המכללה האקדמית להנדסה בראודה
המחלקה להנדסת תוכנה ומערכות מידע
אנליזה נומרית חורף תשפ"ו
ד"ר דבורה טולדנו קטעי

שאלות לדוגמא

שאלה 1:

נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 0.01x_1 + x_2 = 0.695 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2.35 \end{cases}$. מצאו למערכת **פתרון נומרי** עם תוך שימוש בשיטת האלימינציה של גאוס עם Partial Pivoting.

* יש לבצע עיגול rd של 3 ספרות במנטיסה מנורמלת ולפרט את כל חישובי העזר ועיגולי הביניים בתהליך הדירוג וההצבה לאחור. תשובה ללא פירוט החישובים ועיגולי הביניים תקבל ניקוד חלקי.

פתרון שאלה 1:

ניישם את שיטת האלימינציה של גאוס בשילוב Partial Pivoting בתהליך הדירוג:

- בשלב הראשון והיחיד במקרה זה (מערכת מסדר 2) נמקם כאיבר ציר (פיבוט) את a_{11} האיבר a_{p1} ($1 \le p \le 2$) בעמודה הראשונה כך שיתקיים $|a_{p1}| = \max\limits_{1\le i\le 2} |a_{i1}|$.

מתקיים: $|a_{p1}| = \max\limits_{1\le i\le 2} |a_{i1}| = \max\{\underset{i=1}{0.01}, \underset{i=2}{2}\} = 2 = |a_{21}|$.

המקסימום מתקבל עבור השורה השנייה כלומר $p=2$ ויש לבצע החלפת שורות בטרם הדירוג בשלב זה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 1 & 0.695 \\ 2 & -3 & 2.35 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2.35 \\ 0.01 & 1 & 0.695 \end{array}\right)$$

נפנה לדירוג

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2.35 \\ 0.01 & 1 & 0.695 \end{array}\right) \to \left[l_{21} = \frac{0.01}{2} = 0.005 \right]$$

$$\to \left[R_2 \to R_2 - 0.005R_1 \right] \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2.35 \\ 0 & 1.02 & 0.683 \end{array}\right)$$

פירוט חישובי העזר ועיגולי הביניים:

$$R_2 \to R_2 - 0.005R_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.01 \to 0 \\ 1 \to 1 - \overbrace{0.005\cdot(-3)}^{-0.015} = \overbrace{1 + 0.015}^{1.015} = 1.015 \xrightarrow[t=3]{rd} 1.02 \\ 0.695 \to 0.695 - \overbrace{0.005\cdot 2.35}^{0.01175 \xrightarrow[t=3]{rd} 0.0118} \xrightarrow[t=3]{rd} \overbrace{0.695 - 0.0118}^{0.6832} \xrightarrow[t=3]{rd} 0.683 \end{cases}$$

הצבה לאחור:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2.35 \\ 0 & 1.02 & 0.683 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2.35 \\ 1.02x_2 = 0.683 \end{cases}}_{\Downarrow} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{0.683}{1.02} = 0.669607\ldots \xrightarrow[t=3]{rd} 0.670 \\ x_1 = \dfrac{2.35 + \overbrace{3\cdot 0.670}^{2.01}}{2} = \dfrac{\overbrace{2.35+2.01}^{4.36}}{2} = \dfrac{4.36}{2} = 2.18 \end{cases}$$

כלומר הפתרון המקורב בשיטת גאוס עם Partial Pivoting הוא $x^*_{G\_pp} = \begin{pmatrix} 2.18 \\ 0.670 \end{pmatrix}$

שאלה 2

נתונה המערכת $Ax=b$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 2 & -a\\ 0 & -a & 3\end{pmatrix}$ ו- $b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ עם $a\neq\pm\sqrt{1.5}$ ממשי.

א. מצאו את תחום ערכי $a\in\mathbb{R}$ עבורם שיטת יעקובי מתכנסת לכל וקטור התחלתי.

ב. עבור $a=0.5$ נתון הפתרון המדויק $x=(2,-1,0)^t$ (עם 3 ספרות במנטיסה). חשבו את $\|B_J\|_\infty$ ואת מספר האיטרציות הנדרש עם וקטור התחלה $x^{(0)}=(1,1,1)^t$ כדי להבטיח $\left\|e^{(m)}\right\|_\infty\leq 10^{-6}$.

פתרון שאלה 2:

א. נבנה את פולינום העזר של שיטת יעקובי באמצעות המטריצה A ונבדוק תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & a & 0\\ a & 2\lambda & -a\\ 0 & -a & 3\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda\cdot\begin{vmatrix}2\lambda & -a\\ -a & 3\lambda\end{vmatrix}-a\cdot\begin{vmatrix}a & -a\\ 0 & 3\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\lambda\cdot(6\lambda^2-a^2)-a\cdot(3a\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda\cdot(6\lambda^2-4a^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\lambda_1=0\ \ or\ \ \lambda^2=\frac{2a^2}{3}\Leftrightarrow\lambda_1=0\ \ or\ \ \lambda_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

שיטת יעקובי מתכנסת לכל וקטור התחלה **אםם** כל שורשי $q_J(\lambda)$ נמצאים במעגל היחידה, כלומר מקיימים $|\lambda|<1$. השורש $\lambda_1=0$ אכן נמצא במעגל היחידה (מרכז המעגל) ולכן נותר לדרוש

בנוסף שיתקיים $|\lambda_{2/3}|=\left|\pm\sqrt{\frac{2}{3}}a\right|<1$ כלומר התנאי הנדרש להתכנסות הוא

$|a|<\sqrt{3/2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sim 1.225$ (שימו לב כי הוא מתייחס לאילוצים הנתונים $a\neq\pm\sqrt{1.5}$).

ב. נחשב את $\|B_J\|_\infty$ עבור $a=0.5$

המערכת המתקבלת ע"י הערך הנתון של a היא $\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 2 & -0.5\\ 0 & -0.5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

דרך 1: חישוב באמצעות הנוסחה $B_J=-D^{-1}(L+U)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 2 & -0.5\\ 0 & -0.5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & -0.5\\ 0 & -0.5 & 0\end{pmatrix}$$

$$B_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&0.5&0\\0.5&0&-0.5\\0&-0.5&0\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0.5&0\\0.5&0&-0.5\\0&-0.5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-0.5&0\\-0.25&0&0.25\\0&\frac{1}{6}&0\end{pmatrix}$$

ולכן
$$\|B_J\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}0&-0.5&0\\-0.25&0&0.25\\0&\frac{1}{6}&0\end{pmatrix}\right\|_\infty=\max\left\{0.5,0.5,\frac{1}{6}\right\}\underset{fiirst/second\ row}{\downarrow}=0.5$$

ב. הוכחנו בקורס כי מתקיים: $\|e^{(m)}\|\le\|B\|^m\cdot\|e^{(0)}\|$.

עבור $x^{(0)}=(1,1,1)^t$ ו-$x=(2,-1,0)^t$ מתקיים $x-x^{(0)}=(1,-2,-2)^t$

ולכן, $\|e^{(0)}\|_\infty=\|x-x^{(0)}\|_\infty=\|(1,-2,-2)\|_\infty=2$

וחישבנו בסעיף קודם $\|B_J\|_\infty=0.5$. לכן נקבל $\|e^{(m)}\|_\infty\le\|B\|_\infty^m\cdot\|e^{(0)}\|_\infty=\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot 2$

נדרוש $\|e^{(m)}\|_\infty\le\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot 2\le 10^{-6}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot 2\le 10^{-6}\Leftrightarrow\frac{1}{2^{m-1}}\le 10^{-6}\Leftrightarrow 2^{m-1}\ge 10^6\Leftrightarrow (m-1)\log 2\ge 6\Leftrightarrow m\ge 1+\frac{6}{\log 2}\cong 20.93$$

לפיכך תידרשנה לפחות 21 איטרציות כדי לקבל את רמת הדיוק המבוקשת.

שאלה 3:

נתון כי:

- $g(x)$ היא פונקציה רציפה לכל x וגם אי זוגית המקיימת $g(1)=2$.
- קיימת נקודה יחידה $r\in(-1,1)$ שעבורה $g(r)=\frac{r^2}{4}$.

מגדירים $f(x)=4g(x)-x^2$.

הוכיחו כי סדרת הקירובים $\{m_n\}_{n\ge 0}$ המתקבלת בשיטת החצייה המיושמת לפתרון המשוואה $f(x)=0$ בקטע $[-1,1]$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(m_n)=r$.

פתרון שאלה 3:

נבדוק תנאים מספיקים להתכנסות שיטת החצייה המיושמת למשוואה $f(x)=0$ בקטע $[-1,1]$.

