第二章 线性时不变系统的时域分析

2.0 引言

研究线性时不变（LTI）系统的意义

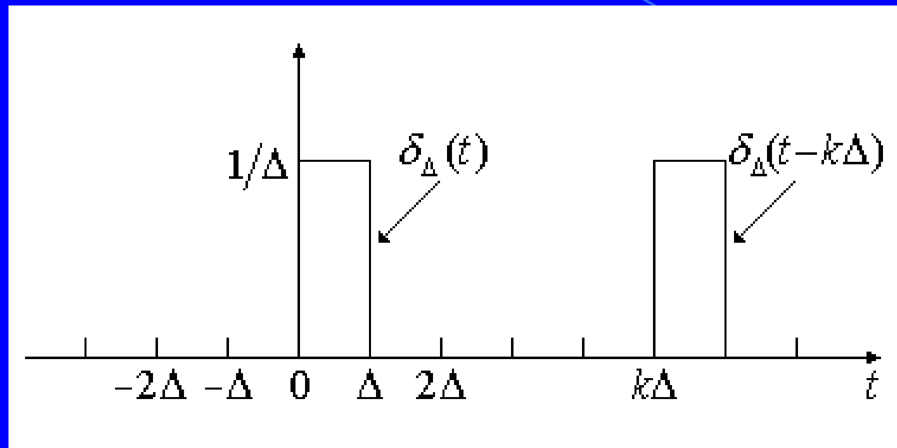
- 很多物理过程都具有这两个性质（L, TI）
- 因为LTI系统具备叠加性和时不变性，所以我们可以通过求解系统对基本信号的响应，利用该响应的加权移位并求和（或积分），可以求得系统对任意信号的响应。

冲激函数、卷积

2.1 连续时间LTI系统的时域分析

将任意信号看成一串理想化的脉冲组合，导出单位冲激响应,然后得到任意信号的响应（卷积形式）。

2.1.1 用脉冲串表示连续时间信号

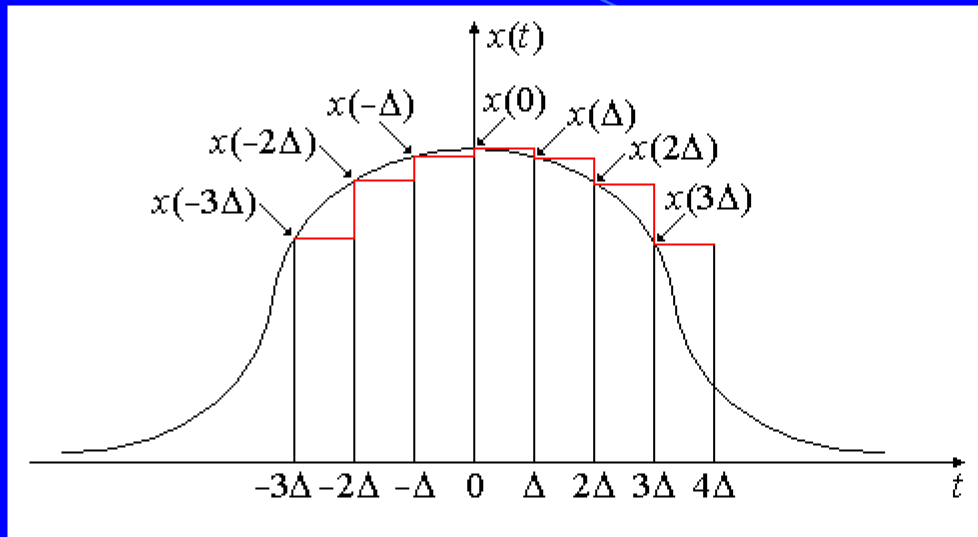


$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & 0\le t<\Delta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\delta_\Delta(t-k\Delta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & k\Delta\le t<k\Delta+\Delta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

信号的脉冲分量表示：



$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Delta \Rightarrow 0, \Delta \Rightarrow d\tau, \sum \Rightarrow \int, k\Delta \Rightarrow \tau$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

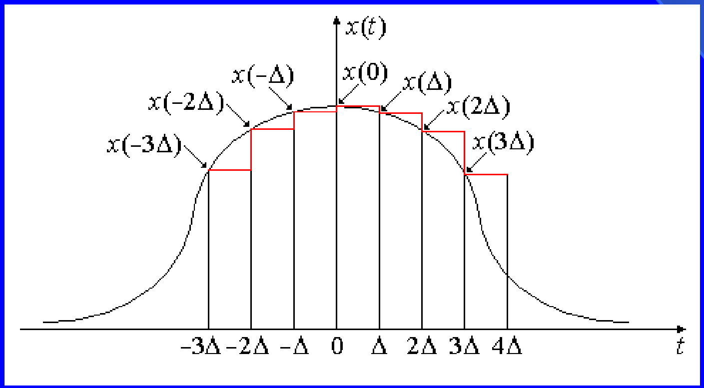
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$= x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

$$x(t)\cdot\delta(t-t_0) =$$

$$x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$



任意信号x(t)可以用无穷多个单位冲激函数 $\delta(t)$的移位、加权之和（积分）来表示。

2.1.2 连续时间系统的单位冲激响应与卷积积分

1. 单位冲激响应

当输入信号 $x(t)=\delta(t)$ 时，系统的响应为$y(t)=h(t)$。

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y(t)$$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow h(t)$$

$h(t)$：单位冲激响应　　$\delta(t) \rightarrow h(t)$

2、根据单位冲激响应$h(t)$求解系统对于任意输入的响应

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$ 时不变

$$x[\Delta]\cdot\delta[t-\Delta]\cdot\Delta \rightarrow x[\Delta]\cdot h[t-\Delta]\cdot\Delta$$ 齐次性

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\cdot h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$ 叠加性

$$\Delta \Rightarrow 0, \sum \Rightarrow \int, k\Delta \Rightarrow \tau, \Delta \Rightarrow d\tau$$

$$\begin{array}{ccc} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau & \rightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ \| & & \| \\ \boldsymbol{x(t)} & \longrightarrow & \boldsymbol{y(t)} \end{array}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$ 卷积积分

$$x(t) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI}\\ h(t)\end{array}} \rightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

LTI系统对任意输入信号$x(t)$的响应, 可以看作$x(t)$和$h(t)$的相互作用:卷积

LTI系统的单位冲激响应$h(t)$完全表征了系统的特性。

卷积积分的计算

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cdot g(t-\alpha)d\alpha$$

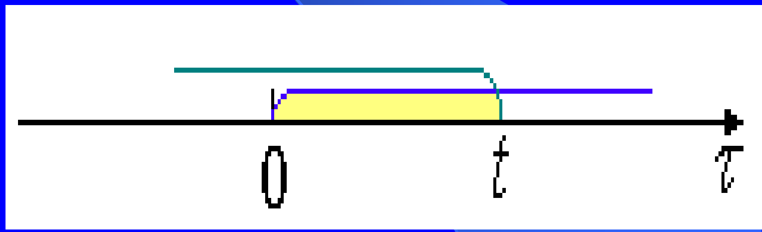
- 反转；平移；相乘；
- 确定积分的上、下限；
- 积分；

例

例：$h(t)=e^{-at}u(t)$，$x(t)=e^{-bt}u(t)$，$a\neq b$，求$y(t)$

解：$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b\tau}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$



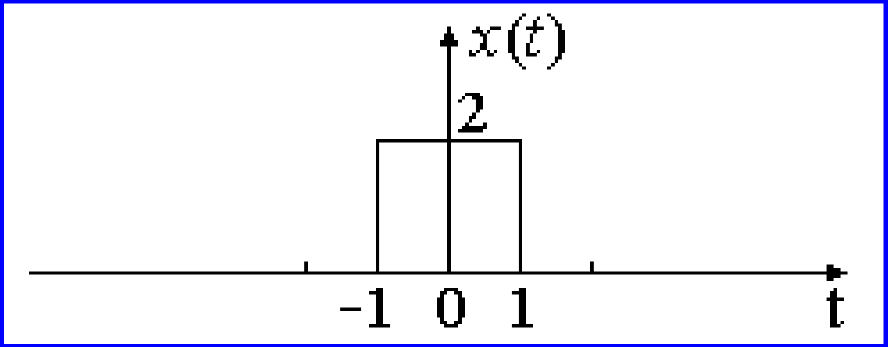
$$=u(t)\int_{0}^{t}e^{-b\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau$$

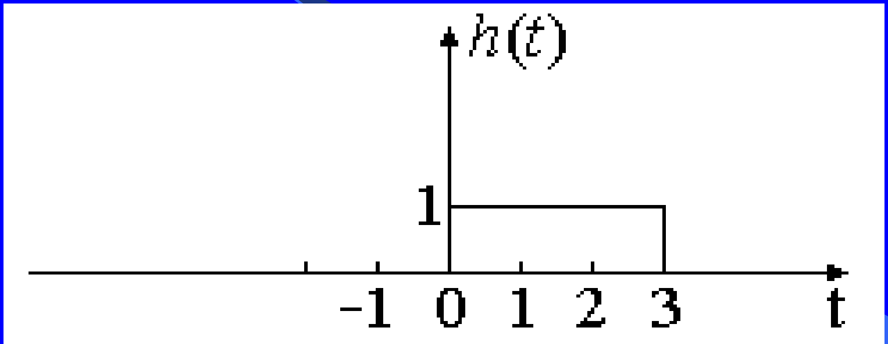
$$=e^{-at}u(t)\int_{0}^{t}e^{(a-b)\tau}d\tau=e^{-at}u(t)\left.\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right|_{0}^{t}$$

$$=e^{-at}u(t)\frac{e^{(a-b)t}-1}{a-b}=\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}u(t)$$

