חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א׳

2024 - סמסטר א׳

יונתן מגר

	7	תוכן העניינים
3		1. חשבון גבולות
3		משפט . 1.1
3		1.1.1. הוכה
4		1.1.2. דוגמ
4	,	2. מונוטוניות הגבוי
4		
4		2.1.1. הוכח
4		2.1.2. הערו
4	'לה של הלמה)	2.2. משפט (הכי
4	` `	,
4		3. כלל הסנדוויץ'
4 4		•
5		
5		
5		,,,
5		
5	in a second seco	
5		
5		4. נוסחת סטירלינג
6	ל התכנסות סדרות	
6	ש הכללי	,
6		
6		
6	ש הגבולי	•
6		
6	הגבולי	'
6	הכללי	5.4. מבחן המנה
7	ת	6. סדרות מונוטוניו
7		משפט .6.1
7		6.1.1. הוכד
7	ה	6.1.2. דוגמ
7	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	6.1.3. פתרו
7	ה	6.1.4. דוגמ
7		6.1.5. פתרו
7		
8	eפת ל- e	6.3. סדרה השוא
8		
8		6.3.2. הוכד

8		. הערה .6.3.4
8	תרגיל)	6.3.5. טענה (ב
9		7. תתי-סדרות
9		דוגמה
9		הגדרה 7.2
9	נוספות	7.2.1. דוגמאות
9		.7.2.2 שאלה
9		משפט
10	זת״ס מונוטונית	7.4. לכל סדרה יש ו
10)	. למה .7.4.1
10	למה	7.4.2. הוכחת ה
10	משפט	7.4.3. הוכחת ה
10	יירשטראס	7.5. משפט בולצנו-ו
10)	7.5.1. הוכחה
10	משפט בולצנו-ויירשראטס המוכלל)	7.5.2 מסקנה (
11	ו קטעים מקוננים '	8. הלמה של קנטור על
11		הוכחה
11	משפט בולצנו-ויירשטראס (אריה במדבר)	8.2. הוכחה נוספת ל

5 חדו"א 1א' *-* שיעור

2024, בינואר, 11

יונתן מגר

1. חשבון גבולות

1.1. משפט

:נתונות שתי סדרות (a_n) ו-נניח ונניח ונניח ונניח וווה אזי: אזיי וווות שתי סדרות (a_n) ו-

$$\exists \lim (a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a+b \ \ (1)$$

$$\exists \lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b \tag{2}$$

$$\exists \lim (a_n\cdot b_n)=\lim a_n\cdot \lim b_n=a\cdot b$$
 (2) .($b\neq 0$ - ו- $\forall n\in \mathbb{N}, b_n\neq 0$ בחנאי נוסף: $\exists \lim \frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{a}{b}$ (3)

 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon}'' \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_{\varepsilon}''$ ונתון $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon}' \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_{\varepsilon}'$ נתון (1)

$$: orall n > n_arepsilon = \max\{n_arepsilon', n_arepsilon''\}$$
 ואז

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|a_n-a+b_n-b|\leq |a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

יהי $\varepsilon>0: |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ יהי חסומה, מתכנסת ולכן מתכנסת (a_n) מתכנסת הסדרה שרירותי. (2)

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_b b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a|, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

מצד שני, מהנתון נובע:

$$\exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}, \forall n > n_\varepsilon'$$

$$\exists n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > n_\varepsilon''$$

נובע: (1) נובע: א $n>n_{\varepsilon}=\max\{n'_{\varepsilon},n''_{\varepsilon}\}$ נובע:

$$|a_nb_n-ab|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{|b|}{|b|+1}<\varepsilon$$

 $|b_n| o |b| > 0$ ומכך ומכך ומכך הוכחנו .lim $rac{1}{b_n} = rac{1}{b}$ הוכיח להוכיח (3), ולכן מספיק להוכיח

