信号与系统

第七章 Z变换

§7.0 引言

连续时间系统：

连续傅立叶变换　　拉普拉斯变换

离散时间系统

离散傅立叶变换　　Z变换

§7.1　Z变换

$$y[n]=H(z)z^{n}$$

线性系统对复指数输入的响应

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

$|z|=1\,(z=e^{jw})$，离散傅立叶变换

一般，Z变换

$$x[n] \to x[n]r^{-n}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]r^{-n}\}e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

$$z = re^{j\omega}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$ Z为复变量

将X(z)称为x[n]的Z变换(双边Z变换)

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

$$x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z)$$

Z 变换与离散傅立叶变换

$$z = re^{j\omega}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

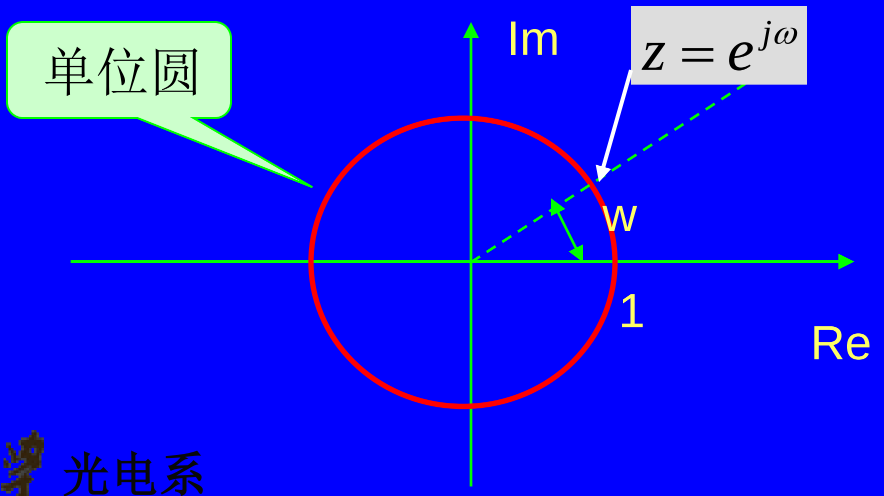
$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

X(z)相当于x[n]乘上实指数信号r^{-n}后的傅立叶变换

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$

在Z变换中，当变换变量z的模为1时，z变换演变为傅立叶变换。

或者，傅立叶变换是在复数z平面中，半径为1的圆上的z变换。



$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$x[n] = r^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

$$z = re^{j\omega}, \Rightarrow dz = jre^{j\omega}d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

$$x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z)$$

拉氏变换与Z变换

- 有抽样信号 $x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$
- 拉氏变换

$$X_s(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-snT}$$

- 令 $z = e^{sT}$，　其中 z 为一个复变量
- 则
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$
- 广义上讲T=1（归一化）

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Z变换

从 S 平面到 Z 平面的映射

$$z = e^{sT}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\omega T}$$

(1) $\sigma = 0 \quad s = j\omega$

$$|z| = e^{\sigma T} = 1$$

(2) $\sigma < 0 \quad s = \sigma + j\omega$

$$|z| < 1$$

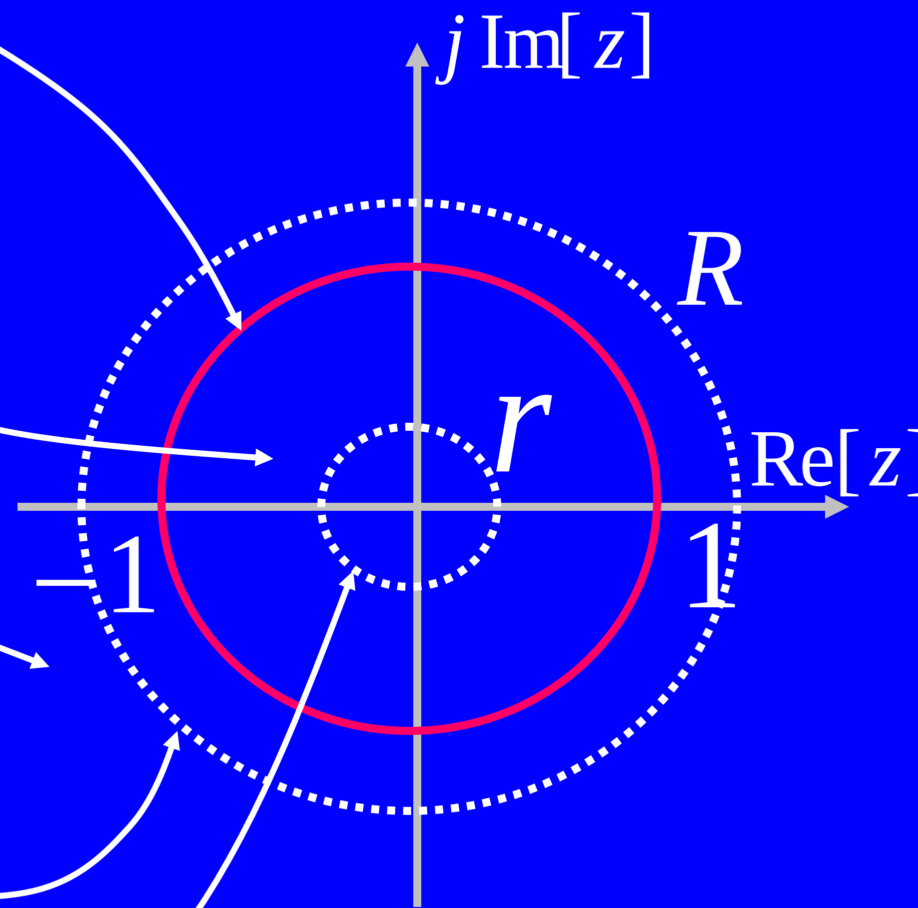
(3) $\sigma > 0 \quad |z| > 1$

(4) $\sigma = constent > 0$

$$|z| = R > 1$$

(5) $\sigma = constent < 0$

$$|z| = r < 1$$

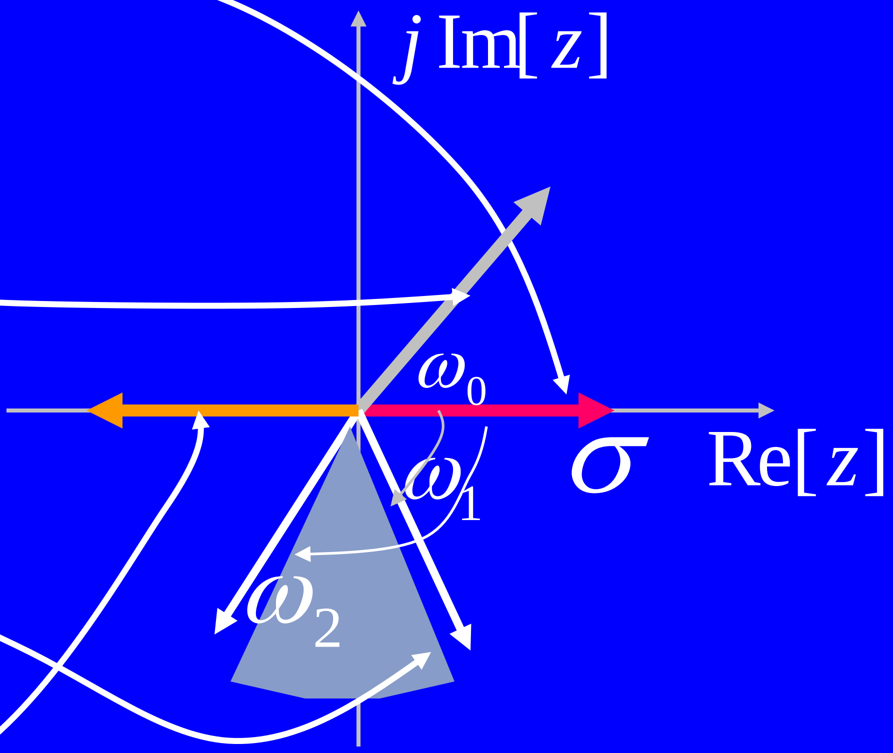


$(6)\omega = 0 \quad s = \sigma$

$(7)\omega = constent = \omega_0$

$(8)\omega = \omega_1 \to \omega_2$

$(9)\omega = \dfrac{\pi}{T}$



$(10)\omega = 0 \to 2k\dfrac{\pi}{T}$

多圈

收敛域(ROC)

$$X(z) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

存在z值的范围，对该范围内的z，X(z)收敛，这些z值的范围，称为收敛域(ROC)

如果收敛域包括单位圆，则傅立叶变换也收敛。

Z变换的表述，既要有代数表示式，又要有相应的收敛域

例7.1

$$x[n]=a^n u[n]$$

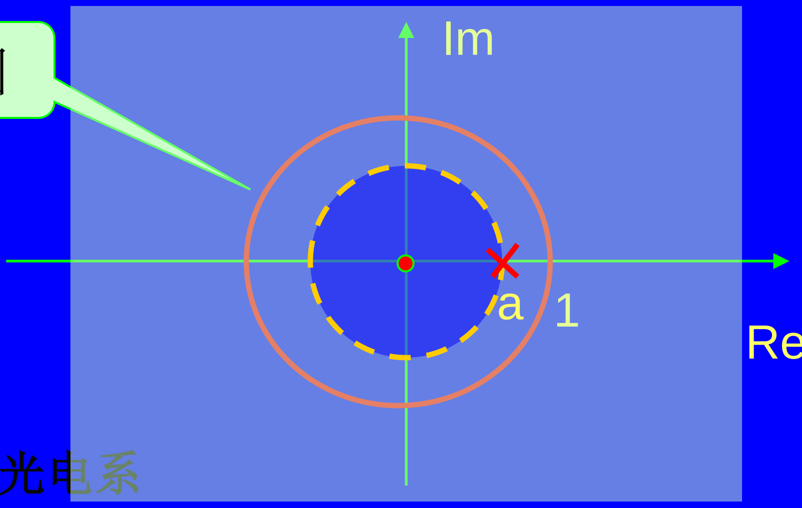
右边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|az^{-1}\right|^n<\infty \Rightarrow \left|az^{-1}\right|<1,|z|>a$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},|z|>|a|$$

