3강. 수학적 벡터

[연 습 문 제]

1. 다음 두 벡터 u, v의 사잇각 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하시오.
   (1) $u = (-3,\ 5)$, $v = (2,\ 7)$
   (2) $u = (2,\ 1,\ 3)$, $v = (1,\ 2, -4)$
   (3) $u = (2,\ 0,\ 1, -2)$, $v = (1,\ 5, -3,\ 2)$

2. 다음 두 벡터 u, v에 의해 결정되는 평행사변형의 넓이를 구하시오.
   (1) $u = (2,\ 3,\ 0)$, $v = (-1,\ 2, -2)$
   (2) $u = (-3,\ 1, -3)$, $v = (6, -2,\ 6)$

3. 두 점 $(-1, -1,\ 0)$, $(2,\ 0,\ 1)$ 을 지나는 직선이 세 점 $(1, -1,\ 0)$, $(1,\ 2,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 2)$ 을 지나는 평면과 만나는 교점의 좌표를 구하시오.

4. 두 벡터 $u = (2,\ 0)$, $v = (1,\ 3)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 2차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

5. 세 벡터 $u = (2,\ 0,\ 0)$, $v = (0,\ 3,\ 0)$, $w = (1,\ 1,\ 1)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 3차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

1. 대수구조

(1) 대수구조

수 뿐 아니라 수를 대신할 수 있는 모든 것을 대상으로 하는 집합과 그 집합에 부여된 연산이 여러 가지 공리로써 엮인 수학적 대상.

간단히 일련의 연산들이 주어진 집합을 대수구조라고 한다.

(2) 여러 대수구조

반군 : 집합과 그 위의 결합법칙을 따르는 하나의 이항 연산을 갖춘 대수구조.
semi-group

모노이드 : 항등원을 갖는 반군.

군 : 역원을 갖는 모노이드.

아벨군(가환군) : 교환법칙이 성립하는 군.

환 : 덧셈에 대하여 아벨군, 곱셈에 대하여 반군을 이루고 분배법칙이 성립하는 대수구조.
ring

[반군] : 집합 + 이항연산 (결합법칙 성립)
$(\mathbb{R}, *)$
$x * y = 0$ 이란 연산이 있을 때,
$(1*2)*3 = 0*3 = 0$
$1*(2*3) = 1*0 = 0$

[모노이드] : 반군 + 항등원
[군] : 모노이드 + 역원 ⇒ $(\mathbb{Z}, +)$ 정수집합과 '덧셈' 연산
[아벨군] : 군 + 교환법칙 성립
[환] : $(\mathbb{Z}, +, \times)$
⊕ 결, 교, 항, 역
⊗ 결
성립

가군 : 어떤 환의 원소에 대한 곱셈이 주어지며, 분배법칙이 성립하는 아벨군.
module

가환환 : 곱셈이 교환법칙을 만족하는 환. ⊕ : 결, 교, 항, 역 ⊗ : 결, 교

나눗셈환 : 0이 아닌 모든 원소가 역원을 가지며, 원소의 개수가 둘 이상인 환. ⊕ : 결, 교, 항, 역 ⊗ : 결, 교, 항

체 : 가환환인 나눗셈환. 즉, 사칙연산이 자유로이 시행 될 수 있고 산술의 잘 알려진 규칙들을 만족하는 대수구조. ⊕ : 결, 교, 항, 역 ⊗ : 결, 교, 항, 역
ex) 유리수, 실수, 복소수

Index

2. 벡터공간

(1) 벡터공간

체 F에 대한 가군 $(V, +, \cdot)$ 을 벡터공간, V의 원소를 벡터라 한다.
이때 $+$는 벡터의 덧셈이고, $\cdot$는 벡터의 스칼라배다.

참고> $+ : V \times V \to V$ 인 함수
$\cdot : F \times V \to V$ 인 함수

Index

1. 대수구조
(1) 대수구조
(2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
(1) 벡터공간
(2) 선형생성
(3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
(1) 노름공간
(2) 내적공간
(3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

① $(V, +)$ 는 아벨군이다. $(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V)$

1) $(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w} = \mathrm{u}+(\mathrm{v}+\mathrm{w})$ 결합법칙
2) $\mathrm{u}+\mathrm{v} = \mathrm{v}+\mathrm{u}$ 교환법칙
3) $\mathrm{u}+\vec{0} = \mathrm{u}$ 인 $\vec{0}$가 V에 존재한다. 항등원
4) $\mathrm{u}+(-\mathrm{u}) = \vec{0}$ 인 $-u$가 V에 존재한다. 역원

② $(V, +, \cdot)$는 F의 가군이다. $(k, m \in F)$

1) $k \cdot (m \cdot \mathrm{u}) = (km) \cdot \mathrm{u}$
2) F의 곱셈 항등원 1에 대해 $1 \cdot \mathrm{u} = \mathrm{u}$
3) $(k+m) \cdot (\mathrm{u}+\mathrm{v}) = k \cdot \mathrm{u} + m \cdot \mathrm{u} + k \cdot \mathrm{v} + m \cdot \mathrm{v}$

