

# Local minimum和saddle point

当模型训练停止，即模型梯度为0时，如何判断是否为local minimum 或者 saddle point。

Hessian  $L(\theta) \approx L(\theta') + \frac{1}{2}(\theta - \theta')^T H(\theta - \theta')$

For all  $v$

$$v^T H v > 0 \implies \text{Around } \theta': L(\theta) > L(\theta') \implies \text{Local minima}$$



$$= H \text{ is positive definite} = \text{All eigen values are positive.} \uparrow$$

For all  $v$

$$v^T H v < 0 \implies \text{Around } \theta': L(\theta) < L(\theta') \implies \text{Local maxima}$$

$$= H \text{ is negative definite} = \text{All eigen values are negative.} \uparrow$$

$$\text{Sometimes } v^T H v > 0, \text{ sometimes } v^T H v < 0 \implies \text{Saddle point}$$

Some eigen values are positive, and some are negative.   激活

1.判断方法：通过hessian矩阵是否为正定、负定进行判断是否进入了local minimum/local maxima 或者 Saddle point。

At critical point:  $L(\theta) \approx L(\theta') + \frac{1}{2}(\theta - \theta')^T H(\theta - \theta')$

$$\text{Sometimes } v^T H v > 0, \text{ sometimes } v^T H v < 0 \implies \text{Saddle point}$$

$H$  may tell us parameter update direction!

$$\begin{array}{l} u \text{ is an eigen vector of } H \\ \lambda \text{ is the eigen value of } u \\ \lambda < 0 \end{array} \implies \begin{array}{l} u^T H u = u^T (\lambda u) = \lambda \|u\|^2 \\ < 0 \end{array}$$

$$L(\theta) \approx L(\theta') + \frac{1}{2}(\theta - \theta')^T H(\theta - \theta') \implies L(\theta) < L(\theta')$$

2.更新参数方法（很少用，保底）：只要Hessian矩阵有负的特征值，那特征值对应的特征向量带入 $L(\theta)$ ，那么二阶导项即为复数，因此只需按照该特征向量进行更新即可脱离saddle point。

3.假说：在参数量极高的情况下，很难到达在所有方向上都不能再进行优化的local minimum点。课程的实验中，特征值为正的特征向量的占比最高不到50%，因此表明local minimum极少，大多数情况下到达的gradient为0的点为saddle点。