

2022학년도

경기과학고 기초 R&E 결과보고서

On the Mechanism of Chalk-Hopping

2022. 12. 08.

연구 참여자: 22057 윤명(gs22057@gs.hs.kr)

22005 권순민(gs22005@gs.hs.kr)

지도 교사: 윤달재(ydalj@korea.kr)

과학영재학교 경기과학고등학교

목차

I 서론	2
II 모델링	3
II.1 예비 실험	3
II.2 자유물체도	4
III 실험	5
III.1 실험 I: 각변위에 따른 복원 토크	5
III.2 실험 II: 분필의 Motion Tracking	6
IV 시뮬레이션 알고리즘	10
V 결과	11
V.1 운동 양상	11
V.2 Chalk-Hopping 발생 조건	12
V.3 시뮬레이션을 통한 예측	13
V.3.1 F_h 과 T	13
V.3.2 θ_0 과 T	14
V.3.3 λl 과 T	14
VI 결론	15

그림 차례

1	Chalk-hopping으로 칠판에 남은 점선	2
2	예비 실험(좌)와 카메라에 녹화되는 화면(우)	3
3	분필의 자유물체도. 힘의 크기 관계는 고려되지 않음.	4
4	실험 I	6
5	각변위에 따른 τ_h 의 그래프. 빨간색 점선은 $y = ax$ 꼴의 추세선. $R^2 = 0.9596$	7
6	실험 II	7
7	영상의 후처리 전(좌)과 후(우)	8
8	Tracker 화면	8
9	시도 6에서의 t - θ 그래프. 검은색 그래프가 실험값, 빨간색 점선이 추세선이다.	9
10	시도 1($\lambda = 4/8$)의 한 주기 동안 y_{cm} 과 θ 의 변화	11
11	시도 2($\lambda = 5/8$), 4($\lambda = 6/8$)의 한 주기 동안 y_{cm} 과 θ 의 변화	11
12	좌횡서순으로 $\lambda = 0.2$, $\lambda \approx 0.262$, $\lambda \approx 0.58$, $\lambda = 1$	13
13	시도 5의 실험 데이터와 시뮬레이션 결과 비교	14
14	F_h 에 따른 주기	14
15	θ_0 에 따른 주기	15
16	λl 에 따른 주기	15

On the Mechanism of Chalk-Hopping

초 록

본 연구의 목적은 chalk-hopping으로 알려진 현상의 메커니즘을 분석하고 이 운동을 모방할 수 있는 단순한 모델을 제시하는 것이다. 본 연구에서는 운동의 분석에 있어서 분필을 잡고 있는 손에 대한 분석이 현상의 설명에 필수적이라는 것을 제안한다. 또한 운동의 주기성에 기초하여 구속 조건을 가정함으로써 추가적인 하나의 관계식과 영상 분석만으로 운동 방정식의 모든 미지수가 결정될 수 있도록 한다. 이로부터 손가락이 가하는 토크가 감쇠 조화진동자로서 행동함을 보인다. 이후 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 본 연구에서 제시한 일련의 과정을 따르는 운동에서 chalk-hopping 현상이 일어나며, 실험 데이터와 그 양상이 일치함을 확인한다.

Abstract

In this paper, we discuss the mechanism of the phenomenon known as chalk-hopping. We propose that studying a series of physical processes caused by the fingers is necessary to describe the phenomenon. Based on the periodicity of the motion, we reduce the number of variables, which implies that the unknowns in equations of motion can be determined completely with video analysis provided with another relation. We show that the torque exerted by the fingers is identical to a damped harmonic oscillator. Subsequently, we present a series of motions that can approximately imitate the behaviour of chalk and by using a computer simulation, we prove that chalk-hopping occurs in a motion following the series.

Keywords: chalk hopping; hand-induced torque

On the Mechanism of Chalk-Hopping

I 서론

몇몇 강의자는 분필로 칠판에 점선을 긋곤 한다. 실제로 분필을 적절히 조정하며 선을 그으면, 점선을 긋는 것은 크게 어렵지 않은 일이다. 이와 같은 hopping 현상은 의자 끌기와 같이 일상적으로도 자주 접할 수 있음에도 불구하고, 강체 사이에서 모종의 마찰에 의해 hopping behavior가 본질적으로 어떤 물리적 현상으로 설명되어야 하는가에 관해서는 명백한 합의가 이뤄진 바 없다[1]. 이에 본 연구에서는 chalk-hopping에서 분필과 칠판 사이의 접촉 자체보다는 운동의 전체적인 양상에 초점을 맞추어 살펴보고자 한다. 칠판과 분필의 재질, 분필을 잡는 위치와 힘 등 수많은 변인중 현상을 기술하는 데에 핵심적인 변인이 무엇인지 제시하고, 이러한 변인에 운동이 어떻게 의존하는지 설명할 것이다. 이를 토대로, 적절한 초기 조건만 주어져 있다면 분필이 어떤 점선을 그릴지 예측 할 수 있을 것이다.



