

## Esercizi 2-categorie

Secondo foglio: cofini, estensioni di Kan, limiti pesati

- Dimostrare che ogni volta che esiste una aggiunzione parametrica

$$\mathcal{A}(F_A(X), Y) \cong \mathcal{B}(X, G_A(Y))$$

per due funtori  $F : \mathcal{A} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \times \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ , allora l'unità  $\eta : 1 \Rightarrow G_A F_A$  è un cuneo in  $\mathcal{A}$ , e la counità un cocuneo. Sono anche universali?

- Dimostrare che l'insieme delle trasformazioni naturali  $F \Rightarrow G$  è l'equalizzatore

$$\text{Nat}(F, G) \dashrightarrow \prod_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(FC, GC) \xrightarrow[\beta]{\alpha} \prod_{f: C \rightarrow C'} \mathcal{D}(FC, GC')$$

per opportune mappe  $\alpha, \beta$ .

- Mostrare che il limite di  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  pesato da  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  è l'insieme delle trasformazioni naturali  $F \Rightarrow G$ .
- Dimostrare il teorema di Brouwer (per assurdo, se esiste una retrazione del disco sulla sfera...).
- Dimostrare che  $\text{Lan}_{GG'} \cong \text{Lan}_G \circ \text{Lan}_{G'}$  per due funtori componibili  $G', G$ .
- Se  $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}$  è la categoria degli spazi vettoriali, mostrare che il funtore  $V \mapsto \int^W W^* \otimes V \otimes W$  è la parte sugli oggetti di una monade su  $\mathcal{C}$ .
- L'oggetto comma di un diagramma  $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$  di categorie è un oggetto  $X \xleftarrow{p} (f/g) \xrightarrow{q} Y$  terminale con una trasformazione naturale  $fp \Rightarrow gq$ . Trovare un peso  $W : \{0 \rightarrow 1 \leftarrow 2\} \rightarrow \mathbf{Cat}$  per cui  $(f/g) \cong \lim^W F$ , se  $F$  è il diagramma  $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ .
- Mostrare che

$$\{W, F\} \cong \int_A \{WA, FA\} \qquad W \odot F \cong \int^A WA \odot FA$$

- Chi è il limite pesato di  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  lungo il funtore  $W : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$  che è costante in un oggetto  $W \in \mathcal{V}$ ?
- Mostrare che dato un funtore  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$  esiste un'aggiunzione  $\text{Lan}_y F \dashv \text{Lan}_F y$  dove  $y : \mathcal{A} \rightarrow [\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$  è l'embedding di Yoneda; mostrare se  $F$  preserva i limiti finiti, lo stesso fa  $\text{Lan}_y F$ . Il funtore  $\text{Lan}_y F$  si chiama *realizzazione* di  $F$ , e il funtore  $\text{Lan}_F y$  si chiama  $F$ -nervo.
- Se  $R$  è un anello commutativo,  $M \otimes_R N$  è la cofine di una opportuna coppia di funtori  $\bar{M}, \bar{N}$ .
- Generalizzare l'aggiunzione tra realizzazione e  $F$ -nervo al caso di un funtore *multilineare*: dato  $F : \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbf{Set}$ , dove ogni  $\mathcal{C}_i$  è piccola, mostrare che esiste un'equivalenza di categorie

$$\mathbf{Cat}(\mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_n, \mathbf{Set}) \cong \text{Mult}(\widehat{\mathcal{C}}_1 \times \dots \times \widehat{\mathcal{C}}_n, \mathbf{Set})$$

dove  $\mathbf{Mult}(-, -)$  è la categoria dei funtori cocontinui in ogni variabile una volta che tutte le altre sono state fissate (lo si dimostri per induzione, componendo successive estensioni di Kan). Data  $\theta \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n, \mathbf{Set})$ , descrivere l'aggiunto destro di ciascun  $\theta(c_1, \dots, c_i^\circ, \dots, c_n): \widehat{\mathcal{C}}_i \rightarrow \mathbf{Set}$  ( $c_i^\circ$  significa che tutti gli oggetti  $c_j$  sono fissi per  $j \neq i$  e  $c_i \in \mathcal{C}$  è libero di variare). Tutti questi funtori hanno un 'nervo vettoriale'  $N: \mathbf{Set} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_1 \times \cdots \times \widehat{\mathcal{C}}_n$ .