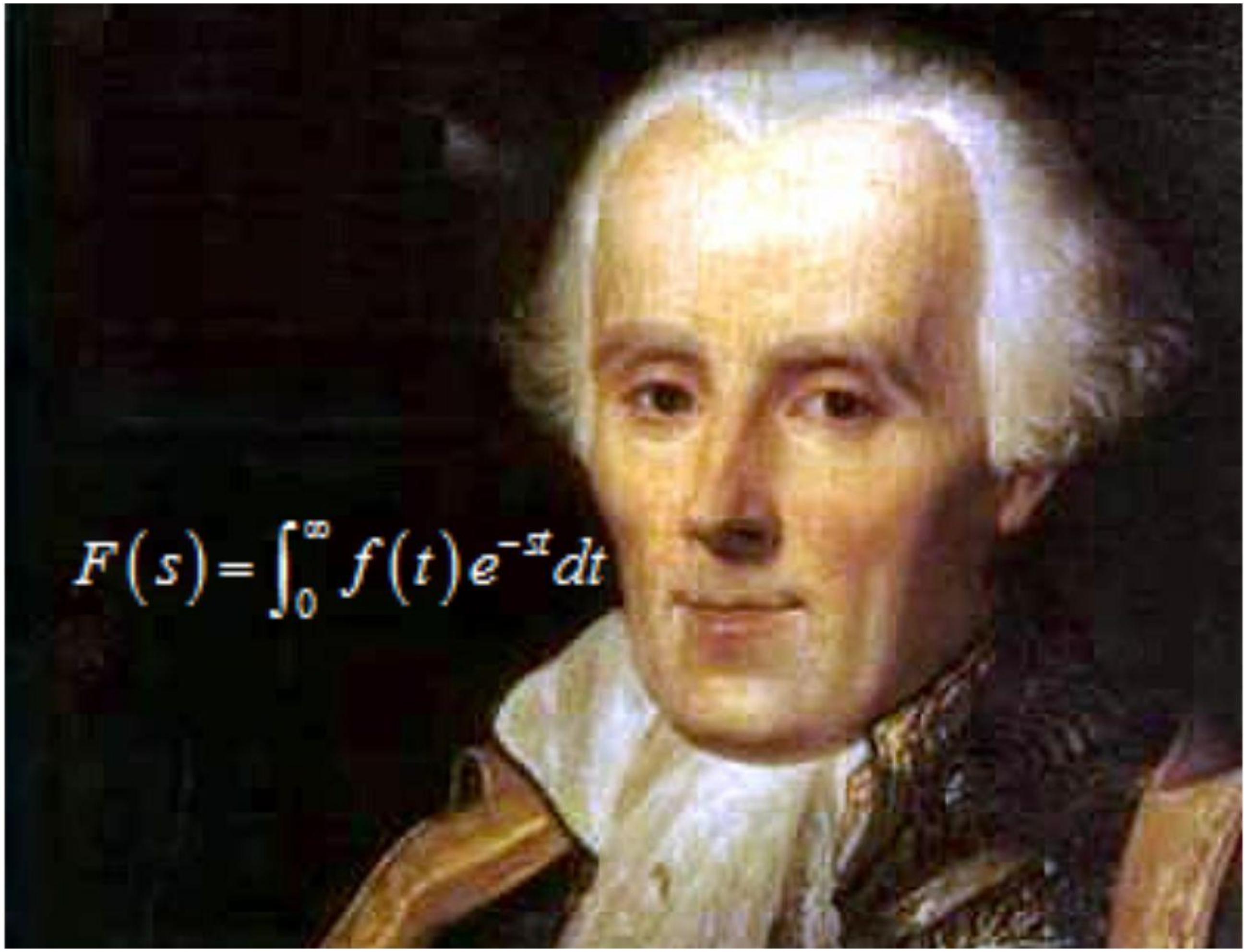


第六章 信号与系统的复频域分析(2)

叶慧慧

回顾

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), ROC = R$$

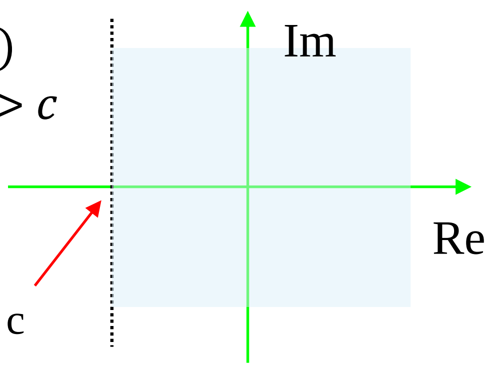
$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1, ROC$$

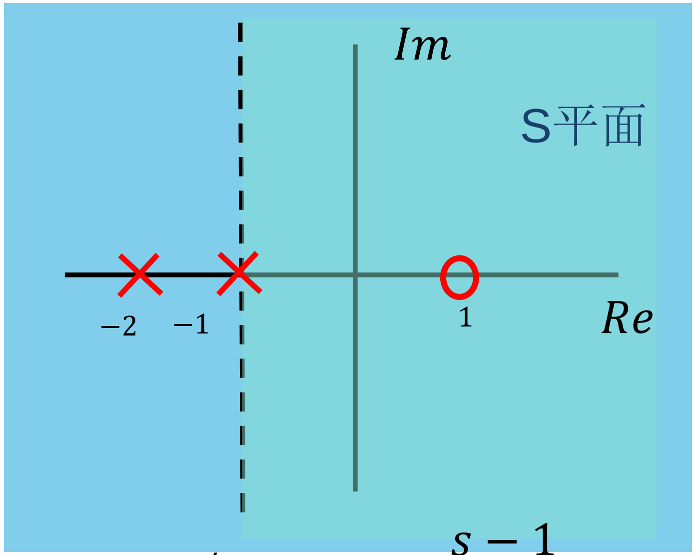
$$u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s), ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s), ROC = R_2$$

