

Esercizi 2-categorie

Primo foglio: categorie arricchite

- Una categoria monoidale è l'ambiente adeguato per definire *oggetti monoide*: un oggetto monoide in \mathcal{V} è un oggetto M con una mappa $\mu : M \otimes M \rightarrow M$ che sia associativa, e una mappa $\eta : I \rightarrow M$ che faccia da unità per μ : ciò significa che i diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes M \otimes M & \xrightarrow{M \otimes \mu} & M \otimes M \\
 \mu \otimes M \downarrow & & \downarrow \mu \\
 M \otimes M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 I \otimes M & \xrightarrow{\eta \otimes M} & M \otimes M & \xleftarrow{M \otimes \eta} & M \otimes I \\
 & \searrow l & \downarrow \mu & \swarrow r & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

siano commutativi. Determinate cosa è un monoide interno alla categoria degli insiemi; determinate cos'è un monoide interno alla categoria degli spazi vettoriali; determinate cos'è un monoide interno alla categoria **Cat** delle categorie e funtori.

- Mostrare esplicitamente che (\mathbf{Set}_*, \vee) sottintende una struttura monoidale sulla categoria degli insiemi puntati; mostrare esplicitamente le regole di coerenza per associatore e unitore. Stessa domanda per la categoria degli *spazi topologici* puntati. E' vero che $A \vee -$ commuta coi colimiti?
- Definiamo il *prodotto schiacciato* di due insiemi puntati come il pushout

$$\begin{array}{ccc}
 A \vee B & \longrightarrow & A \times B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & A \wedge B
 \end{array}$$

$(A, B) \mapsto A \wedge B$ è una struttura monoidale su \mathbf{Set}_* ? Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che $A \wedge -$ commuta coi colimiti?

- Dimostrare che la categoria \mathbf{Fin}_* degli insiemi finiti puntati $\{*, 1, \dots, n\}$ e funzioni puntate (le $f : [m]_* \rightarrow [n]_*$ tali che $f(*_{[m]}) = *_{[n]}$) è equivalente alla categoria degli insiemi finiti e funzioni parziali. Che cosa diventa la struttura monoidale (\mathbf{Fin}_*, \vee) lungo questa equivalenza? Che cosa diventa la struttura monoidale (\mathbf{Fin}_*, \wedge) lungo questa equivalenza?
- Se $F : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{W} : G$ è una coppia di funtori aggiunti monoidali, mostrare o confutare che
 - L'unità $\alpha : 1 \Rightarrow GF$ e la counità $\epsilon : FG \Rightarrow 1$ sono trasformazioni naturali monoidali;
 - Il "cambio di base mediante F ", $F_* : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \rightarrow \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}$ ha per aggiunto destro il cambio di base mediante G .
- Dimostrare che la sottocategoria $\mathcal{S} = \{\emptyset, 1\} \subset \mathbf{Set}$ è cartesiana chiusa; è vero o falso che un insieme coincide con una \mathcal{S} -categoria?
- La categoria dei gruppi è cartesiana chiusa? Possiede una struttura monoidale \otimes per cui è chiusa?

- Sia G un gruppo fissato; nella categoria \mathbf{Set}^G degli insiemi dotati di una azione di G è possibile definire un bifuntore \otimes_G come

$$X \otimes_G Y := \text{coeq} \left(\coprod_{g \in G} X \times Y \xrightarrow[g \times 1]{1 \times g} X \times Y \right)$$

Questo (insieme all'insieme terminale con azione banale, e alle ovvie coerenze) definisce una struttura monoidale su \mathbf{Set}^G ?

- Dimostrare che per ogni categoria piccola A , la categoria dei funtori $[A, \mathbf{Set}]$ è cartesiana chiusa; dedurne che la categoria degli insiemi con una azione di gruppo è cartesiana chiusa.
- Mostrare la *regola di interscambio* per trasformazioni \mathcal{V} -naturali:

$$(\alpha \circ \beta) \bullet (\gamma \circ \delta) = (\alpha \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet \delta).$$

- Dimostrare che se esiste una aggiunzione $F : \mathcal{V} \rightleftarrows \mathcal{W} : G$ ($F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ aggiunto sinistro), allora esiste una aggiunzione $F_{\dagger} \dashv G_{\dagger}$.
- Un'equivalenza di categorie è sempre un funtore monoidale forte? Se $F \dashv G$ è un'equivalenza monoidale, dimostrare che $F_{\dagger} \dashv G_{\dagger}$ induce un'equivalenza tra le \mathcal{V} -categorie e le \mathcal{W} -categorie: restano indotti degli isomorfismi di categorie $\mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}[A, A'] \cong \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}[F_{\dagger}A, F_{\dagger}A']$.
- Data una categoria monoidale \mathcal{V} , mostrare che esiste una categoria \mathcal{V}^{\otimes} così definita:

- gli oggetti di \mathcal{V}^{\otimes} sono n -uple di oggetti di \mathcal{V} denotate $[C_1, \dots, C_n]$ (con la convenzione che se $n = 0$ la tupla è vuota);
- i morfismi $[C_1, \dots, C_n] \rightarrow [D_1, \dots, D_m]$ sono coppie $(\alpha, \{f_j\})$ dove α è una funzione parziale $[n] \rightarrow [m]$ con dominio S_{α} e $\{f_j : \bigotimes_{\{i | \alpha(i)=j\}} C_i \rightarrow D_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ è una famiglia di morfismi di \mathcal{V} .

(definire opportunamente la composizione di due morfismi $(\alpha, f), (\beta, g)$).

- Mostrare che esiste un funtore $p : \mathcal{V}^{\otimes} \rightarrow \mathbf{Fin}_*$ che manda $[C_1, \dots, C_n]$ in $[n]_*$; mostrare che p è una *opfibrizzazione*: per ogni oggetto $\overline{C} = [C_1, \dots, C_n] \in \mathcal{V}^{\otimes}$ e ogni morfismo $f : [n]_* \rightarrow [m]_*$ in \mathbf{Fin}_* esiste un morfismo $(\theta_f, \bar{f}) : \overline{C} \rightarrow \overline{D} = [D_1, \dots, D_m]$ tale che $p(\theta_f, \bar{f}) = f$, e tale che la composizione con \bar{f} induce la seguente biiezione per ogni $\overline{E} = [E_1, \dots, E_d]$

$$\mathcal{V}^{\otimes}(\overline{D}, \overline{E}) \cong \mathcal{V}^{\otimes}(\overline{C}, \overline{E}) \times_{\mathbf{Fin}_*([n]_*, [d]_*)} \mathbf{Fin}_*([m]_*, [d]_*).$$

- Mostrare che se indichiamo \mathcal{V}_n^{\otimes} la fibra di $[n]_*$ mediante p , p induce un funtore $\mathcal{V}_m^{\otimes} \rightarrow \mathcal{V}_n^{\otimes}$ per ogni $f : [m]_* \rightarrow [n]_*$ in \mathbf{Fin}_* .
- Mostrare che $\mathcal{V}_0^{\otimes} \cong \{0\}$, $\mathcal{V}_1^{\otimes} \cong \mathcal{V}$, e in generale che $\mathcal{V}_n^{\otimes} \cong \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ (n volte).
- Mostrare che la corrispondenza che manda \mathcal{V} in \mathcal{V}^{\otimes} è functoriale in \mathbf{Cat} ;
- Mostrare che $\mathbf{Fin}_* \cong \{0\}^{\otimes}$ rispetto all'unica struttura monoidale che esiste sulla categoria terminale $\{0\}$; mostrare che p è il funtore indotto dall'unico funtore terminale $\mathcal{V} \rightarrow \{0\}$.