单位圆



例7.2 $x[n] = -a^n u[-n-1]$

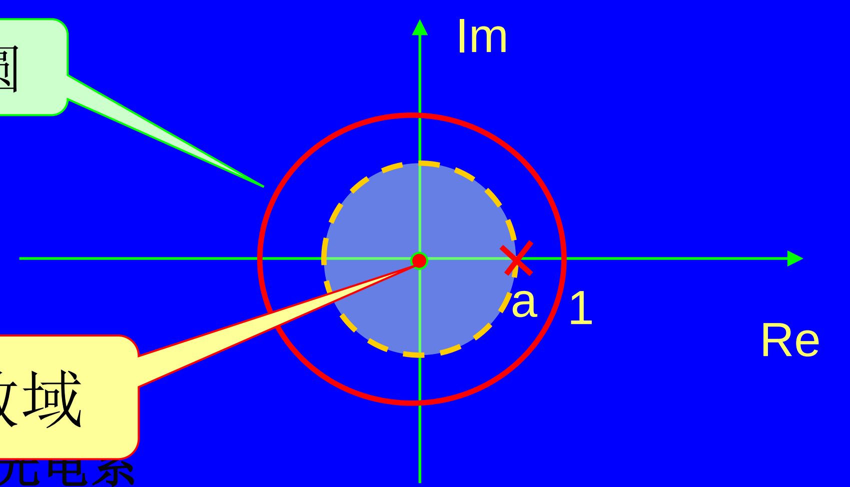
左边序列

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

当 $|a^{-1}z| < 1$ $X(z) = 1 - \dfrac{1}{1-a^{-1}z} = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

收敛半径



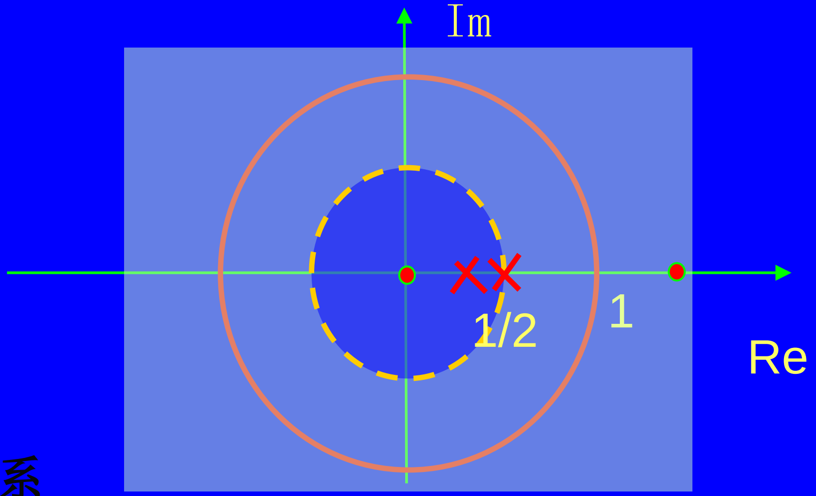
例7.3　$x[n]=7(\frac{1}{3})^n u[n]-6(\frac{1}{2})^n u[n]$

$$X(z)=7\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3}z^{-1})^n-6\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n$$

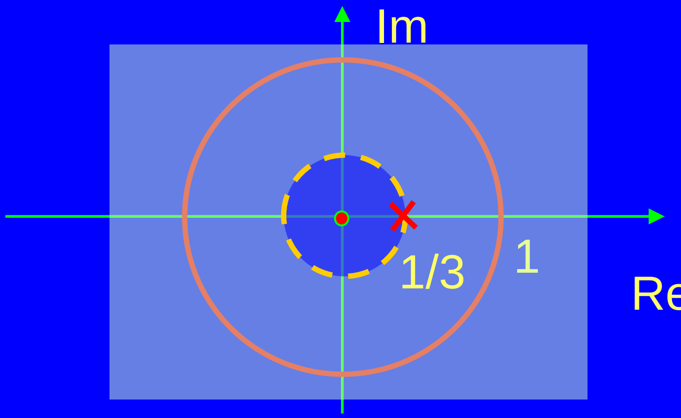
$$=\frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}$$

$$\left|(1/3)z^{-1}\right|<1,\left|(1/2)z^{-1}\right|<1\Rightarrow$$

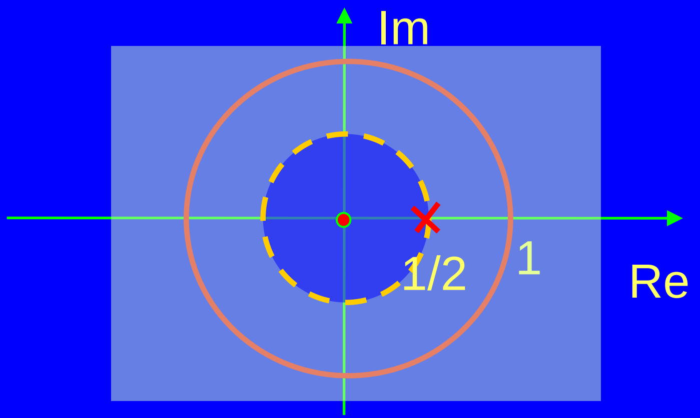
$$ROC:|z|>1/2$$



$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z|>1/3$$



$$6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>1/2$$



$$x[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>1/2$$

Z变换可以表示为Z的多项式，也可以表示为Z^{-1}的多项式。

对右边序列来讲(n<0, x[n]=0)，X(z)仅涉及Z的负幂，因此常用z^{-1}的多项式表示。

考虑零、极点时，往往用z的多项式表示方便。

§7.2 Z变换的收敛域

性质1：X(z)的ROC是在z平面内以原点为中心的圆环。

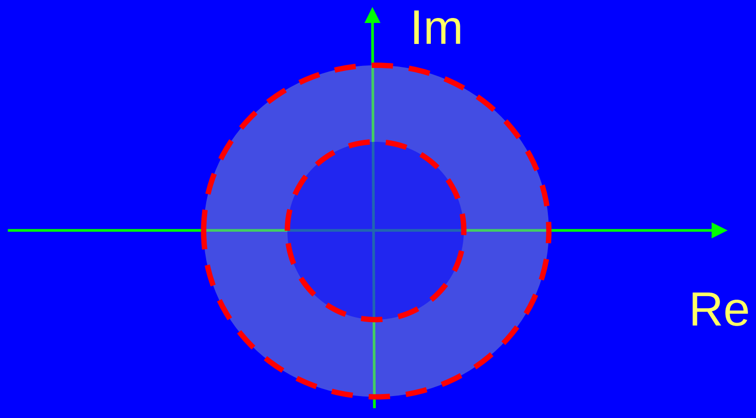
$$z = re^{j\omega} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right| r^{-n} < \infty$$

收敛域仅决定于r=|z|，而与w无关

ROC必须仅由一个圆环组成。

向内延伸到原点

向外延伸到无穷远



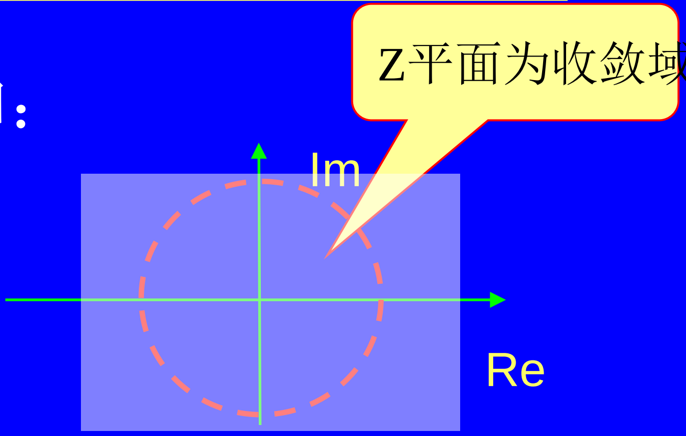
性质2：ROC不包含任何极点

因为在极点处，X(Z)为无穷大，z变换不收敛

性质3：如果x[n]是有限长序列，那么ROC就是整个z平面，可能除去0或无穷大。

当序列为有限长时，z变换为有限项和：

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$



N1为0或正，式中仅有z的负次幂项，ROC不含0；

N2为0或负，式中仅有z的正次幂项，ROC不含无穷大；

N1为负，N2为正 ，式中有z的正、负次幂项，ROC不含0和无穷大；

性质4：如果x[n]是右边序列，并且|z|=r0的圆位于ROC内，那么|z|>r0 的全部有限z值都在ROC内。

|z|=r0的圆位于ROC内，表明 $x[n]r_0^{-n}$ 绝对可和，当|z|=r1>r0时 r_1^{-n} 比 r_0^{-n} 衰减的快；

对正的n值，更快的衰减保证收敛；

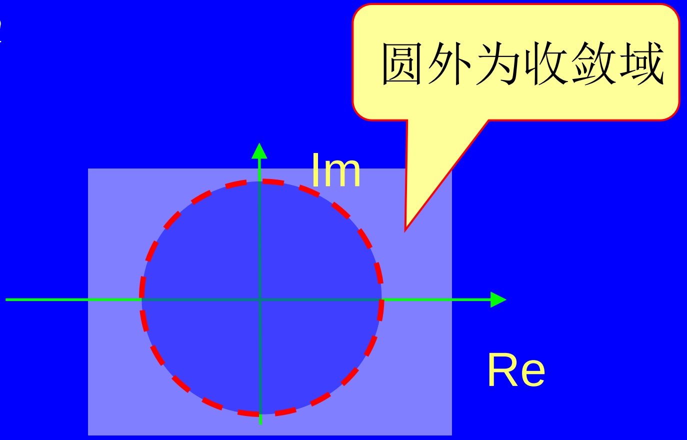
对负的n值，因为是右边序列，为有限个非零值，从而保证绝对可和

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

如N1>=0，ROC包含无穷大；

否则，不包含。

右边序列　　圆外



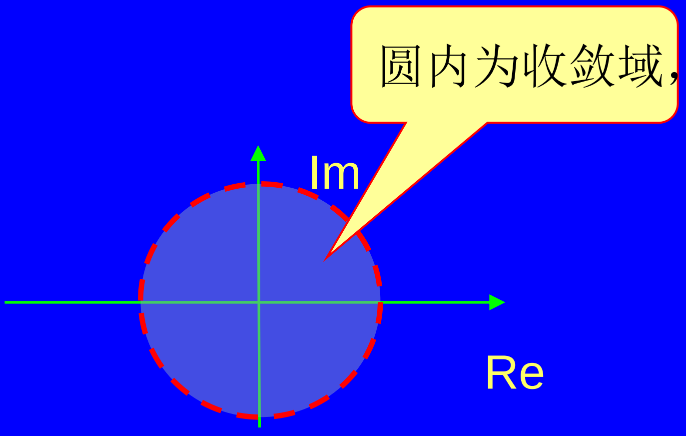
性质5：如果x[n]是左边序列，并且|z|=r0的圆位于ROC内，那么0<|z|<r0 的全部z值都在ROC内。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

