第四章　离散时间信号与系统的频域分析

§4.0　引言

信号分解为单位脉冲信号的线性组合

信号分解为复指数信号的线性组合

离散时间周期信号的傅立叶级数:　　有限项级数

连续时间周期信号的傅立叶级数:　　无穷项级数

§4.1 离散时间LTI系统的特征函数

连续时间：$e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$

离散时间：$z^{n} \rightarrow H(z)z^{n}$

特征函数

特征值

系统对信号的响应，仅是常数乘输入（与输入无关）

12:56

对h[n]的LTI系统 $x[n]=z^n$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{n-k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{n}z^{-k}=z^{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}$$

$y[n]=H[z]z^n$

其中 $H[z]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}$

输出是同一复指数乘一个常数
复指数是LTI系统的特征函数

对LTI系统

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t} \Rightarrow y(t)=\sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \Rightarrow y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

LTI系统中：输入表示为复指数信号的线性组合

那么：输出为相同复指数信号的线性组合

且：输出的系数为相应系数与对应特征值相乘

周期信号： s、z的纯虚数。s=jw, z=e^{jw}

$$\{a_k\} \rightarrow \{a_k H(z_k)\}$$

12:56

§4.2 离散傅立叶级数(DFS)

$$x[n]=x[n+mN]$$

$$\Phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n},\quad k=0,\pm1,\pm2\ldots$$

$$\Phi_k[n]=\Phi_{(k+rN)}[n]$$

N个谐波

$$x[n]=\sum_k a_k\Phi_k[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

傅立叶级数系数

$$x[n]\begin{cases} x[0]=\sum_{k} a_k \\ x[1]=\sum_{k} a_k e^{jk\omega_0} \\ \\ x[N-1]=\sum_{k} a_k e^{jk\omega_0(N-1)} \end{cases}$$

N个方程线性独立

N个线性独立方程----可求的a_k的唯一解

任意离散时间周期信号, a_k存在和收敛.

不存在收敛问题和吉布斯现象---x[n]和a_k是等价的

$$\sum_{n} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, k = 0, \pm N \ldots. \\ 0, else \end{cases}$$

周期复指数序列在一个周期内求和为零。

$$x[n] = \sum_{k} a_k \Phi_k[n] = \sum_{k} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$e^{-jr\omega_0 n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{n}\sum_{k} a_k e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

$$= \sum_{k} a_k \sum_{n} e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$e^{-jrw_0 n}$ *

$$x[0]=\sum_k a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_{N-1}$$

$e^{-jrw_0 n}$ *

$n=0,\ldots N-1$

$$x[1]=\sum_k a_k e^{jk\omega_0} = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 n} + \ldots + a_{N-1} e^{jk\omega_0 n}$$

$n=1$

……

$$x[N-1]=\sum_k a_k e^{j\omega_0 k(N-1)} = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 n} + \ldots + a_{N-1} e^{jk\omega_0 n}$$

$n=N-1$

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_n \sum_k a_k e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

$$= \sum_k a_k \sum_n e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

12:56

$$x[n]=\sum_{k} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

综合公式

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

分析公式

频谱系数

$$x[n] \xleftrightarrow{Fs} a_k$$

12:56

$$\Phi_k[n] = \Phi_{k+rN}[n]$$

若k=0,…,N-1

$$x[n] = a_0\Phi_0[n] + a_1\Phi_1[n] + \ldots + a_{N-1}\Phi_{N-1}[n]$$

若k=1,…,N

$$x[n] = a_1\Phi_1[n] + a_2\Phi_2[n] + \ldots + a_N\Phi_N[n]$$

$$\Phi_0[n] = \Phi_N[n] \quad \Longrightarrow \quad a_k = a_{k+N}$$

$\Phi_k[n]$以周期N周期性重复

a_k的值必定以N为周期，周期性重复。

例4-1 x[n] = sin(ω$_0$n) 的傅立叶级数系数

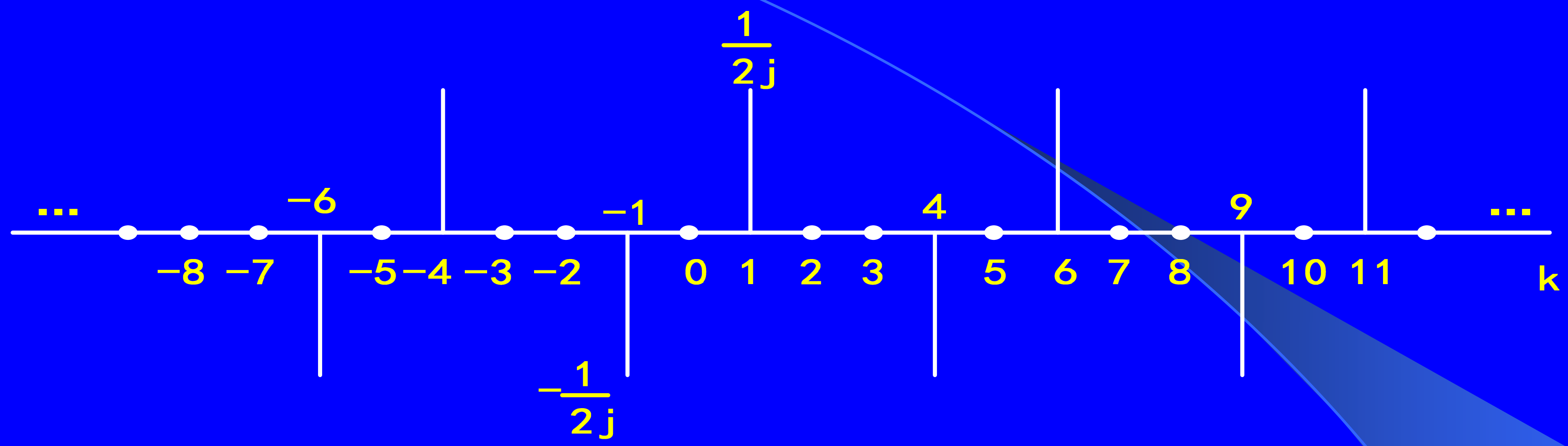
该信号只有满足 2π/ω$_0$ 为整数比时才是周期的，此时信号的周期为 N。根据欧拉公式，我们可以把 x[n] 改写复指数形式，即：

$$x[n]=\frac{1}{2j}e^{j(2\pi/N)n}-\frac{1}{2j}e^{-j(2\pi/N)n},\quad \therefore\ a_1=\frac{1}{2j},\quad a_{-1}=-\frac{1}{2j}$$

我们知道离散时间周期序列的傅立叶系数是周期的，其周期与时域序列的周期相同，即：

$$a_{N+k}=a_k$$

下面我们以 N=5 为例，来看一下该信号的频谱（傅立叶级数系数）：



x[n] = sin[(2π/5)n] 的频谱（傅立叶级数系数）

从图中我们可以看出，**离散时间序列的频谱确实是周期的。**

12:56

例4-2 离散时间周期方波序列的傅立叶级数系数（频谱）

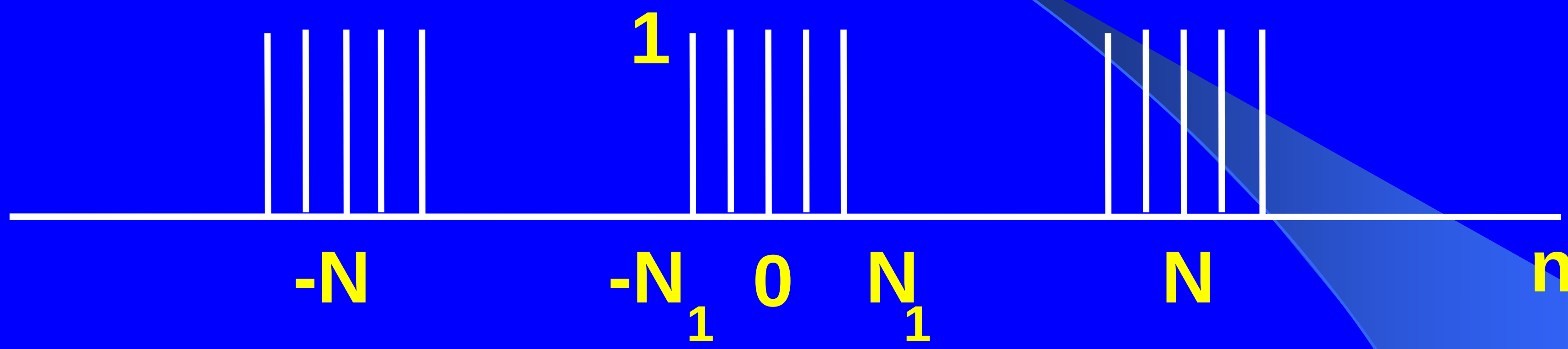


图4-2 离散时间周期方波序列

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad \text{letting } m = n + N_1$$

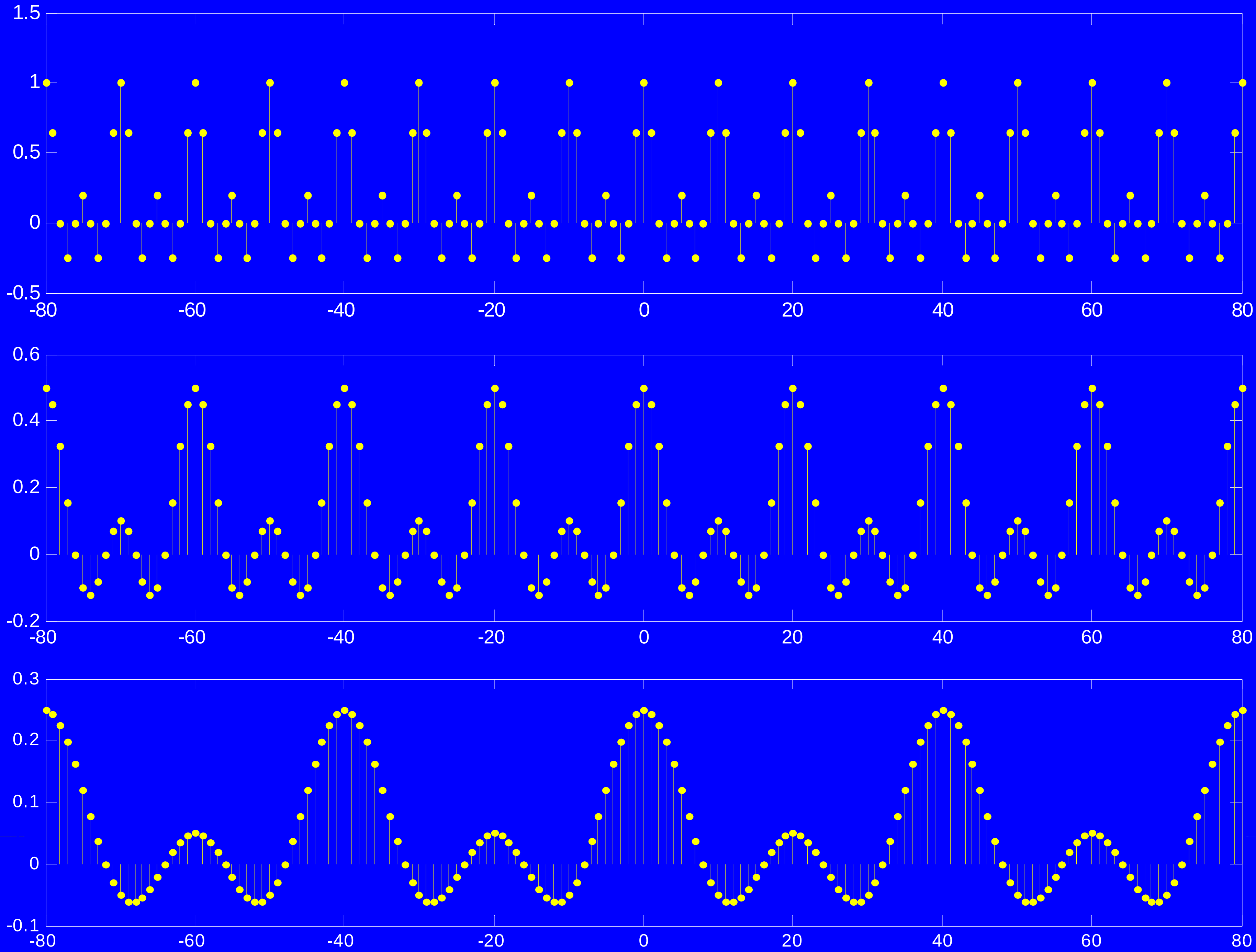
$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}\{e^{-jk(2\pi/N)}\}^m$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1}\left(\frac{1-e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}\right); \quad k \neq 0, \ \pm N, \ \pm 2N, \ \ldots$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-jk(2\pi/N)}[e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/N)}[e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}; \quad k = 0, \ \pm N, \ \pm 2N, \ \ldots$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80

