מבוא לתורת הקבוצות - שיעור 3

31 ביולי, 2023

גלעד פרבר **הקלדה - יונתן מגר**

תזכורת על פונקציות

- פונקציה $f : X \to Y$ מקיימת חד-ערכיות.
- פונקציה היא שלשה (f, X, Y) אך ניתן להגדירה למעשה כזוג (f, Y), הרי ש-x נקבע ע״י f (שהוא אוסף כל הזוגות הסדורים של הפונקציה, ומתכונת החד-ערכיות נובע כי כל x יופיע פעם אחת בלבד).
- **חח״ע** - אם $\forall x, y \in X(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$. נראה כי $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$. לכן, פעמים רבות נוכיח חח״ע כך: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- **על** - אם $\forall y \in Y \exists x \in X(f(x) = y)$.

דוגמות לפונקציות

1. **הפונקציה הקבועה** - תהא $Y \neq \emptyset$. נקבע $y_0 \in Y$ ונגדיר $f = \{x, y_0 \mid x \in X\}$.
   - אם Y בעלת יותר מאיבר אחד אזי f לא על.
   - אם X בעלת יותר מאיבר אחד אזי f לא חח״ע.
   - אם $X = Y = \mathbb{R}$, הגרף $\{(x, y_0)\}$ הוא קו אופקי.
2. **פונקצית הזהות** - תהא $X \neq \emptyset$. נגדיר $\mathrm{id}_X : X \to X$ על ידי $\mathrm{id}_X(x) = x$. חח״ע ועל.
   - כאשר $X = \mathbb{R}$, הגרף הוא קו בזווית $45°$.
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת $f = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ היא חח״ע ולא על, הרי שלמספר אי-זוגי אין מקור.

הרכבת פונקציות

תהיינה 3 קבוצות X, Y, Z, והפונקציות $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. נגדיר $h = g \circ f : X \to Z$, על ידי $h(x) = g(f(x))$, ונגיד "g מורכבת על f". פורמלית:

$$g \circ f = \{(x\{(x, z) \mid x \in X, z \in Z : \exists y \in Y :$$
$$(x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$

- **תרגיל**: לוודא שזו בפונקציה, ולהראות שפעולת ההרכבה היא אסוציאטיבית ($f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$).

ניתן לראות כי פעולת ההרכבה היא **לא** קומוטטיבית:

- **דוגמה**: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$. נראה כי $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$, בעוד ש-$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2$.

הפיכות ופונקציה הופכית

תהיינה $X, Y \neq \emptyset$ קבוצות. $f : X \to Y$, $g : Y \to X$.

(I) נאמר כי f הפיכה משמאל ו-g הופכית של f משמאל אם מתקיים $g \circ f = \mathrm{id}_X$. גורר ש-$g$ הפיכה מימין.

(II) נאמר כי f הפיכה מימין ו-g הופכית של f מימין אם מתקיים $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. גורר ש-$g$ הפיכה משמאל.

- נאמר כי f **הפיכה** וש-g **ההופכית** שלה, אם ידוע $\mathrm{I} \wedge \mathrm{II}$.

דוגמה - נביט בפונקציה $f:\mathbb{R}\to[0,\infty), f(x)=x^2$, ובפונקציה $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}$. אזי,

$$f\circ g:[0,\infty)\to[0,\infty)$$

$$(f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x=\mathrm{id}_{[0,\infty)}$$

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2}=|x|\neq\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

כלומר, g הופכית של f מימין, אך לא משמאל.