- נתון כי $g(x)$ היא פונקציה רציפה ולכן $f(x)=4\cdot g(x)-x^2$ רציפה (סכום ומכפלה של פונקציות רציפות) לכל x ובפרט בקטע $[-1,1]$.
- $g(x)$ היא פונקציה אי זוגית המקיימת $g(1)=2$ ולכן גם $g(-1)=-2$ ומכאן נקבל:

$$\left.\begin{array}{l}f(-1)=4\cdot g(-1)-(-1)^2=4\cdot(-2)-1=-9<0\\ f(1)=4\cdot g(1)-1^2=4\cdot 2-1=7>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(-1)\cdot f(1)<0$$

- נמצא את הפתרון/הפתרונות של המשוואה ונבדוק יחידותם בקטע:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 4\cdot g(x)-x^2=0 \Leftrightarrow g(x)=\frac{x^2}{4}$$

מהנתון נובע כי קיימת נקודה יחידה $r\in(-1,1)$ שעבורה $g(r)=\frac{r^2}{4}$ ולכן מתקיים:

$$f(r)=4\cdot g(r)-r^2=4\cdot\left(\frac{r^2}{4}\right)-r^2=r^2-r^2=0$$

כלומר, למשוואה $f(x)=0$ יש פתרון בקטע $[-1,1]$ והוא $x=r$ יחידותו נובעת מהנתון על יחידות הנקודה $r\in(-1,1)$ שעבורה $g(r)=\frac{r^2}{4}$.

לסיכום:

$f(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$ ומקיימת את התנאי הנוסף במשפט ערך הביניים $f(-1)\cdot f(1)<0$ ובנוסף בעלת שורש יחיד $r\in(-1,1)$ בקטע ואילו תנאים מספיקים להתכנסות שיטת החצייה בקטע.

כלומר סדרת הקירובים $\{m_n\}_{n\ge 0}$ המתקבלת בשיטת החצייה המיושמת לפתרון המשוואה $f(x)=0$ בקטע $[-1,1]$ ובפרט מתקיים $\lim_{n\to\infty}(m_n)=r$.

שאלה 4:

סטודנטים בקורס "אנליזה נומרית" התבקשו להציע שיטת נקודת שבת למציאת הפתרון $r=1$ של המשוואה $f(x)=4x^3-4x^2-x+1=0$.

א. סטודנט חרוץ שניגש לפתור את הבעייה הציע מיד את השיטה האיטרטיבית $x_{n+1}=g(x_n)=4x_n^3-4x_n^2+1;\quad n\ge 0$. הוכיחו כי הצעתו לא מתאימה לפתרון הבעייה.

ב. סטודנט שנה ד' שכבר למד את הקורס בעבר הציע לחברו את השיטה האיטרטיבית $x_{n+1}=h(x_n)=(1-A)\cdot x_n+A\cdot g(x_n);\quad n\ge 0$ (עם $g(x_n)$ מסעיף קודם ו- $A\neq 0$ פרמטר ממשי).

מצאו טווח ערכים עבור A שבו מובטחת <u>התכנסות לוקלית</u> של השיטה המוצעת ל- $r=1$

ג. עבור $A=-\frac{1}{2}$ מצאו קטע $I=[a,b]$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}h(x_n)=1$ לכל $x_0\in I$.

מהו <u>סדר ההתכנסות</u> הלוקלי של השיטה במקרה זה?

פתרון שאלה 4:

א. נראה כי עבור השיטה האיטרטיבית $x_{n+1}=g(x_n)=4x_n^3-4x_n^2+1;\quad n\ge 0$ נקודת השבת $r=1$ היא נקודת דחייה של פונקצית האיטרציה המוצעת $g(x)$ ולכן הצעת הסטודנט לא מתאימה לפתרון הבעייה.

פונקצית האיטרציה המוצעת הינה $g(x)=4x^3-4x^2+1$ ואכן מקיימת את השקילות $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$. (כיוון ש- $g(r)=4x^3-4x^2+1\Big|_{x=1}=4-4+1=1=r$)

מתקיים $g'(x)=12x^2-8x$ ולכן $g'(r)=g'(1)=12x^2-8x\Big|_{x=1}=4$.

כיוון ש- $|g'(1)|=4>1$ נסיק כי $r=1$ היא נקודת דחייה של פונקצית האיטרציה המוצעת $g(x)$ ולכן הצעת הסטודנט לא מתאימה לפתרון הבעייה.

ב. עבור השיטה האיטרטיבית הנוספת המוצעת $n\ge 0$ $x_{n+1}=h(x_n);$ (עם $g(x_n)$ מסעיף קודם ו- $A\neq 0$ פרמטר), נמצא טווח ערכים עבור A שבו מובטחת התכנסות לוקלית של השיטה המוצעת ל- $r=1$.

<u>התכנסות לוקלית</u> מובטחת אםם $h(r)=r$ וגם $|h'(r)|<1$ (במילים: $r=1$ היא נקודת השבת המהווה נקודת משיכה של פונקצית האיטרציה המוצעת $h(x)$).

מהתהליך האיטרטיבי המוצע $n\ge 0$ $x_{n+1}=h(x_n)=(1-A)\cdot x_n+A\cdot g(x_n);$ נסיק כי $h(x)=(1-A)\cdot x+A\cdot g(x)$. נדרוש קיום שני התנאים $h(r)=r$ וגם $|h'(r)|<1$:

- מתקיים: $h(r)=(1-A)\cdot r+A\cdot g(r)$.

  מסעיף קודם נובע כי $f(r)=0\Leftrightarrow g(r)=r$ ולכן נקבל
  $$h(r)=(1-A)\cdot r+A\cdot\underbrace{g(r)}_{=r}=(1-A)\cdot r+A\cdot r=r.$$
  כלומר התנאי $h(r)=r$ מתקיים לכל פרמטר ממשי $A\neq 0$.

- כעת נתייחס לתנאי $|h'(r)|<1$:

  מתקיים $h'(x)=(1-A)+A\cdot g'(x)$. ראינו בסעיף קודם כי $g'(r)=4$ ולכן נקבל
  $$h'(r)=(1-A)+A\cdot\underbrace{g'(r)}_{=4}=3A+1$$

$$|h'(r)|<1\Rightarrow|3A+1|<1$$
$$\Rightarrow -1<3A+1<1$$
$$\Rightarrow -2<3A<0$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3}<A<0$$

ולכן טווח ערכי A מתאים המבטיח התכנסות לוקלית יהיה $-\frac{2}{3}<A<0$

ג. עבור $A=-\frac{1}{2}$ נמצא קטע $I=[a,b]$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}h(x_n)=1$ לכל $x_0\in I$ וכמו כן נמצא את סדר ההתכנסות הלוקלי של השיטה במקרה זה.

נציב $A=-\frac{1}{2}$, $g(x)=4x^3-4x^2+1$, ונקבל את פונקצית האיטרציה
$$h(x)=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\left(4x^3-4x^2+1\right)=-2x^3+2x^2+\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}$$

ראשית נמצא קטע I הכולל את $r=1$ ומתקיים בו תנאי ג' במשפט ההתכנסות של שיטת נקודת שבת (כלומר $h(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b) ומתקיים בו התנאי $|h'(x)|<1$) לאחר מכן נבדוק את שני תנאי המשפט האחרים בקטע זה.

$h(x)=-2x^3+2x^2+\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}$ היא פולינום גזיר לכל x:

$$|h'(x)|<1 \Rightarrow \left|-6x^2+4x+\frac{3}{2}\right|<1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x^2+4x+\frac{3}{2}>-1 \qquad and \qquad -6x^2+4x+\frac{3}{2}<1$$
$$\Rightarrow -12x^2+8x+5>0 \qquad and \qquad -12x^2+8x+1<0$$
$$\Rightarrow -0.393<x<1.06 \qquad and \qquad (x<-0.108 \quad or \quad x>0.774)$$
$$\Rightarrow 0.774<x<1.06$$

קבלנו כי אי השוויון $|h'(x)|<1$ מתקיים כאשר $0.774<x<1.06$ או כאשר $-0.393<x<-0.108$. הקטע הרלוונטי עבורנו הוא זה אשר כולל את נקודת השבת $r=1$ והוא כמובן הקטע $0.774<x<1.06$.

נבדוק את שני תנאי המשפט הנוספים ביחס לקטע $0.774<x<1.06$:

- $h(x)=-2x^3+2x^2+\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}$ פולינום רציף לכל x ממשי ובפרט בקטע $I=[0.774,1.06]$.
- נראה כי $h(x)$ מעבירה את הקטע $I=[0.774,1.06]$ לעצמו ולשם כך נמצא קיצון מוחלט שלה בקטע:

$h'(x)=-6x^2+4x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow x_1\approx-0.27,\ x_2\approx 0.934$. הנקודה הרלוונטית לחקירת קיצון מוחלט בקטע $I=[0.774,1.06]$ היא $x=0.934$ וכמובן גם הקצוות. מתקיים:

$$h(0.774)\cong 0.932 \quad \Rightarrow \min$$
$$h(1.06)\cong 0.955$$
$$h(0.934)\cong 1.02 \quad \Rightarrow \max$$

לכן, לכל $x\in[0.774,1.06]$ מתקיים אי השוויון

$$0.774<0.932=h(0.774)\le h(x)\le h(0.934)\cong 1.02<1.06$$

לסיכום: כל תנאי המשפט מתקיימים ולכן מובטח כי הסדרה $n\ge 0$;$x_{n+1}=h(x_n)$ מתכנסת ל- $r=1\in[0.774,1.06]$ (כלומר $\lim_{n\to\infty}h(x_n)=1$) לכל $x_0\in[0.774,1.06]$ התחלתי.