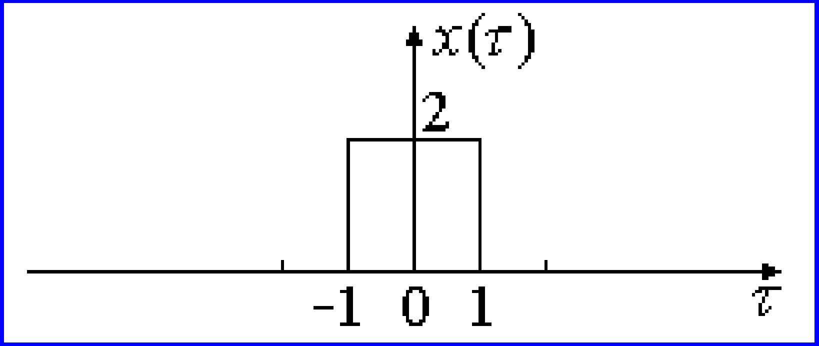
2.1.3 卷积积分的图形求解

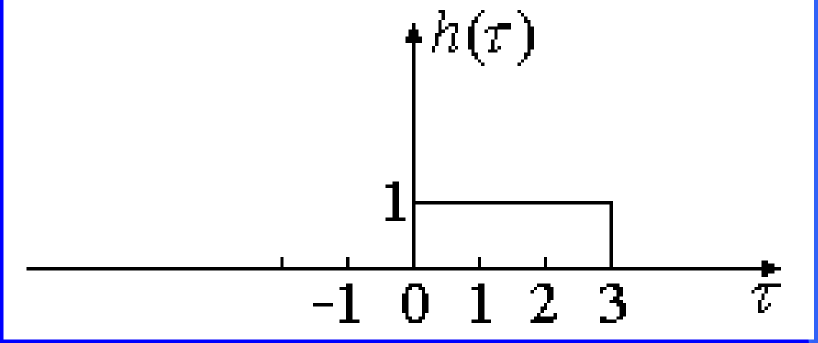
例： 已知$x(t)$与$h(t)$如图所示，试求$x(t)*h(t)$



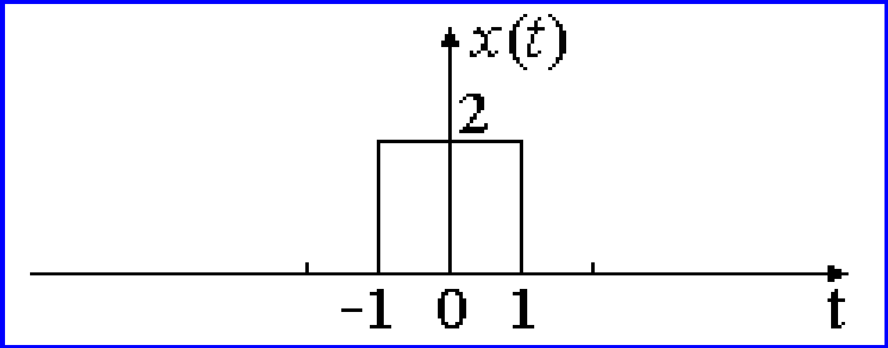


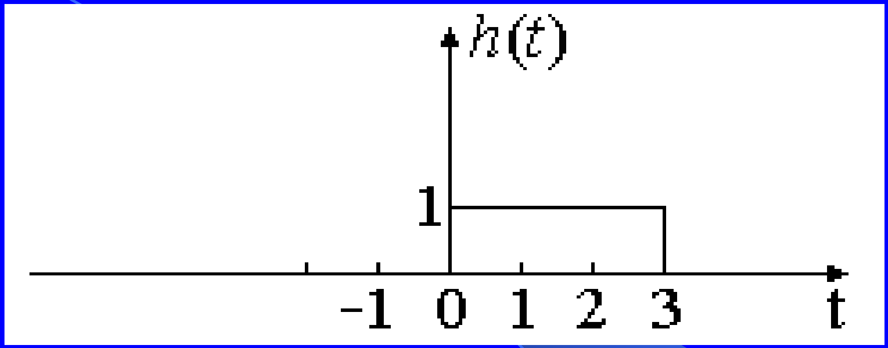
解：$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$





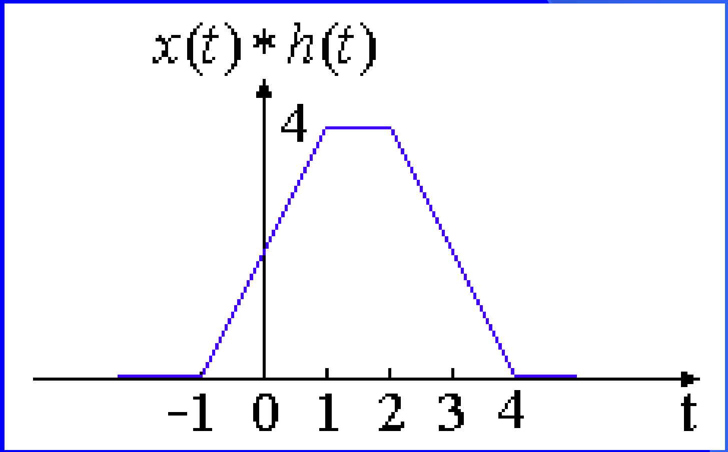
例： 已知$x(t)$与$h(t)$如图所示， 试求$x(t)*h(t)$



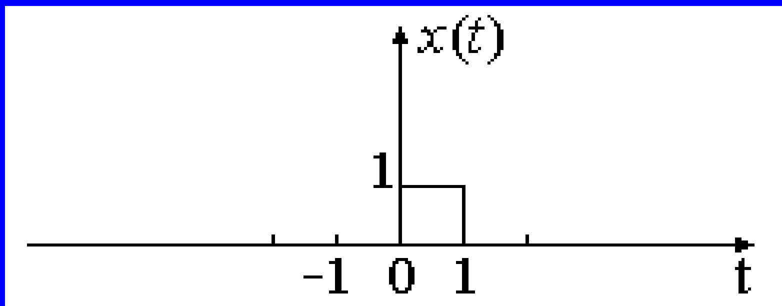


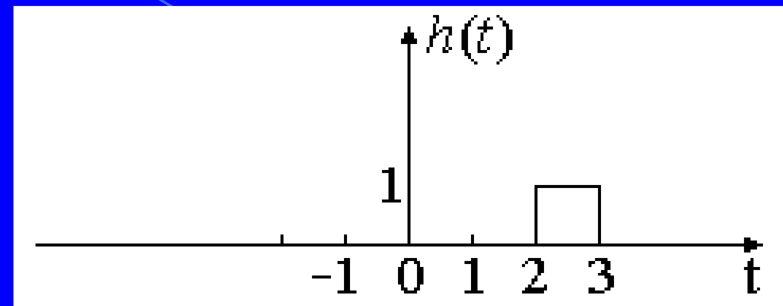
结果：

$$x(t)*h(t)=\begin{cases} 2(t+1) & -1<t<1 \\ 4 & 1<t<2 \\ 2(4-t) & 2<t<4 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

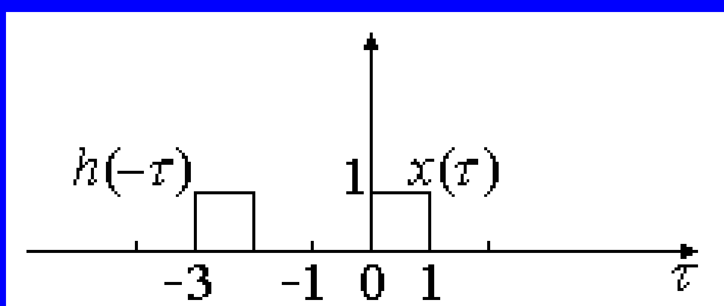


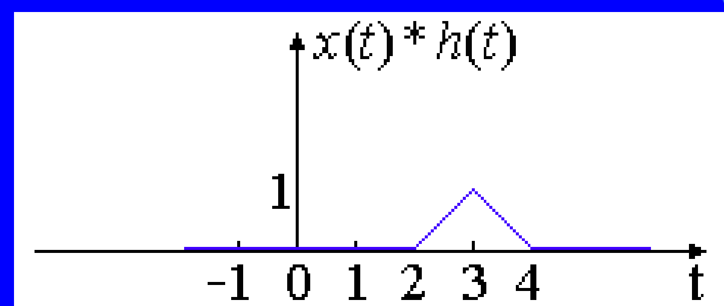
例： 已知$x(t)$与$h(t)$如图所示， 试求$x(t)*h(t)$





结果：





2.1.4 卷积积分的性质

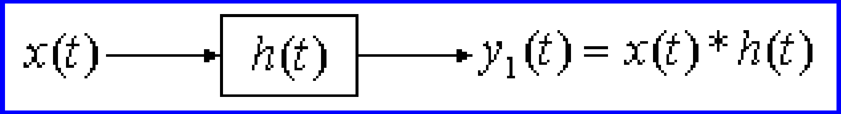
1、卷积积分的代数性质

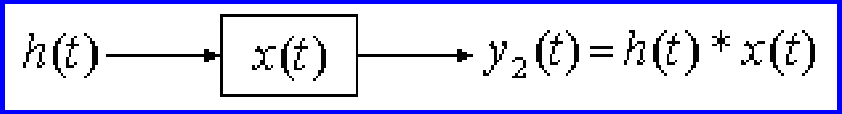
① 交换律
② 结合律
③ 分配律

① 交换律

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$





② 结合律

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

级联系统

$$x(t)\longrightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{w(t)} \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=w(t)*h_2(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

$$y(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=x(t)*h(t)$$

$$x(t)\longrightarrow \boxed{h(t)=h_1(t)*h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

结论： 两个LTI系统级联后的冲激响应

＝ 单个等效冲激响应的卷积

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=h_1(t)*h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

交换律

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=h_2(t)*h_1(t)} \longrightarrow y(t)$$

结合律

级联系统

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow y(t)$$

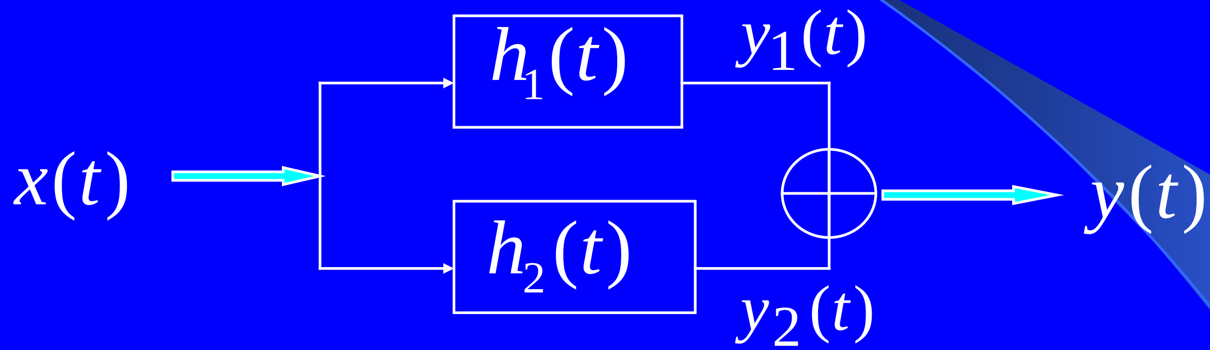
$$y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=[x(t)*h_2(t)]*h_1(t)$$