在介绍连续时间信号的傅立叶表示时，我们曾经讲：当用有限项级数重建信号时会产生 Gibbs 效应。

那么对于离散时间信号是否也会产生同样的效应呢？答案显然是否定的。原因很简单，因为离散傅立叶级数本身就只有有限项。

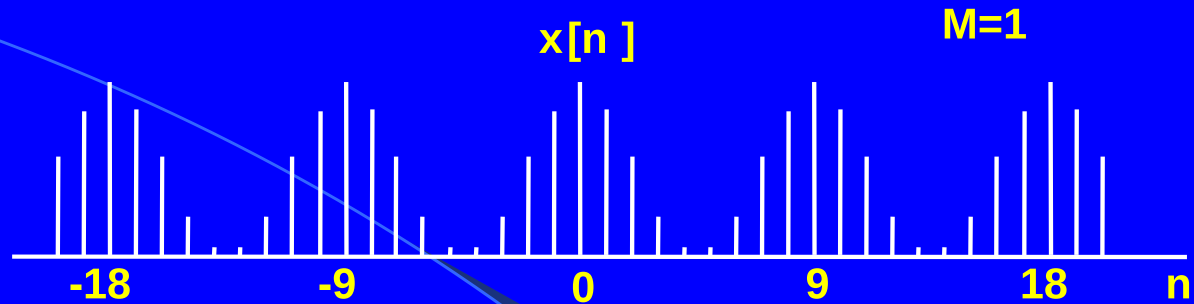
下面我们以 N＝9，$2N_1+1=5$ 的周期方波序列为例，简要介绍离散时间信号重建的基础知识。我们知道：一个周期为9的离散时间序列，其傅立叶级数的系数也有9项。如果我们用：

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

那么我们期望当M＝4时，通过信号的频谱重建的信号与原信号完全一致，即：

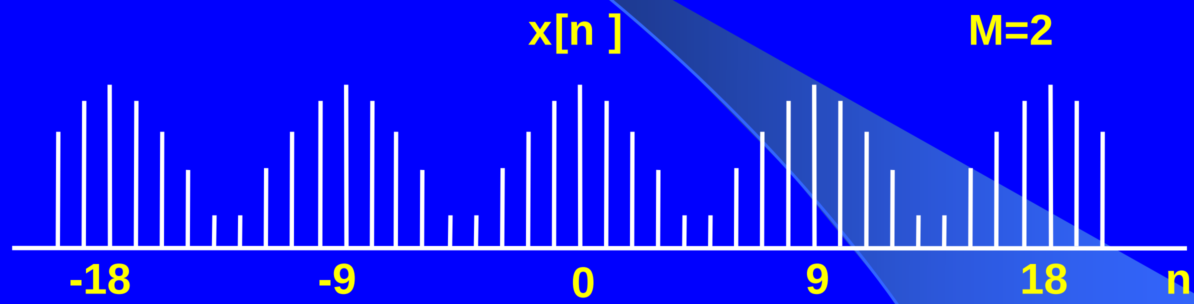
$$\hat{x}[n]=x[n]$$

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=-1}^{1}a_k e^{jk(2\pi/9)n}$$



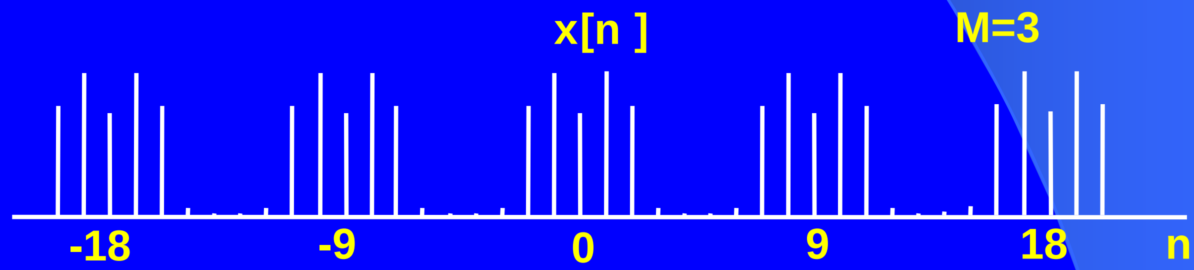
(a)

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=-2}^{2}a_k e^{jk(2\pi/9)n}$$



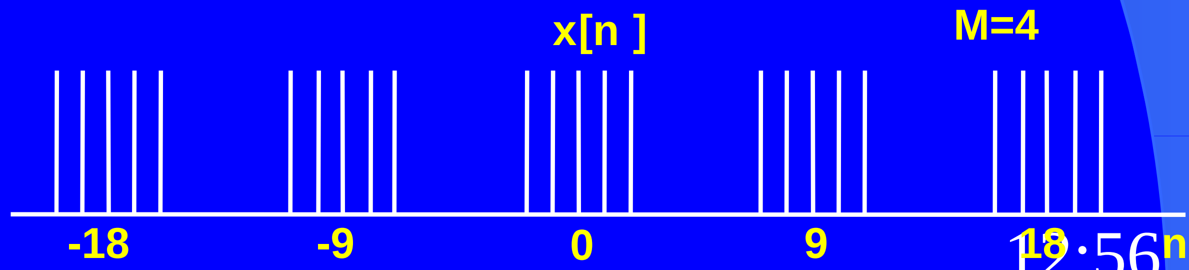
(b)

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=-3}^{3}a_k e^{jk(2\pi/9)n}$$



(c)

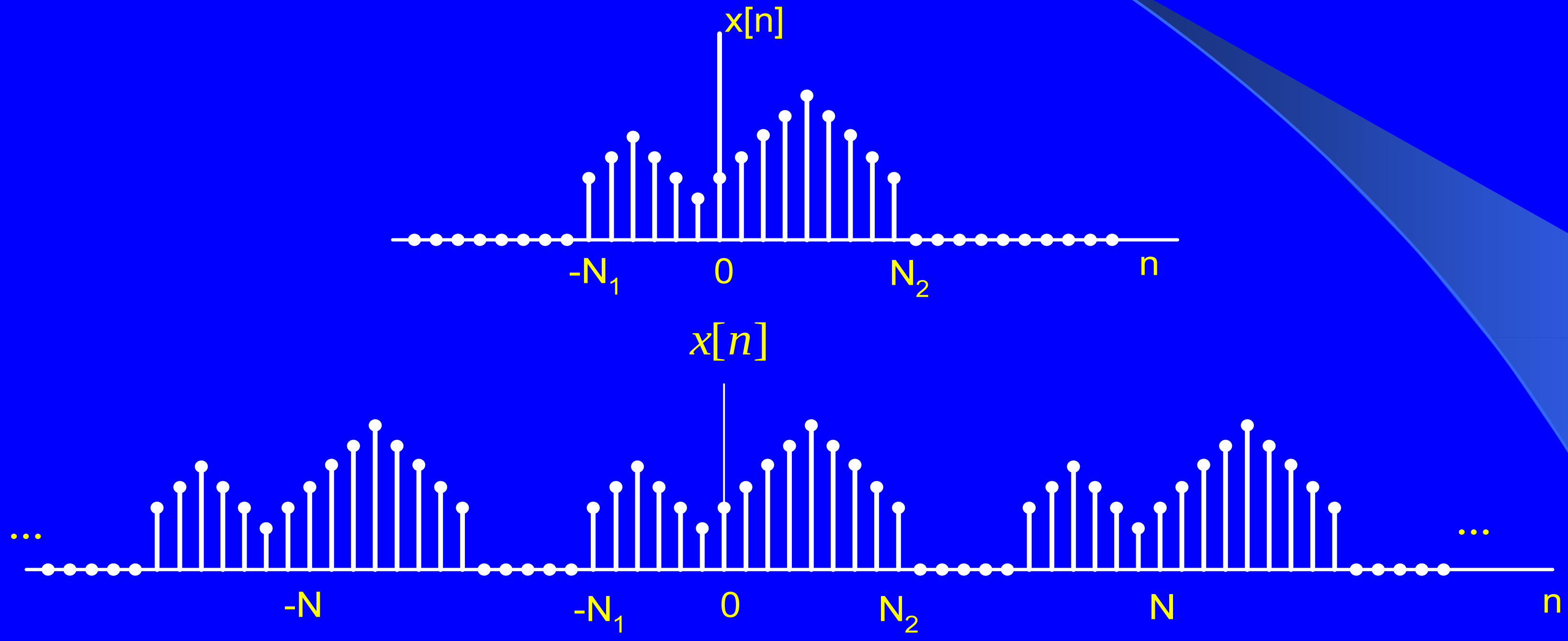
$$\hat{x}[n]=\sum_{k=-4}^{4}a_k e^{jk(2\pi/9)n}$$



(d)

§4.3 离散时间傅立叶变换

§4.3.1 离散时间傅立叶变换的导出



$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \Leftrightarrow a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/N)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/N)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

