אנליזה נומרית מצגת מלווה #7

שיטות איטרטיביות לפתרון משוואות לא לינאריות: שיטת נקודת שבת

- הצגת שיטת נקודת השבת.
- תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות לוקאלית של השיטה. (נק' משיכה ודחייה)
- משפט קיום ויחידות נק' השבת והתכנסות אלגוריתם נק' השבת .

שיטת נקודת שבת
Fixed point iteration

הגדרה:

נקודה $\boxed{r}$ המקיימת $\boxed{g(r) = r}$ נקראת **נקודת שבת** של הפונקציה $g(x)$.

(זוהי נקודה שהפונקציה $g(x)$ משאירה במקום.)

למשל: נקודות השבת של $g(x) = x^2$ הן $r_1 = 0$ ו- $r_2 = 1$.

מבחינה גיאומטרית $\boxed{r}$ הוא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $y=g(x)$ עם גרף הפונקציה $y=x$.

שיטת נקודת שבת- מודל כללי

1. מעוניינים לפתור את המשוואה $(1) \quad f(x)=0$

כלומר למצוא **שורש** ממשי r של $f(x)$ המקיים $f(r)=0$

2. עוברים <u>למשוואה שקולה</u> $(2) \quad x=g(x)$ עם אותו הפתרון r.

במקרה זה r מהווה **<u>נקודת שבת</u>** של $g(x)$ כלומר $g(r)=r$

3. הייצוג (2) מאפשר להגדיר תהליך איטרטיבי

$$(3) \quad x_{n+1}=g(x_n); \quad n \ge 0$$

שיטת נקודת שבת- מודל כללי, המשך

4. עבור בחירה של x_0 התחלתי מקבלים סדרת קירובים $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

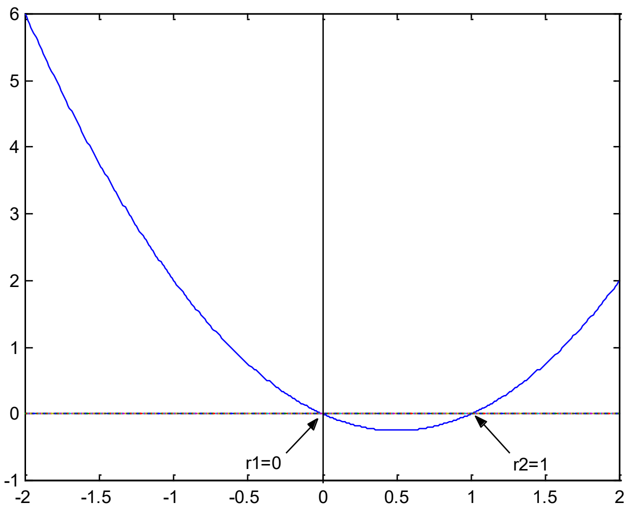
$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$x_3 = g(x_2)$$
$$\vdots$$
$$x_n = g(x_{n-1})$$
$$\vdots$$

5. בתנאים מסוימים הסדרה מתכנסת ובמקרה זה הגבול של הסדרה הוא הפתרון המבוקש של המשוואה (2) ולכן גם של המשוואה השקולה (1) כלומר $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. (ההתכנסות תלויה בהגדרת $g(x)$ ובבחירת x_0)

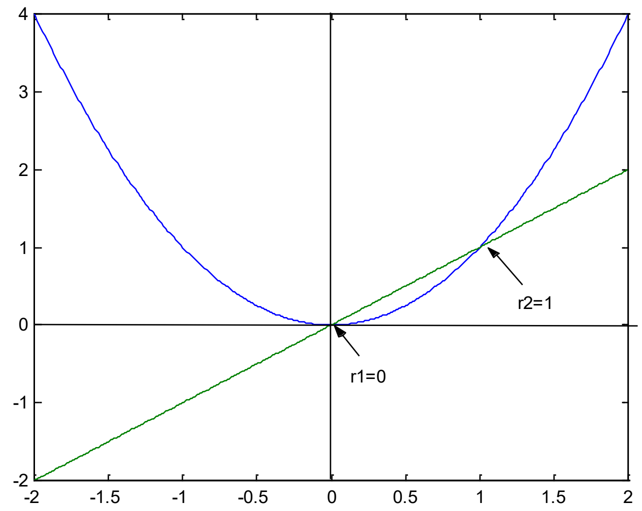
שיטת נקודת שבת - דוגמא

עבור המשוואה $x^2 - x = 0$, ניתן לעבור לייצוג שקול $x^2 = x$

ואכן, מחישוב פשוט רואים כי השורשים של $f(x) = x^2 - x$ שהם $r = 0,1$ הם בדיוק נקי השבת של $g(x) = x^2$.

