

# Theoretical and Experimental Research on Coupled Phase-Oscillator Models

米田亮介

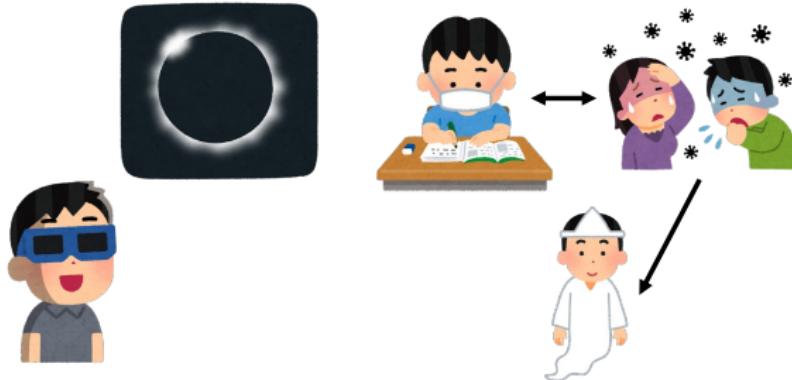
Graduate School of Informatics, Kyoto University

January 23, 2023



# 数理モデル

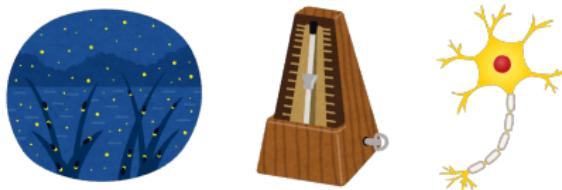
- 数理モデル: 複雑な自然現象を数学を用いて説明する試み
  - ▶ 星の動きの予測
  - ▶ COVID-19 の感染者数の予測



- 本研究: 同期現象を記述する数理モデルの研究

# 同期現象

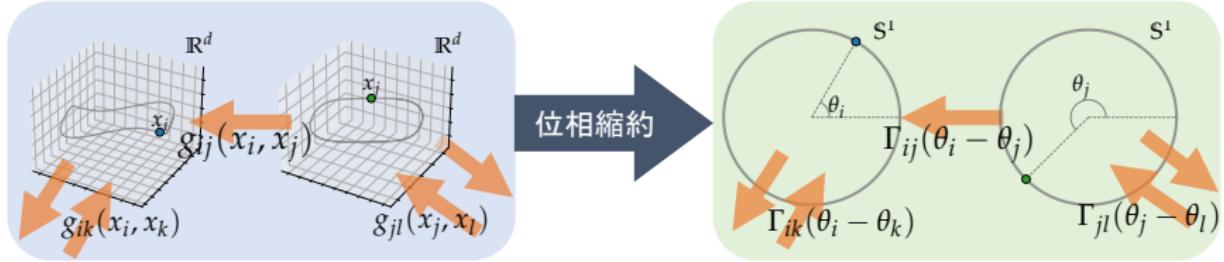
- 振動子が相互作用を通して振動のタイミングを揃える現象
  - ▶ ホタルの発光
  - ▶ メトロノーム
  - ▶ ニューロンの発火、etc.



- 悪い側面も
  - ▶ ミレニアム橋の崩壊
  - ▶ てんかん発作



## 結合位相振動子系



$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$

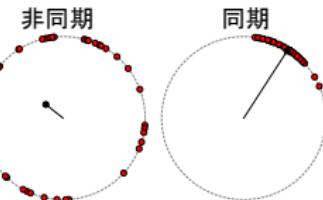
自然振動数 結合関数

# Questions

- 理論的側面 [Chapter 3, 4]

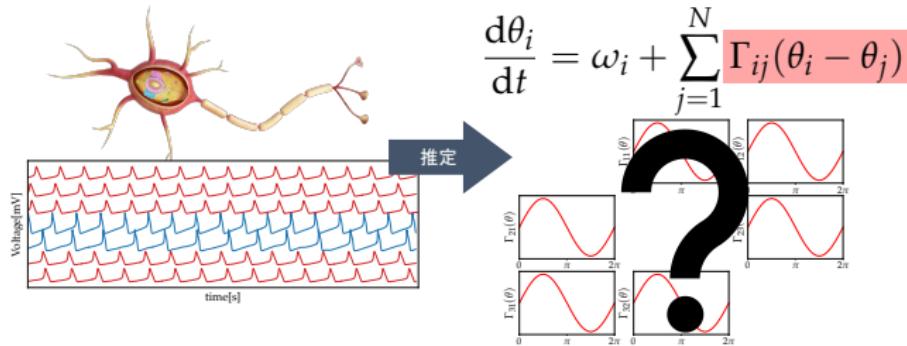
$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$

解析



- ▶ 非同期状態から同期状態への転移の振る舞いは？
- ▶ どのような条件のもとで同期しやすい/同期しにくいのか？

- 実験的側面 [Chapter 5]



- ▶ 与えられたデータからどのようにモデルを推定するか？

# [Chapter 3] 結合位相振動子系

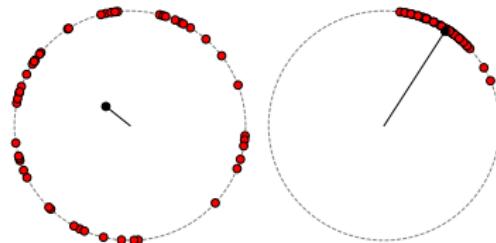
## 大域結合位相振動子モデル

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_j - \theta_i)$$

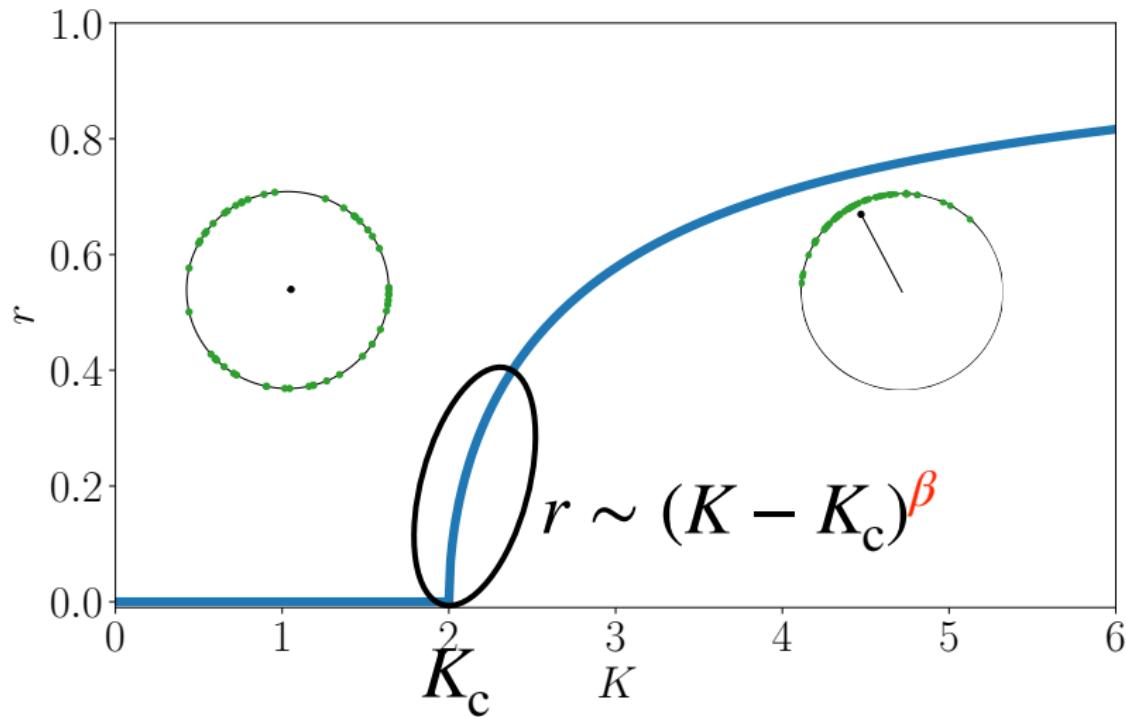
- $\omega_i \sim g(\omega)$ : 自然振動数分布  $g(\omega)$  からサンプル
- $K$ : 結合定数
- $\Gamma(\theta)$ : 結合関数 (周期  $2\pi$ )

