אנליזה נומרית: מצגת מלווה #10

Chebyshev polynomials & Optimal Choice of interpolation nodes

נושאי המצגת:

1. פולינומי צ'ביצ'ב;
2. בחירה אופטימלית של נקודות אינטרפולציה בנורמה ∞.

תזכורת: הצגת לגרנג' לפולינום האינטרפולציה

מקרבים את $f(x)$ בקטע $[a,b]$ באמצעות פולינום אינטרפולציה $L_n(x)$
ממעלה $n \geq$ הבנוי על $n+1$ נקודות שונות $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$

- **הפולינומים היסודיים של לגרנג'**

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

- **הצגת לגרנג' לפולינום האינטרפולציה:**

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot l_k(x)$$

- **שגיאת האינטרפולציה בנקודה x:**

$$E_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\alpha = \min\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\} < \xi < \beta = \max\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

בחירה אופטימלית של נקודות אינטרפולציה

נתבונן **בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה בקטע $[a,b]$**

$$\max_{a\le x\le b}\left|E_n(x)\right| = \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

$$M_{n+1}[a,b] = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|, \qquad \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

בהינתן n קבוע- החסם לשגיאה תלוי בשני גורמים:

- הגורם $M_{n+1}[a,b]$.
  גורם זה תלוי בפונקציה $f(x)$ שאותה מקרבים אך אינו מושפע מבחירת $n+1$ נק' האינטרפולציה בקטע $[a,b]$.
- הגורם $\max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$.
  גורם זה אינו תלוי בפונקציה $f(x)$ שאותה מקרבים אך תלוי בבחירה של $n+1$ נק' האינטרפולציה בקטע $[a,b]$.

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

בחירה אופטימלית של נקודות אינטרפולציה, המשך

נתבונן על הגורם השני המשפיע על החסם לשגיאה

$$\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right| = \max_{a\le x\le b}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right|$$

שאלה:

כיצד נבחר $n+1$ נק' האינטרפולציה בקטע $[a,b]$ כך שהגודל

$$\max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

יהיה מינימלי?

בחירה של נקודות כנ"ל תהיה בחירה אופטימלית במובן של הקטנת החסם לשגיאה באמצעות הגורם השני התלוי בנק' האינטרפולציה.

בחירה אופטימלית של נקודות אינטרפולציה, המשך

ננסח בעיה שקולה בלשון בעיית min-max:

יש למצוא קבוצה של $n+1$ נקודות שונות $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$
בקטע $[a,b]$ כך שהפולינום $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$
יהיה בעל הסטייה המינימלית מ-0 .

כלומר: $\boxed{\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right| \to \min}$ או $\boxed{\min_{X=\{x_k\}_{k=0}^{n}}\left(\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|\right)}$

בחירה אופטימלית של נקודות אינטרפולציה, המשך

ניסוח הבעיה בלשון פורמלית לפי נורמה ∞:

יש למצוא קבוצה של $n+1$ נקודות שונות $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

בקטע $[a,b]$ כך שעבור $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

מתקיים $\boxed{\|\omega_{n+1}\|_\infty \le \|\tilde{p}_{n+1}\|_\infty}$

לכל פולינום מתוקן $\tilde{p}_{n+1}(x)$ ממעלה $n+1$ (פולינום שהמקדם המוביל שלו=1)

קבוצת נקודות האינטרפולציה האופטימלית במובן הנ"ל היא , כפי שנראה בהמשך, קבוצת נקודות אינטרפולציה שידועה בשם **נקודות צ'ביצ'ב.** למעשה זוהי קבוצת השורשים של **פולינומי צ'ביצ'ב**, בהם נדון כעת בהרחבה.

פולינומי צ'ביצ'ב:
הגדרה ותכונות

פולינומי צ'ביצ'ב - הגדרה

הגדרה: פולינום צ'ביצ'ב ממעלה n :

❑ **ייצוג טריגונומטרי בקטע $[0,\pi]$:**

$$T_n(\theta) = \cos(n \cdot \theta), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

אם נציב $x = cos\theta$ נקבל $x(0) = cos0 = 1$ ו- $x(\pi) = cos\pi = -1$

לפיכך, באמצעות נוסחת המעבר $x = cos\theta$ ($\theta = arccosx$) נוכל לקבל ייצוג אלגברי שקול:

❑ **ייצוג אלגברי בקטע $[-1,1]$:**

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

אנו למעשה מעבירים את הפונקציה $cos(n\theta)$ מהקטע $[0,\pi]$ להיות מותאמת לקטע $[-1,1]$ באמצעות פונקציית המעבר $x = cos\theta$.