 $\exists n_0 \in \mathbb{N}: |b|>r, \forall n>n_0$ נשתמש בלמה מהשיעור ונסיק כי 0< r<|b| נסיק כי ,ונסיק כי ,ונסיק כי , עבור c>0 מסוים. נראה כי ,0 כי c>0 שרירותי. אז: c>0 מתקיים לב כי c>0 מונים לב כי c>0 מתקיים לב כי c>0 מתקיים

$$\exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon r |b|, \forall n < n_\varepsilon'$$

 $: \forall n > n_{\varepsilon} = \max\{n_0, n_{\varepsilon}'\}$ ואז

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{1}{r|b|}|b_n - b| < \frac{1}{r|b|} \cdot \varepsilon r|b| = \varepsilon$$

1.1.2. דוגמה

$$\begin{split} \lim_{n\to\infty} & \sqrt{n} \Big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} \Big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Big) \Big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \Big)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ \lim_{n\to\infty} & \frac{(n+1) - n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{split}$$

2. מונוטוניות הגבול

2.1. למה

 $d \geq 0$ אזי $d_n \rightarrow d$ ו ו- $d_n \geq 0$ כאשר כאני מדרה נתונה סדרה כאשר

2.1.1. הוכחה

וזו $d_n < d+arepsilon, orall n_0 \Leftarrow d_n - d < arepsilon, orall n_0 \Leftarrow |d_n - d| < arepsilon, orall n_0 = n_0$ כדי של בור $d_n < d+arepsilon, orall n_0 \neq n_0, d_n \geq 0$ סתירה טחירה פתירה מינים של האור מינים וואר מינים של האור מינים ש

.2.1.2 הערה

 $.0 \geq 0$ בגבול הלא מכבד" בגבול אי-שיוויון חזק, למשל אי-שיוויון מעבר אבול מכבד" מעבר לגבול מעבר אי-שיוויון חזק,

2.2. משפט (הכללה של הלמה)

 $.a \leq b$ אזי וו. $a_n \leq b_n$ ו וו
 $\lim b_n = b$ ו ווו $a_n = a$ ונניח (
 ,(b_n)-ו (a_n) דרות שתי נתונות שתי מדרות

2.2.1. הוכחה

 $a \leq b$ כלומר , $b-a \geq 0$, לפי הלמה, לפי לפי לכן, לכן, לכן, לכן, לכן, לפי הלמה, לפי הלמה, לפי הלמה לכן, לכן, לכן, לכן

 $c \leq a \leq b$ אז א $c_n \rightarrow a$ ו ר $c \leq a_n \leq b$ אומר אומר בפרט, המשפט אומר

3. כלל הסנדוויץ'

-ש בם . $(x_n) o L$, $(y_n) o L$ כך ש- כך תרנות נניח נניח מדרות שלוש סדרות (x_n), (y_n) , (z_n) בניח גם ש $n_0 \in \mathbb{N}: x_n \le z_n \le y_n$, $\forall n < n_0$

 $\lim_{n o \infty} z_n = L$ אזי

3.1.1. הוכחה

נתון:

$$\begin{split} \forall \varepsilon > 0 &\exists n_\varepsilon' \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon' \\ &\exists n_\varepsilon'' \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon'' \\ &\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n > n_0 \end{split}$$
 לכן,
$$(L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n > n_0)$$
 לכן,
$$(L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n > n_\varepsilon)$$
 לכן,
$$(L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n > n_\varepsilon)$$
 לכן,
$$(L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq z_$$

.3.1.2 דוגמאות

$$\lim \sqrt{1+rac{1}{n}}=1$$
 תרגיל: •

.1-אפות שואפות וכל הסדרות וכל
$$x_n=1 \leq z_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n} = y_n$$
 יכל הסנדוויץ: •

$$\frac{n}{n^2+5n+3}=rac{rac{1}{n}}{1+rac{5}{n}+rac{3}{n^2}}=rac{0}{1+0+0}=0$$
 : תרגיל

.0-ט שואפות שואפות וכל הסדרות וכל $\frac{n}{n^2+5n+3} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$ בכלל הסנדוויץ': •

3.2. דוגמה

 $.\frac{a_n}{n} \to 0$ הסדרה אזי הסדרה סדרה (a_n) תהי

3.2.1. הוכחה

מהנתון מהנתון $M>0: |a_n|\leq \frac{M}{n}$ כלומר $M>0: |a_n|\leq M, \forall n\in\mathbb{N}$ ולכן מהנתון מאפות ל-0 לפי כלל הסנדוויץ'.

