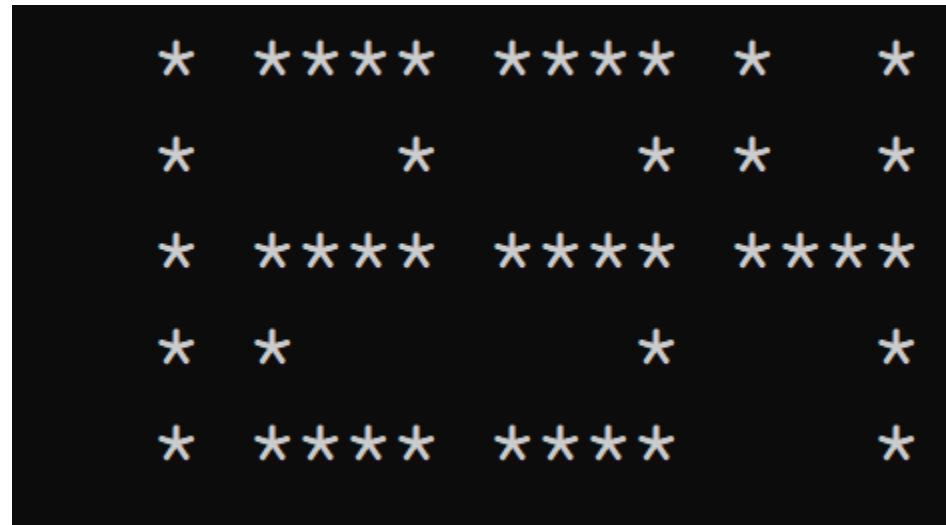


# 불완전성 정리 튜링 머신 의식

연세대학교 컴퓨터과학과 최적화및응용 연구실

통합과정 이창열

# 첫 과제





**PANDA**

+



**NOISE**

=



**GIBBON**  
(긴팔원숭이)



# HOW

$O(n^2)$

```
a = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
b = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

for i in range(10):
    for j in range(i+1):
        b[i] += a[j]
print(b)
# [1,3,6,10,15,21,28,36,45,55]
```

$O(n)$

```
a = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
b = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
x = 0
for i in range(10):
    x = a[i] + x
    b[i] = x
print(b)
# [1,3,6,10,15,21,28,36,45,55]
```

수학적으로 잘 정의만 된다면

**어떤 문제든  
컴퓨터 알고리즘으로  
해결할 수 있다.**

어떤 문제는  
컴퓨터 알고리즘으로  
해결할 수 **없다!**

# 정지 문제 halting problem

주어진 프로그램과 그것의 인풋에 대하여, 그 컴퓨팅 과정이 언젠가 끝나면 정지<sub>halt</sub>한다고 한다.

어떠한 프로그램과 그것의 인풋이 주어지더라도, 해당 컴퓨팅 과정의 정지 여부를 판별하라.

(튜링) 이 문제를 푸는 알고리즘은 존재하지 않는다.



# 디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

# 디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

1. 모든 자연수를 세 개의 제곱수(squared number)들의 합으로 표현할 수 있는가?

$$0 = 0 + 0 + 0$$

$$1 = 1 + 0 + 0$$

$$2 = 1 + 1 + 0$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 2^2 + 0 + 0$$

$$5 = 2^2 + 1 + 0$$

$$6 = 2^2 + 1 + 1$$

$$7 = \dots$$

NO

# 디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

2. 모든 자연수를 네 개의 제곱수(squared number)들의 합으로 표현할 수 있는가?

$$0 = 0 + 0 + 0 + 0$$

$$1 = 1 + 0 + 0 + 0$$

$$2 = 1 + 1 + 0 + 0$$

$$3 = 1 + 1 + 1 + 0$$

$$4 = 2^2 + 0 + 0 + 0$$

$$5 = 2^2 + 1 + 0 + 0$$

$$6 = 2^2 + 1 + 1 + 0$$

$$7 = 2^2 + 1 + 1 + 1$$

...

(라그랑주 Lagrange, 1770) YES

# 디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

## 3. 페르마의 마지막 정리

$$\nexists n, x, y, z \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (x + 1)^{n+3} + (y + 1)^{n+3} = (z + 1)^{n+3}$$

(와일즈<sub>Wiles</sub>, 1994) **True**

# 디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

4. 2보다 큰 모든 짝수를 두개의 소수(prime number)의 합으로 표현할 수 있는가?

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

...

(골드바흐의 추측<sub>goldbach conjecture</sub>, 1742) 힐베르트의 8번째 문제 중 하나

# 디오판토스 방정식 판별 문제

디오판토스 방정식은 다항 연립방정식으로 변수의 수에 제한이 없고 각 항의 계수와 해는 모두 정수여야 한다.

