אנליזה נומרית: מצגת 12
LEAST SQUARES Approximations

<u>נושאי המצגת:</u>

1. הקדמה: אפיון מציאת המקרב הטוב ביותר בממ"פ – מקרה כללי.
2. מקרה פרטי: קירוב ריבועים מינימליים

- 2א: קירוב ריבועים מינימליים לפונקציות במרחב $C[a,b]$.
  פולינומי לז'נדר ומערכות אורתוגונליות במרחב $\mathbb{R}_n[x]$.
- 2ב: קירוב ריבועים מינימליים פולינומיאלי במרחב $\mathbb{R}^N$
  באמצעות ייצוג דיסקרטי של פונקציות.
  מערכת אורתוגונלית למקרה הדיסקרטי.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

הקדמה - תזכורת ממבנים 1

אפיון ומציאה של המקרב הטוב ביותר בממ"פ *V*

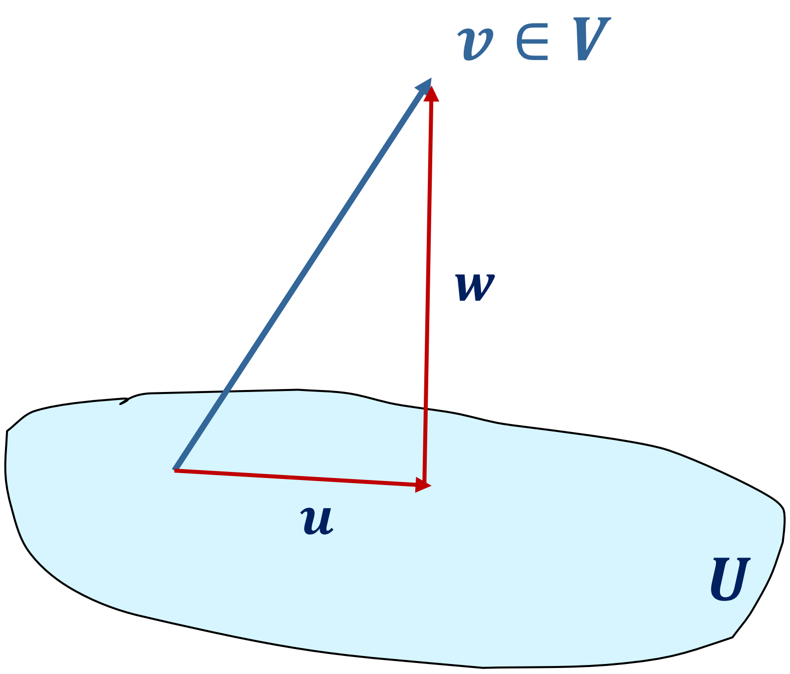
© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

משפט אפיון המקרב הטוב ביותר בממ"פ V -הקדמה

יהי V מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ) מעל שדה הממשיים $\mathbb{R}$ ויהי U ת"מ של V

טענה: כל $v \in V$ ניתן לפירוק אורתוגונלי יחיד $v = u + w$ כאשר $u \in U$ ו- $w \in U^{\perp}$ וקטורים א"ג , כלומר $\langle u,w \rangle = 0$.

הגדרה: הווקטור $u \in U$ בפירוק נקרא **ההיטל הא"ג של v על ת"מ U** ומסמנים $u = P_U(V)$.



משפט אפיון המקרב הטוב ביותר בממ"פ $(V,\mathbb{R})$

טענה: (ממבנים 1)

יהי U תת מרחב ממימד סופי של ממ"פ $(V,\mathbb{R})$.

המקרב הטוב ביותר של $V \in v$ בתת המרחב U הוא $u^* = P_U(v)$ (ההיטל האורתוגונלי של v על תת המרחב U).

שאלה: איך ניתן לחשב את $u^* = P_U(v)$?

גם את זה למדנו במבנים 1....

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

מציאת המקרב הטוב ביותר בממ"פ $(V,\mathbb{R})$

טענה: בהינתן ממ"פ V, ת"מ $U = span\{u_0,u_1,\dots,u_n\}$ ואיבר $v \in V$

אז, המקרב הטוב ביותר ל- v ב-U הוא $u^* = P_U(v) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot u_i$

כאשר המקדמים $i = 0,1,\dots,n$, c_i הם הפתרון **למערכת המשוואות הנורמליות**

$$\boxed{\begin{pmatrix} \langle u_0,u_0\rangle & \langle u_1,u_0\rangle & \cdots & \langle u_n,u_0\rangle \\ \langle u_0,u_1\rangle & \langle u_1,u_1\rangle & \dots & \langle u_n,u_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_0,u_n\rangle & \langle u_1,u_n\rangle & \cdots & \langle u_n,u_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v,u_0\rangle \\ \langle v,u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v,u_n\rangle \end{pmatrix}}$$

*__הערה:__ מטריצת המקדמים היא מטריצה סימטרית בשל סימטריות המ"פ מעל הממשיים $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

מקרה פרטי

אם תת המרחב U נפרש ע"י קבוצה אורתוגונלית $U = Span\{u_0,u_1, \dots ,u_n\}$

(כלומר $\langle u_i,u_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$) אז מערכת המשוואות הנורמליות המתקבלת

היא <u>אלכסונית</u>

$$\begin{pmatrix} \langle u_0, u_0 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_0 \rangle \\ \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

והמקרב הטוב ביותר u^* ל- v הוא הווקטור $u^* = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot u_i$ כאשר המקדמים $c_i,\ i = 0,1, \dots ,n$ הם **<u>מקדמי פורייה</u>**

$$c_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}; \quad i = 0,1,2\dots,n$$

מקרה פרטי 1:
קירוב ריבועים מינימליים לפונקציות בממ"פ $C[a,b]$
(מקרה רציף)

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

הקדמה

נתונה פונקציה $f(x) \in C[a,b]$ ותת מרחב $U \subseteq C[a,b]$ שנגדיר כמרחב המקרבים האפשריים לפונקציה $f(x)$. נרצה למצוא את המקרב הטוב ביותר ממרחב המקרבים U ל- $f(x)$, כלומר למצוא $Q(x) \in U$ כך שהמרחק $d(f,Q)$ יהיה המינימלי האפשרי, כלומר $\|f-Q\| \le \|f-u\|,\ \forall u(x) \in U$.

הפתרון לבעיה תלוי כמובן בנורמה בה נבחר.

- **בנורמה** ∞ נחפש מקרב $Q(x)$ שעבורו $\max_{a \le x \le b} |f(x)-Q(x)| \to min$.

מקרב זה נקרא **<u>מקרב המינימקס</u> (min-max)**.

- **בנורמה 1** נחפש מקרב $Q(x)$ שעבורו $\int_a^b |f(x)-Q(x)|dx \to min$

- **בנורמה 2** נחפש מקרב $Q(x)$ שעבורו $\int_a^b \left(f(x)-Q(x)\right)^2 dx \to min$

מקרב זה נקרא **<u>מקרב ריבועים מינימליים</u>**.

המרחב $C[a,b]$ הוא ממ"פ ביחס למ"פ הטבעית $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ שמגדירה את נורמה 2 בממ"פ זה, ולכן נוכל למצוא את הפתרון לבעיה באמצעות המקרה הכללי שראינו קודם.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה בממ"פ $C[a,b]$

עבור הממ"פ $V = C[a,b]$ (מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$) עם המ"פ הטבעית $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

נגדיר את U להיות תת המרחב הנפרש ע"י הבסיס $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$

אזי מקרב ריבועים מינימליים (ר"מ) לפונקציה נתונה $f(x) \in C[a,b]$ מתת המרחב U הוא מהצורה $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cdot \varphi_k(x)$ כאשר המקדמים c_k הם פתרון מערכת המשוואות הנורמלית המתאימה.

