Nabla 算子

乌洛托品

2024 年 4 月 21 日

1 面向读者与符号约定

本文主要面向场波初学者，对于 Nabla 算子的一些基本规则进行总结，以便于初学者快速掌握相关知识。当然，在阅读本教程之前，读者需对矢量代数 (如矢量的点积、叉积、混合积和二重叉积等) 和矢量微积分的基本概念 (如梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子等) 有一定的了解。

在本文中，我们约定如下符号规则：以下公式中，C_1, C_2 为常标量，$\vec{C}$ 为常矢量，u 与 v 为标量函数，$\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 为矢量函数，$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ 为场点矢径，$\vec{r'} = x'\vec{e_x} + y'\vec{e_y} + z'\vec{e_z}$ 为源点矢径，记 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r'}$，$R = |\vec{R}|$

2 矢量代数基础

本节主要回忆一些基本的矢量恒等式，以便于后续的推导。

(1) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

* 这就是所谓矢量二重叉积的 BAC-CAB(back-cab) 法则，很容易记忆。注意到，等式右边也非常有特色，是一个矢量数乘两个矢量点积的形式。因为过于简单 (只要硬算)，此处不再加以证明 (太难算了好吗)。

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

* 混合积具有轮换对称性，因此可以写成行列式的形式，这样更容易记忆。

好了，简单的热身过后，让我们正式进入 Nabla 算子的世界吧！(坏笑)

3 线性规则

(1) $\nabla(C_1 u \pm C_2 v) = C_1 \nabla u \pm C_2 \nabla v$

(2) $\nabla \cdot (C_1\vec{A} \pm C_2\vec{B}) = C_1 \nabla \cdot \vec{A} \pm C_2 \nabla \cdot \vec{B}$

(3) $\nabla \times (C_1\vec{A} \pm C_2\vec{B}) = C_1 \nabla \times \vec{A} \pm C_2 \nabla \times \vec{B}$

(4) $\nabla \cdot (u\vec{C}) = \nabla u \cdot \vec{C}$

(5) $\nabla \times (u\vec{C}) = \nabla u \times \vec{C}$

上述公式应该没什么好说的，由微分的线性性易得

4 乘积的微分规则

(1) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$
* 同标量乘积的求导法则

(2) $\nabla(f(u,v)) = f'(u)\nabla u + f'(v)\nabla v$
* 同上，求导的链式法则对梯度运算也成立

(3) $\nabla\cdot(u\vec{A}) = u\nabla\cdot\vec{A} + \nabla u\cdot\vec{A}$
* 考虑到 $\nabla\cdot(u\vec{A})$ 为标量 (点积)，右式为仅对 $\vec{A}$ 微分 $(u\nabla\cdot\vec{A})$ 和仅对 u 微分 $(\nabla u\cdot\vec{A})$ 之和

(4) $\nabla\times(u\vec{A}) = u\nabla\times\vec{A} + \nabla u\times\vec{A}$
* 同上

(5) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\nabla\times\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times\nabla\times\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$
* $\vec{A}\cdot\nabla =: A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}$
** $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \nabla_{\vec{A}}(\vec{A}\cdot\vec{B}) + \nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\cdot\vec{B})$，其中，下标表示对该矢量求导，另一矢量视为常矢量。显然，当 $\nabla_{\vec{B}}$ 只作用于 $\vec{B}$ 时，$\nabla_{\vec{B}}$ 就被简化为 ∇
*** 对于一个矢量数乘两个矢量点积的形式，很容易联想到 BAC-CAB(back-cab) 法则，就有 $\vec{A}\times\nabla_{\vec{B}}\times\vec{B} = \nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_{\vec{B}})$，由于 $\nabla_{\vec{B}}$ 只能作用于 $\vec{B}$，所以 $\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla_{\vec{B}})$ 需要改写为 $(\vec{A}\cdot\nabla_{\vec{B}})\vec{B}$，因此有 $\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\nabla_{\vec{B}}\times\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla_{\vec{B}})\vec{B} = \vec{A}\times\nabla\times\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$，同理易得含有 $\nabla_{\vec{A}}$ 的等式，故上式得证

