

# 微分積分学俗論 II

米田亮介

2019 年 1 月 21 日

## 1 11/14 の微積続論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t \quad (1)$$

2.

$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \quad (2)$$

1.  $x = 0$  は解である。 $x \neq 0$  のとき両辺を変数分離すると、

$$\frac{dx}{x} = \log t dt \quad (3)$$

であり、これを積分すると、

$$\log |x| = t \log t - t + C' \quad (4)$$

である。ここで  $C'$  は積分定数である。これより、解は

$$|x(t)| = C e^{t \log t - t} = C e^{-t} t^t \quad (5)$$

となる。ここで  $C > 0$  は定数。 $x = 0$  の解もまとめると、任意の  $C \in \mathbb{R}$  に対して

$$x(t) = C e^{-t} t^t \quad (6)$$

となる。

2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を

$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \quad (7)$$

の形に決め打ちして、 $C(t)$  を求めるという算段である。このとき、

$$C'(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \quad (8)$$

である。これより、 $C(t)$  についての微分方程式

$$C'(t) = e^t \quad (9)$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \quad (10)$$

となる。ここで  $C$  は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t = t^t + Ce^{-t}t \quad (11)$$

と求まった。

## 2 テキスト第3章問5

$a_j(t) (j = 1, 2)$  と  $q(t)$  を  $t$  のある関数として2階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t), \quad t \neq -1 \quad (12)$$

を考える。 $x = t, t^2, t^3$  が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数  $a_j(t)$  と  $q(t)$  を定めよ。
2. 一般解を求めよ。

1.  $x = t, t^2, t^3$  を代入して連立方程式を解くだけ。

$$a_1(t) = -\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}, \quad (13)$$

$$a_2(t) = \frac{2(3t^2 - 3t + 1)}{t^2(t-1)^2}, \quad (14)$$

$$q(t) = \frac{2t}{(t-1)^2} \quad (15)$$

2. 非同次方程式の一般解は、同次方程式の一般解と特殊解の和になる。そのために同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (16)$$

を解きたいが、そのまま解くのは難しい。そこで次のように考える。非同次方程式の解  $t, t^2$  を同次方程式の基本解  $x_1, x_2$  を用いて表してみる。特殊解は  $t^3$  であるから、

$$t = c_1x_1 + c_2x_2 + t^3, \quad (17)$$

$$t^2 = c'_1x_1 + c'_2x_2 + t^3 \quad (18)$$

とかける。ここで  $c_1, c_2, c'_1, c'_2$  は適当な定数である。両辺を引くと、

$$t - t^2 = (c_1 - c'_1)x_1 + (c_2 - c'_2)x_2 \quad (19)$$

となる。これより、 $t - t^2$  は基本解の線形和で表せることがわかった。よって、 $t - t^2$  も同次方程式の解である。同様の考えによって、 $t - t^3$  も同次方程式の解である。

$t - t^2, t - t^3$  はそれぞれ独立であるから、同次方程式の基本解になる。非同次方程式の特殊解として  $t^3$  を選ぶと、一般解は

$$c_1(t - t^2) + c_2(t - t^3) + t^3 \quad (20)$$

になる。

**Remark 1** 最後の答えを書くところで非同次方程式の特殊解として、 $t^3$  を選んだが、 $t, t^2$  でも良い。どれを選んでも結局  $c_1, c_2$  の任意性から解空間はおなじになる。

**Remark 2** 問題文のはじめにある  $t \neq -1$  が意味不明。 $t \neq 0, 1$  の間違い。 $t = 0, 1$  では与えられた特解が独立でなくなるからだめ。

**Remark 3** 同次方程式を直接求める方法もまとめておく。同次方程式は、

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = x'' - \frac{2(2t-1)}{t(t-1)} x' + \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2} = 0 \quad (21)$$

である。線形の 2 階常微分方程式に対するチルンハウス変換<sup>\*1</sup>を施そう。方程式を  $x = e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} \eta$  で変数変換すると、

$$\eta'' = r\eta \quad (22)$$

に変換されることが知られている (確認せよ。)。ここで、

$$r = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_2 \quad (23)$$

である。今の場合、 $r$  を具体的に計算すると、 $r = 0$  となる。よって、変数変換された同次方程式は

$$\eta'' = 0 \quad (24)$$

を満たす。これは簡単に解くことが出来て、任意定数  $c_1, c_2$  を用いて、 $\eta = c_1 t + c_2$  となる。今度、逆変換を行うと、

$$x = c_1 t e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} + c_2 e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} \quad (25)$$

である。ここで、

$$e^{-\frac{1}{2} \int^t a_1(t) dt} = \begin{cases} t(t-1) & t > 1 \text{ または } t < 0 \\ -t(t-1) & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (26)$$

