$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2018 年 7 月 29 日

概要

バーゼル問題の証明をできる限り記していく。

目次

1 Fourier 級数展開を用いる方法

区間 $[-\pi,\pi]$ で

$$f(t) = t^2 \tag{1}$$

となる周期関数 f を考える。f を複素フーリ級数展開すると、

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-int} \tag{2}$$

と計算できる。ここに $t=\pi$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-in\pi} && (3)\\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} (-1)^n && (4)\\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^2} && (5)\\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} && (6)
\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{7}$$

であることが示された[*1]。

[*1] http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215