Esercizi 2-categorie

Primo foglio: categorie arricchite

- Una categoria monoidale è l'ambiente adeguato per definire *oggetti monoide*: un oggetto monoide in $\mathcal{V}$ è un oggetto M con una mappa $\mu : M \otimes M \to M$ che sia associativa, e una mappa $\eta : I \to M$ che faccia da unità per μ: ciò significa che i diagrammi

$$\begin{tikzcd} M \otimes M \otimes M \arrow[r, "M\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes M"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes M"] \arrow[dr, "l"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \otimes I \arrow[l, "M\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

  siano commutativi. Determinate cosa è un monoide interno alla categoria degli insiemi; determinate cos'è un monoide interno alla categoria degli spazi vettoriali; determinate cos'è un monoide interno alla categoria $\mathbf{Cat}$ delle categorie e funtori.
- Mostrare esplicitamente che $(\mathbf{Set}_*, \vee)$ sottintende una struttura monoidale sulla categoria degli insiemi puntati; mostrare esplicitamente le regole di coerenza per associatore e unitore. Stessa domanda per la categoria degli *spazi topologici* puntati. E' vero che $A \vee -$ commuta coi colimiti?
- Definiamo il *prodotto schiacciato* di due insiemi puntati come il pushout

$$\begin{tikzcd} A \vee B \arrow[r] \arrow[d] & A \times B \arrow[d] \\ * \arrow[r] & A \wedge B \end{tikzcd}$$

  $(A, B) \mapsto A \wedge B$ è una struttura monoidale su $\mathbf{Set}_*$? Stessa domanda per la categoria degli spazi topologici puntati. E' vero che $A \wedge -$ commuta coi colimiti?
- Dimostrare che la categoria Fin_* degli insiemi finiti puntati $\{*, 1, \dots, n\}$ e funzioni puntate (le $f : [m]_* \to [n]_*$ tali che $f(*_{[m]}) = *_{[n]}$) è equivalente alla categoria degli insiemi finiti e funzioni parziali. Che cosa diventa la struttura monoidale $(\mathrm{Fin}_*, \vee)$ lungo questa equivalenza? Che cosa diventa la struttura monoidale $(\mathrm{Fin}_*, \wedge$ lungo questa equivalenza?
- Se $F : \mathcal{V} \leftrightarrows \mathcal{W} : G$ è una coppia di funtori aggiunti monoidali, mostrare o confutare che
  - L'unità $\alpha : 1 \Rightarrow GF$ e la counità $\epsilon : FG \Rightarrow 1$ sono trasformazioni naturali monoidali;
  - Il "cambio di base mediante F", $F_* : \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}$ ha per aggiunto destro il cambio di base mediante G.
- Dimostrare che la sottocategoria $\mathcal{S} = \{\varnothing, 1\} \subset \mathbf{Set}$ è cartesiana chiusa; è vero o falso che un insieme coincide con una $\mathcal{S}$-categoria?
- La categoria dei gruppi è cartesiana chiusa? Possiede una struttura monoidale $\otimes$ per cui è chiusa?

- Sia G un gruppo fissato; nella categoria $\mathbf{Set}^G$ degli insiemi dotati di una azione di G è possibile definire un bifuntore $\otimes_G$ come
$$X \otimes_G Y := \mathrm{coeq}\left(\textstyle\coprod_{g\in G} X \times Y \overset{1\times g}{\underset{g\times 1}{\rightrightarrows}} X \times Y \right)$$
Questo (insieme all'insieme terminale con azione banale, e alle ovvie coerenze) definisce una struttura monoidale su $\mathbf{Set}^G$?
- Dimostrare che per ogni categoria piccola A, la categoria dei funtori $[A, \mathbf{Set}]$ è cartesiana chiusa; dedurne che la categoria degli insiemi con una azione di gruppo è cartesiana chiusa.
- Mostrare la *regola di interscambio* per trasformazioni $\mathcal{V}$-naturali:
$$(\alpha \circ \beta) \bullet (\gamma \circ \delta) = (\alpha \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet \delta).$$
- Dimostrare che se esiste una aggiunzione $F : \mathcal{V} \leftrightarrows \mathcal{W} : G$ ($F : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ aggiunto sinistro), allora esiste una aggiunzione $F_\dagger \dashv G_\dagger$.
- Un'equivalenza di categorie è sempre un funtore monoidale forte? Se $F \dashv G$ è un'equivalenza monoidale, dimostrare che $F_\dagger \dashv G_\dagger$ induce un'equivalenza tra le $\mathcal{V}$-categorie e le $\mathcal{W}$-categorie: restano indotti degli isomorfismi di categorie $\mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat}[A, A'] \cong \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat}[F_\dagger A, F_\dagger A']$.
- Data una categoria monoidale $\mathcal{V}$, mostrare che esiste una categoria $\mathcal{V}^\otimes$ così definita:
  - gli oggetti di $\mathcal{V}^\otimes$ sono n-uple di oggetti di $\mathcal{V}$ denotate $[C_1, \dots, C_n]$ (con la convenzione che se $n = 0$ la tupla è vuota);
  - i morfismi $[C_1, \dots, C_n] \to [D_1, \dots, D_m]$ sono coppie $(\alpha, \{f_j\})$ dove α è una funzione parziale $[n] \to [m]$ con dominio S_α e $\{f_j : \bigotimes_{\{i|\alpha(i)=j\}} C_i \to D_j \mid 1 \le j \le m\}$ è una famiglia di morfismi di $\mathcal{V}$.

  (definire opportunamente la composizione di due morfismi $(\alpha, f), (\beta, g)$).
  - Mostrare che esiste un funtore $p : \mathcal{V}^\otimes \to \mathrm{Fin}_*$ che manda $[C_1, \dots, C_n]$ in $[n]_*$; mostrare che p è una *opfibrazione*: per ogni oggetto $\overline{C} = [C_1, \dots, C_n] \in \mathcal{V}^\otimes$ e ogni morfismo $f : [n]_* \to [m]_*$ in Fin_* esiste un morfismo $(\theta_f, \bar{f}) : \overline{C} \to \overline{D} = [D_1, \dots, D_m]$ tale che $p(\theta_f, \bar{f}) = f$, e tale che la composizione con $\bar{f}$ induce la seguente biiezione per ogni $\overline{E} = [E_1, \dots, E_d]$
  $$\mathcal{V}^\otimes(\overline{D}, \overline{E}) \cong \mathcal{V}^\otimes(\overline{C}, \overline{E}) \times_{\mathrm{Fin}_*([n]_*, [d]_*)} \mathrm{Fin}_*([m]_*, [d]_*).$$
  - Mostrare che se indichiamo $\mathcal{V}^\otimes_n$ la fibra di $[n]_*$ mediante p, p induce un funtore $\mathcal{V}^\otimes_m \to \mathcal{V}^\otimes_n$ per ogni $f : [m]_* \to [n]_*$ in Fin_*.
  - Mostrare che $\mathcal{V}^\otimes_0 \cong \{0\}$, $\mathcal{V}^\otimes_1 \cong \mathcal{V}$, e in generale che $\mathcal{V}^\otimes_n \cong \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ (n volte).
  - Mostrare che la corrispondenza che manda $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}^\otimes$ è funtoriale in $\mathbf{Cat}$;
  - Mostrare che $\mathrm{Fin}_* \cong \{0\}^\otimes$ rispetto all'unica struttura monoidale che esiste sulla categoria terminale $\{0\}$; mostrare che p è il funtore indotto dall'unico funtore terminale $\mathcal{V} \to \{0\}$.

May 16, 2018,
Fosco Loregian