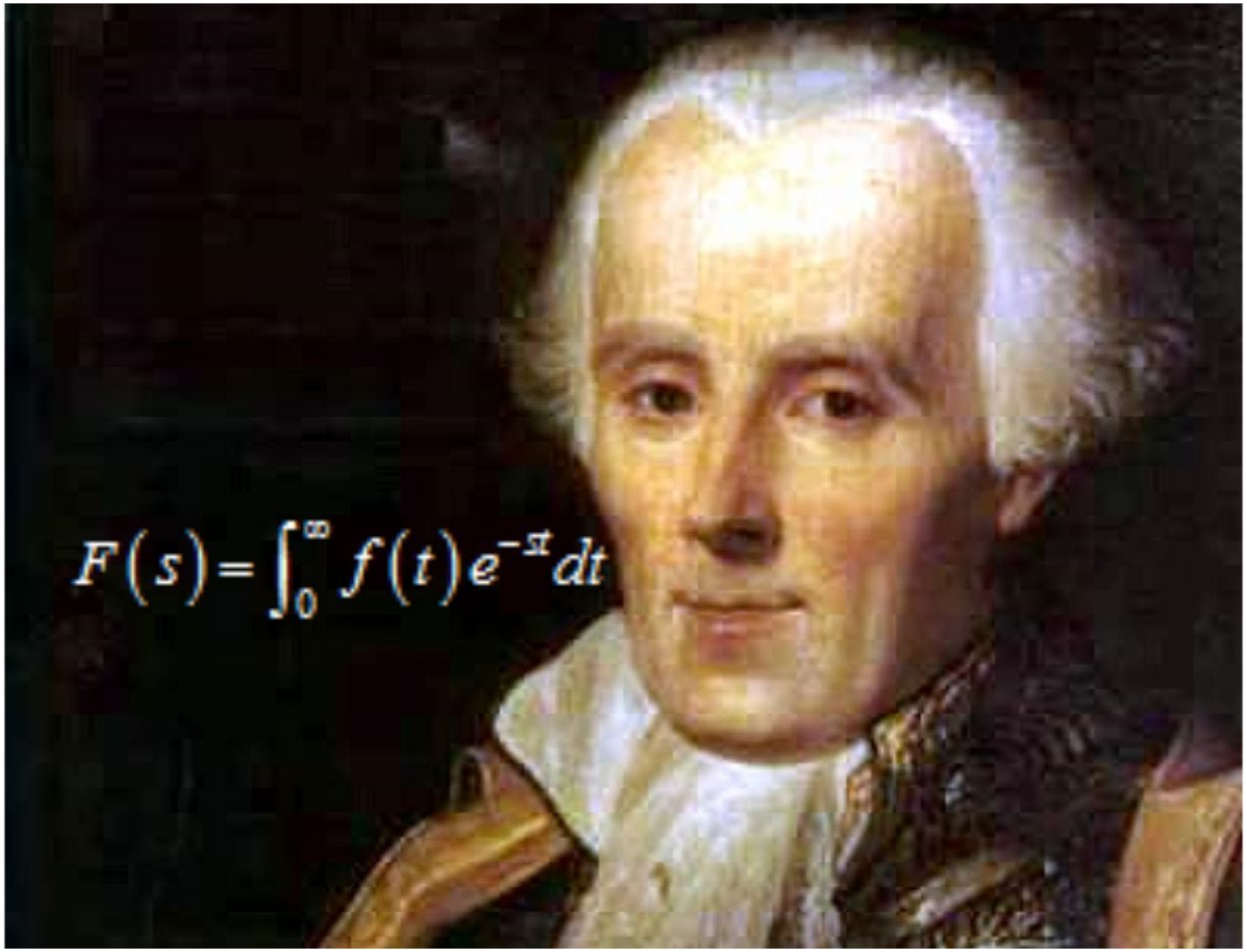
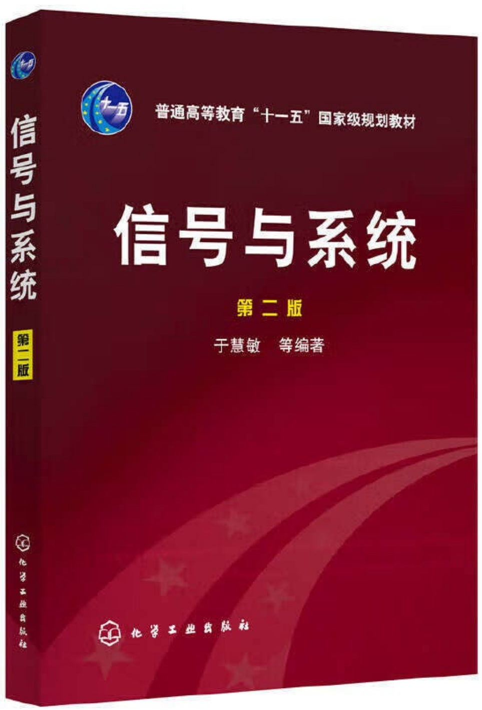
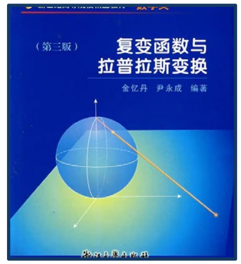


