2강. 물리적 벡터

[연 습 문 제]

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-3y+z=-10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y-2z=6 \\ x+y+2z=9 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y+2z+4w+v=0 \\ z+w+2v=0 \\ 2x+2y-z+3w=0 \end{cases}$

2. 역행렬이 존재하는 두 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 임을 보이시오.

3. 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4. 정사각행렬 A 와 A 의 역행렬 A^{-1} 에 대하여 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ 임을 증명하시오.

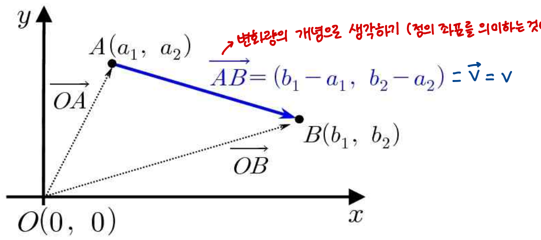
5. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} 5x+3y+2=0 \\ 4x-y+5=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2z=6 \\ -x-2y+3z=8 \\ -3x+4y+6z=30 \end{cases}$

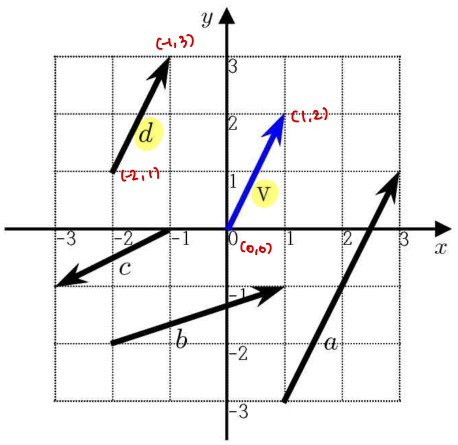
1. 벡터와 좌표계

(1) 평면벡터

R^2 에서 크기(스칼라)와 방향의
의미를 모두 포함하는 표현 도구.



a_1으로 시작해서 b_1으로 끝남
a_2로 시작해서 b_2로 끝남
이런개념



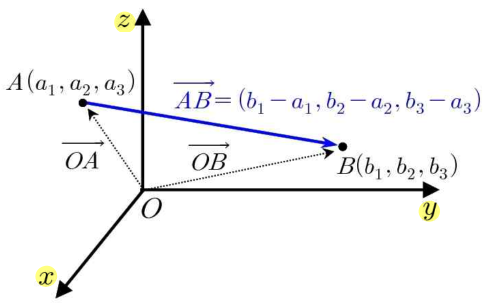
방향이 같은 : d, a
크기가 같은 : d, c

v = (1-0, 2-0) = (1, 2)
d = (-1-(-2), 3-1) = (1, 2)

Q. 벡터 v와 같은 벡터는? A. d

(2) 공간벡터

R^3 에서 크기와 방향의 의미를 모두
포함하는 표현 도구.



(3) n차원 벡터 (고차원에 대한 논의 필요)

R^n 상의 벡터 $\mathrm{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$

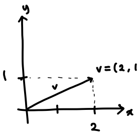
$=\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, \cdots, b_n-a_n)$

- 영벡터 $\vec{0}=\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$
- 두 벡터 $\mathrm{v}=(v_1,\cdots,v_n)$, $\mathrm{w}=(w_1,\cdots,w_n)$ 가 같다. $\Leftrightarrow$ $v_1=w_1, \cdots, v_n=w_n$ 두 벡터의 모든 성분들이 동일

2. 벡터의 연산

(1) 노름 (norm)

ex)



$v=(2,1) \Rightarrow \|v\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

정규화 $\Rightarrow$ $\frac{v}{\sqrt{5}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

- 벡터의 크기 (또는 길이) 라고도 하며,

  이중 절댓값 $\|\mathrm{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$

- 노름이 1인 벡터를 단위벡터라고 한다.

