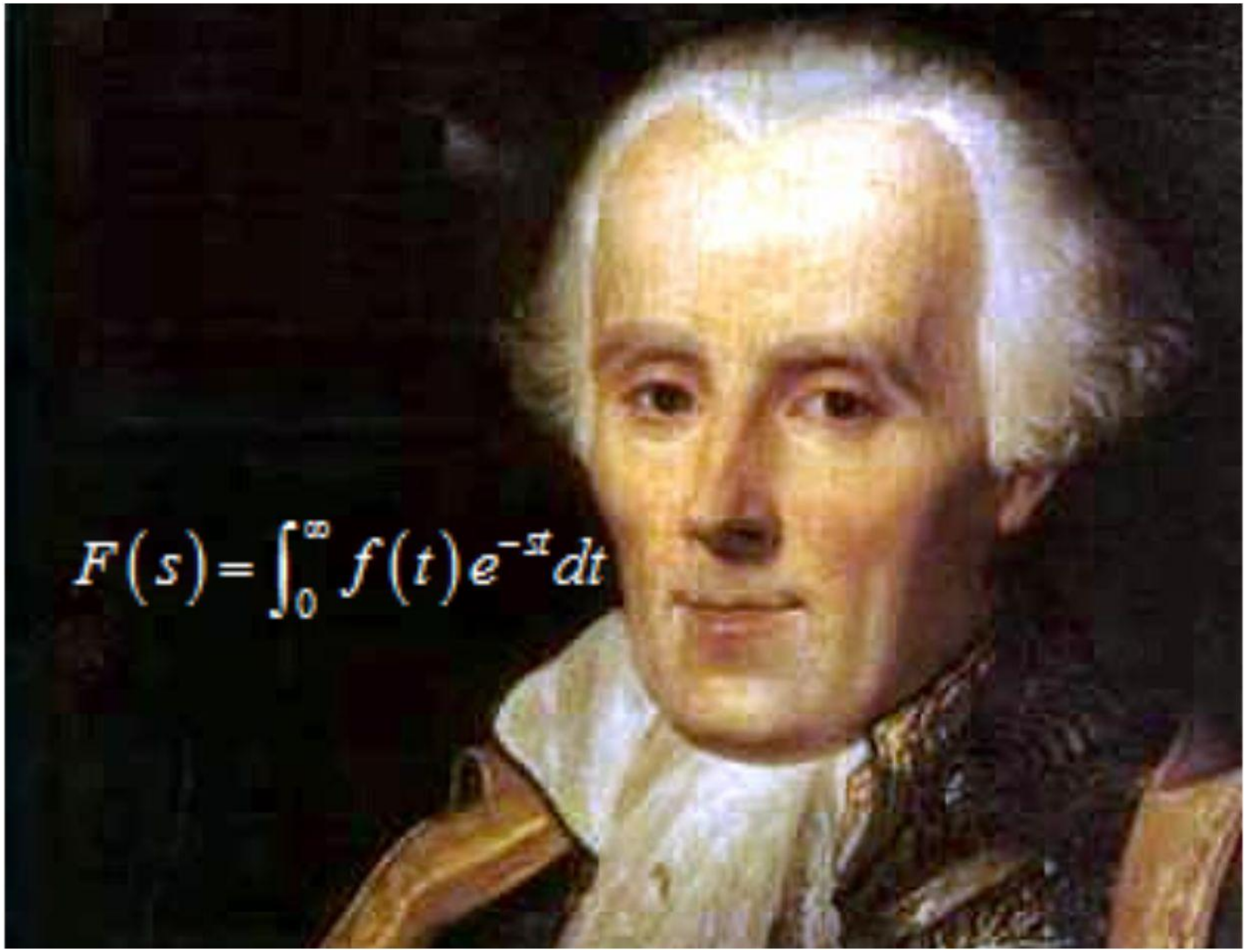


《信号与系统》 第七章 z变换

叶慧慧

yehuihui@zju.edu.cn

……的应用。系统的基本连接方式有并联连接、串联连接、反馈连接三种。

一个并联系统，如图 6-26(a)，系统函数为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=[H_1(s)+H_2(s)] \tag{6-95}$$

一个串联系统，如图 6-26(b)，系统函数为

$$H(s)=H_1(s)H_2(s) \tag{6-96}$$

反馈系统如图 6-26(c) 所示，它的系统函数为

$$Y(s)=H_1(s)E(s)$$

$$E(s)=X(s)-Y(s)H_2(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)} \tag{6-97}$$

第 2 章曾讲过用三个基本运算单元，用加法器、乘法器和积分器来仿真微分方程所描述的连续时间 LTI 系统，用加法器、乘法器和延时器画出差分方程的方框图，用这三种基本运算单元能构造任意阶

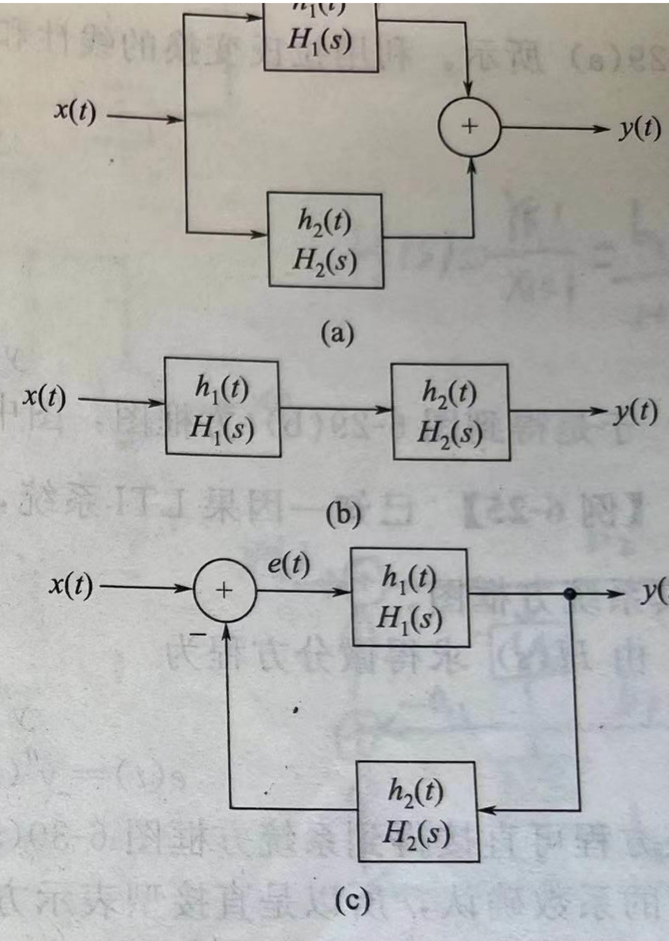
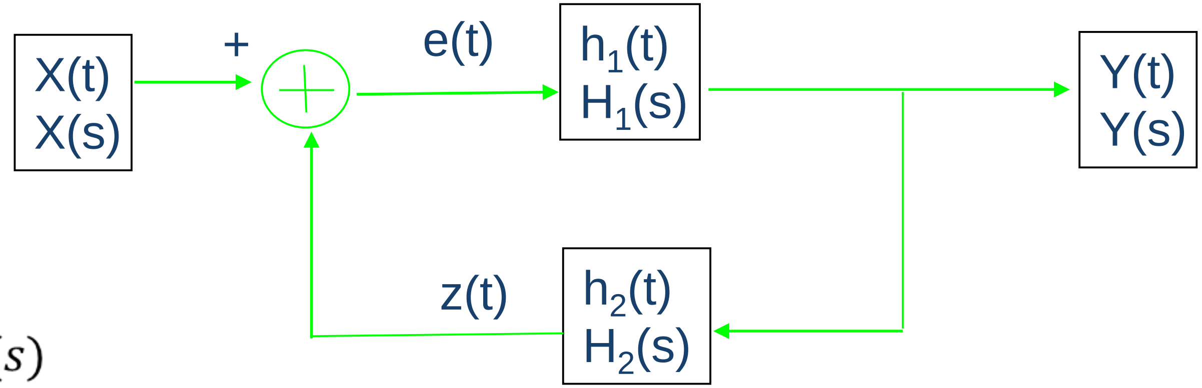


图 6-26　系统基本的连接方框图

反馈



$$Y(s) = H_1(s)E(s)$$

$$E(s) = X(s) + Z(s)$$

$$Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) + H_2(s)Y(s)]$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

第七章
Z变换

§7.0 引言

连续时间系统: $X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$ $X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt$

连续傅立叶变换 → 拉普拉斯变换

离散时间系统:

离散傅立叶变换 → Z变换

傅里叶变换

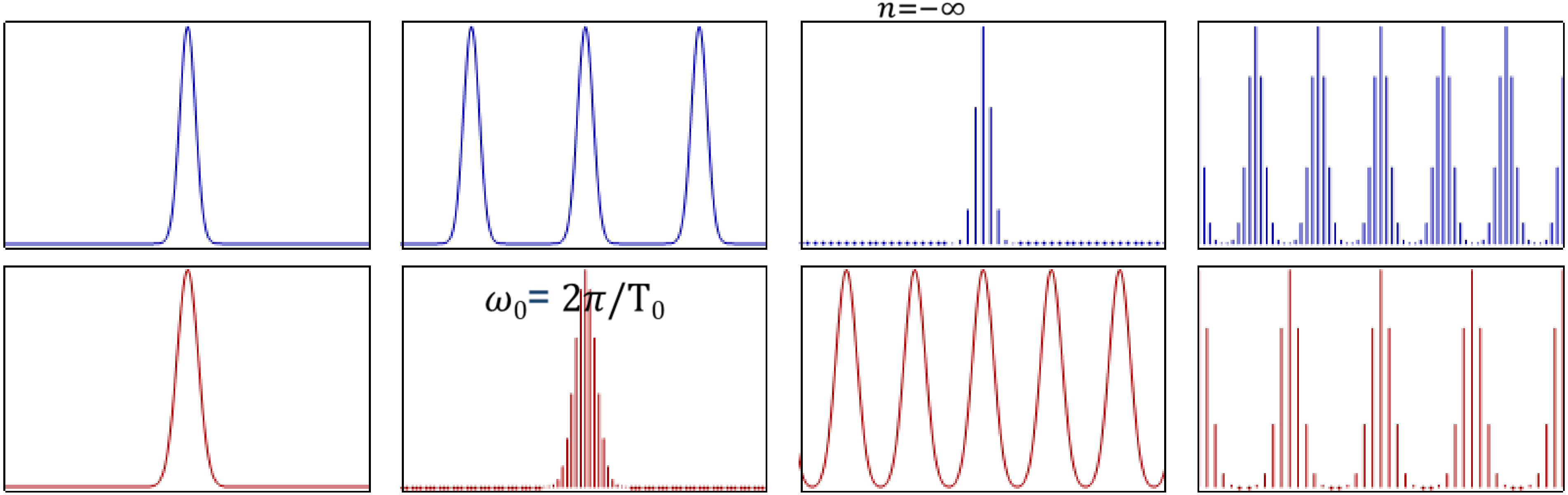
采样

连续时间信号　连续时间周期信号　离散时间信号　离散时间周期信号

周期延拓

$x(t)$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$



$X(j\omega)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k \delta\,(\omega - k\omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k \delta\,(\omega - 2\pi k/N)$$

周期为N

Domains of representation

N-domain/time domain

Real/actual domain

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Frequency domain

Z domain

Physical significance in sound, but seldom used for implementation

Primarily for its convenience in mathematical analysis and synthesis

§7.1 双边Z变换

离散时间信号x[n]的傅立叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

如果x[n]不收敛，用衰减因子 r^{-n} 修正 x[n]:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

r=2，

n = 0 , 1， 2， 3, 4

$r^{-n} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

令Z为复变量： $Z=re^{j\omega}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

将$X(z)$称为$x[n]$的Z变换(双边Z变换)

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

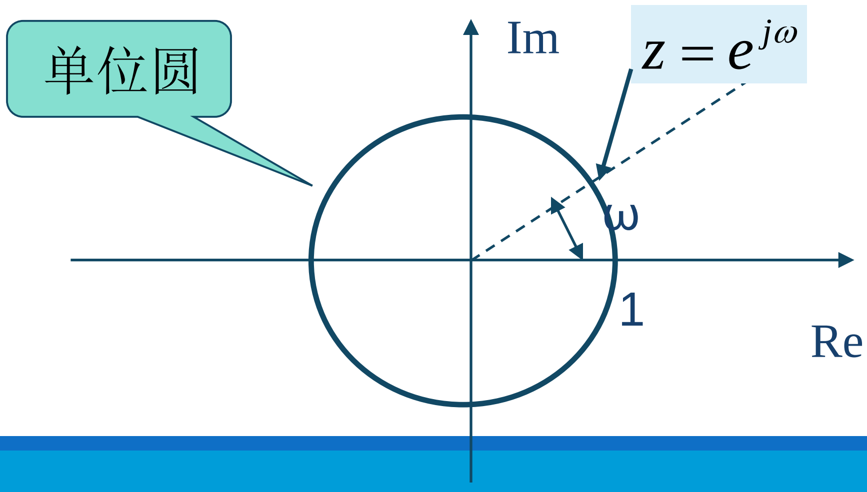
$X(z)$相当于$x[n]$乘上实指数信号r^{-n}后的傅立叶变换

$$X(z)=F\{x[n]r^{-n}\}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$

在Z变换中，当变换变量z的模为1时，z变换演变为离散傅立叶变换。

或者，傅立叶变换是在复数z平面中，半径为1的圆上的z变换。



Z反变换表达式

$$X(z)=F\{x[n]r^{-n}\} \qquad x[n]r^{-n}=F^{-1}\{X(z)\}$$

$$x[n]=r^{n}F^{-1}\{X(z)\}=r^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)r^{n}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

$$\boxed{x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)(z)^{n}d\omega}$$

$$z = re^{j\omega}, \quad dz = jr\,e^{j\omega}d\omega \qquad d\omega = \frac{1}{j}z^{-1}dz$$

变量z逆时针环绕 |z|=r 的圆周线积分

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(z)(z)^n d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)(z)^{n-1}dz$$

圆周积分

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X[z] \quad \begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)(z)^{n-1}dz \end{cases}$$

拉氏变换与Z变换

- 有抽样信号 $x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$
- 拉氏变换

$$X_s(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-snT}$$

拉氏变换与Z变换

- 有抽样信号 $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$
- 拉氏变换

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

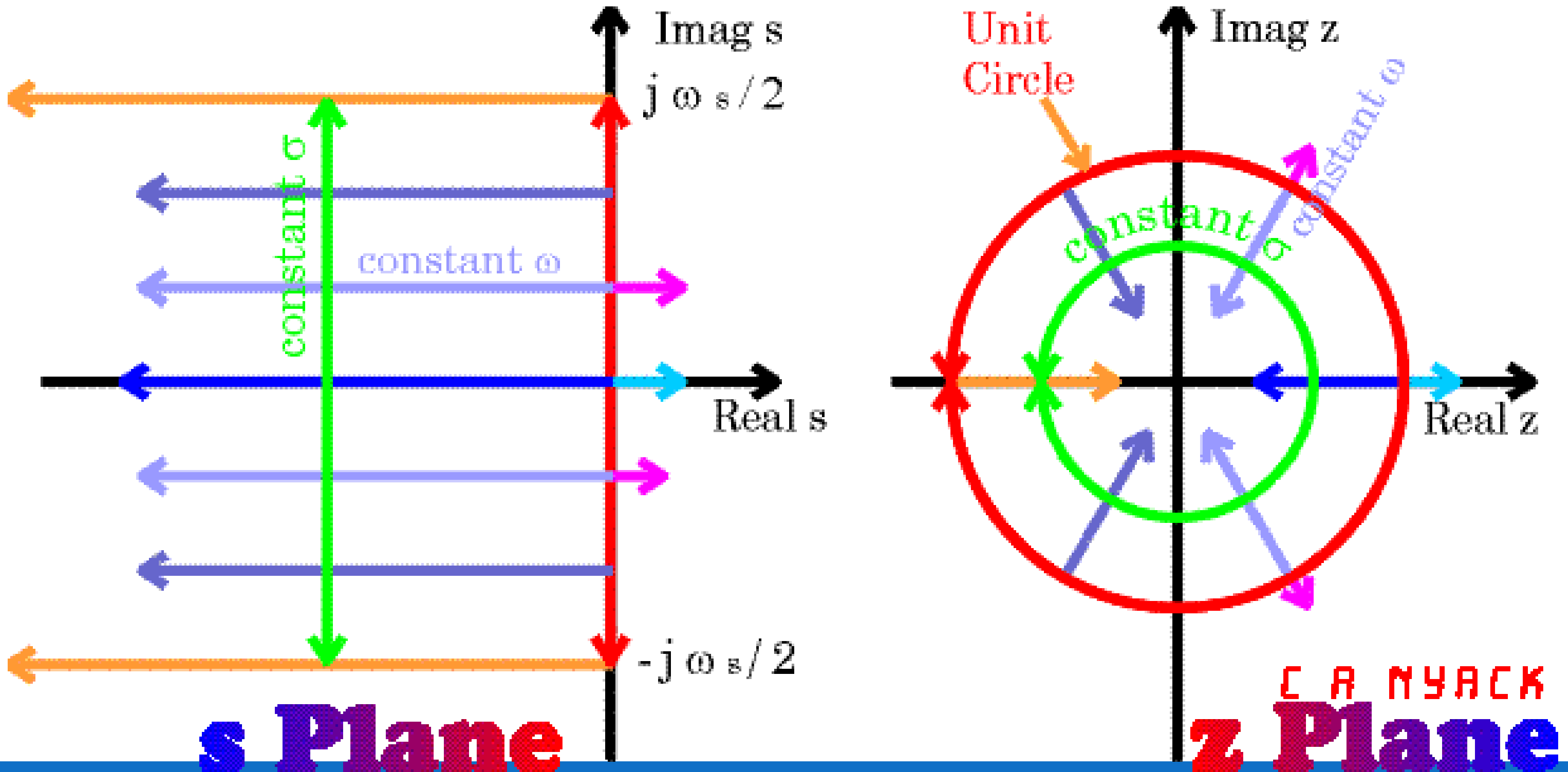
- 令 $z = e^{sT}$，其中 z 为一个复变量
- 则 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$

