

微分積分学俗論 II

2019 年 1 月 10 日

1 11/14 の微積分続論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t \quad (1)$$

2.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \quad (2)$$

1. $x = 0$ は解である。 $x \neq 0$ のとき両辺を変数分離すると、

$$\frac{dx}{x} = \log t dt \quad (3)$$

であり、これを積分すると、

$$\log |x| = t \log t - t + C' \quad (4)$$

である。ここで C' は積分定数である。これより、解は

$$|x(t)| = C e^{t \log t - t} = C e^{-t} t^t \quad (5)$$

となる。ここで $C > 0$ は定数。 $x = 0$ の解もまとめると、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して

$$x(t) = C e^{-t} t^t \quad (6)$$

となる。

2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を

$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \quad (7)$$

の形に決め打ちして、 $C(t)$ を求めるという算段である。このとき、

$$C'(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \quad (8)$$

である。これより、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$C'(t) = e^t \quad (9)$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \quad (10)$$

となる。ここで C は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t = t^t + Ce^{-t}t \quad (11)$$

と求まった。

Remark 1 微分方程式を解くときに思考停止で変数分離法とか定数変化法を使ってるけど、解が本当にこれだけなのか？ということは常にしっかりと考えるべきことなのかもしれない。初期値を与えたときに、解の存在と一意性を提示してくれるものはベクトル場のリプシッツ連続性であった。なので、ひとたびベクトル場のリプシッツ連続性を確認することができたならば、変数分離法や定数変化法は強力な手法になるのである。今回の問題では自励系の微分方程式ではないので、補助変数を用意して強引に自励系の多変数微分方程式系にする必要がある。このとき、高次元にベクトル場が与えられたときにも解の存在と一意性を決めるのはリプシッツ連続性になるのだろうか？このことについても少し調べてみる必要がありそうだ。

2 テキスト第 3 章問 5

$a_j(t) (j = 1, 2)$ と $q(t)$ を t のある関数として 2 階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t), \quad t \neq -1 \quad (12)$$

を考える。 $x = t, t^2, t^3$ が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数 $a_j(t)$ と $q(t)$ を定めよ。
2. 一般解を求めよ。

1. $x = t, t^2, t^3$ を代入して連立方程式を解くだけ。

$$a_1(t) = -\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}, \quad (13)$$

$$a_2(t) = \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2}, \quad (14)$$

$$q(t) = \frac{2t}{(t-1)^2} \quad (15)$$

2. 非同次方程式の一般解は、同次方程式の一般解と特殊解の和になる。そのために同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (16)$$

を解きたいが、そのまま解くのは難しい。そこで次のように考える。非同次方程式の解 t, t^2 を同次方

方程式の基本解 x_1, x_2 を用いて表してみる。特殊解は t^3 であるから、

$$t = c_1 x_1 + c_2 x_2 + t^3, \quad (17)$$

$$t^2 = c'_1 x_1 + c'_2 x_2 + t^3 \quad (18)$$

とかける。ここで c_1, c_2, c'_1, c'_2 は適当な定数である。両辺を引くと、

$$t - t^2 = (c_1 - c'_1)x_1 + (c_2 - c'_2)x_2 \quad (19)$$

となる。これより、 $t - t^2$ は基本解の線形和で表せることがわかった。よって、 $t - t^2$ も同次方程式の解である。同様の考えによって、 $t - t^3$ も同次方程式の解である。

$t - t^2, t - t^3$ はそれぞれ独立であるから、同次方程式の基本解になる。非同次方程式の特殊解として t^3 を選ぶと、一般解は

$$c_1(t - t^2) + c_2(t - t^3) + t^3 \quad (20)$$

になる。

Remark 2 最後の答えを書くところで非同次方程式の特殊解として、 t^3 を選んだが、 t, t^2 でも良い。どれを選んでも結局 c_1, c_2 の任意性から解空間はおなじになる。

Remark 3 よくある問題は特殊解を一つ与えた上で、非同次方程式の一般解を求めさせる問題だが、この問題は特殊解を (複数個) 先に与えている、という点において目新しい。よくよく考えると、微分方程式を与えると、(一般解に対応する) 解空間を考えることができるが、この問題は、解空間の中の有限個の点から解空間全体を復元できることも主張している。線形空間であれば、次元の数のぶんだけ解を用意すればよいが、今回は線形空間でもない、という点においても非常に面白い問題であると思う。

Remark 4 問題文のはじめにある $t \neq -1$ が意味不明。 $t \neq 0, 1$ の間違い。 $t = 0, 1$ では与えられた特解が独立でなくなるからだめ。

3 テキスト第3章問6

2 階同次方程式

$$x'' - \frac{1}{t+1}x' + \frac{1}{(t+1)^2}x = 0, \quad t \neq -1 \quad (21)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. $x = t + 1$ が解であることを示せ。
2. 定数変化法を用いて一般解を求めよ。
3. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. 代入するだけ。