✓ 秩序変数: 同期の強さを表すパラメータ

$$r = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \right|$$



# 分岐図と臨界指数

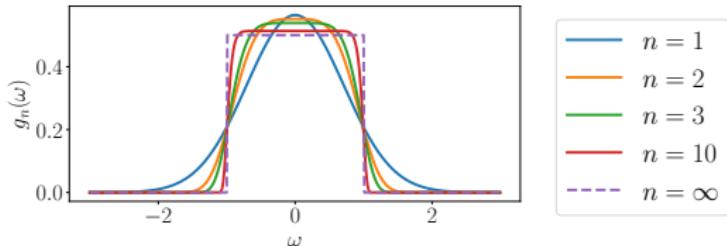


- $N \rightarrow \infty$  での連続転移の臨界点近傍での立ち上がり: 臨界指数  $\beta$ 
  - ▶ 臨界指数は統計力学でよく研究されている
  - ▶ 分布関数  $g(\omega)$ 、結合関数  $\Gamma(\theta)$  による依存性

# 臨界指數

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + a \sin 2\theta$$

$$g_n(\omega) = \frac{ne^{-(\omega/\Delta)^{2n}}}{\Gamma(1/2n)\Delta}$$



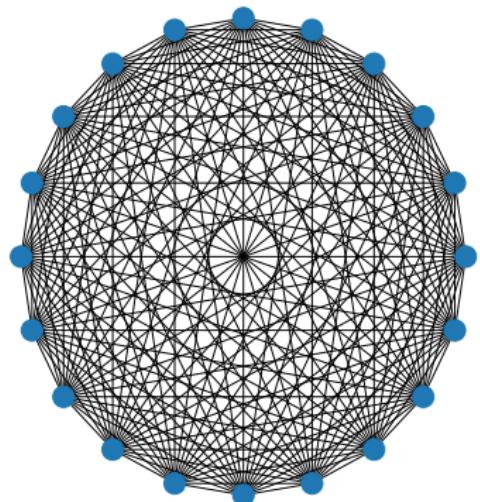
	all-to-all		
	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$n = 1$	1 (Chiba 2011)	$1/2$ (Kuramoto 1975)	(不連続) (Chiba 2011)
$n \geq 2$		$1/(2n)$ (Basanarkov 2007)	
$n = \infty$		(不連続) (Pazo 2005)	

- 理論的な導出はモデルの全結合性に強く依存
- 本研究: 現実に即したネットワークにおける臨界指数を調べる

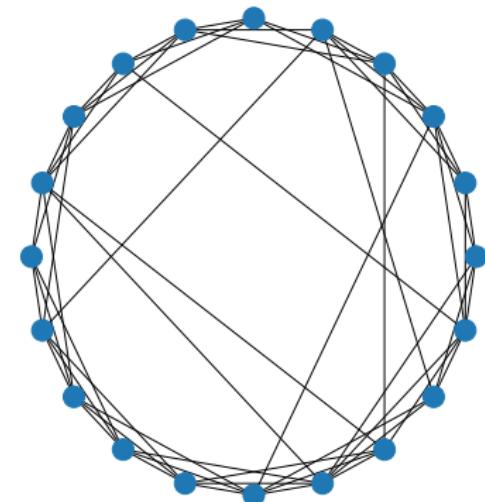
# スモールワールドネットワーク

- スモールワールドネットワーク
  - ▶ ネットワーク全体の直径が小さい
- **Watts–Strogatz model<sup>1</sup>:** スモールワールド性を記述する代表的なモデル
  - ▶  $O(N)$  本の枝を持つ (全結合グラフは  $O(N^2)$ )

全結合



スモールワールドネットワーク



<sup>1</sup>Watts and Strogatz, 1998

# スモールワールドネットワーク上の結合振動子モデル

## スモールワールドネットワーク上の結合振動子モデル

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{2k} \sum_{j \in \Lambda_i} [\sin(\theta_j - \theta_i) + a \sin 2(\theta_j - \theta_i)]$$

- $\Lambda_i$ :  $i$  番目の振動子に接続する振動子の index 集合。Watts–Strogatz モデルに従って生成したネットワークによって定まる。
- $k$ : (ネットワークの平均次数)/2

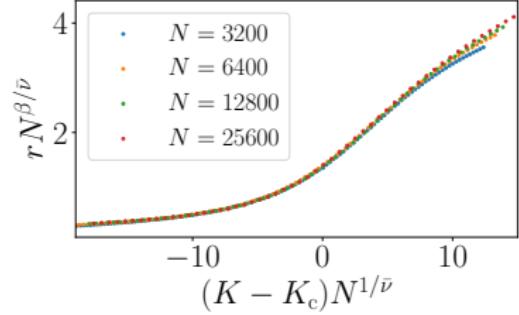
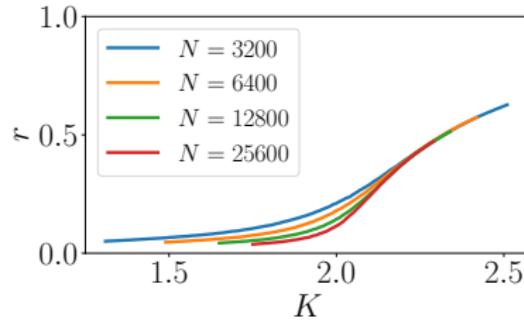
	all-to-all( $O(N^2)$ )			small-world( $O(N)$ )		
	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$n = 1$	1	1/2	(不連続)	?	(1/2) (Hong 2001)	?
$n \geq 2$	1	$1/(2n)$	(不連続)	?	?	?
$n = \infty$	1	(不連続)	(不連続)	?	?	?

# 有限サイズスケーリング

## 有限サイズスケーリング

$$r_N(K)N^{\beta/\bar{\nu}} = F((K - K_c)N^{1/\bar{\nu}})$$

- 連続転移する系が臨界点近傍でスケーリング関数  $F$  に従う、という仮定
- 有限サイズ  $N$  のときの  $r_N(K)$  のデータをもとに  $K_c, \beta, \bar{\nu}$  を推定
  - Bayesian scaling analysis(ガウス過程回帰を用いる)によって推定<sup>2</sup>
- $a = 0, n = 1$



<sup>2</sup>Harada 2011

# 数値計算結果

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + \textcolor{blue}{a} \sin 2\theta, \quad g_{\textcolor{red}{n}}(\omega) = \frac{n e^{-(\omega/\Delta)^{2\textcolor{red}{n}}}}{\Gamma(1/2n)\Delta}$$

- $\textcolor{blue}{a} = 0, -0.2, 0.5$  と  $\textcolor{red}{n} = 1, 2, 3, \infty$  でそれぞれ臨界指数  $\beta, \bar{\nu}$  を計算