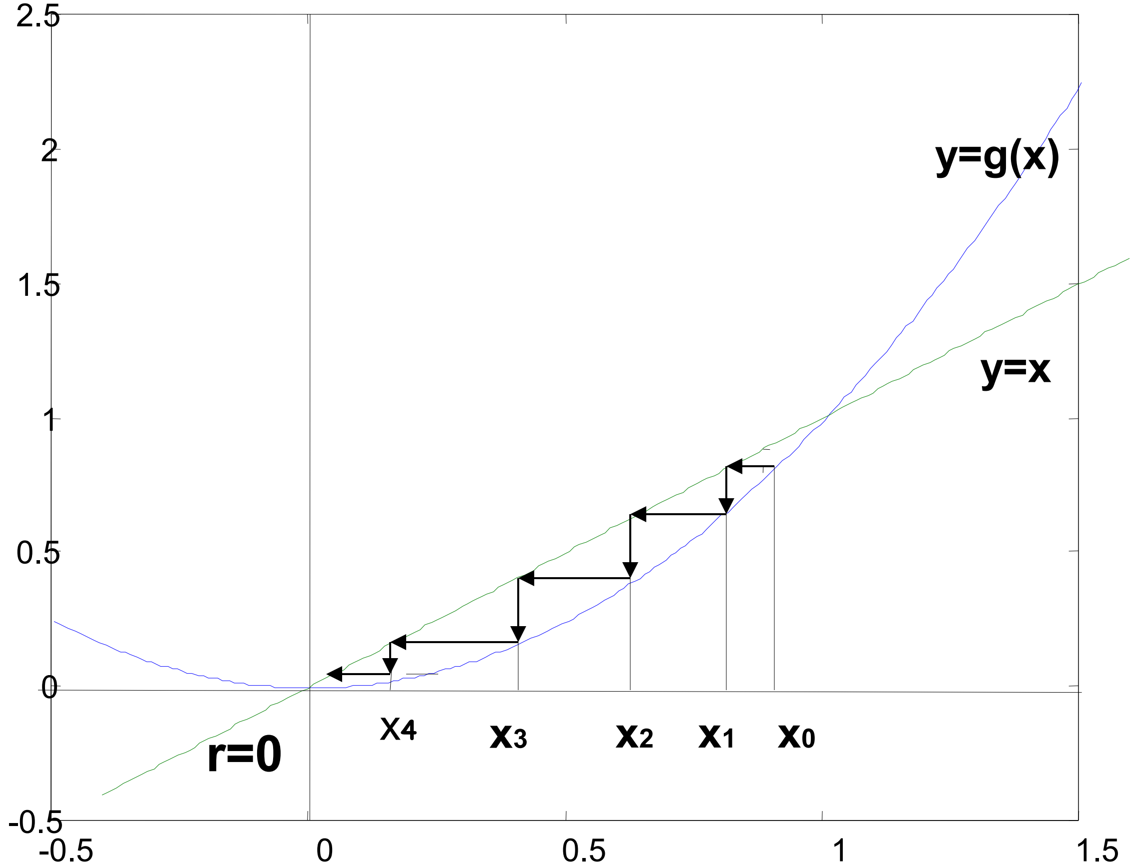


$$f(x) = x^2 - x = 0$$



$$x = g(x) = x^2$$

תיאור גיאומטרי של אלגוריתם נקודת שבת



אלגוריתם נקודת שבת – דוגמא 1

דוגמא: השוואה בין בחירות שונות של x_0 התחלתי עבור אותה $g(x)$:

נניח שברצוננו למצוא בעזרת שיטת נק' שבת את השורש $\boxed{r_1 = 0}$ של

המשוואה $\boxed{f(x) = x^2 - x = 0}$ השקולה למשוואה $\boxed{x = x^2 = g(x)}$

נתבונן ב 4 אפשריות שונות לבחירת x_0 התחלתי עבור $g(x) = x^2$ ונריץ על ארבעתן את האלגוריתם של נק' שבת $x_n = g(x_{n-1}); n \geq 1$:

איטרציה	$g(x)=x^2$	$g(x)=x^2$	$g(x)=x^2$	$g(x)=x^2$
0	$x_0 = 2$	$x_0 = -1$	$x_0 = -0.5$	$x_0 = 0.1$
1	4	1	0.25	0.01
2	16	1	0.0625	0.0001
3	256	1	0.00390625	0.1×10^{-7}
	$\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$	$\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{} r_2 = 1}$	$\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{} r_1 = 0}$	$\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{} r_1 = 0}$

אלגוריתם נקודת שבת – דוגמא 2

<u>דוגמא:</u> השוואה בין הצגות שונות של $x = g(x)$ עבור אותה $f(x)$:

נניח שברצוננו למצוא בעזרת שיטת נק' שבת את השורש $\boxed{r_1 = 4}$ של המשוואה $\boxed{x^2 - 2x - 8 = 0}$ (למשוואה יש שורש נוסף $r_2 = -2$)

נתבונן ב 3 הצגות אפשריות שונות למעבר לצורה $x = g(x)$. נריץ על שלושתן את האלגוריתם של נק' שבת, כאשר בכולן נציב נק' התחלה $\boxed{x_0 = 5}$

איטרציה	$x = \frac{x^2 - 8}{2} = g_3(x)$	$x = \frac{2x + 8}{x} = g_2(x)$	$x = \sqrt{2x + 8} = g_1(x)$
0	5.000	5.000	5.000
1	8.500	3.600	4.243
2	32.125	4.222	4.060
3	512.008	3.895	4.015

שיטת נקודת שבת , המשך דוגמא 2

$x=\sqrt{2x+8}$	$x=\frac{2x+8}{x}$	$x=\frac{x^2-8}{2}$	איטרציה
4.004	4.054	131072.000	4
4.001	3.973	8589934592.000	5
4.000	4.014		6
	3.993		7
	4.004		8
	3.998		9
	4.001		10
	4.000		11

הערה:

$g_1'(4)=\frac{1}{4}$ $\quad$ $g_2'(4)=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $g_3'(4)=4$

תזכורת מחדו"א – משפט לגרנג'

משפט לגרנג'

תהי $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b)

אזי קיימת **נקודת ביניים** $a < c < b$ כך ש- $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

שיטת נקודת שבת- תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות לוקלית

- נסמן את שגיאת הקירוב באיטרציה ה- n ב- $e_n = x_n - r$
- בהנחה ש- $g(x)$ גזירה בסביבות הנקודה r , קיימת, לפי משפט לגרנג', נקודת ביניים c_{n-1} בין r לבין x_{n-1} כך ש-

$$e_n = x_n - r = g(x_{n-1}) - g(r) = g'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - r) = g'(c_{n-1}) \cdot e_{n-1}$$

- עוד נציין כי אם הסדרה $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת, הרי שהגבול שלה הוא r

לפיכך נקבל כי $\lim_{n\to\infty} c_{n-1} = r$ ובפרט $\lim_{n\to\infty} g'(c_{n-1}) = g'(r)$

כלומר קבלנו כי אסימפטוטית (כלומר עבור $n \to \infty$) מתקיים

$$\boxed{e_n \approx g'(r) \cdot e_{n-1}}$$

שיטת נקודת שבת: תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות לוקלית

אם $g'(r) \neq 0$ והשיטה מתכנסת ראינו כי $e_n \approx g'(r)\cdot e_{n-1}$

ובפרט: $e_n \approx g'(r)\cdot e_{n-1} \approx \left(g'(r)\right)^2 \cdot e_{n-2} \approx \cdots \approx \left(g'(r)\right)^n \cdot e_0$

כלומר מקבלים $\boxed{e_n \approx \left(g'(r)\right)^n \cdot e_0}$

מסקנה- תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות לוקלית:

- אם $|g'(r)| < 1$ השיטה מתכנסת לוקלית (עבור x_0 בסביבת r).
  נקודת השבת r נקראת במקרה זה **נקודת משיכה**
- אחרת ($|g'(r)| > 1$) השיטה מתבדרת ונקודת השבת נקראת **נקודת דחייה**

הערות/מסקנות

הערה 1: תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות הוא כאמור $|g'(r)|<1$. תנאי זה תלוי אמנם ב- r שאנו מחפשים ולא ניתן לבדוק אותו ישירות אך אם נבחר $g(x)$ וקטע הכולל את r כך ש- $|g'(x)|<1$ לכל x בקטע - אז נוכל להסיק כי אי השוויון מתקיים בפרט עבור r ואז ההתכנסות הלוקלית מובטחת.

