

徐森林，薛春华 编
《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

目 录

第一章 数列极限	1
1.1 数列极限的概念	1
1.1.1 练习题	1
1.1.2 思考题	7
1.2 数列极限的基本性质	11
1.2.1 练习题	11
1.2.2 思考题	16
1.3 实数理论, 实数连续性命题	16
1.3.1 练习题	16
1.3.2 思考题	16
1.4 Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数 $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	16
1.4.1 练习题	16
1.4.2 思考题	24
1.5 上极限与下极限	27
1.5.1 练习题	27
1.5.2 思考题	32
1.6 Stolz 公式	33
1.6.1 练习题	33
1.6.2 思考题	35
1.7 复习题 1	36
索 引	49
参考文献	49
后 记	51

第一章 数列极限

1.1 数列极限的概念

1.1.1 练习题

1. 用数列极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 10} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n - 1 \right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1.$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7};$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{6}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{3n+4}{7n-3} - \frac{3}{7} \right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7}.$$

□

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{50, \left[\frac{12}{\varepsilon} \right] + 1\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{1}{2}n^2 - n - 1000 > 1$$

且

$$\left| \frac{5n+6}{n^2-n-1000} - 0 \right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2}n^2 - n - 1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0.$$

□

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n + 5} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] + 4$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{8}{2^n + 5} - 0 \right| < \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n + 5} = 0.$$

□

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{\sin n!}{n^{1/2}} - 0 \right| < \frac{1}{n^{1/2}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0.$$

□

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{2, \left[\left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1\}$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}| = \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} < \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0.$$

□

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{2, \left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^3} \right]\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}| &= \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)(n-2)} + \sqrt[3]{(n-2)^2}} \\ &< \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0.$$

□

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1+n^2} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{n^{3/2} \arctan n}{1+n^2} \right| < \frac{\frac{\pi}{2} n^{3/2}}{n^2} < \frac{\pi/2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1+n^2} = 0.$$

□

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}, n \text{ 为奇数}; \end{cases}$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &< \begin{cases} \frac{1}{n}, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, n \text{ 为奇数} \end{cases} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

□

$$(10) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty.$$

证明. 对于 $\forall A > 0$, 取 $N = \max\{5, \left[\sqrt[3]{2A} \right] + 1\}$, 当 $n > N$ 时,

$$1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} > 1 - \frac{9}{n^2} > \frac{1}{2}$$

且

$$n^3 - 4n - 5 = n^3 \left(1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) > \frac{1}{2} n^3 > A$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty.$$

□

2. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, **证明:** $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$.

证明. 我们分以下几种情况证明此命题:

(1) 当 $a \in \mathbb{R}$ 时. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$.

(2) 当 a 是 $+\infty$ 时。由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, 对 $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n > A$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $a_{n+k} > A$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = +\infty$.

(3) 当 a 是 $-\infty$ 时。由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, 对 $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n < A$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $a_{n+k} < A$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = -\infty$.

□

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$: 举例说明, 这个命题的逆命题不真。

证明. 我们只证明 a 是有限实数的情况。当 a 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 时也成立。由极限的定义有: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

从而

$$||a_n| - |a|| < |a_n - a| < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|.$$

如果我们取 $a_n = (-1)^n$, 则 $|a_n| = 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 1 \neq 0$. 但是很显然 a_n 是发散的。

□

4. 设 $x_n \leq a \leq y_n, n \in \mathbb{N}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$$

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon$. 从而

$$|y_n - a| = y_n - a = y_n - x_n + x_n - a < y_n - x_n < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$.
同理可证

$$-\varepsilon < x_n - y_n < x_n - a < 0 < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

□

5. 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列。证明: 数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数, 或者有最小的数。举出两者都有的例子; 再举出只有一个的例子。

证明. 假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 我们分以下几种情况讨论:

(1) 如果 $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. 此时, 数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

(2) 如果 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_{n_0} \neq a$. 不妨假设 $a_{n_0} < a$. 对于 $\varepsilon = \frac{a - a_{n_0}}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$ 使得 $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a + a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$. 取

$$m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N\}.$$

我们有:

$$(a) \ m \in \{a_n\}_{n=1}^{+\infty},$$

(b) $a_n \geq m, \forall n$.

即, m 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值.

如果 $a_{n_0} > a$. 我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值.

考虑下列收敛数列:

- (1) 如果 $a_n = \frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n \leq a_1 = 1$, 没有最小值.
- (2) 如果 $a_n = -\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1 = a_1 \leq a_n$, 没有最大值.
- (3) 如果 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则 $-1 = a_1 \leq a_n \leq a_2 = \frac{1}{2}$

□

6. 证明下列数列发散:

- (1) $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散, 因为:

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$$

□

- (2) $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列 $\{k_n\}, \{l_n\}$ 使得

- (a) $k_n \in (2m\pi - \frac{\pi}{6}, 2m\pi + \frac{\pi}{6})$,
- (b) $l_n \in (2m\pi + \frac{5\pi}{6}, (2m+1)\pi + \frac{\pi}{6})$.

显然, 我们有

- (a) $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$,
- (b) $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$.

因此, $\{\cos n\}$ 是发散的。

□

7. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 三个数列 $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限。

证明. (\Rightarrow) 由定理 1.1.2, 收敛数列的子列也收敛, 且极限相同。

(\Leftarrow) 假设三个子列的极限都是 a 。由极限的定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0$,

- (1) $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2} - a| < \varepsilon, \forall k > N_1$,
- (2) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1} - a| < \varepsilon, \forall k > N_2$,
- (3) $\exists N_3 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k} - a| < \varepsilon, \forall k > N_3$ 。

取 $N = 3 \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 我们有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N,$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

□

注 1. 这个命题对于 $a = +\infty, -\infty, \infty$ 也成立。

注 2. 对于 $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+2} = \cdots = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk} = a.$$

8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_{n-1}) = d$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = d$.

证明.

$$\frac{a_n - a_1}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_1}{n} = d.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{n} = 0$, 易知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = d.$$

□

9. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 用 $\varepsilon - N$ 法, $A - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}, (a \text{ 为实数 } +\infty, -\infty).$$

证明. 我们只证 a 为实数的情形. 其他的情况证明类似. 由极限的定义, 对于 $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2}a - \frac{a}{2} \right| \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} \right| + \frac{a}{2n} \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| + \frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{a}{2n}. \end{aligned}$$

取 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_1.$$

取 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_2.$$

取 $N_3 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_3.$$

最后, 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$, $\forall n > N$, 我们有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

□

1.1.2 思考题

10. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $|q| < 1$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 则存在整数 $M > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. 于是 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|q^{n-k}| < \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon, \forall n > N_1, k = 0, 1, 2, \dots, N_0.$$

我们现在取 $N = \max\{N_0, N_1\}$. 对任意的 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - \frac{a}{1-q} \right| \\ &= \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - a \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{aq^n}{1-q} \right| \\ &< |(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}| + \frac{|a||q|^n}{|1-q|} \\ &< \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3} (1 + |q| + \cdots + |q|^{n-N_0}) + \left(MN_0 + \frac{a}{1-|q|} \right) \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{即, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

□

11. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab.$$

证明. 首先我们证明命题在 $b = 0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\exists M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > N_0$.

