

שאלה 2

$$\begin{pmatrix} 2.11 & -4.21 & 0.921 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 \\ 1.09 & 0.987 & 0.832 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.01 \\ -3.09 \\ 4.21 \end{pmatrix}$$

נתונה המערכת:

נתון כי הפתרון האנליטי המדויק של המערכת עם 3 ספורות במנטישה הינו:
 $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-0.428, 0.427, 5.11)^T$

הפתרון הקרוב למערכת, לפי שיטת גאוס, ללא החלפת שורות ועם דיזק של 3 ספורות במנטישה בשיטת הנקודת הצפה ועיגול בשיטת Pz , הינו: $x_G = (-0.427, 0.428, 5.11)^T$

מצאו פתרון מוקrb של המערכת הנתונה בשיטת גאוס עם **partial pivoting**. השוו את התוצאה שקבלתם להתוצאה המדויקת הנתונה (עם ייזוג של 3 ספורות במנטישה) ע"י חישוב **חישוב חישותי באמצעות עבורי כל קוודרינט**.

עזרה: בכל סעיף ובכל שלב של החישוב **כולל בשלב קלט של המערכת יש לעגל** (round) את התוצאה ל 3 ספורות משמעותיות במנטישה עשוית בשיטת הנקודת הצפה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -7.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & 0.921 & 2.01 \\ 7.09 & 0.18 & 0.832 & 4.21 \\ \hline 7 & 0 & 0 & 0.1216 \end{array} \right)$$

$$m_{21} = \frac{2.11}{4.01} = 0.526 \xrightarrow[R_1]{t=3} 0.526$$

$$m_{22} = \frac{1.09}{4.01} = 0.2718 \xrightarrow[R_1]{t=3} 0.272$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1$$

$$\overbrace{R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -7.12 & -3.09 \\ 0 & -9.58 & 1.51 & 3.64 \\ 0 & -1.78 & 1.14 & 5.05 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{c|ccccc} & & & & 2 & 1 \\ -7.78 & | & 19.58 & 1.51 & 5.05 & 0.1216 \end{array} \right.$$

$$m_{32} = \frac{-1.78}{-9.58} = 0.1858 \xrightarrow[R_1]{t=3} 0.786$$

$$\overbrace{R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -7.12 & -3.09 \\ 0 & -9.58 & 1.51 & 3.64 \\ 0 & 0 & 0.859 & 4.32 \end{array} \right)$$

$$0.859 x_3 = 4.32$$

$$\boxed{x_3 = 5.08 + \frac{4.32}{0.859} \xrightarrow[R_1]{t=1} 5.09}$$

$$-9.58 x_2 + 1.51 x_3 = 3.64$$

$$x_2 = 0.4227$$

$$\boxed{x_2 = 0.423}$$

$$\boxed{x_1 = -0.424}$$

$$R.E_{x_1} = \frac{-0.428 - (-0.424)}{-0.428} = \begin{pmatrix} -0.004 \\ -0.428 \end{pmatrix} = 0.0093 = 0.93\%$$

$$R.E_{x_2} = \begin{pmatrix} 0.424 - 0.423 \\ -0.424 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.004 \\ -0.424 \end{pmatrix} = 0.0093 \Rightarrow 0.93\%$$

$$R.E_{x_3} = \begin{pmatrix} 5.11 - 5.09 \\ 5.11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 5.11 \end{pmatrix} = 0.00399 \Rightarrow 0.39\%$$

$$\begin{array}{c} \text{אלאם} \\ \text{נחנו מעתה}: \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & | & x_1 \\ 2 & -1 & 1 & | & x_2 \\ 4 & 3 & 5 & | & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

x = (x₁, x₂, x₃) = (1, 2, -1)
 מונע כי המשנה אינטגרלית מפוקה לשפטות וינו:
 א. הרווח שטיפורי תואר מפוקה ל-LU על הסדרת וויאריאנטית
 ב. הרווח הוא תרטיטת מאנליזיס וויקרLU שקיום ג'סגור ונטולות (ב-
 ערך נס' ג'סגור כביניג ערך וויאריאנטית)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(-5-2) - 2(10-4) + 1(6-8) \\ = -24 - 18 + 90 = 48 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \\ |S| = 5 \neq 0$$

לעומת זה

$\mu_{11} \quad \mu_{22}$

$\overline{\text{LU}} \quad \text{מיה}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0 \\ 1.33 & 0.33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -5.35 \end{pmatrix}$$

$$U_{22} = -1 - 0.667 \cdot 3 = -1 - 2.001 = -1 - 2 = -3$$

$$U_{23} = 1 - 0.667 \cdot 9 = 1 - 2.001 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$$

$$L_{23} = \frac{(3 - 7.33 \cdot 3)}{-3} = -1(1 - 7.33) = 0.33$$

$$U_{33} = 5 - 7.33 \cdot 9 - 0.33(-5) = 5 - 12 + 1.65 = -5.35$$

$\underbrace{7.33 \cdot 9}_{11.97 \xrightarrow{\text{R2}}} \quad \underbrace{0.33(-5)}_{12}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0 \\ 7.33 & 0.33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_1 = 0 \\ Y_2 = -1 \\ Y_3 = 5.33 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -5.35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5.33 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -0.996$$

$$\rightarrow x_2 - 5(-0.996) = -1$$

$$-3x_2 + 4.98 = -1$$

$$\boxed{x_2 = 1.993 \xrightarrow[t=3]{R\downarrow} 1.99}$$

$$3x_1 + 3(1.99) - 9(-0.996) = 0$$

$$-8.964 \xrightarrow[t=3]{R\downarrow} -8.96$$

$$3x_1 + 5.97 - 8.96 = 0$$

$$3x_1 = 2.99$$

$$\boxed{x_1 = 0.9966 \xrightarrow[t=3]{R\downarrow} 0.997}$$

$$\boxed{(0.997, 1.99, -0.996)}$$

שאלה 4:

נתונה המערכת הדיליה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}$$

נרצה לישם את שיטת גaus על מערכת זו תוך התחשבות ב"אפסים" המופיעים במטריצה וחסכון בסיבוכיות של האלגוריתם.

חשבו את מספר פעולות M שיש לבצע בתהליך קידמה ואחורות של שיטת גaus הנוראית שביצעתם.

(יש לנתח במפורש את הגורמים הכפליים והפעולות האלמנטריות שעושם בשלבי הדירוג השונים ולצין אילו איברים עוברים שינוי הלכה מעשה כתוצאה מכל פעולה אלמנטרית ומהן המתריצות המתאפשרות לאחר כל שלב של דירוג)

ר' נסמן

11/182

$\overline{11n_{kS}}$
 $\overline{\rightarrow 11K_2}$

$$x_7 = \frac{b_7}{\cancel{a_{77}}}$$

$$x_6 = \frac{b_6 - x_7 a_{67}}{a_{66}}$$

$$x_5 = \frac{b_5 - a_{57}^{-1} x_7 - a_{56}^{-1} x_6}{a_{55}}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{37}^{-1} x_7 - a_{35}^{-1} x_5 - x_6 a_{36}}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{27}^{-1} x_7 - a_{26}^{-1} x_6}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{17}^{-1} x_7 - a_{12}^{-1} x_2}{a_{11}}$$

1

2

3

4

3

3

$17 = MD$

$32 - 17 = 15 = MD$