חדוא 1א׳ - שיעור 7

18 בינואר, 2024

יונתן מגר

תתי-סדרות

דוגמה

תהא סדרה a_n:

$$a_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

ותת-סדרה b_k:

$$b_k : \underbrace{b_1 = \frac{1}{3}}_{(a_3)}, \underbrace{b_2 = \frac{1}{7}}_{(a_7)}, \underbrace{b_3 = \frac{1}{101}}_{(a_{101})}, \dots$$

הגדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ הינה **תת-סדרה** (תת״ס) שלה אם קיימת סדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש של מספרים טבעיים (אינדקסים) כך ש-$b_k = a_{n_k}$.

דוגמאות נוספות

נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(1) הסדרה היא תת״ס של עצמה: $n_k = k \Leftarrow b_k = a_k$.
(2) $b_k = a_{2k}$ היא תת״ס של (a_n): $n_k = 2k$.
(3) $b_k = a_{k+1}$ היא תת״ס של (a_n): $n_k = k + 1$.
(4) $(2a_k)_{k=1}^{\infty}$ לא תת״ס של (a_n) כי $2ak$ לא בהכרח שווה ל-a_{n_k}:

$$a_n : 1, 3, 5, 7, \dots$$
$$2a_k : 2, 6, 10, 14, \dots$$

שאלה

אם $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת״ס של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ וכן $\left(b_{m_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת״ס של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. האם $\left(a_{n_k} + b_{m_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא תת״ס של $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$? **לא**:

$$a_n : \mathbf{2}, 4, \mathbf{6}, 8, \dots \Rightarrow n_k = 2k - 1$$
$$b_n : 1, \mathbf{3}, 5, \mathbf{7}, \dots \Rightarrow m_k = 2k$$
$$a_n + b_n : 3, 7, 11, \dots$$

אך $a_{n_1} + b_{m_1} = 5$ ולא שייך ל-$(a_n + b_n)$.

משפט

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהי $\left(a_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ תת״ס שלה. אזי:

(1) אם הסדרה (a_n) חסומה אז גם כל תת״ס שלה (a_{n_k}) חסומה.
(2) אם הסדרה (a_n) מתכנסת (כולל במובן הרחב) אז גם כל תת״ס שלה (a_{n_k}) מתכנסת (ולאותו הגבול).
(3) אם הסדרה (a_n) מונוטונית עולה (או יורדת) אז גם כל תת״ס שלה (a_{n_k}) מונוטונית עולה (או יורדת).

לכל סדרה יש תת"ס מונוטונית

למה

אם לסדרה (a_n) אין איבר מקסימלי (למשל, $a_n = n^2$, או $a_n = 1 - \frac{1}{n}$), אזי יש לה תת"ס עולה ממש.

הוכחת הלמה

נסמן $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ $M_n = \max$ $\ni (a_n)$. נבנה תת"ס עולה ממש בצורה אינדוקטיבית באופן הבא:

נגדיר $n_1 = 1$. מכיוון שלסדרה (a_n) אין איבר מקסימלי, נובע ש-$\exists n_2 > n_1$ כך ש-$a_{n_2} > M_{n_1} = a_1$ (אחרת, M_{n_1} איבר מקסימלי בסדרה וזוהי סתירה).

באופן דומה, $\exists n_3 > n_2$ כך ש-$a_{n_3} > M_{n_2} \geq a_{n_2}$ (אחרת M_{n_2} איבר מקסימלי בסדרה וזוהי סתירה) - וכך הלאה.

נקבל סדרת אינדקסים $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ כך ש-$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < ...$.

■

הוכחת המשפט

תהי (a_n) סדרה. אם ל-(a_n) יש תת"ס מונוטונית עולה ממש - סיימנו.

נניח כי ל-(a_n) אין תת"ס עולה ממש. נבנה כעת באופן אינדוקטיבי תת"ס יורדת. מהלמה הקודמת, נובע שלסדרה (a_n) יש איבר מקסימלי. נסמן איבר זה באופן הבא: $a_{n_1} = \max\{a_n\}$. נתבונן כעת בתת"ס הבאה: $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, a_{n_1+3}, ...$, שגם לה אין תת"ס עולה ממש (הרי שלסדרה המקורית אין תת"ס עולה ממש).

מהלמה הקודמת, נובע שלתת"ס זו יש איבר מקסימלי. נסמן אותו $a_{n_2} = \max\left\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, ...\right\}$. לכן $n_2 > n_1$! ברור כי $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$. לבסוף, נראה כי מתקיים $a_{n_2} \leq a_{n_1}$. כעת ממשיכים בצורה אינדוקטיבית ומקבלים $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ כש-$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq ...$.