となるが、符号は  $c_1, c_2$  の任意性の方に吸収出来るので無視すると、

$$x = c_1 t^2(t-t) + c_2 t(t-1) \quad (27)$$

である。ここで、 $(c_1, c_2) = (1, 0), (0, 1)$  という風にとると、 $x = t^2(t-1), t(t-1)$  はそれぞれ同次方程式の解であり、しかも独立である。以上から、同次方程式の一般解は、

$$x = c_1 t^2(t-t) + c_2 t(t-1) \quad (28)$$

---

<sup>\*1</sup> 3 次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  を  $x^3 + px + q = 0$  という形に変換することをチルンハウス変換という。今回はその類似でチルンハウス変換という言い方をした。

となる。

### 3 テキスト第3章問6

2階同次方程式

$$x'' - \frac{1}{t+1}x' + \frac{1}{(t+1)^2}x = 0, \quad t \neq -1 \quad (29)$$

に対して次の問いに答えよ。

1.  $x = t + 1$  が解であることを示せ。
2. 定数変化法を用いて一般解を求めよ。
3. 初期条件  $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$  を満足する解を求めよ。

1. 代入するだけ。
2. 与えられた微分方程式は  $x$  について線形だから、 $x = t + 1$  が解であれば  $x = C(t + 1)$  も解である。このとき、定数変化法を用いて一般解を求めたいので、

$$x = C(t)(t + 1) \quad (30)$$

として、 $C(t)$  を求める。式 (29) に代入すると、 $C(t)$  に関する微分方程式

$$(t + 1)C'' + C' = 0 \quad (31)$$

が得られる。まず、 $C'$  についての微分方程式だと思って、変数分離法で解くと、

$$C'(t) = \frac{c_2}{t + 1} \quad (32)$$

が得られる。 $c_2$  は任意定数。よって、

$$C(t) = c_1 + c_2 \log |t + 1| \quad (33)$$

が得られる。 $c_1$  も任意定数\*2。  $t \neq -1$  で  $\log |t + 1|$  もきちんと定義されるので問題ない。以上より、一般解は、

$$x = c_1(t + 1) + c_2(t + 1) \log |t + 1| \quad (34)$$

である。

3.  $t = 0$  における  $x, x'$  の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1, \quad (35)$$

$$v_0 = x'(0) = C(0) + C'(0) = c_1 + c_2 \quad (36)$$

であるから、 $c_1 = x_0, c_2 = v_0 - x_0$  と求まる。以上より、初期条件  $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$  を満足する

---

\*2 積分定数の決め方がずいぶんと恣意的になってしまった。。。

解は、

$$x = x_0(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1) \log |t+1| \quad (37)$$

である。

## 4 テキスト第3章問7

2 階非同次方程式

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + \frac{2}{(t+1)^2}x = t+1, \quad t \neq -1 \quad (38)$$

に対して次の問いに答えよ。

1. 定数変化法を用いて一般解を求めよ (問2を参照せよ)。
2. 初期条件  $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$  を満足する解を求めよ。

1. まず、同次方程式に対する解として  $x = t+1, (t+1)^2$  がある。次に、非同次方程式の一般解を求めるためには、非同次方程式の特殊解をひとつ求めれば良い。そのために、 $x = t+1$  に対して定数変化法を用いることを考える。先程と同じように  $x = C(t)(t+1)$  として、式 (38) に代入すると、 $C(t)$  に関する微分方程式

$$C'' = 1 \quad (39)$$

が得られる。この微分方程式の解のひとつは、 $C(t) = \frac{1}{2}t^2$  となるので、特殊解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1)^2 \quad (40)$$

である。以上より、式 (38) の一般解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 \quad (41)$$

である。

2.  $t = 0$  における  $x, x'$  の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \quad (42)$$

$$v_0 = x'(0) = c_1 + 2c_2 \quad (43)$$

なので、 $c_1 = 2x_0 - v_0, c_2 = v_0 - x_0$  が分かる。よって、初期条件  $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$  を満足する解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + (2x_0 - v_0)(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)^2 \quad (44)$$

である。

## 5 テキスト第3章問12

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1.  $x'' + x = 1$
2.  $x'' - x' - 2x = t^2$
3.  $x'' + x' - 2x = (3t^4 + 4t^3)e^t$
4.  $x'' + x' + x = te^{-t}$

1. 対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (45)$$

である。これを解くと、 $\lambda = \pm i$  であり、基本解は

$$x = \cos t, \sin t \quad (46)$$

である。また、特性解は  $x = 1$  である。よって、一般解は

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \quad (47)$$

である。 $c_1, c_2$  は任意定数である。

2. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は  $\lambda = 2, -1$  なので、基本解は

$$x = e^{2t}, e^{-t} \quad (48)$$

である。特性解として  $c_1 t^2 + c_2 t + c_3$  の形のもの考える。微分方程式に特性解を代入すると、

$$-2c_1 t^2 + (-2c_1 - 2c_2)t + (2c_1 - c_2 - 2c_3) = t^2 \quad (49)$$

となるので、係数比較をして連立方程式を解くと、

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{4} \quad (50)$$

である。以上より、一般解は

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \quad (51)$$

である。

3. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は  $\lambda = -2, 1$  なので、基本解は

$$x = e^{-2t}, e^t \quad (52)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^t \quad (53)$$

