הסקה אוטומטית ושימושיה – תרגיל בית 1

נתונים טכניים

1. תאריך פרסום התרגיל: 20 במרץ 2022. **תאריך הגשת התרגיל: 3 באפריל 2022.**
2. ההגשה בזוגות
3. יש לשלוח אלי במייל קובץ zip שיכלול את הדברים הבאים:
   (א) כל הקוד שכתבתם בפייתון
   (ב) קבצי ה־cnf שנתבקשתם ליצור
   (ג) קובץ pdf שיכלול את שמות המגישים, תעודות הזהות שלהם, והתשובות לשאלות.
4. הרגישו חופשי לשאול שאלות בפורום הקורס במודל (וגם לענות, אך מבלי לגלות את התשובות לשאלות שבתרגיל).

תרגיל

1. ממשו בפייתון שני פותרני SAT:
   (א) מעבר על כל ההשמות האפשריות למשתנים.
   (ב) $DPLL$ כפי שנלמד בכיתה.

   בשני המקרים יש לפרסר קבצי cnf ולהדפיס sat אם הנוסחה המיוצגת בקובץ ספיקה ו־$unsat$ אם היא אינה ספיקה.
   חובה לממש ולבחון את המימושים על פי ההנחיות המפורטות כאן:
   https://github.com/yoni206/ar-class-2022-hw1.
   המימוש ייבדק באופן אוטומטי ועל כן חשוב לעקוב בדיוק אחרי ההוראות.
2. בשיעור הראשון יצרנו את הנוסחאות הבאות:

$$\varphi_{foo} = ((\neg a \wedge \neg b \wedge h) \vee (\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))))$$

$$\varphi_{goo} = ((a \wedge f) \vee (\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h)))$$

$$\varphi = \varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}$$

   (א) רשמו את $\neg\varphi$ (שימו לב לשלילה!) בצורת cnf לפי האלגוריתם של צייטין.
   (ב) צרו קובץ cnf שמייצג את הנוסחה שרשמתם.
   (ג) הריצו את הסולברים שמימשתם על הקובץ הזה.
      i. מה התוצאה שקיבלתם?
      ii. מה התוצאה אומרת על הפונקציות foo ו־goo מהשיעור הראשון?
      iii. איזה סולבר היה מהיר יותר?
   (ד) נוסחת ה־cnf שיצרתם ספיקה ביחד עם $\neg\varphi$. הוכיחו שהנוסחאות אינן שקולות.

לנוחותכם, להלן ההגדרה המלאה של שיטת צייטין. תהי נוסחה A. ניצור נוסחה B כדלהלן:
עבור כל תת נוסחה C של A שאינה משתנה נגדיר משתנה חדש p_C. נגדיר את B להיות הנוסחה $p_A \wedge \bigwedge_{\{C\in sub(A)\}} E(C)$,
כאשר $E(C)$ מוגדרת כך:

$$E(C)=\begin{cases} CNF(p_C \leftrightarrow C) & C\ is\ variable\\ CNF(p_C \leftrightarrow true) & C\ is\ true\\ CNF(p_C \leftrightarrow false) & C\ is\ false\\ CNF(p_C \leftrightarrow \neg p_D) & C=\neg D\\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1}\wedge p_{C_2})) & C=C_1\wedge C_2\\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1}\vee p_{C_2})) & C=C_1\vee C_2\\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1}\rightarrow p_{C_2})) & C=C_1\rightarrow C_2\\ CNF(p_C \leftrightarrow (p_{C_1}\leftrightarrow p_{C_2})) & C=C_1\leftrightarrow C_2 \end{cases}$$

$$CNF(p\leftrightarrow C)=\begin{cases} (\neg p_C\vee C)\wedge(\neg C\vee p_C) & C\ is\ variable\\ (\neg p_C\vee true)\wedge(false\vee p_C) & C\ is\ true\\ (\neg p_C\vee false)\wedge(true\vee p_C) & C\ is\ false\\ (\neg p_C\vee\neg P_D)\wedge(p_D\vee p_C) & C\ is\ \neg D\\ (\neg p_C\vee p_{C_1})\wedge(\neg p_C\vee p_{C_2})\wedge(\neg p_{C_1}\vee\neg p_{C_2}\vee p_C) & C\ is\ C_1\wedge C_2\\ (\neg p_C\vee p_{C_1}\vee p_{C_2})\wedge(\neg p_{C_1}\vee p_C)\wedge(\neg p_{C_2}\vee p_C) & C\ is\ C_1\vee C_2\\ (\neg p_{\{C\}}\vee\neg p_{C_1}\vee p_{C_2})\wedge(p_{C_1}\vee p_C)\wedge(\neg p_{C_2}\vee p_C) & C\ is\ C_1\rightarrow C_2\\ (\neg p_C\vee\neg p_{C_1}\vee p_{C_2})\wedge(\neg p_C\vee p_{C_1}\vee\neg p_{C_2})\wedge & C\ is\ C_1\leftrightarrow C_2\\ (p_C\vee\neg p_{C_1}\vee\neg p_{C_2})\wedge(p_C\vee p_{C_1}\vee p_{C_2}) & \end{cases}$$

