דף נוסחאות באנליזה נומרית

1. שגיאות נומריות:

עבור x ערך מדויק ו- x^* ערך מקורב מגדירים:

- שגיאה נומרית: $N.E = x - x^*$
- שגיאה מוחלטת: $A.E = \left|x - x^*\right|$
- שגיאה יחסית: $R.E = \dfrac{\left|x - x^*\right|}{\left|x\right|}$

2. פתרון מערכת משוואות ליניאריות $Ax = b$

(A מטריצה ריבועית והפיכה מסדר n)

2.1 פירוק LU

משפט: תנאי מספיק 1 לקיום פירוק LU

אם תהליך האלימינציה של גאוס מתבצע ללא החלפת שורות, אז המטריצה A ניתנת לפירוק A=LU כאשר:

- המטריצה U היא מטריצה משולשת עליונה שמתקבלת מהדירוג של A בשיטת האלימינציה של גאוס.
- המטריצה L היא מטריצה משולשת תחתונה מהצורה $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

  שאיבריה מתחת לאלכסון הם הגורמים הכפליים $l_{ij},\ i > j$ בתהליך האלימינציה של גאוס אשר שימשו לאיפוס האברים a_{ij} בהתאמה.

משפט: תנאי מספיק 2 לקיום פירוק LU

לכל $1 \le k \le n$ נגדיר מינור מוביל של A באמצעות $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$

אם $\Delta_k \ne 0$ לכל $1 \le k \le n$, אזי אז המטריצה A ניתנת לפירוק A=LU כפי שהוגדר לעיל.

2.2 אי יציבות נומרית של שיטת גאוס ואסטרטגית בחירת צירים

- **שיטת Partial Pivoting**
  - בשלב ה- k של הדירוג (לכל $k = 1, .., n-1$) מחשבים את האינדקס p כך שיתקיים התנאי $\left|a_{pk}\right| = \max\limits_{k \le i \le n} \left|a_{ik}\right|$
  - במקרה ש- $k \ne p$ מבצעים החלפת שורות בהתאמה $R_k \leftrightarrow R_p$.
  - ממשיכים לפי אותו עיקרון עד להשלמת הדירוג. בסיום הדירוג, פותרים את המערכת השקולה המתקבלת.

2.3 נורמה וקטורית ונורמה מטריציונית במרחב $\mathbb{R}^n$

- **הגדרה של נורמה 2 ונורמה ∞ של וקטור במרחב $\mathbb{R}^n$:**
עבור וקטור $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$ מגדירים
  - נורמה 2 (נורמה אוקלידית): $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$
  - נורמה ∞ : $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$
- **נוסחאות לחישוב נורמה מטריציונית של $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ בנורמה 2 ובנורמה ∞:**
  - נורמה מטריציונית 2 (נורמה אוקלידית): $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}\left(A^tA\right)}$

$$\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\lambda_{max}((A^{-1})^tA^{-1})}=\sqrt{\lambda_{max}((A^tA)^{-1})}=\sqrt{\frac{1}{\lambda_{min}(A^t\,A)}}$$

  - נורמה מטריציונית ∞ : $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$
- **תכונות של נורמה מטריציונית:**
כל נורמה מטריציונית מקיימת את התכונות הבאות:

1) $\|A\|\ge 0,\qquad \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$
2) $\|A\|=0\Leftrightarrow\ A=[0]_{n\times n}$
3) $\|\lambda\cdot A\|=|\lambda|\cdot\|A\|,\qquad \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n},\lambda\in\mathbb{R}$
4) $\|A+B\|=\|A\|+\|B\|,\qquad \forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$
5) $\|A\cdot v\|\le\|A\|\cdot\|v\|,\qquad \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n},v\in\mathbb{R}^n$
6) $\|A\cdot B\|\le\|A\|\cdot\|B\|,\qquad \forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

2.4 שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת $Ax=b$

- **מודל השיטות**
  - ✓ מעוניינים למצוא פתרון x למערכת משוואות $Ax=b\quad(1)$
  - ✓ עוברים למערכת משוואות שקולה מהצורה $x=Bx+c\quad(2)$
  - ✓ מגדירים תהליך איטרטיבי $x^{(m+1)}=Bx^{(m)}+c;\quad m=0,1,2,\ldots\quad(3)$
  - ✓ עבור וקטור התחלה $x^{(0)}$ הנוסחה (3) מאפשרת לחשב סדרה רקורסיבית $\left\{x^{(m)}\right\}_{m=0}^{\infty}$
  - ✓ בתנאי משפט ההתכנסות הסדרה מתכנסת לפתרון המדויק x כלומר $\lim_{m\to\infty}x^{(m)}=x$.
- **תנאי עצירה ביישום נומרי להשגת רמת דיוק ε:**
  - שגיאה מוחלטת: $\left\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(m+1)}-x_i^{(m)}\right|\le\varepsilon$
- ניתוח רקורסיבי של השגיאה $e^{(m)}=x-x^{(m)}$ (השגיאה באיטרציה m):

$$e^{(m)}=B\cdot e^{(m-1)};\quad m=1,2,3,\ldots$$
$$e^{(m)}=B\cdot e^{(m-1)}=B^2\cdot e^{(m-2)}=\cdots=B^m\cdot e^{(0)}$$