(3) 由于 $|a_n| < M$, 对上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left| \frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1\}$, 对于上述的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} \right| \\ &< \left| \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1}b_{N_0+1}}{n} \right| + \left| \frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \frac{(n-N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} = 0.$$

下面证明命题在 $b \neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a)b = 0$. 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_{n-1} - a)b + (a_n - a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - b) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_{n-1}(b_1 - b) + a_n(b_n - b)}{n} = 0.$$

(3)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} - ab \right| \\ &= \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} + \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| \end{aligned}$$

(4) 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \left| \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$\left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} - ab \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} = ab.$$

□

12. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, b_n \geq 0 (n \in \mathbb{N}), \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS$.

证明. 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 首先我们证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

(2)

$$\begin{aligned} & |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - aS| \\ &= |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - S)| \\ &< |(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| + |a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| \end{aligned}$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ 得知

$$|(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$ 可得知

$$|a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS.$$

□

注 3. 这题里的条件 $b_m \geq 0 (n \in \mathbb{N})$ 不是必须的。只要 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|) = S$ 就够了。

注 4. 这题是第 10 题的推广。如果 $b_n = q^{n-1}, 0 < q < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

由这题的结论, 第 10 题得证。

13. (Toeplitz 定理) 设 $n, k \in \mathbb{N}$, $t_{nk} \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ 。说明例 1.1.15 为 Toeplitz 定理的特殊情形。

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 我们有:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

(2) 我们取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$ 。

(3) 对于 $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N_0$, 存在 $N_l \in \mathbb{N}$ 使得 $t_{nl} < \frac{\varepsilon}{2N_0 M}, \forall n > N_l$ 。

(4) 取 $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$, 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k - a \right| \\ &= \sum_{k=1}^{N_0} t_{nk} |(a_k - a)| + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} |(a_k - a)| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2N_0 M} M + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a.$$

如果我们取 $b_{nk} = \frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证。

□

14. 设 a, b, c 为三个给定的实数, 令 $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$, 并归纳定义

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ b_n = \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$ 。

证明. 我们通过以下结论去证明该命题:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n) = a + b + c$. 这是因为 $a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \cdots = a + b + c$.

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - c_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - b_n) = 0$. 这是因为

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - b_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - b),$$

$$a_n - c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - c_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - c),$$

$$c_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1} - b_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (c - b).$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n + (a_n - b_n) + (a_n - c_n)) = a + b + c,$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a + b + c}{3}.$$

(4) 同理可证, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a + b + c}{3}$.

□

15. 设 a_1, a_2 为实数, 令

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, n = 3, 4, 5, \cdots,$$

其中 $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_2 + a_1 q}{1 + q}$.

证明. 由递推公式, 我们可以证明

$$a_n - a_{n-1} = (-q)^{n-2} (a_2 - a_1), \forall n \geq 3.$$

由此我们可以得出 a_n 的通项公式

$$a_n = a_2 + \sum_{k=1}^{n-2} (-q)^k (a_2 - a_1) = a_2 - \frac{q + (-q)^{n-1}}{1 + q} (a_2 - a_1).$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_2 - \frac{q}{1 + q} (a_2 - a_1) = \frac{a_2 + qa_1}{1 + q}.$$

□

16. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, $4 \leq b_n \leq 5$, $4 \leq c_n \leq 5$,

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2 + c_n^2}}{b_n + c_n} a_{n-1}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

证明. 由通项公式定义有

$$0 \leq a_n \leq \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由 $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

□

1.2 数列极限的基本性质

1.2.1 练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - 1/n + 5/n^2}{3 - 2/n - 7/n^2} = 4/3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{3 + (-2)(-2/3)^n} = 1/3$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}}, |a| < 1, |b| < 1$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) \left(\frac{1 - b}{1 - b^n}\right) = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$$

解. 记

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2(n-1)-1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3.$$

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right)$$

解. $1 - \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)} \end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积: 奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2 \cdot 3}(n+2)!$.

分母的 $2n$ 项的积: 奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$.

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right]$$

解.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8n^3 - 2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right] = \frac{4}{3}.$$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}})$$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

解.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0.$$

2. 设 $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. 应用例 1.2.6 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

证明.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} \cdot \sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. □

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 应用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} = a$, 其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数.

证明.

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - 1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{n} = a.$$

□

4. 设 $a_n \neq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r > 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$.

证明. 取 $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$. 由极限的定义, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} > 1$. 于是

$$|a_n| > \left(\frac{r+1}{2} \right)^{n-N} |a_N|.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$. □

5. (1) 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, 我们有

$$S_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ □

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$

证明.

$$0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

□

6. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$. 应用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

证明. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, 我们有一下结论:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

同时, 我们有

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{a_n}\right)/n} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - 1 + \frac{1}{a_n} \right) / n} \right) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot a_n} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 1 + \cdots + 1 + a_n)}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - 1 + a_n)}{n} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

7. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$: $\left(\text{提示: } 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n} \right)$

证明.

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{n} &= \frac{(n-1)! + n!}{n!} \\
 &< \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \\
 &< \frac{(n-1)(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} \\
 &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n \cdot (n-1)} \\
 &= 1 + \frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$ 。

□

8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ 。记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, \quad T_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

应用 $\varepsilon - N$ 法 (分 $a < b$, $a > b$, $a = b$) 或 $\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)$ 与 $\min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|)$, 证明:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \max\{a, b\}; \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \min\{a, b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - b_n| = |a - b|.$$

由此可知:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \max\{a, b\},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \min\{a, b\}.$$

□

9. 应用例 1.1.7 与例 1.1.15 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证明. 取 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

□

10. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right) = 1$

证明. 考虑数列 $\sqrt[n]{n}$. 这个数列在 $n=3$ 是取得最大值且 $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \forall n \geq 3$. 这就是说数列 $\{\sin \frac{\ln n}{n}\}$ 在 $n=3$ 时取得最大值且

$$\sin \frac{\ln(n+1)}{n+1} < \sin \frac{\ln n}{n}, \forall n \geq 3.$$

从而,

$$\left(\sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}} < \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} < \left((n-1) \sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((n-1) \sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right) = 1.$$

□

11. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

□

1.2.2 思考题

12. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$.

证明. 假设 $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ 是互异的素数, $m_k \geq 1, k = 1, 2, \cdots, l$. 这里 $l = p(n)$.

$$\ln n = \sum_{k=1}^l m_k \ln p_k \geq \sum_{k=1}^{p(n)} \ln 2 = p(n) \ln 2.$$

因此

$$0 \leq \frac{p(n)}{n} \leq \frac{\ln n}{n \ln 2}.$$

由夹逼定理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$. □

13. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}$.

