המכללה האקדמית להנדסה בראודה
המחלקה להנדסת תוכנה ומערכות מידע
אנליזה נומרית חורף תשפ"ו
ד"ר דבורה טולדנו קטעי

<u>שאלות לדוגמא</u>

<u>שאלה 1:</u>

נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 0.01x_1 + x_2 = 0.695 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2.35 \end{cases}$. מצאו למערכת **<u>פתרון נומרי</u>** עם תוך שימוש בשיטת האלימינציה של גאוס עם Partial Pivoting.

* <u>יש לבצע עיגול rd של 3 ספרות במנטיסה מנורמלת ולפרט את כל חישובי העזר ועיגולי הביניים בתהליך הדירוג וההצבה לאחור.</u> תשובה ללא פירוט החישובים ועיגולי הביניים תקבל ניקוד חלקי.

<u>שאלה 2</u>

נתונה המערכת $Ax = b$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & -a \\ 0 & -a & 3 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ עם $a \neq \pm\sqrt{1.5}$ ממשי.

א. מצאו את תחום ערכי $a \in \mathbb{R}$ עבורם שיטת יעקובי מתכנסת לכל וקטור התחלתי.

ב. עבור $a = 0.5$ נתון הפתרון המדויק $x = (2, -1, 0)^t$ (עם 3 ספרות במנטיסה). חשבו את $\|B_J\|_\infty$ ואת מספר האיטרציות הנדרש עם וקטור התחלה $x^{(0)} = (1,1,1)^t$ כדי להבטיח $\left\|e^{(m)}\right\|_\infty \leq 10^{-6}$.

<u>שאלה 3:</u>

נתון כי:

- $g(x)$ היא פונקציה רציפה לכל x וגם אי זוגית המקיימת $g(1) = 2$.
- קיימת נקודה יחידה $r \in (-1,1)$ שעבורה $g(r) = \frac{r^2}{4}$.

מגדירים $f(x) = 4g(x) - x^2$.

הוכיחו כי סדרת הקירובים $\{m_n\}_{n\geq 0}$ המתקבלת בשיטת החצייה המיושמת לפתרון המשוואה $f(x) = 0$ בקטע $[-1,1]$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}(m_n) = r$.

<u>שאלה 4:</u>

סטודנטים בקורס "אנליזה נומרית" התבקשו להציע שיטת נקודת שבת למציאת הפתרון $r = 1$ של המשוואה $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$.

א. סטודנט חרוץ שניגש לפתור את הבעייה הציע מיד את השיטה האיטרטיבית $x_{n+1} = g(x_n) = 4x_n^3 - 4x_n^2 + 1; \quad n \geq 0$. הוכיחו כי הצעתו לא מתאימה לפתרון הבעייה.

ב. סטודנט שנה ד' שכבר למד את הקורס בעבר הציע לחברו את השיטה האיטרטיבית $x_{n+1} = h(x_n) = (1-A)\cdot x_n + A\cdot g(x_n); \quad n \geq 0$ (עם $g(x_n)$ מסעיף קודם ו- $A \neq 0$ פרמטר ממשי).

מצאו טווח ערכים עבור A שבו מובטחת <u>התכנסות לוקלית</u> של השיטה המוצעת ל- $r=1$

ג. עבור $A = -\frac{1}{2}$ מצאו קטע $I = [a, b]$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 1$ לכל $x_0 \in I$.

מהו <u>סדר</u> <u>ההתכנסות</u> הלוקלי של השיטה במקרה זה?

שאלה 5:

נתון כי לפונקציה $f\left(x\right)$ קיים שורש ממשי r מריבוי 2 בדיוק. מגדירים פונקצית איטרציה של שיטת נקודת שבת ע"י $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-x^2$.

א. מצאו את הערכים האפשריים של r .

ב. עבור כל אחת מהאפשרויות: בדקו האם הסדרה המתאימה $\left\{x_{n+1}=g\left(x_n\right)\right\}_{n\geq 0}$ מתכנסת לוקלית ואם כן מצאו תנאי להתכנסות לוקלית ריבועית בדיוק .

שאלה 6

נתונה המשוואה $f(x)=ax-x^2=0$ ($a\neq 0$ פרמטר ממשי) . לצורך חישוב נומרי של הפתרון $r=a$ של המשוואה הוצעה השיטה האיטרטיבית הבאה:

$$x_{n+1}=(a+1)\cdot x_n-x_n^2;\qquad n\geq 0 \;.$$

א. מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת התכנסות לוקלית לשורש r .

ב. עבור איזה ערך של a בטווח שמצאתם מובטחת התכנסות לוקלית מסדר שני?

ג. הציגו פונקצית איטרציה של שיטה <u>נוספת</u> המבטיחה התכנסות מסדר 2 לפחות לשורש $r=a$.

שאלה 7

מקרבים את הפונקציה $f(x)=ln((x+a)^2)+3x$ בקטע $[1,5]$ ($a>0$ ממשי) באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ <u>הטוב ביותר האפשרי</u> בקטע.

א. מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-2}$.
(בסעיף זה <u>אין צורך</u> למצוא את נקודות האינטרפולציה ואת $L_2(x)$)

א. מצאו את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב $L_2(T;x)$ בקטע הנתון $[1,5]$.

ב. עבור $a=5$ הוכיחו (ללא חישוב מפורש של $L_2(x)$) כי לכל $x\in[2,2.5]$ מתקיים $f\left(x\right)-L_2\left(T;x\right)>0$.

