

微分積分学俗論 II

2019 年 1 月 5 日

1 11/14 の微積分論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t \quad (1)$$

2.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \quad (2)$$

1. $x = 0$ は解である。 $x \neq 0$ のとき両辺を変数分離すると、

$$\frac{dx}{x} = \log t dt \quad (3)$$

であり、これを積分すると、

$$\log |x| = t \log t - t + C' \quad (4)$$

である。ここで C' は積分定数である。これより、解は

$$|x(t)| = C e^{t \log t - t} = C e^{-t} t^t \quad (5)$$

となる。ここで $C > 0$ は定数。 $x = 0$ の解もまとめると、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して

$$x(t) = C e^{-t} t^t \quad (6)$$

となる。

2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を

$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \quad (7)$$

の形に決め打ちして、 $C(t)$ を求めるという算段である。このとき、

$$\dot{C}(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \quad (8)$$

である。これより、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$\dot{C}(t) = e^t \quad (9)$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \quad (10)$$

となる。ここで C は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t = t^t + Ce^{-t}t^t \quad (11)$$

と求まった。

Remark 1 微分方程式を解くときに思考停止で変数分離法とか定数変化法を使ってるけど、解が本当にこれだけなのか？ということは常にしっかりと考えるべきことなのかもしれない。初期値を与えたときに、解の存在と一意性を提示してくれるものはベクトル場のリプシッツ連続性であった。なので、ひとたびベクトル場のリプシッツ連続性を確認することができたならば、変数分離法や定数変化法は強力な手法になるのである。今回の問題では自励系の微分方程式ではないので、補助変数を用意して強引に自励系の多変数微分方程式系にする必要がある。このとき、高次元にベクトル場が与えられたときにも解の存在と一意性を決めるのはリプシッツ連続性になるのだろうか？このことについても少し調べてみる必要がありそうだ。

2 テキスト第3章問5

$a_j(t) (j = 1, 2)$ と $q(t)$ を t のある関数として 2 階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t) \quad (12)$$

を考える。 $x = t, t^2, t^3$ が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数 $a_j(t)$ と $q(t)$ を定めよ。
2. 一般解を求めよ。