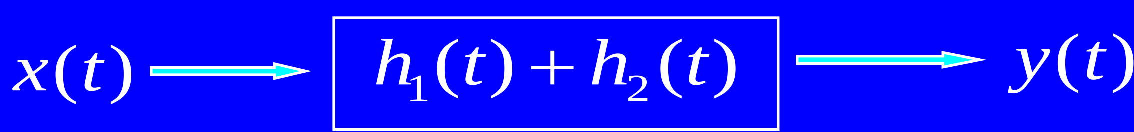
结论 两个LTI系统级联后的单位冲激响应与它们在级联中的级联次序无关。

③ 分配律

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

并联





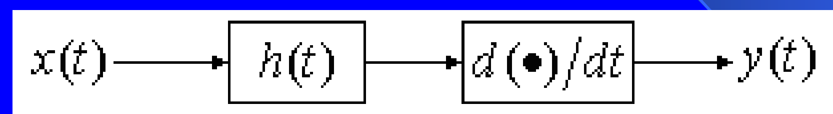
LTI系统的并联可以用一个单一的LTI系统代替，系统的单位冲激响应＝并联联结中各个单位冲激响应的和。

（2）卷积的积分与微分

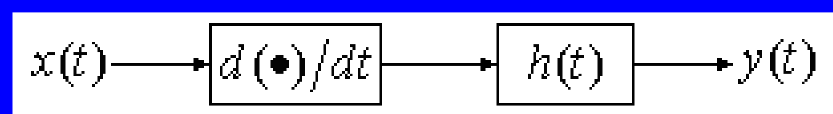
$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad 与 \quad y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$ 都是LTI系统。

(1) 微分算子

$$\frac{d\left[x(t)*h(t)\right]}{dt}$$



$$=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$



$$=x(t)*\frac{dh(t)}{dt}$$

推论：$$\frac{d^2\left[x(t)*h(t)\right]}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}*h(t)=\frac{dx(t)}{dt}*\frac{dh(t)}{dt}=x(t)*\frac{d^2h(t)}{dt^2}$$

例

有一LTI系统，当激励为 $x_1(t)=u(t)$ 时，响应 $y_1(t)=e^{-at}u(t)$，试求当 $x_2(t)=\delta(t)$时，响应 $y(t)$？（假定系统无起始储能）。

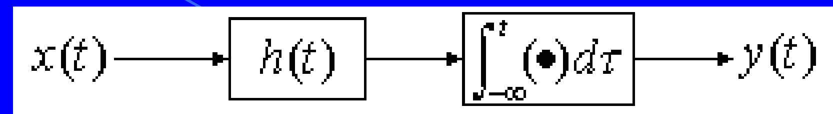
解: $x_2(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$, $y_1(t)=x_1(t)*h(t)$

$$y_2(t)=x_2(t)*h(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}*h(t)=\frac{d\left[x_1(t)*h(t)\right]}{dt}=\frac{dy_1(t)}{dt}$$

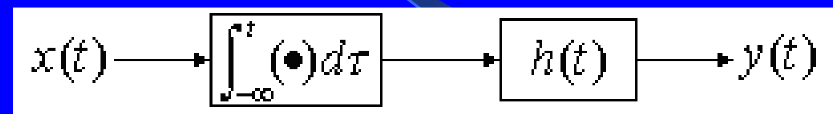
$$y_2(t)=\frac{dy_1(t)}{dt}=e^{-at}\delta(t)-ae^{-at}u(t)=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$$

(2) 积分算子

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) * h(\tau) d\tau$$



$$= \left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau\right] * h(t)$$



$$= x(t) * \left[\int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau\right]$$

(3) 记$x^{(k)}(t)=\dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$, $x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$,

$\boxed{\text{则}y^{(k)}(t)=x^{(i)}(t)*h^{(k-i)}(t)}$

$$y^0(t)=x^{(0)}(t)*h^{(0-0)}(t),\qquad y(t)=x(t)*h(t)$$

$$y^0(t)=x^{(1)}(t)*h^{(0-1)}(t),\qquad y(t)=\frac{dx(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t} h(t)dt$$

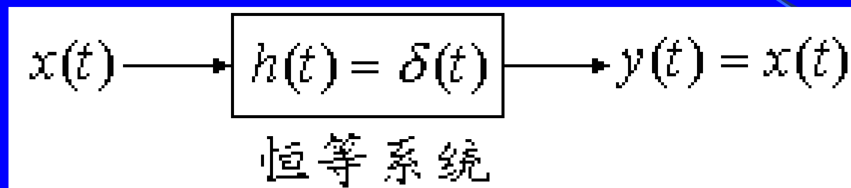
$$y^0(t)=x^{(-1)}(t)*h^{(0+1)}(t),\qquad y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t)dt*\frac{dh(t)}{dt}$$

$$y^1(t)=x^{(0)}(t)*h^{(1-0)}(t),\qquad \frac{dy(t)}{dt}=x(t)*\frac{dh(t)}{dt}$$

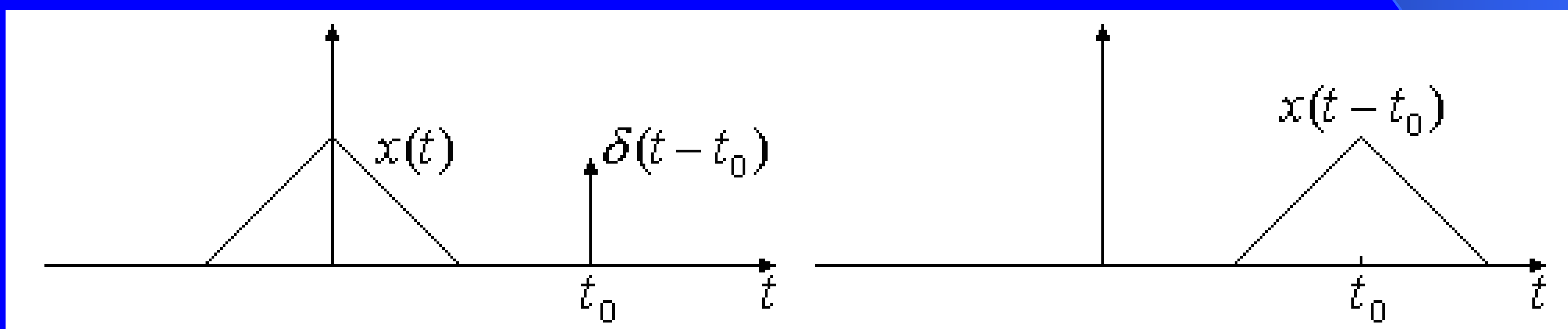
$$y^1(t)=x^{(1)}(t)*h^{(1-1)}(t),\qquad \frac{dy(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$

3、与$\delta(t)$以及$u(t)$的卷积

(1) $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$



推论：$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau = x(t-t_0)$



若$h(t) = \delta(t-t_0)$，则称之为延时系统。

证明

若：$y(t) = x(t) * h(t)$

则：$x(t-t_1) * h(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$

证：$x(t-t_1) = x(t) * \delta(t-t_1)$

$$h(t-t_2) = h(t) * \delta(t-t_2)$$

$$\begin{aligned} x(t-t_1) * h(t-t_2) &= [x(t) * \delta(t-t_1)] * [h(t) * \delta(t-t_2)] \\ &= [x(t) * h(t)] * [\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2)] \\ &= y(t) * \delta(t-t_1-t_2) = y(t-t_1-t_2) \end{aligned}$$

