מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 9

21 באוגוסט, 2023

יונתן מגר

- (הערה משיעור שעבר) - פונקציה על היא חח"ע רק בקבוצות סופיות.

קבוצות בנות-מניה

קבוצת המספרים הטבעיים מסומנת ב-$\mathbb{N}$, וכאשר מתייחסים אליה יחד עם יחס הסדר הטבעי ($n \leq m$ אם $n \subseteq m$), מסמנים אותה גם ב-ω.

טענה - הקבוצה ω היא אינסופית (קבוצה שהיא לא סופית).

- נוכיח: נניח בשלילה כי היא סופית. אז $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$ כך ש-$f(n) = 2n$ שקילות.
- להוכחה נוספת, נוכל להניח בשלילה כי היא סופית. מכך, קיימת פונ' שקילות $f : \omega \to n$ עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$. נסתכל על הצמצום $f|_n : \{0, 1, ..., n-1\} \to n$ לפיו היא נשארת חח"ע. אך לפי הטענה משיעור שעבר $f|_n$ גם על. נביט ב-$f(n) = m \in n$ (או כל $s \geq n$. $f(s)$), אבל ל-m יש מקור תחת $f|_n$. נסמנו ב-$f(k) = f|_n(k)$. לכן $f(n) = f(k)$, בסתירה לחח"ע של f.

■

קבוצה A השקולה ל-$\mathbb{N}$ נקראת בת-מנייה.

הרעיון הוא שהשקילות $f : \mathbb{N} \to A$ "יוצרת" דרך "למנות" את איברי A: $f(1), f(2), f(3)...$. מסמנים את עוצמת קבוצה בת-מנייה $|A| = \aleph_0$. לדוגמה:

(1) **שלמים** $\mathbb{Z}$: ניקח פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, המוגדרת כך: $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ if } n \text{ even} \\ -\frac{n}{2} \text{ if } n \text{ odd} \end{cases}$. נקבל $0, -1, 1, -2, 2...$

(2) **זוגיים**: $f(n) = 2n$.

(3) **ראשוניים**: נסמן את קבוצת הראשוניים ב-$\mathbb{P}$. אז $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow |\mathbb{P}| \leq \aleph_0$. כדי להראות את הכיוון ההפוך צריך:

   (א') להראות ש-$\mathbb{P}$ אינסופית. הוכחנו בשיעור הראשון.

   (ב') להראות שאם X אינסופית אז $\aleph_0 \leq |X|$. מקש"ב נקבל שוויון.

(4) **זוגות של טבעיים** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מהצורה (m, n). נביט בסכום $m + n = k$; נסדר קודם את k מ-0 עד אינסוף,ולכל k כזה יש מספר סופי של זוגות אותם מסדרים באמצעות שקילות עם k.

לכל קבוצה אינסופית X מתקיים $\aleph_0 \leq |X|$.

נוכיח: נעיר כי אנו לא יודעים שכל שתי עוצמות ניתנות להשוואה, לכן לא נוכל להניח בשלילה כי $|X| < \aleph_0$. נתון כי X אינסופית, כלומר X לא סופית. נבנה סדרה של איברים מתוך X שונים זה מזה ב"אורך" בן מניה. נגדיר לכל n טבעי את הפונקציה $f_n : n \to X$ על ידי הכלל הרקורסיבי $f_n(m) = f_{n-1}(m)$ כאשר $m \in n-1$ ואת $f_n(n-1)$ נגדיר להיות איבר כלשהו ב-$X \setminus \{f_{n-1}(0), f_{n-1}(1), ..., f_{n-1}(n-1)\}$. נביט באיחוד כל הפונקציות האלה, ונקבל $f : \omega \to X$. מתקיים כי f הזו חח"ע $f(m) = f(k)$, מתקבל כי $f(m) = f_{m+1}(m) \wedge f(k) = f_{k+1}(k)$. נוכל להגדיר $f_r(k) = f_r(m)$ כך ש-$r = \max(k+1, m+1)$. לכן $k = m$, כלומר $\aleph_0 \leq |X|$.

■

קבוצה X היא אינסופית אם"ם היא שקולה לתת-קבוצה נאותה של עצמה.

נוכיח: ראינו שזהו תנאי מספיק (כלומר הכיוון $\Rightarrow$). נראה שזהו תנאי הכרחי (כלומר נראה את הכיוון $\Leftarrow$). נמצא תת-קבוצה בת-מניה ב-X (לפי המשפט הקודם קיימת כזו) $Y = \{y_1, y_2, y_3, ...\} \subseteq X$, ונגדיר את $h(x) = \begin{cases} x \text{ if } x \notin y \\ y_{n+1} \text{ if } x = y_n \in Y \end{cases}$. קל לראות כי f חח"ע כי $h(X) = X \setminus \{y_n\}$.

