$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2018 年 8 月 5 日

概要

バーゼル問題の証明をできる限り記していく。

目次

1 Fourier 級数展開を用いる方法 2

2 Fourier 級数展開を用いる方法 3

1 Fourier 級数展開を用いる方法

区間 $[-\pi, \pi]$ で

$$f(t) = t^2 \tag{1}$$

となる周期関数 f を考える。f を複素フーリ級数展開すると、

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-int} \tag{2}$$

と計算できる。ここに $t = \pi$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-in\pi} &(3)\\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} (-1)^n &(4)\\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^2} &(5)\\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &(6)
\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{7}$$

であることが示された[*1]。

[*1] http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215

2　Fourier 級数展開を用いる方法

式 (2) において $t=0$ を代入すると、

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \tag{8}$$

が得られる。この式を整理すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \tag{9}$$

となる。

一方で、$\sum \frac{1}{n^2}$ を求めたいが、これは $n \geq 2$ において、

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \tag{10}$$

となることを用いると、$\sum \frac{1}{n^2} < 2$ が示される。よって、この級数は正項級数で上に有界であるから収束する。この収束値を α とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
\alpha - \frac{\pi^2}{12} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} && (11)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right\} && (12)\\
&= \sum_{n:\text{偶数}} \frac{2}{n^2} && (13)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m)^2} && (14)\\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\alpha}{2} && (15)
\end{aligned}$$

これより、

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{16}$$

が示された[*2]。

[*2] http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215