证明.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4n^2}. \end{aligned}$$

由夹逼定理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}$. □

1.3 实数理论, 实数连续性命题

1.3.1 练习题

1.3.2 思考题

1.4 Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

1.4.1 练习题

1. 证明下列数列收敛:

$$(1) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n} \right), n \in \mathbb{N};$$

1.4 CAUCHY 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数 $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 17

证明. 记 $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, 我们有 $S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < S_n$. 很显然 $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, S_n 收敛. \square

$$(2) \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$. 当 $n > 10$ 时, $\frac{n+9}{2n-1} < 1$. 即 $S_{n+1} < S_n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 10$. 另一方面 $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, S_n 收敛. \square

2. 设 $0 < a_n < 1$ 且 $a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N}$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

证明. 考虑函数 $f(x) = (1 - x)x, x \in (0, 1)$, 我们有

$$f(x) > 0, f(x) \leq \frac{1}{4}, x \in (0, 1).$$

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{4(1 - a_n)a_n} \geq 1$, 即 a_n 是单调递增的函数. 由实数连续性命题 (二) 可知, a_n 收敛.

由递推公式可知, $\frac{1}{4} \geq a(1 - a) \geq \frac{1}{4}$. 所以 $a = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$. \square

3. 给定两正数 $x_0 = a$ 与 $y_0 = b$, 归纳定义

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2},$$

$n = 1, 2, \cdots$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$, 并称此极限为 a 与 b 的算术-几何平均数.

证明. 由算术-几何平均不等式知: $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad \forall n = 1, 2, \cdots, \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n, \quad \forall n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

于是

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq y_1 \leq y_0 = b.$$

令 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = B$. 由递推公式可知: $A = \sqrt{AB}$, 从而 $A = B$. \square

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, 用 x_n 表示方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的根, 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

解. 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$ 对于给定的 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 是单调增函数, 所以 $f_n(x)$ 只会有唯一的根 x_n . 由于

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_n(x_n) + x_n^{n+1} = f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在. 由于 $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$ 知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

5. 设 $c > 0, x_1 = \sqrt{c}, x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$.

证明. 我们用归纳法证明 $x_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(1) \quad x_1 = \sqrt{c} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

$$(2) \quad \text{假设 } x_k < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \text{ 我们证明 } x_{k+1} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{c + x_k} \\ &< \sqrt{c + \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4c + 2 + 2\sqrt{1 + 4c}}{4}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

现在考虑函数 $f(x) = c + x - x^2$ 。很显然

$$f(x) > 0, \quad x \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}\right).$$

于是

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = c + x_n - x_n^2 > 0.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列。由实数连续性命题 (二) 可知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. 对递归公式取极限得 $a = \sqrt{c + a}$. 从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

□

6. 设 $x_1 = c > 0$, 令 $x_{n+1} = c + \frac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

解. 由递推公式, 我们有

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}}.$$

下面我们证明:

$$(1) \quad x_{2k-1} < x_{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$(2) \quad x_{2k} > x_{2(k+1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-3} - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_{n-3}} = \frac{x_{n-2} - x_{n-4}}{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-3} \cdot x_{n-4}}.$$

由于 $x_3 - x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$, 从而知 (1) 成立. 由于 $x_4 - x_2 = \frac{x_1 - x_3}{x_1 \cdot x_3} < 0$, 从而知 (2) 成立.

另一方面:

$$x_{2k} - x_1 = c + \frac{1}{x_{2k-1}} - c = \frac{1}{x_{2k-1}} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$x_{2k+1} - x_2 = c + \frac{1}{x_{2k}} - c - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_{2k}}{x_1 \cdot x_{2k}} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, 奇数列和偶数列都是收敛子列. 假设

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = b.$$

由递推公式, 我们有

$$x_{2k+1} = c + \frac{1}{c + \frac{1}{x_{2k-1}}} \Rightarrow a^2 - ac - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2},$$

$$x_{2k+2} = c + \frac{1}{c + \frac{1}{x_{2k}}} \Rightarrow b^2 - bc - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}.$$

即, $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$.

7. 证明: $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$

证明. 第一个等式是题 5 的特例: $c = 1$. 第二个等式是题 6 的特例: $c = 1$. □

8. 设 $c > 0$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

证明. 当 $c > 1$ 时, 由递推公式可知,

$$a_{n+1} \geq 2\sqrt{\frac{c}{2} \frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c} a_n \geq \cdots \geq c^{\frac{n}{2}} a_1.$$

所以

$$+\infty \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (c^{\frac{n}{2}} a_1) = +\infty.$$

当 $0 < c \leq 1$ 时, 我们可以证明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增有界。

(1) $a_1 = \frac{c}{2} < 1 - \sqrt{1 - c}$.

(2) 设 $a_k < 1 - \sqrt{1 - c}$. 下面我们证明 $a_{k+1} \geq a_k$ 且 $a_{k+1} < 1 - \sqrt{1 - c}$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - c})^2 = 1 - \sqrt{1 - c}.$$

考察函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$.

$$f(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 1 - \sqrt{1 - c}).$$

因此

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 - 2a_k + c) > 0.$$

即 $\{a_n\}$ 是单调增的数列. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在. 设极限为 a , 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = 1 - \sqrt{1 - c}$.

□

9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调增, $\{b_n\}$ 单调减, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$. 证明: $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

证明. 很显然 $\{a_n - b_n\}$ 是单调增. 又由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, 可知 $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 从而

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛. 再由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ 知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. \square

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在正数 M , $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + |a_n - a_{n-1}| \leq M.$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{A_n\}$ 都收敛.

证明. 很显然数列 $\{A_n\}$ 是单调增有界数列, 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{A_n\}$ 是收敛的.

$$\{A_n\} \text{收敛} \Rightarrow \{A_n\} \text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\} \text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\} \text{收敛}.$$

\square

11. 应用 Cauchy 收敛准则证明下列数列收敛:

$$(1) x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)};$$

证明.

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1) \cdot (n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right| \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛. \square

$$(2) x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

证明.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛. \square

$$(3) x_n = \frac{\arctan 1}{1(1 + \cos 1!)} + \frac{\arctan 2}{2(2 + \cos 2!)} + \cdots + \frac{\arctan n}{n(n + \cos n!)}.$$

证明.

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\arctan(n+1)}{(n+1)((n+1) + \cos(n+1)!)} + \cdots + \frac{\arctan(n+p)}{(n+p)((n+p) + \cos(n+p)!)} \right| \\ &< \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &< \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛. \square

12. 应用 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^n;$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\frac{n}{n-3}} = e.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^n;$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{(-n+2)\frac{n}{-n+2}} = e^{-1}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n;$$

$$\text{证明. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2+n}\right)^{(-2-n)\frac{n}{-2-n}} = e^{-1}. \quad \square$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2};$$

$$\text{证明. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^2 = e^2. \quad \square$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n.$$

$$\text{证明. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3. \quad \square$$

13. $\forall n \in \mathbb{N}$, 证明:

$$(1) 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$$

证明. 由不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 可知:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

\square

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = 0.$$

证明. 由 (1) 和夹逼原理, 可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = 0$. \square

14. 设 $\alpha < 1$, 证明:

$$(1) 0 < n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] < \frac{e}{n^{1-\alpha}}.$$

证明. 由不等式 $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ 可知:

$$\begin{aligned} 0 &< n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ &< n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ &= n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{n} \right] \\ &< \frac{e}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0.$$

证明. 由 (1) 和夹逼原理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0$.

□

15. (1) 设 $0 < a < b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 证明:

$$b^{n+1} - a^{n+1} < (n+1)b^n(b-a),$$

$$a^{n+1} > b^n[(n+1)a - nb];$$

证明.

