

# 浙大考试周资料分享项目

郁林ZJU & 求是潮BOX  
合作推出

## 《偏微分》

学语言、要出国，找郁林学长姐！

（托福/雅思/GRE/小语种/文书润色/留学申请）

课程甄选、价格优惠、平台保障

求是潮Box 属于浙大人自己的网络U 盘



郁林ZJU 公众号



雅雅学姐



求是潮Box

一键关注轻松获取更多资讯和信息

—— 郁林 ELINC ——

截止 2019 年 7 月，3500+浙大学员的选择

2014 年从浙大出发，目前服务覆盖杭州/上海主要高校

一.(15分)用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 64x, -\infty < x, y < +\infty, \\ u|_{y=x} = 16x^2, u|_{y=-3x} = 0. \end{cases}$$

二.(15分)用分离变量法求解下列初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \cos \pi x, 0 < x < 1, t > 0; \\ u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=1} = 0, t > 0; \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

三.(15分) (1). 验证 $w(x, t) = -x^2 + tx$ 满足

$$w_{tt} - w_{xx} = 2, w_x|_{x=0} = t;$$

(2). 试用延拓法求解半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2, x > 0, t > 0, \\ u_x|_{x=0} = t, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, x > 0. \end{cases}$$

四.(15分) (1). 已知函数 $e^{-x^2}$ 的傅里叶(Fourier)变换

$$F[e^{-x^2}](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2},$$

$a > 0$ 为常数, 试求函数 $e^{-a\lambda^2}$ 的傅里叶逆变换

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda;$$

(2). 试用傅里叶变换法求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2tu = 0, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

的格林函数 $G(x, t, \xi)$ , 即求函数 $G(x, t, \xi)$ 使得

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

五.(20分)用幂级数解法讨论: 当 $\lambda$ 是何值时二阶线性微分方程

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0$$

在 $x = 0$ 的邻域内存在多项式形式的解? 并求出这些解。

六.(20分) 半径为1的半圆型薄板,上、下侧面绝热, 稳定的温度分布 $u(x, y)$ 满足

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, |u(x, y)| < +\infty, x^2 + y^2 < 1 \text{ 且 } y > 0, \\ u|_{x^2+y^2=1, y \geq 0} = 2x^3y, u|_{y=0, |x| \leq 1} = 0 \end{cases}$$

作极坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

已知

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}.$$

- (1). 写出函数 $v(r, \theta)$ 所满足的方程以及边界（边值）条件；
- (2). 用分离变量法求函数 $u(x, y)$ 。

15-16学年冬季学期《偏微分方程》期末试卷答案

一.(15分)在区域 $\{t > 1, -\infty < x < +\infty\}$ 内指出二阶线性偏微分方程

$$t^2 u_{tt} + 2tx u_{tx} + x^2 u_{xx} = 0$$

的类型（即说明是双曲型、抛物型还是椭圆型方程）？作变换 $\xi = x/t, \eta = x, u(\xi, \eta) = u(t, x)$  求 $u(\xi, \eta)$ 所满足的方程，并求满足条件 $u(1, x) = x^2, u_t(1, x) = 0$ 的特解。

解：方程为抛物型方程：

$u(\xi, \eta)$ 所满足 $u_{\eta\eta} = 0$ , 解得通解为

$$u(t, x) = u(\xi, \eta) = \eta f(\xi) + g(\xi) = x f(x/t) + g(x/t)$$

由定解条件得

$$\begin{cases} u(1, x) = x f(x) + g(x) = x^2 \\ u_t(1, x) = -x^2 f'(x) - x g'(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) + x f'(x) + g'(x) = 2x \\ -x f'(x) + g'(x) = 0 \end{cases}$$

解得 $f(x) = 2x, g(x) = -x^2$ , 从而

$$u(t, x) = \frac{2x^2}{t} - \frac{x^2}{t^2} = \frac{x^2}{t^2} (2t - 1).$$

二. (15分) 试用幂级数解法讨论：当 $\rho$ 是何值时Hermite方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \rho y = 0$$