(6) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$
* 同理，有 $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \nabla_{\vec{A}}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) + \nabla_{\vec{B}}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$，由于混合积的轮换对称性，易得 $\nabla_{\vec{A}}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla_{\vec{A}}\times\vec{A}$，$\nabla_{\vec{B}}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{A}\cdot\nabla_{\vec{B}}\times\vec{B}$，综合两式，就有 $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

(7) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})$
* 同理，有 $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \nabla_{\vec{A}}\times(\vec{A}\times\vec{B}) + \nabla_{\vec{B}}\times(\vec{A}\times\vec{B})$，对于矢量双重积，我们毫不犹豫地使用 BAC-CAB 法则，于是有 $\nabla_{\vec{A}}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla_{\vec{A}}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla_{\vec{A}}\cdot\vec{A})$，然而 $\nabla_{\vec{A}}$ 只能作用于 $\vec{A}$，所以 $\vec{A}(\nabla_{\vec{A}}\cdot\vec{B})$ 只能改写为 $(\vec{B}\cdot\nabla_{\vec{A}})\vec{A}$. 对于含有 $\nabla_{\vec{B}}$ 的等式同理易得。

5 二阶微分规则

(1) $\nabla\times\nabla u = 0$

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$
* 梯无旋，旋无散

(3) $\nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$
* Laplace 算子的定义

(4) $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$
* 旋度的旋度等于梯度的散度减去散度的梯度 (Laplace 项)
** 证明还是老套路，看到矢量双重积，就想到 BAC-CAB 法则，于是 $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\nabla\cdot\nabla)$，由于 Nabla 算子只能作用于矢量，因此我们将 $\vec{A}(\nabla\cdot\nabla)$ 改写为 $\nabla^2\vec{A}$，得证。

6 含矢径的常用公式

(1) $\nabla\cdot\vec{r}=3$

(2) $\nabla\times\vec{r}=0$
* 矢径的散度为 3(空间的维度)，旋度为 0(笔直向外，显然无旋)

(3) $\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}$
* 这一公式很容易记忆，可看作只存在一个电荷的电场，只需代入电势的负梯度为场强即可

(4) $\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\vec{r})$
* 同样可看作只存在一个电荷的电场，左式可看作电场的散度（根据高斯定理，与电荷体密度成正比），显然在无电荷分布处均为 0，而在源处趋于无穷大，故须用 δ 函数表示（负号继承自 (3) 式）

7 坐标系变换规则

前述的公式均是在直角坐标系下成立的，然而工程上往往需要使用其他坐标系 (如圆波导就更适合使用圆柱坐标系)，此时需进行坐标系变换。在变换后的坐标系中，我们使用另一个三元组 (q_1,q_2,q_3) 来替代原有的 (x,y,z)。可见 q_1,q_2,q_3 都是 x,y,z 的函数，同时 x,y,z 也都是 q_1,q_2,q_3 的函数。

一般地，对于工程应用而言，属于不同坐标 q_i 的坐标曲线 (即某一坐标 q_i 为变量，其他坐标均为常数的空间曲线) 之间是两两正交的，这种坐标系被称为正交曲线坐标系。因此，以下我们着重研究正交曲线坐标系下的 Nabla 算子。

7.1 拉梅系数

将矢径微分，得：

$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}dq_3 \tag{1}$$

根据几何直观，正交曲线坐标系中每一点的基矢方向应该分别沿着三条坐标曲线的切线方向，也就是矢径对三个坐标的偏导数方向，因此有：

$$\vec{r}=\vec{e_1}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right|dq_1+\vec{e_2}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\right|dq_2+\vec{e_3}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\right|dq_3 \tag{2}$$