3. לכל $n>1$, נסמן ב־$[1..n]$ את קבוצת המספרים הטבעיים מ־1 עד n. שלשה פיתאגורית ב־$[1..n]$ היא שלישייה של מספרים $x,y,z\in[1..n]$ כך ש־$x^2+y^2=z^2$. בהינתן צביעה של $[1..n]$ בצבעים אדום וירוק, שלשה פיתאגורית x,y,z נקראת מונוכרומטית אם x,y,z צבועים באותו הצבע.

דוגמה: אם $n=15$ אז $[1..n]=\{1,2,3,\dots,15\}$. השלשות הפיתאגוריות ב־$[1..n]$ הן $3,4,5$ ו־$5,12,13$. אם נצבע את כל המספרים הזוגיים ב־$[1..n]$ בצבע אדום ואת האי זוגיים בצבע ירוק, נקבל שאין שלשה פיתאגורית מונו־כרומטית: בשלשה $3,4,5$, המספרים 3 ו־5 יהיו צבועים בירוק ואילו 4 יהיה צבוע בכחול. באופן דומה, בשלשה $5,12,13$, המספרים $5,13$ יהיו צבועים בירוק ואילו 12 יהיה צבוע בכחול. לעומת זאת, אם נצבע את כל המספרים בין 1 ל־10 בצבע אדום ואת המספרים יתר המספרים בצבע כחול, נקבל שהשלשה $3,4,5$ היא מונוכרומטית (כולה צבועה באדום).

(א) כתבו תכנית פייתון שעוברת על כל המספרים n בין 5 ל־50, ולכל n כזה יוצרת קובץ cnf שמייצג נוסחה φ_n כך ש־φ ספיקה אם ורק אם קיימת צביעה של $[1..n]$ ללא שלשות פיתאגוריות מונוכרומטיות.

(ב) הריצו את הפותרנים שמימשתם על כלל הנוסחאות. אתם אמורים לקבל sat על כולן (אם הפותרן הנאיבי איטי מדי עבור חלק מהקלטים – אין צורך לחכות לסיום הריצה). החל מאיזה n הפותרן שמבוסס על $DPLL$ היה טוב יותר?

(ג) בונוס (3 נקודות): ב־2016 אנשים מאוד חכמים הוכיחו שיש n עבורו לא קיימת צביעה של $[1..n]$ כך שאין שלשה פיתאגורית מונוכרומטית (כלומר, הנוסחה φ_n אינה ספיקה). מהו n?

הערה: הגישו את התכנית שמייצרת את קבצי ה־cnf וגם את הקבצים עצמם.

4. בכיתה הוכחנו שניתן לפתור נוסחאות הורן בזמן ריבועי.

(א) הוכיחו את 2 הלמות הבאות, אותן רק ציינו בכיתה ללא הוכחה:

i. למה 1: תהי F נוסחה. נניח שיש ב־F פסוקית עם ליטרל אחד ℓ. תהי F' הנוסחה המתקבלת מ־F על ידי מחיקת כל הפסוקיות בהן ℓ מופיע, ומחיקת $\overline{\ell}$ מכל הפסוקיות בהן $\overline{\ell}$ מופיע. אז F ו־F' שקולות.

ii. למה 2: תהי F נוסחת הורן כך שבכל פסוקית יש לפחות שני ליטרלים. אז F ספיקה.

(ב) האלגוריתם הפולינומיאלי שראינו לפתרון נוסחאות הורן עלול לתת תשובה לא נכונה על נוסחאות שאינן הורן. הסיבה לכך היא שלמה 2 נכונה רק לנוסחאות הורן. תנו דוגמה לנוסחה F שאינה הורן, שבה בכל פסוקית יש לפחות שני ליטרלים, אך היא אינה ספיקה.