

微分積分学続論 II

米田亮介

2019 年 1 月 27 日

1 11/14 の微積分続論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t \quad (1)$$

2.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \quad (2)$$

1. $x = 0$ は解である。 $x \neq 0$ のとき両辺を変数分離すると、

$$\frac{dx}{x} = \log t dt \quad (3)$$

であり、これを積分すると、

$$\log |x| = t \log t - t + C' \quad (4)$$

である。ここで C' は積分定数である。これより、解は

$$|x(t)| = C e^{t \log t - t} = C e^{-t} t^t \quad (5)$$

となる。ここで $C > 0$ は定数。 $x = 0$ の解もまとめると、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して

$$x(t) = C e^{-t} t^t \quad (6)$$

となる。

2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を

$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \quad (7)$$

の形に決め打ちして、 $C(t)$ を求めるという算段である。このとき、

$$C'(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \quad (8)$$

である。これより、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$C'(t) = e^t \quad (9)$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \quad (10)$$

となる。ここで C は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t^t = t^t + Ce^{-t}t^t \quad (11)$$

と求まった。

2 テキスト第3章問5

$a_j(t) (j = 1, 2)$ と $q(t)$ を t のある関数として2階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t), \quad t \neq -1 \quad (12)$$

を考える。 $x = t, t^2, t^3$ が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数 $a_j(t)$ と $q(t)$ を定めよ。
2. 一般解を求めよ。

1. $x = t, t^2, t^3$ を代入して連立方程式を解くだけ。

$$a_1(t) = -\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}, \quad (13)$$

$$a_2(t) = \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2}, \quad (14)$$

$$q(t) = \frac{2t}{(t-1)^2} \quad (15)$$

2. 非同時方程式の一般解は、同次方程式の一般解と特殊解の和になる。そのために同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (16)$$

を解きたいが、そのまま解くのは難しい。そこで次のように考える。非同次方程式の解 t, t^2 を同次方程式の基本解 x_1, x_2 を用いて表してみる。特殊解は t^3 であるから、

$$t = c_1x_1 + c_2x_2 + t^3, \quad (17)$$

$$t^2 = c'_1x_1 + c'_2x_2 + t^3 \quad (18)$$

とかける。ここで c_1, c_2, c'_1, c'_2 は適当な定数である。両辺を引くと、

$$t - t^2 = (c_1 - c'_1)x_1 + (c_2 - c'_2)x_2 \quad (19)$$

となる。これより、 $t - t^2$ は基本解の線形和で表せることがわかった。よって、 $t - t^2$ も同次方程式の解である。同様の考えによって、 $t - t^3$ も同次方程式の解である。

$t - t^2, t - t^3$ はそれぞれ独立であるから、同次方程式の基本解になる。非同次方程式の特殊解として t^3 を選ぶと、一般解は

$$c_1(t - t^2) + c_2(t - t^3) + t^3 \quad (20)$$

になる。

Remark 1 最後の答えを書くところで非同次方程式の特殊解として、 t^3 を選んだが、 t, t^2 でも良い。どれを選んででも結局 c_1, c_2 の任意性から解空間はおなじになる。

Remark 2 問題文のはじめにある $t \neq -1$ が意味不明。 $t \neq 0, 1$ の間違い。 $t = 0, 1$ では与えられた特解が独立でなくなるからだめ。

Remark 3 同次方程式を直接求める方法もまとめておく。同次方程式は、

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = x'' - \frac{2(2t-1)}{t(t-1)} x' + \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2} x = 0 \quad (21)$$

である。線形の 2 階常微分方程式に対するチルンハウス変換^{*1}を施そう。方程式を $x = e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} \eta$ で変数変換すると、

$$\eta'' = r\eta \quad (22)$$

に変換されることが知られている (確認せよ。)。ここで、

$$r = \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{2} a_1' - a_2 \quad (23)$$

である。今の場合、 r を具体的に計算すると、 $r = 0$ となる。よって、変数変換された同次方程式は

$$\eta'' = 0 \quad (24)$$

を満たす。これは簡単に解くことが出来て、任意定数 c_1, c_2 を用いて、 $\eta = c_1 t + c_2$ となる。今度、逆変換を行うと、

$$x = c_1 t e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} + c_2 e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} \quad (25)$$

である。ここで、

$$e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} = \begin{cases} t(t-1) & t > 1 \text{ または } t < 0 \\ -t(t-1) & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (26)$$

となるが、符号は c_1, c_2 の任意性の方に吸収出来るので無視すると、

$$x = c_1 t^2(t-1) + c_2 t(t-1) \quad (27)$$

^{*1} 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ を $x^3 + px + q = 0$ という形に変換することをチルンハウス変換という。今回はその類似でチルンハウス変換という言い方をした。

