אנליזה נומרית מתקדמת:
מצגת מלווה #3

שיטות נומריות לפתרון מערכת משוואות-
פירוק LU

__נושאי המצגת:__

- הגדרת פירוק LU
- משפט קיום הפירוק, תנאי מספיק לקיום הפירוק.
- אלגוריתם דוליטל.
- שימוש בפירוק LU לפתרון מערכת משוואות ליניאריות.

מה זה פירוק LU?

פירוק של מטריצה ריבועית כלשהי A למכפלה של שתי מטריצות $A=LU$:

1. L מטריצה משולשת תחתונה. מסומנת באות L, מהמילה **Lower**.
2. U מטריצה משולשת עליונה. מסומנת באות U, מהמילה **Upper**.

Lower Triangular Matrix

$$[\,L\,]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

Upper Triangular Matrix

$$[\,U\,]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

שאלות:

- האם לכל מטריצה ריבועית קיים פירוק LU?
- אם קיים פירוק LU- איך נמצא אותו?

מה זה פירוק LU?

דוגמאות לקיום פירוק LU

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-2\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\7&2&1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}}_{U}$$

פירוק LU

בתהליך האלימינציה של גאוס המיושם על מערכת $Ax = b$, אנו עושים שימוש בפעולות אלמנטריות על שורות המטריצה המורחבת $(A|b)$ על מנת להביא אותה לצורה מדורגת שקולה $Ux = g$ כך ש-U היא מטריצה משולשת עליונה.

כפי שמוסבר בהרחבה בנספח, כל פעולה אלמנטרית i ניתן לתאר ע"י מטריצה הפיכה L_i ובפרט ניתן לתאר את התהליך הנ"ל כסדרת הכפלות משמאל של המטריצה A במטריצות אלמנטריות הפיכות המייצגות את הפעולות האלמנטריות המשמשות בתהליך השילוש (שלב הדירוג של A למטריצה משולשת עליונה).

כלומר אם אנו מבצעים k פעולות בתהליך, אזי

$$\boxed{(A|b) \Rightarrow L_1 \cdot (A|b) \Rightarrow L_2 \cdot L_1 \cdot (A|b) \Rightarrow \cdots \Rightarrow L_k \cdot \cdots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (A|b)}$$

כאשר $\boxed{U = L_k \cdot \cdots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A}$ משולשת עליונה

ומכאן, לפי הכלל $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$ מקבלים:

$$\boxed{A = (L_k \cdot \cdots \cdot L_2 \cdot L_1)^{-1} \cdot U = (L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots \cdot L_k^{-1}) \cdot U}$$

פירוק LU - המשך

נסמן $\boxed{L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot \cdots \cdot L_k^{-1}}$ אזי $\boxed{A = LU}$

L היא תוצאת כפל של מטריצות אלמנטריות הופכיות שהן משולשות תחתונות ולכן גם L משולשת תחתונה.

<u>הוכחנו למעשה</u> כי **<u>אם תהליך האלימינציה של גאוס מתבצע ללא החלפת שורות</u>**, אזי המטריצה L היא מטריצה משולשת תחתונה, ומכאן נובע ש- A היא כפולה של מטריצה משולשת תחתונה במטריצה משולשת עליונה .

פירוק זה נקרא **<u>"פירוק LU של המטריצה A"</u>**

משפט פירוק LU

משפט: תנאי מספיק 1 לקיום פירוק LU
אם תהליך האלימינציה של גאוס מתבצע ללא החלפת שורות
המטריצה A ניתנת לפירוק $A=LU$

