工業数学 A1

米田亮介

2019 年 9 月 30 日

$\boxed{6}$

$A(z) = (a_{jk}(z))_{1\le j,k\le N}$ を N 次正方行列、$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を単位円板、m を正の整数とし、以下の (A),(B) を仮定する。

(A) 各 $a_{jk}(z)$ は D 上の正則関数である。
(B) $\det A(z)$ は $z = 0$ に m 位の零点をもつ。

このとき、十分に小さい正数 ε に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$m = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} A(z)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\,\mathrm{d}z\right) \tag{1}$$

ここで積分路 C_ε は円周 $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon\}$ を正の向きに一周するものとし、$\mathrm{tr}(X)$ は行列 X のトレース (trace) を表す。

こたえ

まず $N = 2$ の場合を考えてみる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(A(z)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\right) &= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}'\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{a_{11}'a_{22} + a_{11}a_{22}' - a_{12}'a_{21} - a_{12}a_{21}'}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\
&= \frac{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})'}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)}
\end{aligned}$$

ときれいにまとめることができる。$\det A(z)$ は $a_{jk}(z)$ の多項式で表されるので正則関数である。偏角の原理を使えば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \mathrm{tr}\left(A(z)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{(\det A(z))'}{\det A(z)}\,\mathrm{d}z = m \tag{2}$$

となることがわかる。

一般の N についても

$$\mathrm{tr}\left(A(z)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\right) = \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)} \tag{3}$$

が成り立つことが予想される。これを示す。

行列 A の逆行列 $A^{-1} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ の各要素は

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det A} \tag{4}$$

で書けることを思い出そう。ここで Δ_{ji} は A の (j,i)-余因子である。このとき、

$$\mathrm{tr}\left(A^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\right) = \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{a}_{ij}a'_{ji} = \frac{1}{\det A(z)}\sum_{i,j=1}^{N} a'_{ji}\Delta_{ji} \tag{5}$$

となる。行列式の微分は

$$\begin{aligned}
(\det A(z))' &= \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{N\sigma(N)}\right)' \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)a'_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{N\sigma(N)} + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a'_{2\sigma(2)}\cdots a_{N\sigma(N)} + \cdots \\
&\quad + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a'_{N\sigma(N)} \\
&= \sum_{i=1}^{N}(A \text{ の } i \text{ 行目のみを微分した行列の行列式 }) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a'_{ij}\Delta_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{N} a'_{ij}\Delta_{ij}
\end{aligned}$$

と書けるので、

$$\mathrm{tr}\left(A^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\right) = \frac{(\det A(z))'}{\det A(z)} \tag{6}$$

となることが示された。以上より、偏角の原理から

$$m = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} A(z)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A(z)\,\mathrm{d}z\right) \tag{7}$$

が示された。