Esercizi 2-categorie

Primo foglio: categorie arricchite

- Dimostrare che ogni volta che esiste una aggiunzione parametrica
$$\mathcal{A}(F_A(X), Y) \cong \mathcal{B}(X, G_A(Y))$$
per due funtori $F : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \times \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$, allora l'unità $\eta : 1 \Rightarrow G_A F_A$ è un cuneo in A, e la counità un cocuneo. Sono anche universali?
- Dimostrare che l'insieme delle trasformazioni naturali $F \Rightarrow G$ è l'equalizzatore
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Nat}(F,G) \arrow[r, dotted] & \prod_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(FC, GC) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \prod_{f:C\to C'} \mathcal{D}(FC, GC') \end{tikzcd}$$
per opportune mappe α, β.
- Mostrare che il limite di $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ pesato da $G : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ è l'insieme delle trasformazioni naturali $F \Rightarrow G$.
- Dimostrare il teorema di Brouwer (per assurdo, se esiste una retrazione del disco sulla sfera. . .).
- Dimostrare che $\mathrm{Lan}_{GG'} \cong \mathrm{Lan}_G \circ \mathrm{Lan}_{G'}$ per due funtori componibili G', G.
- Se $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}$ è la categoria degli spazi vettoriali, mostrare che il funtore $V \mapsto \int^W W^* \otimes V \otimes W$ è la parte sugli oggetti di una monade su $\mathcal{C}$.
- Mostrare che dato un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ esiste un'aggiunzione $\mathrm{Lan}_y F \dashv \mathrm{Lan}_F y$ dove $y : \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ è l'embedding di Yoneda; mostrare se se F preserva i limiti finiti, lo stesso fa $\mathrm{Lan}_y F$. Il funtore $\mathrm{Lan}_y F$ si chiama *realizzazione* di F, e il funtore $\mathrm{Lan}_F y$ si chiama F-nervo.
- Se R è un anello commutativo, $M \otimes_R N$ è la cofine di una opportuna coppia di funtori $\bar{M}, \bar{N}$.
- Generalizzare l'aggiunzione tra realizzazione e F-nervo al caso di un funtore *multilineare*: dato $F \colon \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathbf{Set}$, dove ogni $\mathcal{C}_i$ è piccola, mostrare che esiste un'equivalenza di categorie
$$\mathbf{Cat}(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n, \mathbf{Set}) \cong \mathsf{Mult}(\widehat{\mathcal{C}_1} \times \cdots \times \widehat{\mathcal{C}_n}, \mathbf{Set})$$
dove $\mathsf{Mult}(\_, \_)$ è la categoriadei funtori cocontinui in ogni variabile una volta che tutte le altre sono state fissate (lo si dimostri per induzione, componendo successive estensioni di Kan). Data $\theta \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n, \mathbf{Set})$, descrivere l'aggiunto destro di ciascun $\theta(c_1, \dots, c_i^\circ, \dots, c_n) \colon \widehat{\mathcal{C}_i} \to \mathbf{Set}$ (c_i° significa che tutti gli oggetti c_j sono fissi per $j \neq i$ e $c_i \in \mathcal{C}$ è libero di variare). Tutti questi funtori hanno un 'nervo vettoriale' $N \colon \mathbf{Set} \to \widehat{\mathcal{C}_1} \times \cdots \times \widehat{\mathcal{C}_n}$.

May 14, 2018,
Fosco Loregian