定义函数： $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

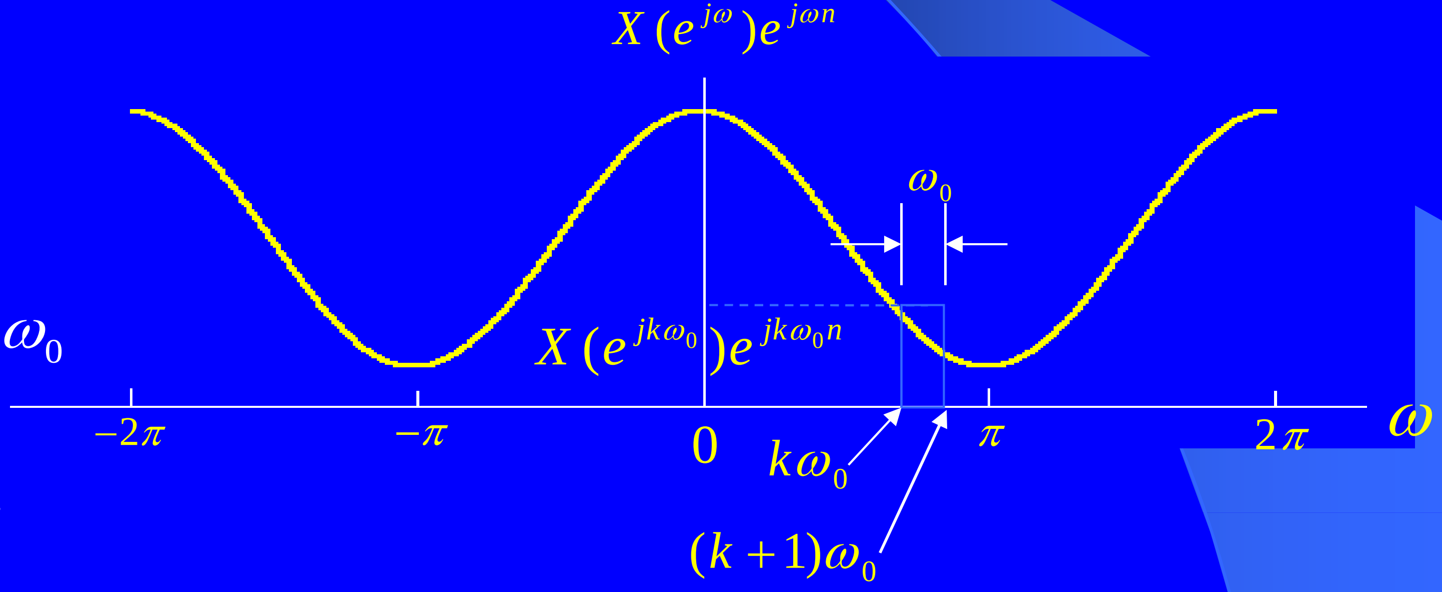
$$e^{-j(\omega+2\pi)n}=e^{-j\omega n}$$

周期信号(2π)

$$a_k=\frac{1}{N}X(e^{jk\omega_0})$$

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}X(e^{jk\omega_0})e^{-jk\omega_0 n}$$

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle}X(e^{jk\omega_0})e^{-jk\omega_0 n}\omega_0$$



$$N\to\infty\Rightarrow\omega_0\to d\omega,\ \sum\to\int$$

求和区间为N个w0, 即

NW0=2π

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

12:56

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$ 综合公式

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ 分析公式

频谱——信号中各复指数信号的相对复幅度的信息

非周期序列，看作复指数信号的线性组合。

复指数序列在频率上是无限靠近，其幅度为 $X(e^{j\omega})(d\omega/2\pi)$

重要关系

离散时间傅立叶系数 ⟷ 离散时间傅立叶变换

一个周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的傅立叶系数 a_k 可以用一个有限长序列 $x[n]$的傅立叶变换的等间隔样本来表示

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

主要差别

离散时间傅立叶变换 ⟷ 连续时间傅立叶变换

离散时间变换 $X(e^{j\omega})$ 的周期性

综合公式中的有限积分区间

0， 2π ， 4π 低频

-π， π， 3π 高频

§4.3.2 离散时间傅立叶变换的收敛

对离散时间的傅立叶变换，在信号为无限长的情况下，我们还必须考虑分析公式中无穷项求和的收敛问题。保证这个和式收敛而对 x[n] 所加的条件是与连续时间傅立叶变换的收敛条件直接相对应的。如果x[n] 是绝对可和的，即：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|<\infty$$

或者，如果这个序列的能量是有限的，即：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2<\infty$

那么，分析公式就一定收敛。

分析公式的收敛

与分析公式相比，综合公式的积分是在一个有限的积分区间上进行的，因此不存在收敛问题。若用在频率范围 $|\omega|\le W$ 内的复指数信号的积分来近似一个非周期信号 x[n] 的话，即；

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

综合公式的收敛

那么，如果w= π，则有：

$\hat{x}[n]=x[n]$ 不存在吉伯斯现象

例　令 x[n] 是一单位冲激信号 $x[n]=\delta[n]$

可由分析公式求得

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=1$$

这就是说，和连续时间情况一样，单位冲激信号的傅立叶变换在所有频率上都是相等的。

下面我们来考察信号的重建问题，我们知道连续信号在重建时会产生Gibbs现象，那么离散信号在重建时会不会产生类似的现象呢？我们令：

$$\hat{x}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin Wn}{\pi n}$$

当W增加时，近似式 $\hat{x}[n]$ 的振荡频率就增加，这一点和连续时间情况下所观察到的一样。但是，另一方面，与连续时间情况不同，这些振荡的幅度相对于 $\hat{x}[0]$的幅度的比例，随着W的增大而减小，直至W=π时，这些振荡完全消失。

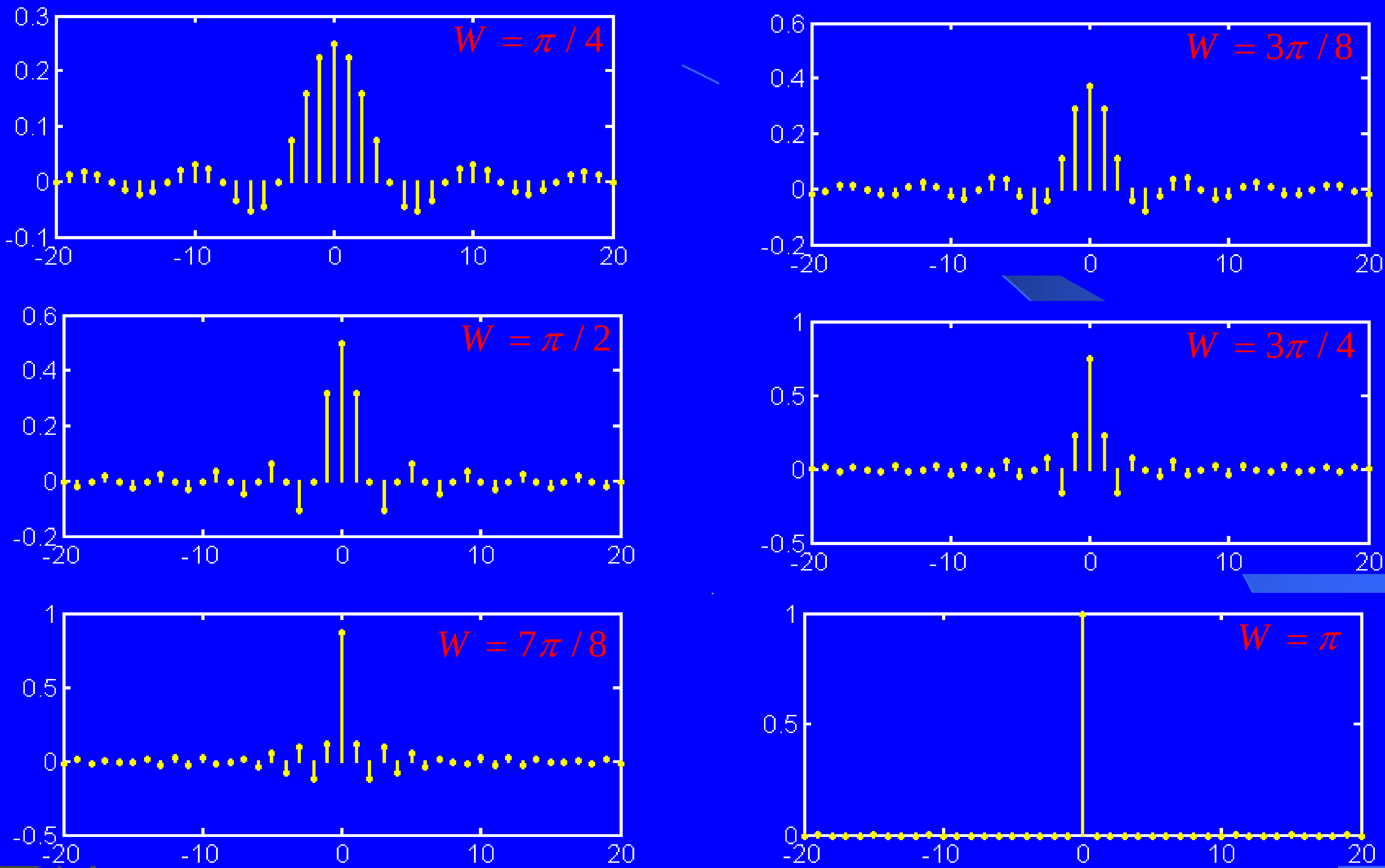


图　单位冲激信号的重建

12:56

§4.3.3 典型离散时间傅立叶变换

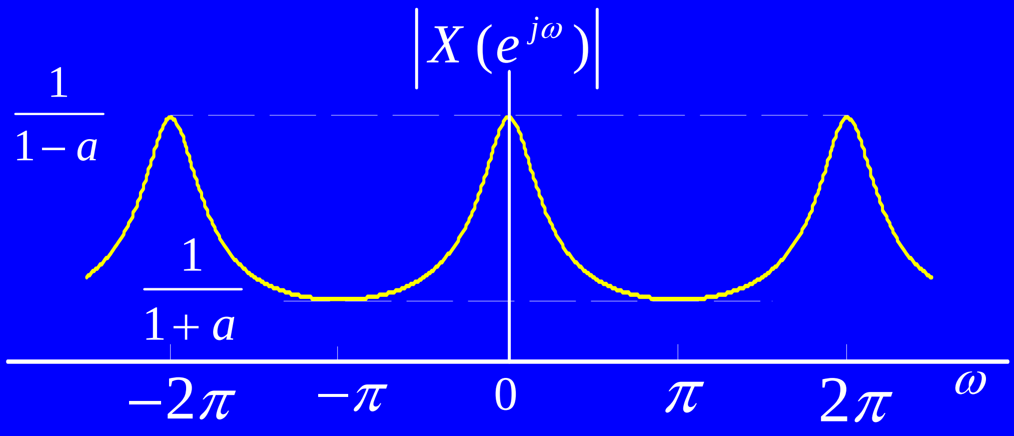
例（2） 考虑信号 $x[n]=a^n u[n]$， $|a|<1$ 的傅立叶变换。

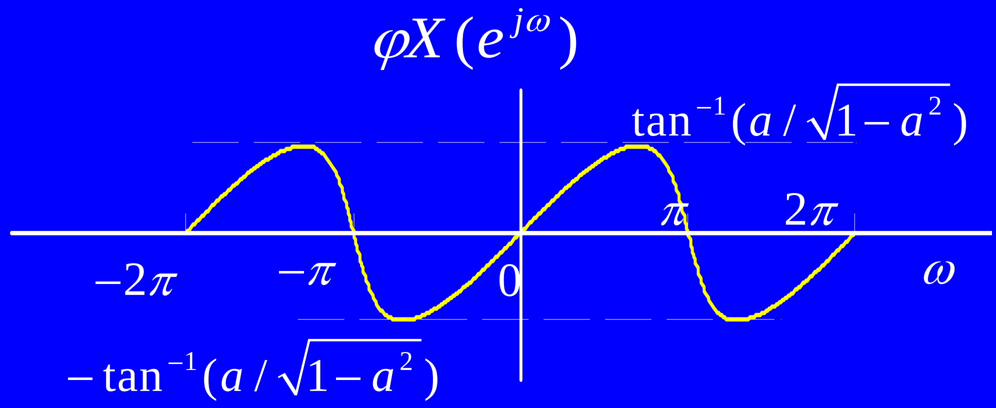
解：根据离散傅立叶变换的分析公式，

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(a^n e^{-j\omega})^n=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