דוגמאות לפולינומי צ'ביצ'ב

באמצעות זהויות טריגונומטריות, קל לחשב מספר פולינומי צ'ביצ'ב ראשונים ולהציגם בשני הייצוגים באופן מפורש:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\theta) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cdot\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = \cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\vdots$$

נוסחת נסיגה לחישוב פולינומי צ'ביצ'ב

לחישוב מעשי של פולינומי צ'ביצ'ב משתמשים בנוסחת הנסיגה הבאה:

טענה: פולינומי צ'ביצ'ב מקיימים את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

תנאי התחלה

$$\left(T_0(x) \equiv 1, T_1(x) = x\right)$$

הוכחה:

ניתן להוכיח ע"י שימוש בזהות הטריגונומטרית:

$$\underbrace{\cos(n \cdot \theta)}_{T_n(x)} = \underbrace{2\cos\theta}_{2x} \cdot \underbrace{\cos((n-1)\theta)}_{T_{n-1}(x)} - \underbrace{\cos((n-2)\theta)}_{T_{n-2}(x)}$$

שורשים של פולינומי צ'ביצ'ב

טענה: לפולינום צ'ביצ'ב $T_n(x)$ יש n **שורשים פשוטים** הנתונים ע"י

$$\left\{ \xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi \right) \right\}_{k=1}^{n}$$

הוכחה: מתקיים

$$T_n(\xi_k) = \cos\left(n \cdot \arccos(\xi_k)\right) = \cos\left(n \cdot \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) = 0$$

שורשים של פולינומי צ'ביצ'ב- דוגמא

דוגמא: נחשב את שורשי פולינום צ'ביצ'ב $T_3(x)$:

$$\boxed{\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{6}\pi\right) \quad , \quad k = 1,2,3}$$

$$k = 1 \qquad \xi_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 \qquad \xi_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$k = 3 \qquad \xi_3 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

נק' קיצון מוחלט של פולינומי צ'ביצ'ב

טענה:

- לפולינום צ'ביצ'ב $T_n(x)$ יש $n+1$ נקודות קיצון מוחלט בקטע $[-1,1]$ הנתונים ע"י

$$\boxed{\left\{\eta_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n}}$$

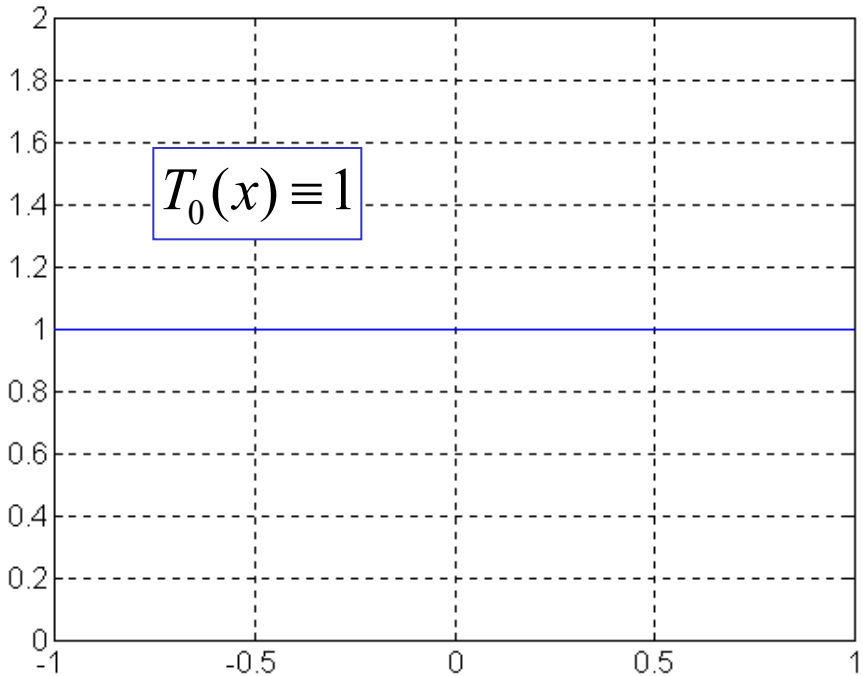
הוכחה: מתקיים $T_n(\eta_k) = \cos(n \cdot \arccos(\eta_k)) = \cos\left(n \cdot \frac{k\pi}{n}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

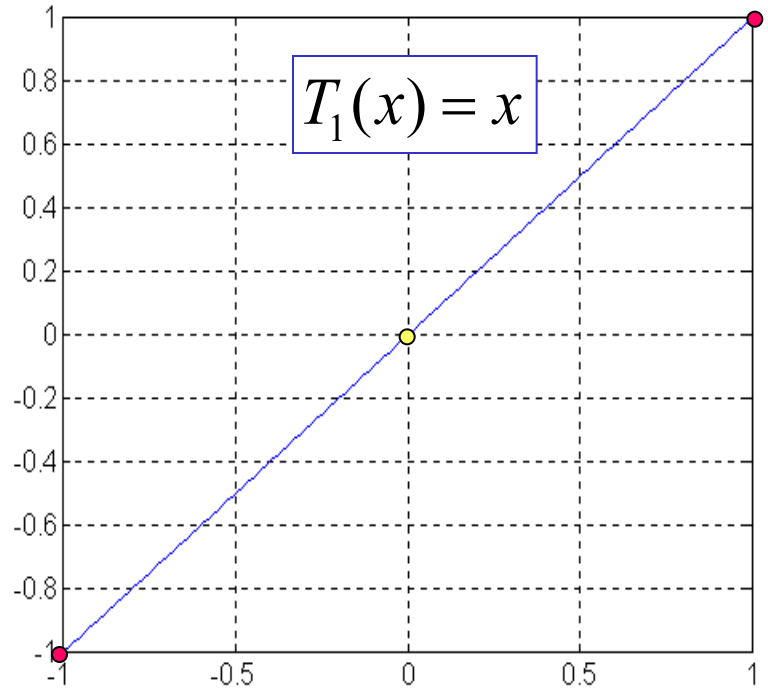
- מתקיים (הקיצון המוחלט $T_n(x)$ של בקטע $[-1,1]$) $\boxed{T_n(\eta_k) = (-1)^k}$

