אלגברה לינארית 1א' - שיעור 6

18 בינואר, 2024

יונתן מגר

תתי-מרחבים וקטוריים ומושגים נוספים

תזכורת

יהי V מ"ו מעל השדה F ותהי $U \subseteq V$ תת-קבוצה של V. נאמר ש-U הוא ת"מ של V אם U מ"ו מעל F ביחס לאותן פעולות של חיבור וכפל בסקלר מ-F. מספיק להראות:

(1) U סגורה לחיבור.

(2) U סגורה לכפל בסקלר מ-F.

(3) $0 \in U$, או לחילופין, $U \neq \emptyset$.

נוכל לדרוש במקום (1) ו-(2) **סגירות לצירופים לינאריים**, כלומר: $\forall u, w \in U, \forall \alpha, \beta \in F : \alpha \cdot u + \beta \cdot w \in U$.

צירופים לינאריים

יהי V מ"ו מעל השדה F, ויהיו $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ וקטורים ב-V. לכל $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in F$, הסכום:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + ... + \lambda_n \cdot v_n$$

נקרא **צירוף לינארי** (צ"ל).

דוגמה: מרחב הפולינומים

$$F[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \wedge a_0, a_1, ..., a_k \in F \right\}$$

מרחב זה מורכב מכל הצ"ל האפשריים של המונומים $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$.

חיבור פולינומים מתבצע בעזרת חיבור המקדמים בהתאמה:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

וכן כפל בסקלר מתבצע ע"י מכפלת המקדמים בסקלר זה:

$$\lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \cdot a_k) x^k$$

זהירות!

פולינום בקורס שלנו הוא יותר מהערכים שהוא מחזיר! למשל, ב-$\mathbb{Z}_2$ נתבונן בפולינום $x^2 + x$:

$$(x^2 + x)(0) = 0 \wedge (x^2 + x)(1) = 0$$

אך פולינום זה **אינו** פולינום האפס, למרות שהם מחזירים את אותם הערכים.

נתבונן באוסף הפולינומים ממעלה $n \geq$ עבור $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$F_n[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, ..., a_n \in F \right\}$$

זוהי ודאי תת-קבוצה של $F_{[x]}$, אך האם זהו ת״מ?

ישנה סגירות לצ״ל $\Rightarrow$ $$\alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) + \beta \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{(\alpha a_n + \beta b_k)}^{\in F} x^k \in F_n[x]$$

ופולינום האפס מתקבל מהצ״ל שבו כל המקדמים אפסים $\sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k$. כלומר, זהו אכן ת״מ!

האם איחוד וחיתוך של ת״מ נשאר ת״מ?

נסתכל על $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \binom{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ועל תתי-המרחבים U (ציר ה-x) ו-W (ציר ה-y).

- נראה כי $U \cap W = \left\{ \binom{0}{0} \right\}$ הוא ת״מ טריוויאלי.
- נראה כי $U \cup W$ הוא מערכת הצירים, אך לא ת״מ כי אינו סגור לחיבור.

טענה

יהי V מ״ו מעל F ויהיו U, W זוג ת״מ של V. אז:

(1) החיתוך $U \cap W$ הינו ת״מ של V גם כן.

(2) האיחוד $U \cup W$ הוא ת״מ של V אם״ם $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

הוכחה

(1) יהיו $v_1, v_2 \in U \cap W$ ויהיו $\alpha, \beta \in F$. נתבונן בצ״ל $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$ כי $v_1, v_2 \in U$ ו-U סגור לצ״ל, וגם $\alpha v_1 + \beta v_2 \in W$ הרי ש-$v_1, v_2 \in W$ ו-W ת״מ וסגור לצ״ל. הראנו את הסגירות לצ״ל של $U \cap W$. U ת״מ ולכן $0 \in U$ וגם W ת״מ ולכן $0 \in W$, כלומר $0 \in U \cap W$, והראנו שהחיתוך $U \cap W$ ת״מ שהרי הוא מכיל את 0 וגם סגור לצ״ל.

(2)
- $\Rightarrow$: אם $U \subseteq W$ אז $U \cup W = W$ וזהו ת״מ, וגם אם $W \subseteq U$ אז $V \cup W = U$ וזהו ת״מ.
- $\Leftarrow$: נניח ש-$U \cup W$ ת״מ ונניח בשלילה ש-$W \not\subseteq U$ וגם $U \not\subseteq W$. $U \not\subseteq W$ ולכן קיים $u \in U$ כך ש-$u \notin W$, גם $U \not\subseteq W$ ולכן יש $w \in W$ כך ש-$w \notin U$. אבל, $u, w \in U \cup W$ וזהו ת״מ ולכן גם $u + w \in U \cup W$, בה״כ נניח $u + w \in W$. נקבל $u = u + w + (-w) \in W$, בסתירה להנחה.