Z变换

- 广义上讲T=1（归一化）$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

从 S 平面到 Z 平面的映射

$$z = e^{sT} \xrightarrow[s=\sigma+j\omega]{} z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\omega T}$$



$(1)\sigma = 0 \quad s = j\omega$

$$|z| = e^{\sigma T} = 1$$

$(2)\sigma < 0 \quad s = \sigma + j\omega$

$$|z| < 1$$

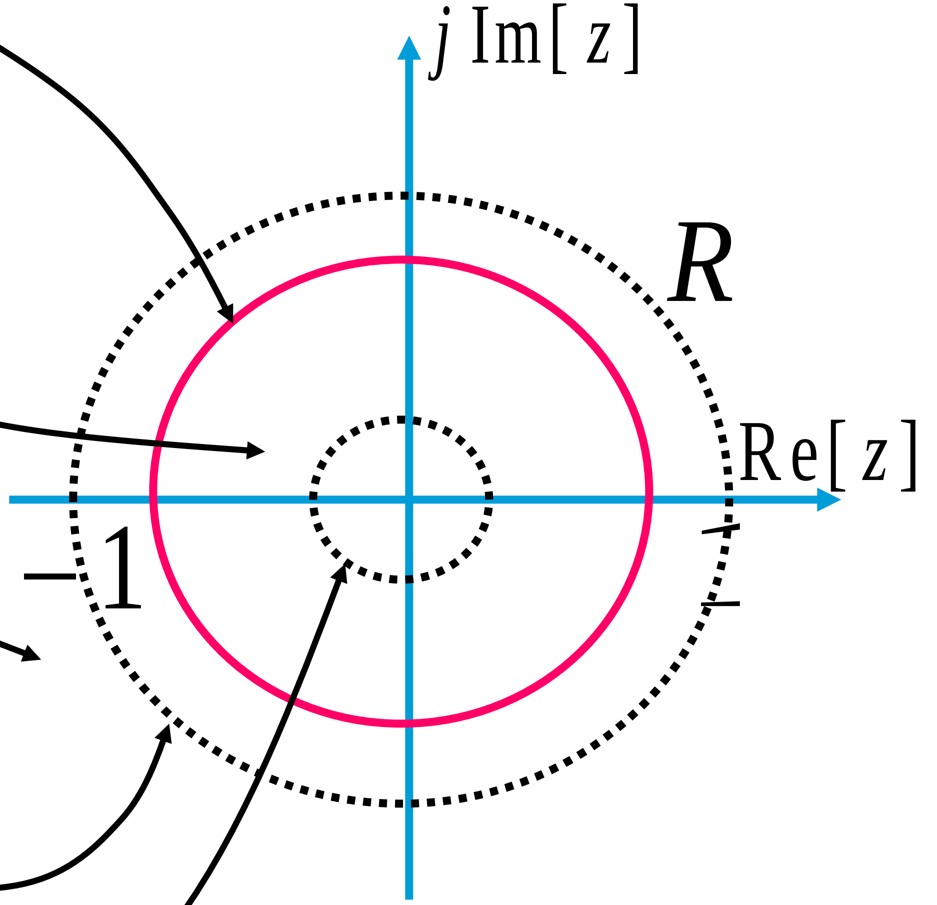
$(3)\sigma > 0 \quad |z| > 1$

$(4)\sigma = constent > 0$

$$|z| = R > 1$$

$(5)\sigma = constent < 0$

$$|z| = r < 1$$



$$(6)\ \omega = 0 \quad s = \sigma$$

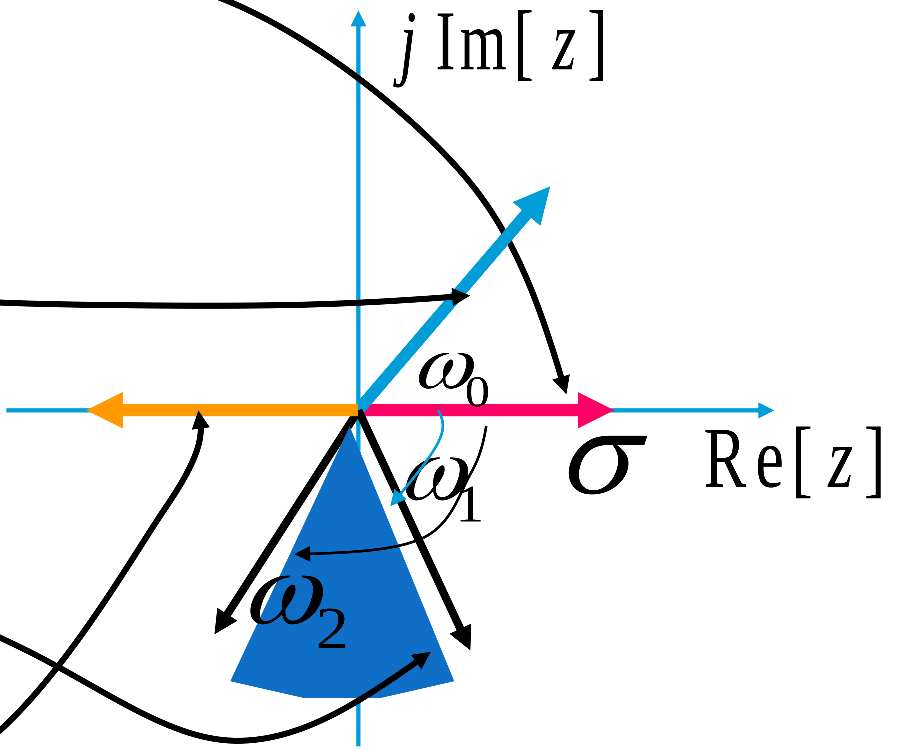
$$(7)\ \omega = constent = \omega_0$$

$$(8)\ \omega = \omega_1 \to \omega_2$$

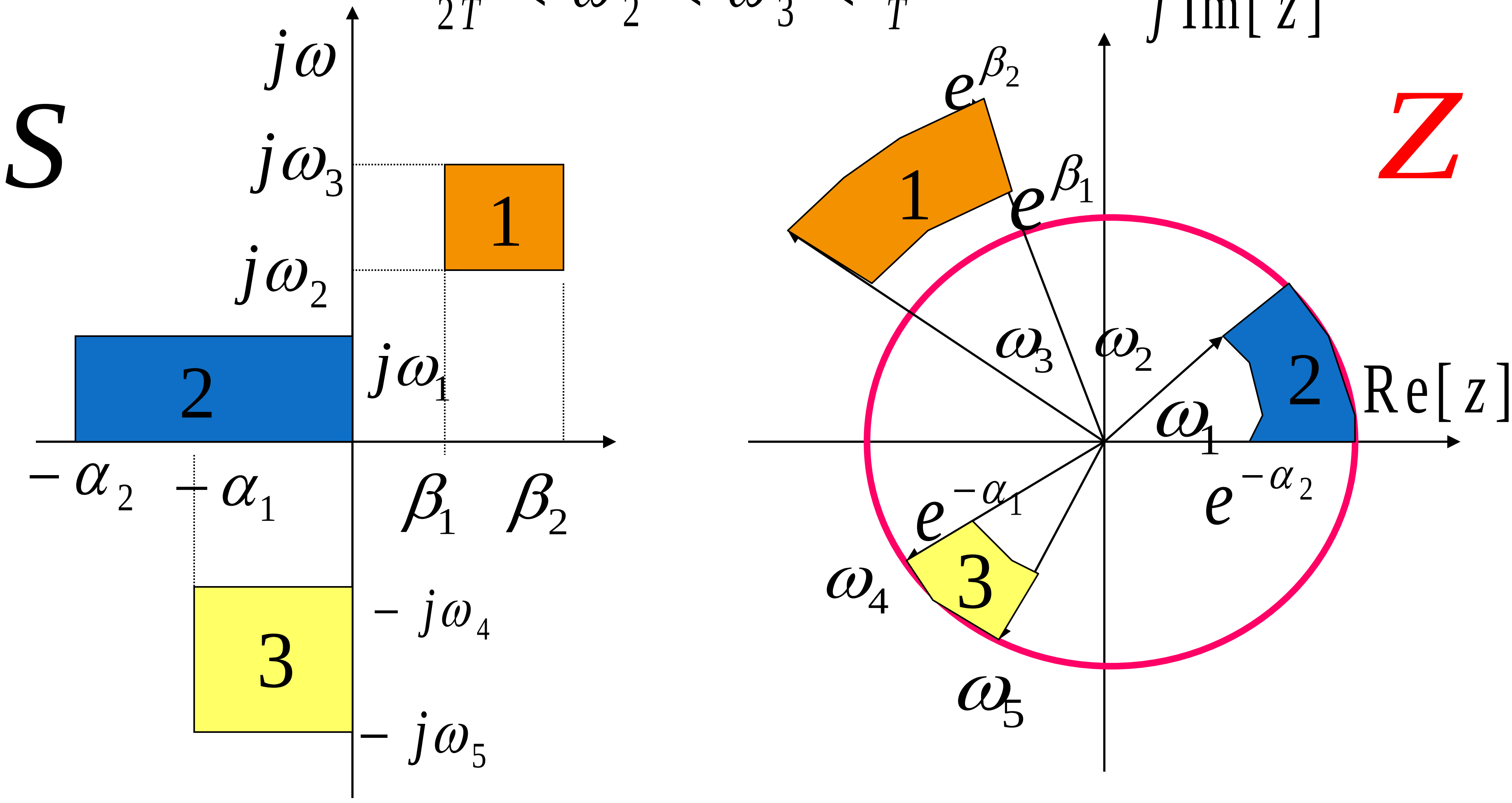
$$(9)\ \omega = \frac{\pi}{T}$$

$$(10)\ \omega = 0 \to 2k\frac{\pi}{T}$$

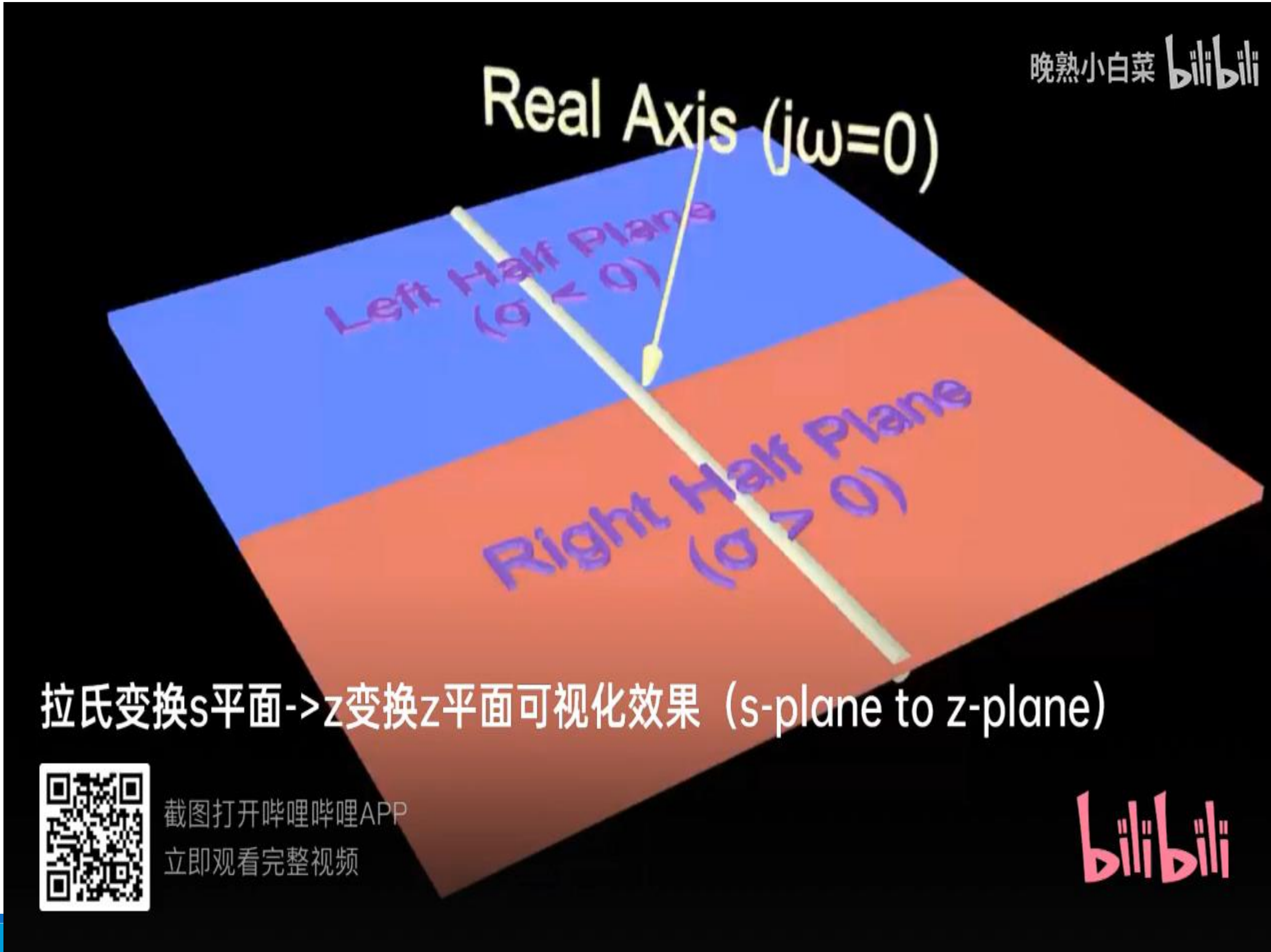
多圈



$$\frac{\pi}{2T} < \omega_2 < \omega_3 < \frac{\pi}{T}$$



$$\frac{\pi}{T} < \omega_4 < \omega_5 < \frac{3\pi}{2T}$$


晚熟小白菜
Real Axis (jω=0)
Left Half Plane
(σ < 0)
Right Half Plane
(σ > 0)