N2为正，式中包含z的负次幂项，z->0时，为无穷大，因此ROC不含0；

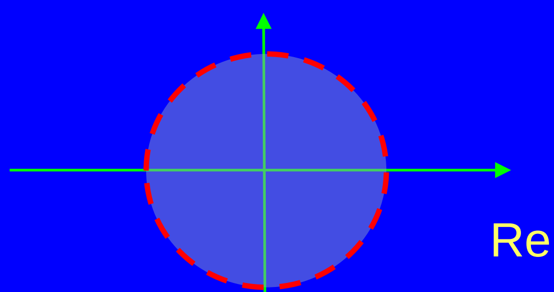
N2<=0，则ROC含0。

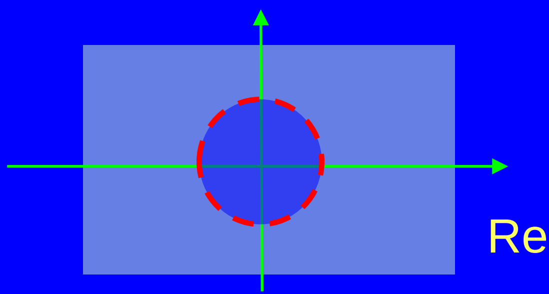
左边序列 圆内

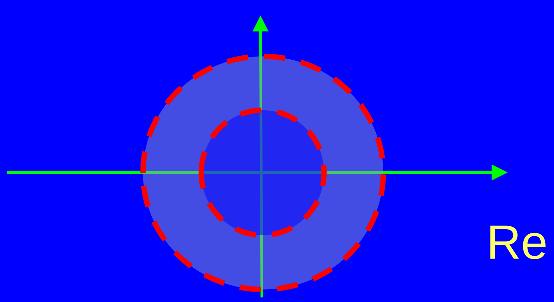


性质6：如果x[n]是双边序列，并且|z|=r0的圆环位于ROC内，那么该ROC一定为包含|z|=r0的圆环。

双边序列为左边序列和右边序列之和，分别对应圆内和圆外。则其ROC为这两部分的重叠部分，即为一圆环。







例7.6

$$x[n]=a^n,0\le n\le N-1,a>0$$

有限长序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n z^{-n}=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a}$$

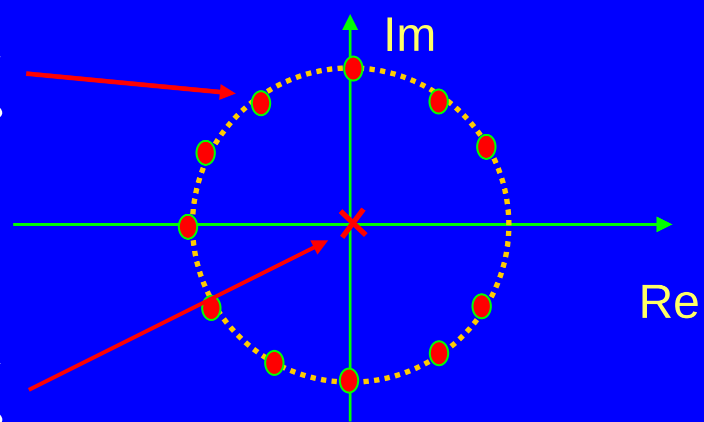
Z->无穷远，X(z)为有限值；

Z->0， X(z)为无穷大；

$$z_k=ae^{j(2\pi k/N)},k=0,1\ldots N-1$$

ROC为不含原点的整个z平面。

N-1个零点



N-1阶极点

例7.7

$$x[n]=b^{|n|},b>0$$

双边序列

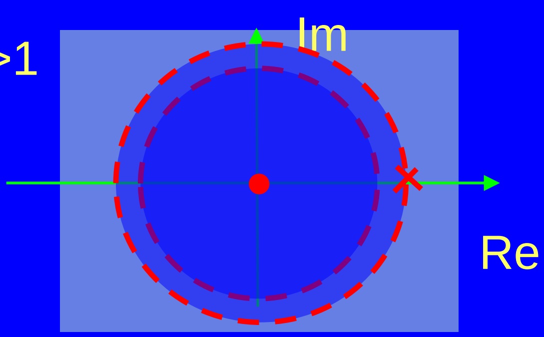
$$x[n]=b^{n}u[n]+b^{-n}u[-n-1]$$

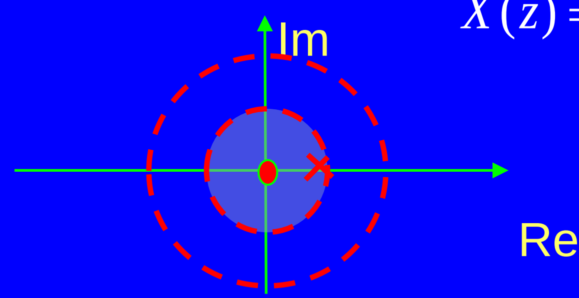
$$b^{n}u[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-bz^{-1}},|z|>b$$

$$b^{-n}u[-n-1]\overset{Z}{\longleftrightarrow}\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}},|z|<\frac{1}{b}$$

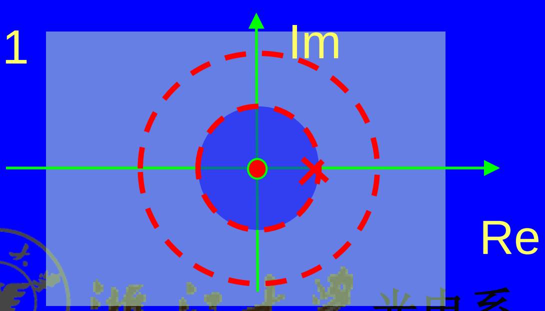
$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}},b<|z|<\frac{1}{b}$$

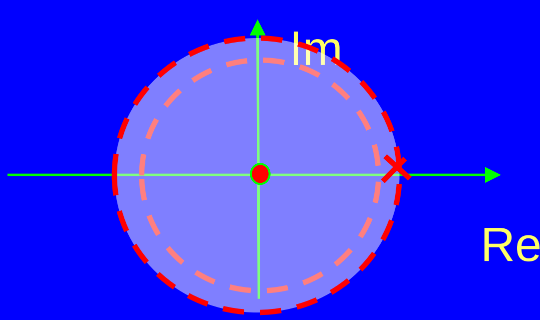
b>1

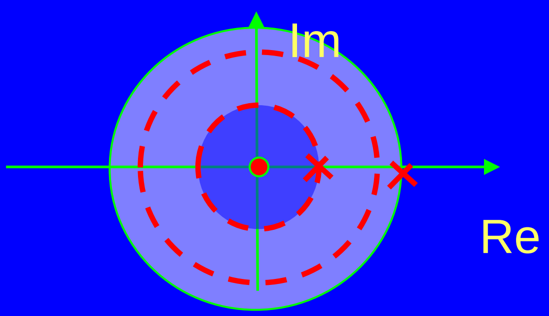




b<1







性质7：如果x[n]的z变换是有理的，那么ROC就被极点所界定，或者延伸至无限远。

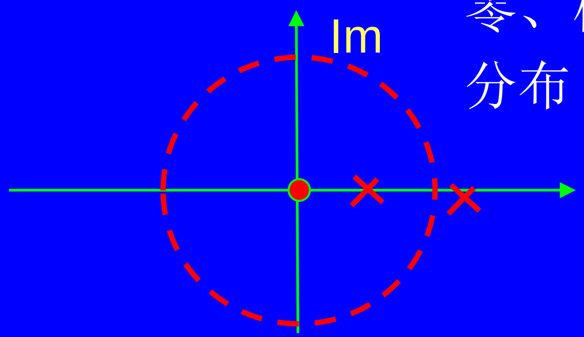
性质8：如果x[n]的z变换是有理的，且是右边序列，那么ROC就位于最外层极点的外边。如果是因果序列，那么，ROC也包括无穷远。

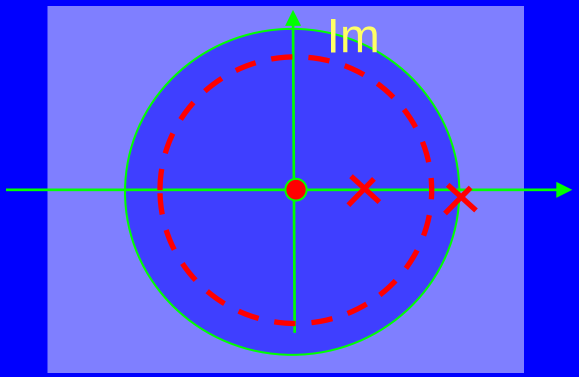
性质9：如果x[n]的z变换是有理的，且是左边序列，那么ROC就位于最里层的非零极点的里边。如果是反因果序列，那么，ROC也包括零。

例7.8

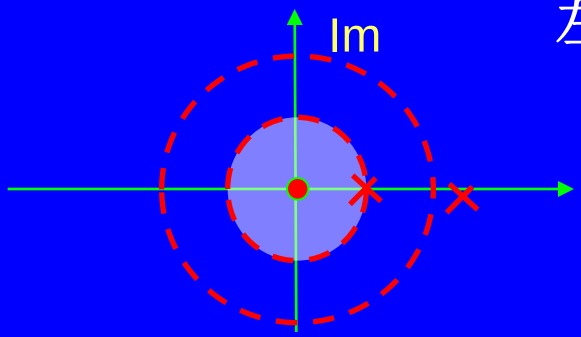
$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