הערה 2: מתקיים $e_n \approx \left(g'(r)\right)^n \cdot e_0$ ($e_n \approx g'(r)\cdot e_{n-1}$)

ולכן ניתן להסיק כי ככל ש- $|g'(r)|$ קטן יותר ההתכנסות יותר מהירה

(באופן שקול, ככל ש- $|g'(r)|$ קרוב יותר ל- 1, ההתכנסות יותר איטית)

הערה 3: אם $|g'(r)|<1$ וגם $g'(r)\neq 0$ קיים קשר ליניארי בין שגיאות עוקבות ונאמר כי השיטה מתכנסת מסדר 1.

מסקנות מתנאי הכרחי להתכנסות -דוגמא

$$f(x)=x^2-2x-8 \Rightarrow x=\sqrt{2x+8}=g_1(x) \qquad x=\frac{2x+8}{x}=g_2(x) \qquad x=\frac{x^2-8}{2}=g_3(x)$$

<u>דוגמא:</u> אם נחזור לדוגמא 2 מקודם:

- עבור נקי השבת $r_1=4$ מתקיים:

$$g_1'(4)=\frac{1}{4}\neq 0 \Rightarrow e_{n+1}\approx \frac{1}{4}e_n$$

$$g_2'(4)=-\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow e_{n+1}\approx -\frac{1}{2}e_n$$

לכן התכנסות שתי השיטות היא התכנסות לינארית!

- כמו כן מתקיים $\left|g_1'(4)\right|=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}=\left|g_2'(4)\right|$

לכן התכנסות השיטה עבור $g_1(x)$ יותר מהירה.

- הפונקציה $g_3(x)$ לא מקיימת תנאי הכרחי להתכנסות

(כי $\left|g_3'(4)\right|=4>1$) ולכן השיטה מתבדרת, כפי שרואים בטבלה.

המשך דוגמא

$$f(x)=x^2-2x-8 \Rightarrow x=\sqrt{2x+8}=g_1(x) \qquad x=\frac{2x+8}{x}=g_2(x) \qquad x=\frac{x^2-8}{2}=g_3(x)$$

- ואילו עבור נקי השבת $r_2=-2$ מתקיים: $g_1'(-2)=\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow e_{n+1}\approx\frac{1}{2}e_n$

לכן השיטה מתכנסת מסדר 1 (התכנסות לינארית)

- אולם $|g_2'(-2)|=2>1$ ו- $|g_3'(-2)|=2>1$

ולכן שתי השיטות מתבדרות עבור $r_2=-2$

תנאי מספיק להתכנסות לוקלית- המשך

תרגיל

למשוואה $e^{-x} - 3x = 0$ (1) יש שורש ממשי יחיד r בקטע $I = [0,1]$

המשוואה (1) שקולה למשוואות

$$x = e^{-x} - 2x \qquad (2a)$$

$$x = \frac{1}{3}e^{-x} \qquad (2b)$$

א. הראו כי r מהווה נקודת דחייה עבור $g_1(x) = e^{-x} - 2x$

ב. הראו כי r מהווה נקודת משיכה עבור $g_2(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$

פתרון תרגיל

א. עבור $g_1(x) = e^{-x} - 2x$: הנגזרת $g'_1(x) = -e^{-x} - 2$ מונוטונית בקטע $[0,1]$ (כי $g''_1(x) = e^{-x} \neq 0$ בקטע) ולכן מקבלת קיצון מוחלט בקצוות. בפרט, לכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$-3 = g'_1(0) \le g'_1(x) \le g'_1(1) \approx -2.37$$

ולכן עבור $r \in [0,1]$ מתקיים $|g'_1(r)| > 1$ $r \leftarrow$ נק' דחייה עבור $g_1(x)$.

ב. עבור $g_2(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$: הנגזרת $g'_2(x) = -\frac{1}{3}e^{-x}$ מונוטונית בקטע $[0,1]$ (כי $g''_2(x) = \frac{1}{3}e^{-x} \neq 0$ בקטע) ולכן מקבלת קיצון מוחלט בקצוות. בפרט, לכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$-\frac{1}{3} = g'_2(0) \le g'_2(x) \le g'_2(1) = -0.123$$

ולכן עבור $r \in [0,1]$ מתקיים $|g'_2(r)| < 1$ $r \leftarrow$ נק' משיכה עבור $g_2(x)$.

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות שיטת נקודת שבת

משפט: נתונה משוואה בצורה $\boxed{x = g(x)}$ (השקולה למשוואה $f(x) = 0$)

1) **אם** $g(x)$ מקיימת את התנאים הבאים:

א. $g(x)$ רציפה בקטע $I = [a,b]$

ב. $g(x)$ מעבירה את הקטע לתוך עצמו, כלומר $\boxed{g(x) \in I ; \quad \forall x \in I}$

ג. $g(x)$ גזירה בקטע (a,b) וכמו כן $\boxed{\forall x \in (a,b), |g'(x)| \le L < 1}$

(כאשר $\boxed{L = \max_{a \le x \le b} |g'(x)|}$)

אזי ל- $g(x)$ **<u>קיימת</u>** נק' שבת $r \in [a,b]$ (כלומר $g(r) = r$) **<u>יחידה</u>**,

והסדרה המוגדרת ע"י $\boxed{x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\ldots}$ **<u>מתכנסת</u>** **<u>לפתרון היחיד r ,</u>**

כלומר $\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = r}$, **<u>עבור כל בחירה של</u>** $x_0 \in [a,b]$.