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle \varphi_1,\varphi_0\rangle & \cdots & \langle \varphi_n,\varphi_0\rangle \\ \langle \varphi_0,\varphi_1\rangle & \langle \varphi_1,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle \varphi_n,\varphi_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_0,\varphi_n\rangle & \langle \varphi_1,\varphi_n\rangle & \cdots & \langle \varphi_n,\varphi_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,\varphi_0\rangle \\ \langle f,\varphi_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f,\varphi_n\rangle \end{bmatrix}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה בממ"פ $C[a,b]$

ייצוג מפורש של הממ"ל הנורמלית למקרה הרציף

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_0(x)dx & \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx & \dots & \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx \\ \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_0(x)dx & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx & \cdots & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_0(x)dx & \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_1(x)\,dx & \cdots & \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)\,dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx \\ \int_a^b f(x)\varphi_1(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \end{bmatrix}$$

<u>הערה:</u>

מעל הממשיים יש סימטריה של המ"פ $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ ולכן מטריצת המקדמים היא מטריצה סימטרית.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

דוגמא 1

מצאו מקרב פולינומיאלי $Q_2(x)$ ממעלה ≤ 2 שהוא המקרב הטוב ביותר, במובן ריבועים מינימליים, לפונקציה $f(x) = |x|$ בקטע $[-1,1]$.

פתרון:

כאן תת מרחב המקרבים הוא $U = \mathbb{R}_2[x]$ ולכן נוכל לבחור כל בסיס לת"מ זה למשל את הבסיס הסטנדרטי $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$

ונחפש את המקרב הטוב ביותר במובן ר"מ מהצורה $\boxed{Q_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2}$

עם מקדמים c_0, c_1, c_2 שהם פתרון מערכת המשוואות הנורמלית:

$$\begin{pmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & \langle p_1, p_0 \rangle & \langle p_2, p_0 \rangle \\ \langle p_0, p_1 \rangle & \langle p_1, p_1 \rangle & \langle p_2, p_1 \rangle \\ \langle p_0, p_2 \rangle & \langle p_1, p_2 \rangle & \langle p_2, p_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, p_0 \rangle \\ \langle f, p_1 \rangle \\ \langle f, p_2 \rangle \end{pmatrix}$$

המשך דוגמא 1

חישובי עזר:

$$\langle p_0, p_0\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1dx = 2 \qquad \langle p_0, p_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot xdx = 0$$

$$\langle p_0, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2dx = 2/3 \qquad \langle p_1, p_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot xdx = 2/3$$

$$\langle p_1, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot x^2dx = 0 \qquad \langle p_2, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\cdot x^2dx = 2/5$$

$$\langle f, p_0\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\cdot 1dx = 1 \qquad \langle f, p_1\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\cdot xdx = 0$$

$$\langle f, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\cdot x^2dx = 2\int_{0}^{1} x^3dx = 1/2$$

המשך דוגמא 1

מערכת המשוואות הנורמליות המתאימה הינה:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ופתרונה:

$$c_0 = \frac{3}{16}$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{15}{16}$$

מכאן

$$\boxed{Q_2(x) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2}$$

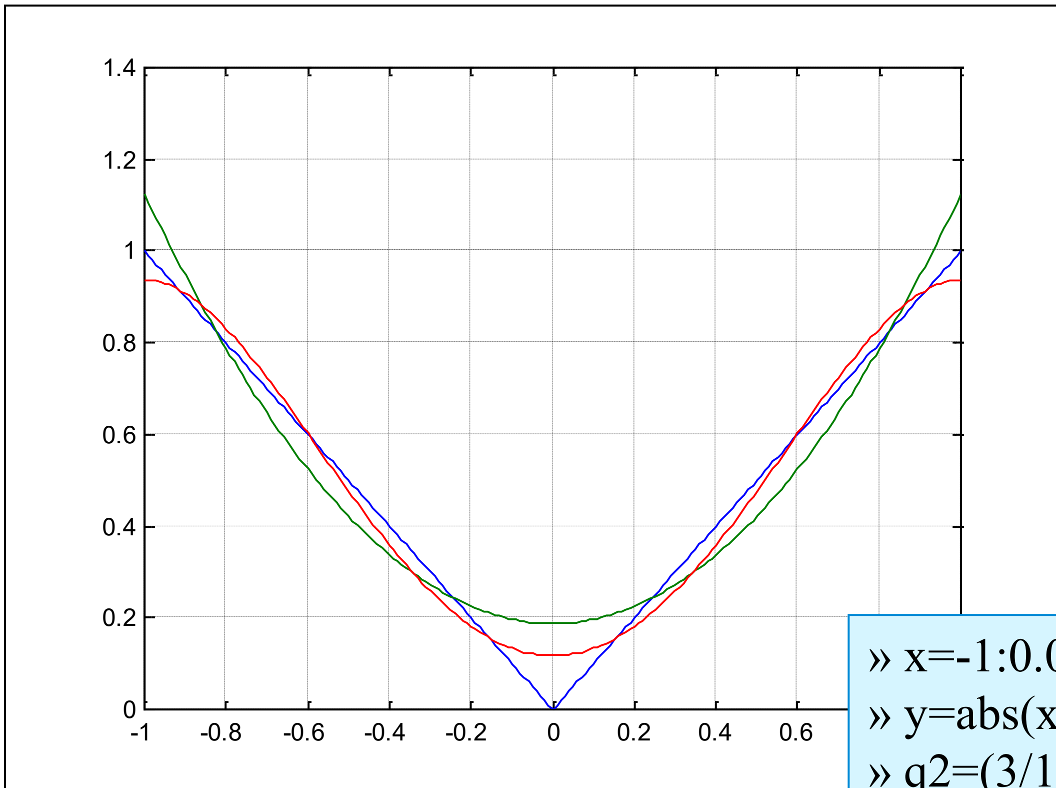
© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

המשך דוגמא 1

אם נוסיף לדוגמא עוד שני פולינומים בסיסיים $p_3(x)=x^3,\quad p_4(x)=x^4$

ונחפש את מקרב הר"מ בתת המרחב $U=\mathbb{R}_4[x]$

אז המקרב הוא $Q_4(x)=\frac{15}{128}+\frac{105}{64}x^2-\frac{105}{128}x^4$




```
» x=-1:0.01:1;
» y=abs(x);
» q2=(3/16)+(15/16).*x.*x;
» q4=(15/128)+(105/64).*x.*x-(105/128).*x.^4;
» plot(x,y,x,q2,x,q4);grid
```

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

דוגמא 2

כעת נמצא באמצעות בסיס אחר $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

פולינום $Q_2(x)$ ממעלה ≤ 2 שהוא המקרב הטוב ביותר, במובן ריבועים מינימליים, לפונקציה $f(x) = |x|$ בקטע $[-1,1]$.

פתרון:

הבסיס הנתון הוא בסיס אורתוגונלי ביחס למ"פ טבעית במרחב $C[-1,1]$ כי:

$$\langle p_0, p_1 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

$$\langle p_0, p_2 \rangle = \left\langle 1, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = 0$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \left\langle x, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \int_{-1}^{1} x \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = 0$$

אזי, המקרב הטוב ביותר במובן ר"מ הוא מהצורה $\boxed{Q_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)}$

כאשר המקדמים c_0, c_1, c_2 הם מקדמי פורייה בהתאמה.

