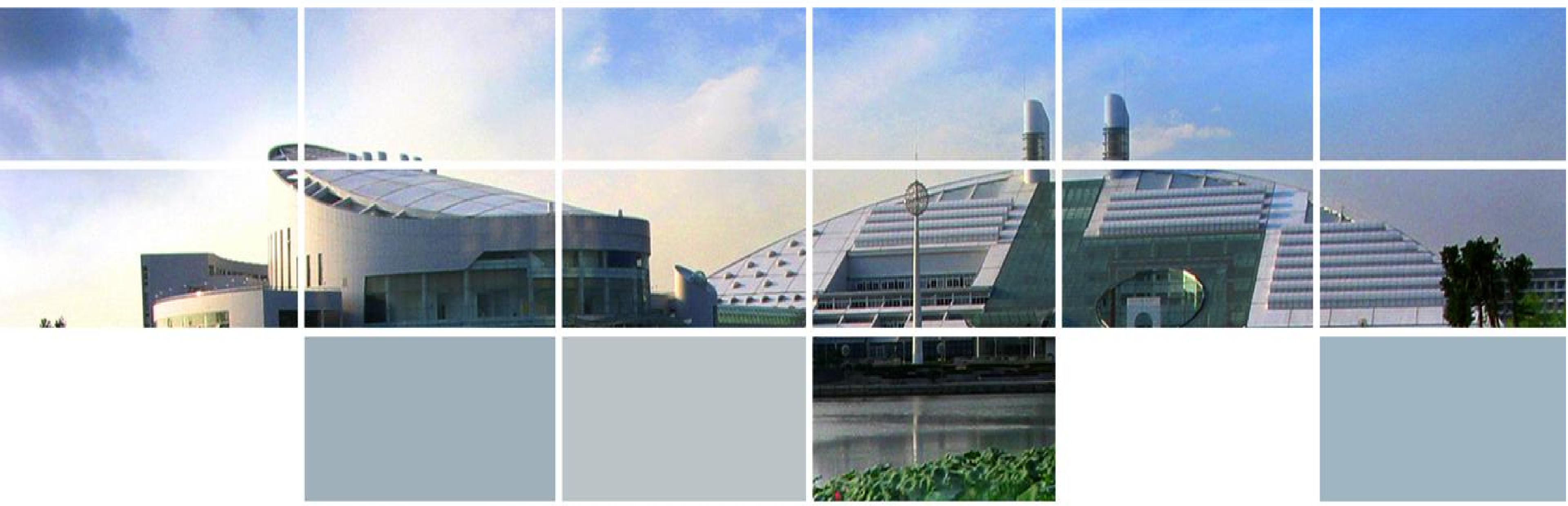
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



概率统计复习

（一）概率

●频率：$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}=\dfrac{A\text{发生次数}}{\text{总次数}}$

●概率：

1.非负性：$P(A)\geq 0$;

2.规范性：$P(S)=1$;

3.可列可加性：$A_1, A_2, \ldots$两两互斥，即

$A_iA_j=\varnothing, i\neq j$, 则$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

性质： $P(\overline{A})=1-P(A)$

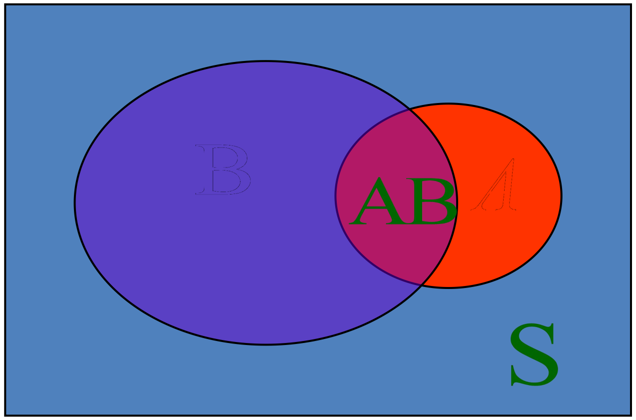
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

条件概率： $P(A)>0$时，定义$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

B在A中所占的概率比例



注：$P(\bullet|A)$也是一个概率

$$\Rightarrow P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$$

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$$

乘法公式

当下面的条件概率都有意义时：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)$$

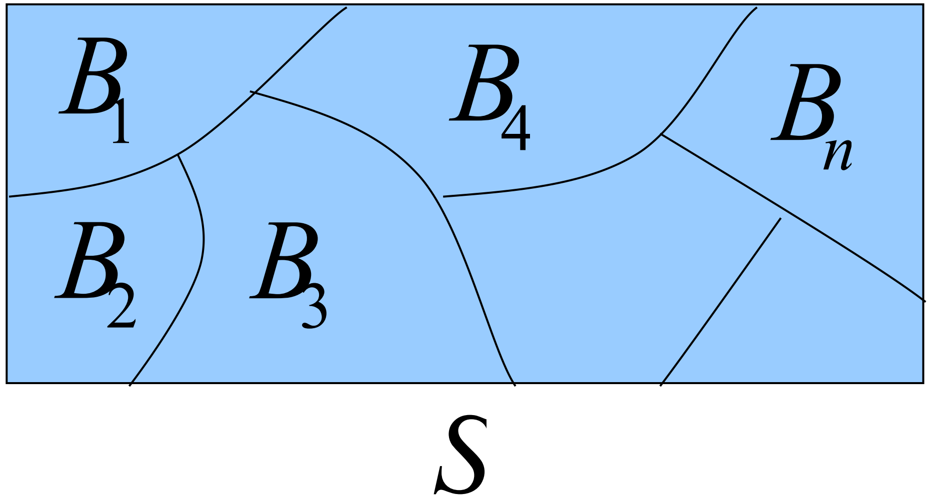
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=$$

