応用数学 第1章：線形代数

はじめに

「応用数学 第1章：線形代数」について、動画を見ながら公式を記載したり例題を解いたりしながら理解を深める。

連立方程式を行列で表す

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

※ベクトル$\vec{x}, \vec{b}$は縦に並べる

行の基本変形

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

行列に行の基本変形を用いて、前述の連立方程式を解く

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2行目を1/2倍する

つまり、両辺に
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1行目に2行目の-1倍を加える

つまり、両辺に $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2行目に1行目の-3倍を加える

つまり、両辺に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1行目と2行目を入れ替える

つまり、両辺に $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解けた！！

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

逆行列

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

となるようなA^{-1}のこと（-1をインバースと読む）

例えば　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方（掃き出し法）

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

を

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

と考える

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$

　↓　2行目を1/2倍する

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

↓　1行目に2行目の—1倍を加える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

↓　2行目に1行目の-3倍を加える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

↓　1行目と2行目を入れ替える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

逆行列が存在しない条件

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列の場合、 $a : b = c : d$
つまり、ad - bc = 0のときは逆行列を持たない。

行列式

$\overrightarrow{(a, b)}, \overrightarrow{(c, d)}$ の2ベクトルがある

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \end{pmatrix}$$

でつくられる平行四辺形の面積を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \end{vmatrix}$$

と表し、行列式と呼ぶ。

行列式の特徴

- 同じ行ベクトルが含まれている場合、行列式はゼロ

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \vec{W} \\ \vdots \\ \vec{W} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

- 1つのベクトルがλ倍されると、行列式はλ倍される

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \lambda\overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

- 他の成分が全部同じでi番目のベクトルだけが違った場合、行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_i} + \vec{W} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \vec{W} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

- 行を入れ替えると符号が変わる

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_s} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_t} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_t} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_s} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

行列式の求め方

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

- 具体例:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 - 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 - 1 & 1 \end{vmatrix} &= 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5(1-0) - 4(2-1) + 3(2-1) \\ &= 5 - 4 + 3 = 4 \end{aligned}$$

固有値と固有ベクトル

以下の式が成り立つ場合、$\vec{x}$とその係数λを、行列Aに対する固有ベクトル、固有値という。

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- 具体例：

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}
$$
$$
= 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

固有値 λ = 5

固有ベクトル（のうちの1つ） $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトルの求め方

$$
\begin{gathered}
A\vec{x} = \lambda\vec{x} \\
(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \\
\vec{x} \neq 0 \text{より}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
|A - \lambda I| = 0 \\
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \\
\lambda = 5 \quad or \quad -1
\end{gathered}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = x_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = -2x_2
$$

$$
\begin{gathered}
\text{したがって、} \\
\lambda = 5 \text{のとき、} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{の定数倍（※）}
\end{gathered}
$$

$$
\lambda = -1 \text{のとき、} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{の定数倍（※）}
$$

※要点

- 固有値は"1つ"に決まる。固有ベクトルは"何らかの定数倍"になるということ
- 大事なのは、比率までしかわからないということ
- 比率がわかったから、これらの固有値、固有ベクトルがわかったということ

問題

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \neq 0 \text{より}$$
$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{より、}$$
$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 3 \quad or \quad 2 \quad or \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{よって、} x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = -2, x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = 0, x_2 = 0$$

したがって、

$$\lambda = 3\text{のとき、}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の定数倍}$$

$$\lambda = 2\text{のとき、}\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の定数倍}$$

$$\lambda = 1\text{のとき、}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{の定数倍}$$

固有値分解

ある実数を正方形に並べて作られた行列Aが固有値$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$と固有ベクトル$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots$を持つとする。
この固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分は0）

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と、それに対応する固有ベクトルを並べた行列

$$V = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

を用意したとき、それらは

$$AV = V\Lambda$$

と関連付けられる。したがって

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

と変更できる。このように正方形の行列を上述のように3つの行列の積に変換することを固有値分解という。
この変換によって、行列の累乗の計算が容易になる。

- 具体例

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値λ=5　or　-1、固有ベクトル$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　or　$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$の定数倍だったので、

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

は、以下のように書ける

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ を固有値分解せよ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)(6-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 2 \quad or \quad 6$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{よって、} x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{よって、} 4x_1 = x_2$$

したがって、

$\lambda = 2$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の定数倍

$\lambda = 6$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

は、以下のように書ける

つまり、固有値分解すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

特異値分解

- 正方行列以外は固有値分解できないが、似たようなことはできる

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$
$$M^T\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

- このような特殊な単位ベクトルがあれば、特異値分解できる

$$M = USV^T$$

※ただしU, Vは直行行列（複素数を要素に持つ場合はユニタリ行列）

特異値の求め方

$$MV = US \qquad M^TU = VS^T$$

$$M = USV^T \qquad M^T = VS^TU^T$$

これらの積は、

$$MM^T = USV^TVS^TU^T = USS^TU^T$$

つまりMM^Tを特異値分解すると、その左特異ベクトル
（ただし単位ベクトルから作らないといけないことに注意）と
特異値の2乗を求めることができる

- 具体例

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MM^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解して

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M^TM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解して

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1}$$

よって、

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 1\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 要点
  - 特異値分解とは、固有値分解の親戚みたいなもの
  - 長方形行列でも、転置させて乗算してやれば正方行列となり、固有値分解できる
- 特異値分解の利用例
  - 画像の圧縮、データ量の削減が挙げられる。
    元の画角を保ってピントをずらしたような画像データを作ることができ、データ量を減らすことが可能となる
  - 教師なし学習による分類
    2つの画像がある場合、特異値分解をかけてやることで特異値の大きい部分（値）が似ていれば、2つの画像は同じようなものだと機械に学習させてやることが可能となる
    ある意味では、教師なしでも2つの画像が似ているのでは･･･ということが浮かび上がってくる

演習問題

1.1

次のベクトル
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問1.1.1

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

問1.1.2

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問1.1.3

$$7\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ 21 \end{pmatrix}$$

問1.1.4

$$8(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 56 \end{pmatrix}$$

1.2

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問1.2.1

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

問1.2.2

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

In [1]:
```python
# 計算して回答確認
import numpy as np

A = np.array([
    [2, 1],
    [5, 3],
])

B = np.array([
    [1, 4],
    [1, 5],
])

A-3*B
```