拉氏变换s平面->z变换z平面可视化效果（s-plane to z-plane)
截图打开哔哩哔哩APP
立即观看完整视频

§7.2　Z变换的收敛域（ROC）

$$X(z) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

存在z值的范围，对该范围内的z，X(z)收敛，这些z值的范围，称为收敛域(ROC)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \mathrm{r}^{n} < \infty$$

如果收敛域包括单位圆，则傅立叶变换也收敛。

Z变换的表述，既要有代数表示式，又要有相应的收敛域

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

Z变换可以表示为Z的多项式，也可以表示为Z^{-1}的多项式。

对右边序列来讲(n<0, x[n]=0)，X(z)仅涉及Z的负幂，因此常用z^{-1}的多项式表示。

考虑零、极点时，往往用z的多项式表示方便。

$$X(z)=\frac{\mathrm{N}(z)}{\mathrm{D}(z)}$$

=0，零点

=0，极点

例7.1

$$x[n]=a^n u[n]$$

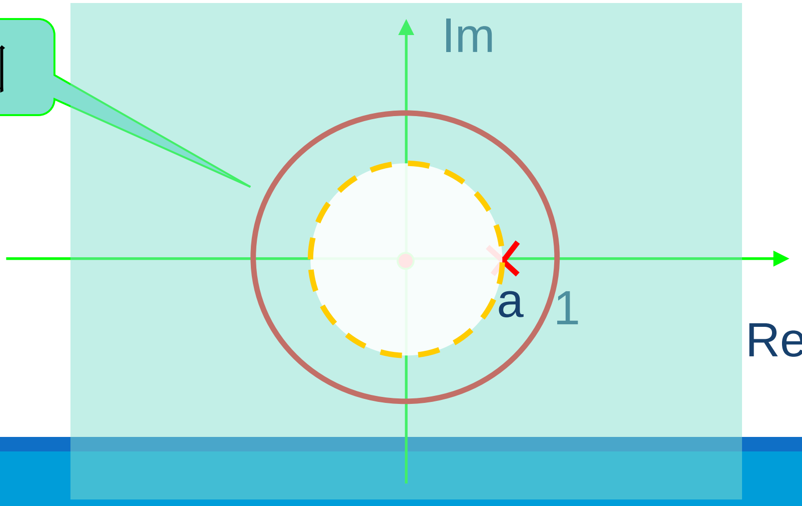
右边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|az^{-1}\right|^n<\infty \Rightarrow \left|az^{-1}\right|<1,|z|>|a|$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},|z|>|a|$$

单位圆



例7.2 $x[n] = -a^n u[-n-1]$

左边序列

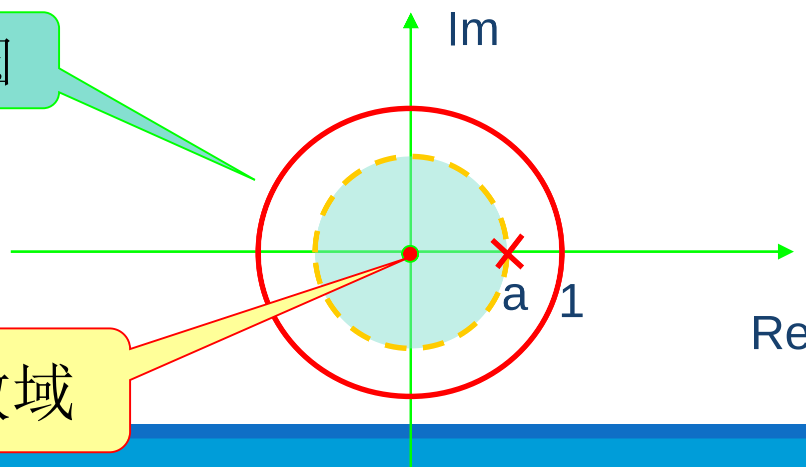
$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

当 $|a^{-1}z| < 1$ $X(z) = 1 - \dfrac{1}{1-a^{-1}z} = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