הוכחה בנספח

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת - דוגמא

המשוואה $e^{-x} - 3x = 0$ (1) שקולה למשוואה $x = \frac{1}{3}e^{-x}$ (2)

ראינו קודם כי למשוואה (1) יש שורש ממשי יחיד r בקטע $I = [0,1]$

המהווה נקודת משיכה עבור $g(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$

נבדוק תנאי המשפט:

1.תנאי א': $g(x)$ פוני' מעריכית רציפה לכל x ממשי בפרט בקטע $I = [0,1]$

2. הוכחנו קודם את תנאי ג במשפט $-1 < -0.33 \le g'(x) \le -0.123 < 0$

3. נוכיח כעת את תנאי ב': $g(x)$ פונקציה מעריכית מונוטונית בקטע $[0,1]$ ולכן מקבלת קיצון מוחלט בקצוות. בפרט, לכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$0 < 0.123 \approx g(1) \le g(x) \le g(0) \approx 0.333 < 1$$

כלומר מתקיים $0 < g(x) < 1$ לכל $0 \le x \le 1$ (התנאי $g(I) \subseteq I$)

כל תנאי המשפט מתקיימים בקטע $[0,1]$ ולכן נסיק כי עבור השיטה האיטרטיבית המתאימה $x_{n+1} = g(x_n); \quad n \ge 0$ (3) מובטחת התכנסות הסדרה $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ל- r עבור כל x_0 התחלתי בקטע $[0,1]$.

r=0.257628….

המשך דוגמא- הרצה

n	x_n	$g(x_n)$
0	$x_0 = 0$	0.333333…
1	x_1 =0.333333…	0.238844…
2	$x_2 = 0.238844…$	0.262513…
3	$x_3 = 0.262513$ …	0.256372…
4	$x_4 = 0.256372$ …	0.257951…
5	$x_5 = 0.257951…$	0.257544…
6	$x_6 = 0.257544…$	0.257649…
7	$x_7 = 0.257649$ …	0.257622…
8	$x_8 = 0.257622$ …	0.257629…
⋮	⋮	⋮

<u>שיטת נקודת שבת - הערות לגבי משפט הקיום, יחידות והתכנסות שיטת נקודת השבת</u>

<u>הערה 1:</u> תנאי משפט הם מספיקים בלבד!

כלומר, אם תנאים א)-ג) מתקיימים אז מובטח קיום ויחידות נק' השבת והתכנסות התהליך האיטרטיבי המתאים!

המשפט לא נותן לנו אינדיקציה לקיומה ויחידותה של נקודת שבת או להתכנסות אליה (אם קיימת) לכל נקודת התחלה בקטע במידה ותנאיו אינם מתקיימים. (תנאי ג' מבטיח התכנסות לוקלית בלבד)

שיטת נקודת שבת - הערות לגבי משפט הקיום, יחידות והתכנסות שיטת נקודת השבת

הערה 2: קשר בין שגיאה באיטרציה n לשגיאה התחלתית

כאשר התייחסנו להתכנסות לוקלית הוכחנו את התוצאה הבאה

$$e_n = g'(c_{n-1}) \cdot e_{n-1}, \quad c_{n-1} \in (a,b)$$

ומכאן נוכל להסיק כי אם מתקיים תנאי ג במשפט $\forall x \in (a,b), |g'(x)| \le L < 1$

כאשר $L = \max_{a \le x \le b} |g'(x)|$, אז $|e_n| = \underbrace{|g'(c_{n-1})|}_{\le L} \cdot |e_{n-1}| \le L \cdot |e_{n-1}|$

כלומר: $\boxed{|e_n| \le L \cdot |e_{n-1}|}$ **קשר בין שגיאות עוקבות**

אשר גורר $|e_n| \le L \cdot |e_{n-1}| \le L^2 \cdot |e_{n-2}| \le L^3 \cdot |e_{n-3}| \le \cdots \le L^n \cdot |e_0|$

כלומר $\boxed{|e_n| \le L^n \cdot |e_0|}$ **קשר בין שגיאה בשלב n לשגיאה תחילית**

שיטת נקודת שבת , המשך הערות לגבי משפטי קיום, יחידות והתכנסות

<u>הערה 3 :</u> לפי תנאי ג' במשפט נדרש כי $-1 < g'(x) < 1$

- אם בקטע הנבדק $\boxed{0 < g'(x) < 1}$

אז **<u>הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת</u>** ל - r **<u>מאותו כיוון</u>**,

במקרה זה, השגיאות בשתי איטרציות עוקבות הן בעלות אותו

סימן ולכן **<u>ההתכנסות היא מונוטונית</u>**.

- אם בקטע הנבדק $\boxed{-1 < g'(x) < 0}$

אז **<u>הקירובים מתנדנדים</u>** ביחס ל - r ,

במקרה זה , השגיאות בשתי איטרציות עוקבות הן בעלות

סימנים נגדיים ולכן **<u>ההתכנסות היא ספירלית</u>**.

שיטת נקודת שבת , המשך הערות לגבי משפטי קיום, יחידות והתכנסות

דוגמא להערה 3 :

נחזור לדוגמא קודמת : עבור $g_1(x)=\sqrt{2x+8}$ מתקיים $g_1'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$.

$g_1'(x)$ מונוטונית יורדת בקטע $[4,5]$ ולכן :

$$0<\frac{1}{\sqrt{18}}=g_1'(5)\le g_1'(x)\le g_1'(4)=0.25<1 \qquad , \quad \forall x\in[4,5]$$

ולכן **ההתכנסות לנקודת השבת היא מונוטונית**.

שיטת נקודת שבת , המשך הערות לגבי משפטי קיום, יחידות והתכנסות

עבור $g_2(x)=\frac{2x+8}{x}$ מתקיים $g_2'(x)=-\frac{8}{x^2}$

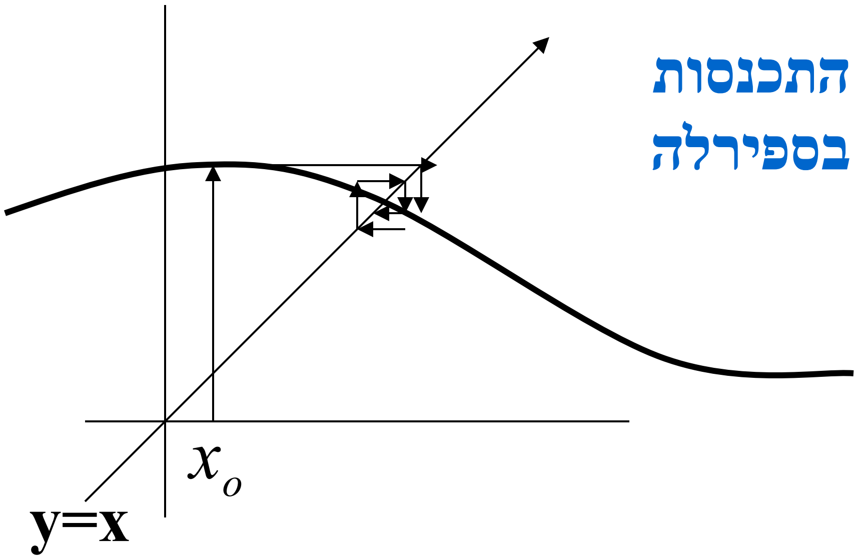
$g_2'(x)$ מונוטונית עולה בקטע $[4,5]$ ולכן