$$(2)\quad x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

积分器的单位冲激响应为：$h(t)=u(t)$

2.2 离散时间LTI系统的时域分析

2.1.1 离散时间信号的单位脉冲分解

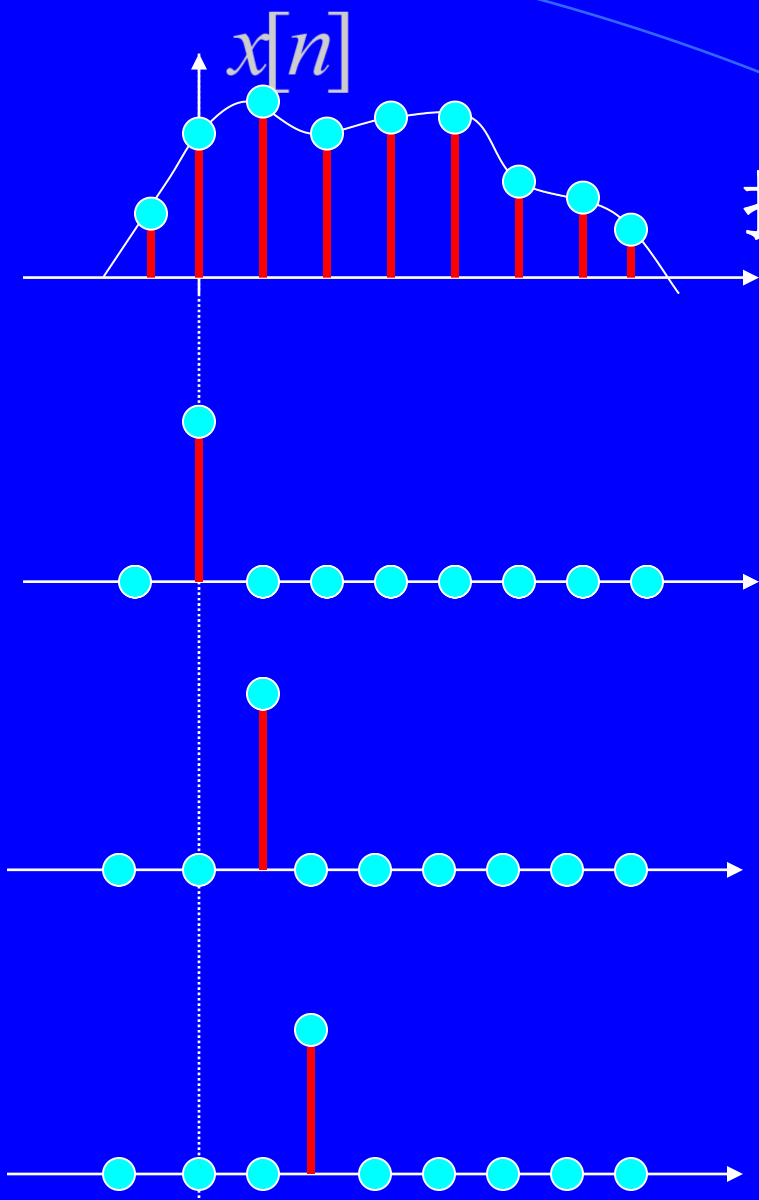
由于单位脉冲信号仅在原点有非零值，而在其它点上的值均为零，即：

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}$$

所以，任何离散时间信号均可以利用移位并加权了的单位冲击信号的和表示。

关键

把离散信号看作单个脉冲信号的组合



$$x[0]\delta[n]$$

$+$

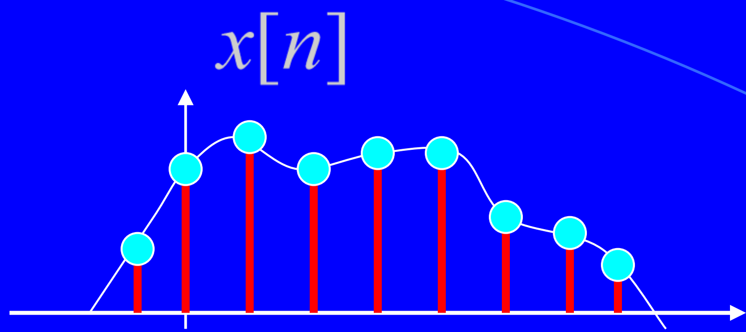
$$x[1]\delta[n-1]$$

$+$

$$x[2]\delta[n-2]$$

$+$

……



$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

加权表示

将任意信号表示为一串移位的单位脉冲序列的线性组合

离散时间单位脉冲的筛选性质

例：用$\delta[n]$表示$u[n]$

解：$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$

2.2.2 离散时间LTI系统的单位脉冲响应与卷积和

根据单位脉冲响应$h[n]$求解系统对于任意输入的响应

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$ 单位脉冲响应

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$ 时不变

$$x[k]\delta[n-k] \rightarrow x[k]h[n-k]$$ 齐次性

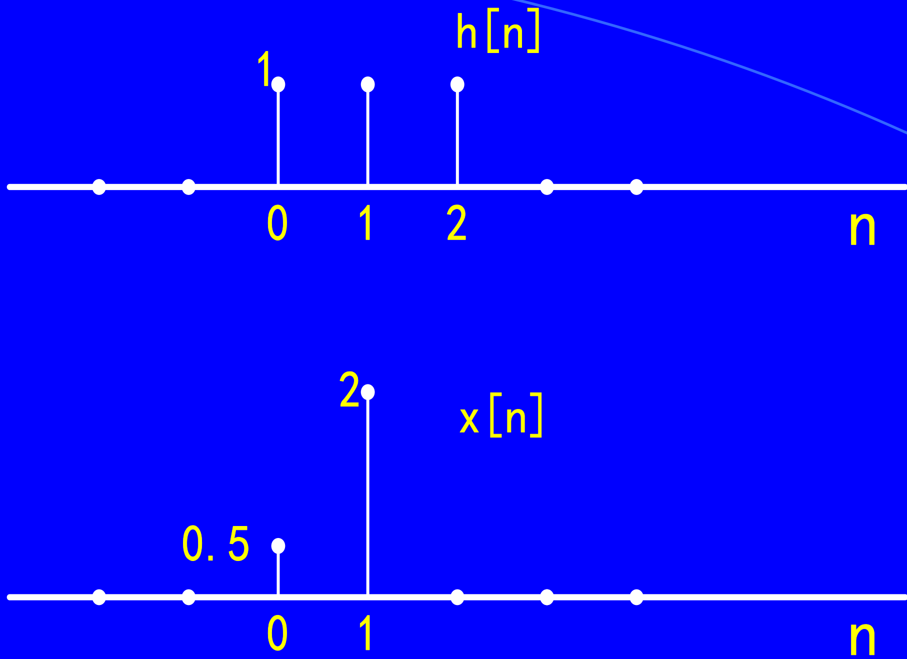
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$ 叠加性

$$x[n] \rightarrow y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n]$$ 卷积和

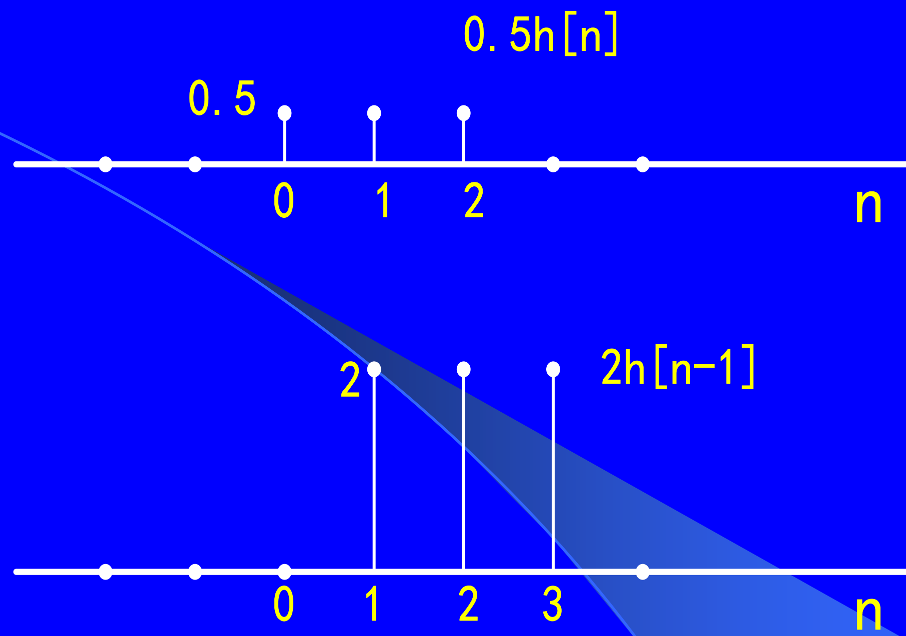
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

结论

- **LTI系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应来表示**
- **LTI系统的单位脉冲响应表示了系统的特性**

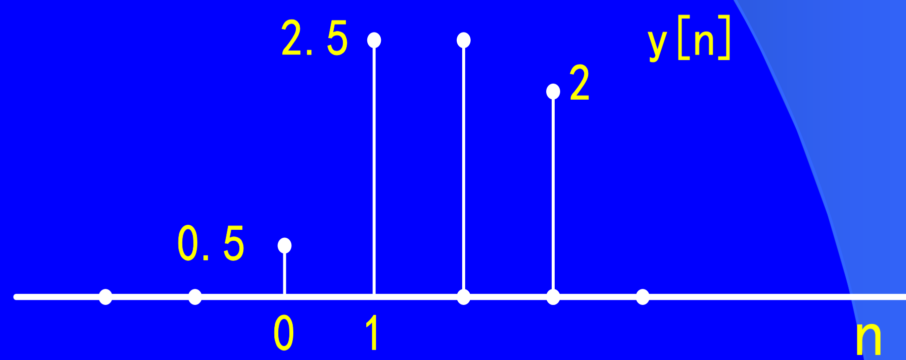


(a)



(b)

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

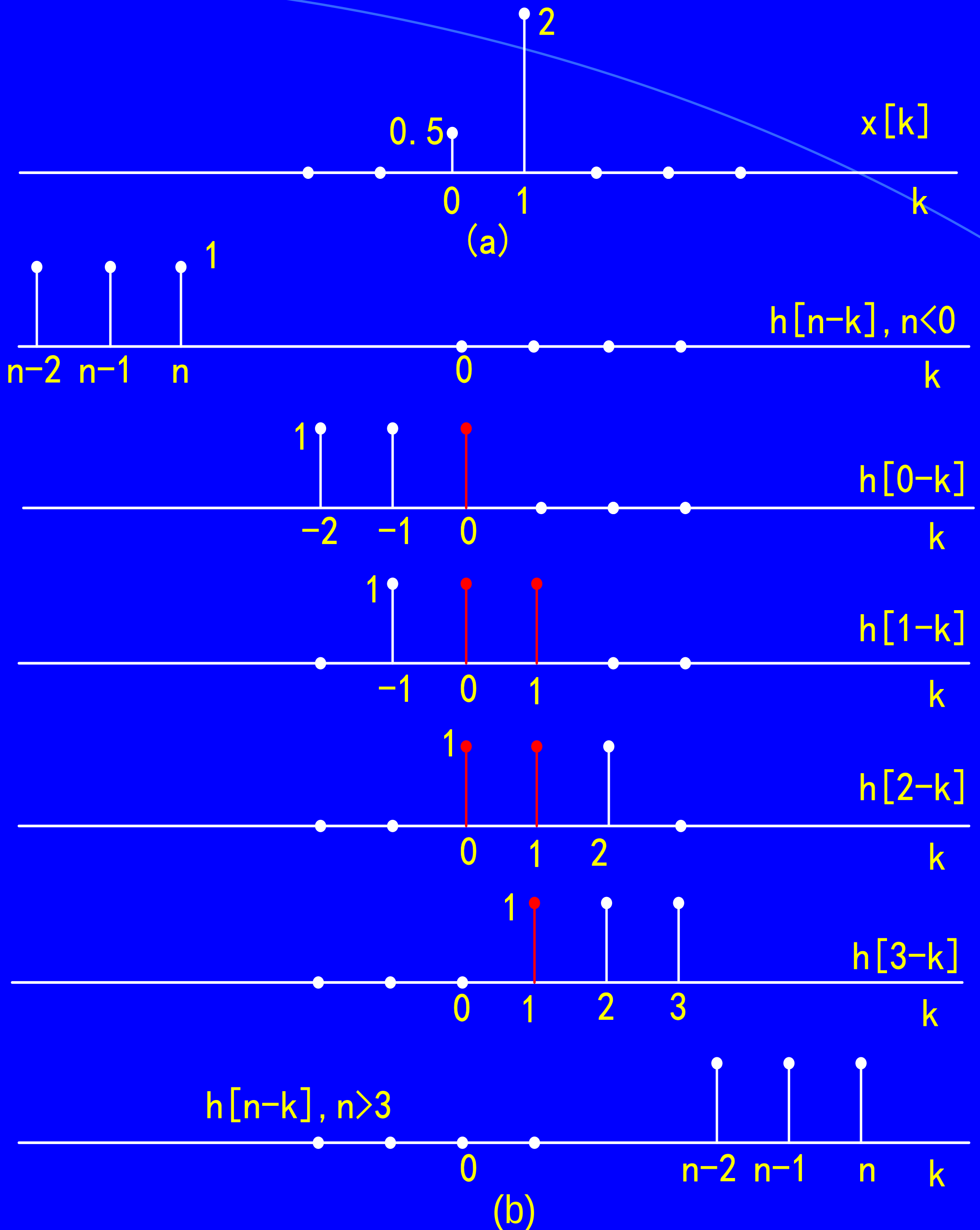


(c)

