# אנליזה נומרית : מצגת מלווה #2

# שיטות נומריות לפתרון מערכת משוואות:
# הקדמה ושיטת גאוס

**נושאי המצגת:**

1. פתרון נומרי של מערכת משוואת לינאריות- הגדרת הבעיה וסוגי השיטות לפתרון.
2. שיטת האלימינציה של גאוס.

# הגדרת הבעיה

ברצוננו לפתור מערכת משוואות ליניאריות מהצורה $\boxed{(1) \qquad Ax = b}$

**ייצוג מטריציוני:**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

**ייצוג באמצעות מערכת משוואות:**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

# הגדרת הבעיה

- למערכת $\boxed{Ax=b}$ קיים פתרון אמם $A$ הפיכה כלומר אמם $\boxed{\det(A)\neq 0}$
במקרה זה אומרים כי המערכת סינגולרית והפתרון היחיד הוא $\boxed{x=A^{-1}\cdot b}$

- אם $\boxed{\det(A)=0}$ למערכת יש אינסוף פתרונות

- כאשר $\boxed{\det(A)\neq 0}$ אך גם $\boxed{\det(A)\to 0}$ המערכת נקראת "חולנית" (או סינגולרית נומרית)-

במקרה זה אמנם קיים תיאורטית פתרון יחיד אך ייתכן כי השיטות הנומריות יתקשו לאתר אותו.

# שיטות נומריות לפתרון מערכת משוואות ליניאריות

ניתן לחלק את השיטות הנומריות לפתרון מערכת המשוואות הליניאריות $\boxed{Ax=b}$ לשתי קבוצות:

- **שיטות ישירות**
  שיטות אלו כרוכות ביישום נומרי של שיטות אנליטיות (דירוג מטריצה).
  בשיטות אלו מספר פעולות החשבון הוא סופי ואמורים לקבל פתרון אנליטי מקורב (תוך מגבלת הדיוק הנובעת מטעויות עיגול). שיטות אלו עדיפות ליישום על מערכות לא גדולות באופן יחסי.
  אנו נלמד בקורס את **שיטת האלימינציה ( החילוץ ) של גאוס עם/ללא pivoting** ונציג את **פירוק LU** ויישום שלו לפתרון מערכת משוואות.

# שיטות נומריות לפתרון מערכת משוואות ליניאריות

- **שיטות איטרטיביות**

בשיטות איטרטיביות מוותרים מראש על הפתרון המדויק ומחפשים פתרון נומרי מקורב תוך הגדרת מידת הדיוק הנדרשת.
מתחילים מניחוש התחלתי ומבצעים מספר סופי של איטרציות עד לקבלת הפתרון בקירוב הנדרש. השאלה היא האם יש התכנסות, אם כן מתי? האם ניתן לשפר סדר התכנסות וכו'.
אין הגבלה על גודל המערכת. עדיפות ליישום עבור מער' דלילות מסדר גדול.

אנו נלמד בקורס את **שיטת יעקובי** ואת **שיטת גאוס – זיידל**

# שיטת האלימינציה של גאוס לפתרון נומרי של מערכת משוואות ליניאריות

# אלגוריתם גאוס

נרצה כעת להתייחס לשיטת גאוס מההיבט האלגוריתמי.

בהינתן מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

## אלגוריתם גאוס כולל 2 שלבים:

**שלב ראשון:** **תהליך קדימה- תהליך השילוש**. זהו השלב בו אנו מדרגים את המטריצה המורחבת הנתונה של המערכת למטריצה שקולה משולשת עליונה. שלב זה נקרא גם **שלב החילוץ/האלימינציה.**

