אנליזה נומרית: מצגת מלווה #9

Approximations by Polynomial Interpolation

נושאי המצגת:

1. אינטרפולציה-הקדמה;
2. אינטרפולציה-הצגת לגרנז'
3. שגיאת האינטרפולציה- הצגת לגרנג'

אינטרפולציה (Interpolation)

הקדמה-

תורת האינטרפולציה היא לב ליבה של האנליזה הנומרית הקלאסית.
(שיטות נומריות בשטחים אחרים כמו: גזירה, אינטגרציה ופתרון משוואות דיפרנציאליות, מבוססות על נושא זה.)

הרעיון המרכזי בתורת האינטרפולציה:

תהי נתונה פונקציה $y = f(x)$ אשר ידועים ערכיה בקבוצת נקודות

בקטע $[a,b]$: $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

כלומר נתונה **<u>טבלת הערכים</u>**

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_n, y_n)$.

$$\boxed{y_k = f(x_k)}$$

אינטרפולציה– הקדמה, המשך

- <u>מטרת האינטרפולציה</u> היא לקרב את $f(x)$ בקטע $[a,b]$ ע"י <u>פולינום</u> $L(x)$, אשר <u>**מתלכד**</u> **עם** $f(x)$ <u>**בנק' הטבלה**</u>, כלומר פולינום המקיים

$$L(x_k) = y_k \; ; \quad \forall k = 0,1,\cdots,n$$

- <u>**בנקודות בקטע שאינן נתונות בטבלה**</u> פולינום האינטרפולציה <u>**מקרב**</u> את ערך הפונקציה

$$L(x) \cong f(x); \qquad \forall x \neq x_k$$

- בנוסף יש למצוא <u>**חסם לשגיאה**</u> בין הערך המקורב של הפונקציה לערכה האמיתי בכל נקודה בקטע שאיננה בטבלה.

אינטרפולציה: שימושים במדעי המחשב

באינטרפולציה עושים שימוש בערכים ידועים או בערכים שמתקבלים כתוצר של דגימה על מנת להעריך ערכים בנקודות שלגביהן אין מידע.

דוגמאות לשימושים בשטחים שונים

❑ **בגיאוגרפיה:**
אינטרפולציה משמשת כדי לחזות ערכים לא ידועים בתחזית מזג אויר (טמפרטורה, צפי גשמים), ריכוזים כימיים, רמות רעש וכן הלאה.

❑ **בגרפיקה של מחשבים:**
- ❖ אינטרפולציה משמשת לשחזור איטרטיבי של תמונה בהדמיה דיגיטלית.
- ❖ כלי תכן ממוחשבים לתכנון ועיצוב מוצרים בעזרת מחשב – CAD (Computer Aides Design), עושים שימוש בקירובים ע"י אינטרפולציה.

אינטרפולציה: שימושים במדעי המחשב

❑ סכימת Secret Sharing/חלוקת סוד:

זוהי שיטה לפתרון בעיית חלוקת סוד (מפתח הצפנה/סיסמה) כך שניתן לחלק מידע נתון D (למשל סיסמה) ל- n משתתפים (shares) $D_1, D_2, \dots, D_n$ באופן כזה שניתן לשחזר את הסוד D בידיעת k חלקים בלבד (גם אם $n-k$ חלקים הלכו לאיבוד) .

*מתוך ויקיפדיה

מנגנון סכימת הסף של עדי שמיר לשחזור "סוד" D באמצעות k משתתפים מתוך n בעלי הסוד

1. נגדיר פולינום $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} \cdot x^{k-1}$
(פולינום ממעלה $k-1$) עם מקדמים אקראיים $a_1, \dots, a_{k-1}$ ונסמן $a_0 = D$
2. לכל אחד מ- n בעלי הסוד מקצים את ערך הפולינום בנקודה i באופן הבא:

$$p(i) = D_i, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

3. בהינתן כל תת קבוצה של k משתתפים שבאמצעותם נרצה לשחזר את הסוד D

❑ ניתן למצוא את הפולינום $p(x)$ על מנת לחשב את הסוד $D = p(0) = a_0$
נעשה זאת באופן הבא:

❑ בונים טבלת ערכי D_i של k השותפים שנבחרו לפיצוח הסוד

i	1	2	….	k
D_i	D_1	D_2	….	D_k

❑ נעיר כי בשלב הראשון הנעלם a_0 אינו ידוע ולכן, לא ניתן לחשב את $p(x)$
רק באמצעות הערכים $p(i) = D_i$ הידועים של k השותפים לשחזור הסוד .

מנגנון סכימת הסף של עדי שמיר לשחזור "סוד" D באמצעות k משתתפים מתוך n בעלי הסוד

- ❑ חישוב המקדמים הנעלמים $a_1, \dots, a_{k-1}$ של $p(x)$ אפשרי באמצעות אינטרפלציית לגרנג' לטבלה:

i	1	2	....	k
D_i	D_1	D_2	....	D_k

- ❑ הסכימה מבוססת על תוצאה שנוכיח בהמשך שלפיה <u>קיים</u> פולינום $p(x)$ <u>יחיד</u> מסדר המקיים $p(i) = D_i$ לכל $i = 1,2, \dots, k$.
- ❑ כאמור פולינום זה הוא פולינום האינטרפולציה ומתקיים $D = p(0)$.