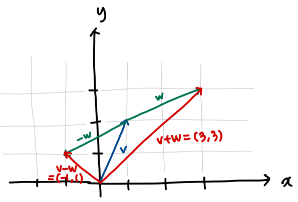
  ※ 정규화 : $\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|}=\hat{v}$

- $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,\cdots,0)$ 등을 표준단위벡터라고 한다. (하나의 성분만 1이고 나머지 성분은 모두 0인것)

$V=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$

$=v_1e_1+v_2e_2+\cdots+v_ne_n$ 으로도 표현가능

(2) 선형결합 linear combination

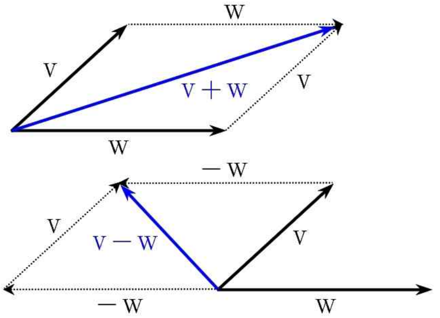


$V=(1,2)$

$W=(2,1)$

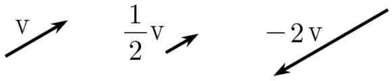
① 벡터의 덧셈과 뺄셈

$\mathrm{v}\pm\mathrm{w}=(v_1\pm w_1, \cdots, v_n\pm w_n)$



② 벡터의 실수배

$$k\mathrm{v} = (kv_1, kv_2, \cdots, kv_n)$$



③ 선형(일차)결합

coefficient (계수)

R^n 의 벡터 w 가 임의의 실수 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 에 대하여

$$\mathrm{w} = k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + \cdots + k_r\mathrm{v}_r$$

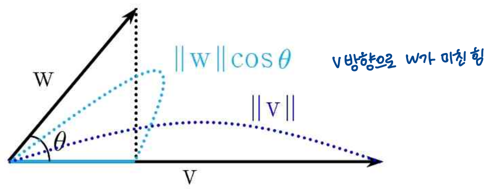
의 형태로 쓰여지면, w 를 $\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_r$ 의 선형(일차)결합이라 한다.

(3) 스칼라 곱

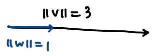
한 벡터가 다른 벡터의 방향에 대해 가한 힘에 의해 변화된 스칼라(크기). 점곱 또는 내적.

$$\mathrm{v} \bullet \mathrm{w} = \|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|\cos\theta$$
$$= v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n$$

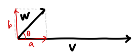
(θ 는 두 벡터 v, w 가 이루는 각)



v방향으로 w가 미친 힘

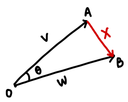
①


$v \cdot w = 3 \times 1 = \vec{3}$

②


a+b

$v \cdot w = \|v\| \times \|a\|$
$= \|v\| \times \|w\| \times \cos\theta$

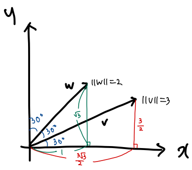


$w = v + x$
$x = w - v$

· 제 2 코사인 법칙

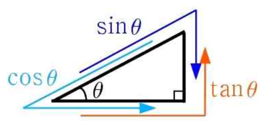
$\|x\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\underbrace{\|v\|\|w\|\cos\theta}_{v \cdot w}$ (x: w−v)

$v \cdot w = \frac{1}{2}\{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|w-v\|^2\}$
$= \frac{1}{2}\{(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2) + (w_1^2+w_2^2+\cdots+w_n^2) - (w_1-v_1)^2 - (w_2-v_2)^2 - \cdots - (w_n-v_n)^2\}$
$= \frac{1}{2}\{2w_1v_1 + 2w_2v_2 + \cdots + 2w_nv_n\}$
$= w_1v_1 + w_2v_2 + \cdots + w_nv_n$



$v \cdot w = \|v\| \times \|w\| \times \cos\theta$
$= 3 \times 2 \times \cos 30°$
$= 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= 3\sqrt{3}$
$= (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) \cdot (1, \sqrt{3})$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

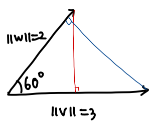
※ 삼각함수 표



θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ex)



$v \cdot w = \|v\| \times \|w\| \times \cos\theta$
$= 3 \times 2 \times \cos 60°$
$= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$

※ 벡터의 연산 성질

R^n 상의 벡터 u, v, w 와 스칼라 k, m 에 대하여 다음이 성립한다.

