徐森林，薛春华 编
《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

目 录

第一章　数列极限

1.1　数列极限的概念

1.1.1　练习题

1. 用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n}=1$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 10}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|0.\underbrace{99\cdots9}_{n}-1\right|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon.$$

由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n}=1$。 □

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+4}{7n-3}=\dfrac{3}{7}$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{3n+4}{7n-3}-\frac{3}{7}\right|=\frac{37}{7(7n-3)}<\frac{37}{7n}<\frac{6}{n}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+4}{7n-3}=\dfrac{3}{7}$。 □

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n+6}{n^2-n-1000}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{50,\left[\frac{12}{\varepsilon}\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时，$\frac{1}{2}n^2-n-1000>1$ 且

$$\left|\frac{5n+6}{n^2-n-1000}-0\right|<\frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2+(\frac{1}{2}n^2-n-1000)}<\frac{6n}{\frac{1}{2}n^2}<\frac{12}{n}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n+6}{n^2-n-1000}=0$。 □

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{2^n+5}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+4$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{8}{2^n+5}-0\right|<\frac{8}{2^n}=\frac{1}{2^{n-3}}<\varepsilon$$

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{2^n+5}=0$. □

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{\sin n!}{n^{1/2}}-0\right|<\frac{1}{n^{1/2}}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$。 □

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{2,\left[\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}<\frac{4}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$。 □

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{2,\left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^3}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-2)}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}<\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}}<\varepsilon.$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$. □

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}n^{3/2}}{n^2}<\frac{\pi/2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0$. □

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数};\end{cases}$

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_n-1|&<\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{n 为偶数},\\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, & \text{n 为奇数}\end{cases}\\ &<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$. □

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$.

证明. 对 $\forall A>0$, 取 $N=\max\left\{5,\left[\sqrt[3]{2A}\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时，$1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}>1-\frac{9}{n^2}>\frac{1}{2}$ 且

$$n^3-4n-5=n^3(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3})>\frac{1}{2}n^3>A$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$。 □

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 证明: $\forall k\in\mathbb{N}$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

证明. 按 a 分类讨论:

(1) $a\in\mathbb{R}$：由极限定义，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$。显然 $n+k>n>N$, 从而 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

(2) $a=+\infty$：由极限定义, 对 $\forall A>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$a_n>A$. 显然 $n+k>n>N$, 从而 $a_{n+k}>A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=+\infty$.

(3) $a=-\infty$：由极限定义，对 $\forall A<0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$a_n<A$. 显然 $n+k>n>N$, 从而 $a_{n+k}<A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=-\infty$.

命题得证。 □

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$：举例说明，这个命题的逆命题不真。

证明. 当 $a\in\mathbb{R},a=+\infty,a=-\infty$ 时，此命题都是成立。我们只证 $a\in\mathbb{R}$ 的情况。

由极限的定义，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$. 于是:

$$||a_n|-|a||<|a_n-a|<\varepsilon.$$

再由极限定义，$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$。

如果我们取 $a_n=(-1)^n$, 则 $|a_n|=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$。但 $\{a_n\}$ 是发散的。 □

4. 设 $x_n\le a\le y_n,n\in\mathbb{N}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=a$$

证明. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$y_n-x_n=|y_n-x_n|<\varepsilon$. 从而

$$|y_n-a|=y_n-a=y_n-x_n+x_n-a<y_n-x_n<\varepsilon.$$

i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$.

同理可证

$$-\varepsilon<x_n-y_n<x_n-a<0<\varepsilon.$$

i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列。证明：数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数，或者有最小的数。举出两者都有的例子；再举出只有一个的例子。

证明. 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，我们分以下几种情况讨论:

(1) 如果 $a_n=a,\forall n\in\mathbb{N}$. 此时，数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

(2) 如果 $\exists n_0\in\mathbb{N}$，使得 $a_{n_0}\neq a$. 不妨假设 $a_{n_0}<a$. 对于 $\varepsilon=\dfrac{a-a_{n_0}}{2}$, $\exists N\in\mathbb{N},N>n_0$ 使得 $a_n-a>a-\varepsilon=\frac{a+a_{n_0}}{2}>a_{n_0},\forall n>N$. 取 $m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$，则

$$m\in\{a_n|n\geq 1\},\quad a_n\geq m,\forall n.$$

即 m 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值. 如果 $a_{n_0}>a$，类似地，我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值。

考虑下列收敛数列:

(1) 如果 $a_n=\frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n\leq a_1=1$, 没有最小值。

(2) 如果 $a_n=-\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1=a_1\leq a_n$，没有最大值。

(3) 如果 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$, 则 $-1=a_1\leq a_n\leq a_2=\frac{1}{2}$

命题得证。 □

注 1. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, 则 $\{a_n\}$ 有最小值。如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$，则 $\{a_n\}$ 有最大值。

6. 证明下列数列发散:

(1) $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散，因为：$0=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-1)^{(-1)^{2n-1}}\neq\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)^{(-1)^{2n}}=+\infty$. □

(2) $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列 $\{k_n\},\{l_n\}$ 使得

(a) $k_n\in(2n\pi-\frac{\pi}{6},2n\pi+\frac{\pi}{6})$,

(b) $l_n\in(2n\pi+\frac{5\pi}{6},(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6})$.

显然，我们有

(a) $\cos k_n\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1],\forall n$,

(b) $\cos l_n\in[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}),\forall n$.

因此，$\{\cos n\}$ 是发散的。 □

7. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 三个数列 $\{a_{3k-2}\},\{a_{3k-1}\},\{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限。

证明. ($\Rightarrow$) 由定理 1.1.2，收敛数列的子列也收敛，且极限相同。
($\Leftarrow$) 假设三个子列的极限都是 a。由极限的定义，对于 $\forall\varepsilon>0$,

(1) $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2}-a|<\varepsilon,\forall k>N_1$,

(2) $\exists N_2\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1}-a|<\varepsilon,\forall k>N_2$,

(3) $\exists N_3\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k}-a|<\varepsilon,\forall k>N_3$。

取 $N=3\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 我们有

$$|a_n-a|<\varepsilon,\forall n>N,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. □

注 2. 这个命题当 $a=+\infty$ 或者 $-\infty$ 时，该命题也成立。

注 3. 对于 $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+1}=\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+2}=\cdots=\lim_{k\to+\infty}a_{pk}=a.$$

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=d$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$。

证明.

$$\frac{a_n-a_1}{n}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n-a_1}{n}=d.$ □

9. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。用 $\varepsilon-N$ 法，$A-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2},(a\text{为实数 }+\infty,-\infty).$$

证明. 我们只证 a 为实数的情形。其他情况证明类似。由极限的定义，对于 $\varepsilon>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_0.$$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}a-\frac{a}{2}\right|\\&<\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|+\frac{a}{2n}\\&<\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|+\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{a}{2n}.\end{aligned}$$

取 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_1.$$

取 $N_2\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n}<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_2.$$

取 $N_3\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_3.$$

最后, 取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2,N_3\}$, $\forall n>N$, 我们有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

命题得证。 □

注 4. 考虑如下数列

$$b_k = \begin{cases} a_k, & k=1; \\ a_n, & k \in \left[\frac{(n-1)n}{2}+1, \frac{n(n+1)}{2}\right], \forall n \geq 2. \end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$. 记

$$S_n = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

则

$$\begin{aligned} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} &= \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2} \\ &= \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \frac{S_n}{2} + \frac{S_n}{2n^2} \end{aligned}$$

由例 *1.1.15* 知, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a$, 从而

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

1.1.2　思考题

10. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $|q|<1$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则存在整数 $M>0$ 和 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当 $|q|<1$ 时， $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$。于是 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|q^{n-k}\right| < \max\left\{\frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon, \forall n > N_1, k = 0,1,2,\cdots,N_0.$$

取 $N=\max\{N_0,N_1\}$。当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned} &\left|(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - \frac{a}{1-q}\right| \\ =& \left|(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - a\frac{1-q^n}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right| \\ <& \left|(a_n - a) + (a_{n-1}-a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}\right| + \frac{|a|\,|q|^n}{|1-q|} \\ <& \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}(1+|q|+\cdots+|q|^{n-N_0}) + \left(MN_0 + \frac{|a|}{1-|q|}\right)\max\left\{\frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon \\ <& \varepsilon. \end{aligned}$$

即， $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \dfrac{a}{1-q}$.

□

11. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$。用 $\varepsilon - N$ 法证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab.$$

证明. 首先我们证明命题在 $b=0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\exists M>0$ 使得 $|a_n|<M, \forall n\in\mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0\in\mathbb{N}$ 使得 $|b_n|<\frac{\varepsilon}{2M}, \forall n>N_0$.

(3) 由于 $|a_n|<M$, 对上述的 $\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_0,N_1\}$。对于上述的 $\varepsilon>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n}\right| \\
&< \left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1}b_{N_0+1}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\frac{(n-N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

由极限的定义知，命题成立在 $b=0$ 时成立。下面证明命题在 $b\neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a)b=0$. 由此可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_{n-1}-a)b + (a_n-a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-b)=0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_{n-1}(b_1-b) + a_n(b_n-b)}{n} = 0.$$

(3) 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_n(b_0-b)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_n-a)b)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} - ab\right| \\
&\leq \left|\frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_n(b_0-b)}{n}\right| + \left|\frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_n-a)b)}{n}\right| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

12. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$b_n \geq 0(n \in \mathbb{N})$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS$.

