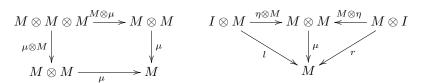
Esercizi 2-categorie

Primo foglio: categorie arricchite

• Una categoria monoidale è l'ambiente adeguato per definire oggetti monoide: un oggetto monoide in \mathcal{V} è un oggetto M con una mappa $\mu: M \otimes M \to M$ che sia associativa, e una mappa $\eta: I \to M$ che faccia da unità per μ : ciò significa che i diagrammi



siano commutativi. Determinate cosa è un monoide interno alla categoria degli insiemi; determinate cos'è un monoide interno alla categoria degli spazi vettoriali; determinate cos'è un monoide interno alla categoria **Cat** delle categorie e funtori.

- Mostrare esplicitamente che (Set*, ∨) sottintende una struttura monoidale sulla categoria degli insiemi puntati; mostrare esplicitamente le regole di coerenza per associatore e unitore. Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che A ∨ − commuta coi colimiti?
- Definiamo il prodotto schiacciato di due insiemi puntati come il pushout

$$\begin{array}{ccc}
A \lor B \longrightarrow A \times B \\
\downarrow & & \downarrow \\
* \longrightarrow A \land B
\end{array}$$

 $(A,B)\mapsto A\wedge B$ è una struttura monoidale su \mathbf{Set}_* ? Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che $A\wedge -$ commuta coi colimiti?

- Se $F: \mathcal{V} \leftrightarrows \mathcal{W}: G$ è una coppia di funtori aggiunti monoidali, mostrare o confutare che
 - L'unità $\alpha:1\Rightarrow GF$ e la counità $\epsilon:FG\Rightarrow 1$ sono trasformazioni naturali monoidali;
 - Il "cambio di base mediante F", $F_* : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}$ ha per aggiunto destro il cambio di base mediante G.
- Dimostrare che la sottocategoria $S = \{\emptyset, 1\} \subset \mathbf{Set}$ è cartesiana chiusa; è vero o falso che un insieme coincide con una S-categoria?
- La categoria dei gruppi è cartesiana chiusa? Possiede una struttura monoidale \otimes per cui è chiusa?

• Sia G un gruppo fissato; nella categoria \mathbf{Set}^G degli insiemi dotati di una azione di G è possibile definire un bifuntore \otimes_G come

$$X \otimes_G Y := \operatorname{coeq} \left(\coprod_{g \in G} X \times Y \xrightarrow{1 \times g \atop g \times 1} X \times Y \right)$$

Questo (insieme all'insieme terminale con azione banale, e alle ovvie coerenze) definisce una struttura monoidale su \mathbf{Set}^G ?

- Dimostrare che per ogni categoria piccola A, la categoria dei funtori [A, Set]
 è cartesiana chiusa; dedurne che la categoria degli insiemi con una azione di gruppo è cartesiana chiusa.
- Mostrare la regola di interscambio per trasformazioni \mathcal{V} -naturali:

$$(\alpha \circ \beta) \bullet (\gamma \circ \delta) = (\alpha \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet \delta).$$

- Dimostrare che se esiste una aggiunzione $F: \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{W}: G$ $(F: \mathcal{V} \to \mathcal{W})$ aggiunto sinistro), allora esiste una aggiunzione $F_{\dagger} \dashv G_{\dagger}$.
- Un'equivalenza di categorie è sempre un funtore monoidale forte? Se $F \dashv G$ è un'equivalenza monoidale, dimostrare che $F_{\dagger} \dashv G_{\dagger}$ induce un'equivalenza tra le \mathcal{V} -categorie e le \mathcal{W} -categorie: restano indotti degli isomorfismi di categorie \mathcal{V} - $\mathbf{Cat}[A, A'] \cong \mathcal{W}$ - $\mathbf{Cat}[F_{\dagger}A, F_{\dagger}A']$.