

אנליזה נומרית: מצגת מלווה #5

# שיטות איטרטביות לפתרון מערכת משוואות

חלק 1:

1. הקדמה: מודל כללי של שיטה איטרטיבית לפתרון מערכת משוואות לינאריות
2. שיטת יעקובי
3. שיטת גאוס-זיידל

# מהי שיטה איטרטיבית?

□ בעיקרה שיטה איטרטיבית היא תהליך של שימוש חוזר ונשנה בנוסחה מתמטית לצורך קבלת תיקון לפתרון מקורב ( כלומר לשפר את מידת הקירוב ).

□ בחישוב איטרטיבי אנו מתחילים תמיד מקירוב התחלתי כלשהו  $x_0$ , ובונים סדרת קירובים  $x_0, x_1, x_2, \dots$ .

□ מעוניינים לבנות סדרת קירובים כזו שעבורה עם כל איטרציה ואיטרציה משפרים את הקירוב. כלומר אנו מעוניינים שסדרת הקירובים  $\{x_k\}_{k \geq 0}$  תתכנס לפתרון האמיתי של הבעיה.

□ במהלך החישובים משתמשים בקירובים הקודמים ( לרוב בקירוב האחרון ) וממשיכים באיטרציות עד להשגת הקירוב בדיוק הרצוי, שאותו הכתבנו מראש.

□ ניתן להסתמך על ידיעותינו בנושא סדרות וגבולות כדי לקבוע אם הסדרה שנוצרה מתכנסת אם לאו.

# שיטות איטרטיביות – הרעיון המרכזי

נתונה מערכת משוואות  $(1) \quad Ax = b$

שלב ראשון: נעביר את המערכת למערכת שקולה מהצורה  $(2) \quad x = Bx + c$

שלב שני: באמצעות הייצוג (2) נגדיר תהליך איטרטיבי:

$$(3) \quad x^{(m+1)} = B \cdot x^{(m)} + c, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

שלב שלישי: עבור בחירה של וקטור התחלתי  $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

הנוסחה האיטרטיבית (3) מאפשרת לחשב סדרת וקטורים  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$

כאשר בכל שלב  $m$  הווקטור המקורב  $x^{(m)}$  מחושב על סמך תוצאות

הווקטור המקורב בשלב קודם שהוא השלב  $m - 1$ :

$$\begin{cases} x^{(1)} = Bx^{(0)} + c \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} + c \\ \vdots \\ x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c \\ \vdots \end{cases}$$

# שיטות איטרטיביות – התכנסות לפתרון

כזכור: בבסיס המודל שהוצג אנו עוברים ממערכת נתונה  $Ax = b$  למערכת

שקולה  $x = Bx + c$  אשר מאפשרת הגדרת תהליך איטרטיבי

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

באמצעות בחירת וקטור אתחול ראשוני  $x^{(0)}$  מקבלים סדרת קירובים  $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$

*עאלות אהשה ודיון אתידי:*

☐ האם סדרת הקירובים  $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  מתכנסת?

☐ אם כן, האם התכנסות היא לפתרון המדויק של המערכת?

☐ אם כן, במה תלויה ההתכנסות? בפרט:

▪ כיצד הגדרת המטריצה  $B$  והווקטור  $c$  במעבר משפיעה על ההתכנסות?

▪ כיצד בחירת וקטור האתחול  $x^{(0)}$  משפיעה על ההתכנסות?

בפרקטיקה, גם אם יש התכנסות לפתרון המדויק של הממ"ל אנו לא יכולים לחשב סדרה אינסופית אלא מחשבים את אברי הסדרה על לקבלת רמת הדיוק הנדרשת

# נורמה 2 ונורמה $\infty$ במרחב $V = \mathbb{R}^n$

הגדרות: יהי  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$  כאשר  $v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

(1) נורמה אינסופית:

$$\|v\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

(2) נורמה 2 (נורמה אוקלידית):

$$\|v\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{1/2}$$

הנורמה המושרית ב-  $\mathbb{R}^n$   
לפי מ"פ אוקלידית

דוגמא: עבור  $v = (2, 1, -3)^t$  מתקיים

$$\|v\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|v\|_{\infty} = \max \{|2|, |1|, |-3|\} = 3$$

# שיטות איטרטיביות – מתי עוצרים?

## מתי עוצרים? שגיאה מוחלטת/יחסית

עוצרים את התהליך האיטרטיבי כאשר הגענו למידת הדיוק המוגדרת.  
כלומר, לכל מידת דיוק מבוקשת ( או אפשרית )  $\varepsilon$  נעצור כאשר מתקיים:

$$\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\| < \varepsilon$$

אם נתייחס לנורמה  $\infty$  ( קל יותר לחשב... ) הרי שתנאי העצירה לפי שגיאה

מוחלטת הוא:

$$\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$$

$$\frac{\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\|_{\infty}}{\|x^{(m)}\|_{\infty}} < \varepsilon$$

תנאי עצירה לפי שגיאה יחסית:

# שיטות איטרטיבית: הדגמת הרעיון

נתייחס למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

הפתרון המדויק של מערכת זו הנו הווקטור

$$\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## הדגמת הרעיון, המשך

הצגה שקולה של המערכת המתקבלת ע"י חילוף המשתנה  $x_i$  במשוואה ה- $i$  ית הנה:

