

徐森林，薛春华 编
《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

目 录

第一章	数列极限	1
1.1	数列极限的概念	1
1.1.1	练习题	1
1.1.2	思考题	6
1.2	数列极限的基本性质	10
1.2.1	练习题	10
1.2.2	思考题	14
1.3	实数理论, 实数连续性命题	15
1.3.1	练习题	15
1.3.2	思考题	15
1.4	Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数 $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	15
1.4.1	练习题	15
1.4.2	思考题	23
1.5	上极限与下极限	25
1.5.1	练习题	25
1.5.2	思考题	31
1.6	Stolz 公式	31
1.6.1	练习题	31
1.6.2	思考题	33
1.7	复习题 1	34
第二章	函数极限与连续	51
2.1	函数极限的概念	51
2.1.1	练习题	51
2.1.2	思考题	58
2.2	函数极限的性质	60
2.2.1	练习题	60
2.2.2	思考题	71
2.3	无穷小 (大) 量的数量级	72
2.3.1	练习题	72
2.3.2	思考题	79
2.4	函数的连续, 单调函数的不连续点集, 初等函数的连续性	81
2.4.1	练习题	81

2.4.2 思考题	90
2.5 有界闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的性质	93
2.5.1 练习题	93
2.5.2 思考题	100
 索 引	 105
 参考文献	 105
 后 记	 107

第一章 数列极限

1.1 数列极限的概念

1.1.1 练习题

1. 用数列极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 10} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n - 1 \right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

由极限的定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0.\underbrace{99 \cdots 9}_n = 1$. □

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7};$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{6}{\varepsilon} \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{3n+4}{7n-3} - \frac{3}{7} \right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+4}{7n-3} = \frac{3}{7}$. □

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max \{ 50, \left[\frac{12}{\varepsilon} \right] + 1 \}$, 当 $n > N$ 时, $\frac{1}{2}n^2 - n - 1000 > 1$ 且

$$\left| \frac{5n+6}{n^2-n-1000} - 0 \right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2 + (\frac{1}{2}n^2 - n - 1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{n^2-n-1000} = 0$. □

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n+5} = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] + 4$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{8}{2^n+5} - 0 \right| < \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon$$

由极限定义知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{2^n+5} = 0$. □

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{\sin n!}{n^{1/2}} - 0 \right| < \frac{1}{n^{1/2}} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n!}{n^{1/2}} = 0$. □

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 2, \left[\left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1 \right\}$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}| = \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} < \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}) = 0$. □

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 2, \left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^3} \right] \right\}$, 当 $n > N$ 时,

$$|\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}| = \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{(n+2)(n-2)} + \sqrt[3]{(n-2)^2}} < \frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}} < \varepsilon.$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-2}) = 0$. □

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1 + n^2} = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{n^{3/2} \arctan n}{1 + n^2} \right| < \frac{\frac{\pi}{2} n^{3/2}}{n^2} < \frac{\pi/2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \arctan n}{1 + n^2} = 0$. □

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n \text{ 为奇数}; \end{cases}$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - 1| < \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. □

$$(10) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty.$$

证明. 对 $\forall A > 0$, 取 $N = \max \left\{ 5, \left[\sqrt[3]{2A} \right] + 1 \right\}$, 当 $n > N$ 时, $1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} > 1 - \frac{9}{n^2} > \frac{1}{2}$ 且

$$n^3 - 4n - 5 = n^3 \left(1 - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right) > \frac{1}{2} n^3 > A$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 4n - 5) = +\infty$. □

2. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明: $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$.

证明. 按 a 分类讨论:

- (1) $a \in \mathbb{R}$: 由极限定义, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 显然 $n + k > n > N$, 从而 $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = a$.
- (2) $a = +\infty$: 由极限定义, 对 $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n > A$. 显然 $n + k > n > N$, 从而 $a_{n+k} > A$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = +\infty$.
- (3) $a = -\infty$: 由极限定义, 对 $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $a_n < A$. 显然 $n + k > n > N$, 从而 $a_{n+k} < A$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+k} = -\infty$.

命题得证. □

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$: 举例说明, 这个命题的逆命题不真.

证明. 当 $a \in \mathbb{R}, a = +\infty, a = -\infty$ 时, 此命题都是成立. 我们只证 $a \in \mathbb{R}$ 的情况.

由极限的定义, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是:

$$||a_n| - |a|| < |a_n - a| < \varepsilon.$$

再由极限定义, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$.

如果我们取 $a_n = (-1)^n$, 则 $|a_n| = 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 1 = |a|$. 但 $\{a_n\}$ 是发散的. □

4. 设 $x_n \leq a \leq y_n, n \in \mathbb{N}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $y_n - x_n = |y_n - x_n| < \varepsilon$. 从而

$$|y_n - a| = y_n - a = y_n - x_n + x_n - a < y_n - x_n < \varepsilon.$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$.

同理可证

$$-\varepsilon < x_n - y_n < x_n - a < 0 < \varepsilon.$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数, 或者有最小的数. 举出两者都有的例子; 再举出只有一个的例子.

证明. 假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 我们分以下几种情况讨论:

- (1) 如果 $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. 此时, 数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

- (2) 如果 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_{n_0} \neq a$. 不妨假设 $a_{n_0} < a$. 对于 $\varepsilon = \frac{a - a_{n_0}}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$ 使得 $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a + a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$. 取 $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, 则

$$m \in \{a_n | n \geq 1\}, \quad a_n \geq m, \forall n.$$

即 m 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值. 如果 $a_{n_0} > a$, 类似地, 我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值.

考虑下列收敛数列:

- (1) 如果 $a_n = \frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n \leq a_1 = 1$, 没有最小值.
 (2) 如果 $a_n = -\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1 = a_1 \leq a_n$, 没有最大值.
 (3) 如果 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则 $-1 = a_1 \leq a_n \leq a_2 = \frac{1}{2}$

命题得证. □

注 1. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 有最小值. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, 则 $\{a_n\}$ 有最大值.

6. 证明下列数列发散:

- (1) $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散, 因为: $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$. □

- (2) $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列 $\{k_n\}, \{l_n\}$ 使得

- (a) $k_n \in (2n\pi - \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{6})$,
 (b) $l_n \in (2n\pi + \frac{5\pi}{6}, (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6})$.

显然, 我们有

- (a) $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$,
 (b) $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$.

因此, $\{\cos n\}$ 是发散的. □

7. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 三个数列 $\{a_{3k-2}\}, \{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限.

证明. (\Rightarrow) 由定理 1.1.2, 收敛数列的子列也收敛, 且极限相同.

(\Leftarrow) 假设三个子列的极限都是 a . 由极限的定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0$,

- (1) $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2} - a| < \varepsilon, \forall k > N_1$,
 (2) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1} - a| < \varepsilon, \forall k > N_2$,
 (3) $\exists N_3 \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k} - a| < \varepsilon, \forall k > N_3$.

取 $N = 3 \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 我们有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N,$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. □

注 2. 这个命题当 $a = +\infty$ 或者 $-\infty$ 时, 该命题也成立。

注 3. 对于 $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk-p+2} = \cdots = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{pk} = a.$$

8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_{n-1}) = d$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = d$ 。

证明.

$$\frac{a_n - a_1}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_1}{n} = d$. □

9. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 。用 $\varepsilon - N$ 法, $A - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}, (a \text{ 为实数 } +\infty, -\infty).$$

证明. 我们只证 a 为实数的情形。其他情况证明类似。由极限的定义, 对于 $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2}a - \frac{a}{2} \right| \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2} \right| + \frac{a}{2n} \\ &< \left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| + \frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{a}{2n}. \end{aligned}$$

取 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_0(a_{N_0} - a)}{n^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_1.$$

取 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_2.$$

取 $N_3 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0 + 1 + n)(n - N_0)}{2n^2} \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_3.$$

最后, 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$, $\forall n > N$, 我们有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2} \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

命题得证. □

注 4. 考虑如下数列

$$b_k = \begin{cases} a_k, & k = 1; \\ a_n, & k \in \left[\frac{(n-1)n}{2} + 1, \frac{n(n+1)}{2} \right], \forall n \geq 2. \end{cases}$$

显然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$. 记

$$S_n = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}},$$

则

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} &= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2} \\ &= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \frac{S_n}{2} + \frac{S_n}{2n^2} \end{aligned}$$

由例 1.1.15 知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

1.1.2 思考题

10. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $|q| < 1$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 则存在整数 $M > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. 于是 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|q^{n-k}| < \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon, \forall n > N_1, k = 0, 1, 2, \cdots, N_0.$$

取 $N = \max \{N_0, N_1\}$. 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - \frac{a}{1-q} \right| \\ &= \left| (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) - a \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right| \\ &< |(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}| + \frac{|a||q|^n}{|1-q|} \\ &< \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3} (1 + |q| + \cdots + |q|^{n-N_0}) + \left(MN_0 + \frac{|a|}{1-|q|} \right) \max \left\{ \frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)} \right\} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

即, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}$.

□

11. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} = ab.$$

证明. 首先我们证明命题在 $b = 0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\exists M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > N_0$.

(3) 由于 $|a_n| < M$, 对上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left| \frac{a_{n-N_0} b_{N_0} + a_{n-N_0+1} b_{N_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1\}$. 对于上述的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} \right| \\ & < \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1} b_{N_0+1}}{n} \right| + \left| \frac{a_{n-N_0} b_{N_0} + a_{n-N_0+1} b_{N_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n} \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2M} \frac{(n - N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

由极限的定义知, 命题成立在 $b = 0$ 时成立。下面证明命题在 $b \neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a)b = 0$. 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_{n-1} - a)b + (a_n - a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - b) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_{n-1}(b_1 - b) + a_n(b_n - b)}{n} = 0.$$

(3) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ & \left| \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n} - ab \right| \\ & \leq \left| \frac{a_0(b_n - b) + a_1(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_0 - b)}{n} \right| + \left| \frac{(a_0 - a)b + (a_1 - a)b + \cdots + (a_n - a)b}{n} \right| \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

12. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $b_n \geq 0 (n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = aS$.

证明. 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 显然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ 得知

$$|(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$ 可得知

$$|a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} & |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - aS| \\ &= |(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) - a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - S)| \\ &< |(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| + |a| |(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

由极限的定义, 命题得证. □

注 5. 这题是第 10 题的推广。如果 $b_n = q^{n-1}, 0 < q < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

由这题的结论, 第 10 题得证。

13. (Toeplitz 定理) 设 $n, k \in \mathbb{N}$, $t_{nk} \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证

明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ 。说明例 1.1.15 为 Toeplitz 定理的特殊情形。

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 我们有:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(2) 我们取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$.

(3) 对于 $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N_0$, 存在 $N_l \in \mathbb{N}$ 使得 $t_{nl} < \frac{\varepsilon}{2N_0 M}, \forall n > N_l$.

(4) 取 $N = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_{N_0}\}$, 当 $n > N$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k - a \right| \\ &= \sum_{k=1}^{N_0} t_{nk} |(a_k - a)| + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} |(a_k - a)| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2N_0 M} M + \sum_{k=N_0+1}^n t_{nk} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

由极限定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$.

如果我们取 $b_{nk} = \frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证. \square

14. 设 a, b, c 为三个给定的实数, 令 $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$, 并归纳定义

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ b_n = \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}, \\ c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$.

证明. 我们通过以下结论证明该命题:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n) = a + b + c$. 这是因为 $a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \dots = a + b + c$.

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - c_n) = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - b_n) = 0$. 这是因为

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - b_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - b),$$

$$a_n - c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - c_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a - c),$$

$$c_n - b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1} - b_{n-1}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (c - b).$$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n + (a_n - b_n) + (a_n - c_n)) = \frac{a+b+c}{3}$.

类似可证, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$. \square

15. 设 a_1, a_2 为实数, 令

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots,$$

其中 $p > 0, q > 0, p + q = 1$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_2 + a_1 q}{1 + q}$.

证明. 由递推公式, 我们可以证明

$$a_n - a_{n-1} = (-q)^{n-2} (a_2 - a_1), \forall n \geq 3.$$

由此我们可以得出 a_n 的通项公式

$$a_n = a_2 + \sum_{k=1}^{n-2} (-q)^k (a_2 - a_1) = a_2 - \frac{q + (-q)^{n-1}}{1 + q} (a_2 - a_1).$$

从而, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_2 - \frac{q}{1 + q} (a_2 - a_1) = \frac{a_2 + qa_1}{1 + q}$. \square

16. 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_1 > 0, 4 \leq b_n \leq 5, 4 \leq c_n \leq 5$,

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2 + c_n^2}}{b_n + c_n} a_{n-1}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

证明. 由通项公式定义有

$$0 \leq a_n \leq \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由 $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

□

1.2 数列极限的基本性质

1.2.1 练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - 1/n + 5/n^2}{3 - 2/n - 7/n^2} = 4/3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{3 + (-2)(-2/3)^n} = 1/3$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{解. } 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} = 1. \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}}, |a| < 1, |b| < 1$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + \cdots + b^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) \left(\frac{1 - b}{1 - b^n}\right) = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

(9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$

解. 记

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2(n-1)-1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right) = 3.$$

(10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

解. $1 - \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)} \end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积: 奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}3(n+2)!$.

分母的 $2n$ 项的积: 奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$

(11) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

解.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{8n^3 - 2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right] = \frac{4}{3}.$$

(12) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}})$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$

(13) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0.$

2. 设 $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. 应用例 1.2.6 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

证明.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} \cdot \sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. □

3. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 应用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} = a$, 其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数.

证明. $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n - 1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[na_n]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{n} = a$. □

4. 设 $a_n \neq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r > 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$.

证明. 取 $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$. 由极限的定义, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r - \varepsilon = \frac{r+1}{2} > 1$. 于是

$$|a_n| > \left(\frac{r+1}{2} \right)^{n-N} |a_N|.$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$. □

5. (1) 应用数学归纳法或 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ 证明不等式:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, 我们有

$$S_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

(2) 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0$

证明. $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$. □

6. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$. 应用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

证明. 由极限的定义知, 存在 $N > 0$ 使得

$$\frac{a}{2} \leq a_n \leq \frac{3a}{2}, \quad \forall n > N.$$

于是 $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$. □

7. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$: $\left(\text{提示: } 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n} \right)$

证明.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} &= \frac{(n-1)! + n!}{n!} \\ &< \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} \\ &< \frac{(n-1)(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} \\ &= 1 + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1$. □

8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, \quad T_n = \min\{a_n, b_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

应用 $\varepsilon - N$ 法 (分 $a < b, a > b, a = b$) 或 $\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|)$ 与 $\min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - |a_n - b_n|)$, 证明:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \max\{a, b\}; \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \min\{a, b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - b_n| = |a - b|.$$

由此可知:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \max\{a, b\}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n &= \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \min\{a, b\}. \end{aligned}$$

□

9. 应用例 1.1.7 与例 1.1.15 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证明. 取 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 1$. □

10. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \dots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$

证明. $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{\ln 2}{2} + \sin \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin \frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \square$

11. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$ \square

1.2.2 思考题

12. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$

证明. 假设 $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ 是互异的素数, $m_k \geq 1, k = 1, 2, \cdots, l$. 于是 $p(n) = \sum_{k=1}^l m_k.$

$$\ln n = \sum_{k=1}^l m_k \ln p_k \geq \sum_{k=1}^{p(n)} \ln 2 = p(n) \ln 2.$$

因此

$$0 \leq \frac{p(n)}{n} \leq \frac{\ln n}{n \ln 2}.$$

由夹逼定理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$ \square

13. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}.$

证明.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4n^2}. \end{aligned}$$

由夹逼定理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{4}.$ \square

1.3 实数理论, 实数连续性命题

1.3.1 练习题

1.3.2 思考题

1.4 Cauchy 收敛准则 (原理), 单调数列的极限, 数

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1.4.1 练习题

1. 证明下列数列收敛:

$$(1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), n \in \mathbb{N};$$

证明. 记 $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, 我们有 $S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < S_n$. 很显然 $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, S_n 收敛. \square

$$(2) \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$. 当 $n > 10$ 时, $\frac{n+9}{2n-1} < 1$. 即 $S_{n+1} < S_n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 10$. 另一方面 $S_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, S_n 收敛. \square

2. 设 $0 < a_n < 1$ 且 $a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N}$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

证明. 考虑函数 $f(x) = (1 - x)x, x \in (0, 1)$, 我们有

$$f(x) > 0, f(x) \leq \frac{1}{4}, x \in (0, 1).$$

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{4(1 - a_n)a_n} \geq 1$, 即 $\{a_n\}$ 是单调递增. 由实数连续性命题 (二) 可知, a_n 收敛. 由递推公式可知, $\frac{1}{4} \geq a(1 - a) \geq \frac{1}{4}$. 所以 $a = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$. \square

3. 给定两正数 $x_0 = a$ 与 $y_0 = b$, 归纳定义

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2},$$

$n = 1, 2, \dots$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$, 并称此极限为 a 与 b 的算术-几何平均数.

证明. 由算术-几何平均不等式知: $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 于是:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

于是

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq y_1 \leq y_0 = b.$$

令 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = B$. 由递推公式可知: $A = \sqrt{AB}$, 从而 $A = B$. \square

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, 用 x_n 表示方程 $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的根, 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

解. 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$ 对于给定的 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 是单调增函数, 所以 $f_n(x)$ 只有唯一的根 x_n . 由于

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_n(x_n) + x_n^{n+1} = f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在. 由于 $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$ 知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

5. 设 $c > 0$, $x_1 = \sqrt{c}$, $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$, $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$.

证明. 我们用归纳法证明 $x_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(1) \quad x_1 = \sqrt{c} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

$$(2) \quad \text{假设 } x_k < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \text{ 我们证明 } x_{k+1} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{c + x_k} \\ &< \sqrt{c + \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4c + 2 + 2\sqrt{1 + 4c}}{4}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

现在考虑函数 $f(x) = c + x - x^2$. 很显然

$$f(x) > 0, \quad x \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}\right).$$

于是 $x_{n+1}^2 - x_n^2 = c + x_n - x_n^2 > 0$. 即 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列. 由实数连续性命题 (二) 知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则

$$a = \sqrt{c + a}.$$

解方程得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$. □

6. 设 $x_1 = c > 0$, 令 $x_{n+1} = c + \frac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

解. 我们首先证明:

$$(1) \quad x_{2k-1} < x_{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$(2) \quad x_{2k} > x_{2(k+1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由递推公式可知

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-3} - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_{n-3}} = \frac{x_{n-2} - x_{n-4}}{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-3} \cdot x_{n-4}}.$$

由于 $x_3 - x_1 = \frac{1}{x_2} > 0$, 从而知 (1) 成立。由于 $x_4 - x_2 = \frac{x_1 - x_3}{x_1 \cdot x_3} < 0$, 从而知 (2) 成立。

另一方面:

$$\begin{aligned} x_{2k} - x_1 &= c + \frac{1}{x_{2k-1}} - c = \frac{1}{x_{2k-1}} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \\ x_{2k+1} - x_2 &= c + \frac{1}{x_{2k}} - c - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_{2k}}{x_1 \cdot x_{2k}} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

由实数连续性命题 (二) 可知, 奇数列和偶数列都是收敛子列。假设

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = b.$$

由递推公式, 我们有

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= c + \frac{1}{c + \frac{1}{x_{2k-1}}} \Rightarrow a^2 - ac - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}, \\ x_{2k+2} &= c + \frac{1}{c + \frac{1}{x_{2k}}} \Rightarrow b^2 - bc - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

即, $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}$.

