信 号 与 系 统

第五章 采样与调制

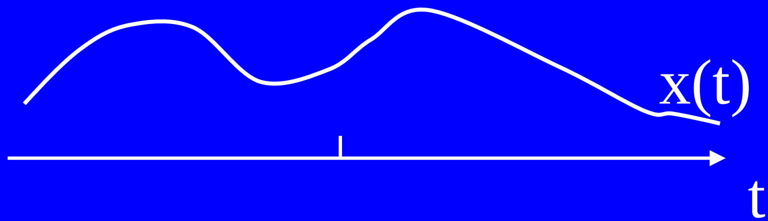
浙江大学 1897 ZHEJIANG UNIVERSITY

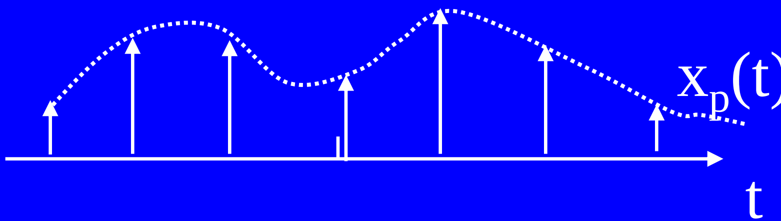
§5.0　引言

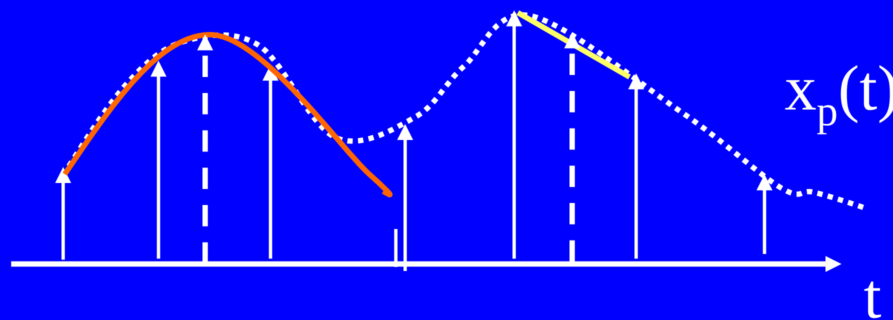
自然、原始的信号——模拟信号：时间连续、
幅值连续。

适合数字设备的信号——数字信号：时间离散、
幅值离散。

连续时间信号 $\xrightarrow{\text{采样}}$ 离散时间信号

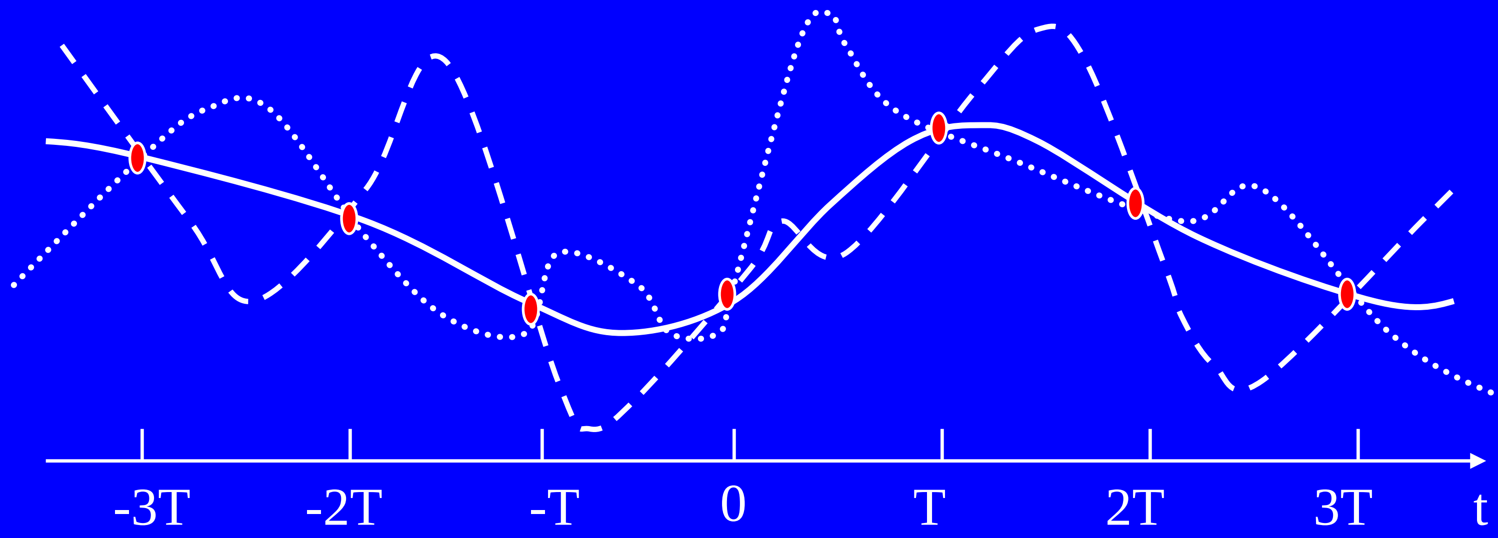






在采样点，样本值等于原值，

在非采样点，用数学方法恢复——插值（线性、抛物线、多项式、样条等）



$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

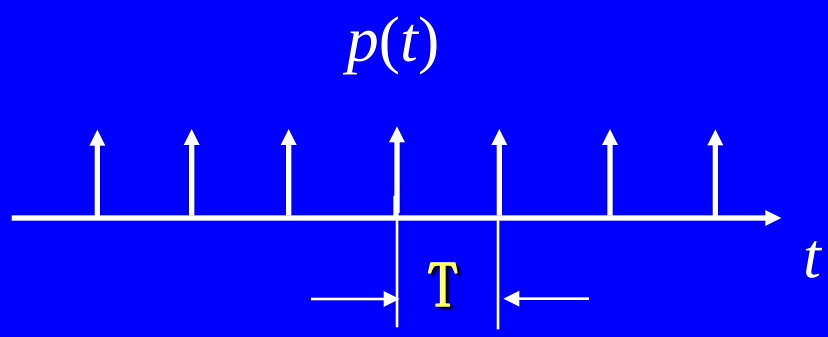
直觉告诉我们，非采样点的误差与采样频率、恢复方法有关。

§5.1　时域采样定理

时域采样——

在一定的条件下，可以用样本值表示连续与离散信号（由样本恢复原信号）。

5.1.1 冲击串采样



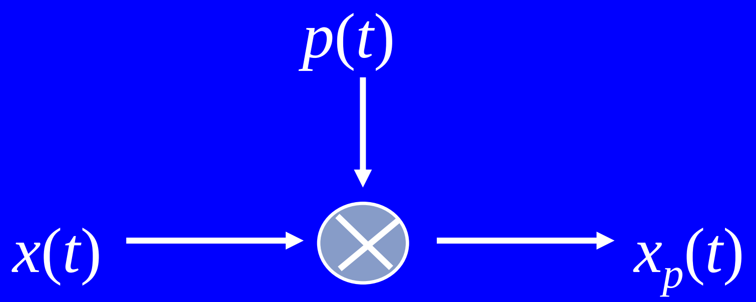
$p(t)$ 采样函数

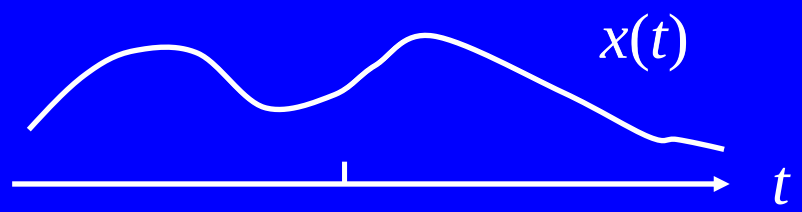
T 采样周期

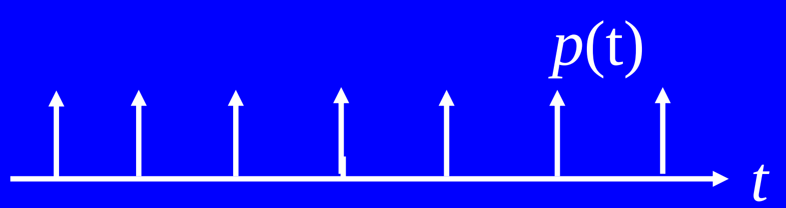
ω_s 采样频率

$(2\pi/T)$

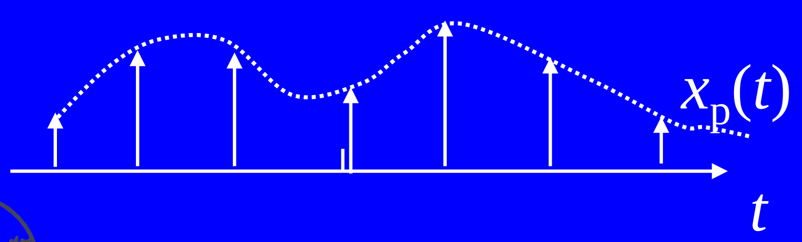
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$







$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$



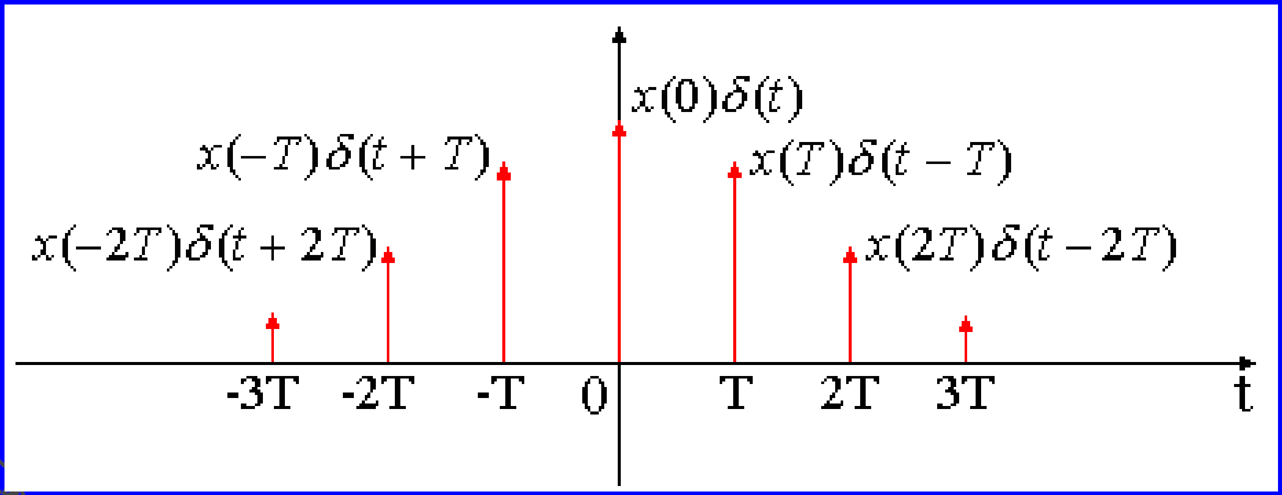
$$x_p(t)=x(t)\,p(t)$$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \qquad x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$x_p(t)=x(t)p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

$$x[n]=x[nT]$$



频谱分析

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_s) = X(j(\omega - \omega_s))$$

$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - n\omega_s))}$$

时域理想抽样的傅立叶变换

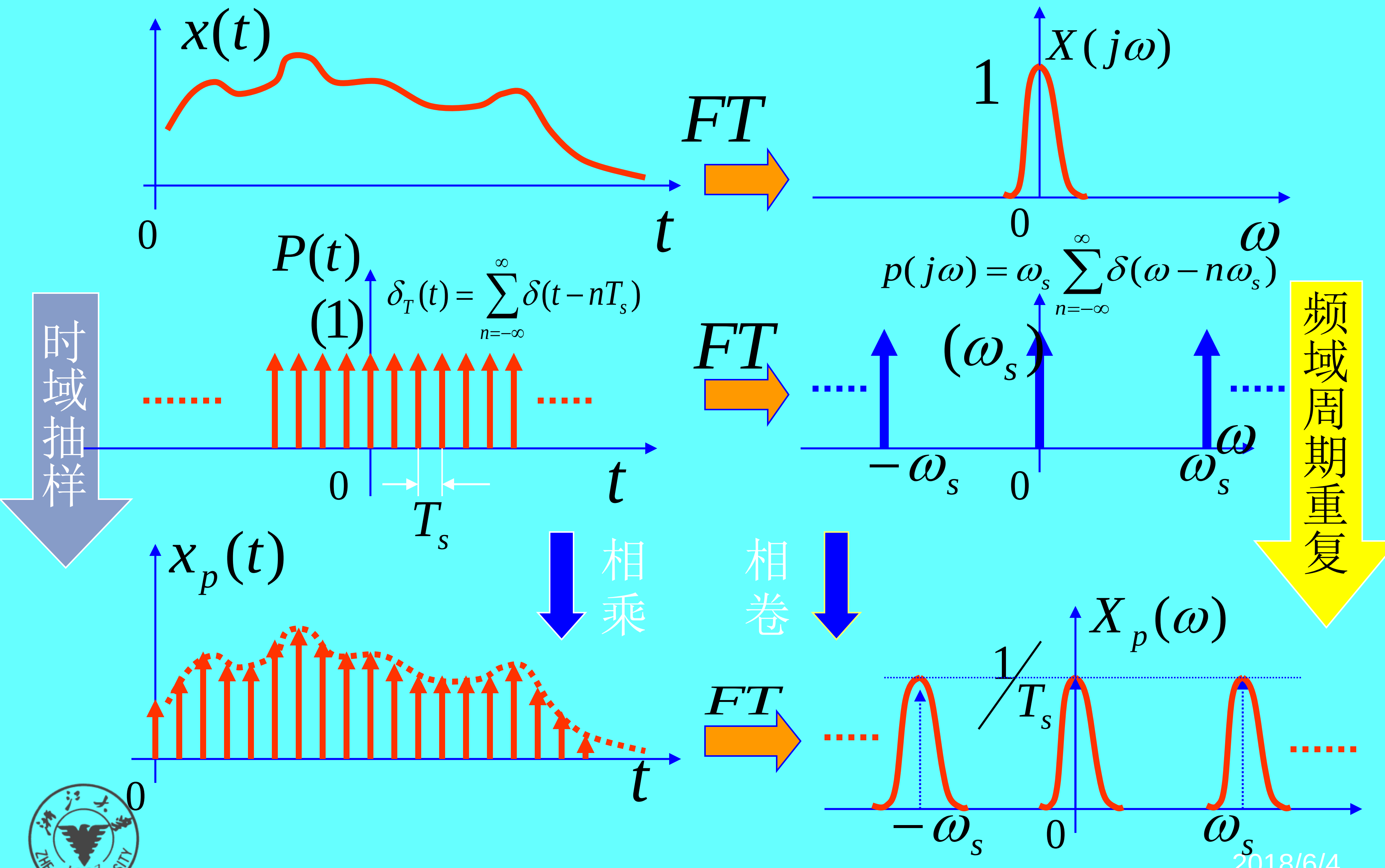
$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$$

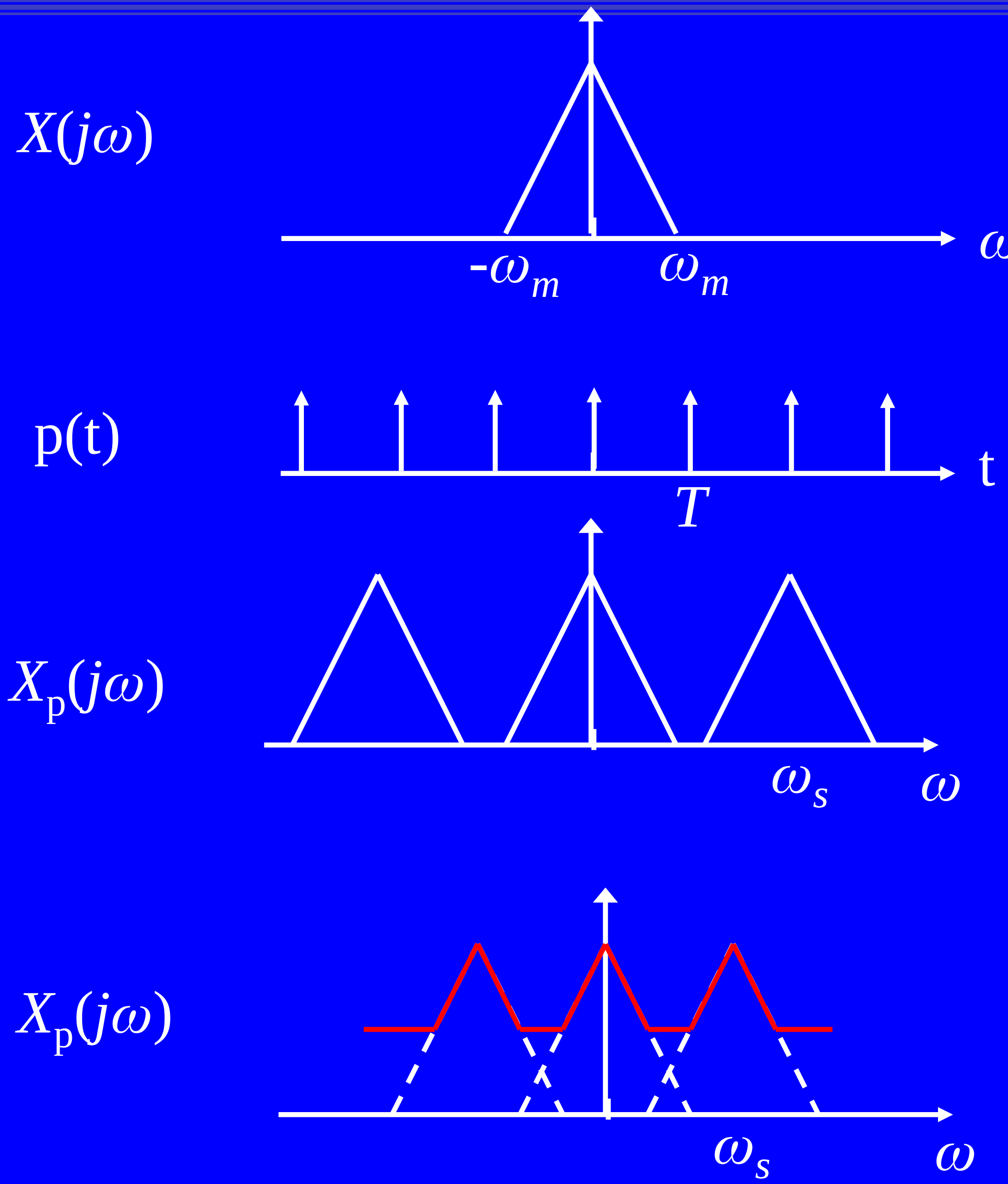
相乘 $\xrightarrow{FT}$

$$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-n\omega_s))$$

$\frac{1}{2\pi}$ 相卷积

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \xrightarrow{FT} P(j\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$


