

תרגיל בית 1 - אנליזה נומרית

מגישים:

Yoni Grinberg : 307868257

Osher Ben Zazon : 212240238

k)

$\therefore 1$ slice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.04 & 57.8 & 58.2 \\ 5.29 & -6.2 & 46.7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{l_2 = \frac{5.29}{0.04} = 132.25 \\ r_2(3) \rightarrow 132}}$$

$$\left[R_2 \rightarrow R_2 - 132R_1 \right] \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.04 & 57.8 & 58.2 \\ 0 & -7.640 & -7.640 \end{array} \right)$$

$$-7.640 = -7.640$$

$$\boxed{y = 1}$$

$$0.04x + 57.8 \cdot 1 = 58.2$$

$$0.04x = 0.4 \quad | : 0.04$$

$$X = 10$$

2) : X ירושלים ארץ ישראל

$$A.E = |X' - X| = |10 - 10| = |0| = 0$$

$$\frac{\text{א.ע}}{\text{י'}} = \frac{A.E}{X'} \cdot 100\% = \frac{0}{10} \cdot 100\% = 0\%$$

: y ירושלים ארץ ישראל

$$A.E = |y' - y| = |1 - 1| = |0| = 0$$

$$\frac{\text{א.ע}}{\text{י'}} = \frac{A.E}{y'} \cdot 100\% = \frac{0}{1} \cdot 100\% = 0\%$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.29 & -6.2 & 46.7 \\ 0 & 57.8 & 57.8 \end{array} \right)$$

$$57.8 \cdot y^* = 57.8 \rightarrow \boxed{y^* = 1}$$

$$5.29 x^* - 6.2 \cdot 1 = 46.7$$

$$5.29 x^* = 52.9 \quad | : 5.29$$

$$\boxed{x^* = 10}$$

: x ונחשב את ההפרה

$$A.E = |x' - \hat{x}| = |10 - 10| = |0| = 0$$

$$\frac{\text{א'כ'לל}}{\text{א'אן'}} = \frac{A.E}{x'} \cdot 100\% = \frac{0}{10} \cdot 100\% = 0\%$$

ה'ל'ל א'כ'לל א'אן' א'כ'לל

$$A.E = |y' - y^*| = |1 - 1| = |0| = 0$$

$$\frac{\text{א'כ'לל}}{\text{א'אן'}} = \frac{A.E}{y'} \cdot 100\% = \frac{0}{1} \cdot 100\% = 0\%$$

א'כ'לל א'כ'לל א'אן' א'כ'לל

א'כ'לל א'כ'לל א'כ'לל

שאלה 2

$$\begin{pmatrix} 2.11 & -4.21 & 0.921 \\ 4.01 & 10.2 & -1.12 \\ 1.09 & 0.987 & 0.832 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.01 \\ -3.09 \\ 4.21 \end{pmatrix} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

נתון כי הפתרון האנליטי המדויק של המערכת עם 3 ספרות במנטיסה הינו:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-0.428, 0.427, 5.11)^T$$

הפתרון המקורב למערכת, לפי שיטת גאוס, ללא החלפת שורות ועם דיוק של 3 ספרות במנטיסה

$$x_G = (-0.427, 0.428, 5.11)^T \text{ הינו: } rd$$

מצאו פתרון מקורב של המערכת הנתונה בשיטת גאוס עם partial pivoting.

השוו את התוצאה שקבלתם לתוצאה המדויקת הנתונה (עם ייצוג של 3 ספרות במנטיסה) ע"י חישוב

השגיאה היחסית באחוזים עבור כל קואורדינטה.

