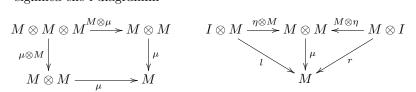
## Esercizi 2-categorie

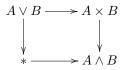
Primo foglio: categorie arricchite

• Una categoria monoidale è l'ambiente adeguato per definire oggetti monoide: un oggetto monoide in  $\mathcal V$  è un oggetto M con una mappa  $\mu: M \otimes M \to M$  che sia associativa, e una mappa  $\eta: I \to M$  che faccia da unità per  $\mu$ : ciò significa che i diagrammi



siano commutativi. Determinate cosa è un monoide interno alla categoria degli insiemi; determinate cos'è un monoide interno alla categoria degli spazi vettoriali; determinate cos'è un monoide interno alla categoria **Cat** delle categorie e funtori.

- Mostrare esplicitamente che ( $\mathbf{Set}_*, \vee$ ) sottintende una struttura monoidale sulla categoria degli insiemi puntati; mostrare esplicitamente le regole di coerenza per associatore e unitore. Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che  $A \vee -$  commuta coi colimiti?
- Definiamo il prodotto schiacciato di due insiemi puntati come il pushout



 $(A,B)\mapsto A\wedge B$  è una struttura monoidale su  $\mathbf{Set}_*$ ? Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che  $A\wedge -$  commuta coi colimiti?

- Dimostrare che la categoria  $\operatorname{Fin}_*$  degli insiemi finiti puntati  $\{*,1,\ldots,n\}$  e funzioni puntate (le  $f:[m]_* \to [n]_*$  tali che  $f(*_{[m]}) = *_{[n]}$ ) è equivalente alla categoria degli insiemi finiti e funzioni parziali. Che cosa diventa la struttura monoidale ( $\operatorname{Fin}_*, \vee$ ) lungo questa equivalenza? Che cosa diventa la struttura monoidale ( $\operatorname{Fin}_*, \wedge$  lungo questa equivalenza?
- $\bullet\,$  Se  $F:\mathcal{V}\leftrightarrows\mathcal{W}:G$  è una coppia di funtori aggiunti monoidali, mostrare o confutare che
  - L'unità  $\alpha:1\Rightarrow GF$  e la counità  $\epsilon:FG\Rightarrow 1$  sono trasformazioni naturali monoidali;
  - Il "cambio di base mediante F",  $F_*: \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}$  ha per aggiunto destro il cambio di base mediante G.
- Dimostrare che la sottocategoria  $S = \{\emptyset, 1\} \subset \mathbf{Set}$  è cartesiana chiusa; è vero o falso che un insieme coincide con una S-categoria?
- La categoria dei gruppi è cartesiana chiusa? Possiede una struttura monoidale ⊗ per cui è chiusa?

1

ullet Sia G un gruppo fissato; nella categoria  $\mathbf{Set}^G$  degli insiemi dotati di una azione di G è possibile definire un bifuntore  $\otimes_G$  come

$$X \otimes_G Y := \operatorname{coeq} \left( \coprod_{g \in G} X \times Y \xrightarrow{1 \times g \atop g \times 1} X \times Y \right)$$

Questo (insieme all'insieme terminale con azione banale, e alle ovvie coerenze) definisce una struttura monoidale su  $\mathbf{Set}^G$ ?

