אנליזה נומרית: מצגת מלווה #5

שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת משוואות

חלק 1:

1. הקדמה: מודל כללי של שיטה איטרטיבית לפתרון מערכת משוואות ליניאריות
2. שיטת יעקובי
3. שיטת גאוס-זיידל

מהי שיטה איטרטיבית?

- בעיקרה שיטה איטרטיבית היא תהליך של שימוש חוזר ונשנה בנוסחה מתמטית לצורך קבלת תיקון לפתרון מקורב (כלומר לשפר את מידת הקירוב).

- בחישוב איטרטיבי אנו מתחילים תמיד מקירוב התחלתי כלשהו x_0, ובונים סדרת קירובים $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

- מעוניינים לבנות סדרת קירובים כזו שעבורה עם כל איטרציה ואיטרציה משפרים את הקירוב. כלומר אנו מעוניינים שסדרת הקירובים $\{x_k\}_{k\geq 0}$ תתכנס לפתרון האמיתי של הבעיה.

- במהלך החישובים משתמשים בקירובים הקודמים (לרוב בקירוב האחרון) וממשיכים באיטרציות עד להשגת הקירוב בדיוק הרצוי, שאותו הכתבנו מראש.

- ניתן להסתמך על ידיעותינו בנושא סדרות וגבולות כדי לקבוע אם הסדרה שנוצרה מתכנסת אם לאו.

שיטות איטרטיביות– הרעיון המרכזי

נתונה מערכת משוואות $(1) \quad Ax = b$

שלב ראשון: נעביר את המערכת למערכת שקולה מהצורה $(2) \quad x = Bx + c$

שלב שני: באמצעות הייצוג (2) נגדיר תהליך איטרטיבי:

$$(3) \quad x^{(m+1)} = B \cdot x^{(m)} + c, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

שלב שלישי: עבור בחירה של וקטור התחלתי $x^{(0)} = (x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$

הנוסחה האיטרטיבית (3) מאפשרת לחשב סדרת וקטורים $\left\{x^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$

כאשר בכל שלב m הווקטור המקורב $x^{(m)}$ מחושב על סמך תוצאות הווקטור המקורב בשלב קודם שהוא השלב ה $m-1$:

$$\begin{cases} x^{(1)} = Bx^{(0)} + c \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} + c \\ \quad \vdots \\ x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c \\ \vdots \end{cases}$$

שיטות איטרטיביות –התכנסות לפתרון

<u>כזכור:</u> בבסיס המודל שהוצג אנו עוברים ממערכת נתונה $Ax = b$ למערכת שקולה $x = Bx + c$ אשר מאפשרת הגדרת תהליך איטרטיבי

$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c, \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

באמצעות בחירת וקטור אתחול ראשוני $x^{(0)}$ מקבלים סדרת קירובים $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$

שאלות למחשבה ודיון עתידי:

- ❑ האם סדרת הקירובים $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ מתכנסת?
- ❑ אם כן, האם התכנסות היא לפתרון המדויק של המערכת?
- ❑ אם כן, במה תלויה ההתכנסות? בפרט:
  - כיצד הגדרת המטריצה B והווקטור c במעבר משפיעה על ההתכנסות?
  - כיצד בחירת וקטור האתחול $x^{(0)}$ משפיעה על ההתכנסות?

בפרקטיקה, גם אם יש התכנסות לפתרון המדויק של הממ"ל אנו לא יכולים לחשב סדרה אינסופית אלא מחשבים את אברי הסדרה על לקבלת רמת הדיוק הנדרשת

נורמה 2 ונורמה ∞ במרחב $V = \mathbb{R}^n$

הגדרות: יהי $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$ כאשר $i = 1, 2, \cdots, n$, $v_i \in \mathbb{R}$

1) **נורמה אינסוף:**

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |v_i|$$

2) **נורמה 2 (נורמה אוקלידית):**

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2}$$

הנורמה המושרית ב- $\mathbb{R}^n$ לפי מ"פ אולידית

דוגמא: עבור $v = (2,1,-3)^t$ מתקיים

$$\|v\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|v\|_\infty = \max\{|2|, |1|, |-3|\} = 3$$

שיטות איטרטיביות –מתי עוצרים?

מתי עוצרים? שגיאה מוחלטת/יחסית

עוצרים את התהליך האיטרטיבי כאשר הגענו למידת הדיוק המוגדרת.