$\sin \theta + \textcolor{blue}{a} \sin 2\theta$	$g_{\textcolor{red}{n}}(\omega)$	$\beta$	$\bar{\nu}$
$\textcolor{blue}{a} = 0$	$\textcolor{red}{n} = 1$	0.51(4)	2.40(6)
	$\textcolor{red}{n} = 2$	0.49(2)	$\approx \frac{1}{2}$ 2.43(4)
	$\textcolor{red}{n} = 3$	0.47(2)	$\approx \frac{5}{2}$ 2.46(4)
	$\textcolor{red}{n} = \infty$	0.46(2)	2.46(4)
$\textcolor{blue}{a} = -0.2$	$\textcolor{red}{n} = 1$	0.48(6)	2.36(8)
	$\textcolor{red}{n} = 2$	0.51(4)	$\approx \frac{1}{2}$ 2.41(6)
	$\textcolor{red}{n} = 3$	0.55(4)	$\approx \frac{5}{2}$ 2.50(6)
	$\textcolor{red}{n} = \infty$	0.49(4)	2.49(6)

- $a = 0.5$  ではヒステリシスを確認  $\Rightarrow$  不連続転移を示唆

# まとめと展望

$$\Gamma(\theta) = \sin \theta + \textcolor{blue}{a} \sin 2\theta, \quad g_n(\omega) = \frac{n}{\Gamma(1/2n)\Delta} e^{-(\omega/\Delta)^{2n}}$$

	all-to-all( $O(N^2)$ )			small-world( $O(N)$ )		
	$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 1$	$a = -0.2$	$a = 0$	$a = 0.5$
$n = 1$	1	$\frac{1}{2}$	(不連続)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(不連続)
$n \geq 2$	1	$\frac{1}{2n}$	(不連続)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(不連続)
$n = \infty$	1	(不連続)	(不連続)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(不連続)

- 全結合とスモールワールドネットワークで  $\beta$  が異なることがわかった。
  - ノイズ系と同じ臨界指数
- 理論的に臨界指数を求めたい。
  - 連続極限をどう取る？？(graphon を用いた解析はできない)

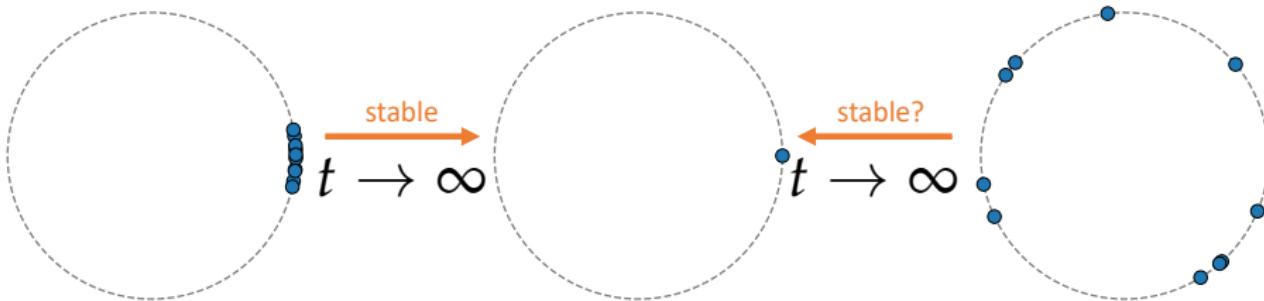
# [Chapter 4] ネットワーク上の一様な結合振動子系

## ネットワーク上の一様な結合振動子系

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

- $\theta_i \in [0, 2\pi]$ :  $i$  番目の振動子の位相
- $a_{ij} \in \{0, 1\}$ : ネットワークの隣接行列の  $(i, j)$  成分

- $\theta_0 = (0, 0, \dots, 0)^\top$ : 完全同期解、すべての位相が同じ
- この解はネットワークによらずに**安定**
  - ▶ 密であれば必ず同期すると期待 (完全同期のみが安定平衡点)
  - ▶ どれほど“密”であれば必ず同期する？



# 接続数 (connectivity)

connectivity  $\mu$

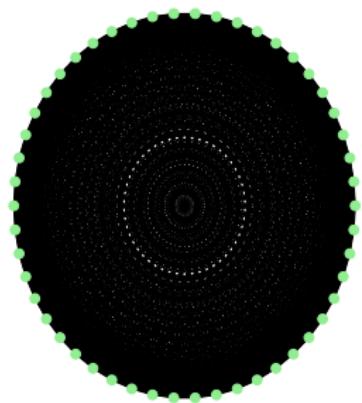
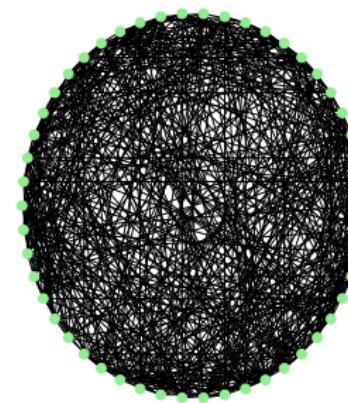
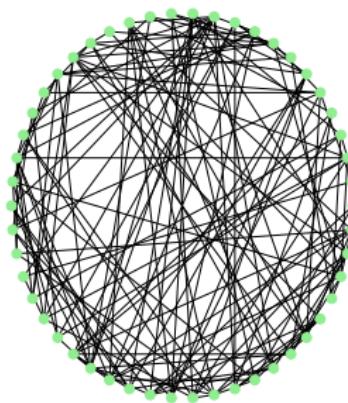
$$\mu = \frac{\min_{i \in [N]} \sum_{j \in [N]} a_{ij}}{N - 1}$$

- $\mu$  はネットワークの“密具合”を表す
  - ▶ ネットワークの最小次数を規格化したもの
  - ▶  $\mu = 1$  のとき全結合ネットワーク

$$\mu = \frac{2}{49} = 0.040\dots$$

$$\mu = \frac{10}{49} = 0.204\dots$$

$$\mu = \frac{49}{49} = 1$$



# 臨界接続数 (critical connectivity)

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

完全同期以外の安定平衡点が存在 (同期しない密なネットワーク)	完全同期のみが安定 (必ず同期するネットワーク)
$\mu \leq 0.6809 \dots$ (Wiley, 2006)	$\mu = 1$ (Watanabe, 1994)
$\mu \leq 0.6818 \dots$ (Canale, 2015)	$\mu \geq 0.9395 \dots$ (Taylor, 2012)
$\mu \leq 0.6828 \dots$ (Townsend, 2020)	$\mu \geq 0.7929 \dots$ (Ling, 2019)
	$\mu \geq 0.7889 \dots$ (Lu, 2020)

- $\mu_c$ : 臨界接続数、完全同期解のみが安定平衡点となる  $\mu$  の境界

$$0.6828 \dots \leq \mu_c \leq 0.7889 \dots$$

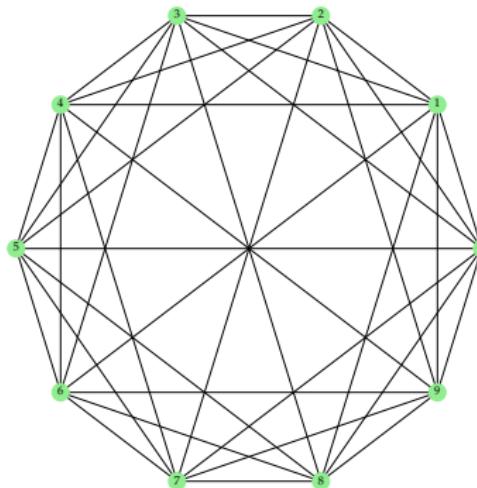
- 本研究: できるだけ密な同期しないネットワークを探索する

# 巡回グラフ

- ネットワークとして巡回グラフを考える
  - 巡回グラフの対応する隣接行列は巡回行列
  - $x \in \{0, 1\}^{N-1}$ : 巡回行列を生成する列

$$a_{ij} = x_{i-j \bmod N}, \quad x_i = x_{N-i}$$

- 強い対称性があるおかげで諸々の値の手計算が可能



$\chi$										
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

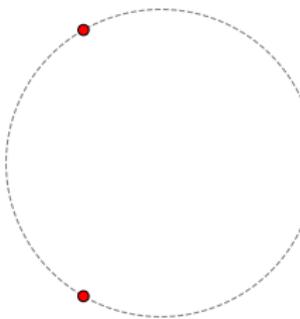
# $p$ -twisted state と線形固有値

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

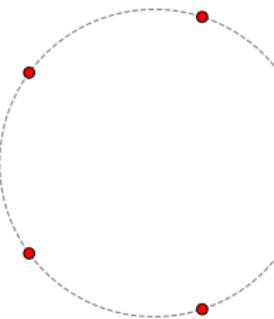
- ネットワークが巡回グラフの場合、 $p$ -twisted state が平衡点

$$\boldsymbol{\theta}_p = \left(0, \frac{2\pi p}{N}, \frac{4\pi p}{N}, \dots, \frac{2\pi(N-1)p}{N}\right)^\top \quad 0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