- ← **הערכה לשגיאה באיטרציה m:** $\left\|e^{(m)}\right\|=\left\|B^m\cdot e^{(0)}\right\|\le\|B\|^m\cdot\left\|e^{(0)}\right\|$
- **חישוב מספר האיטרציות הנדרש לקבלת רמת דיוק ε** :
← על מנת לחשב את מספר האיטרציות המינימלי m הנדרש לחישוב וקטור מקורב $x^{(m)}$ לוקטור הפתרון x בנורמה ∞ ועם רמת דיוק ε נפתור את אי השוויון:

$$\left\|e^{(m)}\right\|_\infty\le\|B\|_\infty^m\cdot\left\|e^{(0)}\right\|_\infty\le\varepsilon$$

- **<u>נוסחאות איטרטיביות עבור שיטת יעקובי ושיטת GZ</u>**

<u>שיטת יעקובי</u>

$$x_i^{(m+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\cdot\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}\cdot x_j^{(m)}\right),i=1,2,...,n;\qquad m=0,1,2,...$$

<u>שיטת GZ</u>

$$x_i^{(m+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\cdot\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\cdot x_j^{(m+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\cdot x_j^{(m)}\right),i=1,2,...,n;\qquad m=0,1,2,...$$

- **<u>מטריצת האיטרציה עבור שיטת יעקובי ו- GZ:</u>**

עבור הפירוק $A=L+D+U$ מקבלים:

➢ $B_J=-D^{-1}\cdot(L+U)$ ו- $c_J=D^{-1}\cdot b$

➢ $B_{GZ}=-(L+D)^{-1}\cdot U$ ו- $c_{GZ}=(L+D)^{-1}\cdot b$

בשיטת יעקובי ידוע גם כי:

$$B_J=-\begin{pmatrix}0&\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\\frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\cdots&\frac{a_{21}}{a_{22}}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{a_{n1}}{a_{nn}}&\frac{a_{n2}}{a_{nn}}&\cdots&0\end{pmatrix},\quad c_J=\begin{pmatrix}\frac{b_1}{a_{11}}\\\frac{b_2}{a_{22}}\\\vdots\\\frac{b_n}{a_{nn}}\end{pmatrix}$$

- **<u>התכנסות השיטות האיטרטיביות</u>**
  - **<u>תנאי מספיק להתכנסות שיטת יעקובי ושיטת גאוס זיידל:</u>**

אם <u>מטריצת המקדמים</u> A היא <u>בעלת אלכסון שולט לחלוטין</u> (**SRDD**), כלומר אם מתקיים: $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\qquad i=1,2,..,n$

אזי שיטת יעקובי/שיטת GZ מתכנסת לכל וקטור התחלה $x^{(0)}$.

- **<u>הגדרה: רדיוס ספקטרלי של מטריצה</u>** $\rho(B)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ הע"ע של B שהם שורשי הפולינום האופייני $\Delta_B(\lambda)=|B-\lambda I|$

- **<u>תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטות איטרטיביות:</u>**

בהינתן מערכת $Ax=b$ השקולה למערכת $x=Bx+c$ אזי, לכל $x^{(0)}$ התחלתי, הסדרה האיטרטיבית $x^{(m+1)}=Bx^{(m)}+c;\;\; m=0,1,2,\ldots$ מתכנסת לפתרון המדויק x של המערכות השקולות <u>אםם</u> $\rho(B)<1$.

- **<u>תנאי מספיק להתכנסות שיטות איטרטיביות:</u>**

לכל נורמה מטריציונית מתקיים $\rho(B)<\|B\|$

לפיכך, עבור נורמה מטריציונית $\|\cdot\|$ שעבורה מתקיים $\|B\|=q<1$ הסדרה האיטרטיבית $x^{(m+1)}=Bx^{(m)}+c;\;\; m=0,1,2,\ldots$ מתכנסת בנורמה זו לפתרון המדויק x לכל $x^{(0)}$ התחלתי.

- **<u>תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת יעקובי במונחים של מטריצה A:</u>**
שיטת יעקובי מתכנסת לכל בחירה שרירותית $x^{(0)}$ של וקטור התחלתי <u>אם״ם</u> שורשי הפולינום $q_J(\lambda)$ נמצאים בתוך מעגל היחידה (כלומר $|\lambda_i|<1, \quad i=1,2,\cdots,n$)
כאשר:
$$q_J(\lambda)=|\lambda\cdot D+(L+U)|=\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix}$$

- **<u>תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות שיטת GZ במונחים של מטריצה A:</u>**
שיטת GZ מתכנסת לכל בחירה שרירותית $x^{(0)}$ של וקטור התחלתי <u>אם״ם</u> שורשי הפולינום $q_{GZ}(\lambda)$ נמצאים בתוך מעגל היחידה (כלומר $|\lambda_i|<1, \quad i=1,2,\cdots,n$)
כאשר:
$$q_{GZ}(\lambda)=|\lambda\cdot(L+D)+U|=\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix}$$

3. <u>פתרון משוואות לא ליניאריות</u>

<u>א. שיטת החצייה</u>

$$m_n=\frac{a_n+b_n}{2} \quad , \quad n\ge 0$$
$$|r-m_n|\le\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$$
$$|r-m_n|<\varepsilon \Leftarrow n>-1+\frac{\log(b_0-a_0)-\log\varepsilon}{\log 2}$$

<u>תנאים מספיקים להתכנסות שיטת החצייה:</u>
אם מתקיים:
1. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$,
2. $f(a)\cdot f(b)<0$,
3. ל- $f(x)$ יש שורש יחיד $r\in(a,b)$
אזי,
סדרת הקירובים $\{m_n\}_{n\ge 0}$ המתקבלת בשיטת החצייה המיושמת לפתרון המשוואה $f(x)=0$ בקטע $[a,b]$ תתכנס לשורש r, כלומר $\lim_{n\to\infty} m_n=r$.