$X(s)$
Re{s}> c





右边信号 $3e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$, Re{s}> −1

拉普拉斯变换的性质

(1)线性 $ax_1(t)+bx_1(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}aX_1(s)+bX_2(s), ROC=R_1\cap R_2$

(2)时移 $x(t-t_0)\overset{L}{\longleftrightarrow}e^{-st_0}X(s), ROC=R$

(3)S域平移 $e^{s_0t}x(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s-s_0), ROC=R+\mathrm{Re}\{s_0\}$

(4)时域尺度变换 $x(at)\overset{L}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{s}{a}), ROC=aR$

(5)共轭 $x^*(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X^*(s^*), ROC=R$

(6)卷积 $x_1(t)*x_2(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X_1(s)X_2(s), ROC=R_1\cap R_2$

(7)时域微分 $\dfrac{dx(t)}{dt}\overset{L}{\longleftrightarrow}sX(s), ROC\subset R$

(8)s 域微分 $-tx(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}\dfrac{dX(s)}{ds}, ROC=R$

(9)时域积分 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\overset{L}{\longleftrightarrow}\dfrac{X(s)}{s}, ROC=R\cap\mathrm{Re}\{s\}>0$

(10)初值与终值定理 $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\,X(s)$ $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}s\,X(s)$

若$t<0$，$x(t)$=0，且在t =0时，$x(t)$不包含冲激或者高阶奇异函数

部分分式展开法求解拉式反变换:(有理函数)

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\dots b_ms^m}{a_0+a_1s+\dots a_ns^n}$$

采用部分分式展开法:

1. 将有理拉氏变换式展开成低阶的线性组合,
2. 其中每一个低阶项的反变换,结合收敛区域由拉氏变换性质或者查表得到

注意收敛区域:左边信号、右边信号,双边信号

§ 6.6　单边拉普拉斯变换

$$uL(s) \triangleq \int_{0-}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

非零起始条件下线性微分方程求解

例6.16： $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

单边

$$uL(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)\, e^{-st}dt$$
$$= \int_{0-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t)\, e^{-st}dt$$
$$= e^{-a}\int_{0-}^{\infty} e^{-(s+a)}\, dt = e^{-a}\frac{1}{s+a}$$

当x<0, x(t)不全为零，单边和双边拉普拉斯是不一样的。

双边

$$L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)\, e^{-st}dt$$
$$= e^{s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)\, e^{-s(t+1)}d(t+1)$$
$$= e^{s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-st}dt$$
$$= \frac{e^{s}}{s+a},\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

单边拉普拉斯变换的性质 $uL\{x(t)\} \triangleq \int_{0-}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \tilde{X}(s)$

大部分与双边变换相同。主要不同：

时域微分 $\frac{dx(t)}{dt} \overset{L}{\longleftrightarrow} s\tilde{X}(s) - \boxed{x(0^-)}$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{L}{\longleftrightarrow} s^2\tilde{X}(s) \boxed{- sx(0-) - x'(0^-)}$$

时域积分

$$uL\{\int_{-\infty}^{t} x(t)dt\} = \frac{\tilde{X}(s)}{s} \boxed{+ \frac{\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau}{s}}$$

卷积 如果$x_1(t)$和$x_2(t)$都是单边信号，

$$x_1(t) * x_2(t) = \tilde{X}_1(s)\tilde{X}_2(s)$$

应用： 利用单边拉普拉斯变换性质，求解具有非零初始条件的微分方程---全响应。

基本信号 → LTI系统 → 基本响应

$\delta(t)$ $\qquad$ $h(t)$

任意信号 → LTI系统 → ？响应

$x(t) * h(t) \quad y(t)$

移位的冲激信号的线性组合

LTI系统的叠加性、齐次性和时不变性

卷积

- 1. 已知单位冲激信号的单位冲激响应
- 2. 将任意信号分解成<u>单位冲激信号</u>的组合
- 3. 得到任意信号的响应

	基本信号 →	LTI系统	→ 基本响应	特征值
特征函数	$e^{j\omega t}$		$e^{j\omega t}H(j\omega)$	
	e^{st}		$e^{st}H(s)$	
	任意信号 →	LTI系统	→ ？响应	
	$x(t)$	$*\ \mathrm{h}(t)$	$y(t)$	卷积
傅里叶变换	$X(j\omega)$	$\mathrm{H}\,(j\omega)$	$Y(j\omega)$	乘积
拉普拉斯变换	$X(s)$	$\mathrm{H}\,(s)$	$Y(s)$	

- 1. 已知基本信号的基本响应
- 2. 将任意信号分解成基本信号的组合（傅里叶变换）
- 3. 得到任意信号的频域响应

但是，不是所有信号都可以进行傅里叶变换，需满足收敛条件

6.7　用拉普拉斯变换分析LTI系统

- 连续时间系统分析的频域方法
  - 频域分析（傅里叶变换）
    - 稳定的LTI系统
    - 卷积得到零状态响应
  - 复频域（S域）分析（拉普拉斯变换）
    - 涉及的信号和系统更广泛
    - 可自动计入非零起始状态，从而一次可解得零输入响应，零状态响应和全响应

6.7.1 系统函数

LTI系统中，若输入$x(t)=e^{st}$，那么，其输出就是$H(s)e^{st}$；即，e^{st}是系统的特征函数，其特征值就是单位冲激函数的拉普拉斯变换. H(s)=L{h(t)}

