אנליזה נומרית : מצגת מלווה #6

שיטות נומריות לפתרון משוואות לא לינאריות

הקדמה ושיטת החצייה

<u>נושאי המצגת:</u>

1. הקדמה.
2. שיטת החצייה.

פתרון משוואות לא ליניאריות

נתונה המשוואה $\boxed{(1) \quad f(x)=0}$

- אנו נחפש שורשים (פתרונות) ממשיים למשוואה (1).
- במקרה זה $\boxed{r}$ הוא ה**שורש** של $f(x)$ (**הפתרון** של המשוואה $f(x)=0$)

  אם $\boxed{f(r)=0}$.
- היבט גרפי: r היא נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה - x.

פתרון משוואות לא ליניאריות, המשך

דוגמאות למשוואות לא ליניאריות:

- **משוואות אלגבריות** : $P_n(x) = 0 \qquad (2)$

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ פולינום מסדר n.

לא ידועה נוסחת למציאת שורשים של פולינום ממעלה ≤ 5 .

- **משוואות טרנסצנדנטיות:** למשל,

$$x \cdot e^{-x} = 0.25 \qquad (3a)$$

או

$$\ln x = x \qquad (3b)$$

אנליזה מתמטית לא נותנת שום אינפורמציה לגבי מספר השורשים של (3) ומיקומם. כדי לקבל הערכה על מיקום ומספר השורשים אלה נשתמש תחילה בתיאור גרפי של המשוואה. (או במשפט ערך הביניים/משפט לגרנג' מחדוא...)

דוגמא לתיאור גרפי של משוואה טרנסצנדנטית

נתייחס למשוואה $\boxed{xe^{-x} = 0.25}$ ונתאר אותה גרפית באמצעות "Matlab"
באופן הבא:

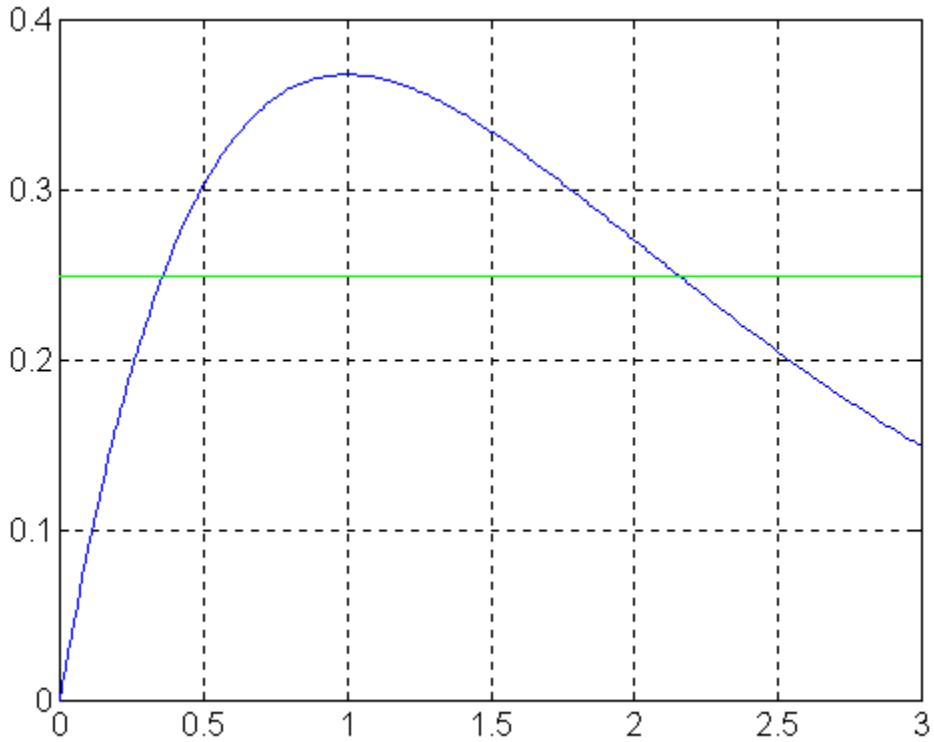
```
>> x=0 : 0.01 :3 ;
>> y=x .* exp(-x) ;
>> z= 0.25 .* ones(length (x)) ;
>> plot (x,y,x,z), grid
```

length(x) - הנו אורך הווקטור x.

ones(length(x)) – הנו וקטור באורך x שכל אבריו =1 .