存在多项式类型的解？并分别求出一个3次多项式和一个4次多项式类型的解。

解：幂级数解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 代入Hermite方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + \rho a_n - 2na_n] x^n = 0.$$

比较系数得

$$a_{n+2} = \frac{2n - \rho}{(n+2)(n+1)} a_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

从而, 当 $\rho = 2n$ 时存在多项式类型的解.  $\rho = 6$ 时有3次多项式类型的解

$$y = a_1 \left( x - \frac{2}{3} x^3 \right), a_0 = 0$$

当 $\rho = 8$ 时有4次多项式类型的解

$$y = a_0 \left( 1 - 4x^2 + \frac{4}{3} x^4 \right), a_1 = 0$$

三. (15分) 设 $A$ 是给定的常数, 试用分离变量法求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < 1, y > 0 \\ u(0, y) = 0, u(1, y) = A \\ u(x, 0) = 0, \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) \neq \infty. \end{cases}$$

解: 取 $v = u - Ax$ , 则 $v(x, y)$ 满足

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, 0 < x < 1, y > 0 \\ v(0, y) = 0, v(1, y) = 0 \\ v(x, 0) = -Ax, \lim_{y \rightarrow +\infty} v(x, y) \neq \infty. \end{cases}$$

分离变量 $v(x, y) = X(x)Y(y)$ 且代入方程及条件 $v(0, y) = 0, v(1, y) = 0$ 及 $\lim_{y \rightarrow +\infty} v(x, y) \neq \infty$ 得,

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0, y > 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} Y(y) \neq +\infty \end{cases}$$

当 $\lambda = n^2\pi^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 时有非零解

$$X_n(x) = A_n \sin n\pi x, Y_n(y) = C_n e^{-n\pi y},$$

取

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n e^{-n\pi y} \sin n\pi x$$

它满足条件 $v(0, y) = 0, v(1, y) = 0$ 以及 $\lim_{y \rightarrow +\infty} v(x, y) \neq \infty$ , 取 $D_n$  满足

$$-Ax = v(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sin n\pi x$$

即

$$D_n = -2A \int_0^1 x \sin n\pi x dx = (-1)^n \frac{2A}{n\pi}$$

从而得解

$$u(x, y) = v(x, y) + Ax = Ax + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\pi y} \sin n\pi x.$$

四. (15分) (1). 求证函数 $w(t, x) = t^2 + (x + 1)^2$ 满足

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, w(t, -1) = t^2.$$

(2). 用延拓法求解下列半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x > -1, t > 0 \\ u(t, -1) = t^2, \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = x + 1. \end{cases}$$

解: (1). 省略。

(2). 记  $y = x + 1$ ,  $v(t, y) = u(t, y - 1) - t^2 - y^2$ , 则函数  $v(t, y)$  满足

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{yy} = 0, y > 0, t > 0 \\ v(t, 0) = 0, \\ v(0, y) = -y^2, v_t(0, y) = y. \end{cases}$$

关于  $y$  作奇延拓

$$V(t, y) = \begin{cases} v(t, y), y \geq 0 \\ -v(t, -y), y < 0 \end{cases}, \phi(y) = \begin{cases} -y^2, y \geq 0 \\ y^2, y < 0 \end{cases}$$

则函数  $V(t, y)$  满足初值问题

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{yy} = 0, -\infty < y < +\infty, t > 0 \\ V(0, y) = \phi(y), V_t(0, y) = y. \end{cases}$$

解得

$$V(t, y) = \frac{\phi(y+t) + \phi(y-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-t}^{y+t} y dy = \frac{\phi(y+t) + \phi(y-t)}{2} + yt.$$

从而得

$$u(t, x) = v(t, y) + t^2 + y^2 = V(t, y)|_{y \geq 0} + t^2 + y^2 = \begin{cases} -t(x+1), 0 < x+1 < t \leq 0 \\ -(x+1-t)^2 - t(x+1), x+1 \geq t > 0. \end{cases}$$

五. (20分) 给定常数  $T > 0$ , 记  $u(t, x)$  为

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(t, 0) = 0, u_x(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = h(x) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, \frac{1}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

