

2.3

$(\partial + x)^{-1}$ を計算せよ。

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \partial^{-n} \quad (1)$$

として $(\partial + x)Y$ を計算すると

$$\begin{aligned} (\partial + x) \sum_{n=0}^{\infty} h_n \partial^{-n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial h_n}{\partial x} + x h_n \right) \partial^{-n} + h_n \partial^{-n+1} \\ &= h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_{n+1} + \frac{\partial h_n}{\partial x} + x h_n \right) \partial^{-n} \end{aligned}$$

である。 $(\partial + x)Y = 1$ とすると、 h_n に関する次の漸化式を得る。

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \\ h_{n+1} &= -\frac{\partial h_n}{\partial x} - x h_n. \end{aligned} \quad (2)$$

2.6

$\frac{\partial u}{\partial x_5}$ は何になるか。

(2.12) から

$$\frac{\partial u}{\partial x_5} = K_5(u) = -[P, (P^{5/2})_+] \quad (3)$$

である。ここで、(2.5) をさらに低次まで計算すると、

$$(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8}\right)\partial^{-3} + \left(\frac{3}{8}uu_x - \frac{1}{16}u_{xxx}\right)\partial^{-4} + \dots$$

である。これより、

$$\begin{aligned} (P^{5/2})_+ &= \left((\partial^2 + u)^2 \left[\partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8}\right)\partial^{-3} + \left(\frac{3}{8}uu_x - \frac{1}{16}u_{xxx}\right)\partial^{-4} + \dots \right] \right)_+ \\ &= \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2\right)\partial + \left(\frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x\right) \end{aligned}$$

であるから、交換子積は

$$\begin{aligned} & \left[\partial^2 + u, \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2 \right) \partial + \left(\frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x \right) \right] \\ &= \partial^2 \left(\frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x \right) - \left[\partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2 \right) \partial \right] u \\ &= -\frac{1}{16}(u_{5x} + 10u_{3x}u + 20u_{2x}u_x + 30u_xu^2) \end{aligned}$$

となる (交換子積の結果が関数になることを利用すると計算量が減らせる)。以上より、

$$\frac{\partial u}{\partial x_5} = \frac{1}{16}(u_{5x} + 10u_{3x}u + 20u_{2x}u_x + 30u_xu^2) \quad (4)$$

である。

2.7

(2.16) の f_1, f_2 と (2.18) の w_1, w_2 の間の関係を導け。

$L \circ M = M \circ \partial$ を用いる。ここで、

$$\begin{aligned} L &= \partial + f_1\partial^{-1} + f_2\partial^{-2} + \dots, \\ M &= 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + w_3\partial^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

である。負の階数の微分は消えることにすると、

$$\begin{aligned} L \circ M &= \partial + w_1 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + w_2 + f_1 \right) \partial^{-1} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + w_3 + f_1w_1 + f_2 \right) \partial^{-2} + \dots, \\ M \circ \partial &= \partial + w_1 + w_2\partial^{-1} + w_3\partial^{-2} + \dots \end{aligned}$$

となる。係数比較をすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x} + f_1 &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} + f_1w_1 + f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。

2.8

$M^{-1} = 1 + v_1\partial^{-1} + v_2\partial^{-2} + \dots$ を求めよ。

$M \circ M^{-1} = 1$ より、

$$1 = 1 + (w_1 + v_1)\partial^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(w_k + v_k + \sum_{i=1}^{k-1} w_i v_{k-i} \right) \partial^{-k}$$

なので係数比較すると、

$$\begin{aligned}v_1 &= -w_1, \\v_k &= -w_k - \sum_{i=1}^{k-1} w_i v_{k-i} \quad (k \geq 2)\end{aligned}\tag{7}$$

となる。

2.9

(2.25),(2.26) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log \tau}{\partial x_1} &= -w_1, \\ \frac{\partial \log \tau}{\partial x_2} &= -2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\end{aligned}$$

と書き直せる。この 2 つの関係式が両立していることを示せ。

2.10

(2.28) を導け。