徐森林，薛春华 编

《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

目 录

第一章　数列极限

1.1　数列极限的概念

1.1.1　练习题

1. 用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 1$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 10}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|0.\underbrace{99\cdots9}_{n}-1\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 1.$$

□

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{7n-3} = \dfrac{3}{7}$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{3n+4}{7n-3}-\frac{3}{7}\right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7}.$$

□

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{50,\left[\frac{12}{\varepsilon}\right]+1\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\frac{1}{2}n^2-n-1000>1$$

且

$$\left|\frac{5n+6}{n^2-n-1000}-0\right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2+(\frac{1}{2}n^2-n-1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0.$$

□

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{2^n+5}=0$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+4$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{8}{2^n+5}-0\right|<\frac{8}{2^n}=\frac{1}{2^{n-3}}<\varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{2^n+5}=0.$$

□

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{\sin n!}{n^{1/2}}-0\right|<\frac{1}{n^{1/2}}<\varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n!}{n^{1/2}}=0.$$

□

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{2,\left[\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2\right]+1\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}<\frac{4}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0.$$

□

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{2,\left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^3}\right]\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right|&=\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-2)}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}\\&<\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}}\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0.$$

□

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0$;

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}n^{3/2}}{n^2}<\frac{\pi/2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0.$$

□

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, n \text{ 为偶数},\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, n \text{ 为奇数};\end{cases}$

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_n-1|&<\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{n 为偶数},\\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, \text{n 为奇数}\end{cases}\\&<\frac{1}{n}\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

□

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$.

证明. 对于 $\forall A>0$, 取 $N=\max\{5,\left[\sqrt[3]{2A}\right]+1\}$, 当 $n>N$ 时,

$$1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}>1-\frac{9}{n^2}>\frac{1}{2}$$

且

$$n^3-4n-5=n^3(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3})>\frac{1}{2}n^3>A$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty.$$

□

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a.$, 证明: $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

证明. 我们分以下几种情况证明此命题:

(1) 当 $a\in\mathbb{R}$ 时。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$。显然 $n+k>n>N$, 从而 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

(2) 当 a 是 $+\infty$ 时。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, 对 $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时，$a_n > A$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $a_{n+k} > A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+k} = +\infty$.

(3) 当 a 是 $-\infty$ 时。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, 对 $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时，$a_n < A$. 显然 $n+k > n > N$, 从而 $a_{n+k} < A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+k} = -\infty$.

□

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$：举例说明，这个命题的逆命题不真。

证明. 我们只证明 a 是有限实数的情况。当 a 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 时也成立。由极限的定义有：对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

从而

$$||a_n| - |a|| < |a_n - a| < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|\,.$$

如果我们取 $a_n = (-1)^n$, 则 $|a_n| = 1$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$。但是很显然 a_n 是发散的。

□

4. 设 $x_n \le a \le y_n, n \in \mathbb{N}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$。证明：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a$$

证明. $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon$. 从而

$$|y_n - a| = y_n - a = y_n - x_n + x_n - a < y_n - x_n < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

同理可证

$$-\varepsilon < x_n - y_n < x_n - a < 0 < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

□

5. 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列。证明：数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数，或者有最小的数。举出两者都有的例子；再举出只有一个的例子。

证明. 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，我们分以下几种情况讨论：

(1) 如果 $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. 此时，数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

(2) 如果 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $a_{n_0} \ne a$. 不妨假设 $a_{n_0} < a$. 对于 $\varepsilon = \frac{a-a_{n_0}}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$ 使得 $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a+a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$. 取

$$m = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}.$$

我们有：

(a) $m \in \{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$,

(b) $a_n >= m, \forall n$.

即，m 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值.

如果 $a_{n_0} > a$. 我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值。

考虑下列收敛数列：

(1) 如果 $a_n = \frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n \le a_1 = 1$, 没有最小值。

(2) 如果 $a_n = -\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1 = a_1 <= a_n$，没有最大值。

(3) 如果 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则 $-1 = a_1 <= a_n <= a_2 = \frac{1}{2}$

□

6. 证明下列数列发散：

(1) $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散，因为：

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim_{n\to+\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$$

□

(2) $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列 $\{k_n\}, \{l_n\}$ 使得

(a) $k_n \in (2m\pi - \frac{\pi}{6}, 2m\pi + \frac{\pi}{6})$,

(b) $l_n \in (2m\pi + \frac{5\pi}{6}, (2m+1)\pi + \frac{\pi}{6})$.