■

סכום של תתי-מרחבים וקטוריים

יהי V מ״ו מעל F ויהיו U, W זוג ת״מ של V. נגדיר את הסכום $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$.

כאשר $U \cap W = \{0\}$ נאמר **שהסכום ישר** ונסמן $U \oplus W$.

טענה

יהיו U, W זוג ת״מ של מ״ו V מעל השדה F, אז $U + W$ הינו גם כן ת״מ של V. זהו למעשה תת-המרחב המינימלי שמכיל את $U \cup W$.

הוכחה

יהיו $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$. כאן $u_1, u_2 \in U \wedge w_1, w_2 \in W$. יהיו $\alpha, \beta \in F$. נביט בצ״ל:

$$\alpha \cdot (u_1 + w_1) + \beta \cdot (u_2 + w_2) = \underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_{\in U} + \underbrace{\alpha w_1 + \beta w_2}_{\in W}$$

U, W ת״מ ולכן $0 \in U$ וגם $0 \in W$ וכן: $0 = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} \in U + W$.

■

הערת אזהרה!

בחיבור ת"מ **אין** חוק צמצום, כלומר אם $u+w_1=u+w_2$ **לא** ניתן להסיק מכך ש-$w_1=w_2$.

טענה

יהיו U,W זוג ת"מ של מ"ו V מעל השדה F. אז:

הסכום $U+W$ הוא סכום ישר אם"ם כל וקטור בסכום ניתן להביע בצורה **יחידה** כסכום של וקטור מ-U ווקטור מ-W.

הוכחה

- $\Leftarrow$: נניח ש-$U\cap W=\{0\}$. יהיו $u_1,u_2\in U$ ו-$w_1,w_2\in W$ כך ש-$u_1+w_1=u_2+w_2\in U+W$. נסיק: $\{0\} = u_1-u_2=w_2-w-1\in U\cap W$. כלומר: $u_1-u_2=0\wedge w_1-w_2=0$ ומכך $u_1=u_2\wedge w_1=w_2$ והראנו את היחידות.
- $\Rightarrow$: נניח שכל וקטור ב-$U+W$ ניתן להביע בצורה יחידה. נראה כי $0\in U\cap W$ ויהי $v\in U\cap W$. נציג:
$$v=\underbrace{v}_{\in U}+\underbrace{0}_{\in W}=\underbrace{0}_{\in U}+\underbrace{v}_{\in W}$$
ומיחידות ההצגה נסיק $v=0$.

■

בסיס למרחב

יהי V מ"ו מעל F ותהי B קבוצת וקטורים מ-V. נאמר ש-B הינו **בסיס** של V אם כל וקטור ב-V ניתן להבעה **בצורה יחידה** כצ"ל של איברי B.

דוגמאות

(1) $\{0\}$ תת-המרחב הטריוויאלי. כאן הבסיס הוא הקב' הריקה (כי צ"ל של אפס וקטורים הוא וקטור האפס שניטרלי לחיבור).

(2) (א') ב-F^n נגדיר את **הבסיס הסטנדרטי** כך:

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נראה כי:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\dots+\lambda_n\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

(ב') ב-$\mathbb{R}^2$:

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\},B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

(3) ב-$F[x]$ בסיס אחד יהיה מורכב מהמונומים: $\{1,x,x^2,\dots\}$.

משפט
יהי V מ"ו מעל שדה F. אז ל-V קיים בסיס B, ובנוסף, לכל זוג בסיסים B_1, B_2 של V מתקיים: $|B_1| = |B_2|$.

אתגר: נסו להוכיח את המשפט ב-$\mathbb{R}^2$.

פרישה של מרחב
יהי V מ"ו מעל F ותהי $A \subseteq V$. נגדיר את **הפרישה** של A להיות אוסף כל הצירופים הלינאריים של וקטורי A. נסמן:

$$\mathrm{Sp}_F(A) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in F, v_1, ..., v_n \in A \right\}$$

טענה
יהי V מ"ו מעל F ותהי $A \subseteq V$, אז $\mathrm{Sp}_F(A)$ הינו ת"מ של V.

הוכחה
צ"ל של אפס וקטורים ייתן את וקטור האפס, ולכן $0 \in \mathrm{Sp}_F(A)$. סגירות לצ"ל מתקבלת בקלות:

$$\alpha \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k \right) + \beta \left(\sum_{k=0}^{m} \mu_k u_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha \lambda_k v_k + \sum_{k=0}^{m} \beta \mu_k u_k \in \mathrm{Sp}_F(A)$$

■