מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 10

23 באוגוסט, 2023

יונתן מגר

העוצמה א

נסמן $\aleph = |[0,1]|$. כדי להגדיר את הממשיים ובפרט את $[0,1]$ משתמשים באקסיומת השלמות: "קיימת קבוצה כך שלכל תת-קבוצה חסומה שלה יש חסם מלעיל מינימלי". לעוצמה א קוראים **עוצמת הרצף**.

$\aleph \neq \aleph_0$

נוכיח: נשתמש בלמה של קנטור מהקורס חדו"א 1 - "בהינתן סדרה $\{I_j\}$ של קטעים סגורים מקוננים $I_{j+1} < I_j$ המקיימת $|I_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, מתקיים כי $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{c\}$".

תהי $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ חח"ע. נבנה סדרת קטעים $I_j \subseteq [0,1]$ מקוננים כאשר $x_j = f(j) \notin I_j$: ראשית, נחלק את $[0,1]$ לשלושה חלקים שווים - $\left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$. לפחות באחד מהם $x_1 = f(1)$ לא נמצא. נעיר כי חילקנו לשלושה קטעים ולא לשניים כי אחרת x_1 היה יכול להיות בדיוק בנקודה המשותפת. נסמן קטע זה ב-I_1. עתה נחלק את I_1 לשלושה קטעים זרים כך שאיחודם שווה ל-I_1. לפחות באחד מהם x_2 לא נמצא. נסמן את הקטע ב-I_2 ונשים לב כי $x_2 \notin I_2 \subseteq I_1$. נמשיך באינדוקציה לבנות $x_j \notin I_j \subseteq I_{j-1}$. גודלו של I_j הינו $\left(\frac{1}{3}\right)^j$, ו-$|I_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. לפי הלמה של קנטור קיים $c \in [0,1]$ כך ש-$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{c\}$, ו-$x_j \neq c$ לכל $1 \leq j < \infty$. כלומר $c \notin \operatorname{im}(f)$ ולכן f לא על $[0,1]$.

■

נרצה להציג כל מספר ממשי כשבר בינארי אינסופי. קיים מכשול קטן - ישנם מספרים בעלי שני ייצוגים שונים. למשל, את $\frac{1}{2}$ ניתן לכתוב באמצעות שבר בינארי בשתי דרכים: $0.100\ldots$ או $0.0111\ldots$. אך אלה מספרים מיוחדים ואין הרבה כאלה.

למה:

תהיינה X, Y קבוצות כך ש-$|Y| \leq \aleph_0$.

(1) אם X אינסופית, $X \cup Y \sim X$.

(2) אם $|X \cup Y| > \aleph_0$, אז $X \cup Y \sim X$.

נוכיח:

(1) נניח בה"כ כי X, Y זרות (אחרת, נחליף את Y ב-$Y \setminus X$). בשיעור הקודם, ראינו שכל קבוצה אינסופית מכילה תת-קבוצה בת-מניה. לכן $X = X_0 \uplus X_1$ כאשר $|X_0| = \aleph_0$. לכן, ממשפט מהשיעור שעבר, $X_0 \cup Y \sim X_0$ ומכך נקבל $X \cup Y = X_0 \uplus X_1 \uplus Y$. מכיוון שהאיחוד הוא חילופי, קיבלנו $X_0 \cup X_1 = X$.

■

(2) נניח בשלילה כי X סופית. מהשיעור הקודם, נקבל כי $|X \cup Y| \leq \aleph_0$ בסתירה לנתון ולכן הטענה נובעת מ-(1).

■

$\aleph = 2^{\aleph_0}$

נוכיח: ראינו כי $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (סדרות אינסופיות ב"מ של אפסים ואחדות) היא קבוצה מעוצמה $2^{\aleph_0}$. נביט בתת-הקבוצה הבאה של $[0,1]^{\mathbb{N}}$: $D = \left\{\varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \varepsilon_n = 0\right\}$. כלומר, סדרות שהן רצף אפסים החל ממקום מסוים. אז לפי הלמה, נקבל כי $E := \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus D \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, מכיוון ש-$D$ היא ב"מ כאיחוד ב"מ של קבוצות סופיות (כשקובעים n_0 מקבלים קבוצה סופית). נגדיר העתקה חח"ע $f : E \to [0,1]$ (ונקבל ש-$2^{\aleph_0} \leq \aleph$) באופן הבא:

$$0 < f(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m 2^{-m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

העובדה שההעתקה מוגדרת נובעת מכך שהטור חסום בין 0 ל-1.