$x(t)$
0
t
FT
$X(j\omega)$
1
0
ω
$P(t)$
(1)
$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
0
T_s
t
FT
$p(j\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$
(ω_s)
$-\omega_s$
0
ω_s
ω
时域抽样
频域周期重复
相乘
相卷
$x_p(t)$
0
t
FT
$X_p(\omega)$
$1/T_s$
$-\omega_s$
0
ω_s

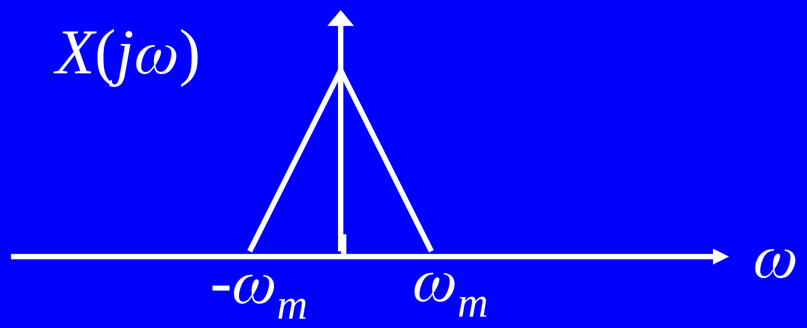


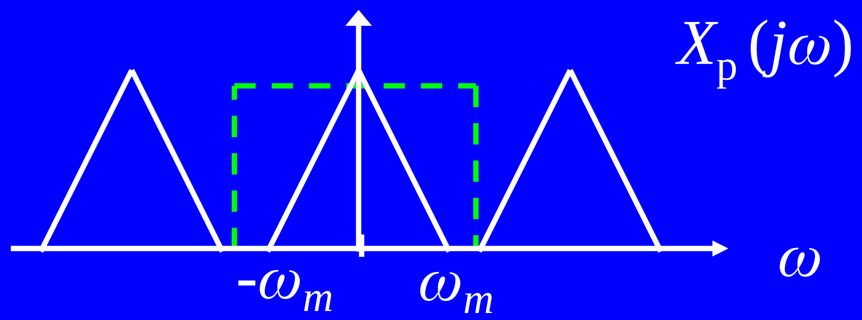
$\omega_m = 1/T$

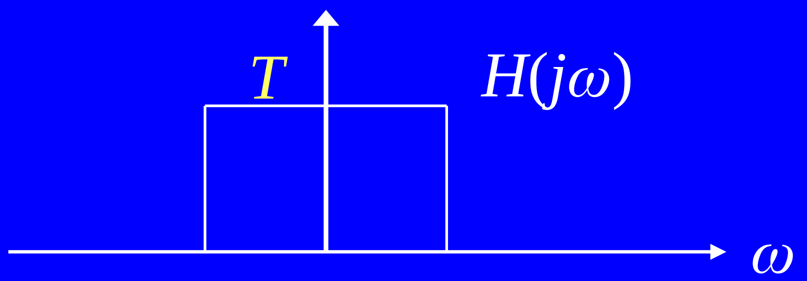
$\omega_s > 2\omega_m$

$\omega_s < 2\omega_m$

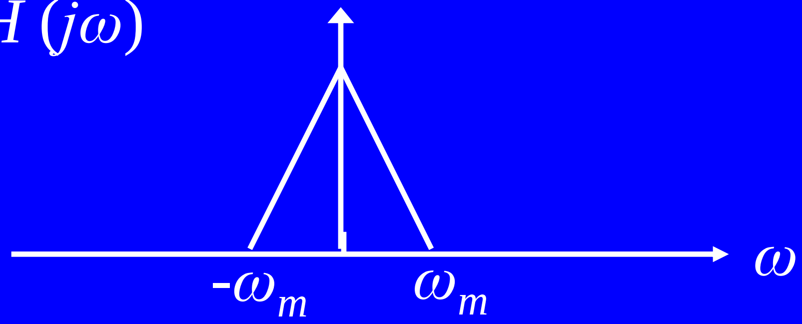
混频







$$X_r(j\omega)= X_p(j\omega)\, H(j\omega)$$



$$\boxed{X_r(j\omega)= X(j\omega)}$$

采样定理

设 $x(t)$ 是某一个带限信号，在 $|\omega| > \omega_m$ 时，$X(j\omega) = 0$, 如果采样频率 $\omega_s > 2\omega_m$（采样间隔 $T<1/2\omega_m$），那么 $x(t)$ 任意一点的函数值都可以由采样值无误差地重建出来。

ω_s： **奈奎斯特频率.**

已知这些样本值，能用如下方法重建$x(t)$：产生一个周期冲激串，其冲激幅度就是这些依次而来的样本值；然后将该冲激串通过一个增益为T，截止频率为ω_s的理想低通滤波器，其输出就是$x(t)$。

3、连续时间信号的时域采样定理：

（采样信号的频谱不发生混叠的条件）

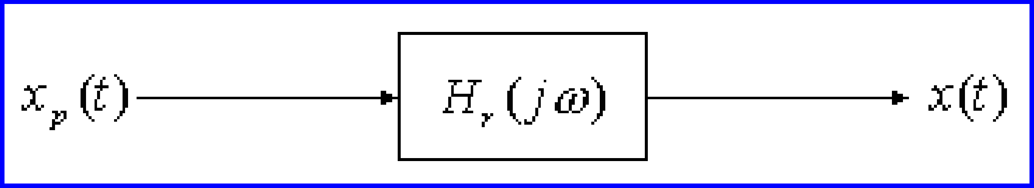
(1)$x(t)$为带限信号，即当$|\omega| > \omega_M$时，$X(j\omega) = 0$

(2)采样频率$\omega_s = 2\pi/T$需满足，$\omega_s > 2\omega_M$，临界值$\omega_s = 2\omega_M$称为奈奎斯特采样频率。

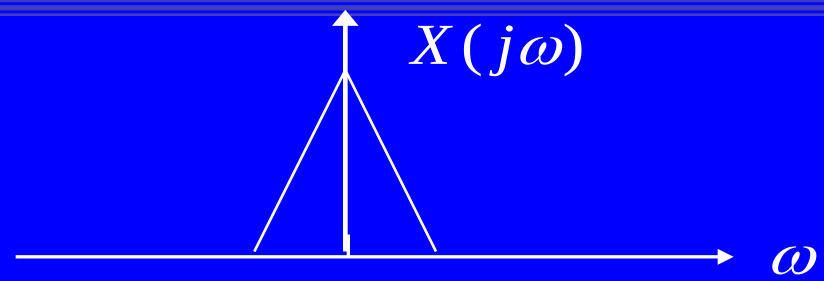
(3)$X_p(j\omega)$中无混叠时，可以从$x_p(t)$无失真地恢复$x(t)$。

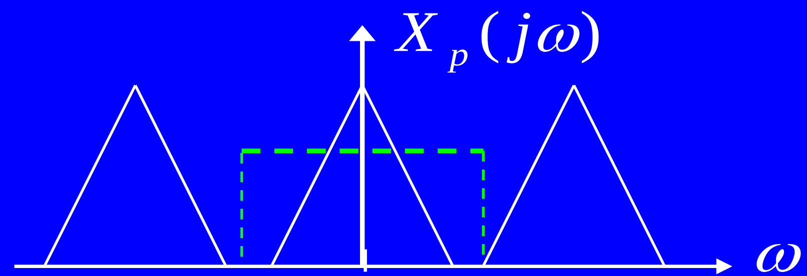
4、信号的重建：(根据$x_p(t)$恢复$x(t)$)

(1)重建系统

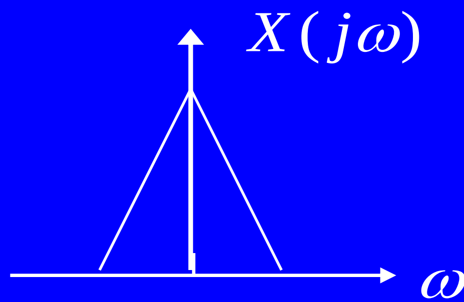


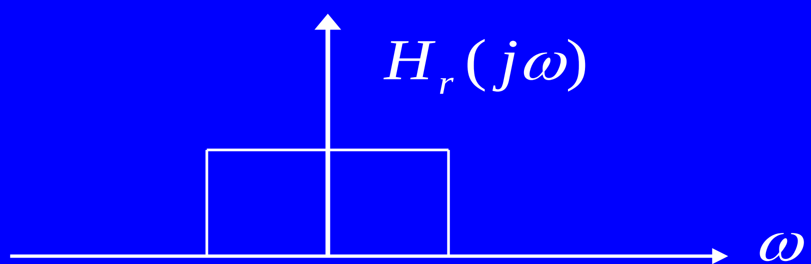
$$X(j\omega) = X_p(j\omega)H_r(j\omega)$$

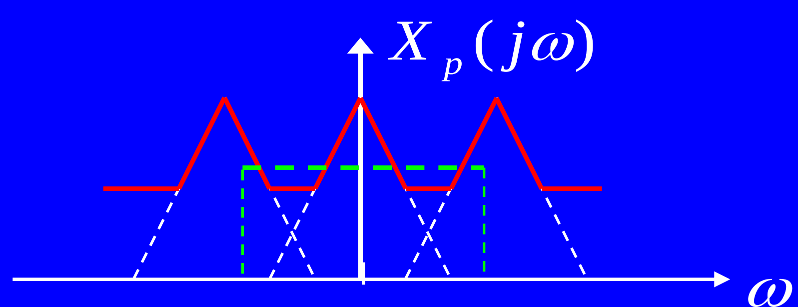




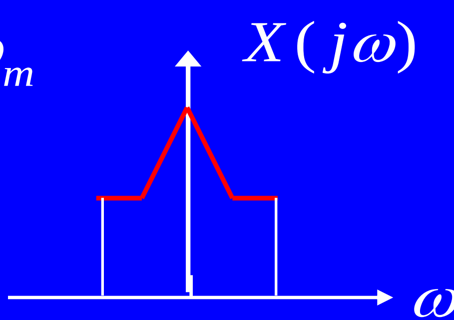
$\omega_s > 2\omega_m$







$\omega_s < 2\omega_m$



频谱的褶叠

混频

理想重建公式

$$x_r(t)=F^{-1}\{X_r(j\omega)\}=F^{-1}\{X_p(j\omega)H(j\omega)\}$$

$$=x_p(t)*h(t)$$

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)h(t-nT)$$

$$h(t)=\frac{\omega_c T\sin(\omega_c t)}{\pi\omega_c t}$$

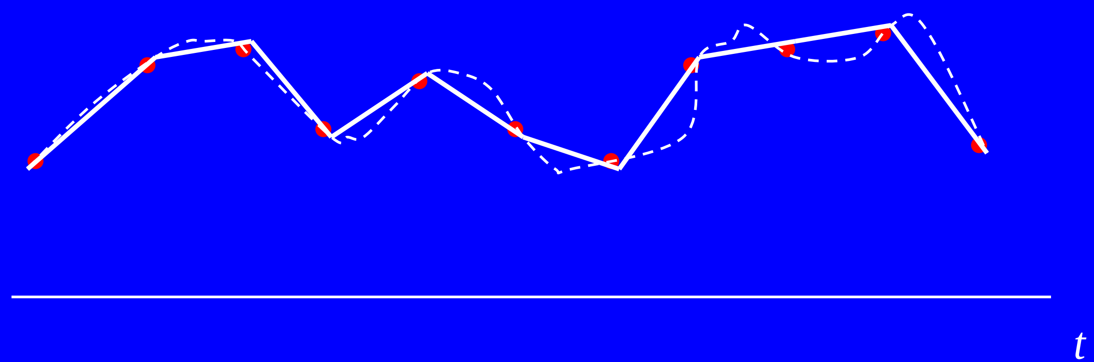
$$\boxed{x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\omega_c T\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi\omega_c(t-nT)}}$$

重建公式的解释

内插：就是用一组样本值的拟合一连续信号。

$$x(t)=\sum c_n x[nT]$$

线性内插：将相邻的样本点用直线直接连起来。



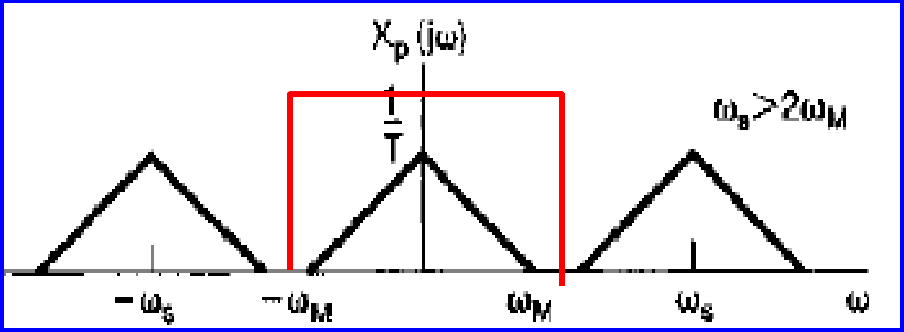
理想内插(带限内插)

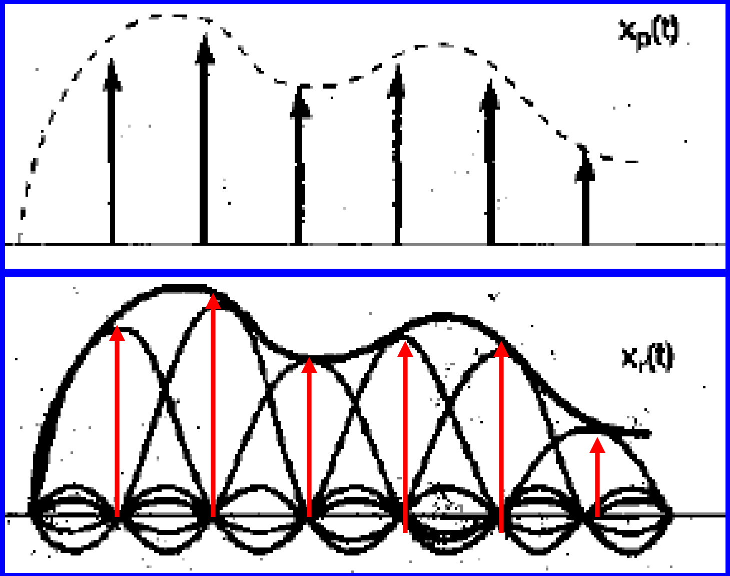
当信号本身是有限带宽，而采样频率又满足采样定理，就实现了信号的真正重建。

利用理想低通滤波器的单位冲激响应的内插

$$h(t)=T\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)=T\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\omega_c T\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi\omega_c(t-nT)}$$





$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t-nT)$$

$$h(t) = \frac{T\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{T\sin(\omega_c(t-nT))}{\pi(t-nT)}$$