7. 证明: $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$

证明. 第一个等式是题 5 的特例: $c = 1$. 第二个等式是题 6 的特例: $c = 1$. □

8. 设 $c > 0$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

证明. 当 $c > 1$ 时, 由递推公式可知,

$$a_{n+1} \geq 2\sqrt{\frac{c}{2} \frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c} a_n \geq \cdots \geq c^{\frac{n}{2}} a_1.$$

所以 $+\infty \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (c^{\frac{n}{2}} a_1) = +\infty$.

当 $0 < c \leq 1$ 时, 我们证明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有界。

(1) $a_1 = \frac{c}{2} < 1 - \sqrt{1 - c}$.

(2) 设 $a_k < 1 - \sqrt{1 - c}$. 下面我们证明 $a_{k+1} \geq a_k$ 且 $a_{k+1} < 1 - \sqrt{1 - c}$.

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - c})^2 = 1 - \sqrt{1 - c}.$$

考察函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$.

$$f(x) > 0, \quad x \in (-\infty, 1 - \sqrt{1 - c}).$$

因此

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 - 2a_k + c) > 0.$$

即 $\{a_n\}$ 是单调增的数列. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在. 设极限为 a , 则

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = 1 - \sqrt{1-c}.$$

命题在 $0 < c \leq$ 也得证了. □

9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调增, $\{b_n\}$ 单调减, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$. 证明: $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

证明. 很显然 $\{a_n - b_n\}$ 是单调增. 又由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, 可知 $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 从而

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛. 再由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ 知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. □

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在正数 $M, \forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leq M.$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{A_n\}$ 都收敛.

证明. 很显然数列 $\{A_n\}$ 是单调增有界数列, 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{A_n\}$ 是收敛的.

$$\{A_n\} \text{收敛} \Rightarrow \{A_n\} \text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\} \text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\} \text{收敛}.$$

Cauchy 数列必收敛, 从而知 $\{a_n\}$ 收敛. □

11. 应用 Cauchy 收敛准则证明下列数列收敛:

$$(1) x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)};$$

证明.

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1) \cdot (n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right| \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛. □

$$(2) x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

证明.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛. □

$$(3) x_n = \frac{\arctan 1}{1(1 + \cos 1!)} + \frac{\arctan 2}{2(2 + \cos 2!)} + \cdots + \frac{\arctan n}{n(n + \cos n!)}.$$

证明.

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\arctan(n+1)}{(n+1)((n+1) + \cos(n+1)!)} + \cdots + \frac{\arctan(n+p)}{(n+p)((n+p) + \cos(n+p)!)} \right| \\ &< \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &< \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛。 □

12. 应用 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^n$;

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\frac{n}{n-3}} = e.$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^n$;

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{(-n+2)\frac{n}{-n+2}} = e^{-1}.$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$;

证明. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2+n}\right)^{(-2-n)\frac{n}{-2-n}} = e^{-1}.$ □

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$;

证明. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^2 = e^2.$ □

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

证明. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$ □

13. $\forall n \in \mathbb{N}$, 证明:

(1) $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$

证明. 由不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 知:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0.$$

证明. 由 (1) 和夹逼原理, 可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0$. □

14. 设 $\alpha < 1$, 证明:

$$(1) 0 < n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] < \frac{e}{n^{1-\alpha}}.$$

证明. 由不等式 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ 知:

$$\begin{aligned} 0 &< n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ &< n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ &= n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{n} \right] \\ &< \frac{e}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0.$$

证明. 由 (1) 和夹逼原理可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = 0$. □

注 6. 由上两题可知 $\left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$ 比 $\frac{1}{n^\alpha} \forall \alpha < 1$. 高阶的无穷小量。

15. (1) 设 $0 < a < b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 证明:

$$b^{n+1} - a^{n+1} < (n+1)b^n(b-a),$$

$$a^{n+1} > b^n[(n+1)a - nb];$$

证明.

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n) < (n+1)b^n(b-a).$$

由此式可知:

$$a^{n+1} > b^{n+1} - (n+1)b^n(b-a) = b^n[b - (n+1)b + (n+1)a] = b^n[(n+1)a - nb].$$

□

(2) 在 (1) 中, 令 $a = 1 + \frac{1}{n+1}$, $b = 1 + \frac{1}{n}$ 推出 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ 为严格增的数列;

证明. 将 $a = 1 + \frac{1}{n+1}$, $b = 1 + \frac{1}{n}$ 代入 (1) 中的第二式, 可知

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \left[(n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) - n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

□

(3) 在 (1) 中, 令 $a = 1, b = 1 + \frac{1}{2n}$ 推出当 n 为偶数时, 有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$; 由此得到 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$, 即 4 为该数列的上界, 从而 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛。

证明. 将 $a = 1, b = 1 + \frac{1}{2n}$ 代入 (1) 的第二个不等式, 我们有:

$$1 \geq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left[(n+1) - n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right],$$

即

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \leq 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq 4.$$

由于 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增的, 我们可知, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$. □

16. 应用不等式 $b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a)$, $0 < a < b$, 证明: 数列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是严格单减的, 并由此推出 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 为有界数列。

证明.

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n) > (n+1)a^n(b-a).$$

即

$$b^{n+1} > a^n [(n+1)b - na].$$

取 $a = 1 + \frac{1}{n+1}, b = 1 + \frac{1}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left[(n+1) \frac{n+1}{n} - n \frac{n+2}{n+1} \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left[\frac{n^2 + 3n + 1}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \left(\frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} \right) \\ &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \end{aligned}$$

由此可见 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$ 是严格单调减. 另外

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4.$$

即 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 为有界数列. □

17. 证明: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{3}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) < \frac{3}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

18. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列。记

$$\bar{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}.$$

证明:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\bar{a}_n \geq \underline{a}_n$;

证明. 这是显然的。 $\bar{a}_n \geq a_n \geq \underline{a}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

(2) $\{\bar{a}_n\}$ 为单调减有界数列; $\{\underline{a}_n\}$ 为单调增有界数列, 且 $\forall n, m \in \mathbb{N}$, 有 $\bar{a}_n \geq \underline{a}_m$;

证明. 由 \bar{a}_n 和 \underline{a}_n 的定义可知,

$$\bar{a}_n = \max\{a_n, \bar{a}_{n+1}\}, \quad \underline{a}_n = \min\{a_n, \underline{a}_{n+1}\}.$$

由此可见 $\{\bar{a}_n\}$ 是单调减, $\{\underline{a}_n\}$ 是单调增, 且

$$\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \cdots \leq \underline{a}_n \leq \cdots \leq \bar{a}_n \leq \cdots \leq \bar{a}_2 \leq \bar{a}_1.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 是有界数列, 故 \underline{a}_1 和 \bar{a}_1 都是有界数。命题得证。 □

(3) 设 $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{a}_n$, $\underline{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{a}_n$, 则 $\bar{a} \geq \underline{a}$;

证明. 应用定理 1.2.5, 这个命题就可以得证。 □

(4) $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \bar{a} = \underline{a}$.

证明. (\Rightarrow): 由极限定义, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

于是

$$|\bar{a}_n - a| < \varepsilon, |\underline{a}_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

由此可知

$$|\bar{a} - a| < \varepsilon, |\underline{a} - a| < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性知, $\bar{a} = \underline{a} = a$.

(\Leftarrow): 记 $\bar{a} = \underline{a} = a$. 再次由极限定义知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得

$$|\bar{a} - a| < \varepsilon, |\underline{a} - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

从而

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N.$$

由极限的定义知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. □

1.4.2 思考题

19. 设 $a_1 \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$.

证明. 很显然 $a_n > 0, \forall n$. 我们现在计算 $|a_{n+1} - \sqrt{3}|$:

$$|a_{n+1} - \sqrt{3}| = \left| \frac{3 + 3a_n - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}a_n}{a_n + 3} \right| = \left| \frac{(3 - \sqrt{3})(a_n - \sqrt{3})}{a_n + 3} \right| < \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) |a_n - \sqrt{3}|.$$

因为 $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$. \square

20. 设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$.

证明. 我们证明如下结论:

(1) 如果 $x_1 \leq \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调增且 $x_n \leq \sqrt{a}, \forall n$;

(2) 如果 $x_1 > \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调减且 $x_n \geq \sqrt{a}, \forall n$;

无论哪种情况发生, 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则

$$b = \frac{b(b^2 + 3a)}{3b^2 + a}.$$

解方程得 $b = \sqrt{a}$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注意到 $x_n > 0, \forall n$ 且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n(\sqrt{a} - x_n)(\sqrt{a} + x_n)}{3x_n^2 + a}, \quad x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a}.$$

我们很容易看出上述的两个结论都是成立的. \square

21. 设 $a > 0$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}} (n > 1)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$.

证明. 我们只需要证明:

(1) 如果 $a \geq 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递增且 $x_n \leq \sqrt{a}, \forall n$

(2) 如果 $a < 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递减且 $x_n \geq \sqrt{a}, \forall n$.

无论上述哪种情况发生, 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则

$$b = \sqrt[3]{ab}.$$

解方程得 $b = \sqrt{a}$. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注意到 $x_n > 0, \forall n$ 且

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}(\sqrt{a} - x_{n-1})(\sqrt{a} + x_{n-1})}{(\sqrt[3]{ax_{n-1}})^2 + \sqrt[3]{ax_{n-1}}x_{n-1} + x_{n-1}^2},$$

$$x_n - \sqrt{a} = \sqrt[3]{ax_{n-1}} - \sqrt{a} = \frac{a(x_{n-1} - \sqrt{a})}{(\sqrt[3]{ax_{n-1}})^2 + \sqrt[3]{a^{5/2}}x_{n-1} + a}$$

当 $a \geq 1$, $x_1 = \sqrt[3]{a} \leq \sqrt{a}$. 由上两式知, 结论 (1) 成立.

当 $a < 1$, $x_1 = \sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$. 由上两式知, 结论 (2) 成立. \square

22. 设 $0 < a_1 < b_1 < c_1$. 令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$$

证明: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛于同一实数.

证明. 由定义可知

$$0 < a_1 < a_n \leq b_n \leq c_n < c_1, \quad \forall n > 1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调增, $\{c_n\}$ 单调减. 由实数连续性命题 (二) 可知, 数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 收敛. 因为 $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$ 可知, 数列 $\{b_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. 易知, $0 < a_1 \leq a \leq b \leq c \leq c_1$ 且

$$a = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, \quad b = \sqrt[3]{abc}, \quad c = \frac{a+b+c}{3}$$

解方程组可得知 $a = b = c$. □

23. 设 $a_n > 0, S_n = a_1 + \cdots + a_n, T_n = \frac{a_1}{S_1} + \cdots + \frac{a_n}{S_n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.

证明. 由于 $S_n \rightarrow +\infty$, 我们可以找到一个子列 $\{n_k\}$ 使得

$$\frac{S_{n_k-1}}{S_{n_k}} < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned} T_{n_k} &= \left(\frac{a_1}{S_1} + \cdots + \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}} \right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}} + \cdots + \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_{k-1}+1}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}} \right) \\ &> \left(\frac{a_1}{S_{n_1}} + \cdots + \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}} \right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}} \right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_k}} + \cdots + \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}} \right) \\ &= \frac{S_{n_1} - 0}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2} - S_1}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} \\ &> \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

即: $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_{n_k} = +\infty$. 因为 T_n 是单调增的数列, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$. 命题得证. □

24. 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

证明. 我们只需证明 $\left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|$ 收敛于 0.

$$\begin{aligned} \left| a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| &= \left| \frac{3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)a_n}{2(1+a_n)} \right| \\ &= \left| \frac{-(\sqrt{5}-1) \left(a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)}{2(1+a_n)} \right| \\ &< \left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \cdot \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|. \end{aligned}$$

由此可见, $\left\{ \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \right\}$ 收敛于 0. □

25. 设 $a_n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 收敛于 S 。证明: $b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛。

证明. 很显然, $\{b_n\}$ 是单调增数列。下面证明 $\{b_n\}$ 是有界数列。由于 $a_n \geq 0$ 且 $S_n \rightarrow S$, 则 S_n 是单调增收敛于 S , 所以

$$\sum_{k=1}^n a_k < S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面,

$$b_n \leq \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)^n \leq \left(1 + \frac{S}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{[S]+1}{n}\right)^n.$$

数列 $\left\{\left(1 + \frac{[S]+1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增的, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{[S]+1}{n}\right)^n = e^{[S]+1}.$$

于是

$$b_n \leq e^{[S]+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续命题 (二) 可知, 数列 $\{b_n\}$ 是收敛数列。□

1.5 上极限与下极限

1.5.1 练习题

1. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 与 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$:

$$(1) a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(2) a_n = n^{(-1)^n};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

$$(3) a_n = [1 + 2^{(-1)^n n}]^{\frac{1}{n}};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2.$$

$$(4) a_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\frac{1}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

$$(5) a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n};$$

$$\text{解. } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

$$(6) a_n = \sqrt[n]{\left|\cos \frac{n\pi}{3}\right|};$$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$

$$(7) a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

解. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = e.$

2. 证明下面各式当两端有意义时成立:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

证明. 由上, 下极限的定义, 我们可以得到两个简单的无需证明的事实: 对于任何数列 $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$ 是一个任意一个子列, 则

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k}$$

$$(b) \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

我们取子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

再在子列 $\{a_{n_k}\}$ 中取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

对于子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n). \end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

考虑子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$, 在其中取子列 $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

对于同样下标的子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

由此可见

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \\ &= \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n\end{aligned}$$

下面我们用类似的办法证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

对于相应的 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ 可以取子列 $\{a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

显然

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \geq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n).$$

取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

另一方面

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

所以 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$. □

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, 则

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + b, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + b\end{aligned}$$

证明. 这题是上面一题的直接应用。 □

(3) $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$;

证明. $\inf_{k \geq n} \{-a_k\} = -\sup_{k \geq n} \{a_k\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
 $\sup_{k \geq n} \{-a_k\} = -\inf_{k \geq n} \{a_k\} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$ □

(4) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为非负数列, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n; \end{aligned}$$

证明. 我们现证第一式. 取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

对于上述的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0.$$

对于 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\underline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \geq \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \geq 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \underline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \end{aligned}$$

取 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

对于对应的子列 $\{b_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\leq \underline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{aligned}$$

现在我们来证明第二式. 取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

对于相对应的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\varliminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n.$$

在 $\{a_{n_k}\}$ 取收敛子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

另一方面

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n &= \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n\end{aligned}$$

□

(5) 设 $\{b_n\}$ 非负, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = b \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = b \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n;$$

证明. 直接用上一题的结论就可以得证。

□

(6) 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

证明. 因为 $a_n > 0, \forall n$, 从而

$$\sup_{k \geq n} \left\{ \frac{1}{a_k} \right\} = \frac{1}{\inf_{k \geq n} \{a_k\}}.$$

由上, 下极限的定义, 命题得证。

□

3. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, 且 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 1$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛。

证明. 由题可知 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$ 。我们可以证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n}.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}.$$

故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是收敛数列。当然 $\{a_n\}$ 收敛。

□

4. 设数列 $\{a_n\}, a_n \leq 1, n = 1, 2, \dots$, 且满足:

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1.$$

证明: (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \omega$, 其中 ω 为有限数; (2) $n\omega - 1 \leq a_n \leq n\omega + 1$.

证明. 先证明 (1).

$$a_1 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} < a_1 + \frac{1}{n}.$$

由此得证 (1), 且 $\omega = a_1$ 。由此 (2) 得证。

□

5. 设 $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ 。证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何 } l > 1, \text{ 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

如果删去“任何”两字, 结论如何?

注 7. 这个题目的结论是不对的。比如

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ 是奇数} \\ 1, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$$

于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^n} = 0,$$

但是, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 不存在。所以下面我们证明:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何 } l > 1, \text{ 有 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

证明. (\Rightarrow): 对于任何的 $l > 1$, 取 $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$, 我们可以找到 $N > 0$, 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq 1 + \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} < l, \quad \forall n > N.$$

于是

$$\frac{a_n}{l^n} < \left(\frac{l+1}{2l}\right)^n, \quad \forall n > N.$$

由 $\frac{l+1}{2l} < 1$ 可知,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

(\Leftarrow): 由定义可知, 对任意的 $l > 1$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有,

$$\frac{a_n}{l^n} < 1 \Rightarrow a_n < l^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l.$$

从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq l \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

如果删去“任何”两字, 结论不成立。

□

1.5.2 思考题

6. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 令

$$l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

证明: $\{a \in \mathbb{R} | \text{有子列 } x_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)\} = [l, L]$. 如果删去条件 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 结论如何?

证明. 对于 $a \in (l, L)$ 和任意的 $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{a - l, L - a\}$, 我们有存在 N 使得:

(1) 当 $n > N$ 时, $-\varepsilon \leq a_{n+1} - a_n \leq \varepsilon$.

(2) 存在子列 n_k , 使得 $a_{n_k} \leq l + \varepsilon, \quad \forall k$

(3) 存在子列 n_l , 使得 $a_{n_l} \geq L - \varepsilon, \quad \forall l$

选择子列 n_t , 并且重新标记下标, 使得

$$a_{n_t} \begin{cases} \leq l + \varepsilon, & \text{当 } t \text{ 是奇数} \\ \geq L - \varepsilon, & \text{当 } t \text{ 是偶数} \end{cases}$$

对于任意上述子列的任意两个相邻的数 $a_{n_{2t}}, a_{n_{2t+1}}$, 在原数列中一定有至少一个 $a_{n_t'}$ 落在区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 从而由极限的定义知这个子列收敛到 a . 命题得证. \square

7. 设 $0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m (n, m = 1, 2, \dots)$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 且 $\sqrt[n]{a_n}$ 收敛.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a > b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$. 取 $N > 0$ 使得

$$a_N < b + \frac{a - b}{3}.$$

又取子列 a_{n_k} 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = a.$$

当 k 充分大后, $n_k > N$, 且 $n_k = m_k N + l$, 其中 $l = 0, 1, \dots, N - 1$. 于是

$$a_{n_k} \leq a_{m_k N} \cdot a_l = a_N^{m_k} \cdot a_l = a_N^{n_k} \cdot \frac{a_l}{a_N^l}.$$

由此可知

$$0 \leq \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \leq \sqrt[n_k]{a_N^{n_k}} \sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}} = a_N \cdot \sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a_N \leq b + \frac{a - b}{3} < a.$$

这与 $\{a_{n_k}\}$ 的选择矛盾. 从而知 $a = b$. 命题得证. \square

1.6 Stolz 公式

1.6.1 练习题

1. 设 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数. 应用 Stolz 公式证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

证明. 我们先计算 $\ln C_n^k + \ln C_n^{n-k} = 2 \ln n! - 2 \ln k! - 2 \ln (n-k)!$, $\forall k \leq n$. 所以 $\sum_{k=0}^n \ln C_n^k = n \ln n! - 2 \sum_{k=0}^n \ln k!$. 设 $x_n = n^2, y_n = \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{n^2} &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1) \ln n - \ln n!}{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{2n-1} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{2n-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

命题得证 □

2. 应用 Stolz 公式证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3};$$

证明. 设 $y_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, x_n = n^{\frac{3}{2}}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})}{n^3 - (n-1)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \sqrt{(1 - \frac{1}{n})^3}\right)}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{2}.$$

证明. 我们设 $y_n = 3 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - 2n^{\frac{3}{2}}, x_n = 3\sqrt{n}$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{3\sqrt{n} - 2n^{\frac{3}{2}} + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{3\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3}) - 6n^2 + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\ &= \frac{3n^2(\sqrt{(1 - 1/n)^3} - 1) + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\ &= \frac{-9n + 9 - 3/n + (6n - 2)(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)} \\ &= \frac{(-9n + 9 - 3/n + (6n - 2)(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1))(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)} \\ &= \frac{n^{\frac{3}{2}}(-9 + 9/n - 3/n^2 + (6 - 2/n)(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1))(1 + \sqrt{1 - 1/n})}{3n^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{(1 - 1/n)^3})(\sqrt{(1 - 1/n)^3} + 1)} \end{aligned}$$

于是:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \right] \xrightarrow{\text{Stolz 公式}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

命题得证

□

1.6.2 思考题

3. 设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$. 进而设 $0 < x_1 \leq \frac{1}{q}$, 其中 $0 < q \leq 1$, 并且 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)$, $n \in \mathbb{N}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \frac{1}{q}$.