המשך דוגמא 2

נחשב את מקדמיה פורייה המתאימים

$$c_0=\frac{\langle f,p_0\rangle}{\langle p_0,p_0\rangle}=\frac{\langle |x|,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{\int_{-1}^{1}|x|\,dx}{\int_{-1}^{1}1dx}=\frac{1}{2};\qquad c_1=\frac{\langle f,p_1\rangle}{\langle p_1,p_1\rangle}=\frac{\langle |x|,x\rangle}{\langle x,x\rangle}=\frac{\int_{-1}^{1}|x|\cdot x dx}{\int_{-1}^{1}x^2dx}=0;$$

$$c_2=\frac{\langle f,p_2\rangle}{\langle p_2,p_2\rangle}=\frac{\langle |x|,x^2-\frac{1}{3}\rangle}{\langle x^2-\frac{1}{3},x^2-\frac{1}{3}\rangle}=\frac{\int_{-1}^{1}|x|\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx}=\frac{15}{16}$$

ומכאן

$$\boxed{Q_2(x)=\frac{1}{2}p_0+\frac{15}{16}p_2=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{15}{16}\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{16}+\frac{15}{16}\cdot x^2}$$

הערה: הפולינומים האורתוגונליים $p_0=1, p_1=x, p_2=x^2-\frac{1}{3}$

נקראים **פולינומי לז'נדר** בקטע $[-1,1]$. נרחיב עליהם בהמשך.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה בממ"פ $C[a,b]$

מסקנה:

יהי $V = C[a,b]$ ממ"פ עם מ"פ טבעית $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

עבור תת המרחב $U = Span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\} \subseteq C[a,b]$:

האינטגרל $\int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x))^2 dx$ יהיה מינימלי עבור $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \varphi_k(x)$ שהוא המקרב הטוב ביותר במובן ר"מ לפונקציה $f(x) \in C[a,b]$. (כלומר, עם מקדמים c_k שהם פתרון הממ"ל הנורמלית המתאימה)

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

תרגילים

תרגיל 1:

א. מצאו $a \in \mathbb{R}$ כך שהקבוצה $\{p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + ax\}$ מהווה קבוצה א"ג ביחס למ"פ $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

ב. מצאו קבועים $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ שעבורם האינטגרל $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \alpha - \beta(1-2x)\right)^2 dx$ יהיה מינימלי.

תרגיל 2:

מצאו קבועים $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ שעבורם האינטגרל $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \alpha - \beta(1-2x)\right)^2 dx$ יהיה מינימלי.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון תרגיל 1

א. מצאו $a \in \mathbb{R}$ כך שהקבוצה $\{p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + ax\}$ מהווה קבוצה א"ג ביחס למ"פ $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

ב. מצאו קבועים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ שעבורם האינטגרל $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \alpha - \beta(1-2x)\right)^2 dx$ יהיה מינימלי.

פתרון:

א. הקבוצה $\{p_0(x), p_1(x)\}$ היא קבוצה א"ג אםם $\langle p_0(x), p_1(x) \rangle = 0$

$$\langle p_0(x), p_1(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 1, 1+ax \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (1+ax)\,dx = 0 \Leftrightarrow \left(x + a \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

מסקנה: הקבוצה $\{p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 - 2x\}$ היא קבוצה א"ג ביחס למ"פ רציפה בקטע $[0,1]$.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון תרגיל 1, המשך

ב. עבור $p_1(x) = 1 - 2x$, $p_0(x) = 1$ ו- $f(x) = \sqrt{x}$

- לפי מסקנה קודמת, האינטגרל $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \left(\alpha + \beta(1-2x)\right)\right)^2 dx$ הוא מינימלי כאשר $Q_1(x) = \alpha \cdot p_0(x) + \beta \cdot p_1(x)$ הוא מקרב ר"מ לפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ לפי מ"פ רציפה בקטע $[0,1]$.

- לפי סעיף א , $\{p_0(x), p_1(x)\}$ היא קבוצה א"ג ביחס למ"פ הנתונה בקטע $[0,1]$. לכן, נוכל לחשב את המקדמים α, β באמצעות הנוסחה לחישוב מקדמי פורייה:

$$\alpha = \frac{\langle f, p_0 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle} = \frac{\langle \sqrt{x}, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_0^1 \sqrt{x}\,dx}{\int_0^1 1^2\,dx} = \frac{\left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_0^1}{\left.x\right|_0^1} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \frac{\langle f, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} = \frac{\langle \sqrt{x}, 1-2x \rangle}{\langle 1-2x, 1-2x \rangle} = \frac{\int_0^1 \sqrt{x}(1-2x)\,dx}{\int_0^1 (1-2x)^2\,dx} = \frac{\left.\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x}\right|_0^1}{\left.-\frac{1}{6}(1-2x)^3\right|_0^1} = \frac{-2/15}{1/3} = -\frac{2}{5}$$

מכאן $$Q_1(x) = \alpha \cdot p_0(x) + \beta \cdot p_1(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}(1-2x) = \frac{4}{5}x - \frac{4}{15}$$

פתרון תרגיל 2

מצאו קבועים $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ שעבורם האינטגרל $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \alpha - \beta(1-2x)\right)^2 dx$ יהיה מינימלי.

פתרון

כמו קודם ולפי מסקנה קודמת, האינטגרל $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - (\alpha + \beta(1-2x))\right)^2 dx$ הוא מינימלי כאשר $Q_1(x) = \alpha \cdot p_0(x) + \beta \cdot p_1(x)$ הוא מקרב ר"מ לפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ לפי מ"פ רציפה בקטע $[0,4]$.

כאן, הקבוצה $\{p_0(x), p_1(x)\}$ <u>איננה</u> קבוצה א"ג ביחס למ"פ רציפה בקטע $[0,4]$.
לכן, חישוב המקדמים α,β יהיה באמצעות פתרון הממ"ל הנורמלית:

$$\begin{pmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & \langle p_0, p_1 \rangle \\ \langle p_1, p_0 \rangle & \langle p_1, p_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, p_0 \rangle \\ \langle f, p_1 \rangle \end{pmatrix}$$

פתרון תרגיל 2, המשך

- חישובי עזר

$$\left\langle p_0,p_0\right\rangle=\left\langle 1,1\right\rangle=\int_0^4 1dx=4$$

$$\left\langle p_1,p_1\right\rangle=\left\langle 1-2x,1-2x\right\rangle=\int_0^4(1-2x)^2dx=-\frac{1}{6}(1-2x)^3\Big|_0^4=-\frac{1}{6}\Big(\overbrace{(-7)^3-1}^{-344}\Big)=\frac{172}{3}$$

$$\left\langle p_0,p_1\right\rangle=\left\langle 1,1-2x\right\rangle=\int_0^4(1-2x)dx=\left(x-x^2\right)\Big|_0^4=-12$$

$$\left\langle f,p_0\right\rangle=\left\langle\sqrt{x},1\right\rangle=\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4=\frac{2}{3}\left(4\sqrt{4}-0\right)=\frac{16}{3}$$

$$\left\langle f,p_1\right\rangle=\left\langle\sqrt{x},1-2x\right\rangle=\int_0^4\sqrt{x}(1-2x)dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}-2x\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}\Big|_0^4=\frac{2}{3}4\sqrt{4}-\frac{4}{5}4^2\sqrt{4}=\frac{16}{3}-\frac{128}{5}=-\frac{304}{15}$$

נציב בממ"ל הנורמלית ונפתור:

$$\begin{pmatrix}4 & -12\\ -12 & \frac{172}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\ -\frac{304}{15}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\alpha=\frac{11}{15},\beta=-\frac{1}{5}$$

מכאן

$$\Rightarrow Q_1(x)=\alpha\cdot p_0(x)+\beta\cdot p_1(x)=\frac{11}{15}-\frac{1}{5}(1-2x)=\frac{2}{5}x+\frac{8}{15}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פולינומי לז'נדר ומערכות אורתוגונליות במרחב $\mathbb{R}_n[x]$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

תכונות של פולינומים אורתוגונליים

נזכיר מספר תכונות של פולינומים אורתוגונליים ממבנים 1:

<u>תכונה 1:</u> כל קבוצה אורתוגונלית של פולינומים $\{p_k(x)\}_{k=0}^{n}$ שונים מ-0 היא קבוצה בת"ל ובפרט מהווה בסיס אורתוגונלי למרחב $\mathbb{R}_n[x]$.

