物理光学
习题答案第一章

1.一个平面电磁波可以表示为：$E_x = 0, E_y = 2\cos[2\pi \times 10^{14}(\frac{z}{c} - t) + \frac{\pi}{2}], E_z = 0$

求：1）该电磁波的频率、波长、振幅和原点的初相位；

2）波的传播方向和电矢量的振动方向；

3）相应的磁场B的表达式

【解】1）对照波动公式的基本形式，由：

$$E_x = 0, E_y = 2\cos[2\pi \times 10^{14}(\frac{z}{c} - t) + \frac{\pi}{2}], E_z = 0$$

易知：

$$v = 10^{14} Hz \qquad \lambda = \frac{c}{v} = 3 \times 10^{-6} m$$

$$A = 2V/m \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \cdot rad$$

2）由于电磁波矢量中：

$$k_z \neq 0 \text{ 且 } E_y \neq 0$$

易知：波的传播方向沿z轴，而电矢量的振动方向沿y轴

（3）因为, $E_x = E_z = 0$, 故 $\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t}$

等式两边同时对t积分，得：

$$B_x(z,t) = -\frac{1}{c}E_y(z,t) = -\frac{2}{c}\cos[2\pi\times10^{14}(\frac{z}{c}-t)+\frac{\pi}{2}] \qquad B_y = B_z = 0$$

3.平面电磁波的表示式为 $\boldsymbol{E}=(-2x_0+2\sqrt{3}y_0)\exp[i(\sqrt{3}x+y+6\times10^8)]$,

试求该平面波的偏振方向，传播方向，传播速度，振幅，波长和频率。

【解】由电磁波在当前时刻的空间分布表达式，易知其偏振的各方向余弦比为：

$$\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=-1:\sqrt{3}:0$$

$$\therefore \quad \cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

偏振方向为: $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{x}_0\cos(120^\circ)+\boldsymbol{y}_0\cos(30^\circ)$

振幅 $A=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4\ V/m$

又由其波矢的各方向余弦比：

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \sqrt{3} : 1 : 0$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2},$$

行进方向为：$\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{x}_0 \cos(30^\circ) + \boldsymbol{y}_0 \cos(60^\circ)$,波沿$-\boldsymbol{k}$方向传播

$$k = \frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} = 2 \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \pi(m)$$

$$\nu = \frac{6\times10^8}{2\pi} = \frac{3\times10^8}{\pi} Hz \qquad V = \lambda\nu = 3\times10^8 m/s$$

4.在与一平行光束垂直的方向上插入一透明薄片，薄片厚度 $h = 0.01mm$，折射率为 $n = 1.5$ ，若光波的波长为 $\lambda = 500nm$，试计算透明薄片插入前后所引起的光程和相位差。

【解】

式中 λ为光波在薄片内的波长。因为$\lambda = \lambda_0 / n$，所以δ 又可写为：

$$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0}(n-1)$$

把l, n和λ_0的数值代入，得到

$$\delta = \frac{2\pi \times 10^{-3} m}{500 \times 10^{-3} m}(1.5-1) = 2\pi \times 10^{3} rad$$

6.写出平面波 $\mathbf{E}=100\exp\left\{i[2x+3y+4z]-16\times10^{8}t\right\}$ 的传播方向上的单位矢量 k_0

【解】

$$由于k_x = k\cdot\cos\alpha = 2,\quad k_y = k\cdot\cos\beta = 3,\quad k_z = k\cdot\cos\gamma = 4,$$

$$故：\quad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 2:3:4$$

$$又\because\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{29}}, \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$因此，\quad \boldsymbol{k}_0 = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{x}_0 + \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{y}_0 + \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{z}_0$$

9.证明题。题目省略。

【证】

1) $$r_s = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$r_s' = -\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = -r_s$$

2) $$r_p = \frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)}$$

$$r_p' = \frac{tg(\theta_2-\theta_1)}{tg(\theta_1+\theta_2)} = -\frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)} = -r_p$$

3) $$t_s = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad t_s' = \frac{2\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

因此，$$t_s t_s' = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \cdot \frac{2\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1} \cdot \frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= \tau_s$$

4)

$$t_p = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$t_p' = \frac{2\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

$$t_p t_p' = \frac{4\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1}\cdot\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\cdot\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \tau_p$$

11.电矢量方向与入射面成45°角的一束线偏振光入射到两介质的界面上，两介质的折射率分别为 $n_1=1,n_2=1.5$ ，问：入射角 $\theta_1=50^\circ$ 时，反射光电矢量的方位角（与入射面所成的角）为多少？若 $\theta_1=60^\circ$ 时，反射光的方位角又为多少？

【解】

(1) $\theta_1=50^\circ$，由折射定律

$$\theta_2=\sin^{-1}\left(\frac{n_1\sin\theta_1}{n_2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sin 50^\circ}{1.5}\right)$$

$$=\sin^{-1}0.511=30^\circ 42'$$

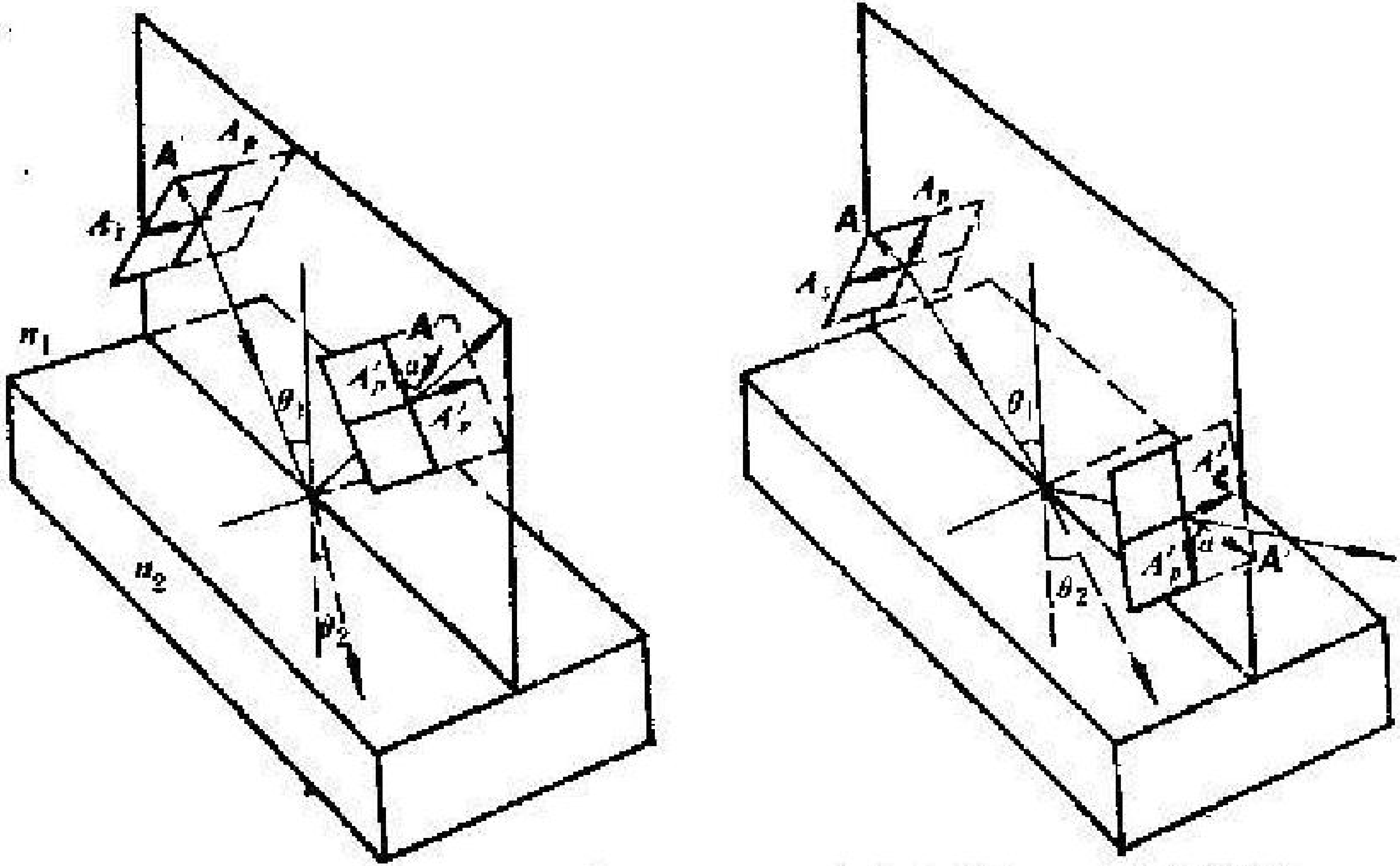
因此

$$r_s=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=-\frac{\sin 19^\circ 18'}{\sin 80^\circ 42'}=-0.335$$

$$r_p=\frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)}=\frac{tg 19^\circ 18'}{tg 80^\circ 42'}=\frac{0.350}{6.107}=0.057$$

入射光中电矢量振动方向与入射面呈45°角，故在入射光中电矢量垂直于入射面分量的振幅 $\boldsymbol{A}_s$ 等于平行于入射面分量的振幅 $\boldsymbol{A}_p$ 。但在反射光中，由于 $\boldsymbol{r}_s\neq\boldsymbol{r}_p$ ，所以反射光中两个分量的振幅 A_s' 和 A_p' 并不相等。它们的数值分别是

$$\boldsymbol{A}_s'=\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{A}_s=-0.335\boldsymbol{A}_s \quad 和 \quad \boldsymbol{A}_p'=\boldsymbol{r}_p\boldsymbol{A}_p=-0.057\boldsymbol{A}_p$$



a) $n_1 < n_2$ $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$

b) $n_1 < n_2$ $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$

用于下页计算合振幅与入射面的夹角之用

因此，合振幅与入射面的夹角α由下式决定：

$$tg\alpha=\frac{A_s'}{A_p'}=-\frac{0.335}{0.057}=-5.877, \alpha=-80^\circ 20'$$

(2) 当$\theta_1=60^\circ$ 时，

$$\theta_2=\sin^{-1}\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.5}\right)=35^\circ 14'$$

故

$$\boldsymbol{r}_s=-\frac{\sin(60^\circ-35^\circ 14')}{\sin(60^\circ+35^\circ 14')}=-\frac{0.419}{0.996}=-0.421$$

$$\boldsymbol{r}_p=\frac{tg(60^\circ-35^\circ 14')}{tg(60^\circ+35^\circ 14')}=\frac{0.461}{-10.92}=-0.042$$

因此，反射光电矢量的振动方向与入射面所成的角度为：

$$\alpha=tg^{-1}\left(\frac{-0.421}{-0.042}\right)=84^\circ 18'$$

14.一个光学系统由两片分离透镜组成，两透镜的折射率分别为1.5和1.7，求此系统的反射光能损失。如透镜表面镀上增透膜，使表面反射比降为0.01，问此系统的光能损失又为多少？设光束以接近正入射通过各反射面。

【解】(1)系统包括4个反射面，假设光束是接近正入射情形下通过各反射面，因而各面的反射率分别为：

$$R_1=\left(\frac{n_1-1}{n_1+1}\right)^2=\left(\frac{1.5-1}{1.5+1}\right)^2=\left(\frac{0.5}{2.5}\right)^2=0.040$$

$$R_2=\left(\frac{n_2-1}{n_2+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{1.5}-1}{\frac{1}{1.5}+1}\right)^2=\left(\frac{1-1.5}{1+1.5}\right)^2=0.040$$

$$R_3=\left(\frac{n_3-1}{n_3+1}\right)^2=\left(\frac{1.7-1}{1.7+1}\right)^2=\left(\frac{0.7}{2.7}\right)^2=0.067$$

$$R_4=\left(\frac{n_4-1}{n_4+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{1.7}-1}{\frac{1}{1.7}+1}\right)^2=\left(\frac{1-1.7}{1+1.7}\right)^2=0.067$$

(这里的n_1，n_2，n_3和n_4分别为4个反射面的相对折射率）。

如果入射到系统的光能为W，则相继透过各面的光能为：

$$W_1=(1-R_1)W=(1-0.040)W=0.960W$$

$$W_2=(1-R_2)W_1=0.960W_1=(0.960)^2W=0.922W$$

$$W_3=(1-R_3)W_2=(1-0.067)W_2=0.933\times 0.922W=0.860W$$

$$W_4=(1-R_4)W_3=(1-0.067)W_3=0.933\times 0.860W=0.802W$$

$$\Delta W=W-W_4=(1-0.802)W=0.198W$$

$\Delta W/W=19.8\%$,系统光能损失率为19.8%

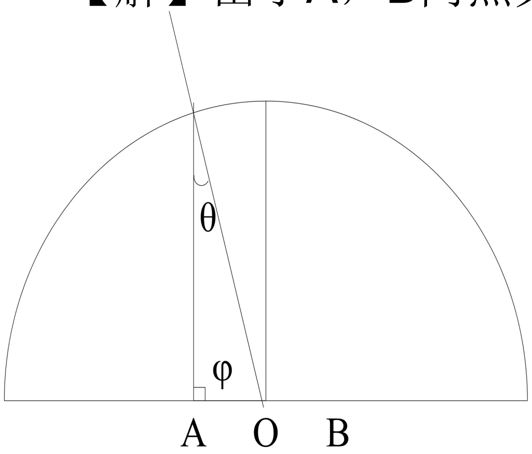
(2)当四个反射面的反射率都降为1%时，透过第四个反射面的光能为：

$$W_4=(1-R)^4W=(1-0.01)^4W=0.9606W$$

$\Delta W/W=1-0.9606=0.0394=3.94\%$,系统光能损失率仅为3.94%

15.一半导体砷化镓发光管，管芯 AB 为发光区，其直径 $d \approx 3mm$ 。为了避免全反射，发光管上部研磨成半球形，以使内部发的光能够以最大透射比向外输送。要使发光区边缘两点 A 和 B 发的光不发生全反射，半球的半径至少应取多少？(已知对发射的 $\lambda = 0.9\mu m$ 光，砷化镓的折射率为3.4)。

【解】由于A，B两点具有几何对称性，下面只分析A点，B点情形相同。



已知空气折射率 n_0=1，砷化镓折射率 n_1=3.4，

为了避免由 A 点发出的光线被全反射，根据全反射条件，则

$$\sin\theta_{\max} = \frac{n_0}{n_1} = 1/3.4$$

由正弦定理：$\dfrac{d/2}{\sin\theta} = \dfrac{R}{\sin\varphi}$

当 $\theta = \theta_{\max}$ 时，　$\sin\varphi$ 亦取得最大值，如图所示，$\sin\varphi = 1$

此时，　$R_{\min} = \dfrac{d/2}{\sin\theta} \cdot \sin\varphi = 1.5 \times 3.4 = 5.1mm$

18.圆柱形光纤（见图11-50），其线芯和包层的折射率分别为 n_1和n_2，且$n_1 > n_2$。

（1）证明入射光的最大孔径角$2u$ 满足关系式 $\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ ；

（2）若 $n_1 = 1.62, n_2 = 1.52$， 求孔径角。

【解】 (1) 为了保证光线在光纤内的入射角大于临界角，必须使入射到光纤端面的光线限制在最大孔径角$2u$范围内。

在光纤端面应用折射定律： $\sin u = n_1 \sin(90^\circ - \theta_c) = n_1 \cos\theta_c$

而$\sin\theta_c = \dfrac{n_2}{n_1}$,因此 $\sin u = n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_c} = n_1\sqrt{1-(\dfrac{n_2}{n_1})^2}$

$$= \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

(2) 当 $n_1 = 1.62, n_2 = 1.52$时

$$\sin u = \sqrt{1.62^2 - 1.52^2} = 0.56$$

$$u \approx 34^\circ$$

所以最大孔径角为 $2u = 68^\circ$

24.利用波的复数表达式求两个波 $\boldsymbol{E}_1=a\cos(kx+\omega t)$ 和 $\boldsymbol{E}_2=-a\cos(kx-\omega t)$ 的合成波。

【解】

$\boldsymbol{E}_1$和$\boldsymbol{E}_2$的相应的复数表达式为

$$\boldsymbol{E}_1 = a e^{i(kz+\omega t)}$$
$$\boldsymbol{E}_2 = -a e^{-i(kz-\omega t)}$$

合成波可以写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2 &= ae^{i(kz+\omega t)}+[-ae^{-i(kz-\omega t)}] \\ &= ae^{i\omega t}(e^{ikz}-e^{-ikz}) \\ &= 2iae^{i\omega t}\sin kz = 2ia(\cos\omega t + i\sin\omega t)\sin kz \\ &= -2a\sin\omega t\sin kz\end{aligned}$$

(27.一束沿z 方向传播的椭圆偏振光表示为$\boldsymbol{E}\left(z,t\right)=x_0A\cos(kz-\omega t)+y_0A\cos(kz-\omega t-\frac{\pi}{4})$ 试求偏振椭圆的方位角和椭圆长半轴及短半轴大小。)

【解】

(1)根据偏振椭圆方位角ψ的定义，该偏振椭圆的方位角ψ由下式决定：

$$tg2\psi=\frac{2\boldsymbol{A}^2}{\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^2}\cos(\pi/4)=\infty$$

因此，$\psi=45^\circ$

(2)考察$z=0$平面，在这平面上$\boldsymbol{E}$随时间的变化为

$$\boldsymbol{E}(0,\ t)=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{A}\cos(-\omega t)+\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{A}\cos(-\omega t-\frac{\pi}{4})$$

已知椭圆长轴与E_x轴的夹角为45°，因此电矢量$\boldsymbol{E}$旋转到这一方向时必有

$\boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{E}_y$，由上式可见，当$\omega t = 7\pi/8$,即 t=7T/16时，有

$$\boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{E}_y = \boldsymbol{A}\cos(-7\pi/8)$$

因此，$$\left|\boldsymbol{E}(0,7\mathrm{T}/16)\right| = \sqrt{\boldsymbol{E}_x^{\ 2} + \boldsymbol{E}_y^{\ 2}} = \sqrt{2\boldsymbol{A}^2\cos^2(7\pi/8)} = 1.31\boldsymbol{A}$$

这就是椭圆长半轴的长度。短半轴发生在继后$T/4$时刻，

因此短半轴长度为

$$\left|\boldsymbol{E}(0,11\mathrm{T}/16)\right| = \sqrt{\boldsymbol{E}_x^{\ 2} + \boldsymbol{E}_y^{\ 2}} = \sqrt{2\boldsymbol{A}^2\cos^2(11\pi/8)} = 0.542\boldsymbol{A}$$