힐베르트의 10번째 문제) 디오판토스 방정식의 해의 존재 여부를 판별하는 알고리즘을 제시하라.

(마티야세비치 Matiyasevich, 1970) 그런 알고리즘은 없다.

# 알고리즘, 인공지능 의식적 사고

# 인간의 사고에 대한 관점

인간의 사고는 (아주 복잡한) 알고리즘이다.

인간의 사고는 알고리즘으로서 원리상 시뮬레이션 할 수 있다.  
하지만, 그 자체만으로 인식이 생겨나지 않는다.

인간의 사고를 알고리즘으로 시뮬레이션하는 것은 수학적으로 불가능하다.



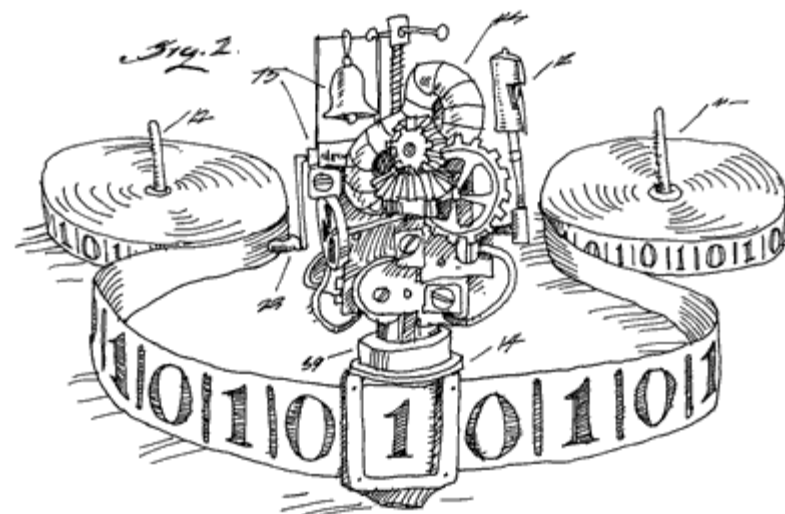
# 알고리즘이란

알고리즘의 정의 = 튜링 머신의 활동 = 컴퓨팅

튜링 머신 Turing machine

현대식 범용 컴퓨터의 이론적 전신

- 0 혹은 1이 적힐 수 있는 셀<sub>cell</sub>이 무한히 있는 테이프<sub>tape</sub>.
- 각 셀을 읽고 쓴 후, 왼쪽으로 혹은 오른쪽으로 1칸 이동하는 헤드<sub>head</sub>.
- 유한한 수의 가능한 (내부) 상태<sub>state</sub>와 규칙들
  - $\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$
- 헤드의 왼편에 있는 셀은 전부 0이라 가정
- 입력은 헤드의 오른편에, 출력은 (끝났을 때) 헤드 왼편에 위치한다 가정



# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$



# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UN+1

입력으로 들어온 숫자 하나에 1을 더하는 튜링 머신

- 입력은 1진수로 들어온다 가정 (e.g., 3 = 111, 5 = 11111)

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, \text{R} \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$

...	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$



# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$		
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$	
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$	
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$



# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

		$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$	
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 4$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, \text{R} \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 5$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$



# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, \text{R} \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 3$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state, read} \rangle \rightarrow \langle \text{state, write, L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, R \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, R \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, R \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, R \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, R \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, L \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, L \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 UNx2

입력으로 들어온 1진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$			
$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 3, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 0, \text{R} \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 1, \text{STOP} \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, 1, \text{R} \rangle$
$\langle 4, 0 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 1, \text{R} \rangle$	$\langle 5, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, \text{L} \rangle$	$\langle 5, 1 \rangle \rightarrow \langle 5, 1, \text{L} \rangle$

...	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$



# 확장 2진 표현법

1진법 체계는 “비효율적”

그냥 2진화는 인풋이 여러 개일 때 구분해내기 어렵다는 문제가 있다.  
- 또한 테이프에 데이터뿐 아니라 온갖 규칙들도 입력시켜야 할 수도 있다.

축약<sub>contraction</sub> 기법

0100010110101011010001110101  
| | | | | | | | | | | | | | | |  
1 00 1 2 1 1 2 1 00 3 1 1

0과 1을 제외한 나머지 숫자들을 특별한 표식이나 명령어로 해석할 수 있다.

예를 들어 2를 (숫자를 분리하는) 심표로, 3을 특정 명령어로 해석한다면

$(1001)_2, (11)_2, (100)_2, op_3, (11)_2$

# 확장 2진 표현법

$(1001)_2, (11)_2, (100)_2, \text{op}_3, (11)_2$

확장<sub>expansion</sub> 기법

$0 \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 10$

$, \rightarrow 2 \text{ or } 110$

$\text{op}_3 \rightarrow 3 \text{ or } 1110$

... 0000100010110101011010001110101000 ...

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$$5, = (101)_2, = 10010110$$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$$state = 0$$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$



# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 1$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 2$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$state = 0$

# 튜링 머신 $\times N \times 2$

입력으로 들어온 확장 2진법 수를 2배하는 튜링 머신

$\langle \text{state}, \text{read} \rangle \rightarrow \langle \text{state}, \text{write}, \text{L/R/STOP} \rangle$

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, \text{R} \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{R} \rangle$        $\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, \text{L} \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

...	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	...
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

$$100100 = (1010)_2 = 10$$

$state = 0$

# 인간의 사고에 대한 관점

튜링 머신의 한계는 무엇일까?

인간은 판별할 수 있지만 튜링 머신은 판별할 수 없는 무언가가 있을까?

만약 있다면 그러한 것이 있다면

인간의 사고를 알고리즘으로 시뮬레이션하는 것은 수학적으로 불가능하다.



# 괴델의 불완전성의 정리와 의식의 컴퓨팅 불가능성

# 괴델의 불완전성 정리

공리들과 추론 규칙들로 이루어진 형식 수학 체계(formal mathematical system) 내에서  
증명을 갖지 못하는 참명제가 존재한다.



공리들과 규칙들을 잘 정의하면  
그 체계 내에서 표현할 수 있는 모든 수학 문장들에  
대해서 참, 거짓 여부를 결정할 수 있지 않을까?

# 의식의 비컴퓨팅성 증명

## Part 1.

튜링 머신의 입력을 자연수로 표현할 수 있었다. 더 나아가 모든 튜링 머신에 번호를 붙여 나열할 수 있다.

튜링 머신이 특정 입력을 받아 수행하는 것은 두 자연수의 순서쌍으로 표현됨

두 자연수를 입력으로 받아, 그것에 해당하는 컴퓨팅이 정지하지 않음을 알아내는 범용 튜링 머신  $A$ 를 생각

## Part 2.

우리는 특정 자연수 순서쌍에 해당하는 컴퓨팅이 정지하지 않음을 추론할 수 있지만

위에서 만든 범용 튜링 머신  $A$ 는 알아낼 수 없다.

# 범용 universal 튜링 머신

임의의 튜링 머신  $T$ 의 규칙들과  $T$ 에 주어질 입력을 입력받는 범용 튜링 머신

$\langle \text{state}, 0/1 \rangle \rightarrow \langle \text{state}, 0/1, \text{L/R/STOP} \rangle$

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 **XN<sub>x</sub>2**이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 **XNx2**이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 1, 1 \rangle \rightarrow \langle 2, 0, L \rangle$

$\langle 2, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

$\langle 3, 0 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 0, R \rangle$

dummy rules

# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신  $XN \times 2$ 이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 1, 1, R \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 2, 0, L \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 0, \text{STOP} \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

$\langle 0, 0, R \rangle$

# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 **XNx2**이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 1, 1, 110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 10, 0, 1110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 0, 0, 11110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$

$\langle 0, 0, 110 \rangle$



# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 **XNx2**이 인코딩 되는 방식

state: in binary  
R: 2 or 110  
L: 3 or 1110  
STOP: 4 or 11110

\*\*

⟨00110⟩  
⟨11110⟩  
⟨00110⟩  
⟨1001110⟩  
⟨00110⟩  
⟨0011110⟩  
⟨00110⟩  
⟨00110⟩

# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 **XNx2**이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

$\langle 00110 \rangle \langle 11110 \rangle \langle 00110 \rangle \langle 1001110 \rangle \langle 00110 \rangle \langle 0011110 \rangle \langle 00110 \rangle \langle 00110 \rangle$

# 범용 universal 튜링 머신

튜링 머신 **XNx2**이 인코딩 되는 방식

state: in binary

R: 2 or 110

L: 3 or 1110

STOP: 4 or 11110

00110111100011010011100011000111100011000110 = 3817480157382

# 범용 universal 튜링 머신

$XN \times 2$ 는 3817480157382번째 튜링 머신, 혹은  $T_{3817480157382}$ .

똑같은 방식으로  $UN+1$ 은  $T_{911326}$ .

일반적으로 임의의 튜링 머신  $T$ 에 고유한 자연수를 부여할 수 있다. (즉, 튜링 머신을 나열할 수 있다.)

