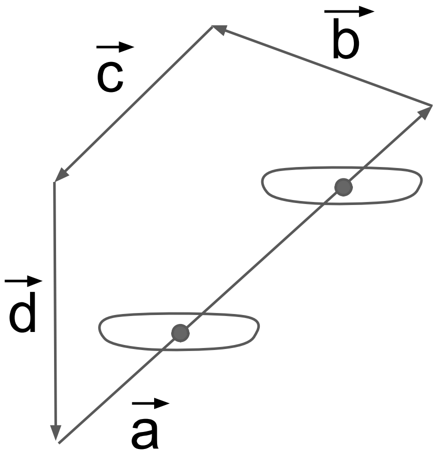
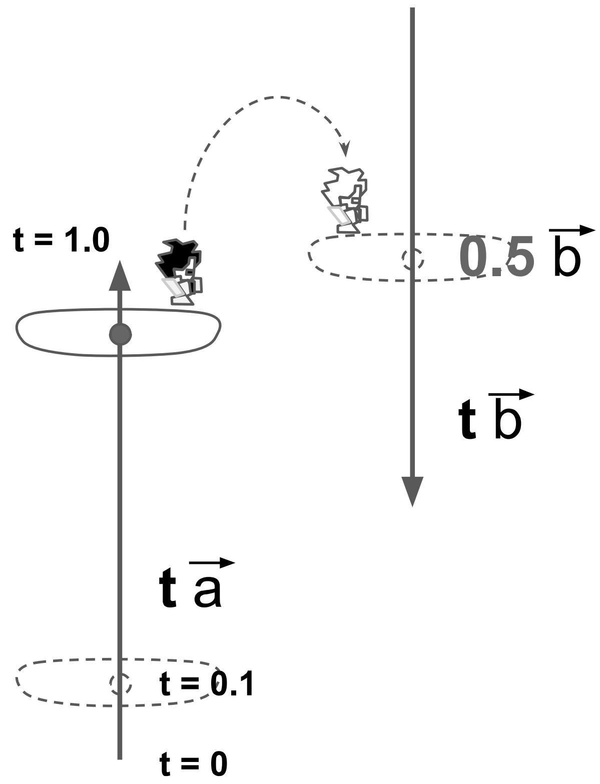
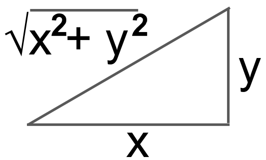
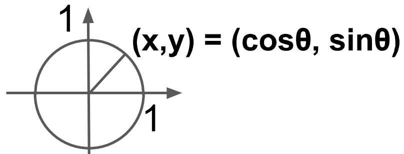




ベクトルの基礎





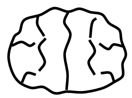
三平方の定理やcosθ sinθでがんばっておるのか

ベクトル ならば **もっとおおざっぱ** に

<u>ただの方向の矢印をベースにして考えられるぞ</u>

ベクトルは

ベクトル脳 をきたえれば
複雑な動きを 分解して
世界が 矢印 でみえるようになる

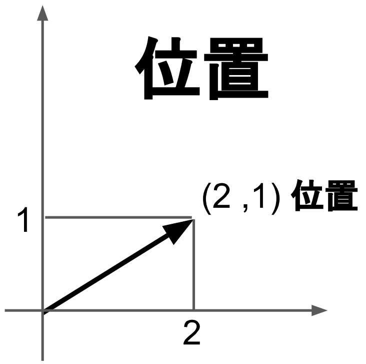


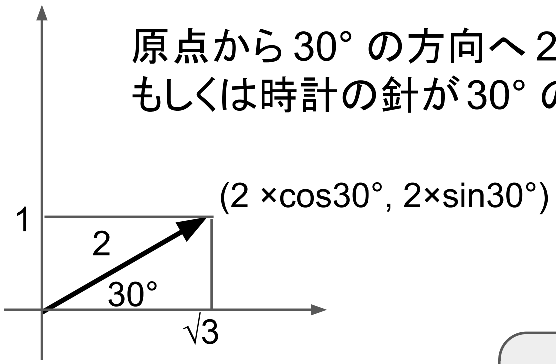
2D や 3D空間 上で
位置 や **方向** や **力や速度の大きさ**を表せる

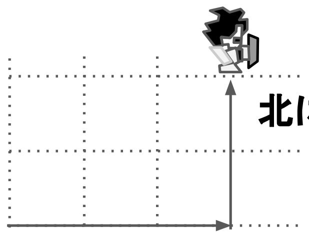
勢い とか 強さ

原点から30° の方向へ 2の速度で進む (=**速度**や**力**の**大きさ**)
もしくは時計の針が30° の方向を向いている(=**方向**)

位置

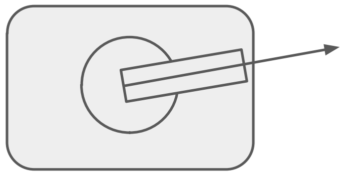






方向

砲台の 方向



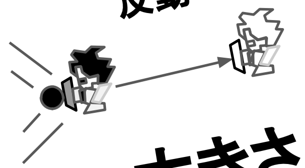
速度

弾の勢い

勢い

力の大きさ

ふっとぶ
反動の加速度

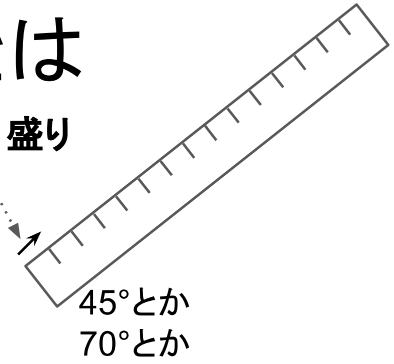


力の大きさ

ゲームに出てくるすべての位置や動きを ベクトルで表現 できる

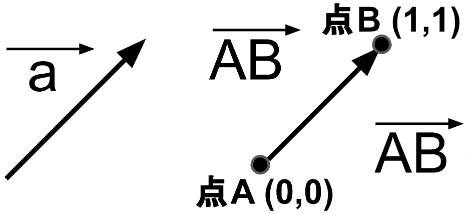
単位ベクトルとは

<u>角度のついた</u>モノサシの 1目盛り



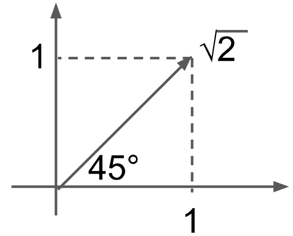
ベクトルの大きさ を Norm ノルムとよび

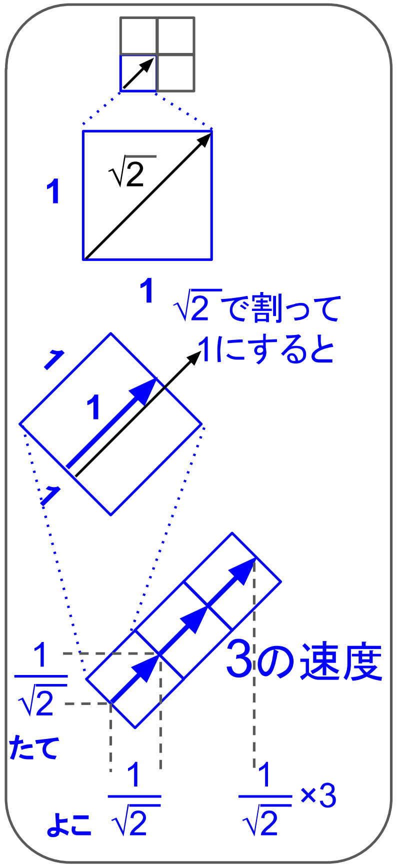
$|\vec{a}|$ や $|\overrightarrow{AB}|$ と書く

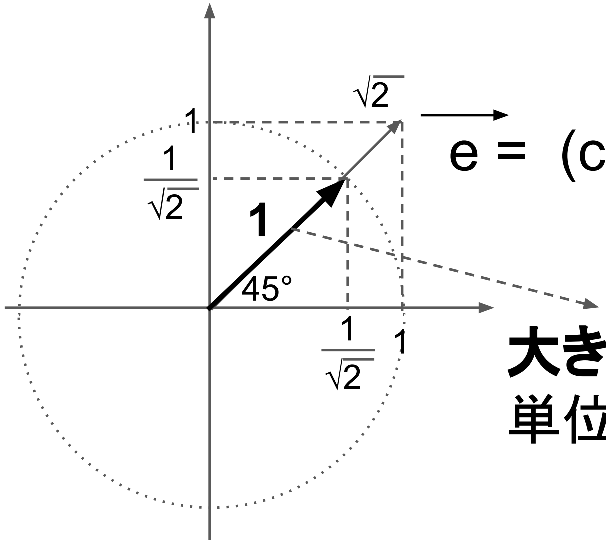


ベクトルの大きさ

$\overrightarrow{AB}$ **の長さ** $= |\overrightarrow{AB}| = \mathrm{Norm}(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{2}$







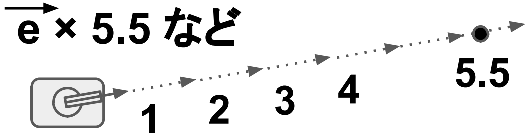
$\vec{e} = (\cos 45°, \sin 45°) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

大きさ1のベクトルを

単位ベクトル $\vec{e}$ と呼ぶ

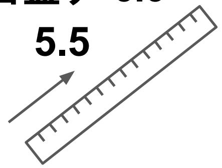
延長線上の位置は

$\vec{e}$ × 5.5 など



単位ベクトルの倍数で表現できる

角度のついたモノサシの 1目盛り×5.5

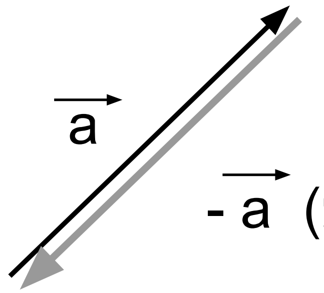


単位ベクトル $\vec{e}$ にしてから3倍や5倍すれば

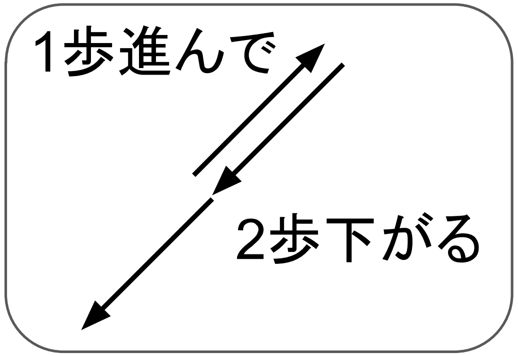
45°の方向に 3の速度 で弾が進むなどを表現しやすい

逆ベクトルとは

$\vec{a}$



$-\vec{a}$ (**逆ベクトル**)

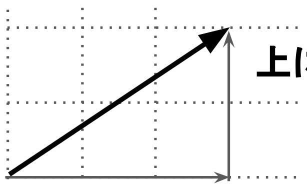


$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

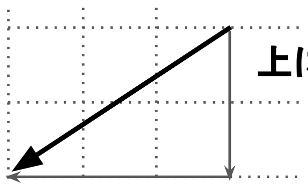
大きさ0 のベクトル $\vec{0}$ は**零ベクトル**

$\vec{a} = (3, 2)$ のときは　$-\vec{a} = (-3, -2)$



上に 2 マス

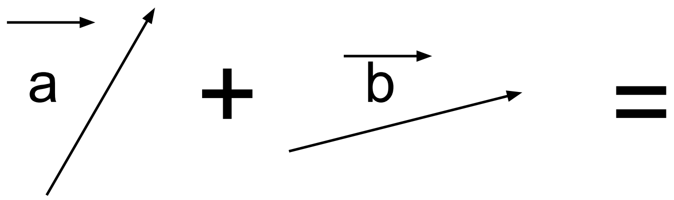
右に 3 マス

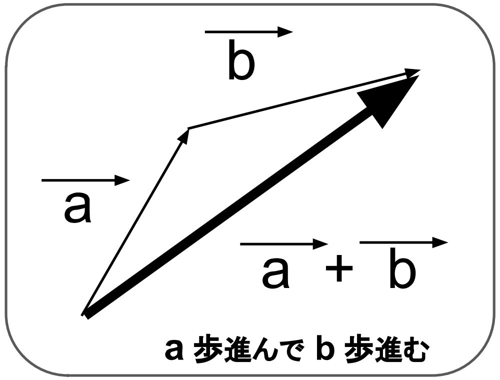


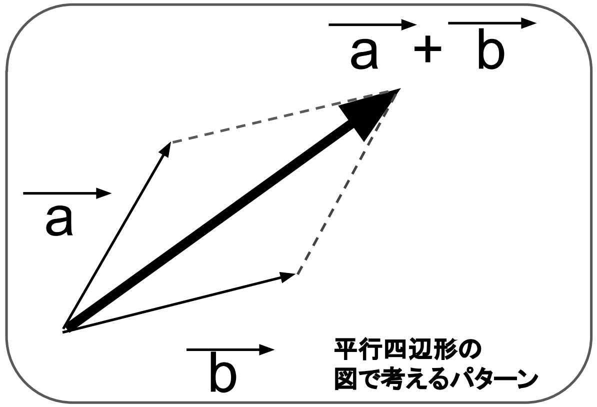
上に - 2 マス

右に - 3 マス

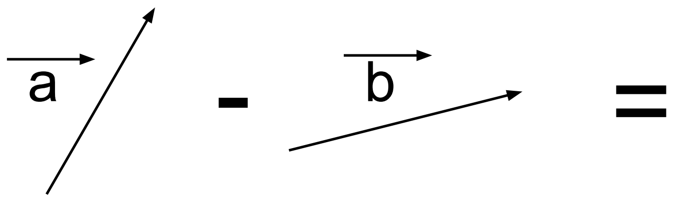
ベクトルの**足し算**

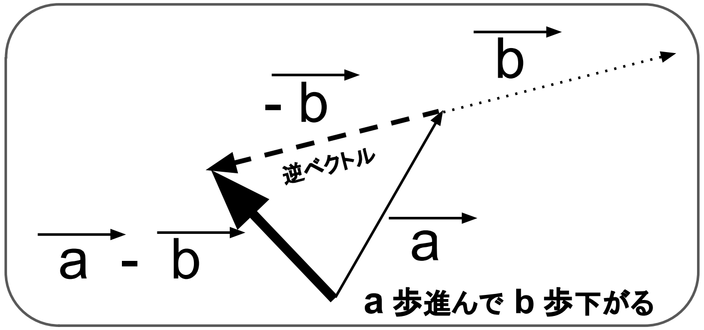


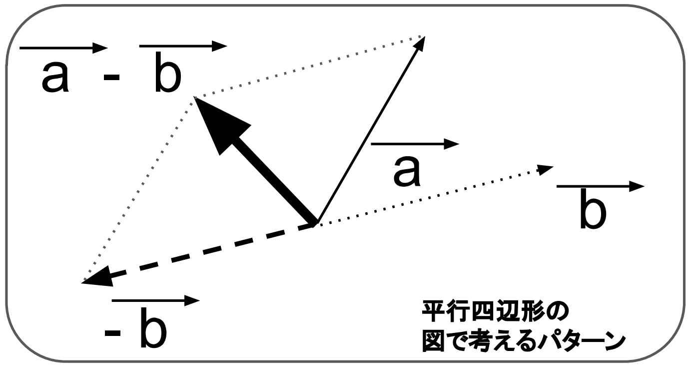


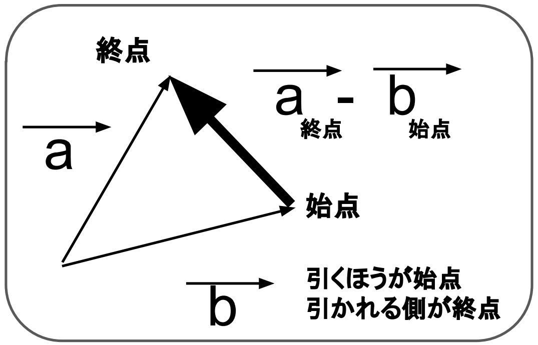


ベクトルの**ひき算**



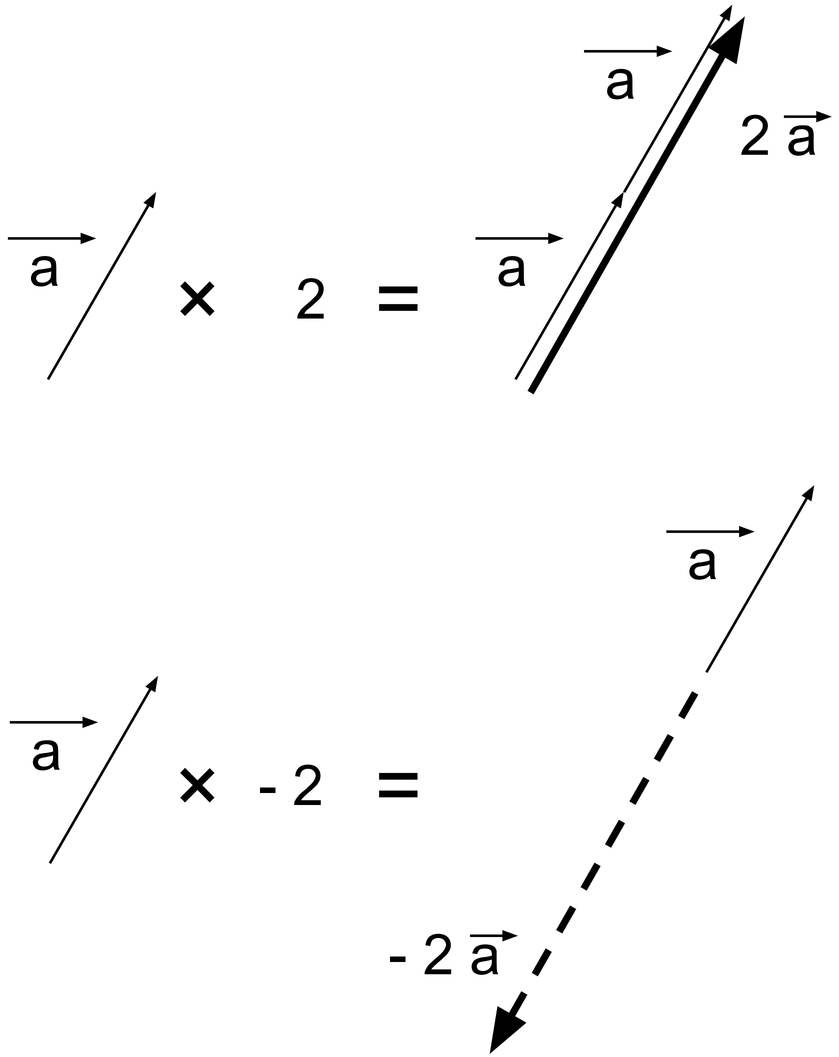






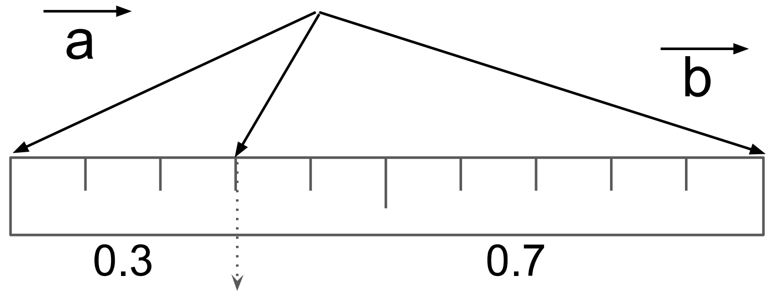
ベクトルのスカラー倍

× 数字で倍



ベクトルの比率の式(間をつなぐ式)

補間式 (間をおぎなう式)



$$\boxed{(1 - 0.3)\,\vec{a} + 0.3\,\vec{b}}$$

間をつなぐ式 $\boxed{(1 - t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}}$ **t が 0 なら $\vec{a}$ / t が 1 なら $\vec{b}$ になる式**

直線 の 補間式

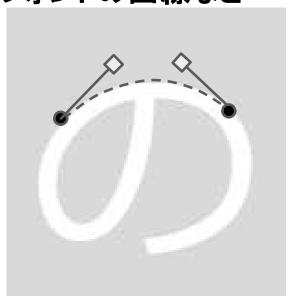
---

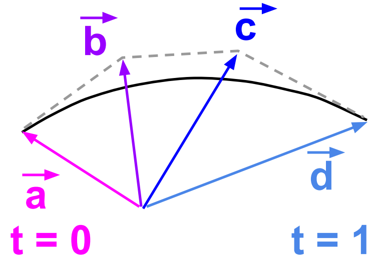
t を 0.0 から　少しづつ　0.5　を　超えて 1.0 まで 増やしていくと

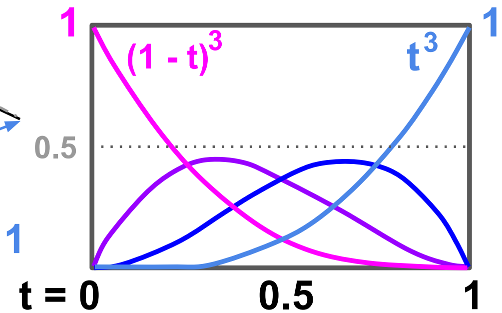
aから、一旦bを目指しつつ、段々cに引っ張られ、結局dに落ち着く式

ベジェ曲線の式 $\boxed{\vec{p} = (1 - t)^3\,\vec{a} + 3(1 - t)^2 t\,\vec{b} + 3(1 - t)\,t^2\,\vec{c} + t^3\,\vec{d}}$