**שלב שני:** **תהליך ההצבה לאחור.** בשלב זה אנו מחשבים ערכי המשתנים השונים, כאשר אנו מתחילים מהמשוואה האחרונה.

# שיטת גאוס - תהליך שילוש המערכת

שלב הקלט

$$\left(A^{(1)}\middle|b^{(1)}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a^{(1)}{}_{11} & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & a^{(1)}{}_{14} & \cdots & a^{(1)}{}_{1n} \\ a^{(1)}{}_{21} & a^{(1)}{}_{22} & a^{(1)}{}_{23} & a^{(1)}{}_{24} & & a^{(1)}{}_{2n} \\ a^{(1)}{}_{31} & a^{(1)}{}_{32} & a^{(1)}{}_{33} & a^{(1)}{}_{34} & & a^{(1)}{}_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a^{(1)}{}_{n1} & a^{(1)}{}_{n2} & a^{(1)}{}_{n3} & a^{(1)}{}_{n4} & \dots & a^{(1)}{}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(1)}{}_{1} \\ b^{(1)}{}_{2} \\ b^{(1)}{}_{3} \\ \vdots \\ b^{(1)}{}_{n} \end{bmatrix}$$

שלב ראשון

$$\left(A^{(2)}\middle|b^{(2)}\right)$$

$$\begin{bmatrix} a^{(1)}{}_{11} & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & a^{(1)}{}_{14} & \cdots & a^{(1)}{}_{1n} \\ 0 & a^{(2)}{}_{22} & a^{(2)}{}_{23} & a^{(2)}{}_{24} & & a^{(2)}{}_{2n} \\ 0 & a^{(2)}{}_{32} & a^{(2)}{}_{33} & a^{(2)}{}_{34} & & a^{(2)}{}_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & a^{(2)}{}_{n2} & a^{(2)}{}_{n3} & a^{(2)}{}_{n4} & \dots & a^{(2)}{}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{(1)}{}_{1} \\ b^{(2)}{}_{2} \\ b^{(2)}{}_{3} \\ \vdots \\ b^{(2)}{}_{n} \end{bmatrix}$$

# שיטת גאוס - תהליך השילוש, המשך

שלב שני

$$\left(A^{(3)}\middle|b^{(3)}\right)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a^{(1)}{}_{11} & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & a^{(1)}{}_{14} & \cdots & a^{(1)}{}_{1n} & b^{(1)}{}_{1} \\ 0 & a^{(2)}{}_{22} & a^{(2)}{}_{23} & a^{(2)}{}_{24} & & a^{(2)}{}_{2n} & b^{(2)}{}_{2} \\ 0 & 0 & a^{(3)}{}_{33} & a^{(3)}{}_{34} & & a^{(3)}{}_{3n} & b^{(3)}{}_{3} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}{}_{n3} & a^{(3)}{}_{n4} & \cdots & a^{(3)}{}_{nn} & b^{(3)}{}_{n} \end{array}\right]$$

$\vdots$

שלב $n-1$

$$\left(A^{(n)}\middle|b^{(n)}\right)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a^{(1)}{}_{11} & a^{(1)}{}_{12} & a^{(1)}{}_{13} & a^{(1)}{}_{13} & \cdots & a^{(1)}{}_{1n} & b^{(1)}{}_{1} \\ 0 & a^{(2)}{}_{22} & a^{(2)}{}_{23} & a^{(2)}{}_{24} & \cdots & a^{(2)}{}_{2n} & b^{(2)}{}_{2} \\ 0 & 0 & a^{(3)}{}_{33} & a^{(3)}{}_{34} & \cdots & a^{(3)}{}_{3n} & b^{(3)}{}_{3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}{}^{(4)} & \cdots & a^{(4)}{}_{4n} & b^{(4)}{}_{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(n)}{}_{nn} & b^{(n)}{}_{n} \end{array}\right]$$

# דוגמא לתהליך קדימה

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

נבצע תהליך קדימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 4R_1]{l_{21} = \frac{0}{1} = 0 \quad l_{31} = \frac{-4}{1} = -4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{3}{2}R_2]{l_{32} = \frac{-3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