סדר התכנסות השיטה: ראינו כי $h(r)=r$ לכל $A>0$ ובפרט עבור $A=-\frac{1}{2}$.

כמו כן מתקיים: $h'(r)=h'(1)=-6x^2+4x+\frac{3}{2}\Big|_{x=1}=-0.5$

מכאן: $h(r)=r$ וגם $|h'(r)|=0.5<1$ וגם $h'(r)\ne 0$ כלומר נוכל להסיק כי ההתכנסות היא מסדר ראשון בדיוק.

שאלה 5:

נתון כי לפונקציה $f(x)$ קיים שורש ממשי r מריבוי 2 בדיוק. מגדירים פונקצית איטרציה של שיטת נקודת שבת ע"י $g(x)=2f(x)-x^2$.

א. מצאו את הערכים האפשריים של r.

ב. עבור כל אחת מהאפשרויות: בדקו האם הסדרה המתאימה $\{x_{n+1}=g(x_n)\}_{n\ge0}$ מתכנסת לוקלית ואם כן מצאו תנאי להתכנסות לוקלית ריבועית בדיוק.

פתרון שאלה 5:

נעיר כי מהנתון כי r מריבוי 2 בדיוק של $f(x)$ נובע כי $f(r)=0$, $f'(r)=0$ וגם $f''(r)\neq 0$.

א. נזכיר כי $g(x)=x \Leftrightarrow f(x)=0$. כלומר, r שורש של $f(x)$ אמם r היא נקודת שבת של $g(x)$.

$$g(r)=r \Leftrightarrow 2\underbrace{f(r)}_{=0}-r^2=r \Leftrightarrow r+r^2=0 \Leftrightarrow r(1+r)=0 \Leftrightarrow r=0 \quad \text{or} \quad r=-1$$

כלומר, הערכים האפשריים של r הם: $r_1=0$ או $r_2=0$

ב. נזכיר עבור הערכים שמצאנו מתקיים $g(r)=r$. כעת נבדוק האם היא נקודת משיכה המבטיחה התכנסות לוקלית בכל אחד מהמקרים, כלומר האם מתקיים התנאי $|g'(r)|<1$.

$$g'(x)=2f'(x)-2x \longrightarrow g'(r)=2\underbrace{f'(r)}_{=0}-2r=-2r \longrightarrow g'(r)=-2r$$

$$g'(r)=-2r \Rightarrow \begin{cases} g'(r_1)=g'(0)=0 \\ g'(r_2)=g'(-1)=2 \end{cases}$$

- עבור $r_1=0$: מתקיים $|g'(0)|=0<1$ and $g(0)=0$ ולכן $r_1=0$ היא נקודת משיכה והסדרה $\{x_{n+1}=g(x_n)\}_{n\ge0}$ תתכנס אליה לוקלית מסדר 2 לפחות.
  כמו כן מתקיים $g''(x)=2f''(x)-2 \longrightarrow g''(0)=2\underbrace{f''(r)}_{\neq0}-2$
  הסדרה מתכנסת מסדר ריבועי בדיוק אם מתקיים בנוסף $g''(r)\neq 0$ וזה קורה אמם
  $$g''(x)=2f''(x)-2 \longrightarrow g'(0)\neq 0 \Leftrightarrow 2\underbrace{f''(r)}_{\neq0}-2\neq 0 \Leftrightarrow f''(r)\neq 1$$
- עבור $r_2=-1$: מתקיים $|g'(-1)|=2>1$ and $g(-1)=0$ ולכן $r_2=-1$ היא נקודת דחייה ובמקרה זה אין התכנסות של הסדרה $\{x_{n+1}=g(x_n)\}_{n\ge0}$.

שאלה 6

נתונה המשוואה $f(x)=ax-x^2=0$ ($a\neq 0$ פרמטר ממשי). לצורך חישוב נומרי של הפתרון $r=a$ של המשוואה הוצעה השיטה האיטרטיבית הבאה:
$x_{n+1}=(a+1)\cdot x_n-x_n^2; \quad n\geq 0$.

א. מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת התכנסות לוקלית לשורש r.
ב. עבור איזה ערך של a בטווח שמצאתם מובטחת התכנסות לוקלית מסדר שני?
ג. הציגו פונקציית איטרציה של שיטה <u>נוספת</u> המבטיחה התכנסות מסדר 2 לפחות לשורש $r=a$.

פתרון שאלה 6:

א. מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת התכנסות לוקלית לשורש r.

תשובה: $0<a<2$

הסבר:

מהנוסחה האיטרטיבית הנתונה נסיק כי פונקציית האיטרציה היא $g(x)=(a+1)\cdot x-x^2$.

התכנסות לוקלית

על מנת שתתקיים התכנסות לוקלית של השיטה המוצעת לשורש $r=a$ נדרוש את קיומם של שני התנאים:

- ראשית נדרוש כי $r=a$ תהיה נקודת שבת של $g(x)$ (כלומר מתקיים $g(r)=r$)
  נראה כי תנאי זה מתקיים לכל a ממשי:
  $$g(r)=g(a)=(a+1)\cdot a-a^2=a^2+a-a^2=a=r$$
- שנית נדרוש כי נקודת שבת זו תהיה נקודת משיכה, כלומר שיתקיים $|g(r)|<1$:
  $$g(x)=(a+1)\cdot x-x^2\rightarrow g'(x)=(a+1)-2x$$

$$|g'(r)|<1\rightarrow |(a+1)-2a|<1\rightarrow |1-a|<1\rightarrow -1<a+1<1\rightarrow 0<a<2$$

ב. עבור איזה ערך של a בטווח שמצאתם מובטחת התכנסות לוקלית מסדר שני?

תשובה: $a=1$

הסבר:

ראינו כי עבור $0<a<2$ מובטחת התכנסות לוקלית לשורש $r=a$.
על מנת לקבל התכנסות מירבית נדרוש בתחילה $g'(r)=0$.
תנאי זה מתקיים אםם $g'(a)=1-a=0$ כלומר אםם $a=1$.
נבדוק את סדר ההתכנסות בפועל עבור ערך זה של a:

$$g'(x)=(a+1)-2x$$
$$\underset{a=1}{\longrightarrow} g'^{(x)}=2-2x\rightarrow g''(x)=-2\rightarrow g''(r)=g''(1)=-2\neq 0$$

קבלנו אם כן עבור $a=1$ כי $g(r)=r, g'(r)=0, g''(r)\neq 0$ ולכן ההתכנסות במקרה זה תהיה מסדר 2 בדיוק והוא המירבי האפשרי.

ג. הציגו פונקציית איטרציה של שיטה <u>נוספת</u> המבטיחה התכנסות מסדר 2 לפחות לשורש $r=a$.

תשובה: $g_{\mathrm{NR}}(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{ax-x^2}{a-2x}$

הסבר:

פונקצית איטרציה נוספת המבטיחה התכנסות מסדר שני לפחות היא פונקצית האיטרציה של שיטת ניוטון רפסון $g_{\mathrm{NR}}(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{ax-x^2}{a-2x}$

נזכיר כי בשיטת NR מובטחת התכנסות מסדר 2 לפחות כל עוד $f'(r)\neq 0$. נראה שתנאי זה מתקיים כאן: $f'(r)=f'(a)=a-2x|_{x=a}=-a\neq 0$

שאלה 7

מקרבים את הפונקציה $f(x)=ln((x+a)^2)+3x$ בקטע $[1,5]$ ($a>0$ ממשי) באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ הטוב ביותר האפשרי בקטע.

א. מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-2}$.
(בסעיף זה אין צורך למצוא את נקודות האינטרפולציה ואת $L_2(x)$)

א. מצאו את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב $L_2(T;x)$ בקטע הנתון $[1,5]$.

ב. עבור $a=5$ הוכיחו (ללא חישוב מפורש של $L_2(x)$) כי לכל $x\in[2,2.5]$ מתקיים $f(x)-L_2(T;x)>0$.

פתרון שאלה 7:

א. פולינום האינטרפולציה האופטימלי הוא פולינום הבנוי על נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע.

ידוע כי, חסם לשגיאת האינטרפולציה עבור פולינום האינטרפולציה $L_n(T;x)$ המקרב את $f(x)$ בקטע $[A,B]$ ובנוי על $n+1$ נקודות צ'ביצ'ב המותאמות לקטע $[A,B]$ נתון ע"י הנוסחה:

$$\max_{A\le x\le B}|f(x)-L_n(T;x)|\le\frac{M_{n+1}[A,B]}{(n+1)!}\cdot\frac{(B-A)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$M_{n+1}[A,B]=\max_{A\le x\le B}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

בנתוני התרגיל : $[A,B]=[1,5]$, $n=2$ ו- $M_{n+1}[A,B]=M_3[1,5]=\max_{1\le x\le5}\left|f'''(x)\right|$.

