

## 2.3

$(\partial + x)^{-1}$  を計算せよ。

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \partial^{-n} \quad (1)$$

として  $(\partial + x)Y$  を計算すると

$$\begin{aligned} (\partial + x) \sum_{n=0}^{\infty} h_n \partial^{-n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial h_n}{\partial x} + x h_n \right) \partial^{-n} + h_n \partial^{-n+1} \\ &= h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( h_{n+1} + \frac{\partial h_n}{\partial x} + x h_n \right) \partial^{-n} \end{aligned}$$

である。 $(\partial + x)Y = 1$  とすると、 $h_n$  に関する次の漸化式を得る。

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \\ h_{n+1} &= -\frac{\partial h_n}{\partial x} - x h_n. \end{aligned} \quad (2)$$

## 2.6

$\frac{\partial u}{\partial x_5}$  は何になるか。

(2.12) から

$$\frac{\partial u}{\partial x_5} = K_5(u) = -[P, (P^{5/2})_+] \quad (3)$$

である。ここで、(2.5) をさらに低次まで計算すると、

$$(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8}\right)\partial^{-3} + \left(\frac{3}{8}uu_x - \frac{1}{16}u_{xxx}\right)\partial^{-4} + \dots$$

である。これより、

$$\begin{aligned} (P^{5/2})_+ &= \left( (\partial^2 + u)^2 \left[ \partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8}\right)\partial^{-3} + \left(\frac{3}{8}uu_x - \frac{1}{16}u_{xxx}\right)\partial^{-4} + \dots \right] \right)_+ \\ &= \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2\right)\partial + \left(\frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x\right) \end{aligned}$$

であるから、交換子積は

$$\begin{aligned}
& \left[ \partial^2 + u, \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left( \frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2 \right) \partial + \left( \frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x \right) \right] \\
&= \partial^2 \left( \frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x \right) - \left[ \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left( \frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2 \right) \partial \right] u \\
&= -\frac{1}{16}(u_{5x} + 10u_{3x}u + 20u_{2x}u_x + 30u_xu^2)
\end{aligned}$$

となる (交換子積の結果が関数になることを利用すると計算量が減らせる)。以上より、

$$\frac{\partial u}{\partial x_5} = \frac{1}{16}(u_{5x} + 10u_{3x}u + 20u_{2x}u_x + 30u_xu^2) \quad (4)$$

である。

## 2.7

(2.16) の  $f_1, f_2$  と (2.18) の  $w_1, w_2$  の間の関係を導け。

$L \circ M = M \circ \partial$  を用いる。ここで、

$$\begin{aligned}
L &= \partial + f_1\partial^{-1} + f_2\partial^{-2} + \dots, \\
M &= 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + w_3\partial^{-3} + \dots
\end{aligned} \quad (5)$$

である。負の階数の微分は消えることにすると、

$$\begin{aligned}
L \circ M &= \partial + w_1 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_2 + f_1 \right) \partial^{-1} + \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_3 + f_1w_1 + f_2 \right) \partial^{-2} + \dots, \\
M \circ \partial &= \partial + w_1 + w_2\partial^{-1} + w_3\partial^{-2} + \dots
\end{aligned}$$

となる。係数比較をすると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_1}{\partial x} + f_1 &= 0, \\
\frac{\partial w_2}{\partial x} + f_1w_1 + f_2 &= 0
\end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。

## 2.8

$M^{-1} = 1 + v_1\partial^{-1} + v_2\partial^{-2} + \dots$  を求めよ。

$M \circ M^{-1} = 1$  より、

$$1 = 1 + (w_1 + v_1)\partial^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( w_k + v_k + \sum_{i=1}^{k-1} w_i v_{k-i} \right) \partial^{-k}$$

なので係数比較すると、

$$\begin{aligned} v_1 &= -w_1, \\ v_k &= -w_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i v_{k-i} \quad (k \geq 2) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

## 2.9

(2.25),(2.26) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \tau}{\partial x_1} &= -w_1, \\ \frac{\partial \log \tau}{\partial x_2} &= -2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \end{aligned}$$

と書き直せる。この 2 つの関係式が両立していることを示せ。

両立するためには

$$-\frac{\partial}{\partial x_2} w_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (8)$$

が成り立つことを確認すれば良い。(2.25),(2.26) より

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial x_1} / \tau, \quad w_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \right) / \tau$$

を代入すると確かに成り立つことがわかる。

## 2.10

(2.28) を導け。

$u$  を (2.27) のように

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau \quad (9)$$

で定めたときに、

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (10)$$

が成り立つことを確認する。

## 付録 A

2.3 の証明の中に現れた

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_l} = - \left[ f(X), (X^l)_+ \right] \quad (11)$$

について、

$$f(X) = X^j \quad (12)$$

のかたちで表される場合について、 $j$  に関する数学的帰納法で示す。ただし、 $j = 2$  のときについては、

$$\frac{\partial X^2}{\partial x_l} = - \left[ X^2, (X^l)_+ \right] \quad (13)$$

が成立する。

- $j = 2$  の場合はあきらか。
- ある  $j$  で成立するとき、適当な関数  $h$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} (X^{j+1} h) &= \frac{\partial X^{j+1}}{\partial x_l} h + X^{j+1} \frac{\partial h}{\partial x_l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_l} [X^j (Xh)] = \frac{\partial X^j}{\partial x_l} Xh + X^j \frac{\partial}{\partial x_l} (Xh) = \frac{\partial X^j}{\partial x_l} Xh + X^j \frac{\partial X}{\partial x_l} h + X^{j+1} \frac{\partial h}{\partial x_l} \end{aligned}$$

であるから、仮定から

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{j+1}}{\partial x_l} &= \frac{\partial X^j}{\partial x_l} X + X^j \frac{\partial X}{\partial x_l} \\ &= - \left[ X^j, (X^l)_+ \right] X - X^j \left[ X, (X^l)_+ \right] \\ &= - X^j (X^l)_+ X + (X^l)_+ X^{j+1} - X^{j+1} (X^l)_+ + X^j (X^l)_+ X \\ &= - X^{j+1} (X^l)_+ + (X^l)_+ X^{j+1} = - \left[ X^{j+1}, (X^l)_+ \right] \end{aligned}$$

となり、 $j + 1$  のときも成立する。

以上より、 $j \geq 2$  のとき、

$$\frac{\partial X^j}{\partial x_l} = - \left[ X^j, (X^l)_+ \right] \quad (14)$$

が示された。 $j = 1$  のときには (2.13) を個別に示す。

$$\frac{\partial}{\partial x_l} K_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_1} K_l(u)$$

となり、確認できる。