#11 אנליזה נומרית: מצגת מלווה

Approximations by Polynomial Interpolation Newton form

תזכורת - הצגת לגרנז' לפולינום האינטרפולציה

פולינומים יסודיים של לגרנז':

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

הצגת פולינום האינטרפולציה של לגרנז':

$$L_n(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \ldots y_n \cdot l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot l_k(x)$$

שגיאת האינטרפולציה בנקודה x:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\min\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\} < \xi < \max\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

הפולינומים היסודיים של ניוטון

הגדרה: הפולינומים היסודיים של ניוטון

לכל קבוצה של $n+1$ נקודות <u>שונות</u> $\{x_k\}_{k=0}^{n} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
מגדירים את $n+1$ הפולינומים היסודיים של ניוטון באופן הבא:

$$\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$$

הקבוצה בת"ל במרחב $\mathbb{R}_n[x]$ ולכן מהוה לו בסיס שנקרא **הבסיס של ניוטון**.

באופן כלל, עבור $k=0,1,\dots,n$ מגדירים את הפולינום היסודי ה- k-י של ניוטון ע"י

$$\begin{cases} N_0(x) = 1 \\ N_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}); \quad k=1,\dots,n \end{cases}$$

הצגת פולינום האינטרפולציה לפיי ניוטון

החיסרון הגדול של שיטת לגרנז' הוא בכך שאם לקבוצת נקודות האינטרפולציה מוסיפים עוד נקודה ורוצים לבנות פולינום ממעלה גדולה יותר, נצטרך לבנות פולינום חדש, כולל כל החישובים.

נרצה לבנות הצגה לפולינום הדומה בצורתה לנוסחת טיילור:

$$\varphi_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

נחפש פולינום אינטרפולציה באמצעות הבסיס של ניוטון ובצורה הבאה:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + A_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

כאשר הוספת כל איבר בסכום מעלה את מעלת הפולינום ב -1.

עלינו למצוא ביטויים עבור המקדמים $A_0, A_1, \ldots A_n$

הצגת ניוטון - מציאת המקדמים

נבנה אנלוגיים דיסקרטיים של נגזרות הנקראים **הפרשים מחולקים** בצורה הבאה:

נתונה הטבלה

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_n

כאשר $\boxed{f_k = f(x_k)}$

נגדיר:

הפרשים מחולקים מסדר ראשון (קירוב לנגזרת מסדר 1 בקטע $[x_{k-1}, x_k]$)

$$f_{01} = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\eta_0) \qquad , \quad x_0 < \eta_0 < x_1$$

$$f_{12} = f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\eta_1) \qquad , \quad x_1 < \eta_1 < x_2$$

באופן כללי לכל $k = 1, \dots, n$:

$$\boxed{f_{k-1,k} = f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\eta_{k-1}) \qquad , \quad x_{k-1} < \eta_{k-1} < x_k}$$

הצגת ניוטון - מציאת המקדמים, המשך

<u>הפרשים מחולקים מסדר שני</u> (קירוב לנגזרת מסדר שני בקטע $[x_{k-2},x_k]$)

למשל, בקטע $[x_0,x_2]$

$$f_{012}=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

ובקטע $[x_1,x_3]$

$$f_{123}=f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$\vdots$

באופן כללי, בקטע $[x_{k-2},x_k]$ לכל $k=2,\dots,n$:

$$\boxed{f_{k-2,k-1,k}=f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_{k-1},x_k]-f[x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-2}}}$$

הצגת ניוטון - מציאת המקדמים, המשך

הגדרה כללית של הפרש מחולק מסדר n

(קירוב לנגזרת מסדר n בקטע $[x_0,x_n]$)

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

הפרשים מחולקים: סכמה
(טבלה של הפרשים מחולקים)