证明. 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(2) 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ 得知

$$|(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$ 可得知

$$|a|\,|(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&|(a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1 b_n) - aS| \\
&= |(a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1 b_n) - a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - S)| \\
&< |(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| + |a|\,|(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

由极限的定义，命题得证。 □

注 5. *这题是第 10 题的推广。如果* $b_n = q^{n-1}, 0 < q < 1$，*则*

$$\lim_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

由这题的结论，第 10 题得证。

13. *(Toeplitz 定理) 设* $n, k \in \mathbb{N}$，$t_{nk} \geq 0$ *且* $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$。*如果* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，*证明*: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$。*说明例 1.1.15 为 Toeplitze 定理的特殊情形。*

证明. 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 我们有:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$，当 $n > N_0$ 时，$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(2) 我们取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$.

(3) 对于 $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N_0$, 存在 $N_l \in \mathbb{N}$ 使得 $t_{nl} < \frac{\varepsilon}{2N_0 M}, \forall n > N_l$.

(4) 取 $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$，当 $n > N$ 时，我们有:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - a\right| \\
&= \sum_{k=1}^{N_0} t_{nk}\,|(a_k - a)| + \sum_{k=N_0}^{n} t_{nk}\,|(a_k - a)| \\
&< \sum_{k=1}^{N_0}\frac{\varepsilon}{2N_0 M}M + \sum_{k=N_0}^{n} t_{nk}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$.

如果我们取 $b_{nk}=\frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证。 □

14. 设 a,b,c 为三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \\ b_n=\dfrac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \\ c_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots.$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$.

证明. 我们通过以下结论证明该命题:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n)=a+b+c$. 这是因为 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-c_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)=0$. 这是因为

$$a_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-b),$$

$$a_n-c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-c_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-c),$$

$$c_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(c-b).$$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to+\infty}3a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n+(a_n-b_n)+(a_n-c_n))=\dfrac{a+b+c}{3}$.

类似可证，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. □

15. 设 a_1,a_2 为实数，令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}, n=3,4,5,\cdots,$$

其中 $p>0$，$q>0$，$p+q=1$。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{a_2+a_1q}{1+q}$.

证明. 由递推公式，我们可以证明

$$a_n-a_{n-1}=(-q)^{n-2}(a_2-a_1),\forall n\geq 3.$$

由此我们可以得出 a_n 的通项公式

$$a_n=a_2+\sum_{k=1}^{n-2}(-q)^k(a_2-a_1)=a_2-\frac{q+(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2-a_1).$$

从而，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a_2-\dfrac{q}{1+q}(a_2-a_1)=\dfrac{a_2+qa_1}{1+q}$. □

16. 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足 $a_1>0$，$4\leq b_n\leq 5$，$4\leq c_n\leq 5$，

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明. 由通项公式定义有

$$0 \le a_n \le \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \le \cdots \le \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由 $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。 □

1.2　数列极限的基本性质

1.2.1　练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2-n+5}{3n^2-2n-7}$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2-n+5}{3n^2-2n-7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4-1/n+5/n^2}{3-2/n-7/n^2} = 4/3$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+(-2/3)^n}{3+(-2)(-2/3)^n} = 1/3$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

解. $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$

解. $1 \le \lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}}$

解. $1 \le \lim\limits_{n\to+\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} = 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}}, |a|<1, |b|<1$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)\left(\frac{1-b}{1-b^n}\right) = \frac{1-b}{1-a}$.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

解. 记

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2(n-1)-1}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

解. $1-\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\dfrac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)\\&=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)}\end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2\cdot3}(n+2)!$.
分母的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.
于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}.$

(11) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

解.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{8n^3-2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\frac{4}{3}.$$

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}.$

(13) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0.$

2. 设 $a_n>0$，$n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$。应用例 *1.2.6* 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证明.

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}\cdot\sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a.$ □

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[na_n]}{n}=a$，其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数。

证明. $a=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{na_n-1}{n}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[na_n]}{n}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{na_n}{n}=a.$ □

4. 设 $a_n\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r>1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$.

证明. 取 $\varepsilon=\frac{r-1}{2}$. 由极限的定义，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>r-\varepsilon=\frac{r+1}{2}>1$. 于是

$$|a_n|>\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n_N}|a_N|\,.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$。 □

5. (1) 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记 $S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$，我们有

$$S_n<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$ □

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$

证明. $0<\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0.$ □

6. 设 $a_n>0(n\in\mathbb{N})$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>0$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

证明. 由极限的定义知，存在 $N>0$ 使得

$$\frac{a}{2}\le a_n\le\frac{3a}{2},\quad\forall n>N.$$

于是 $1=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{2}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}=1.$ □

7. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1$: $\left(提示: 1+\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\leq 1+\dfrac{2}{n}\right)$

证明.

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{n}&=\frac{(n-1)!+n!}{n!}\\&<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\\&<\frac{(n-1)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\\&=1+\frac{2}{n}\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1.$ □

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$。记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},\quad T_n=\min\{a_n,b_n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

应用 $\varepsilon-N$ 法 (分$a<b,a>b,a=b$) 或 $\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+|a_n-b_n|$ 与 $\min\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n-|a_n-b_n|)$，证明:

$$(1)\quad\lim_{n\to+\infty}S_n=\max\{a,b\};\quad(2)\quad\lim_{n\to+\infty}T_n=\min\{a,b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n-b_n|=|a-b|.$$

由此可知:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\max\{a,b\},$$

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\min\{a,b\}.$$

□

9. 应用例 *1.1.7* 与例 *1.1.15* 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

证明. 取 $a_n=\sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$ □

10. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}+\sin\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

证明. $1=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}+\sin\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ □

11. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1}=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\le\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\le\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$。 □

1.2.2 思考题

12. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0.$

证明. 假设 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_l$ 是互异的素数，$m_k\ge 1,k=1,2,\cdots,l$。于是 $p(n)=\sum\limits_{k=1}^{l}m_k$.

$$\ln n=\sum_{k=1}^{l}m_k\ln p_k\ge\sum_{k=1}^{p(n)}\ln 2=p(n)\ln 2.$$

因此

$$0\le\frac{p(n)}{n}\le\frac{\ln n}{n\ln 2}.$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0.$ □

13. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{4}.$

证明.

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}&=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\&<\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\\&<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\&=\frac{n(n+1)}{4n^2}.\end{aligned}$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$。 □

1.3 实数理论，实数连续性命题

1.3.1 练习题

1.3.2 思考题

1.4 Cauchy 收敛准则 (原理)，单调数列的极限，数 $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

1.4.1 练习题

1. 证明下列数列收敛：

(1) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right), n\in\mathbb{N};$

证明. 记 $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$，我们有 $S_{n+1}=S_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<S_n$. 很显然 $S_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知，$S_n$ 收敛。 □

(2) $\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}, n\in\mathbb{N}.$

证明. 记 $S_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$. 当 $n>10$ 时，$\frac{n+9}{2n-1}<1$. 即 $S_{n+1}<S_n,\forall n\in\mathbb{N},n>10$. 另一方面 $S_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知，$S_n$ 收敛。 □

2. 设 $0<a_n<1$ 且 $a_{n+1}(1-a_n)\geq\frac{1}{4}$，$n\in\mathbb{N}$。证明：$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$。

证明. 考虑函数 $f(x)=(1-x)x,x\in(0,1)$, 我们有

$$f(x)>0,f(x)\leq\frac{1}{4},x\in(0,1).$$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq\dfrac{1}{4(1-a_n)a_n}\geq 1$，即 $\{a_n\}$ 是单调递增。由实数连续性命题 (二) 可知，a_n 收敛。由递推公式可知，$\frac{1}{4}\geq a(1-a)\geq\frac{1}{4}$. 所以 $a=\frac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$。 □

3. 给定两正数 $x_0=a$ 与 $y_0=b$，归纳定义

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}},\quad y_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2},$$

$n=1,2,\cdots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$，并称此极限为与的算术-几何平均数。

证明. 由算术-几何平均不等式知：$x_n\leq y_n,\forall n\in\mathbb{N}$。于是：

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geq\sqrt{x_nx_n}=x_n,\quad\forall n=1,2,\cdots,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leq\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,\quad\forall n=1,2,\cdots.$$

于是

$$a=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n\leq\cdots\leq y_n\leq y_1\leq y_0=b.$$

令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=B$。由递推公式可知：$A=\sqrt{AB}$, 从而 $A=B$. □

4. $\forall n\in\mathbb{N}$, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的根，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

解. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$ 对于给定的 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 是单调增函数，所以 $f_n(x)$ 只会有唯一的根 x_n。由于

$$f_{n+1}(x_{n+1})=0<f_n(x_n)+x_n^{n+1}=f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1}\le x_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 *(二)* 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在。由于 $\dfrac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$ 知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

5. 设 $c>0$，$x_1=\sqrt{c}$，$x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$，$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

证明. 我们用归纳法证明 $x_n\le\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2},\forall n\in\mathbb{N}$.