- מסקנה: $\boxed{\|T_n\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}|T_n(x)| = 1}$

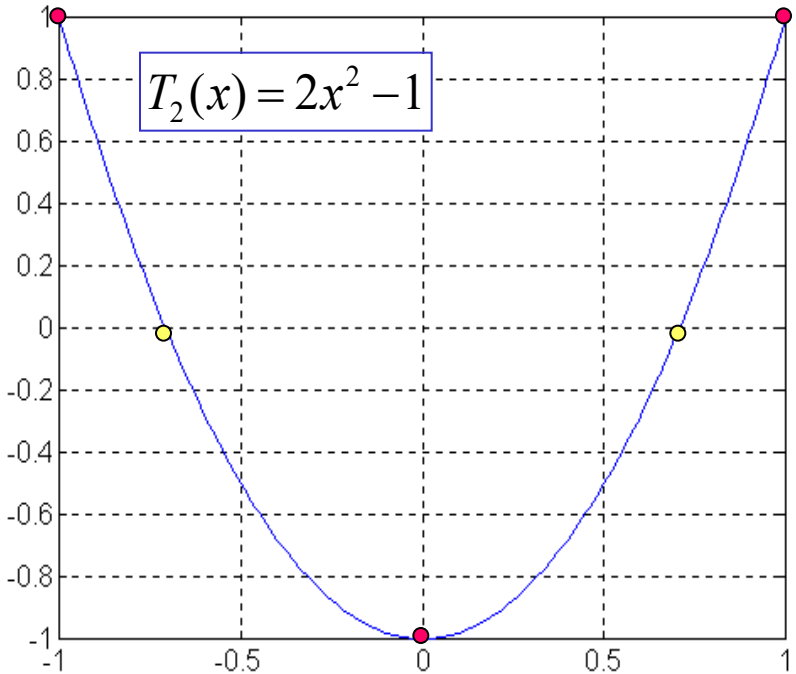
גרפים של פולינומי צ'ביצ'ב

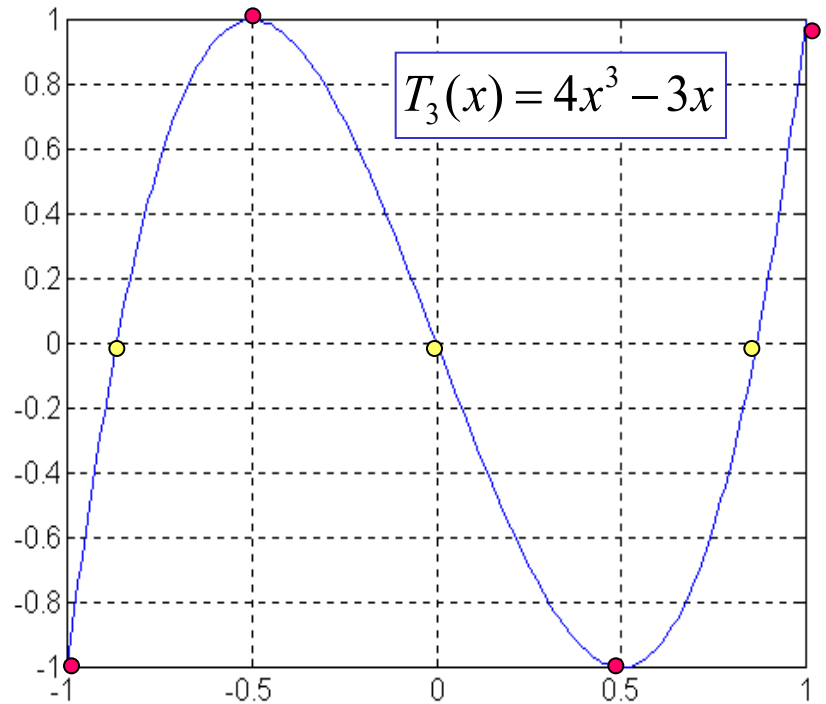
נראה כעת מספר גרפים של פולינומי צ'ביצ'ב:



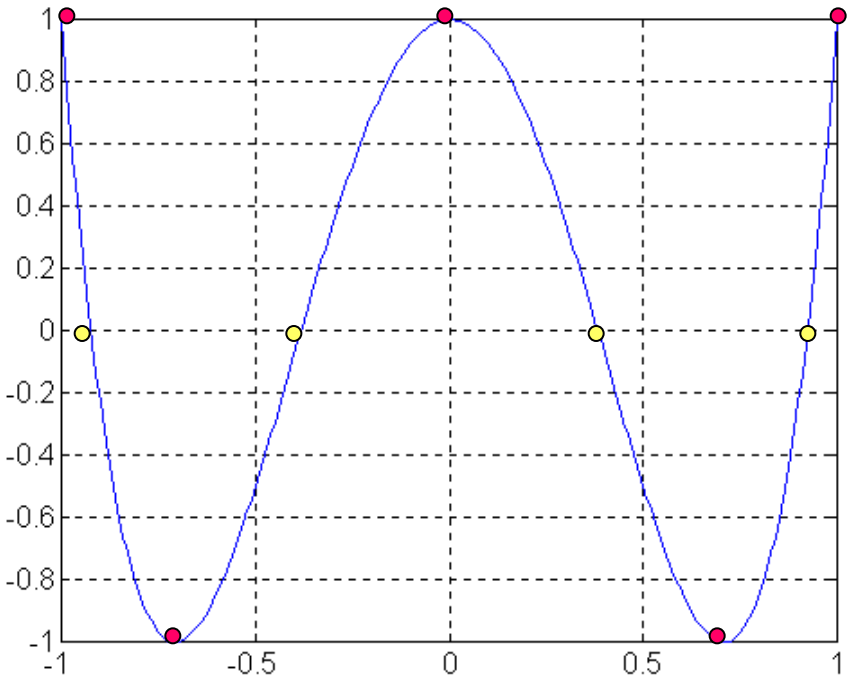


גרפים של פולינומי צ'ביצ'ב, המשך

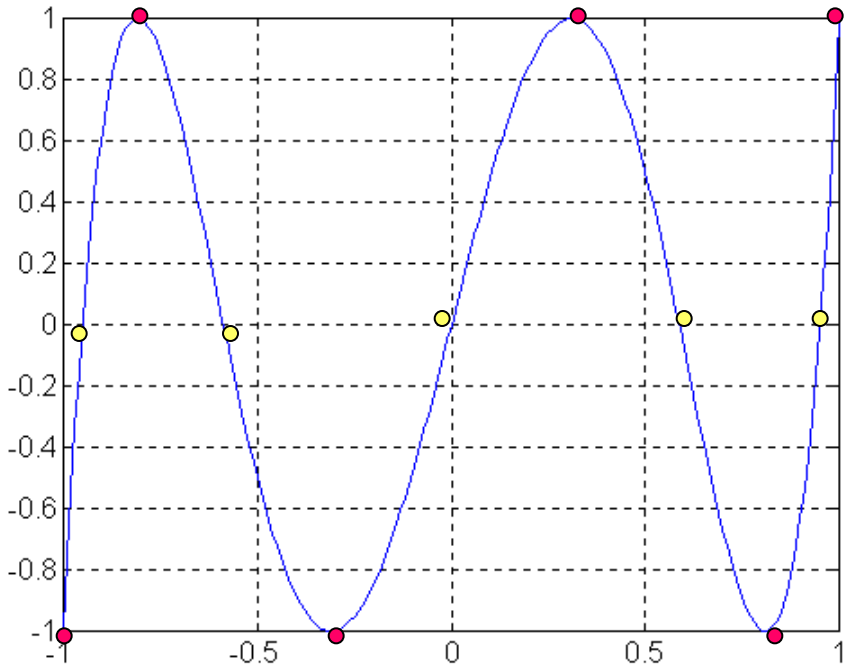




גרפים של פולינומי צ'ביצ'ב, המשך



$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$



$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

המקדם המוביל של פולינומי צ'ביצ'ב

טענה:

המקדם המוביל של פולינום צ'ביצ'ב $T_{n+1}(x)$ הוא 2^n .

הוכחה: באינדוקציה על n .

- בדיקה: עבור $n = 0$ ו- $T_1(x) = x$ אכן מתקיים $2^0 = 1$.
- הנחה: נניח כי המקדם של $T_n(x)$ הוא 2^{n-1} .
- הוכחה: נוכיח כי המקדם של $T_{n+1}(x)$ הוא 2^n :

- לפי נוסחת הנסיגה שהצגנו: $T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$
- נובע כי הגורם x^{n+1} מתקבל רק מתוך החלק $2x \cdot T_n(x)$ ע"י כפל של הגורם המוביל 2^{n-1} של x^n בגורם $2x$
- ואז מקבלים: $2x \cdot 2^{n-1}x^n = 2^n \cdot x^{n+1}$.

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

פולינום צ'ביצ'ב מתוקן

הגדרה:

הפולינום $\boxed{\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)}$ נקרא **פולינום צ'ביצ'ב מתוקן**

נעיר כי לפי טענה קודמת המקדם המוביל של פולינום צ'ביצ'ב $T_n(x)$ הוא 2^{n-1}

ולכן נקבל כי המקדם המוביל של $\tilde{T}_n(x)$ הוא 1 מכאן שזהו פולינום מתוקן.

