אנליזה נומרית: מצגת מלווה 13

Numerical Integration:

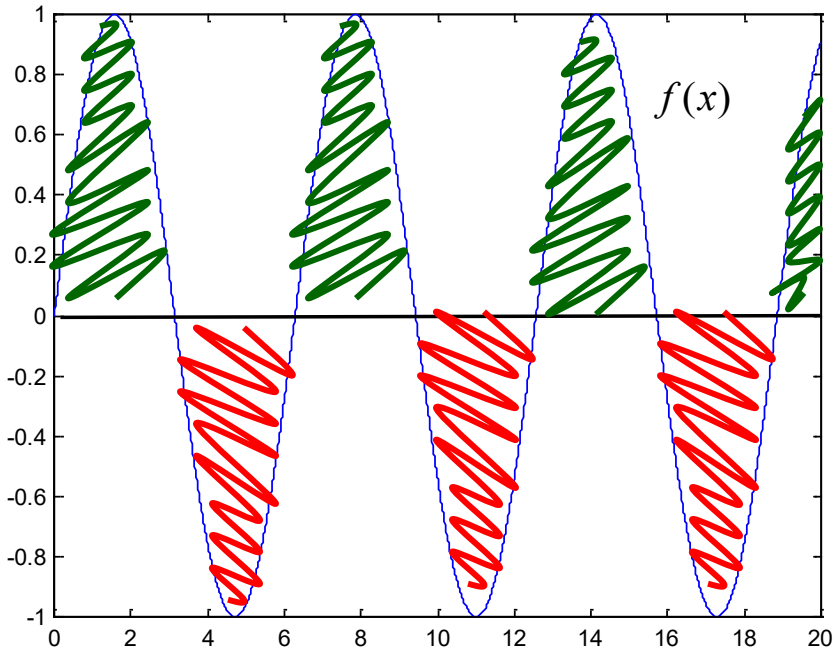
Part a. Trapezoidal Method

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

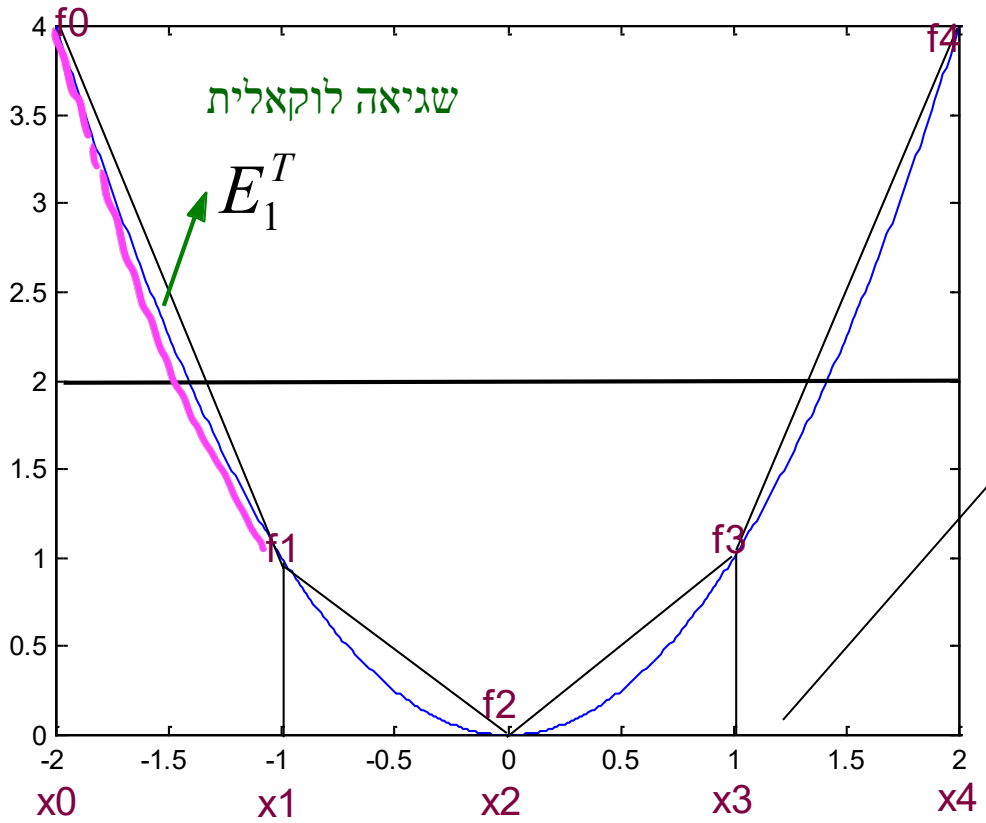
אינטגרציה נומרית

$$\int_a^b f(x)dx$$

<u>מטרה:</u> חישוב קירוב נומרי לאינטגרל המסוים ("שטח")



