

徐森林，薛春华 编  
《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月



# 目 录

<b>第一章</b>	<b>数列极限</b>	<b>1</b>
1.1	数列极限的概念	1
1.1.1	练习题	1
1.1.2	思考题	6
1.2	数列极限的基本性质	10
1.2.1	练习题	10
1.2.2	思考题	14
1.3	实数理论, 实数连续性命题	15
1.3.1	练习题	15
1.3.2	思考题	15
1.4	Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数 $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	15
1.4.1	练习题	15
1.4.2	思考题	23
1.5	上极限与下极限	25
1.5.1	练习题	25
1.5.2	思考题	31
1.6	Stolz 公式	31
1.6.1	练习题	31
1.6.2	思考题	33
1.7	复习题 1	34
<b>第二章</b>	<b>函数极限与连续</b>	<b>51</b>
2.1	函数极限的概念	51
2.1.1	练习题	51
2.1.2	思考题	58
2.2	函数极限的性质	60
2.2.1	练习题	60
2.2.2	思考题	71
2.3	无穷小 (大) 量的数量级	72
2.3.1	练习题	72
2.3.2	思考题	79
2.4	函数的连续, 单调函数的不连续点集, 初等函数的连续性	81
2.4.1	练习题	81

2.4.2 思考题 . . . . .	83
索 引	85
参考文献	85
后 记	87

# 第一章 数列极限

## 1.1 数列极限的概念

### 1.1.1 练习题

1. 用数列极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1;$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 10} \right] + 1$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n - 1 \right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

由极限的定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1$ . □

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7};$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \frac{6}{\varepsilon} \right] + 1$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| \frac{3n+4}{7n-3} - \frac{3}{7} \right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7}$ . □

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0;$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \max \{ 50, \left[ \frac{12}{\varepsilon} \right] + 1 \}$ , 当  $n > N$  时,  $\frac{1}{2}n^2 - n - 1000 > 1$  且

$$\left| \frac{5n+6}{n^2-n-1000} - 0 \right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2}n^2 - n - 1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0$ . □

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n+5} = 0;$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] + 4$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| \frac{8}{2^n+5} - 0 \right| < \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon$$

由极限定义知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n+5} = 0$ . □

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0;$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| \frac{\sin n!}{n^{1/2}} - 0 \right| < \frac{1}{n^{1/2}} < \varepsilon$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0$ . □

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0;$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \max \left\{ 2, \left[ \left( \frac{4}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1 \right\}$ , 当  $n > N$  时,

$$|\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}| = \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} < \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0$ . □

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0;$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \max \left\{ 2, \left[ \sqrt{\left( \frac{4}{\varepsilon} \right)^3} \right] \right\}$ , 当  $n > N$  时,

$$|\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}| = \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)(n-2)} + \sqrt[3]{(n-2)^2}} < \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}} < \varepsilon.$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0$ . □

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1 + n^2} = 0;$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \right] + 1$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| \frac{n^{3/2} \arctan n}{1 + n^2} \right| < \frac{\frac{\pi}{2} n^{3/2}}{n^2} < \frac{\pi/2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1 + n^2} = 0$ . □

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n \text{ 为奇数}; \end{cases}$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ , 当  $n > N$  时,

$$|a_n - 1| < \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ . □

$$(10) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty.$$

**证明.** 对  $\forall A > 0$ , 取  $N = \max \left\{ 5, \left[ \sqrt[3]{2A} \right] + 1 \right\}$ , 当  $n > N$  时,  $1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} > 1 - \frac{9}{n^2} > \frac{1}{2}$  且

$$n^3 - 4n - 5 = n^3 \left( 1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) > \frac{1}{2} n^3 > A$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty$ . □

**2.** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 证明:  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$ .

**证明.** 按  $a$  分类讨论:

- (1)  $a \in \mathbb{R}$ : 由极限定义, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 显然  $n + k > n > N$ , 从而  $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$ . 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$ .
- (2)  $a = +\infty$ : 由极限定义, 对  $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时,  $a_n > A$ . 显然  $n + k > n > N$ , 从而  $a_{n+k} > A$ . 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = +\infty$ .
- (3)  $a = -\infty$ : 由极限定义, 对  $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时,  $a_n < A$ . 显然  $n + k > n > N$ , 从而  $a_{n+k} < A$ . 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = -\infty$ .

命题得证. □

**3.** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$ : 举例说明, 这个命题的逆命题不真.

**证明.** 当  $a \in \mathbb{R}, a = +\infty, a = -\infty$  时, 此命题都是成立. 我们只证  $a \in \mathbb{R}$  的情况.

由极限的定义, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 于是:

$$||a_n| - |a|| < |a_n - a| < \varepsilon.$$

再由极限定义,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$ .

如果我们取  $a_n = (-1)^n$ , 则  $|a_n| = 1$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 1 = |a|$ . 但  $\{a_n\}$  是发散的. □

**4.** 设  $x_n \leq a \leq y_n, n \in \mathbb{N}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时,  $y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon$ . 从而

$$|y_n - a| = y_n - a = y_n - x_n + x_n - a < y_n - x_n < \varepsilon.$$

i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ .

同理可证

$$-\varepsilon < x_n - y_n < x_n - a < 0 < \varepsilon.$$

i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ . □

**5.** 设  $\{a_n\}$  为一个收敛数列. 证明: 数列  $\{a_n\}$  中或者有最大的数, 或者有最小的数. 举出两者都有的例子; 再举出只有一个的例子.

**证明.** 假设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 我们分以下几种情况讨论:

- (1) 如果  $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$ . 此时, 数列  $\{a_n\}$  既有最小值也有最大值, 且相等

- (2) 如果  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $a_{n_0} \neq a$ . 不妨假设  $a_{n_0} < a$ . 对于  $\varepsilon = \frac{a - a_{n_0}}{2}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$  使得  $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a + a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$ . 取  $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ , 则

$$m \in \{a_n | n \geq 1\}, \quad a_n \geq m, \forall n.$$

即  $m$  是数列  $\{a_n\}$  的最小值. 如果  $a_{n_0} > a$ , 类似地, 我们可以证明  $\{a_n\}$  有最大值.

考虑下列收敛数列:

- (1) 如果  $a_n = \frac{1}{n}$ , 则该数列有最大值  $a_n \leq a_1 = 1$ , 没有最小值.  
 (2) 如果  $a_n = -\frac{1}{n}$ , 该数列有最小值  $-1 = a_1 \leq a_n$ , 没有最大值.  
 (3) 如果  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ , 则  $-1 = a_1 \leq a_n \leq a_2 = \frac{1}{2}$

命题得证. □

注 1. 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ , 则  $\{a_n\}$  有最小值. 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ , 则  $\{a_n\}$  有最大值.

6. 证明下列数列发散:

- (1)  $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散, 因为:  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$ . □

- (2)  $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列  $\{k_n\}, \{l_n\}$  使得

- (a)  $k_n \in (2n\pi - \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{6})$ ,  
 (b)  $l_n \in (2n\pi + \frac{5\pi}{6}, (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6})$ .

显然, 我们有

- (a)  $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$ ,  
 (b)  $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$ .

因此,  $\{\cos n\}$  是发散的. □

7. 证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛  $\Leftrightarrow$  三个数列  $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$  都收敛且有相同的极限.

证明.  $(\Rightarrow)$  由定理 1.1.2, 收敛数列的子列也收敛, 且极限相同.

$(\Leftarrow)$  假设三个子列的极限都是  $a$ . 由极限的定义, 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,

- (1)  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_{3k-2} - a| < \varepsilon, \forall k > N_1$ ,  
 (2)  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_{3k-1} - a| < \varepsilon, \forall k > N_2$ ,  
 (3)  $\exists N_3 \in \mathbb{N}$ , 使得  $|a_{3k} - a| < \varepsilon, \forall k > N_3$ .

取  $N = 3 \max\{N_1, N_2, N_3\}$ , 我们有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N,$$

即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . □



注 2. 这个命题当  $a = +\infty$  或者  $-\infty$  时, 该命题也成立。

注 3. 对于  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+2} = \cdots = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk} = a.$$

8. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_{n-1}) = d$ 。证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = d$ 。

证明.

$$\frac{a_n - a_1}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_1}{n} = d$ . □

9. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。用  $\varepsilon - N$  法,  $A - N$  法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}, (a \text{ 为实数 } +\infty, -\infty).$$

证明. 我们只证  $a$  为实数的情形。其他情况证明类似。由极限的定义, 对于  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2}a - \frac{a}{2} \right| \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} \right| + \frac{a}{2n} \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| + \frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{a}{2n}. \end{aligned}$$

取  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_1.$$

取  $N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\frac{a}{2n} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_2.$$

取  $N_3 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_3.$$

最后, 取  $N = \max\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$ ,  $\forall n > N$ , 我们有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

命题得证. □

注 4. 考虑如下数列

$$b_k = \begin{cases} a_k, & k = 1; \\ a_n, & k \in \left[ \frac{(n-1)n}{2} + 1, \frac{n(n+1)}{2} \right], \forall n \geq 2. \end{cases}$$

显然  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$ . 记

$$S_n = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

则

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} &= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2} \\ &= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \frac{S_n}{2} + \frac{S_n}{2n^2} \end{aligned}$$

由例 1.1.15 知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

### 1.1.2 思考题

10. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ,  $|q| < 1$ . 用  $\varepsilon - N$  法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 则存在整数  $M > 0$  和  $N_0 \in \mathbb{N}$  使得

$$|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当  $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ . 于是  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$  使得

$$|q^{n-k}| < \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon, \forall n > N_1, k = 0, 1, 2, \cdots, N_0.$$

取  $N = \max \{N_0, N_1\}$ . 当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} & \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - \frac{a}{1-q} \right| \\ &= \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - a \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right| \\ &< |(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}| + \frac{|a||q|^n}{|1-q|} \\ &< \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3} (1 + |q| + \cdots + |q|^{n-N_0}) + \left( MN_0 + \frac{|a|}{1-|q|} \right) \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

即,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}$ .

□

11. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ . 用  $\varepsilon - N$  法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} = ab.$$

**证明.** 首先我们证明命题在  $b = 0$  时成立。

(1) 由于  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\exists M > 0$  使得  $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$ .

(2) 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 由于  $\{b_n\}$  收敛到 0, 则  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  使得  $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > N_0$ .

(3) 由于  $|a_n| < M$ , 对上述的  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$  使得

$$\left| \frac{a_{n-N_0} b_{N_0} + a_{n-N_0+1} b_{N_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取  $N = \max\{N_0, N_1\}$ . 对于上述的  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > N$  时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} \right| \\ & < \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1} b_{N_0+1}}{n} \right| + \left| \frac{a_{n-N_0} b_{N_0} + a_{n-N_0+1} b_{N_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n} \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2M} \frac{(n - N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

由极限的定义知, 命题成立在  $b = 0$  时成立。下面证明命题在  $b \neq 0$  时也成立。

(1) 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a)b = 0$ . 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_{n-1} - a)b + (a_n - a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  和  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - b) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_{n-1}(b_1 - b) + a_n(b_n - b)}{n} = 0.$$

(3) 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \left| \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} - ab \right| \\ & \leq \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} \right| + \left| \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

**12.** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ,  $b_n \geq 0 (n \in \mathbb{N})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS$ .

**证明.** 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 显然  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

(2) 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  和  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$  得知

$$|(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$  可得知

$$|a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} & |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - aS| \\ &= |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - S)| \\ &< |(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| + |a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

由极限的定义, 命题得证. □

**注 5.** 这题是第 10 题的推广。如果  $b_n = q^{n-1}, 0 < q < 1$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

由这题的结论, 第 10 题得证。

**13. (Toeplitz 定理)** 设  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $t_{nk} \geq 0$  且  $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ 。如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 证

明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ 。说明例 1.1.15 为 Toeplitz 定理的特殊情形。

**证明.** 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 我们有:

(1)  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_0$  时,  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

(2) 我们取  $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$ .

(3) 对于  $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N_0$ , 存在  $N_l \in \mathbb{N}$  使得  $t_{nl} < \frac{\varepsilon}{2N_0 M}, \forall n > N_l$ .

(4) 取  $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$ , 当  $n > N$  时, 我们有:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k - a \right| \\ &= \sum_{k=1}^{N_0} t_{nk} |(a_k - a)| + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} |(a_k - a)| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2N_0 M} M + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

由极限定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ .

如果我们取  $b_{nk} = \frac{1}{n}$ , 则例 1.1.15 就可以由这题得证.  $\square$

14. 设  $a, b, c$  为三个给定的实数, 令  $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ , 并归纳定义

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ b_n = \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$ .

证明. 我们通过以下结论证明该命题:

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n) = a + b + c$ . 这是因为  $a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \dots = a + b + c$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - c_n) = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - b_n) = 0$ . 这是因为

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - b_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - b),$$

$$a_n - c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - c_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - c),$$

$$c_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1} - b_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (c - b).$$

(3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n + (a_n - b_n) + (a_n - c_n)) = \frac{a+b+c}{3}$ .

类似可证,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$ .  $\square$

15. 设  $a_1, a_2$  为实数, 令

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots,$$

其中  $p > 0, q > 0, p + q = 1$ . 证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_2 + a_1 q}{1 + q}$ .

证明. 由递推公式, 我们可以证明

$$a_n - a_{n-1} = (-q)^{n-2} (a_2 - a_1), \forall n \geq 3.$$

由此我们可以得出  $a_n$  的通项公式

$$a_n = a_2 + \sum_{k=1}^{n-2} (-q)^k (a_2 - a_1) = a_2 - \frac{q + (-q)^{n-1}}{1 + q} (a_2 - a_1).$$

从而,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_2 - \frac{q}{1 + q} (a_2 - a_1) = \frac{a_2 + qa_1}{1 + q}$ .  $\square$

16. 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  满足  $a_1 > 0, 4 \leq b_n \leq 5, 4 \leq c_n \leq 5$ ,

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2 + c_n^2}}{b_n + c_n} a_{n-1}$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

证明. 由通项公式定义有

$$0 \leq a_n \leq \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由  $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$  知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

□

## 1.2 数列极限的基本性质

### 1.2.1 练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - 1/n + 5/n^2}{3 - 2/n - 7/n^2} = 4/3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{3 + (-2)(-2/3)^n} = 1/3$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} = 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}}, |a| < 1, |b| < 1$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) \left(\frac{1 - b}{1 - b^n}\right) = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

(9)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$

解. 记

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2(n-1)-1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right) = 3.$$

(10)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

解.  $1 - \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$ . 从而

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)} \end{aligned}$$

分子的  $2n$  项的积: 奇数项的积是  $(n-1)!$ , 偶数项的积是  $\frac{1}{2}3(n+2)!$ .

分母的  $2n$  项的积: 奇数项的积是  $n!$ , 偶数项的积是  $\frac{1}{2}(n+1)!$ .

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$ .

(11)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

解.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8n^3 - 2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right] = \frac{4}{3}.$$

(12)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}})$

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ .

(13)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0.$

2. 设  $a_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ . 应用例 1.2.6 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

证明.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} \cdot \sqrt[n]{a_1}$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ . □

3. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . 应用夹逼定理证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} = a$ , 其中  $[x]$  表示不超过的最大整数.

证明.  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - 1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{n} = a$ . □

4. 设  $a_n \neq 0$  且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r > 1$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$ .

