第六章 信号与系统的复频域分析

6.0 引言

傅立叶分析

相当广泛的一些信号 → 周期复指数信号的线性组合

复指数信号 → LTI系统的特征函数

连续时间傅立叶变换

信号　　e^{st}的线性组合，$s=j\omega$

特征函数　　适用于任意s值（复数）

推广

拉普拉斯变换

6.1 拉普拉斯变换

6.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

一个信号$x(t)$的复里叶变换的存在条件是该信号绝对可积，但有很多重要信号不满足该条件。

对那些是因为当$x\to\infty$时 $x(t)$不为零而不满足绝对可积条件的$x(t)$，我们引入一个衰减因子$e^{-\sigma t}$，使得对合适的σ，$x(t)e^{-\sigma t}$是绝对可积条件的。

$$F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$\boxed{X(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt}$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma+j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega}$$

令 $s=\sigma+j\omega$

定义 $$\boxed{X(s)\overset{\triangle}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt}$$

为x(t)的拉普拉斯（正）变换 $L\{x(t)\}$

$$x(t)\xleftrightarrow{L}X(s)$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}X(s)e^{st}ds}$$

为x(t)的拉普拉斯反变换 $L^{-1}\{x(t)\}$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

双边拉普拉斯变换

$$\Downarrow$$

$$x(t)u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$X(s)=\int_{0}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

单边拉普拉斯变换

s=jω

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅立叶变换

即

$$X(s)\Big|_{s=j\omega}=F\{x(t)\}$$

$$s=\sigma+j\omega$$

$$X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j(\sigma+j\omega)t}dt$$

或

$$X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]\,e^{-j\omega t}dt$$

$x(t)e^{-\sigma t}$的傅立叶变换

例 6.1 $x(t)=e^{-at}u(t) \qquad a>0$ 时，傅立叶变换X(jω)收敛

$$X(j\omega)=\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}\text{ , a>0}$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(s+a)t}dt$$

$$X(s)=\frac{1}{s+a}\text{ ,Re\{s\}}>-a \qquad s=\sigma+j\omega\text{ , }\sigma=\mathrm{Re}\{s\}$$

$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\text{, Re\{s\}>-a}$$

例 6.2

$$x(t)=-e^{-at}\mathrm{u}(\text{-t})$$

$$X(s)=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}e^{-st}u(-t)dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-(s+a)t}dt$$

$$=\frac{1}{s+a}\ ,\ \ \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\}<\text{-a}$$

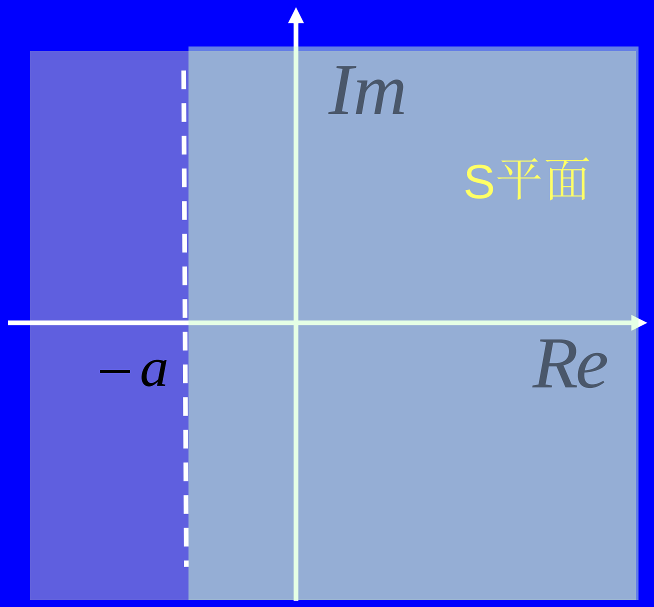
$$-e^{-at}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}\{\mathrm{s}\}<\text{-a}$$

6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

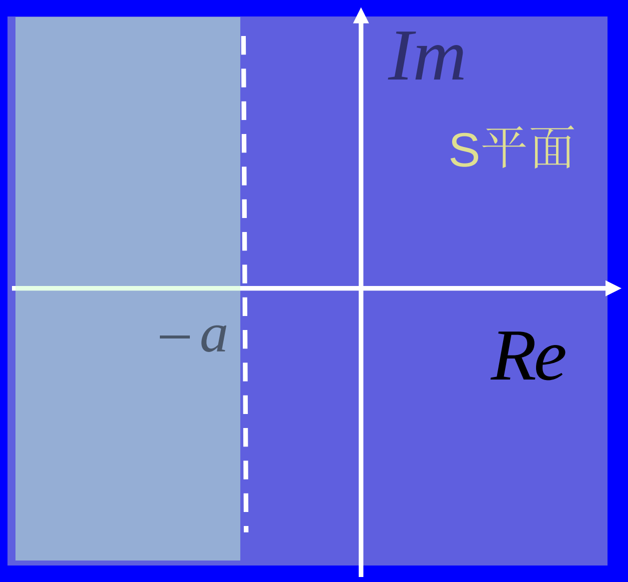
$$X(s) \overset{\triangle}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

使上式收敛的s值的范围称为拉普拉斯变换的**收敛域**，简记为**ROC (Region of Convergence)**

使 $x(t)e^{-\sigma t}$的傅立叶变换收敛的s值（ $s = \sigma + j\omega$ ）



例 6.1



例 6.2

例 6.3 $x(t)=3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}[3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)]e^{-st}dt$$

$$=3\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t}e^{-st}u(t)dt-2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}e^{-st}u(t)dt$$

$$X(s)=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+1}$$

$$e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1},\ \boxed{\mathrm{Re}\{s\}>-1}\qquad e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2},\ \boxed{\mathrm{Re}\{s\}>-2}$$

$$3e^{-2t}u(t)-3e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{s-1}{s^2+3s+2},\ \boxed{\mathrm{Re}\{s\}>-1}$$

例 6.4 $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}(\cos 3t)u(t)$

欧拉关系 $\Rightarrow$ $x(t)=[e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}+\frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}]u(t)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(1-3j)t}u(t)e^{-st}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(1+3j)t}u(t)e^{-st}dt$$

$$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+(1-3j)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right), \ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) + e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

6.1.3 拉普拉斯变换的零极点图

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{0}^{m+1} b_m s^m}{\sum_{0}^{n+1} b_n s^n},\quad n>m \qquad \text{有理式}$$

N(s)— 分子多项式

D(s) — 分母多项式

只要*x*(t)是实指数或复指数信号的线性组合，X(s)一定是有理的。

有理拉普拉斯变换

分子多项式的根：$X(s)=0$， $X(s)$的零点

分母多项式的根：$X(s)$无界，$X(s)$的极点

$X(s)$的零极点图 S平面内的极点和零点的$X(s)$的表示

有理拉普拉斯变换 → 变换的零极图 + ROC

方便 形象

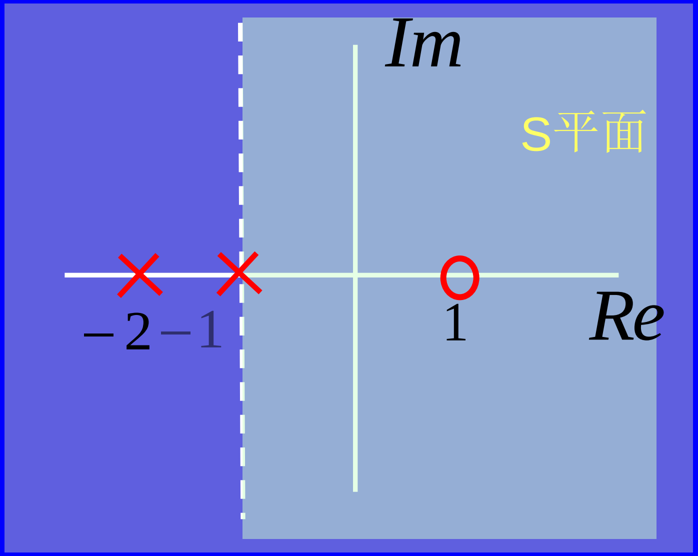
在S平面内标出$N(s)$和$D(s)$的根的位置，并指出收敛域ROC

× — 分母多项式的根 的位置　　O —分子多项式的根 的位置

例 6.3　$$3e^{-2t}u(t)-3e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{s-1}{s^2+3s+2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