第六章 信号与系统的复频域分析

叶慧慧
yehuihui@zju.edu.cn



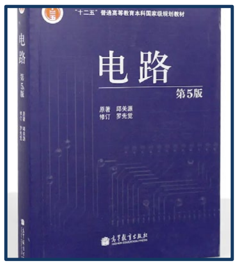


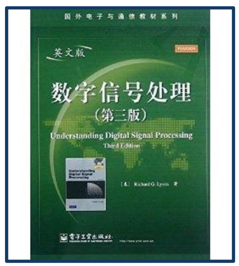
复变函数与拉普拉斯变换

- 微分方程求解

电路

- 线性动态电路得复频域分析

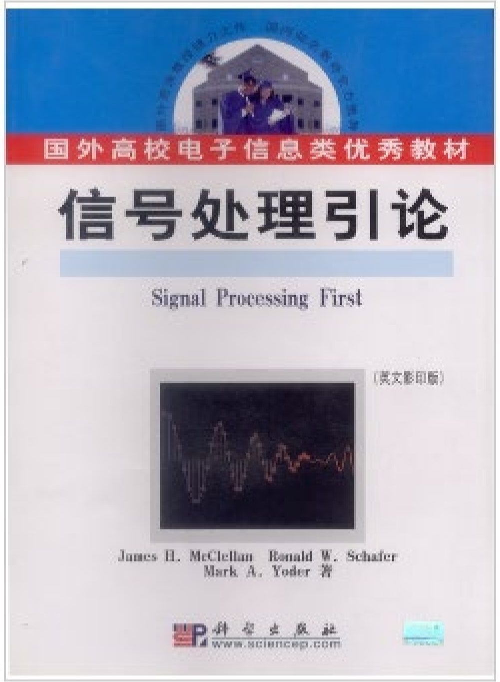




数字信号处理

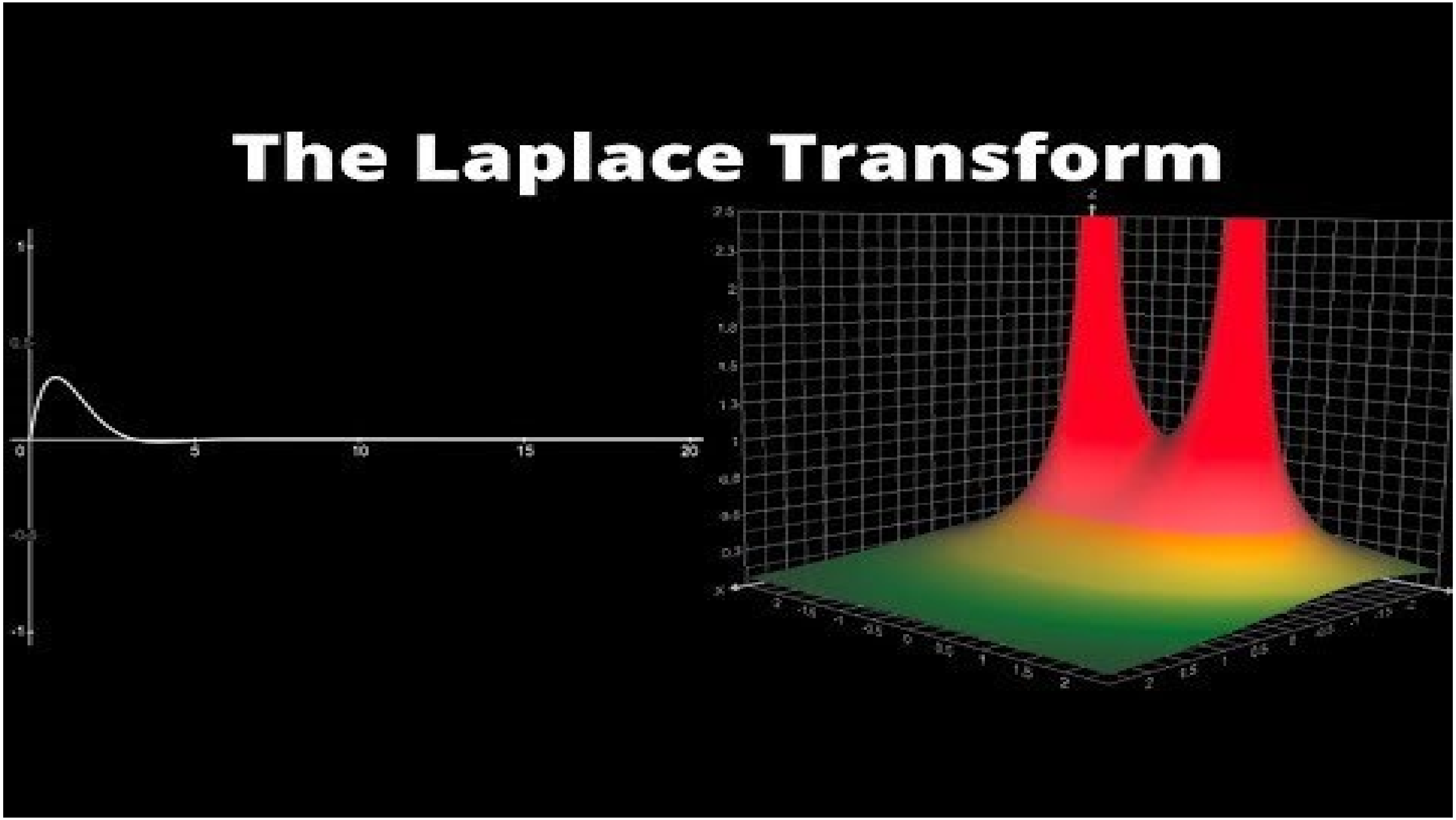
- z变换

[信号处理引论 : [英文版] | Signal Processing First影印版 (sciencereading.cn)]



- 信号与系统
  - 信号分析
    - 连续信号
      - 时域：信号表达为冲激信号的线性组合
      - 频域：信号表达为正弦信号的线性组合（CFS，CTFT）
      - 复频域：信号表达为复指数的线性组合（单边、双边）
    - ↓ 抽样
    - 离散信号
      - 时域：信号表达为脉冲序列的线性组合
      - 频域：信号表达为正弦序列的线性组合（DFS，DTFT）
      - Z域：信号表达为复指数的线性组合（单边、双边）
  - 系统分析
    - 连续系统
      - 系统的描述
        - 输入输出描述法：N 阶微分方程
        - 状态空间描述：N 个一阶微分方程组
      - 系统响应求解
        - 时域：$y(t)=f(t)*h(t)$
        - 频域：$Y(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)*H(\mathrm{j}\omega)$
        - 复频域：$Y(s)=F(s)*H(s)$
    - 离散系统
      - 系统的描述
        - 输入输出描述法：N 阶差分方程
        - 状态空间描述：N 个一阶差分方程组
      - 系统响应求解
        - 时域：$y[k]=f[k]*h[k]$
        - 频域：$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})*H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
        - Z域：$Y(z)=F(z)*H(z)$

B站：拉普拉斯变换到底告诉我们什么？
https://youtu.be/n2y7n6jw5d0



傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换的联系是什么？为什么要进行这些变换？
Zhihu.com

基本信号 → LTI系统 → 基本响应

$\delta(t)$　　　　　　　　$\mathrm{h}(t)$

任意信号 → LTI系统 → ？响应

$x(t)$　　$*\,\mathrm{h}(t)$　　$y(t)$

移位的冲激信号的线性组合

LTI系统的叠加性、齐次性和时不变性

卷积

- 1. 已知单位冲激信号的单位冲激响应
- 2. 将任意信号分解成<u>单位冲激信号</u>的组合
- 3. 得到任意信号的响应

基本信号 → LTI系统 → 基本响应

特征函数 $e^{j\omega t}$　　$e^{j\omega t}H(j\omega)$ 特征值

任意信号 → LTI系统 → ？响应

$x(t)$　$* \ \mathrm{h}(t)$　$y(t)$　卷积

傅里叶变换

$X(j\omega)$　$\mathrm{H}\,(j\omega)$　$Y(j\omega)$　乘积

- 1.　已知基本信号的基本响应
- 2.　将任意信号分解成基本信号的组合（傅里叶变换）
- 3.　得到任意信号的频域响应

但是，不是所有信号都可以进行傅里叶变换，需满足收敛条件

6.1 拉普拉斯变换

6.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

一个信号$x(t)$的傅里叶变换的存在条件是该信号绝对可积，但有很多重要信号不满足该条件。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

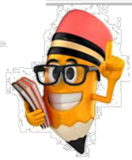
对那些是因为当$x\to\infty$时 $x(t)$不为零而不满足绝对可积条件的$x(t)$，我们引入一个衰减因子$e^{-\sigma t}$，使得对合适的σ，$x(t)e^{-\sigma t}$是绝对可积条件的。

阶跃信号

斜坡信号

周期信号

指数信号



$$F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$\boxed{X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt}$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega}$$

令　$s=\sigma+j\omega$

定义

$$X(s)\overset{\Delta}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,e^{-st}dt$$

$L\{x(t)\}$ 为*x*(*t*)的拉普拉斯（正）变换

$$x(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s)$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}X(s)e^{st}ds$$

$L^{-1}\{x(t)\}$ 为*x*(*t*)的拉普拉斯反变换

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}dt$$

双边拉普拉斯变换

$x(t)u(t)$

$$X(s)=\int_{0}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}dt$$

单边拉普拉斯变换

时域

复频域（S域）

- 频域

拉普拉斯变换

$s = \sigma + j\omega$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]\; e^{-j\omega t} dt$$