证明. 取  $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$ . 由极限的定义, 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} > 1$ . 于是

$$|a_n| > \left( \frac{r+1}{2} \right)^{n-N} |a_N|.$$

即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$ . □

5. (1) 应用数学归纳法或  $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$  证明不等式:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记  $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$ . 利用不等式  $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ , 我们有

$$S_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是  $S_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ . □

(2) 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$

证明.  $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ . □

6. 设  $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$  且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$ . 应用夹逼定理证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

证明. 由极限的定义知, 存在  $N > 0$  使得

$$\frac{a}{2} \leq a_n \leq \frac{3a}{2}, \quad \forall n > N.$$

于是  $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$ . □



7. 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$ :  $\left( \text{提示: } 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n} \right)$

证明.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} &= \frac{(n-1)! + n!}{n!} \\ &< \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \\ &< \frac{(n-1)(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} \\ &= 1 + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$ . □

8. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ . 记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, \quad T_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

应用  $\varepsilon - N$  法 (分  $a < b, a > b, a = b$ ) 或  $\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)$  与  $\min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|)$ , 证明:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \max\{a, b\}; \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \min\{a, b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - b_n| = |a - b|.$$

由此可知:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \max\{a, b\}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n &= \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \min\{a, b\}. \end{aligned}$$

□

9. 应用例 1.1.7 与例 1.1.15 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证明. 取  $a_n = \sqrt[n]{n}$ , 显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 1$ . □

10. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \dots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$

证明.  $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\ln 2}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \square$

11. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$   $\square$

### 1.2.2 思考题

12. 用  $p(n)$  表示能整除  $n$  的素数的个数. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$

证明. 假设  $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$ , 其中  $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$  是互异的素数,  $m_k \geq 1, k = 1, 2, \cdots, l$ . 于是  $p(n) = \sum_{k=1}^l m_k.$

$$\ln n = \sum_{k=1}^l m_k \ln p_k \geq \sum_{k=1}^{p(n)} \ln 2 = p(n) \ln 2.$$

因此

$$0 \leq \frac{p(n)}{n} \leq \frac{\ln n}{n \ln 2}.$$

由夹逼定理可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$   $\square$

13. 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}.$

证明.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2n^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4n^2}. \end{aligned}$$

由夹逼定理可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}.$   $\square$

## 1.3 实数理论, 实数连续性命题

### 1.3.1 练习题

### 1.3.2 思考题

## 1.4 Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

### 1.4.1 练习题

1. 证明下列数列收敛:

$$(1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), n \in \mathbb{N};$$

证明. 记  $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ , 我们有  $S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < S_n$ . 很显然  $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 由实数连续性命题 (二) 可知,  $S_n$  收敛.  $\square$

$$(2) \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

证明. 记  $S_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$ . 当  $n > 10$  时,  $\frac{n+9}{2n-1} < 1$ . 即  $S_{n+1} < S_n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 10$ . 另一方面  $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . 由实数连续性命题 (二) 可知,  $S_n$  收敛.  $\square$

2. 设  $0 < a_n < 1$  且  $a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N}$ . 证明:  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ .

证明. 考虑函数  $f(x) = (1 - x)x, x \in (0, 1)$ , 我们有

$$f(x) > 0, f(x) \leq \frac{1}{4}, x \in (0, 1).$$

所以  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{4(1 - a_n)a_n} \geq 1$ , 即  $\{a_n\}$  是单调递增. 由实数连续性命题 (二) 可知,  $a_n$  收敛. 由递推公式可知,  $\frac{1}{4} \geq a(1 - a) \geq \frac{1}{4}$ . 所以  $a = \frac{1}{2}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ .  $\square$

3. 给定两正数  $x_0 = a$  与  $y_0 = b$ , 归纳定义

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2},$$

$n = 1, 2, \dots$ . 证明: 数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ , 并称此极限为  $a$  与  $b$  的算术-几何平均数.

证明. 由算术-几何平均不等式知:  $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . 于是:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

于是

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq y_1 \leq y_0 = b.$$

令  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = B$ . 由递推公式可知:  $A = \sqrt{AB}$ , 从而  $A = B$ .  $\square$

4.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 用  $x_n$  表示方程  $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$  在闭区间  $[0, 1]$  上的根, 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

解. 设  $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$  对于给定的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  是单调增函数, 所以  $f_n(x)$  只有唯一的根  $x_n$ . 由于

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_n(x_n) + x_n^{n+1} = f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  存在. 由于  $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$  知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$ .

5. 设  $c > 0$ ,  $x_1 = \sqrt{c}$ ,  $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ . 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$ .

证明. 我们用归纳法证明  $x_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$(1) \quad x_1 = \sqrt{c} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

$$(2) \quad \text{假设 } x_k < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \text{ 我们证明 } x_{k+1} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{c + x_k} \\ &< \sqrt{c + \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4c + 2 + 2\sqrt{1 + 4c}}{4}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

现在考虑函数  $f(x) = c + x - x^2$ . 很显然

$$f(x) > 0, \quad x \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}\right).$$

于是  $x_{n+1}^2 - x_n^2 = c + x_n - x_n^2 > 0$ . 即  $\{x_n\}$  是单调递增的数列. 由实数连续性命题 (二) 知, 数列  $\{x_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , 则

$$a = \sqrt{c + a}.$$

解方程得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$ . □

6. 设  $x_1 = c > 0$ , 令  $x_{n+1} = c + \frac{1}{x_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

解. 我们首先证明:

$$(1) \quad x_{2k-1} < x_{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$(2) \quad x_{2k} > x_{2(k+1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由递推公式可知

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-3} - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_{n-3}} = \frac{x_{n-2} - x_{n-4}}{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-3} \cdot x_{n-4}}.$$

由于  $x_3 - x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$ , 从而知 (1) 成立。由于  $x_4 - x_2 = \frac{x_1 - x_3}{x_1 \cdot x_3} < 0$ , 从而知 (2) 成立。

另一方面:

$$\begin{aligned} x_{2k} - x_1 &= c + \frac{1}{x_{2k-1}} - c = \frac{1}{x_{2k-1}} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \\ x_{2k+1} - x_2 &= c + \frac{1}{x_{2k}} - c - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_{2k}}{x_1 \cdot x_{2k}} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

由实数连续性命题 (二) 可知, 奇数列和偶数列都是收敛子列。假设

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = b.$$

由递推公式, 我们有

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= c + \frac{1}{c + \frac{1}{x_{2k-1}}} \Rightarrow a^2 - ac - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}, \\ x_{2k+2} &= c + \frac{1}{c + \frac{1}{x_{2k}}} \Rightarrow b^2 - bc - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

即,  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$ .

7. 证明:  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$

证明. 第一个等式是题 5 的特例:  $c = 1$ . 第二个等式是题 6 的特例:  $c = 1$ . □

8. 设  $c > 0$ ,  $a_1 = \frac{c}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ ,  $n = 1, 2, \cdots$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

证明. 当  $c > 1$  时, 由递推公式可知,

$$a_{n+1} \geq 2\sqrt{\frac{c}{2} \frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c} a_n \geq \cdots \geq c^{\frac{n}{2}} a_1.$$

所以  $+\infty \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (c^{\frac{n}{2}} a_1) = +\infty$ .

当  $0 < c \leq 1$  时, 我们证明数列  $\{a_n\}$  是单调递增且有界。

(1)  $a_1 = \frac{c}{2} < 1 - \sqrt{1 - c}$ .

(2) 设  $a_k < 1 - \sqrt{1 - c}$ . 下面我们证明  $a_{k+1} \geq a_k$  且  $a_{k+1} < 1 - \sqrt{1 - c}$ .

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - c})^2 = 1 - \sqrt{1 - c}.$$

考察函数  $f(x) = x^2 - 2x + c$ .

$$f(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 1 - \sqrt{1 - c}).$$

因此

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 - 2a_k + c) > 0.$$

即  $\{a_n\}$  是单调增的数列. 由实数连续性命题 (二) 可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  存在. 设极限为  $a$ , 则

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = 1 - \sqrt{1-c}.$$

命题在  $0 < c \leq$  也得证了. □

**9.** 设数列  $\{a_n\}$  单调增,  $\{b_n\}$  单调减, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ . 证明:  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

**证明.** 很显然  $\{a_n - b_n\}$  是单调增. 又由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ , 可知  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , 从而

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知,  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都收敛. 再由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$  知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ . □

**10.** 设数列  $\{a_n\}$  满足: 存在正数  $M, \forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leq M.$$

**证明:** 数列  $\{a_n\}$  与  $\{A_n\}$  都收敛.

**证明.** 很显然数列  $\{A_n\}$  是单调增有界数列, 由实数连续性命题 (二) 可知,  $\{A_n\}$  是收敛的.

$$\{A_n\} \text{收敛} \Rightarrow \{A_n\} \text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\} \text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\} \text{收敛}.$$

Cauchy 数列必收敛, 从而知  $\{a_n\}$  收敛. □

**11.** 应用 Cauchy 收敛准则证明下列数列收敛:

$$(1) x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)};$$

**证明.**

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1) \cdot (n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right| \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

即  $\{x_n\}$  是 Cauchy 列, 从而收敛. □

$$(2) x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

**证明.**

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

即  $\{x_n\}$  是 Cauchy 列, 从而收敛. □

$$(3) x_n = \frac{\arctan 1}{1(1 + \cos 1!)} + \frac{\arctan 2}{2(2 + \cos 2!)} + \cdots + \frac{\arctan n}{n(n + \cos n!)}.$$

证明.

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\arctan(n+1)}{(n+1)((n+1) + \cos(n+1)!)} + \cdots + \frac{\arctan(n+p)}{(n+p)((n+p) + \cos(n+p)!)} \right| \\ &< \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &< \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

即  $\{x_n\}$  是 Cauchy 列, 从而收敛。 □

12. 应用  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  与  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ , 求下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^n$ ;

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\frac{n}{n-3}} = e.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^n$ ;

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{(-n+2)\frac{n}{-n+2}} = e^{-1}.$

(3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$ ;

证明.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2+n}\right)^{(-2-n)\frac{n}{-2-n}} = e^{-1}.$  □

(4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$ ;

证明.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^2 = e^2.$  □

(5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ .

证明.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$  □

13.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 证明:

(1)  $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$

证明. 由不等式  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  知:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0.$$

**证明.** 由 (1) 和夹逼原理, 可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0$ . □

**14.** 设  $\alpha < 1$ , 证明:

$$(1) 0 < n^\alpha \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] < \frac{e}{n^{1-\alpha}}.$$

**证明.** 由不等式  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$  知:

$$\begin{aligned} 0 &< n^\alpha \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ &< n^\alpha \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ &= n^\alpha \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{n} \right] \\ &< \frac{e}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0.$$

**证明.** 由 (1) 和夹逼原理可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0$ . □

**注 6.** 由上两题可知  $\left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$  比  $\frac{1}{n^\alpha} \forall \alpha < 1$ . 高阶的无穷小量。

**15.** (1) 设  $0 < a < b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . 证明:

$$b^{n+1} - a^{n+1} < (n+1)b^n(b-a),$$

$$a^{n+1} > b^n[(n+1)a - nb];$$

**证明.**

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n) < (n+1)b^n(b-a).$$

由此式可知:

$$a^{n+1} > b^{n+1} - (n+1)b^n(b-a) = b^n[b - (n+1)b + (n+1)a] = b^n[(n+1)a - nb].$$

□

(2) 在 (1) 中, 令  $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ ,  $b = 1 + \frac{1}{n}$  推出  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  为严格增的数列;

**证明.** 将  $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ ,  $b = 1 + \frac{1}{n}$  代入 (1) 中的第二式, 可知

$$\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} > \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \left[ (n+1) \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) - n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

□



(3) 在 (1) 中, 令  $a = 1, b = 1 + \frac{1}{2n}$  推出当  $n$  为偶数时, 有  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$ ; 由此得到  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$ , 即 4 为该数列的上界, 从而  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  收敛。

**证明.** 将  $a = 1, b = 1 + \frac{1}{2n}$  代入 (1) 的第二个不等式, 我们有:

$$1 \geq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left[ (n+1) - n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right],$$

即

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \leq 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq 4.$$

由于  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  是单调递增的, 我们可知,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$ . □

**16.** 应用不等式  $b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a)$ ,  $0 < a < b$ , 证明: 数列  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  是严格单减的, 并由此推出  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  为有界数列。

**证明.**

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n) > (n+1)a^n(b-a).$$

即

$$b^{n+1} > a^n [(n+1)b - na].$$

取  $a = 1 + \frac{1}{n+1}, b = 1 + \frac{1}{n}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left[ (n+1) \frac{n+1}{n} - n \frac{n+2}{n+1} \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left( \frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left[ \frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left( \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} \right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

由此可见  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$  是严格单调减. 另外

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4.$$

即  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  为有界数列. □

**17.** 证明:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{3}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**证明.**

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{3}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

18. 设  $\{a_n\}$  为有界数列。记

$$\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

证明:

(1)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有  $\bar{a}_n \geq \underline{a}_n$ ;

**证明.** 这是显然的。  $\bar{a}_n \geq a_n \geq \underline{a}_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . □

(2)  $\{\bar{a}_n\}$  为单调减有界数列;  $\{\underline{a}_n\}$  为单调增有界数列, 且  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , 有  $\bar{a}_n \geq \underline{a}_m$ ;

**证明.** 由  $\bar{a}_n$  和  $\underline{a}_n$  的定义可知,

$$\bar{a}_n = \max\{a_n, \bar{a}_{n+1}\}, \quad \underline{a}_n = \min\{a_n, \underline{a}_{n+1}\}.$$

由此可见  $\{\bar{a}_n\}$  是单调减,  $\{\underline{a}_n\}$  是单调增, 且

$$\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \cdots \leq \underline{a}_n \leq \cdots \leq \bar{a}_n \leq \cdots \leq \bar{a}_2 \leq \bar{a}_1.$$

由于数列  $\{a_n\}$  是有界数列, 故  $\underline{a}_1$  和  $\bar{a}_1$  都是有界数。命题得证。 □

(3) 设  $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{a}_n$ ,  $\underline{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{a}_n$ , 则  $\bar{a} \geq \underline{a}$ ;

**证明.** 应用定理 1.2.5, 这个命题就可以得证。 □

(4)  $\{a_n\}$  收敛  $\Leftrightarrow \bar{a} = \underline{a}$ .

**证明.** ( $\Rightarrow$ ): 由极限定义, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

于是

$$|\bar{a}_n - a| < \varepsilon, |\underline{a}_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

由此可知

$$|\bar{a} - a| < \varepsilon, |\underline{a} - a| < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性知,  $\bar{a} = \underline{a} = a$ .

( $\Leftarrow$ ): 记  $\bar{a} = \underline{a} = a$ . 再次由极限定义知, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得

$$|\bar{a} - a| < \varepsilon, |\underline{a} - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

从而

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

由极限的定义知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . □

## 1.4.2 思考题

19. 设  $a_1 \geq 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 证明:  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$ .

证明. 很显然  $a_n > 0, \forall n$ . 我们现在计算  $|a_{n+1} - \sqrt{3}|$ :

$$|a_{n+1} - \sqrt{3}| = \left| \frac{3 + 3a_n - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}a_n}{a_n + 3} \right| = \left| \frac{(3 - \sqrt{3})(a_n - \sqrt{3})}{a_n + 3} \right| < \left( \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) |a_n - \sqrt{3}|.$$

因为  $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} < 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$ .  $\square$

20. 设  $a > 0$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 证明:  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ .

证明. 我们证明如下结论:

(1) 如果  $x_1 \leq \sqrt{a}$ , 则  $\{x_n\}$  是单调增且  $x_n \leq \sqrt{a}, \forall n$ ;

(2) 如果  $x_1 > \sqrt{a}$ , 则  $\{x_n\}$  是单调减且  $x_n \geq \sqrt{a}, \forall n$ ;

无论哪种情况发生, 由实数连续性命题 (二) 可知,  $\{x_n\}$  收敛. 记  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ , 则

$$b = \frac{b(b^2 + 3a)}{3b^2 + a}.$$

解方程得  $b = \sqrt{a}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ .

注意到  $x_n > 0, \forall n$  且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n(\sqrt{a} - x_n)(\sqrt{a} + x_n)}{3x_n^2 + a}, \quad x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a}.$$

我们很容易看出上述的两个结论都是成立的.  $\square$

21. 设  $a > 0$ ,  $x_1 = \sqrt[3]{a}$ ,  $x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}} (n > 1)$ . 证明:  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ .

证明. 我们只需要证明:

(1) 如果  $a \geq 1$ , 则数列  $\{x_n\}$  是单调递增且  $x_n \leq \sqrt{a}, \forall n$

(2) 如果  $a < 1$ , 则数列  $\{x_n\}$  是单调递减且  $x_n \geq \sqrt{a}, \forall n$ .

无论上述哪种情况发生, 由实数连续性命题 (二) 可知,  $\{x_n\}$  收敛. 记  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ , 则

$$b = \sqrt[3]{ab}.$$

解方程得  $b = \sqrt{a}$ . 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$ .

注意到  $x_n > 0, \forall n$  且

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}(\sqrt{a} - x_{n-1})(\sqrt{a} + x_{n-1})}{(\sqrt[3]{ax_{n-1}})^2 + \sqrt[3]{ax_{n-1}}x_{n-1} + x_{n-1}^2},$$

$$x_n - \sqrt{a} = \sqrt[3]{ax_{n-1}} - \sqrt{a} = \frac{a(x_{n-1} - \sqrt{a})}{(\sqrt[3]{ax_{n-1}})^2 + \sqrt[3]{a^{5/2}}x_{n-1} + a}$$

当  $a \geq 1$ ,  $x_1 = \sqrt[3]{a} \leq \sqrt{a}$ . 由上两式知, 结论 (1) 成立.

当  $a < 1$ ,  $x_1 = \sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ . 由上两式知, 结论 (2) 成立.  $\square$

22. 设  $0 < a_1 < b_1 < c_1$ . 令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

证明:  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  收敛于同一实数.

证明. 由定义可知

$$0 < a_1 < a_n \leq b_n \leq c_n < c_1, \quad \forall n > 1.$$

于是  $\{a_n\}$  单调增,  $\{c_n\}$  单调减. 由实数连续性命题 (二) 可知, 数列  $\{a_n\}, \{c_n\}$  收敛. 因为  $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$  可知, 数列  $\{b_n\}$  收敛.

设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ . 易知,  $0 < a_1 \leq a \leq b \leq c \leq c_1$  且

$$a = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, \quad b = \sqrt[3]{abc}, \quad c = \frac{a+b+c}{3}$$

解方程组可得知  $a = b = c$ . □

23. 设  $a_n > 0, S_n = a_1 + \cdots + a_n, T_n = \frac{a_1}{S_1} + \cdots + \frac{a_n}{S_n}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ .

证明. 由于  $S_n \rightarrow +\infty$ , 我们可以找到一个子列  $\{n_k\}$  使得

$$\frac{S_{n_k-1}}{S_{n_k}} < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned} T_{n_k} &= \left( \frac{a_1}{S_1} + \cdots + \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}} \right) + \left( \frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}} + \cdots + \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}} \right) + \cdots + \left( \frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_{k-1}+1}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}} \right) \\ &> \left( \frac{a_1}{S_{n_1}} + \cdots + \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}} \right) + \left( \frac{a_{n_1+1}}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}} \right) + \cdots + \left( \frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_k}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}} \right) \\ &= \frac{S_{n_1} - 0}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2} - S_1}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} \\ &> \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

即:  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_{n_k} = +\infty$ . 因为  $T_n$  是单调增的数列, 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ . 命题得证. □

24. 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

证明. 我们只需证明  $\left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|$  收敛于 0.

$$\begin{aligned} \left| a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| &= \left| \frac{3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)a_n}{2(1+a_n)} \right| \\ &= \left| \frac{-(\sqrt{5}-1) \left( a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)}{2(1+a_n)} \right| \\ &< \left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \cdot \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|. \end{aligned}$$

由此可见,  $\left\{ \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \right\}$  收敛于 0. □

25. 设  $a_n \geq 0$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  收敛于  $S$ 。证明:  $b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$  收敛。

证明. 很显然,  $\{b_n\}$  是单调增数列。下面证明  $\{b_n\}$  是有界数列。由于  $a_n \geq 0$  且  $S_n \rightarrow S$ , 则  $S_n$  是单调增收敛于  $S$ , 所以

$$\sum_{k=1}^n a_k < S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面,

$$b_n \leq \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)^n \leq \left(1 + \frac{S}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{[S]+1}{n}\right)^n.$$

数列  $\left\{\left(1 + \frac{[S]+1}{n}\right)^n\right\}$  是单调增的, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{[S]+1}{n}\right)^n = e^{[S]+1}.$$

于是

$$b_n \leq e^{[S]+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续命题 (二) 可知, 数列  $\{b_n\}$  是收敛数列。 □

## 1.5 上极限与下极限

### 1.5.1 练习题

1. 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  与  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ :

$$(1) a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(2) a_n = n^{(-1)^n};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

$$(3) a_n = [1 + 2^{(-1)^n n}]^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2.$$

$$(4) a_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\frac{1}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(5) a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

$$(6) a_n = \sqrt[n]{\left|\cos \frac{n\pi}{3}\right|};$$

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$

$$(7) a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

解.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = e.$

2. 证明下面各式当两端有意义时成立:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

证明. 由上, 下极限的定义, 我们可以得到两个简单的无需证明的事实: 对于任何数列  $\{a_n\}$ ,  $\{a_{n_k}\}$  是一个任意一个子列, 则

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k}$$

$$(b) \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

我们取子列  $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

再在子列  $\{a_{n_k}\}$  中取子列  $\{a_{n_{k_l}}\}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

对于子列  $\{b_{n_{k_l}}\}$ , 我们会有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n). \end{aligned}$$

取子列  $\{a_{n_k}\}$ , 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

考虑子列  $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ , 在其中取子列  $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$ , 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

对于同样下标的子列  $\{b_{n_{k_l}}\}$ , 我们有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \\ &= \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n\end{aligned}$$

下面我们用类似的办法证明第二式。取子列  $\{b_{n_k}\}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

对于相应的  $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$  可以取子列  $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

显然

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \geq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)\end{aligned}$$

取子列  $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ , 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

取子列  $\{b_{n_{k_l}}\}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

另一方面

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

所以  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$ . □

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ , 则

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + b, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + b\end{aligned}$$

**证明.** 这题是上面一题的直接应用。 □

(3)  $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ;

$$\begin{aligned} \text{证明. } \inf_{k \geq n} \{-a_k\} &= -\sup_{k \geq n} \{a_k\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n. \\ \sup_{k \geq n} \{-a_k\} &= -\inf_{k \geq n} \{a_k\} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \end{aligned}$$

□

(4) 设  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  均为非负数列, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n; \end{aligned}$$

证明. 我们现证第一式. 取子列  $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

对于上述的  $\{a_{n_k}\}$ , 我们再取子列  $\{a_{n_{k_l}}\}$ , 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0.$$

对于  $\{b_{n_{k_l}}\}$ , 我们会有

$$\underline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \geq \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \underline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \end{aligned}$$

取  $\{a_{n_k}\}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

对于对应的子列  $\{b_{n_k}\}$ , 我们再取子列  $\{b_{n_{k_l}}\}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\leq \underline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{aligned}$$

现在我们来证明第二式. 取子列  $\{b_{n_k}\}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

对于相对应的  $\{a_{n_k}\}$ , 我们再取子列  $\{a_{n_{k_l}}\}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$



所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n\end{aligned}$$

取子列  $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

在  $\{a_{n_k}\}$  取收敛子列  $\{a_{n_{k_l}}\}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

另一方面

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n &= \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n\end{aligned}$$

□

(5) 设  $\{b_n\}$  非负, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = b \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = b \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n;$$

**证明.** 直接用上一题的结论就可以得证。

□

(6) 设  $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

**证明.** 因为  $a_n > 0, \forall n$ , 从而

$$\sup_{k \geq n} \left\{ \frac{1}{a_k} \right\} = \frac{1}{\inf_{k \geq n} \{a_k\}}.$$

由上, 下极限的定义, 命题得证。

□

**3.** 设  $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ , 且  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 1$ , 证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛。

**证明.** 由题可知  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$ 。我们可以证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}.$$

故  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  是收敛数列。当然  $\{a_n\}$  收敛。 □

4. 设数列  $\{a_n\}, a_n \leq 1, n = 1, 2, \dots$ , 且满足:

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1.$$

证明: (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \omega$ , 其中  $\omega$  为有限数; (2)  $n\omega - 1 \leq a_n \leq n\omega + 1$ .

证明. 先证明 (1).

$$a_1 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} < a_1 + \frac{1}{n}.$$

由此得证 (1), 且  $\omega = a_1$ . 由此 (2) 得证。 □

5. 设  $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何 } l > 1, \text{ 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

如果删去“任何”两字, 结论如何?

注 7. 这个题目的结论是不对的。比如

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ 是奇数} \\ 1, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^n} = 0,$$

但是,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  不存在。所以下面我们证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何 } l > 1, \text{ 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

证明. ( $\Rightarrow$ ): 对于任何的  $l > 1$ , 取  $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$ , 我们可以找到  $N > 0$ , 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq 1 + \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} < l, \quad \forall n > N.$$

于是

$$\frac{a_n}{l^n} < \left(\frac{l+1}{2l}\right)^n, \quad \forall n > N.$$

由  $\frac{l+1}{2l} < 1$  可知,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

( $\Leftarrow$ ): 由定义可知, 对任意的  $l > 1$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时有,

$$\frac{a_n}{l^n} < 1 \Rightarrow a_n < l^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l.$$

从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq l \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

如果删去“任何”两字, 结论不成立。 □

## 1.5.2 思考题

6. 设数列  $\{x_n\}$  有界, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , 令

$$l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

证明:  $\{a \in \mathbb{R} | \text{有子列 } x_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)\} = [l, L]$ . 如果删去条件  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , 结论如何?

证明. 对于  $a \in (l, L)$  和任意的  $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{a - l, L - a\}$ , 我们有存在  $N$  使得:

(1) 当  $n > N$  时,  $-\varepsilon \leq a_{n+1} - a_n \leq \varepsilon$ .

(2) 存在子列  $n_k$ , 使得  $a_{n_k} \leq l + \varepsilon, \quad \forall k$

(3) 存在子列  $n_l$ , 使得  $a_{n_l} \geq L - \varepsilon, \quad \forall l$

选择子列  $n_t$ , 并且重新标记下标, 使得

$$a_{n_t} \begin{cases} \leq l + \varepsilon, & \text{当 } t \text{ 是奇数} \\ \geq L - \varepsilon, & \text{当 } t \text{ 是偶数} \end{cases}$$

对于任意上述子列的任意两个相邻的数  $a_{n_{2t}}, a_{n_{2t+1}}$ , 在原数列中一定有至少一个  $a_{n_t'}$  落在区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . 从而由极限的定义知这个子列收敛到  $a$ . 命题得证.  $\square$

7. 设  $0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m (n, m = 1, 2, \dots)$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  且  $\sqrt[n]{a_n}$  收敛.

证明. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a > b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ . 取  $N > 0$  使得

$$a_N < b + \frac{a - b}{3}.$$

又取子列  $a_{n_k}$  使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = a.$$

当  $k$  充分大后,  $n_k > N$ , 且  $n_k = m_k N + l$ , 其中  $l = 0, 1, \dots, N - 1$ . 于是

$$a_{n_k} \leq a_{m_k N} \cdot a_l = a_N^{m_k} \cdot a_l = a_N^{n_k} \cdot \frac{a_l}{a_N^l}.$$

由此可知

$$0 \leq \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \leq \sqrt[n_k]{a_N^{n_k}} \sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}} = a_N \cdot \sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a_N \leq b + \frac{a - b}{3} < a.$$

这与  $\{a_{n_k}\}$  的选择矛盾. 从而知  $a = b$ . 命题得证.  $\square$

## 1.6 Stolz 公式

## 1.6.1 练习题

1. 设  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  为组合数. 应用 Stolz 公式证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

**证明.** 我们先计算  $\ln C_n^k + \ln C_n^{n-k} = 2 \ln n! - 2 \ln k! - 2 \ln (n-k)!$ ,  $\forall k \leq n$ . 所以  $\sum_{k=0}^n \ln C_n^k = n \ln n! - 2 \sum_{k=0}^n \ln k!$ . 设  $x_n = n^2, y_n = \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ , 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2} &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1) \ln n - \ln n!}{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{2n-1} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2n-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

命题得证 □

**2. 应用 Stolz 公式证明:**

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3};$$

**证明.** 设  $y_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, x_n = n^{\frac{3}{2}}$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})}{n^3 - (n-1)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \sqrt{(1 - \frac{1}{n})^3}\right)}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{2}.$$

**证明.** 我们设  $y_n = 3 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - 2n^{\frac{3}{2}}, x_n = 3\sqrt{n}$ . 于是

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{3\sqrt{n} - 2n^{\frac{3}{2}} + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{3\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3}) - 6n^2 + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\ &= \frac{3n^2(\sqrt{(1 - 1/n)^3} - 1) + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\ &= \frac{-9n + 9 - 3/n + (6n - 2)(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)} \\ &= \frac{(-9n + 9 - 3/n + (6n - 2)(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1))(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)} \\ &= \frac{n^{\frac{3}{2}}(-9 + 9/n - 3/n^2 + (6 - 2/n)(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1))(1 + \sqrt{1 - 1/n})}{3n^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{(1 - 1/n)^3})(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)} \end{aligned}$$

于是:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \right] \xrightarrow{\text{Stolz 公式}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

命题得证

□

### 1.6.2 思考题

**3.** 设  $0 < x_1 < 1$ ,  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$ . 进而设  $0 < x_1 \leq \frac{1}{q}$ , 其中  $0 < q \leq 1$ , 并且  $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \frac{1}{q}$ .

**证明.** 如果我们能证明  $\{x_n\}$  单调减且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n &\xrightarrow{\text{Stolz 公式}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1}(1 - qx_{n-1})}{qx_{n-1}} \\ &= \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

下面我们证明  $\{x_n\}$  单调减且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . 由于  $x_n - x_{n-1} = -qx_{n-1}^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  可知,  $\{x_n\}$  是单调减的. 很明显  $x_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . 由实数连续性命题 (二) 可知,  $\{x_n\}$  是收敛的. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , 则  $a = a(1 - qa) \Rightarrow qa^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ . 命题得证. □

**4.** 由 Toeplitz 定理导出  $\frac{\infty}{\infty}$  型的 Stolz 公式。

**证明.** 取

$$t_{nk} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n - x_0}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

(1) 由于  $\{x_n\}$  是单调增数列,  $t_{nk} > 0$ .

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ .

(3)  $\sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1$ .

由 Toeplitz 定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_0}{x_n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_0}{x_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_n - x_0} \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &\xrightarrow{\text{Toeplitz 公式}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a. \end{aligned}$$

命题得证.

□

5. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$ .

证明. 记  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$ . 我们很容易证明以下结论:

(1)  $\{S_n\}$  是单增的, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

现在计算

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= a_n^2(S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2)) + (S_n - a_n^2)^2 \\ &= 3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3(a_n S_n) + a_n^6 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3}{3n} \stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(a_n S_n)^3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3}{3n} = 1.$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$ . 命题得证.  $\square$

## 1.7 复习题 1

未解决的题: 11

1. 设  $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 0, 1, 2, \dots$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$ .

证明. 由递归定义,

$$a_{n-1}^2 + 2 < a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 < a_n^2, \quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 2 * (n-1) + a_1^2 = 2n-1.$$

于是

$$0 \leq \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \forall n > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0.$$

算术平均

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n} = 0.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{2n} &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{2n} \\ &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

命题得证.  $\square$

2. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ , 并且存在常数  $K$  使得  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K.$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ .

证明. 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , 存在  $M > 0$  使得  $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$ .

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_1$  时有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \forall n > N_1.$$

设  $s_n = \sum_{k=1}^n |y_k|$ . 很显然  $\{s_n\}$  是一个收敛数列. 于是, 存在  $N_2 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_2$  时有

$$s_n - s_{n-N_1} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}.$$

综上,

$$\begin{aligned} |z_n| &= |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &< |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{N_1} y_{n-N_1+1}| + |x_{N_1+1} y_{n-N_1} + x_{N_1+2} y_{n-N_1-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &< MN_1(s_n - s_{n-N_1}) + \frac{\varepsilon}{2K}(|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{n-N_1}|) \\ &< MN_1 \frac{\varepsilon}{2MN_1} + K \frac{\varepsilon}{2K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

命题得证. □

3. 设数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足:

(1)  $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$ .

应用 Toeplitz 定理证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

证明. 在这题里我们可以取

$$t_{nk} = \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

(1)  $t_{nk} > 0, \forall n > 0, k = 0, 1, \cdots, n$ ;

(2) 给定  $n, \sum_{k=0}^n t_{nk} = 1$ ;

(3) 由于  $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ , 给定  $k, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ ;

于是

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = \sum_{k=0}^n t_{nk} \frac{a_k}{b_k}.$$

由 Toeplitz 定理, 命题可以得证. □

4. 设  $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a.$$

证明. 对于给定的正整数  $k > 0$ , 我们可以证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$ . 这是因为

$$0 \leq \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} < \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-k}}.$$

夹逼定理说明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$ .

下面我们就可以用极限的定义来证明命题了. 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设  $M = \max\{|a_0 - a|, |a_1 - a|, \dots, |a_{N_0} - a|\}$ .

对于每一个  $k, 1 \leq k \leq N_0$ , 存在  $N_k$ , 当  $n > N_k$  时有,

$$\frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \leq \frac{\varepsilon}{2MN_0}.$$

取  $N = \max\{N_0, N_1, \dots, N_{N_0}\}$ , 当  $n > N$  时

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - a \right| &= \left| \frac{p_1(a_n - a) + p_2(a_{n-1} - a) + \dots + p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{p_{n-k+1} |a_k - a|}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} + \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-N_0}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{M\varepsilon}{2MN_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

命题得证. □

5. 设  $\{a_n\}$  为单调增的数列, 令  $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = a$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . 若“单调增”的条件删去, 结论是否成立.

证明. 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时,  $\sigma_n < a + 1$ . 于是

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2} < \sigma_{2n} < a + 1.$$

从而

$$a_n < 2\left(a + 1 - \frac{a_1}{2}\right).$$

单调增有上界的数列是收敛数列. 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  存在. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$ , 由例 1.1.15 可知,

$$b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = a.$$

如果  $\{a_n\}$  不是单调增的, 结论不成立. 例如  $a_n = (-1)^n$ ,  $\sigma_n = 0$  或  $-\frac{1}{n}$ . 所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$ . 但是  $\{a_n\}$  不收敛. □

6. 设  $\{S_n\}$  为数列,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ,  $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$ . 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$  且  $\{\sigma_n\}$  收敛, 证明  $\{S_n\}$  也收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$ .



证明. 我们直接计算

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \sigma_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nS_n - S_0 - S_1 - \cdots - S_{n-1}}{n+1} \\ &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (nS_n - nS_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.\end{aligned}$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \sigma_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$ . □

7. 设数列  $\{x_n\}$  满足:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$ .

证明. 如果我们能证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (x_n - x_{n-1})}{n} = 0$ , 则命题得证.  
通过简单的计算, 我们有

$$(-1)^n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k) + x_2 - x_1.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k)}{n-2} = 0.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (x_n - x_{n-1})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k)}{n-2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-2}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_2 - x_1}{n} = 0.$$

□

8. 设  $u_0, u_1, \cdots$  为满足  $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 (n = 0, 1, 2, \cdots)$  的实数列, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛. 证明  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $u_k = 0$ .

证明. 由  $u_n$  的定义可知,

$$u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad \forall n.$$

记  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . 由于  $\{S_n\}$  收敛, 则存在  $N > 0$ , 使得当  $n > N$  时  $\sum_{k=n}^{\infty} u_k < 1$ .

$$\begin{aligned}u_{n+1} &\leq u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \\ &= u_{n+1} \left( u_{n+1} + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} u_{n+2} + \cdots \right) \\ &\leq u_{n+1} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots) \\ &\leq u_{n+1}\end{aligned}$$

从而,  $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = c$ . 由于  $\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k < 1$  可知,  $c = 0$ . 又由  $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = 0$ , 可知  $u_N = u_{N-1} = \cdots = u_1 = 0$ . □

9. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$

证明. 取  $t_{nk} = \frac{1}{2^n} C_n^k$ , 我们有

$$(1) \quad t_{nk} > 0 \text{ 且 } \sum_{k=0}^n t_{nk} = \frac{1}{2^n} (1+1)^n = 1;$$

(2) 很容易验证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ . 因为  $2^n = (1+1)^n > C_n^{k+1}$ , 从而

$$0 \leq t_{nk} \leq \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

由夹逼定理,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ .

由 Toeplitz 定理知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$ . □

10. 给定实数  $a_0, a_1$ , 并令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$

证明. 由递归公式有:

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) (a_{n-1} - a_{n-2}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - a_0).$$

于是:

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (a_1 - a_0) + \dots + (a_1 - a_0) \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} (a_1 - a_0) \end{aligned}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} (a_1 - a_0) \right) = a_0 + \frac{2}{3} (a_1 - a_0) = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$ . □

11. 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为任意给定的实数. 令

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $x_{n+1}$  应理解为  $x_1$ . 归纳定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$x_{n+1}^{(k-1)}$  应理解为  $x_1^{(k-1)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . 证明:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

12. 设  $\{a_n\}$  为一个数列, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = l; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^2} = \frac{l}{2}.$$

证明.

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$ , 易知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k - na_1 &= \sum_{k=2}^n (a_k - a_1) \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{l=1}^{k-1} (a_{l+1} - a_l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)(a_{l+1} - a_l) \end{aligned}$$

如果取  $t_{nk} = \frac{2(n-k)}{(n-1)n}$ , 则

$$(1) \quad t_{nk} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \cdots, n \text{ 且 } \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sum_{k=1}^n \frac{2(n-k)}{(n-1)n} = 1;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0, \quad \forall k.$$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k - na_1}{(n-1)n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{(n-1)n} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \frac{l}{2}.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k - na_1}{(n-1)n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)n}{n^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{n} = \frac{l}{2}.$$

命题得证。 □

**13.** 设  $x_1 \in [0, 1], \forall n \geq 2$ , 令

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2}x_{n-1}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1+x_{n-1}}{2}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{3}; \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{2}{3}.$

证明. 由递推公式可知

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1+x_{2(k-1)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_{2(k-1)} \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \left( \frac{1}{4} \right)^l + \left( \frac{1}{4} \right)^{k-1} x_2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^k + \left( \frac{1}{4} \right)^{k-1} x_2. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{3}$ .

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^l + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{2}{3}$ . □

14. 定初始值  $a_0$ , 并递推定义

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

求  $a_0$  的所有可能的值, 使得数列  $\{a_n\}$  是严格增的。

解. 考虑数列  $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ . 显然

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + (-1)^n a_0 \\ &= \frac{1}{5} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n (5a_0 - 1) \right] \end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{1}{5} [2^n + (-1)^n (5a_0 - 1) 3^n].$$

由此

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_{2n-1} &= \frac{1}{5} [2^{2n} + (5a_0 - 1) 3^{2n} - 2^{2n-1} + (5a_0 - 1) 3^{2n-1}] \\ &= \frac{1}{5} [2^{2n-1} + 4(5a_0 - 1) 3^{2n-1}]. \end{aligned}$$

只有当  $a_0 \geq \frac{1}{5}$  时,  $a_{2n} > a_{2n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} a_{2n-1} - a_{2n-2} &= \frac{1}{5} [2^{2n-1} - (5a_0 - 1) 3^{2n-1} - 2^{2n-2} - (5a_0 - 1) 3^{2n-2}] \\ &= \frac{1}{5} [2^{2n-2} - 4(5a_0 - 1) 3^{2n-2}]. \end{aligned}$$

只有当  $a_0 \leq \frac{1}{5}$  时,  $a_{2n-1} > a_{2n-2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

综上, 只有  $a_0 = \frac{1}{5}$  时,  $\{a_n\}$  是严格递增的。

15. 设  $c > 0$ ,  $a_1 = \frac{c}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

试问: 当时  $-3 \leq c < 0$ , 数列  $\{a_n\}$  的收敛性如何?

证明. 现证  $c > 1$  的情形:

$$a_n \geq \sqrt{ca_{n-1}^2} = \sqrt{c} a_{n-1} \geq \dots \geq (\sqrt{c})^{n-1} a_1.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{c})^{n-1} = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . 命题得证.

现在  $c \leq 1$  的情形:

(1) 考虑函数  $f(x) = x^2 - 2x + c$ . 当  $x \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$ ,  $f(x) < 0$  且  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1 + c$ .

(2) 很显然  $a_1 = \frac{c}{2} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$ . 于是  $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}f(a_1) < 0 \Rightarrow a_2 < a_1$ .

$$a_1^2 \in (2 - c - 2\sqrt{1-c}, 2 - c + 2\sqrt{1-c}) \Rightarrow a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c}).$$

(3) 假设  $n = k$  时,  $a_k \leq a_{k-1}$  且  $a_k \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$ . 显然我们有  $a_{k+1} \leq a_k, a_{k+1} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$ .

综上,

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad a_n \geq 1 - \sqrt{1-c}, \quad \forall n.$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$ .

现考虑  $-3 \leq c < 0$  的情形。

(1) 我们先证明  $a_n$  是有界的。  $\frac{c}{2} < a_1 = \frac{c}{2} \leq 0$ . 假设  $\frac{c}{2} \leq a_k \leq 0$ , 则  $0 \leq a_k^2 \leq \frac{c^2}{4}$ . 从而

$$\frac{c}{2} < \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} = a_{k+1} \leq \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} = \frac{c}{8}(4 - c) < 0$$

由数学归纳法知,  $a_n \in [\frac{c}{2}, 0], \forall n$ .

(2)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-2} &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-3})(a_{n-1} - a_{n-3}) \\ &= \frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-3})(a_{n-2} + a_{n-4})(a_{n-2} - a_{n-4}) \end{aligned}$$

由于  $\frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-3})(a_{n-2} + a_{n-4}) > 0$ ,  $a_n - a_{n-2}$  和  $a_{n-2} - a_{n-4}$  同号。即  $\{a_{2k-1} | k \geq 1\}$  和  $\{a_{2k} | k \geq 1\}$  是单调数列。因为

$$a_3 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a_2^2}{2} > 0$$

所以  $\{a_{2k-1} | k \leq 1\}$  是单调递增的。又因为

$$a_4 - a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}(a_3 - a_1) < 0,$$

所以  $\{a_{2k} | k \geq 1\}$  是单调递减的。

假设当  $k \rightarrow +\infty$  时,  $a_{2k-1} \rightarrow p, a_{2k} \rightarrow q$ . 在递推公式两端取极限, 我们有

$$\begin{aligned} p &= \frac{c}{2} + \frac{q^2}{2} \\ q &= \frac{c}{2} + \frac{p^2}{2} \end{aligned}$$

两式相减可得

$$p - q = \frac{1}{2}(q - p)(p + q) \Rightarrow (p - q)(p + q + 2) = 0.$$

如果  $p - q = 0$ , i.e.  $p = q$ , 则  $p = q = 1 - \sqrt{1-c}$ .

如果  $p + q + 2 = 0$ , 则将  $p = -2 - q$  代入第一个方程, 我们有  $(q + 1)^2 = -(c + 3)$ . 所以如果  $c > -3$ , 则  $(q + 1)^2 < 0$ , 从而无解。当  $c = -3$  时,  $q = -1$ , 从而  $p = q = -1$ .  $\square$

**16.** 数列  $\{u_n\}$  定义如下:  $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2, n \in \mathbb{N}$ . 问:  $a, b$  为何值时  $\{u_n\}$  收敛, 并求出其极限值。

解. 由递归定义可知:

$$u_{n+1} - a = (u_n - a)^2 + (u_n - a).$$

记  $v_n = u_n - a$ , 则  $v_1 = b - a$ . 如果  $\{u_n\}$  收敛, 则  $\{v_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

(1) 由于  $v_{n+1} - v_n = v_n^2 \geq 0$ ,  $\{v_n\}$  是单调增的。

(2) 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , 则  $v_n \leq 0, \forall n$ .

下面我们用归纳法来证明, 当  $v_1 \leq 0, v_1 + 1 \geq 0$  时,  $v_n \leq 0$  且  $v_n + 1 \geq 0 \forall n$ .

(1) 当  $n = 1$  时, 成立。

(2) 假设  $n = k$  时, 我们也有  $v_k \leq 0$  且  $v_k + 1 \geq 0$ .

(3) 我们证明  $n = k + 1$  时也成立。因为

$$v_{k+1} = v_k \cdot (v_k + 1),$$

所以  $v_{k+1} \leq 0$ . 另一方面

$$v_{k+1} + 1 = v_k^2 + v_k + 1 = \left(v_k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

由此可见, 当  $b \in [a - 1, a]$  时,  $\{u_n\}$  收敛。

**17.** 设  $A > 0, 0 < y_0 < A^{-1}, y_{n+1} = y_n(2 - Ay_n), n \in \mathbb{N}$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A^{-1}$ .

**证明.** 如果我们能证明  $0 < y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ , 则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 2 - Ay_n \geq 2 - AA^{-1} = 1 \Rightarrow y_{n+1} \geq y_n.$$

从而  $\{y_n\}$  是单调递增有上界的数列。故收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A^{-1}$ .

下面我们就证明  $y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . 考虑函数  $f(x) = x(2 - Ax)$ . 显然该函数在  $x = A^{-1}$  是取得最大值。即  $f(x) < A^{-1}, \forall x \in \mathbb{R}$ . 由于  $0 < y_1 < A^{-1}$ , 由归纳法,  $0 < y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**18.** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ .

**证明.** 由于  $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$ , 则  $a_n \neq 2$ , 从而  $a_1 \neq \frac{3}{2}$ . 我们现证无论  $a_1$  取何值, 都存在  $N$  使得  $a_N \leq 1$ .

(1) 如果  $a_1 \leq 1$ , 取  $N = 1, a_N = a_1 \leq 1$

(2) 如果  $a_1 > \frac{3}{2}$ , 则  $a_2 > 2, a_3 < 0$ . 于是取  $N = 3, a_N = a_3 < 0 \leq 1$ .

(3) 如果  $1 < a_1 < \frac{3}{2}$ . 记  $a_1 = 1 + h$ , 则

$$a_k = 1 + \frac{h}{1 - (k-1)h}, \quad k = 2, 3 \cdots$$

取  $k = \lceil \frac{1}{h} \rceil$ , 我们有

$$1 - (k-1)h \geq h > 0, \quad \frac{h}{1 - (k-1)h} \geq \frac{1}{2}.$$

从而取  $N = k + 2 = \lceil \frac{1}{h} \rceil + 2$ , 我们有  $a_{N-2} = a_k \geq \frac{3}{2}, a_N < 0 \leq 1$ .

综上, 我们不妨假设  $a_1 \leq 1$ . 下面我们可以用数学归纳法证明  $\{a_n\}$  是单调增的, 且  $a_n \leq 1, \forall n$ . 由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n},$$

我们可知当  $a_n < 1$  时,  $a_{n+1} > a_n$ . 又因为  $2 - a_n > 1 \rightarrow a_{n+1} \leq 1$ . 到此我们证明了  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  存在. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 则  $(2 - a)a = 1$ . 解方程知  $a = 1$ .  $\square$

**19.** 设数列  $\{a_n\}$  满足不等式  $0 \leq a_k \leq 100a_n (n \leq k \leq 2n, n = 1, 2, \dots)$ , 且无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$

**证明.** 显然  $a_{2n} \leq 100a_n, a_{2n} \leq 100a_{n+1}, \dots, a_{2n} \leq 100a_{2n-1}$ . 从而

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$ . 由夹逼定理知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2na_{2n} = 0$ .

同理,  $a_{2n-1} \leq 100a_n, a_{2n-1} \leq 100a_{n+1}, \dots, a_{2n-1} \leq 100a_{2n-2}$ . 将所有的不等式加起来, 我们有

$$0 \leq (2n-1)a_{2n-1} = a_{2n-1} + 2(n-1)a_{2n-1} \leq 2 * 100 \sum_{k=n}^{2n-2} a_k + a_{2n-1} \leq 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$ . 由夹逼定理知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0$ .

综上所述, 我们有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$   $\square$

**20.** 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

**证明.** 通过简单计算, 我们可以得知

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n-k+1}{n^2}\right), \quad \forall k \leq \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

另一方面

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n.$$

很显然

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n &= e^{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n &= e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由夹逼定理, 命题得证.  $\square$

21. 设  $a_1 > b_1 > 0$ , 令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: 数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$ .

证明. 很显然

$$b_n \leq \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \leq a_n, \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \leq \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1}, \\ b_n - b_{n-1} &= \frac{(a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \geq 0 \Rightarrow b_n \geq b_{n-1}. \end{aligned}$$

所以

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_2 \leq a_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  和  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  都存在。

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b,$$

$$a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1} = \dots = a_1 b_1 \Rightarrow ab = a_1 b_1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \Rightarrow a = \frac{a + b}{2} \Rightarrow a = b.$$

于是  $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$ . □

22. 当  $n \geq 3$  时, 证明:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

证明. 在证明该题之前, 我们先证明如下结论: 数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $n \geq 2, a_k \geq -1, k = 1, 2, \dots, n$  且它们有相同的符号, 则

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k.$$

我们用归纳法来证明此命题:

(1) 当  $n = 2$  时,  $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 \geq 1 + a_1 + a_2$ , 命题成立。

(2) 假设  $n = k$  时, 命题亦成立, i.e.  $\prod_{n=1}^k (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^k a_n$ .

(3) 下面证明当  $n = k + 1$  时, 命题亦成立。

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{k+1} (1 + a_n) &= \left( \prod_{n=1}^k (1 + a_n) \right) \cdot (1 + a_{k+1}) \\ &\geq (1 + a_1 + \dots + a_k) \cdot (1 + a_{k+1}) \quad (\text{因为 } 1 + a_{k+1} \geq 0) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n + \sum_{n=1}^k a_n a_{k+1} \\ &\geq 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n \end{aligned}$$

命题得证。



下面我们用上述命题来证明此题。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

首先, 由  $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1, \forall k \leq n$ , 我们可知

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

右边的不等式的得证。

另一方面, 应用上面证明的结论, 可知

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{n} = 1 - \frac{(k-1)k}{2n}.$$

于是

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n}$$

左边的不等式得证。 □

**23.** 设  $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), n = 2, 3, \cdots$ , 且

$$x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  (其中  $\prod_{k=1}^n$  表示从  $k=1$  到  $k=n$  的连乘积)。

解. 我们先计算

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \\ &= \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2 + 1}{2(a_1 + 1)} \cdot \frac{a_3 + 1}{3(a_2 + 1)} \cdots \frac{a_n + 1}{n(a_{n-1} + 1)} \\ &= \frac{a_n + 1}{n! a_1} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} a_1 &= 1! \\ a_2 &= 2! \left(1 + \frac{1}{1!}\right) \\ a_3 &= 3! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) \\ &\vdots \\ a_n &= n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) \end{aligned}$$

从而知,

$$a_n + 1 = n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

于是:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$

24. 设  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 用  $K_n$  表示使得  $H_k \geq n$  的最小下标, 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n}$

解. 我们记  $x_n = H_n - \ln n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = C$  (Euler 常数). 现在我们计算

$$x_{K_{n+1}} - x_{K_n} = \left( \frac{1}{K_{n+1} + 1} + \cdots + \frac{1}{K_{n+1}} \right) - \ln K_{n+1} + \ln K_n.$$

另一方面

$$1 - \frac{1}{K_n} \leq \left( \frac{1}{K_n + 1} + \cdots + \frac{1}{K_{n+1}} \right) < 1 + \frac{1}{K_{n+1}}.$$

从而由夹逼定理知

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{K_{n+1}} - x_{K_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \ln K_{n+1} + \ln K_n).$$

即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = e$ .

25. 设  $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2 (n \in \mathbb{N})$ ,

$$S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}.$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$ .

证明. 如果  $y_0 = 2$ , 则  $y_n = 2, \forall n > 0$ . 从而  $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}.$$

下面证明当  $y_0 > 2$  时结论亦成立. 取  $a = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$ . 简单计算可知

$$y_0 = a + \frac{1}{a}.$$

由此

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0^2 - 2 = \left( a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \\ y_2 &= y_1^2 - 2 = \left( a^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2 - 2 = a^4 + \frac{1}{a^4} \\ &\dots \\ y_n &= y_{n-1}^2 - 2 = \left( a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}} \right)^2 - 2 = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y_0 y_1 \cdots y_n &= \frac{1}{a - \frac{1}{a}} \left[ \left( a - \frac{1}{a} \right) \left( a + \frac{1}{a} \right) \left( a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdots \left( a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \right) \right] \\ &= \frac{a}{a^2 - 1} \left[ (a^{2^n})^2 - \left( \frac{1}{a^{2^n}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{a}{a^2 - 1} \frac{a^{2^{n+2}} - 1}{a^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{a^{2^{n+1}}}{a^{2^{n+2}} - 1} = \frac{a^2 - 1}{a} \left( \frac{1}{a^{2^{n+1}} - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+2}} - 1} \right).$$

由此可知

$$S_n = \frac{a^2 - 1}{a} \left( \frac{1}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+2}} - 1} \right).$$

进而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a^2 - 1}{a} \left( \frac{1}{a^2 - 1} + 1 \right) = a$ . 命题得证。  $\square$

**26.** 令数列  $\{b_n\}$  满足

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明: (1) 当  $n \geq 2$  时,  $b_n = \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$ .

**证明.** (1). 直接计算

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} b_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k)!}{n!} \left( 1 + \frac{k+1}{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k)!}{n!} + \sum_{k=1}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{n!(n-n)!}{n!} + \sum_{k=1}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{0!(n-0)!}{n!} - 2 \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} - 2 \\ &= 2b_n - 2 \end{aligned}$$

所以,  $b_n = \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1$ .

(2) 当  $n > 4$ , 我们有  $b_{n-1} > 2 \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{2n}{n-1}$ , 从而

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{b_{n-1}} < \frac{n+1}{2n} + \frac{n-1}{2n} = 1.$$

即从  $n > 4$  起, 数列  $\{b_n\}$  单调递减。另一方面, 显然  $b_n \geq 2, \forall n \geq 2$ . 由此可知  $\{b_n\}$  是收敛的。对

(1) 中的等式取极限可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$ .  $\square$

**27.** 设  $S_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ . 证明:

$$n^n \left[ 1 + \frac{1}{4(n-1)} \right] < S_n < n^n \left[ 1 + \frac{2}{e(n-1)} \right].$$

**证明.** 提取  $n^n$  可得

$$S_n = n^n \left[ 1 + \frac{1}{n^n} + \frac{2^2}{n^n} + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \right].$$

显然

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{1}{n^n} + \frac{2^2}{n^n} + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{(n-2)^{n-1}}{n^n} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} < \frac{2(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

我们不难证明  $\{(1 - \frac{1}{n})^n\}$  是单调增且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ . 所以

$$\frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}.$$

将上述不等式综合起来, 我们就证明了此题。 □

**28.** 设  $x_n > 0$ . 证明:

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n \geq e;$$

(2) 上式中的  $e$  为最佳常数。

**证明.** (1)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n \geq e$  等价于  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{n}{1+n} \right)^n \geq 1$ . 我们用反证法来证明该命题。如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{n}{1+n} \right)^n < 1,$$

则存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时, 我们有

$$\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{n}{1+n} < 1, \forall n > N.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{x_{N+1}}{N+1} - \frac{x_{N+2}}{N+2} &> \frac{x_1}{N+2} \\ \frac{x_{N+2}}{N+2} - \frac{x_{N+3}}{N+3} &> \frac{x_1}{N+3}, \\ &\dots \\ \frac{x_{n-1}}{n-1} - \frac{x_n}{n} &> \frac{x_1}{n}\end{aligned}$$

把以上的不等式加起来, 我们有

$$\frac{x_{N+1}}{N+1} > \frac{x_{N+1}}{N+1} - \frac{x_n}{n} > \sum_{k=N+1}^n \frac{x_1}{k} \rightarrow +\infty.$$

这显然与  $\frac{x_{N+1}}{N+1}$  是个有限数矛盾。从而假设不成立, 命题得证。

(2) 现证明对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在数列  $\{x_n\}$  使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n < e^{1+\varepsilon}.$$

我们取  $x_1 = \frac{\varepsilon}{2}, x_n = n$ , 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{\varepsilon}{2} + n + 1}{n} \right)^n = e^{1+\frac{\varepsilon}{2}} < e^{1+\varepsilon}.$$

这说明  $e^{1+\varepsilon}$  不是下确界。命题得证。 □

**29.** 设  $a_n > 0$ . 证明:  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \geq 1$ .

**证明.** 如果  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < 1$ , 则, 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时有,

$$n \left( \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}.$$

于是:

$$\frac{a_{N+1}}{N+1} > \frac{a_{N+1}}{N+1} - \frac{a_N}{N} > \sum_{k=N+2}^n \frac{1}{k}.$$

当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\sum_{k=N+2}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$ . 这与  $\frac{a_{N+1}}{N+1}$  是个有限数矛盾。从而假设不成立。 □

**30.** 设  $2a_{n+1} = 1 + b_n^2, 2b_{n+1} = 2a_n - a_n^2, 0 \leq b_n \leq \frac{1}{2} \leq a_n, n = 1, 2, \dots$ . 证明: 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  均收敛, 并求其极限之值。

**证明.** 很容易证得:  $a_n \leq \frac{5}{8}, \forall n$ .

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}(b_n + b_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{2}(2 - a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &\leq \frac{1}{2^2} |a_{n-1} - a_{n-2}| \\ |b_{n+1} - b_n| &\leq \frac{1}{2^2} |b_{n-1} - b_{n-2}| \end{aligned}$$

取  $A = \max\{|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|\}, B = \max\{|b_2 - b_1|, |b_3 - b_2|\}$ , 则

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n-1}| &\leq \frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}} A \\ |b_n - b_{n-1}| &\leq \frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}} B \end{aligned}$$

由此可见, 数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是 Cauchy 列。从而都收敛。

假设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ , 则

$$\begin{aligned} 2a &= 1 + b^2, \\ 2b &= 2a - a^2. \end{aligned}$$

解方程组可知,  $(b^2 + 2b - 1)(b^2 - 2b + 3) = 0$ . 解得  $b = \sqrt{2} - 1, a = 2 - \sqrt{2}$ . □



## 第二章 函数极限与连续

### 2.1 函数极限的概念

#### 2.1.1 练习题

1. 在定义 2.1.3 中就 24 种情形给出函数极限的定义。并配出相应的图形。

解. 不在此赘述。用到的时候在写。

2. 按函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{x} = 6;$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\Delta > \frac{1}{\varepsilon}$ , 当  $x > \Delta$  时, 有

$$\left| \frac{6x+5}{x} - 6 \right| = \left| \frac{5}{6x} \right| < \frac{1}{x} < \frac{1}{\Delta} < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{x} = 6.$

□

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x + 10) = 2;$$

证明. 对  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ , 当  $0 < |x - 2| < \delta$  时, 有

$$|(x^2 - 6x + 10) - 2| = |x - 2| \cdot |x - 4| < 3 \cdot |x - 2| < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 6x + 10) = 2.$

□

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1;$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\Delta = \max\{2 + \sqrt{5}, \frac{1}{\varepsilon}\}$ , 当  $x > \Delta$  时, 有

$$\left| \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} - 1 \right| = \left| \frac{-4}{x^2 - 1} \right| < \frac{4}{4x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\Delta} < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1.$

□

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0;$$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon^2}{4} \right\}$ , 当  $2 - \delta < x < 2$  时, 有

$$\left| \sqrt{4 - x^2} \right| = \left| \sqrt{(2 - x)(2 + x)} \right| < 2\sqrt{2 - x} < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ . □

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4;$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{11} \right\}$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{x^4 - 1}{x - 1} - 4 \right| = |x^3 + x^2 + x - 3| = |x - 1| \cdot |x^2 + 2x + 3| < 11 \cdot |x - 1| < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$ . □

(6)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6};$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min \{1, 30\varepsilon\}$ , 当  $0 < |x - 3| < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{x - 3}{x^2 - 9} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{x - 3}{6(x + 3)} \right| < \frac{|x - 3|}{30} < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$ . □

(7)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0;$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = 2\varepsilon^2$ , 当  $0 < x - 1 < \delta$  时, 有

$$\left| \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} \right| < \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$ . □

(8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = 0;$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\Delta = \max \left\{ 1, \frac{4}{\varepsilon^2} \right\}$ , 当  $x > \Delta$  时, 有

$$\left| \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} \right| = \frac{2}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}} < \frac{2}{\sqrt{x}} < \frac{2}{\Delta} < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = 0$ . □

(9)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}} = 1;$

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\Delta = \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 2 + \sqrt{6} \right\}$ , 当  $|x| > \Delta$  时, 有

$$\left| \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}} - 1 \right| = \frac{4}{\sqrt{x^4 - 4} + (x^2 - 2)} < \frac{4}{4|x|} < \frac{1}{\Delta} < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}} = 1$ . □



3. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . 用  $\varepsilon - \delta$  法证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2;$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|f(x)| < |a| + 1, \quad |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}.$$

于是,

$$|f^2(x) - a^2| = (|f(x)| + |a|) \cdot |f(x) - a| < (2|a| + 1) |f(x) - a| < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$ . □

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a} (a > 0);$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$f(x) > \frac{a}{4}, \quad |f(x) - a| < \frac{3\sqrt{a}}{2}\varepsilon.$$

于是,

$$\left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{a} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{a}} < \frac{2}{3\sqrt{a}} |f(x) - a| < \varepsilon$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a} (a > 0)$ . □

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{a}.$$

证明. 我们分两种情况证明此命题。

(a) 当  $a = 0$ . 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| < \varepsilon^3$ . 于是,

$$\left| \sqrt[3]{f(x)} \right| < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{a}$ .

(b) 当  $a \neq 0$ . 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$|f(x) - a| < \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \sqrt[3]{a^2} \varepsilon \right\}.$$

于是,  $f(x)a \geq 0, f^2(x) \geq 0$  且

$$\left| \sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{a} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)a} + \sqrt[3]{a^2}} < \frac{|f(x) - a|}{\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{a}$ .

命题得证. □

4. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ . 举例说明反之不成立. 问: 当且仅当  $a$  为何值时反之也成立?

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - a| < \varepsilon$ . 于是,

$$||f(x)| - |a|| \leq |f(x) - a| < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ .

设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

则,  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$ . 但  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在。

当  $a = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . □

**5.** 讨论下列函数在点 0 处的极限或左, 右极限:

(1)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ;

**解.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ .

(2)  $f(x) = [x]$ ;

**解.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$ .

(3)  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases}$

**解.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ . 从而  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**6.** 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ -ax, & x < 2. \end{cases}$

(1) 求  $f(2^+), f(2^-)$ ;

**解.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ , 当  $2 < x < 2 + \delta$  时, 有

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = (x + 2)(x - 2) < 5(x - 2) < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ .

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|+1}$ , 当  $2 - \delta < x < 2$  时, 有

$$|f(x) + 2a| = |-ax + 2a| = |a|(2 - x) < \frac{|a|\varepsilon}{|a|+1} < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2a$ .

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  存在,  $a$  应为何值。

**解.**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  存在  $\iff \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ . 所以  $a = -2$ .

**7.** 设  $f(x_0^-) < f(x_0^+)$ . 证明:  $\exists \delta > 0$ , s.t. 当  $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$  时, 有  $f(x) < f(y)$ .

**证明.** 取  $\varepsilon < \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 当  $x_0 - \delta_1 < x < x_0$  时, 有

$$f(x) - f(x_0^-) < \varepsilon \Rightarrow f(x) < \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

对上述的  $\varepsilon$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 当  $x_0 < y < x_0 + \delta_2$  时, 有

$$f(y) - f(x_0^+) > -\varepsilon \Rightarrow f(y) > \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 当  $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$  时, 有  $f(x) < \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} < f(y)$ .  $\square$

**8.** 设  $f$  在  $(-\infty, x_0)$  内单调增, 且有一数列  $\{x_n\}$ , 适合  $x_n < x_0 (n \in \mathbb{N})$ ,  $x_n \rightarrow x_0^-$  及  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a$ . 证明:  $f(x_0^-) = a = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x)$ .

**证明.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$a - \varepsilon < f(x_n) < a + \varepsilon.$$

取  $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_0 - x_2, \dots, x_0 - x_{N+1}\}$ , 我们现在考虑  $x$  满足  $x_0 - \delta < x < x_0$ .

(1) 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0^-$  且  $x_n < x_0$ , 则存在  $N_1 > N$  使得

$$x_0 - x_{N_1} < \frac{x_0 - x}{2} \Rightarrow x_{N_1} > \frac{x_0 + x}{2} > x.$$

(2) 从而  $x_{N+1} < x < x_{N_1}$ . 由于  $f(x)$  单调增,  $f(x_{N+1}) \leq f(x) \leq f(x_{N_1})$ .

于是,

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

所以,  $f(x_0^-) = a$ . 类似地, 我们也可以证明  $a = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x)$ .  $\square$

**9.** 用肯定的语气表示  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$ .

**解.** 存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 对  $\forall \delta > 0$ , 存在  $x'$  满足  $0 < |x' - x_0| < \delta$ ,  $|f(x') - a| > \varepsilon_0$ .

**10.**  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset [0, 1]$  为有限集, 且  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ . 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in A_n, \\ 0, & x \in [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}$$

$\forall x_0 \in [0, 1]$ , 求  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**解.** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 当  $n > N$  时, 有

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

对于给定的  $x_0 \in [0, 1]$ , 取  $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0 - x'|}{2} \mid x' \in \bigcup_{n=1}^N A_n \right\}$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$x \in [0, 1] - \bigcup_{n=1}^N A_n.$$

于是,

$$|f(x)| < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

11. 叙述函数极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  的归结原理, 并应用它证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  都不存在。

解. 归结原理: 对任意的数列  $\{x_n\}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a,$$

则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 。

对于  $\sin x$ , 我们考察子列  $a_n = (2n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$  和  $b_n = (2n + \frac{3}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$ . 显然

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(b_n) = -1.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  不存在。

对于  $\cos x$ , 我们考察子列  $a_n = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$  和  $b_n = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{N}$ . 显然

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(b_n) = -1.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  不存在。

12. (1) 叙述极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  的 *Cauchy* 准则;

解. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\Delta > 0$ , 当  $x_1 > \Delta, x_2 > \Delta$  时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(2) 根据 *Cauchy* 准则叙述  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在的充要条件, 并应用它证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  不存在。

解.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在  $\iff$  存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 对  $\forall \Delta > 0$ , 存在  $x_1 > \Delta, x_2 > \Delta$  使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0.$$

取  $\varepsilon_0 = 1$ , 对  $\forall \Delta > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{\Delta}{2\pi} \right\rceil$ ,  $x_1 = (2N + \frac{1}{2})\pi > \Delta, x_2 = (2N + \frac{3}{2})\pi > \Delta$ . 于是

$$|\sin(x_1) - \sin(x_2)| = 2 > \varepsilon_0.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  不存在。

同理可以证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  不存在。

13. 设  $f$  为周期函数, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 证明  $f(x) \equiv 0$ 。

证明. 假设  $f$  的周期为  $T$ , 我们只需证明  $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, T)$ . 我们用反证法来证明此命题。

设  $\exists x_0 \in [0, T)$  使得  $f(x_0) \neq 0$ . 考虑数列  $\{x_0 + nT\}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_0 + nT) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + nT) = f(x_0) \neq 0.$$

由归结原理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ . 这与假设矛盾, 从而  $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, T)$ . □

**14.** 设  $f$  在  $U^o(x_0)$  内有定义。证明:  $\forall \{x_n\} \subset U^o(x_0)$  且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$  都存在 (实数, 或  $+\infty$ , 或  $-\infty$ ), 则所有这些极限都相等。

**证明.** (反证法): 假设  $\{x_n^1 \subset U^o(x_0)\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^1 = x_0$  和  $\{x_n^2 \subset U^o(x_0)\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 = x_0$ , 但

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^1) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^2)$ . 我们考虑数列  $x_n^3 = \begin{cases} x_k^1, & n = 2k-1 \\ x_k^2, & n = 2k. \end{cases}$  显然数列  $\{x_n^3\}$  满足条件

$$\{x_n^3 \subset U^o(x_0)\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^3 = x_0,$$

但是由归结原理,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^3)$  不存在。这与命题假设矛盾。从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^2)$ 。命题得证。□

**15.** 设  $f$  为定义  $[a, +\infty)$  在上的增 (减) 函数。证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在有限的充要条件是  $f$  在  $[a, +\infty)$  上有上 (下) 界。

**证明.** 我们只证明  $f$  是单增函数的情形。

( $\Rightarrow$ ) 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ . 我们证明  $f(x) \leq a$ . 假设存在  $x_0$  使得  $f(x_0) > b$ . 考察子列  $\{x_0 + n\}$ . 由于  $f$  是单增的, 有

$$f(x_0 + n) \geq f(x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + n)$  不存在, 则由归结原理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在。这与假设矛盾。

(2) 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + n)$  存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + n) \geq f(x_0) > b.$$

这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  矛盾。

于是,  $f(x) \leq b, \forall x \in [a, +\infty)$ .

( $\Leftarrow$ ) 设  $f(x) < M, \forall x \in [0, +\infty)$ . 取一个子列  $\{x_n\}$  满足条件

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

我们可以从中取一个单调增的子列  $\{x_{n_k}\}$  满足条件

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

由于  $f$  是单调增的,  $f(x_{n_k})$  也是单调增。从而  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k})$  存在。设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = b$ . 由此我们可以推出  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$ . 同理, 另取一个子列  $\{x'_n\}$  满足条件

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = +\infty.$$

从中取一个单调增的子列  $\{x'_{n_k}\}$  满足条件

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x'_{n_k} = +\infty$$

且

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x'_{n_k}) = b', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = b'$$

将  $\{x_{n_k}\}$  和  $\{x'_{n_k}\}$  合起来, 组成一个新的递增列, 记作  $\{y_n\}$ . 于是,  $\{f(y_n)\}$  收敛。由归结原理知,  $b = b'$ .

自此我们证明了任何数列  $\{x_n\}$ , 如果满足  $x_n \rightarrow +\infty$ , 则  $f(x_n) \rightarrow b$ . 再次利用归结原理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在。□

16. 设  $f$  为  $U^o(x_0)$  上的单调增函数, 证明:  $f(x_0^-)$  与  $f(x_0^+)$  均存在且有限, 且

$$f(x_0^-) = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x), \quad f(x_0^+) = \inf_{x \in U_+^o(x_0)} f(x).$$

证明. 取  $x_1 \in U_-^o(x_0), x_2 \in U_+^o(x_0)$ , 由  $f$  是单增函数知,

$$f(x) \leq f(x_2), \forall x \in U_-^o(x_0),$$

$$f(x) \geq f(x_1), \forall x \in U_+^o(x_0).$$

所以,

$$f(x_1) \leq \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x) \leq \inf_{x \in U_+^o(x_0)} f(x) \leq f(x_2).$$

取单调增数列  $\{a_n \subset U_-^o(x_0)\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0^-$ . 于是,  $\{f(a_n)\}$  单调增, 且有上界. 从而它收敛. 记  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = A$ . 由上确界的定义知,  $A \leq \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x)$ . 设  $\{b_n \subset U_+^o(x_0)\}$  是一个满足条件  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0^+$  的子列. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$A - \varepsilon < f(a_n) < A + \varepsilon.$$

另一方面取  $\varepsilon' = x_0 - a_{N+1}$ , 存在  $N'$ , 当  $n > N'$  时, 有

$$x_0 - b_n < \varepsilon'.$$

又由于  $a_n \rightarrow x_0^-$ , 则对任意满足上式的  $b_n$ , 存在  $m > N + 1$  使得

$$a_{N+1} < b_n < a_m.$$

于是

$$A - \varepsilon < f(a_{N+1}) \leq f(b_n) \leq f(a_m) < A + \varepsilon.$$

有极限的定义知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \leq A.$$

由归结原理和上确界的定义知,

$$f(x_0^-) = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x).$$

类似的办法可证  $f(x_0^+) = \inf_{x \in U_+^o(x_0)} f(x)$ . □

### 2.1.2 思考题

17. (1) 设函数  $f$  在  $(0, +\infty)$  上满足方程  $f(2x) = f(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ . 证明:  $f(x) = a$ .

证明. (反证法) 设  $x_0 \in (0, +\infty), f(x_0) \neq a$ . 由函数方程式知,

$$f(nx_0) = f(x_0).$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx_0) = f(x_0).$$

由归结原理知, 这与假设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  矛盾. 所以,  $f(x) = a, \forall x \in (0, +\infty)$ . □

(2) 设函数  $f$  在  $(0, +\infty)$  上满足方程  $f(x^2) = f(x)$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1)$$

证明:  $f(x) \equiv f(1), x \in (0, +\infty)$ .

证明. 如果  $x_0 < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0^{2^n} = 0.$$

由函数方程式和归结原理知:

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0^{2^n}) = f(1).$$

如果  $x_0 > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0^{2^n} = +\infty.$$

由函数方程式和归结原理知:

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0^{2^n}) = f(1).$$

所以,  $f(x) \equiv f(1), x \in (0, +\infty)$ . □

18. 设函数  $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  在任意有限区间  $(a, b)$  内有界, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A.$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$ .

证明. 设  $|f(x)| < M, \forall x \in (a, a+1)$ . 记  $r = x - [x]$ .

$$f(x) - f([a] + r) = \sum_{k=[a]}^{[x]-1} (f(k+1+r) - f(k+r)).$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f([a] + r)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f([a] + r)}{[x] - [a]} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x] - [a]}{x} \\ &= A \end{aligned}$$

命题得证. □

19. 设  $a > 1, b > 1$  为两个常数, 函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  在  $x = 0$  的近旁有界, 且  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $f(ax) = bf(x)$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

证明. 由函数的定义可知  $f(0) = 0$ . 设  $f$  在  $(-\delta_0, \delta_0)$  上有界. 记  $|f(x)| < M, \forall x \in (-\delta_0, \delta_0)$ . 对  $\forall x \rightarrow 0$ , 存在  $N$  使得

$$a^n x \in (-\delta_0, \delta_0), n = 1, 2, \dots, N. \quad a^{N+1}x \notin (-\delta_0, \delta_0).$$

显然当  $x \rightarrow 0$  时,  $N \rightarrow +\infty$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{f(a^N x)}{b^N} = 0.$$

命题得证. □

## 2.2 函数极限的性质

### 2.2.1 练习题

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-2x^3}{1+x^4};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-2x^3}{1+x^4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x-2x^3)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^4)} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x-1};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x}-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x-1};$$

解.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-m-1}+\dots+1}{x^{-m}} = -m, & m < 0; \\ 0, & m = 0; \\ 1, & m = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^{m-1}+\dots+1) = m, & m > 1. \end{cases}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1};$$

解.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \begin{cases} \text{无定义}, & n = 0; \\ 0, & m = 0; \\ \frac{m}{n}, & m \neq 0, n \neq 0. \end{cases}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x};$$

解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1+x)^{\frac{1}{|m|}}}{x} = -\frac{1}{|m|} = \frac{1}{m}, & m < 0; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[m]{(1+x)^{m-1}+\dots+1}} = \frac{1}{m}, & m > 0 \end{cases}$$



所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} = \frac{1}{m}$ .

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^m - m}{x - 1}$$

解.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^m - m}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x+1) + \cdots + (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)] = \frac{m(m+1)}{2}$ .

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

解. 我们对  $n, m$  分情况讨论:

(a) 当  $m=0$  或者  $n=0$  时, 分子为 0, 于是极限为 0.

(b) 当  $m=n=1$  或者  $m=n=-1$  是, 分子为 0, 于是极限为 0.

(c) 当  $m=1, n=-1$  时,

$$(1+x)^{-1} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-1} - (1-x)}{x^2} = 1$ .

(d) 当  $m=-1, n=1$  时,

$$(1-x) - (1+x)^{-1} = \frac{-x^2}{1+x}.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - (1+x)^{-1}}{x^2} = -1$ .

(e) 当  $m > 0, n < 0$  时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = \frac{1 - (1+mx)^{|n|}(1+nx)^m}{(1+mx)^{|n|}}.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = n^2 m^2 - C_{|n|}^2 m^2 - C_m^2 n^2$ .

(f) 当  $m < 0, n > 0$  时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = \frac{(1+mx)^n(1+nx)^{|m|} - 1}{(1+nx)^{|m|}}.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_n^2 m^2 + C_{|m|}^2 n^2 - n^2 m^2$ .

(g) 当  $m > 0, n > 0$  时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = (C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2)x^2 + \cdots$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2$ .

(h) 当  $m < 0, n < 0$  时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = \frac{(1+nx)^{|m|} - (1+mx)^{|n|}}{(1+mx)^{|n|}(1+nx)^{|m|}} = \frac{(C_{|m|}^2 n^2 - C_{|n|}^2 m^2)x^2 + \cdots}{(1+mx)^{|n|}(1+nx)^{|m|}}.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_{|m|}^2 n^2 - C_{|n|}^2 m^2$ .

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - (1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m]{1+nx}}{x \cdot \sqrt[m]{1+nx}} = -\frac{n}{|m|}, & m < 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m]{1+nx}}{\sqrt[m]{(1+nx)^{m-1}} + \sqrt[m]{(1+nx)^{m-2}} + \cdots + 1} = \frac{n}{m}, & m > 0. \end{cases}$$

$$\text{即, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} = \frac{n}{m}.$$

$$\text{同理, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} = \frac{m}{n}. \text{ 所以,}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - (1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} \\ &= \frac{n}{m} - \frac{m}{n} \\ &= \frac{n^2 - m^2}{nm}. \end{aligned}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{x} (a > 0);$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{a^2 + x} + a)} = \frac{1}{2a}.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}} = \frac{3^{70}8^{20}}{5^{90}}.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} (m, n \in \mathbb{N});$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \cdots + 1)}{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}} + \cdots + 1)} = \frac{n}{m}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x};$$

解. 无论  $m > 0$  或者  $m < 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} = \frac{\alpha}{m}.$$

同理可知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \frac{\beta}{n}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}(\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} \\ &= \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} \\ &= \frac{n\alpha + m\beta}{mn}. \end{aligned}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(a+x)(b+x)} - \sqrt{(a-x)(b-x)});$$

解.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(a+x)(b+x)} - \sqrt{(a-x)(b-x)}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(a+b)x}{\sqrt{(a+x)(b+x)} + \sqrt{(a-x)(b-x)}} = a+b.$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) (m, n \in \mathbb{N});$$

解. 记  $A = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, B = \sum_{k=0}^{m-1} x^k$ . 显然

$$A - n = \sum_{k=1}^{n-1} (x^k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j,$$

$$B - m = \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - 1) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} &= \frac{1}{(1-x)AB} (mA - nB) \\ &= \frac{1}{(1-x)AB} (m(A-n) - n(B-m)) \\ &= \frac{1}{AB} \left( m \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j - n \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j \right). \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{1}{mn} \left( m \frac{n(n-1)}{2} - n \frac{m(m-1)}{2} \right) = \frac{n-m}{2}.$

$$(18) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} (n \in \mathbb{N});$$

解. 当  $n=1$  时, 分子为 0, 所以极限为 0. 当  $n>1$  时,

$$\begin{aligned} (x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a) &= (x-a) \sum_{k=0}^{n-2} a^k (x^{n-1-k} - a^{n-1-k}) \\ &= (x-a)^2 \sum_{k=0}^{n-2} a^k \sum_{j=0}^{n-2-k} a^j x^{n-2-k-j}. \end{aligned}$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} = a^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k) = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}.$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} (n \in \mathbb{N});$$

解. 我们先计算分子:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - (n+1)x + n &= x(x^n - 1) - n(x-1) \\ &= (x-1) \sum_{k=1}^n (x^k - 1) \\ &= (x-1)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} x^j. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} (n \in \mathbb{N});$$

解. 分子有理化,

$$1 - \sqrt[l]{x} = \frac{1-x}{\sum_{j=0}^{l-1} \sqrt[l]{x^j}}.$$

所以,

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{\prod_{l=2}^n \left( \sum_{j=0}^{l-1} \sqrt[l]{x^j} \right)}.$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

2. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ .

(1) 若  $a > b$ , 则在某  $U^o(x_0)$  内有  $f(x) > g(x)$ ;

证明. 取  $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ . 由函数极限定义知, 存在一个空心邻域  $U^o(x_0, \delta_1)$  使得

$$g(x) - b < \varepsilon \Rightarrow g(x) < \frac{a+b}{2}, \quad \forall x \in U^o(x_0, \delta_1).$$

取  $U^o(x_0, \delta) \subset U^o(x_0, \delta_1)$  使得

$$f(x) - a > -\varepsilon \Rightarrow f(x) > \frac{a+b}{2}, \quad \forall x \in U^o(x_0, \delta).$$

所以,  $f(x) > g(x), \forall x \in U^o(x_0, \delta)$ . □

(2) 若在某  $U^o(x_0)$  内有  $f(x) < g(x)$ , 问: 是否必有  $a < b$ ? 说明理由.

解. 不会是严格  $a < b$ . 例如在 0 的空心邻域  $U^o(0, \frac{1}{2})$ ,  $1 + \frac{x^2}{3} = f(x) < g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ . 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ .

3. 求下列极限 ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4};$$

解. 取  $\delta = \frac{1}{2}$ , 当  $2 < x < 2 + \delta$  时,  $[x] = 2$ . 所以,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4} = 0$ .

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]^2 + 4}{x^2 + 4};$$

解.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]^2 + 4}{x^2 + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} ([x]^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 4)} = \frac{5}{8}$ .

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[4x]}{1+x};$$

**证明.** 显然  $[4x] = 3, \forall x \in (1 - \frac{1}{4}, 1)$ . 所以,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[4x]}{1+x} = \frac{3}{2}$ . □

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n};$$

**证明.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n} = -1$  □

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n};$$

**证明.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n} = 1$ . □

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x};$$

**证明.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1} = \frac{1}{n}$ . □

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x};$$

**证明.** 由于  $x - 1 \leq [x] \leq x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$ . □

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}};$$

**证明.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1$ . □

4. 设  $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ . 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m},$$

其中  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**证明.** 分子有理化,

$$\frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}}{\sqrt[m]{(1+p(x))^{m-1}} + \sqrt[m]{(1+p(x))^{m-2}} + \cdots + 1}.$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}$ . □

5. 定出常数  $a$  与  $b$ , 使得下列等式成立:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0;$$

**解.**  $\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = \frac{(1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ . 如果极限为 0, 则  $1-a=0, a+b=0$ . 于是,  $a=1, b=-1$ .

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0;$$

证明. 分子有理化

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b = \frac{(1 - a^2)x^2 - (1 + 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}.$$

如果极限为 0, 则  $1 + a \neq 0, 1 - a^2 = 0, 1 + 2ab = 0$ . 于是,  $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ .  $\square$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0;$$

证明. 分子有理化

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b = \frac{(1 - a^2)x^2 - (1 + 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}.$$

如果极限为 0, 则  $1 - a \neq 0, 1 - a^2 = 0, 1 + 2ab = 0$ . 于是,  $a = -1, b = \frac{1}{2}$ .  $\square$

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} (b \neq 0);$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h};$$

解. 利用三角函数性质, 有

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h = -2 \sin^2 \frac{h}{2} \sin x + \cos x \sin h.$$

$$\text{所以, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{3+x} \right)^x;$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{3+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{3+x} \right)^{-\frac{3+x}{2} \cdot \frac{-2x}{3+x}} = e^{-2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{\sin^2 x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x};$$

$$\text{解. 令 } y = \arctan x, \text{ 则 } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x};$$

解.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a};$$

解. 利用三角函数性质:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 a &= (\sin x + \sin a)(\sin x - \sin a) \\ &= (\sin x + \sin a) \left[ \sin(x - a) \cos a - 2 \sin a \sin^2 \left( \frac{x - a}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a} = 2 \sin a \cos a$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1};$$

解.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = 2$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}.$$

证明. 利用三角函数性质:  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ . 于是,

$$\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left( \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \sqrt{2}.$

□

7. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1});$$

解. 利用三角函数性质:

$$\sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi) = \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) \cos n\pi \Rightarrow \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = \frac{\sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi)}{\cos n\pi}.$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi)}{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{(\sqrt{n^2+1}+n)} = 0.$  于是,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = 0.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n});$$

解. 利用三角函数性质,  $\sin^2(\pi \sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n} - n\pi) = \sin^2 \left( \pi \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \right).$  所

以,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n}) = 1.$

8. (1) 证明:  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x}]$ ;

**证明.** 利用三角函数性质,

$$\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x} = \sin \left( \frac{k}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}} \right) \cos \sqrt{x} - 2 \sin \sqrt{x} \sin^2 \left( \frac{k}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right).$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x}] = 0$ . □

(2) 设常数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ , 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \sin \sqrt{x+k} = 0.$$

**证明.** 显然

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin \sqrt{x+k} = \sum_{k=2}^n a_k [\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x+1}].$$

由上题知, 这里和的每一项都收敛于 0. 所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \sin \sqrt{x+k} = 0$ . □

**9. 证明:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

**证明.** 当  $x = 0$  时,  $\cos \frac{x}{2^k} = \cos 0 = 1$ . 所以, 极限为 1. 下面证  $x \neq 0$  的情形.

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \sin x / \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{2^n} = \left( \frac{x}{2^n} / \sin \frac{x}{2^n} \right) \cdot \left( \frac{\sin x}{x} \right).$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \frac{\sin x}{x}$ . □

**10. 计算极限:**

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}};$

**解.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{2x} \cdot (-2)} = e^{-2}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x;$

**解.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot \frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}};$

**解.** 利用三角函数性质,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} &= \left( 1 + \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin x) \cos x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \left( 1 + \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin x) \cos x} \right)^{\frac{(1 + \sin x) \cos x}{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin x) \cos x}}. \end{aligned}$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = 1$ .



$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

解. 利用三角函数性质,

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cos x \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x}{\cos 2x}.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cos x \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x}{x^2 \cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x};$$

解. 利用三角函数性质:

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}.$$

$$\begin{aligned} (\tan x)^{\tan 2x} &= \left( 1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)^{\frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}} \\ &= \left[ \left( 1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{(\sin x - \cos x)}} \right]^{\frac{-2 \sin x}{(\sin x + \cos x)}} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$$

解. 令  $x = \frac{\pi}{2} + y$ .

$$\begin{aligned} (\sin x)^{\tan x} &= \left[ \frac{1}{(1 + (\cos y - 1))^{\frac{1}{\cos y - 1}}} \right]^{\frac{(1 - \cos y) \cos y}{\sin y}} \\ &= \left[ \frac{1}{(1 + (\cos y - 1))^{\frac{1}{\cos y - 1}}} \right]^{\frac{\sin \frac{y}{2} \cos y}{\cos \frac{y}{2}}} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

解. 令  $y = \frac{1}{x}$ .

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y + \cos y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos y - 1}{y} = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\sin y + \cos y)^{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[ (1 + \sin y + \cos y - 1)^{\frac{1}{\sin y + \cos y - 1}} \right]^{\frac{\sin y + \cos y - 1}{y}} \\ &= e \end{aligned}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}};$$

解. 利用三角函数公式  $\cos \sqrt{x} - 1 = -2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (1 + \cos \sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \right]^{\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (1 + \cos \sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \right]^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}};$$

解. 和上题类似,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (1 + \cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1)^{\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1} \right]^{n(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (1 + \cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1)^{\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1} \right]^{-\frac{x^2}{2} \cdot \left( \frac{\sin \frac{x}{2\sqrt{n}}}{\frac{x}{2\sqrt{n}}} \right)^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}};$$

解. 由例 2.2.13(2) 知,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{1+x}} - 1}{\frac{x}{1+x}} &= 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1))^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)} 2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1))^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)} \frac{2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)}{\frac{x}{1+x}} \left( \frac{x^2+1}{1+x} \right)} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}, a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

解. 利用三角函数的性质,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} &= \left( 1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{(x-a) \sin a}} \\ &= \left( 1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin(x-a) \cos a}{(x-a) \sin a} \cdot \frac{\sin a (\cos(x-a) - 1)}{(x-a) \sin a}}. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}}.$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2};$$

解. 记  $A = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$ , 则

$$\sqrt[2^n]{2} A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}.$$

$$\text{于是, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}} = 2.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x}.$$

解. 令  $(1+x)^\mu = e^y$ , 则  $x \rightarrow 0 \iff y \rightarrow 0$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{(\sqrt[\mu]{e})^y - 1} = \mu.$$

11. 设  $x_n = \underbrace{\sin \cdots \sin}_{n \text{ 次}} a$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

证明. 对  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \underbrace{\sin \cdots \sin}_{(n+1) \text{ 次}} a = x_{n+1} \leq x_n = \underbrace{\sin \cdots \sin}_{n \text{ 次}} a, \quad \forall n \geq 2.$$

即  $\{x_n\}$  是单调减有下界的数列, 故收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ , 则

$$b = \sin b, \quad 0 \leq b \leq \sin 1.$$

解方程得  $b = 0$ . □

## 2.2.2 思考题

12. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$ . (提示:  $e = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n!n}$ ,  $\frac{n}{n+1} < \theta_n < 1$ )

证明. 根据提示, 计算

$$en! = m + \frac{\theta_n}{n}.$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin 2\pi \frac{\theta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \theta_n \cdot \frac{\sin 2\pi \frac{\theta_n}{n}}{2\pi \frac{\theta_n}{n}} = 2\pi$ . □

13. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ [(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}} \right\} = \frac{1}{e}$ .

证明. 记

$$A = n \cdot \left( \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n!}} - 1 \right), \quad B = \frac{1}{n+1} \left( \ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} + \ln \frac{n+1}{n} \right).$$

简单计算可以

$$A = nB \cdot \frac{e^B - 1}{B}.$$

于是,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A = \lim_{n \rightarrow +\infty} nB \cdot \frac{e^B - 1}{B} = 1$ . 所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ [(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot A = \frac{1}{e}.$$

命题得证. □

14. 设  $|x| < 1$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n} \right)^n = e^{\frac{1}{1-x}}.$$

**证明.** 因为  $|x| < 1$ , 级数  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ . 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1-x^{n+1}}{n(1-x)} \right)^{\frac{n(1-x)}{1-x^{n+1}} \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} \\ &= e^{\frac{1}{1-x}}. \end{aligned}$$

命题得证。 □

**15.** 设  $f$  与  $g$  为两个周期函数, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ , 证明  $f = g$ .

**证明.** 设  $f$  和  $g$  的周期分别为  $T_f$  和  $T_g$ , 则  $f(x) = f(x + nT_f)$ ,  $g(x) = g(x + nT_g)$ . 考虑子列  $\{x + nT_f\}$  和  $x + nT_g$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x + nT_f) - g(x + nT_f)] = 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x + nT_f).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x + nT_g) - g(x + nT_g)] = 0 \Rightarrow g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT_g).$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (g(x + nT_f) - f(x + nT_g)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (g(x + nT_f + nT_g) - f(x + nT_g + nT_f)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

命题得证。 □

## 2.3 无穷小 (大) 量的数量级

### 2.3.1 练习题

**1.** 证明下列各式:

(1)  $2x - x^2 = O^*(x)(x \rightarrow 0);$

**证明.** 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2.$$

所以,  $2x - x^2 = O^*(x)(x \rightarrow 0).$  □

(2)  $x \sin \sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}}(x \rightarrow 0^+);$

**证明.** 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

所以,  $x \sin \sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}}(x \rightarrow 0^+).$  □

(3)  $2x^3 + x^2 = O^*(x^3)(x \rightarrow \infty);$

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x} = 2.$$

所以,  $2x^3 + x^2 = O^*(x^3)(x \rightarrow \infty)$ . □

(4)  $x \sin \sqrt{x} = o(x^{\frac{5}{4}})(x \rightarrow 0^+)$ ;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \sqrt{x}}{x^{\frac{5}{4}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{x} = 0.$$

所以,  $x \sin \sqrt{x} = o(x^{\frac{5}{4}})(x \rightarrow 0)$ . □

(5)  $\sqrt{1+x} - 1 = o(1)(x \rightarrow 0)$ ;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} = 0.$$

所以,  $\sqrt{1+x} - 1 = o(1)(x \rightarrow 0)$ . □

(6)  $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}(x \rightarrow 0)$ ;

证明. 因为,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} = 1.$$

所以,  $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}(x \rightarrow 0)$ . □

(7)  $\frac{1}{1+\alpha(x)} = 1 - \alpha(x) + o(\alpha(x))(x \rightarrow x_0)$ , 其中  $\alpha(x) = o(1)(x \rightarrow x_0)$ ;

证明. 因为,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{1+\alpha(x)} - 1 + \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{1+\alpha(x)} = 0.$$

所以,  $\frac{1}{1+\alpha(x)} = 1 - \alpha(x) + o(\alpha(x))(x \rightarrow x_0)$ . □

(8)  $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)(x \rightarrow 0), n \in \mathbb{N}$ ;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n C_n^k x^{k-1} = 0.$$

所以,  $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)(x \rightarrow 0)$  □

(9)  $(1+x)^n = 1 + nx + O^*(x^2)(x \rightarrow 0), n \in \mathbb{N}$ ;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n C_n^k x^{k-2} = C_n^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=3}^n C_n^k x^{k-1} = C_n^2.$$

所以,  $(1+x)^n = 1 + nx + O^*(x^2)(x \rightarrow 0)$ . □

$$(10) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} (x \rightarrow +\infty).$$

证明. 因为,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} (x \rightarrow +\infty)$ . □

2. 确定  $\alpha$  的值, 使下列函数与  $x^\alpha$  当  $x \rightarrow 0$  时为同阶无穷小量:

$$(1) \sin 2x - 2 \sin x;$$

解. 因为  $\sin 2x - 2 \sin x = 2 \sin x (\cos x - 1) = -4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$ , 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3} = -1.$$

所以,  $\sin 2x - 2 \sin x$  与  $x^3$  当  $x \rightarrow 0$  时为同阶无穷小量.

$$(2) \frac{1}{1+x} - (1-x);$$

解. 因为  $\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$ , 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1-x)}{x^2} = 1.$$

所以,  $\frac{1}{1+x} - (1-x)$  与  $x^2$  当  $x \rightarrow 0$  时为同阶无穷小量.

$$(3) \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x};$$

解. 因为  $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x} = \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \sin x})}$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \sin x})} = 1.$$

所以,  $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}$  与  $x$  当  $x \rightarrow 0$  时为同阶无穷小量.

$$(4) \sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}.$$

解. 因为  $\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3} = \sqrt[5]{x^2} \sqrt[5]{3 - 4x}$ , 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{3 - 4x} = \sqrt[5]{3}.$$

所以,  $\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}$  与  $x^{\frac{2}{5}}$  当  $x \rightarrow 0$  时为同阶无穷小量.

3. 确定  $\alpha$  的值, 使下列函数与  $x^\alpha$  当  $x \rightarrow \infty$  时为同阶无穷大量:

$$(1) \sqrt{x^2 + x^5};$$

解. 因为  $\sqrt{x^2+x^5} = \sqrt{x^5}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}$ , 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x^5}}{\sqrt{x^5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x^2+x^5}$  与  $x^{\frac{5}{2}}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为同阶无穷大量.

(2)  $x + x^2(2 + x^{-1} \sin x)$ ;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2(2 + x^{-1} \sin x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + 2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2.$$

所以,  $x + x^2(2 + x^{-1} \sin x)$  与  $x^2$  当  $x \rightarrow \infty$  时为同阶无穷大量.

(3)  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$  与  $\sqrt{x}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为同阶无穷大量.

(4)  $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$ .

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5}{x^2(x^3 - 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 2.$$

所以,  $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$  与  $x^2$  当  $x \rightarrow \infty$  时为同阶无穷大量.

4. 求下列无穷小或无穷大的阶:

(1)  $x - 5x^3 + x^{10} (x \rightarrow 0)$ ;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 5x^3 + x^{10}}{x} = 1,$$

所以,  $x - 5x^3 + x^{10}$  当  $x \rightarrow 0$  时为 1 阶无穷小量.

(2)  $x - 5x^3 + x^{10} (x \rightarrow +\infty)$ ;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 5x^3 + x^{10}}{x^{10}} = 1,$$

所以,  $x - 5x^3 + x^{10}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为 10 阶无穷大量.

(3)  $x^3 - 3x + 2 (x \rightarrow 1)$ ;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3.$$

所以,  $x^3 - 3x + 2$  当  $x \rightarrow 1$  时为 2 阶无穷小量.

$$(4) \sqrt{x \sin x} (x \rightarrow 0);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{x} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x \sin x}$  当  $x \rightarrow 0$  时为 1 阶无穷小量.

$$(5) \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} (x \rightarrow 0);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 2.$$

所以,  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$  当  $x \rightarrow 0$  时为 1 阶无穷小量.

$$(6) \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}};$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x^5}}} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为 1 阶无穷大量.

$$(7) \frac{x+1}{x^4+1} (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 1.$$

所以,  $\frac{x+1}{x^4+1}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为 3 阶无穷小量.

$$(8) \frac{2x^5}{x^3-3x+1} (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^2(x^3-3x+1)} = 2.$$

所以,  $\frac{2x^5}{x^3-3x+1}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为 2 阶无穷大量.

$$(9) \frac{1}{\sin \pi x} (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x-1}{\sin \pi(x-1)} = -\frac{1}{\pi}.$$

所以,  $\frac{1}{\sin \pi x}$  当  $x \rightarrow 1$  时为 1 阶无穷大量.

$$(10) \sin \left( \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} - \sqrt{2} \right) (x \rightarrow 0^+)$$



解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left( \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} - \sqrt{2} \right)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left( \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} + \sqrt{2})(\sqrt{1 + \sqrt{x}} + 1)} \right)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

所以,  $\sin \left( \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} - \sqrt{2} \right)$  当  $x \rightarrow 0^+$  时为  $\frac{1}{2}$  阶无穷小量.

$$(11) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \quad (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \sqrt{\frac{1}{x^7}}}}} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为  $\frac{1}{2}$  阶无穷大量.

$$(12) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \quad (x \rightarrow 0^+);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt[16]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^{\frac{7}{8}} + \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}}} = 1.$$

所以,  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$  当  $x \rightarrow 0^+$  时为  $\frac{1}{16}$  阶无穷小量.

$$(13) (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n) (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) = 1.$$

所以,  $(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时为  $\frac{n(n+1)}{2}$  阶无穷大量.

$$(14) x^3 - 3x + 2 (x \rightarrow 1);$$

解. 和 (3) 一样

$$(15) \ln x \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 + (x-1))^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

所以,  $\ln x$  当  $x \rightarrow 1$  时为 1 阶无穷小量.

$$(16) e^x - e, \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} e \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = e.$$

所以,  $e^x - e$  当  $x \rightarrow 1$  时为 1 阶无穷小量.

$$(17) \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1 - x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

所以,  $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$  当  $x \rightarrow 1$  时为  $\frac{1}{3}$  阶无穷小量.

$$(18) x^x - 1 \quad (x \rightarrow 1).$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ x \ln(1 + (x - 1))^{\frac{1}{x-1}} \right] \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1.$$

所以,  $x^x - 1$  当  $x \rightarrow 1$  时为 1 阶无穷小量.

5. 用等价无穷小替换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x - \cos x};$$

解. 因为  $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ ,  $(x \rightarrow +\infty)$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \cos x} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt{1 + x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)};$$

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $\sin x \sim x$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^3 \cdot \frac{x^2}{2}} = 2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{1 - \cos^2 x};$$

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt{1 + x^4} - 1 \sim \frac{x^4}{2}$ ,  $1 - \cos^2 x = \sin^2 x \sim x^2$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^2} = 0.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{\sin x};$$

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan(\tan x) \sim x, \sin x \sim x$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{\sin x} = 1.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 (\sqrt{1 + x^2} - 1)^3}{x^5 \sin^3 x};$$

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - 1 \sim x, \sqrt{1 + x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{2}, \sin x \sim x$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 (\sqrt{1 + x^2} - 1)^3}{x^5 \sin^3 x} = \frac{1}{8}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x}, n \in \mathbb{N}.$$

解. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt[n]{1 + x + x^2} - 1 \sim \frac{x}{n}, \sin 2x \sim 2x$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{2n}.$$

6. 设  $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$ . 证明:

$$f(x) - g(x) = o(f(x)) (x \rightarrow x_0); \quad f(x) - g(x) = o(g(x)) (x \rightarrow x_0).$$

证明. 因为  $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

从而,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

即,  $f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad f(x) - g(x) = o(g(x)) (x \rightarrow x_0)$ . □

### 2.3.2 思考题

7. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 且  $f(x) - f(\frac{x}{2}) = o(x) (x \rightarrow 0)$ . 证明:  $f(x) = o(x) (x \rightarrow 0)$ .

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|x| < \delta$  时,

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} \right| < \varepsilon.$$

现考察  $\frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x}$ . 当  $|x| < \delta$  时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^k} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

于是,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} \right| \leq 2\varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . i.e.  $f(x) = o(x)(x \rightarrow 0)$ . □

8. 设函数  $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  满足:

- (1)  $g(x+T) > g(x), \forall x \geq a$ , 其中  $T > 0$  为常数;
- (2) 函数  $f, g$  在  $[a, +\infty)$  的任何有限子区间上有界;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

证明: 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A,$$

那么

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $M_1 > 0$ , 当  $y > M_1$  时, 有

$$A - \varepsilon \leq \frac{f(y+T) - f(y)}{g(y+T) - g(y)} \leq A + \varepsilon.$$

如果限定  $y \in [M_1, M_1 + T)$ , 则对  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(A - \varepsilon)g(y + nT) - (A - \varepsilon)g(y) \leq f(y + nT) - f(y) \leq (A + \varepsilon)g(y + nT) - (A + \varepsilon)g(y).$$

由题设, 存在  $M_2 > 0$  使得

$$|f(y)| < M_2, |g(y)| < M_2, \forall y \in [M_1, M_1 + T).$$

由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , 则存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时,

$$\frac{|(A - \varepsilon)g(y) + f(y)|}{g(y + nT)} < \varepsilon, \forall y \in [M_1, M_1 + T),$$

$$\frac{|(A + \varepsilon)g(y) + f(y)|}{g(y + nT)} < \varepsilon, \forall y \in [M_1, M_1 + T).$$

由此可知

$$A - 2\varepsilon \leq \frac{f(y + nT)}{g(y + nT)} \leq A + 2\varepsilon, \forall y \in [M_1, M_1 + T).$$

取  $M = NT + M_1$ , 当  $x > M$  时, 存在  $y \in [M_1, M_1 + T)$  和  $n > N$  使得  $x = y + nT$ . 于是,

$$A - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + 2\varepsilon.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . □

注 8. 这题可以看做是函数版的 Stolz 公式。

9. 函数列  $f_n: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  都是无穷大 ( $x \rightarrow +\infty$ ). 证明: 存在  $(0, +\infty)$  上的一个函数  $f$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f$  是  $f_n$  比更高阶的无穷大,  $n \in \mathbb{N}$ .

证明. 定义一个函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k^2(x), \quad x \in (0, n].$$

由此定义, 对于函数  $f_n$ , 当  $x > n$  时,  $f(x) \geq f_n^2(x)$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f_n(x)} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

即, 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x)$  是比  $f_n(x)$  更高阶的无穷大量。□

## 2.4 函数的连续, 单调函数的不连续点集, 初等函数的连续性

### 2.4.1 练习题

1. 研究下列函数在  $x = 0$  处的连续性:

(1)  $f(x) = [x]$ ;

解. 取  $1 > \delta > 0$ , 考虑  $x \in (-\delta, \delta)$ .

$$f(x) = -1 \neq f(0), \forall x \in (-\delta, 0), \quad f(x) = 0 = f(0), \forall x \in [0, \delta).$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  是右连续, 但不左连续。故,  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续。

(2)  $f(x) = \operatorname{sgn} |x|$ ;

解. 取  $1 > \delta > 0$ , 考虑  $x \in (-\delta, \delta)$ , 则

$$f(x) = 1 \neq f(0) = 0, \forall 0 \neq x \in (-\delta, \delta).$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续。

(3)  $f(x) = |x|$ ;

解. 显然  $f(0) = 0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0).$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

(4)  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ ;

解. 由  $\cos$  的连续性知,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ . 所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ . 即,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

(5)  $f(x) = [|\cos x|]$ ;

解. 当  $x = 0$  时,  $f(0) = [|\cos 0|] = [1] = 1$ . 取  $0 < \delta < 1$ , 当  $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta)$  时,

$$|\cos x| < 1, \quad f(x) = 0 \neq f(1).$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续。

(6)  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ ;

解. 取  $0 < \delta < 1$ . 当  $x \in (-\delta, 0)$  时,  $\sin x < 0$ . 当  $x \in (0, \delta)$  时,  $\sin x > 0$ . 于是,

$$f(x) = -1, \forall x \in (-\delta, 0), \quad f(x) = 1, \forall x \in (0, \delta), \quad f(0) = 0.$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续。

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

解. 很显然  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ . 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

解. 我们计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处右连续, 但不左连续。

$$(9) \quad f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 2.718, & x = 0; \end{cases}$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e \neq f(0).$$

所以,  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续。

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0).$$

所以,  $f$  在  $x = 0$  处连续。

2. 指出下列函数的间断点, 并说明其类型:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty; \end{cases}$$

解. 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -7) \cup (-7, 1) \cup (1, +\infty)$  上是连续的。

因为  $\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{1}{x+7} = +\infty$  和  $\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^+} x = -7$ . 所以,  $x = -7$  是  $f$  的第二类间断点。

因为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$  和  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0$ . 所以  $x = 1$  是函数  $f$  的跳跃间断点。

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解.  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , 由归结原理,  $f$  在  $x$  的左右极限都不存在. 所以  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$  是函数  $f$  的第二类间断点。

$$(3) D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}; \end{cases}$$

解.  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , 由归结原理知,  $f(x)$  在  $x=x_0$  处的极限不存在. 故,  $x_0$  为函数  $f(x)$  的第二类间断点。

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解. 函数在  $x \neq 0$  时是连续的. 另外

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

所以,  $x=0$  是函数  $f$  的第二类间断点。

### 2.4.2 思考题





## 参考文献

[徐薛] 徐森林, 薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.



## 后 记