(1) $x_1=\sqrt{c}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(2) 假设 $x_k<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。我们证明 $x_{k+1}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=\sqrt{c+x_k}\\&<\sqrt{c+\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{4c+2+2\sqrt{1+4c}}{4}}\\&=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.\end{aligned}$$

现在考虑函数 $f(x)=c+x-x^2$。很显然

$$f(x)>0,\quad x\in\left(0,\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}\right).$$

于是 $x_{n+1}^2-x_n^2=c+x_n-x_n^2>0$. 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列。由实数连续性命题 (二) 知，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则

$$a=\sqrt{c+a}.$$

解方程得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. □

6. 设 $x_1=c>0$，令 $x_{n+1}=c+\dfrac{1}{x_n}$，$n\in\mathbb{N}$。求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

解. 我们首先证明：

(1) $x_{2k-1}<x_{2k+1},\quad\forall k\in\mathbb{N}$;

(2) $x_{2k}>x_{2(k+1)},\quad\forall k\in\mathbb{N}$.

由递推公式可知

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-3}-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_{n-3}} = \frac{x_{n-2}-x_{n-4}}{x_{n-1}\cdot x_{n-2}\cdot x_{n-3}\cdot x_{n-4}}.$$

由于 $x_3 - x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$, 从而知 (1) 成立。由于 $x_4 - x_2 = \frac{x_1 - x_3}{x_1\cdot x_3} < 0$, 从而知 (2) 成立。

另一方面：

$$x_{2k} - x_1 = c + \frac{1}{x_{2k-1}} - c = \frac{1}{x_{2k-1}} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$x_{2k+1} - x_2 = c + \frac{1}{x_{2k}} - c - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_{2k}}{x_1\cdot x_{2k}} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 *(二)* 可知，奇数列和偶数列都是收敛子列。假设

$$\lim_{k\to+\infty} x_{2k-1} = a, \lim_{k\to+\infty} x_{2k} = b.$$

由递推公式，我们有

$$x_{2k+1} = c + \frac{1}{c+\frac{1}{x_{2k-1}}} \Rightarrow a^2 - ac - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2},$$

$$x_{2k+2} = c + \frac{1}{c+\frac{1}{x_{2k}}} \Rightarrow b^2 - bc - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}.$$

即，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}$.

7. 证明：$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$

证明. 第一个等式是题 5 的特例：$c = 1$. 第二个等式是题 6 的特例：$c = 1$. □

8. 设 $c > 0$，$a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$。证明：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 1-\sqrt{1-c}, & 0 < c \le 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

证明. 当 $c > 1$ 时，由递推公式可知，

$$a_{n+1} \ge 2\sqrt{\frac{c}{2}\frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c}a_n \ge \cdots \ge c^{\frac{n}{2}} a_1.$$

所以 $+\infty \ge \lim_{n\to+\infty} a_n \ge \lim_{n\to+\infty}\left(c^{\frac{n}{2}}a_1\right) = +\infty$.

当 $0 < c \le 1$ 时，我们证明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有界。

(1) $a_1 = \frac{c}{2} < 1 - \sqrt{1-c}$.

(2) 设 $a_k < 1 - \sqrt{1-c}$. 下面我们证明 $a_{k+1} \ge a_k$ 且 $a_{k+1} < 1 - \sqrt{1-c}$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-c}\right)^2 = 1 - \sqrt{1-c}.$$

考察函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$.

$$f(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 1-\sqrt{1-c}).$$

因此

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(a_k^2-2a_k+c)>0.$$

即 $\{a_n\}$ 是单调增的数列. 由实数连续性命题 (二) 可知， $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在。设极限为 a, 则

$$a=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2}\Rightarrow a=1-\sqrt{1-c}.$$

命题在 $0<c\leq$ 也得证了。 □

9. *设数列* $\{a_n\}$ *单调增，*$\{b_n\}$ *单调减，且* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$*。证明：*$\{a_n\}$ *与* $\{b_n\}$ *都收敛，且* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

证明. 很显然 $\{a_n-b_n\}$ 是单调增。又由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$，可知 $a_n\leq b_n,\forall n\in\mathbb{N}$, 从而

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots\leq b_n\leq\cdots\leq b_2\leq b_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛. 再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$ 知, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$。 □

10. *设数列* $\{a_n\}$ *满足：存在正数* M*，*$\forall n\in\mathbb{N}$*，有*

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+|a_n-a_{n-1}|\leq M.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ *与* $\{A_n\}$ *都收敛。*

证明. 很显然数列 $\{A_n\}$ 是单调增有界数列，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{A_n\}$ 是收敛的。

$$\{A_n\}\text{收敛}\Rightarrow\{A_n\}\text{是 Cauchy 列}\Rightarrow\{a_n\}\text{是 Cauchy 列}\Rightarrow\{a_n\}\text{收敛}.$$

Cauchy 数列必收敛，从而知 $\{a_n\}$ 收敛。 □

11. *应用 Cauchy 收敛准则证明下列数列收敛：*

(1) $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$;

证明.

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|\leq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

(2) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$;

证明.

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

(3) $x_n=\dfrac{\arctan 1}{1(1+\cos 1!)}+\dfrac{\arctan 2}{2(2+\cos 2!)}+\cdots+\dfrac{\arctan n}{n(n+\cos n!)}$.

证明.

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\arctan(n+1)}{(n+1)((n+1)+\cos(n+1)!)}+\cdots+\frac{\arctan(n+p)}{(n+p)((n+p)+\cos(n+p)!)}\right|\\ &< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)\\ &< \frac{\pi}{2n}.\end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

12. 应用 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^n$；

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\frac{n}{n-3}} = e.$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^n$；

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{(-n+2)\frac{n}{-n+2}} = e^{-1}.$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$；

证明. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2+n}\right)^{(-2-n)\frac{n}{-2-n}} = e^{-1}.$ □

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$；

证明. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^2 = e^2.$ □

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

证明. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$ □

13. $\forall n\in\mathbb{N}$，证明：

(1) $0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$

证明. 由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 知：

$$0 < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0.$

证明. 由 (1) 和夹逼原理，可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$。 □

14. 设 $\alpha<1$，证明:

(1) $0<n^\alpha\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]<\dfrac{e}{n^{1-\alpha}}.$

证明. 由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 知:

$$\begin{aligned}0&<n^\alpha\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}\right]\\&<\frac{e}{n^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0.$

证明. 由 (1) 和夹逼原理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$。 □

注 6. 由上两题可知 $\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ 比 $\frac{1}{n^\alpha}$ $\forall\alpha<1$. 高阶的无穷小量。

15. (1) 设 $0<a<b$，$\forall n\in\mathbb{N}$。证明:

$$b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a),$$

$$a^{n+1}>b^n\left[(n+1)a-nb\right];$$

证明.

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)<(n+1)b^n(b-a).$$

由此式可知:

$$a^{n+1}>b^{n+1}-(n+1)b^n(b-a)=b^n\left[b-(n+1)b+(n+1)a\right]=b^n\left[(n+1)a-nb\right].$$

□

(2) 在 *(1)* 中，令 $a=1+\dfrac{1}{n+1}$，$b=1+\dfrac{1}{n}$ 推出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为严格增的数列;

证明. 将 $a=1+\dfrac{1}{n+1},b=1+\dfrac{1}{n}$ 代入（1）中的第二式，可知

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

(3) 在（*1*）中，令 $a=1$，$b=1+\frac{1}{2n}$ 推出当 n 为偶数时，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$；由此得到 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$，即 4 为该数列的上界，从而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛。

证明. 将 $a=1, b=1+\dfrac{1}{2n}$ 代入（1）的第二个不等式，我们有:

$$1\geq\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left[(n+1)-n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right],$$

即

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\leq 2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\leq 4.$$

由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增的，我们可知，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 4,\forall n\in\mathbb{N}.$ □

16. 应用不等式 $b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a)$，$0<a<b$，证明：数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是严格单减的，并由此推出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为有界数列。

证明.

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)>(n+1)a^n(b-a).$$

即

$$b^{n+1}>a^n\left[(n+1)b-na\right].$$

取 $a=1+\dfrac{1}{n+1}, b=1+\dfrac{1}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}&>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left[(n+1)\frac{n+1}{n}-n\frac{n+2}{n+1}\right]\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{n^2+3n+1}{n(n+1)}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left[\frac{n^2+3n+1}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right]\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}\right)\\&>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

由此可见 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格单调减. 另外

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4.$$

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为有界数列。 □

17. 证明：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{3}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N}.$

证明.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\frac{3}{n},\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

□

18. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列。记

$$\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

证明:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\overline{a}_n \geq \underline{a}_n$;

证明. 这是显然的。$\overline{a}_n \geq a_n \geq \underline{a}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. □

(2) $\{\overline{a}_n\}$ 为单调减有界数列；$\{\underline{a}_n\}$ 为单调增有界数列，且 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 有 $\overline{a}_n \geq \underline{a}_m$;

证明. 由 $\overline{a}_n$ 和 $\underline{a}_n$ 的定义可知，

$$\overline{a}_n = \max\{a_n, \overline{a}_{n+1}\}, \quad \underline{a}_n = \min\{a_n, \underline{a}_{n+1}\}.$$

由此可见 $\{\overline{a}_n\}$ 是单调减，$\{\underline{a}_n\}$ 是单调增, 且

$$\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \cdots \leq \underline{a}_n \cdots \leq \cdots \leq \overline{a}_n \leq \cdots \leq \overline{a}_2 \leq \overline{a}_1.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 是有界数列，故 $\underline{a}_1$ 和 $\overline{a}_1$ 都是有界数。命题得证。 □

(3) 设 $\overline{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{a}_n$，$\underline{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underline{a}_n$, 则 $\overline{a} \geq \underline{a}$;

证明. 应用定理 1.2.5，这个命题就可以得证。 □

(4) $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \overline{a} = \underline{a}$.

