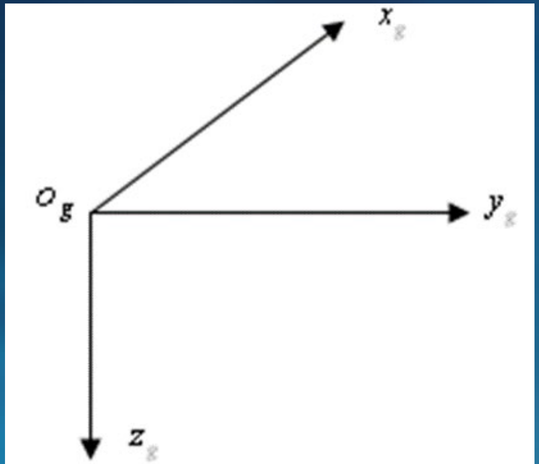
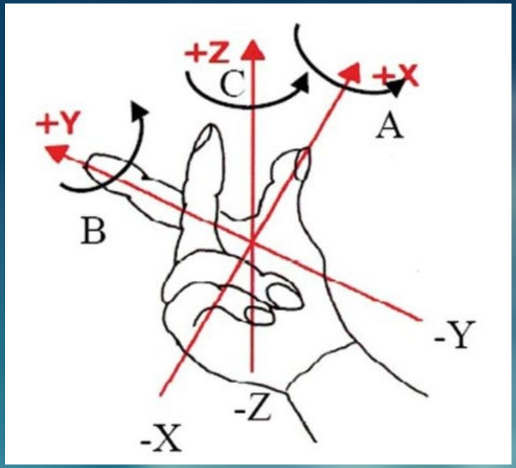
惯性坐标系

