חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א׳

סמסטר א׳ - 2024

יונתן מגר

תוכן העניינים

חדו"א 1א' - שיעור 5

11 בינואר, 2024

יונתן מגר

1. חשבון גבולות

1.1. משפט

נתונות שתי סדרות (a_n) ו-(b_n), ונניח $\lim a_n = a$ ו-$\lim b_n = b$. אזי:

(1) $\exists \lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$

(2) $\exists \lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$

(3) $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ (בתנאי נוסף: $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$ ו-$b \neq 0$).

1.1.1. הוכחה

(1) נתון $\forall \varepsilon > 0 \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n'_\varepsilon$ ונתון $\forall \varepsilon > 0 \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n''_\varepsilon$.

ואז $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

(2) יהי $\varepsilon > 0$ שרירותי. הסדרה (a_n) מתכנסת ולכן חסומה, כלומר $\exists M > 0 : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. ואז:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_b b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| =$$
$$= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|, \forall n \in \mathbb{N}$$

מצד שני, מהנתון נובע:

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}, \forall n > n'_\varepsilon$$

$$\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > n''_\varepsilon$$

ואז $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, מ-(1) נובע:

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{|b| + 1} < \varepsilon$$

■

(3) הוכחנו (2), ולכן מספיק להוכיח $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. מהנתון $b_n \to b \neq 0$ ומכך $|b_n| \to |b| > 0$.

נשתמש בלמה מהשיעור הקודם, ונסיק כי $0 < r < |b|$, עבור r מסוים. נראה כי $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |b| > r, \forall n > n_0$.
נשים לב כי $\forall n > n_0$ מתקיים $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{1}{r|b|}|b_n - b|$. כעת, יהי $\varepsilon > 0$ שרירותי. אז:

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon r|b|, \forall n < n'_\varepsilon$$

ואז $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n_0, n'_\varepsilon\}$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{1}{r|b|}|b_n - b| < \frac{1}{\cancel{r|b|}} \cdot \varepsilon \cancel{r|b|} = \varepsilon$$

■

1.1.2. דוגמה

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

2. מונוטוניות הגבול

2.1. למה

נתונה סדרה (d_n) כאשר $d_n\geq 0$ ו-$d_n\to d$. אזי $d\geq 0$.

2.1.1. הוכחה

מהנתון נובע $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:|d_n-d|<\varepsilon,\forall n>n_\varepsilon$. נניח בשלילה ש-$d<0$, ונבחר $0<\varepsilon<-d$. מכך נובע ש-$d+\varepsilon<0$.

אז עבור ε, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ כך ש-$d_n<d+\varepsilon,\forall n>n_0 \Leftarrow d_n-d<\varepsilon,\forall n>n_0 \Leftarrow |d_n-d|<\varepsilon,\forall n>n_0$ וזו סתירה $\forall n>n_0, d_n\geq 0$.

$\blacksquare$

2.1.2. הערה

מעבר לגבול "לא מכבד" אי-שיוויון חזק, למשל $d_n=\frac{1}{n}>0$ בגבול $0\geq 0$.

2.2. משפט (הכללה של הלמה)

נתונות שתי סדרות (a_n) ו-(b_n), ונניח $\lim a_n=a$ ו-$\lim b_n=b$ ו-$a_n\leq b_n$. אזי $a\leq b$.

2.2.1. הוכחה

נגדיר $d_n=b_n-a_n\geq 0$. לכן, $d_n\to b-a$. לפי הלמה, $b-a\geq 0$, כלומר $a\leq b$.

$\blacksquare$

בפרט, המשפט אומר שאם $c\leq a_n\leq b$ ו-$c_n\to a$, אז $c\leq a\leq b$.

3. כלל הסנדוויץ'

נתונות שלוש סדרות $(x_n),(y_n),(z_n)$ כך ש-$(x_n)\to L,(y_n)\to L$. נניח גם ש-

$$\exists n_0\in\mathbb{N}:x_n\leq z_n\leq y_n,\forall n<n_0$$

אזי $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=L$.