0.25 .* ones(length (x)) – הנו וקטור באורך x שכל אבריו = 0.25.

המשך דוגמא



- ניתן לראות לפי הגרף כי למשוואה יש שורש אחד בקטע [0,0.5] ושורש נוסף בקטע [2,2.5] .
- מניתוח קיצון ומונוטוניות של $f(x) = xe^{-x}$ נוכל להסיק כי למשוואה $xe^{-x} = 0.25$ אין עוד פתרונות ממשיים.

תזכורת: מהי שיטה איטרטיבית?

- בעיקרה שיטה איטרטיבית היא תהליך של שימוש חוזר ונשנה בנוסחה מתמטית לצורך קבלת תיקון לפתרון מקורב (כלומר לשפר את מידת הקירוב).

- בחישוב איטרטיבי אנו מתחילים תמיד מקירוב התחלתי כלשהו x_0 , ובונים סדרת קרובים $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$
אנו מעוניינים לבנות סדרת קירובים אשר תתכנס לפתרון האמיתי של הבעיה.

- במהלך החישובים משתמשים בקרובים הקודמים (לרוב בקירוב האחרון) וממשיכים באיטרציות עד להשגת הקירוב בדיוק הרצוי, שאותו הכתבנו מראש.

- אנו יכולים להסתמך על ידיעותינו בנושא סדרות וגבולות כדי לקבוע אם הסדרה שנוצרה מתכנסת אם לאו.

גישה נומרית לפתרון משוואות לא ליניאריות

הרעיון המרכזי בגישה הנומרית לפתרון משוואות לא ליניאריות:

ל"ייצר" באמצעות נוסחה איטרטיבית ובחירה של x_0 התחלתי , סדרת מספרים (קירובים) $\boxed{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ שתתכנס לפתרון המדויק של המשוואה $f(x) = 0$

כלומר $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = r}$. (כאשר מתקיים $\boxed{f(r)=0}$)

נלמד בקורס ארבע שיטות:

