Introduction to Tensors in a Nutshell

M. Yoon

Published on January 19, 2023
Last edited on September 22, 2024

Contents

1 Is 1-Dimensional Velocity a Vector?

만약 우리 우주가 1차원이라면, 스칼라와 벡터에는 어떤 차이가 있는가? 조금 다르게 말해서, 1차원 속도는 스칼라인가? 결론부터 말하자면, 그렇지 않다.

길이 1 m의 막대를 생각해 보자. 막대의 길이는 미터법에서는 1.00 m이지만, 만약 미국의 관습 단위계를 사용한다면 우리는 동일한 길이를 보고 39.4 in라고 말할 것이다. 우리가 말한 길이의 값은 달라졌지만, 당연히 물리적으로 막대의 길이는 변하지 않았다. 여기에서 변한 것은 우리가 막대를 측정하는 데에 사용한 눈금과, 동시에 정확히 '반대로' 변한 측정값이다.

벡터는 성분과 기저로 이루어진다. 물리학에서는 목적에 따라 여러 좌표계를 오가는데, 이러한 좌표 변환은 곧 기저의 변환을 의미한다. 물리학에서 벡터란, 특정한 좌표 변환에 대하여 그 성분이 기저와 정확히 '반대로' 변해 그 자체로는 좌표 변환에 변하지 않는 대상을 말한다.[1] 보다 일반적으로, 이렇듯 좌표 변환에 그 자체가 그대로인 물리량들을 불변량이라 칭한다.[2] 여기서 기저와 동일한 방식의 변환을 따르는 것을 공변성, 벡터의 성분과 같이 정반대로 변환되는 것을 반변성이라 한다.

2 Contravariance and Covariance

3차원 벡터[3] v의 i번째 성분과 기저를 각각 v^i, e_i라 하자. 말인 즉슨,

$$v = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i \tag{1}$$

라는 것이다. 여기서 v^i와 같이 위에 쓰인 첨자는 해당 성분(또는 기저의 원소)이 반변량임을 나타내는 것으로, 지수와는 관계가 없다. 앞으로는 편의를 위해, 특정 첨자가 한 항 안에서 위와 아래에 각각 한 번씩 등장하는 경우, 명시되어 있지 않더라도 해당 첨자에 대한 합이 적용된 것으로 생각할 것이다. 즉, $v = v^i e_i$라 쓸 수 있다.[4] 이를 행렬의 형태로 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$v = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

기저의 선형변환 Λ를 고려하자. 식 2의 표기 방식에 따르면, 자연스럽게 Λ를 3×3 행렬의 형태로 생각할 수 있을 것이다. Λ 하에 v가 invariant일 v의 변환은

$$v = \left(\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \Lambda \right) \left(\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \right) \tag{3}$$

[1] 물론, n차원 벡터는 n개의 성분을 가진 1차원적 대상이어야 한다.
[2] 시간에 대한 미분값이 0임을 의미하는 보존량과 헷갈리지 않도록 주의하라.
[3] 이 글에서 벡터는 '화살표'를 벗어나지 않을 것이다. 즉, 벡터를 곧 $\mathbb{R}^n$ 위의 벡터로 보아도 좋다.
[4] 인덱스를 사용한 노테이션에 관해 더 알고 싶다면 Ricci Notation를 참고하라.

로서 쉽게 알 수 있다. 변환된 기저와 성분은 각각 $e'_i = \Lambda^j_i e_j$, $v'_i = (\Lambda^{-1})^i_j v^j$와 같이 첨자를 이용하여 쓸 수 있다. 여기서 첨자 j는 앞선 약속에 따라 합을 암시하는 첨자로, 다른 알파벳으로 바꾸어도 식은 동일하며, 이러한 첨자를 더미 인덱스라 한다. 대조적으로, 첨자 i는 문자로서의 의미를 가지는 첨자로, 자유 인덱스라 한다.

