# מבוא לתורת הקבוצות - הרצאה 5

07 באוגוסט, 2023

**יונתן מגר**

## יחס שקילות

$R \subseteq X \times X$ נקרא "יחס שקילות" אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. במקרה זה נהוג לסמן $\sim$ במקום $R$.

### דוגמות

(1) יחס על הממשיים החיוביים המוגדר ע"י $x \sim y$ אם $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

(2) יחס על ערים: "אפשר להגיע מעיר אחת לשנייה בלי לחצות נהר".

(3) יחס על תלמידים: "לשבת באותה שורה".

(4) יחס על אנשים: "להיות מאותו מין".

(5) יחס על הממשיים הנתון ע"י $x \sim y$ אם $x - y \in \mathbb{Z}$.

## מחלקות שקילות

תהי $X$ קבוצה ו-$\sim$ יחס שקילות על $X$. מחלקת שקילות זוהי תת-קבוצה $A$ של $X$ המקיימת:

- לכל $x, y \in A$ מתקיים $x \sim y$.
- אם $x \in A$ ו-$x \sim z$ אז $z \in A$.

מחלקת שקילות המכילה את $x$ מסומנת ב-$\overline{x}$ או ב-$[x]$, ואומרים ש-$x$ הוא מייצג/נציג שלה (כמובן $x \sim y \Leftrightarrow [y] = [x]$).

### דוגמות (בהתאמה לדוגמות הקודמות)

(1) מחלקות שקילות לדוגמה: $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ וגם $\sqrt{2} * \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(3) כל שורה היא מחלקת שקילות.

(5) מחלקות שקילות לדוגמה: $\mathbb{Z}$ וגם $\mathbb{R} + 0.3$.

- **משפט**: תהי $X$ קבוצה ו-$\sim$ יחס שקילות על $X$, אז אוסף מחלקות השקילות $\overline{X} := \{\overline{x} \mid x \in X\}$. אוסף זה משרה חלוקה של $X$ לתת-קבוצות זרות שאיחודן הוא $X$.

- **הוכחה**: נראה שהאיחוד הינו $X$ כולו. נניח $x \in X$ הקבוצה $\overline{x}$ הינה מחלקת שקילות, ומרפלקסיביות היא מכילה את $x$. נראה שמדובר באיחוד זר: נניח $A, B \in \overline{X}$. נראה כי $A \cap B = \emptyset$ או $A = B$. אחרת, נניח כי $x \in A \cap B$. נראה כי $A = \overline{x} \wedge B = \overline{x}$. $x \in A$ ולכן אם $x \sim y$, נקבל ש-$A$ מחלקת שקילות מהתכונה השנייה ש-$y \in A$. כעת נבדוק $A \subseteq \overline{x}$: נניח $y \in A$. אז מהתכונה הראשונה וזה ש-$x \in A$ נקבל $y \sim x$ ולכן $y \in \overline{x}$ ולכן $A = B$.

## מרחב מנה

$\overline{X}$ נקרא מרחב המנה של $X$ ביחס ל-$\sim$ ומסומן ב-$x/\sim$. מערכת נציגים של $X$ ביחס ל-$\sim$ היא תת-קבוצה של $X$ המכילה בדיוק איבר אחד מכל מחלקת שקילות. העובדה שלכל יחס שקילות קיימת מערכת נציגים נובעת מאקסיומת הבחירה ויש יחסי שקילות שברור איזו מערכת נציגים מתאימה להם. באופן טבעי, ביחס $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ על $\mathbb{R}$ מתאימה מערכת הנציגים $[0, 1)$.

### דוגמות

(1) יהי $p \in \mathbb{N}$ ונגדיר על השלמים יחס $x \sim y$ כך: $x = y + kp$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$. ז"א $x - y$ מתחלק ב-$p$ ללא שארית. ישנן $p$ מערכות שקילות. אפשר לבחור מערכת נציגים $\{0, 1, ..., p-1\}$. נרשום $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/\sim = \left\{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{p-1}\right\}$.

(2) בנייה של הרציונאליים: נגדיר יחס על $\left(\mathbb{Z}^{+}\right)^2$ כך - $(m', n') \sim (m, n)$ אם $mn' = m'n$.
מחלקות השקילות מתאימות ל-$\mathbb{Z}^{+}$. ז"א, קיבלנו הגדרה של $\mathbb{Q}$ באמצעות השלמים ופעולת הכפל בלבד:

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Z}^{+}\right)^2 \cup \{0\}$$

נשים לב כי $\mathbb{Q}$ לא מכיל את $\mathbb{Z}$, אך מכיל "עותק" של $\mathbb{Z}$ : $\{(m, 1) \mid m \in \mathbb{Z}^{+}\} \cup \{0\}$.

ההגדרה של קבוצה באמצעות מחלקות שקילות דורשת, למשל שכשמגדירים כל מיני פעולות על $\mathbb{Q}$ כמו חיבור, את הגדרת הפעולות על נציגים של מחלקות שקילות: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$. נוכל לוודא שהגדרה זו היא טובה ע״י כך שנוודא שהיא אינה תלויה בבחירת הנציג. כלומר, אם ניקח $(m,n)\sim(m',n'),(p,q)\sim(p',q')$ אז נצפה ש-$(mq+np,nq)\sim(m'q'+n'p',n'q')$.

