高等数学

- 定积分/重积分
- 微分/全微分
- 导数/偏导
- 微分方程
- 不定积分
- 极限/重极限
- 函数
- 前置知识

前置知识

三角函数

和差公式

和差化积

和差化积
sinα+sinβ= 2sin[(α+β)/2] cos[(α-β)/2]
sinα-sinβ= 2cos[(α+β)/2] sin[(α-β)/2]
cosα+cosβ= 2cos[(α+β)/2] cos[(α-β)/2]
cosα-cosβ= -2sin[(α+β)/2] sin[(α-β)/2]
tanα+tanβ=sin(α+β)/cosαcosβ
=tan(α+β)(1-tanαtanβ)
tanα-tanβ=sin(α-β)/cosαcosβ
=tan(α-β)/(1+tanαtanβ)

积化和差

积化和差
sinαsinβ = -[cos(α+β)-cos(α-β)] /2
cosαcosβ = [cos(α+β)+cos(α-β)]/2
sinαcosβ = [sin(α+β)+sin(α-β)]/2
cosαsinβ = [sin(α+β)-sin(α-β)]/2

基本公式

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

万能公式

$\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+tan^2\frac{a}{2}}$

$\cos a=\frac{1-tan^2\frac{a}{2}}{1+tan^2\frac{a}{2}}$

$\tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-tan^2\frac{a}{2}}$

$1+tan^2\frac{a}{2}=\frac{\cos^2(a/2)+\sin^2(a/2)}{\cos^2(a/2)}=\frac{1}{cos^2(a/2)}=\sec^2\frac{a}{2}$

$1-tan^2\frac{a}{2}=\frac{\cos^2(a/2)-\sin^2(a/2)}{\cos^2(a/2)}=\frac{\cos a}{cos^2(a/2)}$

半角公式

$\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$

$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$

$\tan\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=\frac{1-\cos a}{\sin a}$

二倍角公式

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

正割(sec)与正切(tan)

$\sec^2 x=\tan^2 x+1$

$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1$

$\tan' x=\sec^2 x=1+\tan^2 x$

$\sec' x=\tan x\sec x$

三角恒等式

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\sin^2 x+\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$

积分使用

$\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2a+1)$

欧拉恒等公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

辅助角公式

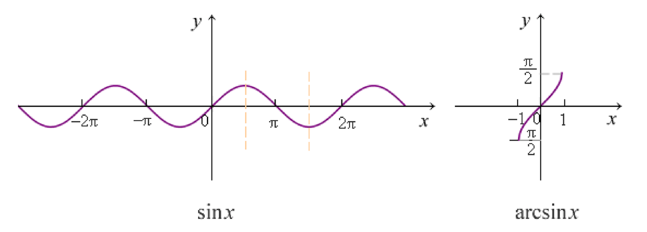
$a\cos x+b\sin x=\sin(x+\varphi);$

$\tan\varphi=\frac{a}{b},\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$

正余弦转换

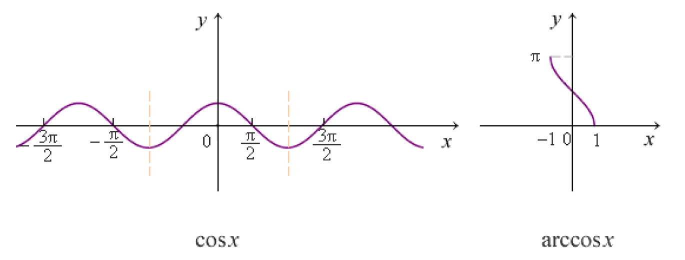
$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$

三角函数图像



sinx　arcsinx

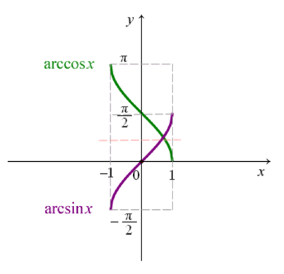
- $y=sinx，x\in R，y\in[-1，1]，$
  周期为2π，函数图像以 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 为对称轴
- $y=arcsinx，x\in[-1，1]，y\in[-\pi/2，\pi/2]$
  - $sinx=0\longleftrightarrow arcsinx=0$
  - $sinx=\frac{1}{2}\longleftrightarrow arcsinx=\frac{\pi}{6}$
  - $sinx=\frac{\sqrt{2}}{2}\longleftrightarrow arcsinx=\frac{\pi}{4}$
  - $sinx=1\longleftrightarrow arcsinx=\frac{\pi}{2}$



