אנליזה נומרית: מצגת מלווה 14

Numerical Integration:

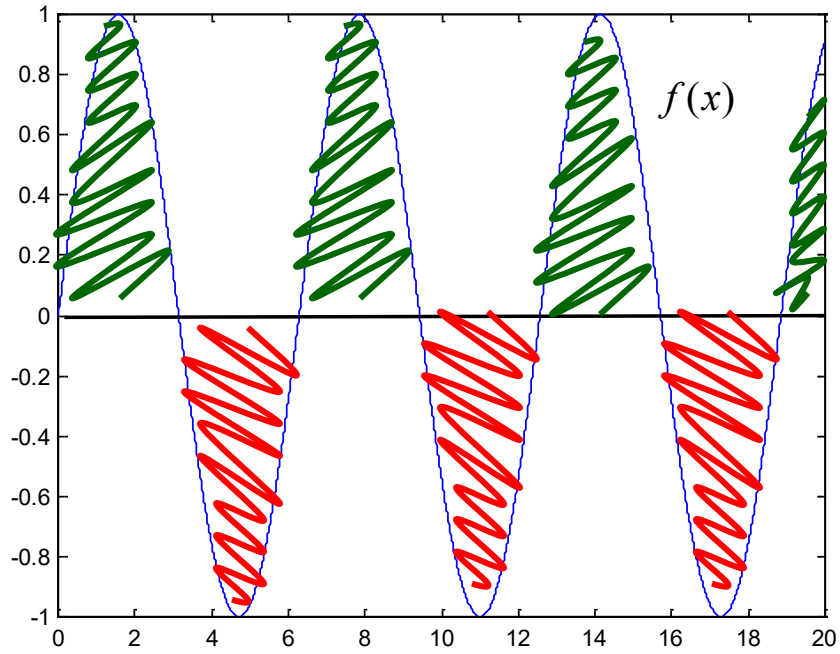
Part b. Simpson Method

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

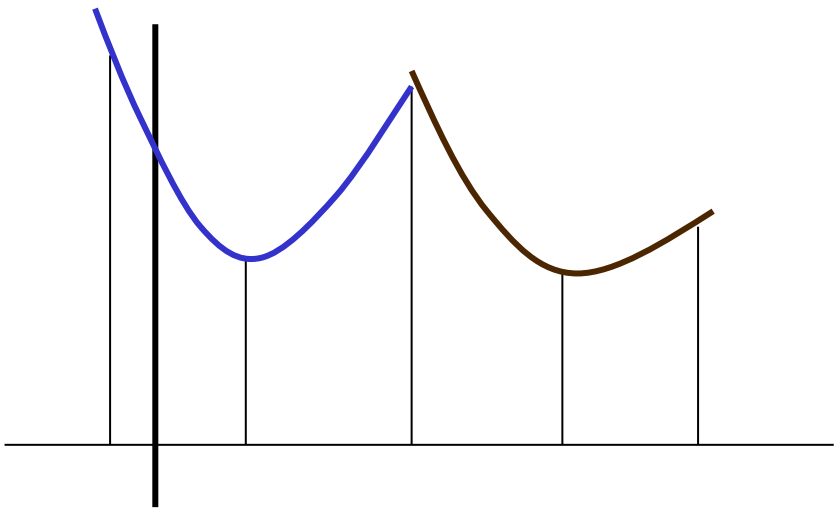
אינטגרציה נומרית

$$\int_a^b f(x)dx$$

<u>מטרה:</u> חישוב קירוב נומרי לאינטגרל המסוים



שיטת סימפסון - שיטת הפרבולות הרעיון הכללי



- מחלקים את הקטע $[a,b]$ ל- $2n$ קטעים שכ"א באורך $\boxed{h=\frac{b-a}{2n}}$
- כל "פס" טיפוסי שכולל 3 נקודות עוקבות מגדיר באופן יחיד פולינום אינטרפולציה ריבועי $L_2(x)$ (פרבולה).
- בכל "פס" מחליפים את האינטגרל מתחת לעקומה באינטגרל של הפרבולה.
- סכום האינטגרלים של n הפרבולות המתאימות מהווה קירוב לאינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