כלומר, לכל מידת דיוק מבוקשת (או אפשרית) ε נעצור כאשר מתקיים:

$$\boxed{\left\| x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\| < \varepsilon}$$

אם נתייחס לנורמה ∞ (קל יותר לחשב...) הרי שתנאי העצירה לפי שגיאה מוחלטת הוא:

$$\boxed{\left\| x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)} \right| < \varepsilon}$$

תנאי עצירה לפי שגיאה יחסית:

$$\boxed{\frac{\left\| x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\|_{\infty}}{\left\| x^{(m)} \right\|_{\infty}} < \varepsilon}$$

שיטות איטרטיביות: הדגמת הרעיון

נתייחס למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

הפתרון המדויק של מערכת זו הנו הווקטור $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

הדגמת הרעיון, המשך

הצגה שקולה של המערכת המתקבלת ע"י חילוץ המשתנה x_i במשוואה ה $i-$ ית הנה:

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1 = -0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.1x_3 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 1.2 \end{cases}$$

או בלשון מטריציונית שקולה:

$$\underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} + \underset{c}{\begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}}$$

הדגמת הרעיון: שיטת יעקובי

ע"י הוספת אינדכס עליון מתאים במערכת המשוואות (*) תתקבלנה הנוסחאות האיטרטיביות הבאות , המתאימות לשיטת יעקובי:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1^{(m)} &= -0.1x_2^{(m-1)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2 \\ x_2^{(m)} &= -0.1x_1^{(m-1)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2 \\ x_3^{(m)} &= -0.1x_1^{(m-1)} - 0.1x_2^{(m-1)} + 1.2 \end{aligned}}$$

הדגמת הרעיון: שיטת יעקובי, המשך

נבחר וקטור התחלתי שרירותי $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = (0,0,0)$

נחשב מספר איטרציות בשיטת יעקובי ונקבל:

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$\left\lVert x^{(m+1)} - x^{(m)} \right\rVert_\infty$
0 תנאי התחלה	0	0	0	
1	1.2	1.2	1.2	1.2
2	0.96	0.96	0.96	0.24
3	1.008	1.008	1.008	0.048
4	0.9984	0.9984	0.9984	0.0096
5	1.00032	1.00032	1.00032	0.00192
6	0.999936	0.999936	0.999936	0.000384

אם נתבונן בסדרת הערכים האיטרטיביים המקורבים הרי שניתן
להסיק כי התהליך מתכנס די מהר לפתרון המדויק $x = (1,1,1)$.

שיטת גאוס-זיידל-הקדמה

אם נעקוב אחר התהליך האיטרטיבי של שיטת יעקובי, נוכל להבחין בכך ש-

- ❑ חישוב $x_2^{(m)}$ נעשה בעזרת $x_3^{(m-1)}$, $x_1^{(m-1)}$ למרות ש- $x_1^{(m)}$ כבר עומד לרשותנו מהחישוב בצעד הקודם.
- ❑ כמו כן חישוב $x_3^{(m)}$ נעשה בעזרת $x_2^{(m-1)}$, $x_1^{(m-1)}$ למרות ש- $x_2^{(m)}$, $x_1^{(m)}$ כבר חושבו בשלב זה.
- ❑ בדרך כלל הערכים החדשים $x_k^{(m)}$ הם קירובים טובים יותר מהערכים הישנים $x_k^{(m-1)}$.
- ❑ לכן אם נשתמש תוך כדי השלב האיטרטיבי (ולא רק בשלב הבא) בתוצאות האפשריות של האיטרציה הנוכחית, נצפה שקצב ההתכנסות היה מהיר יותר.

שיטה זו, לבניית הנוסחאות האיטרטיביות, נקראת **שיטת גאוס זיידל** שבה בניגוד לשיטת יעקובי, משתמשים באינפורמציה המעודכנת ביותר העומדת לרשותנו.

הדגמת הרעיון: שיטת גאוס- זיידל

אם ניישם את הרעיון הנ"ל ונשתמש כל פעם בתוצאות האיטרציה האחרונה, במערכת המשוואות (*) תתקבלנה
הנוסחאות האיטרטיביות הבאות , המתאימות לשיטת גאוס זיידל:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_1^{(m)} &= -0.1x_2^{(m-1)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2\\
x_2^{(m)} &= -0.1x_1^{(m)} - 0.1x_3^{(m-1)} + 1.2\\
x_3^{(m)} &= -0.1x_1^{(m)} - 0.1x_2^{(m)} + 1.2
\end{aligned}
}
$$

הדגמת הרעיון: שיטת גאוס- זיידל, המשך

נבחר את אותו וקטור התחלתי שרירותי שבחרנו קודם $x^{(0)} = (0,0,0)$
נחשב מספר איטרציות בשיטת גאוס-זיידל ונקבל:

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$\left\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\right\|_\infty$
תנאי התחלה 0	0	0	0	
1	1.2	1.08	0.972	1. 2
2	0.9948	1.00332	1.000188	0.2502
3	0.9996492	1.0000163	1.0000335	0.0048492
4	0.999995	0.9999971	1.0000008	0.0003008

אם נתבונן בסדרת הערכים האיטרטיביים המקורבים הרי שניתן
להסיק כי גם תהליך זה מתכנס לפתרון המדויק $x = (1,1,1)$
ועושה רושם שאף במספר איטרציות קטן יותר. (דורש הוכחה פורמלית)

לסיכום: שיטות איטרטיביות- הרעיון המרכזי

בבסיס השיטות האיטרטיביות

- עוברים ממערכת נתונה $Ax = b$ למערכת שקולה $x = Bx + c$

- המערכת השקולה מאפשרת לנו להגדיר תהליך איטרטיבי
$$x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + c, \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

- עבור וקטור אתחול ראשוני $x^{(0)}$ נקבל סדרת קירובים $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$

- בתנאים מסוימים, מובטחת התכנסות של סדרת הקירובים לפתרון המדויק של המערכת $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$

שיטות שונות המיישמות עיקרון זה (יעקובי/גאוס זיידל) נבדלות זו מזו בהגדרת מטריצת האיטרציה B ווקטור האיברים החופשיים c במערכת המשוואות השקולה $x = Bx + c$.

