《复变函数与拉普拉斯变换》2022 小测

姓名：　　　　　　　　　　　学号：　　　　　　　　　　作业本序号：

一、复数、复函数

(1) 若 $(1+i)^n=(1-i)^n$，求 n。

解：由 $1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$，$1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ 得 $2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}n}=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\pi}{4}n+2kn\right)}$，化简得

$\frac{\pi}{4}n=-\frac{\pi}{4}n-2k\pi$，得到 $n=-4k$，$k=0,\pm1,\cdots$

(2) 计算 i^i。

解：$i^i=e^{i\mathrm{Ln}i}=e^{i\left(0+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$，　$k=0,1,\cdots$

(3) 求函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 的可导点和解析点。

解：$f(z)=x^2+ixy$，由 C-R 方程易得 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ 在 $(0,0)$ 处可导，无处解析。

(4) 已知函数 $f(z)=u+iv$ 解析，且 $u=x^3+3x^2y-3xy^2-y^3$，$f(1)=1$ 求函数 $f(z)$（用 z 表示，其中 $z=x+iy$）。

解：$f(z)=(1-i)z^3+i$

二、计算积分、留数、级数

(1) $\int_0^{\pi+2\mathrm{i}}\cos\frac{z}{2}dz$

解：$\int_0^{\pi+2\mathrm{i}}\cos\frac{z}{2}dz=2\sin\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2\mathrm{i}}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)=2\cos i=2\mathrm{ch}1$

(2) $\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{\sin z}{z^6}-\frac{\ln(3+z)}{z^3+4}\right)dz$

解：$\frac{\ln(3+z)}{z^3+4},\sin z$ 在 $|z|\le1$ 解析　所以 $\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{\sin z}{z^6}-\frac{\ln(3+z)}{z^3+4}\right)dz=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^6}dz=\frac{2\pi i}{5!}$

(3) 求函数 $f(z)=\frac{\mathrm{sh}z}{z^4}$ 在孤立奇点处的留数。

解：$\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{1}{6}$

(4) 求函数$\dfrac{1}{z^2(1-z^2)^2}$在圆环$1<|z|<+\infty$展开的罗朗级数。

解：$\dfrac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n \qquad |t|\le 1 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{(1-t)^2}=(\dfrac{1}{1-t})'=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n$

在圆环$1<|z|<+\infty \quad \dfrac{1}{z^2(1-z^2)^2}=\dfrac{1}{z^6(1-z^{-2})^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^{-2n-6}$

三、证明题

(1) 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是整函数，且$v(x,y)\le c$，求证$f(z)$是常数。

解：考虑函数$g=e^{-if}$， g是整函数，且$|g|=e^v\le e^c$,即g是有界整函数，

所以g是常数，$\Rightarrow g'=-if'e^{-if}=0$，$\Rightarrow f'=0$，所以$f(z)$是常数。

(2) 已知$f(z)$是整函数，且对于充分大的$|z|$，有$|f(z)|\le M|z|^n$成立，其中M为常数，$n\ge 1$为整数。证明$f(z)$必是一个次数小于或等于n的多项式。

解：将$f(z)$进行 Taylor 展开$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}C_k z^k$，其中$C_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z^{k+1}}dz$。若$k>n$，有

$|C_k|=\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z^{k+1}}dz\right|\le\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{Mr^n}{r^{k+1}}2\pi r\le\dfrac{M}{r^{k-n}}\to 0 \qquad (r\to\infty)$，即$C_k=0\,(k>n)$，命题成立。