אנליזה נומרית : מצגת מלווה #4

שיטות נומריות לפתרון מערכת משוואות, המשך

נושאי המצגת:

1. אי יציבות של שיטת גאוס
2. שיטת גאוס עם בחירת צירים (Partial Pivoting)

1. יציבות נומרית של שיטת גאוס

תזכורת: אי יציבות שמקורה בשיטת הפתרון

הגדרה:

לבעיה יש **אי יציבות שמקורה בשיטת הפתרון** אם טעויות קטנות המופיעות בשלב כלשהו של הפתרון משפיעות לרעה על החישובים שלאחר מכן במידה כזו שהתוצאות הסופיות הן לגמרי לא מדויקות.

נראה כעת את אי היציבות הנומרית של שיטת גאוס לפתרון מערכת משוואות ליניאריות.

נפתח בדוגמאות להמחשת אי היציבות ואח"כ ננסה להבין את המקור לאי היציבות ונציג שתי דרכים להתגבר עליה.

אי היציבות של שיטת גאוס

מוטיבציה

דוגמא 1 להסבר הבעיה

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

למערכת יש פתרון יחיד

$$x = \left(x_1, x_2\right)^t = \left(1,1\right)^t$$

- במקרה זה לא נוכל ליישם את שיטת גאוס הרגילה היות ואיבר הציר/הפיבוט בשורה הראשונה=0.
- נוכל לפתור את המערכת בשיטת גאוס אם נעבור למערכת שקולה ע"י החלפת שורה 1 ו- 2- כלומר נבחר את איבר הציר כך שיהיה $\neq 0$.

אי היציבות של שיטת גאוס- המשך
דוגמא 1

- ראינו אם כן כי ע"י החלפת שורה 1 ו- 2 שמגדירה איבר ציר "תקין" (שונה מ-0) ניתן למצוא פתרון למערכת בשיטת גאוס.

שיטה זו נקראת **שיטת גאוס עם בחירת צירים (פיבוטינג/ pivoting)**

טענה:

אם $0 \neq |A|$ אז אלגוריתם גאוס עם פיבוטינג מאפשר לקבל פתרון אחד ויחיד.

אי היציבות של שיטת גאוס

מוטיבציה

דוגמא 2 להסבר הבעיה

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix}$$

למערכת יש פתרון יחיד

$$x = (x_1, x_2)^t = (10.00, 1.000)^t$$

נחפש פתרון מקורב של המערכת בשיטת האלימינציה של גאוס תוך עיגול 4 ספרות במנטיסה בכל שלב של הפתרון.

אי היציבות של שיטת גאוס- המשך דוגמא 2

<u>פתרון הדוגמא</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.003000 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right) \xrightarrow[rd\quad(t=4)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 0.003000 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right)$$

$$x_2^* = \frac{104400}{104300} = 1.000958.... \xrightarrow[rd\quad(t=4)]{} 1.001$$

$$x_1^* = \frac{59.17 - \overbrace{59.14 \cdot 1.001}^{59.19914}}{0.003000} \xrightarrow[rd\quad(t=4)]{} \frac{\overbrace{59.17 - 59.20}^{-0.03}}{0.003000} = \frac{-0.03}{0.003000} = -10$$

אי היציבות של שיטת גאוס- המשך דוגמא 2

פתרון הדוגמא- פירוט חישובי העזר

$$\left\{\begin{array}{l}
l_{21}=\dfrac{5.291}{0.003000}=1763.666\ldots\xrightarrow[rd\ (t=4)]{}1764 \\[2em]
R_2\leftarrow R_2-1764R_1: \\[2em]
5.291\rightarrow 0 \\[1em]
-6.130\rightarrow -6.130-\overbrace{1764\cdot 59.14}^{\xrightarrow[rd\ (t=4)]{}104300}=\overbrace{-6.130-104300}^{=-104306.13}\xrightarrow[rd\ (t=4)]{}104300 \\[1em]
46.78\rightarrow 46.78-\overbrace{1764\cdot 59.17}^{\xrightarrow[rd\ (t=4)]{}104400}=\overbrace{46.78-104400}^{-104353.22}\xrightarrow[rd\ (t=4)]{}104400
\end{array}\right\}$$

אי היציבות של שיטת גאוס- המשך דוגמא 2

המשך פתרון הדוגמא

חישובי שגיאות יחסיות של כל קואורדינטה:

$$R.E_{x_1} = \left|\frac{x_1 - x_1^*}{x_1}\right| = \left|\frac{10-(-10)}{10}\right| = 2 \rightarrow 200\%$$

$$R.E_{x_2} = \left|\frac{x_2 - x_2^*}{x_2}\right| = \left|\frac{1-(1.001)}{1}\right| = 0.001 \rightarrow 0.1\%$$

בדוגמא זו לא נדרשנו להחלפת שורות היות ו-$a_{11} \neq 0$ אך למרות זו
קבלנו פתרון לא יציב בעליל עם שגיאה 200% עבור הקואורדינטה x_1

אי היציבות של שיטת גאוס, המשך

העובדה שבדוגמא 2 מתקבל ערך מקורב עם אחוזי שגיאה גדולים מאד, מצביעה על **חוסר יציבות** נומרית.

