フーリエ解析入門 解答

米田亮介

2025 年 7 月 5 日

目次

1 フーリエ解析の起源

1.3 練習

練習 1.3.1. 複素数 $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2} \tag{1}$$

と定義し、これを z の**絶対値**という。

1. $|z|$ の幾何的な意味は何か？
2. $|z| = 0$ ならば $z = 0$ であることを示せ。
3. $\lambda \in \mathbb{R}$ であれば、$|\lambda z| = |\lambda||z|$ を示せ。ただし、$|\lambda|$ は実数に対する通常の絶対値を表す。
4. z_1, z_2 を複素数とするとき

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{2}$$

を証明せよ。

5. $z \neq 0$ のとき $|1/z| = 1/|z|$ を示せ。

解答. 1. $|z|$ は複素平面上における原点から z までの距離を表す。

2. $|z| = 0$ のとき、$x^2 + y^2 = 0$ である。これを満たす実数 x, y は $x = y = 0$ であり、これより $z = 0$ である。
3.

$$|\lambda z| = |\lambda x + i\lambda y| = (\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2)^{1/2} = |\lambda|(x^2 + y^2)^{1/2} = |\lambda||z|$$

4. $z_i = x_i + iy_i,\ x_i, y_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2)$ とおく。

$$|z_1 z_2| = (x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2)^{1/2} = |z_1||z_2|$$

がまず示される。また、

$$(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2[(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}(x_2^2 + y_2^2)^{1/2} - (x_1 x_2 + y_1 y_2)] \geq 0$$

であるから、$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ である。ここでコーシーシュワルツの不等式[*1]を用いた。

5. $z \neq 0$ のとき

$$|z||1/z| = |z \cdot 1/z| = 1$$

である。$|z| \neq 0$ であるから $|1/z| = 1/|z|$ である。

練習 1.3.2. $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ が複素数のとき、z の**複素共役**を

$$\bar{z} = x - iy \tag{3}$$

により定義する。

[*1] コーシーシュワルツの不等式は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2| \geq |\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2|$ である。

1. $\bar{z}$ の幾何学的な意味は何か？
2. $|z|^2 = z\bar{z}$ を示せ。
3. z が単位円周上にあるとき、$1/z = \bar{z}$ を証明せよ。

解答. 1. $\bar{z}$ は実軸周りに z を反転させたものに対応する。

2.
$$|z| = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z\bar{z}$$

3. z が単位円周上にあるとき、$|z| = 1$ である。上式に代入して、$\bar{z} = 1/z$ である。

練習 1.3.3. 複素数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとは、ある $w \in \mathbb{C}$ が存在し、

$$\lim_{n\to\infty} |w_n - w| = 0 \tag{4}$$

をみたすことであり、w をこの数列の極限という。

1. 複素数列が収束するとき、その極限は一意的に定まることを示せ。
   複素数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の整数 N で
   $$n, m > N \Rightarrow |w_n - w_m| < \varepsilon \tag{5}$$
   を満たすようなものが存在することである。
2. 複素数列が収束するのは、それがコーシー列のとき、かつそのときに限ることを証明せよ。
   複素数の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束するとは、その部分和
   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n \tag{6}$$
   が収束することである。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負の実数列で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するものとする。
3. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数列で、すべての n に対して $|z_n| \leq a_n$ をみたしているとする。このとき $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が収束することを示せ。

解答. 1. $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し、その極限が w_1, w_2 とする。定義より $k = 1, 2$ それぞれについて、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N_k \in \mathbb{N}$ が存在し、$n > N_k$ ならば $|w_n - w_k| < \varepsilon$ となる。これより、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n > N$ ならば $|w_1 - w_2| < 2\varepsilon$ となる。よって $|w_1 - w_2| = 0$ であり、$w_1 = w_2$ が示された。