שיטת הטרפז - הרעיון הכללי



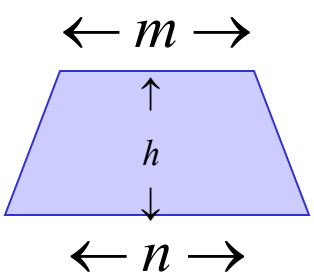
$$h = \frac{b-a}{n}$$

מחלקים את הקטע $[a,b]$ ל- n תתי קטעים שווים באורכם (אורך כל קטע $h = \frac{b-a}{n}$), ומסכמים את "שטחי" הטרפזים בכל תתי הקטעים. סכום זה מהווה **קירוב לאינטגרל המסוים** $\int_a^b f(x)dx$.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

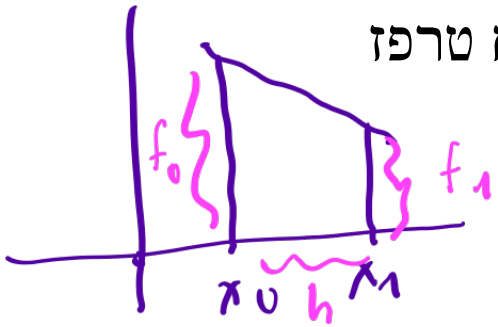
שיטת הטרפז בקטע - נוסחאות לוקאליות

$$s = \frac{(m+n)\cdot h}{2}$$



תזכורת:

שטח טרפז



נתבונן בתת הקטע הראשון $[x_0,x_1]$ ונסמן $f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1$

אזי **קירוב הטרפז הלוקאלי לאינטגרל המסוים** $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ נתון ע"י:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong T_1[f, x_0, x_1] = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] = \frac{h}{2}[f_0 + f_1]$$

זוהי **נוסחת הטרפז הלוקאלית** המתאימה לפונקציה $f(x)$ **בתת הקטע הראשון** $[x_0,x_1]$.

שיטת הטרפז - נוסחאות לוקאליות, המשך

<u>באופן כללי</u>, אם נתייחס לתת קטע כללי $[x_k,x_{k+1}] = [x_k,x_k + h]$

ונסמן $f(x_k) = f_k, f(x_{k+1}) = f_{k+1}$

אזי **<u>קירוב הטרפז הלוקאלי לאינטגרל המסוים</u>** $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$

<u>בתת הקטע הכללי</u> $[x_k,x_{k+1}] = [x_k,x_k + h]$ נתון ע"י:

$$T_1[f;x_k,x_{k+1}] = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}[f_k + f_{k+1}]$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \cong T_1[f;x_k,x_{k+1}]$$

שיטת הטרפז - נוסחאות לוקאליות, המשך

הערה:

למעשה, הקירוב שאנו מחשבים הוא האינטגרל של **האינטרפולטור הלינארי** המתאים $L_1(x)$ לפונקציה $f(x)$ בקטע $[x_k, x_{k+1}]$.

כלומר

$$\boxed{T_1 = T_1\left[f; x_k, x_{k+1}\right] = \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_1(x)dx}$$

נוסחת הטרפז הגלובלית

כאמור, על מנת לחשב קירוב לאינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ נחלק את $[a,b]$

ל - n קטעים באורך שווה $\boxed{h=\frac{b-a}{n}}$ באמצעות $n+1$ נקודות החלוקה

$\boxed{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}$ $(x_{k+1}=x_k+h,\ k=0,\dots,n-1)$

נסמן $\boxed{f(x_k)=f_k\,,\quad k=0,1,\cdots,n}$

מתכונות אינטגרל מסוים נקבל:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx}$$

קירוב הטרפז הגלובלי $T_n[f;a,b]$ לאינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מוגדר כסכום קירובי הטרפז הלוקליים בכל תת קטע, כלומר:

$$\boxed{T_n[f;a,b]=T_1[f;x_0,x_1]+T_1[f;x_1,x_2]+\cdots\cdots+T_1[f;x_{n-1},x_n]}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