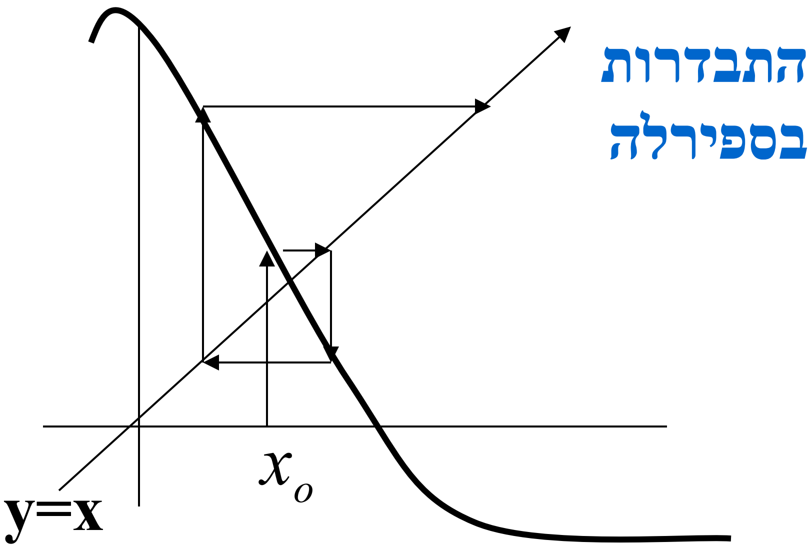
$$\forall x\in[4,5] \quad , \quad -1<-0.5=g_2'(4)\le g_2'(x)\le g_2'(5)=-0.32<0$$

ולכן הקרובים מתנדנדים ביחס לנקודת השבת

<u>**וההתכנסות אליה היא ספירלית**</u>.

שיטת נקודת שבת -
צורות התכנסות והתבדרות





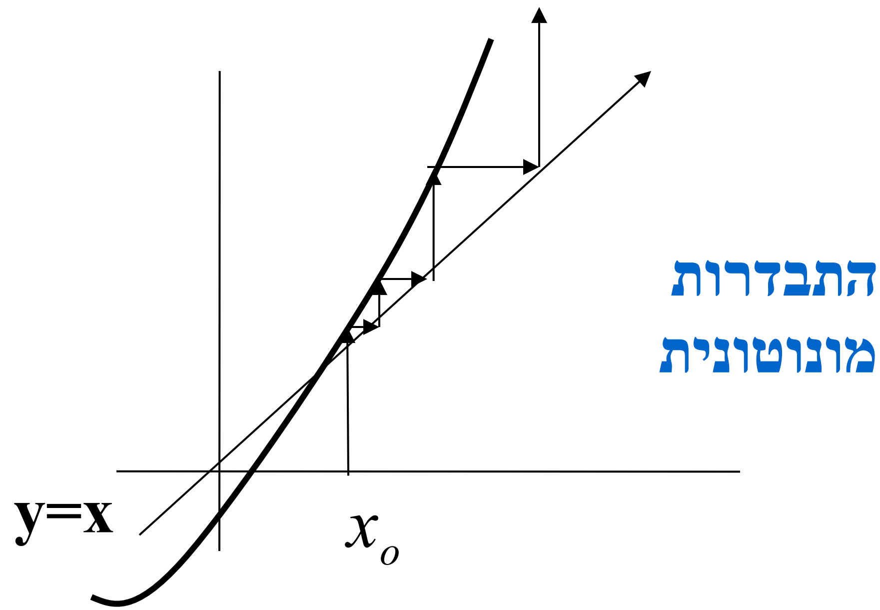
$$-1 < g'(x) \le 0$$

$$g'(x) < -1$$

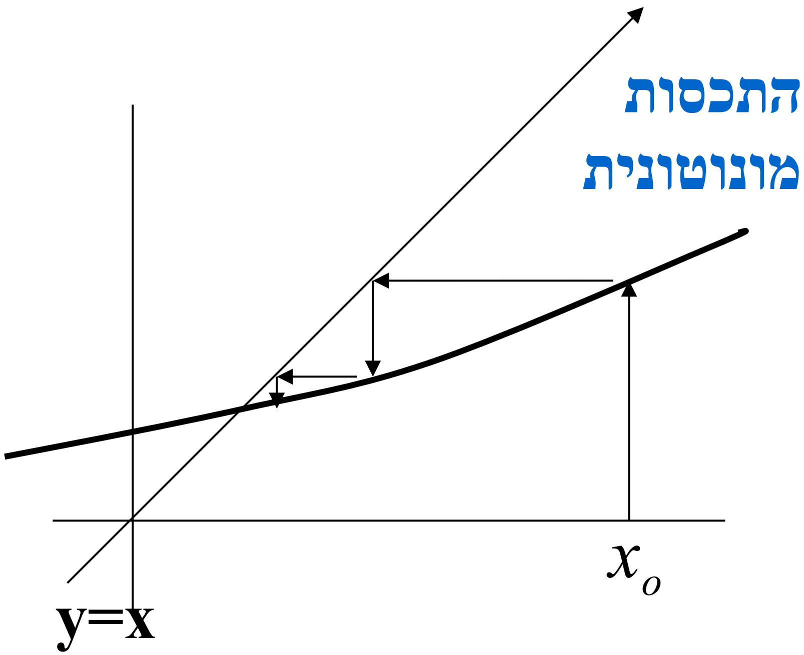
התכנסות בשני צדדים
לסירוגין.

שיטת נקודת שבת -
צורות התכנסות והתבדרות

$$g'(x) > 1$$



$$0 \le g'(x) < 1$$



תרגיל

למשוואה $f(x)=x^3+x-3=0$ יש פתרון ממשי אחד.

נרצה למצוא קירוב שלו ע״י שימוש בשיטת נקודת השבת.

נתבונן בשתי אפשרויות:

1) $g_1(x)=\sqrt[3]{3-x}$ 2) $g_2(x)=3-x^3$

א) תנו הסבר תיאורטי מדוע בחירה 2 לא מתאימה. מהו סוג ההתבדרות במקרה זה?