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

שורשים ונקודות קיצון מוחלט של פולינומי צ'ביצ'ב מתוקנים

מהגדרת פולינום צ'ביצ'ב המתוקן $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ נובע כי:

- $\tilde{T}_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(x) = 0$

שורשי $\tilde{T}_n(x)$ הם השורשים $\left\{\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right\}_{k=1}^{n}$
של פולינום צ'ביצ'ב $T_n(x)$

- $\tilde{T}_n{}'(x) = 0 \Leftrightarrow T_n{}'(x) = 0$

נקודות קיצון של $\tilde{T}_n(x)$ הן נקודות קיצון $\left\{\eta_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n}$
של פולינום צ'ביצ'ב $T_n(x)$.
(שימו לב: הקיצון מתקבל באותן הנקודות אך הערך המקסימלי שונה)

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

נורמת ∞ של פולינומי צ'ביצ'ב מתוקן

מסקנה: עבור **פולינום צ'ביצ'ב המתוקן** $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ מתקיים:

- ערכים בנקודות קיצון מוחלט

$$\tilde{T}_n(\eta_k) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\eta_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

- נורמת ∞:

$$\left\|\tilde{T}_n\right\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

פולינומי צ'ביצ'ב מתוקנים-דוגמאות

$T_0(x)=1$	$\tilde{T}_0(x)=1$	$\left\|\tilde{T}_0\right\|_\infty=1$
$T_1(x)=x$	$\tilde{T}_1(x)=x$	$\left\|\tilde{T}_1\right\|_\infty=1$
$T_2(x)=2x^2-1$	$\tilde{T}_2(x)=x^2-\frac{1}{2}$	$\left\|\tilde{T}_2\right\|_\infty=\frac{1}{2}$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$\tilde{T}_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$	$\left\|\tilde{T}_3\right\|_\infty=\frac{1}{4}$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$\tilde{T}_4(x)=x^4-x^2+\frac{1}{8}$	$\left\|\tilde{T}_4\right\|_\infty=\frac{1}{8}$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$\tilde{T}_5(x)=x^5-\frac{5}{4}x^3+\frac{5}{16}x$	$\left\|\tilde{T}_5\right\|_\infty=\frac{1}{16}$

בחירה אופטימלית של נקודות אינטרפולציה בנורמה ∞.

תזכורת: הגדרת בעיית הבחירה באופטימלית של נקודות

בהתייחס **לנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה בקטע $[a,b]$**

$$\max_{a\le x\le b}\left|E_n(x)\right| = \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

$$M_{n+1}[a,b] = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|, \qquad \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

שאלה:

כיצד נבחר $n+1$ נק' האינטרפולציה בקטע $[a,b]$ כך שהגודל

$$\max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

יהיה מינימלי?

הגדרת בעיית הבחירה האופטימלית של נקודות אינטרפולציה,

ניסוח הבעיה בלשון פורמלית לפי נורמה ∞:

יש למצוא קבוצה של $n+1$ נקודות שונות $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

בקטע $[a,b]$ כך שעבור $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

מתקיים $\boxed{\|\omega_{n+1}\|_\infty \le \|\tilde{p}_{n+1}\|_\infty}$

לכל פולינום מתוקן $\tilde{p}_{n+1}(x)$ ממעלה $n+1$ (פולינום שהמקדם המוביל שלו=1)

- נראה עוד מעט כי קבוצת נקודות האינטרפולציה האופטימלית במובן הנ"ל היא קבוצת השורשים של צ'ביצ'ב המתוקן $\tilde{T}_{n+1}(x)$ הידועה בשם נקודות צ'ביצ'ב $\{\xi_k\}_{k=0}^{n}$.

- במקרה זה: $\omega_{n+1}(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) = (x-\xi_0)(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_n)$

משפט בדבר האופטימליות של פולינומי צ'ביצ'ב

תהי A מחלקת הפולינומים המתוקנים ממעלה $n+1$.
אזי לכל פולינום $\tilde{P}_{n+1}(x) \in A$ מתקיים:

$$\left\|\tilde{T}_{n+1}\right\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right| \le \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{P}_{n+1}(x)\right| = \left\|\tilde{P}_{n+1}\right\|_\infty$$

ניסוח שקול:

- מבין כל הפולינומים המתוקנים ממעלה $n+1$, פולינום צ'ביצ'ב $\tilde{T}_{n+1}(x)$ הוא בעל הסטייה המינימלית מאפס בקטע $[-1,1]$.
- בפרט, לכל פולינום מתוקן $\tilde{P}_{n+1}(x)$ ממעלה $n+1$ מתקיים

$$\left\|\tilde{P}_{n+1}\right\|_\infty \ge \left\|\tilde{T}_{n+1}\right\|_\infty = \frac{1}{2^n}$$

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

הוכחת משפט האופטימליות

נניח בשלילה כי הטענה לא נכונה.