נוסחת הטרפז הגלובלית, המשך

כאמור, בכל תת קטע $k=0,1,\cdots,n-1$, $[x_k,x_{k+1}]$ משתמשים בנוסחת הטרפז הלוקאלית המתאימה ומקבלים:

$$\boxed{T_n[f;a,b]=\underbrace{\left[\frac{h}{2}(f_0+f_1)\right]}_{\text{שטח טרפז 1}}+\underbrace{\left[\frac{h}{2}(f_1+f_2)\right]}_{\text{שטח טרפז 2}}+\cdots+\underbrace{\left[\frac{h}{2}(f_{n-2}+f_{n-1})\right]}_{\text{שטח טרפז n-1}}+\underbrace{\left[\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)\right]}_{\text{שטח טרפז n}}}$$

ובאופן שקול:

$$\boxed{T_n[f;a,b]=\frac{h}{2}\cdot[f_0+2f_1+2f_2+\cdots\cdots+2f_{n-1}+f_n]=\frac{h}{2}\cdot\left[f_0+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}f_k+f_n\right]}$$

$$\boxed{h=\frac{b-a}{n}}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx\cong T_n[f;a,b]}$$

שיטת הטרפז-דוגמא 1

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

שערכו המדויק הוא $I = \ln 2 = 0.69314718...$

חשבו קירובים ל- I ע"י קירובי הטרפז T_1, T_2, T_3, T_4.

פתרון דוגמא 1- שיטת הטרפז

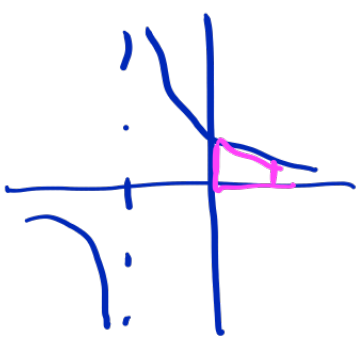
נתון $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 = 0.69314718...$

❑ **חישוב הקירוב T_1**

- במקרה זה $n = 1$ ואין חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ ולכן נתבסס על נקודות הקצה בלבד $x_0 = a = 0, x_1 = b = 1$ ו- $h = 1$.

- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה: $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על טרפז אחד)

$$T_1 = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + f_1] = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} = 0.75$$



$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

❑ **חישוב הקירוב T_2**

- במקרה זה $n = 2$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$

לשני תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{2}$ ולכן נתבסס על 3 נקודות החלוקה

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.

- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, f_2 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על 2 טרפזים)

$$T_2 = \frac{h}{2}\cdot[f_0 + 2f_1 + f_2] = \frac{1}{4}\cdot\left[1 + 2\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{17}{24} = 0.70833\ \ldots$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

❑ **חישוב הקירוב T_3**

- במקרה זה $n = 3$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ לשלושה תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{3}$ ולכן נתבסס על 4 נקודות החלוקה $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$.
- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}, f_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5},\ f_3 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על 3 טרפזים)

$$T_3 = \frac{h}{2}\cdot[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3] = \frac{1}{6}\cdot\left[1 + 2\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{10} = 0.70$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln 2 = 0.69314718\ldots$$

פתרון דוגמא 1- המשך

❑ חישוב הקירוב T_4

- במקרה זה $n = 4$ ויש חלוקה פנימית של קטע האינטגרציה $[a,b] = [0,1]$ לארבעה תתי קטעים שכ"א באורך $h = \frac{1}{4}$ ולכן נתבסס על 5 נקודות החלוקה $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$.
- נחשב ערך הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x+1}$ בנק' החלוקה:
- $f_0 = f(0) = 1, f_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, f_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, f_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{7},\ f_4 = f(1) = \frac{1}{2}$
- קירוב הטרפז המתאים יהיה (מבוסס על 4 טרפזים)

$$T_4 = \frac{h}{2} \cdot [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4] =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1171}{1680} = 0.6970238095\ \ldots$$

שגיאה לוקאלית של נוסחת הטרפז

בלי הגבלת הכלליות נתייחס באופן לוקלי לתת הקטע הראשון $[a,a+h]$.