零、极点分布

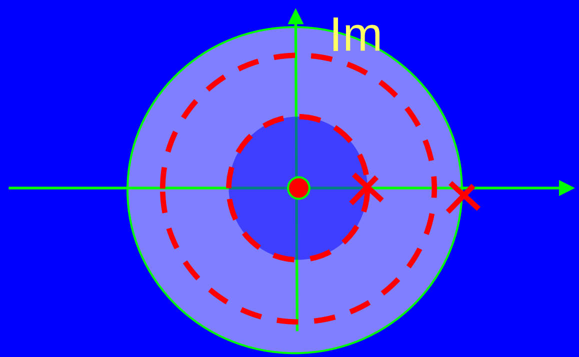




右边序列



左边序列



双边序列

存在傅立叶变换

7.4　Z变换的性质

（1） 线性

若 $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), ROC = R_1$

和 $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), ROC = R_2$

则 $ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC = R_2 \cap R_2$

线性组合后的ROC至少是R_1和R_2相重合的部分

线性组合后的极点是由原来的全部极点所构成（无零、极点相消），那么收敛域为各单个收敛域的重叠部分。

如线性组合后，发生零、极点相消，则收敛域可能增大

例　$x_1[n]=a^n u[n]$　$x_2[n]=a^n u[n-1]$　ROC: |z|> |a|

$x_1[n]- x_2[n]=\delta[n]$　ROC: 整个z平面|

（2） 时移性质

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), ROC = R$

原点或无穷远点可能加上或除掉

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = z^{-n_0} X(z)$$

$$k = n - n_0$$

$$z^{-n_0}\begin{cases} n_0>0 & \text{在}z=0\text{引入极点} \quad \text{原点去除} \\ n_0<0 & \text{在}z=0\text{引入零点} \quad z=\infty\text{去除} \end{cases}$$

（3）　z域微分

若　$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则　$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}, ROC = R$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{d}{dz}z^{-n} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -z^{-1}Z\{nx[n]\}$$

$$n^m x[n] \xleftrightarrow{Z} (-z\frac{d}{dz})^{(m)} X(z), ROC = R$$

例

$$X(z)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},|z|>|a|$$

$$a^n u[n]\xleftrightarrow{z}\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

$$na^n u[n]\xleftrightarrow{z}-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},|z|>|a|$$

（4） z域尺度变换

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

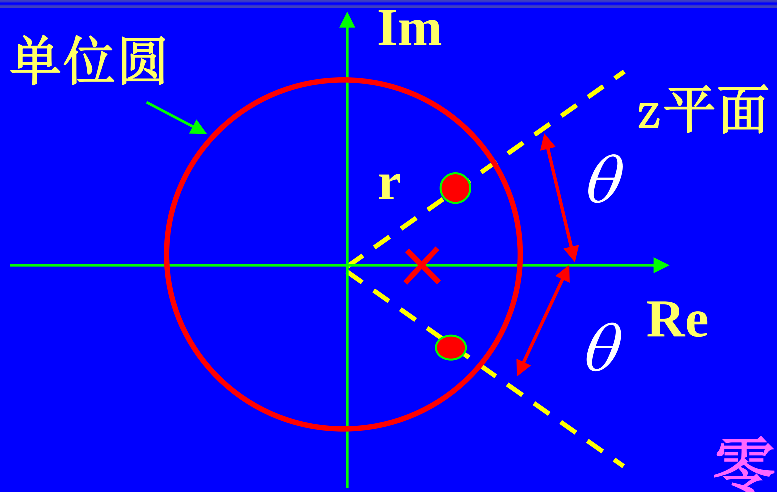
则 $a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(\frac{z}{a}), ROC = |a| R \ldots \{R_- < \left|\frac{z}{a}\right| < R_+\}$

$$z - z_0 = 0 \to \frac{z}{a} - z_0 = 0 \to z = az_0$$

特例 $z_0 = e^{j\omega_0}$ $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z), ROC = |z_0| R = R$

	X(z)	$X(e^{-j\omega_0} z)$
因式	$1 - az^{-1}$	$1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}$
极（零）点	$z_0 = a$	$z = ae^{j\omega 0}$

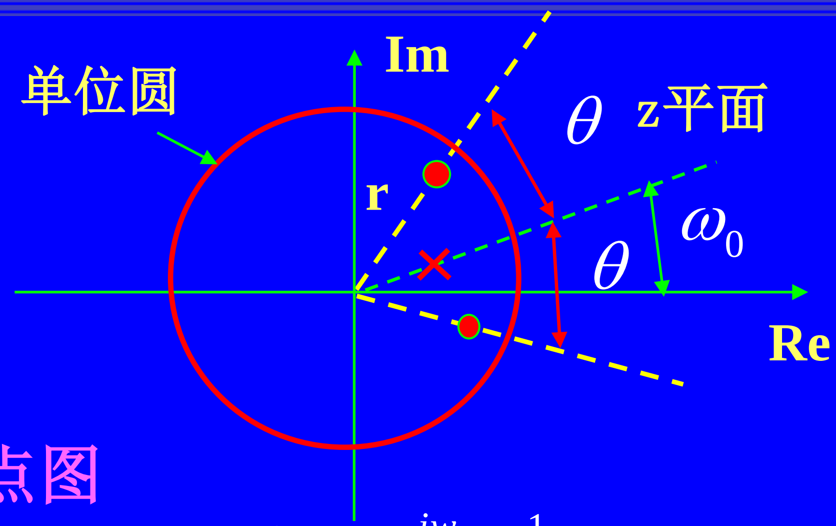
一般 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$ ω_0 旋转 ＋ r_0 倍



$1-az^{-1}$

x[n]的z变换

零极点图



$1-ae^{jw_0}z^{-1}$

$e^{j\omega_0 n}x[n]$的z变换

$$a=-1$$

$$(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(-z)$$

（5） 时间扩展

定义

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k] & \text{n是k的整数倍} \\ 0 & \text{n不是k的整数倍} \end{cases}$$

若 $x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z), ROC=R$

那么

$$x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{Z}X(z^k), ROC=R^{1/k}..\{R_- <|z^k|< R_+\}$$

$$z=a\rightarrow z=a^{1/k}$$

解释

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{(k)}[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n/k]z^{-n}$$ m=n/k

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-km}=X(z^k)$$

$$X(z^k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](z^k)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-kn}$$

右边： Z^{-m} m= kn m为k的整数倍 n=m/k

时间反转

若 $$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$$

则 $$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(\frac{1}{z}), ROC = \frac{1}{R}..\{R_- <| \frac{1}{z} |< R_+\}$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{Z} X(z^k),$$

$$k = -1$$

若z_0在x[n]的ROC内，那么$1/z_0$在x[-n]的ROC内

（6）　卷积性质

若　$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), ROC = R_1$

和　$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), ROC = R_2$

则

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \quad ROC包括R_2 \cap R_2$$

如存在零、极点相消时，ROC 可能扩大

（7） 共轭

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), ROC = R$

若x[n]实序列 $X(z) = X^*(z^*), ROC = R$

零、极点共轭成对

（8） 累加

若 $$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$$

则 $$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z), ROC = R \cap |z|>1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = u[n] * x[n]$$

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

例

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

$$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$$\delta[n]-\delta[n-1]\xleftrightarrow{Z}1-z^{-1}$$

ROC：整个z平面, 不包括原点
在z＝1有一个零点

卷积性质

$$x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z), ROC=R$$

$$Y(z)=(1-z^{-1})X(z) \qquad ROC=R$$

可能会除去z＝0和（或）增加z＝1

z变换差分性质

系统 $$y[n]=(\delta[n]-\delta[n-1])*x[n]=x[n]-x[n-1]$$

一次差分（离散时间微分）

例

$$w[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=u[n]*x[n]$$

累加器
（一次差分的逆运算）

$$w[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\xleftrightarrow{z}\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)\quad ROC\text{至少包括}R\cap|z|>1$$

z变换累加(积分)性质

初值定理

若 n<0，x[n]=0　　那么 $x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$z\to\infty, n>0, z^{-n}\to 0; n=0, z^{-n}=1$$

若x[0]为有限值，那么 $\lim_{z\to\infty} X(z)$ 为有限值。将X(z)表示成两个多项式之比时，分子多项式的阶次不能大于分母多项式的阶次；即零点的个数不能多于极点个数。

性质小结　　表7.1　p272

7.5 常用Z变换对

$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1$, 全部z

$\delta[n-m] \xleftrightarrow{Z} z^{-m}$, 除去零、极点

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

$$-u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|<1$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|<|a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

$$-na^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z| < |a|$$

$$[\cos\omega_0 n]u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$$

$$[\sin\omega_0 n]u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$$

§7.6 Z反变换

$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$x[n] = r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

$$z = re^{j\omega}, \Rightarrow dz = jre^{j\omega}d\omega$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$　Z反变换

（1）留数法（略）

（2）幂级数展开法

（3）部分分式法

幂级数展开法

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$=\underbrace{\cdots x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}}_{\text{Z的正幂}}+x(0)z^{0}+\underbrace{x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots x(n)z^{-n}+}_{\text{Z的负幂}}$$

将X(z)在给定的收敛域内，展开成z^{-1}的幂级数之和，则该幂级数的系数，就是序列x[n]