# שיטת גאוס - נוסחאות לשילוש המערכת

**איפוס עמודה ראשונה מתחת לאיבר** $a_{11}$ (בהנחה ש- $a_{11} \neq 0$)

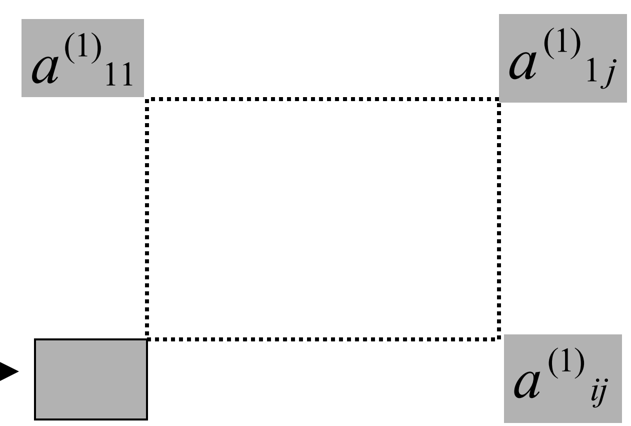
עבור כל שורה, החל מהשורה השנייה של המערכת מחשבים **גורם כפלי**

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad , \quad i = 2,3,\ldots,n$$

ובעזרתו מבצעים שינוי של איברי המטריצה ושל הווקטור $b$ כך:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)} \quad , \quad i,j = 2,3,\ldots,n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1} \cdot b_1^{(1)} \quad , \quad i = 2,3,\ldots,n$$




זהו האיבר שיש לאפס כעת

# שיטת גאוס - נוסחאות לשילוש המערכת, המשך

**<u>באופן כללי:</u>**

בשלב ה - $k$ אנו רוצים לאפס את העמודה ה - $k-$ית מתחת לאיבר $a^{(k)}{}_{kk}$ .

האיבר $a^{(k)}{}_{kk}$ נקרא בשם "**<u>ציר</u>**"(**pivot**), והשורה ממנה בא נקראת "**<u>שורת הציר</u>**"(**pivoting row**). בשלב ה- $k$ הציר הוא $a^{(k)}{}_{kk}$ ושורת הציר היא השורה ה - $k$ של המערכת המעודכנת לפי השלבים הקודמים.

**<u>איפוס העמודה ה-*k* מתחת לציר:</u>**

עבור כל שורה, החל מהשורה ה- $k+1$ של המערכת מחשבים גורם כפלי

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad , \quad i = (k+1),(k+2),\ldots,n$$

ובעזרתו מבצעים שינוי של איברי המטריצה ושל הווקטור $b$ כך:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i,j = (k+1),(k+2),\ldots,n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = (k+1),(k+2),\ldots,n$$

# שיטת גאוס -שילוש המערכת, המשך

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots\cdots + a_{kn}x_n = b_k \\
\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

# שיטת גאוס - תהליך ההצבה לאחור

נתונה המערכת המשולשת עליונה $A^{(n)}x = b^{(n)}$

תהליך ההצבה לאחור הוא תהליך פתרון המערכת, והוא מתבצע באופן הבא:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1,n-2}x_{n-2} + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2} \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n} \cdot x_n - a_{n-2,n-1} \cdot x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left[b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \cdot x_j\right] \quad , \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1}$$

$$\boxed{a_{kk} \neq 0, \quad \forall k}$$

# דוגמא להצבה לאחור

נחזור לדוגמא קודמת ( בה הדגמנו תהליך קדימה של שיטת גאוס ) ונתבונן במערכת המשוואות השקולה למערכת הנתונה שקבלנו בסופו של התהליך:

$$\begin{cases} (1) \qquad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ (2) \qquad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ (3) \qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

הצבה לאחור:

- ממשוואה (3) נובע $x_3 = 3$
- נציב במשוואה (2) ונחלץ $x_2 = 16$
- נציב במשוואה (1) $x_3 = 3$ ו- $x_2 = 16$ ונקבל $x_1 = 29$.

