微分積分学俗論 II

米田亮介

2019 年 1 月 10 日

1　11/14 の微積続論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.
$$\frac{dx}{dt} = x \log t \tag{1}$$

2.
$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \tag{2}$$

1. $x = 0$ は解である。$x \neq 0$ のとき両辺を変数分離すると、
$$\frac{dx}{x} = \log t dt \tag{3}$$
であり、これを積分すると、
$$\log |x| = t \log t - t + C' \tag{4}$$
である。ここで C' は積分定数である。これより、解は
$$|x(t)| = Ce^{t \log t - t} = Ce^{-t} t^t \tag{5}$$
となる。ここで $C > 0$ は定数。$x = 0$ の解もまとめると、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して
$$x(t) = Ce^{-t} t^t \tag{6}$$
となる。
2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を
$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \tag{7}$$
の形に決め打ちして、$C(t)$ を求めるという算段である。このとき、
$$C'(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \tag{8}$$

である。これより、$C(t)$ に関しての微分方程式

$$C'(t) = e^t \tag{9}$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \tag{10}$$

となる。ここで C は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t^t = t^t + Ce^{-t}t^t \tag{11}$$

と求まった。

2　テキスト第 3 章問 5

$a_j(t)(j = 1, 2)$ と $q(t)$ を t のある関数として 2 階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t), \quad t \neq -1 \tag{12}$$

を考える。$x = t, t^2, t^3$ が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数 $a_j(t)$ と $q(t)$ を定めよ。
2. 一般解を求めよ。

1. $x = t, t^2, t^3$ を代入して連立方程式を解くだけ。

$$a_1(t) = -\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}, \tag{13}$$

$$a_2(t) = \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2}, \tag{14}$$

$$q(t) = \frac{2t}{(t-1)^2} \tag{15}$$

2. 非同時方程式の一般解は、同次方程式の一般解と特殊解の和になる。そのために同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{16}$$

を解きたいが、そのまま解くのは難しい。そこで次のように考える。非同次方程式の解 t, t^2 を同次方程式の基本解 x_1, x_2 を用いて表してみる。特殊解は t^3 であるから、

$$t = c_1x_1 + c_2x_2 + t^3, \tag{17}$$

$$t^2 = c_1'x_1 + c_2'x_2 + t^3 \tag{18}$$

とかける。ここで c_1, c_2, c_1', c_2' は適当な定数である。両辺を引くと、

$$t - t^2 = (c_1 - c_1')x_1 + (c_2 - c_2')x_2 \tag{19}$$

となる。これより、$t - t^2$ は基本解の線形和で表せることがわかった。よって、$t - t^2$ も同次方程式の解である。同様の考えによって、$t - t^3$ も同次方程式の解である。

$t-t^2, t-t^3$ はそれぞれ独立であるから、同次方程式の基本解になる。非同次方程式の特殊解として t^3 を選ぶと、一般解は

$$c_1(t-t^2)+c_2(t-t^3)+t^3 \tag{20}$$

になる。

Remark 1 最後の答えを書くところで非同次方程式の特殊解として、t^3 を選んだが、t, t^2 でも良い。どれを選んでも結局 c_1, c_2 の任意性から解空間はおなじになる。

Remark 2 ~~問題文のはじめにある $t \neq -1$ が意味不明。~~$t \neq 0, 1$ の間違い。$t = 0, 1$ では与えられた特解が独立でなくなるからだめ。

3 テキスト第 3 章問 6

2 階同次方程式

$$x'' - \frac{1}{t+1}x' + \frac{1}{(t+1)^2}x = 0, \quad t \neq -1 \tag{21}$$

に対して次の問いに答えよ。

1. $x = t+1$ が解であることを示せ。
2. 定数変化法を用いて一般解を求めよ。
3. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. 代入するだけ。
2. 与えられた微分方程式は x について線形だから、$x = t+1$ が解であれば $x = C(t+1)$ も解である。このとき、定数変化法を用いて一般解を求めたいので、

$$x = C(t)(t+1) \tag{22}$$

として、$C(t)$ を求める。式 (21) に代入すると、$C(t)$ に関する微分方程式

$$(t+1)C'' + C' = 0 \tag{23}$$

が得られる。まず、C' についての微分方程式だと思って、変数分離法で解くと、

$$C'(t) = \frac{c_2}{t+1} \tag{24}$$

が得られる。c_2 は任意定数。よって、

$$C(t) = c_1 + c_2 \log|t+1| \tag{25}$$

が得られる。c_1 も任意定数[*1]。$t \neq -1$ で $\log|t+1|$ もきちんと定義されるので問題ない。以上より、

[*1] 積分定数の決め方がずいぶんと恣意的になってしまった。。。

一般解は、

$$x = c_1(t+1) + c_2(t+1)\log|t+1| \tag{26}$$

である。

3. $t=0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1, \tag{27}$$
$$v_0 = x'(0) = C(0) + C'(0) = c_1 + c_2 \tag{28}$$

