

# 第三章 连续时间信号与系统的频域分析

## § 3.0 引言

信号分解为单位脉冲信号的线性组合

信号分解为复指数信号的线性组合

卷积

叠加性质：系统对任意信号的响应，就是对基本信号的响应的线性叠加



# 傅立叶的两个最主要的贡献——

- “周期信号都可表示为谐波关系的正弦信号的加权和”——傅里叶的第一个主要论点
- “非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示”——傅里叶的第二个主要论点



## § 3.1 LTI系统的特征函数

基本信号：

构成广泛的有用信号

LTI系统对基本信号的响应应简单

连续时间： $e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$

离散时间： $z^n \rightarrow H(z)z^n$

系统对信号的响应，  
仅是常数乘输入  
(与输入无关)

特征函数

特征值



## 对LTI系统

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \Rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \Rightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

LTI系统中：输入表示为复指数信号的线性组合

那么：输出为相同复指数信号的线性组合

且：输出的系数为相应系数与对应特征值相乘

周期信号：s、z的纯虚数。s=jw, z=e<sup>jw</sup>



## § 3.2 连续时间周期信号的傅立叶级数

### § 3.2.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

$$x(t) = x(t + T) \quad T_0, \text{基波}; \quad \omega_0 = 2\pi / T_0$$

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk2\pi/Tt}, \text{谐波}$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

周期信号的  
傅立叶级数

$a_k$  —— 傅立叶级数系数

$k=0$ , 常数, 直流分量

$k=\pm 1$ , 一次谐波分量(基波)

$k=\pm 2$ , 二次谐波分量



## § 3. 2. 2 连续时间周期信号傅立叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_0^T x(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

$$= \begin{cases} T, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

综合公式

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

分析公式

傅立叶级数系数  
(频谱系数)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$





# 结论

如果一个周期信号 $x(t)$ 可以展开为傅立叶级数, 可表示为由其各谐波分量叠加而成. 不同的信号, 组成的谐波分量不同, 即 $a_k$ 不同.

周期信号可由其傅立叶级数系数 $\{a_k\}$ 来表征 (即在能量误差等于零的意义上) 的等效表示.

$$x(t) \xrightarrow{Fs} a_k$$

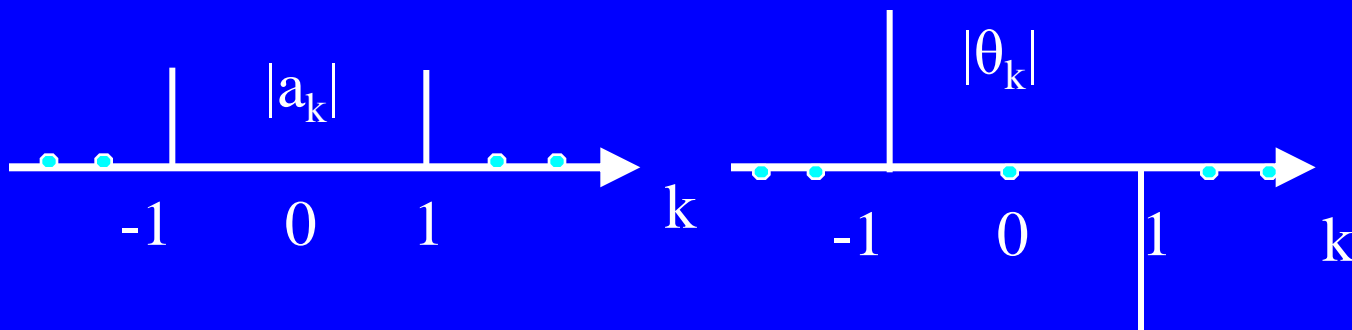


## 例3.1

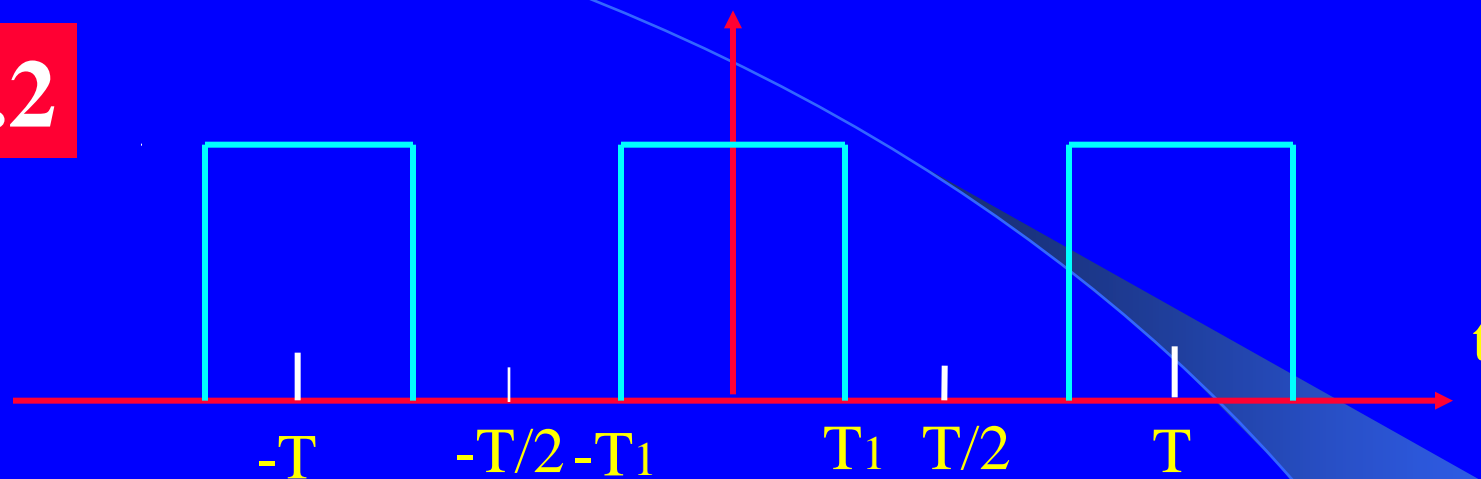
$$x(t) = \sin(\omega_0 t)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, k \neq \pm 1$$



## 例3.2



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$\omega_0 = 2\pi / T$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

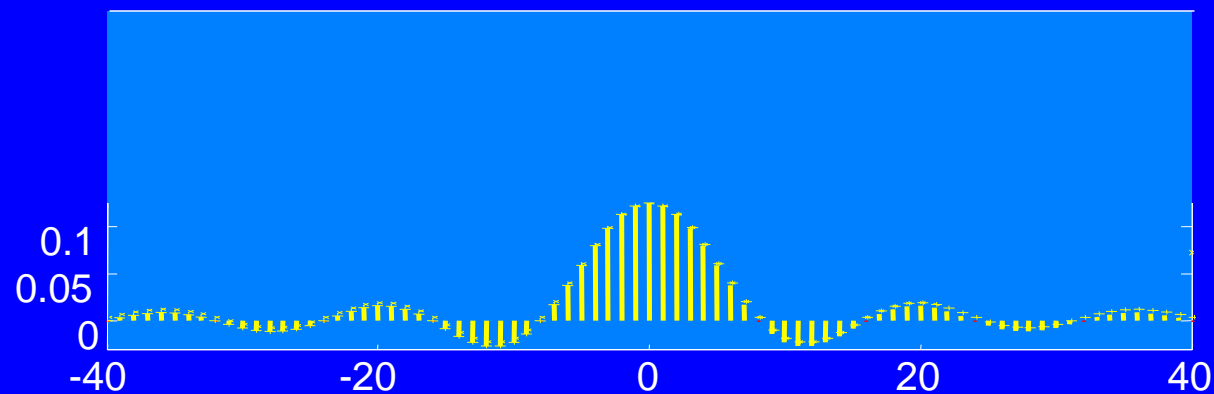
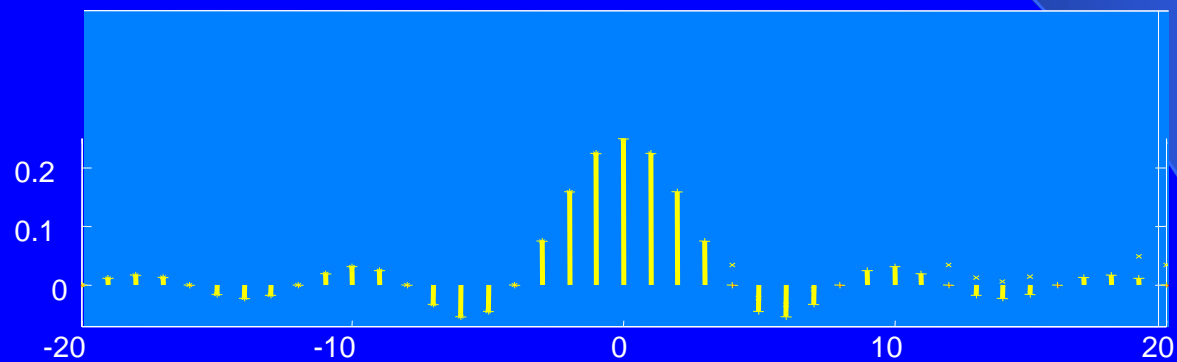
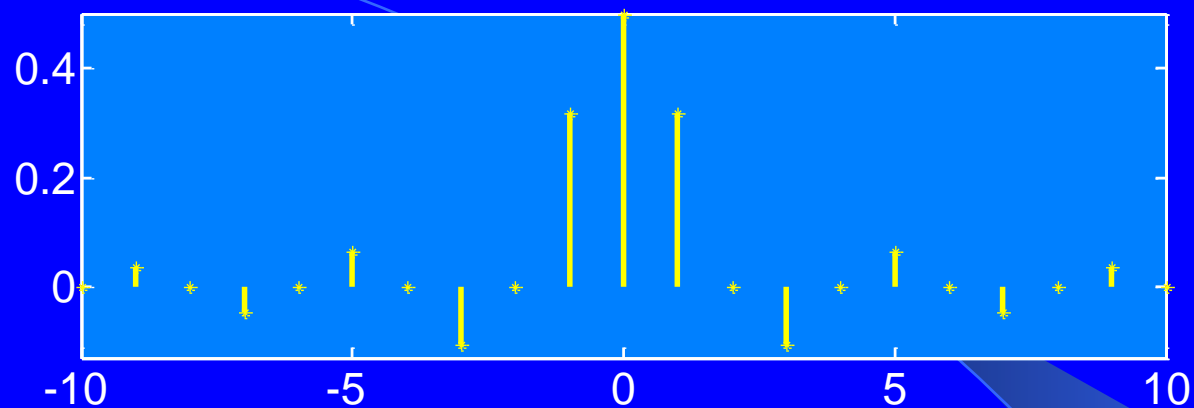
$$= \frac{2}{k\omega_0 T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right]$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, k \neq 0$$

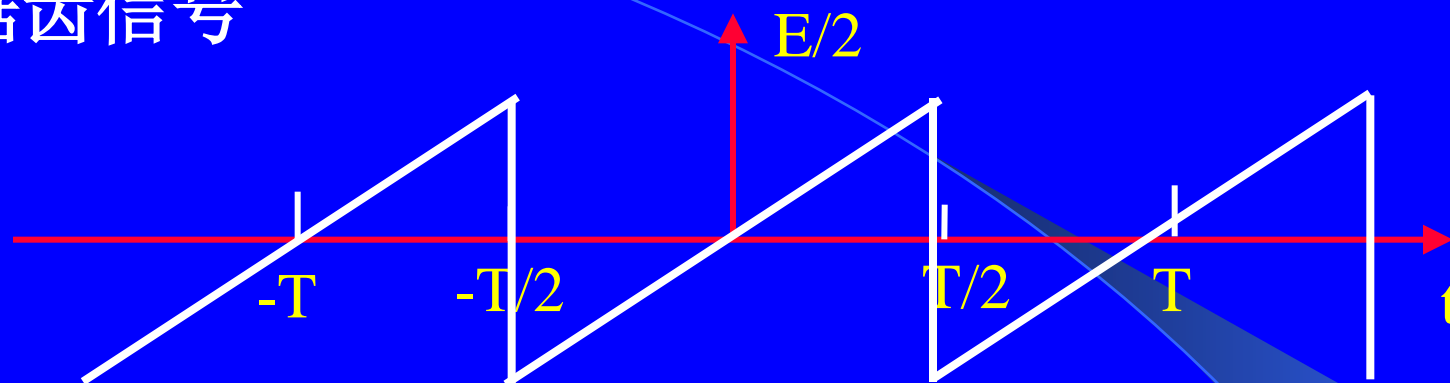
1/k收敛, 且  $\rightarrow 0$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{Sa}(k\omega_0 T_1)$$





## 周期锯齿信号



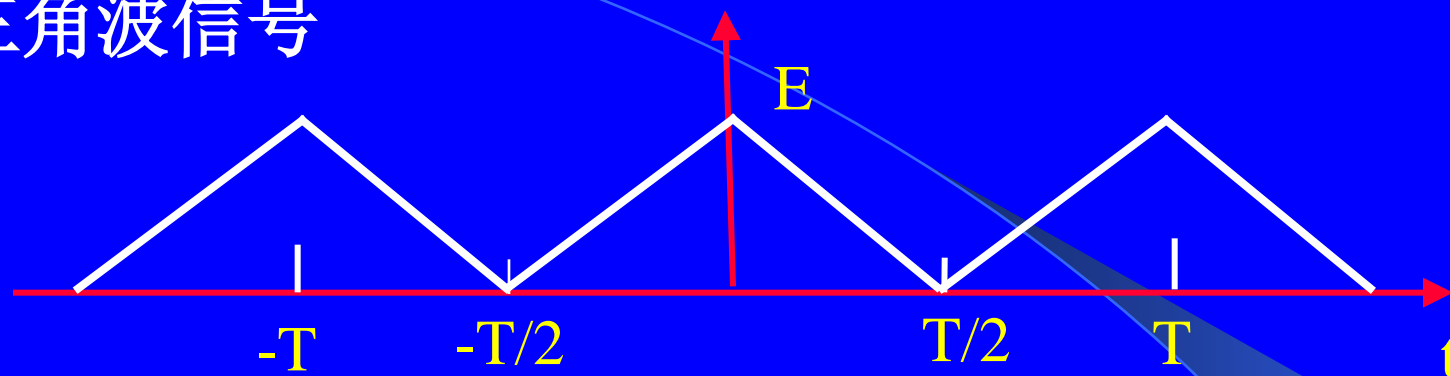
$$a_0 = 0$$
$$a_k = \frac{j}{2} (-1)^k \frac{E}{k\pi}, k \neq 0$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{j}{2} (-1)^k \frac{E}{k\pi} e^{jk\omega_0 t}$$

$1/k$ 收敛, 且  $\rightarrow 0$



## 周期三角波信号



$$a_k = \frac{E}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$x(t) = \frac{E}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi}{2}k\right) e^{jk\omega_0 t}$$

$1/k^2$ 收敛, 且  $\rightarrow 0$



### § 3.2.3 傅立叶级数的收敛

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t)$$

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt$$





当使 $E_N$ 最小时:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

且  $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$

实际中,  $n=N$ ,  $N$ 是有限整数。  
如果  $N$ 愈大, 则 其均方误差愈小

$$n \rightarrow \infty, e_N = 0$$

傅立叶级数, 是在 $E_N=0$ 的意义上, 对对应信号的最佳表示. (不是点点相等)



## 狄利赫利条件:

- 在一个周期内只有有限个间断点;
- 在一个周期内有有限个极值点;
- 在一个周期内函数绝对可积, 即

$$\int_{t_0}^{t_0 + T_1} |x(t)| \cdot dt < \infty$$

- 一般周期信号都满足这些条件.

