一.(15分)用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=64x, -\infty<x,y<+\infty, \\ u|_{y=x}=16x^2,\ u|_{y=-3x}=0. \end{cases}$$

二.（15分）用分离变量法求解下列初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\cos\pi x,\ 0<x<1,\ t>0; \\ u_x|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=1}=0,\ t>0; \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

三.（15分）(1). 验证$w(x,t)=-x^2+tx$满足

$$w_{tt}-w_{xx}=2,\ w_x|_{x=0}=t;$$

(2). 试用延拓法求解半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2,\ x>0,t>0, \\ u_x|_{x=0}=t,\ t>0, \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0,x>0. \end{cases}$$

四.(15分) (1). 已知函数$e^{-x^2}$的傅里叶(Fourier)变换

$$F[e^{-x^2}](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\lambda^2},$$

$a>0$为常数, 试求函数$e^{-a\lambda^2}$的傅里叶逆变换

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\lambda^2}e^{i\lambda x}d\lambda;$$

(2). 试用傅里叶变换法求初值问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-2tu=0,\ -\infty<x<+\infty,t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty, \end{cases}$$

的格林函数$G(x,t,\xi)$，即求函数$G(x,t,\xi)$使得

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

五.(20分)用幂级数解法讨论：当λ是何值时二阶线性微分方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0$$

在$x=0$的邻域内存在多项式形式的解？并求出这些解。

六.(20分) 半径为1的半圆型薄板,上、下侧面绝热，稳定的温度分布$u(x,y)$满足

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, |u(x,y)|<+\infty,\ x^2+y^2<1\text{且}y>0, \\ u|_{x^2+y^2=1,y\geq 0}=2x^3y,\ u|_{y=0,|x|\leq 1}=0 \end{cases}$$

作极坐标变换

$$x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta,\, v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

已知

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}.$$

(1). 写出函数$v(r,\theta)$所满足的方程以及边界（边值）条件；

(2). 用分离变量法求函数$u(x,y)$。