对每一个n值的输出y[n]，可以看作每个输入x[k]对输出的贡献，其权重为h[n-k]

图示法求卷积和

- 反转:k为累加变量,n为参变量,将x[n]和h[n]的自变量用k代换,h[k]反转为h[-k]。
- 平移:将h[-k]随参变量n平移到h[n-k],{h[-k+n]}。
- 相乘:将x[k]与h[n-k]相乘,得x[k]h[n-k]。
- 求和:将相乘后的x[k]h[n-k]的各点相加,得 $\sum$ x[k]h[n-k],累加值就是n时刻的卷积和。
- 选取不同的n值,重复。



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]=0,\ \ n<0$$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k]=0.5$$

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k]=2.5$$

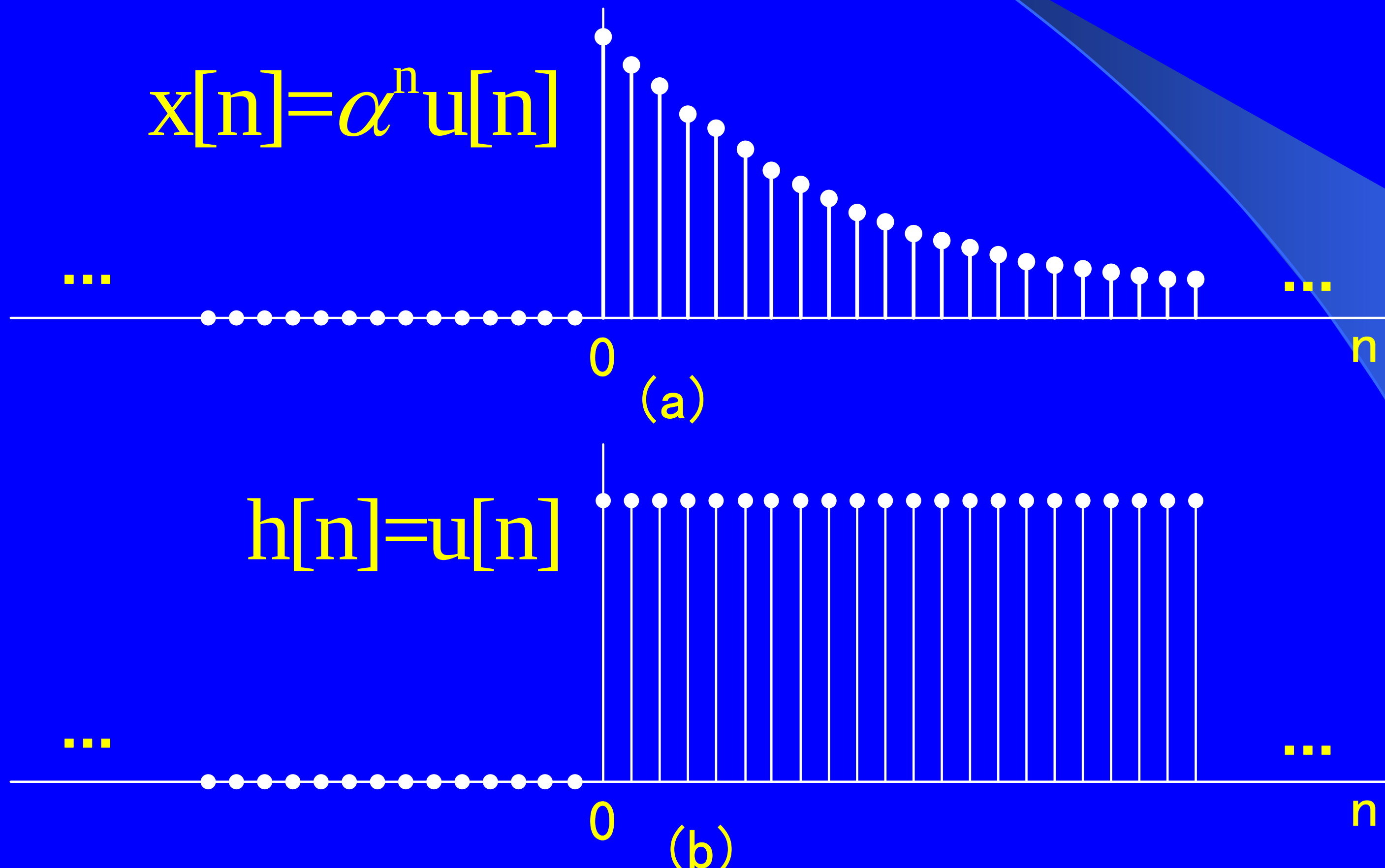
$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[2-k]=2.5$$

$$y[3]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[3-k]=2$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]=0,\ \ n>3$$

例 $x[n] = \alpha^n u[n]$

$h[n] = u[n]$



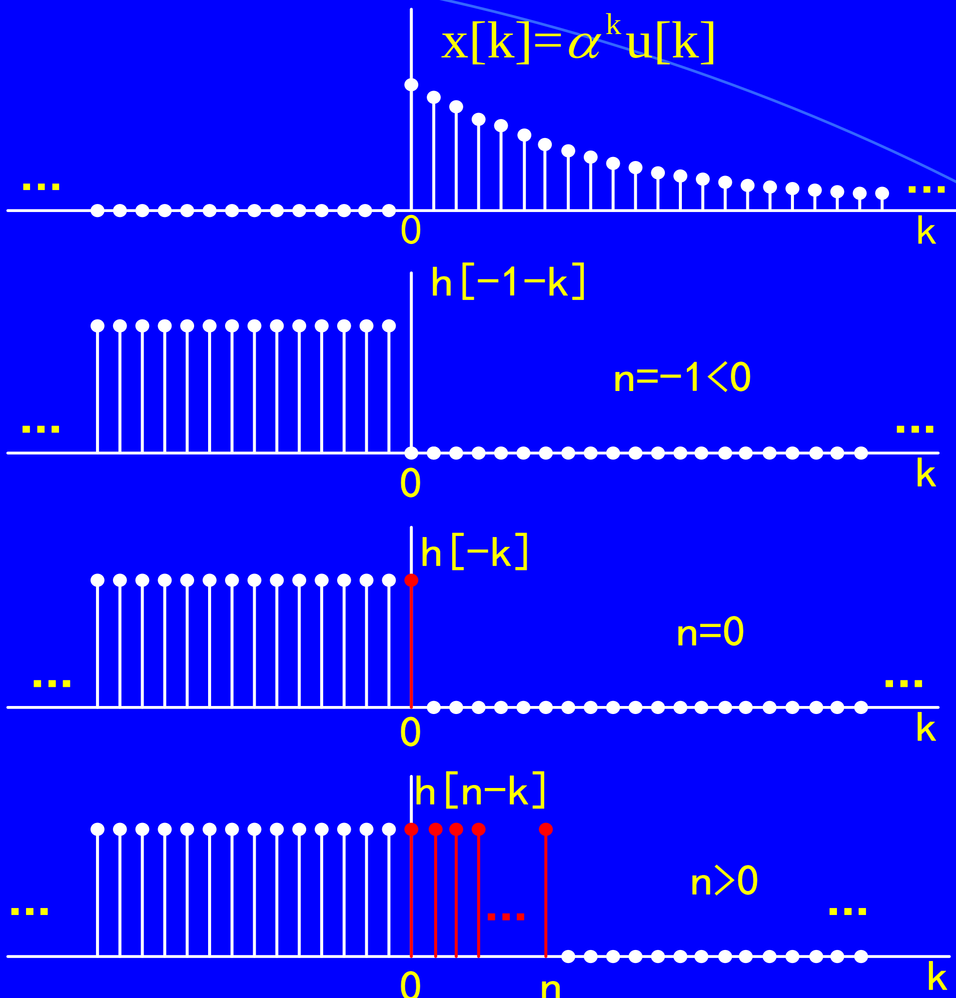


图2.6

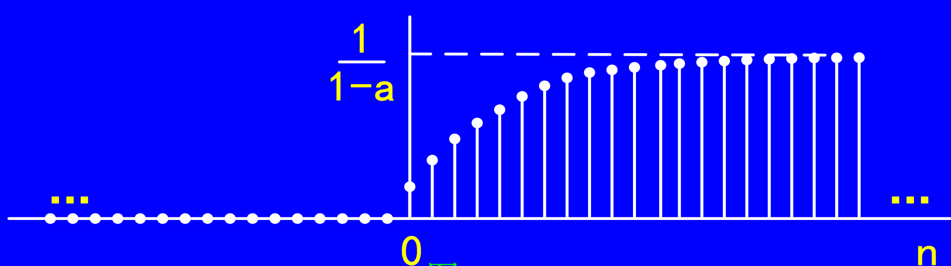


图2.7

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k}=\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n]$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{k}u[k]u[n-k]=u[n]\sum_{k=0}^{n}a^{k}$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

2.1.4 卷积和的性质

1、卷积和的代数性质

(1) 交换律：$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

(2)结合律：$\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]=x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)$