קל לארגן חישובים ידניים באמצעות טבלה. נדגים כאן הסכימה המתאימה
לקבוצה של חמש נקודות אינטרפולציה $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & f_{01} & & & \\
x_1 & f_1 & & f_{012} & & \\
 & & f_{12} & & f_{0123} & \\
x_2 & f_2 & & f_{123} & & f_{01234} \\
 & & f_{23} & & f_{1234} & \\
x_3 & f_3 & & f_{234} & & \\
 & & f_{34} & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}
$$

טבלה של הפרשים מחולקים-דוגמא

נציג טבלה של הפרשים מחולקים עבור $f(x)=x^2$

x	$f(x)$				
0	0				
		1			
1	1		1		
		4		0	
3	9		1		0
		9		0	
6	36		1		
		16			
10	100				

טבלה של הפרשים מחולקים, המשך דוגמא

הסברים לחישובים בדוגמא:

הפרשים מחולקים מסדר 1:

$$f_{01}=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

$$f_{12}=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\frac{9-1}{3-1}=4$$

$$f_{23}=\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}=\frac{36-9}{6-3}=9$$

$$f_{34}=\frac{f_4-f_3}{x_4-x_3}=\frac{100-36}{10-6}=16$$

הפרשים מחולקים מסדר 2:

$$f_{012}=\frac{f_{12}-f_{01}}{x_2-x_0}=\frac{4-1}{3-0}=1$$

$$f_{123}=\frac{f_{23}-f_{12}}{x_3-x_1}=\frac{9-4}{6-1}=1$$

$$f_{234}=\frac{f_{34}-f_{23}}{x_4-x_2}=\frac{16-9}{10-3}=1$$

טבלה של הפרשים מחולקים, המשך דוגמא

הסברים לחישובים בדוגמא, המשך:

הפרשים מחולקים מסדר 3:

$$f_{0123} = \frac{f_{123} - f_{012}}{x_3 - x_0} = \frac{1-1}{6-0} = 0$$

$$f_{1234} = \frac{f_{234} - f_{123}}{x_4 - x_1} = \frac{1-1}{10-1} = 0$$

הפרשים מחולקים מסדר 4:

$$f_{01234} = \frac{f_{1234} - f_{0123}}{x_4 - x_0} = \frac{0-0}{10-0} = 0$$

כל ההפרשים המחולקים מסדר גדול יותר מתאפסים!

נוסחת ניוטון לפולינום האינטרפולציה

נתונה הטבלה

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
f_0	f_1	f_2	$\ldots$	f_n

כאשר $\boxed{f_k = f(x_k)}$

אזי **הצגת ניוטון לפולינום האינטרפולציה** היא

$$\boxed{\begin{gathered}P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]\cdot(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\cdot(x - x_0)(x - x_1) + \\ \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]\cdot(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\end{gathered}}$$

הוכחה בנספח

חישוב פולינום האינטרפולציה לפי ניוטון - דוגמא

עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ ונקודות האינטרפולציה $x_0=1,\ \ x_1=4,\ \ x_2=16$

מצאו את פולינום האינטרפולציה בצורת ניוטון.

פתרון

נבנה טבלה של הפרשים מחולקים

$$
\begin{array}{cccc}
1 & \boxed{1} & & \\
 & & \boxed{\frac{1}{3}} & \\
4 & 2 & & \boxed{-\frac{1}{90}} \\
 & & \frac{1}{6} & \\
16 & 4 & &
\end{array}
$$

ונקבל

$$\boxed{P_2(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{90}(x-1)(x-4)}$$