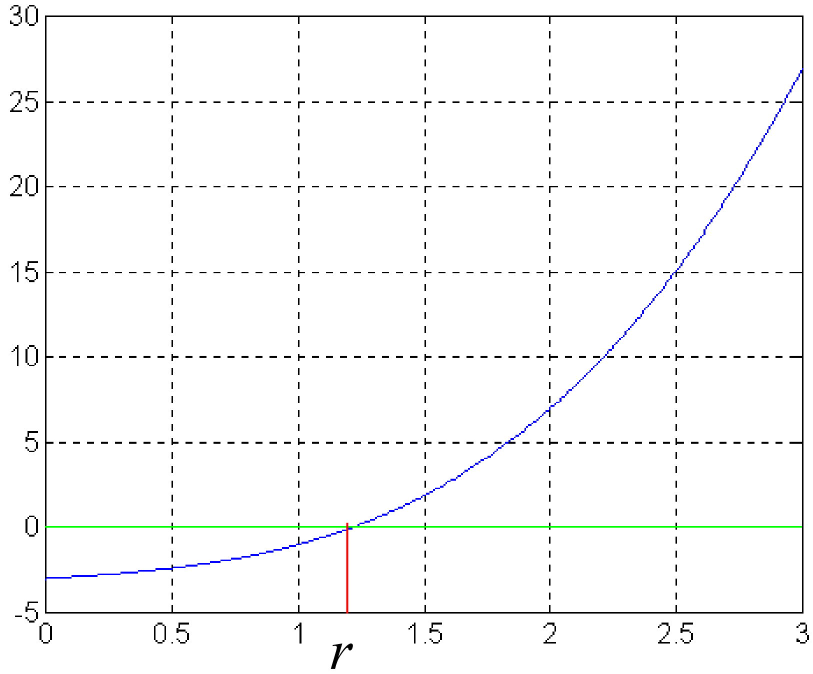
ב) תנו הסבר תיאורטי מדוע בחירה 1 מתאימה. מהו סוג ההתכנסות הלוקלית במקרה זה?

ג) מצאו קטע $[a,b]$ שבו מובטחת התכנסות של שיטה 1 לכל x_0 התחלתי בקטע.

פתרון התרגיל

נברר תחילה היכן נמצא הפתרון המבוקש של המשוואה $f(x) = 0$:

ניעזר בתיאור גרפי ב- matlab



✓ לפי משפט ערך הביניים בקטע $[1,2]$

$$f(1)\cdot f(2) = (-1)\cdot 7 < 0$$

לכן יש $1 < r < 2$ כך ש- $f(r) = 0$

✓ לפי התיאור הגרפי רואים כי $r \in (1,2)$ הוא גם פתרון יחיד בקטע.

המשך הפתרון

<u>א)</u> ע״מ להראות כי בחירה 2 לא מתאימה, נראה כי נקודת השבת r היא נקודת דחייה של $g_2(x) = 3 - x^3$.

מתקיים: הנגזרת $g'_2(x) = -3x^2$ רציפה בקטע $(1,2)$ הכולל את נקודת השבת r וזו פונקציה מונוטונית יורדת בקטע, לכן

$$-12 = g_2'(2) < g_2'(x) < g_2'(1) = -3, \quad \forall x \in (1,2)$$

בפרט, עבור $r \in (1,2)$ מתקיים $-12 < g_2'(r) < -3$

אשר גורר כי $|g_2'(r)| > 1$ וכי r נקודת דחייה של $g_2(x)$.

- ✓ במקרה זה התהליך האיטרטיבי $x_n = g_2(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\cdots$ <u>לא</u> <u>יתכנס</u> ל- r .
- ✓ היות ו- $g_2'(r) < -1$ נסיק כי <u>ההתבדרות היא ספירלית</u>.

המשך הפתרון

<u>ב)</u> ע״מ להראות כי בחירה 1 מתאימה, נראה כי נקודת השבת r היא נקודת משיכה של $g_1(x) = \sqrt[3]{3-x}$.

הנגזרת $g_1'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$ היא פונקציה רציפה בקטע $(1,2)$ הכולל את נקודת השבת r וזו פונקציה מונוטונית יורדת בקטע, לכן

$$-0.33 = g_1'(2) < g_1'(x) < g_1'(1) = -0.21, \quad \forall x \in (1,2)$$

בפרט, עבור $r \in (1,2)$ מתקיים $-1 < g_1'(r) < 0$
אשר גורר כי $|g_1'(r)| < 1$ וכי r נקודת משיכה של $g_1(x)$.

✓ זה מבטיח כי התהליך האיטרטיבי $x_n = g_1(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\cdots$ יתכנס לוקלית ל-r (כלומר לכל x_0 התחלתי בסביבה של r).

✓ היות ו- $-1 < g_1'(r) < 0$ נסיק כי <u>ההתכנסות הלוקלית</u> היא <u>ספירלית</u>.

המשך הפתרון

ג. נבדוק קיום תנאי משפט ההכנסות של שיטת נקודת שבת בקטע $I = [1,2]$

1) $g_1(x) = \sqrt[3]{3-x}$ **רציפה** לכל x בפרט בקטע $[1,2]$.

2) $g_1(x) = \sqrt[3]{3-x}$ מונוטונית יורדת בקטע כי $g_1'(x) < 0$ בקטע ולכן

$$1 = g_1(2) \le g_1(x) \le g_1(1) = \sqrt[3]{2} < 2, \quad \forall x \in [1,2]$$

ולכן מתקיים התנאי $x \in I, \quad g_1(x) \in I$.

3) הראינו קודם כי $-1 < -0.33 < g_1'(x) < -0.21 < 1, \quad \forall x \in (1,2)$

כלומר $x \in I, \quad |g_1'(x)| \le 0.33 < 1$.

שלושת תנאי משפט ההתכנסות מתקיימים ולכן נסיק על קיום ויחידות נקודת שבת $r \in [1,2]$ (את זה כבר ראינו באמצעות הייצוג הגרפי) ועל התכנסות התהליך האיטרטיבי המתאים $x_n = g_1(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\cdots$ לנקודת השבת (כלומר $\lim_{n\to\infty} x_n = r$) לכל $x_0 \in [1,2]$ התחלתי.

r=1.213411….