1. שיטת החצייה
2. שיטת נקודת שבת
3. שיטת ניוטון רפסון
4. שיטת המיתר

גישה נומרית לפתרון משוואות לא לינאריות: הערות

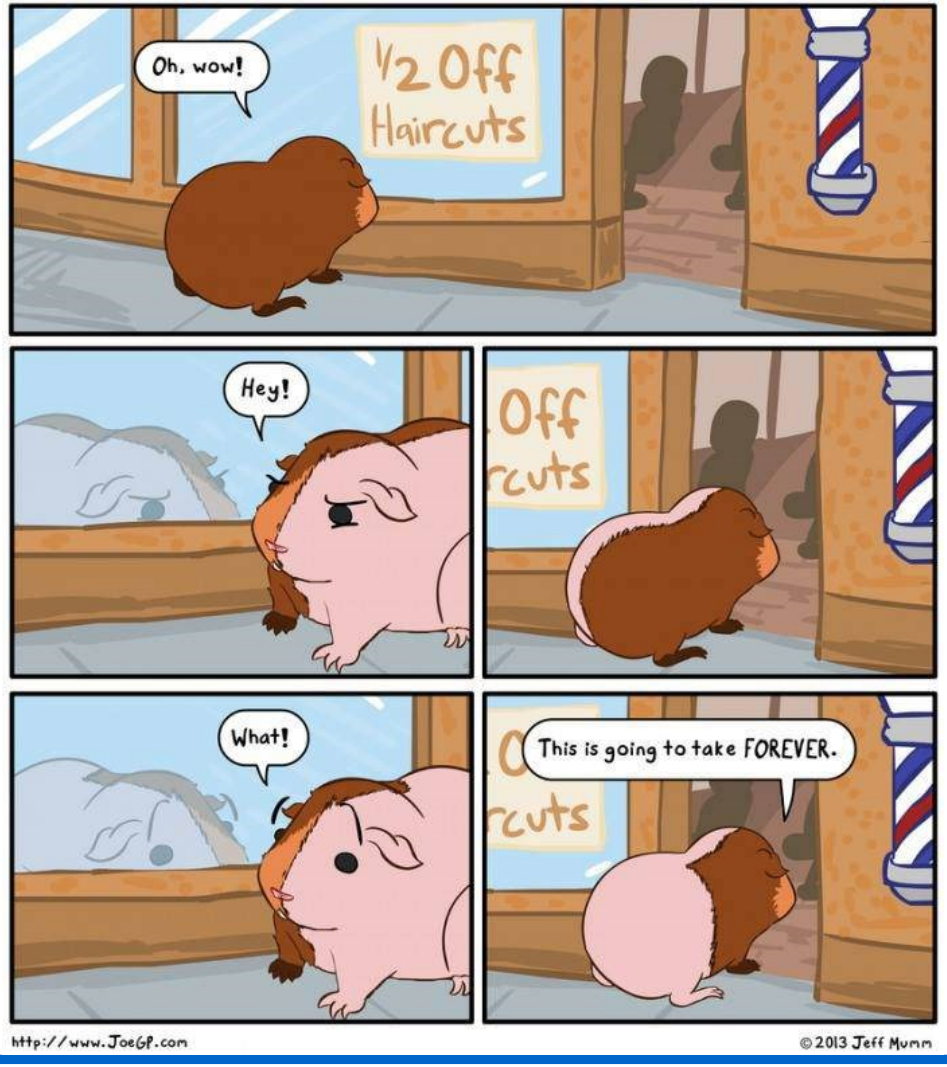
1. כל שיטה נומרית לפתרון משוואה לא לינארית מוגדרת ע"י נוסחה איטרטיבית שונה.
2. אפשרויות לבחירת x_0 התחלתי:
   - ❑ גישה תיאורטית: על סמך ניתוח מתמטי אנליטי
   - ❑ גישה נומרית: על סמך ניסוי וטעייה (trial & error)
3. סדרת הקירובים המתקבלת (על סמך הנוסחה האיטרטיבית ובחירת x_0 התחלתי) עשויה להתכנס או להתבדר.
4. אנו מעוניינים בשיטות שעבורם יש התכנסות תיאורטית לפתרון המשוואה אך למעשה עוצרים את התהליך אחרי מספר סופי של צעדים כאשר מתקבלת רמת הדיוק המבוקשת ε.
5. קריטריון ההתכנסות ε נקבע ע"י מגדיר הבעיה או שנקבע ע"י פותר הבעיה באמצעות ניתוח רגישות הפתרון ל ε כפרמטר נומרי.

קריטריונים לעצירת התהליך עבור רמת דיוק ε

Theoretical	Practical
$f(r)=0$	$\lvert f(x_n)\rvert < \varepsilon$
$x_n \to r$	$\begin{cases} \lvert x_n - x_{n-1}\rvert < \varepsilon & \text{שגיאה מוחלטת} \\ \dfrac{\lvert x_n - x_{n-1}\rvert}{\lvert x_n\rvert} < \varepsilon & \text{שגיאה יחסית} \end{cases}$

שיטת החצייה

Bisection Method



תזכורת מחדו"א – משפט ערך הביניים

משפט ערך הביניים

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ כך ש- $f(a)\cdot f(b)<0$,

אזי קיימת **נקודת ביניים** $a<r<b$ כך ש- $\boxed{f(r)=0}$

שימוש

משפט זה מאפשר לנו למצוא קטע $[a,b]$ בו למשוואה $f(x)=0$ יש לפחות פתרון אחד.