עבור $f(x)=ln((x+a)^2)+3x=2ln(x+a)+3x$ מתקיים:

$$f'(x)=\frac{2}{x+a}+3;\ f''(x)=-\frac{2}{(x+a)^2};\ f'''(x)=\frac{4}{(x+a)^3}$$

היות ו $f^{(4)}(x)=\frac{-12}{(x+a)^4}\neq0$ לכל $x\in[1,5]$ נסיק ע"י $f'''(x)$ היא פונקציה מונוטונית המקבלת את ערכי הקיצון שלה בקצות הקטע, כלומר:

$$M_3[1,5]=\max_{1\le x\le5}\left|f'''(x)\right|=\max\left\{\left|f'''(1)\right|,\left|f'''(5)\right|\right\}=\max\left\{\frac{4}{(1+a)^3},\frac{4}{\underbrace{(5+a)^3}_{>(1+a)^3}}\right\}=\frac{4}{(1+a)^3}$$

נציב בנוסחת החסם לשגיאה ונקבל:

$$\max_{1\le x\le5}|f(x)-L_2(T;x)|\le\frac{M_3[1,5]}{3!}\cdot\frac{(5-1)^3}{2^5}=\frac{\frac{4}{(1+a)^3}}{3!}\cdot\frac{4^3}{2^5}=\frac{4}{3(1+a)^3}$$

נדרוש את רמת הדיוק

$$\max_{1\le x\le 5}|f(x)-L_2(T;x)|\le 10^{-2}\Rightarrow \frac{4}{3(1+a)^3}\le 10^{-2}$$

$$\Rightarrow (1+a)^3\ge \frac{4\cdot 10^2}{3}\Rightarrow 1+a\ge \sqrt[3]{\frac{4\cdot 10^2}{3}}\Rightarrow a\ge -1+\sqrt[3]{\frac{400}{3}}\cong 4.1087..$$

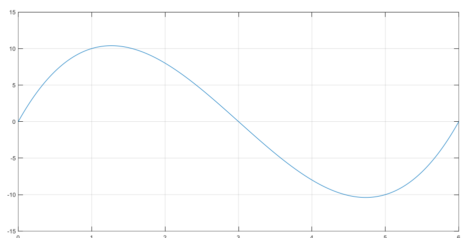
הטווח המבוקש הוא $a\ge 4.1087..$ הכולל כבר את האילוץ הנתון $a>0$.

ב. נמצא את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב $L_2(T;x)$ בקטע הנתון $[1,5]$
נק' האינטרפולציה המתאימות הן 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע.

אנו יודעים כי 3 נק' צביצ'ב בקטע $[-1,1]$ הן $\xi_0=-\frac{\sqrt{3}}{2},\xi_1=0,\xi_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
נוסחת מעבר מהקטע $[-1,1]$ לקטע שלנו $[a,b]=[1,5]$ היא: $z=\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}=2x+3$
ולכן, 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[1,5]$ הן $x_0=3-\sqrt{3},x_1=3,x_2=3+\sqrt{3}$.

ג. ראינו כי נקודות האינטרפולציה המתאימות ל- $L_2(T;x)$ בקטע הן
$$x_0=3-\sqrt{3}\sim 1.268,x_1=3,x_2=3+\sqrt{3}\sim 4.732$$
נשתמש בנוסחת השגיאה בפועל
$$1<\xi<5\quad ,f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot\omega_3(x);\qquad x\in[2,2.5]$$

עבור $a=5$: $f(x)=ln((x+5)^2)+3x$ ולכן $f'''(x)=\frac{4}{(x+5)^3}$ ונציין כי $f'''(x)>0$
לכל $x>-5$ בפרט $f'''(\xi)>0$ עבור $1<\xi<5$.
הפונקציה $\omega_3(x)=(x-3+\sqrt{3})(x-3)(x-3-\sqrt{3})$ משנה סימן בנקודות האינטרפולציה (שהם שורשי $\omega_3(x)$)
היות וכל נקודה $x\in[2,2.5]$ נמצאת בין השורשים $x_0=3-\sqrt{3}\sim 1.73268,x_1=3$
מספיק לבדוק את הסימן של $\omega_3(x)$ בנקודה כלשהי בקטע $[2,2.5]$ וסימן זה מייצג את הסימן בקטע. לכל $x\in[2,2.5]$ מתקיים $\omega_3(x)=\underbrace{(x-3+\sqrt{3})}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{<0}\underbrace{(x-3-\sqrt{3})}_{<0}>0$
לחלופין, ניתן לנמק באמצעות ייצוג גרפי של $\omega_3(x)$ ולהראות כי הגרף שלה נמצא מעל לציר x בקטע המדובר (כלומר הפונקציה חיובית בקטע)



לכן נקבל: $\forall x\in[2,2.5]:\ f(x)-L_2(x)=\frac{\overbrace{f'''(\xi)}^{+}}{3!}\cdot\underbrace{\omega_3(x)}_{+}>0$.

שאלה 8

מקרבים את הפונקציה $f(x) = e^{-0.5x} + x^2$ בקטע $[0,4a]$ ($a > 0$ ממשי) באמצעות
פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ הבנוי על נקודות שוות מרחק בקטע
מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-2}$.
(אין צורך למצוא את נקודות האינטרפולציה ואת $L_2(x)$)

פתרון שאלה 8:

פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ בנוי על 3 נקודות שוות מרחק בקטע $[0,4a]$ שהן
$x_0 = 0, x_1 = 2a, x_2 = 4a$
חסם לשגיאת האינטרפולציה עבור פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ המקרב את $f(x)$ בקטע
$[0,4a]$ ובנוי על 3 נקודות בקטע נתון ע"י הנוסחה:

$$\max_{0\le x\le 4a} |f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_3[0,4a]}{3!}\cdot \max_{0\le x\le 4a}|\omega_3(x)|$$

כאשר $\omega_3(x)=x(x-2a)(x-4a)$ ו- $M_3[0,4a]=\max_{0\le x\le 4a}|f'''(x)|$

- נחשב $M_3[0,4a]$

$$f(x)=e^{-0.5x}+x^2 \longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-0.5x}+2x;\ f''(x)=-\frac{1}{4}e^{-0.5x}+2;\ f'''(x)=\frac{1}{8}e^{-0.5x}$$

היות ו $f^{(4)}(x)=-\frac{1}{16}e^{-0.5x}\neq 0$ לכל $x\in[0,4a]$ נסיק כי $f'''(x)$ היא פונקציה מונוטונית המקבלת את ערכי הקיצון שלה בקצות הקטע, כלומר:

$$M_3[0,4a]=\max_{0\le x\le 4a}|f'''(x)|=\max\left\{|f'''(0)|,|f'''(4a)|\right\}=\max\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{8}\frac{1}{\underbrace{e^{2a}}_{>1}}\right\}=\frac{1}{8}$$

- נחשב $\max_{0\le x\le 4a}|\omega_3(x)|$

$$\omega_3(x)=x(x-2a)(x-4a)=x^3-6ax^2+8a^2x$$

נקודות חשודות לקיצון מוחלט בקטע הן נק' פנימיות בקטע בהן $\omega_3'(x)=0$ + קצות הקטע

$$\omega_3'(x)=0\Rightarrow 3x^2-12ax+8a^2=0\Rightarrow \tilde{x}_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}a$$

נחשב ערכי $|\omega_3(x)|$ בנק' החשודות

$$|\omega_3(0)|=|\omega_3(4a)|=0$$

$$|\omega_3(\tilde{x}_1)|=|\omega_3(\tilde{x}_2)|\simeq 3.08a^3 \longrightarrow \max$$

כלומר $\max_{0\le x\le 4a}|\omega_3(x)|=3.08a^3$

- נציב בנוסחת החסם לשגיאה ונקבל:

$$\max_{0\le x\le 4a} |f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_3[0,4a]}{3!}\cdot \max_{0\le x\le 4a}|\omega_3(x)|=\frac{1/8}{3!}\cdot 3.08a^3=\frac{77}{1200}a^3$$

- נדרוש את רמת הדיוק

$$\max_{0\le x\le 4a} |f(x)-L_2(x)| \le \frac{77}{1200}a^3 \le 10^{-2}$$
$$\Rightarrow a^3 \le \frac{1200\cdot 10^{-2}}{77} = \frac{12}{77} \Rightarrow a \le \sqrt[3]{\frac{12}{77}} \Rightarrow a \le 0.538141..$$

נתייחס גם לאילוץ הנתון $a > 0$ ונסיק כי הטווח המבוקש הוא $0 < a \le 0.538141..$.

שאלה 9

תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ממשי ומקיימת
$f(0)=\frac{3}{2}, f[x_0,x_1]=-\frac{3}{2}, f[x_1,x_2]=-\frac{1}{2}, f[x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{8}$.
בנו טבלת הפרשים מחולקים מתאימה וחשבו את פולינום האינטרפולציה $L_3(x)$ המתאים ל- $f(x)$
בנק' $x_0=-1, x_1=0, x_2=1, x_3=2$.