그림 1: Chalk-hopping으로 칠판에 남은 점선

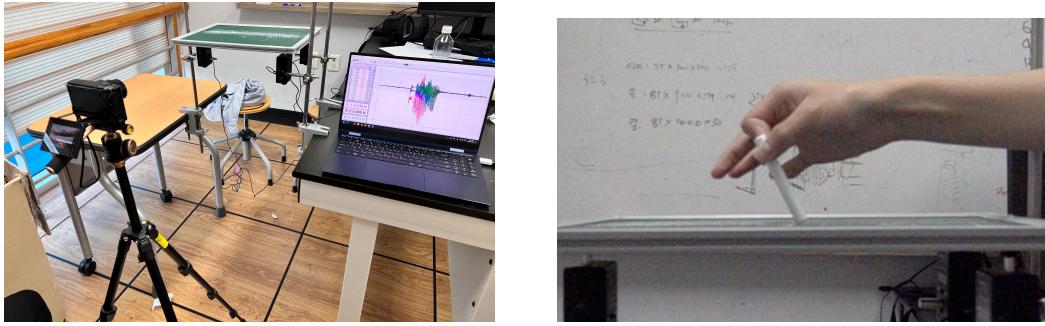


그림 2: 예비 실험(좌)와 카메라에 녹화되는 화면(우)

II 모델링

II.1 예비 실험

분필의 운동을 관찰하고 그 양상을 나이브하게 파악하기 위하여 변수를 까다롭게 통제하지 않은 예비 실험을 수행한다. 손으로 분필을 잡아 점선을 긋는 장면을 카메라를 촬영하되, 시간에 따른 수직항력을 추가로 확인하기 위해 칠판 아래로 힘 센서가 받치고 있도록 설계하였다(그림 2). 구체적인 실험 과정은 아래와 같다.

1. 스탠드를 책상에 설치하고(왼쪽에 1개, 오른쪽에 2개), 클램프를 이용하여 스탠드에 3개의 힘 센서를 고정한다. 이때 힘 센서에는 누르는 힘을 측정할 수 있는 헤드를 장착한다.
2. 힘 센서 위에 칠판을 올리고 수평을 맞춘다. 힘 센서의 데이터 수집은 초당 400번 수행하도록 설정한다.
3. 칠판면에 수평으로 카메라를 설치하고, 칠판의 윗면과 아랫면이 보이지 않도록 카메라의 높이를 조정한다. 촬영 fps는 960(959.04)으로 한다.
4. 엄지와 검지만으로 분필을 잡고 chalk-hopping을 일으키며 이를 카메라로 녹화한다. 이때, 분필의 이동방향은 카메라의 시점에 수직하도록 한다.

이 실험에서는 Sony®사의 DSC-RX 100 vi 카메라와 Vernier® DFS-BTA dual-range 힘 센서, 동사의 LabPro® 인터페이스와 Logger Pro® 3 소프트웨어를 사용하였다.

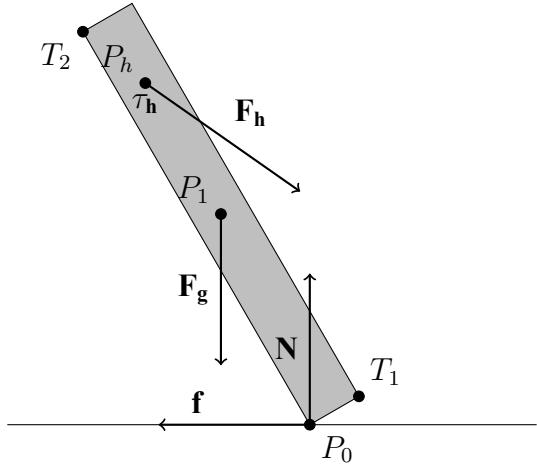


그림 3: 분필의 자유물체도. 힘의 크기 관계는 고려되지 않음.