28.有一菲涅耳菱体（见图11-23a），其折射率为1.5，入射线偏振光的电矢量与入射面（即图面）成　角45°求：

（1）菱体的顶角 α 取多大时，从菱体能射出圆偏振光？

（2）若菱体的折射率为1.49，能否产生圆偏振光？

【解】 ⑴ 要使菱体的出射光为圆偏振光，出射光的电矢量平行于入射面的分波(p波)和垂直于入射面的分波（s波）的振幅必须相等（入射线偏振光的电矢量与图面呈45°角保证了这一条件的实现），位相差必须等于$\pi/2$。光束在菱体内在相同条件下全反射两次，每次全反射的位相差必须等于$\pi/4$。根据全反射条件下p波和s波位相差的计算公式

$$tg\frac{\delta}{2}=\frac{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta-n^2}}{\sin^2\theta}$$

已知$n=1/1.5$,为使$\delta=\pi/4$，由上式可求出光束在菱体内的入射角

$$\theta=53^\circ13' \quad 或 \quad \theta=50^\circ13'$$

由于$\alpha=\theta$，所以菱体的顶角可选$53^\circ13'$或$50^\circ13'$。

（2）对于一定的菱体折射率n，位相差δ有一极大值，它由下式决定

$$\frac{d}{d\theta}\left(tg\frac{\delta}{2}\right)=\frac{2n^2-(1+n^2)\sin^2\theta}{\sin^3\theta\sqrt{\sin^2\theta-n^2}}=0$$

此 式 之 解 为 $\sin^2\theta=\dfrac{2n^2}{1+n^2}$

把这一结果代入δ的计算公式，得到位相差得极大值δ_{m}的表示式为

$$tg\frac{\delta_m}{2}=\frac{1-n^2}{2n}$$

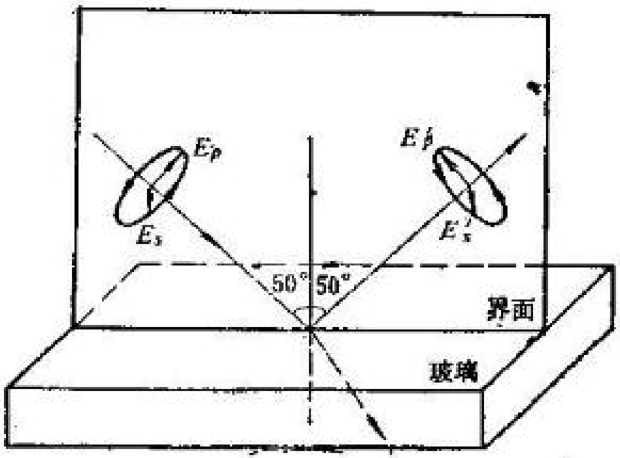
当$n=\dfrac{1}{1.49}$时，$tg\dfrac{\delta_m}{2}$=0.4094，δ_m=$44^\circ32'<\pi/4$。

因此，光束在菱体内两次全反射不能产生圆偏振光。

29.右旋偏振光以50°角入射到空气—玻璃界面（玻璃折射率为1.5），试决定反射波和透射波的偏振状态。

【解】

入射的右旋圆偏振光（如图）可以写为



$$\boldsymbol{E}_s = a\cos\omega t$$

$$\boldsymbol{E}_p = a\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin\omega t$$

因为入射角小于布儒斯特角（设玻璃的折射率$n = 1.5$，布儒斯特角$\theta_B \approx 56^\circ$），故反射光的电矢量为

$$\boldsymbol{E}_s' = -|r_s|a\cos\omega t = |r_s|a\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{E}_p' = |r_p|\mathrm{asin}\omega t$$

$\boldsymbol{E}_s'$对 $\boldsymbol{E}_p'$的位相差为$-\pi/2$，且由菲涅耳公式易见$\left|r_p\right|<\left|r_s\right|$，所以反射光应为左旋椭圆偏振光。

对于透射光，电矢量的分量为

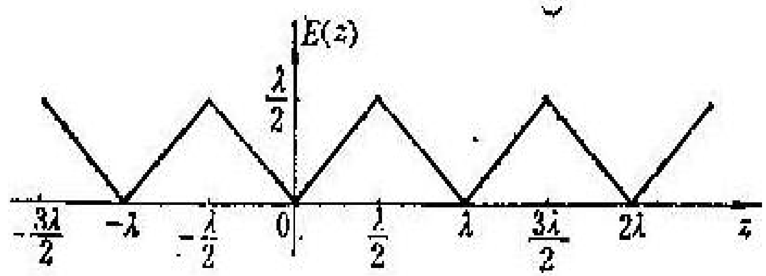
$$\boldsymbol{E}_s'' = t_s a \cos\omega t$$

$$\boldsymbol{E}_p'' = t_p a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = t_p a \sin\omega t$$

由于$t_s \neq t_p$,故透射光为右旋椭圆偏振光。

34.求图11-53所示的周期性的周期矩形波的傅里叶分析表达式，并绘出其频谱图。

【解】



上图所示的周期性三角波在一个星期$\left[-\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right]$内的函数式可写为

$$\boldsymbol{E}(z)=\begin{cases} z & 当 0<z\le\frac{\lambda}{2} \\ -z & 当 -\frac{\lambda}{2}\le z<0 \end{cases}$$

由于$\boldsymbol{E}(z)$是一个偶函数，所以傅里叶系数$\boldsymbol{B}_n=0$,而

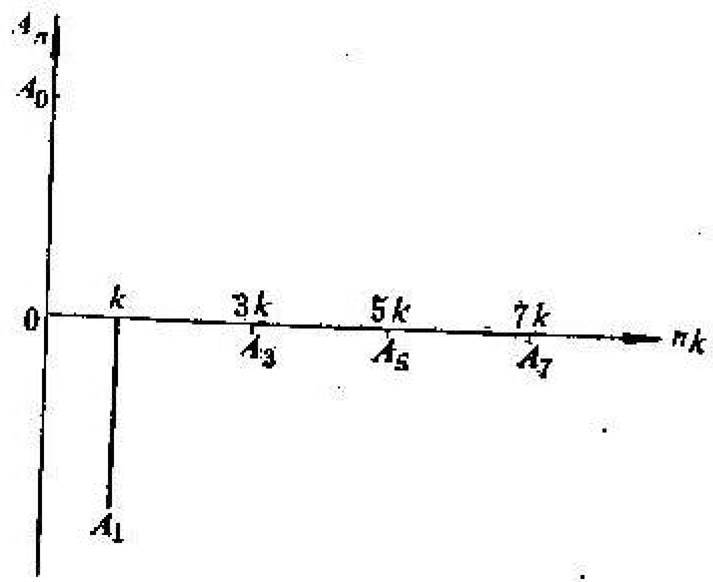
$$\boldsymbol{A}_0=\frac{4}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} z dz=\frac{4}{\lambda}\left[\frac{\cos nkz}{(nk)^2}+\frac{z\sin nkz}{nk}\right]_0^{\lambda/2}$$

$$=\begin{cases} 0 & 当n为偶数 \\ -\frac{2\lambda}{\pi^2 n^2} & 当n为奇数 \end{cases}$$

因此所求的傅里叶分析表达式为

$$\boldsymbol{E}(z)=\frac{\lambda}{4}-\frac{2\lambda}{\pi^{2}}\left[\frac{\cos kz}{1^{2}}+\frac{\cos 3kz}{3^{2}}+\frac{\cos 5kz}{5^{2}}+\cdots\right]$$

三角波的离散频谱图如图2所示



物理光学第一章习题解答

8. 太阳光（自然光）以60°角入射到窗玻璃（n=1.5）上，试求太阳光的透射比。

分析：直接利用折射定律（P302）和透射比公式（P307）

解： 由 $\theta_1 = 60°, n_1 = 1, n_2 = 1.5, n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

可得 $\theta_2 = 35.26°$

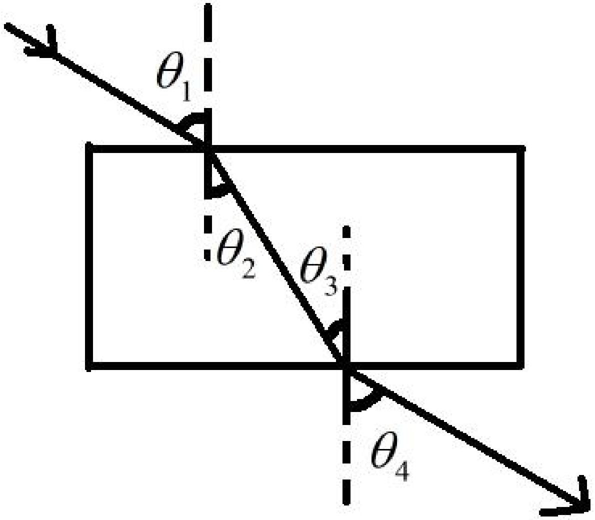
$$\tau_s = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1} \frac{4\sin^2\theta_2 \cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} = 0.823$$

$$\tau_p = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1} \frac{4\sin^2\theta_2 \cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} = 0.99$$

对于自然光 $\tau_n = (\tau_s + \tau_p)/2 = 0.91$

12. 光束入射到平行平面玻璃板上，如果在上表面反射时发生全偏振，试证明折射光在下表面反射时亦会发生全偏振。

分析：可利用折射定律求出两个表面入射角、折射角，或由平行平板的性质易知光线只发生轴向位移，再利用全偏振条件（P308）即可



证明：当上表面发生全偏振时

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

在下表面反射时，易知

$$\theta_4 = \theta_1, \theta_3 = \theta_2$$

因此 $\theta_3 + \theta_4 = 90^\circ$ ，满足全偏振条件，亦发生全偏振

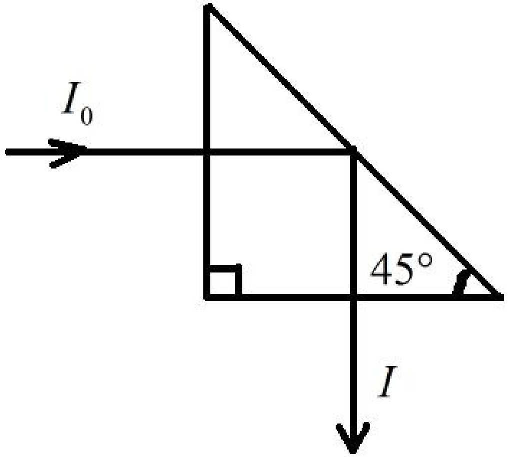
13. 光束垂直入射到45° 直角棱镜的一个侧面，并经斜面反射后有第二个侧面射出（如图），若入射光强为I_0，求从棱镜透过的出射光强I？设棱镜的折射率为1.52，且不考虑棱镜的吸收。

分析：先判断斜面上是否发生全反射（条件P309），再利用垂直入射菲涅耳公式（P304）计算

解： $\sin\theta_c = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \theta_c = 41.14° < 45°$ 所以发生全反射

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{A_1^2}{A_0^2} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 = 0.63$$

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A^2}{A_1^2} = \left(\frac{2}{\frac{1}{n}+1}\right)^2 = 1.455$$



$$I = 1.455 \times 0.63 I_0 = 0.92 I_0$$

26. N个频率相同、振动方向相同的光波在空间某点P叠加，若N个波的振幅都为A_0，相邻光波间的相位差为δ，试用相幅矢量加法求取P点的光的合强度。

分析：利用振幅矢量加法（P325），N个波的叠加如下页图所示，矢量A的大小即为N个波的合振幅，其平方即为强度

解：见下页

由弦长计算公式，得

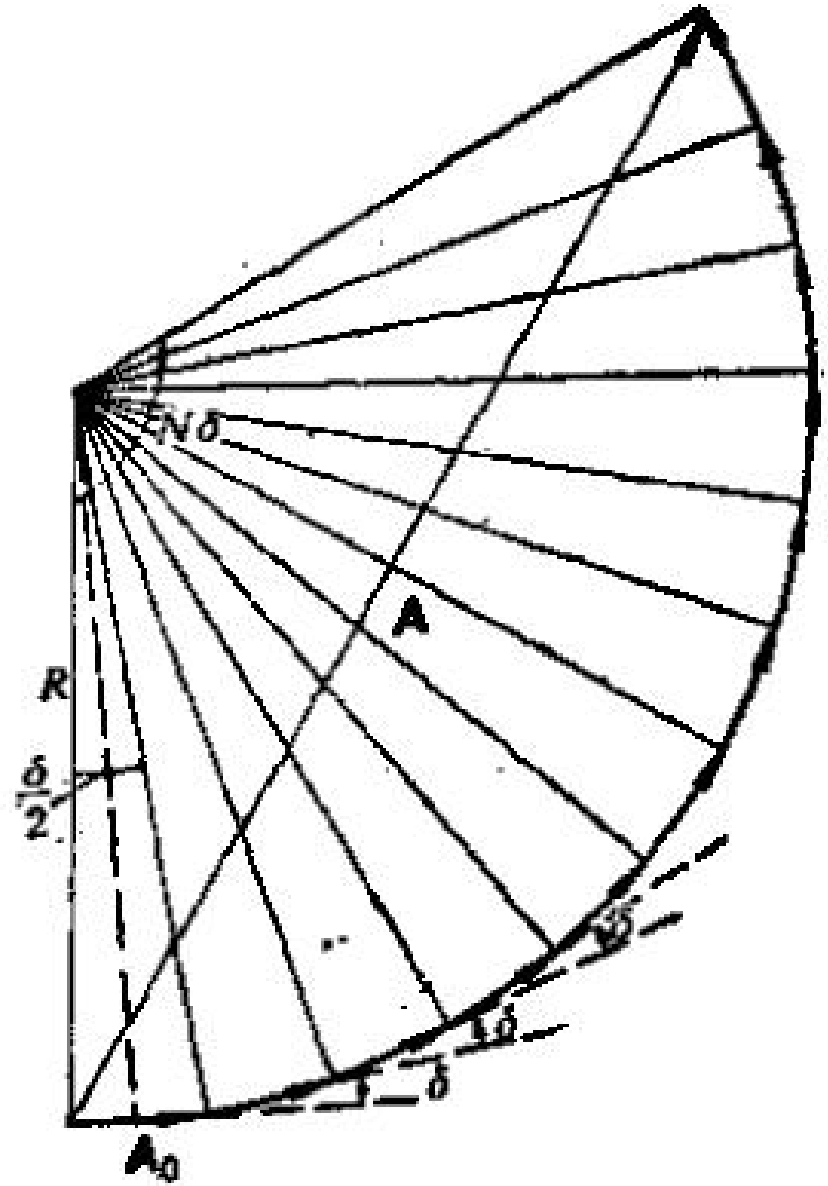
$$A = 2R\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$A_0 = 2R\sin\frac{\delta}{2}$$

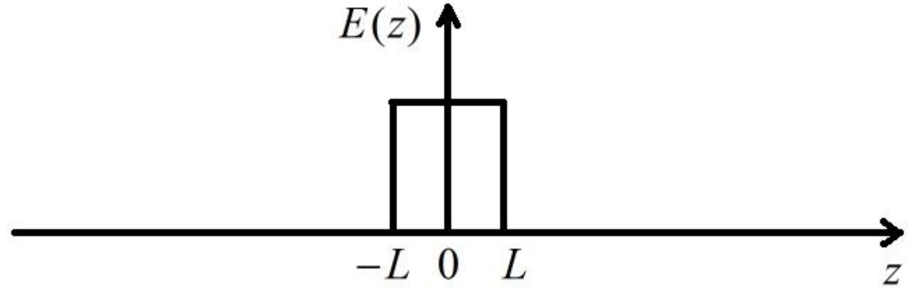
因此

$$A = A_0\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

$$I = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$



35. 试求如图所示的矩形脉冲的傅里叶变换，并绘出其频谱图。

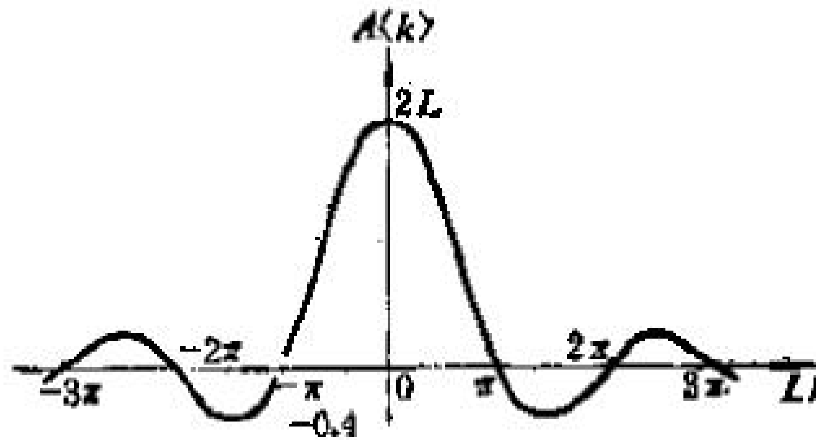


解：

$$E(z)=\begin{cases}1,|z|\le 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$\text{A(k)}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-ikz}dz=\int_{-L}^{L} e^{-ikz}=-\frac{1}{ik}e^{-ikz}\Big|_{-L}^{L}=\frac{2}{k}\sin kL$$

$$=2L\frac{\sin kL}{kL}=2L\frac{\sin\frac{2\pi L}{\lambda}}{\frac{2\pi L}{\lambda}}=2L\sin c\,\frac{2L}{\lambda}$$



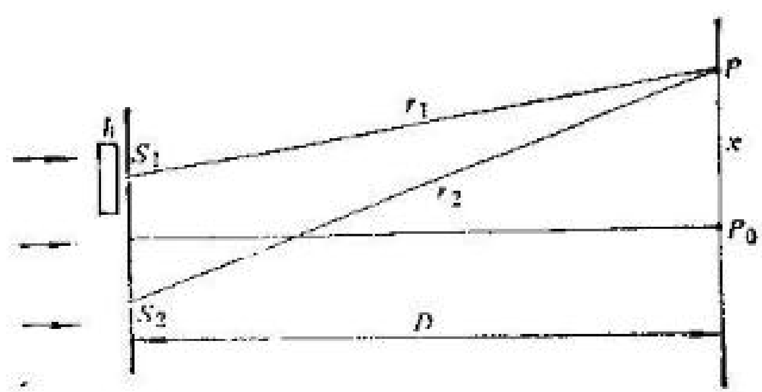
物理光学习题解答
第二章

5.在杨氏实验中，两小孔距离为1mm，观察屏离小孔的距离为50cm，当用一片折射率为1.58的透明薄片贴住其中一个小孔时，发现屏上的条纹系移动了0.5cm，试确定试件的厚度。

【解】

小孔未贴薄片时，有两小孔S_1和S_2到屏上P_0点的光程差为零（P_0点是S_1S_2连线的垂直平分线与屏的交点）。

当小孔S_1贴上薄片时，零程差点由P_0移到与P_0相距0.5cm的P点，如下图所示，



P点光程差的变化量为

$$\delta\Delta = \frac{xd}{D} = \frac{(5mm)(1mm)}{500mm} = 0.01mm$$

显然，P点光程差的变化等于S_1到P的光程差的增加，即

$$\delta\Delta = nh - h$$

式中h代表薄片的厚度，并设空气的折射率为1。因此

$$(n-1)h = (0.01mm)$$

$$h = \frac{0.01mm}{n-1} = \frac{0.01mm}{1.58-1} = 1.72\times10^{-2}\,mm$$

6.一个长30mm的充以空气的气室置于杨氏装置中的一个小孔前，在观察屏上观察到稳定的干涉条纹系。然后抽去气室中的空气，注入某种气体，发现条纹移动了25个条纹，已知照明光波波长 $\lambda = 656.28nm$ ，空气折射率 $n_0 = 1.000276$。试求注入气室内气体的折射率。