(3)分配律：$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

2、与$\delta(n)$以及$u(n)$的卷积

(1) $x[n]*\delta[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]$

$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$ ($\delta[n]$的抽样性)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta[n-n_0]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n_0]\delta[n-n_0]=x[n_0]$$

结论：离散时间的恒等系统的$h[n]=\delta[n]$

推论：$x[n]*\delta[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k-n_0]=x[n-n_0]$

结论：离散时间的延时系统的$h[n]=\delta[n-n_0]$,

特别地，单位延时器的$h[n]=\delta[n-1]$。

$$(2)\quad x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

结论：离散时间的累加器的$h[n]=u[n]$

2.3 单位脉冲响应与LTI系统性质

- 通过前几节的讨论，得到了LTI系统时域分析的基本方法：卷积。由此也得LTI系统的单位脉冲响应这一重要概念。任一LTI系统完全可由其单位脉冲响应来描述，即一LTI系统可等价为一信号：单位脉冲响应。这样就可以用信号分析方法去分析LTI系统。本节将用LTI的卷积方法和单位脉冲响应来进一步分析LTI系统的性质，讨论LTI系统的一些重要性质在单位冲激／脉冲响应中的反映。

2.3.1 可逆系统

输入、输出信号有唯一的关系。

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h_1(t)} \rightarrow w(t) = x(t)$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\delta(t)} \rightarrow x(t)$$ 恒等系统

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

例　纯时移的LTI系统

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$t_0=0$ 无记忆　$t_0\neq 0$ 有记忆

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

因此 $$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$$

逆系统 $$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

离散时间 $$h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$h_1[n] = \delta[n + n_0]$$

2.3.2 LTI系统的稳定性

离散时间
LTI系统

对每一个有界的输入，输出都有界

$$|x[n]| < B \qquad \text{对所有的n}$$

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\right|, \quad |y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$|y[n]| \le B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

稳定性 ⟷ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \le \infty$ 单位脉冲响应绝对可和

（充分必要条件）

连续时间
LTI系统

$$|x(t)| < B \quad \text{对全部t}$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

稳定性 ⟺ $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ 单位冲激响应绝对可积

（充分必要条件）

例

累加器 $h[n]=u[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u[n]|=\sum_{n=0}^{+\infty}u[n]=\infty$$ 不稳定

积分器 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(\tau)|d\tau=\int_{0}^{+\infty}d\tau=\infty$$ 不稳定

2.3.3 LTI系统的因果性

输出只决定于现在和过去的输入

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k]+\sum_{k=n+1}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

***y*[*n*]与*k*>*n*的*x*[*k*]无关** ⇒ ***h*[*n*-*k*]中对*k*>*n*的部分为零**

***h*[*n*]=0，n<0**

充分必要条件

因果LTI系统的冲激响应在冲激出现之前必须为零

线性系统的因果性等效于初始松弛条件：

如果一个因果系统的输入在某个时刻以前为0，则其输出在那个时刻以前也必须为0。

连续因果LTI系统

充分必要条件　$h(t)=0, t<0$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

例：$h(t)=e^{-t}u(t+1)$ 稳定，非因果

$h(t)=e^{-t}u(t-1)$ 稳定，因果

$h(t)=e^{2t}u(t-1)$ 不稳定，因果

$h(t)=e^{-t}u(-t)$ 不稳定，非因果

$h(t)=e^{2t}u(-t+1)$ 稳定，非因果

$h[n]=2^{-n}u[n+2]$ 稳定，非因果

$h[n]=2^{-n}u[n-1]$ 稳定，因果

$h[n]=2^{n}u[n+2]$ 不稳定，非因果

$h[n]=2^{-n}u[-n]$ 不稳定，非因果

$h[n]=2^{n}u[-n+2]$ 稳定，非因果

2.3.8 LTI系统的单位阶跃响应

单位阶跃响应

$S[n]$ → $x[n]=u[n]$时的系统输出响应

$S(t)$ → $x(t)=u(t)$时的系统输出响应

离散时间LTI系统

卷积和 →

$$S[n]=u[n]*h[n]=h[n]*u[n]$$

$$S[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

$$h[n]=S[n]-S[n-1]$$

连续时间LTI系统

卷积

$$S(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$$

$$h(t) = dS(t) / dt = S'(t)$$

§2.3.5　LTI系统的特征函数

LTI系统对复指数信号的响应

基本信号：　e^{st}　z^n

构成广泛的有用信号

LTI系统对基本信号的响应应简单

连续时间：$e^{st} \to H(s)e^{st}$

离散时间：$z^n \to H(z)z^n$

特征函数

特征值

系统对信号的响应，

仅是常数乘输入

（与输入无关）

证明

对单位冲激响应为h(t)的LTI系统

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

其中

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

结论：

输出是同一复指数乘一个常数
复指数是LTI系统的特征函数

例

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

$$a_1 e^{s_1 t} \to a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$a_2 e^{s_2 t} \to a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$a_3 e^{s_3 t} \to a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

对LTI系统

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t} \Rightarrow y(t)=\sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

LTI系统中：输入表示为复指数信号的线性组合

那么：输出为相同复指数信号的线性组合

且：输出的系数为相应系数与对应特征值相乘

周期信号：　s为纯虚数。s=jw

例 $y(t)=x(t-3)$ $x(t)=e^{j2t}$

$$y(t)=e^{j2(t-3)}=e^{-j6}e^{j2t} \qquad y(t)=H(s)e^{st}$$

特征值

单位冲激响应 $h(t)=\delta(t-3)$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-3)e^{-s\tau}d\tau=e^{-3s}$$

$$H(j2)=e^{-3j2}=e^{-6j}$$

更一般的 $x(t)=\cos(4t)+\cos(7t)$

$$\Longrightarrow \quad y(t)=\cos(4(t-3))+\cos(7(t-3))$$

$$x(t)=1/2e^{j4t}+1/2e^{-j4t}+1/2e^{j7t}+1/2e^{-j4t}$$

$$y(t)=1/2e^{-j12}e^{j4t}+1/2e^{j12}e^{-j4t}+1/2e^{-j21}e^{j7t}+1/2e^{j21}e^{-j4t}$$

$$H(s)=e^{-3s}, s=4j$$

$$=\cos(4(t-3))+\cos(7(t-3))$$

对离散LTI系统

$$x[n]=z^n \qquad z=re^{j\omega}$$

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \Rightarrow y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

LTI系统中：输入表示为复指数信号的线性组合

那么：输出为相同复指数信号的线性组合

且：输出的系数为相应系数与对应特征值相乘

周期信号： z为纯虚数。z=e^{jw}

2.4 LTI系统的微分和差分方程描述

描述系统：输入输出法/端口法

- 输入与单位脉冲响应得卷积；
- 求解微分方程；

在一定的条件下（初始松弛）

连续时间LTI系统 ⟷ 线性常系数微分方程

离散时间LTI系统 ⟷ 线性常系数差分方程

2.4.1 连续LTI系统微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$ **(1)** 一阶微分方程

- 隐含特性
- 求解微分方程，必须给定附加条件
- 因果LTI系统，附加条件取一种特殊而简单的形式

例

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$x(t)=Ke^{3t}u(t)$$ **K为实数** ....(2)

$$y(t)=y_p(t)+y_h(t)$$

完全解　特解　齐次解

特解：满足特定输入的方程的解 ——— 强迫响应

齐次解：满足齐次方程的一个解——自由响应

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$$

....(3)

求特解 $$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t), \qquad x(t)=Ke^{3t}u(t)$$

通用方法：找一个与输入形式相同的信号 **受迫响应**

$$y_p(t)=Ye^{3t}，\ t>0,\ Y\text{为待定系数} \qquad \text{....(4)}$$

(2)、(4)代入(1)

$$3Ye^{3t}+2Ye^{3t}=Ke^{3t}$$

消去因子 e^{3t}

$$3Y+2Y=K \qquad Y=K/5$$

$$\therefore y_p(t)=\frac{K}{5}e^{3t}，\ t>0$$ **强迫响应**

求齐次解 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$

假设 $y_h(t)=Ae^{st}$

代入方程后得 $Ase^{st}+2Ae^{st}=Ae^{st}(s+2)=0$

➡ $s=-2$

$y_h(t)=Ae^{-2t}$ 自由响应（自然响应）

$y(t)=Ae^{-2t}+\frac{K}{5}e^{3t},\ \ t>0$ **A未定**

确定A　　附加条件

对因果LTI系统，初始条件：　$t<t_0$, $x(t)=0$, 则 $t<t_0$, $y(t)=0$

本例　$t<0$, $x(t)=0$, 则 $t<0$, $y(t)=0$

把 $t=0$，$y(0)=0$ 代入　$y(t)=Ae^{-2t}+\frac{K}{5}e^{3t},\quad t>0$

$$y(0)=A+K/5=0 \Longrightarrow A=-K/5$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t)=\frac{K}{5}[e^{3t}-e^{-2t}],\quad t>0 \\ t<0,\ y(t)=0\text{（初始条件）} \end{array}\right\} \Rightarrow y(t)=\frac{K}{5}[\underbrace{e^{3t}}_{\text{特解}}-\underbrace{e^{-2t}}_{\text{齐次解}}]u(t)$$

强迫响应　自由响应

推广到 *N*阶线性常系数微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

N—输出y(t)的最高阶导数

***N*=0**

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

显式函数

***N*>=1** **y(t)的解＝特解+齐次解**

齐次解　满足齐次微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

自由响应

初始松弛条件： $t<=t_0$, $x(t)=0$，则 $t<=t_0$, $y(t)=0$

对$t>t_0$的响应，初始条件为

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{dy^{N-1}(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

2.4.2 线性常系数差分方程

N阶线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] \qquad \textbf{(1)}$$

y[n]的完全解＝特解＋齐次解

齐次解　　满足齐次方程　$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$

初始松弛条件：若 **$n<n_0$, $x[n]=0$** 则 **$n<n_0$，$y[n]=0$**

系统为因果LTI系统

另一种方法

重写(1)式

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\{\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\} \quad (2)$$

递归方程

需要附加条件： y[n-1] ,…., y[n-N]

N=0

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}(\frac{b_k}{a_0})\,x[n-k] \quad (3)$$

非递归方程

系统的单位脉冲响应

$$h[n]=\begin{cases}\frac{b_n}{a_0}, & 0\le \mathrm{n}\le \mathrm{M}\\ 0, & 其余\mathrm{n}\end{cases}$$

(3)式为卷积和的表示

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]=h[n]*x[n]$$

单位脉冲响应有限长

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]$$

显式方程

有限脉冲响应（FIR）系统

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

写成 $$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

为了求得当前的输出值，需要前一个输出值**y[n-1]**

要开始进行递归，需要一个初始条件

假设初始松弛条件，并且 $x[n]=K\delta[n]$

n<= -1, x[n]=0 $\xrightarrow{\text{初始松弛}}$ **n<= -1, y[n]=0**

y[-1]=0

$$y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]=K$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{2}y[0]=\frac{1}{2}K$$

$$y[2]=x[2]+\frac{1}{2}y[1]=(\frac{1}{2})^2K$$

$$\vdots$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=(\frac{1}{2})^nK$$

初始松弛 ⟺ 因果LTI系统

K=1 单位脉冲响应

$$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$$

单位脉冲无限长

递归方程

无限脉冲响应（IIR）系统

2.5 零状态响应和零输入响应

- 零输入响应:不考虑外加输入信号的作用,仅由系统的初始状态所产生的响应.
- 零状态响应:不考虑系统的起始状态的作用,即起始状态等于零时,仅由系统的外加激励信号所产生的响应.

