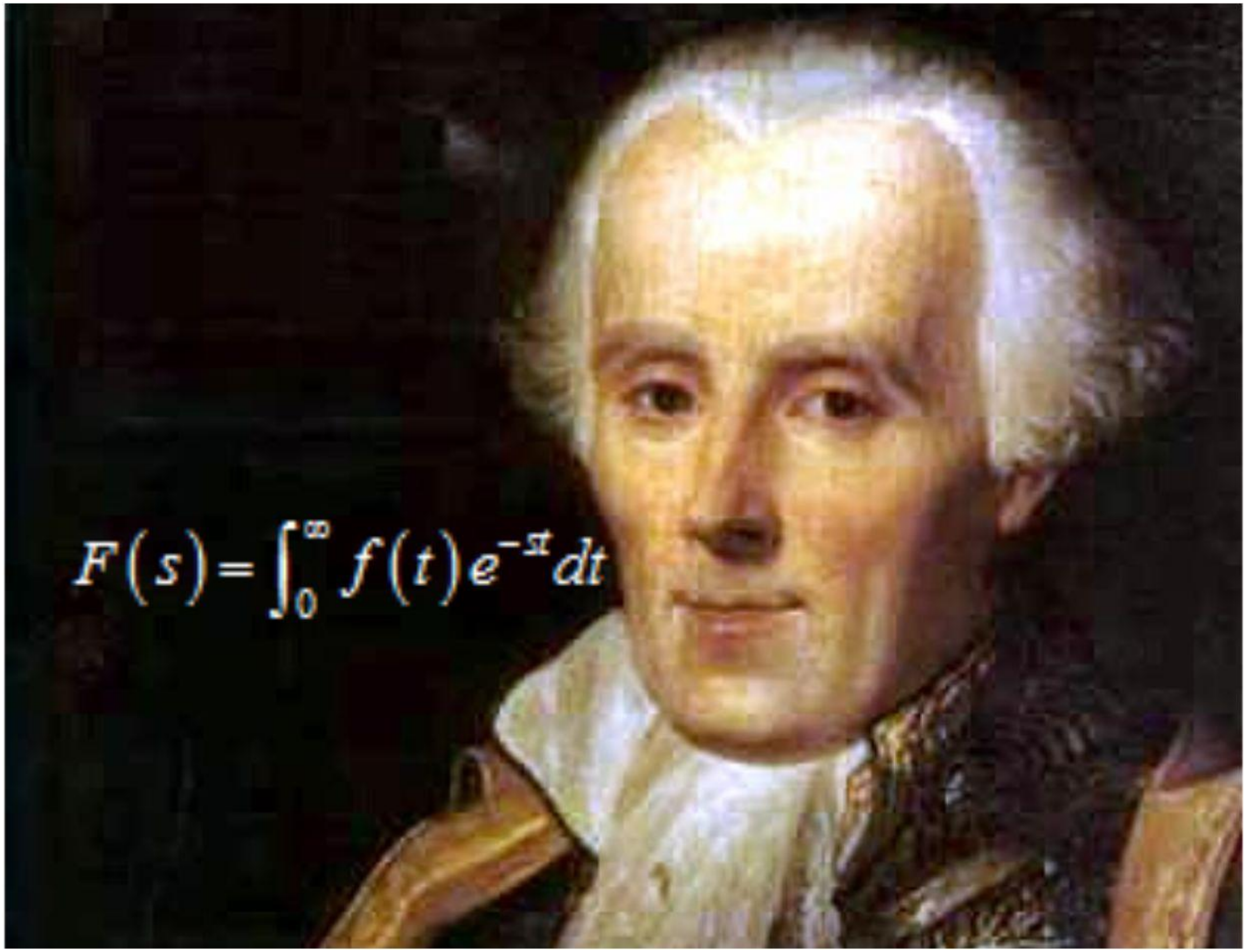


《信号与系统 》 第七章 z变换

第七章
Z变换

§7.0 引言

§7.1 双边Z变换

§7.2 Z变换收敛域(ROC)