不满足特例 P92



不存在间断点: 傅立叶级数收敛, 且每一点等于  $x(t)$

存在有限数目间断点:

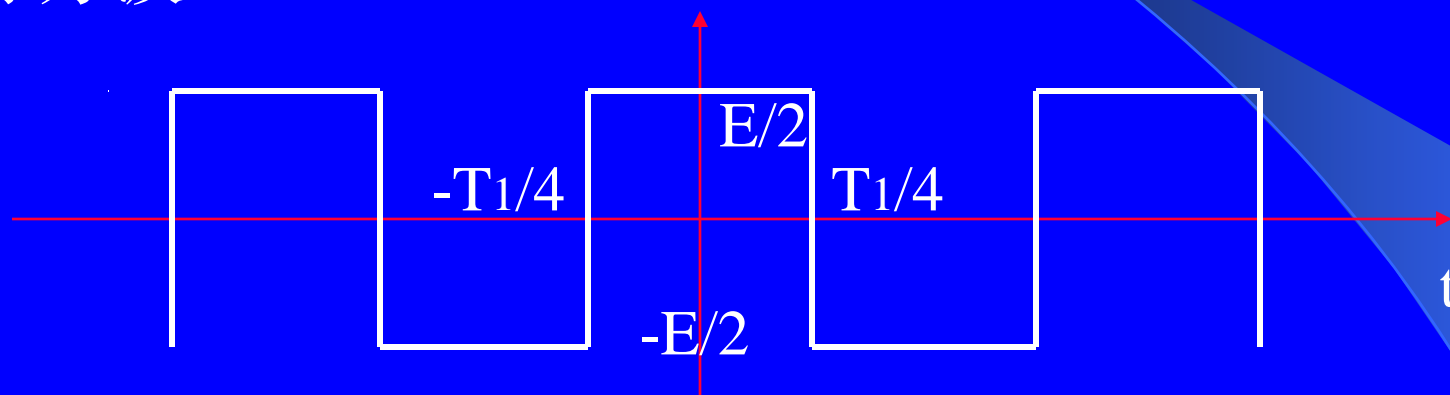
不连续点外, 傅立叶级数收敛于  $x(t)$

不连续点处, 收敛于不连续点的平均值



# 吉伯斯现象

对称方波



$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



## 对称方波有限项的傅里叶级数

- $N=1$

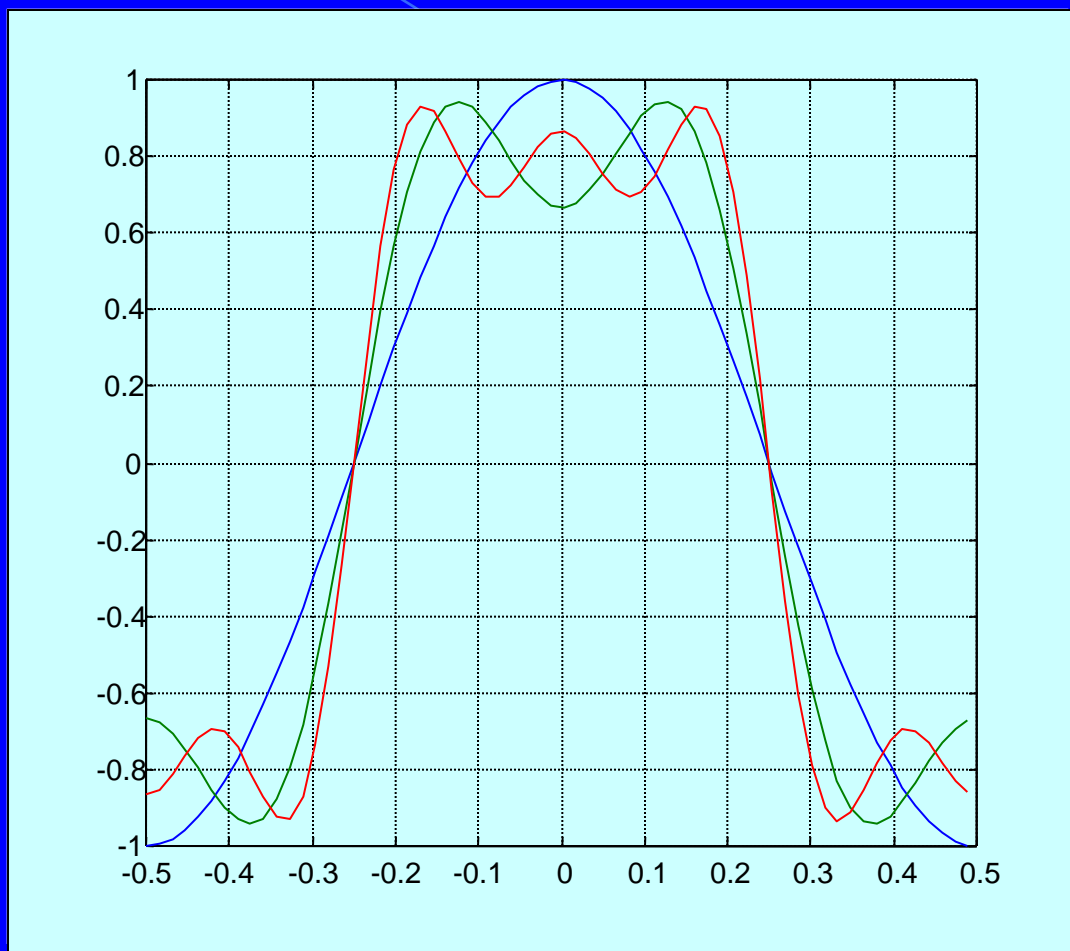
$$E_1 \approx 0.05E^2$$

- $N=2$

$$E_2 = 0.02E^2$$

- $N=3$

$$E_3 = 0.01E^2$$



有限项的 $N$ 越大, 误差越小例如:  $N=11$

部分和出现峰值, 最大为1.09

无论 $N$ 取多大, 超量不变



吉伯斯现象:

随着 $N$ 的增加, 部分和的起伏就向不连续点处压缩, 但对任何有限的 $N$ 值, 起伏的峰值大小保持不变。



由以上可见：

- N越大，越接近方波  $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N = x(t)$
- 快变信号，高频分量，主要影响跳变沿；
- 慢变信号，低频分量，主要影响顶部；
- 任一分量的幅度或相位发生相对变化时，波形将会失真
- 在不间断点，有高频起伏和超量(1.09)



## § 3.3 连续时间傅立叶变换

非周期信号      看作      周期无限大的周期信号

当周期信号的周期 $T$ 无限大时, 就演变成了非周期信号的单脉冲信号

$$T \rightarrow \infty$$

频率也变成连续变量

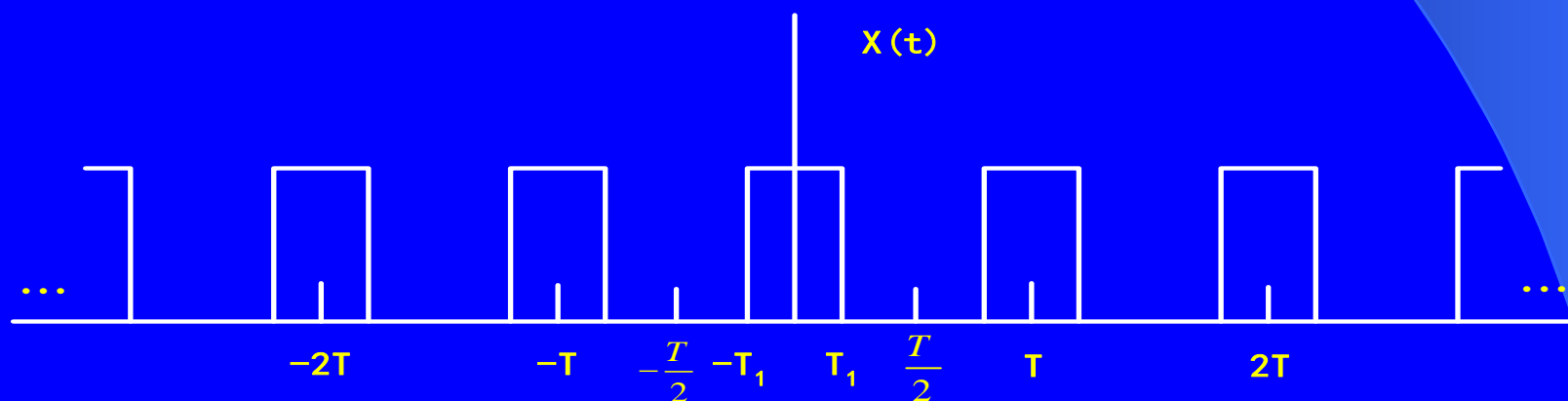
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0 \rightarrow d\omega \qquad k\omega_0 \rightarrow \omega$$





## § 3.3.1 非周期信号傅立叶变换表示的导出:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

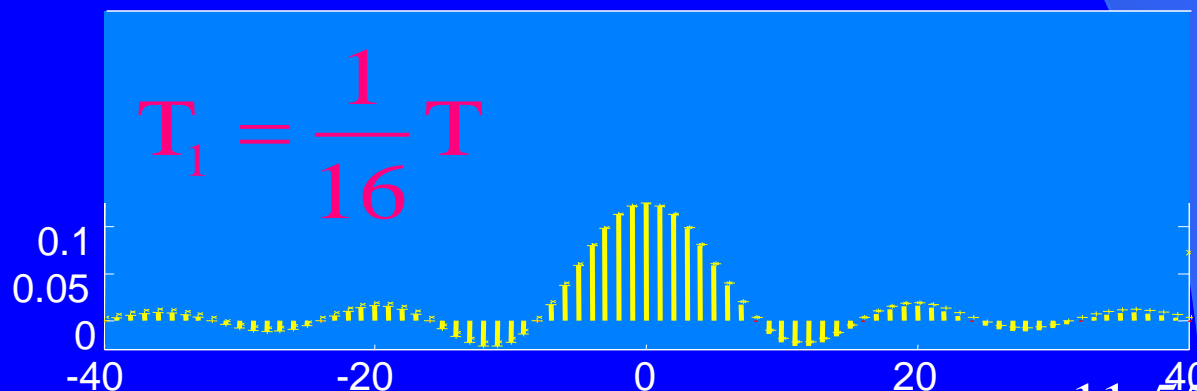
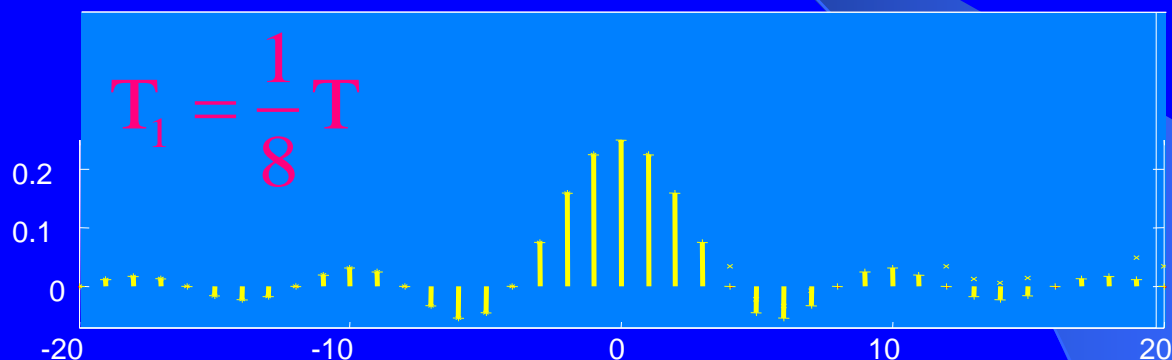
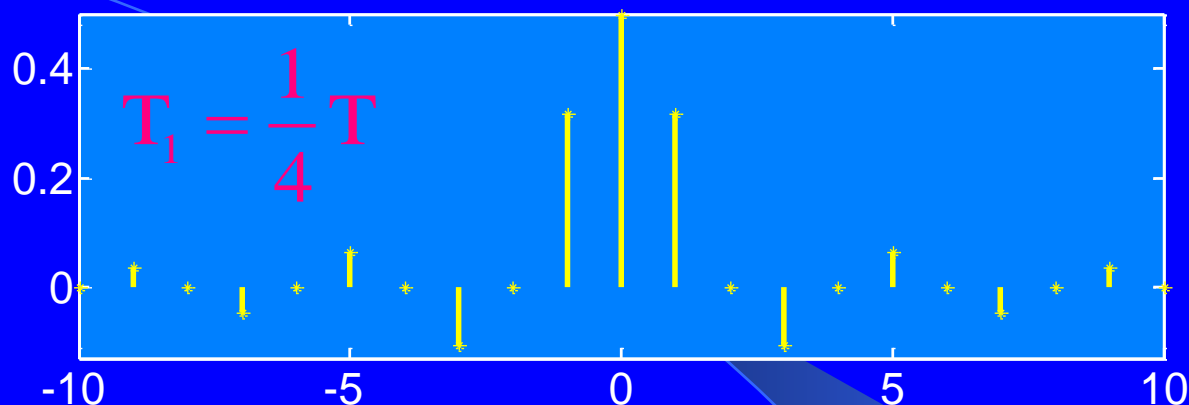


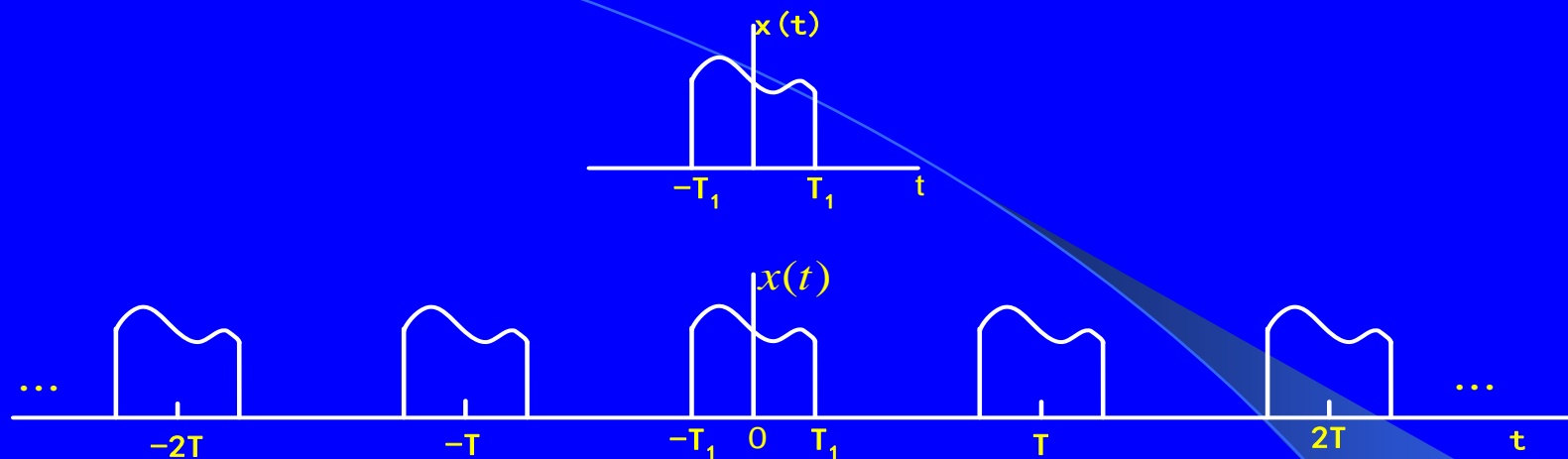
$$a_k = \frac{2 \sin(k \omega_0 T_1)}{k \omega_0 T}$$

$$T a_k = \left. \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \right|_{\omega = k \omega_0}$$

$T_1$ 固定，过零点固定

$T$ 改变，谱线密度改变





$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

定义:  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$



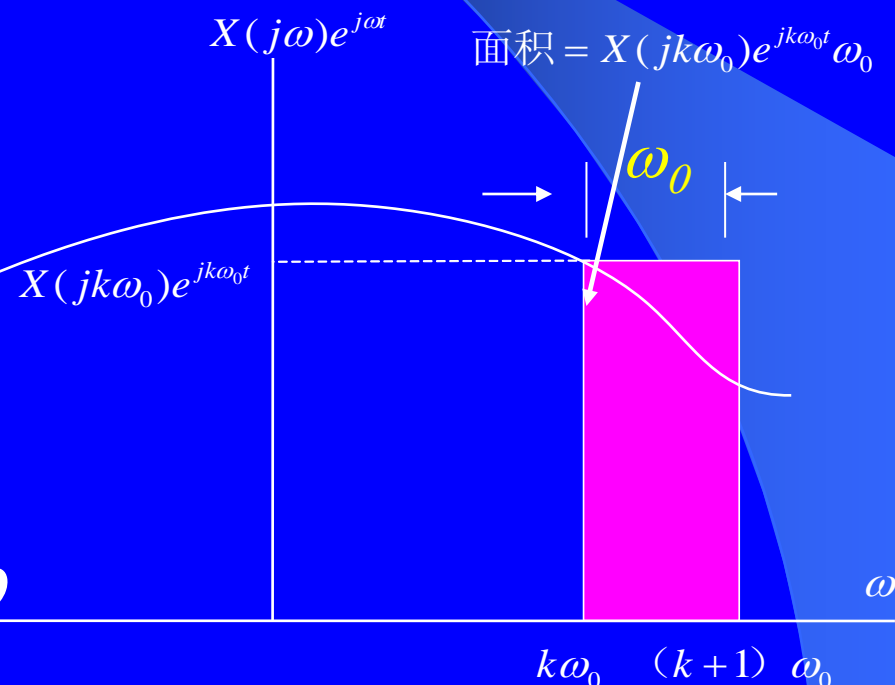
$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$T \rightarrow \infty \quad \omega_0 \rightarrow 0(d\omega)$$

$$K\omega_0 \rightarrow \omega \quad \sum \rightarrow \int$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

频域信号映射为  
时域信号

傅立叶变换对

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

时域信号映射为  
频域信号

函数 $X(j\omega)$ 称为 $x(t)$ 的傅立叶变换或傅立叶积分，上式称为傅立叶反变换式——表示复指数信号的线性组合。

复指数信号出现在连续频率上, 其加权“幅度”为  $X(j\omega)d\omega/2\pi$  , 为无穷小. 将表示不同频率的复指数信号”复幅度”相对大小的  $X(j\omega)$ , 来表示信号所包含复指数信号组成成分的度量, 称为  
频谱.