定义拉梅系数 h_i 为：$h_i=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|$，因此上式可改写为：

$$\vec{r}=\vec{e_1}h_1dq_1+\vec{e_2}h_2dq_2+\vec{e_3}h_3dq_3 \tag{3}$$

7.2 梯度

根据定义，梯度在三个基矢下的分量恰好是标量函数在这三个方向上的方向导数，即：

$$\nabla u=\vec{e_1}\frac{\partial u}{\partial\vec{r_1}}+\vec{e_2}\frac{\partial u}{\partial\vec{r_2}}+\vec{e_3}\frac{\partial u}{\partial\vec{r_3}} \tag{4}$$

其中，$\vec{r_i}$ 表示在第 i 个坐标 q_i 方向上的位置，由于 $dr_i=h_idq_i$，因此有：

$$\nabla u=\vec{e_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}+\vec{e_2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}+\vec{e_3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3} \tag{5}$$

故 Nabla 算子在任意正交曲线坐标系下的表达式为：

$$\nabla=\sum_i^3\vec{e_i}\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \tag{6}$$

7.3 散度

根据定义，散度即单位体积内矢量场 $\vec{A}$ 的通量，即：

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{7}$$

由于趋于 0 的小环面 S 的形状是任意的，我们不妨取一个长宽高分别为 $h_1 dq_1, h_2 dq_2, h_3 dq_3$ 的小立方体，则面元 $dS_i = h_j h_k dq_j dq_k$，体积元 $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$，每次取一组相对面进行积分，则 $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 可表示为：

$$\sum_i^3 (A_i' dS_i' - A_i dS_i) = \sum_i^3 (A_i' h_j' h_k' - A_i h_j h_k) dq_j dq_k = \frac{\partial}{\partial q_i}(A_i h_j h_k) dq_i dq_j dq_k \tag{8}$$

最后约去体积元，即得：

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i^3 \frac{\partial}{\partial q_i}(A_i h_j h_k) \tag{9}$$

7.4 旋度

根据定义，旋度即单位面积内矢量场 $\vec{A}$ 的有向环量。换言之，旋度矢量在每一坐标上的分量就是它在这一坐标平面内的投影，即：

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{10}$$

不妨分别在 3 个坐标平面内进行计算,此时法矢 $\vec{n}$ 分别为 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$。当 $\vec{n} = \vec{e_1}$ 时,取一个长宽分别为 $h_2 dq_2, h_3 dq_3$ 的小矩形，则面元 $dS_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$，故 $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 可表示为：

$$-(A_2' h_2' - A_2 h_2) dq_2 + (A_3' h_3' - A_3 h_3) dq_3 = \left(\frac{\partial A_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial A_2 h_2}{\partial q_3} \right) dq_2 dq_3 \tag{11}$$

因此，旋度在第一个坐标平面上的分量为：

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{e_1} = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial A_2 h_2}{\partial q_3} \right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(h_1 \frac{\partial h_3 A_3}{\partial q_2} - h_1 \frac{\partial h_2 A_2}{\partial q_3} \right) \tag{12}$$

不难验证，一般曲线坐标系下的旋度可以表示为：

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e_1} & h_2 \vec{e_2} & h_3 \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{13}$$

7.5 Laplace 算子

根据定义，Laplace 算子即梯度的散度，即：

$$\nabla^2 = \nabla \cdot (\sum_i^3 \vec{e_i} \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i^3 \frac{\partial}{\partial q_i} (\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}) \tag{14}$$

7.6 圆柱坐标系

以上就是正交曲线坐标系下 Nabla 算子的一般表达式。下面我们以圆柱坐标系为例，来具体计算 Nabla 算子及 Laplace 算子的表达式。

圆柱坐标系下，我们取三个坐标 $q_1 = \rho, q_2 = \theta, q_3 = z$，则有：

$$d\vec{r} = \vec{e_\rho} d\rho + \vec{e_\theta} \rho d\theta + \vec{e_z} dz \tag{15}$$