פתרון שאלה 9:

נסמן $f_0=f(-1), f_1=f(0), f_2=f(1), f_3=f(2)$
מהנתון נובע $f_1=\frac{3}{2}, f_{01}=-\frac{3}{2}, f_{12}=-\frac{1}{2}, f_{123}=\frac{1}{8}$

ניעזר בנתונים על מנת לבנות טבלת הפרשים מחולקים

- מהנתונים $f(0)=f_1=\frac{3}{2}, f[x_0,x_1]=f_{01}=-\frac{3}{2}$ נוכל לחשב את $f_0=f(-1)$:

$$f_{01}=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} \quad\Rightarrow\quad -\frac{3}{2}=\frac{\frac{3}{2}-f_0}{0+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}-f_0=-\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad f_0=3$$

- מהנתונים $f_1=\frac{3}{2}$ ו- $f_{12}=-\frac{1}{2}$ נוכל לחשב את $f_2=f(1)$:

$$f_{12}=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}=\frac{f_2-\frac{3}{2}}{1-0} \quad\Rightarrow\quad f_2-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f_2=1$$

- מהנתונים $f_{01}=-\frac{3}{2}$ ו- $f_{12}=-\frac{1}{2}$ נוכל לחשב את f_{012} :

$$f_{012}=\frac{f_{12}-f_{01}}{x_2-x_0}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-(-1)}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f_{012}=\frac{1}{2}$$

- מהנתונים $f_{123}=\frac{1}{8}$ ו- $f_{12}=-\frac{1}{2}$ נוכל לחשב את f_{23} :

$$f_{123}=\frac{f_{23}-f_{12}}{x_3-x_1} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{f_{23}+\frac{1}{2}}{2-0} \Rightarrow f_{23}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow f_{23}=-\frac{1}{4}$$.

- מהנתונים $f_{23}=-\frac{1}{4}$ ו- $f_2=1$ נוכל לחשב את f_3 :

$$f_{23}=\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2}\Rightarrow -\frac{1}{4}=\frac{f_3-1}{2-1}\Rightarrow f_3-1=-\frac{1}{4}\Rightarrow f_3=\frac{3}{4}.$$

- מהנתונים $f_{123}=\frac{1}{8}$ ו- $f_{012}=\frac{1}{2}$ נוכל לחשב את f_{0123} :

$$f_{0123}=\frac{f_{123}-f_{012}}{x_3-x_0}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}{2-(-1)}=-\frac{1}{8}\Rightarrow f_{0123}=-\frac{1}{8}.$$

נבנה טבלת הפרשים מחולקים:

$x_0=-1$	$f_0=3$				
		$f_{01}=-\frac{3}{2}$			
$x_1=0$	$f_1=\frac{3}{2}$		$f_{012}=\frac{1}{2}$		
		$f_{12}=-\frac{1}{2}$		$f_{0123}=-\frac{1}{8}$	
$x_2=1$	$f_2=1$		$f_{123}=\frac{1}{8}$		
		$f_{23}=-\frac{1}{4}$			
$x_3=2$	$f_3=\frac{3}{4}$				

הצגת ניוטון לפולינום האינטרפולציה $L_3(x)$ המתאים ל- $f(x)$ בנק'
$x_0=-1, x_1=0, x_2=1, x_3=2$ תהיה:

$$L_3(x)=f_0+f_{01}(x-x_0)+f_{012}(x-x_0)(x-x_1)+f_{0123}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

נציב את הערכים שקבלנו ונקבל:

$$L_3(x)=3-\frac{3}{2}(x+1)+\frac{1}{2}\cdot(x+1)x-\frac{1}{8}\cdot(x+1)x(x-1)$$

שאלה 10:

נתון כי קיים פולינום ריבועי $p_2(x)=x^2+ax+b$ כך שהקבוצה $\{p_0(x)=1, p_1(x)=x-1, p_2(x)\}$ מהווה קבוצה אורתוגונלית ביחס לקבוצת הנקודות $\{x_1=-1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, x_5=3\}$.

א. מצאו את a ו- b.

ב. מצאו את המקרב הטוב ביותר במובן ריבועים מינימליים לטבלה:

x	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-1	1	1	-1	1

פתרון שאלה 10:

א. נמצא את a ו- b.

נבדוק האם קיים a ו- b ממשיים שעבורו מתקיים $\langle p_0,p_1\rangle=0$ וגם $\langle p_0,p_2\rangle=0$ וגם $\langle p_1,p_2\rangle=0$ ביחס לקבוצת הנקודות $\{x_1=-1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, x_5=3\}$.

נבנה טבלה מורחבת:

x	-1	0	1	2	3
$\tilde{P}_0(x)=1$	1	1	1	1	1
$\tilde{P}_1(x)=x-1$	-2	-1	0	1	2
$\tilde{P}_2(x)=x^2+ax+b$	$1-a+b$	b	$1+a+b$	$4+2a+b$	$9+3a+b$

- מתקיים: $\langle p_0,p_1\rangle=1\cdot(-2)+1\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2=0$
(קיום תנאי זה אינו מותנה בבחירת a ו- b)

- כעת נבדוק מהו התנאי לקיום הדרישה $\langle p_0, p_1\rangle = 0$

$$\langle p_0, p_2\rangle = 0 \Leftrightarrow (1-a+b) + b + (1+a+b) + (4+2a+b) + (9+3a+b) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5a + 5b + 15 = 0 \Leftrightarrow a + b + 3 = 0$$

- לסיום נבדוק מהו התנאי לקיום הדרישה $\langle p_1, p_1\rangle = 0$

$$\langle p_1, p_2\rangle = 0 \Leftrightarrow (-2)\cdot(1-a+b) + (-1)\cdot b + (4+2a+b) + 2\cdot(9+3a+b) = 0$$
$$\Leftrightarrow 10a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

עבור $a = -2$ נקבל מהמשוואה $a + b + 3 = 0$ כי $b = -1$

ולכן $\tilde{P}_2(x) = x^2 - 2x - 1$

לסיכום: עבור $b = -1$ ו- $a = -2$ מקבלים את הקבוצה

$$\{p_0(x) = 1, p_1(x) = x - 1, p_2(x) = x^2 - 2x - 1\}$$

המהווה קבוצה אורתוגונלית ביחס לקבוצת הנקודות הנתונה.

ב. מצאו את המקרב הטוב ביותר במובן ריבועים מינימליים לטבלה:

x	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-1	1	1	-1	1

בסעיף קודם קבלנו כי הקבוצה

$$\{p_0(x) = 1, p_1(x) = x - 1, p_2(x) = x^2 - 2x - 1\}$$

מהווה קבוצה אורתוגונלית ביחס לקבוצת הנקודות $\{x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3\}$.

הטבלה המורחבת המתאימה היא

x	-1	0	1	2	3
y	-1	1	1	-1	1
$\tilde{P}_0(x) = 1$	1	1	1	1	1
$\tilde{P}_1(x) = x - 1$	-2	-1	0	1	2
$\tilde{P}_2(x) = x^2 - 2x - 1$	2	-1	-2	-1	2

וידוע כי עבור קבוצה אורתוגונלית המקרב הטוב ביותר במובן ר"מ הוא הצירוף לינארי

$$Q_2(x) = \alpha_0 \cdot p_0(x) + \alpha_1 \cdot p_1(x) + \alpha_2 \cdot p_2(x) =$$
$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (x-1) + \alpha_2 \cdot (x^2 - 2x - 1)$$

כאשר $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ מקדמי פוריה המתאימים.

$$\alpha_0 = \frac{\langle y, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} = \frac{-1+1+1-1+1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle y, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} = \frac{2-1+0-1+2}{4+1+0+1+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle y, p_2\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle} = \frac{-2-1-2+1+2}{4+1+4+1+4} = \frac{-2}{14} = -\frac{1}{7}$$

ולכן:

$$Q_2(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot(x-1) - \frac{1}{7}\cdot(x^2 - 2x - 1)$$

שאלה 11:

יהי $Q_2(x)$ פולינום ממעלה ≤ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)$ במובן הריבועים המינימליים
ויהי $H_2(x)$ פולינום ממעלה ≤ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $g(x)$ במובן הריבועים המינימליים .
הוכיחו או הפריכו: $Q_2(x)+H_2(x)$ הוא פולינום ממעלה ≤ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)+g(x)$ במובן הריבועים המינימליים .

פתרון שאלה 11:

הטענה נכונה.
הוכחה:
תהי $\{\tilde{p}_0(x), \tilde{p}_1(x), \tilde{p}_2(x)\}$ קבוצה אורתוגונלית של פולינומים ביחס למ"פ המתאימה.
אם $Q_2(x)$ פולינום ממעלה ≤ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)$ במובן הריבועים המינימליים
אזי בהכרח מתקיים: $Q_2(x)=a_0\cdot\tilde{p}_0(x)+a_1\cdot\tilde{p}_1(x)+a_2\cdot\tilde{p}_2(x)=\sum_{k=0}^{2}a_k\cdot\tilde{p}_k(x)$

כאשר $k=0,1,2;\quad a_k=\dfrac{\langle f,\tilde{p}_k\rangle}{\langle\tilde{p}_k,\tilde{p}_k\rangle}$ מקדמי פורייה מתאימים ל- f.

