偏微分方程（工科）复习资料笔记

Das Schloss

2023/12/3

本资料为某学院朋辈辅学工科偏微分方程课程的资料，本学期我担任该课程朋辈辅学的“小老师”，为自己学院大二的同学们简单梳理了一下偏微分学习的知识点和解题思路。现在我决定把这份资料放在 cc98 上，希望能为今后同学们工科偏微分课程的学习~~（补天）~~提供一些帮助。也欢迎学习以及将要学习工科偏微分的同学们在帖子下面一起交流（当然也欢迎数院 3 学分偏微分的同学交流）

1 引言：偏微分学习方法

一言以蔽之，工科偏微分方程主要聚焦于某些特定偏微分方程的解析解法。

这门课非常容易面向考试学习，因为 PDE 属于整体框架非常清晰（或者说固定），只是题目灵活性较高（听说去年的考题灵活性就比较高），所以需要同学们平时多做题进行积累，并且注意总结归纳某种类型的偏微分的解题思路方法，做到举一反三。

这门课老师的上课内容中可能存在一些听也听不懂、考试也不考的部分，这些部分需要你自行取舍。具体的考试范围可以参考**工科偏微分方程考试范围求问**中的图片，不过如果老师有说还是尽量以老师为准。

然后我的建议是，首先，历年卷还是很重要的，建议提前买好（蓝田大概率是有的），如果上课学到相应部分就可以试着做做看了，然后期末考前在各种题型解题思路都已经比较清晰的情况下，再一次性刷一套或多套历年卷。然后平时作业也得注意认真做，如果有超出考试范围的作业题（理论上不会有）可以适当放松，听课的话同理。顺便，记得复习一下 ODE，回顾一下某些常见 ODE 方程的解法。

这里再说点题外话，打印店的历年卷基本上都是从 cc98 上 copy 过来的，甚至还 steal 了 98 上 bigbig 同

学自己整理的小笔记**呕心沥血偏微分方程（061B0090）复习指南**，cc98 上也有各种偏微分资料（如电子版的教材和打印店 14 元一份的习题解答），只要你想找，什么都找得到，但是纸质资料复习起来确实可能会更加方便一点，因此买不买打印店的资料还是由各位同学们自己决定。

总而言之，工科偏微分方程远没有同学们想象的那么难，放平心态，认真学习，拿高分不是问题。

2 二阶线性方程

二阶线性方程的具体形式为 $au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+f=0$

其中判别式 $\Delta=b^2-ac$，而特征方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{a}$

注意 u_{xy} 的系数为 2b（因为 Δ 的公式也变了），实质上就是二次方程求根，具体可以参考书上的推导

特征方程的作用是，当你使用特征方程的解 $\xi(x,y)=C_1$ 和 $\eta(x,y)=C_2$ 进行变量替换后，最终二阶线性方程可以被简化为标准型

这里根据 Δ 的正负性对二阶线性方程进行分类

2.1 Δ>0 双曲型

此时你能很容易找出两个实函数解 ξ 和 η，这样可以直接进行变量替换，得到一个二阶导项只有 $u_{\xi\eta}$ 的线性方程（这就是双曲型的标准型），另外，有时也可以作进一步变换，$\xi=s+t$，$\eta=s-t$（当然，反一反也行），这样就能转化成二阶导项只有 u_{ss} 和 u_{tt} 的线性方程（双曲型标准型也同样可以写成这个形式）

简单来道例题，作业 1.11(1)：

$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$

先算 $\Delta=4>0$，说明是双曲型方程，那么计算 $\frac{dy}{dx}=\frac{1\pm\sqrt{4}}{1}=-1/3$，进而得到 $\xi=y-3x$，$\eta=x+y$，对原式进行变量替换，得 $u_{\xi\eta}=\frac{1}{2}u_\eta$，当然也可以进一步变换成 s 和 t 的标准式，得到 $u_{ss}-u_{tt}=u_s-u_t$