的解。试用分离变量法求  $h(x)$  使得解满足  $u(T, x) = 0$ 。

解: 由边界条件知本征 (特征) 函数为  $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ , 取

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos nx, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos nx, h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos nx$$

则满足

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [u'_n(t) + n^2 u_n(t)] \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos nx \\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(0) \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \cos nx \end{cases}$$

即

$$u'_n(t) + n^2 u_n(t) = f_n, u_n(0) = h_n$$

由 $u(T, x) = 0$ 得 $u_n(T) = 0$ , 利用

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & n = 0 \\ \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

解得

$$h_n = u_n(0) = - \int_0^T e^{n^2 t} f_n dt = \begin{cases} -\frac{T}{2\pi}, & n = 0 \\ \frac{2(1-e^{n^2 T})}{n^3 \pi} \sin \frac{n}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

从而

$$h(x) = -\frac{T}{2\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2(1-e^{n^2 T})}{n^3 \pi} \sin \frac{n}{2} \cos nx$$

六. (20分) (1). 试用傅里叶变换法求函数 $G(x, y, \tau)$ (格林函数)使得问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, y > 0 \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, & u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

的解可以表示为 $u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, \tau) f(\tau) d\tau$ .

(2). 试用上述表达式求证: 在区域 $\{-\infty < x < +\infty, y > 0\}$ 内解满足

$$\min_{-\infty < x < +\infty} f(x) \leq u(x, y) \leq \max_{-\infty < x < +\infty} f(x)$$

解: (1). 记 $u(x, y)$ 与 $f(x)$ 关于 $x$ 的Fourier变换分别为 $\bar{u}(\lambda, y)$ 与 $\bar{f}(\lambda)$ 。关于 $x$ 作Fourier变换得

$$\begin{cases} \bar{u}_{yy} - \lambda^2 \bar{u} = 0, & -\infty < \lambda < +\infty, y > 0 \\ \lim_{\lambda^2+y^2 \rightarrow +\infty} \bar{u}(\lambda, y) = 0, & \bar{u}(\lambda, 0) = \bar{f}(\lambda) \end{cases}$$

解得

$$\bar{u}(\lambda, y) = \bar{f}(\lambda) e^{|\lambda|y}$$

关于 $\lambda$ 作Fourier逆变换得

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\tau)}{\pi[(x-\tau)^2 + y^2]} d\tau.$$

从而 $G(x, y, \tau) = \frac{y}{\pi[(x-\tau)^2 + y^2]}$ 。

(2)记 $m = \min_{-\infty < x < +\infty} f(x)$ 及 $M = \max_{-\infty < x < +\infty} f(x)$ , 则

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\tau)}{\pi[(x-\tau)^2 + y^2]} d\tau \geq m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi[(x-\tau)^2 + y^2]} d\tau = m.$$

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\tau)}{\pi[(x-\tau)^2 + y^2]} d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi[(x-\tau)^2 + y^2]} d\tau = M.$$

2017-2018学年冬季学期《偏微分方程》期末试卷答案

一.(15分)用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 64x, -\infty < x, y < +\infty, \\ u|_{y=x} = 16x^2, u|_{y=-3x} = 0. \end{cases}$$

解：作变换

$$\xi = y + 3x, \eta = y - x, u(\xi, \eta) = u(x, y) \quad \text{-----5分}$$

则 $u(\xi, \eta)$ 满足方程

$$-16u_{\xi\eta} = 16(\xi - \eta), \text{ 即 } u_{\xi\eta} = \eta - \xi,$$

积分得通解为

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi\eta(\eta - \xi) + F(\xi) + G(\eta),$$

即

$$u(x, y) = -2x(y + 3x)(y - x) + F(y + 3x) + G(y - x).$$

由条件得

$$16x^2 = u|_{y=x} = F(4x) + G(0), 0 = u|_{y=-3x} = F(0) + G(-4x),$$

解得

$$F(0) + G(0) = 0, F(x) = x^2 - G(0), G(x) = -F(0).$$

从而，解为

$$u(x, y) = (y + 3x)^2 - 2x(y + 3x)(y - x). \quad \text{-----15分}$$

二. (15分) 用分离变量法求解下列初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \cos \pi x, 0 < x < 1, t > 0; \\ u_{xx}|_{x=0} = 0, u_x|_{x=1} = 0, t > 0; \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