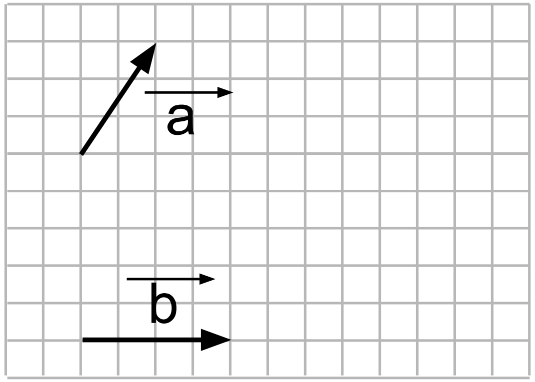
フォントの曲線など



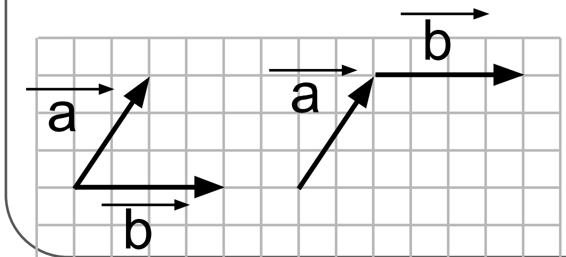


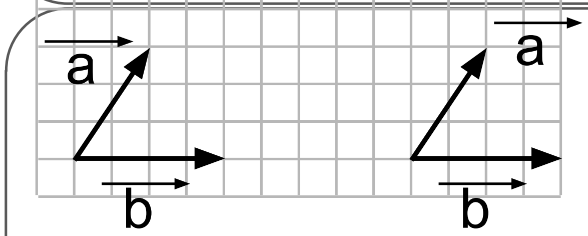


練習問題1



問1　$\vec{a} + \vec{b}$ をえがけ





問2　$\vec{a} - \vec{b}$ をえがけ

練習問題2

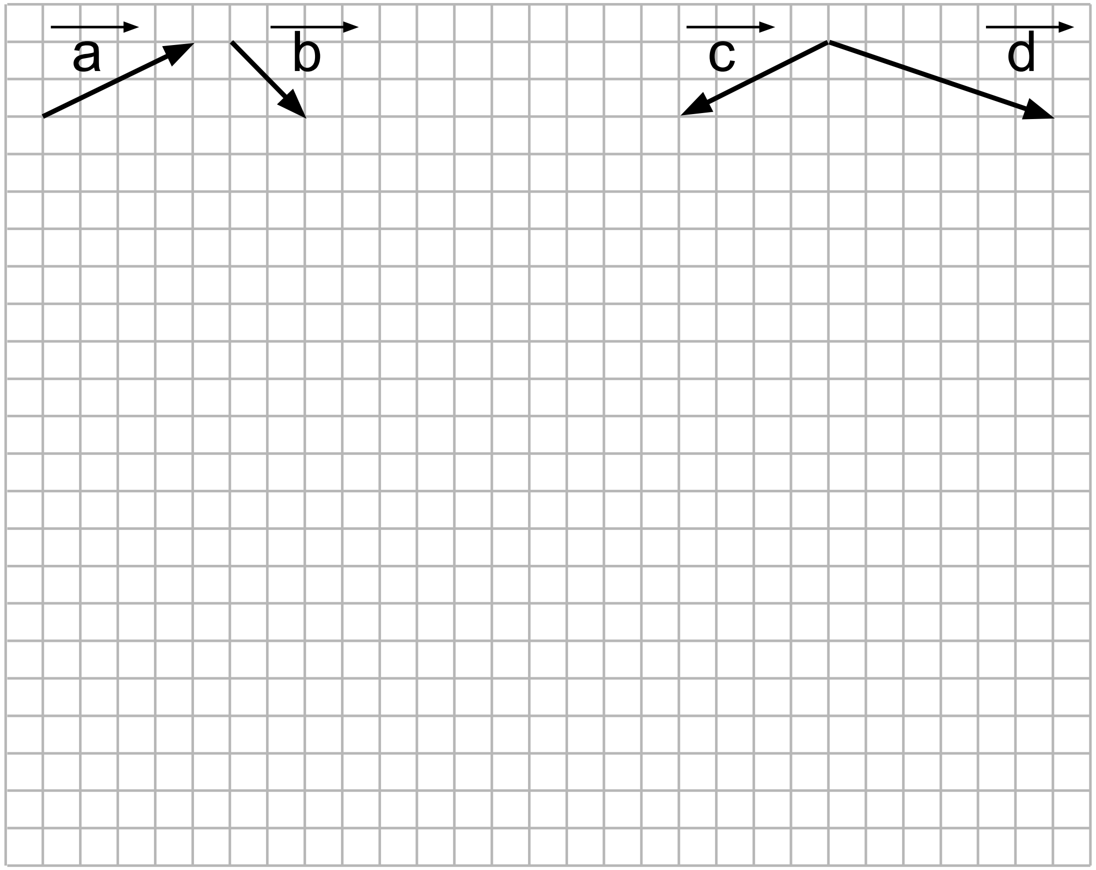
(1)　$\vec{a} + \vec{b}$

(2)　$2\vec{a} - 3\vec{b}$

(3)　$(1 - 0.5)\vec{c} + 0.5\vec{d}$

(4)　$(1 - 0.6)\vec{c} + 0.6\vec{d}$

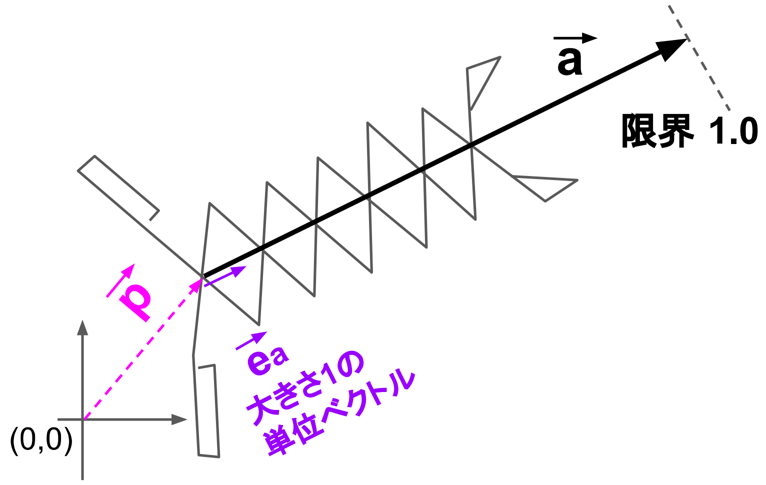
をえがけ



ベクトルパズル 1

ノビールハンドが のびた先っぽの手の

$\vec{a}$ 方向に t = 0.1 ～ 1.0まで伸びるとすると、位置 $\vec{v}$ を表すベクトルの式は?



こたえは①か②か どっち？？

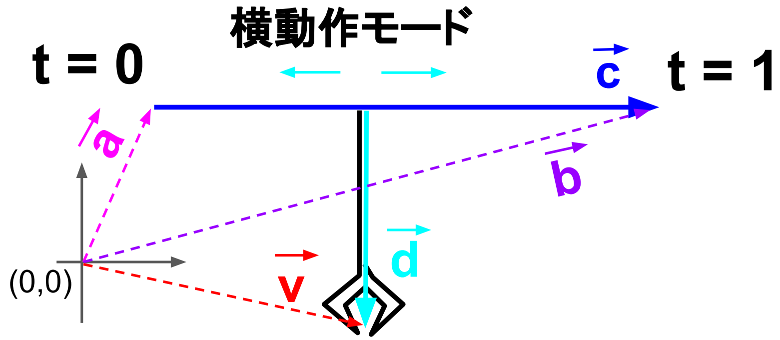
① $\vec{v} = \vec{p} + t\,\vec{a}$

② $\vec{v} = \vec{p} + t\,\vec{e_a}$

ヒント t = 0.1 や 1.0 をあてはめてみると ..

ベクトルパズル 2

UFOキャッチャー(**横動作**モード) の先っぽ $\vec{v}$ を表す式は?



こたえは①か②か どっち？？

① $\vec{v} = \vec{c} + t\,\vec{d}$

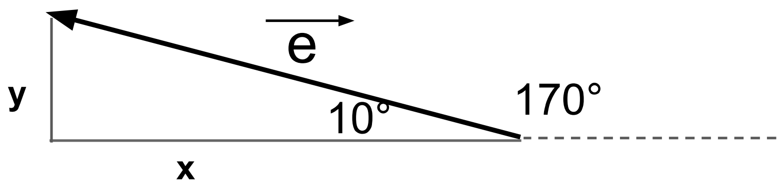
② $\vec{v} = (1 - t)\,\vec{a} + t\,\vec{b} + \vec{d}$

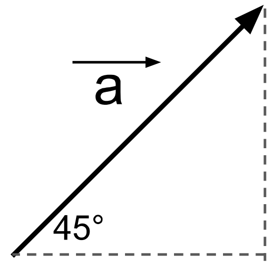
ヒント t = 0 や 1 をあてはめてみると ..

練習問題3

次のベクトルの x成分とy成分を計算せよ

$\cos 10^\circ = 0.98$　$\sin 10^\circ = 0.17$　$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 0.71$　$|\vec{a}| = 10$ としてよい





(1)単位ベクトル $\vec{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$

x成分 -0.98　y成分

$e_x =$ -0.98

$e_y =$

$\vec{e} = ($　　,　　$)$

(2) $|\vec{a}| = 10$ ならば

x成分 0.71　y成分 0.71

$a_x = |a| \times \cos 45^\circ =$ 7.1

$a_y = |a| \times \sin 45^\circ =$

$\vec{a} = ($ 7.1 ,　　$)$

練習問題4

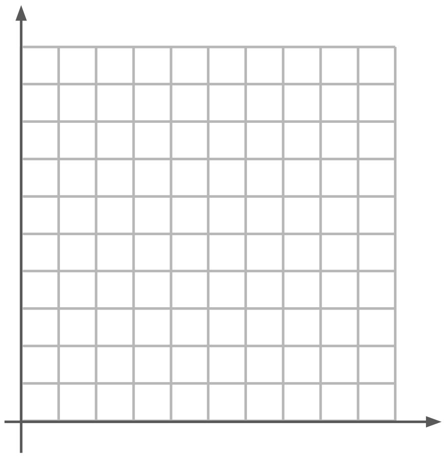
ベクトルの　$\vec{a} = (2, 4)$　$\vec{b} = (2, 2)$ のとき以下を計算し、さらに図示せよ

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (2, 4) + (2, 2) = (\square, \square)$

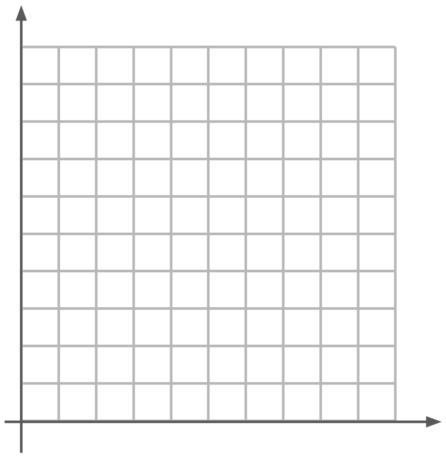
(2) $\vec{a} - \vec{b} = (2, 4) - (2, 2) = (\square, \square)$

(3) $2\vec{a} = 2 \times (2, 4) = (\square, \square)$

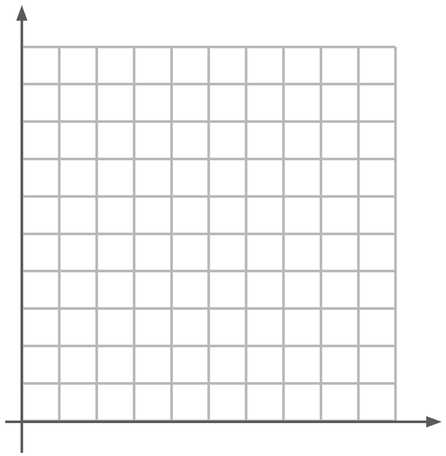
(1)



(2)



(3)



練習問題5

問1 三平方の定理を使って $\vec{a} = (2, 4)$ $\vec{b} = (2, 4, 3)$ のベクトルの大きさをもとめよ

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \boxed{\quad}$

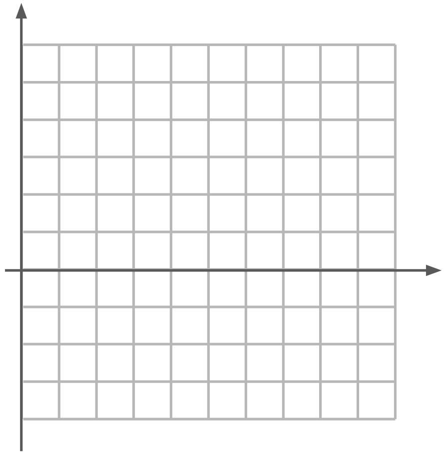
(2) $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \boxed{\quad}$

問2 $\vec{c} = (2, 4)$ $\vec{d} = (4, 3)$ のとき、$\overrightarrow{cd}$ ベクトルの大きさをもとめよ

(3) $\overrightarrow{cd} = \vec{d} - \vec{c} = (4, 3) - (2, 4) = (\underset{\text{①}}{\boxed{\quad}}, \underset{\text{②}}{\boxed{\quad}})$

(4) $|\overrightarrow{cd}| = \sqrt{\underset{\text{①}}{\boxed{\quad}}^2 + \underset{\text{②}}{\boxed{\quad}}^2} = \boxed{\quad}$

(5) $\overrightarrow{cd}$ を図にかけ



ベクトルの演算法則の公式集

$\vec{a} = (a_x, a_y)$ $\vec{b} = (b_x, b_y)$ のとき　$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$　$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$　$k\vec{a} = \vec{a}k = (k a_x, k a_y)$

点A(A_x, A_y)　点B $= (B_x, B_y)$ のとき　$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$

$\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x, B_y - A_y)$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (交換OK)　$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (結合)

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (k倍の分割)　$(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$ (n+m倍)　$n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a} = nm\vec{a}$

練習問題6

問1 $\vec{a} = (2, 3)$ $\vec{b} = (1, 4)$ のとき、次の計算をせよ

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (2 + 1, 3 + 4) = (\square, \square)$

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y) = (2 - 1, 3 - 4) = (\square, \square)$

(3) $2\vec{a} = 2(2, 3) = (2 \times 2, 2 \times 3) = (\square, \square)$

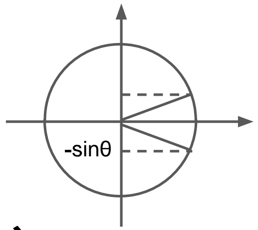
問2 2点 $A = (1, 2)$ $B = (4, 6)$ において、$\overrightarrow{AB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ をもとめなさい

$AB = (b_x - a_x, b_y - a_y) = (4 - 1, 6 - 2) = (\underset{①}{\square}, \underset{②}{\square})$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2} = \sqrt{\underset{①}{\square}^2 + \underset{②}{\square}^2} = \sqrt{\square^2} = \square$

練習ドリル1

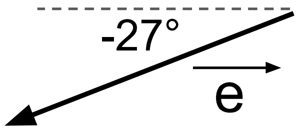
ヒント: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$



問1 次のベクトルの x成分とy成分を計算せよ

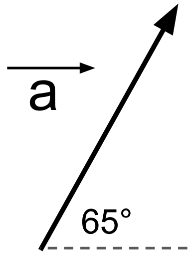
$\cos 27° = 0.89$ $\sin 27° = 0.45$ $\cos 65° = 0.42$ $\sin 65° = 0.91$ $|\vec{a}| = 5$ としてよい

(1)



x成分 □
y成分 □

(2)



x成分 □
y成分 □

問2 $\vec{a} = (1, -2)$ $\vec{b} = (-1, -3)$ のとき、次の計算をせよ

(1) $\vec{a} + \vec{b} =$ (□ , □)　(2) $\vec{a} - \vec{b} =$ (□ , □)　(3) $4\vec{a} =$ (□ , □)

(4) $2\vec{a} + 3\vec{b} =$ (□ , □)　(5) $2\vec{a} - 3\vec{b} =$ (□ , □)　(6) $|\vec{a}| =$ □

問3 2点 $A = (3, -1)$ $B = (-1, -4)$ において、$\overrightarrow{AB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ をもとめなさい

$AB = (b_x - a_x, b_y - a_y) =$ (□① , □②)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2} = \sqrt{□①^2 + □②^2} = \sqrt{□^2} =$ □

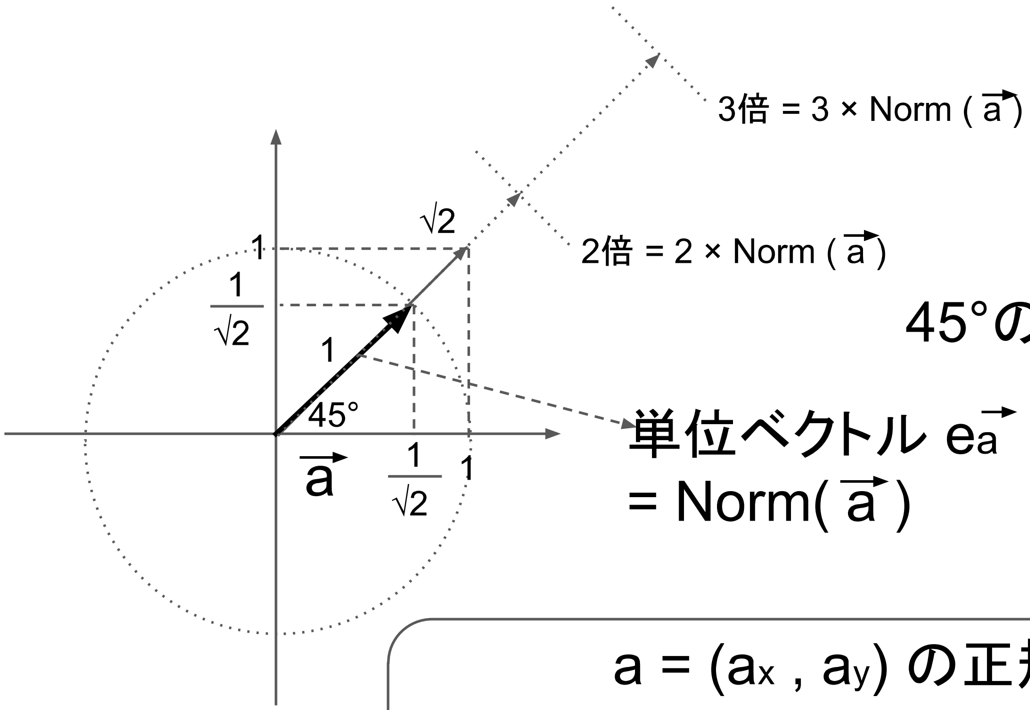
単位ベクトルを求めておくと
それを2倍,3倍,しやすい

3Dの場合

$$\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \right)$$

3D 3次元の場合は $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ **球の半径**

2D 2次元の場合は $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ **三平方の定理**



単位ベクトル $\vec{e_a}$ = Norm($\vec{a}$)
がないと倍々しにくいので必須

単位ベクトル $\vec{e_a}$
= Norm($\vec{a}$)

$$45°の単位ベクトル = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$a = (a_x , a_y)$ の正規化の公式

2Dの場合

$$\vec{e_a} = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{(a_x, a_y)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \right)$$

練習問題7

$\vec{a} = (a_x\ ,\ a_y)$ の正規化の公式

$$\mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{(a_x,\ a_y)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\ ,\ \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\right)$$

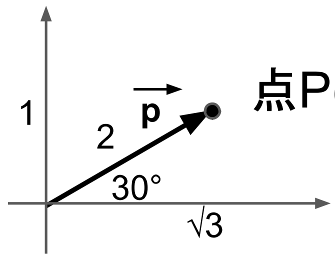
問1 次のとき、$\vec{a}$を正規化(Normalize)して同一方向単位ベクトルを求めよ

(1) $\vec{a} = (3, 4)$　　$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \boxed{}$　　$\mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = (\boxed{}, \boxed{})$

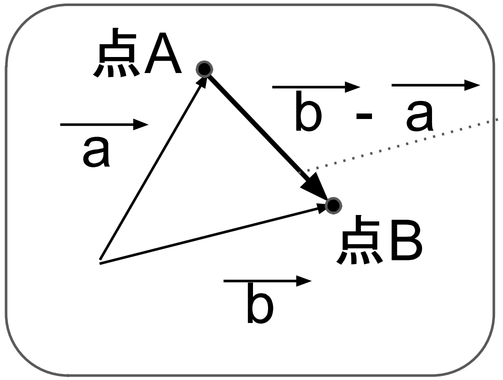
(2) $\vec{a} = (-30, 40)$　　$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \boxed{}$　　$\mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = (\boxed{}, \boxed{})$

(3) $\vec{a} = (12, -5)$　　$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \boxed{}$　　$\mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = (\boxed{}, \boxed{})$

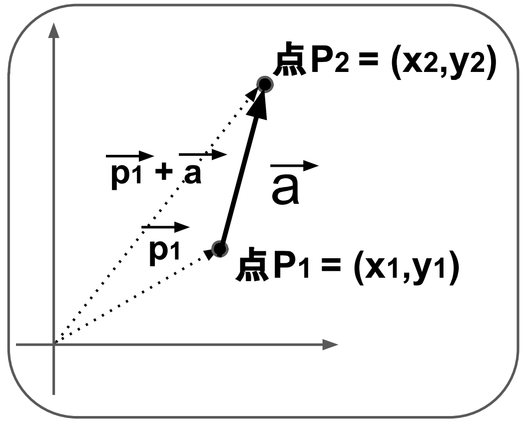
位置ベクトルは原点(0,0)を始点とするベクトル
点の位置を表すことができるベクトル



点$P(x,y)$ $\vec{p} = (x, y)$



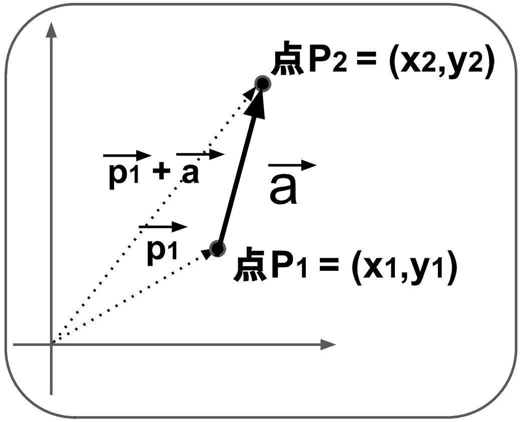
$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$



$P_2 = (x_2, y_2) = P_1 + \vec{a} = (x_1 + a_x, y_1 + a_y)$

$\vec{a} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

練習問題8



$P_2 = (x_2, y_2) = P_1 + \vec{a} = (x_1 + a_x, y_1 + a_y)$

$\vec{a} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

問1 座標点 $P_1(10, 20)$ $P_2(20, -10)$ のとき、次をもとめよ

(1) P_1を始点としP_2を終点とする　ベクトル$\overrightarrow{P_1P_2}$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p_2} - \vec{p_1} = (p_{2x} - p_{1x}, p_{2y} - p_{1y}) = (\boxed{}, \boxed{})$

(2) $\vec{a} = (10, 5)$ の始点が、座標点P_1にあるとき、終点P_3 の座標値

$P_3(x_3, y_3) = P_1 + \vec{a} = (x_1 + a_x, y_1 + a_y) = (\boxed{}, \boxed{})$

練習ドリル2

問1 次の計算をせよ。

ただし $\vec{a} = (2,3)$　$\vec{b} = (5,2)$　$\vec{c} = (1,2)$,　$L = 3$,　$M = 2$,　$P_1 = (5,3)$,　$P_2 = (4,1)$ とする

(1) $\vec{a}L = (\boxed{},\boxed{})$　(2) $M\vec{b} = (\boxed{},\boxed{})$　(3) $P_1 + \vec{b} = (\boxed{},\boxed{})$

(4) $\vec{a}M + \vec{b} = (\boxed{},\boxed{})$　(5) $(L + M)\vec{c} = (\boxed{},\boxed{})$　(6) $P_1 - P_2 = (\boxed{},\boxed{})$

(7) $M\vec{c} + L\vec{a} = (\boxed{},\boxed{})$　(8) $(P_1 - P_2)L = (\boxed{},\boxed{})$

問2 $P_1(40, 30)$を始点とし $P_2(50, 20)$ を終点とする　ベクトル$\overrightarrow{P_1P_2}$をもとめよ

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p_2} - \vec{p_1} = (p_{2x} - p_{1x}, p_{2y} - p_{1y}) = (\boxed{},\boxed{})$$

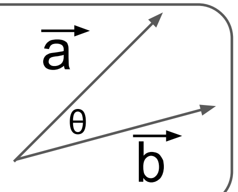
問3 $\vec{a} = (10, 5)$ の始点が、座標点$P_1(30, 40)$にあるとき、終点P_2 の座標値を求めよ

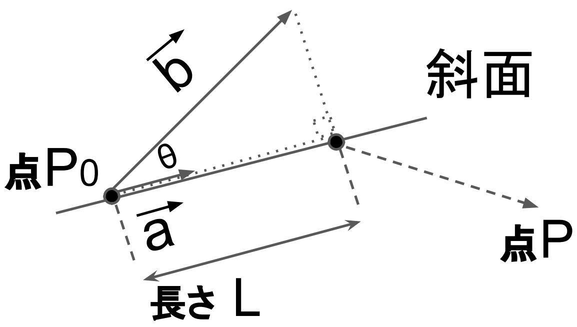
$$P_2(x_2, y_2) = P_1 + \vec{a} = (x_1 + a_x, y_1 + a_y) = (\boxed{},\boxed{})$$

ベクトルの内積を使えば斜面上の点を cosθをすっとばして計算できてしまう(神)！

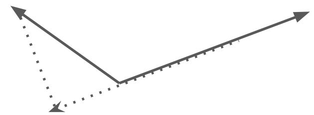
cos計算はCPU計算時間がかかる
内積はゲームの計算にとって必須の神法則

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (ドット)
$= a_x \times b_x + a_y \times b_y$