再来道难的，18 年冬学期偏微分期末考第六题（前半部分）

$u_{xx}+2cos(x)u_{xy}-sin^2(x)u_{yy}-sin(x)u_y=2(1+cos^2(x))$

同样，计算 $\Delta=cos^2(x)+sin^2(x)=1>0$，为双曲型方程，特征线方程 $\frac{dy}{dx}=cos(x)\pm 1$，因此取 $\xi=x-sin(x)+y$，$\eta=x+sin(x)-y$，然后经过大量的运算，能求出 $u_{\xi\eta}=\frac{1+cos^2(x)}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}cos(\xi+\eta)$

2.2 Δ=0 抛物线型

此时只能找到一个实数解 ξ，不过我们可以随意选择一个与 ξ 线性无关的解 η，就能实现标准型转换

比如这道作业题 1.11(3)：

$u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+5u_x=0$

很明显，$\Delta=0$，那么首先算出 $\xi=2x+y$，再随意取一个 $\eta=x$，就可得到 $u_{\eta\eta}+10u_\xi+5u_\eta=0$

2.3 Δ<0 椭圆型

此时你能找到的两个解都是复函数 s 和 r 且共轭，那取 $s=\xi+i\eta$，$r=\xi-i\eta$，就可以用 ξ 和 η 将原来的方程化为标准型（这本教材上这些符号用得都非常随意，自己学习的时候调整成自己适应的写法就行了）

比如这道作业题 1.11(2)：

$u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$

算一下 $\Delta=-1<0$，说明是椭圆型，算一下两个解为 $\frac{dy}{dx}=2\pm i$，因此 $\xi=y-2x$，$\eta=x$，算得 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$

3 行波法

行波法的主要难点是对第一章的融会贯通，以及半无界弦以及强迫振动的求解方法，并且需要你拥有较好的微积分能力

3.1 无界弦自由振动

首先是最简单的形式，无界弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad ,t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

如果你第一次遇到这个形式的方程，最容易想到的思路就是通过第一章中的化简方法，将函数化为 $u_{\xi\eta}$ 形式的方程，然后将方程进行两次积分，实现方程的求解（这里建议看书上的推导过程并自己推导一下，而且需要尝试推导一下本复习资料考题汇总部分的第一题，考试中遇到的许多行波法题目会涉及该题类似的偏微分求解），然后带入方程的初始条件，解得最终的结果

通过一系列运算，可以算得这个方程最终的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$$

这就是达朗贝尔 (D'Alembert) 公式，如果题目可以被化为这个方程形式的话，可以直接用这个公式一步搞定

For example, this question:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad ,t>0 \\ u|_{t=0} = x^2 \\ u_t|_{t=0} = -x \end{cases}$$

这道题直接带入达朗贝尔公式，可以得到 $u(x,t) = \frac{1}{2}[(x-t)^2+(x+t)^2] - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\alpha d\alpha = x^2 - xt + t^2$，验证一下，完全正确

当然，考试的时候有些题没法化为这个形式的方程，那么就直接利用你在微积分和常微分中学到的知识来解题，这里就不多赘述了（后面的题多的是）

3.2 半无界弦自由振动

半无界弦的最大特点是，相对于无界弦，其 x 的取值范围为 $x \in (0, \infty)$，且会多出一个 x=0 时的条件

对于这种问题，我们的思路是，通过延拓将半无界弦问题转化为无界弦问题，然后用上面的方法解决它

3.2.1 奇延拓

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & , x > 0, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 & , t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & , x > 0 \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & , x > 0 \end{cases}$$

如上式，x=0 时 u 的值恒为 0，那么可以考虑，将整个函数补全（延拓）成关于 x 的奇函数

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \varphi(x) & , x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \psi(x) & , x \geq 0 \\ -\psi(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

然后进行计算，只取 x>0 的部分就行了，算出最终结果

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & , x - at \geq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & , x - at < 0 \end{cases}$$

3.2.2 偶延拓

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & ,x>0,t>0 \\ u_x|_{x=0} = 0 & ,t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & ,x>0 \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & ,x>0 \end{cases}$$

如上式，x=0 时 u 关于 x 的导数恒为 0，那么可以考虑，将整个函数补全（延拓）成关于 x 的偶函数

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \varphi(x) & ,x \geq 0 \\ \varphi(-x) & ,x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \psi(x) & ,x \geq 0 \\ \psi(-x) & ,x<0 \end{cases}$$