## 从物理意义来讨论FT

- (a)  $X(j\omega)$  是一个**频谱密度函数**的概念 (相对复幅度)

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T a_k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi a_k}{\omega} = \frac{2\pi a_k}{d\omega}$$

$a_k$  表示的是谐波的幅度 (绝对复幅度)

- (b)  $X(j\omega)$  是一个**连续谱**  
(c)  $X(j\omega)$  包含了**从零到无限高频**的所有频率分量  
(d) 各频率分量的频率**不成谐波关系**

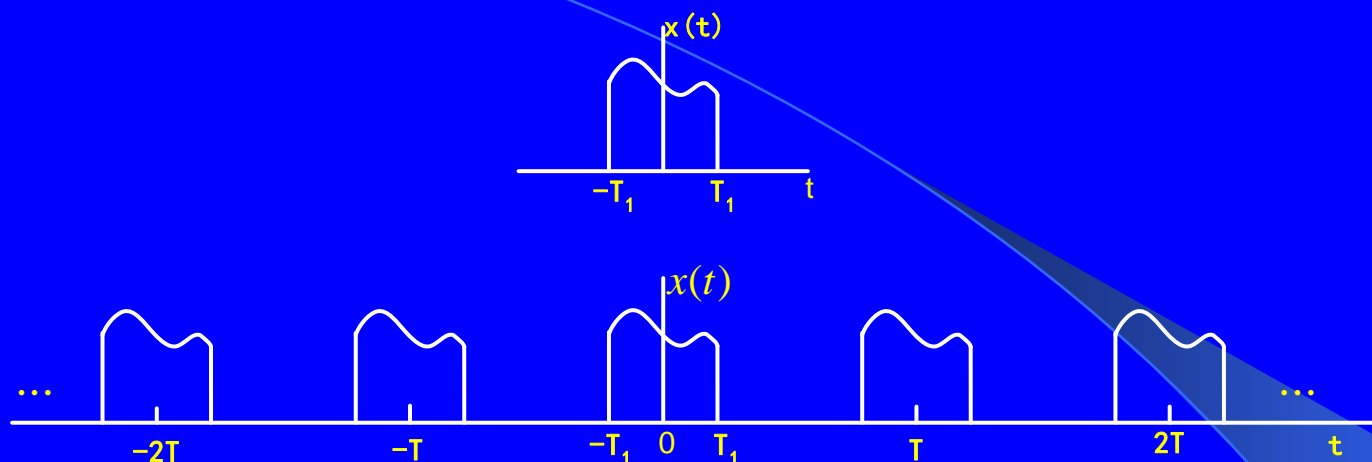


一般信号的傅立叶变换都是复数（除偶实对称信号外）。

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{-j\varphi(j\omega)}$$

$|X(j\omega)|$ : 频谱的幅值,  $\varphi(j\omega)$ : 频谱的相角.





$$a_k = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

由于  $x(t)$  在  $s \leq t \leq s+T$  以外为零, 所以又可写成

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

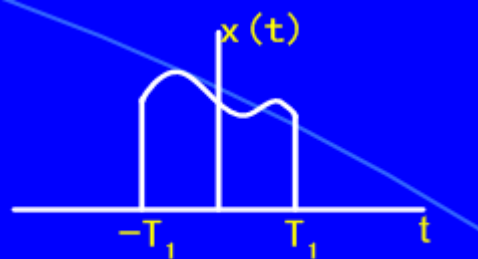
$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

$X(j\omega)$  就是  $x(t)$  的傅立叶变换。

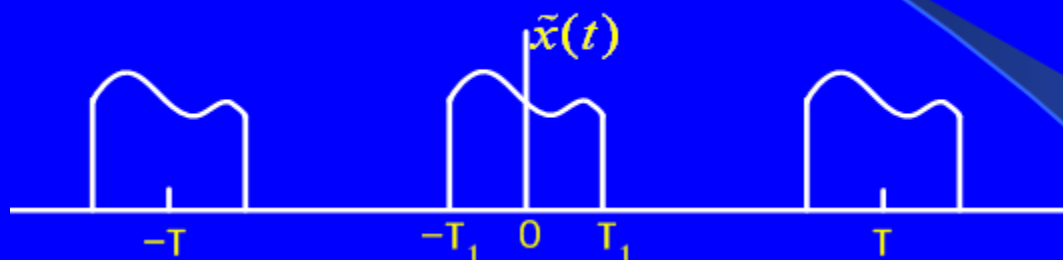
$a_k$  傅立叶系数







$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$



$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$



## § 3.3.2 傅立叶变换的收敛

现考虑按照式求出的 $X(j\omega)$ ，令 $\hat{x}(t)$ 表示利用 $X(j\omega)$ 按综合公式右边积分得到的信号：

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

若 $x(t)$  能量有限，则 $x(t)$ 平方可积  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

令 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = 0$$

$x(t)$ 和傅立叶反变换, 在均方差 $E=0$ 的意义上的等价表示.



## 狄里赫利条件

绝对可积、有限起伏、有限间断点

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

用广义函数的概念，允许奇异函数也能满足上述条件，因而象阶跃、冲激一类函数也存在傅立叶变换



## § 3.3.3 典型信号的傅立叶变换

例1

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

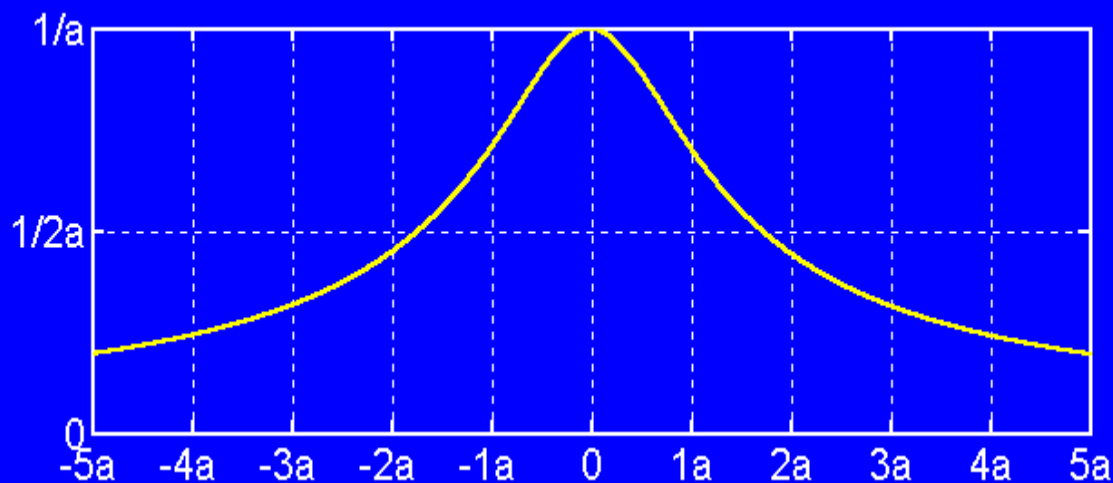
$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



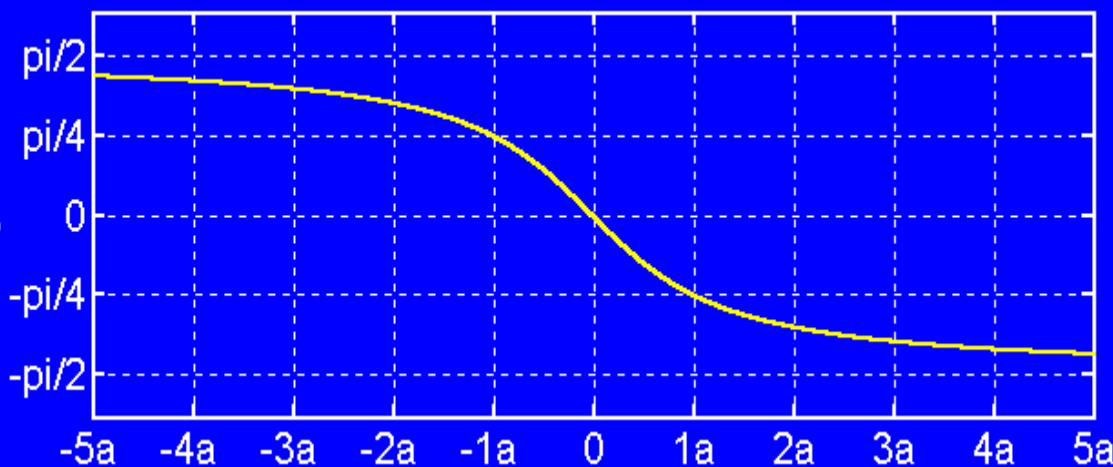
$$|X(j\omega)|$$

幅频



$$\varphi X(j\omega)$$

相频



例1 中信号  
的傅立叶变换

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$



## 例2

设 $x(t)$ 为  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$

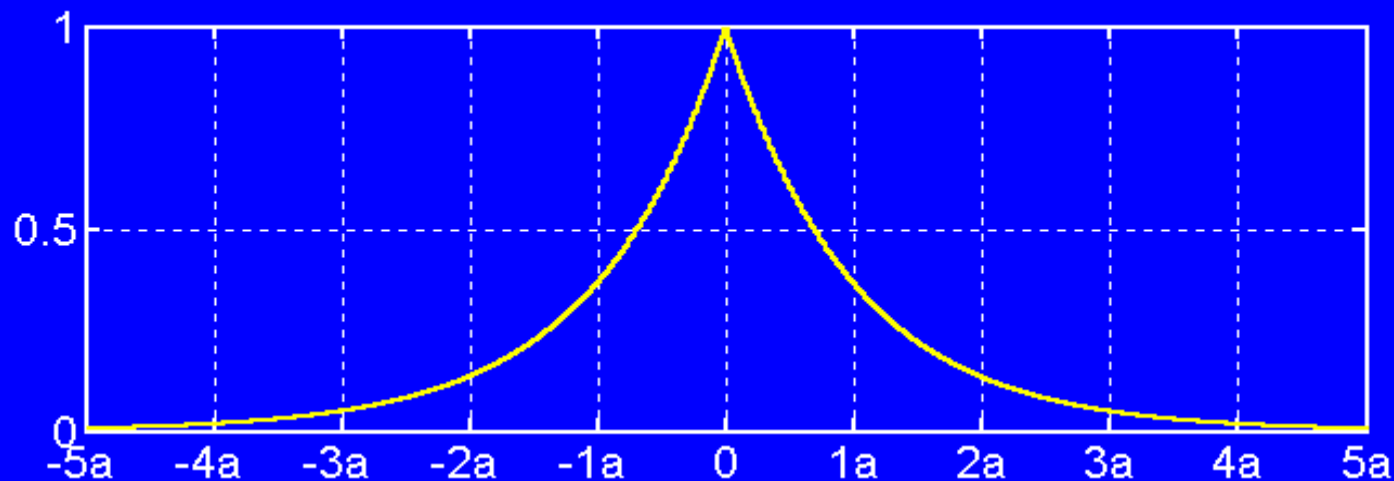
该信号的傅立叶变换是:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

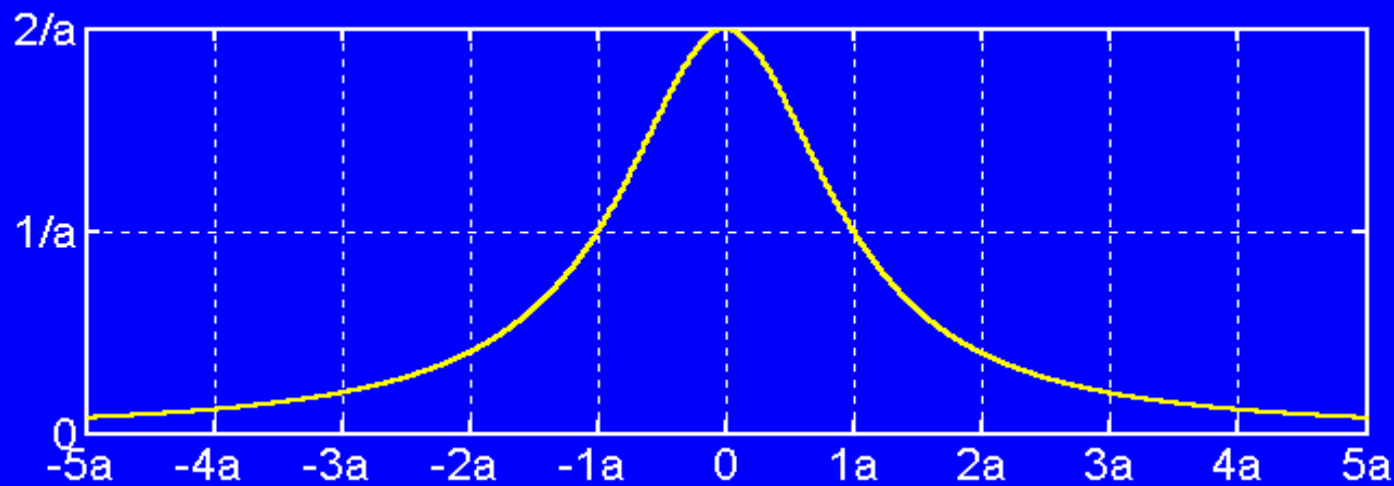
这时,  $X(j\omega)$  是实数,



$$x(t) = e^{-a|t|}$$



$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



## 例3

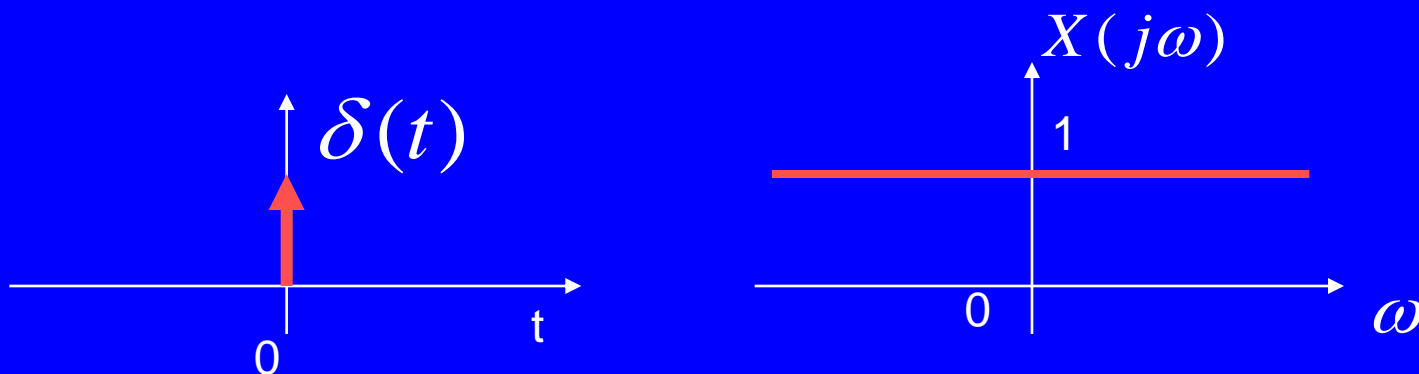
单位冲激函数的傅立叶变换

$$x(t) = \delta(t)$$

将上式代入公式

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

这就是说，单位冲激函数得频谱在所有频率上都是相同的





求单位冲激偶函数的傅立叶变换

$$\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{j\omega t} d\omega$$

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

$$\delta'(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\omega$$



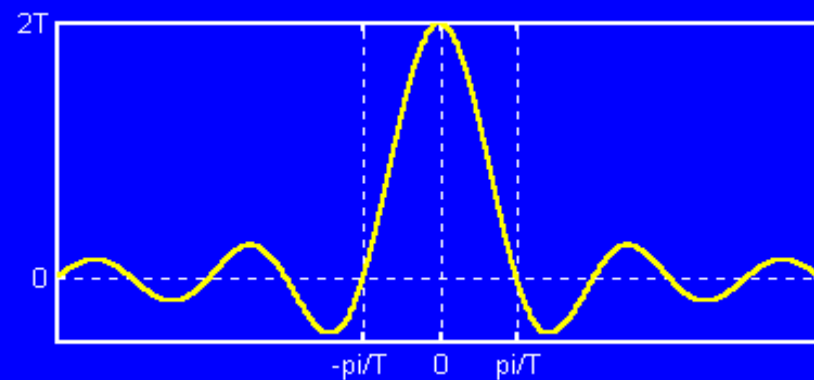
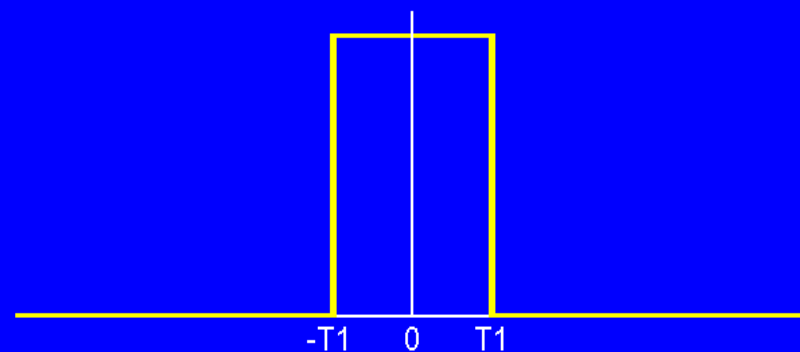
## 例4

考虑下面矩形脉冲信号

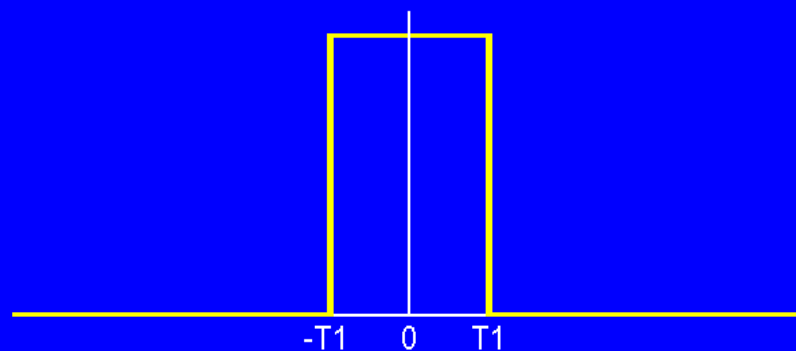
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

傅立叶变换为:

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{+T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



$T_1 \rightarrow \infty$       矩形脉冲变为常数1

$$X(j\omega) \Rightarrow \lim_{T_1 \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} = 2\pi \delta(\omega)$$

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$



现考虑矩形脉冲傅立叶变换的反变换

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

因为 $x(t)$ 是平方可积, 所以  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0$

再者, 因为 $x(t)$ 满足狄里赫利条件, 因此除了  $t = \pm T_1$  外

$\hat{x}(t) = x(t)$  而在  $t = \pm T_1$  时,  $\hat{x}(t)$  收敛于  $\frac{1}{2}$  (这就是  $x(t)$  在不连续点两边的平均值)。

另外,  $\hat{x}(t)$  收敛于  $x(t)$  时呈现的吉伯斯现象, 也很像图3.9中对周期方波所画的那样。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$



