אלגברה לינארית 1א׳

סמסטר א׳ - 2024

יונתן מגר

תוכן העניינים

אלגברה לינארית 1א׳ - שיעור 3

09 בינואר, 2024

יונתן מגר

1. שדות - המשך

1.1. דוגמאות לשדות

ראינו סוג מסוים של שדות: לדוגמה, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

1.1.1. תזכורת (מהשיעור עם ענת)

נגדיר יחס על $\mathbb{Z}$ בהינתן $n \geq 1$ קבוע: $a \equiv b \operatorname{mod} n \Leftrightarrow n | a - b$, כלומר קיים c שלם כך ש-$a - b = cn$. הוכחנו כי היחס **רקלפסיבי**: $a \equiv a \operatorname{mod} n$, **סימטרי וטרנזיטיבי**. (אשלים בהמשך).

נגדיר את מחלקות השקילות $[x]_n = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \operatorname{mod} n\} = \{x, x \pm n, x \pm 2n...\}$.

1.1.2. למה

(1) כל שתי מחלקות שקילות שוות או זרות.

(2) כל איבר שלם נמצא באחת ממחלקות השקילות.

(3) זה מגדיר חלוקה של $\mathbb{Z}$: כלומר, $\mathbb{Z} = [0]_n \uplus ... \uplus [n-1]_n$ (זה אומר ש-$\mathbb{Z}$ איחוד של מחלקות השקילות $[0]$ עד $[n-1]$ ואין חפיפה).

1.1.3. הוכחה

(1) יהיו $[a]_n, [b]_n$ מחלקות שקילות.

- במקרה א׳, $[a] \cap [b] = \emptyset$. ניצחנו (מחלקות השקילות זרות).
- במקרה ב׳, $\exists c \in [a] \cap [b]$. כלומר, $c \equiv a \operatorname{mod} n \vee c \equiv b \operatorname{mod} n$. צ״ל $[a] = [b]$.

נוכיח ש-$[a] \subseteq [b]$ (משיקולי סימטריה, יינבע גם ש-$[b] \subseteq [a]$): יהי $x \in [a]$. כלומר, $x \equiv a \operatorname{mod} n$, וגם ראינו קודם ש-$c \equiv a \operatorname{mod} n$. משיקולי סימטריות וטרנזיטיביות, נגרר ש-$x \equiv c \operatorname{mod} n$. נזכיר ש-$c \equiv b \operatorname{mod} n$, ומטרנזיטיביות $x \equiv b \operatorname{mod} n$, כרצוי.

$\blacksquare$

(2) ברור כי לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \in [a]$ מרפלקסיביות.

$\blacksquare$

(3) קודם נוכיח ש-$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{n-1} [i]_n$. הכיוון $\supseteq$ ברור. עבור הכיוון $\subseteq$, נוכיח: יהי $x \in \mathbb{Z}$ צריך למצוא $0 \leq i \leq n-1$, כך ש-$x \in [i]$. נזכיר כי השלמים $\mathbb{Z}$ באים עם חילוק עם שארית, כלומר נוכל לבטא את x בתור $an + r$, כך ש-$x \leq r \leq n-1$. אז, $x - r = an$ ולכן $x \equiv r \operatorname{mod} n$ ומכך $x \in [r]$ ($\blacksquare$ חלק ראשון).

חלק שני: לכל $0 \leq j \leq i \leq n-1$ מתקיים ש-$[i] \cap [j] = \emptyset$. לפי (1) די להראות ש-$[j] \neq [i]$. נראה ש-$i \notin [j]$ למרות ש-$i \in [i]$, ואכן $0 \leq i - j \leq n$. לכן $i - j \neq an$ ולכן $i \neq j \operatorname{mod} n$ כלומר $i \notin [j]$.

$\blacksquare$

1.2. הגדרה - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

נסמן ב-$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ את קבוצת מחלקות השקילות, כלומר $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{[0]_n, [1]_n ..., [n-1]_n\right\}$ קבוצה בגודל n.

נגדיר: $[x] + [y] := [x + y]$, $[x] \cdot [y] := [x \cdot y]$. צריך להראות שהפעולות מוגדרות היטב, כלומר אינן תלויות בבחירת הנציגים.

1.2.1. טענה - החיבור והכפל ב-$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ מוגדרים היטב

נוכיח: $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$[x_1] = [x_2]$ ו-$y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$[y_1] = [y_2]$. צ"ל $[x_1 + y_1] = [x_2 + y_2]$ וגם $[x_1 \cdot y_1] = [x_2 \cdot y_2]$. לפי הלמה הקודמת, די להראות ש-$[x_1 + y_1] \cap [x_2 + y_2] \neq \emptyset$. די להראות ש-$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \mod n$ (ואותו דבר עבור כפל).

