# 徐森林，薛春华 编
# 《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

# 目录

# 第一章　数列极限

## 1.1　数列极限的概念

### 1.1.1　练习题

**1.** 用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 1$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 10}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|0.\underbrace{99\cdots9}_{n} - 1\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 1$。 □

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{7n-3} = \dfrac{3}{7}$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{3n+4}{7n-3} - \frac{3}{7}\right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{7n-3} = \dfrac{3}{7}$。 □

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \max\left\{50, \left[\frac{12}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$, 当 $n > N$ 时，$\frac{1}{2}n^2 - n - 1000 > 1$ 且

$$\left|\frac{5n+6}{n^2-n-1000} - 0\right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2}n^2 - n - 1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0$。 □

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8}{2^n+5} = 0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right] + 4$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{8}{2^n+5} - 0\right| < \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon$$

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8}{2^n+5} = 0.$ □

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{\sin n!}{n^{1/2}}-0\right|<\frac{1}{n^{1/2}}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$。 □

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{2,\left[\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}<\frac{4}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$。 □

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{2,\left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^3}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-2)}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}<\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}}<\varepsilon.$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$. □

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}n^{3/2}}{n^2}<\frac{\pi/2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0$. □

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数};\end{cases}$

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_n-1|&<\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{n 为偶数},\\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, & \text{n 为奇数}\end{cases}\\ &<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$. □

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$.

**证明.** 对 $\forall A>0$, 取 $N=\max\left\{5,\left[\sqrt[3]{2A}\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时，$1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}>1-\frac{9}{n^2}>\frac{1}{2}$ 且

$$n^3-4n-5=n^3(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3})>\frac{1}{2}n^3>A$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$。 □

**2.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 证明: $\forall k\in\mathbb{N}$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

**证明.** 按 $a$ 分类讨论:

(1) $a\in\mathbb{R}$：由极限定义，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$。显然 $n+k>n>N$，从而 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

(2) $a=+\infty$：由极限定义, 对 $\forall A>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$a_n>A$. 显然 $n+k>n>N$, 从而 $a_{n+k}>A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=+\infty$.

(3) $a=-\infty$：由极限定义，对 $\forall A<0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$a_n<A$. 显然 $n+k>n>N$, 从而 $a_{n+k}<A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=-\infty$.

命题得证。 □

**3.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$：举例说明，这个命题的逆命题不真。

**证明.** 当 $a\in\mathbb{R},a=+\infty,a=-\infty$ 时，此命题都是成立。我们只证 $a\in\mathbb{R}$ 的情况。

由极限的定义，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$. 于是:

$$||a_n|-|a||<|a_n-a|<\varepsilon.$$

再由极限定义，$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$。

如果我们取 $a_n=(-1)^n$, 则 $|a_n|=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$。但 $\{a_n\}$ 是发散的。 □

**4.** 设 $x_n\le a\le y_n,n\in\mathbb{N}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=a$$

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$y_n-x_n=|y_n-x_n|<\varepsilon$. 从而

$$|y_n-a|=y_n-a=y_n-x_n+x_n-a<y_n-x_n<\varepsilon.$$

i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$.

同理可证

$$-\varepsilon<x_n-y_n<x_n-a<0<\varepsilon.$$

i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. □

**5.** 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列。证明：数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数，或者有最小的数。举出两者都有的例子；再举出只有一个的例子。

**证明.** 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，我们分以下几种情况讨论:

(1) 如果 $a_n=a,\forall n\in\mathbb{N}$. 此时，数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

(2) 如果 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $a_{n_0} \neq a$. 不妨假设 $a_{n_0} < a$. 对于 $\varepsilon = \dfrac{a - a_{n_0}}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$ 使得 $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a+a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$. 取 $m = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$，则

$$m \in \{a_n | n \geq 1\}, \quad a_n \geq m, \forall n.$$

即 $m$ 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值. 如果 $a_{n_0} > a$，类似地，我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值。

考虑下列收敛数列：

(1) 如果 $a_n = \frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n \leq a_1 = 1$, 没有最小值。

(2) 如果 $a_n = -\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1 = a_1 \leq a_n$，没有最大值。

(3) 如果 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则 $-1 = a_1 \leq a_n \leq a_2 = \frac{1}{2}$

命题得证。 □

**注 1.** 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 有最小值。如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$，则 $\{a_n\}$ 有最大值。

**6.** 证明下列数列发散：

(1) $\{n^{(-1)^n}\}$

**证明.** 该数列发散，因为：$0 = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$. □

(2) $\{\cos n\}$

**证明.** 取两个整数子列 $\{k_n\}, \{l_n\}$ 使得

(a) $k_n \in (2n\pi - \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{6})$,

(b) $l_n \in (2n\pi + \frac{5\pi}{6}, (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6})$.

显然，我们有

(a) $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$,

(b) $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$.

因此，$\{\cos n\}$ 是发散的。 □

**7.** 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 三个数列 $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限。

**证明.** $(\Rightarrow)$ 由定理 1.1.2，收敛数列的子列也收敛，且极限相同。
$(\Leftarrow)$ 假设三个子列的极限都是 $a$。由极限的定义，对于 $\forall \varepsilon > 0$,

(1) $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2} - a| < \varepsilon, \forall k > N_1$,

(2) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1} - a| < \varepsilon, \forall k > N_2$,

(3) $\exists N_3 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k} - a| < \varepsilon, \forall k > N_3$。

取 $N = 3\max\{N_1, N_2, N_3\}$, 我们有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. □

**注 2.** 这个命题当 $a=+\infty$ 或者 $-\infty$ 时，该命题也成立。

**注 3.** 对于 $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+1}=\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+2}=\cdots=\lim_{k\to+\infty}a_{pk}=a.$$

**8.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=d$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=d$。

**证明.**

$$\frac{a_n-a_1}{n}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n}=d.$ □

**9.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。用 $\varepsilon-N$ 法，$A-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2},(a\text{为实数 }+\infty,-\infty).$$

**证明.** 我们只证 $a$ 为实数的情形。其他情况证明类似。由极限的定义，对于 $\varepsilon>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_0.$$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}a-\frac{a}{2}\right|\\&<\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|+\frac{a}{2n}\\&<\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|+\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{a}{2n}.\end{aligned}$$

取 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_1.$$

取 $N_2\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n}<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_2.$$

取 $N_3\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_3.$$

最后, 取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2,N_3\}$, $\forall n>N$, 我们有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

命题得证。 □

**注 4.** 考虑如下数列

$$b_k=\begin{cases}a_k, & k=1;\\ a_n, & k\in\left[\frac{(n-1)n}{2}+1,\frac{n(n+1)}{2}\right],\forall n\geq 2.\end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=a$. 记

$$S_n=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}&=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2}\\&=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2n^2}\\&=\frac{S_n}{2}+\frac{S_n}{2n^2}\end{aligned}$$

由例 *1.1.15* 知, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=a$, 从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

### 1.1.2 思考题

**10.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, $|q|<1$. 用 $\varepsilon-N$ 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\frac{a}{1-q}.$$

**证明.** 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, 则存在整数 $M>0$ 和 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n-a|<M,\forall n\in\mathbb{N},$$

$$|a_n-a|<\frac{(1-|q|)\varepsilon}{3},\forall n>N_0.$$

我们知道, 当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$。于是 $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|q^{n-k}\right|<\max\left\{\frac{1}{3MN_0},\frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon,\forall n>N_1,k=0,1,2,\cdots,N_0.$$

取 $N=\max\{N_0,N_1\}$。当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\left|(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})-\frac{a}{1-q}\right|\\&=\left|(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})-a\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right|\\&<\left|(a_n-a)+(a_{n-1}-a)q+\cdots+(a_1-a)q^{n-1}\right|+\frac{|a|\,|q|^n}{|1-q|}\\&<\frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}(1+|q|+\cdots+|q|^{n-N_0})+\left(MN_0+\frac{|a|}{1-|q|}\right)\max\left\{\frac{1}{3MN_0},\frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

即, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\dfrac{a}{1-q}$.

□

**11.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$。用 $\varepsilon - N$ 法证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab.$$

**证明.** 首先我们证明命题在 $b=0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\exists M>0$ 使得 $|a_n|<M, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > N_0$.

(3) 由于 $|a_n| < M$, 对上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1\}$。对于上述的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n}\right| \\
&< \left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1}b_{N_0+1}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\frac{(n-N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

由极限的定义知，命题成立在 $b=0$ 时成立。下面证明命题在 $b \neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - a)b = 0$. 由此可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_{n-1}-a)b + (a_n-a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - b) = 0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_{n-1}(b_1-b) + a_n(b_n-b)}{n} = 0.$$

(3) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_n(b_0-b)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_n-a)b)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} - ab\right| \\
&\le \left|\frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_n(b_0-b)}{n}\right| + \left|\frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_n-a)b)}{n}\right| \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

**12.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$b_n \geq 0(n\in\mathbb{N})$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n) = S$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n) = aS$.

**证明.** 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(2) 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ 得知

$$|(a_n-a)b_1+(a_{n-1}-a)b_2+\cdots+(a_1-a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n) = S$ 可得知

$$|a|\,|(b_1+b_2+\cdots+b_n)-S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&|(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)-aS| \\
&= |(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)-a(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a(b_1+b_2+\cdots+b_n-S)| \\
&< |(a_n-a)b_1+(a_{n-1}-a)b_2+\cdots+(a_1-a)b_n| + |a|\,|(b_1+b_2+\cdots+b_n)-S| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

由极限的定义，命题得证。 □

**注 5.** *这题是第 10 题的推广。如果* $b_n = q^{n-1}, 0<q<1$，*则*

$$\lim_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

*由这题的结论，第 10 题得证。*

**13.** *(Toeplitz 定理) 设* $n,k\in\mathbb{N}$，$t_{nk}\geq 0$ *且* $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$。*如果* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，*证明:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$。*说明例 1.1.15 为 Toeplitze 定理的特殊情形。*

**证明.** 对于 $\forall\varepsilon>0$, 我们有:

(1) $\exists N_0\in\mathbb{N}$，当 $n>N_0$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

(2) 我们取 $M=\max\{|a_1-a|,|a_2-a|,\cdots,|a_{N_0}-a|\}$.

(3) 对于 $l\in\mathbb{N}, 1\leq l\leq N_0$, 存在 $N_l\in\mathbb{N}$ 使得 $t_{nl}<\frac{\varepsilon}{2N_0M}, \forall n>N_l$.

(4) 取 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_{N_0}\}$，当 $n>N$ 时，我们有:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - a\right| \\
&= \sum_{k=1}^{N_0} t_{nk}\,|(a_k-a)| + \sum_{k=N_0}^{n} t_{nk}\,|(a_k-a)| \\
&< \sum_{k=1}^{N_0}\frac{\varepsilon}{2N_0M}M + \sum_{k=N_0}^{n} t_{nk}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$.

如果我们取 $b_{nk}=\frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证。 □

**14.** 设 $a,b,c$ 为三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \\ b_n=\dfrac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \\ c_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots.$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$.

**证明.** 我们通过以下结论证明该命题：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n)=a+b+c$. 这是因为 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-c_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)=0$. 这是因为

$$a_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-b),$$

$$a_n-c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-c_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-c),$$

$$c_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(c-b).$$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to+\infty}3a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n+(a_n-b_n)+(a_n-c_n))=\dfrac{a+b+c}{3}$.

类似可证，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. □

**15.** 设 $a_1,a_2$ 为实数，令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}, n=3,4,5,\cdots,$$

其中 $p>0$，$q>0$，$p+q=1$。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{a_2+a_1q}{1+q}$.

**证明.** 由递推公式，我们可以证明

$$a_n-a_{n-1}=(-q)^{n-2}(a_2-a_1), \forall n\geq 3.$$

由此我们可以得出 $a_n$ 的通项公式

$$a_n=a_2+\sum_{k=1}^{n-2}(-q)^k(a_2-a_1)=a_2-\frac{q+(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2-a_1).$$

从而，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a_2-\dfrac{q}{1+q}(a_2-a_1)=\dfrac{a_2+qa_1}{1+q}$. □

**16.** 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足 $a_1>0$，$4\leq b_n\leq 5$，$4\leq c_n\leq 5$，

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

**证明.** 由通项公式定义有

$$0 \le a_n \le \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \le \cdots \le \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由 $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。 □

## 1.2 数列极限的基本性质

### 1.2.1 练习题

**1.** 应用数列极限的基本性质求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2-n+5}{3n^2-2n-7}$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2-n+5}{3n^2-2n-7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4-1/n+5/n^2}{3-2/n-7/n^2} = 4/3$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+(-2/3)^n}{3+(-2)(-2/3)^n} = 1/3$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

**解.** $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1.$ 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$

**解.** $1 \le \lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$ 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1.$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}}$

**解.** $1 \le \lim\limits_{n\to+\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\pi}{2}} = 1.$ 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1.$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}}, |a|<1, |b|<1$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right)\left(\dfrac{1-b}{1-b^n}\right) = \dfrac{1-b}{1-a}.$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

**解.** 记

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2(n-1)-1}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

**解.** $1-\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)\\&=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)}\end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2\cdot3}(n+2)!$.
分母的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.
于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}$.

(11) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

**解.**

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{8n^3-2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\frac{4}{3}.$$

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

(13) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0.$

**2.** 设 $a_n>0$，$n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$。应用例 *1.2.6* 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

**证明.**

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}\cdot\sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$. □

**3.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$，其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数。

**证明.** $a=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na_n-1}{n}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[na_n]}{n}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na_n}{n}=a.$ □

**4.** 设 $a_n\neq0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r>1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$.

**证明.** 取 $\varepsilon=\frac{r-1}{2}$. 由极限的定义，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>r-\varepsilon=\frac{r+1}{2}>1$. 于是

$$|a_n|>\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n_N}|a_N|.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$。 □

**5.** (1) 应用数学归纳法或 $\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{2k}{2k+1}$ 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

**证明.** 记 $S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{2k}{2k+1}$，我们有

$$S_n<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0$

**证明.** $0<\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)\le\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0.$ □

**6.** 设 $a_n>0(n\in\mathbb{N})$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>0$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

**证明.** 由极限的定义知，存在 $N>0$ 使得

$$\frac{a}{2}\le a_n\le\frac{3a}{2},\quad\forall n>N.$$

于是 $1=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}=1.$ □

**7.** 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1$: $\left(提示:1+\dfrac{1}{n}\le\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\le1+\dfrac{2}{n}\right)$

**证明.**

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{n}&=\frac{(n-1)!+n!}{n!}\\&<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\\&<\frac{(n-1)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\\&=1+\frac{2}{n}\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1.$ □

**8.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$。记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},\quad T_n=\min\{a_n,b_n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

应用 $\varepsilon-N$ 法 (分$a<b,a>b,a=b$) 或 $\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+|a_n-b_n|$ 与 $\min\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n-|a_n-b_n|)$, 证明:

$$(1)\quad\lim_{n\to+\infty}S_n=\max\{a,b\};\quad(2)\quad\lim_{n\to+\infty}T_n=\min\{a,b\}.$$

**证明.** 显然我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n-b_n|=|a-b|.$$

由此可知:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\max\{a,b\},$$

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\min\{a,b\}.$$

□

**9.** 应用例 *1.1.7* 与例 *1.1.15* 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

**证明.** 取 $a_n=\sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$ □

**10.** 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\ln2}{2}+\sin\dfrac{\ln3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$

**证明.** $1=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}+\sin\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ □

**11.** 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2.$

**证明.**

$$\frac{2n+2}{n+1}=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\leq\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$。 □

### 1.2.2　思考题

**12.** 用 $p(n)$ 表示能整除 $n$ 的素数的个数。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0.$

**证明.** 假设 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_l$ 是互异的素数，$m_k\geq 1,k=1,2,\cdots,l$。于是 $p(n)=\sum\limits_{k=1}^{l}m_k$.

$$\ln n=\sum_{k=1}^{l}m_k\ln p_k\geq\sum_{k=1}^{p(n)}\ln 2=p(n)\ln 2.$$

因此

$$0\leq\frac{p(n)}{n}\leq\frac{\ln n}{n\ln 2}.$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0.$ □

**13.** 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{4}.$

**证明.**

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}&=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\&<\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\\&<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\&=\frac{n(n+1)}{4n^2}.\end{aligned}$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$。 □

## 1.3 实数理论，实数连续性命题

### 1.3.1 练习题

### 1.3.2 思考题

## 1.4 Cauchy 收敛准则 (原理)，单调数列的极限，数 $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

### 1.4.1 练习题

**1.** 证明下列数列收敛：

(1) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right), n\in\mathbb{N};$

**证明.** 记 $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$，我们有 $S_{n+1}=S_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<S_n$. 很显然 $S_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知，$S_n$ 收敛。 □

(2) $\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}, n\in\mathbb{N}.$

**证明.** 记 $S_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$. 当 $n>10$ 时，$\frac{n+9}{2n-1}<1$. 即 $S_{n+1}<S_n,\forall n\in\mathbb{N},n>10$. 另一方面 $S_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知，$S_n$ 收敛。 □

**2.** 设 $0<a_n<1$ 且 $a_{n+1}(1-a_n)\geq\frac{1}{4}$，$n\in\mathbb{N}$。证明：$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$。

**证明.** 考虑函数 $f(x)=(1-x)x,x\in(0,1)$, 我们有

$$f(x)>0,f(x)\leq\frac{1}{4},x\in(0,1).$$

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq\dfrac{1}{4(1-a_n)a_n}\geq 1$，即 $\{a_n\}$ 是单调递增。由实数连续性命题 (二) 可知，$a_n$ 收敛。由递推公式可知，$\frac{1}{4}\geq a(1-a)\geq\frac{1}{4}$. 所以 $a=\frac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$。 □

**3.** 给定两正数 $x_0=a$ 与 $y_0=b$，归纳定义

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}},\quad y_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2},$$

$n=1,2,\cdots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$，并称此极限为与的算术-几何平均数。

**证明.** 由算术-几何平均不等式知：$x_n\leq y_n,\forall n\in\mathbb{N}$。于是：

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geq\sqrt{x_nx_n}=x_n,\quad\forall n=1,2,\cdots,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leq\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,\quad\forall n=1,2,\cdots.$$

于是

$$a=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n\leq\cdots\leq y_n\leq y_1\leq y_0=b.$$

令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=B$。由递推公式可知：$A=\sqrt{AB}$, 从而 $A=B$. □

**4.** $\forall n\in\mathbb{N}$, 用 $x_n$ 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的根，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

**解.** 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$ 对于给定的 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 是单调增函数，所以 $f_n(x)$ 只会有唯一的根 $x_n$。由于

$$f_{n+1}(x_{n+1})=0<f_n(x_n)+x_n^{n+1}=f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1}\le x_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 *(二)* 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在。由于 $\dfrac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$ 知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

**5.** 设 $c>0$，$x_1=\sqrt{c}$，$x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$，$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

**证明.** 我们用归纳法证明 $x_n\le\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2},\forall n\in\mathbb{N}$.

(1) $x_1=\sqrt{c}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(2) 假设 $x_k<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。我们证明 $x_{k+1}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=\sqrt{c+x_k}\\&<\sqrt{c+\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{4c+2+2\sqrt{1+4c}}{4}}\\&=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.\end{aligned}$$

现在考虑函数 $f(x)=c+x-x^2$。很显然

$$f(x)>0,\quad x\in\left(0,\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}\right).$$

于是 $x_{n+1}^2-x_n^2=c+x_n-x_n^2>0$. 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列。由实数连续性命题 (二) 知，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则

$$a=\sqrt{c+a}.$$

解方程得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. □

**6.** 设 $x_1=c>0$，令 $x_{n+1}=c+\dfrac{1}{x_n}$，$n\in\mathbb{N}$。求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

**解.** 我们首先证明：

(1) $x_{2k-1}<x_{2k+1}$, $\quad\forall k\in\mathbb{N}$;

(2) $x_{2k}>x_{2(k+1)}$, $\quad\forall k\in\mathbb{N}$.