O_g 为地面任意点，$o_g x_g$ 为水平面任意方向，$o_g z_g$ 垂直地面指向地心，$o_g x_g y_g$ 符合右手规则。



地面坐标系常用于指示飞机的方位

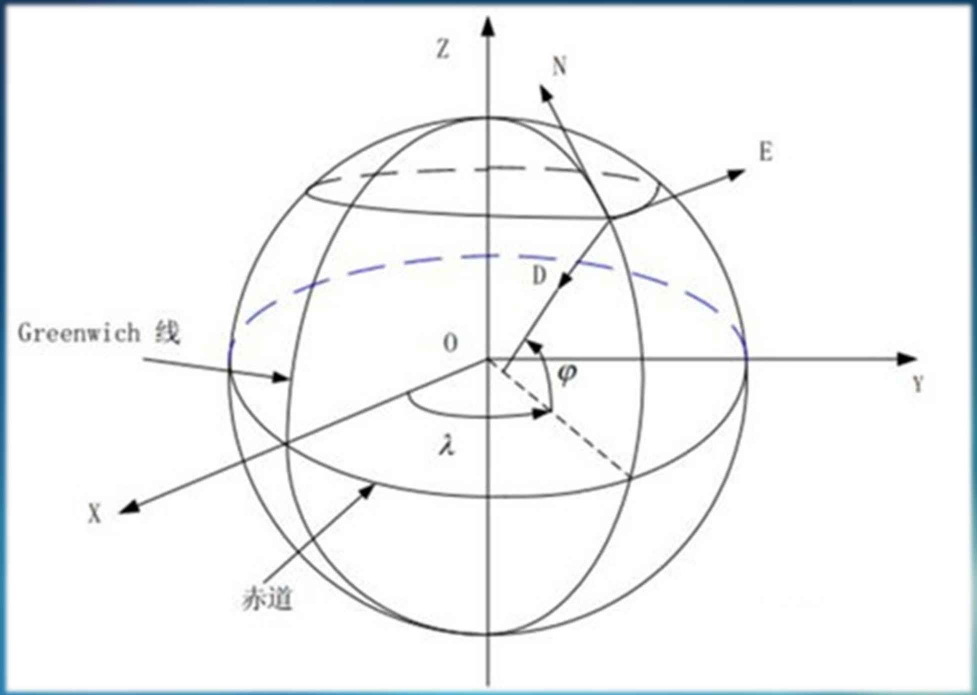
近距离导航和航迹控制



右手规则

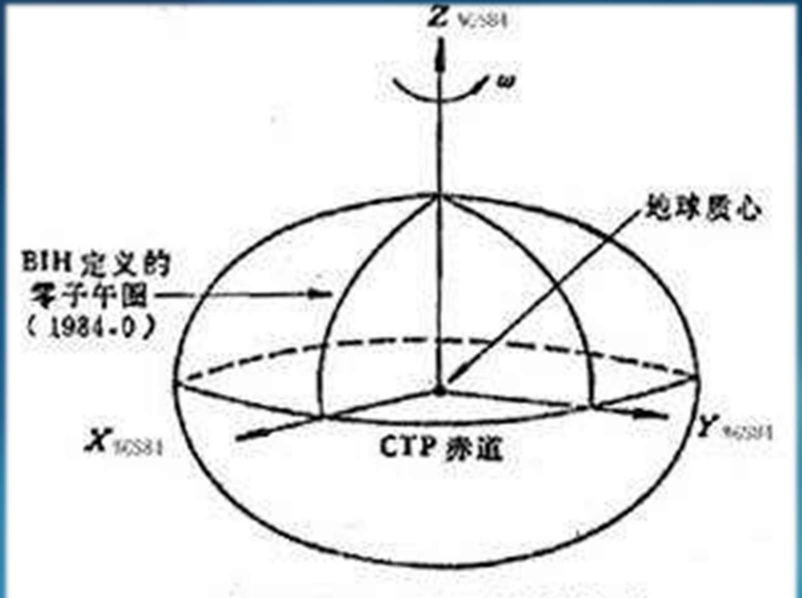
地球中心坐标系(ECEF)

- **ECEF坐标系与地球固联**，且随着地球转动。