נראה כי f חח"ע: נניח $\delta \neq \varepsilon$ כך ש $\varepsilon, \delta \in E$. לכן, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ראשון כך ש-$\varepsilon_{n_0} \neq \delta_{n_0}$. כלומר, $\varepsilon_i = \delta_i$ לכל $i = 1, ..., n_0 - 1$. בה"כ נקבע $\varepsilon(n_0) = 1$ ו-0 $\delta_{n_0} = 0$. נקבל:

$$f(\varepsilon) - f(\delta) = \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i} = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i} > \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{-1}{2^i} = \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{1}{2^{n_0+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 0$$

כלומר $f(\varepsilon) \neq f(\delta)$ (הרי שההפרש גדול מ-0).

בכיוון השני ($2^{\aleph_0} \leq$ א) נגדיר העתקה $g : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ חח"ע על ידי כך שנבטיח שאם $g(x) = \varepsilon$ אז מתקיים כי $x = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m 2^{-m}$. החח"ע מובטחת כי אם $x \neq y$, $\varepsilon = g(x) \neq g(y) = \delta$ אחרת אם $\varepsilon = \delta$ נקבל שני גבולות שונים לאותו הטור. עבור $x \in [0,1)$ נגדיר את $\varepsilon = g(x)$ באינדוקציה על ε_n:

- בסיס: נבחר את ε_1 באופן הבא: $0 \leq x - \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{1}{2}$, כלומר אם $0 \leq x < \frac{1}{2}$ נבחר $\varepsilon_1 = 0$, אחרת נבחר $\varepsilon_1 = 1$.
- (לא חובה) את ε_2 נבחר כך ש-$0 \leq x - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_2}{4} \leq \frac{1}{4}$. אם $0 \leq x - \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{1}{4}$ נבחר $\varepsilon_2 = 0$, אחרת $\varepsilon_2 = 1$.
- נמשיך באינדוקציה ונניח כי בחרנו ε_i לכל $1 \leq i \leq n-1$ כך ש-

$$0 \leq x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 0 \leq y = 2^{n-1}x - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \cdot 2^{n-1-i} < 1$$

נבחר את ε_n באופן הבא:

$$0 \leq x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} - \frac{\varepsilon_n}{2^n} < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 0 \leq 2^{n-1}x - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i 2^{n-i-1} - \frac{\varepsilon_n}{2} < \frac{1}{2}$$

אם $0 \leq y < 1$ נבחר $\varepsilon_n = 0$ אחרת נבחר $\varepsilon_n = 1$.

סה"כ לכל $n \in \mathbb{N}$ נקבל כי $x - \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m 2^{-m} < 2^{-n}$ ומכך $x = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m 2^{-m}$. לכן הראנו כי g חח"ע. לכן, קיבלנו כי $2^{\aleph_0} \leq$ א ומקש"ב נקבל שוויון.

■

מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים

מספר ממשי שהוא פתרון של המשוואה $p(x) = 0$ כאשר p הוא פולינום עם מקדמים שלמים. מספר נקרא טרנסצנדנטי אם הוא אינו אלגברי. נסמן ב-$\mathbb{R}_{\text{trans}}$ וב-$\mathbb{R}_{\text{alg}}$ את תתי-הקבוצות הקבוצות המתאימות. למשל, $\sqrt{2}$ וגם פתרון של המשוואה $x^7 - 17x^6 + 30x + 4 = 0$ הם מספרים אלגבריים.

מהמשפט הקודם, נובע כי ישנם $_0$א מספרים אלגבריים, ו-א מספרים טרנסצנדנטיים. נוכיח: יש $_0$א פולינומים עם מקדמים שלמים, לכן $_0$א $= |\mathbb{R}_{\text{alg}}|$, אולם $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\text{alg}} \uplus \mathbb{R}_{\text{trans}}$, ולכן מהלמה מתחילת השיעור א $= |\mathbb{R}_{\text{trans}}| = |\mathbb{R}| = |[0,1]|$.

■

חשבון עוצמות

חיבור

תהיינה a, b עוצמות, ויהיו A, B קבוצות זרות, כך ש-$|A| = a$ ו-$|B| = b$. נגדיר $a + b = |A \uplus B|$. נראה כי:

(1) ההגדרה טובה: כלומר, קיימות קבוצות זרות מכל עוצמה ואין תלות בבחירת המייצגים.
(2) החיבור חילופי (נובע מהגדרת איחוד).
(3) החיבור אסוציאטיבי (נובע מהגדרת איחוד).
(4) החיבור מותאם ליחס סדר על עוצמות: $a \leq a', b \leq b'$ מקיים $a + b \leq a' + b'$.
(5) החיבור מתאים להגדרה על הטבעיים: $a + 0 = a$ לכל a.