微分積分学続論 II

米田亮介

2019 年 1 月 24 日

1　11/14 の微積続論 II 小テスト

次の微分方程式を解け。

1.
$$\frac{dx}{dt} = x \log t \tag{1}$$

2.
$$\frac{dx}{dt} = x \log t + t^t \tag{2}$$

1. $x = 0$ は解である。$x \neq 0$ のとき両辺を変数分離すると、
$$\frac{dx}{x} = \log t dt \tag{3}$$
であり、これを積分すると、
$$\log |x| = t \log t - t + C' \tag{4}$$
である。ここで C' は積分定数である。これより、解は
$$|x(t)| = Ce^{t \log t - t} = Ce^{-t} t^t \tag{5}$$
となる。ここで $C > 0$ は定数。$x = 0$ の解もまとめると、任意の $C \in \mathbb{R}$ に対して
$$x(t) = Ce^{-t} t^t \tag{6}$$
となる。

2. この問題には定数変化法を使う。つまり、解の形を
$$x(t) = C(t) e^{-t} t^t \tag{7}$$
の形に決め打ちして、$C(t)$ を求めるという算段である。このとき、
$$C'(t) e^{-t} t^t + x \log t = x \log t + t^t \tag{8}$$

である。これより、$C(t)$ に関しての微分方程式

$$C'(t) = e^t \tag{9}$$

が得られる。故に

$$C(t) = e^t + C \tag{10}$$

となる。ここで C は積分定数である。以上より、はじめの微分方程式の解は

$$x(t) = (e^t + C)e^{-t}t^t = t^t + Ce^{-t}t^t \tag{11}$$

と求まった。

2 テキスト第 3 章問 5

$a_j(t)(j = 1, 2)$ と $q(t)$ を t のある関数として 2 階非同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = q(t), \quad t \neq -1 \tag{12}$$

を考える。$x = t, t^2, t^3$ が解であるとき、次の問いに答えよ。

1. 関数 $a_j(t)$ と $q(t)$ を定めよ。
2. 一般解を求めよ。

1. $x = t, t^2, t^3$ を代入して連立方程式を解くだけ。

$$a_1(t) = -\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}, \tag{13}$$

$$a_2(t) = \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2}, \tag{14}$$

$$q(t) = \frac{2t}{(t-1)^2} \tag{15}$$

2. 非同時方程式の一般解は、同次方程式の一般解と特殊解の和になる。そのために同次方程式

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{16}$$

を解きたいが、そのまま解くのは難しい。そこで次のように考える。非同次方程式の解 t, t^2 を同次方程式の基本解 x_1, x_2 を用いて表してみる。特殊解は t^3 であるから、

$$t = c_1x_1 + c_2x_2 + t^3, \tag{17}$$

$$t^2 = c_1'x_1 + c_2'x_2 + t^3 \tag{18}$$

とかける。ここで c_1, c_2, c_1', c_2' は適当な定数である。両辺を引くと、

$$t - t^2 = (c_1 - c_1')x_1 + (c_2 - c_2')x_2 \tag{19}$$

となる。これより、$t-t^2$ は基本解の線形和で表せることがわかった。よって、$t-t^2$ も同次方程式の解である。同様の考えによって、$t-t^3$ も同次方程式の解である。
$t-t^2, t-t^3$ はそれぞれ独立であるから、同次方程式の基本解になる。非同次方程式の特殊解として t^3 を選ぶと、一般解は

$$c_1(t-t^2)+c_2(t-t^3)+t^3 \tag{20}$$

になる。

Remark 1 最後の答えを書くところで非同次方程式の特殊解として、t^3 を選んだが、t, t^2 でも良い。どれを選んでも結局 c_1, c_2 の任意性から解空間はおなじになる。

Remark 2 ~~問題文のはじめにある $t \neq -1$ が意味不明。~~$t \neq 0, 1$ の間違い。$t=0,1$ では与えられた特解が独立でなくなるからだめ。