收敛半径

单位圆



圆内为收敛域

例7.3

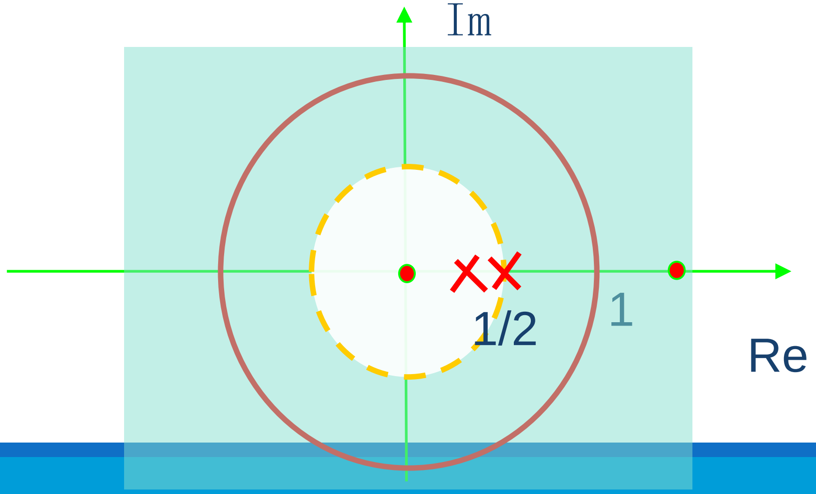
$$x[n]=7(\frac{1}{3})^n u[n]-6(\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$X(z)=7\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3}z^{-1})^n-6\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}z^{-1})^n$$

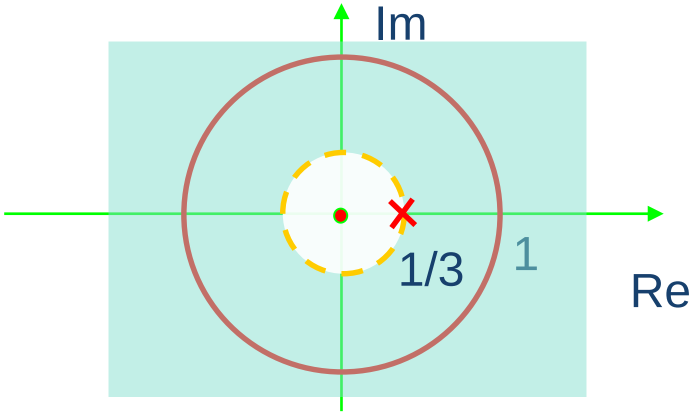
$$=\frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}$$

$$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1,\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\Rightarrow$$

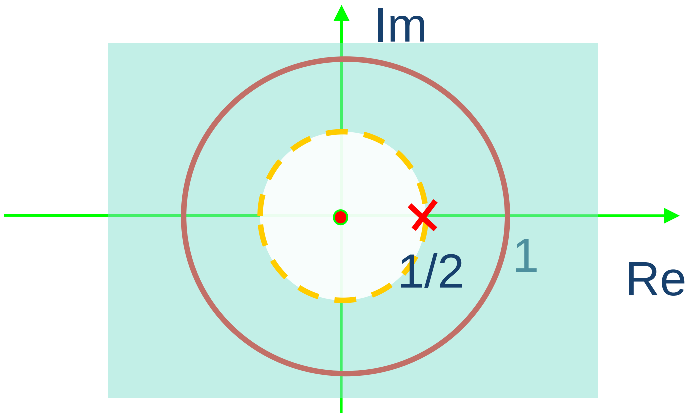
$$ROC:|z|>\frac{1}{2}$$



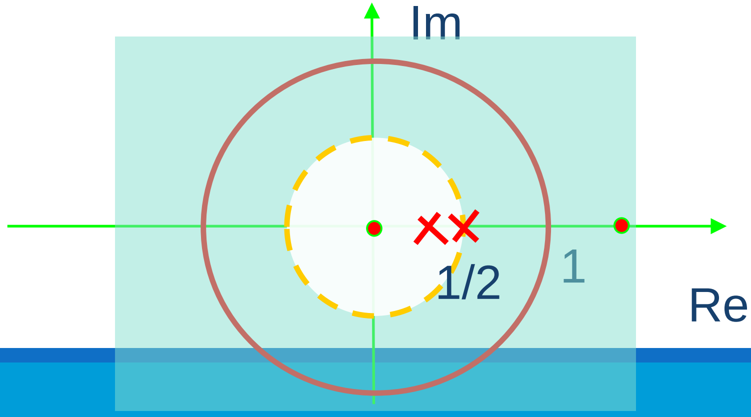
$$7(\frac{1}{3})^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > 1/3$$



$$6(\frac{1}{2})^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > 1/2$$



$$x[n] \xleftrightarrow{z} \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > 1/2$$

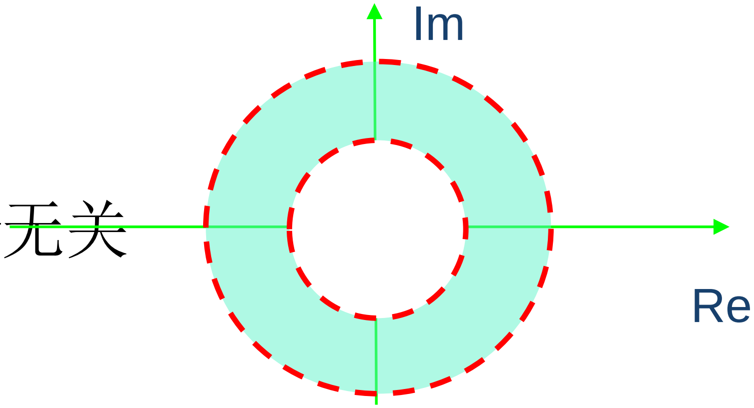


§7.3 Z变换的收敛域的性质

性质1：X(z)的ROC是在z平面内以原点为中心的圆环。

$$z = re^{j\omega}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$$



收敛域仅决定于r=|z|，而与w无关

ROC必须仅由一个圆环组成。

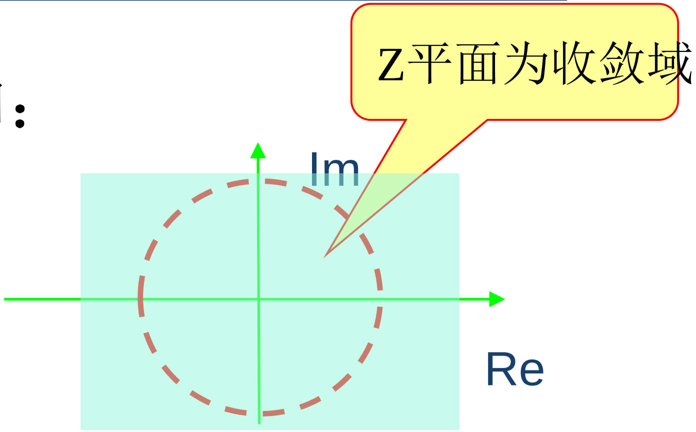
性质2：ROC不包含任何极点

因为在极点处，X(Z)为无穷大，z变换不收敛

性质3：如果x[n]是有限长序列，那么ROC就是整个z平面，可能除去0或无穷大。

当序列为有限长时，z变换为有限项和：

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]z^{-n}$$



N1为0或正，式中仅有z的负次幂项，ROC不含0；

N2为0或负，式中仅有z的正次幂项，ROC不含无穷大；

N1为负，N2为正 ，式中有z的正、负次幂项，ROC不含0和无穷大；

性质4：如果x[n]是右边序列，并且|z|=r0的圆位于ROC内，那么|z|>r0 的全部有限z值都在ROC内。

|z|=r0的圆位于ROC内，表明 $x[n]r_0^{-n}$ 绝对可和，

当|z|=r1>r0 时 r_1^{-n} 比 r_0^{-n} 衰减的快；

对正的n值，更快的衰减保证收敛；

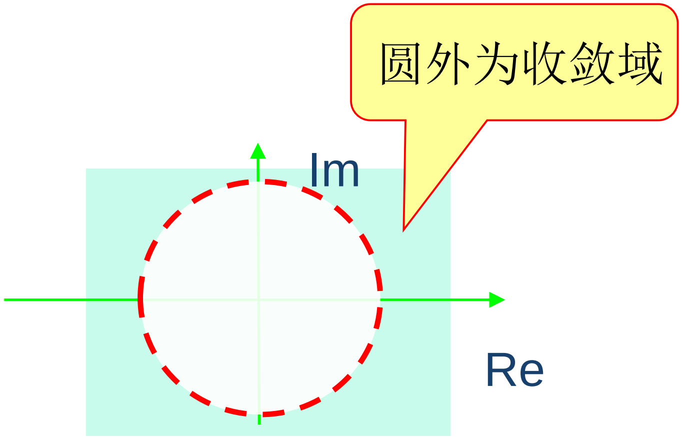
对负的n值，因为是右边序列，为有限个非零值，从而保证绝对可和

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

如N_1>=0，ROC包含无穷大；

否则，不包含。

右边序列 圆外



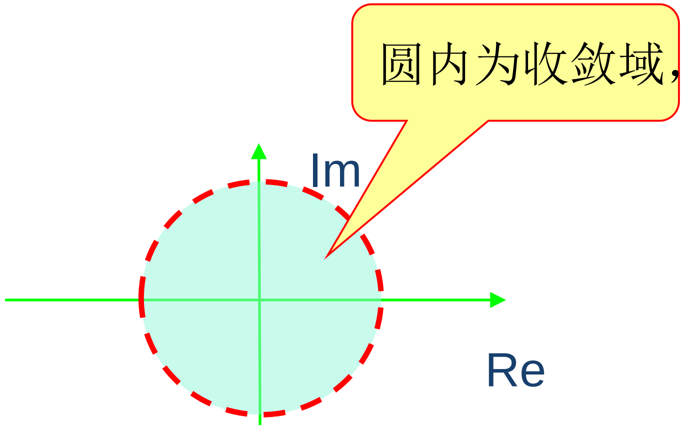
性质5：如果x[n]是左边序列，并且|z|=r0的圆位于ROC内，那么0<|z|<r0 的全部z值都在ROC内。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