连续时间系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

全响应　零输入响应　零状态响应

$$= y_{zi}(t) + x(t) * h(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k e^{\lambda_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}e^{\lambda_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}e^{\lambda_k t}+B(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik}e^{\lambda_k t}+x(t)*h(t)$$

注意：零输入响应≠自由响应

零状态响应≠强迫响应

一般零输入响应求解容易，零状态响应求解较难 ➡ $y_{zs}(t)=x(t)*h(t)$

2.6 微分和差分方程描述的一阶系统的方框图表示

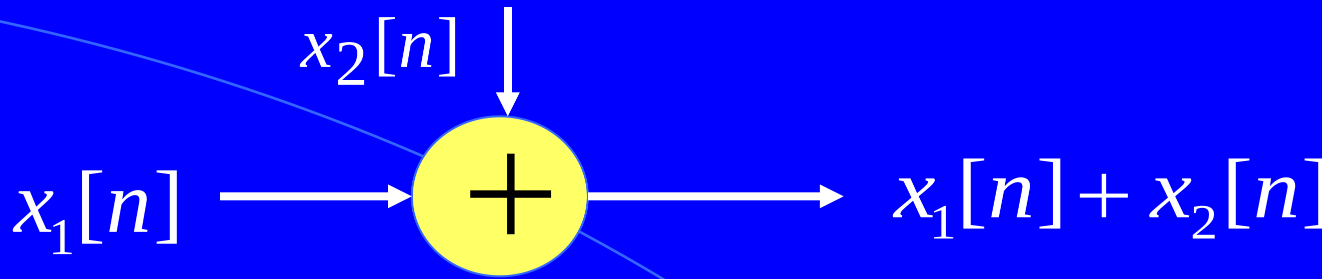
离散时间系统

一阶差分方程 $y[n]+ay[n-1]=bx[n]$ **(1)**

三种基本运算：相加、乘以系数、延迟

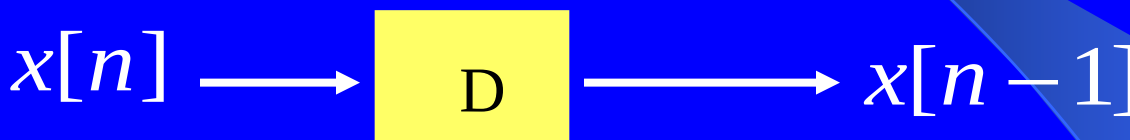
定义三种基本网络

加法器



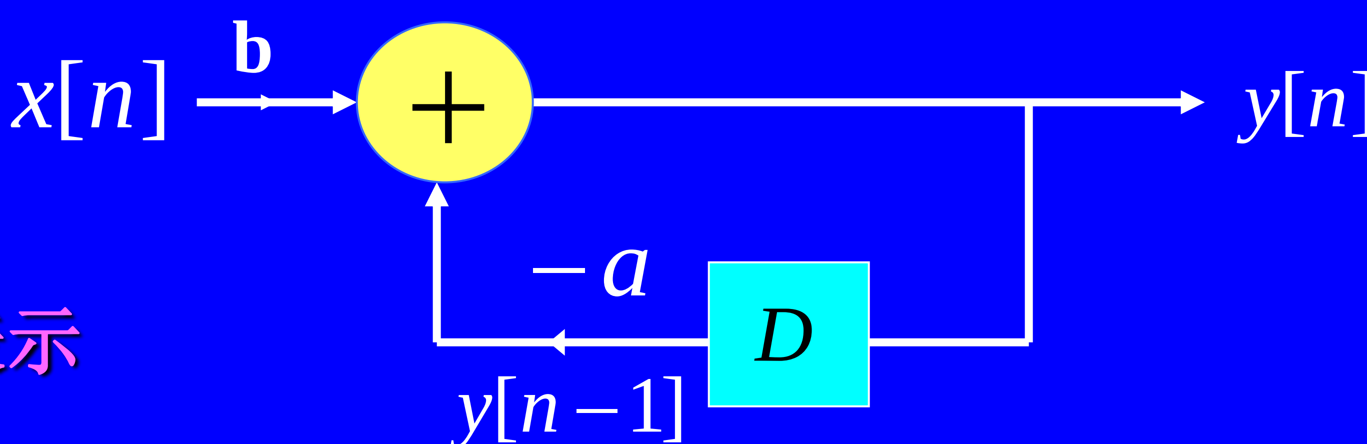
乘以系数

单位延迟



方程(1)重写为

$$y[n]=bx[n]-ay[n-1]$$



方框图表示

一般方程：$\sum_{0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{0}^{N} b_k x[n-k]$

$$y[n] = \sum_{0}^{N} b_k w[n-k]$$

考察方程：$\sum_{0}^{N} a_k w[n-k] = f[n]$

时不变

$$b_0 f[n] \to b_0 w[n]$$

$$b_1 f[n-1] \to b_1 w[n-1]$$

$$b_2 f[n-2] \to b_2 w[n-2]$$

叠加

$$\sum_{0}^{N} b_k x[n-k] \to \sum_{0}^{N} b_k w[n-k]$$

$$\sum_{0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{0}^{N} a_k w[n-k] = x[n]$$

$$\begin{cases} w[n] = (x[n] - \sum_{1}^{N} a_k w[n-k]) / a_0 \\ y[n] = \sum_{0}^{N} b_k w[n-k] \end{cases}$$

$$\sum_{0}^{N} a_k y[n-k]$$

$$=\sum_{0}^{N} b_k x[n-k]$$

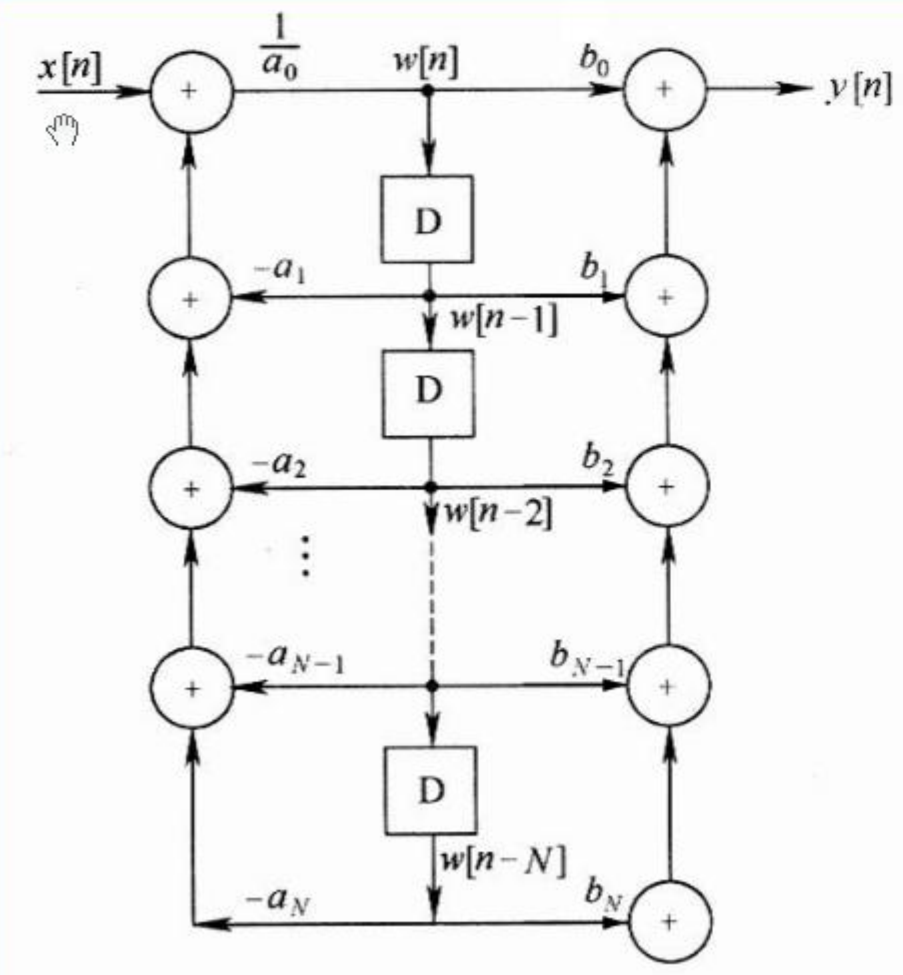


图 2-33 N 阶离散系统的模拟框图

连续时间系统

一阶微分方程 $$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t) \qquad \textbf{(2)}$$

方程(2)改写为 $$y(t)=-\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{b}{a}x(t)$$

