מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 12

06 בספטמבר, 2023

יונתן מגר

אקסיומת הבחירה

תהיינה X, Y **קבוצות. אזי** $|X| \geq |Y| \Leftrightarrow$ **קיימת פונקציה על** $f : X \to Y$.

נוכיח; $\Rightarrow$: נגדיר לכל $y \in Y$ את $\emptyset \neq A_y = f^{-1}(y) \subseteq X$. מאקסיומת הבחירה, קיימת פונ' בחירה $\varphi(y) \in A_y$. אז $f \circ \varphi = \mathrm{id}_Y$ ו-φ היא חח"ע מ-Y ל-X כרצוי. עבור $\Leftarrow$: נניח $|X| \geq |Y|$. אז קיימת $g : Y \to X$ חח"ע (והפיכה משמאל). כלומר קיימת $f : X \to Y$ כך ש-$\mathrm{id}_Y = f \circ g : Y \to Y$, כלומר f על Y.

■

אם $\forall i \in I$, A_i **הן קבוצות כך ש-**$|A_i| \leq a$**, אז** $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq a \cdot |I|$.

נוכיח: תהי A קבוצה מעוצמה a ו-$f_i : A \to A_i$ שהן על (הקיום מובטח מהמשפט הקודם). נגדיר $f : A \times I \to \bigcup A_i$ על ידי $f(x, i) = f_i(x)$ והיא על $\bigcup_{i\in I} A_i$.

■

- **הגדרה:** תהי $X \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר כי $x_0 \in \mathbb{R}$ היא נק' הצטברות של X אם $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X$ כך ש-$|x - x_0| < \varepsilon$.

$x_0 \in \mathbb{R}$ **נק' הצטברות של קבוצה** X**. אזי קיימת סדרה של איברי** X **המתכנסת ל-**x_0.

נוכיח: נסמן ב-$A_n = \left\{x \in X : (x - x_0) < \frac{1}{n}\right\}$ עבור אינדקסים $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $A_n \neq 0$ מההנחה ש-x_0 נק' הצטברות. לכן, קיימת פונקצית בחירה $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq X$ המקיימת $f(n) \in A_n$. נגדיר $x_n = f(n)$ וקיבלנו את הסדרה המבוקשת.

■

- **תרגיל:** אם נתון בנוסף $x_0 \notin X$, הוכיחו כי קיימת סדרה של איברים שונים זה מזה כך ש-$x_n \to x_0$.

יחסי סדר והלמה של צורן

בפרק זה, אם לא נאמר אחרת, נניח כי הסדר חלש.

יחס סדר חלקי [וחזק]

תהי X קבוצה ויהי R יחס דו-מקומי על X, R נקרא יחס סדר חלקי [או חזק] אם:

(1) הוא רפלקסיבי ($\forall x \in X . xRx$). [אם נרצה לדבר על יחס סדר חזק, נדרוש $\forall x \in X . (x, x) \notin R$]
(2) הוא אנטי-סימטרי חלש ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$). [אם נרצה לדבר על יחס סדר חזק, $xRy \Rightarrow (y, x) \notin R$]
(3) הוא טרנזיטיבי ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$).

במקרה כזה, (X, R) נקרא קבוצה סדורה חלקית. לרוב, נסמן יחס כזה ב-$\subseteq, \preccurlyeq, \leq$.

יחס סדר מלא

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נאמר ששני איברים $x, y \in X$ ניתנים להשוואה אם $x \leq y$ או $y \leq x$ (ביחס סדר חזק אומרים $x < y \vee y < x \vee x = y$). כאשר כל שני איברים ב-$X$ ניתנים להשוואה, אומרים שיחס הסדר הוא מלא.

דוגמות

(1) יחס ההכלה על $P(X)$ הוא **חלקי**.
(2) יחס $\leq$ על כל קבוצת מספרים הוא **מלא**. (על $\mathbb{Q}$, היחס מגדיר יחס סדר על מחלקות שקילות של זוגות).
(3) יחס "חלוקה" על $\mathbb{N} \setminus \{0\}$: $m \mid n \Rightarrow m \leq n$ הוא **חלקי**.