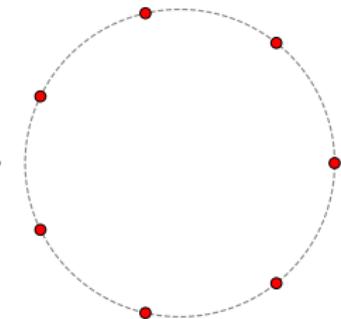
$N = 3, p = 1$



$N = 5, p = 1$



$N = 7, p = 2$



- $p$ -twisted state まわりの Jacobian 行列の固有値  $\lambda$

$$\lambda_k = \sum_{l \in [N-1]} x_l \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right) \left[ -1 + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) \right]$$

# 方針

- 安定平衡点を持つネットワークを色々取り替える



その中で  $\mu$  が最大となるネットワークを選ぶ

- 最適化問題による定式化

- $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{N-1} \Rightarrow$  整数計画問題
- 制約条件

★  $\lambda_k < 0 \Leftrightarrow L^{(N,p)} \mathbf{x} < \mathbf{0}$  (安定性)

$$\left[ L^{(N,p)} \right]_{kl} = \cos\left(\frac{2\pi pl}{N}\right) \left[ -1 + \cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) \right]$$

★  $x_i = x_{N-i} \Leftrightarrow C^{(N)} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  (無向グラフ)

$$\left[ C^{(N)} \right]_{kl} = \delta_{k,l} - \delta_{k,N-l}$$

# 整数計画問題としての定式化

“ $N$  体の振動子を持つ系において  $p$ -twisted state が安定平衡点になるようなネットワークの中で最大の connectivity はいくらか?”

## 整数計画問題 $(N, p)$

$N \geq 2, 1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$  に対して

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \mu = \frac{1}{N-1} \mathbf{1}^\top \mathbf{x}, \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{N-1}, \\ & \quad L^{(N,p)} \mathbf{x} < \mathbf{0}, \quad [\text{stable}] \\ & \quad C^{(N)} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad [\text{undirected}] \end{aligned}$$

- $\mu^{(N,p)}$ : 各  $N, p$  における整数計画問題の最大値

# $\mu^{(N,p)}$ の厳密解

## Theorem ( $\mu^{(N,p)}$ )

$N \geq 2, 1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor$  に対して  $m = \gcd(N, p), \tilde{N} = N/m$  とおく。

- ①  $\tilde{N} = 2, 3, 4$  のとき実行可能解が存在しない。
- ②  $\tilde{N} \geq 5$  のとき

$$S_k^{(\tilde{N})} = \sum_{l=1}^k \cos\left(\frac{2\pi l}{\tilde{N}}\right) \left[ -1 + \cos\left(\frac{2\pi l}{\tilde{N}}\right) \right]$$

とし、 $k_c^{(\tilde{N})}$  を  $S_k^{(\tilde{N})} \geq 0$  なる最小の  $k$  と定義する。このとき、

$$\mu^{(N,p)} = \frac{m(2k_c - 1) - 1 - 2 \lfloor mS_{k_c-1} / (S_{k_c} - S_{k_c-1}) \rfloor}{N - 1}$$

# $\mu_c$ の下限

Theorem ( $\sup \mu^{(N,p)}$ )

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \mu^{(N,p)} \mid 1 \leq p \leq \lfloor N/2 \rfloor, N \geq 2 \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu^{(19m,m)} \\ &= \frac{11}{19} - \frac{2}{19} \frac{\sum_{l=1}^5 \left[ -\cos\left(\frac{2\pi l}{19}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi l}{19}\right) \right]}{-\cos\left(\frac{12\pi}{19}\right) + \cos^2\left(\frac{12\pi}{19}\right)} = 0.683875\dots \end{aligned}$$

- $\mu \leq 0.6838\dots$  なるネットワークが存在して、完全同期解以外の安定平衡点が存在する。

$$0.6838\dots \leq \mu_c \leq 0.7889\dots$$

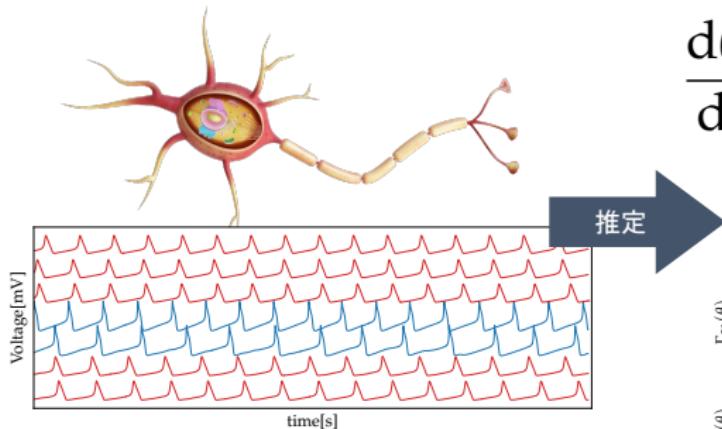
# まとめと展望

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j \in [N]} a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

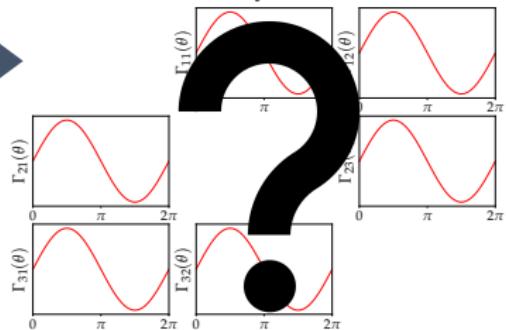
完全同期以外の安定平衡点が存在 (同期しない密なネットワーク)	完全同期のみが安定 (必ず同期するネットワーク)
$\mu \leq 0.6809 \dots$ (Wiley, 2006)	$\mu = 1$ (Watanabe, 1994)
$\mu \leq 0.6818 \dots$ (Canale, 2015)	$\mu \geq 0.9395 \dots$ (Taylor, 2012)
$\mu \leq 0.6828 \dots$ (Townsend, 2020)	$\mu \geq 0.7929 \dots$ (Ling, 2019)
$\mu \leq 0.6838 \dots$ (Yoneda, 2021)	$\mu \geq 0.7889 \dots$ (Lu, 2020)
$\mu \leq 0.6875$ (Canale, 2022)	$\mu \geq 0.75$ (Townsend, 2021)