שיטת יעקובי ושיטת גאוס-זיידל:
נוסחאות איטרטיביות כלליות

המערכת $Ax = b$ (1) ניתנת להצגה השקולה הבאה:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Downarrow$$

$$a_{ii} x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j + b_i \,, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_i \underset{a_{ii} \neq 0}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j + b_i \right), \quad i = 1, 2, \cdots, n}$$

נוסחאות איטרטיביות, המשך

נוסחאות איטרטיביות- שיטת יעקובי:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), i = 1, 2, \ldots, n$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

נוסחאות איטרטיביות- שיטת גאוס-זיידל:

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right), i = 1, 2, \ldots, n$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

ייצוג מטריציוני של השיטות האיטרטיביות

בהינתן מערכת משוואות

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ייצוג מטריציוני של שיטת יעקובי, המשך

מטריצת המקדמים A ניתנת לפירוק הבא $\boxed{A = L + D + U}$

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{U}}$$

אברי A מתחת לאלכסון | **אברי האלכסון של A** | **אברי A מעל האלכסון**

ייצוג מטריציוני של שיטת יעקובי

מהפירוק $\boxed{A = L + D + U}$ נוכל להסיק כי:

$$Ax = b \Leftrightarrow \left(L + D + U\right)x = b$$

$$Dx = -\left(L + U\right)x + b$$

$$\boxed{x = \underbrace{-D^{-1}\left(L + U\right)x}_{Bx} + \underbrace{D^{-1}b}_{c}}$$

ייצוג מטריציוני של שיטת יעקובי, המשך

<u>התבנית האיטרטיבית המטריציונית המתאימה לשיטת יעקובי:</u>

$$x^{(m)} = -D^{-1}\left(L+U\right)x^{(m-1)} + D^{-1}b$$

המטריצה $B_J = -D^{-1}\left(L+U\right)$ נקראת **<u>מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי</u>**.

ייצוג מטריציוני של וקטור הערכים החופשיים במערכת השקולה הוא:

$$c_J = D^{-1} \cdot b$$

שיטת יעקובי- הצגה מטריציונית

באופן מפורש, בשיטת יעקובי מקבלים מערכת שקולה מהצורה

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{B_J} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}}_{c_J}$$

מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי: דוגמא

עבור המערכת

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת יעקובי היא:

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

וקטור האיברים החופשיים בשיטת יעקובי הוא:

$$c_J = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

ייצוג מטריציוני של שיטת גאוס-זיידל

עבור שיטת גאוס-זיידל, נוכל לקבל ע"י הפירוק $\boxed{A = L + D + U}$:

$$Ax = b \Leftrightarrow \left(L + D + U\right) x = b$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Dx = b - Ux - Lx}$$

התבנית האיטרטיבית המטריציונית המתאימה לשיטת גאוס-זיידל:

$$\boxed{Dx^{(m)} = b - Ux^{(m-1)} - Lx^{(m)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(L + D\right)x^{(m)} = b - Ux^{(m-1)}$$

ייצוג מטריציוני של שיטת גאוס-זיידל, המשך

הצגה שקולה לתבנית האיטרטיבית המטריציונית המתאימה לשיטת גאוס-זיידל:

$$\boxed{x^{(m)} = -\left(L+D\right)^{-1} U \cdot x^{(m-1)} + \left(L+D\right)^{-1} \cdot b}$$

המטריצה $\boxed{B_{GZ} = -\left(L+D\right)^{-1} U}$ נקראת **מטריצת האיטרציה של שיטת גאוס-זיידל**.

ייצוג מטריציוני של וקטור הערכים החופשיים במערכת השקולה הוא:

$$\boxed{c_{GZ} = \left(L+D\right)^{-1} \cdot b}$$

ייצוג מטריציוני של השיטות: דוגמא

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L}+\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

נחשב לפי הנוסחאות:

$$B_J=-D^{-1}\cdot(L+U)$$
$$B_{GZ}=-(L+D)^{-1}\cdot U$$

מטריצת האיטרציה של שיטת יעקובי: דוגמא

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת יעקובי היא:

$$B_J=-D^{-1}\left(L+U\right)=-\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{D}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L+U}$$

$$=-\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצת האיטרציה של שיטת G-Z: דוגמא

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת גאוס-זיידל היא:

$$B_{GZ}=-\left(L+D\right)^{-1}U=-\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{L+D}{}^{-1}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$=-\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.125 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.125 & 0.25 \end{pmatrix}$$