באופן דומה, אם $H_2(x)$ פולינום ממעלה ≤ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $g(x)$ במובן הריבועים המינימליים אזי בהכרח מתקיים

$$H_2(x)=b_0\cdot\tilde{p}_0(x)+b_1\cdot\tilde{p}_1(x)+b_2\cdot\tilde{p}_2(x)=\sum_{k=0}^{2}b_k\cdot\tilde{p}_k(x)$$

כאשר $k=0,1,2;\quad b_k=\dfrac{\langle g,\tilde{p}_k\rangle}{\langle\tilde{p}_k,\tilde{p}_k\rangle}$ מקדמי פורייה המתאימים ל- g.

מכאן:

$$Q_2(x)+H_2(x)=\sum_{k=0}^{2}a_k\cdot\tilde{p}_k(x)+\sum_{k=0}^{2}b_k\cdot\tilde{p}_k(x)=\sum_{k=0}^{2}(a_k+b_k)\cdot\tilde{p}_k(x)=\sum_{k=0}^{2}c_k\cdot\tilde{p}_k(x)$$

כאשר מתקיים

$$c_k=a_k+b_k=\frac{\langle f,\tilde{p}_k\rangle}{\langle\tilde{p}_k,\tilde{p}_k\rangle}+\frac{\langle g,\tilde{p}_k\rangle}{\langle\tilde{p}_k,\tilde{p}_k\rangle}=\{\text{לפי אקסיומות מ"פ}\}=\frac{\langle f+g,\tilde{p}_k\rangle}{\langle\tilde{p}_k,\tilde{p}_k\rangle};\quad k=0,1,2$$

מצד שני אם נחשב את $P_2(x)$ פולינום ממעלה ≤ 2, המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)+g(x)$ במובן הריבועים המינימליים אזי בהכרח מתקיים

$$P_2(x)=d_0\cdot\tilde{p}_0(x)+d_1\cdot\tilde{p}_1(x)+d_2\cdot\tilde{p}_2(x)=\sum_{k=0}^{2}d_k\cdot\tilde{p}_k(x)$$

כאשר: $k=0,1,2;\quad d_k=\dfrac{\langle f+g,\tilde{p}_k\rangle}{\langle\tilde{p}_k,\tilde{p}_k\rangle}$

קיבלנו: $k=0,1,2;\quad d_k=c_k$ לכן $P_2(x)\equiv Q_2(x)+H_2(x)$.
במילים אחרות $Q_2(x)+H_2(x)$ הוא המקרב הטוב ביותר ל- $f(x)+g(x)$ במובן הריבועים המינימליים .

שאלה 12:

מצאו $a,b\in\mathbb{R}$ כך שהקבוצה $\{q_0(x)\equiv 1,\ q_1(x)=x-1,\ q_2(x)=x^2-ab\cdot x+b\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי למרחב הפולינומים ממעלה≥ 2 ביחס למ"פ הרציפה בקטע $[0,2]$ ($\langle f,g\rangle=\int_0^2 f(x)g(x)dx$).

פתרון שאלה 12:

ידוע כי קבוצת פולינומי לז'נדר $\left\{\tilde{p}_0(x)\equiv 1,\ \tilde{p}_1(x)=x,\ \tilde{p}_2(x)=x^2-\frac{1}{3}\right\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי למרחב הפולינומים ממעלה≥ 2 ביחס למ"פ הרציפה בקטע $[-1,1]$ ($\langle f,g\rangle=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$).
נוסחת המעבר מהקטע $[-1,1]$ לקטע $[0,2]$ הינה $x=t-1$ ולכן נקבל את קבוצת פולינומי לז'נדר מותאמים לקטע $[0,2]$:

$$\left\{q_0(t)\equiv 1,\ q_1(t)=t-1,\ q_2(t)=(t-1)^2-\frac{1}{3}\right\}$$

נכנס אברים ונחזור לייצוג במשתנה x ונקבל:

$$\left\{q_0(x)\equiv 1,\ q_1(x)=x-1,\ q_2(x)=x^2-2x+\frac{2}{3}\right\}$$

נשווה לקבוצת הפולינומים הנתונה

$$\{q_0(x)\equiv 1,\ q_1(x)=x-1,\ q_2(x)=x^2-ab\cdot x+b\}$$

יש התאמה בין שני האיברים הראשונים כי בשניהם מתקיים: $q_0(x)\equiv 1$ וגם $q_1(x)=x-1$
ע"י השוואת שני האיברים הנותרים נקבל: $q_2(x)=q_2(x)=x^2-2x+\frac{2}{3}=x^2-ab\cdot x+a$
ע"י השוואת מקדמים עבור $q_2(x)$ נקבל:

$$\left.\begin{array}{c|c} x^2 & 1=1 \\ x & ab=2 \\ 1 & a=\frac{2}{3} \end{array}\right\}\ \Rightarrow a=\frac{2}{3}, b=3$$

ולכן $a=\frac{2}{3}, b=3$

שאלה 13:

מצאו קבועים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ שעבורם האינטגרל $\int_1^2\left[\frac{1}{x^2}-\alpha x-\frac{\beta}{x}\right]^2 dx$ הינו מינימלי.

פתרון שאלה 13:

האינטגרל $\int_1^2\left[\frac{1}{x^2}-\alpha x-\frac{\beta}{x}\right]^2 dx$ מינימלי כאשר $Q_1(x)=\alpha\cdot p_0(x)+\beta\cdot p_1(x)=a\cdot x+\beta\cdot\frac{1}{x}$ הוא המקרב הטוב ביותר לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ביחס למ"פ רציפה בקטע $[1,2]$. (המוגדרת ע"י $\langle f,g\rangle=\int_1^2 f(x)\cdot g(x)dx$)

ראינו כי המקדמים α,β הם פתרונות של הממ"ל הנורמלית המתאימה

$$\begin{pmatrix}\langle p_0,p_0\rangle & \langle p_0,p_1\rangle\\ \langle p_1,p_0\rangle & \langle p_1,p_1\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle f,p_0\rangle\\ \langle f,p_1\rangle\end{pmatrix}$$

$$\langle p_0,p_0\rangle=\langle x,x\rangle=\int_1^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{7}{3}$$

$$\langle p_1,p_1\rangle=\left\langle\frac{1}{x},\frac{1}{x}\right\rangle=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=-\left.\frac{1}{x}\right|_1^2=\frac{1}{2}$$

$$\langle p_0,p_1\rangle=\left\langle x,\frac{1}{x}\right\rangle=\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^2 1dx=1$$

$$\langle f,p_0\rangle=\left\langle\frac{1}{x^2},x\right\rangle=\int_1^2\frac{1}{x^2}\cdot xdx=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln x|_1^2=\ln 2$$

$$\langle f,p_1\rangle=\left\langle\frac{1}{x^2},\frac{1}{x}\right\rangle=\int_1^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^2\frac{1}{x^3}\cdot xdx=-\left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^2=\frac{3}{8}$$

נציב בממ"ל הנורמלית ונפתור אותה

$$\begin{pmatrix}7/3 & 1\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln 2\\ 3/8\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\alpha=-0.1706,\beta=1.0911$$

$$\Rightarrow Q_1(x)=\alpha\cdot p_0(x)+\beta\cdot p_1(x)=-0.1706\cdot x+1.0911\cdot\frac{1}{x}$$

שאלה 14:

נתון כי $I=\int_0^4 \frac{1}{x+2}dx=\ln 3\cong 1.0986122...$.

א. יהי T_n קירוב הטרפז ל- I. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $I-T_n<0$.

ב. נתונים קירוב הטרפז $T_0=\frac{4}{3}, T_1=\frac{7}{6}, T_2=\frac{67}{60}$.

הוכיחו כי $S_2=\frac{4T_1-T_0}{3}$ וכי $S_4=\frac{4T_2-T_1}{3}$.

ג. הוכיחו כי $I^*=\frac{16S_4-S_2}{15}$ מבטיח קירוב טוב יותר ל- I מקירוב סימפסון S_4.

פתרון שאלה 14:

א. לפי נוסחת השגיאה בפועל של שיטת הטרפז הגלובלית

$$I-T_n=-\frac{1}{12}\cdot\frac{(4-0)^3}{n^2}\cdot f''(\xi),\quad 0<\xi<4$$

כאן: $f(x)=\frac{1}{x+2}=(x+2)^{-1}$ ולכן $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

עבור $0<\xi<4$ הביטוי $(\xi+2)^3>0$ חיובי ולכן נקבל כי $f''(\xi)=\frac{2}{(\xi+2)^3}>0$

ולכן $I-T_n=\underbrace{-\frac{1}{12}}_{-}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{+}\cdot\underbrace{f''(\xi)}_{+}<0$.