אינטרפולציה הרעיון המרכזי - סיכום

- נתונה פונקציה בצורת טבלת ערכים (עם $n+1$ נתונים)

x_0	x_1	....	x_n
y_0	y_1	....	y_n

- רוצים לבנות פולינום $L(x)$, עדיפות לכזה מהמעלה הנמוכה ביותר האפשרית, שיעבור דרך כל הנקודות, כלומר שיתקיימו התנאים:

$$(1) \qquad L(x_k) = y_k \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

הרעיון המרכזי – סיכום, המשך

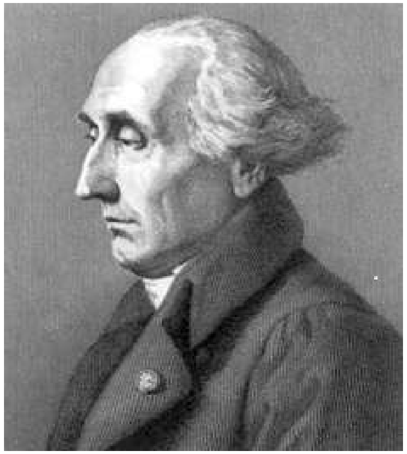
שאלות:

- האם קיים פולינום $L(x)$ כנ"ל ?
- אם קיים פולינום כנ"ל , מהי הדרגה הנמוכה ביותר האפשרית שלו ?
- כיצד ניתן למצוא את הייצוג האלגברי של הפולינום ?
- בהינתן נקודה $\hat{x}$, שאיננה בטבלה: מהי שגיאת/שגיאה מוחלטת של הקירוב $|f(\hat{x})-L(\hat{x})|$?

אינטרפולציה של לגרנז'

כעת נראה את אחת האפשרויות לבנות פולינום אינטרפולציה מהסוג המקיים את דרישת האינטרפולציה.

הצגה זו נקראת **<u>ההצגה של לגרנז'</u>** לפולינום האינטרפולציה.



ג'וזף לואי לגראנג'
Joseph Louis Lagrange
1736-1813

הפולינומים היסודיים של לגרנג'

הגדרה: הפולינומים היסודיים של לגרנג'

לכל קבוצה של $n+1$ נקודות שונות $\{x_k\}_{k=0}^{n} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
ועבור $k = 0,1,\dots,n$ מגדירים את הפולינום היסודי של לגרנג' באופן הבא:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

הפולינומים היסודיים של לגרנג'

הגדרה: הפולינומים היסודיים של לגרנג'

כלומר

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$l_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

דוגמא: הפולינומים היסודיים של לגרנג'

נציג את הפולינומים היסודיים עבור קבוצת הנקודות $\{x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9\}$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} = -\frac{1}{15}(x-1)(x-9)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{1}{40}(x-1)(x-4)$$

הפולינומים היסודיים של לגרנג'- תכונות

הערה: $l_k(x)$ הוא פולינום ממעלה n לכל $k = 0,1,\dots,n$

טענה 1

הפולינום היסודי של לגרנג' $l_k(x)$ $(k = 0,1,\dots,n)$ מקיים:

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 0 & ; j \neq k \\ 1 & ; j = k \end{cases} ; \qquad 0 \leq j \leq n$$

טענה 2

קבוצת הפולינומים היסודיים של לגרנג' $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ המתאימה

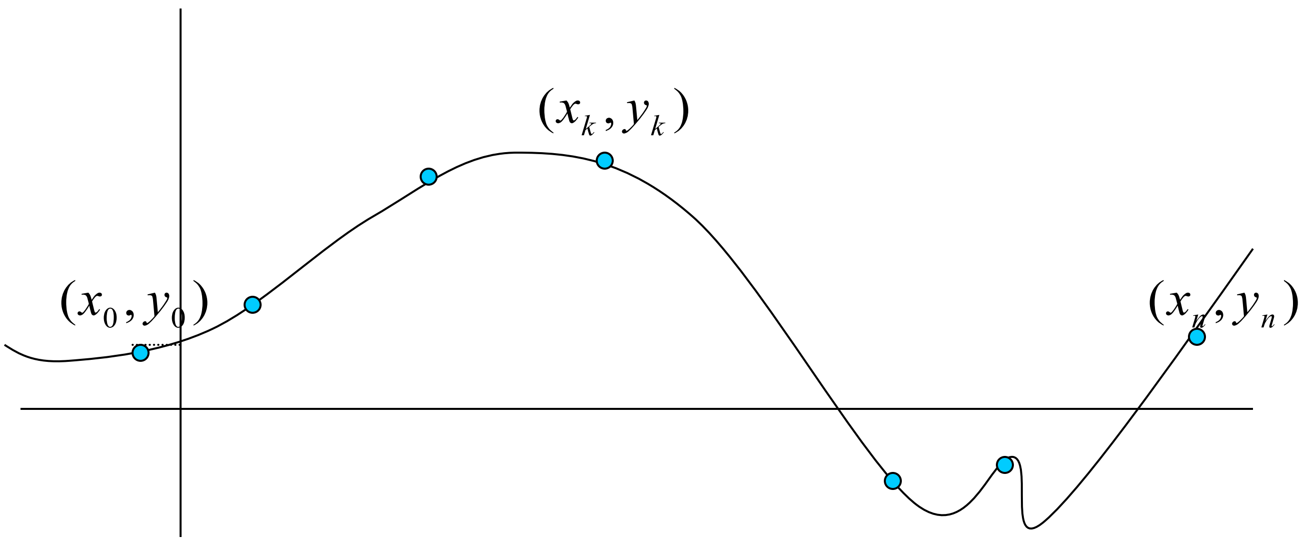
לנקודות $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ מהווה בסיס למרחב הפולינומים $\mathbb{R}_n[x]$.