3.1.1. הוכחה

נתון:

$$\forall\varepsilon>0\exists n'_\varepsilon\in\mathbb{N}:L-\varepsilon<x_n<L+\varepsilon,\forall n>n'_\varepsilon$$
$$\exists n''_\varepsilon\in\mathbb{N}:L-\varepsilon<y_n<L+\varepsilon,\forall n>n''_\varepsilon$$
$$\exists n_0\in\mathbb{N}:x_n\leq z_n\leq y_n,\forall n>n_0$$

לכן, $\forall n>n_\varepsilon=\max\{n'_\varepsilon,n''_\varepsilon,n_0\}$ מתקיים $L-\varepsilon<x_n\leq z_n\leq y_n<L+\varepsilon$. כלומר,

$$\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:L-\varepsilon<z_n<L+\varepsilon,\forall n>n_\varepsilon$$

■

3.1.2. דוגמאות

- תרגיל: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$
- פתרון בכלל הסנדוויץ׳: $x_n = 1 \le z_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \le 1 + \frac{1}{n} = y_n$ וכל הסדרות שואפות ל-1.
- תרגיל: $\frac{n}{n^2+5n+3} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{1+0+0} = 0$
- פתרון בכלל הסנדוויץ׳: $0 \le \frac{n}{n^2+5n+3} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \forall n \ge 1$ וכל הסדרות שואפות ל-0.

3.2. דוגמה

תהי (a_n) סדרה חסומה. אזי הסדרה $\frac{a_n}{n} \to 0$.

3.2.1. הוכחה

מהנתון $\exists M > 0 : |a_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$. כלומר $-M \le a_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}$ ולכן $-\frac{M}{n} \le \frac{a_n}{n} \le \frac{M}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ וכל הסדרות שואפות ל-0 לפי כלל הסנדוויץ׳.

3.3. טענה

תהי קבוצה $B \ne \emptyset$ חסומה מלמעלה. אז $\exists (x_n) \subseteq B$ כך ש-$\lim x_n = \sup B$.

3.3.1. הוכחה

מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in B : \sup B - \varepsilon \le x_\varepsilon \le \sup B$.

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, כלומר $\exists x_n \in B$ כך ש-$\forall n \ge 1, \sup B - \frac{1}{n} \le x_n \le \sup B$ וכל הסדרות שואפות ל-$\sup B$.

3.4. הערה

אם קבוצה $B \ne \emptyset$ חסומה מלמטה, אז $\exists x_n \in B$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf B$.

4. נוסחת סטירלינג

הנוסחה: $n! \simeq \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$. כלומר $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}} = 1$

חדו"א 1א' - שיעור 6

16 בינואר, 2024

יונתן מגר

5. טענות נוספות על התכנסות סדרות

5.1. מבחן השורש הכללי

תהי סדרה $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ו-$\exists 0 \leq \alpha < 1$ ו-$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$a_n^{\frac{1}{n}} \leq \alpha \forall n > n_0$. אזי $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5.1.1. הוכחה

$0 \leq a_n \leq \alpha^n, \forall n > n_0$. מכיוון ש-$\alpha^n$ שואפת ל-0 וכך גם הסדרה הקבועה 0, גם a_n שואפת ל-0 (כלל הסנדוויץ').

$\blacksquare$

5.1.2. שאלה

תהי סדרה $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$. האם הסדרה (a_n) בהכרח מתכנסת? <u>לא</u>. למשל, הסדרה:

$$a_n : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ...$$

ואז $a_n^{\frac{1}{n}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$, אך אין גבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$!

5.2. מבחן השורש הגבולי

תהי סדרה $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ונניח כי $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = P$. אזי:

(1) אם $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftarrow P < 1$.

(2) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftarrow P > 1$.

5.2.1. הוכחה

(1) אם $P < 1$, נבחר $P + \varepsilon < 1 \Leftarrow 0 < \varepsilon < 1 - P$. אז מהגדרת הגבול: $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left| a_n^{\frac{1}{n}} - P \right| < \varepsilon \forall n > n_\varepsilon$. ואז, בפרט, $a_n^{\frac{1}{n}} < P + \varepsilon < 1$. מהמשפט הקודם $(\alpha = P + \varepsilon)$, סיימנו.

(2) אם $P > 1$, נבחר $1 < P - \varepsilon \Leftarrow 0 < \varepsilon < P - 1$. מהגדרת הגבול: $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left| a_n^{\frac{1}{n}} - P \right| < \varepsilon \forall n > n_\varepsilon$. בפרט, $1 < P - \varepsilon < a_n^{\frac{1}{n}} \forall n > n_\varepsilon$. ואז, $1 < (P - \varepsilon)^n < a_n \forall n > n_\varepsilon$.

$\blacksquare$

5.3. מבחן המנה הגבולי

תהי $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

(1) אם $\lim a_n = 0 \Leftarrow L < 1$.

(2) אם $\lim a_n = +\infty \Leftarrow L > 1$.

5.4. מבחן המנה הכללי

(1) נתונה סדרה חיובית (a_n) ונתונים $n_0 \in \mathbb{N}$ ו-$L < 1$ כך ש-$a_{n+1} < L a_n \forall n > n_0$. אזי $\lim a_n = 0$.