同样只取 x>0 的部分就行了，算出最终结果

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha & ,x-at \geq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{0}^{at-x}\psi(\alpha)d\alpha & ,x-at<0 \end{cases}$$

再看看这道题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & ,x>0,t>0 \\ u_x|_{x=0} = 0 & ,t>0 \\ u|_{t=0} = x^2 & ,x>0 \\ u_t|_{t=0} = -x & ,x>0 \end{cases}$$

观察到此题的条件为 x=0 时 $u_x = 0$，所以对其作偶延拓

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 \\ u_t|_{t=0} = -|x| \end{cases}$$

用达朗贝尔公式算出结果

$$u(x,t) = \begin{cases} x^2 - xt + t^2 & ,0 \le t \le x \\ \frac{x^2+t^2}{2} & ,0 \le x \le t \end{cases}$$

3.3 无界弦强迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad ,t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

根据叠加原理，可以把 u 拆分成 $u_1 + u_2$

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2 u_{1xx} \quad ,t > 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_{1t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} + f(x,t) \quad ,t > 0 \\ u_2|_{t=0} = 0 \\ u_{2t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其中第一部分直接用自由振动的方法进行求解，而第二部分就根据书中的齐次化原理，化为

$$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx} & ,t>0 \\ \omega|_{t=\tau}=0 \\ \omega_t|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases}$$

得到最终结果 $u_2=\int_0^t \omega(x,t,\tau)d\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$

这里可以这样理解，对于 u，如果能找到 u_2 使得 $u_1=u-u_2$ 满足 $u_{1tt}=a^2u_{1xx}$，那就能够化成简单问题进行求解了，而 u_2 可以取任意的满足 $u_{2tt}=a^2u_{2xx}+f(x,t)$ 的函数式，不过取 $u_2|_{t=0}=0$ 和 $u_{2t}|_{t=0}=0$ 最让人省心

那么，为什么要说上面这些呢？因为我们即将迎来行波法的最终 BOSS：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & ,x>0,t>0 \\ u|_{x=0}=g(t) & ,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & ,x>0 \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & ,x>0 \end{cases}$$

（对于偶延拓的情况，上第二式应该改成 $u_x|_{x=0}=g(t)$）

这里有两种方法可以解决，两者相差不算太大，第一种能通过公式法解决所有 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的问题，而第二种更是能让你做出化为标准型后还带着 u_t 和 u_x 甚至 u 的行波法大混合题

第一种做法很简单，就是一步步“降维”，一点点化简成我们认识的形式

比如上面的方程与强迫振动唯二的区别，就是其都取了 x>0 的半无界，以及其在 x=0 时不再等于 0，而是等于 g(x)，那么我们第一步，可以先取 $v(x,t)=u(x,t)-g(t)$（当然，偶延拓时减去 xg(t)），这样就可以化为

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}+f(x,t)-g''(t) & ,x>0,t>0 \\ v|_{x=0}=0 & ,t>0 \\ v|_{t=0}=\varphi(x)-g(0) & ,x>0 \\ v_t|_{t=0}=\psi(x)-g'(0) & ,x>0 \end{cases}$$

然后，进行奇延拓，化为正常的强迫振动型方程，再套用公式解出最终结果，最后只要再加上 g(t)，就能得到 u 的最终结果了，这里的步骤就省略掉了

第二种做法就要用到我们上面的那个“理解”了，我们最痛恨的，就是 f(x,t) 和 x=0 时的 g(x) 了，那么，我们可以找出一个 $\omega(x,t)$，同时满足 $\omega_{tt}=a^2\omega_{xx}+f(x,t)$ 以及 $\omega|_{x=0}=0$，那么，取 $v(x,t)=u(x,t)-\omega(x,t)$，我们就可以把整道题化简为单纯的半无界弦问题，然后把它解决掉

废话不多说，上题吧（2017 冬期末考试第三题）:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2 & ,x>0,t>0 \\ u_x|_{x=0}=t & ,t>0 \\ u|_{t=0}=0 & ,x>0 \\ u_t|_{t=0}=0 & ,x>0 \end{cases}$$