(4) יחס ההרחבה על פונקציות: תהיינה X,Y קבוצות, ונביט באוסף הפונקציות מתתי-קבוצות של X לתוך Y. נאמר כי $f \leq g$ אם $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ וכן $g|_{\mathrm{dom}(f)} = f$ - הוא **חלקי**.
(5) יחס סדר על זוגות של ממשיים: $(x,y) \leq (x',y')$ אם $x \leq x' \wedge y \leq y'$ הוא **חלקי**.
(6) היחס הלקסיקוגרפי (מילוני): $(x,y) \leq (x',y')$ אם $x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')$ הוא **מלא**.

שרשראות

תהי $(X,\leq)$ קס"ח (קבוצה סדורה חלקית). נאמר כי תת-קבוצה $C \subseteq X$ היא שרשרת אם כל שני איברים ב-C ניתנים להשוואה. לדוגמה, ב-(3), יחס החלוקה $C_1 = \{1, 2!, 3!, 4!, ...\}$ היא שרשרת ו-$C_2 = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ שרשרת גם. בדוגמה (5), קבוצת כל הזוגות (x,x) של מספרים ממשיים היא שרשרת.

איבר מינימלי/מקסימלי

תהי $(X,\leq)$ קס"ח. איבר $x \in X$ נקרא **מינימלי** אם לא קיים $x \neq y \in X$ כך ש-$y \leq x$. באופן דומה, איבר $x \in X$ נקרא **מקסימלי** אם לא קיים $x \neq y \in X$ כך ש-$x \leq y$.

- איבר מינימלי/מקסימלי לא אומר בהכרח שהוא הכי קטן/גדול, כי לא בטוח שניתן להשוות אותו עם כל האחרים!

דוגמות

(1) נביט ב-$(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, |)$. אז איבר מינימלי הוא איבר שונה מ-1 שלא ניתן לחלוקה באף מספר טבעי אחר, כלומר ראשוני.
(2) נביט ב-$(P(X), \subseteq)$. $\emptyset$ היא איבר מינימלי. אם מדובר ב-$(P(X) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, האיברים המינימליים הם הסינגלטונים.
(3) יחס על זוגות טבעיים $(x,y) \leq (x',y')$ אם $x < x' \wedge y < y'$ או $x = x' \wedge y = y'$. האיברים המינימליים הם $(0,m)$ או $(m,0)$.

חסם מלרע/מלעיל

תהי $(X,\leq)$ קס"ח ותהי $A \subseteq X$.

- נאמר כי $m \in X$ הוא **חסם מלרע** של A אם $\forall a \in A. m \leq a$. נאמר ש-$m$ הוא חסם תחתון של A אם הוא חסם מלרע, ולכל חסם מלרע אחר m' של A מתקיים $m' \leq m$. במקרה זה נסמן $m = \inf(A)$ (אינפימום).
- נאמר כי $m \in X$ הוא **חסם מלעיל** של A אם $\forall a \in A. m \geq a$. נאמר ש-$m$ הוא חסם עליון של A אם הוא חסם מלעיל, ולכל חסם מלעיל אחר m' של A מתקיים $m' \geq m$. במקרה זה נסמן $m = \sup(A)$ (סופרימום).
  - זאת אומרת, חסם עליון זהו **חסם מלעיל קטן ביותר**, וחסם תחתון זהו **חסם מלרע גדול ביותר**.
- אם $\inf(A) \in A$ נסמן $\inf(A) = \boldsymbol{\min(A)}$, ואם $\sup(A) \in A$ נסמן $\sup(A) = \boldsymbol{\max(A)}$.

הלמה של צורן

תהי $(X,\leq)$ קס"ח לא ריקה. נניח שלכל שרשרת לא ריקה C ב-X יש חסם מלעיל. אזי יש ב-X איבר מקסימלי.

