# Ott–Antonsen 縮約による蔵本モデルの解析

米田亮介

2018 年 10 月 20 日

**概要**

**Ott–Antonsen 縮約** [1, 2] は無限次元に拡張された蔵本モデルを有限次元に縮約する手法の一つであり、蔵本モデルの自己無矛盾方程式、中心多様体縮約に並んで用いられる解析手法である。ここでは Ott–Antonsen 縮約を用いた具体的な計算過程とその結果を述べたい。

## 1 蔵本モデル

自然界の興味深い現象のひとつに**集団同期現象**がある。集団同期現象とは、注目する物体の一群が集団で揃った動きをするものである。代表的な例としては、アマゾンの木々で暮らすホタルたちが一斉に同じタイミングでピカピカと光りだす、というものである。その他にも、概日リズムも神経系の集団同期現象として捉えて解析することができることも知られている。

集団同期現象を記述するモデルは様々に研究されてきたが、その単純さと数学的な奥深さから特に知られてるのが、**蔵本モデル**である。蔵本モデルは $\mathbb{S}^1$ 上を運動する $N$ 個の振動子に関するモデルであり、$i$ 番目の振動子の位相を $\theta_i$ として、

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \cdots, N \tag{1}$$

という $N$ 次元の微分方程式系で表される。ここで $\omega_i$ は $i$ 番目の振動子の自然振動数で、ある確率密度関数 $g(\omega)$ から独立に選ばれる。また、$K$ は結合定数である。

$N$ 個の振動子たちがどれだけ揃っているのか、を表す物理量として、**秩序変数**を導入する。秩序変数は

$$z = re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \tag{2}$$

で表され、$\mathbb{S}^1$ を複素平面上の単位円とみなしたときの重心に相当する。$r \sim 0$ のときは、重心が原点近辺にあることから、振動子たちは $\mathbb{S}^1$ 上にまんべんなく存在することになり、これは非同期状態に対応している。一方で、$r \sim 1$ のときには、重心が $\mathbb{S}^1$ のある箇所に局在しており、これは振動子たちがその箇所に集中的に集まっていることを表している。よって、$r \sim 1$ のときが同期状態に対応する。

蔵本モデルの自然振動数は確率密度関数 $g(\omega)$ に従うため、$N$ 次元のモデルを考える限りは有限サイズゆらぎが避けられない。そのため、蔵本モデルを解析する際は無限次元に拡張することがしばしばある。蔵本モデルを無限次元に拡張すると、粒子数が保存することから連続の式で表されることが示されている。$F(\theta, \omega, t)$

を時間 $t$ における $\theta, \omega$ の確率密度関数として、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(V[F]F) = 0, \\ &V[F](\theta, \omega, t) = \omega + K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta', \omega', t) \sin(\theta' - \theta) d\theta' d\omega' \end{aligned} \tag{3}$$

で表される。このとき、$\omega$ が $g(\omega)$ に従うことから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta, \omega, t) d\theta = g(\omega) \tag{4}$$

が成立する。また、この連続極限において、秩序変数は

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta, \omega, t) e^{i\theta} d\theta d\omega \tag{5}$$

と書ける。

# 2 Ott–Antonsen 縮約

連続の式は無限次元の偏微分方程式になっている。そのため、無限次元を有限次元に縮約する方法がいくつか存在する。偏微分方程式を縮約する代表的なものとしては中心多様体縮約がある。ただ、この手法は定常状態からの摂動を考えるので定常状態から”離れた”ところでの解析は非常に難しい。蔵本モデルに限定して考えると、Ott–Antonsen 縮約がある。Ott–Antonsen 縮約は求めたい確率密度関数 $F(\theta, \omega, t)$ をある関数 $a(\omega, t)$ を用いて

$$F(\theta, \omega, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[ 1 + \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} a(\omega, t)^k e^{ik\theta} + \text{c.c.} \right) \right] \tag{6}$$

と書ける、としたものである。彼らの主張は蔵本モデルの集団的な運動 (ここでいう秩序変数) を知る限りにおいては確率密度関数 $F(\theta, \omega, t)$ は上の形に制限しても変わらない、というものである。なので、蔵本モデルを解析するときには、$F$ を上の形に制限したものを連続の式に代入し、それによって得られる $a(\omega, t)$ に関する偏微分方程式を解けば良い、ということになる。

$F(\theta, \omega, t)$ を上の形に制限したものを連続の式に代入すると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial t} + i\omega a + \frac{K}{2}(a^2 z - z^*) = 0, \\ &z = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) a(\omega, t)^* d\omega \end{aligned} \tag{7}$$

という $a$ に関する偏微分方程式が得られる。

**例 1 (Cauchy 分布)** $g(\omega)$ が *Cauchy* 分布

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \tag{8}$$

の場合を考える。このとき、秩序変数は留数定理を用いて計算することができて、$z(t) = a(i\gamma, t)^*$ となるから、$a$ に関する偏微分方程式を $\omega = i\gamma$ に制限したものを考えれば良い。このとき、

$$\frac{dz}{dt} = \left[ \left( \frac{K}{2} - \gamma \right) - \frac{K}{2} r^2 \right] z \tag{9}$$

が得られる。右辺のゼロ点を見ることで $t \to \infty$ における $r$ の $K$ 依存性がわかる。$K_{\mathrm{c}} := 2\gamma$ を用いると、$K < K_{\mathrm{c}}$ においては、

$$r = 0 \tag{10}$$

が得られ、$K \geq K_{\mathrm{c}}$ においては、

$$r = 0, \sqrt{1 - \frac{K_{\mathrm{c}}}{K}} \tag{11}$$

が得られる。

## 参考文献


[1] Edward Ott and Thomas M Antonsen. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, Vol. 18, No. 3, p. 037113, 2008.

[2] Edward Ott and Thomas M Antonsen. Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*, Vol. 19, No. 2, p. 023117, 2009.