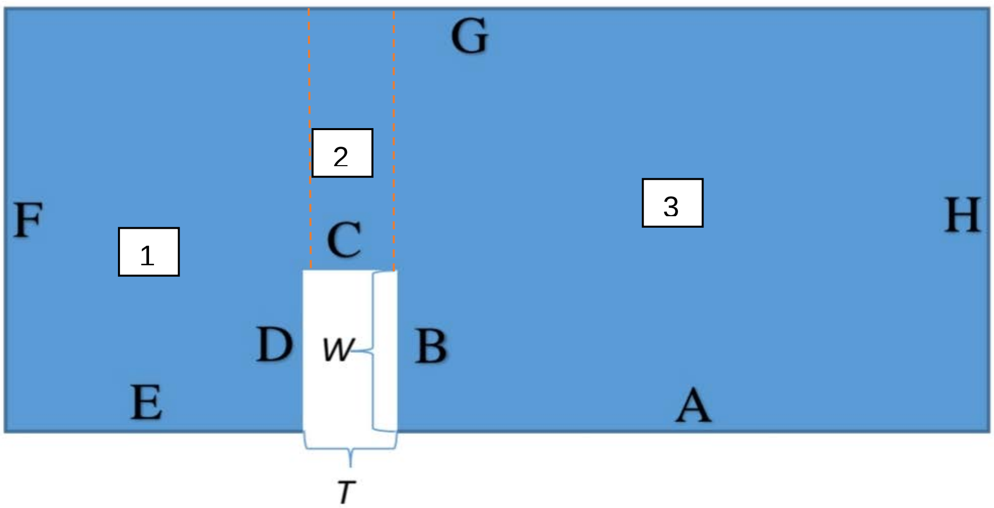
תרגיל נומרי מסכם לקורס מבוא לפיזיקה חישובית – הידרודינמיקה דו מימדית של זורם לא דחיס עם צמיגות במצב עמיד

מגיש : יהונתן אברהם , 206223513

בתרגיל זה נבחן נומרית בעזרת שיטת גאוס סיידל כיצד נראה זרם דו מימדי בלתי דחיס ובמצב עמיד העוקף מכשול מלבני. נגדיר את מהירות הזרם להיות $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$. המרחב הדו מימדי והמכשול נתונים בשרטוט 1 .



שרטוט 1 . החלק העליון של המרחב והמכשול המלבני. נצטרך לעשות חישובים רק בחצי זה ומסימטריה נוכל להשלים את התוצאה לחלק התחתון. 1,2,3 אלו אזורים שחולקו על מנת לבצע סדר באינדקסים בצורה נוחה יותר.

על מנת שנוכל לפתור את הבעיה באופן נוח נגדיר שני שדות וקטורים. שדה הזרימה – ψ ואת המערבולתיות – ζ . כשהקשר ביניהם לבין וקטור הזרימה : $u = \partial_y \psi \quad v = -\partial_x \psi$ ולמערבולתיות $\zeta = \partial_y u - \partial_x v$.

כמו כן, הנחנו צפיפות קבועה ומצב עמיד לכן משוואת הרצף ונאוויר סטוקס יקבלו את הצורה :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}$$

ניתן לכתוב את צמד המשוואות הוקטוריות לכל רכיב מהירות מה שייתן שלוש משוואות דיפרנציאליות עם שלושה נעלמים u,v,p ובעזרת הקשר בינם לבין שדה הזרימה והמערבולתיות נקבל צמד משוואות פואסון מצומדות :

$$\Delta\psi = \zeta$$

$$\nu\Delta\zeta = \left[\partial_y\psi\partial_x\zeta - \partial_x\psi\partial_y\zeta\right]$$

נעשה דיסקריטיזציה למרחב הדו מימדי ונרשום את צמד המשוואות בצורה דיסקרטית כאשר נקודות לאורך ציר X יקבלו אינדקס i ולאורך ציר Y אינקדס j . נקבל את המשוואות הבאות איתן נעבוד :