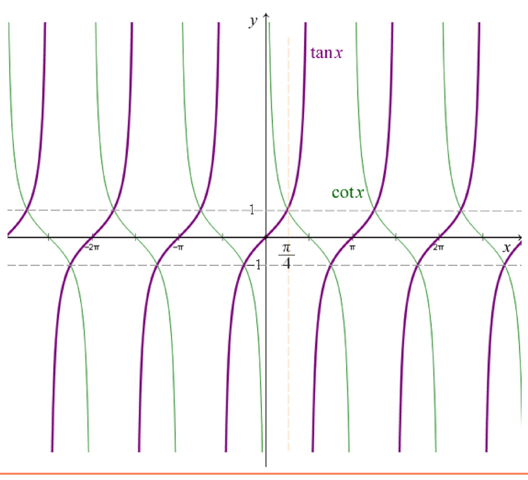
cosx　arccosx

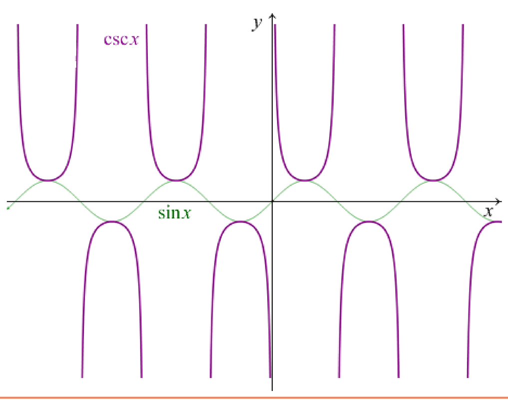
- $y=cosx，x\in R，y\in[-1，1]$
  周期为2π，函数图像以 $x=k\pi$ 为对称轴
- $y=arccosx，x\in[-1，1]，y\in[0，\pi]$
  - $cosx=0\longleftrightarrow arccosx=\frac{\pi}{2}$
  - $cosx=\frac{1}{2}\longleftrightarrow arccosx=\frac{\pi}{3}$
  - $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}\longleftrightarrow arccosx=\frac{\pi}{4}$
  - $cosx=1\longleftrightarrow arccosx=0$

区分和联系

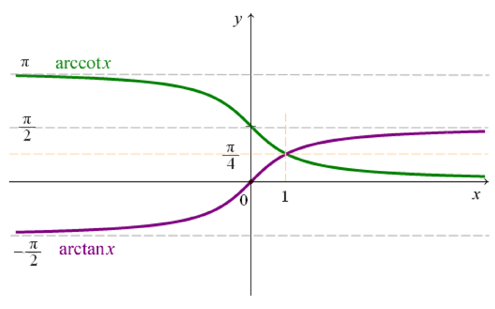


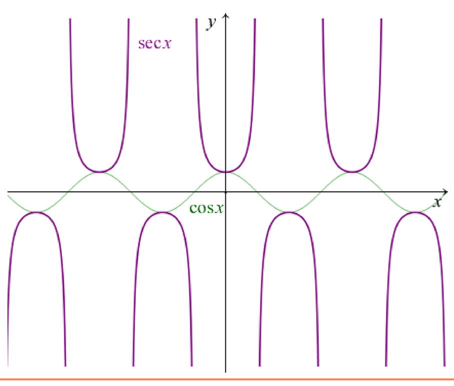
- y = arcsin x 与 y = arccos x
  自变量的取值范围都是 x∈[–1，1]
- y = arcsin x 与 y = arccos x 的图像
  关于直线 y = π/4 对称，相交与点 (√2/2，π/4)





tanx　cotx





arctanx　arccotx

α \ 函数	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	∞

正割/余割/余切函数

$\csc x=\sin x^{-1}=\frac{1}{sinx}$

$\sec x=\cos x^{-1}=\frac{1}{cosx}$

$\cot x=\tan x^{-1}=\frac{1}{tanx}$

不等式

$\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2}}$

算数 >= 几何

$\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})\geq\sqrt{x*\frac{1}{x}}=1$

完全平方

$ab\leq\frac{(a^2+b^2)}{2}$

高数常用不等式

$\frac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x[x>0]$

数列求和

等差数列

$S=a_0+\ldots+a_{n-1}+a_n,a_n=a_1+nd\implies S=(n+1)a_0+(0+\ldots+n)d=(n+1)a_0+\frac{n(n+1)}{2}d$

等比数列

$S=a_0+\ldots+a_n,a_n=a_0q^n(q\neq 0)\implies S=a_0+\ldots+a_0q^n=a_0(1+\ldots+q^n)=a_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

对于公比绝对值小于1的， 1-q^n -> 1, 所以结果为：首项 / (1-公比)

SP：当数列从 1下标开始时

等差: $na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$, 等比: $a_1\frac{1-q^n}{1-q}$

多项式

二项式定理

$x^n-1=(1+x+\ldots+x^{n-1})(x-1)$

几何图形

扇形

面积：

$S=\frac{1}{2}rl=1/2[半径\times弧长]$

弧长

$L=n$（圆心角）× π（圆周率）× r（半径）/180

= α (圆心角弧度数) × r（半径）

球体

表面积 $4\pi r^2$

体积 $\frac{3}{4}\pi r^3$

锥体

表面积 = 侧面+底面

体积 = $\frac{1}{3}\times$ 底面积 × 高

圆

面积 S=πr²

周长 C=2πr

椭圆

面积 $S=\pi ab$

周长 $L=2\pi b+4(a-b)$

标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

焦点

$F_1=(-c,0),F_2=(c_0,0)[x 轴时，\ a>b>0]$

a,b,c关系 $a^2-b^2=c^2$

弧与弧度

弧长=弧度 x 半径

$l=ar$

$2\pi(rad)=360^\circ\to 1rad=360/(2\pi)$

虚数

$i^2=-1$

欧拉恒等公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$