由递推公式可知

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-3}-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_{n-3}} = \frac{x_{n-2}-x_{n-4}}{x_{n-1}\cdot x_{n-2}\cdot x_{n-3}\cdot x_{n-4}}.$$

由于 $x_3 - x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$, 从而知 (1) 成立。由于 $x_4 - x_2 = \frac{x_1 - x_3}{x_1\cdot x_3} < 0$, 从而知 (2) 成立。

另一方面：

$$x_{2k} - x_1 = c + \frac{1}{x_{2k-1}} - c = \frac{1}{x_{2k-1}} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$x_{2k+1} - x_2 = c + \frac{1}{x_{2k}} - c - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_{2k}}{x_1\cdot x_{2k}} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 *(*二*)* 可知，奇数列和偶数列都是收敛子列。假设

$$\lim_{k\to+\infty} x_{2k-1} = a, \lim_{k\to+\infty} x_{2k} = b.$$

由递推公式，我们有

$$x_{2k+1} = c + \frac{1}{c+\frac{1}{x_{2k-1}}} \Rightarrow a^2 - ac - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2},$$

$$x_{2k+2} = c + \frac{1}{c+\frac{1}{x_{2k}}} \Rightarrow b^2 - bc - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}.$$

即，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}$.

**7.** 证明：$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$

**证明.** 第一个等式是题 5 的特例：$c = 1$. 第二个等式是题 6 的特例：$c = 1$. □

**8.** 设 $c > 0$，$a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$。证明：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 1-\sqrt{1-c}, & 0 < c \le 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

**证明.** 当 $c > 1$ 时，由递推公式可知，

$$a_{n+1} \ge 2\sqrt{\frac{c}{2}\frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c}a_n \ge \cdots \ge c^{\frac{n}{2}}a_1.$$

所以 $+\infty \ge \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \ge \lim\limits_{n\to+\infty}\left(c^{\frac{n}{2}}a_1\right) = +\infty$.

当 $0 < c \le 1$ 时，我们证明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有界。

(1) $a_1 = \frac{c}{2} < 1 - \sqrt{1-c}$.

(2) 设 $a_k < 1-\sqrt{1-c}$. 下面我们证明 $a_{k+1} \ge a_k$ 且 $a_{k+1} < 1-\sqrt{1-c}$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-c}\right)^2 = 1-\sqrt{1-c}.$$

考察函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$.

$$f(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 1-\sqrt{1-c}).$$

因此

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(a_k^2-2a_k+c)>0.$$

即 $\{a_n\}$ 是单调增的数列. 由实数连续性命题 (二) 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在。设极限为 $a$, 则

$$a=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2}\Rightarrow a=1-\sqrt{1-c}.$$

命题在 $0<c\leq$ 也得证了。 □

**9.** *设数列* $\{a_n\}$ *单调增，*$\{b_n\}$ *单调减，且* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$*。证明：*$\{a_n\}$ *与* $\{b_n\}$ *都收敛，且* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

**证明.** 很显然 $\{a_n-b_n\}$ 是单调增。又由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$，可知 $a_n\leq b_n,\forall n\in\mathbb{N}$, 从而

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots\leq b_n\leq\cdots\leq b_2\leq b_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛. 再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$ 知，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$。 □

**10.** *设数列* $\{a_n\}$ *满足：存在正数* $M$*，*$\forall n\in\mathbb{N}$*，有*

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+|a_n-a_{n-1}|\leq M.$$

*证明：数列* $\{a_n\}$ *与* $\{A_n\}$ *都收敛。*

**证明.** 很显然数列 $\{A_n\}$ 是单调增有界数列，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{A_n\}$ 是收敛的。

$$\{A_n\}\text{收敛}\Rightarrow\{A_n\}\text{是 Cauchy 列}\Rightarrow\{a_n\}\text{是 Cauchy 列}\Rightarrow\{a_n\}\text{收敛}.$$

Cauchy 数列必收敛，从而知 $\{a_n\}$ 收敛。 □

**11.** *应用 Cauchy 收敛准则证明下列数列收敛：*

(1) $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$;

**证明.**

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right|\leq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

(2) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$;

**证明.**

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

(3) $x_n=\dfrac{\arctan 1}{1(1+\cos 1!)}+\dfrac{\arctan 2}{2(2+\cos 2!)}+\cdots+\dfrac{\arctan n}{n(n+\cos n!)}$.

**证明.**

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\arctan(n+1)}{(n+1)((n+1)+\cos(n+1)!)}+\cdots+\frac{\arctan(n+p)}{(n+p)((n+p)+\cos(n+p)!)}\right| \\ &< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right) \\ &< \frac{\pi}{2n}.\end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

**12.** 应用 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$，求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^n$;

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\frac{n}{n-3}}=e.$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^n$;

**解.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{(-n+2)\frac{n}{-n+2}}=e^{-1}.$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$;

**证明.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2+n}\right)^{(-2-n)\frac{n}{-2-n}}=e^{-1}.$ □

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$;

**证明.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^2=e^2.$ □

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

**证明.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3=e^3.$ □

**13.** $\forall n\in\mathbb{N}$，证明:

(1) $0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}$

**证明.** 由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 知:

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{3}{n}.$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0.$

**证明.** 由 (1) 和夹逼原理，可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$。 □

**14.** 设 $\alpha<1$，证明:

(1) $0<n^\alpha\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]<\dfrac{e}{n^{1-\alpha}}.$

**证明.** 由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 知:

$$\begin{aligned}0&<n^\alpha\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}\right]\\&<\frac{e}{n^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0.$

**证明.** 由 (1) 和夹逼原理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$。 □

**注 6.** 由上两题可知 $\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ 比 $\frac{1}{n^\alpha}$ $\forall\alpha<1$. 高阶的无穷小量。

**15.** (1) 设 $0<a<b$，$\forall n\in\mathbb{N}$。证明:

$$b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a),$$

$$a^{n+1}>b^n\left[(n+1)a-nb\right];$$

**证明.**

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)<(n+1)b^n(b-a).$$

由此式可知:

$$a^{n+1}>b^{n+1}-(n+1)b^n(b-a)=b^n\left[b-(n+1)b+(n+1)a\right]=b^n\left[(n+1)a-nb\right].$$

□

(2) 在 *(1)* 中，令 $a=1+\dfrac{1}{n+1}$，$b=1+\dfrac{1}{n}$ 推出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为严格增的数列;

**证明.** 将 $a=1+\dfrac{1}{n+1},b=1+\dfrac{1}{n}$ 代入（1）中的第二式，可知

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

(3) 在（*1*）中，令 $a=1$，$b=1+\frac{1}{2n}$ 推出当 $n$ 为偶数时，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$；由此得到 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$，即 4 为该数列的上界，从而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛。

**证明.** 将 $a=1,b=1+\dfrac{1}{2n}$ 代入（1）的第二个不等式，我们有:

$$1\geq\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left[(n+1)-n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right],$$

即

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\leq 2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\leq 4.$$

由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增的，我们可知，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 4,\forall n\in\mathbb{N}.$ □

**16.** 应用不等式 $b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a)$，$0<a<b$，证明：数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是严格单减的，并由此推出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为有界数列。

**证明.**

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)>(n+1)a^n(b-a).$$

即

$$b^{n+1}>a^n\left[(n+1)b-na\right].$$

取 $a=1+\dfrac{1}{n+1},b=1+\dfrac{1}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}&>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left[(n+1)\frac{n+1}{n}-n\frac{n+2}{n+1}\right]\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{n^2+3n+1}{n(n+1)}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left[\frac{n^2+3n+1}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right]\\&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}\right)\\&>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

由此可见 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格单调减. 另外

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4.$$

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为有界数列。 □

**17.** 证明：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{3}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N}.$

**证明.**

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\frac{3}{n},\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

□

**18.** 设 $\{a_n\}$ 为有界数列。记

$$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad \underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明：

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $\overline{a}_n\geq\underline{a}_n$;

**证明.** 这是显然的。$\overline{a}_n\geq a_n\geq\underline{a}_n,\forall n\in\mathbb{N}$. □

(2) $\{\overline{a}_n\}$ 为单调减有界数列；$\{\underline{a}_n\}$ 为单调增有界数列，且 $\forall n,m\in\mathbb{N}$, 有 $\overline{a}_n\geq\underline{a}_m$;

**证明.** 由 $\overline{a}_n$ 和 $\underline{a}_n$ 的定义可知，

$$\overline{a}_n=\max\{a_n,\overline{a}_{n+1}\},\quad \underline{a}_n=\min\{a_n,\underline{a}_{n+1}\}.$$

由此可见 $\{\overline{a}_n\}$ 是单调减，$\{\underline{a}_n\}$ 是单调增, 且

$$\underline{a}_1\leq\underline{a}_2\leq\cdots\leq\underline{a}_n\cdots\leq\cdots\leq\overline{a}_n\leq\cdots\leq\overline{a}_2\leq\overline{a}_1.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 是有界数列，故 $\underline{a}_1$ 和 $\overline{a}_1$ 都是有界数。命题得证。 □

(3) 设 $\overline{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{a}_n$，$\underline{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}\underline{a}_n$, 则 $\overline{a}\geq\underline{a}$;

**证明.** 应用定理 1.2.5，这个命题就可以得证。 □

(4) $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\overline{a}=\underline{a}$.

**证明.** ($\Rightarrow$): 由极限定义，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N$ 使得

$$|a_n-a|<\varepsilon,\forall n>N.$$

于是

$$|\overline{a}_n-a|<\varepsilon,|\underline{a}_n-a|<\varepsilon\forall n>N.$$

由此可知

$$|\overline{a}-a|<\varepsilon,|\underline{a}-a|<\varepsilon.$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知，$\overline{a}=\underline{a}=a$.

($\Leftarrow$): 记 $\overline{a}=\underline{a}=a$. 再次由极限定义知，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N$ 使得

$$|\overline{a}-a|<\varepsilon,|\underline{a}-a|<\varepsilon,\forall n>N.$$

从而

$$|a_n-a|<\varepsilon,\forall n>N.$$

由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. □

### 1.4.2 思考题

**19.** 设 $a_1\ge 0$，$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{3}$.

**证明.** 很显然 $a_n>0,\forall n$. 我们现在计算 $\left|a_{n+1}-\sqrt{3}\right|$:

$$\left|a_{n+1}-\sqrt{3}\right|=\left|\frac{3+3a_n-3\sqrt{3}-\sqrt{3}a_n}{a_n+3}\right|=\left|\frac{(3-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3})}{a_n+3}\right|<\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\left|a_n-\sqrt{3}\right|.$$

因为 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}<1$, 所以 $\lim_{n\to+\infty}(a_n-\sqrt{3})=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{3}$. □

**20.** 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$，$n=1,2,\cdots$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{a}$

**证明.** 我们证明如下结论:

(1) 如果 $x_1\le\sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调增且 $x_n\le\sqrt{a},\quad\forall n$;

(2) 如果 $x_1>\sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调减且 $x_n\ge\sqrt{a},\quad\forall n$;

无论哪种情况发生，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n\to+\infty}x_n=b$, 则

$$b=\frac{b(b^2+3a)}{3b^2+a}.$$

解方程得 $b=\sqrt{a}$. 即 $\lim_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{a}$.

注意到 $x_n>0,\forall n$ 且

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_n(\sqrt{a}-x_n)(\sqrt{a}+x_n)}{3x_n^2+a},\quad x_{k+1}-\sqrt{a}=\frac{(x_k-\sqrt{a})^3}{3x_k^2+a}.$$

我们很容易看出上述的两个结论都是成立的。 □

**21.** 设 $a>0$，$x_1=\sqrt[3]{a}$，$x_n=\sqrt[3]{ax_{n-1}}(n>1)$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{a}$

**证明.** 我们只需要证明:

(1) 如果 $a\ge 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递增且 $x_n\le\sqrt{a},\forall n$

(2) 如果 $a<1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递减且 $x_n\ge\sqrt{a},\forall n$.

无论上述哪种情况发生，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n\to+\infty}x_n=b$, 则

$$b=\sqrt[3]{ab}.$$

解方程得 $b=\sqrt{a}$. 即 $\lim_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{a}$.

注意到 $x_n>0,\forall n$ 且

$$x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-1}(\sqrt{a}-x_{n-1})(\sqrt{a}+x_{n-1})}{\left(\sqrt[3]{ax_{n-1}}\right)^2+\sqrt[3]{ax_{n-1}}x_{n-1}+x_{n-1}^2},$$

$$x_n-\sqrt{a}=\sqrt[3]{ax_{n-1}}-\sqrt{a}=\frac{a(x_{n-1}-\sqrt{a})}{\left(\sqrt[3]{ax_{n-1}}\right)^2+\sqrt[3]{a^{5/2}x_{n-1}}+a}$$

当 $a\ge 1$, $x_1=\sqrt[3]{a}\le\sqrt{a}$. 由上两式知，结论 (1) 成立.
当 $a<1$, $x_1=\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$. 由上两式知，结论 (2) 成立. □

**22.** 设 $0 < a_1 < b_1 < c_1$。令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

证明：$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 收敛于同一实数。

**证明.** 由定义可知

$$0 < a_1 < a_n \le b_n \le c_n < c_1, \quad \forall n > 1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调增，$\{c_n\}$ 单调减。由实数连续性命题 (二) 可知，数列 $\{a_n\},\{c_n\}$ 收敛。因为 $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$ 可知，数列 $\{b_n\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$。易知，$0 < a_1 \le a \le b \le c \le c_1$ 且

$$a = \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}, \quad b = \sqrt[3]{abc}, \quad c = \frac{a+b+c}{3}$$

解方程组可得知 $a = b = c.$ □

**23.** 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $T_n = \dfrac{a_1}{S_1} + \cdots + \dfrac{a_n}{S_n}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

**证明.** 由于 $S_n \to +\infty$, 我们可以找到一个子列 $\{n_k\}$ 使得

$$\frac{S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned}
T_{n_k} &= \left(\frac{a_1}{S_1} + \cdots \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}}\right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}} + \cdots \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_{k-1}+1}} + \cdots \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}}\right) \\
&> \left(\frac{a_1}{S_{n_1}} + \cdots \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}}\right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_2}} + \cdots \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_k}} + \cdots \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}}\right) \\
&= \frac{S_{n_1} - 0}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2} - S_1}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} \\
&> \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

即: $\lim\limits_{k\to+\infty} T_{n_k} = +\infty$. 因为 $T_n$ 是单调增的数列，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. 命题得证。 □

**24.** 设 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**证明.** 我们只需证明 $\left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|$ 收敛于 0.

$$\begin{aligned}
\left|a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| &= \left|\frac{3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)a_n}{2(1+a_n)}\right| \\
&= \left|\frac{-(\sqrt{5}-1)\left(a_n - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{2(1+a_n)}\right| \\
&< \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \cdot \left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

由此可见，$\left\{\left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|\right\}$ 收敛于 0. □

**25.** 设 $a_n \geq 0$，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 收敛于 $S$。证明：$b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛。

**证明.** 很显然，$\{b_n\}$ 是单调增数列。下面证明 $\{b_n\}$ 是有界数列。由于 $a_n \geq 0$ 且 $S_n \to S$, 则 $S_n$ 是单调增收敛于 $S$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面，

$$b_n \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)^n \leq \left(1+\frac{S}{n}\right)^n < \left(1+\frac{[S]+1}{n}\right)^n.$$

数列 $\left\{\left(1+\frac{[S]+1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增的，且

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{[S]+1}{n}\right)^n = e^{[S]+1}.$$

于是

$$b_n \leq e^{[S]+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知，数列 $\{b_n\}$ 是收敛数列。 □

# 1.5 上极限与下极限

## 1.5.1 练习题

**1.** 求 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$:

(1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(2) $a_n = n^{(-1)^n}$;

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(3) $a_n = [1+2^{(-1)^n n}]^{\frac{1}{n}}$;

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

(4) $a_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$;

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(5) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$;