$$P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$$

定义: 称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个**划分**, 若

(i) **不漏** $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$,

(ii) **不重** $B_i B_j = \varnothing, \quad i \neq j.$



设$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分且$P(B_i) > 0$. 则有

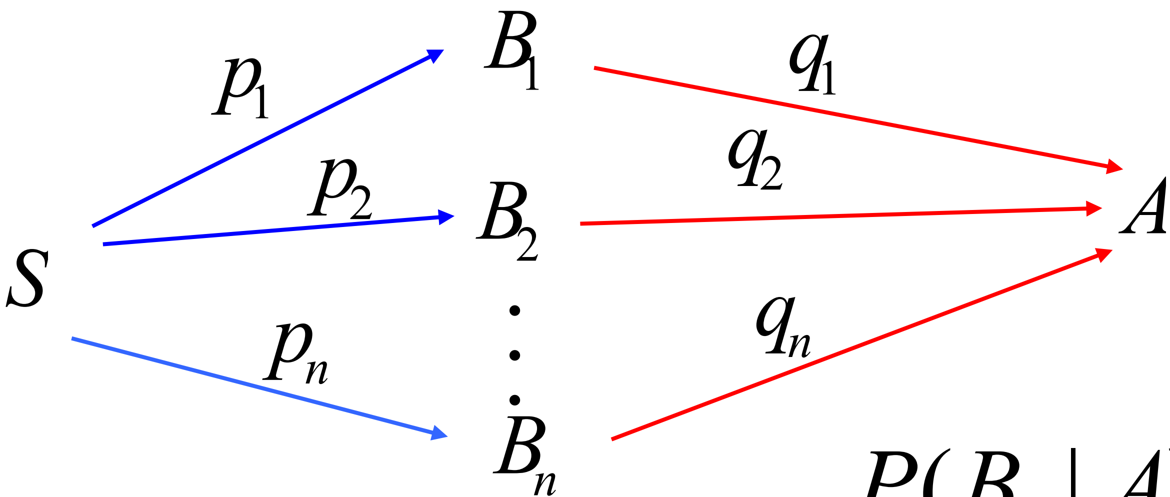
全概率公式:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A \mid B_j)$$

对$P(A) > 0$有**Bayes公式:**

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A \mid B_j)}$$

设$P(B_j)=p_j, P(A\mid B_j)=q_j, j=1,2,\ldots,n.$



$$P(B_i\mid A)=\frac{p_i q_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}$$

则 $P(A)=\sum_{j=1}^{n} p_j q_j$

(二) 随机变量

若随机变量X的取值为有限个或可数个，则称X为**离散型随机变量**．**分布律为**：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

或$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$

分布律的性质：$p_k \geq 0, \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$

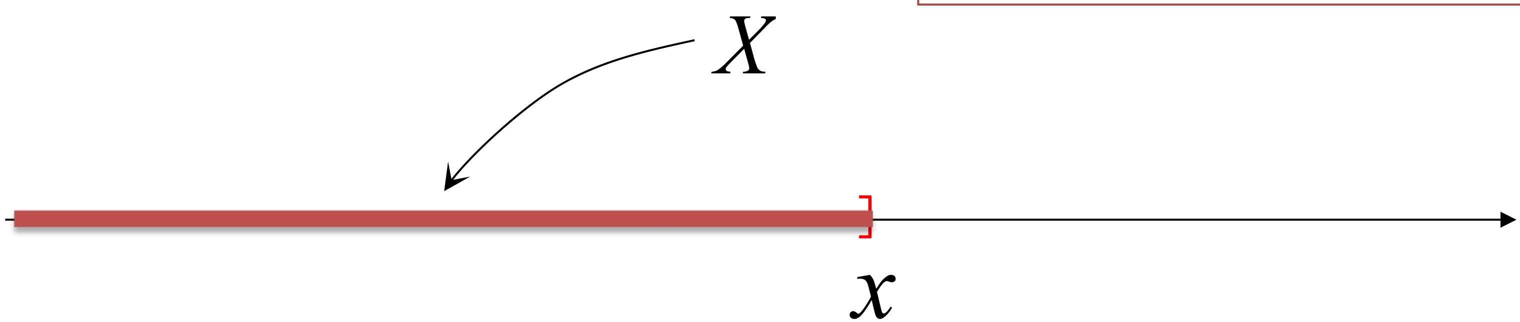
定义: 随机变量X,对任意实数x,称函数

$$F(x)=P(X\le x)$$

为 X 的概率分布函数，简称**分布函数**.

$F(x)$的几何意义

$$\boxed{F(x)=P(X\in(-\infty,x])}$$



$F(x)$的性质：

(1) $0 \le F(x) \le 1$;

(2) $F(x)$单调不减;

对$x_1 < x_2$, 有 $0 \le P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

(3) $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$;

(4) $F(x)$是右连续函数, 即 $F(x+0) = F(x)$.

$$F(x) - F(x-0) = P(X = x)$$

一般地，离散型随机变量的分布函数为阶梯函数.

如果分布律为$P\left\{X=x_k\right\}=p_k, k=1,2,\cdots$

那么分布函数为$F(x)=\sum\limits_{x_k\le x} p_k$.

$F(x)$在$x=x_k, \left(k=1,2,\cdots\right)$处有跳跃，

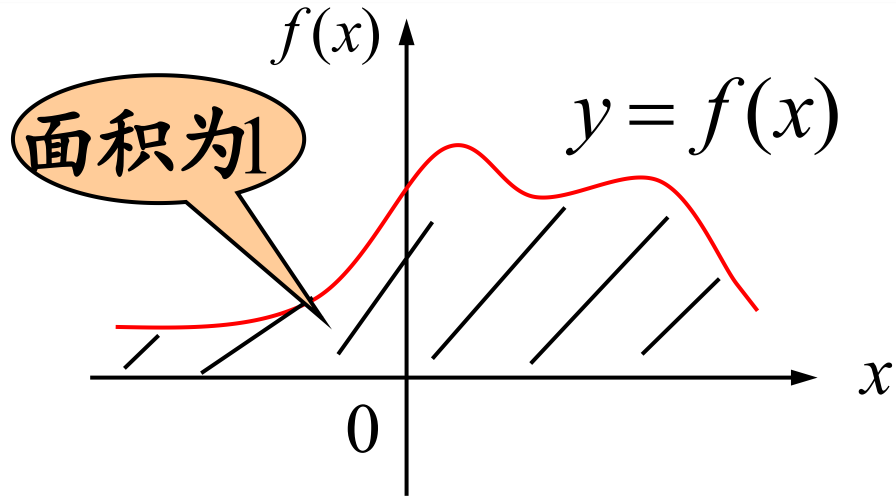
其跳跃值为$p_k=P\{X=x_k\}$.

定义: 对于随机变量X的分布函数 $F(x)$, 若存在非负的函数$f(x)$, 使对于任意实数 x 有:

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

则称X为**连续型随机变量**,其中$f(x)$称为X的**概率密度函数**, 简称概率密度.