N2为正，式中包含z的负次幂项，z->0时，为无穷大，因此ROC不含0；

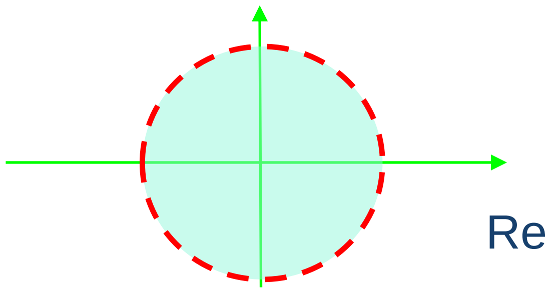
N2<=0，则ROC含0。

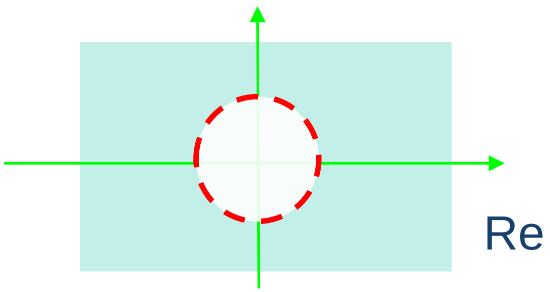
左边序列　　圆内

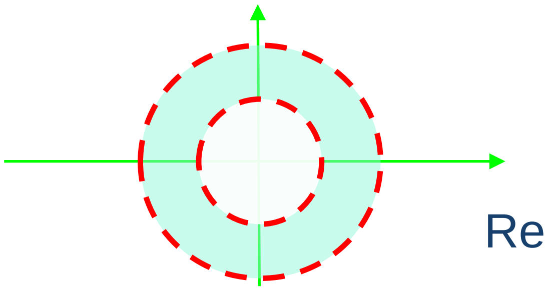


性质6：如果x[n]是双边序列，并且|z|=r0的圆环位于ROC内，那么该ROC一定为包含|z|=r0的圆环。

双边序列为左边序列和右边序列之和，分别对应圆内和圆外。则其ROC为这两部分的重叠部分，即为一圆环。







例7.6

$$x[n]=a^{n}, 0\le n\le N-1, a>0$$

有限长序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^{n}z^{-n}=\frac{1-(az^{-1})^{N}}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^{N}-a^{N}}{z-a}$$

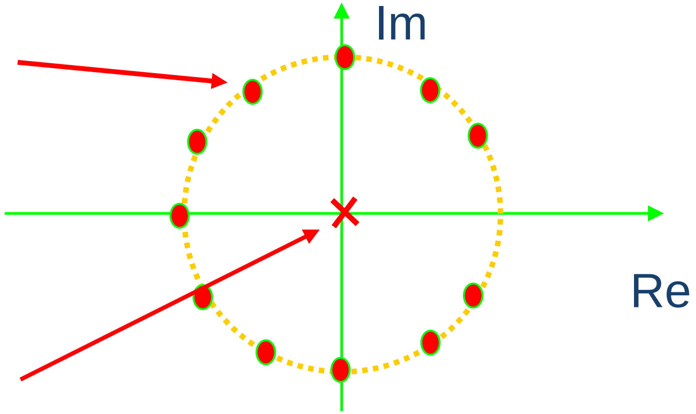
Z->无穷远，X(z)为有限值；

Z->0， X(z)为无穷大；

$$z_{k}=ae^{j(2\pi k/N)}, k=0,1\ldots N-1$$

ROC为不含原点的整个z平面。

N-1个零点



N-1阶极点

例7.7

$$x[n]=b^{|n|},b>0$$

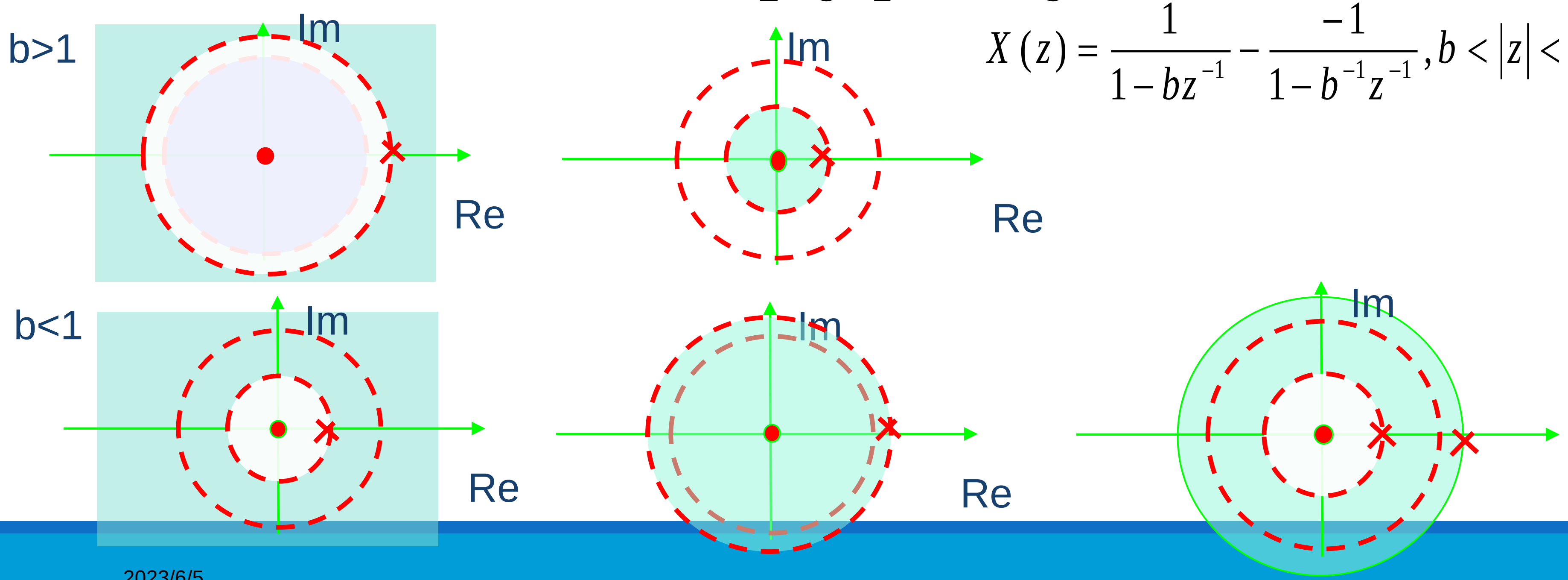
双边序列

$$x[n]=b^{n}u[n]+b^{-n}u[-n-1]$$

$$b^{n}u[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{1-bz^{-1}},|z|>b$$

$$b^{-n}u[-n-1]\xleftrightarrow{Z}\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}},|z|<\frac{1}{b}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}},b<|z|<\frac{1}{b}$$



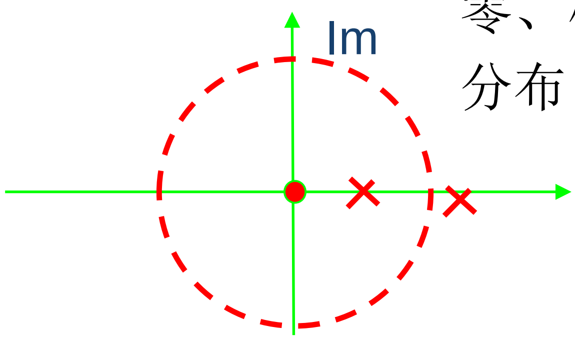
性质7：如果x[n]的z变换是有理的，那么ROC就被极点所界定，或者延伸至无限远。