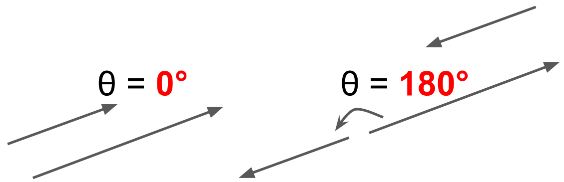
点$P_1(x_1,y_1) = P_0 + L\vec{a}$
$= (x_0,y_0) + L\,(a_x, a_y)$



cos抜きの
掛け算と足し算のみで済むので
時間のかかるcos計算がなく高速

$|\vec{a}| = 1$ **(単位ベクトルならば)**

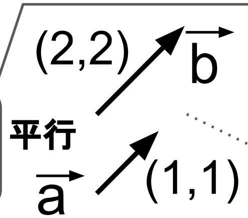
$L = |\vec{b}|\cos\theta = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \underbrace{(a_x \times b_x + a_y \times b_y)}$



(cos無しの掛け算だけで済む)

内積は 平行の判定 にも使える

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (ドット) が aの長さ × bの長さ の絶対値 と = なら平行



内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$a_x \times b_x + a_y \times b_y$ 　 $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times -1$ 　 θ = 180°

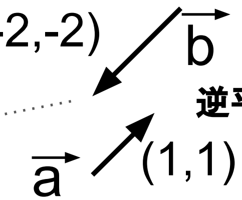
$1 \times -2 + 1 \times -2$

-4 ⟷ -4

同じ

4 ⟷ 4 　 θ = 0° なら × 1

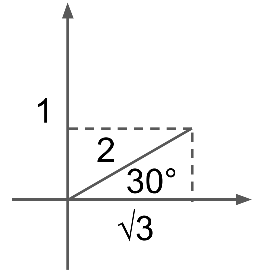
長さ $|\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$



長さ $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos 30° = \sqrt{3} / 2 \quad \cos 60° = 1 / 2 \quad \cos 45° = 1 / \sqrt{2}$

練習問題9

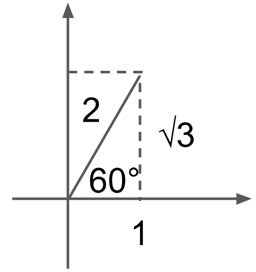


問1 次のベクトルの内積の計算をせよ

(1) $|\vec{a}| = 4 \quad |\vec{b}| = 3 \quad \theta = 30°$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = \boxed{\quad}$

(2) $\vec{a} = (2, 3) \quad \vec{b} = (4, 6)$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y = \boxed{\quad}$

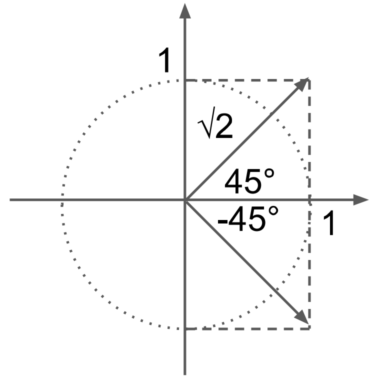
(3) $|\vec{a}| = 5 \quad |\vec{b}| = 6 \quad \theta = 60°$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = \boxed{\quad}$



(4) $|\vec{a}| = 5 \quad |\vec{b}| = 5 \quad \theta = 45°$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = \boxed{\quad}$

(5) $\vec{a} = (4, 2) \quad \vec{b} = (3, 4)$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y = \boxed{\quad}$

(6) $\vec{a} = (-1, 2) \quad \vec{b} = (2, 5)$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y = \boxed{\quad}$



(7) $|\vec{a}| = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = \sqrt{2} \quad \theta = 45°$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = \boxed{\quad}$

(8) $\vec{a} = (1, 1) \quad \vec{b} = (1, -1)$ $\qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y = \boxed{\quad}$

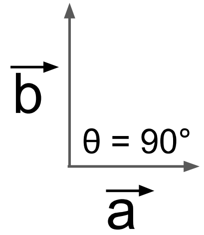
練習問題10

問1 $\vec{a} = (-2, 2)$ $\vec{b} = (4, 4)$ のとき
2つのベクトルが垂直かどうか調べよ

2つのベクトルの垂直チェッカー

内積 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

$a_x \times b_x + a_y \times b_y = 0 \Leftrightarrow a \perp b$



$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y = \boxed{\quad}$ ゆえに a と b は $\boxed{\qquad\qquad}$

問2 a = (4, 4) b = (8, 0) のとき
2つのベクトルの角度をもとめよ

正規化
単位ベクトル$\vec{e}$

$\vec{e}_a = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$

$\vec{e}_b = \mathrm{Norm}(\vec{b}) = \frac{b}{|b|} = (\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$

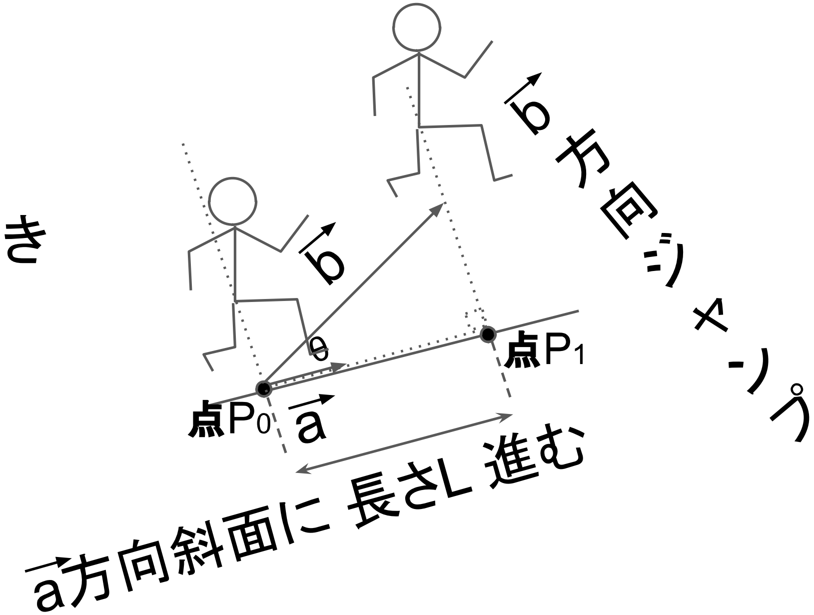
$\cos\theta = \vec{e}_a \bullet \vec{e}_b = e_{ax} \times e_{bx} + e_{ay} \times e_{by} = \boxed{\quad}$ ゆえに $\theta = \boxed{\quad}$

2つのベクトルの角度

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が正規化されて | a | = 1 | b | = 1 なら
単位ベクトル化

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos\theta$

練習問題11



問1 図のようにキャラが 斜面方向に a で進んでいるとき
ある地点 P_0 でキャラが $\vec{b}$ の方向にジャンプしたとき
$\vec{a} = (4, 3)$　$\vec{b} = (5, 10)$とすると
(1) 斜面を $\vec{a}$ 方向にキャラはどれだけ進みますか?

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \boxed{}$$

正規化 単位ベクトル$\vec{e}$

$$\vec{e}_a = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\underset{①}{\boxed{}}, \underset{②}{\boxed{}})$$

$$\text{長さ}L = \vec{e}_a \bullet \vec{b} = (\underset{①}{\boxed{e_{ax}}} \times b_x + \underset{②}{\boxed{e_{ay}}} \times b_y) = \underset{③}{\boxed{}}$$

もしくは $L = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|}$ **のままにしておいて**

(2) 点P_0(1, 1)とするとき、ジャンプ先から斜面方向に垂直に下した点P_1を求めよ

$$\text{点}P_1 = P_0 + L\,\vec{e}_a = (1, 1) + \underset{③}{\boxed{}}(\underset{①}{\boxed{}}, \underset{②}{\boxed{}}) = (\boxed{}, \boxed{})$$

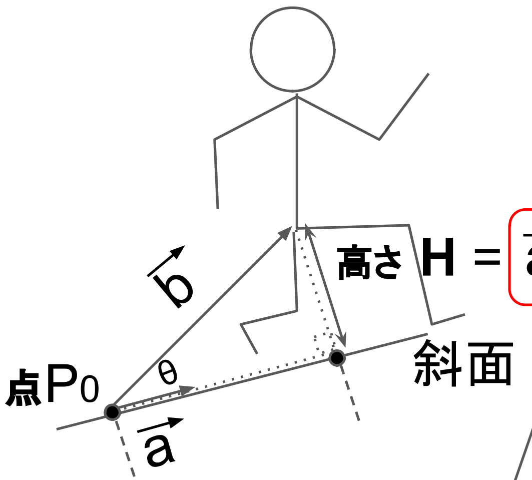
$|\vec{a}|$のルート計算を回避

UnityのVector3のProject関数
正射影ベクトルと呼ぶ

ルートせずに 2乗のままなら
かけ算やわり算だけで完結できる

もしくは $\dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|} \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \rightarrow \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \rightarrow \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{4^2 + 3^2}\vec{a} \rightarrow$ **この方法なら$\sqrt{}$の計算を節約でき プログラムでの処理速度も高速になる**

ベクトルの外積を使えば斜面上からどのくらい離れた位置にキャラを立たせればいいかを sinθをすっとばして計算できてしまう



高さ H = $\vec{a} \boxed{\times} \vec{b}$

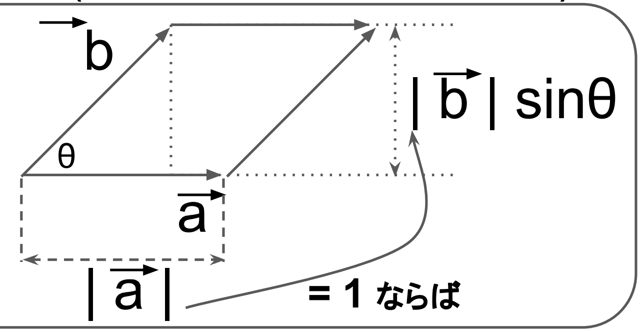
$|a| = 1$(単位ベクトルならば)

普通のかけ算と区別するためにこの資料では $\boxed{\times}$ で書く(一般的にはただの×の書き方が普通)

外積 $\vec{a} \underset{クロス}{\boxed{\times}} \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$

$= a_x b_y - a_y b_x$

= **平行四辺形の面積**



外積は たすき掛け

$$\begin{array}{cc} \oplus & \ominus \\ \end{array} \quad \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \Rightarrow \overset{\oplus}{a_x b_y} - \overset{\ominus}{a_y b_x}$$

例えば a = (4, 2)　b = (3, 1) なら

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{b} = 4 \underset{普通の掛け算}{\times} 1 - 2 \underset{普通の掛け算}{\times} 3 = 4 - 6 = -2$

このプリントでは区別のため
$\underset{外積}{\boxed{\times}}$ **普通の掛け算と違うので**
勘違いに注意

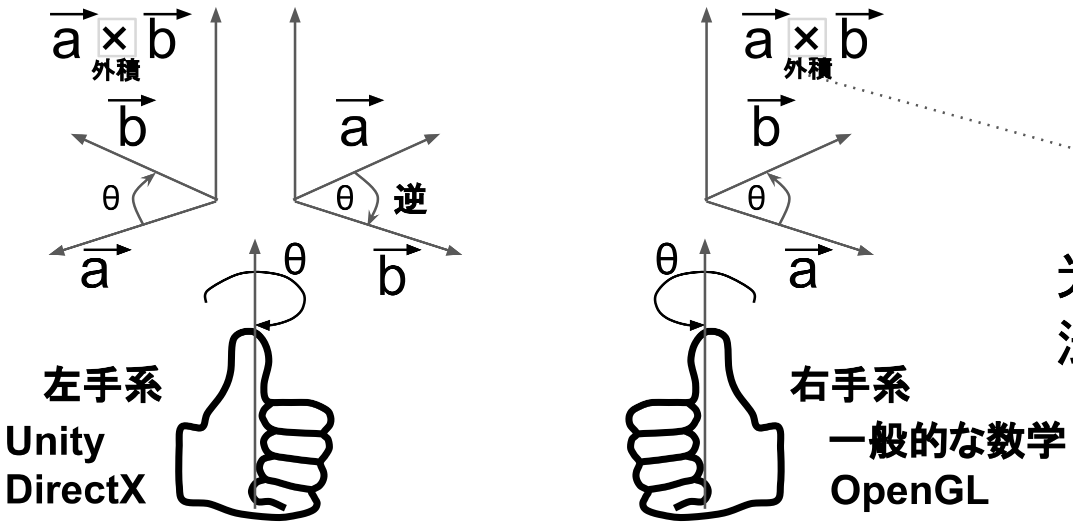
3次元ベクトルの<u>外積</u>の場合は2次元と違って
ある3Dポリゴンの面から垂直な<u>法線ベクトル方向</u>になる

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ とすると

$\vec{a} \underset{外積}{\times} \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y,\ a_zb_x - a_xb_z,\ a_xb_y - a_yb_x)$

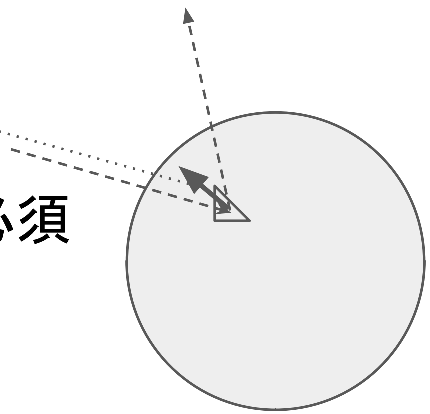
左手系

2つのベクトルに垂直な方向を向いた大きさが$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ のベクトル



左手系と右手系では外積の向きが逆になっちゃうので注意

光の反射には
法線ベクトルが必須



外積の演算法則集

交換法則

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (通常イメージ通りの交換は成り立たない)

分配法則

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

結合法則

数値なら後ろに移動できる

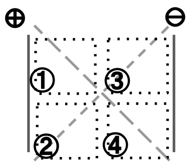
$(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (m\vec{b})$　m は数字(スカラー:2倍とか)

練習問題

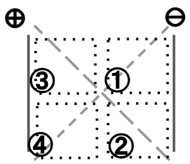
問1 次のベクトルの外積 $(\vec{a} \times \vec{b})$ と $(\vec{b} \times \vec{a})$ の計算をせよ

(1) $\vec{a} = (\underset{\textcircled{1}}{3}, \underset{\textcircled{2}}{1})$　$\vec{b} = (\underset{\textcircled{3}}{2}, \underset{\textcircled{4}}{3})$

$\vec{a} \times \vec{b} = \underset{\textcircled{1}}{\boxed{}} \times \underset{\textcircled{4}}{\boxed{}} - \underset{\textcircled{2}}{\boxed{}} \times \underset{\textcircled{3}}{\boxed{}} = \boxed{}$



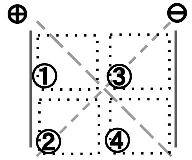
$\vec{b} \times \vec{a} = \underset{\textcircled{3}}{\boxed{}} \times \underset{\textcircled{2}}{\boxed{}} - \underset{\textcircled{4}}{\boxed{}} \times \underset{\textcircled{1}}{\boxed{}} = \boxed{}$



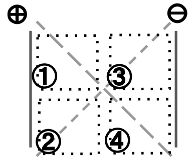
練習問題12

問1 次のベクトルの外積 ($\vec{a}\times\vec{b}$)の計算をせよ

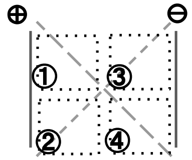
(1) $\vec{a} = (\underset{\text{①}}{3}, \underset{\text{②}}{1})$ $\vec{b} = (\underset{\text{③}}{2}, \underset{\text{④}}{3})$ $\vec{a}\times\vec{b} = \underset{\text{①}}{\square} \times \underset{\text{④}}{\square} - \underset{\text{②}}{\square} \times \underset{\text{③}}{\square} = \square$



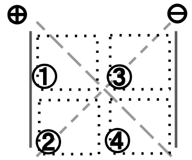
(2) $\vec{a} = (-2, 3)$ $\vec{b} = (4, 5)$ $\vec{a}\times\vec{b} = \underset{\text{①}}{\square} \times \underset{\text{④}}{\square} - \underset{\text{②}}{\square} \times \underset{\text{③}}{\square} = \square$



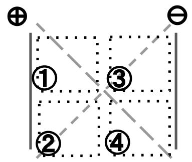
(3) $\vec{a} = (6, 3)$ $\vec{b} = (-3, 1)$ $\vec{a}\times\vec{b} = \underset{\text{①}}{\square} \times \underset{\text{④}}{\square} - \underset{\text{②}}{\square} \times \underset{\text{③}}{\square} = \square$



(4) $\vec{a} = (6, 3)$ $\vec{b} = (6, 3)$ $\vec{a}\times\vec{b} = \underset{\text{①}}{\square} \times \underset{\text{④}}{\square} - \underset{\text{②}}{\square} \times \underset{\text{③}}{\square} = \square$

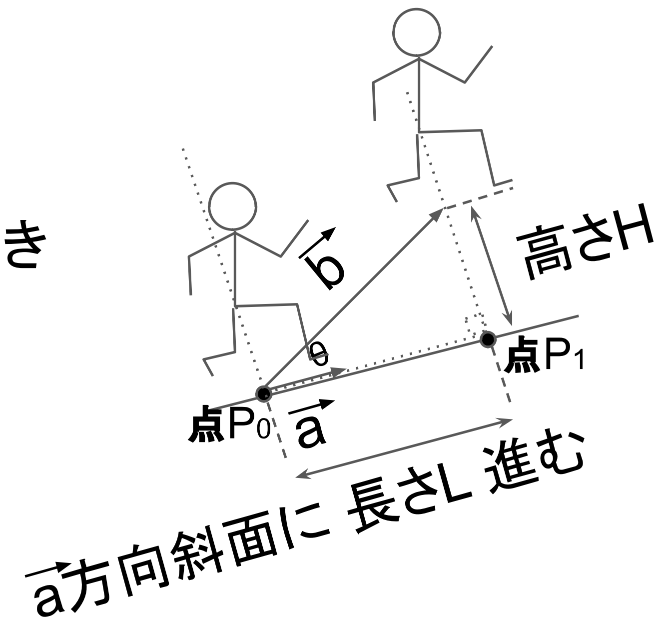


(5) $\vec{a} = (6, 3)$ $\vec{b} = (-6, -3)$ $\vec{a}\times\vec{b} = \underset{\text{①}}{\square} \times \underset{\text{④}}{\square} - \underset{\text{②}}{\square} \times \underset{\text{③}}{\square} = \square$



練習問題13

問1 図のようにキャラが 斜面方向に a で進んでいるとき
ある地点 P_0 でキャラが $\vec{b}$ の方向にジャンプしたとき
$\vec{a} = (12, 5)$ $\vec{b} = (13, 13)$とすると



(1) 斜面方向の長さLを求めよ

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \boxed{}$$

正規化
単位ベクトルe

$$\vec{e_a} = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\underset{①}{\boxed{}}, \underset{②}{\boxed{}})$$

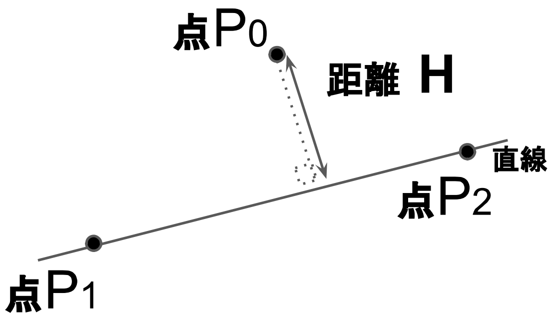
$$長さL = \vec{e_a} \underset{内積}{\bullet} \vec{b} = \underset{①}{\boxed{e_{ax}}}\, b_x + \underset{②}{\boxed{e_{ay}}}\, b_y = \boxed{}$$

(2) 斜面からの高さHを求めよ

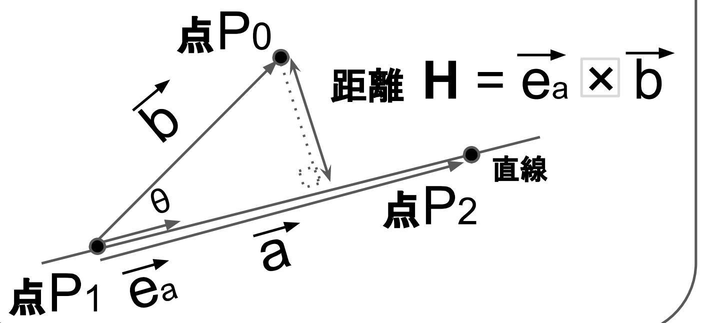
$$高さH = \vec{e_a} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{b} = \underset{①}{\boxed{e_{ax}}}\, b_y - \underset{②}{\boxed{e_{ay}}}\, b_x = \boxed{}$$

ベクトルの外積は点と直線の距離の計算と左右判定に使える

※2Dの場合
3Dの外積は面に垂直な方向になっちゃうので
2Dと3Dでは内積と外積の駆使の仕方は変わる

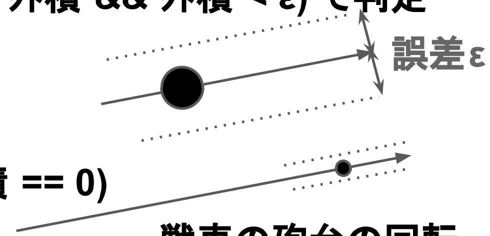


$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$ $\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{b}$ とすると

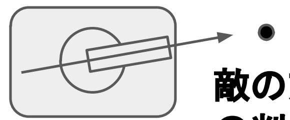


if (外積 == 0) なら
点P0は直線上だけど
ぴったり0は中々厳しいので

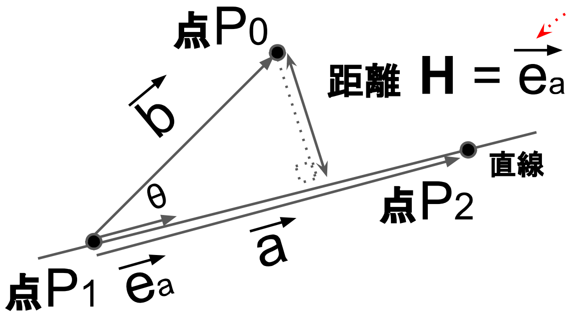
if (-ε < 外積 && 外積 < ε) で判定



戦車の砲台の回転

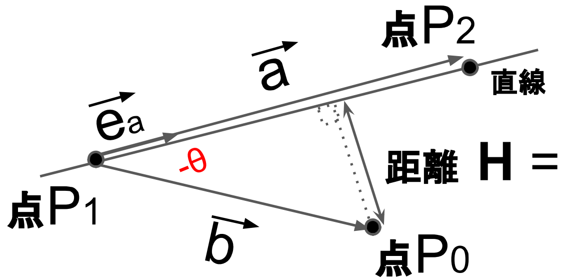


敵の方向の判定



右か左かの方位判定にも外積が使える

点P1からみて点P0が右回りの逆回転方向だと



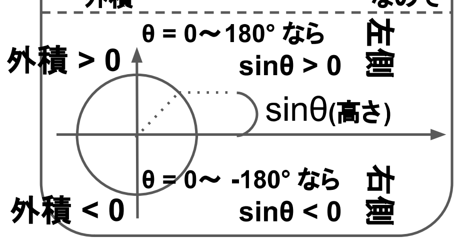
距離 H $= \vec{b} \times \vec{e}_a = - \vec{e}_a \times \vec{b}$

if (外積 > 0) なら 点P0は左側

if (外積 < 0) なら 点P0は右側

外積の⊕⊖で厳密な sinθの角度を求めずとも左右判別ができる

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$



練習問題14

問1 2点P_1 = (1, 2) P_2 = (-2, 14) を通る直線$\overrightarrow{P_1P_2}$と点P_0 = (-4, 5)の最短距離を求めよ

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 14) - (1, 2) = (\underset{①}{\boxed{}}, \underset{②}{\boxed{}})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_0} = (-4, 5) - (1, 2) = (\boxed{}, \boxed{})$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\underset{①}{\boxed{a_x^2}} + \underset{②}{\boxed{a_y^2}}} = \boxed{}$$

正規化
単位ベクトル$\vec{e}$

$$\vec{e_a} = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\underset{③}{\boxed{}}, \underset{④}{\boxed{}})$$

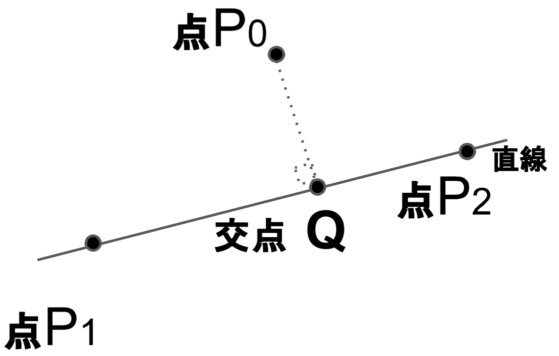
最短距離 $\mathbf{H} = \vec{e_a} \times \vec{b} = \underset{③}{\boxed{e_{ax}}}\, b_y - \underset{④}{\boxed{e_{ay}}}\, b_x = \boxed{}$

図にかいてみよ　$\sqrt{17} = 4.123$

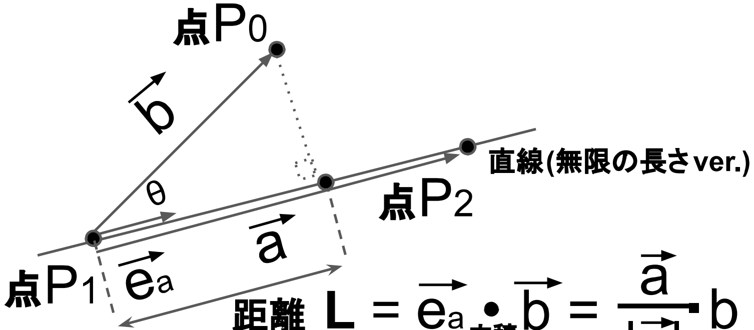
問2 点P_0は直線P_1P_2に対してどちら側?