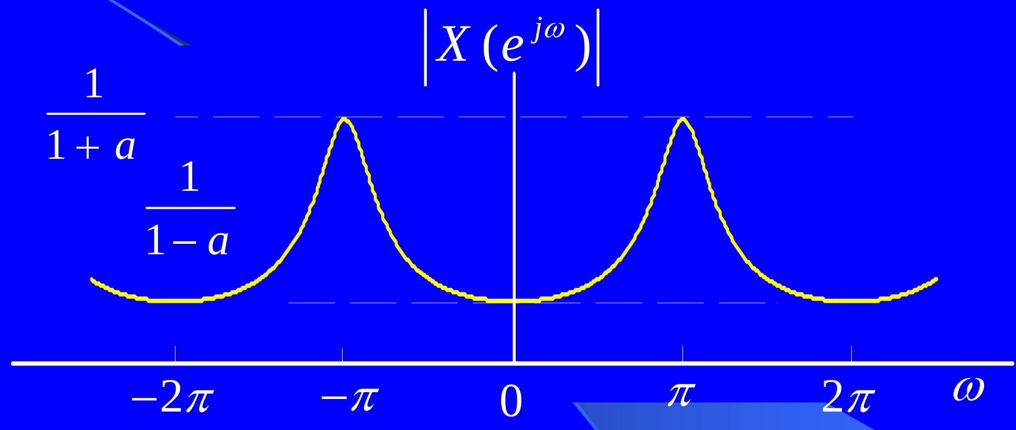
$$=\frac{1}{1-a\cos\omega+ja\sin\omega}$$

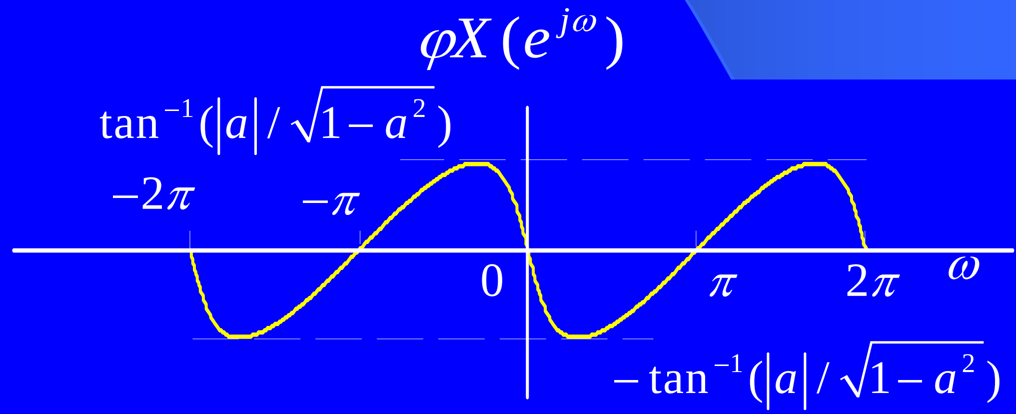
$1 > a > 0$


$\left|X(e^{j\omega})\right|$
$\frac{1}{1-a}$
$\frac{1}{1+a}$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω


$\varphi X(e^{j\omega})$
$\tan^{-1}(a/\sqrt{1-a^2})$
π
2π
-2π
$-\pi$
0
ω
$-\tan^{-1}(a/\sqrt{1-a^2})$

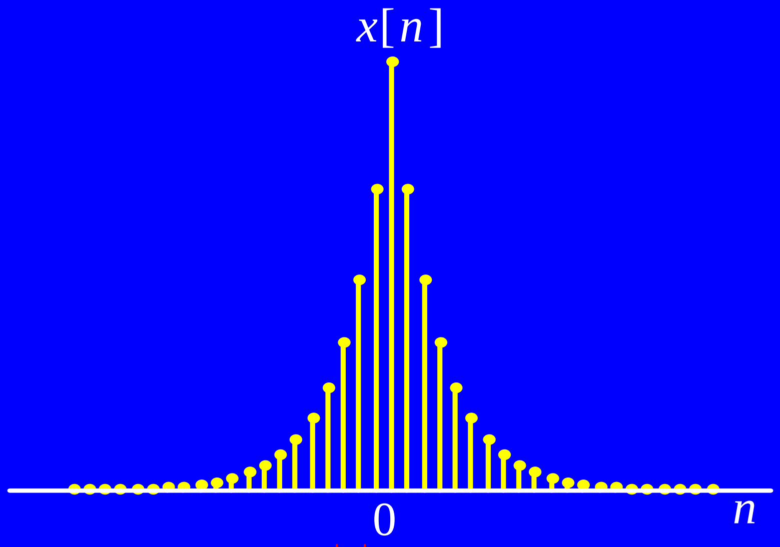
$-1 < a < 0$


$\left|X(e^{j\omega})\right|$
$\frac{1}{1+a}$
$\frac{1}{1-a}$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω


$\varphi X(e^{j\omega})$
$\tan^{-1}(|a|/\sqrt{1-a^2})$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω
$-\tan^{-1}(|a|/\sqrt{1-a^2})$

例（3） 设:$x[n]=a^{|n|}, \quad |a|<1$

解：该信号对于0<a<1如图所示，它的傅立叶级数为：



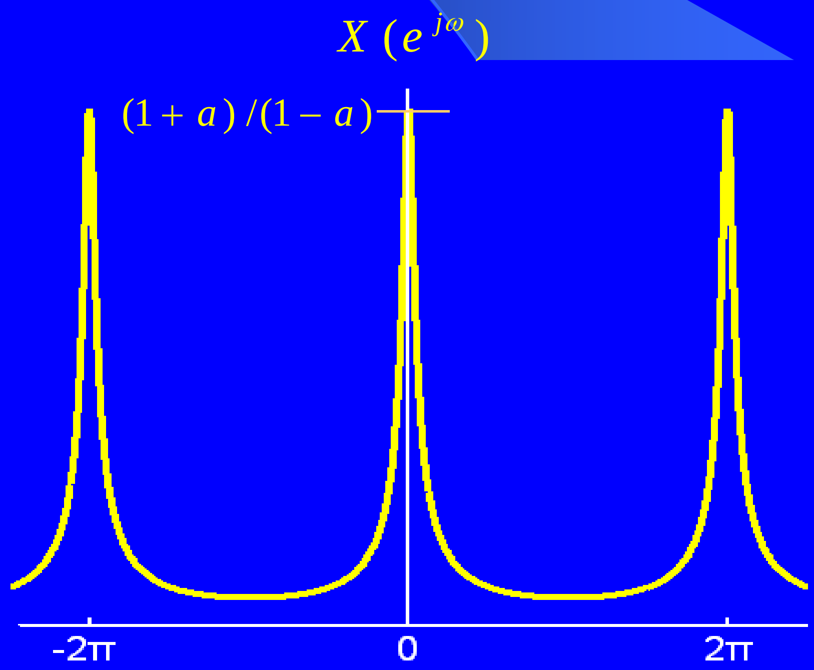
$x[n]=a^{|n|}, \quad a=0.7$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}$$

在上式第二个求和式中，以 m=-n 置换，可得：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{+\infty}(ae^{-j\omega})^{n}+\sum_{m=1}^{\infty}(ae^{j\omega})^{m}$$

这两个求和式都是无穷几何级数，可以用闭式表示为：



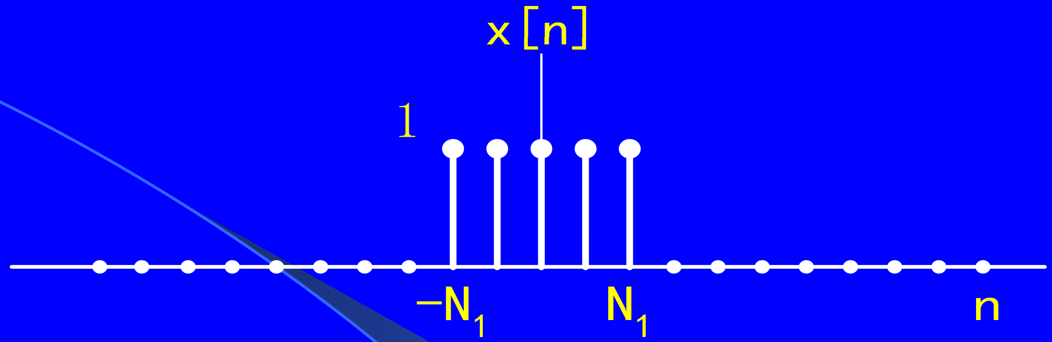
$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}=\frac{1-a^{2}}{1-2a\cos\omega+a^{2}}$$

所以，$X(e^{j\omega})$ 是实函数

12:56

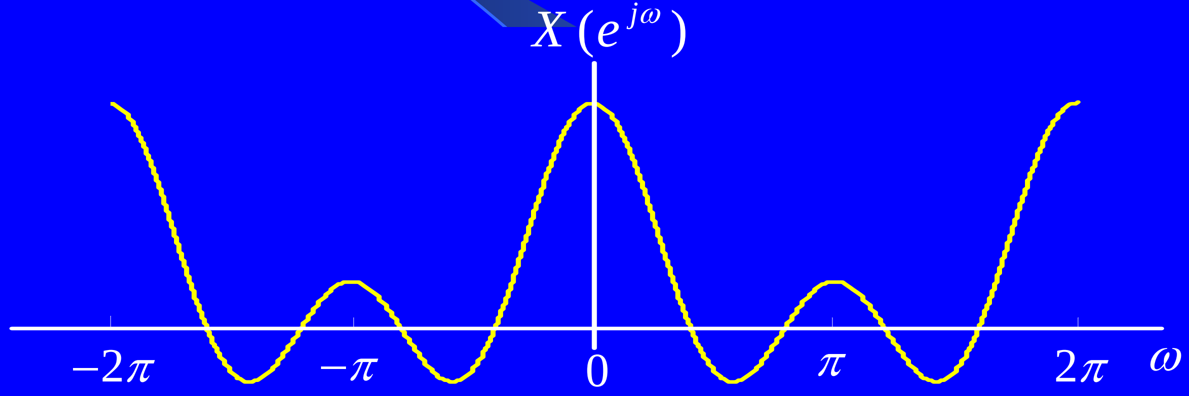
例(4) 考虑下列矩形脉冲序列：

$$x(t)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{\sin[(N_1+1/2)\omega]}{\sin(\omega/2)}$$



上式的函数是sinc函数在离散时间情况下所对应的形式。

例(5) 考虑 $X(e^{j\omega})$ 是频域为2π周期的均匀冲激串

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{jk\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

