חדוא 1א׳ - שיעור 6

16 בינואר, 2024

יונתן מגר

טענות נוספות על התכנסות סדרות

מבחן השורש הכללי

תהי סדרה $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ו-$\exists 0 \leq \alpha < 1$ ו-$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-${a_n}^{\frac{1}{n}} \leq \alpha \forall n > n_0$. אזי $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה

$\forall n > n_0, 0 \leq a_n \leq \alpha^n$. מכיוון ש-$\alpha^n$ שואפת ל-0 וכך גם הסדרה הקבועה 0, גם a_n שואפת ל-0 (כלל הסנדוויץ׳).

■

שאלה

תהי סדרה $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ המקיימת ${a_n}^{\frac{1}{n}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$. האם הסדרה (a_n) בהכרח מתכנסת? <u>לא</u>. למשל, הסדרה:

$$a_n : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$$

ואז ${a_n}^{\frac{1}{n}} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$, אך אין גבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$!

מבחן השורש הגבולי

תהי סדרה $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ונניח כי $\exists \lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{\frac{1}{n}} = P$. אזי:

(1) אם $P < 1 \Leftarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) אם $P > 1 \Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

הוכחה

(1) אם $P < 1$, נבחר $0 < \varepsilon < 1 - P \Leftarrow P + \varepsilon < 1$. אז מהגדרת הגבול: $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left|{a_n}^{\frac{1}{n}} - P\right| < \varepsilon \forall n > n_\varepsilon$. ואז, בפרט, ${a_n}^{\frac{1}{n}} < P + \varepsilon < 1$. מהמשפט הקודם $(\alpha = P + \varepsilon)$, סיימנו.

(2) אם $P > 1$, נבחר $0 < \varepsilon < P - 1 \Leftarrow 1 < P - \varepsilon$. מהגדרת הגבול: $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left|{a_n}^{\frac{1}{n}} - P\right| < \varepsilon \forall n > n_\varepsilon$. בפרט, $1 < P - \varepsilon < {a_n}^{\frac{1}{n}} \forall n > n_\varepsilon$. ואז, $1 < (P - \varepsilon)^n < a_n \forall n > n_\varepsilon$.

■

מבחן המנה הגבולי

תהי $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

(1) אם $L < 1 \Leftarrow \lim a_n = 0$.

(2) אם $L > 1 \Leftarrow \lim a_n = +\infty$.

מבחן המנה הכללי

(1) נתונה סדרה חיובית (a_n) ונתונים $n_0 \in \mathbb{N}$ ו-$L < 1$ כך ש-$a_{n+1} < L a_n \forall n > n_0$. אזי $\lim a_n = 0$.

(2) נתונה סדרה חיובית (a_n) ונתונים $n_0 \in \mathbb{N}$ ו-$L > 1$ כך ש-$a_{n+1} > L a_n \forall n > n_0$. אזי $\lim a_n = +\infty$.

סדרות מונוטוניות

- סדרה (a_n) נקראת **מונוטונית עולה** אם $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, ונקראת **מונוטונית יורדת** אם $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$.
- אם מתקיים $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$ אז הסדרה **עולה ממש**, ואם $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$ אז הסדרה **יורדת ממש**.

משפט

תהי (a_n) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה. אזי, $\exists \lim a_n = \sup a_n$. אם (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, אז $\exists \lim a_n = \inf a_n$.

הוכחה

נוכיח את המקרה הראשון (השני זהה); נסמן $L = \sup a_n$ ונוכיח $\lim a_n = L$. יהי $\varepsilon > 0$ שרירותי. קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$\overbrace{L - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}}^{L=\sup a_n} \underbrace{\leq}_{\forall n > n_\varepsilon} \overbrace{a_n \leq L}^{\sup a_n = L} \underbrace{< L + \varepsilon}_{\varepsilon > 0}$$

כלומר הוכחנו:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$$

■

דוגמה

נתונה סדרה $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. האם היא מתכנסת?

פתרון

$a_{n+1} = \overbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}^{a_n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ ואז הסדרה מונ׳ יורדת. מצד שני, $0 < a_n \forall n \in \mathbb{N}$, כלומר הסדרה חסומה מלמטה, ואז לפי המשפט הקודם $\exists \lim a_n$.

דוגמה

נתונה סדרה המוגדרת ע״י $a_1 = \sqrt{6}$ ו-$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \forall n \in \mathbb{N}$. צ״ל כי $\exists \lim a_n$ ולחשב אותו.

פתרון

- נוכיח באינדוקציה כי הסדרה עולה (ברור ש-$a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$).
  (1) $a_2 \geq a_1$: $a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{6 + \sqrt{6}} \geq \sqrt{6} = a_1$.
  (2) נתון $a_n \geq a_{n-1}$ ואז $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \geq \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n$.
- נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חסומה מלמעלה.
  (1) $a_1 \leq 3$: $a_1 = \sqrt{6} \leq 3$.
  (2) נתון $a_n \leq 3$ ואז $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \leq 3$.

לכן $\exists \lim a_n = a$. נחשב את a: מהמשפטים הקודמים $\lim a_{n+1} = a$ וגם $\lim \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + a}$. מכאן מתקיים $a = \sqrt{6 + a} \geq 0$. פתרונות המשוואה הריבועית $a^2 - a - 6 = 0$ הם $a_1 = 3, a_2 = -2$, כלומר $a = 3$.

■

טענה

סדרה (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה מתכנסת ל-$+\infty$. בדומה, סדרה (a_n) מונוטונית יורדת ולא חסומה מלמטה מתכנסת ל-$-\infty$.

סדרה השואפת ל-e

טענה

הסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

הוכחה

- עליה:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^{n-j}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{1}{n^j}\\
&= 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{\cancel{(n-j)!}(n-j+1)\cdot\ldots\cdot n}{j!\cancel{(n-j)!}\cdot(n\cdot n\cdot\ldots\cdot n)}\\
&= 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{n-j+1}{n}\cdot\frac{n-j+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cancel{\frac{n}{n}}\right)\\
&= 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\\
&\le 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{n+1}\right)\\
&\le 1+1+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}
\end{aligned}$$

- חסימות:

$$\begin{aligned}
2 = a_1 \le a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\le 1+1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\\
&\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{פעמים } n-1}} = 1+1+\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} = 2+1-\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3
\end{aligned}$$

■

מסקנה

הסדרה a_n עולה וחסומה מלמעלה, לכן $\exists \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. מסמנים את הגבול ב-$e$ ($2 \le e \le 3$).

הערה

בהמשך הקורס רואים שמתקיים גם $e = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$. ניתן לחשב $e = 2.71828...$.

טענה (בתרגיל)

תהי $x_n \to +\infty$ (או $x_n \to -\infty$). אזי, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.