这道题两种方法都能做，不过我这边说下第二种方法，首先，求 $u_{tt}-u_{xx}=2$ 和 $u_x|_{x=0}=t$ 的特解，如果眼睛够尖，你凑都能凑出一个特解出来，但如果看不出，你可以选择将方程标准化，然后求出 $u=\frac{t^2-x^2}{2}+F(x+t)+G(x-t)$，带入 x=0 时条件，并随意取 F(x)=0，就可以求出 $G(x)=-\frac{1}{2}x^2$，进而得到特解 $\omega=xt-x^2$

往里一带 $v=u-\omega$，哎，这不就是我们上面半无界弦的例题吗？然后用同样的方法就能算出 v 的解，进而求出原题的解为

$$u(x,t)=\begin{cases} t^2 & ,0\le t\le x \\ \frac{t^2-x^2}{2}+tx & ,0\le x\le t \end{cases}$$

顺带一提，原题的第一小问已经给出了 ω 的具体公式，但我们完全可以知道，这个公式是从哪来的

4 分离变量法

分离变量法又称驻波法，其精髓总结起来，就是猜解的形式，然后解出自己猜的解

本章主要整理一维波动方程、一维热传导方程、二维泊松方程以及幂级数，其余部分理论上考试不考，某

王伟老师今年的小测里涉及了二维平板热传导，但考试应该是不会考的，如果实在担心建议自己看一下，和一维热传导基本上一模一样

4.1 有界弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad ,0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

对于这个类型的方程，猜想解是一个 x 的函数与一个 t 的函数的乘积，即 $u(x,t) = X(t) * T(t)$，代入原方程中发现

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

这里发现两个式子都是分别仅关于 x 和 t 的，那么说明两个式子的结果恒为一个常数，因此设该常数后开始解 ODE

$$X''(x) = \lambda X(x)$$
$$T''(t) = a^2 \lambda T(t)$$

由边界条件可知，X(0)=X(l)=0，因此我们的后续操作就是确定这个 λ 并且解出 X(t)

根据计算，当 $\lambda \leq 0$ 时，X(x) 只能解出恒为 0 的解，因此我们的主要关注点需要放在 $\lambda > 0$ 的时候，$X(x) = C_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$，代入初始条件

$$C_1 = 0$$
$$C_1 cos(\sqrt{\lambda} l) + C_2 sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

最后得到 $\sqrt{\lambda} l = n\pi$，因此当 $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ 时

$$X_n(x) = C_n sin(\frac{n\pi x}{l})$$

而解关于 T(t) 的方程得

$$T_n(t) = a_n cos(\frac{n\pi at}{l}) + b_n sin(\frac{n\pi at}{l})$$

最终整理得到

$$u_n(x,t) = (A_n cos(\frac{n\pi at}{l}) + B_n sin(\frac{n\pi at}{l}))sin(\frac{n\pi x}{l})$$

然后代入与 t 有关的初始条件，注意到所有满足 Dirichlet 条件的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都能被傅里叶展开，那么就能将解表示为一个级数展开

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(\frac{n\pi x}{l}) = \varphi(x)$$
$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n sin(\frac{n\pi x}{l}) = \psi(x)$$

那么，很明显，A_n 和 $\frac{n\pi a}{l} B_n$ 就是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 傅里叶展开之后的系数，那么就能求出

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$

需要注意的是，有时候边界条件并不一定是在 x=0 或 x=l 时函数值为 0，与行波法中类似，也有可能会碰见函数的一阶导为 0 的情况，这时解出的 X(t) 就不是正弦函数的形式了，而可能是余弦函数或者是带一个相位的三角函数，总之具体题目具体分析

4.2 有界弦强迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t) \quad ,0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

对于上面这种非齐次的方程，一般使用本征函数展开法解决

首先，用同样方法求出 λ，然后设

$$u_n(x,t) = c_n(t)sin(\frac{n\pi x}{l})$$

X(x) 的取值使得方程能够满足 x=0 和 x=l 的边界条件，而 $c_n(t)$ 需要使用其它条件来解出

$$\sum_1^\infty [c_n''(t) + (\frac{an\pi}{l})^2 c_n(t)]sin(\frac{n\pi x}{l}) = f(x,t)$$