最短距離 **H** が0より $\boxed{}$ ので
右側(時計まわり側) か 左側(反時計まわり側)
かでいうと $\boxed{}$

ベクトルの内積は点から直線に下した交点の計算に使える



$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$　$\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{b}$とすると



距離 $\mathbf{L} = \vec{e}_a \underset{内積}{\bullet} \vec{b} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot b = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|}$

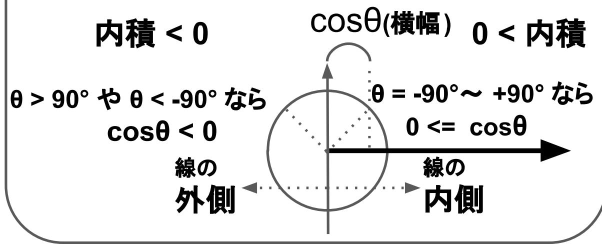
$$\overrightarrow{P_1\mathbf{Q}} = \mathbf{L}\,\vec{e}_a = (\vec{e}_a \underset{内積}{\bullet} \vec{b})\,\vec{e}_a = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$

点$\mathbf{Q}$ = 点$P_1 + \overrightarrow{P_1\mathbf{Q}}$

ほかにも

内積の⊕⊖で厳密な cosθの角度
を求めずとも内側、外側判別にもつかえる

$\vec{a} \underset{内積}{\bullet} \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ なので

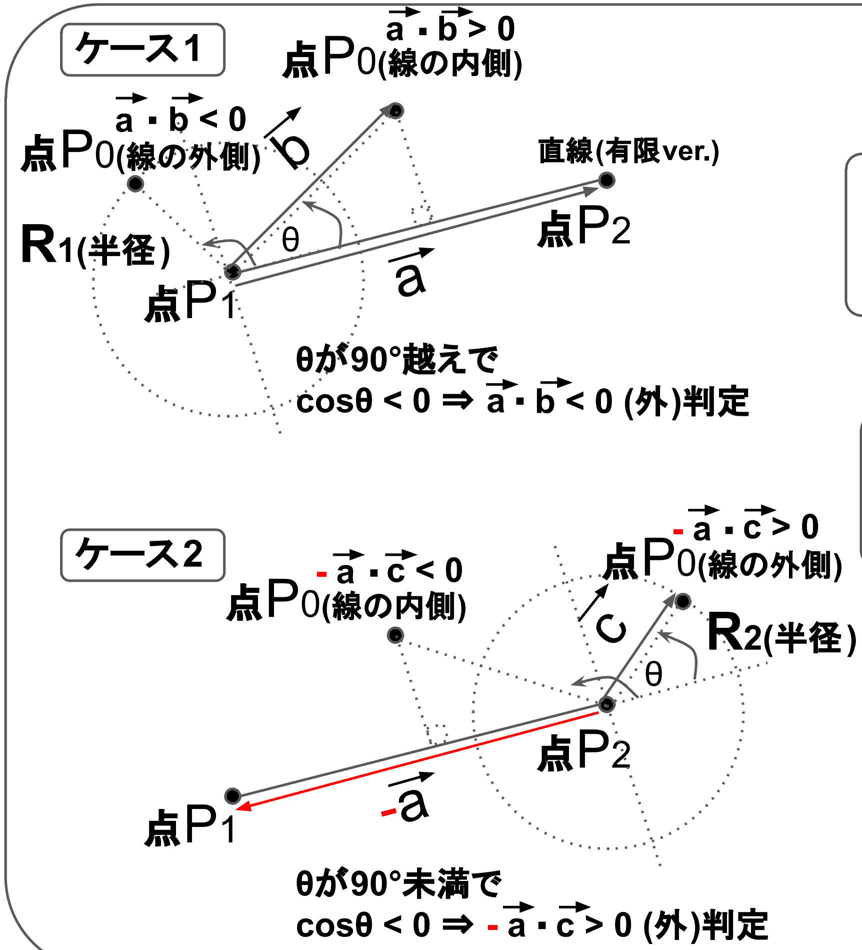


$$\overrightarrow{P_1\mathbf{Q}} = \left(\frac{\overset{a_xb_x + a_yb_y}{\vec{a} \bullet \vec{b}}}{\underset{a_x^2 + a_y^2}{|\vec{a}|^2}}\right)\vec{a}$$

内積は線の内側か外側かの判定にも使える

点と線の 最短距離H は
直線の内側か外側かで外積か円の半径距離か切替

内積dotドット・で判別



$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$ $\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{b}$ $\overrightarrow{P_2P_0} = \vec{c}$ とするとき

$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$(P1より外側)のとき

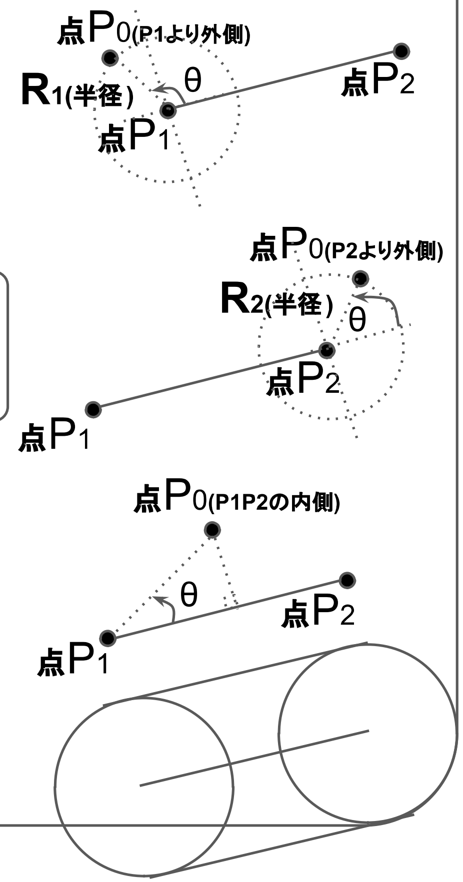
距離 $H = R_1 = |\overrightarrow{P_1P_0}| = |\vec{b}|$

$-\vec{a}\cdot\vec{c} > 0$(P2より外側)のとき

距離 $H = R_2 = |\overrightarrow{P_2P_0}| = |\vec{c}|$

それ以外のとき

距離 $H = \vec{e}_a \underset{外積}{\times} \vec{b}$



2Dカプセルコライダーの当たり判定

練習問題15

問1 2点$P_1 = (6, 10)$ $P_2 = (11, 12)$ を端点とするとき点$P_0 = (2, 3)$との最短距離を求めよ

$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (11, 12) - (6, 10) = (\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$

図にかいてみよ

$\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_0} = (2, 3) - (6, 10) = (\underset{①}{\boxed{\quad}}, \underset{②}{\boxed{\quad}})$

$\vec{a} \underset{内積}{\bullet} \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \boxed{\quad}$ 0より $\boxed{\qquad}$

上記の < 0 判定によりP_0はP_1の外側に
あったのでP_2の判定は必要ない
外側なので、最短距離HはP_1P_0の距離

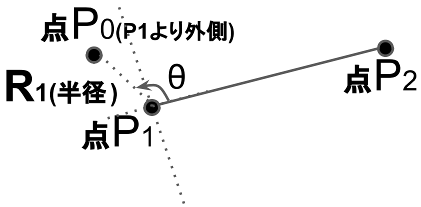
最短距離 $H = |\vec{b}| = \sqrt{\underset{①}{\boxed{b_x^2}} + \underset{②}{\boxed{b_y^2}}} = \boxed{\quad}$

円と線分(有限の直線)の当たり判定

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$ $\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{b}$ $\overrightarrow{P_2P_0} = \vec{c}$ とするとき

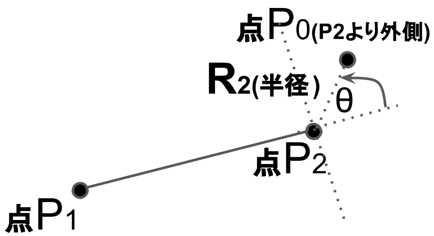
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$(P1より外側)のとき

距離 $\mathbf{H} = \mathbf{R_1} = |\overrightarrow{P_1P_0}| = |\vec{b}|$



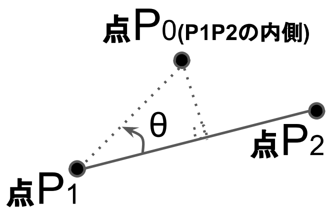
$-\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$(P2より外側)のとき

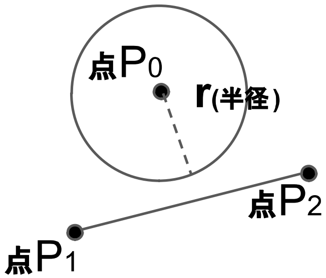
距離 $\mathbf{H} = \mathbf{R_2} = |\overrightarrow{P_2P_0}| = |\vec{c}|$

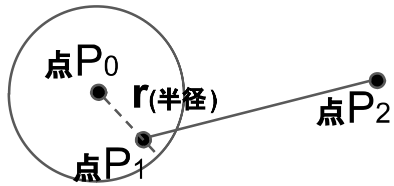


それ以外のとき

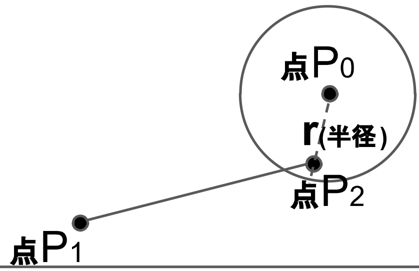
距離 $\mathbf{H} = \vec{e_a} \boxed{\times} \vec{b}$
外積



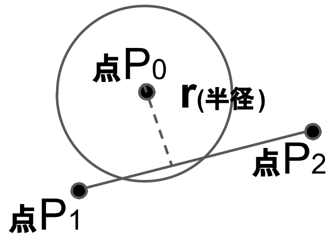




距離 $\mathbf{H}^2 = \mathbf{R_1}^2 = |\overrightarrow{P_1P_0}|^2 = |\vec{b}|^2 \leqq \mathbf{r}^2$ のとき衝突

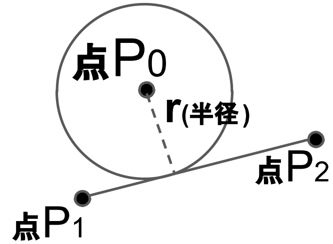


距離 $\mathbf{H}^2 = \mathbf{R_2}^2 = |\overrightarrow{P_2P_0}|^2 = |\vec{c}|^2 \leqq \mathbf{r}^2$ のとき衝突



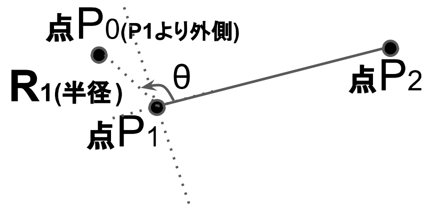
距離 $\mathbf{H}^2 = |\vec{e_a} \boxed{\times} \vec{b}|^2 \leqq \mathbf{r}^2$ のとき衝突
外積

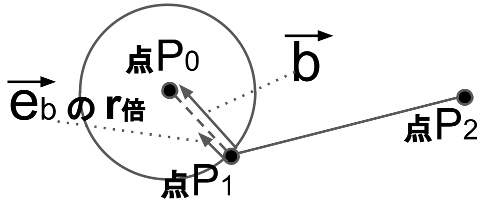
円を線分(地面)に<u>ぴったり沿わす</u>には



$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$　$\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{b}$　$\overrightarrow{P_2P_0} = \vec{c}$ とするとき

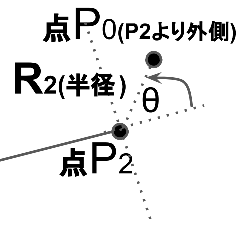
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$(P1より外側)のとき

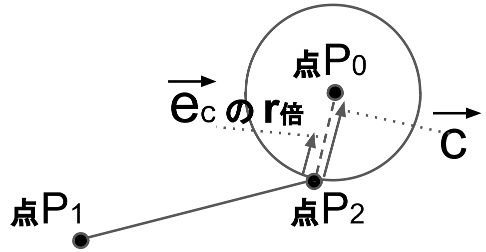




$P_0 = P_1 + \mathbf{r}\,\vec{e}_b$ のときぴったり沿う

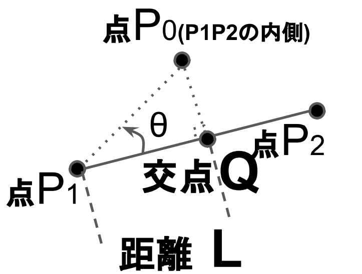
$-\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$(P2より外側)のとき





$P_0 = P_2 + \mathbf{r}\,\vec{e}_c$ のときぴったり沿う

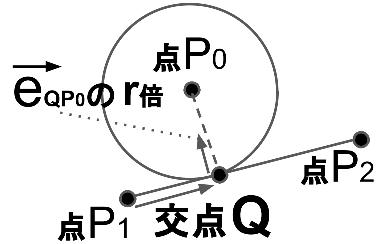
それ以外のとき



$\overrightarrow{P_1\mathbf{Q}} = \mathbf{L}\,\vec{e}_a$

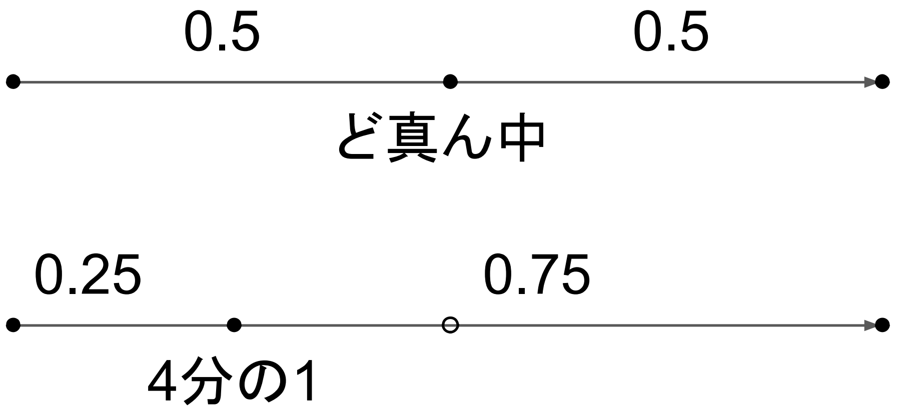
点$\mathbf{Q}$ = 点$P_1 + \overrightarrow{P_1\mathbf{Q}}$

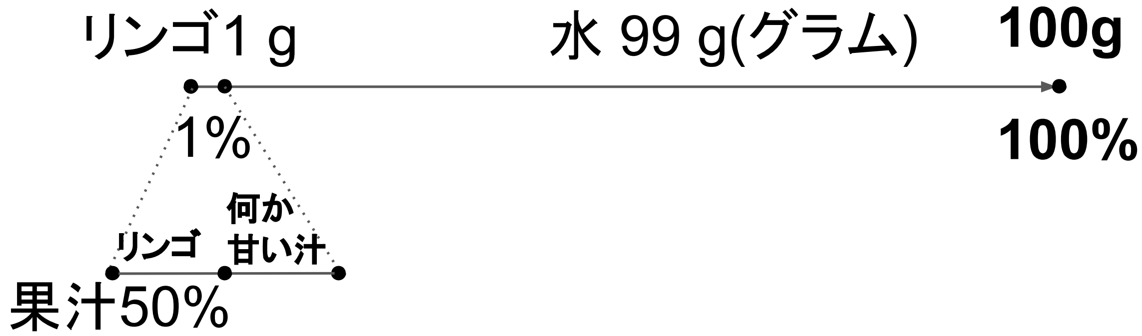
$\vec{e}_{QP_0} = \mathrm{Norm}(\overrightarrow{\mathbf{Q}P_0})$

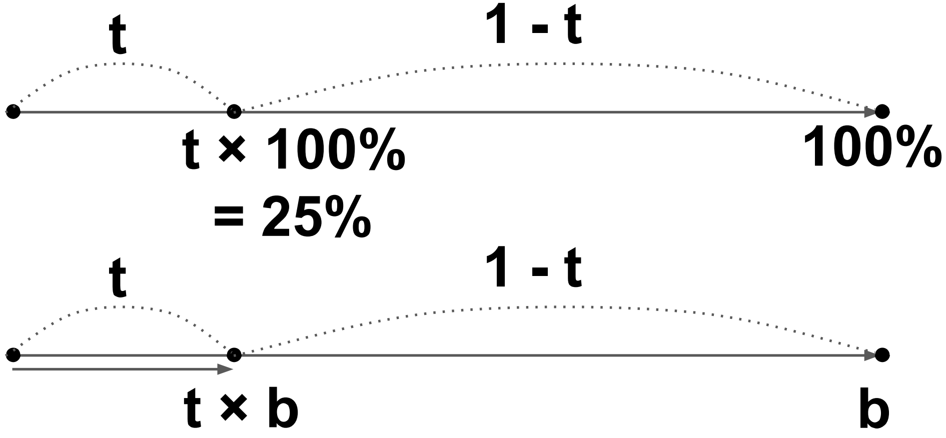


$P_0 =$ 点$\mathbf{Q} + \mathbf{r}\,\vec{e}_{QP_0}$ のときぴったり沿う

比率についての確認







練習問題

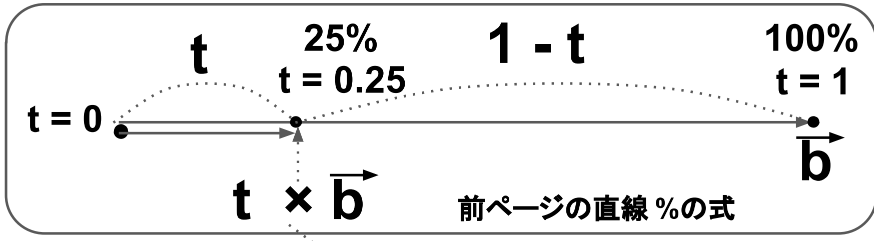
問1 税込100円のパンを3割引で買った値段は

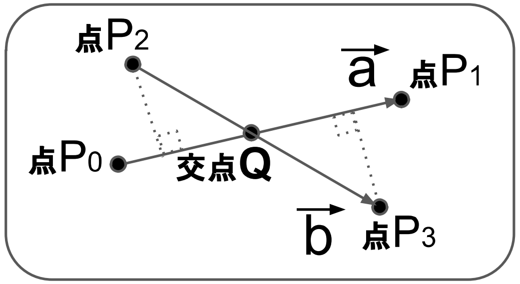
$$100 \times \left(\frac{10}{10} - \frac{3}{10}\right) = 100\times(1 - 0.3) = \boxed{} \text{円}$$

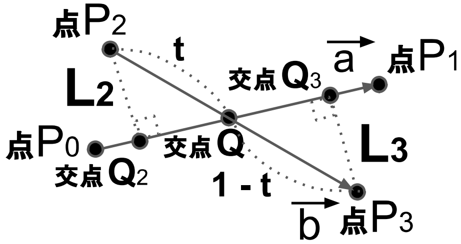
問2 30分のアニメ25%再生した残り時間は何分?

$$30 \times \left(\frac{100}{100} - \frac{25}{100}\right) = 30\times(1 - 0.25) = \boxed{} \text{分}$$

2つの線分の交点をもとめるには



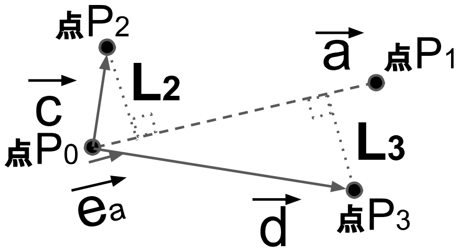




$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}$　$\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{b}$　$\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{c}$　$\overrightarrow{P_0P_3} = \vec{d}$　とするとき

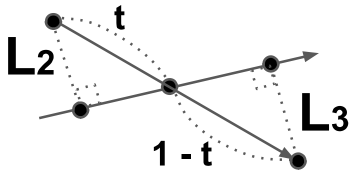
こたえ

点$\mathbf{Q}$ = 点$P_2 + \overrightarrow{P_2\mathbf{Q}}$ = 点$P_2 + \mathbf{t}\,\vec{b}$



$$\mathbf{L_2} = |\vec{e_a} \times \vec{c}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a} \times \vec{c}|$$

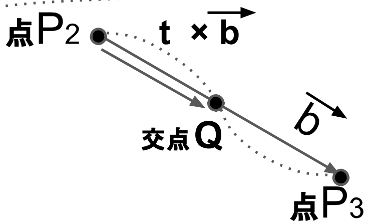
$$\mathbf{L_3} = |\vec{e_a} \times \vec{d}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a} \times \vec{d}|$$



$\mathbf{L_2 : L_3 = t : 1 - t}$ **(比率)**

$$\mathbf{L_3\,t = L_2\,(1 - t)}$$
$$\mathbf{L_3\,t = L_2 - L_2\,t}$$
$$\mathbf{L_2\,t + L_3\,t = L_2}$$
$$\mathbf{(L_2 + L_3)\,t = L_2}$$

$\overrightarrow{P_2\mathbf{Q}} = \mathbf{t}\,\vec{b}$



$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{L_2}}{\mathbf{(L_2 + L_3)}} = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{c}| + |\vec{a} \times \vec{d}|}$$

練習問題16

問1 線分1: $P_0 = (5, 5)$ $P_1 = (15, 11)$ 線分2: $P_2 = (5, 10)$ $P_3 = (15, 6)$ の交点Qを求めよ

$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (15, 11) - (5, 5) = (\boxed{①}, \boxed{②})$

