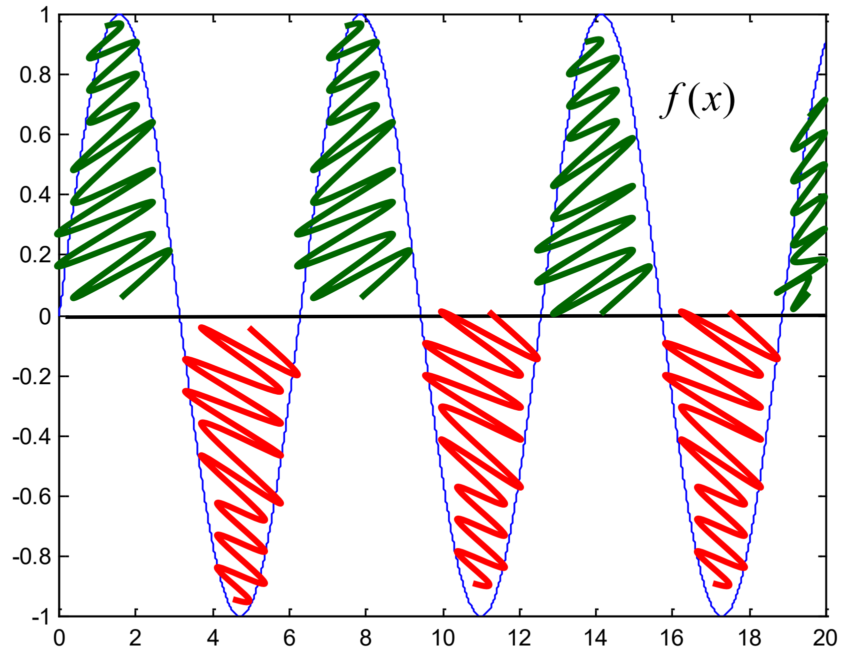
אנליזה נומרית: מצגת מלווה 13

Numerical Integration:

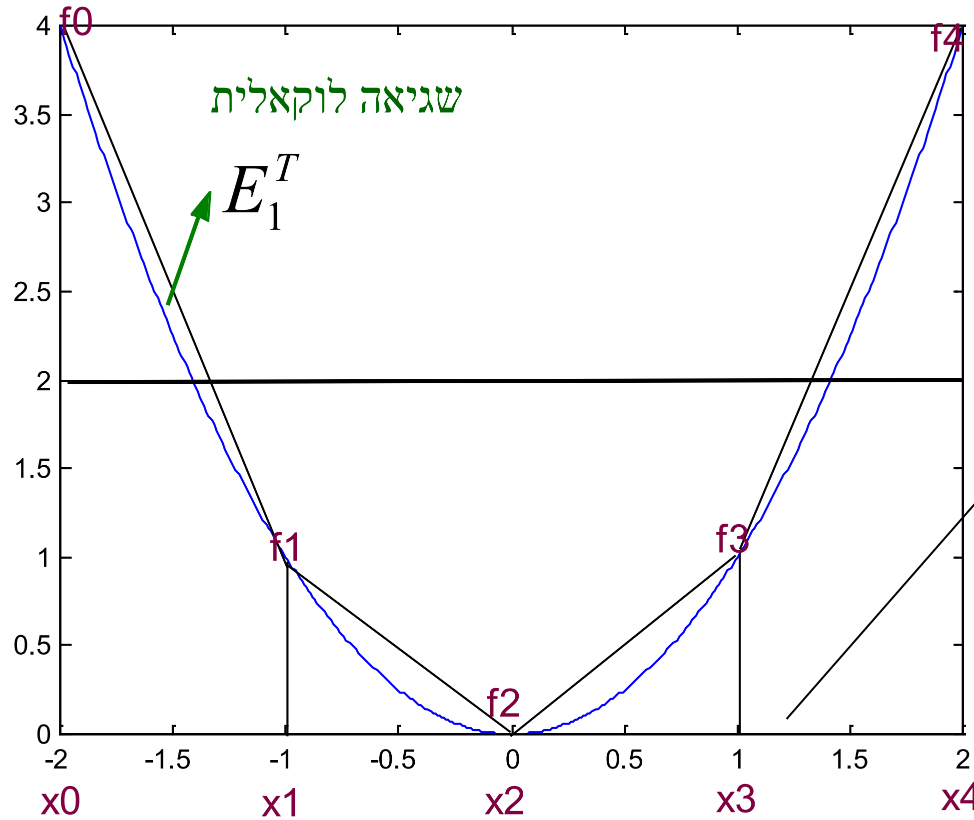
Part a. Trapezoidal Method

אינטגרציה נומרית

<u>מטרה:</u> חישוב קירוב נומרי לאינטגרל המסוים ("שטח") $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$