【解】

设所注气体的折射率为n_g，气室充空气和充气体前后，

光程的变化为

$$\Delta = (n_g - n_0)30mm$$

光程的这一变化对应于25个波长，即

$$\Delta = 25\lambda$$

因此

$$(n_g - n_0)30mm = 25\lambda$$

$$n_g = \frac{25 \times 656.28 \times 10^{-6} mm}{30mm} + 1.000276$$

$$= 546.9 \times 10^{-6} + 1.000276 = 1.000823$$

空气折射率与气压的关系……

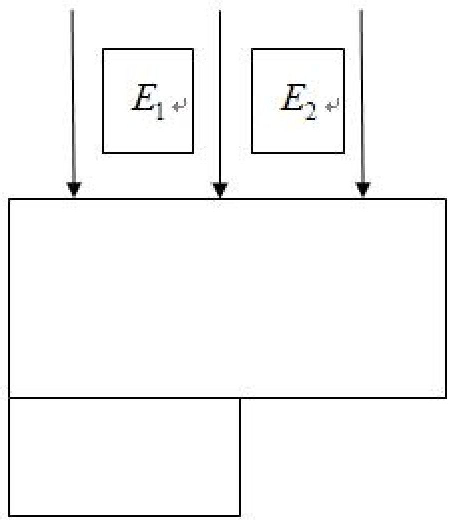
7.垂直入射的平面波通过折射率为n的玻璃板，透射光经透镜汇聚到焦点上。玻璃板的厚度沿着C点且垂直于图面（见教材图12-54）的直线发生光波量级的突变d，问d为多少时，焦点光强是玻璃板无突变时光强的一半。

【解】

将光分成两部分，分别为E_1和E_2，

且 $E_1 = E_2 = E$

加玻璃前，E_1和E_2同相位，干涉后为$2E$，光强为$I_1 = 4I_0$



加玻璃后，光强$I_2 = 4I_0 \cos^2 \dfrac{\delta}{2} = 2I_0$

而 $\delta = k\Delta$

$$\therefore \quad m\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d$$

$$\therefore \quad d = \frac{\lambda}{n-1}(m/2 + \frac{1}{4})$$

9.若光波的波长为 λ ，波长宽度为$\Delta\lambda$ ，相应的频率和频率宽度记为 ν 和$\Delta\nu$ ，证明： $\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$

对于 $\lambda=632.8nm$ 的氦氖激光，波长宽度 $\Delta\lambda=2\times10^{-8}nm$ ，求频率宽度和相干长度。

1）【证明】 由 $c=\nu\lambda$,得 $\nu=c/\lambda$, 对其两边求导：

$$\Delta\nu=-\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda=-\frac{\nu}{\lambda}\Delta\lambda$$

故 $\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$

2）【解】 由于 $|\Delta\nu|=\frac{\nu}{\lambda}\Delta\lambda=\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda,$

故 $$|\Delta\nu|=\frac{3\times10^8m}{(632.8nm)(632.8nm)}\times2\times10^{-8}nm$$

$$=1.5\times10^4Hz$$

相应地， $$\Delta_{\max}=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}=\frac{(632.8nm)(632.8nm)}{2\times10^{-8}nm}=2\times10^4m$$

10.直径为0.1mm的一段钨丝用作杨氏实验的光源（ $\lambda=550nm$ ），为使横向相干宽度大于1mm，双孔必须与灯相距多远？

【解】

$$\because \quad \mathrm{b}\cdot\beta=\lambda,\text{即}\ \mathrm{b}\cdot\frac{d}{l}=\lambda$$

$$\text{由于}\quad \mathrm{b}\geq 1mm,\ \ \text{故}\frac{\lambda l}{d}\geq 1mm$$

$$\Rightarrow \quad l\geq\frac{(1mm)(0.1mm)}{0.55\times10^{-3}mm}=182mm$$

钨丝是宽光谱光源

11.在等倾干涉实验中，若照明光波的波长$\lambda = 600nm$，平板的厚度$h = 2mm$，折射率　$n = 1,5$其下表面涂上某种高折射率介质　$n_H > 1.5$ 问

（1）在反射光方向观察到的圆条纹中心是暗还是亮？

（2）由中心向外计算，第10个亮纹的半径是多少？（观察望远物镜的焦距为20cm）

（3）第10个亮环处的条纹间距是多少？

【解】

(1)　环条纹中心是亮斑还是暗斑，决定于该点的干涉级数是整数还是半整数。本例中平板的折射率介于上下介质的折射率之间，故环中心（θ_1=θ_2=0）对应的光程差为

$$\Delta = 2nh = 2 \times 1.5 \times 2mm = 6mm$$

干涉级数是

$$m_0 = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{6mm}{600 \times 10^{-6} mm} = 10,000$$

所以环中心是一亮斑。

(2) 当中心是亮斑时，由中心向外计算，第N个亮纹的角半径是

$$\theta_N = \sqrt{\frac{nN\lambda}{h}}$$

于是第10个亮纹的角半径是

$$\theta_{10} = \sqrt{\frac{1.5\times10\times600\times10^{-6}mm}{2mm}} = 0.067rad$$

半径是

$$r_{10} = f\theta_{10} = 0.067\times200mm = 13.4mm$$

(3) 第10个亮环处的角间距是

$$\Delta\theta = \frac{n\lambda}{2\theta_{10}h} = \frac{1.5\times600\times10^{-6}mm}{2\times0.067\times2mm} = 3.358\times10^{-3}rad$$

所以间距是

$$e = f\Delta\theta = 200mm\times3.358\times10^{-3} = 0.67mm$$

15.如教材图12-56所示的装置产生的等厚干涉条纹称牛顿环。证明：$R=\dfrac{r^2}{N\lambda}$

N 和 r 分别表示第 N 个暗纹及对应的暗纹半径；λ 为照明光波波长；R 为球面曲率半径。

【证】

透镜凸表面和玻璃板平面间的空气层中心0的厚度为零，易知，牛顿环中心为一暗斑。

设由中心向外计算，第N个暗环的半径为r_N,则由图可见

$$r^2=R^2-(R-h)^2=2Rh-h^2$$

由于 $R>>h$，上式可写为 $r^2=2Rh$

又由于N个条纹对应的空气层厚度差为 $h=N\dfrac{\lambda}{2}$

所以有 $r^2=NR\lambda \quad \Rightarrow \quad R=\dfrac{r^2}{N\lambda}$

18.假设照明迈克尔逊干涉仪的光源发出波长 λ_1 和 λ_2 的两个单色光波， $\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda$ ，且 $\Delta\lambda<<\lambda_1$ ，这样，当平面镜 M_1 移动时，干涉条纹呈周期性的消失和再现，从而使条纹可见度作周期性变化，

（1）试求条纹可见度随光程差的变化规律；

（2）相继两次条纹消失时，平面镜 M_1 移动的距离 Δh ；

（3）对于纳灯，设 $\lambda_1=589.0nm$ 和 $\lambda_2=589.6nm$ 均为单色光，求 Δh 值。

【解】 (1) 设两光波的光程差为Δ，

$$\text{对于}\lambda_1\text{：}\quad I_1=4I_0\cos^2\frac{\pi\Delta}{\lambda_1}=4I_0\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\pi\Delta}{\lambda_1})$$

$$\text{对于}\lambda_2\text{：}\quad I_2=4I_0\cos^2\frac{\pi\Delta}{\lambda_2}=4I_0\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\pi\Delta}{\lambda_2})$$

$$\because\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\therefore$ 合成后

$$I=I_1+I_2=4I_0[1+\cos(\frac{\pi\Delta}{\lambda_1}+\frac{\pi\Delta}{\lambda_2})\cos(\frac{\pi\Delta}{\lambda_1}-\frac{\pi\Delta}{\lambda_2})]$$

$$=4I_0[1+\cos\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\cdot\cos(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\cdot\pi\Delta)]$$

$\because \quad \Delta\lambda << \lambda$，所以$\cos(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\cdot\pi\Delta)$对强度的变化不敏感

$$\therefore \quad I_M = 1 + \left|\cos(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\cdot\pi\Delta)\right|, \quad I_m = 1 - \left|\cos(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\cdot\pi\Delta)\right|$$

可见度 $k = \dfrac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \left|\cos(\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\cdot\pi\Delta)\right|$

这里，$\Delta = 2\Delta h$，当$\dfrac{\Delta\lambda\pi}{\lambda^2}\cdot 2\Delta h = \pi$为一周期，

即$\Delta h = \dfrac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$，条纹可见度相同

(2) 容易了解，当波长λ_1的单色光的亮条纹和波长λ_2的暗条纹重合时，条纹消失。后一情况相当于光程差等于λ_1的整数倍和λ_2的半整数倍的情形，即

$$\Delta = 2h + \Delta' = m_1\lambda_1 = (m_2 + \frac{1}{2})\lambda_2$$

式中假设 $\cos\theta_2 \approx 1$, Δ'是附加程差，m_1和m_2是整数。因此

$$m_2 - m_1 + \frac{1}{2} = \frac{2h+\Delta'}{\lambda_2} - \frac{2h+\Delta'}{\lambda_1} = \frac{(2h+\Delta')}{\lambda_1\lambda_2}\Delta\lambda$$

当h增加Δh时，条纹再次消失，但这时干涉级之差增大1，所以

$$m_2 - m_1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{[2(h+\Delta h)+\Delta']}{\lambda_1\lambda_2}\Delta\lambda$$

两式相减，得到 $$\Delta h = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta\lambda}$$

(3) 以钠光作为光源时，条纹消失的周期

$$\Delta h = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta\lambda} = \frac{(589.6nm)(589.6nm)}{2\times 0.6nm} = 289395.33nm$$
$$= 0.289mm$$

19.教材图12-58是用泰曼干涉仪测量气体折射率的示意图，其中D_1 和 D_2 是两个长度为 10cm的真空气室，端面分别与光束Ⅰ和Ⅱ垂直。在观察到单色光照明（ $\lambda=589.3nm$ ）产生的干涉条纹后，缓慢向气室D_2充氧气，最后发现条纹移动了92个，

（1）计算氧气的折射率；

（2）若测量条纹精度为1/10条纹，求折射率的测量精度。

【解】

(1) 条纹移动了92个，表示光束(1)和(2)的光程差变化了92λ。而光程差的变化等于$2(n-1)l$,式中n是氧气的折射率，l是气室的长度，因子2是考虑到光线两次通过气室的结果。因此

$$2(n-1)l=92\lambda$$

得到

$$n=1+\frac{92\lambda}{2l}=1+\frac{92\times5.893\times10^{-4}mm}{2\times100mm}$$

$$=1.000271$$

(2) 如果条纹变化的测量误差为ΔN，显然有

$$2l\Delta n = \Delta N\lambda$$

所以折射率的测量精度

$$\Delta n = \frac{\Delta N\lambda}{2l} = \frac{\frac{1}{10}\times 5.893\times 10^{-4}mm}{2\times 100mm} = 2.9\times 10^{-7}$$

27.在照相物镜上镀一层光学厚度为 $\frac{5}{4}\lambda_0$ （$\lambda_0=550nm$）的低折射率膜，试求在可见区内反射比最大的波长？薄膜应呈什么颜色？

【解】

对低折射率，镀膜后起减反增透作用

当厚度为$\frac{1}{2}\lambda$时，反射比最大，即无增透效果。

$$nh=k\cdot\frac{\lambda}{2}, \text{ 即 } \frac{5}{4}\lambda_0=k\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \quad \lambda=\frac{1}{k}\cdot\frac{5}{2}\lambda_0$$

当 $k=1$时， $\lambda=1375nm$ 当 $k=2$时， $\lambda=687.5nm$

当 $k=3$时， $\lambda=458.3nm$ 当 $k=4$时， $\lambda=343.75nm$

由于可见光范围在$380\sim780nm$之间，故波长为$687.5nm$和$458.3nm$

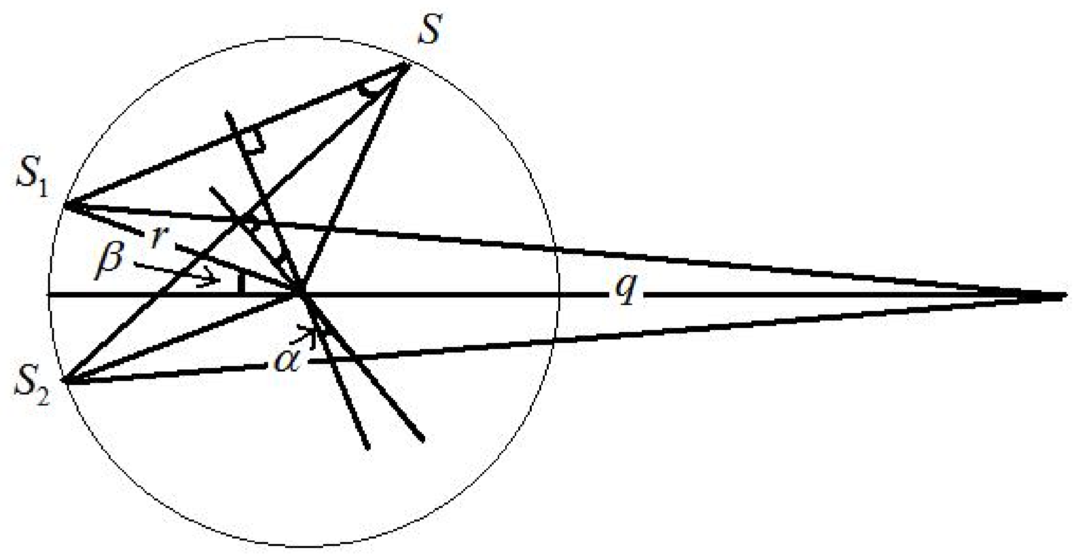
相应地，薄膜呈紫色

物理光学第二章习题解答

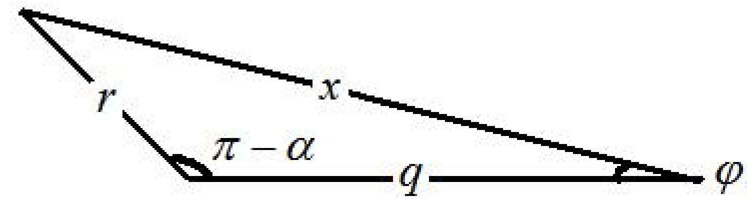
2. 菲涅耳双面镜波面干涉装置（如图）由两个相交成一个小角度α的平面镜组成，由距平面镜交点O为r、波长为λ的单色点光源S照明干涉系统，在距平面镜交点为q的远处屏幕π处的两光束交叠区上可以观察到干涉条纹。试说明系统的干涉原理，计算相干光束会聚角并进而求取条纹间距。

解：点光源S由两个平面镜成的虚像S_1和S_2相当于两个相干点光源，从而形成了类似杨氏干涉的干涉系统。

注意S、S_1和S_2都位于一个圆周上，通过相似三角形和圆的几何性质可知 $\beta=\alpha$



转换为几何问题：



已知边长**r**、**q**，角 $\pi-\alpha$ ，求角 **φ**

设另一条边为**x**，有

$$\cos(\pi-\alpha)=\frac{r^2+q^2-x^2}{2rq}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{r}{x}$$

解得

$$\varphi=\arcsin\frac{r\sin\alpha}{\sqrt{r^2+q^2+2rq\cos\alpha}}$$

考虑**α**很小，**r<<q**，可近似得到 $\varphi=\frac{r\alpha}{q}$

所以 $\omega=2\varphi=\frac{2r\alpha}{q}$ $e=\frac{\lambda}{\omega}=\frac{\lambda q}{2r\alpha}$

12. 用氦氖激光照明迈克耳逊干涉仪，通过望远镜看到视场内有20个暗环，且中心是暗斑。然后移动反射镜M_1，看到暗环条纹收缩，并且一一在中心消失了20个环，此时视场内只有10个暗环，试求（1）M_1移动前中心暗斑的干涉级次（设干涉仪分光板G_1不镀膜）；（2）M_1移动前后第5个暗环的角半径。

分析：利用平板的双光束干涉相关公式（P351），分别写出变化前后和变化的厚度h的表达式联立求解，以求出干涉级次，最后利用角半径公式求解

解：（1）$\Delta h = N\frac{\lambda}{2} = 20\times\frac{\lambda}{2} = 10\lambda$

根据暗环条件得 $\theta_{1N} = \frac{1}{n'}\sqrt{\frac{nN\lambda}{h}}$

得 $h = \frac{nN\lambda}{\theta_{1N}^2}$

所以 $$h_1 = \frac{nN_1\lambda}{\theta_{1N}^2} = \frac{20\lambda}{\theta_{1N}^2} \qquad h_2 = \frac{nN_2\lambda}{\theta_{1N}^2} = \frac{10\lambda}{\theta_{1N}^2}$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{10\lambda}{\theta_{1N}^2} = 10\lambda$$

所以 $$\theta_{1N}^2 = 1$$

$$h_1 = 20\lambda$$

由 $$2nh_1 + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow m = 40.5$$

（**2**） $$h_2 = 10\lambda$$

$$\theta_{1N} = \sqrt{\frac{5\lambda}{10\lambda}} = 0.707 rad$$

14. 用等厚条纹测量玻璃楔板的楔角时，在长达5cm的范围内共有15个亮条纹，玻璃楔板的折射率n=1.52，所用光波波长λ=600nm，求楔角。

分析：由等厚干涉公式（P353）可得

$$\left.\begin{aligned} 2nh = m\lambda \\ h = L\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{m\lambda}{2nL}$$

解：

$$\alpha = \frac{m\lambda}{2nL} = \frac{15 \times 600 \times 10^{-9}}{2 \times 1.52 \times 5 \times 10^{-2}} = 5.92 \times 10^{-5}\, rad$$

24.（图见教材）F-P标准具两镜面的间隔为1cm，在其两侧各放一个焦距为15cm的准直透镜L_1和会聚透镜L_2。直径为1cm的光源（中心在光轴上）置于L_1的焦面上，光源为λ=589.3nm的单色光。空气折射率为1。（1）计算L_2焦点处的干涉级次，在L_2的焦面上能看到多少个亮条纹？其中半径最大条纹的干涉级和半径是多少？（2）若将一片折射率为1.5，厚度为0.5mm的透明薄片插入其间至一半位置，干涉环条纹应怎样变化？