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(6) $a_n = \sqrt[n]{\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|}$;

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(7) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

**解.** $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

**2.** 证明下面各式当两端有意义时成立:

(1) $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to+\infty} b_n \leq \varliminf\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leq \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$,
$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n \leq \varlimsup\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leq \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$

**证明.** 由上，下极限的定义，我们可以得到两个简单的无需证明的事实：对于任何数列 $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$ 是一个任意一个子列，则

(a) $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \varliminf\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}$

(b) $\varlimsup\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$

我们取子列 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) = \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

再在子列 $\{a_{n_k}\}$ 中取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

对于子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$，我们会有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \geq \varliminf_{k\to+\infty} b_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} b_n.$$

从而

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n &\leq \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) \\ &= \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n). \end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

考虑子列 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$，在其中取子列 $\{a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}) = \varliminf_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) \geq \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

对于同样下标的子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \leq \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n) &\le \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}})\\ &= \lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}+\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\\ &\le \lim_{k\to+\infty}a_{n_k}+\overline{\lim}_{n\to+\infty}b_n\\ &= \underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n+\overline{\lim}_{n\to+\infty}b_n\end{aligned}$$

下面我们用类似的办法证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}b_{n_k}=\overline{\lim}_{n\to+\infty}b_n.$$

对于相应的 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$ 可以取子列 $\{a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}})=\overline{\lim}_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})\le\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

显然

$$\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}\ge\underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n+\overline{\lim}_{n\to+\infty}b_n &\le \lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}+\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\\ &= \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}})\\ &= \lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})\\ &\le \overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})=\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}=\overline{\lim}_{k\to+\infty}b_{n_k}\le\overline{\lim}_{n\to+\infty}b_n.$$

另一方面

$$\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}\le\overline{\lim}_{k\to+\infty}a_{n_k}\le\overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n.$$

所以 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\le\overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n+\overline{\lim}_{n\to+\infty}b_n$. □

(2) 设 $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$, 则
$\underline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n+b$,
$\overline{\lim}_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n+b$

**证明.** 这题是上面一题的直接应用。 □

(3) $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(-a_n)=-\overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-a_n)=-\underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n$;

**证明.** $\inf\limits_{k\geq n}\{-a_k\}=-\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}\Rightarrow \varliminf\limits_{n\to+\infty}(-a_n)=-\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n$.
$\sup\limits_{k\geq n}\{-a_k\}=-\inf\limits_{k\geq n}\{a_k\}\Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to+\infty}(-a_n)=-\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n$ □

(4) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为非负数列，则
$\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\varliminf\limits_{n\to+\infty}b_n\leq\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_nb_n\leq\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to+\infty}b_n$,
$\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to+\infty}b_n\leq\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_nb_n\leq\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to+\infty}b_n$;

**证明.** 我们现证第一式。取子列 $\{a_{n_k}b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}a_{n_k}b_{n_k}=\varliminf_{n\to+\infty}a_nb_n.$$

对于上述的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}=\varliminf_{k\to+\infty}a_{n_k}\geq\varliminf_{n\to+\infty}a_n\geq 0.$$

对于 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\varliminf_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\geq\varliminf_{k\to+\infty}b_{n_k}\geq\varliminf_{n\to+\infty}b_n\geq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty}a_n\cdot\varliminf_{n\to+\infty}b_n&\leq\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}\cdot\varliminf_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\\&=\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}b_{n_{k_l}}\\&=\lim_{k\to+\infty}a_{n_k}b_{n_k}\\&=\varliminf_{n\to+\infty}a_nb_n\end{aligned}$$

取 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}a_{n_k}=\varliminf_{n\to+\infty}a_n.$$

对于对应的子列 $\{b_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}=\varlimsup_{k\to+\infty}b_{n_k}\leq\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty}a_nb_n&\leq\varliminf_{k\to+\infty}a_{n_k}b_{n_k}\\&\leq\varliminf_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}b_{n_{k_l}}\\&=\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}\cdot\lim_{l\to+\infty}b_{n_{k_l}}\\&\leq\varliminf_{n\to+\infty}a_n\cdot\varlimsup_{n\to+\infty}b_n\end{aligned}$$

现在我们来证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}b_{n_k}=\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.$$

对于相对应的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}a_{n_{k_l}}=\varliminf_{k\to+\infty}a_{n_k}\geq\varliminf_{n\to+\infty}a_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_n\cdot\varlimsup_{n\to+\infty} b_n &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}}\cdot\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}}\\ &= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}}b_{n_{k_l}}\\ &\le \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k}b_{n_k}\\ &\le \varlimsup_{n\to+\infty} a_nb_n\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k}b_{n_k} = \varlimsup_{n\to+\infty} a_nb_n.$$

在 $\{a_{n_k}\}$ 取收敛子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

另一方面

$$\varlimsup_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \le \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to+\infty} a_nb_n &= \varlimsup_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}}b_{n_{k_l}}\\ &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}}\cdot\varlimsup_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}}\\ &\le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n\cdot\varlimsup_{n\to+\infty} b_n\end{aligned}$$

□

(5) 设 $\{b_n\}$ 非负，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$，则
$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_nb_n = b\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_nb_n = b\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$;

**证明.** 直接用上一题的结论就可以得证。 □

(6) 设 $a_n > 0 (n\in\mathbb{N})$, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$, 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

**证明.** 因为 $a_n > 0, \forall n$, 从而

$$\sup_{k\ge n}\left\{\frac{1}{a_k}\right\} = \frac{1}{\inf\limits_{k\ge n}\{a_k\}}.$$

由上，下极限的定义，命题得证。 □

**3.** 设 $a_n > 0 (n\in\mathbb{N})$，且 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n} = 1$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。

**证明.** 由题可知 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$。我们可以证明

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

由此可知

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}.$$

故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是收敛数列。当然 $\{a_n\}$ 收敛。 □

**4.** 设数列 $\{a_n\}, a_n\leq 1, n=1,2,\cdots$，且满足:

$$a_m+a_n-1<a_{m+n}<a_m+a_n+1.$$

证明: *(1)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\omega$, 其中 $\omega$ 为有限数; *(2)* $n\omega-1\leq a_n\leq n\omega+1$.

**证明.** 先证明 (1).

$$a_1-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}<a_1+\frac{1}{n}.$$

由此得证 (1), 且 $\omega=a_1$。由此 (2) 得证。 □

**5.** 设 $a_n\geq 0, n\in\mathbb{N}$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq 1 \iff \text{对任何}l>1,\text{有}\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

如果删去"任何"两字，结论如何?

**注 7.** 这个题目的结论是不对的。比如

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & n\text{是奇数}\\ 1, & n\text{是偶数}\end{cases}$$

于是

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}\leq\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{l^n}=0,$$

但是，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 不存在。所以下面我们证明:

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq 1 \iff \text{对任何}l>1,\text{有}\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

**证明.** $(\Rightarrow)$: 对于任何的 $l>1$, 取 $\varepsilon=\frac{l-1}{2}>0$，我们可以找到 $N>0$, 使得

$$\sqrt[n]{a_n}\leq 1+\frac{l-1}{2}=\frac{l+1}{2}<l,\quad \forall n>N.$$

于是

$$\frac{a_n}{l^n}<\left(\frac{l+1}{2l}\right)^n,\quad \forall n>N.$$

由 $\frac{l+1}{2l}<1$ 可知,

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{l^n}=0.$$

$(\Leftarrow)$: 由定义可知，对任意的 $l>1$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时有,

$$\frac{a_n}{l^n}<1\Rightarrow a_n<l^n\Rightarrow \sqrt[n]{a_n}<l.$$

从而

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq l\Rightarrow\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq 1.$$

如果删去"任何"两字, 结论不成立。 □

### 1.5.2 思考题

**6.** 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 令

$$l=\varliminf_{n\to+\infty}x_n,\quad L=\varlimsup_{n\to+\infty}x_n.$$

证明：$\{a\in\mathbb{R}|有子列x_{n_k}\to a(k\to\infty)\}=[l,L]$. 如果删去条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，结论如何？

**证明.** 对于 $a\in(l,L)$ 和任意的 $\varepsilon<\frac{1}{2}\min\{a-l,L-a\}$, 我们有存在 $N$ 使得：

(1) 当 $n>N$ 时，$-\varepsilon\le a_{n+1}-a_n\le\varepsilon$.

(2) 存在子列 $n_k$, 使得 $a_{n_k}\le l+\varepsilon,\quad\forall k$

(3) 存在子列 $n_l$, 使得 $a_{n_l}\ge L-\varepsilon,\quad\forall l$

选择子列 $n_t$，并且重新标记下标，使得

$$a_{n_t}\begin{cases}\le l+\varepsilon, & 当\ \mathrm{t}\ 是奇数\\ \ge L-\varepsilon, & 当\ \mathrm{t}\ 是偶数\end{cases}$$

对于任意上述子列的任意两个相邻的数 $a_{n_{2t}},a_{n_{2t+1}}$，在原数列中一定有至少一个 $a_{n_{t'}}$ 落在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 从而由极限的定义知这个子列收敛到 $a$. 命题得证。 □

**7.** 设 $0\le a_{n+m}\le a_n\cdot a_m(n,m=1,2,\cdots)$. 证明 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 且 $\sqrt[n]{a_n}$ 收敛。

**证明.** 设 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a>b=\varliminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$。取 $N>0$ 使得

$$a_N<b+\frac{a-b}{3}.$$

又取子列 $a_{n_k}$ 使得

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}=a.$$

当 $k$ 充分大后，$n_k>N$, 且 $n_k=m_kN+l$, 其中 $l=0,1,\cdots,N-1$. 于是

$$a_{n_k}\le a_{m_kN}\cdot a_l=a_N^{m_k}\cdot a_l=a_N^{n_k}\cdot\frac{a_l}{a_N^l}.$$

由此可知

$$0\le\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\le\sqrt[n_k]{a_N^{n_k}}\sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}=a_N\cdot\sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}.$$

于是

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\le a_N\le b+\frac{a-b}{3}<a.$$

这与 $\{a_{n_k}\}$ 的选择矛盾。从而知 $a=b$. 命题得证。 □

## 1.6 Stolz 公式

### 1.6.1 练习题

**1.** 设 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数。应用 *Stolz* 公式证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

**证明.** 我们先计算 $\ln C_n^k + \ln C_n^{n-k} = 2\ln n! - 2\ln k! - 2\ln(n-k)!, \quad \forall k \le n$. 所以 $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k = n\ln n! - 2\sum\limits_{k=0}^{n} \ln k!$. 设 $x_n = n^2, y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k$, 于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)\ln n - \ln n!}{2n-1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{2n-1}\right) + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

命题得证 □

**2.** 应用 *Stolz* 公式证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}$;

**证明.** 设 $y_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, x_n = n^{\frac{3}{2}}$，则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})}{n^3 - (n-1)^3}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1 + \sqrt{(1-\frac{1}{n})^3}\right)}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2}{3}\right] = \dfrac{1}{2}$.

**证明.** 我们设 $y_n = 3\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} - 2n^{\frac{3}{2}}$, $x_n = 3\sqrt{n}$. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{3\sqrt{n} - 2n^{\frac{3}{2}} + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\
&= \frac{3\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3}) - 6n^2 + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\
&= \frac{3n^2(\sqrt{(1-1/n)^3} - 1) + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\
&= \frac{-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\
&= \frac{(-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\
&= \frac{n^{\frac{3}{2}}(-9 + 9/n - 3/n^2 + (6 - 2/n)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(1 + \sqrt{1-1/n})}{3n^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{(1-1/n)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}
\end{aligned}$$

于是:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{3}\right] \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1}{2}.$$

命题得证 □

### 1.6.2 思考题

**3.** 设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=1$. 进而设 $0<x_1\le\frac{1}{q}$，其中 $0<q\le 1$，并且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n), n\in\mathbb{N}$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=\dfrac{1}{q}$.

**证明.** 如果我们能证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} nx_n &\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}(1-qx_{n-1})}{qx_{n-1}}\\ &=\frac{1}{q}.\end{aligned}$$

下面我们证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$. 由于 $x_n-x_{n-1}=-qx_{n-1}^2, \forall n\in\mathbb{N}$ 可知,$\{x_n\}$ 是单调减的。很明显 $x_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 是收敛的。设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$, 则 $a=a(1-qa)\Rightarrow qa^2=0\Rightarrow a=0$. 命题得证。 □

**4.** 由 *Toeplitz* 定理导出 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 *Stolz* 公式。

**证明.** 取

$$t_{nk}=\frac{x_k-x_{k-1}}{x_n-x_0}, \quad \forall k=1,2,\cdots,n.$$

(1) 由于 $\{x_n\}$ 是单调增数列，$t_{nk}>0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk}=0$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=\dfrac{x_n-x_0}{x_n-x_0}=1$.

由 Toeplitz 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{y_0}{x_n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_0}{x_n}\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{x_n-x_0}\cdot\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}\\ &\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} t_{nk}\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}\\ &\xlongequal{\text{Toeplitz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a.\end{aligned}$$

命题得证。 □

**5.** 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1.$

**证明.** 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$. 我们很容易证明以下结论：

(1) $\{S_n\}$ 是单增的, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

现在计算

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= a_n^2(S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2)) + (S_n - a_n^2)^2) \\ &= 3(a_nS_n)^2 - 3a_n^3(a_nS_n) + a_n^6 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{3n} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(a_nS_n)^3} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{3n} = 1.$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1$。命题得证。 □

## 1.7 复习题 1

未解决的题：11

**1.** 设 $a_0 = 1$,$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$,$n = 0, 1, 2, \cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$

**证明.** 由递归定义，

$$a_{n-1}^2 + 2 < a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 < a_n^2, \quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 2*(n-1) + a_1^2 = 2n - 1.$$

于是

$$0 \leq \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \forall n > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0.$$

算术平均

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}{n} = 0.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{2n} &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{2n} \\ &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

命题得证。 □

**2.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, 并且存在常数 $K$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K.$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

**证明.** 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$，存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \forall n > N_1.$$

设 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|$. 很显然 $\{s_n\}$ 是一个收敛数列。于是, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有

$$s_n - s_{n-N_1} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}.$$

综上，

$$\begin{aligned}
|z_n| &= |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| \\
&< |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{N_1} y_{n-N_1+1}| + |x_{N_1+1} y_{n-N_1} + x_{N_1+2} y_{n-N_1-1} + \cdots + x_n y_1| \\
&< MN_1(s_n - s_{n-N_1}) + \frac{\varepsilon}{2K}(|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{n-N_1}|) \\
&< MN_1 \frac{\varepsilon}{2MN_1} + K\frac{\varepsilon}{2K} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

命题得证。 □

**3.** 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足:

(1) $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to +\infty (n \to +\infty)$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$.

应用 *Toeplitz* 定理证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

**证明.** 在这题里我们可以取

$$t_{nk} = \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

(1) $t_{nk} > 0, \forall n > 0, k = 0, 2, \cdots, n$;

(2) 给定 $n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} t_{nk} = 1$;

(3) 由于 $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to +\infty (n \to +\infty)$, 给定 $k$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$;

于是

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = \sum_{k=0}^{n} t_{nk} \frac{a_k}{b_k}.$$

由 Toeplitz 定理，命题可以得证。 □

**4.** 设 $p_k > 0, k = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a.$$

**证明.** 对于给定的正整数 $k > 0$, 我们可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$. 这是因为

$$0 \le \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} < \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-k}}.$$

夹逼定理说明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$。

下面我们就可以用极限的定义来证明命题了。对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_0$, 当 $n > N_0$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $M = \max\{|a_0 - a|, |a_1 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$.

对于每一个 $k, 1 \le k \le N_0$, 存在 $N_k$, 当 $n > N_k$ 时有,

$$\frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \le \frac{\varepsilon}{2MN_0}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$, 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} - a\right| &= \left|\frac{p_1(a_n - a) + p_2(a_{n-1} - a) + \cdots + p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right| \\
&< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{p_{n-k+1}|a_k - a|}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-N_0}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{M\varepsilon}{2MN_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

命题得证。 □

**5.** 设 $\{a_n\}$ 为单调增的数列，令 $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = a$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 若“单调增”的条件删去，结论是否成立。

**证明.** 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，$\sigma_n < a + 1$. 于是

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2} < \sigma_{2n} < a + 1.$$

从而

$$a_n < 2\left(a + 1 - \frac{a_1}{2}\right).$$

单调增有上界的数列是收敛数列。即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b$, 由例 1.1.15 可知,

$$b = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = a.$$

如果 $\{a_n\}$ 不是单调增的，结论不成立。例如 $a_n = (-1)^n$，$\sigma_n = 0$或$-\frac{1}{n}$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$. 但是 $\{a_n\}$ 不收敛。 □

**6.** 设 $\{S_n\}$ 为数列,$a_n = S_n - S_{n-1}$, $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ 且 $\{\sigma_n\}$ 收敛，证明 $\{S_n\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$.

**证明.** 我们直接计算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(S_n-\sigma_n)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{nS_n-S_0-S_1-\cdots-S_{n-1}}{n+1}\\&\xlongequal{\text{Stolz 公式}}\lim_{n\to+\infty}(nS_n-nS_{n-1})\\&=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-\sigma_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n$. □

**7.** 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

**证明.** 如果我们能证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n(x_n-x_{n-1})}{n}=0$，则命题得证。

通过简单的计算，我们有

$$(-1)^n(x_n-x_{n-1})=\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)+x_2-x_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n(x_n-x_{n-2})=0$, 可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)}{n-2}=0.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n(x_n-x_{n-1})}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)}{n-2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{x_2-x_1}{n}=0.$$

□

**8.** 设 $u_0,u_1,\cdots$ 为满足 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2(n=0,1,2,\cdots)$ 的实数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。证明 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $u_k=0$.