证明. ($\Rightarrow$): 由极限定义，对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

于是

$$|\overline{a}_n - a| < \varepsilon, |\underline{a}_n - a| < \varepsilon \forall n > N.$$

由此可知

$$|\overline{a} - a| < \varepsilon, |\underline{a} - a| < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性知，$\overline{a} = \underline{a} = a$.

($\Leftarrow$): 记 $\overline{a} = \underline{a} = a$. 再次由极限定义知，对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得

$$|\overline{a} - a| < \varepsilon, |\underline{a} - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

从而

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. □

1.4.2 思考题

19. 设 $a_1 \geq 0$，$a_{n+1} = \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}$.

证明. 很显然 $a_n > 0, \forall n$. 我们现在计算 $\left|a_{n+1} - \sqrt{3}\right|$:

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{3}\right| = \left|\frac{3+3a_n - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}a_n}{a_n+3}\right| = \left|\frac{(3-\sqrt{3})(a_n - \sqrt{3})}{a_n+3}\right| < \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\left|a_n - \sqrt{3}\right|.$$

因为 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3} < 1$, 所以 $\lim_{n\to+\infty}(a_n - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}$. □

20. 设 $a > 0$，$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$，$n = 1, 2, \cdots$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$

证明. 我们证明如下结论：

(1) 如果 $x_1 \leq \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调增且 $x_n \leq \sqrt{a}, \quad \forall n$;

(2) 如果 $x_1 > \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调减且 $x_n \geq \sqrt{a}, \quad \forall n$;

无论哪种情况发生，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, 则

$$b = \frac{b(b^2+3a)}{3b^2+a}.$$

解方程得 $b = \sqrt{a}$. 即 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注意到 $x_n > 0, \forall n$ 且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n(\sqrt{a}-x_n)(\sqrt{a}+x_n)}{3x_n^2+a}, \quad x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2+a}.$$

我们很容易看出上述的两个结论都是成立的。 □

21. 设 $a > 0$，$x_1 = \sqrt[3]{a}$，$x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}}(n > 1)$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$

证明. 我们只需要证明：

(1) 如果 $a \geq 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递增且 $x_n \leq \sqrt{a}, \forall n$

(2) 如果 $a < 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递减且 $x_n \geq \sqrt{a}, \forall n$.

无论上述哪种情况发生，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, 则

$$b = \sqrt[3]{ab}.$$

解方程得 $b = \sqrt{a}$. 即 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注意到 $x_n > 0, \forall n$ 且

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}(\sqrt{a} - x_{n-1})(\sqrt{a} + x_{n-1})}{\left(\sqrt[3]{ax_{n-1}}\right)^2 + \sqrt[3]{ax_{n-1}}x_{n-1} + x_{n-1}^2},$$

$$x_n - \sqrt{a} = \sqrt[3]{ax_{n-1}} - \sqrt{a} = \frac{a(x_{n-1} - \sqrt{a})}{\left(\sqrt[3]{ax_{n-1}}\right)^2 + \sqrt[3]{a^{5/2}x_{n-1}} + a}$$

当 $a \geq 1$, $x_1 = \sqrt[3]{a} \leq \sqrt{a}$. 由上两式知，结论 (1) 成立.
当 $a < 1$, $x_1 = \sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$. 由上两式知，结论 (2) 成立. □

22. 设 $0 < a_1 < b_1 < c_1$。令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

证明：$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 收敛于同一实数。

证明. 由定义可知

$$0 < a_1 < a_n \le b_n \le c_n < c_1, \quad \forall n > 1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调增，$\{c_n\}$ 单调减。由实数连续性命题 (二) 可知，数列 $\{a_n\},\{c_n\}$ 收敛。因为 $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$ 可知，数列 $\{b_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$。易知，$0 < a_1 \le a \le b \le c \le c_1$ 且

$$a = \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}, \quad b = \sqrt[3]{abc}, \quad c = \frac{a+b+c}{3}$$

解方程组可得知 $a = b = c.$ □

23. 设 $a_n > 0$，$S_n = a_1 + \cdots + a_n$，$T_n = \dfrac{a_1}{S_1} + \cdots + \dfrac{a_n}{S_n}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty.$

证明. 由于 $S_n \to +\infty$, 我们可以找到一个子列 $\{n_k\}$ 使得

$$\frac{S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned}
T_{n_k} &= \left(\frac{a_1}{S_1} + \cdots \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}}\right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}} + \cdots \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_{k-1}+1}} + \cdots \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}}\right) \\
&> \left(\frac{a_1}{S_{n_1}} + \cdots \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}}\right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_2}} + \cdots \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_k}} + \cdots \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}}\right) \\
&= \frac{S_{n_1} - 0}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2} - S_1}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} \\
&> \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

即: $\lim\limits_{k\to+\infty} T_{n_k} = +\infty$. 因为 T_n 是单调增的数列，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. 命题得证。 □

24. 设 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$

证明. 我们只需证明 $\left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|$ 收敛于 0.

$$\begin{aligned}
\left|a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| &= \left|\frac{3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)a_n}{2(1+a_n)}\right| \\
&= \left|\frac{-(\sqrt{5}-1)\left(a_n - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{2(1+a_n)}\right| \\
&< \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \cdot \left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

由此可见，$\left\{\left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|\right\}$ 收敛于 0. □

25. 设 $a_n \geq 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 收敛于 S。证明：$b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛。

证明. 很显然，$\{b_n\}$ 是单调增数列。下面证明 $\{b_n\}$ 是有界数列。由于 $a_n \geq 0$ 且 $S_n \to S$, 则 S_n 是单调增收敛于 S, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面，

$$b_n \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)^n \leq \left(1+\frac{S}{n}\right)^n < \left(1+\frac{[S]+1}{n}\right)^n.$$

数列 $\left\{\left(1+\frac{[S]+1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增的，且

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{[S]+1}{n}\right)^n = e^{[S]+1}.$$

于是

$$b_n \leq e^{[S]+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知，数列 $\{b_n\}$ 是收敛数列。 □

1.5 上极限与下极限

1.5.1 练习题

1. 求 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$:

(1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(2) $a_n = n^{(-1)^n}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(3) $a_n = [1+2^{(-1)^n n}]^{\frac{1}{n}}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

(4) $a_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(5) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(6) $a_n = \sqrt[n]{\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|}$;

解. $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(7) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

解. $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = e$.

2. 证明下面各式当两端有意义时成立:

(1) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n$,
$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n$

证明. 由上，下极限的定义，我们可以得到两个简单的无需证明的事实：对于任何数列 $\{a_n\}$，$\{a_{n_k}\}$ 是一个任意一个子列，则

(a) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \le \underline{\lim}_{k\to+\infty} a_{n_k}$

(b) $\overline{\lim}_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$

我们取子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n).$$

再在子列 $\{a_{n_k}\}$ 中取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \underline{\lim}_{k\to+\infty} a_{n_k} \ge \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

对于子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$，我们会有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \ge \underline{\lim}_{k\to+\infty} b_{n_k} \ge \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

从而

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l\to+\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k\to+\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \\ &= \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n). \end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

考虑子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$，在其中取子列 $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l\to+\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \underline{\lim}_{k\to+\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \ge \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n).$$

对于同样下标的子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \le \overline{\lim}_{k\to+\infty} b_{n_k} \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n) &\le \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}})\\ &= \lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}+\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\\ &\le \lim_{k\to+\infty}a_{n_k}+\varlimsup_{n\to+\infty}b_n\\ &= \varliminf_{n\to+\infty}a_n+\varlimsup_{n\to+\infty}b_n\end{aligned}$$

下面我们用类似的办法证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}b_{n_k}=\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.$$

对于相应的 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$ 可以取子列 $\{a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}})=\varlimsup_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})\le\varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

显然

$$\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}\ge\varliminf_{n\to+\infty}a_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty}a_n+\varlimsup_{n\to+\infty}b_n &\le \lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}+\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\\ &= \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}})\\ &= \lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})\\ &\le \varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})=\varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}=\varlimsup_{k\to+\infty}b_{n_k}\le\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.$$

另一方面

$$\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}\le\varlimsup_{k\to+\infty}a_{n_k}\le\varlimsup_{n\to+\infty}a_n.$$

所以 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\le\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n+\varlimsup\limits_{n\to+\infty}b_n$. □

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$, 则
$\varliminf\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n+b$,
$\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n+b$

证明. 这题是上面一题的直接应用。 □

(3) $\varliminf\limits_{n\to+\infty}(-a_n)=-\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(-a_n)=-\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n$;

证明. $\inf\limits_{k\geq n}\{-a_k\} = -\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\} \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.
$\sup\limits_{k\geq n}\{-a_k\} = -\inf\limits_{k\geq n}\{a_k\} \Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ □

(4) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为非负数列，则
$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to+\infty} b_n \leq \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_nb_n \leq \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$,
$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n \leq \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_nb_n \leq \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$;