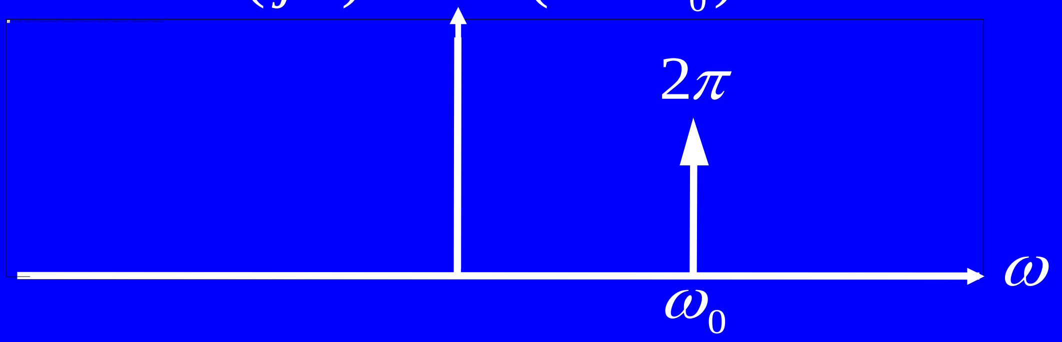
$$1 \xleftrightarrow{Fs} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

§4.4 周期信号的傅立叶变换

和在连续时间情况相同，利用把一个周期信号的傅立叶变换表示成频域中的冲激串的办法，就可以把离散时间周期信号也归并到离散时间傅立叶变换的范畴中去。考虑如下信号：

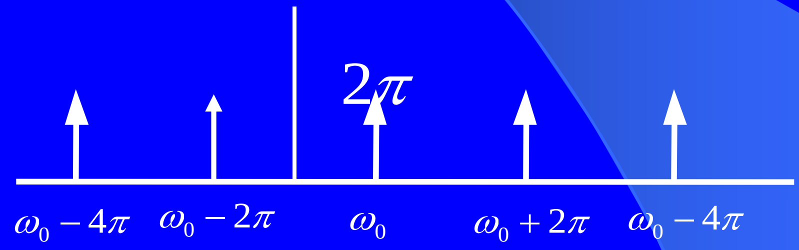
$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$



我们可以通过综合公式验证$X(e^{j\omega})$表达式的正确性，因为：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

一个 2π周期只包含一个冲激信号

12:56

因此，对于一个周期为 N 的序列 x[n], 若它的傅立叶级数：

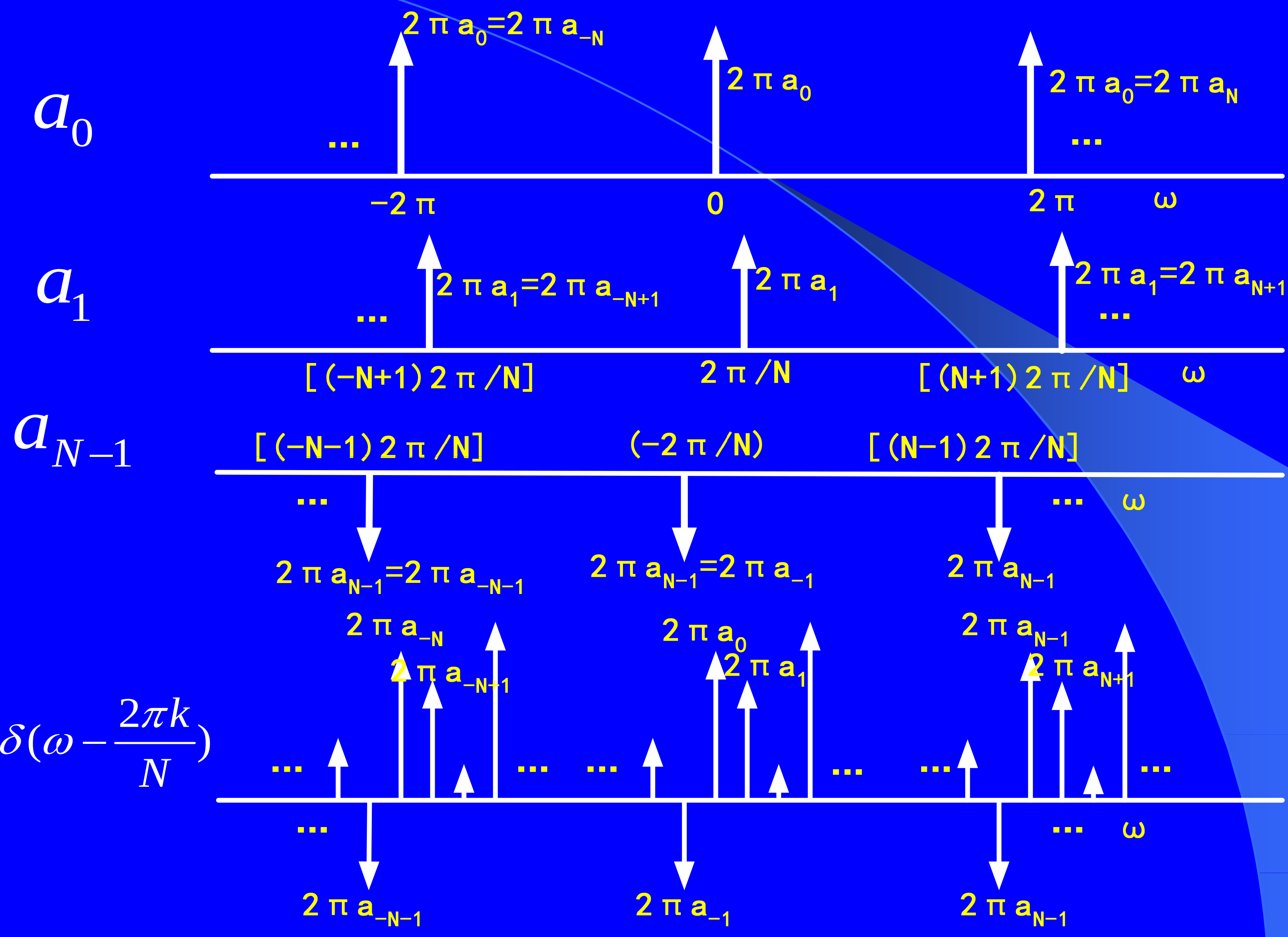
$$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

则它的傅立叶变换就是：

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} + \cdots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n}$$



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

12:56

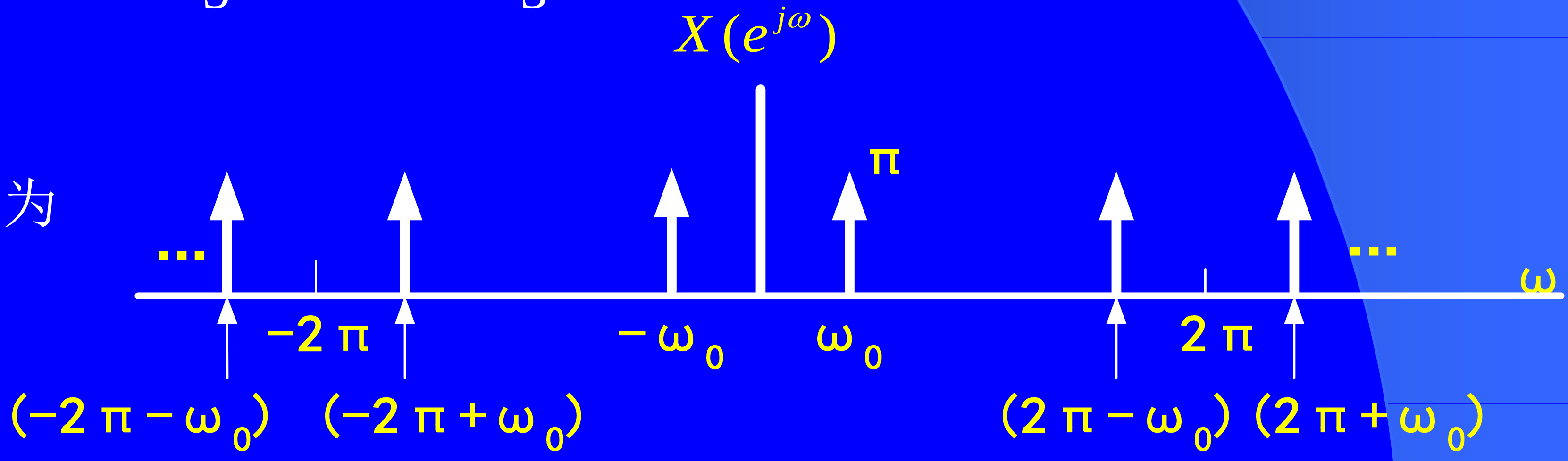
例5.5考虑周期信号 $x[n]=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{5}$

因为 $x[n]=e^{j\omega_0 n}$的傅立叶变换是 $X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$

所以 $x[n]=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{5}$的傅立叶变换是

$$X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-\frac{2\pi}{5}-2\pi l)+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega+\frac{2\pi}{5}-2\pi l)$$

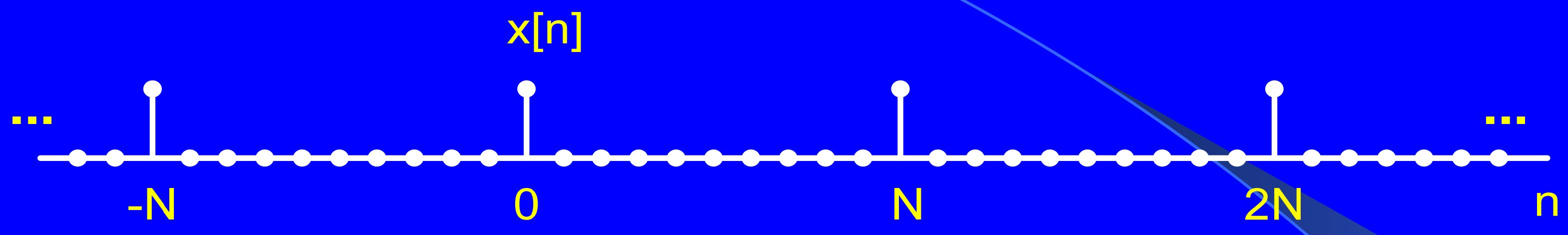
$$=\pi\delta(\omega-\frac{2\pi}{5})+\pi\delta(\omega+\frac{2\pi}{5})\quad,\ -\pi\le\omega<\pi$$



$X(e^{j\omega})$ 以周期为 2π，周期重复

12:56

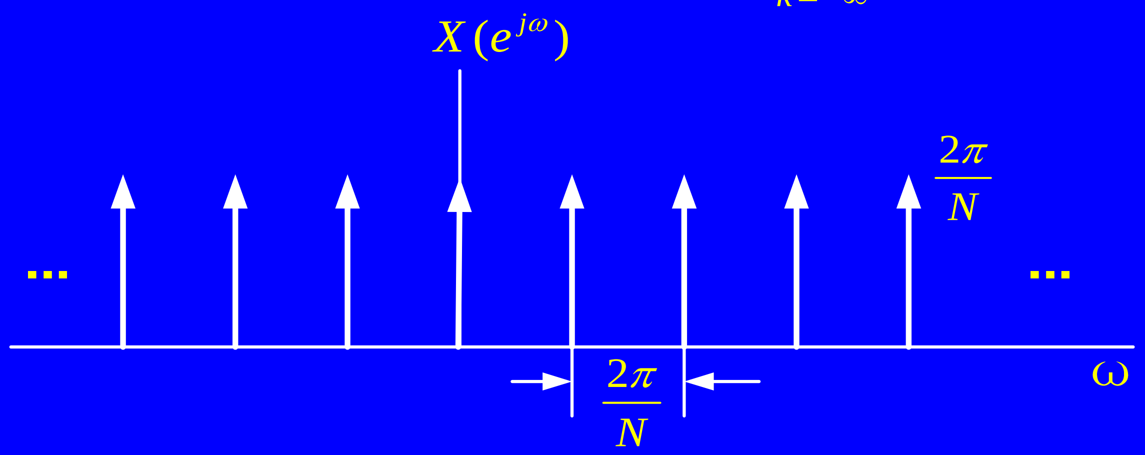
例5. 6 考虑离散时间周期冲激串序列 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$ 的傅立叶变换