למערכת יש פתרון יחיד והוא:

$$\bar{x} = (x_1, \quad x_2, \quad x_3) = (29, \quad 16, \quad 3)$$

# אלגוריתם גאוס

* we assume here that all pivots are different from 0, and therefore there is no need in rows interchange

input: $n$, $A = a(i,j)$, $b(i)$

**1) elimination step:**

```
for k=1 to n-1 do
        pivot=a(k,k)
        for i=k+1 to n do
                l=a(i,k)/pivot
                for j=k+1 to n do
                        a(i,j)=a(i,j)-l*a(k,j)
                end
                b(i)=b(i)-l*b(k)
        end
end
```

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = (k+1), \ldots, n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = (k+1), \ldots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} \cdot b_k^{(k)}, \quad i = (k+1), \ldots, n$$

# אלגוריתם גאוס - המשך

**2) back substitution**:

```
x(n)=b(n)/a(n,n)
for k=n-1 down to 1 do
        sum=0;
        for j=k+1 to n do
                sum=sum+a(k,j)*x(j)
        end
        x(k)=[b(k)-sum]/a(k,k)
end
```

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left[b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\cdot x_j\right] \quad , \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

⟹ Output=$x(k)$, $k=1,2,\ldots,n$

# סיבוכיות של אלגוריתם גאוס

כדי למצוא את סיבוכיות האלגוריתם, נספור כמה פעולות כפל וחילוק מתבצעות תוך כדי התהליך.

**תזכורת מחדו"א:**

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

הוכחה באינדוקציה על $n$.

נסמן: $M$ = מספר פעולות הכפל

$D$ = מספר פעולות החילוק

# שיטת גאוס - סיבוכיות שלב תהליך השילוש

| צעד | שינוי המטריצה $A$ | | שינוי הווקטור $b$ |
|---|---|---|---|
| | $D$ | $M$ | $M$ |
| $1$ | $n-1$ | $(n-1)^2$ | $n-1$ |
| $2$ | $n-2$ | $(n-2)^2$ | $n-2$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n-1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $the \quad sum$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ |

# סיבוכיות תהליך השילוש- המשך

קיבלנו בתהליך השילוש $\frac{(n^3-n)}{3} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ פעולות MD עבור מטריצה A,

ו - $\frac{(n^2-n)}{2}$ פעולות MD עבור שינוי הווקטור b .

סה"כ **<u>בתהליך השילוש קיבלנו</u>** $\boxed{\frac{2n^3+3n^2-5n}{6} = \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^3-n}{3}}$ פעולות MD

# שיטת גאוס - סיבוכיות שלב הצבה לאחור

| $M$ | $D$ | צעד |
|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $2$ |
| $2$ | $1$ | $3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n-1$ | $1$ | $n$ |
| $\frac{n(n-1)}{2}$ | $n$ | $the \quad sum$ |

קיבלנו בתהליך ההצבה לאחור $\boxed{\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ פעולות MD

# שיטת גאוס - סיכום סיבוכיות

מהחישוב האחרון קיבלנו כי בתהליך גאוס לפתרון מערכת משוואות לינאריות מתבצעות

פעולות MD $$\underbrace{\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}}_{\text{קדימה}}+\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{הצבה לאחור}}=\boxed{\frac{2n^3+6n^2-2n}{6}}$$

כלומר, תהליך האלימינציה של גאוס היא כרוך

בסדר גודל של $n^3$ פעולות MD

# אלגוריתם גאוס - מערכת תלת אלכסונית

ישנם מקרים רבים בהם המטריצה הנה בעלת מבנה מסוים סביב האלכסון
( band matrix ). אנו נטפל במטריצה תלת אלכסונית.
במקרה זה נגדיר 3 וקטורים שייצגו את שלושת אלכסוני המטריצה $a,d,c$.