3.3. טענה

 $\lim x_n = \sup B$ כך כך כך $\exists (x_n) \subseteq B$ אז מלמעלה. חסומה $B \neq \emptyset$ הבוצה קבוצה

.3.3. הוכחה

 $. orall arepsilon > 0 \exists x_arepsilon \in B : \sup B - arepsilon \leq x_arepsilon \leq \sup B$ מתקיים

. $\sup B$ ל-ים שואפות הסדרות וכל ל $n\geq 1, \sup B-\frac{1}{n}\leq x_n\leq \sup B$ כך כך של הסדרות הסדרות גבחר גבחר נבחר גבחר כך של כך כך או

3.4. הערה

. lim $x_n=\inf B$ כך ש
- חסומה מלמטה, אז אז לכל לכל אז לכל ש $n\in\mathbb{N}$ לכל אז חסומה מלמטה, אז חסומה מלמטה, אז אם קבוצה א

4. נוסחת סטירלינג

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}}=1$$
כלומר . $n!\simeq\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$:הנוסחה

6 חדו"א 1א' *-* שיעור

2024, בינואר, 16

יונתן מגר

5. טענות נוספות על התכנסות סדרות

5.1. מבחן השורש הכללי

. $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = 0$ אזי $a_n^{\frac{1}{n}} \leq \alpha \forall n > n_0$ כך ש $a_n = 0$ כך אזי $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ אזי פררה תהי סדרה מהי סדרה אזי $a_n \geq 0$ ו-1

5.1.1. הוכחה

.(כלל הסנדוויץ'). מכיוון ש- $lpha^n$ שואפת ל-0 וכך גם הסדרה הקבועה (כלל הסנדוויץ'). מכיוון ש- $lpha^n$ שואפת ל-0 וכך גם מסדרה הקבועה (כלל הסנדוויץ').

.5.1.2 שאלה

. הסדרה: למשל, למשל, מתכנסת? בהכרח מחכרה: $a_n^{\frac{1}{n}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ המקיימת $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ האם הסדרה:

$$a_n: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}...$$

 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} a_n$ גבול אין אין
, $\displaystyle a_n^{\frac{1}{n}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ואז

5.2. מבחן השורש הגבולי

 \vdots אזי: .
 $\lim_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}=P$ כי תנניח ונניח $a_n\geq 0 \forall n\in\mathbb{N}$ הדרה תהי

$$\exists \lim a_n = 0 \Leftarrow P < 1$$
 אם (1

$$\exists\lim_{n\to\infty}a_n \geq 0$$
 אם (1)
$$\lim_{n\to\infty}a_n = 0 \Leftarrow P < 1$$
 אם (2) אם (2) אם (2)

.5.2.1 הוכחה

 $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \left|a_n^{-\frac{1}{n}} - P\right| < arepsilon \, \forall n > n_{\varepsilon}$ אז מהגדרת הגבול: . $P + arepsilon < 1 \Leftarrow 0 < arepsilon < 1 - P$ אם , P < 1 אם (1) . סיימנו. (lpha = P + arepsilon), מהמשפט הקודם . $a_n^{\frac{1}{n}} < P + arepsilon < 1$, סיימנו.