(2) נתונה סדרה חיובית (a_n) ונתונים $n_0 \in \mathbb{N}$ ו-$L > 1$ כך ש-$a_{n+1} > L a_n \forall n > n_0$. אזי $\lim a_n = +\infty$.

6. סדרות מונוטוניות

- סדרה (a_n) נקראת **מונוטונית עולה** אם $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, ונקראת **מונוטונית יורדת** אם $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$.
- אם מתקיים $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$ אז הסדרה **עולה ממש**, ואם $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$ אז הסדרה **יורדת ממש**.

6.1. משפט

תהי (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה. אזי, $\exists \lim a_n = \sup a_n$. אם (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, אז $\exists \lim a_n = \inf a_n$.

6.1.1. הוכחה

נוכיח את המקרה הראשון (השני זהה); נסמן $L = \sup a_n$ ונוכיח $\lim a_n = L$. יהי $\varepsilon > 0$ שרירותי. קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$\overbrace{L-\varepsilon < \underbrace{a_{n_\varepsilon} \leq}_{\forall n>n_\varepsilon}}^{L=\sup a_n} \overbrace{a_n \leq L}^{\sup a_n=L} \underbrace{< L+\varepsilon}_{\varepsilon>0}$$

כלומר הוכחנו:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$$

■

6.1.2. דוגמה

נתונה סדרה $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. האם היא מתכנסת?

6.1.3. פתרון

$a_{n+1} = \overbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}^{a_n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ ואז הסדרה מונ' יורדת. מצד שני, $0 < a_n \forall n \in \mathbb{N}$, כלומר הסדרה חסומה מלמטה, ואז לפי המשפט הקודם $\exists \lim a_n$.

6.1.4. דוגמה

נתונה סדרה המוגדרת ע"י $a_1 = \sqrt{6}$ ו-$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \forall n \in \mathbb{N}$. צ"ל כי $\exists \lim a_n$ ולחשב אותו.

6.1.5. פתרון

- נוכיח באינדוקציה כי הסדרה עולה (ברור ש-$a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$).
  (1) $a_2 \geq a_1$: $a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+\sqrt{6}} \geq \sqrt{6} = a_1$.
  (2) נתון $a_n \geq a_{n-1}$ ואז $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \geq \sqrt{6+a_{n-1}} = a_n$.
- נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חסומה מלמעלה.
  (1) $a_1 \leq 3$: $a_1 = \sqrt{6} \leq 3$.
  (2) נתון $a_n \leq 3$ ואז $a_{n+1} = \sqrt{a_n+6} \leq 3$.

לכן $\exists \lim a_n = a$. נחשב את a: מהמשפטים הקודמים $\lim a_{n+1} = a$ וגם $\lim \sqrt{6+a_n} = \sqrt{6+a}$. מכאן מתקיים $a = \sqrt{6+a} \geq 0$. פתרונות המשוואה הריבועית $a^2-a-6=0$ הם $a_1 = 3, a_2 = -2$, כלומר $a = 3$.

■

6.2. טענה

סדרה (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה מתכנסת ל-$+\infty$. בדומה, סדרה (a_n) מונוטונית יורדת ולא חסומה מלמטה מתכנסת ל-$-\infty$.

6.3. סדרה השואפת ל-e

6.3.1. טענה

הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

6.3.2. הוכחה

- עליה:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^{n-j}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{1}{n^j} \\ &= 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{\cancel{(n-j)!}(n-j+1)\cdot\ldots\cdot n}{j!\cancel{(n-j)!}\cdot(n\cdot n\cdot\ldots\cdot n)} \\ &= 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{n-j+1}{n}\cdot\frac{n-j+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\right) \\ &= 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{n}\right) \\ &\le 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{n+1}\right) \\ &\le 1+1+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \end{aligned}$$

- חסימות:

$$\begin{aligned} 2=a_1\le a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \\ &\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{פעמים } n-1}} = 1+1+\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} = 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

■

6.3.3. מסקנה

הסדרה a_n עולה וחסומה מלמעלה, לכן $\exists\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. מסמנים את הגבול ב-$e$ ($2\le e\le 3$).

6.3.4. הערה

בהמשך הקורס רואים שמתקיים גם $e=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$. ניתן לחשב $e=2.71828...$.

6.3.5. טענה (בתרגיל)

תהי $x_n\to+\infty$ (או $x_n\to-\infty$). אזי, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$.

