数理解析特論レポート

米田亮介

1　Darboux 変換

1. 差分演算子 L, B をそれぞれ $L = e^{\partial/\partial n} + u_n e^{-\partial/\partial n}, B = -u_n u_{n-1} e^{-2\partial/\partial n}$ で定める。このとき、関数 $\varphi_n(t)$ に対する線形方程式
$$L\varphi_n(t) = (\lambda + 1/\lambda)\varphi_n(t), \quad \frac{d}{dt}\varphi_n(t) = B\varphi_n(t) \tag{1}$$
の両立条件から、無限格子上の連続時間発展方程式である Lotka–Voltera(LV) 方程式
$$\frac{d}{dt}u_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{2}$$
が導かれることを示せ。ここで、$\lambda + 1/\lambda$ は L の固有値を与える定数。
2. LV 方程式の自明な解 $u = 1$ を seed(種) として、Darboux 変換を k 回適用することで得られる差分作用素を $L^{(k)} = e^{\partial/\partial n} + u_n^{(k)} e^{-\partial/\partial n}$ で表す。このとき、$u_n^{(1)}$ および $u_n^{(2)}$ を求めよ。

関数 f のシフト演算子 $e^{a\partial/\partial x}$ は
$$e^{a\partial/\partial x} f(x) = f(x+a) \tag{3}$$
で書けるのであった[*1]。本レポートでは関数のシフト演算子の類似として数列 u_n に作用するシフト演算子 $e^{k\partial/\partial n}$ は
$$e^{k\partial/\partial n} u_n = u_{n+k} \tag{4}$$
で作用するように決めることにする。

1. 線形方程式
$$L\varphi_n(t) = (\lambda + 1/\lambda)\varphi_n(t) \tag{5}$$

[*1] 直観的にはテイラー展開によって説明できる。C^ω 級の関数 f について
$$e^{a\partial/\partial x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(x) = f(x+a)$$
と形式的に書ける。

の両辺を t 微分すると、

$$
\begin{aligned}
L_t\varphi_n(t) &= (\lambda+1/\lambda)\frac{d}{dt}\varphi_n(t) - L\frac{d}{dt}\varphi_n(t) && (6)\\
&= (\lambda+1/\lambda)B\varphi_n(t) - LB\varphi_n(t) && (7)\\
&= B\left[(\lambda+1/\lambda)\varphi_n(t)\right] - LB\varphi_n(t) && (8)\\
&= (BL-LB)\varphi_n(t) && (9)
\end{aligned}
$$

が成り立つ必要がある。

2　離散系・超離散系

離散 Lotka–Voltera(dLV) 方程式

$$
\frac{V_n^{(t+1)}}{V_n^{(t)}} = \frac{1+\delta V_{n-1}^{(t)}}{1+\delta V_{n+1}^{t+1}} \tag{10}
$$

について考える。

1. 双線形 dLV 方程式

$$
(1+\delta)\tau_{n-1}^{(t+1)}\tau_n^{(t)} = \tau_{n-1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)} + \delta\tau_{n-2}^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)} \tag{11}
$$

   に対して、従属変数変換

$$
V_n^{(t)} = \frac{\tau_{n-1}^{(t)}\tau_{n+2}^{(t+1)}}{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}} \tag{12}
$$

   を施すことで、dLV 方程式を導出せよ。

2. 双線形 dLV 方程式が 1 ソリトン解

$$
\begin{aligned}
\tau_n^{(t)} &= 1+\alpha p^n q^t, && (13)\\
q &= \frac{1+\delta(1+\delta)^{-1}p^{-1}}{1+\delta(1+\delta)^{-1}p} && (14)
\end{aligned}
$$

   を満たすことを確かめよ。

3. dLV 方程式から超離散 Lotka–Voltera 方程式を導出せよ。
4. 双線形 dLV 方程式の 1 ソリトン解 $\tau_n^{(t)}$ の超離散化から超離散 Lotka–Voltera 方程式の 1 ソリトン解 $T_n^{(t)}$ を導出せよ。
5. dLV 方程式の 1 ソリトン解に対して次のパラメータ変換を導入する。

$$
p = \exp(P/\varepsilon), \quad \delta = \exp(-1/\varepsilon), \quad \alpha = \exp(A/\varepsilon). \tag{15}
$$

   このとき、$\varepsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ などと ε を選び、離散 Lotka–Voltera 方程式の解を用いて $U_n^{(t)} = \varepsilon\log u_n^{(t)}$ をプロットすることで、超離散系への移行の様子を観察せよ。