応用数学 第1章：線形代数

はじめに

「応用数学 第1章：線形代数」について、動画を見ながら公式を記載したり例題を解いたりしながら理解を深める。

連立方程式を行列で表す

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

※ベクトル$\vec{x}, \vec{b}$は縦に並べる

行の基本変形

- i行目をc倍する
- s行目にt行目のc倍を加える
- p行目とq行目を入れ替える

行列に行の基本変形を用いて、前述の連立方程式を解く

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2行目を1/2倍する

つまり、両辺に
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

1行目に2行目の-1倍を加える

つまり、両辺に $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

2行目に1行目の-3倍を加える

つまり、両辺に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

1行目と2行目を入れ替える

つまり、両辺に $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

解けた！！

$$
\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}
$$

単位行列

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}
$$

逆行列

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

となるようなA^{-1}のこと（-1をインバースと読む）

例えば　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方（掃き出し法）

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

を

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

と考える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

　↓　2行目を1/2倍する

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

↓　1行目に2行目の—1倍を加える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

↓　2行目に1行目の-3倍を加える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

↓　1行目と2行目を入れ替える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

逆行列が存在しない条件

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列の場合、 $a : b = c : d$
つまり、ad - bc = 0のときは逆行列を持たない。

行列式

$\overrightarrow{(a,b)}, \overrightarrow{(c,d)}$ の2ベクトルがある

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \end{pmatrix}$$

でつくられる平行四辺形の面積を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \end{vmatrix}$$

と表し、行列式と呼ぶ。

行列式の特徴

- 同じ行ベクトルが含まれている場合、行列式はゼロ

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \vec{W} \\ \vdots \\ \vec{W} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

- 1つのベクトルがλ倍されると、行列式はλ倍される

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \lambda\overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

- 他の成分が全部同じでi番目のベクトルだけが違った場合、行列式の足し合わせになる

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_i} + \vec{W} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \vec{W} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

- 行を入れ替えると符号が変わる

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_s} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_t} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_t} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_s} \\ \vdots \\ \overrightarrow{v_n} \end{vmatrix}$$

行列式の求め方

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

- 具体例:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 - 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 - 1 & 1 \end{vmatrix} &= 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5(1-0) - 4(2-1) + 3(2-1) \\ &= 5 - 4 + 3 = 4 \end{aligned}$$

固有値と固有ベクトル

以下の式が成り立つ場合、$\vec{x}$とその係数λを、行列Aに対する固有ベクトル、固有値という。

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- 具体例：

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}
$$
$$
= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

固有値 λ = 5

固有ベクトル（のうちの1つ） $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトルの求め方

$$
\begin{gathered}
A\vec{x} = \lambda \vec{x} \\
(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \\
\vec{x} \neq 0 \text{より}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
|A - \lambda I| = 0 \\
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \\
\lambda = 5 \quad or \quad -1
\end{gathered}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = x_2
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = -2x_2
$$

$$
\begin{gathered}
\text{したがって、} \\
\lambda = 5 \text{のとき、} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{の定数倍 (※)}
\end{gathered}
$$

$$
\lambda = -1 \text{のとき、} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{の定数倍 (※)}
$$

※要点

- 固有値は"1つ"に決まる。固有ベクトルは"何らかの定数倍"になるということ
- 大事なのは、比率までしかわからないということ
- 比率がわかったから、これらの固有値、固有ベクトルがわかったということ

問題

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\vec{x} \neq 0 \text{より}$$
$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{より、}$$
$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 3 \quad or \quad 2 \quad or \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{よって、} x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = -2, x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{よって、} x_1 = 0, x_2 = 0$$

したがって、

$$\lambda = 3\text{のとき、}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{の定数倍}$$

$$\lambda = 2\text{のとき、}\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{の定数倍}$$

$$\lambda = 1\text{のとき、}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{の定数倍}$$

固有値分解

ある実数を正方形に並べて作られた行列Aが固有値$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$と固有ベクトル$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots$を持つとする。
この固有値を対角線上に並べた行列（それ以外の成分は0）

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

と、それに対応する固有ベクトルを並べた行列

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

を用意したとき、それらは

$$AV = V\Lambda$$

と関連付けられる。したがって

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

と変更できる。このように正方形の行列を上述のように3つの行列の積に変換することを固有値分解という。
この変換によって、行列の累乗の計算が容易になる。

- 具体例

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値λ=5　or　-1、固有ベクトル$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　or　$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$の定数倍だったので、

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

は、以下のように書ける

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ を固有値分解せよ

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)(6-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 2 \quad or \quad 6$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{よって、} x_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{よって、} 4x_1 = x_2$$

したがって、
$\lambda = 2$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$の定数倍

$\lambda = 6$のとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$の定数倍

$$A = V\Lambda V^{-1}$$
は、以下のように書ける
つまり、固有値分解すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