■

תהי $X\subseteq Y$ כאשר Y בת-מניה. אז X היא בת-מניה או סופית.

נוכיח: $|X|\leq|Y|=\aleph_0$. אם X אינסופית אז $\aleph_0\leq|X|$ ולכן מקש"ב $|X|=\aleph_0$ ו-X בת מניה. אחרת, X סופית.

■

חשבון עוצמות בנות-מניה

(1) תהיינה A,B קבוצות ב"מ (בנות-מניה). אז $A\cup B$ ב"מ.

(2) תהא A_i ב"מ $i\in\{1,2...,n\}$ אז $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ ב"מ.

(3) תהא A_i ב"מ $i\in\mathbb{N}$ אז $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$ ב"מ.

(4) תהא B_i כך ש-$|B_i|\leq\aleph_0$. אז $\left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right|\leq\aleph_0$.

ניתן לראות כי $4\Rightarrow3\Rightarrow2\Rightarrow1$. נוכיח את (4) כי הוא גורר את כל השאר. בה"כ נוכל להניח כי B_i כולן זרות, אחרת נחליף כל אחת מהן בהפרש $B_i\setminus\bigcup_{j-1}^{i-1}B_j$ וכך נשנה את האיחוד ולא את האי-שוויון הנתון.

נגדיר העתקה חח"ע $f:\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ על ידי $f(x)=(n_1\alpha_n(x))$ כאשר $\alpha_n:B_N\to\mathbb{N}$ חח"ע (קיימת כי $|B_n|\leq\aleph_0$) ו-$x\in B_n$. ההעתקה f מוגדרת היטב כי הנחנו שהקבוצות זרות, אז לכל $x\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i$ אינדקס יחיד כך ש-$x\in B_n$. מאחר ו-f היא חח"ע נקבל את האי-שוויון הדרוש.

■

משפט

(1) אם $|X|=|Y|=\aleph_0$ אז $|X\times Y|=\aleph_0$.

(2) אם $|X_i|=\aleph_0$ עבור $i\in\{1,...,n\}$ אז $\left|\prod_{i=1}^{n}X_i\right|=\aleph_0$.

נוכיח:

(1) אפשר באלכסון, כפי שהוכחנו $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$. אפשר גם לרשום $X\times Y=\bigcup_{y\in Y}X\times\{y\}$, וזהו איחוד ב"מ של קבוצות ב"מ. לכן מ-(3) במשפט הקודם נקבל את הדרוש.

■

(2) באינדוקציה - תרגיל.

תרגילים

אם X ב"מ, אוסף תת-הקבוצות הסופיות של X הוא גם ב"מ.

נוכיח: נרשום את האוסף כאיחוד על פני הגודל האפשרי של תת-קבוצות - $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$ כאשר F_n הינו אוסף תת-הקבוצות מגודל בדיוק n של X. מספר תתי-הקבוצות מגודל n של X הינו ב"מ וקיבלנו איחוד ב"מ של קבוצות ב"מ.

■

בהינתן $\pi:B\to A$ כך ש-$|A|\leq\aleph_0$, ולכל $a\in A$ מתקיים $\left|\pi^{-1}(a)\right|\leq\aleph_0$, אז $|B|\leq\aleph_0$.

נוכיח: $B=\bigcup_{a\in a}\pi^{-1}(a)$ איחוד ב"מ (או סופי) של קבוצות הוא ב"מ (או סופי).

X אינסופית אם"ם לכל $f:X\to X$ קיימת $\emptyset\subsetneq A\subsetneq X$ כך ש-$f(A)\subseteq A$.

נוכיח: עבור $\Rightarrow$ נניח בשלילה ש-X סופית. אז הפרמוטציה $f(x_i)=\begin{cases}x_{i+1} & \text{if } 0\leq i\leq n-2\\ x_0 & \text{if } i=n-1\end{cases}$ לא מקיימת את התנאי הנתון בסתירה. עבור $\Leftarrow$, תהי $f:X\to X$. ניקח איזשהו $a\in X$ ונגדיר את הקבוצה: $A=\{f(a),f(f(a)),f(f(f(a)))...\}$ המותירה שתי אפשרויות - $a\in A$, כלומר קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f^n(a)=a$ ואז A סופית ובפרט $\emptyset\subsetneq A\subsetneq X$ וכמובן $f(A)=A$. אילו $a\notin A$, אז $\emptyset\subsetneq A\subsetneq X$ אבל $f(A)\subseteq A$ כרצוי.

■