שיטת סימפסון לוקאלית

בהינתן 3 נקודות שוות מרחק x_0,x_1,x_2 כאשר $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$

וערכיהן של הפונקציה בנקודות אלה, בהתאמה f_0,f_1,f_2 ,

יהי $L_2(x)$ פולינום האינטרפולציה הריבועי (פרבולה) העובר דרך 3 הנקודות הנ"ל, אזי **קירוב סימפסון הלוקאלי לאינטגרל בקטע** מוגדר ע"י

$$S_2 = S_2[f\,;x_0,x_1,x_2] = \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx$$

טענה

נוסחת סימפסון הלוקלית הבנויה על אינטרפולציה ריבועית בנק' שוות המרחק x_0,x_1,x_2 נתונה ע"י:

$$S_2 = S_2[f;x_0,x_1,x_2] = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

שיטת סימפסון לוקאלית, המשך

הוכחה

נעזר **בהצגה של לגרנז' לפולינום האינטרפולציה הריבועי**:

$$L_2(x) = f_0 \cdot l_0(x) + f_1 \cdot l_1(x) + f_2 \cdot l_2(x)$$

כאשר $\{l_k(x)\}_{k=0}^{2}$ הפולינומים היסודיים של לגרנז'.

מכאן נובע:

$$\boxed{S_2 = \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx = f_0 \cdot \int_{x_0}^{x_2} l_0(x)dx + f_1 \cdot \int_{x_0}^{x_2} l_1(x)dx + f_2 \cdot \int_{x_0}^{x_2} l_2(x)dx}$$

נסמן:

$$\boxed{A_k = \int_{x_0}^{x_2} l_k(x)dx, \quad k = 0,1,2}$$

אזי

$$\boxed{S_2 = \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx = f_0 \cdot A_0 + f_1 \cdot A_1 + f_2 \cdot A_2}$$

$$A_k = \int_{x_0}^{x_2} l_k(x)dx, \quad k = 0,1,2$$

המשך ההוכחה

נחשב $\boxed{A_k\,, \quad k = 0,1,2}$

$$\boxed{A_0 =} \int_{x_0}^{x_2} l_0(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\underbrace{(x_0-x_1)}_{-h}\underbrace{(x_0-x_2)}_{-2h}}dx = \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} z(z-h)dz = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}\left(z^2 - hz\right)dz = \frac{1}{2h^2}\cdot\left(\frac{z^3}{3} - h\frac{z^2}{2}\Big|_{-h}^{h}\right) = \boxed{\frac{h}{3}}$$

הצבה

$$\boxed{z = x - x_1\,, \quad z(x_0) = -h, z(x_2) = h\,, \quad x - x_2 = z - h, \quad x - x_0 = z + h}$$

המשך ההוכחה

באופן דומה,

$$\boxed{A_1 =}\int_{x_0}^{x_2} l_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{\underbrace{(x_1-x_0)}_{h}\underbrace{(x_1-x_2)}_{-h}}dx = -\frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx =$$

הצבה כמו קודם $\boxed{z = x - x_1}$

$$= -\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}(z+h)(z-h)dz = -\frac{1}{h^2}\cdot\underbrace{\int_{-h}^{h}(z^2-h^2)dz}_{-\frac{4}{3}h^3} = \boxed{\frac{4}{3}h}$$

$$\boxed{A_2 =}\int_{x_0}^{x_2} l_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{\underbrace{(x_2-x_0)}_{2h}\underbrace{(x_2-x_1)}_{h}}dx = \frac{1}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx =$$

$$\boxed{z = x - x_1} = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}(z+h)zdz = \frac{1}{2h^2}\underbrace{\int_{-h}^{h}\left(z^2+hz\right)dz}_{2/3\,h^3} = \boxed{\frac{h}{3}}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

$$S_2 = \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx = f_0 \cdot A_0 + f_1 \cdot A_1 + f_2 \cdot A_2$$

