מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 13

13 בספטמבר, 2023

יונתן מגר

שימושים ללמה של צורן

כל שתי עוצמות ניתנות להשוואה

תהיינה X,Y קבוצות. אזי, $|X|\le|Y|$ או $|Y|\le|X|$. נוכיח: נסמן $\mathcal{F}$ קבוצת הזוגות (A,f) כך ש-$A\subseteq X$ ו-$f:A\to Y$ חח"ע. נגדיר יחס סדר "הרחבה" לפי $(A,f)\le(A',f')$ אם $A\subseteq A'$ וגם $f'|_A=f$. נראה שמתקיים התנאי בלמה של צורן, כלומר שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. תהי C שרשרת כלשהי ב-f, ונגדיר $\left(\hat{A},\hat{f}\right)$ כך ש-$\hat{A}=\bigcup_{(A,f)\in C}A$ ו-$\hat{f}=\bigcup_{(A,f)\in C}f$ ונראה שזהו חסם מלעיל של C. ראשית, $\hat{A}\subseteq X$ כאיחוד של תתי קבוצות, ו-$\hat{f}$ היא פונקציה חח"ע: היא פונקציה כי C היא שרשרת, אז עבור $x\in A$ מסוים, לכל A' אחר, או ש-$x\notin A'$, או $x\in A'$ ואז f,f' מוגדרות באותו אופן על x. הפונקציה $\hat{f}$ חח"ע: אם $x_1,x_2\in\hat{A}$ אז קיימות $x_1\in A_1$ ו-$x_1\in A_2$ ומכך ש-C שרשרת אחת מוכלת בשנייה, ולכן $\hat{f}$ מוגדרת עליהן באמצעות אחד מ-f_1,f_2 והן חח"ע.

כעת, מהלמה של צורן קיים איבר מקסימלי (A_0,f_0), ו-$f_0:A_0\to Y$ חח"ע. נסמן $B_0=f_0(A_0)\subseteq Y$. אם $A_0=X$ סיימנו ($|X|\le|Y|$). אם $B_0=Y$ סיימנו. אחרת, $A_0\neq X$ ו-$B_0\neq Y$, כלומר קיימים $x_0\in X\setminus A_0$ ו-$y_0=Y\setminus B_0$ ונביט ב-$A=A_0\cup\{x_0\}$, $f=f_0\cup\{(x_0,y_0)\}$. זו פונקציה חח"ע שמקיימת $(A_0,f_0)<(A,f)$ בסתירה למקסימליות.

■

לכל מונה אינסופי a מתקיים $a+a=a$

נוכיח: תהי קבוצה X כך ש-$a=|X|$. נגדיר את $\mathcal{F}$ להיות קבוצת הזוגות (A,f) כך ש-$A\subseteq X$ ו-$f:A\times\{0,1\}\to A$ חח"ע ועל, ומתקיים לכל $(A,f)\in\mathcal{F}$ ש-$|A|+|A|=|A|$. נגדיר יחס סדר "הרחבה" על $\mathcal{F}$, כלומר $(A,f)\le(A',f')$ אם $A\subseteq A'$ וגם $f'|_A=f$. תהי C שרשרת ב-$\mathcal{F}$. נגדיר $\left(\hat{A},\hat{f}\right)$ ע"י $\hat{A}=\bigcup_{(A,f)\in C}A$ ו-$\hat{f}=\bigcup_{(A,f)\in C}f$. העובדה ש-$\hat{f}:\hat{A}\times\{0,1\}\to\hat{A}$ פונקציה חח"ע נכונה כמו קודם. $\hat{f}$ היא על $\hat{A}$ כי כל $x\in\hat{A}$ שייך לאיזשהו A כך ש-$(A,f)\in C$. לכן, $x=f(x',\varepsilon)$ כאשר $\varepsilon\in\{0,1\}$ ו-$x'\in A$. לכן, לפי הלמה של צורן יש איבר מקסימלי (A_0,f_0). כמובן, $f_0:A_0\times\{0,1\}\to A_0$ חח"ע. נטען ש-$X\setminus A_0$ סופית. אכן, אילו נניח בשלילה שהיא אינסופית, אז היא מכילה קבוצה ב"מ. נסמן ב-$B_0=\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\subseteq X\setminus A_0$. נגדיר $g:B_0\times\{0,1\}\to B_0$ לפי $(x_n,0)\mapsto x_{2n}$ ו-$(x_n,1)\mapsto x_{2n+1}$, ואז נגדיר $A_1=A_0\cup B_0$ והיא על $f_1=f_0\cup g:A_1\times\{0,1\}\to A_1$. אז $(A_0,f_0)<(A_1,f_1)$ בסתירה למקסימליות, אז $|X|=|A_0|=|A_0|+|A_0|=|X|+|X|$.

■

מסקנה - אילו $Y\subseteq X$ וגם $|X|<|Y|$, אז $|Y\setminus X|=|Y|$.

נוכיח: נסמן $a=\max(|X|,|Y\setminus X|)$ אז $|Y|=|Y\setminus X|+|X|\le a+a=a\le|Y|$.