但X（z）是有理式时，可以用分子多项式除于分母多项式，得到幂级数展开。

X（z）在幂级数展开时，要结合收敛域，判断z的升幂或者降幂排列。

如果从收敛域判断x[n]是右边序列的话，则按z的降幂（z^{-1}升幂）排列。

x[n]是左边序列的话，则按z的升幂（z^{-1}降幂）排列。

例

$$X(z)=4z^2+2+3z^{-1}, 0<|z|<\infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n]=\begin{cases} 4, n=-2 \\ 2, n=0 \\ 3, n=1 \\ 0 \end{cases}$$

$$x[n]=4\delta[n+2]+2\delta[n]+3\delta[n-1]$$

$$\delta[n+n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{n_0}$$

例

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>a$$

右边序列

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+\ldots$$

n=0　1　2

$$|z|<a,(|az^{-1}|>1)$$

左边序列

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-\ldots$$

n= -1　-2

长除法

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2},|z|>1$$

因为 $|z|>1$，
所以按z^{-1}排列

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
\hline
1-2z^{-1}+z^{-2} & z^{-1} \\
 & \underline{z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}} \\
 & \quad 2z^{-2}-z^{-3} \\
 & \quad \underline{2z^{-2}-4z^{-3}+2z^{-4}} \\
 & \qquad 3z^{-3}-2z^{-4} \\
 & \qquad \underline{3z^{-3}-6z^{-4}+3z^{-5}} \\
 & \qquad\quad 4z^{-4}-3z^{-5} \\
 & \qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

$$x[n] = nu[n]$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2},|z|<1$$

因为 $|z|<1$，

所以按z排列

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}$$

$$z+2z^2+3z^3+\cdots$$

$$1-2z+z^2 \,\big)\, z$$

$$\underline{z-2z^2+z^3}$$

$$2z^2-z^3$$

$$\underline{2z^2-4z^3+2z^4}$$

$$3z^3-2z^4$$

$$\underline{3z^3-6z^4+3z^5}$$

$$4z^4-3z^5$$

$$\cdots$$

$$X(z)=z^{1}+2z^{2}+3z^{3}+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{-1}-nz^{-n}$$

$$x[n]=-nu[-n-1]$$

$$X(z)=\lg(1+az^{-1}),|z|>|a|$$

$$\lg(1+az^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(az^{-1})^{n}}{n},|az^{-1}|<1$$

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^{n}}{n},n\geq 1\\ 0,n\leq 0\end{cases}$$

$$x[n]=-\frac{(-a)^{n}}{n}u[n-1]$$

部分分式法

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n}+\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}$$

若ROC位于极点　$z=a_i$ 的外边，相应的反变换为：

$$A_i a_i^n u[n]$$

若ROC位于极点　$z=a_i$ 的里边，相应的反变换为：

$$-A_i a_i^n u[-n-1]$$

基本原则：

分解成基本函数的z变换，结合z变换的性质

例

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})},|z|>\frac{1}{3}$$

右边序列

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},|z|>\frac{1}{4}\xleftrightarrow{Z}(\frac{1}{4})^{n}u[n]$$

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|>\frac{1}{3}\xleftrightarrow{Z}2(\frac{1}{3})^{n}u[n]$$

$$\boxed{x[n]=(\frac{1}{4})^{n}u[n]+2(\frac{1}{3})^{n}u[n]}$$

例

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})},\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$$

双边序列

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},|z|>\frac{1}{4}\xleftrightarrow{Z}(\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|<\frac{1}{3}\xleftrightarrow{Z}-2(\frac{1}{3})^n u[-n-1]$$

$$\boxed{x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]-2(\frac{1}{3})^n u[-n-1]}$$

例

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})},|z|<\frac{1}{4}$$

左边序列

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},|z|<\frac{1}{4}\xleftrightarrow{z}-(\frac{1}{4})^{n}u[-n-1]$$

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|<\frac{1}{3}\xleftrightarrow{z}-2(\frac{1}{3})^{n}u[-n-1]$$

$$\boxed{x[n]=-(\frac{1}{4})^{n}u[-n-1]-2(\frac{1}{3})^{n}u[-n-1]}$$

例

$$X(z)=\frac{10z}{z^{2}-3z+2},|z|>2$$

无重根

$$X(z)=\frac{10z}{z^{2}-3z+2}=\frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$=\frac{A}{1-z^{-1}}+\frac{B}{1-2z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{-10}{1-z^{-1}}+\frac{10}{1-2z^{-1}}$$

$$x[n]=10(2^{n}-1)u[n]$$

例
$$X(z)=\frac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2},|z|>2$$

重根

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{C_1}{z-2}+\frac{C_2}{(z-2)^2}$$

$$A_1=z\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=0}=-1 \qquad A_2=(z-1)\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=1}=6$$

$$C_2=(z-1)^2\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=2}=4$$

$$C_1=\frac{d}{dz}[(z-2)^2\frac{X(z)}{z}]\bigg|_{z=2} \Rightarrow C_1=-5$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{z}+\frac{6}{z-1}+\frac{-5}{z-2}+\frac{4}{(z-2)^2}$$

重点

$$\boxed{\frac{X(z)}{z}}=\frac{-1}{z}+\frac{6}{z-1}+\frac{-5}{z-2}+\frac{4}{(z-2)^2}$$

$$X(z)=-1+\frac{6z}{z-1}+\frac{-5z}{z-2}+\frac{4z}{(z-2)^2}$$

$$X(z)=-1+\frac{6}{1-z^{-1}}+\frac{-5}{1-2z^{-1}}+2\frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$x[n]=-\delta[n]+6u[n]-5(2)^n u[n]+2n(2)^n u[n]$$

§7.7 单边Z变换

$$\overline{X(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= Z\{x[n]u[n]\}$$

ROC为圆外 $|z| > r$

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$x[n+1] \leftrightarrow zX(z) - zx[0]$$

当$n<0$，$x[n]=0$，则单、双边z变换相同

$$x[n]=a^n u[n] \qquad \overline{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

例7−16 $x[n]=a^n u[n+1]$

$$\overline{X(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n u[n+1]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

$$X(z)=Z\{a^{n+1}u[n+1]/a\}=z\frac{1}{1-az^{-1}}/a=\frac{1}{a}\frac{z^2}{z-a},|z|>|a|$$

§7.7 单边Z变换性质

（1）位移性

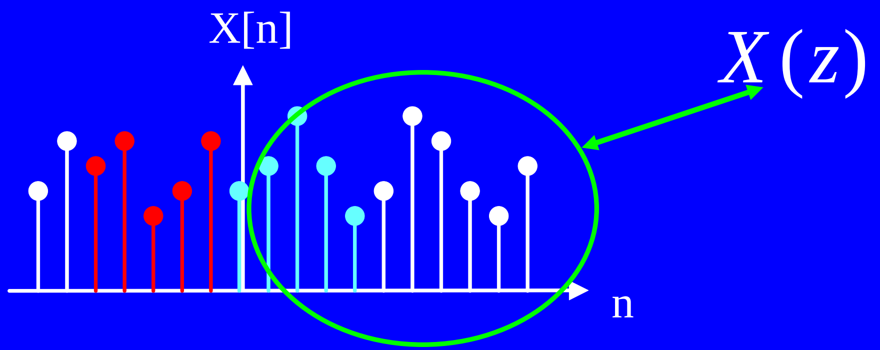
$$Z\{x[n+m]u[n]\}=z^{m}\{\overline{X(z)}-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\}$$

$$Z\{x[n-m]u[n]\}=z^{-m}\{\overline{X(z)}+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}\}$$

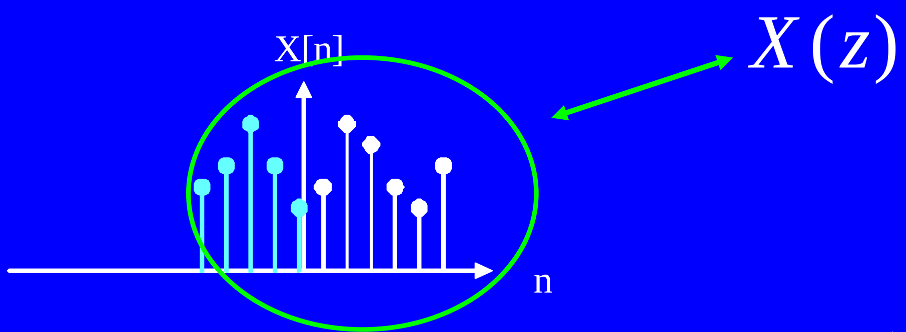
X[n]是双边序列

$$Z\{x[n+m]\}=z^{m}X(z)$$
$$Z\{x[n-m]\}=z^{-m}X(z)$$

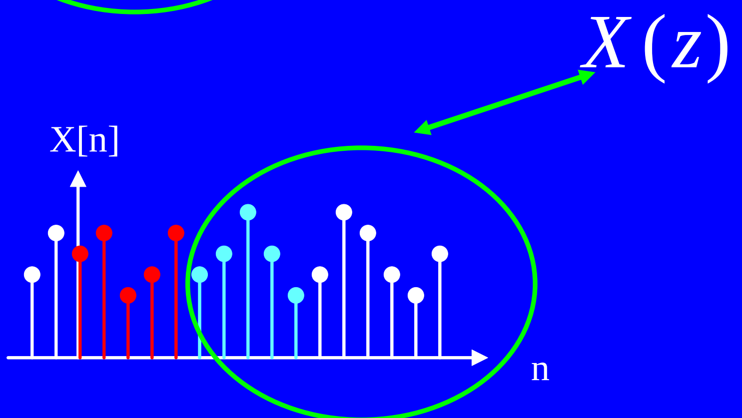
X[n]为双边信号



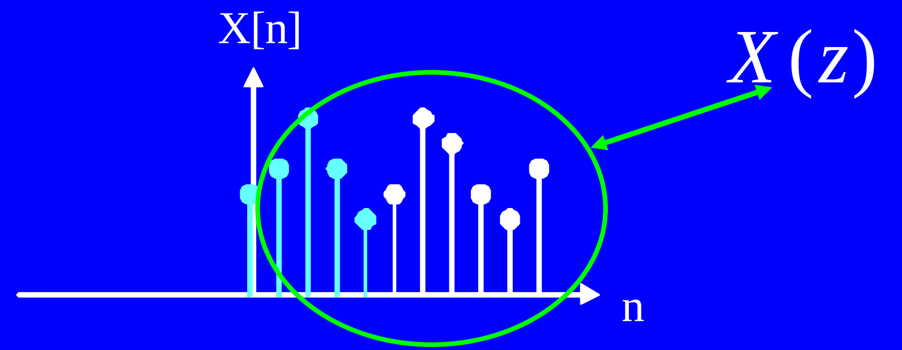
$$Z\{x[n+m]u[n]\}=z^{m}\{\overline{X(z)}-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\}$$