性质8：如果x[n]的z变换是有理的，且是右边序列，那么ROC就位于最外层极点的外边。如果是因果序列，那么，ROC也包括无穷远。

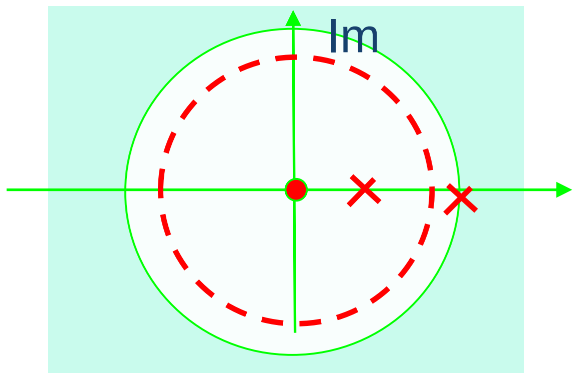
性质9：如果x[n]的z变换是有理的，且是左边序列，那么ROC就位于最里层的非零极点的里边。如果是反因果序列，那么，ROC也包括零。

例7.8

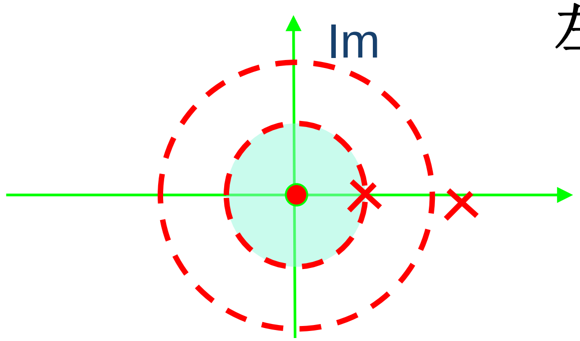
$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$



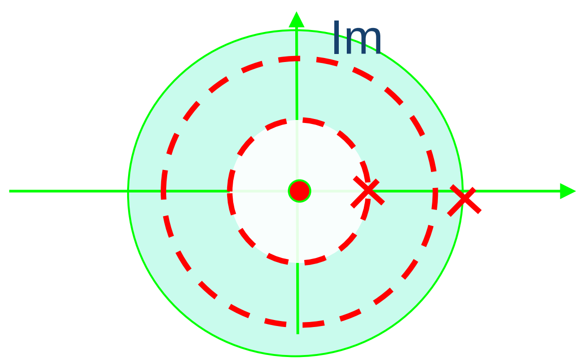
零、极点分布



右边序列



左边序列



双边序列

存在傅立叶变换

7.4　Z变换的性质

（1）　线性

若　$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), ROC = R_1$

和　$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), ROC = R_2$

则　$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC = R_2 \cap R_2$

线性组合后的ROC至少是R_1和R_2相重合的部分

线性组合后的极点是由原来的全部极点所构成（无零、极点相消），那么收敛域为各单个收敛域的重叠部分。

如线性组合后，发生零、极点相消，则收敛域可能增大

例　$x_1[n]=a^n u[n]$　$x_2[n]=a^n u[n-1]$　ROC: $|z|>|a|$

$x_1[n]-x_2[n]=\delta[n]$　　ROC: 整个z平面|

（2） 时移性质

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z), ROC = R$

原点或无穷远点可能加上或除掉

$$Z\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} = z^{-n_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} = z^{-n_0}X(z)$$

$$k = n - n_0$$

$n_0>0$ 在z=0引入极点 原点去除

$n_0<0$ 在z=0引入零点 z＝∞去除

（3） z域微分

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}, ROC = R$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{d}{dz}z^{-n} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -z^{-1}Z\{nx[n]\}$$

$$n^m x[n] \xleftrightarrow{Z} (-z\frac{d}{dz})^{(m)} X(z), ROC = R$$

例

$$X(z)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},|z|>|a|$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},|z|>|a|$$

（4） z域尺度变换

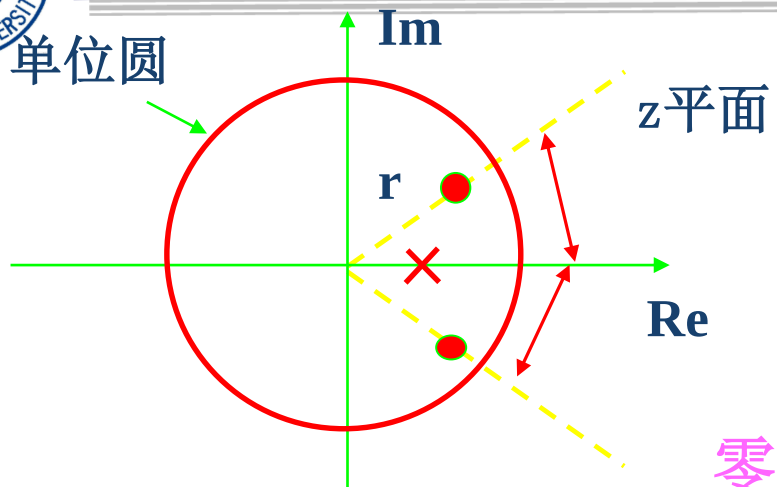
若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(\frac{z}{a}), ROC = |a| R \ldots \{R_- < \left|\frac{z}{a}\right| < R_+\}$

$$z - z_0 = 0 \to \frac{z}{a} - z_0 = 0 \to z = az_0$$

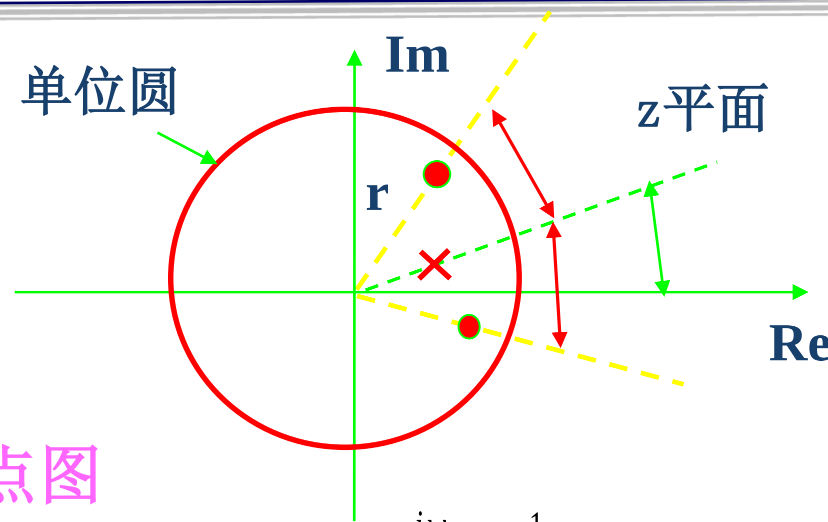
特例 $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z), ROC = |z_0| R = R$

	$X(z)$	$X(e^{-j\omega_0} z)$
因式	$1 - az^{-1}$	$1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}$
极（零）点	$z_0 = a$	$z = ae^{j\omega_0}$



$$1-az^{-1}$$

x[n]的z变换



零极点图

$$1-ae^{jw_0}z^{-1}$$

$e^{jw_0 n}x[n]$ **的z变换**

$$a=-1$$

$$(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(-z)$$

（5） 时间扩展

定义

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x[n/k] & \text{n是k的整数倍}\\ 0 & \text{n不是k的整数倍}\end{cases}$$

若 $x[n]\xleftrightarrow{Z} X(z), ROC=R$

那么

$$x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{Z} X(z^k), ROC=R^{1/k}..\{R_- <|z^k|< R_+\}$$

$$z=a \rightarrow z=a^{1/k}$$

解释

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/k]z^{-n}$$ m=n/k

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-km}=X(z^{k})$$

$$X(z^{k})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^{k})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-kn}$$

右边: z^{-m} **m= kn** **m为k的整数倍** **n=m/k**

时间反转

若 $x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), ROC = R$

则 $x[-n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(\frac{1}{z}), ROC = \frac{1}{R} .. \{R_- < |\frac{1}{z}| < R_+\}$

$$x_{(k)}[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z^k),$$

$$k = -1$$

若z0在x[n]的ROC内，那么1/z0在x[-n]的ROC内

（6） 卷积性质

若 $$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z), ROC = R_1$$

和 $$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z), ROC = R_2$$

则 $$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z) \quad ROC\text{包括}\, R_2 \cap R_2$$

如存在零、极点相消时，**ROC** 可能扩大

（7） 共轭

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), ROC = R$

若x[n]实序列 $X(z) = X^*(z^*), ROC = R$

零、极点共轭成对

（8） 累加

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), ROC = R$

则 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z), ROC = R \cap |z|>1$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = u[n] * x[n]$$

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

例

$$y[n]=h[n]*x[n]$$

$$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$$\delta[n]-\delta[n-1]\xleftrightarrow{Z}1-z^{-1}$$

ROC：整个z平面，不包括原点
在z＝1有一个零点

卷积性质

$$x[n]\xleftrightarrow{Z}X(z),ROC=R$$

$$Y(z)=(1-z^{-1})X(z) \qquad ROC=R$$

可能会除去z＝0和（或）增加z＝1

z变换差分性质

系统

$$y[n]=(\delta[n]-\delta[n-1])*x[n]=x[n]-x[n-1]$$

一次差分 （离散时间微分）

例

$$w[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=u[n]*x[n]$$

累加器
（一次差分的逆运算）

$$w[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)\quad ROC\text{至少包括}R\cap|z|>1$$

z变换累加(积分)性质

初值定理

若 n<0，x[n]=0 那么 $x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$

若**x[0]**为有限值，那么 $\lim_{z\to\infty} X(z)$ 为有限值。将**X(z)**表示成两个多项式之比时，分子多项式的阶次不能大于分母多项式的阶次；即零点的个数不能多于极点个数。

