$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2018 年 8 月 5 日

概要

バーゼル問題の証明をできる限り記していく。

目次

1 Fourier 級数展開を用いる方法

区間 $[-\pi, \pi]$ で

$$f(t) = t^2 \tag{1}$$

となる周期関数 f を考える。f を複素フーリ級数展開すると、

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-int} \tag{2}$$

と計算できる。ここに $t = \pi$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-in\pi} && (3) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} (-1)^n && (4) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^2} && (5) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} && (6)
\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{7}$$

であることが示された[*1]。

[*1] http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215

2 Fourier 級数展開を用いる方法

式 (2) において $t=0$ を代入すると、

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \tag{8}$$

が得られる。この式を整理すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \tag{9}$$

となる。

一方で、$\sum \frac{1}{n^2}$ を求めたいが、これは $n \geq 2$ において、

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \tag{10}$$

となることを用いると、$\sum \frac{1}{n^2} < 2$ が示される。よって、この級数は正項級数で上に有界であるから収束する。この収束値を α とおく。このとき、

$$\alpha - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \tag{11}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\} \tag{12}$$

$$= \sum_{n:\text{偶数}}\frac{2}{n^2} \tag{13}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m)^2} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\alpha}{2} \tag{15}$$

これより、

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{16}$$

が示された[*2]。

[*2] http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215

3　中間値の定理を用いる方法

この証明のアイデアは、$n \geq 0$ で成り立つ次の恒等式[*3]

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{17}$$

と中間値の定理を用いるものである。具体的には次の命題を用いる。

> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上で連続とし、$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上で非負関数で積分可能 ($g \in \mathrm{L}^1[a,b]$) とする。このとき、ある $\xi \in [a,b]$ が存在して、次が成立する。
>
> $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \tag{18}$$

このとき、式 (17) の両辺に $x^2 - 2x$ を掛けて $[0,\pi]$ 上で積分すると、左辺は、

$$\int_0^\pi \left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right\}(x^2 - 2\pi x)dx \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (x^2 - 2\pi x)dx + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(kx)(x^2 - 2\pi x)dx \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2\right]_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \left(\frac{1}{k}\sin(kx)\right)'(x^2 - 2\pi x)dx \tag{21}$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{k}\sin(kx)(x^2 - 2\pi x)\right]_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin(kx)(x-\pi)dx\right\} \tag{22}$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\int_0^\pi \left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)'(x-\pi)dx \tag{23}$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2}\left\{[\cos(kx)(x-\pi)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(kx)dx\right\} \tag{24}$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{k^2} \tag{25}$$

となる。右辺については、

$$\int_0^\pi (x-2\pi)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx \tag{26}$$

$$= \int_0^\pi (x-2\pi)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left\{-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right\}'dx \tag{27}$$

$$= -\left[(x-2\pi)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \left\{(x-2\pi)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right\}'\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx \tag{28}$$

$$= \frac{-2\pi}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi_n\right)}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \left\{(x-2\pi)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right\}'dx \tag{29}$$

$$= \frac{-2\pi}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi_n\right)}{n+\frac{1}{2}}\left(2\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) \to 0 \tag{30}$$

[*3] 恒等式 (17) は $x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ で値を持たないが、その場合は極限値を考える。

となることがわかる。よって、両辺の極限 $n \to \infty$ を取ると、

$$-\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{k^2} = 0 \tag{31}$$

となり、これを整理すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{32}$$

となり、Basel 問題が示された。

参考文献

[1] Samuel G. Moreno, A One-Sentence and Truly Elementary Proof of the Basel Problem, arXiv:1502.07667.