分析：光源经过准直后形成不同方向的平行光，可以采用等倾干涉的原理和公式求解

解：（**1**）$2nh = m\lambda \Rightarrow m = \dfrac{2nh}{\lambda} = 33938.5$

L_2焦点处的干涉级次为33938

光源最边上的点通过L_1的夹角为

$$\sin\theta = \frac{1/2}{15} \Rightarrow \cos\theta = 0.999444$$

因此 $2nh\cos\theta = m'\lambda \Rightarrow m' = \dfrac{2nh\cos\theta}{\lambda} = 33919.7$

最外面一圈为**33920**，其半径为**5mm**（**33919.7**级位置为**5mm**，**33920**级略小于**5mm**）

亮纹条数 $33938 - 33920 + 1 = 19$

所以亮纹**19**条，暗纹**18**条

（**2**）插入玻璃片后，**F-P**下部图案不变（暗一半）

上部也是一组图案，成为两组图案

26. 在玻璃基片上镀两层光学厚度为$\lambda_0/4$的介质薄膜，如果第一层折射率为1.35，问为达到在正入射下膜系对λ_0全增透的目的，第二层薄膜的折射率应为多少？（玻璃基片折射率$n_G=1.6$）

分析：直接代入双层$\lambda_0/4$膜系全增透条件（P365）即可

解：

$$n_2=\sqrt{\frac{n_G}{n_0}}n_1=\sqrt{\frac{1.6}{1}}\times 1.35=1.7$$

物理光学习题解答
第三章

3.如教材图13-58所示，单色点光源S（波长$\lambda=500nm$ ）安放在离光阑1m远的地方，光阑上有一个内外半径分别为0.5mm和1mm的通光圆环。考察点P离光阑1m（SP连线通过圆环中心并垂直于圆环平面），
问：在P点的光强和没有光阑时的光强之比是多少？

【解】

由于半径为$1mm$的圆孔包含的波带数为

$$j=\frac{\rho^2(R+r_0)}{r_0R\lambda}$$

$$=\frac{(1mm)^2(1000mm+1000mm)}{(1000mm)(1000mm)(500\times10^{-6}mm)}$$

$$=4$$

半径为$0.5mm$的圆屏挡住的波带数为

$$j'=\frac{(0.5mm)^2(1000mm+1000mm)}{(1000mm)(1000mm)(500\times10^{-6}mm)}$$

$$=1$$

因此通光圆环通过的波带数为3. 由于相邻两波带在P点干涉的相消作用，所以通光圆环在P点产生的振幅实际上等于1个波带在P点产生的振幅。并且近似地等于第一个波带产生的振幅。

没有光阑时P点的振幅是第一个波带产生的振幅的$\frac{1}{2}$，

故通光圆环在P点产生的强度是没有光阑时的强度的4倍

4.波长$\lambda=563.3nm$的平行光正入射在直径$D=2.6mm$的圆孔上，与孔相距 $r_0=1m$处放一屏幕。问：

（1）屏幕上正对圆孔中心的P点是亮点还是暗点？

（2）要使P点变成与（1）相反的情况，至少要把屏幕向前（同时求出向后）移动多少距离？

【解】

(1) P点的亮暗取决于圆孔包含的波带数是奇数还是偶数（假设波带数目不大）。当平行光入射时，波带数

$$j=\frac{\rho^2}{\lambda r_0}=\frac{\left(D/2\right)^2}{\lambda r_0}=\frac{(1.3mm)^2}{(563.3\times10^{-6}\,mm)(10^3\,mm)}=3$$

故P点是亮点。

(2) 当P点向前移近圆孔时，相应的波带数增加；波带数增大为4时，P点变为暗点。

这时P点到圆孔的距离为

$$r_0' = \frac{\rho^2}{j\lambda} = \frac{(1.3mm)^2}{4\times 563.3\times 10^{-6}\,mm} = 750\,mm$$

即P点移动的距离为

$$r_0 - r_0' = 1000mm - 750mm = 250mm$$

当P点向后移远圆孔时，波带数减小，减小为2时，P 点也变为暗点。

与此对应的P到圆孔的距离为

$$r_0' = \frac{\rho^2}{j\lambda} = \frac{(1.3mm)^2}{2\times 563.3\times 10^{-6}\,mm} = 1500\,mm$$

因此P点移动的距离为

$$r_0' - r_0 = 1500mm - 1000mm = 500mm$$

9.波长为 $\lambda = 500nm$ 的平行光垂直照射在宽度为 0.025mm的单缝上，以焦距为 50cm的会聚透镜将衍射光聚焦于焦面上进行观察，求：

（1）衍射图样中央亮纹的半宽度；

（2）第一亮纹和第二亮纹到中央亮纹的距离；

（3）第一亮纹和第二亮纹相对于中央亮纹的强度。

【解】

（1）单缝衍射中央亮纹的角半宽度为

$$\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{500 \times 10^{-6} mm}{0.025mm} = 0.02rad$$

因此亮纹的半宽度

$$q = \theta \cdot f = 0.02 \times 500mm = 10mm$$

(2) 第一亮纹的位置对应于$\beta=\pm1.43\pi$，即是

$$\frac{ka}{2}\sin\theta=\pm1.43\pi$$

故

$$\sin\theta=\frac{\pm1.43\lambda}{a}=\frac{\pm1.43\times5\times10^{-4}mm}{0.025mm}$$
$$=\pm0.0286$$

或者 $\theta\approx\pm0.0286rad$,因此第一亮纹到场中心的距离

$$q_1=\theta f=\pm0.0286\times500mm=\pm14.3mm$$

第二亮纹对应于$\beta=\pm2.46\pi$，因而

$$\sin\theta=\frac{\pm2.46\lambda}{a}=\frac{\pm2.46\times5\times10^{-4}mm}{0.025mm}$$
$$=\pm0.0492$$

它到场中心的距离

$$q_2=\theta f=\pm0.0492\times500mm=\pm24.6mm$$

(3) 第一亮纹的强度

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin 1.43\pi}{1.43\pi} \right)^2$$

$$= I_0 (-0.213)^2 = 0.047 I_0$$

第二亮纹的强度

$$I = I_0 \left(\frac{\sin 2.46\pi}{2.46\pi} \right)^2 = (0.128)^2 I_0 = 0.016 I_0$$

13.利用第三节的结果导出外径和内径分别为a和b的圆环（见教材图13-61）的夫琅和费衍射强度公式，并求出当b=a/2时，

（1）圆环衍射与半径为a的圆孔衍射图样的中心强度之比；

（2）圆环衍射图样第一个暗环的角半径（超越方程 $J_1(Z)=\frac{1}{2}J_1(\frac{1}{2}Z)$ **解为** $Z=3.144$**）。**

【解】

半径为a的圆孔在衍射场P点产生的振幅为

$$E_h=E_0\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]=Ca^2\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]$$

因为场中心振幅E_0正比于圆孔的面积πa^2。圆孔中的圆屏使P点的振幅减小

$$E_s=Cb^2\left[\frac{2J_1(kb\theta)}{kb\theta}\right]$$

因此圆环在P点产生的振幅为

$$E_r=E_h-E_s=2C\left[\frac{a^2J_1(ka\theta)}{ka\theta}-\frac{b^2J_1(kb\theta)}{kb\theta}\right]$$

P点的强度为

$$I_r = 4C^2\left[\frac{a^2 J_1(ka\theta)}{ka\theta} - \frac{b^2 J_1(kb\theta)}{kb\theta}\right]^2$$

$$= 4C^2\left\{a^4\left[\frac{J_1(Z_1)}{Z_1}\right]^2 + b^4\left[\frac{J_1(Z_2)}{Z_2}\right]^2 - 2a^2b^2[\frac{J_1(Z_1)}{Z_1}][\frac{J_1(Z_2)}{Z_2}]\right\}$$

式中$Z_1 = ka\theta$，$Z_2 = kb\theta$。对于衍射场中心，$Z_1 = Z_2 = 0$，

相应的强度为

$$(I_r)_0 = 4C^2\left(\frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} - \frac{a^2b^2}{2}\right) = C(a^2 - b^2)^2$$

当 $b = a/2$时

$$(1)\quad (I_r)_0 = C^2\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^2 = \frac{9}{16}C^2a^4$$

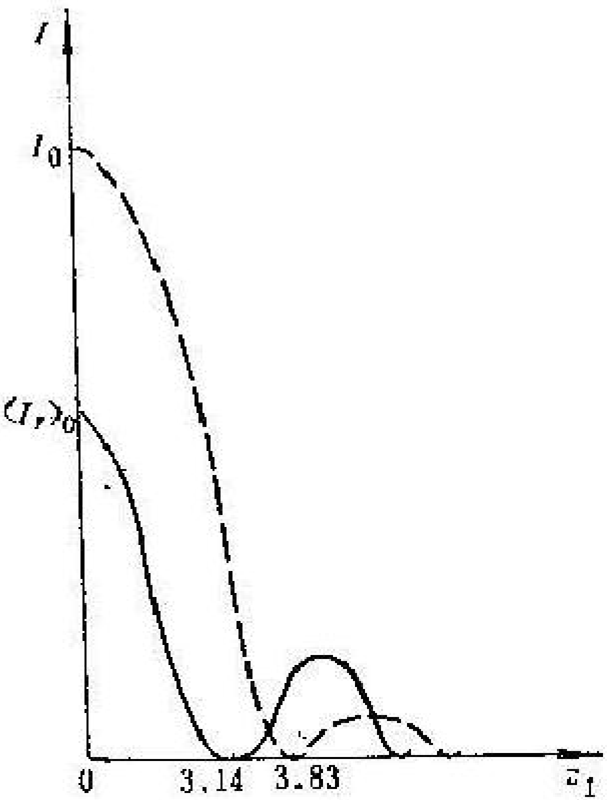
因此
$$\frac{(I_r)_0}{(I_h)_0} = \frac{\frac{9}{16}C^2a^4}{C^2a^4} = \frac{9}{16}$$

(2) 圆环衍射强度的第一个零值满足

$$\frac{a^2 J_1(ka\theta)}{ka\theta}-\frac{b^2 J_1(kb\theta)}{kb\theta}=0$$

或

$$aJ_1(ka\theta)=bJ_1(kb\theta)=\frac{a}{2}J_1(ka\theta)$$



利用贝塞尔函数表解上式，得到

$$ka\theta=Z_1=3.144$$

因此，第一个零点的角半径为

$$\theta=3.144\frac{\lambda}{2\pi a}=0.51\frac{\lambda}{a}$$

左图中，实线表示的是$b=\dfrac{a}{2}$的圆环的衍射强度曲线。

半径为a的圆孔的强度曲线如虚线所示。

18.一台显微镜的数值孔径为0.85，问：

（1）它用于波长 $\lambda = 400nm$ 时的最小分辨距离是多少？

（2）若利用油浸物镜使数值孔径增大到1.45，分辨率提高了多少倍？

（3）显微镜的放大率应设计成多大？（设人眼的最小分辨率为$1'$）

【解】

(1) 显微镜的最小分辨距离可由下式求出：

$$\varepsilon = \frac{0.61\lambda}{NA} = \frac{0.61 \times 400 \times 10^{-9} m}{0.85} = 287nm$$

(2) 当$\lambda = 400nm$, $N \cdot A \cdot = 1.45$时，

$$\varepsilon' = \frac{0.61 \times 400 \times 10^{-9} m}{1.45 \times 10^{-3}} = 168mm$$

分辨本领提高的倍数是

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{287}{168} = 1.7$$

(3) 为充分利用显微镜物镜的分辨本领，显微镜物镜应把最小分辨距离ε'放大到眼睛的明视距离处能够分辨。

人眼在明视距离处的最小分辨距离为

$$\varepsilon_e = 250mm\alpha_e = 250\times\frac{\frac{1}{60}}{180}\pi\ mm = 0.072685mm$$

所以这台显微镜的放大率至少应为

$$M = \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon'} = \frac{0.072685}{1.68\times10^{-4}} \approx 432$$

21.一块光栅的宽度为10cm，每毫米内有500条缝，光栅后面放置的透镜的焦距为500mm。问：
（1）它产生的波长 $\lambda=632.8nm$ **的单色光的1级和2级谱线的半宽度是多少？**
（2）若入射光是波长为632.8nm及和此波长相差0.5nm的两种单色光，它们的1级和2级谱线的距离是多少？

【解】

(1) $\lambda=632.8nm$ 的单色光的一级和二级谱线的位置分别为

$$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{d}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{632.8\times10^{-6}mm}{\frac{1}{500}mm}\right)=18^\circ26'$$

和

$$\theta_2=\sin^{-1}\left(\frac{2\lambda}{d}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{2\times632.8\times10^{-6}mm}{\frac{1}{500}mm}\right)=39^\circ12'$$

因此谱线的角半宽度为

$$\Delta\theta_1=\frac{632.8\times10^{-6}mm}{100mm\times\cos18^\circ26'}=6.67\times10^{-6}rad \qquad \Delta\theta_2=\frac{632.8\times10^{-6}mm}{100mm\times\cos39^\circ12'}=8.17\times10^{-6}rad$$

由于半宽 $\Delta x = \Delta\theta \cdot f$,因此相应的半宽分别为

$$\Delta x_1 = \Delta\theta_1 f = 6.67\times10^{-6}\times500\times10^{-3} = 3.34\times10^{-3}\,mm$$

$$\Delta x_2 = \Delta\theta_2 f = 8.17\times10^{-6}\times500\times10^{-3} = 4.08\times10^{-3}\,mm$$

(2) 将 $d\sin\theta = m\lambda$ 求导可得

$$d\cos\theta\Delta\theta = m\Delta\lambda$$

$$\Delta l = \frac{m}{d\cos\theta}\cdot f\cdot\Delta\lambda$$

因此，光线的线色散为

$$\frac{\Delta l}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}f$$

上题已算得一级谱线和二级谱线的衍射角分别为$\theta_1 = 18^\circ 26'$和$\theta_2 = 39^\circ 12'$,

所以相应的线色散为

$$\left(\frac{\Delta l}{\Delta\lambda}\right)_1=\frac{mf}{d\cos\theta_1}=\frac{500mm}{\frac{1}{500}\times10^6\,nm\times\cos18^\circ26'}$$

$$=0.26mm/nm$$

$$\left(\frac{\Delta l}{\Delta\lambda}\right)_2=\frac{mf}{d\cos\theta_2}=\frac{2\times500mm}{\frac{1}{500}\times10^6\,nm\times\cos39^\circ12'}$$

$$=0.64mm/nm$$

而波长差$\delta\lambda=0.5nm$的两种单色光的一级谱线和二级谱线之间的距离为

$$\Delta l_1=\left(\frac{\Delta l}{\Delta\lambda}\right)_1\delta\lambda=0.26\times0.5=0.13mm$$

$$\Delta l_2=\left(\frac{\Delta l}{\Delta\lambda}\right)_2\delta\lambda=0.64\times0.5=0.32mm$$

22.设计一块光栅，要求

（1）是波长 $\lambda = 600nm$ 的第2级谱线的衍射角 $\theta \leq 30^{\circ}$ ；

（2）色散尽可能大；

（3）第3级谱线缺级；

（4）在波长 $\lambda = 600nm$ 的第2级谱线处能分辨0.02nm的波长差。在选定光栅的参数后，问在透镜的焦面上只可能看到波长600nm的几条谱线？

【解】

为使波长$600nm$的二级谱线的衍射角$\theta \leq 30^{\circ}$，光栅栅距d必须满足

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\theta} \geq \frac{2\times600\times10^{-6}mm}{\sin 30^{\circ}} = 2.4\times10^{-3}mm$$

据（2），应选择d尽量小，故

$$d = 2.4\times10^{-3}mm$$

据（3），光栅缝宽

$$\alpha = \frac{d}{3} = \frac{2.4\times10^{-3}mm}{3} = 0.8\times10^{-3}mm$$

再由条件(4)，光栅的缝数N至少应有

$$N=\frac{\lambda}{m\delta\lambda}=\frac{600nm}{2\times 0.02nm}=15000$$

所以光栅的总宽度W至少为

$$W=Nd=15000\times 2.4\times 10^{-3}mm=36mm$$

光栅形成的谱线应在$|\theta|<90^\circ$的范围内。当$\theta=\pm 90^\circ$时，

$$m=\frac{d\sin\theta}{\lambda}=\frac{\pm 2.4\times 10^{-3}mm}{6\times 10^{-4}mm}=\pm 4$$

即第4级谱线对应于衍射角$\theta=90^\circ$，实际上不可能看见。

此外第3级缺级，所以只能看见$0,\pm 1,\pm 2$级共5条谱线。

25.有一多缝衍射屏如教材图13-64所示，缝数为2N，缝宽为a,缝间不透明部分的宽度依次为a和3a。试求正入射情况下，这 一衍射的夫琅和费衍射强度分布公式。

【解】

1) 对于双缝衍射：$I=4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\frac{\delta}{2}$

$$\alpha=\frac{kla}{2}=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2a\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{4\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

$$\therefore\quad \delta=4\alpha \quad \text{即} \quad \frac{\delta}{2}=2\alpha$$

$$\therefore\quad I=4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2 2\alpha$$

2) 对于多缝干涉：$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$

其中 $d = 3a + a + a + a = 6a$

$$\therefore \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 6a \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{2} = \frac{6\pi}{\lambda} a \sin\theta = 6\alpha$$

$\therefore$ 多光束干涉因子为 $\left(\frac{\sin \frac{N}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2$

$$\therefore \quad I = 4I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2$$

$$= 4I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cos 2\alpha \right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

26.一块闪耀光栅宽260mm，每毫米有300个刻槽，闪耀角为$77°12'$。
（1）求光束垂直于槽面入射时，对于波长$\lambda = 500nm$的光的分辨本领；
（2）光栅的自由光谱范围有多大？
（3）试同空气间隔为1cm、精细度为25的法布里—珀罗标准具的分辨本领和自由光谱范围作一比较。

【解】

(1) 光栅栅距 $d = \dfrac{1}{300}mm$

已知光栅宽260mm,因此光栅槽数为

$$N = \frac{W}{d} = 260 \times 300 = 7.8 \times 10^4$$

因此，光栅对500nm的闪耀级数为

$$m = \frac{2d\sin\gamma}{\lambda} = \frac{2 \times 1/300mm \times \sin 77°12'}{500 \times 10^{-6}mm} = 13$$

因此光栅的分辨本领

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = 13 \times 7.8 \times 10^4 \approx 10^6$$

(2) 光栅的自由光谱范围

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{500nm}{13} = 38.5nm$$

3) 题给法布里—珀罗标准具的分辨本领和自由光谱范围分别为

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 0.97mS = 0.97\frac{2h}{\lambda}S = \frac{0.97\times 2\times 10mm\times 25}{500\times 10^{-6}mm} \approx 10^{6}$$

和

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2h} = \frac{(500nm)^2}{2\times 10^7 nm} = 0.0125nm$$

