מבוא לתורת הקבוצות - הרצאה 6

09 באוגוסט, 2023

יונתן מגר

משפט קנטור

טענה: תהי X קבוצה. אזי $|X| < |P(X)|$.

הוכחה: יש העתקה חח"ע מ-X ל-$P(X)$, הנתונה ע"י: $x \mapsto \{x\}$. לכן, נקבל כי $|X| \leq |P(X)|$. נניח כעת בשלילה שיש העתקה חח"ע ועל (כלומר $|X| = |P(X)|$). נגדיר את A להיות $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. כלומר, קבוצת כל האיברים ב-X שלא שייכים לתמונה של עצמם תחת f. נשים לב כי $A \subseteq X$, כלומר $A \in P(X)$. לכן מההנחה ש-f על, קיים $x_0 \in X$ כך ש-$f(x_0) = A$. נניח כי $x_0 \in A$. כלומר, $x_0 \in f(x_0)$, בסתירה להגדרת A. כעת נניח $x_0 \notin A$, כלומר $x_0 \notin f(x_0)$, ומכך מתקיים $x_0 \in A$ ושוב הגענו לסתירה. כלומר, הנחת היסוד שגויה ונקבל $|X| < |P(X)|$.

■

מסקנות

1. לכל מספר טבעי $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m < 2^m$ (וגם לכל עוצמה).
2. יש אינסוף עוצמות שונות.
3. לא קיימת קבוצת כל הקבוצות.

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

טענה: נניח כי עבור שתי עוצמות a, b, מתקיים $a \leq b \wedge b \geq a$. אזי $a = b$.

- עלינו להוכיח שאם קבוצות A, B מקיימות $f : A \to B$ חח"ע ו-$g : B \to A$ חח"ע, קיימת $h : A \to B$ חח"ע ועל.

הוכחה (גיאומטרית)

נשים לב שמאחר ו-$g : B \to g(B)$, היא על, אז למצוא $h : A \to B$ חח"ע ועל שקול ללמצוא $h' : A \to g(B) \subseteq A$. זאת מפני שאז $h = g^{-1} \circ h'$. נשים לב כי $g \circ f$ חח"ע כהרכבה של פונקציות חח"ע, ותמונתה $A \supseteq g(B) \supseteq g(f(A))$. נסמן $X = g \circ f(A), Y = g(B) \setminus X, Z = A \setminus g(B) = A \setminus (X \cup Y)$. כלומר, חילקנו את A ל-3 חלקים זרים.

נזכיר כי עלינו למצוא פונקצית שקילות בין A ל-$X \cup Y$. יש לנו פונקצית שקילות בין A לבין X ($g \circ f : A \to g(f(A)) = X$). נגדיר לכל מספר טבעי i תת-קבוצות של A שאותן נסמן X_i, Y_i, Z_i. הן מקיימות (1): $X_1 \cup Y_1 \cup Z_1 = X$, (2): לכל i מתקיים $X_i \cap Y_i = X_i \cap Z_i = Y_i \cap Z_i = \emptyset$ ו-(3): $\forall i > 1 (X_i \cup Y_i \cup Z_i = X_{i-1})$.

נעשה זאת על ידי ההגדרה הבאה: $X_1 = (g \circ f)(X), Y_1 = (g \circ f)(Y), Z_1 = (g \circ \text{כ})(Z)$. מכך, (1) ו-(2) מתקיימים כי $g \circ f : A \to X$ חח"ע ועל X. לכל $i > 1$ נגדיר $X_i = (g \circ f)(X_{i-1})$, $Y_i = (g \circ f)(Y_{i-1})$, $Z_i = (g \circ f)(Z_{i-1})$. נראה כי $X_i \cup Y_i \cup Z_i = (g \circ f)(X_{i-2}) = X_{i-1}$. לכל i נקבל חלוקה מסוימת של A:

$$A = X_i \cup Y \bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j \cup Z \bigcup_{j=1}^{i-1} Z_j$$

ב"גבול", נקבל:

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \right) \cup Y \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j \cup Z \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$$

נגדיר את $h' : A \to g(B) = X \cup Y$ ע"י:

$$h'(t)=\begin{cases} g\circ f(t) \text{ if } t\in Z\cup\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}Z_j \\ t \text{ if } t\in\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}X_j\cup Y\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}Y_j \end{cases}$$

חח"ע ועל:

חח"ע ועל $g\circ f$ ולכן $h':Z\to Z_1\wedge h':Z_i\to Z_{i+1}$ אם $i\geq 1$.

ומפני שהזהות חח"ע ועל, $h':\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}X_i\to\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}X_i\wedge h':Y_i\to Y_i\wedge h':Y\to Y$ אם $i\geq 1$.

■

למת נקודת השבת

תהי X קבוצה ותהי העתקה $\varphi:P(X)\to P(X)$ השומרת על הכלה. כלומר, $A\subseteq B\subseteq X$ אז $\varphi(A)\subseteq\varphi(B)$. אזי קיימת $B\in P(X)$ כך ש-$\varphi(B)=B$.

דוגמות

(1) $X=Z,\varphi(A)=A\cup\{0\}$. נקודות השבת הינן כל תתי-הקבוצות ש-0 כבר שייך להן.

(2) $X=\mathbb{R}\setminus\{0\},\varphi(A)=2\cdot A=\{2x\mid x\in A\}$. נקודות שבת לדוגמה: $\{0\}$ \ $\mathbb{R}$, $\{0\}\setminus\mathbb{Q}$, $\{2^m\mid m\in\mathbb{R}\}$, $\emptyset$, $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}_-\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}_+\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}_-\setminus\{0\}$.

הוכחה

נסמן $\hat{A}=\{A\in P(X)\mid A\subseteq\varphi(A)\},B=\bigcup\limits_{A\in\hat{A}}A$. נראה כי B נק' שבת של φ. ראשית כל $\emptyset\in\hat{A}$, כלומר $\hat{A}$ לא ריקה. נשים לב אם $A\in\hat{A}\Rightarrow A\subseteq\varphi(A)\Rightarrow\varphi(A)\in\varphi(\varphi(A))\Rightarrow\varphi(A)\in\hat{A}$. לכל $A\in\hat{A}$ מתקיים $A\subseteq B$, ומשמירה על הכלה מתקבל $\varphi(A)\subseteq\varphi(B)$. בסך הכל $B=\bigcup\limits_{A\in\hat{A}}A\subseteq\bigcup\limits_{A\in\hat{A}}\varphi(A)\subseteq\varphi(B)$. מכך נובע $B\in\varphi(B)$ ובפרט $B\in\hat{A}$. לכן, $\varphi(B)\in\hat{A}$ ו-$\varphi(B)\subseteq B$ כי B איחוד של כל הקבוצות ב-$\hat{A}$.

הוכחת משפט קנטור-שרדר ברנשטיין באמצעות למת נק' השבת

נתונות $f:X\to Y$ חח"ע ו-$g:Y\to X$ חח"ע. נגדיר $\varphi:P(X)\to P(X)$ ע"י $\varphi(A)=X\setminus g(Y\setminus f(A))$.

תרגיל: בדקו ש-φ שומרת הכלה. מלמת נק' השבת קיימת $B\subseteq X$ כך ש-$\varphi(B)=B$, כלומר $B=X\setminus g(Y\setminus f(b))$. ודאו כי מובן מדוע האיחור זר ב-$X=B\uplus g(Y\setminus f(B))$.