$x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅立叶变换

傅立叶变换 **s=jω**

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

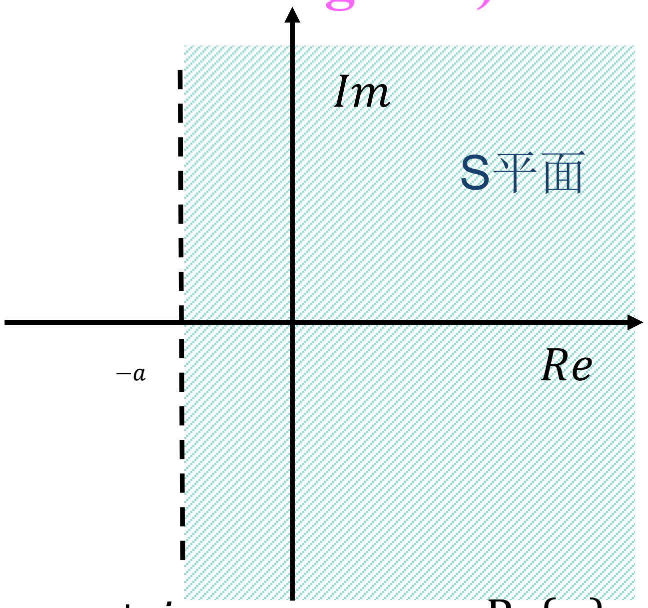
$$X(s)|_{s\,=\,j\omega} = F\{x(t)\}$$

6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

$$X(s) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

使上式收敛的s值的范围称为拉普拉斯变换的收敛域，简记为ROC (Region of Convergence)

使 $x(t)e^{-\sigma t}$的傅立叶变换收敛的s值（ $s = \sigma + j\omega$ ）



$s = \sigma + j\omega$, $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$

例 6.1

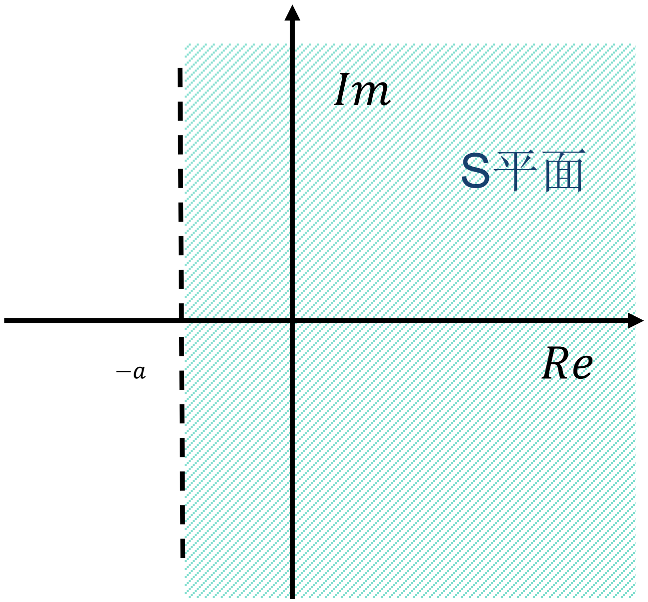
$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$，求X(s)和收敛域

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad = \frac{1}{s+a}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶变换绝对可积 $\sigma + a>0$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$



例 6.2

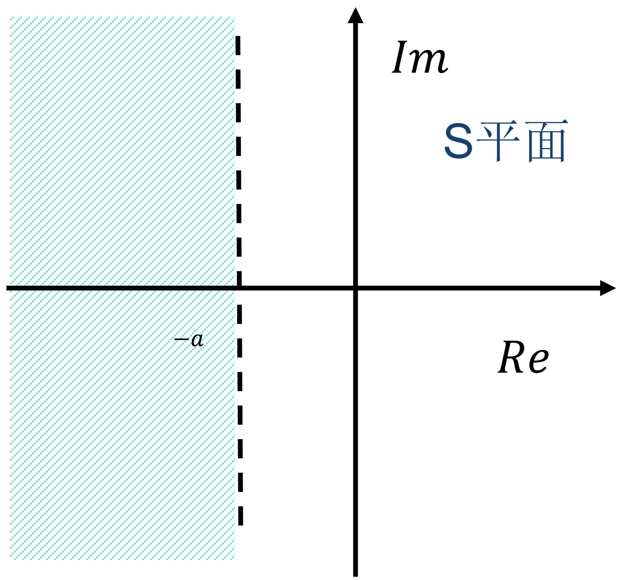
$x(t) = -e^{-at}\mathrm{u}(-\mathrm{t})$，，求X(s)和收敛域

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-st} u(-t) dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s+a}\ , \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

傅里叶变换绝对可积 $\sigma + a < 0$

$$-e^{-at}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}\ , \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$



例 6.3

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} [3\,e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)]e^{-st}dt$$
$$= 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}\,u(t)dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)\,dt$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1} \quad , \quad \boxed{\mathrm{Re}\{s\} > -1}$$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2} \quad , \quad \boxed{\mathrm{Re}\{s\} > -2}$$

$$3e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{s-1}{s^2+3s+2} \quad , \quad \boxed{\mathrm{Re}\{s\} > -1}$$

例 6.4

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3\,t)u(t)$$

欧拉关系

$$x(t) = [e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}]u(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-3j)t}\,u(t)e^{-st}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+3j)t}\,u(t)e^{-st}dt$$

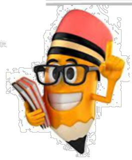
$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}\quad ,\qquad \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > -2$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+(1-3j)}\quad ,\qquad \mathrm{Re}\{\mathrm{s}\} > -1$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+(1+3j)}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right), \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) + e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$



6.1.3 拉普拉斯变换的零极点图

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{0}^{m+1} b_m s^m}{\sum_{0}^{n+1} b_n s^n},\quad n>m$$

有理式

***N*(s)— 分子多项式**

***D*(s) — 分母多项式**

只要*x*(t)是实指数或复指数信号的线性组合，*X*(s)一定是有理的。

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

有理拉普拉斯变换

分子多项式的根：$X(s)=0$， $X(s)$的零点

分母多项式的根：$X(s)$无界，$X(s)$的极点

$X(s)$的零极点图　S平面内的极点和零点的$X(s)$的表示

有理拉普拉斯变换 → 变换的零极图 + ROC

方便　形象

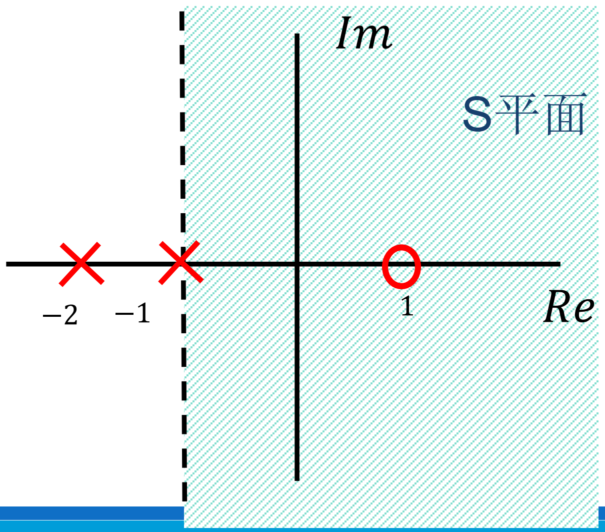
在S平面内标出$N(s)$和$D(s)$的根的位置，并指出收敛域**ROC**

× — 分母多项式的根 的位置　　　　**O** —分子多项式的根 的位置

例 6.3　$3e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$,　　$\text{Re}\{s\} > -1$