(1) $$\delta_i^2\psi_{i,j} + \delta_j^2\psi_{i,j} = \zeta_{i,j}$$

(2) $$\delta_i^2\zeta_{i,j} + \delta_j^2\zeta_{i,j} = \frac{R}{4}\left(\delta_j\psi_{i,j}\delta_i\zeta_{i,j} - \delta_i\psi_{i,j}\delta_j\zeta_{i,j}\right)$$

והאופרטורי הגזירה מוגדרים כך :

$$\delta_i\chi_{i,j} \equiv \chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j} \qquad \delta_i^2\chi_{i,j} \equiv \chi_{i+1,j} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i-1,j}$$

$$\delta_j\chi_{i,j} \equiv \chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1} \qquad \delta_i^2\chi_{i,j} \equiv \chi_{i,j+1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}$$

נגדיר את R שמופיע במשוואה (2) כמספר ריינולדס של הסריג $R = \frac{v_0 h}{\nu}$. כאשר h אלמנט האורך של הסריג. קובע את המרחק בין המשבצות בסריג. בנוסף את מספר ריינולדס הפיזיקאלי $R_e = \frac{v_0 2w}{\nu}$. כש 2w זה רוחב המחסום.

נוכל לקבל משתי ההגדרות קשר בין R ל R_e בו נשתמש בהמשך $R_e = \frac{R\cdot 2w}{h}$ (3)

<u>פתרון הבעיה:</u>

כעת יש בידינו מספיק מידע כדי לפתור את הבעיה. קיבלנו זוג משוואות דיפרנציאליות חלקיות- פואסון, עם תנאי שפה כתוצאה מנוכחות המחסום והגבלות המרחב. ננחש מצב התחלתי בו למשל אין מחסום כך שלא תתקבל מערבולתיות - ז"א המערך שמשוייך ל $\zeta = 0$ יהיה מערך של אפסים . ושדה הזרימה מניח מהירות אופקית כזו $\psi = v_0 y$ כך שנבנה מערך עבור שדה הזרימה של אחדות המוכפל בערכי חלוקת המרחב $y = j\cdot h$.

נעבור על האינדקסים שמשוייכים ל-X ו- Y ז"א i,j . עבור כל נקודה נעדכן את המערך של שדה הזרימה ואת המערבולתיות על סמך המשוואה שמשוייכת לאזור שלהם . נחזור על התהליך באיטרציות עד שתנאי ההתכנסות מתקיים. את תנאי התכנסות נבחר לפי הנורמה של ψ באיטרציה ה n+1 ביחס לאיטרציה ה- n. ז"א $\|\psi^{n+1} - \psi^n\| \leq \varepsilon$.

בנוסף ניתן להאיץ את ההתכנסות על ידי שימוש באיטרציה הקודמת : $\psi_{i,j}^* = \frac{1}{4}(\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n \psi_{i,j-1}^n)$

כך שבאיטרציה הn+1 נקבל $\psi_{i,j}^{n+1} = w\psi_{i,j}^{*}+(1-w)\psi_{i,j}^{n}$. כאשר W הוא פרמטר הרלקסציה ובתרגיל זה נבחר להיות 0.01 . כעקרון שיטת גאוס סיידל מקצרת את איטרציות ההתכנסות ע"י שימוש באיברים שחושבו באיטרציה ה n+1 . שיטה זו גרמה לחוסר יציבות שלא מצאתי דרך פתרון אלא לשלב בין שיטת ג'קובי לגאוס סידל. כך זמן ההתכנסות ארך אך נותרה יציבות עבור ערכי R גבוהים.

קביעת המשוואות:

את המשוואות הרלוונטיות לכל אזור (1,2,3 בשרטוט 1) ותנאי השפה, נקבל מתוך משוואת (1) ו-(2) והצבה מפורשת של ביטויי הנגזרות בהן . נתחיל עם הביטויים עבור פונקציית הזרם .