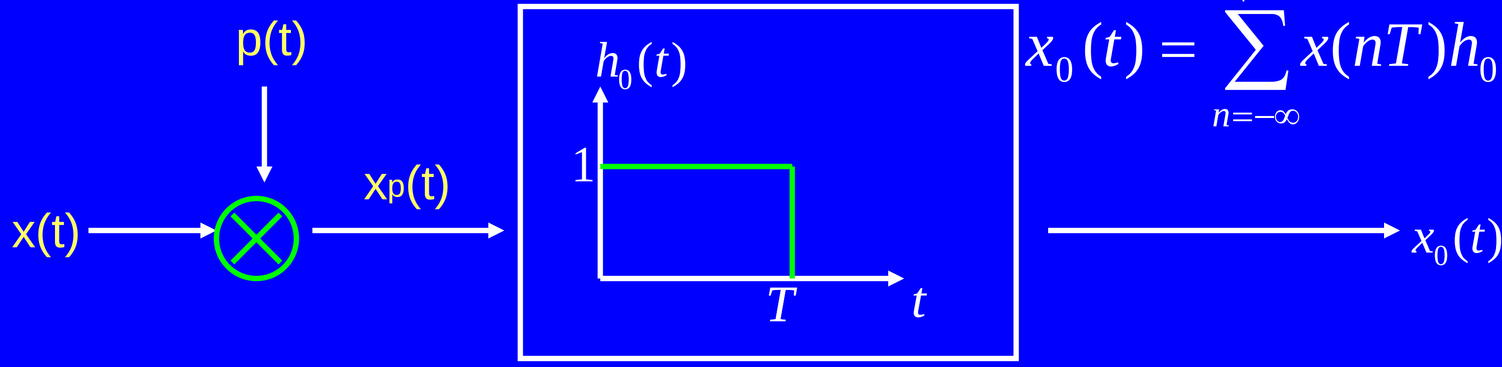
§5.1.2 零阶保持采样

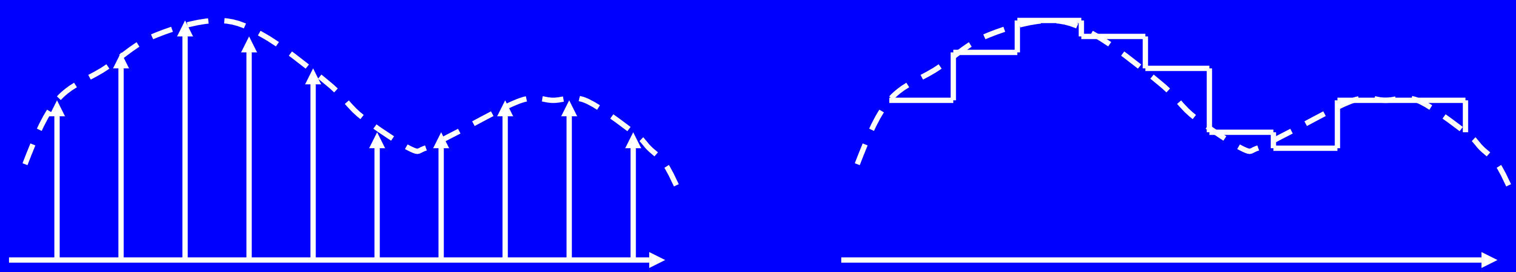
冲击脉冲序列采样是理想情况，实际做不到。

在一个给定的瞬间对x(t)采样，并保持这一样本直到下一个样本被采到。

系统的输出，原理上可以看作：理想冲激串采样，再跟一个LTI系统（该系统具有矩形的单位冲激响应）

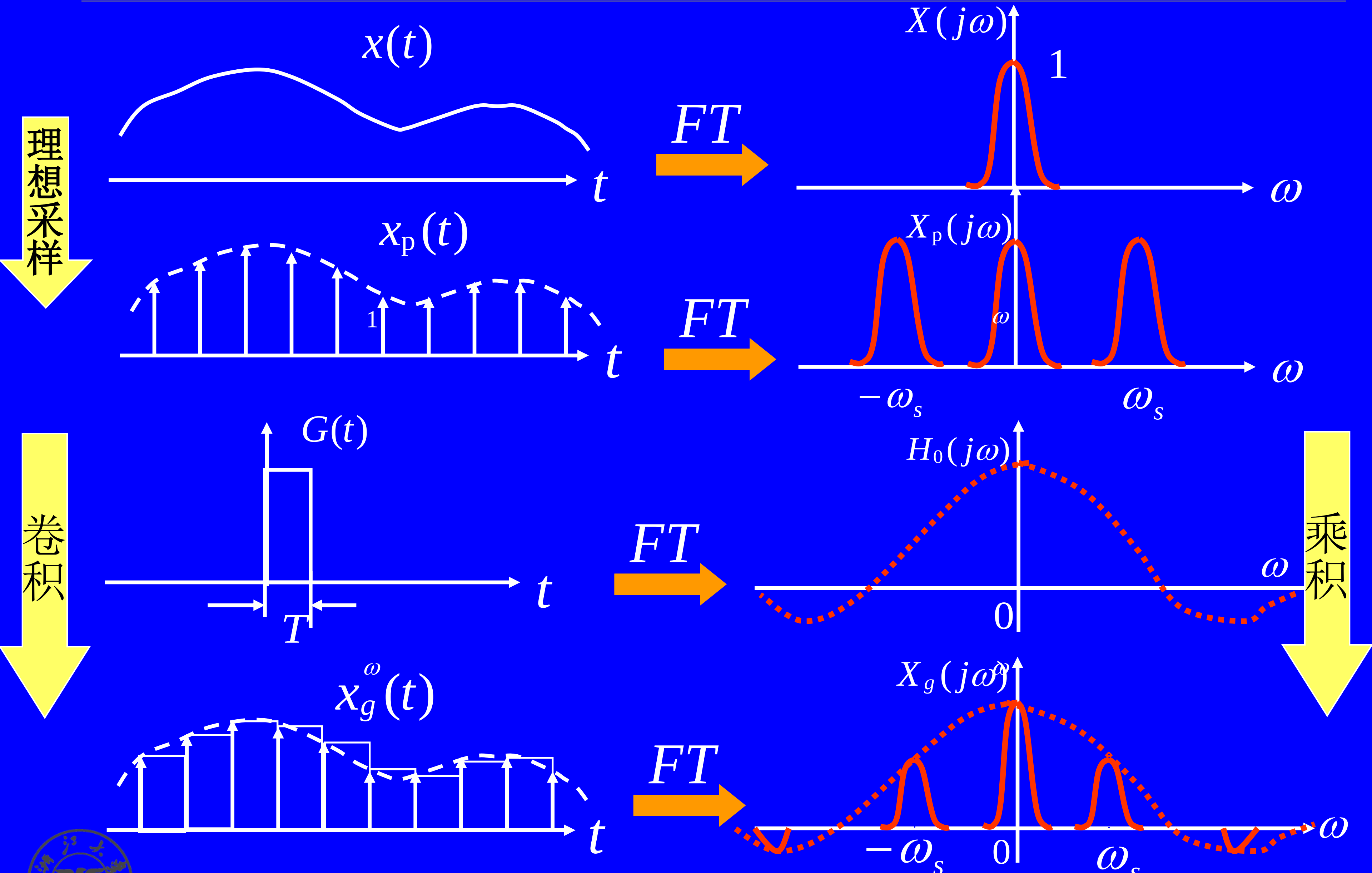
$$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)h_0(t-nT)$$



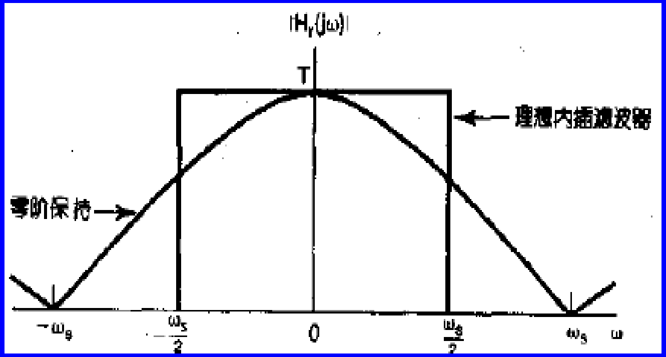


$$X_0(j\omega)=X_p(j\omega)H_0(j\omega)$$

$x[n]=x(nT)$和$x_0(t)$对应


理想采样
x(t)
t
FT
X(jω)
1
ω
x_p(t)
1
t
FT
X_p(jω)
ω
ω
−ω_s
ω_s
卷积
G(t)
t
T
FT
H_0(jω)
ω
0
乘积
ω
x_g(t)
t
FT
X_g(jω)
ω
ω
−ω_s
0
ω_s

- 零阶保持采样是一种有失真的采样。对中心频谱来说，是低通滤波。



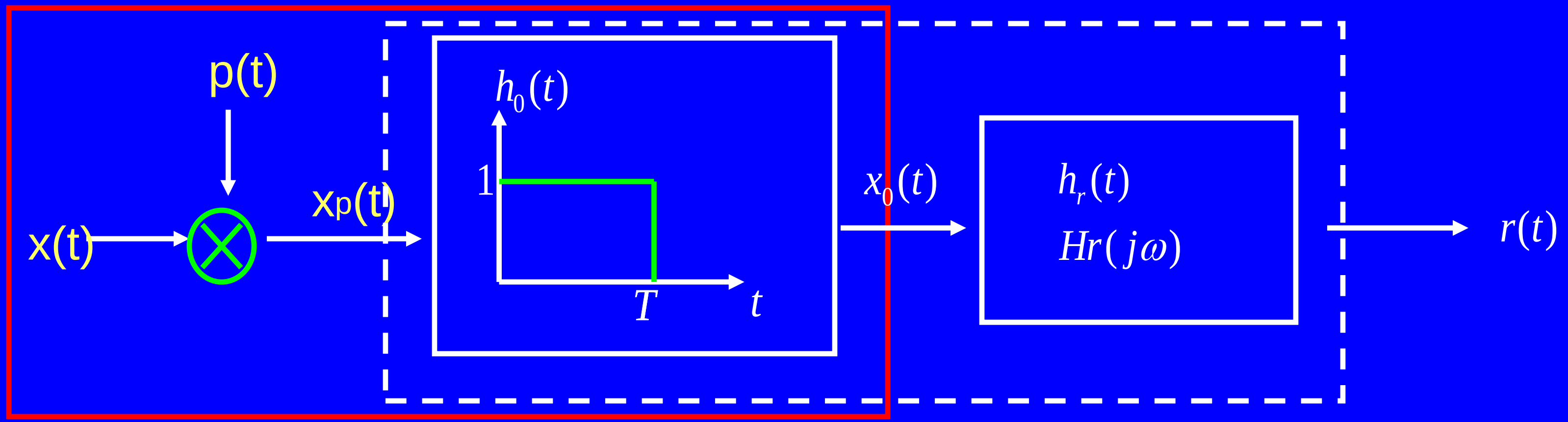
数学上的分析：

- 矩形宽度越窄，失真越小，当窄到为冲击脉冲时，无失真。

- 矩形宽度越宽，失真越大，当无限宽时，只剩下直流分量。

零阶保持信号重建

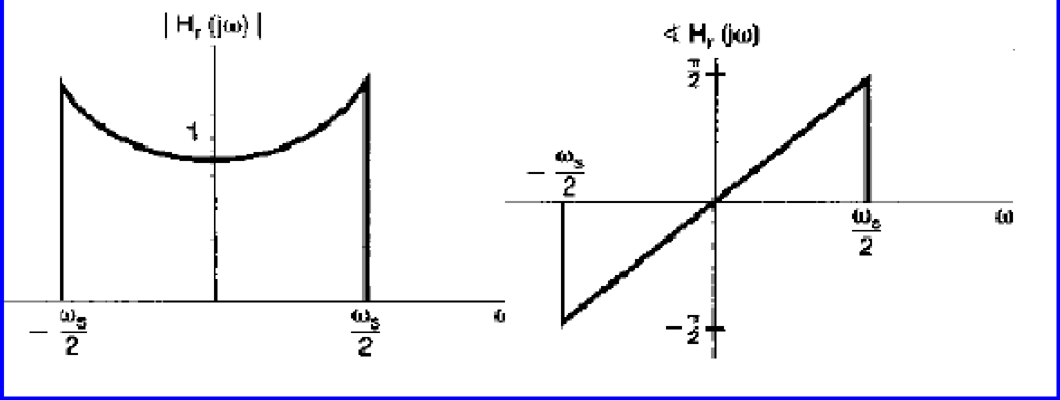
零阶保持信号重建：用一个单位冲激响应为$h_r(t)$的LTI系统来处理。$x_0(t)$经该系统后，重建为$x(t)$。



$$H_0(j\omega)=e^{-j\omega T/2}\left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\right]$$

$$H_r(j\omega)=H(j\omega)\frac{e^{j\omega T/2}\omega}{2\sin(\omega T/2)}$$

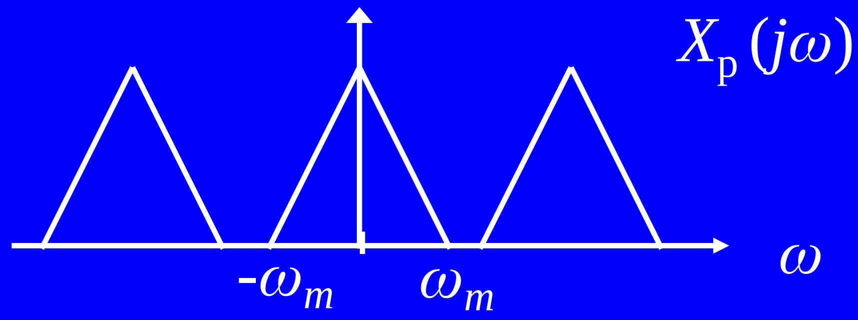
$H(j\omega)$是理想低通滤波器



实际上，该系统难以真正实现。

很多情况下，零阶保持输出本身就被认为是对原始信号的充分近似。同时也可以看作是一种样本间的内插。

§5.1.3　理想冲击采样的其他输出



理想冲击采样频谱

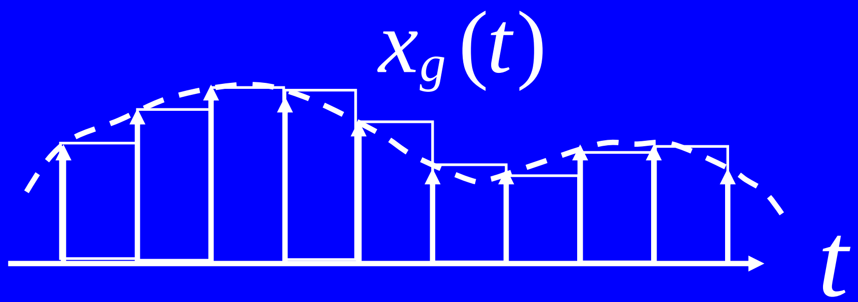
只要通过一个低通滤波器，就能输出近似值。

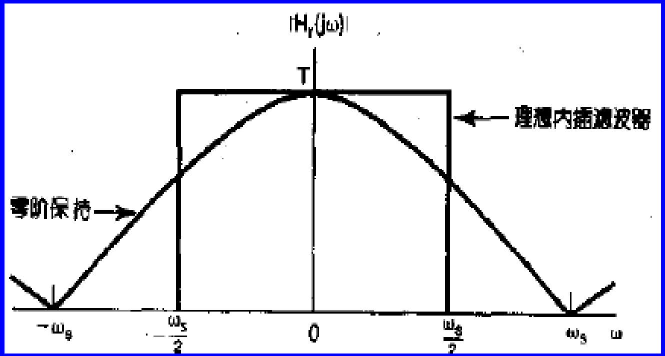
$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)h(t-nT)$$

零阶保持输出

- 滤波器 $h(t)=G(t)$, $H(j\omega)=Sa(\omega T)$

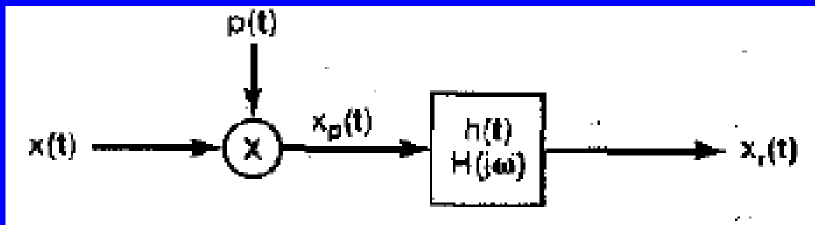
$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)h(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)G(t-nT)$$