בפרט, כל פולינום $q_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ ניתן להצגה יחידה

$$q_n(x) = c_0 p_0 + c_1 p_1 + \ldots + c_k p_k + \ldots c_n p_n \qquad (1)$$

כאשר $c_k = \dfrac{\langle q_n, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}$ (**<u>מקדמי פורייה</u>**)

<u>תכונה 2:</u> אם $\{p_k(x)\}_{k=0}^{n}$ קבוצה אורתוגונלית של פולינומים במרחב $\mathbb{R}_n[x]$ ו- $q_m(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ פולינום כלשהו ממעלה $m < n$ אז $\langle p_n, q_m \rangle = 0$.

פולינומים אורתוגונליים בקטע רציף

פולינומים אורתוגונליים בקטע [-1,1] לפי מכפלה טבעית בממ"פ $V = C[-1,1]$
ידועים בספרות ונקראים בשם **פולינומי לז'נדר**

כיוון שתכונת האורתוגונליות נשמרת אם כופלים פונקציות בסיסיות בקבועים, מקובל לבצע "תיקון" של פולינומים.

אנו נבצע **תיקון** כך ש**המקדם המוביל של הפולינום=1**

להלן ארבעת פולינומי לז'נדר מתוקנים ראשונים בקטע [-1 ,1]:

$$\widetilde{p}_0(x) = 1$$

$$\widetilde{p}_1(x) = x$$

$$\widetilde{p}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\widetilde{p}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

משפט בדבר יחס הנסיגה
בין פולינומים אורתוגונליים בקטע $[-1,1]$

תהי $\{\tilde{p}_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ קבוצה של פולינומים אורתוגונליים מתוקנים, אזי

$$(1) \qquad \tilde{p}_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\tilde{p}_n(x) - \beta_n \tilde{p}_{n-1}(x), \quad n \ge 1$$

עם תנאי התחלה :

$$\tilde{p}_0(x) = 1, \ \ \tilde{p}_1(x) = x$$

והמקדמים:

$$(2) \qquad \alpha_n = \frac{\langle x\tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle}{\langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle} \qquad \beta_n = \frac{\langle x\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n-1} \rangle}{\langle \tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \rangle} = \frac{\langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle}{\langle \tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \rangle}$$

הוכחת המשפט

- נתבונן בפולינום $x\tilde{P}_n(x)$ שהנו פולינום מתוקן ממעלה $n+1$ ונציג אותו

(לפי תכונה 1) כצירוף ליניארי של $\left\{\tilde{P}_k(x)\right\}_{k=0}^{n+1}$:

$$(3) \qquad x\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k \tilde{P}_k$$

כאשר

$$(4) \qquad c_k = \frac{\left\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_k \right\rangle}{\left\langle \tilde{P}_k, \tilde{P}_k \right\rangle}, \quad k = 0,1,\cdots,n+1$$

מקדמי פורייה.

- נציין כי

$$(5) \qquad \langle f \cdot g, h \rangle = \langle g, f \cdot h \rangle$$

ולכן (4) ניתן להצגה השקולה הבאה:

$$(4a) \qquad c_k = \frac{\left\langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_k \right\rangle}{\left\langle \tilde{P}_k, \tilde{P}_k \right\rangle}, \quad k = 0,1,\cdots,n+1$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

המשך הוכחת המשפט

- נעיר כי לכל $k=0,1,\dots,n-2$ הפולינום $x\tilde{P}_k(x)$ הוא פולינום מתוקן ממעלה $\geq (n-1)$. לכן, לפי תכונה (2) $\langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_k \rangle = 0$

מכאן נובע כי $\boxed{(6) \qquad c_k = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,n-2}$

- מהצבת (6) ב- (3) נקבל

$$\boxed{(3a) \qquad x\tilde{P}_n(x) = c_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x) + c_n\tilde{P}_n(x) + c_{n+1}\tilde{P}_{n+1}(x)}$$

- כעת נשווה מקדמים של x^{n+1} בין שני אגפי $(3a)$ ונקבל: $\boxed{(7) \qquad c_{n+1} = 1}$

(הסבר: $x\tilde{P}_n(x)$ הוא פולינום מתוקן והמקדם המוביל שלו , כלומר המקדם המבוקש =1.
באגף ימין , הגורם הרלוונטי בסכום הוא המחובר האחרון $c_{n+1}\tilde{P}_{n+1}(x)$
שהמקדם המוביל שלו הוא c_{n+1})

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

המשך הוכחת המשפט

❑ נציב את תוצאה (7) בנוסחה $(3a)$ ונקבל:

$$\boxed{x\tilde{P}_n = c_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x) + c_n\tilde{P}_n(x) + \tilde{P}_{n+1}(x)}$$

או באופן שקול:

$$\boxed{(8) \qquad \tilde{P}_{n+1}(x) = (x - c_n)\tilde{P}_n(x) - c_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(x)}$$

הצגה זו שקולה להצגה (1) ע"י ההצבה $\boxed{\beta_n = c_{n-1}, \quad \alpha_n = c_n}$

ושימוש בנוסחאות (4).

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

הערה להוכחת המשפט

❑ על מנת להוכיח את ההצגה השנייה עבור β_n מספיק לנמק מדוע $\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle = \langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n-1} \rangle$ או באופן שקול מדוע $\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle = \langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_{n-1} \rangle$ (9)

❑ המשוואה (9) שקולה ל- $0 = \langle \tilde{P}_n, x\tilde{P}_{n-1} \rangle - \langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle$ שממנה נובע

$$\boxed{(9a) \quad \langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n - x\tilde{P}_{n-1} \rangle = 0}$$

נכונות המשוואה $(9a)$ נובעת מתכונה (2) מקודם ובשל העובדה כי $\tilde{P}_n - x\tilde{P}_{n-1}$ הוא פולינום ממעלה $n-1 \geq$.

מעבר מקטע [1-,1] לקטע $[a, b]$

על מנת לעבור לקטע $[a\ ,b]$ כלשהו נבצע את הטרנספורמציה הלינארית הבאה:

$$z=\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}$$

באמצעות נוסחה זו ניתן לבנות פולינומים אורתוגונליים בקטע $[a\ ,b]$ לפי מ"פ טבעית $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

<u>דוגמא:</u> נבחר $[0,1] = [a,b]$ ונקבל (ע"י נוסחת המעבר: $x = 2z - 1$)

$[-1,1]$	$[0,1]$	$normalized\ [0,1]$
$\tilde{p}_0(x)=1$	$p_0(z)=1$	$\tilde{p}_0(z)=1$
$\tilde{p}_1(x)=x$	$p_1(z)=2z-1$	$\tilde{p}_1(z)=z-\frac{1}{2}$
$\tilde{p}_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$	$p_2(z)=(2z-1)^2-\frac{1}{3}$	$\tilde{p}_2(z)=z^2-z+\frac{1}{6}$
$\tilde{p}_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$	$p_3(z)=(2z-1)^3-\frac{3}{5}(2z-1)$	$\tilde{p}_3(z)=z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{5}z-\frac{1}{20}$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

תרגיל 1

מצאו פולינום $Q_2(x)$ שהוא המקרב הטוב ביותר במובן הריבועים המינימליים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$.

פתרון:

נחפש פולינום מהצורה $\boxed{Q_2(x)=c_0\widetilde{p}_0(x)+c_1\widetilde{p}_1(x)+c_2\widetilde{p}_2(x)}$

כאשר $\tilde{p}_0(x),\tilde{p}_1(x),\tilde{p}_2(x)$ פולינומים בסיסיים אורתוגונליים.

(אפשר לקחת כל קבוצה בסיסית ב- $\mathbb{R}_2[x]$. אנחנו לוקחים קבוצה בסיסית אורתוגונלית כדי שמערכת המשוואות הנורמליות המתאימה תהיה אלכסונית וניתן יהיה לחשב את c_0,c_1,c_2 באמצעות מקדמים פורייה.)

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון תרגיל 1 , המשך

נוסחת המעבר מהקטע $[-1,1]$ לקטע $[a,b]=[1,2]$ היא: $x=2z-3$

נמיר את שלושת פולינומי לז'נדר בהתאמה

$[-1,1]$	$[1,2]$	$Normalized\ in\ [1,2]$
$\tilde{p}_0(x)=1$	$p_0(z)=1$	$\tilde{p}_0(z)=1$
$\tilde{p}_1(x)=x$	$p_1(z)=2z-3$	$\tilde{p}_1(z)=z-\frac{3}{2}$
$\tilde{p}_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$	$p_2(z)=(2z-3)^2-\frac{1}{3}=4z^2-12z+\frac{26}{3}$	$\tilde{p}_2(z)=z^2-3z+\frac{13}{6}$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון תרגיל 1, המשך

עבור קבוצת פולינומי לז'נדר המתוקנים והאורתוגונליים בקטע [1,2]
המקרב הטוב ביותר במובן ריבועים מינימליים הינו:

$$Q_2(x) = c_0\widetilde{p}_0(x) + c_1\widetilde{p}_1(x) + c_2\widetilde{p}_2(x)$$

כאשר המקדמים $\boxed{c_0, c_1, c_2}$ הם מקדמי פורייה הנתונים ע"י

$$c_k = \frac{\langle f, \widetilde{p}_k \rangle}{\langle \widetilde{p}_k, \widetilde{p}_k \rangle}, \quad k = 0,1,2$$

$$\langle \tilde{p}_k, \tilde{p}_k \rangle = \int_1^2 \tilde{p}_k^2(x)dx, \quad \langle f, \tilde{p}_k \rangle = \int_1^2 f(x) \cdot \tilde{p}_k(x)dx$$

פתרון תרגיל 1, המשך

חישובי עזר:

$$\left\langle f,\tilde{p}_0\right\rangle=\int_1^2 f(x)\,\tilde{p}_0(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$$

$$\left\langle f,\tilde{p}_1\right\rangle=\int_1^2 f(x)\,\tilde{p}_1(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x}\left(x-\frac{3}{2}\right)dx=\int_1^2\left(1-\frac{3}{2x}\right)dx=1-\frac{3}{2}\ln 2$$

$$\left\langle f,\tilde{p}_2\right\rangle=\int_1^2 f(x)\,\tilde{p}_2(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x}\left(x^2-3x+\frac{13}{6}\right)dx=\int_1^2\left(x-3+\frac{13}{6x}\right)dx=\frac{13}{6}\ln 2-\frac{3}{2}$$

$$\left\langle \tilde{p}_0,\tilde{p}_0\right\rangle=\int_1^2 \tilde{p}_0^2(x)dx=\int_1^2 1dx=x\Big|_1^2=1$$

$$\left\langle \tilde{p}_1,\tilde{p}_1\right\rangle=\int_1^2 \tilde{p}_1^2(x)dx=\int_1^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\int_1^2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx=\frac{1}{12}$$

$$\left\langle \tilde{p}_2,\tilde{p}_2\right\rangle=\int_1^2 \tilde{p}_2^2(x)dx=\int_1^2\left(x^2-3x+\frac{13}{6}\right)^2dx=\int_1^2\left(x^4-6x^3+\frac{40x^2}{3}-13x+\frac{169}{36}\right)dx=\frac{1}{180}$$

פתרון תרגיל 1, המשך

מחישובי העזר נקבל:

$$c_0 = \frac{\langle f, \tilde{p}_0 \rangle}{\langle \tilde{p}_0, \tilde{p}_0 \rangle} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$$

$$c_1 = \frac{\langle f, \tilde{p}_1 \rangle}{\langle \tilde{p}_1, \tilde{p}_1 \rangle} = \frac{1 - \frac{3}{2}\ln 2}{1/12} = 6\left(2 - 3\ln 2\right)$$

$$c_2 = \frac{\langle f, \tilde{p}_2 \rangle}{\langle \tilde{p}_2, \tilde{p}_2 \rangle} = \frac{\frac{13}{6}\ln 2 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{180}} = 30\left(13\ln 2 - 9\right)$$

ולכן המקרב הטוב יותר (במובן ריבועים מינימליים) לפי מ"פ רציפה בקטע $[1,2]$ לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ הוא:

$$Q_2(x) = c_0\tilde{p}_0(x) + c_1\tilde{p}_1(x) + c_2\tilde{p}_2(x) =$$
$$= \ln 2 \cdot 1 + 6\left(2 - 3\ln 2\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) + 30\left(13\ln 2 - 9\right) \cdot \left(x^2 - 3x + \frac{13}{6}\right)$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

תרגיל 2

יהי $Q_3(x)$ פולינום ממעלה ≤ 3 המהווה את מקרב הר"מ לפונקציה $f(x) = e^{x^2}$ לפי מ"פ רציפה בקטע $[-1,1]$. הוכיחו כי $Q_3(x)$ ממעלה 2 לכל היותר.

פתרון

למעשה עלינו להראות כי המקדם של x^3 במקרב הפולינומיאלי $Q_3(x)$ שווה ל-0 .

אם נחשב את המקרב באמצעות בסיס לז'נדר המתאים (שהוא בסיס א"ג ל- $\mathbb{R}_3[x]$ לפי מ"פ רציפה בקטע $[-1,1]$) $\left\{\tilde{p}_0(x)=1 \quad ; \quad \tilde{p}_1(x)=x \quad ; \quad \tilde{p}_2(x)=x^2-\frac{1}{3}; \quad \tilde{p}_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x\right\}$

אזי: $Q_3(x)=c_0\cdot\tilde{p}_0(x)+c_1\cdot\tilde{p}_1(x)+c_2\cdot\tilde{p}_2(x)+c_3\cdot\tilde{p}_3(x)$

אשר גורר כי המקדם של x^3 יהיה למעשה מקדם פורייה c_3 ואכן מתקיים

$$c_3=\frac{\langle f,\tilde{p}_3\rangle}{\langle\tilde{p}_3,\tilde{p}_3\rangle}=0$$

(נובע מכך ש-$f(x)$ פונקציה זוגית ו-$\tilde{p}_3(x)$ פולינום אי זוגי ולכן המכפלה אי זוגית. קטע האינטגרציה הוא סימטרי ולכן $\langle f,\tilde{p}_3\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\tilde{p}_3(x)dx=0$).