这个信号的傅立叶级数系数为： $$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=(N)}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

选取求和区间为： $0\le n\le N-1$ 有 $$a_k=\frac{1}{N}$$

所以，该信号的傅立叶变换为： $$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{N})$$



§4.5 离散时间傅立叶变换性质

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x[n]\}$$

$$x[n] = F^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

§4.5.1 离散时间傅立叶变换性质的周期性

离散时间傅立叶变换对ω来说总是周期的，其周期是2π，即：

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

这一点与连续时间傅立叶变换不同的。

§4.5.2 线性

若 $x_1[n] \xleftrightarrow{Fs} X_1(e^{j\omega})$

和 $x_2[n] \xleftrightarrow{Fs} X_2(e^{j\omega})$

则 $ax_1[n]+bx_2[n] \xleftrightarrow{Fs} aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$

§4.5.3 时移与频移性质

若 $x[n] \xleftrightarrow{Fs} X(e^{j\omega})$

则 $x[n-n_0] \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$ 【将 $x[n-n_0]$代入分析公式即可得出】

和 $e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{Fs} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ 【将 $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$代入综合公式即可得出】

例

截止频率为ω_c的低通滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$

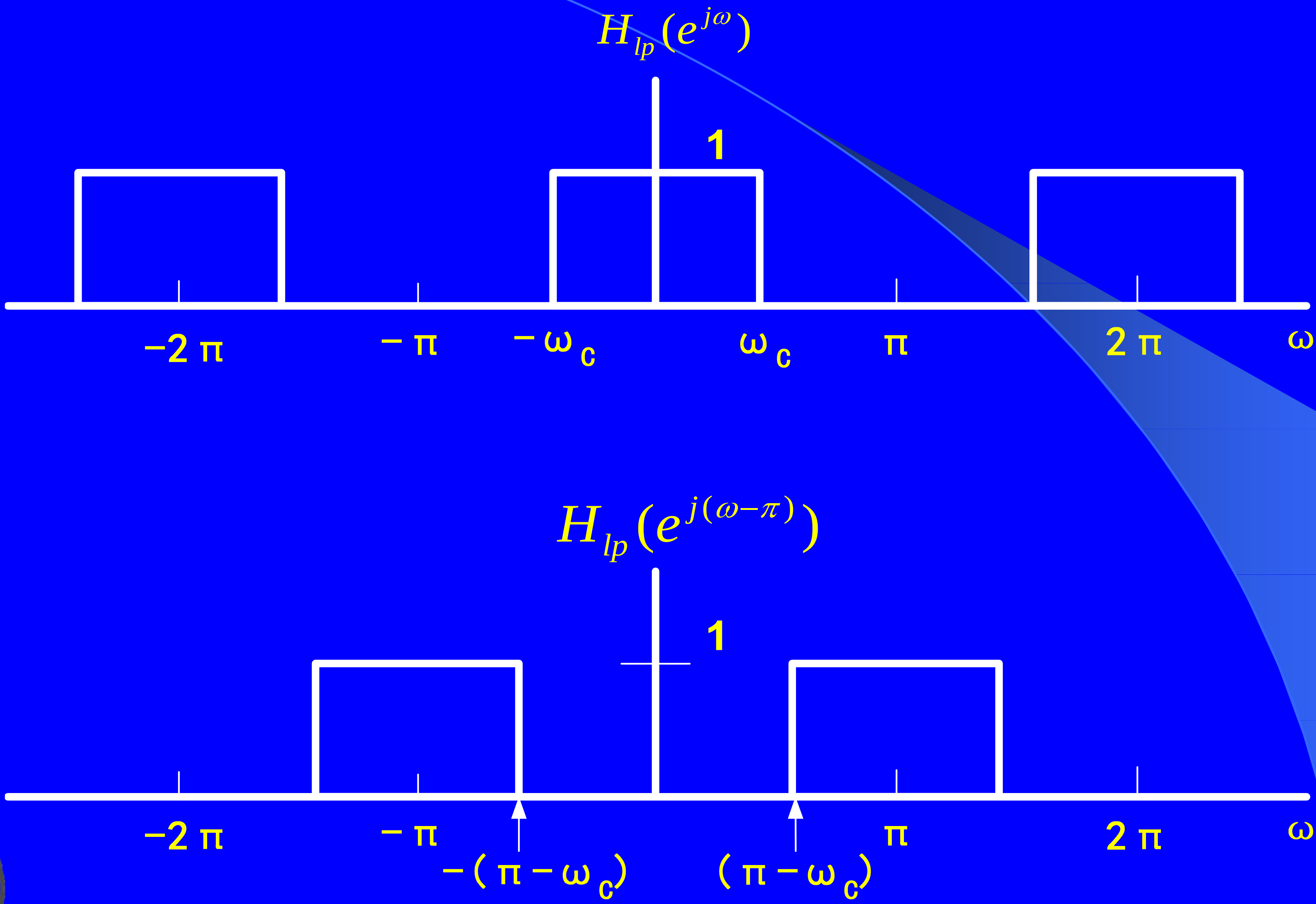
频移半个周期(即π) → $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$

截止频率为$\pi-\omega_c$的理想高通滤波器

一个LTI系统的频率响应是该系统的单位冲激响应的傅立叶变换

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$$


$H_{lp}(e^{j\omega})$
1
-2π
$-\pi$
$-\omega_c$
ω_c
π
2π
ω
$H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$
1
-2π
$-\pi$
$-(\pi-\omega_c)$
$(\pi-\omega_c)$
π
2π
ω

§4.5.4 共轭与共轭对称性

若 $x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$ 则 $x^*[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X^*(e^{-j\omega})$

同时，若x[n]是实值序列，那么其变换实共轭对称的，即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \qquad \text{（x[n]为实）}$$

据此可得，$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$是ω的偶函数，而$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$是ω的奇函数。同理，$X(e^{j\omega})$的模是ω的偶函数，相角是ω的奇函数。

用Ev和Od分别表示x[n]的偶部和奇部，则有

$$Ev\{x[n]\} \overset{F}{\leftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$Od\{x[n]\} \overset{F}{\leftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

因此，若x[n]为实且为偶序列，那么其傅立叶变换也是实且为偶函数。

§4.5.5 差分与累加

离散时间情况下的累加相应于连续时间情况下的积分。现讨论离散时间序列的累加及其逆运算——一次差分的傅立叶变换。设x[n]的傅立叶变换为$X(e^{j\omega})$。根据线性和时移性质，一次差分信号 x[n]-x[n-1] 的傅立叶变换是：

差分：

$$x[n]-x[n-1] \overset{F}{\leftrightarrow} (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

考虑信号 $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

累加：

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

累加过程中可能出现的直流项

例4-5　现利用累加性质导出单位阶跃x[n]=u[n]的傅立叶变换X(e^{jω}）。知：

$$g[n]=\delta[n]\overset{F}{\leftrightarrow}G(e^{j\omega})=1$$

单位阶跃就是单位脉冲的累加，即：

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}g[m]$$

所以单位阶跃函数的傅立叶变换为：

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}G(e^{j\omega})+\pi G(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

时间反转

设信号x[n] 的频谱为$X(e^{j\omega})$，考虑一下y[n]=x[-n] 的变换$Y(e^{j\omega})$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n}$$

将上式作 m=-n 置换，得

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j(-\omega)M} = X(e^{-j\omega})$$

即：$$x[-n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

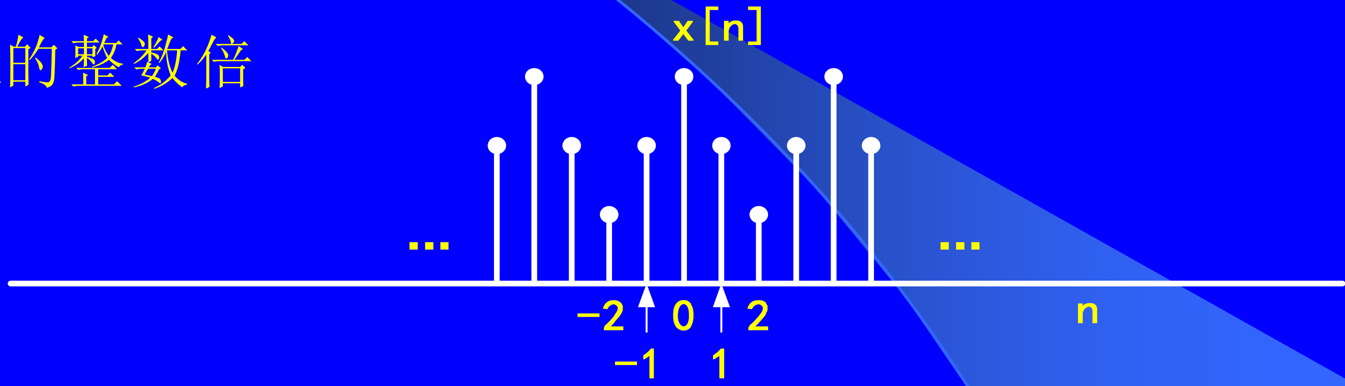
12:56

§4.5.6 时域扩展

连续时间下性质为：

$$x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

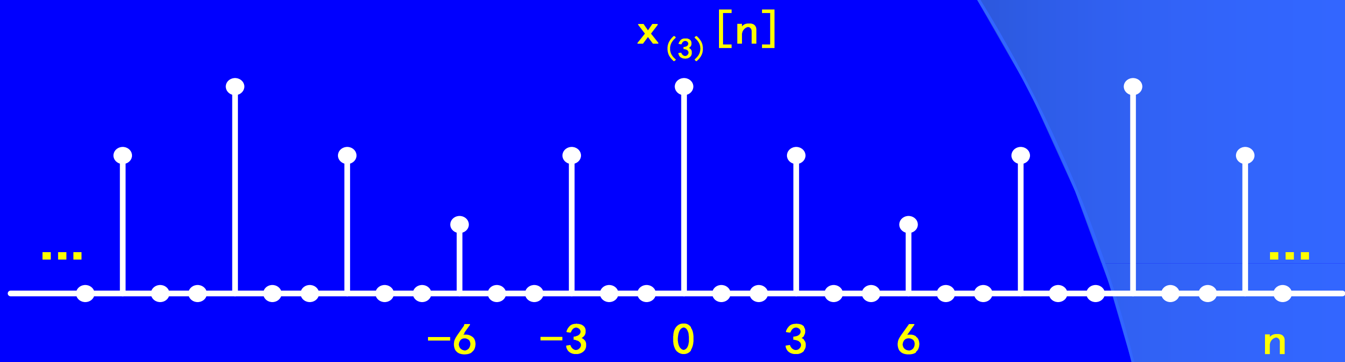
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{当n为k的整数倍} \\ 0, & \text{当n不为k的整数倍} \end{cases}$$