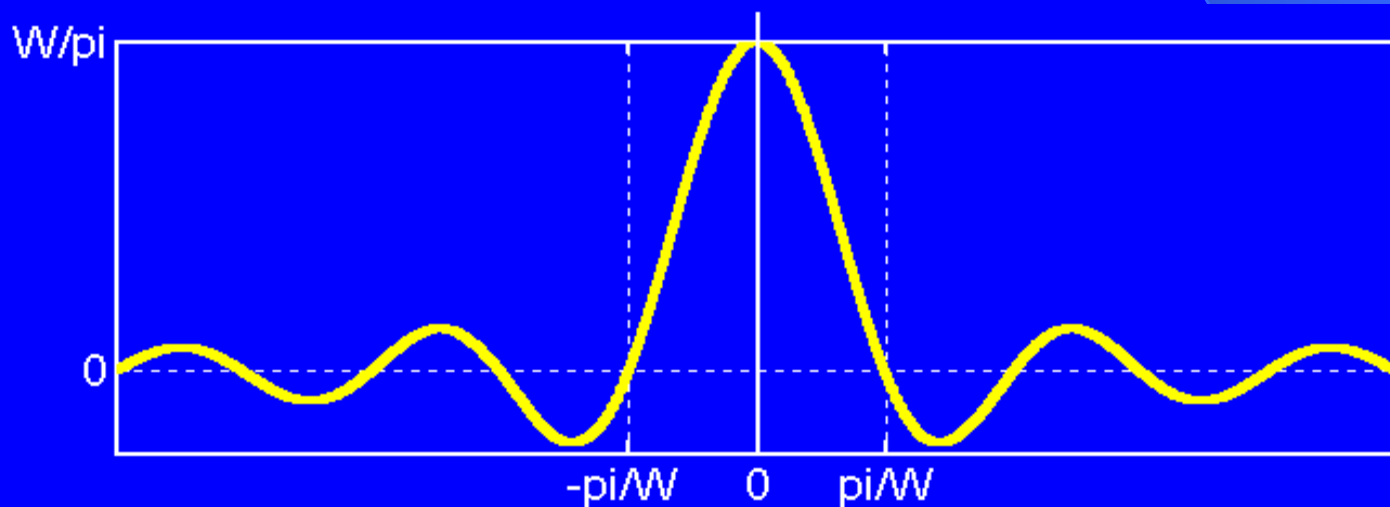
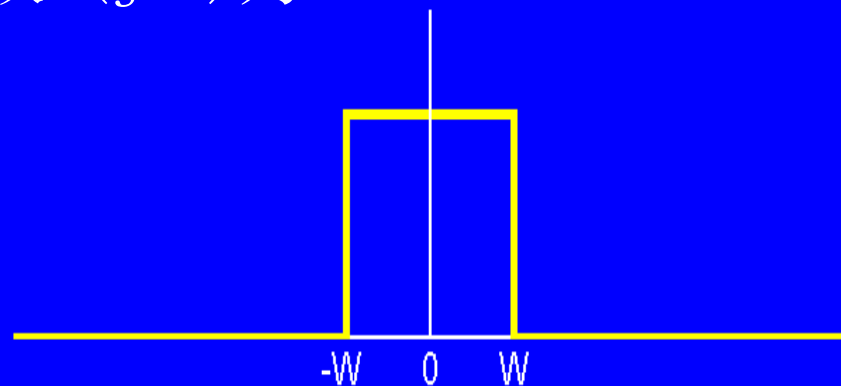
## 例5

考虑一信号 $x(t)$ , 其傅立叶变换 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

利用综合公式可求得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

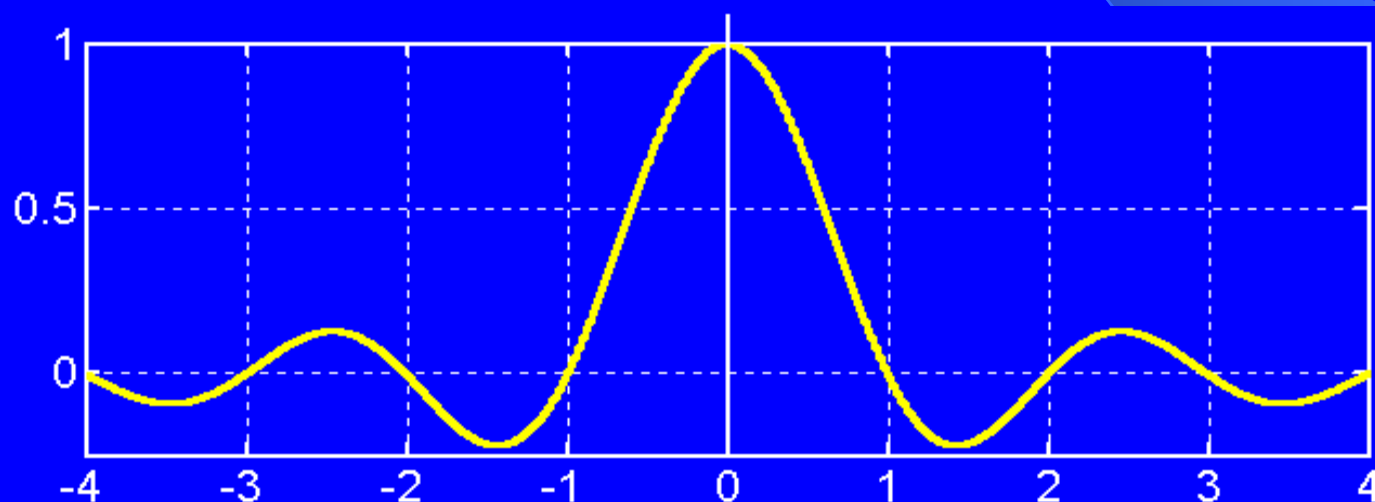


## sinc函数

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

$$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



## 例6

纯虚指数信号:  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

考虑频谱  $X_1(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi}$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\text{推论: } \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



## § 3.4 连续时间周期信号的傅立叶变换

周期信号不满足狄里赫利条件

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$





$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



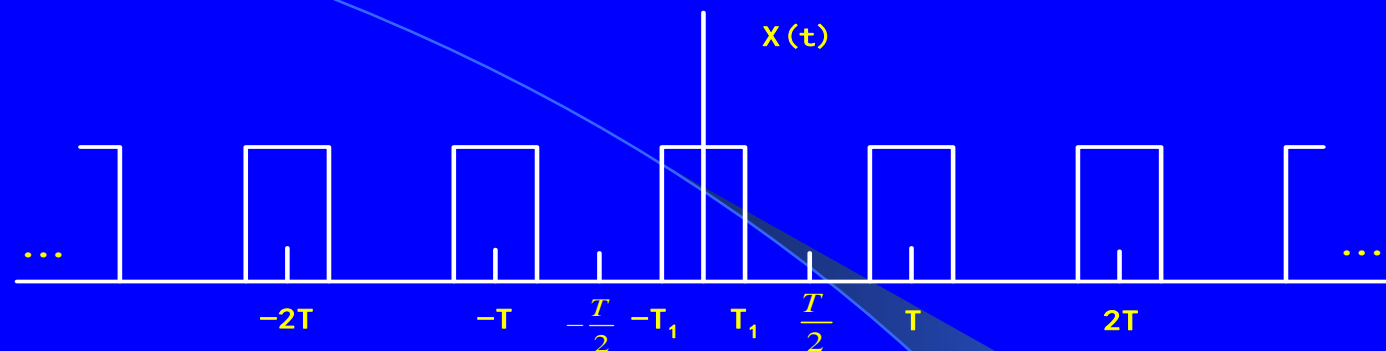
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

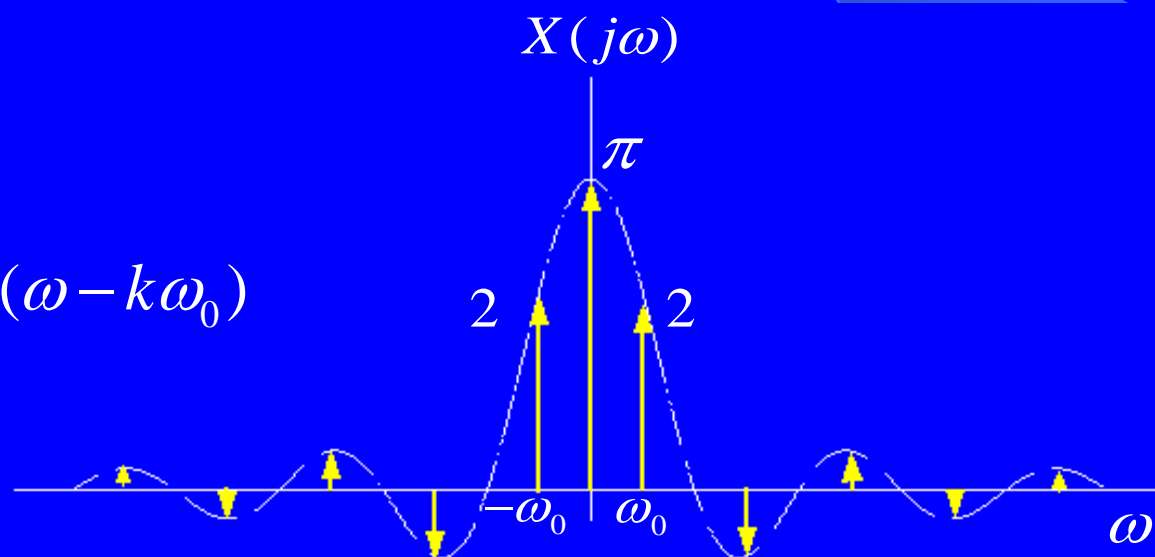


例



$$a_k = \frac{2 \sin(k \omega_0 T_1)}{k \omega_0 T}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(k \omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k \omega_0)$$



## 一般周期信号的傅立叶变换

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

由一些冲激组成离散频谱  
位于信号的谐频处  $(0, \pm\omega_0, 2\omega_0, \dots)$   
大小不是有限值，而是无穷小频带内有无穷大的频谱值

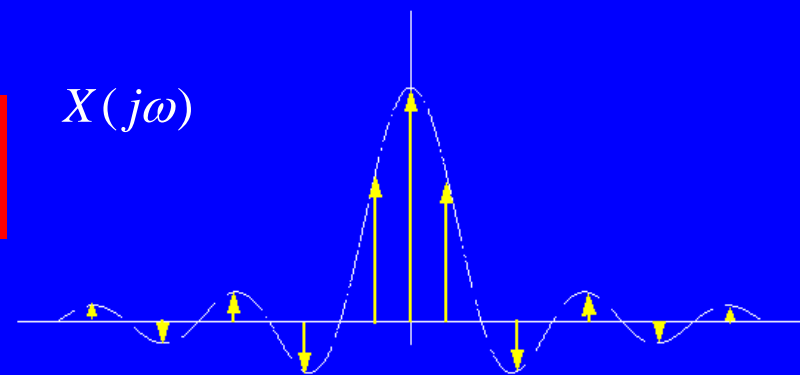
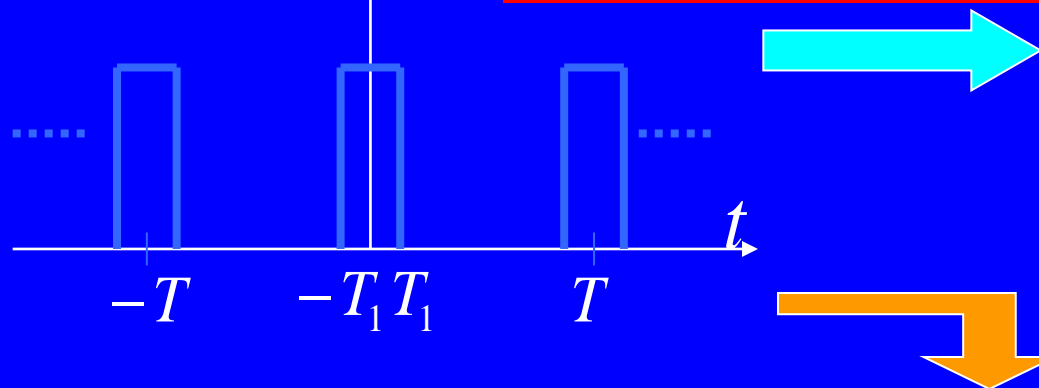


## 周期信号的傅立叶变换存在条件

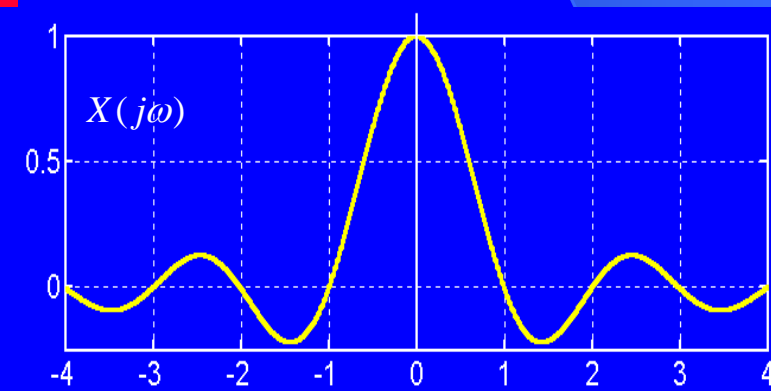
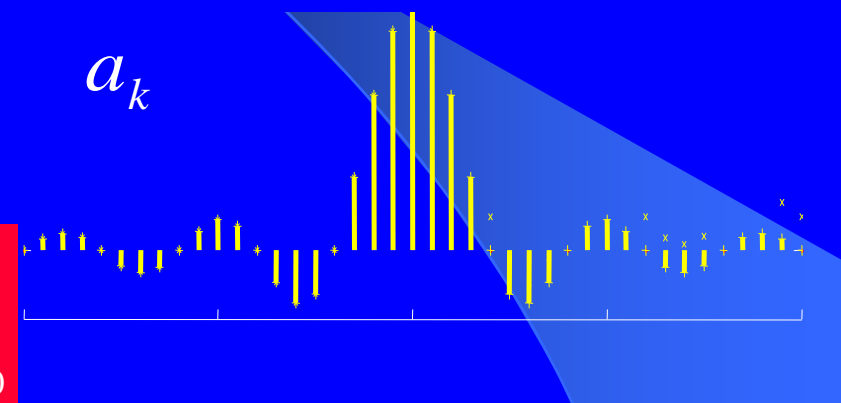
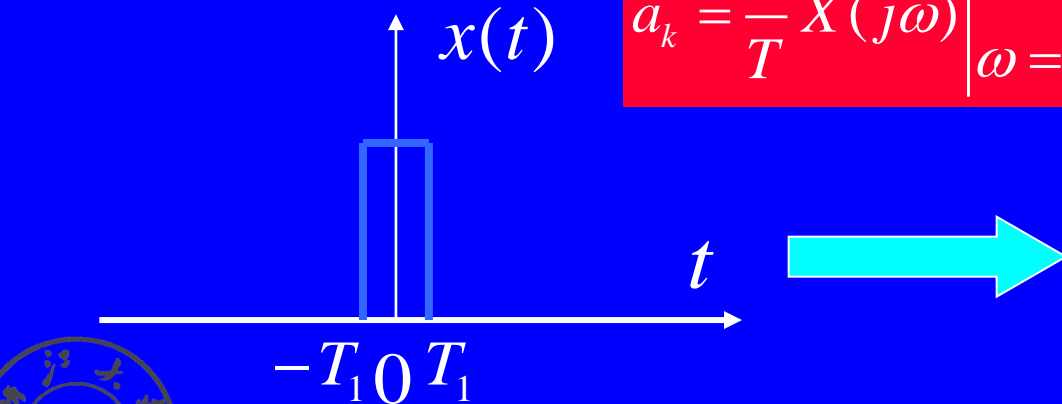
- 周期信号不满足绝对可积条件
- 引入冲激信号后，冲激的积分是有意义的
- 在以上意义下，周期信号的傅立叶变换是存在的
- 周期信号的频谱是离散的，其频谱密度，即傅立叶变换是一系列冲激



$$x(t) \quad X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$



$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$



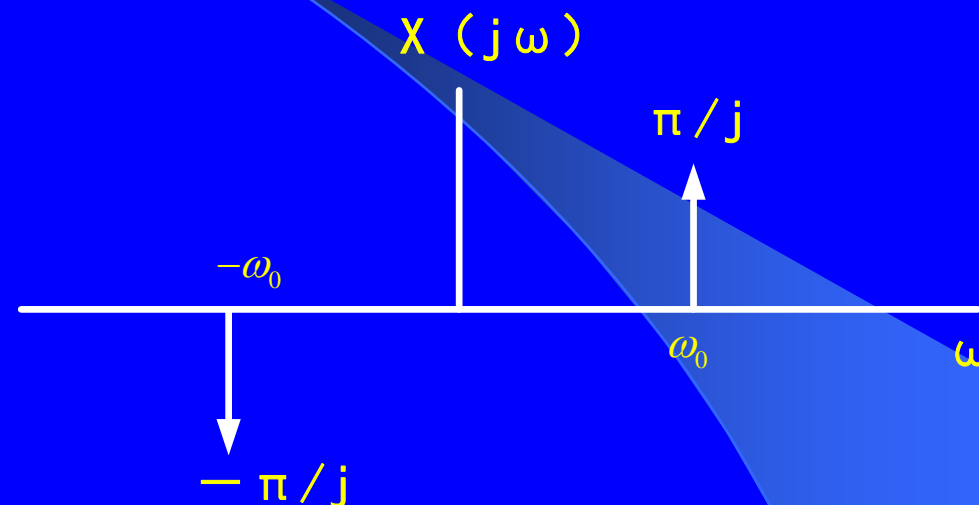
例

设 $x(t)$ 为:  $x(t) = \sin \omega_0 t$

傅立叶级数系数是:

$$a_1 = \frac{1}{2j} \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_k = 0, \quad |k| \neq 1$$



