

徐森林，薛春华 编
《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

目 录

第一章 数列极限	1
1.1 数列极限的概念	1
1.1.1 练习题	1
1.1.2 思考题	7
1.2 数列极限的基本性质	11
1.2.1 练习题	11
1.2.2 思考题	16
1.3 实数理论, 实数连续性命题	16
1.3.1 练习题	16
1.3.2 思考题	16
1.4 Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数 $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	16
1.4.1 练习题	16
1.4.2 思考题	17
索 引	19
参考文献	19
后 记	21

第一章 数列极限

1.1 数列极限的概念

1.1.1 练习题

1. 用数列极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 10} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n - 1 \right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1.$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7};$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{6}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{3n+4}{7n-3} - \frac{3}{7} \right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7}.$$

□

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{50, \left[\frac{12}{\varepsilon} \right] + 1\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{1}{2}n^2 - n - 1000 > 1$$

且

$$\left| \frac{5n+6}{n^2-n-1000} - 0 \right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2}n^2 - n - 1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0.$$

□

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n + 5} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] + 4$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{8}{2^n + 5} - 0 \right| < \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n + 5} = 0.$$

□

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{\sin n!}{n^{1/2}} - 0 \right| < \frac{1}{n^{1/2}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0.$$

□

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{2, \left[\left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1\}$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}| = \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} < \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0.$$

□

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{2, \left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^3} \right]\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}| &= \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)(n-2)} + \sqrt[3]{(n-2)^2}} \\ &< \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0.$$

□

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1+n^2} = 0;$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{n^{3/2} \arctan n}{1+n^2} \right| < \frac{\frac{\pi}{2} n^{3/2}}{n^2} < \frac{\pi/2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1+n^2} = 0.$$

□

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}}, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{n}{n}, n \text{ 为奇数}; \end{cases}$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &< \begin{cases} \frac{1}{n}, n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, n \text{ 为奇数} \end{cases} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

□

$$(10) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty.$$

证明. 对于 $\forall A > 0$, 取 $N = \max\{5, \left[\sqrt[3]{2A} \right] + 1\}$, 当 $n > N$ 时,

$$1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} > 1 - \frac{9}{n^2} > \frac{1}{2}$$

且

$$n^3 - 4n - 5 = n^3 \left(1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) > \frac{1}{2} n^3 > A$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty.$$

□

2. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明: $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$.

证明. 我们分以下几种情况证明此命题:

(1) 当 $a \in \mathbb{R}$ 时. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$.

(2) 当 a 是 $+\infty$ 时。由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, 对 $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n > A$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $a_{n+k} > A$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = +\infty$.

(3) 当 a 是 $-\infty$ 时。由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, 对 $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n < A$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $a_{n+k} < A$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = -\infty$.

□

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$: 举例说明, 这个命题的逆命题不真。

证明. 我们只证明 a 是有限实数的情况。当 a 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 时也成立。由极限的定义有: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

从而

$$||a_n| - |a|| < |a_n - a| < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|.$$

如果我们取 $a_n = (-1)^n$, 则 $|a_n| = 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 1 \neq 0$. 但是很显然 a_n 是发散的。

□

4. 设 $x_n \leq a \leq y_n, n \in \mathbb{N}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$$

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon$. 从而

$$|y_n - a| = y_n - a = y_n - x_n + x_n - a < y_n - x_n < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$.
同理可证

$$-\varepsilon < x_n - y_n < x_n - a < 0 < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

□

5. 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列。证明: 数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数, 或者有最小的数。举出两者都有的例子; 再举出只有一个的例子。

证明. 假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 我们分以下几种情况讨论:

(1) 如果 $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. 此时, 数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

(2) 如果 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_{n_0} \neq a$. 不妨假设 $a_{n_0} < a$. 对于 $\varepsilon = \frac{a - a_{n_0}}{2}, \exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$ 使得 $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a + a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$. 取

$$m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N\}.$$

我们有:

$$(a) \ m \in \{a_n\}_{n=1}^{+\infty},$$

(b) $a_n \geq m, \forall n$.