证明. 如果我们能证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n &\xrightarrow{\text{Stolz 公式}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - (n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n-1}(1 - qx_{n-1})}{qx_{n-1}} \\ &= \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

下面我们证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. 由于 $x_n - x_{n-1} = -qx_{n-1}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ 可知, $\{x_n\}$ 是单调减的. 很明显 $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 是收敛的. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 则 $a = a(1 - qa) \Rightarrow qa^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. 命题得证. □

4. 由 Toeplitz 定理导出 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 Stolz 公式.

证明. 取

$$t_{nk} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n - x_0}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

(1) 由于 $\{x_n\}$ 是单调增数列, $t_{nk} > 0$.

(2) 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$.

(3) $\sum_{k=1}^n t_{nk} = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1$.

由 Toeplitz 定理可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_0}{x_n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_0}{x_n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_n - x_0} \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &\xrightarrow{\text{Toeplitz 公式}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a. \end{aligned}$$

命题得证.

□

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$.

证明. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$. 我们很容易证明以下结论:

(1) $\{S_n\}$ 是单增的, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

现在计算

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= a_n^2(S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2)) + (S_n - a_n^2)^2 \\ &= 3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3(a_n S_n) + a_n^6 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3}{3n} \stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(a_n S_n)^3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^3}{3n} = 1.$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$. 命题得证. \square

1.7 复习题 1

未解决的题: 11

1. 设 $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 0, 1, 2, \dots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

证明. 由递归定义,

$$a_{n-1}^2 + 2 < a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 < a_n^2, \quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 2 * (n-1) + a_1^2 = 2n-1.$$

于是

$$0 \leq \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \forall n > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0.$$

算术平均

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n} = 0.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{2n} &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{2n} \\ &= \frac{2n-1}{2n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2n} \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

命题得证. \square

2. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, 并且存在常数 K 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K.$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

证明. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 存在 $M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \forall n > N_1.$$

设 $s_n = \sum_{k=1}^n |y_k|$. 很显然 $\{s_n\}$ 是一个收敛数列. 于是, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有

$$s_n - s_{n-N_1} < \frac{\varepsilon}{2MN_1}.$$

综上,

$$\begin{aligned} |z_n| &= |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &< |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_{N_1} y_{n-N_1+1}| + |x_{N_1+1} y_{n-N_1} + x_{N_1+2} y_{n-N_1-1} + \cdots + x_n y_1| \\ &< MN_1(s_n - s_{n-N_1}) + \frac{\varepsilon}{2K}(|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{n-N_1}|) \\ &< MN_1 \frac{\varepsilon}{2MN_1} + K \frac{\varepsilon}{2K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

命题得证. □

3. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足:

(1) $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$.

应用 Toeplitz 定理证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

证明. 在这题里我们可以取

$$t_{nk} = \frac{b_k}{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

(1) $t_{nk} > 0, \forall n > 0, k = 0, 1, \cdots, n$;

(2) 给定 $n, \sum_{k=0}^n t_{nk} = 1$;

(3) 由于 $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 给定 $k, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$;

于是

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = \sum_{k=0}^n t_{nk} \frac{a_k}{b_k}.$$

由 Toeplitz 定理, 命题可以得证. □

4. 设 $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a.$$

证明. 对于给定的正整数 $k > 0$, 我们可以证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$. 这是因为

$$0 \leq \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} < \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-k}}.$$

夹逼定理说明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{n-k}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$.

下面我们就可以用极限的定义来证明命题了. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N_0 , 当 $n > N_0$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $M = \max\{|a_0 - a|, |a_1 - a|, \dots, |a_{N_0} - a|\}$.

对于每一个 $k, 1 \leq k \leq N_0$, 存在 N_k , 当 $n > N_k$ 时有,

$$\frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \leq \frac{\varepsilon}{2MN_0}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, \dots, N_{N_0}\}$, 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - a \right| &= \left| \frac{p_1(a_n - a) + p_2(a_{n-1} - a) + \dots + p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{p_{n-k+1} |a_k - a|}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} + \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-N_0}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{k=1}^{N_0} \frac{M\varepsilon}{2MN_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

命题得证. □

5. 设 $\{a_n\}$ 为单调增的数列, 令 $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 若“单调增”的条件删去, 结论是否成立.

证明. 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\sigma_n < a + 1$. 于是

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2} < \sigma_{2n} < a + 1.$$

从而

$$a_n < 2\left(a + 1 - \frac{a_1}{2}\right).$$

单调增有上界的数列是收敛数列. 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$, 由例 1.1.15 可知,

$$b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = a.$$

如果 $\{a_n\}$ 不是单调增的, 结论不成立. 例如 $a_n = (-1)^n$, $\sigma_n = 0$ 或 $-\frac{1}{n}$. 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$. 但是 $\{a_n\}$ 不收敛. □

6. 设 $\{S_n\}$ 为数列, $a_n = S_n - S_{n-1}$, $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ 且 $\{\sigma_n\}$ 收敛, 证明 $\{S_n\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$.

证明. 我们直接计算

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \sigma_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nS_n - S_0 - S_1 - \cdots - S_{n-1}}{n+1} \\ &\stackrel{\text{Stolz 公式}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (nS_n - nS_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.\end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \sigma_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$. □

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明. 如果我们能证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (x_n - x_{n-1})}{n} = 0$, 则命题得证.
通过简单的计算, 我们有

$$(-1)^n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k) + x_2 - x_1.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n (x_n - x_{n-2}) = 0$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k)}{n-2} = 0.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n (x_n - x_{n-1})}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k (x_{k+2} - x_k)}{n-2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-2}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_2 - x_1}{n} = 0.$$

□

8. 设 u_0, u_1, \cdots 为满足 $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的实数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 证明 $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $u_k = 0$.

证明. 由 u_n 的定义可知,

$$u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad \forall n.$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. 由于 $\{S_n\}$ 收敛, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时 $\sum_{k=n}^{\infty} u_k < 1$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &\leq u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \\ &= u_{n+1} \left(u_{n+1} + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} u_{n+2} + \cdots \right) \\ &\leq u_{n+1} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots) \\ &\leq u_{n+1}\end{aligned}$$

从而, $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = c$. 由于 $\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k < 1$ 可知, $c = 0$. 又由 $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = 0$, 可知 $u_N = u_{N-1} = \cdots = u_1 = 0$. □

9. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$

证明. 取 $t_{nk} = \frac{1}{2^n} C_n^k$, 我们有

$$(1) \quad t_{nk} > 0 \text{ 且 } \sum_{k=0}^n t_{nk} = \frac{1}{2^n} (1+1)^n = 1;$$

(2) 很容易验证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$. 因为 $2^n = (1+1)^n > C_n^{k+1}$, 从而

$$0 \leq t_{nk} \leq \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0$.

由 Toeplitz 定理知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$. □

10. 给定实数 a_0, a_1 , 并令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$

证明. 由递归公式有:

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) (a_{n-1} - a_{n-2}) = \dots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - a_0).$$

于是:

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (a_1 - a_0) + \dots + (a_1 - a_0) \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} (a_1 - a_0) \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} (a_1 - a_0) \right) = a_0 + \frac{2}{3} (a_1 - a_0) = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$. □

11. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为任意给定的实数. 令

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 x_{n+1} 应理解为 x_1 . 归纳定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$x_{n+1}^{(k-1)}$ 应理解为 $x_1^{(k-1)}$, $k = 2, 3, \dots$. 证明:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

12. 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = l; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^2} = \frac{l}{2}.$$

证明.

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$, 易知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

现在计算

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k - na_1 &= \sum_{k=2}^n (a_k - a_1) \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{l=1}^{k-1} (a_{l+1} - a_l) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)(a_{l+1} - a_l) \end{aligned}$$

如果取 $t_{nk} = \frac{2(n-k)}{(n-1)n}$, 则

$$(1) \quad t_{nk} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \cdots, n \text{ 且 } \sum_{k=1}^n t_{nk} = \sum_{k=1}^n \frac{2(n-k)}{(n-1)n} = 1;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nk} = 0, \quad \forall k.$$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k - na_1}{(n-1)n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{(n-1)n} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \frac{l}{2}.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k - na_1}{(n-1)n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)n}{n^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{n} = \frac{l}{2}.$$

命题得证。 □

13. 设 $x_1 \in [0, 1], \forall n \geq 2$, 令

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2}x_{n-1}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1+x_{n-1}}{2}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{3}; \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{2}{3}.$

证明. 由递推公式可知

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+x_{2(k-1)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_{2(k-1)} \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \left(\frac{1}{4} \right)^l + \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} x_2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k + \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} x_2. \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{3}$.

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^l + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \frac{2}{3}$. □

14. 定初始值 a_0 , 并递推定义

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

求 a_0 的所有可能的值, 使得数列 $\{a_n\}$ 是严格增的。

解. 考虑数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$. 显然

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + (-1)^n a_0 \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n (5a_0 - 1) \right] \end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{1}{5} [2^n + (-1)^n (5a_0 - 1) 3^n].$$

由此

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_{2n-1} &= \frac{1}{5} [2^{2n} + (5a_0 - 1) 3^{2n} - 2^{2n-1} + (5a_0 - 1) 3^{2n-1}] \\ &= \frac{1}{5} [2^{2n-1} + 4(5a_0 - 1) 3^{2n-1}]. \end{aligned}$$

只有当 $a_0 \geq \frac{1}{5}$ 时, $a_{2n} > a_{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{2n-1} - a_{2n-2} &= \frac{1}{5} [2^{2n-1} - (5a_0 - 1) 3^{2n-1} - 2^{2n-2} - (5a_0 - 1) 3^{2n-2}] \\ &= \frac{1}{5} [2^{2n-2} - 4(5a_0 - 1) 3^{2n-2}]. \end{aligned}$$

只有当 $a_0 \leq \frac{1}{5}$ 时, $a_{2n-1} > a_{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

综上, 只有 $a_0 = \frac{1}{5}$ 时, $\{a_n\}$ 是严格递增的。

15. 设 $c > 0$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

试问: 当时 $-3 \leq c < 0$, 数列 $\{a_n\}$ 的收敛性如何?

证明. 现证 $c > 1$ 的情形:

$$a_n \geq \sqrt{ca_{n-1}^2} = \sqrt{c} a_{n-1} \geq \dots \geq (\sqrt{c})^{n-1} a_1.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{c})^{n-1} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. 命题得证.

现在 $c \leq 1$ 的情形:

(1) 考虑函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$. 当 $x \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$, $f(x) < 0$ 且 $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1 + c$.

(2) 很显然 $a_1 = \frac{c}{2} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$. 于是 $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}f(a_1) < 0 \Rightarrow a_2 < a_1$.

$$a_1^2 \in (2 - c - 2\sqrt{1-c}, 2 - c + 2\sqrt{1-c}) \Rightarrow a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c}).$$

(3) 假设 $n = k$ 时, $a_k \leq a_{k-1}$ 且 $a_k \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$. 显然我们有 $a_{k+1} \leq a_k, a_{k+1} \in (1 - \sqrt{1-c}, 1 + \sqrt{1-c})$.

综上,

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad a_n \geq 1 - \sqrt{1-c}, \quad \forall n.$$

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

现考虑 $-3 \leq c < 0$ 的情形。

(1) 我们先证明 a_n 是有界的。 $\frac{c}{2} < a_1 = \frac{c}{2} \leq 0$. 假设 $\frac{c}{2} \leq a_k \leq 0$, 则 $0 \leq a_k^2 \leq \frac{c^2}{4}$. 从而

$$\frac{c}{2} < \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} = a_{k+1} \leq \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} = \frac{c}{8}(4 - c) < 0$$

由数学归纳法知, $a_n \in [\frac{c}{2}, 0], \forall n$.

(2)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-2} &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-3})(a_{n-1} - a_{n-3}) \\ &= \frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-3})(a_{n-2} + a_{n-4})(a_{n-2} - a_{n-4}) \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{4}(a_{n-1} + a_{n-3})(a_{n-2} + a_{n-4}) > 0$, $a_n - a_{n-2}$ 和 $a_{n-2} - a_{n-4}$ 同号。即 $\{a_{2k-1} | k \geq 1\}$ 和 $\{a_{2k} | k \geq 1\}$ 是单调数列。因为

$$a_3 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a_2^2}{2} > 0$$

所以 $\{a_{2k-1} | k \leq 1\}$ 是单调递增的。又因为

$$a_4 - a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}(a_3 - a_1) < 0,$$

所以 $\{a_{2k} | k \geq 1\}$ 是单调递减的。

假设当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $a_{2k-1} \rightarrow p, a_{2k} \rightarrow q$. 在递推公式两端取极限, 我们有

$$\begin{aligned} p &= \frac{c}{2} + \frac{q^2}{2} \\ q &= \frac{c}{2} + \frac{p^2}{2} \end{aligned}$$

两式相减可得

$$p - q = \frac{1}{2}(q - p)(p + q) \Rightarrow (p - q)(p + q + 2) = 0.$$

如果 $p - q = 0$, i.e. $p = q$, 则 $p = q = 1 - \sqrt{1-c}$.

如果 $p + q + 2 = 0$, 则将 $p = -2 - q$ 代入第一个方程, 我们有 $(q + 1)^2 = -(c + 3)$. 所以如果 $c > -3$, 则 $(q + 1)^2 < 0$, 从而无解。当 $c = -3$ 时, $q = -1$, 从而 $p = q = -1$. \square

16. 数列 $\{u_n\}$ 定义如下: $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2, n \in \mathbb{N}$. 问: a, b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛, 并求出其极限值。

解. 由递归定义可知:

$$u_{n+1} - a = (u_n - a)^2 + (u_n - a).$$

记 $v_n = u_n - a$, 则 $v_1 = b - a$. 如果 $\{u_n\}$ 收敛, 则 $\{v_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

(1) 由于 $v_{n+1} - v_n = v_n^2 \geq 0$, $\{v_n\}$ 是单调增的。

(2) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, 则 $v_n \leq 0, \forall n$.

下面我们用归纳法来证明, 当 $v_1 \leq 0, v_1 + 1 \geq 0$ 时, $v_n \leq 0$ 且 $v_n + 1 \geq 0 \forall n$.

(1) 当 $n = 1$ 时, 成立。

(2) 假设 $n = k$ 时, 我们也有 $v_k \leq 0$ 且 $v_k + 1 \geq 0$.

(3) 我们证明 $n = k + 1$ 时也成立。因为

$$v_{k+1} = v_k \cdot (v_k + 1),$$

所以 $v_{k+1} \leq 0$. 另一方面

$$v_{k+1} + 1 = v_k^2 + v_k + 1 = \left(v_k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

由此可见, 当 $b \in [a - 1, a]$ 时, $\{u_n\}$ 收敛。

17. 设 $A > 0, 0 < y_0 < A^{-1}, y_{n+1} = y_n(2 - Ay_n), n \in \mathbb{N}$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A^{-1}$.

证明. 如果我们能证明 $0 < y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$, 则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 2 - Ay_n \geq 2 - AA^{-1} = 1 \Rightarrow y_{n+1} \geq y_n.$$

从而 $\{y_n\}$ 是单调递增有上界的数列。故收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A^{-1}$.

下面我们就证明 $y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. 考虑函数 $f(x) = x(2 - Ax)$. 显然该函数在 $x = A^{-1}$ 是取得最大值。即 $f(x) < A^{-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. 由于 $0 < y_1 < A^{-1}$, 由归纳法, $0 < y_n < A^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. \square

18. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

证明. 由于 $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$, 则 $a_n \neq 2$, 从而 $a_1 \neq \frac{3}{2}$. 我们现证无论 a_1 取何值, 都存在 N 使得 $a_N \leq 1$.

(1) 如果 $a_1 \leq 1$, 取 $N = 1, a_N = a_1 \leq 1$

(2) 如果 $a_1 > \frac{3}{2}$, 则 $a_2 > 2, a_3 < 0$. 于是取 $N = 3, a_N = a_3 < 0 \leq 1$.

(3) 如果 $1 < a_1 < \frac{3}{2}$. 记 $a_1 = 1 + h$, 则

$$a_k = 1 + \frac{h}{1 - (k-1)h}, \quad k = 2, 3 \dots$$

取 $k = [\frac{1}{h}]$, 我们有

$$1 - (k-1)h \geq h > 0, \quad \frac{h}{1 - (k-1)h} \geq \frac{1}{2}.$$

从而取 $N = k + 2 = [\frac{1}{h}] + 2$, 我们有 $a_{N-2} = a_k \geq \frac{3}{2}, a_N < 0 \leq 1$.

综上, 我们不妨假设 $a_1 \leq 1$. 下面我们可以用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 是单调增的, 且 $a_n \leq 1, \forall n$. 由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n},$$

我们可知当 $a_n < 1$ 时, $a_{n+1} > a_n$. 又因为 $2 - a_n > 1 \rightarrow a_{n+1} \leq 1$. 到此我们证明了 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 则 $(2 - a)a = 1$. 解方程知 $a = 1$. \square

19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足不等式 $0 \leq a_k \leq 100a_n (n \leq k \leq 2n, n = 1, 2, \dots)$, 且无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$

证明. 显然 $a_{2n} \leq 100a_n, a_{2n} \leq 100a_{n+1}, \dots, a_{2n} \leq 100a_{2n-1}$. 从而

$$0 \leq 2na_{2n} \leq 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2na_{2n} = 0$.

同理, $a_{2n-1} \leq 100a_n, a_{2n-1} \leq 100a_{n+1}, \dots, a_{2n-1} \leq 100a_{2n-2}$. 将所有的不等式加起来, 我们有

$$0 \leq (2n-1)a_{2n-1} = a_{2n-1} + 2(n-1)a_{2n-1} \leq 2 * 100 \sum_{k=n}^{2n-2} a_k + a_{2n-1} \leq 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \sum_{k=n}^{2n-1} a_k = 0$. 由夹逼定理知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n-1)a_{2n-1} = 0$.

综上所述, 我们有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ \square

20. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

证明. 通过简单计算, 我们可以得知

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n-k+1}{n^2}\right), \quad \forall k \leq \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$\left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

另一方面

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n.$$

很显然

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{2n^2}\right)^n &= e^{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n &= e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由夹逼定理, 命题得证. \square

21. 设 $a_1 > b_1 > 0$, 令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

证明. 很显然

$$b_n \leq \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \leq a_n, \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \leq \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1}, \\ b_n - b_{n-1} &= \frac{(a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \geq 0 \Rightarrow b_n \geq b_{n-1}. \end{aligned}$$

所以

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_2 \leq a_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 都存在。

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b,$$

$$a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1} = \dots = a_1 b_1 \Rightarrow ab = a_1 b_1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \Rightarrow a = \frac{a + b}{2} \Rightarrow a = b.$$

于是 $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$. □

22. 当 $n \geq 3$ 时, 证明:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

证明. 在证明该题之前, 我们先证明如下结论: 数列 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $n \geq 2, a_k \geq -1, k = 1, 2, \dots, n$ 且它们有相同的符号, 则

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k.$$

我们用归纳法来证明此命题:

(1) 当 $n = 2$ 时, $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 \geq 1 + a_1 + a_2$, 命题成立。

(2) 假设 $n = k$ 时, 命题亦成立, i.e. $\prod_{n=1}^k (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^k a_n$.

(3) 下面证明当 $n = k + 1$ 时, 命题亦成立。

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{k+1} (1 + a_n) &= \left(\prod_{n=1}^k (1 + a_n) \right) \cdot (1 + a_{k+1}) \\ &\geq (1 + a_1 + \dots + a_k) \cdot (1 + a_{k+1}) \quad (\text{因为 } 1 + a_{k+1} \geq 0) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n + \sum_{n=1}^k a_n a_{k+1} \\ &\geq 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n \end{aligned}$$

命题得证。

下面我们用上述命题来证明此题。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

首先, 由 $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1, \forall k \leq n$, 我们可知

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

右边的不等式的得证。

另一方面, 应用上面证明的结论, 可知

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{n} = 1 - \frac{(k-1)k}{2n}.$$

于是

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n}$$

左边的不等式得证。 □

23. 设 $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), n = 2, 3, \cdots$, 且

$$x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ (其中 $\prod_{k=1}^n$ 表示从 $k=1$ 到 $k=n$ 的连乘积)。

解. 我们先计算

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) \\ &= \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2 + 1}{2(a_1 + 1)} \cdot \frac{a_3 + 1}{3(a_2 + 1)} \cdots \frac{a_n + 1}{n(a_{n-1} + 1)} \\ &= \frac{a_n + 1}{n! a_1} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} a_1 &= 1! \\ a_2 &= 2! \left(1 + \frac{1}{1!}\right) \\ a_3 &= 3! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) \\ &\vdots \\ a_n &= n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) \end{aligned}$$

从而知,

$$a_n + 1 = n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

于是: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$

24. 设 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, 用 K_n 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n}$

解. 我们记 $x_n = H_n - \ln n$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = C$ (Euler 常数). 现在我们计算

$$x_{K_{n+1}} - x_{K_n} = \left(\frac{1}{K_{n+1} + 1} + \cdots + \frac{1}{K_{n+1}} \right) - \ln K_{n+1} + \ln K_n.$$

另一方面

$$1 - \frac{1}{K_n} \leq \left(\frac{1}{K_n + 1} + \cdots + \frac{1}{K_{n+1}} \right) < 1 + \frac{1}{K_{n+1}}.$$

从而由夹逼定理知

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{K_{n+1}} - x_{K_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \ln K_{n+1} + \ln K_n).$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = e$.

25. 设 $y_0 \geq 2, y_n = y_{n-1}^2 - 2 (n \in \mathbb{N})$,

$$S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$.

证明. 如果 $y_0 = 2$, 则 $y_n = 2, \forall n > 0$. 从而 $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}.$$

下面证明当 $y_0 > 2$ 时结论亦成立. 取 $a = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}$. 简单计算可知

$$y_0 = a + \frac{1}{a}.$$

由此

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \\ y_2 &= y_1^2 - 2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2 - 2 = a^4 + \frac{1}{a^4} \\ &\dots \\ y_n &= y_{n-1}^2 - 2 = \left(a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}} \right)^2 - 2 = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y_0 y_1 \cdots y_n &= \frac{1}{a - \frac{1}{a}} \left[\left(a - \frac{1}{a} \right) \left(a + \frac{1}{a} \right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdots \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \right) \right] \\ &= \frac{a}{a^2 - 1} \left[(a^{2^n})^2 - \left(\frac{1}{a^{2^n}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{a}{a^2 - 1} \frac{a^{2^{n+2}} - 1}{a^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{a^{2^{n+1}}}{a^{2^{n+2}} - 1} = \frac{a^2 - 1}{a} \left(\frac{1}{a^{2^{n+1}} - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+2}} - 1} \right).$$

由此可知

$$S_n = \frac{a^2 - 1}{a} \left(\frac{1}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^{2^{n+2}} - 1} \right).$$

进而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a^2 - 1}{a} \left(\frac{1}{a^2 - 1} + 1 \right) = a$. 命题得证。 \square

26. 令数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明: (1) 当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$.

证明. (1). 直接计算

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} b_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k)!}{n!} \left(1 + \frac{k+1}{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k)!}{n!} + \sum_{k=1}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{n!(n-n)!}{n!} + \sum_{k=1}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{0!(n-0)!}{n!} - 2 \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)!}{n!} - 2 \\ &= 2b_n - 2 \end{aligned}$$

所以, $b_n = \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1$.

(2) 当 $n > 4$, 我们有 $b_{n-1} > 2 \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{2n}{n-1}$, 从而

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{b_{n-1}} < \frac{n+1}{2n} + \frac{n-1}{2n} = 1.$$

即从 $n > 4$ 起, 数列 $\{b_n\}$ 单调递减。另一方面, 显然 $b_n \geq 2, \forall n \geq 2$. 由此可知 $\{b_n\}$ 是收敛的。对

(1) 中的等式取极限可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$. \square

27. 设 $S_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. 证明:

$$n^n \left[1 + \frac{1}{4(n-1)} \right] < S_n < n^n \left[1 + \frac{2}{e(n-1)} \right].$$

证明. 提取 n^n 可得

$$S_n = n^n \left[1 + \frac{1}{n^n} + \frac{2^2}{n^n} + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \right].$$

显然

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{1}{n^n} + \frac{2^2}{n^n} + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{(n-2)^{n-1}}{n^n} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} < \frac{2(n-1)^{n-1}}{n^n} \\ &< \frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

我们不难证明 $\{(1 - \frac{1}{n})^n\}$ 是单调增且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. 所以

$$\frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}.$$

将上述不等式综合起来, 我们就证明了此题。 □

28. 设 $x_n > 0$. 证明:

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n \geq e;$$

(2) 上式中的 e 为最佳常数。

证明. (1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n \geq e$ 等价于 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{n}{1+n} \right)^n \geq 1$. 我们用反证法来证明该命题。如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{n}{1+n} \right)^n < 1,$$

则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 我们有

$$\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{n}{1+n} < 1, \forall n > N.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{x_{N+1}}{N+1} - \frac{x_{N+2}}{N+2} &> \frac{x_1}{N+2} \\ \frac{x_{N+2}}{N+2} - \frac{x_{N+3}}{N+3} &> \frac{x_1}{N+3}, \\ &\dots \\ \frac{x_{n-1}}{n-1} - \frac{x_n}{n} &> \frac{x_1}{n} \end{aligned}$$

把以上的不等式加起来, 我们有

$$\frac{x_{N+1}}{N+1} > \frac{x_{N+1}}{N+1} - \frac{x_n}{n} > \sum_{k=N+1}^n \frac{x_1}{k} \rightarrow +\infty.$$

这显然与 $\frac{x_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立, 命题得证。

(2) 现证明对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在数列 $\{x_n\}$ 使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n < e^{1+\varepsilon}.$$

我们取 $x_1 = \frac{\varepsilon}{2}, x_n = n$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{2} + n + 1}{n} \right)^n = e^{1+\frac{\varepsilon}{2}} < e^{1+\varepsilon}.$$

这说明 $e^{1+\varepsilon}$ 不是下确界。命题得证。 □

29. 设 $a_n > 0$. 证明: $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \geq 1$.

证明. 如果 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < 1$, 则, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有,

$$n \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}.$$

于是:

$$\frac{a_{N+1}}{N+1} > \frac{a_{N+1}}{N+1} - \frac{a_n}{n} > \sum_{k=N+2}^n \frac{1}{k}.$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{k=N+2}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$. 这与 $\frac{a_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立。 □

30. 设 $2a_{n+1} = 1 + b_n^2, 2b_{n+1} = 2a_n - a_n^2, 0 \leq b_n \leq \frac{1}{2} \leq a_n, n = 1, 2, \dots$. 证明: 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛, 并求其极限之值。

证明. 很容易证得: $a_n \leq \frac{5}{8}, \forall n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}(b_n + b_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \\ b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{2}(2 - a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &\leq \frac{1}{2^2} |a_{n-1} - a_{n-2}| \\ |b_{n+1} - b_n| &\leq \frac{1}{2^2} |b_{n-1} - b_{n-2}| \end{aligned}$$

取 $A = \max\{|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|\}, B = \max\{|b_2 - b_1|, |b_3 - b_2|\}$, 则

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n-1}| &\leq \frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}} A \\ |b_n - b_{n-1}| &\leq \frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}} B \end{aligned}$$

由此可见, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是 Cauchy 列。从而都收敛。

假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, 则

$$\begin{aligned} 2a &= 1 + b^2, \\ 2b &= 2a - a^2. \end{aligned}$$

解方程组可知, $(b^2 + 2b - 1)(b^2 - 2b + 3) = 0$. 解得 $b = \sqrt{2} - 1, a = 2 - \sqrt{2}$. □

第二章 函数极限与连续

2.1 函数极限的概念

2.1.1 练习题

1. 在定义 2.1.3 中就 24 种情形给出函数极限的定义。并配出相应的图形。

解. 不在此赘述。用到的时候在写。

2. 按函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{x} = 6;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\Delta > \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $x > \Delta$ 时, 有

$$\left| \frac{6x+5}{x} - 6 \right| = \left| \frac{5}{6x} \right| < \frac{1}{x} < \frac{1}{\Delta} < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{x} = 6.$

□

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x + 10) = 2;$$

证明. 对 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 有

$$|(x^2 - 6x + 10) - 2| = |x - 2| \cdot |x - 4| < 3 \cdot |x - 2| < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 6x + 10) = 2.$

□

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\Delta = \max\{2 + \sqrt{5}, \frac{1}{\varepsilon}\}$, 当 $x > \Delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} - 1 \right| = \left| \frac{-4}{x^2 - 1} \right| < \frac{4}{4x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\Delta} < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1.$

□

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon^2}{4} \right\}$, 当 $2 - \delta < x < 2$ 时, 有

$$\left| \sqrt{4 - x^2} \right| = \left| \sqrt{(2 - x)(2 + x)} \right| < 2\sqrt{2 - x} < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$. □

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{11} \right\}$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x^4 - 1}{x - 1} - 4 \right| = |x^3 + x^2 + x - 3| = |x - 1| \cdot |x^2 + 2x + 3| < 11 \cdot |x - 1| < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$. □

$$(6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6};$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \{1, 30\varepsilon\}$, 当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x - 3}{x^2 - 9} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{x - 3}{6(x + 3)} \right| < \frac{|x - 3|}{30} < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$. □

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon^2$, 当 $0 < x - 1 < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} \right| < \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$. □

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = 0;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\Delta = \max \left\{ 1, \frac{4}{\varepsilon^2} \right\}$, 当 $x > \Delta$ 时, 有

$$\left| \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} \right| = \frac{2}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}} < \frac{2}{\sqrt{x}} < \frac{2}{\Delta} < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = 0$. □

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}} = 1;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\Delta = \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, 2 + \sqrt{6} \right\}$, 当 $|x| > \Delta$ 时, 有

$$\left| \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}} - 1 \right| = \frac{4}{\sqrt{x^4 - 4} + (x^2 - 2)} < \frac{4}{4|x|} < \frac{1}{\Delta} < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}} = 1$. □

3. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. 用 $\varepsilon - \delta$ 法证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2;$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x)| < |a| + 1, \quad |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}.$$

于是,

$$|f^2(x) - a^2| = (|f(x)| + |a|) \cdot |f(x) - a| < (2|a| + 1) |f(x) - a| < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$. □

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a} (a > 0);$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$f(x) > \frac{a}{4}, \quad |f(x) - a| < \frac{3\sqrt{a}}{2}\varepsilon.$$

于是,

$$\left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{a} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{a}} < \frac{2}{3\sqrt{a}} |f(x) - a| < \varepsilon$$

所以, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a} (a > 0)$. □

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{a}.$$

证明. 我们分两种情况证明此命题。

(a) 当 $a = 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon^3$. 于是,

$$\left| \sqrt[3]{f(x)} \right| < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{a}$.

(b) 当 $a \neq 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - a| < \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \sqrt[3]{a^2} \varepsilon \right\}.$$

于是, $f(x)a \geq 0, f^2(x) \geq 0$ 且

$$\left| \sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{a} \right| = \frac{|f(x) - a|}{\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)a} + \sqrt[3]{a^2}} < \frac{|f(x) - a|}{\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{a}$.

命题得证. □

4. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$. 举例说明反之不成立. 问: 当且仅当 a 为何值时反之也成立?

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \varepsilon$. 于是,

$$||f(x)| - |a|| \leq |f(x) - a| < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$.

设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

则, $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$. 但 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

当 $a = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. □

5. 讨论下列函数在点 0 处的极限或左, 右极限:

(1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$;

解. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$.

(2) $f(x) = [x]$;

解. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$.

(3) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases}$

解. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$. 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ -ax, & x < 2. \end{cases}$

(1) 求 $f(2^+), f(2^-)$;

解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$, 当 $2 < x < 2 + \delta$ 时, 有

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = (x + 2)(x - 2) < 5(x - 2) < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|+1}$, 当 $2 - \delta < x < 2$ 时, 有

$$|f(x) + 2a| = |-ax + 2a| = |a|(2 - x) < \frac{|a|\varepsilon}{|a|+1} < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2a$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 存在, a 应为何值。

解. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 存在 $\iff \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$. 所以 $a = -2$.

7. 设 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. 证明: $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ 时, 有 $f(x) < f(y)$.

证明. 取 $\varepsilon < \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ 时, 有

$$f(x) - f(x_0^-) < \varepsilon \Rightarrow f(x) < \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

对上述的 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x_0 < y < x_0 + \delta_2$ 时, 有

$$f(y) - f(x_0^+) > -\varepsilon \Rightarrow f(y) > \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ 时, 有 $f(x) < \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} < f(y)$. \square

8. 设 f 在 $(-\infty, x_0)$ 内单调增, 且有一数列 $\{x_n\}$, 适合 $x_n < x_0 (n \in \mathbb{N})$, $x_n \rightarrow x_0^-$ 及 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a$. 证明: $f(x_0^-) = a = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x)$.

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < f(x_n) < a + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_0 - x_2, \dots, x_0 - x_{N+1}\}$, 我们现在考虑 x 满足 $x_0 - \delta < x < x_0$.

(1) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0^-$ 且 $x_n < x_0$, 则存在 $N_1 > N$ 使得

$$x_0 - x_{N_1} < \frac{x_0 - x}{2} \Rightarrow x_{N_1} > \frac{x_0 + x}{2} > x.$$

(2) 从而 $x_{N+1} < x < x_{N_1}$. 由于 $f(x)$ 单调增, $f(x_{N+1}) \leq f(x) \leq f(x_{N_1})$.

于是,

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

所以, $f(x_0^-) = a$. 类似地, 我们也可以证明 $a = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x)$. \square

9. 用肯定的语气表示 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$.

解. 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 x' 满足 $0 < |x' - x_0| < \delta$, $|f(x') - a| > \varepsilon_0$.

10. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset [0, 1]$ 为有限集, 且 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, $i, j \in \mathbb{N}$. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in A_n, \\ 0, & x \in [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}$$

$\forall x_0 \in [0, 1]$, 求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

对于给定的 $x_0 \in [0, 1]$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0 - x'|}{2} \mid x' \in \bigcup_{n=1}^N A_n \right\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$x \in [0, 1] - \bigcup_{n=1}^N A_n.$$

于是,

$$|f(x)| < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

11. 叙述函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 的归结原理, 并应用它证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ 都不存在。

解. 归结原理: 对任意的数列 $\{x_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a,$$

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 。

对于 $\sin x$, 我们考察子列 $a_n = (2n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$ 和 $b_n = (2n + \frac{3}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$. 显然

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(b_n) = -1.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 不存在。

对于 $\cos x$, 我们考察子列 $a_n = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ 和 $b_n = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{N}$. 显然

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(b_n) = -1.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ 不存在。

12. (1) 叙述极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 的 *Cauchy* 准则;

解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\Delta > 0$, 当 $x_1 > \Delta, x_2 > \Delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

(2) 根据 *Cauchy* 准则叙述 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在的充要条件, 并应用它证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ 不存在。

解. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在 \iff 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \Delta > 0$, 存在 $x_1 > \Delta, x_2 > \Delta$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0.$$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 对 $\forall \Delta > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{\Delta}{2\pi} \right\rceil$, $x_1 = (2N + \frac{1}{2})\pi > \Delta, x_2 = (2N + \frac{3}{2})\pi > \Delta$. 于是

$$|\sin(x_1) - \sin(x_2)| = 2 > \varepsilon_0.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 不存在。

同理可以证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ 不存在。

13. 设 f 为周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0$ 。

证明. 假设 f 的周期为 T , 我们只需证明 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, T)$. 我们用反证法来证明此命题。

设 $\exists x_0 \in [0, T)$ 使得 $f(x_0) \neq 0$. 考虑数列 $\{x_0 + nT\}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_0 + nT) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + nT) = f(x_0) \neq 0.$$

由归结原理, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$. 这与假设矛盾, 从而 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, T)$. □

14. 设 f 在 $U^o(x_0)$ 内有定义。证明: $\forall \{x_n\} \subset U^o(x_0)$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 都存在 (实数, 或 $+\infty$, 或 $-\infty$), 则所有这些极限都相等。

证明. (反证法): 假设 $\{x_n^1 \subset U^o(x_0)\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^1 = x_0$ 和 $\{x_n^2 \subset U^o(x_0)\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 = x_0$, 但

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^1) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^2)$. 我们考虑数列 $x_n^3 = \begin{cases} x_k^1, & n = 2k - 1 \\ x_k^2, & n = 2k. \end{cases}$ 显然数列 $\{x_n^3\}$ 满足条件

$$\{x_n^3 \subset U^o(x_0)\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^3 = x_0,$$

但是由归结原理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^3)$ 不存在。这与命题假设矛盾。从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n^2)$ 。命题得证。□

15. 设 f 为定义 $[a, +\infty)$ 在上的增 (减) 函数。证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在有限的充要条件是 f 在 $[a, +\infty)$ 上有上 (下) 界。

证明. 我们只证明 f 是单增函数的情形。

(\Rightarrow) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. 我们证明 $f(x) \leq a$. 假设存在 x_0 使得 $f(x_0) > b$. 考察子列 $\{x_0 + n\}$. 由于 f 是单增的, 有

$$f(x_0 + n) \geq f(x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + n)$ 不存在, 则由归结原理, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在。这与假设矛盾。

(2) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + n)$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + n) \geq f(x_0) > b.$$

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ 矛盾。

于是, $f(x) \leq b, \forall x \in [a, +\infty)$.

(\Leftarrow) 设 $f(x) < M, \forall x \in [0, +\infty)$. 取一个子列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

我们可以从中取一个单调增的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足条件

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

由于 f 是单调增的, $f(x_{n_k})$ 也是单调增。从而 $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k})$ 存在。设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = b$. 由此我们可以推出 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$. 同理, 另取一个子列 $\{x'_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = +\infty.$$

从中取一个单调增的子列 $\{x'_{n_k}\}$ 满足条件

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x'_{n_k} = +\infty$$

且

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x'_{n_k}) = b', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = b'$$

将 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x'_{n_k}\}$ 合起来, 组成一个新的递增列, 记作 $\{y_n\}$. 于是, $\{f(y_n)\}$ 收敛。由归结原理知, $b = b'$.

自此我们证明了任何数列 $\{x_n\}$, 如果满足 $x_n \rightarrow +\infty$, 则 $f(x_n) \rightarrow b$. 再次利用归结原理, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在。□

16. 设 f 为 $U^o(x_0)$ 上的单调增函数, 证明: $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 均存在且有限, 且

$$f(x_0^-) = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x), \quad f(x_0^+) = \inf_{x \in U_+^o(x_0)} f(x).$$

证明. 取 $x_1 \in U_-^o(x_0), x_2 \in U_+^o(x_0)$, 由 f 是单增函数知,

$$f(x) \leq f(x_2), \forall x \in U_-^o(x_0),$$

$$f(x) \geq f(x_1), \forall x \in U_+^o(x_0).$$

所以,

$$f(x_1) \leq \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x) \leq \inf_{x \in U_+^o(x_0)} f(x) \leq f(x_2).$$

取单调增数列 $\{a_n \subset U_-^o(x_0)\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0^-$. 于是, $\{f(a_n)\}$ 单调增, 且有上界. 从而它收敛. 记 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = A$. 由上确界的定义知, $A \leq \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x)$. 设 $\{b_n \subset U_+^o(x_0)\}$ 是一个满足条件 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0^+$ 的子列. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < f(a_n) < A + \varepsilon.$$

另一方面取 $\varepsilon' = x_0 - a_{N+1}$, 存在 N' , 当 $n > N'$ 时, 有

$$x_0 - b_n < \varepsilon'.$$

又由于 $a_n \rightarrow x_0^-$, 则对任意满足上式的 b_n , 存在 $m > N + 1$ 使得

$$a_{N+1} < b_n < a_m.$$

于是

$$A - \varepsilon < f(a_{N+1}) \leq f(b_n) \leq f(a_m) < A + \varepsilon.$$

有极限的定义知,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \leq A.$$

由归结原理和上确界的定义知,

$$f(x_0^-) = \sup_{x \in U_-^o(x_0)} f(x).$$

类似的办法可证 $f(x_0^+) = \inf_{x \in U_+^o(x_0)} f(x)$. □

2.1.2 思考题

17. (1) 设函数 f 在 $(0, +\infty)$ 上满足方程 $f(2x) = f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. 证明: $f(x) = a$.

证明. (反证法) 设 $x_0 \in (0, +\infty), f(x_0) \neq a$. 由函数方程式知,

$$f(nx_0) = f(x_0).$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx_0) = f(x_0).$$

由归结原理知, 这与假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 矛盾. 所以, $f(x) = a, \forall x \in (0, +\infty)$. □

(2) 设函数 f 在 $(0, +\infty)$ 上满足方程 $f(x^2) = f(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1)$$

证明: $f(x) \equiv f(1), x \in (0, +\infty)$.

证明. 如果 $x_0 < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0^{2^n} = 0.$$

由函数方程式和归结原理知:

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0^{2^n}) = f(1).$$

如果 $x_0 > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0^{2^n} = +\infty.$$

由函数方程式和归结原理知:

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0^{2^n}) = f(1).$$

所以, $f(x) \equiv f(1), x \in (0, +\infty)$. □

18. 设函数 $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 在任意有限区间 (a, b) 内有界, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A.$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$.

证明. 设 $|f(x)| < M, \forall x \in (a, a+1)$. 记 $r = x - [x]$.

$$f(x) - f([a] + r) = \sum_{k=[a]}^{[x]-1} (f(k+1+r) - f(k+r)).$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f([a] + r)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f([a] + r)}{[x] - [a]} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x] - [a]}{x} \\ &= A \end{aligned}$$

命题得证. □

19. 设 $a > 1, b > 1$ 为两个常数, 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 的近旁有界, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(ax) = bf(x)$. 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

证明. 由函数的定义可知 $f(0) = 0$. 设 f 在 $(-\delta_0, \delta_0)$ 上有界. 记 $|f(x)| < M, \forall x \in (-\delta_0, \delta_0)$. 对 $\forall x \rightarrow 0$, 存在 N 使得

$$a^n x \in (-\delta_0, \delta_0), n = 1, 2, \dots, N. \quad a^{N+1}x \notin (-\delta_0, \delta_0).$$

显然当 $x \rightarrow 0$ 时, $N \rightarrow +\infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{f(a^N x)}{b^N} = 0.$$

命题得证. □

2.2 函数极限的性质

2.2.1 练习题

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-2x^3}{1+x^4};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-2x^3}{1+x^4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x-2x^3)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^4)} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x-1};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x}-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x-1};$$

解.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-m-1}+\cdots+1}{x^{-m}} = -m, & m < 0; \\ 0, & m = 0; \\ 1, & m = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^{m-1}+\cdots+1) = m, & m > 1. \end{cases}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1};$$

解.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \begin{cases} \text{无定义}, & n = 0; \\ 0, & m = 0; \\ \frac{m}{n}, & m \neq 0, n \neq 0. \end{cases}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x};$$

解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1+x)^{\frac{1}{|m|}}}{x} = -\frac{1}{|m|} = \frac{1}{m}, & m < 0; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[m]{(1+x)^{m-1}+\cdots+1}} = \frac{1}{m}, & m > 0 \end{cases}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} = \frac{1}{m}$.

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^m - m}{x - 1}$$

解. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^m - m}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x+1) + \cdots + (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)] = \frac{m(m+1)}{2}$.

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

解. 我们对 n, m 分情况讨论:

(a) 当 $m=0$ 或者 $n=0$ 时, 分子为 0, 于是极限为 0.

(b) 当 $m=n=1$ 或者 $m=n=-1$ 是, 分子为 0, 于是极限为 0.

(c) 当 $m=1, n=-1$ 时,

$$(1+x)^{-1} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-1} - (1-x)}{x^2} = 1$.

(d) 当 $m=-1, n=1$ 时,

$$(1-x) - (1+x)^{-1} = \frac{-x^2}{1+x}.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - (1+x)^{-1}}{x^2} = -1$.

(e) 当 $m > 0, n < 0$ 时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = \frac{1 - (1+mx)^{|n|}(1+nx)^m}{(1+mx)^{|n|}}.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = n^2 m^2 - C_{|n|}^2 m^2 - C_m^2 n^2$.

(f) 当 $m < 0, n > 0$ 时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = \frac{(1+mx)^n(1+nx)^{|m|} - 1}{(1+nx)^{|m|}}.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_n^2 m^2 + C_{|m|}^2 n^2 - n^2 m^2$.

(g) 当 $m > 0, n > 0$ 时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = (C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2)x^2 + \cdots$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2$.

(h) 当 $m < 0, n < 0$ 时,

$$(1+mx)^n - (1+nx)^m = \frac{(1+nx)^{|m|} - (1+mx)^{|n|}}{(1+mx)^{|n|}(1+nx)^{|m|}} = \frac{(C_{|m|}^2 n^2 - C_{|n|}^2 m^2)x^2 + \cdots}{(1+mx)^{|n|}(1+nx)^{|m|}}.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = C_{|m|}^2 n^2 - C_{|n|}^2 m^2$.

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - (1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m]{1+nx}}{x \cdot \sqrt[m]{1+nx}} = -\frac{n}{|m|}, & m < 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m]{1+nx}}{\sqrt[m]{(1+nx)^{m-1}} + \sqrt[m]{(1+nx)^{m-2}} + \cdots + 1} = \frac{n}{m}, & m > 0. \end{cases}$$

$$\text{即, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} = \frac{n}{m}.$$

$$\text{同理, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} = \frac{m}{n}. \text{ 所以,}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - (1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} \\ &= \frac{n}{m} - \frac{m}{n} \\ &= \frac{n^2 - m^2}{nm}. \end{aligned}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{x} (a > 0);$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{a^2 + x} + a)} = \frac{1}{2a}.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}} = \frac{3^{70}8^{20}}{5^{90}}.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} (m, n \in \mathbb{N});$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}} + \cdots + 1)}{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}} + \cdots + 1)} = \frac{n}{m}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x};$$

解. 无论 $m > 0$ 或者 $m < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} = \frac{\alpha}{m}.$$

同理可知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \frac{\beta}{n}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\beta x}(\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} \\ &= \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} \\ &= \frac{n\alpha + m\beta}{mn}. \end{aligned}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(a+x)(b+x)} - \sqrt{(a-x)(b-x)});$$

解. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(a+x)(b+x)} - \sqrt{(a-x)(b-x)}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(a+b)x}{\sqrt{(a+x)(b+x)} + \sqrt{(a-x)(b-x)}} = a+b.$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) (m, n \in \mathbb{N});$$

解. 记 $A = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, B = \sum_{k=0}^{m-1} x^k$. 显然

$$A - n = \sum_{k=1}^{n-1} (x^k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j,$$

$$B - m = \sum_{k=1}^{m-1} (x^k - 1) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} &= \frac{1}{(1-x)AB} (mA - nB) \\ &= \frac{1}{(1-x)AB} (m(A-n) - n(B-m)) \\ &= \frac{1}{AB} \left(m \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j - n \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} x^j \right). \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{1}{mn} \left(m \frac{n(n-1)}{2} - n \frac{m(m-1)}{2} \right) = \frac{n-m}{2}.$

$$(18) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} (n \in \mathbb{N});$$

解. 当 $n=1$ 时, 分子为 0, 所以极限为 0. 当 $n>1$ 时,

$$\begin{aligned} (x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a) &= (x-a) \sum_{k=0}^{n-2} a^k (x^{n-1-k} - a^{n-1-k}) \\ &= (x-a)^2 \sum_{k=0}^{n-2} a^k \sum_{j=0}^{n-2-k} a^j x^{n-2-k-j}. \end{aligned}$$

于是, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} = a^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k) = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}.$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} (n \in \mathbb{N});$$

解. 我们先计算分子:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - (n+1)x + n &= x(x^n - 1) - n(x-1) \\ &= (x-1) \sum_{k=1}^n (x^k - 1) \\ &= (x-1)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} x^j. \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} (n \in \mathbb{N});$$

解. 分子有理化,

$$1 - \sqrt[l]{x} = \frac{1-x}{\sum_{j=0}^{l-1} \sqrt[l]{x^j}}.$$

所以,

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{\prod_{l=2}^n \left(\sum_{j=0}^{l-1} \sqrt[l]{x^j} \right)}.$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

2. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$.

(1) 若 $a > b$, 则在某 $U^o(x_0)$ 内有 $f(x) > g(x)$;

证明. 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. 由函数极限定义知, 存在一个空心邻域 $U^o(x_0, \delta_1)$ 使得

$$g(x) - b < \varepsilon \Rightarrow g(x) < \frac{a+b}{2}, \quad \forall x \in U^o(x_0, \delta_1).$$

取 $U^o(x_0, \delta) \subset U^o(x_0, \delta_1)$ 使得

$$f(x) - a > -\varepsilon \Rightarrow f(x) > \frac{a+b}{2}, \quad \forall x \in U^o(x_0, \delta).$$

所以, $f(x) > g(x), \forall x \in U^o(x_0, \delta)$. □

(2) 若在某 $U^o(x_0)$ 内有 $f(x) < g(x)$, 问: 是否必有 $a < b$? 说明理由.

解. 不会是严格 $a < b$. 例如在 0 的空心邻域 $U^o(0, \frac{1}{2})$, $1 + \frac{x^2}{3} = f(x) < g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$. 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

3. 求下列极限 ($n \in \mathbb{N}$):

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4};$$

解. 取 $\delta = \frac{1}{2}$, 当 $2 < x < 2 + \delta$ 时, $[x] = 2$. 所以, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4} = 0$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]^2 + 4}{x^2 + 4};$$

解. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]^2 + 4}{x^2 + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} ([x]^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 4)} = \frac{5}{8}$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[4x]}{1+x};$$

证明. 显然 $[4x] = 3, \forall x \in (1 - \frac{1}{4}, 1)$. 所以, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[4x]}{1+x} = \frac{3}{2}$. □

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n};$$

证明. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n} = -1$ □

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n};$$

证明. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^n} = 1$. □

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x};$$

证明. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1} = \frac{1}{n}$. □

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x};$$

证明. 由于 $x - 1 \leq [x] \leq x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$. □

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}};$$

证明. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1$. □

4. 设 $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m},$$

其中 $n, m \in \mathbb{N}$.

证明. 分子有理化,

$$\frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}}{\sqrt[m]{(1+p(x))^{m-1}} + \sqrt[m]{(1+p(x))^{m-2}} + \cdots + 1}.$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+p(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}$. □

5. 定出常数 a 与 b , 使得下列等式成立:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0;$$

解. $\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b = \frac{(1-a)x - (a+b) + \frac{1-b}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. 如果极限为 0, 则 $1-a=0, a+b=0$. 于是, $a=1, b=-1$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0;$$

证明. 分子有理化

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b = \frac{(1 - a^2)x^2 - (1 + 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}.$$

如果极限为 0, 则 $1 + a \neq 0, 1 - a^2 = 0, 1 + 2ab = 0$. 于是, $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. □

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0;$$

证明. 分子有理化

$$\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b = \frac{(1 - a^2)x^2 - (1 + 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + ax + b}.$$

如果极限为 0, 则 $1 - a \neq 0, 1 - a^2 = 0, 1 + 2ab = 0$. 于是, $a = -1, b = \frac{1}{2}$. □

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} (b \neq 0);$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h};$$

解. 利用三角函数性质, 有

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h = -2 \sin^2 \frac{h}{2} \sin x + \cos x \sin h.$$

$$\text{所以, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{3+x} \right)^x;$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{3+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3+x} \right)^{-\frac{3+x}{2} \cdot \frac{-2x}{3+x}} = e^{-2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{\sin^2 x};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x};$$

$$\text{解. 令 } y = \arctan x, \text{ 则 } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = 1.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x};$$

解. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a};$$

解. 利用三角函数性质:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 a &= (\sin x + \sin a)(\sin x - \sin a) \\ &= (\sin x + \sin a) \left[\sin(x - a) \cos a - 2 \sin a \sin^2 \left(\frac{x - a}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a} = 2 \sin a \cos a$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1};$$

解. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = 2$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}.$$

证明. 利用三角函数性质: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. 于是,

$$\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \sqrt{2}.$

□

7. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1});$$

解. 利用三角函数性质:

$$\sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi) = \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) \cos n\pi \Rightarrow \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = \frac{\sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi)}{\cos n\pi}.$$

所以, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi)}{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{(\sqrt{n^2+1}+n)} = 0.$ 于是,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = 0.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n});$$

解. 利用三角函数性质, $\sin^2(\pi \sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n} - n\pi) = \sin^2 \left(\pi \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \right).$ 所

以, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n}) = 1.$

8. (1) 证明: $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x}]$;

证明. 利用三角函数性质,

$$\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x} = \sin \left(\frac{k}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}} \right) \cos \sqrt{x} - 2 \sin \sqrt{x} \sin^2 \left(\frac{k}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right).$$

于是, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x}] = 0$. □

(2) 设常数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \sin \sqrt{x+k} = 0.$$

证明. 显然

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin \sqrt{x+k} = \sum_{k=2}^n a_k [\sin \sqrt{x+k} - \sin \sqrt{x+1}].$$

由上题知, 这里和的每一项都收敛于 0. 所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \sin \sqrt{x+k} = 0$. □

9. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

证明. 当 $x = 0$ 时, $\cos \frac{x}{2^k} = \cos 0 = 1$. 所以, 极限为 1. 下面证 $x \neq 0$ 的情形.

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \sin x / \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{2^n} = \left(\frac{x}{2^n} / \sin \frac{x}{2^n} \right) \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \frac{\sin x}{x}$. □

10. 计算极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{2x} \cdot (-2)} = e^{-2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x;$$

$$\text{解. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot \frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}};$$

解. 利用三角函数性质,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} &= \left(1 + \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin x) \cos x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \left(1 + \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin x) \cos x} \right)^{\frac{(1 + \sin x) \cos x}{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \sin x) \cos x}. \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = 1$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

解. 利用三角函数性质,

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cos x \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x}{\cos 2x}.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cos x \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x}{x^2 \cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x};$$

解. 利用三角函数性质:

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}.$$

$$\begin{aligned} (\tan x)^{\tan 2x} &= \left(1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)^{\frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{(\sin x - \cos x)}} \right]^{\frac{-2 \sin x}{(\sin x + \cos x)}} \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}.$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$$

解. 令 $x = \frac{\pi}{2} + y.$

$$\begin{aligned} (\sin x)^{\tan x} &= \left[\frac{1}{(1 + (\cos y - 1))^{\frac{1}{\cos y - 1}}} \right]^{\frac{(1 - \cos y) \cos y}{\sin y}} \\ &= \left[\frac{1}{(1 + (\cos y - 1))^{\frac{1}{\cos y - 1}}} \right]^{\frac{\sin \frac{y}{2} \cos y}{\cos \frac{y}{2}}} \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1.$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

解. 令 $y = \frac{1}{x}.$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y + \cos y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos y - 1}{y} = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\sin y + \cos y)^{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[(1 + \sin y + \cos y - 1)^{\frac{1}{\sin y + \cos y - 1}} \right]^{\frac{\sin y + \cos y - 1}{y}} \\ &= e \end{aligned}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}};$$

解. 利用三角函数公式 $\cos \sqrt{x} - 1 = -2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos \sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \right]^{\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos \sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \right]^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}};$$

解. 和上题类似,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(1 + \cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1)^{\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1} \right]^{n(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(1 + \cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1)^{\cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1} \right]^{-\frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2\sqrt{n}}}{\frac{x}{2\sqrt{n}}} \right)^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}};$$

解. 由例 2.2.13(2) 知,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{1+x}} - 1}{\frac{x}{1+x}} &= 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1))^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)} 2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1))^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)} \frac{2(e^{\frac{x}{1+x}} - 1)}{\frac{x}{1+x}} \left(\frac{x^2+1}{1+x} \right)} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}, a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

解. 利用三角函数的性质,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} &= \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{(x-a) \sin a}} \\ &= \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin(x-a) \cos a}{(x-a) \sin a} \cdot \frac{\sin a (\cos(x-a) - 1)}{(x-a) \sin a}}. \end{aligned}$$

于是, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}}.$

$$(12) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2};$$

解. 记 $A = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$, 则

$$\sqrt[2^n]{2} A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}.$$

于是, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}} = 2.$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x}.$$

解. 令 $(1+x)^\mu = e^y$, 则 $x \rightarrow 0 \iff y \rightarrow 0$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{(\sqrt[y]{e})^y - 1} = \mu.$$

11. 设 $x_n = \underbrace{\sin \cdots \sin}_n a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

证明. 对 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \underbrace{\sin \cdots \sin}_{(n+1) \text{ 次}} a = x_{n+1} \leq x_n = \underbrace{\sin \cdots \sin}_n a, \quad \forall n \geq 2.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调减有下界的数列, 故收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则

$$b = \sin b, \quad 0 \leq b \leq \sin 1.$$

解方程得 $b = 0$. □

2.2.2 思考题

12. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$. (提示: $e = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n!n}$, $\frac{n}{n+1} < \theta_n < 1$)

证明. 根据提示, 计算

$$en! = m + \frac{\theta_n}{n}.$$

所以, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin 2\pi \frac{\theta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \theta_n \cdot \frac{\sin 2\pi \frac{\theta_n}{n}}{2\pi \frac{\theta_n}{n}} = 2\pi$. □

13. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ [(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}} \right\} = \frac{1}{e}$.

证明. 记

$$A = n \cdot \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n!}} - 1 \right), \quad B = \frac{1}{n+1} \left(\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} + \ln \frac{n+1}{n} \right).$$

简单计算可以

$$A = nB \cdot \frac{e^B - 1}{B}.$$

于是, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A = \lim_{n \rightarrow +\infty} nB \cdot \frac{e^B - 1}{B} = 1$. 所以,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ [(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot A = \frac{1}{e}.$$

命题得证. □

14. 设 $|x| < 1$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n} \right)^n = e^{\frac{1}{1-x}}.$$

证明. 因为 $|x| < 1$, 级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1-x^{n+1}}{n(1-x)} \right)^{\frac{n(1-x)}{1-x^{n+1}} \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} \\ &= e^{\frac{1}{1-x}}.\end{aligned}$$

命题得证。 □

15. 设 f 与 g 为两个周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 证明 $f = g$.

证明. 设 f 和 g 的周期分别为 T_f 和 T_g , 则 $f(x) = f(x + nT_f)$, $g(x) = g(x + nT_g)$. 考虑子列 $\{x + nT_f\}$ 和 $x + nT_g$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x + nT_f) - g(x + nT_f)] = 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x + nT_f).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x + nT_g) - g(x + nT_g)] = 0 \Rightarrow g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT_g).$$

于是,

$$\begin{aligned}f(x) - g(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (g(x + nT_f) - f(x + nT_g)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (g(x + nT_f + nT_g) - f(x + nT_g + nT_f)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

命题得证。 □

2.3 无穷小 (大) 量的数量级

2.3.1 练习题

1. 证明下列各式:

(1) $2x - x^2 = O^*(x)(x \rightarrow 0);$

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2.$$

所以, $2x - x^2 = O^*(x)(x \rightarrow 0).$ □

(2) $x \sin \sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}}(x \rightarrow 0^+);$

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

所以, $x \sin \sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}}(x \rightarrow 0^+).$ □

(3) $2x^3 + x^2 = O^*(x^3)(x \rightarrow \infty);$

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x} = 2.$$

所以, $2x^3 + x^2 = O^*(x^3)(x \rightarrow \infty)$. □

(4) $x \sin \sqrt{x} = o(x^{\frac{5}{4}})(x \rightarrow 0^+)$;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \sqrt{x}}{x^{\frac{5}{4}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{x} = 0.$$

所以, $x \sin \sqrt{x} = o(x^{\frac{5}{4}})(x \rightarrow 0)$. □

(5) $\sqrt{1+x} - 1 = o(1)(x \rightarrow 0)$;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} = 0.$$

所以, $\sqrt{1+x} - 1 = o(1)(x \rightarrow 0)$. □

(6) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}(x \rightarrow 0)$;

证明. 因为,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} = 1.$$

所以, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}(x \rightarrow 0)$. □

(7) $\frac{1}{1+\alpha(x)} = 1 - \alpha(x) + o(\alpha(x))(x \rightarrow x_0)$, 其中 $\alpha(x) = o(1)(x \rightarrow x_0)$;

证明. 因为,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{1+\alpha(x)} - 1 + \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{1+\alpha(x)} = 0.$$

所以, $\frac{1}{1+\alpha(x)} = 1 - \alpha(x) + o(\alpha(x))(x \rightarrow x_0)$. □

(8) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)(x \rightarrow 0), n \in \mathbb{N}$;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n C_n^k x^{k-1} = 0.$$

所以, $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)(x \rightarrow 0)$ □

(9) $(1+x)^n = 1 + nx + O^*(x^2)(x \rightarrow 0), n \in \mathbb{N}$;

证明. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n C_n^k x^{k-2} = C_n^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=3}^n C_n^k x^{k-1} = C_n^2.$$

所以, $(1+x)^n = 1 + nx + O^*(x^2)(x \rightarrow 0)$. □

$$(10) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} (x \rightarrow +\infty).$$

证明. 因为,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} = 1.$$

所以, $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} (x \rightarrow +\infty)$. □

2. 确定 α 的值, 使下列函数与 x^α 当 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量:

$$(1) \sin 2x - 2 \sin x;$$

解. 因为 $\sin 2x - 2 \sin x = 2 \sin x (\cos x - 1) = -4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3} = -1.$$

所以, $\sin 2x - 2 \sin x$ 与 x^3 当 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量.

$$(2) \frac{1}{1+x} - (1-x);$$

解. 因为 $\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1-x)}{x^2} = 1.$$

所以, $\frac{1}{1+x} - (1-x)$ 与 x^2 当 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量.

$$(3) \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x};$$

解. 因为 $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x} = \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \sin x})}$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \sin x})} = 1.$$

所以, $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}$ 与 x 当 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量.

$$(4) \sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}.$$

解. 因为 $\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3} = \sqrt[5]{x^2} \sqrt[5]{3 - 4x}$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{3 - 4x} = \sqrt[5]{3}.$$

所以, $\sqrt[5]{3x^2 - 4x^3}$ 与 $x^{\frac{2}{5}}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量.

3. 确定 α 的值, 使下列函数与 x^α 当 $x \rightarrow \infty$ 时为同阶无穷大量:

$$(1) \sqrt{x^2 + x^5};$$

解. 因为 $\sqrt{x^2+x^5} = \sqrt{x^5}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x^5}}{\sqrt{x^5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}} = 1.$$

所以, $\sqrt{x^2+x^5}$ 与 $x^{\frac{5}{2}}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为同阶无穷大量.

(2) $x + x^2(2 + x^{-1} \sin x)$;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2(2 + x^{-1} \sin x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2.$$

所以, $x + x^2(2 + x^{-1} \sin x)$ 与 x^2 当 $x \rightarrow \infty$ 时为同阶无穷大量.

(3) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

所以, $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ 与 \sqrt{x} 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为同阶无穷大量.

(4) $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$.

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5}{x^2(x^3 - 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 2.$$

所以, $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$ 与 x^2 当 $x \rightarrow \infty$ 时为同阶无穷大量.

4. 求下列无穷小或无穷大的阶:

(1) $x - 5x^3 + x^{10} (x \rightarrow 0)$;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 5x^3 + x^{10}}{x} = 1,$$

所以, $x - 5x^3 + x^{10}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为 1 阶无穷小量.

(2) $x - 5x^3 + x^{10} (x \rightarrow +\infty)$;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 5x^3 + x^{10}}{x^{10}} = 1,$$

所以, $x - 5x^3 + x^{10}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为 10 阶无穷大量.

(3) $x^3 - 3x + 2 (x \rightarrow 1)$;

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3.$$

所以, $x^3 - 3x + 2$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为 2 阶无穷小量.

$$(4) \sqrt{x \sin x} (x \rightarrow 0);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{x} = 1.$$

所以, $\sqrt{x \sin x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为 1 阶无穷小量.

$$(5) \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} (x \rightarrow 0);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 2.$$

所以, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为 1 阶无穷小量.

$$(6) \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}};$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x^5}}} = 1.$$

所以, $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为 1 阶无穷大量.

$$(7) \frac{x+1}{x^4+1} (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 1.$$

所以, $\frac{x+1}{x^4+1}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为 3 阶无穷小量.

$$(8) \frac{2x^5}{x^3-3x+1} (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^2(x^3-3x+1)} = 2.$$

所以, $\frac{2x^5}{x^3-3x+1}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为 2 阶无穷大量.

$$(9) \frac{1}{\sin \pi x} (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x-1}{\sin \pi(x-1)} = -\frac{1}{\pi}.$$

所以, $\frac{1}{\sin \pi x}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为 1 阶无穷大量.

$$(10) \sin \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} - \sqrt{2} \right) (x \rightarrow 0^+)$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} - \sqrt{2} \right)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left(\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} + \sqrt{2})(\sqrt{1 + \sqrt{x}} + 1)} \right)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

所以, $\sin \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} - \sqrt{2} \right)$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时为 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小量.

$$(11) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \quad (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \sqrt{\frac{1}{x^7}}}}} = 1.$$

所以, $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大量.

$$(12) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \quad (x \rightarrow 0^+);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt[16]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^{\frac{7}{8}} + \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}}} = 1.$$

所以, $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时为 $\frac{1}{16}$ 阶无穷小量.

$$(13) (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n) \quad (x \rightarrow +\infty);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) = 1.$$

所以, $(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 阶无穷大量.

$$(14) x^3 - 3x + 2 \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 和 (3) 一样

$$(15) \ln x \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 + (x-1))^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

所以, $\ln x$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为 1 阶无穷小量.

$$(16) e^x - e, \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}} = e.$$

所以, $e^x - e$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为 1 阶无穷小量.

$$(17) \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} \quad (x \rightarrow 1);$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1 - x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

所以, $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小量.

$$(18) x^x - 1 \quad (x \rightarrow 1).$$

解. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[x \ln(1 + (x - 1))^{\frac{1}{x-1}} \right] \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1.$$

所以, $x^x - 1$ 当 $x \rightarrow 1$ 时为 1 阶无穷小量.

5. 用等价无穷小替换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x - \cos x};$$

解. 因为 $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $(x \rightarrow +\infty)$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \cos x} = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1 + x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{2}$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)};$$

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^4 x}{\sin^3 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^3 \cdot \frac{x^2}{2}} = 2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{1 - \cos^2 x};$$

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1 + x^4} - 1 \sim \frac{x^4}{2}$, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x \sim x^2$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^4} - 1}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^2} = 0.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{\sin x};$$

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan(\tan x) \sim x, \sin x \sim x$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{\sin x} = 1.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 (\sqrt{1 + x^2} - 1)^3}{x^5 \sin^3 x};$$

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x, \sqrt{1 + x^2} - 1 \sim \frac{x^2}{2}, \sin x \sim x$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 (\sqrt{1 + x^2} - 1)^3}{x^5 \sin^3 x} = \frac{1}{8}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x}, n \in \mathbb{N}.$$

解. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1 + x + x^2} - 1 \sim \frac{x}{n}, \sin 2x \sim 2x$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{2n}.$$

6. 设 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$. 证明:

$$f(x) - g(x) = o(f(x)) (x \rightarrow x_0); \quad f(x) - g(x) = o(g(x)) (x \rightarrow x_0).$$

证明. 因为 $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

从而,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

即, $f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad f(x) - g(x) = o(g(x)) (x \rightarrow x_0)$. □

2.3.2 思考题

7. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且 $f(x) - f(\frac{x}{2}) = o(x) (x \rightarrow 0)$. 证明: $f(x) = o(x) (x \rightarrow 0)$.

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} \right| < \varepsilon.$$

现考察 $\frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x}$. 当 $|x| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})}{x} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^k} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

于是,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} \right| \leq 2\varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. i.e. $f(x) = o(x)(x \rightarrow 0)$. □

8. 设函数 $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- (1) $g(x+T) > g(x), \forall x \geq a$, 其中 $T > 0$ 为常数;
- (2) 函数 f, g 在 $[a, +\infty)$ 的任何有限子区间上有界;
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

证明: 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = A,$$

那么

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $M_1 > 0$, 当 $y > M_1$ 时, 有

$$A - \varepsilon \leq \frac{f(y+T) - f(y)}{g(y+T) - g(y)} \leq A + \varepsilon.$$

如果限定 $y \in [M_1, M_1 + T)$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(A - \varepsilon)g(y + nT) - (A - \varepsilon)g(y) \leq f(y + nT) - f(y) \leq (A + \varepsilon)g(y + nT) - (A + \varepsilon)g(y).$$

由题设, 存在 $M_2 > 0$ 使得

$$|f(y)| < M_2, |g(y)| < M_2, \forall y \in [M_1, M_1 + T).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{|(A - \varepsilon)g(y) + f(y)|}{g(y + nT)} < \varepsilon, \forall y \in [M_1, M_1 + T),$$

$$\frac{|(A + \varepsilon)g(y) + f(y)|}{g(y + nT)} < \varepsilon, \forall y \in [M_1, M_1 + T).$$

由此可知

$$A - 2\varepsilon \leq \frac{f(y + nT)}{g(y + nT)} \leq A + 2\varepsilon, \forall y \in [M_1, M_1 + T).$$

取 $M = NT + M_1$, 当 $x > M$ 时, 存在 $y \in [M_1, M_1 + T)$ 和 $n > N$ 使得 $x = y + nT$. 于是,

$$A - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + 2\varepsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. □

注 8. 这题可以看做是函数版的 Stolz 公式。

9. 函数列 $f_n: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n 都是无穷大 ($x \rightarrow +\infty$). 证明: 存在 $(0, +\infty)$ 上的一个函数 f , 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, f 是 f_n 比更高阶的无穷大, $n \in \mathbb{N}$.

证明. 定义一个函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k^2(x), \quad x \in (0, n].$$

由此定义, 对于函数 f_n , 当 $x > n$ 时, $f(x) \geq f_n^2(x)$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f_n(x)} \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

即, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 是比 $f_n(x)$ 更高阶的无穷大量。□

2.4 函数的连续, 单调函数的不连续点集, 初等函数的连续性

2.4.1 练习题

1. 研究下列函数在 $x = 0$ 处的连续性:

(1) $f(x) = [x]$;

解. 取 $1 > \delta > 0$, 考虑 $x \in (-\delta, \delta)$.

$$f(x) = -1 \neq f(0), \forall x \in (-\delta, 0), \quad f(x) = 0 = f(0), \forall x \in [0, \delta).$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 是右连续, 但不左连续。故, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

(2) $f(x) = \operatorname{sgn} |x|$;

解. 取 $1 > \delta > 0$, 考虑 $x \in (-\delta, \delta)$, 则

$$f(x) = 1 \neq f(0) = 0, \forall 0 \neq x \in (-\delta, \delta).$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

(3) $f(x) = |x|$;

解. 显然 $f(0) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0).$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

(4) $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$;

解. 由 \cos 的连续性知, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. 所以, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$. 即, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

(5) $f(x) = \lceil \cos x \rceil$;

解. 当 $x = 0$ 时, $f(0) = \lceil \cos 0 \rceil = \lceil 1 \rceil = 1$. 取 $0 < \delta < 1$, 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta)$ 时,

$$|\cos x| < 1, \quad f(x) = 0 \neq f(1).$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

(6) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$;

解. 取 $0 < \delta < 1$. 当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $\sin x < 0$. 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $\sin x > 0$. 于是,

$$f(x) = -1, \forall x \in (-\delta, 0), \quad f(x) = 1, \forall x \in (0, \delta), \quad f(0) = 0.$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

解. 很显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

解. 我们计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1,$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续, 但不左连续。

$$(9) \quad f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 2.718, & x = 0; \end{cases}$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e \neq f(0).$$

所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续。

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0).$$

所以, f 在 $x = 0$ 处连续。

2. 指出下列函数的间断点, 并说明其类型:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty; \end{cases}$$

解. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -7) \cup (-7, 1) \cup (1, +\infty)$ 上是连续的。

因为 $\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{1}{x+7} = +\infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^+} x = -7$. 所以, $x = -7$ 是 f 的第二类间断点。

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0$. 所以 $x = 1$ 是函数 f 的跳跃间断点。

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, 由归结原理, f 在 x 的左右极限都不存在. 所以 $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ 是函数 f 的第二类间断点.

$$(3) D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}; \end{cases}$$

解. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 由归结原理知, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的极限不存在. 故, x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

$$(4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解. 函数在 $x \neq 0$ 时是连续的. 另外

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

所以, $x=0$ 是函数 f 的第二类间断点.

3. 延拓下列函数, 使其在 \mathbb{R} 上连续:

$$(1) f(x) = \frac{x^3-8}{x-2};$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 12.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2, \\ 12, & x = 2. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续.

$$(2) f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2};$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续.

$$(3) f(x) = x \cos \frac{1}{x}.$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续.

$$(4) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

解. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

定义函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续。

4. 定出 a, b 与 c , 使得函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ ax^2 + bx + c, & 0 < |x| < 1, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续

解. 函数要在 $x = -1$ 处连续, 则

$$a - b + c = -1$$

函数要在 $x = 0$ 处连续, 则

$$c = 0.$$

函数要在 $x = 1$ 处连续, 则

$$a + b + c = 1$$

于是, 解方程组可知 $a = 0, b = 1, c = 0$

5. 设 f 在点 x_0 处连续, 则 $|f|$ 与 f^2 也在点 x_0 处连续。反之是否成立?

证明. 由连续的定义知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad |f(x)| < |f(x_0)| + 1.$$

从而,

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$|f^2(x) - f^2(x_0)| \leq (|f(x)| + |f(x_0)|) |f(x) - f(x_0)| \leq (1 + 2|f(x_0)|)\varepsilon.$$

所以, $|f|$ 和 f^2 在 x_0 处也连续。反过来不成立。例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$|f| \equiv 1, f^2 \equiv 1$, 所以他们在 $x = 0$ 处连续。但 f 在 $x = 0$ 处右连续但不左连续。 \square

6. 讨论函数 $f + g$ 与 fg 在点 x_0 处的连续性, 如果:

(1) f 在点 x_0 处连续, 但 g 在点 x_0 处不连续;

解. $f+g$ 在 x_0 处肯定不连续, 不然 $g = (f+g) - f$ 就在 x_0 处连续了. fg 在 x_0 可能连续, 不如 $f \equiv 0$, 则对任何的 g , fg 都是连续的. 但是如果 $f(x_0) \neq 0$, 则 fg 在 x_0 处不连续. 否则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{fg}{f} = \frac{f(x_0)g(x_0)}{f(x_0)} = g(x_0).$$

即, g 在 x_0 处连续了。

(2) f 与 g 在点 x_0 处都不连续。

解. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

设 $g = -f$. 显然 f 和 g 在 $x = 0$ 处都不连续, 但是 $f+g \equiv 0$, $fg \equiv -1$. 所以, $f+g$ 和 fg 在 $x = 0$ 处连续。

当然也有例子说明 $f+g$ 和 fg 不连续。

7. 设函数 f 在点 x_0 处连续, $f(x_0) > 0$, 则当 x 充分靠近点 x_0 时, 应有 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$.

证明. 取 $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

命题得证. □

8. (1) 设 $f(x) \equiv g(x)$, $x \neq 0$, 且 $f(0) \neq g(0)$. 证明: f 与 g 两者中至多有一个在 $x = 0$ 处连续

证明. 由于 $f(x) \equiv g(x)$, $x \neq 0$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \stackrel{\text{记作}}{=} A.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \stackrel{\text{记作}}{=} B.$$

如果 $A \neq B$, 则 f 和 g 在 $x = 0$ 处都不连续。

如果 f 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(0) = A = B$, 从而 $g(0) \neq A$ 和 $g(0) \neq B$. 即 g 在 $x = 0$ 处不连续. 同理, 如果 g 在 $x = 0$ 处连续, 则 f 在 $x = 0$ 处不连续. □

(2) 设 f 与 g 都为 \mathbb{R} 上的连续函数, 且 $f(x) \equiv g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. 证明: $f(x) \equiv g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

证明. 因为 f 和 g 在 \mathbb{R} 上连续, 则 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

由归结原理, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x \in \mathbb{Q}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0), \forall x \in \mathbb{Q}.$$

由于 $f(x) \equiv g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$ 知,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \forall x \in \mathbb{Q}.$$

所以, $f(x_0) = g(x_0)$. □

9. 举出定义在 $[0, 1]$ 上分别符合下述要求的函数:

(1) 只在 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{4}$ 三点不连续的函数;

解. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1], \\ 2x, & x = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}. \end{cases}$$

显然此函数满足要求。

(2) 只在 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{4}$ 三点连续的函数;

解. 考虑如下函数

$$f_1(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{4}, & x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x < \frac{7}{24}, \\ -x + \frac{1}{4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, 0 \leq x < \frac{7}{24}, \\ 1, & \frac{7}{24} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{7}{24}, \\ x - \frac{1}{3}, & x \in \mathbb{Q}, \frac{7}{24} \leq x < \frac{5}{12}, \\ -x + \frac{1}{3}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \frac{7}{24} \leq x < \frac{5}{12}, \\ 1, & \frac{5}{12} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{5}{12}, \\ x - \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{Q}, \frac{5}{12} \leq x \leq 1, \\ -x + \frac{1}{2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \frac{5}{12} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

f_1 在 $x = \frac{1}{4}$ 和 $x > \frac{7}{24}$ 上连续。

f_2 在 $x = \frac{1}{3}, x < \frac{7}{24}$ 和 $x > \frac{5}{12}$ 上连续。

f_3 在 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x < \frac{5}{12}$ 上连续。

考虑三个函数的乘积 $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$. 此函数只在 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 上连续。

(3) 只在 $\frac{1}{n} (n \in \mathbb{N})$ 上不连续的函数;

解. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}, \\ 2x, & x \in \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

$\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ 是函数 f 仅有的间断点。

(4) 只在 $x = 0$ 右连续, 而在其他点都不连续的函数。

解. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

这个函数只有在 $x = 0$ 右连续。

10. 设函数 f, g 在 (a, b) 上连续。证明:

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in (a, b),$$

$$G(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in (a, b)$$

在 (a, b) 上都为连续函数.

证明. 重新表述 F, G 为

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$

$$G(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

f, g 在 (a, b) 上连续, 则 $|f(x) - g(x)|$ 在 (a, b) 上连续. 从而, F, G 在 (a, b) 上连续. \square

11. 设 f 在 (a, b) 内连续。证明:

- (1) 如果 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 为有限值, 则 f 在 (a, b) 内有界; 又若 $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi) \geq \max\{f(a^+), f(b^-)\}$, 则 f 在 (a, b) 内能达到最大值;

证明. 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $\delta_1 > 0$, 当 $a \leq x \leq a + \delta_1$ 时, 有

$$|f(x)| \leq |f(a^+)| + 1$$

当 $b - \delta < x < b$ 时, 有

$$|f(x)| \leq |f(b^-)| + 1.$$

对任意的有理数 $\frac{p}{q}$, 存在 $\delta_{\frac{p}{q}}$, 当 $|x - \frac{p}{q}| < \delta_{\frac{p}{q}}$ 时, 有

$$|f(x)| \leq \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| + 1.$$

很显然 $\left\{ \left(-\delta_{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \delta_{\frac{p}{q}} \right) \mid \forall \frac{p}{q} \in [a + \frac{\delta_1}{2}, b - \frac{\delta_1}{2}] \right\}$ 构成闭区间 $[a + \frac{\delta_1}{2}, b - \frac{\delta_1}{2}]$ 的一个开覆盖。由有限覆盖定理知, 存在有限个有理数, $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_k}{q_k}$ 使得

$$[a + \frac{\delta_1}{2}, b - \frac{\delta_1}{2}] \subset \bigcup_{l=1}^k \left(-\delta_{\frac{p_l}{q_l}} + \frac{p_l}{q_l}, \frac{p_l}{q_l} + \delta_{\frac{p_l}{q_l}} \right).$$

取

$$M = \max \left\{ |f(a^+)|, |f(b^-)|, \left| f\left(\frac{p_1}{q_1}\right) \right|, \left| f\left(\frac{p_2}{q_2}\right) \right|, \dots, \left| f\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \right| \right\} + 1,$$

则 $|f(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$. \square

- (2) 如果 $f(a^+) = f(b^-) = +\infty$. 证明: f 在 (a, b) 内能达到最小值。

12. 设函数 f 在区间 I 上连续。证明:

- (1) 若 $\forall r \in \mathbb{Q} \cap I$ 有 $f(r) = 0$, 则在 I 上 $f(x) \equiv 0$;

证明. 对 $\forall x \in I$. 如果 $x \in \mathbb{Q}$, 则由题设 $f(x) = 0$. 当 $x \notin \mathbb{Q}$, 则存在有理子列 $r_n \rightarrow x$. 由连续性知, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = 0$. 所以, 在 I 上 $f(x) \equiv 0$. \square

(2) 若 $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap I, r_1 < r_2$ 有 $f(r_1) < f(r_2)$, 则 f 在 I 上严格增.

证明. 对 $\forall x_1 < x_2, x_1 \in I, x_2 \in I$. 我们单调减有理数列 $\{a_n\}$ 和单调增有理数列 $\{b_n\}$ 满足

$$x_1 < \cdots < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots < x_2,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_2.$$

$$\text{由连续性知, } f(x_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) < f(a_1) < f(b_1) < \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(x_2). \quad \square$$

13. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\forall x \in [a, b], \exists y \in [a, b], s.t.$

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明: $\exists \xi \in [a, b], s.t. f(\xi) = 0$.

证明. 取 $y_0 \in [a, b], \exists y_1 \in [a, b], s.t.$

$$|f(y_1)| \leq \frac{1}{2}|f(y_0)|.$$

$\exists y_2 \in [a, b], s.t.$

$$|f(y_2)| \leq \frac{1}{2}|f(y_1)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |f(y_0)|.$$

将此迭代下去, 我们可以得到一个子列 $\{y_n\} \subset [a, b]$ 满足

$$|f(y_n)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |f(y_0)|.$$

不妨设 $\{y_n\}$ 收敛 (否则就取其收敛子列). 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \xi$, 则 $\xi \in [a, b]$ 且由 f 的连续性知, $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = 0$. \square

14. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 满足: $0 \leq f(x) \leq x, x \in [0, +\infty)$. 又设, $a_1 \geq 0, a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, \dots$. **证明:**

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列;

证明. 由题意知, $\{a_n\}$ 是单调递减的数列, 且 $a_n \geq 0$. 于是, $\{a_n\}$ 为收敛数列. \square

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = t$, 则有 $f(t) = t$;

证明. 在 $a_{n+1} = f(a_n)$ 两边取极限知, $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \xrightarrow{f \text{ 是连续的}} f(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n) = f(t)$. \square

(3) 若条件改为 $0 \leq f(x) < x, x \in (0, +\infty)$, 则 $t = 0$.

证明. 由 (2) 和条件 $0 \leq f(x) < x, x \in (0, +\infty)$ 知, $t = 0$. \square

15. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x + 5}{1 + x^2 + \ln 1 + x};$$

解. 由分子, 分母的连续性知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x + 5}{1 + x^2 + \ln 1 + x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (e^x \cos x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 + \ln 1 + x)} = 6.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cos x};$$

解. 由连续性知,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cos x} = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}};$$

解. 从分子, 分母提取 \sqrt{x} 后, 应用函数的连续性知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right);$$

解. 有理化知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right).$$

解. 令 $t = \frac{1}{x}$ 和有理化知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{t + \sqrt{t}}}{\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}} + \sqrt{t - \sqrt{t + \sqrt{t}}}} = 1.$$

16. 设 f 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 常数 $c > 0$. 记

$$F(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leq c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

证明, F 在 \mathbb{R} 上连续.

证明. 重新表述 F 为

$$F(x) = \max\{-c, \min\{c, f(x)\}\}.$$

由题 10 知, $F(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续. □

2.4.2 思考题

17. 设函数 f 只有可去间断点。证明: $F(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$ 为连续函数。

证明. □

18. 设函数 f 在 \mathbb{R} 上单调增 (或单调减), $F(x) = f(x^+)$ 。证明: F 在 \mathbb{R} 上右连续。

证明. □

19. 设 f 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 适合函数方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。证明:

(1) 若 f 在一点 x_0 处连续。则 $f(x) = f(1)x$;

证明. 很容易证得:

$$f(n) = nf(1), \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1), \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

即, 对 $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = f(1)x$ 。下面我们证明 f 在 \mathbb{R} 上连续。

(a) 取 $y = x_0, x \rightarrow 0$, 则 $f(x+x_0) = f(x) + f(x_0)$ 。由于 f 在 x_0 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+x_0) = f(x_0).$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

所以, f 在 $x=0$ 处连续。

(b) 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 取 $y \rightarrow 0$, 有

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x+y) = f(x) + \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(x).$$

所以, f 在 x 处连续。

设 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 取 $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

于是,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(1)\frac{p_n}{q_n} = f(1)x.$$

所以, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)x$. □

(2) 若 f 在 \mathbb{R} 上单调, 也有 $f(x) = f(1)x$ 。

证明. 由上题知, 对 $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$ 。如果 f 单调, 则 f 连续。

下面我们不妨假设 f 单增。事实上, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 我们可以取有理列 $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ 和

$\left\{ \frac{p'_n}{q'_n} \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ 使得,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x^-,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p'_n}{q'_n} = x^+.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2 使得

$$f\left(\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}}\right) - f\left(\frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}\right) = f(1)\left(\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}} - \frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}\right) < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\left\{x - \frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}, \frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}} - x\right\}$, 当 $|y - x| < \delta$ 时,

$$|f(y) - f(x)| < f\left(\frac{p'_{N_1}}{q'_{N_1}}\right) - f\left(\frac{p_{N_2}}{q_{N_2}}\right) < \varepsilon.$$

所以, f 在 x 处连续. 由 x 的任意性知, f 在 \mathbb{R} 上连续. \square

20. 设函数 f 在 \mathbb{R} 上连续且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有等式 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. 证明: $f(x) = a^x$, 其中 $a = f(1)$ 为一正数.

证明. 由函数方程式知,

$$f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 1,$$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0,$$

$$f(n) = \underbrace{f(1) \cdot f(1) \cdots f(1)}_n = f(1)^n,$$

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)}.$$

同理, 我们可以证明 $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{\frac{p}{q}}.$$

由 f 的连续性知, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)^x$ \square

21. 设函数 f 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有等式 $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$. 证明: $f(x) = 0$ 或者 $f(x) = x^a$, 其中 a 为常数.

证明. 如果 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 则由 $f(x_0) = f(x_0)f(1)$ 知, $f(1) = 1$. 从而 $f(e) > 0$. 记

$$a = \ln f(e),$$

则

$$f(e) = e^a.$$

同时

$$f(e^n) = \underbrace{f(e) \cdot f(e) \cdots f(e)}_{n \uparrow} = \underbrace{e^a \cdot e^a \cdots e^a}_{n \uparrow} = (e^n)^a,$$

$$f(1) = f(e)f(e^{-1}) \Rightarrow f(e^{-1}) = (e^{-1})^a,$$

$$f(e^{-n}) = (e^{-n})^a,$$

又因为 $(\sqrt[n]{e})^n = e$ 知,

$$(f(\sqrt[n]{e}))^n = e^a \Rightarrow f(\sqrt[n]{e}) = (\sqrt[n]{e})^a.$$

由此可见, 对 $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$f\left(e^{\frac{p}{q}}\right) = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^a.$$

对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 我们可以找一系列有理数 $\left\{\frac{p_n}{q_n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \ln x.$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{p_n}{q_n}} = e^{\ln x} = x,$$

由 f 的连续性知,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(e^{\frac{p_n}{q_n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{p_n}{q_n}}\right)^a = x^a.$$

命题得证. □

22. 设 f 在 \mathbb{R} 上连续且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有等式

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

证明: $f = 0$ 或 $f(x) = \cos ax$ 或 $f(x) = \cosh ax$, 式中 a 为常数.

证明. 我们分以下情况来证明此命题:

(1) 如果 $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, 则 $f(x) = \cos(0x)$. 得证.

(2) 如果 $f(x_0) \neq 0, f(x_0) \neq 1$, 则 $f(0) = 1$. 于是 f 不是常数函数.

(a) 如果 f 是周期函数。连续的非常数函数存在最小正周期。设 T 为 f 的最小正周期, 即 $f(T) = f(0) = 1$. 我们很容易证明

$$f\left(\frac{T}{2}\right) = -1, f\left(\frac{T}{4}\right) = 0, f\left(\frac{3T}{4}\right) = 0,$$

$$f(x) > 0, \forall x \in \left[0, \frac{T}{4}\right) \cup \left(\frac{3T}{4}, T\right], f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right).$$

取 $a = \frac{2\pi}{T}$, 则 $f(0) = \cos a0 = 1, f(T) = \cos aT = 1$.

二等分 $[0, T]$,

$$f(T) + f(0) = 2f^2\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{T}{2}\right) = -1 = \cos a\frac{T}{2}.$$

假设 2^n 等分 $[0, T]$ 后,

$$f\left(\frac{kT}{2^n}\right) = \cos a\frac{kT}{2^n}, \forall k = 0, 1, \dots, 2^n.$$

下证在 2^{n+1} 等分点上, 上式也成立。当 $k = 2l, \forall l = 0, 1, \dots, 2^n$ 时, 显然成立。因为他们也是 2^n 等分点。当 $k = 1$ 时,

$$2\cos^2 a\frac{T}{2^{n+1}} = \cos a\frac{2T}{2^{n+1}} + \cos a0 = f\left(\frac{2T}{2^{n+1}}\right) + f(0) = 2f^2\left(\frac{T}{2^{n+1}}\right).$$

所以

$$f\left(\frac{T}{2^{n+1}}\right) = \cos a\frac{T}{2^{n+1}}.$$

对于其他的奇数 $k = 2l - 1, \forall l = 2, 3, \dots, 2^n$,

$$\begin{aligned} 2 \cos a \frac{kT}{2^{n+1}} \cos a \frac{T}{2^{n+1}} &= \cos a \frac{(k+1)T}{2^{n+1}} + \cos a \frac{(k-1)T}{2^{n+1}} \\ &= f\left(\frac{(k+1)T}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{(k-1)T}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2f\left(\frac{kT}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{T}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

于是,

$$f\left(\frac{kT}{2^{n+1}}\right) = \cos a \frac{kT}{2^{n+1}}.$$

当 $n \rightarrow +\infty$, 等分点在 $[0, T]$ 上稠密. 由 f 和 \cos 的连续性和相同的周期性知, $f(x) = \cos ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) 如果 f 不是周期函数.

□

23. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 且 $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, 又 f 在 $x = 0$ 与 $x = 1$ 处连续. 证明: f 为常值函数.

证明. 对 $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1$, 有

$$f(x) = f(x^2) = \dots = f(x^{2^n}) = \dots$$

于是, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$.

当 $x < -1$,

$$f(x) = f(x^2) = f(|x|) = f(\sqrt{|x|}) = \dots = f(\sqrt[2^n]{|x|}) = \dots,$$

所以, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt[2^n]{|x|}) = f(1)$. 同上, 当 $x > 1$ 有, $f(x) = f(1)$.

又因为

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

于是, f 为常值函数.

□

2.5 有界闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的性质

2.5.1 练习题

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 语言表达函数 f 在 I 上不一致连续.

解. $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, 存在 $x \in I, x' \in I$ 满足 $|x - x'| < \delta$ 但 $|f(x) - f(x')| > \varepsilon_0$.

2. 设函数 f 在开区间 (a, b) 上连续且 $f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 存在有限. 证明: f 在 (a, b) 上一致连续.

证明. 定义

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x) & x \in (a, b), \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$$

\tilde{f} 在 $[a, b]$ 上连续且 $\tilde{f}|_{(a,b)} = f(x)$. 所以, f 在 (a, b) 上一致连续.

□

3. 设函数 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 若存在常数 b 与 c 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - bx - c) = 0,$$

则称直线 $y = bx + c$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线. 在这种情况下, f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M, x' > M$ 时, 有

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq |f(x) - bx - c - f(x') + bx' + c| \geq |f(x) - f(x')| - |b||x - x'|$$

取 $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}$ 可得

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \forall x > M, x' > M, |x - x'| < \delta_0.$$

另一方面, $f|_{[a, M+1]}$ 上连续, 从而一致连续, 即 $\exists \delta_1$, 当 $x \leq M+1, x' \leq M+1, |x - x'| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, 1\}$, 当 $x \in [a, +\infty), x' \in [a, +\infty), |x - x'| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

即 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续. □

4. 由“连续的周期函数一定是一致连续的”证明: $\sin^2 x + \sin x^2$ 不是周期函数.

证明. 很显然 $\sin^2 x$ 在 \mathbb{R} 上是一致连续的. 现证 $\sin x^2$ 不是一致连续的. 取

$$x_n = \sqrt{2n\pi}, x'_n = \sqrt{2n\pi} + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \forall n \in \mathbb{N},$$

于是有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n - x_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(x'_n)^2 - \sin(x_n)^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos 2n\pi \sin\left(2 + \frac{1}{2n\pi}\right) = \sin 2.$$

所以 $\sin x^2$ 在 \mathbb{R} 上不是一致连续的. 从而 $\sin^2 x + \sin x^2$ 在 \mathbb{R} 不一致连续. □

5. 研究下列函数的一致连续性:

$$(1) f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R};$$

解. 连续的周期函数一定是一致连续的, 故 $f(x)$ 是一致连续的.

$$(2) f(x) = \cos \frac{1}{x}, x > 0;$$

解. 取 $x_n = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}$. 显然

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0,$$

但是

$$|f(x_k) - f(x_{k+1})| = 2.$$

故 f 不是一致连续的.

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x}, x \geq 0;$$

解. 显然当 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$ 时,

$$|\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1 x_2} + \sqrt[3]{x_2^2}} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{3}.$$

于是当 $x \geq 1$ 时, f 是一致连续的. 在 $[0, 1]$ 上, f 显然是一致连续的. 从而, f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

$$(4) f(x) = \cos x^2, x \in \mathbb{R};$$

解. 取

$$x_n = \sqrt{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}, x'_n = x_n + \frac{1}{x_n},$$

于是有,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n - x_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos (x'_n)^2 - \cos (x_n)^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sin x_n^2 \sin \left(2 + \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}\right) = -\sin 2.$$

所以, 函数 $f(x) = \cos x^2$ 在 \mathbb{R} 上不一致连续.

$$(5) f(x) = x \cos \frac{1}{x}, x > 0;$$

解. 很显然 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. 定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

我们现在来检查 $F(x)$ 的连续性. 当 $x_1 > x_2 > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \cos 1 \cdot (x_1 - x_2) &< \cos \frac{1}{x_2} \cdot (x_1 - x_2) \\ &< F(x_1) - F(x_2) \\ &= \cos \frac{1}{x_1} \cdot (x_1 - x_2) + x_2 \left(\cos \frac{1}{x_1} - \cos \frac{1}{x_2} \right) \\ &< (x_1 - x_2) + 2x_2 \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right] \right) \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right] \right) \\ &< (x_1 - x_2) + 2x_2 \frac{x_1 - x_2}{2x_1 x_2} \\ &< 2(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

由此可见, $F(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上一致连续. 另一方面, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 从而一致连续. 所以, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续. 从而 $f(x) = F(x)|_{(0, +\infty)}$ 是一致连续的.

$$(6) f(x) = x \arctan x, x \in \mathbb{R};$$

解. 当 $x_1 < x_2$ 时, $\arctan x_1 < \arctan x_2$. 于是,

$$(x_2 - x_1) \arctan x_2 < x_2 \arctan x_2 - x_1 \arctan x_1 < (x_2 - x_1) \arctan x_1.$$

于是, 当 $|x_1| > M, |x_2| > M$ 时,

$$|x_2 \arctan x_2 - x_1 \arctan x_1| < \frac{\pi}{2} |x_2 - x_1|.$$

即, f 在 $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ 上一致连续. 另一方面, f 在 $[-M, M]$ 上是一致连续的. 所以, 在 \mathbb{R} 上, $f(x) = x \arctan x$ 上一致连续.

(7) $f(x) = x^2 \arcsin x, |x| \leq 1$.

解. 有界闭区间上的连续函数是一致连续的.

6. 证明:

(1) 3 次方程 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 只有唯一根, 此根在 $(0, 1)$ 内;

证明. 显然 $f(x) = x^3 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x$. 于是,

$$f(x) < 0, \forall x \leq 0, \quad f(1) > 0, \forall x \geq 1.$$

由介值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

如果存在另一个 $\xi' \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi') = 0$. 于是

$$\xi^3 + 2\xi - 1 = \xi'^3 + 2\xi' - 1 \Rightarrow (\xi - \xi')(\xi^2 + \xi\xi' + \xi'^2 + 2) = 0.$$

因为 $\xi^2 + \xi\xi' + \xi'^2 + 2 \geq 2$, 所以 $\xi = \xi'$. 即存在唯一根. □

(2) 方程 $x^5 - 3x + 1 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 中有根;

证明. 记 $f(x) = x^5 - 3x + 1$, 则

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0.$$

由介值定理可知, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得, $f(\xi) = 0$. □

(3) 方程 $x2^x = 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上有根;

证明. 记 $f(x) = x2^x - 1$, 则

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 2 - 1 = 1 > 0.$$

由介值定理可知, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得, $f(\xi) = 0$. □

(4) 方程 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3} = 0, a_1, a_2, a_3 > 0, \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ 在区间 (λ_1, λ_2) 与 (λ_2, λ_3) 中各有一个根;

证明. 记 $f(x) = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$. 显然

$$\lim_{x \rightarrow \lambda_1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \lambda_2^-} f(x) = -\infty.$$

于是由介值定理知, 存在 $\xi \in (\lambda_1, \lambda_2)$ 使得 $f(\xi) = 0$. 同理可证, 存在 $\xi' \in (\lambda_2, \lambda_3)$ 使得 $f(\xi') = 0$. □

(5) 实系数偶次多项式

$$f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x + a_{2n}$$

当 $a_{2n} < 0$ 时至少有两个实根;

证明. 显然

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = a_{2n} < 0.$$

由介值定理, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 各有一根。□

(6) 方程 $x - \lambda \sin x = 0 (0 \leq \lambda < 1)$ 有唯一的根;

证明. 注意到 $|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$x - \lambda|x| \leq x - \lambda \sin x \leq x + |\lambda||x|.$$

当 $x > 0$ 时, $x - \lambda \sin x \geq x - \lambda x = (1 - \lambda)x > 0$.

当 $x < 0$ 时, $x - \lambda \sin x \leq x - \lambda x = (1 - \lambda)x < 0$.

所以, 方程 $x - \lambda \sin x = 0$ 只有唯一根 $x = 0$ 。□

(7) 方程 $x - \lambda \sin x = b (0 \leq \lambda < 1, b > 0)$ 在 $[0, \lambda + b]$ 中有一根;

证明. 记 $f(x) = x - \lambda \sin x - b$. 显然

$$f(0) = -b < 0, \quad f(\lambda + b) = b + \lambda - \lambda \sin(b + \lambda) - b = \lambda - \lambda \sin(b + \lambda) \geq 0.$$

如果 $f(\lambda + b) = 0$, 得证。

如果 $f(\lambda + b) > 0$, 则由介值定理知, 存在 $\xi \in (0, b + \lambda)$ 使得 $f(\xi) = 0$ 。□

(8) 方程 $\sin x = \frac{1}{x}$ 有无穷多个根。

证明. 记 $f(x) = x \sin x - 1$. 可见 $f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) f\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right) < 0$. 由介值定理, 存在 $\xi_n \in \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}, \frac{(2n+3)\pi}{2}\right)$ 使得,

$$f(\xi_n) = 0.$$

故, 方程 $\sin x = \frac{1}{x}$ 有无穷多个根。□

7. 证明: 存在唯一的连续函数 $f, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ 满足 Kepler 方程:

$$y - \lambda \sin y = x, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

8. 设 $\varphi(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0.$$

证明:

(1) 当 n 为奇数时, 方程 $x^n + \varphi(x) = 0$ 有一个实根;

证明. 由题可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + \varphi(x)}{x^n} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n + \varphi(x)}{x^n} = -\infty.$$

故存在 $x_1 < 0 < x_2$ 使得

$$(x_1^n + \varphi(x_1))(x_2^n + \varphi(x_2)) < 0.$$

于是存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $x_0^n + \varphi(x_0) = 0$. □

(2) 当 n 为偶数时, 存在数 y 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$y^n + \varphi(y) \leq x^n + \varphi(x).$$

证明. 由题可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + \varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n + \varphi(x)}{x^n} = +\infty > \varphi(0).$$

故存在 $M > 0$ 使得 $x^n + \varphi(x) > \varphi(0), \forall x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$. 取 $y \in [-M, M]$ 使得,

$$y^n + \varphi(y) = \min_{x \in [-M, M]} (x^n + \varphi(x)).$$

于是, $y^n + \varphi(y) \leq x^n + \varphi(x) \forall x \in \mathbb{R}$. □

9. 设 f 在 \mathbb{R} 上连续, 且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 函数 f 满足:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, 0 < k < 1.$$

证明:

(1) 函数 $kx - f(x)$ 单调增;

证明. 设 $x < y$, 则

$$ky - f(y) - kx + f(x) \geq k(y - x) - |f(x) - f(y)| > 0.$$

故 $kx - f(x)$ 单调增. □

(2) $\exists \xi \in \mathbb{R}$, s.t. $f(\xi) = \xi$.

证明. 考虑函数 $F(x) = f(x) - x$. 很容易证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) < 0.$$

事实上, 对固定的 x_0 , 当 $x > x_0$ 时,

$$F(x) - F(x_0) = x_0 - x + (f(x) - f(x_0)) < (1 - k)(x_0 - x) < -\infty, \forall x \rightarrow +\infty.$$

同理可证,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) > 0.$$

假设 $M_1 < 0 < M_2$ 满足

$$F(x) > 0, \forall x \leq M_1, F(x) < 0, \forall x \geq M_2.$$

由介值定理, 存在 $\xi \in [M_1, M_2]$ 使得

$$F(\xi) = 0.$$

即 $f(\xi) = \xi$. 唯一性的证明很容易。如果存在 ξ_0, ξ_1 使得 $f(\xi_0) = \xi_0, f(\xi_1) = \xi_1$, 则 $|f(\xi_0) - f(\xi_1)| = |\xi_0 - \xi_1|$. 这与题设矛盾。□

10. (1) 设 f, g 在区间 I 上一致连续。证明 $f + g$ 在 I 上也是一致连续。

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$,

当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

当 $|x_1 - x_2| < \delta_2$ 时, 有

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$$|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| < \varepsilon.$$

即, $f + g$ 在 I 上一致连续。□

(2) 设区间 I_1 以 c 为右端点, 区间 I_2 以 c 为左端点。证明: 函数 f 在 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续 $\iff f$ 在 I_1 与 I_2 上都一致连续。

证明. (\Rightarrow) 这是显然的, 因为 $I_1 \subset I_1 \cup I_2, I_2 \subset I_1 \cup I_2$.

(\Leftarrow) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$,

当 $x_1 \in I_1, x_2 \in I_1$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $x_1 \in I_2, x_2 \in I_2$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $x_1 \in I_1 \cup I_2, x_2 \in I_1 \cup I_2$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 如果, $x_1 \in I_1, x_2 \in I_1$ 或 $x_1 \in I_2, x_2 \in I_2$ 时

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

当 $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - f(c)| + |f(c) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即, f 在 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续。□

11. (1) 证明: $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续;

证明. 当 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

从而 f 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续。

另一方面, f 在 $[0, 1]$ 上一致连续是显然的。

所以, f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。 \square

(2) 应用例 2.5.11 及 $\sin x' - \sin x'' = 2 \cos \frac{x' + x''}{2} \sin \frac{x' - x''}{2}$ 。证明: $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

证明. 对 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x' - \sin x''| < 2 \left| \cos \frac{x' + x''}{2} \right| \left| \sin \frac{x' - x''}{2} \right| < |x_1 - x_2|.$$

于是, $f = \sin x$ 在 \mathbb{R} 上一致连续。 \square

(3) 证明: $f(x) = \cos \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。

证明.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 2 \left| \sin \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \right| \left| \sin \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2} \right| < |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|.$$

于是, f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。 \square

12. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\forall x \in [a, b], f(x) \neq 0$ 。证明: f 在 $[a, b]$ 上恒正或恒负。

证明. 假设存在 $x_1 \in [a, b], x_2 \in [a, b]$ 满足 $x_1 < x_2, f(x_1)f(x_2) < 0$ 。由介值定理可知, 存在 $x \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x) = 0$ 。这与题设矛盾。故 f 恒为正或恒为负。 \square

2.5.2 思考题

13. 设函数 f 在区间 I 上连续, 且是一对一的 (即有反函数), 则 f 是严格单增的。

证明. 不妨假设存在 $x_1 < x_2 < x_3$ 使得

$$f(x_1) < f(x_2), \quad f(x_3) < f(x_2).$$

取 $m = \max\{f(x_1), f(x_3)\}, l = \frac{m + f(x_2)}{2}$ 。由介值定理知, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ 使得

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = l.$$

这与 f 是单射矛盾。故 f 在 I 上单调。 \square

14. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $f \circ f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ 。证明: $\exists \xi \in \mathbb{R}, s.t. f(\xi) = \xi$ 。

证明. 如果 $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$, 则

$$x = f \circ f(x) < f(x),$$

这假设矛盾。故存在 $x_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_1) \geq x_1$ 。如果 $f(x_1) = x_1$, 取 $\xi = x_1$, 命题得证。故我们设 $f(x_1) > x_1$ 。

同理可证, 如果 $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$, 则可以找到 x_2 使得 $f(x_2) \leq x_2$. 如果 $f(x_2) = x_2$, 则取 $\xi = x_2$, 命题得证. 现设 $f(x_2) < x_2$.

不妨设 $x_1 < x_2$. 由于

$$(f(x_1) - x_1)(f(x_2) - x_2) < 0,$$

由介值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(\xi) - \xi = 0$, i.e. $f(\xi) = \xi$. 命题得证. \square

15. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续 ($a < b$), $f(a) = f(b)$. 证明: 在曲线 $y = f(x) (x \in [a, b])$ 上一定能找到两点 $A = (\xi, f(\xi))$, $B = (\xi + \frac{b-a}{2}, f(\xi + \frac{b-a}{2}))$, 使得 $\xi \in [a, \frac{a+b}{2}]$ 且 AB 平行 x 轴.

证明. 我们考虑函数

$$F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{b-a}{2}\right).$$

由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

$$F(a) = f(a) - f\left(\frac{b+a}{2}\right), \quad F\left(\frac{b+a}{2}\right) = f\left(\frac{b+a}{2}\right) - f(b).$$

如果 $F(a) = 0$, 则取 $\xi = a$, 命题得证. 如果 $F(a) \neq 0$, 则 $F\left(\frac{b+a}{2}\right) \neq 0$ 且 $F(a)F\left(\frac{b+a}{2}\right) < 0$. 由介值定理, 存在 $\xi \in \left(a, \frac{b+a}{2}\right)$ 使得 $F(\xi) = 0$. 命题得证. \square

16. 设 f 在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2)$. 证明: $\exists \xi \in [0, 1]$, 使得 $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

证明. 考虑函数 $F(x) = f(x) - f(x+1)$. 显然 F 在 $[0, 2]$ 上连续.

$$F(0) = f(0) - f(1), \quad F(1) = f(1) - f(2) = f(1) - f(0).$$

如果 $F(0) = 0$, 则取 $\xi = 0$, 命题得证. 如果 $F(0) \neq 0$, 则

$$F(0)F(1) < 0.$$

由介值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$. 命题得证. \square

17. 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $f(0) = f(1)$ 证明: $\forall n \in \mathbb{N}$, 必存在 $\xi_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, 使得

$$f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right).$$

证明. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 考虑函数

$$F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

很显然

$$\sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0.$$

如果 $\exists k$ 使得 $F\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, 则取 $\xi = \frac{k}{n}$, 命题得证. 如果 $\forall i, i = 0, 2, \dots, n-1, F\left(\frac{i}{n}\right) \neq 0$, 则必存在 $i < j$ 使得

$$F\left(\frac{i}{n}\right) \cdot F\left(\frac{j}{n}\right) < 0.$$

由介值定理知, 存在 $\xi \in \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$. 命题得证. \square

18. 设函数 $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 连续, 且 $\forall x \in [0, 1]$ 有 $f(g(x)) = g(f(x))$. 证明:

(1) 如果 f 单调减, 则 $\exists_1 a \in [0, 1], s.t. f(a) = g(a) = a$;

证明. 考虑函数 $F(x) = f(x) - x$. 很显然

$$F(0) = f(0) \geq 0, \quad F(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

如果 $F(0) = 0$, i.e. $f(0) = 0$ 时, $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, 1]$. 取 $a = 0$, 则命题得证。

如果 $F(1) = 0$, i.e. $f(1) = 1$ 时, $f(x) \equiv 1, \forall x \in [0, 1]$. 取 $a = 1$, 则命题得证。

如果 $F(0) > 0, F(1) < 0$, 由介值定理知, $\exists a \in (0, 1)$ 使得 $F(a) = 0$, i.e. $f(a) = a$. a 的唯一性是由 f 单调减保证的。□

(2) 如果 f 单调, 则 $\exists a \in [0, 1], s.t. f(a) = g(a) = a$;

证明. 我们只证 f 是单增的情形。考虑函数 $G(x) = g(x) - x$. 存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $G(x_0) = 0$, i.e. $g(x_0) = x_0$. 我们现在考察数列

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

用归纳法可证, $g(x_n) = x_n$. $n = 0$ 时, 上式成立。设 $n = k$ 时, 上式亦成立, i.e. $g(x_k) = x_k$. 现证 $n = k + 1$ 时, 此式亦成立。事实上,

$$g(x_{k+1}) = g(f(x_k)) = f(g(x_k)) = f(x_k) = x_{k+1}.$$

注意到 f 是单增的. 如果 $x_1 \geq x_0$, $\{x_n\}$ 是单调增有上界的数列。如果 $x_1 \leq x_0$, 则 $\{x_n\}$ 是单调减有下界的数列。故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \in [0, 1].$$

对于这个 a , 我们一定有

$$f(a) = a, \quad g(a) = a.$$

命题得证。□

(3) 如果 f 单调增, 使 $f(a) = g(a) = a$ 成立的 $a \in [0, 1]$ 是否唯一;

解. 不唯一, $f(x) = g(x) = x, \forall x \in [0, 1]$ 就满足条件。

19. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 存在数 a 及 $c > 0$, 使得对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $|f^n(a)| \leq c$. 证明: f 有不动点 x_0 , 即 $f(x_0) = x_0$. 这里 $f^n = \overbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}^{n \uparrow}$ 表示的 n 次复合。

证明. 我们考虑数列

$$a_0 = a = f^0(a), \quad a_n = f^n(a), n = 1, 2, \dots$$

如果 $a_0 = a = f(a) = a_1$, 命题得证。设 $a_0 > f(a) = a_1$. 如果存在 k 使得 $a_k = f^k(a) = f(a_{k-1}) = a_{k-1}$. 命题得证。如果存在 k 使得 $a_k = f^k(a) = f(a_{k-1}) > a_{k-1}$. 则

$$(f(a) - a)(f(a_{k-1}) - a_{k-1}) < 0.$$

由介值定理知, 存在 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$. 命题得证。如果 $\forall k$ 都有 $a_k = f^k(a) = f(a_{k-1}) < a_{k-1}$ 。则 $\{a_n\}$ 是单调减有下界的数列。故收敛。设

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0.$$

则 $f(x_0) = x_0$. 即 x_0 为 f 的不动点。

同理可知, 当 $a_0 < a_1$ 时, 我们也总可以找到一点 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$. □

20. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$. 证明: $\exists t_0 \in [0, 1]$, 使得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |t_0 - x_i| = \frac{1}{2}.$$

证明. 考察函数 $F(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$. 很显然,

$$F(0) + F(1) = n.$$

如果 $F(0) = F(1) = \frac{n}{2}$, 则命题得证。如果 $F(0) \neq F(1)$, 则

$$\left(F(0) - \frac{n}{2}\right) \left(F(1) - \frac{n}{2}\right) < 0.$$

由介值定理, 不存在 $t_0 \in [0, 1]$ 使得 $F(t_0) = \frac{n}{2}$. □

21. 设函数 f 在区间 I 上连续, 且有唯一的极值点 $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (I 的内点集)。若 $f(x_0)$ 为极大 (小) 值, 则 $f(x_0)$ 为最大 (小) 值。

证明. 假设 x_0 为 f 的极大值点。我们需要证明 f 在 I 的端点处不能取到最大值。设 I 的右端点为 b . 如果存在 $x_1 \in (x_0, b)$ 使得 $f(x_1) \geq f(x_0)$ 。由于 x_0 是极大值, 存在 $x \in (x_0, x_1)$ 使得 $f(x) < f(x_0)$. 于是, f 在 (x_0, x_1) 内有极小值。这与 x_0 是唯一极值矛盾。故当 $x > x_0$ 时有 $f(x) < f(x_0)$.

同理可证, 当 $x < x_0$ 时也有 $f(x) < f(x_0)$. 由于函数 f 在 I 上连续, 则 f 在 I 端点出的值不会超过 $f(x_0)$. i.e. $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I$. i.e. $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$. □

22. 设 f 在 $[a, b)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$, 且 $\forall (\alpha, \beta) \subset [a, b)$, $f(x)$ 在 (α, β) 上达不到最小值。证明: f 在 $[a, b)$ 上是严格增的。

证明. □

23. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都为 f 的极值点。证明: f 为常值函数。

证明. □

24. 设 f 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 又设 f 的最小值 $f(a) < a$. 证明 $f \circ f$ 至少在两个点上达到最小值。

证明. □

参考文献

[徐薛] 徐森林, 薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

后 记