§7.3 Z变换收敛域的性质

§7.4 Z变换的性质

§7.5 常用Z变换对

§7.6 Z反变换

§7.7 单边Z变换

§7.8 单边Z变换的性质

§7.9 LTI系统的Z域分析

§7.6　Z反变换

求$X(z)$的幂级数展开系数

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,z^{-n}$$

$$x[n]=Z^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)(z)^{n-1}dz$$

（1）幂级数展开法

（2）部分分式法

（3）留数法（略）

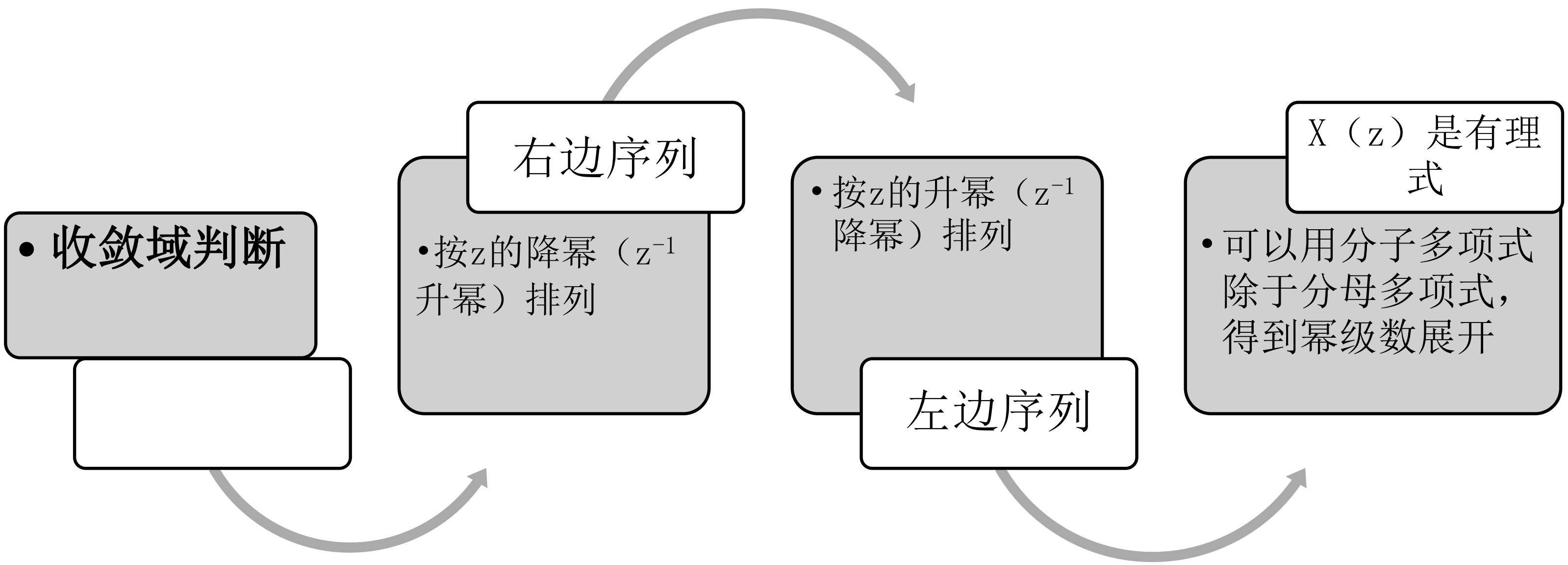
（1）幂级数展开法

将X(z)在给定的收敛域内，展开成z^{-1}的幂级数之和，则该幂级数的系数，就是序列x[n]

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

Z的正幂　　　　　　Z的负幂

z的降幂 $$=\boxed{\cdots x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}}+x(0)z^{0}+\boxed{x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots x(n)z^{-n}+}$$



缺点：不易求得闭式解

（2）部分分式法

$$\delta[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} 1, \text{全部}z$$

$$\delta[n-m] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-m}, \text{除去零、极点}$$

$$a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^{-M} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-N} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

若$M \geq N$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{i=1}^{m} \boxed{\frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}} \Longrightarrow$$

右边序列：$A_i a_i^n u[n]$

左边序列：$-A_i a_i^n u[-n-1]$

基本原则：

分解成基本函数的z变换，结合z变换的性质

§7.7　单边Z变换

$$\overline{X(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=Z\{x[n]u[n]\}$$

$$x[n]=a^{n}u[n] \qquad \overline{X(z)}=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

当n<0，$x[n]$=0，则单、双边z变换相同

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

例7-16　$x[n]=a^{n}u[n+1]$

$$\overline{X(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}u[n+1]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

$$X(z)=Z\{a^{n+1}u[n+1]/a\}=z\frac{1}{1-az^{-1}}/a=\frac{1}{a}\frac{z^{2}}{z-a},|z|>|a|$$

§7.8　单边Z变换性质

（1）位移性

$$x[n-1] \overset{UZ}{\leftrightarrow} z^{-1}\overline{X(z)} + x[-1]$$

$$x[n+1] \overset{UZ}{\leftrightarrow} z\overline{X(z)} - zx[0]$$

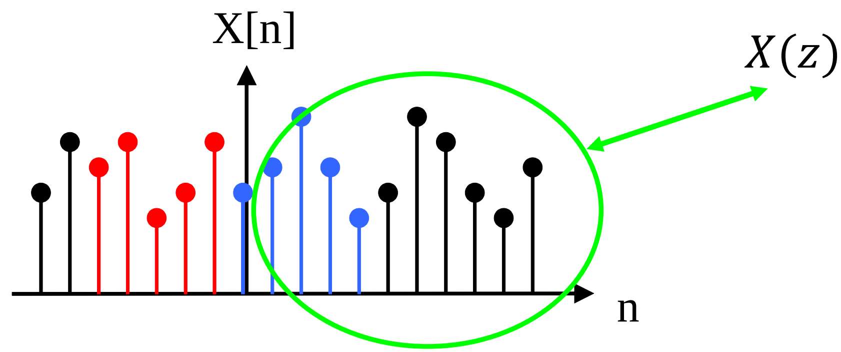
若为因果序列，此项为0

$$Z\{x[n-m]u[n]\} = z^{-m}\{\overline{X(z)} + \boxed{\sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k}}\}$$

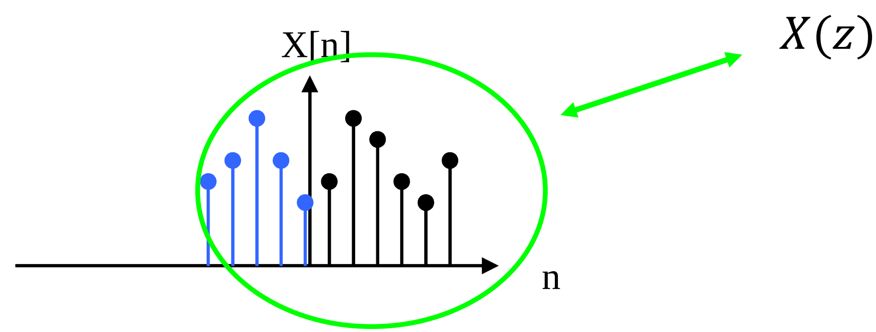
$$Z\{x[n+m]u[n]\} = z^{m}\{\overline{X(z)} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\}$$

