

שאלה 2

$$\begin{pmatrix} 2.11 & -4.21 & 0.921 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 \\ 1.09 & 0.987 & 0.832 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.01 \\ -3.09 \\ 4.21 \end{pmatrix} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

נתון כי הפתרון האנליטי המדויק של המערכת עם 3 ספרות במנטיסה הינו:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-0.428, 0.427, 5.11)^T$$

הפתרון המקורב למערכת, לפי שיטת גאוס, ללא החלפת שורות ועם דיוק של 3 ספרות במנטיסה

$$x_G = (-0.427, 0.428, 5.11)^T \text{ הינו: } rd$$

מצאו פתרון מקורב של המערכת הנתונה בשיטת גאוס עם partial pivoting.

השוו את התוצאה שקבלתם לתוצאה המדויקת הנתונה (עם ייצוג של 3 ספרות במנטיסה) ע"י חישוב

השגיאה היחסית באחוזים עבור כל קואורדינטה.

הערה: בכל סעיף ובכל שלב של החישוב כולל בשלב הקלט של המערכת יש לעגל (round) את התוצאה ל 3 ספרות משמעותיות במנטיסה עשרונית בשיטת הנקודה הצפה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & 0.921 & 2.01 \\ 1.09 & 0.187 & 0.832 & 4.21 \end{array} \right)$$

$\therefore \begin{array}{l} 1) \text{ 1st row} \\ 0.25 \end{array}$

$$m_{21} = \frac{2.11}{4.01} = 0.5261 \Rightarrow 0.526$$

$\begin{array}{l} R_1 \\ c=3 \end{array}$

$$m_{31} = \frac{1.09}{4.01} = 0.2718 \Rightarrow 0.272$$

$\begin{array}{l} R_1 \\ c=3 \end{array}$

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 0 & -9.58 & 1.51 & 3.64 \\ 0 & -1.78 & 1.94 & 5.05 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{2nd row} \\ -1.78 \mid -9.58 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{2nd row} \\ 0.1858 \end{array}$$

$$m_{32} = \frac{-1.78}{-9.58} = 0.1858 \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \\ c=3 \end{array}} 0.186$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 0 & -9.58 & 1.51 & 3.64 \\ 0 & 0 & 0.859 & 4.37 \end{array} \right)$$

$$0.859 x_3 = 4.37$$

$$x_3 = 5.087 \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \\ c=1 \end{array}} 5.09$$

$$-9.58 x_2 + 1.51 x_3 = 3.64$$

$$x_2 = 0.4227$$

$$x_2 = 0.423$$

$$x_1 = -0.424$$

$$RE_{x_1} = \frac{-0.428 - (-0.424)}{-0.428} = \left| \frac{-0.004}{-0.428} \right| = 0.0093 = 0.93\%$$

$$RE_{x_2} = \left| \frac{0.427 - 0.425}{0.427} \right| = \left| \frac{0.002}{0.427} \right| = 0.0047 = 0.47\%$$

$$RE_{x_3} = \left| \frac{5.11 - 5.09}{5.11} \right| = \left| \frac{0.02}{5.11} \right| = 0.0039 = 0.39\%$$

שאלה 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

נתונה המערכת:

נתון כי המטריצה הנגזרת של המערכת הידועה (1,2,3) היא $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (1, 2, -1)^T$
 א. הראו כי המטריצה הנגזרת של המערכת היא LU וכתבו את המטריצה A ואת המטריצה L .
 ב. פתרו את המערכת באמצעות פירוק LU עם דיוק של 3 ספרות במטריצה הנגזרת. (יש לעגל לכל 4 ספרות לאחר כל ביצוע פעולה אריתמטית)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(-5-3) - 3(10-4) + 9(6-4) = -24 - 18 + 18 = -24 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$5 \neq 0$$

לכן LU קיימת

מטריצה U

מטריצה L

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0 \\ 1.33 & 0.33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -5.35 \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = -1 - 0.667 \cdot 3 = -1 - 2.001 = -1 - 2 = -3$$

$$u_{23} = 1 - 0.667 \cdot 9 = 1 - 2.001 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$$

$$L_{23} = \frac{(3 - 1.33 \cdot 3)}{-3} = -1(1 - 1.33) = 0.33$$

$$u_{33} = 5 - 1.33 \cdot 9 - 0.33(-5) = 5 - 12 + 1.65 = -5.35$$

$11.97 \frac{R^1}{C^3} \quad 12$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0 \\ 1.33 & 0.33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= -1 \\ y_3 &= 5.33 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5.35 & 5.33 \end{array} \right)$$

$$x_3 = -0.996$$

$$\rightarrow x_2 - 5(-0.996) = -1$$

$$\rightarrow x_2 + 4.98 = -1$$

$$x_2 = 1.99 \xrightarrow[t=3]{R_2} 1.99$$

$$3x_1 + 3(1.99) + 9(-0.996) = 0$$

$$= 8.964 \xrightarrow[t=3]{R_1} 8.96$$

$$3x_1 + 5.97 - 8.96 = 0$$

$$3x_1 = 2.99$$

$$x_1 = 0.9966 \xrightarrow[t=3]{R_1} 0.997$$

$$(0.997, 1.99, -0.996)$$

שאלה 4:

נתונה המערכת הדלילה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}$$

נרצה ליישם את שיטת גאוס על מערכת זו תוך התחשבות ב"אפסים" המופיעים במטריצה וחסכון בסיבוכיות של האלגוריתם.