显然，我们有

(a) $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$,

(b) $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$.

因此，$\{\cos n\}$ 是发散的。 □

7. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 三个数列 $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限。

证明. $(\Rightarrow)$ 由定理 1.1.2，收敛数列的子列也收敛，且极限相同。

$(\Leftarrow)$ 假设三个子列的极限都是 a。由极限的定义，对于 $\forall \varepsilon > 0$,

(1) $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2} - a| < \varepsilon, \forall k > N_1$,

(2) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1} - a| < \varepsilon, \forall k > N_2$,

(3) $\exists N_3 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k} - a| < \varepsilon, \forall k > N_3$。

取 $N = 3\max\{N_1, N_2, N_3\}$, 我们有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. □

注解 1. 这个命题对于 $a=+\infty.-\infty,\infty$ 也成立。

注解 2. 对于 $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+1}=\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+2}=\cdots=\lim_{k\to+\infty}a_{pk}=a.$$

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=d$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$。

证明.

$$\frac{a_n-a_1}{n}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n}=d.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1}{n}=0$, 易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=d.$$

□

9. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。用 $\varepsilon-N$ 法，$A-N$ 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2},(a\text{为实数 }+\infty,-\infty).$$

证明. 我们只证 a 为实数的情形。其他的情况证明类似。由极限的定义，对于 $\varepsilon>0,\exists N_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_0.$$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}a-\frac{a}{2}\right|\\&<\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|+\frac{a}{2n}\\&<\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|+\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{a}{2n}.\end{aligned}$$

取 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得

$$\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_1.$$

取 $N_2\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n}<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_2.$$

取 $N_3\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_3.$$

最后, 取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2,N_3\}$, $\forall n>N$, 我们有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

□

1.1.2 思考题

10. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$|q|<1$。用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则存在整数 $M>0$ 和 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < M, \forall n\in\mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$。于是 $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|q^{n-k}\right| < \max\left\{\frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon, \forall n > N-1, k=0,1,2,\cdots,N_0.$$

我们现在取 $N=\max\{N_0,N_1\}$。对任意的 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - \frac{a}{1-q}\right| \\
&= \left|(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - a\frac{1-q^n}{1-q} + \frac{aq^n}{1-q}\right| \\
&< \left|(a_n - a) + (a_{n-1}-a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}\right| + \frac{|a|\,|q|^n}{|1-q|} \\
&< \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}(1+|q|+\cdots+|q|^{n-N_0}) + \left(MN_0 + \frac{a}{1-|q|}\right)\max\left\{\frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

即，$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \dfrac{a}{1-q}$.

□

11. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$。用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_n b_0}{n} = ab.$$

证明. 首先我们证明命题在 $b=0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\exists M>0$ 使得 $|a_n|<M, \forall n\in\mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0\in\mathbb{N}$ 使得 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n>N_0$.

(3) 由于 $|a_n|<M$, 对上述的 $\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$\left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{N_0,N_1\}$, 对于上述的 $\varepsilon>0$, 当 $n>N$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_n b_0}{n}\right| \\
&< \left|\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1}b_{N_0+1}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\frac{(n-N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

即
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=0.$$
下面证明命题在 $b\neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a)b=0$. 由此可知
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(a_0-a)b+(a_1-a)b+\cdots+(a_{n-1}-a)b+(a_n-a)b}{n}=0.$$

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-b)=0$, 则
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0(b_n-b)+a_1(b_{n-1}-b)+\cdots+a_{n-1}(b_1-b)+a_n(b_n-b)}{n}=0.$$

(3)
$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}-ab\right|\\&=\left|\frac{a_0(b_n-b)+a_1(b_{n-1}-b)+\cdots+a_n(b_0-b)}{n}+\frac{(a_0-a)b+(a_1-a)b+\cdots+(a_n-a)b)}{n}\right|\end{aligned}$$

(4) 对于 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，
$$\left|\frac{a_0(b_n-b)+a_1(b_{n-1}-b)+\cdots+a_n(b_0-b)}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\left|\frac{(a_0-a)b+(a_1-a)b+\cdots+(a_n-a)b)}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
从而
$$\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}-ab\right|<\varepsilon.$$
即
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

□

12. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$b_n\geq 0(n\in\mathbb{N})$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=S$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS$.

