

Tenemos un cuadrado cuyos lados miden  $(2 + x + 2) = x + 4$  por lo que el área sería:

$$\text{Largo} \cdot \text{ancho} = (x + 4) \cdot (x + 4) = (x + 4)^2$$

Pero ya se conoce el área total que es 49 unidades cuadradas  
Entonces:

$$(x + 4)^2 = 49$$

donde despejando el cuadrado nos queda:

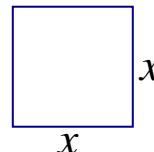
$$x + 4 = \sqrt{49}$$

$$x + 4 = 7$$

$$x = 7 - 4$$

$$x = 3$$

En conclusión, si volvemos al problema original, el área del cuadrado de lado  $x$  es igual a:  $3 \cdot 3 = 9$  unidades cuadradas



## LECTURA Nº 12: MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

Tomado con fines instruccionales de:

Ochoa, A. (2007). **Métodos de Factorización**. Unefa. Artículo no publicado (pp.1-6). Caracas. Venezuela.

La operación de descomponer en factores los productos notables, también se llama “Factorización”. Es el proceso inverso al desarrollo de los productos notables.

Para factorizar polinomios existen varios métodos:

### FACTOR COMÚN

Consiste en transformar la expresión dada en un producto, donde uno de los factores es común entre los términos y el otro se obtiene al dividir cada término de la expresión original entre el factor común.

**Ejemplo 1:**  $12x + 3$

$$\textcircled{3} \cdot 4x + \textcircled{3}$$

$$\frac{3}{3}(3 \cdot 4x + 3) =$$

$$3 \left( \frac{\cancel{3} \cdot 4x}{\cancel{3}} + \frac{3}{3} \right) =$$

$$3(4x + 1) =$$

Descomponemos el número 12 en dos factores y observamos que el 3 es común en los dos términos. Multiplicamos y dividimos toda la expresión por el factor común

Efectuamos el cociente de cada término entre el factor común

Esta es la expresión ya factorizada

Cuando nos piden sacar factor común o simplemente factorizar y hay coeficientes con factores comunes, se saca el máximo común divisor de dichos coeficientes.

**Ejemplo 2:** Factorizar el polinomio  $36x^2 - 12x^3 + 18x$ 

$$-12x^3 + 36x^2 + 18x$$

Ordenamos y calculamos el máximo común divisor entre los coeficientes de cada término,  
 $\text{mcd}(36, 12, 18) = 6$

$$-12x^3 + 36x^2 + 18x$$

Como la variable  $x$  es común en los tres términos, multiplicamos el mcd por la  $x$  elevada a la menor potencia que aparezca. En este caso es elevada a la 1 ( $6x$ )

$$\frac{6x}{6x} \cdot (-12x^3 + 36x^2 + 18x)$$

Multiplicamos y dividimos toda la expresión por este factor común

$$6x \cdot \left( -\frac{12x^3}{6x} + \frac{36x^2}{6x} + \frac{18x}{6x} \right)$$

Efectuamos el cociente de cada término entre el factor común

$$6x \cdot (-2x^2 + 6x + 3)$$

Resolviendo cada cociente:

- Se dividen los coeficientes, y
- Se aplica la ley de cociente de potencias de igual base (se copia la base y se restan los exponentes) y así se obtiene la expresión factorizada por factor común

Ahora extraeremos factores comunes diferentes por agrupación de términos.

**Ejemplo 3:** Factorizar  $3x^2 - 6xy + 4x - 8y$ 

$$(3x^2 - 6xy) + (4x - 8y)$$

Formamos dos grupos considerando que los dos primeros términos son divisibles entre  $3x$  y los dos últimos entre  $4$

$$\frac{3x}{3x} (3x^2 - 6xy) + \frac{4}{4} (4x - 8y)$$

Multiplicamos y dividimos las dos expresiones por estos factores comunes

$$3x \left( \frac{3x^2}{3x} - \frac{6xy}{3x} \right) + 4 \left( \frac{4x}{4} - \frac{8y}{4} \right)$$

Simplificando

$$3x(x - 2y) + 4(x - 2y)$$

Observa que surgió un nuevo factor común entre los dos términos.

$$\frac{(x - 2y)}{(x - 2y)} [3x(x - 2y) + 4(x - 2y)]$$

Se procede a multiplicar y dividir por el nuevo factor común

$$(x - 2y) \left[ \frac{3x(x - 2y)}{(x - 2y)} + \frac{4(x - 2y)}{(x - 2y)} \right]$$

