מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 10

04 בספטמבר, 2023

יונתן מגר

חשבון עוצמות

תזכורת - חיבור

עבור a,b עוצמות, ו-$|A|=a\wedge|B|=b$ כך ש-$A\cap B=\emptyset$, מגדירים $a+b=|A\uplus B|$. מתקיימת חילופיות, קיבוציות, יחס סדר וכו'. נשים לב שאם ניקח $a=0,a'=1,b=\aleph_0$ $a+b=a'+b$.

דוגמות

- $\forall n.n+\aleph_0=\aleph_0$
- $\aleph_0+\aleph=\aleph$
- $\forall n.n+\aleph=\aleph$
- $\forall a\geq\aleph_0.n+a=a$
- $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$
- $\aleph+\aleph=\aleph$
- למעשה לכל עוצמה a אינסופית מתקיים $a+a=a$.

כפל

תהיינה a,b עוצמות. יהיו A,B קבוצות כך ש-$|A|=a$, $|B|=b$, נגדיר $a\cdot b=|A\times B|$.

- **טענה**: ההגדרה טובה, כלומר לא תלויה במייצגים. מתקיים:
  - $a\cdot b=b\cdot a$
  - $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
  - $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
  - מתאים ליחס הסדר על עוצמות.
  - $a\leq a',b\leq b'\Rightarrow a\cdot b\leq a'\cdot b'$
  - הכל מתאים לכפל על הטבעיים.
  - וכמובן $a\cdot a=a,a\cdot 0=0$.

דוגמות

- $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
- $n\cdot\aleph_0=\aleph_0$
- $\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$
- $n\cdot\aleph=\aleph$

חזקה

תהיינה a,b עוצמות עם $b\neq 0$. יהיו A,B קבוצות כך ש-$|A|=a$, $|B|=b$, נגדיר $\left|A^B\right|=a^b$. נגדיר $a^0=1$ לכל a.

- **טענה**: ההגדרה טובה, כלומר לא תלויה במייצגים. מתקיים:
  - $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$ - כי $A^{B\uplus C}\sim A^B\times A^C$.
  - $(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$ - כי $(A\times B)^C\sim A^C\times B^C$.
  - $a^{b\cdot c}=\left(a^b\right)^c$ - כי $A^{B\times C}\sim\left(A^B\right)^C$.
  - מתאימה להגדרת החזקה על הטבעיים.

  נוכיח: בהינתן $f:C\to A^B$. על כל איבר ב-C היא מתאימה פונ' מ-B ל-A באופן הבא: $g(b,c)=f((c))(b)$. כדי להראות שההתאמה $f\mapsto g$ חח"ע ועל נמצא את ההופכית. כלומר, בהינתן $g:B\times C\to A$ נגדיר את $f:C\to A^B$ ע"י כך שנתאים לכל איבר c את איך ש-$f(c)$ פועלת על b: $(f(c))(b)=g(b,c)$.
  - $\forall a.1^a=1$, $\forall a.a^1=a$, $|P(A)|=2^{|A|}$

דוגמות

- $\aleph \cdot \aleph = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.
- $2^{\aleph} \cdot 2^{\aleph} = 2^{\aleph+\aleph} = 2^{\aleph}$
- $\aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
- $\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$

מה עוצמת קבוצת הפונקציות הרציפות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$? תשובה: יש לפחות א כי כל הפונקציות הקבועות הן רציפות. מצד שני, פונקציה רציפה נקבעת על פי הערכים שלה, על $\mathbb{Q}$ ולכן העוצמה היא לכל היותר $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$. לכן העוצמה היא א.

אקסיומת הבחירה

ניסוח ראשון

המכפלה הקרטזית של משפחה לא ריקה של קבוצות לא ריקות אינה ריקה. כלומר, $\forall I, i \in I, A_i \neq \emptyset \exists f \in \prod_{i \in I} A_i$ שזוהי $f \in (\cup_{i \in I} A_i)^I$ כך ש-$\forall i \in I . f(i) \in A_i$.

ניסוח שני

לכל קבוצה X קיימת פונקציה $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ כך ש-$f(A) \in A$ לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$.

- **טענה**: הניסוחים שקולים. הוכחה ברשימות (9.1: להוסיף אח"כ).