Out[1]:
```
array([[ -1, -11],
       [  2, -12]])
```

2.1

次のベクトルと行列 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問2.1.1

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

問2.1.2

$$B\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

問2.1.3

$$BA = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 10 \\ 25 & 23 & 10 \end{pmatrix}$$

問2.1.4

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

In [2]:
```python
# 計算して回答確認
import numpy as np

v = np.array([
    [1],
    [0],
    [3]
])

A = np.array([
    [1, 3, 4],
    [5, 9, 0],
    [3, 1, 2],
])

B = np.array([
    [1, 0, 3],
    [0, 2, 5],
])
```

In [3]:
```python
# 2.1.1
Av = A.dot(v)
Av
```

Out[3]:
```
array([[13],
       [ 5],
       [ 9]])
```

In [4]:
```python
# 2.1.2
Bv = B.dot(v)
Bv
```

Out[4]:
```
array([[10],
       [15]])
```

In [5]:
```python
# 2.1.3
BA = B.dot(A)
BA
```

Out[5]:
```
array([[10,  6, 10],
       [25, 23, 10]])
```

In [6]:
```python
# 2.1.4
B_t = B.T
B_t
```

Out[6]:
```
array([[1, 0],
       [0, 2],
       [3, 5]])
```

2.2

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問2.2.1

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

問2.2.2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

問2.2.3

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

問2.2.4

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

In [7]:
```
# 回答確認
A = np.array([
    [2, 1],
    [4, 1],
])

B = np.array([
    [1, 3],
    [3, 1],
])
```

In [8]:
```
# 2.2.1
A.dot(B)
```

Out[8]:
```
array([[ 5,  7],
       [ 7, 13]])
```

In [9]:
```
# 2.2.2
np.linalg.inv(A)
```

Out[9]:
```
array([[-0.5,  0.5],
       [ 2. , -1. ]])
```

In [10]:
```
# 2.2.3
np.linalg.inv(B)
```

Out[10]:
```
array([[-0.125,  0.375],
       [ 0.375, -0.125]])
```

In [11]:
```
# 2.2.4
B.dot(A).dot(np.linalg.inv(B))
```

Out[11]:
```
array([[-0.25,  4.75],
       [ 0.25,  3.25]])
```

おわりに（第1章：線形代数）

本レポートでは、動画の要点を記載したり例題の演習を行い、最後に付属の演習問題を回答した。
ベクトルや行列の演算は手計算で行ったあと、Pythonでも確認を行った。
ベクトルや行列の計算は問題ないが、固有値や特異値については理解が曖昧である。
確認テストやインターネットの記事を通して理解を深めていく。

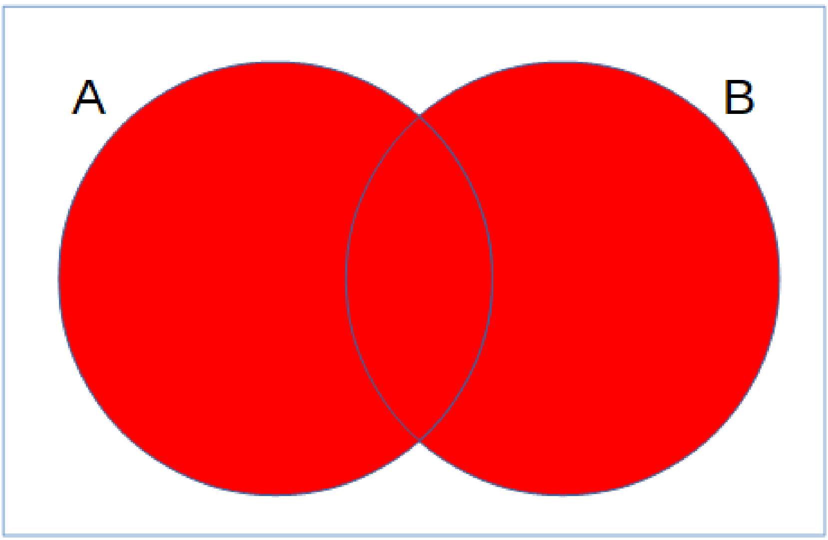
応用数学 第2章：確率・統計

はじめに

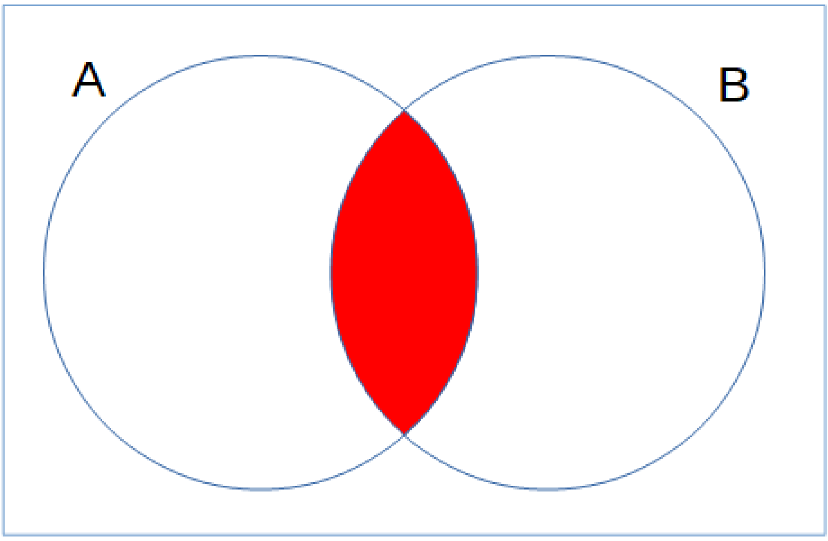
「応用数学 第2章：確率・統計」について、動画を見ながら公式を記載したり例題を解いたりしながら理解を深める。