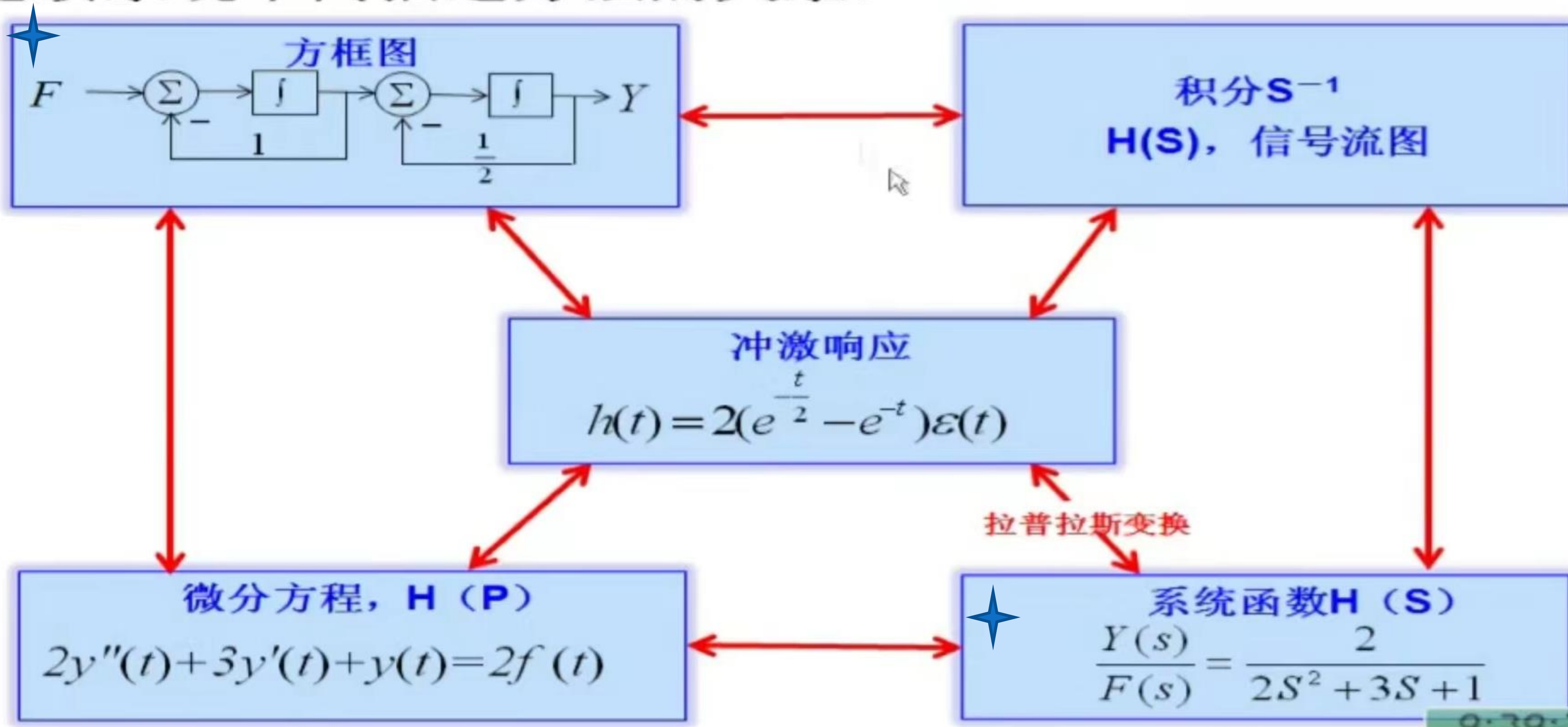
$$Y(s) = H(s)X(s)$$

当$s=j\omega$ 时，拉普拉斯变成傅立叶变换，H(s)为LTI系统的频率响应函数。

一般的，H(s)称为**系统函数**或**转移函数**

连续系统函数H(s)的定义和求解

连续系统不同描述方法的关系：



郭宝龙教授 西电

线性常系数微分方程

例

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

双边拉式变换

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}$$

因果信号 $h(t) = e^{-3t}u(t)$
从零时刻开始的信号

或

$h(t) = -e^{-3t}u(-t)$ 非因果

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s)$$

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

没有收敛域的说明，因为微分方程本身没有限制收敛域
需要结合稳定性和因果性等附加说明

零点

$$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0$$

极点

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$$

系统特性与系统函数

若LTI系统的输入　$x(t)=e^{-3t}u(t)$

输出　$y(t)=[e^{-t}-e^{-2t}]u(t)$

$$X(s)=\frac{1}{s+3},\mathrm{Re}\{s\}>-3 \qquad Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

系统函数　$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

1. 因果性

因果系统：一个系统在任何时刻的输出只决定于现在以及过去的输入，而与系统以后的输入无关

一个因果系统的系统函数的ROC是某个右半平面

反之，则不一定。

对于一个具有有理系统函数的系统来说，系统的因果性就等效于ROC位于最右边极点的右半平面

例 6.17

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

因果

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

例 6.18

$$H(s) = \frac{e^{s}}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}$$

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{e^{s}}{s+1}$$

非因果

2 稳定性

稳定系统：若系统的输入是有界的，则系统的输出也必须是有界的

当且仅当系统函数$H(s)$的ROC包括$j\omega$轴时，一个LTI系统是稳定的

当：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

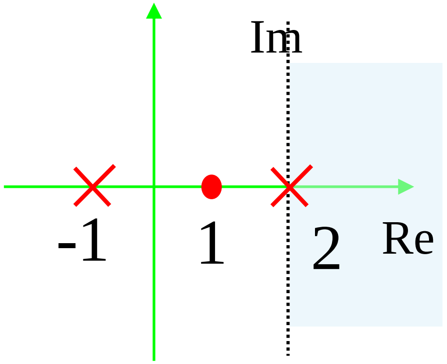
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

存在

$$H(s)|\sigma = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = H(j\omega)$$