הערה: בכל סעיף ובכל שלב של החישוב כולל בשלב הקלט של המערכת יש לעגל (round) את התוצאה ל 3 ספרות משמעותיות במנטיסה עשרונית בשיטת הנקודה הצפה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 2.11 & -4.21 & 0.921 & 2.01 \\ 1.09 & 0.187 & 0.832 & 4.21 \end{array} \right)$$

$\therefore \begin{array}{l} 1) \text{ 1st row} \\ 0.25 \end{array}$

$$m_{21} = \frac{2.11}{4.01} = 0.5267 \Rightarrow 0.526$$

$\begin{array}{l} R_2 \\ c=3 \end{array}$

$$m_{31} = \frac{1.09}{4.01} = 0.2718 \Rightarrow 0.272$$

$\begin{array}{l} R_3 \\ c=3 \end{array}$

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 0 & -9.58 & 1.51 & 3.64 \\ 0 & -1.78 & 1.94 & 5.05 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{2nd row} \\ -1.78 \mid -9.58 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{nd row} \\ 0.1858 \end{array}$$

$$m_{32} = \frac{-1.78}{-9.58} = 0.1858 \xrightarrow[\begin{array}{l} c=3 \\ R_3 \end{array}]{}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4.01 & 10.2 & -1.12 & -3.09 \\ 0 & -9.58 & 1.51 & 3.64 \\ 0 & 0 & 0.859 & 4.37 \end{array} \right)$$

$$0.859 x_3 = 4.37$$

$$x_3 = 5.087 \xrightarrow[\begin{array}{l} c=1 \\ R_3 \end{array}]{}$$

$$-9.58 x_2 + 1.51 x_3 = 3.64$$

$$x_2 = 0.4227$$

$$x_2 = 0.423$$

$$x_1 = -0.424$$

$$RE_{x_1} = \frac{-0.428 - (-0.424)}{-0.428} = \left| \frac{-0.004}{-0.428} \right| = 0.0093 = 0.93\%$$

$$RE_{x_2} = \left| \frac{0.427 - 0.425}{0.427} \right| = \left| \frac{0.002}{0.427} \right| = 0.0047 = 0.47\%$$

$$RE_{x_3} = \left| \frac{5.11 - 5.09}{5.11} \right| = \left| \frac{0.02}{5.11} \right| = 0.0039 = 0.39\%$$

שאלה 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

נתונה המערכת:

נתון כי המטריצה הנגזרת של המערכת הידועה $(1, 2, -1)^T$ היא A ונמצא את הפתרון.
א. הראו כי המטריצה A היא הפתרון של המערכת LU עם דיוק של 3 ספרות במטריצה מנומקת. (יש להעיל את כל המערכת באמצעות פירוק LU עם דיוק של 3 ספרות במטריצה מנומקת.)
ב. פתרו את המערכת באמצעות פירוק LU עם דיוק של 3 ספרות במטריצה מנומקת. (יש להעיל את כל המערכת באמצעות פירוק LU עם דיוק של 3 ספרות במטריצה מנומקת.)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(-5-9) - 3(10-4) + 9(6-4) = -24 - 18 + 18 = -14 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$5 \neq 0$$

לכן LU קיים

המטריצה U היא:

המטריצה L היא:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0 \\ 1.33 & 0.33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -5.35 \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = -1 - 0.667 \cdot 3 = -1 - 2.001 = -1 - 2 = -3$$

$$u_{23} = 1 - 0.667 \cdot 9 = 1 - 2.001 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$$

$$L_{23} = \frac{(3 - 1.33 \cdot 3)}{-3} = -1(1 - 1.33) = 0.33$$

$$u_{33} = 5 - 1.33 \cdot 9 - 0.33(-5) = 5 - 12 + 1.65 = -5.35$$

$11.97 \xrightarrow{R_3} 12$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0 \\ 1.33 & 0.33 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 5.33 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5.35 & 5.33 \end{array} \right)$$

$$x_3 = -0.996$$

$$\rightarrow x_2 - 5(-0.996) = -1$$

$$\rightarrow x_2 + 4.98 = -1$$

$$x_2 = 1.99 \xrightarrow[t=3]{R_2} 1.99$$

$$3x_1 + 3(1.99) + 9(-0.996) = 0$$

$$= 8.964 \xrightarrow[t=3]{R_1} 8.96$$

$$3x_1 + 5.97 - 8.96 = 0$$

$$3x_1 = 2.99$$

$$x_1 = 0.9966 \xrightarrow[t=3]{R_1} 0.997$$

$$(0.997, 1.99, -0.996)$$

שאלה 4:

נתונה המערכת הדלילה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}$$

נרצה ליישם את שיטת גאוס על מערכת זו תוך התחשבות ב"אפסים" המופיעים במטריצה וחסכון בסיבוכיות של האלגוריתם.