ⓐ $\mathrm{u}+\mathrm{v}=\mathrm{v}+\mathrm{u}$
ⓑ $(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{w}=\mathrm{v}+(\mathrm{u}+\mathrm{w})$
ⓒ $\mathrm{u}+\vec{0}=\vec{0}+\mathrm{u}=\mathrm{u}$
ⓓ $\mathrm{u}+(-\mathrm{u})=\vec{0}$
ⓔ $k(\mathrm{u}+\mathrm{v})=k\mathrm{u}+k\mathrm{v}$
ⓕ $(k+m)\mathrm{u}=k\mathrm{u}+m\mathrm{u}$
ⓖ $k(m\mathrm{u})=(km)\mathrm{u}$
ⓗ $1\mathrm{u}=\mathrm{u}$
ⓘ $0\mathrm{u}=\vec{0}$, $k\vec{0}=\vec{0}$

ⓙ $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=\mathrm{v}\cdot\mathrm{u}$
ⓚ $\vec{0}\cdot\mathrm{u}=\mathrm{u}\cdot\vec{0}=0$
ⓛ $\mathrm{u}\cdot(\mathrm{v}+\mathrm{w})$
$=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}+\mathrm{u}\cdot\mathrm{w}$
ⓜ $(\mathrm{u}+\mathrm{v})\cdot\mathrm{w}$
$=\mathrm{u}\cdot\mathrm{w}+\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}$
ⓝ $k(\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})=(k\mathrm{u})\cdot\mathrm{v}$
$=\mathrm{u}\cdot(k\mathrm{v})$

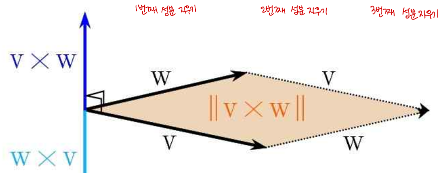
— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

(4) 벡터 곱 (벡터가 결과값으로 나옴)

방향은 두 벡터에 동시에 수직이고, 크기는 두 벡터의 평행사변형의 면적인 R^3 상의 벡터. 가위곱 또는 외적.

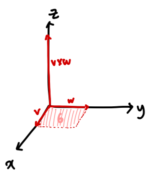
$$\mathrm{v}\times\mathrm{w}=\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right)$$

1번째 성분 지우기 2번째 성분 지우기 3번째 성분 지우기



($\|\mathrm{v}\times\mathrm{w}\|=\|\mathrm{w}\times\mathrm{v}\|$)

ex)



v=(2,0,0)
w= (0,3,0)
v×w =(0 , 0, 6)
⇒방향: 두 벡터에 동시에 수직
크기 : 두 벡터의 평행사변형 면적

— Index —
1. 벡터와 좌표계
(1) 평면벡터
(2) 공간벡터
(3) n차원 벡터
2. 벡터의 연산
(1) 노름
(2) 선형결합
(3) 스칼라 곱
(4) 벡터 곱
3. 벡터의 응용
(1) 직선의 표현
(2) 평면의 표현

※ 벡터 곱의 성질

R^3 상의 벡터 u, v, w 와 스칼라 k 에 대하여 다음이 성립한다.