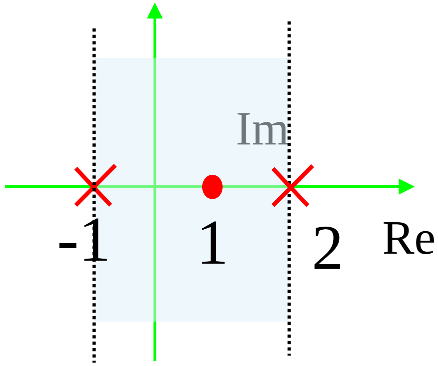
例

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$



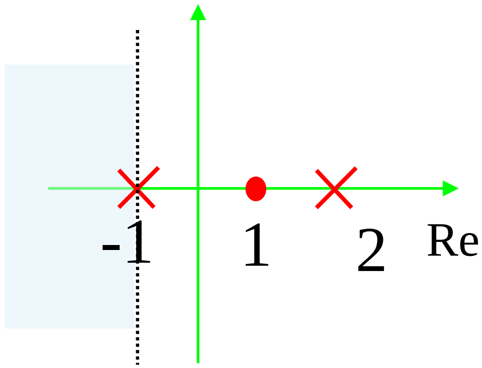
因果不稳定

$$h(t)=(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t})u(t)$$



非因果稳定

$$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$



非因果不稳定

$$h(t)=-(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t})u(-t)$$

3. 因果稳定性

当且仅当H(s)的全部极点都位于s平面的左半平面时，一个具有有理系统函数H(s)的因果系统才是稳定的

例

$$e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{2t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-2}, \mathrm{Re}\{s\} > 2$$

系统特性与系统函数

若LTI系统的输入 $x(t) = e^{-3t}u(t)$

输出 $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

$$X(s) = \frac{1}{s+3}, \mathrm{Re}\{s\} > -3 \qquad Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

系统函数 $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

极点-2，-1；所以ROC 为Re{s}>-1;
又极点-2，-1<0，所以系统是稳定的

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

例6.22 在下列条件下，求$H(s)$

1. 系统是因果。
2. 系统函数有理，仅有极点-2，4
3. 若 $x(t)=1$，则$y(t)=0$。
4. 冲激响应时，$t=0+$的值为4。

---

1. 因果系统，ROC在右边；极点s=4，不包含 $j\omega$ 轴.
   所以系统是不稳定

2. $$H(s)=\frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}$$

3. 若x(t)=1，则y(t)=0。 4. 冲激响应时，t=0+的值为4。

$$H(s)=\frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}$$

3. $x(t)=1=e^{0\cdot t}=e^{-st}\Big|_{s=0}$，　$y(t)\Big|_{s=0}=H(0)e^{0\cdot t}=0$，

所以$p(0)$=0，则p(s)=sq(s)

4. $h(0)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2q(s)}{s^2-2s-8}=4\Rightarrow q(s)=4$

$$\therefore H(s)=\frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$

6.7.3 全响应的求解

回顾

时域求解：对连续时间系统，可分别解得齐次解和特解（自由响应和强迫响应）

$$y(t)=\sum_{k=1}^{N}C_k e^{\lambda_k t}+B(t),t\geq 0$$

$$=\boxed{\sum_{k=1}^{N}C_{zik} e^{\lambda_k t}}+\boxed{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk} e^{\lambda_k t}+B(t)}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik} e^{\lambda_k t}+x(t)*h(t)$$

零输入响应：不考虑外加输入信号的作用，仅由系统的初始状态所产生的响应

零状态响应：不考虑系统初始状态的作用，即起始状态等于零，仅由系统的外加激励信号所产生的响应

6.7.3　全响应的求解

利用单边拉普拉斯变换性质:求解具有非零初始条件的微分方程---全响应。

$$uL\{x(t)\} \triangleq \int_{0-}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \tilde{X}(s)$$

时域微分 $\dfrac{dx(t)}{dt} \overset{L}{\longleftrightarrow} s\tilde{X}(s) - x(0^-)$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{L}{\longleftrightarrow} s^2\tilde{X}(s) - sx(0-) - x'(0^-)$$

时域积分 $uL\{\int_{-\infty}^{t} x(t)dt\} = \dfrac{\tilde{X}(s)}{s} + \dfrac{\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau}{s}$

卷积 如果$x_1(t)$和$x_2(t)$都是单边信号，

$$x_1(t) * x_2(t) = \tilde{X}_1(s)\tilde{X}_2(s)$$

例:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad y(0-)=\beta, y'(0-)=\gamma$$

设:$x\,(t)=au(t)$

$$s^2Y(s)-\beta s-\gamma+3sY(s)-3\beta+2Y(s)=a/s$$

$$Y(s)=\boxed{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)}+\frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}}+\frac{a}{s(s+1)(s+2)}$$

零输入响应

零状态响应
(初始松弛)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = au(t) \\ \\ y(0-) = \beta, y'(0-) = \gamma \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{a}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \beta(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}) + \gamma(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}) + \frac{a}{2}(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2})$$
$$= \frac{a}{2s} + \frac{2\beta + \gamma - a}{s+1} + \frac{a + 2\beta + 2\gamma}{2(s+2)}$$

$$y(t) = [\frac{\alpha}{2} + (2\beta + \gamma - \alpha)e^{-t} + \frac{(\alpha + 2\beta + 2\gamma)}{2}e^{-2t}]u(t)$$

6.7.2 S域的元件模型

时域　　　　**s域**

电阻R:　$v_R(t) = Ri_R(t)$　　$\tilde{V}_R(s) = \tilde{R}I_R(s)$

电感L:　$v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$　　$\tilde{V}_L(s) = sL \cdot \tilde{I}_L(s) - Li_L(0^-)$

电容C:　$v_C(t) = \dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$　　$\tilde{V}_C(s) = \dfrac{1}{sC}\tilde{I}_C(s) + \dfrac{1}{s}v_C(0^-)$