$f(x)$的性质:



(1) $f(x)\geq 0$;

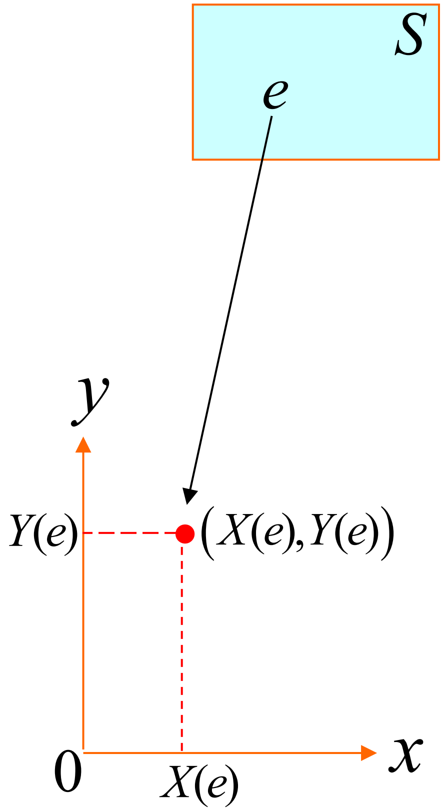
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$;

(3) $P(X\in D)=\int_D f(x)\,dx$, 任意$D\subset R$.

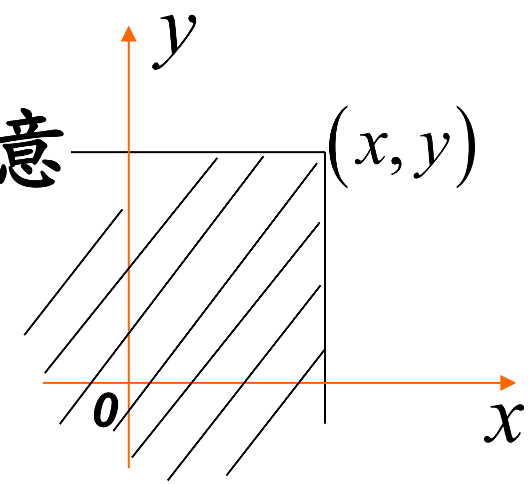
(4)在$f(x)$连续点x, $F'(x)=f(x)$.

(三) 二元随机变量

定义：设E是一个随机试验，样本空间$S=\{e\}$；设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的向量(X,Y)称为**二维随机向量**或**二元随机变量**。



联合分布函数



定义：设(X,Y)是二元随机变量，对于任意实数x, y，二元函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

称为二元随机变量(X,Y)的**联合分布函数**。

X和Y也有它们自己的分布函数，分别记为:$F_X(x), F_Y(y)$,

并称他们为边际分布函数

$$F_X(x) = P(X \le x) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = F(+\infty, y)$$

条件分布函数

- **定义:**

若$P(Y=y)>0$, 则在$Y=y$条件下, X的**条件分布函数**为:

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\frac{P(X\le x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

若$P(Y=y)=0$，但对任一$\varepsilon>0, P(y<Y\le y+\varepsilon)>0$,

则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数定义为：

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}$$

此时仍记为$P(X\le x|Y=y)$.

即：$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$.

二元离散型随机变量

定义：若二元随机变量(X,Y)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(X,Y)是二元离散型随机变量。

离散随机变量的联合概率分布律

设(X,Y)所有可能取值为(x_i,y_j)，称

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\ ,\ i,j=1,2,\cdots$$

为二元离散型随机变量(X,Y)的**联合分布律**。

1° $p_{ij}\ge 0$，

2° $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

X,Y的边际分布律为：$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\overset{\text{记为}}{=}p_{i\bullet}$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\overset{\text{记为}}{=}p_{\bullet j}$$

在$Y=y_j$条件下，X的条件分布律为:

$$\boxed{P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad i=1,2\cdots}$$

在$X=x_i$条件下，Y的条件分布律为:

$$\boxed{P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad j=1,2\cdots}$$

联合概率密度函数

定义：对于二元随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$,

如果存在非负函数$f(x,y)$，使对于任意x,y,

有 $$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv}$$

称(X,Y)为二元**连续型**随机变量.

并称$f(x,y)$为二元随机变量(X,Y)的

(联合)概率密度（函数）。

概率密度的性质：

- 1. $f(x,y)\geq 0$

- 2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

3. 设D是xoy平面上的区域，点(X,Y)落在D内的概率为：

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$

4. 在$f(x,y)$的连续点(x,y)，有$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

X,Y的边际密度函数为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

若$f_Y(y)>0$,则在$Y=y$的条件下，X的条件密度函数为：

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

若$f_X(x)>0$,则在$X=x$的条件下，Y的条件密度函数为：

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

条件概率$P(Y\in D\mid X=x)=\int_D f_{Y|X}(y\mid x)dy$

二元离散型与连续型随机变量分布比较

二元离散型随机变量	二元连续型随机变量
(X,Y)联合分布律	(X,Y)联合概率密度
$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$	$f(x,y)$
X的边际分布律	X的边际概率密度
$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},i=1,2,\ldots$	$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$
$X=x_i$时Y的条件分布律	$X=x$时Y的条件概率密度
$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\ldots$	$f_{Y\mid X}(y \mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

(四) 独立性

如果$P(AB)=P(A)P(B)$，则称两个事件A,B相互独立

当$P(A)>0$时

$$\Leftrightarrow \quad P(B|A)=P(B)$$

当$P(\bar{A})>0$时

$$\Leftrightarrow \quad P(B|\bar{A})=P(B)$$

直观含义：A发生与否都不会改变B发生的概率

A,B相互独立$\Leftrightarrow \bar{A},B$相互独立

$\Leftrightarrow A,\bar{B}$相互独立$\Leftrightarrow \bar{A},\bar{B}$相互独立

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个随机事件，若对$2\le k\le n$,
以及不同的$i_1,\dots i_k$,均有：

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=\prod_{j=1}^{k}P\left(A_{i_j}\right)$$

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立

相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立

两两独立不能推出相互独立

设$F(x,y)$是二元随机变量(X,Y)的分布函数，$F_X(x)$是X的边际分布函数，$F_Y(y)$是Y的边际分布函数，若对所有x,y有：

$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x)P(Y\leq y)$ 即

$$\boxed{F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)}$$

称随机变量X,Y相互独立。

独立性等价判断:

离散型

用分布律判断。对一切i, j都成立$\boxed{p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}}$

即$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j), \forall i, j$

$$\Leftrightarrow P(Y = y_j \mid X = x_i) = P(Y = y_j), \forall j$$

即Y条件分布律与Y的边际分布律相等

独立性等价判断：

连续型

用密度函数判断。对在平面的点(x,y)

几乎处处成立 $\boxed{f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).}$

即在平面上除去“面积”为零的集合以外，

上述等式处处成立。

$$\Leftrightarrow f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$$

即Y的条件密度函数与Y的边际密度函数相等

(五) 随机变量函数的分布

问题：已知随机变量X的分布，$Y=g(X)$，

函数$g(\cdot)$已知，求Y的分布.