可见题给光栅和标准具的分辨本领相当，但光栅比标准具的自由光谱范围宽得多。

物理光学第三章习题解答

8. 波长λ=500nm的单色光垂直入射到边长为3cm的方孔上，在光轴（它通过孔中心并垂直方孔平面）附近离孔z处观察衍射，试求出夫琅和费衍射区的大致范围。

分析：代入夫琅和费近似条件（P383）即可

解：

$$k\frac{(x_1^2+y_1^2)_{\max}}{2z} << \pi$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

取 $x_1 = y_1 = 1.5cm$

可求得 $z >> 900m$

16. 若望远镜能分辨角距离为3×10⁻⁷rad的两颗星，它的物镜的最小直径是多少？同时为了充分利用望远镜的分辨率，望远镜应有多大的放大率？

分析：第一问直接代入望远镜分辨率公式（P399）；第二问为了充分利用望远镜的分辨率，应使它的最小分辨角经望远镜放大后大于人眼的最小分辨角，使其能为人眼所分辨

解：（1）考虑可见光中心波段550nm

$$\alpha = \frac{1.22\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{1.22\lambda}{\alpha} == 2.24m$$

（2）取人眼瞳孔直径为2.5mm

$$\alpha_e = \frac{1.22\lambda}{D_e} = 2.68\times10^{-4}rad \qquad M \geq \frac{\alpha_e}{\alpha} = \frac{2.68\times10^{-4}}{3\times10^{-7}} \approx 900$$

20. 在双缝的一个缝前贴一块厚0.001mm、折射率为1.5的玻璃片。设双缝间距为1.5μm，缝宽为0.5μm，用波长500nm的平行光垂直入射。试分析该双缝的夫琅和费衍射图样。

解：加玻璃片后，双缝至P点程差为

$$\Delta = d\sin\theta + (n-1)h = d\sin\theta + (1.5-1)\times 0.001 = m\lambda$$

又 $a\sin\theta = n\lambda$（**n=0**对应衍射极大，**n=±1,±2...**为极小）

$$\frac{d}{a} = \frac{m\lambda - 0.0005}{n\lambda} = \frac{1}{n}(m-1) \quad \text{又}\ \frac{d}{a} = 3 \Rightarrow m = 3n+1\text{处缺级}$$

故未加时，**dsinθ=0**为中央零级，**m=3n**处缺级

加玻璃后，**dsinθ=0.0005**为零级，**m=（3n+1）**处缺级

即整体条纹平移一级

28. 设光栅的振幅透射系数为

$$t(x)=t_0+t_1\cos 2\pi f_0 x+t_1\cos\left(2\pi f_0 x+\frac{\pi}{2}\right)$$

这块光栅的夫琅和费衍射场中将出现几个衍射斑？各斑的中心强度与零级的比值是多少？

解：

$$E(x,y)=F[t(x)]$$

$$=t_0\delta(f)+\frac{1}{2}t_1[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]+\frac{1}{2}t_1 e^{i\frac{\pi}{2}}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$$

因此，有三个衍射斑（第一项为0级）

由于 $\pm f_0$ 处各有相差 $e^{i\frac{\pi}{2}}$ 的两项，其合成振幅应为 $\frac{\sqrt{2}}{2}t_1$

$$\frac{I_{\pm f_0}}{I_0}=\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t_1}{t_0}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2$$

11. 在不透明细丝的夫琅和费衍射图样中，测得暗条纹间距为1.5mm，所用透镜的焦距为30mm，光波波长为632.8nm。问细丝直径是多少？

分析：细丝和单缝的衍射图样类似，利用单缝衍射的角半宽度计算式（P394）求解

解：

$$\Delta x = f \cdot \Delta\theta = f \cdot \frac{\lambda}{a}$$

代入题设 $\Delta x = \frac{1.5}{2} mm, f = 300mm, \lambda = 632.8nm$

得 $\alpha = 0.1256mm$

15. 用望远镜观察远处两个等强度的发光点S_1和S_2.当S_1的像（衍射图样）中央和S_2的像的第一个强度零点相重合时，两像之间的强度极小值与两个像中央强度之比是多少？

解：S_1和S_2的像的强度分布式 $I = I_0\left[\dfrac{2J_1(Z)}{Z}\right]^2$ *

S_1的像的中央对应于 $Z = 0$

S_2的像的第一强度零点对应于 $Z = 1.22\pi = 3.833rad$

两像之间中点对应于 $Z = \dfrac{1.22\pi}{2} = 0.61\pi = 1.9rad$

将Z值代入*式，得中间点单独强度 $I_1 = I_0\left[\dfrac{2J(1.9)}{1.9}\right]^2 = 0.374I_0$

因此，中间点合强度与像中央强度之比

$$\frac{I}{I_0} = \frac{2I_1}{I_0} = 0.374\times 2 = 0.748$$

物理光学第四章作业答案

- 1、振幅为A，波长为$2/3*10^4$nm的单色平面波的方向余弦cosα=2/3，cosβ=1/3,cosγ=2/3,试求它在xy平面上的复振幅及空间频率。

- **分析：**
- （1）单色平面波的复振幅形式：
- $E(x,y,z)=A\exp[ik(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)]$
- $=A\exp[i2\pi(ux+vy+wz)]$
- （2）在xy平面上，z=0，故只要求u，v
- 其中，$u=\cos\alpha/\lambda$，$v=\cos\beta/\lambda$

- 解： 在xy平面上：
- $E(x,y)=A\exp[ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)]$
- $=A\exp[i2\pi(ux+vy)]$
- 代入数据得：
- $E(x,y)=A\exp[i*100\pi(2x+y)]$，（单位为mm）
- 故：
- $u=\cos\alpha/\lambda$，代入数据得：$u=100mm^{-1}$
- $v=\cos\beta/\lambda$，代入数据得：$v=50mm^{-1}$

- 其他答案：$u=10^5m^{-1}$ 或 $10^{-4}nm^{-1}$

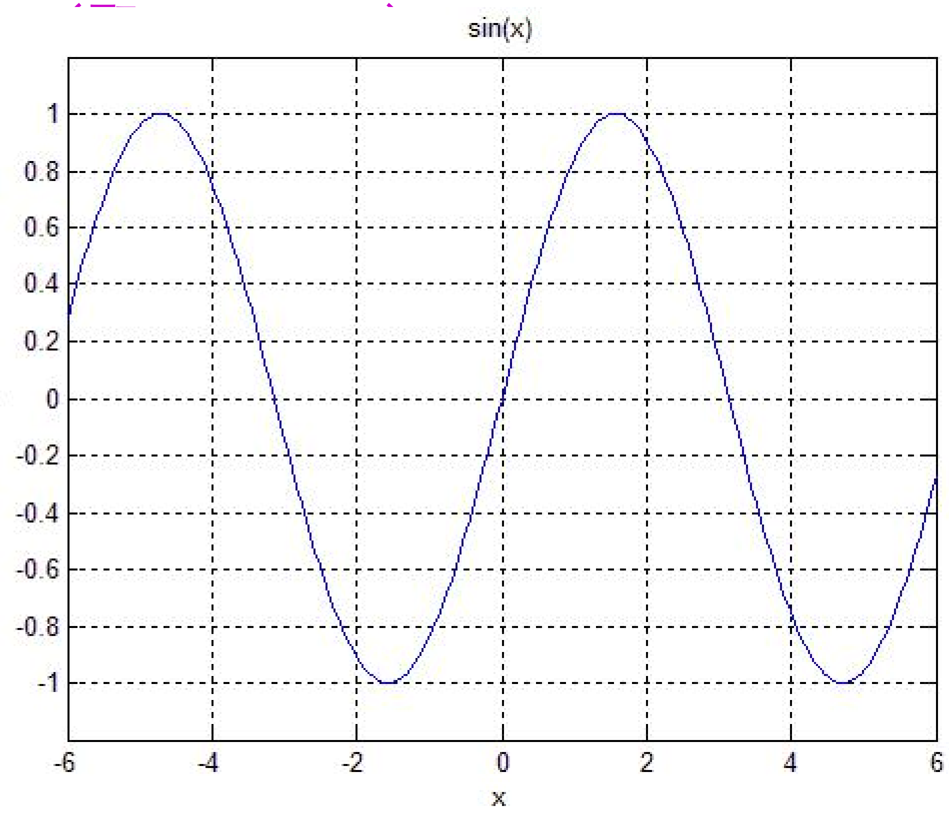
- 4、求下列函数的傅里叶频谱变换，并画出原函数和频谱的图形。
- （1） $E(X)=\begin{cases} A\sin(2\pi u_0 x); & |x|\le L \\ 0; & |x|>L \end{cases}$

• 分析：

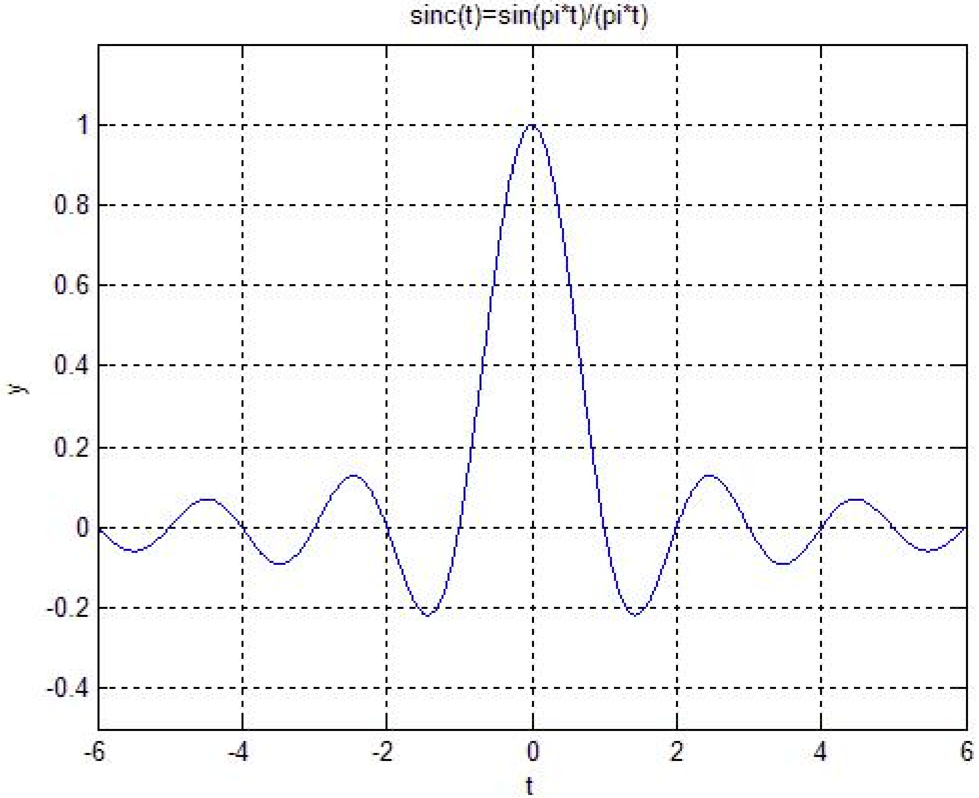
- （1）对一维傅里叶变换，公式如下：
- $E(u)=\int_{\infty} E(x)\exp(-i2\pi ux)dx$
- （2）$\mathrm{sinc}(x)=\sin(\pi x)/\pi x$

- 解:(1)E（u）$=\int_{\infty} E(x)\exp(-i2\pi ux)dx$
- $=\int_{\pm L} A\sin(2\pi u_0 x)\exp(-i2\pi ux)dx$
- $=\int_{\pm L} (A/2i)*(e^{i2\pi u_0 x} - e^{-i2\pi u_0 x})$
- $*\exp(-i2\pi ux)dx$
- $=\int_{\pm L} (A/2i)*[e^{i2\pi(u_0-u)x} - e^{-i2\pi(u_0+u)x}]dx$
- $=(A/4\pi)*[(1/u-u_0)*e^{i2\pi(u_0-u)x} - (1/u+u_0) *e^{i2\pi(u_0+u)x}]|_{\pm L}$
- $=iAL\{\mathrm{sinc}[2L(u+u_0)-\mathrm{sinc}[2L(u-u_0)]\}$

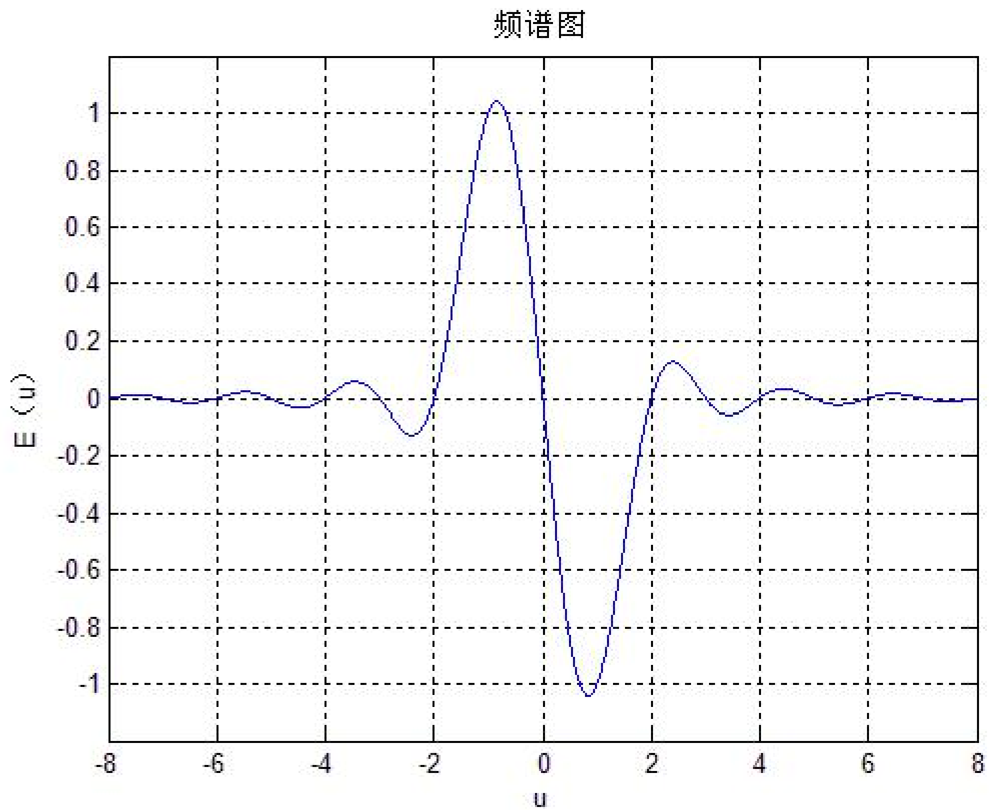
- (2)原函数示意图：



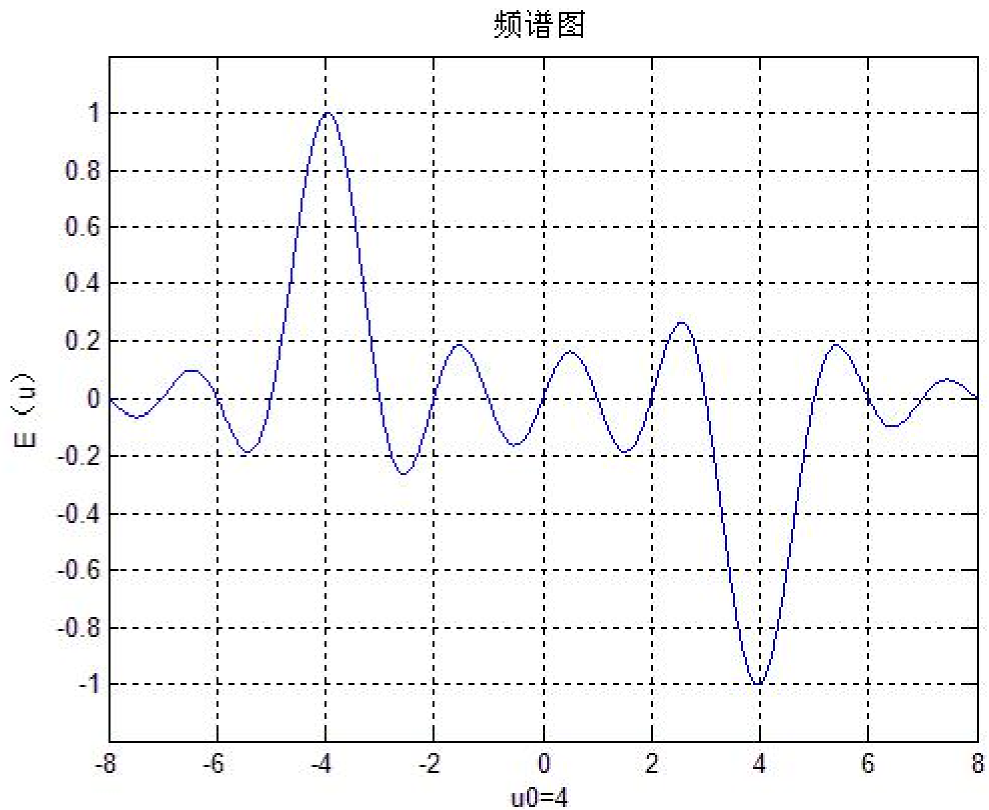
- sinc(t)函数：



- 频谱图示意



- 频谱图示意图



- 6、求如图所示衍射屏的夫琅和费衍射图样的强度分布。设衍射屏由单位振幅的单色平面波垂直照明。
- 分析：
- （1）由矩孔的复振幅透射系数，得到衍射屏的复振幅透射系数t(x,y)。 $P_{书351}$
- （2）夫琅和费衍射场的复振幅分布E(x,y)为孔径面上（即刚透过衍射屏）光场的复振幅分布的傅里叶变换，继而得到强度分布I(x,y)。$P_{书350}$； $P_{书384}$

- **解：** 衍射屏的复振幅透射系数为：

$$t(x,y)=rect(x/L) * rect(y/L) - rect(x/l) * rect(y/l)$$

由单位振幅的单色平面波垂直照明，可得衍射屏后光场分布为：

$$E(x1,y1)=1 * t(x,y)= t(x,y)$$

故，衍射屏的夫琅和费衍射场的复振幅分布为：

$$E(x,y)= (1/ i\lambda z) * F\{E(x1,y1)\} = (1/ i\lambda z) * F\{t(x,y)\}$$

$$= (1/ i\lambda z) * [L^2 \text{sinc}(Lu)\text{sinc}(Lv) - l^2 \text{sinc}(lu)\text{sinc}(lv)]$$

其中，$u=x/\lambda z$ ； $v=y/\lambda z$

故强度分布为：

$$I(x,y)=(1/\lambda z)^2 * F\{E(x1,y1)\}^2$$

$$= (1/\lambda z)^2 * [L^2 \text{sinc}(Lx/\lambda z)\text{sinc}(Ly/\lambda z) - l^2 \text{sinc}(l x/\lambda z)\text{sinc}(ly/\lambda z)]$$