である。ここで、 $(c_1, c_2) = (1, 0), (0, 1)$ という風にとると、 $x = t^2(t-1), t(t-1)$ はそれぞれ同次方程式の解であり、しかも独立である。以上から、同次方程式の一般解は、

$$x = c_1 t^2(t-1) + c_2 t(t-1) \quad (28)$$

となる。

3 テキスト第3章問6

2階同次方程式

$$x'' - \frac{1}{t+1}x' + \frac{1}{(t+1)^2}x = 0, \quad t \neq -1 \quad (29)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. $x = t+1$ が解であることを示せ。
2. 定数変化法を用いて一般解を求めよ。
3. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. 代入するだけ。
2. 与えられた微分方程式は x について線形だから、 $x = t+1$ が解であれば $x = C(t+1)$ も解である。このとき、定数変化法を用いて一般解を求めたいので、

$$x = C(t)(t+1) \quad (30)$$

として、 $C(t)$ を求める。式 (29) に代入すると、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$(t+1)C'' + C' = 0 \quad (31)$$

が得られる。まず、 C' についての微分方程式だと思って、変数分離法で解くと、

$$C'(t) = \frac{c_2}{t+1} \quad (32)$$

が得られる。 c_2 は任意定数。よって、

$$C(t) = c_1 + c_2 \log |t+1| \quad (33)$$

が得られる。 c_1 も任意定数^{*2}。 $t \neq -1$ で $\log |t+1|$ もきちんと定義されるので問題ない。以上より、一般解は、

$$x = c_1(t+1) + c_2(t+1) \log |t+1| \quad (34)$$

である。

^{*2} 積分定数の決め方がずいぶんと恣意的になってしまった。。。

3. $t = 0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1, \quad (35)$$

$$v_0 = x'(0) = C(0) + C'(0) = c_1 + c_2 \quad (36)$$

であるから、 $c_1 = x_0, c_2 = v_0 - x_0$ と求まる。以上より、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は、

$$x = x_0(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1) \log |t+1| \quad (37)$$

である。

4 テキスト第3章問7

2 階非同次方程式

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + \frac{2}{(t+1)^2}x = t+1, \quad t \neq -1 \quad (38)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. 定数変化法を用いて一般解を求めよ (問2を参照せよ)。
2. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. まず、同次方程式に対する解として $x = t+1, (t+1)^2$ がある。次に、非同次方程式の一般解を求めるためには、非同次方程式の特殊解をひとつ求めれば良い。そのために、 $x = t+1$ に対して定数変化法を用いることを考える。先程と同じように $x = C(t)(t+1)$ として、式 (38) に代入すると、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$C'' = 1 \quad (39)$$

が得られる。この微分方程式の解のひとつは、 $C(t) = \frac{1}{2}t^2$ となるので、特殊解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1)^2 \quad (40)$$

である。以上より、式 (38) の一般解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 \quad (41)$$

である。

2. $t = 0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \quad (42)$$

$$v_0 = x'(0) = c_1 + 2c_2 \quad (43)$$

なので、 $c_1 = 2x_0 - v_0, c_2 = v_0 - x_0$ が分かる。よって、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + (2x_0 - v_0)(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)^2 \quad (44)$$

である。

5 テキスト第3章問12

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1. $x'' + x = 1$
2. $x'' - x' - 2x = t^2$
3. $x'' + x' - 2x = (3t^4 + 4t^3)e^t$
4. $x'' + x' + x = te^{-t}$

1. 対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (45)$$

である。これを解くと、 $\lambda = \pm i$ であり、基本解は

$$x = \cos t, \sin t \quad (46)$$

である。また、特性解は $x = 1$ である。よって、一般解は

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \quad (47)$$

である。 c_1, c_2 は任意定数である。

2. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = 2, -1$ なので、基本解は

$$x = e^{2t}, e^{-t} \quad (48)$$

である。特性解として $c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ の形のを考える。微分方程式に特性解を代入すると、

$$-2c_1 t^2 + (-2c_1 + -2c_2)t + (2c_1 - c_2 - 2c_3) = t^2 \quad (49)$$

となるので、係数比較をして連立方程式を解くと、

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{4} \quad (50)$$

である。以上より、一般解は

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \quad (51)$$

である。

3. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -2, 1$ なので、基本解は

$$x = e^{-2t}, e^t \quad (52)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^t \quad (53)$$

と置いてみる。また、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0 \quad (54)$$

を仮定する。微分方程式にこれを代入すると、 u_1', u_2' について、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0, \quad (55)$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = (3t^4 + 4t^3)e^t \quad (56)$$

となるから、

$$u_1' = -\left(t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)e^{3t}, \quad (57)$$

$$u_2' = t^4 + \frac{4}{3}t^3 \quad (58)$$

それぞれを積分すると、

$$u_1 = -\frac{1}{3}e^{3t}t^4, \quad (59)$$

$$u_2 = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^4 \quad (60)$$

である。よって、特殊解は

$$x = \frac{1}{5}t^5 e^t \quad (61)$$

である。以上より一般解は、

$$x = c_1 e^{-2t} + \left(c_2 + \frac{1}{5}t^5\right)e^t \quad (62)$$

である。

4. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ なので、基本解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad (63)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = (c_1 t + c_2)e^{-t} \quad (64)$$

と仮定する。非同次方程式に代入して係数比較すると、

$$c_1 = 1, \quad (65)$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad (66)$$

となる。これより $c_1 = c_2 = 1$ なので、特殊解は

$$x = (t+1)e^{-t} \quad (67)$$

である。以上より一般解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + (t+1)e^{-t} \quad (68)$$

である。

6 テキスト第4章問2

$t > 0$ において

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (69)$$

の形の2元連立非同次方程式を考える。ただし、

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad (70)$$

とする。行列

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t & -t \end{pmatrix} \quad (71)$$

が対応する同次方程式の基本行列であるとき、以下の問に答えよ。ただし、 $t, s > 0$ とする。

1. 係数行列 $A(t)$ を求めよ。
2. 対応する同次方程式の解核行列 $R(t, s)$ を求めよ。
3. 初期条件

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

を満たす、この非同次方程式の解を求めよ。

1. 係数行列の各成分を

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (73)$$

として、これらを求める。基本行列の定義から、

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad (74)$$

は同次方程式の解であるから、それぞれ代入すれば良い。 $\mathbf{v}_1(t)$ を同次方程式に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad (75)$$

であり、 $v_2(t)$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad (76)$$

である。この 2 つ (式としては 4 つ) を連立させて解くと、

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1/t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

が得られる。

2. 解核行列 $R(t, s)$ は基本行列 $V(t)$ を用いると、

$$R(t, s) = V(t)V(s)^{-1} \quad (78)$$

となる (教科書の定理 4.3)。計算すると、

$$R(t, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s/t + t/s & s/t - t/s \\ s/t - t/s & s/t + t/s \end{pmatrix} \quad (79)$$

である。

3. 教科書の定理 4.5 から、初期条件 $\mathbf{x}(1)$ を満たす解は次で与えられる。

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 1)\mathbf{x}(1) + \int_1^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr. \quad (80)$$

あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t^2 - 3t + 3 + 1/t \\ -t^2 + 3t + 1/t \end{pmatrix} \quad (81)$$

である。

7 テキスト第 4 章問 4

定数係数微分方程式

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (82)$$

に対して次の問に答えよ。

1. 対応する同次方程式の解核行列を求めよ。
2. 初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ を満たす非同次方程式の解を求めよ。

1. 同次方程式は定数係数の微分方程式になるので、教科書の定理 4.9 より、解核行列は次で与えられる。

$$R(t, s) = \exp(A(t - s)). \quad (83)$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

である。行列 A は行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \quad (85)$$

を用いて、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad (86)$$

と表される。よって、

$$\exp(A(t-s)) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i)(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$= e^{t-s} \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \quad (88)$$

となる。

2. 解核行列が得られたので、初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ を満たす解は、

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr \quad (89)$$

となる。あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left(\mathbf{x}_0 + \frac{1}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} \omega^2 - 2 \\ \omega^2 + 2 \end{pmatrix} \right) \quad (90)$$

$$- \frac{1}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} (\omega^2 - 2) \cos \omega t + 2\omega \sin \omega t \\ (\omega^2 + 2) \cos \omega t - \omega^3 \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (91)$$

である。

Remark 4 対角化するための行列 T は基底のとり方によって、いくらでも値が取り替わることに注意。ただ、行列 T のとり方が違えども、答えは必ず一致するはずなので、この解答と違う T を選んでいたとしても、答えは同じである必要がある。

Remark 5 答えだけを書くと不親切らしいので、計算の過程も書くことにする。

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr \quad (92)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{t-r} \begin{pmatrix} \cos(t-r) & \sin(t-r) \\ -\sin(t-r) & \cos(t-r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega r \end{pmatrix} dr \quad (93)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 + e^t \int_0^t e^{-r} \begin{pmatrix} \sin(t-r) \cos \omega r \\ \cos(t-r) \cos \omega r \end{pmatrix} dr \quad (94)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 + e^t \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t e^{-r} \cos r \cos \omega r dr \\ \int_0^t e^{-r} \sin r \cos \omega r dr \end{pmatrix} \quad (95)$$