复频域阻抗　　复频域阻抗

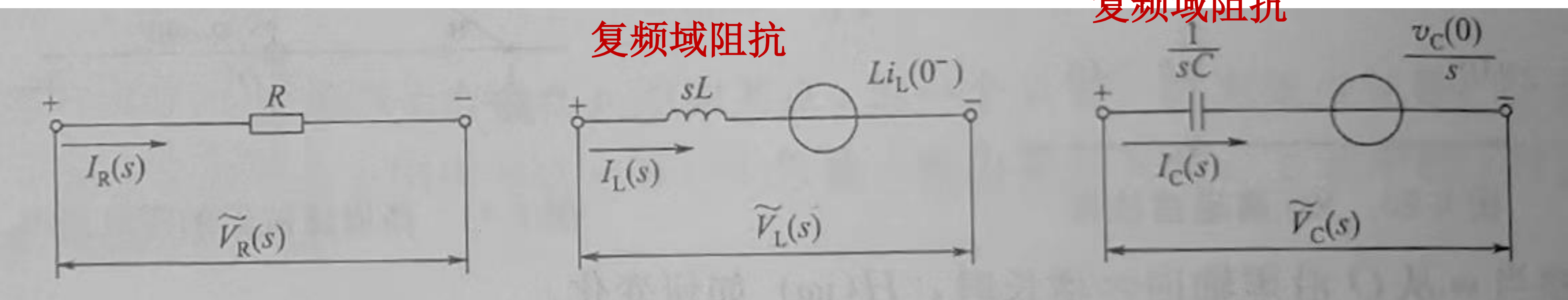
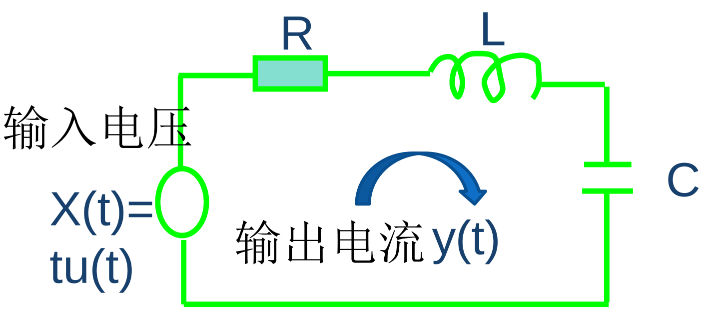
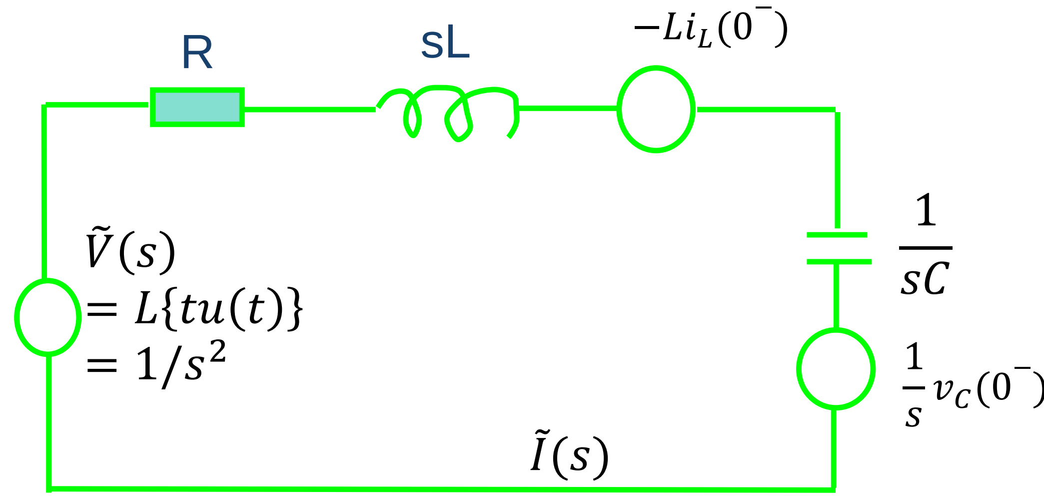


图 6-23　元件的电压降与电流关系的 S 域模型（回路分析）





$$\tilde{I}(s) = \frac{\tilde{V}(s)+Li(0^-)-\frac{v_C(0^-)}{s}}{R+sL+\frac{1}{sC}} = \overset{\tilde{I}_{zs}(s)}{\boxed{\frac{\tilde{V}(s)}{R+sL+\frac{1}{sC}}}} + \overset{\tilde{I}_{zi}(s)}{\boxed{\frac{Li(0^-)-\frac{v_C(0^-)}{s}}{R+sL+\frac{1}{sC}}}}$$

$$H(s) = \frac{\tilde{I}_{zs}(s)}{\tilde{V}(s)} = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

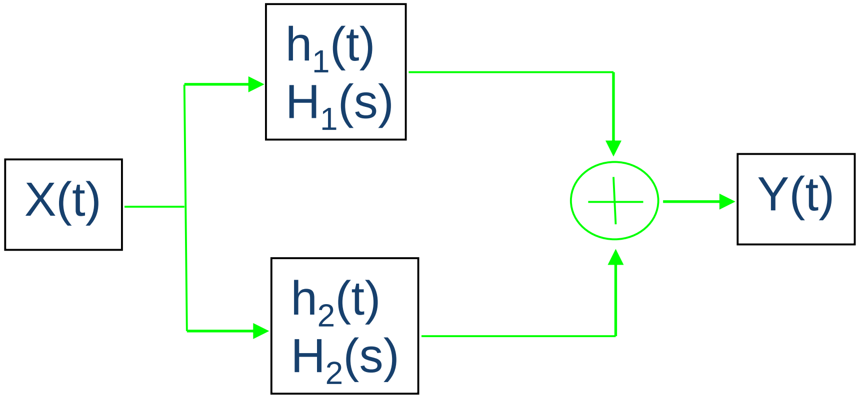
6.7.4 系统函数与方框图

LTI系统互连的系统函数

并连

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

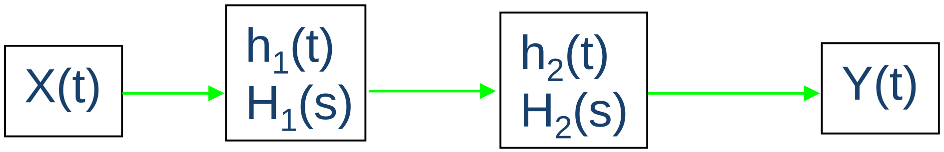
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$