终值定理

若 n<0，x[n]=0，x[n]的全部极点小于1，最多再有一个等于1的一阶极点，那么

那么 $$x[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

性质小结 表7.1 p259

7.5 常用Z变换对

$$\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1, \text{全部}z$$

$$\delta[n-m] \xleftrightarrow{Z} z^{-m}, \text{除去零、极点}$$

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

$$-u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|<1$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|<|a|$$

$$na^{n}u[n]\xleftrightarrow{z}\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}=\frac{az}{(z-a)^{2}},|z|>|a|$$

$$-na^{n}u[-n-1]\xleftrightarrow{z}\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}},|z|<|a|$$

$$[\cos\omega_0 n]u[n]\xleftrightarrow{z}\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}},|z|>1$$

$$[\sin\ \omega_0 n]u[n]\xleftrightarrow{z}\frac{[\sin\ \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}},|z|>1$$

§7.6 Z反变换

$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$x[n] = r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

$$z = re^{j\omega}, \Rightarrow dz = jre^{j\omega}d\omega$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Z反变换

（1）幂级数展开法

（2）部分分式法

（3）留数法（了解）

幂级数展开法

将X(z)在给定的收敛域内，展开成z^{-1}的幂级数之和，则该幂级数的系数，就是序列x[n]

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$=\underbrace{\cdots x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}}_{\text{Z的正幂}}+x(0)z^{0}+\underbrace{x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots x(n)z^{-n}+}_{\text{Z的负幂}}$$

例

$$X(z) = 4z^{2} + 2 + 3z^{-1}, 0 < |z| < \infty$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \begin{cases} 4, n = -2 \\ 2, n = 0 \\ 3, n = 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

$$\delta[n+n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{n_0}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$|z|>a,\quad \frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\ldots$$

X（z）是有理式时，可以用分子多项式除于分母多项式，得到幂级数展开

结合收敛域，判断z的升幂或者降幂排列

- x[n]是右边序列，则按z的降幂（z^{-1}升幂）排列
- x[n]是左边序列，则按z的升幂（z^{-1}降幂）排列

$$|z|<a,(|az^{-1}|>1)\quad \frac{1}{1-az^{-1}}=-a^{-1}z-a^{-2}z^2-\ldots$$

例

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>a$$

右边序列

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+\ldots$$

n=0 1 2

$$|z|<a,(|az^{-1}|>1)$$

左边序列

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-\ldots$$

n= -1 -2

长除法

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2},|z|>1$$

因为 $|z|>1$，

所以按 z^{-1} 排列

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
1-2z^{-1}+z^{-2} \,\big) & z^{-1} \\
 & \underline{z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}} \\
 & \quad 2z^{-2}-z^{-3} \\
 & \quad \underline{2z^{-2}-4z^{-3}+2z^{-4}} \\
 & \qquad 3z^{-3}-2z^{-4} \\
 & \qquad \underline{3z^{-3}-6z^{-4}+3z^{-5}} \\
 & \qquad\quad 4z^{-4}-3z^{-5}
\end{array}$$

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

$$x[n] = nu[n]$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2},|z|<1$$

因为 $|z|<1$，

所以按z排列

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}$$

$$
\begin{array}{r}
z+2z^2+3z^3+\cdots \\
1-2z+z^2 \,\big) \hphantom{z+2z^2+3z^3+\cdots} \\
\underline{z-2z^2+z^3} \\
2z^2-z^3 \\
\underline{2z^2-4z^3+2z^4} \\
3z^3-2z^4 \\
\underline{3z^3-6z^4+3z^5} \\
4z^4-3z^5
\end{array}
$$

$$X(z) = z^1 + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{-1} -nz^{-n}$$

$$x[n] = -nu[-n-1]$$

$$X(z) = \lg(1 + az^{-1}), |z| > |a|$$

$$\lg(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(az^{-}1)^{n}}{n}, |az^{-1}| < 1$$

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1}\dfrac{a^{n}}{n}, n \geq 1 \\ 0, n \leq 0 \end{cases}$$

$$x[n] = -\frac{(-a)^{n}}{n}u[n-1]$$

部分分式法

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}$$

若ROC位于极点 $z=a_i$ 的外边，相应的反变换为：

$$A_i a_i^n u[n]$$

若ROC位于极点 $z=a_i$ 的里边，相应的反变换为：

$$-A_i a_i^n u[-n-1]$$

基本原则：

分解成基本函数的z变换，结合z变换的性质

例

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})},|z|>\frac{1}{3}$$

右边序列

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},|z|>\frac{1}{4}\xleftrightarrow{Z}(\frac{1}{4})^{n}u[n]$$

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|>\frac{1}{3}\xleftrightarrow{Z}2(\frac{1}{3})^{n}u[n]$$

$$\boxed{x[n]=(\frac{1}{4})^{n}u[n]+2(\frac{1}{3})^{n}u[n]}$$

例

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})},\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$$

双边序列

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},|z|>\frac{1}{4}\xleftrightarrow{Z}(\frac{1}{4})^{n}u[n]$$

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|<\frac{1}{3}\xleftrightarrow{Z}-2(\frac{1}{3})^{n}u[-n-1]$$

$$\boxed{x[n]=(\frac{1}{4})^{n}u[n]-2(\frac{1}{3})^{n}u[-n-1]}$$

例

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})},|z|<\frac{1}{4}$$

左边序列

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},|z|<\frac{1}{4}\xleftrightarrow{Z}-(\frac{1}{4})^{n}u[-n-1]$$

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|<\frac{1}{3}\xleftrightarrow{Z}-2(\frac{1}{3})^{n}u[-n-1]$$

$$\boxed{x[n]=-(\frac{1}{4})^{n}u[-n-1]-2(\frac{1}{3})^{n}u[-n-1]}$$

例

$$X(z)=\frac{10z}{z^2-3z+2},|z|>2$$

无重根

$$X(z)=\frac{10z}{z^2-3z+2}=\frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$=\frac{A}{1-z^{-1}}+\frac{B}{1-2z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{-10}{1-z^{-1}}+\frac{10}{1-2z^{-1}}$$

$$x[n]=10(2^n-1)u[n]$$

例

$$X(z)=\frac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2},|z|>2$$

重根

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{C_1}{z-2}+\frac{C_2}{(z-2)^2}$$

$$A_1=z\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=0}=-1 \qquad A_2=(z-1)\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=1}=6$$

$$C_2=(z-1)^2\frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2}\bigg|_{z=2}=4$$

$$C_1=\frac{d}{dz}[(z-2)^2\frac{X(z)}{z}]\bigg|_{z=2} \Rightarrow C_1=-5$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{z}+\frac{6}{z-1}+\frac{-5}{z-2}+\frac{4}{(z-2)^2}$$

重点

[redacted] $= \frac{-1}{z} + \frac{6}{z-1} + \frac{-5}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2}$

$$X(z) = -1 + \frac{6z}{z-1} + \frac{-5z}{z-2} + \frac{4z}{(z-2)^2}$$

$$X(z) = -1 + \frac{6}{1-z^{-1}} + \frac{-5}{1-2z^{-1}} + 2\frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$x[n] = -\delta[n] + 6u[n] - 5(2)^n u[n] + 2n(2)^n u[n]$$

留数法

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\sum_n \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

用留数求围线积分

一阶极点：

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=[(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

S 阶极点：

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}[X(z)z^{n-1}(z-z_m)^s]\right\}_{z=z_m}$$

例

$$X(z)=\frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}\quad(|z|>1)\quad x[n]=?$$

解

$\because |z|>1 \quad \therefore x[n]$ 必然是因果序列，右边序列

$$x[n]=\sum_n \operatorname{Re}s[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

$$=\sum \operatorname{Re}s\left[\frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}z^{n-1}\right]_{z=z_m}$$

$n=0,\quad z_1=1,\quad z_2=0.5,\quad z_{3,4}=0$

$n=1,\quad z_1=1,\quad z_2=0.5,\quad z_3=0$

$n\geq 2,\quad z_1=1,\quad z_2=0.5$

$\because z=\infty,$ **不含z的正**幂正幂$(x[n]z^{-n})\therefore n<0$时，$x[n]=0$

$$(1)n=0 \quad x[n]=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}\Big|_{z=0}+8-13(0.5)^0$$

$$=6+8-13=1$$

$$(2)n=1 \quad x[n]=\frac{z^3+2z^2+1}{z\ \ (z-1)(z-0.5)}\Big|_{z=0}+8-13(0.5)^1$$

$$=2+8-13(0.5) \quad =3.5$$

$$(3)n\geq 2 \quad x[n]=z^{n-2}\frac{z^3+2z^2+1}{z-0.5}\Big|_{z=1}+z^{n-2}\frac{z^3+2z^2+1}{z-1}\Big|_{z=0.5}$$

$$=8-13(0.5)^n$$