徐森林，薛春华 编
《数学分析》题解

西海岸民工

2024 年 11 月

目 录

第一章　数列极限

1.1　数列极限的概念

1.1.1　练习题

1. 用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 1$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 10}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|0.\underbrace{99\cdots9}_{n}-1\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

由极限的定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n} = 1$。 □

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+4}{7n-3}=\dfrac{3}{7}$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{3n+4}{7n-3}-\frac{3}{7}\right| = \frac{37}{7(7n-3)} < \frac{37}{7n} < \frac{6}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+4}{7n-3}=\dfrac{3}{7}$。 □

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n+6}{n^2-n-1000}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{50,\left[\frac{12}{\varepsilon}\right]+1\}$, 当 $n>N$ 时, $\frac{1}{2}n^2-n-1000>1$ 且

$$\left|\frac{5n+6}{n^2-n-1000}-0\right| < \frac{5n+6}{\frac{1}{2}n^2+(\frac{1}{2}n^2-n-1000)} < \frac{6n}{\frac{1}{2}n^2} < \frac{12}{n} < \varepsilon$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n+6}{n^2-n-1000}=0$。 □

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{2^n+5}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+4$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{8}{2^n+5}-0\right| < \frac{8}{2^n} = \frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon$$

由极限定义知 $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{2^n+5}=0$. □

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{\sin n!}{n^{1/2}}-0\right|<\frac{1}{n^{1/2}}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n!}{n^{1/2}}=0$。 □

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{2,\left[\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}<\frac{4}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

由极限定义知，$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=0$。 □

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{2,\left[\sqrt{\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^3}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right|=\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-2)}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}<\frac{4}{\sqrt[3]{(n+2)^2}}<\varepsilon.$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=0.$ □

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0$;

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}n^{3/2}}{n^2}<\frac{\pi/2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{3/2}\arctan n}{1+n^2}=0.$ □

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$, 其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, n \text{ 为偶数},\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, n \text{ 为奇数};\end{cases}$

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|a_n-1|&<\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{n 为偶数},\\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}, \text{n 为奇数}\end{cases}\\ &<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1.$ □

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$.

证明. 对 $\forall A>0$, 取 $N=\max\left\{5,\left[\sqrt[3]{2A}\right]+1\right\}$, 当 $n>N$ 时，$1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}>1-\frac{9}{n^2}>\frac{1}{2}$ 且

$$n^3-4n-5=n^3(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3})>\frac{1}{2}n^3>A$$

由极限定义知, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3-4n-5)=+\infty$。 □

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a.$，证明: $\forall k\in\mathbb{N}$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

证明. 我们分以下几种情况证明此命题:

(1) 当 $a\in\mathbb{R}$ 时。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$。显然 $n+k>n>N$, 从而 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=a$.

(2) 当 a 是 $+\infty$ 时。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, 对 $\forall A>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$a_n>A$. 显然 $n+k>n>N$, 从而 $a_{n+k}>A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=+\infty$.

(3) 当 a 是 $-\infty$ 时。由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$, 对 $\forall A<0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$a_n<A$. 显然 $n+k>n>N$, 从而 $a_{n+k}<A$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+k}=-\infty$.

□

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$：举例说明，这个命题的逆命题不真。

证明. 我们只证明 a 是有限实数的情况。当 a 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 时也成立。由极限的定义有：对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

从而

$$||a_n|-|a||<|a_n-a|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=|a|.$$

如果我们取 $a_n=(-1)^n$, 则 $|a_n|=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=|a|$。但是很显然 a_n 是发散的。

□

4. 设 $x_n\le a\le y_n,n\in\mathbb{N}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=a$$

证明. $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $y_n-x_n=|y_n-x_n|<\varepsilon$. 从而

$$|y_n-a|=y_n-a=y_n-x_n+x_n-a<y_n-x_n<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=a$.

同理可证

$$-\varepsilon<x_n-y_n<x_n-a<0<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

□

5. 设 $\{a_n\}$ 为一个收敛数列。证明：数列 $\{a_n\}$ 中或者有最大的数，或者有最小的数。举出两者都有的例子；再举出只有一个的例子。

证明. 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，我们分以下几种情况讨论：

(1) 如果 $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. 此时，数列 $\{a_n\}$ 既有最小值也有最大值, 且相等

(2) 如果 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $a_{n_0} \neq a$. 不妨假设 $a_{n_0} < a$. 对于 $\varepsilon = \frac{a-a_{n_0}}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}, N > n_0$ 使得 $a_n - a > a - \varepsilon = \frac{a+a_{n_0}}{2} > a_{n_0}, \forall n > N$. 取

$$m = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}.$$

我们有：

(a) $m \in \{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$,

(b) $a_n >= m, \forall n$.

即，m 是数列 $\{a_n\}$ 的最小值.

如果 $a_{n_0} > a$. 我们可以证明 $\{a_n\}$ 有最大值。

考虑下列收敛数列：

(1) 如果 $a_n = \frac{1}{n}$, 则该数列有最大值 $a_n \leq a_1 = 1$, 没有最小值。

(2) 如果 $a_n = -\frac{1}{n}$, 该数列有最小值 $-1 = a_1 <= a_n$，没有最大值。

(3) 如果 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则 $-1 = a_1 <= a_n <= a_2 = \frac{1}{2}$

□

6. 证明下列数列发散：

(1) $\{n^{(-1)^n}\}$

证明. 该数列发散，因为：

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (2n-1)^{(-1)^{2n-1}} \neq \lim_{n\to+\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = +\infty$$

□

(2) $\{\cos n\}$

证明. 取两个整数子列 $\{k_n\}, \{l_n\}$ 使得

(a) $k_n \in (2m\pi - \frac{\pi}{6}, 2m\pi + \frac{\pi}{6})$,

(b) $l_n \in (2m\pi + \frac{5\pi}{6}, (2m+1)\pi + \frac{\pi}{6})$.

显然，我们有

(a) $\cos k_n \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \forall n$,

(b) $\cos l_n \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \forall n$.

因此，$\{\cos n\}$ 是发散的。 □

7. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 三个数列 $\{a_{3k-2}\},\{a_{3k-1}\},\{a_{3k}\}$ 都收敛且有相同的极限。

证明. $(\Rightarrow)$ 由定理 1.1.2，收敛数列的子列也收敛，且极限相同。
$(\Leftarrow)$ 假设三个子列的极限都是 a。由极限的定义，对于 $\forall\varepsilon>0$,

(1) $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-2}-a|<\varepsilon,\forall k>N_1$,

(2) $\exists N_2\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k-1}-a|<\varepsilon,\forall k>N_2$,

(3) $\exists N_3\in\mathbb{N}$, 使得 $|a_{3k}-a|<\varepsilon,\forall k>N_3$。

取 $N=3\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 我们有

$$|a_n-a|<\varepsilon,\forall n>N,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. □

注 1. 这个命题对于 $a=+\infty.-\infty,\infty$ 也成立。

注 2. 对于 $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+1}=\lim_{k\to+\infty}a_{pk-p+2}=\cdots=\lim_{k\to+\infty}a_{pk}=a.$$

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=d$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$。

证明.

$$\frac{a_n-a_1}{n}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)}{n}.$$

由例 1.1.15 知：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_1}{n}=d.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1}{n}=0$, 易知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=d.$$

□

9. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。用 $\varepsilon-N$ 法，$A-N$ 法证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2},(a\text{为实数 }+\infty,-\infty).$$

证明. 我们只证 a 为实数的情形。其他的情况证明类似。由极限的定义，对于 $\varepsilon>0,\exists N_0\in\mathbb{N}$, 使得

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3},\forall n>N_0.$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|\\
=&\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}a-\frac{a}{2}\right|\\
<&\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|+\frac{a}{2n}\\
<&\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right|+\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{a}{2n}.
\end{aligned}$$

取 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_0(a_{N_0}-a)}{n^2}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_1.$$

取 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{a}{2n} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_2.$$

取 $N_3 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{(N_0+1+n)(n-N_0)}{2n^2}\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n > N_3.$$

最后, 取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$, $\forall n > N$, 我们有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} - \frac{a}{2}\right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

□

1.1.2 思考题

10. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$|q| < 1$。用 $\varepsilon - N$ 法证明:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证明. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则存在整数 $M > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|a_n - a| < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}, \forall n > N_0.$$

我们知道, 当 $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$。于是 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|q^{n-k}\right| < \max\left\{\frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon, \forall n > N_1, k = 0, 1, 2, \cdots, N_0.$$

我们现在取 $N = \max\{N_0, N_1\}$。对任意的 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - \frac{a}{1-q}\right| \\
&= \left|(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - a\frac{1-q^n}{1-q} + \frac{aq^n}{1-q}\right| \\
&< \left|(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}\right| + \frac{|a|\,|q|^n}{|1-q|} \\
&< \frac{(1-|q|)\varepsilon}{3}(1 + |q| + \cdots + |q|^{n-N_0}) + \left(MN_0 + \frac{a}{1-|q|}\right)\max\left\{\frac{1}{3MN_0}, \frac{1-|q|}{3(|a|+1)}\right\}\varepsilon \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

即，$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \dfrac{a}{1-q}$.

□

11. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$。用 $\varepsilon - N$ 法证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab.$$

证明. 首先我们证明命题在 $b = 0$ 时成立。

(1) 由于 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\exists M > 0$ 使得 $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 由于 $\{b_n\}$ 收敛到 0, 则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n > N_0$.

(3) 由于 $|a_n| < M$, 对上述的 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1\}$, 对于上述的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n}\right| \\
&< \left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-N_0-1}b_{N_0+1}}{n}\right| + \left|\frac{a_{n-N_0}b_{N_0} + a_{n-N_0+1}b_{N_0-1} + \cdots + a_nb_0}{n}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\frac{(n-N_0)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = 0.$$

下面证明命题在 $b \neq 0$ 时也成立。

(1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - a)b = 0$. 由此可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_{n-1}-a)b + (a_n-a)b}{n} = 0.$$

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - b) = 0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_{n-1}(b_1-b) + a_n(b_n-b)}{n} = 0.$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} - ab\right| \\
&= \left|\frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_n(b_0-b)}{n} + \frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_n-a)b)}{n}\right|
\end{aligned}$$

(4) 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{a_0(b_n-b) + a_1(b_{n-1}-b) + \cdots + a_n(b_0-b)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{(a_0-a)b + (a_1-a)b + \cdots + (a_n-a)b)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\left|\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} - ab\right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0}{n} = ab.$$

□

12. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$b_n \geq 0(n \in \mathbb{N})$，$\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n) = aS$.

