מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 7

14 באוגוסט, 2023

יונתן מגר

מספרים טבעיים

המטרה היא לבחור מייצגים לעוצמות ספציפיות (הנקראות מספרים טבעיים). ההגדרה היא רקורסיבית (משפט הרקורסיה - מוכיח באמצעות אינדוקציה שבתורה נובעת מהגדרת המספרים הטבעיים). נגדיר:

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \{\emptyset\} = \{0\} = 0 \cup \{0\}$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\}$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\}$$

$$\vdots$$

$$n + 1 := n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, ..., n\}$$

אקסיומת האינסוף (או אקסיומת האינדוקציה)

קיימת קבוצה X המכילה את $\emptyset$ וכן לכל $x \in X$ מתקיים $x \cup \{x\} \in X$.

הגדרה (המספרים הטבעיים)

נבחר X כלשהי המקיימת את האקסיומה. נגדיר את הטבעיים להיות הקבוצה המתקבלת מחיתוך כל הקבוצות המוכלות ב-X המקיימות את התנאי באקסיומה.

טענה

הגדרת הטבעיים אינה תלויה בבחירת הקבוצה המקורית X המקיימת את האקסיומה.

הוכחה

תהיינה X, Y קבוצות המקיימות את האקסיומה. נסמן ב-$\mathbb{N}_X, \mathbb{N}_Y$ את הטבעיים המתקבלים לפי ההגדרה מ-X או מ-Y בהתאמה. נסמן $Z = X \cap Y$. נשים לב כי Z בעצמו מקיים את האקסיומה. לכן, נסמן ב-$\mathbb{N}_Z$ את הטבעיים המתקבלים לפי ההגדרה מ-Z. נראה כי $\mathbb{N}_Z = \mathbb{N}_X$ (ובאופן דומה נקבל $\mathbb{N}_Z = \mathbb{N}_Y$). אכן, משום ש-$Z \subseteq X$ כל קבוצה שמקיימת את האקסיומה ומוכלת ב-Z משתתפת בחיתוך שמגדיר את $\mathbb{N}_X$ ולכן נקבל $\mathbb{N}_X \subseteq \mathbb{N}_Z$. נשים לב כי $\mathbb{N}_X$ מקיימת את האקסיומה ו-$\mathbb{N}_X \subseteq \mathbb{N}_Z \subset Z$ ולכן משתתפת בחיתוך שמגדיר את $\mathbb{N}_Z$ ולכן $\mathbb{N}_Z \subseteq \mathbb{N}_X$ וקיבלנו שוויון.

■

יחס סדר על הטבעיים

יחס סדר חלש (חזק) - יחס על קבוצה המקיים רפלקסיביות (רק לחלש), טרנזטיביות ואנטי-סימטרי חלש (חזק).

(1) נגדיר יחס סדר על $\mathbb{N}$: $n < m$ אם $n \in m$. בדקו כי זהו יחס סדר חזק (טרנזיטבי ואנטי-סימטרי חזק).

(2) נגדיר $n \leq m$ אם $n \subseteq m$ (בהמשך נראה שזה שקול לכך ש-$n < m$ או $n = m$). בדקו כי זהו יחס סדר חלש.

יחס סדר חלש (חזק) יקרא מלא אם לכל x, y $(x \neq y)$ מתקיים $x \leq y$ $(x < y)$ או $y \leq x$ $(y < x)$. נרצה להראות בהמשך כי היחסים שהגדרנו על הטבעיים הינם מלאים.

עקרון האינדוקציה

אם P היא תכונה אפשרית של איברי $\mathbb{N}$ והקבוצה הריקה מקיימת את התכונה, ומראים ש-$P(x) \Rightarrow P(x \cup \{x\})$ אז כל הטבעיים מקיימים את P ($P(x)$ אומר ש-x מקיימת את P).

הוכחה

נסמן ב-$X \subseteq \mathbb{N}$ את קבוצת האיברים המקיימים את התכונה P. אז $\emptyset \in X$ ולכל $x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X$ אז X מקיימת את אקסיומת האינסוף ולכן משתתפת בחיתוך שמגדיר את $\mathbb{N}$.

דוגמות

(1) נוכיח כי 0 קטן מכל טבעי אחר. בעצם נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n = 0$ או $0 \in n$.

עבור הקבוצה הריקה מתקיים $0 = \emptyset$. נניח כי $x \in \mathbb{N}$ מקיים את התכונה ונראה ש-$x \cup \{x\}$ גם מקיים את התכונה. נסמן $y = x \cup \{x\}$ ונראה $y = 0$ או $0 \in y$. אם $x = 0$ נקבל $0 \in y$. אחרת $0 \in x$ ולכן $0 \in y$. לכן, לפי עקרון האינדוקציה התכונה נכונה לכל הטבעיים.

■

(2) נוכיח כי $m < n \Rightarrow m + 1 = n \vee m + 1 < n$. כלומר עלינו להראות שאם $m < n$ אז $m \cup \{m\} = n$ או $m \cup \{m\} \subseteq n$.

נניח כי n היא הקבוצה הריקה, אז התנאי מתקיים באופן ריק (כי אין איברים בקבוצה הריקה).

נניח כי n מקיים את התכונה ונוכיח כי $n \cup \{n\}$ מקיים את התכונה. נניח כי $m \in n \cup \{n\}$. אז או שמתקיים $m \in n$ (ומכך $m \cup \{m\} = n$ או $m \cup \{m\} \in n$ כאשר n מוכל וגם שייך ל-$n \cup \{n\}$) או שמתקיים $m = n$ (ובמקרה זה $m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$).

■

עקרון האינדוקציה השלמה

אם $X \subseteq \mathbb{N}$ מקיימת $\emptyset \in X$ וגם מתקיים שאם עבור $y \in \mathbb{N}$ כל $x \in y$ מקיים $x \in X$ אז $y \in X$, אז $X = \mathbb{N}$. נוכיח:

נביט בקבוצה הבאה (כל האיברים הטבעיים שכל קודמיהם שייכים ל-X): $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in X (y \in X)\}$. נשים לב ש-$X \subseteq Y$ מהעקרון. נראה כי $\emptyset \in Y$ כי אין לה קודמים.

המשך בשיעור הבא...