המשך הפתרון - הרצה

n	x_n	$g(x_n) = \sqrt[3]{3 - x_n}$
0	$x_0 = 1$	1.259921…
1	x_1 =1.259921…	1.202789…
2	x_2 = 1.202789…	1.215811…
3	x_3 = 1.215811…	1.212868…
4	x_4 = 1.212868…	1.213534…
5	x_5 = 0.257951…	1.213383…
6	x_6 = 1.213383…	1.213417…
7	x_7 = 1.213417 …	1.213410…
8	x_8 = 1.213410 …	1.213411…
⋮	⋮	⋮

שיטת נקודת שבת: נספח

- הוכחת משפט קיום ויחידות נק' השבת והתכנסות אלגוריתם נק' השבת.
- דוגמא

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות שיטת נקודת שבת

משפט: נתונה משוואה בצורה $\boxed{x = g(x)}$ (השקולה למשוואה $f(x) = 0$)

1) **אם** $g(x)$ מקיימת את התנאים הבאים:

א. $g(x)$ רציפה בקטע $I = [a,b]$

ב. $g(x)$ מעבירה את הקטע לתוך עצמו, כלומר $\boxed{g(x) \in I; \quad \forall x \in I}$

ג. $g(x)$ גזירה בקטע (a,b) וכמו כן $\boxed{\forall x \in (a,b), |g'(x)| \le L < 1}$

(כאשר $\boxed{L = \max_{a \le x \le b} |g'(x)|}$)

אזי ל- $g(x)$ **<u>קיימת</u>** נק' שבת $r \in [a,b]$ (כלומר $g(r) = r$) **<u>יחידה</u>**,

והסדרה המוגדרת ע"י $\boxed{x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1,2,\ldots}$ **<u>מתכנסת לפתרון היחיד r</u>**,

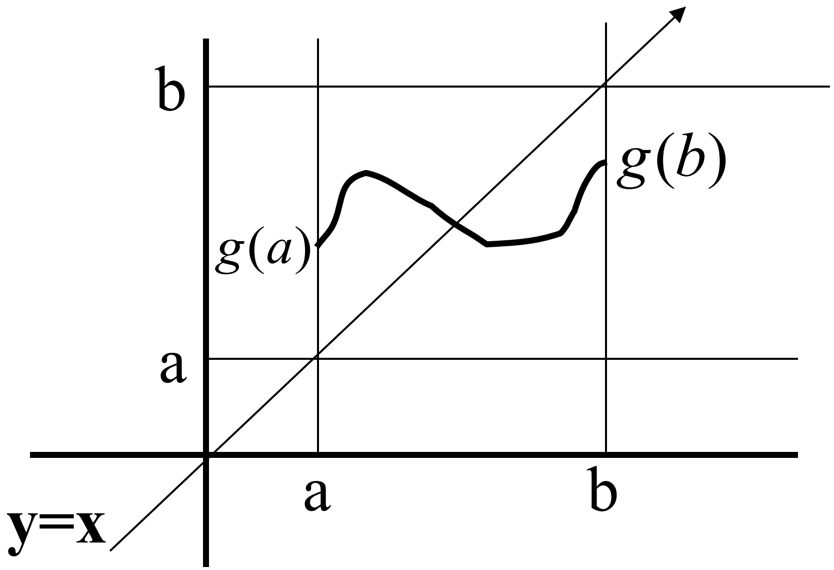
כלומר $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = r}$, **<u>עבור כל בחירה של</u>** $x_0 \in [a,b]$.

הוכחה בנספח

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות השיטה - הוכחת המשפט

קיום:

הסבר גיאומטרי



הוכחה פורמלית:

אם $g(a)=a$ או $g(b)=b$ אזי קיום נקודת השבת ברור.

אחרת, נוכיח את קיום נקודת השבת בקטע הפתוח (a,b).

מתנאי ב' ומההנחה ש- $g(a)\neq a$ ו- $g(b)\neq b$

נובע כי $a<g(a)\leq b$ ו- $a\leq g(b)<b$

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות השיטה , המשך הוכחת המשפט

נגדיר פונקציית עזר: $\boxed{h(x)=g(x)-x}$

$h(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ (כהפרש של שתי פונקציות רציפות בקטע)

וכמו כן מתקיים:

$h(a)=g(a)-a>0$ ו- $h(b)=g(b)-b<0$

לפי **<u>משפט ערך הביניים</u>** קיימת נקודה $a<r<b$ כך ש-

$$h(r)=g(r)-r=0$$

או באופן שקול, $g(r)=r$

לפי הגדרה, r היא נקודת שבת של $g(x)$.

<u>מ.ש.ל. הוכחת הקיום</u>.

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות השיטה , המשך הוכחת המשפט

<u>יחידות</u>:

נניח בשלילה כי קיימות שתי נקודות שבת שונות $r_1 \neq r_2$ בקטע $[a,b]$.

(ב.ה.כ. מניחים כי $r_1 < r_2$)

לפי **<u>משפט לגרנז'</u>** קיימת נקודה $r_1 < c < r_2$ כך ש-

$$g(r_2) - g(r_1) = g'(c)(r_2 - r_1)$$

לפי הגדרת נקודת שבת נובע כי $r_1 = g(r_1), \quad r_2 = g(r_2)$

לכן נקבל $r_1 < c < r_2$, $r_2 - r_1 = g'(c)(r_2 - r_1)$

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות השיטה , המשך הוכחת המשפט

מכאן

$$|r_2 - r_1| = |g'(c)||r_2 - r_1| \quad , \quad r_1 < c < \mathrm{r}_2$$

(לפי הנחה $r_1 \neq r_2$) $\Downarrow$

$$\left|g'(c)\right| = 1 \quad , \quad r_1 < c < r_2$$

וזאת בסתירה לנתון (תנאי ג׳) ! מכאן נובעת יחידות נק׳ השבת.

<u>מ.ש.ל הוכחת היחידות.</u>

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות השיטה , המשך הוכחת המשפט

התכנסות:

נסמן את שגיאת הקירוב ב - $e_n = x_n - r$.

אזי

$$e_n = x_n - r = g(x_{n-1}) - g(r) = g'(c_{n-1})(x_{n-1} - r) = g'(c_{n-1}) \cdot e_{n-1}$$

לפי הגדרת השגיאה

לפי הגדרת הסדרה

ועובדת התכנסותה לפתרון r

לפי משפט לגרנג'

לפי הגדרת השגיאה

כאשר c_{n-1} נקודה בין r לבין x_{n-1}.