O：$s=1$

X：$s=-1,\ s=-2$

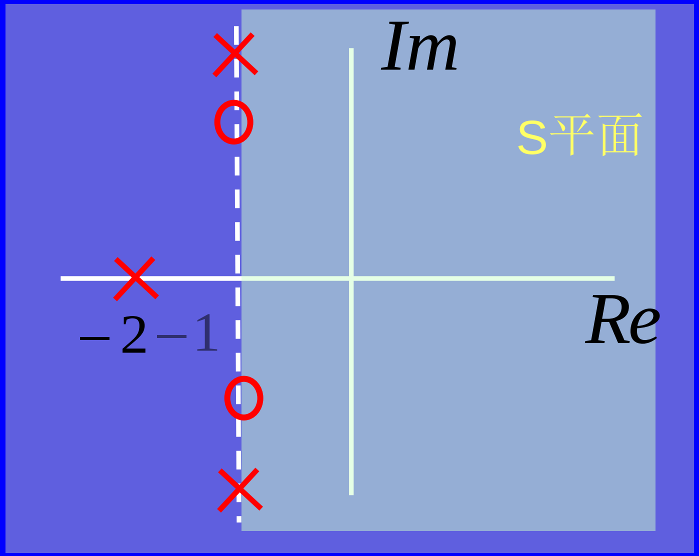


例 6.4

$$e^{-2t}u(t)+e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$O: s=-\frac{5}{4}\pm j\sqrt{71}$$

$$\times: s=-1\pm j3,\qquad s=-2$$



例 6.5

$$x(t)=\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

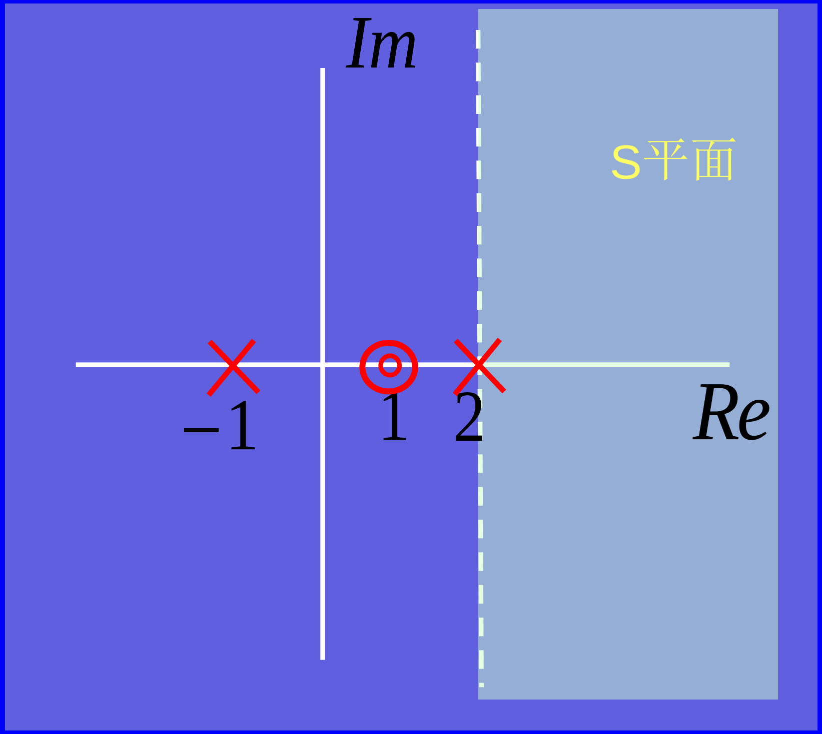
$$L\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$$ **ROC：整个s平面**

$$X(s)=1-\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-2},\mathrm{Re}\{s\}>2$$

或

$$X(s)=\frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>2$$

例 6.5的零极图 和 ROC



重复次数：阶数

S＝1：二阶零点

6.1.4 拉普拉斯变换的收敛域特性

性质1：$X(s)$的ROC在s平面内由平行于$j\omega$轴的带状区域所组成。

$X(s)$的ROC ⟹ 使 $x(t)e^{-\sigma t}$的傅立叶变换收敛的s值（$s=\sigma+j\omega$）

即

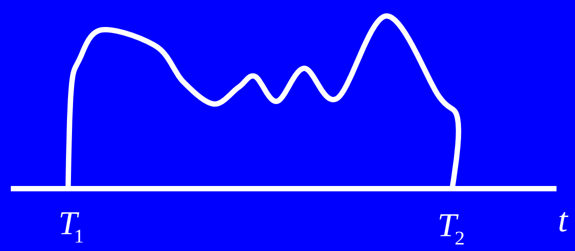
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}dt<\infty$$

$x(t)e^{-\sigma t}$绝对可积

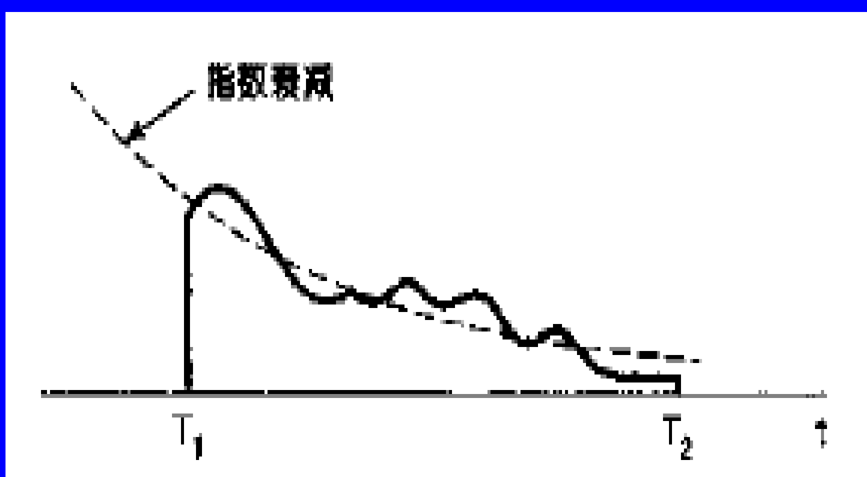
只与σ有关

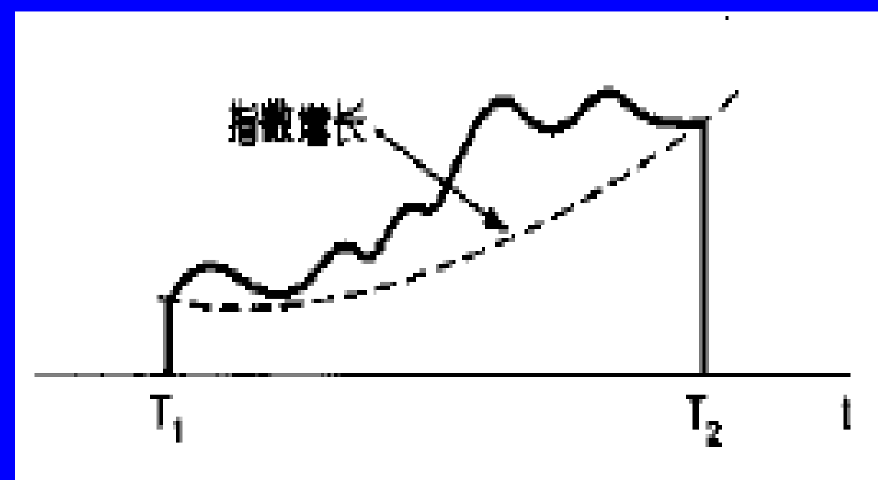
性质2：对有理拉普拉斯变换，ROC不包括任何极点

性质3：如果$x(t)$是有限持续期，并且是绝对可积的，那么ROC就是整个 s平面.



有限持续时间信号





证明

设x(t)绝对可积 $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| < \infty$

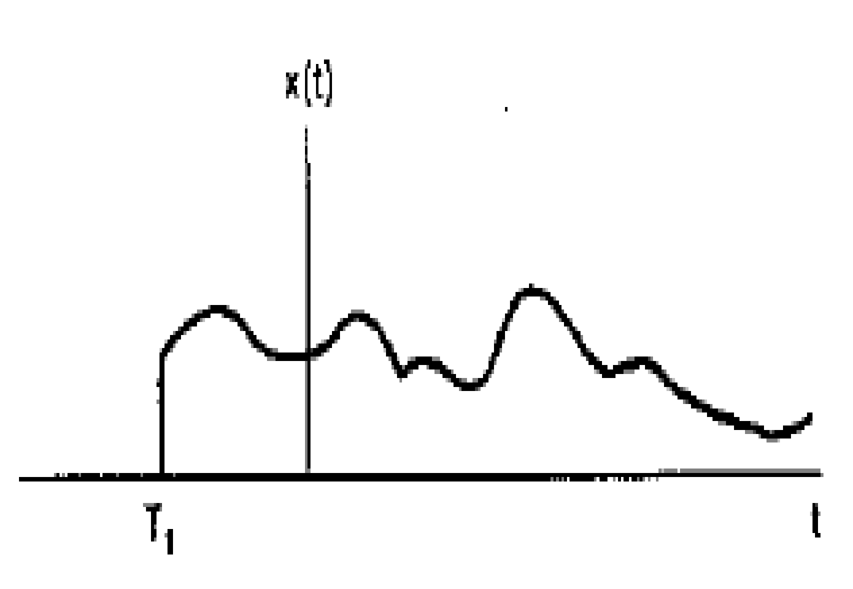
$\Downarrow$

σ =0 $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

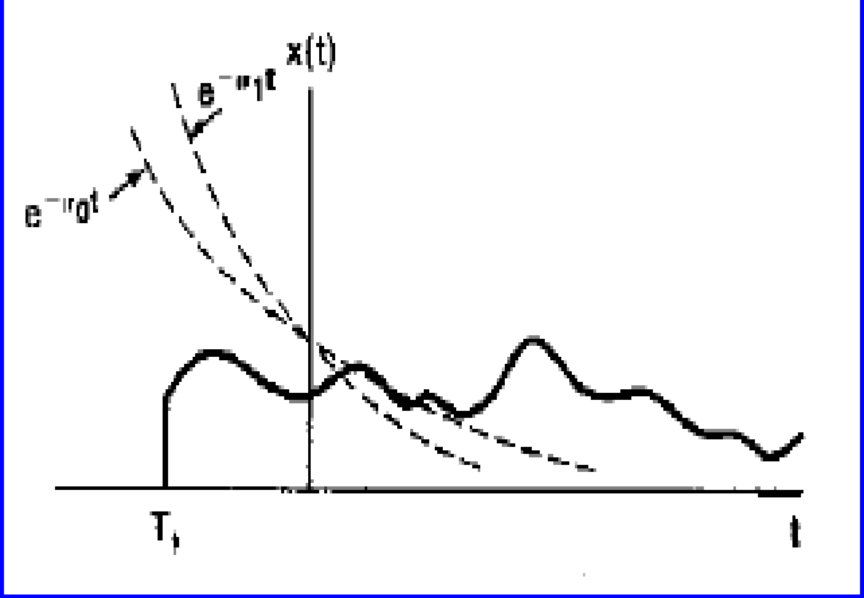
σ >0 $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$