המשוואה ה- $k$ - ית במערכת תלת אלכסונית נתונה ע"י:

$$a_k x_{k-1} + d_k x_k + c_k x_{k+1} = b_k \qquad \begin{cases} k = 1,2,\cdots,n \\ a_1 = c_n = 0 \end{cases}$$

# גאוס - מערכת תלת אלכסונית , המשך

נתונה מערכת ליניארית תלת אלכסונית $Ax=b$

נעיר כי אלגוריתם גאוס הנו אלגוריתם כללי לפתרון מערכות משוואות ליניאריות. במקרה של מערכת תלת אלכסונית ניתן לייעל את האלגוריתם ולהתאימו לתנאי הבעיה וע"י כך לחסוך בסיבוכיות.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
d_1 & c_1 & & & & & b_1 \\
a_2 & d_2 & c_2 & & & & b_2 \\
 & a_3 & d_3 & c_3 & & & b_3 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} & \\
 & & & & a_n & d_n & b_n
\end{array}\right)
\Rightarrow
\left(\begin{array}{cccccc|c}
d_1 & c_1 & & & & & b_1 \\
0 & \hat{d}_2 & c_2 & & & & \hat{b}_2 \\
 & 0 & \hat{d}_3 & c_3 & & & \hat{b}_3 \\
 & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \hat{d}_{n-1} & c_{n-1} & \hat{b}_{n-1} \\
 & & & & 0 & \hat{d}_n & \hat{b}_n
\end{array}\right)$$

# גאוס - מערכת תלת אלכסונית, המשך

**השילוש:**

$$1)\quad d_1 \neq 0 \Rightarrow m_1 = \frac{a_2}{d_1} \Rightarrow \begin{cases} \hat{d}_2 = d_2 - m_1 c_1 \\ \hat{b}_2 = b_2 - m_1 b_1 \end{cases}$$

$$2)\quad d_2 \neq 0 \Rightarrow m_2 = \frac{a_3}{d_2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{d}_3 = d_3 - m_2 c_2 \\ \hat{b}_3 = b_3 - m_2 \hat{b}_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$k)\quad d_k \neq 0 \Rightarrow m_k = \frac{a_{k+1}}{d_k} \Rightarrow \begin{cases} \hat{d}_{k+1} = d_{k+1} - m_k c_k \\ \hat{b}_{k+1} = b_{k+1} - m_k \hat{b}_k \end{cases}$$

---

**הצבה לאחור**

$$x_n = \frac{\hat{b}_n}{\hat{d}_n}$$

$$x_{n-1} = \frac{\hat{b}_{n-1} - c_{n-1} \cdot x_n}{\hat{d}_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_k = \frac{\hat{b}_k - c_k \cdot x_{k+1}}{\hat{d}_k}$$

# גאוס - מערכת תלת אלכסונית, סיבוכיות

$$\begin{aligned}
&set\quad \hat{d}_1 = d_1 \\
&\qquad \hat{b}_1 = b_1 \\
&for\quad k=1\quad to\quad n-1\quad do \\
&\qquad m = \frac{a_{k+1}}{\hat{d}_k} \\
&\qquad \hat{d}_{k+1} = d_{k+1} - m\cdot c_k \\
&\qquad \hat{b}_{k+1} = b_{k+1} - m\cdot \hat{b}_k \\
&end
\end{aligned}$$

**תהליך קדימה**

$$3(n-1) = 3n-3$$

**הצבה לאחור**

$$x_n = \frac{\hat{b}_n}{\hat{d}_n} \longleftarrow 1$$

$$\begin{aligned}
&for\quad i=n-1\quad down\quad to\quad 1\quad do \\
&\qquad x_i = \frac{\hat{b}_i - c_i\cdot x_{i+1}}{\hat{d}_i} \\
&end
\end{aligned}$$

$$2(n-1) = 2n-2$$

סיכום: פתרון מערכת תלת אלכסונית בשיטת גאוס מתבצע ב - $5n-4$ פעולות MD

# שיטת גאוס

# תרגילים

# תרגיל 1

פתרו, לפי שיטת גאוס , את המערכת הבאה :