那么将 f(x,t) 进行关于 x 的傅立叶展开，$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)sin(\frac{n\pi x}{l})dx$，得到 $c_n''(t) + (\frac{an\pi}{l})^2 c_n(t) = f_n(t)$

再代入初始条件，$c_n(0)=0$，$c'_n(0)=0$，最后能求出

$$c_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)sin(\frac{n\pi a(t-\tau)}{l})d\tau$$

当然，这里也可以用我们在行波法中提到的齐次化原理来进行求解，这里也不过多赘述

当然，有界弦非齐次方程加花和行波法中的加花基本一致，这里直接来到最终 Boss 处开打

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \quad ,0<x<l,t>0 \\ u|_{x=0}=p(t) \\ u|_{x=l}=q(t) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

这边可以使用和行波法一样的解题方法，同样是两个思路

对于“降维法”，同样我们最痛恨的是 x=0 和 x=l 时的值，那么就想办法把这两玩意儿给去掉

简单一想，就可以发现，对于 $\omega(x,t)=p(t)+\frac{x}{l}[q(t)-p(t)]$，原本的 u(x,t) 减去它后，便能将 p(t) 和 q(t) 给去了（导数为 0 的初值情况也可以自己找到一个 $\omega(x,t)$ 使得条件满足，这里就省略了）

那么，减掉之后，就是个

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}+f_2(x,t) \quad ,0<x<l,t>0 \\ v|_{x=0}=0 \\ v|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=\varphi_2(x) \\ v_t|_{t=0}=\psi_2(x) \end{cases}$$

的形式（具体方程就不写了，可以自己推一下），那么还是使用线性叠加原理的性质，将方程拆成

$$\begin{cases} v_{1tt} = a^2 v_{1xx} + f_2(x,t) & ,0 < x < l, t > 0 \\ v_1|_{x=0} = 0 \\ v_1|_{x=l} = 0 \\ v_1|_{t=0} = 0 \\ v_{1t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} v_{2tt} = a^2 v_{2xx} & ,0 < x < l, t > 0 \\ v_2|_{x=0} = 0 \\ v_2|_{x=l} = 0 \\ v_2|_{t=0} = \varphi_2(x) \\ v_{2t}|_{t=0} = \psi_2(x) \end{cases}$$

上面的两种方程我们都会求，那么只要把两个方程叠起来，就能获得最终的方程结果

另一种思路就是求出特解让 f(x,t),p(t) 和 q(t) 同时消失，然后直接将原题变成有界弦的自由振动，这里就不多讲了

对于热传导问题（即 $u_t = a^2 u_{xx}$）也是完全一样的做法，无非就是 T(t) 的解的形式不一样罢了，这里就不具体说明了

4.3 极坐标下的分离变量法

这部分的题目考得都比较常规，因此只需要稍微掌握一下做题方法，再做几道题目练练手就可以了

对于圆内稳定温度分布问题，其方程满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & ,x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y) & ,x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

对其进行极坐标转换（$x = rcos\theta$，$y = rsin\theta$），得到

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & ,0 \le r < 1, 0 \le \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) = \varphi(\theta) & ,0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

然后进行分离变量，设 $u = R(r)\Phi(\theta)$，求出

$$\Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0$$
$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0$$

此时观察到还有自然周期性条件 $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi)$ 和自然边界条件 $|R(0)| < \infty$，加入条件后设 $\lambda = n^2$，得本征函数 $\Phi(\theta) = c_ncos(n\theta) + d_nsin(n\theta)$

进而求出 $R_n(r)$ 的通解为

$$R_0(r) = a_0 + b_0ln(r)$$
$$R_n(r) = a_nr^n + b_nr^n$$

通过自然边界条件，很容易能发现，b_n 全部为 0，因此化简得到

$$u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_ncos(n\theta) + \beta_nsin(n\theta))$$

带入 r=1，就是傅立叶展开的形式，因此可以直接求出

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)cos(n\theta)d\theta$$
$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)sin(n\theta)d\theta$$