- המטריצה U בפירוק היא המטריצה המשולשת העליונה המתקבלת מ- A לאחר דירוג בשיטת גאוס
- המטריצה L בפירוק היא מטריצה משולשת תחתונה שאיבריה נתונים ע"י:

$$t_{ij} = \begin{cases} l_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}; & i > j \\ 1; & i = j \\ 0; & i < j \end{cases}$$

l_{ij}
זהו הגורם הכפלי המתאים

משפט פירוק LU, המשך

<u>באופן מפורש:</u>

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

מציאת פירוק LU- דוגמא

נמצא פירוק $A=LU$ (עם עיגול של 3 ספרות לפי שיטת הנקודה הצפה) של

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 5 & 3.33 & 2.5 \\ 33.3 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 5 & 3.33 & 2.5 \\ 33.3 & 25 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 5R_1 \\ R_3 \to R_3 - 33.3R_1}]{l_{21}=\frac{5}{1}=5,\, l_{31}=\frac{33}{1}=33.3} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0 & 0.83 & 0.83 \\ 0 & 8.3 & 8.9 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{l_{32}=\frac{8.3}{0.83}=10} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0 & 0.83 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} = U$$

פתרון דוגמא , המשך

לכן $\boxed{A = LU}$ כאשר

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0 & 0.83 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 33.3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

תזכורת מאלגברה: מינורים מובילים של מטריצה

הגדרה:
תת מטריצה מובילה מסדר k של מטריצה A מסדר nxn היא תת המטריצה המתקבלת ע"י מחיקת $(n-k)$ השורות והעמודות האחרונות של המטריצה.

הדטרמיננטה של תת המטריצה המובילה נקראת **מינור מוביל** של מטריצה A .

- לדוגמה: עבור $A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 8 & 5 & 7\end{bmatrix}$ המינורים המובילים הם:

$$\triangle_1 = |1| = 1$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix}1 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix} = -10$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix}1 & 7 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 8 & 5 & 7\end{vmatrix} = -49$$

תזכורת מאלגברה: מינורים מובילים של מטריצה

הגדרה:

תהי A מטריצה ריבועית

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

המינור המוביל ה- k של A מוגדר ומסומן באופן הבא:

$$\boxed{\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

פירוק LU: תנאי מספיק לקיום הפירוק

משפט:

אם כל המינורים המובילים של מטריצה A שונים מ-0

כלומר $\Delta_k \neq 0, \quad k=1,2,\cdots,n$

אז קיים ל- A פירוק LU כנ"ל.

כלומר, תנאי מספיק לקיום הפירוק (ואי צורך בהחלפת שורות בדירוג) הוא התנאי

$$\Delta_1 = |a_{11}| \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \cdots\cdots, \Delta_n = |A| \neq 0$$

אלגוריתם דוליטל

- אלגוריתם דוליטל הינו אלגוריתם המבצע פירוק $A=LU$
- נדגים את העיקרון של האלגוריתם על מטריצה A מסדר 4.

מחפשים פירוק מהצורה

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

לאחר כפל מטריצות באגף ימין מקבלים

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

אלגוריתם דוליטל

- למציאת הגורמים u_{ij} ו- l_{ij} נבצע השוואת מטריצות איבר-איבר לפי סדר מסוים שנדגים כעת:

שלב ראשון : השוואת שורה ועמודה 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}$$

$$1^{st}\,row: \quad u_{11}=a_{11}; \quad u_{12}=a_{12}; \quad u_{13}=a_{13}; \quad u_{14}=a_{14}$$

$$1^{st}\text{column: } \mathrm{l}_{21}u_{11}=a_{21}; \quad \mathrm{l}_{31}u_{11}=a_{31}; \quad \mathrm{l}_{41}u_{11}=a_{41}$$

$$\Rightarrow \quad l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}; \quad l_{31}=\frac{a_{31}}{u_{11}}; \quad l_{41}=\frac{a_{41}}{u_{11}}$$

אלגוריתם דוליטל

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

שלב שני: השוואת שורה ועמודה 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}$$

$$2^{\text{nd}}\, row: \quad l_{21}u_{12}+u_{22}=a_{22}; \quad l_{21}u_{13}+u_{23}=a_{23}; \quad l_{21}u_{14}+u_{24}=a_{24}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12} \\ u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13} \\ u_{24}=a_{24}-l_{21}u_{14} \end{cases}$$

$$2^{nd} \text{ column:} \quad l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=a_{32}; \quad l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22}=a_{42}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22} \\ l_{42}=(a_{42}-l_{41}u_{12})/u_{22} \end{cases}$$