מציאת B_J ו- B_{GZ} באמצעות Matlab

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים A:

❑ הגדרת D: D=diag(diag(A))

diag(A) יוצר וקטור שמורכב מאברי האלכסון של A
diag(diag(A)) יוצר מטריצה אלכסונית שאיבר האלכסון שלהם הם אברי diag(A)

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
>> D=diag(diag(A))

D =

     2     0     0
     0     2     0
     0     0     2
```

מציאת B_J ו- B_{GZ} באמצעות Matlab

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים A:

- הגדרת L: L=tril(A)-D

tril(A) מטריצה הכוללת את אברי האלכסון של A ומה שמתחתיו

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
>> tril(A)

ans =

     2     0     0
    -1     2     0
     0    -1     2
```

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
>> D=diag(diag(A));
>> L=tril(A)-D

L =

     0     0     0
    -1     0     0
     0    -1     0
```

מציאת B_J ו- B_{GZ} באמצעות Matlab

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים A:

❑ הגדרת U: U=triu(A)-D

triu(A) מטריצה הכוללת את אברי האלכסון של A ומה שמעליו

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
>> triu(A)

ans =

     2    -1     0
     0     2    -1
     0     0     2
```

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
>> D=diag(diag(A));
>> U=triu(A)-D

U =

     0    -1     0
     0     0    -1
     0     0     0
```

מציאת B_J באמצעות Matlab

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים A:

- הגדרת Bj: Bj=-inv(D)*(L+U)

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
>> D=diag(diag(A));
>> L=tril(A)-D;
>> U=triu(A)-D;
>> BJ=-inv(D)*(L+U)

BJ =

         0    0.5000         0
    0.5000         0    0.5000
         0    0.5000         0
```

מציאת B_{GZ} באמצעות Matlab

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים A:

- הגדרת Bgz: Bgz=-inv(D+L)*U

```
>> A=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];
D=diag(diag(A));
L=tril(A)-D;
U=triu(A)-D;
BGZ=-inv(D+L)*U

BGZ =

         0    0.5000         0
         0    0.2500    0.5000
         0    0.1250    0.2500
```

שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת משוואות

<u>חלק 2</u>:

תנאים להתכנסות שיטה איטרטיבית לפתרון מערכת משוואות ליניאריות

מטריצה בעלת אלכסון שולט לחלוטין
Strictly Row Diagonal Dominant Matrix (SRDD)

הגדרה: **מטריצה** A נקראת **בעלת אלכסון שולט לחלוטין** SRDD

אם מתקיים

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1,2,..,n$$

למשל

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

מטריצה SRDD

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

מטריצה שאיננה SRDD

תנאי מספיק להתכנסות שיטת יעקובי ושיטת גאוס זיידל

<u>טענה</u> אם מטריצה A היא בעלת אלכסון שולט לחלוטין (SRDD) אז התהליך האיטרטיבי של שיטות יעקובי /שיטת גאוס -זיידל למערכת Ax=b יתכנס עבור כל בחירה של וקטור התחלתי $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^t$.

תנאי מספיק להתכנסות השיטות של יעקובי ושל גאוס זיידל, דוגמא

נתבונן במערכת:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

A

למטריצה יש אלכסון שולט לחלוטין, (10>1+1)

לכן השיטות יעקובי וגאוס -זיידל יתכנסו לכל וקטור התחלתי

מקרה כללי: התכנסות שיטות איטרטיביות

ראינו כי בבסיס השיטות האיטרטיביות, אנו עוברים ממערכת $Ax=b$ למערכת שקולה $x=Bx+c$ המאפשרת לנו להגדיר תהליך איטרטיבי $m=1,2,\ldots$ $x^{(m)}=Bx^{(m-1)}+c$.

הצגנו קודם את השאלה:
האם סדרת הווקטורים $m=1,2,\ldots$, $x^{(m)}$
מתכנסת לפתרון המדויק של המערכת $Ax=b$ ואם כן במה זה תלוי?

נראה כעת כי הגורם המשפיע על התכנסות השיטה האיטרטיבית לפתרון של המערכת הוא מיקום הערכים העצמיים של מטריצת האיטרציה B ביחס למעגל היחידה.

הגדרה: רדיוס ספקטרלי של מטריצה

נזכיר כי הע"ע של B הם שורשי הפולינום האופייני $P_B(\lambda)=|B-\lambda I|$.

לפי המשפט היסודי של האלגברה, למטריצה B מסדר n יש בדיוק n ע"ע מעל שדה המרוכבים $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

הרדיוס הספקטרלי של המטריצה B מסומן ב- $\boxed{\rho(B)}$ ומוגדר ע"י

$$\boxed{\rho(B)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$$

הרדיוס הספקטרלי $\rho(B)$ מגדיר למעשה את הרדיוס של המעגל הקנוני שבתוכו נמצאים כל הע"ע של המטריצה B.