שגיאת הקירוב בתת קטע זה מוגדרת ע"י

$$E_1^T[f;a,a+h]=\underbrace{\int_a^{a+h} f(x)dx}_{\text{ערך מדויק}}-\underbrace{T_1[f;a,a+h]}_{\text{קירוב הטרפז בקטע}}$$

טענה: אם $f(x)$ בעלת נגזרת שניה רציפה בתת הקטע $[a,a+h]$

אזי קיימת נקודת ביניים $a<\eta<a+h$ שעבורה השגיאה הלוקלית בתת בקטע נתונה ע"י:

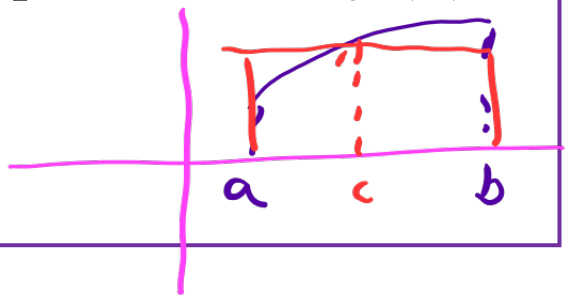
$$(1)\quad E_1^T=E_1^T[f;a,a+h]=-\frac{1}{12}f''(\eta)\cdot h^3$$

הוכחת הטענה בדבר שגיאה לוקאלית-משפטי עזר

משפט ערך הביניים האינטגרלי:

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז קיימת נקודת ביניים $a < c < b$ כך ש-:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$



הכללה: אם $f(x),g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ ו-$g(x)$ **לא משנה סימן בקטע** אז קיימת נקודת ביניים $a < c < b$ כך ש- :

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

הערה: עבור $g(x) \equiv 1$ נקבל את משפט ערך הביניים האינטגרלי.

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

בדומה לנוסחת שגיאת טרפז לוקלית

$$E_1^T = \int_a^{a+h} f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^{a+h} L_1(x)\,dx}_{\text{שטח הטרפז מתחת הישר המשמש לשורר לגמרי כמעוקן } L_1(x)} = \int_a^{a+h} \underbrace{\left(f(x)-L_1(x)\right)}_{\text{שגיאת האינטרפולציה הלינארית}}\,dx$$

נשתמש בשגיאה לפי הנגזרת לחיבור:

$$f(x)-L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-a-h)$$

$$a < \xi = \xi(x) < a+h$$

$$\Rightarrow E_1^T = \int_a^{a+h} \left(f(x)-L_1(x)\right)dx = \int_a^{a+h} \frac{f''(\xi)}{2!}\underbrace{(x-a)(x-a-h)}_{g(x)}\,dx$$

$g(x) \le 0$ בקטע $[a,a+h]$

ולכן, לפי משפט, דרך הממוצע המוכלל,
קיימת נקודת ביניים $a<\eta<a+h$
כך ש-

$$E_1^T = \frac{f''(\eta)}{2!}\underbrace{\int_a^{a+h}(x-a)(x-a-h)\,dx}_{-\frac{h^3}{6}} = -\frac{1}{12}f''(\eta)\cdot h^3$$

$$\boxed{E_1^T = -\frac{1}{12}f''(\eta)\cdot h^3 \qquad a<\eta<a+h}$$

מש"ל

הוכחת הטענה בדבר שגיאה לוקאלית

כיוון שנוסחת הטרפז הלוקאלית מבוססת על **אינטרפולציה לינארית**

בקטע $[x_0,x_1]=[a,a+h]$, נוכל להשתמש **בנוסחת השגיאה של האינטרפולציה הלינארית:**

$$\boxed{f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),\quad x_0<\alpha=\alpha(x)<x_1}$$

ולרשום:

$$E_1^T=\underbrace{\int_a^{a+h} f(x)\,dx}_{I}-\underbrace{\int_a^{a+h} L_1(x)\,dx}_{T_1}=\int_a^{a+h}\left[f(x)-L_1(x)\right]dx=$$

לפי שגיאת האינטרפולציה

$$=\int_a^{a+h}\frac{f''(\alpha)}{2!}\underbrace{(x-a)(x-a-h)}_{g(x)\le 0,\quad \forall x\in[a,a+h]}dx,\quad a<\alpha=\alpha(x)<a+h$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

הוכחת הטענה בדבר שגיאה לוקאלית, המשך

נמשיך...