שיטת הטרפז - הרעיון הכללי



$$h = \frac{b-a}{n}$$

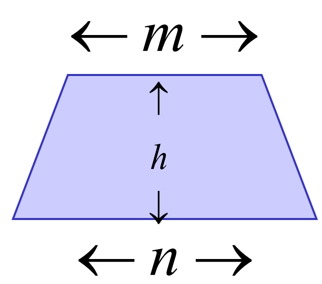
מחלקים את הקטע $[a,b]$ ל- n תתי קטעים שווים באורכם (אורך כל קטע $h = \frac{b-a}{n}$), ומסכמים את "שטחי" הטרפזים בכל תתי הקטעים. סכום זה מהווה **<u>קירוב לאינטגרל המסוים</u>** $\int_a^b f(x)dx$.

שיטת הטרפז בקטע - נוסחאות לוקאליות

תזכורת:

שטח טרפז

$$s=\frac{(m+n)\cdot h}{2}$$



נתבונן בתת הקטע הראשון $[x_0,x_1]$ ונסמן $f(x_0)=f_0, f(x_1)=f_1$

אזי **קירוב הטרפז הלוקאלי לאינטגרל המסוים** $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ נתון ע"י:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong T_1[f,x_0,x_1]=\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]=\frac{h}{2}[f_0+f_1]$$

זוהי **נוסחת הטרפז הלוקאלית** המתאימה לפונקציה $f(x)$ **בתת הקטע הראשון** $[x_0,x_1]$.

שיטת הטרפז - נוסחאות לוקאליות, המשך

<u>באופן כללי</u>, אם נתייחס לתת קטע כללי $[x_k, x_{k+1}] = [x_k, x_k + h]$

ונסמן $f(x_k) = f_k, f(x_{k+1}) = f_{k+1}$

אזי **<u>קירוב הטרפז הלוקאלי לאינטגרל המסוים</u>** $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$
<u>בתת הקטע הכללי</u> $[x_k, x_{k+1}] = [x_k, x_k + h]$ נתון ע"י:

$$T_1[f; x_k, x_{k+1}] = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}[f_k + f_{k+1}]$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \cong T_1[f; x_k, x_{k+1}]$$

שיטת הטרפז - נוסחאות לוקאליות, המשך

הערה:

למעשה, הקירוב שאנו מחשבים הוא האינטגרל של **האינטרפולטור הלינארי**
המתאים $L_1(x)$ לפונקציה $f(x)$ בקטע $[x_k, x_{k+1}]$.

כלומר
$$T_1 = T_1\left[f; x_k, x_{k+1}\right] = \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_1(x)dx$$

נוסחת הטרפז הגלובלית

כאמור, על מנת לחשב קירוב לאינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ נחלק את $[a,b]$

ל - n קטעים באורך שווה $\boxed{h=\frac{b-a}{n}}$ באמצעות $n+1$ נקודות החלוקה

$\boxed{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}$ $(x_{k+1}=x_k+h,\ k=0,\dots,n-1\ )$

נסמן $\boxed{f(x_k)=f_k\ , \quad k=0,1,\cdots,n}$

מתכונות אינטגרל מסוים נקבל:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx}$$

קירוב הטרפז הגלובלי $T_n[f;a,b]$ לאינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מוגדר כסכום קירובי הטרפז הלוקליים בכל תת קטע, כלומר:

$$\boxed{T_n\left[f;a,b\right]=T_1\left[f;x_0,x_1\right]+T_1\left[f;x_1,x_2\right]+\cdots\cdots+T_1\left[f;x_{n-1},x_n\right]}$$