即, m 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值.

如果 $a_{n_0} > a$. 我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值.

考虑下列收敛数列:

- (1) 如果 $a_n = \frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n \leq a_1 = 1$, 没有最小值.
- (2) 如果 $a_n = -\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1 = a_1 \leq a_n$, 没有最大值.
- (3) 如果 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则 $-1 = a_1 \leq a_n \leq a_2 = \frac{1}{2}$

□

6. 证明下列数列发散:

- (1) $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散, 因为:

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$$

□

- (2) $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列 $\{k_n\}, \{l_n\}$ 使得

- (a) $k_n \in (2m\pi - \frac{\pi}{6}, 2m\pi + \frac{\pi}{6})$,
- (b) $l_n \in (2m\pi + \frac{5\pi}{6}, (2m+1)\pi + \frac{\pi}{6})$.

显然, 我们有

- (a) $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$,
- (b) $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$.

因此, $\{\cos n\}$ 是发散的。

□

7. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 三个数列 $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限。

证明. (\Rightarrow) 由定理 1.1.2, 收敛数列的子列也收敛, 且极限相同。

(\Leftarrow) 假设三个子列的极限都是 a 。由极限的定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0$,

- (1) $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2} - a| < \varepsilon, \forall k > N_1$,
- (2) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1} - a| < \varepsilon, \forall k > N_2$,
- (3) $\exists N_3 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k} - a| < \varepsilon, \forall k > N_3$ 。

取 $N = 3 \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 我们有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N,$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

□

注 1. 这个命题对于 $a = +\infty, -\infty, \infty$ 也成立。

注 2. 对于 $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+2} = \cdots = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk} = a.$$

8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_{n-1}) = d$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = d$.

证明.

$$\frac{a_n - a_1}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_1}{n} = d.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{n} = 0$, 易知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = d.$$

□

9. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 用 $\varepsilon - N$ 法, $A - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}, (a \text{ 为实数 } +\infty, -\infty).$$

证明. 我们只证 a 为实数的情形. 其他的情况证明类似. 由极限的定义, 对于 $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2}a - \frac{a}{2} \right| \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} \right| + \frac{a}{2n} \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| + \frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{a}{2n}. \end{aligned}$$

取 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_1.$$

取 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_2.$$

取 $N_3 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_3.$$

最后, 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$, $\forall n > N$, 我们有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

□

1.1.2 思考题

10. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $|q| < 1$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 则存在整数 $M > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. 于是 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|q^{n-k}| < \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon, \forall n > N-1, k = 0, 1, 2, \cdots, N_0.$$

我们现在取 $N = \max\{N_0, N_1\}$. 对任意的 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - \frac{a}{1-q} \right| \\ &= \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - a \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{aq^n}{1-q} \right| \\ &< |(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}| + \frac{|a||q|^n}{|1-q|} \\ &< \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3} (1 + |q| + \cdots + |q|^{n-N_0}) + \left(MN_0 + \frac{a}{1-|q|} \right) \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{即, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

□

11. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab.$$

证明. 首先我们证明命题在 $b = 0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\exists M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > N_0$.

(3) 由于 $|a_n| < M$, 对上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left| \frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1\}$, 对于上述的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} \right| \\ &< \left| \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1}b_{N_0+1}}{n} \right| + \left| \frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \frac{(n-N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} = 0.$$

下面证明命题在 $b \neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a)b = 0$. 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_{n-1} - a)b + (a_n - a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - b) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_{n-1}(b_1 - b) + a_n(b_n - b)}{n} = 0.$$

(3)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} - ab \right| \\ &= \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} + \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| \end{aligned}$$

(4) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \left| \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$\left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} - ab \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} = ab.$$

□

12. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $b_n \geq 0 (n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS$.