3 Tensors

3.1 Covector

지금까지는 물리적 의미에서의 벡터로서 v에 관해 논하고 있었지만, 이는 당연히 수학에서 말하는 벡터의 정의에도 부합한다. v를 비롯한 모든 3차원 벡터가 벡터 공간 V의 원소라 하자. $V \to \mathbb{R}$인 선형 사상들의 집합은 역시 벡터 공간을 이루고, 이를 V의 쌍대 공간 V^*라 한다.[5]

V^* 역시 벡터 공간으로, V^*의 원소를 단순히 함수로만 보는 것은 불충분하다. V^*의 원소는 단순히 수학적인 관점에서가 아닌, 지금까지의 논의에 합류할 수 있는 물리적인 의미로서의 벡터이다. 다만 다른 점은, 성분이 반변하는 벡터를 스칼라로 대응시키기에, 그 성분이 공변한다는 점이다. 이로부터, $\omega \in V^*$를 기저의 선형결합 $\omega_i e^i$의 형태로 쓸 수 있다. 여기서 $e^i(e_j) = \delta^i_j$[6]가 되도록 V^*의 기저를 선택해주면, ω는 벡터 $v^i e_i$[7] 스칼라 $v^i \omega_i$로 대응시켜주는 사상으로 생각할 수 있다. 그 성분이 공변량이라는 점에서, V^*의 원소를 코벡터라 부른다. 앞서 사용했던 행렬의 형태로 코벡터의 작용을

$$\omega(v) = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$= v^1\omega_1 + v^2\omega_2 + v^3\omega_3 \tag{5}$$

와 같이 쓸 수 있다. 열벡터 공간의 쌍대 공간은 행벡터 공간이므로, 반변하는 대상을 열벡터의 형태로 나타내기로 하였으니 공변하는 대상이 행벡터의 형태로 나타나는 것은 자연스럽다.

3.2 Metric Tensor

벡터가 무엇인지 알았으니, 자연스러운 다음 순서는 내적이 될 것이다. 처음 내적을 배웠을 때를 돌이켜보면, 두 벡터 $v^i e_i$, $w^i e_i$의 내적은 $v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3$로 주어질 것이라 예상할 수 있다. 그러나 슬프게도, 이러한 정의는 더 이상 유용하지 않다. 벡터의 내적은 벡터의 크기를 정의한다는 점에서, 스칼라인 것이 적절하지만

[5] 쌍대를 처음 접했다면, 잠시 선형대수학 책을 펼치자. 한 번 읽어보는 것만으로 충분하다.

[6] δ^i_j는 크로네커 델타로, $i = j$일 때는 1, $i \neq j$일 때는 0의 값을 가진다. 첨자의 위치는 지금은 못 본 척해도 좋다.

[7] 아직 e^i와 e_i는 서로 관계가 없는 벡터와 코벡터이다.

$v^i w^j$꼴의 항은 두 반변량의 곱으로, 변환 Λ 하에 $(\Lambda^{-1})^i_k(\Lambda^{-1})^j_l v^k w^l$와 같이 변환, 즉 2-반변하기 때문이다.

이러한 문제는 2-공변인 대상의 도움을 받아 해결할 수 있을 것이다. 계량 텐서는 2-공변 또는 2-반변인 n^2개의 성분을 가지는 물리량으로, 계량 텐서 g에 대하여, 두 벡터 $v^i e_i$, $w^i e_i$의 내적을 $g_{ij}v^i w^j$로 정의하기로 한다. 위아래 첨자의 수가 같으므로, 이렇게 정의된 내적은 스칼라라는 것을 확인할 수 있다. 우리가 잘 알고있는 공간 벡터의 내적은 g_{ij}가 $i = j$일 때만 1이고 다른 경우 0인 특수한 경우이다.

다시 벡터 공간의 관점으로 돌아와보자. g는 두 벡터를 스칼라로 대응시키는 사상, 즉 $V^* \times V^*$의 원소이다. 자연스럽게 이 공간의 기저 b^{ij}를 $b^{ij}(e_k, e_l) = \delta^i_k \delta^j_l$가 되도록 선택할 수 있다. $b^{ij} = e^i \otimes e^j$라 표기하기로 하면, $g = g_{ij}e^i \otimes e^j$인 불변량이다.