משפט קיום ויחידות של פולינום האינטרפולציה

בהינתן $(n+1)$ נקודות במישור: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$

קיים פולינום $L_n(x)$ **יחיד** ממעלה $\geq n$ כך שמתקיימת תכונת האינטרפולציה

$$\boxed{L_n(x_k)=y_k, \qquad k=0,1,\ldots,n}$$



הוכחת קיום פולינום האינטרפולציה של לגרנז'

- עבור קבוצת הפולינומים היסודיים של לגרנג' $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ המותאמים לקבוצת הנקודות הנתונה $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ וסדרת הערכים $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ נגדיר:

$$\boxed{L_n(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \dots y_n \cdot l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot l_k(x)}$$

- כזכור- $l_k(x)$ הוא פולינום ממעלה n לכל $k = 0,1, \dots ,n$

$L_n(x)$ **<u>הוא פולינום</u>** ממעלה $\leq n$.

הוכחת קיום פולינום האינטרפולציה של לגרנז'

- נראה כי הפולינום שהגדרנו $L_n(x)$ מקיים את תנאי האינטרפולציה

$$L_n\left(x_k\right)=y_k,\forall k=0,1,..,n$$

- אם נשתמש בתוצאה של טענה 2:

$$\boxed{l_k(x_j)=\begin{cases}0 & ;j\neq k\\ 1 & ;j=k\end{cases}}$$

נקבל לכל k :

$$L_n(x_k)=y_0\cdot\underbrace{l_0(x_k)}_{=0}+y_1\cdot\underbrace{l_1(x_k)}_{=0}+\ldots y_k\cdot\underbrace{l_k(x_k)}_{=1}+\ldots+y_n\cdot\underbrace{l_n(x_k)}_{=0}=y_k$$

בכך הוכחנו למעשה את תכונת האינטרפולציה

בנינו, אם כן, באופן מעשי פולינום אינטרפולציה מהצורה

$$\boxed{L_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}y_k\cdot l_k\left(x\right)}$$

הנקרא **פולינום האינטרפולציה בהצגת לגרנז'**

מ.ש.ל קיום

הוכחת יחידות

- **נניח בשלילה** כי קיימים 2 פולינומים **שונים** $P_n(x)$ ו- $Q_n(x)$ ממעלה $\leq n$ ששניהם מבצעים אינטרפולציה על הנקודות:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_n, y_n).$$

כלומר $\boxed{P_n(x_k) = Q_n(x_k) = y_k \quad , \quad k = 0,1,\cdots,n}$

- אזי שני הפולינומים הנ"ל מתלכדים ב - $n+1$ נקודות, ולכן ההפרש ביניהם

$\boxed{R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)}$ הוא פולינום ממעלה $\leq n$ אשר מתאפס ב - $n+1$ נקודות,

- כלומר לפולינום $R_n(x)$ ממעלה $\leq n$ יש לפחות $n+1$ שורשים וזה בסתירה למשפט היסודי של האלגברה.

- מסקנה: $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$

- כלומר $P_n(x) \equiv Q_n(x)$ וזה בסתירה להנחת השלילה.

מ.ש.ל יחידות

הגדרה: הצגת לגרנג' לפולינום האינטרפולציה

הגדרת פולינום האינטרפולציה

תהי $y=f(x)$ מוגדרת ב- $n+1$ נקודות שונות $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}=\{x_k\}_{k=0}^{n}$

בקטע $[a,b]$ מגדירים $L_n : C[a,b]\to\mathbb{R}_n[x]$ ע"י:

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{f(x_k)}_{y_k}\cdot l_k(x);\quad a\le x\le b$$

****הערות:**

❑ פולינום האינטרפולציה $L_n(f;x)$ הוא ממעלה $\le n$.

❑ לכל סט נקודות אינטרפולציה $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ בקטע $[a,b]$ מתאים פולינום $L_n(f;x)$

דוגמא לחישוב פולינום האינטרפולציה

דוגמא:

נמצא את פולינום האינטרפולציה $L_2(f;x)$ המקרב את $f(x)=\sqrt{x}$
בקטע $[0,10]$ באמצעות הנקודות $\{x_0=1, x_1=4, x_2=9\}$.

❑ מצאנו קודם את שלושת הפולינומים היסודיים של לגרנג' המתאימים לנקודות
$x_0=1, x_1=4, x_2=9$ עם $n=2$:

$$l_0(x)=\frac{1}{24}(x-4)(x-9)$$

$$l_1(x)=-\frac{1}{15}(x-1)(x-9)$$

$$l_2(x)=\frac{1}{40}(x-1)(x-4)$$

❑ נחשב $y_k=f(x_k);\ k=0,1,2$ עבור $f(x)=\sqrt{x}$:

$$y_0=f(1)=1;\ \ y_1=f(4)=2;\ y_2=f(9)=3$$

דוגמא לחישוב פולינום האינטרפולציה

המשך דוגמא:

❑ נציב את התוצאות שמצאנו בייצוג של $L_2(f;x)$:

$$\boxed{L_2(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + y_2 \cdot l_2(x)}$$