と置いてみる。また、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0 \quad (54)$$

を仮定する。微分方程式にこれを代入すると、 $u_1', u_2'$  について、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0, \quad (55)$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = (3t^4 + 4t^3)e^t \quad (56)$$

となるから、

$$u_1' = -\left(t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)e^{3t}, \quad (57)$$

$$u_2' = t^4 + \frac{4}{3}t^3 \quad (58)$$

それぞれを積分すると、

$$u_1 = -\frac{1}{3}e^{3t}t^4, \quad (59)$$

$$u_2 = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^4 \quad (60)$$

である。よって、特殊解は

$$x = \frac{1}{5}t^5 e^t \quad (61)$$

である。以上より一般解は、

$$x = c_1 e^{-2t} + \left(c_2 + \frac{1}{5}t^5\right)e^t \quad (62)$$

である。

4. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  なので、基本解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad (63)$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = (c_1 t + c_2)e^{-t} \quad (64)$$

と仮定する。非同次方程式に代入して係数比較すると、

$$c_1 = 1, \quad (65)$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad (66)$$

となる。これより  $c_1 = c_2 = 1$  なので、特殊解は

$$x = (t + 1)e^{-t} \quad (67)$$

である。以上より一般解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + (t + 1)e^{-t} \quad (68)$$

である。

## 6 テキスト第4章問2

$t > 0$  において

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (69)$$

の形の2元連立非同次方程式を考える。ただし、

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad (70)$$

とする。行列

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t & -t \end{pmatrix} \quad (71)$$

が対応する同次方程式の基本行列であるとき、以下の問に答えよ。ただし、 $t, s > 0$  とする。

1. 係数行列  $A(t)$  を求めよ。
2. 対応する同次方程式の解核行列  $R(t, s)$  を求めよ。
3. 初期条件

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

を満たす、この非同次方程式の解を求めよ。

1. 係数行列の各成分を

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (73)$$

として、これらを求める。基本行列の定義から、

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad (74)$$

は同次方程式の解であるから、それぞれ代入すれば良い。 $\mathbf{v}_1(t)$  を同次方程式に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \quad (75)$$

であり、 $\mathbf{v}_2(t)$  を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \quad (76)$$

である。この2つ(式としては4つ)を連立させて解くと、

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1/t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$



が得られる。

2. 解核行列  $R(t, s)$  は基本行列  $V(t)$  を用いると、

$$R(t, s) = V(t)V(s)^{-1} \quad (78)$$

となる (教科書の定理 4.3)。計算すると、

$$R(t, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s/t + t/s & s/t - t/s \\ s/t - t/s & s/t + t/s \end{pmatrix} \quad (79)$$

である。

3. 教科書の定理 4.5 から、初期条件  $\mathbf{x}(1)$  を満たす解は次で与えられる。

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 1)\mathbf{x}(1) + \int_1^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr. \quad (80)$$

あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t^2 - 3t + 3 + 1/t \\ -t^2 + 3t + 1/t \end{pmatrix} \quad (81)$$

である。

## 7 テキスト第 4 章問 4

定数係数微分方程式

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (82)$$

に対して次の問に答えよ。

1. 対応する同次方程式の解核行列を求めよ。
2. 初期条件  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  を満たす非同次方程式の解を求めよ。

1. 同次方程式は定数係数の微分方程式になるので、教科書の定理 4.9 より、解核行列は次で与えられる。

$$R(t, s) = \exp(A(t - s)). \quad (83)$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

である。行列  $A$  は行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \quad (85)$$

を用いて、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad (86)$$

と表される。よって、

$$\exp(A(t-s)) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i)(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$= e^{t-s} \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \quad (88)$$

となる。

**Remark 4** 対角化するための行列  $T$  は基底のとり方によって、いくらでも値が取り替わることに注意。ただ、行列  $T$  のとり方が違えども、答えは必ず一致するはずなので、この解答と違う  $T$  を選んでいたとしても、答えは同じである必要がある。

2. 解核行列が得られたので、初期条件  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  を満たす解は、

$$\mathbf{x}(t) = R(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t R(t, r)\mathbf{f}(r)dr \quad (89)$$

となる。あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 + \frac{e^t}{\omega} \begin{pmatrix} \sin t \sin \omega t \\ \cos t \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (90)$$

である。