1강. 행렬과 행렬식

1. 행렬

(1) 용어정리

성분 := 행렬 안에 배열된 구성원 (=항=원소)

행 := 행렬의 가로줄

열 := 행렬의 세로줄

$m\times n$ **행렬** := m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

주대각선 := 행렬의 왼쪽 위에서 오른쪽 아래를 가르는 선

대각성분 := 주대각선에 걸치는, 행과 열의 지표수가 같은 성분

영행렬 := 모든 성분이 0인 행렬

전치행렬 := (a_{ij}) 에 대하여 (a_{ji})

대칭행렬 := $A=A^T$ 인 A

정사각행렬 := 행, 열의 개수가 같은 행렬

단위행렬 := 모든 대각성분이 1이고, 그 외의 성분은 0인 정사각행렬

(2) 행렬의 연산

$m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 에 대해

① 덧셈과 뺄셈

$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

② 상수배

상수 c 에 대해 $cA=(ca_{ij})$

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

$m \times n$ 행렬 $A=(a_{ij})$ 와 $n \times r$ 행렬 $B=(b_{jk})$ 에 대해

③ 곱셈

$AB=(c_{ik})$: $m \times r$ 행렬

단, $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

※ 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립되지 않는다.

— Index —
1. 행렬
(1) 용어정리
(2) 행렬의 연산
2. 연립일차방정식
(1) 행렬의 표현
(2) 가우스 조던 소거법
(3) 역행렬 이용
3. 행렬식
(1) 행렬식이란?
(2) 역행렬
(3) 크래머 공식

2. 연립일차방정식

(1) 행렬의 표현

예를 들어, $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ 를

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ 표현 ⇒ 가우스 조던 소거법

② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ 표현 ⇒ 역행렬 이용

(2) 가우스 조던 소거법

: 기존 행렬보다 더 간단해야함, 원래의 해가 유지되어야 함

다음 세 가지의 기본 행 연산을 통해 연립일차방정식의 첨가행렬을 기약 행 사다리꼴로 변환하여 해를 구한다.

1) 한 행을 상수배한다.
2) 한 행을 상수배하여 다른 행에 더한다.
3) 두 행을 맞바꾼다.

기본행 연산

(3) 역행렬 이용

연립일차방정식 $AX=B$ 에서 A의 역행렬 A^{-1} 가 존재하면, $X=A^{-1}B$ 이다.

예를 들어,

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$$

3. 행렬식

(1) 행렬식이란?

정사각행렬 A를 하나의 수로써 대응시키는 특별한 함수. $\det A = |A|$

이때, A 가

1) 0×0 ⇨ $\det(\ )=0$
2) 1×1 ⇨ $\det(a)=a$
3) 2×2 ⇨ $\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (ad - bc)

가우스조던 소거법

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \times 2 \quad 2 \quad 4 \quad 10$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \times 2 \quad 0 \quad 2 \quad 4$$

: 행사다리꼴

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

: 기약행사다리꼴

$$\Rightarrow x=1,\ y=2$$

$$\begin{cases} y+z=1 \\ 2x+y+3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \times \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{2} & \tfrac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \times \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

행 맞바꾸기

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} z&=t \\ x&=1-t \\ y&=1-t \end{aligned}\right\} \text{부정형 (일반해)}$$

4) 3×3 ⇨

M_{ij} : 기존 행렬에서
i행과 j열을 지운 소행렬

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

+ − + − ⋯ 이런식으로 이어짐

5) 4×4 ⇨ 웬만하면 볼 일은 거의 x

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14}$$

(2) 역행렬

행렬식이 0이면 역행렬이 존재하지 않는다. 즉, 행렬식이 0이 아닌 정사각행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 은

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots \\ C_{12} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(단, $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$)

ex. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathrm{adj}\,A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}}_{\det(A)\cdot I}$$

$\Leftrightarrow A\cdot \mathrm{adj}\,A = \det(A)\cdot I$

$\therefore A\cdot \underbrace{\dfrac{\mathrm{adj}\,A}{\det(A)}}_{A^{-1}} = I$ ($\det(A)\neq0$ 일때)

(3) 크래머 공식

연립일차방정식 $AX=B$ 에서, A가 행렬식이 0이 아닌 정사각행렬일 때,

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

단, $j=1,\cdots,n$ 이고 A_j는 A의 j번째 열을 B 의 원소로 바꾼 행렬이다.