המשך דוגמא

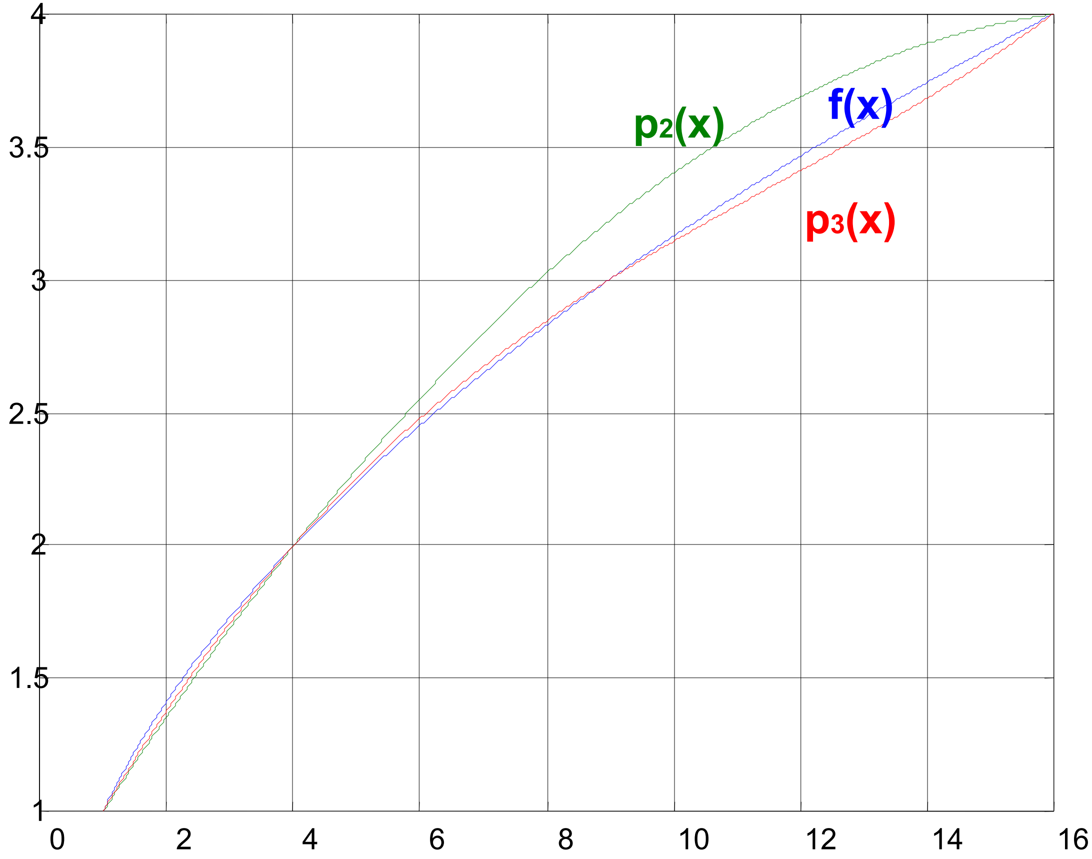
כעת נוסיף את נק' האינטרפולציה $x_3 = 9$ ונבנה את פולינום האינטרפולציה

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \boxed{1} & & & \\
 & & \boxed{\frac{1}{3}} & & \\
4 & 2 & & \boxed{-\frac{1}{90}} & \\
 & & \frac{1}{6} & & \boxed{\frac{1}{1260}} \\
16 & 4 & & -\frac{1}{210} & \\
 & & \frac{1}{7} & & \\
9 & 3 & & &
\end{array}
$$

$$\boxed{P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{90}(x-1)(x-4) + \frac{1}{1260}(x-1)(x-4)(x-16)}$$

$$\boxed{P_3(x) = P_2(x) + \frac{1}{1260}(x-1)(x-4)(x-16)}$$

תיאור גרפי של התוצאות שקיבלנו



תרגיל

תהי $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע $[0,1]$. נתון כי:

- $p(x) = x + 1$ הוא פולינום האינטרפולציה הלינארי המקרב את $f(x)$ באמצעות הנקודות $x_0 = 0, x_1 = 1$.
- $q(x) = 3x - 1$ הוא פולינום האינטרפולציה הלינארי המקרב את $f(x)$ באמצעות הנקודות $x_1 = 1, x_2 = 2$.