<u>ב. שיטת נקודת שבת: מודל השיטה</u>

- ✓ מעוניינים למצוא פתרון r למשוואה מהצורה $f(x)=0$ (1) (r <u>שורש</u> של $f(x)$)
- ✓ עוברים למשוואה שקולה מהצורה $x=g(x)$ (2) (r <u>נקודת שבת</u> של $g(x)$)
- ✓ מגדירים תהליך איטרטיבי $x_{n+1}=g(x_n); \quad n=0,1,2,\ldots$ (3)
- ✓ עבור ערך התחלי x_0 הנוסחה (3) מאפשרת לחשב סדרה רקורסיבית $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$
- ✓ בתנאי משפט ההתכנסות הסדרה מתכנסת לפתרון המדויק x כלומר $\lim_{n\to\infty}x_n=r$.

ג. משפט ההתכנסות של שיטת נקודת השבת

נתונה פונקצית איטרציה $g(x)$ וקטע $I=[a,b]$. (נזכיר: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$)
אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $g(x)$ רציפה בקטע $I=[a,b]$.
2. מתקיים $g(I)\subseteq I$ (כלומר $a\le g(x)\le b$ לכל $a\le x\le b$)
3. הפונקציה $g(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b) ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $|g'(x)|<1$

(ניסוח יישומי לבדיקה: לכל $x\in(a,b)$ מתקיים $|g'(x)|\le L<1$ עבור $L=\max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$)

אזי, למשוואה $g(x)=x$ **קיים** פתרון **יחיד** r בקטע $I=[a,b]$ והתהליך האיטרטיבי $x_{n+1}=g(x_n);\quad n\ge 0$ מתכנס לפתרון r (כלומר $\lim_{n\to\infty}x_n=r$) לכל $x_0=[a,b]$ התחלתי.

ד. תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות לוקלית: נקודת משיכה ונקודת דחייה

תהי r נקודת שבת של $g(x)$ $\left(g(r)=r\right)$ ונניח כי $g(x)$ גזירה לוקלית בסביבת r.
הוכחנו כי עבור השגיאה $e_n=x_n-r$ מתקיים $e_n\approx g'(r)\cdot e_{n-1}$ וגם $e_n\approx\left(g'(r)\right)^n\cdot e_0$
ולכן:

- אם $|g'(r)|<1$ אזי נקודת השבת r היא **נקודת משיכה** של $g(x)$ והתהליך האיטרטיבי המתאים $x_{n+1}=g(x_n);\quad n\ge 0$ יתכנס אליה לוקלית.
- אם $|g'(r)|\ge 1$ אזי נקודת השבת r היא **נקודת דחייה** של $g(x)$ והתהליך האיטרטיבי המתאים $x_{n+1}=g(x_n);\quad n\ge 0$ יתבדר.

ה. צורת התכנסות של שיטת נקודת שבת

- אם $0\le g'(x)<1$ לכל $x\in I$, אזי **ההתכנסות בקטע** I מונוטונית.
- אם $-1<g'(x)\le 0$ לכל $x\in I$, אזי **ההתכנסות בקטע** I ספירלית.

ו. אנליזת שגיאות וסדר התכנסות של שיטת נקודת שבת

- מניתוח של שגיאות עוקבות בשיטת נקודת שבת קבלנו את התוצאה הבאה

$$\boxed{e_{n+1}=g'(r)\cdot e_n+\frac{g''(r)}{2!}\cdot e_n^2+\frac{g'''(r)}{3!}\cdot e_n^3+\cdots}$$

- מסקנה: אם עבור פונקצית האיטרציה $g(x)$ מתקיים $\begin{cases} g(r)=r \\ g^{(k)}(r)=0;\quad 1\le k\le p-1 \\ g^{(p)}(r)\ne 0\end{cases}$

אזי סדר התכנסות השיטה לנקודת השבת r של $g(x)$ הוא בדיוק p.

ז. שיטת ניוטון-רפסון (NR)

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad,\quad n\ge 0\quad,\quad f'(x_n)\ne 0}$$

שיטת NR היא מקרה פרטי של שיטת נקודת שבת עבור פונקצית האיטרציה $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$
ולכן כל התיאוריה הנוגעת לשיטת נקודת שבת חלה גם על שיטת ניוטון רפסון.