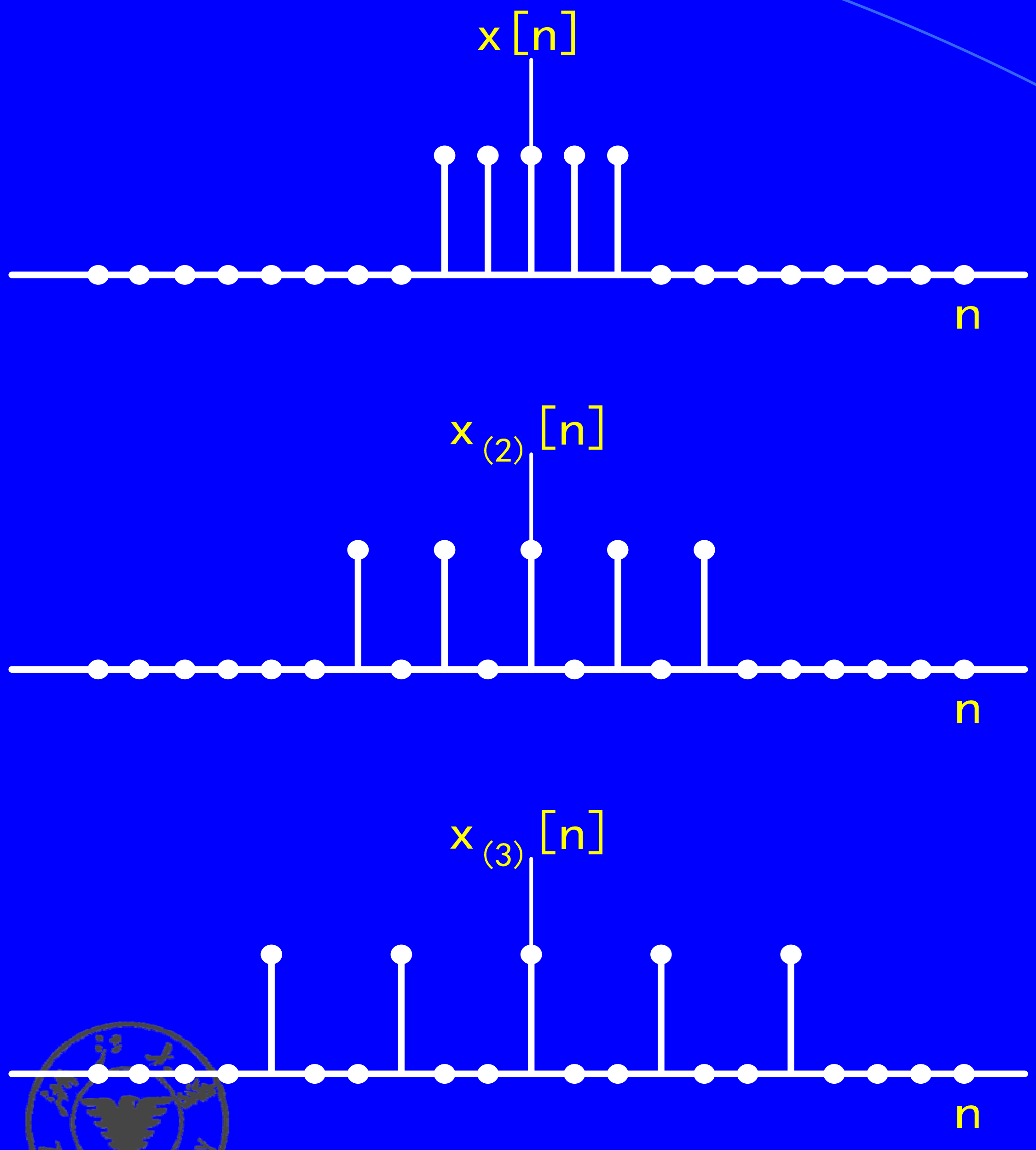
$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n}$$

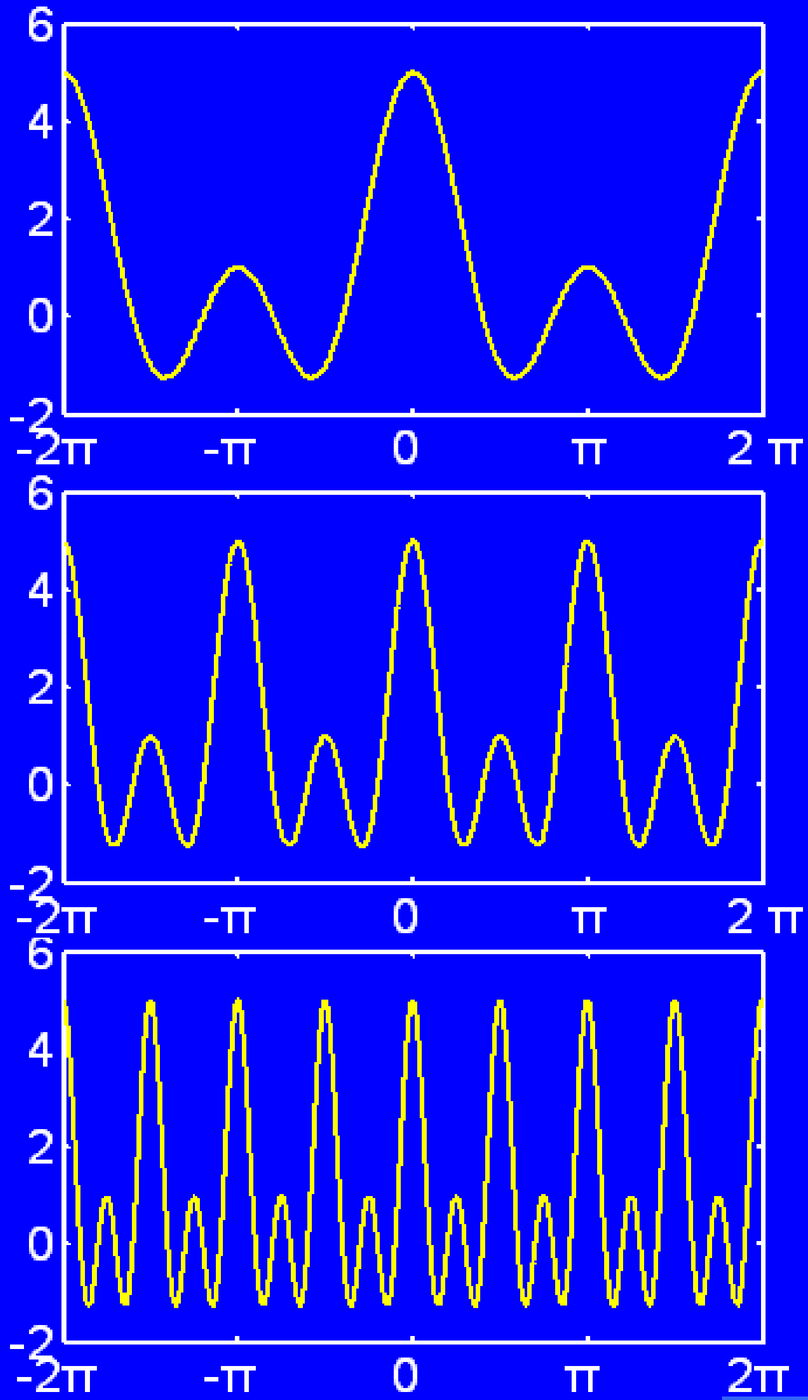
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r}$$



$$x_{(k)}[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})$$


x[n]
n
$x_{(2)}[n]$
n
$x_{(3)}[n]$
n


6
4
2
0
-2
-2π
-π
0
π
2π

例5.9 考虑序列x[n]的傅立叶变换

解：如图所示，x[n] 可以用下述二个序列的和来表示：

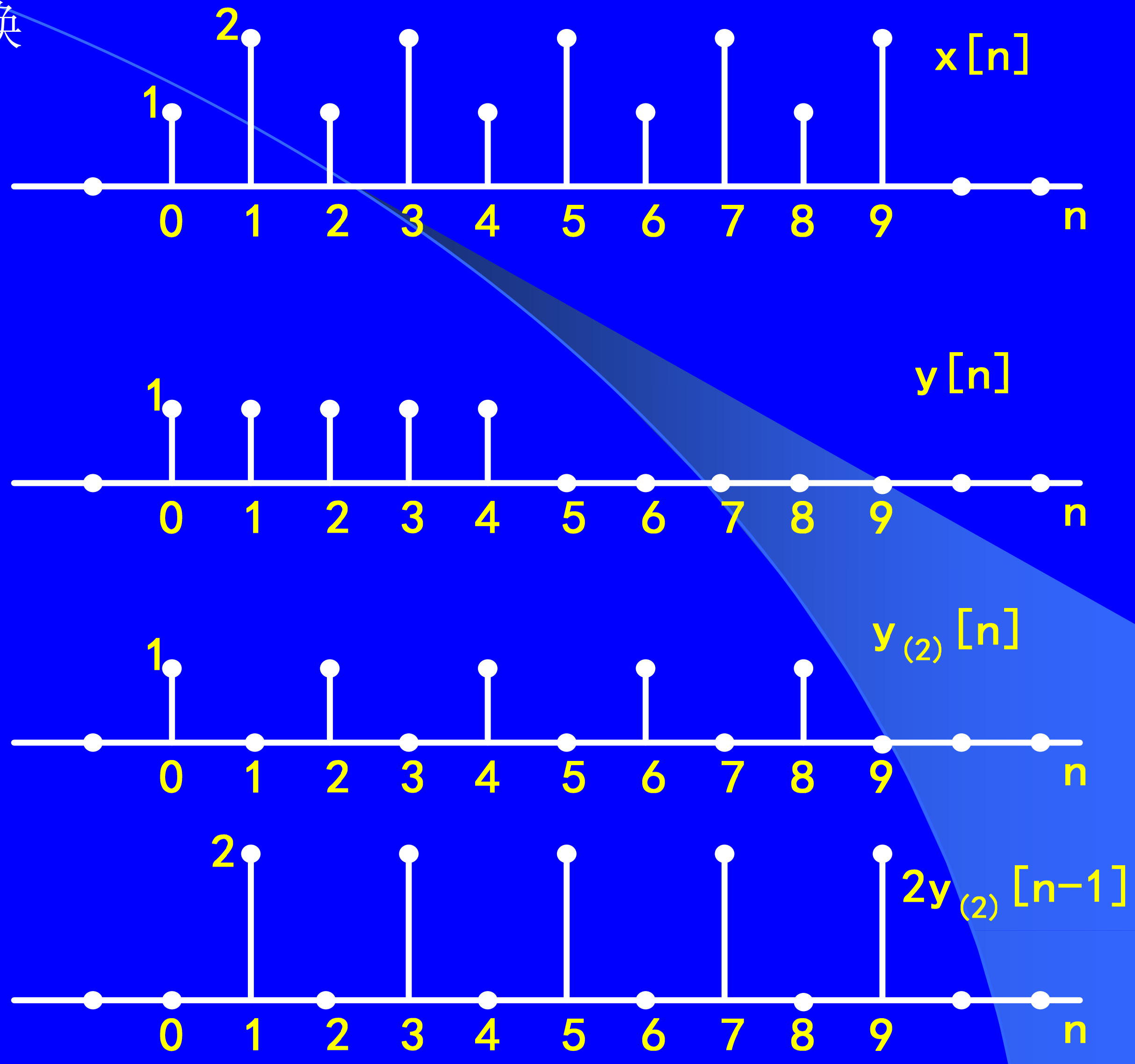
$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$