$\vec{b} = \overrightarrow{P_2P_3} = (15, 6) - (5, 10) = (\boxed{③}, \boxed{④})$

$\vec{c} = \overrightarrow{P_0P_2} = (5, 10) - (5, 5) = (\boxed{⑤}, \boxed{⑥})$

$\vec{d} = \overrightarrow{P_0P_3} = (15, 6) - (5, 5) = (\boxed{⑦}, \boxed{⑧})$

比率 $$\mathbf{t} = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{c}| + |\vec{a} \times \vec{d}|}$$

$$= \frac{|\underset{①}{a_x}\,\underset{⑥}{c_y} - \underset{②}{a_y}\,\underset{⑤}{c_x}|}{|\underset{①}{a_x}\,\underset{⑥}{c_y} - \underset{②}{a_y}\,\underset{⑤}{c_x}| + |\underset{①}{a_x}\,\underset{⑧}{d_y} - \underset{②}{a_y}\,\underset{⑦}{d_x}|} = \boxed{⑨}$$

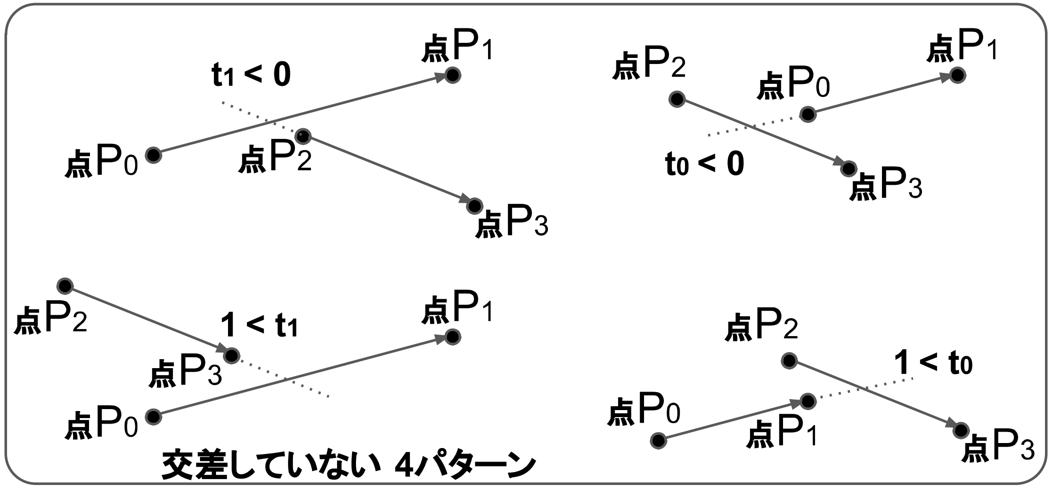
$$点\mathbf{Q} = 点P_2 + \overrightarrow{P_2\mathbf{Q}} = 点P_2 + \mathbf{t}\,\vec{b}$$

$$= (5, 10) + \boxed{⑨}(\boxed{③}, \boxed{④})$$

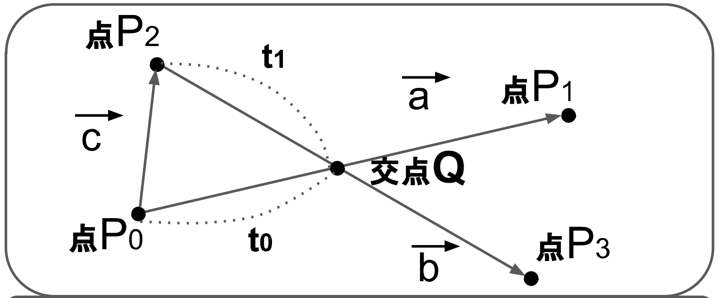
こたえ $= (\boxed{}, \boxed{})$

図にかいてみよ

2つの線分が交差するかの判定



$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}$　$\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{b}$ とするとき



$0 < t_0 < 1$ かつ $0 < t_1 < 1$ なら交差している

判定条件

$-\vec{c} + t_0\vec{a} = t_1\vec{b}$

$-\vec{c} + t_0\vec{a} = \vec{c} + t_1\vec{b}$

$\overrightarrow{P_0Q} = \boxed{t_0\vec{a} = \vec{c} + t_1\vec{b}}$

$t_0\vec{a}$と $\vec{a}$は平行なので　$t_0\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$(\vec{c} + t_1\vec{b}) \times \vec{a} = 0$

$\vec{c} \times \vec{a} + t_1\vec{b} \times \vec{a} = 0$

$t_1\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c} \times \vec{a}$

材料 $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ から
t_1のもとめかた

点Q = 点$P_2 + t_1\vec{b}$

$$t_1 = -\frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{b} \times \vec{a}} = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \times \vec{b}}$$

点Q = 点$P_2 + t_1\vec{b}$

点Q - 点$P_2 = t_1\vec{b}$

$\overrightarrow{P_2Q} = \boxed{t_1\vec{b} = -\vec{c} + t_0\vec{a}}$

$t_1\vec{b}$と $\vec{b}$は平行なので　$t_1\vec{b} \times \vec{b} = 0$

$(-\vec{c} + t_0\vec{a}) \times \vec{b} = 0$

$-\vec{c} \times \vec{b} + t_0\vec{a} \times \vec{b} = 0$

$t_0\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$

材料 $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ から
t_0のもとめかた

点Q = 点$P_0 + t_0\vec{a}$

$$t_0 = \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{\vec{a} \times \vec{b}}$$

2Dと3Dの外積と法線ベクトルの比較

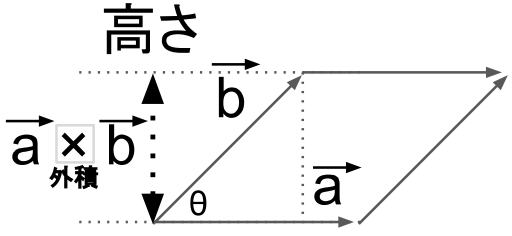
2D

外積は たすき掛け

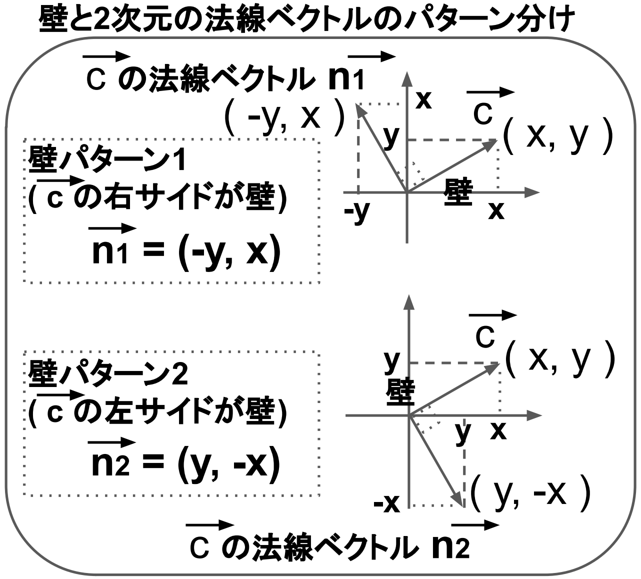
$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{b} \Rightarrow \overset{\oplus}{} a_x b_y - \overset{\ominus}{} a_y b_x$$

数字(スカラー)になる



2Dの場合は外積と
法線ベクトルはべつもの



3D

$$\begin{array}{c} 外積 \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \text{xをループ}\ a_x \quad b_x \end{array}$$

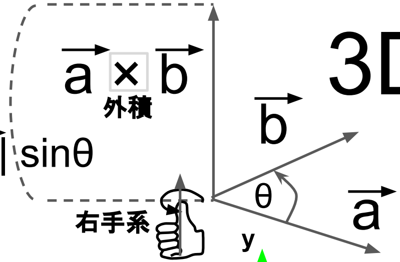
$\Rightarrow a_y b_z - a_z b_y$

$\Rightarrow a_z b_x - a_x b_z$

$\Rightarrow a_x b_y - a_y b_x$

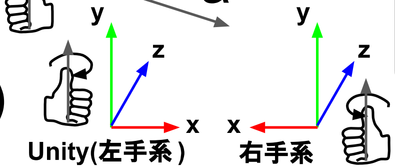
大きさ

$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$

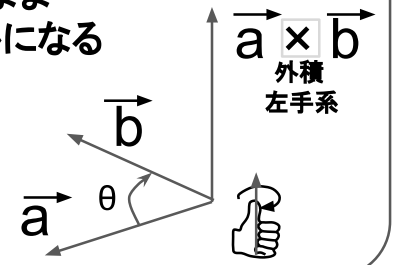


$$\vec{a} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{b} \underset{左手系}{=} (\,a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x\,)$$

ベクトルになる



外積がそのまま
法線ベクトルになる



練習問題

問1 $\vec{a} = (3, 0, 0)$ $\vec{b} = (0, 0, 4)$ のとき $\vec{a} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{b}$ (左手系) をもとめよ

こたえ

$\vec{a} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{b} = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$

問2 $\vec{a} = (3, 0, 0)$ $\vec{b} = (0, 0, 4)$ のとき $\vec{b} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{a}$ (左手系) をもとめよ

こたえ

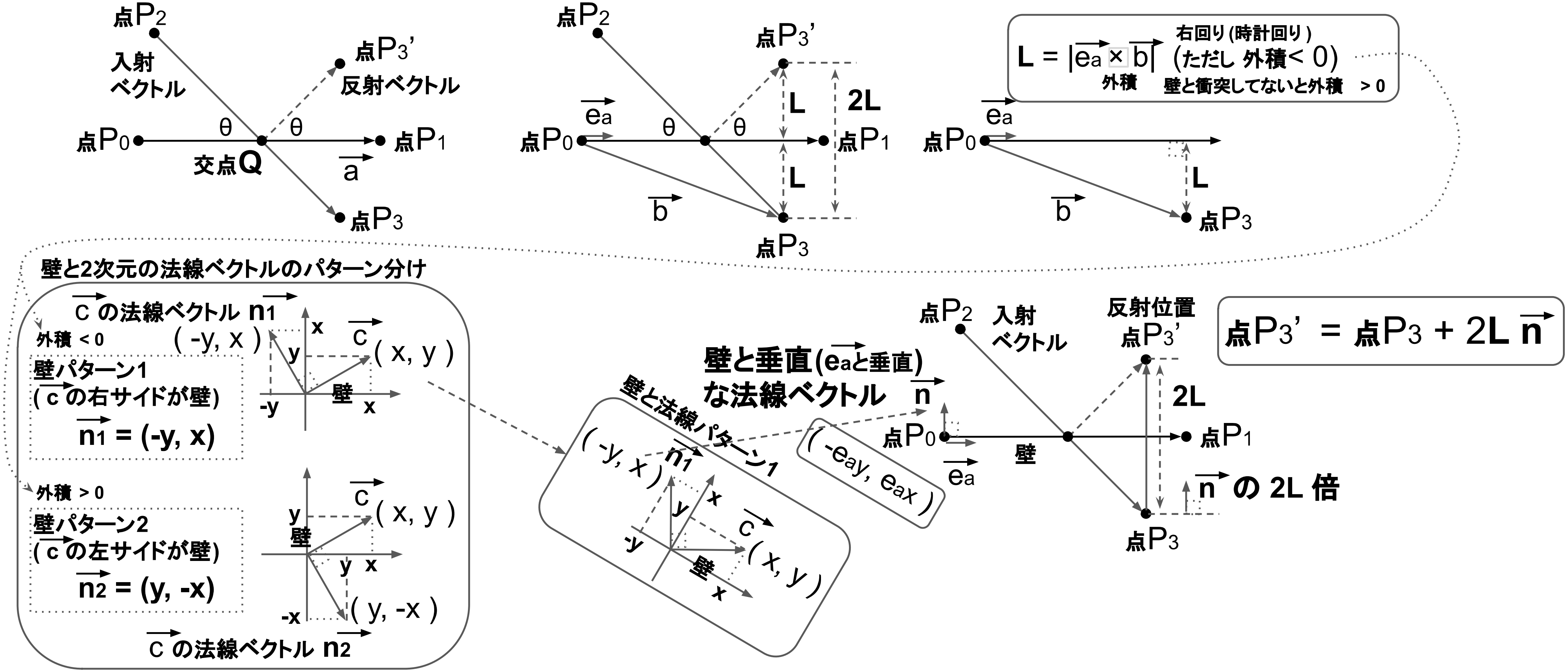
$\vec{b} \underset{外積}{\boxed{\times}} \vec{a} = (\boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$

ベクトルの反射をもとめるには

前のページの交点Qの式

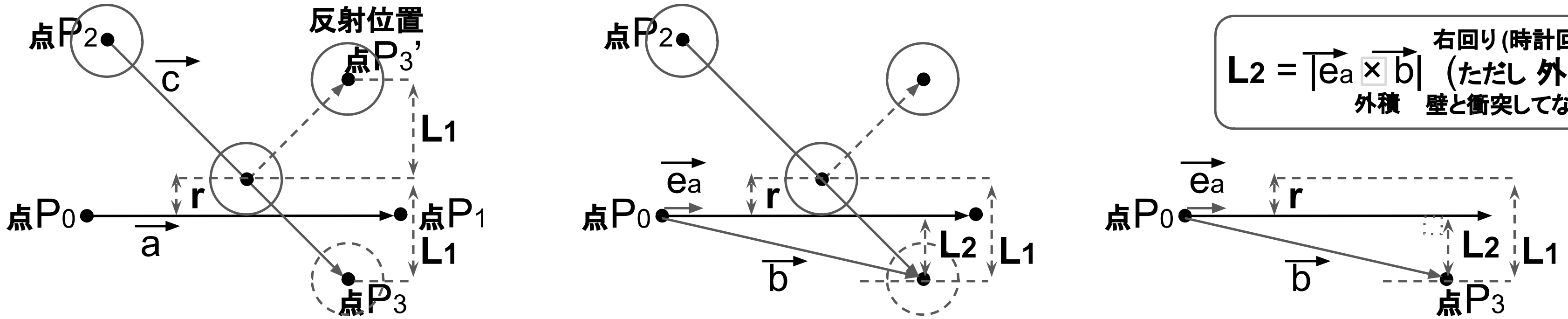
交点$\mathbf{Q}$ = 点$P_2 + \mathbf{t_1}\,\overrightarrow{b}$　　$\mathbf{t_1} = \dfrac{\overrightarrow{P_0P_2} \times \overrightarrow{a}}{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{P_2P_3}}$

$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{a}$　$\overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{b}$ とするとき



円(球)の反射をもとめるには

$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{a}$　$\overrightarrow{P_0P_3} = \vec{b}$ とするとき



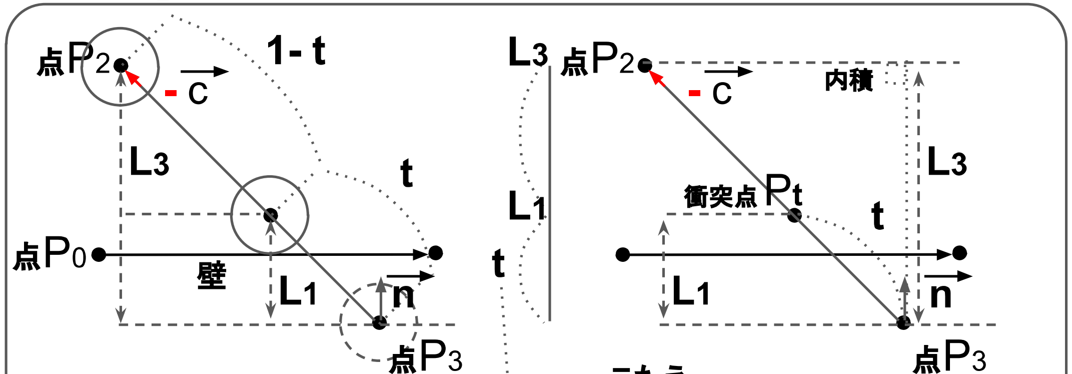
右回り(時計回り)

$L_2 = |\vec{e_a} \times \vec{b}|$ (ただし 外積 < 0)

外積　壁と衝突してないと外積 > 0

$L_1 = r + L_2$

衝突点 Pt をもとめるには



$L_3 = -\vec{c} \cdot \vec{n}$
内積

または

$L_3 = \vec{c} \cdot \vec{n}$

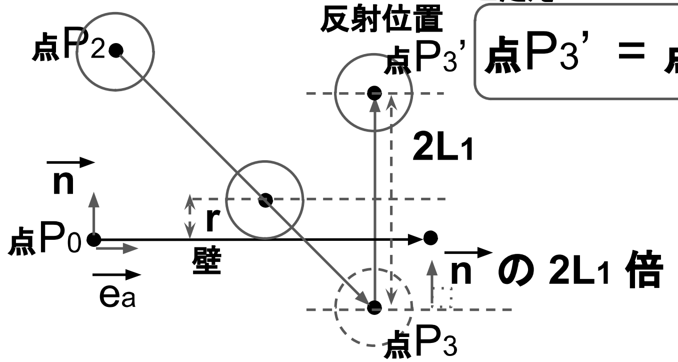
$t = \dfrac{L_1}{L_3}$

こたえ

衝突点 P_t = 点 P_3 + $t\,(-\vec{c})$

または

衝突点 P_t = 点 P_3 + $t\,\vec{c}$



こたえ

点P_3' = 点P_3 + $2L_1\vec{n}$

練習問題17

問1 壁01: $P_0 = (1, 1)$ $P_1 = (7, 4)$ 光線23: $P_2 = (3, 4)$ $P_3 = (8, 2)$ の反射点$P_3{}'$を求めよ

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (7, 4) - (1, 1) = (\boxed{}_{①}, \boxed{}_{②})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_3} = (8, 2) - (1, 1) = (\boxed{}_{③}, \boxed{}_{④})$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\boxed{a_x^2}_{①} + \boxed{a_y^2}_{②}} = \boxed{}_{⑤}$$

正規化
単位ベクトル$\vec{e}$

$$\vec{e_a} = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(\boxed{}_{①}, \boxed{}_{②})}{\boxed{}_{⑤}} = (\boxed{}_{⑥}, \boxed{}_{⑦})$$

長さ$\mathbf{L}$ $= |\vec{e_a} \times \vec{b}| = |\boxed{e_{ax}}_{⑥}\,\boxed{b_y}_{④} - \boxed{e_{ay}}_{⑦}\,\boxed{b_x}_{③}| = \boxed{}_{⑧}$ 長さ(絶対値)なので — マイナスは取る

外積 < 0なので 壁パターン1: aの右サイドが壁

$\vec{e_a}$と垂直な法線 $\vec{\mathbf{n}} = (-\boxed{e_{ay}}_{⑦}, \boxed{e_{ax}}_{⑥}) = (\boxed{}_{⑨}, \boxed{}_{⑩})$

反射点

$$\mathbf{P}_3{}' = \text{点}P_3 + 2\,\mathbf{L}\,\vec{\mathbf{n}}$$

$$= (8, 2) + 2\,\boxed{}_{⑧}(\boxed{}_{⑨}, \boxed{}_{⑩})$$

こたえ $= (\boxed{}, \boxed{})$

図にかいてみよ

練習問題18

問1 円(球)の半径が $r = 1$ で 始点 $P_2 = (3, 4)$にあるとき

壁01: $P_0 = (1, 1)$ $P_1 = (7, 4)$ 方向23: $P_2 = (3, 4)$ $P_3 = (8, 2)$ の反射点P_3'を求めよ

$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (7, 4) - (1, 1) = ($ ① $,$ ② $)$

$\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_3} = (8, 2) - (1, 1) = ($ ③ $,$ ④ $)$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} =$ ⑤ (①: a_x, ②: a_y)

正規化
単位ベクトル$\vec{e}$

$\vec{e_a} = \mathrm{Norm}(\vec{a}) = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{(①, ②)}{⑤} = ($ ⑥ $,$ ⑦ $)$

長さ$L_2 = |\vec{e_a} \times \vec{b}| = |e_{ax}\, b_y - e_{ay}\, b_x| =$ ⑧ (⑥: e_{ax}, ④: b_y, ⑦: e_{ay}, ③: b_x)

長さ(絶対値)なので
ー マイナスは取る

長さ$L_1 = r + L_2 =$ ⑨ (⑧: L_2)

外積 < 0なので 壁パターン1: aの右サイドが壁

$\vec{e_a}$と垂直な法線 $\vec{n} = (-e_{ay}, e_{ax}) = ($ ⑩ $,$ ⑪ $)$

反射点

$P_3' =$ 点$P_3 + 2 L_1 \vec{n}$

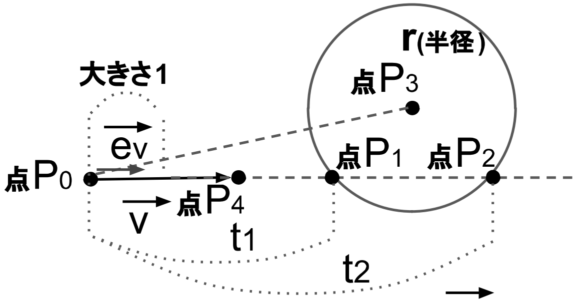
$= (8, 2) + 2$ ⑨ $($ ⑩ $,$ ⑪ $) = ($ $,$ $)$

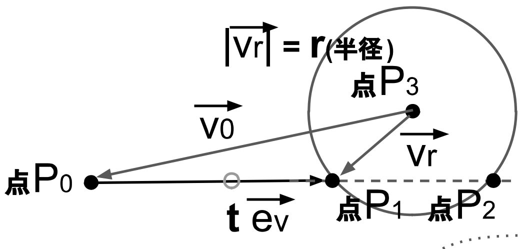
こたえ

図にかいてみよ $\sqrt{5} = 2.236$

円とレイ(光線)の衝突を判定するには

$\overrightarrow{P_0P_4} = \vec{v}$ $\overrightarrow{P_3P_1} = \vec{v_r}$ $\overrightarrow{P_3P_0} = \vec{v_0}$ とするとき





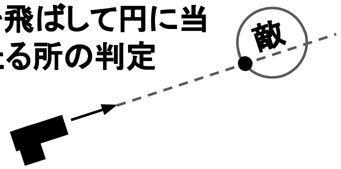
$$\vec{e_v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$\vec{v_r} = \vec{v_0} + t\,\vec{e_v}$ $|\vec{v_r}| = r$(半径)

$$\vec{v_r}\cdot\vec{v_r} = |\vec{v_r}|^2$$

内積

レイ(光線) $\vec{v}$ を飛ばして円に当たる所の判定



$$(\vec{v_0} + t\,\vec{e_v})\cdot(\vec{v_0} + t\,\vec{e_v}) = r^2$$

内積

$$\vec{v_0}\cdot(\vec{v_0} + t\,\vec{e_v}) + t\,\vec{e_v}\cdot(\vec{v_0} + t\,\vec{e_v}) = r^2$$

$$\vec{v_0}\cdot\vec{v_0} + \vec{v_0}\cdot t\,\vec{e_v} + t\,\vec{e_v}\cdot\vec{v_0} + t\,(\vec{e_v}\cdot\vec{e_v}) = r^2$$

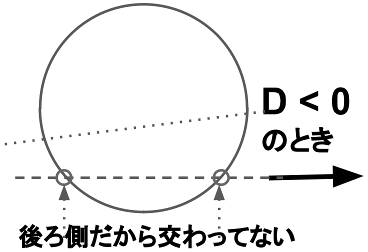
$$t^2(\vec{e_v}\cdot\vec{e_v}) + 2t\,(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v}) + (\vec{v_0}\cdot\vec{v_0}) - r^2 = 0$$

2次方程式の解っぽい式 $(\vec{e_v}\cdot\vec{e_v}) = a$ $(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v}) = b$ $\vec{v_0}\cdot\vec{v_0} - r^2 = c$ とすると

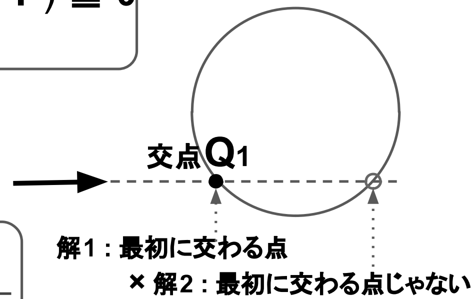
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{-(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v}) \pm \sqrt{(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (\vec{e_v}\cdot\vec{e_v})(\vec{v_0}\cdot\vec{v_0} - r^2)}}{(\vec{e_v}\cdot\vec{e_v}) = 1\ (e_v\text{は単位ベクトル})} = -(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v}) \pm \sqrt{(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (|\vec{v_0}|^2 - r^2)}$$