证明. 我们现证第一式。取子列 $\{a_{n_k}b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k}b_{n_k} = \varliminf_{n\to+\infty} a_nb_n.$$

对于上述的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} a_n \geq 0.$$

对于 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\varliminf_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \geq \varliminf_{k\to+\infty} b_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} b_n \geq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to+\infty} b_n &\leq \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \varliminf_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}}\\ &= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}}b_{n_{k_l}}\\ &= \lim_{k\to+\infty} a_{n_k}b_{n_k}\\ &= \varliminf_{n\to+\infty} a_nb_n\end{aligned}$$

取 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

对于对应的子列 $\{b_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} = \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_nb_n &\leq \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k}b_{n_k}\\ &\leq \varliminf_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}}b_{n_{k_l}}\\ &= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}}\\ &\leq \varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n\end{aligned}$$

现在我们来证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} b_{n_k} = \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

对于相对应的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\le \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n.$$

在 $\{a_{n_k}\}$ 取收敛子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

另一方面

$$\varlimsup_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \le \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n &= \varlimsup_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \varlimsup_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n\end{aligned}$$

□

(5) 设 $\{b_n\}$ 非负，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$，则
$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = b \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = b \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$;

证明. 直接用上一题的结论就可以得证。 □

(6) 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$，$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$，则

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

证明. 因为 $a_n > 0, \forall n$, 从而

$$\sup_{k\ge n}\left\{\frac{1}{a_k}\right\} = \frac{1}{\inf\limits_{k\ge n}\{a_k\}}.$$

由上，下极限的定义，命题得证。 □

3. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$，且 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 1$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。

证明. 由题可知 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$。我们可以证明

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

由此可知

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}.$$

故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是收敛数列。当然 $\{a_n\}$ 收敛。 □

4. 设数列 $\{a_n\}, a_n\le 1, n=1,2,\cdots$，且满足:

$$a_m+a_n-1<a_{m+n}<a_m+a_n+1.$$

证明: *(1)* $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\omega$, 其中 ω 为有限数; *(2)* $n\omega-1\le a_n\le n\omega+1$.

证明. 先证明 (1).

$$a_1-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}<a_1+\frac{1}{n}.$$

由此得证 (1), 且 $\omega=a_1$。由此 (2) 得证。 □

5. 设 $a_n\ge 0, n\in\mathbb{N}$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le 1 \iff \text{对任何}l>1,\text{有}\ \overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

如果删去"任何"两字，结论如何?

注 7. 这个题目的结论是不对的。比如

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & n\text{是奇数}\\ 1, & n\text{是偶数}\end{cases}$$

于是

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}\le\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{1}{l^n}=0,$$

但是，$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 不存在。所以下面我们证明:

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le 1 \iff \text{对任何}l>1,\text{有}\ \overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

证明. $(\Rightarrow)$: 对于任何的 $l>1$, 取 $\varepsilon=\frac{l-1}{2}>0$，我们可以找到 $N>0$, 使得

$$\sqrt[n]{a_n}\le 1+\frac{l-1}{2}=\frac{l+1}{2}<l,\quad \forall n>N.$$

于是

$$\frac{a_n}{l^n}<\left(\frac{l+1}{2l}\right)^n,\quad \forall n>N.$$

由 $\frac{l+1}{2l}<1$ 可知,

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

$(\Leftarrow)$: 由定义可知，对任意的 $l>1$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时有,

$$\frac{a_n}{l^n}<1\Rightarrow a_n<l^n\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}<l.$$

从而

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le l\Rightarrow\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le 1.$$

如果删去"任何"两字, 结论不成立。 □

1.5.2 思考题

6. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 令

$$l=\varliminf_{n\to+\infty}x_n,\quad L=\varlimsup_{n\to+\infty}x_n.$$

证明：$\{a\in\mathbb{R}|有子列x_{n_k}\to a(k\to\infty)\}=[l,L]$. 如果删去条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，结论如何？

证明. 对于 $a\in(l,L)$ 和任意的 $\varepsilon<\frac{1}{2}\min\{a-l,L-a\}$, 我们有存在 N 使得：

(1) 当 $n>N$ 时，$-\varepsilon\le a_{n+1}-a_n\le\varepsilon$.

(2) 存在子列 n_k, 使得 $a_{n_k}\le l+\varepsilon,\quad\forall k$

(3) 存在子列 n_l, 使得 $a_{n_l}\ge L-\varepsilon,\quad\forall l$

选择子列 n_t，并且重新标记下标，使得

$$a_{n_t}\begin{cases}\le l+\varepsilon, & \text{当 t 是奇数}\\ \ge L-\varepsilon, & \text{当 t 是偶数}\end{cases}$$

对于任意上述子列的任意两个相邻的数 $a_{n_{2t}},a_{n_{2t+1}}$，在原数列中一定有至少一个 $a_{n_{t'}}$ 落在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 从而由极限的定义知这个子列收敛到 a. 命题得证。 □

7. 设 $0\le a_{n+m}\le a_n\cdot a_m(n,m=1,2,\cdots)$. 证明 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 且 $\sqrt[n]{a_n}$ 收敛。

证明. 设 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a>b=\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$。取 $N>0$ 使得

$$a_N<b+\frac{a-b}{3}.$$

又取子列 a_{n_k} 使得

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}=a.$$

当 k 充分大后，$n_k>N$, 且 $n_k=m_kN+l$, 其中 $l=0,1,\cdots,N-1$. 于是

$$a_{n_k}\le a_{m_kN}\cdot a_l=a_N^{m_k}\cdot a_l=a_N^{n_k}\cdot\frac{a_l}{a_N^l}.$$

由此可知

$$0\le\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\le\sqrt[n_k]{a_N^{n_k}}\sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}=a_N\cdot\sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}.$$

于是

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\le a_N\le b+\frac{a-b}{3}<a.$$

这与 $\{a_{n_k}\}$ 的选择矛盾。从而知 $a=b$. 命题得证。 □

1.6 Stolz 公式

1.6.1 练习题

1. 设 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数。应用 *Stolz* 公式证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

证明. 我们先计算 $\ln C_n^k + \ln C_n^{n-k} = 2\ln n! - 2\ln k! - 2\ln(n-k)!,\quad \forall k \le n$. 所以 $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k = n\ln n! - 2\sum\limits_{k=0}^{n} \ln k!$. 设 $x_n = n^2, y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k$, 于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)\ln n - \ln n!}{2n-1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{2n-1}\right) + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

命题得证 □

2. 应用 *Stolz* 公式证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}$;

证明. 设 $y_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}, x_n = n^{\frac{3}{2}}$，则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})}{n^3 - (n-1)^3}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1 + \sqrt{(1-\frac{1}{n})^3}\right)}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2}{3}\right] = \dfrac{1}{2}$.

证明. 我们设 $y_n = 3\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} - 2n^{\frac{3}{2}}$, $x_n = 3\sqrt{n}$. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{3\sqrt{n} - 2n^{\frac{3}{2}} + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\
&= \frac{3\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3}) - 6n^2 + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\
&= \frac{3n^2(\sqrt{(1-1/n)^3} - 1) + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\
&= \frac{-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\
&= \frac{(-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\
&= \frac{n^{\frac{3}{2}}(-9 + 9/n - 3/n^2 + (6 - 2/n)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(1 + \sqrt{1-1/n})}{3n^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{(1-1/n)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}
\end{aligned}$$

于是:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{3}\right] \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1}{2}.$$

命题得证 □

1.6.2 思考题

3. 设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=1$. 进而设 $0<x_1\leq\frac{1}{q}$，其中 $0<q\leq 1$，并且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n), n\in\mathbb{N}$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=\dfrac{1}{q}$.

证明. 如果我们能证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} nx_n &\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}(1-qx_{n-1})}{qx_{n-1}}\\ &=\frac{1}{q}.\end{aligned}$$

下面我们证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$. 由于 $x_n-x_{n-1}=-qx_{n-1}^2, \forall n\in\mathbb{N}$ 可知,$\{x_n\}$ 是单调减的。很明显 $x_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 是收敛的。设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$, 则 $a=a(1-qa)\Rightarrow qa^2=0\Rightarrow a=0$. 命题得证。 □

4. 由 *Toeplitz* 定理导出 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 *Stolz* 公式。

证明. 取

$$t_{nk}=\frac{x_k-x_{k-1}}{x_n-x_0},\quad \forall k=1,2,\cdots,n.$$

(1) 由于 $\{x_n\}$ 是单调增数列，$t_{nk}>0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk}=0$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=\dfrac{x_n-x_0}{x_n-x_0}=1$.

