

工業数学 A1

米田亮介

2019 年 9 月 29 日

6

$A(z) = (a_{jk}(z))_{1 \leq j, k \leq N}$ を N 次正方行列、 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を単位円板、 m を正の整数とし、以下の (A),(B) を仮定する。

(A) 各 $a_{jk}(z)$ は D 上の正則関数である。

(B) $\det A(z)$ は $z = 0$ に m 位の零点をもつ。

このとき、十分に小さい正数 ε に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$m = \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z) dz \right) \quad (1)$$

ここで積分路 C_ε は円周 $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon\}$ を正の向きに一周するものとし、 $\operatorname{tr}(X)$ は行列 X のトレース (trace) を表す。

こたえ

まず $N = 2$ の場合を考えてみる。

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left(A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z) \right) &= \operatorname{tr} \left(\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{a'_{11}a_{22} + a_{11}a'_{22} - a'_{12}a_{21} - a_{12}a'_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})'}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)} \end{aligned}$$

ときれいにまとめることができる。 $\det A(z)$ は $a_{jk}(z)$ の多項式で表されるので正則関数である。偏角の原理を使えば

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \operatorname{tr} \left(A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z) \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)} dz = m \quad (2)$$

となることがわかる。

一般の N についても

$$\operatorname{tr} \left(A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z) \right) = \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)} \quad (3)$$

が成り立つことが予想される。これを示す。

行列 A の逆行列 $A^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ の各要素は

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det A} \quad (4)$$

で書けることを思い出そう。ここで Δ_{ji} は A の (j, i) 余因子である。このとき、

$$\mathrm{tr} \left(A^{-1}(z) \frac{d}{dz} A(z) \right) = \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij} a'_{ji} = \frac{1}{\det A(z)} \sum_{i,j=1}^N a'_{ji} \Delta_{ji} \quad (5)$$

となる。行列式の微分は

$$\begin{aligned} (\det A(z))' &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{N\sigma(N)} \right)' \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{N\sigma(N)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \cdots a_{N\sigma(N)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{N\sigma(N)} \\ &= \sum_{i=1}^N (A \text{ の } i \text{ 行目のみを微分した行列の行列式}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a'_{ij} \Delta_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^N a'_{ij} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

と書けるので、

$$\mathrm{tr} \left(A^{-1}(z) \frac{d}{dz} A(z) \right) = \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)} \quad (6)$$

となることが示された。以上より、偏角の原理から

$$m = \mathrm{tr} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z) dz \right) \quad (7)$$

が示された。