המשך הוכחה

קיבלנו $A_0 = \frac{h}{3}; A_1 = \frac{4h}{3}; A_2 = \frac{h}{3}$

ומכאן

$$S_2 = \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx = f_0 \cdot \frac{h}{3} + f_1 \cdot \frac{4h}{3} + f_2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$\boxed{S_2 = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]}$$

נוסחת סימפסון גלובלית

על מנת למצוא ערך מקורב ל- $\int_a^b f(x)dx$. נחלק את הקטע $[a,b]$ ל- $2n$ קטעים באורך $\boxed{h=\frac{b-a}{2n}}$ כ"א. באמצעות $2n+1$ נקודות חלוקה

$$\boxed{a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=b} \qquad (x_k=a+kh,\ \ k=0,1,\ldots,2n)$$

נסמן $\boxed{f(x_k)=f_k\,,\quad k=0,1,\cdots,2n}$

- ✓ דרך 3 הנקודות הראשונות x_0,x_1,x_2 נעביר פרבולה ראשונה.
- ✓ דרך 3 הנקודות העוקבות x_2,x_3,x_4 נעביר פרבולה שניה.

$\vdots$

- ✓ דרך 3 הנקודות האחרונות x_{2n-2},x_{2n-1},x_{2n} נעביר פרבולה n –ית.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

נוסחת סימפסון גלובלית - המשך

מתכונות אינטגרל מסוים נקבל:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

נוסחאות סימפסון הלוקליות בתתי הקטעים תהיינה בהתאמה:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong S_2\left[f; x_0, x_1, x_2\right] = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \cong S_2\left[f; x_2, x_3, x_4\right] = \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \cong S_2\left[f; x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}\right] = \frac{h}{3}\left[f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right]$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

נוסחת סימפסון גלובלית - המשך

קירוב סימפסון הגלובלי $S_{2n}[f;a,b]$ לאינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מוגדר כסכום קירובי סימפסון הלוקליים, כלומר:

$$\int_a^b f(x)dx \cong S_{2n}[f;a,b] = \left(\frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2]\right)+\left(\frac{h}{3}[f_2+4f_3+f_4]\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{h}{3}[f_{2n-4}+4f_{2n-3}+f_{2n-2}]\right)+\left(\frac{h}{3}[f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}]\right)$$

<u>טענה:</u> נוסחת סימפסון הגלובלית בקטע $[a,b]$ היא:

$$\int_a^b f(x)dx \cong S_{2n}[f;a,b] = \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+4f_{2n-1}+f_{2n}]$$

$$h=\frac{b-a}{2n}$$

שיטת סימפסון-דוגמא 1

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

שערכו המדויק הוא $I = \ln 2 = 0.69314718...$

חשבו קירובים ל- I ע"י קירובי סימפסון S_2, S_4.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1

❑ חישוב הקירוב S_2

- במקרה זה $2n = 2$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ לשני תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{2}$ ולכן נתבסס על 3 נקודות החלוקה $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.
- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, f_2 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב סימפסון המתאים יהיה קירוב סימפסון לוקלי (מבוסס על פרבולה אחת)

$$S_2 = \frac{h}{3}\cdot[f_0 + 4f_1 + f_2] = \frac{1}{6}\cdot\left[1 + 4\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{25}{36} = 0.694444\ldots$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

❑ חישוב הקירוב S_4

- במקרה זה $2n = 4$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ לארבעה תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{4}$ ולכן נתבסס על 5 נקודות החלוקה $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$.
- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, f_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, f_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{7},\ f_4 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב סימפסון המתאים יהיה קירוב סימפסון גלובלי (מבוסס על 2 פרבולות)

$$S_4 = \frac{h}{3} \cdot [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4] =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left[1 + 4 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1747}{2520} = 0.6932539683\ \ldots$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