集合

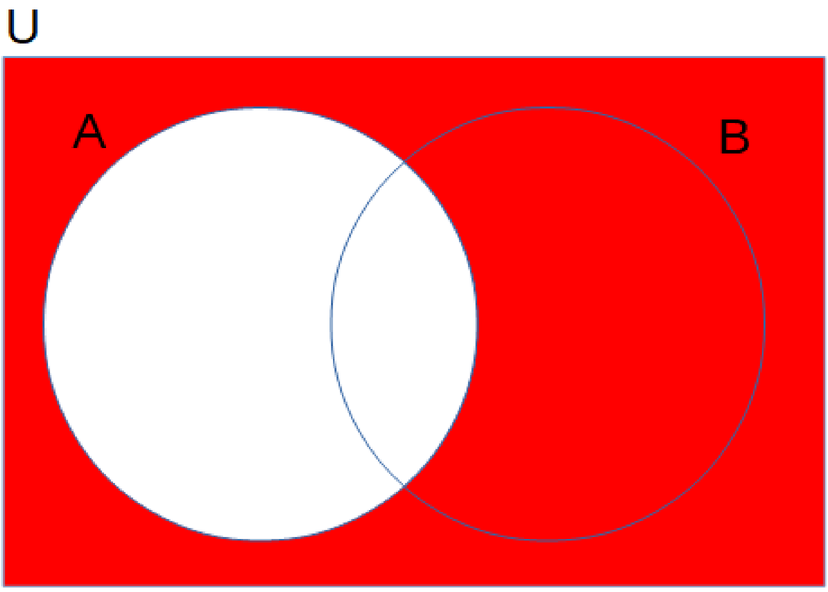
- A ∪ B （和集合）



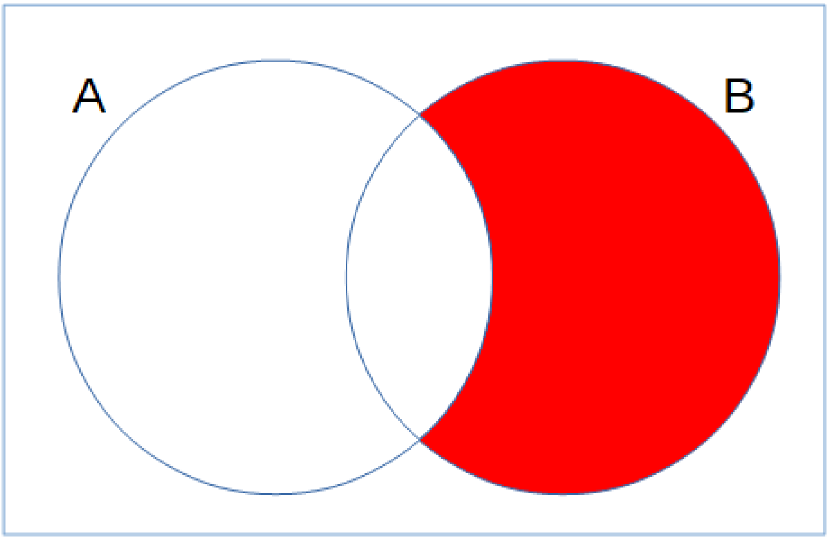
- A ∩ B（共通部分）



- U \ A = $\bar{A}$（絶対補）・・・UからAを除いた部分



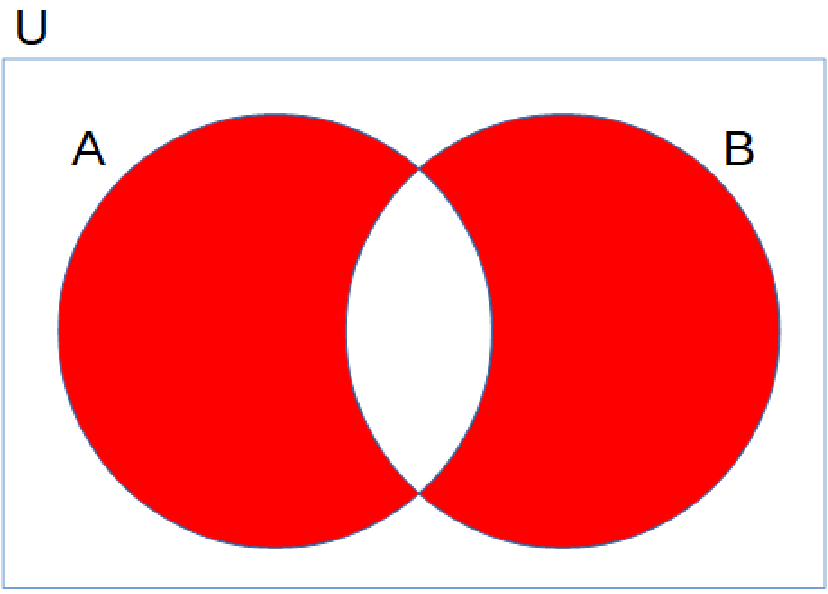
- B \ A（相対補）・・・BからAを除いた部分



問題

次の図を表現する式はどれか？

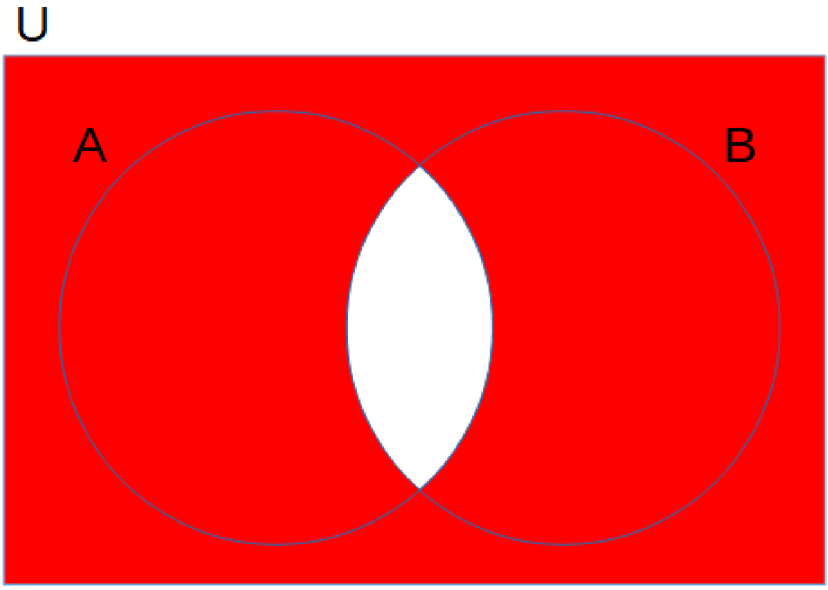
1. $\overline{A \cup B}$
2. $\overline{A \cap B}$
3. $(B \backslash A) \cap (A \backslash B)$
4. $(B \backslash A) \cup (A \backslash B)$



回答

4（$(B \backslash A) \cup (A \backslash B)$）

※2（$\overline{A \cap B}$）は以下になるので違う



確率の定義

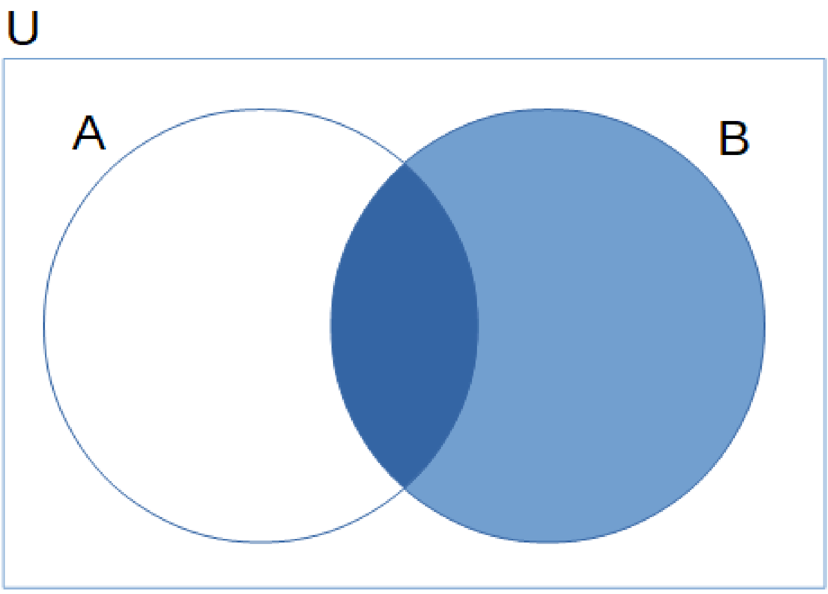
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{\text{事象}A\text{が起こる数}}{\text{すべての事象の数}}$$

※確率は0から1の間の値をとる

- 例題1
  $P(\bar{A})$を$P(A)$を使って表せ

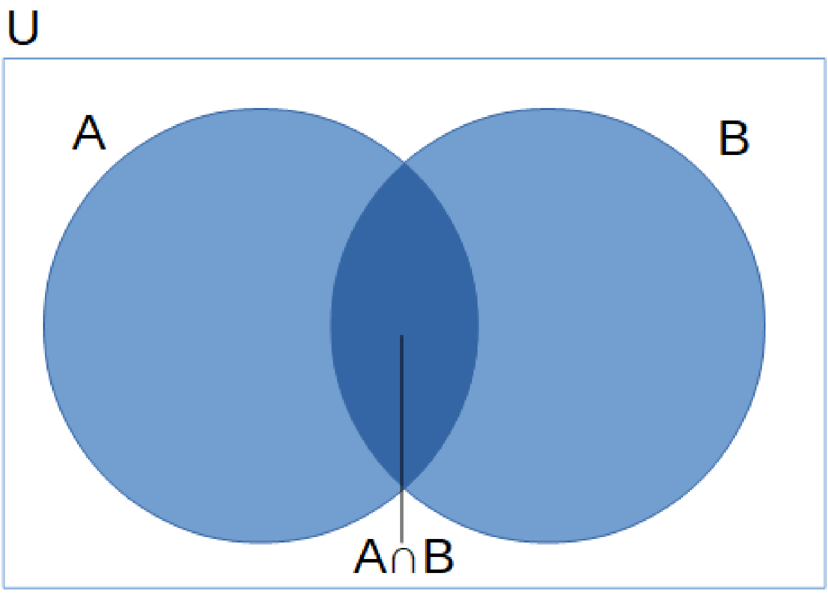
条件付き確率

- ある事象Bが与えられた下で、Aとなる確率
  例）雨が降っている条件下で交通事項に合う確率
  → 同じ「Aとなる確率」でも「全体UのうちAとなる確率」よりも確率の値は大きくなる



$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- $P(A \cap B)$



$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) = P(B \cap A)$$

※$P(B|A)\cdots$　Aという条件下でのB

事象Aと事象Bが互いに独立している場合
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

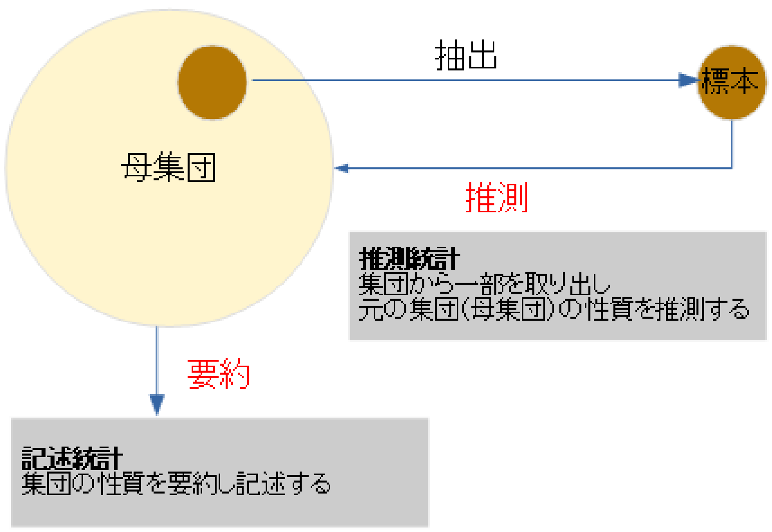
- $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ベイズ則

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

記述統計と推測統計



- 記述統計
  - 集団の性質を要約し記述する
- 推測統計
  - 集団から一部を取り出し、元の集団（母集団）の性質を推測する

確率変数と確率分布

- 確率変数
  - 事象と結びつけらた数値
  - 事象そのものと解釈する場合もある
- 確率分布（次の表）
  - 事象の発生する確率の分布
  - 離散値であれば表に示せる

事象	裏0枚、表4枚	裏1枚、表3枚	裏2枚、表2枚	裏が3枚、表1枚	裏4枚、表0枚
確率変数（裏を0, 表を1と対応させ和をとる）	4	3	2	1	0
事象が発生した回数	75	300	450	300	75
事象と対応する確率	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

期待値

事象X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
確率変数f(X)	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$
確率P(X)	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\cdots$	$P(x_n)$

- 期待値E(f)

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=x_k)f(X=x_k)$$

- 連続する値の期待値E(f)

$$P(X=x_k)f(X=x_k)dx$$

分散と共分散

- 分散
  - データの散らばり具合
  - 各値が期待値からどれだけずれているかを平均したもの

$$\begin{aligned}&\text{分散}Var(f)\\&=E((f_{(X=x)}-E_{(f)})^2)\\&=E(f^2_{(X=x)})-(E_{(f)})^2\end{aligned}$$

※「fの2乗の平均」-「平均の2乗」

- 共分散
  - 2つのデータ系列の傾向の違い
    - 正の値ならば似た傾向
    - 負の値ならば逆の傾向
    - ゼロならば関係性に乏しい

$$\begin{aligned}&\text{共分散}Cov(f,g)\\&=E((f_{(X=x)}-E(f))(g_{(Y=y)}-E(g))\\&=E(fg)-E(f)E(g)\end{aligned}$$

分散と標準偏差

- 分散は2乗してしまうので元のデータと単位が違ってしまう
  （例えば身長をcmで計っていたとすると、cmの2乗は平方センチメートル）
  $\rightarrow$ 2乗の平方根すれば、元の単位に戻る

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{Var(f)} \\
&= \sqrt{E((f_{(X=x)} - E_{(f)})^2)}
\end{aligned}
$$

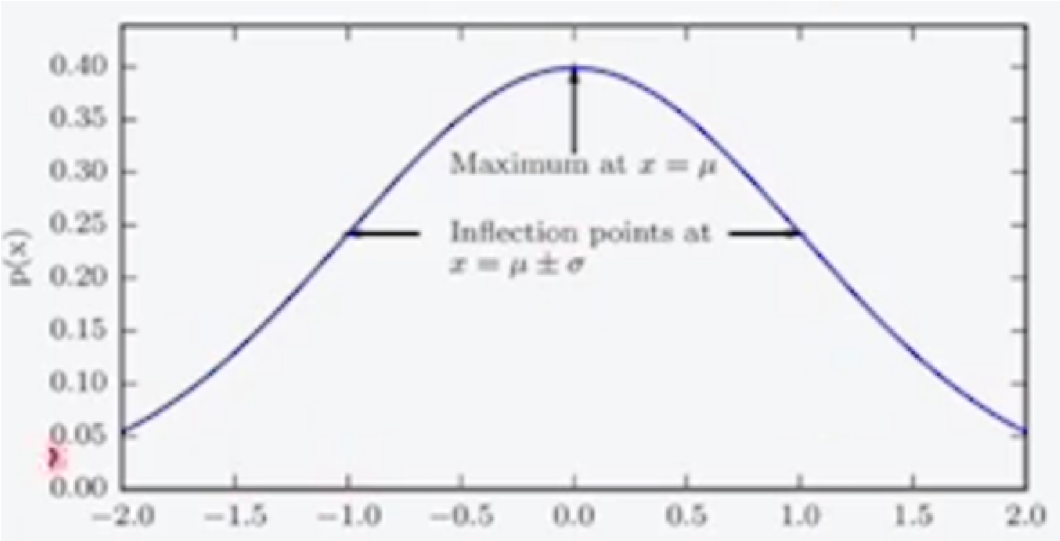
様々な確率分布

- ベルヌーイ分布
  - コイントスのようなイメージ
  - 裏と表で出る割合が等しくなくとも使える
  - $P(x|\mu) = \mu^x(1-\mu)^{1-x}$

- マルチヌーイ（カテゴリカル）分布
  - サイコロを転がすイメージ
  - 各面の出る割合が等しくなくとも使える

- 二項分布
  - ベルヌーイ分布の多試行版
  - $P(x|\lambda, n) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\lambda^x(1-\lambda)^{n-x}$
  - 釣鐘型の分布

- ガウス分布
  - 釣鐘型の連続分布
  - $N(x; \mu, \sigma^2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)$
  - 真の分布がわからなくても、サンプルが多ければ正規分布に近づく
  - それぞれの積分、面積を足し合わせると合計1になる



推定

- 母集団を特徴づける母数（パラメータ：平均など）を統計学的に推測すること
- 点推定
  - 平均値などを1つの値に推定すること
- 区間推定
  - 平均値などが存在する範囲（区間）を推定すること

推定量と推定値

- 推定量（estimator）
  - パラメータ（平均など）を推定するために利用する数値の計算方法や計算式のこと。推定関数とも呼ぶ

- 推定値（estimate）
  - 実際に施行を行った結果から計算した値
  - 真の値をθとすると、$\hat{\theta}$は推定値を表す
    - ハット（ˆ） がついていたら、推定しているのだなと考える

標本平均

- 母集団から取り出した標本の平均値
  - 一致性
    - サンプル数が多くなれば、母集団の値に近づく
  - 不偏性
    - サンプル数がいくらであっても、その期待値は母集団の値と同様
  - $E(\hat{\theta}) = \theta$

標本分散

サンプルサイズをnとすると

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- 一致性は満たすが、不偏性は満たさない！

不偏分散

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

- 標本分散に$\frac{n}{n-1}$をかけて修正している
- サンプルが十分に取れない場合は、このようなやり方もある

演習問題

問 3.1

「異なる絵柄の描かれた５枚のカードから１枚を引く」というような，同じ条件下で繰り返し行うことのできる実験や観測などのことを「試行」といい，それによって起こる「★印の描かれたカードを引いた」というような，結果を「事象」という。

試行の結果として起こる事象に整数や実数の数値が結びつけられているときに，その数値を「確率変数」という。

次の選択肢のうち，確率変数として適当なものはどれか。すべて選べ。

a.　さいころを振ったときに出た目の数。

b.　３枚のコインを同時に投げて裏表どちらが出るか試行したときのコインの枚数。

c.　赤，青，黄の ３ 色のボールが壷の中に入っている。ここから１個を取り出したときの色。

d.　８本のうち１本が当たりであるクジを，当たりが出るまで抽選し続けたときの回数。

問3.1

- 回答（★ 誤り ★）
  - a
- 考察（★ 誤り ★）
  - bは、常に3枚で試行とは関係なし。cは事象、dは事象が発生した回数
- 正答
  - a, d
  - 解説には「試行の結果として起こる事象に数値が結びつけられているときに、その数値を「確率変数」という」とある。
    dはまさに回数なので確率変数となる。