- 10、一个衍射屏具有圆对称的复振幅透射系数：$t(r)=[1/2 +1/2\cos(ar^2)]*\mathrm{circ}(r/a)$
- (1)说明这一衍射屏有类似透镜的性质。
- (2)给出此屏的焦距的表达式。
- 分析：
- (1)透镜的复振幅投射系数为：
- $t(x,y)=\exp[-ik(x_1^2+y_1^2)/2f]$； $P_{书383}$
- $(2)\cos(x)=1/2 * (e^{ix}+e^{-ix})$

- 解：(1) $t(r)=[1/2 + 1/2\cos(ar^2)]*\mathrm{circ}(r/a)$
- $=\{1/2 + 1/4*[\exp(iar^2) + \exp(-iar^2)]\} *\mathrm{circ}(r/a)$
- 上式中，第一个因子circ(r/a)表示该衍射屏是半径为a的圆孔。
- 第二个因子中：
- 第一项1/2，使透射光的振幅衰减；
- 第二项的第三项均与透镜复振幅投射系数
- $t(x,y)=\exp[-ik(x_1^2+y_1^2)/2f]$的形式类似，当用平面波垂直照射时，这两项分别产生发散和汇聚球面波。
- 因此，这个衍射屏具有类似透镜的性质。

- (2)对于因子exp(iar^2)：$a= - k/2f_1$,
- 得$f_1 = - k/2a= -\pi/a$ λ< 0，发散；
- 对于因子 exp($-iar^2$)： $a= k/2f_2$,
- 得$f_2 = k/2a=\pi/a$ λ> 0，汇聚；
- 对于因子1/2，1/2=1/2*e0,
- 可得 $f_3 = \infty$。

- 13、用一架镜头直径D=2cm，焦距f=7cm的照相机拍摄2m远受相干光照明的物体的照片，求照相机的相干传递函数，以及像和物的截止空间频率。设照明波长λ=600nm。
- 分析：
- (1)衍射受限的相干成像系统的相干传递函数和光瞳函数有相同的形式，对直径为D的圆孔，$P(\varepsilon,\eta)=circ(2\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}/D)$；
- 传递函数为：$H(u,v)=circ(2\lambda L'\sqrt{u^2+v^2}/D)$；
- (2)截止频率为：$\rho_{max}=(\sqrt{u^2+v^2})_{max}=D/2\lambda L'$

- 解：对直径为D的圆孔，光瞳函数为：
- $P(\varepsilon,\eta) = circ(2\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}/D)$；
- 相应的有传递函数为：
- $H(u,v)=circ[(2\lambda L')*\sqrt{u^2+v^2}/D]$；
- 由物像关系1/L'+1/L=1/f，得：
- L'=Lf /(L-f)，代入数据得， L'=7.25cm；

- 故，像空间的截止频率：

$$\rho_{max} = (\sqrt{u^2+v^2})_{max} = D/2\lambda L',$$

代入数据得： $\rho_{max} = 229.9\ mm^{-1}$

物空间的截止频率：

$$\rho_{0max} = \rho_{max} * (L'/L) = D/2\lambda L,$$

代入数据得： $\rho_{0max} = 8.33\ mm^{-1}$

14、在上题中，若被成像的物是一个周期d的黑白光栅，问当d分别为0.4mm，0.2mm和0.1mm时，像的强度分布的大致情形是怎样？

分析：周期为d的黑白光栅的基频为1/d，n级频率分量的频率为n/d，只有当 频率小于物的截止频率时，该频率分量才能传递到像面，即必须：

$$n \le \rho_{o\max} \cdot d$$

$$\rho_{o\max} = 8.3mm^{-1}$$

解：（1）当d=0.4mm时，利用上题的结果：

$$\rho_{o\max} d = 8.3mm^{-1} \times 0.4mm = 3.32$$

故只有0，±1，±2，±3级参与成像。这时因缺少高频成分，像面上光栅像不再像原光栅那样具有尖锐的边缘。

$$\rho_{o\max}d = 8.3mm^{-1} \times 0.2mm = 1.66$$

(2) 当d=0.2mm时

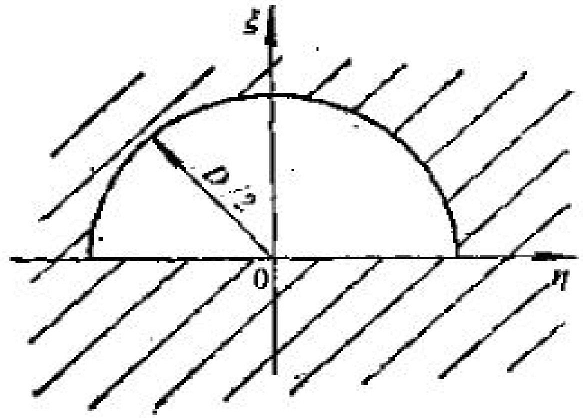
这时只有0， ±1参与成像，这时强度分布如正弦光栅。

$$\rho_{o\max}d = 8.3mm^{-1} \times 0.1mm = 0.83$$

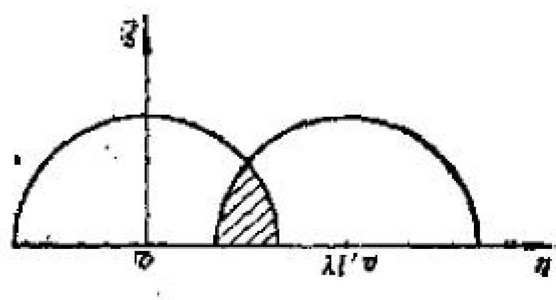
（3）当d=0.1mm时

这时仅零频通过，像面是一片均匀亮度。

16、一个非相干成 … D的半圆孔，如
下图所示。求沿u … 数的表达式。



解：（1）先求沿v轴 … η轴上彼此分开
λl'u的两个瞳的重叠 …



$$S=\left(\frac{D}{2}\right)^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)$$

$$\cos\,\theta=\frac{\lambda l' v}{D}$$

$$S=\left(\frac{D}{2}\right)^2\left[\cos^{-1}\left(\frac{\lambda l' v}{D}\right)-\left(\frac{\lambda l' v}{D}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\lambda l' v}{D}\right)^2}\right]$$

而

故

$$S_D=\frac{\pi}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

光瞳的面积为:

因此得到

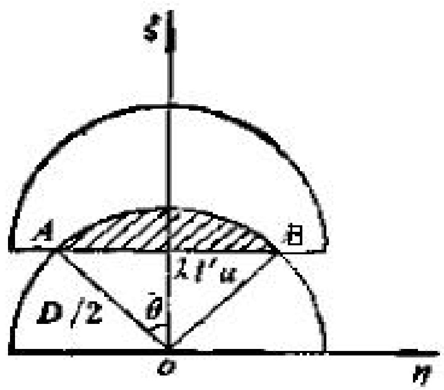
$$H(0,v)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{v}{D/\lambda l'}\right)-\left(\frac{v}{D/\lambda l'}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v}{D/\lambda l'}\right)^2}\right] & v<D/\lambda l' \\ 0 & v\geqslant D/\lambda l'\end{cases}$$

$$|v_{\max}|=\frac{D}{\lambda l'}$$

可见沿v轴的截止频率为:

（2）再来计算沿u 。

在ξ轴上分开λl'u的 积，如下图所示：



S=扇形面积-ΔOAB的面积= $\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2(\theta - \sin\theta\cos\theta)\right]$

由于 $\cos\theta = \frac{\lambda l'u}{D/2}$

故 $S = \left(\frac{D}{2}\right)^2\left[\cos^{-1}\left(\frac{\lambda l'u}{D/2}\right) - \left(\frac{\lambda l'u}{D/2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{\lambda l'u}{D/2}\right)^2}\right]$

将S除 S_D ：

$$H(u,0) \approx \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{u}{D/2\lambda l'}\right) - \left(\dfrac{u}{D/2\lambda l'}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{D/2\lambda l'}\right)^2}\,\right] & \text{当 } u < D/2\lambda l' \\ 0 & \text{当 } u \geqslant D/2\lambda l' \end{cases}$$

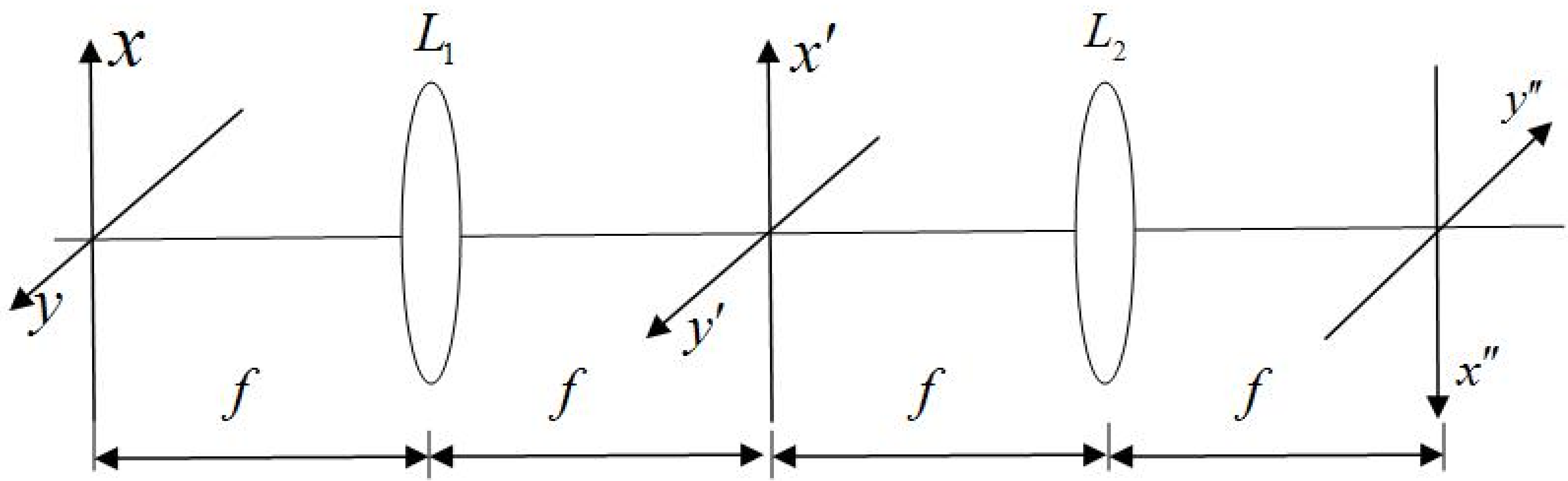
沿u轴的截止频率为： $|u_{\max}| = \dfrac{D}{2\lambda l'}$

它是沿v轴截止频率的一半。

4.17 在如下图所示的信息处理系统中，在 xy平面上放置一正弦光栅，其振幅透射系数为：$t(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi u_0 x$

（1）在频谱面的中央放置一小圆屏挡住光栅的零级谱，求这时像面上的光强度分布；

（2）移动小圆屏，挡住光栅的-1级谱，像面上的光强分布又是怎样？



解：(1)在相干光垂直照明下，正弦光栅的频谱为：

$$\tilde{E}(u)=\delta(u)+\frac{1}{2}\delta(u-u_0)+\frac{1}{2}\delta(u+u_0)$$

挡住零级谱后

$$\tilde{E}'(u)=\frac{1}{2}\delta(u-u_0)+\frac{1}{2}\delta(u+u_0)$$

因此，像面上的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}''(x'')&=F\{\tilde{E}'(u)\}\\&=\frac{1}{2}F\{\delta(u-u_0)\}+\frac{1}{2}F\{\delta(u+u_0)\}\end{aligned}$$

利用δ函数的傅里叶变换性质，则：

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}''(x'')&=\frac{1}{2}(e^{-2\pi u_0 x''}+e^{2\pi u_0 x''})\\&=\cos 2\pi u_0 x''\end{aligned}$$

最后得到强度分布

$$I(x'') = \left|\tilde{\varepsilon}''(x'')\right|^2$$

$$= \cos^2 2\pi u_0 x'' = \frac{1}{2}(1 + \cos 4\pi u_0 x'')$$

可见，像面上的强度分布仍是一正弦式分布，但空间频率为物分布的2倍。

(2)当小圆屏挡住-1级谱时

$$\tilde{E}'(u) = \delta(u) + \frac{1}{2}\delta(u - u_0)$$

这时像面上的强度分布为

$$I(x'') = \left|F\{\tilde{E}'(u)\}\right|^2 = \left|F\{\delta(u) + \frac{1}{2}\delta(u - u_0)\}\right|^2$$

$$= \left|(1 + \frac{1}{2}e^{-i2\pi u_0 x''})\right|^2 = \frac{5}{4} + \cos 2\pi u_0 x''$$

这也是一正弦分布，且空间频率与物分布相同。

与物分布不同的是，像分布的对比度降低了。

4.19一个物体有如图所示的周期性振幅透射系数，如将它置于相干光学处理系统的物面位置，并在频谱面上用一小圆屏把零级谱挡住，试说明在像面上得到对比度反转的物体像。

解：

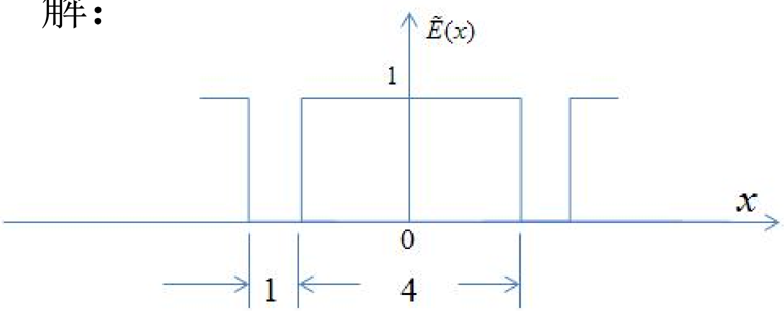


图1

周期性振幅透射系数物体（如图1）

（一个周期为5个单位）

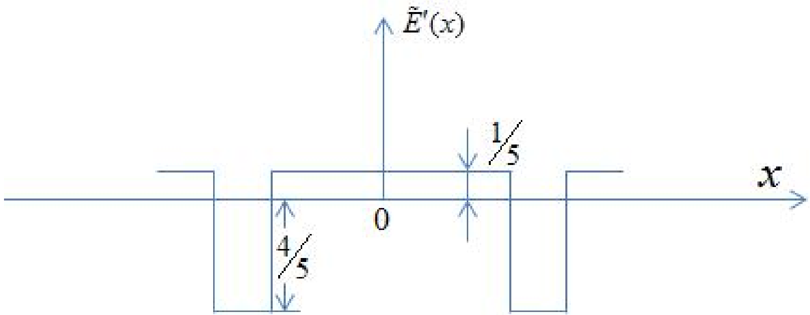


图2

挡住零级——挡住直流量。

其大小为函数的平均值（一个周期内）

挡住零级即$\tilde{E}(x)$在原图上坐标上移$4/5$（如图2）

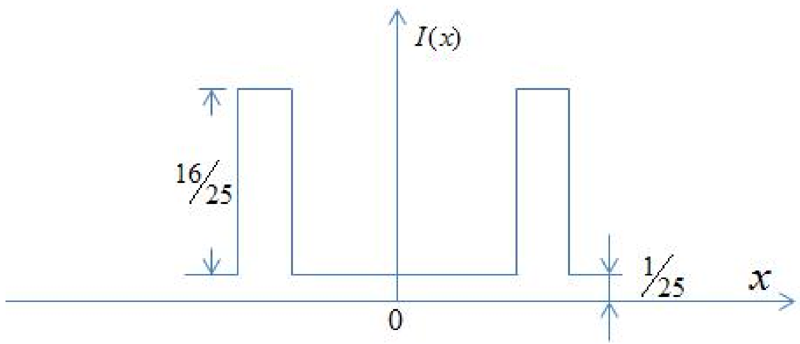


图3

振幅变为：$\frac{1}{5}$，$-\frac{4}{5}$，强度变为：$\frac{1}{25}$，$\frac{16}{25}$

结果：原来亮 $\rightarrow$ 暗，暗 $\rightarrow$ 亮了，但不完全暗

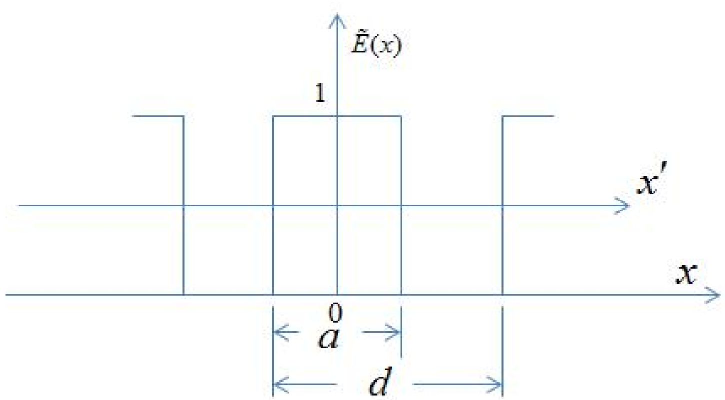
（对比度反转不完全相反）

注意：

1) 一般滤去零级谱，对比度变坏，不能改善像对比

2) 可吸收衰减零频分量，以改善像对比

※ 对比度反转与周期函数结构有关（如图4）



当 $a=\frac{d}{2}$时，直流分量为 $\frac{1}{2}$

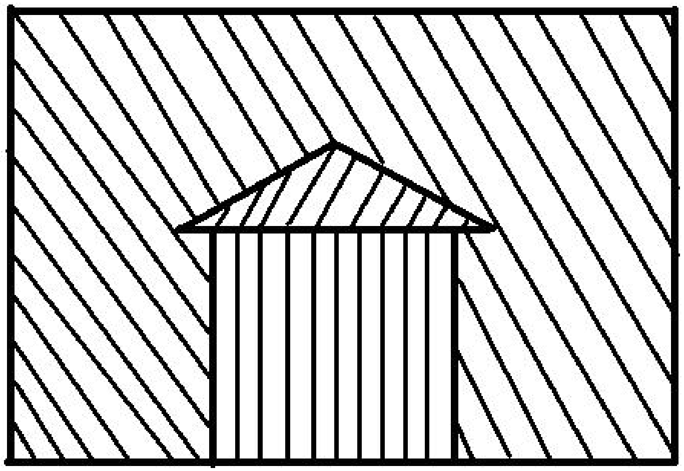
挡住零级后，像的复振幅仍为光栅结构。

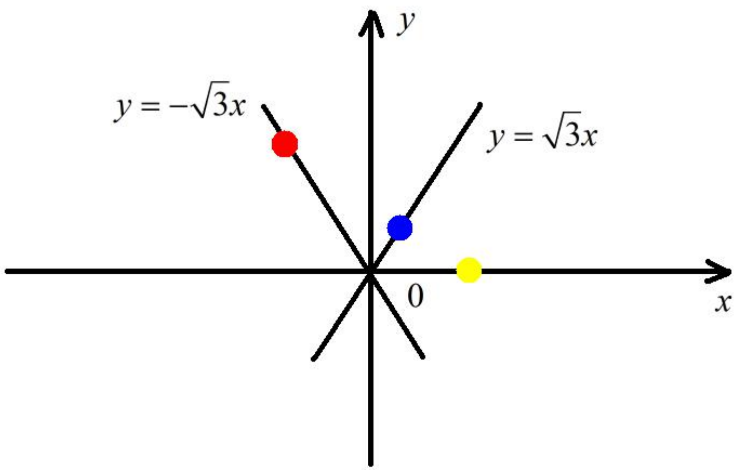
强度分布是均匀的，因而看不到光栅的像。

物理光学第四章习题解答

22. 用全息法将如图所示的房顶、墙壁和天空三部分制成互成120°的余弦光栅置于一块玻璃上，把此片放在4f系统的物平面上。用什么方法可使原来没有颜色的房顶、墙壁和天空分别变成红的、黄的和蓝的？

