1. תהי A קבוצה, $f : A \to A$ המוגדרת ע״י $f(a) = a$ או באופן שקול: $f = \{(a,a) \mid a \in A\}$. לפעמים נסמן ב-$\mathrm{id}(A)$.
   - נשים לב שהתחום והתמונה של f זהים ושווים ל-A.
2. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. נראה כי $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
3. היחס $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ אינו פונקציה מעל $\mathbb{R}$ כי אינו שלם ואינו חד-ערכי. יחד עם זאת, $\{(x^2, x) : x \in R^+\}$ הוא כן פונקציה, וזוהי פונקציית השורש.

- **תרגיל** - יהיו $f : A \to B$ ו-$g : C \to D$ פונקציות כך ש-A, C זרות. הראו כי $f \cup g : A \cup C \to B \cup D$ היא פונק׳.
- **פתרון** - אכן מתקיים $f \cup g \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. צ״ל שהוא חד-ערכי ושלם.

  יהי $x \in A \cup C$. צ״ל שקיים $y \in B \cup D$ יחיד כך ש-$(x,y) \in f \cup g$.

  - **קיום** - אם $x \in A$, מכיוון ש-f פונקציה אז קיים $y \in B$ כך ש-$f(x) = y$, כלומר $y \in B \cup D \wedge (x,y) \in f \cup g$.

    אם $x \in C$, מכיוון ש-g פונקציה קיים $y \in D$ כך ש-$(x,y) \in g$ ולכן $(x,y) \in f \cup g$ כאשר $y \in B \cup D$.

  - **יחידות** - נניח כי קיימים $y_1, y_2 \in B \cup D$ כך ש-$(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f \cup g$.
    - אם $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in f$ אז מחד-ערכיות של f יתקיים $y_1 = y_2$.
    - אם $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in g$ אז מחד-ערכיות של g יתקיים $y_1 = y_2$.
    - אם $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in g$ (בלי הגבלת הכלליות) אז $x \in A \wedge x \in C$, בסתירה לכך ש-$A \cap C = \emptyset$.

    הראינו ש-$f \cup g$ שלם וחד-ערכי ולכן זו פונקציה.

■

הגדרה - יהיו A, B קבוצות, $f : A \to B$.

1. f נקראת חח״ע אם $\forall a_1, a_2 \in A(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.
2. f על B אם $\mathrm{Im}(f) = B$. באופן שקול $\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b)$.

- תרגיל - תהי X קבוצה. $I \subseteq X$. נגדיר $f : P(X) \to P(X)$ על ידי $f(A) = A \triangle I$. האם f חח״ע? האם על?
  - פתרון - נבדוק חח״ע: נניח ש-$f(A_1) = f(A_2)$ כלומר $A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$. נוכיח $A_1 \subseteq A_2$ (מסימטריה ינבע ש-$A_2 \subseteq A_1$).

    יהי $x \in A_1$. אם $x \in I$ אז $x \notin A \triangle I = A_2 \triangle I$ ולכן $x \in A_2$. אחרת, $x \in A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$+ תהי
A קבוצה, $f : A \to A$ המוגדרת ע״י $f(a) = a$ או באופן שקול: $f = \{(a,a) \mid a \in A\}$. לפעמים נסמן ב-$\mathrm{id}(A)$.
  - נשים לב שהתחום והתמונה של f זהים ושווים ל-A.

1. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. נראה כי $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
2. היחס $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ אינו פונקציה מעל $\mathbb{R}$ כי אינו שלם ואינו חד-ערכי. יחד עם זאת, $\{(x^2, x) : x \in R^+\}$ הוא כן פונקציה, וזוהי פונקציית השורש.

- **תרגיל** - יהיו $f : A \to B$ ו-$g : C \to D$ פונקציות כך ש-A, C זרות. הראו כי $f \cup g : A \cup C \to B \cup D$ היא פונק׳.
- **פתרון** - אכן מתקיים $f \cup g \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. צ״ל שהוא חד-ערכי ושלם.

  יהי $x \in A \cup C$. צ״ל שקיים $y \in B \cup D$ יחיד כך ש-$(x,y) \in f \cup g$.

  - **קיום** - אם $x \in A$, מכיוון ש-f פונקציה אז קיים $y \in B$ כך ש-$f(x) = y$, כלומר $y \in B \cup D \wedge (x,y) \in f \cup g$.

אם $x \in C$, מכיוון ש-g פונקציה קיים $y \in D$ כך ש-$(x,y) \in g$ ולכן $(x,y) \in f \cup g$ כאשר $y \in B \cup D$.

- **יחידות** - נניח כי קיימים $y_1, y_2 \in B \cup D$ כך ש-$(x_1,y_1),(x_1,y_2) \in f \cup g$.
  - אם $(x_1,y_1),(x_1,y_2) \in f$ אז מחד-ערכיות של f יתקיים $y_1 = y_2$.
  - אם $(x_1,y_1),(x_1,y_2) \in g$ אז מחד-ערכיות של g יתקיים $y_1 = y_2$.
  - אם $(x_1,y_1) \in f, (x_1,y_2) \in g$ (בלי הגבלת הכלליות) אז $x \in A \wedge x \in C$, בסתירה לכך ש-$A \cap C = \emptyset$.

  הראינו ש-$f \cup g$ שלם וחד-ערכי ולכן זו פונקציה.

■

הגדרה - יהיו A, B קבוצות, $f : A \to B$.

1. f נקראת חח"ע אם $\forall a_1, a_2 \in A(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.
2. f על B אם $\mathrm{Im}(f) = B$. באופן שקול $\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b)$.

- תרגיל - תהי X קבוצה. $I \subseteq X$. נגדיר $f : P(X) \to P(X)$ על ידי $f(A) = A \triangle I$. האם f חח"ע? האם על?
  - פתרון - נבדוק חח"ע: נניח ש-$f(A_1) = f(A_2)$ כלומר $A_1 \triangle I = A_2 \triangle I$. נוכיח $A_1 \subseteq A_2$ (מסימטריה ינבע ש-$A_2 \subseteq A_1$).

    יהי $x \in A_1$. אם $x \in I$ אז $x \notin A \triangle I = A_2 \triangle I$ ולכן $x \in A_2$. ולכן $x \in A_2$.