 $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}: \left|a_{n}^{\frac{1}{n}} - P\right| < \varepsilon \forall n > n_{\varepsilon}$ בהרל הגבול: $1 < P - \varepsilon \Leftarrow 0 < \varepsilon < P - 1$ בהרל, P > 1 אם P >

.5.3 מבחן המנה הגבולי מבחן מבחן המנה הגבולי מבחן
$$a_{n}>0 \, \forall n\in\mathbb{N}$$
 תהי תהי $a_n>0 \, \forall n\in\mathbb{N}$ אם . $\lim a_n=0 \Leftarrow L<1$ אם (1)

 $\lim a_n = +\infty \Leftarrow L > 1$ אם (2)

5.4. מבחן המנה הכללי

 $\lim a_n = 0$ אזי $a_{n+1} < La_n \, \forall n > n_0$ כך שכר בר ו-1 ונתונים (a_n) ונתונים (a_n) ונתונים (1)

 $\lim a_n = +\infty$ אזי . $a_{n+1} > La_n \ \forall n > n_0$ כך שL > 1 וונתונים (a_n) ונתונים (2) נתונה סדרה היובית

6. סדרות מונוטוניות

- $.a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ בקראת מונוטונית יורדת מונוטונית אם הארו $.a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ אם עולה מונוטונית יורדת הארו סדרה יובקראת הארו יורדת אם הארו יורדת אם הארו יובקראת מונוטונית אור יובקראת הארו יובקראת מונוטונית יורדת אם הארו יובקראת הארו יובקראת מונוטונית יורדת אם הארו יובקראת מונוטונית יורדת אורדת הארו יובקראת מונוטונית יורדת אורדת הארו יובקראת מונוטונית יורדת הארו יובקראת מונוטונית יורדת אורדת הארו יובקראת מונוטונית יורדת הארו יובקראת מונוטונית וורדת הארו יובקראת הארו
 - . ממש. יורדת הסדרה א $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$ ואם ממש, ואם הסדרה אז מ $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$ אם מתקיים •

6.1. משפט

, מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, אם ב $\lim a_n = \sup a_n$, אזי, אזי, וחסומה מונוטונית עולה מונוטונית עולה. אזי, אזי, אזי, אזי, אזי, אזי מונוטונית עולה וחסומה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה. $\exists \lim a_n = \inf a_n$ אז

6.1.1. הוכחה

- כך ש- תיים קיים arepsilon > 0 יהי . $\lim a_n = L$ ונוכיח ב $\log a_n$ נסמן (השני זהה); נסמן הראשון ונוכיח את המקרה הראשון ונוכיח ונוכיח ונוכיח את המקרה הראשון (השני זהה)

$$\overbrace{L-\varepsilon < \underbrace{a_{n_\varepsilon} \leq \underbrace{a_n \leq L}_{\forall n > n_\varepsilon}}^{\sup a_n = L} \underbrace{\leq L+\varepsilon}_{\varepsilon > 0}$$

כלומר הוכחנו:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$$

מתכנסת? האם היא מתכנסת.
 $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ נתונה סדרה

 a_n , $0 < a_n \, \forall n \in \mathbb{N}$, ואז הסדרה מונ' יורדת. מצד שני, $a_{n+1} = \overline{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq a_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim a_n$ הקודם המשפט לפי ואז לפי מלמטה, חסומה חסומה כלומר

. אותו
ב $\exists \lim a_n$ יכי צ"ל כי . $a_{n+1} = \sqrt{6+a}_n \forall n \in \mathbb{N}$ ו ולחשב מינה סדרה מזגדרת נתונה מ

.6.1.5 פתרון

 $a_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ - ש'ברות עולה (ברור הסדרה כי באינדוקציה - נוכיח נוכיח באינדוקציה הסדרה אולה (

$$.a_2=\sqrt{6+a_1}=\sqrt{6+\sqrt{6}}\geq \sqrt{6}=a_1:a_2\geq a_1$$
 (1) $.a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}\geq \sqrt{6+a_{n-1}}=a_n$ ואז $a_n\geq a_{n-1}$ (2)

$$a_{n+1} = \sqrt{6} + a_n \ge \sqrt{6} + a_{n-1} = a_n$$
 ואז $a_n \ge a_{n-1}$ (2)

• נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חסומה מלמעלה.

$$.a_1 = \sqrt{6} \le 3 : a_1 \le 3$$
 (1)

$$.a_1=\sqrt{6}\leq 3: a_1\leq 3 \ \mbox{(1)}$$
 $.a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}\leq 3$ ואז $a_n\leq 3$ (2)

מכאן מתקיים .lim $\sqrt{6+a_n}=\sqrt{6+a}$ וגם ווה $\lim a_{n+1}=a$ הקודמים הקודמים $\lim a_n=a$ לכן . $\exists \lim a_n=a$ a=3 כלומר, $a_1=3, a_2=-2$ הם $a^2-a-6=0$ הריבועית. כלומר המשוואה פתרונות המשוואה הריבועית.