$$x_1 = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\det}\left(b_1C_{11} + b_2C_{21} + b_3C_{31}\right)$$

역행렬, 행렬식

ex) $A = \begin{pmatrix} 1^{+} & 2^{-} & 3^{+} \\ 0^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 1^{+} & 2^{-} & 0^{+} \end{pmatrix}$ 의 행렬식 구하기

$3 \cdot (0-1) = -3$

$\therefore \det(A) = -3$

* 사루스 법칙 (전개) : 이렇게 할 수도 있음

동일하게 써준다

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$\diagdown + \diagdown + \diagdown - \diagup - \diagup - \diagup$

ex) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$0+0+0 \; -3-0-0 = -3$

크래머 공식

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

$X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{\det(A)} \left(b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + b_3 C_{31} \right)$$

[연 습 문 제]

1. 다음 연립일차방정식을 가우스 조던 소거법 또는 역행렬을 이용하여 풀이하고, 해에 대해 탐구하시오.

(1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-3y+z=-10 \\ 3x-3y+6z=15 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y-2z=6 \\ x+y+2z=9 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y+2z+4w+v=0 \\ z+w+2v=0 \\ 2x+2y-z+3w=0 \end{cases}$

2. 역행렬이 존재하는 두 정사각행렬 A, B 에 대하여 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 임을 보이시오.

3. 다음 행렬의 역행렬을 구하시오.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

4. 정사각행렬 A 와 A 의 역행렬 A^{-1} 에 대하여 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ 임을 증명하시오.

5. 크래머 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하시오.

(1) $\begin{cases} 5x+3y+2=0 \\ 4x-y+5=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2z=6 \\ -x-2y+3z=8 \\ -3x+4y+6z=30 \end{cases}$

<연습문제>

1. 역행렬 구하기

1) $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $0 \quad 0 \quad -\frac{7}{2} \quad -\frac{21}{2}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore x=1 \quad y=-2 \quad z=3$

2) $2 \quad -2 \quad 4 \quad 10$

$3 \quad -3 \quad 6 \quad 15$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} z=t \text{ (임의의 실수)} \\ x=25-5t \\ y=20-3t \end{cases}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{-1} \end{pmatrix}$

불능! ⇒ 해가 없다

$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -1\cdot(-4+4) + 1\cdot(-2+2) - 2\cdot(-2+2) = 0$

det (A) = 0 이므로 해가 없다.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $2 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 2 \quad 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $0 \quad 0 \quad 5 \quad 5 \quad 10 \quad 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ $0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 0$

$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $\left.\begin{cases} v=0 \\ w=t \\ z=-t \\ y=s \\ x=-s-2t \end{cases}\right\}$ 부정형

3. 역행렬 구하기

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

$\det(A) = 1\cdot(6-15) - 0\cdot(\quad) + 8\cdot(5-4)$

$= -9+8 = -1$

$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

5. 크래머 공식

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -5-12 = -17$

$x = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} = -\frac{1}{17}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{17}(2+15) = -1$

$y = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} = -\frac{1}{17}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{17}(-25+8) = 1$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}$

24×6: 24, 12, 144 $\quad$ $92 \times 2 = 184$ $\quad$ $184 - 144 = 40$

$\det(A) = 1\cdot(-12-12) - 0\cdot(\quad) + 2\cdot(-4-6)$

$= -24-20 = -44$

$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = -\frac{1}{44}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \\ 30 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{44}\left\{6\cdot(-12-12) - 0\cdot(\quad) + 2\cdot(32+60)\right\}$

$= -\frac{1}{44}(-144+184) = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}$

$60 - 36 = 24$ $\quad$ $42 + 24 = 72$ $\quad$ $72 \div 4$

$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = -\frac{1}{44}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 8 & 3 \\ -3 & 30 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{44}\left\{1\cdot(48-90) + 1\cdot(36-60) - 3\cdot(18-16)\right\}$

$= -\frac{1}{44}(-42-24-6) = -\frac{72}{44} = -\frac{18}{11}$

$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = -\frac{1}{44}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 8 \\ -3 & 4 & 30 \end{vmatrix}$

$= -\frac{1}{44}\left\{1\cdot(-60-32) - 0\cdot(\quad) + 6\cdot(-4-6)\right\}$

$= -\frac{1}{44}(-92-60) = +\frac{152}{44} = \frac{38}{11}$