$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{j} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

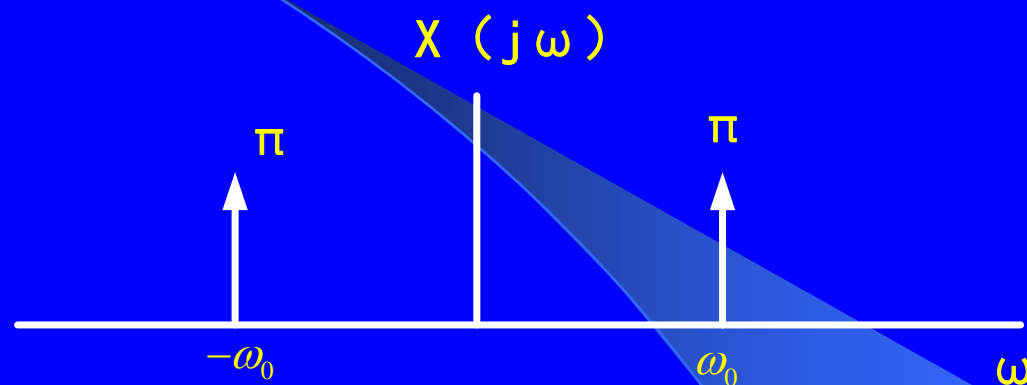


$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

傅立叶级数系数是：

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0, \quad |k| \neq 1$$

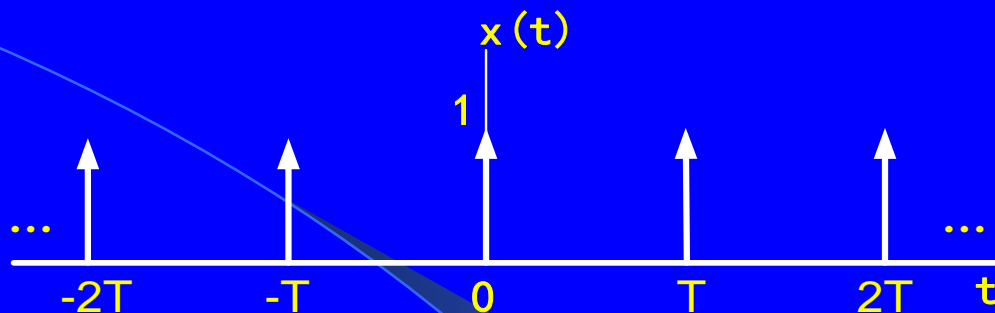


$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$



例

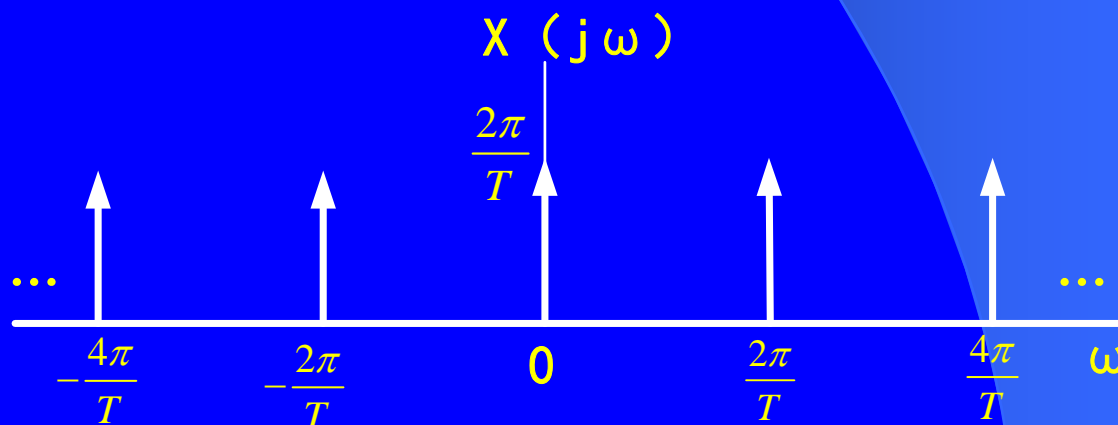
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

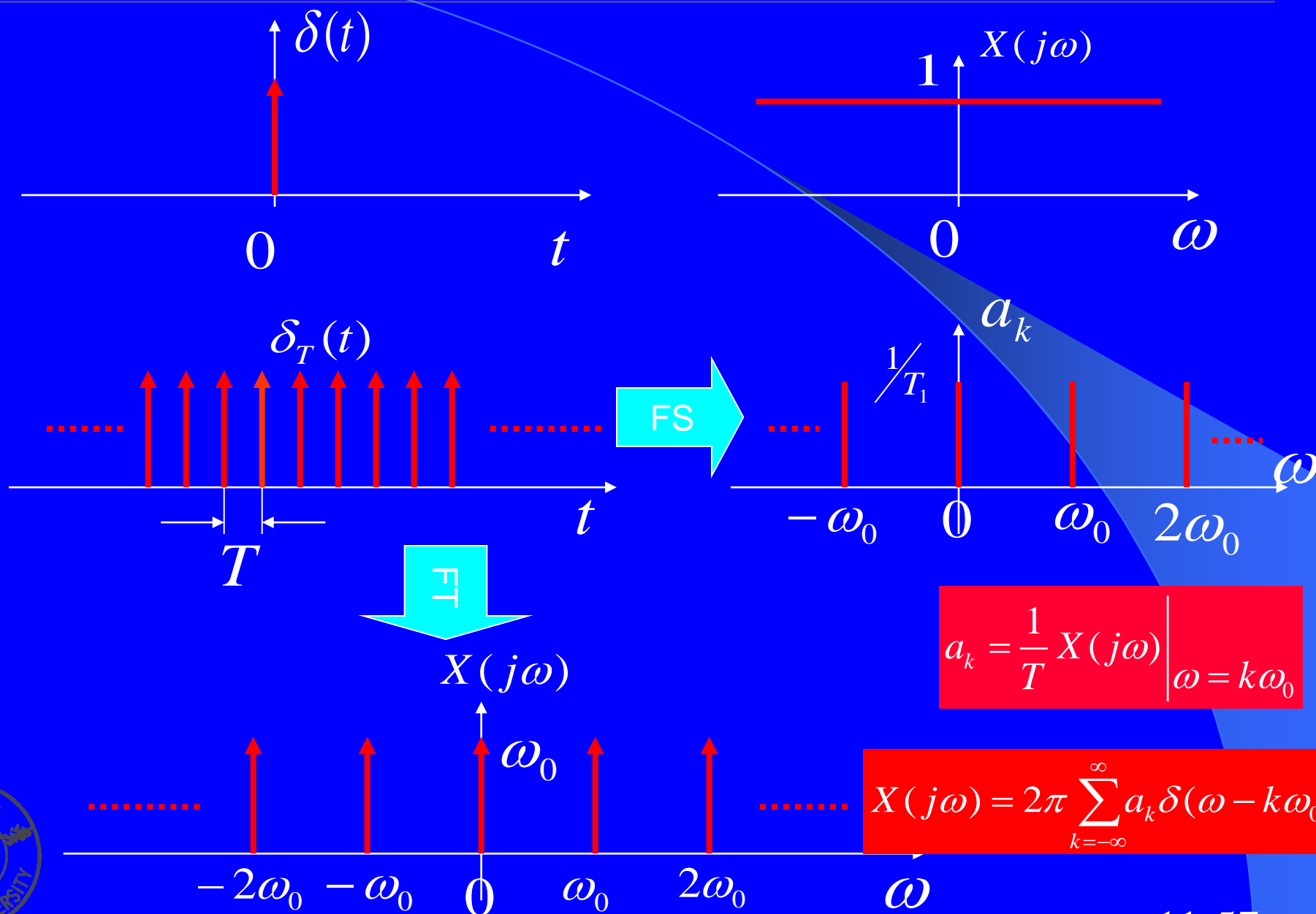
$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$



$$= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$







## 单脉冲和周期信号的傅立叶变换的比较

单脉冲的频谱  $X_0(j\omega)$  是连续谱，它的大小是有限值；

周期信号的谱  $X(j\omega)$  是离散谱，含谱密度概念，它的大小用冲激表示；

$X_0(j\omega)$  是  $X(j\omega)$  的包络的  $\frac{1}{\omega_0}$ 。



## § 3.5 连续时间傅立叶变换性质

我们已经讲过一个信号 $x(t)$ 和它的傅立叶变换 $X(j\omega)$ 是由下面傅立叶变换的综合和分析公式联系起来的：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

综合公式



傅立叶变换对

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

分析公式



有时为了方便, 将 $X(j\omega)$ 用 $F\{x(t)\}$ ,  $x(t)$ 用 $F^{-1}\{X(j\omega)\}$ 来表示;  
也将 $x(t)$ 和 $X(j\omega)$ 这一对傅立叶变换用下列符号表示:

$$\overset{F}{x(t) \leftrightarrow X(j\omega)}$$

例如:

$$\frac{1}{a + j\omega} = F\{e^{-at}u(t)\}$$

$$e^{-at}u(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\}$$

以及:

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}$$



## § 3.5.1 线性

若  $\overset{\text{F}}{x(t) \leftrightarrow X(j\omega)}$

和  $\overset{\text{F}}{y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)}$

则

$$\overset{\text{F}}{ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)}$$

将分析公式应用于  $ax(t) + by(t)$  就可以直接得出上式。线性性质很容易推广到任意个信号的线性组合中去。



## § 3.5.2 时移性质

若  $\overset{\text{F}}{x(t)} \leftrightarrow X(j\omega)$  则  $\overset{\text{F}}{x(t-t_0)} \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

为证明此性质，我们先看下式

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

令  $t-t_0$  取代  $t$ ，上式可得：

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-j\omega t_0} X(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

这就是对  $x(t-t_0)$  傅立叶变换

$$\text{F}\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

这个性质说明：信号在时间上移位，并不改变它的傅立叶变换的模；也就是说，若将  $X(j\omega)$  用极坐标表示

$$\text{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

$$\text{F}\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]}$$



例 考虑对下图的信号 $x(t)$ 求其傅立叶变换。

解：线性组合：

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 如图所示

因为矩形脉冲的傅立叶变换为

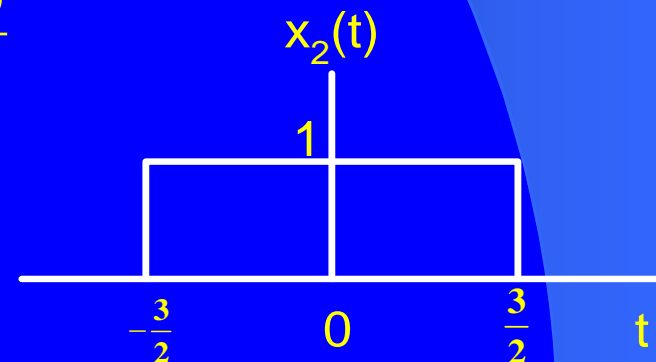
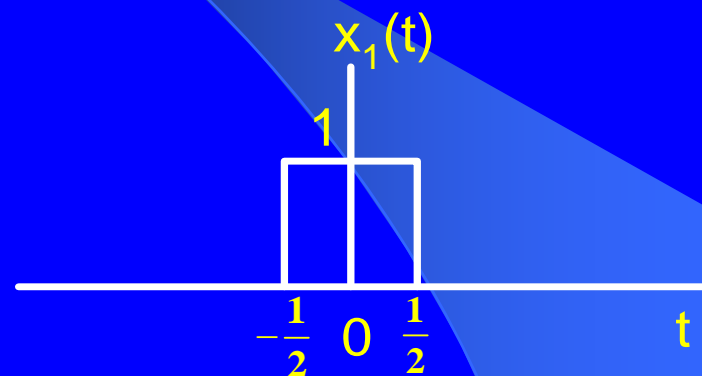
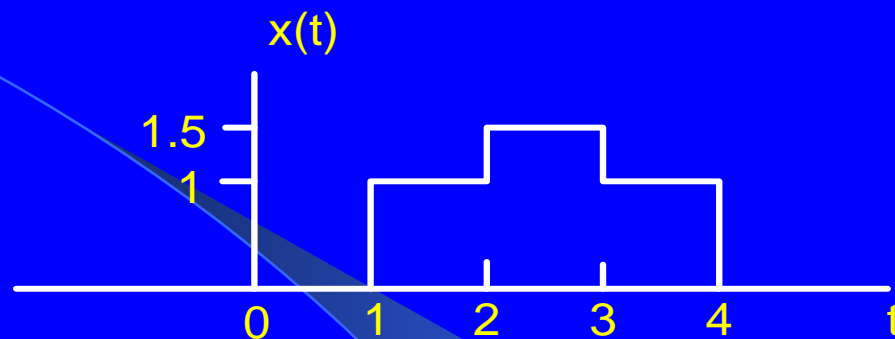
$$X(j\omega) = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

所以：

$$X_1(j\omega) = 2 \frac{\sin(\omega/2)}{\omega} \quad X_2(j\omega) = 2 \frac{\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

利用傅立叶变换的线性和时移性质可得：

$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega} \right\}$$



## § 3.5.3 频移性质

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega), \quad \text{则} x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j(\omega - \omega_0))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(j(\omega - \omega_0))$$

$$\text{推论: } x(t)\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))]$$

$$x(t)\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{2j} [X(j(\omega - \omega_0)) - X(j(\omega + \omega_0))]$$





## § 3.5.4 共轭及共轭对称性

共轭性质：若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$  则  $x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

将分析公式取共轭可得这一性质

$$X^*(j\omega) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

用 $-\omega$ 来代替 $\omega$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt$$

上式得右边就是对 $x^*(t)$ 的傅立叶变换的分析公式，因此可以得到

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

共轭性质就能证明，如果 $x(t)$ 是实函数，那么 $X(j\omega)$ 就具有共轭对称性，即：

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad [x(t) \text{ 为实}]$$



因为, 若 $x(t)$ 为实数, 就有 $x^*(t) = x(t)$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)$$

令 $-\omega$ 代替 $\omega$ , 则可得:  $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$  [x(t)为实]

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad X(-j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} = X^*(j\omega)$$

若将 $X(j\omega)$ 用直角坐标表示为:

$$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\text{Im}\{X(j\omega)\}$$



## 实函数

$$\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$$

$$\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$$

这就是说，傅立叶变换的实部是频率的偶函数，而虚部则是频率的奇函数。类似，若将 $X(j\omega)$ 用极坐标表示为

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$$

那么，根据傅立叶函数的共轭对称性可以得出： $|X(j\omega)|$ 是频率 $\omega$ 的偶函数， $\angle X(j\omega)$ 是频率 $\omega$ 的奇函数。

如果 $x(t)$ 为实、偶函数，那么 $X(j\omega)$ 也为实、偶函数。

如果 $x(t)$ 为实、奇函数，那么 $X(j\omega)$ 也为纯虚、奇函数。



我们曾经讲过任何一个实函数 $x(t)$ 总可以用一个偶函数 $x_e(t) = E_v\{x(t)\}$ 和一个奇函数 $x_o(t) = O_d\{x(t)\}$  即:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

根据傅立叶变换的线性, 有

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\}$$

根据上面的讨论  $F\{x_e(t)\}$ 是实函数,  $F\{x_o(t)\}$ 是纯虚函数, 于是可以得出, 若 $x(t)$ 为实函数, 则有

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$E_v\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} \text{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$O_d\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} j \text{Im}\{X(j\omega)\}$$

$X(t)$ 的偶部贡献  
频谱的实部



例 重新考虑一下中  $x(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$  号的傅立叶变换求解问题, 现用傅立叶变换的对称性质来解。

因为:  $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j\omega}$

$t > 0, x(t) = e^{-at}u(t)$

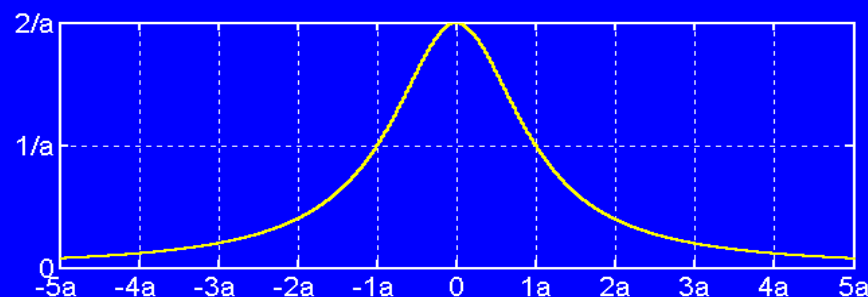
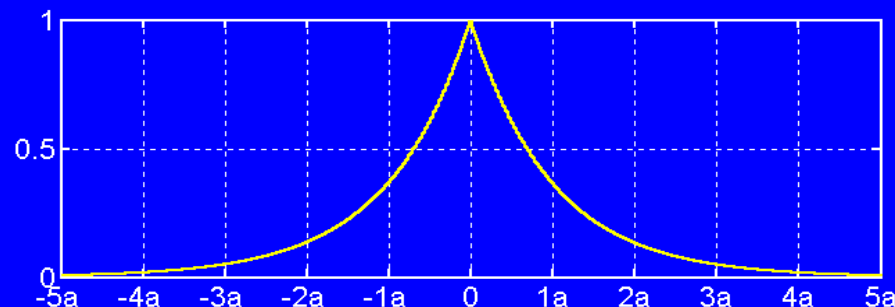
$t < 0, x(t)$  则取的是镜像值