- בדומה, אם יש חסם מלרע לכל שרשרת אז יש ב-X איבר מינימלי. זה נובע מהלמה של צורן, ע"י לקיחת יחס הסדר ההפוך: $x \overset{\prime}{\leq} y \Leftrightarrow y \leq x$.
- אין כאן טענה על יחידות האיבר המקסימלי, רק על קיום.
- כדאי לשים לב תמיד שאנו לא מניחים בלי כוונה שכל שני איברים (ב-X) ניתנים להשוואה.
- הלמה של צורן שקולה לאקסיומת הבחירה (כלומר אנו מראים את הכיוון $\Uparrow$).

משפט עזר ראשון

תהי $(X,\leq)$ קס"ח לא ריקה, ונתון שלכל שרשרת $C \subseteq X$ לא ריקה יש חסם עליון. תהי $f: X \to X$ המקיימת $f(x) \geq x$ לכל $x \in X$. אז קיימת נק' שבת, כלומר $f(x_0) = x_0$.

- למשל, ב-$(\mathbb{R}, \leq)$, $f(x) = x+1$ אין נק' שבת וזה כי לשרשרת $\mathbb{N}$ אין חסם עליון.
- עבור $f(x) = \sqrt{x}$ לקטע $[0,1]$ אכן 0 ו-1 נקודות שבת.
- עבור $X = P(A)$ ניקח את $f(B) = B \cup \{X_0\}$. נקודות השבת הן כל הקבוצות שמכילות את x_0.

הוכחת משפט עזר ראשון

נקבע $a_0 \in X$. נגדיר עבור $A \subseteq X$ כי A סגורה ביחס ל-a_0 אם מתקיימים:

(1) $a_0 \in A$

(2) $f(A) \subseteq A$

(3) לכל שרשרת $C \subseteq A$ מתקיים $\sup(C) \in A$.

נשים לב כי $A = \{x : a_0 \leq x\}$ היא סגורה ביחס ל-a_0.

נסמן ב-B את חיתוך כל הקבוצות הסגורות ביחס ל-a_0. כמובן ש-B בעצמה סגורה ביחס ל-a_0, ומוכלת בקבוצה A. זאת אומרת, שלכל $b \in B$ מתקיים $b \geq a_0$. נסמן $E = \{e \in B \mid \forall b \in B : b < e \Rightarrow f(b) \leq e\}$. אלו האיברים של B עבורים $f(\{x \mid x < e\}) \leq e$. נשים לב כי קבוצה זו אינה ריקה, הרי ש-a_0 נמצא בה. לכל איבר $e \in B$ נסמן $B_e = \{b \in B \mid b \leq e \vee b \geq f(e)\}$.

- $e \in E \Rightarrow B_e = B$: נראה ש-$B_e \subseteq B$ מההגדרה של B_e. נוכיח ש-$B \subseteq B_e$: נראה כי B_e סגורה וכך נקבל את ההכלה כי אז B_e משתתף בחיתוך שמגדיר את B. נוכיח כי B_e סגורה:

(1) $a_0 \in B_e$ כי $a_0 \leq e$ וזה נכון כי $e \in B$.

(2) נניח כי $b \in B_e$ ונראה כי $f(b) \in B_e$. נראה כי אם $b \in B_e$, מתקבל ש-$b \leq e$, ואז $b = e$ ומתקבל $f(b) \in B_e$ או $b < e$ ומהגדרת E מתקיים $f(b) \leq e$ ו-$f(b) \in B_e$. במקרה השני, $f(b) \geq b \geq f(e)$ כי f מגדילה. קיבלנו כי $f(b) \in B_e$.