证明. 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 首先我们证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

(2)

$$\begin{aligned} & |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - aS| \\ &= |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - S)| \\ &< |(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| + |a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| \end{aligned}$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ 得知

$$|(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$ 可得知

$$|a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS.$$

□

注 3. 这题里的条件 $b_m \geq 0 (n \in \mathbb{N})$ 不是必须的。只要 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|) = S$ 就够了。

注 4. 这题是第 10 题的推广。如果 $b_n = q^{n-1}, 0 < q < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

由这题的结论, 第 10 题得证。

13. (Toeplitz 定理) 设 $n, k \in \mathbb{N}$, $t_{nk} \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ 。说明例 1.1.15 为 Toeplitz 定理的特殊情形。

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 我们有:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

(2) 我们取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$ 。

(3) 对于 $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N_0$, 存在 $N_l \in \mathbb{N}$ 使得 $t_{nl} < \frac{\varepsilon}{2N_0 M}, \forall n > N_l$ 。

(4) 取 $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$, 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k - a \right| \\ &= \sum_{k=1}^{N_0} t_{nk} |(a_k - a)| + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} |(a_k - a)| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2N_0 M} M + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a.$$

如果我们取 $b_{nk} = \frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证。

□

14. 设 a, b, c 为三个给定的实数, 令 $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$, 并归纳定义

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ b_n = \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a + b + c}{3}$ 。

证明. 我们通过以下结论去证明该命题:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n) = a + b + c$. 这是因为 $a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \cdots = a + b + c$.

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - c_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - b_n) = 0$. 这是因为

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - b_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - b),$$

$$a_n - c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - c_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - c),$$

$$c_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1} - b_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (c - b).$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n + (a_n - b_n) + (a_n - c_n)) = a + b + c,$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a + b + c}{3}.$$

(4) 同理可证, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a + b + c}{3}$.

□

15. 设 a_1, a_2 为实数, 令

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, n = 3, 4, 5, \cdots,$$

其中 $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_2 + a_1 q}{1 + q}$.

证明. 由递推公式, 我们可以证明

$$a_n - a_{n-1} = (-q)^{n-2} (a_2 - a_1), \forall n \geq 3.$$

由此我们可以得出 a_n 的通项公式

$$a_n = a_2 + \sum_{k=1}^{n-2} (-q)^k (a_2 - a_1) = a_2 - \frac{q + (-q)^{n-1}}{1 + q} (a_2 - a_1).$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_2 - \frac{q}{1 + q} (a_2 - a_1) = \frac{a_2 + qa_1}{1 + q}.$$

□

16. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足 $a_1 > 0$, $4 \leq b_n \leq 5$, $4 \leq c_n \leq 5$,

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2 + c_n^2}}{b_n + c_n} a_{n-1}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

证明. 由通项公式定义有

$$0 \leq a_n \leq \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由 $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

□

1.2 数列极限的基本性质

1.2.1 练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - 1/n + 5/n^2}{3 - 2/n - 7/n^2} = 4/3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{3 + (-2)(-2/3)^n} = 1/3$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}}, |a| < 1, |b| < 1$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) \left(\frac{1 - b}{1 - b^n}\right) = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$$

解. 记

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2(n-1)-1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3.$$

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right)$$

解. $1 - \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)}\end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积: 奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2 \cdot 3}(n+2)!$.

分母的 $2n$ 项的积: 奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$.

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right]$$

解.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8n^3 - 2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right] = \frac{4}{3}.$$

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}})$$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$.

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

解.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0.$$

2. 设 $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. 应用例 1.2.6 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

证明.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} \cdot \sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. □

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 应用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} = a$, 其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数.

证明.

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - 1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{n} = a.$$

□

4. 设 $a_n \neq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r > 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$.

证明. 取 $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$. 由极限的定义, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} > 1$. 于是

$$|a_n| > \left(\frac{r+1}{2} \right)^{n-N} |a_N|.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$. □

5. (1) 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, 我们有

$$S_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ □

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$

证明.

$$0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

□

6. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$. 应用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

证明. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, 我们有一下结论:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

同时, 我们有

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{a_n}\right)/n} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - 1 + \frac{1}{a_n} \right) / n} \right) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot a_n} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 1 + \cdots + 1 + a_n)}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - 1 + a_n)}{n} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

7. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$: $\left(\text{提示: } 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n} \right)$

证明.