דוגמא 1- המשך

נרכז את קירובי סימפסון שקיבלנו ונשווה לקירוב הטרפז שחישבנו קודם עבור אותו אינטגרל

קירובי טרפז	קירובי סימפסון
$T_1 = 0.75$	
$T_2 = 0.70833\ldots$	$S_2 = 0.694444\ldots$
$T_3 = 0.7$	
$T_4 = 0.6970238095\ldots$	$S_4 = 0.6932539683\ldots$

שגיאה לוקאלית של נוסחת סימפסון

בלי הגבלת הכלליות נתייחס באופן לוקלי ל"פס" הראשון $[x_0,x_2]$.

שגיאת הקירוב בתת קטע זה מוגדרת ע"י

$$E_1^S[f;x_0,x_2]=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - S_2[f;x_0,x_2]$$

טענה: אם $f(x)$ בעלת נגזרת רביעית רציפה בקטע $[x_0,x_2]$

אזי קיימת נקודת ביניים $x_0 < \eta < x_2$ שעבורה שגיאת סימפסון הלוקלית בקטע נתונה ע"י:

$$E_2^S = E_2^S[f;x_0,x_1,x_2] = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\eta)\cdot h^5, \quad x_0 < \eta < x_2 \qquad (1)$$

שגיאת גלובלית של שיטת סימפסון

- שגיאת הקירוב הגלובלית מוגדרת ע"י

$$E_{2n}^{S}[f;a,b]=\int_a^b f(x)dx-S_{2n}[f;a,b]$$

- כיוון שקירוב סימפסון גלובלי מוגדר כסכום של n קירובי סימפסון לוקליים אז השגיאה הגלובלית תוגדר בהתאמה כסכום n השגיאות הלוקליות (השגיאה המצטברת בקטע), כלומר:

$$E_{2n}^{S}=\sum_{k=1}^{n}E_{2}^{S}\left[f;x_{2k-2},x_{2k-1},x_{2k}\right]$$

טענה:

אם $f(x)\in C^4[a,b]$ אזי קיימת נקודת ביניים $a<\xi<b$ שעבורה שגיאת סימפסון הגלובלית בקטע נתונה ע"י:

$$(2)\qquad E_{2n}^{S}=-\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot f^{(4)}(\xi),\quad a<\xi<b$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

הוכחת הטענה בדבר שגיאת סימפסון גלובלית

ניישם את הנוסחה שקיבלנו עבור שגיאה לוקאלית לכל תת קטע:

$$
\begin{aligned}
&E_2^S\left[f;x_0,x_1,x_2\right]=-\frac{1}{90}h^5\cdot f^{(4)}(r_1) && x_0<r_1<x_2\\
&E_2^S\left[f;x_2,x_3,x_4\right]=-\frac{1}{90}h^5\cdot f^{(4)}(r_2) && x_2<r_2<x_4\\
&\vdots\\
&E_2^S\left[f;x_{2n-2},x_{2n-1},x_{2n}\right]=-\frac{1}{90}h^5\cdot f^{(4)}(r_n) && x_{2n-2}<r_n<x_{2n}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

כאשר:

$$
E_{2n}^S=E_2^S\left[f;x_0,x_1,x_2\right]+E_2^S\left[f;x_2,x_3,x_4\right]+\cdots+E_2^S\left[f;x_{2n-2},x_{2n-1},x_{2n}\right]
$$

שגיאה גלובלית של נוסחת סימפסון, המשך הוכחה

- נסכם ונקבל:

$$E_{2n}^{S} = -\frac{1}{90}\cdot h^5 \cdot \sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(r_k) = -\frac{1}{90}\cdot h^5 \cdot \left(n \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(r_k)}{n} \right) \qquad (3)$$

- הביטוי $\boxed{\frac{\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(r_k)}{n}}$ הנו **ממוצע חשבוני** של הערכים $\left\{ f^{(4)}(r_k) \right\}_{k=1}^{n}$

אשר נמצא בין הערך המינימלי והמקסימלי בקבוצה שבעצמם חסומים ע"י ערך מינימלי ומקסימלי בקטע.