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n) < (n+1)b^n(b-a).$$

由此式可知:

$$a^{n+1} > b^{n+1} - (n+1)b^n(b-a) = b^n[b - (n+1)b + (n+1)a] = b^n[(n+1)a - nb].$$

□

(2) 在 (1) 中, 令 $a = 1 + \frac{1}{n+1}$, $b = 1 + \frac{1}{n}$ 推出 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 为严格增的数列;

证明. 将 $a = 1 + \frac{1}{n+1}$, $b = 1 + \frac{1}{n}$ 代入 (1) 中的第二式, 可知

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left[(n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) - n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

□

(3) 在 (1) 中, 令 $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{2n}$ 推出当 n 为偶数时, 有 $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$; 由此得到 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$, 即 4 为该数列的上界, 从而 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 收敛。

证明. 将 $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{2n}$ 代入 (1) 的第二个不等式, 我们有:

$$1 \geq \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \left[(n+1) - n \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right],$$

即

$$\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \leq 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \leq 4.$$

由于 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 是单调递增的, 我们可知, $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

□

16. 应用不等式 $b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a)$, $0 < a < b$, 证明: 数列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是严格单减的, 并由此推出 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 为有界数列。

证明.

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n) > (n+1)a^n(b-a).$$

即

$$b^{n+1} > a^n[(n+1)b - na].$$

取 $a = 1 + \frac{1}{n+1}$, $b = 1 + \frac{1}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left[(n+1)\frac{n+1}{n} - n\frac{n+2}{n+1} \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left[\frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left(\frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} \right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

由此可见 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格单调减, 且有界。 □

17. 证明: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{3}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{3}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

18. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列。记

$$\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

证明:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\bar{a}_n \geq \underline{a}_n$;

证明. 这是显然的。 $\bar{a}_n \geq a_n \geq \underline{a}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. □

(2) $\{\bar{a}_n\}$ 为单调减有界数列; $\{\underline{a}_n\}$ 为单调增有界数列, 且 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 有 $\bar{a}_n \geq \underline{a}_m$;

证明. 由 \bar{a}_n 和 \underline{a}_n 的定义可知,

$$\bar{a}_n = \max\{a_n, \bar{a}_{n+1}\}, \quad \underline{a}_n = \min\{a_n, \underline{a}_{n+1}\}.$$

由此可见 $\{\bar{a}_n\}$ 是单调减, $\{\underline{a}_n\}$ 是单调增, 且

$$\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \cdots \leq \underline{a}_n \leq \cdots \leq \bar{a}_n \leq \cdots \leq \bar{a}_2 \leq \bar{a}_1.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 是有界数列, 故 \underline{a}_1 和 \bar{a}_1 都是有界数。命题得证。 □

(3) 设 $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{a}_n$, $\underline{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{a}_n$, 则 $\bar{a} \geq \underline{a}$;

证明. 应用定理 1.2.5, 这个命题就可以得证。□

(4) $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \bar{a} = \underline{a}$.

证明. (反证法) 假设 $\bar{a} > \underline{a}$. 对于 $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \frac{\bar{a}-\underline{a}}{3}$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 有

$$\underline{a}_n < \underline{a} + \varepsilon < \underline{a} + \frac{\bar{a}-\underline{a}}{3} < \bar{a} - \frac{\bar{a}-\underline{a}}{3} < \bar{a} - \varepsilon < \bar{a}_n.$$

于是在 $\{a_n\}$ 存在两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 使得

$$a_{k_n} < \underline{a} + \frac{\bar{a}-\underline{a}}{3} < \bar{a} - \frac{\bar{a}-\underline{a}}{3} < a_{l_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而 $\{a_n\}$ 发散。矛盾。□

1.4.2 思考题

19. 设 $a_1 \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$.

证明. 首先我们证明, 如果 $a_n < \sqrt{3}$, 则 $a_{n+1} > a_n$. 如果 $a_n > \sqrt{3}$, 则 $a_{n+1} < a_n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+3a_n}{3a_n+a_n^2}.$$

于是我们有

$$(1) \quad a_n < \sqrt{3} \Rightarrow 3+3a_n > 3a_n+a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_n;$$

$$(2) \quad a_n > \sqrt{3} \Rightarrow 3+3a_n < 3a_n+a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} < a_n;$$

$$(3) \quad a_n = \sqrt{3} \Rightarrow 3+3a_n = 3a_n+a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n.$$

基于以上的计算, 不管 a_1 取何值, 我们都有

$$|a_{n+1} - \sqrt{3}| = \left| \frac{3+3a_n-3\sqrt{3}-\sqrt{3}a_n}{a_n+3} \right| = \left| \frac{(3-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3})}{a_n+3} \right| < \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right) |a_n - \sqrt{3}|.$$

因为 $\frac{3-\sqrt{3}}{3} < 1$, 所以 $(a_n - \sqrt{3}) \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow \sqrt{3}$. □

20. 设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$

证明. 这题和上一题类似。我们计算

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n(\sqrt{a}-x_n)(\sqrt{a}+x_n)}{3x_n^2+a},$$

所以:

(1) 如果 $x_1 \leq \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调增且有上界 \sqrt{a} 的数列;

(2) 如果 $x_1 > \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调减且有下界 \sqrt{a} 的数列;

无论那种情况发生, 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ 。

对于以上两种情况我们可以分别用数学归纳法讨论:

(1): 当 $x_1 \leq \sqrt{a}$ 时:

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq x_1 \text{ 且 } x_2 - \sqrt{a} = \frac{(x_1 - \sqrt{a})^3}{3x_1^2 + a} \leq 0 \Rightarrow x_2 \leq \sqrt{a}.$$

假设 $n = k$ 时也有 $x_k \geq x_{k-1}$ 且 $x_k \leq \sqrt{a}$ 。

现证 $n = k + 1$ 时也有这些。 $x_{k+1} \geq x_k$ 是显然的。 $x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a} \leq 0 \Rightarrow x_{k+1} \leq \sqrt{a}$ 。

(2): 当 $x_1 > \sqrt{a}$ 时:

$$x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow x_2 < x_1 \text{ 且 } x_2 - \sqrt{a} = \frac{(x_1 - \sqrt{a})^3}{3x_1^2 + a} > 0 \Rightarrow x_2 > \sqrt{a}.$$

假设 $n = k$ 时也有 $x_k < x_{k-1}$ 且 $x_k > \sqrt{a}$ 。

现证 $n = k + 1$ 时也有这些。 $x_{k+1} < x_k$ 是显然的。 $x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a} > 0 \Rightarrow x_{k+1} > \sqrt{a}$ 。 \square

21. 设 $a > 0$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}}$ ($n > 1$)。证明: $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$

证明. 我们只需要证明:

(1) 如果 $a \geq 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递增, 且有上界 \sqrt{a} 。

(2) 如果 $a < 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递减, 且有下界 \sqrt{a} 。

无论上述那种情况发生, 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ 。

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}(\sqrt{a} - x_{n-1})(\sqrt{a} + x_{n-1})}{(\sqrt[3]{ax_{n-1}})^2 + \sqrt[3]{ax_{n-1}}x_{n-1} + x_{n-1}^2}.$$