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 1.2 \end{cases}$$

או בלשון מטריציונית שקולה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}}_c$$



## הדגמת הרעיון: שיטת יעקובי

ע"י הוספת אינדקס עליון מתאים במערכת המשוואות (\*) תתקבלנה הנוסחאות האיטרטיביות הבאות, המתאימות לשיטת יעקובי:

$$x_1^{(m)} = -0.1x_2^{(m-1)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2$$

$$x_2^{(m)} = -0.1x_1^{(m-1)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2$$

$$x_3^{(m)} = -0.1x_1^{(m-1)} - 0.1x_2^{(m-1)} + 1.2$$

# הדגמת הרעיון: שיטת יעקובי, המשך

נבחר וקטור התחלתי שרירותי  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$   
 נחשב מספר איטרציות בשיטת יעקובי ונקבל:

$m$	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$\ x^{(m+1)} - x^{(m)}\ _\infty$
0 תנאי התחלה	0	0	0	
1	1.2	1.2	1.2	1.2
2	0.96	0.96	0.96	0.24
3	1.008	1.008	1.008	0.048
4	0.9984	0.9984	0.9984	0.0096
5	1.00032	1.00032	1.00032	0.00192
6	0.999936	0.999936	0.999936	0.000384

אם נתבונן בסדרת הערכים האיטרטיביים המקורבים הרי שניתן  
 להסיק כי התהליך מתכנס די מהר לפתרון המדויק  $x = (1, 1, 1)$ .

# שיטת גאוס-זיידל-הקדמה

אם נעקוב אחר התהליך האיטרטיבי של שיטת יעקובי, נוכל להבחין בכך ש-

□ חישוב  $x_2^{(m)}$  נעשה בעזרת  $x_1^{(m-1)}$ ,  $x_3^{(m-1)}$  למרות ש-  $x_1^{(m)}$

כבר עומד לרשותנו מהחישוב בצעד הקודם.

□ כמו כן חישוב  $x_3^{(m)}$  נעשה בעזרת  $x_1^{(m-1)}$ ,  $x_2^{(m-1)}$  למרות ש-  $x_1^{(m)}$ ,  $x_2^{(m)}$

כבר חושבו בשלב זה.

□ בדרך כלל הערכים החדשים  $x_k^{(m)}$  הם קירובים טובים יותר מהערכים הישנים  $x_k^{(m-1)}$ .

□ לכן אם נשתמש תוך כדי השלב האיטרטיבי ( ולא רק בשלב הבא ) בתוצאות האפשריות של האיטרציה הנוכחית, נצפה שקצב ההתכנסות היה מהיר יותר.

שיטה זו, לבניית הנוסחאות האיטרטיביות, נקראת שיטת גאוס זיידל שבה בניגוד לשיטת יעקובי, משתמשים באינפורמציה המעודכנת ביותר העומדת לרשותנו.

# הדגמת הרעיון: שיטת גאוס- זיידל

אם ניישם את הרעיון הנ"ל ונשתמש כל פעם בתוצאות האיטרציה האחרונה, במערכת המשוואות (\*) תתקבלנה הנוסחאות האיטרטיביות הבאות, המתאימות לשיטת גאוס זיידל:

$$\begin{aligned}x_1^{(m)} &= -0.1x_2^{(m-1)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2 \\x_2^{(m)} &= -0.1x_1^{(m)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2 \\x_3^{(m)} &= -0.1x_1^{(m)} - 0.1x_2^{(m)} + 1.2\end{aligned}$$

# הדגמת הרעיון: שיטת גאוס- זיידל, המשך

נבחר את אותו וקטור התחלתי שרירותי שבחרנו קודם  $x^{(0)} = (0,0,0)$   
נחשב מספר איטרציות בשיטת גאוס-זיידל ונקבל:

$m$	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$\ x^{(m+1)} - x^{(m)}\ _\infty$
0 תנאי התחלה	0	0	0	
1	1.2	1.08	0.972	1.2
2	0.9948	1.00332	1.000188	0.2502
3	0.9996492	1.0000163	1.0000335	0.0048492
4	0.999995	0.9999971	1.0000008	0.0003008

אם נתבונן בסדרת הערכים האיטרטיביים המקורבים הרי שניתן להסיק כי גם תהליך זה מתכנס לפתרון המדויק  $x = (1,1,1)$  ועושה רושם שאף במספר איטרציות קטן יותר. ( דורש הוכחה פורמלית)

# לסיכום: שיטות איטרטיביות - הרעיון המרכזי

בבסיס השיטות האיטרטיביות

□ עוברים ממערכת נתונה  $Ax = b$  למערכת שקולה  $x = Bx + c$

□ המערכת השקולה מאפשרת לנו להגדיר תהליך איטרטיבי

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

□ עבור וקטור אתחול ראשוני  $x^{(0)}$  נקבל סדרת קירובים  $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$

□ בתנאים מסוימים, מובטחת התכנסות של סדרת הקירובים לפתרון המדויק של המערכת  $x$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$$

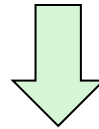
שיטות שונות המיישמות עיקרון זה (יעקובי/גאוס זיידל) נבדלות זו מזו בהגדרת מטריצת האיטרציה  $B$  ווקטור האיברים החופשיים  $c$  במערכת המשוואות השקולה  $x = Bx + c$ .