X[n]是双边序列

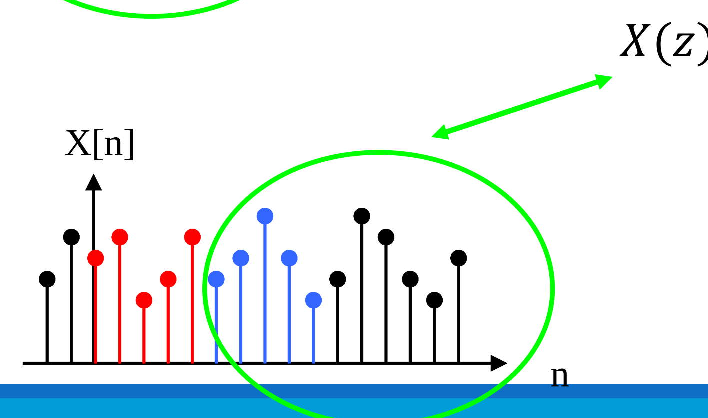
X[n]为双边信号



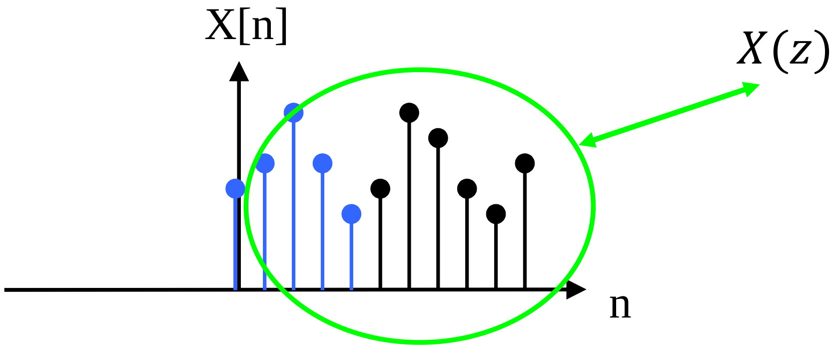
$$Z\{x[n+m]u[n]\} = z^{m}\{\overline{X(z)} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\}$$



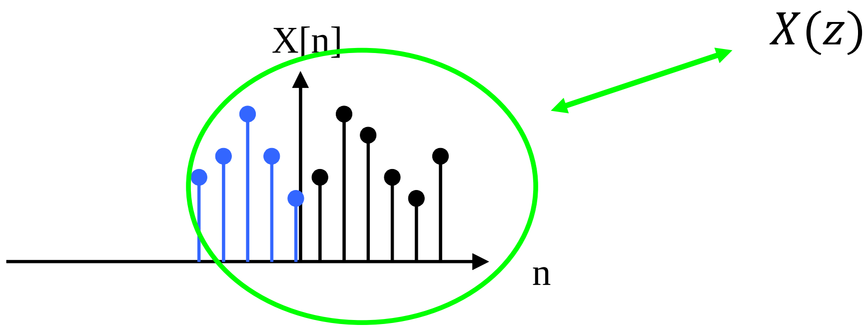
$$Z\{x[n-m]u[n]\} = z^{-m}\{\overline{X(z)} + \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k}\}$$



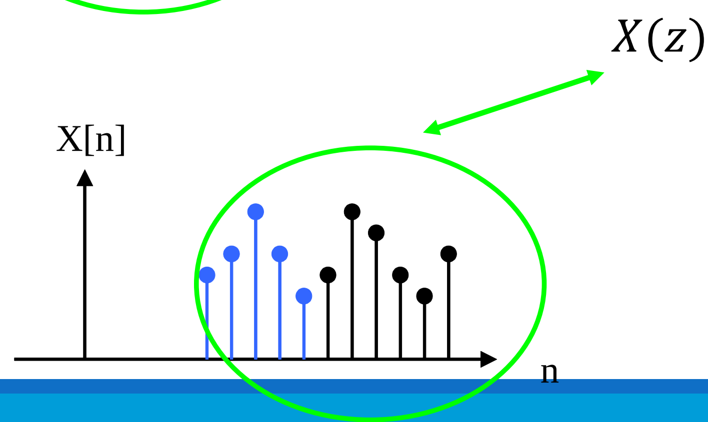
X[n]为因果信号，x[n]=x[n]u[n]



$$Z\{x[n+m]u[n]\} = z^m\{\overline{X(z)} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\}$$



$$Z\{x[n-m]u[n]\} = z^{-m}\overline{X(z)}$$



具有非零初始条件的差分方程(非初始松弛条件)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r\, x[n-r]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right]$$

初始状态

若因果信号此项为零

初始状态

零输入响应

零状态响应

$$Y(z) = \boxed{\frac{-\sum_{k=0}^{N}\left[a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}} + \boxed{X(z)H(z)}$$