特異値分解

- 正方行列以外は固有値分解できないが、似たようなことはできる

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u}$$
$$M^T\vec{u} = \sigma\vec{v}$$

- このような特殊な単位ベクトルがあれば、特異値分解できる

$$M = USV^T$$

※ただしU, Vは直行行列（複素数を要素に持つ場合はユニタリ行列）

特異値の求め方

$$MV = US \qquad M^T U = VS^T$$

$$M = USV^T \qquad M^T = VS^T U^T$$

これらの積は、

$$MM^T = USV^T VS^T U^T = USS^T U^T$$

つまりMM^Tを特異値分解すると、その左特異ベクトル
（ただし単位ベクトルから作らないといけないことに注意）と
特異値の2乗を求めることができる

- 具体例

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MM^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解して

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

これを固有値分解して

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1}$$

よって、

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 1\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 要点
  - 特異値分解とは、固有値分解の親戚みたいなもの
  - 長方形行列でも、転置させて乗算してやれば正方行列となり、固有値分解できる
- 特異値分解の利用例
  - 画像の圧縮、データ量の削減が挙げられる。
    元の画角を保ってピントをずらしたような画像データを作ることができ、データ量を減らすことが可能となる
  - 教師なし学習による分類
    2つの画像がある場合、特異値分解をかけてやることで特異値の大きい部分（値）が似ていれば、2つの画像は同じようなものだと機械に学習させてやることが可能となる
    ある意味では、教師なしでも2つの画像が似ているのでは･･･ということが浮かび上がってくる

演習問題

1.1

次のベクトル
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問1.1.1

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

問1.1.2

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問1.1.3

$$7\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ 21 \end{pmatrix}$$

問1.1.4

$$8(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 48 \\ 64 \\ 56 \end{pmatrix}$$

1.2

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問1.2.1

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

問1.2.2

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

In [13]:
```
# 計算して回答確認
import numpy as np

A = np.array([
    [2, 1],
    [5, 3],
])

B = np.array([
    [1, 4],
    [1, 5],
])

A-3*B
```

Out[13]:
```
array([[ -1, -11],
       [  2, -12]])
```

2.1

次のベクトルと行列 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問2.1.1

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

問2.1.2

$$B\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

問2.1.3

$$BA = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 10 \\ 25 & 23 & 10 \end{pmatrix}$$

問2.1.4

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

In [37]:
```python
# 計算して回答確認
import numpy as np

v = np.array([
    [1],
    [0],
    [3]
])

A = np.array([
    [1, 3, 4],
    [5, 9, 0],
    [3, 1, 2],
])

B = np.array([
    [1, 0, 3],
    [0, 2, 5],
])
```

In [38]:
```python
# 2.1.1
Av = A.dot(v)
Av
```

Out[38]:
```
array([[13],
       [ 5],
       [ 9]])
```

In [39]:
```python
# 2.1.2
Bv = B.dot(v)
Bv
```

Out[39]:
```
array([[10],
       [15]])
```

In [40]:
```python
# 2.1.3
BA = B.dot(A)
BA
```

Out[40]:
```
array([[10,  6, 10],
       [25, 23, 10]])
```

In [41]:
```python
# 2.1.4
B_t = B.T
B_t
```

Out[41]:
```
array([[1, 0],
       [0, 2],
       [3, 5]])
```

2.2

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
に関して以下の計算をせよ

問2.2.1

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

問2.2.2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

問2.2.3

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

問2.2.4

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

In [35]:
```
# 回答確認
A = np.array([
    [2, 1],
    [4, 1],
])

B = np.array([
    [1, 3],
    [3, 1],
])
```

In [19]:
```
# 2.2.1
A.dot(B)
```

Out[19]:
```
array([[ 5,  7],
       [ 7, 13]])
```

In [21]:
```
# 2.2.2
np.linalg.inv(A)
```

Out[21]:
```
array([[-0.5,  0.5],
       [ 2. , -1. ]])
```

In [23]:
```
# 2.2.3
np.linalg.inv(B)
```

Out[23]:
```
array([[-0.125,  0.375],
       [ 0.375, -0.125]])
```

In [26]:
```
# 2.2.4
B.dot(A).dot(np.linalg.inv(B))
```

Out[26]:
```
array([[-0.25,  4.75],
       [ 0.25,  3.25]])
```

おわりに

本レポートでは、動画の要点を記載したり例題の演習を行い、最後に付属の演習問題を回答した。
ベクトルや行列の演算は手計算で行ったあと、Pythonでも確認を行った。
ベクトルや行列の計算は問題ないが、固有値や特異値については理解が曖昧である。
確認テストやインターネットの記事を通して理解を深めていく。