2. はじめに複素数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列のときに *Cauchy* 列であることを示す。$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を w とおくと、定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$n > N$ ならば $|w_n - w| < \varepsilon$ となる。このとき、$m > N$ なる m についても $|w_m - w| < \varepsilon$ となる。よって、$n, m > N$ ならば $|w_n - w_m| < 2\varepsilon$ となるので *Cauchy* 列となる。
   次に複素数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が *Cauchy* 列のときに収束列であることを示す。はじめに $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の整数 N が存在し、$n \geq N$ であれば $|w_n - w_N| < \varepsilon$ が成り立つ。これより、$|w_n| < \varepsilon + |w_N|$ である。よって、$M = \max\{|w_1|, \ldots, |w_{N-1}|, \varepsilon + |w_N|\}$ とおくと、任意の正の整数 n で $|w_n| < M$ がわかる。これは $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることに他ならない。ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理より有界な列には収束する部分列 $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在

する。$\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = w$ とおくと、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある正の整数 K が存在して、$k \geq K$ ならば $|w_{n_k} - w| < \varepsilon$ とかける。これと *Cauchy* 列の条件をそろえると、$n \geq \max\{N, n_K\}$ であれば $|w_n - w| \leq |w_n - w_{n_K}| + |w_{n_K} - w| < 2\varepsilon$ となる。これにより $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることが示された。

3. $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_k$ は収束するので *Cauchy* 列である。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の整数 N が存在して、$n \geq m > N$ ならば $\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$ となる。このとき、$|S_n - S_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} z_k| < \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$ が得られる。よって、S_n は *Cauchy* 列であるので、収束することが示された。

練習 1.3.4. $z \in \mathbb{C}$ に対して、その**複素指数**を

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{7}$$

により定義する。

1. すべての複素数に対して、この級数が収束することを証明し、上記の定義が意味をもつことを確認せよ。さらに $\mathbb{C}$ の任意の有界閉集合上で、この収束は一様収束であることを示せ。

2. z_1, z_2 が複素数であるとき、$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ であることを示せ。

3. z が純虚数であるとき、すなわち $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ であるとき、

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{8}$$

を示せ。これはオイラーの等式である。

4. 一般に $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{9}$$

である。

$$|e^{x+iy}| = e^x \tag{10}$$

を示せ。

5. $e^z = 1$ が成り立つのは、ある整数 k に対して $z = 2\pi k i$ であるとき、かつそのときに限ることを証明せよ。

6. 複素数 $z = x + iy$ が次の形に書けることを示せ。

$$z = re^{i\theta} \tag{11}$$

ただし $0 \leq r < \infty$ であり、$\theta \in \mathbb{R}$ は 2π の整数倍の違いを除いて一意的に定まる。また、次の式が意味をもつとき、

$$r = |z|, \quad \theta = \arctan(y/x) \tag{12}$$

であることを確認せよ。

7. 特に $i = e^{i\pi/2}$ である。複素数に i を掛けることの幾何的な意味は何か？また、$\theta \in \mathbb{R}$ に対して $e^{i\theta}$ を掛けることの幾何的な意味は何か？

8. 与えられた $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{13}$$

を示せ。これらもオイラーの等式と呼ばれている。

9. 複素関数を用いて

$$\cos(\theta + \vartheta) = \cos\theta\cos\vartheta - \sin\theta\sin\vartheta \tag{14}$$

などの三角関数に関する等式を示せ。それから

$$2\sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi), \tag{15}$$

$$2\sin\theta\cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi) \tag{16}$$

を示せ。この計算はダランベールによる進行波を用いた解と定常波の重ね合わせによる解を結びつけるものである。

解答. *1.* $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k/k!$ として、S_n が *Cauchy* 列であることを示す。任意の $z \in \mathbb{C}$ はある $M > 0$ によって $|z| < M$ と抑えられる。任意の $\varepsilon > 0$ に対して正の整数 N を $\varepsilon > 1/2^N$ かつ $N! > (2M)^N$[*2] が成り立つようなものとして取る。このとき $n \geq m > N$ であれば $|S_n - S_m| < \sum_{k=m+1}^{n} M^k/k! < 1/2^N < \varepsilon$ となり、*Cauchy* 列であることが示された。
次に e^z が有界閉集合 $S \subset \mathbb{C}$ 上で一様収束することを示す。S は有界であるからある $M > 0$ が存在して、任意の $z \in S$ において $|z| < M$ である。$z = M$ においても e^M は収束するので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して正の整数 N が存在して、$n > N$ であれば $\sum_{k=n+1}^{\infty} M^k/k! < \varepsilon$ である。このとき、任意の $z \in S$ において、$n > N$ において $|\sum_{k=n+1}^{\infty} z^k/k!| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k/k! < \sum_{k=n+1}^{\infty} M^k/k! < \varepsilon$ がわかる。よって S 上でこの収束は一様収束であることが示された。

2. $e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} z_1^m/m! \sum_{n=0}^{\infty} z_2^n/n! = \sum_{m,n=0}^{\infty} z_1^m z_2^n/(m!n!)$ において、$m + n = k$ となる項をまとめると、$\sum_{k=0}^{\infty} 1/k! \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} z_1^{k-n} z_2^n = \sum_{k=0}^{\infty} (z_1 + z_2)^k/k! = e^{z_1+z_2}$ となる。よって $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ である。これらの操作は e^z が絶対収束することから正当化される。

3. $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n y^n/n! = (1 - y^2/2! + y^4/4! - \cdots) + i(y/1! - y^3/3! + y^5/5! - \cdots) = \cos y + i\sin y$ である。これらの操作についても e^z が絶対収束することから正当化される。

4. $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ である。また、$|e^{x+iy}| = |e^x||\cos y + i\sin y|$ において、$e^x > 0$ と $|\cos y + i\sin y| = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より、$|e^{x+iy}| = e^x$ である。

5. $1 = e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y$ の虚部に注目すると $\sin y = 0$、すなわち $y = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ が必要。このとき、$1 = (\pm 1)^k e^x$ となる。$e^x > 0$ より、k は偶数かつ $x = 0$ となる。よって、$k \in \mathbb{Z}$ として $z = 2\pi ki$ が得られる。

6. $z = 0$ のときは $r = 0$ とすれば $z = re^{i\theta}$ で表現できる。$z \neq 0$ のときは、$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると、$z = r(x/r + iy/r)$ である。このとき $\cos\theta = x/r, \sin\theta = y/r$ なる θ が 2π の整数倍の違いを除いて一意的に定まる。また、$x \neq 0$ であれば $\tan\theta = y/x$ より $\theta = \arctan(y/x)$ が成り立つ。まとめると $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ となる。よって、任意の $z \in \mathbb{C}$ は $z = re^{i\theta}$ の形で表現できることが示された。

[*2] 一般に $a > 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$ である。

7. 複素数 $z = re^{i\vartheta}$ に $e^{i\theta}$ を掛けると $re^{i(\vartheta+\theta)}$ となり、これは複素平面上の偏角が ϑ から $\vartheta+\theta$ に移ったことに対応する。すなわち、複素数に $e^{i\theta}$ を掛けることは複素平面上で反時計周りに角度 θ だけ回転させることに対応する。特に $i = e^{i\pi/2}$ を掛けることは反時計周りに 90 度回転させることに対応する。

8. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を $\cos\theta, \sin\theta$ について解くことで、$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2, \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$ が得られる。

9. $e^{i(\theta+\vartheta)} = \cos(\theta+\vartheta) + i\sin(\theta+\vartheta)$ と $e^{i\theta}e^{i\vartheta} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = (\cos\theta\cos\vartheta - \sin\theta\sin\vartheta) + i(\cos\theta\sin\vartheta + \sin\theta\cos\vartheta)$ の実部と虚部をそれぞれ比較することで、

$$\cos(\theta+\vartheta) = \cos\theta\cos\vartheta - \sin\theta\sin\vartheta,$$
$$\sin(\theta+\vartheta) = \cos\theta\sin\vartheta + \sin\theta\cos\vartheta$$

が得られる。また、$\vartheta \leftarrow -\vartheta$ を代入することで、

$$\cos(\theta-\vartheta) = \cos\theta\cos\vartheta + \sin\theta\sin\vartheta,$$
$$\sin(\theta-\vartheta) = -\cos\theta\sin\vartheta + \sin\theta\cos\vartheta$$

が得られる。これらから、

$$2\sin\theta\sin\vartheta = \cos(\theta-\vartheta) - \cos(\theta+\vartheta),$$
$$2\sin\theta\cos\vartheta = \sin(\theta+\vartheta) + \sin(\theta-\vartheta)$$

もわかる。

練習 1.3.5. 整数 n に対して $f(x) = e^{inx}$ が周期 2π の周期関数であることと

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

を証明せよ。このことを用いて、整数 $n, m \geq 1$ に対して

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{18}$$

を示せ。同様にして

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{19}$$

を示せ。最後に任意の n, m に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \tag{20}$$

を示せ。

解答. $f(x+2\pi) = e^{in(x+2\pi)} = e^{inx}e^{2\pi ni} = e^{inx} = f(x)$ より f は周期 2π の周期関数である。$n = 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$ であり、$n \neq 0$ のとき $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = (1/n)[\sin nx - i\cos nx]_{-\pi}^{\pi} = 0$ である。よって、$1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \delta_{n,0}$ が示された。

$\cos nx \cos mx = 1/2\mathrm{Re}(e^{i(n+m)x} + e^{i(n-m)x})$ より $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = 1/2\mathrm{Re}(2\pi\delta_{n+m,0} + 2\pi\delta_{n-m,0}) = \pi\delta_{n,m}$ が示される。

$\sin nx \sin mx = 1/2\mathrm{Re}(e^{i(n-m)x} - e^{i(n+m)x})$ より $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 1/2\mathrm{Re}(2\pi\delta_{n-m,0} - 2\pi\delta_{n+m,0}) = \pi\delta_{n,m}$ が示される。

$\sin nx \cos mx = 1/2\mathrm{Im}(e^{i(n+m)x} + e^{i(n-m)x})$ より $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 1/2\mathrm{Im}(2\pi\delta_{n+m,0} + 2\pi\delta_{n-m,0}) = 0$ が示される。

練習 1.3.6. f が $\mathbb{R}$ 上で *2* 回連続微分可能で、かつ方程式

$$f''(t) + c^2 f(t) = 0 \tag{21}$$

の解であれば、ある定数 a, b が存在し、

$$f(t) = a\cos ct + b\sin ct \tag{22}$$

となっていることを証明せよ。これは二つの関数 $g(t) = f(t)\cos ct - c^{-1}f'(t)\sin ct$ と $h(t) = f(t)\sin ct + c^{-1}f'(t)\cos ct$ を微分することによって示すことが出来る。

解答. $g'(t) = h'(t) = 0$ であるから、ある定数 a, b が存在して $g(t) = a, h(t) = b$ となる。$g(t)\cos ct + h(t)\sin ct$ を計算することで $f(t) = a\cos ct + b\sin ct$ を得る。$f'(t) = -ac\sin ct + bc\cos ct$ となり、$g(t) = a, h(t) = b$ を満たす。

練習 1.3.7. a と b が実数であるとき、次のように表せることを示せ。

$$a\cos ct + b\sin ct = A\cos(ct - \varphi) \tag{23}$$

ただし、$A = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり、φ は

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{24}$$

となるように選んでいる。

解答. $A\cos(ct - \varphi) = A\cos ct\cos\varphi + A\sin ct\sin\varphi = a\cos ct + b\sin ct$

1.4 問題

2　フーリエ級数の基本性質

2.6　練習

練習 2.6.1. f は $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数で、任意の閉区間上で可積分とする。$a, b \in \mathbb{R}$ のとき、次の二つの等式を示せ。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)dx, \tag{25}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx \tag{26}$$

解答. $f(x) = f(x+2\pi)$ であるから $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x+2\pi)dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)dy$ となる。同様に $f(x) = f(x-2\pi)$ から $\int_a^b f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)dy$ となる。

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)dy = -\int_{-\pi}^{-\pi+a} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)dy$ であり、上式から $\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)dy = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)dy$ であるから $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)dy$ となる。

2.7　問題

3　フーリエ級数の収束

3.3　練習

3.4　問題

4　フーリエ級数のいくつかの応用

4.5　練習

4.6　問題

5　$\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換

5.5　練習

5.6　問題

6 $\mathbb{R}^d$ 上のフーリエ変換

6.6 練習

6.7 問題

7　有限フーリエ解析

7.3　練習

7.4　問題

8　ディリクレの定理

8.4　練習

8.5　問題