ח. אנליזת שגיאות וסדר התכנסות של שיטת NR

מניתוח של שגיאות עוקבות בשיטת NR קבלנו את התוצאה הבאה

$$\boxed{e_{n+1}=\frac{\frac{1}{2}f''(r)\cdot e_n^2+\frac{1}{3}f'''(r)\cdot e_n^3+\frac{1}{8}f^{(4)}(r)\cdot e_n^4+\ldots}{f'(r)+f''(r)\cdot e_n+\frac{f'''(r)}{2!}\cdot e_n^2+\cdots}}$$

מסקנות (מקרים פרטיים):

- אם $f'(r)\neq 0$ ← התכנסות ריבועית לפחות.
- אם $f'(r)\neq 0$ וגם $f''(r)\neq 0$ ← $\boxed{e_{n+1}\simeq\frac{f''(r)}{2f'(r)}\cdot e_n^2}$ ← התכנסות ריבועית בדיוק.
- אם $f'(r)=0$ וגם $f''(r)\neq 0$ ← $\boxed{e_{n+1}\simeq\frac{1}{2}\cdot e_n}$ ← התכנסות לינארית בדיוק.

4. אינטרפולציה פולינומיאלית

4.1 הצגת לגרנג' לפולינום האינטרפולציה

נתונה טבלה של $n+1$ נקודות $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$ כאשר
$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$

הפולינומים היסודיים של לגרנג'

$$\boxed{l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\quad;\quad k=0,1,\cdots n}$$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$l_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

הצגת לגרנג' לפולינום האינטרפולציה

$$\boxed{L_n(x)=y_0\cdot l_0(x)+y_1\cdot l_1(x)+\cdots+y_n\cdot l_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\cdot l_k(x)}$$

נוסחת שגיאת האינטרפולציה בנקודה $x\in[a,b]$:

$$\boxed{f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\omega_{n+1}(x)};\quad a<\xi<b}$$

הערכה/חסם לשגיאת האינטרפולציה המוחלטת בקטע $[a,b]$:

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-L_n(x)\right|\le \frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$
$$M_{n+1}[a,b]=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|;\quad \omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

מסקנה: בדיקת סימן שגיאת האינטרפולציה בתת קטע $[c,d]\subseteq[a,b]$

$$\underset{c\le x\le d}{sign}\left(f(x)-L_n(x)\right)=\underset{a<\xi<b}{sign}\left(f^{(n+1)}(\xi)\right)\cdot\underset{c\le x\le d}{sign}\left(\omega_{n+1}(x)\right)$$
$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

4.2 הצגת ניוטון לפולינום האינטרפולציה

נתונה טבלה של $n+1$ נקודות $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$ כאשר $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$

הפרשים מחולקים (קירובים לנגזרות באמצעות נק' האינטרפולציה):

- הפרש מחולק מסדר 1:

$$f_{k,k+1}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}=\frac{f_{k+1}-f_k}{x_{k+1}-x_k};\quad k=0,\dots,n-1$$

- הפרש מחולק מסדר 2:

$$f_{k,k+1,k+2}=\frac{f[x_{k+1},x_{k+2}]-f[x_k,x_{k+1}]}{x_{k+2}-x_k}=\frac{f_{k+1,k+2}-f_{k,k+1}}{x_{k+2}-x_k};\quad k=0,\dots,n-2$$
$$\vdots$$

- הפרש מחולק מסדר n:

$$f_{0,1,\dots,n-1,n}=\frac{f[x_1,\cdots,x_{n-1},x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}=\frac{f_{1,\dots,n-1,n}-f_{0,1,\dots,n-1}}{x_n-x_0};$$

הפולינומים היסודיים של ניוטון

$$\begin{cases}N_0(x)=1\\ N_k(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1});\quad k=1,\dots,n\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_0(x)\equiv 1\\ N_1(x)=(x-x_0)\\ N_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)\\ \vdots\\ N_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{cases}$$

הצגה של ניוטון לפולינום האינטרפולציה:

$$P_n(x)=f(x_0)+f_{01}\cdot(x-x_0)+f_{012}\cdot(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f_{01\dots n}\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

הערה: חישובי שגיאות עבור פולינום אינטרפולציה בייצוג של ניוטון זהים לאלו שהוצגו קודם עבור הצגת לגרנג' (נובע מיחידות קירוב האינטרפולציה. זה אותו מקרב רק ייצוג אחר).

4.3 פולינומי צ'ביצ'ב ואינטרפולציה אופטימלית

הגדרה:

$$\boxed{\begin{array}{ll} T_n(\theta)=\cos(n\theta) & \theta\in[0,\pi] \quad , \quad n=0,1,2,\cdots \\ x=\cos\theta \Rightarrow & \\ T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos \quad x) & x\in[-1,1] \quad , \quad n=0,1,2,\cdots \end{array}}$$

נוסחה רקורסיבית לחישוב פולינומי צ'ביצ'ב:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \quad , \quad n=1,2,\cdots \\ T_0(x)=1 \quad ; \quad T_1(x)=x \end{array}}$$

ארבעת פולינומי צ'ביצ'ב ראשונים:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x$$

שורשים $\{\xi_k\}$ ונקודות קיצון $\{\eta_k\}$ של פולינום צ'ביצ'ב $T_n(x)$ בקטע $[-1,1]$:

$$\boxed{\left\{\xi_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right\}_{k=1}^{n} \quad ; \quad \left\{\eta_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n}}$$

מקרה פרטי: עבור $n=3$ שורשים של $T_3(x)$ הם: $\xi_0=\frac{\sqrt{3}}{2},\xi_1=0,\xi_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ונקודות קיצון מוחלט בקטע $[-1,1]$ הן $\eta_0=1,\eta_1=\frac{1}{2},\eta_2=-\frac{1}{2},\eta_3=-1$