רדיוס ספקטרלי : דוגמא

נחשב רדיוס ספקטרלי של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

נחשב ע"ע:

$$\Delta_A(\lambda)=\left|A-\lambda I\right|\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 2-\lambda & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda\cdot(2-\lambda)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\lambda_1=0,\lambda_{2/3}=2$$

$$\rightarrow\rho(A)=\max_{1\le i\le 3}\left|\lambda_i\right|=2$$

חישוב ערכים עצמיים ורדיוס ספקטרלי ב- matlab

```
>> A=[0 -2 2;0 2 -3;0 0 2];
>> azmi=eig(A)

azmi =

     0
     2
     2
```

```
>> A=[0 -2 2;0 2 -3;0 0 2];
>> ro=norm(eig(A),inf)

ro =

     2
```

משפט ההתכנסות של השיטות האיטרטיביות

נתונה המערכת $x=Bx+c$ ויהי $x^{(0)}$ וקטור התחלתי שרירותי.

אזי סדרת הקירובים $x^{(m)}$ המתקבלת ע"י השיטה האיטרטיבית

$$x^{(m)}=Bx^{(m-1)}+c \quad m=1,2,\dots$$

מתכנסת לפתרון המדויק x של המערכת **אם ורק אם** $\boxed{\rho(B)<1}$

(כלומר, כל הערכים העצמיים של B נמצאים בתוך מעגל היחידה)

למה עזר להוכחה: לכל מטריצה B מתקיים

$$\rho(B)<1 \quad \Leftrightarrow \quad B^m \xrightarrow[m\to\infty]{} (0)$$

הוכחת משפט ההתכנסות של השיטות האיטרטיביות

נתונה המערכת $x=Bx+c$ שהפתרון שלה הוא x וסדרת הקירובים $x^{(m)}$ המתקבלת ע"י השיטה האיטרטיבית $m=1,2,\ldots$ $x^{(m)}=Bx^{(m-1)}+c$

נגדיר את השגיאה בכל שלב איטרטיבי: $\boldsymbol{e}^{(m)}=x-x^{(m)}$

$$\underbrace{x-x^{(m)}}_{e^{(m)}}=\left(Bx+c\right)-\left(Bx^{(m-1)}+c\right)=B\underbrace{\left(x-x^{(m-1)}\right)}_{e^{(m-1)}}$$

כלומר קבלנו <u>קשר בין שגיאות עוקבות בתהליך האיטרטיבי</u>: $\boxed{e^{(m)}=B\cdot e^{(m-1)}}$

<u>ניתוח רקורסיבי של שגיאת הקירוב באיטרציה m:</u>

$$e^{(m)}=B\cdot e^{(m-1)}=B^2\cdot e^{(m-2)}=B^3\cdot e^{(m-3)}=\cdots=B^m\cdot e^{(0)}$$

כלומר קבלנו <u>קשר בין השגיאה בשלב m לבין השגיאה ההתחלתית</u> $\boxed{e^{(m)}=B^m\cdot e^{(0)}}$

מכאן: $\lim\limits_{m\to\infty}e^{(m)}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{m\to\infty}\left(B^m\cdot e^{(0)}\right)=0\Leftrightarrow\left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(B^m\right)\right)\cdot e^{(0)}=0$

$$\Leftrightarrow\lim_{m\to\infty}\left(B^m\right)=0\Leftrightarrow\rho\left(B\right)<1$$

טענת עזר

תנאי הכרחי ומספיק- דוגמא

נתונה מערכת $Ax=b$ עם מטריצת המקדמים

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

א. האם שיטת יעקובי איטרטיבית תתכנס במקרה זה?

ב. האם שיטת גאוס זיידל תתכנס במקרה זה?

שיטת יעקובי: תנאי הכרחי ומספיק- דוגמא

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ראינו כי מטריצת האיטרציה בשיטת יעקובי היא:

$$B_J=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים של B_J הם: $\lambda_1=0, \lambda_{2/3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

הרדיוס הספקטרלי הוא: $\rightarrow \rho\left(B_J\right)=\max_{1\le i\le 3}\left|\lambda_i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

מסקנה: שיטת יעקובי מתכנסת במקרה זה

שיטת גאוס-זיידל תנאי הכרחי ומספיק- דוגמא

עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

מטריצת האיטרציה בשיטת גאוס-זיידל היא:

$$B_{GZ}=\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.125 & 0.25 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים של B_{GZ} הם: $\lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_{2/3}=0$

הרדיוס הספקטרלי הוא: $\rightarrow \rho\left(B_{GZ}\right)=\max_{1\le i\le 3}\left|\lambda_i\right|=\frac{1}{2}<1$

מסקנה: שיטת גאוס זיידל מתכנסת במקרה זה

נורמה 2 ונורמה ∞ במרחב $V = \mathbb{R}^{n\times n}$

הגדרות: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1) **נורמה אינסוף:**

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$$

2) **נורמה 2 (נורמה אוקלידית):**

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^t A\right)}}$$

דוגמא: עבור $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ מתקיים

נורמה אינסוף

$$\|A\|_\infty = \max\left\{|-1|+|2|,|1|+|3|\right\} = \max\{3,4\} = 4$$

נורמה 2

$$A^T \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{A^T A}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{5}{2}\cdot\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A\cdot A^T\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