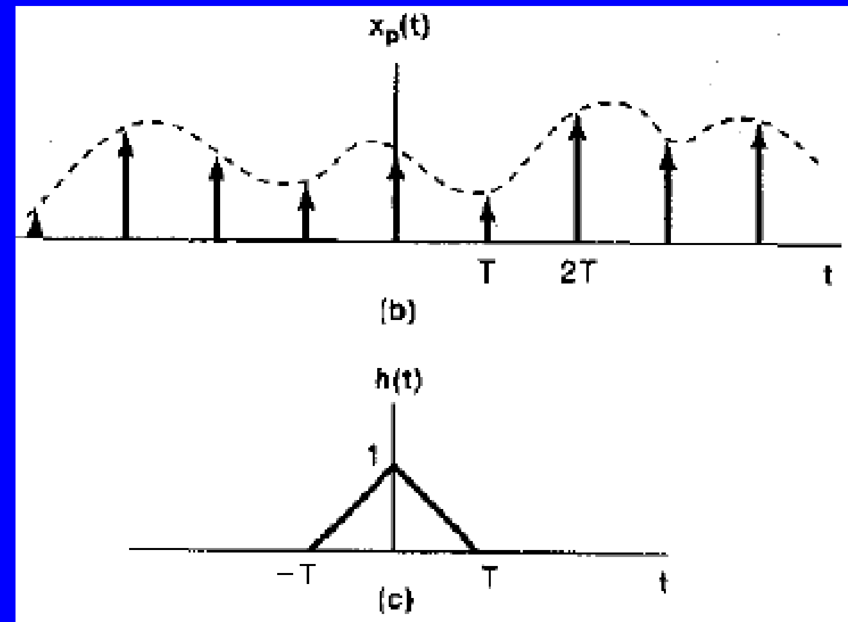


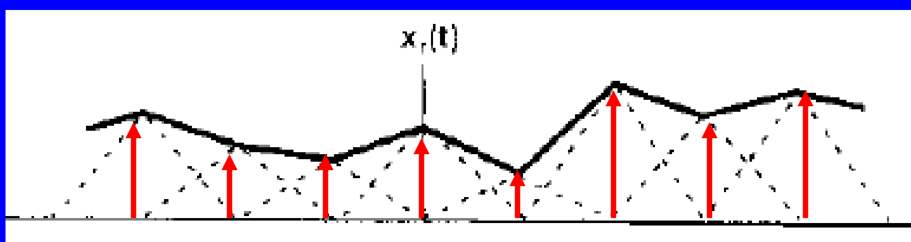


D/A转换器输出。

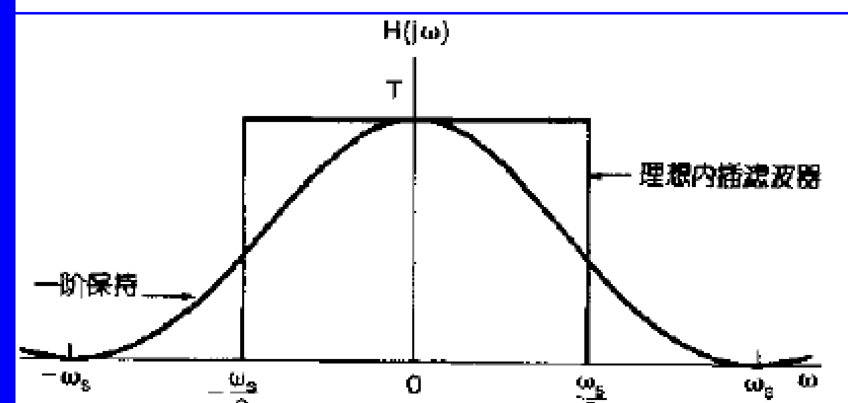
一阶保持输出—线性内插







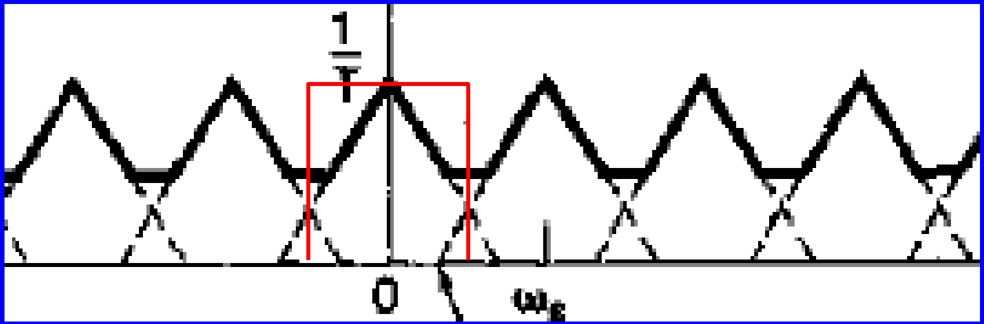
$$H(j\omega)=\frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}\right]^2$$



高阶保持输出—非线性内插

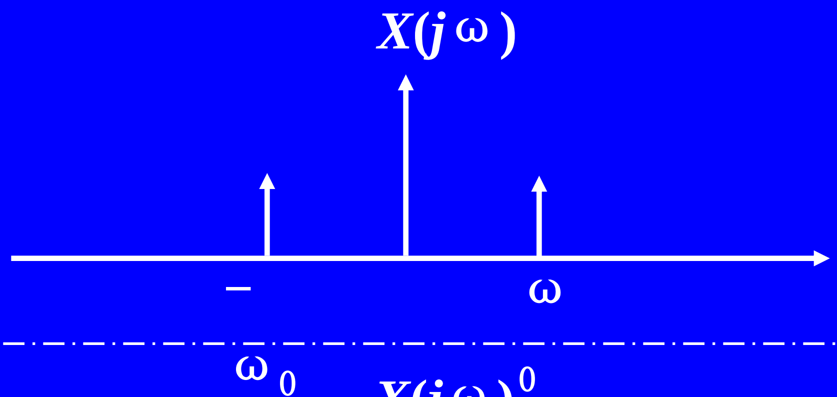
§5.2 欠采样的效果：混叠现象

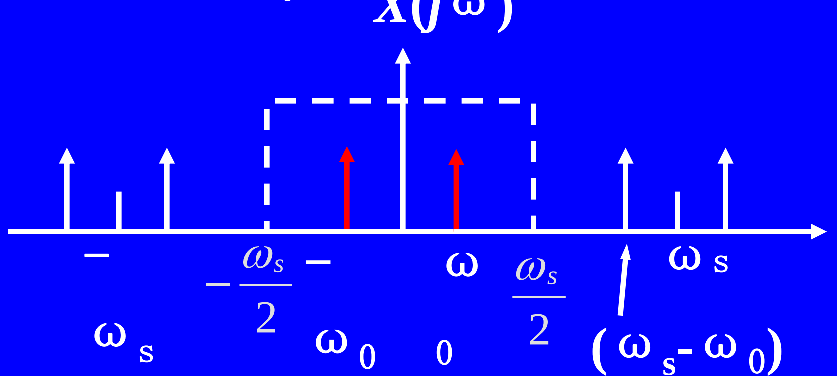
混叠：当$\omega_s<2\omega_m$时，$x(t)$的频谱，存在相互重叠，不能用低通滤波恢复原来信号(欠采样)



但当$\omega_s=2\omega_m$，重建信号和原始信号在采样点是相等的：

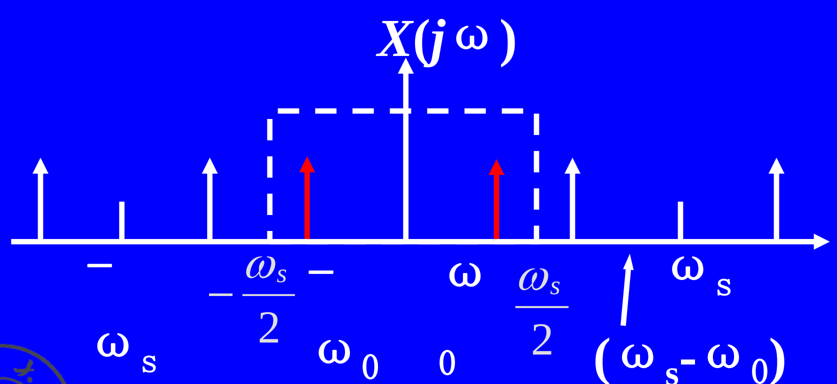
$$x_r(nT)=x(nT), n=0,\pm1,\pm2\ldots$$





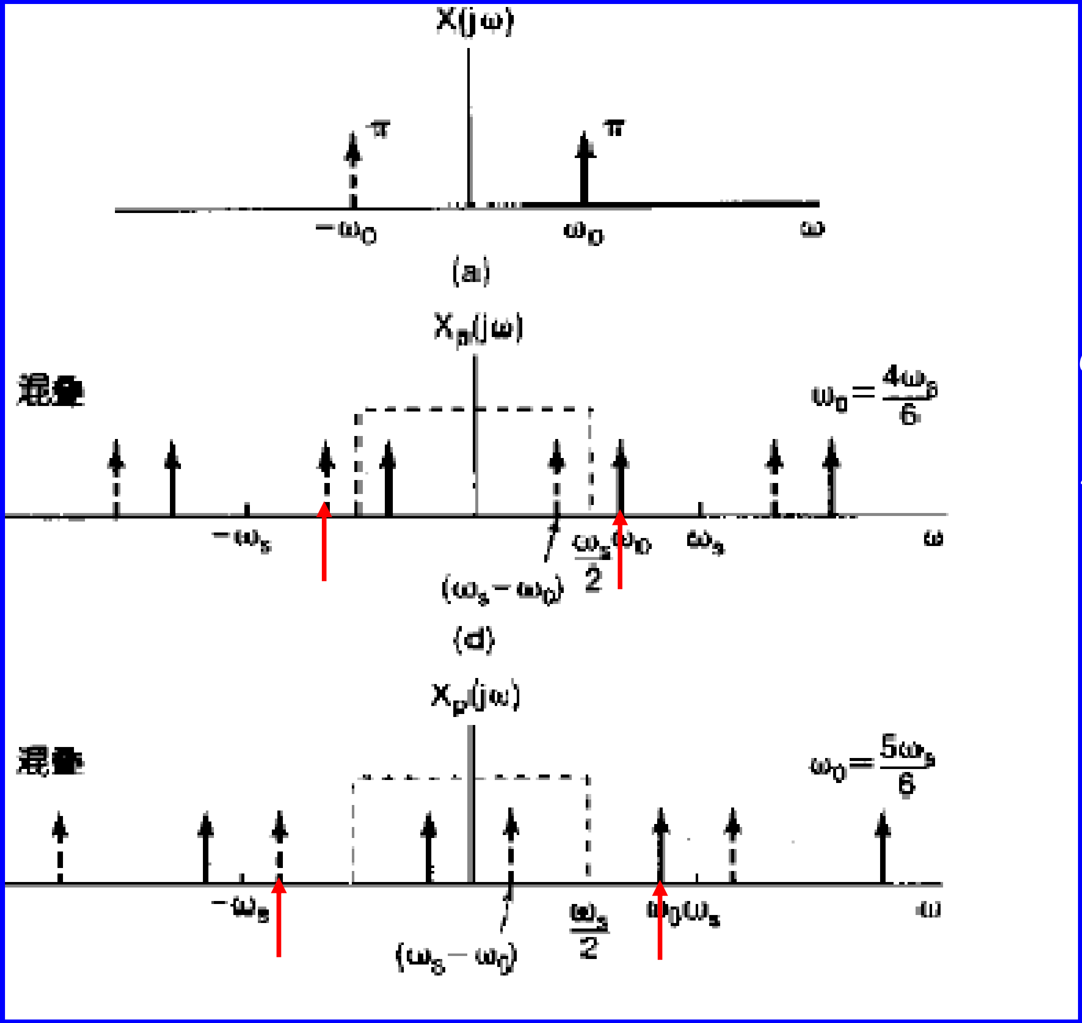
$$\omega_0 = \omega_s / 6; \quad \omega_s = 6\omega_0;$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_0 t) = x(t)$$



$$\omega_0 = 2\omega_s / 6; \quad \omega_s = 3\omega_0;$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_0 t) = x(t)$$



$$\omega_0 = 4\omega_s/6; \quad \omega_s = 1.5\omega_0;$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0 t) \neq x(t)$$

$$\omega_0 = 5\omega_s/6; \quad \omega_s = 1.2\omega_0;$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0 t) \neq x(t)$$

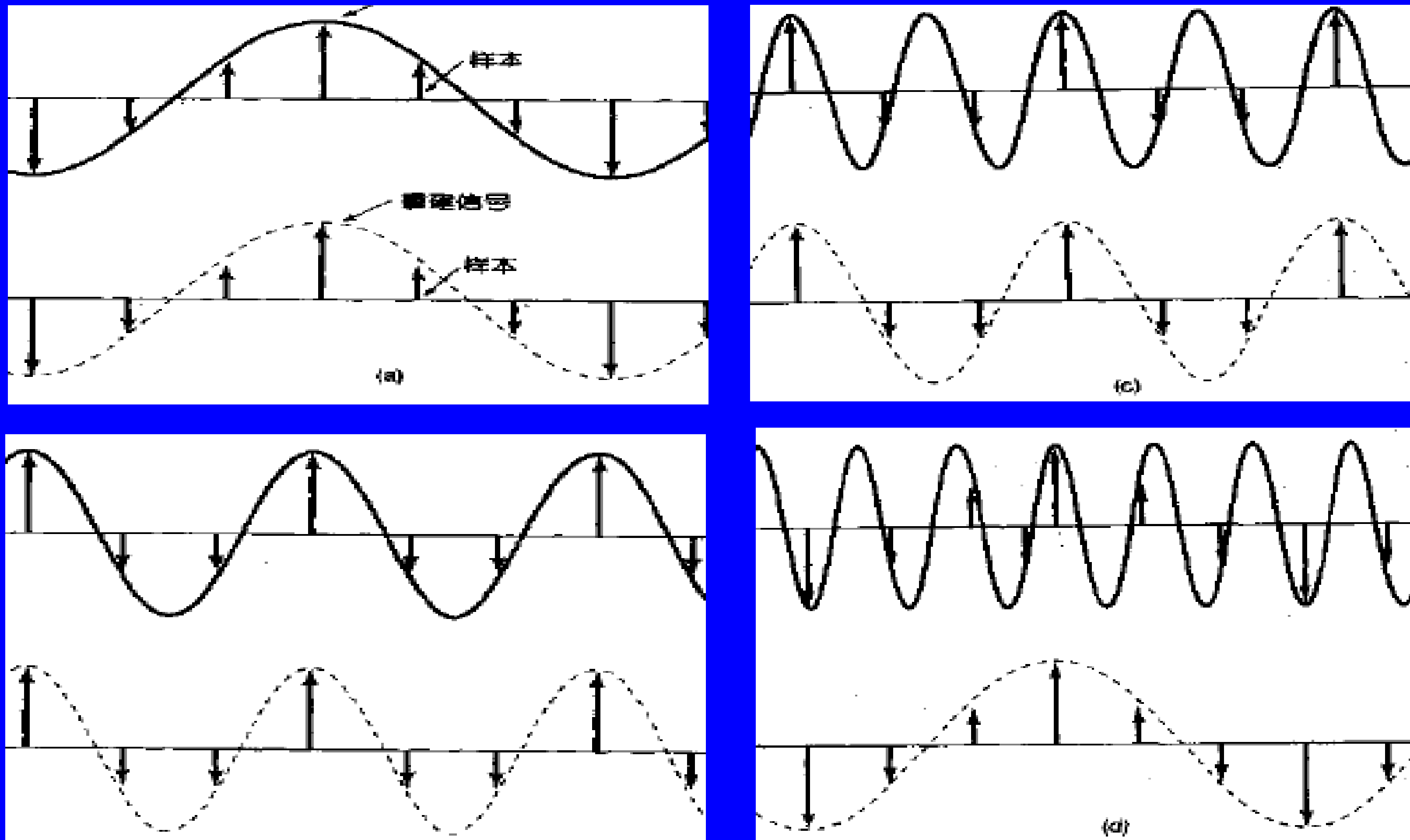
当混叠现象发生时，原始频率ω_0就被混叠成一个较低的频率$\omega_s-\omega_0$。对于$\omega_s/2>\omega_s-\omega_0$，随着$\omega_0$的增加，输出频率就下降，当$\omega_s=\omega_0$时，被重建信号就是一个常数。

$$x(t)=\cos(\omega_0 t+\phi)$$

相位倒置：

$$x_r(t)=\cos((\omega_s-\omega_0)t-\phi)$$

采样定理要求大于两倍最高频率，而不是大于等于两倍最高频率。



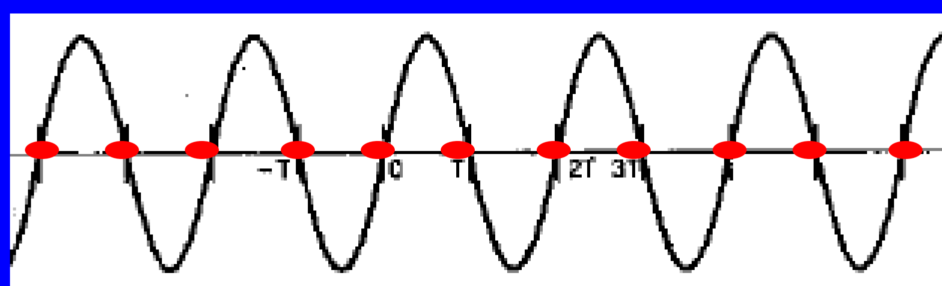
对周期信号而言，欠采样相当于在多个周期上获得一周期的采样序列，对应在时域上的尺度扩展--------取样示波器

例7.1

$$x(t)=\cos(\frac{\omega_s}{2}t+\phi)$$

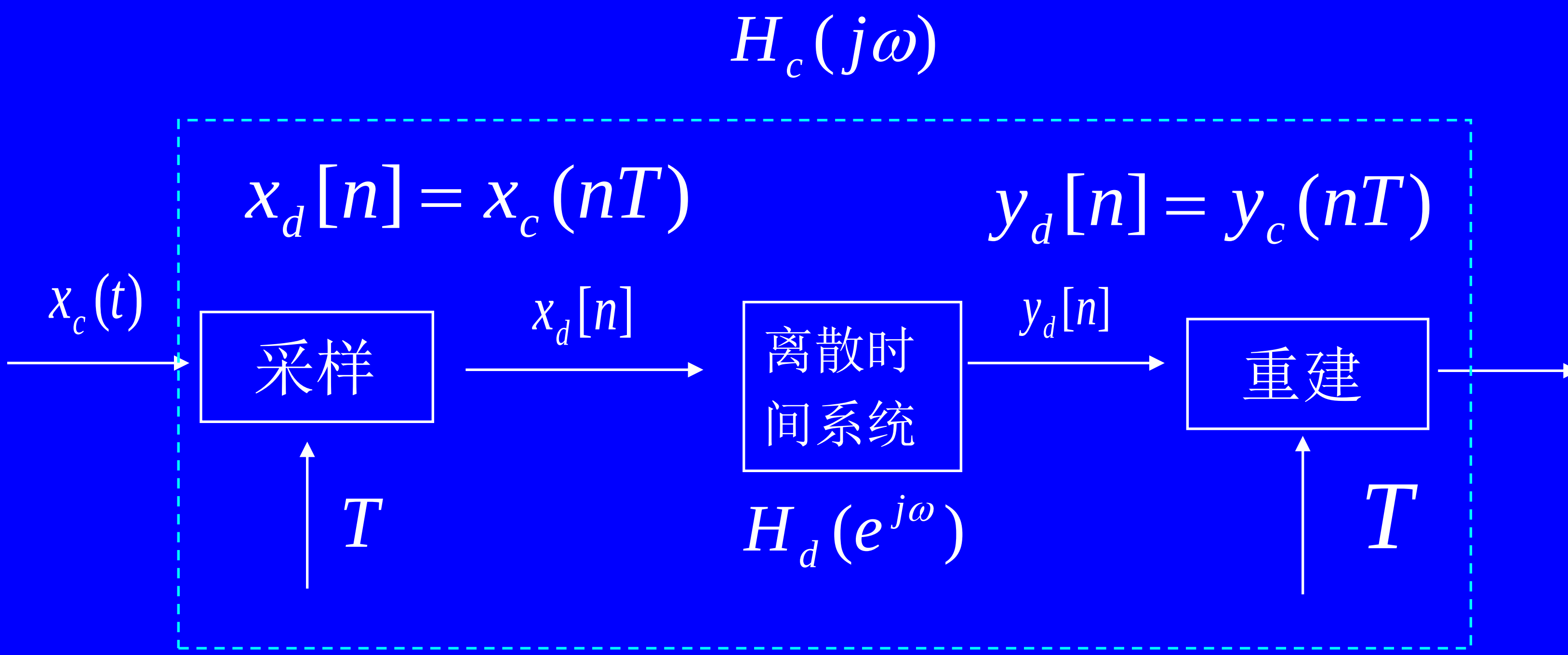
$$x_r(t)=\cos(\phi)\cos(\frac{\omega_s}{2}t)$$

$$x(t)=0*\cos(\frac{\omega_s}{2}t)$$

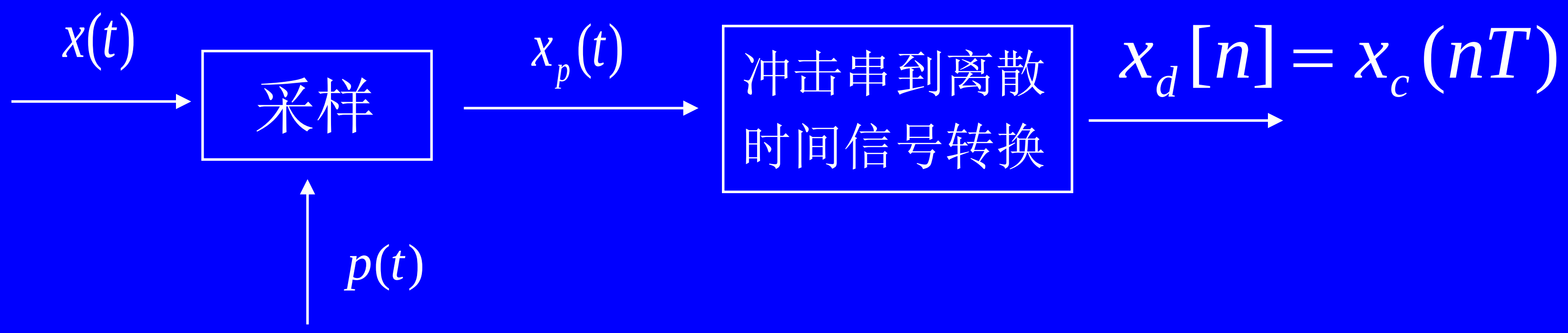


§5.4　连续时间系统的离散处理

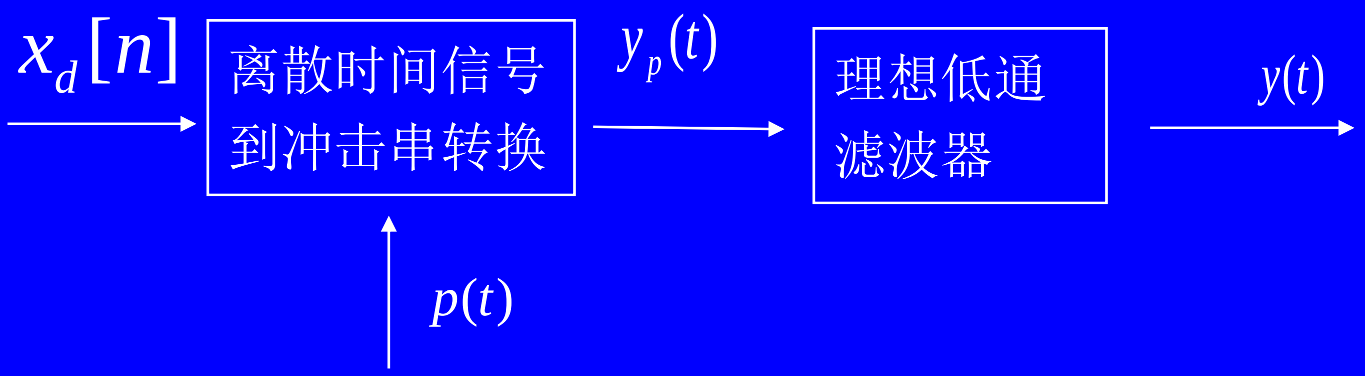
$$x[n]=x(nT)$$


$H_c(j\omega)$
$x_d[n]=x_c(nT)$
$y_d[n]=y_c(nT)$
$x_c(t)$
采样
$x_d[n]$
离散时间系统
$y_d[n]$
重建
T
$H_d(e^{j\omega})$
T

- 采样系统



- 重建系统



- 采样系统

$$x(t) \to x_c(nT)$$

$$x_c(nT) \to x_d[n]$$

连续信号到离散信号：

信号离散化和时间归一化

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$F\{\delta(t-nT)\} = e^{-j\omega \cdot nT}$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega \cdot nT}$$

$$x_d[n] = x_c(nT)$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega n}$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega \cdot nT}$$

$$\boxed{\begin{gathered} X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega) \\ \Omega = \omega T \end{gathered}}$$

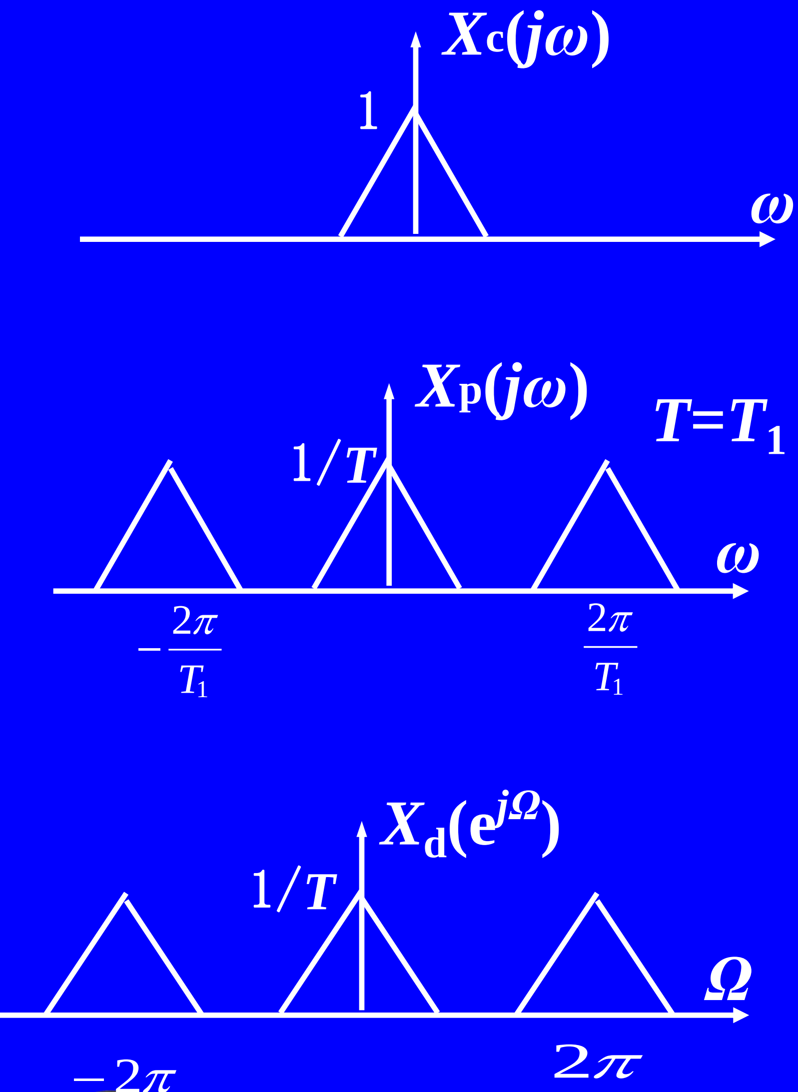
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T)$$

$$\Omega = \omega T$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T)$$

$$\boxed{X_c(j\omega) = T \bullet X_d(e^{j\Omega}),.|\,\omega\,|< \omega_s/2}$$



$X_c(j\omega)$　$x(t)$

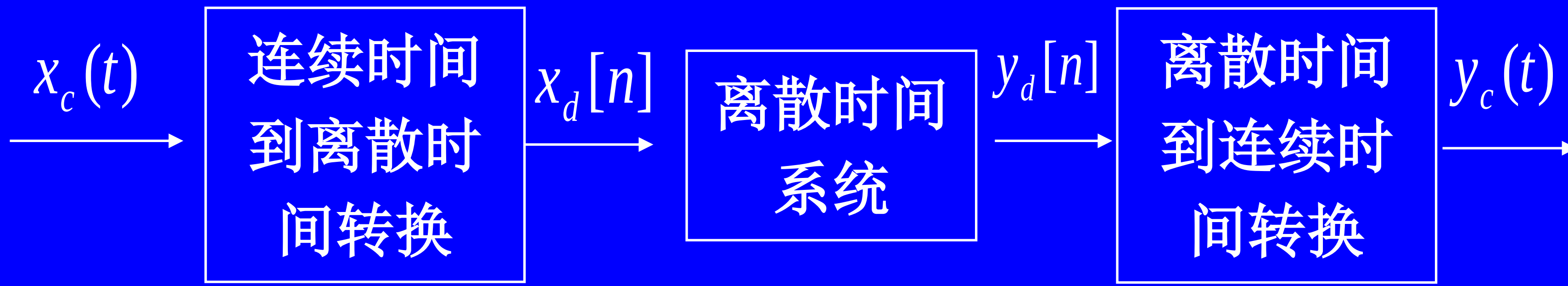
冲激串采样，对应频谱的周期性。

$X_p(j\omega)$　$x_p(t)$　$x(nT)$

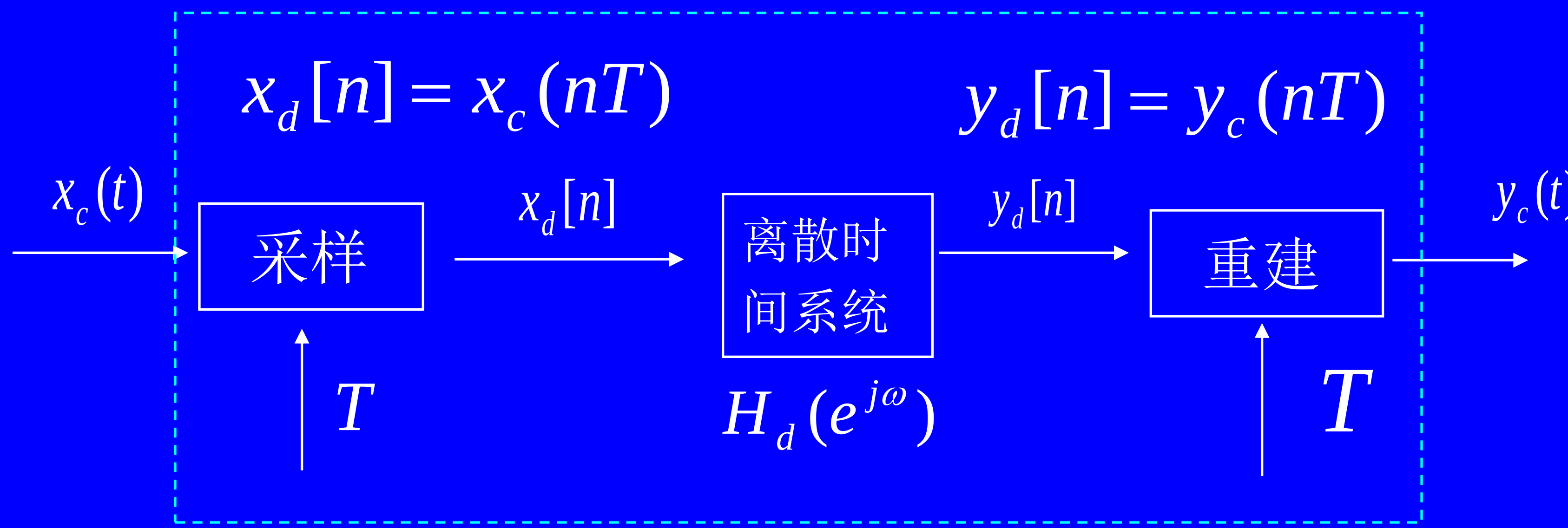
时间归一化：

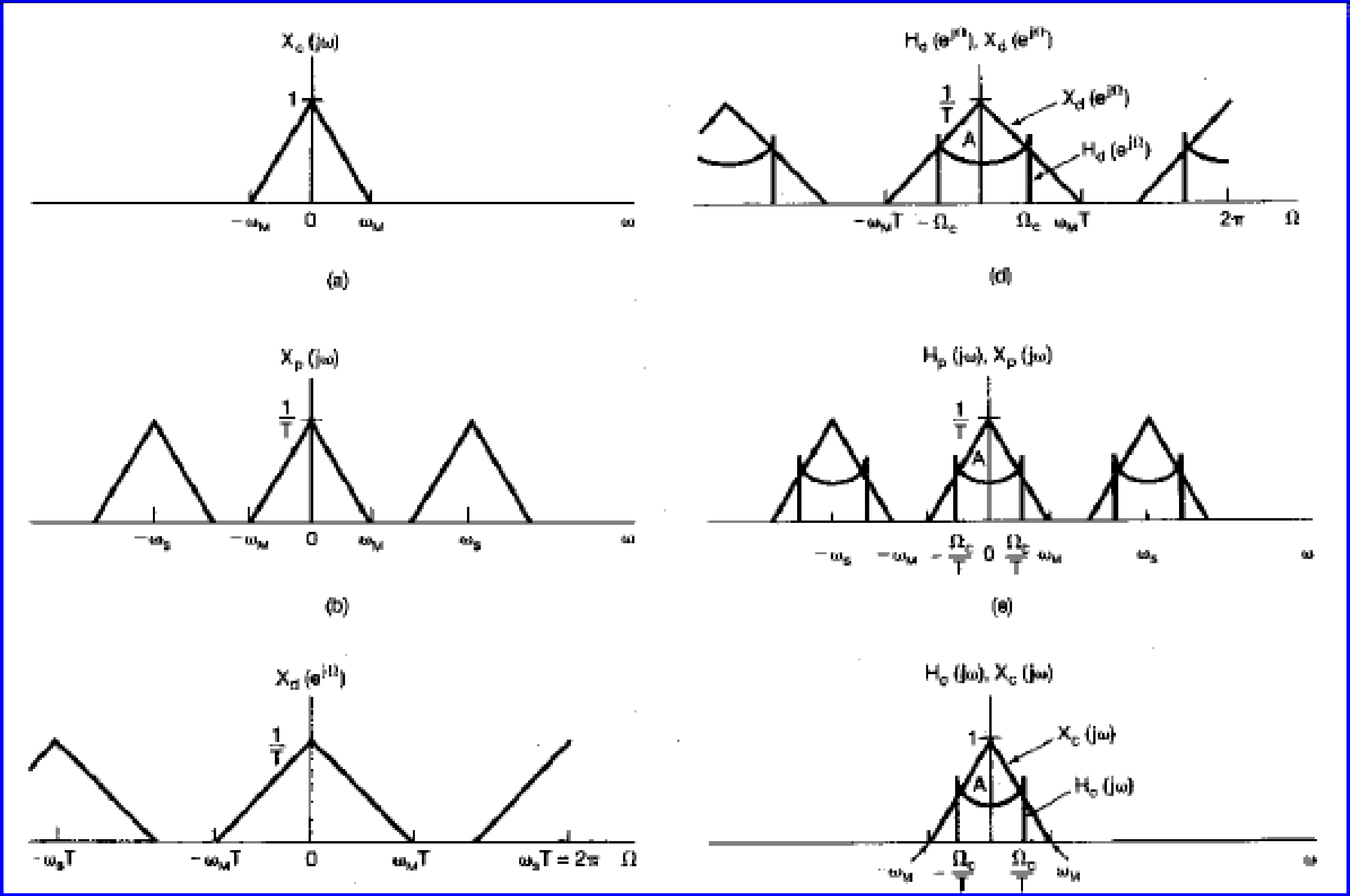
时域有1/T的变化，对应频域T倍的变化，即$\Omega = \omega T$