若Y为离散型随机变量，则先写出Y的可能取值：

$$y_1, y_2, \cdots y_j, \cdots;$$

再找出$\{Y=y_j\}$的等价事件$\{X \in D\}$，得

$$P(Y=y_j)=P(X \in D);$$

若Y为连续型随机变量,则

(1) 确定Y的取值范围;

(2) 写出Y的分布函数:$F_Y(y)=P(Y\le y)$,

找出$\{Y\le y\}$的等价事件$\{X\in D\}$,得$F_Y(y)=P(X\in D)$;

(3) 对$F_Y(y)$求导得Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

注意常用到复合函数求导:

$$\frac{d(F_X(h(y)))}{dy}=f_X(h(y))h'(y)$$

定理： 设随机变量$X \sim f_X(x), -\infty < x < +\infty$,

$Y = g(X), g'(x) > 0$ (或$g'(x) < 0$), 则Y具有概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中(α, β)是Y的取值范围，h是g的反函数, 即

$h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$.

$$Z = X + Y$$

离散型:

$$P(Z = z_k) = \sum_i P(X = x_i, Y = z_k - x_i)$$

$$= \sum_i P(X = z_k - y_i, Y = y_i)$$

连续型:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$$

$$M = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

$$F_M(z) = P(M \le z)$$

$$= P(X_1 \le z, \ldots, X_n \le z)$$

如果$X_1, \ldots, X_n$相互独立

$$= F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$N = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

$$1 - F_N(z) = P(N > z)$$

$$= P(X_1 > z, \ldots, X_n > z)$$

如果$X_1, \ldots, X_n$相互独立

$$= \quad (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z))$$

(六) 数字特征

期望（数学期望，均值）

$$E(X)=\begin{cases}\sum_i x_i p_i, & 若X是离散型\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & 若X是连续型\end{cases}$$

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_i g(x_i) p_i, & 若X是离散型\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & 若X是连续型\end{cases}$$

$$E(g(X,Y))=\begin{cases}\sum_i g(x_i,y_j)p_{ij}, \text{若}(X,Y)\text{是离散型}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy, \text{若}(X,Y)\text{是连续型}\end{cases}$$

特别地，若(X,Y)是连续型，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy$$

方差:

$$D(X)=Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}.$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2)=Var(X)+[E(X)]^2$$

标准差: $$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$$

性质：

1.均值具有线性性

$$E(b+\sum_i a_i X_i)=b+\sum_i a_i E(X_i)$$

2.$Var(aX+b)=a^2Var(X)$

3.$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

协方差：

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$\Rightarrow E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)$$

性质：

1.对称性 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2.$Cov(X,X)=Var(X)$

3.线性性

$$Cov(\sum_i a_iX_i,Y)=\sum_i a_iCov(X_i,Y)$$

$(X_1,\ldots,X_n)$的协方差矩阵：

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\text{其中}a_{ij}=Cov(X_i,X_j)$$

X与Y的相关系数：

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

$$-1\le\rho_{XY}\le 1$$

X与Y不相关：$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$

$$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

X与Y独立$\Rightarrow X$与Y不相关

反之不一定成立

(七) 九大分布

1. 0–1分布(或两点分布)

记为 $X \sim 0-1(p)$或 $X \sim B(1, p)$

X	0	1
P	$1-p$	p

其中 $0 < p < 1$.

分布律还可写为 $P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}, \ k = 0, 1.$

$$E(X) = p, \quad Var(X) = p(1-p)$$

2. **二项分布，** 记为 $X \sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

这里n是正整数,$0<p<1$

$$E(X)=np, \quad Var(X)=np(1-p)$$

3.参数为λ的泊松分布，记为 $X \sim \pi(\lambda)$ 或 $X \sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$

$$E(X)=Var(X)=\lambda$$

4.(a,b)上的均匀分布,记为$X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2},Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

性质： 对任何$[a,b]$的子区间$[c,d]$,

$$P(X\in[c,d])=\frac{d-c}{b-a}$$

5. 参数为$\lambda>0$的**指数分布**，记为$X\sim E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

无记忆性：对t，$s>0$,

$$P(X-s>t\mid X>s)=P(X>t)=e^{-\lambda t}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

6. 正态分布，记为$X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty<x<+\infty,$$

性质： (1) $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(2) 分布函数$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布$N(0,1)$的分布函数

(3) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha, z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

(4) $E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$

7. 平面区域D上的均匀分布，记为 $(X,Y)\sim U(D)$

假设D的面积有限,(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

性质：对D的任何子区域D_1,都有

$$P((X,Y)\in D_1)=\frac{D_1\text{的面积}}{D\text{的面积}}$$

8. 二元正态分布，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$

性质： $(1) X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$(2) \rho=\rho_{XY}$

$(3) X$ 与 Y 独立 $\Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关

9. 多元正态分布

性质：

(1)$(X_1,\ldots,X_n)$正态$\Rightarrow$每个分量X_i正态

每个分量X_i正态，且相互独立$\Rightarrow(X_1,\ldots,X_n)$正态

(2)$(X_1,\ldots,X_n)$正态$\Leftrightarrow$所有线性组合$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$正态

(3)$(X_1,\ldots,X_n)$正态$\Rightarrow$

若每个Y_i都是$X_1,\ldots,X_n$的线性组合，则$(Y_1,\ldots,Y_m)$正态

(4)若$(X_1,\ldots,X_n)$正态，则$X_1,\ldots,X_n$相互独立$\Leftrightarrow$

$X_1,\ldots,X_n$两两不相关$\Leftrightarrow Cov(X_i,X_j)=0,\forall i\neq j$

(八) 大数定律和中心极限定理

1. 依概率收敛

当$n\to\infty$时，$X_n \xrightarrow{P} a$ 如果：

对任意的$\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-a|\geq\varepsilon)\to 0$

性质：

(1)若$X_n \xrightarrow{P} a, f(x)$在点$a$连续，则

$f(X_n) \xrightarrow{P} f(a).$

(2)若$X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b, g$在$(a,b)$连续，

则 $g(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b).$

2. **切比雪夫不等式**：设X的方差$Var(X)$存在，则

对于任意$\varepsilon>0$,都有：$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

等价为：$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

3. 大数定律:

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，具有相同的均值$\mu$,

同分布或同方差，则当 $n \to \infty$时,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu.$$

贝努利大数定律:

设n_A为n重贝努里试验中事件A发生的次数，并记

事件A在每次试验中发生的概率为p，则有

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p, \text{当} n \to +\infty \text{时}.$$

4. 中心极限定理:

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$独立同分布，$E(X_i)=\mu, Var(X_i)=\sigma^2$,

则当n充分大时 $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

特别地，当n充分大时，$B(n,p) \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$.

(九) 统计量与抽样分布

1.**总体**：随机变量X

2. **简单随机样本**：

满足以下两个条件的$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为容量是n的简单随机样本：

(1) 代表性：每个X_i与X同分布；

(2) 独立性：$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的随机变量

3. 统计量：样本的不含任何未知参数的函数。

设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为样本, 若$g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$不含任何未知参数, 则称$g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为统计量.

4. 常用统计量：

样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$

样本k阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

样本 k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

5. χ^2分布：设$X_1,\cdots,X_n$相互独立，都服从$N(0,1)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

(1). 设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则$E(\chi^2)=n, Var(\chi^2)=2n$

(2). χ^2分布的可加性：

设$Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$，且$Y_1, Y_2$相互独立，则

$Y_1+Y_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$.

6. t分布：设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,且$X$和$Y$相互独立.

则 $\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$

(1). $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$

(2). 当$n > 45, t_{\alpha}(n) \approx z_{\alpha}$

7. F分布：设$X\sim\chi^2(n_1)$, $Y\sim\chi^2(n_2)$，且X,Y独立，则

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$$

(1) 若$F\sim F(n_1,n_2)$，则$\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

(2) $F_\alpha(n_2,n_1)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$

8. 单个正态总体下的抽样分布

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_n$是样本，样本均值

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$ 样本方差 $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

则 (1) $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$; (2) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$;

(3) $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

且$\bar{X}$与S^2相互独立.

9. 两个正态总体下的抽样分布

设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^{\ 2}\right)$，并且它们相互独立. 样本均值分别为$\overline{X},\overline{Y}$；样本方差分别为$S_1^2,S_2^2$. 则可以得到下面三个抽样分布.

(1) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

（2）当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, S_w=\sqrt{S_w^2}$

(3) $$\frac{S_1^2}{S_2^2}\bigg/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

(十) 点估计

设总体X有未知参数θ, $X_1,\cdots,X_n$是X的简单随机样本.

点估计问题：构造合适的统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

来估计未知参数θ，称$\hat{\theta}$为参数θ的点估计量.

当给定样本观察值$x_1,\cdots,x_n$时，$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$

的点估计值。

- 常用的点估计方法：

  矩估计法、极大似然估计法.

1. 矩估计法:

设总体有k个未知参数$\theta_1,\ldots,\theta_k, X_1,\ldots,X_n$是样本:

(1) 求总体前k阶矩关于k个参数的函数,

$$\mu_i = E(X^i) = h_i(\theta_1,\cdots,\theta_k), \quad i = 1,\cdots,k.$$

(2) 解出各参数关于前k阶矩的反函数

$$\theta_i = g_i(\mu_1,\cdots,\mu_k), \quad i = 1,\cdots,k$$

(3) 以样本各阶原点矩$A_1,\cdots,A_k$分别代替总体各阶原点矩$\mu_1,\cdots,\mu_k$,得各参数的矩估计

$$\hat{\theta}_i = g_i(A_1,\cdots,A_k), \quad i = 1,\cdots,k.$$

注：在实际应用时，也可用总体中心矩ν_i替换总体原点矩μ_i，相应地，以样本中心矩B_i估计总体中心矩ν_i.

特别地，用样本二阶中心矩来估计总体方差.

(II)极大似然估计

设总体X有分布律$p(x;\theta)$, x取值至多可列，或有概率密度$f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, θ未知. $X_1,\ldots,X_n$为总体X的简单随机样本，其观察值为$x_1,\ldots,x_n$，则

似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$(或$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$)

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta)$.

$\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$称为$\theta$的极大似然估计值，相应统计量$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$称为$\theta$的极大似然估计量(MLE).

说明：1.未知参数可能不是一个，设为$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$；

2.求$L(\theta)$的最大值时，可转换为求$\ln L(\theta)$的最大值，$\ln L(\theta)$称为对数似然函数.

3.若$L(\theta)$关于某个θ_i是单调增(减)函数，则θ_i的极大似然估计在其边界取得；

4.若$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，则$g(\theta)$的极大似然估计为$g(\hat{\theta})$.

四条评价准则：

(1) 无偏性准则

(2) 有效性准则

(3) 均方误差准则

(4) 相合性准则

1. 无偏性准则

若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$,满足

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的一个**无偏估计量**.

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的**渐近无偏估计量**.

2. 有效性准则

设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的两个无偏估计，

如果$Var\left(\hat{\theta}_1\right)\leq Var\left(\hat{\theta}_2\right)$，对一切$\theta\in\Theta$成立

且不等号至少对某一$\theta\in\Theta$成立，则称

$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

3. 均方误差准则

设$\hat{\theta}$是参数θ的点估计, 方差存在, 则称

$E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$是估计量$\hat{\theta}$的均方误差, 记为$Mse(\hat{\theta})$.

$$Mse(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta})-\theta]^2.$$

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计, 则有$Mse(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta})$.

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是 θ的 点 估 计， 如 果

$Mse(\hat{\theta}_1) \le Mse(\hat{\theta}_2)$, 对 一 切 $\theta \in \Theta$ 成 立，

且 不 等 号 至 少 对 某 一 $\theta \in \Theta$ 成 立, 则 称 $\hat{\theta}_1$ 优 于 $\hat{\theta}_2$.

4. 相合性准则

设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，

$$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\xrightarrow{P}\theta$$

即$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$ 成立.

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量.

(十一) 置信区间

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$,θ未知. 对给定值$\alpha(0<\alpha<1)$,有两个统计量

$$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n),\ \hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n),$$ 使得:

$$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$$

称$\left(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U\right)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间;

$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别为双侧置信下限和双侧置信上限.

如果$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)<\theta\right\}\geq 1-\alpha$，则称$\hat{\theta}_L$是参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信下限**.

如果$P\left\{\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$，则称$\hat{\theta}_U$是参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信上限**.

1. 单个正态总体参数的区间估计

设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本.

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差.

置信水平为$1-\alpha$.

(1) σ^2已知时

μ的双侧置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

单侧置信下限为$\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

单侧置信上限为$\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

(2) σ^2未知时

μ的双侧置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

单侧置信下限为$\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

单侧置信上限为$\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$

(3). 方差σ^2的置信区间

双侧置信区间为：$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

单侧置信下限为：$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$$

单侧置信上限为：$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

2. 两个正态总体参数的区间估计

设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$,并且它们相互独立.

样本均值分别为$\overline{X},\overline{Y}$;样本方差分别为$S_1^2,S_2^2$.

置信水平为 $1-\alpha$.

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

$\mu_1-\mu_2$的双侧置信区间：

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

单侧置信下限：$\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

单侧置信上限：$\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)+z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知

$\mu_1-\mu_2$的双侧置信区间：

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

单侧置信下限：$\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

单侧置信下限：$\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

(3). $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

双侧置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

单侧置信下限：
$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$$

单侧置信上限：
$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$$

注意区分是成对数据还是两正态总体数据

如果是成对数据$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$.先令

$D_i=X_i-Y_i$, 可以将$D_1,\cdots,D_n$看成来自同一正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本, 且相互独立. 然后再做区间估计.

例如μ_D的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间为

$$\left(\bar{D}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

其中$\bar{D}=\bar{X}-\bar{Y}$, $\quad S_D=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\bar{D})^2$

(十二)假设检验

假设检验的过程：（利用拒绝域）

1. 提出假设（原假设$H_0 \leftrightarrow$备择假设H_1）
2. 提出检验统计量和拒绝域形式
3. 在给定显著性水平α下，根据Neyman-Pearson原则求出拒绝域的临界值
4. 根据实际样本观测值作出判断

假设检验的过程：（利用$P_$值）

1. 提出假设（原假设$H_0 \leftrightarrow$备择假设H_1）
2. 提出检验统计量和拒绝域形式

3'. 计算检验统计量的观测值与$P_$值；

4'. 根据$P_$值和显著性水平α，作出判断.

（若$P_ \le \alpha$，则拒绝原假设；

若$P_ > \alpha$，则接受原假设）

两类错误：

第I类错误：拒绝真实的原假设

第II类错误：接受错误的原假设

Neyman-Pearson原则：

首先控制犯第I类错误的概率不超过显著性水平α，再寻找检验，使得犯第II类错误的概率尽可能小.

关于总体参数θ的假设：

H_0：$\theta = \theta_0$，　H_1：$\theta \neq \theta_0$（双边检验）

H_0：$\theta \geq \theta_0$，H_1：$\theta < \theta_0$(左边检验）

H_0：$\theta \leq \theta_0$，H_1：$\theta > \theta_0$（右边检验）

$P_$值计算：

（设检验统计量为H，检验统计量的观测值为h）

1. 若检验统计量太大或太小时拒绝，

令$p = P(H \geq h \mid \theta = \theta_0)$,则$P_ = 2\min(p, 1-p)$

2. 若检验统计量太小时拒绝，

则$P_ = P(H \leq h \mid \theta = \theta_0)$

3. 若检验统计量太大时拒绝，

则$P_ = P(H \geq h \mid \theta = \theta_0)$

1. 单个正态总体参数的假设检验

设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本.

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差.

显著性水平为 α.

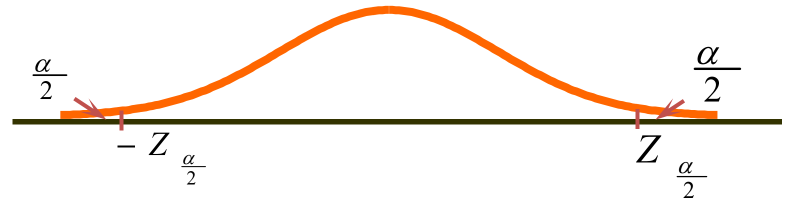
(1) σ^2已知检验μ （Z检验法）

$$z_0=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},\quad \text{当}\mu=\mu_0\text{时，}\quad Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

(1) $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

拒绝域： $|Z|\geq z_{\alpha/2}$

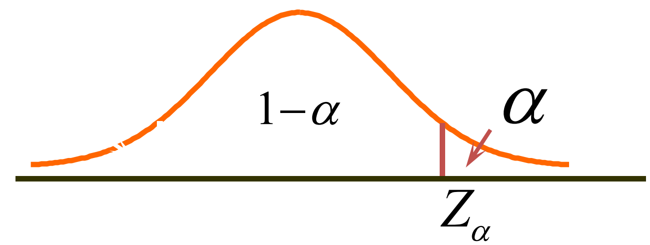
$$P\_=P_{\mu_0}\{|Z|\geq|z_0|\}=2(1-\Phi(|z_0|)).$$



(2) $H_0:\mu\leq\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$

拒绝域： $Z\geq z_\alpha$

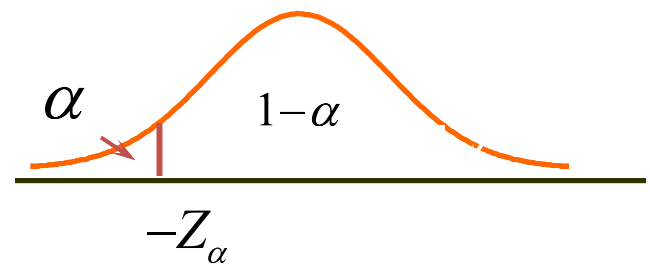
$$P\_=P_{\mu_0}\{Z\geq z_0\}=1-\Phi(z_0)$$



