数理物理学通論レポート

米田亮介

問題 1

電磁場における電荷の運動は

$$m\ddot{\boldsymbol{q}} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}, t) + \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{q}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, t), \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3) \tag{1}$$

で表される。ここで、e は電荷、c は光速、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ はそれぞれ電場、磁場である。

$$\mathbb{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2}$$

を満たす $\boldsymbol{A}$ と ϕ(このペアを電磁ポテンシャルという) が存在すると仮定すると、ハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{1}{2m}\left|\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}, t)\right|^2 + e\phi(\boldsymbol{q}, t) \tag{3}$$

の正準方程式が上記の微分方程式と一致することを確かめよ。

$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ の各成分を $q_i, p_i (i = 1, 2, 3)$ とベクトルの各成分を書き下すと、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_j p_j - \frac{2e}{c}p_j A_j + \frac{e^2}{c^2}A_j A_j\right) + e\phi \tag{4}$$

となる。ここで、同じ添字については和を取ることにする[*1]。正準方程式は、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{2m}\left(2p_j\delta_{i,j} - \frac{2e}{c}A_j\delta_{i,j}\right) = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{1}{2m}\left(-\frac{2e}{c}p_j\partial_i A_j + \frac{2e^2}{c^2}A_j\partial_i A_j\right) - e\partial_i\phi \\ &= \frac{e}{mc}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\partial_i A_j - e\partial_i\phi \end{aligned} \tag{6}$$

となる。まとめると、

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_i &= \dot{p}_i - \frac{e}{c}\left(\partial_t A_i + \dot{q}_j\partial_j A_i\right) \\ &= \frac{e}{mc}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\partial_i A_j - \frac{e}{c}\dot{q}_j\partial_j A_i + e\left(-\partial_i\phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i\right) \\ &= \frac{e}{c}\left(\dot{q}_j\partial_i A_j - \dot{q}_j\partial_j A_i\right) + eE_i \end{aligned} \tag{7}$$

[*1] 上付き、下付きとかそういうことはここでは考えない。

である。これより、

$$m\ddot{\boldsymbol{q}} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}, t) + \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{q}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}, t) \tag{8}$$

が示された[*2]。

問題 10

数列 a_n を 2^n を 10 進法で表したときの最初の数とする。つまり、$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 1, a_5 = 3, \cdots$ である。この数列に 7 が現れることを示せ。より一般に、任意の N と任意の N 桁の自然数を与えたとき、2^n の上位 N 桁がその自然数と一致するような n が存在することを示せ。

$\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して

$$P(\theta) = \theta + \log_{10} 2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \tag{9}$$

という写像を考える。このとき、$\log_{10} 2$ は無理数である[*3] から、任意の θ について $\{P^n(\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上稠密であることがわかる。このことを用いて、問題を解いていく。

2^n を 10 進法で表したときの最初の数字は $\log_{10} 2^n = n \log_{10} 2$ の小数部分を計算することによってわかる。例えば

問題 11

フィボナッチ数列について前問と同様のことが成り立つことを示せ。

問題 13

ケプラー問題を一般化した

$$V(r) = ar^k \tag{10}$$

のポテンシャル系の作用-角変数を求めよ。ここで k は整数、a は実数で、$ak > 0$ であるとする。

[*2] 外積をエディントンのイプシロンを用いて展開すると、

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{q}} \times \boldsymbol{B})_i &= \epsilon_{ijk}\dot{q}_j(\boldsymbol{B})_k = \epsilon_{ijk}\dot{q}_j(\nabla \times \boldsymbol{A})_k = \epsilon_{ijk}\dot{q}_j\epsilon_{klm}\partial_l A_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}\dot{q}_j\partial_l A_m \\ &= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\dot{q}_j\partial_l A_m = \dot{q}_j\partial_i A_j - \dot{q}_j\partial_j A_i\end{aligned}$$

となることを用いた。

[*3] $\log_{10} 2$ が有理数 $\frac{p}{q}$ で書けるとしよう。p, q は 1 以上の自然数である。このとき、$2^q = 2^p 5^p$ であるから、素因数分解の一意性から $p = q = 0$ となり矛盾。よって、$\log_{10} 2$ は無理数である。