衝突しているかの判定

$D = (\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (|\vec{v_0}|^2 - r^2) < 0$ のとき 衝突していない



$D = (\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (|\vec{v_0}|^2 - r^2) \geqq 0$ のとき 衝突している



交点Q_1 = 点P_0 + $t_1\,\vec{e_v}$ **こたえ1**

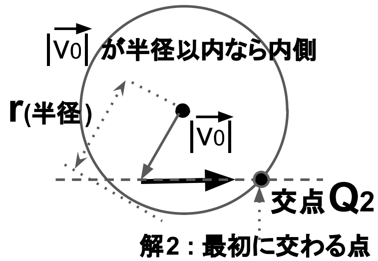
$t > 0$ のとき

$$t_1 = -(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v}) - \sqrt{(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (|\vec{v_0}|^2 - r^2)}$$

交点Q_2 = 点P_0 + $t_2\,\vec{e_v}$ **こたえ2**

$|\vec{v_0}| < r$ かつ $t < 0$ のとき

$$t_2 = -(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v}) + \sqrt{(\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (|\vec{v_0}|^2 - r^2)}$$



ルート√ の中身 D が

$D = (\vec{v_0}\cdot\vec{e_v})^2 - (|\vec{v_0}|^2 - r^2)$

> 0 ⇔ 解2つ(2点と交差)
= 0 ⇔ 解1つ(1点と交差)
< 0 ⇔ 交差しない

練習問題19

問1　円(球)の半径が $r = 2$ で $P_3 = (5, 5)$にあるとき
光線04: $P_0 = (1, 2)$ $P_4 = (3, 3)$ と円(球)の交点 P_1 と P_2 を求めよ

$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_4} = (3, 3) - (1, 2) = (\boxed{}_{①}, \boxed{}_{②})$

$\vec{v_0} = \overrightarrow{P_0P_3} = (1, 2) - (5, 5) = (\boxed{}_{③}, \boxed{}_{④})$

$|\vec{v}| = \sqrt{\underset{①}{v_x}^2 + \underset{②}{v_y}^2} = \boxed{}_{⑤}$　　$|\vec{v_0}| = \sqrt{\underset{③}{v_{0x}}^2 + \underset{④}{v_{0y}}^2} = \boxed{}_{⑥}$

$\vec{e_v} = \mathrm{Norm}(\vec{v}) = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{(\boxed{}_{①}, \boxed{}_{②})}{\boxed{}_{⑤}} = (\boxed{}_{⑦}, \boxed{}_{⑧})$

$\underset{内積}{\vec{v_0} \bullet \vec{e_v}} = \underset{③}{v_{0x}}\,\underset{⑦}{e_{vx}} + \underset{④}{v_{0y}}\,\underset{⑧}{e_{vy}} = \boxed{}_{⑨}$　　$r^2 = 2^2 = \boxed{}_{⑩}$

$t_1 = -\underset{⑨}{(\vec{v_0} \cdot \vec{e_v})} + \sqrt{\underset{⑨}{(\vec{v_0} \cdot \vec{e_v})}^2 - (\underset{⑥}{|\vec{v_0}|}^2 - \underset{⑩}{r^2})} = -\boxed{}_{⑨} - \sqrt{\boxed{}} = \boxed{\dfrac{}{\sqrt{}}}_{⑪}$

$t_2 = -\underset{⑨}{(\vec{v_0} \cdot \vec{e_v})} - \sqrt{\underset{⑨}{(\vec{v_0} \cdot \vec{e_v})}^2 - (\underset{⑥}{|\vec{v_0}|}^2 - \underset{⑩}{r^2})} = -\boxed{}_{⑨} + \sqrt{\boxed{}} = \boxed{\dfrac{}{\sqrt{}}}_{⑫}$

こたえ1

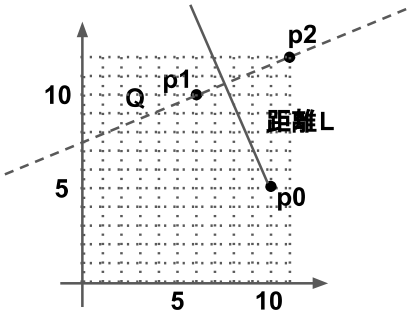
交点 P_1 = 点 $P_0 + t_1 \vec{e_v} = (1, 2) + \boxed{}_{⑪}(\boxed{}_{⑦}, \boxed{}_{⑧}) = (\boxed{}, \boxed{})$

こたえ2

交点 P_2 = 点 $P_0 + t_2 \vec{e_v} = (1, 2) + \boxed{}_{⑫}(\boxed{}_{⑦}, \boxed{}_{⑧}) = (\boxed{}, \boxed{})$

図にかいてみよ　　$\sqrt{5} = 2.236$

実力ドリル 1



1. 3点 p1(6, 10), p2(11, 12), p0(10, 5) があります。

(1) p1, p2 を通る直線 (無限長) と p0の最短距離を求めなさい

$\overrightarrow{p1p2} = (\ 11\ \ 12\ ) - (\ 6\ \ 10\ ) = {}_{①}(\ \overset{②}{\square}\ \ \overset{③}{\square}\ )$

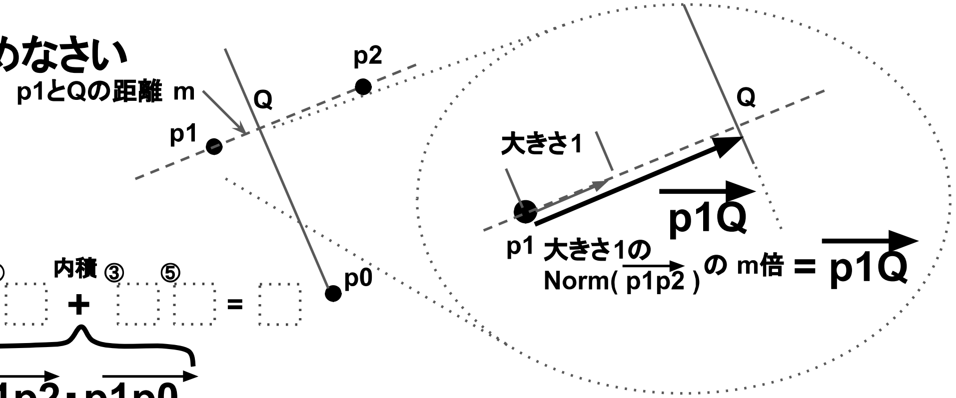
$\overrightarrow{p1p0} = (\ 10\ \ 5\ ) - (\ 6\ \ 10\ ) = (\ \overset{④}{\square}\ \ \overset{⑤}{\square}\ )$

$\mathrm{Norm}(\ \overrightarrow{p1p2}\ ) = \dfrac{{}^{①}\overrightarrow{p1p2}}{|\overrightarrow{p1p2}|} = \dfrac{(\ \overset{②}{\square}\ \ \overset{③}{\square}\ )}{\sqrt{\underset{②}{\square}^2 + \underset{③}{\square}^2}} = (\ \square\ \ \square\ )$

ノルムは大きさ 1の
単位ベクトルを求める

最短距離L = $\mathrm{Norm}(\ \overrightarrow{p1p2}\ ) \overset{外積}{\times} \overrightarrow{p1p0} = \overset{こたえ}{\square}$

(2) 直線 $\overrightarrow{p1p2}$ に 任意の点 p0から垂線を下した時の交点 Q を求めなさい



p1とQの距離 m = $\mathrm{Norm}(\ \overrightarrow{p1p2}\ ) \overset{内積}{\cdot} \overrightarrow{p1p0} = \dfrac{\overrightarrow{p1p2} \cdot \overrightarrow{p1p0}}{|\overrightarrow{p1p2}|}$

$\overset{②}{\square}\ \overset{④}{\square} \overset{内積}{+} \overset{③}{\square}\ \overset{⑤}{\square} = \square$

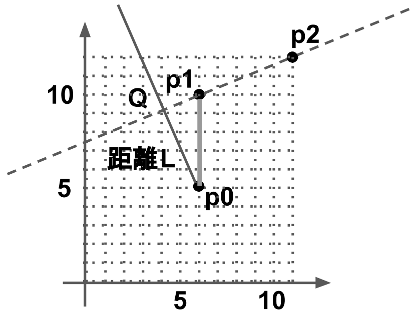
$\overrightarrow{p1Q} = \mathrm{Norm}(\ p1p2\ )$ のm倍 $= \dfrac{\overrightarrow{p1p2}}{|\overrightarrow{p1p2}|}\ \dfrac{\overrightarrow{p1p2} \cdot \overrightarrow{p1p0}}{|\overrightarrow{p1p2}|} = \dfrac{\overrightarrow{p1p2} \cdot \overrightarrow{p1p0}}{|\overrightarrow{p1p2}|^2}\ \underset{{}_{①}(\ \overset{②}{\square}\ \overset{③}{\square}\ )}{\overrightarrow{p1p2}} = {}_{⑥}(\ \square\ \ \square\ )$

距離の 2乗 = $\square$

$Q = p1 + \overrightarrow{p1Q} = (\ 6\ \ \ 10\ ) + {}_{⑥}(\ \square\ \ \square\ ) = \overset{こたえ}{(\ \square\ \ \square\ )}$

実力ドリル 1 (つづき)　　有限の長さ の線の外側 ver.

2. 3点 p1(6, 10), p2(11, 12), p0(6, 5) があります。



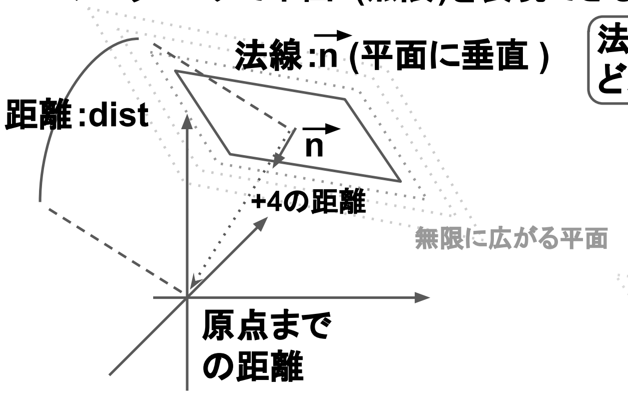
(3) p1 p2 を 端点とする線分 <u>(有限長)</u> とp0 の 最短距離を求めなさい

ヒント

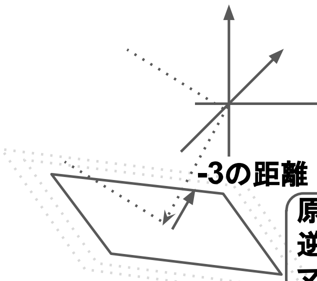
$\overrightarrow{p1p2} \cdot \overrightarrow{p1p0} < 0$ だと… p0は線の外側だから … p1(6, 10) - p0(6, 5) = …

(4) (3) の 最短距離のとき、線分 <u>(有限長)</u>に下した点の座標値を求めなさい

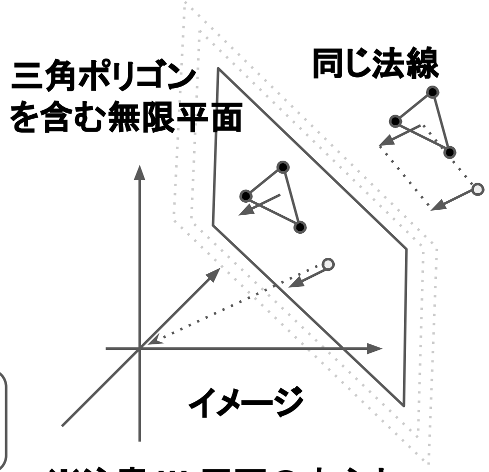
2つのパラメータで平面 (無限)を表現できる



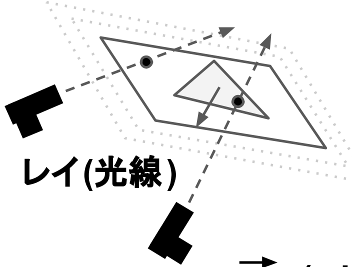
法線方向 :nと距離 :distを変えればどんな平面でも表現できる



原点に向かう逆矢印ならマイナス方向の距離



※注意 !!! 平面の中心と三角ポリゴンの法線の起点は全然別の場所だが方向は同じ



三角ポリゴンとレイの当たり判定には
まず平面の当たり判定をして
平面上の交点を求めてから
平面とレイの交点がポリゴンの内側かを判定すればよい

$\vec{n} = (a,b,c)$

平面の方程式 : $ax + by + cz = 0$

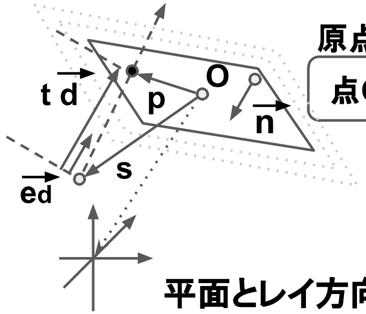
レイの方程式 : $\vec{p} = \vec{s} + t\,\vec{ed}$

平面の垂直の方程式 : $(\vec{p} \cdot \vec{n}) = 0$

$(\vec{s} + t\,\vec{ed}) \cdot \vec{n} = 0$

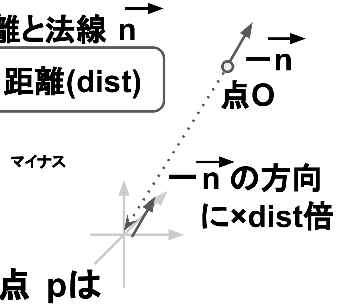
$(\vec{s} \cdot \vec{n}) + t\,(\vec{ed} \cdot \vec{n}) = 0$

$t\,(\vec{ed} \cdot \vec{n}) = -(\vec{s} \cdot \vec{n})$



原点からの距離と法線 $\vec{n}$

点O = $-\vec{n}$ × 距離(dist)



こたえ

平面とレイ方向 $\vec{d}$ の交点 pは

$$t = -\frac{(\vec{s} \cdot \vec{n})}{(\vec{ed} \cdot \vec{n})} \qquad \vec{p} = \vec{s} + t\,\vec{ed}$$

列

$$\begin{array}{ccc} & \text{1列} & \text{2列} \\ \text{行 1行目} & \left(\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right) \\ \text{2行目} & & \end{array}$$

成分 $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$

成分 $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$

(i, j) = (2, 1)成分

m×n行列 = 3×2行列

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&0\\3&4\end{pmatrix}}^{\text{2列}}}_{\text{3行}}$$

正方形の行列
「正方行列」

$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$

行と列が
同じ数
なら正方

$\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&2\\3&4&1\end{pmatrix}$

下だけ 0
「上三角行列」

$\begin{pmatrix}2&1&3\\0&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

上だけ 0
「下三角行列」

$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&4&0\\3&2&1\end{pmatrix}$

斜め以外 0
「対角行列」

$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

行列の基礎

位置のベクトル(x,y,z)に
拡大縮小スケール行列と
回転行列と
平行移動行列を
掛け算しないと位置が計算できない件

ベクトルは行列と
セットで使わざるおえない

単位行列とは

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

斜め方向に
1がならぶ行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を単位行列 **E** とよぶ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = 3 \\ y = 7 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{matrix}$$

$$E \times E = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

壱 × 壱 = 壱
イチ　イチ　イチ

単位行列

ゼロ行列とは

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

全成分がゼロの行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をゼロ行列 **O**とよぶ

零行列
ゼロ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゼロ行列を掛け算すると
当然、ゼロになる

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列どうしの足し算

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d_1+d_2 & e_1+e_2 & f_1+f_2 \\ g_1+g_2 & h_1+h_2 & i_1+i_2 \end{pmatrix}$$

行列どうしの引き算

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ d_1 - d_2 & e_1 - e_2 & f_1 - f_2 \\ g_1 - g_2 & h_1 - h_2 & i_1 - i_2 \end{pmatrix}$$

スカラー倍
行列の2倍　k倍

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times a & 2\times b \\ 2\times c & 2\times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\times a & k\times b \\ k\times c & k\times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

練習問題20

問1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき次の計算をせよ

(1) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+1 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{①}}$

(2) $B + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 1+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(3) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-2 \\ 3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(4) $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 \\ 3\times 2 & 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{②}}$

(5) $2B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 \\ 1\times 2 & 2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{③}}$

(6) $2A + 2B = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{②}} + \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{③}} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(7) $2(A + B) = 2\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{①}} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(8) $2A + 3A = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{②}} + \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(9) $(2 + 3)A = 5\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(10) $3 \times 2A = 3\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}_{\text{②}} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

(11) $(3 \times 2)A = 6\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

行列の計算法則

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

行列どうしの足し算の交換　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\shortparallel$

$$A_2 + A_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & d_2 + d_1 \end{pmatrix}$$

交換してもよい

$$\boxed{A + B = B + A}$$

交換法則

結合法則

$$\boxed{(A + B) + C = A + (B + C)}$$

(8) $2A + 3A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

②

(9) $(2 + 3)A = 5 \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

分配法則 1

$$\boxed{k(A + B) = kA + kB}$$

(10) $3 \times 2A = 3 \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

②

(11) $(3 \times 2)A = 6 \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

分配法則 2

$$\boxed{k_1(k_2A) = (k_1k_2)A}$$

行列の掛け算は形で覚えるしかない　ムリぃ、覚えられねぇ

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\times a_2 + b_1\times d_2 + c_1\times g_2 & a_1\times b_2 + b_1\times e_2 + c_1\times h_2 & a_1\times c_2 + b_1\times f_2 + c_1\times i_2 \\ d_1\times a_2 + e_1\times d_2 + f_1\times g_2 & d_1\times b_2 + e_1\times e_2 + f_1\times h_2 & d_1\times c_2 + e_1\times f_2 + f_1\times i_2 \\ g_1\times a_2 + h_1\times d_2 + i_1\times g_2 & g_1\times b_2 + h_1\times e_2 + i_1\times h_2 & g_1\times c_2 + h_1\times f_2 + i_1\times i_2 \end{pmatrix}$$

$a_1\ b_1\ c_1$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \to a_1\times a_2 + b_1\times d_2 + c_1\times g_2$ 　 $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \\ e_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \to a_1\times b_2 + b_1\times e_2 + c_1\times h_2$ 　 $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2 \\ f_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \to a_1\times c_2 + b_1\times f_2 + c_1\times i_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{pmatrix}$$

$d_1\ e_1\ f_1$

$\begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \to d_1\times a_2 + e_1\times d_2 + c_1\times g_2$ 　 $\begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \\ e_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \to d_1\times b_2 + e_1\times e_2 + c_1\times h_2$ 　 $\begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2 \\ f_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \to d_1\times c_2 + e_1\times f_2 + c_1\times i_2$

$g_1\ f_1\ i_1$

$\begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \to g_1\times a_2 + f_1\times d_2 + i_1\times g_2$ 　 $\begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \\ e_2 \\ h_2 \end{pmatrix} \to g_1\times b_2 + f_1\times e_2 + i_1\times h_2$ 　 $\begin{pmatrix} g_1 \\ f_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2 \\ f_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \to g_1\times c_2 + f_1\times f_2 + i_1\times i_2$

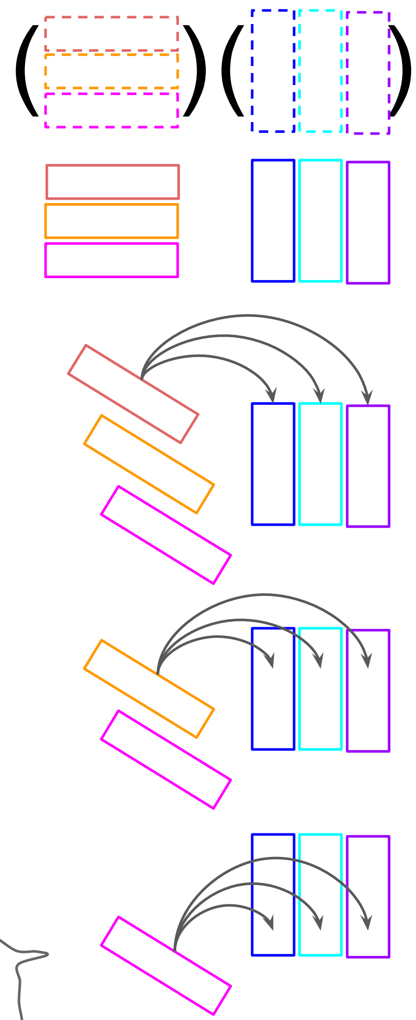
練習問題

視(み)える、視(み)えるぞ、法則が！

練1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times2+2\times1+3\times2 & 1\times1+2\times2+3\times2 & 1\times3+2\times4+3\times3 \\ 2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times3+1\times4+2\times3 \\ 3\times2+1\times1+4\times2 & 3\times1+1\times2+4\times2 & 3\times3+1\times4+4\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{pmatrix}$

練2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1+1\times2+3\times3 & \_\times\_+\_\times\_+\_\times\_ & \_\times\_+\_\times\_+\_\times\_ \\ 1\times1+2\times2+4\times3 & \_\times\_+\_\times\_+\_\times\_ & \_\times\_+\_\times\_+\_\times\_ \\ 2\times1+2\times2+3\times3 & \_\times\_+\_\times\_+\_\times\_ & \_\times\_+\_\times\_+\_\times\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \\ \ & \ & \ \end{pmatrix}$

そして
感謝



イメージ
これで覚える

ヒント

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times1+2\times4+3\times7 & 1\times2+2\times5+3\times8 & 1\times3+2\times6+3\times9\\ \multicolumn{3}{c}{\text{下半分なくなる}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$

練習問題21

問1 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 1 & 9\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}$ $C = (1\ \ 2\ \ 3)$ のとき次の<u>地獄のような</u>計算をせよ

(1) $A \times B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 1 & 9\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$ ①

(2) $B \times A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 1 & 9\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$

(3) $C \times A = (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$ or $(\square\ \ \square\ \ \square)$ ②

どっちでしょう？

(4) $C \times (A \times B) = (1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix} = (\square\ \ \square\ \ \square)$ ①

(5) $(C \times A) \times B = (\square\ \ \square\ \ \square)\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 1 & 9\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix} = (\square\ \ \square\ \ \square)$ ②

(6) $(x\ \ y\ \ z\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = (\square\ \ \square\ \ \square\ \ \square)$

平行移動行列　をかけると

$x+2$　$y+3$　$z+4$ でX軸+2 Y軸+3 Z軸+4 になる

(7) $(x\ \ y\ \ z\ \ 1)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\square\ \ \square\ \ \square\ \ \square)$

拡大縮小行列　をかけると

$2x$　$3y$　$4z$ でX軸×2 Y軸×3 Z軸×4 で2,3,4倍拡大する

交換法則

A × B ≠ B × A (交換すると結果が変わっちゃう！　)

分配法則

A × (B + C)　=　A × B + A × C
(A + B) × C　=　A × C + B × C

結合法則

(A × B) × C　=　A × (B × C)

平行移動行列とは

縦×横(4つ×4つ)の**平行移動行列をかける** と

1×4 横4列 横4つ

$$
\text{縦1}\ (x\ \ y\ \ z\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{縦1}\ (x+2\ \ \ y+3\ \ \ z+4\ \ \ 1)
$$

(DirectX系)　　計算結果(移動後)

3D

3Dだけど縦×横(4×4)の4次元行列と
4次元ベクトルを使えば
1 が効いて **x方向+2 y方向+3 z方向+4** される

くるっとまわす

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+3 \\ z+4 \\ 1 \end{pmatrix}\ \text{縦4行}
$$

計算結果(移動後)

斜めに逆 ver.
(OpenGL系)　4×1　横1列

2Dには縦×横(3×3)の3次元行列を使う

1×3 横3列 横3つ

$$
\text{縦1}\ (x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{縦1}\ (x+2\ \ \ y+3\ \ \ 1)
$$