חשבו את פולינום האינטרפולציה $h(x)$ המקרב את $f(x)$ באמצעות הנקודות $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

נספח:
הוכחת נוסחת ניוטון לפולינום האינטרפולציה

תכונות של הפרשים מחולקים

למה עזר:

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

מקרה פרטי: ($n=2$)

$$f\left[x_0, x_1, x_2\right] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

נוסחת ניוטון לפולינום האינטרפולציה

נתונה הטבלה

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
f_0	f_1	f_2	$\ldots$	f_n

כאשר $\boxed{f_k = f(x_k)}$

אזי **הצגת ניוטון לפולינום האינטרפולציה** היא

$$\boxed{\begin{gathered}P_n(x) = f(x_0) + f\left[x_0, x_1\right]\cdot(x - x_0) + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\cdot(x - x_0)(x - x_1) + \\ \cdots + f\left[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\right]\cdot(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\end{gathered}}$$

נוסחת ניוטון, הוכחה

נדגים את רעיון ההוכחה למקרים פרטיים:

$n=1$ לפי נוסחת ניוטון $P_1(x)=f_0+f_{01}(x-x_0)$

נראה כעת כי פולינום האינטרפולציה הנתון אכן מתלכד עם הפונקציה הנתונה בנקודות הטבלה, ואכן מתקיים

$$\boxed{\begin{aligned} &P_1(x_0)=f_0 \\ &P_1(x_1)=f_0+\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x_1-x_0)=f_1 \end{aligned}}$$

$n=2$ לפי נוסחת ניוטון

$$\begin{aligned} P_2(x)&=\left(f_0+f_{01}(x-x_0)\right)+f_{012}(x-x_0)(x-x_1)= \\ &=P_1(x)+f_{012}(x-x_0)(x-x_1) \end{aligned}$$

נוסחת ניוטון, המשך הוכחה

נשתמש בצורת לגרנז' של פולינום האינטרפולציה $P_1(x)$ וכן
נשתמש בנוסחה עבור f_{012} מלמה 1 קודמת ונקבל:

$$P_2(x) = f_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1)\left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right]$$

הצגת לגרנז' של $P_1(x)$

f_{012}

נוסחת ניוטון, המשך הוכחה

נראה כעת כי פולינום האינטרפולציה הנתון אכן מתלכד עם הפונקציה הנתונה בנקודות הטבלה,

$$\boxed{\begin{aligned} P_2(x_0) &= P_1(x_0) = f_0 \\ P_2(x_1) &= P_1(x_1) = f_1 \\ P_2(x_2) &= f_0 \cdot 0 + f_1 \cdot 0 + f_2 \cdot 1 = f_2 \end{aligned}}$$

המשך הוכחת ההצגה של ניוטון

כעת נטפל **<u>במקרה הכללי</u>**:

מתקיים

$$\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x) + f_{012\ldots n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

עלינו להראות כי $P_n(x_k) = f_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$

נעיר כי לפי ההצגה דלעיל של $P_n(x)$ נובע מיידית כי

$$P_n(x_k) = P_{n-1}(x_k) = f_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

נותר להוכיח כי $P_n(x_n) = f_n$.

לשם כך נציג את $P_{n-1}(x)$ בצורת לגרנז' וכמו כן נשתמש בנוסחה עבור $f_{012..n}$ במונחים של $\{f_k\}$ (הנוסחה מלמה 1 קודמת)

המשך הוכחת ההצגה של ניוטון

נקבל,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} f_k\cdot l_k(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{f_k}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

נציב $x=x_n$

$$P_n(x_n)=\sum_{k=0}^{n-1} f_k\frac{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{k-1})(x_n-x_{k+1})\cdots(x_n-x_{n-1})}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n-1})}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} f_k\frac{(x_n-x_0)\cdots\boxed{(x_n-x_k)}\cdots(x_n-x_{n-1})}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots\boxed{(x_k-x_n)}}+$$

$$+f_n\underbrace{\boxed{\frac{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}}}_{=1}=f_n$$