即 $h_1=1,h_2=\rho,h_3=1$，故易得 Nabla 算子的表达式为：

$$\nabla=\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e_\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{16}$$

同理，Laplace 算子的表达式为：

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{17}$$

或简化为：

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{18}$$

7.7 球坐标系

球坐标系下，我们取三个坐标 $q_1=\rho,q_2=\theta,q_3=\phi$，则有：

$$d\vec{r}=\vec{e_\rho}d\rho+\vec{e_\theta}\rho d\theta+\vec{e_\phi}\rho\sin\theta d\phi \tag{19}$$

即 $h_1=1,h_2=\rho,h_3=\rho\sin\theta$，故易得 Nabla 算子的表达式为：

$$\nabla=\vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e_\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e_\phi}\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{20}$$

同理，Laplace 算子的表达式为：

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{21}$$

或简化为：

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{22}$$

8 张量形式的 Nabla 算子

本节需要读者对张量有初步的认识 (包括张量积与张量的缩并)。对于场波初学者而言，可以跳过这一节，因为张量形式的 Nabla 算子并不是必须的。但对于高阶的场波学习者而言，张量形式的 Nabla 算子是重要的，因为它可以使矢量微分运算进一步简化，从而使推导更加简洁。

8.1 Einstein 求和约定

Einstein 求和约定是一种简化张量运算的方法，当一个指标在一个式子中出现两次，一个上标一个下标，那么就表示对这两个指标求和，也即：

$$A_iB^i=\sum_i^3 A_iB^i \tag{23}$$

可以看到，这种记号能够省略掉求和符号，使得张量运算更加简洁。事实上，我们看到上式恰好表示了两个矢量 A^i 与 B_i 的点积。对于工科而言，不妨先简单认为上标表示列向量，下标表示行向量，那么上式就是矩阵乘法的一种简化形式。虽然这种理解不那么严谨，然而对于初学者而言，这种理解更加直观，同时并不妨碍计算。

以下，在不引起歧义的情况下，我们将一直使用 Einstein 求和约定。

8.2 Kronecker delta 符号

以下引入 Kronecker delta 符号，定义如下：

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{24}$$

不难发现，这实际上就是单位张量，从而其转置等于自身，即 $\delta_i^j = \delta_j^i$。一个有趣的性质是，δ_i^j 可以表示为基矢的点积，即 $\delta_i^j = \vec{e_i} \cdot \vec{e^j}$。$\delta_i^j$ 的另一个重要性质是其筛选性，即：

$$\delta_i^j A_j = A_i \tag{25}$$

对于二阶张量而言，筛选性质可以写作：

$$\delta_i^j M_j^k = M_i^k \tag{26}$$

以及

$$\delta_{ij} M_k^j = M_{ik} \tag{27}$$

上下标仅仅是为了区分张量的“行阶”与“列阶”，但并不影响 Kronecker delta 符号的性质。

具有较好数理基础的读者不难发现，δ_i^j 实际上恰好对应于连续函数中的单位冲激函数 $\delta(x - x_0)$，因此两者都被记作 δ。

8.3 Levi-Civita 符号

Levi-Civita 符号 ε_{ijk} 是一个三阶全反对称张量，定义如下：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k)\text{为}(1,2,3)\text{的偶排列}, \\ -1 & (i,j,k)\text{为}(1,2,3)\text{的奇排列}, \\ 0 & i = j \text{ 或 } j = k \text{ 或 } k = i. \end{cases} \tag{28}$$

感谢浙大版线代教材，让我们对行列式采取了逆序数的定义，相信同学们对奇偶排列的概念并不陌生 (其实是我懒得写了，陌生也不要紧，有兴趣的自己去看书吧 hhh)。简单来看，其实只需要记住 ε_{ijk} 的轮换对称性，也即：$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$，其余都为 0 即可。从而行列式可以非常直观地改写为：