ⓐ $\mathrm{u}\times\mathrm{v}=-(\mathrm{v}\times\mathrm{u})$ 교환법칙 성립X
ⓑ $\mathrm{u}\times(\mathrm{v}+\mathrm{w})=(\mathrm{u}\times\mathrm{v})+(\mathrm{u}\times\mathrm{w})$
ⓒ $(\mathrm{u}+\mathrm{v})\times\mathrm{w}=(\mathrm{u}\times\mathrm{w})+(\mathrm{v}\times\mathrm{w})$
ⓓ $k(\mathrm{u}\times\mathrm{v})=(k\mathrm{u})\times\mathrm{v}=\mathrm{u}\times(k\mathrm{v})$
ⓔ $\mathrm{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\mathrm{u}=\vec{0}$
ⓕ $\mathrm{u}\times\mathrm{u}=\vec{0}$ (동일한 벡터로는 평행사변형을 못만들기 때문에)

3. 벡터의 응용

(1) 직선의 표현

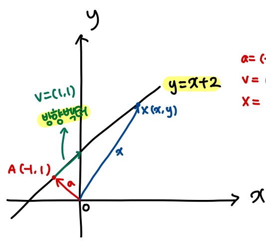
→ 원점을 시점으로 하는 벡터

R^2 또는 R^3 에서 위치벡터가 a인 점 A 를 지나며 방향벡터가 v인 직선 상의 임의의 점 X 의 위치벡터 x는

$$\mathrm{x} = a + k\mathrm{v}$$

을 만족한다. (단, k는 임의의 실수)

ex)



$a=(-1,1)$, $v=(1,1)$, $X=(x,y)$ → $X=a+kv$ (k는 임의의 실수)

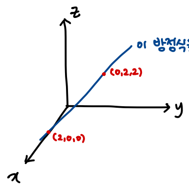
$\Updownarrow$

$(x,y)=(-1,1)+k(1,1)$
$=(-1+k,\ 1+k)$

$\therefore \begin{cases} x=-1+k \Rightarrow k=x+1 \\ y=1+k \Rightarrow k=y-1 \end{cases}$

$\Rightarrow x+1=y-1$ 이므로
$y=x+2$ 이다.
(직선의 방정식과 동일)

ex)



이 방정식을 벡터로 구현해보자

$\begin{cases} v=(-2,2,2) \text{ : 방향벡터} \\ a=(2,0,0) \text{ : 위치벡터} \\ X=(x,y,z) \end{cases}$

$\therefore X=a+kv$ (k는 임의의 실수)

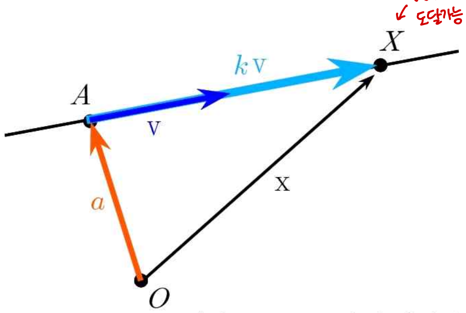
$(x,y,z)=(2,0,0)+k(-2,2,2)$
$=(2-2k,\ 2k,\ 2k)$

$x=2-2k \Rightarrow k=1-\frac{1}{2}x$
$y=2k \Rightarrow k=\frac{1}{2}y$
$z=2k \Rightarrow k=\frac{1}{2}z$

$\therefore 1-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}z$

$2-x=y=z$

v에 적당한 실수배를 해서 도달가능



(단, O 는 원점이다.)

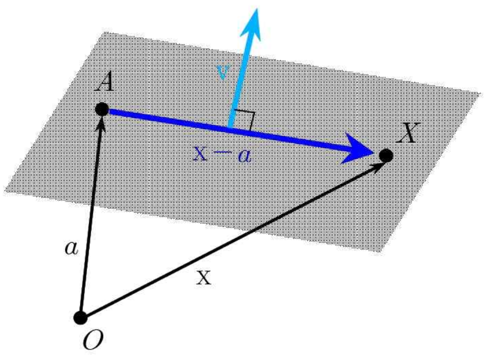
(2) 평면의 표현

R^3 에서 위치벡터가 a인 점 A 를 지나며 법선벡터가 v인 평면상의 임의의 점 X 의 위치벡터 x는

$$(\mathrm{x} - a) \cdot \mathrm{v} = 0$$

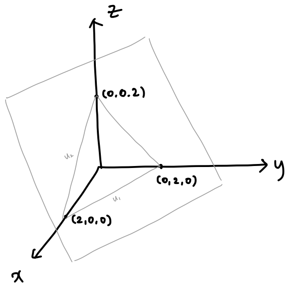
을 만족한다.