Remark 3 同次方程式を直接求める方法もまとめておく。同次方程式は、

$$x''+a_1x'+a_2x = x'' - \frac{2(2t-1)}{t(t-1)}x' + \frac{2(3t^2-3t+1)}{t^2(t-1)^2} = 0 \tag{21}$$

である。線形の *2* 階常微分方程式に対するチルンハウス変換[*1]を施そう。方程式を $x=e^{-\frac{1}{2}\int^t a_1(t)dt}\eta$ で変数変換すると、

$$\eta'' = r\eta \tag{22}$$

に変換されることが知られている *(*確認せよ。*)*。ここで、

$$r = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1' - a_2 \tag{23}$$

である。今の場合、r を具体的に計算すると、$r=0$ となる。よって、変数変換された同次方程式は

$$\eta'' = 0 \tag{24}$$

を満たす。これは簡単に解くことが出来て、任意定数 c_1, c_2 を用いて、$\eta = c_1t + c_2$ となる。今度、逆変換を行うと、

$$x = c_1te^{-\frac{1}{2}\int^t a_1(t)dt} + c_2e^{-\frac{1}{2}\int^t a_1(t)dt} \tag{25}$$

である。ここで、

$$e^{-\frac{1}{2}\int^t a_1(t)dt} = \begin{cases} t(t-1) & t>1 \text{ または } t<0 \\ -t(t-1) & 0<t<1 \end{cases} \tag{26}$$

となるが、符号は c_1, c_2 の任意性の方に吸収出来るので無視すると、

$$x = c_1t^2(t-t) + c_2t(t-1) \tag{27}$$

[*1] 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ を $x^3+px+q=0$ という形に変換することをチルンハウス変換という。今回はその類似でチルンハウス変換という言い方をした。

である。ここで、$(c_1, c_2) = (1, 0), (0, 1)$ という風にとると、$x = t^2(t-1), t(t-1)$ はそれぞれ同次方程式の解であり、しかも独立である。以上から、同次方程式の一般解は、

$$x = c_1 t^2(t-t) + c_2 t(t-1) \tag{28}$$

となる。

3　テキスト第 3 章問 6

2 階同次方程式

$$x'' - \frac{1}{t+1}x' + \frac{1}{(t+1)^2}x = 0, \quad t \neq -1 \tag{29}$$

に対して次の問いに答えよ。

1. $x = t + 1$ が解であることを示せ。
2. 定数変化法を用いて一般解を求めよ。
3. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. 代入するだけ。
2. 与えられた微分方程式は x について線形だから、$x = t + 1$ が解であれば $x = C(t + 1)$ も解である。このとき、定数変化法を用いて一般解を求めたいので、

$$x = C(t)(t+1) \tag{30}$$

として、$C(t)$ を求める。式 (29) に代入すると、$C(t)$ に関する微分方程式

$$(t+1)C'' + C' = 0 \tag{31}$$

が得られる。まず、C' についての微分方程式だと思って、変数分離法で解くと、

$$C'(t) = \frac{c_2}{t+1} \tag{32}$$

が得られる。c_2 は任意定数。よって、

$$C(t) = c_1 + c_2 \log|t+1| \tag{33}$$

が得られる。c_1 も任意定数*2。$t \neq -1$ で $\log|t+1|$ もきちんと定義されるので問題ない。以上より、一般解は、

$$x = c_1(t+1) + c_2(t+1)\log|t+1| \tag{34}$$

である。

*2 積分定数の決め方がずいぶんと恣意的になってしまった。。。

3. $t=0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1, \tag{35}$$
$$v_0 = x'(0) = C(0) + C'(0) = c_1 + c_2 \tag{36}$$

であるから、$c_1 = x_0, c_2 = v_0 - x_0$ と求まる。以上より、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は、

$$x = x_0(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)\log|t+1| \tag{37}$$

