מצגת 5- תרגיל 1:

נתונה המערכת $Ax = b$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ו- $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ עם פרמטר ממשי $a \neq \pm 1$.

א. מצאו את תחום ערכי $a \in \mathbb{R}$ עבורם שיטת GZ מתכנסת לכל וקטור התחלתי.

ב. עבור $a = 0.5$ חשבו את $\|B_{GZ}\|_\infty$

ג. עבור $a = 0.5$ הנתון הפתרון המדויק הוא $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

מה מספר האיטרציות המינימלי m המבטיח רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-3}$ עבור וקטור התחלה $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

פתרון

א. נמצא תחום ערכי $a \in \mathbb{R}$ עבורם שיטת GZ מתכנסת.

דרך 1: לפי תנאי הכרחי ומספיק המנוסח באמצעות מטריצה A:

$$q_{GZ}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - a^2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - a^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = a^2$$

שיטת GZ מתכנסת אם כל שורשי $q_{GZ}(\lambda)$ נמצאים במעגל היחידה כלומר אם

$|\lambda_{1,2}| = |a^2| < 1$ וזה קורה כמובן אם $|a| < 1$.

דרך 2: לפי תנאי הכרחי ומספיק עבור מטריצת האיטרציה של שיטת GZ

$$B_{GZ} = -(D+L)^{-1} \cdot U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$B_{GZ} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Delta_{B_{GZ}}(\lambda) = |\lambda I - B_{GZ}| = \begin{vmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda - a^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda \cdot (\lambda - a^2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = a^2$$

לכן הרדיוס הספקטרלי הוא $\rho(B_{GZ}) = a^2$ ועל מנת להבטיח התכנסות לכל וקטור התחלה נדרש (תנאי הכרחי ומספיק) ש- $\rho(B_{GZ}) < 1 \rightarrow a^2 < 1 \rightarrow |a| < 1$.

ב. עבור $a = 0.5$ נחשב את $\|B_{GZ}\|_\infty$

עבור $a = 0.5$ הנמצא בטווח ההתכנסות של שיטת גאוס-זיידל מטריצת האיטרציה בשיטת GZ תהיה: $B_{GZ} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$ ולכן $\|B_{GZ}\|_\infty = 0.5$

ג. עבור $a = 0.5$ הנתון הפתרון המדויק הוא $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

מה מספר האיטרציות המינימלי m המבטיח רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-3}$ עבור וקטור התחלה $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

ראינו בהרצאה כי $\left\|e^{(m)}\right\|_\infty \le \left(\left\|B_{GZ}\right\|_\infty\right)^m \cdot \left\|e^{(0)}\right\|_\infty$

חישבנו $\|B_{GZ}\|_\infty = 0.5$. נחשב כעת $\left\|e^{(0)}\right\|_\infty$: עבור הפתרון $x = \binom{4}{2}$ ווקטור ההתחלה $x^{(0)} = \binom{1}{0}$ הנתונים מתקיים $\left\|e^{(0)}\right\|_\infty = \left\|x - x^{(0)}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\|_\infty = 3$

ולכן: $\left(\underbrace{\left\|B_{GZ}\right\|_\infty}_{0.5}\right)^m \cdot \underbrace{\left\|e^{(0)}\right\|_\infty}_{3} \le 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2^m} \cdot 3 \le 10^{-3}$

ואז $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \le \frac{10^{-3}}{3} \Rightarrow m \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \le \ln\left(\frac{10^{-3}}{3}\right) \Rightarrow m \ge \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cong 11.55$

כלומר, לכל $m \ge 12$ מובטחת רמת הדיוק הנתונה.