תרגיל 1

מקרבים את הפונקציה $f(x) = e^{-0.5x} - x^2$ בקטע $[0,4]$ באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_n(x)$ הטוב ביותר האפשרי בקטע.

א. מצאו את מספר נקודות האינטרפולציה אשר מבטיח כי הקירוב יהיה עם מידת דיוק של $\varepsilon = 10^{-2}$ לפחות. (בסעיף זה אין צורך למצוא את נקודות האינטרפולציה ואת $L_n(x)$)

ב. מצאו את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב מקרב פולינומיאלי הטוב ביותר האפשר ממעלה $2\geq$ המקרב את $f(x)$ בקטע הנתון.

ג. עבור $n = 2$ הוכיחו (ללא חישוב מפורש של $L_2(x)$) כי לכל $x \in [1,1.5]$ מתקיים $f(x) - L_2(x) < 0$.

נוסחת עזר: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}e^{-0.5x}$ לכל $n \geq 3$

פתרון תרגיל 1

א. פולינום האינטרפולציה הטוב ביותר האפשרי $L_n(x)$ (ממעלה $\geq n$) בנוי על $(n+1)$ נקי צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[0,4]$.
נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה האופטימלית (אינטרפלציית צ'ביצ'ב) בקטע בו מבוצעת אינטרפולציה זו.

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x) - L_n(\tilde{T};x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}; \qquad M_{n+1}[a,b] = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

כאן $[a,b] = [0,4]$.

נחשב $M_{n+1}[0,4] = \max_{0\le x\le 4}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

על סמך נוסחת העזר הנתונה $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \frac{1}{2^{n+1}}e^{-0.5x}$. זוהי פונקציה מעריכית מונוטונית יורדת המקבלת ערך מקסימלי בקצה השמאלי ולכן $M_{n+1}[0,4] = \left|f^{(n+1)}(0)\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$. לכן נקבל:

$$\max_{0\le x\le 4}|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}[0,4]}{(n+1)!}\cdot\frac{(4-0)^{n+1}}{2^{2\cdot n+1}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{(n+1)!}\cdot\frac{4^{n+1}}{2^{2\cdot n+1}}$$
$$= \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

נבדוק איזה n מבטיח את רמת הדיוק הנדרשת

$$\max_{0\le x\le 4}|f(x) - L_n(x)| \le \frac{1}{2^n(n+1)!} \le 10^{-2}$$

עבור $n = 2$: $\max_{0\le x\le 4}|f(x) - L_2(x)| \le \frac{1}{2^2\cdot 3!} = \frac{1}{24} \sim 0.0416 > 10^{-2}$

עבור $n = 3$: $\max_{0\le x\le 4}|f(x) - L_3(x)| \le \frac{1}{2^3\cdot 4!} = \frac{1}{192} \sim 0.005208 < 10^{-2}$

ולכן פולינום האינטרפולציה הטוב ביותר האפשרי אשר מבטיח רמת דיוק $\varepsilon = 10^{-2}$ הוא $L_3(T;x)$ אשר בנוי על $n+1=4$ נקי צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[0,4]$.

ב. נמצא את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב מקרב פולינומיאלי הטוב ביותר האפשר ממעלה ≤ 2 המקרב את $f(x)$ בקטע הנתון.

נק' האינטרפולציה המתאימות הן 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע.

אנו יודעים כי 3 נק' צביצ'ב בקטע $[-1,1]$ הן $\xi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \xi_1 = 0, \xi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

נוסחת מעבר מהקטע $[-1,1]$ לקטע שלנו $[a,b] = [0,4]$ היא: $z = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} = 2x + 2$

ולכן, 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[0,4]$ הן $x_0 = 2 - \sqrt{3}, x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

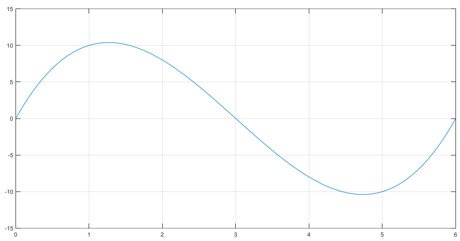
ג. נשתמש בנוסחת השגיאה בפועל

$$x \in [1,1.5] \qquad f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot \omega_3(x); \quad 0 < \xi < 4$$

כאן: $f(x) = e^{-0.5x} - x^2$ ולכן $f'''(x) = -\frac{1}{8}e^{-0.5x}$ ונציין כי $f'''(x) < 0$ לכל x
בפרט $f'''(\xi) < 0$ עבור $0 < \xi < 4$.

הפונקציה $\omega_3(x) = \left(x - 2 - \sqrt{3}\right)(x-2)\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)$ משנה סימן בנקודות האינטרפולציה (שהם שורשי $\omega_3(x)$)
היות וכל נקודה $x \in [1,1.5]$ נמצאת בין השורשים $x_0 = 2 - \sqrt{3} \sim 0.268, x_1 = 2$
מספיק לבדוק את הסימן של $\omega_3(x)$ בנקודה כלשהי בקטע $[1,1.5]$ וסימן זה מייצג את הסימן בקטע. לכל $x \in [1,1.5]$ מתקיים $\omega_3(x) = \underbrace{\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)}_{>0}\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)}_{<0}$

לחלופין, ניתן לנמק באמצעות ייצוג גרפי של $\omega_3(x)$ ולהראות כי הגרף שלה נמצא מתחת לציר x בקטע המדובר (כלומר הפונקציה שלילית בקטע)



לכן נקבל: $\forall x \in [1,1.5]:\ f(x) - L_2(x) = \overbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}}^{-} \cdot \underbrace{\omega_3(x)}_{-} < 0$.

תרגיל 2

מקרבים את הפונקציה $f(x) = ln(x+1)$ בקטע $[0,4a]$ ($a > 0$ ממשי) באמצעות פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ הטוב ביותר האפשרי בקטע.

א. מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-6}$.
(בסעיף זה אין צורך למצוא את נקודות האינטרפולציה ואת $L_2(x)$)

ב. מצאו את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב $L_2(T;x)$ עבור $a = 0.5$.

ג. עבור $n = 2$ הוכיחו (ללא חישוב מפורש של $L_2(x)$) כי עבור $a = 0.5$ ולכל $x \in [0.2,0.5]$ מתקיים $f(x) - L_2(T;x) > 0$.

פתרון תרגיל 2

א. פולינום האינטרפולציה האופטימלי הוא פולינום הבנוי על נקי צ'ביצ'ב מותאמות לקטע.

ידוע כי, חסם לשגיאת האינטרפולציה עבור פולינום האינטרפולציה $L_n(T;x)$ המקרב את $f(x)$ בקטע $[A,B]$ ובנוי על $n+1$ נקודות צ'ביצ'ב המותאמות לקטע $[A,B]$ נתון ע"י הנוסחא:

$$\max_{A\le x\le B} |f(x)-L_n(T;x)| \le \frac{M_{n+1}[A,B]}{(n+1)!}\cdot\frac{(B-A)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$M_{n+1}[A,B] = \max_{A\le x\le B}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

בנתוני התרגיל שלנו $[A,B] = [0,4a]$, $n = 2$ ו- $M_{n+1}[A,B] = M_3[0,4a] = \max_{0\le x\le 4a}\left|f'''(x)\right|$.

עבור $f(x) = ln(x+1)$ מתקיים :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1};\ f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2};\ f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

היות ו $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \ne 0$ לכל $x \in [0,4a]$ נסיק ע"י $f'''(x)$ היא פונקציה מונוטונית המקבלת את ערכי הקיצון שלה בקצות הקטע, כלומר:

$$M_3[0,4a] = \max_{0\le x\le 4a}\left|f'''(x)\right| = \max\left\{\left|f'''(0)\right|,\left|f'''(4a)\right|\right\} = \max\left\{\frac{2}{1^3},\frac{2}{\underbrace{(a+1)^3}_{>1}}\right\} = 2$$

נציב בנוסחת החסם לשגיאה ונקבל:

$$\max_{0\le x\le 4a} |f(x)-L_2(T;x)| \le \frac{M_3[0,4a]}{3!}\cdot\frac{(4a-0)^3}{2^5} = \frac{2}{3!}\cdot\frac{4^3\cdot a^3}{2^5} = \frac{2}{3!}\cdot\frac{2^6\cdot a^3}{2^5} = \frac{2a^3}{3}$$

נדרוש את רמת הדיוק

$$\max_{0\le x\le 4a} |f(x)-L_2(T;x)| \le 10^{-6} \Rightarrow \frac{2a^3}{3} \le 10^{-6} \Rightarrow a \le \sqrt[3]{1.5\cdot 10^{-6}} \cong 0.011447...$$

נתייחס גם לאילוץ הנתון $a > 0$ ונקבל את הטווח המבוקש $0 < a \le 0.011447...$.

ב. נמצא את נקודות האינטרפולציה המתאימות לחישוב $L_2(T;x)$ עבור $a = 0.5$

נק' האינטרפולציה המתאימות הן 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע.

אנו יודעים כי 3 נק' צביציב בקטע $[-1,1]$ הן $\xi_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

עבור $a = 0.5$ נקבל את הקטע $[0,4a] = [0,2]$

נוסחת מעבר מהקטע $[-1,1]$ לקטע שלנו $[a,b] = [0,2]$ היא: $z = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} = x + 1$

ולכן, 3 נק' צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[0,2]$ הן $x_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ג. עבור $a = 0.5$ מקבלים כאמור את הקטע $[0,4a] = [0,2]$

נשתמש בנוסחת השגיאה בפועל

$$x \in [0.2,0.5] \qquad f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot \omega_3(x);\quad 0 < \xi < 2$$

כאן: $f(x) = ln(x+1)$ ולכן $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ ונציין כי $f'''(x) > 0$

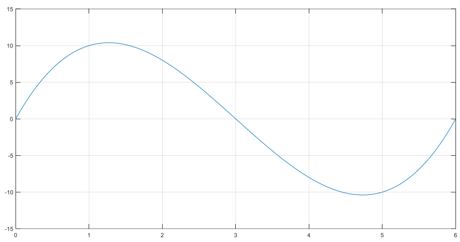
לכל $x > -1$ בפרט $f'''(\xi) > 0$ עבור $0 < \xi < 2$.

הפונקציה $\omega_3(x) = \left(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-1)\left(x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ משנה סימן בנקודות האינטרפולציה (שהם שורשי $\omega_3(x)$)

היות וכל נקודה $x \in [0.2, 0.5]$ נמצאת בין השורשים $x_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0.134, x_1 = 1$

מספיק לבדוק את הסימן של $\omega_3(x)$ בנקודה כלשהי בקטע $[0.2, 0.5]$ וסימן זה מייצג את הסימן בקטע. לכל $x \in [0.2, 0.5]$ מתקיים $\omega_3(x) = \underbrace{\left(x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{\left(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{<0}$

לחלופין, ניתן לנמק באמצעות ייצוג גרפי של $\omega_3(x)$ ולהראות כי הגרף שלה נמצא מתחת לציר x בקטע המדובר (כלומר הפונקציה שלילית בקטע)



לכן נקבל: $0 < \underbrace{\omega_3(x)}_{+} \cdot \overbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}}^{+} = f(x) - L_2(x)$:$\forall x \in [0.2,0.5]$.