ואכן, קיימים $x_1 - x_2 = x_3 n$ ו-$y_1 - y_2 = y_3 n$. ואז,

$$x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) = x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = n(x_3 + y_3)$$

ולכן הם שקולים. באופן דומה עבור כפל,

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = (x_2 + x_3 n)(y_2 + y_3 n) - x_2 y_2 = n[x_3 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_3 n]$$

■

1.2.2. טענה - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא שדה

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ עם החיבור והכפל שהגדרנו ועם $[0]$ כאיבר האפס ו-$[1]$ כאיבר היחידה מקיים את כל התכונות של שדה, פרט אולי לקיום הופכי. נוכיח (חלקית): נגיד ש-$[0]$ הוא באמת איבר האפס: $[x] + [0] = [x + 0] = [x]$ כרצוי. כך הלאה עבור איבר היחידה ושאר תכונות השדה. הטענה לכן נובעת מקיום התכונות בשלמים.

■

1.2.3. דוגמאות

(1) $n = 2$. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\text{זוגיים, אי-זוגיים}\} = \{[0], [1]\} = \{[8], [-3]\}$. זה שדה המזדהה עם $\mathbb{F}_2$.
(2) $n = 3$. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\} = \{[0], [1], [-1]\}$. זהו שדה (ניתן לזהותו בתור $\mathbb{F}_3$).
(3) $n = 4$. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \left\{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\right\}$. ל-2 אין הופכי, כי $[2] \cdot [x] = [2x]$ וכל האיברים ב-$2x$ זוגיים ולכן לא נקבל את $[1]$. דרך אחרת: $[2] \cdot [2] = [0]$ ובשדה זה לא יכול להתקיים. כלומר, זהו לא שדה.
(4) $n = 5$. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ שדה, $2 \cdot 3 \equiv 1 \mod 5$.
(5) $n = 6$. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ לא שדה כי $2 \cdot 3 \equiv 0 \mod 6$.

קל להכליל בתור משפט: **$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא שדה אמ"מ n ראשוני.** (נדלג על ההוכחה).

2. מציין של שדה

ב-$\mathbb{Q}$, $0 \neq 1 + 1 + 1 + 1... + 1$. אך ב-$F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, מתקיים $1_F + ... + 1_F$ (p פעמים) שווה ל-0. נגדיר באינדוקציה $n \cdot 1_F := 1_F + ... + 1_F$ (n פעמים), ו-$-n \cdot 1_F = -(n \cdot 1_F)$.

נגדיר את המציין של השדה כך:

$$\mathrm{char}(F) := \begin{cases} 0 \text{ if } n \cdot 1_F \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{else} \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1_F = 0\} \end{cases}$$

3. מערכות משוואות מעל שדות

יהי F שדה כלשהו, ונסמן $1 = 1_F$ ו-$0 = 0_F$.

3.1. הגדרות

(1) משוואה לינארית ב-n נעלמים מעל F עם מקדמים $a_1 ... a_n, b \in F$ היא משוואה מהצורה $a_1 x_1 + ... + a_n x_n = b$.
(2) מערכת משוואות של m משוואות ב-n נעלמים מעל F היא אוסף של m משוואות כמו ב-(1). נרשום:

$$\begin{pmatrix} a_{1n} x_1 + ... & a_{1n} x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} x_1 + ... & a_{mn} x_n & = b_m \end{pmatrix}$$

כאשר $a_{ij} \in F$, $1 \le i \le m$ נקראים המקדמים. (להשלים)

(3) פתרון של מערכת המשוואות זה $(x_1, ...x_n) \in F^n$ הוא n-יה של איברים ב-F כך שאם נציב את x_i ב-X_i במערכת המשוואות כל המשוואות יתקיימו.

(4) קבוצת הפתרונות היא $\{(x_1, ..., x_n) \in F^n \mid (x_1, ..., x_n)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות$\}$.

3.1.1. דוגמה: $X + Y = 0$.

פתרונות לדוגמה, $(0, 0)$, $(1, -1)$. קבוצת הפתרונות היא $\{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in F\}$.

אלגברה לינארית 1א׳ - שיעור 4

11 בינואר, 2024

יונתן מגר

4. מערכות משוואות לינאריות

4.1. הגדרה

מערכות משוואות לינאריות באותן נעלמים נקראות **שקולות** אם יש להן את אותו אוסף פתרונות.

4.1.1. דוגמה

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

אוסף הפתרונות $S = \{(1,0)\}$.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

גם פה, אוסף הפתרונות $S = \{(1,0)\}$.