例7-18　已知系统 $y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$

当输入$x[n]=4^n u[n]$，起始条件y[-1]=4，求系统响应

$$\overline{Y(z)}-\frac{1}{4}z^{-1}\{\overline{Y(z)}+y[-1]z\}=\overline{X(z)}$$

零输入响应　零状态响应

$$\overline{Y(z)}=\boxed{\frac{\frac{1}{4}y[-1]}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}+\boxed{\frac{\overline{X(z)}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}$$

$$\overline{X(z)}=\frac{1}{1-4z^{-1}},|z|>4$$

$$y[-1]=4$$

$$\overline{Y(z)}=\frac{2-4z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-4z^{-1})}=\frac{2z^2-4z}{(z-\frac{1}{4})(z-4)}=\frac{\frac{14}{15}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{\frac{16}{15}}{1-4z^{-1}},|z|>4$$

$$y[n]=\frac{14}{15}(\frac{1}{4})^n u[n]+\frac{16}{15}(4)^n u[n]$$

（2）初值定理　因果序列x[n]，

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$$

（3）终值定理　因果序列x[n]，且，X(z)的极点位于单位圆内,或者z=1处一阶极点

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = x[\infty] = \lim_{z\to 1}\{(z-1)\overline{X(z)}\}$$

§7.9 LTI系统Z域分析

Z变换 → 离散时间LTI系统分析和表征

$$X(z) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow Y(z)$$

$$h[n] \xleftrightarrow{Z} H(z)$$

卷积性质 $$Y(z) = H(z)X(z)$$

系统函数
（转移函数）

系统函数（转移函数）

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

只要单位圆在H(z)的ROC内　　$H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ → 频率响应

LTI系统　　$x[n] = z^n$　　$y[n] = H(z)z^n$

特征值

特征函数

(单位脉冲响应的z变换)

（1）因果性

因果LTI系统 **单位脉冲响应h[n]：n<0，h[n]=0。(右边序列)**

ROC：z 平面内某一个圆的外边

$h[n]=\delta[n]$ H(z)=1 ROC：整个z平面，可能包括原点

$h[n]=\delta[n+1]$ H(z)=z **在z ＝∞有一个极点**

因果序列

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

ROC包括无限远点

一个离散时间LTI系统当且仅当它的系统函数的ROC是在某一个圆的外边，且包括无限远点，该系统是因果的。

*该圆的直径可能为零，包括或不包括零。 $h[n]=\delta[n], h[n]=\delta[n-1]$

一个具有有理系统函数的LTI系统要是因果的，当且仅当(a)ROC位于圆外；(b)若H(z)能表示为多项式之比，其分子的阶次不能大于分母的阶次。

例

$$H(z)=\frac{z^3-2z^2+z}{z^2+1/4z+1/8}$$

非因果

分子的阶次高于分母的阶次

反变换 $h[n]=[(\frac{1}{2})^{n+1}+1]u[n+1]$

例

$$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|>2$$

单位脉冲响应为右边序列

$$H(z)=\frac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{(1-1/2z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{2z^2-5/2z}{z^2-5/2z+1}$$

因果

反变换 $h[n]=[(\frac{1}{2})^n+2^n]u[n]$

（2） 稳定性

等效于

离散时间LTI系统稳定 ⟺ **单位脉冲响应绝对可和**

⇓

h[n]的傅立叶变换收敛 ⟺ **H(z)的ROC包括单位圆**

一个LTI系统当且仅当它的系统函数H(z)的ROC包括单位圆时，系统是稳定的。

例

(1) $$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|>2$$

因果、不稳定

(ROC不包括单位圆)

(2) $$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},1/2<|z|<2$$

非因果、稳定

$$h[n]=(\frac{1}{2})^{n}u[n]-2^{n}u[-n-1]$$

(3) $$H(z)=\frac{1}{1-1/2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}},|z|<1/2$$

非因果、不稳定

$$h[n]=-[(\frac{1}{2})^{n}+2^{n}]u[-n-1]$$

一个具有有理系统函数的因果LTI系统，当且仅当H(z)的全部极点都位于单位圆内时，系统是稳定的。

对于非因果系统，收敛域并不是在圆外区域，极点不限于单位圆内。

例

因果系统 $$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$ **在z ＝a有一个极点**

稳定 ⟹ $|a|<1$ ⟹ $h[n]=a^{n}u[n]$ **绝对可和**

7.9.2 由线性常系数差分方程表征的LTI系统

解差分方程的方法：

（1）时域经典法

（2）傅立叶变换法

（3）Z变换解法

线性常系数差分方程 → 系统函数 频率响应 或时域响应

位移特性

$$Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$
$$Z[x(n+m)] = z^{m}X(z)$$

例

一LTI系统，其输入x[n]和输出y[n]满足线性常系数差分方程

$$y[n] - 1/2y[n-1] = x[n] + 1/3x[n-1]$$

Z变换
线性性质
时移性质

$$Y(z) - 1/2z^{-1}Y(z) = X(z) + 1/3z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\left[\frac{1+1/3z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}\right]$$

差分方程本身不能确定ROC

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+1/3z^{-1}}{1-1/2z^{-1}}$$

$$H(z) = (1 + 1/3z^{-1})\frac{1}{1 - 1/2z^{-1}}$$

ROC $\begin{cases} |z|>1/2 \\ |z|<1/2 \end{cases}$

|z|>1/2

$$h[n] = (1/2)^n u[n] + 1/3(1/2)^{n-1} u[n-1]$$

因果、稳定

|z|<1/2

$$h[n] = -(1/2)^n u[-n-1] - 1/3(1/2)^{n-1} u[-n]$$

非因果、不稳定

一般的N阶差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

两边取z变换，并利用线性和时移性质

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k} X(z)$$

或

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统函数有理 差分方程本身也没有提供ROC的信息

因果性、稳定性用来作为标定ROC的条件

系统函数与系统特性的关系

例

1. 当输入$x_1[n]=(\frac{1}{6})^n u[n]$时，输出$y_1[n]=[a(\frac{1}{2})^n+10(\frac{1}{3})^n]u[n], a\subset R$

