

Cauchy の主値積分

米田亮介

2018 年 10 月 26 日

Cauchy の主値積分は次で与えられる。有限区間の場合、

$$PV \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right) \quad (1)$$

である。また、無限区間の場合、

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R f(x)dx \right) \quad (2)$$

である。

例 1

$$PV \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = 0 \quad (3)$$

例 2

$$PV \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \quad (4)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(3 [\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + 3 [\sqrt[3]{x}]_{\varepsilon}^1 \right) \quad (5)$$

$$= 6 \quad (6)$$