由 Toeplitz 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{y_0}{x_n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_0}{x_n}\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{x_n-x_0}\cdot\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}\\ &\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}t_{nk}\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}\\ &\xlongequal{\text{Toeplitz 公式}}\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a.\end{aligned}$$

命题得证。 □

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1.$

证明. 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$. 我们很容易证明以下结论:

(1) $\{S_n\}$ 是单增的, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

现在计算

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= a_n^2(S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2)) + (S_n - a_n^2)^2) \\ &= 3(a_nS_n)^2 - 3a_n^3(a_nS_n) + a_n^6 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{3n} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(a_nS_n)^3} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{3n} = 1.$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1$。命题得证。 □

1.7 复习题 1

1. 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 0, 1, 2, \cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$

证明. 由递归定义，

$$a_{n-1}^2 + 2 < a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 < a_n^2, \quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 2 * (n-1) + a_1^2 = 2n - 1.$$

于是

$$0 \leq \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \forall n > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0.$$

算术平均

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}{n} = 0.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{2n} &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{2n} \\ &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

命题得证。 □

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, 并且存在常数 K 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \le K.$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

证明. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$，存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \forall n > N_1.$$

设 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|$. 很显然 $\{s_n\}$ 是一个收敛数列。于是, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有

$$s_n - s_{n-N_1} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}.$$

综上，

$$\begin{aligned}
|z_n| &= |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| \\
&< |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{N_1} y_{n-N_1+1}| + |x_{N_1+1} y_{n-N_1} + x_{N_1+2} y_{n-N_1-1} + \cdots + x_n y_1| \\
&< MN_1(s_n - s_{n-N_1}) + \frac{\varepsilon}{2K}(|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{n-N_1}|) \\
&< MN_1 \frac{\varepsilon}{2MN_1} + K\frac{\varepsilon}{2K} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

命题得证。 □

3. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足:

(1) $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to +\infty (n \to +\infty)$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = s$.

应用 *Toeplitz* 定理证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

证明. 在这题里我们可以取

$$t_{nk} = \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

(1) $t_{nk} > 0, \forall n > 0, k = 0, 2, \cdots, n$;

(2) 给定 n, $\sum\limits_{k=0}^{n} t_{nk} = 1$;

(3) 由于 $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to +\infty (n \to +\infty)$, 给定 k, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$;

于是

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = \sum_{k=0}^{n} t_{nk} \frac{a_k}{b_k}.$$

由 Toeplitz 定理，命题可以得证。 □

4. 设 $p_k>0, k=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0, \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

证明. 对于给定的正整数 $k>0$, 我们可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$. 这是因为

$$0\le\frac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}<\frac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-k}}.$$

夹逼定理说明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$。

下面我们就可以用极限的定义来证明命题了。对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 N_0, 当 $n>N_0$ 时有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $M=\max\{|a_0-a|,|a_1-a|,\cdots,|a_{N_0}-a|\}$.

对于每一个 $k, 1\le k\le N_0$, 存在 N_k, 当 $n>N_k$ 时有,

$$\frac{p_{n-k-1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\le\frac{\varepsilon}{2MN_0}.$$

取 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_{N_0}\}$, 当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right|&=\left|\frac{p_1(a_n-a)+p_2(a_{n-1}-a)+\cdots+p_n(a_1-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|\\&<\sum_{k=1}^{N_0}\frac{p_{n-k-1}|a_k-a|}{p_1+p_2+\cdots+p_n}+\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{n-N_0}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&<\sum_{k=1}^{N_0}\frac{M\varepsilon}{2MN_0}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

命题得证。 □

5. 设 $\{a_n\}$ 为单调增的数列，令 $\sigma_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. 若“单调增”的条件删去，结论是否成立。

证明. 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，$\sigma_n<a+1$. 于是

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_n}{2}<\sigma_{2n}<a+1.$$

从而

$$a_n<2\left(a+1-\frac{a_1}{2}\right).$$

单调增有上界的数列是收敛数列。即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=b$, 由例 1.1.15 可知,

$$b=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=a.$$

如果 $\{a_n\}$ 不是单调增的，结论不成立。例如 $a_n=(-1)^n$，$\sigma_n=0$或$-\frac{1}{n}$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=0$. 但是 $\{a_n\}$ 不收敛。 □

6. 设 $\{S_n\}$ 为数列,$a_n=S_n-S_{n-1}$,$\sigma_n=\dfrac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$ 且 $\{\sigma_n\}$ 收敛，证明 $\{S_n\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n$.

证明. 我们直接计算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(S_n-\sigma_n)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{nS_n-S_0-S_1-\cdots-S_{n-1}}{n+1}\\&\xlongequal{\text{Stolz 公式}}\lim_{n\to+\infty}(nS_n-nS_{n-1})\\&=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-\sigma_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n$. □

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

证明. 如果我们能证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n(x_n-x_{n-1})}{n}=0$，则命题得证。

通过简单的计算，我们有

$$(-1)^n(x_n-x_{n-1})=\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)+x_2-x_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n(x_n-x_{n-2})=0$, 可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)}{n-2}=0.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n(x_n-x_{n-1})}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)}{n-2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{x_2-x_1}{n}=0.$$

□

8. 设 $u_0,u_1,\cdots$ 为满足 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2(n=0,1,2,\cdots)$ 的实数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。证明 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $u_k=0$.

证明. 由 u_n 的定义可知,

$$u_n\geq u_{n+1}\geq 0,\quad \forall n.$$

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. 由于 $\{S_n\}$ 收敛，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}u_k<1$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}\leq u_n&=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2\\&=u_{n+1}\left(u_{n+1}+\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}u_{n+2}+\cdots\right)\\&\leq u_{n+1}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots)\\&\leq u_{n+1}\end{aligned}$$

从而，$u_{N+1}=u_{N+2}=u_{N+3}=\cdots=c$. 由于 $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}u_k<1$ 可知，$c=0$. 又由 $u_{N+1}=u_{N+2}=u_{N+3}=\cdots=0$，可知 $u_N=u_{N-1}=\cdots=u_1=0$. □

9. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$

证明. 取 $t_{nk} = \frac{1}{2^n}C_n^k$, 我们有

(1) $t_{nk} > 0$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{n} t_{nk} = \frac{1}{2^n}(1+1)^n = 1$;

(2) 很容易验证 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$. 因为 $2^n = (1+1)^n > C_n^{k+1}$, 从而

$$0 \le t_{nk} \le \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$。

由 Toeplitz 定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$。 □

10. 给定实数 a_0, a_1，并令

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{a_0+2a_1}{3}$

证明. 由递归公式有:

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-a_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - a_0).$$

于是:

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-a_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(a_1-a_0) + \cdots + (a_1-a_0) \\ &= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}(a_1-a_0) \end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 + \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}(a_1-a_0)\right) = a_0 + \frac{2}{3}(a_1-a_0) = \frac{a_0+2a_1}{3}$。 □

11. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意给定的实数。令

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 x_{n+1} 应理解为 x_1. 归纳定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$x_{n+1}^{(k-1)}$ 应理解为 $x_1^{(k-1)}, k = 2, 3, \cdots$. 证明:

$$\lim_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

12. 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = l; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n^2} = \frac{l}{2}.$$

证明.

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=l$，易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=l.$$

现在计算

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k-na_1&=\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\\&=\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}(a_{l+1}-a_l)\\&=\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(a_{l+1}-a_l)\end{aligned}$$

如果取 $t_{nk}=\dfrac{2(n-k)}{(n-1)n}$，则

(1) $t_{nk}\geq 0,\forall n\in\mathbb{N},k=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2(n-k)}{(n-1)n}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0,\quad\forall k.$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_1}{(n-1)n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2(n-k)}{(n-1)n}\frac{a_{k+1}-a_k}{2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}t_{nk}\frac{a_{k+1}-a_k}{2}=\frac{l}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_1}{(n-1)n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n}{n^2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1}{n}=\frac{l}{2}.$$

命题得证。 □

13. 设 $x_1\in[0,1],\forall n\geq 2$，令

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{2}x_{n-1}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{1+x_{n-1}}{2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2k}=\dfrac{1}{3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2k+1}=\dfrac{2}{3}$.

证明. 由递推公式可知

$$\begin{aligned}x_{2k}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1+x_{2(k-1)}}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x_{2(k-1)}\\&=\sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^l+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}x_2\\&=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}x_2.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k}=\dfrac{1}{3}$.

$$x_{2k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x_{2(k-1)+1}=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{l}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k}x_1=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k}x_1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k+1}=\dfrac{2}{3}$. □

14. 定初始值 a_0，并递推定义

$$a_n=2^{n-1}-3a_{n-1},\quad n=1,2,\cdots.$$

求 a_0 的所有可能的值，使得数列 $\{a_n\}$ 是严格增的。

解. 考虑数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$. 显然

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{3^n}&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{3^{n-2}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}+(-1)^n a_0\\&=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+(-1)^n(5a_0-1)\right]\end{aligned}$$

于是

$$a_n=\frac{1}{5}\left[2^n+(-1)^n(5a_0-1)3^n\right].$$

由此

$$\begin{aligned}a_{2n}-a_{2n-1}&=\frac{1}{5}[2^{2n}+(5a_0-1)3^{2n}-2^{2n-1}+(5a_0-1)3^{2n-1}]\\&=\frac{1}{5}[2^{2n-1}+4(5a_0-1)3^{2n-1}].\end{aligned}$$

只有当 $a_0\ge\frac{1}{5}$ 时，$a_{2n}>a_{2n-1},\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}a_{2n-1}-a_{2n-2}&=\frac{1}{5}[2^{2n-1}-(5a_0-1)3^{2n-1}-2^{2n-2}-(5a_0-1)3^{2n-2}]\\&=\frac{1}{5}[2^{2n-2}-4(5a_0-1)3^{2n-2}].\end{aligned}$$

只有当 $a_0\le\frac{1}{5}$ 时，$a_{2n-1}>a_{2n-2},\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

综上，只有 $a_0=\frac{1}{5}$ 时，$\{a_n\}$ 是严格递增的。

15. 设 $c>0$，$a_1=\frac{c}{2}$，$a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$，$n=1,2,\cdots$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\begin{cases}1-\sqrt{1-c}, & 0<c\le 1,\\ +\infty, & c>1.\end{cases}$$

试问：当时 $-3\le c<0$，数列 $\{a_n\}$ 的收敛性如何？

证明. 现证 $c>1$ 的情形：

$$a_n\ge\sqrt{ca_{n-1}^2}=\sqrt{c}a_{n-1}\ge\cdots\ge\left(\sqrt{c}\right)^{n-1}a_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{c}\right)^{n-1}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$. 命题得证。

现在 $c\le 1$ 的情形：

(1) 考虑函数 $f(x)=x^2-2x+c$。当 $x\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$, $f(x)<0$ 且 $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-1+c$.