.6.2 טענה

סדרה (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה מתכנסת ל $-\infty$. בדומה, סדרה (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה מתכנסת ל $-\infty$ מתכנסת ל

e-ל. סדרה השואפת ל ϵ -3

6.3.1 טענה

. הסומה עולה מונוטונית מונו
 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ הסדרה

.6.3.2 הוכחה

:עליה

$$\begin{split} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^{n-j} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{1}{n^j} \\ &= 1 + 1 + \sum_{j=2}^n \frac{(n-j)!(n-j+1) \cdot \ldots \cdot n}{j!(n-j)!} \cdot (n \cdot n \cdot \ldots \cdot n) \\ &= 1 + 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{n-j+1}{n} \cdot \frac{n-j+2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}\right) \\ &= 1 + 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{j-1}{n+1}\right) \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{j-1}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \end{split}$$

• חסימות:

$$\begin{split} 2 &= a_1 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{predict}} = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}_{2} = 2 + 1 - \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}}_{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{split}$$

6.3.3. מסקנה

. .(2 $\leq e \leq$ 3) eב-בול הגבול מסמנים .
 $\exists \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ לכן הלמעלה, מלמעלה עולה עולה מסמנים הסדרה הסדרה הסדרה מלמעלה.

6.3.4. הערה

.e=2.71828...לחשב ניתן בהמשך בהמשך בהמשך בהמשך גם עם שמתקיים גם שמתקיים $.e=\lim\sum_{n\rightarrow\infty}^{n}\frac{1}{k!}$ גם שמתקיים בהמשך בהמשך בהמשך בהמשך און בהמשך בהמ

6.3.5. טענה (בתרגיל)

.
$$\lim \left(1+rac{1}{x_n}
ight)^{x_n}=e$$
 אזי, אזי, $x_n o -\infty$ (או $x_n o -\infty$). אזי, $x_n o +\infty$

7 חדו"א 1א' - שיעור

2024, בינואר, 18

יונתן מגר

7. תתי-סדרות

7.1. דוגמה

 $: a_n$ מדרה תהא

$$a_n:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots$$

 $:\!b_k$ ותת-סדרה

$$b_k: \underbrace{b_1 = \frac{1}{3}}_{(a_3)}, \underbrace{b_2 = \frac{1}{7}}_{(a_7)}, \underbrace{b_3 = \frac{1}{101}}_{(a_{101})}, \dots$$

7.2. הגדרה

של ממש עולה עולה סדרה סדרה אם קיימת שלה אם תת-סדרה (תת"ס) הינה הינה תה-סדרה שסדרה שסדרה שסדרה שסדרה נאמר ממש של הינה עולה ממש של הינה עולה ממש של משלה שסדרה וא ממש של הינה עולה ממש של $b_k=a_{n_k}$ -ש כך אינדקסים (אינדקסים טבעיים טבעיים

7.2.1. דוגמאות נוספות

 $\left(a_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ נתונה סדרה

- $b_k = a_k \Leftarrow n_k = k$ במה: עצמה תת"ס של הסדרה היא הסדרה (1)
 - $a_k=2k:(a_n)$ של תת"ס של $b_k=a_{2k}$ (2)
 - $a_k = k+1 : (a_n)$ של תת"ס של $b_k = a_{k+1}$ (3)
- $:a_{n_k}$ לא תת"ס של (a_n) כא מינ (a_n) לא לא לא מת"ס ($(a_k)_{k=1}^\infty$