תכונות של נורמה מטריציונית

טענה: נורמה מטריציונית מקיימת את התכונות הבאות:

1) $\|A\| \geq 0; \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = [0]$

2) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

עובר בירושה מנורמה ווקטורית

4) $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$

5) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

מסקנה מניתוח רקורסיבי של שגיאת הקירוב

הוכחנו כי עבור יישום שיטה איטרטיבית $m=1,2,\ldots$ $x^{(m)}=Bx^{(m-1)}+c$

והגדרת שגיאת הקירוב בשלב m: $e^{(m)}=x-x^{(m)}$

- הקשר בין כל שתי שגיאות עוקבות הוא: $\boxed{e^{(m)}=B\cdot e^{(m-1)}}$
- הקשר בין השגיאה $e^{(m)}$ בשלב m לשגיאה $e^{(0)}$ בשלב ההתחלתי: $\boxed{e^{(m)}=B^m\cdot e^{(0)}}$

מכאן נסיק כי:

$$\left\|e^{(m)}\right\|=\left\|B^m\cdot e^{(0)}\right\|\le\left\|B^m\right\|\cdot\left\|e^{(0)}\right\|\le\left\|B\right\|^m\cdot\left\|e^{(0)}\right\|$$

מסקנה: <u>**הערכה לשגיאת הקירוב באיטרציה m נתונה ע"י**</u>

$$\boxed{\left\|e^{(m)}\right\|\le\left\|B\right\|^m\cdot\left\|e^{(0)}\right\|}$$

מסקנה: הערכת מספר האיטרציות הנדרש לקבלת רמת דיוק נתונה

על מנת לחשב את מספר האיטרציות m בשיטה איטרטיבית לחישוב ערך מקורב לפתרון המדויק x עם רמת דיוק ε (לפי נורמה ∞) ניתן לפתור את אי השוויון

$$\boxed{\left\|e^{(m)}\right\|_\infty \le \left(\|B\|_\infty\right)^m \cdot \left\|e^{(0)}\right\|_\infty \le \varepsilon}$$

כאשר:

$$e^{(0)} = x - x^{(0)}$$

$$\left\|e^{(0)}\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left\{\left|e_i^{(0)}\right|\right\}$$

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|$$

תרגיל

נתונה המערכת $Ax = b$

כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $\pm 1 \neq a \in \mathbb{R}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את תחום ערכי $a \in \mathbb{R}$ עבורם שיטת GZ מתכנסת לפתרון של המערכת לכל וקטור התחלתי.

ב. עבור $a = 0.5$ חשבו את $\|B_{BZ}\|_\infty$.

ג. עבור $a = 0.5$ הפתרון המדויק הוא $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. מהו מספר האיטרציות המינימלי m המבטיח קירוב עם רמת דיוק של 10^{-3} לפחות עבור וקטור התחלה $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

משפט ההתכנסות של שיטת יעקובי במונחים של המטריצה A

נתונה מערכת $Ax=b$. סדרת הקירובים $x^{(m)}$ המתקבלת ע"י שיטת

יעקובי המתאימה $\quad m=1,2,\ldots \quad x^{(m)}=B_J\cdot x^{(m-1)}+c_J$

מתכנסת לפתרון המדויק x של המערכת לכל וקטור בחירה התחלתי

שרירותי $x^{(0)}$ אם ורק אם כל השורשים של הפולינום:

$$q_J(\lambda)=\left|\lambda\cdot D+\left(L+U\right)\right|=\begin{vmatrix} a_{11}\cdot\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdot\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\cdot\lambda \end{vmatrix}$$

נמצאים בתוך מעגל היחידה כלומר מקיימים $|\lambda_i|<1$ לכל $i=1,2,..,n$.

הוכחת משפט ההתכנסות של שיטת יעקובי במונחים של המטריצה A

תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת יעקובי הוא

$\rho(B_J) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| < 1$, באופן שקול קיומם של כל הע"ע λ_i של B_J בתוך מעגל היחידה.

נוכיח למעשה כי הע"ע של B_J (שורשי $\Delta_{B_J}(\lambda) = |\lambda I - B_J|$) הם שורשי $q_J(\lambda)$

$$\Delta_{B_J}(\lambda) = |\lambda I - B_J| = \left|\lambda I + \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{-B_J}\right| = \left|D^{-1}\cdot\left[\lambda D + (L+U)\right]\right| = \left|D^{-1}\right|\cdot\underbrace{\left|\lambda D + (L+U)\right|}_{q_J(\lambda)}$$

קבלנו: $\Delta_{B_J}(\lambda) = \left|D^{-1}\right|\cdot q_J(\lambda)$.

היות ו- $|D^{-1}| \neq 0$ הוא קבוע מספרי נסיק כי לשני הפולינומים $\Delta_{B_J}(\lambda)$ ו- $q_J(\lambda)$ יש אותם השורשים.

מש"ל.