מהי סיבה אפשרית לאחוזי השגיאה הגדולים שקבלנו?

מבחינה מעשית המחשב מבצע טעויות עיגול שערכן המצטבר עשוי להוביל לאי יציבות נומרית ויש לדעת לזהות מצבים אפשריים כאלו ולהציע דרך למנוע אותם.

במקרה זה **חוסר היציבות נובע מדרך הפתרון**

2. Partial Pivoting לפתרון בעיית אי היציבות של שיטת גאוס

מגבלות שיטת גאוס- כיצד מתגברים?

- כאמור, אלגוריתם גאוס נכשל כאשר יש פיבוט $a_{kk}=0$ ועשוי להיכשל כאשר $a_{kk}\approx 0$ מאחר ואנו עושים שימוש בציר לחישוב הגורמים הכפליים בתהליך קדימה וחישוב הנעלמים בהצבה לאחור.

- נציין כי בעת הדירוג בשיטת גאוס בשלב של בתהליך קדימה המעבר מ- $A=A^{(1)}$ ל- $U=A^{(n)}$ **<u>אינו נקבע חד-ערכית</u>**, אלא יש מספר אפשרויות לבחור את כלל ההחלפה בכל שלב.

- על מנת להתגבר על מגבלות השיטה ולהימנע מטעויות ניתן בכל שלב של הדירוג לבחור את הפיבוט בצורה שתמזער את השגיאה המצטברת וזאת באמצעות שימוש בפעולות אלמנטריות של **<u>החלפת שורות</u>**.

כיצד מתגברים?, המשך

- בעת חישוב הגורמים הכפליים $l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ אנו מבצעים חלוקה בפיבוט a_{kk} .
ערכים מספריים קטנים מאד של הפיבוט המופיעים במכנה של הגורם הכפלי גורמים לשגיאות גדולות.

- על מנת להקטין את השגיאות, רצוי בכל אחד משלבי הדירוג , למקם כפיבוט (ע"י החלפת שורות מתאימה) איבר ציר גדול ככל שניתן ואז הגורמים הכפליים l_{ik} $(i = k+1, \dots ,n)$ יהיו קטנים ככל שניתן ובפרט יקיימו $|l_{ik}| \le 1$.

$$\left|l_{ik}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|a_{ik}\right| \le \left|a_{kk}\right|, \quad \forall i = k,\dots,n$$

כיצד מתגברים?, המשך

- לשם כך, בשלב ה- k של תהליך קדימה, נסרוק את כל האברים בעמודה ה- k על האלכסון ומתחתיו ונבחר את השורה שבה מופיע האיבר הגדול ביותר בערכו המוחלט

- אם השורה המתאימה איננה השורה ה- k אז נבצע החלפה שלה עם שורת הפיבוט במטריצה המורחבת.

השיטה המתוארת לעיל של החלפת שורות נקראת **partial pivoting**.

סיכום: שיטת Partial Pivoting

בשיטה זו הנקראת גם **maximal column pivoting**
בוחרים כפיבוט את האיבר הגדול ביותר בהשוואה לאיברים בעמודה שלו (מהאלכסון ומטה).

1. בשלב ה- k של הדירוג $(k = 1,..,n-1)$:
   - ❑ מחשבים את האינדקס p כך שיתקיים התנאי $$\boxed{\left|a_{pk}\right| = \max_{k\le i\le n}\left|a_{ik}\right|}$$
     (המטריצה A הפיכה ולכן קיים ערך מקסימלי שונה מ-0)
   - ❑ במקרה ש- $k \neq p$ מבצעים החלפת שורות בהתאמה $R_k \leftrightarrow R_p$
     (באופן כזה מבטיחים כי $\left|l_{ik}\right| \le 1, \quad \forall i = k+1,\dots,n$)
   - ❑ מבצעים איפוס האברים מתחת לאיבר a_{kk} .
2. פועלים לפי העיקרון המתואר ב- 1 לכל $k = 1,..,n-1$ עד להשלמת הדירוג.
3. בסיום הדירוג, פותרים את המערכת השקולה המתקבלת.

