אלגברה לינארית 1א' - שיעור 5

16 בינואר, 2024

יונתן מגר

מסקנות מכך שקיימת משוואה קנונית יחידה

(1) אם $n > m$ (מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות) אז מתקיים בדיוק אחד מהשניים:
- (א') אין פתרון.
- (ב') יש לפחות $|F|$ (מספר האיברים בשדה F) פתרונות.

נוכיח: אם יש שורת סתירה ($0 = 1$) אז אין פתרונות. אחרת, כל שורה נותנת לכל היותר איבר פותח אחד, ולכן:

$$1 \leq n - m \leq n - \text{מספר האיברים הפותחים} = \text{מספר המשתנים החופשיים}$$

ולכן יש לפחות $|F|$ פתרונות.

■

(2) לכל מערכת משוואות מתקיים בדיוק אחד מהבאים:
- (א') אין פתרון.
- (ב') יש פתרון יחיד.
- (ג') יש לפחות $|F|$ פתרונות.

נוכיח: נעבור לצורה קנונית, זה לא משנה את קבוצת הפתרונות.
- (א') $\Leftrightarrow$ יש שורת סתירה.
- (ב') $\Leftrightarrow$ אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים.
- (ג') $\Leftrightarrow$ אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי אחד לפחות.

■

מערכת משוואות הומוגנית

מערכת משוואות נקראת **הומוגנית** אם $b_1 = ... = b_m = 0$. כלומר:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

נקרא לפתרון $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ **הפתרון הטרוויאלי**.

מסקנה

במערכת משוואות הומוגנית:

(1) אם $n > m$ אז יש לפחות $|F|$ פתרונות.

(2) תמיד:
- או שיש את הפתרון הטריוויאלי בלבד.
- או שיש לפחות $|F|$ פתרונות.

הוכחה: מיידי מהמסקנות הקודמות וקיום הפתרון הטריוויאלי.

מרחבים ליניאריים/וקטוריים

יהי F שדה. קבוצה V עם שתי פונקציות $a : V \times V \to V$ (נקראת "חיבור" ומוגדרת $\forall u, v \in V, v + u := a(v, u)$), $m : F \times V \to V$ (נקראת "כפל בסקלר" ומוגדרת $\forall \lambda \in F \forall v \in V, \lambda \cdot v = \lambda v := m(\lambda, v)$) תיקרא מרחב וקטורי (לינארי) מעל F אם מתקיימות התכונות הבאות:

(1) **חילופיות**: $\forall v, u \in V, v + u = u + v$.

(2) **אסוציאטיביות**: $\forall v, u, w \in V, (v + u) + w = v + (u + w)$.

(3) **קיום איבר אפס**: קיים $w \in V$ ניטראלי לחיבור כלומר $\forall v \in V, v + w = w + v = v$. (תכף נראה ש-$w$ יחיד, ואז זה יצדיק להגיד "איבר האפס" ולסמנו ב-$0_v = 0$).

(4) **קיום נגדי**: $\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0_v$ הניטראלי לחיבור.

(5) **חוק הפילוג 1**: $\forall \lambda, \mu \in F \forall v \in V, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$.

(6) **חוק הפילוג 2**: $\forall \lambda \in F \forall u, v \in V, \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda \mu$.

(7) **אסוציאטיביות של כפל בסקלר**: $\forall \lambda, \mu \in F \forall v \in V, (\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu v)$.

(8) **איבר יחידה**: $\forall v \in V, 1_F \cdot v = v$.

איברים במ"ו נקראים **וקטורים**, ואיברים בשדה המתאים נקראים **סקלרים**.

דוגמאות

(1) F^n הוא מ"ו מעל F עם:

- החיבור $(v_1, ..., v_n) + (v_1, ..., v_n) := (v_1 + u_1, ..., v_n + u_n)$.
- הכפל בסקלר $F \ni \lambda(v_1, ..., v_n) = (\lambda v_1, ..., \lambda v_n)$.

נבדוק (1): כן, כי החיבור מוגדר לפי החיבור ב-F, והחיבור ב-F חילופי.

(2)-(4): כנ"ל.

וקטור האפס הוא $0_F = (0, ..., 0)$.

(5): $(\lambda + \mu)\overbrace{(v_1, ..., v_n)}^{\underline{v}} = (..., (\lambda + \mu)v_i, ...) = (..., \lambda v_i + \mu v_i, ...) = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v}$.