- עבור אזורים 1,2,3 ללא תנאי השפה נקבל : $\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}(\psi_{i+1,j}^{n}+\psi_{i-1,j}^{n+1}+\psi_{i,j+1}^{n}+\psi_{i,j-1}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n})$

- עבור F אנחנו יודעים $v = \partial_x\psi = 0$ ז"א $\psi_{i,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n} = 0$ נשתמש בכך ונקבל:

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{3}(\psi_{i+1,j}^{n}+\psi_{i,j+1}^{n}+\psi_{i,j-1}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n})$$

- עבור עבור G מתקיים $\partial_y\psi = v_0$ ז"א $\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j}^{n} = v_0$ נשתמש בקשר זה ונקבל :

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{3}(\psi_{i+1,j}^{n}+\psi_{i-1,j}^{n+1}+\psi_{i,j-1}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n}+v_0)$$

- עבור H אנחנו יודעים $v = \partial_x\psi = 0$ ז"א $\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i,j}^{n} = 0$ נשתמש בכך ונקבל:

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{3}(\psi_{i-1,j}^{n}+\psi_{i,j+1}^{n}\psi_{i,j-1}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n})$$

- עבור הפינה FG מתקיים $\psi_{i,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n} = 0$ וגם $\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j}^{n} = v_0$ לכן נקבל :

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(\psi_{i+1,j}^{n}+\psi_{i,j-1}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n}+v_0)$$

- עבור הפינה GH מתקיים $\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i,j}^{n} = 0$ וגם $\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j}^{n} = v_0$ לכן נקבל :

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(\psi_{i-1,j}^{n+1}+\psi_{i,j-1}^{n+1}-\zeta_{i,j}^{n}+v_0)$$

כאשר על שפת המחסום B,C,D $\psi = 0,$ לאורך כל האיטרציות. באופן דומה נפעל כדי לקבל את הביטויים למערבולתיות

- עבור עבור אזורים 1,2,3 ללא תנאי השפה נקבל :

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\Big(\zeta_{i+1,j}^{n}+\zeta_{i-1,j}^{n+1}+\zeta_{i,j+1}^{n}+\zeta_{i,j-1}^{n+1}+\frac{R}{4}((\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n+1})(\zeta_{i,j+1}^{n}+\zeta_{i,j-1}^{n+1}) - (\psi_{i,j+1}^{n}-\psi_{i,j-1}^{n+1})(\zeta_{i+1,j}^{n}-\zeta_{i-1,j}^{n+1}))\Big)$$

- עבור H מתקיים $\partial_x\psi = 0$ וגם $\partial_x\zeta = 0$ שזה שקול לכך שאופרטורי הגזירה $\delta_i\chi_{i,j} = 0$ ונשאר עם משוואת לפלס עבור משוואה (2) . כמו כן ניעזר בכך שעבור H - $\zeta_{i+1,j}^{n}-\zeta_{i,j}^{n} = 0$ ונקבל :

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{3}(\zeta_{i-1,j}^{n+1}+\zeta_{i,j+1}^{n}-\zeta_{i,j-1}^{n+1})$$