- Dimostrare che per ogni categoria piccola A, la categoria dei funtori [A, Set] è cartesiana chiusa; dedurne che la categoria degli insiemi con una azione di gruppo è cartesiana chiusa.
- Mostrare la regola di interscambio per trasformazioni V-naturali:

$$(\alpha \circ \beta) \bullet (\gamma \circ \delta) = (\alpha \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet \delta).$$

- Dimostrare che se esiste una aggiunzione  $F: \mathcal{V} \leftrightarrows \mathcal{W}: G$   $(F: \mathcal{V} \to \mathcal{W})$ aggiunto sinistro), allora esiste una aggiunzione  $F_{\dagger} \dashv G_{\dagger}$ .
- Un'equivalenza di categorie è sempre un funtore monoidale forte? Se  $F \dashv G$ è un'equivalenza monoidale, dimostrare che  $F_{\dagger} \dashv G_{\dagger}$  induce un'equivalenza tra le  $\mathcal{V}$ -categorie e le  $\mathcal{W}$ -categorie: restano indotti degli isomorfismi di categorie  $\mathcal{V}$ -Cat $[A, A'] \cong \mathcal{W}$ -Cat $[F_{\dagger}A, F_{\dagger}A']$ .
- Data una categoria monoidale  $\mathcal{V}$ , mostrare che esiste una categoria  $\mathcal{V}^{\otimes}$  così definita:
  - gli oggetti di  $\mathcal{V}^{\otimes}$  sono *n*-uple di oggetti di  $\mathcal{V}$  denotate  $[C_1, \ldots, C_n]$  (con la convenzione che se n = 0 la tupla è vuota);
  - i morfismi  $[C_1,\ldots,C_n] \to [D_1,\ldots,D_m]$  sono coppie  $(\alpha,\{f_i\})$  dove  $\alpha$  è una funzione parziale  $[n] \to [m]$  con dominio  $S_{\alpha}$  e  $\{f_j : \bigotimes_{\{i \mid \alpha(i)=j\}} C_i \to a\}$  $D_i \mid 1 \leq j \leq m$  è una famiglia di morfismi di  $\mathcal{V}$ .

(definire opportunamente la composizione di due morfismi  $(\alpha, f), (\beta, g)$ ).

- Mostrare che esiste un funtore  $p: \mathcal{V}^{\otimes} \to \operatorname{Fin}_*$  che manda  $[C_1, \dots, C_n]$ in  $[n]_*$ ; mostrare che p è una opfibrazione: per ogni oggetto  $\overline{C}$  $[C_1,\ldots,C_n]\in\mathcal{V}^{\otimes}$  e ogni morfismo  $f:[n]_*\to[m]_*$  in Fin\* esiste un morfismo  $(\theta_f, \overline{f}): \overline{C} \to \overline{D} = [D_1, \dots, D_m]$  tale che  $p(\theta_f, \overline{f}) = f$ , e tale che la composizione con  $\bar{f}$  induce la seguente biiezione per ogni  $\overline{E} = [E_1, \dots, E_d]$ 

$$\mathcal{V}^{\otimes}(\overline{D},\overline{E}) \cong \mathcal{V}^{\otimes}(\overline{C},\overline{E}) \times_{\mathrm{Fin}_{*}([n]_{*},[d]_{*})} \mathrm{Fin}_{*}([m]_{*},[d]_{*}).$$

- Mostrare che se indichiamo V<sub>n</sub><sup>⊗</sup> la fibra di [n]<sub>\*</sub> mediante p, p induce un funtore V<sub>m</sub><sup>⊗</sup> → V<sub>n</sub><sup>⊗</sup> per ogni f: [m]<sub>\*</sub> → [n]<sub>\*</sub> in Fin<sub>\*</sub>.
  Mostrare che V<sub>0</sub><sup>⊗</sup> ≅ {0}, V<sub>1</sub><sup>∞</sup> ≅ V, e in generale che V<sub>n</sub><sup>∞</sup> ≅ V × · · · × V
- Mostrare che la corrispondenza che manda  $\mathcal V$  in  $\mathcal V^\otimes$  è funtoriale in
- Mostrare che Fin<sub>\*</sub>  $\cong \{0\}^{\otimes}$  rispetto all'unica struttura monoidale che esiste sulla categoria terminale  $\{0\}$ ; mostrare che p è il funtore indotto dall'unico funtore terminale  $\mathcal{V} \to \{0\}$ .