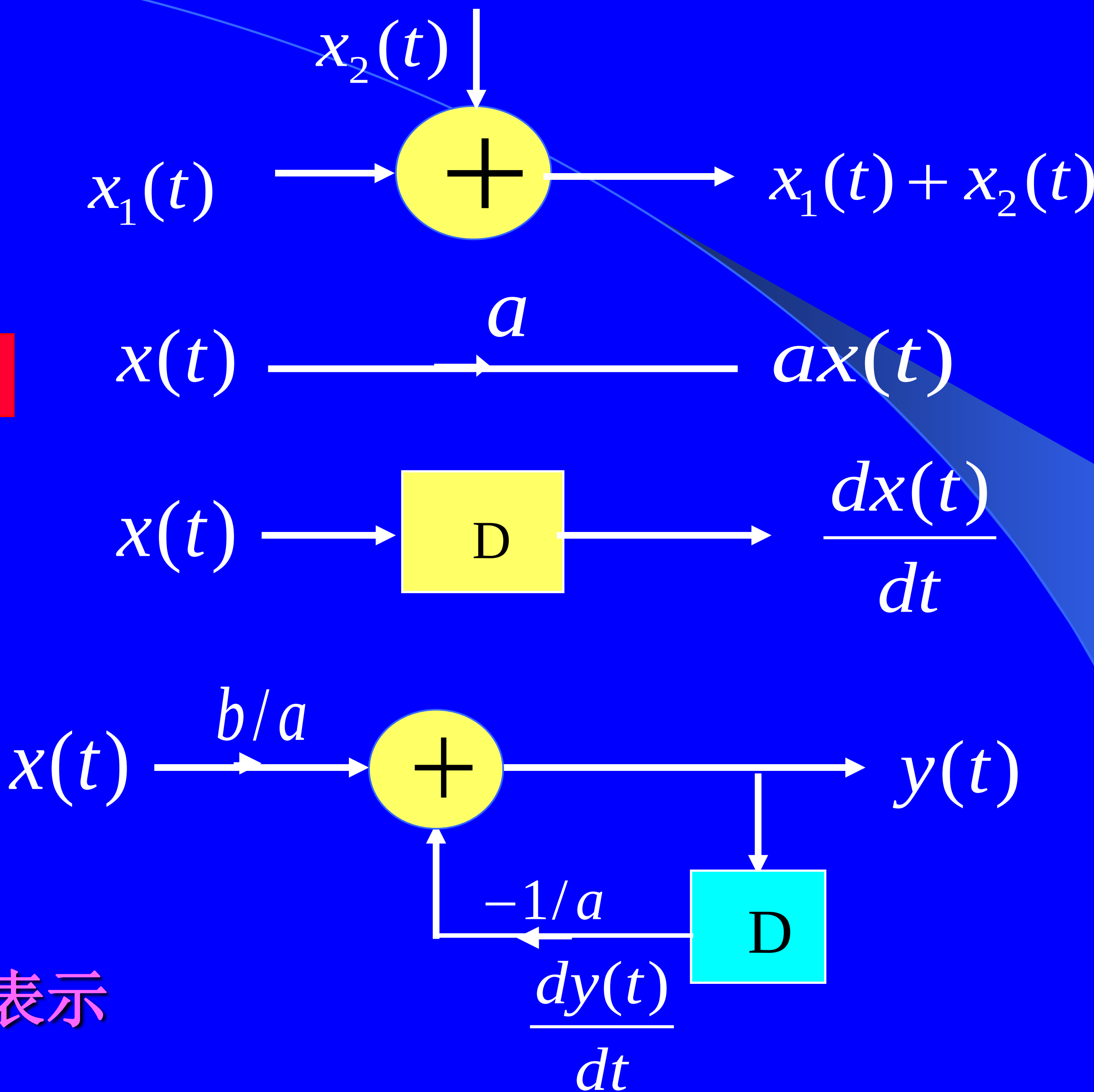
涉及三种基本运算：相加、乘以系数、微分

定义三种基本网络

相加器

乘以系数

微分器



方框图表示

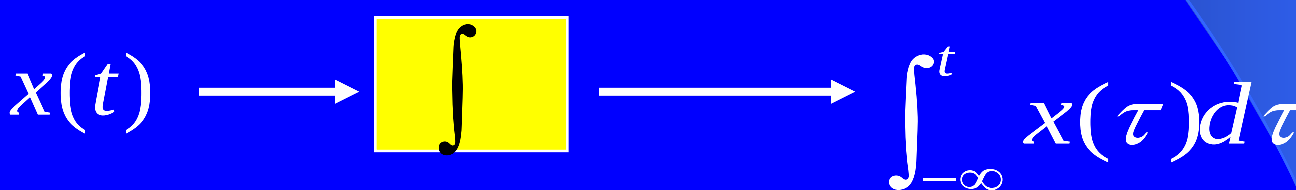
微分器实现困难, 且对误差和噪声极为灵敏 ➡ 另一种实现

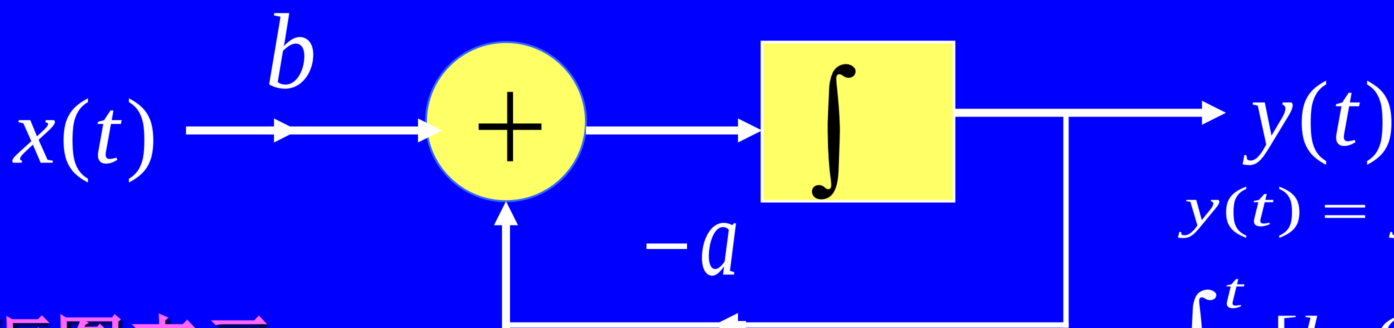
(2)式写为 $$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t)$$

从－∞到 t 积分， 假设初始松弛， 得

定义 $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau$$

积分器



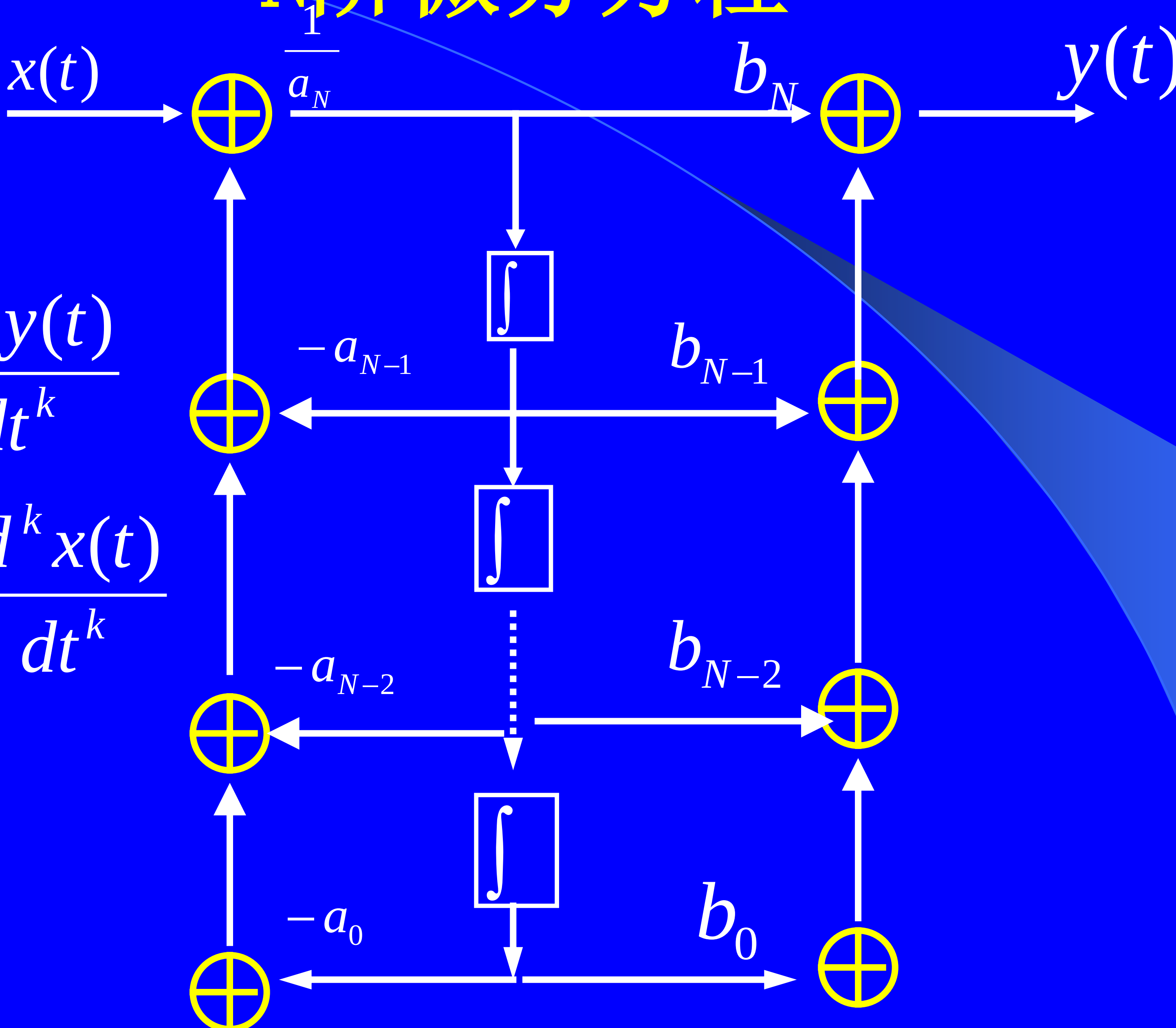


$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau$$

方框图表示

N阶微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$



小 结

- 离散时间信号　离散时间系统响应　单位脉冲响应
- 连续时间信号　连续时间系统响应　单位冲激响应
- 输出=输入与单位冲激响应的卷积
- 系统性质与单位冲激响应
- 微分方程与差分方程
- 零状态响应和零输入响应
- 方框图