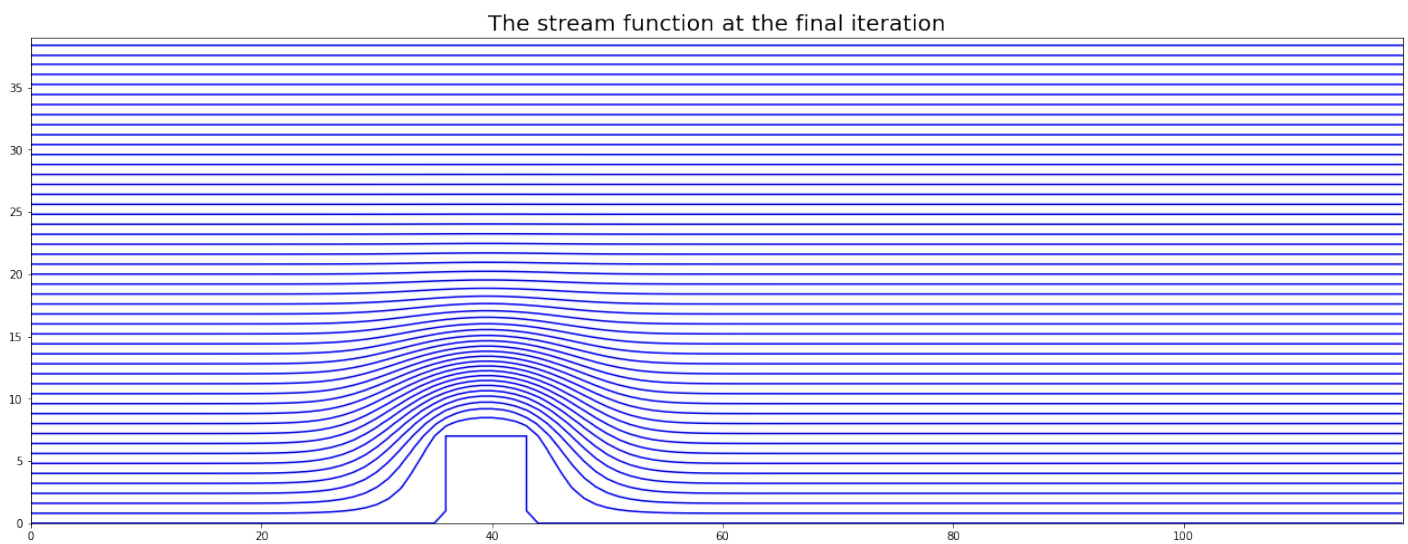
- על D $\zeta_{i,j}^{n+1} = 2\zeta\psi_{i-1,j}^{n+1}$
- על C על D $\zeta_{i,j}^{n+1} = 2\psi_{i,j+1}^{n+1}$
- על B $\zeta_{i,j}^{n+1} = 2\zeta\psi_{i+1,j}^{n+1}$

- בנקודות הקצה *DC* ו *CB* נעשה ממוצע בין התאים הסמוכים.

