

תרגיל בית 8

18 בדצמבר 2025

0.1 תרגילים בנושא פונקציה יוצרת מומנטים

0.1.1 יהי $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, מצאו נוסחה כללית למומנט ה- k של X

0.1.2 נתונה הפי"מ: $M_X(t) := 0.1e^{5t} + 0.4e^{2t} + 0.5$ הוכיחו:

$$P(-0.7 \leq X \leq 3.3) \geq 1 - \frac{2.41}{4}$$

רמז, א"ש צ'ביצ'ב

0.1.3 תרגיל: יהי $Y \sim \text{exp}(1)$ ונגדיר $X := \min(Y, 1)$

1. חשבו את הפי"מ (פונקציה יוצרת מומנטים) של X

2. חשבו את התוחלת ואת השונות של X

0.2 תרגילים של משתנים מקריים דו מימדיים

0.2.1 תרגיל: נתונים X, Y מ"מ בעלי הצפיפות המשותפת הבאה

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/x & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את הצפיפות השולית של X

0.2.2 יהיו X, Y מ"מ עם צפיפות משותפת אחידה במשולש החסום על ידי $(0, 1), (0, 0), (1, 0)$

1. מצאו את $\mathbb{E}[Y]$

2. מצאו את ההתפלגות של $\min\{X, Y\}$ ואת תוחלתו

3. מצאו את $\mathbb{E}[\max\{X, Y\}]$

• רמז: דרך אחת לעשות את זה לקחת בחשבון את הקו שנוצר על ידי $x = y$ בחלוקה לתחומים

0.2.3 יהיו X, Y שהצפיפות המשותפת שלהם היא אחידה במשולש שקודקודיו הם $(-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$. מצאו את הצפיפות המשותפת של $|X|, |Y|$

0.2.4 תרגיל (קשה)

נבחר n נקודות באקראי בקטע $[0, 1]$ המתפלגות באופן בלתי תלוי ואחיד*

1. לכל זוג נקודות באוסף מחשבים את המרחק ביניהם וסוכמים על כל הזוגות. חשבו את תוכלת סכום המרחקים שהתקבל

2. *חשבו את התפלגות הנקודה בעלת הערך המקסמלי, ובעלת הערך המינימלי, וחשבו את תוחלתן. הסיקו מהי תוחלת המרחק המקסמלי בין שתי נקודות

* ההתפלגות היא: עבור $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_i הופעה של $X_i \sim U[0, 1]$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

רמז: איך 2 קשור ל 1? אפשר לפתור את 1 באמצעות 2 .