- אזי קיים פולינום מתוקן $\tilde{Q}_{n+1}(x)$ ממעלה $n+1$ **שונה** מ- $\tilde{T}_{n+1}(x)$

כך ש- $$\left\|\tilde{Q}_{n+1}\right\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{Q}_{n+1}(x)\right| < \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right| = \left\|\tilde{T}_{n+1}\right\|_\infty = \frac{1}{2^n}$$

- בפרט, $$\boxed{-\frac{1}{2^n} < \tilde{Q}_{n+1}(x) < \frac{1}{2^n} \quad , \quad \forall x \in [-1,1]}$$

- נגדיר את פולינום ההפרש: $R_n(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) - \tilde{Q}_{n+1}(x)$

- $R_n(x)$ הוא פולינום ממעלה $n \ge$ (כיוון שהפולינומים $\tilde{Q}_{n+1}(x)$ ו- $\tilde{T}_{n+1}(x)$ הם פולינומים מתוקנים ממעלה $n+1$)

הוכחת משפט האופטימליות

- בנקודות $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n+1}$ שהן נקודות קיצון מוחלט של $\tilde{T}_{n+1}(x)$ מתקיים:

$$R_n(\eta_k)=\tilde{T}_{n+1}(\eta_k)-\tilde{Q}_{n+1}(\eta_k)=\frac{(-1)^k}{2^n}-\tilde{Q}_{n+1}(\eta_k)$$

- היות ולפי הנחת השלילה : $\forall x\in[-1,1]$, $-\frac{1}{2^n}<\tilde{Q}_{n+1}(x)<\frac{1}{2^n}$

נסיק כי בנקודות $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n+1}$ לפולינום ההפרש $R_n(x)$ ול- $\tilde{T}_{n+1}(x)$ יש אותו סימן.

הפולינום $R_n(x)$ מחליף סימנים בלפחות $n+2$ נקודות (הנק' $\{\eta_k\}_{k=0}^{n+1}$)

לפיכך נובע (ממשפט ערך הביניים) כי לפולינום $R_n(x)$ יש לפחות $n+1$ שורשים וזה בסתירה למשפט היסודי של האלגברה!

מסקנה: $R_n(x)\equiv 0$ ובאופן שקול $\tilde{T}_{n+1}(x)\equiv\tilde{Q}_{n+1}(x)$ בניגוד להנחת השלילה.

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

מסקנות ממשפט האופטימליות

מסקנה 1: עבור כל פולינום מתוקן $\omega_{n+1}(x)$ ששורשיו הם $n+1$ הנקודות $-1 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le 1$ מתקיים :

$$\|\omega_{n+1}\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}\left|\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}_{\omega_{n+1}(x)}\right| \ge \frac{1}{2^n} = \max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_{n+1}(x)\right| = \left\|\tilde{T}_{n+1}\right\|_\infty$$

- הביטוי $\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$ מקבל ערך מינימלי כאשר נקודות האינטרפולציה היא קבוצת $n+1$ שורשי פולינום צ'ביצ'ב $\tilde{T}_{n+1}(x)$.
- הערך המינימלי הנ"ל הוא 2^{-n} .

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

מסקנות ממשפט האופטימליות

מסקנה 2: אם $L_n(\tilde{T},x)$ הוא פולינום האינטרפולציה ממעלה $n \geq$ המוגדר באמצעות נקודות האינטרפולציה $\left\{\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right)\right\}_{k=1}^{n+1}$ (קבוצת $n+1$ שורשי פולינום צ'ביצ'ב $\tilde{T}_{n+1}(x)$ בקטע $[-1,1]$)

אז נקבל את ההערכה הבאה לשגיאת האינטרפולציה:

$$\left|f(x)-L_n(\tilde{T};x)\right| \leq \frac{M_{n+1}[-1,1]}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}, \quad \forall x\in[-1,1]$$

כאשר:

$$M_{n+1}[-1,1] = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

תרגיל 1

תהי $f(x) = e^{-x}$

1. יהי $L_2(x)$ מקרב האינטרפולציה הטוב ביותר ל- $f(x)$ בקטע $[-1,1]$.
מהן נקודות האינטרפולציה המתאימות?

2. העריכו את שגיאת האינטרפולציה בקטע $[-1,1]$.

פתרון תרגיל 1- סעיף 1

1. יהי $L_2(x)$ מקרב האינטרפולציה <u>הטוב ביותר</u> ל- $f(x)$ בקטע $[-1,1]$.
מהן נקודות האינטרפולציה המתאימות?

- על מנת למצוא את פולינום אינטרפולציה $L_2(x)$ ממעלה $n = 2 \geq$ יש להשתמש ב- $n + 1 = 3$ נקודות אינטרפולציה בקטע $[-1,1]$.

- היות ומדובר <u>באינטרפולציה אופטימלית</u>, יש למצוא את 3 נקודות צ'ביצ'ב שהן שורשי פולינום צ'ביצ'ב $\tilde{T}_3(x)$ בקטע $[-1,1]$.

- באמצעות שימוש בנוסחה $\left\{\xi_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2(n+1)}\pi\right)\right\}_{k=1}^{n+1}$ עם $n + 1 = 3$
ראינו קודם כי 3 נק' צ'ביצ'ב בקטע $[-1,1]$ הן:

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

פתרון תרגיל 1- סעיף 2

2. נעריך את שגיאת האינטרפולציה האופטימלית בקטע $[-1,1]$.