כלומר, שתי המערכות **שקולות**.

4.2. הגדרה

שלושת הפעולות הבאות המבוצעות על מע׳ משוואות נקראות **פעולות אלמנטריות**:

(1) החלפת סדר המשוואות במערכת.

(2) מכפלת משוואה בסקלר שאינו 0.

(3) הוספת מכפלה בסקלר של משוואה אחת למשוואה אחרת.

4.3. פעולות אלמנטריות מעבירות בין מע׳ משוואות שקולות

4.3.1. הוכחה

נתונה מערכת משוואות לינארית

$$(M) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נסמן ב-$\widetilde{M}$ את המערכת המתקבלת מ-M לאחר הפעלת פעולה אלמנטרית אחת. לכאורה עלינו להראות הכלה דו-כיוונית בין אוסף הפתרונות של M לזה של $\widetilde{M}$. בפועל, אם נשים לב שלכל פעולה אלמנטרית יש פעולה אלמנטרית הופכית, נוכל להסיק שמספיק להראות שכל פתרון של M הוא גם פתרון של $\widetilde{M}$. ואמנם:

(1) הפעולה ההופכית להחלפת שתי משוואות היא החלפה נוספת של אותן שתי משוואות.

(2) אם נכפול משוואה בסקלר $\lambda \neq 0$ אחרי מכפלה של אותה משוואה ב-λ^{-1} נחזור למשוואה המקורית.

(3) על מנת לחזור למשוואה המקורית לאחר שהוספנו לה מכפלה בסקלר של משוואה אחרת, עלינו להוסיף לה גם מכפלה של אותה משוואה אך בסקלר הנגדי.

יהי $(c_1, c_2, ..., c_n)$ פתרון של המערכת M:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + ... + a_{1n}c_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}c_1 + ... + a_{in}c_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}c_1 + ... + a_{jn}c_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + ... + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$$

(1) ברור שהחלפת סדר המשוואות אינה משנה את נכונותן, ולכן $(c_1, c_2, ..., c_n)$ פתרון גם לאחריה.
(2) אם נכפול את המשוואה ה-i-ית ב-$\lambda \neq 0$, יתר המשוואות לא משתנות, קיומן לא משתנה והמשוואה החדשה מתקיימת.
(3) אם נוסיף למשוואה ה-i-ית את מכפלת המשוואה ה-j-ית ב-λ, כל יתר המשוואות יתקיימו כמקודם והמשוואה החדשה מתקיימת.

■

5. מטריצה

מטריצה מגודל $m \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ היא טבלה שבה m שורות ו-n עמודות, וכל רכיביה סקלרים מ-$\mathbb{F}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & R_1 & - \\ - & R_2 & - \\ & \vdots & \\ - & R_m & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & ... & | \\ C_1 & C_2 & ... & C_m \\ | & | & ... & | \end{pmatrix}$$

כאן, $R_1, ..., R_m \in \mathbb{F}^n$ (השורות) ו-$C_1, ..., C_n \in \mathbb{F}^m$ (העמודות).

נסמן ב-$M_{m\times n}(\mathbb{F})$ את אוסף כל המטריצות מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ואם $m = n$ נסמן $M_n(\mathbb{F})$ ונאמר שהמטריצה ריבועית.
אם $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נסמן ב-A_{ij} את האיבר שבשורה ה-i ובעמודה ה-j-ית במטריצה A.

5.1. דוגמאות למטריצות

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 2}(\mathbb{Q})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$$

5.2. הגדרה

בהינתן מע׳ משוואות לינאריות מעל השדה $\mathbb{F}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נבנה מטריצה מגודל $m \times (n+1)$ מעל השדה $\mathbb{F}$ שבה כל שורה מייצגת משוואה כל עמודה מייצגת נעלם, והמקדמים החופשיים מיוצגים בעמודה נוספת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$$

מטריצה זו נקראת **מטריצת המקדמים (המורחבת)** של המערכת. במידה ונבנה מטריצה ללא עמודת המקדמים החופשיים נקרא לה **המטריצה המצומצמת**.

5.2.1. הגדרה

נוכל לבצע **פעולות שורה אלמנטריות** על מטריצה. פעולות אלה הן:

(1) החלפה בין שתי שורות $R_i \leftrightarrow R_j$.

(2) מכפלת שורה בסקלר שונה מאפס $R_i \to \lambda \cdot R_i, \lambda \neq 0$

(3) הוספת מכפלה בסקלר של שורה אחרת לאחרת $R_i \to R_i + \lambda \cdot R_j$

זוג מטריצות נקראות **שקולות שורה** אם ניתן לעבור מאחת לשניה על ידי מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות, ונסמן $A \sim B$.