**证明.** 由 $u_n$ 的定义可知，

$$u_n\geq u_{n+1}\geq 0,\quad \forall n.$$

记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. 由于 $\{S_n\}$ 收敛，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}u_k<1$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}\leq u_n&=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2\\&=u_{n+1}\left(u_{n+1}+\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}u_{n+2}+\cdots\right)\\&\leq u_{n+1}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots)\\&\leq u_{n+1}\end{aligned}$$

从而，$u_{N+1}=u_{N+2}=u_{N+3}=\cdots=c$. 由于 $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}u_k<1$ 可知，$c=0$. 又由 $u_{N+1}=u_{N+2}=u_{N+3}=\cdots=0$，可知 $u_N=u_{N-1}=\cdots=u_1=0$. □

**9.** 设 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$

**证明.** 取 $t_{nk} = \frac{1}{2^n}C_n^k$, 我们有

(1) $t_{nk} > 0$ 且 $\sum_{k=0}^{n} t_{nk} = \frac{1}{2^n}(1+1)^n = 1$;

(2) 很容易验证 $\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$. 因为 $2^n = (1+1)^n > C_n^{k+1}$, 从而

$$0 \le t_{nk} \le \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

由夹逼定理，$\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$。

由 Toeplitz 定理知，$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$。 □

**10.** 给定实数 $a_0, a_1$，并令

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{a_0+2a_1}{3}$

**证明.** 由递归公式有：

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-a_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - a_0).$$

于是：

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(a_1 - a_0) + \cdots + (a_1 - a_0) \\ &= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}(a_1 - a_0) \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}(a_1 - a_0)\right) = a_0 + \frac{2}{3}(a_1 - a_0) = \frac{a_0+2a_1}{3}$。 □

**11.** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意给定的实数。令

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $x_{n+1}$ 应理解为 $x_1$. 归纳定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$x_{n+1}^{(k-1)}$ 应理解为 $x_1^{(k-1)}, k = 2, 3, \cdots$. 证明：

$$\lim_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

**12.** 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，且 $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$。证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = l; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^2} = \frac{l}{2}.$$

**证明.**

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=l$，易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=l.$$

现在计算

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k-na_1&=\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\\&=\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}(a_{l+1}-a_l)\\&=\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(a_{l+1}-a_l)\end{aligned}$$

如果取 $t_{nk}=\dfrac{2(n-k)}{(n-1)n}$，则

(1) $t_{nk}\geq 0,\forall n\in\mathbb{N},k=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2(n-k)}{(n-1)n}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0,\quad\forall k.$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_1}{(n-1)n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2(n-k)}{(n-1)n}\frac{a_{k+1}-a_k}{2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}t_{nk}\frac{a_{k+1}-a_k}{2}=\frac{l}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_1}{(n-1)n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n}{n^2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1}{n}=\frac{l}{2}.$$

命题得证。 □

**13.** 设 $x_1\in[0,1],\forall n\geq 2$，令

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{2}x_{n-1}, & n \text{ 为偶数},\\ \frac{1+x_{n-1}}{2}, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2k}=\dfrac{1}{3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2k+1}=\dfrac{2}{3}$.

**证明.** 由递推公式可知

$$\begin{aligned}x_{2k}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1+x_{2(k-1)}}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x_{2(k-1)}\\&=\sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^l+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}x_2\\&=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}x_2.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k} = \dfrac{1}{3}$.

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^l + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k+1} = \dfrac{2}{3}$. □

**14.** 定初始值 $a_0$，并递推定义

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求 $a_0$ 的所有可能的值，使得数列 $\{a_n\}$ 是严格增的。

**解.** 考虑数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$. 显然

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + (-1)^n a_0 \\
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n(5a_0 - 1)\right]
\end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{1}{5}\left[2^n + (-1)^n(5a_0 - 1)3^n\right].$$

由此

$$\begin{aligned}
a_{2n} - a_{2n-1} &= \frac{1}{5}[2^{2n} + (5a_0 - 1)3^{2n} - 2^{2n-1} + (5a_0 - 1)3^{2n-1}] \\
&= \frac{1}{5}[2^{2n-1} + 4(5a_0 - 1)3^{2n-1}].
\end{aligned}$$

只有当 $a_0 \geq \frac{1}{5}$ 时，$a_{2n} > a_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_{2n-1} - a_{2n-2} &= \frac{1}{5}[2^{2n-1} - (5a_0 - 1)3^{2n-1} - 2^{2n-2} - (5a_0 - 1)3^{2n-2}] \\
&= \frac{1}{5}[2^{2n-2} - 4(5a_0 - 1)3^{2n-2}].
\end{aligned}$$

只有当 $a_0 \leq \frac{1}{5}$ 时，$a_{2n-1} > a_{2n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

综上，只有 $a_0 = \frac{1}{5}$ 时，$\{a_n\}$ 是严格递增的。

**15.** 设 $c > 0$，$a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

试问：当时 $-3 \leq c < 0$，数列 $\{a_n\}$ 的收敛性如何?

**证明.** 现证 $c > 1$ 的情形:

$$a_n \geq \sqrt{ca_{n-1}^2} = \sqrt{c}a_{n-1} \geq \cdots \geq \left(\sqrt{c}\right)^{n-1} a_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{c}\right)^{n-1} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. 命题得证。

现在 $c \leq 1$ 的情形:

(1) 考虑函数 $f(x)=x^2-2x+c$。当 $x\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$, $f(x)<0$ 且 $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)=-1+c$.

(2) 很显然 $a_1=\frac{c}{2}\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$. 于是 $a_2-a_1=\frac{1}{2}f(a_1)<0\Rightarrow a_2<a_1$.

$$a_1^2\in(2-c-2\sqrt{1-c},2-c+2\sqrt{1-c})\Rightarrow a_2=\frac{c}{2}+\frac{a_1^2}{2}\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c}).$$

(3) 假设 $n=k$ 时，$a_k\le a_{k-1}$ 且 $a_k\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$. 显然我们有 $a_{k+1}\le a_k,a_{k+1}\in(1-\sqrt{1-c},1+\sqrt{1-c})$.

综上，

$$a_{n+1}\le a_n,\quad a_n\ge 1-\sqrt{1-c},\quad \forall n.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1-\sqrt{1-c}$.

现考虑 $-3\le c<0$ 的情形。

(1) 我们先证明 $a_n$ 是有界的。$\frac{c}{2}<a_1=\frac{c}{2}\le 0$. 假设 $\frac{c}{2}\le a_k\le 0$, 则 $0\le a_k^2\le\frac{c^2}{4}$。从而

$$\frac{c}{2}<\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2}=a_{k+1}\le\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}=\frac{c}{8}(4-c)<0$$

由数学归纳法知，$a_n\in\left[\frac{c}{2},0\right],\forall n$.

(2)

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-2}&=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+a_{n-3}\right)\left(a_{n-1}-a_{n-3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(a_{n-1}+a_{n-3}\right)\left(a_{n-2}+a_{n-4}\right)\left(a_{n-2}-a_{n-4}\right)\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{4}\left(a_{n-1}+a_{n-3}\right)\left(a_{n-2}+a_{n-4}\right)>0$，$a_n-a_{n-2}$ 和 $a_{n-2}-a_{n-4}$ 同号。即 $\{a_{2k-1}|k\ge 1\}$ 和 $\{a_{2k}|k\ge 1\}$ 是单调数列。因为

$$a_3-a_1=\frac{c}{2}+\frac{a_2^2}{2}-\frac{c}{2}=\frac{a_2^2}{2}>0$$

所以 $\{a_{2k-1}|k\le 1\}$ 是单调递增的。又因为

$$a_4-a_2=\frac{a_3+a_1}{2}\left(a_3-a_1\right)<0,$$

所以 $\{a_{2k}|k\ge 1\}$ 是单调递减的。

假设当 $k\to+\infty$ 时，$a_{2k-1}\to p,a_{2k}\to q$。在递推公式两端取极限，我们有

$$\begin{aligned}p&=\frac{c}{2}+\frac{q^2}{2}\\q&=\frac{c}{2}+\frac{p^2}{2}\end{aligned}$$

两式相减可得

$$p-q=\frac{1}{2}(q-p)(p+q)\Rightarrow(p-q)(p+q+2)=0.$$

如果 $p-q=0$, i.e. $p=q$, 则 $p=q=1-\sqrt{1-c}$.

如果 $p+q+2=0$, 则将 $p=-2-q$ 代入第一个方程，我们有 $(q+1)^2=-(c+3)$. 所以如果 $c>-3$, 则 $(q+1)^2<0$, 从而无解。当 $c=-3$ 时，$q=-1$, 从而 $p=q=-1$. □

**16.** 数列 $\{u_n\}$ 定义如下: $u_1=b,u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$，$n\in\mathbb{N}$. 问: $a,b$ 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛，并求出其极限值。

**解.** 由递归定义可知:

$$u_{n+1}-a=(u_n-a)^2+(u_n-a).$$

记 $v_n=u_n-a$，则 $v_1=b-a$. 如果 $\{u_n\}$ 收敛，则 $\{v_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

(1) 由于 $v_{n+1}-v_n=v_n^2\geq 0$, $\{v_n\}$ 是单调增的。

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$，则 $v_n\leq 0,\forall n$.

下面我们用归纳法来证明，当 $v_1\leq 0, v_1+1\geq 0$ 时，$v_n\leq 0$ 且 $v_n+1\geq 0\ \forall n$.

(1) 当 $n=1$ 时，成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，我们也有 $v_k\leq 0$ 且 $v_k+1\geq 0$.

(3) 我们证明 $n=k+1$ 时也成立。因为

$$v_{k+1}=v_k\cdot(v_k+1),$$

所以 $v_{k+1}\leq 0$. 另一方面

$$v_{k+1}+1=v_k^2+v_k+1=\left(v_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0.$$

由此可见，当 $b\in[a-1,a]$ 时，$\{u_n\}$ 收敛。

**17.** 设 $A>0, 0<y_0<A^{-1}, y_{n+1}=y_n(2-Ay_n), n\in\mathbb{N}$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A^{-1}$.

**证明.** 如果我们能证明 $0<y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$, 则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=2-Ay_n\geq 2-AA^{-1}=1\Rightarrow y_{n+1}\geq y_n.$$

从而 $\{y_n\}$ 是单调递增有上界的数列。故收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A^{-1}$.

下面我们就证明 $y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$. 考虑函数 $f(x)=x(2-Ax)$. 显然该函函数在 $x=A^{-1}$ 是取得最大值。即 $f(x)<A^{-1},\forall x\in\mathbb{R}$. 由于 $0<y_1<A^{-1}$, 由归纳法，$0<y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$. □

**18.** 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2-a_n)a_{n+1}=1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$。

**证明.** 由于 $(2-a_n)a_{n+1}=1$, 则 $a_n\neq 2$, 从而 $a_1\neq\frac{3}{2}$. 我们现证无论 $a_1$ 取何值，都存在 $N$ 使得 $a_N\leq 1$.

(1) 如果 $a_1\leq 1$, 取 $N=1$, $a_N=a_1\leq 1$

(2) 如果 $a_1>\frac{3}{2}$, 则 $a_2>2$, $a_3<0$. 于是取 $N=3$, $a_N=a_3<0\leq 1$.

(3) 如果 $1<a_1<\frac{3}{2}$. 记 $a_1=1+h$, 则

$$a_k=1+\frac{h}{1-(k-1)h},\quad k=2,3\cdots.$$

取 $k=\left[\frac{1}{h}\right]$, 我们有

$$1-(k-1)h\geq h>0,\quad \frac{h}{1-(k-1)h}\geq\frac{1}{2}.$$

从而取 $N=k+2=\left[\frac{1}{h}\right]$，我们有 $a_{N-2}=a_k\geq\frac{3}{2}, a_N<0\leq 1$.

综上，我们不妨假设 $a_1 \le 1$. 下面我们可以用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 是单调增的，且 $a_n \le 1, \forall n$. 由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n-1)^2}{2-a_n},$$

我们可知当 $a_n < 1$ 时，$a_{n+1} > a_n$. 又因为 $2 - a_n > 1 \to a_{n+1} \le 1$. 到此我们证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则 $(2-a)a = 1$. 解方程知 $a = 1$. □

**19.** 设数列 $\{a_n\}$ 满足不等式 $0 \le a_k \le 100a_n (n \le k \le 2n, n = 1, 2, \cdots)$，且无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$

**证明.** 显然 $a_{2n} \le 100a_n$, $\quad a_{2n} \le 100a_{n+1}, \cdots, a_{2n} \le 100a_{2n-1}$. 从而

$$0 \le 2na_{2n} \le 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 200 \sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$.

同理，$a_{2n-1} \le 100a_n$, $\quad a_{2n-1} \le 100a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1} \le 100a_{2n-2}$. 将所有的不等式加起来，我们有

$$0 \le (2n-1)a_{2n-1} = a_{2n-1} + 2(n-1)a_{2n-1} \le 2 * 100 \sum_{k=n}^{2n-2} a_k + a_{2n-1} \le 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 200 \sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0$.

综上所述，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ □

**20.** 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

**证明.** 通过简单计算，我们可以得知

$$\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)^2 \le \left(1+\frac{k}{n^2}\right)\left(1+\frac{n-k+1}{n^2}\right), \quad \forall k \le \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

另一方面

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) \le \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}{n}\right)^n = \left(1+\frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n.$$

很显然

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}.$$

由夹逼定理，命题得证。 □

**21.** 设 $a_1 > b_1 > 0$，令

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad n = 2,3,\cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1b_1}$.

**证明.** 很显然

$$b_n \le \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \le a_n, \quad \forall n = 2,3\cdots.$$

于是

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \le \frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2} = a_{n-1},$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})\cdot b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} \ge 0 \Rightarrow b_n \ge b_{n-1}.$$

所以

$$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \le \cdots \le a_n \le \cdots \le a_2 \le a_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 都存在。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$,

$$a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1} = \cdots = a_1b_1 \Rightarrow ab = a_1b_1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \Rightarrow a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a = b.$$

于是 $a = b = \sqrt{a_1b_1}$. □

**22.** 当 $n \ge 3$ 时，证明：

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

**证明.** 在证明该题之前,我们先证明如下结论:数列 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 满足 $n \ge 2, a_k \ge -1, k = 1,2,\cdots,n$ 且它们有相同的符号，则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

我们用归纳法来证明此命题:

(1) 当 $n = 2$ 时，$(1+a_1)\cdot(1+a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 \ge 1 + a_1 + a_2$, 命题成立。

(2) 假设 $n = k$ 时，命题亦成立，i.e. $\prod\limits_{n=1}^{k}(1+a_n) \ge 1 + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

(3) 下面证明当 $n = k+1$ 时，命题亦成立。

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{k+1}(1+a_n) &= \left(\prod_{n=1}^{k}(1+a_n)\right)\cdot(1+a_{k+1}) \\ &\ge (1+a_1+\cdots+a_k)\cdot(1+a_{k+1})(\text{因为 } 1+a_{k+1} \ge 0) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n + \sum_{n=1}^{k} a_na_{k+1} \\ &\ge 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n\end{aligned}$$

命题得证。

下面我们用上述命题来证明此题。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

首先，由 $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1, \forall k\le n$，我们可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

右边的不等式的得证。

另一方面，应用上面证明的结论，可知

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\ge 1-\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{n}=1-\frac{(k-1)k}{2n}.$$

于是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{3}{2n}$$

左边的不等式得证。 □

**23.** 设 $a_1=1, a_n=n(a_{n-1}+1), n=2,3,\cdots$，且

$$x_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$（其中 $\prod\limits_{k=1}^{n}$ 表示从 $k=1$ 到 $k=n$ 的连乘积）.

**解.** 我们先计算

$$\begin{aligned}x_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\\&=\frac{a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2+1}{2(a_1+1)}\cdot\frac{a_3+1}{3(a_2+1)}\cdots\frac{a_n+1}{n(a_{n-1}+1)}\\&=\frac{a_n+1}{n!a_1}\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&a_1=1!\\&a_2=2!\left(1+\frac{1}{1!}\right)\\&a_3=3!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)\\&\quad\cdots\\&a_n=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)\end{aligned}$$

从而知，

$$a_n+1=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

于是：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e.$

**24.** 设 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n\in\mathbb{N}$，用 $K_n$ 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$

**解.** 我们记 $x_n = H_n - \ln n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = C(Euler$ 常数). 现在我们计算

$$x_{K_{n+1}} - x_{K_n} = \left(\frac{1}{K_n+1}+\cdots+\frac{1}{K_{n+1}}\right) - \ln K_{n+1} + \ln K_n.$$

另一方面

$$1-\frac{1}{K_n} \leq \left(\frac{1}{K_n+1}+\cdots+\frac{1}{K_{n+1}}\right) < 1+\frac{1}{K_{n+1}}.$$

从而由夹逼定理知

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(x_{K_{n+1}} - x_{K_n}) = \lim_{n\to+\infty}(1-\ln K_{n+1}+\ln K_n).$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n} = e.$

**25.** 设 $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2(n\in\mathbb{N})$,

$$S_n = \frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots+\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$

**证明.** 如果 $y_0 = 2$, 则 $y_n = 2, \forall n > 0$。从而 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{2^k} = 1-\dfrac{1}{2^{n+1}}$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$$

下面证明当 $y_0 > 2$ 时结论亦成立。取 $a = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$. 简单计算可知

$$y_0 = a+\frac{1}{a}.$$

由此

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0^2 - 2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2+\frac{1}{a^2}\\
y_2 &= y_1^2 - 2 = \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = a^4+\frac{1}{a^4}\\
&\cdots\\
y_n &= y_{n-1}^2 - 2 = \left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)^2 - 2 = a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
y_0y_1\cdots y_n &= \frac{1}{a-\frac{1}{a}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\cdots\left(a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}\right)\right]\\
&= \frac{a}{a^2-1}\left[\left(a^{2^n}\right)^2-\left(\frac{1}{a^{2^n}}\right)^2\right]\\
&= \frac{a}{a^2-1}\frac{a^{2^{n+2}}-1}{a^{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}=\frac{a^2-1}{a}\frac{a^{2^{n+1}}}{a^{2^{n+2}}-1}=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{a^{2^{n+2}}-1}\right).$$

由此可知

$$S_n=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a^{2^{n+2}}-1}\right).$$

进而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{a^2-1}{a}\left(\dfrac{1}{a^2-1}+1\right)=a$. 命题得证。 □

**26.** 令数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明:*(1)* 当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\dfrac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$;
*(2)* $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$.

**证明.** (1). 直接计算

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}b_{n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}\cdot\frac{n+1}{n}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}\left(1+\frac{k+1}{n-k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{n!(n-n)!}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{0!(n-0)!}{n!}-2\\&=2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}-2\\&=2b_n-2\end{aligned}$$

所以，$b_n=\dfrac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$。

（2）当 $n>4$, 我们有 $b_{n-1}>2\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2n}{n-1}$, 从而

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{b_{n-1}}<\frac{n+1}{2n}+\frac{n-1}{2n}=1.$$

即从 $n>4$ 起，数列 $\{b_n\}$ 单调递减。另一方面，显然 $b_n\geq 2,\forall n\geq 2$. 由此可知 $\{b_n\}$ 是收敛的。对（1）中的等式取极限可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$. □

**27.** 设 $S_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$. 证明:

$$n^n\left[1+\frac{1}{4(n-1)}\right]<S_n<n^n\left[1+\frac{2}{e(n-1)}\right].$$

**证明.** 提取 $n^n$ 可得

$$S_n=n^n\left[1+\frac{1}{n^n}+\frac{2^2}{n^n}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right].$$

显然

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &< \frac{1}{n^n}+\frac{2^2}{n^n}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &< \frac{(n-2)^{n-1}}{n^n}+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} < \frac{2(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &< \frac{2}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

我们不难证明 $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$ 是单调增且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$. 所以

$$\frac{1}{4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{e}.$$

将上述不等式综合起来，我们就证明了此题。 □

**28.** 设 $x_n>0$. 证明:

(1) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geq e$;

(2) 上式中的 $e$ 为最佳常数。

**证明.** (1) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n\geq e$ 等价于 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}\right)^n\geq 1$. 我们用反证法来证明该命题。如果

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}\right)^n<1,$$

则存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，我们有

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}<1,\forall n>N.$$

于是

$$\begin{gathered}\frac{x_{N+1}}{N+1}-\frac{x_{N+2}}{N+2}>\frac{x_1}{N+2}\\ \frac{x_{N+2}}{N+2}-\frac{x_{N+3}}{N+3}>\frac{x_1}{N+3},\\ \cdots\\ \frac{x_{n-1}}{n-1}-\frac{x_n}{n}>\frac{x_1}{n}\end{gathered}$$

把以上的不等式加起来，我们有

$$\frac{x_{N+1}}{N+1}>\frac{x_{N+1}}{N+1}-\frac{x_n}{n}>\sum_{k=N+1}^{n}\frac{x_1}{k}\to+\infty.$$

这显然与 $\frac{x_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立，命题得证。

(2) 现证明对于任意的 $\varepsilon>0$，存在数列 $\{x_n\}$ 使得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n<e^{1+\varepsilon}.$$

我们取 $x_1=\frac{\varepsilon}{2}, x_n=n$, 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{2}+n+1}{n}\right)^n=e^{1+\frac{\varepsilon}{2}}<e^{1+\varepsilon}.$$

这说明 $e^{1+\varepsilon}$ 不是下确界。命题得证。

$\square$

**29.** 设 $a_n>0$. 证明：$\varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq 1$.

**证明.** 如果 $\varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1$, 则，存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时有，

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1\Rightarrow\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}>\frac{1}{n+1}.$$

于是:

$$\frac{a_{N+1}}{N+1}>\frac{a_{N+1}}{N+1}-\frac{a_n}{n}>\sum_{k=N+2}^{n}\frac{1}{k}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，$\sum_{k=N+2}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty$. 这与 $\frac{a_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立。 $\square$

**30.** 设 $2a_{n+1}=1+b_n^2, 2b_{n+1}=2a_n-a_n^2, 0\leq b_n\leq\frac{1}{2}\leq a_n, n=1,2,\cdots$. 证明：数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛，并求其极限之值。

**证明.** 很容易证得：$a_n\leq\frac{5}{8},\forall n$.

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{2}(b_n+b_{n-1})(b_n-b_{n-1})\\ b_{n+1}-b_n&=\frac{1}{2}\left(2-a_n-a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n|&\leq\frac{1}{2^2}\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|\\ |b_{n+1}-b_n|&\leq\frac{1}{2^2}\left|b_{n-1}-b_{n-2}\right|\end{aligned}$$

取 $A=\max\{|a_2-a_1|,|a_3-a_2|\}$, $B=\max\{|b_2-b_1|,|b_3-b_2|\}$, 则

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n-1}|&\leq\frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}}A\\ |b_n-b_{n-1}|&\leq\frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}}B\end{aligned}$$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是 Cauchy 列。从而都收敛。

假设 $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$, 则

$$\begin{aligned}2a&=1+b^2,\\ 2b&=2a-a^2.\end{aligned}$$

解方程组可知,$(b^2+2b-1)(b^2-2b+3)=0$. 解得 $b=\sqrt{2}-1, a=2-\sqrt{2}$. $\square$

# 第二章　函数极限与连续

## 2.1　函数极限的概念

### 2.1.1　练习题

**1.** *在定义 2.1.3 中就 24 种情形给出函数极限的定义。并配出相应的图形。*

**解.** 不在此赘述。用到的时候在写。

**2.** 按函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\Delta>\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $x>\Delta$ 时，有

$$\left|\frac{6x+5}{x}-6\right|=\left|\frac{5}{6x}\right|<\frac{1}{x}<\frac{1}{\Delta}<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6.$ □

(2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$;

**证明.** 对 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$\left|(x^2-6x+10)-2\right|=|x-2|\cdot|x-4|<3\cdot|x-2|<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-6x+10)=2.$ □

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\Delta=\max\left\{2+\sqrt{5},\frac{1}{\varepsilon}\right\}$, 当 $x>\Delta$ 时，有

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\left|\frac{-4}{x^2-1}\right|<\frac{4}{4x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\Delta}<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$ □

(4) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon^2}{4}\right\}$, 当 $2-\delta<x<2$ 时，有

$$\left|\sqrt{4-x^2}\right|=\left|\sqrt{(2-x)(2+x)}\right|<2\sqrt{2-x}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$. □

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=4$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{11}\right\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x^4-1}{x-1}-4\right|=\left|x^3+x^2+x-3\right|=|x-1|\cdot\left|x^2+2x+3\right|<11\cdot|x-1|<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=4$. □

(6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,30\varepsilon\}$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{x-3}{6(x+3)}\right|<\frac{|x-3|}{30}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$. □

(7) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon^2$, 当 $0<x-1<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right|=\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right|<\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$. □

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=0$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\Delta=\max\left\{1,\frac{4}{\varepsilon^2}\right\}$, 当 $x>\Delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right|=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}<\frac{2}{\sqrt{x}}<\frac{2}{\Delta}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=0$. □

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2-2}}=1$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\Delta=\max\left\{\frac{1}{\varepsilon},2+\sqrt{6}\right\}$, 当 $|x|>\Delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-2}}-1\right|=\frac{4}{\sqrt{x^4-4}+(x^2-2)}<\frac{4}{4|x|}<\frac{1}{\Delta}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2-2}}=1$. □

**3.** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$. 用 $\varepsilon-\delta$ 法证明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=a^2$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)|<|a|+1,\quad |f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2|a|+1}.$$

于是,

$$\left|f^2(x)-a^2\right|=(|f(x)|+|a|)\cdot|f(x)-a|<(2|a|+1)\,|f(x)-a|<\varepsilon$$

所以, $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=a^2$. □

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}(a>0)$;

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$f(x)>\frac{a}{4},\quad |f(x)-a|<\frac{3\sqrt{a}}{2}\varepsilon.$$

于是,

$$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{a}\right|=\frac{|f(x)-a|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{a}}<\frac{2}{3\sqrt{a}}\,|f(x)-a|<\varepsilon$$

所以, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}(a>0)$. □

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{a}$.

**证明.** 我们分两种情况证明此命题。

(a) 当 $a=0$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|<\varepsilon^3$. 于是,

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}\right|<\varepsilon.$$

所以, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{a}$.

(b) 当 $a\neq 0$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)-a|<\min\left\{\frac{|a|}{2},\sqrt[3]{a^2}\varepsilon\right\}.$$

于是, $f(x)a\geq 0, f^2(x)\geq 0$ 且

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{a}\right|=\frac{|f(x)-a|}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)a}+\sqrt[3]{a^2}}<\frac{|f(x)-a|}{\sqrt[3]{a^2}}<\varepsilon.$$

所以, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{a}$.

命题得证。 □

**4.** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$。证明: $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$。举例说明反之不成立。问: 当且仅当 $a$ 为何值时反之也成立?

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$. 于是，

$$||f(x)|-|a||\le|f(x)-a|<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$。

设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0;\\ -1 & x<0.\end{cases}$$

则，$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$. 但 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. □

**5.** 讨论下列函数在点 0 处的极限或左，右极限:

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{-x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$.

(2) $f(x)=[x]$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}0=0$.

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$

**解.** $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1$. 从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

**6.** 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 2,\\ -ax, & x<2.\end{cases}$

(1) 求 $f(2^+), f(2^-)$;

**解.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$, 当 $2<x<2+\delta$ 时，有

$$|f(x)-4|=|x^2-4|=(x+2)(x-2)<5(x-2)<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=4$.

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|+1}$, 当 $2-\delta<x<2$ 时，有

$$|f(x)+2a|=|-ax+2a|=|a|(2-x)<\frac{|a|\varepsilon}{|a|+1}<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-2a$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在，$a$ 应为何值。

**解.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在 $\iff$ $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$. 所以 $a=-2$.

**7.** 设 $f(x_0^-)<f(x_0^+)$. 证明: $\exists\delta>0, s.t.$ 当 $x_0-\delta<x<x_0<y<x_0+\delta$ 时, 有 $f(x)<f(y)$.

**证明.** 取 $\varepsilon < \dfrac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ 时，有

$$f(x) - f(x_0^-) < \varepsilon \Rightarrow f(x) < \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

对上述的 $\varepsilon$, 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x_0 < y < x_0 + \delta_2$ 时, 有

$$f(y) - f(x_0^+) > -\varepsilon \Rightarrow f(y) > \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ 时, 有 $f(x) < \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} < f(y)$. □

**8.** 设 $f$ 在 $(-\infty, x_0)$ 内单调增, 且有一数列 $\{x_n\}$, 适合 $x_n < x_0 (n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x_0^-$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = a$。证明：$f(x_0^-) = a = \sup\limits_{x\in U_-^o(x_0)} f(x)$。

**证明.** 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时，有

$$a - \varepsilon < f(x_n) < a + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_0 - x_2, \cdots, x_0 - x_{N+1}\}$, 我们现在考虑 $x$ 满足 $x_0 - \delta < x < x_0$.

(1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0^-$ 且 $x_n < x_0$, 则存在 $N_1 > N$ 使得

$$x_0 - x_{N_1} < \frac{x_0 - x}{2} \Rightarrow x_{N_1} > \frac{x_0 + x}{2} > x.$$

(2) 从而 $x_{N+1} < x < x_{N_1}$. 由于 $f(x)$ 单调增，$f(x_{N+1}) \le f(x) \le f(x_{N_1})$.

于是，

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

所以，$f(x_0^-) = a$. 类似地，我们也可以证明 $a = \sup\limits_{x\in U_-^o(x_0)} f(x)$. □

**9.** 用肯定的语气表示 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne a$.

**解.** 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $x'$ 满足 $0 < |x' - x_0| < \delta, |f(x') - a| > \varepsilon_0$.

**10.** $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset [0,1]$ 为有限集，且 $A_i \bigcap A_j = \varnothing (i \ne j)$，$i$，$j \in \mathbb{N}$。定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in A_n, \\ 0, & x \in [0,1] - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}$$

$\forall x_0 \in [0,1]$，求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

**解.** 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

对于给定的 $x_0 \in [0,1]$, 取 $\delta = \min\left\{\dfrac{|x_0 - x'|}{2} \middle| x' \in \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n\right\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$x \in [0,1] - \bigcup_{n=1}^{N} A_n.$$

于是，

$$|f(x)| < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

**11.** 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的归结原理，并应用它证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 都不存在。

**解.** 归结原理：对任意的数列 $\{x_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = a,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$。

对于 $\sin x$, 我们考察子列 $a_n = (2n+\frac{1}{2})\pi, n\in\mathbb{N}$ 和 $b_n = (2n+\frac{3}{2})\pi, n\in\mathbb{N}$. 显然

$$1 = \lim_{n\to+\infty}\sin(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty}\sin(b_n) = -1.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。

对于 $\cos x$, 我们考察子列 $a_n = 2n\pi, n\in\mathbb{N}$ 和 $b_n = (2n+1)\pi, n\in\mathbb{N}$. 显然

$$1 = \lim_{n\to+\infty}\cos(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty}\cos(b_n) = -1.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在。

**12.** (1) 叙述极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的 *Cauchy* 准则；

**解.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\Delta>0$, 当 $x_1>\Delta, x_2>\Delta$ 时，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(2) 根据 *Cauchy* 准则叙述 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在的充要条件，并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在。

**解.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在 $\iff$ 存在 $\varepsilon_0>0$, 对 $\forall\Delta>0$, 存在 $x_1>\Delta, x_2>\Delta$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0.$$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 对 $\forall\Delta>0$, 取 $N = \left[\dfrac{\Delta}{2\pi}\right]$, $x_1 = (2N+\frac{1}{2})\pi > \Delta, x_2 = (2N+\frac{3}{2})\pi > \Delta$. 于是

$$|\sin(x_1) - \sin(x_2)| = 2 > \varepsilon_0.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在。

同理可以证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在。

**13.** 设 $f$ 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。证明 $f(x)\equiv 0$。

**证明.** 假设 $f$ 的周期为 $T$, 我们只需证明 $f(x)\equiv 0, \forall x\in[0\ T)$. 我们用反证法来证明此命题。

设 $\exists x_0\in[0,T)$ 使得 $f(x_0)\neq 0$. 考虑数列 $\{x_0+nT\}$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}(x_0+nT) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_0+nT) = f(x_0) \neq 0.$$

由归结原理，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$. 这与假设矛盾，从而 $f(x)\equiv 0, \forall x\in[0\ T)$. □

**14.** 设 $f$ 在 $U^o(x_0)$ 内有定义。证明：$\forall\{x_n\}\subset U^o(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 都存在（实数，或 $+\infty$，或 $-\infty$），则所有这些极限都相等。

**证明.** (反证法)：假设 $\{x_n^1\subset U^o(x_0)\},\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^1=x_0$ 和 $\{x_n^2\subset U^o(x_0)\},\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^2=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n^1)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n^2)$. 我们考虑数列 $x_n^3=\begin{cases}x_k^1, & n=2k-1\\ x_k^2, & n=2k.\end{cases}$ 显然数列 $\{x_n^3\}$ 满足条件

$$\{x_n^3\subset U^o(x_0)\},\lim_{n\to+\infty}x_n^3=x_0,$$

但是由归结原理，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n^3)$ 不存在。这与命题假设矛盾。从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n^1)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n^2)$。命题得证。 □

**15.** 设 $f$ 为定义 $[a,+\infty)$ 在上的增（减）函数。证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限的充要条件是 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上（下）界。

**证明.** 我们只证明 $f$ 是单增函数的情形。

($\Rightarrow$) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$. 我们证明 $f(x)\le a$。假设存在 $x_0$ 使得 $f(x_0)>b$. 考察子列 $\{x_0+n\}$. 由于 $f$ 是单增的，有

$$f(x_0+n)\ge f(x_0),\forall n\in\mathbb{N}.$$

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_0+n)$ 不存在，则由归结原理，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在。这与假设矛盾。

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_0+n)$ 存在, 则

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_0+n)\ge f(x_0)>b.$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 矛盾。

于是，$f(x)\le b,\forall x\in[a,+\infty)$.

($\Leftarrow$) 设 $f(x)<M,\forall x\in[0,+\infty)$. 取一个子列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty.$$

我们可以从中取一个单调增的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足条件

$$\lim_{k\to+\infty}x_{n_k}=+\infty.$$

由于 $f$ 是单调增的，$f(x_{n_k})$ 也是单调增。从而 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})$ 存在。设 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=b$. 由此我们可以推出 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=b$。同理，另取一个子列 $\{x'_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n\to+\infty}x'_n=+\infty.$$

从中取一个单调增的子列 $\{x'_{n_k}\}$ 满足条件

$$\lim_{k\to+\infty}x'_{n_k}=+\infty$$

且

$$\lim_{k\to+\infty}f(x'_{n_k})=b',\quad \lim_{n\to+\infty}f(x'_n)=b'$$

将 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x'_{n_k}\}$ 合起来，组成一个新的递增列, 记作 $\{y_n\}$。于是，$\{f(y_n)\}$ 收敛。由归结原理知，$b=b'$.