- $\mu_c$  の下からの評価について
  - ▶ 巡回グラフにおける他の平衡点？他のネットワーク？

# [Chapter 5] 結合関数推定



$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$



- 先行研究: ベイズ線形回帰 [Ota 2018]
  - ▶  $\Gamma_{ij}$  を有限次の Fourier 級数展開で近似し、Fourier 係数を線形回帰
  - ▶ 何次まで展開すべきかの自由度が残る
  - ▶ Gibbs 現象が生じる場合も
- 本研究: ガウス過程回帰を用いて結合関数を推定できるか？

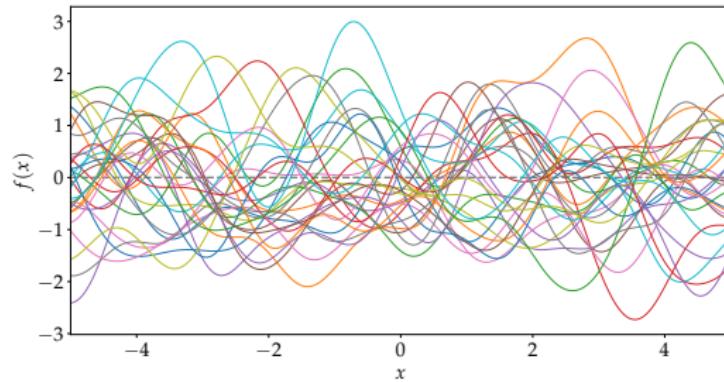
# ガウス過程

## ガウス過程

確率過程  $X_t$  について、任意の組  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  が多次元正規分布に従うとき  $X_t$  をガウス過程と呼ぶ

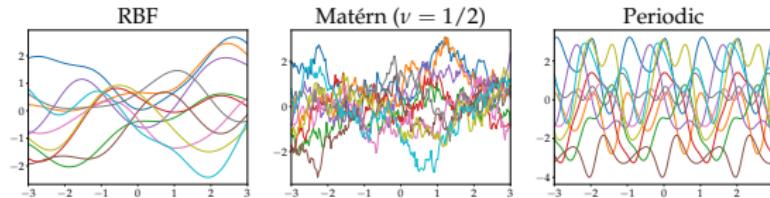
$$f \sim \mathcal{GP}(m, k)$$

- $m(x)$ : 平均関数
- $k(x, \tilde{x})$ : カーネル関数

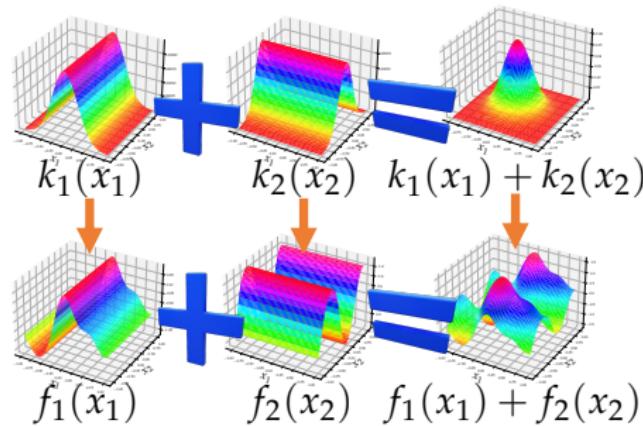


# カーネル関数

ガウス過程で生成される関数の性質を決定 (e.g. 滑らかさ、周期性、加法性)



- **additive model**  $f(\mathbf{x}) = \sum_i f_i(x_i)$ 
  - ▶ additive なカーネルで生成  $k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sum_i k_i(x_i, \tilde{x}_i)$



# ガウス過程回帰

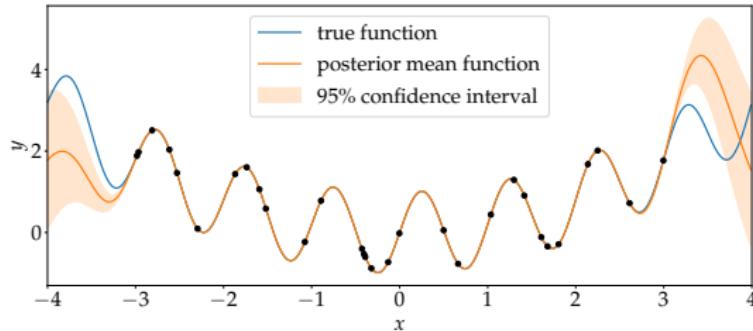
$y = f(x)$  を満たすデータ  $\mathcal{D} = \{(x_i, y_i)\}_i$  によるガウス過程の事後分布で回帰<sup>3</sup>

$$f | \mathcal{D} \sim \mathcal{GP}(\bar{m}, \bar{k}),$$

$$\bar{m}(x) = m(x) + k_{xX}k_{XX}^{-1}(\mathbf{y} - m_X),$$

$$\bar{k}(x, \tilde{x}) = k(x, \tilde{x}) - k_{xX}k_{XX}^{-1}k_{X\tilde{x}}$$

- ✓ ガウス過程のデータによる事後分布はまたガウス過程
- ✓ データ数  $n$  に対して  $\mathcal{O}(n^3)$  の計算量が必要  $\Rightarrow$  SVGP による効率化



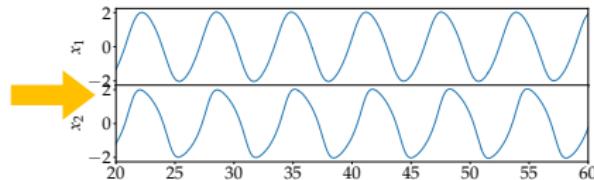
<sup>3</sup> $[k_{XX}]_{ij} = k(x_i, x_j), [k_{xX}]_i = k(x_i, x), [\mathbf{y}]_i = y_i, [m_X]_i = m(x_i)$

# [アルゴリズム] 観測・位相へ変換

観測

位相へ変換

結合関数推定

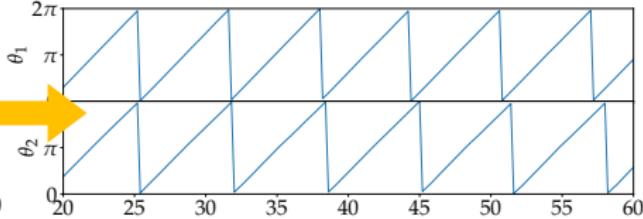
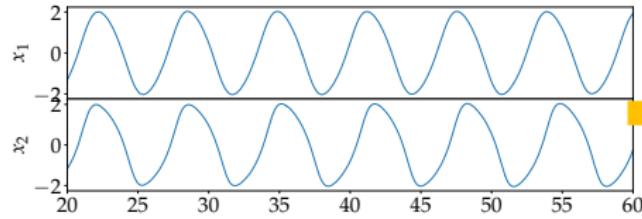


観測

位相へ変換

結合関数推定

- Kralemann の方法 [Kralemann 2007]



# [アルゴリズム] 結合関数推定

観測

位相へ変換

結合関数推定

$i$  体目のベクトル場について  
✓ 回帰する関数  $\Gamma_{ij}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i)$$

✓ データ  $\mathcal{D}_i = \{(\mathbf{x}_k, y_k)\}_k$

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \theta_1(t_k) - \theta_i(t_k) \\ \vdots \\ \theta_N(t_k) - \theta_i(t_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{T}^{N-1}$$
$$y_k = \frac{\theta_i(t_{k+1}) - \theta_i(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \in \mathbb{R}$$