ב. נחשב קירובי סימפסון S_2 ו- S_4 ל- I ונוכיח את השוויונות הנתונים.

בשלב ראשון נחלק את קטע האינטגרציה $[0,4]$ ל- 4 תתי קטעים באותו אורך $h=\frac{4-0}{4}=1$

נקודות החלוקה תהיינה $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ והן תשמשנה אותנו לחישוב שני קירובי סימפסון הנדרשים.

נחשב כעת את ערכי הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x+2}$ בנקודות החלוקה (מסמנים $f_k=f(x_k)$)

$$f_0=\frac{1}{2}, f_1=\frac{1}{3}, f_2=\frac{1}{4}, f_3=\frac{1}{5}, f_4=\frac{1}{6}$$

✓ לחישוב S_2 נדרשות רק שלושת הנקודות החלוקה $x_0=0, x_2=2, x_4=4$ ואורך תת הקטע $h_1=2$. לכן:

$$S_2=\frac{h_1}{3}\cdot[f_0+4f_2+f_4]=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right]=\frac{10}{9}=1.1111....$$

✓ לחישוב S_4 נדרשות כל 5 נקודות החלוקה ואורך תת הקטע $h_2=1$
לכן:

$$S_4=\frac{h_2}{3}\cdot[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4]=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]=\frac{11}{10}=1.1$$

✓ נוכיח כי עבור הערכים הנתונים עבור קירובי הטרפז ועבור הערכים שחישבנו לקירובי סימפסון אכן מתקיים השוויונות $S_2=\frac{4T_1-T_0}{3}$ וגם $S_4=\frac{4T_2-T_1}{3}$.

$$\frac{4T_1-T_0}{3}=\frac{4\cdot\frac{7}{6}-\frac{4}{3}}{3}=\frac{10}{9}=S_2$$

$$\frac{4T_2-T_1}{3}=\frac{4\cdot\frac{67}{60}-\frac{7}{6}}{3}=\frac{11}{10}=S_4$$

ג. נחשב את $I^*=\frac{16S_4-S_2}{15}$ ונוכיח כי $\left|I-I^*\right|<\left|I-S_4\right|$:

$$I^*=\frac{16S_4-S_2}{15}=\frac{16\cdot\frac{11}{10}-\frac{10}{9}}{15}=\frac{742}{675}=1.099259...$$

$$\begin{cases}\left|I-I^*\right|=\left|\ln 3-\frac{742}{675}\right|=0.00064697....\\ \left|I-S_4\right|=\left|\ln 3-\frac{11}{10}\right|=0.00138771...\end{cases}\longrightarrow\left|I-I^*\right|<\left|I-S_4\right|$$

שאלה 15:

איזה קירוב סימפסון S_{2n} נדרש לחישוב על מנת לקרב את האינטגרל $\int_{0.5}^{1.5}x\ln x dx$ עם רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-4}$?

פתרון שאלה 15:

נמצא איזה קירוב סימפסון S_{2n} נדרש לחישוב על מנת לקרב את האינטגרל $\int_{0.5}^{1.5}x\ln x dx$ עם רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-4}$.

באופן שקול ניתן לשאול עבור איזה קירוב סימפסון S_{2n} מתקיים אי השוויון $\left|E_{2n}^S\right|\le 10^{-4}$.

מתקיים: $\left|E_{2n}^S[f;a,b]\right|\le\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|}_{M_4}$ $(*)$.

בנתוני התרגיל: $[a,b]=[0.5,1.5]$, $f(x)=x\ln x$ ולכן $f^{(4)}(x)=\frac{2}{x^3}$.

$f^{(4)}(x)$ היא פונקציה מונוטונית בקטע $I=[0.5,1.5]$ כיוון ש- $\forall x\in I\quad f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^4}\neq 0,$

ולכן הקיצון המוחלט של $f^{(4)}(x)$ בקטע $I=[0.5,1.5]$ יתקבל בקצוות ובפרט

$$M_4=\max_{0.5\le x\le 1.5}\left|f^{(4)}(x)\right|=\max\left\{\underbrace{\left|f^{(4)}(0.5)\right|}_{=16},\underbrace{\left|f^{(4)}(1.5)\right|}_{=\frac{16}{27}}\right\}=16$$

נציב את נתוני הבעיה ואת מה שחושב ב- (*) ונפתור את אי השוויון המתאים:

$$\left|E_{2n}^{S}\right| \le \frac{1}{180}\cdot\frac{(1.5-0.5)^5}{(2n)^4}\cdot 16 \le 10^{-4} \Rightarrow$$

$$2n \ge \sqrt[4]{\frac{1^5\cdot 16\cdot 10^4}{180}} \cong 5.4602$$

מסקנה: קירוב סימפסון שיבטיח את רמת הדיוק הנדרשת לאינטגרל הנתון יהיה S_6.

שאלה 16:

יהיו $S_{2n}^{(1)}$ קירוב סימפסון לאינטגרל $I_1=\int_3^4 e^x dx$ ו- $S_{2n}^{(2)}$ קירוב סימפסון לאינטגרל $I_2=\int_4^5 e^x dx$ ויהיו E_1 ו- E_2 שגיאות האינטגרציה בהתאמה. הוכיחו כי מתקיים אי השוויון $E_1 > E_2$.

פתרון שאלה 16:

תזכורת: נוסחת השגיאה של קירוב סימפסון לאינטגרל $I=\int_a^b f(x)dx$ היא

$$E_{2n}^{S}[f;a,b] = -\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi),\qquad a<\xi<b$$

ולכן: $3<\xi_1<4$, $E_1=-\frac{1}{180}\cdot\frac{(4-3)^5}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi_1)=-\frac{1}{180}\cdot\frac{1}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi_1)$, ו-

$$E_2=-\frac{1}{180}\cdot\frac{(5-4)^5}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi_2)=-\frac{1}{180}\cdot\frac{1}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi_2),\qquad 4<\xi_2<5$$

מכיוון ש- $3<\xi_1<4$ ו- $4<\xi_2<5$ נסיק כי $\xi_1<\xi_2$. כמו כן $f^{(4)}(x)=e^x$ היא פונקציה מונוטונית עולה וחיובית ממש ולכן מתקיים $f^{(4)}(\xi_1)<f^{(4)}(\xi_2)$ (*) וכיוון שהמקדם המשותף בנוסחת השגיאה בפועל $-\frac{1}{180}\cdot\frac{1}{(2n)^4}$ הוא שלילי לכל n טבעי נובע כי מתקיים:

$$E_1=-\frac{1}{180}\cdot\frac{1}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi_1)\underset{(*)}{>}-\frac{1}{180}\cdot\frac{1}{(2n)^4}f^{(4)}(\xi_2)=E_2$$

הוכחנו אם כן $E_1>E_2$.

שאלה 17:

מקרבים את הפונקציה $f(x)=\ln(x+4)$ בקטע $[-2,2]$ באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ הטוב ביותר האפשרי בקטע.

א. מצאו את נקודות האינטרפולציה המתאימות x_0,x_1,x_2.

ב. מצאו חסם/הערכה לשגיאת האינטרפולציה המוחלטת בקטע $[-2,2]$.

ג. היעזרו בתוצאות סעיף קודם ומצאו חסם לשגיאת האינטגרציה האינטרפולטורית $\left|\int_{-2}^{2}\left(f(x)-L_2(x)\right)dx\right|$.

ד. נתון כי $p_2(x)$ הוא פולינום האינטרפולציה המקרב את $f(x)$ בקטע $[-2,2]$ באמצעות נקודות שווות מרחק בקטע. נגדיר את $I^*=\int_{0.5}^{1} p_2(x)dx$ כערך מקורב לאינטגרל המסויים $I=\int_{0.5}^{1} f(x)dx$. הוכיחו כי $I-I^*<0$.

מצאו תת קטע $[c,d]\subset[-2,2]$ שעבורו $\int_{c}^{d} f(x)dx-\int_{c}^{d} p_2(x)dx>0$.

פתרון שאלה 17:

א. נמצא את נקודות האינטרפולציה המתאימות x_0,x_1,x_2 לאינטרפולציה אופטימלית בקטע $[-2,2]$

פולינום האינטרפולציה הטוב ביותר האפשרי $L_2(x)$ (ממעלה $2 \geq$) בנוי על 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[-2,2]$.

3 נקודות צ'ביצ'ב בקטע $[-1,1]$ הן: $\xi_0=-\frac{\sqrt{3}}{2},\xi_1=0,\xi_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

נוסחת המעבר לקטע $[-2,2]$ היא: $z=2x$

ולכן, 3 נקודות צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[-2,2]$ הן: $z_0=-\sqrt{3},z_1=0,z_2=\sqrt{3}$

ב. נמצא חסם/הערכה לשגיאת האינטרפולציה המוחלטת בקטע $[-2,2]$.