5.3. שקילות שורה של מטריצות היא יחס שקילות

5.3.1. הוכחה

- **רפלקסיביות**: אם נבצע 0 פעולות שורה אלמנטריות, נקבל שכל מטריצה שקולת שורה לעצמה.
- **סימטריות**: אם ניתן להגיע מ-A ל-B על ידי סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות, נבצע את אותן פעולות אך הופכיות ובסדר הפוך כדי להגיע מ-B ל-A.
- **טרנזיטיביות**: אם אפשר להגיע מ-A ל-B על ידי סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות, וכך גם מ-B ל-C, אז אם נבצע את שתי סדרות הפעולות ברצף נגיע מ-A ל-C כנדרש.

■

5.3.2. מסקנה: מטריצות שקולות שורה מייצגות מערכות משוואות שקולות.

5.4. הגדרה

- שורה במטריצה שבה יש רק אפסים נקראת **שורת אפסים**.
- האיבר הראשון שאינו אפס בשורה שאינה שורת אפסים נקרא **איבר פותח (מוביל)**.
- מטריצה נקראת **מדורגת** אם:
  (1) כל איבר פותח נמצא מימין לאיברים הפותחים בשורות שמעליו.
  (2) שורות אפסים (אם קיימות) בתחתית המטריצה.
- מטריצה מדורגת נקראת **מדורגת קנונית** אם:
  (1) כל איבר פותח הוא 1.
  (2) בעמודה שבה מופיע איבר פותח, יתר הרכיבים הם אפסים.
- משתנה שמיוצג בעמודה שבה איבר פותח במטריצה מדורגת נקרא **משתנה תלוי (קשור)**. אחרת, נאמר שהמשתנה **חופשי**.

5.5. כל מטריצה היא שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית כלשהי

5.5.1. הסבר

לפי שיטת האלימינציה של גאוס, נוכל להעביר כל מטריצה למטריצה שקולת שורה ומדורגת שבה כל האיברים הפותחים הם אחדות. כעת ניתן יהיה לאפס את יתר רכיבי העמודה שבה אחד פותח בעזרת הוספה מתאימה של מכפלת השורה שבה האחד הפותח באחרות.

5.5.2. דוגמה

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5x+6y+7z=8 \\ 9x+10y+az=b \end{cases} ,a,b\in\mathbb{R}$$

נבנה את מטריצת המקדמים המורחבת של המערכת, ונבצע פעולות שורה אלמנטריות עד שנגיע למטריצה מדורגת קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & a & b \end{array}\right)$$

(1) בעזרת החלפת שורות נוודא שהאיבר בעמודה והשורה הראשונות אינו אפס. אם כל העמודה הראשונה היא אפסים, נתעלם ממנה.
(2) בעזרת מכפלה מתאימה של השורה הראשונה נוודא שהאיבר הפותח בה הוא 1.
(3) נאפס את יתר רכיבי העמודה בעזרת הוספה של מכפלות מתאימות של השורה הראשונה באחרות (לאפס את כל העמודה, לא רק כלפי מטה).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-9R_1]{R_2\to R_2-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & a-27 & b-36 \end{array}\right)$$

(4) נתעלם מהשורה והעמודה הראשונות ונחזור על פעולות (1) - (4).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & a-27 & b-36 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & a-27 & b-36 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & a-27 & b-36 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+8R_2]{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-11 & b-12 \end{array}\right)$$

אם $a=11$ המטריצה המצומצמת מדורגת קנונית במקרה הזה, והיא מייצגת את המערכת השקולה:

$$\begin{cases} x-z=-2 \\ y+2z=3 \\ 0=b-12 \end{cases}$$

כעת עבור $b\neq 12$, המשוואה האחרונה תהיה $0=b-12\neq 0$ וקיבלנו סתירה, ולמערכת אין אף פתרון במקרה הזה.

ואם $b=12$ נבודד את המשתנים התלויים x,y לפי המשתנה החופשי שהוא z, ונקבל:

$$\begin{cases} x=z-2 \\ y=3-2z \end{cases} \Rightarrow S=\left\{ \begin{pmatrix} z-2 \\ 3-2z \\ z \end{pmatrix} \mid z\in\mathbb{R} \right\}$$

אם $a\neq 11$, נמשיך:

$$\xrightarrow{R_3\to(a-11)^{-1}\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&1&\frac{b-12}{a-11}\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to R_2-2R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-2+\frac{b-12}{a-11}\\0&1&0&3-2\cdot\frac{b-12}{a-11}\\0&0&1&\frac{b-12}{a-11}\end{array}\right)$$

המטריצה המצומצמת מדורגת קנונית ומייצגת את המע׳ השקולה:

$$\begin{cases}x=-2+\frac{b-12}{a-11}\\y=3-2\cdot\frac{b-12}{a-11}\\z=\frac{b-12}{a-11}\end{cases}$$

למערכת פתרון **יחיד** כי כל המשתנים **תלויים**.