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \tag{29}$$

与行列式形式相似的矢量叉积也很容易表示为：

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix} = \varepsilon^i{}_{jk} \vec{e_i} A^j B^k \tag{30}$$

相应地，叉积的每一个分量也可以表示为：

$$\vec{e^l} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{e^l} \cdot \varepsilon^i{}_{jk} \vec{e_i} A^j B^k = \delta_i^l \varepsilon^i{}_{jk} A^j B^k = \varepsilon^l{}_{jk} A^j B^k \tag{31}$$

或

$$(\vec{A} \times \vec{B})^i = \varepsilon^i{}_{jk} A^j B^k \tag{32}$$

这里，为什么 $\vec{e_i}$ 中的 i 是下标而不是上标呢？这是因为每一个列向量都可以表示为其分量和基矢点积的形式，即 $\vec{A}=\vec{e_i}A^i$, 因此基矢 $\vec{e_i}$ 中 i 必须是下标。那为什么 $\vec{e^l}$ 中的 l 是上标而不是下标呢？这是因为 $\vec{e^l}$ 需要和 $\vec{e_i}$ 点乘，因此必须是一个列向量

接下来引入最重要的大杀器，它联系了 Levi-Civita 符号和 Kronecker delta 符号——可以说，记住这个公式就基本无敌了。废话不多说，直接上公式：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm}=\delta^l_j\delta^m_k-\delta^m_j\delta^l_k=\begin{vmatrix}\delta^l_j & \delta^m_j\\ \delta^l_k & \delta^m_k\end{vmatrix} \tag{33}$$

下面我们来看看这个公式的威力

8.4 再论矢量双重叉积公式

听说你很难证？没事，我们现在回过头再来看看：

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \varepsilon^i{}_{jk}\vec{e_i}A^j(\vec{B}\times\vec{C})^k\\
&= \varepsilon^i{}_{jk}\vec{e_i}A^j\varepsilon^k{}_{lm}B^lC^m\\
&= \vec{e_i}\varepsilon^i{}_{jk}\varepsilon^k{}_{lm}A^jB^lC^m\\
&= \vec{e_i}\varepsilon_k{}^i{}_j\varepsilon^k{}_{lm}A^jB^lC^m\\
&= \vec{e_i}(\delta^i_l\delta_{jm}-\delta^i_m\delta_{jl})A^jB^lC^m\\
&= \vec{e_i}A^jB^iC_j-\vec{e_i}A^jB_jC^i\\
&= (\vec{e_i}B^i)(A^jC_j)-(\vec{e_i}C^i)(A^jB_j)\\
&= \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})
\end{aligned}$$

简直太变态了好吗？

8.5 Nabla 算子的张量形式

刚才的矢量双重积公式只是一盘开胃菜，接下来让我们进入正题。首先，让我们把 Nabla 算子表示为张量形式:

$$\nabla=\vec{e_i}\frac{\partial}{\partial x^i}=:\vec{e_i}\partial_i \tag{34}$$

其中，∂_i 表示对 x^i 求导。这是直角坐标系中的形式，那么在一般坐标系下，Nabla 算子的表达式为：

$$\nabla=\vec{e_i}\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q^i}=:\vec{e_i}\partial_i \tag{35}$$

其中，h_i 为拉梅系数，$\partial_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q^i}$。显然，这一定义对于直角坐标系也同样成立。这样，我们就把任意正交曲线坐标系下的 Nabla 算子用张量形式统一起来了。