לפי מ.ערך הביניים המוכלל

$$= \frac{f''(\eta)}{2!} \cdot \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-h)\,dx = \qquad , a < \eta < a+h$$

הצבה

$$\underset{z=x-a}{\Downarrow} \quad = \frac{f''(\eta)}{2!} \cdot \int_0^h \underbrace{z(z-h)}_{z^2-hz}\,dz = \frac{f''(\eta)}{2!} \underbrace{\left[\frac{z^3}{3} - h\frac{z^2}{2} \Big|_0^h \right]}_{=-\frac{1}{6}h^3}$$

$$= -\frac{1}{12} f''(\eta) \cdot h^3 \qquad , a < \eta < a+h$$

שגיאת גלובלית של שיטת הטרפז

- שגיאת הקירוב הגלובלית מוגדרת ע"י

$$E_n^T[f;a,b]=\int_a^b f(x)dx-T_n[f;a,b]$$

- כיוון שקירוב טרפז גלובלי מוגדר כסכום של n קירובי טרפז לוקליים אז השגיאה הגלובלית תוגדר בהתאמה כסכום n השגיאות הלוקליות (השגיאה המצטברת בקטע), כלומר:

$$E_n^T=\sum_{k=1}^{n}E_1^T[f;x_{k-1},x_k]$$

טענה:

f גזירה פעמיים בתיפה

אם $f(x)\in C^2[a,b]$ אזי קיימת נקודת ביניים $a<\xi<b$ שעבורה שגיאת הטרפז הגלובלית בקטע נתונה ע"י:

$$(2)\qquad E_n^T=E_n^T[f;a,b]=-\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi)$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

טעות נוסחת שיטת הטרפזים המורכבת

$$E_1^T[f;x_{k-1},x_k] = -\frac{1}{12} f''(\eta_k)\, h^3 \quad ; \quad x_{k-1} \le \eta_k < x_k$$

$$E_n^T = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} E_1^T[f;x_{k-1},x_k]}_{\text{בשיטה המורכבת}} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{12} f''(\eta_k)\, h^3 =$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)}{n}\right)}_{\text{ממוצע חשבוני של } \{f''(\eta_k)\}_{k=1}^{n} \text{ בקבוצה}} = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot A$$

$h = \frac{b-a}{n}$

לסמן כי A: ממוצע חשבוני של בקבוצה $\{f''(\eta_k)\}_{k=1}^{n}$

ממוצע חשבוני תמוך בקטע שמה מקסימלי בקבוצה
מקבל שווה לערך מינימלי בקבוצה
נקח $\max_{a\le x\le b} f''(x)$ ולפחות שווה מ- $\min_{a\le x\le b} f''(x)$

כלומר

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le A \le \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

ולפי משפט ערך הביניים הממוצע לפחות הגיעה
לסיים כי קיימת נקודה ביניים $a<\xi<b$
כך ש- $f''(\xi) = A$

כלומר: קיימת $a<\xi<b$ כך ש-

$$\boxed{E_n^T[f;a,b] = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi)}$$

הוכחת הטענה בדבר שגיאת טרפז גלובלית

ניישם את הנוסחה שקיבלנו עבור שגיאה לוקאלית לכל תת קטע:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&E_1^T\left[f;x_0,x_1\right]=-\frac{1}{12}h^3\cdot f''(r_1) && x_0<r_1<x_1\\
&E_1^T\left[f;x_1,x_2\right]=-\frac{1}{12}h^3\cdot f''(r_2) && x_1<r_2<x_2\\
&\vdots\\
&E_1^T\left[f;x_{n-1},x_n\right]=-\frac{1}{12}h^3\cdot f''(r_n) && x_{n-1}<r_n<x_n
\end{aligned}
$$

כאשר:

$$
\boxed{E_n^T=E_1^T\left[f;x_0,x_1\right]+E_1^T\left[f;x_1,x_2\right]+\cdots+E_1^T\left[f;x_{n-1},x_n\right]}
$$

שגיאה גלובלית של נוסחת הטרפז, המשך הוכחה

- נסכם ונקבל:

$$E_n^T = -\frac{1}{12}\cdot h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} f''(r_k) = -\frac{1}{12}\cdot h^3 \cdot \left(n \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n} \right) \qquad (3)$$

- הביטוי $\boxed{\frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n}}$ הנו **ממוצע חשבוני** של הערכים $\{f''(r_k)\}_{k=1}^{n}$

ולכן נמצא בין הערך המינימלי והמקסימלי בקבוצה אשר בעצמם חסומים ע"י ערך מינימלי ומקסימלי בקטע

- בפרט,

$$\boxed{\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)}{n} \le \max_{a\le x\le b} f''(x)}$$

שגיאה גלובלית של נוסחת הטרפז, המשך הוכחה

- לכן קיימת נקודה $\boxed{a<\xi<b}$ כך ש- $\boxed{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f''(r_k)=f''(\xi) \qquad (4)}$