O： $\boldsymbol{s = 1}$

***X*: $\boldsymbol{s = -1, s = -2}$**

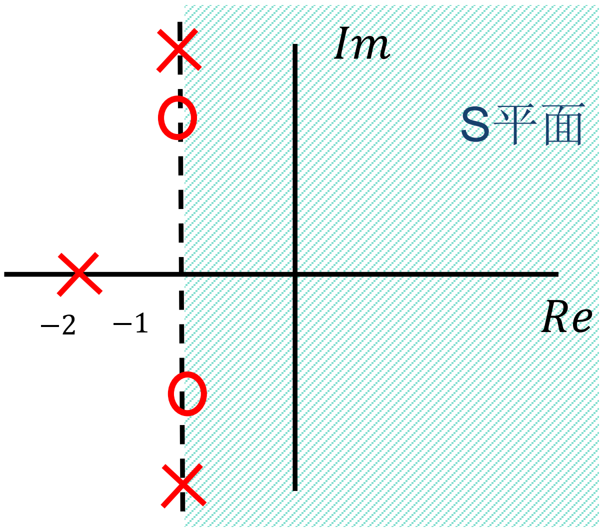


例 6.4

$$e^{-2t}u(t)+e^{-2t}(\cos 3\,t)u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$O: s=-\frac{5}{4}\pm j\sqrt{71}$$

$$\times: s=-1\pm j3,\qquad s=-2$$



例 6.5

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt = 1$$

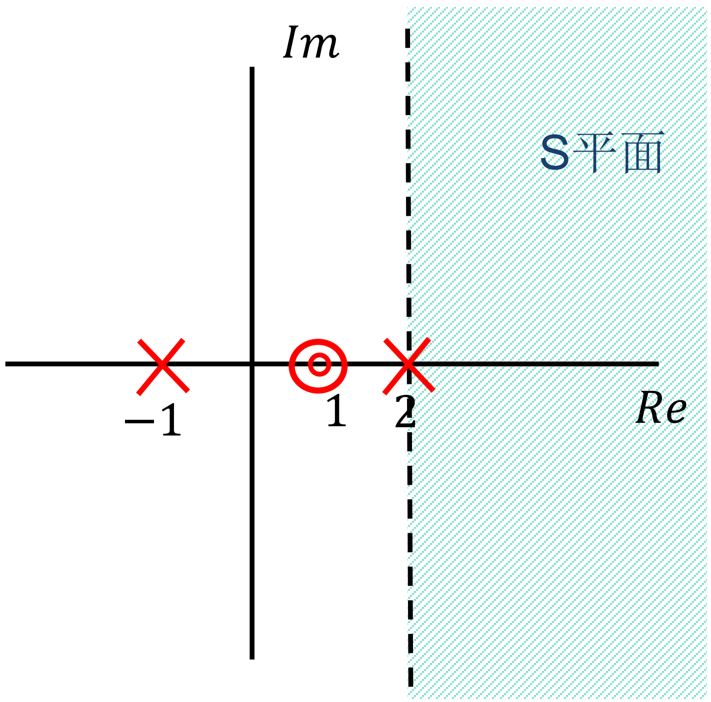
ROC：整个s平面

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}, \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

或

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \qquad \mathrm{Re}\{s\}>2$$

例 6.5的零极图 和 ROC



重复次数：阶数

S＝1：二阶零点

6.1.4 拉普拉斯变换的收敛域特性

性质1：X(s)的ROC在s平面内由平行于$j\omega$轴的带状区域所组成。

X(s)的ROC $\Rightarrow$ 使 $x(t)e^{-\sigma t}$的傅立叶变换收敛的s值（ $s = \sigma + j\omega$ ）

即

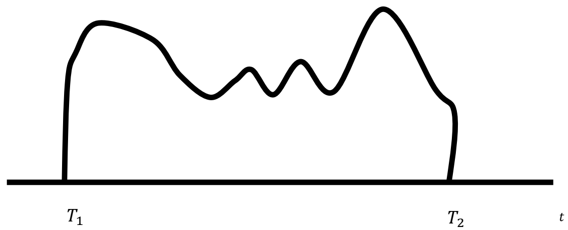
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma t} dt < \infty$$

$x(t)e^{-\sigma t}$绝对可积

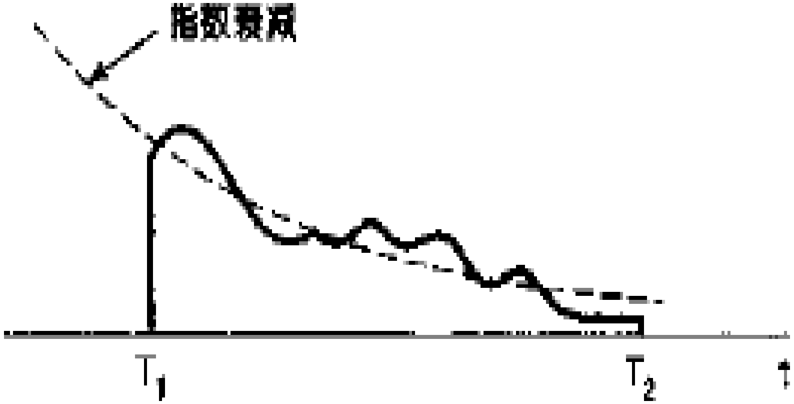
只与σ有关

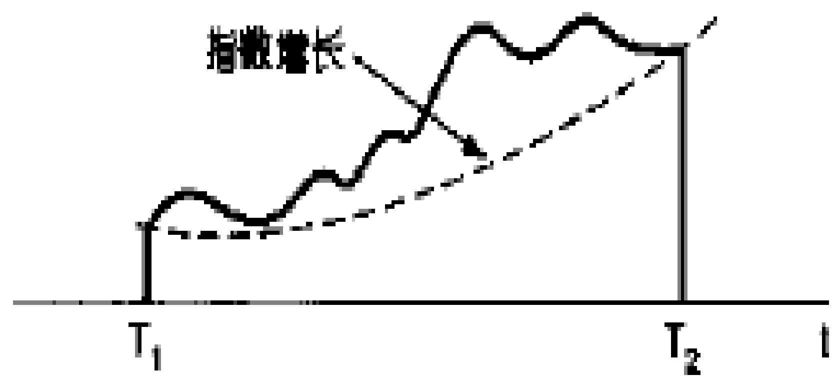
性质2：对有理拉普拉斯变换，ROC不包括任何极点

性质3：如果x(t)是有限持续期，并且是绝对可积的，那么ROC就是整个 s平面.



有限持续时间信号





证明

设x(t)绝对可积

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| < \infty$$

$$\Downarrow$$

σ =0

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

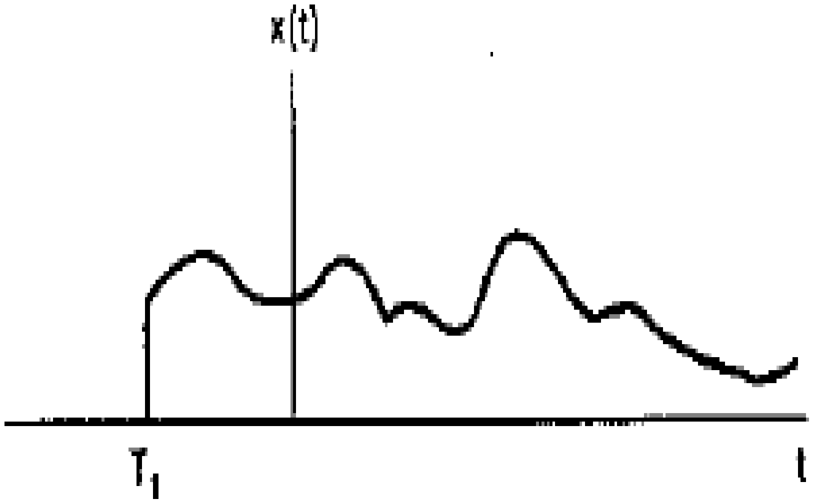
σ >0

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$$

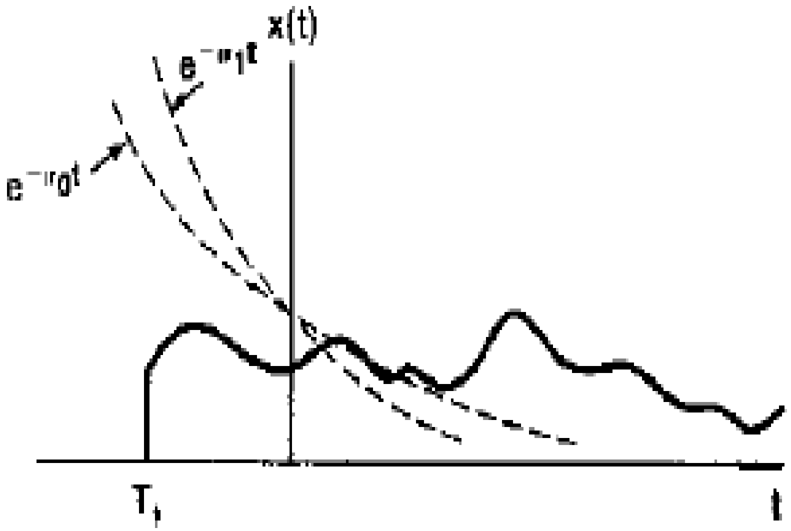
σ <0

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt$$

性质4：如果x(t)是右边信号，而且如果Re{s}= σ_0这条线位于ROC内，那么Re{s}> σ_0 的全部s值都一定在ROC内。



右边信号x(t)