# שיטת יעקובי ושיטת גאוס-זיידל:

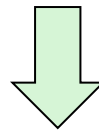
## נוסחאות איטרטביות כלליות

המערכת  $Ax = b$  (1) ניתנת להצגה השקולה הבאה:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,n$$



$$a_{ii}x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i=1,2,\dots,n$$



$$x_i \stackrel{a_{ii} \neq 0}{=} \frac{1}{a_{ii}} \left( -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j + b_i \right), \quad i=1,2,\dots,n$$

# נוסחאות איטרטיביות, המשך

נוסחאות איטרטיביות - שיטת יעקובי:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), i = 1, 2, \dots, n$$
$$m = 0, 1, 2, \dots$$

נוסחאות איטרטיביות - שיטת גאוס-זיידל:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), i = 1, 2, \dots, n$$
$$m = 0, 1, 2, \dots$$



# ייצוג מטריציוני של השיטות

## האיטרטיביות

בהינתן מערכת משוואות

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# ייצוג מטריציוני של שיטת יעקובי, המשך

מטריצת המקדמים  $A$  ניתנת לפירוק הבא  $A = L + D + U$

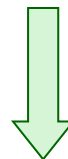
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_U$$

אברי  $A$  מעל האלכסון      אברי האלכסון של  $A$       אברי  $A$  מתחת לאלכסון

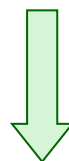
# ייצוג מטריציוני של שיטת יעקובי

מהפירוק  $A = L + D + U$  נוכל להסיק כי:

$$Ax = b \Leftrightarrow (L + D + U)x = b$$



$$Dx = -(L + U)x + b$$



$$x = \underbrace{-D^{-1}(L + U)x}_{Bx} + \underbrace{D^{-1}b}_c$$

# ייצוג מטריציוני של שיטת יעקובי, המשך

התבנית האיטרטיבית המטריציונית המתאימה לשיטת יעקובי:

$$x^{(m)} = -D^{-1}(L+U)x^{(m-1)} + D^{-1}b$$

המטריצה  $B_J = -D^{-1}(L+U)$  נקראת מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי.

ייצוג מטריציוני של וקטור הערכים החופשיים במערכת השקולה הוא:

$$c_J = D^{-1} \cdot b$$

# שיטת יעקובי - הצגה מטריציונית

באופן מפורש, בשיטת יעקובי מקבלים מערכת שקולה מהצורה

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ a_{22} & \vdots & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \\ a_{nn} & a_{nn} & a_{nn} & & \end{pmatrix}}_{B_J} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}}_{c_J}$$

# מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי: דוגמא

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_b \quad \text{עבור המערכת}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת יעקובי היא:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_J = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{וקטור האיברים החופשיים בשיטת יעקובי הוא:}$$

# ייצוג מטריציוני של שיטת גאוס-זיידל

עבור שיטת גאוס-זיידל, נוכל לקבל ע"י הפירוק  $A = L + D + U$ :

$$Ax = b \Leftrightarrow (L + D + U)x = b$$



$$Dx = b - Ux - Lx$$

התבנית האיטרטיבית המטריציונית המתאימה לשיטת גאוס-זיידל:

$$Dx^{(m)} = b - Ux^{(m-1)} - Lx^{(m)}$$



$$(L + D)x^{(m)} = b - Ux^{(m-1)}$$

# ייצוג מטריציוני של שיטת גאוס-זיידל, המשך



הצגה שקולה לתבנית האיטרטיבית המטריציונית המתאימה לשיטת גאוס-זיידל:

$$x^{(m)} = -(L + D)^{-1} U \cdot x^{(m-1)} + (L + D)^{-1} \cdot b$$

המטריצה  $B_{GZ} = -(L + D)^{-1} U$  נקראת מטריצת האיטרציה של שיטת גאוס-זיידל.

ייצוג מטריציוני של וקטור הערכים החופשיים במערכת השקולה הוא:

$$c_{GZ} = (L + D)^{-1} \cdot b$$



# ייצוג מטריציוני של השיטות: דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{עבור מערכת } Ax=b \text{ עם מטריצת מקדמים}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

$$B_J = -D^{-1} \cdot (L + U)$$

$$B_{GZ} = -(L + D)^{-1} \cdot U$$

נחשב לפי הנוסחאות:

# מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי: דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{עבור מערכת } Ax=b \text{ עם מטריצת מקדמים}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת יעקובי היא:

$$\begin{aligned} B_J = -D^{-1}(L+U) &= -\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_D \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L+U} \\ &= -\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# מטריצת האיטרציה של שיטת G-Z : דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ עבור מערכת } Ax=b \text{ עם מטריצת מקדמים}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת גאוס-זיידל היא:

$$\begin{aligned} B_{GZ} &= -(L+D)^{-1}U = -\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{L+D} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \\ &= -\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.125 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.125 & 0.25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# מציאת $B_J$ ו- $B_{GZ}$ באמצעות Matlab