Simplificando

$$(x - 2y)(3x + 4)$$

Obtenemos la expresión ya factorizada

**DIFERENCIA DE CUADRADOS**

Este caso se basa en la fórmula:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

**Ejemplo 4:** Factorizar  $x^2 - 9$ 

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

Expresamos todos los términos en cuadrados

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Tomando en cuenta que la factorización es el procedimiento inverso a producto notable y como

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Ejemplo 5:** Factorizar  $x^4 - 16$ 

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2$$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

Expresamos todos los términos en cuadrados

Tomando en cuenta que la factorización es el procedimiento inverso a producto notable:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Como el segundo factor también es una diferencia de cuadrados, se procede a factorizarlo:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$$

**TRINOMIO**

Se pueden conseguir tres casos:

**Trinomio de la forma  $x^2 + ax + b$ :**

La fórmula general viene dada por:

$x^2 + ax + b$  y al factorizarlo queda expresada como

$(x + n)(x + m)$  donde  $n \cdot m = b$  y  $n + m = a$

**Ejemplo 6:**  $x^2 - 7x + 12$ 

$-3 - 4 = -7$ $(-3) \cdot (-4) = 12$	Buscamos dos cantidades, tales que su producto sea 12, éstas deben tener el mismo signo para que el producto sea positivo, y para que la suma sea -7, deben ser los dos negativos.
$x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-3 - 4)x + (-3) \cdot (-4)$	Se sustituyen los coeficientes, una por una adición y la otra por una multiplicación.
$x^2 + 10x + 24 = (x - 3)(x - 4)$	Aplicando la fórmula general.

**Ejemplo 7:**  $x^2 - 7x + 12$ 

$6 + 4 = 10$ $6 \cdot 4 = 24$	Buscamos dos cantidades, tales que la suma sea 10 y su producto sea 24.
$x^2 + 10x + 24 = x^2 + (6 + 4)x + (6 \cdot 4)$	Se sustituyen los coeficientes, una por una adición y la otra por una multiplicación.
$x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$	Aplicando la fórmula general.

**Ejemplo 8:**  $x^2 + 15x - 100$ 

$20 + (-5) = 15$ $20 \cdot (-5) = -100$	Buscamos dos cantidades tales que la suma sea 15 y su producto sea -100. Para que el producto sea negativo deben tener signos diferentes.
$x^2 + 10x + 24 = x^2 + (20 + (-5))x + (20 \cdot (-5))$	Se sustituyen los coeficientes, uno por una adición y el otro por una multiplicación.
$x^2 + 10x + 24 = (x + 20)(x - 5)$	Aplicando la fórmula general

### 3.2 Trinomio cuadrado perfecto

Se basa en las siguientes fórmulas:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{y} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Analizamos el procedimiento mediante el ejemplo N° 9:

$x^2 + 25 + 10x$	
$x^2 + 10x + 25$ $x^2$ ya está en forma de cuadrado $25 = 5^2$	Verificamos si dos de los términos se pueden expresar en forma de cuadrado.
$10x = 2(x \cdot 5)$	También verificamos si el término restante se puede expresar como el doble producto de las bases de los cuadrados.
$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$	Al cumplir las condiciones, se pasa a factorizarlo según la fórmula.

**Ejemplo 9:**  $4x^2 - 12x + 9 =$

$4x^2 - 12x + 9 =$ $4x^2 = (2x)^2$ $9 = (-3)^2$	Verificamos si dos de los términos se pueden expresar en forma de cuadrado.
$-12x = 2 \cdot (2x) \cdot (-3)$	También verificamos si el término restante se puede expresar como el doble producto de las bases de los cuadrados.
$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x \cdot (-3)) + 3^2$	Expresamos el trinomio en cuadrados y productos.
$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$	Factorizamos aplicando la fórmula.

**Trinomio de segundo grado** ( $ax^2 + bx + c$ )

Cuando no se cumplen las condiciones de los dos casos anteriores.

En este caso, se procede de la siguiente manera:

$ax^2 + bx + c = 0$	Se iguala toda la expresión a cero (0).
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Se calculan los dos valores de x, utilizando la ecuación cuadrática.
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	Se aplica la fórmula general.

**Ejemplo 10:**

Factorizar el polinomio  $2x^2 + 5x - 3$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ $a = 2 \quad b = 5 \quad c = -3$	Igualamos a cero y determinamos los valores de <b>a</b> , <b>b</b> y <b>c</b> .
$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$	Sustituimos los valores de a, b y c en la ecuación cuadrática
$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2 \cdot 2}$  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$	Resolvemos lo que está dentro de la raíz: $5^2 = 25$ $-4 \cdot 2 \cdot (-3) = -8 \cdot (-3) = +24$
$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$	Extraemos la cantidad subradical por ser un cuadrado perfecto.
$x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  $x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$	Obtenemos dos valores de la x uno sumando 7 y el otro restándolo. Así obtenemos: $x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -3$
$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$	Reemplazamos los valores en la fórmula general. Recuerda que $x - (-3) = x + 3$

### Regla de Ruffini

Se aplica para cualquier polinomio que tiene raíces enteras; es decir, encontrar valores de x (números enteros) que al sustituirlos en el polinomio nos da cero.