מקרה פרטי 2:
קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה במ"פ האוקלידי $\mathbb{R}^N$ (מקרה דיסקרטי)

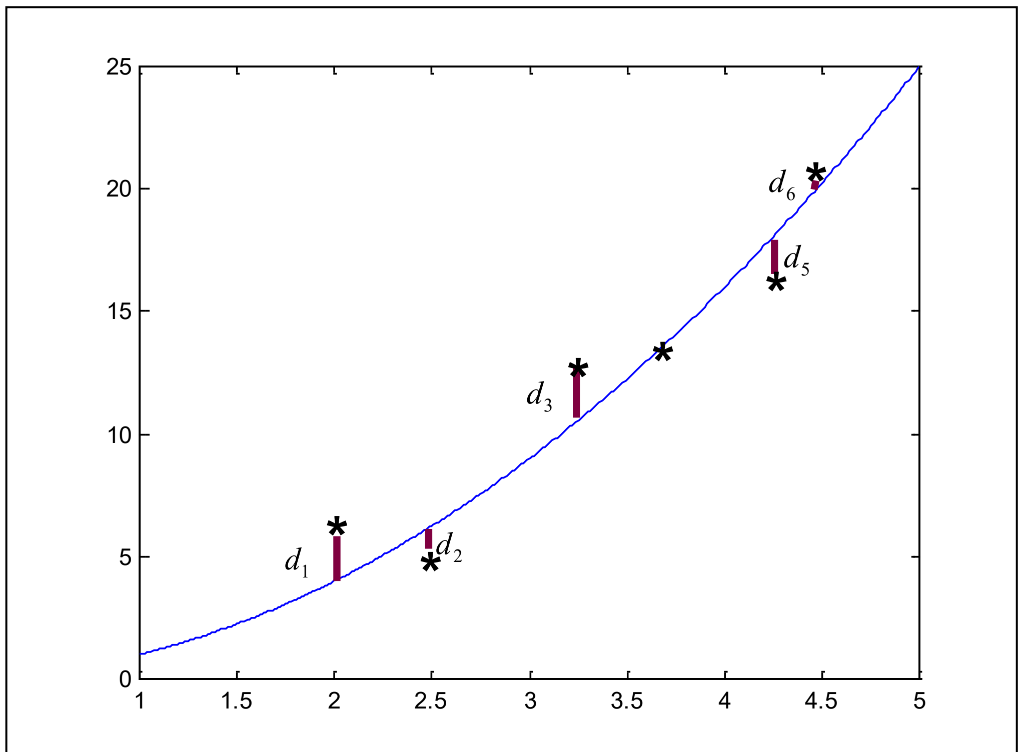
© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

הקדמה

נניח כי נתונה פונקציה $y=f(x)$ באמצעות טבלה (ייצוג דיסקרטי) של N נקודות במישור $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)$

זה עשוי להיות כתוצאה של מדידה (ואז $f(x)$ לאו דווקא שייכת למרחב $C[a,b]$ ולכן הגישה הקודמת לא מתאימה) או מהגדרה מלאכותית של טבלת ערכים עבור $f(x)$ אשר נתונה בצורה מפורשת, כולל למקרה של $f(x)\in C[a,b]$.

נרצה **למצוא את המקרב הטוב ביותר $Q(x)$ אשר עובר <u>בסמוך</u> לכל הנקודות בטבלה.**



הקדמה, המשך

- נסמן ב- d_i את המרחק האנכי בין הנקודה בטבלה (x_i, y_i) לעקומה המקרבת, כמצוין באיור הקודם. מציאת המקרב האופטימלי $Q(x)$ יכולה להתבצע בנורמות שונות ועבור כל אחת יתקבל פתרון אחר לבעיה.
- לפי **נורמה 1** , נחפש מקרב $Q(x)$ שעבורו

$$\sum_{i=1}^{N} |d_i| = \sum_{i=1}^{N} |y_i - Q(x_i)| \to min.$$

- לפי **נורמה** ∞, נחפש מקרב $Q(x)$ (הנקרא מקרב **min-max**) שעבורו

$$\max_{1 \le i \le N} |d_i| = \max_{1 \le i \le N} |y_i - Q(x_i)| \to min.$$

- **לפי נורמה 2** , נחפש מקרב $Q(x)$ שעבורו

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - Q(x_i)\right)^2 \to min.$$

קירוב המתקבל בגישה זו נקרא **<u>קירוב ריבועים מינימליים</u>(נורמה 2)** .

המרחב $\mathbb{R}^N$ הוא ממ"פ ביחס למ"פ אוקלידית $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot y_k$ שמגדירה את נורמה 2 בממ"פ זה, ולכן נוכל למצוא את הפתרון לבעיה באמצעות המקרה הכללי שראינו קודם.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה בממ"פ $\mathbb{R}^N$

יהי $V=\mathbb{R}^N$ הממ"פ האוקלידי עם מכפלה סקלרית ותהי $y=f(x)$
פונקציה הנתונה באמצעות טבלת ערכים $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_N,y_N)$

אזי מקרב ריבועים מינימליים (ר"מ) לפונקציה נתונה $f(x)$ מתת המרחב
$$U=Span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)\}$$
הוא $Q_m(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k\cdot\varphi_k(x)$

כאשר המקדמים c_k הם פתרון מערכת המשוואות הנורמלית המתאימה.

$$\begin{bmatrix}\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle & \cdots & \langle\varphi_m,\varphi_0\rangle\\ \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_m,\varphi_1\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle\varphi_0,\varphi_m\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_m\rangle & \cdots & \langle\varphi_m,\varphi_m\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle y,\varphi_0\rangle\\ \langle y,\varphi_1\rangle\\ \vdots\\ \langle y,\varphi_m\rangle\end{bmatrix}$$

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=1}^{N}f(x_k)\cdot g(x_k)$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה בממ"פ $\mathbb{R}^N$

ייצוג מפורש של הממ"ל הנורמלית למקרה הדיסקרטי

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N}\varphi_0(x_k)\varphi_0(x_k) & \sum_{k=1}^{N}\varphi_1(x_k)\varphi_0(x_k) & \cdots & \sum_{k=1}^{N}\varphi_m(x_k)\varphi_0(x_k) \\ \sum_{k=1}^{N}\varphi_0(x_k)\varphi_1(x_k) & \sum_{k=1}^{N}\varphi_1(x_k)\varphi_1(x_k) & \cdots & \sum_{k=1}^{N}\varphi_m(x_k)\varphi_1(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{N}\varphi_0(x_k)\varphi_m(x_k) & \sum_{k=1}^{N}\varphi_1(x_k)\varphi_m(x_k) & \cdots & \sum_{k=1}^{N}\varphi_m(x_k)\varphi_m(x_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} y_k\varphi_0(x_k) \\ \sum_{k=1}^{N} y_k\varphi_1(x_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N} y_k\varphi_m(x_k) \end{bmatrix}$$

הערה:

מעל הממשיים יש סימטריה של המ"פ $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ ולכן מטריצת המקדמים היא מטריצה סימטרית .

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

קיום ויחידות של פתרון למערכת המשוואות הנורמליות

ניתן להוכיח כי בהינתן קבוצת נקודות $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ עם $m< N$
(N- מספר הנקודות, $(dimU = m + 1$
אז מטריצת המקדמים של מערכת המשוואות הנורמליות המתאימה
הנה **<u>סימטרית ומוגדרת חיובית</u>** ולכן למערכת המשוואות הנורמליות
שהגדרנו **<u>קיים פתרון יחיד</u>**.

הערה: עבור מקרב פולינומיאלי $Q_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ נדרוש $n < N$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

דוגמא

מצאו <u>מקרב פולינומיאלי</u> $Q_2(x)$ עבור הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

$(N=5)$

<u>פתרון</u>

במקרה זה הקבוצה הבסיסית לא נתונה, אולם ניתן לקחת בסיס כלשהו למרחב הפולינומים ממעלה ≥ 2 , למשל הבסיס הסטנדרטי $\{p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2\}$

נמצא מקרב ריבועים מינימליים מהצורה: $Q_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$

כאשר המקדמים c_0,c_1,c_2 הם פתרון הממ"ל הנורמלית המתאימה :

$$\begin{pmatrix} \langle p_0,p_0\rangle & \langle p_0,p_1\rangle & \langle p_0,p_2\rangle \\ \langle p_1,p_0\rangle & \langle p_1,p_1\rangle & \langle p_1,p_2\rangle \\ \langle p_2,p_0\rangle & \langle p_2,p_1\rangle & \langle p_2,p_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y,p_0\rangle \\ \langle y,p_1\rangle \\ \langle y,p_2\rangle \end{pmatrix}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

המשך דוגמא

עבור הבסיס הסטנדרטי שבחרנו נקבל:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2
p_0	1	1	1	1	1
p_1	-2	-1	0	1	2
p_2	4	1	0	1	4

$\Rightarrow$

$$\langle p_0, p_0 \rangle = 5$$
$$\langle p_0, p_1 \rangle = \langle p_1, p_0 \rangle = 0$$
$$\langle p_0, p_2 \rangle = \langle p_2, p_0 \rangle = 10$$
$$\langle p_1, p_1 \rangle = 10$$
$$\langle p_1, p_2 \rangle = \langle p_2, p_1 \rangle = 0$$
$$\langle p_2, p_2 \rangle = 34$$
$$\langle y, p_0 \rangle = 7$$
$$\langle y, p_1 \rangle = 0$$
$$\langle y, p_2 \rangle = 18$$

המשך דוגמא

נציב ונפתור את מערכת המשוואות הנורמלית שמתקבלת:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = {}^{2}\!/_{7}, \quad c_0 = {}^{29}\!/_{35}$$

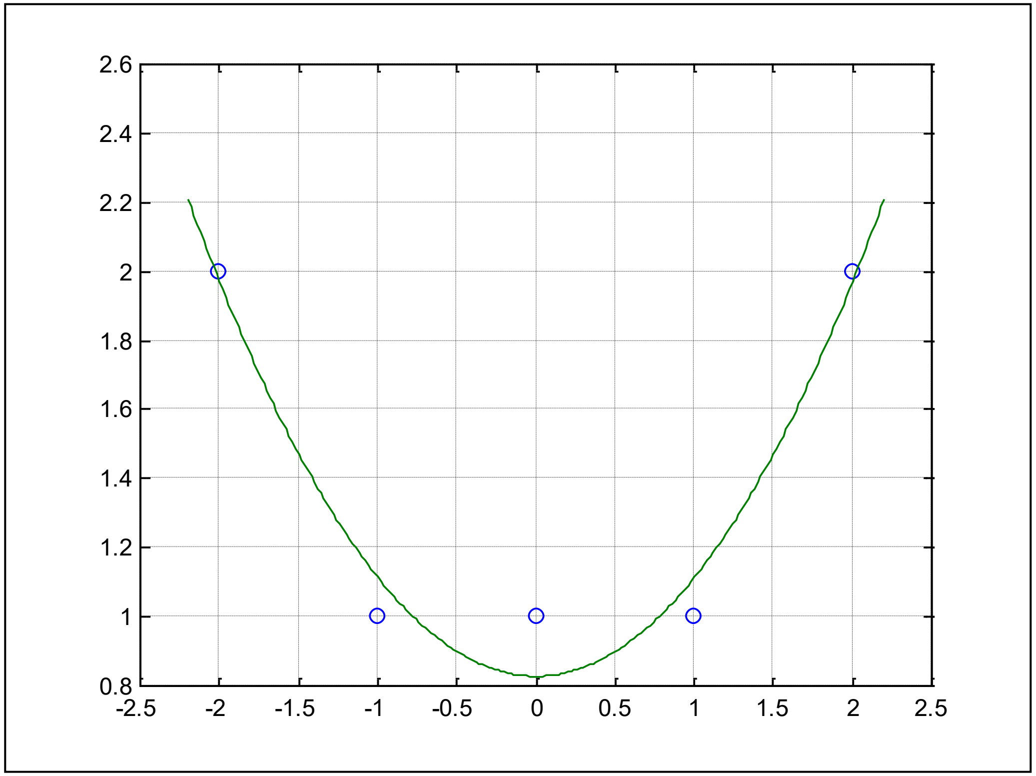
ולכן המקרב המבוקש הנו:

$$\boxed{Q_2(x) = \frac{29}{35} + \frac{2}{7}x^2}$$

המשך דוגמא

היבט גיאומטרי:

```
» x=[-2 -1 0 1 2];
» y=[2 1 1 1 2];
» p=polyfit(x,y,2);
» xx=-2.2:0.02:2.2;
» yy=polyval(p,xx);
» plot(x,y,'o',xx,yy);grid
```



המשך דוגמא

<u>הערות ל- matlab:</u>

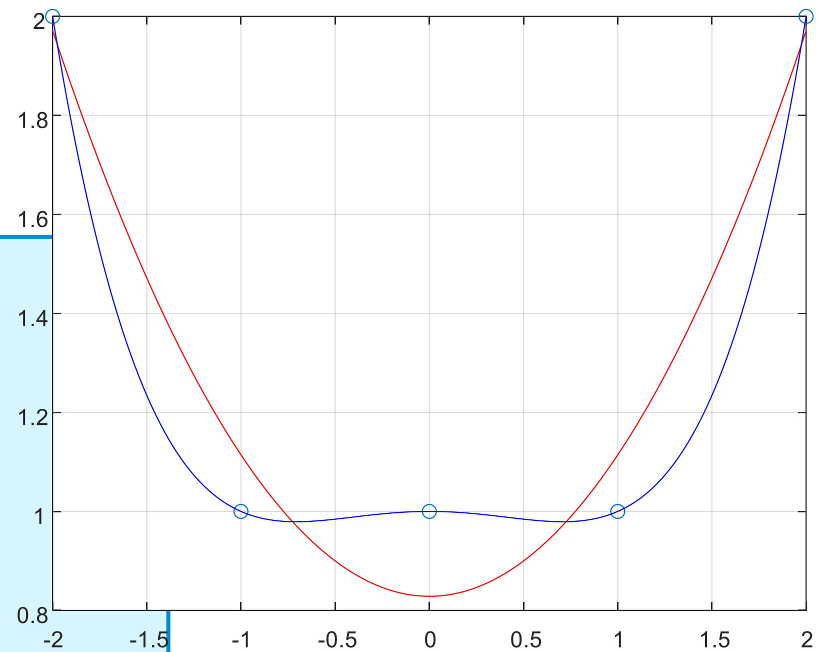
<u>*P=Polyfit(x,y,2):</u> מגדיר את וקטור המקדמים של הפולינום p ממעלה ≤ 2 שהוא המקרב הטוב ביותר במובן ריבועים מינימליים המתאים לטבלה

x	
y	

<u>* Polyval(p,xx):</u> מחשב את ערך הפולינום p בנקודה xx .

