

Esercizi 2-categorie

Secondo foglio: cofini, estensioni di Kan, limiti pesati

- Dimostrare che ogni volta che esiste una aggiunzione parametrica

$$\mathcal{A}(F_A(X), Y) \cong \mathcal{B}(X, G_A(Y))$$

per due funtori $F : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \times \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$, allora l'unità $\eta : 1 \Rightarrow G_A F_A$ è un cuneo in \mathcal{A} , e la counità un cocuneo. Sono anche universali?

- Dimostrare che l'insieme delle trasformazioni naturali $F \Rightarrow G$ è l'equalizzatore

$$\text{Nat}(F, G) \xrightarrow{\quad} \prod_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(FC, GC) \xrightarrow[\beta]{\alpha} \prod_{f: C \rightarrow C'} \mathcal{D}(FC, GC')$$

per opportune mappe α, β .

- Mostrare che il limite di $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ pesato da $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ è l'insieme delle trasformazioni naturali $F \Rightarrow G$.
- Dimostrare il teorema di Brouwer (per assurdo, se esiste una retrazione del disco sulla sfera...).
- Dimostrare che $\text{Lan}_{GG'} \cong \text{Lan}_G \circ \text{Lan}_{G'}$ per due funtori componibili G', G .
- Se $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}$ è la categoria degli spazi vettoriali, mostrare che il funtore $V \mapsto \int^W W^* \otimes V \otimes W$ è la parte sugli oggetti di una monade su \mathcal{C} .
- L'oggetto comma di un diagramma $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ di categorie è un oggetto $X \xleftarrow{p} (f/g) \xrightarrow{q} Y$ terminale con una trasformazione naturale $fp \Rightarrow gq$. Trovare un peso $W : \{0 \rightarrow 1 \leftarrow 2\} \rightarrow \mathbf{Cat}$ per cui $(f/g) \cong \lim^W F$, se F è il diagramma $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$.
- Mostrare che

$$\{W, F\} \cong \int_A \{WA, FA\} \qquad W \odot F \cong \int^A WA \odot FA$$

- Mostrare che dato un funtore $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ esiste un'aggiunzione $\text{Lan}_y F \dashv \text{Lan}_F y$ dove $y : \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ è l'embedding di Yoneda; mostrare se F preserva i limiti finiti, lo stesso fa $\text{Lan}_y F$. Il funtore $\text{Lan}_y F$ si chiama *realizzazione* di F , e il funtore $\text{Lan}_F y$ si chiama *F-nervo*.
- Se R è un anello commutativo, $M \otimes_R N$ è la cofine di una opportuna coppia di funtori \bar{M}, \bar{N} .
- Generalizzare l'aggiunzione tra realizzazione e F -nervo al caso di un funtore *multilineare*: dato $F : \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbf{Set}$, dove ogni \mathcal{C}_i è piccola, mostrare che esiste un'equivalenza di categorie

$$\mathbf{Cat}(\mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n, \mathbf{Set}) \cong \mathbf{Mult}(\widehat{\mathcal{C}}_1 \times \dots \times \widehat{\mathcal{C}}_n, \mathbf{Set})$$

dove $\mathbf{Mult}(_, _)$ è la categoria dei funtori cocontinui in ogni variabile una volta che tutte le altre sono state fissate (lo si dimostri per induzione, componendo successive estensioni di Kan). Data $\theta \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n, \mathbf{Set})$,

descrivere l'aggiunto destro di ciascun $\theta(c_1, \dots, c_i^\circ, \dots, c_n): \widehat{\mathcal{C}}_i \rightarrow \mathbf{Set}$ (c_i° significa che tutti gli oggetti c_j sono fissi per $j \neq i$ e $c_i \in \mathcal{C}$ è libero di variare). Tutti questi funtori hanno un 'nervo vettoriale' $N: \mathbf{Set} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_1 \times \dots \times \widehat{\mathcal{C}}_n$.