であるから、$c_1 = x_0, c_2 = v_0 - x_0$ と求まる。以上より、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は、

$$x = x_0(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)\log|t+1| \tag{29}$$

である。

4 テキスト第 3 章問 7

2 階非同次方程式

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + \frac{2}{(t+1)^2}x = t+1, \quad t \neq -1 \tag{30}$$

に対して次の問いに答えよ。

1. 定数変化法を用いて一般解を求めよ (問 2 を参照せよ)。
2. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. まず、同次方程式に対する解として $x = t+1, (t+1)^2$ がある。次に、非同次方程式の一般解を求めるためには、非同次方程式の特殊解をひとつ求めれば良い。そのために、$x = t+1$ に対して定数変化法を用いることを考える。先程と同じように $x = C(t)(t+1)$ として、式 (30) に代入すると、$C(t)$ に関する微分方程式

$$C'' = 1 \tag{31}$$

が得られる。この微分方程式の解のひとつは、$C(t) = \frac{1}{2}t^2$ となるので、特殊解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1)^2 \tag{32}$$

である。以上より、式 (30) の一般解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 \tag{33}$$

である。

2. $t=0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \tag{34}$$
$$v_0 = x'(0) = c_1 + 2c_2 \tag{35}$$

なので、$c_1 = 2x_0 - v_0, c_2 = v_0 - x_0$ が分かる。よって、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + (2x_0 - v_0)(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)^2 \tag{36}$$

である。

5 テキスト第 3 章問 12

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1. $x'' + x = 1$
2. $x'' - x' - 2x = t^2$
3. $x'' + x' - 2x = (3t^4 + 4t^3)e^t$
4. $x'' + x' + x = te^{-t}$

1. 対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \tag{37}$$

である。これを解くと、$\lambda = \pm i$ であり、基本解は

$$x = \cos t, \sin t \tag{38}$$

である。また、特性解は $x = 1$ である。よって、一般解は

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \tag{39}$$

である。c_1, c_2 は任意定数である。

2. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = 2, -1$ なので、基本解は

$$x = e^{2t}, e^{-t} \tag{40}$$

である。特性解として $c_1t^2 + c_2t + c_3$ の形のものを考える。微分方程式に特性解を代入すると、

$$-2c_1t^2 + (-2c_1 + -2c_2)t + (2c_1 - c_2 - 2c_3) = t^2 \tag{41}$$

となるので、係数比較をして連立方程式を解くと、

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{4} \tag{42}$$

である。以上より、一般解は

$$x = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \tag{43}$$

である。

3. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -2, 1$ なので、基本解は

$$x = e^{-2t}, e^t \tag{44}$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^t \tag{45}$$

と置いてみる。また、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0 \tag{46}$$

を仮定する。微分方程式にこれを代入すると、u_1', u_2' について、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0, \tag{47}$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = (3t^4 + 4t^3)e^t \tag{48}$$

となるから、

$$u_1' = -\left(t^4 + \frac{4}{3}t^3\right) e^{3t}, \tag{49}$$

$$u_2' = t^4 + \frac{4}{3}t^3 \tag{50}$$

それぞれを積分すると、

$$u_1 = -\frac{1}{3}e^{3t}t^4, \tag{51}$$

$$u_2 = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^4 \tag{52}$$

である。よって、特殊解は

$$x = \frac{1}{5}t^5 e^t \tag{53}$$

である。以上より一般解は、

$$x = c_1 e^{-2t} + \left(c_2 + \frac{1}{5}t^5\right) e^t \tag{54}$$

である。

4. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ なので、基本解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{55}$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = (c_1 t + c_2)e^{-t} \tag{56}$$

と仮定する。非同次方程式に代入して係数比較すると、

$$c_1 = 1, \tag{57}$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \tag{58}$$

となる。これより $c_1 = c_2 = 1$ なので、特殊解は

$$x = (t+1)e^{-t} \tag{59}$$

である。以上より一般解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + (t+1)e^{-t} \tag{60}$$

である。