自此我们证明了任何数列 $\{x_n\}$，如果满足 $x_n\to+\infty$，则 $f(x_n)\to b$. 再次利用归结原理，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。 □

**16.** 设 $f$ 为 $U^o(x_0)$ 上的单调增函数，证明：$f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在且有限，且

$$f(x_0^-)=\sup_{x\in U_-^o(x_0)} f(x),\quad f(x_0^+)=\inf_{x\in U_+^o(x_0)} f(x).$$

**证明.** 取 $x_1\in U_-^o(x_0), x_2\in U_+^o(x_0)$, 由 $f$ 是单增函数知，

$$f(x)\le f(x_2),\forall x\in U_-^o(x_0),$$

$$f(x)\ge f(x_1),\forall x\in U_+^o(x_0).$$

所以，

$$f(x_1)\le \sup_{x\in U_-^o(x_0)} f(x)\le \inf_{x\in U_+^o(x_0)} f(x)\le f(x_2).$$

取单调增数列 $\{a_n\subset U_-^o(x_0)\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=x_0^-$. 于是,$\{f(a_n)\}$ 单调增，且有上界。从而它收敛。记 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=A$. 由上确界的定义知，$A\le \sup\limits_{x\in U_-^o(x_0)} f(x)$. 设 $\{b_n\subset U_-^o(x_0)\}$ 是一个满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=x_0^-$ 的子列。对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，有

$$A-\varepsilon<f(a_n)<A+\varepsilon.$$

另一方面取 $\varepsilon'=x_0-a_{N+1}$, 存在 $N'$，当 $n>N'$ 时，有

$$x_0-b_n<\varepsilon'.$$

又由于 $a_n\to x_0^-$，则对任意满足上式的 $b_n$，存在 $m>N+1$ 使得

$$a_{N+1}<b_n<a_m.$$

于是

$$A-\varepsilon<f(a_{N+1})\le f(b_n)\le f(a_m)<A+\varepsilon.$$

有极限的定义知，

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)\le A.$$

由归结原理和上确界的定义知，

$$f(x_0^-)=\sup_{x\in U_-^o(x_0)} f(x).$$

类似的办法可证 $f(x_0^+)=\inf\limits_{x\in U_+^o(x_0)} f(x)$. □

### 2.1.2 思考题

**17.** (1) 设函数 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$。证明:$f(x)=a$.

**证明.** (反证法) 设 $x_0\in(0,+\infty), f(x_0)\neq a$. 由函数方程式知，

$$f(nx_0)=f(x_0).$$

于是，

$$\lim_{n\to+\infty} f(nx_0)=f(x_0).$$

由归结原理知，这与假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ 矛盾。所以，$f(x)=a,\forall x\in(0,+\infty)$. □

(2) 设函数 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$，且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=f(1)$$

证明：$f(x)\equiv f(1), x\in(0,+\infty)$.

**证明.** 如果 $x_0<1$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_0^{2^n}=0.$$

由函数方程式和归结原理知；

$$f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f(x_0^{2^n})=f(1).$$

如果 $x_0>1$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_0^{2^n}=+\infty.$$

由函数方程式和归结原理知；

$$f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f(x_0)=\lim_{n\to+\infty} f(x_0^{2^n})=f(1).$$

所以，$f(x)\equiv f(1), x\in(0,+\infty)$. □

**18.** 设函数 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在任意有限区间 $(a,b)$ 内有界，且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

**证明.** 设 $|f(x)|<M,\forall x\in(a,a+1)$。记 $r=x-[x]$.

$$f(x)-f([a]+r)=\sum_{k=[a]}^{[x]-1}(f(k+1+r)-f(k+r)).$$

于是，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f([a]+r)}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f([a]+r)}{[x]-[a]}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]-[a]}{x}\\&=A\end{aligned}$$

命题得证。 □

**19.** 设 $a>1,b>1$ 为两个常数，函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的近旁有界，且 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $f(ax)=bf(x)$。证明:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

**证明.** 由函数的定义可知 $f(0)=0$. 设 $f$ 在 $(-\delta_0,\delta_0)$ 上有界。记 $|f(x)|<M,\forall x\in(-\delta_0,\delta_0)$. 对 $\forall x\to 0$, 存在 $N$ 使得

$$a^n x\in(-\delta_0,\delta_0), n=1,2,\cdots,N.\quad a^{N+1}x\notin(-\delta_0,\delta_0).$$

显然当 $x\to 0$ 时，$N\to+\infty$. 于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{N\to+\infty}\frac{f(a^N x)}{b^N}=0.$$

命题得证。 □

# 2.2 函数极限的性质

## 2.2.1 练习题

**1.** 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-2x^3}{1+x^4}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-2x^3}{1+x^4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(1+x-2x^3)}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x^4)}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x-1}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}$;

**解.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{-m-1}+\cdots+1}{x^{-m}}=-m, & m<0;\\ 0, & m=0;\\ 1, & m=1;\\ \lim\limits_{x\to 1}(x^{m-1}+\cdots+1)=m, & m>1.\end{cases}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$;

**解.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\begin{cases}\text{无定义}, & n=0;\\ 0, & m=0;\\ \dfrac{m}{n}, & m\neq 0, n\neq 0.\end{cases}$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}$;

**解.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x)^{\frac{1}{|m|}}}{x}=-\dfrac{1}{|m|}=\dfrac{1}{m}, & m<0;\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[m]{(1+x)^{m-1}}+\cdots+1}=\dfrac{1}{m}, & m>0\end{cases}$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\dfrac{1}{m}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^m-m}{x-1}$

**解.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^m-m}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[1+(x+1)+\cdots+(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)\right]=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

**解.** 我们对 $n,m$ 分情况讨论:

*(a)* 当 $m=0$ 或者 $n=0$ 时，分子为 0，于是极限为 0.

*(b)* 当 $m=n=1$ 或者 $m=n=-1$ 是，分子为 0, 于是极限为 0.

*(c)* 当 $m=1,n=-1$ 时，

$$(1+x)^{-1}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{-1}-(1-x)}{x^2}=1$.

*(d)* 当 $m=-1,n=1$ 时，

$$(1-x)-(1+x)^{-1}=\frac{-x^2}{1+x}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)-(1+x)^{-1}}{x^2}=-1$.

*(e)* 当 $m>0,n<0$ 时，

$$(1+mx)^n-(1+nx)^m=\frac{1-(1+mx)^{|n|}(1+nx)^m}{(1+mx)^{|n|}}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=n^2m^2-C_{|n|}^2m^2-C_m^2n^2$.

*(f)* 当 $m<0,n>0$ 时，

$$(1+mx)^n-(1+nx)^m=\frac{(1+mx)^n(1+nx)^{|m|}-1}{(1+nx)^{|m|}}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=C_n^2m^2+C_{|m|}^2n^2-n^2m^2$.

*(g)* 当 $m>0,n>0$ 时，

$$(1+mx)^n-(1+nx)^m=(C_n^2m^2-C_m^2n^2)x^2+\cdots.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=C_n^2m^2-C_m^2n^2$.

*(h)* 当 $m<0,n<0$ 时，

$$(1+mx)^n-(1+nx)^m=\frac{(1+nx)^{|m|}-(1+mx)^{|n|}}{(1+mx)^{|n|}(1+nx)^{|m|}}=\frac{(C_{|m|}^2n^2-C_{|n|}^2m^2)x^2+\cdots}{(1+mx)^{|n|}(1+nx)^{|m|}}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=C_{|m|}^2n^2-C_{|n|}^2m^2$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$

**解.** $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[|m|]{1+nx}}{x\cdot\sqrt[|m|]{1+nx}}=-\frac{n}{|m|}, & m<0,\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{nx}{\sqrt[m]{(1+nx)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+nx)^{m-2}}+\cdots+1}=\frac{n}{m}, & m>0.\end{cases}$$

即，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\frac{n}{m}$.

同理，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\frac{m}{n}$. 所以，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}\\&=\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\\&=\frac{n^2-m^2}{nm}.\end{aligned}$$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}(a>0)$;

**解.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{a^2+x}+a)}=\frac{1}{2a}$.

(12) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$;

**解.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\frac{3^{70}8^{20}}{5^{90}}$.

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}(m,n\in\mathbb{N})$;

**解.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\cdots+1)}{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\cdots+1)}=\frac{n}{m}$.

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$;

**解.** 无论 $m>0$ 或者 $m<0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}.$$

同理可知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\beta}{n}.$$

于是，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\\&=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\\&=\frac{n\alpha+m\beta}{mn}.\end{aligned}$$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

**解.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}$.

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)})$;

**解.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(a+b)x}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}} = a+b$.

(17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)(m,n\in\mathbb{N})$;

**解.** 记 $A=\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k, B=\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k$. 显然

$$A-n=\sum_{k=1}^{n-1}(x^k-1)=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}x^j,$$

$$B-m=\sum_{k=1}^{m-1}(x^k-1)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1}x^j.$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}&=\frac{1}{(1-x)AB}(mA-nB)\\&=\frac{1}{(1-x)AB}(m(A-n)-n(B-m))\\&=\frac{1}{AB}\left(m\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}x^j-n\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1}x^j\right).\end{aligned}$$

所以, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)=\dfrac{1}{mn}\left(m\dfrac{n(n-1)}{2}-n\dfrac{m(m-1)}{2}\right)=\dfrac{n-m}{2}$.

(18) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}(n\in\mathbb{N})$;

**解.** 当 $n=1$ 时, 分子为 0, 所以极限为 0. 当 $n>1$ 时,

$$\begin{aligned}(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)&=(x-a)\sum_{k=0}^{n-2}a^k(x^{n-1-k}-a^{n-1-k})\\&=(x-a)^2\sum_{k=0}^{n-2}a^k\sum_{j=0}^{n-2-k}a^jx^{n-2-k-j}.\end{aligned}$$

于是, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=a^{n-2}\sum\limits_{k=0}^{n-2}(n-1-k)=\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

(19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}(n\in\mathbb{N})$;

**解.** 我们先计算分子:

$$\begin{aligned}x^{n+1}-(n+1)x+n&=x(x^n-1)-n(x-1)\\&=(x-1)\sum_{k=1}^{n}(x^k-1)\\&=(x-1)^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}x^j.\end{aligned}$$

于是，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k-1}1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(20) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}(n\in\mathbb{N})$;

**解.** 分子有理化，

$$1-\sqrt[l]{x}=\frac{1-x}{\sum\limits_{j=0}^{l-1}\sqrt[l]{x^j}}.$$

所以，

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{\prod\limits_{l=2}^{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{l-1}\sqrt[l]{x^j}\right)}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1}{n!}$.

**2.** 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$。

(1) 若 $a>b$，则在某 $U^o(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$；

**证明.** 取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$. 由函数极限定义知，存在一个空心邻域 $U^o(x_0,\delta_1)$ 使得

$$g(x)-b<\varepsilon\Rightarrow g(x)<\frac{a+b}{2},\quad \forall x\in U^o(x_0,\delta_1).$$

取 $U^o(x_0,\delta)\subset U^o(x_0,\delta_1)$ 使得

$$f(x)-a>-\varepsilon\Rightarrow f(x)>\frac{a+b}{2},\quad \forall x\in U^o(x_0,\delta).$$

所以，$f(x)>g(x),\forall x\in U^o(x_0,\delta)$. □

(2) 若在某 $U^o(x_0)$ 内有 $f(x)<g(x)$，问：是否必有 $a<b$? 说明理由。

**解.** 不会是严格 $a<b$. 例如在 0 的空心邻域 $U^0(0,\frac{1}{2})$, $1+\frac{x^2}{3}=f(x)<g(x)=1+\frac{x^2}{2}$. 但是 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.

**3.** 求下列极限 $(n\in\mathbb{N})$:

(1) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$;

**解.** 取 $\delta=\frac{1}{2}$, 当 $2<x<2+\delta$ 时，$[x]=2$. 所以，$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{[x]^2+4}{x^2+4}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{[x]^2+4}{x^2+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2^-}([x]^2+4)}{\lim\limits_{x\to2^-}(x^2+4)}=\dfrac{5}{8}$.

(3) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[4x]}{1+x}$;

**证明.** 显然 $[4x]=3,\forall x\in(1-\frac{1}{4},1)$. 所以，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[4x]}{1+x}=\dfrac{3}{2}$. □

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^n}$;

**证明.** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^n}=-1$ □

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^n}$;

**证明.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x^n}=1$. □

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

**证明.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}=\dfrac{1}{n}$. □

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$;

**证明.** 由于 $x-1\le[x]\le x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$. □

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

**证明.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$. □

**4.** 设 $p(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$。证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m},$$

其中 $n,m\in\mathbb{N}$.

**证明.** 分子有理化，

$$\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}}{\sqrt[m]{(1+p(x))^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+p(x))^{m-2}}+\cdots+1}.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$. □

**5.** 定出常数 $a$ 与 $b$，使得下列等式成立:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$;

**解.** $\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b=\dfrac{(1-a)x-(a+b)+\dfrac{1-b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$. 如果极限为 0，则 $1-a=0,a+b=0$. 于是,$a=1,b=-1$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$;

**证明.** 分子有理化

$$\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}.$$

如果极限为 0, 则 $1+a\neq 0, 1-a^2=0$ $1+2ab=0$. 于是，$a=1, b=-\frac{1}{2}$. □

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$;

**证明.** 分子有理化

$$\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}.$$

如果极限为 0, 则 $1-a\neq 0, 1-a^2=0$ $1+2ab=0$. 于是，$a=-1, b=\frac{1}{2}$. □

**6.** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$;

**解.** 利用三角函数性质，有

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h=-2\sin^2\frac{h}{2}\sin x+\cos x\sin h.$$

所以，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^x$;

**解.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{3+x}\right)^{-\frac{3+x}{2}\cdot\frac{-2x}{3+x}}=e^{-2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^2 x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$;

**解.** 令 $y=\arctan x$, 则 $x\to 0\Rightarrow y\to 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cos y}{\sin y}=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y} = 1.$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$;

**解.** 利用三角函数性质:

$$\begin{aligned}\sin^2 x-\sin^2 a &= (\sin x+\sin a)(\sin x-\sin a)\\ &= (\sin x+\sin a)\left[\sin(x-a)\cos a - 2\sin a\sin^2\left(\frac{x-a}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

所以, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a} = 2\sin a\cos a$

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{4x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} = 2$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

**证明.** 利用三角函数性质: $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. 于是,

$$\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

所以, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \sqrt{2}.$ □

**7.** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

**解.** 利用三角函数性质:

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi) = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})\cos n\pi \Rightarrow \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)}{\cos n\pi}.$$

所以, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)}{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}}\right|\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{(\sqrt{n^2+1}+n)} = 0$. 于是, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = 0$。

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$;

**解.** 利用三角函数性质, $\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi) = \sin^2\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$. 所以, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = 1.$

**8.** (1) 证明: $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x}\right]$;

**证明.** 利用三角函数性质，

$$\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x}=\sin\left(\frac{k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}\right)\cos\sqrt{x}-2\sin\sqrt{x}\sin^2\left(\frac{k}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right).$$

于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x}\right]=0.$ □

(2) 设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=0.$$

**证明.** 显然

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=\sum_{k=2}^{n}a_k\left[\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x+1}\right].$$

由上题知，这里和的每一项都收敛于 0. 所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=0$。 □

**9.** 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

**证明.** 当 $x=0$ 时，$\cos\frac{x}{2^k}=\cos 0=1$. 所以，极限为 1. 下面证 $x\neq 0$ 的情形。

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\sin x\Big/\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{2^n}=\left(\frac{x}{2^n}\Big/\sin\frac{x}{2^n}\right)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)=\dfrac{\sin x}{x}.$ □

**10.** 计算极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{-1}{2x}\cdot(-2)}=e^{-2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

**解.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

**解.** 利用三角函数性质，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}&=\left(1+\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin x)\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\\&=\left(1+\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin x)\cos x}\right)^{\frac{(1+\sin x)\cos x}{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin x)\cos x}}.\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=1$。

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

**解.** 利用三角函数性质，

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}=\frac{2\cos x\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2 x}{\cos 2x}.$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}=\frac{2\cos x\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2 x}{x^2\cos 2x}=\frac{3}{2}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

**解.** 利用三角函数性质：

$$\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}.$$

$$\begin{aligned}(\tan x)^{\tan 2x}&=\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)^{\dfrac{2\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}}\\&=\left[\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)^{\dfrac{\cos x}{(\sin x-\cos x)}}\right]^{\dfrac{-2\sin x}{(\sin x+\cos x)}}\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{-1}$.

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

**解.** 令 $x=\frac{\pi}{2}+y$.

$$\begin{aligned}(\sin x)^{\tan x}&=\left[(1+(\cos y-1))^{\dfrac{1}{\cos y-1}}\right]^{\dfrac{(1-\cos y)\cos y}{\sin y}}\\&=\left[(1+(\cos y-1))^{\dfrac{1}{\cos y-1}}\right]^{\dfrac{\sin\frac{y}{2}\cos y}{\cos\frac{y}{2}}}\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;

**解.** 令 $y=\frac{1}{x}$.

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y+\cos y-1}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos y-1}{y}=1.$$

于是，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{y\to 0^+}(\sin y+\cos y)^{\frac{1}{y}}\\&=\lim_{y\to 0^+}\left[(1+\sin y+\cos y-1)^{\frac{1}{\sin y+\cos y-1}}\right]^{\frac{\sin y+\cos y-1}{y}}\\&=e\end{aligned}$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

**解.** 利用三角函数公式 $\cos\sqrt{x}-1=-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to 0^+}\left[(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0^+}\left[(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$;

**解.** 和上题类似,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}&=\lim_{n\to+\infty}\left[(1+\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)^{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}\right]^{n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[(1+\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)^{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}\right]^{-\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2\sqrt{n}}}{\frac{x}{2\sqrt{n}}}\right)^2}=e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$;

**解.** 由例 *2.2.13(2)* 知,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{1+x}}-1}{\frac{x}{1+x}}=1.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}&=\lim_{x\to 0}(1+2(e^{\frac{x}{1+x}}-1))^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)\frac{x^2+1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}(1+2(e^{\frac{x}{1+x}}-1))^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}\frac{2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}{\frac{x}{1+x}}\left(\frac{x^2+1}{1+x}\right)}\\&=e^2\end{aligned}$$

(11) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}, a\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$;

**解.** 利用三角函数的性质,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}&=\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}}\\&=\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}\cdot\frac{\sin(x-a)\cos a}{(x-a)\sin a}\cdot\frac{\sin a(\cos(x-a)-1)}{(x-a)\sin a}}.\end{aligned}$$

于是, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=e^{\frac{\cos a}{\sin a}}$.

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$;

**解.** 记 $A=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$, 则

$$\sqrt[2^n]{2}A=2\Rightarrow A=\frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}.$$

于是, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt[2^n]{2}}=2$.