图中O即为坐标原点，位置在**地球质心**。X轴通过格林尼治线和赤道线的交点，正方向为原点指向交点方向。Z轴通过原点指向北极。**Y轴与X、Z轴构成右手坐标系**。



WGS-84坐标系

- WGS-84坐标系的X轴指向BIH(国际时间服务机构)1984.0定义的零子午面(Greenwich)和协议地球极(CTP)赤道的交点。Z轴指向CTP方向。Y轴与X、Z轴构成右手坐标系。



WGS-84世界大地坐标系

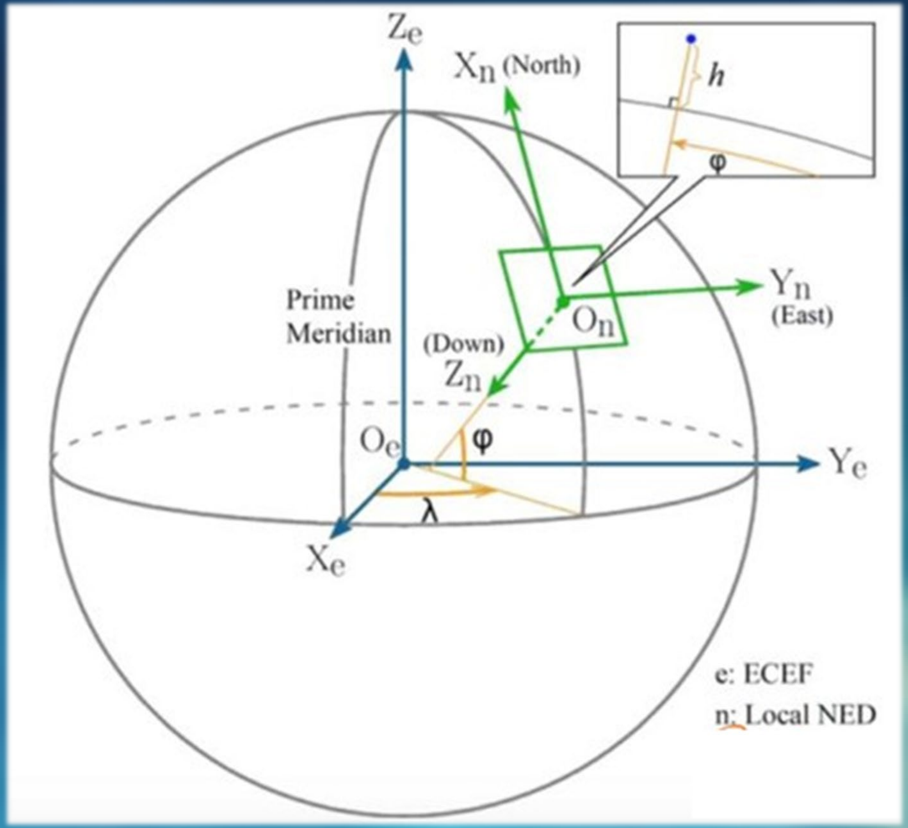
?