(2) 很显然 $a_1=\frac{c}{2}\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$. 于是 $a_2-a_1=\frac{1}{2}f(a_1)<0\Rightarrow a_2<a_1$.

$$a_1^2\in(2-c-2\sqrt{1-c},2-c+2\sqrt{1-c})\Rightarrow a_2=\frac{c}{2}+\frac{a_1^2}{2}\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c}).$$

(3) 假设 $n=k$ 时，$a_k\le a_{k-1}$ 且 $a_k\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$. 显然我们有 $a_{k+1}\le a_k, a_{k+1}\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$.

综上，

$$a_{n+1}\le a_n,\quad a_n\ge 1-\sqrt{1-c},\quad \forall n.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1-\sqrt{1-c}$.

现考虑 $-3\le c<0$ 的情形。

(1) 我们先证明 a_n 是有界的。$\frac{c}{2}<a_1=\frac{c}{2}\le 0$. 假设 $\frac{c}{2}\le a_k\le 0$, 则 $0\le a_k^2\le\frac{c^2}{4}$。从而

$$\frac{c}{2}<\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2}=a_{k+1}\le\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}=\frac{c}{8}(4-c)<0$$

由数学归纳法知，$a_n\in\left[\frac{c}{2},0\right],\forall n$.

(2)

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-2}&=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+a_{n-3}\right)\left(a_{n-1}-a_{n-3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(a_{n-1}+a_{n-3}\right)\left(a_{n-2}+a_{n-4}\right)\left(a_{n-2}-a_{n-4}\right)\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{4}\left(a_{n-1}+a_{n-3}\right)\left(a_{n-2}+a_{n-4}\right)>0$，$a_n-a_{n-2}$ 和 $a_{n-2}-a_{n-4}$ 同号。即 $\{a_{2k-1}|k\ge 1\}$ 和 $\{a_{2k}|k\ge 1\}$ 是单调数列。因为

$$a_3-a_1=\frac{c}{2}+\frac{a_2^2}{2}-\frac{c}{2}=\frac{a_2^2}{2}>0$$

所以 $\{a_{2k-1}|k\le 1\}$ 是单调递增的。又因为

$$a_4-a_2=\frac{a_3+a_1}{2}\left(a_3-a_1\right)<0,$$

所以 $\{a_{2k}|k\ge 1\}$ 是单调递减的。

假设当 $k\to+\infty$ 时，$a_{2k-1}\to p, a_{2k}\to q$。在递推公式两端取极限，我们有

$$\begin{aligned}p&=\frac{c}{2}+\frac{q^2}{2}\\q&=\frac{c}{2}+\frac{p^2}{2}\end{aligned}$$

两式相减可得

$$p-q=\frac{1}{2}(q-p)(p+q)\Rightarrow(p-q)(p+q+2)=0.$$

如果 $p-q=0$, i.e. $p=q$, 则 $p=q=1-\sqrt{1-c}$.

如果 $p+q+2=0$, 则将 $p=-2-q$ 代入第一个方程，我们有 $(q+1)^2=-(c+3)$. 所以如果 $c>-3$, 则 $(q+1)^2<0$, 从而无解。当 $c=-3$ 时，$q=-1$, 从而 $p=q=-1$. □

16. *数列 $\{u_n\}$ 定义如下: $u_1=b, u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$，$n\in\mathbb{N}$. 问: a,b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛，并求出其极限值。*

解. 由递归定义可知:

$$u_{n+1}-a=(u_n-a)^2+(u_n-a).$$

记 $v_n=u_n-a$，则 $v_1=b-a$. 如果 $\{u_n\}$ 收敛，则 $\{v_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

(1) 由于 $v_{n+1}-v_n=v_n^2\geq 0$, $\{v_n\}$ 是单调增的。

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$，则 $v_n\leq 0,\forall n$.

下面我们用归纳法来证明，当 $v_1\leq 0, v_1+1\geq 0$ 时，$v_n\leq 0$ 且 $v_n+1\geq 0\ \forall n$.

(1) 当 $n=1$ 时，成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，我们也有 $v_k\leq 0$ 且 $v_k+1\geq 0$.

(3) 我们证明 $n=k+1$ 时也成立。因为

$$v_{k+1}=v_k\cdot(v_k+1),$$

所以 $v_{k+1}\leq 0$. 另一方面

$$v_{k+1}+1=v_k^2+v_k+1=\left(v_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0.$$

由此可见，当 $b\in[a-1,a]$ 时，$\{u_n\}$ 收敛。

17. 设 $A>0, 0<y_0<A^{-1}, y_{n+1}=y_n(2-Ay_n), n\in\mathbb{N}$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=A^{-1}$.

证明. 如果我们能证明 $0<y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$, 则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=2-Ay_n\geq 2-AA^{-1}=1\Rightarrow y_{n+1}\geq y_n.$$

从而 $\{y_n\}$ 是单调递增有上界的数列。故收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=A^{-1}$.

下面我们就证明 $y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$. 考虑函数 $f(x)=x(2-Ax)$. 显然该函函数在 $x=A^{-1}$ 是取得最大值。即 $f(x)<A^{-1},\forall x\in\mathbb{R}$. 由于 $0<y_1<A^{-1}$, 由归纳法，$0<y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$. □

18. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2-a_n)a_{n+1}=1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$。

证明. 由于 $(2-a_n)a_{n+1}=1$, 则 $a_n\neq 2$, 从而 $a_1\neq\frac{3}{2}$. 我们现证无论 a_1 取何值，都存在 N 使得 $a_N\leq 1$.

(1) 如果 $a_1\leq 1$, 取 $N=1$, $a_N=a_1\leq 1$

(2) 如果 $a_1>\frac{3}{2}$, 则 $a_2>2$, $a_3<0$. 于是取 $N=3$, $a_N=a_3<0\leq 1$.

(3) 如果 $1<a_1<\frac{3}{2}$. 记 $a_1=1+h$, 则

$$a_k=1+\frac{h}{1-(k-1)h},\quad k=2,3\cdots.$$

取 $k=\left[\frac{1}{h}\right]$, 我们有

$$1-(k-1)h\geq h>0,\quad \frac{h}{1-(k-1)h}\geq\frac{1}{2}.$$

从而取 $N=k+2=\left[\frac{1}{h}\right]$，我们有 $a_{N-2}=a_k\geq\frac{3}{2}, a_N<0\leq 1$.

综上，我们不妨假设 $a_1 \le 1$. 下面我们可以用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 是单调增的，且 $a_n \le 1, \forall n$. 由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n},$$

我们可知当 $a_n < 1$ 时，$a_{n+1} > a_n$. 又因为 $2 - a_n > 1 \to a_{n+1} \le 1$. 到此我们证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则 $(2-a)a = 1$. 解方程知 $a = 1$. □

19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足不等式 $0 \le a_k \le 100a_n (n \le k \le 2n, n = 1, 2, \cdots)$，且无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$

证明. 显然 $a_{2n} \le 100a_n$, $\quad a_{2n} \le 100a_{n+1}, \cdots, a_{2n} \le 100a_{2n-1}$. 从而

$$0 \le 2na_{2n} \le 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 200 \sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$.

同理，$a_{2n-1} \le 100a_n$, $\quad a_{2n-1} \le 100a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1} \le 100a_{2n-2}$. 将所有的不等式加起来，我们有

$$0 \le (2n-1)a_{2n-1} = a_{2n-1} + 2(n-1)a_{2n-1} \le 2 * 100 \sum_{k=n}^{2n-2} a_k + a_{2n-1} \le 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 200 \sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0$.

综上所述，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ □

20. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

证明. 通过简单计算，我们可以得知

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^2 \le \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n-k+1}{n^2}\right), \quad \forall k \le \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

另一方面

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \le \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n.$$

很显然

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}.$$

由夹逼定理，命题得证。 □

21. 设 $a_1 > b_1 > 0$，令

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1b_1}$.