2. 若输入$x_2[n]=(-1)^n$时，输出$y_2[n]=\frac{7}{4}(-1)^n$

求：H(z)，因果性，稳定性，差分方程

$$X_1(z)=\frac{1}{1-1/6z^{-1}}, |z|>1/6$$

$$Y_1(z)=\frac{a}{1-1/2z^{-1}}+\frac{10}{1-1/3z^{-1}}, |z|>1/2$$

⇨

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{[(a+10)-(5+a/3)z^{-1}][1-1/6z^{-1}]}{(1-1/2z^{-1})(1-1/3z^{-1})}, |z|>\frac{1}{2}$$

$$y[n]=H(z)z^n \leftrightarrow y_2[n]=\frac{7}{4}(-1)^n=H(z)|_{z=-1}(-1)^n$$

$$\frac{7}{4}=H(-1)=\frac{[(a+10)-5+a/3][7/6]}{(3/2)(4/3)} \Rightarrow a=-9$$

$$H(z)=\frac{[1-2z^{-1}][1-1/6z^{-1}]}{(1-1/2z^{-1})(1-1/3z^{-1})}$$

$Y_1(z)$的ROC包含$X_1(z)$和$H(z)$的交集。对于$H(z)$：其ROC可能为：$|z|<1/3, 1/3<|z|<1/2, |z|>1/2$。所以$|z|>1/2$系统是稳定且因果的。

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]-\frac{13}{6}x[n-1]+\frac{1}{3}x[n-2]$$

线性常系数差分方程的Z域求解

单边Z变换

具有非零初始条件的差分方程
（非初始松弛条件）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r\, x[n-r]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right]$$

初始状态

若因果信号
此项为零

初始状态

$$Y(z)=\underbrace{\frac{-\sum_{k=0}^{N}\left[a_k z^{-k}\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{X(z)H(z)}_{\text{零状态响应}}$$

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n] \qquad x[n] = au[n] \qquad y[-1] = b$$

$$Y(z) + 3b + 3z^{-1}Y(z) = \frac{a}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \overset{\text{零输入响应}}{\boxed{\frac{3b}{1 + 3z^{-1}}}} + \overset{\text{零状态响应}}{\boxed{\frac{a}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})}}}$$

例

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n]$$

输入 $x[n]=4^n u[n]$ 初始条件: $y[-2]=0, y[-1]=1$

解: $Y(z)+z^{-1}(Y(z)+y[-1]z)-6z^{-2}(Y(z)+y[-2]z^2+y[-1]z)=X(z)$

$$X(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}, |z|>4$$

$$(1+z^{-1}-6z^{-2})Y(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}+(-1+6z^{-1})$$

零状态响应

零输入响应

$$Y(z)=\frac{1}{(1+z^{-1}-6z^{-2})(1-4z^{-1})}+\frac{(-1+6z^{-1})}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{(1+3z^{-1})(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}+\frac{(-1+6z^{-1})}{(1+3z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

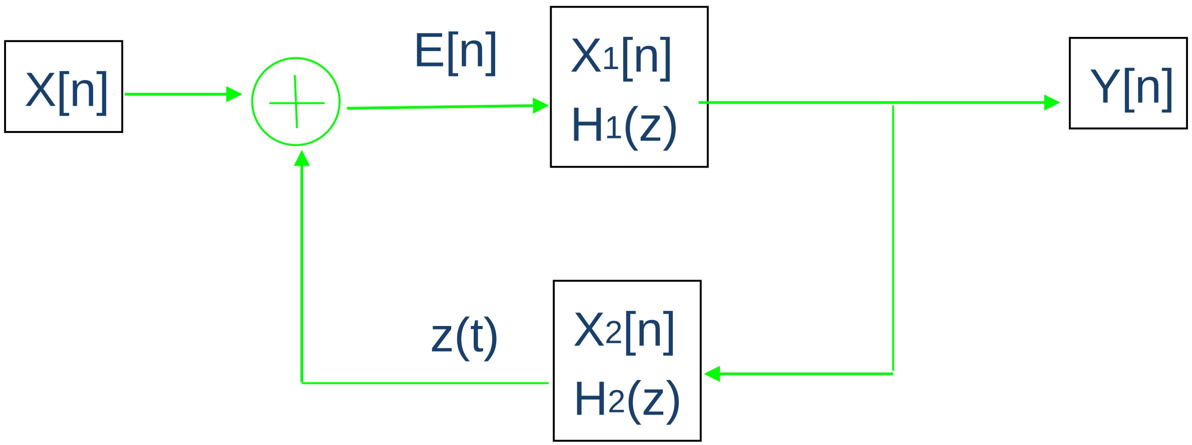
$$=\frac{A_1\ \frac{9}{35}}{(1+3z^{-1})}+\frac{A_2\ -\frac{2}{5}}{(1-2z^{-1})}+\frac{A_3\ \frac{8}{7}}{(1-4z^{-1})}+\frac{B_1\ -\frac{9}{5}}{(1+3z^{-1})}+\frac{B_2\ \frac{4}{5}}{(1-2z^{-1})}$$

$$y[n] = \underbrace{(-\frac{2}{5} \times 2^n + \frac{9}{35} \times (-3)^n + \frac{8}{7} \times 4^n)u[n]}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{(\frac{4}{5} \times 2^n - \frac{9}{5} \times (-3)^n)u[n]}_{\text{零输入响应}}$$

$$= (\frac{2}{5} \times 2^n - \frac{54}{35} \times (-3)^n + \frac{8}{7} \times 4^n)u[n]$$

7.9.3 系统函数的方框图表示

反馈

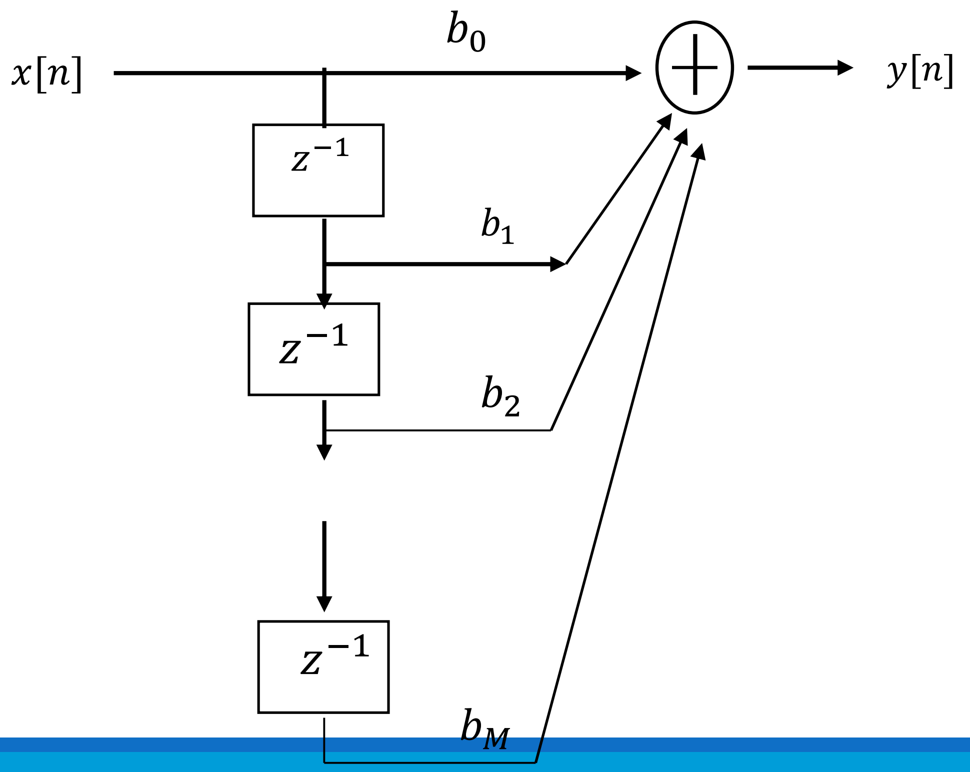


$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

非递归方程

$$H_N(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

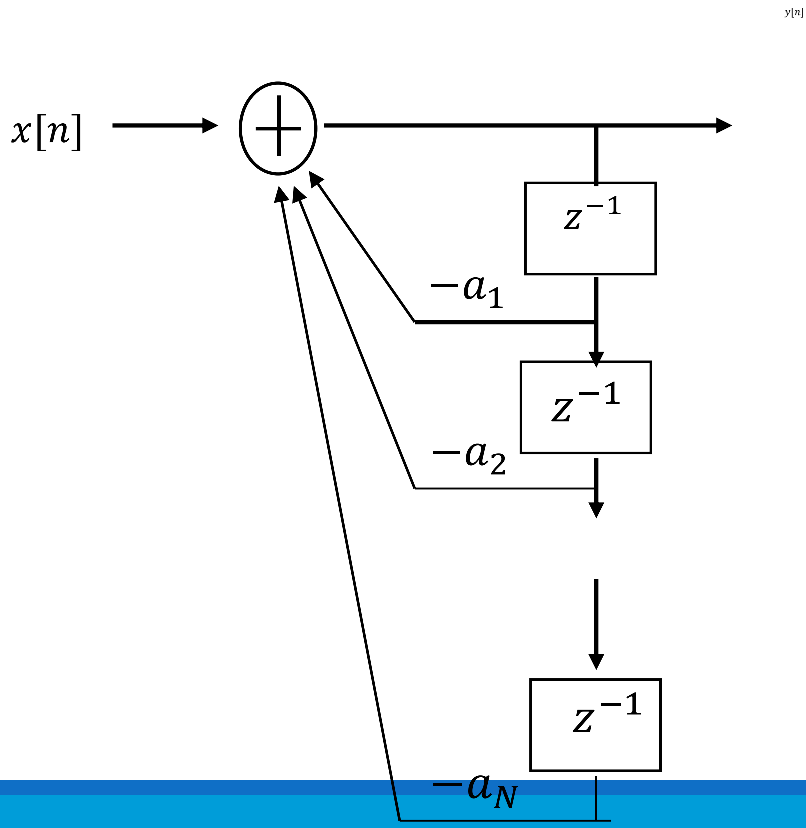
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$



递归方程

$$H_R(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}},a_0\Rightarrow 1$$

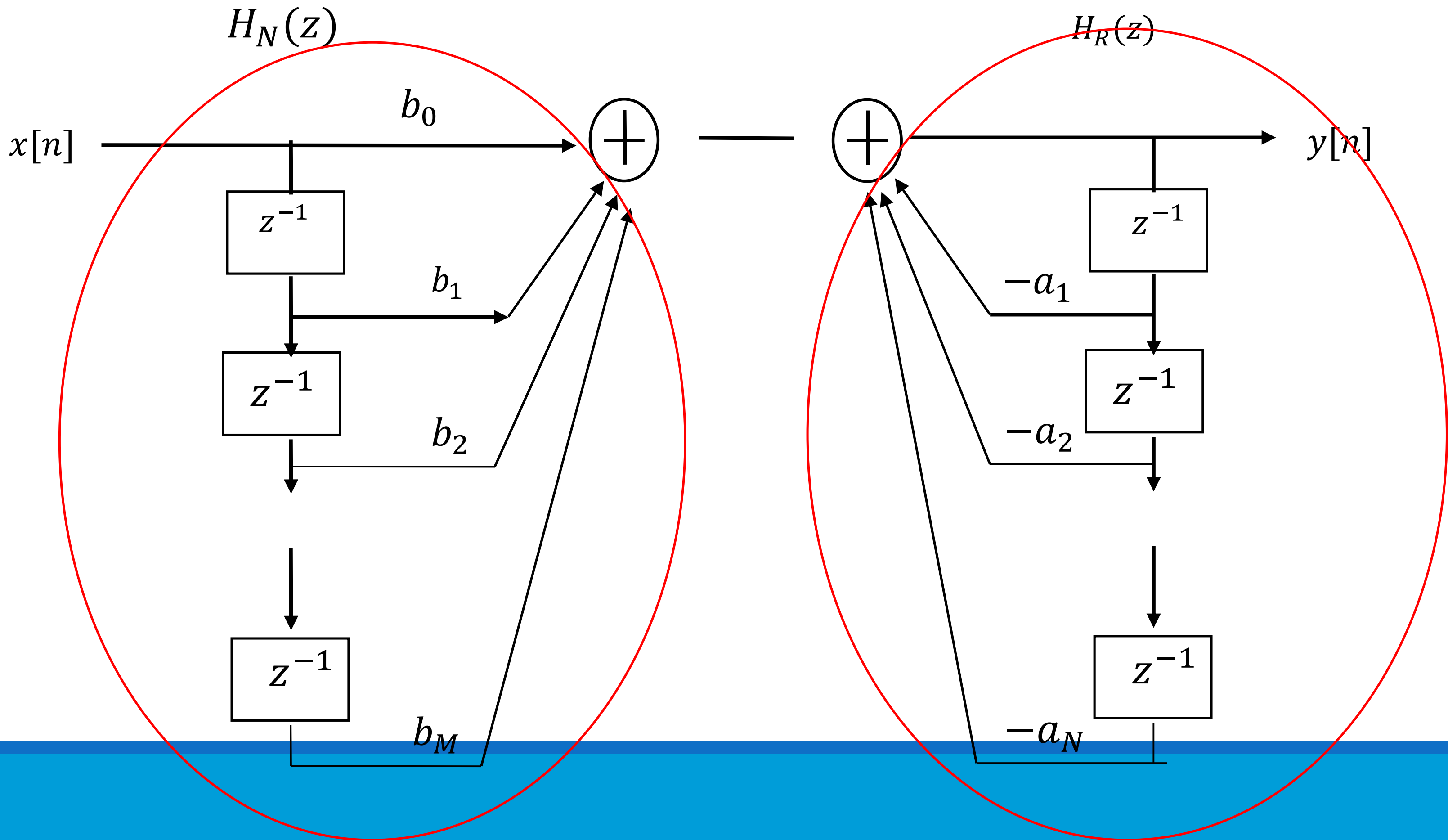
$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+\cdots+a_Ny[n-N]=x[n]$$
$$y[n]=x[n]-a_1y[n-1]-a_2y[n-2]-\cdots-a_Ny[n-N]$$