2. 与えられた微分方程式は x について線形だから、 $x = t + 1$ が解であれば $x = C(t + 1)$ も解である。このとき、定数変化法を用いて一般解を求めたいので、

$$x = C(t)(t + 1) \quad (22)$$

として、 $C(t)$ を求める。式 (21) に代入すると、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$(t + 1)C'' + C' = 0 \quad (23)$$

が得られる。まず、 C' についての微分方程式だと思って、変数分離法で解くと、

$$C'(t) = \frac{c_2}{t + 1} \quad (24)$$

が得られる。 c_2 は任意定数。よって、

$$C(t) = c_1 + c_2 \log |t + 1| \quad (25)$$

が得られる。 c_1 も任意定数^{*1}。 $t \neq -1$ で $\log |t + 1|$ もきちんと定義されるので問題ない。以上より、一般解は、

$$x = c_1(t + 1) + c_2(t + 1) \log |t + 1| \quad (26)$$

である。

3. $t = 0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1, \quad (27)$$

$$v_0 = x'(0) = C(0) + C'(0) = c_1 + c_2 \quad (28)$$

であるから、 $c_1 = x_0, c_2 = v_0 - x_0$ と求まる。以上より、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は、

$$x = x_0(t + 1) + (v_0 - x_0)(t + 1) \log |t + 1| \quad (29)$$

である。

4 テキスト第3章問7

2 階非同次方程式

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + \frac{2}{(t+1)^2}x = t + 1, \quad t \neq -1 \quad (30)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. 定数変化法を用いて一般解を求めよ (問2を参照せよ)。
2. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

^{*1} 積分定数の決め方がずいぶんと恣意的になってしまった。。。

1. まず、同次方程式に対する解として $x = t + 1, (t + 1)^2$ がある。次に、非同次方程式の一般解を求めるためには、非同次方程式の特殊解をひとつ求めれば良い。そのために、 $x = t + 1$ に対して定数変化法を用いることを考える。先程と同じように $x = C(t)(t + 1)$ として、式 (30) に代入すると、 $C(t)$ に関する微分方程式

$$C'' = 1 \quad (31)$$

が得られる。この微分方程式の解のひとつは、 $C(t) = \frac{1}{2}t^2$ となるので、特殊解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t + 1)^2 \quad (32)$$

である。以上より、式 (30) の一般解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t + 1) + c_1(t + 1) + c_2(t + 1)^2 \quad (33)$$

である。

2. $t = 0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \quad (34)$$

$$v_0 = x'(0) = c_1 + 2c_2 \quad (35)$$

なので、 $c_1 = 2x_0 - v_0, c_2 = v_0 - x_0$ が分かる。よって、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t + 1) + (2x_0 - v_0)(t + 1) + (v_0 - x_0)(t + 1)^2 \quad (36)$$

である。

5 テキスト第3章問12

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1. $x'' + x = 1$
2. $x'' - x' - 2x = t^2$
3. $x'' + x' - 2x = (3t^4 + 4t^3)e^t$
4. $x'' + x' + x = te^{-t}$

1. 対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (37)$$

である。これを解くと、 $\lambda = \pm i$ であり、基本解は

$$x = \cos t, \sin t \quad (38)$$

である。また、特性解は $x = 1$ である。よって、一般解は

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \quad (39)$$

である。 c_1, c_2 は任意定数である。

2. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = 2, -1$ なので、基本解は

$$x = e^{2t}, e^{-t} \quad (40)$$

である。特性解として $c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ の形のもの考える。微分方程式に特性解を代入すると、

$$-2c_1 t^2 + (-2c_1 - 2c_2)t + (2c_1 - c_2 - 2c_3) = t^2 \quad (41)$$

となるので、係数比較をして連立方程式を解くと、

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{4} \quad (42)$$

である。以上より、一般解は

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \quad (43)$$

である。

3. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -2, 1$ なので、基本解は

$$x = e^{-2t}, e^t \quad (44)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^t \quad (45)$$

と置いてみる。また、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0 \quad (46)$$

を仮定する。微分方程式にこれを代入すると、 u_1', u_2' について、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0, \quad (47)$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = (3t^4 + 4t^3)e^t \quad (48)$$

となるから、

$$u_1' = -\left(t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)e^{3t}, \quad (49)$$

$$u_2' = t^4 + \frac{4}{3}t^3 \quad (50)$$

それぞれを積分すると、

$$u_1 = -\frac{1}{3}e^{3t}t^4, \quad (51)$$

$$u_2 = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^4 \quad (52)$$

である。よって、特殊解は

$$x = \frac{1}{5}t^5 e^t \quad (53)$$

である。以上より一般解は、

$$x = c_1 e^{-2t} + \left(c_2 + \frac{1}{5}t^5\right) e^t \quad (54)$$

である。

4. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ なので、基本解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad (55)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = (c_1 t + c_2) e^{-t} \quad (56)$$

と仮定する。非同次方程式に代入して係数比較すると、

$$c_1 = 1, \quad (57)$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad (58)$$

となる。これより $c_1 = c_2 = 1$ なので、特殊解は

$$x = (t + 1) e^{-t} \quad (59)$$

である。以上より一般解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + (t + 1) e^{-t} \quad (60)$$

である。