שאלה 8

מקרבים את הפונקציה $f(x)=e^{-0.5x}+x^2$ בקטע $[0,4a]$ ($a>0$ ממשי) באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ <u>הבנוי על נקודות שוות מרחק בקטע</u>

מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-2}$.
(<u>אין צורך</u> למצוא את נקודות האינטרפולציה ואת $L_2(x)$)

שאלה 9

תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ממשי ומקיימת

$$f(0)=\frac{3}{2},\; f[x_0,x_1]=-\frac{3}{2},\; f[x_1,x_2]=-\frac{1}{2},\; f[x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{8} \;.$$

בנו טבלת הפרשים מחולקים מתאימה וחשבו את פולינום האינטרפולציה $L_3(x)$ המתאים ל- $f(x)$ בנק' $x_0=-1, x_1=0, x_2=1, x_3=2$.

המכללה האקדמית להנדסה בראודה
המחלקה להנדסת תוכנה ומערכות מידע
אנליזה נומרית חורף תשפ"ו
ד"ר דבורה טולדנו קטעי

שאלה 10:

נתון כי קיים פולינום ריבועי $p_2(x)=x^2+ax+b$ כך שהקבוצה $\{p_0(x)=1, p_1(x)=x-1, p_2(x)\}$ מהווה קבוצה אורתוגונלית ביחס לקבוצת הנקודות $\{x_1=-1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, x_5=3\}$.

א. מצאו את a ו- b.

ב. מצאו את המקרב הטוב ביותר במובן ריבועים מינימליים לטבלה:

x	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-1	1	1	-1	1

שאלה 11:

יהי $Q_2(x)$ פולינום ממעלה ≥ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)$ במובן הריבועים המינימליים ויהי $H_2(x)$ פולינום ממעלה ≥ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $g(x)$ במובן הריבועים המינימליים.
הוכיחו או הפריכו: $Q_2(x)+H_2(x)$ הוא פולינום ממעלה ≥ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)+g(x)$ במובן הריבועים המינימליים.

שאלה 12:

מצאו $a,b\in\mathbb{R}$ כך שהקבוצה $\{q_0(x)\equiv 1,\ \ q_1(x)=x-1,\ \ q_2(x)=x^2-ab\cdot x+b\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי למרחב הפולינומים ממעלה ≤ 2 ביחס למ"פ הרציפה בקטע $[0,2]$ ($\langle f,g\rangle=\int_0^2 f(x)g(x)dx$).

שאלה 13:

מצאו קבועים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ שעבורם האינטגרל $\int_1^2\left[\frac{1}{x^2}-\alpha x-\frac{\beta}{x}\right]^2dx$ הינו מינימלי.

שאלה 14:

נתון כי $I=\int_0^4\frac{1}{x+2}dx=\ln 3\cong 1.0986122...$.

א. יהי T_n קירוב הטרפז ל- I. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $I-T_n<0$.

ב. נתונים קירוב הטרפז $T_0=\frac{4}{3}, T_1=\frac{7}{6}, T_2=\frac{67}{60}$.
הוכיחו כי $S_2=\frac{4T_1-T_0}{3}$ וכי $S_4=\frac{4T_2-T_1}{3}$.

ג. הוכיחו כי $I^*=\frac{16S_4-S_2}{15}$ מבטיח קירוב טוב יותר ל- I מקירוב סימפסון S_4.

שאלה 15:

איזה קירוב סימפסון S_{2n} נדרש לחישוב על מנת לקרב את האינטגרל $\int_{0.5}^{1.5}x\ln x dx$ עם רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-4}$?

<u>שאלה 16:</u>

יהיו $S_{2n}^{(1)}$ קירוב סימפסון לאינטגרל $I_1=\int_3^4 e^x dx$ ו- $S_{2n}^{(2)}$ קירוב סימפסון לאינטגרל $I_2=\int_4^5 e^x dx$ ויהיו E_1 ו- E_2 שגיאות האינטגרציה בהתאמה. הוכיחו כי מתקיים אי השוויון $E_1>E_2$.

<u>שאלה 17:</u>

מקרבים את הפונקציה $f(x)=\ln(x+4)$ בקטע $[-2,2]$ באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ <u>הטוב ביותר האפשרי</u> בקטע.

א. מצאו את נקודות האינטרפולציה המתאימות x_0,x_1,x_2.

ב. מצאו חסם/הערכה לשגיאת האינטרפולציה המוחלטת בקטע $[-2,2]$.

ג. היעזרו בתוצאות סעיף קודם ומצאו חסם לשגיאת האינטגרציה האינטרפולטורית $\left|\int_{-2}^{2}\left(f(x)-L_2(x)\right)dx\right|$.

ד. נתון כי $p_2(x)$ הוא פולינום האינטרפולציה המקרב את $f(x)$ בקטע $[-2,2]$ באמצעות נקודות שוות מרחק בקטע. נגדיר את $I^*=\int_{0.5}^{1} p_2(x)dx$ כערך מקורב לאינטגרל המסויים $I=\int_{0.5}^{1} f(x)dx$. הוכיחו כי $I-I^*<0$.

מצאו תת קטע $[c,d]\subset[-2,2]$ שעבורו $\int_c^d f(x)dx-\int_c^d p_2(x)dx>0$.

<u>שאלה 18:</u>

נתון האינטגרל $I=\int_0^{2a}\ln(x+4)dx$ כאשר $a>0$ פרמטר ממשי.

מצאו את טווח ערכי a שעבורו קירוב סימפסון המתאים S_6 יבטיח רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-3}$.

<u>שאלה 19:</u>

נתון האינטגרל $I=\int_0^{2}\ln(x+a)dx$ כאשר $a>0$ פרמטר ממשי.

מצאו את טווח ערכי a שעבורו קירוב סימפסון המתאים S_6 יבטיח רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-3}$.