계량 텐서 $g = g_{ij}e^i \otimes e^j$를 행렬 표기법으로 나타내면, 2-공변인 성분은 행벡터에 2번 감싸지고, 2-반변인 기저는 열벡터에 2번 감싸진 아래와 같은 형태가 된다.

$$g = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 \otimes e^1 \\ e^1 \otimes e^2 \\ e^1 \otimes e^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e^2 \otimes e^1 \\ e^2 \otimes e^2 \\ e^2 \otimes e^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e^3 \otimes e^1 \\ e^3 \otimes e^2 \\ e^3 \otimes e^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{6}$$

3.3 At Last, Tensors

일반적으로, p개의 벡터와 q개의 코벡터를 스칼라로 대응시키는 사상은 p-공변–q-반변인 불변량이 된다. 이러한 불변량을 (p, q)-텐서라고 한다. 당연하게도, (p, q)-텐서는 $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{p}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{q}}$의 원소라고도 할 수 있다.

3.4 Index Raising and Lowering

계량 텐서는 내적을 정의할 뿐만 아니라, 관습적으로 첨자를 올리고 내리는 데에 사용된다. $v^i e_i$와 $g = g_{ij}e^i \otimes e^j$에 대하여, $g(v, \cdot) = g_{ij}v^j e^i$라는 점에서, $v_i = g_{ij}v^j$로 정의한다. 역행렬 $g^{ij}(= g_{ij})$를 사용하여, 마찬가지로 $\omega \in V^*$에 대하여 $\omega^i = g^{ij}\omega_j$로 정의한다.[8]

[8]원칙적으로 v^i와 v_i, ω_i와 ω^i, g_{ij}와 g^{ij}는 각각 서로 별개의 텐서의 성분이나, 계량 텐서가 그들 사이의 관계를 맺어준 것이다.

4 Electromagnetic Tensor

텐서, 곧 불변량은 물리적 실체와 밀접한 연관이 있다. 좌표계에 무관하게 실재하는 물리적 실체라면 텐서로서 기술될 수 있고, 반대로 어떤 물리량이 텐서로서 기술된다면 이것이 우리의 직관과는 무관하게 일종의 물리적 실체라고 이해할 수 있다.

텐서로서 기술되는 물리량의 대표적인 예시는 전자기장이다. 역사적으로 전기 현상과 자기 현상을 독립적으로 여기는 것에서 출발하여, 점차 둘의 상호 연관성이 밝혀져 왔다. 그러나 19세기, 맥스웰이 고전 전자기학의 공리를 완성할 때까지도, 물리학자들은 전기장과 자기장이 물리적으로 동일한 대상이라고는 생각할 수 없었다. 하지만 상대성 이론의 등장과 함께 전자기장은 전자기장 텐서라는 우아한 설명 방식을 가지게 되었고, 이제 우리는 전기장과 자기장이 하나의 물리적 실체를 다른 각도에서 바라본 결과라는 사실을 새로운 이해 방식으로 채택하게 되었다.

계량 부호 $(+,-,-,-)$, $c=1$을 사용할 때 전자기장 텐서 F의 성분은

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

로 주어진다.[9] 여기서 그리스 문자로 쓰인 첨자는 다루는 벡터 공간이 4차원 시공간이라는 것을 나타내기 위해 사용하였다. 즉 α, $\beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3$임을 뜻한다. $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$라 할 때 맥스웰 방정식은 다음과 같은 두 줄의 방정식으로 다시 쓰일 수 있다.

$$\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\beta \tag{7}$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{8}$$

[9]지금까지 사용해왔던 행렬 표기법에 따르면 1×4 또는 4×1 행렬이 2번 겹쳐진 형태여야 하나, 표기의 간결함을 위해 부득이하게 4×4 행렬을 사용하였다.