נוסחת הטרפז הגלובלית, המשך

כאמור, בכל תת קטע $k = 0,1,\cdots,n-1$ $[x_k, x_{k+1}]$, משתמשים
בנוסחת הטרפז הלוקאלית המתאימה ומקבלים:

$$T_n[f;a,b] = \left[\frac{h}{2}(f_0+f_1)\right] + \left[\frac{h}{2}(f_1+f_2)\right] + \cdots + \left[\frac{h}{2}(f_{n-2}+f_{n-1})\right] + \left[\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)\right]$$

ובאופן שקול:

$$T_n[f;a,b] = \frac{h}{2}\cdot\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots\cdots + 2f_{n-1} + f_n\right] = \frac{h}{2}\cdot\left[f_0 + 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong T_n[f;a,b]$$

שיטת הטרפז-דוגמא 1

נתון האינטגרל $I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

שערכו המדויק הוא $I=\ln 2=0.69314718\ldots$

חשבו קירובים ל- I ע"י קירובי הטרפז T_1,T_2,T_3,T_4.

פתרון דוגמא 1- שיטת הטרפז

נתון $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 = 0.69314718...$

❑ **חישוב הקירוב T_1**

- במקרה זה $n = 1$ ואין חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$

ולכן נתבסס על נקודות הקצה בלבד $x_0 = a = 0, x_1 = b = 1$ ו- $h = 1$.

- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה: $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על טרפז אחד)

$$T_1 = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + f_1] = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

- ❑ **חישוב הקירוב T_2**
- במקרה זה $n = 2$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ לשני תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{2}$ ולכן נתבסס על 3 נקודות החלוקה $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.
- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, f_2 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על 2 טרפזים)

$$T_2 = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + 2f_1 + f_2] = \frac{1}{4} \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{17}{24} = 0.70833\ldots$$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\ln 2=0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

❑ **חישוב הקירוב T_3**

- במקרה זה $n=3$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b]=[0,1]$ לשלושה תתי קטעים שכ"א באורך $h=\frac{1}{3}$ ולכן נתבסס על 4 נקודות החלוקה $.x_0=0, x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{2}{3}, x_3=1$
- נחשב ערך הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0=f(0)=1, f_1=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}, f_2=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}, \ f_3=f(1)=\frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על 3 טרפזים)

$$T_3=\frac{h}{2}\cdot[f_0+2f_1+2f_2+f_3]=\frac{1}{6}\cdot\left[1+2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right]=\frac{7}{10}=0.70$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

- **חישוב הקירוב T_4**

- במקרה זה $n = 4$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ לארבעה תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{4}$ ולכן נתבסס על 5 נקודות החלוקה $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$.
- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, f_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, f_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{7}, f_4 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על 4 טרפזים)

$$T_4 = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4] =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1171}{1680} = 0.6970238095\ldots$$

שגיאה לוקאלית של נוסחת הטרפז

בלי הגבלת הכלליות נתייחס באופן לוקלי לתת הקטע הראשון $[a,a+h]$.

שגיאת הקירוב בתת קטע זה מוגדרת ע"י

$$E_1^T[f;a,a+h]=\underbrace{\int_a^{a+h} f(x)dx}_{\text{ערך מדויק}}-\underbrace{T_1[f;a,a+h]}_{\text{קירוב הטרפז בקטע}}$$

טענה: אם $f(x)$ בעלת נגזרת שניה רציפה בתת הקטע $[a,a+h]$

אזי קיימת נקודת ביניים $a<\eta<a+h$ שעבורה השגיאה הלוקלית בתת בקטע נתונה ע"י:

$$(1)\quad E_1^T=E_1^T[f;a,a+h]=-\frac{1}{12}f''(\eta)\cdot h^3$$

הוכחת הטענה בדבר שגיאה לוקאלית-משפטי עזר

משפט ערך הביניים האינטגרלי:

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז קיימת נקודת ביניים $a < c < b$ כך ש-:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

הכללה: אם $f(x), g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ ו-$g(x)$ **לא משנה סימן בקטע** אז קיימת נקודת ביניים $a < c < b$ כך ש-:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

הערה: עבור $g(x) \equiv 1$ נקבל את משפט ערך הביניים האינטגרלי.