- מ- (3) ו- (4) נקבל $E_n^T=-\frac{1}{12}\cdot h^3\cdot n\cdot f''(\xi)$

ובאופן שקול,

$$\boxed{E_n^T=-\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi),\quad a<\xi<b}$$

מסקנות והערות לגבי נוסחת שגיאה גלובלית של שיטת הטרפז

$$E_n^T = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi) \qquad a<\xi<b$$

א. $E_n^T = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (**סדר גודל של השגיאה**)

ב. נוסחת הטרפז הגלובלית מדויקת עבור כל פולינום ממעלה ≥ 1 (כי אז $E_n^T \equiv 0$)

ג. שגיאת הטרפז ניתנת לחישוב עבור כל פולינום ממעלה 2 .

ד. אם בקטע $[a,b]$ הפונקציה $f(x)$ קמורה $(f''(x) > 0)$ אז $\int_a^b f(x)dx < T_n$

אם בקטע $[a,b]$ הפונקציה $f(x)$ קעורה $(f''(x) < 0)$ אז $\int_a^b f(x)dx > T_n$

ה. למעט המקרים שהוזכרו לעיל, נוסחת השגיאה היא בעלת אופי תיאורטי בלבד, כיוון שערכה של הנקודה ξ לא ידוע, לכן בדרך כלל נחשב את חסם השגיאה (כמו באינטרפולציה). נציג כעת את **ההערכה לשגיאה מוחלטת**.

חסם לשגיאה מוחלטת
של שיטת הטרפז הגלובלית

עבור חלוקה של הקטע $[a,b]$ ל- n תתי קטעים שווי אורך.

נסמן: $M_2 = \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$

אזי חסם לשגיאה מוחלטת בשיטת הטרפז הגלובלית בקטע $[a,b]$ הינו

$$\left| E_n^T \right| \le \frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} \cdot M_2$$

שיטת הטרפז-דוגמא 2

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

שערכו המדויק הוא $I = \ln 2 = 0.69314718...$.

איזה קירוב טרפז T_n נדרש לחשב על מנת למצוא ערך מקורב לאינטגרל הנתון שיבטיח רמת דיוק של $\varepsilon = 10^{-7}$?

פתרון דוגמא 2

נתון $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 = 0.69314718...$

- בשלב ראשון נמצא חסם לשגיאת הטרפז המוחלטת $|E_n^T|$ באמצעות הנוסחה

$$\boxed{\left|E_n^T\right| \le \frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} \cdot M_2, \quad M_2 = \max_{a \le x \le b} \left|f''(x)\right|}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \left|f''(x)\right| = \frac{2}{(x+1)^3} \text{ is decreasing monotonic} \Rightarrow M_2 = \max_{0 \le x \le 1} \left|f''(x)\right| = \left|f''(0)\right| = 2$$

$$\Rightarrow \left|E_n^T\right| \le \frac{1}{12n^2} \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

- בשלב השני נפתור את איש השוויון $\left|E_n^T\right| \le \frac{1}{6n^2} \le 10^{-7}$

$$\frac{1}{6n^2} \le 10^{-7} \Rightarrow n \ge \sqrt{\frac{10^7}{6}} \cong 1290.99 \qquad \Rightarrow n = 1291 \Rightarrow T_n = T_{1291}$$

© אנליזה נומרית, תוכנה-ד"ר דבורה טולדנו קטעי

שיטת הטרפז- דוגמא 3

נתון האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ ויהי T_n קירוב הטרפז הגלובלי המתאים
הוכיחו או הפריכו: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $I - T_n > 0$.

<u>פתרון:</u> נזכור כי $I - T_n = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - T_n = E_n^T[f;a,b]$ ולכן ניתן לבדוק באופן שקול האם $E_n^T[f;a,b] > 0$.

לשם כך נשתמש בנוסחת השגיאה בפועל (ולא בנוסחת חסם לשגיאה מוחלטת!)

$$\boxed{E_n^T\left[f;a,b\right] = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi);\quad a<\xi<b}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(\xi) = \frac{2}{(\xi+1)^3} \underset{0<\xi<1}{>} 0$$

$$\Rightarrow E_n^T = \underbrace{-\frac{1}{12}}_{<0}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{>0}\cdot\underbrace{f''(\xi)}_{>0} < 0 \quad \Rightarrow \quad I - T_n < 0 \quad \Longrightarrow$$ **הטענה לא נכונה**