הרחבת הדוגמא

היבט גיאומטרי עבור מקרבים מסדר n=2,4:




```
» x=[-2 -1 0 1 2];
» y=[2 1 1 1 2];
» p2=polyfit(x,y,2);
» p4=polyfit(x,y,4);
» xx=-2:0.02:2;
» yy2=polyval(p2,xx);
» yy4=polyval(p4,xx);
» plot(x,y,'o',xx,yy2,'r',xx,yy4,'b');grid
```

דוגמא נוספת לפולינומים אורתוגונליים

מצאנו קודם מקדמים לטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

עבור הפונקציות הבסיסיות $1, x, x^2$

כעת נתבונן שוב באותה קבוצת נק', והפעם נבחר $\varphi_0(x)=1, \;\; \varphi_1(x)=x, \;\; \varphi_2(x)=x^2-2$

נראה תחילה שזהו בסיס אורתוגונלי ביחס לנקודות $\{x_k\}_{k=1}^{5}$:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2
φ_0	1	1	1	1	1
φ_1	-2	-1	0	1	2
φ_2	2	-1	-2	-1	2

$$\langle \varphi_0,\varphi_1\rangle=\langle \varphi_1,\varphi_0\rangle=1\cdot(-2)+1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2=0$$

$$\langle \varphi_0,\varphi_2\rangle=\langle \varphi_2,\varphi_0\rangle=1\cdot 2+1\cdot(-1)+1\cdot(-2)+1\cdot(-1)+1\cdot 2=0$$

$$\langle \varphi_1,\varphi_2\rangle=\langle \varphi_2,\varphi_1\rangle=(-2)\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot(-1)+2\cdot 2=0$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

המשך דוגמא

כזכור, כאשר הפונקציות הבסיסיות הן אורתוגונליות מתקבלת מערכת אלכסונית:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & & \\ & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \\ & & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, \varphi_0 \rangle \\ \langle y, \varphi_1 \rangle \\ \langle y, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix}$$

שפתרונה הוא מקדמי פורייה:

$$c_0 = \frac{\langle y, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}$$

$$c_1 = \frac{\langle y, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}$$

$$c_2 = \frac{\langle y, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}$$

והקירוב הנדרש יהיה:

$$\boxed{Q_2(x) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot (x^2 - 2)}$$

המשך דוגמא

בדוגמא זו מתקיים:

$$c_0 = \frac{\langle y, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{2+1+1+1+2}{1+1+1+1+1} = \frac{7}{5}$$

$$c_1 = \frac{\langle y, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{-4-1+0+1+4}{4+1+0+1+4} = 0$$

$$c_2 = \frac{\langle y, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle} = \frac{4-1-2-1+4}{4+1+4+1+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

ולכן נקבל

$$\boxed{Q(x) = \frac{7}{5} + \frac{2}{7}(x^2 - 2) = \frac{29}{35} + \frac{2}{7}x^2}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

יחס הנסיגה של פולינומים אורתוגונליים: המקרה הדיסקרטי

נוכל להגדיר קבוצת פולינומים אורתוגונליים $\{\tilde{p}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ביחס למכפלה פנימית דיסקרטית על הנקודות $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ באופן הרקורסיבי הבא:

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\tilde{p}_n(x) - \beta_n \tilde{p}_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

עם תנאי ההתחלה

$$\tilde{p}_0(x) = 1,$$

$$\tilde{p}_1(x) = x - \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}$$

והמקדמים:

$$\alpha_n = \frac{\langle x\tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle}{\langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle} \qquad \beta_n = \frac{\langle x\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n-1} \rangle}{\langle \tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \rangle} = \frac{\langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle}{\langle \tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \rangle}$$

פולינומים אורתוגונליים-מקרה דיסקרטי, הערה

קבוצת הפולינומים האורתוגונליים $\{\tilde{p}_k(x)\}_{k=0}^{n}$ שבונים עבור הטבלה $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{N}$ תלויה רק בנקודות $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ ולא בערכי הפונקציה בנקודות אלו.

לדוגמא:

קבוצת הפולינומים האורתוגונליים שנבנה עבור הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

לא תהיה שונה מזו שנבנה עבור הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	4	8	4	8	4

בניית פולינומים אורתוגונלים: דוגמא

נתונה הטבלה

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

1. מצאו שלושה פולינומים אורתוגונליים ביחס קב' הנקודות הנ"ל.
2. חשבו בעזרת פולינומים אלה את הפולינום $\tilde{Q}_2(x)$ שהוא המקרב הטוב ביותר לטבלה במובן הריבועים המינימליים.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון הדוגמא

$$\boxed{\tilde{p}_0(x)=1}$$

$$\tilde{p}_1(x)=x-\alpha_0 \qquad \alpha_0=\frac{\sum_{k=1}^{5}x_k}{5}=\frac{-2-1+0+1+2}{5}=0\Rightarrow \boxed{\tilde{p}_1(x)=x}$$

$$\tilde{p}_2(x)=\left(x-\alpha_1\right)\tilde{p}_1(x)-\beta_1\tilde{p}_0(x)$$

$$\alpha_1=\frac{\langle x\tilde{p}_1,\tilde{p}_1\rangle}{\langle \tilde{p}_1,\tilde{p}_1\rangle}=\frac{\sum_{k=1}^{5}x_k\tilde{p}_1^2(x_k)}{\sum_{k=1}^{5}\tilde{p}_1^2(x_k)}=\frac{\sum_{k=1}^{5}x_k{}^3}{\sum_{k=1}^{5}x_k{}^2}=\frac{-8-1+0+1+8}{4+1+0+1+4}=0$$

$$\beta_1=\frac{\langle \tilde{p}_1,\tilde{p}_1\rangle}{\langle \tilde{p}_0,\tilde{p}_0\rangle}=\frac{\sum_{k=1}^{5}x_k{}^2}{N}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=2$$

$$\boxed{\tilde{p}_2(x)=x^2-2}$$

פתרון הדוגמא, המשך

קיבלנו, אם כן את קבוצת הפולינומים $\{\tilde{p}_0(x) \equiv 1, \tilde{p}_1(x) = x, \tilde{p}_2(x) = x^2 - 2\}$ המהווה קבוצה אורתוגונלית ביחס קבוצת הנקודות הנתונה בטבלה $\{x_k\}_{k=1}^{5}$.

המקרב הטוב ביותר, עבור קבוצת פונקציות בסיסיות אורתוגונליות (במקרה זה הפולינומים האורתוגונליים שבנינו) הוא מהצורה

$$\boxed{\tilde{Q}_2(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k \cdot \tilde{p}_k(x) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot (x^2 - 2)}$$

כאשר $\boxed{c_k = \left\langle \frac{y, \tilde{p}_k}{\tilde{p}_k, \tilde{p}_k} \right\rangle, \quad k = 0,1,2}$ מקדמי פורייה.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

פתרון הדוגמא, המשך

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2
$\tilde{p}_0$	1	1	1	1	1
$\tilde{p}_1$	-2	-1	0	1	2
$\tilde{p}_2$	2	-1	-2	-1	2

נבנה את הטבלה המתאימה לבעיה:

$$c_0 = \frac{\langle y, \tilde{p}_0 \rangle}{\langle \tilde{p}_0, \tilde{p}_0 \rangle} = \frac{2+1+1+1+2}{1+1+1+1+1} = \frac{7}{5}$$

$$c_1 = \frac{\langle y, \tilde{p}_1 \rangle}{\langle \tilde{p}_1, \tilde{p}_1 \rangle} = \frac{-4-1+0+1+4}{4+1+0+1+4} = 0$$

$$c_2 = \frac{\langle y, \tilde{p}_2 \rangle}{\langle \tilde{p}_2, \tilde{p}_2 \rangle} = \frac{4-1-2-1+4}{4+1+4+1+4} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q_2(x) = \frac{7}{5} + \frac{2}{7}(x^2 - 2) = \frac{29}{35} + \frac{2}{7}x^2}$$

תרגיל

נתונה קבוצת הנקודות $\{x_1=-2, x_2=-1, x_3=0, x_4=1\}$

א. מצאו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך שהקבוצה

$$\{p_0(x)=1,\ p_1(x)=x-a,\ p_2(x)=x^2+bx+c\}$$

מהווה קבוצה אורתוגונלית ביחס לקבוצת הנקודות הנתונה.

ב. באמצעות הקבוצה הא"ג שמתקבלת בסעיף קודם, מצאו את המקרב הטוב ביותר במובן ר"מ לפונקציה $y=f(x)$ הנתונה באמצעות הטבלה הבאה:

x	-2	-1	0	1
y	-2	4	3	-5

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי