

---

# Electricité

---

Cours du CNAM - CPDA 1ère année - 2006/2007

November 12, 2016

Version 0.3.2

Guillaume Pellerin / Christophe Langrenne  
CNAM - Chaire d'Acoustique  
5, rue du Vertbois F-75003 Paris  
*guillaume.pellerin@cnam.fr*

---

Version électronique type PDF avec hypertexte :  
<http://www.cnam.fr/cpda/docscours/1A/Electricite-CPDA-CNAM.pdf>

Ce cours est destiné à introduire les notions générales d'électricité pour la formation dispensée par le **Centre de Préparation au Diplôme d'Etat d'Audioprothésiste** (CPDA) au sein du Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) de Paris.

De nombreux éléments de ce polycopié ont été tirés des cours personnels de Christophe Langrenne, Ingénieur de Recherche à la Chaire d'Acoustique du CNAM. Je le remercie vivement.

Trois chapitres se distinguent. Tout d'abord les éléments théoriques qui fondent la physique **électrostatique** sont abordés. On y définit les charges, les champs et les potentiels électriques. Les interactions mutuelles entre les charges sont ici dénuées de tout mouvement mécanique. Un chapitre sur l'**électrocinétique** introduit ensuite les effets électriques dus aux mouvements éventuels de ces charges qui produisent les courants continus électriques. Le troisième chapitre présente ensuite les notions fondamentales de l'**électromagnétisme** qui participent aux interactions entre les charges électriques sous l'effet des champs magnétiques. Enfin, le dernier chapitre tente une synthèse de l'ensemble de ces effets pour définir les règles pratiques de calcul des circuits dans le cas des **courants variables**, notamment celui des courants alternatifs.

On notera l'importance des séances de travaux dirigés complémentaires pour cerner l'ensemble des méthodes de calcul abordées lors de ce cours d'Electricité.

Ce document est en constante évolution. Certaines parties seront donc revues ou corrigées régulièrement. La version la plus récente peut être téléchargée à tout moment à l'adresse web indiquée en page de garde.



# Contents

<b>1 Electrostatique</b>	<b>7</b>
1.1 Généralités	7
1.1.1 La charge électrique élémentaire	7
1.1.1.1 Observations d'après l'expérience.	7
1.1.1.2 Matériaux isolants et matériaux conducteurs.	8
Expérience :	8
1.1.1.3 Principe de Conservation.	8
1.1.2 Loi de Coulomb	8
Validité de la loi de Coulomb.	9
1.1.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	9
1.1.4 Principe de superposition	10
1.1.5 Distributions continues de charges	10
1.1.6 Représentation des champs	11
1.2 Etude du champ électrique	11
1.2.1 Notion d'angle solide	11
1.2.2 Caractérisation des champs de vecteur : le flux	13
1.2.2.1 A travers un élément de surface	13
1.2.2.2 Théorème de Gauss	13
1.2.3 Applications	14
1.3 Potentiel	15
1.3.1 Notion de potentiel électrostatique	15
1.3.2 Vecteur Gradient	15
1.3.3 Circulation du vecteur $\vec{E}$	16
1.3.4 Potentiel créé par une charge ponctuelle	17
1.3.5 Potentiel créé par un ensemble de charges (principe de superposition)	17
1.4 Le condensateur	19
1.4.1 Charge des conducteurs en équilibre	19
1.4.2 Condensateur plan (armatures rapprochées)	20
1.4.3 Condensateur en présence d'un diélectrique	22
Expérience de Faraday.	22

1.4.4	Association des condensateurs . . . . .	23
1.4.4.1	En parallèle . . . . .	23
1.4.4.2	En série . . . . .	23
1.4.5	Notions sur les électrets . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Electrocinétique</b>	<b>25</b>
2.1	Rappels . . . . .	25
2.1.1	Mobilité des charges : courant électrique . . . . .	25
2.1.2	Densité de courant électrique . . . . .	25
2.1.3	Loi d'Ohm locale (ou microscopique) . . . . .	26
2.1.4	Résistance d'un conducteur. Loi d'Ohm . . . . .	27
2.1.5	Association de résistances . . . . .	27
2.1.5.1	Résistances en série . . . . .	27
2.1.5.2	Résistances en parallèle . . . . .	27
2.2	Éléments d'un circuit électrique . . . . .	28
2.2.1	Notion de circuit électrique . . . . .	28
2.2.2	Puissance électrique disponible . . . . .	28
2.2.3	Nécessité d'une force électromotrice ou fém . . . . .	29
2.2.4	Conventions . . . . .	30
2.2.5	Relation courant / tension . . . . .	30
2.2.5.1	Point de fonctionnement . . . . .	31
2.2.5.2	Générateur de tension . . . . .	31
2.2.5.3	Générateur de courant . . . . .	32
2.2.5.4	Représentation Duale . . . . .	32
2.2.5.5	Associations de dipôles : dipôles équivalents . . . . .	34
2.2.5.6	Adaptation d'impédance : charge adaptée . . . . .	35
2.3	Réseaux électriques . . . . .	36
2.3.1	Analyse d'un réseau en régime continu - Méthode de Kirchhoff . . . . .	36
2.3.2	Méthode de superposition . . . . .	37
2.3.3	Théorème de Millmann . . . . .	37
2.3.4	Théorème de Thévenin . . . . .	38
2.3.5	Théorème de Norton . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Electromagnétisme</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Le champ magnétique . . . . .	41
3.2.1	Préambule . . . . .	41
3.2.2	Topographie du champ magnétique . . . . .	41
3.2.3	Définition du champ magnétique . . . . .	41

3.2.3.1	Quelques expériences . . . . .	42
	Canon à électrons : . . . . .	42
	Bobine de Helmholtz : . . . . .	42
3.2.3.2	Observations . . . . .	42
3.2.4	Loi de Biot et Savart . . . . .	42
3.2.5	Champ magnétique créé par un fil rectiligne . . . . .	43
3.2.6	Action d'un champ $\vec{B}$ sur un conducteur parcouru par un courant - Force de Laplace . . . . .	43
3.2.7	Le théorème d'Ampère . . . . .	43
3.2.8	Travail des forces de Laplace . . . . .	44
3.3	L'induction . . . . .	44
3.3.1	Introduction . . . . .	44
3.3.2	Tension aux bornes d'un conducteur . . . . .	44
3.3.3	Calcul de la force électromotrice . . . . .	44
3.3.4	Auto-induction . . . . .	44
3.4	Le solénoïde . . . . .	45
3.4.1	Etablissement et suppression du courant dans un solénoïde . . . . .	45
3.4.2	Analyse d'un circuit RL . . . . .	45
3.4.2.1	Etablissement du courant . . . . .	45
3.4.2.2	Suppression du courant . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Courants Variables</b>	<b>46</b>
4.1	Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales . . . . .	46
4.2	Impédances complexes . . . . .	46
4.2.1	Résistance . . . . .	46
4.2.2	Capacitance . . . . .	46
4.2.3	Inductance . . . . .	46
4.2.4	Puissances . . . . .	47
4.2.4.1	Puissance instantanée . . . . .	47
4.2.4.2	Puissance active (absorbée) . . . . .	47
4.2.4.3	Puissance réactive . . . . .	47
4.2.4.4	Puissance apparente . . . . .	47
4.3	Etude de cas . . . . .	47
4.3.1	Circuit RLC . . . . .	47
4.3.2	Théorème de Thévenin en notation complexe . . . . .	47
4.3.3	Théorème de Norton en notation complexe . . . . .	47



# Chapter 1

## Electrostatique

### 1.1 Généralités

#### 1.1.1 La charge électrique élémentaire

Une des manifestations quotidiennes de l'effet de l'électricité statique est l'attraction mutuelle de petits corps légers avec des corps de plus grande masse. Une expérience bien connue consiste par exemple à attirer un bout de papier avec une baguette métallique préalablement frottée par un morceau de laine. Ce type de phénomène est connu depuis longtemps et même rapporté par Thalès de Milet vers 600 av. J.-C. Ce dernier observa en effet un déplacement spontané de brindilles de paille vers un morceau de ambre jaune<sup>1</sup> préalablement frotté. Le mot **électricité** provient d'ailleurs du mot grec *àlektron* qui signifie ambre.

L'étude des phénomènes électriques a continué jusqu'au XIX<sup>ème</sup> siècle où il a été élaboré la théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques, appelée **électromagnétisme**.

##### 1.1.1.1 Observations d'après l'expérience.

Dans la nature, on explique l'ensemble des effets d'électricité statique par l'existence de particules portant une charge  $q$  positive ou négative. Les éléments dont les charges sont de mêmes signes se repoussent tandis que les éléments dont les charges sont de signes opposés s'attirent.

La matière est en effet constituée d'atomes, ces atomes étant eux-mêmes constitués de particules élémentaires : les **électrons**, les **protons** et les **neutrons**. Les électrons gravitent autour du noyau constitué de neutrons et de protons. Ces trois types de particules possèdent des propriétés différentes comme par exemple leur masses ou leur charges électriques respectives. Dans le système d'unité international, l'unité de charge électrique est le **Coulomb** noté **C**.

Electron :	$q_e = -e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton :	$q_p = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron :	$q_n = 0 \text{ C}$	$m_p = 1.674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$e$  est la **charge électrique** élémentaire la plus petite qui puisse se manifester à l'échelle atomique. Toutes les valeurs de charges possibles sont ainsi définies comme des multiples de  $e$ . Les quantités d'électrons et de protons contenues dans un matériau donné déterminent donc sa charge globale, fixe ou variable dans le temps, les électrons pouvant s'échapper plus ou moins librement. La charge électrique totale  $q$  sera égale à la somme algébrique des charges élémentaires.

---

<sup>1</sup>L'ambre jaune est une sorte de résine fossilisée.

### 1.1.1.2 Matériaux isolants et matériaux conducteurs.

Un matériau est constitué d'un grand nombre de charges électriques. Lorsque la charge totale négative est égale à la charge totale positive, le matériau est dit électriquement neutre. Si des électrons s'échappent ou sont arrachés, la charge globale augmente et devient positive. Si des électrons sont ajoutés, la charge globale diminue et devient négative. Ces phénomènes définissent l'effet d'**électrisation** des corps.

Un matériau est dit **conducteur parfait** si, lorsqu'il devient électrisé, les électrons peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par le matériau. Il sera un **isolant parfait** (ou **diélectrique**) si les électrons sont incapables de se déplacer. Mais tous les matériaux ne sont pas totalement conducteurs ou isolants. Leurs propriétés de résistance à l'électrisation ou à la conduction, par les effets de frottement notamment, seront abordées plus loin au chapitre 2.

**Expérience :** Frotter vigoureusement une baguette métallique avec un chiffon, si possible en laine. Si elle est tenue à l'aide d'un matériau isolant, la baguette finit par attirer certains objets légers comme des plumes et de petits morceaux de papier. Le chiffon arrache en effet une certaine quantité d'électrons à la surface de la baguette et l'électrise. En revanche, cette expérience n'a aucun effet si la baguette est tenue à pleine main. Le corps humain est en effet conducteur et donne les électrons manquants à la baguette pour rétablir l'équilibre électrostatique.

### 1.1.1.3 Principe de Conservation.

En électrostatique, la charge totale d'un corps isolé est considérée constante dans le temps. Cette charge est également invariante par changement de repère, contrairement à la masse.

## 1.1.2 Loi de Coulomb

A l'aide d'une balance de torsion, Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures qui lui a permis de déterminer les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle  $q_1$  sur une autre charge ponctuelle  $q_2$  :

1. La force est radiale, c'est-à-dire, dirigée selon la droite qui joint les deux charges.
2. La force est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon.
3. La force varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

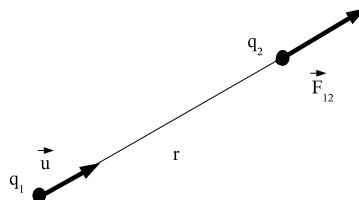


Figure 1.1: Force de Coulomb exercée sur  $q_2$  par  $q_1$  (ici, les deux charges sont de mêmes signes).

L'expression mathématique moderne de la force de Coulomb traduisant ces propriétés est la suivante :



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} \quad (1.1)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire parallèle à l'axe créé par les 2 charges et  $\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  est la permittivité du vide exprimée en Farad/mètre, c'est-à-dire en  $\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ . Ainsi,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ .

**Validité de la loi de Coulomb.** Cette expression n'est valable que dans le vide, pour des charges immobiles (approximation de l'électrostatique) et pour des distances supérieures à  $10^{-14} \text{ m}$ . Pour des distances plus faibles, les particules ne peuvent plus être considérées ponctuelles.

La force électrostatique est à bien différencier de la force gravitationnelle. Alors que la première dépend de la charge électrique de chaque particule, la seconde dépend uniquement de leur masse comme le montre la définition suivante.

**Définition** (Loi de gravitation universelle) : Soient  $m_A$  et  $m_B$  deux masses ponctuelles situées respectivement dans l'espace au points  $A$  et  $B$ . La masse  $m_A$  exerce spontanément une force d'attraction sur la masse  $m_B$  telle que :

$$\vec{F}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u} \quad (1.2)$$

où  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  est la constante d'attraction universelle,  $r = \|\vec{AB}\|$  et  $\vec{u} = \vec{AB}/r$ . Les valeurs de  $m_A$  et  $m_B$  étant toujours positives, la force d'attraction est toujours attractive. On remarque que la masse  $m_B$  exerce une force d'attraction opposée à  $\vec{F}_{AB}$  :  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ .

**Remarque :** Pour comparer l'influence des deux forces, calculons le rapport de la norme de la force électrostatique  $\|\vec{F}_E\|$  et de la norme de la force gravitationnelle  $\|\vec{F}_G\|$  intervenant entre deux protons ( $m_p = 1.6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et  $q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) :

$$\frac{F_E}{F_G} = 1.24 \cdot 10^{36}.$$

Les forces électriques sont classées dans les interactions fortes. Au niveau atomique, les forces de gravitation sont négligeables devant les forces électriques.

**Note** (Pourquoi protons et électrons ne se collent-ils pas l'un contre l'autre ?) :

- il existe d'autres forces à l'échelle quantique : les forces nucléaires sont plus fortes que les forces électriques, mais décroissent plus rapidement (cohésion des noyaux);
- les électrons tournent autour du noyau composé de neutrons et de protons et changent régulièrement d'orbite lorsqu'on leur apporte de l'énergie;
- l'effet quantique lié au principe d'incertitude.

### 1.1.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge  $q$  située en un point  $O$  de l'espace et  $M$  un point quelconque de l'espace. La présence de  $q$  en  $O$  modifie les propriétés électriques dans tout l'espace, notamment en  $M$ . On décrit cet effet

par l'existence d'un champ vectoriel  $\vec{E}_1$  qui est le champ électrostatique issu de la loi de Coulomb et produit par la charge  $q$ .

**Définition :** Une particule de charge  $q$  située au point  $O$  crée en tout point  $M$  de l'espace distinct de  $O$  un champ vectoriel  $\vec{E}(M)$  appelé champ électrostatique et d'unité le Volt/mètre ( $V.m^{-1}$ ) dépendant de  $r = \|\vec{OM}\|$  tel que :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}. \quad (1.3)$$

On peut ainsi réécrire l'équation 1.1 sous la forme:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1, \quad (1.4)$$

avec

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}.$$

L'intérêt de cette séparation vient du fait que l'on distingue clairement ce qui dépend uniquement de la particule qui subit la force (en  $q_2$  dans l'exemple) de ce qui ne dépend que d'une source extérieure (le vecteur  $\vec{E}_1$  dans l'exemple).

#### 1.1.4 Principe de superposition

Si il y a plus de deux charges en présence, la force exercée sur une des charges est la somme vectorielle des forces de Coulomb exercées par chacune des autres charges. Ainsi, dans le cas d'un nuage de charges ponctuelles, le champ électrostatique au point quelconque  $M$  s'écrit:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i. \quad (1.5)$$

où  $n$  est le nombre de particules.

En pratique, cette expression est rarement utilisable car les matériaux comportent un nombre gigantesque de particules. Considérant que les échelles spatiales sont très grandes devant les distances inter-particulaires, on perd alors toute possibilité de distinguer une particule d'une autre. Il est donc souvent plus habile d'utiliser des distributions continues de charges.

#### 1.1.5 Distributions continues de charges

Soit  $P$  un point quelconque d'un espace conducteur  $D$  et  $dq$  la charge élémentaire concentrée en ce point. Le champ électrostatique total créé en un point  $M$  de l'espace par cette distribution de charge s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \int_D d\vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}. \quad (1.6)$$

On a également posé  $r = \|\vec{PM}\|$  et  $\vec{PM} = r\vec{u}$ . Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme presque infinie par une intégrale.

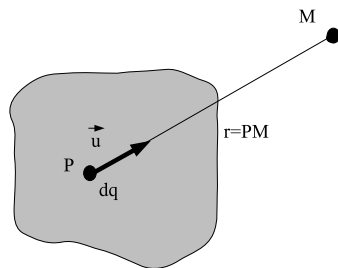


Figure 1.2: Géométrie du problème de la distribution continue de charges.

On définit  $\rho = \frac{dq}{dV}$  comme étant la **densité volumique de charges** dans l'élément de volume  $dV$  (unité :  $\text{C.m}^{-3}$ ). Le champ électrostatique créé par une telle distribution dans l'ensemble du volume  $V$  est donc :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r^2} \vec{u} dV. \quad (1.7)$$

Lorsque l'une des dimensions de la distribution de charges est beaucoup plus petite que les deux autres, (ex : un plan ou une sphère creuse), on peut généralement faire une intégration sur deux dimensions. On définit alors la **densité surfacique de charges**  $\sigma = \frac{dq}{dS}$  dans l'élément de surface  $dS$  (unité :  $\text{C.m}^{-2}$ ) et le champ total sur la surface  $S$  devient :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} \vec{u} dS. \quad (1.8)$$

Enfin, si deux des dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième (ex : un fil), on peut définir une **densité linéique de charges**  $\lambda = \frac{dq}{dl}$  dans l'élément de longueur  $dl$  (unité :  $\text{C.m}^{-1}$ ) et le champ total sur la longueur  $L$  s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \vec{u} dl. \quad (1.9)$$

### 1.1.6 Représentation des champs

Les équations précédentes ont montré qu'on peut calculer un vecteur champ électrique dans n'importe quel cas de distribution de charges. Pour représenter ce champ, on utilise les lignes de champs qui sont tangentes à la direction du vecteur en chaque point de l'espace. Plus le champ est fort, plus les lignes sont serrées. De même, plus le champ est faible, plus les lignes sont espacées. Les lignes de champs ne se coupent pas et partent des charges positives (ou de l'infini) pour aboutir aux charges négatives (ou à l'infini). On y ajoute des flèches pour rappeler le sens du champ comme le montre l'exemple à la figure 1.1.6.

## 1.2 Etude du champ électrique

### 1.2.1 Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de la notion d'angle définie dans un plan. Dans un espace à 3 dimensions, l'oeil regarde par exemple tous les objets selon un angle solide

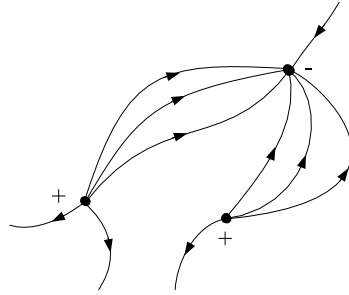


Figure 1.3: Exemple d'un tracé de lignes de champ entre des charges ponctuelles positives et négatives.

mais ne voit finalement qu'une surface projetée. De même lors d'une prise de vue photographique : pour une même surface de projection, l'angle réel perçu par l'objectif est variable et dépend de sa distance focale. Dans ce cas précis, plus la focale est petite, plus l'angle solide perçu est grand. C'est en modifiant cet angle solide qu'on produit l'effet « zoom ».

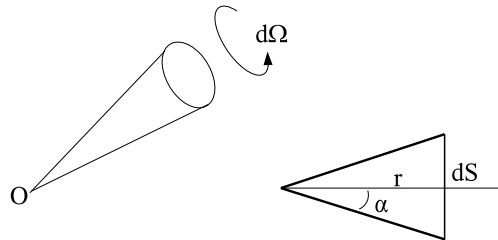


Figure 1.4: Schéma représentatif d'un angle solide.

**Définition :** L'angle solide élémentaire  $d\Omega$ , délimité par un cône coupant un élément de surface  $dS$  située à une distance  $r$  de son sommet  $O$  vaut :

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}}. \quad (1.10)$$

Cet angle solide est toujours positif et son unité est le 'stéradian' (sr).

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à  $r$  constant vaut  $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . L'angle solide élémentaire s'écrit alors  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet  $\alpha$  vaut :

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi(1 - \cos \alpha). \quad (1.11)$$

Le demi-espace, engendré avec  $\alpha = \pi/2$  radians, correspond donc à un angle solide de  $2\pi$  stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de  $4\pi$  ( $\alpha = \pi$ ). On remarque que l'angle solide calculé ne dépend pas de  $r$ .

Dans le cas général, le cône peut intercepter une surface quelconque dont la normale  $\vec{n}$  fait un angle  $\vartheta$  avec la génératrice de vecteur directeur  $\vec{u}$ . L'angle solide élémentaire est alors défini par :

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos \vartheta}{r^2}$$

On en déduit :

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} \quad (1.12)$$

où  $dS'$  est la surface effective qui, par exemple, serait vue par un observateur situé en  $O$ .

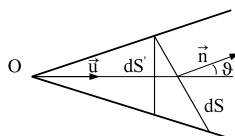


Figure 1.5: Géométrie liée au calcul d'un angle solide quelconque.

## 1.2.2 Caractérisation des champs de vecteur : le flux

### 1.2.2.1 A travers un élément de surface

**Définition** (Flux élémentaire) : On appelle flux élémentaire d'un vecteur  $\vec{E}$  à travers une surface  $d\vec{S}$  la quantité :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha,$$

d'où :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega. \quad (1.13)$$

**Remarque** (Analogie) : Si le vecteur  $\vec{E}$  était une vitesse, le flux représenterait un débit volumique.

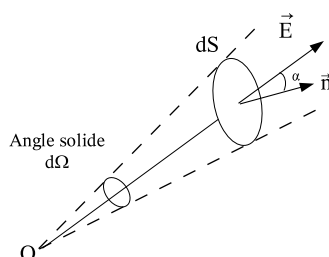


Figure 1.6: Géométrie pour le calcul d'un flux élémentaire passant à travers une surface élémentaire.

**Remarque** (Surface orientée) : Le signe dépend de l'orientation de la normale c'est-à-dire de  $\cos \alpha$ . Par la suite et par convention, nous choisirons l'orientation de  $d\vec{S}$  dirigée vers l'extérieur de la surface  $S$ . Ainsi, pour  $q > 0$ , le champ  $\vec{E}$  est dirigé dans le même sens que  $\vec{n}$  et l'on obtient un flux positif.

### 1.2.2.2 Théorème de Gauss

Le flux à travers une surface quelconque est égal à la somme des flux élémentaires :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{Dist.} d\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Prenons une charge  $q$  à l'intérieur d'une surface fermée.

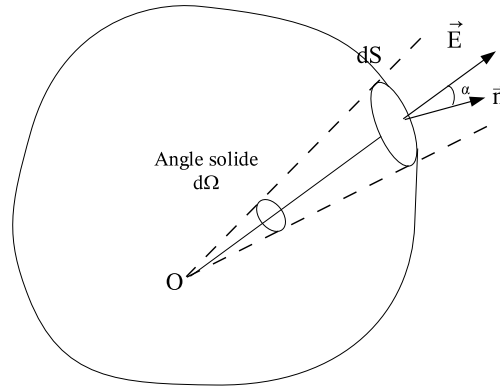


Figure 1.7: Flux à travers une surface.

En intégrant l'équation 1.14 selon toutes les directions (c'est-à-dire sur les  $4\pi$  stéradians), on obtient le flux total suivant:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

**Définition** (Théorème de Gauss) : *Le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal au produit de la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface et de la constante  $1/\epsilon_0$ .*

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{1.15}$$

### 1.2.3 Applications

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile et performante pour calculer le champ  $\vec{E}$  lorsque celui-ci possède des propriétés particulières de symétrie. Celles-ci permettent en effet de simplifier le calcul du flux  $\Phi$ . Comme le théorème de Gauss est valable sur une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface  $S$  adaptée, c'est-à-dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée **surface de Gauss**.