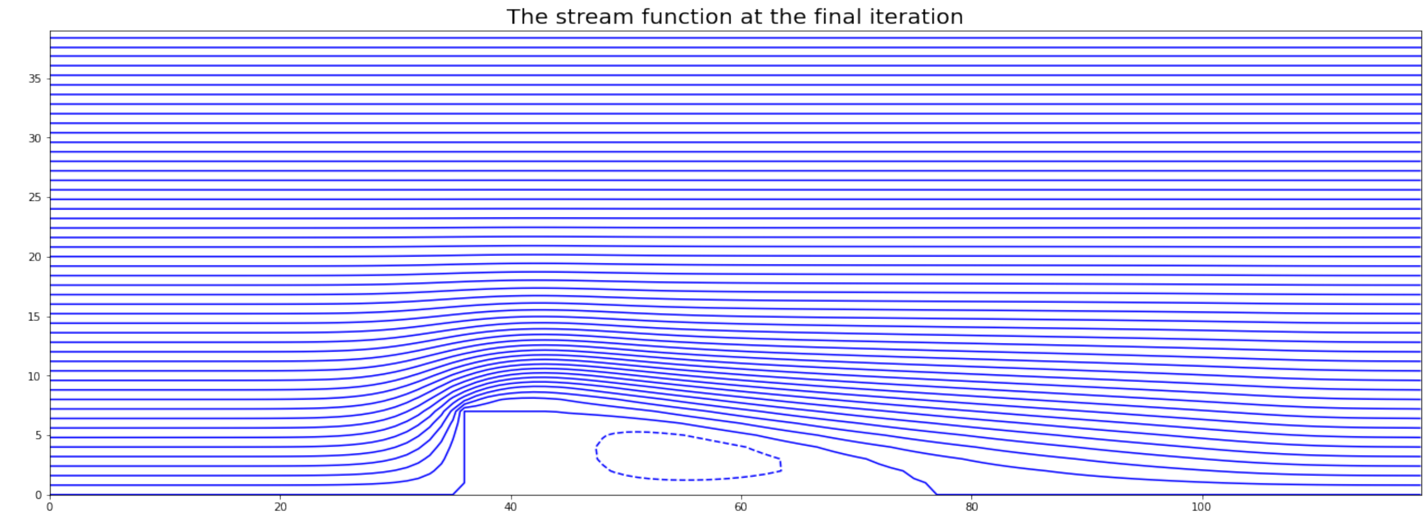
<u>מציאת מספר ריינולדס הקריטי:</u>

נחפש מספר ריינולדס – *R* עבורו כיוון וקטור המהירות לאחר המחסום משתנה . ז"א תתפתח מהירות בכיוון אופקי כלפי מעלה בציר *Y*. נסתכל על המשבצת האמצעית בוקטור שלאחר המחסום ונראה עבור איזה ערך *R_critical* (פרופורציוני ל- *Re_critical*) המהירות תתאפס ונקבל ערך עם סימן הפוך עבור המשבצת . ז"א שנמצא אפס לפונקציה : *v(R_critical)=0*. זאת בעית מציאת שורש של פונקציה מונוטונית עולה . נבדוק ערכי $R \in [0.01, 3]$.

<u>תוצאות :</u>



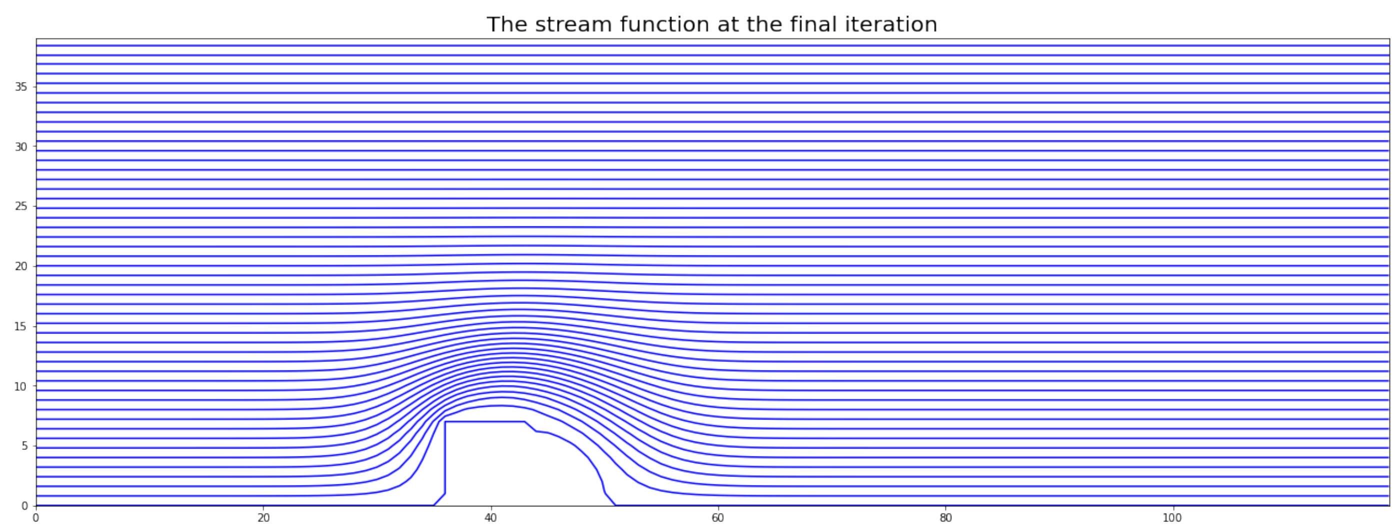
שרטוט 2. מצב המערכת עבור R=0.01 ו-h=1 הציר האופקי הוא ציר X ואנכי -Y (המרחב הדו מימדי אותו חקרנו) .כפי שניתן היה לצפות עבור מספר ריינולדס נמוך היחס בין המהירות האופקית לבין הצמיגות קטן ולכן הזרימה עוקפת בצורה ישירה את המחסום ללא יצירת מערבולת. תוצאה זו התקבלה לאחר 468 איטרציות