最后带回原式即可，书上给了个最终化简结果，不过理论上不需要记下来

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2rcos(\theta-\tau)+r^2}\varphi(\tau)d\tau$$

4.4 幂级数解法

考试虽然不考 Bessel 方程和 Legendre 方程在 PDE 上的应用，但是考试的时候可能会出现用幂级数的思想进行 ODE 解方程的题目，不过这类题目通常非常简单

幂级数的思想，总结来说就是，对于 $F(y,x,\frac{dy}{dx})$，将 y 表示为 $\sum_0^\infty a_k x^k$，再根据原方程解出这些系数，进而得到用幂级数表示的解

考试的时候理论上不会出现像 Bessel 方程一样有奇解的方程，所以考试应该不会接触到广义幂级数（除非题目里明确告诉你），不过这边简单提一下，遇到有奇解的方程，设 $y=x^c\sum_0^\infty a_k x^k$ 即可

来道简单例题，18 年期末考第 1 题，求出一个 $\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+10y=0$ 在 x=0 附近的多项式形式解

那么，我们设 $y=\sum_0^\infty a_n x^n$，代入得到

$$\sum_0^\infty[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(10-2n)a_n]x^n=0$$
$$a_{n+2}=\frac{2n-10}{(n+1)(n+2)}a_n$$

简单算一下，发现 $a_3=-\frac{4}{3}a_1$，$a_5=\frac{15}{4}a_1$，且 $a_7=a_9=...=0$，因此 $y=\frac{15}{4}x^5-\frac{4}{3}x^3+x$ 满足条件（取 $a_0=0$，$a_1=1$）

17 年期末考有道拓展题目，这边就不具体讲解了：当 λ 取何值时 $\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+(\lambda-1)y=0$ 在 x=0 附近存在多项式形式解，并求出这些解

5 积分变换法

有一些偏微分方程（包括前面说过的部分方程）可以利用傅立叶变换和拉普拉斯变换进行求解，考试理论上只考使用傅立叶变换求解的题目

5.1 傅立叶变换基本性质

傅立叶变换在之前（以及今后）的许多课中都有所涉及，这里就简单讲讲（书上相关公式里的符号写得非常混乱，我这里可能也没写好，非常抱歉）

傅立叶变换和傅立叶逆变换的公式分别为

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$
$$F^{-1}[g(\lambda)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

而对于傅立叶变换的求解，也有一些性质能够帮助我们简化计算（这里仅作列举，为方便同学们复习）

1. 线性性质

$$F[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 F[f_1(x)] + \alpha_2 F[f_2(x)]$$

2. 微分性质

$$F[f'(x)] = i\lambda F[f(x)]$$

3. 卷积性质

$$F[f_1(x) * f_2(x)] = F[f_1(x)] \cdot F[f_2(x)]$$
$$F[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} F[f_1(x)] * F[f_2(x)]$$

4. 平移性质

$$F[f(x-a)] = e^{-i\lambda a} F[f(x)]$$
$$F[e^{iax} f(x)] = F[f](\lambda - a)$$

5. 伸缩性质

$$F[f(kx)] = \frac{1}{|k|} F[f](\frac{\lambda}{k})$$

6. 乘子性质

$$F[xf(x)] = i\frac{d}{d\lambda} F[f](\lambda)$$

7. 对称性质

$$F^{-1}[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} F[f](-\lambda)$$

这里再写两个解偏微分方程时较为复杂但比较常见的变换，可以简单记记

$$F[e^{-Ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$$
$$F^{-1}[e^{-A\lambda^2}] = \sqrt{\frac{1}{2\pi A}} e^{-\frac{x^2}{4A}}$$

5.2 傅立叶变换求解偏微分方程

傅立叶变换解方程的条件是函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，因此需要我们涉及的问题是无界问题（半无界问题则需要使用拉普拉斯变换，不过考试时遇到积分变换法的半无界问题通常是先延拓再作傅里叶变换）

下面，我们直接用一个例题来解释傅立叶变换求解偏微分方程的具体过程

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & ,-\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & ,-\infty < x < +\infty \end{cases}$$