(3) $H_0:\mu\geq\mu_0,\ H_1:\mu<\mu_0$

拒绝域： $Z\leq -z_\alpha$

$$P\_=P_{\mu_0}\{Z\leq z_0\}=\Phi(z_0)$$

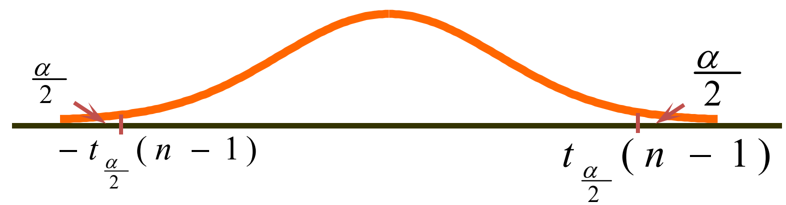


(2) σ^2未知检验μ (t检验法)

$$t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}},\quad \text{当}\mu=\mu_0\text{时}，\quad t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

(1) $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$

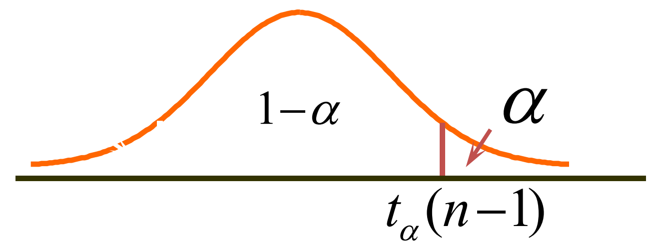
拒绝域： $|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$



$$P\_=P_{\mu_0}\{|t|\geq|t_0|\}=2P(t(n-1)\geq|t_0|).$$

(2) $H_0:\mu\leq\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$

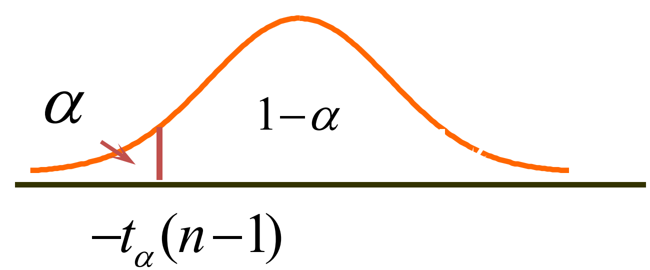
拒绝域： $t\geq t_\alpha(n-1)$



$$P\_=P_{\mu_0}\{t\geq t_0\}=P(t(n-1)\geq t_0)$$

(3) $H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$

拒绝域： $t\leq -t_\alpha(n-1)$



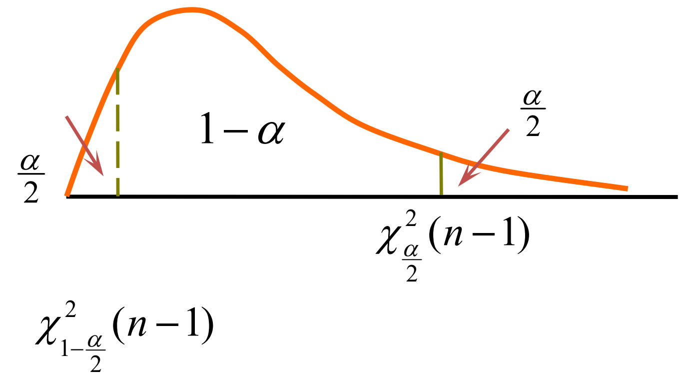
$$P\_=P_{\mu_0}\{t\leq t_0\}=P(t(n-1)\leq t_0)$$

(3) μ未知检验σ^2 (χ^2检验法)

当$\sigma^2=\sigma_0^2$时，$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

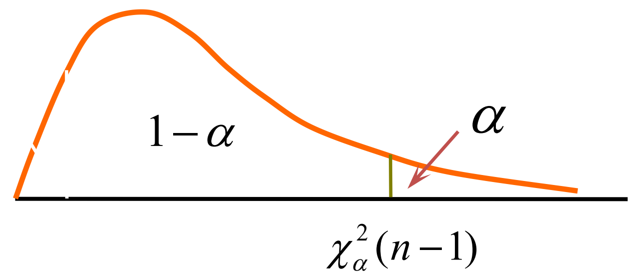
(1) $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

拒绝域：$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$



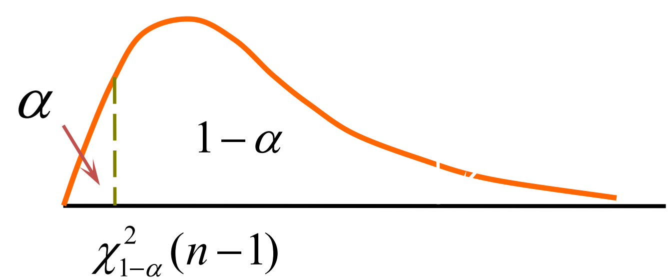
(2) $H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$

拒绝域： $\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$



(3) $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$

拒绝域：$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$



2. 两个正态总体参数的假设检验

设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$,并且它们相互独立.

样本均值分别为$\overline{X},\overline{Y}$;样本方差分别为$S_1^2,S_2^2$.

置信水平为 $1-\alpha$.

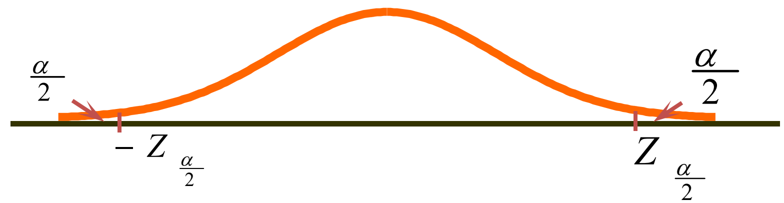
注意区分是成对数据还是两正态总体数据

(1) σ_1^2,σ_2^2已知检验$\mu_1-\mu_2$ (Z检验法)

当$\mu_1-\mu_2=\delta$时，$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

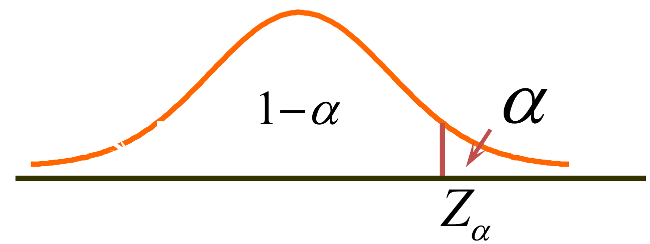
(1) $H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$