(1): 当 $a \geq 1$ 时:

$$\sqrt[3]{a} \leq \sqrt{a}.$$

当 $n = 2$ 时, $\sqrt{a} - x_1 = \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} \geq 0 \Rightarrow x_2 - x_1 \geq 0$ 且 $x_2 = \sqrt[3]{ax_1} \leq \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ 。

假设 $n = k$ 时, $x_k \geq x_{k-1}$ 且 $x_k \leq \sqrt{a}$ 。

由归纳法可得, $n = k + 1$ 时有, $x_{k+1} \geq x_k$ 且 $x_{k+1} \leq \sqrt{a}$ 。

(2): 当 $a < 1$ 时:

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}.$$

当 $n = 2$ 时, $\sqrt{a} - x_1 = \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow x_2 - x_1 < 0$ 且 $x_2 = \sqrt[3]{ax_1} > \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ 。

假设 $n = k$ 时, $x_k < x_{k-1}$ 且 $x_k > \sqrt{a}$ 。

由归纳法可得, $n = k + 1$ 时有, $x_{k+1} < x_k$ 且 $x_{k+1} > \sqrt{a}$ 。 \square

22. 设 $0 < a_1 < b_1 < c_1$ 。令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

证明: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 收敛于同一实数。

证明. 由定义可知

$$0 < a_1 < a_n \leq b_n \leq c_n < c_1, \quad \forall n > 1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调增, $\{c_n\}$ 单调减。由实数连续性命题 (二) 可知, 数列 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ 收敛。设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$ 。易知,

$$0 < a_1 \leq a \leq c \leq c_1.$$

因为 $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$ 可知, 数列 $\{b_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 显然 $a \leq b \leq c$, 且

$$a = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, \quad b = \sqrt[3]{abc}, \quad c = \frac{a+b+c}{3}$$

解方程组可得知 $a = b = c$. □

23. 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $T_n = \frac{a_1}{S_1} + \cdots + \frac{a_n}{S_n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.

证明. 由于 $S_n \rightarrow +\infty$, 我们可以找到一个子列 $\{n_k\}$ 使得

$$\frac{S_{n_k-1}}{S_{n_k}} < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

现在我们计算 T_{n_k} :

$$\begin{aligned} T_{n_k} &= \left(\frac{a_1}{S_1} + \cdots + \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}} \right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}} + \cdots + \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_{k-1}+1}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}} \right) \\ &> \left(\frac{a_1}{S_{n_1}} + \cdots + \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}} \right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_k}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}} \right) \\ &= \frac{S_{n_1} - 0}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2} - S_1}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} \\ &> \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

即: $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_{n_k} = +\infty$. 因为 T_n 是单调增的数列, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$. 命题得证. □

24. 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

证明. 我们只需证明 $\left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|$ 收敛于 0.

$$\begin{aligned} \left| a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| &= \left| \frac{3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)a_n}{2(1+a_n)} \right| \\ &= \left| \frac{-(\sqrt{5}-1) \left(a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)}{2(1+a_n)} \right| \\ &< \left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \cdot \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|. \end{aligned}$$

由此可见, $\left\{ \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \right\}$ 收敛于 0. □

25. 设 $a_n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 收敛于 S . 证明: $b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛.

证明. 很显然, $\{b_n\}$ 是单调增数列. 下面我们证明 $\{b_n\}$ 是有界数列. 由于 $a_n \geq 0$ 且 $S_n \rightarrow S$, 则 S_n 是单调增的收敛于 S . 从而

$$\sum_{k=1}^n a_k < S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面,

$$b_n \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + a_k) \right)^n \leq \left(1 + \frac{S}{n} \right)^n.$$

数列 $\left\{ \left(1 + \frac{S}{n} \right)^n \right\}$ 是单调增的, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{S}{n} \right)^n = e^S.$$

于是

$$b_n \leq e^S, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, 数列 $\{b_n\}$ 是收敛数列。 □

1.5 上极限与下极限

1.5.1 练习题

1. 求 $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 与 $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$:

$$(1) a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2};$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(2) a_n = n^{(-1)^n};$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

$$(3) a_n = [1 + 2^{(-1)^n n}]^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2.$$

$$(4) a_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3};$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\frac{1}{2}, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(5) a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n};$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

$$(6) a_n = \sqrt[n]{\left| \cos \frac{n\pi}{3} \right|};$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(7) a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{解. } \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = e.$$

2. 证明下面各式当两端有意义时成立:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

证明. 有上, 下极限的定义, 我们可以得到两个简单的无需证明的事实: 对于任何数列 $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$ 是一个任意一个子列, 则

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k}$$

$$(b) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

我们取子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

再在子列 $\{a_{n_k}\}$ 中取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

对于子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n). \end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

考虑子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$, 在其中取子列 $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

对于同样下标的子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

由此可见

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{aligned}$$

下面我们用类似的办法证明第二式亦成立。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

对于相应的 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ 可以取子列 $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

显然

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

于是

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

另一方面

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

□

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, 则

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + b, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + b \end{aligned}$$

证明. 这题是上面一题的直接应用。

□

(3) $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n;$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\sup_{k \geq n} \{a_k\} \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

$$\sup_{k \geq n} \{-a_k\} = -\inf_{k \geq n} \{a_k\} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

□

(4) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为非负数列, 则

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n; \end{aligned}$$

证明. 我们现证第一式。取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

对于上述的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0.$$

对于 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\varliminf_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \geq \varliminf_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \geq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \varliminf_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \varliminf_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &= \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \end{aligned}$$

取 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

对于对应的子列 $\{b_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n &\leq \varliminf_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\leq \varliminf_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{aligned}$$

现在我们来证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

对于相对应的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

所以

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

在 $\{a_{n_k}\}$ 取收敛子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

另一方面

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n &= \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{aligned}$$

□

(5) 设 $\{b_n\}$ 非负, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, 则

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = b \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = b \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n;$$

证明. 直接用上一题的结论就可以得证。

□

(6) 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

证明. 因为 $a_n > 0, \forall n$, 从而

$$\sup_{k \geq n} \left\{ \frac{1}{a_k} \right\} = \frac{1}{\inf_{k \geq n} \{a_k\}}.$$

由上, 下极限的定义, 命题得证。

□

3. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, 且 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 1$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛。

证明. 由题可知 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$ 。我们可以证明

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

由此可知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}.$$

故 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是收敛数列。当然 $\{a_n\}$ 收敛。

□

4. 设数列 $\{a_n\}, a_n \leq 1, n = 1, 2, \dots$, 且满足:

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1.$$

证明: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \omega$, 其中 ω 为有限数; (2) $n\omega - 1 \leq a_n \leq n\omega + 1$.

证明. 先证明 (1).

$$a_1 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} < a_1 + \frac{1}{n}.$$

由此得证 (1), 且 $\omega = a_1$. 由此 (2) 得证. \square

5. 设 $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何 } l > 1, \text{ 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

如果删去“任何”两字, 结论如何?