פולינום צ'ביצ'ב מתוקן: $\boxed{\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)}$

ארבעת פולינומי צ'ביצ'ב מתוקנים ראשונים:

$$\tilde{T}_0(x)=1,\ \tilde{T}_1(x)=x,\ \tilde{T}_2(x)=x^2-\frac{1}{2},\ \tilde{T}_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$$

הערכה לשגיאת האינטרפולציה האופטימלית באמצעות נקודות צ'ביצ'ב בקטע $[-1,1]$:

$$\boxed{\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-L_n(\tilde{T};x)\right|\le\frac{M_{n+1}[-1,1]}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}; \qquad M_{n+1}[-1,1]=\max_{-1\le x\le 1}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}$$

נוסחאות מעבר בין הקטעים $[-1,1]$ ו- $[a,b]$:

$$\boxed{\begin{array}{l} x\in[-1,1]\to z\in[a,b]\Leftrightarrow z=\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2} \\ z\in[a,b]\to x\in[-1,1]\Leftrightarrow x=\frac{2}{b-a}z+\frac{b+a}{b-a} \end{array}}$$

הערכה לשגיאת האינטרפולציה באופטימלית באמצעות נקודות צ'ביצ'ב מותאמות לקטע $[a,b]$

$$\boxed{\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-L_n(\tilde{T};x)\right|\le\frac{M_{n+1}[a,b]}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}; \qquad M_{n+1}[a,b]=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}$$

5. קירוב ריבועים מינימליים

בעיית ריבועים מינימליים בממ"פ – מקרב אופטימלי לפי נורמה 2:

יהי U תת מרחב ממימד סופי של ממ"פ V.

אזי, לכל $v \in V$ קיים $u^* \in U$ יחיד שהוא המקרב הטוב ביותר בתת המרחב ביחס לנורמה 2 כך שמתקיים: $\|E\|_2 = \|v - u^*\|_2 \le \|v - u\|_2$ לכל $u \in U$.

מקרב הטוב ביותר לפי קריטריון זה- נקרא **מקרב ריבועים מזעריים/מינימליים**

מציאת מקרב ריבועים מינימליים לפונקציה $y = f(x) \in C[a,b]$ ולפונקציה $y = f(x)$ הנתונה באמצעות טבלת ערכים $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ (קירוב במרחב $\mathbb{R}^N$)

הגדרת הבעיה:

רוצים למצוא לפונקציה נתונה $y = f(x)$ (ייצוג רציף/ייצוג דיסקרטי) את המקרב הטוב ביותר $Q_m(x)$ במובן ריבועים מינימליים (לפי נורמה 2) מתוך תת מרחב מקרבים נתון U.

מכפלה פנימית רציפה של פונקציות במרחב $C[a,b]$:

עבור $f(x), g(x) \in C[a,b]$ המ"פ הרציפה הסטנדרטית מוגדרת ע"י $\boxed{\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx}$.

מכפלה פנימית דיסקרטית של פונקציות על קבוצת נקודות $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ במרחב $\mathbb{R}^N$:

תהיינה $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות המוגדרות בקבוצת הנקודות $x_1, x_2, \cdots, x_N$ אזי המ"פ הדיסקרטית ביניהן, ביחס לקבוצת הנקודות הנתונה, מוגדרת ע"י $\boxed{\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \cdot g(x_k)}$.

מערכת משוואות נורמליות (למקרה הדיסקרטי ולמקרה הרציף):

בהינתן בסיס $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)\}$ של תת מרחב המקרבים U:

רוצים למצוא את הצירוף הלינארי הטוב ביותר במובן הריבועים המינימליים: $\boxed{Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \phi_j(x)}$

מוצאים את המקדמים $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ ע"י פתרון המערכת המשוואות הנורמלית (הסימטרית) הבאה:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \cdots & \langle \phi_m, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_m, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_m \rangle & \langle \phi_1, \phi_m \rangle & \cdots & \langle \phi_m, \phi_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, \phi_0 \rangle \\ \langle y, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \phi_m \rangle \end{bmatrix}}$$

במקרה הרציף מובטח קיום פתרון יחיד לפי משפט ממבנים 1.
במקרה הדיסקרטי- מובטח קיום פתרון יחיד בתנאי $m < N$.

מקרה פרטי:
אם הבסיס $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)\}$ הוא בסיס אורתוגונלי ביחס למ"פ המתאימה, אז $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \quad \forall i \ne j$ ולכן מקבלים למעשה מערכת אלכסונית שהפתרון שלה הוא וקטור

מקדמי פורייה $\boxed{c_k = \frac{\langle y, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}, \quad k = 0,1,\dots,m}$

<u>מקדמי פורייה וקירוב ר״מ פולינומיאלי למקרה רציף</u>

עבור קבוצת פולינומים אורתוגונליים $\{\tilde{p}_0(x), \tilde{p}_1(x), \cdots, \tilde{p}_n(x)\}$ ביחס למ״פ רציפה בקטע $[a,b]$ המקרב הטוב ביותר במובן ר״מ לפונקציה $f(x)$ הוא

$$Q_n(x) = c_0 \cdot \tilde{p}_0(x) + c_1 \cdot \tilde{p}_1(x) + \cdots + c_n \cdot \tilde{p}_n(x)$$

כאשר <u>מקדמי פורייה המתאימים</u> הם: $\boxed{c_k = \dfrac{\langle f, \tilde{P}_k \rangle}{\langle \tilde{P}_k, \tilde{P}_k \rangle} = \dfrac{\int_a^b f(x) \cdot \tilde{P}_k(x)\,dx}{\int_a^b \tilde{P}_k(x) \cdot \tilde{P}_k(x)\,dx}, \quad k = 0,1,\dots,n}$.

<u>מקדמי פורייה וקירוב ר״מ פולינומיאלי למקרה דיסקרטי</u>

עבור קבוצת פולינומים אורתוגונליים $\{\tilde{p}_0(x), \tilde{p}_1(x), \cdots, \tilde{p}_n(x)\}$ ביחס למ״פ דיסקרטית על קבוצת הנקודות $\{x_i\}_{i=1}^N$ 'המקרב הטוב ביותר במובן ר״מ לפונקציה הנתונה ע״י $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ הוא $Q_n(x) = c_0 \cdot \tilde{p}_0(x) + c_1 \cdot \tilde{p}_1(x) + \cdots + c_n \cdot \tilde{p}_n(x)$

כאשר <u>מקדמי פורייה המתאימים</u> הם: $\boxed{c_k = \dfrac{\langle y, \tilde{P}_k \rangle}{\langle \tilde{P}_k, \tilde{P}_k \rangle} = \dfrac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \tilde{P}_k(x_i)}{\sum_{i=1}^N \left(\tilde{P}_k(x_i)\right)^2}, \quad k = 0,1,\dots,n}$.

<u>קירוב ריבועים מינימליים לפונקציה בממ״פ $C[a,b]$ - מסקנה:</u>

יהי $V = C[a,b]$ ממ״פ עם מ״פ טבעית $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

עם תת המרחב $U = Span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\} \subseteq C[a,b]$.

אזי, אינטגרל מהצורה $\int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^m c_k \cdot \varphi_k(x))^2 dx$ יהיה מינימלי עבור $Q_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k \cdot \varphi_k(x)$ שהוא המקרב הטוב ביותר במובן ר״מ לפונקציה $f(x) \in C[a,b]$. (כלומר, עם מקדמים c_k שהם פתרון הממ״ל הנורמלית המתאימה, במקרה שהקבוצה $\{\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ היא א״ג אז המקדמים c_k יהיו מקדמי פורייה)

<u>פולינומי לז'נדר</u>: <u>פולינומים אורתוגונליים ביחס למ״פ רציפה בקטע $[a,b]$</u>

- ארבעה פולינומי לז'נדר ראשונים בקטע $[-1,1]$:

$$\boxed{\tilde{P}_0(x) = 1, \quad \tilde{P}_1(x) = x, \quad \tilde{P}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \tilde{P}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x}$$

- **<u>נוסחה רקורסיבית עבור פולינומים לז'נדר בקטע $[-1,1]$:</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{P}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\tilde{P}_n(x) - \beta_n \tilde{P}_{n-1}(x), \quad n \ge 1 \\ \tilde{P}_0(x) = 1 \qquad ; \quad \tilde{P}_1(x) = x \\ \alpha_n = \dfrac{\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}{\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle} \qquad \beta_n = \dfrac{\langle x\tilde{P}_n, \tilde{P}_{n-1} \rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_{n-1} \rangle} = \dfrac{\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_n \rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1}, \tilde{P}_{n-1} \rangle} \end{array}}$$

- **פולינומי לז'נדר בקטע $[a,b]$:**

ניתן להגדיר פולינומי לז'נדר בקטע $[a,b]$ באמצעות חישוב פולינומי לז'נדר בקטע $[-1,1]$ ושימוש בנוסחת המעבר $x=\frac{2}{b-a}z-\frac{b+a}{b-a}$.

נוסחה רקורסיבית עבור פולינומים אורתוגונליים- מקרה דיסקרטי

$$\tilde{P}_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\tilde{P}_n(x)-\beta_n\tilde{P}_{n-1}(x),\quad n\ge 1$$

$$\tilde{P}_0(x)=1;\qquad \tilde{P}_1(x)=x-\alpha_0;\quad \alpha_0=\frac{\sum_{k=1}^{N}x_k}{N}$$

$$\alpha_n=\frac{\langle x\tilde{P}_n,\tilde{P}_n\rangle}{\langle \tilde{P}_n,\tilde{P}_n\rangle}\qquad \beta_n=\frac{\langle x\tilde{P}_n,\tilde{P}_{n-1}\rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1},\tilde{P}_{n-1}\rangle}=\frac{\langle \tilde{P}_n,\tilde{P}_n\rangle}{\langle \tilde{P}_{n-1},\tilde{P}_{n-1}\rangle}$$

6. אינטגרציה נומרית

א. נוסחת הטרפז הלוקלית

קירוב לאינטגרל המסוים $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ בתת הקטע $[x_k,x_{k+1}]$ באורך h

נוסחת הקירוב הלוקלי:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\cong T_1\left[f;x_k,x_{k+1}\right]=\frac{h}{2}\cdot\left[f_k+f_{k+1}\right]\qquad ;h=x_{k+1}-x_k$$

נוסחת שגיאת הקירוב הלוקלי

$$E_1^T\left[f;x_k,x_{k+1}\right]=-\frac{h^3}{12}\cdot f''(r_k),\quad x_k<r_k<x_{k+1}$$