傅立叶变换解方程的关键点是，将整个方程和初始条件关于 x 作傅立叶变换，即

$$F[u] = \hat{u}(\lambda, t)$$

$$F[f] = \hat{f}(\lambda, t)$$

$$F[\varphi] = \hat{\varphi}(\lambda)$$

整理可得

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda, t) \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\lambda) \end{cases}$$

这样，就将一个偏微分方程转化成了一个一阶线性常微分方程，这个方程的解为

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi} e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} d\tau$$

求出该函数的反傅立叶变换即可，不过这个求解的难度和计算量比较大，这里就不具体写过程和答案了

6 期末考试小贴士

这里简单讲一下期末考试的“套路”

期末考试基本上会有 5-6 道题（近几年全都是 6 题了），每次的考点也比较固定（但并不是百分百固定），分别是

1. 行波法

有一道行波法可能是一道需要通过二阶线性方程标准型化简来求解的题目，解出一个积分通解后带入初始条件完成解题

2. 另一个行波法

另一道行波法通常会涉及延拓法，但是有些较难的题也同样需要化为二阶线性方程标准型或者强迫振动，甚至两道行波法题都是较难的延拓/强迫振动题

3. 常规分离变量法

基本上就是本篇笔记中涉及的有界弦自由/强迫振动，或者热传导方程

4. 极坐标分离变量法

最近基本每年都会考，考题通常都比较常规，第一问通常需要将方程转换为极坐标形式，第二问进行求解

5. 幂级数解法

也是最近每年都会考的，题目难度通常不高

6. 傅立叶变换法

一道常规的傅立叶变换的题目，不过计算有可能会稍微复杂点

另外，某些题目也会有一些前置小问，这些前置小问都是给后续方程求解作提示，甚至对不同的题目也有提示作用，考试时可以利用这些前置问题的结论辅助解题

7 小测及期末相关考题选讲

1. 2021/12 王伟班 PDE 小测第一题

关键词：行波法 二阶线性方程标准型

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + u_x + 2u_y = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_y(x,0) = e^{2x} \end{cases}$$

答案（仅供参考）：$\frac{1}{4}e^{2x+3y} - \frac{1}{4}e^{2x-y}$

2. 2023/02 期末考试第二题

关键词：行波法 二阶线性方程标准型 延拓 难

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t + \frac{1}{4}u = 0 & ,t > 0, x \geq 0 \\ u|_{x=0} = f(t) & ,t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

3. 2019/01 期末考试第四题

关键词：分离变量法

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = -24x & ,t > 0, 0 < x < \pi \\ u|_{x=0} = 0 & ,t \geq 0 \\ u_x|_{x=\pi} = 3\pi^2 & ,t \geq 0 \\ u|_{t=0} = x^3 + sin(\frac{3}{2}x) \end{cases}$$

答案（仅供参考）：$x^3 + e^{-9t}sin(\frac{3}{2}x)$

4. 2023/12 林智班 PDE 小测第一题

关键词：分离变量法 难

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 1 & ,t > 0, 0 < x < 1 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = 0 \\ u|_{t=0} = 2sin(\pi x) \end{cases}$$

5. 2019/01 期末考试第五题（省去第一问转换为极坐标形式）

关键词：分离变量法 极坐标

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{sin(2\theta)}{r^2} & ,r \geq 1, 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(1,\theta) = 0, \lim_{r\to+\infty} u(r,\theta) = 0 & ,0 \leq \theta \leq \pi \\ v(r,0) = v(r,\pi) = 0 & ,r \geq 1 \end{cases}$$

答案（仅供参考）：$u(r,\theta) = \frac{1}{4}(\frac{1}{r^2} - 1)sin(2\theta)$

6. 2023/02 期末考试第一题

关键词：幂级数

求 $(1-x^2)y'' + xy' - y = 0$ 在 x=0 邻域内的幂级数解

答案（仅供参考）：$y = a_1 x + a_0 \sum_0^\infty \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n)!} x^{2n}$

7. 2018/01 期末考试第四题

关键词：积分变换法

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2tu = 0 & , -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & , -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

8. 2023/02 期末考试第六题

关键词：积分变换法 难

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + xu_x = 0 & , -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & , -\infty < x < +\infty \end{cases}$$