Esercizi 2-categorie

Primo foglio: categorie arricchite

- Una categoria monoidale è l'ambiente adeguato per definire *oggetti monoide*: un oggetto monoide in $\mathcal{V}$ è un oggetto M con una mappa $\mu : M \otimes M \to M$ che sia associativa, e una mappa $\eta : I \to M$ che faccia da unità per μ: ciò significa che i diagrammi

$$\begin{tikzcd} M \otimes M \otimes M \arrow[r, "M\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes M"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes M"] \arrow[dr, "l"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \otimes I \arrow[l, "M\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

  siano commutativi. Determinate cosa è un monoide interno alla categoria degli insiemi; determinate cos'è un monoide interno alla categoria degli spazi vettoriali; determinate cos'è un monoide interno alla categoria **Cat** delle categorie e funtori.
- Mostrare esplicitamente che $(\mathbf{Set}_*, \vee)$ sottintende una struttura monoidale sulla categoria degli insiemi puntati; mostrare esplicitamente le regole di coerenza per associatore e unitore. Stessa domanda per la categoria degli *spazi topologici* puntati. E' vero che $A \vee -$ commuta coi colimiti?
- Definiamo il *prodotto schiacciato* di due insiemi puntati come il pushout

$$\begin{tikzcd} A \vee B \arrow[r] \arrow[d] & A \times B \arrow[d] \\ * \arrow[r] & A \wedge B \end{tikzcd}$$

  $(A, B) \mapsto A \wedge B$ è una struttura monoidale su $\mathbf{Set}_*$? Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che $A \wedge -$ commuta coi colimiti?
- Se $F : \mathcal{V} \leftrightarrows \mathcal{W} : G$ è una coppia di funtori aggiunti monoidali, mostrare o confutare che
  - L'unità $\alpha : 1 \Rightarrow GF$ e la counità $\epsilon : FG \Rightarrow 1$ sono trasformazioni naturali monoidali;
  - Il "cambio di base mediante F", $F_* : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}$ ha per aggiunto destro il cambio di base mediante G.
- Dimostrare che la sottocategoria $\mathcal{S} = \{\varnothing, 1\} \subset \mathbf{Set}$ è cartesiana chiusa; è vero o falso che un insieme coincide con una $\mathcal{S}$-categoria?
- La categoria dei gruppi è cartesiana chiusa? Possiede una struttura monoidale $\otimes$ per cui è chiusa?

- Sia G un gruppo fissato; nella categoria $\mathbf{Set}^G$ degli insiemi dotati di una azione di G è possibile definire un bifuntore $\otimes_G$ come
$$X \otimes_G Y := \mathrm{coeq}\left(\textstyle\coprod_{g\in G} X \times Y \overset{1\times g}{\underset{g\times 1}{\rightrightarrows}} X \times Y \right)$$
Questo (insieme all'insieme terminale con azione banale, e alle ovvie coerenze) definisce una struttura monoidale su $\mathbf{Set}^G$?
- Dimostrare che per ogni categoria piccola A, la categoria dei funtori $[A, \mathbf{Set}]$ è cartesiana chiusa; dedurne che la categoria degli insiemi con una azione di gruppo è cartesiana chiusa.
- Mostrare la *regola di interscambio* per trasformazioni $\mathcal{V}$-naturali:
$$(\alpha \circ \beta) \bullet (\gamma \circ \delta) = (\alpha \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet \delta).$$
- Dimostrare che se esiste una aggiunzione $F : \mathcal{V} \leftrightarrows \mathcal{W} : G$ ($F : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ aggiunto sinistro), allora esiste una aggiunzione $F_\dagger \dashv G_\dagger$.
- Un'equivalenza di categorie è sempre un funtore monoidale forte? Se $F \dashv G$ è un'equivalenza monoidale, dimostrare che $F_\dagger \dashv G_\dagger$ induce un'equivalenza tra le $\mathcal{V}$-categorie e le $\mathcal{W}$-categorie: restano indotti degli isomorfismi di categorie $\mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}[A, A'] \cong \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}[F_\dagger A, F_\dagger A']$.

May 14, 2018,
Fosco Loregian