מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 8

16 באוגוסט, 2023

יונתן מגר

עקרון האינדוקציה (תזכורת)

אם P תכונה אפשרית של איברי $\mathbb{N}$, והקבוצה $\emptyset$ מקיימת את P וגם "x מקיימת את P" גורר ש-$x \cup \{x\}$ מקיימת את P, אז כל $\mathbb{N}$ מקיימים את P.

עקרון האינדוקציה השלמה (המשך)

אם $X \subseteq \mathbb{N}$ מקיימת $\emptyset \in X$ וגם מתקיים שאם עבור $y \in \mathbb{N}$ כל $x \in y$ מקיים $x \in X$ אז $y \in X$, אז $X = \mathbb{N}$. נוכיח:

נביט בקבוצה הבאה (כל האיברים הטבעיים שכל קודמיהם שייכים ל-X): $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid \forall x \in y (x \in X)\}$. נשים לב ש-$Y \subseteq X$ מהעקרון. נראה כי $\emptyset \in Y$ כי אין לה קודמים. נניח $y \in Y$ ונראה כי $y \cup \{y\} \in Y$. לשם כך, ניקח $x \in y \cup \{y\}$. לכן, $x \in y \vee x = y$. אם $x \in y$ אז $x \in X$ מההגדרה, לכל $x \in y$, ולכן $y \cup \{y\} \in Y$. לכן, קיבלנו $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq Y = \mathbb{N}$ ולכן $X = \mathbb{N}$.

■

טענה: לכל תת-קבוצה לא ריקה של טבעיים יש איבר מינימלי.

משפט

תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. אזי קיים $n \in A$ כך שאין $m \in A$ המקיים $m < n$. נוכיח:

נביט בקבוצה $X = \mathbb{N} \setminus A$. אם $\emptyset \notin X$ אז $\emptyset \in A$ והיא איבר מינימלי (בהתאם לכך שאפס קטן מכל טבעי אחר). אם $\emptyset \in X$, אז משום ש-$X \neq \mathbb{N}$ ו-A לא ריקה, נובע שעקרון האינדוקציה השלמה לא ניתן ליישום על X. לכן, התנאי של עקרון האינדוקציה השלמה לא מתקיים. כלומר קיים $y \in \mathbb{N}$ כך שכל $x \in y$ מקיים $x \in X$ אבל $y \notin X$. נתרגם ליחס הסדר: $\exists y \in A. \forall x < y (x \notin A)$. לכן כל איברי A אינם קטנים מ-y.

■

קבוצות סופיות

קבוצה A נקראת סופית אם היא שקולה לאיזו $n \in \mathbb{N}$, ובמקרה זה נסמן $|A| = n$.

טענה

אם $|A| = n$ וכן $x \in A$ אז $|A \setminus \{x\}| = n - 1$ כאשר $n - 1$ היא העוצמה ש-n היא העוקב שלה. נוכיח:

תהי $f : A \to n$ פונקציית שקילות ונניח $f(x) \in n$. $m = f(x)$. נחלק למקרים:

- אם $m = n - 1$ אז הצמצום של $f|_{A \setminus \{x\}} : A \setminus \{x\} \to n - 1$ שקילות.
- אחרת ($m \neq n - 1$) נגדיר $g : A \setminus \{x\} \to n - 1$ באופן הבא - קיים $x \neq a \in A$ כך ש-$f(a) = n - 1$ ונגדיר $g(y) = f(y)$ לכל $y \neq a$ ואת $g(a) = m = f(x) \neq n - 1$. ולכן g שקילות (מהיותה חח"ע ועל).

■

דיון

השתמשנו כאן בעובדה שלכל $0 \neq n \in \mathbb{N}$ קיים ויחיד $m \in \mathbb{N}$ כך ש-$n = m + 1$. אז בעצם מה שעשינו זה להגדיר במצב כזה $m = n - 1$. למה קיים m כזה? מראים באינדוקציה: מניחים שעבור x יש כזה ומראים שלכל $x \cup \{x\}$ יש עוקב כזה (אך זה מתקיים מיד כי כך בנוי $x \cup \{x\}$). למה m כזה יחיד? נניח $k \cup \{k\} = m \cup \{m\}$. אם $m = k$ הראנו יחידות, אחרת $k = \{m\} \wedge m = \{k\}$. מכך $\{\emptyset\} = 1 \sim \{\{k\}\} = k$ ולכן $\{k\} = \emptyset$ כלומר לא קיים k כזה וקיבלנו יחידות.

■

תרגיל

אם $|A|=n$ וכן $x\notin A$ אז $|A\cup\{x\}|=n+1$.