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$.

**解.** 令 $(1+x)^{\mu}=e^{y}$, 则 $x\to 0 \iff y\to 0$. 于是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{(\sqrt[\mu]{e})^{y}-1}=\mu.$$

**11.** 设 $x_n=\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n\text{ 次}}a$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

**证明.** 对 $\forall a\in\mathbb{R}$,

$$0\le\underbrace{\sin\cdots\sin}_{\text{(n+1) 次}}a=x_{n+1}\le x_n=\underbrace{\sin\cdots\sin}_{\text{n 次}}a,\quad \forall n\ge 2.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调减有下界的数列，故收敛。设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b$, 则

$$b=\sin b,\quad 0\le b\le\sin 1.$$

解方程得 $b=0$. □

### 2.2.2 思考题

**12.** 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin(2\pi en!)=2\pi$.（提示: $e=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{\theta_n}{n!n},\quad \dfrac{n}{n+1}<\theta_n<1$）

**证明.** 根据提示，计算

$$en!=m+\frac{\theta_n}{n}.$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin 2\pi\dfrac{\theta_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2\pi\theta_n\cdot\dfrac{\sin 2\pi\frac{\theta_n}{n}}{2\pi\frac{\theta_n}{n}}=2\pi$. □

**13.** 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right\}=\dfrac{1}{e}$.

**证明.** 记

$$A=n\cdot\left(\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}-1\right),\quad B=\frac{1}{n+1}\left(\ln\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}+\ln\frac{n+1}{n}\right).$$

简单计算可以

$$A=nB\cdot\frac{e^{B}-1}{B}.$$

于是，$\lim\limits_{n\to+\infty}A=\lim\limits_{n\to+\infty}nB\cdot\dfrac{e^{B}-1}{B}=1$. 所以,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right\}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot A=\frac{1}{e}.$$

命题得证。 □

**14.** 设 $|x|<1$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}}{n}\right)^{n}=e^{\frac{1}{1-x}}.$$

**证明.** 因为 $|x|<1$, 级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1-x^{n+1}}{n(1-x)}\right)^{\frac{n(1-x)}{1-x^{n+1}}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x}}.$$

命题得证。 □

**15.** 设 $f$ 与 $g$ 为两个周期函数，且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，证明 $f=g$。

**证明.** 设 $f$ 和 $g$ 的周期分别为 $T_f$ 和 $T_g$，则 $f(x)=f(x+nT_f)$, $g(x)=g(x+nT_g)$. 考虑子列 $\{x+nT_f\}$ 和 $x+nT_g$，有

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x+nT_f)-g(x+nT_f)]=0 \Rightarrow f(x)=\lim_{n\to+\infty} g(x+nT_f).$$

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x+nT_g)-g(x+nT_g)]=0 \Rightarrow g(x)=\lim_{n\to+\infty} f(x+nT_g).$$

于是，

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= \lim_{n\to+\infty}(g(x+nT_f)-f(x+nT_g)) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(g(x+nT_f+nT_g)-f(x+nT_g+nT_f)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

命题得证。 □

# 2.3 无穷小 (大) 量的数量级

## 2.3.1 练习题

**1.** 证明下列各式:

(1) $2x-x^2=O^*(x)(x\to 0)$;

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(2-x)=2.$$

所以，$2x-x^2=O^*(x)(x\to 0)$. □

(2) $x\sin\sqrt{x}\sim x^{\frac{3}{2}}(x\to 0^+)$;

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.$$

所以，$x\sin\sqrt{x}\sim x^{\frac{3}{2}}(x\to 0^+)$. □

(3) $2x^3+x^2=O^*(x^3)(x\to\infty)$;

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}2+\frac{1}{x}=2.$$

所以，$2x^3+x^2=O^*(x^3)(x\to\infty)$. □

(4) $x\sin\sqrt{x}=o(x^{\frac{5}{4}})(x\to 0^+)$；

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{5}{4}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{x}=0.$$

所以，$x\sin\sqrt{x}=o(x^{\frac{5}{4}})(x\to 0)$. □

(5) $\sqrt{1+x}-1=o(1)(x\to 0)$；

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}=0.$$

所以，$\sqrt{1+x}-1=o(1)(x\to 0)$. □

(6) $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}(x\to 0)$；

**证明.** 因为，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1.$$

所以，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}(x\to 0)$. □

(7) $\dfrac{1}{1+\alpha(x)}=1-\alpha(x)+o(\alpha(x))(x\to x_0)$，其中 $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0)$；

**证明.** 因为，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{1+\alpha(x)}-1+\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{1+\alpha(x)}=0.$$

所以，$\dfrac{1}{1+\alpha(x)}=1-\alpha(x)+o(\alpha(x))(x\to x_0)$. □

(8) $(1+x)^n=1+nx+o(x)(x\to 0), n\in\mathbb{N}$；

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^{k-1}=0.$$

所以，$(1+x)^n=1+nx+o(x)(x\to 0)$ □

(9) $(1+x)^n=1+nx+O^*(x^2)(x\to 0), n\in\mathbb{N}$；

**证明.** 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^{k-2}=C_n^2+\lim_{x\to 0}\sum_{k=3}^{n}C_n^k x^{k-1}=C_n^2.$$

所以，$(1+x)^n=1+nx+O^*(x^2)(x\to 0)$. □

(10) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}(x\to+\infty)$.

**证明.** 因为，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}=1.$$

所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}(x\to+\infty)$. □

**2.** 确定 $\alpha$ 的值，使下列函数与 $x^\alpha$ 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量:

(1) $\sin 2x-2\sin x$;

**解.** 因为 $\sin 2x-2\sin x=2\sin x(\cos x-1)=-4\sin x\sin^2\frac{x}{2}$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=-1.$$

所以，$\sin 2x-2\sin x$ 与 $x^3$ 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量.

(2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$;

**解.** 因为 $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{x^2}{1+x}$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-(1-x)}{x^2}=1.$$

所以，$\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$ 与 $x^2$ 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量.

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$;

**解.** 因为 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\dfrac{\sin x(1+\cos x)}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})}$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})}=1.$$

所以，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 $x$ 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量.

(4) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.

**解.** 因为 $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}=\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{3-4x}$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{3-4x}=\sqrt[5]{3}.$$

所以，$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ 与 $x^{\frac{2}{5}}$ 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量.

**3.** 确定 $\alpha$ 的值，使下列函数与 $x^\alpha$ 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量:

(1) $\sqrt{x^2+x^5}$;

**解.** 因为 $\sqrt{x^2+x^5}=\sqrt{x^5}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}$，于是，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x^5}}{\sqrt{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}=1.$$

所以，$\sqrt{x^2+x^5}$ 与 $x^{\frac{5}{2}}$ 当 $x\to+\infty$ 时为同阶无穷大量.

(2) $x+x^2(2+x^{-1}\sin x)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^2(2+x^{-1}\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2+\frac{\sin x}{x}\right)=2.$$

所以，$x+x^2(2+x^{-1}\sin x)$ 与 $x^2$ 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量.

(3) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}=1.$$

所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 与 $\sqrt{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时为同阶无穷大量.

(4) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$.

**解.** 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^2(x^3-3x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=2.$$

所以，$\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$ 与 $x^2$ 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量.

**4.** 求下列无穷小或无穷大的阶:

(1) $x-5x^3+x^{10}(x\to0)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{x-5x^3+x^{10}}{x}=1,$$

所以，$x-5x^3+x^{10}$ 当 $x\to0$ 时为 *1* 阶无穷小量.

(2) $x-5x^3+x^{10}(x\to+\infty)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5x^3+x^{10}}{x^{10}}=1,$$

所以，$x-5x^3+x^{10}$ 当 $x\to+\infty$ 时为 *10* 阶无穷大量.

(3) $x^3-3x+2(x\to1)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}(x+2)=3.$$

所以，$x^3-3x+2$ 当 $x\to1$ 时为 *2* 阶无穷小量.

(4) $\sqrt{x\sin x}(x\to 0)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x}=1.$$

所以，$\sqrt{x\sin x}$ 当 $x\to 0$ 时为 *1* 阶无穷小量.

(5) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}(x\to 0)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=2.$$

所以，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ 当 $x\to 0$ 时为 *1* 阶无穷小量.

(6) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^5}}}=1.$$

所以，$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}$ 当 $x\to +\infty$ 时为 *1* 阶无穷大量.

(7) $\dfrac{x+1}{x^4+1}(x\to +\infty)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{x+1}{x^4+1}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^4}}=1.$$

所以，$\dfrac{x+1}{x^4+1}$ 当 $x\to +\infty$ 时为 *3* 阶无穷小量.

(8) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}(x\to +\infty)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^5}{x^2(x^3-3x+1)}=2.$$

所以，$\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$ 当 $x\to +\infty$ 时为 *2* 阶无穷大量.

(9) $\dfrac{1}{\sin \pi x}(x\to 1)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{\sin\pi x}}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{\sin\pi(x-1)}=-\frac{1}{\pi}.$$

所以，$\dfrac{1}{\sin\pi x}$ 当 $x\to 1$ 时为 *1* 阶无穷大量.

(10) $\sin\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2}\right)(x\to 0^+)$

**解.** 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}\right)}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

所以，$\sin\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2}\right)$ 当 $x\to0^+$ 时为 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小量.

(11) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\quad(x\to+\infty)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}}=1.$$

所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ 当 $x\to+\infty$ 时为 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大量.

(12) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\quad(x\to0^+)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt[16]{x}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^{\frac{7}{8}}+\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}}=1.$$

所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ 当 $x\to0^+$ 时为 $\frac{1}{16}$ 阶无穷小量.

(13) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)(x\to+\infty)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)=1.$$

所以，$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ 当 $x\to+\infty$ 时为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 阶无穷大量.

(14) $x^3-3x+2(x\to1)$;

**解.** 和 (3) 一样

(15) $\ln x\quad(x\to1)$;

**解.** 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\ln\left(1+(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}}=1.$$

所以，$\ln x$ 当 $x\to1$ 时为 1 阶无穷小量.

(16) $e^x-e,\quad(x\to1)$;

**解.** 因为
$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to1}e\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=e.$$
所以，$e^x-e$ 当 $x\to1$ 时为 1 阶无穷小量.

(17) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\quad(x\to1)$;

**解.** 因为
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$
所以，$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ 当 $x\to1$ 时为 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小量.

(18) $x^x-1\quad(x\to1)$.

**解.** 因为
$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\left[x\ln(1+(x-1))^{\frac{1}{x-1}}\right]\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1.$$
所以，$x^x-1$ 当 $x\to1$ 时为 1 阶无穷小量.

**5.** 用等价无穷小替换求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}$;

**解.** 因为 $\arctan\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x},\quad(x\to+\infty)$. 于是，
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\cos x}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

**解.** 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{2},1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. 于是，
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan^4x}{\sin^3x(1-\cos x)}$;

**解.** 当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\sin x\sim x$. 于是，
$$\lim_{x\to0}\frac{x\tan^4x}{\sin^3x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^5}{x^3\cdot\frac{x^2}{2}}=2.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2x}$;

**解.** 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x^4}-1\sim\frac{x^4}{2},1-\cos^2x=\sin^2x\sim x^2$. 于是，
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{2x^2}=0.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{\sin x}$;

**解.** 当 $x \to 0$ 时，$\tan(\tan x) \sim x, \sin x \sim x$. 于是，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\tan x)}{\sin x} = 1.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2(\sqrt{1+x^2}-1)^3}{x^5 \sin^3 x}$;

**解.** 当 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x, \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{2}, \sin x \sim x$. 于是，

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2(\sqrt{1+x^2}-1)^3}{x^5 \sin^3 x} = \frac{1}{8}.$$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}, n \in \mathbb{N}$.

**解.** 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x+x^2} - 1 \sim \frac{x}{n}, \sin 2x \sim 2x$. 于是，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \frac{1}{2n}.$$

**6.** 设 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$. 证明:

$$f(x) - g(x) = o(f(x))(x \to x_0); \quad f(x) - g(x) = o(g(x))(x \to x_0).$$

**证明.** 因为 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$, 所以

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

从而，

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = 0.$$

即，$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad f(x) - g(x) = o(g(x))(x \to x_0)$. □

### 2.3.2 思考题

**7.** 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，且 $f(x) - f(\frac{x}{2}) = o(x)(x \to 0)$。证明:$f(x) = o(x)(x \to 0)$.

**证明.** 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时，

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} \right| < \varepsilon.$$

现考察 $\dfrac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x}$. 当 $|x| < \delta$ 时，

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^k} \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

于是，

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^n})}{x}\right| \le 2\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. i.e. $f(x)=o(x)(x\to 0)$. □

**8.** 设函数 $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足:

(1) $g(x+T)>g(x),\forall x\ge a$, 其中 $T>0$ 为常数;

(2) 函数 $f,g$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何有限子区间上有界;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

证明：若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A,$$

那么

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

**证明.** 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $M_1>0$, 当 $y>M_1$ 时，有

$$A-\varepsilon\le\frac{f(y+T)-f(y)}{g(y+T)-g(y)}\le A+\varepsilon.$$

如果限定 $y\in[M_1,M_1+T)$，则对 $\forall n\in\mathbb{N}$

$$(A-\varepsilon)g(y+nT)-(A-\varepsilon)g(y)\le f(y+nT)-f(y)\le(A+\varepsilon)g(y+nT)-(A+\varepsilon)g(y).$$

由题设，存在 $M_2>0$ 使得

$$|f(y)|<M_2,|g(y)|<M_2,\forall y\in[M_1,M_1+T).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, 则存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{|(A-\varepsilon)g(y)+f(y)|}{g(y+nT)}<\varepsilon,\forall y\in[M_1,M_1+T),$$

$$\frac{|(A+\varepsilon)g(y)+f(y)|}{g(y+nT)}<\varepsilon,\forall y\in[M_1,M_1+T).$$

由此可知

$$A-2\varepsilon\le\frac{f(y+nT)}{g(y+nT)}\le A+2\varepsilon,\forall y\in[M_1,M_1+T).$$

取 $M=NT+M_1$, 当 $x>M$ 时，存在 $y\in[M_1,M_1+T)$ 和 $n>N$ 使得 $x=y+nT$。于是,

$$A-2\varepsilon\le\frac{f(x)}{g(x)}\le A+2\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. □

**注 8.** 这题可以看做是函数版的 *Stolz* 公式。

**9.** 函数列 $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$，$n=1,2,3,\cdots$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$，$f_n$ 都是无穷大 $(x\to+\infty)$。证明：存在 $(0,+\infty)$ 上的一个函数 $f$，当 $x\to+\infty$ 时，$f$ 是 $f_n$ 比更高阶的无穷大，$n\in\mathbb{N}$。

**证明.** 定义一个函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k^2(x), \quad x \in (0, n].$$

由此定义，对于函数 $f_n$, 当 $x > n$ 时，$f(x) \geq f_n^2(x)$. 于是

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f_n(x)} \geq \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

即，当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 是比 $f_n(x)$ 更高阶的无穷大量。 □

# 2.4 函数的连续, 单调函数的不连续点集，初等函数的连续性

## 2.4.1 练习题

**1.** 研究下列函数在 $x = 0$ 处的连续性:

(1) $f(x) = [x]$;

**解.** 取 $1 > \delta > 0$, 考虑 $x \in (-\delta, \delta)$.

$$f(x) = -1 \neq f(0), \forall x \in (-\delta, 0), \quad f(x) = 0 = f(0), \forall x \in [0, \delta).$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 是右连续，但不左连续。故，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

(2) $f(x) = \operatorname{sgn}|x|$;

**解.** 取 $1 > \delta > 0$, 考虑 $x \in (-\delta, \delta)$, 则

$$f(x) = 1 \neq f(0) = 0, \forall 0 \neq x \in (-\delta, \delta).$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

(3) $f(x) = |x|$;

**解.** 显然 $f(0) = 0$, 且

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0).$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

(4) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

**解.** 由 cos 的连续性知，$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. 所以，$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. 即，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

(5) $f(x) = [|\cos x|]$;

**解.** 当 $x = 0$ 时，$f(0) = [|\cos 0|] = [1] = 1$。取 $0 < \delta < 1$, 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta)$ 时，

$$|\cos x| < 1, \quad f(x) = 0 \neq f(1).$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

(6) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$;

**解.** 取 $0<\delta<1$. 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$\sin x<0$. 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\sin x>0$. 于是，

$$f(x)=-1,\forall x\in(-\delta,0),\quad f(x)=1,\forall x\in(0,\delta),\quad f(0)=0.$$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

(7) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

**解.** 很显然 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. 于是，

$$\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0).$$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(8) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

**解.** 我们计算

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1=f(0),$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1,$$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，但不左连续。

(9) $f(x)=\begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 2.718, & x=0;\end{cases}$

**解.** 计算极限

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}=e\neq f(0).$$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

(10) $f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数},\\ -x, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

**解.** 计算极限

$$\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}|x|=0=f(0).$$

所以，$f$ 在 $x=0$ 处连续。

**2.** 指出下列函数的间断点，并说明其类型：

(1) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leq x\leq 1,\\ (x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty;\end{cases}$

**解.** 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-7)\cup(-7,1)\cup(1,+\infty)$ 上是连续的。

因为 $\lim\limits_{x\to-7^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-7^-}\dfrac{1}{x+7}=+\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-7^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-7^+}x=-7$。所以，$x=-7$ 是 $f$ 的第二类间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}=0$. 所以 $x=1$ 是函数 $f$ 的跳跃间断点。

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数}, \\ -x, & x\text{为无理数}. \end{cases}$

**解.** $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。$\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$, 由归结原理，$f$ 在 $x$ 的左右极限都不存在。所以 $x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ 是函数 $f$ 的第二类间断点。

(3) $D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}; \end{cases}$

**解.** $\forall x_0\in\mathbb{R}$, 由归结原理知，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限不存在。故，$x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点。

(4) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

**解.** 函数在 $x\neq 0$ 时是连续的。另外

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

所以，$x=0$ 是函数 $f$ 的第二类间断点。

**3.** 延拓下列函数，使其在 $\mathbb{R}$ 上连续:

(1) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$;

**解.** 计算极限

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 2, \\ 12, & x=2. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

(2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

**解.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x=0. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

(3) $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$.

