

微分積分学俗論 II

米田亮介

2019 年 1 月 18 日

1 11/14 の微積分続論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t \quad (1)$$

2.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \quad (2)$$

1. $x = 0$ は解である。 $x \neq 0$ のとき両辺を変数分離すると、

$$\frac{dx}{x} = \log t dt \quad (3)$$

であり、これを積分すると、

$$\log |x| = t \log t - t + C' \quad (4)$$

である。ここで C' は積分定数である。これより、解は

$$|x(t)| = C e^{t \log t - t} = C e^{-t} t^t \quad (5)$$

となる。ここで $C > 0$ は定数。 $x = 0$ の解もまとめると、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して

$$x(t) = C e^{-t} t^t \quad (6)$$

となる。

2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を

$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \quad (7)$$

の形に決め打ちして、 $C(t)$ を求めるという算段である。このとき、

$$C'(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \quad (8)$$

である。これより、 $C(t)$ についての微分方程式

$$C'(t) = e^t \quad (9)$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \quad (10)$$

となる。ここで C は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t = t^t + Ce^{-t}t \quad (11)$$

と求まった。

2 テキスト第 3 章問 5

$a_j(t) (j = 1, 2)$ と $q(t)$ を t のある関数として 2 階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t), \quad t \neq -1 \quad (12)$$

を考える。 $x = t, t^2, t^3$ が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数 $a_j(t)$ と $q(t)$ を定めよ。
2. 一般解を求めよ。

1. $x = t, t^2, t^3$ を代入して連立方程式を解くだけ。

$$a_1(t) = -\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}, \quad (13)$$

$$a_2(t) = \frac{2(3t^2 - 3t + 1)}{t^2(t-1)^2}, \quad (14)$$

$$q(t) = \frac{2t}{(t-1)^2} \quad (15)$$

2. 非同次方程式の一般解は、同次方程式の一般解と特殊解の和になる。そのために同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (16)$$

を解きたいが、そのまま解くのは難しい。そこで次のように考える。非同次方程式の解 t, t^2 を同次方程式の基本解 x_1, x_2 を用いて表してみる。特殊解は t^3 であるから、

$$t = c_1x_1 + c_2x_2 + t^3, \quad (17)$$

$$t^2 = c'_1x_1 + c'_2x_2 + t^3 \quad (18)$$

とかける。ここで c_1, c_2, c'_1, c'_2 は適当な定数である。両辺を引くと、

$$t - t^2 = (c_1 - c'_1)x_1 + (c_2 - c'_2)x_2 \quad (19)$$

となる。これより、 $t - t^2$ は基本解の線形和で表せることがわかった。よって、 $t - t^2$ も同次方程式の解である。同様の考えによって、 $t - t^3$ も同次方程式の解である。

$t - t^2, t - t^3$ はそれぞれ独立であるから、同次方程式の基本解になる。非同次方程式の特殊解として t^3 を選ぶと、一般解は

$$c_1(t - t^2) + c_2(t - t^3) + t^3 \quad (20)$$

になる。

Remark 1 最後の答えを書くところで非同次方程式の特殊解として、 t^3 を選んだが、 t, t^2 でも良い。どれを選んでも結局 c_1, c_2 の任意性から解空間はおなじになる。

Remark 2 問題文のはじめにある $t \neq -1$ が意味不明。 $t \neq 0, 1$ の間違い。 $t = 0, 1$ では与えられた特解が独立でなくなるからだめ。

3 テキスト第 3 章問 6

2 階同次方程式

$$x'' - \frac{1}{t+1}x' + \frac{1}{(t+1)^2}x = 0, \quad t \neq -1 \quad (21)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. $x = t + 1$ が解であることを示せ。
2. 定数変化法を用いて一般解を求めよ。
3. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. 代入するだけ。
2. 与えられた微分方程式は x について線形だから、 $x = t + 1$ が解であれば $x = C(t + 1)$ も解である。このとき、定数変化法を用いて一般解を求めたいので、

$$x = C(t)(t + 1) \quad (22)$$

として、 $C(t)$ を求める。式 (21) に代入すると、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$(t + 1)C'' + C' = 0 \quad (23)$$

が得られる。まず、 C' についての微分方程式だと思って、変数分離法で解くと、

$$C'(t) = \frac{c_2}{t + 1} \quad (24)$$

が得られる。 c_2 は任意定数。よって、

$$C(t) = c_1 + c_2 \log |t + 1| \quad (25)$$

が得られる。 c_1 も任意定数^{*1}。 $t \neq -1$ で $\log |t + 1|$ もきちんと定義されるので問題ない。以上より、

^{*1} 積分定数の決め方がずいぶんと恣意的になってしまった。。。

一般解は、

$$x = c_1(t+1) + c_2(t+1) \log |t+1| \quad (26)$$

である。

3. $t = 0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1, \quad (27)$$

$$v_0 = x'(0) = C(0) + C'(0) = c_1 + c_2 \quad (28)$$

であるから、 $c_1 = x_0, c_2 = v_0 - x_0$ と求まる。以上より、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は、

$$x = x_0(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1) \log |t+1| \quad (29)$$

である。

4 テキスト第3章問7

2 階非同次方程式

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + \frac{2}{(t+1)^2}x = t+1, \quad t \neq -1 \quad (30)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. 定数変化法を用いて一般解を求めよ (問2を参照せよ)。
2. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. まず、同次方程式に対する解として $x = t+1, (t+1)^2$ がある。次に、非同次方程式の一般解を求めるためには、非同次方程式の特殊解をひとつ求めれば良い。そのために、 $x = t+1$ に対して定数変化法を用いることを考える。先程と同じように $x = C(t)(t+1)$ として、式 (30) に代入すると、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$C'' = 1 \quad (31)$$

が得られる。この微分方程式の解のひとつは、 $C(t) = \frac{1}{2}t^2$ となるので、特殊解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1)^2 \quad (32)$$

である。以上より、式 (30) の一般解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 \quad (33)$$

である。

2. $t = 0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \quad (34)$$

$$v_0 = x'(0) = c_1 + 2c_2 \quad (35)$$

なので、 $c_1 = 2x_0 - v_0, c_2 = v_0 - x_0$ が分かる。よって、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + (2x_0 - v_0)(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)^2 \quad (36)$$

である。

5 テキスト第3章問12

次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$1. x'' + x = 1$$

$$2. x'' - x' - 2x = t^2$$

$$3. x'' + x' - 2x = (3t^4 + 4t^3)e^t$$

$$4. x'' + x' + x = te^{-t}$$

1. 対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (37)$$

である。これを解くと、 $\lambda = \pm i$ であり、基本解は

$$x = \cos t, \sin t \quad (38)$$

である。また、特性解は $x = 1$ である。よって、一般解は

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \quad (39)$$

である。 c_1, c_2 は任意定数である。

2. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = 2, -1$ なので、基本解は

$$x = e^{2t}, e^{-t} \quad (40)$$

である。特性解として $c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ の形のもの考える。微分方程式に特性解を代入すると、

$$-2c_1 t^2 + (-2c_1 + -2c_2)t + (2c_1 - c_2 - 2c_3) = t^2 \quad (41)$$

となるので、係数比較をして連立方程式を解くと、

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{4} \quad (42)$$

である。以上より、一般解は

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \quad (43)$$

である。

3. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -2, 1$ なので、基本解は

$$x = e^{-2t}, e^t \quad (44)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^t \quad (45)$$

と置いてみる。また、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0 \quad (46)$$

を仮定する。微分方程式にこれを代入すると、 u_1', u_2' について、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0, \quad (47)$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = (3t^4 + 4t^3)e^t \quad (48)$$