证明. 我们分以下步骤证明该命题。

(1) 首先我们证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(2)

$$
\begin{aligned}
&|(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n) - aS| \\
&= |(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n) - a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - S)| \\
&< |(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| + |a|\,|(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S|
\end{aligned}
$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ 得知

$$|(a_n - a)b_1 + (a_{n-1} - a)b_2 + \cdots + (a_1 - a)b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S$ 可得知

$$|a|\,|(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上，

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n) = aS.$$

□

注 3. 这题里的条件 $b_m \geq 0(n \in \mathbb{N})$ 不是必须的。只要 $\lim\limits_{n\to+\infty}(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|) = S$ 就够了。

注 4. 这题是第 *10* 题的推广。如果 $b_n = q^{n-1}, 0 < q < 1$，则

$$\lim_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

由这题的结论，第 *10* 题得证。

13. *(Toeplitz* 定理*)* 设 $n, k \in \mathbb{N}$，$t_{nk} \geq 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$。如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，证明*:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$。说明例 *1.1.15* 为 *Toeplitze* 定理的特殊情形。

证明. 对于 $\forall\varepsilon > 0$, 我们有:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$，当 $n > N_0$ 时，$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(2) 我们取 $M = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_0} - a|\}$.

(3) 对于 $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq N_0$, 存在 $N_l \in \mathbb{N}$ 使得 $t_{nl} < \frac{\varepsilon}{2N_0M}, \forall n > N_l$.

(4) 取 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_{N_0}\}$，当 $n>N$ 时，我们有:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k-a\right|\\&=\sum_{k=1}^{N_0}t_{nk}\left|(a_k-a)\right|+\sum_{k=N_0}^{n}t_{nk}\left|(a_k-a)\right|\\&<\sum_{k=1}^{N_0}\frac{\varepsilon}{2N_0M}M+\sum_{k=N_0}^{n}t_{nk}\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a.$$

如果我们取 $b_{nk}=\frac{1}{n}$, 则例 1.1.15 就可以由这题得证。 □

14. 设 a,b,c 为三个给定的实数，令 $a_0=a,b_0=b,c_0=c$，并归纳定义

$$\begin{cases}a_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2},\\ b_n=\frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}, \quad n=1,2,\cdots.\\ c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\end{cases}$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$.

证明. 我们通过以下结论去证明该命题:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n)=a+b+c$. 这是因为 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-c_n)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-b_n)=0$. 这是因为

$$a_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-b),$$

$$a_n-c_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-c_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a-c),$$

$$c_n-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(c_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(c-b).$$

(3)

$$\lim_{n\to+\infty}3a_n=\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n+(a_n-b_n)+(a_n-c_n))=a+b+c,$$

从而,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{a+b+c}{3}.$$

(4) 同理可证，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$.

□

15. 设 a_1,a_2 为实数，令

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}, n=3,4,5,\cdots,$$

其中 $p>0$，$q>0$，$p+q=1$。证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{a_2+a_1q}{1+q}$.

证明. 由递推公式，我们可以证明

$$a_n - a_{n-1} = (-q)^{n-2}(a_2 - a_1), \forall n \geq 3.$$

由此我们可以得出 a_n 的通项公式

$$a_n = a_2 + \sum_{k=1}^{n-2} (-q)^k (a_2 - a_1) = a_2 - \frac{q + (-q)^{n-1}}{1+q}(a_2 - a_1).$$

从而，

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_2 - \frac{q}{1+q}(a_2 - a_1) = \frac{a_2 + qa_1}{1+q}.$$

□

16. 设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足 $a_1 > 0$，$4 \leq b_n \leq 5$，$4 \leq c_n \leq 5$，

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2 + c_n^2}}{b_n + c_n} a_{n-1}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

证明. 由通项公式定义有

$$0 \leq a_n \leq \frac{5\sqrt{2}}{8} a_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^{n-1} a_1.$$

由 $\frac{5\sqrt{2}}{8} < 1$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。 □

1.2　数列极限的基本性质

1.2.1　练习题

1. 应用数列极限的基本性质求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7}$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2 - n + 5}{3n^2 - 2n - 7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4 - 1/n + 5/n^2}{3 - 2/n - 7/n^2} = 4/3$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + (-2/3)^n}{3 + (-2)(-2/3)^n} = 1/3$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

解. $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}}$

解. $1 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} \leq 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}$

解. $1\le\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi}{2}}\le 1$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}=1$.

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}}, |a|<1, |b|<1$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+b+\cdots+b^{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)\left(\frac{1-b}{1-b^n}\right)=\frac{1-b}{1-a}$.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

解. 记

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2(n-1)-1}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

解. $1-\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$. 从而

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)\\&=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)}\end{aligned}$$

分子的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $(n-1)!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2\cdot 3}(n+2)!$.
分母的 $2n$ 项的积：奇数项的积是 $n!$, 偶数项的积是 $\frac{1}{2}(n+1)!$.
于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}$.

(11) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

解.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{8n^3-2n}{6}.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\frac{4}{3}.$$

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}.$

(13) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解.

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0.$$

2. 设 $a_n>0$，$n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$。应用例 *1.2.6* 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证明.

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}\cdot\sqrt[n]{a_1}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$. □

3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$。应用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$，其中 $[x]$ 表示不超过的最大整数。

证明.

$$a=\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n-1}{n}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{[na_n]}{n}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n}{n}=a.$$

□

4. 设 $a_n\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r>1$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$.

证明. 取 $\varepsilon=\frac{r-1}{2}$. 由极限的定义，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>r-\varepsilon=\frac{r+1}{2}>1$. 于是

$$|a_n|>\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n_N}|a_N|.$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$。 □

5. (1) 应用数学归纳法或 $\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{2k}{2k+1}$ 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明. 记 $S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}$. 利用不等式 $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{2k}{2k+1}$，我们有

$$S_n < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{S_n(2n+1)}.$$

于是 $S_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

□

(2) 证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$

证明.

$$0 < \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

□

6. 设 $a_n>0(n\in\mathbb{N})$ 且 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=a>0$。应用夹逼定理证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$

证明. 由于 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=a>0$, 我们有一下结论：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=0, \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{n}=0.$$

同时，我们有

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(1+1+\dots+1+\frac{1}{a_n}\right)/n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-1+\dfrac{1}{a_n}\right)/n}\right)\\
&\le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1\cdot 1\cdot\dots\cdot 1\cdot a_n)}\\
&\le \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+1+\dots+1+a_n)}{n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1+a_n)}{n}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

7. 证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!}=1$: $\left(\text{提示}: 1+\frac{1}{n}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}k!}{n!}\le 1+\frac{2}{n}\right)$

证明.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{n}=&\frac{(n-1)!+n!}{n!}\\
&<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}\\
&<\frac{(n-1)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\\
&=1+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n\cdot(n-1)}\\
&=1+\frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k!}{n!}=1$。 □

8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$。记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},\quad T_n=\min\{a_n,b_n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

应用 $\varepsilon-N$ 法 (分$a<b,a>b,a=b$) 或 $\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+|a_n-b_n|$ 与 $\min\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}(a_n+b_n-|a_n-b_n|)$，证明：

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}S_n=\max\{a,b\};\quad (2)\quad \lim_{n\to+\infty}T_n=\min\{a,b\}.$$

证明. 显然我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n-b_n|=|a-b|.$$

由此可知：

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\max\{a,b\},$$

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\min\{a,b\}.$$

□

9. 应用例 *1.1.7* 与例 *1.1.15* 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

证明. 取 $a_n=\sqrt[n]{n}$, 显然

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$$

□

10. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)=1$

证明. 考虑数列 $\sqrt[n]{n}$. 这个数列在 $n=3$ 是取得最大值且 $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n},\forall n\geq 3$。这就是说数列 $\{\sin\frac{\ln n}{n}\}$ 在 $n=3$ 时取得最大值且

$$\sin\frac{\ln(n+1)}{n+1}<\sin\frac{\ln n}{n},\forall n\geq 3.$$

从而,

$$\left(\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left((n-1)\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\left((n-1)\sin\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1,$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)=1.$$

□

11. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2.$

证明.

$$\frac{2n+2}{n+1}=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\leq\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{2n+2}{n}.$$

由夹逼定理, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$。 □

1.2.2 思考题

12. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{n}=0.$

证明. 假设 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_l$ 是互异的素数, $m_k\geq 1,k=1,2,\cdots,l$。这里 $l=p(n)$.

$$\ln n=\sum_{k=1}^{l}m_k\ln p_k\geq\sum_{k=1}^{p(n)}\ln 2=p(n)\ln 2.$$

因此

$$0\leq\frac{p(n)}{n}\leq\frac{\ln n}{n\ln 2}.$$

由夹逼定理可知, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{n}=0.$

□

13. 设 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$。证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{4}.$

证明.

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \\ &< \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \\ &< \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4n^2}.\end{aligned}$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{4}$。 □

1.3 实数理论，实数连续性命题

1.3.1 练习题

1.3.2 思考题

1.4 Cauchy 收敛准则 (原理)，单调数列的极限，数 $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

1.4.1 练习题

1. 证明下列数列收敛：

(1) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right), n\in\mathbb{N};$

证明. 记 $S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$，我们有 $S_{n+1} = S_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < S_n$. 很显然 $S_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知，$S_n$ 收敛。 □

(2) $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}, n\in\mathbb{N}.$

证明. 记 $S_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$. 当 $n>10$ 时，$\frac{n+9}{2n-1}<1$. 即 $S_{n+1}<S_n, \forall n\in\mathbb{N}, n>10$. 另一方面 $S_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知，$S_n$ 收敛。 □

2. 设 $0<a_n<1$ 且 $a_{n+1}(1-a_n)\geq\frac{1}{4}$，$n\in\mathbb{N}$。证明：$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$。

证明. 考虑函数 $f(x) = (1-x)x, x\in(0,1)$, 我们有

$$f(x)>0, f(x)\leq\frac{1}{4}, x\in(0,1).$$

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{1}{4(1-a_n)a_n}\geq 1$，即 a_n 是单调递增的函数。由实数连续性命题 (二) 可知，a_n 收敛。由递推公式可知，$\frac{1}{4}\geq a(1-a)\geq\frac{1}{4}$. 所以 $a=\frac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$。 □

3. 给定两正数 $x_0=a$ 与 $y_0=b$，归纳定义

$$x_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}},\quad y_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2},$$

$n=1,2,\cdots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$，并称此极限为与的算术-几何平均数。

证明. 由算术-几何平均不等式知：$x_n\le y_n,\forall n\in\mathbb{N}$。于是：

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\ge\sqrt{x_nx_n}=x_n,\quad\forall n=1,2,\cdots,$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\le\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,\quad\forall n=1,2,\cdots.$$

于是

$$a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n\le\cdots\le y_n\le y_1\le y_0=b.$$

令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=B$。由递推公式可知：$A=\sqrt{AB}$, 从而 $A=B$. □

4. $\forall n\in\mathbb{N}$, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的根，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

解. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$ 对于给定的 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 是单调增函数，所以 $f_n(x)$ 只会有唯一的根 x_n。由于

$$f_{n+1}(x_{n+1})=0<f_n(x_n)+x_n^{n+1}=f_{n+1}(x_n),$$

所以

$$x_{n+1}\le x_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 *(二)* 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在。由于 $\dfrac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$ 知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

5. 设 $c>0$，$x_1=\sqrt{c}$，$x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$，$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

证明. 我们用归纳法证明 $x_n\le\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2},\forall n\in\mathbb{N}$.