$\sigma_1 > \sigma_0$, $e^{-\sigma_1 t}$衰减比$e^{-\sigma_0 t}$快

如果 $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

右边信号，等效为 $$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

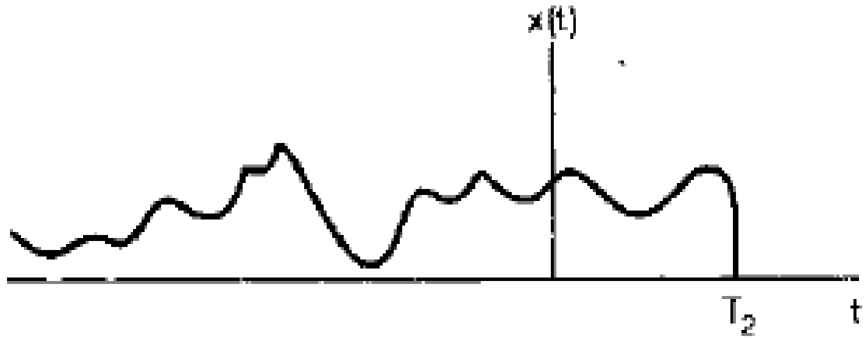
如果$\sigma_1 > \sigma_0$　$t \to \infty$，　$e^{-\sigma_1 t}$ 衰减比 $e^{-\sigma_0 t}$ 快

$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0) t} dt$$
$$\le e^{-(\sigma_1 - \sigma_0) T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

$x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 绝对可积

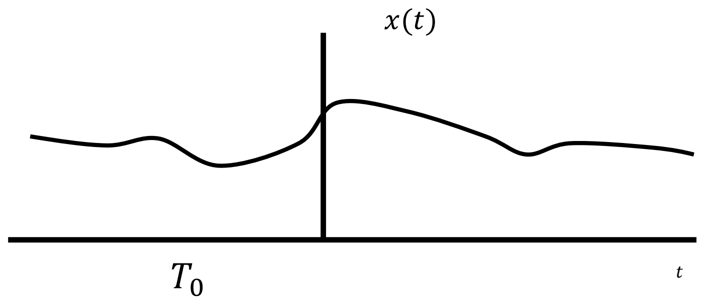
性质5：如果x(t)是左边信号，而且如果Re{s}= σ_0这条线位于ROC内，那么Re{s}< σ_0 的全部s值都一定在ROC内。

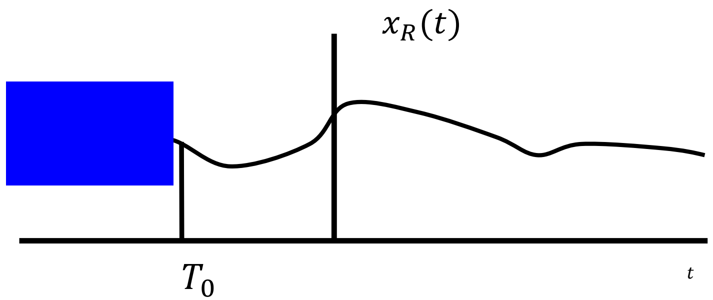
左边信号
x(t)

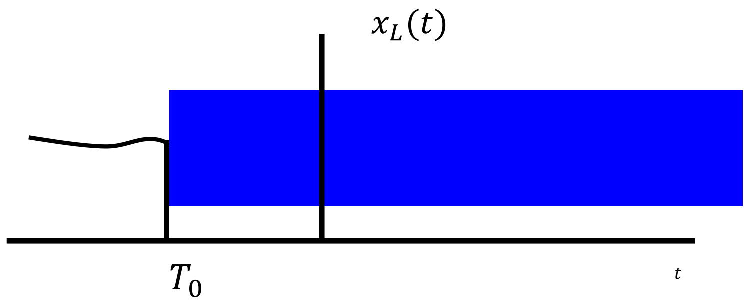


ROC：　　左半平面

性质6：如果x(t)是双边信号，而且如果Re{s}= σ_0这条线位于ROC内，那么ROC 就一定是由s 平面的一条带状区域所组成，直线Re{s}= σ_0 位于带中。







$L\{x_R(t)\}$ 的ROC

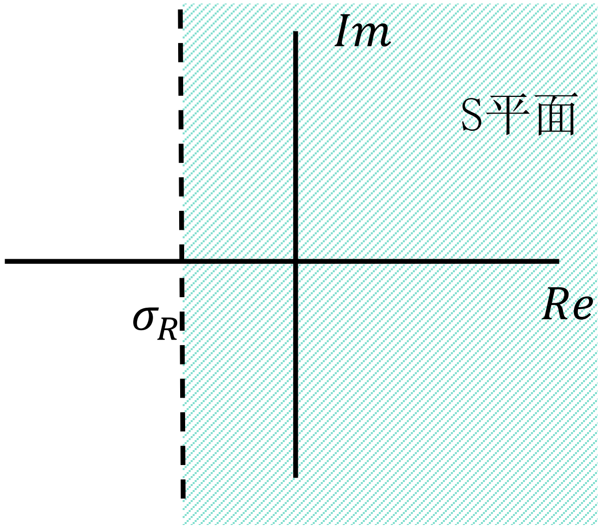
$L\{x_L(t)\}$ 的ROC

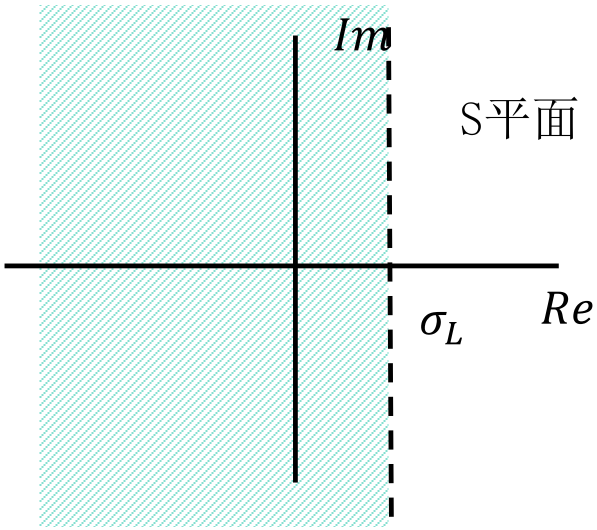
$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_R$