✓ additive な周期カーネル

$$k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j \neq i} k_j(x_j, \tilde{x}_j)$$

$$k_j(x, \tilde{x}) = p_0^{(j)} \exp(p_1^{(j)} \cos(x - \tilde{x}))$$

✓ SVGP で結合関数を推定

$$\Gamma_{ij} \mid \mathcal{D}_i \sim \mathcal{GP}(\bar{m}_j, \bar{k}_j)$$

$$\bar{m}_j(x) = k_j(x, X)k(X, X)^{-1}\mathbf{y}$$

$$\bar{k}_j(x, \tilde{x}) = k_j(x, \tilde{x})$$

$$- k_j(x, X)k(X, X)^{-1}k_j(X, \tilde{x})$$

# van der Pol 振動子

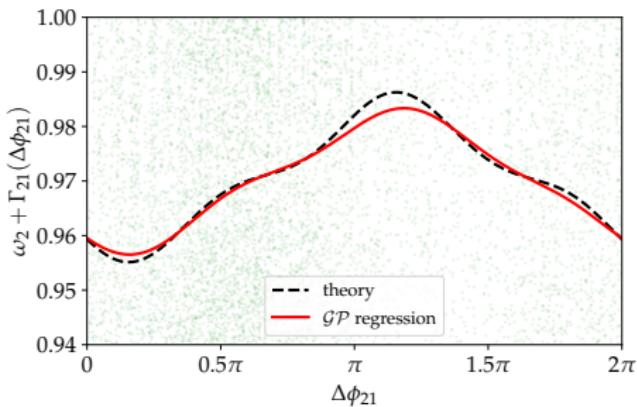
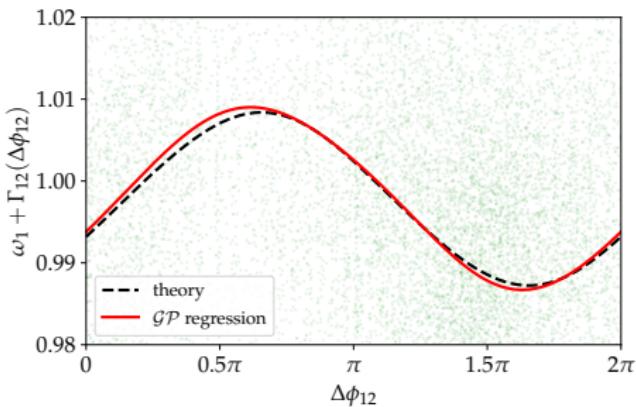
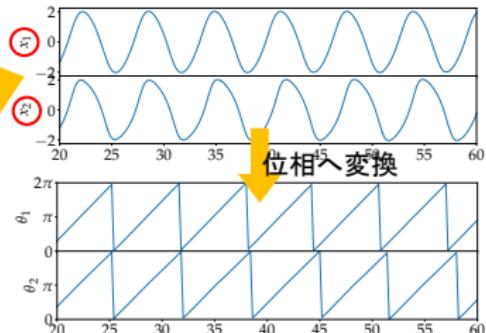
$$\ddot{x}_1 = y_1 + K(x_2 - x_1) + \xi_{x_1}(t),$$

$$\dot{y}_1 = \varepsilon_1(1 - x_1^2)y_1 - x_1 + Kx_2^2y_2 + \xi_{y_1}(t),$$

$$\ddot{x}_2 = y_2 - Kx_1^2y_1 + \xi_{x_2}(t),$$

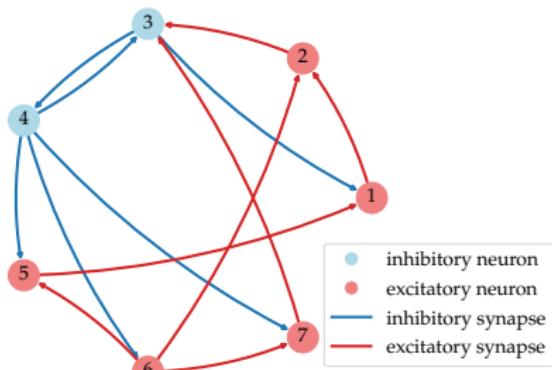
$$\dot{y}_2 = \varepsilon_2(1 - x_2^2)y_2 - x_2 + Kx_1y_1^2 + \xi_{y_2}(t),$$

観測

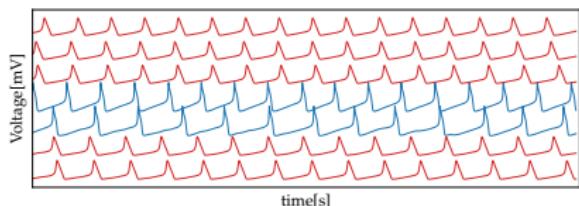


# 神経細胞モデル

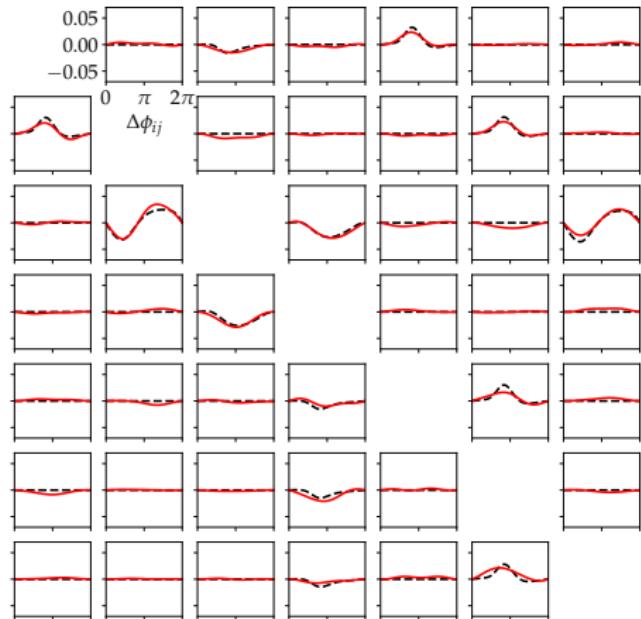
✓ 興奮性・抑制性細胞によるネットワーカモデル



✓ 観測時系列



✓ 結合関数の推定

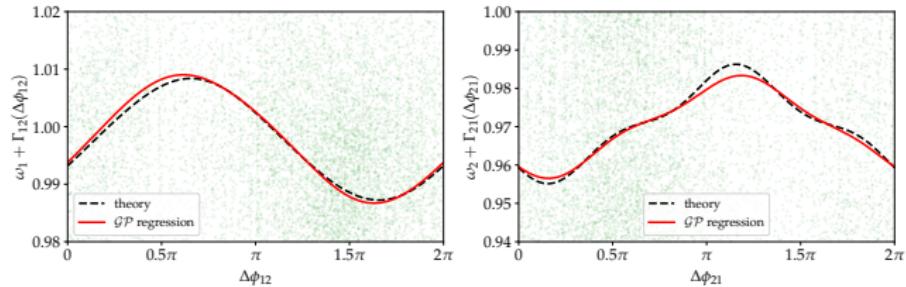


黒点線: 理論 赤線:  $\mathcal{GP}$  回帰

# まとめと展望

- ガウス過程回帰を用いてリズム現象が従う結合位相振動子系を推定

$$k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{N-1} p_0^{(j)} \exp(p_1^{(j)} \cos(x_j - \tilde{x}_j))$$