שיטת החצייה Bisection Method

רעיון השיטה:

בהינתן קטע $[a,b]$ בו קיים שורש יחיד r של $f(x)$ ומתקיים בו התנאי $f(a)\cdot f(b)<0$:

❑ נמצא את נקודת האמצע (**mid point**) $\boxed{m=\frac{a+b}{2}}$ ונחשב את $f(m)$

- אם $\boxed{f(m)=0}$, אזי m הוא השורש המבוקש וסיימנו.
- אחרת $\boxed{f(m)\neq 0}$ ואז ייתכנו שני מקרים:

א) $f(m)\cdot f(a)<0$ ואז השורש נמצא בהכרח בקטע $[a,m]$.

או

ב) $f(m)\cdot f(b)<0$ ואז השורש נמצא בהכרח בקטע $[m,b]$.

שיטת החצייה, המשך

רעיון השיטה, המשך:

- באופן דומה ממשיכים בתהליך החצייה של תת הקטע בו נמצא השורש $[a,m]$ או $[m,b]$ לשניים ואיתור חצי הקטע בו נמצא השורש.

<u>בכל שלב אנו מצביעים על קטע חדש של חיפוש שאורכו מחצית אורך קטע החיפוש הקודם.</u>

- בדרך זו אנו "מייצרים" סדרת קירובים $\boxed{\{m_n\}_{n\geq 0}}$ המתכנסת לפתרון המדויק של המשוואה, כלומר $\boxed{root = r = \lim_{n\to\infty}(m_n)}$

שיטת החצייה, המשך

רעיון השיטה, המשך:

<u>באופן מעשי</u> אין באפשרותנו לבצע את התהליך האיטרטיבי אינסוף פעמים ולכן אנו עוצרים אחרי מספר סופי של צעדים ומקבלים **<u>קירוב</u>** **<u>לשורש r</u>**, כלומר:

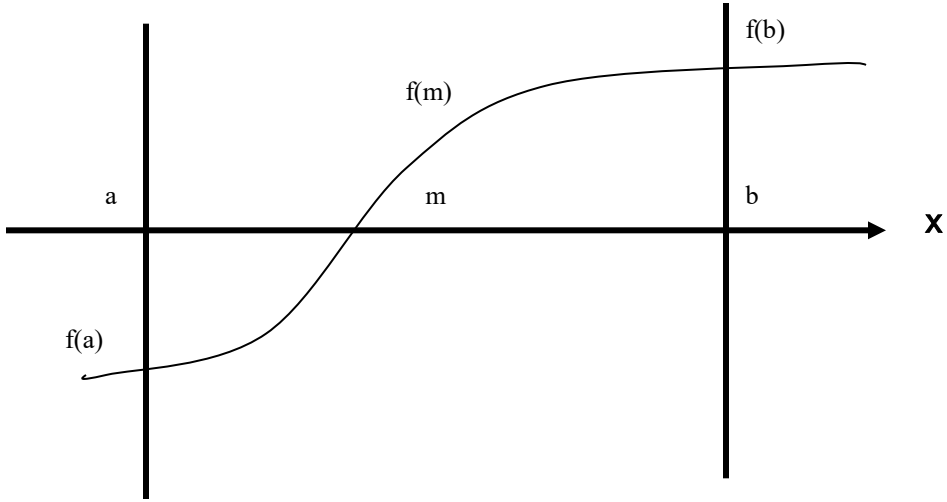
$$\boxed{r \cong m_n = \frac{a_n + b_n}{2}}$$

<u>מתי עוצרים את התהליך?</u>

נחזור על התהליך עד שנגיע לקטע קטן דיו, (בד"כ לפי מידת הדיוק שהגדרנו) שבו הקירוב לשורש חסום ברמת הדיוק הנדרשת $\boxed{\varepsilon}$,

כלומר כאשר $\boxed{|m_n - m_{n-1}| < \varepsilon}$ ו/או $\boxed{|f(m_n)| < \varepsilon}$. (אפשר לשלב את שני תנאי עצירה ולעצור כאשר הראשון מתקיים)

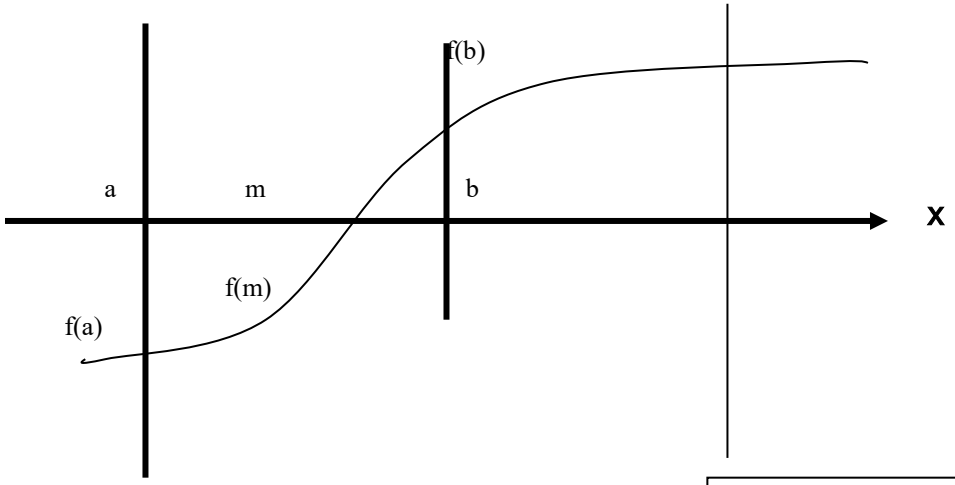
רעיון השיטה – היבט גיאומטרי



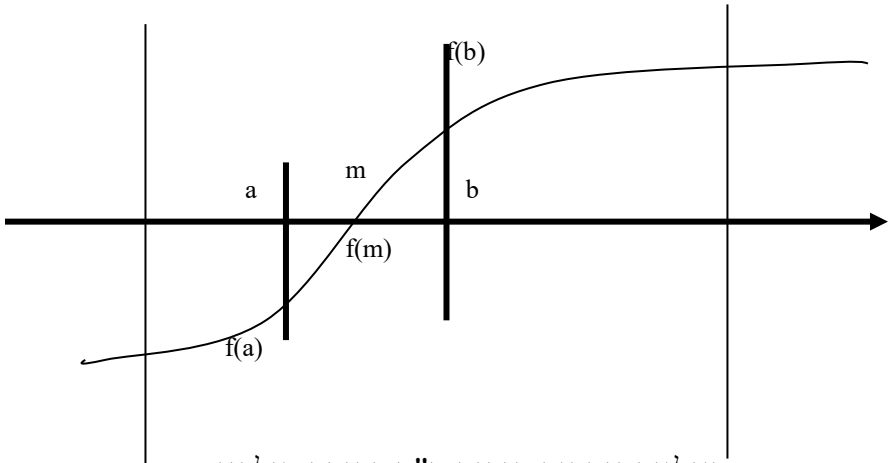
בהתאם לסימן של f(m) (בהשוואה עם הסימנים של f(a) ו- f(b))
ממשיכים לטפל בתת - הקטע הימני או השמאלי :

היבט גיאומטרי, המשך

$$b = m, f(b) = f(m)$$



$$a = m, f(a) = f(m)$$



שיטת החצייה-דוגמא

לפונקציה $\boxed{f(x)=(x+1)^2 e^{(x^2-2)}-1}$ יש שורש בקטע $[0,1]$,

מאחר ו- $f(0)<0$ ו- $f(1)>0$.

נקודת האמצע של הקטע הנה $m=0.5$ כאשר $f(0.5)=-0.609009$.
מאחר ו- $f(0.5)\cdot f(1)<0$, נצמצם את חיפוש השורש לקטע $[0.5,1]$.

צעד זה וצעדים נוספים בשיטת החצייה יניבו את התוצאות המפורטות בטבלה הבאה:

שיטת החצייה, המשך דוגמא

n	a	b	m	f (m)
0	0	1	0.5	-0.609009
1	0.5	1	0.75	-0.272592
2	0.75	1	0.875	0.023105
3	0.75	0.875	0.8125	-0.139662
4	0.8125	0.875	0.84375	-0.062448
5	0.84375	0.875	0.859375	-0.020775
6	0.859375	0.875	0.867188	0.000883
7	0.859375	0.867188	0.863282	-0.010015
8	0.863282	0.867188	0.865235	-0.004584
9	0.865235	0.867188	0.866212	-0.001854
10	0.866212	0.867188	0.866700	-0.000487
11	0.866700	0.867188	0.866944	0.000198
12	0.866700	0.866944	0.866822	-0.000145
13	0.866822	0.866944	0.866883	0.000027
14	0.866822	0.866883	0.866853	-0.000058
15	0.866853	0.866883	0.866868	-0.000016
16	0.866868	0.866883	0.866876	0.000007

שיטת החצייה, המשך דוגמא

קטע החיפוש הבא באיטרציה ה-18 יהיה $\left[\overbrace{0.866868}^{a_{17}}, \overbrace{0.866876}^{b_{17}}\right]$

מכאן ניתן להסיק כי השורש המדויק r של הפונקציה בקטע $[0,1]$

חסום ע"י $\underbrace{0.866872}_{\frac{a_{17}+b_{17}}{2}} \pm \underbrace{0.000004}_{\frac{b_{17}-a_{17}}{2}}$

נקודת אמצע הקטע באיטרציה ה- 18

אורך מחצית הקטע באיטרציה ה- 18

לפונקציה הנתונה יש שורש נוסף בקטע $[-2,-1]$. נסו למצוא לו הערכה באופן דומה.

BISECTION ALGORITHM

```
Function root=Bisect (f, a, b,  eps1,eps2, maxiter, flag, niter)
        1. Set fa=f(a); fb=f(b);
        2. flag=0;
        3. If sign(fa) = sign (fb) then stop
        4. For iter=1 to maxiter
        5.              m=(a+b)/2;
        6.              fm=f(m);
        7.              If ( |fm|<eps2  or (b-a) < eps1 )
        8.                    root=(a+b)*0.5
        9.                    flag=1
        10.                   niter=iter;
        11.                   break;
        12.             end
```

BISECTION ALGORITHM

```
13.         If sign (fm) <> sign (fa) then
14.                 b=m;
15.                 fb=fm;
16.         else
17.                 a=m;
18.                 fa=fm;
19.          end
26. End
```

בסוף התהליך הקירוב לשורש הוא הערך root.

- if flag=1 the procedure succeeded. The root had been found, and the number of iteration is "niter".
- If flag=0 the desired accuracy is not achieved.

הערות לאלגוריתם שיטת החצייה

1) האלגוריתם המעשי לשיטת החצייה , כפי שהוצג לעיל, מציב תנאי נוסף לעצירה שהוא מספר מקסימלי של איטרציות לביצוע. תנאי זה מונע מצב שבו המחשב יכנס לתהליך ארוך מדי או אפילו ללולאה אינסופית.
לתהליך ארוך מדי ניתן להיכנס אם רמת הדיוק הנדרשת גבוהה , כלומר $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ הנדרשים קטנים מדי ושגיאות עיגול לא מאפשרות לקבל את הפתרון המקורב ברמת הדיוק הנ"ל.
מצב של לולאה אינסופית אפשרי כאשר סדרת הקירובים מתבדרת .
(בשל אי רציפות בקטע ו/או כתיבה שגויה של קטע הקוד).