[기본세팅]
$V = \{x \mid x \in R, x > 0\}$
$F = \mathbb{R}$
$+ : V \times V \to V \quad u+v = uv$
$\cdot : F \times V \to V, \ k \cdot u = u^k$

① $(V, +)$: 아벨군인가?
1) $(u+v)+w = (uv)+w = uvw$
$u+(v+w) = u+vw = uvw$ ⇒ 결합법칙 성립
2) $u+v = uv = vu = v+w$ ⇒ 교환법칙 성립
3) $u+1 = u \cdot 1 = u$ ∴ 1은 항등원
4) $u+\left(\frac{1}{u}\right) = u \cdot \frac{1}{u} = 1$ ∴ $\frac{1}{u}$은 역원

② $(V, +, \cdot)$은 가군인가?
1) $k \cdot (m \cdot u) = k \cdot u^m = u^{mk} = u^{km} = (km) \cdot u$
2) $1 \cdot u = u^1 = u$
3) $\underbrace{(k+m)}_{\text{스칼라}} \cdot \underbrace{(u+v)}_{\text{벡터}}$ 여기서 +는 스칼라끼리의 덧셈
u, v (벡터)는 미리 정의한 연산임
$= (u+v)^{k+m}$
$= (uv)^{k+m}$
$= u^{k+m} v^{k+m}$
$= u^k u^m v^k v^m$
$= u^k + u^m + v^k + v^m$
$= k \cdot u + m \cdot u + k \cdot v + m \cdot v$

Index

1. 대수구조
(1) 대수구조
(2) 여러 대수구조
2. 벡터공간
(1) 벡터공간
(2) 선형생성
(3) 선형독립
3. 여러 벡터공간
(1) 노름공간
(2) 내적공간
(3) 유클리드공간
4. 기저와 차원

(2) 선형생성

① 부분벡터공간

벡터공간 V상에서 정의된 덧셈과 스칼라배에 대하여 그 자체로서 벡터공간이 되는 V의 부분집합 W를 V의 부분벡터공간 또는 부분공간이라 한다.

② (선형)생성

벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 $S=\{\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \cdots,\ \mathrm{v}_n\}$ 내의 벡터들의 가능한 모든 선형결합으로 이루어진, V의 부분벡터공간을 S의 (선형)생성 $span(S)$이라 한다. 즉,

$$span(S)=\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i\mathrm{v}_i\ \middle|\ k_i\in F,\ \mathrm{v}_i\in S\right\}$$

이때 S가 $span(S)$을 (선형)생성한다라고 한다.

ex) $S=\{(1,0),(0,1)\}$
$F=\mathbb{R}$
$\Rightarrow span(S)=\{k(1,0)+m(0,1)\mid k,m\in F\}$
$=\{(k,m)\mid k,m\in F\}$
$=\mathbb{R}^2$

(3) 선형독립 (linearly independent)

벡터공간 V의 공집합이 아닌 부분집합 $S=\{\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \cdots,\ \mathrm{v}_n\}$ 에 대하여

$$k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+\ \cdots+k_n\mathrm{v}_n=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ k_1=k_2=\ \cdots=k_n=0$$

이면 S가 선형독립이라고 한다. 만약 $k_1=k_2=\ \cdots=k_n=0$ 외의 다른 해가 존재하면 S가 선형종속이라고 한다.

ex) $S=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$
$k_1(1,0)+k_2(0,1),k_3(1,1)=0$을 만족하는 해는?
$\Rightarrow\begin{cases}k_1=k_2=k_3=0\\ k_1=k_2=1,\ k_3=-1\end{cases}$ 반례있음
$\therefore$ S는 선형종속이다

3. 여러 벡터공간

(1) 노름공간 (normed space)

노름이 부여된 $K-$벡터공간 $(V,\ \|\cdot\|)$

노름이란 $\forall\mathrm{u},\mathrm{v}\in V,\ \ \forall k\in K$ 에 대해 아래 세 조건을 만족시키는 함수 $\|\cdot\|:\ V\ \rightarrow\ [0,\ \infty)$ 이다. $(K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\})$
실수 복소수

1) $\|k\mathrm{v}\|=|k|\|\mathrm{v}\|$
2) $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|\le\|\mathrm{u}\|+\|\mathrm{v}\|$
3) $\|\mathrm{v}\|=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{v}=\vec{0}$

(2) 내적공간

내적이 부여된 $K-$벡터공간 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

내적이란 $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V,\ \forall k \in K$ 에 대해 아래 네 조건을 만족시키는 함수

$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ 이다. $(K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

1) $\langle \mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle$

2) $\langle k\mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = k\langle \mathrm{v}, \mathrm{u}\rangle$

3) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, \mathrm{u}\rangle}$

4) $\mathrm{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle > 0$

(3) 유클리드공간

음이 아닌 정수 n에 대하여 n차원 유클리드공간 R^n 은 실수집합 R 의 n번 곱집합이며, 이를 n차원 실수 벡터공간으로써 정의하기도 한다.