解：特征值问题为

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X'(0) = X'(1) = 0; \end{cases} \quad -\lambda = \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$$

特征值以及相应地特征函数为

$$\lambda_n = (n\pi)^2, X_n(x) = \cos n\pi x, n = 0, 1, 2, \dots,$$

构造初边值问题解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t) \cos n\pi x, \quad \text{-----5分}$$

代入得

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} [T_n''(t) + (n\pi)^2 T_n(t)] \cos n\pi x = t \cos \pi x, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(0) \cos n\pi x = 0, \sum_{n=0}^{+\infty} T_n'(0) \cos n\pi x = 0, \end{cases}$$

即 $T_n(t)$ 满足

$$\begin{cases} T_1''(t) + \pi^2 T_1(t) = t \\ T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T_n''(t) + \pi^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0, \end{cases} \quad (n \neq 1). \quad \text{-----10分}$$

解得

$$T_1(t) = \frac{\pi t - \sin \pi t}{\pi^3}, T_n(t) = 0 (n \neq 1).$$

从而初边值问题的解为

$$u(x, t) = \frac{\pi t - \sin \pi t}{\pi^3} \cos \pi x. \quad \text{-----15分}$$



三. (15分) (1). 验证  $w(x,t) = -x^2 + tx$  满足

$$w_{tt} - w_{xx} = 2, w_x|_{x=0} = t;$$

(2). 试用延拓法求解半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2, x > 0, t > 0, \\ u_x|_{x=0} = t, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, x > 0. \end{cases}$$

解: (1). 直接验证; -----5分

(2). 记  $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ , 则

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, x > 0, t > 0, \\ v|_{t=0} = x^2, v_t|_{t=0} = -x, x > 0. \end{cases}$$

利用(偶)延拓, 若  $\tilde{v}(x,t)$  为初值问题

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt} - \tilde{v}_{xx} = 0, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ \tilde{v}|_{t=0} = x^2, \tilde{v}_t|_{t=0} = -|x|, -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

-----10分

则  $v(x,t) = \tilde{v}|_{x \geq 0}$ . 而  $x \geq 0$

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{1}{2} [(x-t)^2 + (x+t)^2] - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |\xi| d\xi$$

得到

$$v(x,t) = \tilde{v}|_{x \geq 0} = \begin{cases} x^2 + t^2 - xt, t \leq x, \\ \frac{1}{2}(x^2 + t^2), 0 < x < t. \end{cases}$$

$$u(x,t) = v + w = \begin{cases} t^2, 0 \leq t \leq x, \\ \frac{1}{2}(t^2 - x^2) + tx, 0 \leq x < t. \end{cases}$$

-----15分

四. (15分) (1). 已知函数  $e^{-x^2}$  的傅里叶(Fourier)变换

$$F[e^{-x^2}](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\lambda^2},$$

$a > 0$  为常数, 试求函数  $e^{-a\lambda^2}$  的傅里叶逆变换

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda;$$

(2). 试用傅里叶变换法求初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2tu = 0, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

的格林函数  $G(x,t,\xi)$ , 即求函数  $G(x,t,\xi)$  使得

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t,\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

解: (1). 计算得

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}. \text{ -----5分}$$

(2). 记函数 $u(x, t)$ 与 $\varphi(x)$ 关于变量 $x$ 的傅里叶变换分别为 $\hat{u}(\lambda, t)$ 与 $\hat{\varphi}(\lambda)$ .作傅里叶变换得

$$\begin{cases} \hat{u}_t + (\lambda^2 - 2t)\hat{u} = 0, & -\infty < \lambda < +\infty, t > 0. \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\lambda), & -\infty < \lambda < +\infty, \end{cases}$$