2) אפשרויות לאי הצלחה של האלגוריתם (flag =0) :

* לא הגענו לרמת הדיוק הדרושה $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.
* a_0 ו- b_0 בעלי אותו סימן. (זה קורה אם בקטע המקורי יש מספר זוגי של שורשים או שורש מריבוי זוגי)

יתרונות וחסרונות של שיטת החצייה

חסרונות של שיטת החצייה

- ההתכנסות איטית (כיוון ש- $\boxed{|m_n - r| \le 0.5\,|m_{n-1} - r|}$ זו נקראת **שיטה מסדר ראשון**).

(הסבר : מתקיים $\boxed{|e_n| \le 0.5|e_{n-1}|}$ ולכן **ההתכנסות לינארית**)

- אם בקטע $[a,b]$ יש מספר זוגי של שורשים או שורש אחד מריבוי זוגי האלגוריתם ייכשל כי במצב זה אין חילופי סימן.

יתרונות וחסרונות , המשך

יתרונות של שיטת החצייה

- פשטות. (שיטה קלה לתכנות)
- אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ויש לה **שורש פשוט** (**שורש מריבוי 1**) בקטע ההתכנסות אליו מובטחת.

מסקנה

ניתן להשתמש בשיטת החצייה על מנת למצוא קירוב גס לשורש ולאחר מכן לנצל שיטה יותר יעילה.

הערכה למספר האיטרציות בשיטת החצייה

נניח שבצענו n איטרציות של שיטת החצייה וקבלנו פתרון מקורב m_n :

$$
\begin{array}{lll}
a_0 & b_0 & \rightarrow m_0 \\
a_1 & b_1 & \rightarrow m_1 \\
a_2 & b_2 & \rightarrow m_2 \\
\vdots & & \\
a_{n-1} & b_{n-1} & \rightarrow m_{n-1} \\
a_n & b_n &
\end{array}
$$

$$\boxed{root \approx \frac{a_n + b_n}{2} = m_n}$$

מספר האיטרציות בשיטת החצייה , המשך

- כזכור, בכל שלב אנו מצביעים על קטע חדש של חיפוש שאורכו מחצית אורך קטע החיפוש הקודם. כלומר מתקיים: $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$
- בפרט, $|r - m_n| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ אשר גורר:

$$|r - m_n| \le \frac{1}{2}\cdot(b_n - a_n) = \frac{1}{2^2}\cdot(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^3}\cdot(b_{n-2} - a_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0)$$

- לאחר $n+1$ איטרציות מקבלים אם כן:

$$\boxed{|r - m_n| \le \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}}$$

(למעשה, בכל שלב אנו מחלקים את הקטע ל-2 ולכן גודל אינטרוול החיפוש לאחר n+1 איטרציות יהיה $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$)

מספר האיטרציות בשיטת החצייה , המשך

לכן, אם ברצוננו להגיע לדיוק ε יש לדרוש

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$2^{n+1} > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$\downarrow$$

$$(n+1)\cdot \log 2 > \log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{n > -1 + \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2}}$$

<u>הערה :</u> הפונקציה הלוגריתמית מחושבת בבסיס 10. ניתן גם לחשב בבסיס e ואז לרשום ln בכל מקום.

מספר האיטרציות בשיטת החצייה , המשך

דוגמא

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$[a,b] = [1,2]$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$\Downarrow$$

$$n > -1 + \frac{\log(2-1) - \log 0.01}{\log 2} = -1 + \frac{2}{0.301} = 5.6$$

$$\Downarrow$$

$$n \geq 6$$

הערה:

שימו לב כי רמת הדיוק איננה תלויה כלל בפונקציה (ובכך טמונה חסרונה)