$$a_n: 1, 3, 5, 7, \dots$$

 $2a_k: 2, 6, 10, 14, \dots$

אם $\left(a_{n_k}+b_{m_k}\right)_{k=1}^\infty$ היא תת"ס של $\left(b_n\right)_{n=1}^\infty$ היא תת"ס של $\left(b_n\right)_{k=1}^\infty$ וכן $\left(a_n\right)_{n=1}^\infty$ וכן $\left(a_n\right)_{n=1}^\infty$ היא תת"ס של $\left(a_n+b_n\right)_{n=1}^\infty$ של $\left(a_n+b_n\right)_{n=1}^\infty$

$$\begin{split} a_n:\mathbf{2},4,\mathbf{6},8,\ldots &\Rightarrow n_k=2k-1\\ b_n:1,\mathbf{3},5,\mathbf{7},\ldots &\Rightarrow m_k=2k\\ a_n+b_n:3,7,11,\ldots \end{split}$$

 $a_n + b_n$ ולא שייך ל- $a_{n_1} + b_{m_2} = 5$ אך

:יני שלה. אזיי תת"ס "תת"ס (a_{n_k}) מדרה ותהי סדרה החדר (a_n) תת"ס מידי

- . חסומה (a_{n_k}) שלה שלה כל גם גם אז חסומה (a_n) הסדרה אם (1)
- . (ולאותו הגבול). מתכנסת (a_{n_k}) מתכנסת (כולל במובן הרחב) אז גם כל תת"ס שלה (a_n) מתכנסת (כולל במובן הרחב)
- .(או יורדת) מונוטונית עולה (a_{n_k}) אז גם כל תת"ס שלה (או יורדת) מונוטונית עולה (או יורדת) אם הסדרה (a_{n_k})

7.4 לכל סדרה יש תת"ס מונוטונית

.7.4.1 למה

. אזי יש לה תת"ס עולה ממש. אזי יש לסדרה ($a_n=1-rac{1}{n}$, או $a_n=n^2$ למשל, למשל איבר מקסימלי איבר אינ לסדרה (a_n) אין איבר מקסימלי

.7.4.2 הוכחת הלמה

נסמן הבא: אינדוקטיבית אינדוקטיבית עולה ממש נבנה תת"ס עולה ($(a_n) \ni M_n = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ נסמן

 M_{n_1} ,אחרת, $a_{n_2}>M_{n_1}=a_1$ כך ש- $\exists n_2>n_1$ כן נובע ש-בר מקסימלי, איבר מקסימלי שלסדרה מכיוון שלסדרה (a_n) איבר מקסימלי בסדרה וווהי סתירה).

. הלאה. - וכך סתירה מקסימלי בסדרה איבר מקסימלי (אהרת מ $m_{n_2} > m_{n_2} > m_{n_2} \geq a_{n_2}$ כך של כדומה, באופן באופן מחרת מ $m_{n_2} > m_{n_2} \geq a_{n_2}$

 $.a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots$ עך כך $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ נקבל סדרת אינדקסים נקבל

7.4.3. הוכחת המשפט

. יש - סיימנו עולה ממש אונוטונית מונוטונית (a_n) אם ל- סיימנו תהי (a_n) אם ל-

 (a_n) אין תת"ס עולה ממש. נבנה כעת באופן אינדוקטיבי תת"ס יורדת. מהלמה הקודמת, נובע שלסדרה נניח כי ל- (a_n) אין תת"ס עולה ממש. נבנה כעת באופן אינדוקטיבי $a_{n_1+1},a_{n_1+2},a_{n_1+3},\ldots$ באופן באיבר מקסימלי. נסמן איבר זה באופן הבא: (a_n) באופן הבא: (a_n)