拒绝域： $|Z|\geq z_{\alpha/2}$



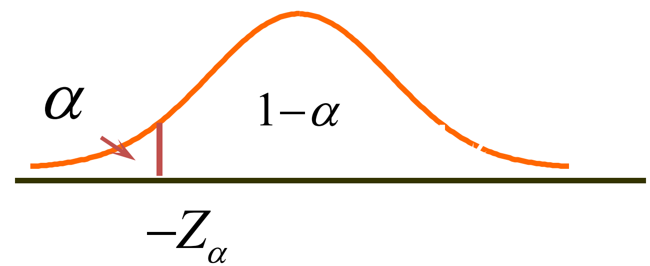
(2) $H_0:\mu_1-\mu_2\leq\delta$

拒绝域： $Z\geq z_\alpha$



(3) $H_0:\mu_1-\mu_2\geq\delta$

拒绝域： $Z\leq -z_\alpha$

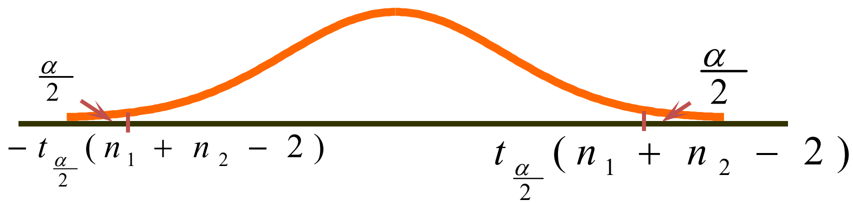


(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知检验 $\mu_1-\mu_2$ (t 检验法)

当 $\mu_1-\mu_2=\delta$ 时，$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

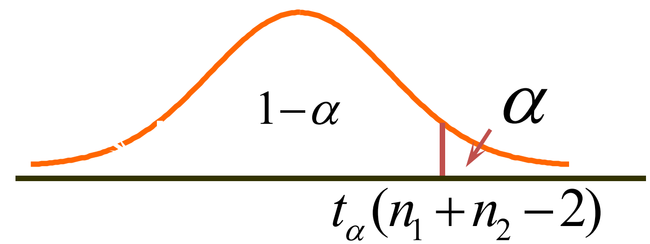
(1) $H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$

拒绝域： $|t|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$



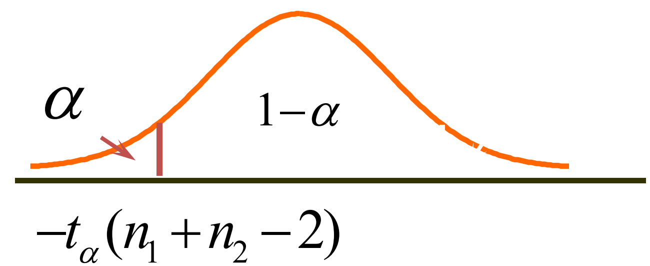
(2) $H_0:\mu_1-\mu_2\leq\delta$

拒绝域： $t\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$



(3) $H_0:\mu_1-\mu_2\geq\delta$

拒绝域： $t\leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$



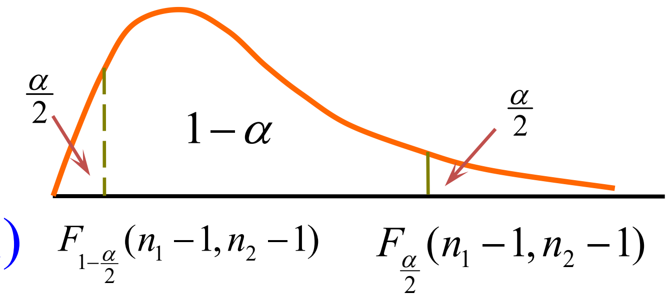
(3) μ_1,μ_2未知检验σ_1^2/σ_2^2 (F检验法)

当$\sigma_1^2=\sigma_2^2$时，$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

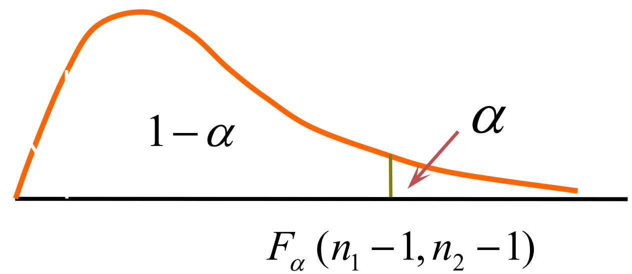
拒绝域：

$F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$



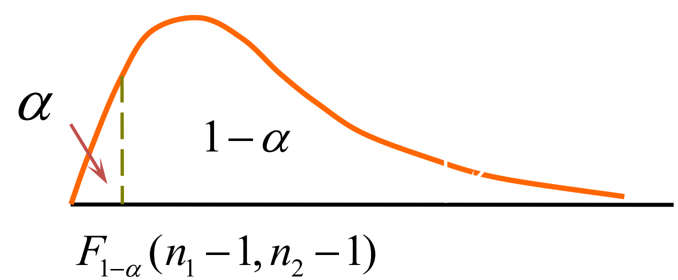
(2) $H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

拒绝域：$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$



(3) $H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$

拒绝域：$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$



3. 拟合优度检验

问题：总体服从何种分布未知，要对总体分布提出一个假设检验

记$F(x)$为总体X的未知的分布函数. 设$F_0(x)$是形式已知但可能含有若干个未知参数的分布函数，需检验假设

$$H_0: F(x) = F_0(x) \qquad \forall x \in R$$

若总体X为离散型，则H_0相当于

H_0：总体X的分布律为$P\{X=t_i\}=p_i, i=1,2,\ldots$

若总体X为连续型，则H_0相当于

H_0：总体X的概率密度为$f(x)$。

——拟合优度检验问题

(一) Pearsonχ^2检验

步骤:

1. 提出原假设H_0

2. 如果原假设中的分布含有r个未知参数，用极大似然估计出来

3. 在H_0下，总体X取值的全体分成k个两两不相交的子集$A_1,\ldots,A_k$.

4. 以$n_i(i=1,\ldots,k)$记样本观察值$x_1,\ldots,x_n$中落在A_i的个数（实际频数）.

4. 计算当H_0为真（r个未知参数用第2步的估计值代入）时事件A_i发生的概率$p_i = P_{H_0}(A_i), i = 1, \ldots, k$,称$np_i$为理论频数.

检查： $np_i \geq 5$,否则合并子集并转到步骤3

5.检验统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n$$

6.拒绝域

$$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2 (k - r - 1)$$