- לכן, $\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n} \le \max_{a\le x\le b} f''(x)$

שגיאה גלובלית של נוסחת סימפסון, המשך הוכחה

- לכן קיימת נקודה $\boxed{a<\xi<b}$ כך ש- $\boxed{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(r_k)=f^{(4)}(\xi) \qquad (4)}$

- מ- (3) ו- (4) נקבל

$$E_{2n}^{S}=-\frac{1}{90}\cdot h^5\cdot n\cdot f^{(4)}(\xi)=-\frac{1}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^5\cdot n\cdot f^{(4)}(\xi)$$

ובאופן שקול,

$$\boxed{E_{2n}^{S}=-\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot f^{(4)}(\xi),\quad a<\xi<b}$$

מסקנות והערות לגבי נוסחת שגיאה גלובלית של שיטת סימפסון

א. $\boxed{E_{2n}^{S} = O\left(\frac{1}{n^4}\right)}$ (**סדר גודל של השגיאה**)

ב. נוסחת סימפסון הגלובלית מדויקת עבור כל פולינום ממעלה ≥ 3 (כי אז $E_{2n}^{S} \equiv 0$)

ג. שגיאת סימפסון ניתנת לחישוב גם עבור כל פולינום ממעלה 4.

ד. למעט המקרים שהוזכרו לעיל, נוסחת השגיאה היא בעלת אופי תיאורטי בלבד, כיוון שערכה של הנקודה ξ לא ידוע, לכן בדרך כלל נחשב את חסם השגיאה (כמו באינטרפולציה). נציג כעת את **ההערכה לשגיאה מוחלטת**.

חסם לשגיאה מוחלטת
של שיטת סימפסון הגלובלית

עבור חלוקה של הקטע $[a,b]$ ל- $2n$ תתי קטעים שווי אורך.

נסמן: $M_4 = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$

אזי חסם לשגיאה מוחלטת בשיטת סימפסון הגלובלית בקטע $[a,b]$ הינו

$$\left| E_{2n}^{S} \right| \le \frac{1}{180} \cdot \frac{(b-a)^5}{(2n)^4} \cdot M_4$$

שיטת סימפסון-דוגמא 2

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

שערכו המדויק הוא $I = \ln 2 = 0.69314718...$.

איזה קירוב סימפסון S_{2n} נדרש לחשב על מנת למצוא ערך מקורב לאינטגרל הנתון שיבטיח רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-7}$?

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון דוגמא 2

נתון $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2 = 0.69314718...$

- בשלב ראשון נמצא חסם לשגיאת סימפסון המוחלטת $\left|E_{2n}^{S}\right|$ באמצעות הנוסחה

$$\boxed{\left|E_{2n}^{S}\right| \le \frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot M_4,\quad M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{24}{(x+1)^5} \text{ is decreasing monotonic} \Rightarrow M_4 = \max_{0\le x\le 1}\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(0)\right| = 24$$

$$\Rightarrow \left|E_{2n}^{S}\right| \le \frac{1}{180\cdot(2n)^4}\cdot 24 = \frac{1}{120n^4}$$

- בשלב השני נפתור את אי השוויון $\left|E_{2n}^{S}\right| \le \frac{1}{120n^4} \le 10^{-7}$

$$\frac{1}{120n^4} \le 10^{-7} \Rightarrow n \ge \sqrt[4]{\frac{10^7}{120}} \cong 16.99 \Rightarrow n \ge 17 \Rightarrow 2n = 34 \Rightarrow S_{2n} = S_{34}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

דוגמא 2 - הערה

- נזכיר כי פתרנו תרגיל דומה עבור שיטת הטרפז ושם קיבלנו כי על מנת למצוא קירוב לאינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ באמצעות שיטת הטרפז T_n כך שתובטח רמת דיוק $\varepsilon = 10^{-7}$ נדרשים $n = 1291$ קטעי חלקוה לפחות.

