תרגיל נוסף #2 מצגת 5

נתונה המערכת $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2a \\ 1 & -a & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$

למערכת יש פתרון יחיד כאשר $a \neq 0, \pm 2$

א. עבור אלו ערכי a, b מתכנסת/מתבדרת שיטת יעקובי עבור מערכת זו?

ב. עבור אלו ערכי a, b מתכנסת שיטת גאוס זיידל עבור מערכת זו?

<u>פתרון:</u>

ראשית נציין כי וקטור האברים החופשיים אינו משפיע על עובדת התכנסות/התבדרות שיטות איטרטיביות ולכן לפרמטר b אין שום השפעה על התשובה והיא תהיה תלויה רק בפרמטר a .

א. נבדוק תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a\lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 2a \\ 1 & -a & -8\lambda \end{vmatrix} = 0 \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{first row}}}{\Leftrightarrow} a\lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2a \\ -a & -8\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\lambda \cdot \left(-8\lambda^2 + 2a^2\right) = 0 \underset{\substack{\downarrow \\ a\neq 0}}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\frac{a}{2}$$

שיטת יעקובי מתכנסת לכל וקטור התחלה **<u>אםם</u>** כל שורשי $q_J(\lambda)$ נמצאים במעגל היחידה, כלומר מקיימים $|\lambda| < 1$. עבור $\lambda_1 = 0$ הדרישה מתקיימת ונותר לבדוק עבור $\lambda_{2,3} = \pm\frac{a}{2}$:

$$|\lambda_{2,3}| < 1 \Leftrightarrow \left|\pm\frac{a}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |a| < 2 \Leftrightarrow -2 < a < 2$$

לכן שיטת יעקובי תתכנס עבור המערכת הנתונה לכל $b \in \mathbb{R}$ ולכל $a \in \mathbb{R}$ כך ש- $a \neq 0,\ |a| < 2$

(תנאי זה כולל את האילוץ הנתון בגוף השאלה $a \neq 0, \pm 2$)

שיטת יעקובי תתבדר עבור $|a| > 2$ ללא תלות בערך הפרמטר b .

(עבור המקרים $a = 0, \pm 2$ נתון שאין יחידות פתרון ולכן אין טעם להתייחס להתכנסות/התבדרות השיטה)

ב. נבדוק תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת גאוס זיידל:

$$q_{GZ}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & \lambda & 2a \\ \lambda & -a\lambda & -8\lambda \end{vmatrix} = 0 \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{first row}}}{\Leftrightarrow} a\lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2a \\ -a\lambda & -8\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\lambda \cdot \left(-8\lambda^2 + 2a^2\lambda\right) = 0 \Leftrightarrow 2a\lambda^2 \cdot \left(-4\lambda + a^2\right) = 0 \underset{\substack{\downarrow \\ a\neq 0}}{\Leftrightarrow} \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \frac{a^2}{4}$$

שיטת גאוס-זיידל מתכנסת לכל וקטור התחלה **<u>אסם</u>** כל שורשי $q_{GZ}(\lambda)$ נמצאים במעגל היחידה,

כלומר מקיימים $|\lambda|<1$. עבור $\lambda_{1,2}=0$ הדרישה מתקיימת ונותר לבדוק עבור $\lambda_3=\frac{a^2}{4}$:

$$|\lambda_3|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{a^2}{4}\right|<1 \Leftrightarrow a^2<4 \Leftrightarrow\Leftrightarrow -2<a<2 \Leftrightarrow |a|<2$$

לכן שיטת גאוס זיידל תתכנס עבור המערכת הנתונה לכל $a\in\mathbb{R}$ כך ש- $|a|<2$,$a\neq 0$ (תנאי

זה כולל את האילוץ הנתון בגוף השאלה $a\neq 0,\pm 2$) ללא תלות בערכו של הפרמטר b .