(6)-(8): כנ"ל.

F^n נקרא המרחב הוקטורי הסטנדרטי מעל F.

(2) נסתכל על קבוצת המטריצות עם m שורות ו-n עמודות $= M_{m \times n}(F)$. זה גם מ"ו מעל F עם:

- החיבור: $M_{m \times n}(F) \ni A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ כך ש-$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$ $\forall i, j, a_{ij}, b_{ij} \in F :$.
- הכפל בסקלר: $\lambda \in F, A \in M_{m \times n}(F), \lambda A := (\lambda a_{ij})$.

ברור ש-(8)-(1) מתקיימים.

(3) דוגמה להגדרה: יהי V מ"ו מעל F. נאמר שתת קבוצה $W \subseteq V$ היא תת מרחב וקטורי של V אם:

(א') $0_v \in W$.

(ב') סגירות לחיבור: $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$.

(ג') סגירות לכפל בסקלר: $\forall \lambda \in F \forall w \in W : \lambda w \in W$.

טענה: אם W תת מרחב של V, אז W הוא מ"ו ביחס לחיבור וכפל בסקלר המושרים מ-V. נדלג על ההוכחה.

(4) דוגמה: $\mathrm{Func}(A, F) = \{f : A \to F$ פונקציות$\}$ כאשר $A \neq \emptyset$ (למשל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). נגדיר:

- החיבור: $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$.
- הכפל בסקלר: $(\lambda f)(a) := \lambda f(a)$.

זהו מ"ו מעל F, כש-0 היא פונק' האפס.

(האם יש קשר בין הדוגמה הנ"ל ל-F^n?)

(5) דוגמה: נקח $V=\mathbb{R}_{>0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$. $F=\mathbb{R}$. נגדיר:
- החיבור: $v,w\in\mathbb{R}_{>0}, v\oplus w=v\cdot w$.
- הכפל בסקלר: $\lambda\in\mathbb{R}, v\in V=\mathbb{R}_{>0}, \lambda\odot v:=v^{\lambda}$.

קל לראות שזה מקיים את כל התכונות. למשל, איבר האפס של V הוא 1.

תכונות של מרחבים וקטוריים

טענה

יהי V מ"ו מעל F.

(1) יש חוק צמצום: $\forall v,u,w\in V, v+u=w+u\Rightarrow v=w$.
(2) איבר האפס הוא יחיד ב-V.
(3) לכל $v\in V$ יש נגדי יחיד (נסמנו $-v$).

הוכחה

(1) יהיו $v,u,w\in V$. נניח $v+u=w+u$. נראה כי מתקיים:

$$v=v+(u+u')=(v+u)+u'=(w+u)+u'=w+(u+u')=w$$

כלומר, $v=w$ כנדרש.

(2) נניח ש-w,w' שניהם ניטראלים לחיבור ונוכיח $w=w'$. נראה כי מתקיים $w=w+w'=w'$.
(3) אם w,w' שניהם נגדיים ל-v: $v+w=0_v=v+w'$. מ-(1) מתקיים $w=w'$.

■

טענה

יהי V מ"ו מעל F.

(1) $\forall\lambda\in F, \lambda\cdot 0_v=0_V$.
(2) $\forall v\in V, 0_F\cdot v=0_V$.
(3) $\lambda\cdot v=0_V\Rightarrow v=0_v\vee\lambda=0_v$.
(4) $\forall v\in V, (-1_F)\cdot v=-v$.

הוכחה

(1) $\lambda 0_V=\lambda(0_V+0_V)=\lambda 0_V+\lambda 0_V$. מצמצום $0_V=\lambda 0_V$.
(2) באופן דומה, $0_F\cdot v=(0_F+0_F)\cdot v=0_Fv+0_Fv\Rightarrow 0_F\cdot v=0_V$.
(3) נניח $\lambda\cdot v=0$. אם $\lambda=0$ ניצחנו. אחרת, $\lambda\neq 0$. כלומר, $v=1_F\cdot v=(\lambda^{-1}\lambda)v=\lambda^{-1}(\lambda v)=0_V$ כנדרש.
(4) יודעים שהנגדי הוא יחיד, אז די להוכיח ש-$-1_F\cdot v$ הוא הנגדי ל-v. נראה כי

$$-1_F\cdot v+v=-1\cdot v+1\cdot v=(-1+1)\cdot v=0_F\cdot v=0_F$$

■