である。

4　テキスト第 3 章問 7

2 階非同次方程式

$$x'' - \frac{2}{t+1}x' + \frac{2}{(t+1)^2}x = t+1, \quad t \neq -1 \tag{38}$$

に対して次の問いに答えよ。

1. 定数変化法を用いて一般解を求めよ (問 2 を参照せよ)。
2. 初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解を求めよ。

1. まず、同次方程式に対する解として $x = t+1, (t+1)^2$ がある。次に、非同次方程式の一般解を求めるためには、非同次方程式の特殊解をひとつ求めれば良い。そのために、$x = t+1$ に対して定数変化法を用いることを考える。先程と同じように $x = C(t)(t+1)$ として、式 (38) に代入すると、$C(t)$ に関する微分方程式

$$C'' = 1 \tag{39}$$

が得られる。この微分方程式の解のひとつは、$C(t) = \frac{1}{2}t^2$ となるので、特殊解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1)^2 \tag{40}$$

である。以上より、式 (38) の一般解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 \tag{41}$$

である。

2. $t=0$ における x, x' の値を実際に計算して任意定数を求めればよい。

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \tag{42}$$
$$v_0 = x'(0) = c_1 + 2c_2 \tag{43}$$

なので、$c_1 = 2x_0 - v_0, c_2 = v_0 - x_0$ が分かる。よって、初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ を満足する解は

$$x = \frac{1}{2}t^2(t+1) + (2x_0 - v_0)(t+1) + (v_0 - x_0)(t+1)^2 \tag{44}$$

である。

5　テキスト第 3 章問 12

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1. $x'' + x = 1$
2. $x'' - x' - 2x = t^2$
3. $x'' + x' - 2x = (3t^4 + 4t^3)e^t$
4. $x'' + x' + x = te^{-t}$

1. 対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 1 = 0 \tag{45}$$

である。これを解くと、$\lambda = \pm i$ であり、基本解は

$$x = \cos t, \sin t \tag{46}$$

である。また、特性解は $x = 1$ である。よって、一般解は

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \tag{47}$$

である。c_1, c_2 は任意定数である。

2. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = 2, -1$ なので、基本解は

$$x = e^{2t}, e^{-t} \tag{48}$$

である。特性解として $c_1t^2 + c_2t + c_3$ の形のものを考える。微分方程式に特性解を代入すると、

$$-2c_1t^2 + (-2c_1 + -2c_2)t + (2c_1 - c_2 - 2c_3) = t^2 \tag{49}$$

となるので、係数比較をして連立方程式を解くと、

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{4} \tag{50}$$

である。以上より、一般解は

$$x = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \tag{51}$$

である。

3. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -2, 1$ なので、基本解は

$$x = e^{-2t}, e^t \tag{52}$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^t \tag{53}$$

と置いてみる。また、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0 \tag{54}$$

を仮定する。微分方程式にこれを代入すると、u_1', u_2' について、

$$u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = 0, \tag{55}$$

$$-2u_1' e^{-2t} + u_2' e^t = (3t^4 + 4t^3)e^t \tag{56}$$

となるから、

$$u_1' = -\left(t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)e^{3t}, \tag{57}$$

$$u_2' = t^4 + \frac{4}{3}t^3 \tag{58}$$

それぞれを積分すると、

$$u_1 = -\frac{1}{3}e^{3t}t^4, \tag{59}$$

$$u_2 = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^4 \tag{60}$$

である。よって、特殊解は

$$x = \frac{1}{5}t^5 e^t \tag{61}$$

である。以上より一般解は、

$$x = c_1 e^{-2t} + \left(c_2 + \frac{1}{5}t^5\right)e^t \tag{62}$$

である。

4. 対応する同次方程式の特性方程式の特性指数は $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ なので、基本解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{63}$$