5.6. תוספת למשפט: כל מטריצה שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית יחידה

אלגברה לינארית 1א׳ - שיעור 5

16 בינואר, 2024

יונתן מגר

5.7. מסקנות מכך שקיימת משוואה קנונית יחידה

(1) אם $n > m$ (מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות) אז מתקיים בדיוק אחד מהשניים:
- (א׳) אין פתרון.
- (ב׳) יש לפחות $|F|$ (מספר האיברים בשדה F) פתרונות.

נוכיח: אם יש שורת סתירה ($0 = 1$) אז אין פתרונות. אחרת, כל שורה נותנת לכל היותר איבר פותח אחד, ולכן:

$$1 \leq n - m \leq \text{מספר האיברים הפותחים} - n = \text{מספר המשתנים החופשיים}$$

ולכן יש לפחות $|F|$ פתרונות.

■

(2) לכל מערכת משוואות מתקיים בדיוק אחד מהבאים:
- (א׳) אין פתרון.
- (ב׳) יש פתרון יחיד.
- (ג׳) יש לפחות $|F|$ פתרונות.

נוכיח: נעבור לצורה קנונית, זה לא משנה את קבוצת הפתרונות.
- (א׳) $\Leftrightarrow$ יש שורת סתירה.
- (ב׳) $\Leftrightarrow$ אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים.
- (ג׳) $\Leftrightarrow$ אין שורת סתירה ויש משתנה חופשי אחד לפחות.

■

5.8. מערכת משוואות הומוגנית

מערכת משוואות נקראת **הומוגנית** אם $b_1 = ... = b_m = 0$. כלומר:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

נקרא לפתרון $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ **הפתרון הטרוויאלי**.

5.8.1. מסקנה

במערכת משוואות הומוגנית:

(1) אם $n > m$ אז יש לפחות $|F|$ פתרונות.

(2) תמיד:
- או שיש את הפתרון הטריוויאלי בלבד.
- או שיש לפחות $|F|$ פתרונות.

הוכחה: מיידי מהמסקנות הקודמות וקיום הפתרון הטריוויאלי.

6. מרחבים לינאריים/וקטוריים

יהי F שדה. קבוצה V עם שתי פונקציות $a : V \times V \to V$ (נקראת "חיבור" ומוגדרת $\forall u, v \in V, v + u := a(v, u)$), $m : F \times V \to V$ (נקראת "כפל בסקלר" ומוגדרת $\forall \lambda \in F \forall v \in V, \lambda \cdot v = \lambda v := m(\lambda, v)$) תיקרא מרחב וקטורי (לינארי) מעל F אם מתקיימות התכונות הבאות:

(1) **חילופיות**: $\forall v, u \in V, v + u = u + v$.
(2) **אסוציאטיביות**: $\forall v, u, w \in V, (v + u) + w = v + (u + w)$.
(3) **קיום איבר אפס**: קיים $w \in V$ ניטראלי לחיבור כלומר $\forall v \in V, v + w = w + v = v$. (תכף נראה ש-$w$ יחיד, ואז זה יצדיק להגיד "איבר האפס" ולסמנו ב-$0_v = 0$).
(4) **קיום נגדי**: $\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0_v$ הניטראלי לחיבור.
(5) **חוק הפילוג 1**: $\forall \lambda, \mu \in F \forall v \in V, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$.
(6) **חוק הפילוג 2**: $\forall \lambda \in F \forall u, v \in V, \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda \mu$.
(7) **אסוציאטיביות של כפל בסקלר**: $\forall \lambda, \mu \in F \forall v \in V, (\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu v)$.
(8) **איבר יחידה**: $\forall v \in V, 1_F \cdot v = v$.

איברים במ"ו נקראים **וקטורים**, ואיברים בשדה המתאים נקראים **סקלרים**.

6.1. דוגמאות

(1) F^n הוא מ"ו מעל F עם:
- החיבור $(v_1, ..., v_n) + (v_1, ..., v_n) := (v_1 + u_1, ..., v_n + u_n)$.
- הכפל בסקלר $F \ni \lambda(v_1, ..., v_n) = (\lambda v_1, ..., \lambda v_n)$.

נבדוק (1): כן, כי החיבור מוגדר לפי החיבור ב-F, והחיבור ב-F חילופי.

(2)-(4): כנ"ל.