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2 \left[ \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \right] = 2 \text{Ev} \{ e^{-at}u(t) \}$$

因为  $e^{-at}u(t)$  是实函数, 由傅立叶变换的对称性可得

$$\text{Ev} \{ e^{-at}u(t) \} \xleftrightarrow{F} \text{Re} \left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\}$$

$$X(j\omega) = 2 \text{Re} \left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



## § 3.5.5 积分与微分

令  $x(t)$  的傅立叶变换是  $X(j\omega)$ ，将傅立叶变换的综合公式两边对  $t$  进行微分，可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

因此有：

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

这是一个特别重要的性质，因为它将时域内的微分用频域内乘以  $j\omega$  所代替。

时域内的积分：

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

上式右边的 冲激函数反映了由积分所产生的直流或平均值。



例3-6 求单位阶跃函数 $x(t) = u(t)$ 的傅立叶变换。

已知： $g(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{F} G(j\omega) = 1$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

对上式两边各取傅立叶变换

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

因为 $G(j\omega) = 1$  所以  $G(0) = 1$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

应用微分性质可以复原单位冲激函数的傅立叶变换，即：

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1$$

上式最后的等式是由于： $\omega\delta(\omega) = 0$



例 现在想求图所示 $x(t)$ 的傅立叶变换 $X(j\omega)$ 。

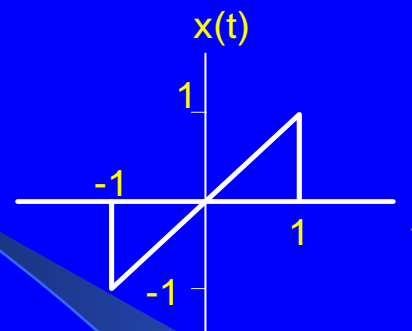
如图所示， $g(t)$ 是矩形脉冲和冲激函数的和。这些分量信号的傅立叶变换可以求出为

$$G(j\omega) = \left(\frac{2\sin \omega}{\omega}\right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega} = \frac{2\sin \omega}{\omega} - 2\cos \omega$$

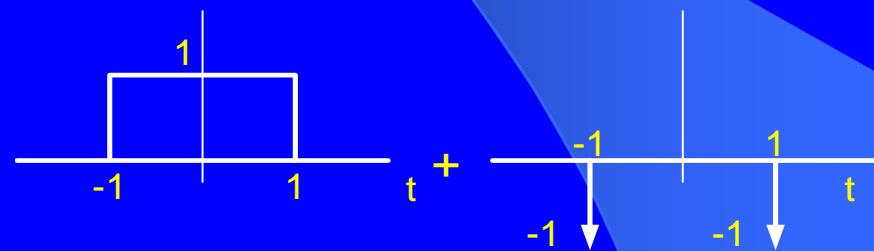
因为原函数的直流分量等于零，所以 $G(0)=0$ ，利用积分性质就有

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} = \frac{2\sin \omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos \omega}{j\omega}$$

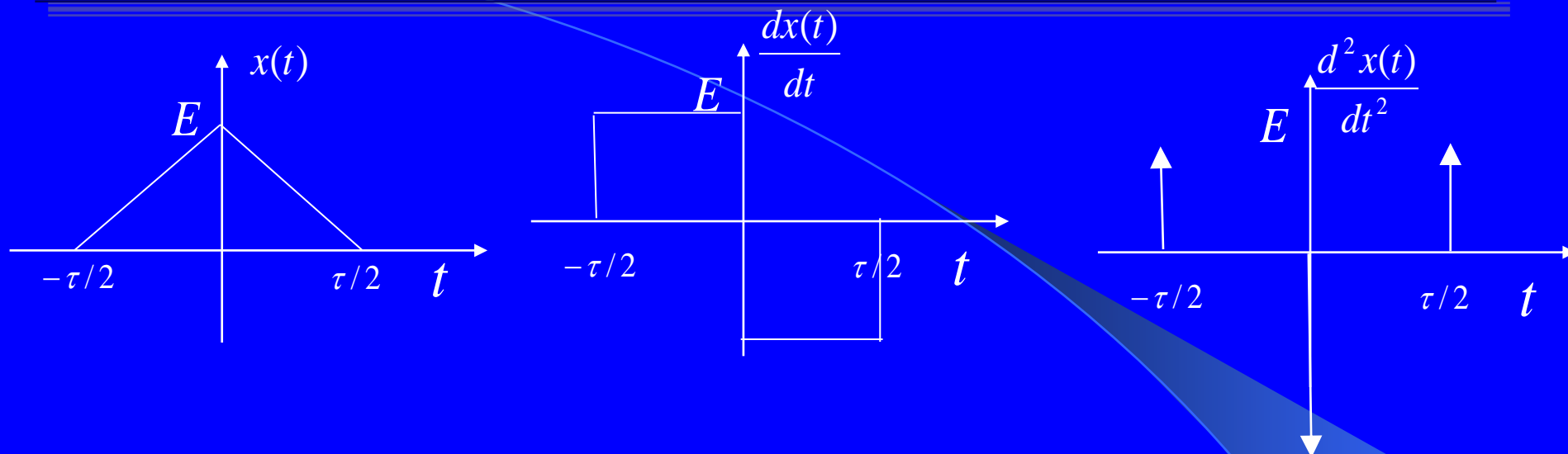
可见， $X(j\omega)$ 的表示是纯虚且为奇函数，这是与 $x(t)$ 是实且为奇函数这一点相一致的



$$g(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$







$$X_2(j\omega) = \frac{2E}{\tau} (e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2) = -\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$X_1(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{j\omega} + \pi X_2(0)\delta(\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{X_1(j\omega)}{j\omega} + \pi X_1(0)\delta(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4\pi}\right)$$



## § 3.5.6 时间和频率的尺度变换

若  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$  则  $x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$  式中  $a$  是一个实常数

这个性质可以直接由傅立叶变换的定义得到, 即

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt$$

利用置换  $\tau = at$ , 可得

$$F\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

因此, 除了一个  $1/|a|$  幅度因子外, 信号在时间上有一个线性尺度因子  $a$  的变换, 相应于它在频率上有一个因子  $1/a$  的变换, 反之亦然。令  $a=-1$ , 则有:

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

也就是说, 在时间上反转一个信号, 它的傅立叶变换也反转

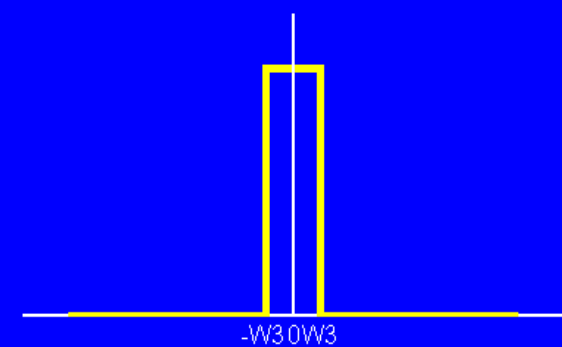
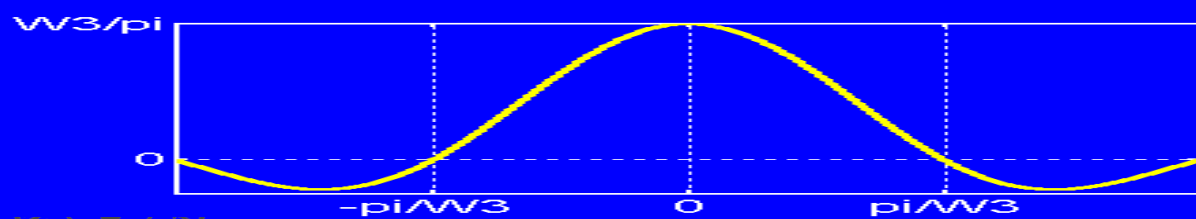
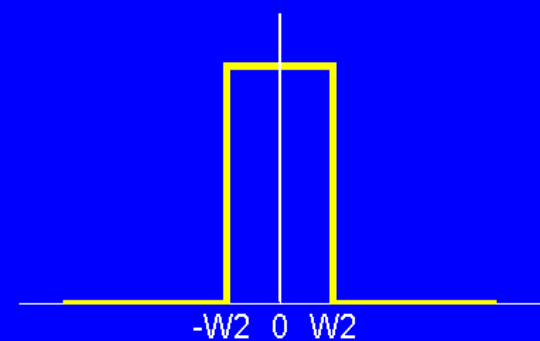
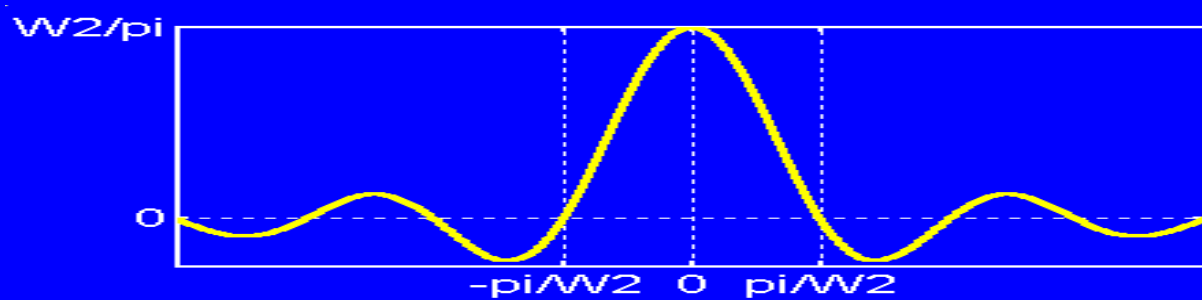
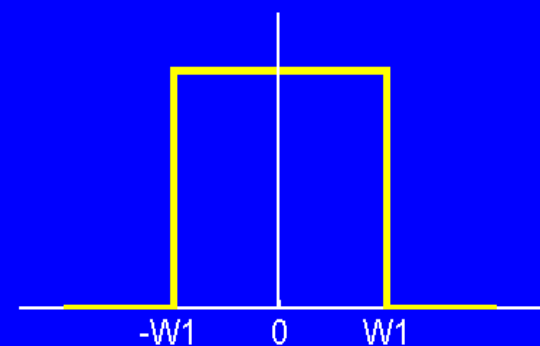
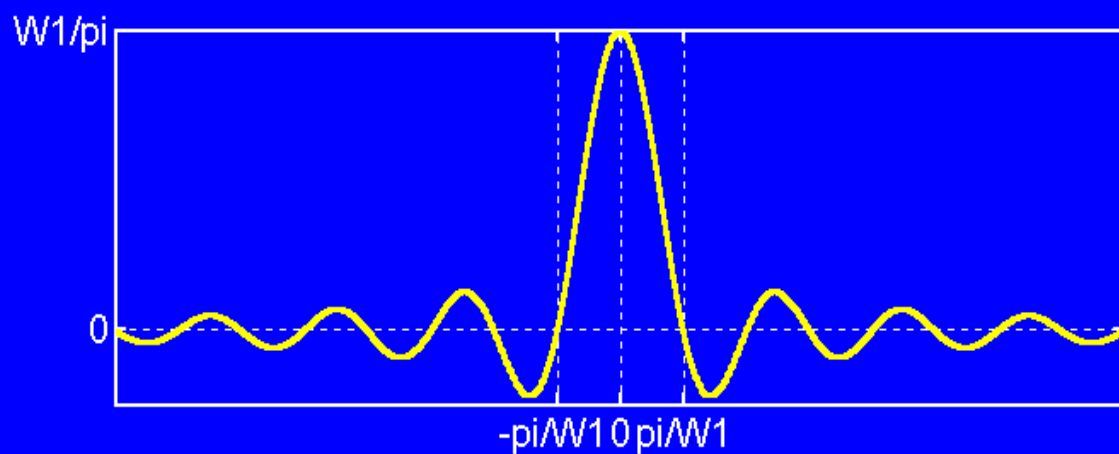


尺度变换性质又一次说明了时间和频率之间的相反关系。关于这一点，我们以前也讲过。譬如，增加正弦信号的周期，其频率就下降，再如再例4.5（见下图）中所看到的，若考虑如下变换：

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

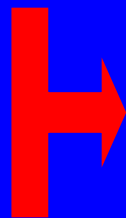
那么随着 $W$ 的增加， $X(j\omega)$ 的反变换就愈来愈窄，幅度也愈来愈高，最终当 $W \rightarrow \infty$ 时，其反变换就趋近于一个冲激函数。看到，一个周期冲激串的傅立叶变换也是一个冲激串。其在频域中的频率间隔是反比于时域中冲激串的时间间隔。





## § 3.5.7 对偶性

比较一下正变换和反变换的关系式,形式上是很相似的,但不完全一样,这就导致了傅立叶变换的对偶性。



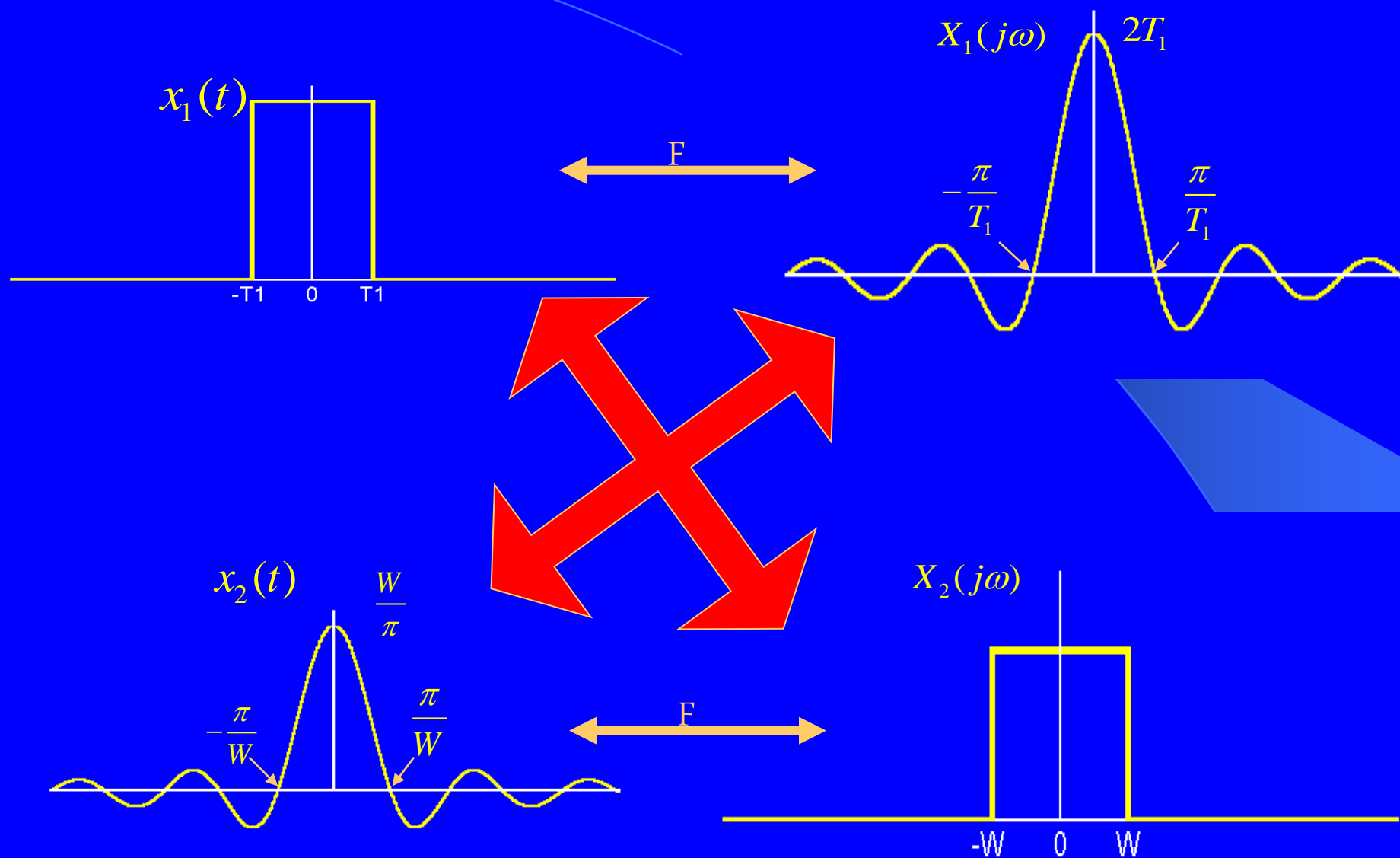
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{综合公式}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{分析公式}$$