注 5. 这个题目的结论是不对的. 比如

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ 是奇数} \\ 1, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^n} = 0,$$

但是, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 不存在. 所以下面我们证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何 } l > 1, \text{ 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

证明. (\Rightarrow): 对于任何的 $l > 1$, 取 $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$, 我们可以找到 $N > 0$, 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq 1 + \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} < l, \quad \forall n > N.$$

于是

$$\frac{a_n}{l^n} < \left(\frac{l+1}{2l}\right)^n, \quad \forall n > N.$$

由 $\frac{l+1}{2l} < 1$ 可知,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

(\Leftarrow): 由定义可知, 对任意的 $l > 1$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有,

$$\frac{a_n}{l^n} < 1 \Rightarrow a_n < l^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l.$$

从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq l \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

如果删去“任何”两字, 结论不成立. \square

1.5.2 思考题

6. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 令

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

证明: $\{a \in \mathbb{R} | \text{有子列 } x_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)\} = [l, L]$. 如果删去条件 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 结论如何?

证明. 对于 $a \in (l, L)$ 和任意的 $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{a-l, L-a\}$, 我们有存在 N 使得:

(1) 当 $n > N$ 时, $-\varepsilon \leq a_{n+1} - a_n \leq \varepsilon$.

(2) 存在子列 n_k , 使得 $a_{n_k} \leq l + \varepsilon, \quad \forall k$

(3) 存在子列 n_l , 使得 $a_{n_l} \geq L - \varepsilon, \quad \forall l$

选择子列 n_t , 并且重新标记下标, 使得

$$a_{n_t} \begin{cases} \leq l + \varepsilon, & \text{当 } t \text{ 是奇数} \\ \geq L - \varepsilon, & \text{当 } t \text{ 是偶数} \end{cases}$$

对于任意上述子列的任意两个相邻的数 $a_{n_{2t}}, a_{n_{2t+1}}$, 在数列中一定有至少一个 a_{n_t} 落在区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 从而由极限的定义知这个子列收敛到 a . 命题得证. \square

7. 设 $0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m (n, m = 1, 2, \dots)$. 证明 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 且 $\sqrt[n]{a_n}$ 收敛。

证明. 设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a > b = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 取 $N > 0$ 使得

$$a_N < b + \frac{a-b}{3}.$$

又取子列 a_{n_k} 使得

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = a.$$

当 k 充分大后, $n_k > N$, 且 $n_k = m_k N + l$, 其中 $l = 0, 1, \dots, N-1$. 于是

$$a_{n_k} \leq a_{m_k N} \cdot a_l = a_N^{m_k} \cdot a_l = a_N^{n_k} \cdot \frac{a_l}{a_N^l}.$$

由此可知

$$0 \leq \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \leq \sqrt[n_k]{a_N^{n_k}} \sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}} = a_N \cdot \sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}.$$

于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a_N \leq b + \frac{a-b}{3} < a.$$

这与 $\{a_{n_k}\}$ 的选择矛盾. 从而知 $a = b$. 命题得证. \square

1.6 Stolz 公式

1.6.1 练习题

1. 设 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数. 应用 Stolz 公式证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

证明. 我们先计算

$$\ln C_n^k + \ln C_n^{n-k} = 2 \ln n! - 2 \ln k! - 2 \ln (n-k)!, \quad \forall k \leq n.$$

所以

$$\sum_{k=0}^n \ln C_n^k = n \ln n! - 2 \sum_{k=0}^n \ln k!.$$

设 $x_n = n^2, y_n = \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2} &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1) \ln n - \ln n!}{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{2n-1} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2n-1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

命题得证 □

2. 应用 Stolz 公式证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3};$$

证明. 设 $y_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, x_n = n^{\frac{3}{2}}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})}{n^3 - (n-1)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \sqrt{(1 - \frac{1}{n})^3}\right)}{3n^2 - 3n + 1} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{2}.$$

证明. 我们设 $y_n = 3 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - 2n^{\frac{3}{2}}$, $x_n = 3\sqrt{n}$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{3\sqrt{n} - 2n^{\frac{3}{2}} + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{3\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3}) - 6n^2 + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\ &= \frac{3n^2(\sqrt{(1-1/n)^3} - 1) + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\ &= \frac{-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\ &= \frac{(-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\ &= \frac{n^{\frac{3}{2}}(-9 + 9/n - 3/n^2 + (6-2/n)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(1 + \sqrt{1-1/n})}{3n^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{(1-1/n)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \end{aligned}$$

于是:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \right] \stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

命题得证 \square

1.6.2 思考题

3. 设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$. 进而设 $0 < x_1 \leq \frac{1}{q}$, 其中 $0 < q \leq 1$, 并且 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)$, $n \in \mathbb{N}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \frac{1}{q}$.

证明. 如果我们能证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1}(1 - qx_{n-1})}{qx_{n-1}} \\ &= \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

下面我们证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. 由于 $x_n - x_{n-1} = -qx_{n-1}^2, \forall n \in \mathbb{N}$ 可知, $\{x_n\}$ 是单调减的. 很明显 $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 是收敛的. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则 $a = a(1 - qa) \Rightarrow qa^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. 命题得证. \square

4. 由 Toeplitz 定理导出 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 Stolz 公式。

证明. 取

$$t_{nk} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n - x_0}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

(1) 由于 $\{x_n\}$ 是单调增数列, $t_{nk} > 0$.

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$.

$$(3) \sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1.$$

由 Toeplitz 定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_0}{x_n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_0}{x_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_n - x_0} \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &\stackrel{\text{Toeplitz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a. \end{aligned}$$

命题得证. □

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$.

证明. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$. 我们很容易证明以下结论:

(1) $\{S_n\}$ 是单增的, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

现在计算

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= a_n^2 (S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2)) + (S_n - a_n^2)^2 \\ &= 3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3 (a_n S_n) + a_n^6 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3}{3n} \stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(a_n S_n)^3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3}{3n} = 1.$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$. 命题得证. □

1.7 复习题 1

1. 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 0, 1, 2, \dots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

证明. 由递归定义,

$$a_{n-1}^2 + 2 < a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 < a_n^2, \quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 2 * (n-1) + a_1^2 = 2n-1.$$

于是

$$0 \leq \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \quad \forall n > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0.$$

算术平均

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}{n} = 0.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{2n} &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{2n} \\ &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

命题得证。 □

2. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, 并且存在常数 K 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K.$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

证明. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.
对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \forall n > N_1.$$

设 $s_n = \sum_{k=1}^n |y_k|$. 很显然 $\{s_n\}$ 是一个收敛数列. 于是, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有

$$s_n - s_{n-N_1} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}.$$

综上,

$$\begin{aligned} |z_n| &= |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &< |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{N_1} y_{n-N_1+1}| + |x_{N_1+1} y_{n-N_1} + x_{N_1+2} y_{n-N_1-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &< MN_1(s_n - s_{n-N_1}) + \frac{\varepsilon}{2K}(|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{n-N_1}|) \\ &< MN_1 \frac{\varepsilon}{2MN_1} + K \frac{\varepsilon}{2K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

命题得证。 □

3. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足:

(1) $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$.

应用 Toeplitz 定理证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

证明. 在这题里我们可以取

$$t_{nk} = \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

(1) $t_{nk} > 0, \forall n > 0, k = 0, 2, \cdots, n;$

(2) 给定 $n, \sum_{k=0}^n t_{nk} = 1;$

(3) 由于 $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 给定 $k, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0;$

于是

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = \sum_{k=0}^n t_{nk} \frac{a_k}{b_k}.$$

由 Toeplitz 定理, 命题可以得证. □

4. 设 $p_k > 0, k = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a.$$

证明. 对于给定的正整数 $k > 0$, 我们可以证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$. 这是因为

$$0 \leq \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} < \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-k}}.$$

夹逼定理说明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$.