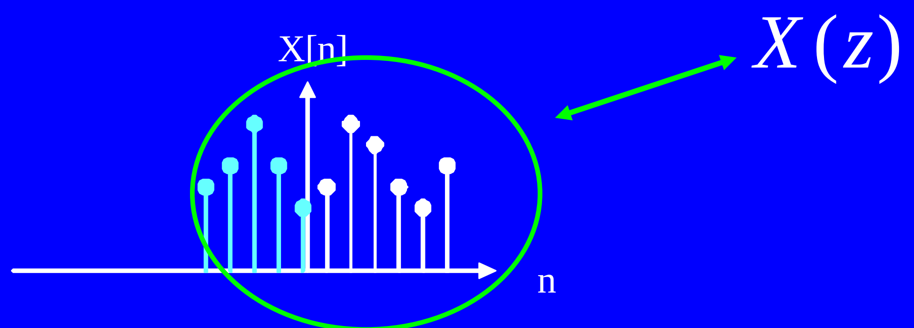
$$Z\{x[n-m]u[n]\}=z^{-m}\{\overline{X(z)}+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}\}$$



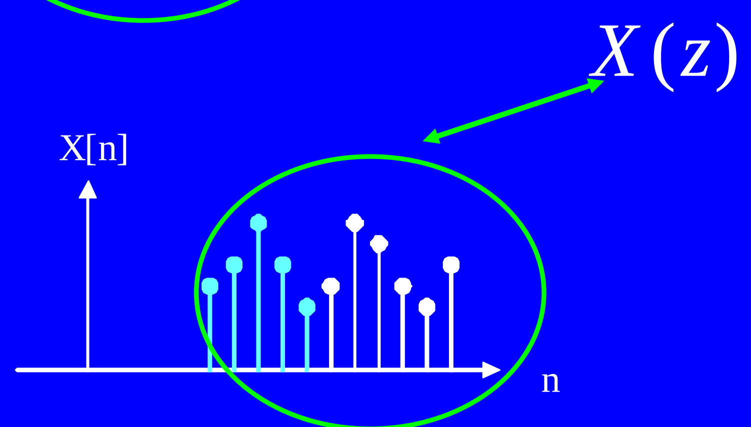
X[n]为因果信号，[n]=x[n]u[n]



$$Z\{x[n+m]u[n]\}=z^{m}\{\overline{X(z)}-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\}$$



$$Z\{x[n-m]u[n]\}=z^{-m}\overline{X(z)}$$



具有非零初始条件的差分方程(非初始松弛条件)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}]$$

初始状态

若因果信号此项为零

初始状态

$$Y(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1}y(l)z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}+X(z)H(z)$$

零输入响应　　零状态响应

例7-18　已知系统 $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$

当输入，$x[n]=4^n u[n]$，起始条件y[-1]=4，求系统响应

$$\overline{Y(z)}-\frac{1}{4}z^{-1}\{\overline{Y(z)}+y[-1]z\}=\overline{X(z)}$$

$$\overline{X(z)}=\frac{1}{1-4z^{-1}},|z|>4$$

$$y[-1]=4$$

$$\overline{Y(z)}=\underbrace{\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-4z^{-1})}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}$$

$$\overline{Y(z)} = \frac{2-4z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-4z^{-1})} = \frac{2z^2-4z}{(z-\frac{1}{4})(z-4)}$$

$$\overline{Y(z)} = \frac{\frac{14}{15}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{16}{15}}{1-4z^{-1}}, |z| > 4$$

$$y[n] = \frac{14}{15}(\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{16}{15}(4)^n u[n]$$

（2）初值定理　因果序列x[n]，

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$$

（3）终值定理　因果序列x[n]，且，X(z)的极点位于单位圆内，或者z=1处一阶极点

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = x[\infty] = \lim_{z\to 1}\{(z-1)\overline{X(z)}\}$$

§7.9 LTI系统Z域分析

Z变换 ⟶ 离散时间LTI系统分析和表征

$$X(z) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow Y(z)$$

$$h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z)$$

卷积性质　$Y(z) = H(z)X(z)$

系统函数
（转移函数）

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

只要单位圆在H(z)的ROC内　$H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ → 频率响应

LTI系统　$x[n]=z^n$　$y[n]=H(z)z^n$

特征值

特征函数

(单位脉冲响应的z变换)

（1） 因果性

因果LTI系统 单位脉冲响应h[n]：n<0，h[n]=0。(右边序列)

ROC：z 平面内某一个圆的外边

$h[n]=\delta[n]$　　H(z)=1　　ROC：整个z平面，可能包括原点

$h[n]=\delta[n+1]$　　H(z)=z　　在z =∞有一个极点

因果序列

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

ROC包括无限远点

一个离散时间LTI系统当且仅当它的系统函数的ROC是在某一个圆的外边，且包括无限远点，该系统是因果的。

*该圆的直径可能为零，包括或不包括零。$h[n]=\delta[n], h[n]=\delta[n-1]$

一个具有有理系统函数的LTI系统要是因果的，当且仅当(a)ROC位于圆外；(b)若H(z)能表示为多项式之比，其分子的阶次不能大于分母的阶次。

例

$$H(z)=\frac{z^3-2z^2+z}{z^2+1/4z+1/8}$$ 非因果

分子的阶次高于分母的阶次

例

$$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|>2$$

单位脉冲响应为右边序列

$$H(z)=\frac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{(1-1/2z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{2z^2-5/2z}{z^2-5/2z+1}$$ 因果

反变换

$$h[n]=[(\frac{1}{2})^n+2^n]u[n]$$

（2） 稳定性

等效于

离散时间LTI系统稳定 ⟺ 单位脉冲响应绝对可和

⇓

h[n]的傅立叶变换收敛 ⟺ H(z)的ROC包括单位圆

一个LTI系统当且仅当它的系统函数H(z)的ROC包括单位圆时，系统是稳定的。

例

(1) $$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|>2$$ 因果、不稳定

（ROC不包括单位圆）

(2) $$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},1/2<|z|<2$$ 非因果、稳定

$$h[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]-2^n u[-n-1]$$

(3) $$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|<1/2$$ 非因果、不稳定

$$h[n]=-[(\frac{1}{2})^n+2^n]u[-n-1]$$

一个具有有理系统函数的因果LTI系统，当且仅当H(z)的全部极点都位于单位圆内时，系统是稳定的。

对于非因果系统，收敛域并不是在圆外区域，极点不限于单位圆内。

例

因果系统　$H(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$　在z＝a有一个极点

稳定 → |a|<1 → $h[n]=a^n u[n]$ 绝对可和

7.9.2 由线性常系数差分方程表征的LTI系统

解差分方程的方法：

（1）时域经典法

（2）傅立叶变换法

（3）Z变换解法

Z变换的位移特性

$$Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

$$Z[x(n+m)] = z^{m}X(z)$$

线性常系数差分方程 ⟹ 系统函数 频率响应 或时域响应

例

一LTI系统，其输入x[n]和输出y[n]满足线性常系数差分方程

$$y[n] - 1/2y[n-1] = x[n] + 1/3x[n-1]$$

Z变换
线性性质
时移性质

$$Y(z) - 1/2z^{-1}Y(z) = X(z) + 1/3z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\left[\frac{1+1/3z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}\right]$$

差分方程本身不能确定ROC

$$Y(z) = H(z)X(z) \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+1/3z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}$$

ROC $H(z)=(1+1/3z^{-1})\dfrac{1}{1-1/2z^{-1}}$

ROC

|z|>1/2

$$h[n]=(1/2)^n u[n]+1/3(1/2)^{n-1}u[n-1]$$

因果、稳定

|z|<1/2

$$h[n]=-(1/2)^n u[-n-1]-1/3(1/2)^{n-1}u[-n]$$

非因果、不稳定

若是因果的

一般的N阶差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

两边取z变换，并利用线性和时移性质

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

或

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$Y(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z)$$

系统函数有理

差分方程本身也没有提供ROC的信息

因果性、稳定性用来作为标定ROC的条件

系统函数与系统特性的关系

例

1.当输入$x_1[n]=(\frac{1}{6})^n u[n]$时，输出$y[n]=[a(\frac{1}{2})^n+10(\frac{1}{3})^n]u[n], a\subset R$

2.若输入$x_2[n]=(-1)^n$时，输出$y2[n]=\frac{7}{4}(-1)^n$

求：H(z)，因果性，稳定性，差分方程

$$X_1(z)=\frac{1}{1-1/6z^{-1}}, |z|>1/6$$

$$Y_1(z)=\frac{a}{1-1/2z^{-1}}+\frac{10}{1-1/3z^{-1}}, |z|>1/2$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{[(a+10)-(5+a/3)z^{-1}][1-1/6z^{-1}]}{(1-1/2z^{-1})(1-1/3z^{-1})}, |z|>\frac{1}{2}$$

$$y[n]=H(z)z^n \leftrightarrow y_2[n]=\frac{7}{4}(-1)^n=H(z)|_{z=-1}(-1)^n$$

$$\frac{7}{4}=H(-1)=\frac{[(a+10)-5+a/3][7/6]}{(3/2)(4/3)} \Rightarrow a=-9$$

$$H(z)=\frac{[1-2z^{-1}][1-1/6z^{-1}]}{(1-1/2z^{-1})(1-1/3z^{-1})}$$

$Y_1(z)$的ROC包含$X_1(z)$和$H(z)$的交集。对于$H(z)$：其ROC可能为：$|z|<1/3$, $1/3<|z|<1/2$, $|z|>1/2$。所以$|z|>1/2$系统是稳定且因果的。

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]-\frac{13}{6}x[n-1]+\frac{1}{3}x[n-2]$$

线性常系数差分方程的Z域求解

具有非零初始条件的差分方程

(非初始松弛条件)

单边Z变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

初始状态

若因果信号此项为零

初始状态

$$Y(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1}y(l)z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}+X(z)H(z)$$

零输入响应　　零状态响应

例 $x[n] = au[n]$ $y[-1] = b$

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n]$$

$$Y(z) + 3b + 3z^{-1}Y(z) = \frac{a}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{3b}{1+3z^{-1}} + \frac{a}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$$

零输入响应 零状态响应

$$y[n]=x[n-2]$$

$$w[n]=x[n-1]$$

$$W(z)=x[-1]+z^{-1}X(z)$$

$$y[n]=w[n-1]$$

$$Y(z)=w[-1]+z^{-1}W(z)$$

$$Y(z)=x[-2]+x[-1]z^{-1}+z^{-2}X(z)$$

例

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n-1]$$

输入 $x[n]=4^n u[n]$ 初始条件: $y[-2]=0, y[-1]=1$

解:

$$Y(z)+z^{-1}[Y(z)+y[-1]z]-6z^{-2}[Y(z)+y[-2]z^2+y[-1]z]=X(z)$$

$$X(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}, |z|>4$$

$$(1+z^{-1}-6z^{-2})Y(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}+(-1+6z^{-1})$$

$$Y(z)=\frac{1}{(1+z^{-1}-6z^{-2})(1-4z^{-1})}+\frac{(-1+6z^{-1})}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{(1+3z^{-1})(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\frac{(-1+6z^{-1})}{(1+3z^{-1})(1-2z^{-1})}}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\frac{A_1}{(1+3z^{-1})}+\frac{A_2}{(1-2z^{-1})}+\frac{A_3}{(1-4z^{-1})}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\frac{B_1}{(1+3z^{-1})}+\frac{B_2}{(1-2z^{-1})}}_{\text{零状态响应}}$$

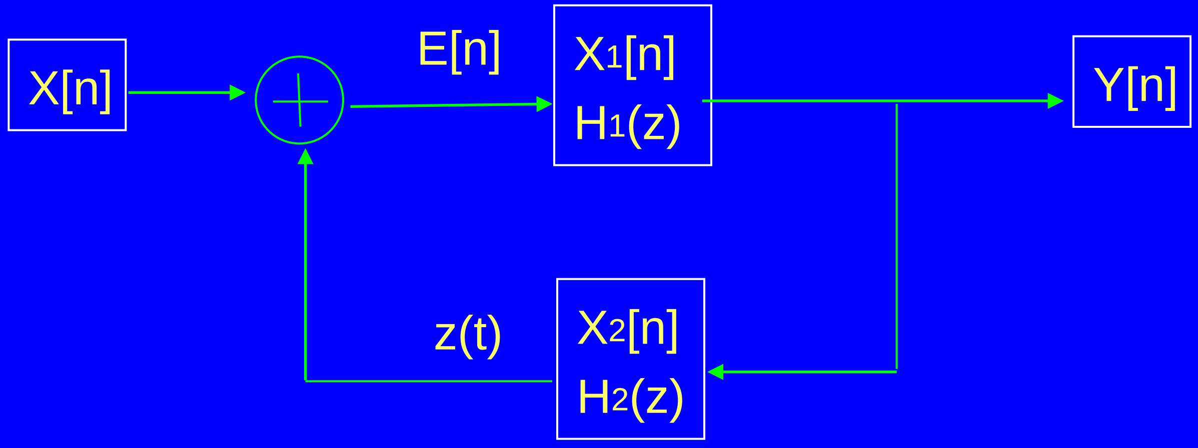
$$A_1=\frac{9}{35},A_2=-\frac{2}{5},A_3=\frac{8}{7},B_1=-\frac{9}{5},B_2=\frac{4}{5}$$

$$y[n]=\underbrace{(-\frac{2}{5}\times 2^n+\frac{9}{35}\times(-3)^n+\frac{8}{7}\times 4^n)u[n]}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{(\frac{4}{5}\times 2^n-\frac{9}{5}\times(-3)^n)u[n]}_{\text{零状态响应}}$$

$$=(\frac{2}{5}\times 2^n-\frac{54}{35}\times(-3)^n+\frac{8}{7}\times 4^n)u[n]$$

7.9.3 系统函数的方框图表示

反馈

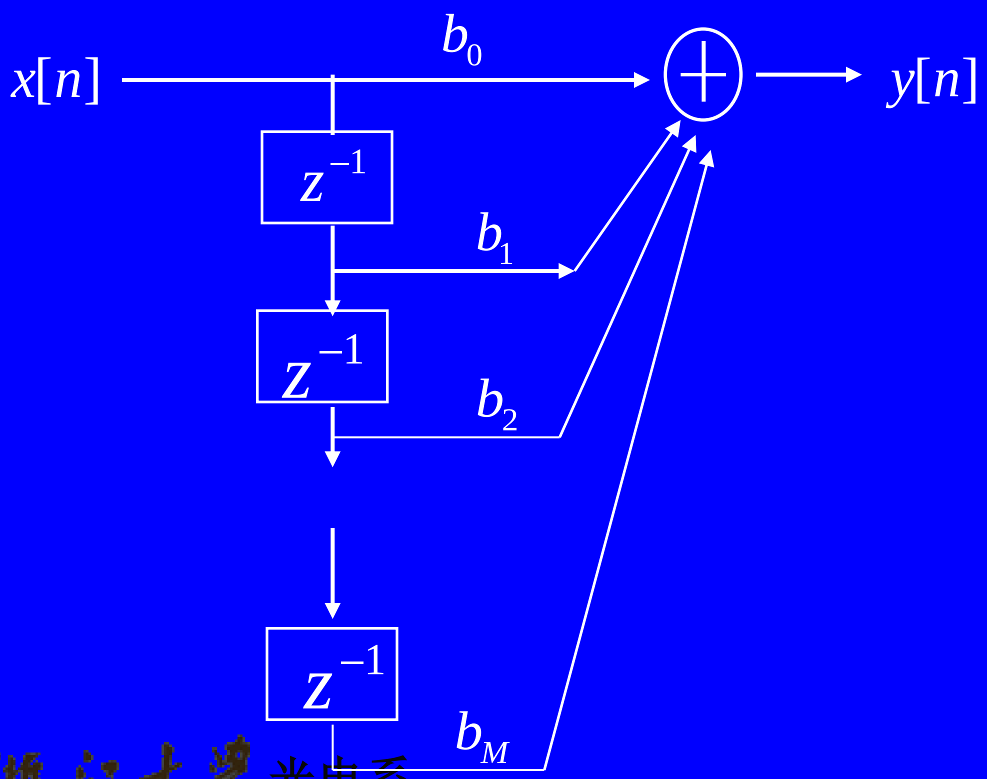


$$H(z)=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z)H_2(z)}$$

非递归方程

$$H_N(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$\Rightarrow\quad y[n]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_Mx[n-M]$$

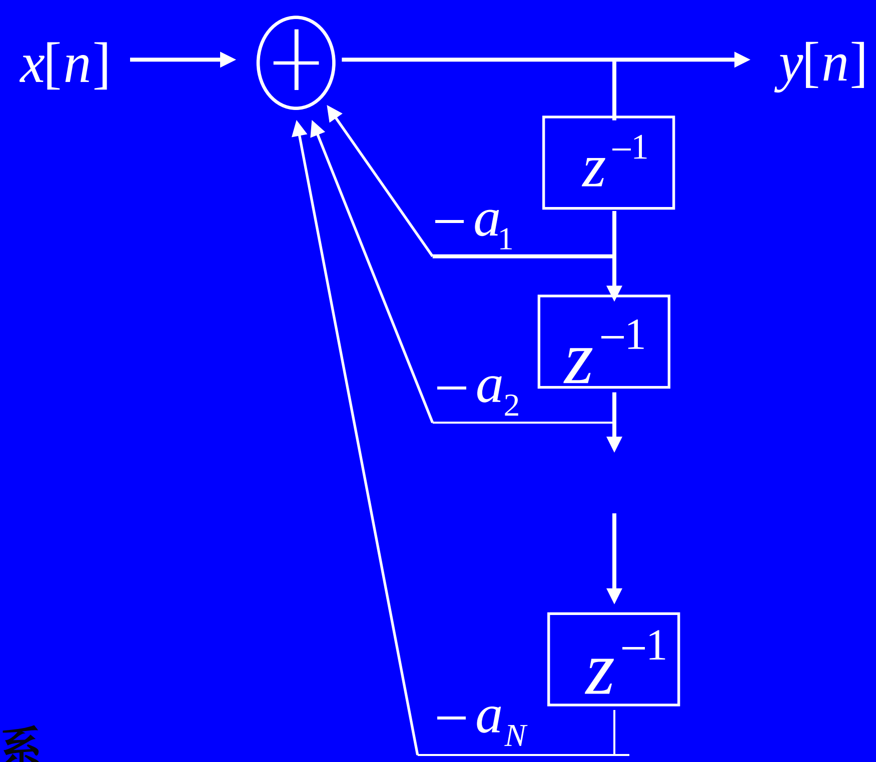


递归方程

$$H_R(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}},\ a_0\Rightarrow 1$$

$$y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+\cdots+a_N y[n-N]=x[n]$$