**Exemple 1** (Champ au voisinage d'un fil infiniment mince, uniformément chargé) : A voir en TD

**Exemple 2** (Champ au voisinage d'une plaque infinie, uniformément chargée) : A voir en TD

**Exemple 3** (Champ au voisinage d'une boule uniformément chargée de rayon  $R$ ) : A voir en TD

## 1.3 Potentiel

### 1.3.1 Notion de potentiel électrostatique

Nous avons vu qu'il fallait calculer 3 composantes pour obtenir  $\vec{E}$ . Ces composantes peuvent être déduites d'un champ potentiel, c'est-à-dire scalaire, à l'aide de la fonction vectorielle nommée **gradient** :

**Définition :** Soit  $\vec{E}$  un champ électrostatique quelconque.  $\vec{E}$  dérive du potentiel électrostatique  $V$  telle que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (1.16)$$

**Note 1 (Historique) :** En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penchés sur les propriétés de cette force radiale en  $1/r^2$ . En particulier Lagrange avait introduit en 1777 une fonction scalaire appelée 'potentiel', plus fondamentale puisque la force en dérive. C'est Poisson qui introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

**Note 2 :** Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique.

### 1.3.2 Vecteur Gradient

Soit  $V(M)$  un scalaire défini en tout point  $M$  de l'espace, c'est-à-dire un **champ scalaire**. Lorsqu'on passe d'un point  $M$  à un point  $M'$  infiniment proche, une variation  $dV$  de ce champ est alors fourni par la différentielle totale suivante :

$$dV(M) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{OM}$$

où le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} V$  est le gradient du champ scalaire  $V$  et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a  $d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  et :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

En faisant de même en coordonnées cylindriques et sphériques, on obtient respectivement :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

### 1.3.3 Circulation du vecteur $\vec{E}$

Le potentiel est lié au travail accompli pour transférer une charge d'un point à un autre. De manière analogue au travail d'une force, on définit la circulation  $\mathcal{C}$  de  $\vec{E}$  le long de la courbe  $(AB)$  par l'équation :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{u}}{r^2} \\ &= \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_A^B \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \\ &= V_A - V_B \end{aligned}$$

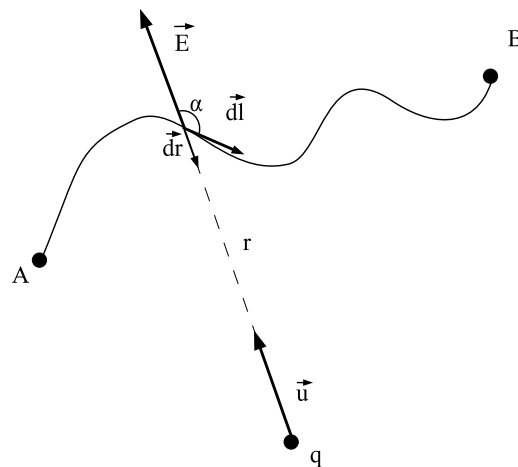


Figure 1.8: Calcul de la circulation entre le point A et B.

**Remarques :**



- La circulation de  $\vec{E}$  le long de AB ne dépend pas de la trajectoire, mais d'une différence de potentiel;
- la circulation de  $\vec{E}$  sur une courbe fermée est nulle.

### 1.3.4 Potentiel créé par une charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle  $q$  située en un point  $O$ . En tout point  $M$  de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique s'écrit :

$$dV(M) = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{r}}{r^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{dV(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}} \quad (1.18)$$

En intégrant selon  $r$  et en posant  $V_0$  comme la charge le potentiel créé par la charge en  $O$ , on obtient:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + V_0 \quad (1.19)$$

**Conventions :**

- La constante d'intégration est généralement choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini) ;
- $V$  est un scalaire exprimé en Volt (V) ;
- $V$  croît des charges  $(-)$  aux charges  $(+)$  (sens de croissance de  $V$  opposé à  $\vec{E}$ ) ;
- Les surfaces de potentiel constant sont appelées équipotentielles ;

### 1.3.5 Potentiel créé par un ensemble de charges (principe de superposition)

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le champ électrique créé par une distribution de charges était égal à la somme vectorielle des champs électriques créés par chacune de ces charges. De même, le potentiel électrique créé par une distribution de charges est égal à la somme algébrique des potentiels électriques créés par chacune de ces charges. Cette propriété découle de la propriété de dérivation d'une somme qui est simplement égale à la somme des dérivées. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on a ainsi :

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}} \quad (1.20)$$

où  $r_i$  est la distance entre la charge  $q_i$  et le point  $M$ .

Lorsque l'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges  $q_i$ , on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégrale où  $P$  est un point courant autour duquel se trouve une charge élémentaire  $dq$ . Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue devient alors :

Matériau	Permittivité relative $\varepsilon_R$
Vide	1 (par définition)
Air	1,0005
Papier	2
Polyester	3,3
Teflon	2,1
PVC	5
Verre	5
Bakélite	6
Chlorure de sodium	6.12
Titanate de baryum	à peu près 1500

Table 1.1: Permittivité relative  $\varepsilon_R$  de certains matériaux.

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{Dist.} \frac{dq}{r} \quad (1.21)$$

où  $r = PM$  est la distance entre le point  $M$  et un point  $P$  quelconque de la distribution de charges.

Pour des distributions de charges linéiques  $\lambda$ , surfacique  $\sigma$  et volumique  $\rho$ , on obtient respectivement :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{\lambda dl}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

### Remarques :

- Le calcul de  $V$  n'implique qu'une seule intégrale alors que  $\vec{E}$ , en tant que vecteur, en implique plusieurs : celles des composantes. Mais, par définition, un scalaire ne donne pas la même information qu'un vecteur. En effet, la connaissance du potentiel en un point  $r$  de l'espace ne permet pas de déterminer à lui seul la force qui s'applique sur la charge  $q$ . Il est également nécessaire de savoir comment  $V$  varie au voisinage de ce point, puisque que c'est à partir des dérivées partielles de  $V$  que seront déduites les composantes de  $\vec{E}$  et de la force.
- Les champs et potentiels électriques ont été exprimés dans le cas où les charges sont dans le *vide*. On a utilisée la constante  $\varepsilon_0$  qui est la permittivité du vide. Dans le cas où un matériau remplace le vide, on doit remplacer  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon$  qui est la permittivité du matériau et qui peut être défini ainsi :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 * \varepsilon_R \quad (1.22)$$

où  $\varepsilon_R$  est la **permittivité relative** ou **constante diélectrique**. Le tableau 1.1 donne les valeurs de  $\varepsilon_R$  pour quelques matériaux.

**Note** (Cartographie) : Si la topologie d'un champ vectoriel est donnée par les lignes de champ, la topologie d'un champ scalaire est donnée par des courbes de niveau. Nous avons vu que dans le cas d'un potentiel électrique, les courbes de niveau s'appellent les **équipotentiels**. Elles joignent les points de même potentiel et ont les propriétés suivantes:

- les équipotentiels sont des lignes fermées ;
- elles entourent les charges ;
- le long d'une courbe définie par  $V = cste$  correspond à  $dV = 0$ , ce qui signifie que  $\overrightarrow{gradV}$  est un vecteur perpendiculaire en tout point à cette courbe (ligne ou surface).

On peut effectuer une analogie avec les cartographies où le relief est représenté par des courbes de niveaux. Ces lignes rejoignent les points situés à la même altitude, c'est-à-dire les points de même énergie potentielle (cf. l'équation  $E_p = \rho gh$ ). Ce sont des lignes fermées entourant les sommets et les fonds. Elles sont strictement équivalentes aux équipotentiels.

Les lignes équivalentes aux lignes de champ ne sont pas représentées. Pour ce faire, il faut prendre en chaque point la perpendiculaire aux lignes de niveau. Les nouvelles lignes indiquent la direction de la pente au point considéré (sens de l'écoulement de l'eau). Plus les lignes de niveau sont serrées, plus la pente est importante. La pente locale est le pendant du champ électrique.

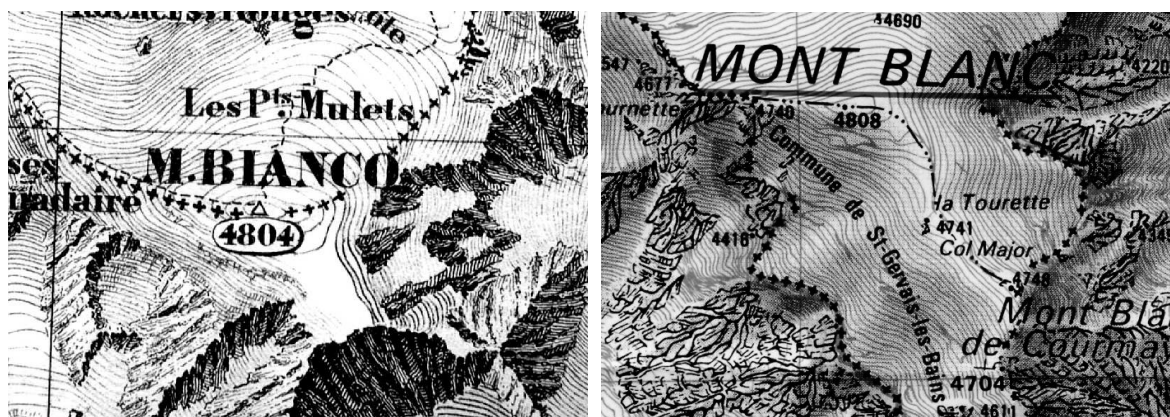


Figure 1.9: Cartographie du mont Blanc (Extraits de la planche de l'Atlas sarde (1854) et IGN TOP 25 3531).

## 1.4 Le condensateur

### 1.4.1 Charge des conducteurs en équilibre

Comme il a été vu précédemment, la matière est composée de charges positives, les protons, localisés dans les noyaux des atomes et de charges négatives, les électrons formant le **nuage électronique** dont l'extention spatiale représente la taille de l'atome. Les électrons peuvent être classés en deux groupes : les électrons de couches profondes qui sont fortement liés aux noyaux et les électrons des couches périphériques qui peuvent passer d'un atome à l'autre. Ils établissent ainsi la liaison chimique et assurent la stabilité des molécules ou des solides.

Dans les conducteurs, les électrons sont libres de se déplacer dans l'ensemble du matériau. Les électrons libérés par les atomes sont appelés les électrons libres. La **valence** d'un métal est égale au

nombre d'électrons que libère chacun des atomes. En l'absence de sollicitation électrique extérieure, un métal est électriquement neutre en chacun de ses points (petit volume légèrement supérieur à la taille de l'atome). Localement, il existe alors une compensation entre les charges  $+$  appartenant aux ions positifs et les charges  $-$  appartenant aux électrons libres.

Si on approche un solide chargé positivement vers un métal non chargé (électriquement neutre), un champ électrique est créé dans le métal. Très rapidement, les électrons libres du métal vont réagir et, animés par la force de Coulomb, vont se déplacer en sens inverse à celui du champ électrique. Les électrons vont donc se diriger vers les charges positives portées par le solide extérieur. Ne pouvant sortir du métal, des électrons vont progressivement s'accumuler sur la face située au voisinage de la charge extérieure positive et créer en ces points une charge négative résultante. A l'inverse, une charge positive résultante va apparaître au voisinage de la face opposée du solide par défaut d'électrons.

Ainsi, les charges résultantes apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur au solide. A l'intérieur du métal, ce nouveau champ s'oppose au champ créé par les charges extérieures et réduit le champ électrique total. Les électrons libres ne cesseront leur mouvement de migration que lorsqu'ils ne seront plus soumis à aucune force, c'est-à-dire lorsque le champ électrique total à l'intérieur du métal sera nul. Cette situation est à ne pas confondre avec celle où les extrémités des conducteurs sont maintenues à des potentiels différents  $V_1$  et  $V_2$  (réservoirs de charges positives et négatives) qui sera vue au chapitre 2 qui concerne l'électrocinétique.

**Remarque :** Les charges semblent donc s'accumuler vers les surfaces. On montre qu'effectivement que, à l'équilibre, les charges électriques portées par un métal sont exclusivement surfaciques (une à deux couches atomiques).

### 1.4.2 Condensateur plan (armatures rapprochées)

Nous avons vu en exercice le calcul du champ électrique dans le cas d'une plaque chargée infinie. Le figure 1.10 en présente une description.

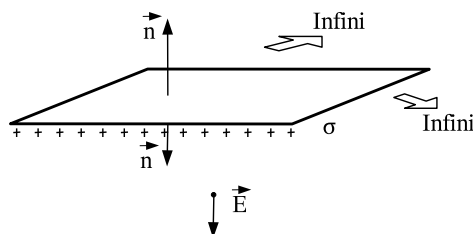


Figure 1.10: Champ électrique généré par une plaque chargée infinie.

Ce champ ne dépend pas de la distance à la plaque et vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n} \quad (1.23)$$

Soient deux armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) planes parallèles infinies, situées à une distance  $d$  l'une de l'autre. L'armature ( $A_1$ ) porte une densité surfacique de charge  $\sigma$  et ( $A_2$ ) porte une densité  $-\sigma$ . Selon le principe de superposition vu à la section 1.1.4, le champ électrostatique entre les deux armatures est égal à la superposition des champs créés par ces deux plans infinis (voir figure 1.11).

Ainsi,

$$\vec{E}(M_1) = \vec{E}(M_2) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E}(M_0) = \vec{E}_{A_1} + \vec{E}_{A_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{i} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} - \vec{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{i}. \quad (1.24)$$

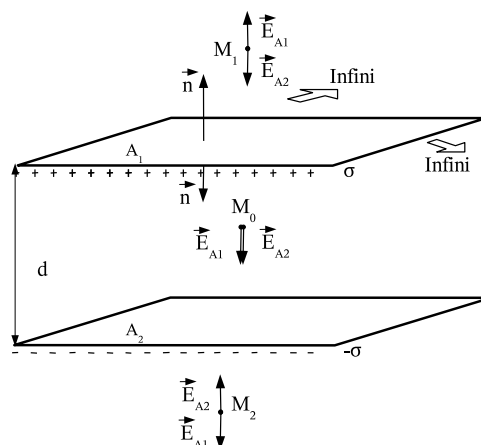


Figure 1.11: Champ électrique généré par deux plaques chargées infinies.

La capacité  $C$  d'un condensateur est le rapport de sa charge  $Q$  et de la tension  $U$  appliquée à ses bornes tel que :

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.25)$$

où  $U$  est donc la différence de potentiel (ou circulation) entre les deux armatures telle que :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d.$$

Puisque  $Q = \sigma S$ ,  $S$  étant la surface de la plaque finie du condensateur, et  $Q = CU$ , on peut déduire la capacité  $C$  du condensateur :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (1.26)$$

Pour obtenir une grande capacité, il faut  $S$  grand et/ou  $d$  petit.

**Remarque** (Effets de bords) : Les plaques d'un condensateur ne sont pas infinies, et le champ  $\vec{E}$  n'est pas brusquement nul sur les bords. La valeur réelle de  $C$  est donc un peu plus élevée que la valeur théorique. On corrige alors la surface  $S$  telle que la plaque soit augmentée d'une longueur égale à  $\frac{3}{8}d$ .

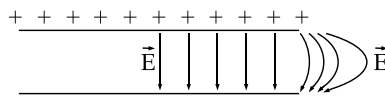


Figure 1.12: Effets de bords.

**Remarque** (Unité) : L'unité de la capacité électrique est le Farad (Coulomb/Volt). Ceci donne une unité pour la permittivité en  $\text{Fm}^{-1}$ . Les valeurs typiques de capacité vont de 1 pF à quelques mF. Par exemple, si  $S = 1 \text{ cm}^2$  et  $d = 1 \text{ mm}$ , on a  $C \approx 1 \mu\text{F}$ .

**Exemple 4** (Condensateur sphérique) : A voir en TD

**Exemple 5** (Condensateur cylindrique) : A voir en TD

### 1.4.3 Condensateur en présence d'un diélectrique

**Expérience de Faraday.** La capacité d'un condensateur augmente si on introduit un isolant entre ses plaques. Si l'isolant remplit tout l'espace inter-plaque, la capacité est multipliée par  $\varepsilon_r$  qui ne dépend que de la nature de l'isolant (ou diélectrique).

Dans les isolants, les électrons des couches externes forment des **liaisons covalentes, ioniques** ou plus généralement **ionocovalentes**. Dans ce type de liaison, un électron ne s'éloigne jamais de l'atome dont il est issu, tout au plus s'en écarte-t-il pour atteindre les premiers atomes voisins. Chaque électron reste localisé dans une région très restreinte de l'espace. Il n'est donc pas mobile.

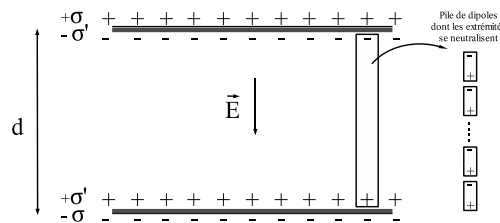


Figure 1.13: Polarisation du diélectrique.

La **polarisation du diélectrique** s'écrit :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.27)$$

polarisation du diélectrique où  $\chi$  est la **susceptibilité diélectrique**. D'autre part on a :

$$\vec{E} = \frac{\sigma - P}{\varepsilon_0} \vec{dir}_E. \quad (1.28)$$

Cette dernière équation conduit à un champ électrique diminué tel que :

$$E = \frac{\sigma}{(1 + \chi)\varepsilon_0}. \quad (1.29)$$

On appelle respectivement **permittivité absolue** et **permittivité relative** du diélectrique les grandeurs (cf. tableau 1.1) :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_r = 1 + \chi.$$

La différence de potentiel entre ses bornes s'écrit donc :

$$\begin{aligned} U = V_1 - V_2 &= \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} \\ &= Ed \\ &= \frac{\sigma d}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \\ &= \frac{Q}{C'} \end{aligned}$$

où l'on a posé  $C' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$ .

**Remarque** (Ordre de grandeur) :  $\varepsilon_r = 1$  dans le vide ;  $\varepsilon_r = 1.0001$  dans l'air ;  $\varepsilon_r = 4$  à  $7$  du verre ;  $\varepsilon_r = 80$  dans l'eau pure ;  $\varepsilon_r = 1000$  dans certains cristaux. Au delà d'un certain potentiel, les diélectriques peuvent conduire le courant (tension de claquage marqué sur les condensateurs). Le diélectrique est alors en parti détruit. (Voir aussi tableau 1.1).

### 1.4.4 Association des condensateurs

#### 1.4.4.1 En parallèle

Le potentiel est identique aux bornes de chaque condensateur. Les charges s'additionnent donc et on obtient:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= UC_1 \quad Q_2 = UC_2 \quad \dots \quad Q_n = UC_n \\
 Q_E &= \sum_{i=1}^n Q_i = U \sum_{i=1}^n C_i \\
 \boxed{C_E &= \sum_{i=1}^n C_i} \tag{1.30}
 \end{aligned}$$

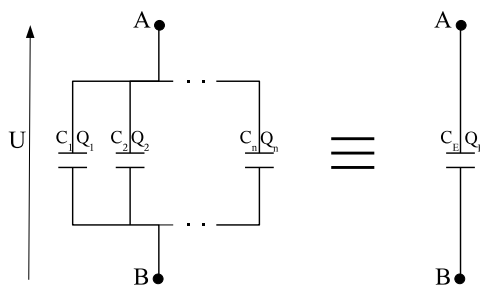


Figure 1.14: Association de condensateurs en parallèle.

#### 1.4.4.2 En série

La charge est identique dans chaque condensateur. Les tensions s'additionnent, d'où :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \dots \quad U_n = \frac{Q}{C_n} \\
 U_E &= \sum_{i=1}^n U_i = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \\
 \boxed{\frac{1}{C_E} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \tag{1.31}
 \end{aligned}$$

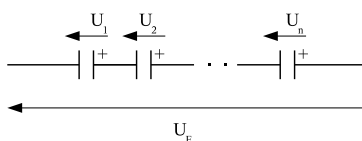


Figure 1.15: Association de condensateurs en série.

### 1.4.5 Notions sur les électrets

Un **électret** est un matériau susceptible de conserver en permanence une polarisation électrique, même en absence de champ électrique.

Exemple de matériaux : Téflon, Mylar (TM).

Exemple d'utilisation : microphones à condensateur sans avoir besoin de tension continue de polarisation (miniaturisation).

Mode de fabrication : bombardement d'électrons ou d'ions pour soumettre le diélectrique à l'action d'un champ électrique intense. Ces matériaux génèrent un champ électrique constant même après l'arrêt du bombardement (analogie avec les aimants).



## Chapter 2

# Electrocinétique

### 2.1 Rappels

#### 2.1.1 Mobilité des charges : courant électrique

Soit deux conducteurs  $A$  et  $B$  isolés en équilibre avec  $V_A > V_B$  (voir figure 2.1).  $A$  possède en excès des charges positives et  $B$  possède en excès des charges négatives.

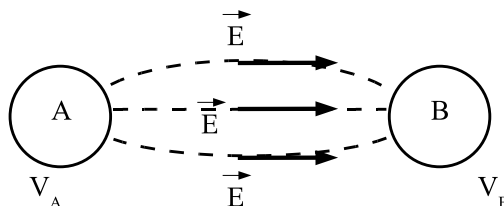


Figure 2.1: Conducteurs chargés isolés en équilibre.

Si on relie les deux conducteurs par un fil également conducteur, il y a un transfert de charge pour que tout point soit au même potentiel. Ensuite,  $A$  et  $B$  sont au même potentiel, le champ électrique s'annule alors ainsi que le courant.

Le déplacement des électrons libres est quasiment instantané (régime transitoire). Supposons que le précédent conducteur isolé  $B$  soit un réservoir d'électrons libres, c'est-à-dire que l'on arrive à maintenir son potentiel  $V_B$ . Si on fait en sorte que les électrons excédentaires du conducteur  $A$  quittent le matériau pour maintenir le potentiel  $V_A$ , le champ électrique initial est rétabli et le déplacement des électrons à l'intérieur du fil conducteur est entretenu. Le champ  $\vec{E}$  qui assure le déplacement des électrons et la circulation du courant est appelé **champ électromoteur**.

#### 2.1.2 Densité de courant électrique

Le courant est produit par un déplacement organisé de charges, à une certaine vitesse. Considérons un fil conducteur de section  $S$ , dans lequel se trouve une densité de charge volumique  $\rho$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}$  (cf. figure 2.2). Pendant un instant  $dt$ , ces charges parcourent une distance  $\vec{v}dt$ . Soit  $\vec{n}dS$  un élément infinitésimal de surface mesurée sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique qui traverse cette surface pendant  $dt$  est celle contenue dans le volume élémentaire  $dV$  associé et s'écrit :

$$dQ = \rho dV = \rho \vec{v}dt \cdot \vec{n}dS$$

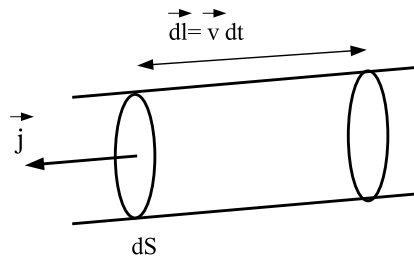


Figure 2.2: Paramétrisation d'un élément de fil pour le calcul du courant.

On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur et qu'on appelle la **densité de courant** :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

exprimé en Ampères par mètre carré ( $\text{A.m}^{-2}$ ).

Le courant  $dI$  circulant dans la portion de fil est la charge traversant la section, et est relié à la densité tel que :

$$dI = \frac{dQ}{dt}$$

On en déduit :

$$I = \frac{1}{dt} \iint_S dQ = \frac{1}{dt} \iint_S \vec{j} dt \cdot \vec{n} dS$$

soit :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad (2.1)$$

On avait défini le flux du champ électrique :  $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ . De même,  $I$  est le flux de la densité de courant à travers la section du fil. Le sens du courant est donné par le sens du vecteur densité de courant.

**Remarque (Convention) :** On suppose que le courant est dû au mouvement des charges positives vers les charges négatives : sens du courant. En fait, ce sont les électrons libres qui se déplacent, mais on conserve la convention pour des raisons historiques.

### 2.1.3 Loi d'Ohm locale (ou microscopique)

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre le densité de courant et le champ électrostatique local :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (2.2)$$

où le coefficient de proportionnalité  $\gamma$  est appelé la **conductivité du milieu**. La conductivité est une grandeur locale positive dépendant uniquement des propriétés du matériau, elle s'exprime en Siemens par mètre et est égale à l'inverse de la résistivité du milieu  $\eta = 1/\gamma$ . Par exemple, le

cuivre possède une conductivité  $\gamma_{Cu} = 58.10^6 \text{ S.m}^{-1}$ , tandis que celle du verre (isolant) est  $\gamma_{Cu} = 10^{-11} \text{ S.m}^{-1}$ .

### 2.1.4 Résistance d'un conducteur. Loi d'Ohm

Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant  $I$ . S'il existe un courant  $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ , cela signifie qu'il y a une chute de potentiel entre  $A$  et  $B$ ,  $U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Il existe un scalaire  $R$ , caractéristique du conducteur, tel que :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E} \cdot \vec{n} dS}, \quad (2.3)$$

où l'unité est l'Ohm (symbole  $\Omega$ ).

**Exemple 6** (Fil cylindrique homogène) : Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section  $S$  où, sur une longueur  $L$ , le champ électrostatique est uniforme, on obtient le lien entre la résistance d'un conducteur (propriété macroscopique) et sa résistivité (propriété microscopique) tel que :

$$R = \frac{EL}{\gamma ES} = \eta \frac{L}{S} \quad (2.4)$$

dont l'unité est le  $\Omega.m$  (Ohm mètre).

## 2.1.5 Association de résistances

### 2.1.5.1 Résistances en série

Soient  $n$  résistances  $R_i$  mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant  $I$ . La tension aux bornes de la chaîne s'écrit simplement :

$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I,$$

Le résistance totale est donc analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est :

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (2.5)$$

### 2.1.5.2 Résistances en parallèle

Soient  $n$  résistances  $R_i$  branchées en parallèle sous une tension  $U = V_1 - V_2$  et alimentées par un courant  $I$ . Le courant se sépare alors en  $n$  courants :

$$I_i = \frac{U}{R_i},$$

dans chacune des  $n$  branches. Nous avons alors (propriété de conservation du courant) :

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R},$$

c'est-à-dire que l'ensemble des  $n$  branches est analogue à une résistance équivalente en série égale à :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad (2.6)$$

## 2.2 Eléments d'un circuit électrique

### 2.2.1 Notion de circuit électrique

**Définition :** Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés **dipôles**, reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée. Un **nœud** d'un circuit est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus. Une **branche** est un tronçon de circuit situé entre deux nœuds. Enfin, une **maille** est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

Un **dipôle** s'insère dans un circuit par l'intermédiaire de deux pôles, l'un par où s'effectue l'entrée du courant (borne +), l'autre la sortie (borne -). Il est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel  $U$  entre ses bornes : c'est-à-dire la courbe caractéristique  $I = f(U)$  qui, pour un dipôle passif, passe par l'origine. Un dipôle actif fournit un courant (positif ou négatif) même en absence de tension. Enfin, on appelle dipôle linéaire tout dipôle dont la courbe est une droite.

Nous avons vu que, dans tout conducteur, la présence d'une résistivité entraîne une variation de tension entre 2 nœuds traversés par le même courant. Les fils électriques reliant les dipôles imposent ainsi leurs résistances propres qui s'ajoutent à la résistance globale du circuit. Dans la majorité des cas d'électronique de puissance, ces résistances internes sont faibles devant celles des dipôles. Les fils sont alors supposés équipotentiels. Cette hypothèse n'est par contre plus valable dans le cas de courants de faible intensité (électronique fine, micro-processeurs, etc...).

**Remarque :** Nous nous intéressons ici à des cas où le courant est établi de façon permanente dans le circuit. L'intensité y est alors la même en tout point. Cela exige évidemment que le circuit soit *fermé*.

### 2.2.2 Puissance électrique disponible

Soit une portion  $AB$  d'un circuit, parcourue par un courant permanent  $I$  allant de  $A$  vers  $B$ . L'existence de ce courant implique que le potentiel en  $A$  est supérieur à celui en  $B$ . Cette différence de potentiel se traduit par l'existence d'un champ électrostatique  $\vec{E}$  produisant une force de Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E}$  capable d'accélérer une charge  $q$ . Ainsi, soit  $P_q = \vec{v} \cdot \vec{E}$  la puissance nécessaire pour communiquer une vitesse  $\vec{v}$  à une particule de charge  $q$  quelconque. Sachant que dans ce conducteur il y a  $n$  porteurs de charge par unité de volume, la puissance totale  $P$  mise en jeu dans le brin  $AB$  parcouru par un courant  $I$  s'écrit :

$$\begin{aligned} P &= \iiint_{\text{brin } AB} n P_q \, dV \\ &= \int_A^B \iint_{\text{Section}} (nq\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \iint_{\text{Section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= I \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = I[V(A) - V(B)]. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{P = UI} \quad (2.7)$$

où  $U = V(A) - V(B) > 0$  puisque le courant s'écoule de  $A$  vers  $B$ . Cette puissance est donc la puissance électrique disponible entre  $A$  et  $B$  du simple fait qu'il y circule un courant  $I$ .

Suivant la nature du dipôle placé entre  $A$  et  $B$  (récepteur), l'énergie électrique disponible sera convertie sous une forme ou une autre. Dans le cas simple où entre  $A$  et  $B$  ne se trouve qu'une résistance  $R$ , la puissance disponible  $P$  ne sert qu'à faire chauffer la résistance puisque  $U = RI$ . Cela se traduit par une dissipation d'énergie sous forme de chaleur, appelée effet Joule, et dont la puissance vaut :

$$\boxed{P_j = RI^2.} \quad (2.8)$$

Cette énergie peut être également reconvertie en rayonnement (lampe), énergie mécanique (moteur), chimique (bac à électrolyse).

**Remarque :** Cette puissance peut aussi être négative lorsque  $U = V(A) - V(B) < 0$ . Le dipôle fournit alors de l'énergie, c'est un générateur.

### 2.2.3 Nécessité d'une force électromotrice ou fém

Si on applique le raisonnement précédent à un circuit fermé, c'est-à-dire si l'on regarde la puissance totale fournie entre  $A$  et  $B$  par la force de Coulomb, on obtient :

$$P = I[V(A) - V(A)] = 0,$$

c'est-à-dire une puissance nulle. Cela signifie qu'il ne peut y avoir de courant en régime permanent. Lorsqu'il y a un courant, cela implique que la force de Coulomb n'est pas responsable du mouvement global des porteurs de charge dans un conducteur.

**Remarque (Analogie) :** Le courant dans un conducteur peut être compris avec l'analogie de la rivière circulant dans son lit. Pour qu'il y ait un écoulement, il faut que l'eau s'écoule d'une région plus élevée vers une région plus basse. Ainsi, le mouvement de l'eau d'un point élevé vers un point plus bas est bien dû à la simple force de gravitation. Mais si l'on veut constituer un circuit fermé, alors il faut fournir de l'énergie (grâce à une pompe) pour amener l'eau à une plus grande hauteur, et le cycle peut alors effectivement recommencer.

C'est exactement ce qui se passe dans un circuit électrique : une force autre que la force électrostatique doit permettre aux porteurs de charge de remonter le potentiel.

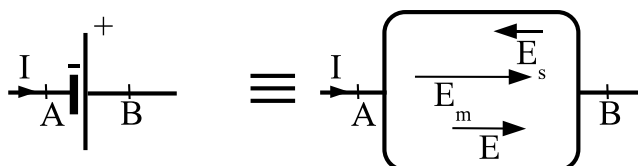


Figure 2.3: Force responsable du courant.

La seule façon d'obtenir un régime stationnaire avec un courant permanent  $I$ , c'est donc d'avoir un champ supplémentaire, appelé champ électromoteur  $\vec{E}_m$ , supérieur en norme et dirigé en sens inverse de  $\vec{E}_s$  (le champ électrostatique). Mettons maintenant le générateur en circuit ouvert ( $I = 0$ ). Le fait qu'une différence de potentiel (ddp) se maintienne entre ses bornes implique nécessairement la présence d'une autre force compensant l'attraction coulombienne. Ainsi, à l'équilibre et en l'absence de courant, on doit donc avoir  $\vec{E}_s + \vec{E}_m = 0$ . Cela signifie donc que la ddp ou tension aux bornes d'un générateur ouvert vaut :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l},$$

où, bien évidemment,  $V_A - V_B < 0$ . On appelle :

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

la **force électromotrice** ou **fém** du générateur ( $e > 0$  est exprimé en volts).

### 2.2.4 Conventions

Dans une branche, le sens du courant peut être choisi arbitrairement. L'orientation de la tension est indépendante du choix de l'orientation de l'intensité :  $U_{AB} = V_A - V_B$  (de B vers A).

- Convention générateur :  $U$  et  $I$  sont dans le même sens.
- Convention récepteur :  $U$  et  $I$  sont de sens contraire.

Si une branche contient un dipôle polarisé de fém  $e$ , celui-ci sera compté  $+e$  si en parcourant la branche, on entre par la borne  $-$  (au sens d'une chute de potentiel).

Exemple :

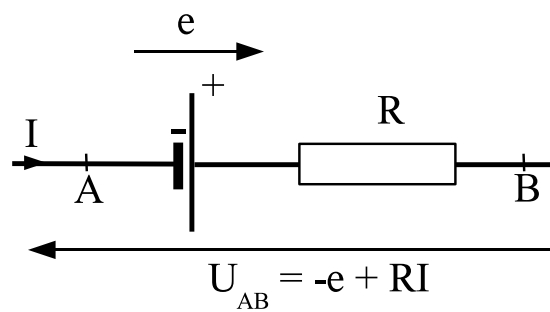


Figure 2.4: Calcul de tension (exemple).

### 2.2.5 Relation courant / tension

Les dipôles sont caractérisés par une relation  $U = f(I)$  ou  $I = f(U)$  reliant la tension  $U$  à leurs bornes au courant  $I$  les traversant. Cette relation dépend des dipôles. La représentation graphique de cette relation s'appelle caractéristique. Si cette caractéristique passe par l'origine, le dipôle est dit passif ; dans le cas contraire, il est dit actif.

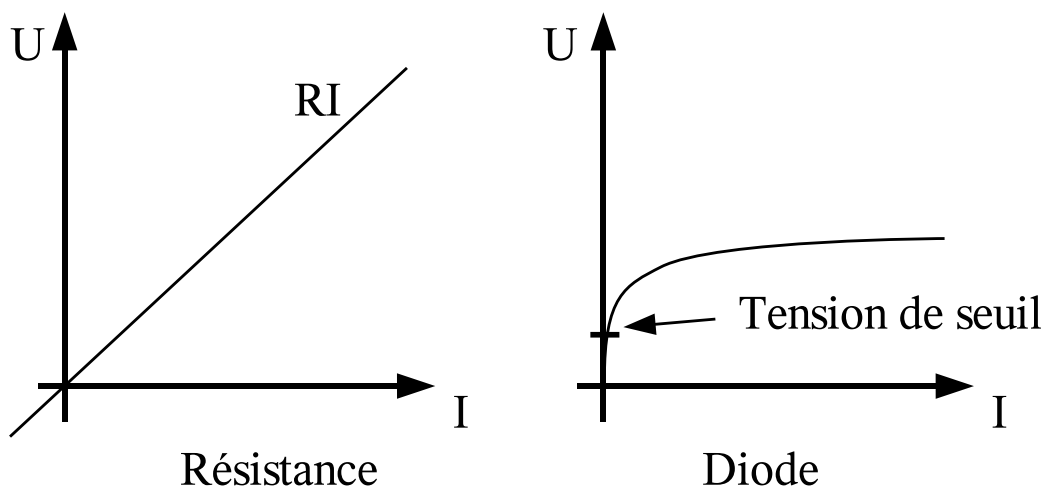


Figure 2.5: Exemples de caractéristiques.

### 2.2.5.1 Point de fonctionnement

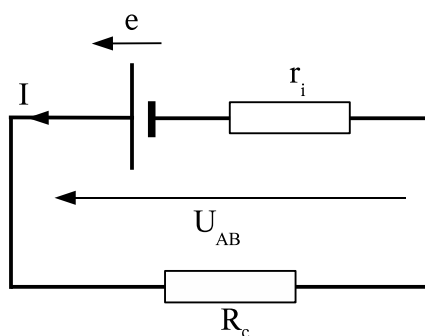


Figure 2.6: Circuit électrique chargé

Soit le circuit électrique donné à la figure 2.6. Le courant s'écrit :

$$I = \frac{e}{r_i + R_c}$$

d'où

$$U_{AB} = e - r_i I = e - \frac{r_i e}{r_i + R_c} = \frac{e}{1 + \frac{r_i}{R_c}}$$

Le **point de fonctionnement** est l'intersection des courbes  $U_{AB} = e - r_i I = R_c I$  comme le montre la figure 2.7

### 2.2.5.2 Générateur de tension

Si la résistance de charge  $R_c$  est très grande devant  $r_i$ , la tension aux bornes du générateur est sensiblement indépendante de  $R_c$ . On obtient alors un générateur à tension constante dont la courbe caractéristique est donnée à la figure 2.8.

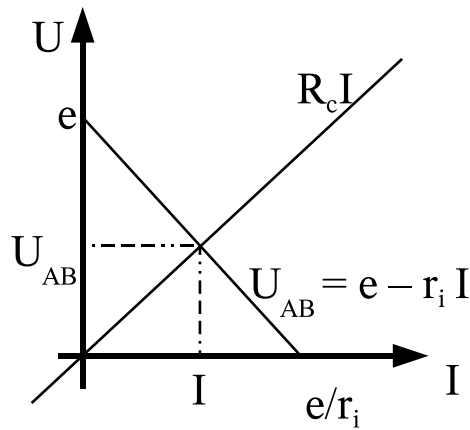


Figure 2.7: Point de fonctionnement.

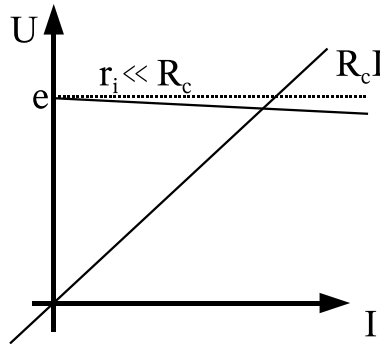


Figure 2.8: Relation tension - courant  $U = f(I)$  pour un générateur de tension.

On en déduit :  $U = e - r_i I \approx e$ . Plus la résistance  $r_i$  est petite, plus le générateur est capable de fournir un courant fort et plus la tension sera proche de  $e$ .

### 2.2.5.3 Générateur de courant

Si la résistance de charge  $R_c$  est très petite devant  $r_i$ , alors  $i = \frac{e}{r_i + R_c} \approx \frac{e}{r_i}$  est indépendant de la charge. On obtient alors un générateur de courant constant dont la courbe caractéristique est donnée à la figure 2.9.

$\eta$  est le courant fourni par le générateur quand il y a court-circuit. En général, l'impédance interne est une résistance  $r_i$  d'où :  $I = \eta - \frac{U}{r_i}$ , avec  $\eta = \frac{e}{r_i}$ .

Ici, plus la résistance est grande, plus le générateur est capable de délivrer un courant proche de  $\eta$ . La symbolique utilisée pour schématiser ce type de générateur est présentée à la figure 2.10.

### 2.2.5.4 Représentation Duale

L'équivalence entre les deux représentations est appelée **dualité**. En effet, on peut écrire à la fois :

$$U = e - r_i I$$



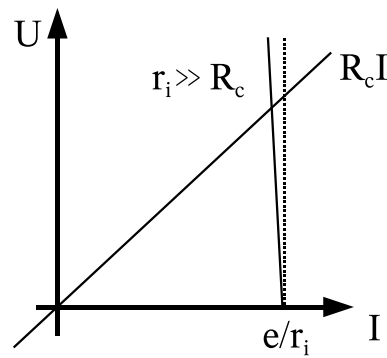


Figure 2.9: Relation tension / courant :  $U = f(I)$  pour un générateur de courant.

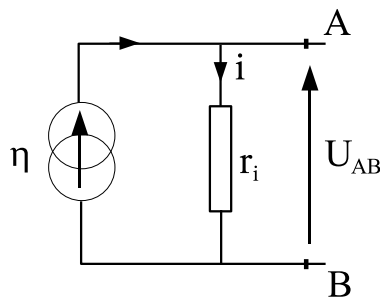


Figure 2.10: Générateur de courant.

et

$$I = \frac{e}{r_i} - \frac{U}{r_i} = \eta - g_i U$$

en posant  $\eta = \frac{e}{r_i}$  et  $g_i = \frac{1}{r_i}$ .  $e$  et  $\eta$  sont orientés dans le même sens. Le principe de dualité schématisé est donné à la figure 2.11.

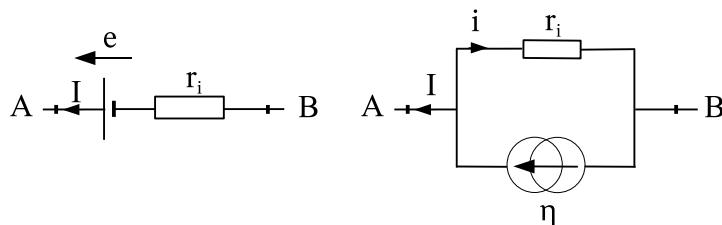


Figure 2.11: Dualité générateurs de tension / courant.

- Générateur de tension :

$$U_{AB} = R_c I$$

$$I = \frac{E}{R_i + R_c}$$

$$U_{AB} = \frac{R_c}{R_i + R_c} E$$

- Générateur de courant :

$$\eta = I + i$$

$$I = \eta - \frac{U_{AB}}{r_i} I$$

$$I(1 + \frac{R_c}{r_i}) = \eta$$

$$I = \frac{r_i}{r_i + R_c} \eta$$

$$I = \frac{1}{r_i + R_c} e$$

$$U_{AB} = R_c I$$

$$U_{AB} = \frac{R_c}{R_i + R_c} E$$

On peut résumer l'effet de la dualité ainsi : quand un générateur de fém  $E$  et de résistance interne  $R_i$  débite dans une résistance de charge  $R_c$  :

- si  $r_i \ll R_c$ , alors c'est une source de tension de fém  $E$  ;
- si  $r_i \gg R_c$ , alors c'est une source de courant  $I = \frac{e}{r_i}$ .

### 2.2.5.5 Associations de dipôles : dipôles équivalents

- Association en série :

Tension :  $u = \sum_k u_k$  (somme algébrique sur une branche) Source de tension :  $e = \sum_k e_k$  (somme algébrique) Résistance :  $R = \sum_k R_k$

De manière générale :  $u = \sum_k u_k = \sum_k e_k + (\sum_k R_k)I$ .

**Note 3 :** *L'association en série de sources de courant idéale n'a aucun sens.*

- Association en parallèle :

Courant :  $I = \sum_k I_k$  (somme algébrique à un nœud) Conducteur ohmique :  $G = \sum_k G_k$  (conductance équivalente)

De manière générale :  $i = \sum_k i_k = \sum_k \eta_k + (\sum_k G_k)U$ .

**Note 4 :** *L'association en parallèle de sources de tension idéales n'a aucun sens.*

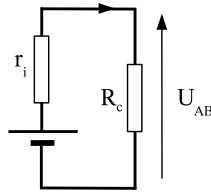


Figure 2.12: Générateur de tension chargé.

### 2.2.5.6 Adaptation d'impédance : charge adaptée

Soit un générateur de tension dans une résistance  $R_c$ .

$$\begin{cases} U_{AB} = e - r_i I \\ U_{AB} = R_c I \end{cases}$$

$$U_{AB} = e - \frac{r_i}{R_c} U_{AB}$$

$$e = \frac{R_c + r_i}{R_c} U_{AB}$$

$$U_{AB} = \frac{R_c}{R_c + r_i} e \quad \text{et} \quad I = \frac{e}{R_c + r_i}$$

**Puissance dissipée dans  $r_i$**

$$P_c = UI = r_i I^2$$

Nous avons :

$$P_c = \frac{r_i}{(R_c + r_i)^2} e^2$$

**Puissance dissipée dans  $R_c$**

$$P_c = U_{AB} I = R_c I^2$$

avec  $I = \frac{e}{R_c + r_i}$ .

Nous avons :

$$P_c = \frac{R_c}{(R_c + r_i)^2} e^2$$

Quelle doit être la résistance de charge pour que la puissance soit maximale ?

$P_c$  est maximum lorsque  $\frac{\partial P_c}{\partial R_c} = 0$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c}{\partial R_c} &= \frac{R_c + r_i - 2R_c}{(R_c + r_i)^3} e^2 \\ &= \frac{R_c + r_i - 2R_c}{(R_c + r_i)^3} e^2 \end{aligned}$$

donc lorsque  $R_i = R_c$ .

**Puissance totale**

$$P_{tot} = eI = P_c + P_i = \frac{e^2}{R_c + r_i}$$

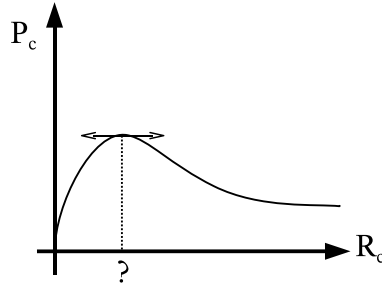


Figure 2.13: Puissance fournie.

## 2.3 Réseaux électriques

### 2.3.1 Analyse d'un réseau en régime continu - Méthode de Kirchhoff

L'analyse d'un réseau consiste à déterminer l'intensité du courant qui circule dans chacune des branches ou des différences de potentiel de chaque branche.

- Si il y a  $N$  nœuds, il y a  $N - 1$  équations de nœuds.
  - Si il y a  $B$  branches, il y a  $B - (N - 1)$  équations des mailles.
  - On cherche  $B$  intensités.
1. Flécher arbitrairement les courants dans les différentes branches, puis les différences de potentiel. On choisi ensuite un sens arbitraire de description de chacune des mailles.
  2. Appliquer la loi des nœuds. Il n'y a pas d'accumulations de charges électriques à un nœud, ce qui implique que la somme algébrique des intensités des branches connectées à un nœud est nulle.

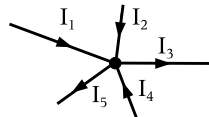


Figure 2.14: Loi des nœuds.

$$\sum_i I = 0$$

On peut prendre comme convention  $+$  si le courant va vers le nœud et  $-$  si il en sort.

3. Appliquer la loi des mailles. En parcourant complètement une maille, la somme des différences de potentiels rencontrés est nulle :  $V_A - V_A$ .

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 = 0.$$

4. Résolution. Les  $B$  équations obtenues à  $B$  inconnues sont résolues par méthodes classiques (substitution, déterminant, ...). Nous obtenons alors des valeurs algébriques des courants : si  $I_i > 0$  : le sens choisi équivaut au sens réel ; si  $I_i < 0$  : le sens choisi est inverse au sens réel.

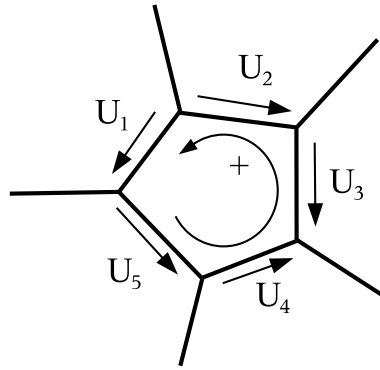


Figure 2.15: Loi des mailles.

### 2.3.2 Méthode de superposition

Le courant produit dans une branche quelconque d'un réseau, par un ensemble de sources, est la somme algébrique des courants produits dans chaque branche par chacune des sources considérées isolément, les autres sources étant rendues passives. Rendre passives les sources signifie annuler les fém (court-circuitées) et les courants électromoteurs (circuits ouverts).

Exemple :

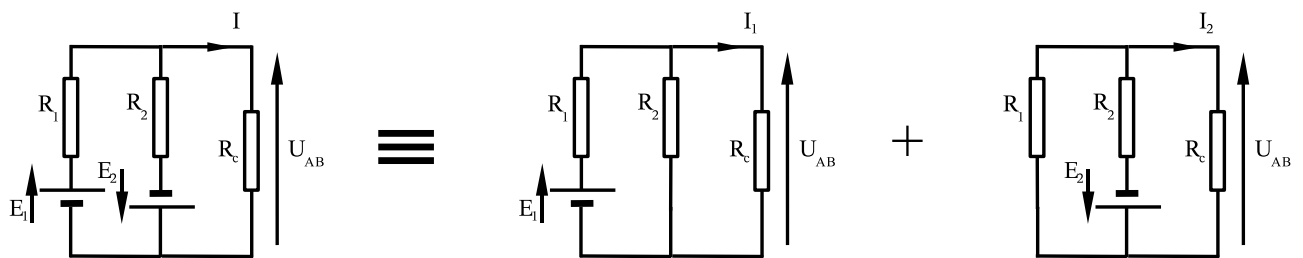


Figure 2.16: Méthodes de superposition.

### 2.3.3 Théorème de Millmann

Ce théorème s'applique dans le cas de branche en parallèle.

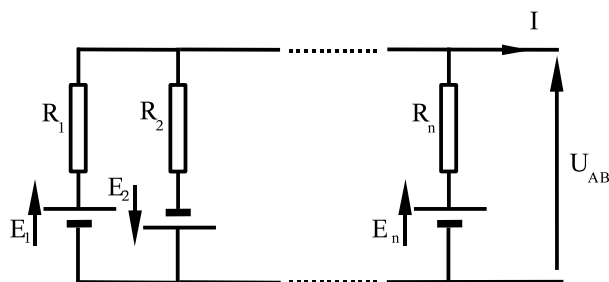


Figure 2.17: Théorème de Millmann.

$$U_{AB} = \frac{\sum_i \pm \frac{e_i}{r_i}}{\sum_i \frac{1}{r_i}}.$$

La démonstration par dualité est évidente :

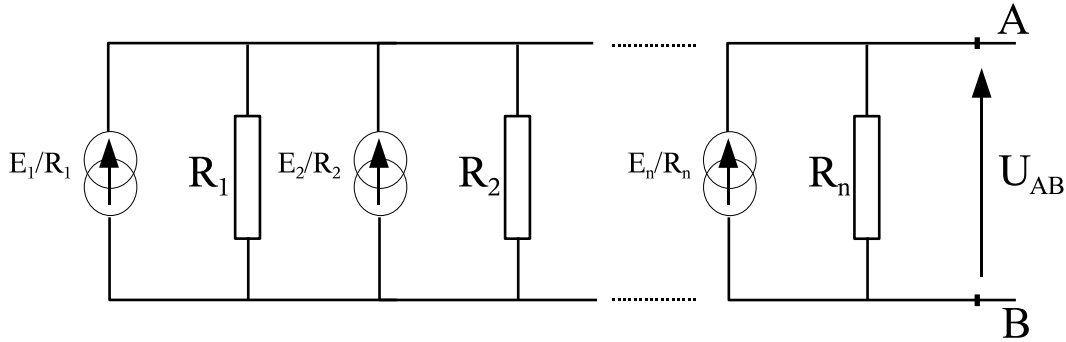


Figure 2.18: Circuit dual équivalent.

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{r_i}$$

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{e_i}{r_i}$$

$$U_{AB} = RI$$

### 2.3.4 Théorème de Thévenin

**Enoncé :** *Tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B, aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur unique de fém  $e$  et de résistance interne  $r$  telles que :*

1.  $e = E$  est la tension mesurée entre A et B à l'aide d'un voltmètre ;
2.  $r = R_{eq}$ , où  $R_{eq}$  est la résistance équivalente du réseau, obtenue en posant que toutes les forces électromotrices (f.é.m.) et les forces contre-électromotrices (f.c.é.m.) sont nulles.

On ne s'intéresse qu'au fonctionnement d'un dipôle équivalent ( $AB$ ) d'un réseau. Si ce dipôle équivalent est une source de tension, on l'appelle générateur de Thévenin. Cette méthode est donc très utile pour déterminer des générateurs équivalents de circuits complexes pour lesquels les lois de Kirchhoff deviennent inadaptées, c'est-à-dire lorsque le nombre d'inconnues dans le système d'équations devient trop grand.

**Exemple 7** (Circuit équivalent) : La figure 2.19 présente une résistance  $R$  alimentée par un circuit comprenant un générateur  $E$  muni de sa résistance propre  $R1$  et d'une résistance supplémentaire  $R2$  en parallèle. On cherche à connaître le générateur équivalent aux bornes de  $R$  entre A et B.

L'application du théorème de Thévenin comporte 4 étapes.

1. On déconnecte le dipôle de charge (cf. 2.20(a)):

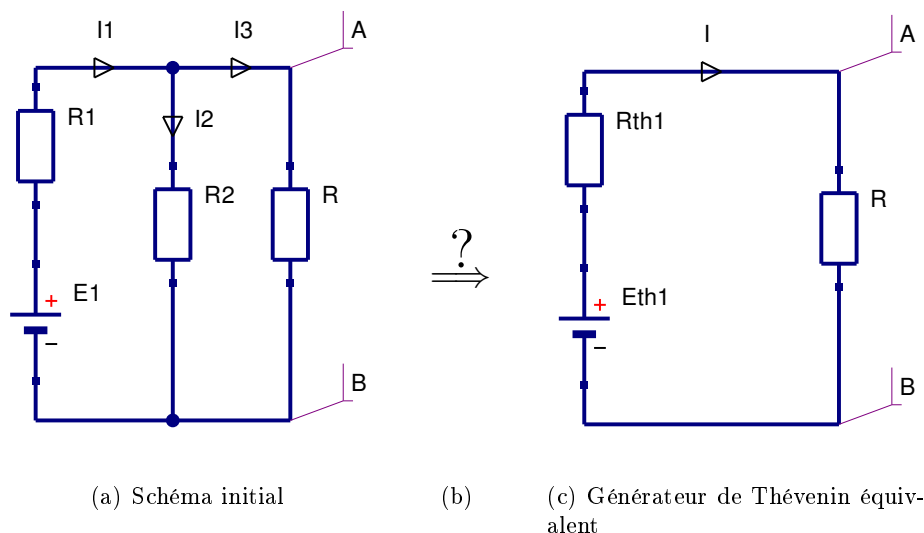


Figure 2.19: Exemple d'un schéma pour l'application du théorème de Thévenin.

2. On supprime toutes les sources et on calcule la résistance équivalente  $R_{th}$  (cf. 2.20(b)):

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.9)$$

3. On rétablit les sources et on calcule la tension à vide  $E_{th} = V_A - V_B$  qui donnera la tension du générateur équivalent (cf. 2.20(c)):

D'après la loi d'Ohm  $I_1 = I_2$  et  $I_3 = 0$  A, d'où:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \quad (2.10)$$

On en déduit d'après la loi des mailles :

$$E_{th} = V_A - V_B = R_2 I_2 = \frac{R_2 E_1}{R_1 + R_2} \quad (2.11)$$

4. On remplace le dipôle de commande par le générateur de Thévenin équivalent (cf. 2.20(d)) où on utilise les quantités données aux équations 2.9 et 2.11.

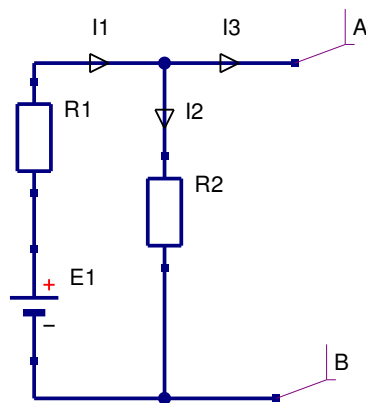
**Remarque :** ATTENTION ! Ceci est un exemple et non un cas général. Seule la méthode en 4 étapes s'applique mais les équations diffèrent selon les cas. On doit systématiquement utiliser les lois de Kirchhoff pour déterminer les lois de tension et de courant.

### 2.3.5 Théorème de Norton

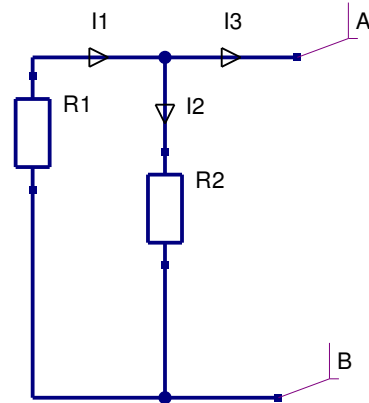
C'est la forme duale du théorème de Thévenin. Le générateur de tension est remplacé par un générateur de courant.

La résistance est déterminée de la même façon. Le courant est le courant de court-circuit pratiqué aux bornes du dipôle de commande.

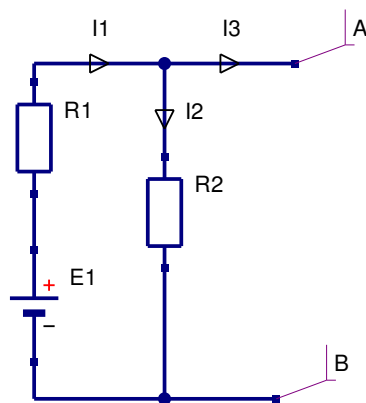
*Suite à venir...*



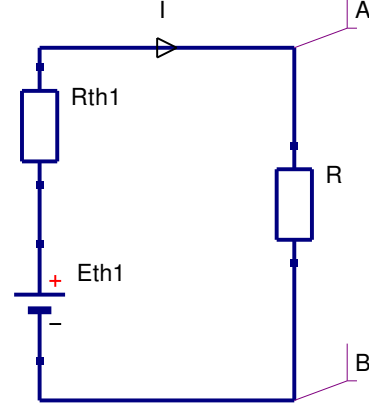
(a) 1<sup>re</sup> étape - enlèvement de la charge



(b) 2<sup>e</sup> étape - calcul de la résistance équivalente



(c) 3<sup>e</sup> étape - calcul de la tension à vide



(d) 4<sup>e</sup> étape - remplacement du dipôle par le générateur de Thévenin équivalent

Figure 2.20: Etape du calcul d'un générateur de Thévenin équivalent.

A FAIRE !

Figure 2.21: Générateur de Norton.



## Chapter 3

# Electromagnétisme

### 3.1 Introduction

L'électrostatique nous a permis d'introduire les notions d'action à distance entre particules chargées au repos. Cette description cesse d'être complète lorsque les charges sont en mouvement. Il y a alors apparition de nouveaux types d'interactions qui constituent une partie de la théorie de l'électromagnétisme : la **magnétostatique**.

### 3.2 Le champ magnétique

#### 3.2.1 Préambule

Les effets magnétiques procèdent d'une **interaction à distance**. Comme en électrostatique, on doit donc pouvoir en déduire ses effets à l'aide d'un champ qui sera un outil mathématique. La connaissance de ce champ suffira à connaître tous les effets magnétiques indépendamment des sources qui l'ont créé.

#### 3.2.2 Topographie du champ magnétique

Le champ magnétique est une grandeur vectorielle, on la note  $\vec{B}$ . Voici quelques exemples de situations mettant en jeu un champ magnétique dont on trace les lignes de flux.

- Champ terrestre
- Aimant droit
- Aimant en U
- Fil infini
- Spire

#### 3.2.3 Définition du champ magnétique

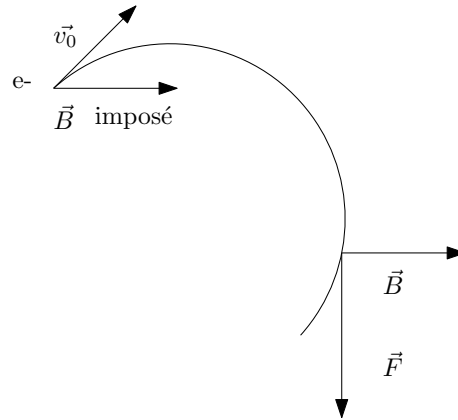
Le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini par son action sur les particules chargées en mouvement.

### 3.2.3.1 Quelques expériences

**Canon à électrons :** ampoule sous vide ( $H_2$ ,  $10^{-5}$  Bar). Les électrons projetés depuis l'électrodes sont déviés par le champ magnétique imposé (variable dans le cas du tube cathodique de la télévision).

**Bobine de Helmholtz :** champ uniforme.  $\vec{v}_0$  est orientable.

### 3.2.3.2 Observations



Soit un électron évoluant dans l'espace à une vitesse  $\vec{v}_0$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  (voir la figure 3.2.3.2). Une force magnétique  $\vec{F}$  apparaît et nous pouvons faire les observations suivantes:

- $\vec{F} \perp \vec{B}$ .
- $\vec{F} \perp \vec{v}_0$ .
- $\vec{F} = \vec{0}$  si  $\vec{v} // \vec{B}$ .
- Si on inverse  $\vec{B}$ ,  $\vec{F}$  s'inverse.
- Si  $q \times 2$ ,  $F \times 2$

On déduit de ces observations une loi de force magnétique  $\vec{F}_{magn}$  dite **Force de Lorentz** telle que :

$$\vec{F}_{magn} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_{ext} \quad (3.1)$$

Force de Lorentz généralisée :

$$\vec{F}_{magn} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (3.2)$$

### 3.2.4 Loi de Biot et Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{AM}}{4\pi AM^3} \quad (3.3)$$

Où  $\mu_0$  est une constante fondamentale, appelée perméabilité magnétique du vide.

En vertu du principe de superposition des champs magnétiques, le champ total créé par l'ensemble des circuits contenus dans l'espace s'écrit :

$$\vec{B} = \int_{\text{circuits}} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{AM}}{4\pi AM^3} \quad (3.4)$$

### 3.2.5 Champ magnétique créé par un fil rectiligne

...

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.5)$$

A l'avenir, on utilisera le théorème d'Ampère.

### 3.2.6 Action d'un champ $\vec{B}$ sur un conducteur parcouru par un courant - Force de Laplace

Le champ  $\vec{B}$  exerce une force  $d\vec{F}$  sur l'élément  $d\tau$  telle que :

$$d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}.d\tau \quad (3.6)$$

$\frac{d\vec{F}}{d\tau}$  est la densité volumique de force.

### 3.2.7 Le théorème d'Ampère

Nous avons vu en électrostatique que l'élément de circulation du champ électrique  $\vec{E}$  sur un élément de chemin  $d\vec{l}$  se définissait par:

$$dC = \vec{E}.d\vec{l}$$

De la même façon, nous définissons un élément de circulation du champ magnétique par :

$$dC = \vec{B}.d\vec{l}$$

La circulation totale en suivant une ligne  $\Gamma$  s'écrit :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{l}$$

Considérons le chemin  $\Gamma$  fermé, constitué du cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  orienté comme indiqué sur la figure ???. En chaque point du cercle,  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires et de même sens. L'élément de circulation est donc simplement  $dC = \|\vec{B}\| \times \|d\vec{l}\|$ .

Puisque  $B$  est constant sur tout le cercle et ne dépend que du rayon  $r$ , la circulation totale du champ magnétique sur le cercle est  $2\pi r B(r)$ . D'après l'expression 3.5 de  $B(r)$ , on en déduit :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I \quad (3.7)$$

### 3.2.8 Travail des forces de Laplace

Un circuit parcouru par un courant  $I$  fixé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  sera soumis à une force de Laplace telle que :

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (3.8)$$

## 3.3 L'induction

### 3.3.1 Introduction

2 expériences

Généralisation :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (3.9)$$

et

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_m \quad (3.10)$$

### 3.3.2 Tension aux bornes d'un conducteur

$$V_C - V_D = R_{CD} I_{CD} - e_{CD} \quad (3.11)$$

### 3.3.3 Calcul de la force électromotrice

Cas du circuit fermé :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.12)$$

### 3.3.4 Auto-induction

On suppose  $\vec{B}_0 = \vec{0}$ , mais  $i(t)$  est non nul dans le circuit. Alors  $i(t)$  crée un champ propre  $B(t)$  impliquent un flux  $\Phi_{propre}$  tel que:

$$\Phi_{propre} = Li(t) \quad (3.13)$$

où  $L$  est l'inductance de la spirale en Henry.

Il est alors créée une f.e.m. induite  $e_{induite}$  telle que:

$$e_{induite} = -\frac{d\Phi_{propre}}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.14)$$

## 3.4 Le solénoïde

Le solénoïde est modélisé par une série de  $N$  spires de rayons  $R$ , de même axe, parcourues par un même courant  $I$  et disposées régulièrement sur une longueur  $2a$ . On note  $O$  le centre du solénoïde, et  $A$  et  $B$  ses extrémités.

On connaît le champ magnétique créé par une spire de courant sur son axe. On peut alors en déduire le champ créé par le solénoïde sur son axe :

$$B(z) = \mu_0 N I \frac{\Omega_A - \Omega_B}{4\pi} \quad (3.15)$$

où  $\Omega_A$  et  $\Omega_B$  sont les angles solides sous lequel on voit respectivement la face  $A$  et la face  $B$  depuis la distance  $z$  par rapport à  $O$ , et  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

Au centre du solénoïde, c'est-à-dire en  $z = 0$ , cette formule devient :

$$B(0) = \mu_0 N I \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad (3.16)$$

On peut montrer qu'il est possible de déterminer le champ magnétique dans tout l'espace ( $\vec{B}(r, z) = B_z(r, z)\vec{u}_z + B_r(r, z)\vec{u}_r$ ) à partir du champ magnétique sur l'axe ( $B(0, z)$  noté  $F(z)$ ) grâce aux relations suivantes :

$$B_z(r, z) = F(z) - \frac{1}{4}r^2 F''(z) \quad (3.17)$$

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{2}r F'(z) + \frac{1}{16}r^3 F'''(z). \quad (3.18)$$

On s'aperçoit alors que ce champ est quasi-homogène dans tout le volume délimité par le solénoïde. Cela correspond à des lignes de champ quasi-parallèles entre elles. A l'extérieur du solénoïde, le champ est analogue à celui d'un aimant: il présente un pôle nord et un pôle sud. Il est cependant très faible.

### 3.4.1 Etablissement et suppression du courant dans un solénoïde

### 3.4.2 Analyse d'un circuit RL

#### 3.4.2.1 Etablissement du courant

#### 3.4.2.2 Suppression du courant

## Chapter 4

# Courants Variables

### 4.1 Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

### 4.2 Impédances complexes

L'impédance est définie comme le rapport de la tension  $u(t)$  (en V) et du courant  $i(t)$  où  $u(t) = U_0 e^{j\omega t + \phi_i}$  avec  $U_0$  la tension max et  $\omega$  la pulsation du signal, et où  $u(t) = I_0 e^{j\omega t + \phi_u}$  avec  $I_0$  est l'intensité max. On écrit :

$$Z = \frac{u}{i} \quad (4.1)$$

#### 4.2.1 Résistance

Soit  $Z_R$  l'impédance complexe d'une résistance. D'après l'équation 4.1,  $Z_R$  est la résistance réelle du dipôle telle que:

$$Z_R = \frac{U_0}{I_0} = R \quad (4.2)$$

#### 4.2.2 Capacitance

Soit  $Z_C$  l'impédance complexe d'une capacitance (condensateur). On sait que  $i(t) = C \frac{\partial u(t)}{\partial t}$ . Or  $\frac{\partial u(t)}{\partial t} = j\omega U_0 e^{j\omega t}$ . On en déduit d'après l'équation 4.1:

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} \quad (4.3)$$

#### 4.2.3 Inductance

Soit  $Z_L$  l'impédance complexe d'une inductance (solénoïde). On sait que  $u(t) = L \frac{\partial i(t)}{\partial t}$ . Or  $\frac{\partial i(t)}{\partial t} = j\omega I_0 e^{j\omega t}$ . On en déduit d'après l'équation 4.1:

$$Z_L = jL\omega \quad (4.4)$$

#### 4.2.4 Puissances

##### 4.2.4.1 Puissance instantanée

$$p = ui \quad (W = J.s^{-1}) \quad (4.5)$$

##### 4.2.4.2 Puissance active (absorbée)

La puissance active correspond à l'énergie moyenne consommée par unité de temps c'est-à-dire à la **puissance moyenne consommée** :

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt \quad (4.6)$$

d'où, en régime sinusoïdal:

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \phi \quad (4.7)$$

soit,

$$P = UI \cos \phi \quad (4.8)$$

où  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  et  $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$  sont respectivement la valeur efficace du courant et la valeur efficace de la tension dans le circuit.

##### 4.2.4.3 Puissance réactive

$$Q = \frac{U_0 I_0}{2} \sin \phi = UI \sin \phi \quad (4.9)$$

##### 4.2.4.4 Puissance apparente

$$S = UI \quad (4.10)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4.11)$$

### 4.3 Etude de cas

#### 4.3.1 Circuit RLC

#### 4.3.2 Théorème de Thévenin en notation complexe

#### 4.3.3 Théorème de Norton en notation complexe

## ***RESUME DU PROGRAMME D'ELECTRICITE (20 heures)***

### ***ELECTROSTATIQUE***

1. Rappels Généralités : charge électrique élémentaire ; corps chargés. Loi de Coulomb. Principe de superposition. Champ électrique ; exemples.
2. Etude du champ électrique Définition du flux. Théorème de Gauss. Application : calcul du champ créé par une distribution uniforme (rectiligne, plane, sphérique).
3. Potentiel Travail des forces électriques ; définition du potentiel. Relation entre potentiel et champ. Calculs de potentiels simples.
4. Condensateurs
  - Charge des condensateurs en équilibre. Définition et capacité du condensateur.
  - Condensateur en présence d'un diélectrique.
  - Energie emmagasinée par un condensateur,
  - Association de condensateurs
5. Notions sur les électrets

### ***COURANTS CONTINUS***

1. Rappels Généralités : densité de courant, courant, intensité, différence de potentiel. Loi d'Ohm, résistivité et résistance des conducteurs. Association de résistances. Loi de Joule.
2. Générateurs - Récepteurs
  - Générateur. Définition ; f.e.m., résistance interne. Générateur de tension, générateur de courant. Charge adaptée. Association. Générateur chimique : Description et fonctionnement d'une pile. Exemples. Potentiel d'électrode.
  - Récepteur. Définition ; f.e.m., résistance interne. Association.
3. Réseaux Définitions et conventions de signe internationale. Lois de Kirchoff ; loi des noeuds, loi des mailles. Mise en équation et résolution de réseaux simples. Théorème de superposition. Théorème de Thévenin et théorème de Norton, applications.

### ***ELECTROMAGNETISME***

1. Rappels
  - Magnétostatique Origine du champ magnétique, force de Lorentz. Action d'un champ sur un circuit : loi de Laplace ; exemples. Champs créés par des courants ; exemples. Interaction entre circuits : relation entre flux magnétiques et courants ; coefficients d'inductance. Propriétés des aimants permanents.
  - Induction Description du phénomène. F.e.m. d'induction ; loi de Faraday. Auto-induction ; tension aux bornes d'une bobine. Induction mutuelle ; tension aux bornes de bobines couplées.
2. Etude du champ magnétique Loi de Biot et Savart : calcul d'un champ créé par un fil rectiligne. Théorème d'Ampère. Application au solénoïde. Notion de conservation du flux magnétique.

### ***COURANTS VARIABLES (Quasi-stationnaires)***

1. Circuits en régime transitoire Charge et décharge d'un condensateur. Etablissement et rupture du courant dans une bobine.



2. Circuits en régime sinusoïdale forcé Généralités. Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales. Impédance complexe d'éléments passifs simples. Association d'impédances. Etude du circuit résonnant RLC ; résonance, surtension, facteur de qualité. Générateur de tension sinusoïdale : f.e.m. et impédance interne complexes. Puissance et adaptation d'impédance. Réseaux : lois de Kirchoff, théorèmes de Thévenin et Norton en notation complexe, exemples.