וקטור האפס הוא $0_F = (0, ..., 0)$.

(5): $(\lambda + \mu)\overbrace{(v_1, ..., v_n)}^{\underline{v}} = (..., (\lambda + \mu)v_i, ...) = (..., \lambda v_i + \mu v_i, ...) = \lambda \underline{v} + \mu \underline{v}$.

(6)-(8): כנ"ל.

F^n נקרא המרחב הוקטורי הסטנדרטי מעל F.

(2) נסתכל על קבוצת המטריצות עם m שורות ו-n עמודות $M_{m \times n}(F) =$. זה גם מ"ו מעל F עם:
- החיבור: $M_{m \times n}(F) \ni A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ כך ש-$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$-ש $\forall i, j, a_{ij}, b_{ij} \in F :$.
- הכפל בסקלר: $\lambda \in F, A \in M_{m \times n}(F), \lambda A := (\lambda a_{ij})$.

ברור ש-(8)-(1) מתקיימים.

(3) דוגמה להגדרה: יהי V מ"ו מעל F. נאמר שתת קבוצה $W \subseteq V$ היא תת מרחב וקטורי של V אם:
(א') $0_v \in W$.
(ב') סגירות לחיבור: $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$.
(ג') סגירות לכפל בסקלר: $\forall \lambda \in F \forall w \in W : \lambda w \in W$.

טענה: אם W תת מרחב של V, אז W הוא מ"ו ביחס לחיבור וכפל בסקלר המושרים מ-V. נדלג על ההוכחה.

(4) דוגמה: $\mathrm{Func}(A, F) = \{f : A \to F \text{ פונקציות}\}$ כאשר $A \neq \emptyset$ (למשל $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). נגדיר:
- החיבור: $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$.
- הכפל בסקלר: $(\lambda f)(a) := \lambda f(a)$.

זהו מ"ו מעל F, כש-0 היא פונק' האפס.

(האם יש קשר בין הדוגמה הנ"ל ל-F^n?)

(5) דוגמה: נקח $V = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. $F = \mathbb{R}$. נגדיר:
- החיבור: $v, w \in \mathbb{R}_{>0}, v \oplus w = v \cdot w$.
- הכפל בסקלר: $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V = \mathbb{R}_{>0}, \lambda \odot v := v^{\lambda}$.

קל לראות שזה מקיים את כל התכונות. למשל, איבר האפס של V הוא 1.

6.2. תכונות של מרחבים וקטוריים

6.2.1. טענה

יהי V מ"ו מעל F.

(1) יש חוק צמצום: $\forall v, u, w \in V, v + u = w + u \Rightarrow v = w$.

(2) איבר האפס הוא יחיד ב-V.

(3) לכל $v \in V$ יש נגדי יחיד (נסמנו $-v$).

6.2.2. הוכחה

(1) יהיו $v, u, w \in V$. נניח $v + u = w + u$. נראה כי מתקיים:

$$v = v + (u + u') = (v + u) + u' = (w + u) + u' = w + (u + u') = w$$

כלומר, $v = w$ כנדרש.

(2) נניח ש-w, w' שניהם ניטראלים לחיבור ונוכיח $w = w'$. נראה כי מתקיים $w = w + w' = w'$.

(3) אם w, w' שניהם נגדיים ל-v: $v + w = 0_v = v + w'$. מ-(1) מתקיים $w = w'$.

■

6.2.3. טענה

יהי V מ"ו מעל F.

(1) $\forall \lambda \in F, \lambda \cdot 0_v = 0_V$.

(2) $\forall v \in V, 0_F \cdot v = 0_V$.

(3) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow v = 0_v \vee \lambda = 0_v$.

(4) $\forall v \in V, (-1_F) \cdot v = -v$.

6.2.4. הוכחה

(1) $\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V$. מצמצום $0_V = \lambda 0_V$.

(2) באופן דומה, $0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F v + 0_F v \Rightarrow 0_F \cdot v = 0_V$.

(3) נניח $\lambda \cdot v = 0$. אם $\lambda = 0$ ניצחנו. אחרת, $\lambda \neq 0$. כלומר, $v = 1_F \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = 0_V$ כנדרש.

(4) יודעים שהנגדי הוא יחיד, אז די להוכיח ש-$-1_F \cdot v$ הוא הנגדי ל-v. נראה כי

$$-1_F \cdot v + v = -1 \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1) \cdot v = 0_F \cdot v = 0_F$$

■

אלגברה לינארית 1א' - שיעור 6

18 בינואר, 2024

יונתן מגר

7. תתי-מרחבים וקטוריים ומושגים נוספים

7.1.1. תזכורת

יהי V מ"ו מעל השדה F ותהי $U \subseteq V$ תת-קבוצה של V. נאמר ש-U הוא ת"מ של V אם U מ"ו מעל F ביחס לאותן פעולות של חיבור וכפל בסקלר מ-F. מספיק להראות:

(1) U סגורה לחיבור.