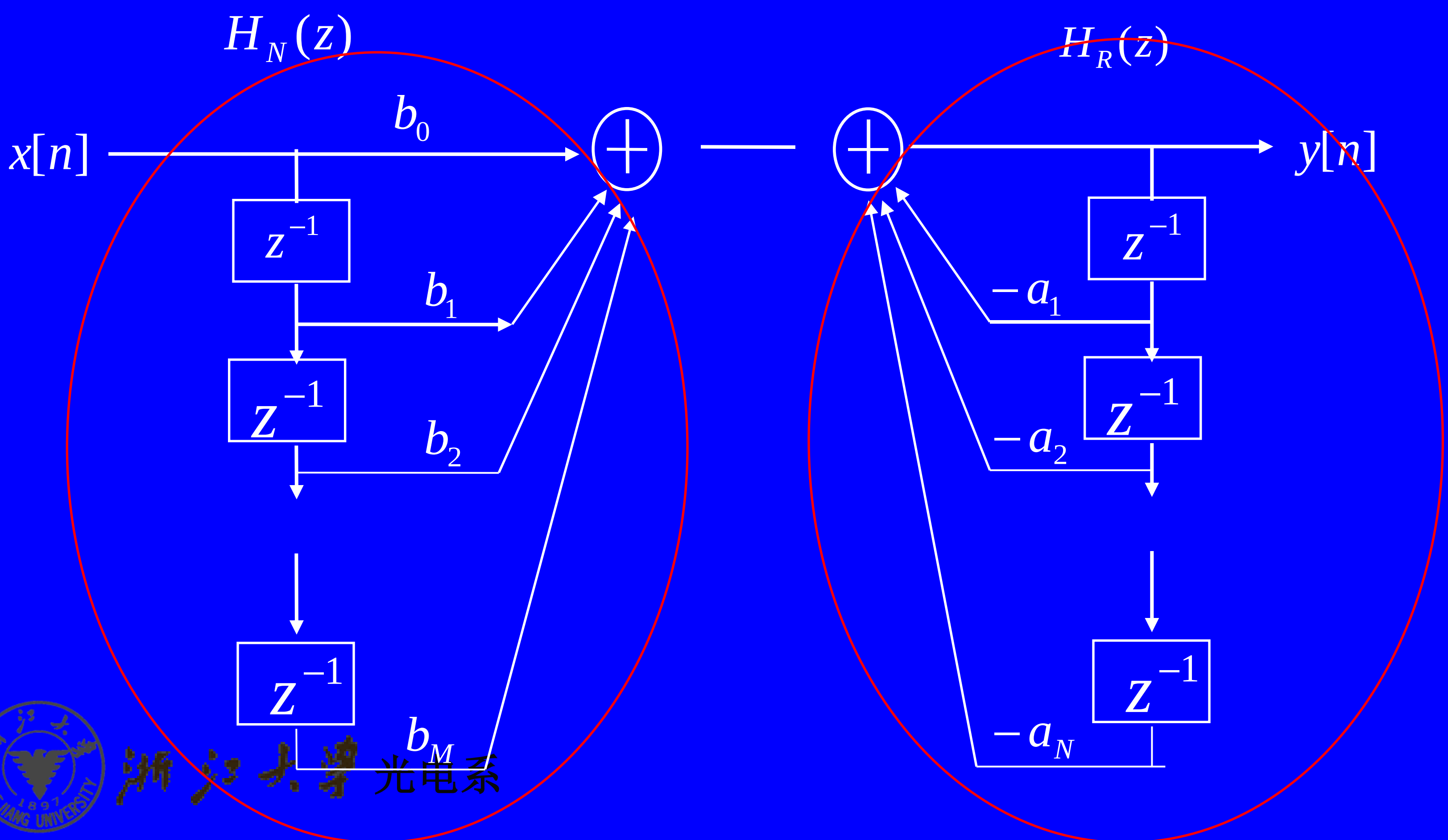
$$y[n]=x[n]-a_1 y[n-1]-a_2 y[n-2]-\cdots-a_N y[n-N]$$



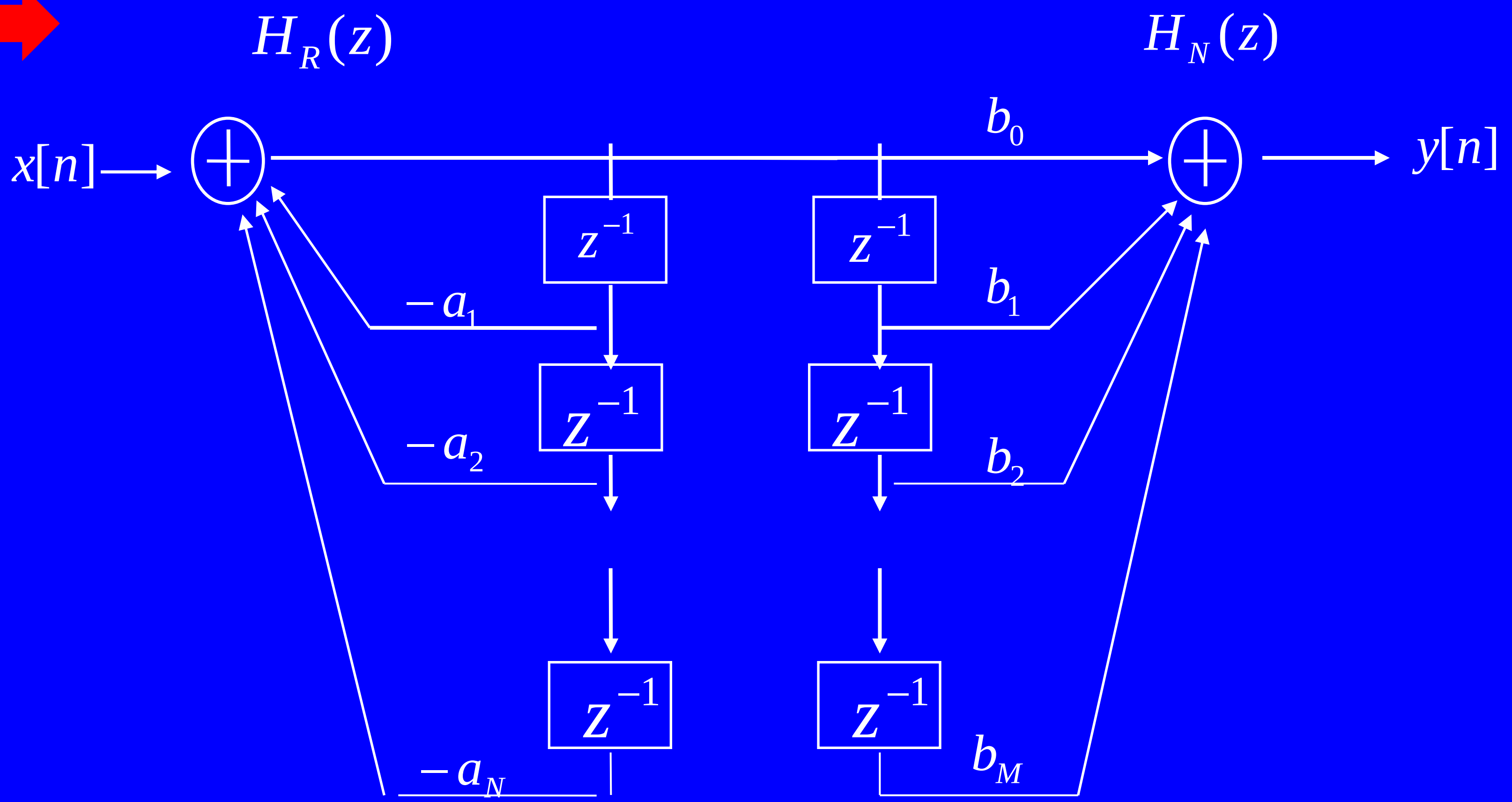
一般系统方程

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=H_N(z)\bullet H_R(z)$$

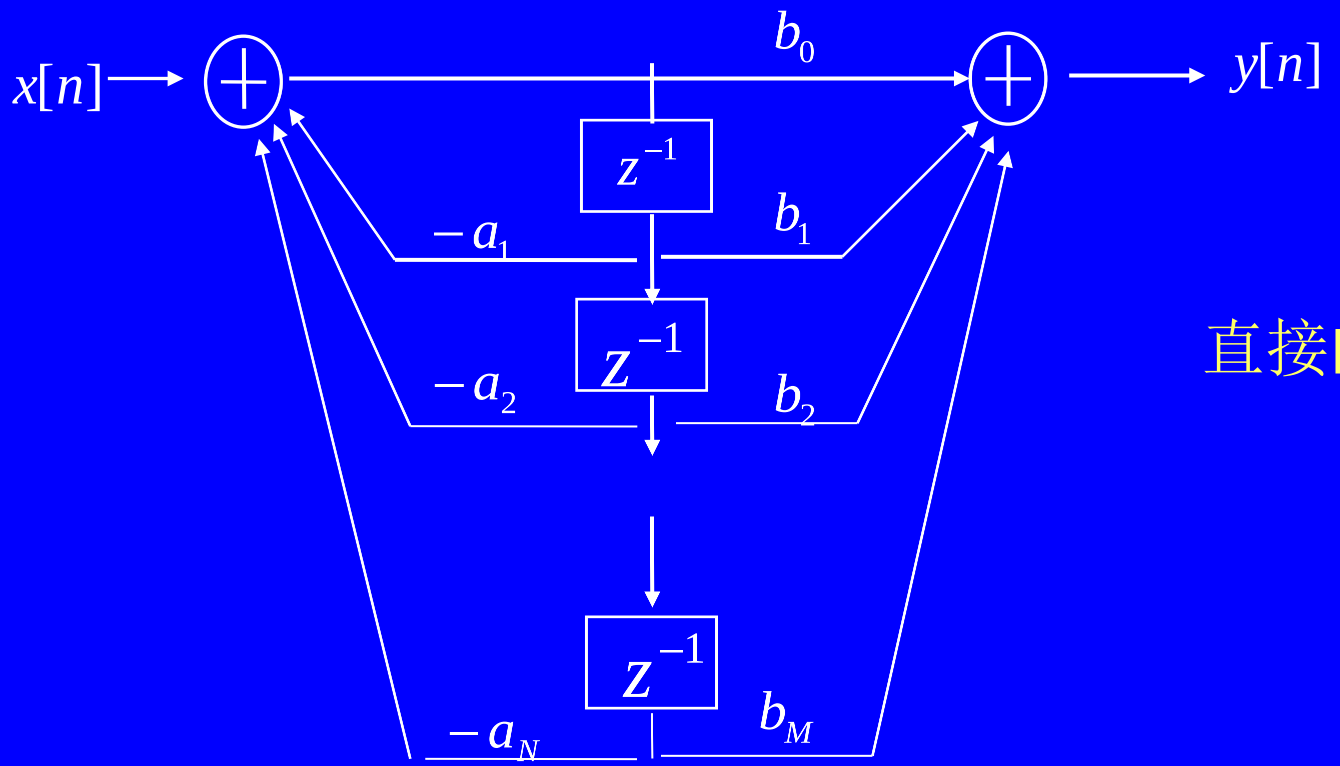
$$\Rightarrow \quad a_0 \Rightarrow 1$$



$$H(z) = H_N(z) \bullet H_R(z) = H_R(z) \bullet H_N(z)$$



$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$



直接II型