下面我们就可以用极限的定义来证明命题了. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 当 $n > N_0$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $M = \max\{|a_0 - a|, |a_1 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$.

对于每一个 $k, 1 \leq k \leq N_0$, 存在 N_k , 当 $n > N_k$ 时有,

$$\frac{p_{n-k-1}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \leq \frac{\varepsilon}{2MN_0}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$, 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} - a \right| &= \left| \frac{p_1(a_n - a) + p_2(a_{n-1} - a) + \cdots + p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \right| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{p_{n-k-1} |a_k - a|}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-N_0}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{M\varepsilon}{2MN_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

命题得证. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为单调增的数列, 令 $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.
若“单调增”的条件删去, 结论是否成立.

证明. 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\sigma_n < a + 1$. 于是

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2} < \sigma_{2n} < a + 1.$$

从而

$$a_n < 2 \left(a + 1 - \frac{a_1}{2} \right).$$

单调增有上界的数列是收敛数列。即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在。设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$, 由例 1.1.15 可知,

$$b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = a.$$

如果 $\{a_n\}$ 不是单调增的, 结论不成立。例如 $a_n = (-1)^n$, $\sigma_n = 0$ 或 $-\frac{1}{n}$. 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$. 但是 $\{a_n\}$ 不收敛。□

6. 设 $\{S_n\}$ 为数列, $a_n = S_n - S_{n-1}$, $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ 且 $\{\sigma_n\}$ 收敛, 证明 $\{S_n\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$.

证明. 我们直接计算

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \sigma_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nS_n - S_0 - S_1 - \cdots - S_{n-1}}{n+1} \\ &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (nS_n - nS_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0. \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \sigma_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$. □

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明. 如果我们能证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (x_n - x_{n-1})}{n} = 0$, 则命题得证。

通过简单的计算, 我们有

$$(-1)^n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k) + x_2 - x_1.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n (x_n - x_{n-2}) = 0$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k)}{n-2} = 0.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (x_n - x_{n-1})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k)}{n-2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-2}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_2 - x_1}{n} = 0.$$

□

8. 设 u_0, u_1, \cdots 为满足 $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) 的实数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。证明 $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $u_k = 0$.

证明. 由 u_n 的定义可知,

$$u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad \forall n.$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. 由于 $\{S_n\}$ 收敛, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时 $\sum_{k=n}^{\infty} u_k < 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \\ &= u_{n+1} \left(u_{n+1} + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} u_{n+2} + \cdots \right) \\ &\leq u_{n+1} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots) \\ &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

从而, $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = c$. 由于 $\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k < 1$ 可知, $c = 0$. 又由 $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = 0$, 可知 $u_N = u_{N-1} = \cdots = u_1 = 0$. \square

9. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$

证明. 取 $t_{nk} = \frac{1}{2^n} C_n^k$, 我们有

$$(1) \quad t_{nk} > 0 \text{ 且 } \sum_{k=0}^n t_{nk} = \frac{1}{2^n} (1+1)^n = 1;$$

(2) 很容易验证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$. 因为 $2^n = (1+1)^n > C_n^{k+1}$, 从而

$$0 \leq t_{nk} \leq \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$.

由 Toeplitz 定理知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$. \square

10. 给定实数 a_0, a_1 , 并令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \cdots$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$

证明. 由递归公式有:

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) (a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - a_0).$$

于是:

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (a_1 - a_0) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} (a_1 - a_0) \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} (a_1 - a_0) \right) = a_0 + \frac{2}{3} (a_1 - a_0) = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$. \square

11. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为任意给定的实数。令

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 x_{n+1} 应理解为 x_1 . 归纳定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$x_{n+1}^{(k-1)}$ 应理解为 $x_1^{(k-1)}$, $k = 2, 3, \dots$. 证明:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

12. 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = l; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^2} = \frac{l}{2}.$$

证明.

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$, 易知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k - na_1 &= \sum_{k=2}^n (a_k - a_1) \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{l=1}^{k-1} (a_{l+1} - a_l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)(a_{l+1} - a_l) \end{aligned}$$

如果取 $t_{nk} = \frac{2(n-k)}{(n-1)n}$, 则

$$(1) \quad t_{nk} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sum_{k=1}^n \frac{2(n-k)}{(n-1)n} = 1;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0, \quad \forall k.$$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k - na_1}{(n-1)n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{(n-1)n} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \frac{l}{2}.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k - na_1}{(n-1)n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)n}{n^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{n} = \frac{l}{2}.$$

命题得证. □

13. 设 $x_1 \in [0, 1], \forall n \geq 2$, 令

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2}x_{n-1}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1+x_{n-1}}{2}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{3}; \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{2}{3}$.

证明. 由递推公式可知

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+x_{2(k-1)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)} \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{1}{4} \right)^l + \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} x_2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k + \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} x_2. \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{3}$.

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4} \right)^l + \left(\frac{1}{4} \right)^k x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k + \left(\frac{1}{4} \right)^k x_1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{2}{3}$. □

14. 定初始值 a_0 , 并递推定义

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

求 a_0 的所有可能的值, 使得数列 $\{a_n\}$ 是严格增的。

解. 考虑数列 $\left\{ \frac{a_n}{3^n} \right\}$. 显然

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{2}{3} \right)^{n-k} + (-1)^n a_0 \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + (-1)^n (5a_0 - 1) \right] \end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{1}{5} [2^n + (-1)^n (5a_0 - 1)3^n].$$

由此

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_{2n-1} &= \frac{1}{5} [2^{2n} + (5a_0 - 1)3^{2n} - 2^{2n-1} + (5a_0 - 1)3^{2n-1}] \\ &= \frac{1}{5} [2^{2n-1} + 4(5a_0 - 1)3^{2n-1}]. \end{aligned}$$

只有当 $a_0 \geq \frac{1}{5}$ 时, $a_{2n} > a_{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{2n-1} - a_{2n-2} &= \frac{1}{5}[2^{2n-1} - (5a_0 - 1)3^{2n-1} - 2^{2n-2} - (5a_0 - 1)3^{2n-2}] \\ &= \frac{1}{5}[2^{2n-2} - 4(5a_0 - 1)3^{2n-2}]. \end{aligned}$$

只有当 $a_0 \leq \frac{1}{5}$ 时, $a_{2n-1} > a_{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

综上, 只有 $a_0 = \frac{1}{5}$ 时, $\{a_n\}$ 是严格递增的。

15. 设 $c > 0$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

试问: 当时 $-3 \leq c < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 的收敛性如何?

证明. 现证 $c > 1$ 的情形:

$$a_n \geq \sqrt{ca_{n-1}^2} = \sqrt{c}a_{n-1} \geq \dots \geq (\sqrt{c})^{n-1}a_1.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{c})^{n-1} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. 命题得证。

现在 $c \leq 1$ 的情形:

(1) 考虑函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$. 当 $x \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$, $f(x) < 0$ 且 $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1 + c$.