Partial Pivoting שיטת

Input:

$$Ax=b; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Main:

For $1 \le k \le n-1$

find p such that $|a_{pk}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}|$

If $p=k$

do elimination step

else

change rows: $R_k \leftrightarrow R_p$

do elimination step

end

End

דוגמא ליישום שיטת Partial Pivoting

נחזור לדוגמא קודמת (דוגמא 2)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix}$$

בשיטת גאוס הרגילה יש לדרג מתחת לפיבוט $a_{11} \neq 0$.

מתקיים $|a_{21}| > |a_{11}|$.

משמע, הפיבוט $a_{11} = 0.003$ איננו אופטימלי כפיבוט לשלב הראשון (והיחיד במקרה זה) של הדירוג .

לפיכך, נבצע החלפת שורות ונקבל את המערכת השקולה:

$$\begin{pmatrix} 5.291 & -6.130 \\ 0.003000 & 59.14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46.78 \\ 59.17 \end{pmatrix}$$

שיטת Partial Pivoting- המשך דוגמא

<u>פתרון המערכת השקולה</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0.003000 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right) \xrightarrow[l_{21}\approx 0.0005670]{rd \quad (t=4)} \left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right)$$

$$x_2^* = \frac{59.14}{59.14} = 1$$

$$x_1^* = \frac{46.78 + \overbrace{6.130 \cdot 1}^{6.130}}{5.291} = \frac{52.91}{5.291} = 10$$

במקרה זה קבלנו פתרון מדויק עם 0% שגיאה (עד כדי 4 ספרות במנטיסה)

תרגיל:
שיטת Partial Pivoting

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אשר הפתרון המדויק שלה הוא $x = (1,1,1)^t$

פתרו את המערכת ע"י שימוש בשיטת Partial Pivoting
עם דיוק של 3 ספרות במנטיסה.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון תרגיל

נפתור את המערכת בשיטת גאוס (עם עיגול rd ו- $t=3$)

<u>תהליך קדימה:</u>

בחירת שורת ציר לשלב $k=1$

נבחר כשורת הפיבוט את שורה $p=3$ היות ו- $|a_{31}|=\max_{1\le i\le 3}|a_{i1}|$.

נבצע החלפת שורה 1 עם שורה 3 ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & -6 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{l_{21}=\frac{1}{3}\xrightarrow[t=3]{rd}0.333, \\ l_{31}=\frac{2}{3}\xrightarrow[t=3]{rd}0.667}]{}$$

$$\to \begin{bmatrix} R_2 \to R_2 - 0.333R_1 \\ R_3 \to R_3 - 0.667R_1 \end{bmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5.33 & 7.67 & 2.33 \\ 0 & 4.33 & -6.67 & -2.33 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון תרגיל

המשך תהליך קדימה: בחירת שורת ציר לשלב $k=2$

במקרה זה $|a_{22}| = \max_{2\le i\le 3}|a_{i2}|$ כלומר, $p=2$ ולכן ואין צורך בהחלפת שורות.

נמשיך בדירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5.33 & 7.67 & 2.33 \\ 0 & 4.33 & -6.67 & -2.33 \end{array}\right) \xrightarrow[l_{32}=\frac{4.33}{-5.33}=-0.81238\ldots \xrightarrow[t=3]{rd} -0.812]{}$$

$$\to\left[R_3 \to R_3 + 0.812R_2\right]\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5.33 & 7.67 & 2.33 \\ 0 & 0 & -0.440 & -0.440 \end{array}\right)$$

פתרון תרגיל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5.33 & 7.67 & 2.33 \\ 0 & 0 & -0.440 & -0.440 \end{array}\right)$$

לאחר הדירוג קבלנו ממ"ל שקולה

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ \quad -5.33x_2 + 7.67x_3 = 2.33 \\ \qquad -0.44x_3 = -0.44 \end{cases}$$

פתרון, ע"י **<u>הצבה לאחור:</u>**

$$x_3^* = \frac{-0.44}{-0.44} = 1$$

$$x_2^* = \frac{2.33 - \overbrace{7.67 \cdot 1}^{=7.67}}{-5.33} = \frac{\overbrace{2.33 - 7.67}^{-5.34}}{-5.33} = \frac{-5.34}{-5.33} = 1.0018761\ldots \xrightarrow[t=3]{rd} 1.00$$

$$x_1^* = \frac{2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$