❑ נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה האופטימלית בקטע $[-1,1]$:

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-L_2(T;x)\right| \le \frac{M_3[-1,1]}{3!}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{M_3[-1,1]}{24}$$

❑ נחשב $M_3[-1,1]=\max_{-1\le x\le 1}|f'''(x)|$:

$$f(x)=e^{-x} \Rightarrow f'''(x)=-e^{-x} \quad \Rightarrow \quad M_3[-1,1]=\max_{-1\le x\le 1}\left|f'''(x)\right| = \left|f'''(-1)\right| = e$$

$$\Rightarrow \quad \max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-L_2(T;x)\right| \le \frac{M_3[-1,1]}{24}=\frac{e}{24}\cong 0.11326...$$

מעבר לקטע $[a,b]$

- ניתן להכליל את התוצאות שקיבלנו עבור הקטע $[-1,1]$ לאינטרפולציה אופטימלית בקטע $[a,b]$ באמצעות נוסחת המעבר:

$$t=\left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot x+\left(\frac{b+a}{2}\right);\quad -1\le x\le 1$$

העתקה זו ממפה את הקטע $[-1,1]$ לקטע $[a,b]$.

- ההעתקה ההפוכה הממפה את הקטע $[a,b]$ לקטע $[-1,1]$ נתונה ע"י:

$$x=\left(\frac{2}{b-a}\right)\cdot t-\left(\frac{b+a}{b-a}\right);\quad a\le t\le b$$

- בשתי ההעתקות מתקיים:

$$x=-1\Leftrightarrow t=a$$
$$x=1\Leftrightarrow t=b$$

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

חסם לשגיאת האינטרפולציה האופטימלית בקטע $[a,b]$

אם $L_n(\tilde{T},x)$ הוא פולינום האינטרפולציה ממעלה $n \geq$ המוגדר באמצעות $n+1$ שורשי פולינום צ'ביצ'ב $\tilde{T}_{n+1}(x)$ המותאמים לקטע $[a,b]$

אז נקבל את ההערכה הבאה לשגיאת האינטרפולציה:

$$\left|f(x)-L_n(\tilde{T};x)\right| \leq \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \quad \forall x\in[a,b]$$

כאשר:

$$M_{n+1}[a,b]=\max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

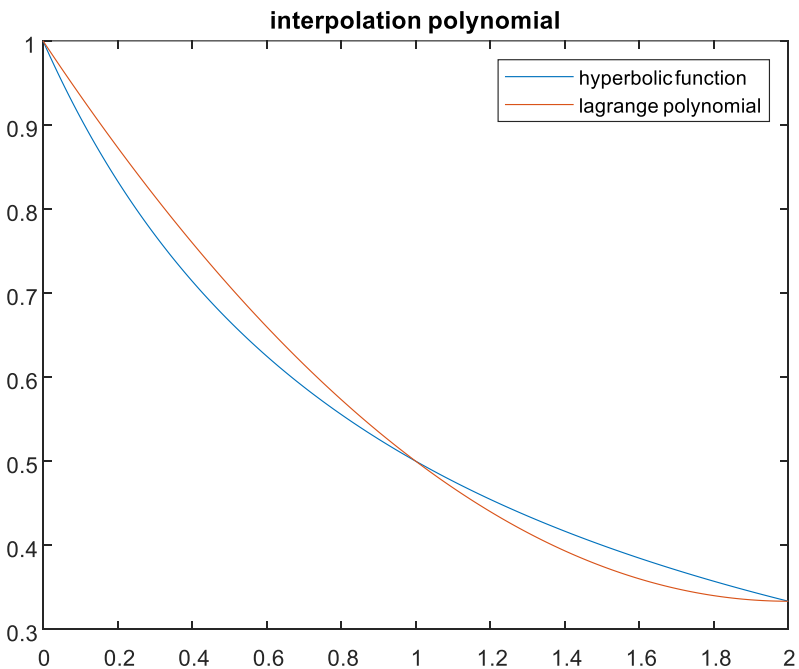
תזכורת: תרגיל ממצגת #9

במצגת קודמת הראינו כי אם מבצעים אינטרפולציה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בקטע $[0,2]$ באמצעות נקודות שוות מרחק $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ מקבלים:

- הפולינום הריבועי המקרב הוא: $L_2(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
- החסם לשגיאה בקטע $[0,2]$ הוא $\max_{0 \le x \le 2} |f(x) - L_2(x)| \le \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0.3849...$

תזכורת: תרגיל ממצגת #9

הייצוג הגרפי של הקירוב בקטע [0,2] באמצעות נקודות שוות מרחק $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ הינו:



$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$L_2(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

נמצא כעת קירוב אינטרפולציה אופטימלי בקטע [0,2]

תרגיל 2

תהי $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1. יהי $L_2(x)$ מקרב האינטרפולציה <u>הטוב ביותר</u> ל- $f(x)$ בקטע $[0,2]$.
מהן נקודות האינטרפולציה המתאימות?

2. העריכו את שגיאת האינטרפולציה בקטע $[0,2]$.

פתרון תרגיל 2- סעיף 1

1. יהי $L_2(x)$ מקרב האינטרפולציה הטוב ביותר ל- $f(x)$ בקטע $[0,2]$.
מהן נקודות האינטרפולציה המתאימות?

- על מנת למצוא את פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ ממעלה $2 \geq$ יש להשתמש ב- $n+1=3$ נקודות אינטרפולציה בקטע $[0,2]$.