8.6 再论矢量恒等式

既然 Nabla 算子可以用张量形式来表示，那现在就让我们来看看这些繁琐的恒等式在张量形式下是如何简化的。比如旋度的旋度？听着就很复杂吧？

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\vec{A} &= \varepsilon^{i}{}_{jk}\vec{e_i}\partial_j(\nabla\times\vec{A})^k \\
&= \varepsilon^{i}{}_{jk}\vec{e_i}\partial_j(\varepsilon^{k}{}_{lm}\partial^l A^m) \\
&= \vec{e_i}\varepsilon_{k}{}^{i}{}_{j}\varepsilon^{k}{}_{lm}\partial_j\partial_l A^m \\
&= \vec{e_i}(\delta^i_l\delta_{jm}-\delta^i_m\delta_{jl})\partial_j\partial_l A^m \\
&= \vec{e_i}(\partial^i\partial_j A^j-\partial_j\partial^j A^i) \\
&= (\vec{e_i}\partial^i)(\partial_j A^j)-(\partial_j\partial^j)(\vec{e_i}A^i) \\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}
\end{aligned}
$$

两个字，薄纱。再来！叉积的旋度怎么说？

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= \varepsilon^{i}{}_{jk}\vec{e_i}\partial^j(\vec{A}\times\vec{B})^k \\
&= \varepsilon^{i}{}_{jk}\vec{e_i}\partial^j(\varepsilon^{k}{}_{lm}A^l B^m) \\
&= \vec{e_i}\varepsilon_{k}{}^{i}{}_{j}\varepsilon^{k}{}_{lm}\partial^j A^l B^m \\
&= \vec{e_i}(\delta^i_l\delta_{jm}-\delta^i_m\delta_{jl})\partial^j A^l B^m \\
&= \vec{e_i}(\delta^i_l\delta_{jm}-\delta^i_m\delta_{jl})(A^l\partial^j B^m+B^m\partial^j A^l) \\
&= \vec{e_i}(A^i\partial_j B^j-A_j\partial^j B^i+B_j\partial^j A^i-B^i\partial_j A^j) \\
&= (\vec{e_i}A^i)(\partial_j B^j)-(A_j\partial^j)(\vec{e_i}B^i)+(B_j\partial^j)(\vec{e_i}A^i)-(\vec{e_i}B^i)(\partial_j A^j) \\
&= \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})
\end{aligned}
$$

还是两个字，薄纱。再来！点积的梯度怎么说？

$$
\begin{aligned}
\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \vec{e_i}\partial^i(A_j B^j) \\
&= \vec{e_i}B^j\partial^i A_j+\vec{e_i}A_j\partial^i B^j \\
&= \delta^i_l\delta^m_j\vec{e_i}B^j\partial^l A_m+\delta^i_l\delta^j_m\vec{e_i}A_j\partial^l B^m \\
&= (\varepsilon_{k}{}^{i}{}_{j}\varepsilon^{k}{}_{l}{}^{m}+\delta^{im}\delta_{jl})\vec{e_i}B^j\partial^l A_m+(\varepsilon_{k}{}^{ij}\varepsilon^{k}{}_{lm}+\delta^i_m\delta^j_l)\vec{e_i}A_j\partial^l B^m \\
&= \varepsilon^{i}{}_{jk}\vec{e_i}B^j\varepsilon^{k}{}_{l}{}^{m}\partial^l A_m+\vec{e_i}B^j\partial_j A^i+\varepsilon^{ij}{}_{k}\vec{e_i}A_j\varepsilon^{k}{}_{lm}\partial^l B^m+\vec{e_i}A_j\partial^j B^i \\
&= \varepsilon^{i}{}_{jk}\vec{e_i}B^j(\nabla\times\vec{A})^k+(B_j\partial^j)(\vec{e_i}A^i)+\varepsilon^{ij}{}_{k}\vec{e_i}A^j(\nabla\times\vec{B})^k+(A_j\partial^j)(\vec{e_i}B^i) \\
&= \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}
\end{aligned}
$$

还是两个字，薄纱。相信这三个例子已经足以说明 Nabla 算子的张量形式的计算方法了。

9 写在最后

作为光电的同学，当时学场波就深觉得数理基础不扎实，比较初等的 Nabla 算子也并不能熟练掌握。作为过来人，我想不妨整理以下这些基础的数学内容，也希望能对同学们有微薄的帮助。最后的最后，码字不易，希望大家多多支持！