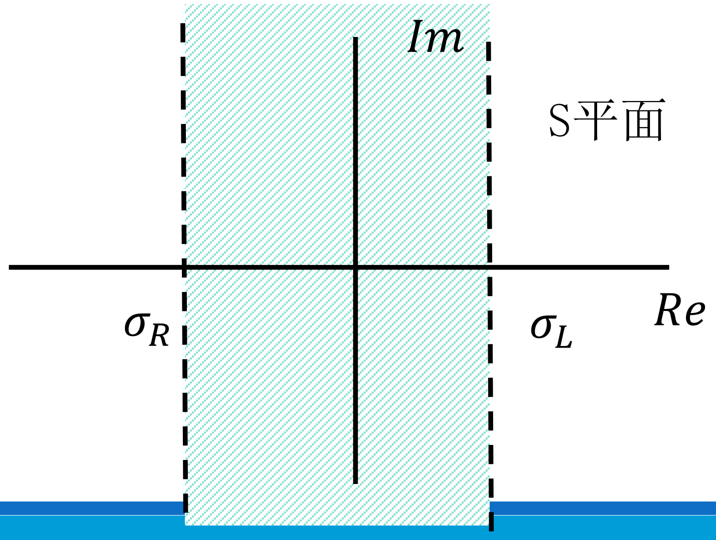
$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_L$

$L\{x(t)\}$ 的ROC ⇨ **两个半平面的重合，**

（ σ_R ＜ σ_L ）


Im
S平面
σ_R
Re


Im
S平面
σ_L
Re


Im
S平面
σ_R
σ_L
Re

例6.7 $x(t) = e^{-b|t|}$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

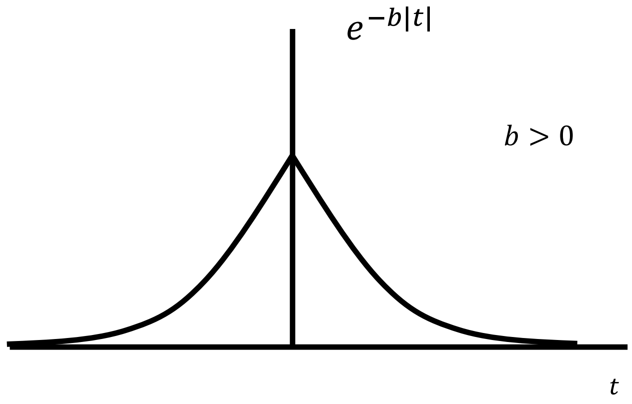
$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -b$$

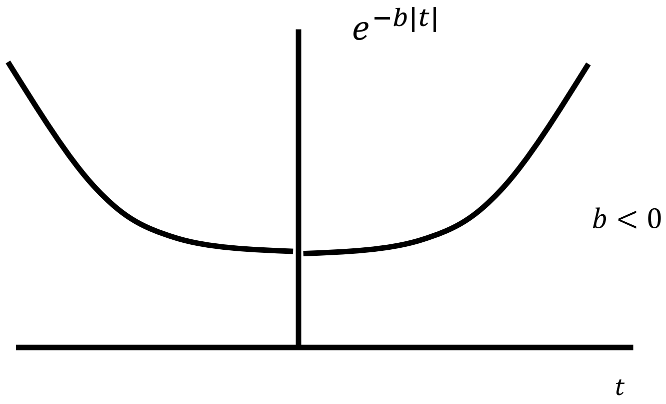
$$e^{bt}u(-t) \leftrightarrow \frac{-1}{s-b}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} < b$$

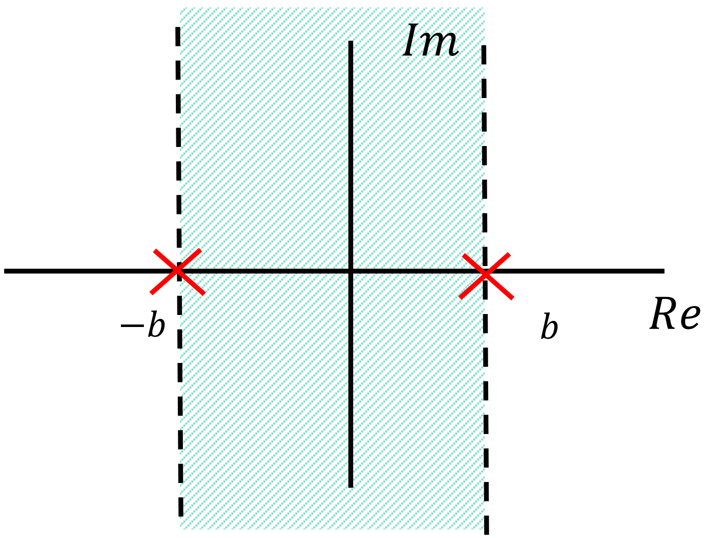
b<=0：　　无公共收敛域

b>0：

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2-b^2}, \qquad -b < \mathrm{Re}\{s\} < +b$$


$e^{-b|t|}$
$b > 0$
t


$e^{-b|t|}$
$b < 0$
t


Im
$-b$
b
Re

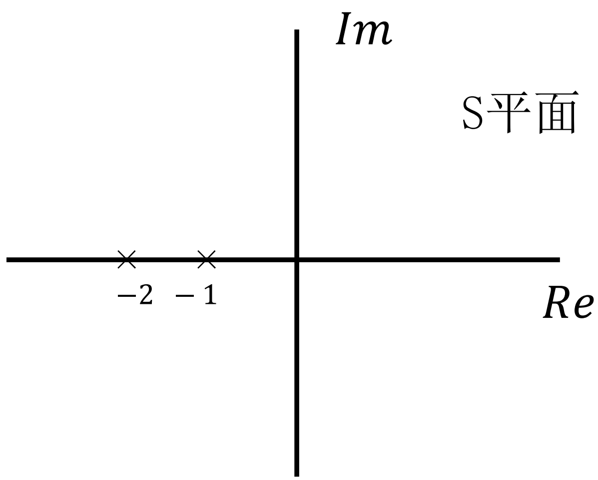
性质7：如果x(t)的拉普拉斯变换X(s)是有理的，那么它的ROC是被极点所界定或延伸到无限远。另外，在ROC内不包含X(s)的任何极点。

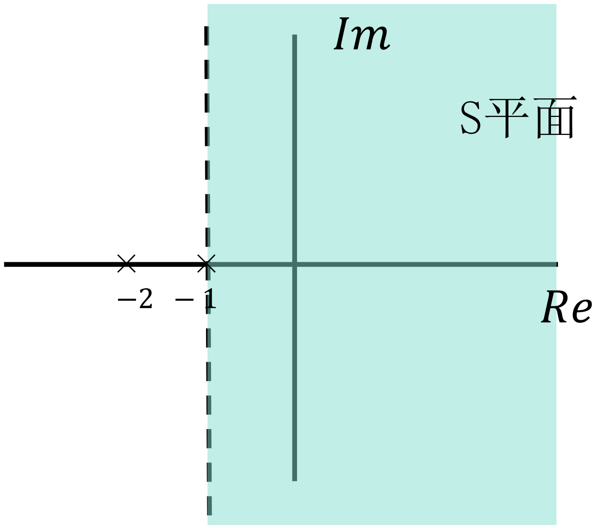
性质8：如果x(t)的拉普拉斯变换X(s)是有理的，若x(t)是右边信号，则其ROC在s平面上位于最右边极点的右边；若x(t)是左边信号，则其ROC在s平面上位于最左边极点的左边。