解：将一滤波器放在4f系统的频谱面上，在该滤波器的与房顶余弦光栅垂直方向对应红色光波处开一小孔，与墙壁余弦光栅垂直方向对应黄色光波处开一小孔，与天空余弦光栅垂直方向对应蓝色光波处开一小孔。





2. 波长为500nm的单色平面波在xy平面上的复振幅分布为（空间频率单位为mm-1）

$$\tilde{E}(x,y)=\exp[i2\times10^{3}\pi(x+1.5y)]$$

试决定平面波的传播方向。

分析：将复振幅表达式化为比较标准的形式来比较判断

解：

$$\tilde{E}(x,y)=\exp[i2\pi(10^{3}x+10^{3}\times1.5y)]$$

所以 $u=10^{3}mm^{-1}$ $\qquad$ $v=1.5\times10^{3}mm^{-1}$

又 $u=\cos\alpha/\lambda$ $\qquad$ $v=\cos\beta/\lambda$

所以 $\cos\alpha=u\lambda=0.5$ $\qquad$ $\cos\beta=v\lambda=0.75$

所以，平面波的方向余弦为（**0.5**，**075**）

7. 求出如图所示的衍射屏的夫琅和费衍射图样的强度分布。设衍射屏由单位振幅的单色平面波垂直照明。

分析：运用衍射和傅里叶变换的关系，应熟悉常见变换

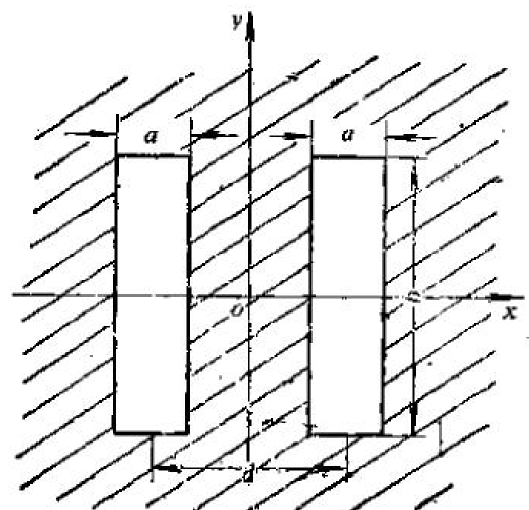
解：狭缝的透射率可用矩形函数表示，这时在衍射屏上的振幅分布可写为

$$\tilde{E}(x,y)=rect\left(\frac{x-d/2}{a}\right)rect\left(\frac{y}{b}\right)+rect\left(\frac{x+d/2}{a}\right)rect\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\tilde{E}(u,v)=F\left[\tilde{E}(x,y)\right]$$

$$=2ab\sin c\left(\frac{ax'}{\lambda z}\right)\sin c\left(\frac{by'}{\lambda z}\right)\cos\left(\frac{\pi dy'}{\lambda z}\right)$$

$$I=\left(\frac{2ab}{\lambda z}\right)^2\sin c^2\left(\frac{ax'}{\lambda z}\right)\sin c^2\left(\frac{by'}{\lambda z}\right)\cos^2\left(\frac{\pi dy'}{\lambda z}\right)$$



11. 将一个受直径d=2cm的圆孔限制的物体置于透镜的前焦面上（图见教材），透镜的直径D=4cm，焦距f=50cm。照明光波波长λ=600nm。问（1）在透镜后焦面上，强度能准确代表物体的傅里叶频谱的模的平方的最大空间频率是多少？（2）在多大的空间频率以上，其频谱为零？尽管物体可以在更高的空间频率上有不为零的傅里叶分量。

分析：透镜的孔径有限，限制了较高的空间频率成分的传播，即渐晕效应，使得透镜后焦面上得不到完全的物体频谱。仅当某个空间频率成分不受阻拦地通过透镜时，在透镜后焦面上得到的强度才能准确代表该空间频率的傅里叶频谱的模的平方。当某一空间频率成分完全被阻拦时，在透镜后焦面上就没有该频率成分。通过几何作图的方法容易得到各频率成分通过透镜的情况。

解：考虑小角度情况，即 $D << f, d << f$

（1）恰好能够完全通过透镜时的传播方向的倾角

$$\theta_{\max} \approx \tan\theta_{\max} = \frac{\frac{D}{2}-\frac{d}{2}}{f} = \frac{D-d}{2f}$$

因为透镜是圆形对称孔径，在圆周各方向上都有相应的最大空间频率，所以

$$\xi_{\max} = \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)_{\max} = \frac{\sin\theta_{\max}}{\lambda} \approx \frac{\theta_{\max}}{\lambda} = \frac{D-d}{2\lambda f} = 33.33mm^{-1}$$

（2）恰好完全被透镜阻拦时的传播方向的倾角

$$\beta \approx \frac{\frac{D}{2}+\frac{d}{2}}{f} = \frac{D+d}{2f}$$

相应的空间频率为 $\xi = \frac{\sin\beta}{\lambda} \approx \frac{\beta}{\lambda} = \frac{D+d}{2\lambda f} = 100mm^{-1}$

总结：当空间频率小于 $\frac{D-d}{2\lambda f}$ 时，透镜后焦面上得到的是相应空间频率范围的物的准确的傅里叶频谱；

当空间频率在 $\frac{D-d}{2\lambda f} \sim \frac{D+d}{2\lambda f}$ 时，透镜后焦面上得到的并非准确的傅里叶频谱，各空间频率成分受到不同程度的阻拦；

当空间频率大于 $\frac{D+d}{2\lambda f}$ 时，虽然物有更高的空间频率成分，但因这些分量全部被透镜的有限孔径阻拦，在透镜后焦面上完全得不到这些高频成分。

因此，透镜是低通滤波器，这就是渐晕效应对物的频谱传播的影响。

物理光学习题解答
第五章

1.一束自然光在30度角下入射到玻璃—空气界面，玻璃的折射率为n=1.54，试计算：
（1）反射光的偏振度；
（2）玻璃—空气界面的布儒斯特角；
（3）以布儒斯特角入射时透射光的偏振度。

【解】 （1）入射自然光可分解为振动方向相互垂直的s波和p波，它们的强度相等，设以I_0表示。据菲涅尔公式，

s波的反射率为

$$R_s = \left[-\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2$$

式中$\theta_1 = 30^\circ$，而

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left[\sin 30^\circ \times 1.54 \right] = \sin^{-1} 0.77 = 50^\circ 21'$$

故

$$R_s = \left[-\frac{\sin(30^\circ - 50^\circ 21')}{\sin(30^\circ + 50^\circ 21')} \right]^2 = \left(\frac{0.3477}{0.9858} \right)^2 = 0.1244$$

因此反射波中s波的强度为

$$I_s^{(R)} = 0.1244 I_0$$

而p波的反射率

$$R_p=\left[\frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)}\right]^2=\left(\frac{-0.3708}{5.8787}\right)^2=0.004$$

因此反射波中p波的强度

$$I_p^{(R)}=0.004I_0$$

于是反射光的偏振度

$$P=\frac{0.1244I_0-0.004I_0}{0.1244I_0+0.004I_0}=94\%$$

(2) 空气—玻璃界面的布儒斯特角为

$$\theta_B = tg^{-1}n = tg^{-1}\frac{1}{1.54} = 33^\circ$$

(3) 当$\theta_B = 33^\circ$时，

$$R_s = \left(-\frac{\sin(33^\circ - 57^\circ)}{\sin(33^\circ + 57^\circ)}\right)^2 = 0.165 \qquad T_s = 1 - R_s = 0.835$$

而 $R_p = 0,\quad T_p = 1 - R_p = 1$

∴ 以布儒斯特角入射时，透射光的偏振度 $P = \frac{1-0.835}{1+0.835} = 9\%$

6.方解石晶片的厚度d=0.013mm,晶片的光轴与表面成60°角，当波长$\lambda = 632.8nm$的氦氖激光垂直入射镜片时（见教材图15-78），求：

（1）晶片内o、e光线的夹角；

（2）o光和e光的振动方向；

（3）o、e光通过晶片后的相位差。

【解】

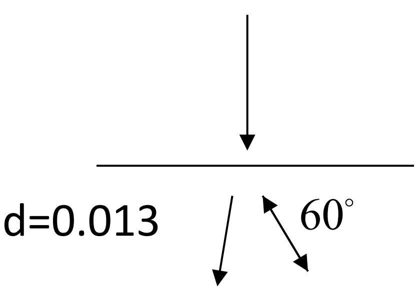
(1) o光遵守折射定律，因此它将不偏折地通过晶片。此外，由惠更斯作图法，可见e光波法线的方向与o光相同，故

$$\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

因此

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{n_0^2}{n_e^2} tg\beta\right) = tg^{-1}\left[\frac{(1.658)^2}{(1.486)^2} \cdot tg30^\circ\right]$$

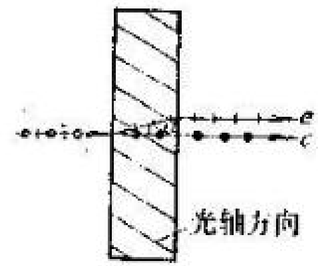
$$= 35^\circ 42'$$



由此得到o光与e光的夹角

$$\alpha = \theta - \beta = 35^\circ 42' - 30^\circ = 5^\circ 42'$$

(2) 由于o光与e光都在图面内（如图所示），所以图面是o光与e光的共同主平面。o光的振动方向垂直于图面，以黑点表示。e光的振动方向在图面内，以线条表示。



(3) e光使法线沿β方向传播时的（法线）折射率，可表示为

$$n(\beta)=\frac{c}{v_N}=\frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_e^2\cos^2\beta+n_0^2\sin^2\beta}}$$

于是

$$n(30^\circ)=\frac{1.658\times1.486}{\sqrt{(1.486)^2\cos^2 30^\circ+(1.658)^2\sin^2 30^\circ}}$$
$$=1.6095$$

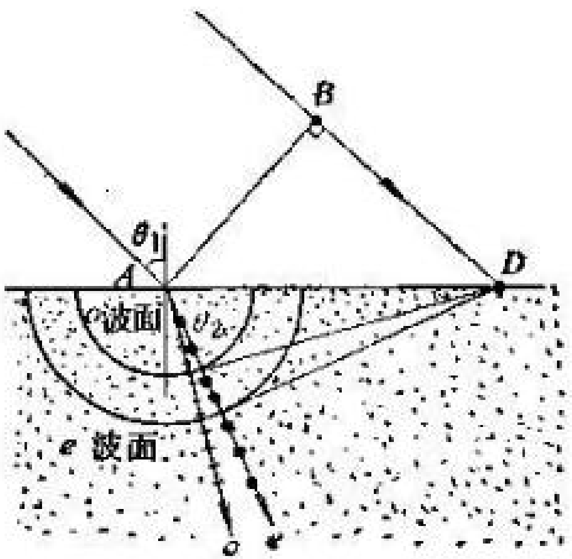
因此o光与e光通过晶片后的位相差

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_0-n_e)d=\frac{2\pi}{632.8\times10^{-6}mm}(1.658-1.6095)\times0.013mm$$
$$\approx2\pi$$

7.一束汞绿光在60°角下入射到KDP晶体表面，晶体的$n_0=1.512,\ n_e=1.470$ ，若光轴与晶体表面平行且垂直于入射面，试求晶体中o光与e光的夹角。

【解】

本题所设情况如图所示。这时，e波波面与图面（入射面）的截线跟o波波面的截线类似，都是圆形。从图中容易看出，对于任意的入射角θ_1，它的正弦与e光折射角θ_{2e}的正弦之比都为



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_{2e}}=\frac{BD}{R}=\frac{c}{v_e}=n_e$$

式中R是e波面的圆截线的半径。由于c/v_e是一常数，所以在本题的的特殊情况下，光线遵守普通的折射定律，它的折射方向可按上式计算。

当$\theta_1 = 60^\circ$时，e光的折射角θ_{2e}由下式求出：

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin\theta_{2e}} = 1.470$$

得到

$$\theta_{2e} = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.470}\right) = 36^\circ 6'$$

而o光的折射角 $$\theta_{2o} = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.512}\right) = 34^\circ 56'$$

因此o光与e光的夹角

$$\alpha = \theta_{2e} - \theta_{2o} = 36^\circ 6' - 34^\circ 56' = 1^\circ 10'$$

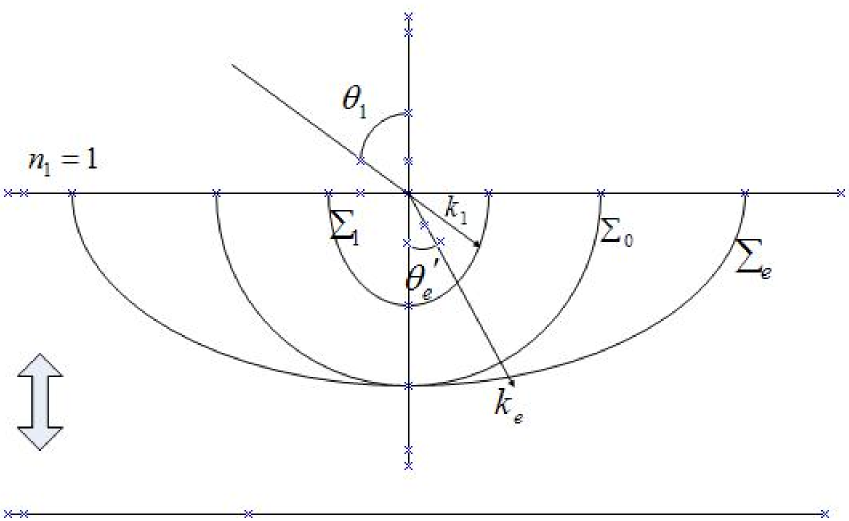
8.如教材图15-79所示，一块单轴晶片的光轴垂直于表面，晶片的两个主折射率分别为 n_0 和 n_e 。证明：
当平面波以 θ_1 角入射到晶片时，晶体中非常光线的折射角 θ_e'，可由下式给出：

$$\tan\theta_e' = \frac{n_0 \sin\theta_1}{n_e\sqrt{n_e^2 - \sin^2\theta_1}}$$

【证】

首先有，$k_1 \sin\theta_1 = k_e \sin\theta_e$

根据折射定律： $n_1 \sin\theta_1 = n(\theta_e)\sin\theta_e$



$$\Rightarrow \quad n(\theta_e) = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_e} \quad (n_1 = 1)$$

$$n(\theta_e) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta_e + n_e^2 \sin^2\theta_o}}$$

$$\Rightarrow \quad tg\theta_e = \frac{n_e \sin\theta_1}{n_o\sqrt{n_e^2 - \sin^2\theta_1}}$$

$$\therefore \quad tg\theta_e' = \frac{n_o^2}{n_e^2}\, tg\theta_e = \frac{n_o \sin\theta_1}{n_e\sqrt{n_e^2 - \sin^2\theta_1}}$$

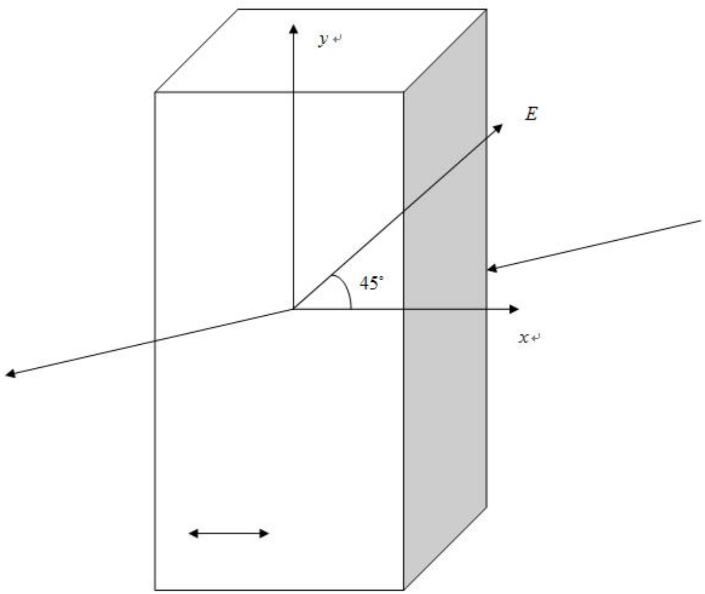
15.一束线偏振的钠黄光（$\lambda = 589.3nm$）垂直通过一块厚度为$1.618\times10^{-2}mm$ 的石英晶片。晶片折射率为$n_o = 1.54424, n_e = 155335$。光轴沿x方向（见教材图15-84），试对于以下三种情况，决定出射光的偏振态。

（1）入射线偏振光的振动方向与x轴成45° 角；

（2）入射线偏振光的振动方向与x轴成-45° 角；

（3）入射线偏振光的振动方向与x轴成30° 角。

【解】



用矩阵表示方便求解

1) 首先定好晶体的快慢轴，石英—正晶体

光轴在x轴(e光)，故快轴在y轴(o光矢的方向)

2) 玻片产生的相位延迟为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left|n_o - n_e\right| d = \frac{2\pi\times1.618\times10^{-2}}{589.3\times10^{-6}}\left|1.55335 - 1.54424\right| = \frac{\pi}{2},$$

该玻片为$\frac{1}{4}$玻片。（快轴在y轴）

3）

$$(1)\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos 45^\circ\\ \sin 45^\circ\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}\quad\Rightarrow \text{右旋圆偏振光}$$

$$(2)\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ)\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\quad\Rightarrow \text{左旋圆偏振光}$$