תת-קבוצה נאותה

$A\subseteq B$ נקראת תת-קבוצה נאותה של B ("תת-קבוצה ממש") אם $A\neq B$.

משפט

קבוצה סופית לעולם אינה שקולה לתת-קבוצה נאותה של עצמה. נוכיח:

נניח X קבוצה סופית ונסמן $|X|=n$, ונניח $A\subsetneq X$. אז יש $x\in X\setminus A$ כלומר $A\subseteq X\setminus\{x\}$. לכן, $|A|\leq|X\setminus\{x\}|$ (ע"י פונקצית הזהות שהיא חח"ע).

■

מסקנה

נניח $f:X\to X$ חח"ע כאשר X סופית, אז f על. נוכיח: $f(X)\subseteq X$ ומהיותה חח"ע $X\subseteq f(X)\Rightarrow|X|\leq|f(X)|$.

■

- נשים לב שבקבוצות אינסופיות מסקנה זו לא מתקיימת. הטענה ההפוכה נכונה אך דורשת בחירה. אכן בהינתן $f:X\to Y$ כלשהי היא על, אז לכל $y\in Y$ יש קבוצת מקורות לא ריקה. הקבוצות האלו הן פירוק של X (כולן זרות ואיחודן X). אוסף הבחירות של איבר אחד $x\in f^{-1}(y)$ לכל y נקרא **חתך** של f. עבור חתך נתון, אם נסמן $x=g(y)$, נקבל ש-$f\circ g=\mathrm{id}_Y$, אבל ההפך לא חייב להיות הזהות על X אלא אם f חח"ע. עוד נשים לב שאם $f:X\to Y$ היא על אז בהכרח $|Y|\leq|X|$ כי אפשר לקחת חתך $g:Y\to X$ של f וזו פונקציה חח"ע. קיום חתך קשור לאקסיומת הבחירה.

טענה

תהי X סופית ו-$f:X\to X$ על אזי f חח"ע. נוכיח:

ניקח חתך של f. הוא $g:X\to X$ חח"ע לפי ההגדרה של חתך. לכן מהטענה הקודמת הוא גם על. מכך f חח"ע.

■

הגדרה

נניח $m,n\in\mathbb{N}$. נגדיר עליהם את הפעולות הבאות:

(1) $n+m$ הוא טבעי המתאים לעוצמת הקבוצה המתקבלת מאיחוד שתי קבוצות זרות מעוצמה n,m בהתאמה.
(2) $n\cdot m$ הוא טבעי המתאים לעוצמה של $n\times m$.
(3) n^m הוא הטבעי המתאים לקבוצת הפונקציות מ-m ל-n.

טענה

תהיינה $A'\subseteq A$ כך ש-A סופית. אז A' סופית וכן $|A'|\leq|A|$. נוכיח: פונקצית הזהות על A' היא חח"ע. את הסופיות של A' נראה באינדוקציה. נניח לה"כ $A=n$. אם $A'=A$ אז סיימנו, אחרת $A'=A\setminus\{x\}$ אז מהטענה הקודמת סיימנו. עבור $n=0,1$ הראנו. נניח $n-1$ ונוכיח עבור n. כלומר נתונה $A'\subseteq A\wedge A=n$. אם $A'=A$ סיימנו, אחרת $A'\subsetneq A$ ואז קיים $x\in A\setminus A'$ ו-$A'\subseteq A\setminus\{x\}$. נראה כי $A\setminus\{x\}$ מעוצמה $n-1$ ולכן מהנחת האינדוקציה היא סופית וכל תת-קבוצה שלה היא סופית ובפרט A'.

■

הגדרה נוספת לחיבור

נגדיר $n+0=0+n=n$ וכן $n+1=n\cup\{n\}$ כמקודם. את $n+m$ נגדיר $m+n=(m+1)+(n-1)$.

נטען כי הגדרות החיבור מתלכדות. נוכיח כי ההגדרה באמצעות איחוד קבוצות גורר את ההגדרה החדשה:

נניח A,B קבוצות מעוצמות m,n בהתאמה.

נוכיח באינדוקציה לכל $n\geq 1$ ולכל m מתקיים $m+n=(m+1)+(n-1)$. אכן עבור $x\in B$ מתקיים כי $n+m=|A\cup B|=|A\cup\{x\}\cup B\setminus\{x\}|=(m+1)+(n-1)$.

טענה

$m+n=n+m$. נובע באופן מיידי מכך שאיחוד קבוצות הוא חילפי עד כדי הוכחת הטענה הבאה: נניח $n=m$ אז לכל $\forall x(x\in m \Leftrightarrow x\in n)$.