(2) U סגורה לכפל בסקלר מ-F.

(3) $0 \in U$, או לחילופין, $U \neq \emptyset$.

נוכל לדרוש במקום (1) ו-(2) **סגירות לצירופים לינאריים**, כלומר: $\forall u, w \in U, \forall \alpha, \beta \in F : \alpha \cdot u + \beta \cdot w \in U$.

7.2. צירופים לינאריים

יהי V מ"ו מעל השדה F, ויהיו $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ וקטורים ב-V. לכל $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in F$, הסכום:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + ... + \lambda_n \cdot v_n$$

נקרא **צירוף לינארי** (צ"ל).

7.3. דוגמה: מרחב הפולינומים

$$F[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \wedge a_0, a_1, ..., a_k \in F \right\}$$

מרחב זה מורכב מכל הצ"ל האפשריים של המונומים $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$.

חיבור פולינומים מתבצע בעזרת חיבור המקדמים בהתאמה:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

וכן כפל בסקלר מתבצע ע"י מכפלת המקדמים בסקלר זה:

$$\lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \cdot a_k) x^k$$

זהירות!

פולינום בקורס שלנו הוא יותר מהערכים שהוא מחזיר! למשל, ב-$\mathbb{Z}_2$ נתבונן בפולינום $x^2 + x$:

$$(x^2 + x)(0) = 0 \wedge (x^2 + x)(1) = 0$$

אך פולינום זה **אינו** פולינום האפס, למרות שהם מחזירים את אותם הערכים.

נתבונן באוסף הפולינומים ממעלה $n \geq$ עבור $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$F_n[x] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, ..., a_n \in F \right\}$$

זוהי ודאי תת-קבוצה של $F_{[x]}$, אך האם זהו ת״מ?

ישנה סגירות לצ״ל $\Rightarrow$ $\alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) + \beta \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{(\alpha a_n + \beta b_k)}^{\in F} x^k \in F_n[x]$

ופולינום האפס מתקבל מהצ״ל שבו כל המקדמים אפסים $\sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k$. כלומר, זהו אכן ת״מ!

7.4. האם איחוד וחיתוך של ת״מ נשאר ת״מ?

נסתכל על $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \binom{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ועל תתי-המרחבים U (ציר ה-x) ו-W (ציר ה-y).

- נראה כי $U \cap W = \left\{ \binom{0}{0} \right\}$ הוא ת״מ טריוויאלי.
- נראה כי $U \cup W$ הוא מערכת הצירים, אך לא ת״מ כי אינו סגור לחיבור.

7.4.1. טענה

יהי V מ״ו מעל F ויהיו U, W זוג ת״מ של V. אז:

(1) החיתוך $U \cap W$ הינו ת״מ של V גם כן.

(2) האיחוד $U \cup W$ הוא ת״מ של V אם״ם $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

7.4.2. הוכחה

(1) יהיו $v_1, v_2 \in U \cap W$ ויהיו $\alpha, \beta \in F$. נתבונן בצ״ל $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$ כי $v_1, v_2 \in U$ ו-U סגור לצ״ל, וגם $\alpha v_1 + \beta v_2 \in W$ הרי ש-$v_1, v_2 \in W$ ו-W ת״מ וסגור לצ״ל. הראנו את הסגירות לצ״ל של $U \cap W$. U ת״מ ולכן $0 \in U$ וגם W ת״מ ולכן $0 \in W$, כלומר $0 \in U \cap W$, והראנו שהחיתוך $U \cap W$ ת״מ שהרי הוא מכיל את 0 וגם סגור לצ״ל.

(2)
- $\Rightarrow$: אם $U \subseteq W$ אז $U \cup W = W$ וזהו ת״מ, וגם אם $U \subseteq W$ אז $U \cup W = V$ וזהו ת״מ.
- $\Leftarrow$: נניח ש-$U \cup W$ ת״מ ונניח בשלילה ש-$W \not\subseteq U$ וגם $U \not\subseteq W$. $W \not\subseteq U$ ולכן קיים $u \in U$ כך ש-$u \notin W$, גם $U \not\subseteq W$ ולכן יש $w \in W$ כך ש-$w \notin U$. אבל, $u, w \in U \cup W$ וזהו ת״מ ולכן גם $u + w \in U \cup W$, בה״כ נניח $u + w \in W$. נקבל $u = u + w + (-w) \in W$, בסתירה להנחה.