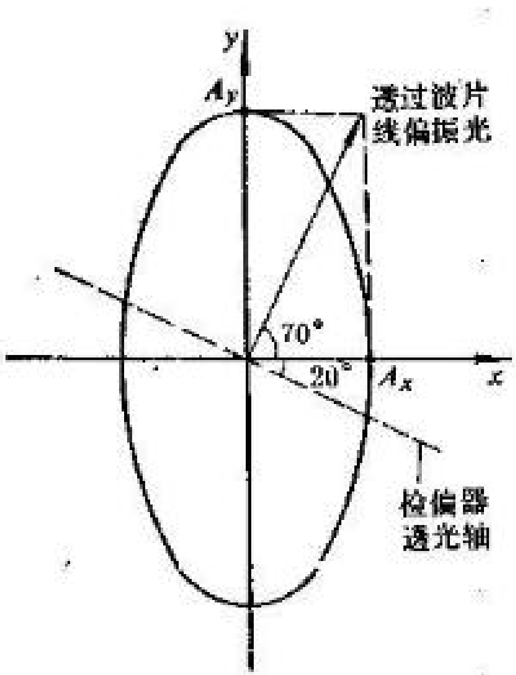
$$(3)\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos 30^\circ\\ \sin 30^\circ\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{1}{2}i\end{bmatrix}\quad\Rightarrow \text{右旋椭圆偏振光}$$

17.通过检偏器观察一束椭圆偏振光，其强度随着检偏器的旋转而改变。当检偏器在某一位置时，强度为极小，此时在检偏器前插入一块/4 片，转动/4 片使它的快轴平行于检偏器的透光轴，再把检偏器沿顺时针方向转过° 就完全消光。试问：

（1）该椭圆偏振光是右旋还是左旋？

（2）椭圆的长短轴之比？

【解】

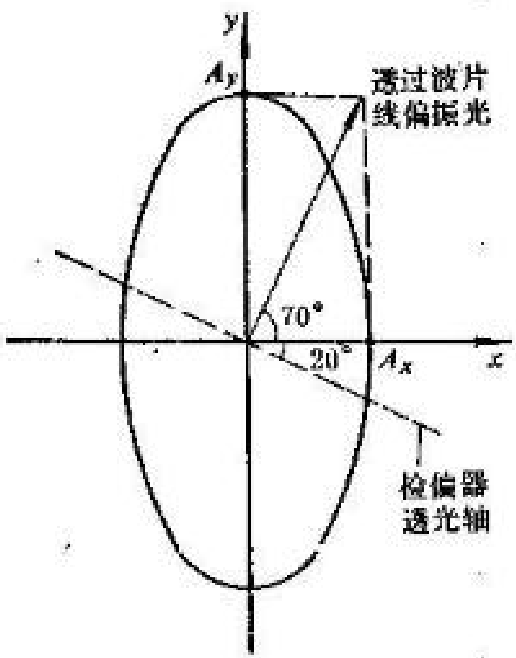


(1) 椭圆偏振光可视为一个光矢量沿长轴方向的线偏振光和一个位相差$\pi/2$的光矢量沿短轴方向的线偏振光的合成。设短轴方向为x轴，长轴方向为y轴（如图所示）。

按题意，插入快轴沿x轴的$\dfrac{1}{4}$玻片后，透射光为线偏振光，其振动方向与x轴成70°角。因而光矢量沿y方向振动和光矢量沿x方向振动的位相差变为0。

由于快轴沿x轴的$\frac{1}{4}$波片产生y方向振动相对于x方向振动的位相差应为$\pi/2$。

这是右旋椭圆偏振光。



(2) 由图可知，椭圆长轴和短轴之比为

$$\frac{A_y}{A_x}=tg70^{\circ}=2.747$$

19. 导出长短轴之比为2:1、且长轴沿x轴的左旋和右旋椭圆偏振光的琼斯矢量，并计算这两个偏振光叠加的结果。

【解】 对于长、短轴之比为2:1，长轴沿x轴的右旋椭圆偏振光

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_x = \boldsymbol{A}_x e^{ikz} = 2ae^{ikz} \qquad \tilde{\boldsymbol{E}}_y = \boldsymbol{A}_y e^{i(kz+\delta)} = ae^{i(kz-\frac{\pi}{2})}$$

因此 $$\sqrt{\boldsymbol{A}_x^2 + \boldsymbol{A}_y^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

则，该偏振光的归一化琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}_R = \frac{a}{\sqrt{5}a}\begin{bmatrix} 2 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$$

如果所求偏振光是左旋的，$\delta=\frac{\pi}{2}$，因此其琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}_L=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ e^{i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ i\end{bmatrix}$$

两偏振光相加的结果

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_R+\boldsymbol{E}_L=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ -i\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ i\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2+2\\ -i+i\end{bmatrix}$$

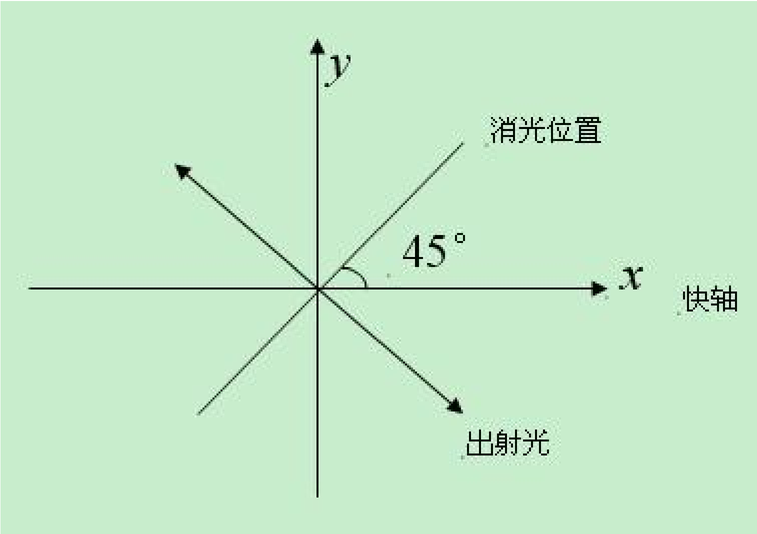
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}=\frac{4}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

合成波是光矢量沿x轴的线偏振光，

它的振幅是椭圆偏振光x分量振幅的2倍。

18.为了决定一束圆偏振光的旋转方向，可将 $\lambda/4$ 片置于检偏器之前，再将后者转至消光位置。此时 $\lambda/4$ 片快轴的方位是这样的：需将它沿着逆时针方向转45°才能与检偏器的透光轴重合。问：该圆偏振光是右旋还是左旋？

【解】



据相位变化关系来求解：

$$\delta_\lambda + \delta_{\lambda/4} = \delta_{出} \quad (\boldsymbol{E}为2,4象限)$$

$$\delta_\lambda + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore \quad \delta_\lambda = \frac{\pi}{2}$$

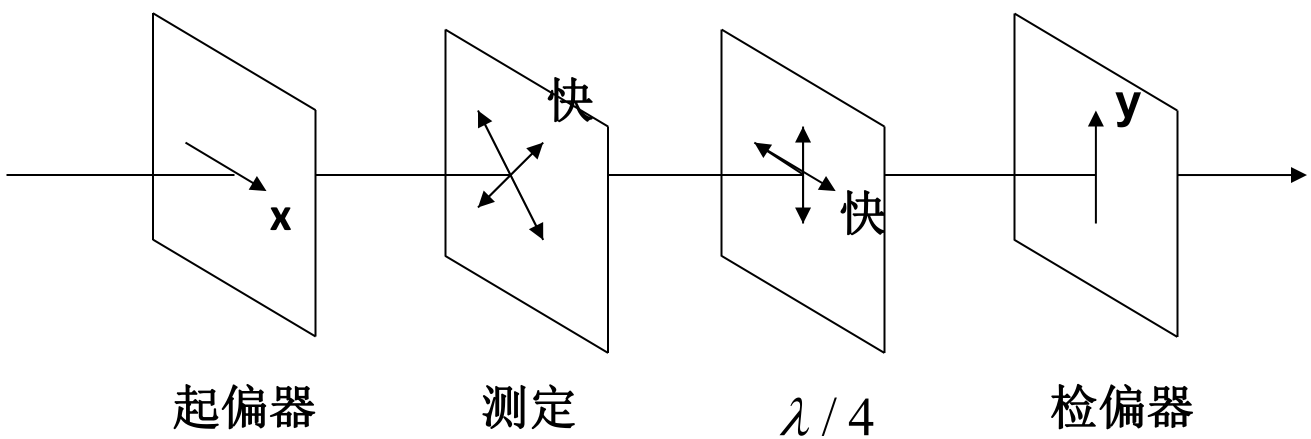
$\sin\delta_\lambda > 0$，故该圆偏振光为左旋的。

21.为测定波片的相位延迟角δ ，采用教材图15-85所示的实验装置：使一束自然光相继通过起偏器、待测波片、$\lambda/4$片和检偏器。当起偏器的透光轴和$\lambda/4$的快轴沿x轴，待测波片的快轴与x轴成45°角时，从$\lambda/4$片透出的是线偏振光，用检偏器确定它的振动方向便可得到待测玻片的相位延迟角。试用琼斯计算法说明这一原理。

【解】

据题设条件，从起偏器透出的线偏振光的琼斯矢量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

而$\dfrac{1}{4}$波片和待测波片的琼斯矩阵分别为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ 和 $\cos\dfrac{\delta}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i\,tg\dfrac{\delta}{2} \\ -i\,tg\dfrac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix}$



因此，线偏振光通过待测波片和$\frac{1}{4}$波片后的偏振态由下面的矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i\ tg\frac{\delta}{2} \\ -i\ tg\frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i\ tg\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} = \cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ tg\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}$$

这是一个线偏振光，振动方向与x轴的夹角$\theta = \frac{\delta}{2}$。

因此，如利用检偏器确定夹角θ，便可得到波片的位相延迟角δ。

25.一块厚度为0.05mm的方解石波片放在两个正交的线偏振器中间，波片的光轴方向与两线偏振器透光轴的夹角为 45° ，问在可见光范围内哪些波长的光不能透过这一系统？

【解】

当两偏振器的透光轴平行，且与波片快、慢轴成45°角时，透过系统的强度

$$I = A^2 - A^2 \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi(n_o - n_e)d}{\lambda}$$

$$= A^2\cos^2\frac{\pi(n_o - n_e)d}{\lambda}$$

显然，当

$$\frac{\pi(n_o - n_e)d}{\lambda} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad m = 0,1,2,\cdots \text{时，} \quad I = 0,$$

相应波长的光不能透过该系统。

这些波长是

$$\lambda = \frac{(n_o - n_e)d}{m+\frac{1}{2}} = \frac{(1.6584-1.4864)\times 0.05\times 10^6 nm}{m+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8600}{m+\frac{1}{2}} nm$$

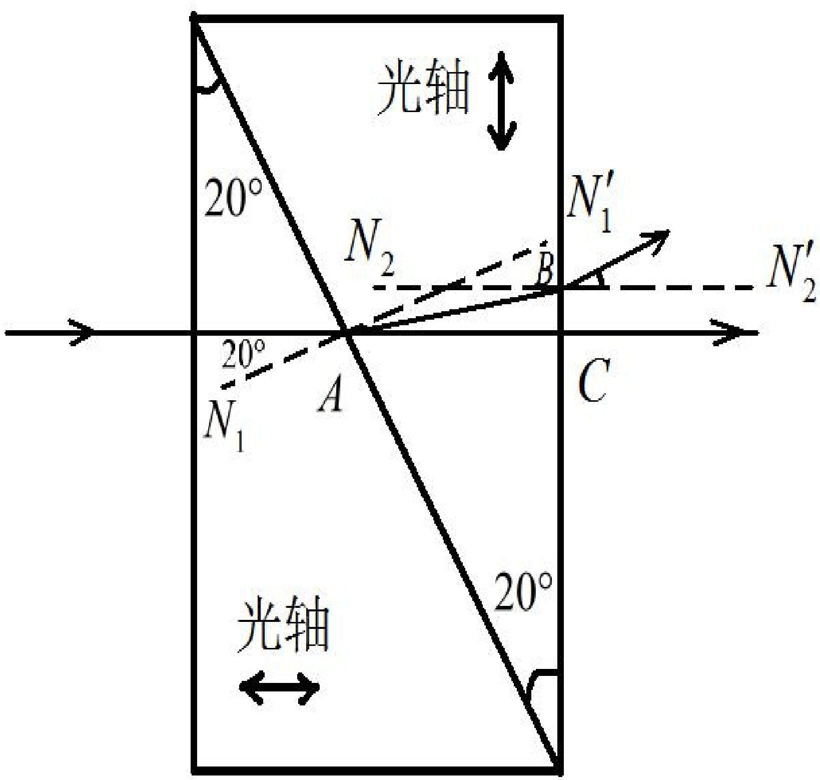
取$m = 11, 12, 13, \cdots, 21$,对应的波长$\lambda = 748nm, 688nm, 637nm, 593nm, 555nm, 521nm,$
$491nm, 465nm, 441nm, 419nm, 400nm$。

物理光学第五章习题解答

13. 石英晶体制成的塞拿蒙棱镜，每块的顶角是20°（如图）。光束正入射于棱镜，求从棱镜出射的o光线与e光线之间的夹角。

分析：运用光在晶体表面的折反射定律（P484）

光束垂直入射第一块晶体时，o光和e光以相同速度传播且不分开。对于o光，经过两棱镜界面时，折射率不变，不发生偏折；在棱镜-空气界面也是正入射，不发生偏折；对于e光，在两棱镜界面和棱镜-空气界面均发生折射。



解：e光在两棱镜的界面，入射角为20°，由折射定律

$$\mathrm{n}_o \sin 20° = n(\theta)\sin\theta_t$$

$$n(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta}}$$

θ是e光波法线与光轴的夹角（$\overline{AB}$与$\overline{\mathrm{BC}}$的夹角），**θ_t是e光波法线与界面法线的夹角**（$\overline{AB}$与$\overline{\mathrm{N_1N_1'}}$的夹角），且

$$\theta = 90° - (20° - \theta_t) = 70° + \theta_t$$

联合以上各式，得

$$\tan\theta = \frac{-n_e^2 \sin 40° - n_e\sqrt{n_e^2 \sin^2 40° - 4(n_o^2 - n_e^2)\sin^2 20° \cos 40°}}{2(n_o^2 - n_e^2)\sin^2 20°}$$

$$= 475.768$$

其中，n_o=1.544，n_e=1.553

因此，

$$\theta = 89°52'46'', n(\theta) = 1.553$$

在棱镜-空气界面，法线为 $\overline{N_2N_2'}$ ，入射角为 $\frac{\pi}{2}-\theta$，并设空气折射率为1，折射角为θ_t，则

$$n(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta_t'$$

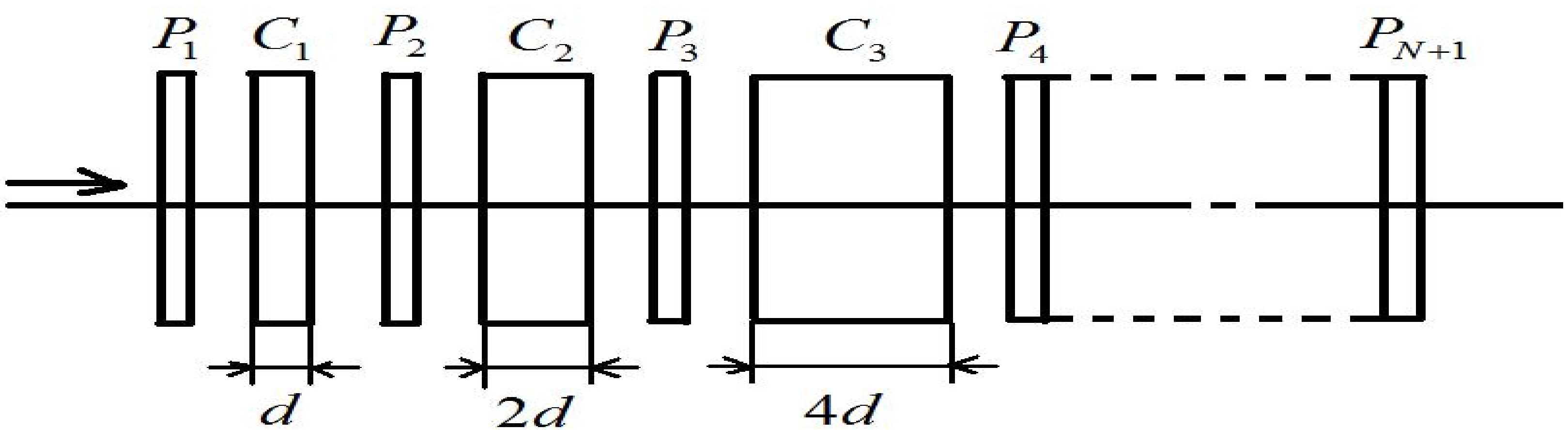
由于在空气中波法线与光线重合，且o光沿水平方向出射，所以o光线和e光线之间的夹角为

$$\theta_t = 11'13''$$

22. 一种观测太阳用的单色滤光器如图所示，由双折射晶片C和偏振片P交替放置而成。滤光器的第一个和最后一个元件是偏振片，晶片的厚度相继递增，即后者是前者的两倍，且所有晶体光轴都相互平行并与光的传播方向垂直。所有偏振片的透光轴均互相平行，但和晶体光轴成45°角，设该滤光器共由N块晶体组成。试用琼斯矩阵法证明该滤光器总的强度透过率T是φ的函数，即

$$T=\left(\frac{\sin 2^N\varphi}{2^N\sin\varphi}\right)^2,\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(n_o-n_e)d}{2}$$

因此该滤波器对太阳光的各种波长有选择作用。



分析：直接计算比较复杂，可以先从N=1,2,3等简单情况考虑，找出规律再推广计算，注意掌握复数和三角函数的关系及相关化简方法

解：取x轴方向与晶片快轴平行，偏振片与x轴成45度，则晶片琼斯矩阵和偏振片琼斯矩阵分别为

$$G_c=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\delta}\end{pmatrix}\qquad G_{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\qquad \delta=\frac{2\pi(n_o-n_e)d}{\lambda}$$

通过第一片偏振片后，光波的归一化琼斯矩阵为

$$E_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

所以最终的光波琼斯矩阵为

$$E=\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\delta}\end{pmatrix}\cdots\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\delta}\end{pmatrix}}_{\text{重复N次}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

从右往左逐项计算，可得

$$E=\frac{1+e^{i\delta}+e^{i2\delta}+\ldots+e^{i(2^N-1)\delta}}{2^N}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1-e^{i2^N\delta}}{1-e^{i\delta}}\frac{1}{2^N\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1-\cos 2^N\delta+i\sin 2^N\delta}{1-\cos\delta+i\sin\delta}\frac{1}{2^N\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left|E_x\right|^2=\frac{(1-\cos 2^N\delta)^2+\sin^2 2^N\delta}{(1-\cos\delta)^2+\sin^2\delta}\frac{1}{2^{2N+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{2^N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2\left(\frac{1}{2^N}\right)^2$$

又 $\varphi=\dfrac{\delta}{2}$

所以 $$I=\left|E_x\right|^2+\left|E_y\right|^2=2\left|E_x\right|^2=\left(\frac{\sin 2^N\varphi}{2^N\sin\varphi}\right)^2$$

即

$$T=\left(\frac{\sin 2^N\varphi}{2^N\sin\varphi}\right)^2$$