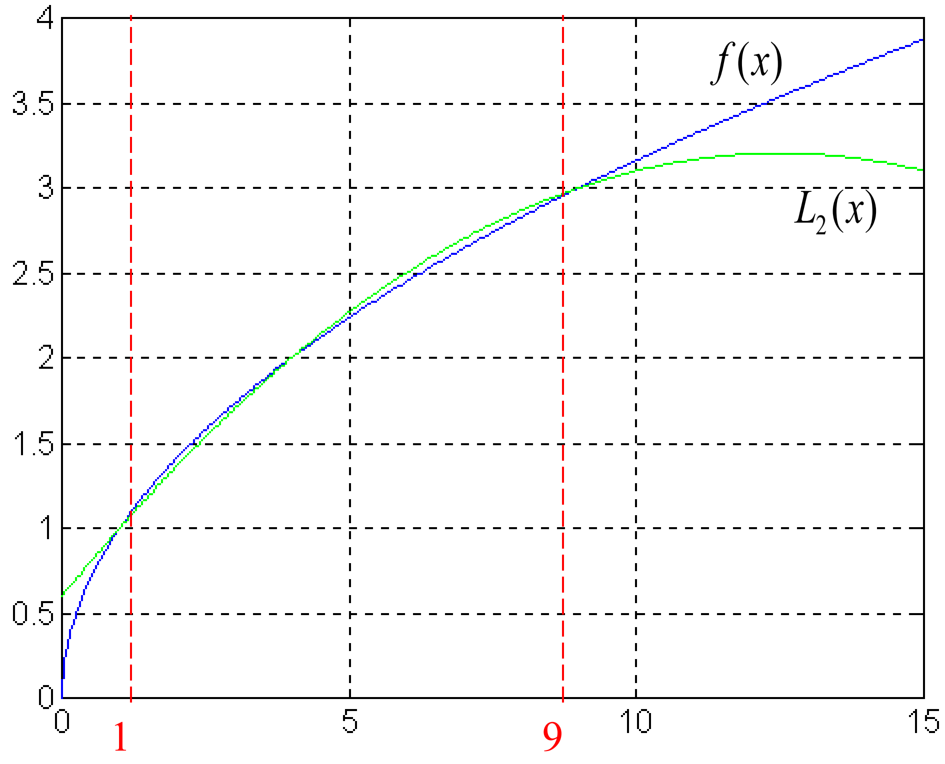
$$\Downarrow$$

$$L_2(x) = 1 \cdot \left(\frac{1}{24}(x-4)(x-9) \right) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{15}(x-1)(x-9) \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{40}(x-1)(x-4) \right)$$

❑ לאחר פישוט הביטוי נקבל:

$$\boxed{L_2(x) = \frac{3}{5} + \frac{5}{12}x - \frac{1}{60}x^2}$$

המשך דוגמא- ייצוג גרפי של הקירוב



תרגיל:

חשבו ערך מקורב ל- $\sqrt{3}$, ע"י קירוב אינטרפולציה מסדר 2.

פתרון:

- בדוגמא קודמת מצאנו את פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ מסדר 2 המקרב את הפונקציה $y = \sqrt{x}$ בקטע $[0,10]$ באמצעות הנקודות $\{x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9\}$.
- קבלנו: לכל $x \in [0,10]$

$$\sqrt{x} \approx L_2(x) = \frac{3}{5} + \frac{5}{12}x - \frac{1}{60}x^2$$

- ובפרט עבור $x = 3$ מתקיים:

$$\sqrt{3} \approx L_2(3) = \frac{3}{5} + \frac{5}{12} \cdot 3 - \frac{1}{60} \cdot 3^2 = \frac{17}{10} = 1.7$$

משפט בדבר שגיאת האינטרפולציה

תהי $f(x)$ פונקציה אשר מוגדרת בקטע $[a,b]$ וגזירה בו $n+1$ פעמים.

נתונות $n+1$ נקודות שונות בקטע $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

ויהי $L_n(x)$ פולינום האינטרפולציה היחיד המקרב את $f(x)$ בנקודות אלה,

אזי עבור <u>כל</u> $x \in [a,b]$ קיימת נק' ביניים $\xi = \xi(x)$ כך ששגיאת האינטרפולציה בנקודה x ניתנת להצגה הבאה:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \qquad (1)$$

כאשר $\min\{x, x_0, x_1, \cdots, x_n\} < \xi < \max\{x, x_0, x_1, \cdots, x_n\}$

הוכחת המשפט בדבר שגיאת האינטרפולציה

$$(1) \qquad f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

<u>מקרה א'</u> אם $x=x_k$ (עבור $k=0,1,\ldots,n$) אז ההוכחה טריוויאלית.

במקרה זה פולינום האינטרפולציה מתלכד עם הפונקציה , כלומר

$$(2) \qquad f(x_k)-L_n(x_k)=y_k-y_k=0$$

ואגף ימין של המשוואה (1) מתאפס אף הוא כי $x-x_k=x_k-x_k=0$.

<u>מקרה ב'</u> נניח כי $x=\bar{x}\neq x_k$ לכל $k=0,1,2,..n$

נתייחס ל- $\bar{x}$ כאל נקודה קבועה כלשהי המקיימת את התנאי דלעיל

ונגדיר באמצעות $\bar{x}$ את פונקציית העזר הבאה:

$$(3) \qquad F(x)=f(x)-L_n(x)-\lambda(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

כאשר λ פרמטר חופשי.