为什么有了GPS输出的海拔高度，我们还是要用气压计等其它设备来辅助定高呢?

02

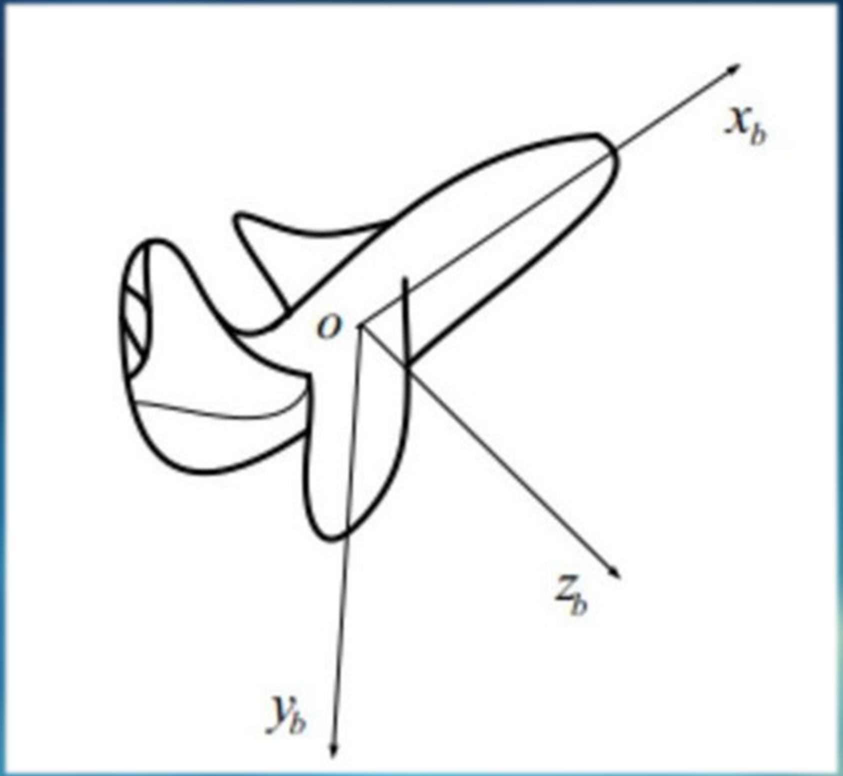
NED坐标系

- NED坐标系是在**导航计算**时使用的坐标系，向量分别指向北，东，地，因此NED坐标系也经常称为“**北东地坐标系**”。



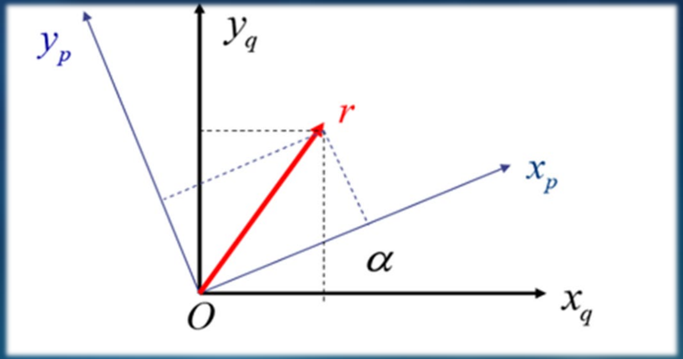
机体坐标系

➢ 机体坐标系与飞行器固联，坐标系符合右手法则，原点在飞行器重心处，X轴指向飞行器机头前进方向，Y轴由原点指向飞行器右侧，Z轴方向根据X、Y轴由右手法则确定。



平面坐标系各轴间的转换

两个平面坐标系 Ox_py_p 和 Ox_qy_q 间的夹角为 α。则其转换矩阵为：



顺时针旋转的转换矩阵

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$

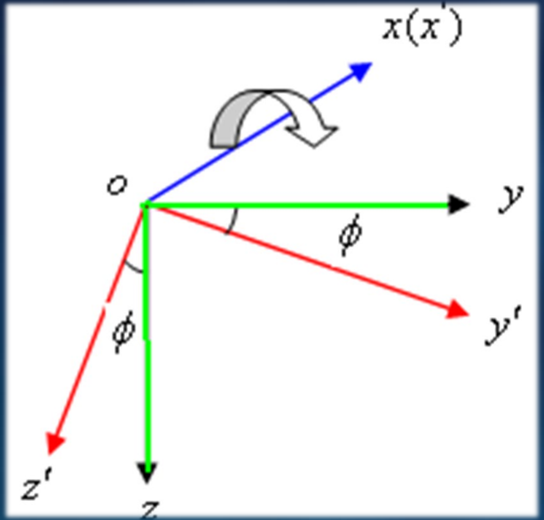
$$L_{qp} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

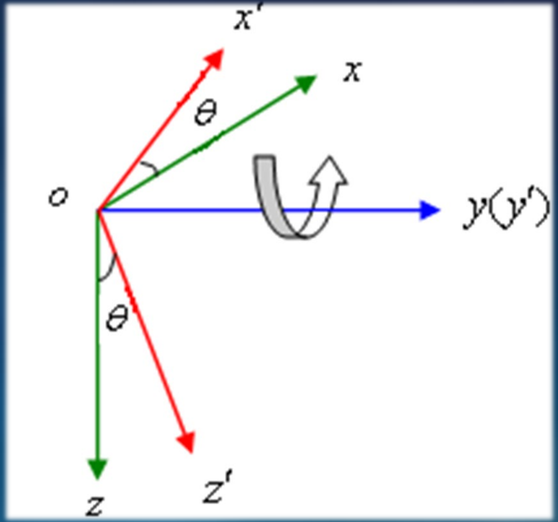
转换矩阵

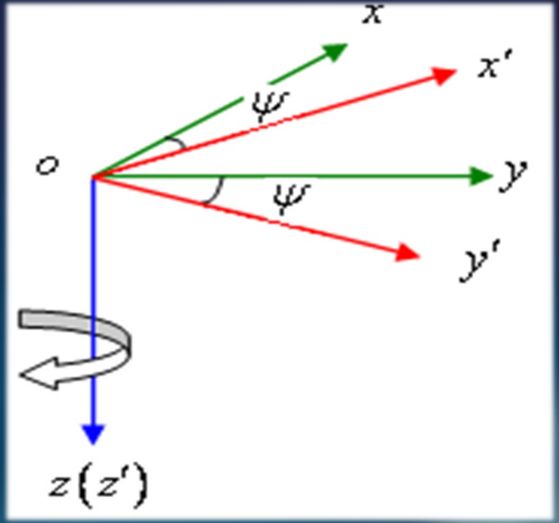
- 互为转置阵； $L_{pq} = \left(L_{qp}\right)^T$
- 互为逆阵； $L_{pq} = \left(L_{qp}\right)^{-1}$
- 正交阵； $\left(L_{pq}\right)^T = \left(L_{pq}\right)^{-1}$
- 传导性。 $L_{pr} = L_{pq}L_{qr}, L_{rp} = L_{rq}L_{qp}$

03

基元旋转







$$T(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

$$T(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$T(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

欧拉角变化率与机体角速度的关系

机体旋转的角速率为 ${}^b\omega = \begin{bmatrix} \omega_{x_b} & \omega_{y_b} & \omega_{z_b} \end{bmatrix}^T$

那么 ${}^b\omega = \dot{\psi}\cdot{}^b k_3 + \dot{\theta}\cdot{}^b n_2 + \dot{\phi}\cdot{}^b b_1$

因此有

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

进一步可以得到

$$\dot{\Theta} = W\,{}^b\omega$$

其中

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix}^T$$

$\boxed{\theta = \pm\pi/2}$

奇异性问题

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_z(\psi)} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 = e_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_y(\theta)} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 = k_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_x(\phi)} \begin{bmatrix} b_1 = n_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$R_b^e = \left(R_e^b\right)^{-1} = \left(R_e^b\right)^T = R_z^{-1}(\psi)R_y^{-1}(\theta)R_x^{-1}(\phi) = R_z(-\psi)R_y(-\theta)R_x(-\phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\sin \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

在奇异情况下，人为设定 $\phi = 0$

$$R_b^e = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

由旋转矩阵反求欧拉角

$$\tan(\psi) = \frac{r_{21}}{r_{11}} \qquad \psi = \arctan\frac{r_{21}}{r_{11}}$$

$$\sin(\theta) = -r_{31} \qquad \theta = \arcsin(-r_{31})$$

$$\tan(\phi) = \frac{r_{32}}{r_{33}} \qquad \phi = \arctan\frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$\theta = \pm\pi/2$

奇异性问题

四元数与欧拉角转换关系

欧拉角 → 四元数

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2)+\sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2)-\cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2)+\sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2)-\sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) \end{bmatrix}$$

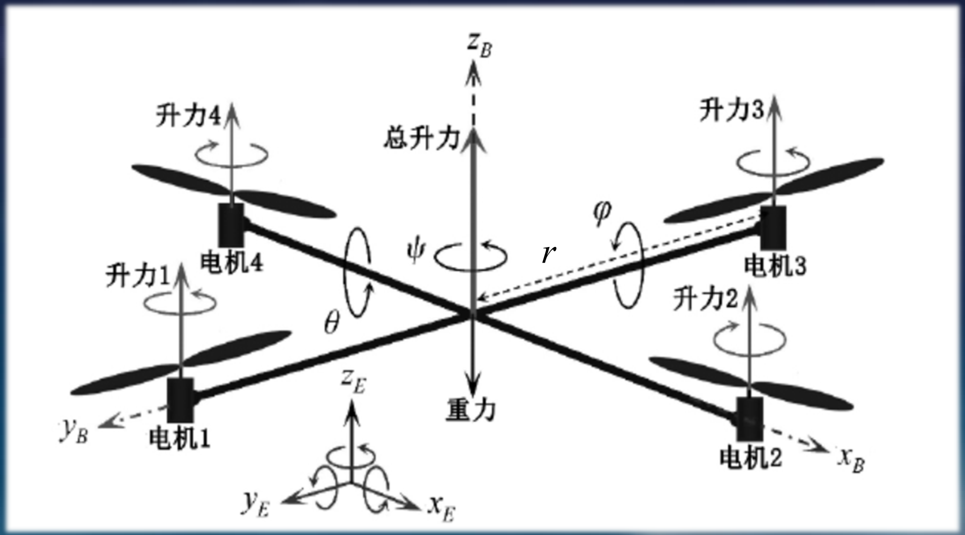
四元数 → 欧拉角

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan \dfrac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2} \\ \arcsin[2(q_0q_2-q_1q_3)] \\ \arctan \dfrac{2(q_0q_3+q_1q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2} \end{bmatrix}$$

请自行阅读四元数相关知识

螺旋桨升力： $k_F\omega_i^2 = \frac{1}{4}mg$

力矩： $T_i = k_M\omega_i^2$



对飞行器受力分析，z轴方向所受合力：

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - mga_z$$

合力矩：

$$M = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + r_4 \times F_4 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

当飞行器在z轴方向受力平衡：

$$\sum_{i=1}^{4} k_F \omega_i^2 + mg = 0$$

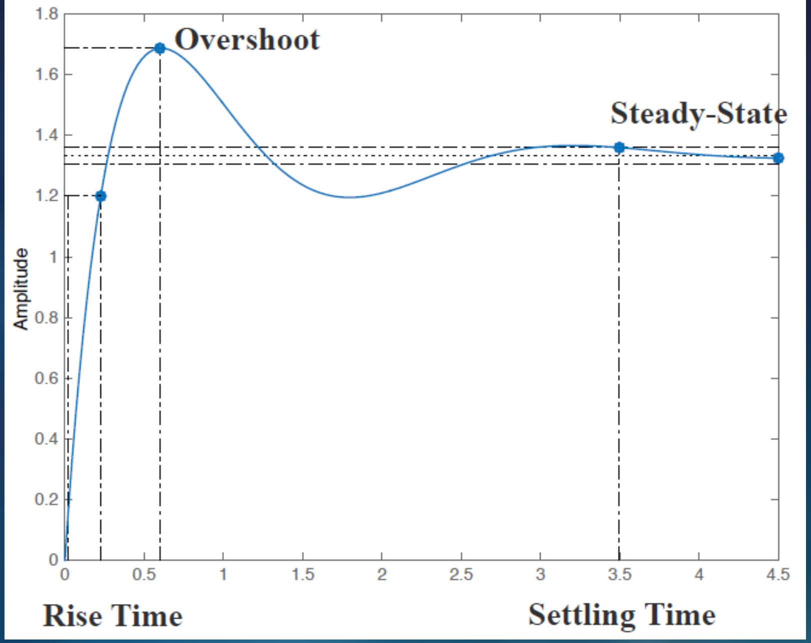
即实现飞行器在某一高度上的悬停；

当受力的平衡被打破，则产生竖直方向运动的加速度：

$$\sum_{i=1}^{4} k_F \omega_i^2 + mg = ma$$

此时加速度的大小和方向决定了飞行器进行相应的升降运动。

控制系统介绍：人工整定



参数变化	$K_p\uparrow$	$K_d\uparrow$	$K_i\uparrow$
Rise Time（上升时间）	减少	-	减少
Overshoot（超调量）	增加	减少	增加
Setting Time（校正时间）	-	减少	增加
Steady-State Error（稳态误差）	减少	-	消除

控制系统介绍： Ziegler-Nichols整定

- 调节增益时的启示（建议）

  1. 设置 $K_i = K_d = 0$
  2. 增大 K_p直到输出发生震荡，此时K_p记为最大增益K_u
  3. 记录增益为K_u时的振荡周期 T_u
  4. 根据下表来设置增益参数:

控制器	K_p	K_d	K_i
P	$0.5K_u$	-	-
PD	$0.8K_u$	$K_pT_u/8$	-
PID	$0.6K_u$	$K_pT_u/8$	$2K_p/T_u$

02 控制系统介绍：基于模型的控制

- 一个普通的二阶模型

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(\mathrm{t})$$

- PID 或 PD 控制方案的缺点

$$u(t) = \ddot{x}^{des}(t) + K_d\dot{e}(t) + K_pe(t)$$

  - 表现效果取决于模型
  - 需要调节增益参数来获得最佳的效果
- 基于模型的控制律

$$u(t) = \overbrace{\hat{m}(\underbrace{\ddot{x}^{des}(t) + K_d\dot{e}(t) + K_pe(t)}_{\text{伺服：前馈+ PD反馈}}) + \hat{b}\dot{x}(t) + \hat{k}}^{\text{基于模型的（估计值）}}x(t)$$

  - 基于模型的部分
    - 取消了系统的动力学
    - 特定于模型
  - 基于伺服的部分
    - 使用带有前馈的PID或PD控制器来将执行误差消除到0
    - 独立于系统模型