Por ejemplo, si un polinomio de cuarto grado  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , tiene cuatro raíces enteras,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$  se factoriza así:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Pero ¿cómo se aplica la regla de Ruffini para obtener las raíces?

Ejemplo N° 12: Factorizar  $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

Se aplica la regla de Ruffini, probando los divisores del término independiente, (en este caso de 12,) o sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y -12

### Problemas con uno (1)

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

	1	-4	-1	16	-12	Se copian los coeficientes del polinomio. Escribimos el número seleccionado a la derecha (a este lo llamaremos raíz).
1						Se copia el primer coeficiente debajo de él mismo.

1	1	-4	-1	16	-12	Se multiplica la raíz por el primer coeficiente que se bajó y el producto se copia en la segunda fila debajo del segundo coeficiente. Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en las columnas donde se colocó el producto.
	1	1				

1	1	-4	-1	16	-12	Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia en la segunda fila debajo del tercer coeficiente. Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en las columnas donde se colocó el producto.
	1	1	-3			
		-3	-4			

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	
	1	-3	-4	12	

Se vuelve a multiplicar y sumar el producto con el siguiente coeficiente.

1	1	-4	-1	16	-12	Se efectúa el último producto y la última suma. Como el resultado final es cero (o), esto nos indica que el 1 sí es una raíz del polinomio y nos sirve para factorizar.
	1	1	-3	-4	12	
	1	-3	-4	12	0	
$(x - 1) \cdot (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$						Hasta ahora tenemos un producto como se observa al utilizar los nuevos coeficientes obtenidos

Si el resultado hubiese sido distinto de cero, habría que seguir probando los demás divisores de 12.

De hecho ya hemos factorizado el polinomio, pero el segundo factor de tercer grado debemos intentar seguir factorizándolo.

Probando ahora por 2 y aplicando otra vez la regla queda:

Figure 1 illustrates the steps of the simplex method. It shows two iterations of pivoting on a tableau. Iteration 1 (red '1') shows the initial tableau with pivot element 1 in the first row, first column. Iteration 2 (red '2') shows the tableau after pivoting, with pivot element 1 in the second row, first column. The diagram uses solid lines for the current tableau and dashed/dotted lines for the previous state to show the transformation.

Así hemos conseguido la segunda raíz, por lo que el polinomio va quedando factorizado de la siguiente manera:

$$(x-1)(x-2)(x^2-x-6)$$

Ahora seguimos aplicando la regla para encontrar las otras raíces.

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0
2		2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	
-2		-2	6		
	1	-3	0		

La nueva raíz en -2 y el último cociente se toma con la raíz -3

La factorización final es:

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

Si en las sucesivas pruebas no encontramos ningún resto cero, quiere decir que el polinomio no se puede factorizar dentro de los números reales.

RESUMIENDO:

Según como sea el polinomio hay métodos que se pueden aplicar y otros que no. Se aconseja que se intenten aplicar los cinco métodos sucesivamente, es decir, en primer lugar se puede extraer el factor común, y luego se pueden seguir aplicando otros de los métodos.

### Ejercicios propuestos:

**Factoriza:**

73- $x^2 + 2x + 3$	74- $x^2 - a^2 + x - a^2x$
75- $3x^5 - 48x$	76- $4x^{12} + 12x^6 + 9$
77- $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$	78- $3xm^2 - x + 3m^2 - 1$
79- $3x^2 + 15x + 18$	80- $3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$
81- $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$	82- $\frac{a^2}{100} - \frac{b^4}{9}$

Calcula el valor de k en:

83-  $P(x) = -2x^4 - 6x^3 + 5x - k$  si  $P(-2) = 35$

84-  $P(x) = 8x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 12x + k$  si  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 125$

85- Si el volumen de un paralelogramo viene dado por la fórmula:  $V = x^3 + 5x^2 + 6x$  . ¿Cuáles podrían ser las medidas de las aristas (largo, ancho y altura)?

86- ¿Para qué valor de  $n$  se cumple que  $x^n - x = x(x^2 - 1)$ ?

87- ¿De cuántas maneras podemos factorizar el número 64?