ב. נוסחת הטרפז הגלובלית

קירוב לאינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ ע"י חלוקת הקטע $[a,b]$ ל- n תתי קטעים באורך h

נוסחת הקירוב הגלובלי:

$$\int_a^b f(x)dx\cong T_n\left[f;a,b\right]=\frac{h}{2}\cdot\left[f_0+2\sum_{k=1}^{n-1}f_k+f_n\right]\qquad ;\quad h=\frac{b-a}{n}$$

נוסחת שגיאת הקירוב הגלובלי

$$E_n^T\left[f;a,b\right]=-\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}f''(\xi),\quad a<\xi<b$$

נוסחת החסם לשגיאת הקירוב הגלובלי

$$\max_{a\le x\le b}\left|E_n^T\left[f;a,b\right]\right|\le\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot M_2\qquad M_2=\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

ג. נוסחת סימפסון הלוקלית

קירוב לאינטגרל המסוים $\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx$ הבנוי על פרבולה דרך הנקודות $\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\}$

כאשר $h = x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1}$

<u>נוסחת הקירוב הלוקלי</u>

$$\boxed{\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \cong S_2\left[f; x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right] = \frac{h}{3}\cdot\left[f_k + 4\cdot f_{k+1} + f_{k+2}\right]}$$

<u>נוסחת שגיאת הקירוב הלוקלי</u>

$$\boxed{E_2^S\left[f; x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right] = -\frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(r_k), \quad x_k < r_k < x_{k+2}}$$

ד. נוסחת סימפסון הגלובלית:

קירוב לאינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ ע"י חלוקת הקטע $[a,b]$ ל- $2n$ תתי קטעים שווי אורך h:

<u>נוסחת הקירוב הגלובלי:</u>

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \ S_{2n}\left[f; a,b\right] = \frac{h}{3}\cdot\left[f_0 + 4\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n}\right] \quad ; \quad h = \frac{b-a}{2n}}$$

<u>נוסחת שגיאת הקירוב הגלובלי</u>

$$\boxed{E_{2n}^S\left[f; a,b\right] = -\frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b}$$

<u>נוסחת החסם לשגיאת הקירוב הגלובלי</u>

$$\boxed{\max_{a\le x\le b}\left|E_{2n}^S\left[f; a,b\right]\right| \le \frac{1}{180}\cdot\frac{(b-a)^5}{(2n)^4} M_4 \quad ; \quad M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|}$$

ה. <u>שגיאת אינטגרציה אינטרפולטורית</u>

אם מקרבים את האינטגרל המסוים $I = \int_a^b f(x)dx$ באמצעות $I^* = \int_a^b L_n(x)dx$ כאשר $L_n(x)$

הוא פולינום האינטרפולציה ממעלה המקרב את $f(x)$ בקטע $[a,b]$ באמצעות הנקודות

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ אז ניתן להציג את שגיאת האינטגרציה כאינטגרל של שגיאת האינטרפולציה באופן הבא:

$$\boxed{I - I^* = \int_a^b \left(f(x) - L_n(x)\right)dx = \int_a^b \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\omega_{n+1}(x)}\right)dx}$$

חסם לשגיאת האינטרפולציה האינטרפולטורית

$$\boxed{\left|I - I^*\right| \le \int_a^b \left|f(x) - L_n(x)\right|dx = \frac{(b-a)}{(n+1)!}\underbrace{\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}_{M_{n+1}[a,b]}\cdot\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|}$$

פקודות שימושיות ב- Matlab

הפעולה	כתיבה ב- Matlab
אתחול וקטור שורה : למשל, $v=(1,2,3)$	$v=[1\ 2\ 3]$
אתחול וקטור עמודה : למשל, $v=(1\ 2\ 3)^t$	$v=[1\ 2\ 3]'$ או $v=[1;\ 2;\ 3]$
אתחול מטריצה A : למשל $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&5\\7&8&9\end{pmatrix}$	$A=\ [1\ 2\ 3;\ -1\ 2\ 5;7\ 8\ 9]$
חישוב מטריצה מוחלפת $B=A^t$	$B=A'$
חישוב מטריצה הופכית $B=A^{-1}$ (עבור מטריצה הפיכה)	$B=inv(A)$
חישוב דטרמיננטה של מטריצה A	$det(A)$
פתרון ממ"ל $Ax=b$ עם פתרון יחיד	$x=inv(A)*b$
פירוק LU של מטריצה A	$[L,U]=lu(A)$ הפקודה מציגה את שתי המטריצות L ו- U בנפרד
חישוב נורמה של וקטור v	נורמה 2 : $norm(v,2)$ נורמה ∞ : $norm(v,inf)$
חישוב נורמה של מטריצה A	נורמה 2 : $norm(A,2)$ נורמה ∞ : $norm(A,inf)$
חישוב ערכים עצמיים של A	$eig(A)$
חישוב המטריצות U,D,L בפירוק $A=L+D+U$	$D=diag(diag(A))$ $L=tril(A)-D$ $U=triu(A)-D$
חישוב המטריצות B_J,B_{GZ},	$B_J=-inv(D)*(L+U)$ $B_{GZ}=-inv(L+D)*U$
חישוב רדיוס ספקטרלי של מטריצה B	$norm(eig(B),inf)$
חישוב שורשים של פולינום $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$	1. בניית וקטור עמודה באורך $n+1$ עם המקדמים של הפולינום בסדר יורד (מהמקדם של החזקה הגבוהה למקדם של החזקה הנמוכה, כולל הצבת מקדמים =0 אם הם חסרים בפולינום) $p=[a_n;\ldots;a_1;\ a_0]$ 2. חישוב השורשים ע"י הפקודה roots(p)
מציאת n פולינומי צ'ביצ'ב ראשונים בקטע $[-1,1]$	syms x chebyshevT ([0, 1, 2, 3, …., n-1], x <u>דוגמא</u> : נמצא ארבעת פולינומי צ'ביצב ראשונים ב- $[-1,1]$ syms x chebyshevT ([0, 1, 2, 3], x) פלט: $[1,x,2*x\text{^}2\ -\ 1,4*x\text{^}3\ -\ 3*x]$