$F(x)=f(x)-L_n(x)-\lambda(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

המשך הוכחת המשפט

- הפונקציה $F(x)$ היא בעלת $n+1$ נגזרות ב - (a,b) כי:
  - נתון כי $f(x)$ גזירה בקטע $n+1$ פעמים
  - שאר הגורמים ב- $F(x)$ הם פולינומים ממעלה $\geq n+1$ ולכן גזירים בקטע $n+1$ פעמים
  - יתרה מכך הנגזרת מסדר $n+1$ של $L_n(x)$ **מתאפסת**
  - כמו כן מתקיים

$$\left((x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right)^{(n+1)}(x)=(n+1)!$$

** עובדות אלו חשובות , נשתמש בהן בהמשך!

- מתקיים:

$$(4)\quad F(x_0)=F(x_1)=\ldots=F(x_n)=0$$

- ממשוואה (4) אנו למדים כי לפונקציה $F(x)$ יש לפחות $n+1$ שורשים.
- נבחר λ כך שיתקיים

$$(4a)\qquad F(\bar{x})=0$$

- כלומר:

$$(5)\qquad \lambda=\frac{f(\bar{x})-L_n(\bar{x})}{(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\cdots(\bar{x}-x_n)}$$

המשך ההוכחה

- עבור בחירה ספציפית זו של λ נקבל שלפונקציה $F(x)$ יש $n+2$ שורשים בקטע $[a,b]$ והם: $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \bar{x}\}$
- לפי משפט רול המוכלל קיימת נקודה ξ

$$\min\{\bar{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n\} < \xi < \max\{\bar{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

כך ש $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

- ע"י גזירה של משוואה (3) (ושימוש בעובדות שציינו קודם) נקבל:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \lambda(n+1)!$$

$$\Rightarrow 0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(n+1)!$$

המשך ההוכחה

- מכאן נובע :

$$(6) \qquad \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- לסיום, ממשוואות (5) ו- (6) נובע כי :

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)$$

שימוש בנוסחת השגיאה: הערכת השגיאה בקטע האינטרפולציה $[a,b]$

- לנוסחת השגיאה שקבלנו יש ערך תיאורטי אך מבחינה מעשית לא ניתן למצוא את הנקודה $\xi = \xi(x)$ ולחשב את השגיאה במפורש.

- עם זאת, ניתן להעריך את השגיאה ולמצוא חסם לשגיאת מקרב האינטרפולציה בקטע הקירוב $[a,b]$ באופן הבא:

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

$$M_{n+1}[a,b] = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

- על פי רוב החסם לשגיאה גדול מהשגיאה בפועל ובהמשך נתייחס לשאלה עד כמה וכיצד ניתן להקטין אותו.

דוגמא

ראינו כי עבור הטבלה

x	1	4	9
$\sqrt{x}$	1	2	3

פולינום האינטרפולציה המתאים ממעלה 2 הוא: $L_2(x)=\frac{3}{5}+\frac{5}{12}x-\frac{1}{60}x^2$

העריכו השגיאה בקטע $[1,9]$.

פתרון: לפי הנוסחה להערכת השגיאה נקבל:

$$\max_{1\le x\le 9}\left|f(x)-L_2(x)\right|\le\frac{M_3[1,9]}{3!}\max_{1\le x\le 9}\left|\underbrace{(x-1)(x-4)(x-9)}_{\omega_3(x)}\right|$$

המשך דוגמא

נחשב את $\boxed{M_3[1,9] = \max_{1\le x\le 9}\left|f'''(x)\right|}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} \\ f''(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-3/2} \\ f'''(x) = \dfrac{3}{8}x^{-5/2} = \dfrac{3}{8\cdot x^{5/2}} = \dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$M_3[1,9] = \max_{1\le x\le 9}\left|f^{(3)}(x)\right| = \max_{1\le x\le 9}\left|\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\right| = f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

המשך דוגמא

<u>נסמן :</u> $\boxed{\omega_3(x) = (x-1)(x-4)(x-9) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36}$

נחפש <u>מקסימום מוחלט</u> (גלובלי) ל $|\omega_3(x)|$ בקטע $[1,9]$:

$$\omega_3'(x) = 0 \iff 3x^2 - 28x + 49 = 0 \iff x_1 = 7, \quad x_2 = 2\tfrac{1}{3}$$

מתקיים:

$$\begin{cases} \omega_3(1) = \omega_3(9) = 0 \\ \omega_3(7) = (7-1)(7-4)(7-9) = -36 \\ \omega_3(\frac{7}{3}) = \left(\frac{7}{3}-1\right)\left(\frac{7}{3}-4\right)\left(\frac{7}{3}-9\right) = \frac{400}{27} \end{cases}$$

ולכן:

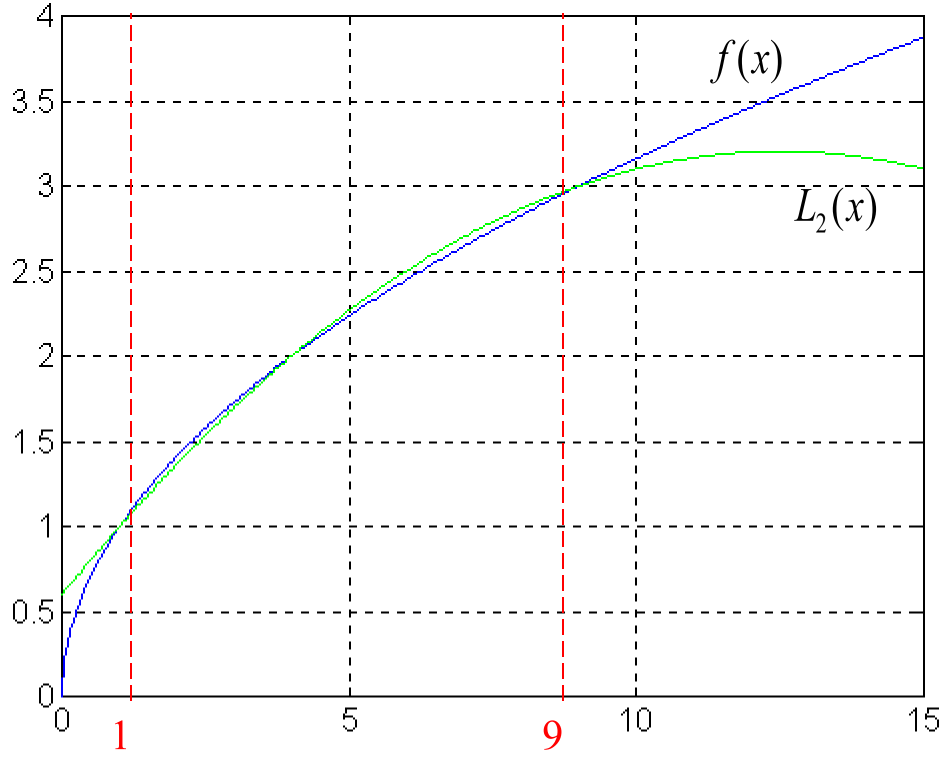
$$\boxed{\max_{1 \le x \le 9} |\omega_3(x)| = |\omega_3(7)| = 36}$$

המשך דוגמא

ולכן נקבל את ההערכה הבאה לשגיאת האינטרפולציה בקטע [1,9] :

$$\boxed{\max_{1\le x\le 9}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[1,9]}{3!}\max_{1\le x\le 9}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{3/8}{3!}\cdot 36 = 2.25}$$

המשך דוגמא



תרגיל

תהי $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}$

1. מצאו את פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ המקרב את $f(x)$ באמצעות נקודות שווות מרחק בקטע $[0,2]$.
2. העריכו את שגיאת האינטרפולציה בקטע $[0,2]$.

פתרון תרגיל- סעיף 1

1. נמצא את פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ המקרב את $f(x)=\frac{1}{x+1}$ באמצעות נקודות שוות מרחק בקטע $[0,2]$.

- ראשית נעיר כי מהגדרת הבעיה (חישוב $L_2(x)$) נובע כי $n=2$
- על מנת למצוא את פולינום האינטרפולציה $L_2(x)$ המבוקש יש להשתמש ב- $n+1=3$ נקודות אינטרפולציה בקטע $[0,2]$.
- נתון כי נקודות האינטרפולציה הן שוות מרחק בקטע ולפיכך נסיק כי $x_0=0, x_1=1, x_2=2$

המשך פתרון סעיף 1

- נמצא כעת את שלושת הפולינומים היסודיים של לגרנג' המתאימים לנקודות האינטרפולציה $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}\left(x^2-3x+2\right)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2+2x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}\left(x^2-x\right)$$

המשך פתרון סעיף 1

- נחשב את ערך הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x+1}$ בנקודות האינטרפולציה: $x_0=0, x_1=1, x_2=2$

$$y_0=f(x_0)=f(0)=1; \quad y_1=f(x_1)=f(1)=\frac{1}{2}; \quad y_2=f(x_2)=f(2)=\frac{1}{3}$$

- לסיום, נציב בנוסחת פולינום האינטרפולציה של לגרנג' ונקבל:

$$\boxed{L_2(x)=y_0\cdot l_0(x)+y_1\cdot l_1(x)+y_2\cdot l_2(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$L_2(x)=1\cdot\left(\frac{1}{2}\left(x^2-3x+2\right)\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(-x^2+2x\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\right)$$

- לאחר פישוט הביטוי נקבל:

$$\boxed{L_2(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+1}$$

פתרון תרגיל- סעיף 2

2. נעריך את שגיאת האינטרפולציה בקטע $[0,2]$.

- נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה עם $n=2$ והנקודות $x_0=0, x_1=1, x_2=2$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[0,2]}{3!}\max_{0\le x\le 2}\left|\underbrace{x(x-1)(x-2)}_{\omega_3(x)}\right|$$

- נחשב $M_3[0,2]=\max\limits_{0\le x\le 2}|f'''(x)|$:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'''(x)=-\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$M_3[0,2]=\max_{0\le x\le 2}\left|f'''(x)\right|=\left|f'''(0)\right|=6$$

המשך פתרון תרגיל- סעיף 2

- ❑ נחשב $\max_{0\le x\le 2}|\omega_3(x)|$:

- נקודות "חשודות" לקיצון מוחלט של $|\omega_3(x)|$ בקטע $[0,2]$ הן הקצוות $x=0,2$ ונקודות בהן $\omega'_3(x)=0$. נמצא אותן:

$$\omega_3(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$$

$$\Rightarrow \omega_3'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+2=0 \quad \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

- חישוב ערכים בנקודות חשודות והסקת מסקנה לגבי ערך מקסימלי

$$\begin{cases} |\omega_3(0)|=|\omega_3(2)|=0 \\ \left|\omega_3\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\right)\right|=\frac{2\sqrt{3}}{9}\longrightarrow \max \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{0\le x\le 2}|\omega_3(x)|=\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

המשך פתרון תרגיל- סעיף 2

❑ נחזור לנוסחת החסם לשגיאה ונציב את הערכים שקיבלנו:

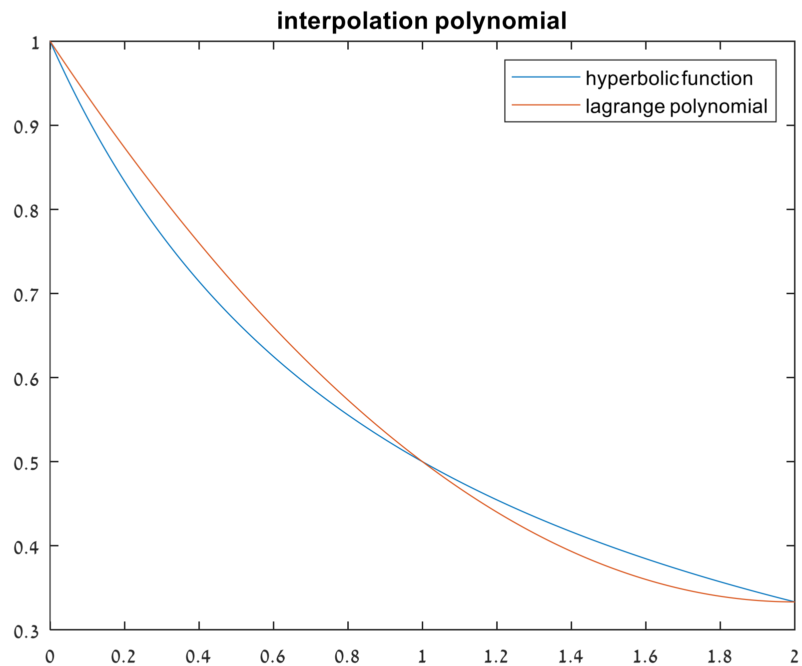
$$\max_{0\le x\le 2}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$M_3[0,2] = 6$$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[0,2]}{3!}\max_{0\le x\le 2}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{6}{3!}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0.3849\ldots$$

ייצוג גרפי של הפתרון

קירוב האינטרפולציה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x+1}$ בקטע $[0,2]$ באמצעות נקודות שוות מרחק $x_0=0, x_1=1, x_2=2$



$$\boxed{f(x)=\frac{1}{x+1}}$$

$$\boxed{L_2(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+1}$$

אינטרפולציה - הצגת לגרנג'

תרגילים נוספים

תרגיל 1

תהי $f(x)=e^{-x/3}$

יהי $L_2(x)$ פולינום האינטרפולציה המקרב את $f(x)$ בקטע $[0,3a]$
באמצעות הנקודות $x_0=0, x_1=a, x_2=2a$. ($a>0$ ממשי)

מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת בקטע רמת דיוק של לפחות $\varepsilon=10^{-3}$
כלומר $|f(x)-L_2(x)|\le 10^{-3}$ לכל $x\in[0,3a]$

פתרון תרגיל 1

❑ בשלב ראשון נעריך את שגיאת האינטרפולציה בקטע $[0,3a]$.

- נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה עם $n = 2$ והנקודות הנתונות $x_0 = 0, x_1 = a, x_2 = 2a$

$$\max_{0\le x\le 3a}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[0,3a]}{3!}\max_{0\le x\le 3a}\left|\underbrace{x(x-a)(x-2a)}_{\omega_3(x)}\right|$$

- נחשב $M_3[0,3a] = \max\limits_{0\le x\le 3a}|f'''(x)|$:

$$f(x)=e^{-x/3} \Rightarrow f'''(x)=-\frac{1}{27}e^{-x/3}$$

○ הפונקציה $f'''(x)$ היא פונקציה מעריכית מונוטונית ולכן הקיצון שלה בקטע $[0,3a]$ מתקבל בקצוות

$$M_3[0,3a]=\max_{0\le x\le 3a}\left|f'''(x)\right| = \max\left\{\left|f'''(0)\right|,\left|f'''(3a)\right|\right\} = \max\left\{\frac{1}{27},\frac{1}{27}e^{-a}\right\}=\frac{1}{27}$$

המשך פתרון תרגיל 1

- נחשב $\max_{0\le x\le 3a}|\omega_3(x)|$:
  - נקודות "חשודות" לקיצון מוחלט של $|\omega_3(x)|$ בקטע $[0,3a]$ הן הקצוות $x=0,3a$ ונקודות בהן $\omega'_3(x)=0$. נמצא אותן:

$$\omega_3(x)=x(x-a)(x-2a)=x^3-3ax^2+2a^2x$$

$$\Rightarrow \omega_3'(x)=0 \quad \Leftrightarrow 3x^2-6ax+2a^2=0 \quad \Leftrightarrow x_{1/2}=\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\right)\cdot a$$

  - חישוב ערכים בנקודות חשודות והסקת מסקנה לגבי ערך מקסימלי

$$\begin{cases} |\omega_3(0)|=0; \quad \left|\omega_3\left(\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\right)\cdot a\right)\right|=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3 \\ |\omega_3(3a)|=6a^3 \longrightarrow \max \end{cases} \Rightarrow \boxed{\max_{0\le x\le 3a}|\omega_3(x)|=6a^3}$$

המשך פתרון תרגיל 1

- נחזור לנוסחת החסם לשגיאה ונציב את הערכים שקיבלנו:

$$\boxed{\max_{0\le x\le 3a}\left|\omega_3(x)\right| = 6a^3} \qquad \boxed{M_3[0,3a] = \frac{1}{27}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\max_{0\le x\le 3a}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[0,3a]}{3!}\cdot\max_{0\le x\le 3a}\left|\omega_3(x)\right| = \frac{1/27}{3!}\cdot 6a^3 = \frac{1}{27}a^3}$$