אלגוריתם דוליטל

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

שלב שלישי: השוואת שורה ועמודה 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}$$

$$3^{rd}\ row:\quad l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=a_{33};\quad l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34}=a_{34}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23} \\ u_{34}=a_{34}-l_{31}u_{14}-l_{32}u_{24} \end{cases}$$

$$3^{\text{rd}}\text{column:}\quad l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33}=a_{43}$$

$$\Rightarrow \quad l_{43}=\frac{a_{43}-l_{41}u_{13}-l_{42}u_{23}}{u_{33}}$$

אלגוריתם דוליטל

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

שלב רביעי ואחרון: השוואת שורה ועמודה 4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{4^{\text{th}}\text{row:} \quad u_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34}}$$

אלגוריתם דוליטל לפירוק LU

* we assume here that there is no need in rows interchange

input: $n, A = a(i,j)$

LU factorization

for k=1 to n do

$l(k,k) = 1$

for $j = k$ to n do

$u(k,j) = a(k,j) - sum1$

end

for $i = k + 1$ to n do

$l(i,k)$ =($a(i,k)$-$sum2$)/$u(k,k)$

end

End

Output: $l(i,j), u(i,j)$

sum1=0;
for s=1 to $k - 1$ do
sum1=sum1+l$(k,s) * u(s,j)$
end

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}$$

$$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} \right)$$

sum2=0;
for s=1 to $k - 1$ do
sum2=sum2+$l(i,s) * u(s,k)$
end

אלגוריתם דוליטל לפירוק LU

* we assume here that there is no need in rows interchange

input: $n, A = a(i,j)$

LU factorization

for k=1 to n do

$l(k,k) = 1$

for $j = k$ to n do

$u(k,j) = a(k,j)$-S_1

end

for $i = k+1$ to n do

$l(i,k) = (a(i,k) - S_2)/u(k,k)$

end

End

$\underline{1 \le k \le n}$

$u_{kk}, u_{k,k+1}, \cdots, u_{kn}$

$l_{kk} = 1, l_{k+1,k}, \cdots, l_{nk}$

$S_1 = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}$

$S_2 = \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk}$

$\underline{k=1}$

$u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1n}$

$l_{11} = 1, l_{21}, \cdots, l_{n1}$

$\underline{k=2}$

$u_{22}, u_{23}, \cdots, u_{2n}$

$l_{22} = 1, l_{32}, \cdots, l_{n2}$

$\vdots$

$\underline{k=n}$

u_{nn}

$l_{nn} = 1$

Output: $l(i,j), u(i,j)$

פירוק LU ב-matlab

ניתן לבצע פירוק LU ע"י אתחול המטריצה A והרצת הפקודה $\boxed{>> lu(A)}$

לדוגמא: נרצה לבצע פירוק LU של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

נרשום:

$$>> A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1;1 & -1 & -1;1 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$>> \left[L,U\right]=lu(A)$$

פירוק LU ב-matlab, המשך

הפלט יהיה:

$$L =$$

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 1.0000 & 0.5000 & 1.0000 \end{matrix}$$

$$U =$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

שימוש בפירוק LU- לפתרון מערכת משוואות

ראינו כי אם המטריצה A ניתנת לדירוג מטריצה משולשת עליונה ללא החלפת שורות, אז קיים לה פירוק LU .

הפירוק יכול לשמש לפתרון חלופי לשיטת גאוס למערכת $Ax=b$. נראה כיצד:

- בהינתן המערכת $Ax=b$ ניתן לכתוב באופן שקול:

$$Ax=b \xrightarrow[A=LU]{} LUx=b \to L\ \ Ux\ =b \xrightarrow[Ux=y]{} Ly=b$$

- כלומר, במקום לפתור את המערכת המקורית נקבל שתי מערכות משוואות חדשות קלות יותר לפתרון:

1. ראשית פותרים את המערכת הראשונה $Ly=b$ שהיא משולשת תחתונה ומקבלים את y.
2. מציבים את הפתרון y במערכת השנייה $Ux=y$ שהיא משולשת עליונה לקבלת הפתרון המבוקש x.

שיטת LU לפתרון מערכת משוואות, המשך

- פתרון המשוואה $Ly = b$ נעשה על ידי הצבה קדימה, שימוש בערך y_1 שחושב כדי לפתור את y_2 וכן הלאה עד שמוצאים את y_n.

$$\boldsymbol{Ly = b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ l_{21} \cdot y_1 + y_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_{n1} \cdot y_1 + l_{n2} \cdot y_2 + \cdots + y_n = b_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_2 = b_2 - l_{21} \cdot y_1 \\ \vdots \\ y_n = b_n - l_{n1} \cdot y_1 - l_{n2} \cdot y_2 - \cdots - l_{n-1} \cdot y_{n-1} \end{cases}$$

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \,, \qquad where\ i = 2, 3, \ldots, n$$

שיטת LU לפתרון מערכת משוואות, המשך

- פתרון המשוואה $Ux = y$ נעשה על ידי הצבה לאחור, שימוש בערך x_n שחושב כדי לפתור את x_{n-1} וכן הלאה עד שמוצאים את x_1.

$$\boldsymbol{Ux = y} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{nn} \cdot x_n = y_n \\ u_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{n-1,n} \cdot x_n = y_{n-1} \\ \vdots \\ u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + \cdots + u_{1n} \cdot x_n = y_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ x_{n-1} = \dfrac{y_{n-1} - u_{n-1,n} \cdot x_n}{u_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_1 = \dfrac{y_1 - u_{12} \cdot x_2 - \cdots - u_{1n} \cdot x_n}{u_{11}} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right), \qquad where\ i = n-1, \dots, 1$$

דוגמא

נתונה המערכת

$$Ax=b: \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 5 & 3.33 & 2.5 \\ 33.3 & 25 & 20 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.688 \\ 10.8 \\ 78.3 \end{pmatrix}}_{b}$$

מצאנו קודם (שקפים 8-9) פירוק LU של A

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 33.3 & 10 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0 & 0.83 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}}_{U}$$

מצאו פתרון למערכת $Ax = b$ באמצעות פירוק A=LU לעיל.

פתרון דוגמא , המשך

- ראשית נפתור את המערכת $Ly = b$:

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 33.3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.688 \\ 10.8 \\ 78.3 \end{pmatrix}$$

ע"י הצבה קדימה (מהמשוואה הראשונה לשלישית) נקבל:

$$y_1 = 0.688$$

$$y_2 = 10.8 - 5 \cdot 0.688 = 7.36$$

$$y_3 = 78.3 - 33.3 \cdot 0.688 - 10 \cdot 7.36 = -18.2$$

פתרון דוגמא , המשך

- כעת נפתור את המערכת $Ux = y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.333 \\ 0 & 0.83 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.688 \\ 7.36 \\ -18.2 \end{pmatrix}.$$

ע"י הצבה לאחור נקבל:

$$x_3 = \frac{-18.2}{0.6} = -30.3$$

$$x_2 = \frac{7.36 - 0.83 \cdot \ -30.3}{0.83} = 39.2$$

$$x_1 = 0.688 - 0.333 \cdot \ -30.3 \ - 0.5 \cdot \ 39.2 \ = -8.81$$

פירוק LU מול גאוס

- כאשר אנו משתמשים בתהליך גאוס לפתרון מערכת $Ax = b$ אנחנו מדרגים את המטריצה המורחבת $(A|b)$ ומקבלים מערכת משוואות חדשה מהצורה $Ux = d$.

$$\boldsymbol{Ux = d} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

- נצטרך לבצע את תהליך גאוס כל פעם מחדש עבור כל b חדש שנקבל.

- תהליך הדירוג לוקח זמן במיוחד עבור ערכי n גדולים. (סיבוכיות $O(n^3)$)

- את פירוק LU נבצע <u>פעם אחת</u> עבור מטריצה A, וכעת נוכל לפתור במהירות עבור כל b.

נספח:
תזכורת מאלגברה-
פעולות ומטריצות
אלמנטריות

מטריצות אלמנטריות

המטריצה האלמנטרית המתאימה **לפעולה אלמנטרית** f מתקבלת ע"י ביצוע הפעולה על מטריצת היחידה I. נסמן אותה ע"י $\boxed{f(I)}$.

דוגמאות

$f_1 : R_1 \leftrightarrow R_3$

$$f_1\ I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_2 : R_2 \to 4 \cdot R_2$

$$f_2\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_3 : R_3 \to R_3 - 7R_2$

$$f_3\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצות אלמנטריות, המשך

משפט:

תהי A מסדר n , אזי מתקיים $\boxed{f(A)=f(I)\cdot A}$

כאשר:

$\boxed{f(I)}$ המטריצה האלמנטרית המתקבלת מביצוע הפעולה f על מטריצת היחידה I

$\boxed{f(A)}$ המטריצה השקולה ל-A המתקבלת ע"י ביצוע הפעולה f על A.

מטריצות אלמנטריות, המשך

דוגמא למשפט:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&1\\5&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[f:R_2\to R_2-2R_1]{}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&-7\\5&5&5\end{pmatrix}=f(A)$$

המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה האלמנטרית שבצענו $f:R_2\to R_2-2R_1$

היא

$$J=f(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן לפי המשפט נקבל

$$f(I)\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&1\\5&5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&-7\\5&5&5\end{pmatrix}=f(A)$$

המטריצות האלמנטריות בשיטת גאוס

בהנחה שהמטריצה A תקינה לאורך כל תהליך האלימינציה של גאוס (כלומר, איברי האלכסון לא מתאפסים) אנו משתמשים למעשה בסוג אחד בלבד של מטריצות אלמנטריות, אלה המייצגות את הוספת כפולה של שורת הציר לשורה הנוכחית.

דוגמא:

עבור איפוס האיבר $a_{4,2}$ אנו כופלים את A משמאל במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{42}}{a_{22}} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

זה שקול לפעולה $R_4 \to R_4 - l_{42} \cdot R_2$ על A כאשר $l_{42} = \dfrac{a_{42}}{a_{22}}$

המטריצות האלמנטריות בשיטת גאוס,המשך

ובאופן כללי,

כל איפוס של איבר $a_{i,j}$ מתבצע ע"י הכפלת A משמאל במטריצה האלמנטרית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -\frac{a_{i,j}}{a_{j,j}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נעיר כי פעולה זו מקבילה לפעולה האלמנטרית בשורה: $R_i \to R_i - l_{i,j} \cdot R_j$ כאשר

$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ הגורם הכפלי המתאים.

פעולות ומטריצות אלמנטריות הפוכות

<u>הפעולות האלמנטריות הן הפיכות</u>. כלומר, לכל אחת מהפעולות האלמנטריות יש פעולה הפוכה (שמחזירה אותנו למצב הקודם) שגם היא פעולה אלמנטרית.

בפרט הפעולה האלמנטרית (בה עושים בשיטת גאוס) $R_i \to R_i - c \cdot R_j$

הפוכה לפעולה $R_i \to R_i + c \cdot R_J$, $i \neq j$

<u>המטריצות האלמנטריות הן הפיכות:</u>

בפרט מתקיים אם $f(I)$ מטריצה אלמנטרית המתאימה לפעולה f אז המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה האלמנטרית ההפוכה f^{-1} היא: $(f(I))^{-1}$

פעולות ומטריצות אלמנטריות הפוכות, המשך

למעשה מתקיים

$$J^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0&0&0\\0&1&&0&0&0&0\\\vdots&&\ddots&&&&\vdots\\0&0&&1&0&0&0\\0&0&&-\dfrac{a_{i,j}}{a_{j,j}}&1&0&0\\0&0&&0&0&1&0\\0&0&\dots&0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0&0&0\\0&1&&0&0&0&0\\\vdots&&\ddots&&&&\vdots\\0&0&&1&0&0&0\\0&0&&\dfrac{a_{i,j}}{a_{j,j}}&1&0&0\\0&0&&0&0&1&0\\0&0&\dots&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

שורה i

עמודה j