חשבו את מספר פעולות MD שיש לבצע בתהליך קדימה ואחורה של שיטת גאוס הנומרית שבצעתם.

(יש לכתוב במפורש את הגורמים הכפליים והפעולות האלמנטריות שעושים בשלבי הדירוג השונים ולציין אילו איברים עוברים שינוי הלכה למעשה כתוצאה מכל פעולה אלמנטרית ומהן המטריצות המתקבלות לאחר כל שלב של דירוג.)

קרנמר

התוכן המופיע כאן הוא חלק מהמסמך המוגן בזכויות יוצרים. כל העתקה או שימוש בלתי מותרים עלולים לגרום לנזק כספי או משפטי. אין להעתיק או לפרסם את התוכן הזה.

$$r_2 = 0 = 3$$

$$m = 9 = 6 + 3$$

$$\begin{cases} m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} & R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1 \quad (a_{21} - m_{21} a_{11}) b_2 = b_2 - m_{21} b_1 \\ m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} & R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} R_1 \quad (a_{31} - m_{31} a_{11}) b_3 = b_3 - m_{31} b_1 \\ m_{71} = \frac{a_{71}}{a_{11}} & R_7 \leftarrow R_7 - m_{71} R_1 \quad (a_{71} - m_{71} a_{11}) b_7 = b_7 - m_{71} b_1 \end{cases}$$

$$b_2'' = b_2' - m_{21} b_1' \quad R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1 \quad (a_{21} - m_{21} a_{11}) b_2'' = b_2' - m_{21} b_1'$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} \quad R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} R_2 \quad (a_{32} - m_{32} a_{22}) b_3'' = b_3' - m_{32} b_2'$$

$$m_{62} = \frac{a_{62}}{a_{22}} \quad R_6 \leftarrow R_6 - m_{62} R_2 \quad (a_{62} - m_{62} a_{22}) b_6'' = b_6' - m_{62} b_2'$$

$$r_2 = 0 = 3$$

$$m = 6 = 3$$

$$\begin{cases} m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} & R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} R_2 \quad (a_{32} - m_{32} a_{22}) b_3'' = b_3' - m_{32} b_2' \\ m_{62} = \frac{a_{62}}{a_{22}} & R_6 \leftarrow R_6 - m_{62} R_2 \quad (a_{62} - m_{62} a_{22}) b_6'' = b_6' - m_{62} b_2' \end{cases}$$

$$8 =$$

$$b = 7 = 7$$

$$m = 4 = 2$$

$$m_{53} = \frac{a_{53}}{a_{33}} \quad R_5 \leftarrow R_5 - m_{53} R_3 \quad (a_{53} - m_{53} a_{33}) b_5''' = b_5'' - m_{53} b_3''$$

$$m_{76} = \frac{a_{76}}{a_{66}} \quad R_7 \leftarrow R_7 - m_{76} R_6 \quad (a_{76} - m_{76} a_{66}) b_7''' = b_7'' - m_{76} b_6''$$

$$b_7''' = b_7'' - m_{76} b_6''$$

$$(1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16)$$

$$(1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16) \quad (1/16)$$

$$r_2 = r_2 = 8 = 32 = 10$$

$$r_2 = 8$$

$$\frac{1/16}{1/16}$$

$$r_2 \quad k \quad (1/16)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & a_{27} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{34} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{54} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ 0 & a_{72} & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{vmatrix}$$

$$2 \quad k \quad (1/16)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{34} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{54} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{vmatrix}$$

$$3 \quad k \quad (1/16)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{34} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{vmatrix}$$

	111128
	<u>111162</u>
$x_7 = \frac{b_7'''}{a_{77}'''}$	1
$x_6 = \frac{b_6'' - x_7 a_{67}''}{a_{66}''}$	2
$x_5 = \frac{b_5''' - a_{57}''' x_7 - a_{56}''' x_6}{a_{55}'''}$	3
$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$	1
$x_3 = \frac{b_3'' - a_{37}'' x_7 - a_{35}'' x_5 - x_6 a_{36}}{a_{33}''}$	4
$x_2 = \frac{b_2' - a_{27}' x_7 - a_{26}' x_6}{a_{22}}$	3
$x_1 = \frac{b_1 - a_{17} x_7 - a_{12} x_2}{a_{11}}$	3

$$17 = \text{MOD}$$

$$32 - 17 = 15 = \text{MOD}$$