חדו״א 1א׳ - שיעור 7

18 בינואר, 2024

יונתן מגר

7. תתי-סדרות

7.1. דוגמה

תהא סדרה a_n:

$$a_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

ותת-סדרה b_k:

$$b_k : \underbrace{b_1 = \frac{1}{3}}_{(a_3)}, \underbrace{b_2 = \frac{1}{7}}_{(a_7)}, \underbrace{b_3 = \frac{1}{101}}_{(a_{101})}, \ldots$$

7.2. הגדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ הינה **תת-סדרה** (תת״ס) שלה אם קיימת סדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש של מספרים טבעיים (אינדקסים) כך ש-$b_k = a_{n_k}$.

7.2.1. דוגמאות נוספות

נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(1) הסדרה היא תת״ס של עצמה: $n_k = k \Leftarrow b_k = a_k$.
(2) $b_k = a_{2k}$ היא תת״ס של (a_n): $n_k = 2k$.
(3) $b_k = a_{k+1}$ היא תת״ס של (a_n): $n_k = k+1$.
(4) $(2a_k)_{k=1}^{\infty}$ לא תת״ס של (a_n) כי $2ak$ לא בהכרח שווה ל-a_{n_k}:

$$\begin{aligned} a_n &: 1, 3, 5, 7, \ldots \\ 2a_k &: 2, 6, 10, 14, \ldots \end{aligned}$$

7.2.2. שאלה

אם $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת״ס של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ וכן $\left(b_{m_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת״ס של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. האם $\left(a_{n_k} + b_{m_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת״ס של $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$? **לא**:

$$\begin{aligned} a_n &: \mathbf{2}, 4, \mathbf{6}, 8, \ldots \Rightarrow n_k = 2k-1 \\ b_n &: 1, \mathbf{3}, 5, \mathbf{7}, \ldots \Rightarrow m_k = 2k \\ a_n + b_n &: 3, 7, 11, \ldots \end{aligned}$$

אך $a_{n_1} + b_{m_1} = 5$ ולא שייך ל-$(a_n + b_n)$.

7.3. משפט

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהי $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ תת״ס שלה. אזי:

(1) אם הסדרה (a_n) חסומה אז גם כל תת״ס שלה (a_{n_k}) חסומה.
(2) אם הסדרה (a_n) מתכנסת (כולל במובן הרחב) אז גם כל תת״ס שלה (a_{n_k}) מתכנסת (ולאותו הגבול).
(3) אם הסדרה (a_n) מונוטונית עולה (או יורדת) אז גם כל תת״ס שלה (a_{n_k}) מונוטונית עולה (או יורדת).

7.4. לכל סדרה יש תת״ס מונוטונית

7.4.1. למה

אם לסדרה (a_n) אין איבר מקסימלי (למשל, $a_n = n^2$, או $a_n = 1 - \frac{1}{n}$), אזי יש לה תת״ס עולה ממש.

7.4.2. הוכחת הלמה

נסמן $M_n = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \in (a_n)$. נבנה תת״ס עולה ממש בצורה אינדוקטיבית באופן הבא:

נגדיר $n_1 = 1$. מכיוון שלסדרה (a_n) אין איבר מקסימלי, נובע ש-$\exists n_2 > n_1$ כך ש-$a_{n_2} > M_{n_1} = a_1$ (אחרת, M_{n_1} איבר מקסימלי בסדרה וזוהי סתירה).

באופן דומה, $\exists n_3 > n_2$ כך ש-$a_{n_3} > M_{n_2} \geq a_{n_2}$ (אחרת M_{n_2} איבר מקסימלי בסדרה וזוהי סתירה) - וכך הלאה.

נקבל סדרת אינדקסים $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ כך ש-$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < ...$.

■

7.4.3. הוכחת המשפט

תהי (a_n) סדרה. אם ל-(a_n) יש תת״ס מונוטונית עולה ממש - סיימנו.

נניח כי ל-(a_n) אין תת״ס עולה ממש. נבנה כעת באופן אינדוקטיבי תת״ס יורדת. מהלמה הקודמת, נובע שלסדרה (a_n) יש איבר מקסימלי. נסמן איבר זה באופן הבא: $a_{n_1} = \max\{a_n\}$. נתבונן כעת בתת״ס הבאה: $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, a_{n_1+3}, ...$, שגם לה אין תת״ס עולה ממש (הרי שלסדרה המקורית אין תת״ס עולה ממש).