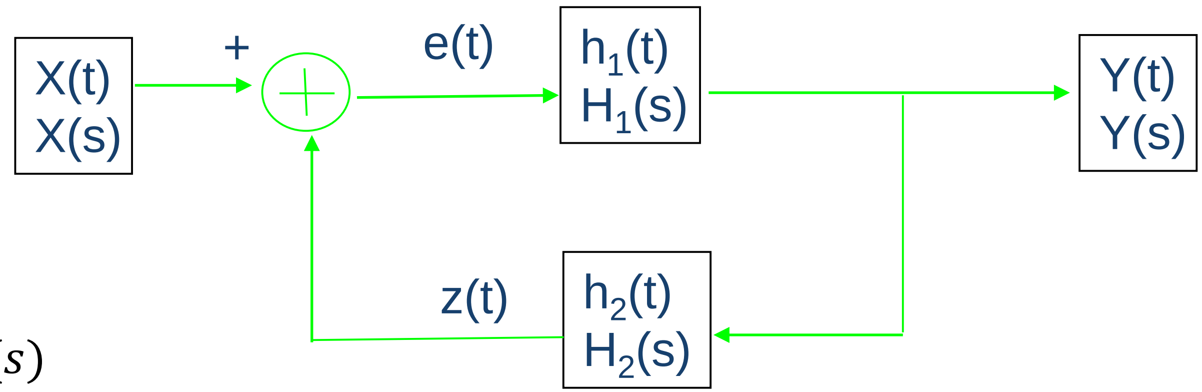
级连

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$



反馈



$$Y(s) = H_1(s)E(s)$$

$$E(s) = X(s) + Z(s)$$

$$Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) + H_2(s)Y(s)]$$

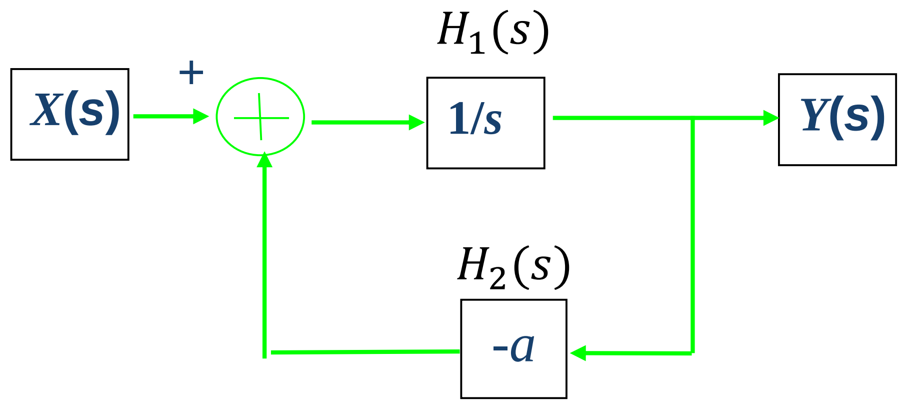
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

微分方程与方框图

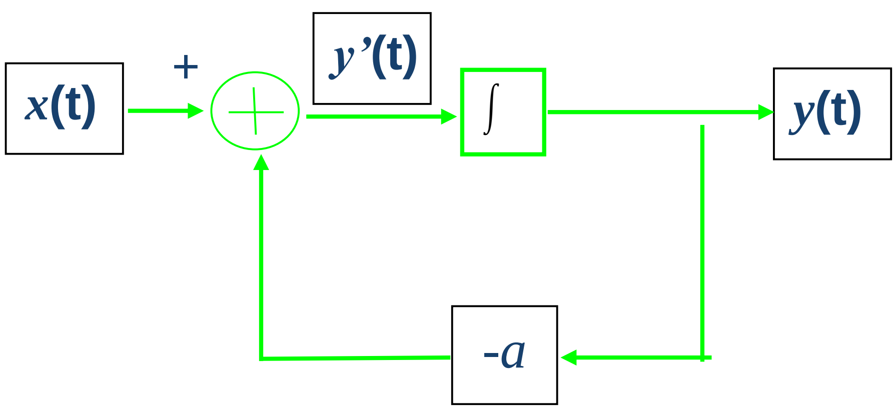
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t)$$