עבור $f(x)=ln(x+4)$ מתקיים: $f'(x)=\frac{1}{x+4};f''(x)=-\frac{1}{(x+4)^2};f'''(x)=\frac{2}{(x+4)^3}$

היות ו- $f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(x+4)^4}\neq 0$ לכל $x\in[-2,2]$ נסיק כי $f'''(x)$ היא פונקציה מונוטונית המקבלת את ערכי הקיצון שלה בקצות הקטע, כלומר:

$$M_3[-2,2]=\max_{-2\le x\le 2}\left|f'''(x)\right|=\max\left\{\left|f'''(-2)\right|,\left|f'''(2)\right|\right\}=\max\left\{\frac{2}{2^3},\frac{2}{6^3}\right\}=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$$

נציב בנוסחת החסם לשגיאה ונקבל:

$$\max_{-2\le x\le 2}|f(x)-L_2(T;x)|\le\frac{M_3[-2,2]}{3!}\cdot\frac{(2-(-2))^3}{2^5}=\frac{1/4}{3!}\cdot\frac{4^3}{2^5}=\frac{1}{12}$$

ג. נמצא חסם לשגיאת האינטגרציה האינטרפולטורית $\left|\int_{-2}^{2}\left(\ln(x+4)-L_2(x)\right)dx\right|$

$$\left|\int_{-2}^{2}\left(\ln(x+4)-L_2(x)\right)dx\right| \le \int_{-2}^{2}\left|\ln(x+4)-L_2(x)\right|dx \le \underbrace{\max_{-2\le x\le 2}|f(x)-L_2(T;x)|}_{\le\frac{1}{12}}\cdot\underbrace{\int_{-2}^{2}1dx}_{=4}=\frac{1}{12}\cdot 4=\frac{1}{3}$$

ד. בהינתן כי $p_2(x)$ הוא פולינום האינטרפולציה המקרב את $f(x)$ בקטע $[-2,2]$ באמצעות נקודות שוות מרחק בקטע ועבור $I^*=\int_{0.5}^{1}p_2(x)dx$ ו- $I=\int_{0.5}^{1}f(x)dx$, נוכיח $I-I^*<0$

$$I-I^*=\int_{0.5}^{1}f(x)dx-\int_{0.5}^{1}p_2(x)dx=\int_{0.5}^{1}\left(f(x)-p_2(x)\right)dx$$

הביטוי $f(x)-p_2(x)$ מייצג למעשה את שגיאת האינטרפולציה בתת הקטע $[0.5,1]$ ולכן

קיימת נקודת ביניים $-2<\xi<2$ כך ש- $f(x)-p_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot\underbrace{x(x+2)(x-2)}_{\omega_3(x)}$

מתקיים $f'''(x)=\frac{2}{(x+4)^3}>0$ לכל $x>-4$ ובפרט עבור $-2<\xi<2$ מתקיים $f'''(\xi)=\frac{2}{(x+\xi)^3}>0$

ולכן סימן שגיאת האינטרפולציה נקבע למעשה לפי הסימן של $\omega_3(x)$ בתת קטע האינטגרציה $[0.5,1]$. $\omega_3(x)$ מתאפסת בנקודות האינטרפולציה ובין כל שתי נקודות שומרת סימן.

לכן, לכל $x\in[0.5,1]$ מתקיים $\omega_3(x)=\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x+2)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-}<0$.

ומכאן נובע כי לכל $x\in[0.5,1]$ מתקיים $f(x)-p_2(x)=\frac{\overbrace{f'''(\xi)}^{+}}{3!}\cdot\underbrace{\omega_3(x)}_{-}<0$

אשר גורר $I-I^*=\int_{0.5}^{1}\underbrace{\left(f(x)-p_2(x)\right)}_{<0\ \ \forall x\in[0.5,1]}dx<0$

כדי למצוא תת קטע $[c,d]\subset[-2,2]$ שעבורו $\int_c^d f(x)dx-\int_c^d p_2(x)dx>0$ מספיק לבחור קטע

שבו $\omega_3(x)>0$ למשל $[c,d]=[-1,-0.5]$ (אז יתקיים $\omega_3(x)=\underbrace{x}_{-}\underbrace{(x+2)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-}>0$)

שאלה 18:

נתון האינטגרל $I=\int_0^{2a}\ln(x+4)\,dx$ כאשר $a>0$ פרמטר ממשי.

מצאו את טווח ערכי a שעבורו קירוב סימפסון המתאים S_6 יבטיח רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-3}$.

פתרון שאלה 18:

נשתמש בחסם לשגיאת סימפסון גלובלית עבור על מנת למצוא טווח ערכי $a>0$ שעבורם קירוב סימפסון יבטיח את רמת הדיוק הנדרשת.

נוסחת החסם הכללית של שיטת סימפסון היא: $\left|E_{2n}^{S}[f;a,b]\right|\le\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|}_{M_4}$

בסעיף ב של תרגיל קודם ראינו כי עבור $f(x)=ln(x+4)$ מתקיים $f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(x+4)^4}$

היות ו- $f^{(5)}(x)=\frac{24}{(x+4)^5}\neq 0$ לכל $x\neq -4$ נסיק כי $\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{6}{(x+4)^4}$ היא פונקציה מונוטונית בקטע $[0,2a]$ (שאינו כולל את $x=-4$ היות ו- $a>0$) ולכן מקבלת את ערכי הקיצון שלה בקצות הקטע, כלומר:

$$M_4=\max_{0\le x\le 2a}\left|f^{(4)}(x)\right|=\max\left\{\left|f^{(4)}(0)\right|,\left|f^{(4)}(2a)\right|\right\}=\max\left\{\frac{6}{4^4},\frac{6}{(2a+4)^4}\right\}\underset{a>0\to 2a+4>4}{=}\frac{6}{4^4}=\frac{3}{128}$$

ומכאן: $\left|E_6^S\right|\le\frac{1}{180}\cdot\frac{(2a-0)^5}{6^4}\cdot M_4=\frac{1}{180}\cdot\frac{2^5\cdot a^4}{6^4}\cdot\frac{3}{128}=\frac{a^4}{311040}$.

כלומר $\left|E_6^S\right|\le\frac{a^4}{311040}$. כעת נדרוש את רמת הדיוק $\varepsilon=10^{-3}$

$$\left|E_6^S\right|\le\frac{a^4}{311040}\le 10^{-3}\longrightarrow a\le\sqrt[4]{311040\cdot 10^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{7776}{25}}\cong 4.1995626...$$

בהתייחס לאילוץ הנתון על a נסכם כי הטווח המבטיח את רמת הדיוק המבוקשת הוא $0<a\le 4.1995626...$.

שאלה 19:

נתון האינטגרל $I=\int_0^{2}\ln(x+a)\,dx$ כאשר $a>0$ פרמטר ממשי.

מצאו את טווח ערכי a שעבורו קירוב סימפסון המתאים S_6 יבטיח רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-3}$.

פתרון שאלה 19:

נשתמש בחסם לשגיאת סימפסון גלובלית עבור על מנת למצוא טווח ערכי $a>0$ שעבורם קירוב סימפסון יבטיח את רמת הדיוק הנדרשת.

עבור $f(x)=ln(x+a)$ מתקיים $f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(x+a)^4}$.

היות ו- $f^{(5)}(x)=\frac{24}{(x+a)^5}\neq 0$ לכל $x\neq -a$ נסיק כי $\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{6}{(x+a)^4}$ היא פונקציה

היות ו- $f^{(5)}(x)=\frac{24}{(x+a)^5}\neq 0$ לכל $x\neq -a$ נסיק כי $\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{6}{(x+a)^4}$ היא פונקציה מונוטונית בקטע $[0,2]$ (שאינו כולל את $x=-a$ היות ו- $a>0$) ולכן מקבלת את ערכי הקיצון שלה בקצות הקטע, כלומר:

$$M_4=\max_{0\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right|=\max\left\{\left|f^{(4)}(0)\right|,\left|f^{(4)}(2)\right|\right\}=\max\left\{\frac{6}{a^4},\frac{6}{(a+2)^4}\right\}\underset{a>0\to a+2>a}{\overset{\downarrow}{=}}\frac{6}{a^4}$$

ולכן: $\left|E_6^S\right|\le\frac{1}{180}\cdot\frac{(2-0)^5}{6^4}\cdot M_4=\frac{1}{180}\cdot\frac{2^5}{6^4}\cdot\frac{6}{a^4}=\frac{1}{1215a^4}$. **כלומר** $\left|E_6^S\right|\le\frac{1}{1215a^4}$

כעת נדרוש את רמת הדיוק $\varepsilon=10^{-3}$

$$\left|E_6^S\right|\le\frac{1}{1215a^4}\le 10^{-3}\longrightarrow a\ge\sqrt[4]{\frac{10^3}{1215}}=\sqrt[4]{\frac{200}{243}}\cong 0.95248...$$

הטווח שקיבלו כבר כולל את האילוץ הנתון על a ולכן נסכם כי הטווח המבטיח את רמת הדיוק המבוקשת הוא $a\ge 0.95248...$.