となるから、

$$u_1' = -\left(t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)e^{3t}, \quad (49)$$

$$u_2' = t^4 + \frac{4}{3}t^3 \quad (50)$$

それぞれを積分すると、

$$u_1 = -\frac{1}{3}e^{3t}t^4, \quad (51)$$

$$u_2 = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^4 \quad (52)$$

である。よって、特殊解は

$$x = \frac{1}{5}t^5 e^t \quad (53)$$

である。以上より一般解は、

$$x = c_1 e^{-2t} + \left(c_2 + \frac{1}{5}t^5\right)e^t \quad (54)$$

である。

4. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ なので、基本解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad (55)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = (c_1 t + c_2)e^{-t} \quad (56)$$

と仮定する。非同次方程式に代入して係数比較すると、

$$c_1 = 1, \quad (57)$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad (58)$$

となる。これより $c_1 = c_2 = 1$ なので、特殊解は

$$x = (t+1)e^{-t} \quad (59)$$

である。以上より一般解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right] + (t+1)e^{-t} \quad (60)$$

である。

6 テキスト第4章問2

$t > 0$ において

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (61)$$

の形の2元連立非同次方程式を考える。ただし、

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad (62)$$

とする。行列

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t & -t \end{pmatrix} \quad (63)$$

が対応する同次方程式の基本行列であるとき、以下の問に答えよ。ただし、 $t, s > 0$ とする。

1. 係数行列 $A(t)$ を求めよ。
2. 対応する同次方程式の解核行列 $R(t, s)$ を求めよ。
3. 初期条件

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

を満たす、この非同次方程式の解を求めよ。

1. 係数行列の各成分を

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (65)$$

として、これらを求める。基本行列の定義から、

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad (66)$$

は同次方程式の解であるから、それぞれ代入すれば良い。 $\mathbf{v}_1(t)$ を同次方程式に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad (67)$$

であり、 $\mathbf{v}_2(t)$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad (68)$$

である。この 2 つ (式としては 4 つ) を連立させて解くと、

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1/t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

が得られる。

2. 解核行列 $R(t, s)$ は基本行列 $V(t)$ を用いると、

$$R(t, s) = V(t)V(s)^{-1} \quad (70)$$

となる (教科書の定理 4.3)。計算すると、

$$R(t, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s/t + t/s & s/t - t/s \\ s/t - t/s & s/t + t/s \end{pmatrix} \quad (71)$$

である。

3. 教科書の定理 4.5 から、初期条件 $\mathbf{x}(1)$ を満たす解は次で与えられる。

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 1)\mathbf{x}(1) + \int_1^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr. \quad (72)$$

あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t^2 - 3t + 3 + 1/t \\ -t^2 + 3t + 1/t \end{pmatrix} \quad (73)$$

である。

7 テキスト第 4 章問 4

定数係数微分方程式

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (74)$$

に対して次の問に答えよ。

1. 対応する同次方程式の解核行列を求めよ。
2. 初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ を満たす非同次方程式の解を求めよ。

1. 同次方程式は定数係数の微分方程式になるので、教科書の定理 4.9 により、解核行列は次で与えられる。

$$R(t, s) = \exp(A(t - s)). \quad (75)$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

である。行列 A は行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \quad (77)$$

を用いて、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad (78)$$

と表される。よって、

$$\exp(A(t-s)) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i)(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$= e^{t-s} \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \quad (80)$$

となる。

Remark 3 対角化するための行列 T は基底のとり方によって、いくらでも値が取り替わることに注意。ただ、行列 T のとり方が違えども、答えは必ず一致するはずなので、この解答と違う T を選んでいたとしても、答えは同じである必要がある。

2. 解核行列が得られたので、初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ を満たす解は、

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr \quad (81)$$

となる。あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 + \frac{e^t}{\omega} \begin{pmatrix} \sin t \sin \omega t \\ \cos t \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (82)$$

である。