となる。よって、次の 2 つの積分

$$I_1 = \int_0^t e^{-r} \cos r \cos \omega r dr, \quad I_2 = \int_0^t e^{-r} \sin r \cos \omega r dr \quad (96)$$

を計算すれば良い。\$I_1\$ を詳しく計算すると、

$$I_1 = \int_0^t e^{-r} \cos r \left(\frac{\sin \omega r}{\omega} \right)' dr \quad (97)$$

$$= \left[e^{-r} \cos r \frac{\sin \omega r}{\omega} \right]_0^t - \frac{1}{\omega} \int_0^t (e^{-r} \cos r)' \sin \omega r dr \quad (98)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \cos r \sin \omega r dr + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \sin r \sin \omega r dr \quad (99)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \cos r \left(-\frac{\cos \omega r}{\omega} \right)' dr + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \sin r \left(-\frac{\cos \omega r}{\omega} \right)' dr \quad (100)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} [e^{-r} \cos r \cos \omega r]_0^t + \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (e^{-r} \cos r)' \cos \omega r dr \quad (101)$$

$$- \frac{1}{\omega^2} [e^{-r} \sin r \cos \omega r]_0^t + \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (e^{-r} \sin r)' \cos \omega r dr \quad (102)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t - \frac{2}{\omega^2} I_2 \quad (103)$$

となる。\$I_2\$ も同様に計算すると、

$$I_2 = \int_0^t e^{-r} \sin r \left(\frac{\sin \omega r}{\omega} \right)' dr \quad (104)$$

$$= \left[e^{-r} \sin r \frac{\sin \omega r}{\omega} \right]_0^t - \frac{1}{\omega} \int_0^t (e^{-r} \sin r)' \sin \omega r dr \quad (105)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \sin r \sin \omega r dr - \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \cos r \sin \omega r dr \quad (106)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \sin r \left(-\frac{\cos \omega r}{\omega} \right)' dr - \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-r} \cos r \left(-\frac{\cos \omega r}{\omega} \right)' dr \quad (107)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} [e^{-r} \sin r \cos \omega r]_0^t + \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (e^{-r} \sin r)' \cos \omega r dr \quad (108)$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} [e^{-r} \cos r \cos \omega r]_0^t - \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (e^{-r} \cos r)' \cos \omega r dr \quad (109)$$

$$= \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2} I_1 \quad (110)$$

となる。この 2 つをまとめると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/\omega^2 \\ -2/\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{\omega^4}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} 1 & -2/\omega^2 \\ 2/\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (112)$$

であるので、あとはこれを代入すれば良い。

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (113)$$

$$+ \frac{e^t \omega^4}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/\omega^2 \\ 2/\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (114)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (115)$$

$$+ \frac{e^t \omega^4}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} \sin t - 2 \cos t / \omega^2 & -2 \sin t / \omega^2 - \cos t \\ \cos t + 2 \sin t / \omega^2 & -2 \cos t / \omega^2 + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (116)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (117)$$

$$+ \frac{e^t \omega^4}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (118)$$

$$- \frac{2e^t \omega^2}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \cos t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \cos t \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2} e^{-t} \sin t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-t} \sin t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (119)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (120)$$

$$+ \frac{e^t \omega^4}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} -e^{-t} \cos \omega t / \omega^2 + (\cos t + \sin t) / \omega^2 \\ -e^{-t} \cos \omega t / \omega^2 + e^{-t} \sin \omega t / \omega + (-\sin t + \cos t) / \omega^2 \end{pmatrix} \quad (121)$$

$$- \frac{2e^t \omega^2}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} -e^{-t} \cos \omega t / \omega^2 + e^{-t} \sin \omega t / \omega + (-\sin t + \cos t) / \omega^2 \\ e^{-t} \cos \omega t / \omega^2 - (\cos t + \sin t) / \omega^2 \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (123)$$

$$+ \frac{e^t}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} (\omega^2 - 2) \cos t + (\omega^2 + 2) \sin t \\ -(\omega^2 - 2) \sin t + (\omega^2 + 2) \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} -\omega^2 \cos \omega t + 2 \cos \omega t - 2\omega \sin \omega t \\ -\omega^2 \cos \omega t + \omega^3 \sin \omega t - 2 \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (124)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left(\mathbf{x}_0 + \frac{1}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} \omega^2 - 2 \\ \omega^2 + 2 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{\omega^4 + 4} \begin{pmatrix} (\omega^2 - 2) \cos \omega t + 2\omega \sin \omega t \\ (\omega^2 + 2) \cos \omega t - \omega^3 \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (125)$$

となる。