הוכחת הטענה בדבר שגיאה לוקאלית

כיוון שנוסחת הטרפז הלוקאלית מבוססת על **אינטרפולציה לינארית**

בקטע $[x_0, x_1] = [a, a+h]$, נוכל להשתמש **בנוסחת השגיאה של האינטרפולציה הלינארית:**

$$\boxed{f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \quad x_0 < \alpha = \alpha(x) < x_1}$$

ולרשום:

$$E_1^T = \underbrace{\int_a^{a+h} f(x)\,dx}_{I} - \underbrace{\int_a^{a+h} L_1(x)\,dx}_{T_1} = \int_a^{a+h} \left[f(x) - L_1(x)\right] dx =$$

לפי שגיאת האינטרפולציה

$$= \int_a^{a+h} \frac{f''(\alpha)}{2!} \underbrace{(x-a)(x-a-h)}_{g(x)\le 0, \quad \forall x \in [a, a+h]} dx, \quad a < \alpha = \alpha(x) < a+h$$

הוכחת הטענה בדבר שגיאה לוקאלית, המשך

נמשיך...

$$,a<\eta<a+h \qquad \underset{\text{לפי מ.ערך הביניים המוכלל}}{=} \frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\int_a^{a+h}(x-a)(x-a-h)\,dx = $$

$$ \underset{\substack{\text{הצבה}\\ z=x-a}}{\overset{=}{\Downarrow}} \frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\int_0^h \underbrace{z(z-h)}_{z^2-hz}\,dz = \frac{f''(\eta)}{2!}\underbrace{\left[\frac{z^3}{3}-h\frac{z^2}{2}\Big|_0^h\right]}_{=-\frac{1}{6}h^3} $$

$$ = -\frac{1}{12}f''(\eta)\cdot h^3 \qquad ,a<\eta<a+h $$

שגיאה גלובלית של שיטת הטרפז

- שגיאת הקירוב הגלובלית מוגדרת ע"י $E_n^T[f;a,b]=\int_a^b f(x)dx-T_n[f;a,b]$
- כיוון שקירוב טרפז גלובלי מוגדר כסכום של n קירובי טרפז לוקליים אז השגיאה הגלובלית תוגדר בהתאמה כסכום n השגיאות הלוקליות (השגיאה המצטברת בקטע), כלומר:

$$E_n^T=\sum_{k=1}^{n}E_1^T[f;x_{k-1},x_k]$$

טענה:

אם $f(x)\in C^2[a,b]$ אזי קיימת נקודת ביניים $a<\xi<b$ שעבורה שגיאת הטרפז הגלובלית בקטע נתונה ע"י:

$$(2)\qquad E_n^T=E_n^T[f;a,b]=-\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi)$$

הוכחת הטענה בדבר שגיאת טרפז גלובלית

ניישם את הנוסחה שקיבלנו עבור שגיאה לוקאלית לכל תת קטע:

$$
(2)\qquad
\boxed{
\begin{aligned}
&E_1^T\left[f;x_0,x_1\right]=-\frac{1}{12}h^3\cdot f''(r_1) && x_0<r_1<x_1\\
&E_1^T\left[f;x_1,x_2\right]=-\frac{1}{12}h^3\cdot f''(r_2) && x_1<r_2<x_2\\
&\vdots\\
&E_1^T\left[f;x_{n-1},x_n\right]=-\frac{1}{12}h^3\cdot f''(r_n) && x_{n-1}<r_n<x_n
\end{aligned}
}
$$

כאשר:

$$
\boxed{E_n^T=E_1^T\left[f;x_0,x_1\right]+E_1^T\left[f;x_1,x_2\right]+\cdots+E_1^T\left[f;x_{n-1},x_n\right]}
$$

שגיאה גלובלית של נוסחת הטרפז, המשך הוכחה

- נסכם ונקבל:

$$E_n^T = -\frac{1}{12}\cdot h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} f''(r_k) = -\frac{1}{12}\cdot h^3 \cdot \left(n \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n} \right) \qquad (3)$$

- הביטוי $\boxed{\frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n}}$ הנו **ממוצע חשבוני** של הערכים $\{f''(r_k)\}_{k=1}^{n}$

ולכן נמצא בין הערך המינימלי והמקסימלי בקבוצה אשר בעצמם חסומים ע"י ערך מינימלי ומקסימלי בקטע

- בפרט,

$$\boxed{\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n} \le \max_{a\le x\le b} f''(x)}$$

שגיאה גלובלית של נוסחת הטרפז, המשך הוכחה

- לכן קיימת נקודה $\boxed{a<\xi<b}$ כך ש-

$$\boxed{(4)\qquad \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f''(r_k) = f''(\xi)}$$

- מ- (3) ו- (4) נקבל

$$E_n^T = -\frac{1}{12}\cdot h^3\cdot n\cdot f''(\xi)$$

ובאופן שקול,

$$\boxed{E_n^T = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi),\quad a<\xi<b}$$

<u>מסקנות והערות לגבי נוסחת שגיאה גלובלית של שיטת הטרפז</u>

א. $\boxed{E_n^T = O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ (**<u>סדר גודל של השגיאה</u>**)

ב. נוסחת הטרפז הגלובלית מדויקת עבור כל פולינום ממעלה ≤ 1 (כי אז $E_n^T \equiv 0$)

ג. שגיאת הטרפז ניתנת לחישוב עבור כל פולינום ממעלה 2 .

ד. אם בקטע $[a,b]$ הפונקציה $f(x)$ קמורה $(f''(x) > 0)$ אז $\int_a^b f(x)dx < T_n$

אם בקטע $[a,b]$ הפונקציה $f(x)$ קעורה $(f''(x) < 0)$ אז $\int_a^b f(x)dx > T_n$

ה. למעט המקרים שהוזכרו לעיל, נוסחת השגיאה היא בעלת אופי תיאורטי בלבד, כיוון שערכה של הנקודה ξ לא ידוע, לכן בדרך כלל נחשב את חסם השגיאה (כמו באינטרפולציה). נציג כעת את **<u>ההערכה לשגיאה מוחלטת</u>**.

חסם לשגיאה מוחלטת
של שיטת הטרפז הגלובלית

עבור חלוקה של הקטע $[a,b]$ ל- n תתי קטעים שווי אורך.

נסמן: $M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

אזי חסם לשגיאה מוחלטת בשיטת הטרפז הגלובלית בקטע $[a,b]$ הינו

$$\left|E_n^T\right| \le \frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot M_2$$

שיטת הטרפז-דוגמא 2

נתון האינטגרל $I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

שערכו המדויק הוא $I=\ln 2=0.69314718...$.

איזה קירוב טרפז T_n נדרש לחשב על מנת למצוא ערך מקורב לאינטגרל הנתון שיבטיח רמת דיוק של $\varepsilon=10^{-7}$?

פתרון דוגמא 2

נתון $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2 = 0.69314718...$

❑ בשלב ראשון נמצא חסם לשגיאת הטרפז המוחלטת $|E_n^T|$ באמצעות הנוסחה

$$\boxed{\left|E_n^T\right| \le \frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot M_2,\quad M_2 = \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \left|f''(x)\right| = \frac{2}{(x+1)^3} \text{ is decreasing monotonic} \Rightarrow M_2 = \max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right| = \left|f''(0)\right| = 2$$

$$\Rightarrow \left|E_n^T\right| \le \frac{1}{12n^2}\cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

❑ בשלב השני נפתור את אי השוויון $\left|E_n^T\right| \le \frac{1}{6n^2} \le 10^{-7}$

$$\frac{1}{6n^2} \le 10^{-7} \Rightarrow n \ge \sqrt{\frac{10^7}{6}} \cong 1290.99 \qquad \Rightarrow n = 1291 \Rightarrow T_n = T_{1291}$$

שיטת הטרפז- דוגמא 3

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ ויהי T_n קירוב הטרפז הגלובלי המתאים
הוכיחו או הפריכו: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $I - T_n > 0$.

פתרון: נזכור כי $I - T_n = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - T_n = E_n^T[f; a,b]$ ולכן ניתן לבדוק באופן שקול האם $E_n^T[f; a,b] > 0$.

לשם כך נשתמש בנוסחת השגיאה בפועל (ולא בנוסחת חסם לשגיאה מוחלטת!)

$$\boxed{E_n^T\left[f;a,b\right] = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi); \quad a<\xi<b}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(\xi) = \frac{2}{(\xi+1)^3} \underset{0<\xi<1}{\overset{\downarrow}{>}} 0$$

$$\Rightarrow E_n^T = -\underset{<0}{\frac{1}{12}}\cdot\underset{>0}{\frac{1}{n^2}}\cdot\underset{>0}{f''(\xi)} < 0 \quad \Rightarrow \quad I - T_n < 0$$

→ **הטענה לא נכונה**