$$y(t) = \int [x(t) - ay(t)]dt$$

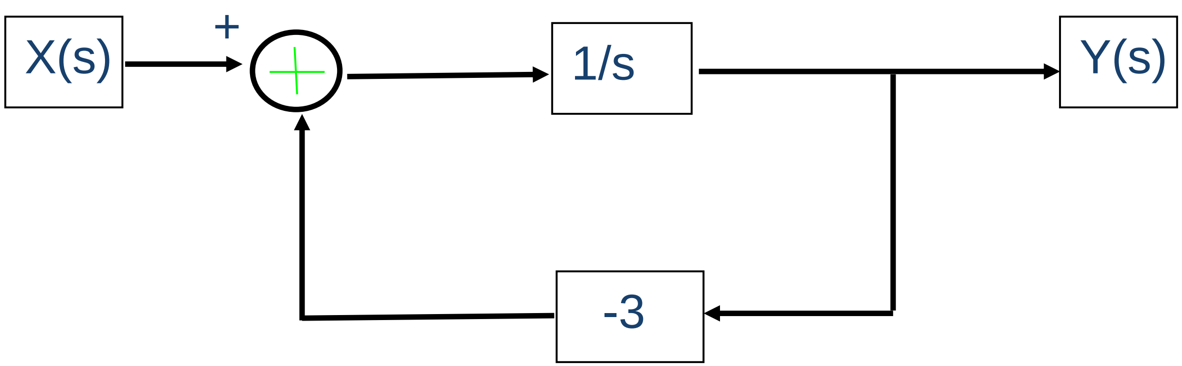


$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}a} = \frac{1}{s+a}$$



例6.23 已知系统函数 $H(s)=\dfrac{1}{s+3}$ ，写出微分方程，画出方框图。

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t) \qquad H(s)=\frac{1}{s+3}=\frac{1/s}{1+3\cdot 1/s}$$



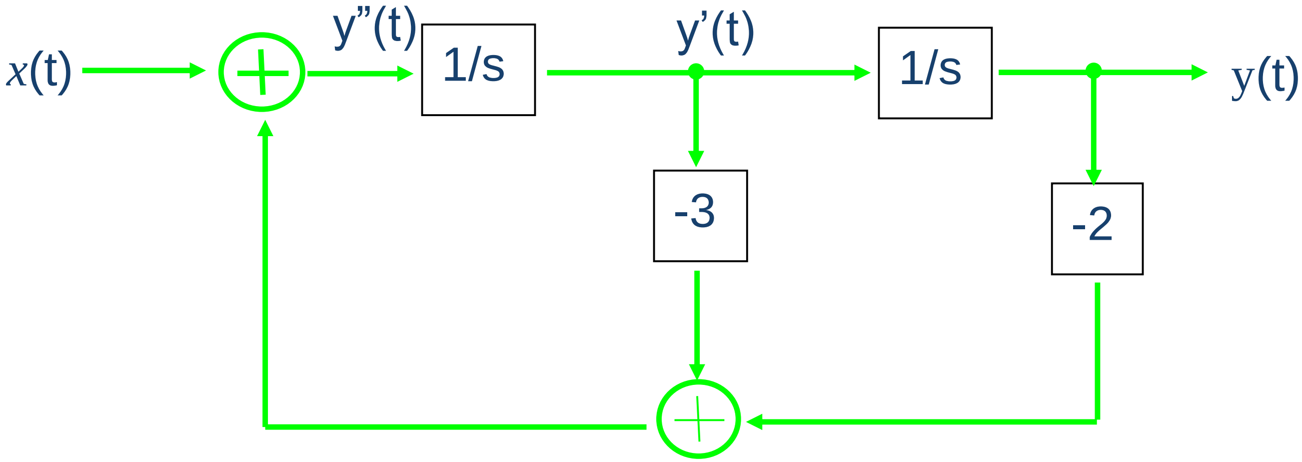
例6.24　画出下面系统的框图

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$(1)\ H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(2) H(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+2}$$

$$(3) H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

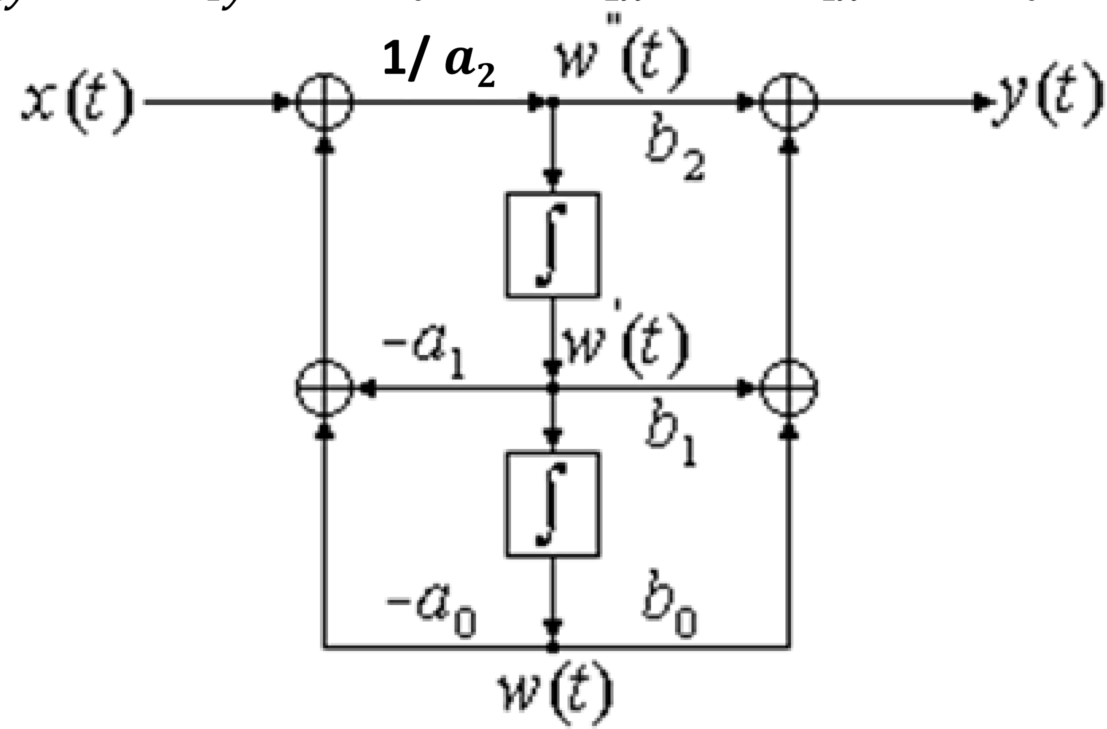


直接II型

$$a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2x''(t)+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