(3) תהי שרשרת $C \subseteq B_e$. נסמן $m = \sup(C)$ (קיים מהתנאי). נראה כי $m \in B_e$:
  - אם קיים $y \in C$ עבורו $y \geq f(e)$, אז $m \geq y \geq f(e)$ ולכן $m \in B_e$.
  - אחרת, לכל $y \in C$ מתקיים $y \leq e$ אז e חסם מלעיל של C, ולכן $m \leq e$ כי m חסם עליון, ולכן $m \in B_e$.

הראינו שאם $b \in B \wedge e \in E$ אז $b \leq e \vee b \geq f(e)$. נוכיח ש-$E$ סגורה:

(1) $a_0 \in E$ ✓

(2) נניח $e \in E$, ונראה כי $f(e) \in E$. ניקח $b < f(e)$ ונראה כי $f(b) \leq f(e)$: מ-$b < f(e)$, מתקיים $f(e) \not\leq b$. מכך, $b \leq e$. אם $b = e$, $f(b) = f(e) \leq f(e)$, כרצוי. אחרת, $b < e$, כלומר $f(b) \leq e \leq f(e)$.

(3) תהי $C \subseteq E$ שרשרת. נסמן $m = \sup(C)$, ונראה $m \in E$. ניקח $b < m$ ונראה ש-$f(b) \leq m$. m חסם עליון, ולכן b לא יכול להיות חסם מלעיל. לכן קיים איבר $y \in C$ כך ש-$b \not\leq y$. נראה כי $y \in E$ ו-$b \in B$ לכן $b \leq y$ או $b \geq f(y)$. לא אפשרי כי $b = y$ מכך ש-$b \not\leq y$. גם $b \geq f(y)$ לא אפשרי מאותה הסיבה. נותרה האפשרות ש-$b < y$, ומהגדרת E נקבל $f(b) \leq y \leq m$.

לכן $E = B$ כי $E \subseteq B$ מההגדרה ו-E סגורה ולכן משתתפת בחיתוך שמגדיר את B.

כלומר, B שרשרת, כלומר כל שני איברים בה ניתנים להשוואה: אכן, יהיו $b, e \in B = E$. ראינו כי $b \leq e$ או $e \leq f(e) \leq b$. כלומר, כל שני איברים אכן ניתנים להשוואה. אז $\exists m = \sup B$ ומתקיים $m \in B$ מסגירות B (תכונה 3) וגם $f(m) \in B$ (תכונה 2 של סגירות) ולכן $m \leq f(m) \leq m$ ולכן $f(m) = m$.

■

משפט עזר שני

תהי $(X, \leq)$ קס"ח לא ריקה. אזי, יש ב-X שרשרת מקסימלית ביחס להכלה על שרשראות.

הוכחת משפט עזר שני

נביט בקבוצה $(\mathbb{C}, \subseteq)$ של שרשראות $C \subseteq X$ סדורה חלקית לפי הכלה. נשים לב שב-$\mathbb{C}$ לכל שרשרת (מדובר בשרשרת של שרשראות) יש חסם עליון (ברור שזה חסם מלעיל וגם שכל חסם מלעיל אחר יכיל אותו), שהוא האיחוד של כל השרשראות בשרשרת. אם יש איזשהי $C \in \mathbb{C}$ שמקיימת לכל $D \in \mathbb{C}$ כי $C \not\subseteq D$, אז C מקסימלית. אחרת, נגדיר $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ע"י כך שלכל שרשרת $C \in \mathbb{C}$ נבחר איזשהי D המקיימת $C \subsetneq D$ וזו פונקציית מגדילה, לכן לפי משפט עזר ראשון נקבל כי ל-f יש נקודת שבת, בסתירה להגדרת f.

■

הוכחת הלמה של צורן

לפי משפט עזר 2, יש בקס"ח שרשרת מקסימלית C. לפי ההנחה של הלמה של צורן, יש x_0 חסם מלעיל של השרשרת C. x_0 הוא איבר מקסימלי של X, אחרת, נניח $x_0 < x$. אז $C \subsetneq C \cup \{x\}$ עדיין שרשרת, בסתירה למקסימליות של C.

■