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ 3x_1+4x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=-1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-1 \end{cases}$$

ראשית נציג את המטריצה המורחבת המתאימה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

# תרגיל 1, המשך

**תהליך קדימה:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_{21} = \frac{3}{4} \\ l_{31} = \frac{1}{2} \\ l_{41} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{15}{4} & \frac{-5}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} l_{32} = \frac{6}{7} \\ l_{42} = \frac{5}{7} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-12}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{20}{7} & \frac{-10}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \left. l_{43} = \frac{5}{6} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} & \frac{-12}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{array}\right)$$

מהדירוג וממשפט גאוס באלגברה נובע כי למערכת יש פתרון יחיד.

# תרגיל 1, המשך

**<u>הצבה לאחור:</u>**

$$x_4 = 0$$

$$x_3 = \frac{7}{12}\cdot\left(-\frac{12}{7}+\frac{10}{7}\cdot 0\right) = -1$$

$$x_2 = \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot(-1)\right) = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\cdot\left(1-1\cdot 0-2\cdot(-1)-3\cdot 1\right) = 0$$

הפתרון המבוקש: $\boxed{\bar{x} = (0,1,-1,0)}$

# תרגיל 2

ברצוננו להתאים (לפשט עד כמה שאפשר ) את אלגוריתם גאוס לפתרון המערכת הבאה

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & d_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & d_6 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}$$

כמה פעולות כפל/חילוק יש לבצע **בתהליך קדימה ואחורה** של אלגוריתם גאוס המותאם למערכת הנתונה? נמקו את תשובתכם.

# תרגיל 2-פתרון

**תהליך קדימה:** מתקיים

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & b_1 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & a_5 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & d_5 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & d_6 & 0 & b_6 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_7 & b_7 \end{array}\right) \xrightarrow{l_{71}=\frac{a_1}{d_1}}$$

$$\hat{d}_7 = d_7 - l_{71} \cdot a_7$$

$$\hat{b}_7 = b_7 - l_{71} \cdot b_1$$

**שלב 1:**

$$\boxed{M = 2, \quad D = 1}$$

# פתרון תרגיל 2, המשך

## **תהליך קדימה, המשך:**

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & b_1 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & a_5 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & d_5 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & d_6 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_7 & \hat{b}_7 \end{array}\right) \xrightarrow{l_{62}=\frac{a_2}{d_2}}$$

$$\hat{d}_6 = d_6 - l_{62}\cdot a_6$$
$$\hat{b}_6 = b_6 - l_{62}\cdot b_2$$

**שלב 2:**

$$\boxed{M = 2, \quad D = 1}$$

# פתרון תרגיל 2, המשך

**תהליך קדימה, המשך:**

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & b_1 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & a_5 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & d_5 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_6 & 0 & \hat{b}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_7 & \hat{b}_7 \end{array}\right) \xrightarrow{l_{53}=\frac{a_3}{d_3}}$$

$$\hat{d}_5 = d_5 - l_{53} \cdot a_5$$
$$\hat{b}_6 = b_5 - l_{53} \cdot b_3$$

**שלב 3:**

$$\boxed{M = 2, \quad D = 1}$$

# פתרון תרגיל 2, המשך

**תהליך קדימה, המשך:**

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccccc|c} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & b_1 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & a_5 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_5 & 0 & 0 & \hat{b}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_6 & 0 & \hat{b}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{d}_7 & \hat{b}_7 \end{array}\right)$$

**בתהליך קדימה** בצענו שלושה שלבי דירוג

ובכל שלב $3MD$ , סה"כ בתהליך קדימה $9MD$

# פתרון תרגיל 2, המשך

**הצבה לאחור:**

$$x_7 = \hat{b}_7 / \hat{d}_7 \qquad 1D$$

$$x_6 = \hat{b}_6 / \hat{d}_6 \qquad 1D$$

$$x_5 = \hat{b}_5 / \hat{d}_5 \qquad 1D$$

$$x_4 = b_4 / d_4 \qquad 1D$$

$$x_3 = \frac{1}{d_3} \cdot \left[ b_3 - a_5 \cdot x_5 \right] \qquad 2MD$$

$$x_2 = \frac{1}{d_2} \cdot \left[ b_2 - a_6 \cdot x_6 \right] \qquad 2MD$$

$$x_1 = \frac{1}{d_1} \cdot \left[ b_1 - a_7 \cdot x_7 \right] \qquad 2MD$$

# פתרון תרגיל 2, המשך

**<u>בהצבה לאחור</u>** בצענו $\boxed{10MD}$

**<u>לסיכום</u>** , בתהליך קדימה ואחורה מבצעים עבור מערכת דלילה זו $\boxed{19MD}$

# הכללה של תרגיל 2

ברצוננו להתאים (לפשט עד כמה שאפשר ) את אלגוריתם
גאוס לפתרון מערכת מסדר אי זוגי $n = 2m+1$
מהצורה שבה טפלנו בתרגיל קודם ) עבור $n = 7$ (

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & a_n \\ & d_2 & & & a_{n-1} & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ & a_2 & & & d_{n-1} & \\ a_1 & & & & & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

# הכללה של תרגיל 2, המשך

כמה פעולות כפל/חילוק יש לבצע **<u>בתהליך קדימה ואחורה</u>** של אלגוריתם גאוס המותאם למערכת מהצורה הנ"ל עבור מערכת מסדר $n$ ? נמקו את תשובתכם.

**<u>פתרון:</u>** ראינו את הפתרון עבור המקרה הפרטי המוצג ( $n = 7$ ) וממנו נקיש בהתאם על הכלל.

# הכללה של תרגיל 2, המשך

**<u>בתהליך קדימה:</u>**

רוצים לאפס את האברים $a_1, a_2, \cdots, a_{\frac{n-1}{2}}$ כדי לעבור למטריצה מדורגת.

לכל $1 \le i \le \dfrac{n-1}{2}$ עלינו לבצע את הפעולות הבאות:

**חישוב גורם כפלי** $$l_i = \frac{a_i}{d_i}$$

**עדכון המטריצה** $$d_{(n+1)-i} = d_{(n+1)-i} - l_i \cdot a_{(n+1)-i}$$

**עדכון הווקטור** $$b_{(n+1)-i} = b_{(n+1)-i} - l_i \cdot b_i$$

סה"כ בתהליך קדימה יש $\boxed{3 \cdot \left( \dfrac{n-1}{2} \right)}$ פעולות $\boxed{MD}$ .

# הכללה של תרגיל 2, המשך

**<u>בהצבה לאחור:</u>**

עבור $\frac{n+1}{2} \le i \le n$ : נבצע $x_i = \frac{b_i}{d_i}$ $\boxed{\Leftarrow \frac{n+1}{2}D}$

עבור $1 \le i \le \frac{n-1}{2}$ : נבצע $x_i = \frac{b_i - a_{(n+1)-i} \cdot x_{(n+1)-i}}{d_i}$

$$\boxed{\Downarrow \quad 2\left(\frac{n-1}{2}\right)MD}$$

סה"כ בתהליך הצבה לאחור מבצעים $\boxed{\frac{3n-1}{2}}$ פעולות $\boxed{MD}$

# הכללה של תרגיל 2, המשך

לסכום, עבור המערכת הכללית הנתונה מבצעים בשיטת גאוס ( תהליך קדימה ואחורה )

$$\boxed{3\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)+\frac{3n-1}{2}=3n-2}$$

פעולות $\boxed{MD}$ .