자연수  $q$ 에 대응되는 튜링 머신  $T$ 가 받은 입력이 자연수  $n$ 에 대응된다고 하자.

그렇다면 범용 튜링 머신의 입력은 다음과 같다.

$q$ 의 확장 2진수 + 특정 코드(e.g., 111110) +  $n$ 의 확장 2진수

모든 컴퓨팅을 두 자연수의 순서쌍으로 표현 가능

# 범용 튜링 머신 A

두 자연수  $q, n$ 을 입력으로 받아 그것으로 정의되는 컴퓨팅  $T_q(n)$ 이 정지하지 않음을 알아내려 하는 범용 튜링 머신 A.

- $A(q, n)$ 이 정지했을 때만 컴퓨팅  $T_q(n)$ 이 정지하지 않음을 알 수 있다.
- $A(q, n)$ 이 정지하지 않았으면 컴퓨팅  $T_q(n)$ 이 정지 여부에 대해 아무것도 말해주지 않는다.

# $A(q, n)$ 이 정지했음의 의미

$A(q, n)$ 이 정지했음은  $T_q(n)$ 이 증명되었음을 의미한다.

1. 어떤 자연수  $q'$ 에 대해  $T_{q'}(n)$ 이 다음과 같다고 하자.

"모든 자연수를  $n$  개의 제곱수들의 합으로 표현할 수 있는지 모든 경우의 수를 체크하는 알고리즘"

-  $T_{q'}(3)$ 은 정지한다.  $T_{q'}(4)$ 는 정지하지 않는다. ...

2. 어떤 자연수  $q''$ 에 대해  $T_{q''}(n)$ 이 페르마의 정리를 모든 경우의 수로 확인하는 알고리즘이라 하자.

$$\nexists n, x, y, z \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3} = (z+1)^{n+3}$$

-  $T_{q''}(3)$ 은 정지하지 않는다.  $T_{q''}(4)$ 는 정지하지 않는다.  $T_{q''}(5)$ 는 정지하지 않는다. ...

3. 어떤 자연수  $q'''$ 에 대해  $T_{q'''}(2)$ 이 골드바흐의 추측을 모든 경우의 수로 확인하는 알고리즘이라 하자.

-  $T_{q'''}(2)$ 이 정지할까?

# 범용 튜링 머신 A

튜링 머신 A를 그것을 정의하는 규칙을 통해 입력이 정지할지를 증명을 작성하는 튜링 머신이라 생각해도 좋다.

$A(q, n)$ 이 정지하면, 이것은 바로  $T_q(n)$ 의 증명이 완료된 것!

만약 어떤  $q'$ 와  $n'$ 에 대해서  $A(q', n')$ 이 영원히 정지하지 않을 것을 안다면,  
튜링 머신으로는  $T_{q'}(n')$ 에 대한 증명을 완료할 수 없다는 것을 시사

그런데 우리가  $T_{q'}(n')$ 이 정지한다는 사실을 안다면?

# 의식의 비컴퓨팅성 증명

Part 2.

우리는 특정 자연수 순서쌍에 해당하는 컴퓨팅이 정지하지 않음을 추론할 수 있지만  
위에서 만든 범용 튜링 머신  $A$ 는 알아낼 수 없다.



# Part 2

모든  $q, n$ 에 대해서  $A(q, n)$ 이 정지하면 컴퓨팅  $T_q(n)$ 이 정지하지 않는다.

따라서,  $A(n, n)$ 이 정지하면 컴퓨팅  $T_n(n)$ 이 정지하지 않는다. ... (1)

이때  $A(n, n)$ 은  $n$ 이라는 수를 입력으로 받는 특정 컴퓨팅으로 볼 수 있다.

따라서  $A(n, n) = T_k(n)$ 인  $k$ 가 존재한다. ... (2)

# Part 2

$A(n, n)$ 이 정지하면 컴퓨팅  $T_n(n)$ 이 정지하지 않는다. ... (1)

$A(n, n) = T_k(n)$ 인  $k$ 가 존재한다. ... (2)

(2)에  $n = k$ 를 대입해보자. (즉,  $T_k$ 의 입력으로  $k$ 가 주어졌다고 해보자.)

$$A(k, k) = T_k(k). \dots (2')$$

(1)에  $n = k$ 를 대입하자.

$A(k, k)$ 가 정지하면 컴퓨팅  $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다. ... (1')

(1')과 (2')을 합치면 다음과 같다.  **$T_k(k)$ 가 정지하면 컴퓨팅  $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다.**

# Part 2

$T_k(k)$ 가 정지하면 컴퓨팅  $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다.

