

1. תהי A קבוצה, $f : A \rightarrow A$ המוגדרת ע"י $f(a) = a$ או באופן שקול: $f = \{(a, a) \mid a \in A\}$. לפעמים נסמן $\text{id}(A)$.
 - A -נשים לב שהתחום והתמונה של f זהים ושווים ל A .
 2. $\text{dom}(f) = \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. נראה כי $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
 3. היחס $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ אינו פונקציה מעל \mathbb{R} כי אינו שלם ואינו חד-ערכי. יחד עם זאת, $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}^+\}$ הוא כן פונקציה, וזוהי פונקציית השורש.
- תרגיל - יהיו $f : A \rightarrow B$ ו- $g : C \rightarrow D$ פונקציות כך ש- A, C זרות. הראו כי $f \cup g : A \cup C \rightarrow B \cup D$ היא פונק' פתרון - אכן מתקיים $f \cup g \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. צ"ל שהוא חד-ערכי ושלם.**
- קיום - אם $x \in A$, מכיוון ש- f פונקציה אז קיים $y \in B$ כך ש- $f(x) = y$, כלומר $(x, y) \in f \subseteq f \cup g$. מכיוון ש- $y \in B \cup D$ ו- $x \in A \cup C$ צ"ל שקיים $y \in B \cup D$ יחיד כך ש- $(x, y) \in f \cup g$. ולכן $f \cup g$ כאשר $x \in C$ אם $y \in B \cup D$, מכיוון ש- g פונקציה קיים $y \in D$ כך ש- $(x, y) \in g$ ולכן $(x, y) \in f \cup g$ כאשר $x \in C$ אם $y \in B \cup D$. נניח כי קיימים $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f \cup g$ - יחידות - נניח כי קיימים $y_1, y_2 \in B \cup D$ כך ש- $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f$ אם $y_1 = y_2$ או $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in g$ אם $y_1 = y_2$ או $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in g$ או $(x_1, y_1) \in g, (x_1, y_2) \in f$. בסתירה לכך ש- $A \cap C = \emptyset$ (בלי הגבלת הכלליות) $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in g$ או $(x_1, y_1) \in g, (x_1, y_2) \in f$. הראינו ש- $f \cup g$ שלם וחד-ערכי ולכן זו פונקציה.**

■

הגדרה - יהיו A, B קבוצות, $f : A \rightarrow B$.

1. $\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$. נקראת חח"ע אם f .
 2. $\text{Im}(f) = B$ אם $\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b)$. באופן שקול f .
- תרגיל - תהי X קבוצה. $I \subseteq X$. נגדיר $f : P(X) \rightarrow P(X)$ על ידי $f(A) = A \triangle I$. האם f חח"ע? האם על פתרון - נבדוק חח"ע: נניח ש- $f(A_1) = f(A_2)$ כלומר $A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$. נוכיח $A_1 \subseteq A_2$ (מסימטריה $A_2 \subseteq A_1$ - נובע ש- $A_1 = A_2$).**
- יהי $x \in A_1$. אם $x \in I$ אז $x \in A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$ ולכן $x \in A_2$. אחרת, $x \in A_1$ ו- $x \notin I$, אז $x \in A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$ ולכן $x \in A_2$ ו- $x \notin I$. לפעמים נסמן $\text{id}(A)$ קבוצה, $f : A \rightarrow A$ המוגדרת ע"י $f(a) = a$ או באופן שקול: $f = \{(a, a) \mid a \in A\}$. לפעמים נסמן $\text{id}(A)$.
 - A -נשים לב שהתחום והתמונה של f זהים ושווים ל A .
1. $\text{dom}(f) = \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. נראה כי $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
 2. היחס $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ אינו פונקציה מעל \mathbb{R} כי אינו שלם ואינו חד-ערכי. יחד עם זאת, $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}^+\}$ הוא כן פונקציה, וזוהי פונקציית השורש.
- תרגיל - יהיו $f : A \rightarrow B$ ו- $g : C \rightarrow D$ פונקציות כך ש- A, C זרות. הראו כי $f \cup g : A \cup C \rightarrow B \cup D$ היא פונק' פתרון - אכן מתקיים $f \cup g \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. צ"ל שהוא חד-ערכי ושלם.**
- קיום - אם $x \in A$, מכיוון ש- f פונקציה אז קיים $y \in B$ כך ש- $f(x) = y$, כלומר $(x, y) \in f \subseteq f \cup g$. מכיוון ש- $y \in B \cup D$ ו- $x \in A \cup C$ צ"ל שקיים $y \in B \cup D$ יחיד כך ש- $(x, y) \in f \cup g$. ולכן $f \cup g$ כאשר $x \in C$ אם $y \in B \cup D$, מכיוון ש- g פונקציה קיים $y \in D$ כך ש- $(x, y) \in g$ ולכן $(x, y) \in f \cup g$ כאשר $x \in C$ אם $y \in B \cup D$. נניח כי קיימים $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f \cup g$ - יחידות - נניח כי קיימים $y_1, y_2 \in B \cup D$ כך ש- $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f$ אם $y_1 = y_2$ או $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in g$ אם $y_1 = y_2$ או $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in g$ או $(x_1, y_1) \in g, (x_1, y_2) \in f$. בסתירה לכך ש- $A \cap C = \emptyset$ (בלי הגבלת הכלליות) $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in g$ או $(x_1, y_1) \in g, (x_1, y_2) \in f$. הראינו ש- $f \cup g$ שלם וחד-ערכי ולכן זו פונקציה.**

$x \in C$ אם $y \in B \cup D$, מכיוון ש- g פונקציה קיים $y \in D$ כך ש- $(x, y) \in g$ ולכן $(x, y) \in f \cup g$ כאשר

- $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f \cup g$ - יחידות - נניח כי קיימים $y_1, y_2 \in B \cup D$ כך ש-
 - $y_1 = y_2$ אם $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f$ אז מחד-ערכיות של f יתקיים.
 - $y_1 = y_2$ אם $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in g$ אז מחד-ערכיות של g יתקיים.
 - $A \cap C = \emptyset$ (כלי הגבלת הכלליות) אז $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in g$ או $x \in A \wedge x \in C$ בסתירה לכך ש-
- הראינו ש- $f \cup g$ שלם וחד-ערכי ולכן זו פונקציה.

■

$f : A \rightarrow B$. הגדרה - יהיו A, B קבוצות

1. $\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$. נקראת חח"ע אם f .
 2. $\text{Im}(f) = B$ על B אם $\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b)$. באופן שקול f .
- ?תרגיל - תהי X קבוצה. $I \subseteq X$. נגדיר $f : P(X) \rightarrow P(X)$ על ידי $f(A) = A \triangle I$. האם f חח"ע? האם על
- פתרון - נבדוק חח"ע: נניח ש- $f(A_1) = f(A_2)$ כלומר $A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$. נוכיח $A_1 \subseteq A_2$ (מסימטריה $A_2 \subseteq A_1$ ינבע ש- $A_2 \subseteq A_1$).
- $x \in A_1$ יהי $x \in A_2$. אם $x \in I$ אז $x \in A \triangle I = A_2 \triangle I$ ולכן $x \in A_2$ ולכן