# עוצמות ומונים

## שקילות של קבוצות

בהינתן $A$ ו-$B$ קבוצות, נאמר כי הן שקולות אם קיימת העתקה חח״ע ועל ביניהן: $f:A\to B$. העתקה כזו נקראת פונקצית שקילות. במקרה כזה, נסמן $A\sim B$ או $|A|=|B|$. זהו **לא** יחס, כי הוא מוגדר על זוגות של קבוצות, ואוסף כל הקבוצות אינו קבוצה בעצמו. יחד עם זאת, נוח להשתמש בסימון $\sim$ כי התכונה ״שקילות קבוצות״ היא רפלקסיבית, טרנזיטיבית וסימטרית.

**טענה:** נניח $A,A',B,B'$, ונניח $A\sim B\wedge A'\sim B'$ וגם $A\cap A'=\emptyset,B\cap B'=\emptyset$ אז $A\uplus A'\sim B\uplus B'$.

**הוכחה:** $f:A\to B$ פונ׳ שקילות ו-$g:A'\to B'$ פונ׳ שקילות. אז $f=A\times B\wedge g=A'\times B'$. נקבל:

$$h=f\cup g=(A\cup A')\times(B\cup B')$$

ומאחר והאיחוד $A\cup A'=\emptyset$ נקבל פונקציה. מאחר ו-$f$ ו-$g$ הן חח״ע ו-$B\cup B'$ זר נקבל כי $h$ חח״ע.

מאחר ו-$f$ ו-$g$ על, נקבל כי $h$ על.

■

## עוצמות ומונים

**הנחה:** קיימת מחלקה Card של קבוצות (בקורס זה לא נגדיר מחלקה, אך נדגיש שאנו לא טוענים שהיא חייבת להיות קבוצה) כך שלכל קבוצה $X$ קיימת קבוצה יחידה $A\in\text{Card}$ כך ש-$|A|=|X|$. לאוסף $\{a=|A|\mid A\in\text{Card}\}$ קוראים עוצמות (נשים לב כי לא הגדרנו מה זה $|A|$).

- נגדיר קבוצה סופית בת $n$ איברים להיות קבוצה ששקולה לקבוצה $\{0,1,...,n-1\}$.
- קבוצה נקראת בת-מניה אם היא שקולה לטבעיים.
- בהינתן שתי עוצמות $a,b$ נאמר כי $a\leq b$ אם עבור נציגים $A,B$ כך ש-$|A|=a,|B|=b$ קיימת העתקה חח״ע $f:A\to B$.
- נאמר כי $a<b$ אם $a\leq b\wedge a\neq b$. כלומר, קיימת $f:A\to B$ חח״ע אך לא קיימת $f:A\to B$ חח״ע ועל.

**הערה:** רשמנו $\leq$ אך זהו לא היחס הרגיל שאנו מכירים עבור מספרים. זו הגדרה של תכונה על קבוצות ולכן העובדה $a\leq b\wedge b\leq a\Rightarrow a=b$ היא אמנם נכונה, אך דורשת הוכחה. זהו משפט מרכזי בשם ״קנטור-שרדר-ברנשטיין״. גם הטענה כי כל צמד עוצמות הוא בר-השוואה דורשת הוכחה.

#### דוגמות

(1) קל להראות $|\{a\}|<|\{b,c\}|$ כי יש העתקה חח״ע (לדוגמה $a\mapsto b$) ואין העתקה שהיא גם חח״ע וגם על כי יש רק שתי העתקות (והן לא על).

(2) קל להראות $|\mathbb{N}|\leq|\mathbb{Q}\cap[0,1]|$. לדוגמה, $f(n)=\frac{1}{n}$ חח״ע.

(3) מתקיים $|P(X)|=\left|2^X\right|$. הוכחנו ע״י ההתאמה של $A\mapsto\chi_A$ הפונקציה האופיינית.

**טענה:** $A,X,Y$ קבוצות כך ש-$X\sim Y$. אז $A^X\sim A^Y\wedge X^A\sim Y^A$.

**מסקנה:** $A\sim B\wedge C\sim D\Rightarrow A^C\sim B^D$. לכן, נוח לסמן $2^a=\left|\{0,1\}^A\right|$ כאשר $|A|=a$ וגם $a^b=\left|A^B\right|$ כאשר $|A|=a$ ו-$|B|=b$.

(4) האלכסון של קנטור: $|\mathbb{N}|<\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$. נוכל להוכיח: $|\mathbb{N}|\leq\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$ ע״י התאמת $n\in\mathbb{N}$ לסדרה בה בכל מקום $m\neq n$ יופיע 0 ובמקום ה-$n$-י יופיע 1.

נראה שלא קיימת פונ׳ חח״ע ועל $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. נניח בשלילה שקיימת, ונביט באיבר מסוים של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הנתון ע״י $x_n = x(n) = 1 - f(n)_n$. מההנחה ש-$f$ על, נקבל כי סדרה זו צריכה להיות $f(k)$ ל-$k \in \mathbb{N}$ בסתירה לכך ש-$x_k$ שונה מ-$f(k)$ במקום ה-$k$.