עבור מערכת  $Ax=b$  עם מטריצת מקדמים  $A$ :

$$D=\text{diag}(\text{diag}(A))$$

□ הגדרת  $D$ :

$\text{diag}(A)$  יוצר וקטור שמורכב מאברי האלכסון של  $A$   
 $\text{diag}(\text{diag}(A))$  יוצר מטריצה אלכסונית שאיבר האלכסון שלהם הם אברי  $\text{diag}(A)$

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
```

```
>> D=diag(diag(A))
```

D =

2	0	0
0	2	0
0	0	2

# מציאת $B_J$ ו- $B_{GZ}$ באמצעות Matlab

עבור מערכת  $Ax=b$  עם מטריצת מקדמים  $A$ :

$$L = \text{tril}(A) - D$$

□ הגדרת  $L$ :

$\text{tril}(A)$  מטריצה הכוללת את אברי האלכסון של  $A$  ומה שמתחתיו

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];  
>> tril(A)
```

ans =

2	0	0
-1	2	0
0	-1	2

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];  
>> D=diag(diag(A));  
>> L=tril(A)-D
```

L =

0	0	0
-1	0	0
0	-1	0

# מציאת $B_J$ ו- $B_{GZ}$ באמצעות Matlab

עבור מערכת  $Ax=b$  עם מטריצת מקדמים  $A$ :

$$U = \text{triu}(A) - D$$

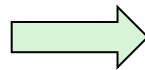
□ הגדרת  $U$ :

$\text{triu}(A)$  מטריצה הכוללת את אברי האלכסון של  $A$  ומה שמעליו

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];  
>> triu(A)
```

ans =

2	-1	0
0	2	-1
0	0	2



```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];  
>> D=diag(diag(A));  
>> U=triu(A)-D
```

U =

0	-1	0
0	0	-1
0	0	0

# מציאת $B_J$ באמצעות Matlab

עבור מערכת  $Ax=b$  עם מטריצת מקדמים  $A$ :

$$B_J = -\text{inv}(D) * (L+U) \quad \square \text{ הגדרת } B_J$$

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];  
>> D=diag(diag(A));  
>> L=tril(A)-D;  
>> U=triu(A)-D;  
>> BJ=-inv(D)*(L+U)  
  
BJ =  
  
         0         0.5000         0  
    0.5000         0         0.5000  
         0         0.5000         0
```

# מציאת $B_{GZ}$ באמצעות Matlab

עבור מערכת  $Ax=b$  עם מטריצת מקדמים  $A$ :

□ הגדרת  $B_{GZ}$ :  $B_{GZ} = -\text{inv}(D+L)*U$

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];  
D=diag(diag(A));  
L=tril(A)-D;  
U=triu(A)-D;  
BGZ=-inv(D+L)*U  
  
BGZ =  
  
0    0.5000    0  
0    0.2500    0.5000  
0    0.1250    0.2500
```



אנליזה נומרית מתקדמת : מצגת מלווה #5

# שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת משוואות

חלק 2:

תנאים להתכנסות שיטה איטרטיבית לפתרון מערכת  
משוואות לינאריות

# מטריצה בעלת אלכסון שולט לחלוטין

## Strictly Row Diagonal Dominant Matrix (SRDD)

הגדרה: מטריצה A נקראת בעלת אלכסון שולט לחלוטין SRDD

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

אם מתקיים

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

מטריצה שאיננה SRDD

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

למשל

מטריצה SRDD

# תנאי מספיק להתכנסות שיטת יעקובי

## ושיטת גאוס זיידל

טענה אם מטריצה  $A$  היא בעלת אלכסון שולט לחלוטין (SRDD) אז


התהליך האיטרטיבי של שיטות יעקובי / שיטת גאוס - זיידל למערכת  $Ax=b$  יתכנס עבור כל בחירה של וקטור התחלתי  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^t$ .

# תנאי מספיק להתכנסות השיטות של יעקובי

## ושל גאוס זיידל, דוגמא

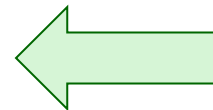
נתבונן במערכת:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

  
 $A$

למטריצה יש אלכסון שולט לחלוטין,  $(10 > 1+1)$

לכן השיטות יעקובי וגאוס-זיידל יתכנסו  
לכל וקטור התחלתי



# מקרה כללי: התכנסות שיטות איטרטיביות

ראינו כי בבסיס השיטות האיטרטיביות, אנו עוברים ממערכת  $Ax=b$  למערכת שקולה  $x=Bx+c$  המאפשרת לנו להגדיר תהליך איטרטיבי

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c \quad m=1,2,\dots$$

**הצגנו קודם את השאלה:**

האם סדרת הווקטורים  $x^{(m)}$ ,  $m=1,2,\dots$  מתכנסת לפתרון המדויק של המערכת  $Ax=b$  ואם כן במה זה תלוי?

נראה כעת כי הגורם המשפיע על התכנסות השיטה האיטרטיבית לפתרון של המערכת הוא מיקום הערכים העצמיים של מטריצת האיטרציה  $B$  ביחס למעגל היחידה.

# הגדרה: רדיוס ספקטרלי של מטריצה

נזכיר כי הע"ע של  $B$  הם שורשי הפולינום האופייני  $P_B(\lambda) = |B - \lambda I|$ .

לפי המשפט היסודי של האלגברה, למטריצה  $B$  מסדר  $n$  יש בדיוק  $n$  ע"ע מעל שדה המרוכבים  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

הרדיוס הספקטרי של המטריצה  $B$  מסומן ב-  $\rho(B)$  ומוגדר ע"י

$$\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

הרדיוס הספקטרי  $\rho(B)$  מגדיר למעשה את הרדיוס של המעגל הקנוני שבתוכו נמצאים כל הע"ע של המטריצה  $B$ .

# רדיוס ספקטרלי : דוגמא

נחשב רדיוס ספקטרלי של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נחשב ע"ע:

$$\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda I| \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (2-\lambda)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = 2$$

$$\rightarrow \rho(A) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i| = 2$$

# חישוב ערכים עצמיים ורדיוס

## ספקטרלי ב-matlab

```
>> A=[0 -2 2;0 2 -3;0 0 2];  
>> azmi=eig(A)  
  
azmi =  
  
    0  
    2  
    2
```

```
>> A=[0 -2 2;0 2 -3;0 0 2];  
>> ro=norm(eig(A),inf)  
  
ro =  
  
    2
```



# משפט ההתכנסות של השיטות האיטרטיביות

נתונה המערכת  $x=Bx+c$  ויהי  $x^{(0)}$  וקטור התחלתי שרירותי.

אזי סדרת הקירובים  $x^{(m)}$  המתקבלת ע"י השיטה האיטרטיבית

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c \quad m=1,2,\dots$$

מתכנסת לפתרון המדויק  $x$  של המערכת אם ורק אם  $\rho(B) < 1$   
( כלומר, כל הערכים העצמיים של  $B$  נמצאים בתוך מעגל היחידה )

למה עזר להוכחה: לכל מטריצה  $B$  מתקיים

$$\rho(B) < 1 \iff B^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (0)$$

# הוכחת משפט ההתכנסות של השיטות האיטרטיביות

נתונה המערכת  $x=Bx+c$  שהפתרון שלה הוא  $x$  וסדרת הקירובים  $x^{(m)}$  המתקבלת ע"י השיטה האיטרטיבית  $x^{(m)}=Bx^{(m-1)}+c \quad m=1,2,\dots$

נגדיר את השגיאה בכל שלב איטרטיבי:  $e^{(m)}=x-x^{(m)}$

$$\underbrace{x-x^{(m)}}_{e^{(m)}} = (Bx+c) - (Bx^{(m-1)}+c) = B \underbrace{(x-x^{(m-1)})}_{e^{(m-1)}}$$

כלומר קבלנו קשר בין שגיאות עוקבות בתהליך האיטרטיבי:  $e^{(m)} = B \cdot e^{(m-1)}$

ניתוח רקורסיבי של שגיאת הקירוב באיטרציה  $m$ :

$$e^{(m)} = B \cdot e^{(m-1)} = B^2 \cdot e^{(m-2)} = B^3 \cdot e^{(m-3)} = \dots = B^m \cdot e^{(0)}$$

כלומר קבלנו קשר בין השגיאה בשלב  $m$  לבין השגיאה ההתחלתית  $e^{(m)} = B^m \cdot e^{(0)}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{(m)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (B^m \cdot e^{(0)}) = 0 \Leftrightarrow \left( \lim_{m \rightarrow \infty} (B^m) \right) \cdot e^{(0)} = 0 \quad \text{מכאן:}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} (B^m) = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$



טענת עזר

## תנאי הכרחי ומספיק - דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{נתונה מערכת } Ax=b \text{ עם מטריצת המקדמים}$$

א. האם שיטת יעקובי איטרטיבית תתכנס במקרה זה?

ב. האם שיטת גאוס זיידל תתכנס במקרה זה?

# שיטת יעקובי: תנאי הכרחי ומספיק – דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{עבור מערכת } Ax=b \text{ עם מטריצת מקדמים}$$

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ראינו כי מטריצת האיטרציה בשיטת יעקובי היא:}$$

$$\text{ערכים עצמיים של } B_J \text{ הם: } \lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \rho(B_J) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \quad \text{הרדיוס הספקטרלי הוא:}$$

**מסקנה: שיטת יעקובי מתכנסת במקרה זה**

# שיטת גאוס-זיידל תנאי הכרחי ומספיק - דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{עבור מערכת } Ax=b \text{ עם מטריצת מקדמים}$$

$$B_{GZ} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.125 & 0.25 \end{pmatrix} \quad \text{מטריצת האיטרציה בשיטת גאוס-זיידל היא:}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_{2/3} = 0 \quad \text{ערכים עצמיים של } B_{GZ} \text{ הם:}$$

$$\rightarrow \rho(B_{GZ}) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i| = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{הרדיוס הספקטלי הוא:}$$

**מסקנה: שיטת גאוס זיידל מתכנסת במקרה זה**

# נורמה 2 ונורמה $\infty$ במרחב $V = \mathbb{R}^{n \times n}$

הגדרות: תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(1) נורמה אינסוף:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(2) נורמה 2 (נורמה אוקלידית):

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

דוגמא: עבור  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  מתקיים

$$\|A\|_{\infty} = \max \{|-1| + |2|, |1| + |3|\} = \max \{3, 4\} = 4$$

נורמה אינסוף

$$A^T \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

נורמה 2

$$\Rightarrow p_{A^T A}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{5}{2} \cdot (3 \pm \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A \cdot A^T)} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot (3 + \sqrt{5})}$$

# תכונות של נורמה מטריציונית

טענה: נורמה מטריציונית מקיימת את התכונות הבאות:

$$1) \quad \|A\| \geq 0; \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = [0]$$

$$2) \quad \|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$4) \quad \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$5) \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

עובר בירושה  
מנורמה ווקטורית

# מסקנה מניתוח רקורסיבי של שגיאת הקירוב

הוכחנו כי עבור יישום שיטה איטרטיבית  $m=1,2,\dots$   $x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c$

והגדרת שגיאת הקירוב בשלב  $m$ :  $e^{(m)} = x - x^{(m)}$

□ הקשר בין כל שתי שגיאות עוקבות הוא:  $e^{(m)} = B \cdot e^{(m-1)}$

□ הקשר בין השגיאה  $e^{(m)}$  בשלב  $m$  לשגיאה  $e^{(0)}$  בהתחלה:  $e^{(m)} = B^m \cdot e^{(0)}$

מכאן נסיק כי:  $\|e^{(m)}\| = \|B^m \cdot e^{(0)}\| \leq \|B^m\| \cdot \|e^{(0)}\| \leq \|B\|^m \cdot \|e^{(0)}\|$

מסקנה: הערכה לשגיאת הקירוב באיטרציה  $m$  נתונה ע"י

$$\|e^{(m)}\| \leq \|B\|^m \cdot \|e^{(0)}\|$$



# מסקנה: הערכת מספר האיטרציות הנדרש

## לקבלת רמת דיוק נתונה

על מנת לחשב את מספר האיטרציות  $m$  בשיטה איטרטיבית לחישוב  
ערך מקורב לפתרון המדויק  $x$  עם רמת דיוק  $\varepsilon$  (לפי נורמה  $\infty$ ) ניתן  
לפתור את אי השוויון

$$\|e^{(m)}\|_{\infty} \leq (\|B\|_{\infty})^m \cdot \|e^{(0)}\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

כאשר:

$$e^{(0)} = x - x^{(0)}$$
$$\|e^{(0)}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |e_i^{(0)}| \right\}$$
$$\|B\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

# תרגיל

נתונה המערכת  $Ax = b$

כאשר  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq \pm 1$  ו-  $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

א. מצאו את תחום ערכי  $a \in \mathbb{R}$  עבורם שיטת  $GZ$  מתכנסת לפתרון של המערכת לכל וקטור התחלתי.

ב. עבור  $a = 0.5$  חשבו את  $\|B_{BZ}\|_{\infty}$ .

ג. עבור  $a = 0.5$  הפתרון המדויק הוא  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ . מהו מספר האיטרציות

המינימלי  $m$  המבטיח קירוב עם רמת דיוק של  $10^{-3}$  לפחות עבור וקטור התחלה  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ?

# משפט ההתכנסות של שיטת יעקובי במונחים של המטריצה $A$

נתונה מערכת  $Ax=b$ . סדרת הקירובים  $x^{(m)}$  המתקבלת ע"י שיטת

$$x^{(m)} = B_J x^{(m-1)} + c_J \quad m=1,2,\dots$$

מתכנסת לפתרון המדויק  $x$  של המערכת לכל וקטור בחירה התחלתי

שרירותי  $x^{(0)}$  אם ורק אם כל השורשים של הפולינום:

$$q_J(\lambda) = |\lambda \cdot D + (L + U)| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdot \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \cdot \lambda \end{vmatrix}$$

נמצאים בתוך מעגל היחידה כלומר מקיימים  $|\lambda_i| < 1$  לכל  $i = 1,2,\dots,n$ .

# הוכחת משפט ההתכנסות של שיטת

## יעקובי במונחים של המטריצה A

תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת יעקובי הוא

$\rho(B_J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1$ , באופן שקול קיומם של כל הע"ע  $\lambda_i$  של  $B_J$  בתוך מעגל היחידה.

נוכיח למעשה כי הע"ע של  $B_J$  (שורשי  $\Delta_{B_J}(\lambda) = |\lambda I - B_J|$ ) הם שורשי

$$\Delta_{B_J}(\lambda) = |\lambda I - B_J| = \left| \lambda I + \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{-B_J} \right| = |D^{-1} \cdot [\lambda D + (L+U)]| = |D^{-1}| \cdot \underbrace{|\lambda D + (L+U)|}_{q_J(\lambda)}$$

קבלנו:  $\Delta_{B_J}(\lambda) = |D^{-1}| \cdot q_J(\lambda)$ .

היות ו-  $|D^{-1}| \neq 0$  הוא קבוע מספרי נסיק כי לשני הפולינומים  $\Delta_{B_J}(\lambda)$  ו-  $q_J(\lambda)$  יש אותם השורשים.

מש"ל.

# משפט ההתכנסות של שיטת גאוס זיידל

## במונחים של המטריצה $A$

נתונה מערכת  $Ax=b$ . סדרת הקירובים  $x^{(m)}$  המתקבלת ע"י שיטת

$$x^{(m)} = B_{GZ} \cdot x^{(m-1)} + c_{GZ} \quad m=1,2,\dots$$

מתכנסת לפתרון המדויק  $x$  של המערכת לכל וקטור בחירה התחלתי

שרירותי  $x^{(0)}$  אם ורק אם כל השורשים של הפולינום:

$$q_{GZ}(\lambda) = |\lambda \cdot (L + D) + U| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdot \lambda & a_{22} \cdot \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} \cdot \lambda & \cdots & a_{n,n-1} \cdot \lambda & a_{nn} \cdot \lambda \end{vmatrix}$$

נמצאים בתוך מעגל היחידה כלומר מקיימים  $|\lambda_i| < 1$  לכל  $i = 1, 2, \dots, n$ .

# תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות

## שיטת יעקובי, דוגמא

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{נתבונן במערכת:}$$


למטריצה יש אלכסון שולט לחלוטין

לכן שיטת יעקובי וגאוס-זיידל מתכנסות עבורה.

נראה (לצורך ההדגמה) קיום תנאי הכרחי ומספיק לשיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8\lambda[8\lambda^2 - 1] \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

**מסקנה:** תהליך יעקובי יתכנס עבור מערכת זו.


$$|\lambda_{1,2,3}| < 1$$

# תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות

## שיטת גאוס-זיידל, דוגמא

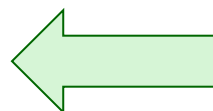
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{נתבונן במערכת:}$$

למטריצה אין אלכסון שולט לחלוטין,

לכן נבדוק תנאי הכרחי ומספיק:

$$\begin{aligned} q_{GZ}(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 5 & 5 \\ 5\lambda & 2\lambda & 5 \\ 5\lambda & 5\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda[8\lambda^2 - 25\lambda + 125] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1.5625 \pm 3.6309i \\ &\Rightarrow |\lambda_{2,3}| = 3.9528 > 1 \end{aligned}$$

**מסקנה:** תהליך גאוס-זיידל לא יתכנס  
עבור מערכת זו.



## תרגיל

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2a \\ 1 & -a & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{נתונה המערכת}$$

כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$  ו-  $a \neq 0, \pm 2$

עבור אילו ערכי  $a, b$  מתכנסת/מתבדרת שיטת יעקובי עבור מערכת זו?



# שיטת יעקובי וגאוס-זיידל

## דיון מסכם

אם שיטת יעקובי ושיטת גאוס- זיידל מתכנסות  
אזי שיטת גאוס-זיידל עושה זאת מהר יותר.

□ קיימים בכל זאת מקרים בהם עבור אותה מערכת משוואות שיטת יעקובי  
תתכנס ואילו שיטת גאוס-זיידל לא!

□ הסיבה לתופעה זו היא שבשיטת גאוס-זיידל השימוש בערכים "טריים" של  
קוארדינטות וקטורי הקירובים עשוי להרחיק אותנו מן הפתרון במקום לקרב  
אותנו אליו.

נביא כעת 2 דוגמאות הדנות בהשוואה בין שתי השיטות הנ"ל.

# שיטת יעקובי וגאוס-זיידל

## דיון מסכם, דוגמאות להשוואה

דוגמא 1: עבור מערכת  $Ax = b$  עם מטריצת מקדמים

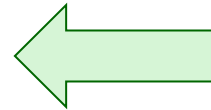
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

התכנסות שיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow |\lambda_i| = 0 < 1, \quad i = 1, 2, 3$$

שיטת יעקובי תתכנס עבור  
מטריצת מקדמים זו.



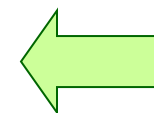
# דיון מסכם, המשך דוגמא 1

התכנסות שיטת גאוס-זיידל:

$$q_{GZ}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$|\lambda_{2,3}| = 2 > 1 \Leftarrow$$

שיטת גאוס-זיידל תתבדר עבור  
מטריצת מקדמים זו.



# שיטת יעקובי וגאוס-זיידל

## דיון מסכם, דוגמאות להשוואה-המשך

דוגמא 2: עבור מערכת  $Ax = b$  עם מטריצת מקדמים  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

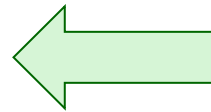
### התכנסות שיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(4\lambda^2 + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$$

$$|\lambda_{2,3}| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 1.118 > 1 \quad \Leftarrow$$

שיטת יעקובי תתבדר עבור  
מטריצת מקדמים זו.



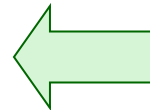
## דיון מסכם, המשך דוגמא 2

התכנסות שיטת גאוס-זיידל:

$$q_{GZ}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ -\lambda & -\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8\lambda\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$

$$|\lambda_1| = 0 < 1 \quad \text{and} \quad |\lambda_{2,3}| = 0.5 < 1 \quad \Leftarrow$$

שיטת גאוס-זיידל תתכנס עבור  
מטריצת מקדמים זו.



# שיטת יעקובי וגאוס-זיידל

## דיון מסכם, המשך

□ תנאי מספיק להתכנסות השיטות ( קיום אלכסון שולט לחלוטין /  $\|B\| \leq q < 1$  )  
הינו תנאי פשוט לבדיקה נומרית ובמידה הוא מתקיים שתי השיטות מתכנסות  
ולכן במקרה זה נעדיף את שיטת גאוס זיידל המתכנסת יותר מהר.

□ מבחינה תיאורטית, במידה ולא מתקיים תנאי מספיק יש לבדוק תנאי הכרחי  
ומספיק עבור כל אחת מהשיטות בנפרד. ( מציאת ע"ע של  $B_J$  ושל  $B_{GZ}$   
או לחלופין מציאת שורשי  $q_J$  ו-  $q_{GZ}$  )

□ מבחינה מעשית, חישוב שורשים של פולינום ממעלה  $n$  זו בעיה נומרית  
סבוכה ולכן מכשיר זה הוא בעיקרו תיאורטי. לרוב ניתן להסתפק בהרצת  
מספר איטרציות ולבדוק אם יש מגמת התכנסות או לא.

# נספח: תזכורת מאלגברה

1. דטרמיננטים: הגדרה, חישוב, תכונות

2. מודול של מספר מרוכב

# תזכורת מאלגברה - דטרמיננטים

**הגדרה:** למטריצה  $A$  ריבועית מסדר  $n$  מתאים מספר הנקרא דטרמיננט המוגדר ומסומן באופן הבא:

$$n = 1$$

$$\det A = |A| = |(a_{11})| = a_{11}$$

$$n = 2$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$



## דטרמיננטים, המשך

$$n = 3$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

לחישוב דטרמיננט מסדר 3 מכפילים את כל אברי השורה הראשונה בדטרמיננט המתאים מסדר 2 המתקבל מהמטריצה  $A$  ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה בה נמצא איבר זה.  
הסימנים של אברי השורה ה-1 מתחלפים לסירוגין  $+, -, +$ .

# דטרמיננטים, המשך

## דטרמיננט מסדר גבוה:

נסמן ב-  $M_{ij}$  את תת המטריצה המתקבלת מ-  $A$  ע"י מחיקת שורה  $i$  ועמודה  $j$ . ( זו תת מטריצה ריבועית מסדר  $n-1$  )  
באינדוקציה על  $n$  מגדירים:

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot |M_{1k}|$$

# תכונות של דטרמיננטים

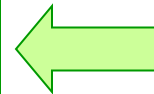
משפט: תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$  אזי:  
(א) ניתן לפתח דטרמיננט לפי כל שורה ולפי כל עמודה ומתקיים:

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot |M_{ik}| \quad \text{פיתוח לפי שורה } i$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}| \quad \text{פיתוח לפי עמודה } j$$

עצה: כדאי לפתח דטרמיננט לפי שורה או עמודה עם מירב האפסים!

$$|A| = |A^t| \quad (ב)$$



# כללים נוספים לחישוב דטרמיננטים

(1) אם אחת משורות ( או עמודות ) המטריצה הריבועית  $A$  היא שורת ( עמודת ) אפסים אזי  $|\mathcal{A}| = 0$ .

(2) אם  $A$  מטריצה ריבועית משולשת עליונה ( או תחתונה ) אזי הדטרמיננט של  $A$  שווה למכפלת אברי האלכסון.

(3) אם המטריצה  $B$  מתקבלת מהמטריצה  $A$  ע"י הכפלת כל אברי שורה ( עמודה ) אחת בלבד בסקלר  $c$  שונה מאפס ( פעולה אלמנטרית בשורה או בעמודה מטיפוס 2 ) אזי

$$|B| = c|A|$$

(4) אם המטריצה  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י החלפת מיקומן של שתי שורות ( עמודות ) (פעולה אלמנטרית בשורה או בעמודה מטיפוס 1 ) אזי

$$|B| = -|A|$$

# כללים נוספים לחישוב דטרמיננטים, המשך

- (5) אם קיימות במטריצה  $A$  שתי שורות (עמודות) פרופורציונליות (כלומר, האחת כפולה של השניה בקבוע שונה מאפס) אזי  $|A| = 0$ .
- (6) אם מוסיפים לשורה (לעמודה) כפולה של שורה (עמודה) אחרת, (פעולה אלמנטרית בשורה או בעמודה מטיפוס 3) אזי הדטרמיננט לא משתנה.
- (7) לכל שתי מטריצות ריבועיות  $A$  ו- $B$  מאותו סדר מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

# דוגמא לשימוש בכללים לחישוב

## דטרמיננט

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & -6 & -11 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

פיתוח לפי  
עמודה 1

$$(-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 9 & -6 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3}{=} \begin{vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

פיתוח לפי שורה 2

# תזכורת מאלגברה- מודול של מספר

## מרוכב

ניתן לתאר את המספר המרוכב  $(i^2 = -1)$   $z = a + b \cdot i$   $a, b \in R$  כוקטור במערכת צירים שראשיתו בנקודה  $O (0,0)$  וסופו בנקודה  $M (a,b)$ .

אורך הוקטור  $OM$  נקרא גם מודול של המספר המרוכב  $z$  או ערך מוחלט של המספר המרוכב  $z$  ומסומן:  $|z|$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{מתקיים:}$$

דוגמא:

$$|z| = |1 - 2 \cdot i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$