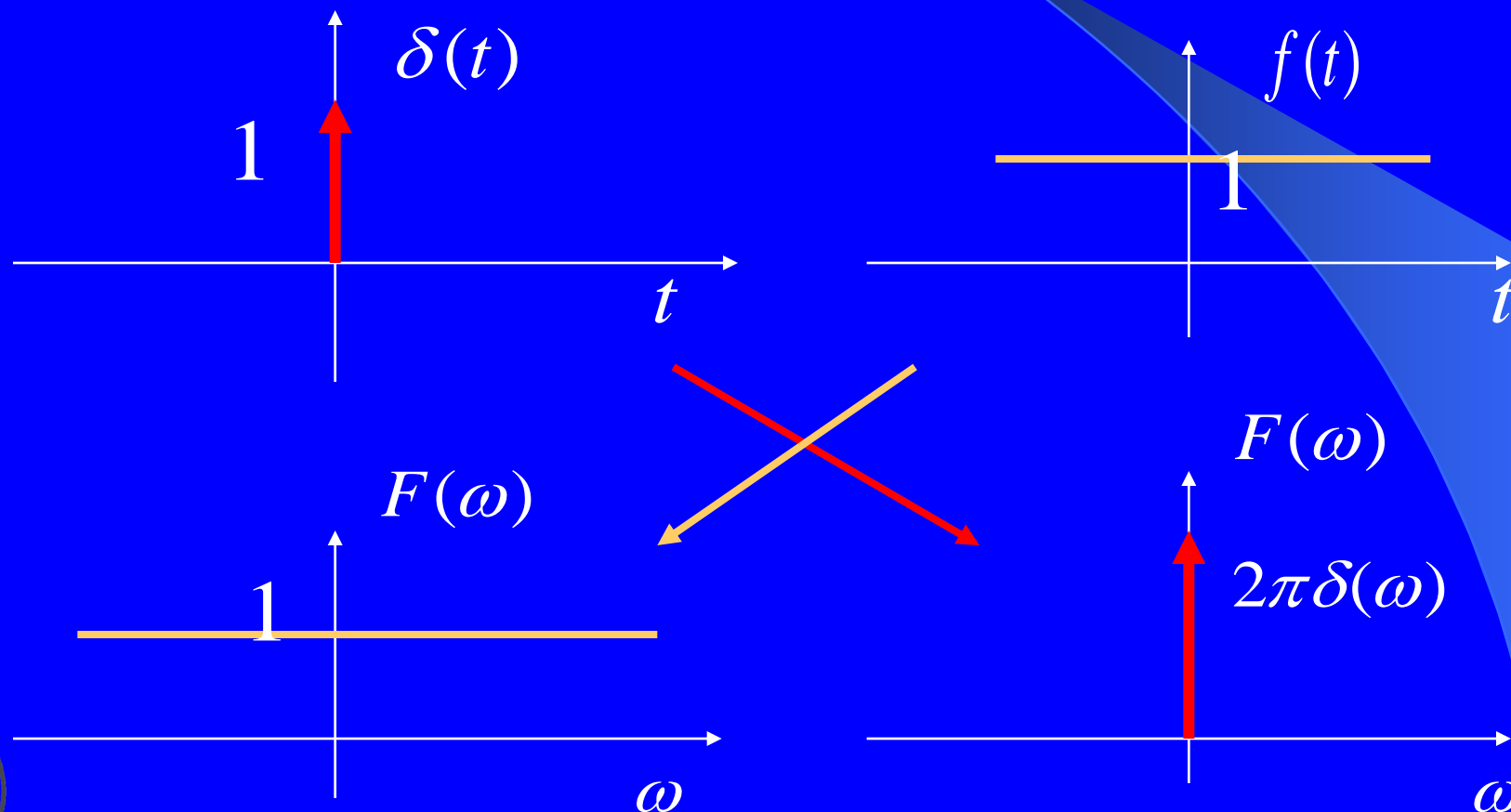
$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

$$x_2(t) = 2 \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$





直流和冲激函数的频谱的对称性是一例子



对偶关系：

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X(\omega)$$

$$X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

可以通过傅立叶正变换来求傅立叶反变换.

傅立叶变换的时、频域特性

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega - \omega_0))$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$





求傅立叶反变换:  $X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$-jte^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\omega} \frac{1}{a + j\omega} = \frac{-j}{(a + j\omega)^2}$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a + j\omega)^n}$$



## § 3.5.8 帕斯瓦尔定理

若 $x(t)$ 和 $X(j\omega)$ 是一对傅立叶变换，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

该式称为帕斯瓦尔定理



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$  是  $x(t)$  的总能量。帕斯瓦尔定理指出，这个能量既可以按每单位时间内的能量  $|x(t)|^2$  在整个时间内积分计算出来，也可以按每单位频率内的能量  $|X(j\omega)|^2 / 2\pi$  在整个频率范围内积分而得到。因此， $|X(j\omega)|^2$  常称为信号  $x(t)$  的能谱密度



## 周期信号

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

## 结论

周期信号的总平均功率等于全部谐波分量的平均功率之和

第k次谐波的平均功率  $|a_k|^2$



## § 3.5.9 卷积性质

一个周期信号用一个傅立叶级数表示, 那么一个LTI系统对这个输入的响应也能够用一个傅立叶级数表示。因为复指数信号是LTI系统的特征函数, 所以输出的傅立叶级数是输入的那些系数乘以对应谐波频率上的系统频率响应的值。

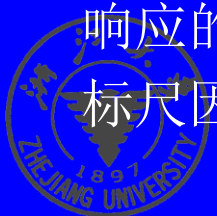
若用 $x(t)$ 表示傅立叶变换综合公式当作复指数信号的一种线性组合来理解, 则 $x(t)$ 是作为一个和的极限表示:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性系统对复指数信号  $e^{jk\omega_0 t}$  的响应是  $H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

上式可以看出频率响应 $H(j\omega)$ 是系统单位冲激响应的傅立叶变换。单位冲激响应的傅立叶变换(在 $\omega = k\omega_0$ 上求值)就是LTI系统对于特征函数  $e^{jk\omega_0 t}$  的复标尺因子



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} H(j\omega) d\tau = H(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= X(j\omega)H(j\omega) \end{aligned}$$

零状态响应

$$y(t) = x(\tau) * h(\tau) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$



### § 3.5.10 相乘性质(调制性质)

卷积性质说的是时域内的卷积对应于频域内的相乘。由于时域和频域之间的对偶性，时域内的相乘应该对应于频域内的卷积。

$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

(该式可以用傅立叶变换的对偶关系和卷积性质一起来证明)

一个信号被另一个信号去乘，可以理解为用一个信号去调制另一个信号的振幅，因此两个信号相乘往往称之为幅度调制。上式也称为调制性质。



作为傅立叶变换相乘性质的一个应用是用来求下面信号 $x(t)$ 的傅立叶变换

$$x(t) = \frac{\sin(t) \sin(t/2)}{\pi t^2}$$

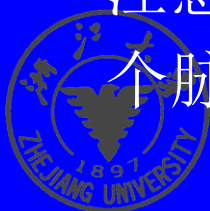
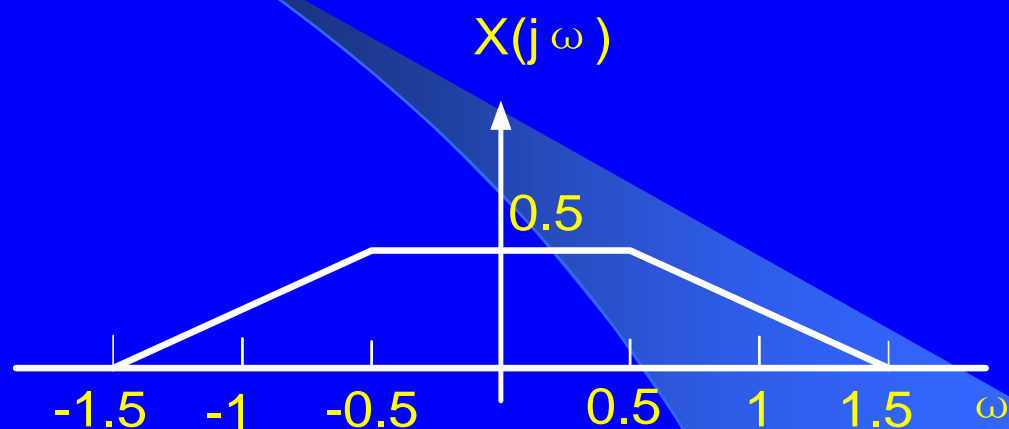
将 $x(t)$  当作sinc函数的乘积:

$$x(t) = \pi \left( \frac{\sin(t)}{\pi t} \right) \left( \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right)$$

应用傅立叶变换的相乘性质, 就得到

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} F \left\{ \frac{\sin(t)}{\pi t} \right\} * F \left\{ \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right\}$$

注意: 每一个sinc函数的傅立叶变换都是一个矩形脉冲, 把这两个脉冲卷积就得到 $X(j\omega)$





## § 3.5 连续时间LTI系统的频域分析

在LTI系统分析中, 频率响应  $H(j\omega)$  所起的作用与其反变换——单位冲激响应  $h(t)$  所起的作用是一样的。一方面,  $h(t)$  完全表征了一个LTI系统,  $H(j\omega)$  也一样。另外, LTI系统很多性质借助  $H(j\omega)$  来反映

时域

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

---

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) \quad F\{y(t)\} = Y(j\omega) \quad F\{h(t)\} = H(j\omega)$$

$$y(t) = x(\tau) * h(\tau) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$



频域  $X(j\omega) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

系统的频率响应

$$H(j\omega) = F\{h(t)\}$$

傅立叶变换的收敛是在几个条件之下得以保证的，这样就不是对所有的LTI系统都能定义出频率响应的。然而，当一个LTI系统是稳定的，那么它单位冲激响应就一定绝对可积。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

上式是三个狄里赫利条件之一，而三个条件合在一起才能保证 $h(t)$ 的傅立叶变换 $H(j\omega)$ 存在。因此假设 $h(t)$ 也满足另两个条件，那么一个稳定的LTI系统就有一个频率响应 $H(j\omega)$



本节我们要将的是如何确定一个LTI系统的频率响应问题。这里的全部讨论都假定系统是稳定的。所以它的频率响应存在。

1、频率响应的定义：
$$h(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

2、
$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad Y_{zs}(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = Y_{zs}(j\omega) / X(j\omega)$$

其中 $X(j\omega)$ ， $Y(j\omega)$  和 $H(j\omega)$ 分别是输入 $x(t)$ ，输出 $y(t)$  和系统单位冲激响应 $h(t)$  的傅立叶变换。

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}$$

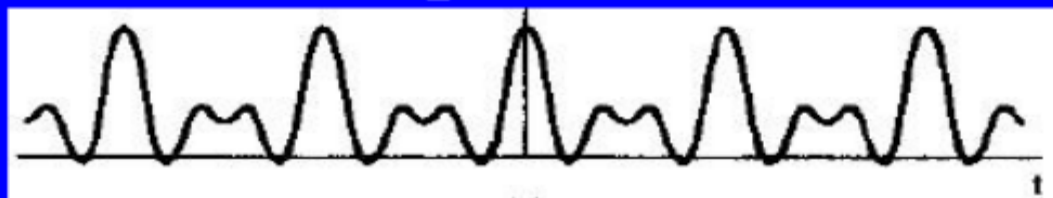
幅频特性反映：系统对输入信号的放大特性

相频特性反映：系统对输入信号的延时特性

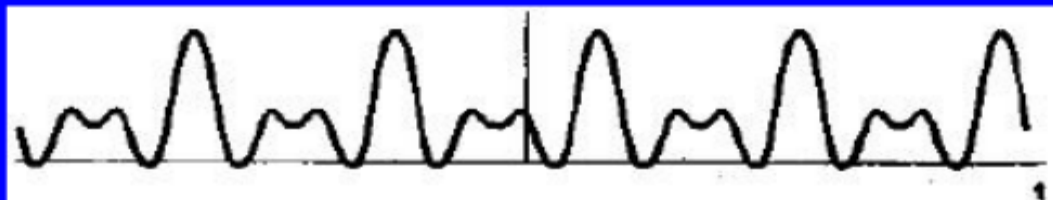


## 例：相位的作用

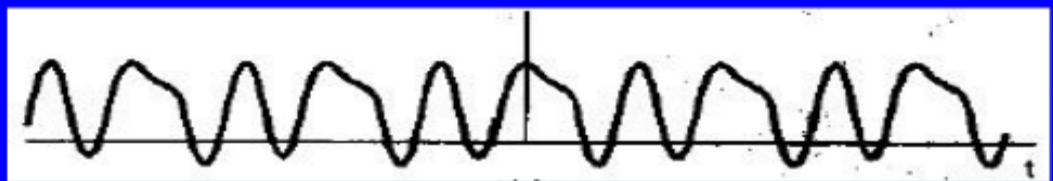
$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3)$$



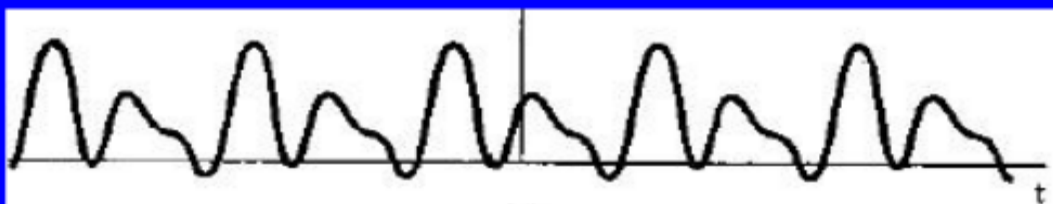
$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$$



$$\phi_1 = 1.2\pi, \quad \phi_2 = 2.4\pi, \\ \phi_3 = 3.6\pi$$



$$\phi_1 = 6\pi, \quad \phi_2 = 2.7\pi, \\ \phi_3 = 0.9\pi$$



$$\phi_1 = 1.2\pi, \quad \phi_2 = 4.1\pi, \\ \phi_3 = -7.0\pi$$

## $H(j\omega)$ 的求解方法？

1.  $h(t)$  的傅立叶变换;
2. 输出输入信号（宽频）的频谱之比;
3. 系统微分方程两边求傅立叶变换;
4. 利用输入为  $x(t)=e^{j\omega t}$  时，系统响应中的  $H(j\omega)$ ：

$$y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$



例 考察一个微分器，即一个LTI系统，其输入是  $x(t)$ ，输出  $y(t)$  由下列关系给出：

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

解： 根据傅立叶变换的微分性质有

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

又根据傅立叶变换的卷积性质有

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

所以一个微分器的频率响应就是：

$$H(j\omega) = j\omega$$

$$h(t) = \delta'(t)$$



## § 3.5.2 连续时间LTI系统的零状态响应

例 考虑一个LTI系统对输入 $x(t)$ 的响应系统单位冲激响应为 $h(t)$ ，它们是：

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad ; \quad x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

不采用直接计算 $y(t) = x(t) * h(t)$ ，而是将问题先变换到频域。

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega} \quad \Rightarrow \quad Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}$$

假设 $a \neq b$  将 $Y(j\omega)$ 的部分分式展开

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega}$$

解出:  $A = \frac{1}{b - a} = -B$

$$\therefore Y(j\omega) = \frac{1}{b - a} \left[ \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right]$$

$$\therefore Y(t) = \frac{1}{b - a} [e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)]$$

利用线性性质



当 $b=a$  时, 上式不成立, 变为:  $Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[ \frac{1}{a+j\omega} \right]$   
 又根据微分的对偶性有

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega} \quad \Rightarrow \quad tc^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{d}{d\omega} \left[ \frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

结果有  $y(t) = tc^{-at}u(t)$

部分分式分解:  $f(x) = \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$  (1阶极点)

$$A \text{ 的确定: } A = f(x)(x+a) \Big|_{x=-a} = \frac{1}{b-a}$$

$$B \text{ 的确定: } A = f(x)(x+b) \Big|_{x=-b} = \frac{1}{a-b}$$





若有2阶以上极点，则展开式为

$$f(x) = \frac{1}{(x+a)^2(x+b)} = \frac{A_{12}}{(x+a)^2} + \frac{A_{11}}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

$$A_{12} \text{的确定: } A_{12} = f(x)(x+a)^2 \Big|_{x=-a}$$

$$A_{11} \text{的确定: } A_{11} = \frac{d}{dx} (f(x)(x+a)^2) \Big|_{x=-a}$$

$$B \text{的确定: } B = f(x)(x+b) \Big|_{x=-b}$$



例：  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ,  $y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$ , 求  $h(t)$  与  $H(j\omega)$ 。

解：  $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 3} \right) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 3}$$

$$A = \left. \frac{j\omega + 2}{j\omega + 3} \right|_{j\omega = -1} = \frac{1}{2} \quad B = \left. \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} \right|_{j\omega = -3} = \frac{1}{2}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{j\omega + 3} \right)$$

$$h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$



### § 3.5.3 由线性常系数微分方程表征的系统

本节我们要将的是如何确定一个LTI系统的频率响应问题。这里的全部讨论都假定系统是稳定的。所以它的频率响应存在。

以前我们介绍的一类连续时间LTI系统是输入输出满足如下的线性常系数微分方程的系统：

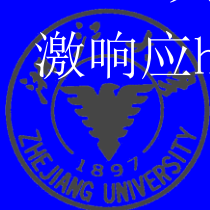
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

由上式表征的LTI系统，根据卷积性质

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$\text{或 } H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

其中 $X(j\omega)$ ， $Y(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 分别是输入 $x(t)$ ，输出 $y(t)$ 和系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅立叶变换。现对上面常系数微分方程两边进行取傅立叶变换：



$$\begin{aligned} F\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} &= F\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^M b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) &= \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega) \Leftrightarrow Y(j\omega) \left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k\right] = X(j\omega) \left[\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k\right] \\ \therefore H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \end{aligned}$$

可以看出 $H(j\omega)$ 是一个有理函数，也就是两个 $(j\omega)$ 的多项式之比。其分母，分子的系数与LTI系统线性常系数微分方程的系数相对应。



例 有一稳定的LTI系统，由如下微分方程表征：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

频率响应是：  $H(j\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$

其反变换是：

$$= \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t} u(t)$$

线性常系数微分方程描述的LTI, 为多项式之比.  
输入也是多项式之比, 则可以用部分分式展开法



例 系统的输入是  $x(t) = e^{-t}u(t)$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[ \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[ \frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}$$

其部分分式展开应为:

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3}$$

求出这些常数为:

$$A_{12} = Y(j\omega)(1 + j\omega)^2 \Big|_{j\omega = -1} = \frac{1}{2}$$

$$A_{11} = \frac{d}{d\omega} (Y(j\omega)(1 + j\omega)^2) \Big|_{j\omega = -1} = \frac{1}{4}$$

$$A_{21} = Y(j\omega)(3 + j\omega) \Big|_{j\omega = -3} = -\frac{1}{4}$$



$$A_{11} = \frac{1}{4}, \quad A_{12} = \frac{1}{2}, \quad A_{21} = -\frac{1}{4}$$