- עם זאת, עבור שיטת סימספון ואותה רמת דיוק מצאנו שנדרשים רק $2n = 34$ קטעי חלוקה (כלומר, סיבוכיות יותר נמוכה משמעותית)

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

שיטת סימפסון-דוגמא 3

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ ויהי S_{2n} קירוב סימפסון הגלובלי המתאים
הוכיחו או הפריכו: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $I - S_{2n} > 0$.

<u>פתרון:</u> נזכור כי $I - S_{2n} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - S_{2n} = E_{2n}^S[f;a,b]$ ולכן ניתן לבדוק באופן שקול האם $E_{2n}^S[f;a,b] > 0$.

לשם כך נשתמש בנוסחת השגיאה בפועל (ולא בנוסחת חסם לשגיאה מוחלטת!)

$$\boxed{E_{2n}^S[f;a,b] = -\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot f^{(4)}(\xi);\quad a<\xi<b}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5} \Rightarrow f^{(4)}(\xi) = \frac{24}{(\xi+1)^5} \underset{0<\xi<1}{>} 0$$

$$\Rightarrow E_{2n}^S = \underbrace{-\frac{1}{180}}_{<0}\cdot\underbrace{\frac{1}{(2n)^4}}_{>0}\cdot\underbrace{f^{(4)}(\xi)}_{>0} < 0 \quad\Rightarrow\quad I - S_{2n} < 0 \quad\Longrightarrow$$

הטענה לא נכונה

אינטגרציה נומרית

תרגילים נוספים

תרגיל 1

מקרבים את $f(x) = x^2 - e^x$ בקטע $[0,3]$ באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_3(x)$ הבנוי על נק' שוות מרחק בקטע הנתון.

משתמשים בקירוב זה על מנת לקרב את האינטגרל $I = \int_{1.2}^{1.8} f(x)dx$ באמצעות $I^* = \int_{1.2}^{1.8} L_3(x)dx$

הוכיחו או הפריכו: שגיאת הקירוב היא שלילית, כלומר $I - I^* < 0$.

פתרון תרגיל 1

- מקרבים את $f(x) = x^2 - e^x$ בקטע $[0,3]$ באמצעות $L_3(x)$ הבנוי על 4 נק' שוות מרחק בקטע הנתון שהן $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.
- לפיכך נוכל לייצג את שגיאת האינטגרציה המתאימה ע"י:

$$(1)\quad I - I^* = \int_{1.2}^{1.8} f(x)dx - \int_{1.2}^{1.8} L_3(x)dx = \int_{1.2}^{1.8} \big(f(x) - L_3(x)\big)dx$$

- כאשר הביטוי $\big(f(x) - L_3(x)\big)$ מייצג למעשה את שגיאת האינטרפולציה המתאימה בקטע האינטגרציה $[1.2,1.8]$ (שהוא תת קטע של קטע האינטרפולציה $[0,3]$).
- נזכיר עוד כי שגיאת האינטרפולציה נתונה ע"י

$$f(x) - L_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_4(x)$$ כאשר $0 < \xi < 3$ ו- $1.2 < x < 1.8$

כאשר $\omega_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$

המשך, פתרון תרגיל 1

- נחקור את סימן שגיאת האינטרפולציה בקטע האינטגרציה (אשר יקבע למעשה את סימן שגיאת האינטגרציה). מתקיים:

$$f(x)=x^2-e^x \Rightarrow f^{(4)}(x)=-e^x \Rightarrow (2)\ f^{(4)}(\xi)=-e^{\xi}<0;\quad 0<\xi<3$$

$$\omega_4(x)\underset{\substack{\downarrow \\ x\in[1.2,1.8]}}{=}\overset{+}{x}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-}\underbrace{(x-3)}_{-}\Rightarrow (3)\ \omega_4(x)>0;\ \forall x\in[1.2,1.8]$$