(1) $x_1=\sqrt{c}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(2) 假设 $x_k<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$。我们证明 $x_{k+1}<\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=\sqrt{c+x_k}\\&<\sqrt{c+\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{4c+2+2\sqrt{1+4c}}{4}}\\&=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.\end{aligned}$$

现在考虑函数 $f(x)=c+x-x^2$。很显然

$$f(x)>0,\quad x\in\left(0,\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}\right).$$

于是

$$x_{n+1}^2-x_n^2=c+x_n-x_n^2>0.$$

即 $\{x_n\}$ 是单调递增的数列。由实数连续性命题 (二) 可知，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 对递归公式取极限得 $a=\sqrt{c+a}$。从而

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

□

6. 设 $x_1=c>0$，令 $x_{n+1}=c+\dfrac{1}{x_n}$，$n\in\mathbb{N}$。求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

解. 由递推公式，我们有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{x_n\cdot x_{n-1}}.$$

下面我们证明:

(1) $x_{2k-1}<x_{2k+1},\quad \forall k\in\mathbb{N};$

(2) $x_{2k}>x_{2(k+1)},\quad \forall k\in\mathbb{N}.$

$$x_n-x_{n-2}=\frac{x_{n-3}-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_{n-3}}=\frac{x_{n-2}-x_{n-4}}{x_{n-1}\cdot x_{n-2}\cdot x_{n-3}\cdot x_{n-4}}.$$

由于 $x_3-x_1=\dfrac{1}{x_2}>0$, 从而知 (1) 成立。由于 $x_4-x_2=\dfrac{x_1-x_3}{x_1\cdot x_3}<0$, 从而知 (2) 成立。

另一方面:

$$x_{2k}-x_1=c+\frac{1}{x_{2k-1}}-c=\frac{1}{x_{2k-1}}>0,\quad \forall k\in\mathbb{N};$$

$$x_{2k+1}-x_2=c+\frac{1}{x_{2k}}-c-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_{2k}}{x_1\cdot x_{2k}}<0,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 *(二)* 可知，奇数列和偶数列都是收敛子列。假设

$$\lim_{k\to+\infty}x_{2k-1}=a,\lim_{k\to+\infty}x_{2k}=b.$$

由递推公式，我们有

$$x_{2k+1}=c+\frac{1}{c+\frac{1}{x_{2k-1}}}\Rightarrow a^2-ac-1=0\Rightarrow a=\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2},$$

$$x_{2k+2}=c+\frac{1}{c+\frac{1}{x_{2k}}}\Rightarrow b^2-bc-1=0\Rightarrow b=\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}.$$

即，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}$.

7. 证明: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}$

证明. 第一个等式是题 5 的特例：$c=1$. 第二个等式是题 6 的特例：$c=1$. □

8. 设 $c>0$，$a_1=\frac{c}{2}$，$a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$，$n=1,2,\cdots$。证明：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 1-\sqrt{1-c}, & 0<c\le 1, \\ +\infty, & c>1. \end{cases}$$

证明. 当 $c>1$ 时，由递推公式可知，

$$a_{n+1} \ge 2\sqrt{\frac{c}{2}\frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c}a_n \ge \cdots \ge c^{\frac{n}{2}}a_1.$$

所以

$$+\infty \ge \lim_{n\to+\infty} a_n \ge \lim_{n\to+\infty}(c^{\frac{n}{2}}a_1) = +\infty.$$

当 $0<c\le 1$ 时，我们可以证明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增有界。

(1) $a_1=\frac{c}{2}<1-\sqrt{1-c}$.

(2) 设 $a_k<1-\sqrt{1-c}$. 下面我们证明 $a_{k+1}\ge a_k$ 且 $a_{k+1}<1-\sqrt{1-c}$.

$$a_{k+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2}<\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-c}\right)^2=1-\sqrt{1-c}.$$

考察函数 $f(x)=x^2-2x+c$.

$$f(x)>0, \quad x\in(-\infty,1-\sqrt{1-c}).$$

因此

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(a_k^2-2a_k+c)>0.$$

即 $\{a_n\}$ 是单调增的数列. 由实数连续性命题 (二) 可知，$\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在。设极限为 a, 则 $a=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2}\Rightarrow a=1-\sqrt{1-c}$.

□

9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调增，$\{b_n\}$ 单调减，且 $\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$。证明：$\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n$.

证明. 很显然 $\{a_n-b_n\}$ 是单调增。又由于 $\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$，可知 $a_n\le b_n, \forall n\in\mathbb{N}$, 从而

$$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛. 再由 $\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$ 知，$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$。 □

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正数 M，$\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+|a_n-a_{n-1}|\le M.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{A_n\}$ 都收敛。

证明. 很显然数列 $\{A_n\}$ 是单调增有界数列，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{A_n\}$ 是收敛的。

$$\{A_n\}\text{收敛} \Rightarrow \{A_n\}\text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\}\text{是 Cauchy 列} \Rightarrow \{a_n\}\text{收敛}.$$

□

11. 应用 *Cauchy* 收敛准则证明下列数列收敛:

(1) $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$;

证明.

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)\cdot(n+2)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)\cdot(n+p+1)}\right| \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

(2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$;

证明.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

(3) $x_n = \dfrac{\arctan 1}{1(1+\cos 1!)} + \dfrac{\arctan 2}{2(2+\cos 2!)} + \cdots + \dfrac{\arctan n}{n(n+\cos n!)}$.

证明.

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\arctan(n+1)}{(n+1)((n+1)+\cos(n+1)!)} + \cdots + \frac{\arctan(n+p)}{(n+p)((n+p)+\cos(n+p)!)}\right| \\
&< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&< \frac{\pi}{2n}.
\end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛。 □

12. 应用 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$，求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^n$;

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\frac{n}{n-3}} = e.$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^n$;

解. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{(-n+2)\frac{n}{-n+2}} = e^{-1}.$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n$;

证明. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2+n}\right)^{(-2-n)\frac{n}{-2-n}} = e^{-1}.$ □

(4) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$；

证明. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\right)^2 = e^2.$ □

(5) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n.$

证明. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$ □

13. $\forall n \in \mathbb{N}$，证明：

(1) $0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$

证明. 由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 可知：

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

□

(2) $\lim_{n\to+\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 0.$

证明. 由 (1) 和夹逼原理，可知 $\lim_{n\to+\infty}\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 0$。 □

14. 设 $\alpha < 1$，证明：

(1) $0 < n^\alpha\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] < \frac{e}{n^{1-\alpha}}.$

证明. 由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 可知：

$$\begin{aligned} 0 &< n^\alpha\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \\ &< n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \\ &= n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}\right] \\ &< \frac{e}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

□

(2) $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 0.$

证明. 由 (1) 和夹逼原理可知，$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = 0$。 □

15. (1) 设 $0<a<b$，$\forall n \in \mathbb{N}$。证明：

$$b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a),$$

$$a^{n+1}>b^n\left[(n+1)a-nb\right];$$

证明.

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)<(n+1)b^n(b-a).$$

由此式可知：

$$a^{n+1}>b^{n+1}-(n+1)b^n(b-a)=b^n\left[b-(n+1)b+(n+1)a\right]=b^n\left[(n+1)a-nb\right].$$

□

(2) 在 *(1)* 中，令 $a=1+\frac{1}{n+1}$，$b=1+\frac{1}{n}$ 推出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为严格增的数列；

证明. 将 $a=1+\frac{1}{n+1}, b=1+\frac{1}{n}$ 代入（1）中的第二式，可知

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

(3) 在（*1*）中，令 $a=1$，$b=1+\frac{1}{2n}$ 推出当 n 为偶数时，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$；由此得到 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$，即 4 为该数列的上界，从而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛。

证明. 将 $a=1, b=1+\frac{1}{2n}$ 代入（1）的第二个不等式，我们有：

$$1\geq\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left[(n+1)-n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right],$$

即

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\leq 2\Rightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\leq 4.$$

由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增的，我们可知，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 4, \forall n\in\mathbb{N}.$ □

16. 应用不等式 $b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a)$，$0<a<b$，证明：数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是严格单减的，并由此推出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 为有界数列。

证明.

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)(b^n+b^{n-1}a+\cdots+a^n)>(n+1)a^n(b-a).$$

即

$$b^{n+1}>a^n\left[(n+1)b-na\right].$$

取 $a=1+\frac{1}{n+1}, b=1+\frac{1}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left[(n+1)\frac{n+1}{n}-n\frac{n+2}{n+1}\right]\\ &=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{n^2+3n+1}{n(n+1)}\right)\\ &=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left[\frac{n^2+3n+1}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right]\\ &=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\left(\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}\right)\\ &>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\end{aligned}$$

由此可见 $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\}$ 是严格单调减，且有界。 □

17. 证明：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{3}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \forall n\in\mathbb{N}.$

证明.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\frac{3}{n},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

□

18. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列。记

$$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\quad \underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明：

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $\overline{a}_n\geq\underline{a}_n$;

证明. 这是显然的。$\overline{a}_n\geq a_n\geq\underline{a}_n, \forall n\in\mathbb{N}.$ □

(2) $\{\overline{a}_n\}$ 为单调减有界数列；$\{\underline{a}_n\}$ 为单调增有界数列，且 $\forall n,m\in\mathbb{N}$, 有 $\overline{a}_n\geq\underline{a}_m$;

证明. 由 $\overline{a}_n$ 和 $\underline{a}_n$ 的定义可知，

$$\overline{a}_n=\max\{a_n,\overline{a}_{n+1}\},\quad \underline{a}_n=\min\{a_n,\underline{a}_{n+1}\}.$$

由此可见 $\{\overline{a}_n\}$ 是单调减，$\{\underline{a}_n\}$ 是单调增, 且

$$\underline{a}_1\leq\underline{a}_2\leq\cdots\leq\underline{a}_n\cdots\leq\cdots\leq\overline{a}_n\leq\cdots\leq\overline{a}_2\leq\overline{a}_1.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 是有界数列，故 $\underline{a}_1$ 和 $\overline{a}_1$ 都是有界数。命题得证。 □

(3) 设 $\overline{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{a}_n$，$\underline{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}\underline{a}_n$, 则 $\overline{a}\geq\underline{a}$;

证明. 应用定理 1.2.5，这个命题就可以得证。 □

(4) $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\overline{a}=\underline{a}$.

证明. (反证法) 假设 $\overline{a} > \underline{a}$. 对于 $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \frac{\overline{a}-\underline{a}}{3}$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 有

$$\underline{a}_n < \underline{a} + \varepsilon < \underline{a} + \frac{\overline{a}-\underline{a}}{3} < \overline{a} - \frac{\overline{a}-\underline{a}}{3} < \overline{a} - \varepsilon < \overline{a}_n.$$

于是在 $\{a_n\}$ 存在两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 使得

$$a_{k_n} < \underline{a} + \frac{\overline{a}-\underline{a}}{3} < \overline{a} - \frac{\overline{a}-\underline{a}}{3} < a_{l_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

从而 $\{a_n\}$ 发散。矛盾。 □

1.4.2 思考题

19. 设 $a_1 \geq 0$，$a_{n+1} = \dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3}$.

证明. 首先我们证明，如果 $a_n < \sqrt{3}$, 则 $a_{n+1} > a_n$. 如果 $a_n > \sqrt{3}$, 则 $a_{n+1} < a_n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+3a_n}{3a_n + a_n^2}.$$

于是我们有

(1) $a_n < \sqrt{3} \Rightarrow 3 + 3a_n > 3a_n + a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$;

(2) $a_n > \sqrt{3} \Rightarrow 3 + 3a_n < 3a_n + a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$;

(3) $a_n = \sqrt{3} \Rightarrow 3 + 3a_n = 3a_n + a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n$.

基于以上的计算，不管 a_1 取何值，我们都有

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{3}\right| = \left|\frac{3 + 3a_n - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}a_n}{a_n + 3}\right| = \left|\frac{(3-\sqrt{3})(a_n - \sqrt{3})}{a_n + 3}\right| < \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\left|a_n - \sqrt{3}\right|.$$

因为 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3} < 1$, 所以 $(a_n - \sqrt{3}) \to 0 \Rightarrow a_n \to \sqrt{3}$. □

20. 设 $a > 0$，$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$，$n = 1, 2, \cdots$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$

证明. 这题和上一题类似。我们计算

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n(\sqrt{a} - x_n)(\sqrt{a} + x_n)}{3x_n^2 + a},$$

所以:

(1) 如果 $x_1 \leq \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调增且有上界 $\sqrt{a}$ 的数列;

(2) 如果 $x_1 > \sqrt{a}$, 则 $\{x_n\}$ 是单调减且有下界 $\sqrt{a}$ 的数列;

无论那种情况发生，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$。
对于以上两种情况我们可以分别用数学归纳法讨论:
(1): 当 $x_1 \leq \sqrt{a}$ 时:
$x_2 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq x_1$ 且 $x_2 - \sqrt{a} = \dfrac{(x_1 - \sqrt{a})^3}{3x_1^2 + a} \leq 0 \Rightarrow x_2 \leq \sqrt{a}$.
假设 $n = k$ 时也有 $x_k \geq x_{k-1}$ 且 $x_k \leq \sqrt{a}$.
现证 $n = k + 1$ 时也有这些。$x_{k+1} \geq x_k$ 是显然的。$x_{k+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a} \leq 0 \Rightarrow x_{k+1} \leq \sqrt{a}$.

(2)：当 $x_1 > \sqrt{a}$ 时：
$x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow x_2 < x_1$ 且 $x_2 - \sqrt{a} = \dfrac{(x_1-\sqrt{a})^3}{3x_1^2+a} > 0 \Rightarrow x_2 > \sqrt{a}$.
假设 $n = k$ 时也有 $x_k < x_{k-1}$ 且 $x_k > \sqrt{a}$.
现证 $n = k+1$ 时也有这些。$x_{k+1} < x_k$ 是显然的。$x_{k+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(x_k-\sqrt{a})^3}{3x_k^2+a} > 0 \Rightarrow x_{k+1} > \sqrt{a}$. □

21. 设 $a > 0$，$x_1 = \sqrt[3]{a}$，$x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}} (n > 1)$。证明：$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$

证明. 我们只需要证明：

(1) 如果 $a \geq 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递增，且有上界 $\sqrt{a}$.

(2) 如果 $a < 1$, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调递减，且有下界 $\sqrt{a}$.

无论上述那种情况发生，由实数连续性命题 (二) 可知，$\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$。

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}(\sqrt{a}-x_{n-1})(\sqrt{a}+x_{n-1})}{\left(\sqrt[3]{ax_{n-1}}\right)^2 + \sqrt[3]{ax_{n-1}}x_{n-1} + x_{n-1}^2}.$$

(1): 当 $a \geq 1$ 时：
$\sqrt[3]{a} \leq \sqrt{a}$.
当 $n = 2$ 时，$\sqrt{a} - x_1 = \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} \geq 0 \Rightarrow x_2 - x_1 \geq 0$ 且 $x_2 = \sqrt[3]{ax_1} \leq \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.
假设 $n = k$ 时,$x_k \geq x_{k-1}$ 且 $x_k \leq \sqrt{a}$.
由归纳法可得知，$n = k+1$ 时有，$x_{k+1} \geq x_k$ 且 $x_{k+1} \leq \sqrt{a}$.

(2): 当 $a < 1$ 时：
$\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$.
当 $n = 2$ 时，$\sqrt{a} - x_1 = \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow x_2 - x_1 < 0$ 且 $x_2 = \sqrt[3]{ax_1} > \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.
假设 $n = k$ 时,$x_k < x_{k-1}$ 且 $x_k > \sqrt{a}$.
由归纳法可得知，$n = k+1$ 时有，$x_{k+1} < x_k$ 且 $x_{k+1} > \sqrt{a}$. □

22. 设 $0 < a_1 < b_1 < c_1$。令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3}$$

证明：$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 收敛于同一实数。

证明. 由定义可知

$$0 < a_1 < a_n \leq b_n \leq c_n < c_1, \quad \forall n > 1.$$

于是 $\{a_n\}$ 单调增, $\{c_n\}$ 单调减。由实数连续性命题 (二) 可知, 数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 收敛。设 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} c_n = c$。易知,

$$0 < a_1 \leq a \leq c \leq c_1.$$

因为 $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$ 可知，数列 $\{b_n\}$ 收敛。设 $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$。显然 $a \leq b \leq c$, 且

$$a = \frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}, \quad b = \sqrt[3]{abc}, \quad c = \frac{a+b+c}{3}$$

解方程组可得知 $a = b = c$. □

23. 设 $a_n > 0$，$S_n = a_1 + \cdots + a_n$，$T_n = \dfrac{a_1}{S_1} + \cdots + \dfrac{a_n}{S_n}$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

证明. 由于 $S_n \to +\infty$, 我们可以找到一个子列 $\{n_k\}$ 使得

$$\frac{S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} < \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

现在我们计算 T_{n_k}:

$$\begin{aligned} T_{n_k} &= \left(\frac{a_1}{S_1} + \cdots \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}}\right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}} + \cdots \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_{k-1}+1}} + \cdots \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}}\right) \\ &> \left(\frac{a_1}{S_{n_1}} + \cdots \frac{a_{n_1}}{S_{n_1}}\right) + \left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_2}} + \cdots \frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{n_{k-1}+1}}{S_{n_k}} + \cdots \frac{a_{n_k}}{S_{n_k}}\right) \\ &= \frac{S_{n_1} - 0}{S_{n_1}} + \frac{S_{n_2} - S_1}{S_{n_2}} + \cdots + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{S_{n_k}} \\ &> \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

即: $\lim\limits_{k\to+\infty} T_{n_k} = +\infty$. 因为 T_n 是单调增的数列，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. 命题得证。 □

24. 设 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

证明. 我们只需证明 $\left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|$ 收敛于 0.

$$\begin{aligned} \left|a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| &= \left|\frac{3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)a_n}{2(1+a_n)}\right| \\ &= \left|\frac{-(\sqrt{5}-1)\left(a_n - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{2(1+a_n)}\right| \\ &< \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \cdot \left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|. \end{aligned}$$

由此可见，$\left\{\left|a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|\right\}$ 收敛于 0. □

25. 设 $a_n \geq 0$，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 收敛于 S。证明: $b_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛。

证明. 很显然，$\{b_n\}$ 是单调增数列。下面我们证明 $\{b_n\}$ 是有界数列。由于 $a_n \geq 0$ 且 $S_n \to S$, 则 S_n 是单调增的收敛于 S. 从而

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < S, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面，

$$b_n \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)^n \leq \left(1 + \frac{S}{n}\right)^n.$$

数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{S}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增的，且

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{S}{n}\right)^n = e^S.$$

于是

$$b_n \le e^S, \forall n \in \mathbb{N}.$$

由实数连续性命题 (二) 可知，数列 $\{b_n\}$ 是收敛数列。 □

1.5 上极限与下极限

1.5.1 练习题

1. 求 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$:

(1) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(2) $a_n = n^{(-1)^n}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(3) $a_n = [1+2^{(-1)^n n}]^{\frac{1}{n}}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

(4) $a_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(5) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(6) $a_n = \sqrt[n]{\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|}$;

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(7) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

解. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

2. 证明下面各式当两端有意义时成立:

(1) $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to+\infty} b_n \le \varliminf\limits_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \le \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$,
$\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n \le \varlimsup\limits_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \le \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$

证明. 有上，下极限的定义，我们可以得到两个简单的无需证明的事实：对于任何数列 $\{a_n\}$, $\{a_{n_k}\}$ 是一个任意一个子列，则

(a) $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \le \varliminf\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}$

(b) $\varlimsup\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$

我们取子列 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) = \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

再在子列 $\{a_{n_k}\}$ 中取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \ge \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

对于子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$，我们会有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \ge \varliminf_{k\to+\infty} b_{n_k} \ge \varliminf_{n\to+\infty} b_n.$$

从而

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\
&= \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}) \\
&= \lim_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) \\
&= \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n).
\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

考虑子列 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$，在其中取子列 $\{a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}) = \varliminf_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) \ge \varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

对于同样下标的子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \le \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

由此可见

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n) &\le \lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}) \\
&= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\
&\le \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \\
&= \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n
\end{aligned}$$

下面我们用类似的办法证明第二式亦成立。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} b_{n_k} = \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

对于相应的 $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}$ 可以取子列 $\{a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty}(a_{n_{k_l}}+b_{n_{k_l}}) = \varlimsup_{k\to+\infty}(a_{n_k}+b_{n_k}) \le \varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

显然

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \ge \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n &\le \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} + \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\ &= \lim_{l\to+\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &= \lim_{l\to+\infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) \\ &\le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n)\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n).$$

取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} = \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

另一方面

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \le \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

所以

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

□

(2) 设 $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, 则
$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \varliminf_{n\to+\infty} a_n + b$,
$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + b$

证明. 这题是上面一题的直接应用。 □

(3) $\varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n$, $\varlimsup_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n$;

证明. $\inf_{k\ge n}\{-a_k\} = -\sup_{k\ge n}\{a_k\} \Rightarrow \varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n$.
$\sup_{k\ge n}\{-a_k\} = -\inf_{k\ge n}\{a_k\} \Rightarrow \varlimsup_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n$ □

(4) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为非负数列, 则
$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to+\infty} b_n \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n b_n \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$,
$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$;

证明. 我们现证第一式。取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \varliminf_{n\to+\infty} a_n b_n.$$

对于上述的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$, 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \ge \varliminf_{n\to+\infty} a_n \ge 0.$$

对于 $\{b_{n_{k_l}}\}$, 我们会有

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \geq \varliminf_{k\to+\infty} b_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} b_n \geq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to+\infty} b_n &\leq \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\
&= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\
&= \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\
&= \varliminf_{n\to+\infty} a_n b_n
\end{aligned}$$

取 $\{a_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

对于对应的子列 $\{b_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{b_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} = \varlimsup_{k\to+\infty} b_{n_k} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to+\infty} a_n b_n &\leq \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\
&\leq \varliminf_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\
&= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\
&\leq \varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n
\end{aligned}$$

现在我们来证明第二式。取子列 $\{b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} b_{n_k} = \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

对于相对应的 $\{a_{n_k}\}$, 我们再取子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k} \geq \varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

所以

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n &\leq \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l\to+\infty} b_{n_{k_l}} \\
&= \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\
&\leq \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} \\
&\leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n
\end{aligned}$$

取子列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} b_{n_k} = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n b_n.$$

在 $\{a_{n_k}\}$ 取收敛子列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 使得

$$\lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} = \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

另一方面

$$\overline{\lim_{l\to+\infty}} b_{n_{k_l}} \leq \overline{\lim_{k\to+\infty}} b_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n b_n &= \overline{\lim_{l\to+\infty}} a_{n_{k_l}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \lim_{l\to+\infty} a_{n_{k_l}} \cdot \overline{\lim_{l\to+\infty}} b_{n_{k_l}} \\ &\leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n\end{aligned}$$

□

(5) 设 $\{b_n\}$ 非负，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$，则 $\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = b \underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = b \overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n$;

证明. 直接用上一题的结论就可以得证。 □

(6) 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, $\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

证明. 因为 $a_n > 0, \forall n$, 从而

$$\sup_{k\geq n}\left\{\frac{1}{a_k}\right\} = \frac{1}{\inf\limits_{k\geq n}\{a_k\}}.$$

由上，下极限的定义，命题得证。 □

3. 设 $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$，且 $\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。

证明. 由题可知 $\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$。我们可以证明

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n}.$$

故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是收敛数列。当然 $\{a_n\}$ 收敛。 □

4. 设数列 $\{a_n\}, a_n \leq 1, n = 1, 2, \cdots$，且满足：

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1.$$

证明: (1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \omega$, 其中 ω 为有限数；(2) $n\omega - 1 \leq a_n \leq n\omega + 1$.

证明. 先证明 (1).

$$a_1 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} < a_1 + \frac{1}{n}.$$

由此得证 (1), 且 $\omega = a_1$。由此 (2) 得证。 □

5. 设 $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$。证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何} l > 1, \text{有} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

如果删去“任何”两字，结论如何?

注 5. 这个题目的结论是不对的。比如

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n\text{是奇数} \\ 1, & n\text{是偶数} \end{cases}$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{l^n} \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{l^n} = 0,$$

但是，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 不存在。所以下面我们证明:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \iff \text{对任何} l > 1, \text{有} \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

证明. $(\Rightarrow)$: 对于任何的 $l > 1$, 取 $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$，我们可以找到 $N > 0$, 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq 1 + \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} < l, \quad \forall n > N.$$

于是

$$\frac{a_n}{l^n} < \left(\frac{l+1}{2l}\right)^n, \quad \forall n > N.$$

由 $\frac{l+1}{2l} < 1$ 可知,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{l^n} = 0.$$

$(\Leftarrow)$: 由定义可知，对任意的 $l > 1$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时有,

$$\frac{a_n}{l^n} < 1 \Rightarrow a_n < l^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l.$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq l \Rightarrow \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

如果删去“任何”两字, 结论不成立。 □

1.5.2 思考题

6. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 令

$$l = \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n, \quad L = \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n.$$

证明: $\{a \in \mathbb{R} | \text{有子列} x_{n_k} \to a (k \to \infty)\} = [l, L]$. 如果删去条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$，结论如何?

证明. 对于 $a \in (l, L)$ 和任意的 $\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{a - l, L - a\}$, 我们有存在 N 使得:

(1) 当 $n > N$ 时，$-\varepsilon \leq a_{n+1} - a_n \leq \varepsilon$.

(2) 存在子列 n_k, 使得 $a_{n_k} \leq l + \varepsilon, \quad \forall k$

(3) 存在子列 n_l, 使得 $a_{n_l} \geq L - \varepsilon, \quad \forall l$

选择子列 n_t，并且重新标记下标，使得

$$a_{n_t}\begin{cases}\le l+\varepsilon, & \text{当 t 是奇数}\\ \ge L-\varepsilon, & \text{当 t 是偶数}\end{cases}$$

对于任意上述子列的任意两个相邻的数 $a_{n_{2t}}, a_{n_{2t+1}}$，在院数列中一定有至少一个 $a_{n_{t'}}$ 落在区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 从而由极限的定义知这个子列收敛到 a. 命题得证。 □

7. 设 $0\le a_{n+m}\le a_n\cdot a_m(n,m=1,2,\cdots)$. 证明 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 且 $\sqrt[n]{a_n}$ 收敛。

证明. 设 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=a>b=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 取 $N>0$ 使得

$$a_N<b+\frac{a-b}{3}.$$

又取子列 a_{n_k} 使得

$$\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}=a.$$

当 k 充分大后，$n_k>N$, 且 $n_k=m_kN+l$, 其中 $l=0,1,\cdots,N-1$. 于是

$$a_{n_k}\le a_{m_kN}\cdot a_l=a_N^{m_k}\cdot a_l=a_N^{n_k}\cdot\frac{a_l}{a_N^l}.$$

由此可知

$$0\le\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\le\sqrt[n_k]{a_N^{n_k}}\sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}=a_N\cdot\sqrt[n_k]{\frac{a_l}{a_N^l}}.$$

于是

$$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\le a_N\le b+\frac{a-b}{3}<a.$$

这与 $\{a_{n_k}\}$ 的选择矛盾。从而知 $a=b$. 命题得证。 □

1.6 Stolz 公式

1.6.1 练习题

1. 设 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数。应用 *Stolz* 公式证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\frac{1}{2}.$$

证明. 我们先计算

$$\ln C_n^k+\ln C_n^{n-k}=2\ln n!-2\ln k!-2\ln(n-k)!,\quad \forall k\le n.$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k=n\ln n!-2\sum_{k=0}^{n}\ln k!.$$

设 $x_n = n^2, y_n = \sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k$, 于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{n^2} &\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)\ln n - \ln n!}{2n-1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{2n-1} \right) + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2n-1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

命题得证 □

2. 应用 *Stolz* 公式证明:

(1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}$;

证明. 设 $y_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}, x_n = n^{\frac{3}{2}}$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} &\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})}{n^3 - (n-1)^3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \left(1 + \sqrt{(1-\frac{1}{n})^3}\right)}{3n^2 - 3n + 1} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

□

(2) $\lim_{n\to+\infty} n \left[\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2}{3} \right] = \dfrac{1}{2}$.

证明. 我们设 $y_n = 3\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - 2n^{\frac{3}{2}}$, $x_n = 3\sqrt{n}$. 于是

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{3\sqrt{n} - 2n^{\frac{3}{2}} + 2(n-1)^{\frac{3}{2}}}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})} \\
&= \frac{3\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3}) - 6n^2 + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\
&= \frac{3n^2(\sqrt{(1-1/n)^3} - 1) + 6n - 2}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})} \\
&= \frac{-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}{3(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\
&= \frac{(-9n + 9 - 3/n + (6n-2)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)} \\
&= \frac{n^{\frac{3}{2}}(-9 + 9/n - 3/n^2 + (6 - 2/n)(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1))(1 + \sqrt{1-1/n})}{3n^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{(1-1/n)^3})(\sqrt{(1-1/n)^3} + 1)}
\end{aligned}
$$

于是:

$$
\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3}\right] \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}.
$$

命题得证 □

1.6.2 思考题

3. 设 $0 < x_1 < 1$，$x_{n+1} = x_n(1-x_n), n = 1, 2, \cdots$. 证明：$\lim_{n\to+\infty} nx_n = 1$. 进而设 $0 < x_1 \leq \frac{1}{q}$，其中 $0 < q \leq 1$，并且 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n), n \in \mathbb{N}$. 证明：$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \dfrac{1}{q}$.

证明. 如果我们能证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$，则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} nx_n &\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}(1-qx_{n-1})}{qx_{n-1}} \\
&= \frac{1}{q}.
\end{aligned}
$$

下面我们证明 $\{x_n\}$ 单调减且 $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. 由于 $x_n - x_{n-1} = -qx_{n-1}^2, \forall n \in \mathbb{N}$ 可知,$\{x_n\}$ 是单调减的。很明显 $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 由实数连续性命题 (二) 可知, $\{x_n\}$ 是收敛的。设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, 则 $a = a(1-qa) \Rightarrow qa^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. 命题得证。 □

4. 由 *Toeplitz* 定理导出 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 *Stolz* 公式。

证明. 取

$$
t_{nk} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n - x_0}, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, n.
$$

(1) 由于 $\{x_n\}$ 是单调增数列，$t_{nk} > 0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = \dfrac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1$.

由 Toeplitz 定理可知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{y_0}{x_n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_0}{x_n} \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_n - x_0} \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\
&\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\
&\xlongequal{\text{Toeplitz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a.
\end{aligned}$$

命题得证。 □

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n} a_n = 1$.

证明. 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$. 我们很容易证明以下结论:

(1) $\{S_n\}$ 是单增的, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

现在计算

$$\begin{aligned}
S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\
&= a_n^2(S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2)) + (S_n - a_n^2)^2) \\
&= 3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3(a_n S_n) + a_n^6
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{3n} \xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(a_n S_n)^3} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^3}{3n} = 1.$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{3n} a_n = 1$。命题得证。 □

1.7 复习题 1

1. 设 $a_0 = 1$,$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$,$n = 0, 1, 2, \cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

证明. 由递归定义,

$$a_{n-1}^2 + 2 < a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 2 < a_n^2, \quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 2 * (n-1) + a_1^2 = 2n - 1.$$

于是

$$0 \leq \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{2n-1}, \forall n > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n^2} = 0.$$

算术平均

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}}{n}=0.$$

现在计算

$$\begin{aligned}\frac{a_n^2}{2n}&=\frac{2n-1}{2n}+\frac{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}}{2n}\\&=\frac{2n-1}{2n}+\frac{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{2n}\end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{2n}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1.$$

命题得证。 □

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$, 并且存在常数 K 使得 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\le K.$$

令

$$z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1,\quad n\in\mathbb{N}.$$

证明*:* $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0.$

证明. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，存在 $M>0$ 使得 $|a_n|<M,\forall n\in\mathbb{N}.$

对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时有

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2K},\quad\forall n>N_1.$$

设 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|$. 很显然 $\{s_n\}$ 是一个收敛数列。于是, 存在 $N_2\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_2$ 时有

$$s_n-s_{n-N_1}<\frac{\varepsilon}{2MN_1}.$$

综上，

$$\begin{aligned}|z_n|&=|x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1|\\&<|x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_{N_1}y_{n-N_1+1}|+|x_{N_1+1}y_{n-N_1}+x_{N_1+2}y_{n-N_1-1}+\cdots+x_ny_1|\\&<MN_1(s_n-s_{n-N_1})+\frac{\varepsilon}{2K}(|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_{n-N_1}|)\\&<MN_1\frac{\varepsilon}{2MN_1}+K\frac{\varepsilon}{2K}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

命题得证。 □

3. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足*:*

(1) $b_n>0,b_0+b_1+\cdots+b_n\to+\infty(n\to+\infty)$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=s.$

应用 *Toeplitz* 定理证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=s.$$

证明. 在这题里我们可以取

$$t_{nk}=\frac{b_k}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

(1) $t_{nk}>0,\forall n>0,k=0,2,\cdots,n;$

(2) 给定 n, $\sum\limits_{k=0}^{n}t_{nk}=1;$

(3) 由于 $b_0+b_1+\cdots+b_n\to+\infty(n\to+\infty)$, 给定 k, $\lim\limits_{n\to+\infty}t_{nk}=0;$

于是

$$\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=\sum_{k=0}^{n}t_{nk}\frac{a_k}{b_k}.$$

由 Toeplitz 定理，命题可以得证。 □

4. 设 $p_k>0,k=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

证明. 对于给定的正整数 $k>0$, 我们可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$. 这是因为

$$0\leq\frac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}<\frac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-k}}.$$

夹逼定理说明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_{n-k}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$。

下面我们就可以用极限的定义来证明命题了。对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 N_0, 当 $n>N_0$ 时有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $M=\max\{|a_0-a|,|a_1-a|,\cdots,|a_{N_0}-a|\}$.

对于每一个 $k,1\leq k\leq N_0$, 存在 N_k, 当 $n>N_k$ 时有，

$$\frac{p_{n-k-1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\leq\frac{\varepsilon}{2MN_0}.$$

取 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_{N_0}\}$, 当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right|&=\left|\frac{p_1(a_n-a)+p_2(a_{n-1}-a)+\cdots+p_n(a_1-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right|\\&<\sum_{k=1}^{N_0}\frac{p_{n-k-1}|a_k-a|}{p_1+p_2+\cdots+p_n}+\frac{p_1+p_2+\cdots+p_{n-N_0}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&<\sum_{k=1}^{N_0}\frac{M\varepsilon}{2MN_0}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

命题得证。 □

5. 设 $\{a_n\}$ 为单调增的数列，令 $\sigma_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. 若“单调增”的条件删去，结论是否成立。

证明. 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，$\sigma_n<a+1$. 于是

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_n}{2}<\sigma_{2n}<a+1.$$

从而

$$a_n<2\left(a+1-\frac{a_1}{2}\right).$$

单调增有上界的数列是收敛数列。即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=b$, 由例 1.1.15 可知，

$$b=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=a.$$

如果 $\{a_n\}$ 不是单调增的，结论不成立。例如 $a_n=(-1)^n$，$\sigma_n=0$或$-\frac{1}{n}$. 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=0$. 但是 $\{a_n\}$ 不收敛。 $\square$

6. *设 $\{S_n\}$ 为数列,$a_n=S_n-S_{n-1}$,$\sigma_n=\dfrac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$ 且 $\{\sigma_n\}$ 收敛，证明 $\{S_n\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n$.*

证明. 我们直接计算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(S_n-\sigma_n)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{nS_n-S_0-S_1-\cdots-S_{n-1}}{n+1}\\&\xlongequal{\text{Stolz 公式}}\lim_{n\to+\infty}(nS_n-nS_{n-1})\\&=\lim_{n\to+\infty}a_n=0.\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-\sigma_n)+\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n$. $\square$

7. *设数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.*

证明. 如果我们能证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n(x_n-x_{n-1})}{n}=0$，则命题得证。

通过简单的计算，我们有

$$(-1)^n(x_n-x_{n-1})=\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)+x_2-x_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n(x_n-x_{n-2})=0$, 可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)}{n-2}=0.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n(x_n-x_{n-1})}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2}(-1)^k(x_{k+2}-x_k)}{n-2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{x_2-x_1}{n}=0.$$

$\square$

8. *设 $u_0,u_1,\cdots$ 为满足 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{n+k}^2(n=0,1,2,\cdots)$ 的实数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。证明 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $u_k=0$.*

证明. 由 u_n 的定义可知，

$$u_n \geq u_{n+1} \geq 0, \quad \forall n.$$

记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. 由于 $\{S_n\}$ 收敛，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时 $\sum_{k=n}^{\infty} u_k < 1$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} \leq u_n &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \\
&= u_{n+1}\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} u_{n+2} + \cdots\right) \\
&\leq u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots) \\
&\leq u_{n+1}
\end{aligned}$$

从而，$u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = c$. 由于 $\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k < 1$ 可知，$c = 0$. 又由 $u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3} = \cdots = 0$，可知 $u_N = u_{N-1} = \cdots = u_1 = 0$. □

9. 设 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$

证明. 取 $t_{nk} = \frac{1}{2^n} C_n^k$, 我们有

(1) $t_{nk} > 0$ 且 $\sum_{k=0}^{n} t_{nk} = \frac{1}{2^n}(1+1)^n = 1$;

(2) 很容易验证 $\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$. 因为 $2^n = (1+1)^n > C_n^{k+1}$, 从而

$$0 \leq t_{nk} \leq \frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

由夹逼定理，$\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$。

由 Toeplitz 定理知，$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$。 □

10. 给定实数 a_0, a_1，并令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$

证明. 由递归公式有:

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - a_0).$$

于是:

$$\begin{aligned}
a_n - a_0 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(a_1 - a_0) + \cdots + (a_1 - a_0) \\
&= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}}(a_1 - a_0)
\end{aligned}$$

从而 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}}(a_1 - a_0)\right) = a_0 + \frac{2}{3}(a_1 - a_0) = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$。 □

11. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意给定的实数。令

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 x_{n+1} 应理解为 x_1. 归纳定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$x_{n+1}^{(k-1)}$ 应理解为 $x_1^{(k-1)}, k = 2, 3, \cdots$. 证明:

$$\lim_{k \to +\infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

12. 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，且 $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$。证明:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = l; \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n^2} = \frac{l}{2}.$$

证明.

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1.$$

由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = l$，易知

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

现在计算

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k - n a_1 &= \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_1) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \sum_{l=1}^{k-1} (a_{l+1} - a_l) \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} (n - l)(a_{l+1} - a_l)
\end{aligned}$$

如果取 $t_{nk} = \dfrac{2(n-k)}{(n-1)n}$，则

(1) $t_{nk} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \cdots, n$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2(n-k)}{(n-1)n} = 1;$

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} t_{nk} = 0, \quad \forall k.$

由 Toeplitz 定理可知

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - n a_1}{(n-1)n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{(n-1)n} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} t_{nk} \frac{a_{k+1} - a_k}{2} = \frac{l}{2}.$$

从而

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - n a_1}{(n-1)n} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)n}{n^2} + \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1}{n} = \frac{l}{2}.$$

命题得证。 □

13. 设 $x_1 \in [0,1], \forall n \geq 2$，令

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2}x_{n-1}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1+x_{n-1}}{2}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k} = \dfrac{1}{3}; \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k+1} = \dfrac{2}{3}.$

证明. 由递推公式可知

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+x_{2(k-1)}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)} \\ &= \sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^l + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} x_2 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} x_2. \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k} = \dfrac{1}{3}.$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_{2(k-1)+1} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^l + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \left(\frac{1}{4}\right)^k x_1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k+1} = \dfrac{2}{3}.$ □

14. 定初始值 a_0，并递推定义

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求 a_0 的所有可能的值，使得数列 $\{a_n\}$ 是严格增的。

解. 考虑数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$. 显然

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-2}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + (-1)^n a_0 \\ &= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + (-1)^n(5a_0 - 1)\right] \end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{1}{5}\left[2^n + (-1)^n(5a_0-1)3^n\right].$$

由此

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_{2n-1} &= \frac{1}{5}[2^{2n} + (5a_0-1)3^{2n} - 2^{2n-1} + (5a_0-1)3^{2n-1}] \\ &= \frac{1}{5}[2^{2n-1} + 4(5a_0-1)3^{2n-1}]. \end{aligned}$$

只有当 $a_0 \geq \frac{1}{5}$ 时，$a_{2n} > a_{2n-1}$，　$\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}a_{2n-1} - a_{2n-2} &= \frac{1}{5}[2^{2n-1} - (5a_0 - 1)3^{2n-1} - 2^{2n-2} - (5a_0 - 1)3^{2n-2}] \\ &= \frac{1}{5}[2^{2n-2} - 4(5a_0 - 1)3^{2n-2}].\end{aligned}$$

只有当 $a_0 \leq \frac{1}{5}$ 时，$a_{2n-1} > a_{2n-2}$，　$\forall n \in \mathbb{N}$.

综上，只有 $a_0 = \frac{1}{5}$ 时，$\{a_n\}$ 是严格递增的。

15. 设 $c > 0$，$a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

试问：当时 $-3 \leq c < 0$，数列 $\{a_n\}$ 的收敛性如何?

证明. 现证 $c > 1$ 的情形:

$$a_n \geq \sqrt{c a_{n-1}^2} = \sqrt{c} a_{n-1} \geq \cdots \geq \left(\sqrt{c}\right)^{n-1} a_1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{c}\right)^{n-1} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. 命题得证。

现在 $c \leq 1$ 的情形:

(1) 考虑函数 $f(x) = x^2 - 2x + c$。当 $x \in (1-\sqrt{1-c}, 1+\sqrt{1-c})$, $f(x) < 0$ 且 $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -1 + c$.

(2) 很显然 $a_1 = \frac{c}{2} \in (1-\sqrt{1-c}, 1+\sqrt{1-c})$. 于是 $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} f(a_1) < 0 \Rightarrow a_2 < a_1$.

$$a_1^2 \in (2 - c - 2\sqrt{1-c}, 2 - c + 2\sqrt{1-c}) \Rightarrow a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} \in (1-\sqrt{1-c}, 1+\sqrt{1-c}).$$

(3) 假设 $n = k$ 时，$a_k \leq a_{k-1}$ 且 $a_k \in (1-\sqrt{1-c}, 1+\sqrt{1-c})$. 显然我们有 $a_{k+1} \leq a_k, a_{k+1} \in (1-\sqrt{1-c}, 1+\sqrt{1-c})$.

综上,

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad a_n \geq 1 - \sqrt{1-c}, \quad \forall n.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

现考虑 $-3 \leq c < 0$ 的情形。

(1) 我们先证明 a_n 是有界的。$\frac{c}{2} < a_1 = \frac{c}{2} \leq 0$. 假设 $\frac{c}{2} \leq a_k \leq 0$, 则 $0 \leq a_k^2 \leq \frac{c^2}{4}$。从而

$$\frac{c}{2} < \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} = a_{k+1} \leq \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} = \frac{c}{8}(4-c) < 0$$

由数学归纳法知，$a_n \in \left[\frac{c}{2}, 0\right], \forall n$.

(2)

$$\begin{aligned}a_n - a_{n-2} &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n-3}\right)\left(a_{n-1} - a_{n-3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + a_{n-3}\right)\left(a_{n-2} + a_{n-4}\right)\left(a_{n-2} - a_{n-4}\right)\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{4}\left(a_{n-1} + a_{n-3}\right)\left(a_{n-2} + a_{n-4}\right) > 0$，$a_n - a_{n-2}$ 和 $a_{n-2} - a_{n-4}$ 同号。即 $\{a_{2k-1} | k \geq 1\}$ 和 $\{a_{2k} | k \geq 1\}$ 是单调数列。因为

$$a_3 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a_2^2}{2} > 0$$

所以 $\{a_{2k-1}|k\leq 1\}$ 是单调递增的。又因为

$$a_4-a_2=\frac{a_3+a_1}{2}(a_3-a_1)<0,$$

所以 $\{a_{2k}|k\geq 1\}$ 是单调递减的。

假设当 $k\to+\infty$ 时，$a_{2k-1}\to p, a_{2k}\to q$。在递推公式两端取极限，我们有

$$p=\frac{c}{2}+\frac{q^2}{2}$$
$$q=\frac{c}{2}+\frac{p^2}{2}$$

两式相减可得

$$p-q=\frac{1}{2}(q-p)(p+q)\Rightarrow(p-q)(p+q+2)=0.$$

如果 $p-q=0$, i.e. $p=q$, 则 $p=q=1-\sqrt{1-c}$.

如果 $p+q+2=0$, 则将 $p=-2-q$ 代入第一个方程，我们有 $(q+1)^2=-(c+3)$. 所以如果 $c>-3$, 则 $(q+1)^2<0$, 从而无解。当 $c=-3$ 时，$q=-1$, 从而 $p=q=-1$. □

16. 数列 $\{u_n\}$ 定义如下: $u_1=b, u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$，$n\in\mathbb{N}$. 问: a,b 为何值时 $\{u_n\}$ 收敛，并求出其极限值。

解. 由递归定义可知:

$$u_{n+1}-a=(u_n-a)^2+(u_n-a).$$

记 $v_n=u_n-a$，则 $v_1=b-a$. 如果 $\{u_n\}$ 收敛，则 $\{v_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

(1) 由于 $v_{n+1}-v_n=v_n^2\geq 0$, $\{v_n\}$ 是单调增的。

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$，则 $v_n\leq 0,\forall n$.

下面我们用归纳法来证明，当 $v_1\leq 0, v_1+1\geq 0$ 时，$v_n\leq 0$ 且 $v_n+1\geq 0\ \forall n$.

(1) 当 $n=1$ 时，成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，我们也有 $v_k\leq 0$ 且 $v_k+1\geq 0$.

(3) 我们证明 $n=k+1$ 时也成立。因为

$$v_{k+1}=v_k\cdot(v_k+1),$$

所以 $v_{k+1}\leq 0$. 另一方面

$$v_{k+1}+1=v_k^2+v_k+1=\left(v_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0.$$

由此可见，当 $b\in[a-1,a]$ 时，$\{u_n\}$ 收敛。

17. 设 $A>0, 0<y_0<A^{-1}, y_{n+1}=y_n(2-Ay_n), n\in\mathbb{N}$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A^{-1}$.

证明. 如果我们能证明 $0<y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$, 则

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=2-Ay_n\geq 2-AA^{-1}=1\Rightarrow y_{n+1}\geq y_n.$$

从而 $\{y_n\}$ 是单调递增有上界的数列。故收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A^{-1}$.

下面我们就证明 $y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$. 考虑函数 $f(x)=x(2-Ax)$. 显然该函函数在 $x=A^{-1}$ 是取得最大值。即 $f(x)<A^{-1},\forall x\in\mathbb{R}$. 由于 $0<y_1<A^{-1}$, 由归纳法，$0<y_n<A^{-1},\forall n\in\mathbb{N}$. □

18. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $(2-a_n)a_{n+1}=1$。证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$。

证明. 由于 $(2-a_n)a_{n+1}=1$, 则 $a_n\neq 2$, 从而 $a_1\neq\frac{3}{2}$. 我们现证无论 a_1 取何值，都存在 N 使得 $a_N\leq 1$.

(1) 如果 $a_1\leq 1$, 取 $N=1$, $a_N=a_1\leq 1$

(2) 如果 $a_1>\frac{3}{2}$, 则 $a_2>2$, $a_3<0$. 于是取 $N=3$, $a_N=a_3<0\leq 1$.

(3) 如果 $1<a_1<\frac{3}{2}$. 记 $a_1=1+h$, 则

$$a_k=1+\frac{h}{1-(k-1)h},\quad k=2,3\cdots.$$

取 $k=\left[\frac{1}{h}\right]$, 我们有

$$1-(k-1)h\geq h>0,\quad \frac{h}{1-(k-1)h}\geq\frac{1}{2}.$$

从而取 $N=k+2=\left[\frac{1}{h}\right]$，我们有 $a_{N-2}=a_k\geq\frac{3}{2}, a_N<0\leq 1$.

综上，我们不妨假设 $a_1\leq 1$. 下面我们可以用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ 是单调增的，且 $a_n\leq 1,\forall n$. 由于

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(a_n-1)^2}{2-a_n},$$

我们可知当 $a_n<1$ 时，$a_{n+1}>a_n$. 又因为 $2-a_n>1\to a_{n+1}\leq 1$. 到此我们证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在。设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$，则 $(2-a)a=1$. 解方程知 $a=1$. □

19. 设数列 $\{a_n\}$ 满足不等式 $0\leq a_k\leq 100a_n(n\leq k\leq 2n, n=1,2,\cdots)$，且无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=0$

证明. 显然 $a_{2n}\leq 100a_n,\quad a_{2n}\leq 100a_{n+1},\cdots,a_{2n}\leq 100a_{2n-1}$. 从而

$$0\leq 2na_{2n}\leq 200\sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 200\sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k=0$. 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty} 2na_{2n}=0$.

同理，$a_{2n-1}\leq 100a_n,\quad a_{2n-1}\leq 100a_{n+1},\cdots,a_{2n-1}\leq 100a_{2n-2}$. 将所有的不等式加起来，我们有

$$0\leq(2n-1)a_{2n-1}=a_{2n-1}+2(n-1)a_{2n-1}\leq 2*100\sum_{k=n}^{2n-2} a_k+a_{2n-1}\leq 200\sum_{k=n}^{2n-1} a_k.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 200\sum\limits_{k=n}^{2n-1} a_k=0$. 由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-1)a_{2n-1}=0$.

综上所述，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=0$ □

20. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$

证明. 通过简单计算，我们可以得知

$$\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)^2 \leq \left(1+\frac{k}{n^2}\right)\left(1+\frac{n-k+1}{n^2}\right), \quad \forall k \leq \frac{n}{2}, k \in \mathbb{N}.$$

由此可见

$$\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

另一方面

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) \leq \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)}{n}\right)^n = \left(1+\frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n.$$

很显然

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(n+1)}{2n^2}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}.$$

由夹逼定理，命题得证。 □

21. 设 $a_1 > b_1 > 0$，令

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

证明. 很显然

$$b_n \leq \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \leq a_n, \quad \forall n = 2, 3\cdots.$$

于是

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \leq \frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2} = a_{n-1},$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})\cdot b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} \geq 0 \Rightarrow b_n \geq b_{n-1}.$$

所以

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1.$$

由实数连续性命题 (二) 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 都存在。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$,

$$a_n b_n = a_{n-1}b_{n-1} = \cdots = a_1 b_1 \Rightarrow ab = a_1 b_1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \Rightarrow a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a = b.$$

于是 $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$. □

22. 当 $n \geq 3$ 时，证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

证明. 在证明该题之前，我们先证明如下结论：数列 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 满足 $n \geq 2, a_k \geq -1, k = 1, 2, \cdots, n$ 且它们有相同的符号，则

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

我们用归纳法来证明此命题：

(1) 当 $n = 2$ 时，$(1+a_1)\cdot(1+a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 \geq 1 + a_1 + a_2$, 命题成立。

(2) 假设 $n = k$ 时，命题亦成立，i.e. $\prod_{n=1}^{k}(1+a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^{k} a_n$.

(3) 下面证明当 $n = k+1$ 时，命题亦成立。

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{k+1}(1+a_n) &= \left(\prod_{n=1}^{k}(1+a_n)\right)\cdot(1+a_{k+1}) \\
&\geq (1 + a_1 + \cdots + a_k)\cdot(1+a_{k+1})(\text{因为 } 1 + a_{k+1} \geq 0) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n + \sum_{n=1}^{k} a_n a_{k+1} \\
&\geq 1 + \sum_{n=1}^{k+1} a_n
\end{aligned}$$

命题得证。

下面我们用上述命题来证明此题。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

首先，由 $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1, \forall k \leq n$，我们可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

右边的不等式的得证。

另一方面，应用上面证明的结论，可知

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{n} = 1 - \frac{(k-1)k}{2n}.$$

于是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{3}{2n}$$

左边的不等式得证。 □

23. 设 $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1}+1), n = 2, 3, \cdots$，且

$$x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$（其中 $\prod\limits_{k=1}^{n}$ 表示从 $k=1$ 到 $k=n$ 的连乘积）.

解. 我们先计算

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) \\ &= \frac{a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2+1}{2(a_1+1)}\cdot\frac{a_3+1}{3(a_2+1)}\cdots\frac{a_n+1}{n(a_{n-1}+1)} \\ &= \frac{a_n+1}{n!a_1} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} a_1 &= 1! \\ a_2 &= 2!\left(1+\frac{1}{1!}\right) \\ a_3 &= 3!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right) \\ &\cdots \\ a_n &= n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right) \end{aligned}$$

从而知,

$$a_n+1 = n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

于是: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = e.$

24. 设 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, 用 K_n 表示使得 $H_k\geq n$ 的最小下标, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n}$

解. 我们记 $x_n = H_n-\ln n$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = C(Euler\text{ 常数})$. 现在我们计算

$$x_{K_{n+1}} - x_{K_n} = \left(\frac{1}{K_n+1}+\cdots+\frac{1}{K_{n+1}}\right) - \ln K_{n+1} + \ln K_n.$$

另一方面

$$1-\frac{1}{K_n} \leq \left(\frac{1}{K_n+1}+\cdots+\frac{1}{K_{n+1}}\right) < 1+\frac{1}{K_{n+1}}.$$

从而由夹逼定理知

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(x_{K_{n+1}}-x_{K_n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\ln K_{n+1}+\ln K_n\right).$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n} = e.$

25. 设 $y_0\geq 2, y_n = y_{n-1}^2-2(n\in\mathbb{N})$,

$$S_n = \frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots+\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$

证明. 如果 $y_0=2$, 则 $y_n=2, \forall n>0$。从而 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k} = 1-\frac{1}{2^{n+1}}$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 = \frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}.$$

下面证明当 $y_0>2$ 时结论亦成立。取 $a=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$. 简单计算可知

$$y_0=a+\frac{1}{a}.$$

由此

$$\begin{aligned}
y_1&=y_0^2-2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=a^2+\frac{1}{a^2}\\
y_2&=y_1^2-2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=a^4+\frac{1}{a^4}\\
&\cdots\\
y_n&=y_{n-1}^2-2=\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)^2-2=a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
y_0y_1\cdots y_n&=\frac{1}{a-\frac{1}{a}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\cdots\left(a^{2^n}+\frac{1}{a^{2^n}}\right)\right]\\
&=\frac{a}{a^2-1}\left[\left(a^{2^n}\right)^2-\left(\frac{1}{a^{2^n}}\right)^2\right]\\
&=\frac{a}{a^2-1}\frac{a^{2^{n+2}}-1}{a^{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}=\frac{a^2-1}{a}\frac{a^{2^{n+1}}}{a^{2^{n+2}}-1}=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^{2^{n+1}}-1}-\frac{1}{a^{2^{n+2}}-1}\right).$$

由此可知

$$S_n=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a^{2^{n+2}}-1}\right).$$

进而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a^2-1}+1\right)=a$. 命题得证。 □

26. 令数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明:*(1)* 当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\frac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$;
(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$.

证明. (1). 直接计算

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}b_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!}\cdot\frac{n+1}{n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}\left(1+\frac{k+1}{n-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{n!(n-n)!}{n!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{0!(n-0)!}{n!}-2\\ &= 2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}-2\\ &= 2b_n-2\end{aligned}$$

所以，$b_n=\dfrac{n+1}{2n}b_{n-1}+1$。

（2）当 $n>4$, 我们有 $b_{n-1}>2\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2n}{n-1}$, 从而

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{b_{n-1}}<\frac{n+1}{2n}+\frac{n-1}{2n}=1.$$

即从 $n>4$ 起，数列 $\{b_n\}$ 单调递减。另一方面，显然 $b_n\geq 2,\forall n\geq 2$. 由此可知 $\{b_n\}$ 是收敛的。对（1）中的等式取极限可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=2$. □

27. 设 $S_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$. 证明:

$$n^n\left[1+\frac{1}{4(n-1)}\right]<S_n<n^n\left[1+\frac{2}{e(n-1)}\right].$$

证明. 提取 n^n 可得

$$S_n=n^n\left[1+\frac{1}{n^n}+\frac{2^2}{n^n}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right].$$

显然

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &< \frac{1}{n^n}+\frac{2^2}{n^n}+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &< \frac{(n-2)^{n-1}}{n^n}+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}<\frac{2(n-1)^{n-1}}{n^n}\\ &< \frac{2}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

我们不难证明 $\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\}$ 是单调增且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}$. 所以

$$\frac{1}{4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{e}.$$

将上述不等式综合起来，我们就证明了此题。 □

28. 设 $x_n>0$. 证明:

(1) $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geq e$;

(2) 上式中的 e 为最佳常数。

证明. (1) $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geq e$ 等价于 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}\right)^n \geq 1$. 我们用反证法来证明该命题。如果

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n}\right)^n < 1,$$

则存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，我们有

$$\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{n}{1+n} < 1, \forall n > N.$$

于是

$$\begin{gathered}\frac{x_{N+1}}{N+1}-\frac{x_{N+2}}{N+2} > \frac{x_1}{N+2}\\ \frac{x_{N+2}}{N+2}-\frac{x_{N+3}}{N+3} > \frac{x_1}{N+3},\\ \cdots\\ \frac{x_{n-1}}{n-1}-\frac{x_n}{n} > \frac{x_1}{n}\end{gathered}$$

把以上的不等式加起来，我们有

$$\frac{x_{N+1}}{N+1} > \frac{x_{N+1}}{N+1}-\frac{x_n}{n} > \sum_{k=N+1}^{n}\frac{x_1}{k} \to +\infty.$$

这显然与 $\frac{x_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立，命题得证。

(2) 现证明对于任意的 $\varepsilon>0$，存在数列 $\{x_n\}$ 使得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n < e^{1+\varepsilon}.$$

我们取 $x_1=\frac{\varepsilon}{2}, x_n=n$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{2}+n+1}{n}\right)^n = e^{1+\frac{\varepsilon}{2}} < e^{1+\varepsilon}.$$

这说明 $e^{1+\varepsilon}$ 不是下确界。命题得证。

□

29. 设 $a_n>0$. 证明: $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) \geq 1$.

证明. 如果 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) < 1$, 则，存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时有，

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1} > \frac{1}{n+1}.$$

于是:

$$\frac{a_{N+1}}{N+1} > \frac{a_{N+1}}{N+1}-\frac{a_n}{n} > \sum_{k=N+2}^{n}\frac{1}{k}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，$\sum_{k=N+2}^{n}\frac{1}{k} \to +\infty$. 这与 $\frac{a_{N+1}}{N+1}$ 是个有限数矛盾。从而假设不成立。 □

30. 设 $2a_{n+1}=1+b_n^2, 2b_{n+1}=2a_n-a_n^2, 0\le b_n\le \frac{1}{2}\le a_n, n=1,2,\cdots$. 证明：数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛，并求其极限之值。

证明. 很容易证得：$a_n\le\frac{5}{8},\forall n$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(b_n+b_{n-1})(b_n-b_{n-1})$$
$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\left(2-a_n-a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)$$

由此可得

$$|a_{n+1}-a_n|\le\frac{1}{2^2}\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|$$
$$|b_{n+1}-b_n|\le\frac{1}{2^2}\left|b_{n-1}-b_{n-2}\right|$$

取 $A=\max\{|a_2-a_1|,|a_3-a_2|\}$, $B=\max\{|b_2-b_1|,|b_3-b_2|\}$, 则

$$|a_n-a_{n-1}|\le\frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}}A$$
$$|b_n-b_{n-1}|\le\frac{1}{2^{2[\frac{n}{2}]-2}}B$$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是 Cauchy 列。从而都收敛。

假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$, 则

$$2a=1+b^2,$$
$$2b=2a-a^2.$$

解方程组可知,$(b^2+2b-1)(b^2-2b+3)=0$. 解得 $b=\sqrt{2}-1, a=2-\sqrt{2}$. □

参考文献

[徐薛] 徐森林，薛春华编著《数学分析》, 清华大学出版社, 2005.

后 记