证明. 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 首先我们证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$.

(2)
$$\begin{aligned}&|(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)-aS|\\&=|(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)-a(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a(b_1+b_2+\cdots+b_n-S)|\\&<|(a_n-a)b_1+(a_{n-1}-a)b_2+\cdots+(a_1-a)b_n)|+|a|\,|(b_1+b_2+\cdots+b_n)-S|\end{aligned}$$
由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$ 得知
$$|(a_n-a)b_1+(a_{n-1}-a)b_2+\cdots+(a_1-a)b_n)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=S$ 可得知
$$|a|\,|(b_1+b_2+\cdots+b_n)-S|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

综上，

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n)=aS.$$

□

注解 3. 这题里的条件 $b_m\geq 0(n\in\mathbb{N})$ 不是必须的。只要 $\lim\limits_{n\to+\infty}(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|)=S$ 就够了。

注解 4. 这题是第 *10* 题的推广。如果 $b_n=q^{n-1},0<q<1$，则

$$\lim_{n\to+\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

由这题的结论，第 *10* 题得证。

13. *(Toeplitz* 定理*)* 设 $n,k\in\mathbb{N}$，$t_{nk}\geq 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0$。如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，证明*:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$。说明例 *1.1.15* 为 *Toeplitze* 定理的特殊情形。

证明. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 我们有:

(1) $\exists N_0\in\mathbb{N}$，当 $n>N_0$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

(2) 我们取 $M=\max\{|a_1-a|,|a_2-a|,\cdots,|a_{N_0}-a|\}$.

(3) 对于 $l\in\mathbb{N},1\leq l\leq N_0$, 存在 $N_l\in\mathbb{N}$ 使得 $t_{nl}<\frac{\varepsilon}{2N_0M},\forall n>N_l$.

(4) 取 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_{N_0}\}$，当 $n>N$ 时，我们有:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a\right|\\&=\sum_{k=1}^{N_0}t_{nk}\left|(a_k-a)\right|+\sum_{k=N_0}^{n}t_{nk}\left|(a_k-a)\right|\\&<\sum_{k=1}^{N_0}\frac{\varepsilon}{2N_0M}M+\sum_{k=N_0}^{n}t_{nk}\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a.$$

如果我们取 $b_{nk}=\frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证。 □

14. 设 a,b,c 为三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases}a_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2},\\b_n=\frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2},\quad n=1,2,\cdots.\\c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}.$

证明. 我们通过以下结论去证明该命题:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n)=a+b+c$. 这是因为 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-c_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)=0$. 这是因为

$$a_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-b),$$

$$a_n-c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-c_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-c),$$

$$c_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(c-b).$$

(3)

$$\lim_{n\to+\infty}3a_n=\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n+(a_n-b_n)+(a_n-c_n))=a+b+c,$$

从而,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{a+b+c}{3}.$$

(4) 同理可证, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$.

□

15. 设 a_1,a_2 为实数,令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2},n=3,4,5,\cdots,$$

其中 $p>0$,$q>0$,$p+q=1$。证明:数列 $\{a_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{a_2+a_1q}{1+q}$.

证明. 由递推公式,我们可以证明

$$a_n-a_{n-1}=(-q)^{n-2}(a_2-a_1),\forall n\geq 3.$$

由此我们可以得出 a_n 的通项公式

$$a_n=a_2+\sum_{k=1}^{n-2}(-q)^k(a_2-a_1)=a_2-\frac{q+(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2-a_1).$$

从而,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a_2-\frac{q}{1+q}(a_2-a_1)=\frac{a_2+qa_1}{1+q}.$$

□

16. 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 满足 $a_1>0$,$4\leq b_n\leq 5$,$4\leq c_n\leq 5$,

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$

证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明. 由通项公式定义有

$$0\leq a_n\leq\frac{5\sqrt{2}}{8}a_{n-1}\leq\cdots\leq\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1}a_1.$$

由 $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}<1$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$。 □

1.2 数列极限的基本性质

1.2.1 练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-n+5}{3n^2-2n-7}$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-n+5}{3n^2-2n-7}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4-1/n+5/n^2}{3-2/n-7/n^2}=4/3$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+(-2/3)^n}{3+(-2)(-2/3)^n}=1/3$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

解. $1=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$

解. $1\le\lim\limits_{n\to+\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}\le 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}=1$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}$

解. $1\le\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\pi}{2}}\le 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}=1$.