따라서  $T_k(k)$ 가 정지한다면 모순이 발생하기 때문에, 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

즉  $A(k, k)$ 가 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

Recall.

만약 어떤  $q'$ 와  $n'$ 에 대해서  $A(q', n')$ 이 영원히 정지하지 않을 것을 안다면,

튜링 머신으로는  $T_{q'}(n')$ 에 대한 증명을 완료할 수 없다는 것을 시사

그런데 우리가  $T_{q'}(n')$ 이 정지한다는 사실을 안다면?

# Part 2

$T_k(k)$ 가 정지하면 컴퓨팅  $T_k(k)$ 이 정지하지 않는다.

따라서  $T_k(k)$ 가 정지한다면 모순이 발생하기 때문에, 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

즉  $A(k, k)$ 가 정지하지 않는다고 추론할 수밖에 없다.

Recall.

만약 어떤  $k$ 에 대해서  $A(k, k)$ 가 영원히 정지하지 않을 것을 안다면,  
튜링 머신으로는  $T_k(k)$ 에 대한 증명을 완료할 수 없다는 것을 시사

그런데 우리가  $T_k(k)$ 이 정지한다는 사실을 알고 있다.

# 괴델의 불완전성 정리와 의식의 컴퓨팅 불가능

이 증명을 따라가는 것이 의식적 사고 (혹은 이해, 통찰력, ...)에 해당함에 동의한다면

인간의 사고를 알고리즘으로 시뮬레이션하는 것은 수학적으로 불가능하다.

# 비컴퓨팅적 물리학의 필요성

# 고전물리학과 양자물리학

고전물리학에서는 한 물리계를 정의하는 데 필요한 모든 데이터를 어느 주어진 시간에 특정할 수 있으며, 그 계의 향후 행동은 이 데이터로 완벽히 결정될 뿐 아니라 튜링 컴퓨팅으로 계산될 수 있다.

양자물리학에서는 완벽하게 무작위적인 속성의 추가적인 자유가 있는데, 그런 요소들이라 하더라도 비알고리즘적 활동을 제공하지는 않는다.

의식의 과학을 이해하기 위해선 비컴퓨팅적인 새로운 과학이 필요하다.

일반상대성이론과 양자론의 원리를 결합시킨 “양자중력적” 현상?

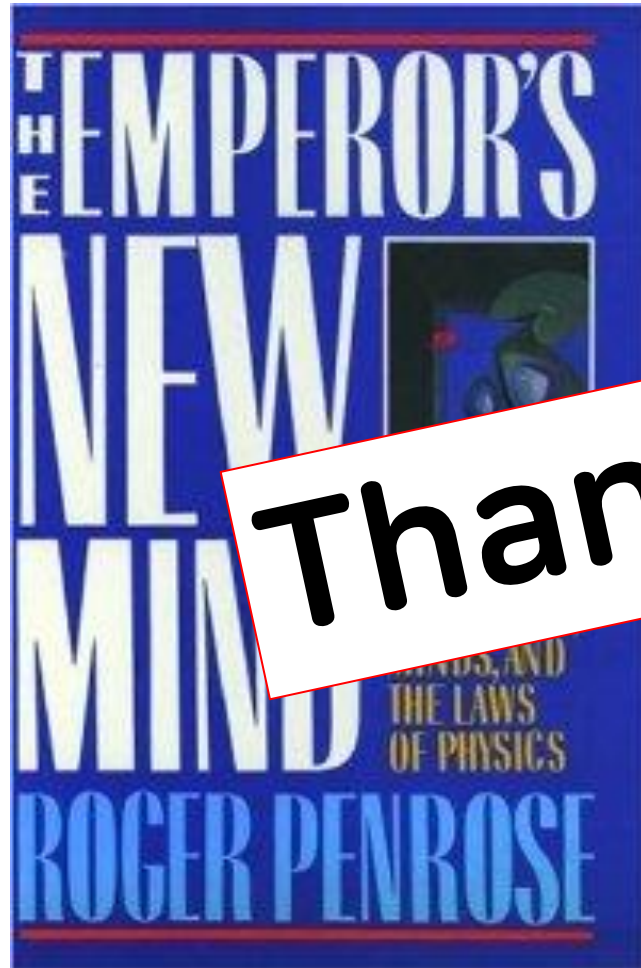
# 창발 현상

보통의 물질들은 컴퓨팅적 활동을 하지만, 두뇌의 구성은 비컴퓨팅적 활동을 한다.

두뇌의 “미묘한 구성”이 있어야 그러한 창발성을 떨 수 있다.

미세소관?





Thank you