 $!n_2>n_1$ לכן $.a_{n_2}=\maxig\{a_{n_1+1},a_{n_1+2},\ldotsig\}$ אותו נסמן אותר מקסימלי. יש איבר מקסימלי. נסמן אותו $.a_{n_2}=\maxig\{a_{n_1+1},a_{n_1+2},\ldotsig\}$ כעת ממשיכים בצורה אינדוקטיבית ומקבלים ברור כי $.n_2\geq n_1+1>n_1$ כשר מחשיכים בארה אינדוקטיבית ומקבלים $.a_{n_1}\geq a_{n_2}\geq a_{n_3}\geq\ldots$ כשר משיכים בארה אינדוקטיבית ומקבלים מחשיכים בארה בארכים מחשיכים בארכים מחשיכים בארכים מחשיכים מחשי

7.5. משפט בולצנו-ויירשטראס

לכל סדרה חסומה יש תת"ס מתכנסת.

7.5.1. הוכחה

תהי עולה או יורדת. מהמשפט הראשון תת"ס $\left(a_{n_k}\right)$ מת"ס הקודם, יש ל- $\left(a_n\right)$ מהמשפט הראשון מהכנסת. מדרצאה, נובע כי $\left(a_{n_k}\right)$ חסומה גם כן. אז, $\left(a_{n_k}\right)$ סדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת.

(משפט בולצנו-ויירשראטס המוכלל) .7.5.2

לכל סדרה יש תת"ס מתכנסת, כולל במובן הרחב.

10

8. הלמה של קנטור על קטעים מקוננים

:נניה כי מתקיים: $I_n = [a_n,b_n]$ ונסמן $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$ המקיימות ((a_n) דרות שתי סדרות שתי נתונות שתי

- $I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\ldots\supseteq I_n\supset I_{n+1}\supseteq\ldots$ מקוננים: מקוננים הינם הינם והינם הינם ו I_n
 - $\lim(b_n a_n) = 0$ (2)

 $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_{n}=\left\{ c\right\}$ הקטעים: לכל המשותפת יחידה נקודה אזי קיימת אזי

8.1. הוכחה

נתון:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

מכאן, (a_n) עולה וחסומה מלמעלה, למשל, ע"י b_n . לכן $a_n=\sup a_n=a$ בדומה, למשל, ע"י וורדת וחסומה מלמעלה, למשל, ע"י בווח $b_n=\inf b_n=a$ נקבל בקבל ווחסומה $a=b \Leftarrow 0=\lim (b_n-a_n)=b-a$ נקבל בקבל ברור כי a=b הינה הנקודה המבוקשת a=b

$$\forall m \in \mathbb{N}, a_m \leq \sup a_n = a = b = \inf b_n \leq b_m$$

$$.\exists a=b\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_{n}$$
, מכאן, $a=b\in I_{m}, \forall m\in\mathbb{N}$, כלומר, כלומר,

 a_m כדי להוכיח את יחידות הנקודה הנ"ל, נניח בשלילה כי: בשלילה כי: א $m\in\mathbb{N}, a_m\leq a'\leq b_m$ כך כך ש- $\exists a'\neq a$ כיי בשלילה הנקודה הנ"ל, נניח בשלילה כי $a'=\lim a'=a$ בסתירה ומכלל הסנדוויץ' מתקיים כי $a'=\lim a'=a$

(אריה במדבר) הוכחה נוספת למשפט בולצנו-ויירשטראס (אריה במדבר).8.2

. מתכנסת $\left(c_{n_k}\right)$ סדרה תת"ס ע"ל שקיימת "בקטע (a,b) מתכנסת סדרה סדרה תהי $\left(c_n\right)$

:נגדיר שתי סדרות $(b_k)_{k=0}^\infty$ ו ר $(a_k)_{k=0}^\infty$ באופן הבא

$$\begin{aligned} a_0 &= a \wedge b_0 = b \\ \forall k \in \mathbb{N}, a_k < b_k \\ b_k - a_k &= \frac{1}{2^k} (b - a) \\ (a_k) \uparrow \wedge (b_k) \downarrow \end{aligned}$$

. אטבעי $[a_k,b_k]$ אטבעי מוכלים הסדרה ($[c_n)$ מוכלים מאיברי מאיברי מאיברי מוכלים מוכלים מוכלים אינ