מסקנה - עבור עוצמות אינסופיות, $a+b=\max(a,b)$

נוכיח: $\max(a,b)\le a+b\le\max(a,b)+\max(a,b)=\max(a,b)$.

משפט המכפלה

לכל מונה אינסופי a מתקיים $a\cdot a=a$ [אילו ידענו שלכל עוצמה $a>\aleph_0$ ניתן לכתוב $a=2^{a'}$ כאשר a' עוצמה כלשהי, אז $a\cdot a=2^{a'}\cdot2^{a'}=2^{a'+a'}=2^{a'}=a$. יחד עם זאת, לפי השערת הרצף הטוענת כי אין עוצמה בין $\aleph_0$ ל-א, והשערת הרצף המוכללת האומרת שאין עוצמה בין $a<2^a$ לכל עוצמה אינסופית a, אשר את שתיהן לא ניתן להוכיח באמצעות אקסיומות ZFC. זאת אומרת, יש מודל של תורת הקבוצות שבו השערת הרצף מתקיימת (גדל), ומודל אחר בו היא אינה מתקיימת (פול-כהן, שהמציא לשם כך את מושג הכפייה)]. הוכחה לפי הלמה של צורן ברשימות (10.4.3).

מסקנה - $a \le b \wedge a \ne 0 \wedge b \ge \aleph_0 \Rightarrow a \cdot b = b$.
אכן $b \le a \cdot b \le b \cdot b = b$. בנוסף, אם $1 < a \le b \wedge b > \aleph_0$, אז $a^b = 2^b$.

קבוצות סדורות היטב

יחס סדר R על קבוצה X נקרא "סדר טוב" אם הוא יחס סדר מלא ולכל תת-קבוצה יש איבר מינימלי. למשל, ω סדורה היטב, אך הרציונליים, השלמים או הממשיים עם $\le$ לא סדורות היטב. ניתן להגדיר יחס שקילות על קבוצות סדורות: אם יש פונ' חח"ע ועל שומרת סדר, ואז נאמר שיש להן את אותו טיפוס סדר. נקרא לטיפוסי סדר "סודרים". לדוגמה, הסודר של הטבעיים הוא ω, ואם ניקח שני עותקים של הטבעיים ונשים אחד מימין לשני, הסודר המתאים ייקרא $\omega + \omega$. אם נשים איבר חדש שגדול מכל איברי ω, נסמן $\omega + 1$. אם ניקח איבר חדש הקטן מכל איברי ω אז נסמן $1 + \omega$. נשים לב שכולם שקולים ל-ω. אפשר לקחת $\aleph_0$ עותקים של ω ואז נסמן $\omega \cdot \omega$ (שגם שקול ל-ω). כל הקבוצות מעוצמה $\aleph_0$ (ראינו) אבל אין ביניהן פונקציה חח"ע ועל שומרת סדר (בקורס הבא). ניתן לעשות כל מיני שטויות עם ה-ω כדי ליצור סודרים יותר מוגזמים.

קבוצה עם יחס סדר מלא סדורה היטב אמ"ם אין בה סדרה יורדת ממש אינסופית.

נוכיח: נניח בשלילה שהיא לא סדורה היטב, אז נוכל לקחת איזושהי תת-קבוצה ללא איבר מינימלי. ניקח את $a_1 \in A$ כאשר אין ב-A איבר מינימלי. נוכל לבנות באינדוקציה $a_n \in A \setminus \{a_{n-1}\}$ סדרה יורדת אינסופית בסתירה. בכיוון השני, נניח שיש בה סדרה יורדת אינסופית. כלומר, איברי סדרה זו מהווים סדרה ללא איבר מינימלי.

■

משפט הסדר הטוב - לכל קבוצה X קיים יחס סדר $R \subseteq X \times X$ שהוא יחס סדר מלא וטוב.

הערה - הפרדוקס של קניג

נביט בקבוצת המספרים הניתנים להגדרה על ידי מספר סופי של מילים (אפשר בשפה פורמלית או באמצעות תוכנה). זוהי קבוצה בת מניה, ולכן, יש מספרים ממשיים שאינן ניתנים להגדרה. ביחס הסדר שמבטיח המשפט, יש להם איבר מינימלי. מצד אחד, הוא לא ניתן להגדרה, ומצד שני, ניתן להגדיר אותו כאיבר המינימלי בקבוצת המספרים שלא ניתנים להגדרה. נשים לב כי זהו לא פרדוקס באמת, מכיוון שהסדר עצמו לא ניתן להגדרה במספר סופי של מילים.

הוכחת המשפט

נביט באוסף כל הקבוצות הסדורות היטב, $(A, \le)$ כאשר $A \subseteq X$. מגדירים יחס סדר $\left(A', \acute{\le}\right) \preccurlyeq (A, \le)$ כך: $A \le A'$, $\acute{\le}|_{A \times A} \le,$ אם $a \in A$ ו-$a' \in A'$ ו-$a \acute{\le} a'$ אז $a' \in A$. לכל שרשרת C יש חסם A $B = \bigcup_{(A,\le)\in C}$ ו-$\le$ $\bigcup_{(A,\le)\in C} = \hat{\le}$.
מהלמה של צורן איבר מקסימלי $(A_0, \le_0)$. מראים כי $A_0 = X$.

■