■

7.5. סכום של תתי-מרחבים וקטוריים

יהי V מ״ו מעל F ויהיו U, W זוג ת״מ של V. נגדיר את הסכום $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$.

כאשר $U \cap W = \{0\}$ נאמר **שהסכום ישר** ונסמן $U \oplus W$.

7.5.1. טענה

יהיו U, W זוג ת״מ של מ״ו V מעל השדה F, אז $U + W$ הינו גם כן ת״מ של V. זהו למעשה תת-המרחב המינימלי שמכיל את $U \cup W$.

7.5.2. הוכחה

יהיו $u_1 + w_1, u_2 + w_2 \in U + W$. כאן $u_1, u_2 \in U \wedge w_1, w_2 \in W$. יהיו $\alpha, \beta \in F$. נביט בצ״ל:

$$\alpha \cdot (u_1 + w_1) + \beta \cdot (u_2 + w_2) = \underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_{\in U} + \underbrace{\alpha w_1 + \beta w_2}_{\in W}$$

U, W ת״מ ולכן $0 \in U$ וגם $0 \in W$ וכן: $0 = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} \in U + W$.

■

הערת אזהרה!

בחיבור ת"מ **אין** חוק צמצום, כלומר אם $u + w_1 = u + w_2$ **לא** ניתן להסיק מכך ש-$w_1 = w_2$.

7.5.3. טענה

יהיו U, W זוג ת"מ של מ"ו V מעל השדה F. אז:

הסכום $U + W$ הוא סכום ישר אם"ם כל וקטור בסכום ניתן להביע בצורה **יחידה** כסכום של וקטור מ-U ווקטור מ-W.

7.5.4. הוכחה

- $\Leftarrow$: נניח ש-$U \cap W = \{0\}$. יהיו $u_1, u_2 \in U$ ו-$w_1, w_2 \in W$ כך ש-$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \in U + W$. נסיק: $u_1 - u_2 = w_2 - w - 1 \in U \cap W = \{0\}$. כלומר: $w_1 - w_2 = 0 \wedge u_1 - u_2 = 0$ ומכך $u_1 = u_2 \wedge w_1 = w_2$ והראנו את היחידות.
- $\Rightarrow$: נניח שכל וקטור ב-$U + W$ ניתן להביע בצורה יחידה. נראה כי $0 \in U \cap W$ ויהי $v \in U \cap W$. נציג: $\underbrace{v}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in U} = \underbrace{0}_{\in W} + \underbrace{v}_{\in U}$ ומיחידות ההצגה נסיק $v = 0$.

$\blacksquare$

8. בסיס למרחב

יהי V מ"ו מעל F ותהי B קבוצת וקטורים מ-V. נאמר ש-B הינו **בסיס** של V אם כל וקטור ב-V ניתן להבעה **בצורה יחידה** כצ"ל של איברי B.

8.1. דוגמאות

(1) $\{0\}$ תת-המרחב הטריוויאלי. כאן הבסיס הוא הקב' הריקה (כי צ"ל של אפס וקטורים הוא וקטור האפס שניטרלי לחיבור).

(2) (א') ב-F^n נגדיר את **הבסיס הסטנדרטי** כך:

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נראה כי:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ב') ב-$\mathbb{R}^2$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) ב-$F[x]$ בסיס אחד יהיה מורכב מהמונומים: $\{1, x, x^2, ...\}$.

8.2. משפט

יהי V מ"ו מעל שדה F. אז ל-V קיים בסיס B, ובנוסף, לכל זוג בסיסים B_1, B_2 של V מתקיים: $|B_1| = |B_2|$.

8.2.1. אתגר: נסו להוכיח את המשפט ב-$\mathbb{R}^2$.

9. פרישה של מרחב

יהי V מ"ו מעל F ותהי $A \subseteq V$. נגדיר את **הפרישה** של A להיות אוסף כל הצירופים הלינאריים של וקטורי A. נסמן:

$$\operatorname{Sp}_F(A) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_1, ..., \lambda_n \in F, v_1, ..., v_n \in A \right\}$$

9.1. טענה

יהי V מ"ו מעל F ותהי $A \subseteq V$, אז $\operatorname{Sp}_F(A)$ הינו ת"מ של V.

9.1.1. הוכחה

צ"ל של אפס וקטורים ייתן את וקטור האפס, ולכן $0 \in \operatorname{Sp}_F(A)$. סגירות לצ"ל מתקבלת בקלות:

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{m} \mu_k u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha\lambda_k v_k + \sum_{k=0}^{m} \beta\mu_k u_k \in \operatorname{Sp}_F(A)$$

■