数理解析特論レポート

米田亮介

1 Darboux 変換

1. 差分演算子 L, B をそれぞれ $L = e^{\partial/\partial n} + u_n e^{-\partial/\partial n}, B = -u_n u_{n-1} e^{-2\partial/\partial n}$ で定める。このとき、関数 $\varphi_n(t)$ に対する線形方程式
$$L\varphi_n(t) = (\lambda + 1/\lambda)\varphi_n(t), \quad \frac{d}{dt}\varphi_n(t) = B\varphi_n(t) \tag{1}$$
の両立条件から、無限格子上の連続時間発展方程式である Lotka–Voltera(LV) 方程式
$$\frac{d}{dt}u_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{2}$$
が導かれることを示せ。ここで、$\lambda + 1/\lambda$ は L の固有値を与える定数。
2. LV 方程式の自明な解 $u = 1$ を seed(種) として、Darboux 変換を k 回適用することで得られる差分作用素を $L^{(k)} = e^{\partial/\partial n} + u_n^{(k)} e^{-\partial/\partial n}$ で表す。このとき、$u_n^{(1)}$ および $u_n^{(2)}$ を求めよ。

関数 f のシフト演算子 $e^{a\partial/\partial x}$ は
$$e^{a\partial/\partial x} f(x) = f(x + a) \tag{3}$$
で書けるのであった[*1]。本レポートでは関数のシフト演算子の類似として数列 u_n に作用するシフト演算子 $e^{k\partial/\partial n}$ は
$$e^{k\partial/\partial n} u_n = u_{n+k} \tag{4}$$
で作用するように決めることにする。

1. 線形方程式
$$L\varphi_n(t) = (\lambda + 1/\lambda)\varphi_n(t) \tag{5}$$

[*1] 直観的にはテイラー展開によって説明できる。C^ω 級の関数 f について
$$e^{a\partial/\partial x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(x) = f(x+a)$$
と形式的に書ける。有限回の微分操作では局所的な作用素にしかなりえないが、無限回の微分操作まで含めると、こういった大域的な演算子を生成することが出来るようになる。このことは有限と無限の違いを浮き彫りにする一つの面白い結果だと思う。

の両辺を t 微分すると、

$$
\begin{aligned}
L_t\varphi_n(t) &= (\lambda+1/\lambda)\frac{d}{dt}\varphi_n(t) - L\frac{d}{dt}\varphi_n(t) && (6)\\
&= (\lambda+1/\lambda)B\varphi_n(t) - LB\varphi_n(t) && (7)\\
&= B\left[(\lambda+1/\lambda)\varphi_n(t)\right] - LB\varphi_n(t) && (8)\\
&= (BL-LB)\varphi_n(t) && (9)
\end{aligned}
$$

が成り立つ必要がある。

2　離散系・超離散系

離散 Lotka–Voltera(dLV) 方程式

$$\frac{V_n^{(t+1)}}{V_n^{(t)}} = \frac{1+\delta V_{n-1}^{(t)}}{1+\delta V_{n+1}^{(t+1)}} \tag{10}$$

について考える。

1. 双線形 dLV 方程式

$$(1+\delta)\tau_{n-1}^{(t+1)}\tau_n^{(t)} = \tau_{n-1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)} + \delta\tau_{n-2}^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)} \tag{11}$$

に対して、従属変数変換

$$V_n^{(t)} = \frac{\tau_{n-1}^{(t)}\tau_{n+2}^{(t+1)}}{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}} \tag{12}$$

を施すことで、dLV 方程式を導出せよ。

2. 双線形 dLV 方程式が 1 ソリトン解

$$\tau_n^{(t)} = 1+\alpha p^n q^t, \tag{13}$$

$$q = \frac{1+\delta(1+\delta)^{-1}p^{-1}}{1+\delta(1+\delta)^{-1}p} \tag{14}$$

を満たすことを確かめよ。

3. dLV 方程式から超離散 Lotka–Voltera 方程式を導出せよ。
4. 双線形 dLV 方程式の 1 ソリトン解 $\tau_n^{(t)}$ の超離散化から超離散 Lotka–Voltera 方程式の 1 ソリトン解 $T_n^{(t)}$ を導出せよ。
5. dLV 方程式の 1 ソリトン解に対して次のパラメータ変換を導入する。

$$p = \exp(P/\varepsilon), \quad \delta = \exp(-1/\varepsilon), \quad \alpha = \exp(A/\varepsilon). \tag{15}$$

このとき、$\varepsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ などと ε を選び、離散 Lotka–Voltera 方程式の解を用いて $U_n^{(t)} = \varepsilon\log u_n^{(t)}$ をプロットすることで、超離散系への移行の様子を観察せよ。