**解.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

(4) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

**解.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0,\\ e, & x=0.\end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

**4.** 定出 $a,b$ 与 $c$, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x\leq -1,\\ ax^2+bx+c, & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

**解.** 函数要在 $x=-1$ 处连续，则

$$a-b+c=-1$$

函数要在 $x=0$ 处连续，则

$$c=0.$$

函数要在 $x=1$ 处连续，则

$$a+b+c=1$$

于是，解方程组可知 $a=0,b=1,c=0$

**5.** 设 $f$ 在点 $x_0$ 处连续，则 $|f|$ 与 $f^2$ 也在点 $x_0$ 处连续。反之是否成立?

**证明.** 由连续的定义知，对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad |f(x)|<|f(x_0)|+1.$$

从而，

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leq|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

$$|f^2(x)-f^2(x_0)|\leq(|f(x)|+|f(x_0)|)\,|f(x)-f(x_0)|\leq(1+2|f(x_0)|)\varepsilon.$$

所以，$|f|$ 和 $f^2$ 在 $x_0$ 处也连续。反过来不成立。例如函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$|f|\equiv 1,f^2\equiv 1$，所以他们在 $x=0$ 处连续。但 $f$ 在 $x=0$ 处右连续但不左连续。 □

**6.** 讨论函数 $f+g$ 与 $fg$ 在点 $x_0$ 处的连续性，如果:

(1) $f$ 在点 $x_0$ 处连续，但 $g$ 在点 $x_0$ 处不连续；

**解.** $f+g$ 在 $x_0$ 处肯定不连续，不然 $g=(f+g)-f$ 就在 $x_0$ 处连续了。$fg$ 在 $x_0$ 可能连续，不如 $f\equiv 0$, 则对任何的 $g$, $fg$ 都是连续的。但是如果 $f(x_0)\neq 0$, 则 $fg$ 在 $x_0$ 处不连续。否则

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{fg}{f}=\frac{f(x_0)g(x_0)}{f(x_0)}=g(x_0).$$

即，$g$ 在 $x_0$ 处连续了。

(2) $f$ 与 $g$ 在点 $x_0$ 处都不连续。

**解.** 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

设 $g=-f$. 显然 $f$ 和 $g$ 在 $x=0$ 处都不连续，但是 $f+g\equiv 0$, $fg\equiv -1$。所以，$f+g$ 和 $fg$ 在 $x=0$ 处连续。

当然也有例子说明 $f+g$ 和 $fg$ 不连续.

**7.** 设函数 $f$ 在点 $x_0$ 处连续，$f(x_0)>0$，则当 $x$ 充分靠近点 $x_0$ 时，应有 $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$.

**证明.** 取 $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow f(x)>f(x_0)-\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}.$$

命题得证。 □

**8.** (1) 设 $f(x)\equiv g(x)$，$x\neq 0$，且 $f(0)\neq g(0)$。证明：$f$ 与 $g$ 两者中至多有一个在 $x=0$ 处连续

**证明.** 由于 $f(x)\equiv g(x)$，$x\neq 0$, 有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x)\xlongequal{\text{记作}} A.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)\xlongequal{\text{记作}} B.$$

如果 $A\neq B$，则 $f$ 和 $g$ 在 $x=0$ 处都不连续。

如果 $f$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(0)=A=B$, 从而 $g(0)\neq A$ 和 $g(0)\neq B$. 即 $g$ 在 $x=0$ 处不连续。同理，如果 $g$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f$ 在 $x=0$ 处不连续。 □

(2) 设 $f$ 与 $g$ 都为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $f(x)\equiv g(x),\forall x\in\mathbb{Q}$. 证明: $f(x)\equiv g(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}$。

**证明.** 因为 $f$ 和 $g$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 $\forall x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

由归结原理，有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\forall x\in\mathbb{Q},\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

由于 $f(x)\equiv g(x),\forall x\in\mathbb{Q}$ 知,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x),\forall x\in\mathbb{Q}.$$

所以，$f(x_0)=g(x_0)$. □

**9.** 举出定义在 $[0,1]$ 上分别符合下述要求的函数:

(1) 只在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{4}$ 三点不连续的函数;

**解.** 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{4},\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1],\\ 2x, & x=\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}.\end{cases}$$

显然此函数满足要求。

(2) 只在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{4}$ 三点连续的函数;

**解.** 考虑如下函数

$$f_1(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{4}, & x\in\mathbb{Q},0\le x<\frac{7}{24},\\ -x+\frac{1}{4}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},0\le x<\frac{7}{24},\\ 1, & \frac{7}{24}\le x\le 1.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\frac{7}{24},\\ x-\frac{1}{3}, & x\in\mathbb{Q},\frac{7}{24}\le x<\frac{5}{12},\\ -x+\frac{1}{3}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\frac{7}{24}\le x<\frac{5}{12},\\ 1, & \frac{5}{12}\le x\le 1.\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\frac{5}{12},\\ x-\frac{1}{2}, & x\in\mathbb{Q},\frac{5}{12}\le x\le 1,\\ -x+\frac{1}{2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\frac{5}{12}\le x\le 1.\end{cases}$$

$f_1$ 在 $x=\frac{1}{4}$ 和 $x>\frac{7}{24}$ 上连续。

$f_2$ 在 $x=\frac{1}{3}, x<\frac{7}{24}$ 和 $x>\frac{5}{12}$ 上连续。

$f_3$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x<\frac{5}{12}$ 上连续。

考虑三个函数的乘积 $f=f_1\cdot f_2\cdot f_3$. 此函数只在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 上连续。

(3) 只在 $\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N})$ 上不连续的函数;

**解.** 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\setminus\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\},\\ 2x, & x\in\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}.\end{cases}$$

$\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$ 是函数 $f$ 仅有的间断点。

(4) 只在 $x=0$ 右连续，而在其他点都不连续的函数。

**解.** 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q},0\le x\le 1,\\ -x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},0\le x\le 1\end{cases}$$

这个函数只有在 $x=0$ 右连续。

**10.** 设函数 $f,g$ 在 $(a,b)$ 上连续。证明:

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad x\in(a,b),$$

$$G(x)=\min\{f(x),g(x)\},\quad x\in(a,b)$$

在 $(a,b)$ 上都为连续函数.

**证明.** 重新表述 $F,G$ 为

$$F(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$

$$G(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

$f,g$ 在 $(a,b)$ 上连续，则 $|f(x)-g(x)|$ 在 $(a,b)$ 上连续。从而，$F,G$ 在 $(a,b)$ 上连续。 □

**11.** 设 $f$ 在 $(a,b)$ 内连续。证明:

(1) 如果 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 为有限值,则 $f$ 在 $(a,b)$ 内有界;又若 $\exists\xi\in(a,b), s.t. f(\xi)\geq\max\{f(a^+),f(b^-)\}$, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 内能达到最大值;

**证明.** 取 $\varepsilon=1$, 则存在 $\delta_1>0$, 当 $a\leq x\leq a+\delta_1$ 时，有

$$|f(x)|\leq|f(a^+)|+1$$

当 $b-\delta<x<b$ 时，有

$$|f(x)|\leq|f(b^-)|+1.$$

对任意的有理数 $\frac{p}{q}$, 存在 $\delta_{\frac{p}{q}}$, 当 $|x-\frac{p}{q}|<\delta_{\frac{p}{q}}$ 时，有

$$|f(x)|\leq\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|+1.$$

很显然 $\left\{(-\delta_{\frac{p}{q}}+\frac{p}{q},\frac{p}{q}+\delta_{\frac{p}{q}})\middle|\forall\frac{p}{q}\in[a+\frac{\delta_1}{2},b-\frac{\delta_1}{2}]\right\}$ 构成闭区间 $[a+\frac{\delta_1}{2},b-\frac{\delta_1}{2}]$ 的一个开覆盖。由有限覆盖定理知，存在有限个有理数,$\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\cdots\frac{p_k}{q_k}$ 使得

$$[a+\frac{\delta_1}{2},b-\frac{\delta_1}{2}]\subset\bigcup_{l=1}^{k}(-\delta_{\frac{p_l}{q_l}}+\frac{p_l}{q_l},\frac{p_l}{q_l}+\delta_{\frac{p_l}{q_l}}).$$

取

$$M=\max\left\{\left|f(a^+)\right|,\left|f(b^-)\right|,\left|f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|,\left|f\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\right|,\cdots\left|f\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right|\right\}+1,$$

则 $|f(x)|\leq M,\forall x\in(a,b)$. □

(2) 如果 $f(a^+)=f(b^-)=+\infty$. 证明: $f$ 在 $(a,b)$ 内能达到最小值。

**12.** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上连续。证明:

(1) 若 $\forall r\in\mathbb{Q}\cap I$ 有 $f(r)=0$, 则在 $I$ 上 $f(x)\equiv0$;

**证明.** 对 $\forall x\in I$. 如果 $x\in\mathbb{Q}$, 则由题设 $f(x)=0$. 当 $x\notin\mathbb{Q}$, 则存在有理子列 $r_n\to x$. 由连续性知，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(r_n)=0$. 所以，在 $I$ 上 $f(x)\equiv0$。 □

(2) 若 $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap I$，$r_1 < r_2$ 有 $f(r_1) < f(r_2)$，则 $f$ 在 $I$ 上严格增.

**证明.** 对 $\forall x_1 < x_2, x_1 \in I, x_2 \in I$. 我们单调减有理数列 $\{a_n\}$ 和单调增有理数列 $\{b_n\}$ 满足

$$x_1 < \cdots < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots < x_2,$$

且

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x_1, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = x_2.$$

由连续性知，$f(x_1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) < f(a_1) < f(b_1) < \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_2)$. □

**13.** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\forall x \in [a,b]$，$\exists y \in [a,b]$，*s.t.*

$$|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明：$\exists \xi \in [a,b]$, *s.t.* $f(\xi) = 0$.

**证明.** 取 $y_0 \in [a,b]$,$\exists y_1 \in [a,b]$, s.t.

$$|f(y_1)| \le \frac{1}{2}|f(y_0)|.$$

$\exists y_2 \in [a,b]$,s.t.

$$|f(y_2)| \le \frac{1}{2}|f(y_1)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 |f(y_0)|.$$

将此迭代下去，我们可以得到一个子列 $\{y_n\} \subset [a,b]$ 满足

$$|f(y_n)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |f(y_0)|.$$

不妨设 $\{y_n\}$ 收敛 (否则就取其收敛子列). 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \xi$, 则 $\xi \in [a,b]$ 且由 $f$ 的连续性知，$f(\xi) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. □

**14.** 设 $f$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，满足：$0 \le f(x) \le x$，$x \in [0,+\infty)$。又设，$a_1 \ge 0$，$a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, \cdots$. 证明：

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列；

**证明.** 由题意知，$\{a_n\}$ 是单调递减的数列，且 $a_n \ge 0$. 于是，$\{a_n\}$ 为收敛数列。 □

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = t$，则有 $f(t) = t$；

**证明.** 在 $a_{n+1} = f(x_n)$ 两边取极限知, $t = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \xlongequal{f\text{ 是连续的}} f(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n) = f(t)$. □

(3) 若条件改为 $0 \le f(x) < x$，$x \in (0,+\infty)$，则 $t = 0$.

**证明.** 由 (2) 和条件 $0 \le f(x) < x$，$x \in (0,+\infty)$ 知，$t = 0$. □

**15.** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x + 5}{1 + x^2 + \ln 1 + x}$；

**解.** 由分子，分母的连续性知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln 1+x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(e^x\cos x+5)}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2+\ln 1+x)}=6.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos x}$;

**解.** 由连续性知，

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos x}=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

**解.** 从分子，分母提取 $\sqrt{x}$ 后，应用函数的连续性知，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

**解.** 有理化知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$.

**解.** 令 $t=\frac{1}{x}$ 和有理化知

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}=1.$$

**16.** 设 $f$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，常数 $c>0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\le c,\\ c, & f(x)>c.\end{cases}$$

证明，$F$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

**证明.** 重新表述 $F$ 为

$$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}.$$

由题 10 知，$F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。 □

### 2.4.2 思考题

**17.** 设函数 $f$ 只有可去间断点。证明:$F(x)=\lim\limits_{t\to x}f(t)$ 为连续函数。

**证明.** □

**18.** 设函数 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调增（或单调减），$F(x)=f(x^+)$。证明：$F$ 在 $\mathbb{R}$ 上右连续。

**证明.** □

**19.** 设 $f$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 适合函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明:

(1) 若 $f$ 在一点 $x_0$ 处连续。则 $f(x)=f(1)x$;

**证明.** 很容易证得:

$$f(n)=nf(1),\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1),\quad f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}f(1).$$

即，对 $\forall x\in\mathbb{Q}$, $f(x)=f(1)x$. 下面我们证明 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

(a) 取 $y=x_0, x\to 0$, 则 $f(x+x_0)=f(x)+f(x_0)$. 由于 $f$ 在 $x_0$ 处连续，则

$$\lim_{x\to 0}f(x+x_0)=f(x_0).$$

于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0).$$

所以，$f$ 在 $x=0$ 处连续。

(b) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 取 $y\to 0$，有

$$\lim_{y\to 0}f(x+y)=f(x)+\lim_{y\to 0}f(y)=f(x).$$

所以，$f$ 在 $x$ 处连续。

设 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 取 $\left\{\frac{p_n}{q_n}\in\mathbb{Q}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{q_n}=x.$$

于是，

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}f(1)\frac{p_n}{q_n}=f(1)x.$$

所以，$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(1)x$. □

(2) 若 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调，也有 $f(x)=f(1)x$.

**证明.** 由上题知，对 $\forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)$. 如果 $f$ 单调，则 $f$ 连续。

下面我们不妨假设 $f$ 单增。事实上，对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 我们可以取有理列 $\left\{\frac{p_n}{q_n}\in\mathbb{Q}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ 和 $\left\{\frac{p'_n}{q'_n}\in\mathbb{Q}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ 使得，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{q_n}=x^-,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p'_n}{q'_n}=x^+.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_1,N_2$ 使得

$$f\left(\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}}\right)-f\left(\frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}\right)=f(1)\left(\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}}-\frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}\right)<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\left\{x-\frac{p_{N_2}}{q_{N_2}},\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}}-x\right\}$, 当 $|y-x|<\delta$ 时,

$$|f(y)-f(x)|<f\left(\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}}\right)-f\left(\frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}\right)<\varepsilon.$$

所以，$f$ 在 $x$ 处连续。由 $x$ 的任意性知，$f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。 □

**20.** 设函数 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有等式 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. 证明:$f(x)=a^x$, 其中 $a=f(1)$ 为一正数.

**证明.** 由函数方程式知，

$$f(0)=f^2(0)\Rightarrow f(0)=1,$$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)^2>0,$$

$$f(n)=\underbrace{f(1)\cdot f(1)\cdots f(1)}_{n}=f(1)^n,$$

$$f(1)=f\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n}\Bigg)=f\left(\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{f(1)}.$$

同理，我们可以证明 $\forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$,

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f(1)^{\frac{p}{q}}.$$

由 $f$ 的连续性知，$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(1)^x$ □

**21.** 设函数 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有等式 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$. 证明:$f(x)=0$ 或者 $f(x)=x^a$, 其中 $a$ 为常数.

**证明.** 如果 $\exists x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x_0)\neq 0$，则由 $f(x_0)=f(x_0)f(1)$ 知，$f(1)=1$. 从而 $f(e)>0$. 记

$$a=\ln f(e),$$

则

$$f(e)=e^a.$$

同时

$$f(e^n)=\underbrace{f(e)\cdot f(e)\cdots f(e)}_{\text{n 个}}=\underbrace{e^a\cdot e^a\cdots e^a}_{\text{n 个}}=(e^n)^a,$$

$$f(1)=f(e)f(e^{-1})\Rightarrow f(e^{-1})=(e^{-1})^a,$$

$$f(e^{-n})=(e^{-n})^a,$$

又因为 $(\sqrt[n]{e})^n=e$ 知，

$$\big(f(\sqrt[n]{e})\big)^n=e^a\Rightarrow f(\sqrt[n]{e})=(\sqrt[n]{e})^a.$$

由此可见，对 $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$f(e^{\frac{p}{q}}) = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^a.$$

对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 我们可以找一列有理数 $\left\{\frac{p_n}{q_n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \ln x.$$

于是，

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{p_n}{q_n}} = e^{\ln x} = x,$$

由 $f$ 的连续性知，

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(e^{\frac{p_n}{q_n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{\frac{p_n}{q_n}}\right)^a = x^a.$$

命题得证。 □

**22.** 设 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有等式

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

证明：$f = 0$ 或 $f(x) = \cos ax$ 或 $f(x) = \cosh ax$，式中 $a$ 为常数.

**证明.** 如果 $f(x_0) \neq 0$, 则

$$2f(x_0) = f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) = 2f(x_0)f(0) \Rightarrow f(0) = 1.$$

□

**23.** 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 且 $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 又 $f$ 在 $x = 0$ 与 $x = 1$ 处连续。证明：$f$ 为常值函数。

**证明.** 对 $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1$，有

$$f(x) = f(x^2) = \cdots = f(x^{2^n}) = \cdots.$$

于是，$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$.

当 $x < -1$,

$$f(x) = f(x^2) = f(|x|) = f(\sqrt{|x|}) = \cdots = f(\sqrt[2^n]{|x|}) = \cdots,$$

所以，$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\sqrt[2^n]{|x|}) = f(1)$. 同上，当 $x > 1$ 有，$f(x) = f(1)$.

又因为

$$f(0) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1).$$

于是，$f$ 为常值函数。 □

# 参考文献

[徐薛] 徐森林，薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

# 后　记