$X_d(e^{j\Omega})$　$x_d[n]$


$x_c(t)$
连续时间到离散时间转换
$x_d[n]$
离散时间系统
$y_d[n]$
离散时间到连续时间转换
$y_c(t)$

$H_c(j\omega)$


$x_d[n]=x_c(nT)$
$y_d[n]=y_c(nT)$
$x_c(t)$
采样
T
$x_d[n]$
离散时间系统
$H_d(e^{j\omega})$
$y_d[n]$
重建
T
$y_c(t)$



$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) H_d(e^{j\omega T})$$

§5.5　调制

调制---将某一个载有信息的信号嵌入另一个信号的过程；

解调---将载有信息的信号提取出来的过程

$$y(t)=x(t)c(t)$$

复指数与正弦幅度调制

$$y(t) = x(t)c(t)$$

调制信号

载波信号

复指数信号或正弦信号$c(t)$的振幅被载有信息的信号$x(t)$相乘（调制）----实现频谱搬移功能。

复指数载波的幅度调制

$$c(t)=e^{j(\omega_c t+\theta_c)}$$

载波频率

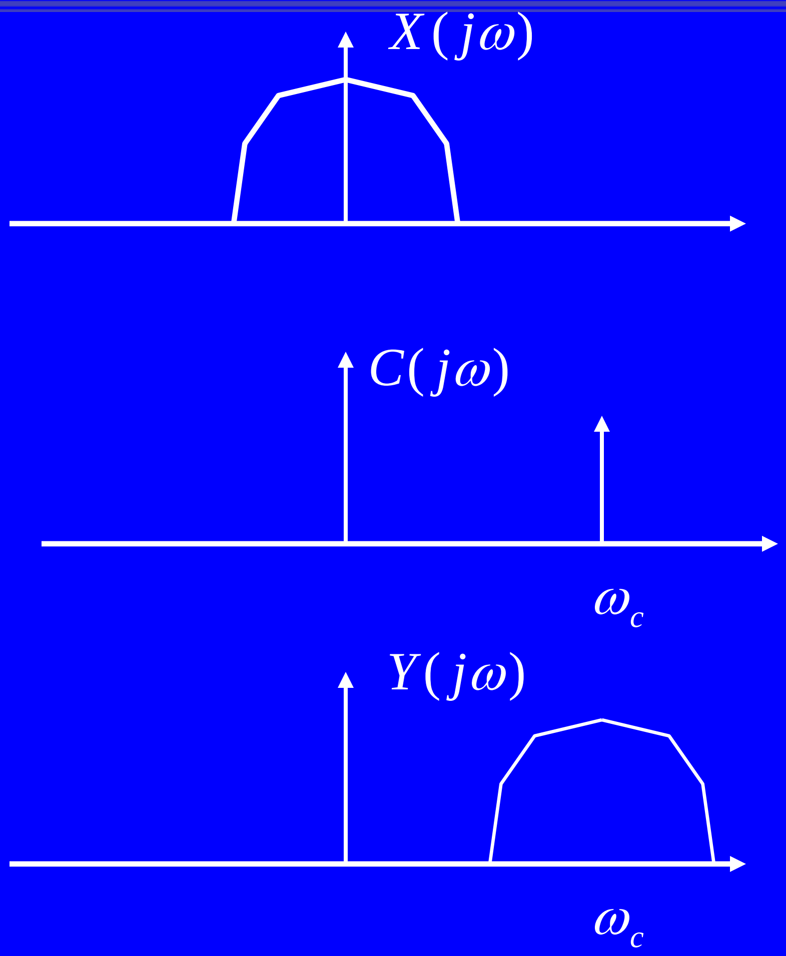
一般 $\theta c=0$

$$y(t)=x(t)e^{j\omega_c t}$$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*C(j\omega)$$

$$C(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_c)$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega-j\omega_c)$$



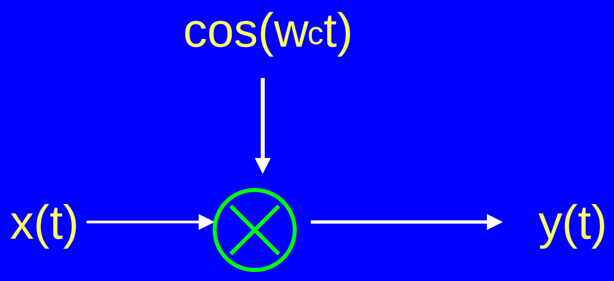
$$x(t)=y(t)e^{-j\omega_c t}$$

解调

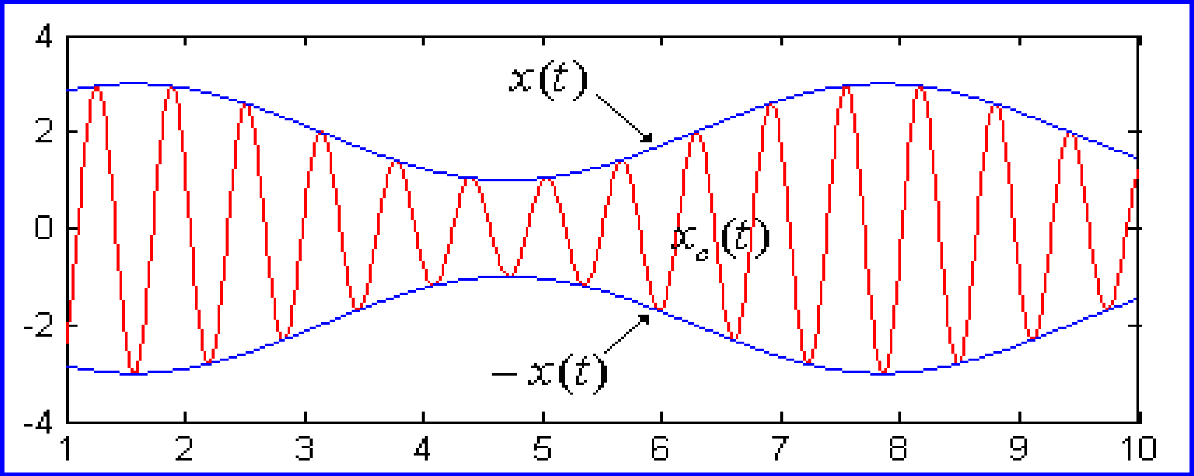
§5.5.1　双边带正弦载波幅度调制(DSB)

$$c(t)=\cos(\omega_c t+\theta_c)$$

$$y(t)=x(t)\cos(\omega_c t+\theta_c)$$



一般 $\theta c=0$



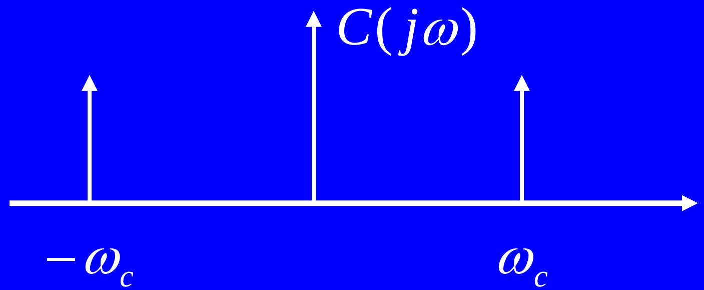
$x(t)$与$x_c(t)$的频谱关系

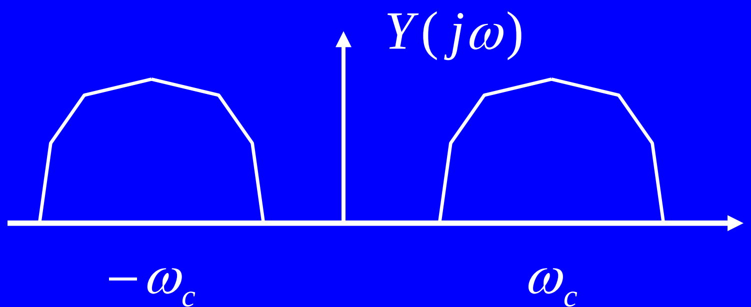
$$x_c(t)=x(t)\cos(\omega_c t)$$

$$C(j\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2}[X(j\omega-j\omega_c)+X(j\omega+j\omega_c)]$$

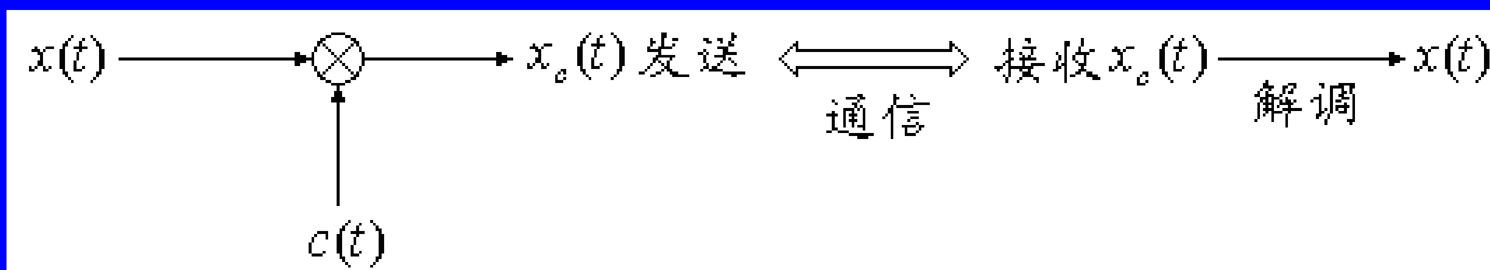
载波抑制





解调

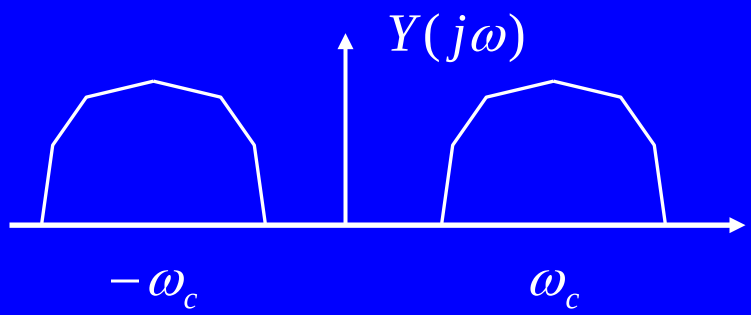
在通讯系统的接收端，载有信息的信号$x(t)$经由解调而得到恢复。

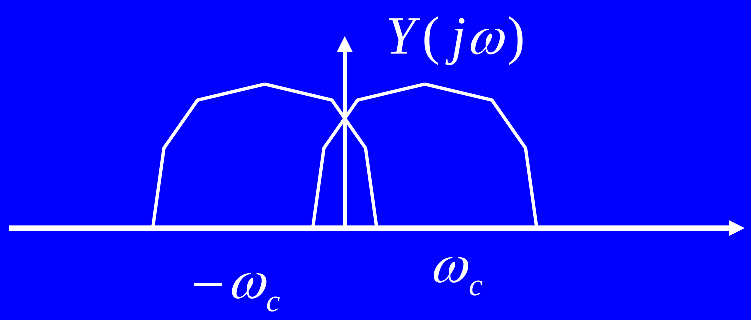


解调过程：根据$x_c(t)$恢复$x(t)$

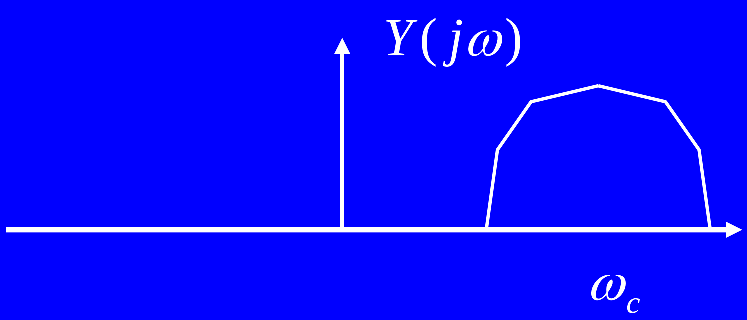
一般有同步解调和非一般有同步解调

解调





- 正弦调制时，必须$\omega_c > \omega_m$，$x(t)$才能从 $y(t)$ 中恢复。一般$\omega_c \gg \omega_m$



- 复指数调制，都能恢复。

同步解调

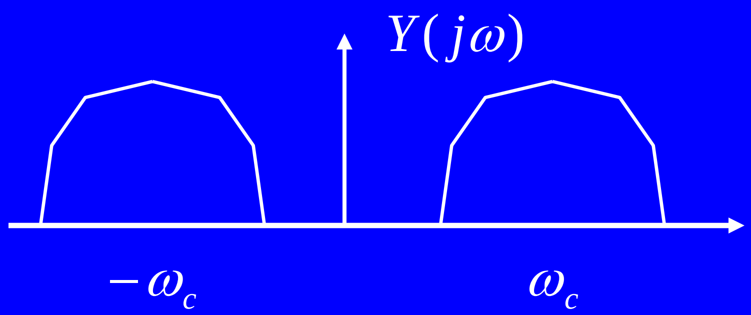
当$\omega_c > \omega_M$时

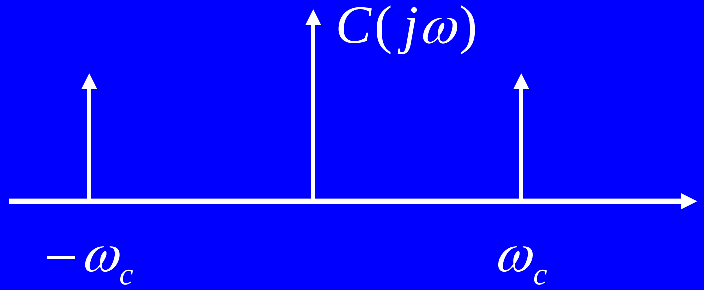
$$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$$

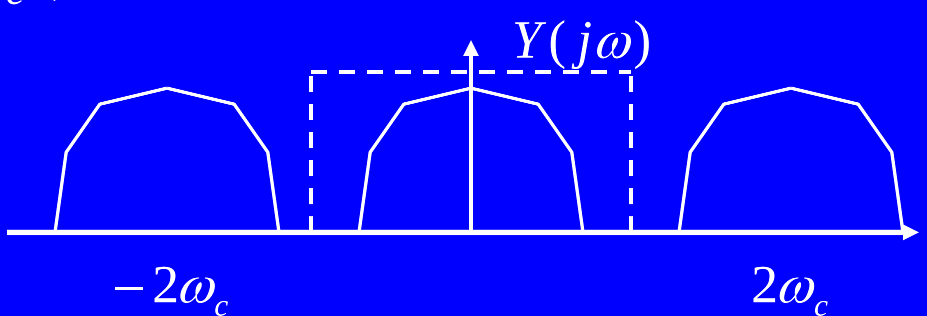
$$w(t) = y(t)\cos(\omega_c t)$$

$$w(t) = x(t)\cos^2(\omega_c t)$$

$$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t)$$

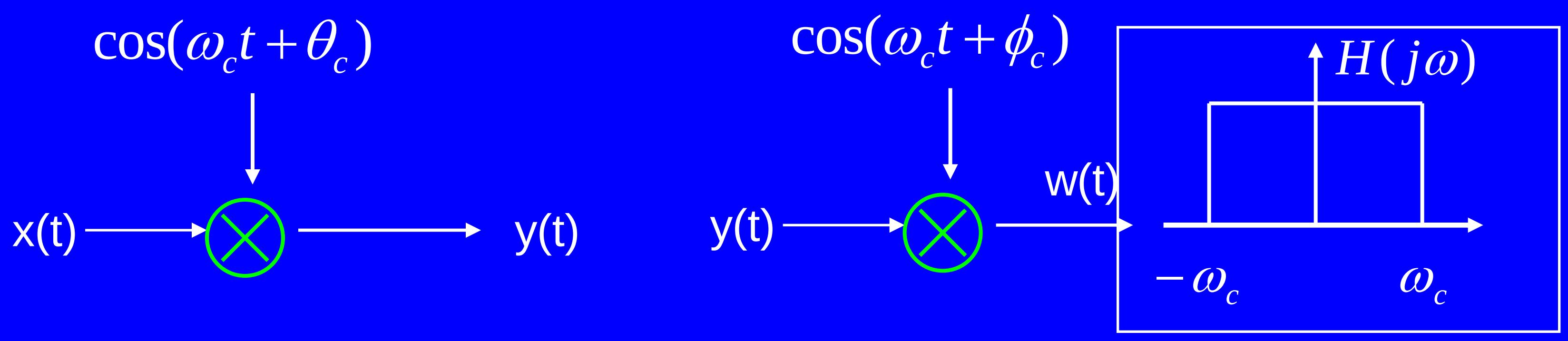






解调器载波的相位与调制器载波的相位相同

解调器载波的相位与调制器载波的相位不同时



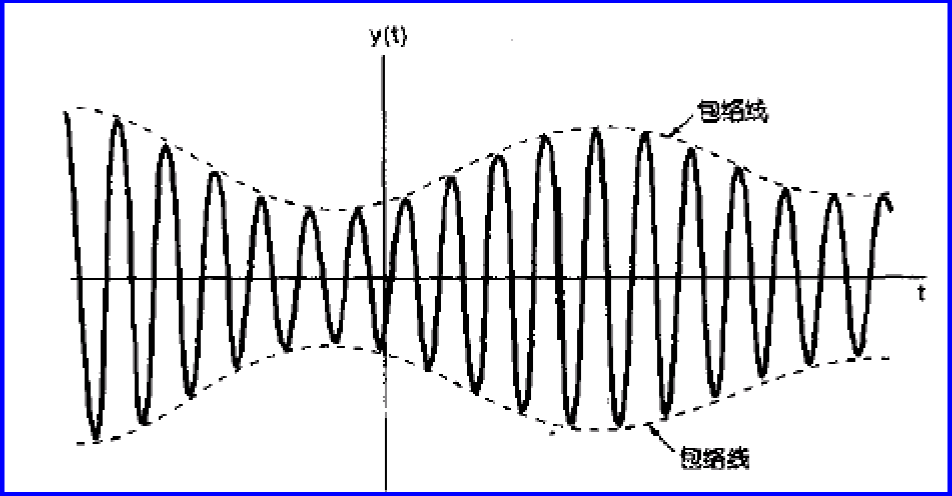
$$w(t)=x(t)\cos(\omega_c t+\theta_c)\cos(\omega_c t+\phi_c)$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\theta_c-\phi_c)x(t)+\frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t+\theta_c+\phi_c)$$