מציאת n פולינומי צ'ביצ'ב ראשונים בקטע כללי $[a,b]$	syms x a b
	k = 0: n-1;
	xi = (2*x - (a+b) /(b-a));
	T = chebyshevT(k, xi);
	
	<u>דוגמא</u> : נמצא ארבעת פולינומי צ'ביצב ראשונים ב- $[0,2]$
	syms x
	k= 0: 3;
	xi = (2*x - 1);
	T = chebyshevT(k, xi);
	פלט:
	$[1,2*x\ -\ 1,8*x\text{^}2\ -\ 8*x\ +\ 1,$
	$32*x\text{^}3\ -\ 48*x\text{^}2\ +\ 18*x\ -\ 1]$

מציאת n פולינומי לז'נדר ראשונים (לא מתוקנים) בקטע $[-1,1]$
 	
(ניתן לעבור לייצוג מתוקן באמצעות חלוקה במקדם המוביל)
	`syms x`
	`legendreP([0 1 2 3, …, n-1], x)`
	
	<u>דוגמא:</u>
	נמצא ארבעת פולינומי לז'נדר ראשונים (לא מתוקנים) ב- $[-1,1]$
	`syms x`
	`legendreP([0 1 2 3], x)`
	פלט:
	$\left[1, x, \frac{3*x^2}{2} - \frac{1}{2}, \frac{5*x^3}{2} - \frac{3*x}{2}\right]$

מציאת n פולינומי לז'נדר ראשונים מתוקנים (monic) בקטע $[-1,1]$	`>> syms x`
	`P = sym(zeros(1,N+1));`
	`for k = 0:n-1`
	`    Pk = legendreP(k,x);`
	`    factor =`
	`2^k*factorial(k)^2/factorial(2*k);`
	`    P(k+1) = simplify(factor*Pk);`
	`end`
	`P`
	
	<u>דוגמא:</u>
	נמצא 4 פולינומי לז'נדר ראשונים מתוקנים ב- $[-1,1]$
	`>> syms x`
	`P = sym(zeros(1,4));`
	`for k = 0:3`
	`    Pk = legendreP(k,x);`
	`    factor =`
	`2^k*factorial(k)^2/factorial(2*k);`
	`    P(k+1) = simplify(factor*Pk);`
	`end`
	`P`
	פלט: `[1, x, x^2 - 1/3, x^3 - (3*x)/5]`

מציאת n פולינומי לז'נדר ראשונים מתוקנים (monic) בקטע $[a,b]$	דוגמא: חישוב 3 פולינומי לז'נדר בקטע $[0,2]$
	`syms x`
	`a=0;`
	`b=2;`
	`n=3;`
	`P = sym(zeros(1,3));`
	`xi = (2*x - (a+b) /(b-a));`
	`for k = 0:3`
	`    Pk = legendreP(k, xi);`
	`    factor =`
	`2^k*factorial(k)^2/factorial(2*k);`
	`    P(k+1) = simplify(factor * Pk);`
	`end`
	`P`
	פלט:
	`P =`
	`[1, 2*x - 1, 4*x^2 - 4*x + 2/3, 8*x^3 - 12*x^2 + (24*x)/5 - 2/5]`

דוגמא לחישוב קבוצת פולינומים א"ג ביחס למ"פ דיסקרטית על קבוצת נקודות נתונה:
 	
מציאת 3 פולינומים אורתוגונליים ראשונים מתוקנים (monic) ביחס לקבוצת הנקודות $\{0,1,2,3,4\}$
	<pre>> syms x
	
	x_nodes = [0,1,2,3,4].';
	phi = [ones(size(x_nodes)),
	x_nodes, x_nodes.^2];
	U = phi;
	for j = 1:3
	    for k = 1:j-1
	        U(:,j) = U(:,j) -
	(U(:,k)'*phi(:,j))/(U(:,k)'*U(:,k))
	* U(:,k);
	    end
	    U(:,j) = U(:,j)/norm(U(:,j));
	end
	P = sym(([ones(length(x_nodes),1),
	x_nodes, x_nodes.^2] \ U).' * [1;
	x; x^2]);
	>> P</pre>

חישוב אינטגרל מסוים $I=\int_a^b f(x)\,dx$	I = integral(f,a,b)
	
	למשל: חישוב $I=\int_0^1 (e^x+x^2)dx$
	<pre>>> fun=@(x) exp(x)+x.^2;
	>> I = integral(fun,0,1)
	
	I =
	
	   2.0516</pre>