である。次に非同次方程式の解を

$$x = (c_1 t + c_2)e^{-t} \tag{64}$$

と仮定する。非同次方程式に代入して係数比較すると、

$$c_1 = 1, \tag{65}$$

$$-c_1 + c_2 = 0 \tag{66}$$

となる。これより $c_1 = c_2 = 1$ なので、特殊解は

$$x = (t+1)e^{-t} \tag{67}$$

である。以上より一般解は

$$x = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + (t+1)e^{-t} \tag{68}$$

である。

6　テキスト第 4 章問 2

$t > 0$ において

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{69}$$

の形の 2 元連立非同次方程式を考える。ただし、

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} \tag{70}$$

とする。行列

$$V(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 1/t & -t \end{pmatrix} \tag{71}$$

が対応する同次方程式の基本行列であるとき、以下の問に答えよ。ただし、$t, s > 0$ とする。

1. 係数行列 $A(t)$ を求めよ。
2. 対応する同次方程式の解核行列 $R(t, s)$ を求めよ。
3. 初期条件

$$\boldsymbol{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

を満たす、この非同次方程式の解を求めよ。

1. 係数行列の各成分を

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{73}$$

として、これらを求める。基本行列の定義から、

$$\boldsymbol{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \tag{74}$$

は同次方程式の解であるから、それぞれ代入すれば良い。$\boldsymbol{v}_1(t)$ を同次方程式に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \tag{75}$$

であり、$\boldsymbol{v}_2(t)$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \tag{76}$$

である。この 2 つ (式としては 4 つ) を連立させて解くと、

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1/t \\ -1/t & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

が得られる。

2. 解核行列 $R(t,s)$ は基本行列 $V(t)$ を用いると、

$$R(t,s) = V(t)V(s)^{-1} \tag{78}$$

となる (教科書の定理 4.3)。計算すると、

$$R(t,s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s/t + t/s & s/t - t/s \\ s/t - t/s & s/t + t/s \end{pmatrix} \tag{79}$$

である。

3. 教科書の定理 4.5 から、初期条件 $\boldsymbol{x}(1)$ を満たす解は次で与えられる。

$$\boldsymbol{x}(t) = R(t,1)\boldsymbol{x}(1) + \int_1^t R(t,r)\boldsymbol{f}(r)dr. \tag{80}$$

あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t^2 - 3t + 3 + 1/t \\ -t^2 + 3t + 1/t \end{pmatrix} \tag{81}$$

である。

7　テキスト第 4 章問 4

定数係数微分方程式

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \tag{82}$$

に対して次の問に答えよ。

1. 対応する同次方程式の解核行列を求めよ。
2. 初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ を満たす非同次方程式の解を求めよ。

1. 同次方程式は定数係数の微分方程式になるので、教科書の定理 4.9 により、解核行列は次で与えられる。

$$R(t,s) = \exp(A(t-s)). \tag{83}$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

である。行列 A は行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \tag{85}$$

を用いて、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \tag{86}$$

と表される。よって、

$$\exp(A(t-s)) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+i)(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

$$= e^{t-s}\begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \tag{88}$$

となる。

Remark 4 対角化するための行列 T は基底のとり方によって、いくらでも値が取り替わることに注意。ただ、行列 T のとり方が違えども、答えは必ず一致するはずなので、この解答と違う T を選んでいたとしても、答えは同じである必要がある。

2. 解核行列が得られたので、初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たす解は、

$$\boldsymbol{x}(t) = R(t,0)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t R(t,r)\boldsymbol{f}(r)dr \tag{89}$$

となる。あとはこれを計算すれば良い。答えは、

$$\boldsymbol{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\left(\boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{\omega^4+4}\begin{pmatrix} \omega^2-2 \\ \omega^2+2 \end{pmatrix}\right) \tag{90}$$

$$-\frac{1}{\omega^4+4}\begin{pmatrix} (\omega^2-2)\cos\omega t + 2\omega\sin\omega t \\ (\omega^2+2)\cos\omega t - \omega^3\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{91}$$

である。