解得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)e^{t^2}e^{-\lambda^2 t}. \text{-----10分}$$

利用

$$F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}](x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

及傅里叶变换的性质得

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{t^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi.$$

格林函数

$$G(x, t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{t^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}. \text{-----15分}$$

五.(20分)用幂级数解法讨论：当 $\lambda$ 是何值时二阶线性微分方程

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0$$

在 $x = 0$ 的邻域内存在多项式形式的解？并求出这些解。

解：取

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{-----5分}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

代入微分方程得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + (\lambda - 1)a_n] x^n = 0,$$

有递推公式

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n, n = 0, 1, 2, \cdots \text{-----10分}$$

微分方程的通解为

$$y = a_0 \left[ 1 + \frac{(1-\lambda)}{2!}x^2 + \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!}x^4 + \cdots \right] + a_1 \left[ x + \frac{(3-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!}x^5 + \cdots \right].$$

当 $\lambda = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \cdots$ 时，我们有

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0,$$

从而微分方程有多项式形式的解. -----15分

当 $n$ 是偶数时，即 $n = 2m(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 且 $a_1 = 0$ 时，多项式形式的解为

$$y_0(x) = a_0 \left[ 1 + \frac{-4m}{2!}x^2 + \frac{(-4)^2 m(m-1)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-4)^m m(m-1)(m-2)\cdots 1}{(2m)!}x^{2m} \right]$$

当 $n$ 是奇数时，即 $n = 2m + 1(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 且 $a_0 = 0$ 时，多项式的解

$$y_1(x) = a_1 \left[ x + \frac{-4m}{3!}x^3 + \frac{(-4)^2 m(m-1)}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-4)^m m(m-1)(m-2)\cdots 1}{(2m+1)!}x^{2m+1} \right]. \text{-----20分}$$

六.(20分) 半径为1的半圆型薄板,上、下侧面绝热, 稳定的温度分布 $u(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, |u(x,y)| < +\infty, x^2 + y^2 < 1 \text{ 且 } y > 0, \\ u|_{x^2+y^2=1, y \geq 0} = 2x^3y, u|_{y=0, |x| \leq 1} = 0 \end{cases}$$

作极坐标变换

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

已知

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}.$$

(1). 写出函数 $v(r, \theta)$ 所满足的方程以及边界（边值）条件;

(2). 用分离变量法求函数 $u(x, y)$ 。

解: (1). 函数 $v(r, \theta)$ 所满足的方程以及边界（边值）条件为

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0, |v(r, \theta)| < +\infty, 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi, \\ v|_{r=1} = 2 \sin \theta \cos^3 \theta, 0 \leq \theta \leq \pi, \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\pi} = 0, 0 \leq r \leq 1. \end{cases} \quad \text{-----5分}$$

(2). 令 $v(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$ , 则利用分离变量法, 由 $v(r, \theta)$ 满足方程以及条件

$$|v(r, \theta)| < +\infty, u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\pi} = 0$$

得

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ |R(r)| < +\infty \end{cases}, \quad \text{-----10分}$$

可变量分离的非平凡解为

$$\lambda_n = n^2, \Phi_n(\theta) = \sin n\theta, R_n(r) = a_n r^n, v_n = a_n r^n \sin n\theta, n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n \sin n\theta, \quad \text{-----15分}$$

则 $v(r, \theta)$ 满足微分方程及条件 $u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\pi} = 0$ , 只要选取合适的系数 $a_n$ 使得 $v(r, \theta)$ 满足条件

$$v|_{r=1} = 2 \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin n\theta = v|_{r=1} = 2 \sin \theta \cos^3 \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$

积分得

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos^3 \theta \sin n\theta d\theta, n = 1, 2, 3, \dots$$

利用 $2 \sin \theta \cos^3 \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$ 得

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, a_n = 0 (n \neq 2, n \neq 4).$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta + \frac{1}{4} r^4 \sin 4\theta,$$

即

$$u(x, y) = v(r, \theta) = xy + x^3y - xy^3 = xy(1 + x^2 - y^2). \quad \text{-----20分}$$