חדוא 1א' - שיעור 4

11 בינואר, 2024

יונתן מגר

חשבון גבולות

משפט

נתונות שתי סדרות (a_n) ו-(b_n), ונניח $\lim a_n = a$ ו-$\lim b_n = b$. אזי:

(1) $\exists \lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$

(2) $\exists \lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$

(3) $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ (בתנאי נוסף: $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$ ו-$b \neq 0$).

הוכחה

(1) נתון $\forall \varepsilon > 0 \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n'_\varepsilon$ ונתון $\forall \varepsilon > 0 \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n''_\varepsilon$.

ואז $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

(2) יהי $\varepsilon > 0$ שרירותי. הסדרה (a_n) מתכנסת ולכן חסומה, כלומר $\exists M > 0 : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. ואז:

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_b b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = \\ = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|, \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

מצד שני, מהנתון נובע:

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}, \forall n > n'_\varepsilon$$

$$\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > n''_\varepsilon$$

ואז $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, מ-(1) נובע:

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{|b| + 1} < \varepsilon$$

■

(3) הוכחנו (2), ולכן מספיק להוכיח $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. מהנתון $b_n \to b \neq 0$ ומכך $|b_n| \to |b| > 0$.

נשתמש בלמה מהשיעור הקודם, ונסיק כי $0 < r < |b|$, עבור r מסוים. נראה כי $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |b| > r, \forall n > n_0$.
נשים לב כי $\forall n > n_0$ מתקיים $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{1}{r|b|}|b_n - b|$. כעת, יהי $\varepsilon > 0$ שרירותי. אז:

$$\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon r|b|, \forall n < n'_\varepsilon$$

ואז $\forall n > n_\varepsilon = \max\{n_0, n'_\varepsilon\}$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{1}{r|b|}|b_n - b| < \frac{1}{\cancel{r|b|}} \cdot \varepsilon \cancel{r|b|} = \varepsilon$$

■

דוגמה

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

מונוטוניות הגבול

למה

נתונה סדרה (d_n) כאשר $d_n\geq 0$ ו-$d_n\to d$. אזי $d\geq 0$.

הוכחה

מהנתון נובע $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:|d_n-d|<\varepsilon,\forall n>n_\varepsilon$. נניח בשלילה ש-$d<0$, ונבחר $0<\varepsilon<-d$. מכך נובע ש-$d+\varepsilon<0$.

אז עבור ε, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ כך ש-$|d_n-d|<\varepsilon,\forall n>n_0$ $\Leftarrow$ $d_n-d<\varepsilon,\forall n>n_0$ $\Leftarrow$ $d_n<d+\varepsilon,\forall n>n_0$ וזו סתירה $\forall n>n_0, d_n\geq 0$.

■

הערה

מעבר לגבול "לא מכבד" אי-שיוויון חזק, למשל $d_n=\frac{1}{n}>0=d_n$ בגבול $0\geq 0$.

משפט (הכללה של הלמה)

נתונות שתי סדרות (a_n) ו-(b_n), ונניח $\lim a_n=a$ ו-$\lim b_n=b$ ו-$a_n\leq b_n$. אזי $a\leq b$.

הוכחה

נגדיר $d_n=b_n-a_n\geq 0$. לכן, $d_n\to b-a$. לפי הלמה, $b-a\geq 0$, כלומר $a\leq b$.

■

בפרט, המשפט אומר שאם $c\leq a_n\leq b$ ו-$c_n\to a$, אז $c\leq a\leq b$.

כלל הסנדוויץ'

נתונות שלוש סדרות $(x_n),(y_n),(z_n)$ כך ש-$(x_n)\to L,(y_n)\to L$. נניח גם ש-

$$\exists n_0\in\mathbb{N}:x_n\leq z_n\leq y_n,\forall n<n_0$$

אזי $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=L$.

הוכחה

נתון:

$$\forall\varepsilon>0\exists n'_\varepsilon\in\mathbb{N}:L-\varepsilon<x_n<L+\varepsilon,\forall n>n'_\varepsilon$$
$$\exists n''_\varepsilon\in\mathbb{N}:L-\varepsilon<y_n<L+\varepsilon,\forall n>n''_\varepsilon$$
$$\exists n_0\in\mathbb{N}:x_n\leq z_n\leq y_n,\forall n>n_0$$

לכן, $\forall n>n_\varepsilon=\max\{n'_\varepsilon,n''_\varepsilon,n_0\}$ מתקיים $L-\varepsilon<x_n\leq z_n\leq y_n<L+\varepsilon$. כלומר,

$$\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:L-\varepsilon<z_n<L+\varepsilon,\forall n>n_\varepsilon$$

■

דוגמאות

- תרגיל: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$
- פתרון בכלל הסנדוויץ': $x_n=1\le z_n=\sqrt{1+\frac{1}{n}}\le 1+\frac{1}{n}=y_n$ וכל הסדרות שואפות ל-1.
- תרגיל: $\frac{n}{n^2+5n+3}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{0}{1+0+0}=0$
- פתרון בכלל הסנדוויץ': $0\le\frac{n}{n^2+5n+3}\le\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n},\forall n\ge 1$ וכל הסדרות שואפות ל-0.

דוגמה

תהי (a_n) סדרה חסומה. אזי הסדרה $\frac{a_n}{n}\to 0$.

הוכחה

מהנתון $\exists M>0:|a_n|\le M,\forall n\in\mathbb{N}$. כלומר $-M\le a_n\le M,\forall n\in\mathbb{N}$ ולכן $-\frac{M}{n}\le\frac{a_n}{n}\le\frac{M}{n}\forall n\in\mathbb{N}$ וכל הסדרות שואפות ל-0 לפי כלל הסנדוויץ'.

טענה

תהי קבוצה $B\neq\emptyset$ חסומה מלמעלה. אז $\exists(x_n)\subseteq B$ כך ש-$\lim x_n=\sup B$.

הוכחה

מתקיים $\forall\varepsilon>0\exists x_\varepsilon\in B:\sup B-\varepsilon\le x_\varepsilon\le\sup B$.

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{n}>0$, כלומר $\exists x_n\in B$ כך ש-$\forall n\ge 1,\sup B-\frac{1}{n}\le x_n\le\sup B$ וכל הסדרות שואפות ל-$\sup B$.

הערה

אם קבוצה $B\neq\emptyset$ חסומה מלמטה, אז $\exists x_n\in B$ לכל $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf B$.

נוסחת סטירלינג

הנוסחה: $n!\simeq\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$. כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}}=1$