证明. 很显然

$$b_n \le \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \le a_n, \quad \forall n = 2, 3\cdots.$$

于是

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \le \frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2} = a_{n-1},$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})\cdot b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} \ge 0 \Rightarrow b_n \ge b_{n-1}.$$

所以

$$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \le \cdots \le a_n \le \cdots \le a_2 \le a_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 都存在。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$,

$$a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1} = \cdots = a_1b_1 \Rightarrow ab = a_1b_1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \Rightarrow a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a = b.$$

于是 $a = b = \sqrt{a_1b_1}$. □

22. 当 $n \ge 3$ 时，证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

证明. 在证明该题之前，我们先证明如下结论：数列 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 满足 $n \ge 2, a_k \ge -1, k = 1, 2, \cdots, n$ 且它们有相同的符号，则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

我们用归纳法来证明此命题：

(1) 当 $n = 2$ 时，$(1+a_1)\cdot(1+a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 \ge 1 + a_1 + a_2$, 命题成立。

(2) 假设 $n = k$ 时，命题亦成立，i.e. $\prod\limits_{n=1}^{k}(1+a_n) \ge 1 + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

(3) 下面证明当 $n = k+1$ 时，命题亦成立。

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{k+1}(1+a_n) &= \left(\prod_{n=1}^{k}(1+a_n)\right)\cdot(1+a_{k+1}) \\ &\ge (1+a_1+\cdots+a_k)\cdot(1+a_{k+1})(\text{因为 } 1+a_{k+1} \ge 0) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n + \sum_{n=1}^{k} a_na_{k+1} \\ &\ge 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n\end{aligned}$$

命题得证。

下面我们用上述命题来证明此题。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

首先，由 $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1,\forall k\le n$，我们可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

右边的不等式的得证。

另一方面，应用上面证明的结论，可知

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\ge 1-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{n}=1-\frac{(k-1)k}{2n}.$$

于是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}>\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3}{2n}$$

左边的不等式得证。 □

23. 设 $a_1=1,a_n=n(a_{n-1}+1),n=2,3,\cdots$，且

$$x_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$（其中 $\prod\limits_{k=1}^{n}$ 表示从 $k=1$ 到 $k=n$ 的连乘积）.

解. 我们先计算

$$\begin{aligned}x_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\\&=\frac{a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2+1}{2(a_1+1)}\cdot\frac{a_3+1}{3(a_2+1)}\cdots\frac{a_n+1}{n(a_{n-1}+1)}\\&=\frac{a_n+1}{n!a_1}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&a_1=1!\\&a_2=2!\left(1+\frac{1}{1!}\right)\\&a_3=3!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)\\&\quad\cdots\\&a_n=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)\end{aligned}$$

从而知，

$$a_n+1=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

于是：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e.$

24. 设 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n\in\mathbb{N}$，用 K_n 表示使得 $H_k\geq n$ 的最小下标，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$

解. 我们记 $x_n=H_n-\ln n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=C$(*Euler* 常数). 现在我们计算

$$x_{K_{n+1}}-x_{K_n}=\left(\frac{1}{K_n+1}+\cdots+\frac{1}{K_{n+1}}\right)-\ln K_{n+1}+\ln K_n.$$

另一方面

$$1-\frac{1}{K_n}\leq\left(\frac{1}{K_n+1}+\cdots+\frac{1}{K_{n+1}}\right)<1+\frac{1}{K_{n+1}}.$$

从而由夹逼定理知

$$0=\lim_{n\to+\infty}(x_{K_{n+1}}-x_{K_n})=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\ln K_{n+1}+\ln K_n\right).$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}=e.$

25. 设 $y_0\geq 2, y_n=y_{n-1}^2-2(n\in\mathbb{N})$,

$$S_n=\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots+\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$

证明. 如果 $y_0=2$, 则 $y_n=2,\forall n>0$。从而 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{2^k}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}}$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=1=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$$

下面证明当 $y_0>2$ 时结论亦成立。取 $a=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$. 简单计算可知

$$y_0=a+\frac{1}{a}.$$

由此

$$\begin{aligned}
y_1&=y_0^2-2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=a^2+\frac{1}{a^2}\\
y_2&=y_1^2-2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=a^4+\frac{1}{a^4}\\
&\cdots\\
y_n&=y_{n-1}^2-2=\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)^2-2=a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
y_0y_1\cdots y_n&=\frac{1}{a-\frac{1}{a}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\cdots\left(a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}\right)\right]\\
&=\frac{a}{a^2-1}\left[\left(a^{2^n}\right)^2-\left(\frac{1}{a^{2^n}}\right)^2\right]\\
&=\frac{a}{a^2-1}\frac{a^{2^{n+2}}-1}{a^{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}=\frac{a^2-1}{a}\frac{a^{2^{n+1}}}{a^{2^{n+2}}-1}=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{a^{2^{n+2}}-1}\right).$$

由此可知

$$S_n=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a^{2^{n+2}}-1}\right).$$

进而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{a^2-1}{a}\left(\dfrac{1}{a^2-1}+1\right)=a$. 命题得证。 □

26. 令数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明:*(1)* 当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\dfrac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$.

证明. (1). 直接计算

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}b_{n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}\cdot\frac{n+1}{n}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}\left(1+\frac{k+1}{n-k}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{n!(n-n)!}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{0!(n-0)!}{n!}-2\\
&=2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}-2\\
&=2b_n-2
\end{aligned}$$

所以，$b_n=\dfrac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$。

（2）当 $n>4$, 我们有 $b_{n-1}>2\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2n}{n-1}$, 从而

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{b_{n-1}}<\frac{n+1}{2n}+\frac{n-1}{2n}=1.$$

即从 $n>4$ 起，数列 $\{b_n\}$ 单调递减。另一方面，显然 $b_n\geq 2,\forall n\geq 2$. 由此可知 $\{b_n\}$ 是收敛的。对（1）中的等式取极限可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$. □

27. 设 $S_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$. 证明:

$$n^n\left[1+\frac{1}{4(n-1)}\right]<S_n<n^n\left[1+\frac{2}{e(n-1)}\right].$$

证明. 提取 n^n 可得

$$S_n=n^n\left[1+\frac{1}{n^n}+\frac{2^2}{n^n}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right].$$

显然

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{1}{n^n}+\frac{2^2}{n^n}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{(n-2)^{n-1}}{n^n}+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} < \frac{2(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{2}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

我们不难证明 $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$ 是单调增且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$. 所以

$$\frac{1}{4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{e}.$$

将上述不等式综合起来，我们就证明了此题。 □

28. 设 $x_n>0$. 证明:

(1) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geq e$;

(2) 上式中的 e 为最佳常数。

证明. (1) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geq e$ 等价于 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}\right)^n\geq 1$. 我们用反证法来证明该命题。如果

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}\right)^n<1,$$

则存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，我们有

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}<1,\forall n>N.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{x_{N+1}}{N+1}-\frac{x_{N+2}}{N+2}&>\frac{x_1}{N+2}\\ \frac{x_{N+2}}{N+2}-\frac{x_{N+3}}{N+3}&>\frac{x_1}{N+3},\\ &\cdots\\ \frac{x_{n-1}}{n-1}-\frac{x_n}{n}&>\frac{x_1}{n}\end{aligned}$$

把以上的不等式加起来，我们有

$$\frac{x_{N+1}}{N+1}>\frac{x_{N+1}}{N+1}-\frac{x_n}{n}>\sum_{k=N+1}^{n}\frac{x_1}{k}\to+\infty.$$

这显然与 $\frac{x_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立，命题得证。

(2) 现证明对于任意的 $\varepsilon>0$，存在数列 $\{x_n\}$ 使得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n<e^{1+\varepsilon}.$$

我们取 $x_1 = \frac{\varepsilon}{2}, x_n = n$, 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{2} + n + 1}{n}\right)^n = e^{1+\frac{\varepsilon}{2}} < e^{1+\varepsilon}.$$

这说明 $e^{1+\varepsilon}$ 不是下确界。命题得证。

□

29. 设 $a_n > 0$. 证明：$\varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geq 1$.

证明. 如果 $\varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1$, 则，存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有，

$$n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}.$$

于是:

$$\frac{a_{N+1}}{N+1} > \frac{a_{N+1}}{N+1} - \frac{a_n}{n} > \sum_{k=N+2}^{n}\frac{1}{k}.$$

当 $n \to +\infty$ 时，$\sum\limits_{k=N+2}^{n}\frac{1}{k} \to +\infty$. 这与 $\frac{a_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立。 □

30. 设 $2a_{n+1} = 1 + b_n^2, 2b_{n+1} = 2a_n - a_n^2, 0 \leq b_n \leq \frac{1}{2} \leq a_n, n = 1, 2, \cdots$. 证明：数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛，并求其极限之值。

证明. 很容易证得：$a_n \leq \frac{5}{8}, \forall n$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n + b_{n-1})(b_n - b_{n-1})$$
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\left(2 - a_n - a_{n-1}\right)\left(a_n - a_{n-1}\right)$$

由此可得

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^2}\left|a_{n-1} - a_{n-2}\right|$$
$$|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2^2}\left|b_{n-1} - b_{n-2}\right|$$

取 $A = \max\{|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|\}$, $B = \max\{|b_2 - b_1|, |b_3 - b_2|\}$, 则

$$|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}}A$$
$$|b_n - b_{n-1}| \leq \frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}}B$$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是 Cauchy 列。从而都收敛。

假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, 则

$$2a = 1 + b^2,$$
$$2b = 2a - a^2.$$

解方程组可知,$(b^2 + 2b - 1)(b^2 - 2b + 3) = 0$. 解得 $b = \sqrt{2} - 1, a = 2 - \sqrt{2}$. □

参考文献

[徐薛] 徐森林，薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

后 记