σ <0 $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$

性质4：如果x(t)是右边信号，而且如果Re{s}= σ_0这条线位于ROC内，那么Re{s}> σ_0 的全部s值都一定在ROC内。



右边信号x(t)



$\sigma_1 > \sigma_0$，$e^{-\sigma_1 t}$衰减比$e^{-\sigma_0 t}$快

如果 $$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty$$

右边信号，等效为 $$\int_{T_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty$$

如果$\sigma_1 > \sigma_0$ $t \rightarrow \infty$， $e^{-\sigma_1 t}$衰减比$e^{-\sigma_0 t}$快

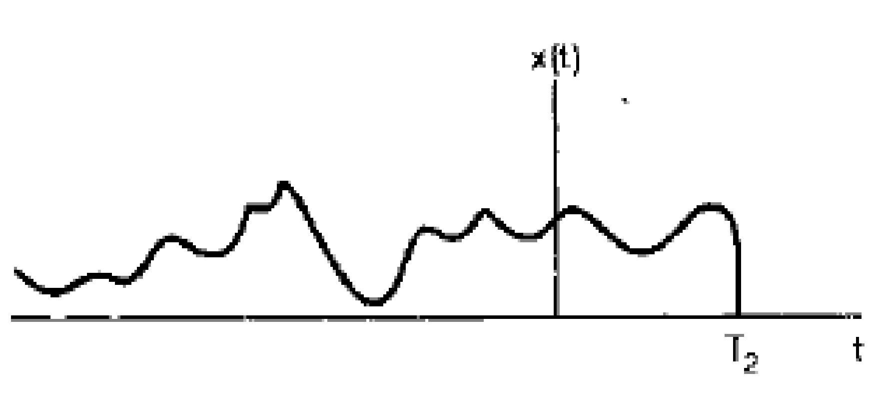
$$\int_{T_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_1 t}dt=\int_{T_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_1 t}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt$$

$$\le e^{-(\sigma_1-\sigma_0)T_1}\int_{T_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt$$

$x(t)e^{-\sigma_1 t}$绝对可积

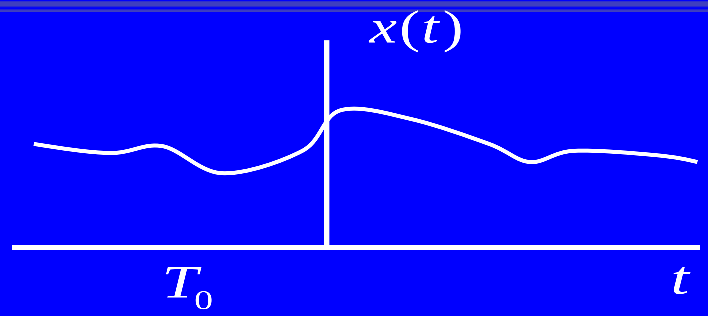
性质5：如果x(t)是左边信号，而且如果Re{s}= σ_0这条线位于ROC内，那么Re{s}< σ_0 的全部s值都一定在ROC内。

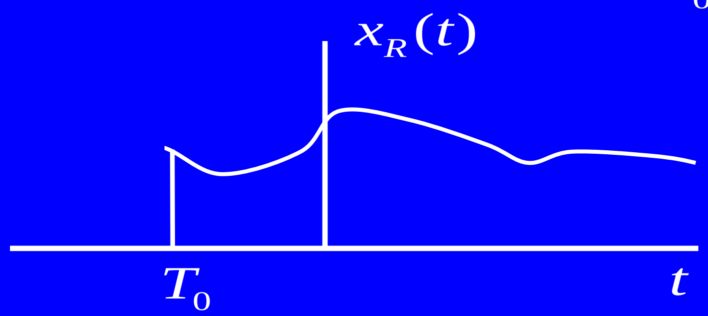
左边信号
x(t)

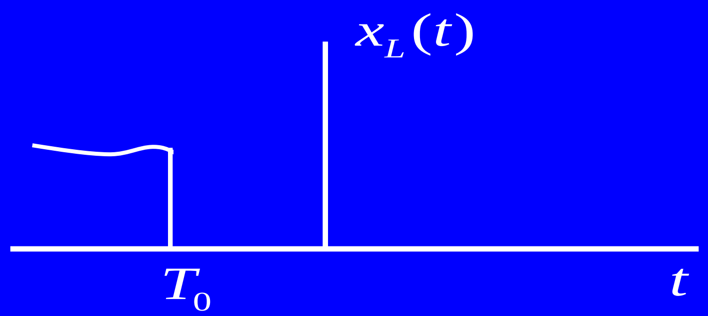


ROC：　左半平面

性质6：如果x(t)是双边信号，而且如果Re{s}= σ_0这条线位于ROC内，那么ROC 就一定是由s 平面的一条带状区域所组成，直线Re{s}= σ_0 位于带中。







$L\{x_R(t)\}$ 的ROC

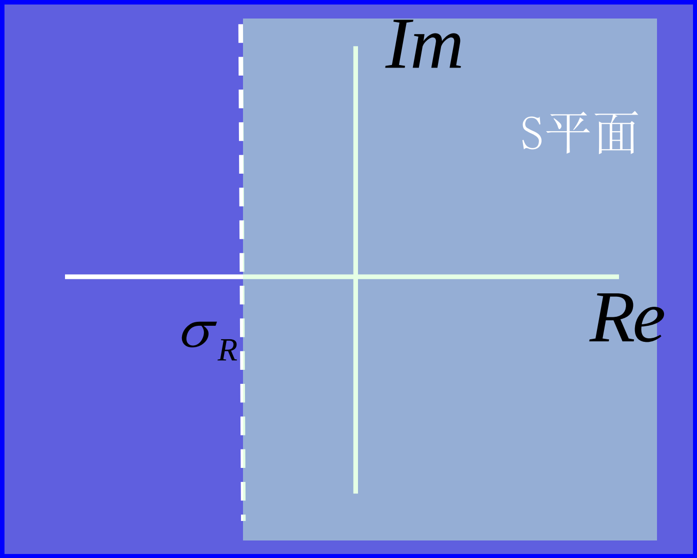
$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_R$

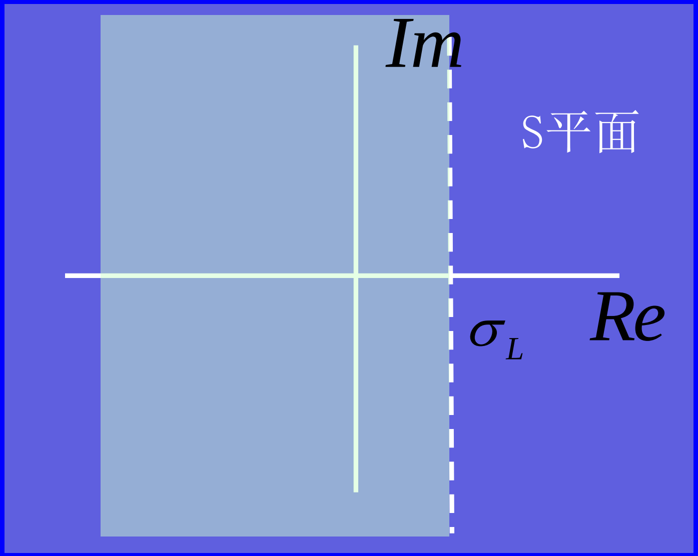
$L\{x_L(t)\}$ 的ROC

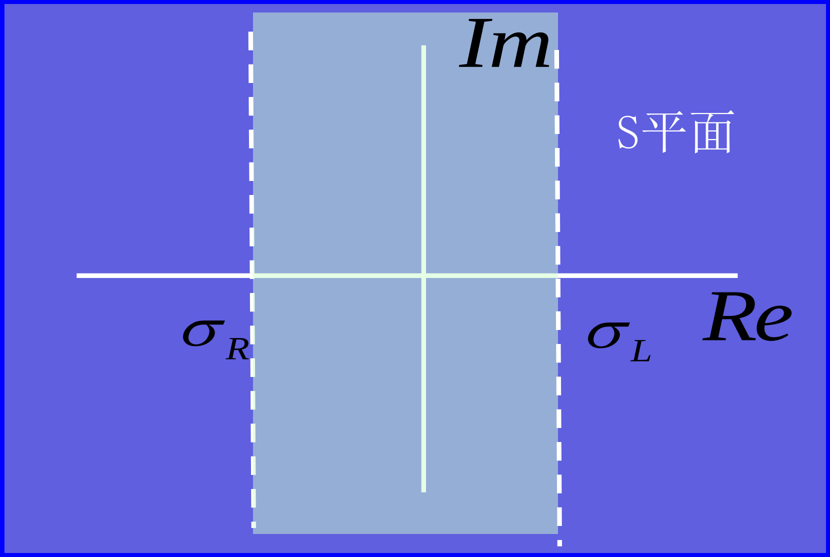
$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_L$