例6.8

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

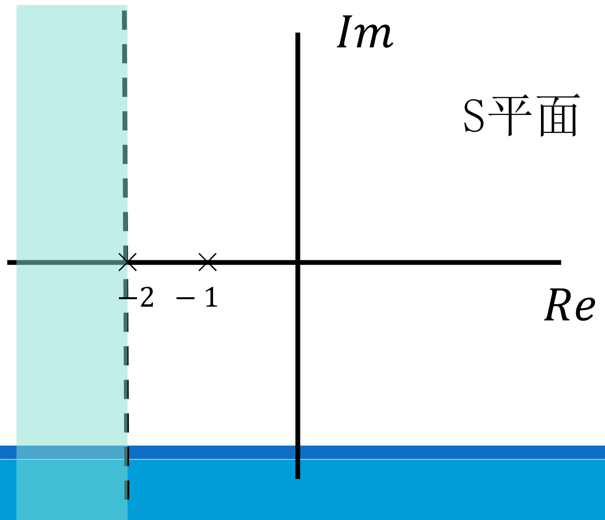
零极点图

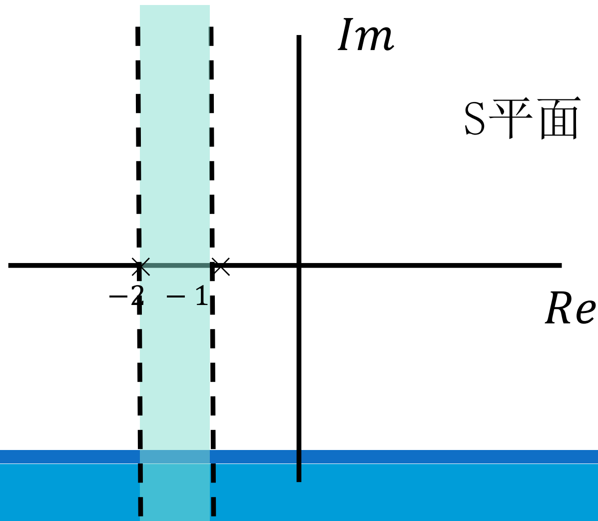




右边信号

左边信号





双边信号

6.2 常用拉普拉斯变换对

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1, ROC$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$-u(-t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^n}, \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^n}, \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$e^{-at}u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$-e^{-at}u(-t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}\{s\}<-a$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{(s+a)^n},\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{(s+a)^n},\mathrm{Re}\{s\}<-a$$

$$\delta(t-T)\overset{L}{\longleftrightarrow}e^{-sT},ROC$$

$$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}\overset{L}{\longleftrightarrow}s^n,ROC$$

无需死记硬背
结合性质可以更容易推导并理解

§6.3 拉普拉斯变换的性质

(1) 线性 $ax_1(t)+bx_1(t)\xleftrightarrow{L}aX_1(s)+bX_1(s), ROC=R_1\cap R_2$

(2) 时移 $x(t-t_0)\xleftrightarrow{L}e^{-st_0}X(s), ROC=R$

(3) S域平移 $e^{s_0t}x(t)\xleftrightarrow{L}X(s-s_0), ROC=R+\mathrm{Re}\{s_0\}$

(4) 时域尺度变换 $x(at)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a}), ROC=aR$

(5) 共轭 $x^*(t)\xleftrightarrow{L}X^*(s^*), ROC=R$

(6) 卷积 $x_1(t)*x_2(t)\xleftrightarrow{L}X_1(s)X_2(s), ROC=R_1\cap R_2$

(7) 时域微分 $\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{L}sX(s), ROC\subset R$

(8) s 域微分 $-tx(t)\xleftrightarrow{L}\frac{dX(s)}{ds}, ROC=R$

(9) 时域积分 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\xleftrightarrow{L}\frac{X(s)}{s}, ROC=R\cap\mathrm{Re}\{s\}>0$

(10) 初值与终值定理 $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$ $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$

若$t<0$，$x(t)$=0，且在t =0时，$x(t)$不包含冲激或者高阶奇异函数

例．　设x(t)是某信号，它有一个有理的拉氏变换，共有两个极点，分别是s=-1，s=-3。若 $g(t)=e^{2t}x(t)$，其傅氏变换G(jω)收敛，试问x(t)信号是右边？左边？双边？

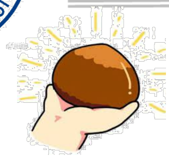
解：$L\{x(t)\}=X(s)$，$ROC=R_1$

$$g(t)=e^{2t}x(t)\overset{L}{\leftrightarrow}G(s)=X(s-2),\qquad ROC=R_1+2$$

$x(t)$ 两个极点：-1，-3 ⟶ $g(t)$ *两个极点：+1，-1。*

$g(t)$ 的傅氏变换 $G(j\omega)$收敛，表示当s=$j\omega$时，G(s)是收敛的，即$G(s)$的收敛域包含$j\omega$轴。

x(t) 两个极点：s=−1，s=−3。
g(t) 两个极点：s=+1，s=−1。



- 若$x(t)$是左边信号，则$X(s)$的ROC:Re{s}<-3，$G(s)$的ROC:Re{s}<-1，没有包含$j\omega$轴。所以$x(t)$不是左边信号。

- 若$x(t)$是右边信号，则$X(s)$的ROC：Re{s}>-1，$G(s)$的ROC：Re{s}>1，没有包含$j\omega$轴。所以$x(t)$不是右边信号。

- 若x(t)是双边信号，则$X(s)$的ROC：-3<Re{s}<-1，$G(s)$的ROC：-1<Re{s}<1，包含$j\omega$轴。所以x(t)是双边信号。

§6.3 拉普拉斯变换的性质

(1)线性 $ax_1(t)+bx_1(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}aX_1(s)+bX_1(s), ROC=R_1\cap R_2$

(2)时移 $x(t-t_0)\overset{L}{\longleftrightarrow}e^{-st_0}X(s), ROC=R$

(3)S域平移 $e^{s_0t}x(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s-s_0), ROC=R+\mathrm{Re}\{s_0\}$

(4)时域尺度变换 $x(at)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a}), ROC=aR$

(5)共轭 $x^*(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X^*(s^*), ROC=R$

(6)卷积 $x_1(t)*x_2(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X_1(s)X_2(s), ROC=R_1\cap R_2$

(7)时域微分 $\frac{dx(t)}{dt}\overset{L}{\longleftrightarrow}sX(s), ROC\subset R$

(8)s 域微分 $-tx(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{dX(s)}{ds}, ROC=R$

(9)时域积分 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{X(s)}{s}, ROC=R\cap\mathrm{Re}\{s\}>0$

(10)初值与终值定理 $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\,X(s)$ $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}s\,X(s)$

若$t<0$，$x(t)$=0，且在t=0时，$x(t)$不包含冲激或者高阶奇异函数

§6.3　拉普拉斯变换的性质

(1) 线性　$ax_1(t)+bx_1(t)\xleftrightarrow{L}aX_1(s)+bX_1(s), ROC=R_1\cap R_2$

(2) 时移　$x(t-t_0)\xleftrightarrow{L}e^{-st_0}X(s), ROC=R$

(3) S域平移　$e^{s_0t}x(t)\xleftrightarrow{L}X(s-s_0), ROC=R+\mathrm{Re}\{s_0\}$

(4) 时域尺度变换　$x(at)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a}), ROC=aR$

(5) 共轭　$x^*(t)\xleftrightarrow{L}X^*(s^*), ROC=R$

(6) 卷积　$x_1(t)*x_2(t)\xleftrightarrow{L}X_1(s)X_2(s), ROC=R_1\cap R_2$

(7) 时域微分　$\frac{dx(t)}{dt}\xleftrightarrow{L}sX(s), ROC\subset R$

(8) s 域微分　$-tx(t)\xleftrightarrow{L}\frac{dX(s)}{ds}, ROC=R$

(9) 时域积分　$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\xleftrightarrow{L}\frac{X(s)}{s}, ROC=R\cap\mathrm{Re}\{s\}>0$

(10) 初值与终值定理　$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$　$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$

若$t<0$，$x(t)$=0，且在t=0时，$x(t)$不包含冲激或者高阶奇异函数

例6. 10

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$te^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^3}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^n}, \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

例6.11

$$X(s)=\frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$X(s)=\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s+2},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$x(t)=[2te^{-t}-e^{-t}+3e^{-2t}]u(t)$$

§6.3 拉普拉斯变换的性质

(1) 线性 $ax_1(t)+bx_1(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}aX_1(s)+bX_1(s), ROC=R_1\cap R_2$

(2) 时移 $x(t-t_0)\overset{L}{\longleftrightarrow}e^{-st_0}X(s), ROC=R$

(3) S域平移 $e^{s_0t}x(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s-s_0), ROC=R+\mathrm{Re}\{s_0\}$

(4) 时域尺度变换 $x(at)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a}), ROC=aR$

(5) 共轭 $x^*(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X^*(s^*), ROC=R$

(6) 卷积 $x_1(t)*x_2(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X_1(s)X_2(s), ROC=R_1\cap R_2$

(7) 时域微分 $\frac{dx(t)}{dt}\overset{L}{\longleftrightarrow}sX(s), ROC\subset R$

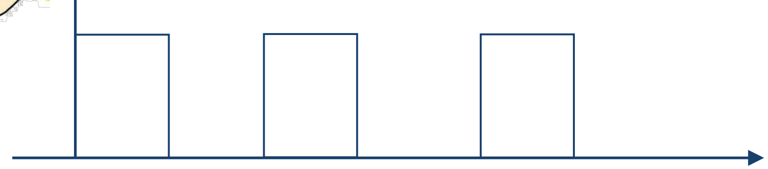
(8) s 域微分 $-tx(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{dX(s)}{ds}, ROC=R$

(9) 时域积分 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{X(s)}{s}, ROC=R\cap\mathrm{Re}\{s\}>0$

(10) 初值与终值定理 $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$ $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$

若$t<0$，$x(t)$=0，且在t=0时，$x(t)$不包含冲激或者高阶奇异函数

单边矩形周期信号拉氏变换



$$x_1(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

第一周期的信号

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau})$$

第一周期的拉氏变换

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s(1 - e^{-sT})}$$

利用时移特性

利用无穷级数求和

6.4 单边周期信号与抽样信号的拉氏变换

单边周期信号： $x(t)=x(t\text{-}nT) \quad t>0$

x_1(t): x(t)的第一周期

$$x_1(t) \overset{L}{\leftrightarrow} X_1(s)$$

第一周期的拉氏变换

$$x_1(t-nT) \overset{L}{\leftrightarrow} e^{-snT}X_1(s)$$

时移特性

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_1(t-nT) \overset{L}{\leftrightarrow} X_1(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{X_1(s)}{1-e^{-sT}} = X_1(s)\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}$$

利用无穷级数求和

抽样信号的拉氏变换

$$\delta_T(t) \bullet u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$L\{\delta_T(t) \bullet u(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$x_s(t) = x(t) \bullet \delta_T(t) \bullet u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$L\{x_s(t)\} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\, e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT)\, e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)(e^{-sT})^n$$

抽样信号的拉氏变换：
离散时间信号的z变换

$$L\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT)\, e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)(e^{-sT})^n$$

$$e^{sT} = z$$

$$L\{x_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

从傅氏变换到拉氏变换

有几种情况不满足狄里赫利条件：

- u(t)
- 增长信号 $e^{at}u(t)(a>0)$
- 周期信号 $\cos\omega t u(t)$

- **若乘一衰减因子$e^{-\sigma t}$，σ为任意实数，则$x(t).e^{-\sigma t}$收敛，满足狄里赫利条件**

$u(t)e^{-\sigma t}$

$e^{at}.e^{-\sigma t}u(t) \quad (\sigma > a)$

$e^{-\sigma t}\cos\omega t u(t)$

FT：实频率ω是振荡频率。

LT：复频率$s=\sigma+j\omega$，ω是振荡频率，σ控制衰减速度

6.5 拉普拉斯反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$$

积分路径：满足Re{s} =σ的全部s点的直线（平行于jω轴）

反变换的积分求值, 要利用复平面的围线积分

部分分式展开法:(有理函数)

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\dots b_ms^m}{a_0+a_1s+\dots a_ns^n}$$

采用部分分式展开法:将有理拉氏变换式展开成低阶的线性组合,其中每一个低阶项的反变换,由拉氏变换性质或者查表得到

注意收敛区域:左边信号、右边信号,双边信号

（1）X(s)分母多项式有n个互异单根(实根、共轭复数根)

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\ldots.b_ms^m}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k_1}{(s-p_1)}+\frac{k_2}{(s-p_2)}+\ldots+\frac{k_n}{(s-p_n)}$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{(s-p_i)}$$

$$k_i=X(s)(s-p_i)\big|s=p_i$$

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}k_ie^{p_it}\,\mathrm{u}(t)$$ 如果是右边信号

（1） $X(\mathrm{s})$分母多项式有n个互异单根(实根、共轭复数根)

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\dots.b_ms^m}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k_1}{(s-p_1)}+\frac{k_2}{(s-p_2)}+\dots+\frac{k_n}{(s-p_n)}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{(s-p_i)}$$

$$k_i=X(s)(s-p_i)\big|s=p_i$$

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}k_ie^{p_it}\,\mathrm{u}(t)$$ 如果是右边信号

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$\mathrm{Re}\{s\}>-1$

$$X(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

$$A=[(s+1)X(s)]\big|_{s=-1}$$

$$B=[(s+2)X(s)]\big|_{s=-2}$$

$$x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

$\mathrm{Re}\{s\}>-1$

分子阶次高于分母时

例

$$X(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

长除法

$$X(s)=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s)=s+2+\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)} \qquad k_i=X(s)(s-p_i)\big|s=p_i$$

$$x(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

(2)X(s)分母多项式包含重根

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)}$$

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{k_{1k}}{(s-p_1)}+\frac{B(s)}{D(s)}$$

$$k_{11}=X(s)(s-p_1)^k\big|s=p_1$$

$$k_{12}=\frac{d[X(s)(s-p_1)^k]}{ds}\Big|s=p_1$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{(i-1)}[X(s)(s-p_1)^k]}{ds^{i-1}}\Big|s=p_1$$

(2) X(s) 分母多项式包含重根

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)}$$

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{k_{1k}}{(s-p_1)}+\frac{B(s)}{D_1(s)}$$

$$k_{11}=X(s)(s-p_1)^k|s=p_1$$

$$k_{12}=\frac{d[X(s)(s-p_1)^k]}{ds}|s=p_1$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{(i-1)}[X(s)(s-p_1)^k]}{ds^{i-1}}|s=p_1$$

$$X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3},$$

$$\mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+1)}+\frac{k_2}{s}$$

$$X(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)}+\frac{-2}{s}$$

$$k_{11}=\frac{s-2}{s}\Big|_{s=-1}=3$$

$$k_{12}=\frac{d\frac{s-2}{s}}{ds}\Big|_{s=-1}=2$$

$$k_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2\frac{s-2}{s}}{ds^2}\Big|_{s=-1}=2$$

$$x(t)=(3\frac{t^2}{2}e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}-2)u(t)$$

$$k_2=sX(s)\big|_{s=0}=-2$$

例6.15（1）

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$\boxed{\mathrm{Re}\{s\}<-2}$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

$$-e^{-t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+1},\mathrm{Re}\{s\}<-1$$

$$-e^{-2t}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+2},\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

$$x(t)=[-e^{-t}+e^{-2t}]u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+1)(s+2},\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

例6.15（2） $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

$\boxed{-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1}$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)}\overset{L}{\longleftrightarrow}-e^{-t}u(-t),\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1$$ 左边信号

$$\frac{1}{(s+2)}\overset{L}{\longleftrightarrow}e^{-2t}u(t),\quad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$ 右边信号

$$x(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\frac{1}{(s+1)(s+2)},-1<\mathrm{Re}\{s\}<-2$$