1. 双線形 dLV 方程式を $n \to n+1$ にシフトして整理すると、

$$
\begin{aligned}
&(1+\delta)\tau_n^{(t+1)}\tau_{n+1}^{(t)} = \tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)} + \delta\tau_{n-1}^{(t)}\tau_{n+2}^{(t+1)} \\
\Leftrightarrow & V_n^{(t)} = \frac{\tau_{n-1}^{(t)}\tau_{n+2}^{(t+1)}}{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}} = \frac{1+\delta}{\delta}\frac{\tau_n^{(t+1)}\tau_{n+1}^{(t)}}{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}} - \frac{1}{\delta} \\
\Leftrightarrow & 1+\delta V_n^{(t)} = (1+\delta)\frac{\tau_n^{(t+1)}\tau_{n+1}^{(t)}}{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となるから、

$$
\frac{1+\delta V_{n-1}^{(t)}}{1+\delta V_{n+1}^{(t+1)}} = \frac{\tau_{n-1}^{(t+1)}\tau_n^{(t)}}{\tau_{n-1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)}}\frac{\tau_{n+1}^{(t+1)}\tau_{n+2}^{(t+2)}}{\tau_{n+1}^{(t+2)}\tau_{n+2}^{(t+1)}} = \frac{\tau_{n-1}^{(t+1)}\tau_{n+2}^{(t+2)}}{\tau_n^{(t+1)}\tau_{n+1}^{(t+2)}}\frac{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}}{\tau_{n-1}^{(t)}\tau_{n+2}^{(t+1)}} = \frac{V_n^{(t+1)}}{V_n^{(t)}}
\tag{17}
$$

となり、dLV 方程式が得られた。

2. 双線形 dLV 方程式の左辺、右辺それぞれに 1 ソリトン解 $\tau_n^{(t)}$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
(1+\delta)\tau_{n-1}^{(t+1)}\tau_n^{(t)} &= (1+\delta)(1+\alpha p^{n-1}q^{t+1})(1+\alpha p^n q^t) \\
&= (1+\delta)\left[1+\alpha p^{n-1}q^t(q+p)+\alpha^2 p^{2n-1}q^{2t+1}\right],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{n-1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)} + \delta\tau_{n-2}^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)} &= (1+\alpha p^{n-1}q^t)(1+\alpha p^n q^{t+1}) + \delta(1+\alpha p^{n-2}q^t)(1+\alpha p^{n+1}q^{t+1}) \\
&= 1+\alpha p^{n-1}q^t(1+pq)+\alpha^2 p^{2n-1}q^{2t+1} \\
&\quad + \delta\left[1+\alpha p^{n-2}q^t(1+p^3q)+\alpha^2 p^{2n-1}q^{2t+1}\right]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

である。左辺から右辺を引くと、

$$
\begin{aligned}
&\alpha p^{n-2}q^t\left[(1+\delta)p(p+q) - p(1+pq) - \delta(1+p^3q)\right] \\
=&\alpha p^{n-2}q^t(1-p)\left[p(q-1)+\delta(pq-1)(1+p)\right] \\
=&\alpha p^{n-2}q^t(1-p)\left[p\frac{1+\delta+\delta p^{-1}-(1+\delta+\delta p)}{1+\delta+\delta p} - \delta\frac{p(1+\delta+\delta p^{-1})-(1+\delta+\delta p)}{1+\delta+\delta p}(1+p)\right] \\
=&\alpha p^{n-2}q^t(1-p)\left[\frac{\delta(1-p)(1+p)}{1+\delta+\delta p} - \frac{\delta(1-p)(1+p)}{1+\delta+\delta p}\right] = 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となる。以上より、$\tau_n^{(t)}$ が双線形 dLV 方程式の解であることが確かめられた。

3. dLV 方程式

$$
\frac{V_n^{(t+1)}}{V_n^{(t)}} = \frac{1+\delta V_{n-1}^{(t)}}{1+\delta V_{n+1}^{(t+1)}}
\tag{21}
$$

に対する超離散化を考える。$\delta, V_n^{(t)}$ が正であるとして次の変数変換を施す。

$$
V_n^{(t)} = \exp\left(\frac{W_n^{(t)}}{\varepsilon}\right), \quad \delta = \exp\left(\frac{-L}{\varepsilon}\right).
\tag{22}
$$

これを dLV 方程式に代入して両辺に $\varepsilon\log$ を取ると、

$$
W_n^{(t+1)} - W_n^{(t)} = \varepsilon\log\left(1+\exp\left(\frac{W_{n-1}^{(t)}-L}{\varepsilon}\right)\right) - \varepsilon\log\left(1+\exp\left(\frac{W_{n+1}^{(t+1)}-L}{\varepsilon}\right)\right)
\tag{23}
$$

である。$\varepsilon \to +0$ の極限操作を行うと、

$$W_n^{(t+1)} - W_n^{(t)} = \max\{0, W_{n-1}^{(t)} - L\} - \max\{0, W_{n+1}^{(t+1)} - L\} \tag{24}$$

である[*2]。これが求める超離散 Lotka–Voltera 方程式である。

4.

[*2] ここで用いたのは

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log \left(\exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right) \right) = \max\{A, B\}$$

という非常に簡単な公式である。