(2) 很显然 $a_1 = \frac{c}{2} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$. 于是 $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}f(a_1) < 0 \Rightarrow a_2 < a_1$.

$$a_1^2 \in (2 - c - 2\sqrt{1-c}, 2 - c + 2\sqrt{1-c}) \Rightarrow a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c}).$$

(3) 假设 $n = k$ 时, $a_k \leq a_{k-1}$ 且 $a_k \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$. 显然我们有 $a_{k+1} \leq a_k$, $a_{k+1} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$.

综上,

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad a_n \geq 1 - \sqrt{1-c}, \quad \forall n.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

现考虑 $-3 \leq c < 0$ 的情形。

□

16. 数列 $\{u_n\}$ 定义如下: $u_1 = b$, $u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2$, $n \in \mathbb{N}$. 问: a, b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛, 并求出其极限值。

解. 由递归定义可知:

$$u_{n+1} - a = (u_n - a)^2 + (u_n - a).$$

记 $v_n = u_n - a$, 则 $v_1 = b - a$. 如果 $\{u_n\}$ 收敛, 则 $\{v_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

(1) 由于 $v_{n+1} - v_n = v_n^2 \geq 0$, $\{v_n\}$ 是单调增的。

(2) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, 则 $v_n \leq 0, \forall n$.

下面我们用归纳法来证明, 当 $v_1 \leq 0, v_1 + 1 \geq 0$ 时, $v_n \leq 0$ 且 $v_n + 1 \geq 0 \forall n$.

- (1) 当 $n = 1$ 时, 成立。
- (2) 假设 $n = k$ 时, 我们也有 $v_k \leq 0$ 且 $v_k + 1 \geq 0$ 。
- (3) 我们证明 $n = k + 1$ 时也成立。因为

$$v_{k+1} = v_k \cdot (v_k + 1),$$

所以 $v_{k+1} \leq 0$ 。另一方面

$$v_{k+1} + 1 = v_k^2 + v_k + 1 = \left(v_k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

由此可见, 当 $b \in [a - 1, a]$ 时, $\{u_n\}$ 收敛。

17. 设 $A > 0, 0 < y_0 < A^{-1}, y_{n+1} = y_n(2 - Ay_n), n \in \mathbb{N}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A^{-1}$.

证明. 如果我们能证明 $0 < y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$, 则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 2 - Ay_n \geq 2 - AA^{-1} = 1 \Rightarrow y_{n+1} \geq y_n.$$

从而 $\{y_n\}$ 是单调递增有上界的数列。故收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A^{-1}$ 。

下面我们就证明 $y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. 考虑函数 $f(x) = x(2 - Ax)$. 显然该函数在 $x = A^{-1}$ 是取得最大值。即 $f(x) < A^{-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. 由于 $0 < y_1 < A^{-1}$, 由归纳法, $0 < y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. \square

18. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ 。

证明. 由于 $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$, 则 $a_n \neq 2$, 从而 $a_1 \neq \frac{3}{2}$. 我们现证无论 a_1 取何值, 都存在 N 使得 $a_N \leq 1$.

- (1) 如果 $a_1 \leq 1$, 取 $N = 1, a_N = a_1 \leq 1$
- (2) 如果 $a_1 > \frac{3}{2}$, 则 $a_2 > 2, a_3 < 0$. 于是取 $N = 3, a_N = a_3 < 0 \leq 1$.
- (3) 如果 $1 < a_1 < \frac{3}{2}$. 记 $a_1 = 1 + h$, 则

$$a_k = 1 + \frac{h}{1 - (k-1)h}, \quad k = 2, 3, \dots$$

取 $k = \lceil \frac{1}{h} \rceil$, 我们有

$$1 - (k-1)h \geq h > 0, \quad \frac{h}{1 - (k-1)h} \geq \frac{1}{2}.$$

从而取 $N = k + 2 = \lceil \frac{1}{h} \rceil$, 我们有 $a_{N-2} = a_k \geq \frac{3}{2}, a_N < 0 \leq 1$.

综上, 我们不妨假设 $a_1 \leq 1$. 下面我们可以用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 是单调增的, 且 $a_n \leq 1, \forall n$. 由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n},$$

我们可知当 $a_n < 1$ 时, $a_{n+1} > a_n$. 又因为 $2 - a_n > 1 \rightarrow a_{n+1} \leq 1$. 到此我们证明了 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在。设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 则 $(2 - a)a = 1$. 解方程知 $a = 1$. \square

19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足不等式 $0 \leq a_k \leq 100a_n (n \leq k \leq 2n, n = 1, 2, \dots)$, 且无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$

证明. 显然 $a_{2n} \leq 100a_n$, $a_{2n} \leq 100a_{n+1}, \dots, a_{2n} \leq 100a_{2n-1}$. 从而

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2na_{2n} = 0$.

同理, $a_{2n-1} \leq 100a_n$, $a_{2n-1} \leq 100a_{n+1}, \dots, a_{2n-1} \leq 100a_{2n-2}$. 将所有的不等式加起来, 我们有

$$0 \leq (2n-1)a_{2n-1} = a_{2n-1} + 2(n-1)a_{2n-1} \leq 2 * 100 \sum_{k=n}^{2n-2} a_k + a_{2n-1} \leq 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0$.

综上所述, 我们有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$

□

20. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

证明. 通过简单计算, 我们可以得知

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n-k+1}{n^2}\right), \quad \forall k \leq \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

另一方面

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n.$$

很显然

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n &= e^{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n &= e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由夹逼定理, 命题得证.

□

21. 设 $a_1 > b_1 > 0$, 令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots.$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

证明. 很显然

$$b_n \leq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \leq a_n, \quad \forall n = 2, 3, \dots.$$

于是

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \leq \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1},$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \geq 0 \Rightarrow b_n \geq b_{n-1}.$$

所以

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 都存在。

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b,$$

$$a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1} = \cdots = a_1 b_1 \Rightarrow ab = a_1 b_1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \Rightarrow a = \frac{a + b}{2} \Rightarrow a = b.$$

于是 $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$. □

22. 当 $n \geq 3$ 时, 证明:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

23. 设 $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), n = 2, 3, \cdots$, 且

$$x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ (其中 $\prod_{k=1}^n$ 表示从 $k=1$ 到 $k=n$ 的连乘积)。

解.

24. 设 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, 用 K_n 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n}$

解.

25. 设 $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2 (n \in \mathbb{N})$,

$$S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}.$$

$$\text{证明: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}.$$

证明. 首先

$$y_n - y_{n-1} = y_{n-1}^2 - y_{n-1} - 2 = (y_{n-1} - 2)(y_{n-1} + 1).$$

由于 $y_0 \geq 2$, 由数学归纳法, 我们可知

$$y_n \geq y_{n-1} \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$S_n \geq S_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 由于

$$\frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} < \frac{1}{2^{n+1}},$$

可知

$$S_n \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n = 0, 1, \cdots.$$

由此可见, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在。

$$\text{假设 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a.$$

□

26. 令数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

证明: (1) 当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{n+1}{2n}b_{n-1} + 1$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$.

参考文献

[徐薛] 徐森林, 薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

后 记