$L\{x(t)\}$ 的ROC → **两个半平面的重合，**

（$\sigma_R < \sigma_L$）


Im
S平面
σ_R
Re


Im
S平面
σ_L
Re


Im
S平面
σ_R
σ_L
Re

例6.7　$x(t)=e^{-b|t|}$

$$x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$$

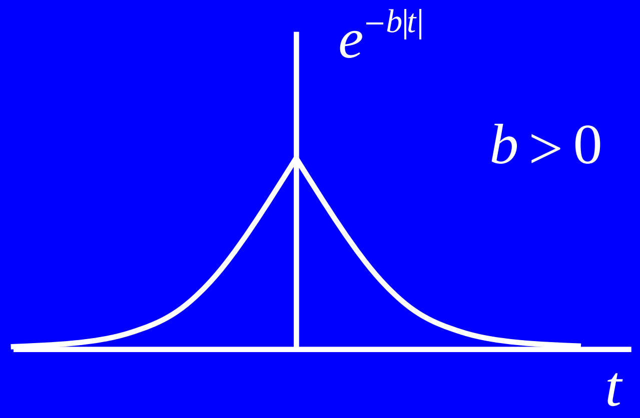
$$e^{-bt}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+b},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-b$$

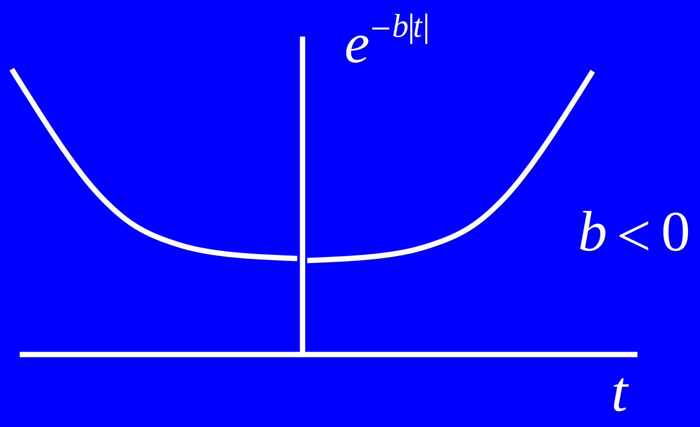
$$e^{bt}u(-t)\leftrightarrow\frac{-1}{s-b},\quad \mathrm{Re}\{s\}<b$$

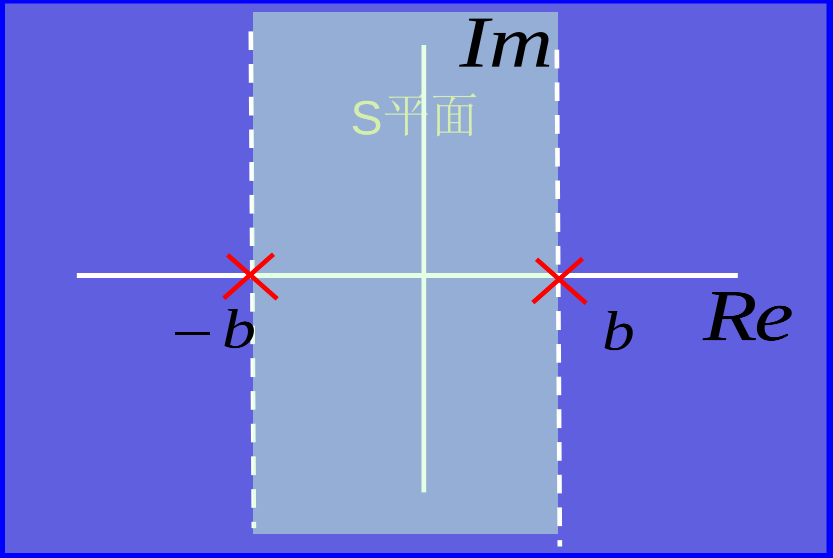
b<=0：　无公共收敛域

b>0：

$$e^{-b|t|}\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s-b}=\frac{-2b}{s^2-b^2},\quad -b<\mathrm{Re}\{s\}<+b$$


$e^{-b|t|}$
$b>0$
t


$e^{-b|t|}$
$b<0$
t


Im
S平面
$-b$
b
Re

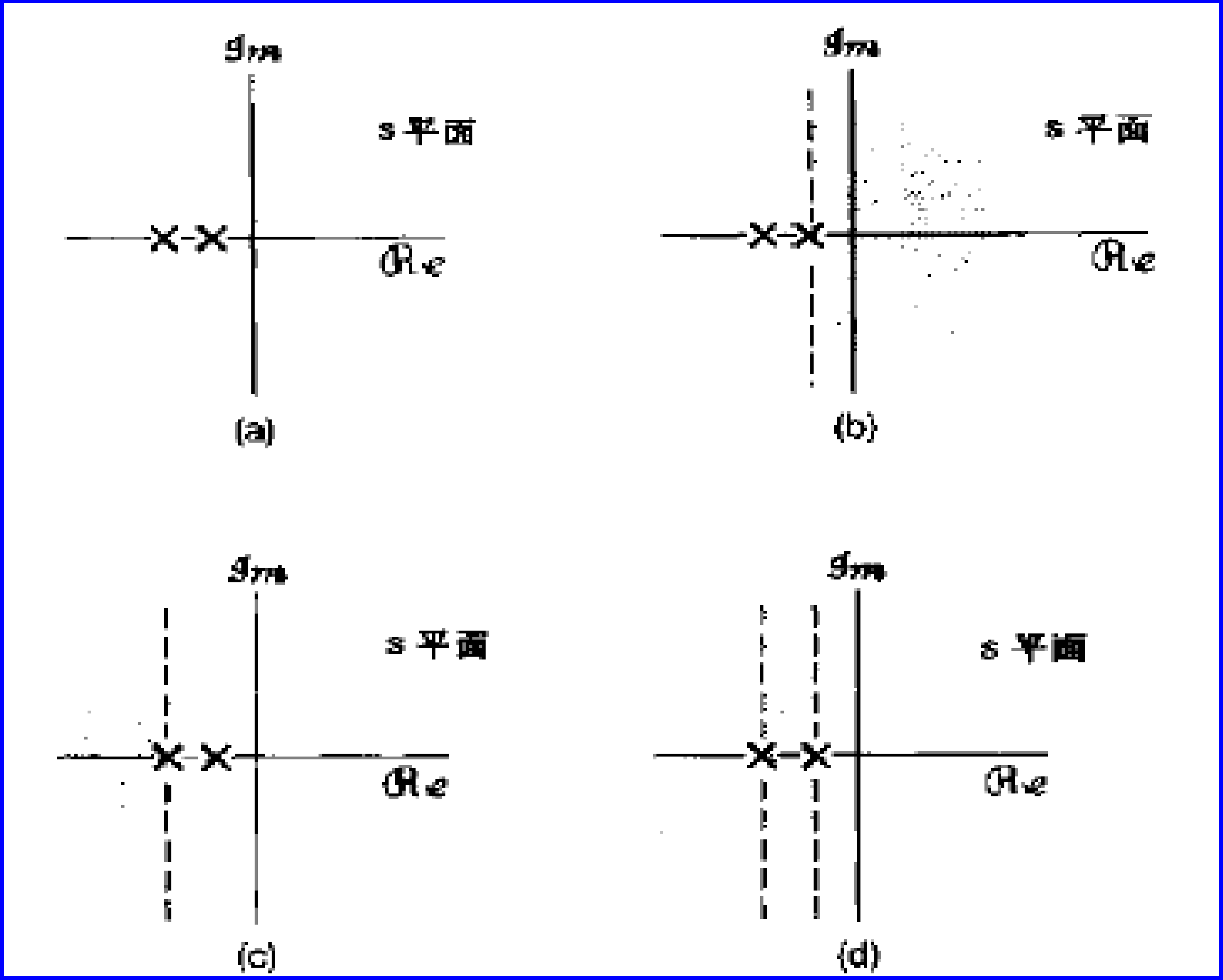
性质7：如果x(t)的拉普拉斯变换X(s)是有理的，那么它的ROC是被极点所界定或延伸到无限远。另外，在ROC内不包含X(s)的任何极点。

性质8：如果x(t)的拉普拉斯变换X(s)是有理的，若x(t)是右边信号，则其ROC在s平面上位于最右边极点的右边；若x(t)是左边信号，则其ROC在s平面上位于最左边极点的左边。

例6.8

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

零极点图



右边信号

左边信号

双边信号

6.2　常用拉普拉斯变换对

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1, ROC$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$-u(-t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^n}, \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^n}, \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

$$\delta(t-T) \xleftrightarrow{L} e^{-sT}, ROC$$

$$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L} s^n, ROC$$

§6.3 拉普拉斯变换的性质

(1) 线性

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), ROC = R_2$$

那么

$$ax_1(t) + bx_1(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_1(s), ROC = R_1 \cap R_2$$