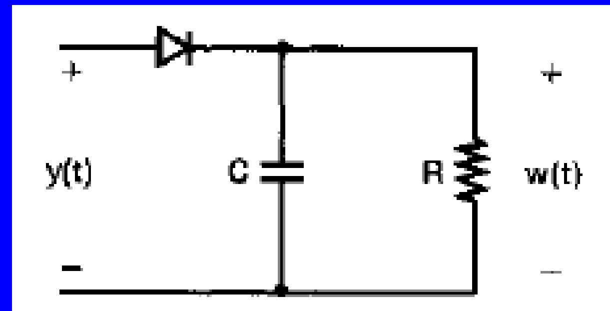
因此：为获得最大的输出信号，振荡器要求同相，而且相位在全部时间内保持不变。

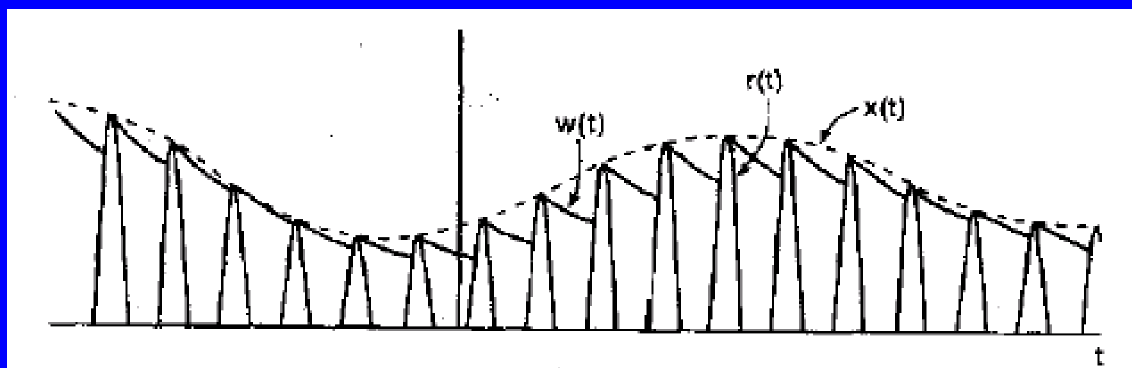
非同步解调

实际应用中，解调器与调制器同相很困难，假设$x(t)>0$，且调制频率大大高于信号频率时，采用非同步解调。已调信号的包络线近似为信号。



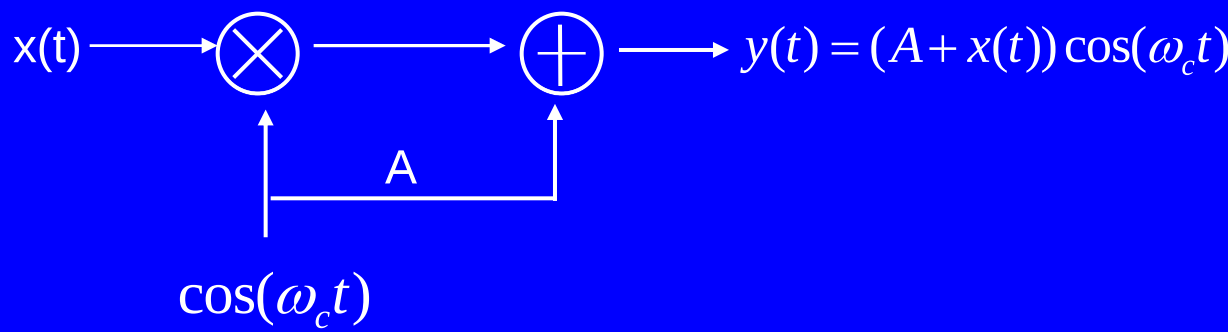
包络检波器

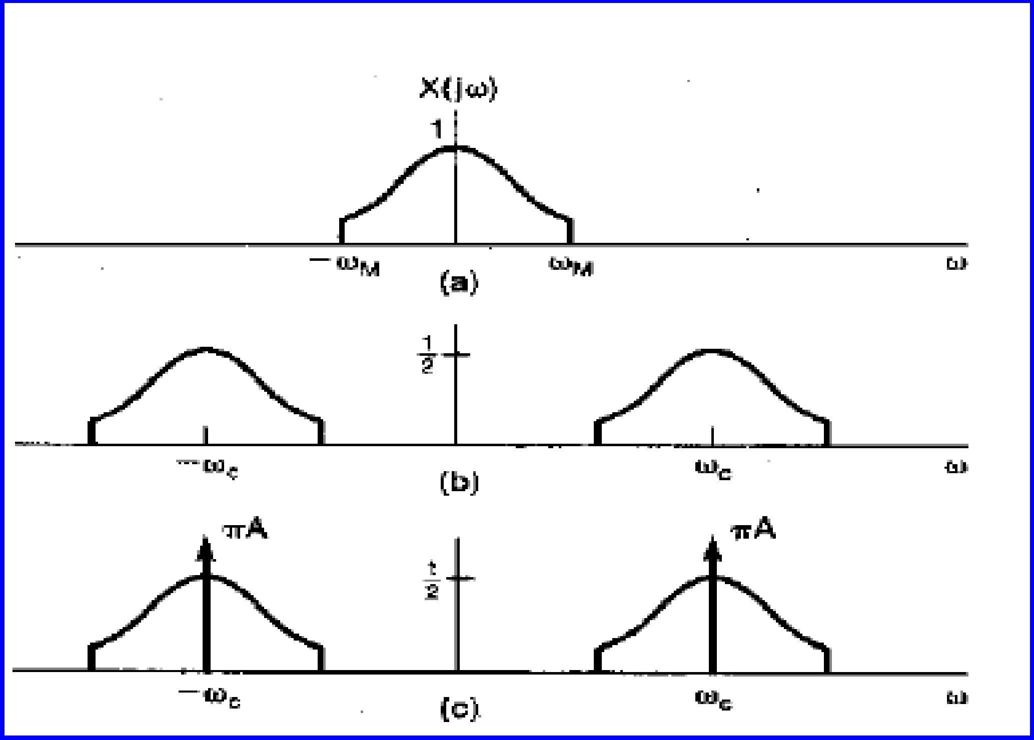




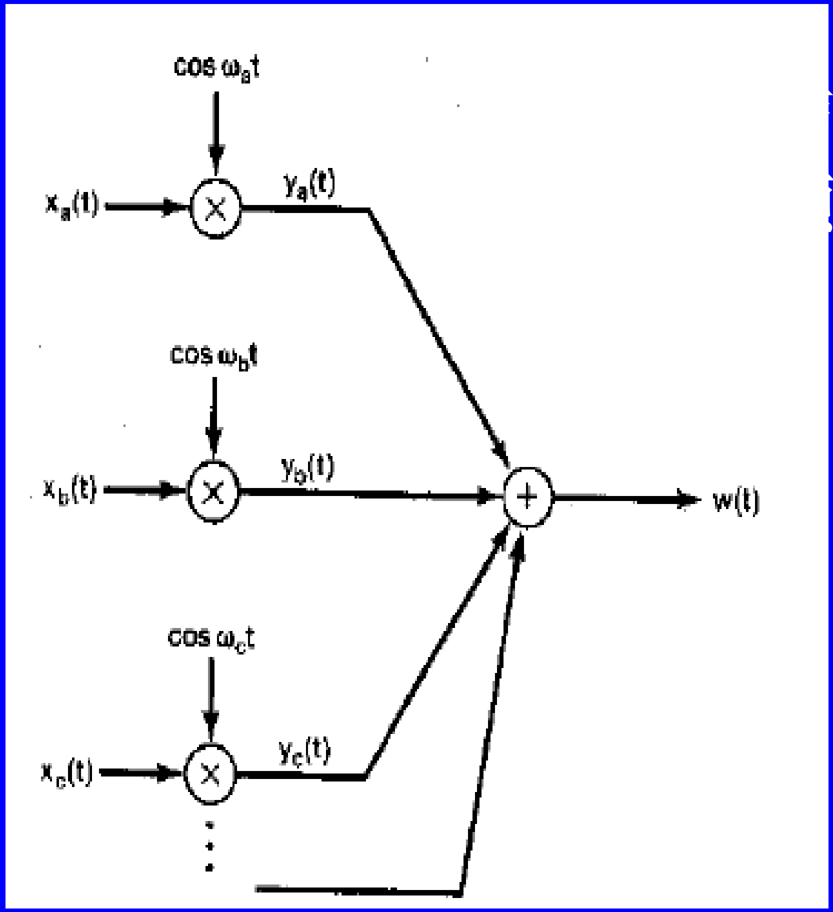
要求：$x(t)>0$；$x(t)$的变化比调制信号慢很多

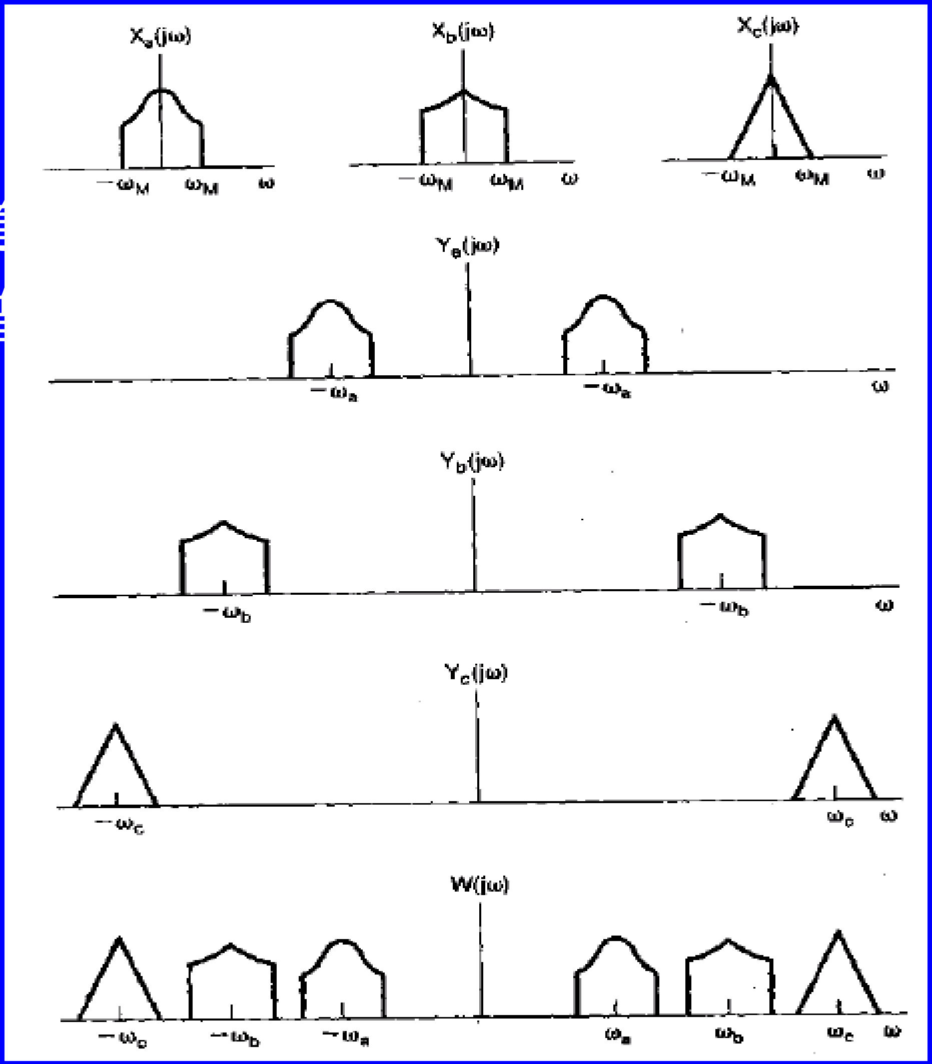
为保证 $x(t)>0$


x(t)
$y(t)=(A+x(t))\cos(\omega_c t)$
A
$\cos(\omega_c t)$

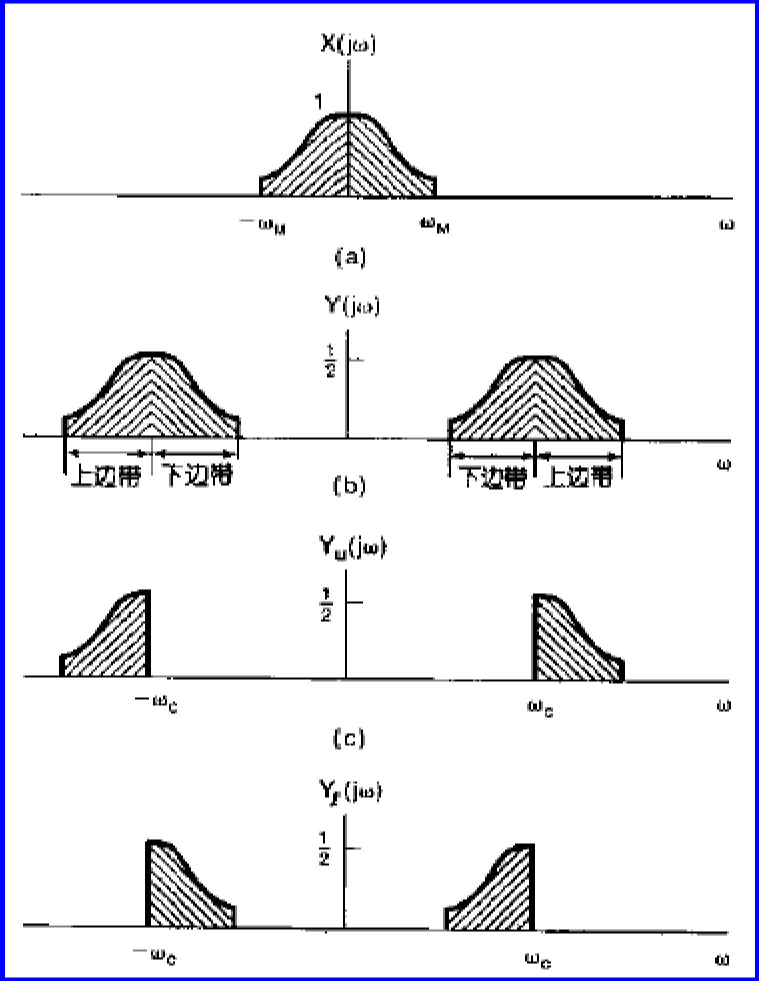

X(jω)
1
−ω_M
ω_M
ω
(a)
1/2
−ω_c
ω_c
(b)
πA
πA
(c)