- 離散のデータから微分を近似するため誤差が生じる
  - Neural SDE [Li 2020]によるベクトル場の回帰の検討

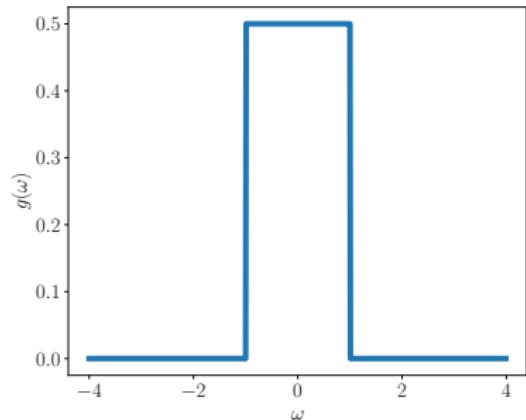
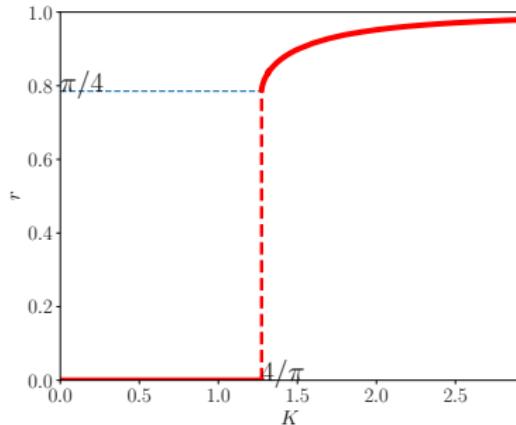
$$dx = f(t, x; \theta_f)dt + g(t, x; \theta_g)dW_t$$

- 解軌道の  $\theta_f, \theta_g$  微分を adjoint 方程式で求める手法

# APPENDIX

$n = \infty$

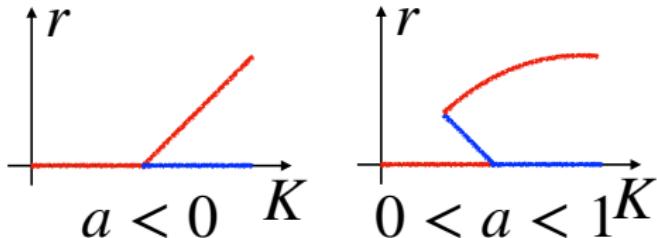
$$r - r_c \propto (K - K_c)^{2/3}$$



- 臨界点で jump が見られる
- $\beta = \frac{2}{3}$

# $\sin 2\theta$ を付け加える

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [\sin(\theta_j - \theta_i) + a \sin 2(\theta_j - \theta_i)]$$



- 中心多様体縮約を用いて  $\beta = 1$  であることが示されている [Crawford 1995, Chiba 2011]。

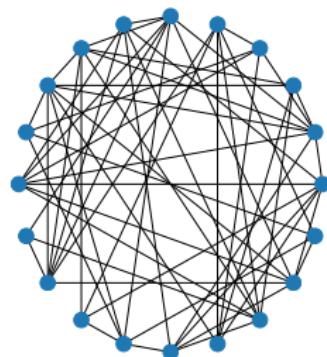
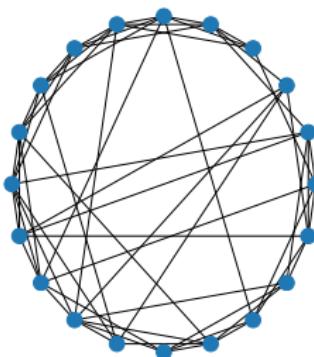
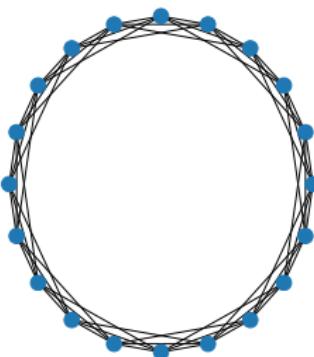
$$r \sim \frac{2(1-a)}{K_c^3 C a} (K - K_c)^{\textcolor{red}{1}} + \dots$$

$$C = \mathcal{PV} \int_{\mathbb{R}} d\omega \frac{g'(\omega)}{\omega}$$

# Watts–Strogatz model

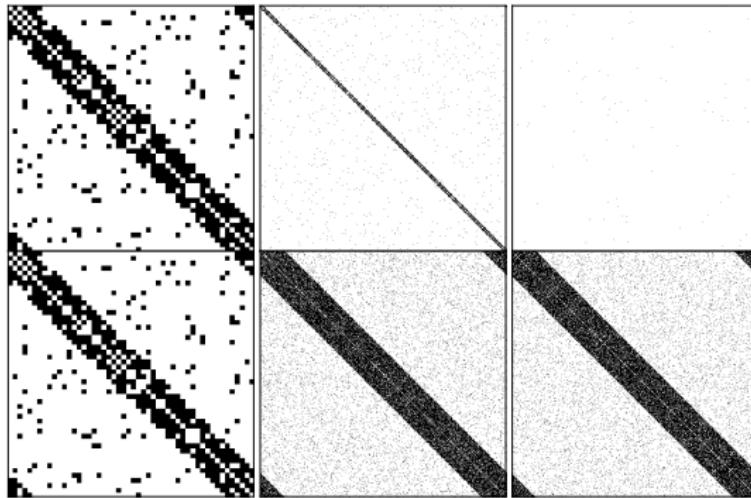
## アルゴリズム

- 1  $N$  個の頂点を持つ  $k$ -隣接グラフを生成する。
- 2  $kN$  本の枝のそれぞれに対して、確率  $p$  でエッジの一方（ランダムに選ぶ）の結合を切り離し、 $N$  頂点の中からランダムに選ばれた頂点につなぎ替える。ただし、自己ループや多重エッジができないようにする。



# $O(N^2)$ small-world との違い

[Chiba et al. 2018] の中でスモールワールドネットワーク上の蔵本モデルの計算をしているが、彼らは  $k = \lfloor rN \rfloor, r \in (0, 0.5)$  としている。



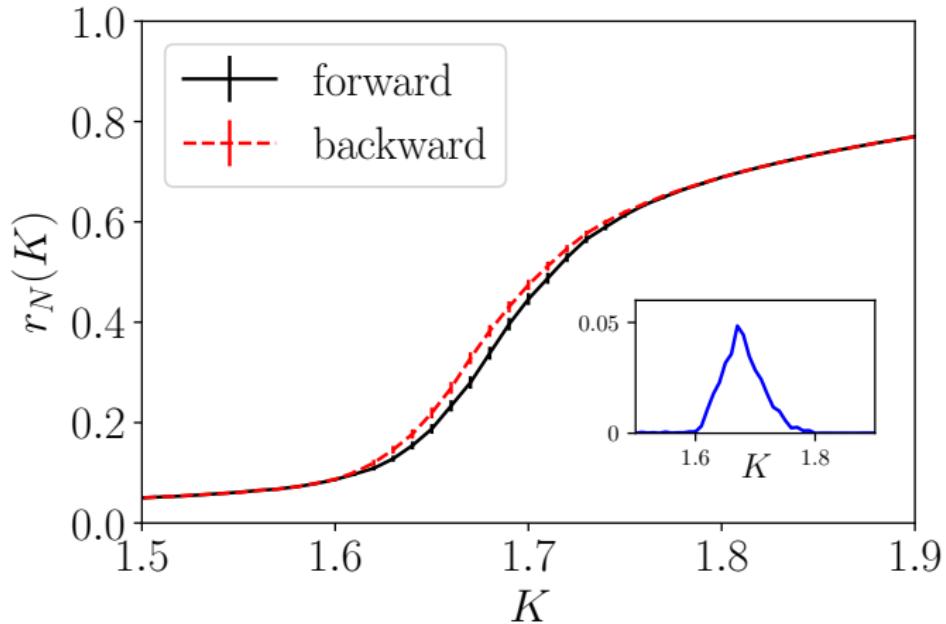
- $r$  の立ち上がりが

$$r \sim \frac{C}{\sqrt{-g''(0)}} (K - K_c)^{1/2} + \dots$$

- この設定だと  $\beta$  が  $g(\omega)$  に依存することを示唆している。(全結合と変わらない結果になりうる。)

