一次齐次ODE

$$\begin{cases} f'(t)+af(t)=0 \\ f(0)=A \end{cases}$$ 则解为 $f(t)=Ae^{-at}$

一次非齐次ODE

$$\begin{cases} f'(t)+af(t)=g(t). \\ f(0)=A \end{cases} \quad (*)$$ 分解为 (I) $\begin{cases} f'(t)+af(t)=0 \\ f(0)=A \end{cases}$ 与 (II) $\begin{cases} f'(t)+af(t)=g(t) \\ f(0)=0 \end{cases}$

$y'(x)+P(x)y(x)=Q(x)$

$y=c\cdot e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$

$Q(x)=0$、 $y=c\cdot e^{-\int P(x)dx}$

解(I)得 $f_I(t)=Ae^{-at}$.

利用齐次化原理解(II)

$$\begin{cases} w'(t,\tau)+aw(t,\tau)=0 \\ w(0,\tau)=g(\tau) \end{cases}$$ ，τ是参数 $\Rightarrow w(t,\tau)=g(\tau)e^{-at}$

则 $f_{II}(t)=\int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau=\int_0^t g(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau$

$\Rightarrow$ (*)的解为 $f(t)=f_I+f_{II}=Ae^{-at}+\boxed{\int_0^t g(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau}$

二次齐次ODE

$$\begin{cases} f''(t)+af'(t)+bf(t)=0 \\ f(0)=A,\ f'(0)=B \end{cases}$$ 解 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 得 $\lambda_\pm=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ （只考虑两个不同根的情形）

定理

从而通解为 $f(t)=C_1e^{\lambda_+t}+C_2e^{\lambda_-t}$ 由初值确定 C_1, C_2.

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

不相等实根

二次非齐次ODE

相等实根： $y=(C_1+C_2x)e^{-\lambda x}$

$e^{-\alpha x}[c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x]$

共轭复根： $\lambda=\alpha\pm\beta i$

$y=e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x]$.

$$\begin{cases} f''(t)+af'(t)+bf(t)=g(t) \\ f(0)=A, \quad f'(0)=B \end{cases} \quad (**)$$

解 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 得 $\lambda_\pm = \dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

(**) 分解为

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} f''(t)+af'(t)+bf(t)=0 \\ f(0)=A, \quad f'(0)=B. \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} f''(t)+af'(t)+bf(t)=g(t) \\ f(0)=0, \quad f'(0)=0 \end{cases}$$

则 (I) 的解可由通解

$f_{\mathrm{I}}(t)=C_1e^{\lambda_+t}+C_2e^{\lambda_-t}$ 通过

初值 $f(0)=A$, $f'(0)=B$ 确定.

(II) 的解通过齐次化原理

$$\begin{cases} w''(t,\tau)+aw'(t,\tau)+bw(t,\tau)=0 \\ w(0,\tau)=0, \quad w'(0,\tau)=g(\tau) \end{cases}, \quad \tau\text{参数}$$

可以解得 $w(t,\tau)=C_1(\tau)e^{\lambda_+t}+C_2(\tau)e^{\lambda_-t}$

从而 (II) 的解为

$$f_{\mathrm{II}}(t)=\int_0^t w(t-\tau,\tau)\,d\tau$$

因此 (**) 的解为 $f(t)=f_{\mathrm{I}}(t)+f_{\mathrm{II}}(t)$.

一、$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

设方程 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$ 特解形式为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$，则得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x). \quad ——(*)$$

(1)如果λ不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根，则 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

(2)如果λ是特征方程$r^2+pr+q=0$的单根，则 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$.

(3)如果λ是特征方程$r^2+pr+q=0$的重根，则 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$.

提示:

此时 $\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p=0$.

要使($*$)式成立, $Q(x)$应设为$m+2$次多项式: $Q(x)=x^2Q_m(x)$,

其中 $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$.

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

❖**结论**

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

有形如

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R^{(1)}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}_m(x)\sin\omega x]$$

的特解，其中$R^{(1)}_m(x)$、$R^{(2)}_m(x)$是m次多项式, $m=\max\{l, n\}$, 而k按$\lambda+i\omega$(或$\lambda-i\omega$)不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取0或1. >>>