数理解析特論レポート

米田亮介

2019 年 1 月 24 日

1　Darboux 変換

1. 差分演算子 L, B をそれぞれ $L = e^{\partial/\partial n} + u_n e^{-\partial/\partial n}, B = -u_n u_{n-1} e^{-2\partial/\partial n}$ で定める。このとき、関数 $\varphi_n(t)$ に対する線形方程式

$$L\varphi_n(t) = (\lambda + 1/\lambda)\varphi_n(t), \quad \frac{d}{dt}\varphi_n(t) = B\varphi_n(t) \tag{1}$$

の両立条件から、無限格子上の連続時間発展方程式である Lotka–Voltera(LV) 方程式

$$\frac{d}{dt}u_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{2}$$

が導かれることを示せ。ここで、$\lambda + 1/\lambda$ は L の固有値を与える定数。

2. LV 方程式の自明な解 $u = 1$ を seed(種) として、Darboux 変換を k 回適用することで得られる差分作用素を $L^{(k)} = e^{\partial/\partial n} + u_n^{(k)} e^{-\partial/\partial n}$ で表す。このとき、$u_n^{(1)}$ および $u_n^{(2)}$ を求めよ。