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}},|a|<1,|b|<1$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right)\left(\dfrac{1-b}{1-b^n}\right)=\dfrac{1-b}{1-a}$.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$

解. 记

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2(n-1)-1}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

解. $1-\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)\\&=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)}\end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2\cdot3}(n+2)!$.
分母的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.
于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}$.

(11) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

解.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{8n^3-2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\frac{4}{3}.$$

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

(13) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解.

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0.$$

2. 设 $a_n>0$，$n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$。应用例 *1.2.6* 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证明.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} \cdot \sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$ □

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{[na_n]}{n} = a$，其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数。

证明.

$$a = \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n - 1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{[na_n]}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n}{n} = a.$$

□

4. 设 $a_n \neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty.$

证明. 取 $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$. 由极限的定义，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} > 1$. 于是

$$|a_n| > \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n_N} |a_N|.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$。 □

5. (1) 应用数学归纳法或 $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{2k}{2k+1}$ 证明不等式:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{2k}{2k+1}$，我们有

$$S_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

□

(2) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$

证明.

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

□

6. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a > 0$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

证明. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, 我们有一下结论:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0, \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{n} = 0.$$

同时，我们有

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(1+1+\cdots+1+\frac{1}{a_n}\right)/n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-1+\dfrac{1}{a_n}\right)/n}\right)\\
&\le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1\cdot1\cdot\cdots\cdot1\cdot a_n)}\\
&\le \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+1+\cdots+1+a_n)}{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1+a_n)}{n}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

7. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1$: $\left(\text{提示}:1+\frac{1}{n}\le\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\le1+\frac{2}{n}\right)$

证明.

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{n} &= \frac{(n-1)!+n!}{n!}\\
&< \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\\
&< \frac{(n-1)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n\cdot(n-1)}\\
&= 1+\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1$。 □

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$。记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},\quad T_n=\min\{a_n,b_n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

应用 $\varepsilon-N$ 法 (分$a<b,a>b,a=b$) 或 $\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+|a_n-b_n|$ 与 $\min\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n-|a_n-b_n|)$，证明:

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}S_n=\max\{a,b\};\quad (2)\quad \lim_{n\to+\infty}T_n=\min\{a,b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n-b_n|=|a-b|.$$

由此可知:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \max\{a,b\},$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \min\{a,b\}.$$

□

9. 应用例 *1.1.7* 与例 *1.1.15* 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证明. 取 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 1.$$

□

10. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{\ln 2}{2} + \sin\frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin\frac{\ln n}{n}\right) = 1$

证明. 考虑数列 $\sqrt[n]{n}$. 这个数列在 $n=3$ 是取得最大值且 $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \forall n \geq 3$。这就是说数列 $\{\sin\frac{\ln n}{n}\}$ 在 $n=3$ 时取得最大值且

$$\sin\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \sin\frac{\ln n}{n}, \forall n \geq 3.$$

从而,

$$\left(\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\sin\frac{\ln 2}{2} + \sin\frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left((n-1)\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \left((n-1)\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{\ln 2}{2} + \sin\frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin\frac{\ln n}{n}\right) = 1.$$

□

11. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2$。 □

1.2.2 思考题

12. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

证明. 假设 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_l$ 是互异的素数，$m_k\geq 1, k=1,2,\cdots,l$。这里 $l=p(n)$.

$$\ln n=\sum_{k=1}^{l}m_k\ln p_l\geq\sum_{k=1}^{p(n)}\ln 2=p(n)\ln 2.$$

因此

$$0\leq\frac{p(n)}{n}\leq\frac{\ln n}{n\ln 2}.$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

□

13. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$.

证明.

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}&=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\&<\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\\&<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\&=\frac{n(n+1)}{4n^2}.\end{aligned}$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{4}$。 □

1.3 实数理论，实数连续性命题

1.3.1 练习题

1.3.2 思考题

参考文献

[徐森林，薛春华] 徐森林，薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

后　记