(DirectX系)　平行移動行列　計算結果(移動後)

2D

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+3 \\ 1 \end{pmatrix}\ \text{縦3行}
$$

計算結果(移動後)

斜めに逆 ver.　3×1　横1
(OpenGL系)

拡大縮小行列とは

縦×横(4つ×4つ)の**拡大縮小 行列をかける**と

1×4 横4列 横4つ

$$
\text{縦1}\ (x\ \ y\ \ z\ \ 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{縦1}\ (2x\ \ \ 3y\ \ \ 4z\ \ \ 1)
$$

計算結果(拡大縮小後)

3D

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 4z \\ 1 \end{pmatrix}\ \text{縦4行}
$$

計算結果(拡大縮小後)

4×1　横1列

1×3 横3列 横3つ

$$
\text{縦1}\ (x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{縦1}\ (2x\ \ \ 3y\ \ \ 1)
$$

拡大縮小行列　計算結果(拡大縮小後)

2D

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 1 \end{pmatrix}\ \text{縦3行}
$$

計算結果(拡大縮小後)

斜めに逆 ver.　3×1　横1

回転行列とは

左横 x yベクトル ver. (DirectX系) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ネット検索すると、右下マイナス ver. と
左上マイナス ver. の2パターンがあり要注意

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 右縦 x y ベクトル ver. (OpenGL系)

位置ベクトル **v**

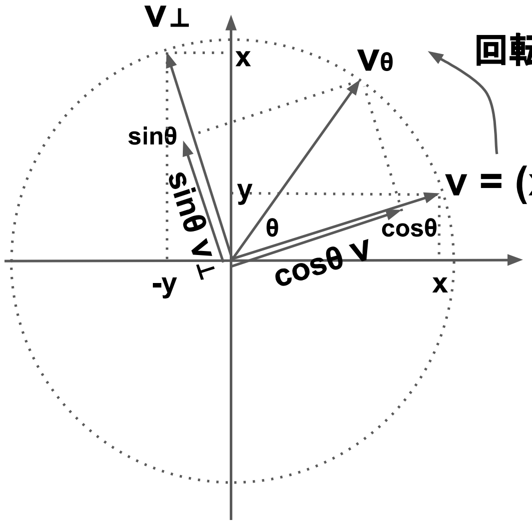
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{回転行列}} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

原点を中心に 角度θ 回転した位置になる

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$v_\perp = \begin{pmatrix} -y & x \end{pmatrix}$$



$v = (x \ \ y)$

回転行列 をかけると 角度θ 回転する

$$v_\theta = \cos\theta\, v + \sin\theta\, v_\perp$$

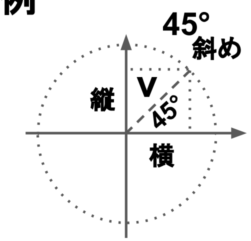
$$= \cos\theta \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta & y\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\sin\theta & y\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta & y\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y\sin\theta & x\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

実例



斜め：横 = $\sqrt{2}$: 1

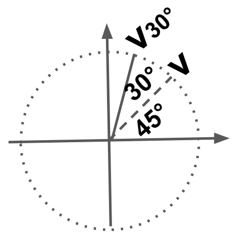
$$\cos 45^\circ = \frac{横}{斜め} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

斜め：縦 = $\sqrt{2}$: 1

$$\sin 45^\circ = \frac{縦}{斜め} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

45°+30°のとき



斜め：横 = 2 : $\sqrt{3}$

$$\cos 30^\circ = \frac{横}{斜め} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

斜め：縦 = 1 : 2

$$\sin 30^\circ = \frac{縦}{斜め} = \frac{1}{2}$$

$$v_{30^\circ} = \begin{pmatrix} x\cos 30^\circ - y\sin 30^\circ & x\sin 30^\circ + y\cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

45° + 30° = 75°回転すると

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

cos45° = 1 / √2
sin45° = 1 / √2
√2 = 1.4142

θ=45°　(x,y) = 3点 $P_0(0,1)P_1(-2,-1)P_2(2,-1)$ のときを図にかいて考えてみよ

組み合わせ行列とは

拡大縮小行列　回転行列　平行移動行列　を組み合わせて
複数の「行列を合成」して　1つの行列にした行列

x y に近いほうの
影響を先に受けるので

$$\begin{pmatrix} \text{移動} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{拡大} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{回転} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

回転 してから 拡大 して 移動

$$\begin{array}{cccc} \text{x+2,y+3} & \text{x2倍,y3倍} & \text{角度θ 回転} & \text{組み合わせ行列} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta & 2 \\ 3\sin\theta & 3\cos\theta & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{組み合わせ行列} & & \text{x+2,y+3←x2倍,y3倍←角度θ 回転 の順の場合の位置} \\ \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta & 2 \\ 3\sin\theta & 3\cos\theta & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2\cos\theta\, x - 2\sin\theta\, y + 2 \\ 3\sin\theta\, x + 3\cos\theta\, y + 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

行列を×かける
順によって
全然こたえが
変わる！

右縦 x yベクトル ver. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
(OpenGL系)

移動 してから
回転 して 拡大

$$\begin{array}{cccc} \text{x2倍,y3倍} & \text{角度θ 回転} & \text{x+2,y+3} & \text{組み合わせ行列} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta & 2\cos\theta - 3\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3\cos\theta & 2\sin\theta + 3\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{組み合わせ行列} & & \text{x2倍,y3倍←角度θ 回転←x+2,y+3 した位置} \\ \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta & 2\cos\theta - 3\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3\cos\theta & 2\sin\theta + 3\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2\cos\theta\, x - 2\sin\theta\, y + 2\cos\theta - 3\sin\theta \\ 3\sin\theta\, x + 3\cos\theta\, y + 2\sin\theta + 3\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

組み合わせ行列とは

拡大縮小行列　回転行列　平行移動行列　を組み合わせて
複数の「行列を合成」して　1つの行列にした行列

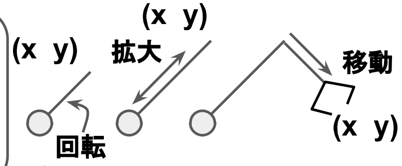
$\cos 45° = 1 / \sqrt{2}$
$\sin 45° = 1 / \sqrt{2}$
$\sqrt{2} = 1.4142$

θ=45°　(x,y) = 3点 $P_0(0,1)P_1(-2,-1)P_2(2,-1)$ のときを図にかいて考えてみよ

x y に近いほうの
影響を先に受けるので

回転 してから
拡大 して 移動

$$(x\ \ y\ \ 1) \times \begin{pmatrix} 回転 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 拡大 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 移動 \end{pmatrix}$$



ロボット工学 と ゲーム CG の基本

$$\underset{角度\theta\ 回転}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{x2倍,y3倍}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{x+2,y+3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{組み合わせ行列}{\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 3\sin\theta & 0 \\ -2\sin\theta & 3\cos\theta & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

組み合わせ行列

$$(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 3\sin\theta & 0 \\ -2\sin\theta & 3\cos\theta & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\ 2\cos\theta\, x - 2\sin\theta\, y + 2 \quad 3\sin\theta\, x + 3\cos\theta\, y + 3 \quad 1\ )$$

角度θ 回転→x2倍,y3倍→x+2,y+3 の順の場合の位置

(x y 1) 左横 x yベクトル ver.
(DirectX系)

行列を×かける
順によって
全然こたえが
変わる！

移動 してから
回転 して 拡大

$$\underset{x+2,y+3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{角度\theta\ 回転}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \times \underset{x2倍,y3倍}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{組み合わせ行列}{\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 3\sin\theta & 0 \\ -2\sin\theta & 3\cos\theta & 0 \\ 2\cos\theta - 3\sin\theta & 2\sin\theta + 3\cos\theta & 1 \end{pmatrix}}$$

組み合わせ行列

$$(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix} 2\cos\theta & 3\sin\theta & 0 \\ -2\sin\theta & 3\cos\theta & 0 \\ 2\cos\theta - 3\sin\theta & 2\sin\theta + 3\cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\ 2\cos\theta\, x - 2\sin\theta\, y + 2\cos\theta - 3\sin\theta \quad 3\sin\theta\, x + 3\cos\theta\, y + 2\sin\theta + 3\cos\theta \quad 1\ )$$

x2倍,y3倍→角度θ 回転→x+2,y+3 した位置

練習問題22

問1 UnityやOpenGLなどで実際に行う順(拡大→回転→移動)で行列を掛け算せよ

x y に近いほうの
影響を先に受けるので

拡大 してから
回転 して 移動

$$(x\ \ y\ \ 1)\times\begin{pmatrix}拡大\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}回転\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}移動\end{pmatrix}$$

(x y 1) 左横 x yベクトル ver.
(DirectX系 Unity系)

計算の仕方の例

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&4\\2&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+2\times1+3\times2 & 1\times1+2\times2+3\times2 & 1\times3+2\times4+3\times3\\2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times3+1\times4+2\times3\\3\times2+1\times1+4\times2 & 3\times1+1\times2+4\times2 & 3\times3+1\times4+4\times3\end{pmatrix}$$

x4倍,y6倍 / 角度θ 回転 / x+2,y+3 / 組み合わせ行列 (拡大×回転)

$$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times\cos\theta+0\times(-\sin\theta)+0\times0 & 4\times\sin\theta+0\times\cos\theta+0\times0 & 4\times0+0\times0+0\times1\\0\times\cos\theta+6\times(-\sin\theta)+0\times0 & 0\times\sin\theta+6\times\cos\theta+0\times0 & 0\times0+6\times0+0\times1\\0\times\cos\theta+0\times(-\sin\theta)+1\times0 & 0\times\sin\theta+0\times\cos\theta+1\times0 & 0\times0+0\times0+1\times1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}=①\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$$

x+2,y+3 / 組み合わせ行列 (拡大×回転×移動)

組み合わせ行列 (拡大×回転×移動) / x4倍,y6倍→角度θ 回転→x+2,y+3 の順の場合の位置

$$(x\ \ y\ \ 1)\ ①\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}=(\square\quad\square\quad\square)$$

こたえ1

拡大 してから
回転 して 移動

x y に近いほうの
影響を先に受けるので

$$\begin{pmatrix}移動\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}回転\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}拡大\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

右縦 x yベクトル ver. $\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$
(OpenGL系)

x+2,y+3 / 角度θ 回転 / x4倍,y6倍 / x+2,y+3 / 組み合わせ行列 (回転×拡大)

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&0&0\\0&6&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta\times4+(-\sin\theta)\times0+0\times0 & \square\times\_+\square\times\_+\square\times\_ & \square\times\_+\square\times\_+\square\times\_\\\sin\theta\times4+\cos\theta\times0+0\times0 & \square\times\_+\square\times\_+\square\times\_ & \square\times\_+\square\times\_+\square\times\_\\0\times4+0\times0+1\times0 & \square\times\_+\square\times\_+\square\times\_ & \square\times\_+\square\times\_+\square\times\_\end{pmatrix}=②\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$$

組み合わせ行列 (拡大×回転×移動)

組み合わせ行列 (拡大×回転×移動) / x+2,y+3←角度θ 回転←x2倍,y3倍 の順の場合の位置

$$②\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square\\\square\\\square\end{pmatrix}$$

こたえ2

練習問題23

問1 点$P_0(2, 2)$ をx方向に3倍、y方向に2倍、原点を中心に拡大したあと、
x方向に5、y方向に-8、平行移動してから、y軸に対して左右反転した点P_1を求めよ

点P_0　**x3倍,y2倍**　**x+5,y-8**　**左右反転**　**こたえ 点P_1**

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & 1 \end{pmatrix}$$

ヒント　**左右反転**

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & y & 1 \end{pmatrix}$$

問2 点$P_2(4, 3)$ をx方向に-3、y方向に-2、平行移動したあと、x軸に対して上下反転し、
x方向に3、y方向に2、平行移動した点P_3を求めよ

点P_2　**x-3,y-2**　**上下反転**　**x+3,y+2**　**こたえ 点P_3**

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & 1 \end{pmatrix}$$

ヒント　**上下反転**

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y & 1 \end{pmatrix}$$

問1

問2

転置行列とは

T はTransposeの略

$A = (1\ \ 2\ \ 3)$　　$A^T = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$　　$A^T = \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$　　$A^T = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$　　$A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$

$(1\ \ 2)\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = (7\ \ 10)$

$(1\ \ 2)^T$　　$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}^T$ なら

同じになる

あれ…違う

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$

転置行列の性質

$(A^T)^T = A$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(2A)^T = 2A^T$　　$(kA)^T = kA^T$

$(AB)^T = A^T B^T$

法則

$(AB)^T = A^T B^T$

で $A = (x\ \ y\ \ 1)$

B を組み合わせ行列

と見立てれば

$$\begin{array}{c} x軸+2, y軸+3 \\ (x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x軸+2, y軸+3 \\ (x+2\ \ y+3\ \ 1) \end{array}$$

左横ベクトルver.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}^T$$

転置すれば
横ベクトル ver.用　の行列 を
縦ベクトル ver.に　使えるようになる

$$\begin{array}{c} x軸+2, y軸+3 \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x軸+2, y軸+3 \\ \begin{pmatrix}x+2\\y+3\\1\end{pmatrix} \end{array}$$

右縦ベクトルver.

$$\begin{array}{c} 組み合わせ行列 \\ (x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}2\cos\theta & 3\sin\theta & 0\\-2\sin\theta & 3\cos\theta & 0\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \end{array}\qquad (x\ \ y\ \ 1)$$

(DirectX系)

T 転置　　T 転置

$$\begin{array}{c} 組み合わせ行列 \\ \begin{pmatrix}2\cos\theta & -2\sin\theta & 2\\3\sin\theta & 3\cos\theta & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} \end{array}\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

(OpenGL系)

逆行列とは

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}^{-1}$$

連立方程式

$$\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=2\end{cases}$$

連立方程式を行列で表現

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}?\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}?\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

かけたら都合よく
単位行列 Eになる逆行列がみつかれば ∴ 連立方程式が解けたことと同じになる

$$\begin{pmatrix}1x+0y\\0x+1y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}?\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

コンピュータで連立方程式を
解くことは、つまりは、
1）逆行列を求めて
2）右辺のベクトルにかけること

こたえ

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{matrix}5\times1+-3\times2\\-3\times1+\ 2\times2\end{matrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

逆行列をかけるやり方で
連立方程式が解けた !!

逆行列を計算で求めてみる

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

単位行列 E

$$\begin{pmatrix}①\ a_{11}\times2+a_{12}\times3 & ②\ a_{11}\times3+a_{12}\times5\\③\ a_{21}\times2+a_{22}\times3 & ④\ a_{21}\times3+a_{22}\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

① $a_{11}\times2+a_{12}\times3=1$　② $a_{11}\times3+a_{12}\times5=0$

③ $a_{21}\times2+a_{22}\times3=0$　④ $a_{21}\times3+a_{22}\times5=1$

①×5 $a_{11}\times2\times5+a_{12}\times3\times5=1\times5$

②×3 −) $a_{11}\times3\times3+a_{12}\times5\times3=0\times3$

$a_{11}+0=5$

①×3 $a_{11}\times2\times3+a_{12}\times3\times3=1\times3$

②×2 −) $a_{11}\times3\times2+a_{12}\times5\times2=0\times2$

$0+-a_{12}=3$

$a_{12}=-3$

③×5 $a_{21}\times2\times5+a_{22}\times3\times5=0\times5$

④×3 −) $a_{21}\times3\times3+a_{22}\times5\times3=1\times3$

$a_{21}+0=-3$

③×3 $a_{21}\times2\times3+a_{22}\times3\times3=0\times3$

④×2 −) $a_{21}\times3\times2+a_{22}\times5\times2=1\times2$

$0+-a_{22}=-2$

$a_{22}=2$

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}?\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}$$

検算したらちゃんと
単位行列 E になった !!

$$\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times2+-3\times3 & 5\times3+-3\times5\\-3\times2+\ 2\times3 & -3\times3+\ 2\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

逆行列 をかけて検算してみる

逆行列$^{-1}$の公式

$A \mid E \xrightarrow{\text{簡約化}} E \mid A^{-1}$

2×2 3×3 なら暗記

$AA^{-1}=E \quad A^{-1}A=E \quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 単位行列

$(A^{-1})^{-1}=A$ 逆行列を持つとき Aは **正則** であるという

2×2

右下方向⊕ 左下方向⊖

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{+a_1b_2 - a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}$$

ただし分母 $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$のとき

detA を「Aの行列式」とよぶ

3×3

⊕ ⊖

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & -(a_2c_3-a_3c_2) & a_2b_3-a_3b_2\\ -(b_1c_3-b_3c_1) & a_1c_3-a_3c_1 & -(a_1b_3-a_3b_1)\\ b_1c_2-b_2c_1 & -(a_1c_2-a_2c_1) & a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

関孝和・サラスの方法 ⊕ ⊖

関孝和 せきこうわ 1637〜1708

ただし分母 $(\det A \neq 0)$のとき

$$\det A = +a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

1 2 3 　 2←3←1 　 3←1←2 　 3 2 1 　 1←3←2 　 2←1←3

$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ 偶数 偶 $a_1 \times (-1)^{1+1}\dfrac{1}{b_2c_3-b_3c_2}\begin{pmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{pmatrix}$ → $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2$ (2 3 / 3 2)

$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ 奇数 奇 $b_1 \times (-1)^{1+2}\dfrac{1}{a_2c_3-a_3c_2}\begin{pmatrix}a_2&a_3\\c_2&c_3\end{pmatrix}$ → 逆 奇 逆 奇逆 $-(a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2)$ (2 3 / 3 2)

$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ 偶数 偶 $c_1 \times (-1)^{1+3}\dfrac{1}{a_2b_3-a_3b_2}\begin{pmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{pmatrix}$ → $a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$ (2 3 / 3 2)

3行×3列の逆行列は2行×2列の式の「余因子」から導びける

$A^{-1} = \begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ 1行目と1列目を取り除いた 余因子

$(-1)^{1+1}\dfrac{1}{b_2c_3-b_3c_2}\begin{pmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$ 「2行目と1列目」を取り除き

$(-1)^{2+1}\dfrac{1}{a_2c_3-a_3c_2}\begin{pmatrix}a_2&a_3\\c_2&c_3\end{pmatrix}$

分母 分母

$$\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & -(a_2c_3-a_3c_2) & a_2b_3-a_3b_2\\ -(b_1c_3-b_3c_1) & a_1c_3-a_3c_1 & -(a_1b_3-a_3b_1)\\ b_1c_2-b_2c_1 & -(a_1c_2-a_2c_1) & a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

分母

$(-1)^{1+2}\dfrac{1}{b_1c_3-b_3c_1}\begin{pmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{pmatrix}$

「1行目と2列目」を取り除き

$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$

取り除いた **余りもの**

転置位置 ☆ 欲しい★

「余因子」

検算.

$(2 \;\; 1)\begin{pmatrix}1&5\\3&-2\end{pmatrix} = (5 \;\; 8)$

逆行列をかけると

$(5 \;\; 8)\begin{pmatrix}1&5\\3&-2\end{pmatrix}^{-1} = (2 \;\; 1)$ 戻った

例. 逆行列の公式をつかってみる

$$\begin{pmatrix}1&5\\3&-2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underset{-2\ -\ 15}{1\times-2 - 5\times3}}\begin{pmatrix}-2&-5\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{-17}(5 \;\; 8)\begin{pmatrix}-2&-5\\-3&1\end{pmatrix} = \frac{1}{-17}(-34 \;\; -17)$$

練習問題27

$$\frac{1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}\begin{pmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & -(a_2c_3-a_3c_2) & a_2b_3-a_3b_2 \\ -(b_1c_3-b_3c_1) & a_1c_3-a_3c_1 & -(a_1b_3-a_3b_1) \\ b_1c_2-b_2c_1 & -(a_1c_2-a_2c_1) & a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

問1 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&1&9\\5&7&8\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&3&5\\4&1&7\\6&9&8\end{pmatrix}$ のとき次の計算地獄をせよ

(1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\times3-5\times1}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}$ ①

(2) 右逆 $A\times A^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}$ ①

(3) 左逆 $A^{-1}\times A=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}$ ①

(4) 逆の逆 $(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3\times2-(-5)\times(-1)}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}$

(5) $\begin{cases}2x+5y=1\\x+3y=2\end{cases}$ $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}$ ①

打ち消される　右から両辺に ×

(6) $B^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&1&9\\5&7&8\end{pmatrix}=\frac{1}{2\times1\times8+4\times9\times5+6\times3\times7-6\times1\times5-2\times9\times7-4\times3\times8}\begin{pmatrix}1\times8-9\times7 & -(4\times8-6\times7) & 4\times9-6\times1\\ -(3\times8-9\times5) & 2\times8-6\times5 & -(2\times9-6\times3)\\ 3\times7-1\times5 & -(2\times7-4\times5) & 2\times1-4\times3\end{pmatrix}=\frac{1}{\square}\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$

$\det B=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$

(7) $C^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&5\\4&1&7\\6&9&8\end{pmatrix}=\frac{1}{2\times1\times8+\square\times\square\times\square+\square\times\square\times\square-\square\times1\times\square-2\times\square\times\square-\square\times\square\times8}\begin{pmatrix}1\times8-\square\times\square & -(\square\times8-\square\times\square) & \square\times\square-\square\times1\\ -(\square\times8-\square\times\square) & 2\times8-\square\times\square & -(2\times\square-\square\times\square)\\ \square\times\square-1\times\square & -(2\times\square-\square\times\square) & 2\times1-\square\times\square\end{pmatrix}=\frac{1}{\square}\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$

$\det C=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$

(8) $(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1}=(\square\ \ \square\ \ \square)$ 平行移動の逆行列

(9) $(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=(\square\ \ \square\ \ \square)$ 拡大縮小の逆行列

(10) $(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\cos\theta\times\cos\theta\times1+0\times\square\times\square+0\times\square\times\square-0\times\square\times\square-\square\times0\times\square-\sin\theta\times-\sin\theta\times1}\begin{pmatrix}\cos\theta\times1-0\times\square & -(\sin\theta\times1-0\times\square) & 0\times\square-0\times\square\\ -(-\sin\theta\times1-0\times\square) & \cos\theta\times1-0\times\square & -(\square\times0-0\times\square)\\ \square\times0-\square\times0 & -(\square\times0-\square\times0) & \cos\theta\times\cos\theta-\sin\theta\times-\sin\theta\end{pmatrix}$

1つでも0の掛け算はどうせ0

-θの角度回転する行列

$=(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$ 回転の逆行列

公式 :$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

公式 :$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

公式 :$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

掃き出し法

ガウスの消去法

連立1次方程式 の 厳密な解き方

係数行列　拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

連立1次方程式　$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 行列

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & ① \\ x + 2y = 5 & ② \end{cases} \qquad \underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \times \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} -y = -2 & ①+②\times(-2) \\ x + 2y = 5 & \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -y = -2 & \\ x = 1 & ②+①\times 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 & \\ -y = -2 & \end{cases} \text{入れ替え} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 & \\ y = 2 & ②\times(-1) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

左辺がきれい になった

連立方程式が解けた！

B

単位行列 **E** になった ★解あり！

rank(**A** ¦ **b**)

両方 2 個

rank(**A**)=2

行列の 基本変形
(1) 1つの行を何倍か(≠ 0倍) する
(2) 2つの行を入れ替える
(3) 1つの行に他の行の何倍かを加える

→拡大係数行列 の 基本変形 で 連立方程式を解く

行列の 0じゃない 一番左 の成分を 行の主成分 とよぶ

簡約な行列 ：(1)零ベクトル は零じゃないものより 下 (2)階段状
(3)行ベクトルの 主成分 は 1 (4)主成分 の 列 の 他 の数字は 0

もとの行列 **A** 基本変形 →

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

簡約化した行列 **B**

行列の階数 rank(**A**) = 4

B の 零ベクトル でない 行の個数 = 4 (1 の個数)