חשבו את מספר פעולות MD שיש לבצע בתהליך קדימה ואחורה של שיטת גאוס הנומרית שבצעתם.

(יש לכתוב במפורש את הגורמים הכפליים והפעולות האלמנטריות שעושים בשלבי הדירוג השונים ולציין אילו איברים עוברים שינוי הלכה למעשה כתוצאה מכל פעולה אלמנטרית ומהן המטריצות המתקבלות לאחר כל שלב של דירוג.)

קרנמר

התוכן המופיע בדף זה הוא חומר חינוכי בלבד ואינו מהווה ייעוץ או המלצה. אין להשתמש בחומר זה לצורכי מסחר או אחרים. כל הזכויות שמורות. © 2019

$$r_2 = 0 = 3 \quad m = 9 = 6 + 3 \quad \begin{cases} m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} & R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1 \quad (a_{21} - m_{21} a_{11}) b_2 = b_2 - m_{21} b_1 \\ m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} & R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} R_1 \quad (a_{31} - m_{31} a_{11}) b_3 = b_3 - m_{31} b_1 \\ m_{71} = \frac{a_{71}}{a_{11}} & R_7 \leftarrow R_7 - m_{71} R_1 \quad (a_{71} - m_{71} a_{11}) b_7 = b_7 - m_{71} b_1 \end{cases}$$

$$b_2'' = b_2' - m_{21} b_1' \quad R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} R_1 \quad (a_{21} - m_{21} a_{11}) b_2'' = b_2' - m_{21} b_1'$$

$$r_2 = 0 = 3 \quad m = 6 = 3 \quad \begin{cases} m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}} & R_1 \leftarrow R_1 - m_{12} R_2 \quad (a_{12} - m_{12} a_{22}) b_1 = b_1 - m_{12} b_2 \\ m_{62} = \frac{a_{62}}{a_{22}} & R_6 \leftarrow R_6 - m_{62} R_2 \quad (a_{62} - m_{62} a_{22}) b_6 = b_6 - m_{62} b_2 \end{cases}$$

$$8 = \quad b = 7 = 7 \quad m_{53} = \frac{a_{53}}{a_{33}} \quad R_5 \leftarrow R_5 - m_{53} R_3 \quad (a_{53} - m_{53} a_{33}) b_5 = b_5 - m_{53} b_3$$

$$m = 4 = 2 \quad m_{76} = \frac{a_{76}}{a_{66}} \quad R_7 \leftarrow R_7 - m_{76} R_6 \quad (a_{76} - m_{76} a_{66}) b_7 = b_7 - m_{76} b_6$$

$$b_7 = b_7 - m_{76} b_6 \quad b_5'' = b_5 - m_{53} b_3$$

$$(1/16) \quad (1/8) \quad (1/4) \quad 7 : 7 \quad 7$$

$$(1/16) \quad (1/8) \quad (1/4) \quad 7 : 7 \quad 7$$

$$72 = 72 = 8 = 32 = 10$$

$$\frac{1/16}{1/16}$$

$$r_2 \quad k \quad (1/8) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & a_{27} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{34} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{54} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ 0 & a_{72} & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{vmatrix}$$

$$2 \quad k \quad (1/8) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{34} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{54} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{vmatrix}$$

$$3 \quad k \quad (1/8) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{34} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{vmatrix}$$

	111128
	<u>111162</u>
$x_7 = \frac{b_7'''}{a_{77}'''}$	1
$x_6 = \frac{b_6'' - x_7 a_{67}''}{a_{66}''}$	2
$x_5 = \frac{b_5' - a_{57}' x_7 - a_{56}' x_6}{a_{55}'}$	3
$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$	1
$x_3 = \frac{b_3'' - a_{37}'' x_7 - a_{35}'' x_5 - x_6 a_{36}''}{a_{33}''}$	4
$x_2 = \frac{b_2' - a_{27}' x_7 - a_{26}' x_6}{a_{22}}$	3
$x_1 = \frac{b_1 - a_{17} x_7 - a_{12} x_2}{a_{11}}$	3

$$17 = \text{MD}$$

$$32 - 17 = 15 = \text{MD}$$