問 3.2

試行の結果に生じる様々な事象は，すべてが同じ割合で生じるとは限らない。たとえば，「4枚のコインを同時に投げて裏表どちらが出るか」試行した場合「すべて表であったり，すべて裏である場合は少なく，2 枚は裏で 2 枚が表といった裏表が混合している場合の方がより多く発生するだろう」ということは計算しなくとも直観的に理解できるかと思う。事象は様々な割合で（すなわち様々な確率で）発生するのだから，事象と結びつけられた数値（たとえば表という事象に 1 という数値を，裏という事象に 0 という数値を対応させる etc）である確率変数もまた様々な確率で発生することになる。この確率変数と対応する確率との関係を表した関数を「確率分布」という。確率変数が離散値（とびとびの値）ならば対応

する確率もまた離散値となる。つまり確率変数と対応する確率との関係（すなわち確率分布）を表にまとめることができるということである。

上述のコインを同時に投げる試行を 1200 回行ったとして，下の表を作った。空欄を埋めよ。

事象	裏が 0 枚，表が 4 枚	裏が 1 枚，表が 3 枚	裏が 2 枚，表が 2 枚	裏が 3 枚，表が 1 枚	裏が 4 枚，表が 0 枚
確率変数（裏を 0，表を 1 と対応させ和をとった）	4	3	2	1	0
事象が発生した回数	75	300	450		75
事象と対応する確率	1/16				

問3.2

- 回答

事象	裏0枚、表4枚	裏1枚、表3枚	裏2枚、表2枚	裏が3枚、表1枚	裏4枚、表0枚
確率変数（裏を0, 表を1と対応させ和をとった）	4	3	2	1	0
事象が発生した回数	75	300	450	**300**	75
事象と対応する確率	1/16	**1/4(4/16)**	**3/8(6/16)**	**1/4(4/16)**	**1/16**

- 考察
  - 「裏が3枚、表1枚」の回数 = 1200 - (75 + 300 + 450 + 75) = 300
  - 「裏1枚、表3枚」の確率 = 300 / 1200 = 1/4(4/16)、他同様に計算

第 5 章　条件付き確率

問 5.1

条件付き確率とは，事象 A が起こった条件の下で事象 B が起こる確率のことであり，これを$p(B|A)$と表す（B が先に書かれるのは，現在の数学の記述法の発祥の地であるヨーロッパで使われている言語における語順が反映しているため。例：the probability of B under the condition A）。たとえば，ある年における，洗濯物を干していたときに，雨が降ってきた確率（洗濯物を干していた日という条件下で，雨が降ってきた日の発生する確率）を考える。前述の記述法に従うならば，

$$p\left(雨が降ってきた日\middle|洗濯物を干していた日\right)$$

のように記述できる。これは洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた確率（洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日の発生する確率）と同様ではない。事象 A と事象 B が同時に起こる確率を同時確率といい，$p(A, B)$あるいは$p(B, A)$で表され（どちらも同じ値となる），条件付き確率とは区別されなければならない。なぜなら，条件付き確率の場合

$$p\left(雨が降ってきた日\middle|洗濯物を干していた日\right) = \frac{洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数}{すべての洗濯物を干していた日数}$$

を表していることになるが，同時確率の場合

$$p\left(雨が降ってきた日, 洗濯物を干していた日\right) = \frac{洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数}{すべての日数（つまり 365 日）}$$

を表していることになるからである。

1 年のうち洗濯物を干していた日数を 60 日，洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数

を 12 日として，ある年における，洗濯物を干していた日という条件下で，雨が降ってきた日の発生する確率と，洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日の発生する確率を求めよ。

5.2

袋の中に赤い玉 3 個と白い玉 2 個が入っている。赤い玉は A，B，C の文字が，白い玉には A，B の文字が，それぞれ 1 個に対して 1 文字ずつ記されている。以下の問いに答えよ。

問 5.2.1　出てきた玉が赤色であったとき，それに記されている文字が B である確率。

問 5.2.2　出てきた玉に記されている文字が A であったとき，その玉の色が白色である確率。

問5.1

- 回答1（洗濯ものを干していた日という条件下で、雨が降ってきた日の発生する確率）

$$
\begin{aligned}
&P(\text{雨が降ってきた日}|\text{洗濯物を干していた日}) \\
&= \frac{\text{洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数}}{\text{洗濯物を干していたすべての日数}} \\
&= \frac{12}{60} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

- 回答2（洗濯ものを干していてかつ雨が降ってきた日の発生する確率）

$$
\begin{aligned}
&P(\text{雨が降ってきた日}, \text{洗濯物を干していた日}) \\
&= \frac{\text{洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数}}{\text{すべての日数}365\text{日}} \\
&= \frac{12}{365}
\end{aligned}
$$

- 考察
  - 問題文の中で条件付確率を丁寧に説明してくれているのが嬉しい
  - 問題を解く中で、条件付確率の意味が理解できる
  - $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$
    ベン図において、Aを雨が降ってきた日数、Bを洗濯物を干していた日数とすると
    $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

問5.2.1

- 回答

$$P(\text{文字が}B|\text{赤玉が出る}) \\ = \frac{1}{3}$$

- 考察
  - 赤玉である条件下で文字がBである確率なので、赤玉3つからBが出る確率を求めることに等しい

問5.2.2

- 回答

$$P(\text{白玉が出る}|\text{文字が}A) \\ = \frac{1}{2}$$

- 考察
  - 文字がAである条件下で白玉が出る確率なので、Aの赤玉・白玉の計2つから白玉が出る確率を求めることに等しい

おわりに（第2章：確率・統計）

本レポートでは、動画の要点を記載しながら最後に付属の演習問題を回答した。
動画では例題が少なかったが、演習問題のおかげで条件付確率の考え方がとても理解できた。
一方で、ベルヌーイ分布や二項分布などの各種確率分布や標本平均をどういう時にどのように利用するのかは
まだイメージできていない。
インターネットの記事を参照したり、確認テストを通してさらに理解を深めていく予定である。

応用数学 第3章：情報理論

はじめに

「応用数学 第3章：情報理論」について、動画を見ながら公式を記載したり例題を解いたりしながら理解を深める。

自己情報量

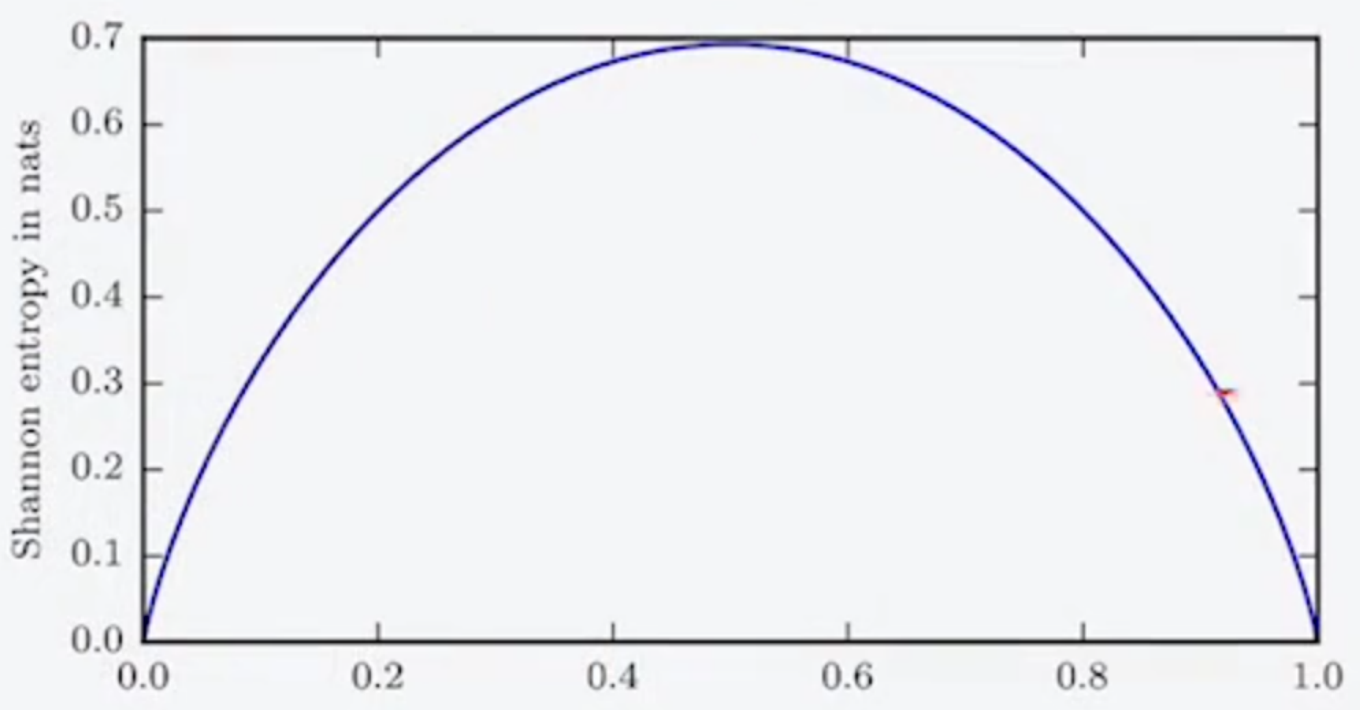
- 対数の底が2のとき、単位はビット（bit）
- 対数の底がeのとき、単位はナット（nat）
- PとWは逆数の関係

$$I(x) = -\log(P(x)) = \log(W(x))$$

シャノンエントロピ

- コイントス、コインを投げた時にどれだけ新しく情報を得られるかを表したもの
- 横軸0.5、つまり偏りがないときは一番情報量が多い
- 横軸0.0、1.0、つまり必ず裏が出る、表が出ると決まっている場合は得られる情報なんてほとんどない
- 自己情報量の期待値
- 誤差関数として使うケースもある

$$\begin{aligned}
&H(x) \\
&= E(l(x)) \\
&= -E(\log(P(x))) \\
&= -\sum(P(x)\log(P(x)))
\end{aligned}$$



カルバック・ライブラー　ダイバージェンス

- 距離のようなもの
- 同じ事象、確率変数における異なる確率分布P、Qの違いを表す
- Pが「最初に見積もった情報の珍しさ」、Qが「実際に測定してみて明らかになった情報の珍しさ」

$$D_{KL}(P||Q) = E_{x\sim P}\left[\log \frac{P(x)}{Q(x)}\right] = E_{x\sim P}[\log P(x) - \log Q(x)]$$

$$I(Q(x)) - I(P(x)) = (-\log(Q(x)) - (-\log(P(x))) = \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$E(f(x)) = \sum_x P(x)f(x)$$

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_x P(x)(-\log(Q(x)) - (-\log(P(x))) = \sum_x P(x)\log\frac{P(x)}{Q(x)}$$

- シャノンエントロピーと似ているぞ･･･誤差関数にも使えるのでは･･･

交差エントロピー

- KLダイバージェンスの一部を取り出したもの
- Qについての自己情報量をPの分布で平均している

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_x P(x)(-\log(Q(x))) - (-\log(P(x)))$$

$$H(P,Q) = H(P) + D_{KL}(P||Q)$$
$$H(P,Q) = -E_{x \sim P}\log Q(x) = -\sum_x P(x)\log Q(x)$$

演習問題

第 4 章　情報量

4.1

滅多に起こらない事象が発生したという情報（例：伝説の生物ツチノコを発見したという情報）の重要度と，しばしば起こる事象が発生したという情報（例：残念なことに風呂場で G から始まる名前を持つ昆虫を発見してしまったという情報）の重要度とでは，どちらの情報により重要さがあるだろうか。これは直観的に前者であるとわかると思う。情報理論の世界の考え方もこの直観には従う。たとえば，10 本に 1 本当たりが含まれているクジに当選したという情報より，1000 本に 1 本当たりが含まれるクジに当選したという情報の方が，（つまり発生する確率の小さい事象の発生する情報の方が）より情報の量が多いと考えるのだ。具体的には 2 回に 1 回は起こるような事象（確率 1/2 の事象）が発生したという情報の大きさを 1bit の「（自己）情報量」として定義している。この情報量は足し合わせ可能な量だと考え，2 回に 1 回は起こるような事象 A と，また別の 2 回に 1 回は起こるような事象 B が同時に発生するという事象（確率 1/4 の事象）の情報量を 2bit，2 回に 1 回は起こるような事象 A と，また別の 2 回に 1 回は起こるような事象 B と，さらに別の 2 回に 1 回は起こるような事象 C が同時に発生するという事象（確率 1/8 の事象）の情報量を 3bit のように考えていく。この関係を数式で表すと以下のようになる。

$$\mathrm{I} = \log_2\left(\frac{1}{\mathrm{p}(X)}\right) = -\log_2\left(\mathrm{p}(X)\right)$$

※I は情報量，p (X)は事象 X の発生する確率。

この定義にしたがって，次の問いに答えよ。

問 4.1.1　1 枚のコインを 1 回投げて表が出たという事象の情報量は何 bit か。

問 4.1.2　2 枚のコインを 1 回投げてすべて表が出たという事象の情報量は何 bit か。

問 4.1.3　n 枚のコインを 1 回投げて 1 枚の表が出たという事象の情報量は何 bit か。

問4.1.1

- 回答

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2 2^{-1} = 1(bit)$$

- 考察
  - 1枚のコインを1回投げて表が出る確率P(X)=1/2

問4.1.2

- 回答

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -\log_2 2^{-2} = 2(bit)$$

- 考察
  - 2枚のコインを1回投げてすべて表が出る確率P(X)=1/2 x 1/2 = 1/4

問4.1.3

- 回答（★ 誤り ★）

$$I = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\log_2 2^{-n} = n(bit)$$

- 考察（★ 誤り ★）
  - n枚のコインを1回投げて1枚の表が出る確率は、$(\frac{1}{2})^1$ x $(\frac{1}{2})^{n-1}$ = $(\frac{1}{2})^n$

- 回答（正答）

$$I = -\log_2\left(n \times 2^{-n}\right) = -\log_2(n) - (-n)\log_2 2 = -\log_2(n) + n(bit)$$

- 考察（正答）
  - n枚のコインを1回投げて1枚の表が出る確率P(X)=${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1$ x $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ = $n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
  - n枚のうち1枚だけ表が出る組合せは${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1$ 、残りn-1枚がそれぞれ1/2の確率で裏表どちらかが出る

第 6 章　対数と乗算除算の関係

問 6.1

実数 X, A, B に対して $X = AB$ という関係が成り立っている。次の式の空欄に入れることのできる適切な選択肢を選べ。

$$\log(X) = \boxed{}$$

ア　$\log\left(\frac{A}{B}\right)$　　イ　$\log(A) - \log(B)$　　ウ　$\log(A) + \log(B)$　　エ　$A\log(B)$

問 6.2

実数 X, A, B に対して　$X = \frac{A}{B}$　という関係が成り立っている。次の式の空欄に入れることのできる適切な選択肢を選べ。

$$\log(X) = \boxed{}$$

ア　$\log(AB)$　　イ　$\log(A) - \log(B)$　　ウ　$\log(A) + \log(B)$　　エ　$A\log(B)$

問 6.3

実数X, x_1, x_2, x_3, x_4に対して　$X = x_1x_2x_3x_4$　という関係が成り立っている。次の式の空欄に入れることのできる適切な選択肢を選べ。

$$\log(X) = \boxed{}$$

ア　$\log(x_1)\log(x_2)\log(x_3)\log(x_4)$　　イ　$\log(x_1x_2) - \log(x_3x_4)$

ウ　$\sum_{k=1}^{4}\log(x_k)$　　エ　$\prod_{k=1}^{4}\log(x_k)$

問6.1

- 回答
  - ウ

- 考察
  - 公式通り

問6.2

- 回答
  - イ

- 考察
  - 公式通り

問6.3

- 回答
  - ウ

- 考察
  - 公式通り

おわりに（第3章：情報理論）

本レポートでは、動画の要点を記載しながら最後に付属の演習問題を回答した。
動画では例題が少なかった。
自己情報量については演習問題で多少イメージはできたが機械学習にどう用いるのかまではイメージできていない。
シャノンエントロピーやカルバック・ライブラー ダイバージェンス、交差エントロピーについても同様なので、
確認テストやインターネットの記事を通してさらに理解を深めていこうと思う。

応用数学 確認テスト

はじめに

応用数学の確認テストを実施し、理解度を確認する。

問題

第7章　確認テスト

問 7.1　次のベクトルの和を求めよ。

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

問 7.2　行列$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$の固有ベクトルを求めたところ，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$の定数倍であることがわかった。固有ベクトル$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$に対応する固有値を求めよ。

ヒント：$\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$が成り立つとき，$\lambda$は，固有ベクトル$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$に対応する固有値であるといえる。

問 7.3　離散的な確率分布$P(x)$の下では，ある確率変数$f(x)$の期待値は

$$\mathrm{E}(f)=\boxed{}$$

と表される。空欄にふさわしい選択肢はどれか。

ア　$\sum P(x)f(x)$　　イ　$\int P(x)f(x)$　　ウ　$\sum\frac{f(x)}{P(x)}$　　エ　$\sum\frac{P(x)}{f(x)}$

問 7.4　ある確率変数$f(x)$の分散は

$$\mathrm{Var}(f)=\mathrm{E}\left(\left(f(x)-\mathrm{E}\big(f(x)\big)\right)^2\right)$$

$$=\boxed{}$$

と表される。空欄にふさわしい選択肢はどれか。

ア　$\mathrm{E}(f(x))-\mathrm{E}(f(x))$　　イ　$\mathrm{E}(f(x)^2)\mathrm{E}(f(x))^2$　　ウ　$\mathrm{E}(f(x)^2)-\mathrm{E}(f(x))^2$

問 7.5　シャノンエントロピーは自己情報量の平均である。ある離散的な事象の確率分布を$P(x)$としたとき，シャノンエントロピーとしてふさわしいものは，次のうちどれか。

ア　$\sum\frac{1}{P(x)}\log\big(P(x)\big)$　　イ　$-\sum P(x)\log\big(P(x)\big)$　　ウ　$\sum P(x)+\log\big(P(x)\big)$

回答

問7.1

問7.2

問7.3

問7.4

問7.5

おわりに（応用数学 確認テスト）

本レポートでは、応用数学の確認テストを実施した。

In [ ]: