

---

# Traitement du signal

---

Cours du CNAM - CPDA - 2012  
modifié le November 12, 2016  
Version 0.5.1

**Guillaume Pellerin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Laboratoire d'Acoustique, Conservatoire National des Arts et Métiers  
<[guillaume.pellerin@parisson.com](mailto:guillaume.pellerin@parisson.com)>

Ce cours enseigné au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) de Paris est destiné à introduire les notions théoriques et pratiques du traitement du signal à un niveau Bac +2 ou +3.

Trois parties se distinguent pour séparer tout d'abord les éléments théoriques qui fondent la **théorie du traitement de signal** par les méthodes de Fourier, puis une synthèse des différents **modes de représentation des signaux** notamment celui du spectrogramme, et enfin une introduction à la **théorie du filtrage numérique**.

Ce document est en constante évolution. Certaines parties seront revues ou corrigées dans les versions ultérieures. Les mises à jour seront disponibles sur l'adresse web indiquée en page de garde et je vous invite donc à la consulter régulièrement.

Il est publié selon les termes de la licence Creative Commons by-nc-sa 2.0 France :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/>

# Contents

<b>1</b>	<b>Les signaux</b>	<b>5</b>
1.1	Préambule . . . . .	5
1.2	Classification des signaux . . . . .	6
1.2.1	Classification dimensionnelle . . . . .	6
1.2.2	Classification phénoménologique . . . . .	6
1.2.3	Classification morphologique . . . . .	6
1.2.4	Classification énergétique . . . . .	7
1.3	Signaux et distributions classiques . . . . .	7
1.3.1	Fenêtre rectangulaire ou Porte . . . . .	7
1.3.2	Impulsion de Dirac . . . . .	7
1.3.3	« Peigne » de Dirac . . . . .	8
1.3.4	Sinus cardinal . . . . .	8
1.4	Evaluation de la similitude entre deux signaux . . . . .	8
1.4.1	Les fonctions d'inter-corrélation et d'auto-corrélation . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Transformées de signaux</b>	<b>10</b>
2.1	Le produit de convolution . . . . .	10
2.2	Rappels sur la décomposition en série de Fourier des signaux périodiques . . . . .	11
2.3	La transformée de Fourier . . . . .	11
2.3.1	Définition de la transformée de Fourier . . . . .	11
2.3.2	Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	12
2.3.3	Les transformées de Fourier de signaux courants . . . . .	13
2.3.4	La fonction de densité spectrale d'énergie . . . . .	14
2.4	L'échantillonnage . . . . .	14
2.4.1	Définition de l'échantillonnage . . . . .	14
2.4.2	La quantification . . . . .	14
2.5	La transformée de Fourier à temps discret . . . . .	15
2.6	Le théorème de Shannon . . . . .	15
2.7	La transformée en $Z$ . . . . .	16
2.7.1	Définition de la transformée en $Z$ . . . . .	16

2.7.2	Existence de la transformée en $Z$ . . . . .	17
2.7.3	Propriétés de la transformée en $Z$ . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Systèmes linéaires et filtrage</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Réponse impulsionnelle d'un système . . . . .	19
3.3	Réponse fréquentielle d'un système . . . . .	20
3.4	Filtrage . . . . .	20
3.4.1	Filtres classiques - vocabulaire . . . . .	21
3.4.2	Filtres numériques . . . . .	22
3.4.3	Exemples de filtres . . . . .	22
3.4.3.1	Le filtre moyennneur lisseur . . . . .	22
3.4.3.2	Le filtre passe-bas . . . . .	22
3.4.3.3	Le filtre vocal . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Modes de représentation des signaux</b>	<b>27</b>
4.1	Fenêtrage des signaux . . . . .	27
4.2	Le spectrogramme . . . . .	29
4.3	Pertinence et choix d'un mode de représentation . . . . .	31
4.4	Le spectre moyenné (Long Term Average Spectrum LTAS) . . . . .	33

# Chapter 1

## Les signaux

### 1.1 Préambule

L'information, qui se présente à nous lors de l'observation d'un phénomène, se manifeste sous forme d'une ou plusieurs grandeurs physiques qui se déroulent à la fois dans le temps et dans l'espace. Dans les problèmes rencontrés en pratique, on est souvent amené à s'intéresser plus particulièrement à l'un ou l'autre de ces deux aspects. On désigne alors par le terme de **signal** l'évolution temporelle, tandis que l'on désigne par le terme d'**image** l'évolution spatiale.

Les différentes opérations que l'on fait subir aux signaux nécessitent des outils mathématiques appropriés qui sont à la base du traitement du signal. Dans ce cours nous envisageons l'étude de certains de ces outils. La théorie du signal propose de modéliser la grandeur physique observée par un objet mathématique dépendant de la variable réelle  $t$  représentant le temps. Dans la suite, le signal désignera indifféremment la grandeur physique observée ou l'objet mathématique servant à la modéliser. Le figure 1.1 donne un aperçu de la représentation temporelle de la forme d'onde d'un signal musical.

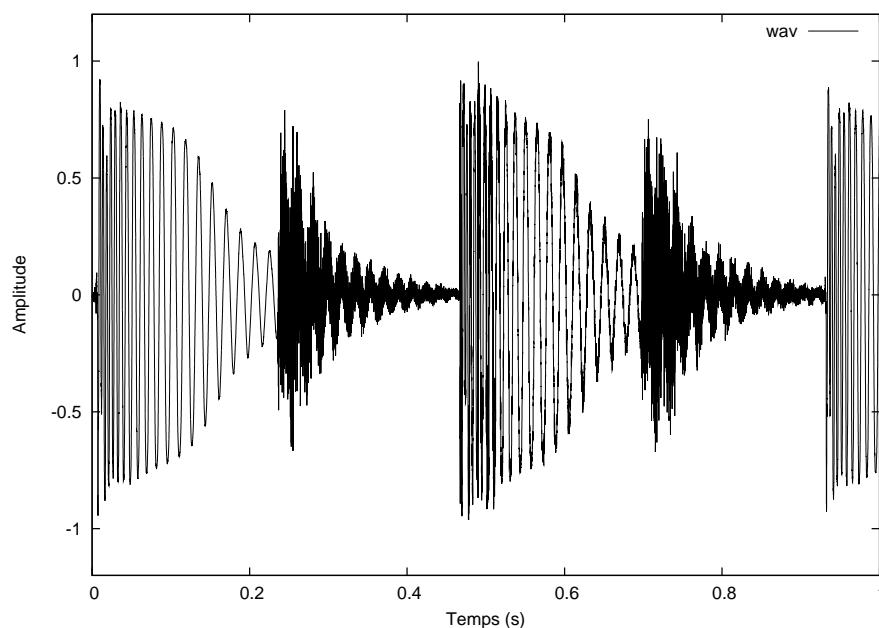


Figure 1.1: Exemple d'une représentation temporelle d'un signal musical combinant un son de grosse caisse et celui d'une caisse claire.

## 1.2 Classification des signaux

En théorie du signal, on a l'habitude d'envisager plusieurs types de signaux. Pour rendre la suite de ce cours plus compréhensible, nous présentons dans cette section les différents modes de classification des signaux.

### 1.2.1 Classification dimensionnelle

On peut différencier les signaux selon leur nombre de variables libres. Par exemple un signal électrique  $V(t)$  est un signal unidimensionnel dépendant du temps. Une image statique en noir et blanc peut être modélisée par un signal bidimensionnel correspondant à la brillance en fonction de la largeur et de la hauteur de l'image. Enfin, un film en noir et blanc peut être considéré comme une image fonction du temps, autrement dit modélisé par un signal tridimensionnel dépendant de l'abscisse et de l'ordonnée de l'image mais également du temps.

### 1.2.2 Classification phénoménologique

La première distinction porte sur notre capacité à prédire l'évolution temporelle de la grandeur observée. Dans le cas d'un oscillateur sinusoïdal d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f_0$  par exemple, moyennant la mesure de  $A$  et de  $f_0$ , on peut prédire la valeur de l'amplitude, à tout instant, par l'expression  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ . Un tel modèle de signal est dit **déterministe**. Il existe cependant des situations où il n'est pas concevable d'explicitement, de cette façon, la forme de l'évolution temporelle du signal. C'est le cas, par exemple, pour la tension engendrée à la sortie d'un microphone ou encore pour le courant électrique produit par l'agitation thermique des particules dans un conducteur (bruit de fond). On ne peut pas dire avec certitude combien vaudra  $x(t)$  à l'instant  $t$ , mais on pourra éventuellement supposer que cette grandeur est distribuée suivant une certaine loi de probabilité. On dit alors que le signal est **aléatoire**.

Pour simplifier, on peut dire que les signaux déterministes sont des cas relativement théoriques et idéaux, ou bien modélisent des signaux observés expérimentalement. Car en fait, tout signal physique réel comporte une composante aléatoire correspondant à la perturbation externe.

### 1.2.3 Classification morphologique

Si, comme c'est le cas pour le signal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , où  $t \in \mathbb{R}$  et  $A \in \mathbb{R}$ , on dit que le signal est à temps continu. Toutefois on rencontre aussi en traitement du signal des grandeurs qui évoluent uniquement à des instants discrets  $t_n$  où  $n$  est un entier. On parle alors de signal à temps discret ou encore de signal numérique. En terme mathématique, un signal à temps continu est une fonction du temps tandis qu'un signal à temps discret est une suite. Le développement et l'essor des techniques numériques ont fait que les problèmes portant sur le traitements des signaux à temps discret ont pris une place majeure aujourd'hui, comparée à celle qu'occupent les traitements portant sur les signaux à temps continu. C'est pourquoi ce cours est centré avant tout sur les problèmes de temps discret et sur le passage du temps continu au temps discret (principe de l'échantillonnage).

Il est également possible de discrétiser le signal en amplitude. On appelle cela la **quantification** du signal.

### 1.2.4 Classification énergétique

On distingue en particulier deux types de signaux :

- les signaux à énergie finie comme tous les signaux physiques,
- les signaux à puissance moyenne finie comme par exemple un signal sinusoïdal.

## 1.3 Signaux et distributions classiques

### 1.3.1 Fenêtre rectangulaire ou Porte

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Un signal rectangulaire s'écrit :

$$\boxed{\Pi_{2a}(t)} \quad (1.1)$$

La représentation graphique d'un signal porte est donnée à la figure 1.2.

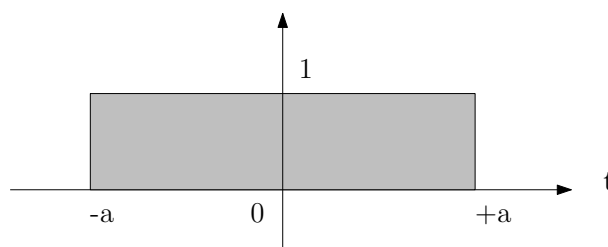


Figure 1.2: Représentation temporelle d'un signal rectangulaire ou « porte ».

### 1.3.2 Impulsion de Dirac

Les propriétés de l'impulsion de Dirac sont identiques à celles d'un signal rectangulaire dont la largeur tend vers 0 et la hauteur vers l'infini, à surface constante. Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . L'impulsion située au temps  $t_0$  s'écrit :

$$\boxed{\delta(t - t_0)} \quad (1.2)$$

Il est souvent utilisé pour déterminer la réponse impulsionnelle d'un système dynamique. Une représentation est donnée à la figure 1.3.

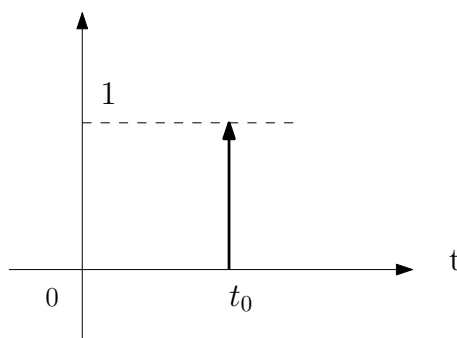


Figure 1.3: Représentation temporelle d'une impulsion de Dirac.

### 1.3.3 « Peigne » de Dirac

Soit  $T$  une période en secondes,  $t \in \mathbb{R}$ , et  $i \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Le peigne de Dirac correspond à une périodisation d'impulsions de Dirac tous les  $iT$  sur tout l'axe temporel (aussi bien  $t < 0$  que  $t > 0$ ). Il s'écrit :

$$\Psi_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT) \quad (1.3)$$

Une représentation dun peigne de Dirac est donnée à la figure 1.4.

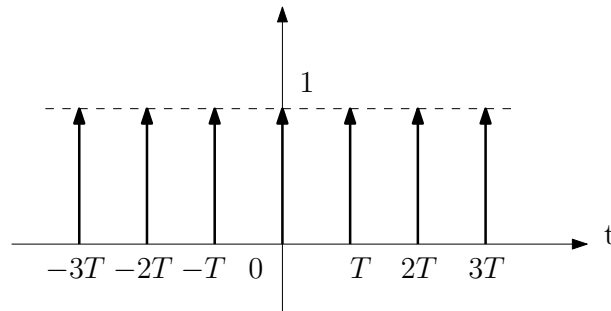


Figure 1.4: Représentation temporelle d'un peigne de Dirac.

### 1.3.4 Sinus cardinal

Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Le sinus cardinal se définit par la formule :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad (1.4)$$

Une représentation est donnée à la figure 1.5.

## 1.4 Evaluation de la similitude entre deux signaux

Il existe en traitement du signal des outils mathématiques qui permettent d'évaluer la similitude entre deux signaux :

- au niveau de leur évolution temporelle grâce à la fonction d'inter ou d'auto-corrélation.
- au niveau de leur composition spectrale grâce à la fonction de densité spectrale.

### 1.4.1 Les fonctions d'inter-corrélation et d'auto-corrélation

La fonction d'**intercorrél**ation donne une quantité liée à la similitude entre deux signaux. Elle se définit par la formule suivante :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (1.5)$$



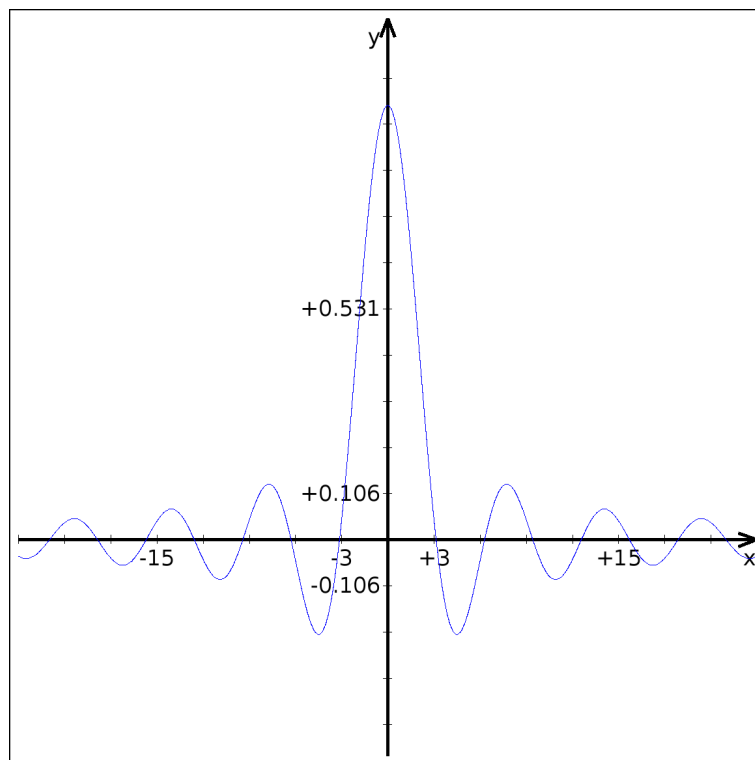


Figure 1.5: Représentation temporelle du sinus cardinal :  $y = \frac{\sin(x)}{x}$  ( $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).

où  $x^*(t)$  est le conjugué de  $x(t)$ . Cette fonction renvoie un maximum lorsque les deux fonctions deviennent les plus similaires à  $t$  donnée. La fonction d'**autocorrélation** est un cas particulier de la fonction d'intercorrélation pour laquelle  $y(t) = x(t)$ . Elle s'écrit donc :

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (1.6)$$

La fonction d'autocorrélation mesure ainsi la similitude de  $x(t)$  avec une version décalée de  $x(t)$ . Elle atteint un maximum pour le temps  $t_0$  auquel  $x(t - t_0)$  ressemble le plus à  $x(t)$ . C'est le cas particulièrement pour les signaux périodiques qui reprennent la même valeur à chaque période  $T$ . La fonction d'autocorrélation permet ainsi d'estimer la périodicité d'un signal semi-périodique en repérant le temps pour lequel elle atteint son maximum.

La fonction d'autocorrélation permet également de calculer l'énergie du signal puisque:

$$\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E \quad (1.7)$$

## Chapter 2

# Transformées de signaux

### 2.1 Le produit de convolution

On appelle produit de convolution **convolution** de  $x(t)$  par  $y(t)$  l'opération notée  $x(t) \star y(t)$  et définie par :

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du \quad (2.1)$$

L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution. En effet :

$$x(t) \star \delta(t) = x(t) \quad (2.2)$$

Lorsque l'on convolue un signal  $x(t)$  à un Dirac situé à un temps  $t_0$ , cela revient à retarder le signal  $x(t)$  de  $t_0$  :

$$x(t) \star \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (2.3)$$

Par ailleurs, si l'on multiplie un signal  $x(t)$  par un Dirac situé à un temps  $t_0$ , cela revient à connaître la valeur que prend  $x(t)$  en  $t_0$  (comme si l'on relevait l'ordonnée d'un point particulier d'une courbe)

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \quad (2.4)$$

De même, lorsque l'on convolue un signal  $x(t)$  à un peigne de Dirac (de période  $T$ ), cela revient à « périodiser » le signal  $x(t)$  tous les  $nT$  : on retarde le signal  $x(t)$  de  $T$ , de  $2T$ , de  $3T$ , etc...

$$x(t) \star \Psi_T(t) = \Sigma x(t - nT) \quad (2.5)$$

De façon plus générale, la convolution telle qu'elle est définie par sa formule mathématique, revient à retourner temporellement un des deux signaux (par exemple  $x(t)$ ) puis à le déplacer sur tout l'axe du temps et à sommer toutes les multiplications de ce signal au deuxième signal  $y(t)$ .

Pour des exemples animé de l'effet du produit de convolution (très pédagogique !), voir :

<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

<http://www.jhu.edu/~signals/discreteconv2/index.html>

## 2.2 Rappels sur la décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

Pour pouvoir analyser les signaux quelque soit leur nature, il est intéressant de chercher des transformations qui mettent en évidence les particularités de leur contenu temporel mais aussi fréquentiel. Joseph Fourier a démontré que tout signal **périodique** peut être décomposé en une somme de sinus et de cosinus élémentaires telle que :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) \quad (2.6)$$

où  $f_0$  est appelée la fréquence **fondamentale**. Sauf effet particulier ou paradoxal, elle correspond à la hauteur principale perçue d'un son. Les autres composantes sont des fréquences supérieures à la fondamentale ( $n > 1$ ) et sont appelées **harmoniques** du signal. Par exemple, dans le cas d'un son émis par un instrument de musique, la fondamentale va correspondre à la note jouée et les autres composantes vont correspondre à la « série harmonique » de cette note (octave, puis quinte, puis octave, puis tierce, etc...). Cette série correspond à des rapports de fréquences (fondamental  $f_0$ , octave  $= 2 * f_0$ , octave + quinte  $= 3 * f_0$ , etc...). Les harmoniques ne vont pas directement contribuer à la perception de la hauteur mais plutôt à la richesse du timbre du son. C'est par exemple la présence d'harmoniques, entre autres, qui permet de différencier une sinusoïde à  $f_0$  d'une note de violon dont la fondamentale est à la même fréquence.

## 2.3 La transformée de Fourier

### 2.3.1 Définition de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une généralisation de la décomposition précédente aux signaux non-périodiques. Soit  $x(t)$  un signal quelconque, on note  $X(f)$  ou  $TF(x(t))$  sa transformée de Fourier telle que :

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (2.7)$$

Inversement, on peut définir une transformée de Fourier inverse  $TF^{-1}$  telle que :

$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad (2.8)$$

$X(f)$  est une fonction complexe même si  $x(t)$  est réel. La transformée de Fourier contient donc une partie réelle et une partie imaginaire et est représentée facilement grâce à son **module** et à son **argument** :  $|X(f)|$  est appelé **spectre d'amplitude** et  $\arg(X(f))$  le **spectre de phase** du signal. La variable  $f$  s'appelle la fréquence dont l'unité est le Hertz (en abrégé : Hz).

#### Remarques importantes:

- La représentation complète d'une transformée de Fourier nécessite 2 graphiques : le module et la phase, ou bien la partie réelle et le partie imaginaire.

- Pour représenter les transformées de Fourier de signaux, il est communément utilisé l'échelle logarithmique. Pour un signal acoustique, par exemple, on calcule  $20 \log(|X(f)|/2.10^{-5})$  et  $\arg(X(f))$ .

Ainsi, la transformée de Fourier est un opérateur mathématique qui permet d'analyser et de représenter un signal dans le domaine fréquentiel. La  $TF$  ne modifie pas le signal mais permet seulement de l'observer selon différents points de vue (temporel ou fréquentiel). Il est important de retenir que  $x(t)$  et  $X(f)$  sont deux descriptions équivalentes du même signal. Ces deux fonctions contiennent la même information il s'agit juste de deux descriptions dans des domaines différents.

$X(f)$  apporte des informations sur le système physique à l'origine du signal. Elle permet par exemple de différencier un son de trompette d'un son trombone, ou bien encore différentes ondes cérébrales, plus facilement qu'en observant le signal dans le domaine temporel. Le **contenu spectral** d'un signal est en effet assimilable à sa « carte d'identité ».

### 2.3.2 Propriétés de la transformée de Fourier

- **Linéarité :**

$$ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(f) + bY(f) \quad (2.9)$$

- **Produit de convolution :**

$$x(t).y(t) \Leftrightarrow X(f) \star Y(f) \quad (2.10)$$

$$x(t) \star y(t) \Leftrightarrow X(f).Y(f) \quad (2.11)$$

Une multiplication dans un domaine correspond ainsi à un produit de convolution dans l'autre.

- **Retard :**

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-2i\pi f t_0} \quad (2.12)$$

$$x(t) \cdot e^{2i\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0) \quad (2.13)$$

Un retard temporel correspond ainsi à un déphasage au niveau fréquentiel, et inversement.

- **Changement d'échelle :**

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (2.14)$$

**Démonstration.** Soient  $x(t)$  et  $y(t)$  deux fonctions temporelles avec  $t \in \mathbb{R}$  telles que  $y(t) = x(at)$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Leur transformées de Fourier dans l'espace des fréquences sont notées respectivement  $X(f)$  et  $Y(f)$ . On a alors :

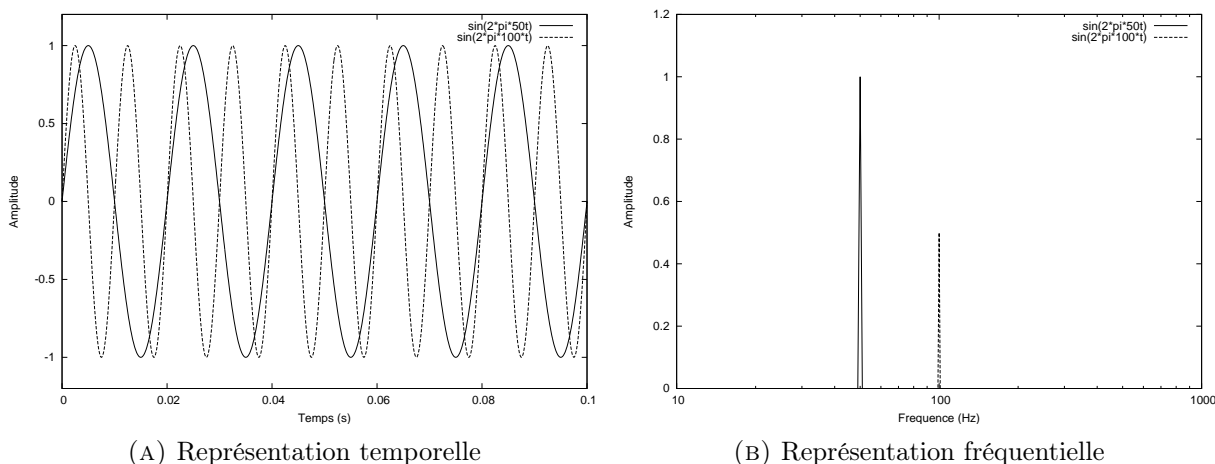


Figure 2.1: Exemple d'application d'un facteur d'échelle  $a = 2$  sur un signal sinusoïdal  $x(t)$  de fréquence  $f_0 = 50$  Hz tel que  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ .

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2i\pi f t} dt \quad (2.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-2i\pi f t} dt \quad (2.16)$$

Effectuons le changement de variable  $u = at$ , c'est-à-dire aussi  $du = a dt$ , qui revient ici à un changement d'échelle. L'équation 2.16 devient :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\frac{2i\pi f u}{a}} \frac{du}{a} \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-2i\pi \frac{f}{a} u} du \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (2.19)$$

Cette loi montre que lorsqu'on diminue l'échelle temporelle d'un signal ( $a > 1$ ), l'échelle fréquentielle augmente. Par exemple, si  $x(t)$  est une sinusoïde de fréquence  $f_0$  telle que  $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ , alors  $X(f) = \delta(f - f_0)$ ,  $y(t) = \sin(2\pi a f_0 t)$  et  $Y(f) = \frac{1}{|a|} \delta(f - f_1)$  où  $f_1 = a f_0$  (cf. figure 2.1). Le facteur supplémentaire  $\frac{1}{|a|}$  provient du principe de conservation d'énergie appliqué dans le domaine fréquentiel.

- **Théorème de Parseval :**

Soit  $E$  l'énergie du signal. On peut démontrer que :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.20)$$

### 2.3.3 Les transformées de Fourier de signaux courants

- Dirac  $\delta(t) \Leftrightarrow$  signal unité

- Signal porte  $\Leftrightarrow$  sinus cardinal
- $\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
- la suite en cours...

### 2.3.4 La fonction de densité spectrale d'énergie

La fonction de densité spectrale d'énergie est la  $TF$  de la fonction d'autocorrélation vue au paragraphe 1.4.1. Elle décrit la répartition de l'énergie en fréquence et on a :

$$\Phi_x(f) = TF(\varphi_x(\tau)) = |X(f)|^2 \quad (2.21)$$

## 2.4 L'échantillonnage

Les signaux numériques dérivent d'un signal analogique par **échantillonnage**. L'échantillonnage est une opération qui consiste à prélever sur un signal à temps continu une suite de valeurs, prises en une suite d'instants  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Dans la suite nous n'envisagerons que l'échantillonnage est régulier, c'est-à-dire que  $t_n = nT$ .

Aujourd'hui l'intérêt grandissant pour la conversion de signaux analogiques en signaux numériques tient au fait qu'il devient de plus en plus simple d'appliquer des algorithmes d'analyse complexe avec l'aide des processeurs numériques. En sciences physiques par exemple, il est fréquent que les résultats expérimentaux soient sous forme d'une suite de valeurs numériques. Les possibilités d'application du traitement numérique des signaux sont d'autant plus nombreuses que la vitesse de calcul des microprocesseurs est élevée. Pour caractériser et traiter un tel signal numérique on peut utiliser les mêmes concepts mathématiques que pour les signaux continus, à condition de les adapter aux contexte numérique.

### 2.4.1 Définition de l'échantillonnage

Le signal continu (analogique) peut être échantillonné (c'est-à-dire discrétisé) à une **fréquence d'échantillonnage**  $f_e$  inverse de la **période d'échantillonnage**  $T_e$  telle que  $f_e = 1/T_e$ . Cet échantillonnage revient à multiplier le signal analogique par un peigne de Dirac de période  $T_e$ .

Le signal échantillonné peut alors s'écrire :

$$x_e(t) = x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \quad (2.22)$$

$x_e(t)$  est donc nul partout sauf en  $t = nT_e$ ,  $n$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . C'est pourquoi par la suite, on ne simplifie cette notation en réduisant  $x_e(t)$  non plus à un signal continu possédant une infinité de valeurs mais à une suite d'échantillons discrets  $x(n)$ , où  $n$  correspond au numéro de l'échantillon.

$$x(n) = x_e(nT_e) \quad (2.23)$$

### 2.4.2 La quantification

L'échantillonnage complet d'un signal nécessite de discrétiser également l'amplitude de ce signal. Quelque soit la résolution binaire donnée, cette opération suppose d'opérer un arrondi sur chaque

échantillon de sorte que la valeur soit codable sur une échelle binaire. Les valeurs courantes de résolution de quantification en audio sont : 8, 16, 24 et 32 bits. De nombreux détails, exemples et schémas sont proposés en séance de cours.

## 2.5 La transformée de Fourier à temps discret

Dans le cas des signaux échantillonnés où le temps est discrétisé, il n'est plus nécessaire d'utiliser des intégrales continues pour sommer les valeurs de  $x(t)$  sur tout l'axe des temps, puisqu'un signal échantillonné peut être assimilé à une suite contenant un nombre **fini** d'éléments. On peut donc définir la transformée de Fourier d'un signal numérique par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-2j\pi n f} \quad (2.24)$$

La transformée de Fourier inverse se retrouve de la même manière que dans le cas continu :

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)e^{2j\pi n f} df \quad (2.25)$$

De la même façon qu'en continu, la TF présente certaines propriétés intéressantes :

- **Retard :**

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-2j\pi n_0 f}$$

- **Produit de convolution :**

$$x(n) \star y(n) \Leftrightarrow X(f).Y(f)$$

et

$$x(n).y(n) \Leftrightarrow X(f) \star Y(f)$$

avec,

$$x(n) \star y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - k)y(k) \quad (2.26)$$

## 2.6 Le théorème de Shannon

La discrétisation temporelle du signal analogique détaillée à la section 2.4 n'est pas sans conséquences vis-à-vis des propriétés spectrales du signal échantillonné. Ainsi une mauvaise adéquation entre les fréquences contenues dans le signal et la fréquence d'échantillonnage peut être destructrice.

En posant  $x_e(t) = x_a(t) \cdot \sum \delta(t - nT_e)$  le signal échantillonné du signal analogique  $x_a(t)$  et  $X_e(f)$  sa transformée de Fourier, on obtient :

$$X_e(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - \frac{n}{T}) \quad (2.27)$$

Comme le schématise la figure 2.2, l'échantillonnage d'un signal analogique à la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/T$  induit une périodisation de son spectre dans le domaine fréquentiel (tous les  $f = n/T$ ,  $n$  étant entier).

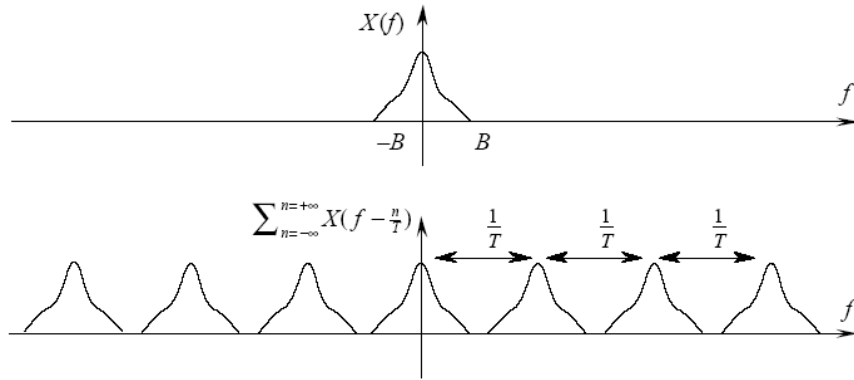


Figure 2.2: Lien entre la fréquence d'échantillonnage d'un signal et la périodisation de son spectre.

Il peut survenir un problème si la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  est trop petite car les « répliques » périodiques du spectre peuvent se superposer partiellement comme le montre la figure 2.3.

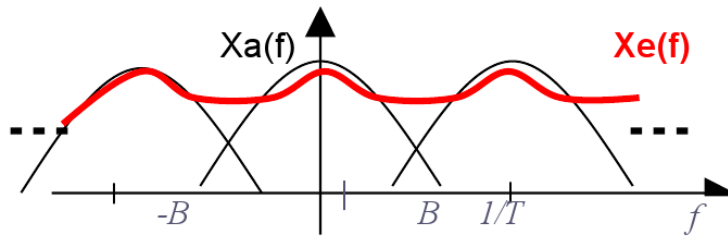


Figure 2.3: Phénomène de repliement.

Cela arrive si la borne supérieure d'un élément de  $X_a(f)$  est plus grande que la borne inférieure de l'élément suivant, autrement dit si  $B < \frac{1}{T} - B$  où  $B$  est la fréquence maximale contenue dans le signal (cf. fig. 2.3).

Ainsi, pour que le spectre  $X_a(f)$  ne soit pas « déformé » lors de sa périodisation, il faut donc que :

$$\boxed{F_e > 2B} \quad (2.28)$$

Cette condition constitue le **théorème de Shannon** énoncé ainsi : « la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal ».

## 2.7 La transformée en Z

### 2.7.1 Définition de la transformée en Z

Pour décrire un filtre dans le domaine numérique, il est pratique de définir une transformée dont la variable a la même nature que celle du signal discrétisé. En effet, un signal numérique - discontinu de



nature - ne comporte qu'un nombre fini de valeurs et on a besoin d'une transformée à temps discret pour décrire les filtres : la transformée en Z.

Soit  $x(n)$  un signal discret quelconque. Sa transformée en Z s'écrit :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \text{ converge}\} \quad (2.29)$$

Remarque : on retrouve la définition de la transformée de Fourier en posant  $z = e^{j2\pi f}$ .

### 2.7.2 Existence de la transformée en Z

Le domaine de convergence est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  dans lequel la série converge. Autrement dit, le domaine de convergence de la transformée en z de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est l'ensemble :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \text{ existe} \right\} \quad (2.30)$$

On l'appelle également couronne de convergence. En effet, en posant  $z = \rho e^{i\theta}$ , il vient :

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} \quad (2.31)$$

Donc  $X(z)$  existe si  $x(n)$  a une croissance au plus exponentielle, auquel cas le domaine de convergence est compris dans une couronne :

- de petit rayon le majorant de la base du côté des n négatifs
- de grand rayon le majorant de la base du côté des n positifs

Dans toute la suite de l'article, les transformées en Z ne seront valables que dans ce domaine de convergence sans que cela soit précisé.

### 2.7.3 Propriétés de la transformée en Z

1. **Linéarité** La transformée en Z d'une combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en Z de chaque signal.

$$\mathcal{Z}\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = a_1 \mathcal{Z}\{x_1(n)\} + a_2 \mathcal{Z}\{x_2(n)\} \quad (2.32)$$

2. **Décalage temporel**

Le décalage temporel d'un signal de k échantillons se traduit par la multiplication de la transformée en Z du signal par  $z^k$ .

$$\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k} \mathcal{Z}\{x(n)\} \quad (2.33)$$

3. **Convolution**

La transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées en Z

$$\mathcal{Z}\{x(n) \star y(n)\} = \mathcal{Z}\{x(n)\} \mathcal{Z}\{y(n)\} \quad (2.34)$$

#### 4. Multiplication par une exponentielle

$$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (2.35)$$

#### 5. Multiplication par la variable d'évolution

De façon générale :

$$\mathcal{Z}\{n^k x(n)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{x(n)\} \quad (2.36)$$

où  $\left(-z \frac{d}{dz}\right)^k \mathcal{Z}\{x(n)\}$  signifie que l'on applique  $k$  fois à  $\mathcal{Z}\{x(n)\}$  l'opérateur  $-z \frac{d}{dz}$

Si l'on écrit cette formule au rang  $k=1$ , on obtient la formule de dérivation :

$$\mathcal{Z}\{nx(n)\} = -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (2.37)$$

#### 6. Théorème de la valeur initiale

Soit  $x(n)$  un signal causal et  $X(z)$  sa transformée en Z. Alors :

$$x(0) = \lim_{n \rightarrow 0} x(n) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) \quad (2.38)$$

#### 7. Théorème de la valeur finale

Soit  $x(n)$ , un signal causal et  $X(z)$ , sa transformée en Z. Alors lorsque la limite existe, on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (2.39)$$

## Chapter 3

# Systèmes linéaires et filtrage

### 3.1 Introduction

Pour modifier l'évolution temporelle ou fréquentielle d'un signal déterminé, on a généralement recours à des *fonctions* temporelles ou fréquentielles qui s'appliquent aux valeurs du signal. Ces fonctions peuvent être regroupées au sein d'un système filtrant  $\mathbb{S}$  nommé *filtre* délivrant un signal  $y(t)$  en réponse à une stimulation  $x(t)$ . On peut donc écrire, si  $S$  est la fonction du filtre :

$$y(t) = S[x(t)] \quad (3.1)$$

D'un point de vue très général, on peut considérer que tout signal transitant dans une chaîne de transmission est soumis à une opération de filtrage. Voici quelques exemples de filtres :

- un système de mesure conçu pour détecter la présence d'un signal de forme particulière,
- un filtre électronique, un amplificateur, un convertisseur A/D,
- un algorithme informatique agissant sur un signal numérique.

Le présent chapitre constitue une synthèse de la théorie des filtres analogiques et numériques qui tente de donner les éléments de description des transformations temporelles ou fréquentielles - comme par exemple la réponse impulsionnelle - qu'opère  $\mathbb{S}$  sur les signaux réels. L'objectif est également de comprendre les méthode de conception de la fonction de filtrage  $S$  pour réaliser une opération particulière. Enfin, il sera donné quelques méthodes pour déterminer les propriétés de la fonction  $S$  en observant les réponses du système à des simulations extérieures.

### 3.2 Réponse impulsionnelle d'un système

Il est possible de décrire un système  $\mathbb{S}$  par l'intermédiaire de sa réponse à des signaux particulier. Mathématiquement, une méthode efficace est de déterminer la réponse de  $\mathbb{S}$  à une impulsion de Dirac, c'est-à-dire une la **réponse impulsionnelle** telle que :

$$s_\delta(t) = S(\delta(t)) \quad (3.2)$$

Le signal  $s_\delta(t)$  récupéré constitue une signature caractéristique du filtre. En effet, la transformée de Fourier d'une impulsion étant une constante (dans le l'espace des fréquences) la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle donne la réponse fréquentielle du filtre pour toutes les fréquences. Ainsi,

il est possible de mesurer rapidement le comportement de n'importe quel filtre. La réponse d'une salle acoustique, par exemple, peut être évaluée avec un explosif ou un autre son bref.

Dans la nature, tous les signaux sont **causaux**, c'est-à-dire que les éléments du signal  $y(t)$  ne peuvent exister avant ceux de  $x(y)$ . En d'autres termes, la causalité impose qu'un signal ne peut précéder celui qui lui a donné naissance<sup>1</sup>. Ainsi les systèmes causaux ont une réponse impulsionnelle nulle avant l'instant d'impulsion, soit  $y(t < 0) = 0$ . Par ailleurs, pour un système causal, le signal de sortie à l'instant  $t$  dépend du signal d'entrée aux instants  $t' < t$ . La durée de la réponse impulsionnelle  $s_\delta(t)$  correspond au temps de réponse du système.

Une fois la réponse impulsionnelle connue, on peut prédire la réponse du filtre  $y(t)$  issue de n'importe quel signal d'entrée  $x(t)$  grâce au produit de convolution :

$$y(t) = x(t) \star s_\delta(t) \quad (3.3)$$

### 3.3 Réponse fréquentielle d'un système

La réponse en fréquence d'un système correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système.

$G(f)$  décrit comment la distribution spectrale d'un signal est modifiée ou "filtrée" par le système  $\mathbb{S}$ . Il est important de noter que le système peut seulement modifier des composantes spectrales mais ne peut en aucun cas en créer de nouvelles.  $|G(f)|$  est le gain du système, c'est à dire la façon dont il modifie les amplitudes de chaque composantes spectrales.  $Arg[G(f)]$  représente le déphasage causé par le système, c'est à dire le « retard » ou l'« avance » qu'il impose à certaines composantes spectrales.

La réponse en fréquence, comme la réponse impulsionnelle permet de décrire complètement le système et de prédire la réponse du système à n'importe quelle entrée. Nous retrouvons l'équivalence entre le produit de convolution dans le domaine temporel et le produit scalaire dans le domaine fréquentiel :

$$y(t) = x(t) \star g(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f).G(f) \quad (3.4)$$

Ainsi, la fonction de transfert  $G(f)$  d'un système constitue le rapport entre signal reçu et le signal émis dans le domaine fréquentiel tel que :

$$G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (3.5)$$

### 3.4 Filtrage

Le filtrage linéaire est une opération utile pour sélectionner une partie du spectre d'un signal ou en atténuer une partie, pour modifier le contenu spectral d'un signal ou encore modéliser la transformation d'un signal dans un conduit propagatif, dans une salle.

Pour tous les filtres, on peut déterminer une fonction de transfert égale au rapport entre spectre du signal de sortie et celui du signal d'entrée :

$$G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (3.6)$$

Cette fonction de transfert peut aussi s'écrire dans l'« espace  $Z$  » :

---

<sup>1</sup>En mathématique, il est possible de définir des filtres non-causaux, mais cela n'est pas l'objet ici.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.7)$$

Ainsi la connaissance de la fonction de transfert d'un filtre nous renseigne complètement sur sa nature, quel que soit l'espace de représentation. La fonction de transfert d'un filtre numérique est donc définie comme la transformée en  $Z$  de la réponse impulsionnelle du filtre.

Nous n'aborderons pas dans ce cours la description de la transformée de Laplace<sup>2</sup> qui est le pendant de la transformée en  $Z$  dans le domaine analogique, c'est-à-dire temps continu. Mais il est essentiel de bien la connaître pour concevoir des filtres analogiques.

### 3.4.1 Filtres classiques - vocabulaire

On définit ici 4 types de filtres les plus classiques :

- les filtres **pas-se-bas** qui laissent intact les basses fréquences d'un signal et en atténuent les hautes fréquences,
- les filtres **pas-se-haut** qui laissent intact les hautes fréquences d'un signal et en atténuent les basses fréquences,
- les filtres **pas-se-bande** qui sélectionnent une partie du spectre d'un signal autour d'une fréquence spécifiée, avec une largeur plus ou moins grande,
- les filtres **cou-pe-bande**, qui atténuent fortement une partie du spectre d'un signal autour d'une fréquence spécifiée, avec une largeur plus ou moins grande.

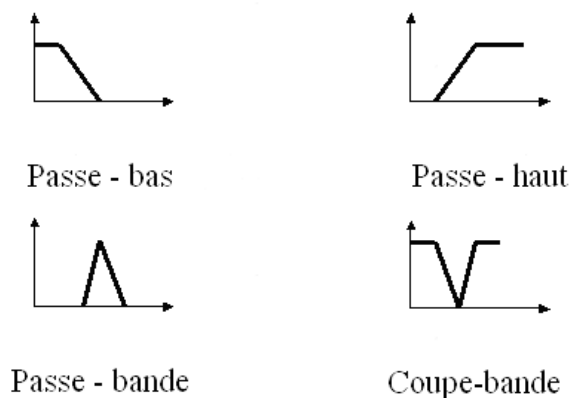


Figure 3.1: Les filtres classiques. L'axe horizontal représente la dimension fréquentielle, l'axe vertical le module de la fonction de filtrage  $|G(f)|$ .

Pour tous ces filtres, on définit des **fréquences de coupure**, c'est à dire les fréquences pour lesquelles le spectre du signal d'entrée va être atténué d'un facteur  $\sqrt{2}$  par rapport à la valeur maximale du spectre d'amplitude. Cette variation équivaut à une variation de 3 dB dans l'échelle logarithmique.

Le filtre passe-bas a donc une fréquence de coupure dans les médiums / hautes fréquences, le passe haut une fréquence de coupure dans les médiums / basses fréquences. Les passe bande et coupe bande possèdent deux fréquences de coupure autour de la fréquence centrale sur laquelle ils se centrent. On spécifie également la pente de l'atténuation de ces filtres, en dB par octave qui apporte une information sur la **sélectivité** du filtre. Enfin, pour les filtres passe-bande et coupe-bande, on détermine leur largeur de bande, c'est à dire la différence entre leurs deux fréquences de coupure qui renseigne aussi sur sa sélectivité.

<sup>2</sup>[http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée\\_de\\_Laplace](http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée_de_Laplace)

### 3.4.2 Filtres numériques

Avant de déterminer sa fonction de transfert, un filtre numérique peut-être défini par une équation aux différences, c'est-à-dire l'opération mathématique du filtre dans le domaine temporel discret entre le signal d'entrée  $x(n)$  quelconque et le signal filtré de sortie  $y(n)$ . D'un point de vue général, en respectant le principe de causalité, tout signal filtré  $y(n)$  s'écrit comme une composition linéaire des échantillons passés de  $x(n)$  et  $y(n)$  tel que :

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (3.8)$$

En calculant les transformées en Z de chaque membre, on calcule aisément la fonction de transfert  $H(z)$  dans le domaine  $z$  :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \quad (3.9)$$

Les valeurs des coefficients  $a_k$  et  $b_k$  fixeront le type de filtre (passe-bas, passe-haut, et...).

### 3.4.3 Exemples de filtres

#### 3.4.3.1 Le filtre moyennneur lisseur

Soit un signal numérique  $y(n)$  avec  $n \in \mathbb{N}$  issu d'un signal  $x(n)$  tel que :

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-N+1)}{N} \quad (3.10)$$

La transformée en Z de  $y(n)$  s'écrit alors :

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{N-1} X(z) \frac{z^{-p}}{N} \quad (3.11)$$

$$= X(z) \sum_{p=0}^{N-1} \frac{z^{-p}}{N} \quad (3.12)$$

On en déduit la fonction de transfert  $H(z)$  du filtre équivalent :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{z^{-p}}{N} \quad (3.13)$$

#### 3.4.3.2 Le filtre passe-bas

Soit  $x(n)$  un signal numérique quelconque de fréquence d'échantillonnage  $f_e$ . La loi récursive qui produit un filtrage passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  pour obtenir le signal filtré  $y(n)$  s'écrit :

$$y(n) = y(n-1) + a[x(n) - y(n-1)] \quad (3.14)$$

$$y(n) = ax(n) + [1-a]y(n-1) \quad (3.15)$$

$$y(n) + [a-1]y(n-1) = ax(n) \quad (3.16)$$

en ayant posé :

$$a = \frac{1}{1 + \frac{f_e}{2\pi f_c}}$$

En effectuant la transformée de Z de chaque membre de l'équation 3.16, on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} + [a-1] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-1)z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} + [a-1] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n-1} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.18)$$

$$Y(z) + [a-1]Y(z).z^{-1} = aX(z) \quad (3.19)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 + (a-1)z^{-1}} \quad (3.20)$$

D'un point de vue pratique, c'est cette fonction qui permet d'implémenter - c'est à dire de mettre en oeuvre sous la forme d'un programme - la fonction de filtrage de type passe-bas dans un programme informatique. Dans le logiciel libre Octave<sup>3</sup>, le code suivant permet par exemple de tester ce filtrage sur des signaux aléatoires à partir de la loi récursive mais aussi en utilisant la fonction `filter` :

% Script Matlab / Octave pour tester une fonction de filtrage passe-bas.

```
f0 = 20;
f1 = 22050;
t1 = 1;
fe = 44100;
fc = 3000;
a = 1/(1+fe/(2*pi*fc));

t = [0:1/fe:t1];
n = length(t);
N = 10;

for k=1:N

    s = randn(1,n);
    %sweep = sin(2*pi*(f0*t1)/log(f1/f0) * (exp(t'/t1*log(f1/f0))-1))';
    sf(1) = s(1);

    % Avec une boucle
    tic;
    for i=2:n
        sf(i)=a*s(i)+(1-a)*sf(i-1);
    end
    t_boucle(k) = toc;

    % Avec filter
    tic;
```

---

<sup>3</sup><http://www.octave.org>

```

sff = filter(a,[1 a-1],s);
t_filter(k) = toc;

% Fonction de transfert
nfft = 16384;
fft_s = fft(s,nfft);
fft_sf = fft(sf,nfft);
fft_sff = fft(sff,nfft);
f = [0:fe/nfft:fe/2];
f(1) = [];

mod_FT(k,:) = abs(fft_sf)./abs(fft_s);
pha_FT(k,:) = angle(fft_sf);
mod_FTF(k,:) = abs(fft_sff)./abs(fft_s);
pha_FTF(k,:) = angle(fft_sff);

end

mod_FT = mean(mod_FT);
figure(1)
semilogx(f,20*log10(mod_FT(1:nfft/2)));
hold on
semilogx(f,20*log10(abs(1./(1+j*(f/fc))),'r'));
title(['Module de la fonction de transfert par la methode recursive (reel / theorique)']);
xlabel(['Frequence (Hz)']);
ylabel(['Amplitude (dB)']);

pha_FT = mean(pha_FT);
figure(2)
semilogx(f,unwrap(pha_FT(1:nfft/2)));
xlabel(['Frequence (Hz)']);
ylabel(['Phase (rad)']);
title(['Phase de la fonction de transfert par la méthode recursive']);

mod_FTF = mean(mod_FTF);
figure(3)
semilogx(f,20*log10(mod_FTF(1:nfft/2)));
hold on
semilogx(f,20*log10(abs(1./(1+j*(f/fc))),'r'));
title(['Module de la fonction de transfert par la fonction filter (reel / theorique)']);
xlabel(['Frequence (Hz)']);
ylabel(['Amplitude (dB)']);

pha_FTF = mean(pha_FTF);
figure(4)
semilogx(f,unwrap(pha_FTF(1:nfft/2)));
xlabel(['Frequence (Hz)']);
ylabel(['Phase (rad)']);
title(['Phase de la fonction de transfert par la fonction filter']);

figure(5)
plot(t_boucle);

```



```

title(['Temps d execution (s)']);
hold on
plot(t_filter,'r');

pause;

```

Pour plus d'exemple sur les fonctions numérique de filtrage, voir <http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/ZTransformFilterMod.html>.

### 3.4.3.3 Le filtre vocal

On peut modéliser la sensation d'intensité auditive par un filtre. L'oreille humaine est particulièrement sensible entre 3 et 4 kHz.

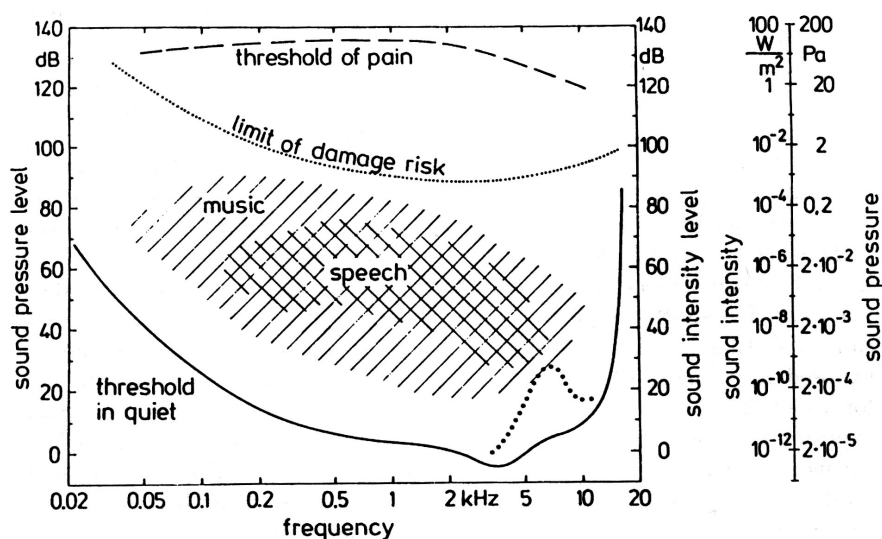


Figure 3.2: Diagramme de sensibilité de l'oreille humaine.

On peut également modéliser la production phonatoire par un modèle source-filtre, où le rôle de la source est joué par les cordes vocales qui produisent un son harmonique avec une distribution de l'énergie assez plate en fréquence. Le conduit vocal, les fosses nasales ainsi que la place des articulateurs (langue, mâchoire, lèvres) peuvent être modélisés par un filtre qui modifie le son glottique pour produire le son tel que nous le percevons à la sortie des lèvres d'un locuteur.

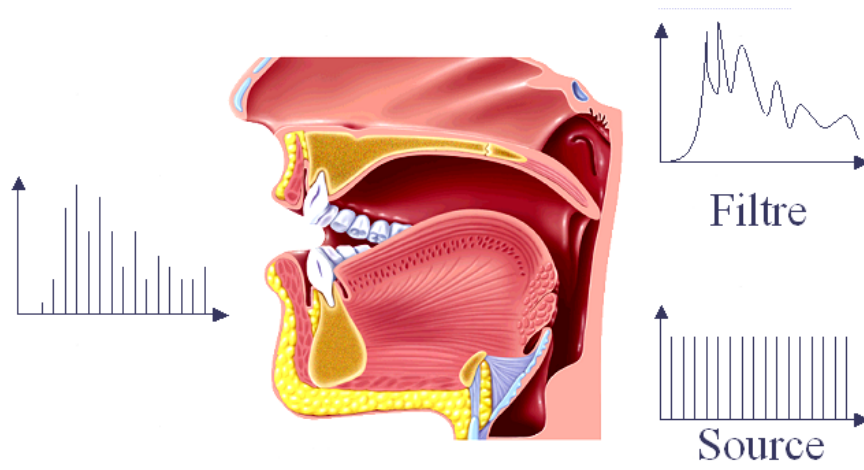


Figure 3.3: Modèle source/filtre de la voix.

## Chapter 4

# Modes de représentation des signaux

### 4.1 Fenêtrage des signaux

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la Transformée de Fourier permet de représenter le spectre d'un signal dans le domaine fréquentiel. Pour une sinusoïde infinie, toute l'énergie du spectre est concentrée à une fréquence donnée, c'est à dire la fréquence de la sinusoïde (cf. fig. 4.1).

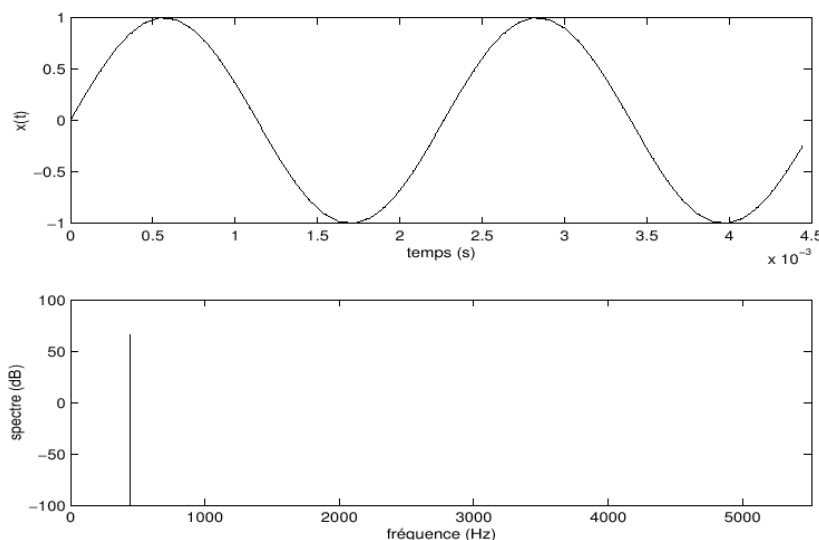


Figure 4.1: Représentation temporelle et spectre d'une sinusoïde dit « son pur ».

Si on veut observer ce sinus sur un temps fini, on va être obligé de le tronquer. L'énergie va alors d'une part se répartir autour de la fréquence de la sinusoïde. C'est ce qu'on appelle l'**étalement spectral**. D'autre part, on observe la présence d'énergie dans toutes les fréquences. Ce phénomène est appelé **fuite spectrale** (cf. fig. 4.2). L'étalement et fuite sont directement liés à la troncature.

Si on réalise la troncature de façon non rectangulaire mais en « fenêtrant » le signal - par une fenêtre de Hanning par exemple, (cf. fig. 4.3) - les transitions dans le signal sont alors plus douces. La fuite spectrale est alors limitée mais l'étalement en fréquence est toujours présent. Ce point est important pour comprendre le rôle des **fenêtres d'analyse**. Si la fenêtre a des discontinuités fortes, les fuites spectrales vont être importantes, mais l'étalement moindre. Si on prend une fenêtre de discontinuité plus douce, on va au contraire obtenir un étalement plus grand, mais moins de fuites spectrales.

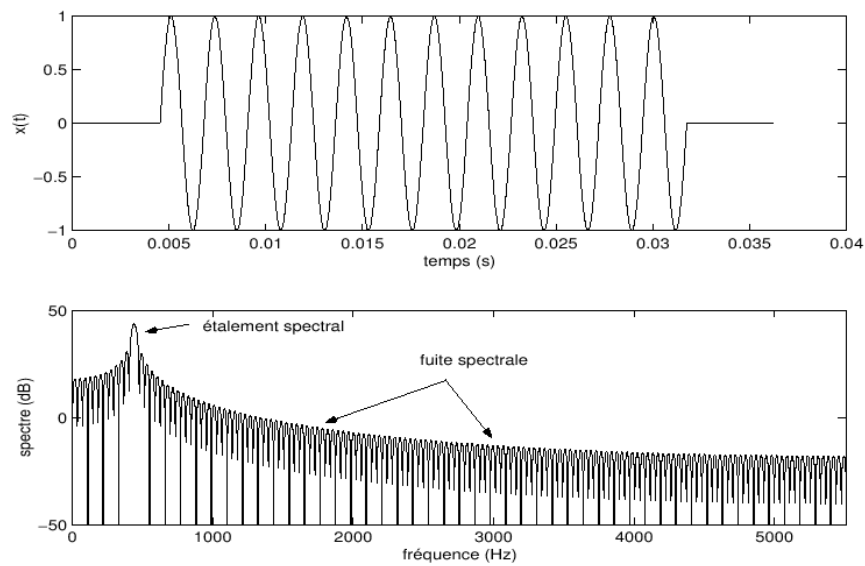


Figure 4.2: Représentation temporelle et spectre d'une sinusoïde tronquée.

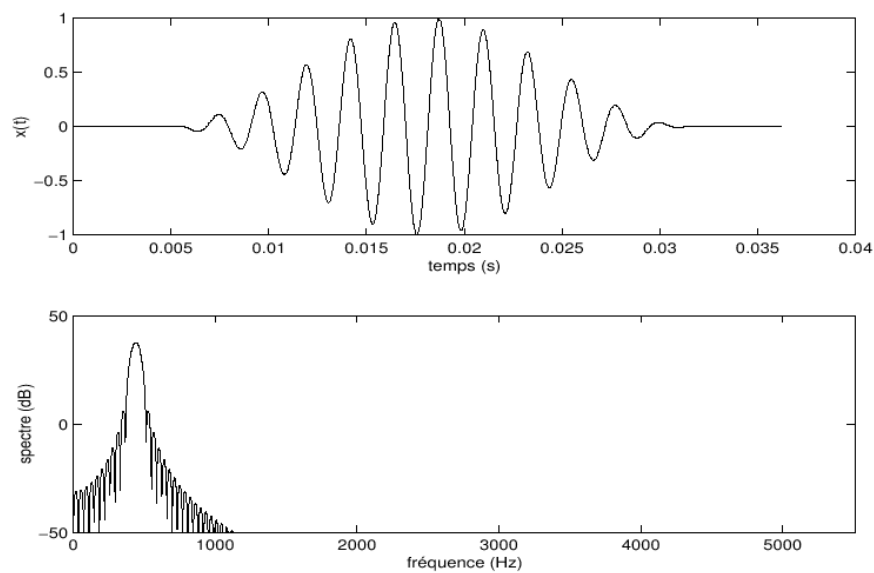


Figure 4.3: Représentation temporelle et spectre d'une sinusoïde modulée par une fenêtre de Hanning.

## 4.2 Le spectrogramme

L'intérêt du spectrogramme est de pouvoir représenter le spectre en évoluant dans le temps. Le nom scientifique de la fonction mathématique associée à cet outil, plus communément appelé « spectrogramme », est la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT). Ce nom provient de l'analyse effectuée sur des fenêtres de support temporel fini. Une autre dénomination de cette représentation est « sonagramme ». Il s'agit d'une marque déposée Kay Electronics.

Le principe du spectrogramme est de « découper » le son en trames. Pour chacune de ces trames on calcule une transformée de Fourier comme le schématise la figure 4.4. Ce spectre est alors représenté à un temps correspondant à celui du centre de la fenêtre, sous forme d'un code de couleur.

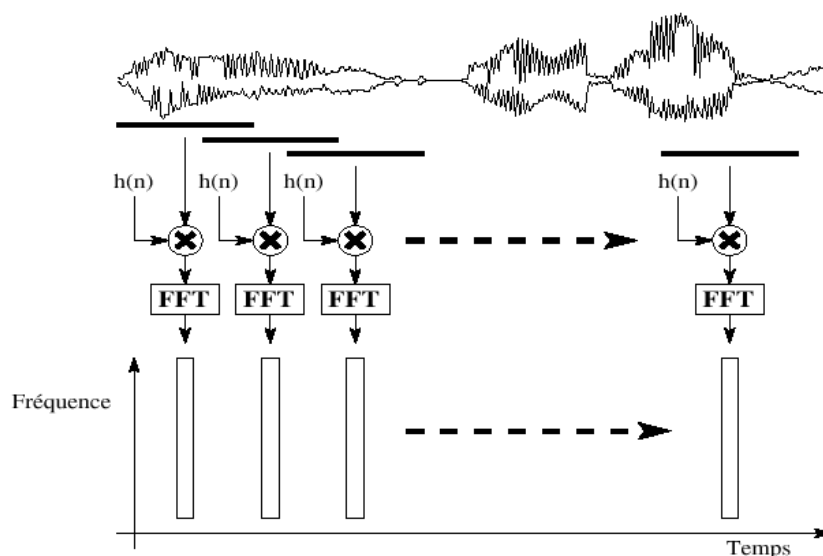


Figure 4.4: Description schématique de l'analyse temps/fréquence par la FFT.

La figure 4.5 montre un exemple de spectrogramme d'un échantillon sonore de voix chantée. Il s'agit d'un glissando C5-E5 réalisé par une soprano. L'analyse a été effectuée avec une fenêtre de Hanning de longueur 23 ms. Le jaune correspond aux amplitudes les plus fortes, le bleu/violet aux amplitudes les plus faibles. On a ainsi une idée de l'aspect du spectre au temps  $t$ . A chaque calcul du spectre, le signal est fenêtré de façon à pouvoir régler à la fois la fuite et l'étalement spectral. On observe facilement le glissando et le vibrato de la chanteuse.

Pour mesurer le vibrato par exemple, on serait tenté de réduire la longueur de la fenêtre dans le temps pour gagner en précision et suivre au mieux les variations du spectre. En réalité, si on réduit la longueur des fenêtres (cf. fig. 4.6), l'étalement spectral augmente, par conséquent la largeur des raies sur le spectrogramme aussi, ce qui perturbe finalement la mesure, car on ne distingue plus distinctement les différentes trajectoires dans le spectrogramme.

Si on revient à la même longueur de fenêtre que dans le premier exemple, tout en utilisant une fenêtre rectangulaire au lieu de la fenêtre « douce » de Hanning, l'étalement spectral est plus faible et les lignes sur le spectrogramme plus fines. Dans ce cas, les fuites spectrales sont beaucoup plus importantes et caractérisées par un manque de contraste dans la représentation du spectrogramme (cf. fig. 4.7).

Les points importants quant à l'utilisation du spectrogramme sont donc:

- la longueur de fenêtre pour ajuster la précision temporelle, au prix d'un étalement spectral qui peut devenir rédhibitoire,

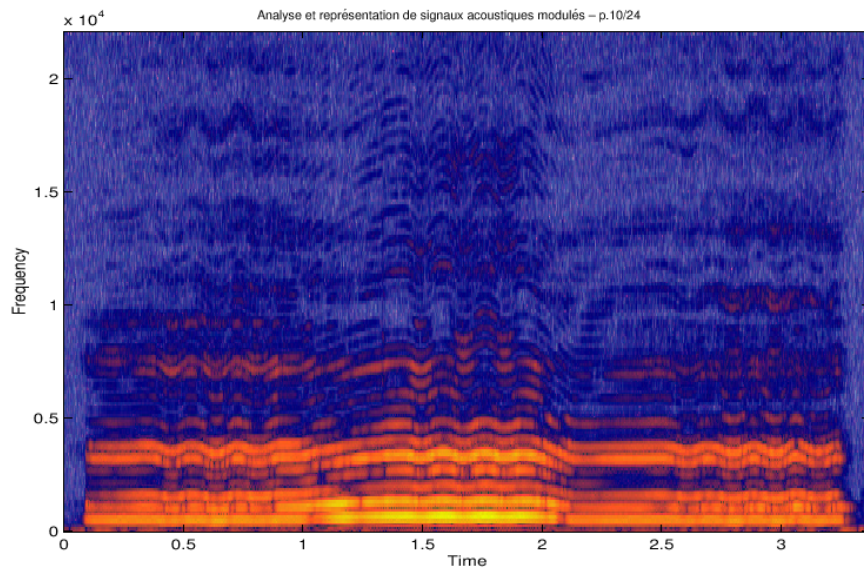
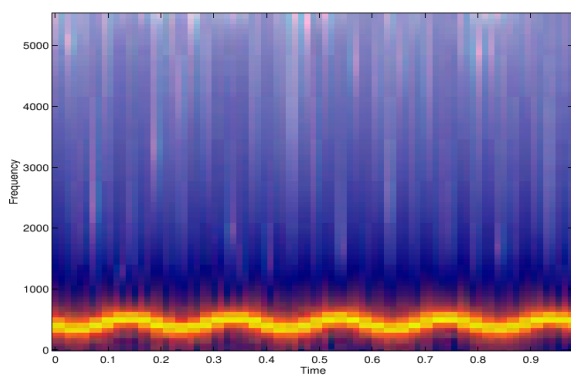
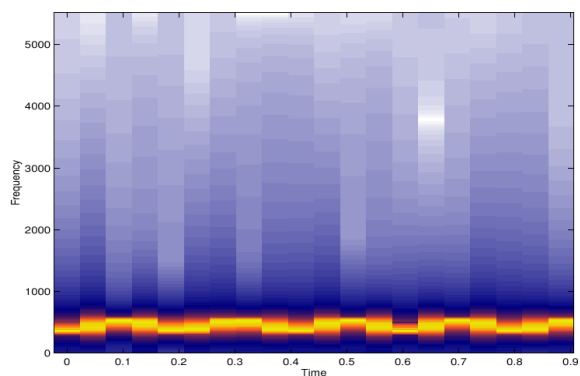


Figure 4.5: Spectrogramme d'un glissando C5-E5 réalisé par une soprano (fenêtre : Hanning, 6 ms de largeur).



(A) Fenêtre de 100 ms



(B) Fenêtre de 20 ms

Figure 4.6: Effet de la modification de la largeur d'une fenêtre temporelle lors du calcul d'un spectrogramme sur un signal contenant un vibrato.

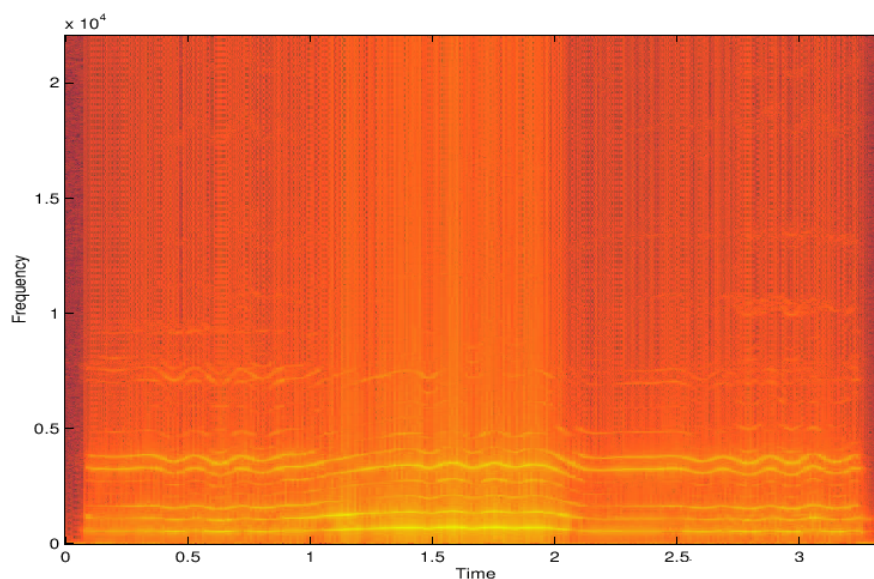


Figure 4.7: Spectrogramme d'un glissando C5-E5 réalisé par une soprano (fenêtre : rectangulaire, 23 ms de largeur).

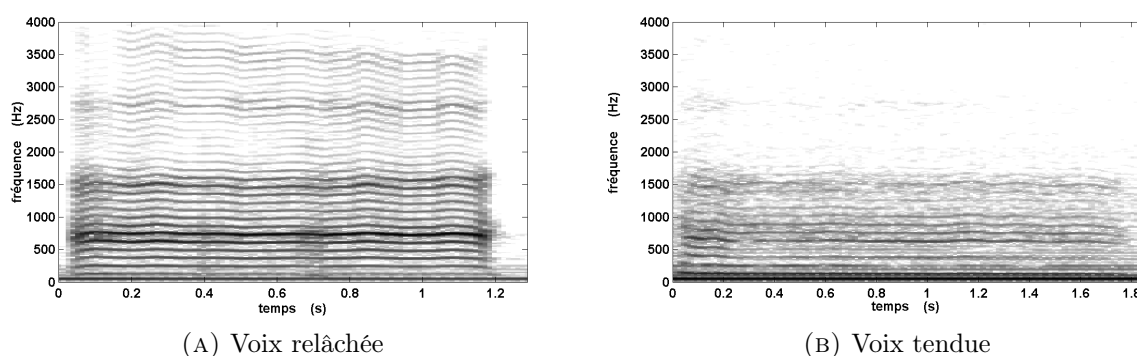


Figure 4.8: Spectrogrammes d'un son de voix relâchée (A) et d'une voix tendue (B).

- le choix de la fenêtre qui va conditionner le contraste du spectrogramme, pour une longueur de fenêtre donnée.

### 4.3 Pertinence et choix d'un mode de représentation

La représentation du signal en temporel est particulièrement adapté à l'analyse de ses variations temporelles, par exemple lors de l'attaque ou de l'extinction d'un son. Au contraire, cette représentation apporte peu d'information lorsqu'on s'intéresse plutôt au contenu spectral du signal. Sur la figure 4.8, on voit que la représentation spectrale de ces deux signaux de parole permet assez bien de différencier la voix « tendue » de la voix « relâchée ».

Un autre intérêt de la représentation du signal à l'aide d'un spectrogramme est de pouvoir séparer des sources sonores, c'est-à-dire des structures, ou, tout du moins, de pouvoir repérer des événements comme le montre la figure 4.9 où l'on distingue deux structures spectrales distinctes.

Pour des sons très harmoniques, une voix chantée par exemple, le spectrogramme permet de repérer très facilement la fondamentale ainsi que la série harmonique. La figure 4.10 représente le spectrogramme d'un chanteur effectuant un glissando du bas au haut de sa tessiture puis l'inverse. On distingue facilement l'évolution temporelle de chaque harmonique contenu dans le signal.

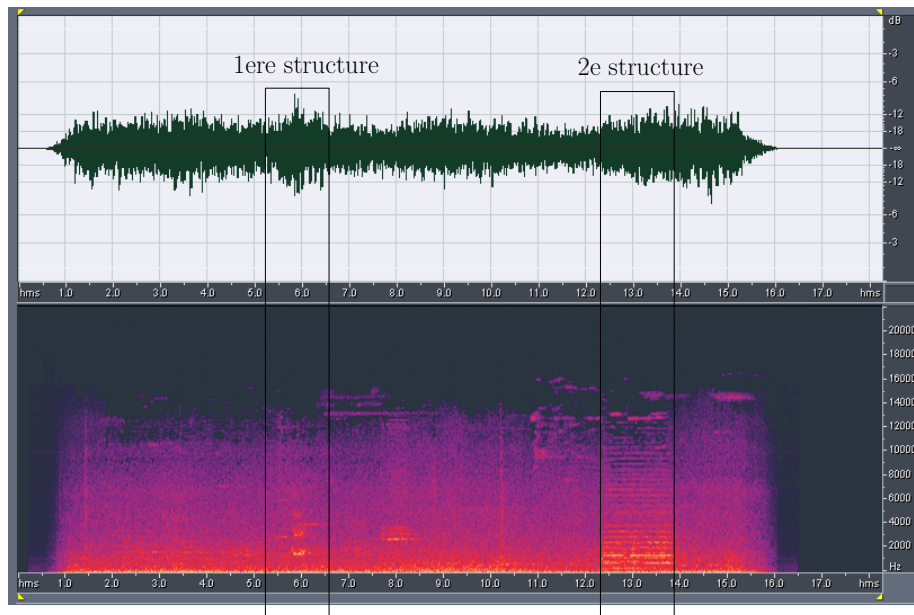


Figure 4.9: Identification de structures sonores à l'aide d'un spectrogramme.

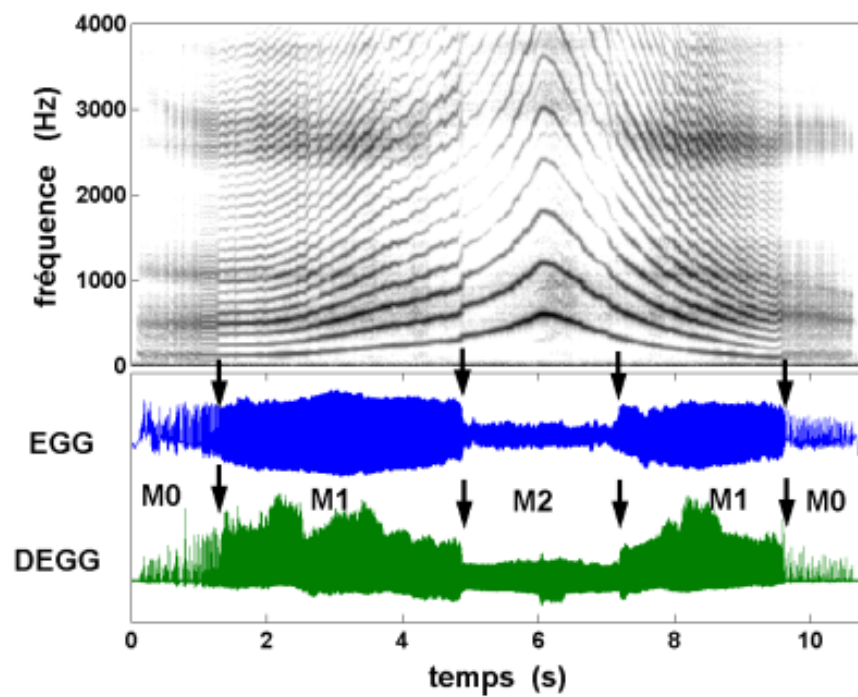


Figure 4.10: Identification de l'évolution temporelle des harmoniques à l'aide d'un spectrogramme.



Dans le cas de la voix parlée, on peut repérer les parties voisée - harmoniques ou non - et même identifier quels sont les phonèmes prononcés avec un peu d'expérience. Cette technique permet par exemple d'améliorer les algorithmes de reconnaissance vocale (cf. fig. 4.11).

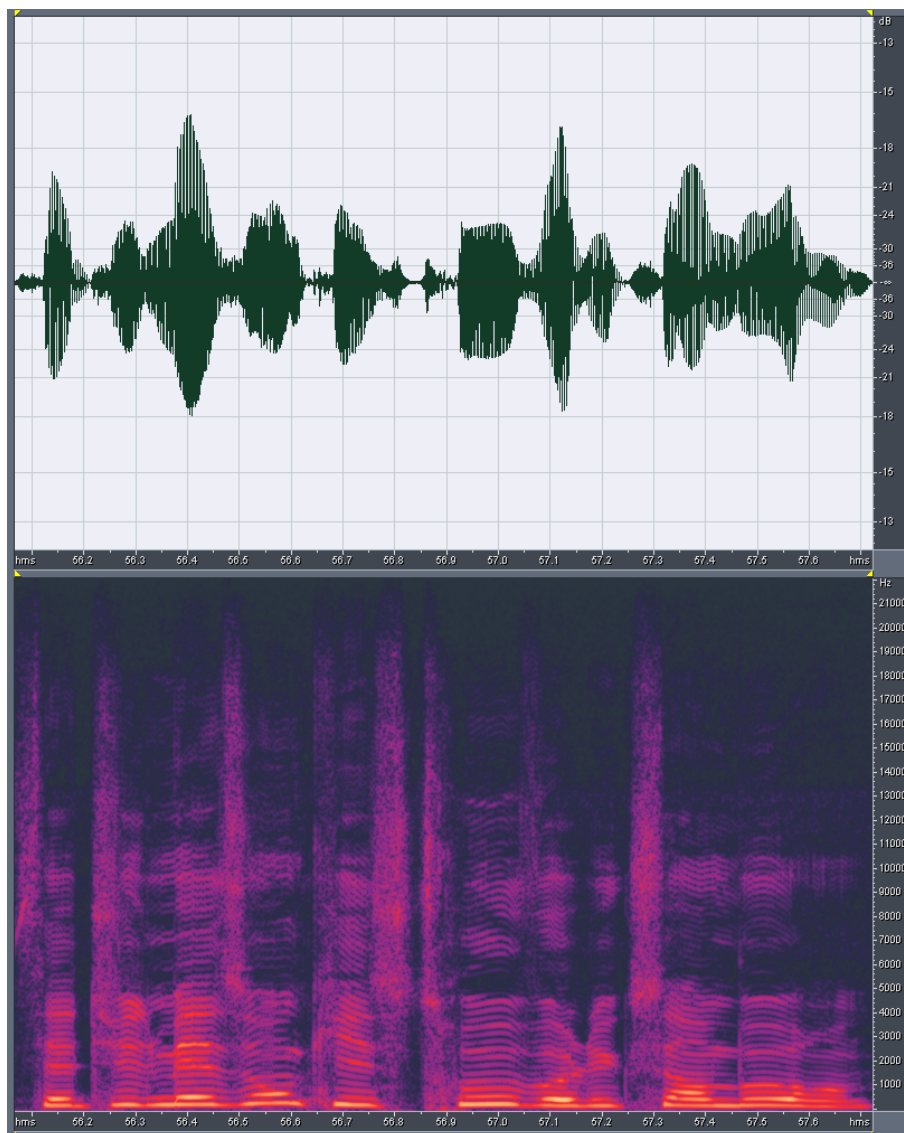


Figure 4.11: Identification de mots à l'aide d'un spectrogramme. Phrase : « C'est une maison qui s'trouve au Luxembourg ».

## 4.4 Le spectre moyenné (Long Term Average Spectrum LTAS)

Dans certains cas, il est également très utile de représenter une partie du signal sous forme de spectre moyenné. Le spectre moyenné consiste à faire la moyenne du spectrogramme sur l'ensemble des instants d'un intervalle de temps. Cette opération peut être effectuée sur le signal tout entier comme sur un morceau particulier.

Pour examiner une voyelle en particulier dans un signal de parole par exemple, il est tout à fait approprié de moyenner le spectrogramme sur l'intervalle de temps de cette voyelle, de façon à pouvoir estimer les formants ou bien le contenu spectral de cette voyelle. Ainsi, sur la figure suivante, on peut examiner le spectre moyenné de la production vocale d'un chanteur sur un /a/. Cette représentation permet de caractériser ses premiers formants vocaliques, ainsi que le formant du chanteur (renforcement énergétique dans la zone 2000-4000 Hz) caractéristique des chanteurs lyriques et des acteurs de théâtre.

# Bibliography

- [1] M. Charbit. Bases de traitement du signal. Cours de DEA, ENST, Paris, 2004.
- [2] M. Fallon. Traitement du signal. Support de cours, ENSAM, Lille, 1997.
- [3] M. Feng. Traitement du signal. Support de cours, ENSERG. INP Grenoble, 2000.
- [4] M. Garnier, D. Dubois, J. Poitevineau, N. Henrich, and M. Castellengo. Perception et description verbale de la qualité vocale dans le chant lyrique : une approche cognitive. Fez, 2004. Journées d'Études sur la Parole.
- [5] T. Heiser. Traitement du signal. Support de cours, UFR Sciences Physiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- [6] N. Henrich. *Etude de la source glottique en voix parlée et chantée*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [7] J. Laroche. Traitement des signaux audio-fréquences. Cours de DEA, ENST, Paris, 1995.
- [8] D. Matignon. Traitement du signal. Support de cours, ENST, Paris, 2000.
- [9] X. Pelerson. Cordes vocales et lèvres vibrantes. Paris, juillet 2004. Conférence SFA.