이 위에 내적 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i \mathrm{v}_i = \mathrm{u} \bullet \mathrm{v}$ 을 정의하면 점곱, 스칼라곱 이라고도 한다.

4. 기저와 차원

① 기저 (basis)

벡터공간 V의 부분집합 B가 선형독립이고 V를 생성할 때, B를 V의 기저라 한다.

② 차원 : 기저의 원소 갯수

B가 벡터공간 V의 기저일 때 B의 원소의 개수를 V의 차원 $\dim(V)$라 한다.

ex) $V = \mathbb{R}^2$

$B_1 = \{(1,0), (0,1)\}$

$\Rightarrow \mathrm{span}(B_1) = \mathbb{R}^2$

$\therefore B_1$은 V의 기저

$B_2 = \{(1,0), (1,1)\}$

$(a,b) = k(1,0) + m(1,1)$

$= (k+m, m)$

$\therefore m = b$

$k = a-b$

$\therefore B_2$는 V의 기저

$B_3 = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$

$\mathrm{span}(B_3) = \mathbb{R}^2$ but 선형종속

$\therefore B_3$는 V의 기저가 아니다

$\dim(V) = n(B_1) = n(B_2) = 2$

③ 정규기저 (normal basis)

다음 조건을 만족하는 노름공간 V의 기저 B를 정규기저라 한다.

$$\forall b \in B\ ,\ \|b\| = 1$$

④ 직교기저 (orthogonal basis)

다음 조건을 만족하는 내적공간 V의 기저 B를 직교기저라 한다.

$$\forall b_1,\ b_2 \in B\ ,\ \langle b_1, b_2 \rangle = 0$$

ex) $\mathbb{R}^2$에 대해서

	정규	직교
$B_1 = \{(2,0), (1,1)\}$	X	X
$B_2 = \{(1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$	O	X
$B_3 = \{(1,1), (1,-1)\}$	X	O
$\underline{B_4 = \{(1,0), (0,1)\}}$	O	O

→ 표준기저

⑤ 정규직교기저

정규기저이자 직교기저인 내적공간의 기저를 정규직교기저라 한다.

특히 R^n 의 정규직교기저

$\{(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$

를 표준기저라 한다.

[연 습 문 제]

1. 이번 강의에서 배운 대수구조들의 관계도를 작성하시오.

2. 다음의 연산이 부여된 집합이 벡터공간인지 아닌지 판별하고, 아니라면 그 이유를 설명하시오.
   (1) 표준적인 벡터덧셈과 아래의 스칼라배가 부여된 모든 실수 3-튜플 $(x,\ y,\ z)$ 의 집합.
   $$k(x,\ y,\ z) = (k^2x,\ k^2y,\ k^2z)$$
   (2) 표준적인 행렬덧셈과 스칼라배가 부여된 모든 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 꼴의 2×2 대각행렬 집합.

3. 세 벡터 $\mathrm{u}=(-1,0,1,2)$, $\mathrm{v}=(2,1,3,0)$, $w=(3,-1,2,5)$ 에 대하여 다음 중 $span\{\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}\}$ 의 벡터인 것을 모두 고르시오.
   ① $(0,0,0,0)$ ② $(2,2,2,2)$
   ③ $(3,6,7,-12)$ ④ $(9,0,11,12)$

4. R^4 의 부분집합 $\{(2,2,-6,-2),(2,0,-2,1),(3,1,-5,0)\}$ 가 선형독립인지 아닌지 판별하고, 아니라면 각 벡터를 나머지 두 벡터의 선형결합으로 표현하시오.

5. R^3 에 대해서 ① 정규지만 직교아닌, ② 직교지만 정교아닌, ③ 정규직교인 기저의 예를 드시오.

<연습문제>

1. 대수구조 관계도

집합
↑
반군
↑
모노이드
↑
군
↑
아벨군 ← 가군 ← 벡터공간
↑
환
↑
[가환환 ← 체 (field) : 두 종류의 이항연산이 모두 만족
[나눗셈환 ←

2. (1) 벡터공간 아님 (∵ 스칼라배 3)

$(k_1+k_2)(x,y,z) = k_1(x,y,z) + k_2(x,y,z)$ 로 찢어질 수 있어야 한다.

3. $u=(-1,0,1,2)$

$v=(2,1,3,0)$

$w=(3,-1,2,5)$

임의의 실수 a, b, c에 대해

$au+bv+cw=(2,2,2,2)$가 성립?

$$\begin{cases} -a+2b+3c=2 \\ b-c=2 \\ a+3b+2c=2 \\ 2a+5c=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

↳ 불능 (0=14는 말이 안됨)

4. 선형독립이려면, $av_1+bv_2+cv_3=\vec{0}$을 만족하는 a, b, c가 $(0,0,0)$을 제외하고는 존재하지 않아야 한다.

$$\begin{cases} 2a+2b+3c=0 \\ 2a+c=0 \\ -6a-2b-5c=0 \\ -2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=-1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{matrix}\right\}$$

일때 왼쪽 식이 만족

⇒ 선형종속이다

5. ① $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

② $\{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

③ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$