משפט ההתכנסות של שיטת גאוס זיידל
במונחים של המטריצה A

נתונה מערכת $Ax=b$. סדרת הקירובים $x^{(m)}$ המתקבלת ע"י שיטת

גאוס זיידל המתאימה $m=1,2,\ldots$ $x^{(m)}=B_{GZ}\cdot x^{(m-1)}+c_{GZ}$

מתכנסת לפתרון המדויק x של המערכת לכל וקטור בחירה התחלתי

שרירותי $x^{(0)}$ אם ורק אם כל השורשים של הפולינום:

$$q_{GZ}(\lambda)=\left|\lambda\cdot(L+D)+U\right|=\begin{vmatrix} a_{11}\cdot\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\cdot\lambda & a_{22}\cdot\lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1}\cdot\lambda & \cdots & a_{n,n-1}\cdot\lambda & a_{nn}\cdot\lambda \end{vmatrix}$$

נמצאים בתוך מעגל היחידה כלומר מקיימים $|\lambda_i|<1$ לכל $i=1,2,..,n$.

תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות

שיטת יעקובי, דוגמא

נתבונן במערכת:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

למטריצה יש אלכסון שולט לחלוטין

לכן שיטת יעקובי וגאוס-זיידל מתכנסות עבורה.

נראה (לצורך ההדגמה) קיום תנאי הכרחי ומספיק לשיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8\lambda\left[8\lambda^2 - 1\right] \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm {}^{1}\!/_{\sqrt{8}}$$

$$\left|\lambda_{1,2,3}\right| < 1$$

<u>מסקנה</u>: תהליך יעקובי יתכנס עבור מערכת זו.

תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות
שיטת גאוס-זיידל, דוגמא

נתבונן במערכת:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

למטריצה אין אלכסון שולט לחלוטין,

לכן נבדוק תנאי הכרחי ומספיק:

$$q_{GZ}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 5 & 5 \\ 5\lambda & 2\lambda & 5 \\ 5\lambda & 5\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda\left[8\lambda^2 - 25\lambda + 125\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 1.5625 \pm 3.6309i$$

$$\Rightarrow \left|\lambda_{2,3}\right| = 3.9528 > 1$$

<u>מסקנה:</u> תהליך גאוס- זיידל לא יתכנס עבור מערכת זו.

תרגיל

נתונה המערכת

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2a \\ 1 & -a & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

כאשר $a,b \in \mathbb{R}$ ו- $a \neq 0,\pm 2$

עבור אילו ערכי a,b מתכנסת/מתבדרת שיטת יעקובי עבור מערכת זו?

שיטת יעקובי וגאוס-זיידל
דיון מסכם

אם שיטת יעקובי ושיטת גאוס- זיידל מתכנסות
אזי שיטת גאוס-זיידל עושה זאת מהר יותר.

- קיימים בכל זאת מקרים בהם עבור אותה מערכת משוואות שיטת יעקובי תתכנס ואילו שיטת גאוס-זיידל לא!
- הסיבה לתופעה זו היא שבשיטת גאוס-זיידל השימוש בערכים "טריים" של קוארדינטות וקטורי הקירובים עשוי להרחיק אותנו מן הפתרון במקום לקרב אותנו אליו.

נביא כעת 2 דוגמאות הדנות בהשוואה בין שתי השיטות הנ"ל.

שיטת יעקובי וגאוס-זיידל

דיון מסכם, דוגמאות להשוואה

דוגמא 1: עבור מערכת $Ax = b$ עם מטריצת מקדמים

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

התכנסות שיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda_i| = 0 < 1, \;\; i = 1, 2, 3$$

שיטת יעקובי תתכנס עבור
מטריצת מקדמים זו.

דיון מסכם, המשך דוגמא 1

<u>התכנסות שיטת גאוס-זיידל:</u>

$$q_{GZ}(\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=2$$

$$\Leftarrow \quad |\lambda_{2,3}|=2>1$$

שיטת גאוס-זיידל תתבדר עבור

מטריצת מקדמים זו.

שיטת יעקובי וגאוס-זיידל
דיון מסכם, דוגמאות להשוואה-המשך

דוגמא 2: עבור מערכת $Ax=b$ עם מטריצת מקדמים
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

התכנסות שיטת יעקובי:

$$q_J(\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2\lambda(4\lambda^2+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1=0, \lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$$

$$\Leftarrow \quad \left|\lambda_{2,3}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\cong 1.118>1$$

שיטת יעקובי תתבדר עבור מטריצת מקדמים זו.

דיון מסכם, המשך דוגמא 2

<u>התכנסות שיטת גאוס-זיידל:</u>

$$q_{GZ}(\lambda)=0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ -\lambda & -\lambda & 2\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 8\lambda(\lambda+\frac{1}{2})^2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{2}$$

$$|\lambda_1|=0<1 \quad \text{and} \quad |\lambda_{2,3}|=0.5<1 \quad \Leftarrow$$

שיטת גאוס-זיידל תתכנס עבור מטריצת מקדמים זו.

שיטת יעקובי וגאוס-זיידל
דיון מסכם, המשך

- תנאי מספיק להתכנסות השיטות (קיום אלכסון שולט לחלוטין / $\|B\| \le q < 1$) הינו תנאי פשוט לבדיקה נומרית ובמידה הוא מתקיים שתי השיטות מתכנסות ולכן במקרה זה נעדיף את שיטת גאוס זיידל המתכנסת יותר מהר.

- מבחינה תיאורטית, במידה ולא מתקיים תנאי מספיק יש לבדוק תנאי הכרחי ומספיק עבור כל אחת מהשיטות בנפרד. (מציאת ע"ע של B_J ושל B_{GZ} או לחלופין מציאת שורשי q_J ו- q_{GZ})

- מבחינה מעשית, חישוב שורשים של פולינום ממעלה **n** זו בעיה נומרית סבוכה ולכן מכשיר זה הוא בעיקרו תיאורטי. לרוב ניתן להסתפק בהרצת מספר איטרציות ולבדוק אם יש מגמת התכנסות או לא.

נספח: תזכורת מאלגברה

1. דטרמיננטים: הגדרה, חישוב, תכונות
2. מודול של מספר מרוכב

תזכורת מאלגברה- דטרמיננטים

הגדרה: למטריצה *A* ריבועית מסדר **n** מתאים מספר הנקרא **דטרמיננט** המוגדר ומסומן באופן הבא:

$$n=1$$

$$\det A = |A| = \left|\left(a_{11}\right)\right| = a_{11}$$

$$n=2$$

$$\det A = |A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

דטרמיננטים, המשך

$$n = 3$$

$$\det A = |A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

לחישוב דטרמיננט מסדר 3 מכפילים את כל אברי השורה הראשונה בדטרמיננט המתאים מסדר 2 המתקבל מהמטריצה A ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה בה נמצא איבר זה.

הסימנים של אברי השורה ה-1 מתחלפים לסירוגין +,-,+.

דטרמיננטים, המשך

דטרמיננט מסדר גבוה:

נסמן ב- M_{ij} את תת המטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j. (זו תת מטריצה ריבועית מסדר $n-1$)

באינדוקציה על n מגדירים:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot |M_{1k}|$$

תכונות של דטרמיננטים

משפט: תהי A מטריצה ריבועית מסדר n אזי:

א) ניתן לפתח דטרמיננט לפי כל שורה ולפי כל עמודה ומתקיים:

פיתוח לפי שורה i

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot |M_{ik}|$$

פיתוח לפי עמודה j

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|$$

ב) $|A| = |A^t|$

עצה: כדאי לפתח דטרמיננט לפי שורה או עמודה עם מירב האפסים!

כללים נוספים לחישוב דטרמיננטים

1) אם אחת משורות (או עמודות) המטריצה הריבועית A היא שורת (עמודת) אפסים אזי $|A| = 0$.

2) אם A מטריצה ריבועית משולשת עליונה (או תחתונה) אזי הדטרמיננט של A שווה למכפלת אברי האלכסון.

3) אם המטריצה B מתקבלת מהמטריצה A ע"י הכפלת כל אברי שורה (עמודה) אחת בלבד בסקלר c שונה מאפס (פעולה אלמנטרית בשורה או בעמודה מטיפוס 2) אזי

$$|B| = c|A|.$$

4) אם המטריצה B מתקבלת מ- A ע"י החלפת מיקומן של שתי שורות (עמודות) (פעולה אלמנטרית בשורה או בעמודה מטיפוס 1) אזי

$$|B| = -|A|.$$

כללים נוספים לחישוב דטרמיננטים, המשך

5) אם קיימות במטריצה A שתי שורות (עמודות) פרופורציונליות (כלומר , האחת כפולה של השניה בקבוע שונה מאפס) אזי $|A| = 0$.

6) אם מוסיפים לשורה (לעמודה) כפולה של שורה (עמודה) אחרת, (פעולה אלמנטרית בשורה או בעמודה מטיפוס 3) אזי הדטרמיננט לא משתנה.

7) לכל שתי מטריצות ריבועיות A ו- B מאותו סדר מתקיים:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

דוגמא לשימוש בכללים לחישוב דטרמיננט

פיתוח לפי עמודה 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_1 \to R_1 + 2R_4 \\ R_2 \to R_2 - 2R_4 \\ R_3 \to R_3 + R_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & -6 & -11 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 9 & -6 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{R_2 \to R_2 + 3R_3}{=} \begin{vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

פיתוח לפי שורה 2

תזכורת מאלגברה- מודול של מספר מרוכב

ניתן לתאר את המספר המרוכב $(i^2=-1)$ $z=a+b\cdot i$ $a,b\in R$
כוקטור במערכת צירים שראשיתו בנקודה (0,0) O וסופו בנקודה
.M (a,b)
אורך הוקטור OM נקרא גם מודול של המספר המרוכב z או
ערך מוחלט של המספר המרוכב z ומסומן: $|z|$

מתקיים:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

דוגמא:

$$|z|=|1-2\cdot i|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$