其中：

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & \text{if n is even} \\ 0, & \text{if n is odd} \end{cases}$$

因为 y[n] 左移二个时间单元就是 $N_1=2$ 的矩形脉冲序列，根据时移性质：

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$



利用时域扩展性质可得：

$$y_{(2)}[n] \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

根据时移性质：

$$2y_{(2)}[n-1] \overset{F}{\longleftrightarrow} 2e^{-j5\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

所以：

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1+2e^{-j\omega})\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

§ 4.5.7 频域微分

设 $x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$

利用分析公式 $X(e^{j\omega})$ 的定义， 并在两边对ω微分可得：

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$$

这个式子的右边就是 -jnx[n] 的傅立叶变换，因此两边各乘以 j，可得：

$$nx[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$x[n]=(n+1)\bullet a^n u[n],.\ |a|<1$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{d\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}}{d\omega}=\frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}+\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})}=\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$$

§ 4.5.8 卷积

与连续时间的情况一样， 若：

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

则：

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

信号可以表示为复指数信号的线性组合。e^{jwn}是LTI系统的特征函数，系统的作用就是给各个频率分量的复振幅加权一个$H(e^{jw})$。---频率响应

12:56

例

考虑系统 $h[n]=a^n u[n]$ 对输入 $x[n]=\beta^n u[n]$ 的响应

解： $$\because H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}=\frac{A}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

如果 $a\neq\beta$

$$A=\frac{a}{a-\beta}, \quad B=\frac{\beta}{a-\beta}$$

$$\therefore \quad y[n]=\frac{a}{a-\beta}a^n u[n]+\frac{\beta}{a-\beta}\beta^n u[n]$$

如果 $a=\beta$ $\quad Y(e^{j\omega})=\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)^2$

$$Y(e^{j\omega})=e^{j\omega}\frac{j}{a}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

$$a^n u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

频域微分性质

$$na^n u[n]\leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

时移性质

$$(n+1)a^{n+1}u[n+1]\leftrightarrow je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

$$\therefore y[n]=(n+1)a^{n+1}u[n+1]/a=(n+1)a^n u[n+1]$$

$$\therefore y[n]=(n+1)a^{n+1}u[n+1]/a=(n+1)a^n u[n]$$

§ 4.5.9 相乘性质

时域相乘等于频域的周期卷积，即：

如果： $y[n]=x_1[n]x_2[n]$

则有： $Y(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

§ 4.5.10 帕斯瓦尔定理

若 $x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$ 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

上式的关系类似于连续傅立叶变换的帕斯瓦尔定理，推导过程也类似。上式的左边就是x[n]的总能量，帕斯瓦尔定理表明这个总能量可以在离散时间频率的2π区间上用积分每单位频率上的能量 $|X(e^{j\omega})|^2/2\pi$ 来获得。与连续信号相仿， $|X(e^{j\omega})|^2$ 称为信号x[n] 的能量密度谱。

连续时间傅立叶级数 复习 离散时间傅立叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

连续时间傅立叶变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}dt$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}d\omega$$

离散时间傅立叶变换

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

§ 5.7 对偶性

离散时间傅立叶级数的对偶性

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \end{cases}$$

- 离散时间傅立叶变换
- 连续时间傅立叶级数

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

对偶性

周期序列a_k的傅里叶级数系数为（1/N）x[-n]

时域性质与频域性质之间存在对偶性

对偶性质

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow a_k e^{jk(2\pi/N)n_0}$$

$$e^{jm(2\pi/N)n} x[n] \longleftrightarrow a_{k-m}$$

•离散时间傅立叶变换和连续时间傅立叶级数的对偶性

$$\begin{cases} x[n]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega t}d\omega & x(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ X(e^{j\omega})=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} & a_k=\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{cases}$$

看作周期性频率响应 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数表示，系数为**x[-n]**

	连续时间		离散时间	
	时域	频域	时域	频域
傅立叶级数	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 连续 周期	$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ 离散 非周期	$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$ 离散 周期	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$ 离散 周期
傅立叶变换	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt$ 连续 非周期	$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}d\omega$ 连续 非周期	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega t}d\omega$ 离散 非周期	$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ 连续 周期

§4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§4.7.1 离散时间LTI系统的频率响应

$$X(e^{j\omega}) \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

离散时间LTI系统的频率响应:为特征函数的特征值。 ———改变输入信号中各频率分量的幅度大小和初始相位；或者输出信号的频谱和输入信号的频谱的比值

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

12:56

频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

相频特性

幅频特性

群时延

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

频域分析法:用于稳定的离散时间LTI系统

例4-11：差分器的频率响应

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega}$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

例4-12：累加器的频率响应

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$$

$$y[n]=x[n]*u[n]$$

$$h[n]=u[n]$$

频率响应

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$

例4-13：延时器的频率响应

$$y[n] = x[n - n_0]$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

频率响应

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

§ 4.7.2离散时间LTI系统的零状态响应的频域求解

例4-14： 考虑一LTI系统

$$h[n]=a^n u[n], |a|<1$$

输入为 $$x[n]=b^n u[n], |a|<1$$

则：频率响应 $$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-be^{-j\omega}}$$

输出信号的频谱(零状态响应)：

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

(1) $a \neq b$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\omega}}$$

$$A = Y(e^{j\omega}) \bullet (1 - ae^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}} = \frac{a}{a-b}$$

$$B = Y(e^{j\omega}) \bullet (1 - be^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{b}} = \frac{-b}{a-b}$$

$$y[n] = \frac{a}{a-b} a^n u[n] - \frac{b}{a-b} b^n u[n]$$

$(1) a = b$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

$$y[n] = (n+1)a^n u[n]$$

例4-15： 考虑一LTI系统

输入为 $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

输出为 $y[n] = 3(\frac{1}{2})^n u[n] - 2(\frac{1}{3})^n u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-1/2e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{3}{1-1/2e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-1/3e^{-j\omega}} = \frac{1}{(1-1/2e^{-j\omega})(1-1/3e^{-j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-1/3e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$$

§ 4.7.3 线性常系数差分方程表征的系统

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

例 考虑系统 $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$

对输入 $x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$ 的响应。

解：

$$H(e^{j\omega})=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega})=[\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}][\frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}]=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

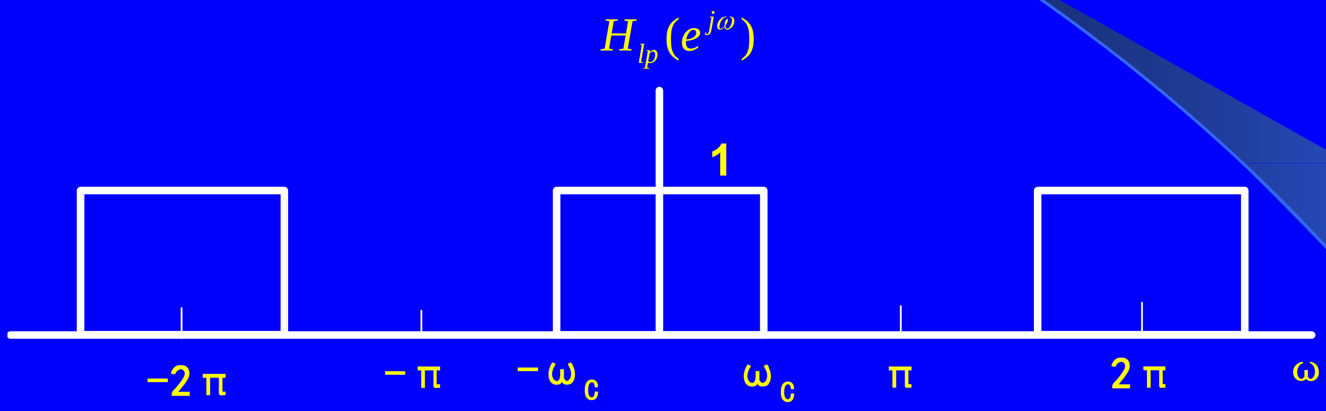
$$B_{11} = -4$$

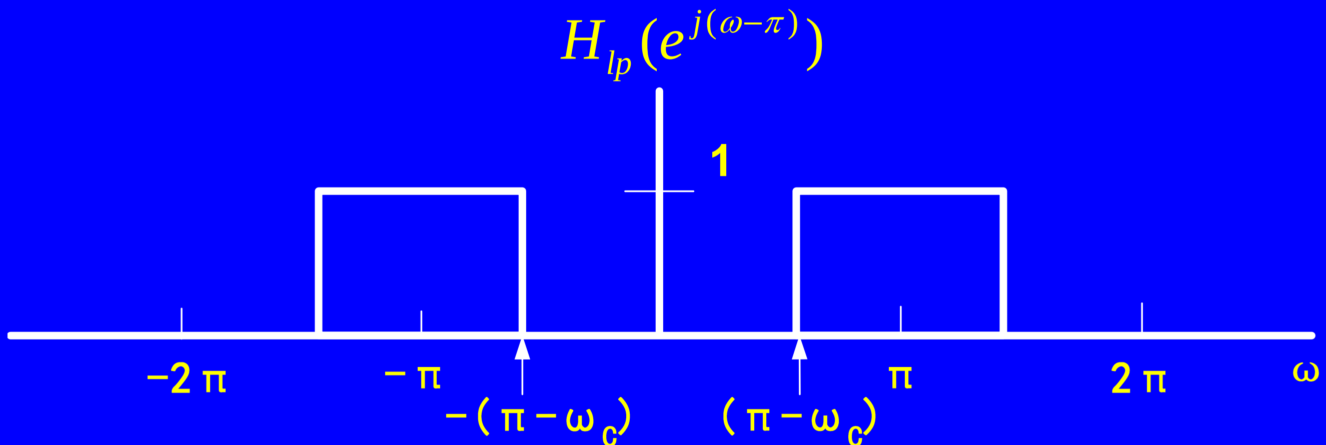
$$B_{21} = 8$$

$$B_{12} = -2$$

$$\therefore\ y[n] = \left\{-4(\frac{1}{4})^n - 2(n+1)(\frac{1}{4})^{n+1} + \frac{1}{8}(\frac{1}{2})^n\right\}u[n]$$

§4.7.4 离散时间信号的滤波





5.9 小结

离散时间傅立叶变换与连续时间傅立叶变换的推导过程是完全一致的。两种傅立叶变换的性质多数也是一样的，不同的地方主要有二点：

- 周期卷积
- 时域扩展

产生这些差别的原因是：

- 离散时间信号在频率相差2π的整数倍时的信号是完全一样的，因此离散傅立叶变换的频谱是以2π为周期的。
- 离散时间信号的取值范围为自变量的整数值。

12:56