- מ- (2) ו- (3) נסיק כי

$$f(x)-L_3(x)=\frac{\overbrace{f^{(4)}(\xi)}^{-}}{4!}\cdot\underset{\substack{>0\\ x\in[1.2,1.8]}}{\omega_4(x)}<0\Rightarrow (4)\ f(x)-L_3(x)<0;\ \forall x\in[1.2,1.8]$$

- נציב את תוצאה (4) בייצוג (1) לשגיאת האינטגרציה ונקבל מתכונות של אינטגרל מסוים כי

$$I-I^*=\int_{1.2}^{1.8}\underbrace{\left(f(x)-L_3(x)\right)}_{<0}dx<0 \Longleftarrow$$

הטענה נכונה

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

תרגיל 2

מקרבים את $f(x) = x^2 - e^x$ בקטע $[0,4]$ באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ הבנוי על נק' שוות מרחק בקטע הנתון.

משתמשים בקירוב זה על מנת לקרב את האינטגרל $I = \int_0^4 f(x)dx$ באמצעות $I^* = \int_0^4 L_2(x)dx$

מצאו חסם לשגיאה מוחלטת של האינטגרציה, כלומר חסם ל- $|I - I^*|$.

פתרון תרגיל 2

- באופן דומה לניתוח שעשינו בתרגיל קודם נוכל להסיק כי $L_2(x)$ בנוי על 3 נק' שוות מרחק בקטע האינטגרציה הנתון שהן $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4$.
  וכי שגיאת האינטגרציה המתאימה ניתנת לייצוג ע"י:

$$I - I^* = \int_0^4 \left(f(x) - L_2(x)\right) dx$$

- מתכונות של אינטגרלים מסוימים נובע כי

$$\left|I - I^*\right| = \left|\int_0^4 \left(f(x) - L_2(x)\right) dx\right| \le \int_0^4 \left|f(x) - L_2(x)\right| dx$$

- ולכן נמצא חסם לשגיאה מוחלטת של האינטרפולציה בקטע $[0,4]$, כלומר חסם לאינטגרנד $|f(x) - L_2(x)|$.
- לשם כך נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה

$$\boxed{\left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!} \cdot \max_{a \le x \le b} \left|\omega_{n+1}(x)\right|}$$

$$\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot \max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

המשך פתרון תרגיל 2

- נחשב $\max_{0\le x\le 4}|f(x)-L_2(x)|$

$$\left|f'''(x)\right| = e^x \text{ is monotonic \& increasing} \Rightarrow \max_{0\le x\le 4}\left|f'''(x)\right| = \left|f'''(4)\right| = e^4 \Rightarrow M_3[0,4] = e^4$$

$$\omega_3(x) = x(x-2)(x-4) = x^3-6x^2+8x \Rightarrow \omega_3'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2-12x+8=0 \Rightarrow \tilde{x}_{1,2} = \frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left|\omega_3(0)\right| = \left|\omega_3(4)\right| = 0;\ \left|\omega_3(\tilde{x}_{1,2})\right| = \frac{16\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \max_{0\le x\le 4}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

לפיכך נקבל חסם לשגיאת האינטרפולציה בקטע

$$\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[0,4]}{3!}\cdot \max_{0\le x\le 4}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{e^4}{3!}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{3}}{27}\cdot e^4$$

- ובאמצעותו את החסם הבא לשגיאת האינטגרציה בקטע

$$\left|I-I^*\right| \le \int_0^4 \left|f(x)-L_2(x)\right|dx \le \int_0^4 \frac{8\sqrt{3}\cdot e^4}{27}dx = \frac{8\sqrt{3}\cdot e^4}{27}\cdot \underbrace{\int_0^4 dx}_{=4} = \frac{32\sqrt{3}\cdot e^4}{27}$$

תרגיל 3

מקרבים את $f(x) = x^2 - e^x$ בקטע $[0,4]$ באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ הטוב ביותר האפשרי בקטע.

משתמשים בקירוב זה על מנת לקרב את האינטגרל $I = \int_0^4 f(x)dx$ באמצעות $I^* = \int_0^4 L_2(x)dx$

מצאו חסם לשגיאה מוחלטת של האינטגרציה, כלומר חסם ל- $|I - I^*|$.

פתרון תרגיל 3

באופן דומה לניתוח שעשינו בשני התרגילים הקודמים והיות ומדובר באינטרפולציה אופטימלית נוכל להסיק כי $L_2(x)$ בנוי על 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע וכי שגיאת האינטגרציה המתאימה חסומה ע"י: $\left|I-I^*\right| \le \int_0^4 \left|f(x)-L_2(T;x)\right| dx$

- נמצא חסם לשגיאה מוחלטת $\max_{0\le x\le 4}\left|f(x)-L_2(T;x)\right|$

לשם כך נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה האופטימלית

$$\boxed{\left|f(x)-L_n(T;x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}}$$

- חישבנו קודם $M_3[0,4]=e^4$ ולכן נקבל: $\left|f(x)-L_2(T;x)\right| \le \frac{\overbrace{M_3[0,4]}^{e^4}}{3!}\cdot\frac{4^3}{2^5}=\frac{e^4}{3}$
- אשר גורר: $\left|I-I^*\right| \le \int_0^4 \left|f(x)-L_2(T;x)\right| dx \le \int_0^4 \frac{e^4}{3}dx = \frac{e^4}{3}\cdot\underbrace{\int_0^4 dx}_{=4} = \frac{4}{3}\cdot e^4$
- שימו לב כי קבלנו חסם קטן יותר מאשר זה שקבלנו עבור נקודות שוות מרחק (האופטימליות של אינטרפולציה בנק' צ'ביצ'ב משרה אופטימליות עבור קירוב האינטגרציה המתאים)

תרגיל 4

נתון האינטגרל $I = \int_0^{4a}\left(x - 1 + e^{-x/2}\right)dx$ עם פרמטר ממשי $a > 0$.

מצאו את נקודות החלוקה של קטע האינטגרציה עם a שלם שעבורם קירוב סימפסון S_4 לאינטגרל הנתון מבטיח רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\left|E_{2n}^{S}\right| \le \frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot M_4,\quad M_4=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

פתרון תרגיל 4

נתון האינטגרל $I=\int_0^{4a}\left(x-1+e^{-x/2}\right)dx$ עם פרמטר ממשי $a>0$.

- בשלב ראשון נשתמש בחסם לשגיאת סימפסון גלובלית S_4 על מנת למצוא ערכי $a>0$ שלמים שעבורו קירוב סימפסון S_4 יבטיח את רמת הדיוק הנדרשת:

$$f(x)=x-1+e^{-x/2}\Rightarrow\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{1}{16}e^{-x/2}\ \text{ is decreasing monotonic}\Rightarrow M_4=\max_{0\le x\le 4a}\left|f^{(4)}(x)\right|\underset{a>0}{\overset{\downarrow}{=}}\left|f^{(4)}(0)\right|=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow\left|E_4^S\right|\le\frac{1}{180}\cdot\frac{(4a-0)^5}{4^4}\cdot M_4=\frac{1}{180}\cdot\frac{4^5\cdot a^5}{4^4}\cdot\frac{1}{16}=\frac{a^5}{720}$$

כעת נפתור אי שוויון מתאים $\Rightarrow\left|E_4^S\right|\le\frac{a^5}{720}\le 10^{-2}\longrightarrow a\le\sqrt[5]{720\cdot 10^{-2}}\simeq 1.48411\ldots$

- טווח ערכים מתאים הוא $0<a\le 1.48411\ldots$ ויש a שלם מתאים יחיד בטווח שהוא $a=1$ שעבורו 5 נקודות החלוקה של הקטע $[0,4a]=[0,4]$ הנדרשות לחישוב S_4 הן $x_0=0,x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=4$