המשך פתרון תרגיל 1

❑ בשלב השני נשתמש בהערכת השגיאה שקיבלנו על מנת לדרוש את רמת הדיוק המבוקשת $\varepsilon = 10^{-3}$:

- לשם כך נפתור את אי השוויון

$$\boxed{\max_{0 \le x \le 3a} \left| f(x) - L_2(x) \right| \le \frac{1}{27} a^3 \le 10^{-3}}$$

$$\frac{1}{27} a^3 \le 10^{-3} \qquad \Rightarrow a \le \sqrt[3]{27 \cdot 10^{-3}} = \frac{3}{10}$$

- נזכיר את האילוץ הנתון $a > 0$ ונסכם:

$$\boxed{\text{טווח ערכי } a \text{ המבטיח את רמת הדיוק } \varepsilon = 10^{-3} \text{ הוא } 0 < a \le 0.3}$$

תרגיל 2

תהי $f(x)=\frac{1}{(x+a)^2}$ ($a>0$ ממשי)

יהי $L_2(x)$ פולינום האינטרפולציה המקרב את $f(x)$ בקטע $[0,2]$ באמצעות נקודות שוות מרחק בקטע.

מצאו טווח ערכי a שעבורו מובטחת בקטע רמת דיוק של לפחות $\varepsilon=10^{-2}$

כלומר $|f(x)-L_2(x)|\le 10^{-2}$ לכל $x\in[0,2]$

פתרון תרגיל 2

- ❑ בשלב ראשון נעריך את שגיאת האינטרפולציה בקטע [0,2] .

- נשתמש בנוסחת החסם לשגיאת האינטרפולציה עם $n = 2$ ו- 3 נקודות שווות מרחק בקטע שהן $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$

$$\boxed{\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{M_3[0,2]}{3!}\max_{0\le x\le 2}\left|\underbrace{x(x-1)(x-2)}_{\omega_3(x)}\right|}$$

- נחשב $M_3[0,2] = \max\limits_{0\le x\le 2}|f'''(x)|$:

$$f(x)=\frac{1}{(x+a)^2} \Rightarrow f'''(x) = -\frac{24}{(x+a)^5}$$

  - ○ הפונקציה $f'''(x)$ היא פונקציה היפרבולית מונוטונית ולכן הקיצון שלה בקטע [0,2] מתקבל בקצוות

$$M_3[0,2] = \max_{0\le x\le 2}\left|f'''(x)\right| = \max\left\{\left|f'''(0)\right|,\left|f'''(2)\right|\right\} = \max\left\{\frac{24}{a^5},\frac{24}{(a+)2^5}\right\} = \frac{24}{a^5}$$

המשך פתרון תרגיל 2

- את $\max_{0\le x\le 2} |\omega_3(x)|$ עבור הנקודות $x_0=0, x_1=1, x_2=2$ חישבנו בדוגמא קודמת (שקף 41) וקיבלנו:

$$\max_{0\le x\le 2} |\omega_3(x)| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

- נחזור לנוסחת החסם לשגיאה ונציב את הערכים שקיבלנו:

$$\max_{0\le x\le 2} |f(x)-L_2(x)| \le \frac{M_3[0,2]}{3!} \max_{0\le x\le 2} |\omega_3(x)| = \frac{24/a^5}{3!} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{3}}{9a^5}$$

המשך פתרון תרגיל 2

- ❑ בשלב השני נשתמש בהערכת השגיאה שקיבלנו על מנת לדרוש את רמת הדיוק המבוקשת $\varepsilon = 10^{-2}$:

- לשם כך נפתור את אי השוויון

$$\boxed{\max_{0\le x\le 2}\left|f(x)-L_2(x)\right| \le \frac{8\sqrt{3}}{9a^5} \le 10^{-2}}$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{9a^5} \le 10^{-2} \quad \Rightarrow a^5 \ge \frac{8\sqrt{3}}{9}\cdot 10^2 \ \Rightarrow a \ge \sqrt[5]{\frac{8\sqrt{3}}{9}\cdot 10^2} \cong 2.7383...$$

- שימו לב כי הטווח שקיבלנו כולל האילוץ הנתון $a > 0$.
- נסכם:

טווח ערכי a המבטיח את רמת הדיוק $\varepsilon = 10^{-2}$ הוא $a \ge 2.7383..$

תרגיל 3

הוכיחו כי עבור הפולינומים היסודיים של לגרנג' המתאימים לנקודות האינטרפולציה $x_0, x_1, \cdots, x_n$ מתקיים

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1}$$

פתרון: נסתכל על $\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)}$ כעל פולינום האינטרפולציה המתאים לטבלה

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
1	1	1	$\cdots$	1

המשך פתרון תרגיל 3

כלומר, זהו פולינום אינטרפולציה ממעלה $\geq n$ שמקבל את אותו הערך (במקרה זה , הערך הקבוע 1), $n+1$ פעמים.

מכאן **<u>פולינום ההפרש</u>** $\boxed{P_n(x) = L_n(x) - 1}$ מתאפס לפחות $n+1$ פעמים (בנקודות האינטרפולציה)

ולכן לפי המשפט היסודי של האלגברה $P_n(x) = L_n(x) - 1 \equiv 0$

ובאופן שקול,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$$

מש"ל