כלומר קיבלנו $e_n = g'(c_{n-1}) \cdot e_{n-1}$ ובאופן שקול $|e_n| = |g'(c_{n-1})| \cdot |e_{n-1}|$

תנאים מספיקים לקיום ויחידות של נקודת שבת והתכנסות השיטה, המשך הוכחת המשפט

מכאן $|e_n| \le L \cdot |e_{n-1}|$ (לפי תנאי ג' $|g'(c_{n-1})| \le L < 1$)

נמשיך באותו אופן :

$$|e_n| \le L \cdot |e_{n-1}| \le L^2 \cdot |e_{n-2}| \le \ldots \le L^n \cdot |e_0|$$

ולפיכך

$$(*) \qquad 0 \le |e_n| \le L^n \cdot |e_0|$$

נזכיר כי לפי תנאי ג' מתקיים $0 < L < 1$ לכן $\lim_{n\to\infty} L^n = 0$

ולפי (*) ומשפט הסנדוויץ' לגבולות נקבל $\lim_{n\to\infty} |e_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n - r| = 0$

או באופן שקול $\lim_{n\to\infty} x_n = r$

$\blacksquare$

כי השגיאות הולכות

וקטנות ושואפות ל-0.

שיטת נקודת שבת - הערות נוספות

הערה #1: אחד התנאים המספיקים לקיום נקודת שבת הוא התנאי $\boxed{g(I)\subseteq I}$

(כלומר $g(x)$ מעבירה את הקטע $[a,b]$ לעצמו.)

- אם $g(x)$ **מונוטונית** (עולה או יורדת) , מספיק לבדוק בקצוות ש- $a\le g(b), g(a)\le b$ ואז בהכרח: $\forall x\in[a,b] \quad , \quad a\le g(x)\le b$.
- אם $g(x)$ **אינה מונוטונית** יש לבדוק שערכי הפונקציה בנקודות הקיצון שלה בקטע חסומים בקטע. ובפרט מספיק לבדוק ש- $\max\limits_{x\in[a,b]}(g(x))\le b$ וגם $\min\limits_{x\in[a,b]}(g(x))\ge a$ ואז בהכרח

$$\forall x\in[a,b] \quad , \quad a\le \min_{a\le x\le b} g(x)\le g(x)\le \max_{a\le x\le b} g(x)\le b.$$

שיטת נקודת שבת , המשך הערות לגבי משפטי קיום, יחידות והתכנסות

הערה #2:

תנאי מספיק ליחידות נקודת שבת (אם קיימת) ולהתכנסות השיטה

הוא $|g'(x)|<1 \quad \forall x \in (a,b),$

על מנת להוכיח קיום תנאי זה יש לחשב קיצון מוחלט של $g'(x)$ בקטע $[a, b]$

ולהראות כי $\boxed{\forall x \in (a,b) \quad , \quad -1 < g'(x) < 1.}$

כלומר, יש להראות כי $\max_{x\in[a,b]}(g'(x))<1$ וגם כי $\min_{x\in[a,b]}(g'(x))>-1$

שיטת נקודת שבת – תרגיל

נתבונן בפונקציה $\boxed{g(x) = 2\cdot\sin(x)}$.

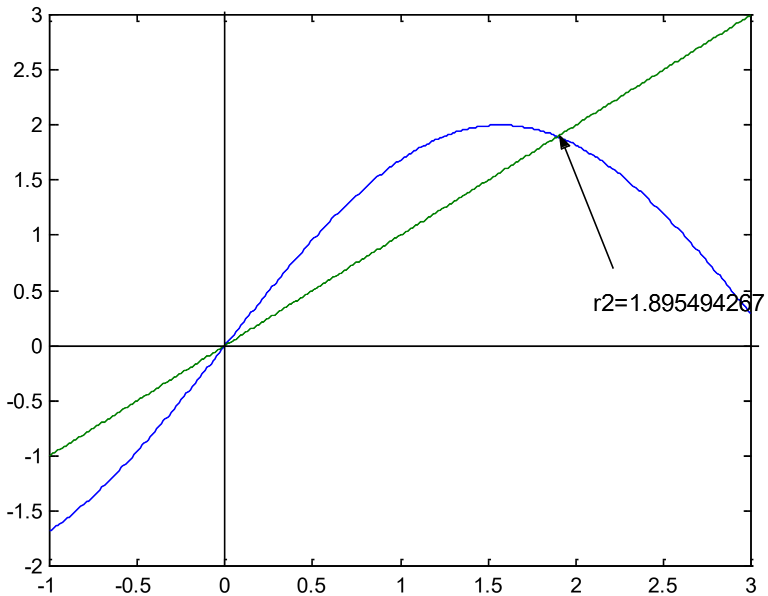
נקודת השבת (כלומר נקודה עבורה $x = g(x) = 2\cdot\sin(x)$) בה נתעניין

היא $\boxed{r_2 = 1.895494267}$ (לפונקציה יש 2 נקודת שבת נוספות $r_1 = 0$

ו- $r_3 = -r_2$)

נבחר (תוך שימוש ב- matlab) את הקטע $I = [a,b] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$

בו נמצאת נקודת השבת:



שיטת נקודת שבת , המשך תרגיל

נוודא כי תנאי המשפט מתקיימים עבור קטע זה:

א) $g(x)$ רציפה בקטע. (פונקציה אלמנטארית רציפה בתחום הגדרתה הטבעי.)

ב) $g(x)$ מונוטונית יורדת בקטע לכן מספיק לבדוק את ערכיה בקצות הקטע:

$$\begin{cases} g(\pi/2) = 2 \in I \\ g(2\pi/3) = \sqrt{3} \in I \end{cases} \Rightarrow \quad g(x) \in I, \forall x \in I$$

ג) $g(x)$ גזירה בקטע $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ וכן $g'(x) = 2 \cdot \cos(x)$ מונוטונית יורדת ב- I

לכן:

$$-1 = g'\left(\frac{2\pi}{3}\right) < g'(x) < g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

שיטת נקודת שבת, המשך תרגיל

<u>מסקנה:</u> התהליך של שיטת נק' שבת **<u>יתכנס</u>** לפתרון **<u>יחיד</u>** לכל ערך התחלתי שנבחר ב - I .

<u>דוגמא להרצת התהליך:</u>

נבחר $x_0 = 1.57 \approx \frac{\pi}{2}$

$iter$	x	$g(x)$
1	1.570000	1.999999
2	1.999999	1.818596
3	1.818596	1.938909
4	1.938909	1.866016
5	1.866016	1.913477
6	1.913477	1.883715
7	1.883715	1.902878
8	1.902878	1.890732
9	1.890732	1.898511
10	1.898511	1.893560

שיטת נקודת שבת, המשך תרגיל

שימו לב כי $$-1 < g'(x) < 0, \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

ולכן ההתכנסות המובטחת הינה ספיראלית, כפי שניתן לראות בסקיצה הבאה: