אנליזה נומרית
מצגת מלווה #1
הקדמה:
אנליזה נומרית מהי?

נושאי המצגת:

1) אנליזה נומרית – מהי?
2) הצגת מספרים במחשב
3) שגיאות בחישובים מקורבים
4) יציבות נומרית.

אנליזה נומרית מהי?

אנליזה נומרית היא ענף של מתמטיקה שימושית, שעיקרו פיתוח אלגוריתמים נומריים יעילים לקבלת פתרונות מספריים (נומריים) לבעיות מתמטיות בתחומים מדעיים שונים (מתמטיקה, פיזיקה, הנדסה, כלכלה ועוד).

אלגוריתם נומרי (שיטה נומרית) כולל סדרה של פעולות אריתמטיות (חשבוניות) ולוגיות אשר מייצרות **פתרון מקורב** לבעיה מתמטית לכל מידת דיוק רצויה.

אנליזה נומרית מהי?

- **מטרת הקורס** היא להכיר שיטות חישוב נומריות, ללמוד את האנליזה המתמטית שלהם ולתרגל את השימוש בהם בצורה יעילה.

- בד בבד עם הלימוד התיאורטי יידרש מימוש של שיטות הפתרון, כלומר כתיבה והרצת תוכניות מחשב המיישמות הלכה למעשה את התיאוריה.

מדוע יש צורך בשיטות נומריות?

- **לפתרון בעיות להן לא קיים פתרון אנליטי.**

למשל: חישוב אינטגרלים מסוימים כמו $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\int_1^{\pi}\frac{sinx}{x}dx$.

- **לפתרון בעיות בהן הפתרון האנליטי המדויק מורכב ודורש זמן בעוד שאיננו הכרחי לפתרון הבעיה וניתן להסתפק בפתרון מקורב.**

למשל: מציאת פתרון למערכת משוואות ליניאריות עם עשרות משתנים.

- **לצורך עיבוד אנליטי של תוצאות המתקבלות ממדידה.**

למשל: מציאת גובה הטיסה של טיל בליסטי כפונקציה של הזמן.

אנליזה נומרית מהי?

הניתוח המתמטי הכמותי של בעיות מדעיות שונות יכול להוביל לבעיות מתמטיות משני טיפוסים עיקריים:

- **<u>בעיות מתמטיות שידועה הדרך האנליטית לפתרונן</u>**

כגון: פתרון מערכת משוואות ליניאריות, חישוב נגזרות ואינטגרלים מסוימים, פתרון בעיית התחלה במשוואת דיפרנציאליות רגילות/חלקיות וכד'.

במקרה זה האנליזה הנומרית הנה כלי המאפשר פישוט של פתרון אנליטי ידוע ואפשרי.

- **<u>בעיות מתמטיות שאינן ידועה הדרך האנליטית לפתרונן</u>**

כגון: פתרון משוואה פולינומיאלית מסדר גבוה, חישוב אינטגרלים מסוימים לא מידיים, קירוב לערכי פונקציות לא פולינומיאליות וכד'.

כאן האנליזה הנומרית הנה כלי לפתרון בעיות בהן אין אינפורמציה על פתרון אנליטי מדויק.

אנליזה נומרית מהי?, המשך

שיטה נומרית טובה מבוססת על 3 עקרונות:

1. **<u>דיוק</u>**: השיטה מאפשרת לקבל פתרון מקורב בדיוק רצוי.
2. **<u>איכות</u>**: התאמת האלגוריתם למגוון של בעיות ויכולת להעריך את טיב הקירוב ושיעור השגיאה (חסמים לשגיאה).
3. **<u>יעילות</u>**: סיבוכיות האלגוריתם (זמן/מקום)

נסכם: אנליזה נומרית מהי?

ניתוח מתמטי כמותי של בעיות מדעיות שונות יכול להוביל לבעיות מתמטיות משני טיפוסים עיקריים:

בעיה מתמטית שניתן לפתור באופן אנליטי מדויק

בעיה מתמטית שלא ידועה דרך אנליטית לפתרונה

פתרון אנליטי מדויק

פתרון אנליטי <u>מקורב</u>

פתרון נומרי <u>מקורב</u>

אנליזה נומרית

יישום שיטות נומרית במחשב לקבלת דיוק רצוי

הערכה <u>לשגיאת הקירוב</u>

הגישה לפתרון בעיה באנליזה נומרית

פתרון בעיה מורכב מהשלבים הבאים:

1. **ניסוח הבעיה כמודל מתמטי:**

מסמנים את המשתנים המעורבים בבעיה בסימונים מתמטיים ומיישמים עקרונות פיסיקליים (למשל) על מנת לקבל משוואות המתארות את התנהגות המשתנים הללו.

2. **התאמת שיטה נומרית לקבלת הפתרון:**

ברוב המקרים ניתן ליישם אלגוריתמים שונים לפתרון בעיה נתונה.

האלגוריתם הספציפי שנבחר בסופו של דבר תלוי בהקשר של הבעיה ובהכרת התכונות של הפונקציות המעורבות.

הגישה לפתרון בעיה , המשך

3. **<u>יישום נומרי והערכת יעילותו :</u>**

יישום השיטה הנומרית שנבחרה ע"י תוכנית מחשב מתאימה והערכת יעילותה (במונחים של זמן מחשב וגודל הזיכרון הנדרשים).

4. **<u>הרצת התוכנית לקבלת פתרון נומרי ועמידה על טיבו:</u>**

הרצת התוכנית לקבלת פתרון נומרי מקורב והערכת השגיאה הנגרמת.

(במידת הצורך עדכון המודל המתמטי ו/או המודל התכנותי)

נסכם: הגישה לפתרון בעיה באנליזה נומרית

1. ניסוח הבעיה כמודל מתמטי

2. התאמת שיטה נומרית לקבלת הפתרון

3. יישום נומרי והערכת יעילותו (סיבוכיות זמן ומקום)

4. הרצת התוכנית לקבלת פתרון נומרי ועמידה על טיבו

הגישה לפתרון בעיה , המשך

הרצוי:

בד"כ המטרה היא לקבל שיטה נומרית, שבה ניתן להקטין את השגיאה הכוללת כרצוננו, תוך התירה לכל שמספר הפעולות האריתמטיות, הכרוכות בהפעלת השיטה (זמן המחשב) וגודל הזיכרון הנדרש במחשב יהיו קטנים ככל האפשר.

המצוי:

בהקשר זה נציין כי במקרים רבים קשה להשיג את כל המשימות האלו ביחד, ואז יש צורך להקריב את יעילות השיטה או אפילו את דיוק הפתרון.

<u>מדוע לימוד אנליזה נומרית חשוב?</u>

- ❑ רוב, אם לא כל, השיטות הנומריות יכולות ל"ייצר" תוצאות מוטעות.
- ❑ אנליזה וחקירה אנליטית מתמטית של השיטות הנלמדות באנליזה נומרית מאפשרים נקודת מבט מעמיקה יותר על התנהגותן .
- ❑ ע"י כך ניתן **<u>לעשות את הבחירה המתאימה ביותר לכל בעיה נתונה</u>**, **<u>להשתמש בהן בצורה היעילה ביותר</u>** **<u>ולהימנע מתוצאות שגויות.</u>**

" האנליזה נומרית היא
"בעת ובעונה אחת גם מדע וגם אומנות...."

לסיכום נצטט מספרו של **Anthony Ralston** בתרגום חופשי:

" האנליזה הנומרית היא בעת ועונה אחת מדע וגם אומנות...."

<u>כמדע</u> האנליזה הנומרית עוסקת בתהליכים שבעזרתם ניתן לפתור בעיות מתמטיות ע"י ביצוע פעולות אריתמטיות (נומריות).

<u>כאומנות</u> האנליזה הנומרית עוסקת בבחירת השיטה המתאימה ביותר לפתרון בעיה נתונה.

הכלים בהם נשתמש בפיתוח התהליכים של האנליזה הנומרית יהיו הכלים של האנליזה המתמטית המדויקת במובנה הקלאסי.

ייצוג מספרים במחשב

באנליזה נומרית אנו עושים שימוש במחשב לפתרון בעיות.

המגבלה העיקרית של המחשב: העדר אפשרות לייצוג מדויק של חלק מהמספרים ממשיים (רציונליים ואי רציונליים) אשר להצגתם דרושות אינסוף ספרות עשרוניות.

לפיכך האריתמטיקה המבוצעת במחשב שונה מזו הנהוגה באלגברה ובחדו"א.

ייצוג מספרים במחשב- שיטת הנקודה הצפה

במחשב קיים מספר סופי n של "תאי אחסון סדורים" לספרות (אורך המילה של המחשב). כל מספר ממשי x מיוצג באופן בינארי באופן הבא:

$$x = \pm\left(\alpha_k \cdot 2^k + \alpha_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + \alpha_0 \cdot 2^0 + \alpha_{-1} \cdot 2^{-1} + \alpha_{-2} \cdot 2^{-2} + \cdots\right)$$
$$\alpha_i = 0,1$$

השיטה הנפוצה לניצול אורך מילת המחשב כדי להציג מספרים במחשב נקראת **<u>שיטת הנקודה הצפה</u>** (**<u>Floating – Point representation</u>**).

בשיטה זו כל מספר ממשי $x \neq 0$ מוצג במחשב לפי התבנית הבאה: $\boxed{x = \pm r \times 2^n}$

כאשר n מספר שלם ו-r הוא שבר המקיים $\boxed{\frac{1}{2} \le r < 1}$

ייצוג מספרים במחשב- שיטת הנקודה הצפה

מטעמי נוחיות נדגים את הבעייתיות באריתמטיקה של מחשבים באמצעות ייצוג מספרים בשיטה העשרונית.

כאן, כל מספר ממשי $x \neq 0$ מוצג במחשב לפי התבנית הבאה: $\boxed{x = \pm r \times 10^n}$

כאשר n מספר שלם ואילו r הוא שבר $\boxed{\frac{1}{10} \leq r < 1}$

שיטת הנקודה הצפה, המשך

הערה: ייצוג זה הינו **ייצוג מנורמל** של שיטת הנקודה הצפה העשרונית והוא **יחיד** לכל מספר ממשי.

בשיטה זו אורך מילת המחשב זו משמש להגדרת שני גדלים:

- t **מנטיסה**: המשמשת לאחסון הספרות של השבר העשרוני r בייצוג של x.
- e **מעריך**: המשמש לאחסון המעריך n בייצוג של x.

גדלים אלו הינם קבועים במחשב נתון.

ייצוג בשיטת הנקודה הצפה: דוגמאות

המספר	ייצוג בשיטת נק' צפה	r	t	e
$a = 257.39$	$a = 0.25739 \cdot 10^3$	0.25739	5	3
$a = 0.00139$	$a = 0.139 \cdot 10^{-2}$	0.139	3	-2
$a = 0.2001$	$a = 0.2001 \cdot 10^0$	0.2001	4	0
$a = 18524$	$a = 0.18524 \cdot 10^5$	0.18524	5	5
$a = 1.5000$	$a = 0.15 \cdot 10^1$	0.15	2	1

שיטת הנקודה הצפה, המשך

<u>הגדרה:</u>

מספר נתון $x \neq 0$ הוא בעל n **<u>ספרות משמעותיות</u>** אם הייצוג המנורמל שלו, מכיל n ספרות מימין לנקודה העשרונית כך שהספרה ה- n שונה מאפס, ומימין לה אפסים בלבד.

<u>דוגמאות:</u>

- למספר $x = 312456000 = 0.312456 \cdot 10^9$ יש 6 ספרות משמעותיות.
- למספר $x = 0.20000000 = 0.2 \cdot 10^0$ יש ספרה משמעותית אחת בלבד.
- למספר $x = 0.100200 = 0.1002 \cdot 10^0$ יש 4 ספרות משמעותיות.

עיגול בשיטת הנקודה הצפה

- כפי שראינו, אורכי המנטיסה t והמעריך e הינם קבועים במחשב נתון.
- קיימים מספרים ממשיים שהמנטיסה שלהם מכילה אינסוף ספרות ולכן לא ניתן להציגם במחשב (שהוא "מכונה סופית").
- בעיה זו מופיעה לא רק כאשר המחשב קורא מספרים, אלא גם כאשר הוא מייצג תוצאות ביניים במהלך חישוב ולכן יש צורך בעיגול.

עיגול בשיטת הנקודה הצפה, המשך

- בעת העיגול יישמטו הספרות "העודפות" מצידו הימני של המספר, כיוון שהשפעתן על גודל המספר קטנה יותר.

- קיימות שתי שיטות מקובלות לתרגום של מספר ממשי נתון x למספר x^* המייצג אותו במחשב:
  - **<u>שיטת העיגול הסטנדרטי</u>** (round)
  - **<u>שיטת הקיצוץ</u>** (chop)

עיגול בשיטת הנקודה הצפה, המשך

יהי x מספר המיוצג בשיטת הנקודה הצפה עם t ספרות במנטיסה.

- **<u>שיטת העיגול הסטנדרטי</u>** (בקיצור: עיגול **rd**)

אם הספרה הממוקמת במקום ה-$t+1$ בייצוג המנורמל של המספר x גדולה או שווה בערכה ל-5 נעגל את הספרה במקום ה- t למעלה, אחרת לא נבצע בה שינוי. כעת נמחק את כל הספרות אחרי הספרה ה- t-ית.

<u>דוגמאות:</u> נעגל (rd) בהינתן מחשב תלת ספרתי (t=3)

$$rd(2.3574) = 2.36 \qquad \left(+0.236\times10^{1}\right)$$

$$rd(2.3534) = 2.35 \qquad \left(+0.235\times10^{1}\right)$$

$$rd(1676) = 1680 \qquad \left(+0.168\times10^{4}\right)$$

$$rd(1674) = 1670 \qquad \left(+0.167\times10^{4}\right)$$

עיגול בשיטת הנקודה הצפה, המשך

- <u>**שיטת הקיצוץ**</u> (chopping)

בשיטה זו עבור מחשב t ספרתי נמחקות ספרות המנטיסה החל מהספרה ה- $t+1$ ללא קשר לערכה של הספרה ה- t –ית.

<u>**דוגמאות:**</u> נעגל בשיטת הקיצוץ (ch) בהינתן מחשב תלת ספרתי (t=3)

$$ch(2.3574) = 2.35 \qquad (+0.235\times 10^{1})$$

$$ch(2.3534) = 2.35 \qquad (+0.235\times 10^{1})$$

$$ch(1676) = 1670 \qquad (+0.167\times 10^{4})$$

$$ch(1674) = 1670 \qquad (+0.167\times 10^{4})$$

עיגול בשיטת הנקודה הצפה-תרגיל

חשבו, ע"י עיגול רגיל rd של 3 ספרות , בשיטת נקודה צפה

(ניתן להניח שפעולת כפל קודמת לפעולת חיבור)

$$\boxed{7.95+200\cdot 8.38}$$

✓ ראשית נבצע את הכפל ונעגל:

$$200\cdot 8.38={\color{blue}167}{\color{magenta}6}\underset{\Downarrow}{\rightarrow}1680$$

עיגול ל-3 ספרות בשיטת נקודה צפה

✓ כעת נבצע נחבר עם התוצאה המעוגלת שקיבלנו:

$$7.95+1680={\color{blue}168}{\color{magenta}7}.95\underset{\Downarrow}{\rightarrow}1690$$

עיגול ל-3 ספרות בשיטת נקודה צפה

שגיאות בחישובים מקורבים

פתרון נומרי הוא על פי רב פתרון מקורב ולכן הדיון בשגיאת הקירוב הינו חשוב.

קיימים מספר מקורות עיקריים לשגיאת הקירוב:

1. שגיאות עיגול של קלט/חישובים (Round-off errors):

מימוש שיטה נומרית כרוך בביצוע פעולות אריתמטיות רבות ונדרשת התאמה של הקלט/ תוצאות החישובים לייצוג עם מנטיסה סופית.

2. שגיאות קיטוע (Truncation errors)

כתוצאה מקירוב פונקציה באמצעות קיטוע של טור אינסופי (למשל, טור טיילור חישוב נגזרות באמצעות הפרשים וכו'.

3. שגיאה מתפשטת/מצטברת (Propagation error):

שגיאה בפלט כתוצאה משגיאה בקלט (במקרה של קלט שמתקבל ממכשיר מדידה לא מכויל למשל), שגיאות מצטברות לאורך הדרך.

סוגי שגיאות בחישובים מקורבים

יהי x הערך האנליטי המדויק ו- x^* הערך הנומרי המקורב:

1. **שגיאה נומרית**

$$N.E. = x - x^*$$

2. **שגיאה מוחלטת**

$$A.E. = \left| x - x^* \right|$$

3. **שגיאה יחסית**

$$R.E. = \left| \frac{x - x^*}{x} \right| = \frac{A.E.}{|x|}$$

שגיאה מוחלטת ושגיאה יחסית, המשך

- השגיאה המוחלטת והשגיאה היחסית מאפשרת לנו להתייחס שגיאות במונחים של גודל.

- השגיאה היחסית מצביעה על המשקל היחסי של השגיאה הנומרית ביחס לפתרון המדויק ובד"כ מתארת באופן יותר מדויק את הסטייה מהערך המדויק ביחס לשגיאה המוחלטת. מכאן חשיבותה.

- השיטות נומריות מאפשרות לקבל ערך מקורב x^* ואילו הערך המדויק x לא ידוע לנו. לפיכך, נוכל להעריך את השגיאה היחסית ע"י:

$$R.E.=\left|\frac{x-x^*}{x}\right|\cong\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|$$

שגיאה מוחלטת ושגיאה יחסית-דוגמאות

1) אם $x = 3.15$ ו- $x^* = 3.14$

אזי השגיאה המוחלטת היא 0.01 והשגיאה היחסית היא כ- 0.32% .

לעומת זאת אם $x = 0.07$ ו- $x^* = 0.08$ אזי השגיאה המוחלטת היא 0.01 והשגיאה היחסית היא כ-14.3%

2) אם $x = 0.00005$ ו- $x^* = 0.00006$ אזי השגיאה המוחלטת היא 0.00001 והשגיאה היחסית היא 20%.

אי יציבות נומרית

- במהלך הפתרון של בעיה באנליזה נומרית נופלות שגיאות עיגול הן בהכנסת הנתונים והן בשלבי החישוב השונים של הפתרון.
- בחלק מהמקרים טעויות העיגול הנ"ל אינן משפיעות באופן משמעותי על התוצאות הסופיות.
- אולם, במקרים מסוימים, טעויות עיגול כאלו עשויות לגרום לאובדן דיוק משמעותי כך שבסופו של התהליך התוצאות הנומריות המחושבות שונות מאד מהתוצאות שיושגו בדרך אנליטית.

תופעה זו נקראת בשם **אי יציבות** (**Instability**).

אי יציבות נומרית

על מנת שנוכל להכריז על הפתרון הנומרי שנתקבל כקירוב לפתרון המדויק עלינו לדעת את רגישות הפתרון לטעויות העיגול.

ישנם שני סוגים עיקריים של אי יציבות באנליזה נומרית:

- **אי יציבות שמקורה בבעיה.** (לחלופין הבעיה נקראת חולנית **(ill-conditioned)**
- **אי יציבות שמקורה בשיטת הפתרון.**

אי יציבות שמקורה בבעיה

הגדרה:

לבעיה יש **אי יציבות שמקורה בבעיה** (או לחלופין הבעיה נקראת **חולנית** **ill-conditioned**) אם שינויים קטנים בנתונים של הבעיה גורמים לשינוים גדולים בפתרונה.

יציבות כזו תלויה גם בנתונים ההתחלתיים. עבור נתונים התחלתיים מסוימים יש יציבות ועבור אחרים אין.

לצורך פתרון בעיה כזו אנו נדרשים לחישובים זהירים הכוללים פעולות חישוב עם רמת דיוק גבוהה, וזאת ללא קשר לשיטה בה משתמשים.

דוגמא לאי יציבות שמקורה בבעיה

נתבונן במערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+1.01y=2.01 \end{cases}$$

שפתרונה הוא $x=y=1$.

כעת נתבונן במערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+1.01y=2.02 \end{cases}$$

שפתרונה הוא $x=0, y=2$.

שינוי קטן של באיבר החופשי במשוואה השנייה גרר שינוי גדול מאד בפתרון האנליטי. **מדוע?**

אי יציבות שמקורה בשיטת הפתרון

הגדרה:

לבעיה יש **אי יציבות שמקורה בשיטת הפתרון** אם טעויות קטנות המופיעות בשלב כלשהו של הפתרון משפיעות לרעה על החישובים שלאחר מכן במידה כזו שהתוצאות הסופיות הן לגמרי לא מדויקות.

נציג כעת דוגמא פשוטה לאי יציבות מסוג זה

תרגיל

פותרים את המשוואה הריבועית $x^2 + 111.11x + 1.2121 = 0$
תוך שימוש במחשב עם $t = 5$ ספרות במנטיסה המעגל (החל משלב הקלט ולאחר כל פעולה אריתמטית) בשיטת הקיצוץ (ch).

א. מהם השורשים המקורבים למשוואה $x^*_{1,2}$ אם ייעשה שימוש במחשב זה בנוסחת השורשים $x^*_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
(נוסחה לחישוב שורשי משוואה ריבועית $ax^2 + bx + x = 0$)

ב. נתון כי הייצוג עם $t = 5$ ספרות במנטיסה של הפתרונות המדויקים של המשוואה הוא $x_1 = -0.010910$ ו- $x_2 = -111.09$
חשבו את השגיאה היחסית עבור כל קירוב שמצאתם בסעיף א' .

תרגיל, המשך

ג. בהסתמך על הפתרון המקורב $x_2^* = -111.09$, מצאו את השורש המקורב x_1^* המתקבל במחשב זה אם משתמשים בנוסחת וייטה $x_1^* \cdot x_2^* = \frac{c}{a}$.

ד. חזרו על סעיף א' עבור מחשב עם $t = 5$ ספרות במנטיסה המשתמש בעיגול בשיטת rd.

פתרון תרגיל

פתרון סעיף א

$$x^*_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-111.11\pm\sqrt{\overbrace{(111.11)^2}^{12345.4321}-\overbrace{4\cdot 1\cdot(1.2121)}^{4.8484}}}{2\cdot 1}=$$

$$\xrightarrow[t=5]{ch}\frac{-111.11\pm\sqrt{\overbrace{12345-4.8484}^{12340.1516}}}{2}\xrightarrow[t=5]{ch}=\frac{-111.11\pm\sqrt{12340}^{\,111.0855526...}}{2}=\frac{-111.11\pm 111.08}{2}=$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^*_1=\dfrac{-111.11+111.08}{2}=\dfrac{-0.03}{2}=-0.015000\\[2ex] x^*_2=\dfrac{-111.11-111.08}{2}=-\dfrac{\overbrace{222.19}^{111.095}}{2}\xrightarrow[t=5]{ch}-111.09\end{cases}$$

שימו ♥

1. יש לבצע עיגול ל- $t=5$ לאחר כל פעולה אריתמטית כולל בשלב הקלט (בתרגיל זה הקלט של מקדמי המשוואה עמד בתנאי של $t=5$ ספרות ולכן לא היה צורך בעיגול של הקלט)
2. פעולת עיגול נדרשה בפועל רק במקומות בהן התוצאה חרגה מ-$t=5$ ספרות במנטיסה (סומנו בכחול בפתרון)

פתרון תרגיל, המשך

פתרון סעיף ג

❑ עבור x_1 :

$$A.E_{x_1} = \left| x_1 - x_1^* \right| = \left| (-0.01091) - (-0.015000) \right| = 0.00409$$

$$R.E_{x_1} = \frac{A.E_{x_1}}{|x_1|} \times 100\% = \frac{0.0040900}{0.010910} \times 100\% = 0.3748854\ldots \times 100\% \xrightarrow[t=5]{ch} \approx 37.488\%$$

❑ עבור x_2 :

$$A.E_{x_2} = \left| x_2 - x_2^* \right| = \left| (-111.09) - (-111.09) \right| = 0$$

$$R.E_{x_2} = \frac{A.E_{x_2}}{|x_2|} \times 100\% = \frac{0}{-111.09} \times 100\% = 0\%$$

פתרון סעיף ג

$$x_1^* \cdot x_2^* = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1^* \cdot (-111.09) = \frac{1.2121}{1}$$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{1.2121}{-111.09} = -0.0109109731\ldots \xrightarrow[t=5]{ch} -0.010910$$

פתרון תרגיל, המשך

פתרון סעיף ד

$$x_{1,2}^{*}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-111.11\pm\sqrt{\overbrace{(111.11)^2}^{12345.4321}-\overbrace{\underbrace{4\cdot 1}_{4}\cdot(1.2121)}^{4.8484}}}{2\cdot 1}=$$

$$\xrightarrow[t=5]{rd}\frac{-111.11\pm\sqrt{\overbrace{12345-4.8484}^{12340.1516}}}{2}\xrightarrow[t=5]{rd}\frac{-111.11\pm\overbrace{\sqrt{12340}}^{111.0855526..}}{2}\xrightarrow[t=5]{rd}\frac{-111.11\pm 111.09}{2}=$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1^{*}=\dfrac{-111.11+111.09}{2}=\dfrac{-0.02}{2}=-0.010000\\[2ex] x_2^{*}=\dfrac{-111.11-111.09}{2}=-\dfrac{222.2}{2}=-111.10\end{cases}$$

$$A.E_{x_1}=\left|x_1-x_1^{*}\right|=\left|(-0.01091)-(-0.010000)\right|=0.00091$$

$$R.E_{x_1}=\frac{A.E_{x_1}}{|x_1|}\times 100\%=\frac{0.00091000}{0.010910}\times 100\%=0.56120418...\times 100\%\xrightarrow[t=5]{rd}\approx 56.12\%$$