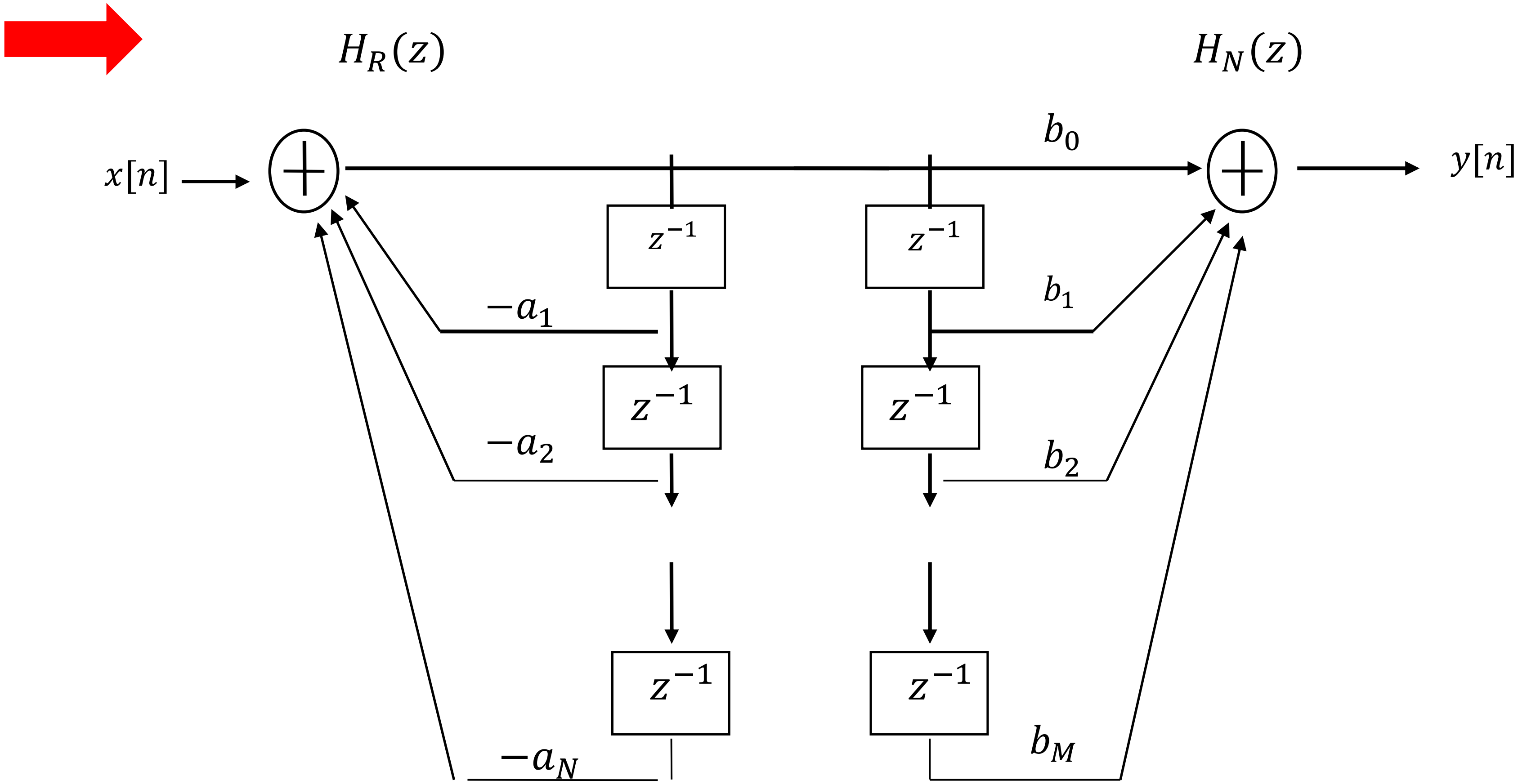
一般系统方程

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=H_N(z)\bullet H_R(z)$$

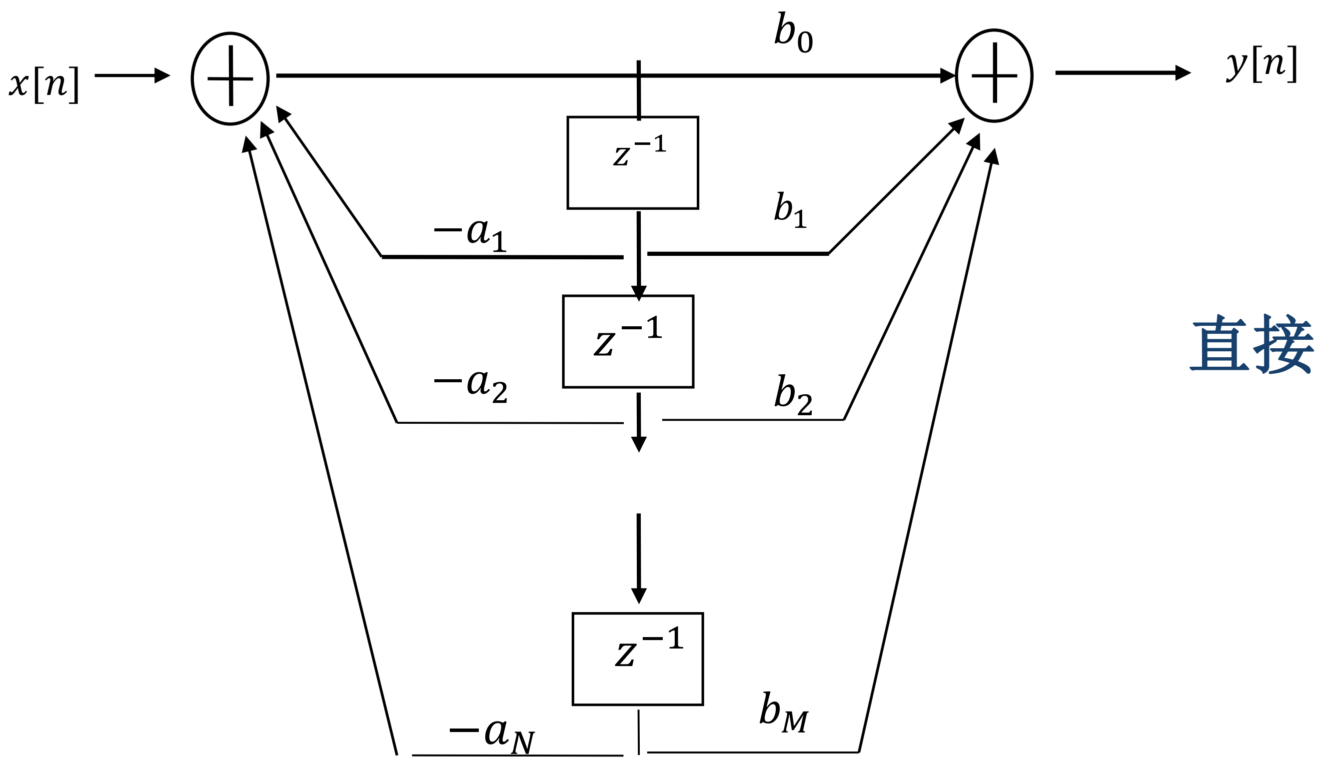
$a_0 \Rightarrow 1$



$$H(z) = H_N(z) \bullet H_R(z) = H_R(z) \bullet H_N(z)$$



$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$



直接II型

小结

Z变换和Z反变换

Z变换的收敛域

Z变换的性质

Z变换求解LTI差分方程

作业：7.1（1，4，5） 7.2（1，3，5） 7.12 7.14（1） 7.21（1，2，3） 7.22（matlab不做）