連立1次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ は
★rank(**A** ¦ **b**) = rank(**A**)
のとき解をもつ(必要十分条件)

rank(**A**) = 3 ≠ rank(**A** ¦ **b**) = 4
★解なし

練習問題24

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 & ① \\ -x + 2y + 2z = 1 & ② \\ x + y - z = -2 & ③ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} ①+③\times(-2) \\ ②+③ \\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} ①と③入替 \\ \ \\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} ①+③\times(-1) \\ ②+③\times(-3) \\ \ \end{array}$$

ピボット 1 にするため に -2 で↓割る

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ ②\times(-1/2) \\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ ②と③入替 \\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} ①+③\times 2 \\ ②+③\times(-1) \\ \ \end{array}$$

単位行列 **E**

答え　x = 1　y = -1　z = 2

練習問題25

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 = 1 & ① \\ +x_2 + x_3 + x_5 = -2 & ② \\ -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 & ③ \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_5 = 1 & ④ \end{cases}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

簡約化

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ \ \\ ③+① \\ ④+①\times(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ \ \\ \ \\ ④+②\times(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} ①+④\times(-1) \\ ②+④\times 2 \\ ③+④\times(-4) \\ \ \end{array}$$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 1$

左辺がどうやっても 0 = 1(右辺)にならず　破綻

rank(**A** ¦ **b**) = ____

rank(**A**) = ____

rank(**A** ¦ **b**) と rank(**A**) は　等しい / 等しくない

答え ★解 は ____

練習問題26

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 & ① \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 & ② \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 & ③ \end{cases}$$

簡約化

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ ②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ \ \\ ③+②\times(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \\ ②+③\times(-1) \\ \ \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 & ① \\ x_3 - x_4 = -1 & ② \\ x_5 = 1 & ③ \end{cases}$$

主成分 以外の x_2 と x_4 に数字割当　任意定数 c_1　c_2

$$\begin{cases} x_1 - 2c_1 + 3c_2 = 2 & ① \\ x_3 - c_2 = -1 & ② \\ x_5 = 1 & ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ x_3 = -1 + c_2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

左辺を x だけに整理

答え　$x_2 = c_1$　$x_4 = c_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列式 デターミナント $\det A$ $|A|$ $|a_{ij}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \overset{+\,-}{\mathrm{sgn}}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

置換 シグマ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 5 & 6 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$

下の数字は上の数字の行先

1を3へ置換 $\sigma(1) = 3$　nを2へ置換 $\sigma(n) = 2$

巡回置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 略 $= (1\ 2\ 3\ 4 \cdots n)$

$n \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$ 巡回

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 入替可　不動(省略可)

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 巡回 $1\to4\to2\to1$, $3\to6\to5\to7\to3$

$\sigma = (3\ 6\ 5\ 7)(1\ 4\ 2)$

置換の積(かけ算) $\sigma \times \tau$ を $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ と定義 $(i = 1,2, \ldots, n)$

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ タウ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma\tau(1) = \sigma(2) = 3$
$\sigma\tau(2) = \sigma(3) = 1$
$\sigma\tau(3) = \sigma(4) = 2$
$\sigma\tau(4) = \sigma(1) = 4$

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

互換の積

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$1\to7\to9\to5\to1$
$2\to6\to4\to2$
$3\to8\to3$ 巡回

$\sigma = (3\ 8)(2\ 6\ 4)(1\ 7\ 9\ 5)$
$= (3\ 8)(2\ 4)(2\ 6)(1\ 5)(1\ 9)(1\ 7)$ 互換の積

逆置換 σ^{-1}

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　$\sigma^{-1} = \overset{逆}{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

単位置換 どこにも行かない

イプシロン $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$

互換の± 符号 $m = 5$個なら $\overset{+\,-}{\mathrm{sgn}}(\sigma) = (-1)^m = (-1)^5$

$\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$　$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$
$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$

偶置換 奇置換

$m = 2,4,6..$なら $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{2,4,6..} = +1$
$m = 1,3,5..$なら $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{1,3,5..} = -1$

置換全体の集合 S_n　$S_2 = \{\varepsilon, (1\ 2)\}$　$S_3 = \{\varepsilon, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \overset{+}{\mathrm{sgn}}(\varepsilon) a_{11}a_{22} + \overset{-}{\mathrm{sgn}}((1\ 2)) a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \overset{+}{\mathrm{sgn}}(\varepsilon) a_{11}a_{22}a_{33} + \overset{+}{\mathrm{sgn}}((1\ 2\ 3)) a_{12}a_{23}a_{31} + \overset{+}{\mathrm{sgn}}((1\ 3\ 2)) a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- \mathrm{sgn}((1\ 2)) a_{12}a_{21}a_{33} - \mathrm{sgn}((2\ 3)) a_{11}a_{23}a_{32} - \mathrm{sgn}((1\ 3)) a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

0出し変形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underset{出る}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下0三角

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underset{出る}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ 0 & & \cdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \underset{繰返し}{\cdots} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上三角行列　出た 出た ...　斜め対角だけのかけ算

1行をc倍すると |行列式| は c倍になる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ c a_{i1} & \cdots & c a_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$b_{i1} + c_{i1}$は 2つの行列式に分離できる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2つの行が等しい行列式は $= 0$

行を入れ替えると行列式は -1倍に

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ j \end{matrix}$$

他の行の c倍を加えても |行列式|の値はもとのまま

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} + c a_{j1} & \cdots & a_{in} + c a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \overset{0}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \overset{もとのまま}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

c倍　c倍

行と列を転置しても行列式は同じ値 $\det(A^T) = \det A$

↑上の行の 5定理 と 0出し変形 は列についても成立

A B C Dが正方行列 Oがゼロ行列ならば

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

A Bが正方行列ならば

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

練習問題28

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{3}(2\times4 - 1\times3) = \boxed{15}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \boxed{0}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-6}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ ②+①\times2 \\ ③+①\times3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = \boxed{11} \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{11} \times (1\times1 - 1\times15) = \boxed{-154}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{3}(2\times4 - 3\times1) = \boxed{15}$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-29} \times \boxed{17} = \boxed{-493}$　(A, O, D)

(7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ ①+④×(-3) ②+④×(-2) ③+④×(-1) $= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$ 0出し $= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 13 \end{vmatrix}$ ③+①×(-3) $= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = \boxed{16}$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ ③+① $= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{4} \times 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{3} \times \boxed{4} \times 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\boxed{24} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-48} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{48}$

余因子展開

j列 消し $|A| = (-1)^{1+j} a_{1j}|A_{1j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj}|A_{nj}|$

j行 消し $|A| = (-1)^{j+1} a_{j1}|A_{j1}| + \dots + (-1)^{j+n} a_{jn}|A_{jn}|$

2列目 消

$$\begin{vmatrix}2&7&4\\3&2&0\\1&5&3\end{vmatrix}_{3\times3} = -7\begin{vmatrix}3&0\\1&3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}2&4\\3&0\end{vmatrix}_{2\times2}$$

1+2=奇　2+2=偶　3+2=奇

$(-1)^{n+j}$　± は n+j の奇・偶数で決まる

どこか の列を消して 展開して3×3 → 2×2 のように 次元を減らせる

練習問題29

2行目 消

$$|A| = \begin{vmatrix}4&5&2\\0&0&2\\7&8&3\end{vmatrix} = -\boxed{0}\underbrace{\begin{vmatrix}5&2\\8&3\end{vmatrix}}_{|A_{21}|} + \boxed{0}\underbrace{\begin{vmatrix}4&2\\7&3\end{vmatrix}}_{|A_{22}|} - 2\underbrace{\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}}_{|A_{23}|} = -2\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} = \boxed{6}$$

余因子行列

余因子行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}\Delta_{11}&\dots&\Delta_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \Delta_{n1}&\dots&\Delta_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

j が逆

余因子行列 で逆行列を 求められる $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$　ただし $|A| \neq 0$

例 $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\4&1&5\end{pmatrix}$ の逆行列を余因子行列経由で求めてみる

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&5\end{vmatrix} = 6$　$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&5\end{vmatrix} = -7$　$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix} = -5$

転置位置　欲しい

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1\\4&5\end{vmatrix} = -9$　$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\4&5\end{vmatrix} = -7$　$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix} = 4$

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&1\\4&1\end{vmatrix} = -3$　$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\4&1\end{vmatrix} = 7$　$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} = -1$

1列目消　余因子展開

$$|A| = \begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\4&1&5\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1&-1\\1&5\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2&3\\1&5\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}$$
$$= 5+1-(10-3)+4(-2-3)$$
$$= -21$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}6&-7&-5\\-9&-7&4\\-3&7&-1\end{pmatrix}$$

答え

$$A^{-1} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix}6&-7&-5\\-9&-7&4\\-3&7&-1\end{pmatrix}$$

クラーメル の公式

連立1次方程式 $Ax = b$　(ただしAが正則のとき)　正則→逆行列を持つ

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{1n}\\&\dots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

a_i の代わりにbで 置き換え

の解 $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$ は $x_i = \dfrac{\det|a_1 \dots b \dots a_n|}{\det A}$ ← $|A|$ で解ける

nが増えても基本解ける　ガウスの消去法 でも掃き出し法 のほうが 計算回数 は少なくて済む

練習問題30

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}5&1\\3&2\end{pmatrix}}\overset{x}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}3&1\\2&2\end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}}_{|A|}} = \frac{4}{7} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix}5&3\\3&2\end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}}_{|A|}} = \frac{\boxed{1}}{7}$$

こたえ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ \frac{\boxed{1}}{7}\end{pmatrix}$

練習問題31

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 3\\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1\end{cases}$$

1列目消　余因子展開

$$|A| = \begin{vmatrix}2&-1&1\\-2&3&-1\\1&-3&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}3&-1\\-3&2\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}-1&1\\-3&2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}-1&1\\3&-1\end{vmatrix}$$
$$= 2(6-3) + 2(-2+3) + 1(1-3)$$
$$= 6$$

A　b

1列目消　余因子展開

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&3&-1\\1&-3&2\end{vmatrix}}{6 \leftarrow |A|} = \frac{3\begin{vmatrix}3&-1\\-3&2\end{vmatrix} - \boxed{1}\begin{vmatrix}-1&1\\-3&2\end{vmatrix} + \boxed{1}\begin{vmatrix}-1&1\\3&-1\end{vmatrix}}{6} = \boxed{1}$$

1列目消　余因子展開

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix}2&3&1\\-2&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix}}{6} = \frac{2\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix} - (\boxed{-2})\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix} + \boxed{1}\begin{vmatrix}3&1\\1&-1\end{vmatrix}}{6} = \boxed{2}$$

1列目消　余因子展開

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix}2&-1&3\\-2&3&1\\1&-3&1\end{vmatrix}}{6} = \frac{2\begin{vmatrix}3&1\\-3&1\end{vmatrix} - (\boxed{-2})\begin{vmatrix}-1&3\\-3&1\end{vmatrix} + \boxed{1}\begin{vmatrix}\boxed{-1}&\boxed{3}\\\boxed{3}&\boxed{1}\end{vmatrix}}{6} = \boxed{3}$$

こたえ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}\end{pmatrix}$

実力ドリル 2

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のときに次の計算をせよ

なお、縦×横の相性があわず計算が定義できないときは「解なし (無理)」と記述すること

(1) $A + 2B$ $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$

(2) $B - A$ $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$

(3) $A \times B$ $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$

ベクトルの外積の × ではなく
ただの行列の掛け算としての ×

1×② × ②×2

(4) $C \times A$ $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} \; & \; \end{pmatrix}$

←あれれ？

2×① × ②×2

(5) $D \times B$ $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$

(6) E^T $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$

転置行列T

(7) A^{-1} $\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$

逆行列

(8) $A^{-1} \times A \times F = A^{-1} \times D$

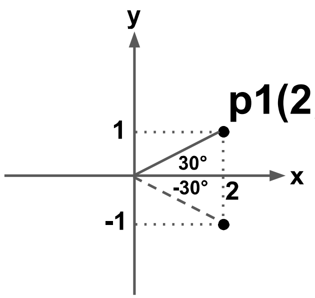
逆行列で
連立方程式
を解いたことに
なる

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$$

大きさ1の
単位行列(になるはず)

2. 座標点 p1(2,1) をx軸に対して対称に反転してから、 x方向に3倍、y方向に2倍する場合に使用する組み合わせ行列 と 変換後 の座標点を求めなさい。



$$\overbrace{(2,1) \times \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}}^{(2,\ -1)} \times \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; & \; \end{pmatrix}$$

組み合わせ行列

変換後の座標点

反転行列　拡大縮小スケール行列

$$\begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$$

計算した
組み合わせ行列

こたえ

変換後の座標点

$\begin{pmatrix} \; & \; \end{pmatrix}$

こたえ

反転行列はある意味スケール行列
(×-1 倍のスケール行列)

ヒント

左右反転

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & y \end{pmatrix}$$

上下反転

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix}$$

実力ドリル 2

5.のヒント　cos-90° = 0　sin-90° = -1

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　$C = (5\ \ -1\ \ 2)$　$D = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（角度θ 回転）　のときに次の計算をせよ

(1) A + B　$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

(2) 2A - 3B　$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

(3) A × B　$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

外積の × ではなく
ただの積としての ×

(4) C × A　$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$　or　$(\ \ \ \ \ )$

(5) D^T　角度 - θ 回転　$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

転置行列T

※重要　実は逆回転行列は
転置Tしたほうが高速計算

回転のみの行列なら
転置Tを使って逆回転しよう
- sinθ = sin(-θ) ←実質逆回転

4.次のような座標変換行列がある。変換後の座標値が　(3,4) であるとき変換前の座標値を求めよ

変換行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(\ \ \ \ ) \times \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (3,4)$

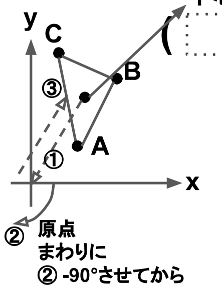
両辺に逆行列を右から ×　$\times A^{-1}$

$(\ \ \ \ ) \times \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{(3,4) \times \overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}}_{=\ (\ \ \ \ )}$

×逆行列
すると
単位行列になる

変換前の座標は ？=(　　)

5.点A(3,2) B(5,6) C(1,7)で作られる三角形を 2次元の物体をその中心点まわりに「 -90°」回転させるための
組み合わせ行列 (変換行列を合成する)を作り、変換後の座標 A´ B´ C´ を求めなさい。



中心点は？　$(\ \ \ \ \ \ 1)$

A(3,2)
B(5,6) の合計÷3
C(1,7)

中心点まわりに
-90°させるための組み合わせ行列

各点 A B C　× ① $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ × ② $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ × ③ $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ = (? ? 1)

① 原点への移動行列　② 原点まわりの回転行列　③ 元の中心点への移動行列

A´ B´ C´
変換後の各座標点

中心点　原点 ①　② -90°　③ 中心点へ戻す

計算した
組み合わせ行列

① $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ × ② $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ × ③ $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

計算した
組み合わせ行列
× $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

こたえ

A´ = (　　　)
B´ = (　　　)
C´ = (　　　)

CPU計算用

3D空間を計算して描く仕組みそのもの

パースペクティブ射影変換行列 とは

パースペクティブ = 遠近法の意味

逆行列を使えば 2D⇔3D
マウスカーソル位置⇔ 3D位置

単純化パースペクティブ射影変換行列

$$
= \begin{pmatrix} \frac{高}{幅}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z遠 - z近} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-z近}{z遠 - z近} & 1 \end{pmatrix}
$$

(DirectX系)

$$
\underbrace{\left(x_{3D} \quad y_{3D} \quad z_{3D} \quad 1 \right) \times \begin{pmatrix} \frac{高}{幅} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z遠 - z近} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-z近}{z遠 - z近} & 1 \end{pmatrix}}
$$

$$
= \left(x_{変換後} \quad y_{変換後} \quad z_{変換後} \quad 1 \right)
$$

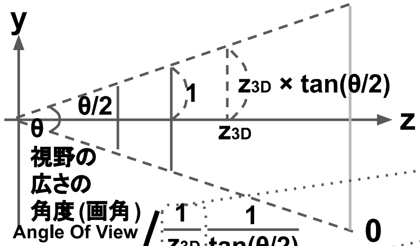
$$
\left(\frac{高}{幅}\frac{x_{3D}}{\tan(\theta/2)} \quad \frac{y_{3D}}{\tan(\theta/2)} \quad \frac{z_{3D} - z近}{z遠 - z近} \quad 1 \right)
$$

プロジェクション座標変換

-1〜1に収まる
カメラ空間上の点

$$
= \left(\frac{x_{変換後}}{z_{3D}} \quad \frac{y_{変換後}}{z_{3D}} \quad z_{変換後} \quad 1 \right)
$$

プロジェクション座標変換

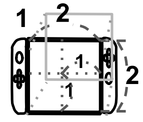


あとから1 / z_{3D} 倍

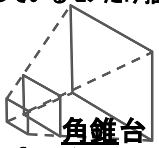
$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{z_{3D}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_{3D}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

z遠 - z近で割る (縮小)

x,yを-1.0〜1.0
z を0.0〜1.0
の小数で扱える
ようになった

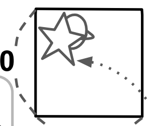


カメラの視錐台の範囲に
入っているモノだけ描く



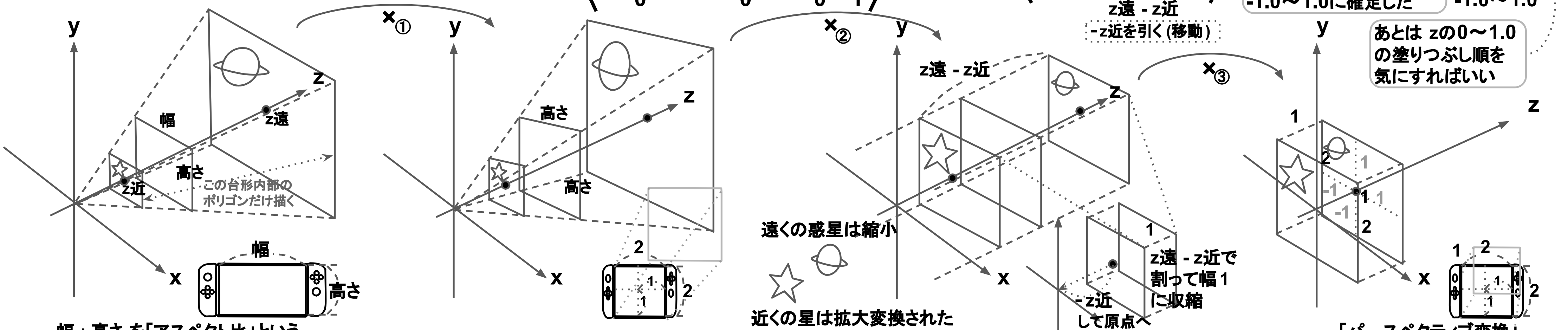
$$
\times_{①} \begin{pmatrix} \frac{高}{幅} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\quad
\times_{②} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_{3D}}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_{3D}}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\quad
\times_{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z遠 - z近} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-z近}{z遠 - z近} & 1 \end{pmatrix}
$$

-z近を引く (移動)



モノの遠近スケールは
画面上の位置へ変換され
-1.0〜1.0に確定した

あとは zの0〜1.0
の塗りつぶし順を
気にすればいい



幅 : 高さ を「アスペクト比」という

「パースペクティブ変換」

GPU用のパースペクティブ射影変換行列

CPU計算用

$$(x_{3D} \;\; y_{3D} \;\; z_{3D} \;\; 1)\times\begin{pmatrix} \frac{高}{幅}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z遠 - z近} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{- z近}{z遠 - z近} & 1 \end{pmatrix} = (x_{変換後} \;\; y_{変換後} \;\; z_{変換後} \;\; 1)$$


(DirectX系)

GPUに送る際にいちいち
1 / z倍の行列をかけたくない ..

あとから1 / z_{3D} 倍

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z3D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z3D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\frac{x_{変換後}}{z_{3D}} \;\; \frac{y_{変換後}}{z_{3D}} \;\; z_{変換後} \;\; 1 \right)$$

奥行き小数
0 ～ 1.0

**GPU計算用
に小細工①**

$$(x_{3D} \;\; y_{3D} \;\; z_{3D} \;\; 1)\times\begin{pmatrix} \frac{高}{幅}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z遠 - z近} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{- z近}{z遠 - z近} & 0 \end{pmatrix}① = (x_{変換後} \;\; y_{変換後} \;\; z_{変換後} \;\; z_{3D}) \rightarrow \left(\frac{x_{変換後}}{z_{3D}} \;\; \frac{y_{変換後}}{z_{3D}} \;\; \frac{z_{変換後}}{z_{3D}} \;\; 1 \right)$$

GPUが勝手に w成分で割る特性
でつじつまをあわせたい ..

(x成分 y成分 z成分 w成分)

GPUはw成分が1以外だと
x y z をw成分で勝手に割る

GPU用のパースペクティブ射影変換行列

GPU計算用① を z遠で 小細工②

$$(x_{3D} \;\; y_{3D} \;\; z_{3D} \;\; 1)\times\begin{pmatrix} \frac{高}{幅}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z遠\frac{1}{z遠 - z近} & 1 \\ 0 & 0 & z遠\frac{- z近}{z遠 - z近} & 0 \end{pmatrix}②① = (x_{変換後} \;\; y_{変換後} \;\; z遠\times z_{変換後} \;\; z_{3D}) \rightarrow \left(\frac{x_{変換後}}{z_{3D}} \;\; \frac{y_{変換後}}{z_{3D}} \;\; \frac{z遠\times z_{変換後}}{z_{3D}} \;\; 1 \right)$$

$$\frac{高}{幅}\frac{x3D}{\tan(\theta/2)} \;\; \frac{y3D}{\tan(\theta/2)} \;\; z遠\frac{z3D - z近}{z遠 - z近} \;\; 1$$

z_{3D}=z近 なら
z3D - z近

z遠

奥行き小数
0 ～ 1.0

最大1 $\frac{z遠}{z3D=z遠 のとき 1}$ ×$z_{変換後}$ 0 ～ 1.0 → 範囲が 0 ～ 1.0 でつじつまがあう

z近 ～ z遠

ためしに

z_{3D} = z近のとき

$$(x_{3D} \;\; y_{3D} \;\; z近 \;\; 1)\times\begin{pmatrix} \frac{高}{幅}\frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(\theta/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z遠\frac{1}{z遠 - z近} & 1 \\ 0 & 0 & z遠\frac{- z近}{z遠 - z近} & 0 \end{pmatrix} = (x_{変換後} \;\; y_{変換後} \;\; \underset{z遠}{0} \;\; \underset{z遠}{z近}) \rightarrow \left(\frac{x_{変換後}}{z近} \;\; \frac{y_{変換後}}{z近} \;\; 0 \;\; 1 \right)$$

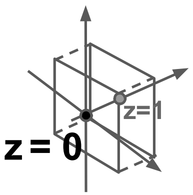
z_{3D} = z遠のとき

z遠 z遠 $\frac{z遠}{z遠}$ $\frac{z遠}{z遠}$=1

奥行き小数
0 ～ 1.0

z_{3D}=z近のとき
変換後の zが0

zが1



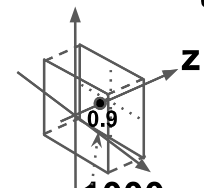
z_{3D} = z近～z遠 のときに ちゃんと
クリッピング後の　z = 0.0～1.0 になるように
GPUのパースペクティブは小細工①、②されている

z近=100 ～ z遠=10000
カメラからの 距離100 ～ 距離10000の視野設定
でシュミレーションしてみると

距離 1000までの
近いものは広く
高精度な小数で
区別できる

近いものは高精度の
ポリゴン位置で描きたい

近　遠
z
0.9　1.0



遠いものはそんなに
厳密には区別せずとも
0.9～1.0の狭い小数
で区別しても目立たない

z_{3D} = 1000(距離が1000離れた3D位置)