■

משפט בולצנו-ויירשטראס

לכל סדרה חסומה יש תת"ס מתכנסת.

הוכחה

תהי (a_n) סדרה חסומה. לפי המשפט הקודם, יש ל-(a_n) תת"ס $\left(a_{n_k}\right)$ מונוטונית עולה או יורדת. מהמשפט הראשון בהרצאה, נובע כי $\left(a_{n_k}\right)$ חסומה גם כן. אז, $\left(a_{n_k}\right)$ סדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת.

■

מסקנה (משפט בולצנו-ויירשראטס המוכלל)

לכל סדרה יש תת"ס מתכנסת, כולל במובן הרחב.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים

נתונות שתי סדרות (a_n) ו-(b_n) המקיימות $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$ ונסמן $I_n = [a_n, b_n]$. נניח כי מתקיימים:

(1) הקטעים I_n הינם קטעים מקוננים: $... \supseteq I_{n+1} \supset I_n \supseteq ... \supseteq I_3 \supseteq I_2 \supseteq I_1$.

(2) $\lim(b_n - a_n) = 0$.

אזי קיימת נקודה יחידה המשותפת לכל הקטעים: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

הוכחה

נתון:

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_2 \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

מכאן, (a_n) עולה וחסומה מלמעלה, למשל, ע״י b_1. לכן $\exists \lim a_n = \sup a_n =: a$. בדומה, (b_n) יורדת וחסומה מלמטה, למשל, ע״י a_1. לכן $\exists \lim b_n = \inf b_n =: b$. נקבל $a = b \Leftarrow 0 = \lim(b_n - a_n) = b - a$. נראה כעת שהנקודה $a = b$ הינה הנקודה המבוקשת c. ברור כי

$$\forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq \sup a_n = a = b = \inf b_n \leq b_m$$

כלומר, $a = b \in I_m, \forall m \in \mathbb{N}$. מכאן, $\exists a = b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

כדי להוכיח את יחידות הנקודה הנ״ל, נניח בשלילה כי: $\exists a' \neq a$, כך ש-$\forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq a' \leq b_m$. נשים לב כי a_m ו-b_m שואפות ל-a, ומכלל הסנדוויץ׳ מתקיים כי $a' = \lim a' = a$ - בסתירה.

■

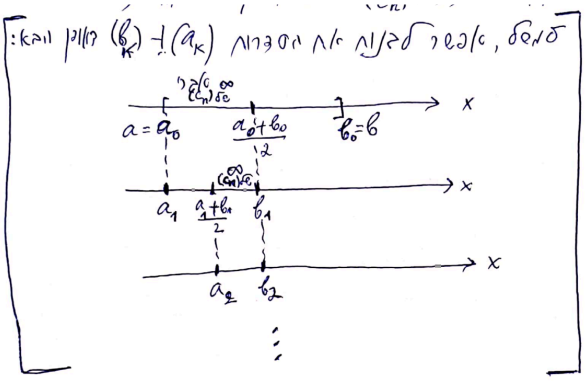
הוכחה נוספת למשפט בולצנו-ויירשטראס (אריה במדבר)

תהי (c_n) סדרה חסומה בקטע $[a, b]$. צ״ל שקיימת תת״ס $\left(c_{n_k}\right)$ מתכנסת.

נגדיר שתי סדרות $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ ו-$(b_k)_{k=0}^{\infty}$ באופן הבא:

$$a_0 = a \wedge b_0 = b$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k < b_k$$
$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$$
$$(a_k) \uparrow \wedge (b_k) \downarrow$$

ואינסוף מאיברי הסדרה (c_n) מוכלים בקטע $[a_k, b_k]$ לכל k טבעי.



ואז לפי הלמה של קנטור $\exists c \in \bigcap_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k]$ יחיד. נוכיח כעת ש-c הינו הגבול של איזושהי תת״ס של (c_n). נבנה תת״ס המתכנסת ל-c: נבחר $c_{n_1} \in [a_1, b_1]$ ו-$n_2 > n_1$, $c_{n_2} \in [a_2, b_2]$ וכו׳ ומתקיים $n_k > n_{k-1}$ ו-$c_{n_k} \in [a_k, b_k]$ לכל $k \geq 3$ באופן אינדוקטיבי. נראה כי $a_k \leq c_{n_k} \leq b_k$, ומכלל הסנדוויץ׳ $c_{n_k} \to c$.

■