

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2018 年 8 月 31 日

概要

バーゼル問題の証明をできる限り記していく。

目次

1	Fourier 級数展開を用いる方法	2
2	Fourier 級数展開を用いる方法	3
3	中間値の定理を用いる方法	4

1 Fourier 級数展開を用いる方法

区間 $[-\pi, \pi]$ で

$$f(t) = t^2 \quad (1)$$

となる周期関数 f を考える。 f を複素フーリエ級数展開すると、

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-int} \quad (2)$$

と計算できる。ここに $t = \pi$ を代入すると、

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{-in\pi} \quad (3)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} (-1)^n \quad (4)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0, n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^2} \quad (5)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

となる。これより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (7)$$

であることが示された*1。

*1 <http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215>

2 Fourier 級数展開を用いる方法

式 (2) において $t = 0$ を代入すると、

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (8)$$

が得られる。この式を整理すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad (9)$$

となる。

一方で、 $\sum \frac{1}{n^2}$ を求めたいが、これは $n \geq 2$ において、

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (10)$$

となることを用いると、 $\sum \frac{1}{n^2} < 2$ が示される。よって、この級数は正項級数で上に有界であるから収束する。この収束値を α とおく。このとき、

$$\alpha - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (11)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right\} \quad (12)$$

$$= \sum_{n:\text{偶数}} \frac{2}{n^2} \quad (13)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m)^2} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\alpha}{2} \quad (15)$$

これより、

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (16)$$

が示された*2。

*2 <http://otaku-of-suri.hatenablog.com/entry/2016/06/17/130215>

3 中間値の定理を用いる方法

この証明のアイデアは、 $n \geq 0$ で成り立つ次の恒等式^{*3}

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (17)$$

と中間値の定理を用いるものである。具体的には次の命題を用いる。

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上で連続とし、 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上で非負関数で積分可能 ($g \in L^1[a, b]$) とする。このとき、ある $\xi \in [a, b]$ が存在して、次が成立する。

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (18)$$

このとき、式 (17) の両辺に $x^2 - 2x$ を掛けて $[0, \pi]$ 上で積分すると、左辺は、

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right\} (x^2 - 2\pi x) dx \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (x^2 - 2\pi x) dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx) (x^2 - 2\pi x) dx \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{\pi}{2} x^2 \right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{1}{k} \sin(kx) \right)' (x^2 - 2\pi x) dx \quad (21)$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{k} \sin(kx) (x^2 - 2\pi x) \right]_0^\pi - \frac{2}{k} \int_0^\pi \sin(kx) (x - \pi) dx \right\} \quad (22)$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \right)' (x - \pi) dx \quad (23)$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2} \left\{ [\cos(kx) (x - \pi)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(kx) dx \right\} \quad (24)$$

$$= -\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{k^2} \quad (25)$$

となる。右辺については、

$$\int_0^\pi (x - 2\pi) \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx \quad (26)$$

$$= \int_0^\pi (x - 2\pi) \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left\{ -\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) \right\}' dx \quad (27)$$

$$= - \left[(x - 2\pi) \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) \right]_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \left\{ (x - 2\pi) \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right\}' \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx \quad (28)$$

$$= \frac{-2\pi}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \xi_n \right)}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \left\{ (x - 2\pi) \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right\}' dx \quad (29)$$

$$= \frac{-2\pi}{n + \frac{1}{2}} + \frac{\cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \xi_n \right)}{n + \frac{1}{2}} \left(2\pi - \frac{\pi^2}{2} \right) \rightarrow 0 \quad (30)$$

^{*3} 恒等式 (17) は $x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ で値を持たないが、その場合は極限値を考える。

となることがわかる。よって、両辺の極限 $n \rightarrow \infty$ を取ると、

$$-\frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{k^2} = 0 \quad (31)$$

となり、これを整理すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (32)$$

となり、Basel 問題が示された^{*4}。

^{*4} Samuel G. Moreno, A One-Sentence and Truly Elementary Proof of the Basel Problem, arXiv:1502.07667.