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{n} &= \frac{(n-1)! + n!}{n!} \\
 &< \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \\
 &< \frac{(n-1)(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} \\
 &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n \cdot (n-1)} \\
 &= 1 + \frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$.

□

8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, \quad T_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

应用 $\varepsilon - N$ 法 (分 $a < b$, $a > b$, $a = b$) 或 $\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)$ 与 $\min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|)$, 证明:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \max\{a, b\}; \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \min\{a, b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - b_n| = |a - b|.$$

由此可知:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \max\{a, b\},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \min\{a, b\}.$$

□

9. 应用例 1.1.7 与例 1.1.15 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证明. 取 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

□

10. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right) = 1$

证明. 考虑数列 $\sqrt[n]{n}$. 这个数列在 $n=3$ 是取得最大值且 $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \forall n \geq 3$. 这就是说数列 $\{\sin \frac{\ln n}{n}\}$ 在 $n=3$ 时取得最大值且

$$\sin \frac{\ln(n+1)}{n+1} < \sin \frac{\ln n}{n}, \forall n \geq 3.$$

从而,

$$\left(\sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}} < \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} < \left((n-1) \sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((n-1) \sin \frac{\ln 3}{3} \right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right) = 1.$$

□

11. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

□

1.2.2 思考题

12. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$.

证明. 假设 $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ 是互异的素数, $m_k \geq 1, k = 1, 2, \cdots, l$. 这里 $l = p(n)$.

$$\ln n = \sum_{k=1}^l m_k \ln p_k \geq \sum_{k=1}^{p(n)} \ln 2 = p(n) \ln 2.$$

因此

$$0 \leq \frac{p(n)}{n} \leq \frac{\ln n}{n \ln 2}.$$

由夹逼定理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$. □

13. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}$.

证明.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4n^2}. \end{aligned}$$

由夹逼定理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}$. □

1.3 实数理论, 实数连续性命题

1.3.1 练习题

1.3.2 思考题

1.4 Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

1.4.1 练习题

1. 证明下列数列收敛:

$$(1) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n} \right), n \in \mathbb{N};$$

1.4 CAUCHY 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数 $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 17

证明. 记 $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, 我们有 $S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < S_n$. 很显然 $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, S_n 收敛. \square

$$(2) \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$. 当 $n > 10$ 时, $\frac{n+9}{2n-1} < 1$. 即 $S_{n+1} < S_n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 10$. 另一方面 $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, S_n 收敛. \square

2. 设 $0 < a_n < 1$ 且 $a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N}$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

证明. 考虑函数 $f(x) = (1 - x)x, x \in (0, 1)$, 我们有

$$f(x) > 0, f(x) \leq \frac{1}{4}, x \in (0, 1).$$

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{4(1 - a_n)a_n} \geq 1$, 即 a_n 是单调递增的函数. 由实数连续性命题 (二) 可知, a_n 收敛.

由递推公式可知, $\frac{1}{4} \geq a(1 - a) \geq \frac{1}{4}$. 所以 $a = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$. \square

3. 给定两正数 $x_0 = a$ 与 $y_0 = b$, 归纳定义

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2},$$

$n = 1, 2, \cdots$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$, 并称此极限为 a 与 b 的算术-几何平均数.

证明. 由算术-几何平均不等式知: $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad \forall n = 1, 2, \cdots, \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n, \quad \forall n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

另一方面,

$$x_n \leq \frac{a+b}{2}, \quad y_n \geq \sqrt{ab}, \quad \forall n = 1, 2, \cdots.$$

令 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = B$. 由递推公式可知: $A = \sqrt{AB}$, 从而 $A = B$. \square

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, 用 x_n 表示方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的根, 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

解. 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$ 对于给定的 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 是单调增函数, 所以 $f_n(x)$ 只有唯一的根 x_n . 由于

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_n(x_n) + x_n^{n+1} = f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在. 由于 $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$ 知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

5. 设 $c > 0, x_1 = \sqrt{c}, x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$. \square

证明.

1.4.2 思考题

参考文献

[徐森林, 薛春华] 徐森林, 薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

后 记