所以：

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{j\omega + 3}$$

其反变换是：

$$h(t) = \left[ \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-3t} \right] u(t)$$



### § 3.5.4 周期信号激励下的系统响应

系统对周期信号的响应，就是系统对周期复指数信号的响应

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$





推论：

$$A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \xleftrightarrow{F} A |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \varphi(\omega_0))$$

$$A \sin(\omega_0 t + \theta_0) \xleftrightarrow{F} A |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \theta_0 + \varphi(\omega_0))$$



若系统的单位冲激响应为 $h(t)$ , 频率响应为 $H(j\omega)$ , 输入为周期信号 $x(t) = x(t+T)$ , 求输出 $y(t)$ 。

1、  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ , 其中  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

2、 当输入为 $e^{s_0 t}$ 时, 输出为 $H(s_0)e^{s_0 t}$  (特征函数)

当输入为 $e^{jk\omega_0 t}$ 时, 输出为 $H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$

其中,  $H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = H(j\omega)|_{\omega=k\omega_0}$

3、  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$



例:  $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ ,  $x(t) = \cos(t)$ , 求  $h(t)$ 、 $H(j\omega)$  与  $y(t)$ 。

解:  $j\omega Y(j\omega) + Y(j\omega) = X(j\omega)$

$$H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \quad h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$x(t) = \cos(t) = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

$$e^{jt} \rightarrow H(j1)e^{jt} = \frac{1}{1+j}e^{jt} \quad e^{-jt} \rightarrow H(-j1)e^{-jt} = \frac{1}{1-j}e^{-jt}$$

$$x(t) \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{e^{jt}}{1+j} + \frac{e^{-jt}}{1-j} \right) = \frac{1}{2} \frac{(1-j)e^{jt} + (1+j)e^{-jt}}{(1+j)(1-j)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$



## § 3.5.6 信号的不失真传输

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

LTI 系统对输入的作用是改变信号中每一频率分量的复振幅

增益

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)|$$

$$\varphi(Y(j\omega)) = \varphi(H(j\omega)) + \varphi(X(j\omega))$$

相移

幅度和相位失真：输出的变化是不希望发生的。



## LTI传输系统引起的信号失真

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

系统幅频特性引起的幅度失真：系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的放大和衰减，使响应的各频率分量的相对幅度产生变化

系统相频特性引起的相位失真：系统对各频率分量产生的相移不与频率成正比，使得响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化



## 不失真传输系统

输出信号与输入信号相比，只是大小和相对时间轴的位置不同，而无波形上的变化。

1、不失真传输系统的定义： $y(t) = Kx(t - t_0)$

2、单位冲激响应： $h(t) = K\delta(t - t_0)$

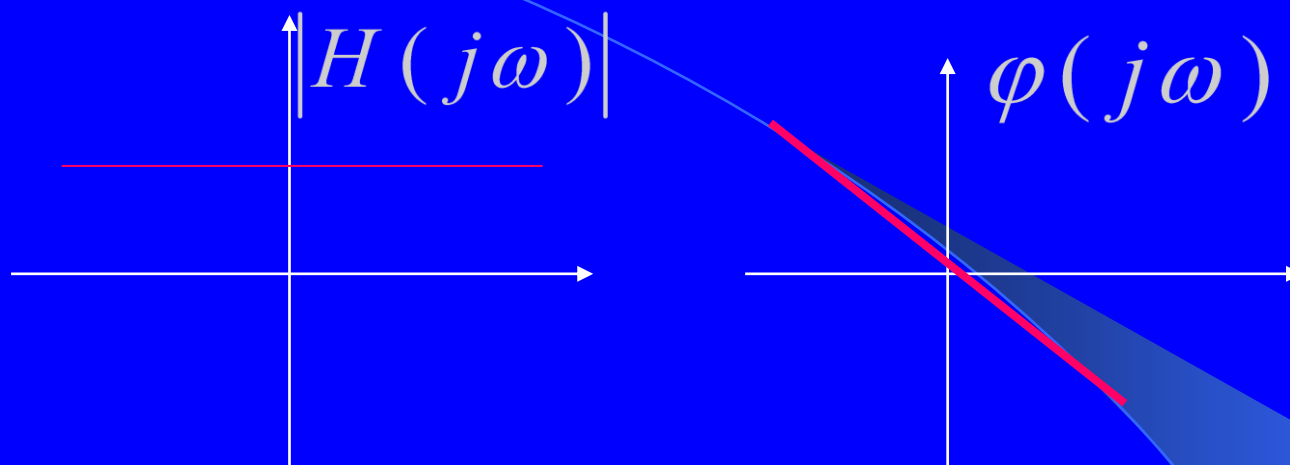
3、频率响应： $H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$

(1)幅度响应： $|H(j\omega)| = K \quad (K > 0)$

(2)相位响应： $\phi(\omega) = -\omega t_0$ （线性相位）

(3)群延迟： $\tau(\omega) = -d\phi(\omega)/d\omega = t_0$





群时延

$$\tau(\omega) = -d\phi(\omega)/d\omega$$

群时延: 信号通过系统时, 各频率分量的公共延  
时特性



## § 3.5.7 信号的滤波与理想滤波器

在各种不同的应用中，改变一个信号中各频率分量的相对大小，或者全部消除某些频率分量。这一过程称为：滤波

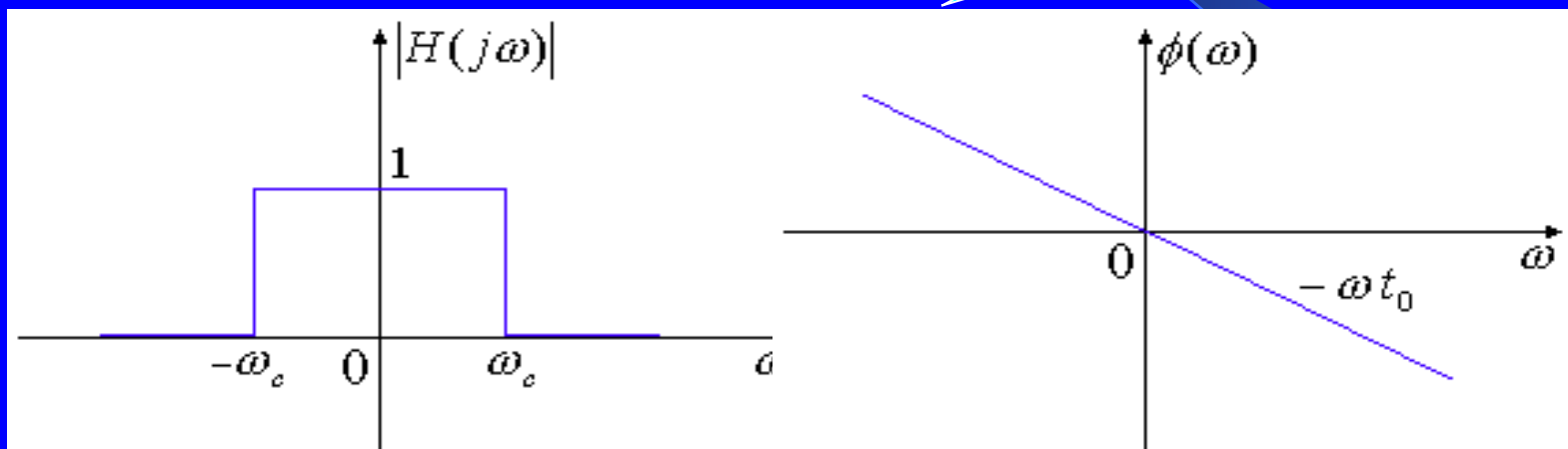




## 1、理想低通滤波器

(1)理想低通滤波器的频响:

具有线性相位特性的  
理想低通滤波器



阻带    通带    阻带

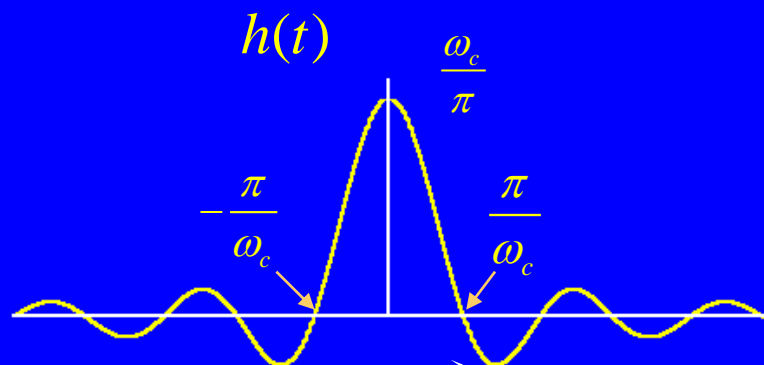
$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$



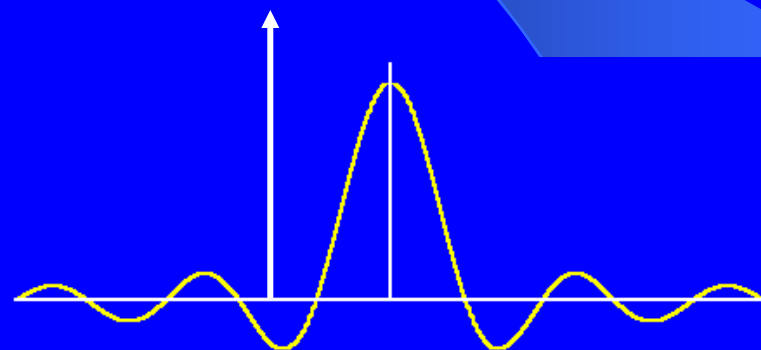
(2)理想低通滤波器的 $h(t)$ :

取 $H_1(j\omega) = |H(j\omega)|$ , 则 $h_1(t) = \sin(\omega_c t) / \pi t$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad h(t) = h_1(t - t_0) = \frac{\sin \omega_c(t - t_0)}{\pi(t - t_0)}$$



非因果系统



频域理想，时域不理想（起皱）



## 2 单位阶跃响应

$$u(t) \rightarrow \text{理想低通} \rightarrow s(t)$$

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$s(t) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} (\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega))e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} [\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)] e^{-j\omega t_0} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t - t_0)]}{\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)]$$

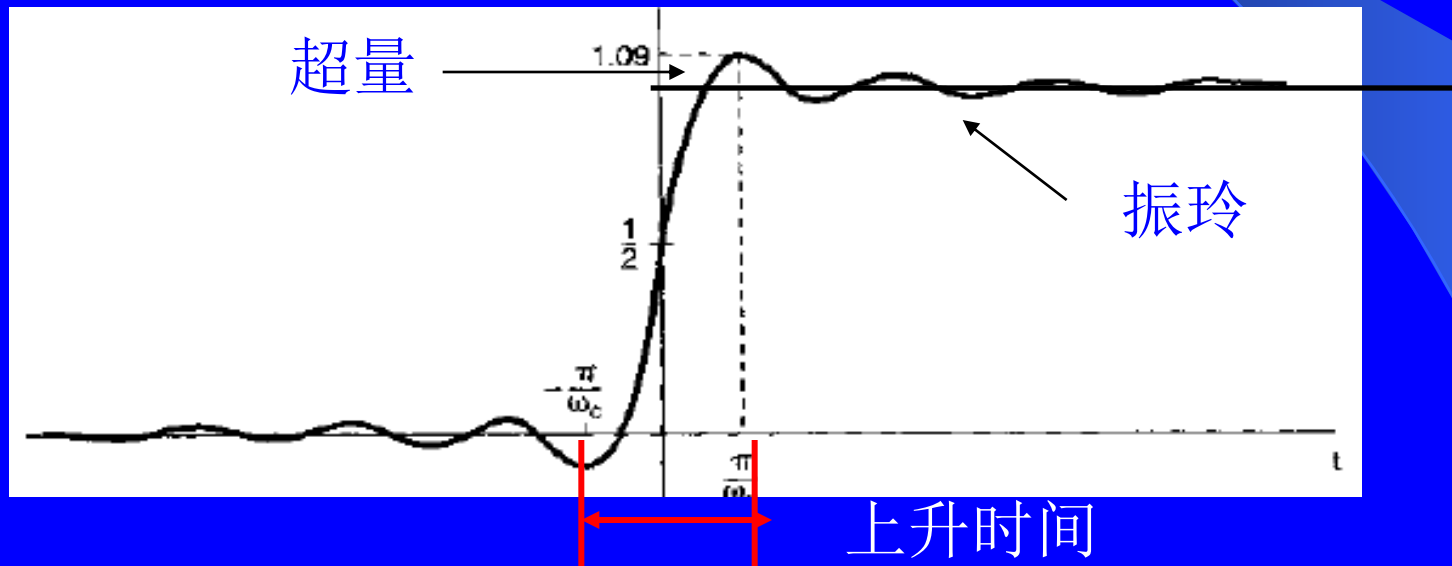
$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{--- 正弦积分}$$



$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$$

$$h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$



$$t_{\tau} = 2 \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c}$$



一个信号通过理想低通滤波器，其实质是用信号的有限频率分量近似原信号。

输入 $x(t)$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega$$

假设输入为 $u(t)$

第一个峰值

$$t = t_0 + \frac{\pi}{\omega_c}$$

$$s(t) \Big|_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1.0895$$



## 3 理想低通滤波器对矩形脉冲的响应:

$$x(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \{ Si[\omega_c(t - t_0)] - Si[\omega_c(t - t_0 - \tau)] \}$$

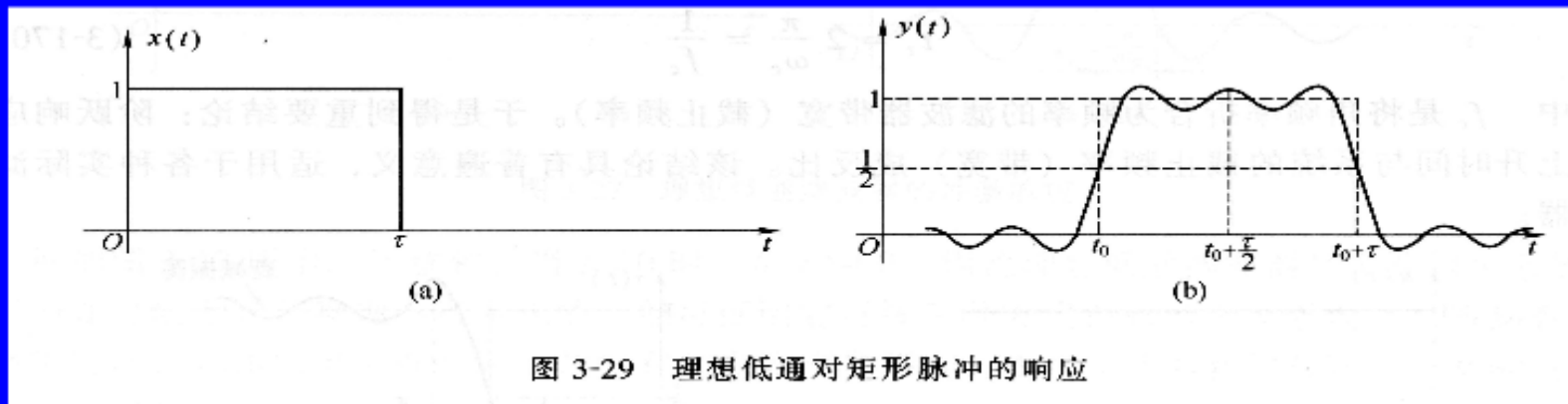
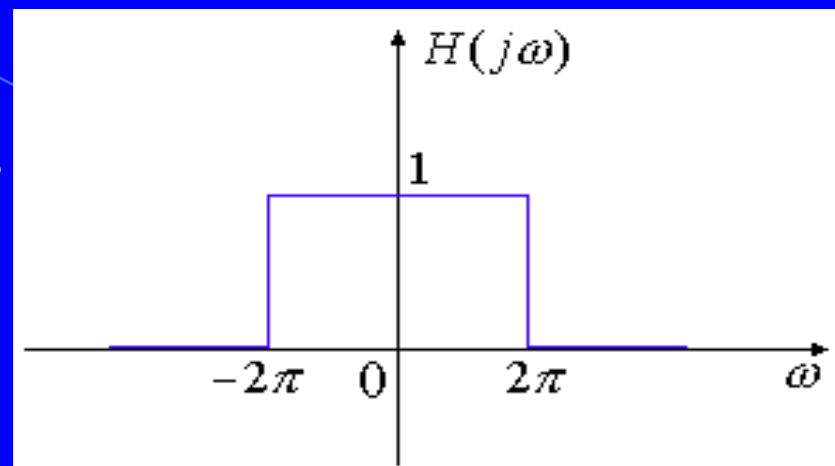


图 3-29 理想低通对矩形脉冲的响应



例：  $x(t) = \cos(\pi t) + 2\cos(3\pi t)$ ，  
系统的频响如图，求输出  $y(t)$ 。



$$e^{j\pi t} \rightarrow H(j\pi)e^{j\pi t} = e^{j\pi t}, \quad e^{-j\pi t} \rightarrow H(-j\pi)e^{-j\pi t} = e^{-j\pi t}$$

$$e^{j3\pi t} \rightarrow H(j3\pi)e^{j3\pi t} = 0, \quad e^{-j3\pi t} \rightarrow H(-j3\pi)e^{-j3\pi t} = 0$$



$$y(t) = \frac{1}{2} \left( e^{j\pi t} + e^{-j\pi t} \right) = \cos(\pi t)$$