מהלמה הקודמת, נובע שלתת״ס זו יש איבר מקסימלי. נסמן אותו $a_{n_2} = \max\left\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, ...\right\}$. לכן $n_2 > n_1$! ברור כי $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$. לבסוף, נראה כי מתקיים $a_{n_2} \leq a_{n_1}$. כעת ממשיכים בצורה אינדוקטיבית ומקבלים $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ כש-$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq ...$.

■

7.5. משפט בולצנו-ויירשטראס

לכל סדרה חסומה יש תת״ס מתכנסת.

7.5.1. הוכחה

תהי (a_n) סדרה חסומה. לפי המשפט הקודם, יש ל-(a_n) תת״ס $\left(a_{n_k}\right)$ מונוטונית עולה או יורדת. מהמשפט הראשון בהרצאה, נובע כי $\left(a_{n_k}\right)$ חסומה גם כן. אז, $\left(a_{n_k}\right)$ סדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת.

■

7.5.2. מסקנה (משפט בולצנו-ויירשראטס המוכלל)

לכל סדרה יש תת״ס מתכנסת, כולל במובן הרחב.

8. הלמה של קנטור על קטעים מקוננים

נתונות שתי סדרות (a_n) ו-(b_n) המקיימות $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$ ונסמן $I_n = [a_n, b_n]$. נניח כי מתקיים:

(1) הקטעים I_n הינם קטעים מקוננים: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supset I_{n+1} \supseteq \ldots$.

(2) $\lim(b_n - a_n) = 0$.

אזי קיימת נקודה יחידה המשותפת לכל הקטעים: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

8.1. הוכחה

נתון:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

מכאן, (a_n) עולה וחסומה מלמעלה, למשל, ע"י b_1. לכן $\exists \lim a_n = \sup a_n =: a$. בדומה, (b_n) יורדת וחסומה מלמטה, למשל, ע"י a_1. לכן $\exists \lim b_n = \inf b_n =: b$. נקבל $a = b \Leftarrow 0 = \lim(b_n - a_n) = b - a$. נראה כעת שהנקודה $a = b$ הינה הנקודה המבוקשת c. ברור כי

$$\forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq \sup a_n = a = b = \inf b_n \leq b_m$$

כלומר, $a = b \in I_m, \forall m \in \mathbb{N}$. מכאן, $\exists a = b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

כדי להוכיח את יחידות הנקודה הנ"ל, נניח בשלילה כי: $\exists a' \neq a$, כך ש-$\forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq a' \leq b_m$. נשים לב כי a_m ו-b_m שואפות ל-a, ומכלל הסנדוויץ' מתקיים כי $a' = \lim a' = a$ - בסתירה.

■

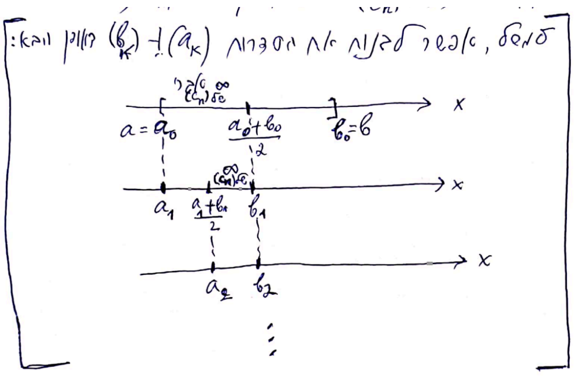
8.2. הוכחה נוספת למשפט בולצנו-ויירשטראס (אריה במדבר)

תהי (c_n) סדרה חסומה בקטע $[a, b]$. צ"ל שקיימת תת"ס $\left(c_{n_k}\right)$ מתכנסת.

נגדיר שתי סדרות $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ ו-$(b_k)_{k=0}^{\infty}$ באופן הבא:

$$a_0 = a \wedge b_0 = b$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k < b_k$$
$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$$
$$(a_k) \uparrow \wedge (b_k) \downarrow$$

ואינסוף מאיברי הסדרה (c_n) מוכלים בקטע $[a_k, b_k]$ לכל k טבעי.



ואז לפי הלמה של קנטור $\exists c \in \bigcap_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k]$ יחיד. נוכיח כעת ש-c הינו הגבול של איזושהי תת"ס של (c_n). נבנה תת"ס המתכנסת ל-c: נבחר $c_{n_1} \in [a_1, b_1]$ ו-$n_2 > n_1$, $c_{n_2} \in [a_2, b_2]$ וכו' ומתקיים $n_k > n_{k-1}$ ו-$c_{n_k} \in [a_k, b_k]$ לכל $k \geq 3$ באופן אינדוקטיבי. נראה כי $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k$, ומכלל הסנדוויץ' $c_{n_k} \to c$.

■