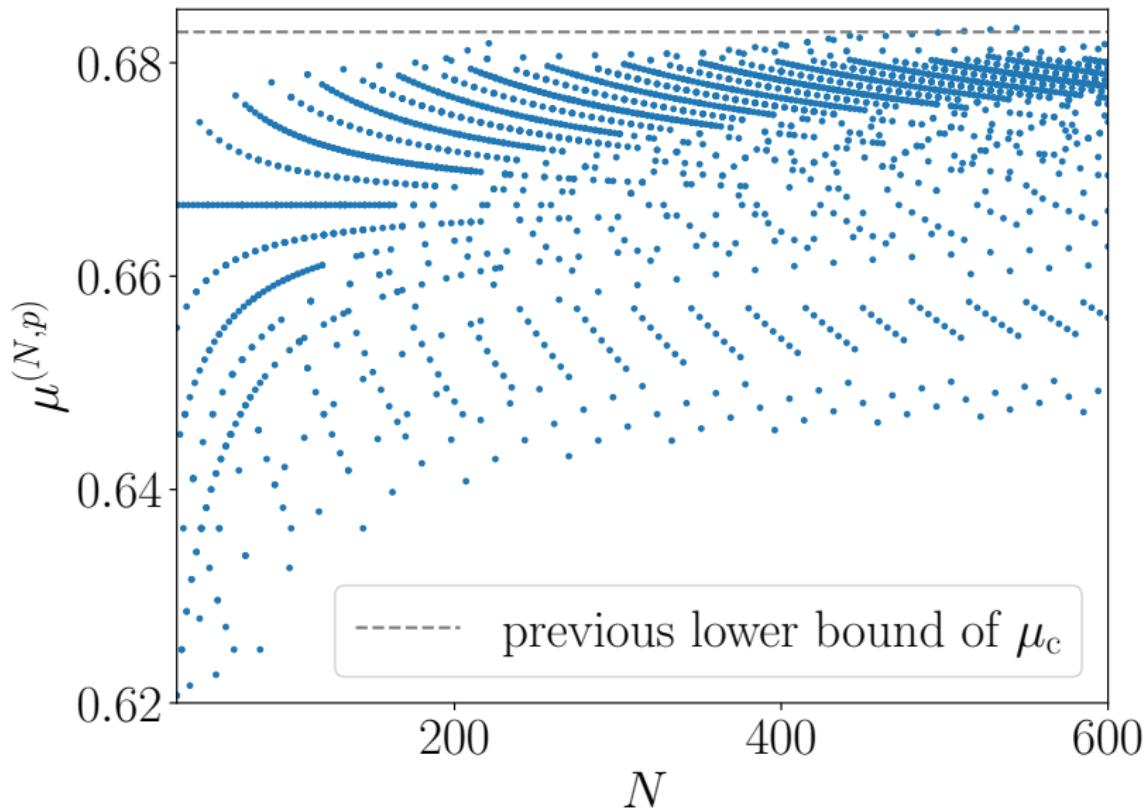
$a = 0.5$

- $a = 0.5$  ではヒステリシスが起こることが確認された。
- 不連続転移（1次相転移）が起こることを示唆している。
- $(a, n) = (0.5, 1)$  でシステムサイズ  $N = 25600$  におけるヒステリシス



# $\mu^{(N,p)}$ の数値計算

- 最適化ライブラリ: JuMP(Julia), pulp(Python)



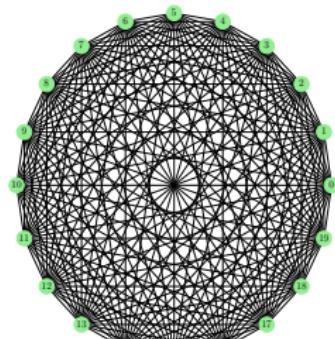
# ネットワーク密度

ネットワーク密度  $d$

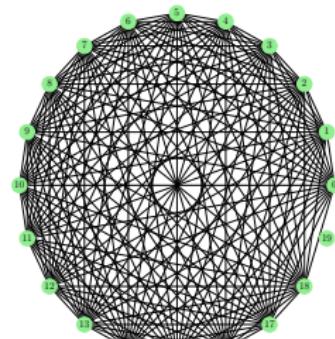
$$d = \frac{\sum_{i,j \in [N]} a_{ij}}{N(N - 1)}$$

- 可能なすべての辺の数に対する辺の数の比
- 全結合ネットワークで  $d = 1$
- $d$  が大きいからといって同期するわけではない

$$\mu = d = 1$$



$$\mu = 0, d = 0.9$$



# 巡回行列

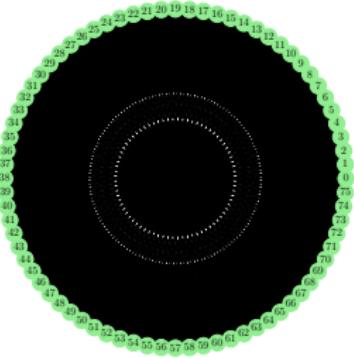
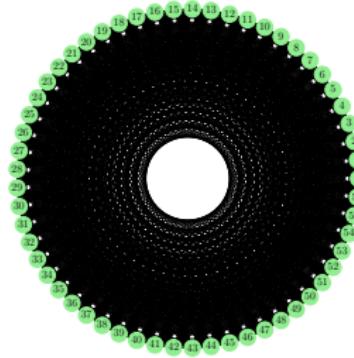
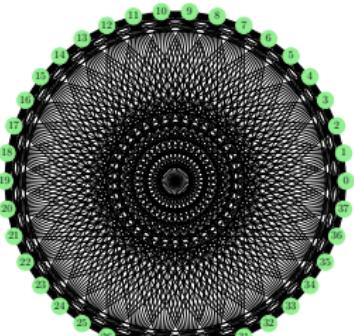
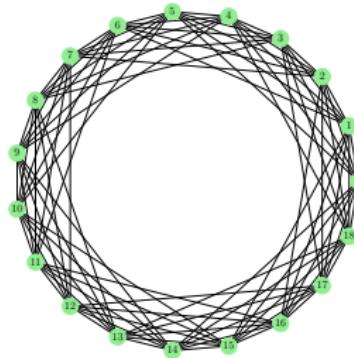
- $x \in \mathbb{R}^N$  から生成される巡回行列  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} = (x_{j-i})_{1 \leq i,j \leq N}$$
$$= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & & x_{N-2} \\ \vdots & x_{N-1} & x_0 & \ddots & \vdots \\ x_2 & & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_0 \end{pmatrix}$$

- 行列  $A$  の固有値  $\lambda_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{N-1} x_l \exp\left(\frac{2\pi i k l}{N}\right)$$

$$(N, p) = (19m, m)$$



# 大規模データに対する処方箋

- 補助変数法 (sparse GP)<sup>4</sup>

- $m(< n)$  個の補助入力点を用いて計算を効率化

- 変分ベイズ法 (SVGP)<sup>5</sup>

- $m(< n)$  個の補助入力点を用意
  - 変分事後分布を学習し真の事後分布に近似
  - データをサイズ  $b$  のミニバッチにわけることで学習を効率化

計算量の比較

	GP	sparse GP	SVGP
推論コスト	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(nm^2)$	$\mathcal{O}(bm^2 + m^3)$
メモリコスト	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(nm)$	$\mathcal{O}(bm + m^2)$

- 本研究では SVGP を用いる

<sup>4</sup>Quiñonero-Candela 2005

<sup>5</sup>Hensman 2013

# ベイズ線形回帰との比較

適切な次数の選択に失敗している