※ 법선벡터는 평면상의 서로 다른 두 직선의 방향벡터들의 벡터 곱으로써 구하면 용이하다.



(단, O 는 원점이다.)

ex)



*법선벡터 구하기

$u_1 = (-1, 1, 0)$

$u_2 = (-1, 0, 1)$

$\therefore v = (1, 1, 1)$ 법선벡터

* 위치벡터 하나 잡기

$a = (2, 0, 0)$

* 식적용

$(x - a) \cdot v = 0$

$\Leftrightarrow (x-2, y, z) \cdot (1, 1, 1)$

$= x - 2 + y + z = 0$

[연 습 문 제]

1. 다음 두 벡터 u, v의 사잇각 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하시오.
   (1) $u = (-3, 5)$, $v = (2, 7)$
   (2) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 2, -4)$
   (3) $u = (2, 0, 1, -2)$, $v = (1, 5, -3, 2)$

2. 다음 두 벡터 u, v에 의해 결정되는 평행사변형의 넓이를 구하시오.
   (1) $u = (2, 3, 0)$, $v = (-1, 2, -2)$
   (2) $u = (-3, 1, -3)$, $v = (6, -2, 6)$

3. 두 점 $(-1, -1, 0)$, $(2, 0, 1)$ 을 지나는 직선이 세 점 $(1, -1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ 을 지나는 평면과 만나는 교점의 좌표를 구하시오.

4. 두 벡터 $u = (2, 0)$, $v = (1, 3)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 2차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

5. 세 벡터 $u = (2, 0, 0)$, $v = (0, 3, 0)$, $w = (1, 1, 1)$ 를 이용하여 행렬식 $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 의 절댓값이 3차원 공간에서 어떤 기하적인 의미를 갖는지 고찰하시오.

<연습문제>

1. $u \cdot v = \|u\| \times \|v\| \times \cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \times \|v\|}$ 이용하기

(1) $\cos\theta = \dfrac{-6+35}{\sqrt{9+25} \times \sqrt{4+49}} = \dfrac{29}{\sqrt{34} \times \sqrt{53}}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{2+2-12}{\sqrt{4+1+9} \times \sqrt{1+4+16}} = \dfrac{-8}{\sqrt{14} \times \sqrt{21}}$

(3) $\cos\theta = \dfrac{2+0-3-4}{\sqrt{4+0+1+4} \times \sqrt{1+25+9+4}} = \dfrac{-5}{3 \times \sqrt{39}}$

2. (1) $u \times v = (-6, 4, 7)$

$\|u \times v\| = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}$

(2) $u \times v = (0, 0, 0) = \vec{0}$ (두벡터가 평행한 관계.. 연직 0)

3. 직선의 방정식 구하기

방향벡터 : $v = (3, 1, 1)$

위치벡터 : $a = (-1, -1, 0)$

$\therefore X = a + kv$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-1, -1, 0) + k(3, 1, 1)$

$= (-1+3k, -1+k, k)$

$\left.\begin{array}{l} x = -1+3k \\ y = 1+k \\ z = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k = \frac{1}{3}(x+1) \\ k = y-1 \\ k = z \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x+y) = y-1 = z$

평면 $(x-a) \cdot v = 0$ 이용

법선 v 구하기 $u = (0, 3, 0)$

$w = (-1, 1, 2)$

법선 $v = (6, 0, 3)$ ↪ (2.0.1)로 바꾸기 (방향은 어차피 같으므로)

$X - a = (x-1, y+1, z)$

$(X-a) \cdot v = 2(x-1) + z = 0$ ⇒ 평면의 방정식

연립하기

직선 $(3k-1, k-1, k)$

평면 $2(x-1) + z = 0$

$2(3k-2) + k = 6k-4+k = 0$

$\therefore k = \frac{4}{7}$

⇒ 점의 좌표는 $\left(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$