- היות ומדובר באינטרפולציה אופטימלית, יש למצוא את 3 נקודות צ'ביצ'ב המותאמות לקטע $[0,2]$ שהן שורשי פולינום צ'ביצ'ב $\tilde{T}_3(x)$

- ראינו כי 3 נק' צ'ביצ'ב בקטע $[-1,1]$ הן $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}, x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

- נוסחת המעבר מהקטע $[-1,1]$ לקטע $[0,2]$ היא $t=x+1$

ולכן, 3 נק' צ'ביצ'ב בקטע $[0,2]$ הן $t_0=1-\frac{\sqrt{3}}{2}, t_1=1,\ t_2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left|f(x)-L_n(\tilde{T};x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \quad \forall x\in[a,b]$$

פתרון תרגיל 2- סעיף 2

2. נעריך את שגיאת האינטרפולציה האופטימלית בקטע $[0,2]$.

- נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה האופטימלית בקטע $[a,b]=[0,2]$:

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(T;x)\right| \le \frac{M_3[0,2]}{3!}\cdot\frac{(2-0)^{2+1}}{2^{2\cdot 2+1}} = \frac{M_3[0,2]}{24}$$

- חישבנו $\boxed{M_3[0,2]=\max_{0\le x\le 2}\left|f'''(x)\right|=\left|f'''(0)\right|=6}$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(T;x)\right| \le \frac{M_3[0,2]}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0.25$$

המשך פתרון תרגיל 2

- לסיכום: עבור פולינום האינטרפולציה האופטימלי $L_2(T;x)$ המקרב את $f(x)=\frac{1}{x+1}$ בנקודות צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[0,2]$ קיבלנו :

$$\max_{0\le x\le 2}\left|\tilde{T}_3(x)\right| = \frac{(2-0)^{2+1}}{2^{2\cdot 2+1}} = \frac{1}{4}$$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(T;x)\right| \le \frac{1}{4} = 0.25$$

- נציין כי עבור פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ המקרב את $f(x)=\frac{1}{x+1}$ בנקודות שוות מרחק בקטע $[0,2]$ קיבלנו :

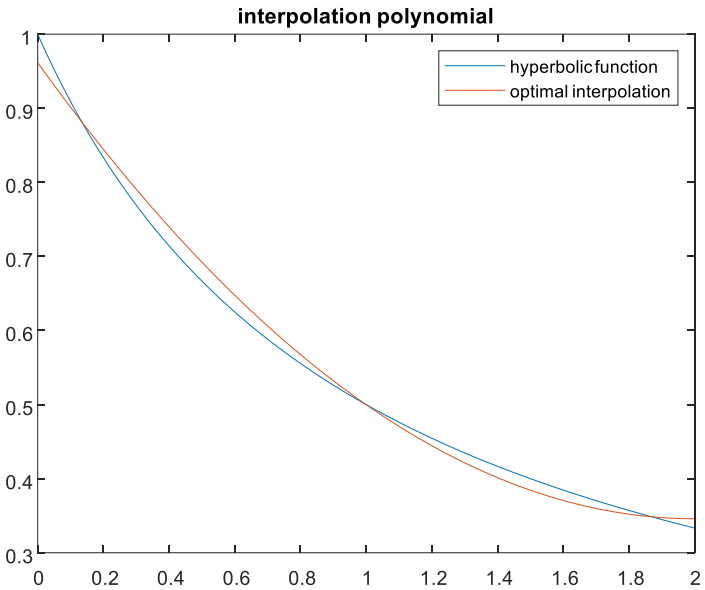
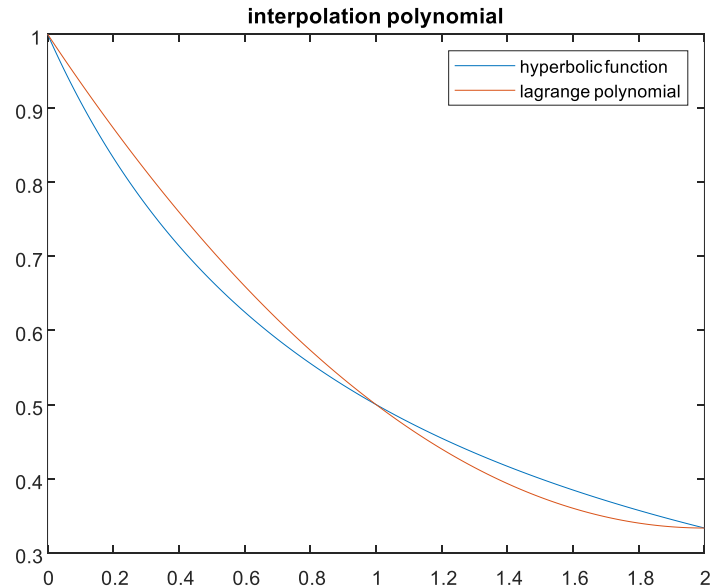
$$\max_{0\le x\le 2}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0.3849...$$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(E;x)\right| \le \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0.3849...$$

Numerical Analysis, Dr. Dvora Toledano-Kitai ©

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

המשך פתרון תרגיל 2

$$L_2(T,x)=\frac{769}{5000}x^2-\frac{3257}{5000}x+\frac{1923}{2000}$$

$$L_2(E,x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+1$$