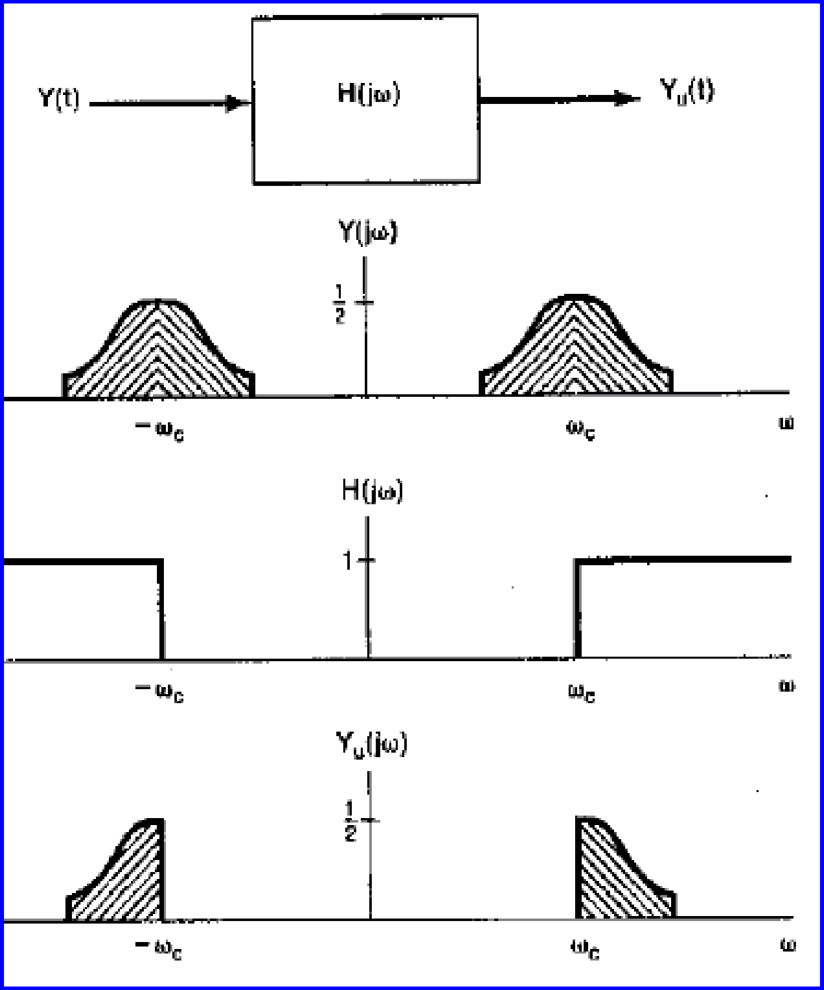
§5.5.2　频分复用


cos ωat
xa(t)
ya(t)
cos ωbt
xb(t)
yb(t)
w(t)
cos ωct
xc(t)
yc(t)

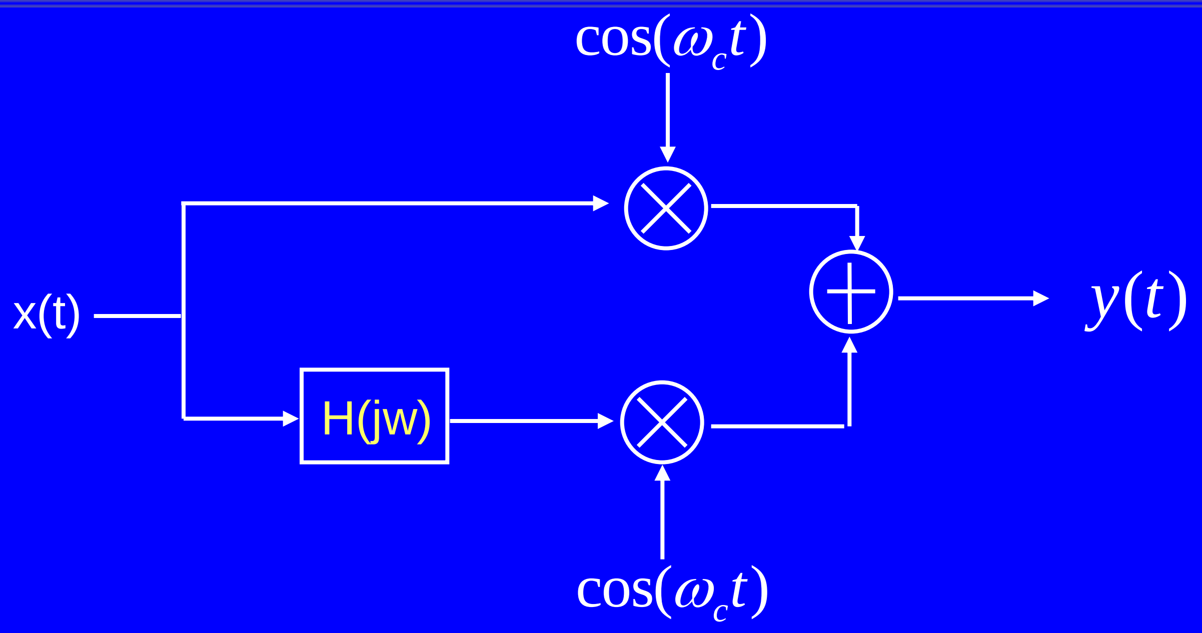

Xa(jω)
Xb(jω)
Xc(jω)
−ωM
ωM
ω
Ya(jω)
−ωa
Yb(jω)
−ωb
Yc(jω)
−ωc
ωc
W(jω)
ωa
ωb

单边带调制

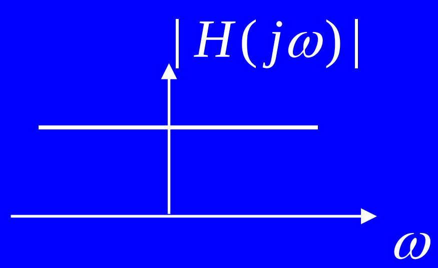

X(jω)
1
−ω_M
ω_M
ω
(a)
Y(jω)
1/2
上边带
下边带
下边带
上边带
ω
(b)
Y_u(jω)
1/2
−ω_c
ω_c
ω
(c)
Y_ℓ(jω)
1/2
−ω_c
ω_c
ω

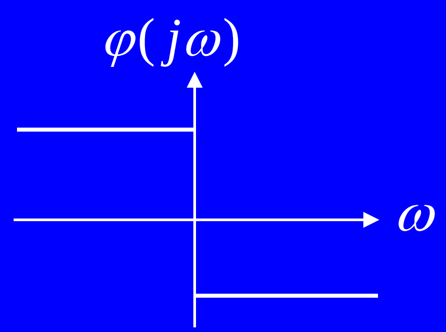

Y(t)
H(jω)
Y_u(t)
Y(jω)
1/2
−ω_c
ω_c
ω
H(jω)
1
−ω_c
ω_c
ω
Y_u(jω)
1/2
−ω_c
ω_c
ω

移相



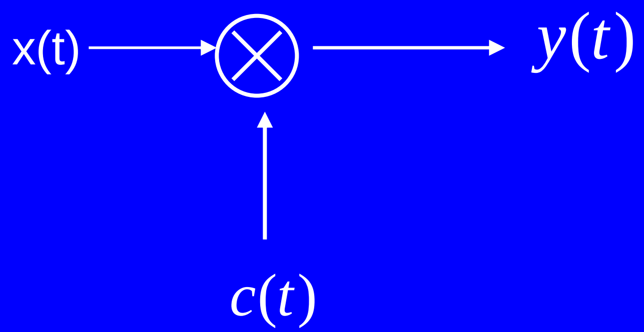
$$H(j\omega)=\begin{cases}-j, \omega>0 \\ j, \omega<0\end{cases}$$

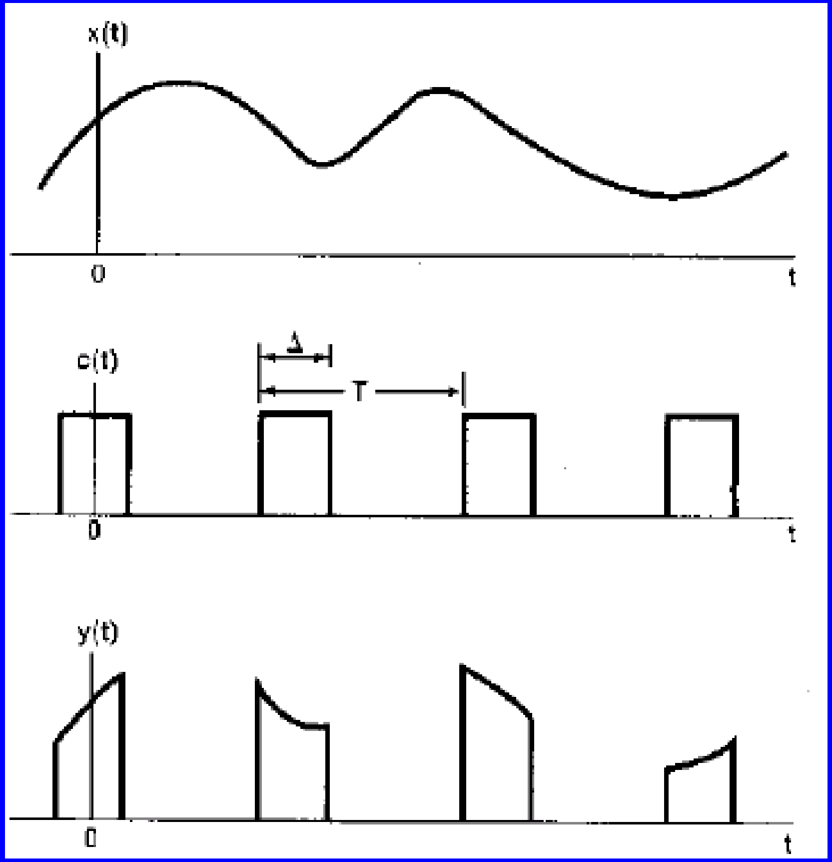




希尔伯特变换

§5.6 脉冲幅度调制(PAM)





$$y(t) = x(t)c(t)$$

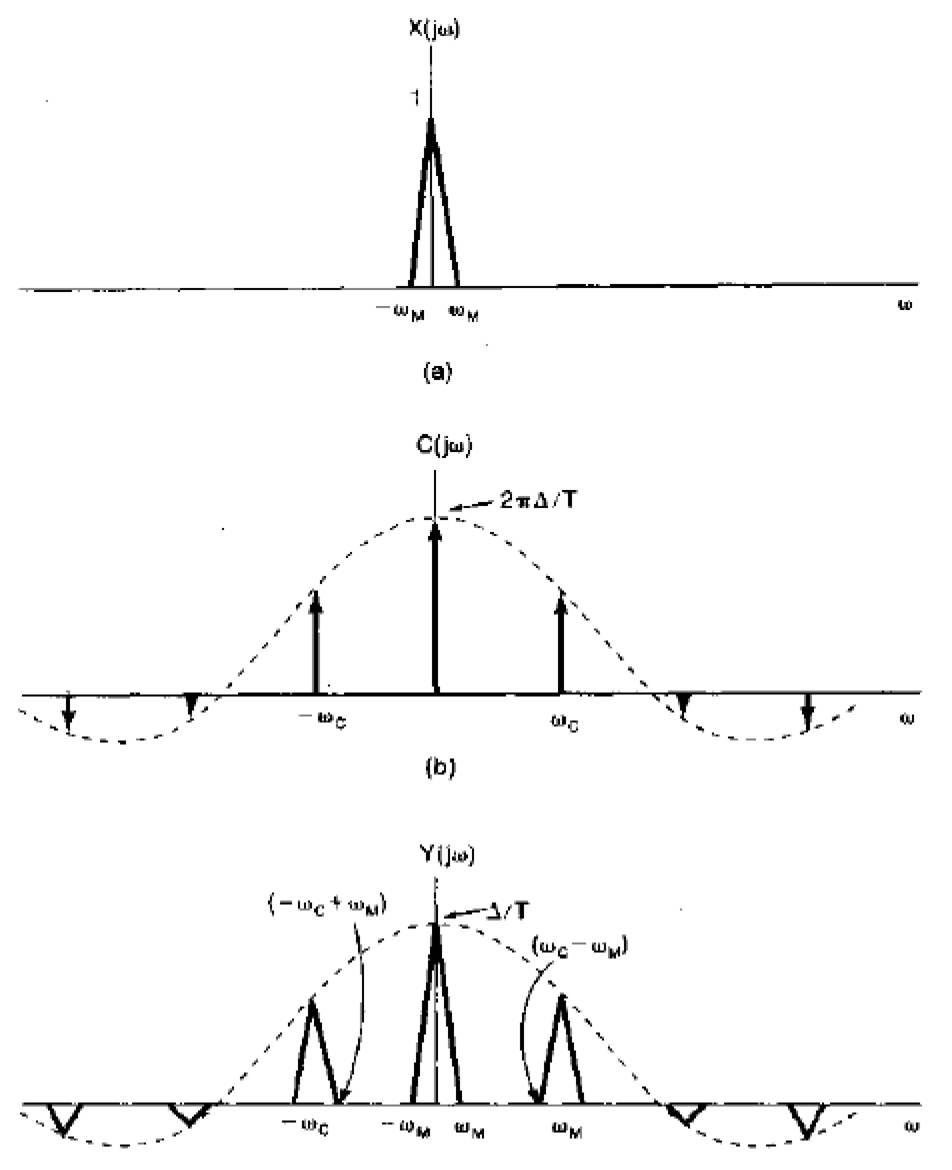
§5.7.1 自然采样与时分复用

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*C(j\omega)$$

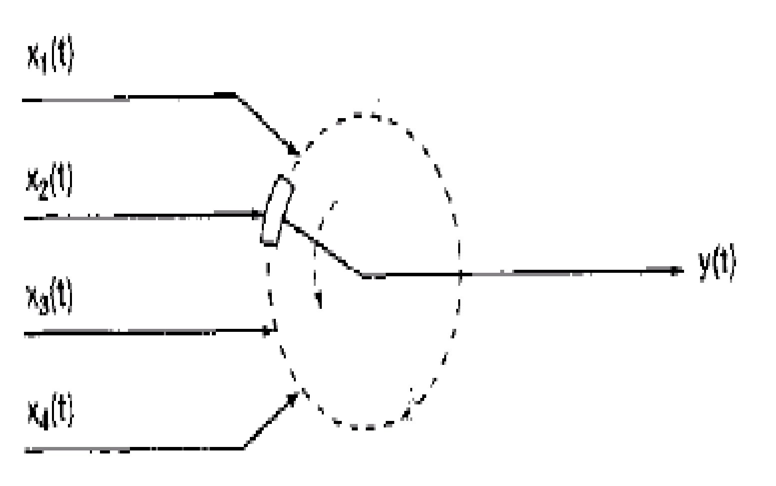
$$C(j\omega)=2\pi\sum a_k\delta(\omega-k\omega_c)$$

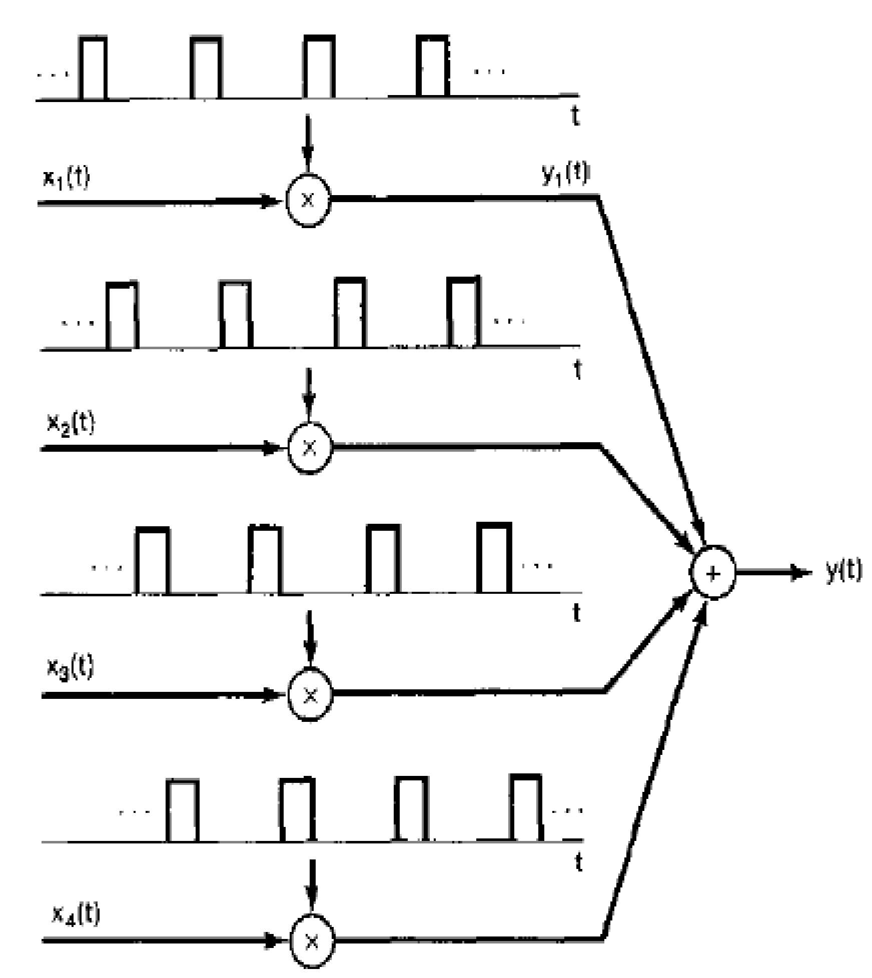
$$a_k=\frac{\sin(k\omega_c\Delta/2)}{\pi k}$$

$$Y(j\omega)=\sum a_kX(j(\omega-k\omega_c))$$



时分多路复用





平顶采样的脉冲幅度调制

频率调制：调制信号控制正弦载波的频率

角调制：相位调制

$$c(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c)$$

$$y(t) = A\cos[\omega_c t + \theta_c(t)]$$

$$\theta_c(t) = \theta_0 + k_p x(t)$$

角调制：相位导数（频率）

$$y(t) = A\cos\theta(t)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t)$$

相位调制与频率调制

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dx(t)}{dt}$$

瞬时频率

$$\omega_i = \frac{d\theta(t)}{dt}$$