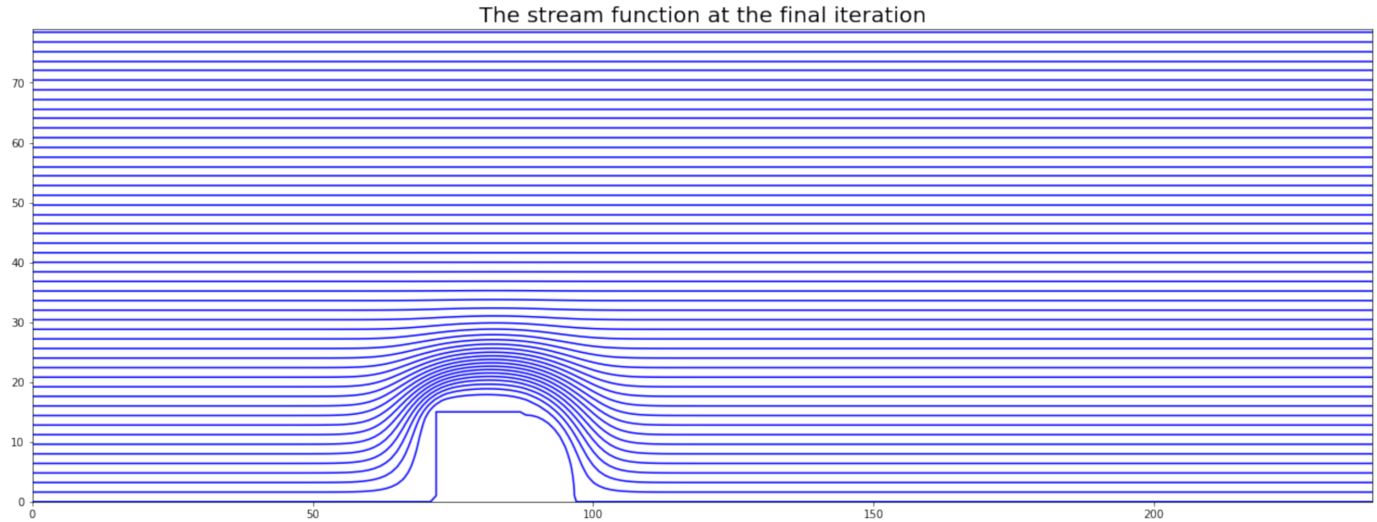
שרטוט 3.מצב המערכת עבור R=4 ו- h=1. כפי שניתן היה לצפות עבור מספר ריינולדס גבוה היחס בין המהירות האופקית לבין הצמיגות גדול יותר ולכן הזרימה מפתחת מערבולתיות מאחורי המחסום. מתקבלות תוצאה זו התקבלה לאחר 639 איטרציות

מציאת השורש :

עבור h=1 נמצא כי R_critical=0.36 מתוך (3) נקבל כי Re_critical= 5.76 באופן דומה עבור h=0.5 נקבל כי R_critical=0.12 ו Re_critical=8.1. ישנו הבדל גדול בין הערכים והציפייה הייתה לתוצאות קרובות בהרבה. השארה מסויימת היא בגלל שהרזולוציה גדולה יותר עבור h=0.5 המערכת רגישה יותר לשינויים שמתבצעים.



שרטוט 4. מצב המערכת עבור R=2R_critical ו- h=1. מספר ריינולדס גבוה כאן מן הערך הקריטי וניתן לראות שמתחילים להווצר המסלולים הסגורים שמתארים את המערבולתיות. כפי שניתן לראות בשרטוט הקודם מתקבלות תוצאה זו התקבלה לאחר 478 איטרציות



שרטוט 5. מצב המערכת עבור R=2R_critical ו- h=0.5 .מספר ריינולדס גבוה כאן מן הערך הקריטי וניתן לראות שמתחילים להווצר המסלולים הסגורים שמתארים את המערבולתיות. כפי שניתן לראות בשרטוט הקודם מתקבלות תוצאה זו התקבלה לאחר 478 איטרציות.