

# תרגיל בית 8

18 בדצמבר 2025

## 0.1 תרגילים בנושא פונקציה יוצרת מומנטים

- 0.1.1 יהי  $X \sim Exp(\lambda)$ , מצאו נוסחה כללית למומנט ה- $k$  של  $X$   
נתונה הפ"ם:  $M_X(t) := 0.1e^{5t} + 0.4e^{2t} + 0.5$  0.1.2

$$P(-0.7 \leq X \leq 3.3) \geq 1 - \frac{2.41}{4}$$

רמז, א"ש צ'ביצ'ב

- 0.1.3 תרגיל: יהי  $X := \min(Y, 1)$  ונגידיך  $Y \sim exp(1)$  ונתנו הints של  $X$   
1. חשבו את הפ"ם (פונקציה יוצרת מומנטים) של  $X$

2. חשבו את התוחלת ואת השונות של  $X$

## 0.2 תרגילים של משתנים מקריים ذو מימדיים

- 0.2.1 תרגיל: נתונים  $X, Y$  מ"מים בעלי הצפיפות המשותפת הבאה

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/x & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את הצפיפות השולית של  $X$

- 0.2.2 יהיו  $X, Y$  מ"מים צפיפות משותפת איחודית במשולש החסום על ידי  $(0,1), (0,0), (1,0)$   
1. מצאו את  $\mathbb{E}[Y]$   
2. מצאו את ההתפלגות של  $\min\{X, Y\}$  ואת תוחלתו  
3. מצאו את  $\mathbb{E}[\max\{X, Y\}]$
- רמז: דרך אחת לעשות את זה זה ללקחת בחשבון את הקוו שנוצר על ידי  $y = x$   
בחלוקת לתחומיים

**0.2.3** יהיו  $X, Y$  שהצפיפות המשותפת שלהם היא איחידה במשולש שקודקודיו הם  $(-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$  מצאו את הצפיפות המשותפת של  $|X|, |Y|$ .

**0.2.4 תרגיל (קשה)**

נבחר  $n$  נקודות באקראי בקטע  $[0, 1]$  המתפלגות באופן בלתי תלוי ואחיד\*

1. לכל זוג נקודות באוסף מחשבים את המרחק ביןיהם וסוכמים על כל הזוגות. חשבו את תוצלת סכום המרחקים שהתקבל

2. \*חשבו את התפלגות הנקודה בעלת הערך המקסימלי, ובעלת הערך המינימלי, וחשבו את תוחלתן. הסיקו מהי תוחלת המרחק המקסימלי בין שתי נקודות

\* ההתפלגות היא: עבור  $X_i \sim U[0, 1]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

רמז: איך 2 קשור ל 1? אפשר לפתור את 1 באמצעות 2.