X(s)的收敛域是R1和R2的相交，可以是空，表示没有收敛域，即不存在拉普拉斯变换。

当发生零、极点相消时，ROC可能扩大。

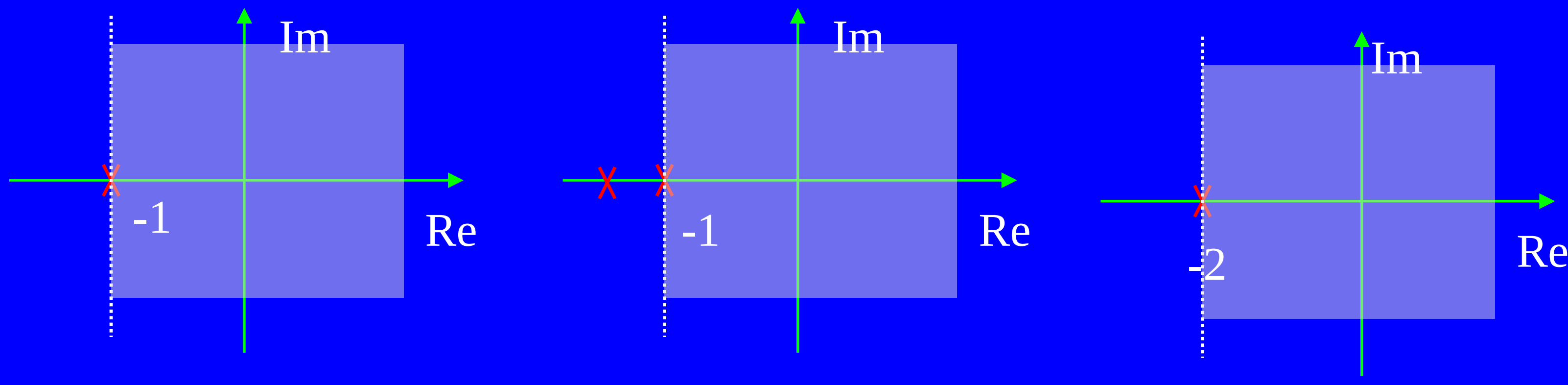
例6.9

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$



(2)时移

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s), ROC = R$$

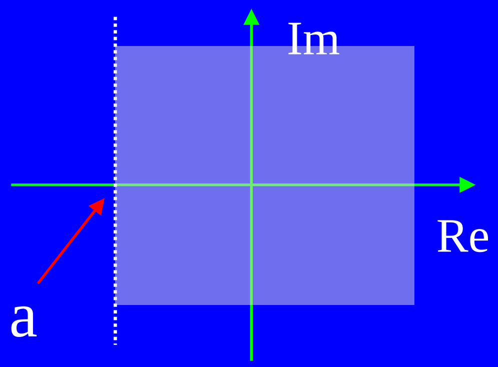
(3)S域平移

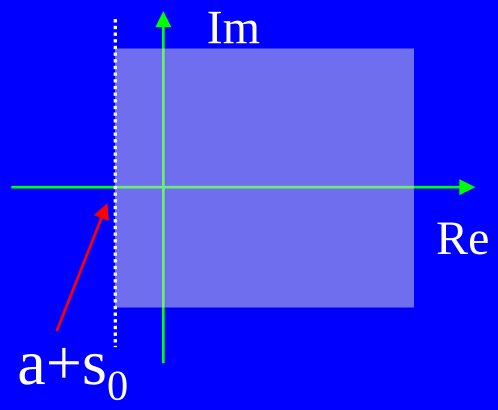
$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s-s_0), ROC = R + \mathrm{Re}\{s_0\}$$

$X(s-s_0)$的ROC是$X(s)$的ROC的平移。

$s=a$ 的零、极点， $s-s_0=a$， $s=a+s_0$





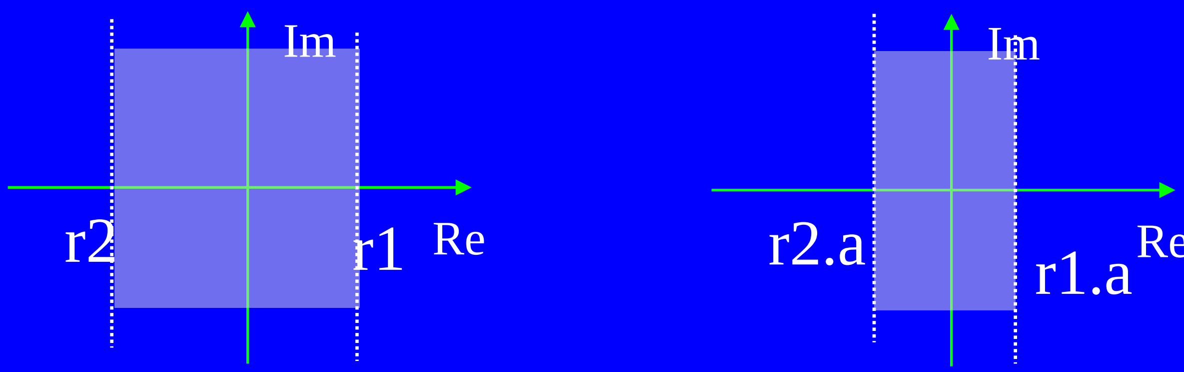
S_0 实部 对应左右平移

虚部，对应上下平移

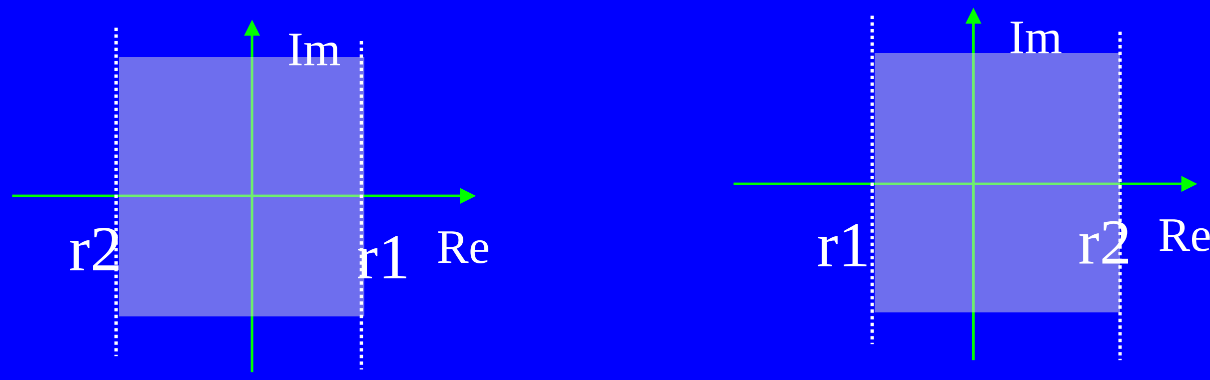
(4)时域尺度变换

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a}), ROC_1 = \boxed{aR}$$



$$x(-t) \xleftrightarrow{L} X(-s), ROC = -R$$



(5) 共轭

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

则

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*), ROC = R$$

$$X(s) = X^*(s^*)$$ x(t)为实函数

零、极点也是共轭的

(6) 卷积

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), ROC = R_2$$

则

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) X_2(s), ROC = R_1 \cap R_2$$

如发生零、极点相消，则收敛域可能增大

(7)时域微分

$$x(t)\xleftrightarrow{L}X(s),ROC=R$$

则 $$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{L}sX(s),ROC\subset R$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{o-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds \qquad \frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi j}\int_{o-j\infty}^{\sigma+j\infty}sX(s)e^{st}ds$$

sX(s)的ROC包括X(s)的ROC。如X(s)中有s=0的极点，则相消后，其ROC大于原ROC

$$u(t)\xleftrightarrow{L}1/s,ROC>0 \qquad \delta(t)\xleftrightarrow{L}1,ROC=R$$

(8) s 域微分

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

则 $$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}, ROC = R$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t)e^{-st}dt$$

例6.10

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

例6.11

$$X(s)=\frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$X(s)=\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$x(t)=[2te^{-t}-e^{-t}+3e^{-2t}]u(t)$$

(9)时域积分

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

则

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}, ROC = R \cap \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t) * x(t)$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$x(t) * u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}$$

(10)初值与终值定理

若t<0, x(t)=0, 且在t=0时，x(t)不含冲激或者高阶奇异函数，则：

初值定理 $$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

终值定理 $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3+5s^2+12}{s^3+4s^2+14s+20} = 2$$

表 9.1 拉普拉斯变换性质

节次	性质	信号	拉普拉斯变换	ROC
		$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
9.5.1	线性	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	至少 $R_1\cap R_2$
9.5.2	时移	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	s 域平移	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	R 的平移[即若 $(s-s_0)$ 在 R 中，则 s 就位于 ROC 中]
9.5.4	时域尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a（即若 s/a 在 R 中，则 s 就位于 ROC 中）
9.5.5	共轭	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	卷积	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	至少 $R_1\cap R_2$
9.5.7	时域微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	至少 R
9.5.8	s 域微分	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	至少 $R\cap\{\mathcal{Re}\{s\}>0\}$
9.5.10	初值和终值定理 若 $t<0$，$x(t)=0$ 且在 $t=0$ 不包括任何冲激或高阶奇异函数，则 $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$ $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$			

6.4 单边周期信号与抽样信号的拉氏变换

单边周期信号： $x(t) = x(t-nT) \quad t>0$

$x_1(t)$: $x(t)$的第一周期

$$x_1(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X_1(s)$$

第一周期的拉氏变换

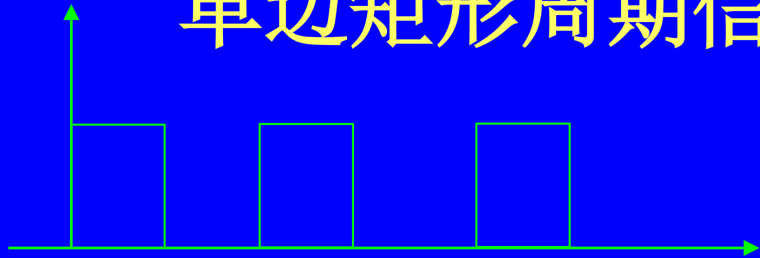
$$x_1(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X_1(s)$$ 第一周期的拉氏变换

$$x_1(t-nT) \overset{L}{\longleftrightarrow} e^{-snT}X_1(s)$$ 时移特性

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_1(t-nT) \overset{L}{\longleftrightarrow} X_1(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{X_1(s)}{1-e^{-sT}} = X_1(s)\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}$$

利用无穷级数求和

单边矩形周期信号拉氏变换



$$x_1(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

第一周期的信号

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})$$

第一周期的拉氏变换

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s(1 - e^{-sT})}$$

利用时移特性
利用无穷技术求和

抽样信号的拉氏变换

$$\delta_T(t)\bullet u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$L\{\delta_T(t)\bullet u(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-snT}=\frac{1}{1-e^{-sT}},\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$x_s(t)=x(t)\bullet\delta_T(t)\bullet u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

$$L\{x_s(t)\}=\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)(e^{-sT})^n$$

抽样信号的拉氏变换

$$L\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)(e^{-sT})^n$$

$$e^{sT} = z$$

$$L\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

6.5 拉普拉斯反变换

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

积分路径：满足Re{s} =σ的全部s点的直线（平行于jω轴）

反变换的积分求值, 要利用复平面的围线积分

部分分式展开法:(有理函数)

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\ldots b_ms^m}{a_0+a_1s+\ldots a_ns^n}$$

采用部分分式展开法:将有理拉氏变换式展开成低阶的线性组合,其中每一个低阶项的反变换,由拉氏变换性质或者查表得到

注意收敛区域:左边信号、右边信号,双边信号

（1） $X(s)$分母多项式有n个互异实根

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1 s+\ldots b_m s^m}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k_1}{(s-p_1)}+\frac{k_2}{(s-p_2)}+\ldots+\frac{k_n}{(s-p_n)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{(s-p_i)}$$

$$k_i=X(s)(s-p_i)\Big|_{s=p_i}$$

例6.12　$X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$　Re{s}>-1

部分分式展开　$X(s)=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+2}$

$$A=[(s+1)X(s)]\Big|_{s=-1}=1 \qquad B=[(s+2)X(s)]\Big|_{s=-2}=-1$$

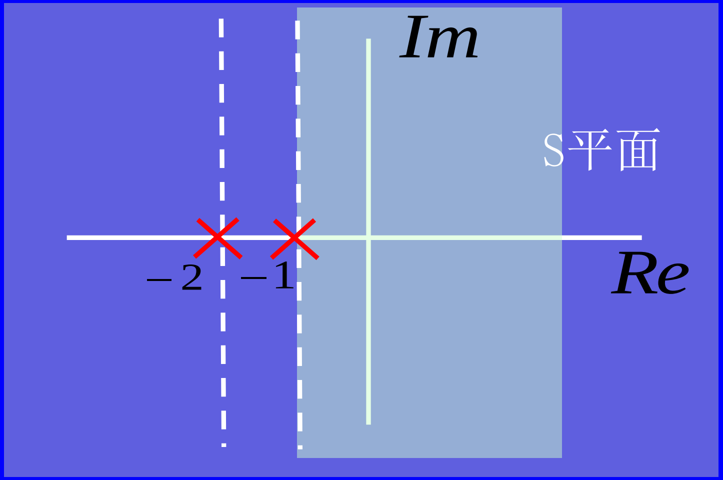
$$X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

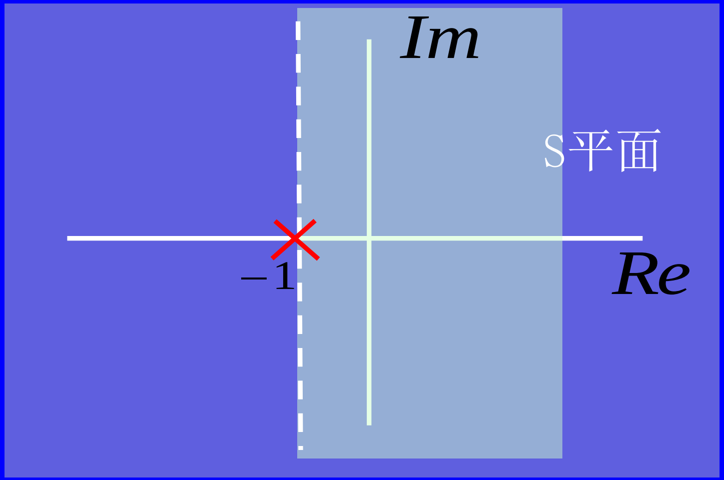
$$e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1},\quad \text{Re}\{s\}>-1$$

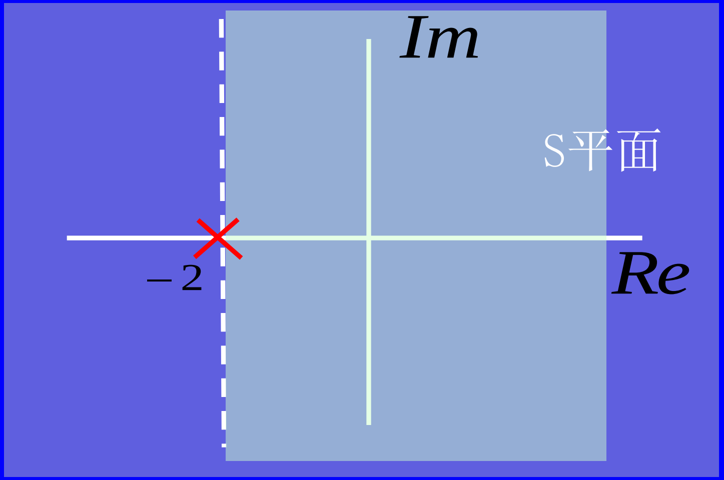
$$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2},\quad \text{Re}\{s\}>-2$$

$$e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2+3s+2},\quad \text{Re}\{s\}>-1$$

X(s)的零极图和ROC







第一项的零极图和ROC

第二项的零极图和ROC

分子阶次高于分母时

例

$$X(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)},\ \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

长除法

$$X(s)=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s)=s+2+\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

$$x(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

(2) X(s) 分母多项式包含重根

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)}$$

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{k_{1k}}{(s-p_1)}+\frac{B(s)}{D(s)}$$

$$k_{11}=X(s)(s-p_1)^k\Big|_{s=p_1}$$

$$k_{12}=\frac{d[X(s)(s-p_1)^k]}{ds}\Bigg|_{s=p_1}$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{(i-1)}[X(s)(s-p_1)^k]}{ds^{i-1}}\Bigg|_{s=p_1}$$

例6.13 $$X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3},\mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+1)}+\frac{k_2}{s}$$

$$k_2=sX(s)\Big|_{s=0}=-2$$

令 $$X_1(s)=(s+1)^3X(s)=\frac{s-2}{s}$$

$$k_{11}=\frac{s-2}{s}\Big|_{s=-1}=3$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}\frac{s-2}{s}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_{13} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{s-2}{s}\Big|_{s=-1} = 2 \qquad k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{(i-1)}[X(s)(s-p_1)^k]}{ds^{i-1}}\Big|_{s=p_1}$$

$$X(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} + \frac{-2}{s}$$

$$x(t) = (3/2t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t} - 2)u(t)$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

例6.15

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$\boxed{\mathrm{Re}\{s\}<-2}$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

$$-e^{-t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+1},\mathrm{Re}\{s\}<-1$$

$$-e^{-2t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+2},\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

$$x(t)=[-e^{-t}+e^{-2t}]u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)(s+2},\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

例6.16 $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ -2<Re{s}<-1

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)}\xleftrightarrow{L}-e^{-t}u(-t),\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1$$ 左边信号

$$\frac{1}{(s+2)}\xleftrightarrow{L}e^{-2t}u(t),\quad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$ 右边信号

$$x(t)=-e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)(s+2)},-1<\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

§ 6.6　单边拉普拉斯变换

$$L(s)\overset{\Delta}{=}\int_{0-}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

例6.17： $x(t)=e^{-a(t+1)}u(t+1)$

$$L(s)=\int_{0-}^{\infty}e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt$$

$$=e^{-a}\int_{0-}^{\infty}e^{-(s+a)}dt=e^{-a}\frac{1}{s+a}$$

当x<0, x(t)不全为零，单边和双边拉普拉斯是不一样的。

$$X(s)=\frac{e^{s}}{s+a},\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

双边

单边拉普拉斯变换的性质

大部分与双边变换相同。主要不同：时域微分、积分性质

时域微分性质

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^2X(s) - sx(0-) - x'(0^-)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau}{s}$$

利用单边拉普拉斯变换性质:求解具有非零初始条件的微分方程---全响应。

时域积分性质

$$uL\{x(t)\} = \tilde{X}(s)$$

$$uL\{\int_{-\infty}^{t} x(t)dt\} = \frac{\tilde{X}(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau}{s}$$

卷积定理

如果$x_1(t)$和$x_2(t)$都是单边信号，

$$x_1(t) * x_2(t) = \tilde{X}_1(s)\,\tilde{X}_2(s)$$

6.7　用拉普拉斯变换分析LTI系统

拉普拉斯变换法是连续时间系统分析的又一个重要工具，与傅氏分析法相比较，可涉及的信号和系统更广泛，尤其在分析非零起始状态的系统时，可自动计入非零起始状态，从而一次可解得零输入响应，零状态响应和全响应。由于拉氏变换建立了时间变量$x(t)$与复频域（S域）变量$s=\sigma+j\infty$ 之间的对应关系，故把用拉氏变换法对系统的分析也称为系统的复频域（S域）分析。

6.7.1 系统函数

LTI系统中，若输入$x(t)=e^{st}$，那么，其输出就是$H(s)e^{st}$；即，e^{st}是系统的特征函数，其特征值就是单位冲激函数的拉普拉斯变换. $H(s)=L\{h(t)\}$

$$Y(s)=H(s)X(s)$$

当$s=j\omega$ 时，拉普拉斯变成傅立叶变换，$H(s)$为LTI系统的频率响应函数。

一般的，$H(s)$称为**系统函数**或**转移函数**

线性常系数微分方程

例

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$$

$$sY(s)+3Y(s)=X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+3}$$

$$h(t)=e^{-3t}u(t) \quad \boxed{或} \quad h(t)=-e^{-3t}u(-t)$$

因果　　　　非因果

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k) Y(s) = (\sum_{k=0}^{M} b_k s^k) X(s)$$

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

没有收敛域的说明，因为微分方程本身没有限制收敛域

需要结合稳定性和因果性等附加说明

零点

$$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0$$

极点

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$$

1. 因果性

一个因果系统的系统函数的ROC是某个右半平面

反之，则不一定。

对于一个具有有理系统函数的系统来说，系统的因果性就等效于ROC位于最右边极点的右半平面

例 6.17

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

因果

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

例 6.18

$$H(s) = \frac{e^{s}}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1} \qquad e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{L} \frac{e^{s}}{s+1}$$

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$$

非因果

2　稳定性

当且仅当系统函数$H(s)$的ROC包括$j\omega$轴时，一个LTI系统是稳定的

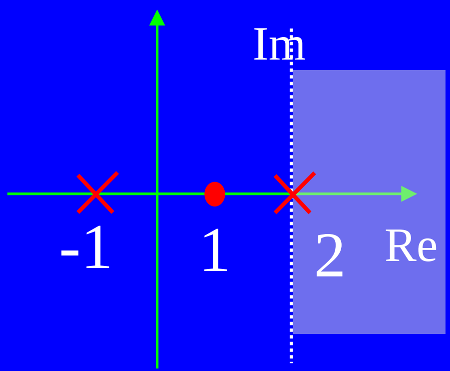
当：$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt<\infty$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$ 存在

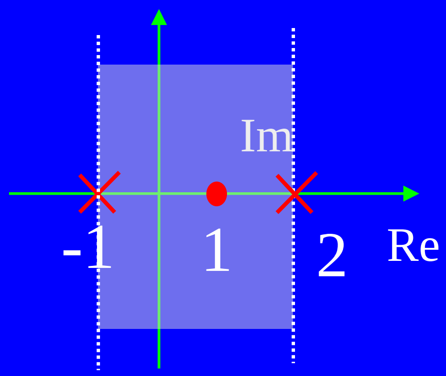
$$H(s)\big|_{\sigma=0}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=H(j\omega)$$

例

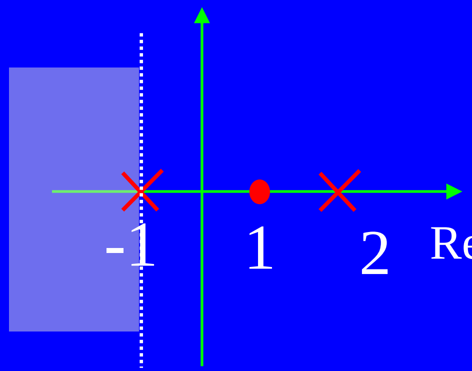
$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$



因果不稳定



非因果稳定



非因果不稳定

$$h(t)=(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t})u(t)$$

$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

$$h(t)=-(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t})u(-t)$$

3. 因果稳定性

当且仅当H(s)的全部极点都位于s平面的左半平面时，一个具有有理系统函数H(s)的因果系统才是稳定的

例

$$e^{-t}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+1},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$e^{2t}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s-2},\mathrm{Re}\{s\}>2$$

系统特性与系统函数

若LTI系统的输入　$x(t)=e^{-3t}u(t)$

输出　$y(t)=[e^{-t}-e^{-2t}]u(t)$

$$X(s)=\frac{1}{s+3},\mathrm{Re}\{s\}>-3 \qquad Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

系统函数　$H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

极点-2，-1；所以ROC 为Re{s}>-1;

又极点-2，-1<0，所以系统是稳定的

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

6.7.3　全响应的求解

利用单边拉普拉斯变换性质:求解具有非零初始条件的微分方程---全响应。

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) - x(0^-)$$

例:
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad y(0-)=\beta, y'(0-)=\gamma$$

设: $x(t)=au(t)$

$$s^2Y(s)-\beta s-\gamma+3sY(s)-3\beta+2Y(s)=a/s$$

$$Y(s)=\boxed{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}}+\frac{a}{s(s+1)(s+2)}$$

零输入响应

零状态响应

(初始松弛)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=au(t) \\ y(0-)=\beta, y'(0-)=\gamma \end{cases}$$

$$Y(s)=\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}+\frac{a}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s)=\beta(\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2})+\gamma(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})+\frac{a}{2}(\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2})$$

$$=\frac{a}{2s}+\frac{2\beta+\gamma-a}{s+1}+\frac{a+2\beta+2\gamma}{2(s+2)}$$

$$y(t)=[\frac{\alpha}{2}+(2\beta+\gamma-\alpha)e^{-t}+\frac{(\alpha+2\beta+2\gamma)}{2}e^{-2t}]u(t)$$

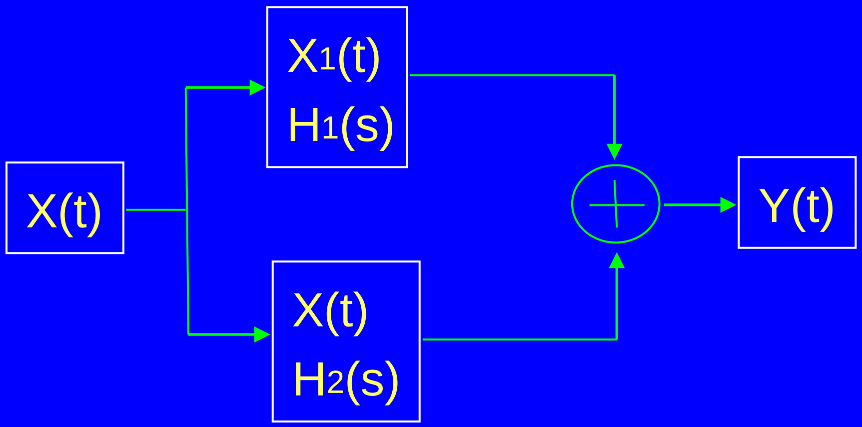
6.7.4 系统函数与方框图

LTI系统互连的系统函数

并连

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

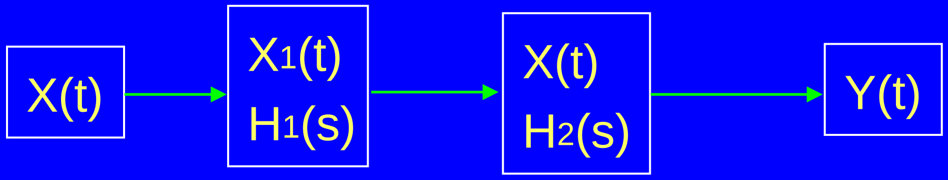
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$



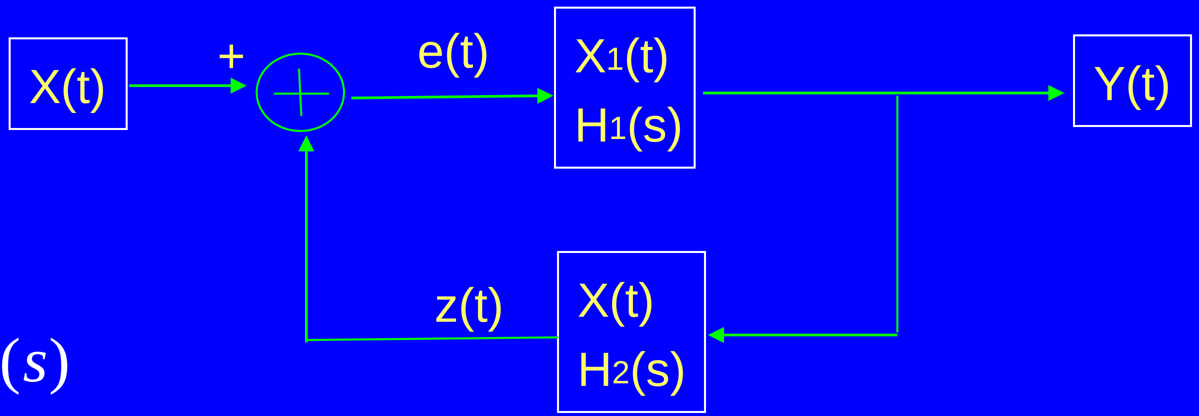
级连

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s) H_2(s)$$



反馈



$$Y(s) = H_1(s)E(s)$$

$$E(s) = X(s) + Z(s)$$

$$Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) + H_2(s)Y(s)]$$

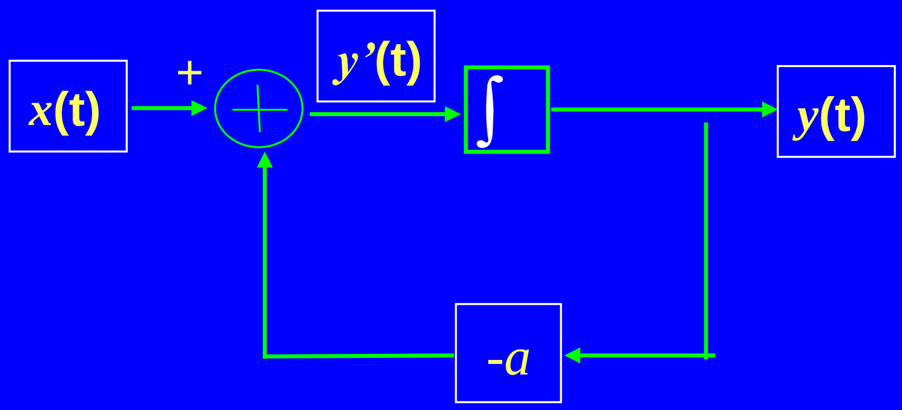
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

微分方程与方框图

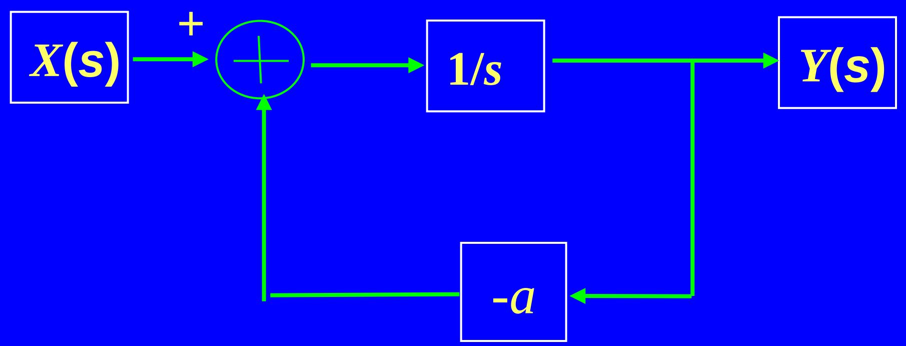
$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-ay(t)$$

$$y(t)=\int[x(t)-ay(t)]dt$$



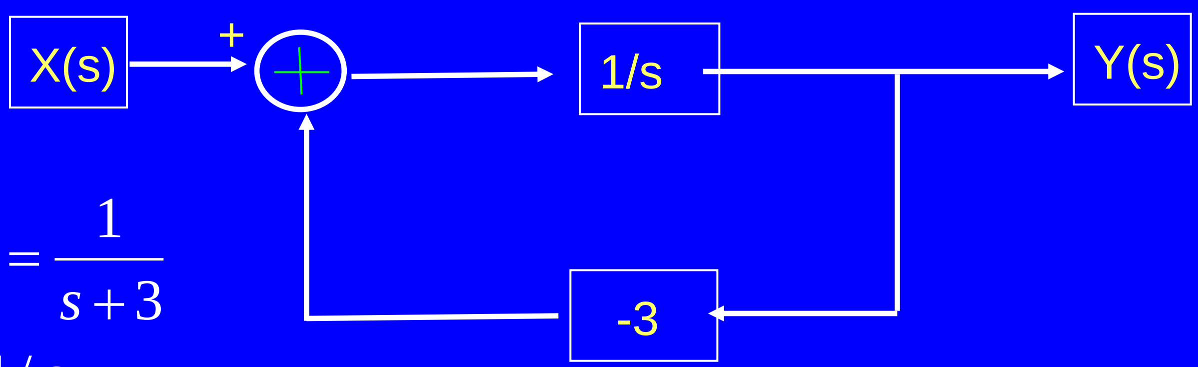
$$H(s)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}a}=\frac{1}{s+a}$$



$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

例3.23　已知系统函数 $H(s)=\dfrac{1}{s+3}$，写出微分方程，画出方框图。

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$$



$$H(s)=\frac{1}{s+3}$$

$$=\frac{1/s}{1+3\cdot 1/s}$$

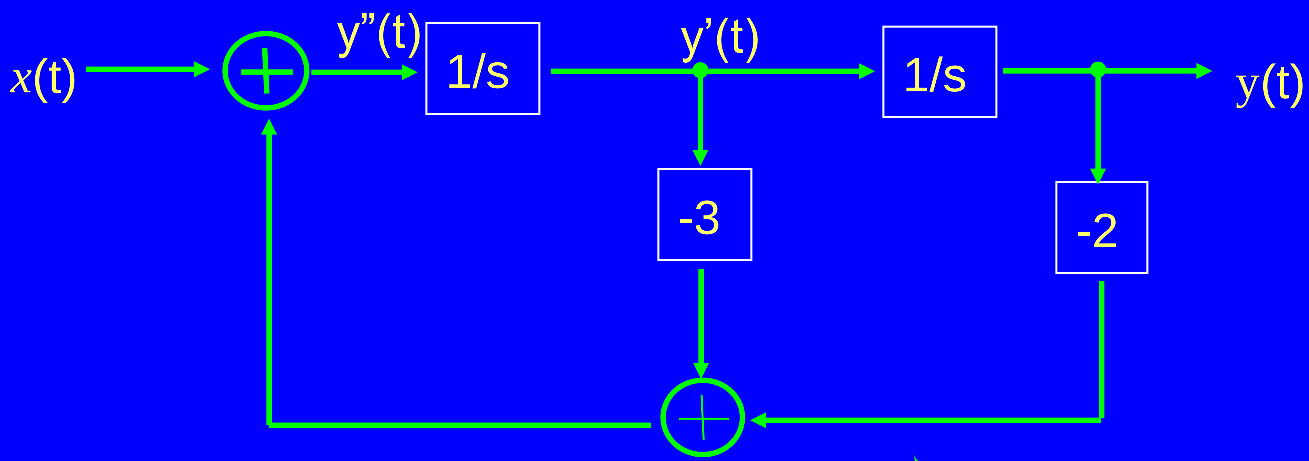
例6.24 画出下面系统的框图

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+2}$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$



直接II型

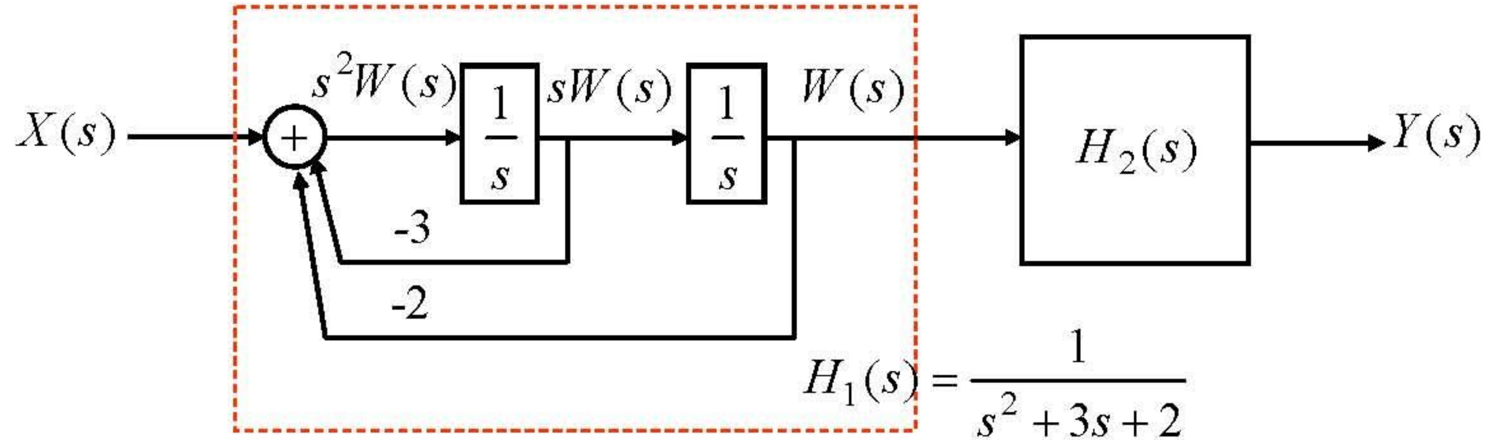
$$H(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$=\frac{1}{s(s+3)+2}$$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$$

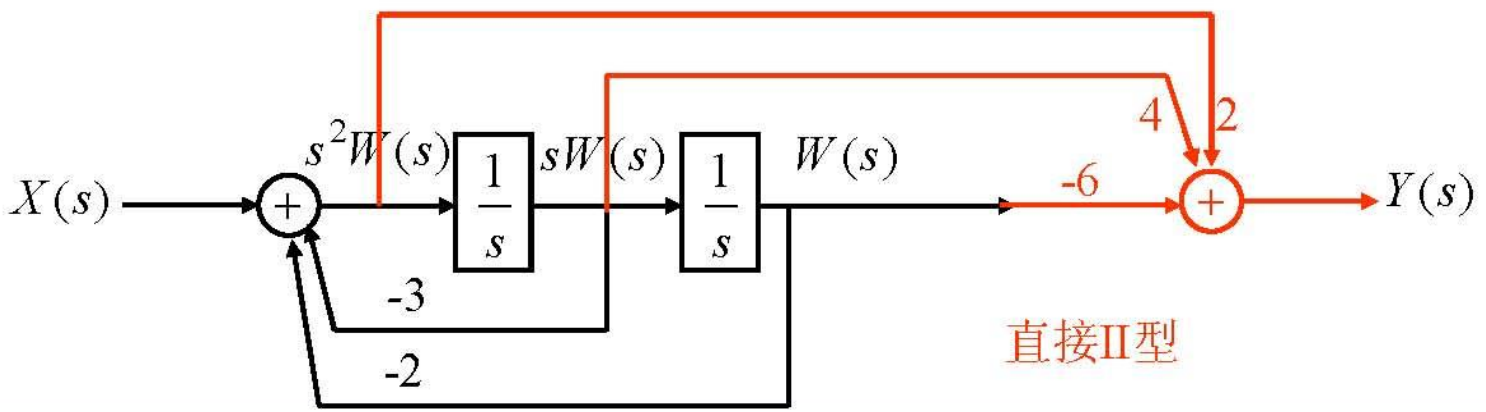
$$y''(t)=x(t)-2y(t)-3y'(t)$$

例 (2) $H(s)=\dfrac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{s^2+3s+2}\cdot(2s^2+4s-6)=H_1(s)\cdot H_2(s)$



$$H_1(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

$H_2(s)=2s^2+4s-6$ ➡ $Y(s)=(2s^2+4s-6)W(s)$ ➡ $Y(s)=2s^2W(s)+4sW(s)-6W(s)$



直接II型