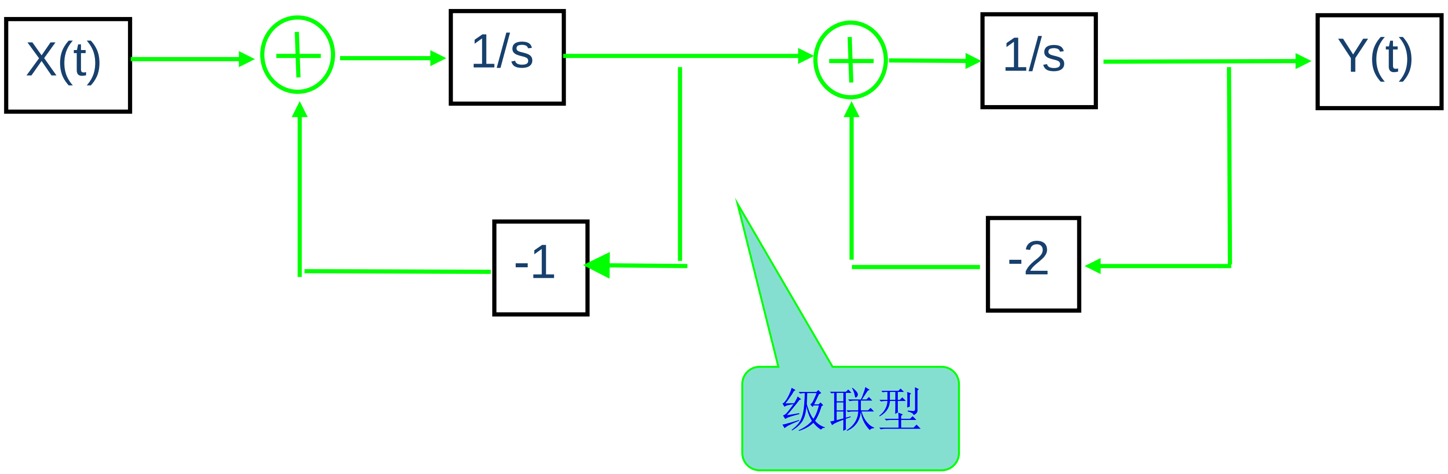
$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$



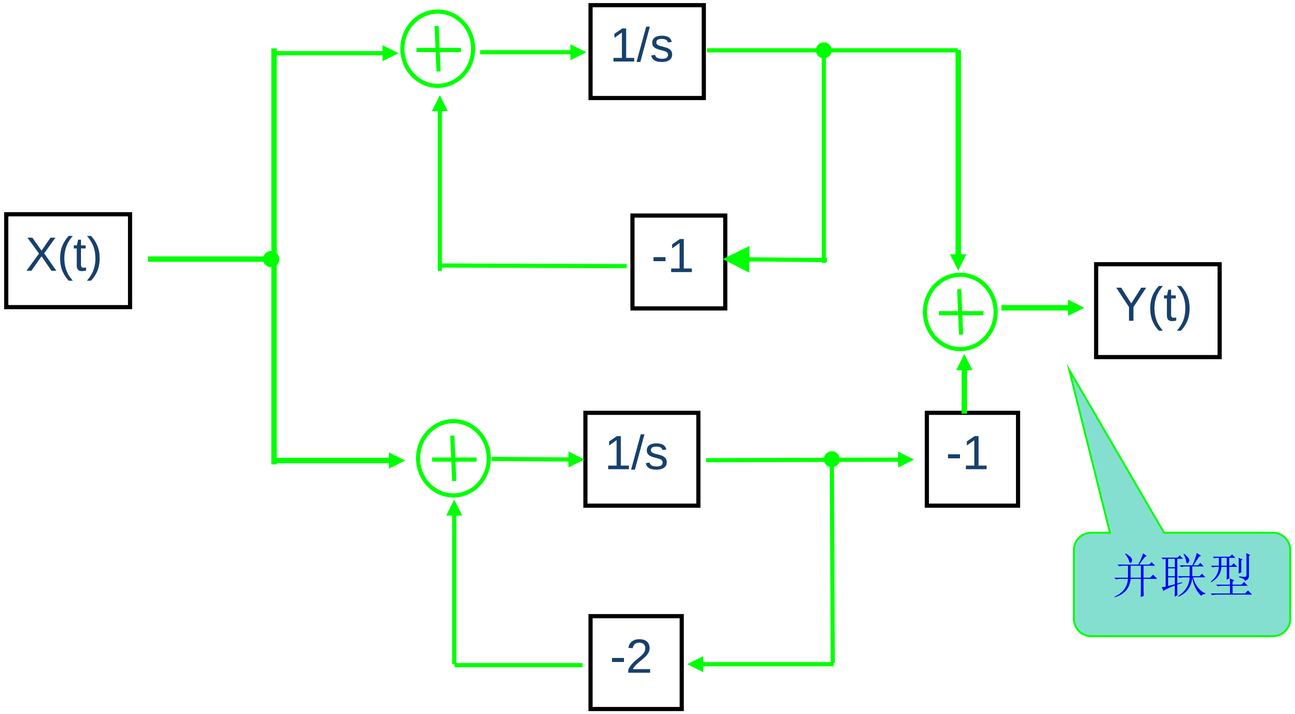
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+2}$$



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$



小结

拉普拉斯变换和反变换
拉普拉斯变换的性质
线性常系数微分方程的求解
有理拉普拉斯的零极点，对应稳定性、因果性等

作业：6.1(2), 6.2(4), 6.9, 6.14, 6.16, 6.18, 6.25, 6.30(2)