2.3

$(\partial + x)^{-1}$ を計算せよ。

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \partial^{-n} \tag{1}$$

として $(\partial + x)Y$ を計算すると

$$\begin{aligned}(\partial + x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n \partial^{-n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial h_n}{\partial x} + xh_n\right)\partial^{-n} + h_n \partial^{-n+1}\\ &= h_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(h_{n+1} + \frac{\partial h_n}{\partial x} + xh_n\right)\partial^{-n}\end{aligned}$$

である。$(\partial + x)Y = 1$ とすると、h_n に関する次の漸化式を得る。

$$\begin{aligned}h_1 &= 1,\\ h_{n+1} &= -\frac{\partial h_n}{\partial x} - xh_n.\end{aligned} \tag{2}$$

2.6

$\dfrac{\partial u}{\partial x_5}$ は何になるか。

(2.12) から

$$\frac{\partial u}{\partial x_5} = K_5(u) = -[P, (P^{5/2})_+] \tag{3}$$

である。ここで、(2.5) をさらに低次まで計算すると、

$$(\partial^2 + u)^{1/2} = \partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8}\right)\partial^{-3} + \left(\frac{3}{8}uu_x - \frac{1}{16}u_{xxx}\right)\partial^{-4} + \cdots$$

である。これより、

$$\begin{aligned}\left(P^{5/2}\right)_+ &= \left((\partial^2 + u)^2\left[\partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial^{-2} + \left(\frac{u_{xx}}{8} - \frac{u^2}{8}\right)\partial^{-3} + \left(\frac{3}{8}uu_x - \frac{1}{16}u_{xxx}\right)\partial^{-4} + \cdots\right]\right)_+\\ &= \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_x\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{xx} + \frac{15}{8}u^2\right)\partial + \left(\frac{15}{16}u_{xxx} + \frac{15}{8}uu_x\right)\end{aligned}$$

であるから、交換子積は

$$
\begin{aligned}
&\left[\partial^2+u,\partial^5+\frac{5}{2}u\partial^3+\frac{15}{4}u_x\partial^2+\left(\frac{25}{8}u_{xx}+\frac{15}{8}u^2\right)\partial+\left(\frac{15}{16}u_{xxx}+\frac{15}{8}uu_x\right)\right]\\
=&\partial^2\left(\frac{15}{16}u_{xxx}+\frac{15}{8}uu_x\right)-\left[\partial^5+\frac{5}{2}u\partial^3+\frac{15}{4}u_x\partial^2+\left(\frac{25}{8}u_{xx}+\frac{15}{8}u^2\right)\partial\right]u\\
=&-\frac{1}{16}(u_{5x}+10u_{3x}u+20u_{2x}u_x+30u_xu^2)
\end{aligned}
$$

となる (交換子積の結果が関数になることを利用すると計算量が減らせる)。以上より、

$$
\frac{\partial u}{\partial x_5}=\frac{1}{16}(u_{5x}+10u_{3x}u+20u_{2x}u_x+30u_xu^2) \tag{4}
$$

である。

2.7

(2.16) の f_1, f_2 と (2.18) の w_1, w_2 の間の関係を導け。

$L\circ M=M\circ\partial$ を用いる。ここで、

$$
\begin{aligned}
L&=\partial+f_1\partial^{-1}+f_2\partial^{-2}+\cdots,\\
M&=1+w_1\partial^{-1}+w_2\partial^{-2}+w_3\partial^{-3}+\cdots
\end{aligned} \tag{5}
$$

である。負の階数の微分は消えることにすると、

$$
\begin{aligned}
L\circ M&=\partial+w_1+\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+w_2+f_1\right)\partial^{-1}+\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}+w_3+f_1w_1+f_2\right)\partial^{-2}+\cdots,\\
M\circ\partial&=\partial+w_1+w_2\partial^{-1}+w_3\partial^{-2}+\cdots
\end{aligned}
$$

となる。係数比較をすると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial x}+f_1=0,\\
&\frac{\partial w_2}{\partial x}+f_1w_1+f_2=0
\end{aligned} \tag{6}
$$

が得られる。

2.8

$M^{-1}=1+v_1\partial^{-1}+v_2\partial^{-2}+\cdots$ を求めよ。

$M\circ M^{-1}=1$ より、

$$
1=1+(w_1+v_1)\partial^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(w_k+v_k+\sum_{i=1}^{k-1}w_iv_{k-i}\right)\partial^{-k}
$$

なので係数比較すると、

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -w_1, \\
v_k &= -w_k - \sum_{i=1}^{k-i} w_i v_{k-i} \ (k \geq 2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる。

2.9

(2.25),(2.26) は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \log \tau}{\partial x_1} &= -w_1, \\
\frac{\partial \log \tau}{\partial x_2} &= -2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

と書き直せる。この 2 つの関係式が両立していることを示せ。

両立するためには

$$
-\frac{\partial}{\partial x_2} w_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-2w_2 + w_1^2 - \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{8}
$$

が成り立つことを確認すれば良い。(2.25),(2.26) より

$$
w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial x_1}/\tau, \quad w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \tau}{\partial x_2}\right)/\tau
$$

を代入すると確かに成り立つことがわかる。

2.10

(2.28) を導け。

u を (2.27) のように

$$
u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau \tag{9}
$$

で定めたときに、

$$
\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \tag{10}
$$

が成り立つことを確認する。

付録 A

2.3 の証明の中に現れた

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_l} = -\left[f(X), \left(X^l\right)_+\right] \tag{11}$$

について、

$$f(X) = X^j \tag{12}$$

のかたちで表される場合について、j に関する数学的帰納法で示す。ただし、$j = 2$ のときについては、

$$\frac{\partial X^2}{\partial x_l} = -\left[X^2, \left(X^l\right)_+\right] \tag{13}$$

が成立する。

- $j = 2$ の場合はあきらか。
- ある j で成立するとき、適当な関数 h に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_l}(X^{j+1}h) = \frac{\partial X^{j+1}}{\partial x_l}h + X^{j+1}\frac{\partial h}{\partial x_l} \\
=&\frac{\partial}{\partial x_l}\left[X^j(Xh)\right] = \frac{\partial X^j}{\partial x_l}Xh + X^j\frac{\partial}{\partial x_l}(Xh) = \frac{\partial X^j}{\partial x_l}Xh + X^j\frac{\partial X}{\partial x_l}h + X^{j+1}\frac{\partial h}{\partial x_l}
\end{aligned}$$

であるから、仮定から

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X^{j+1}}{\partial x_l} = \frac{\partial X^j}{\partial x_l}X + X^j\frac{\partial X}{\partial x_l} \\
=&-\left[X^j, \left(X^l\right)_+\right]X - X^j\left[X, \left(X^l\right)_+\right] \\
=&-X^j\left(X^l\right)_+X + \left(X^l\right)_+X^{j+1} - X^{j+1}\left(X^l\right)_+ + X^j\left(X^l\right)_+X \\
=&-X^{j+1}\left(X^l\right)_+ + \left(X^l\right)_+X^{j+1} = -\left[X^{j+1}, \left(X^l\right)_+\right]
\end{aligned}$$

となり、$j + 1$ のときも成立する。

以上より、$j \geq 2$ のとき、

$$\frac{\partial X^j}{\partial x_l} = -\left[X^j, \left(X^l\right)_+\right] \tag{14}$$

が示された。$j = 1$ のときには (2.13) を個別に示す。

$$\frac{\partial}{\partial x_l}K_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_1}K_l(u)$$

となり、確認できる。