Table 1: 자유물체도와 운동방정식에서 사용한 문자

질량	m
P_0 에 대한 관성모멘트	I_0
각속도	ω
중력	F_g
수직항력	N
마찰력	f
손이 가하는 힘	F_h
손이 가하는 P_h 에 대한 토크	τ_h
$\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0$	\mathbf{r}_i

II.2 자유물체도

본 연구에서는 분필을 반지름 r , 길이 l 의 균일한 원기둥으로 가정한다. 분필과 칠판의 접점과 분필을 손으로 잡은 점 역시 넓이가 없는 점으로 간주하면, 분필에 힘과 토크가 점에서 가해진다고 생각할 수 있다. 실제로 손이 분필에 힘을 가하는 영역은 점보다는 직사각형에 가깝지만 힘의 분포가 거의 대칭적이기에 알짜 효과를 계산할 때 점에서 힘과 토크를 가한다고 생각하는 것은 타당하다.

분필이 칠판과 접촉하고 있는 상황을 상정하자. 이하 논의에서는 칠판과 분필이 맞닿는 분필의 가장 아랫부분을 P_0 , 분필의 질량중심을 P_{cm} , 손으로 분필을 잡은 점을 P_h 로 할 것이다. 아래와 같은 문자를 사용하여 분필의 자유물체도(그림 3)와 아래와 같은 운동방정식을 도출할 수 있다. 여기서 중력은 분필에 작용하는 다른 힘들에 비해 충분히 작으므로, 이하 논의에서 무시한다.

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_g + \mathbf{N} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_h \\ I_0\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_g + (\boldsymbol{\tau}_h + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_h) \end{cases} \quad (1)$$

분필의 운동 변수를 영상 분석을 통해 직접 얻으려고 시도한다면 N , f , \mathbf{F}_h , $\boldsymbol{\tau}_h$ 과 같은 힘과 토크가 동시에 미지수가 된다. 이 경우 운동방정식은 3개의 관계식으로, 미지수를 완전히 결정하기 위해서 2개의 추가적인 관계식이 요구된다. 무엇보다 영상 분석으로 속도 또는 가속도를 도출하는 경우 동영상의 fps가 높을수록 오차가 커지는데[2], chalk-hopping의 특성상 매우 빠른 fps로 촬영된 영상을 분석해야 하므로 이러한 방법은 적절하지 않다.

분필의 운동을 크게 칠판에 닿아있는 부분과 닿아있지 않은 부분으로 나누어 보다 간단한 방법을 찾을 수 있다. 분필의 운동을 칠판에 닿아있는 동안은 P_0 에 대한 회전 운동으로, 그렇지 않는 동안은 P_h 에 대한 회전 운동으로 간주한다면 오직 \mathbf{F}_h 와 $\boldsymbol{\tau}_h$ 만을 미지수로 보고 N 과 f 에 대한 정보 없이도 분필의 운동을 완전히 기술할 수 있다. 다만, chalk-hopping이 일어나는 것 자체가 가능한지 판단할 때에는 N 과 f 에 대한 고려가 중요할데, 이는 V.2에서 논의할 것이다.

III 실험

실험에서는 길이 8 cm, 반지름 0.5 cm의 분필과 간이 칠판을 사용하였다. 간이 칠판과 분필 사이의 정지마찰계수는 $\mu = 0.84$ 로 측정하였다.

Open Source Physics의 소프트웨어 Tracker의 autotracker 기능을 이용하여 T_1 과 T_2 를 tracking하였다. 두 점의 좌표 데이터로부터, 질량중심의 좌표 $(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}})$ 과 분필이 칠판과 이루는 둔각 θ 등을 모두 도출할 수 있다.

III.1 실험 I: 각변위에 따른 복원 토크

일정한 점선을 긋는 상황을 상정한다면 \mathbf{F}_h 가 상수라는 가정은 타당하다. 남은 미지수는 $\boldsymbol{\tau}_h$ 뿐으로, 본 단락에서는 손이 분필에 가하는 복원 토크가 각변위 $\Delta\theta$ 와 어떤 관계에 있는지 규명한다. 이를 위해 다음과 같은 순서로 실험을 진행한다.

- 책상 위에 하얀 종이를 두고 스탠드를 이용해 휴대폰을 고정한다(그림 5).

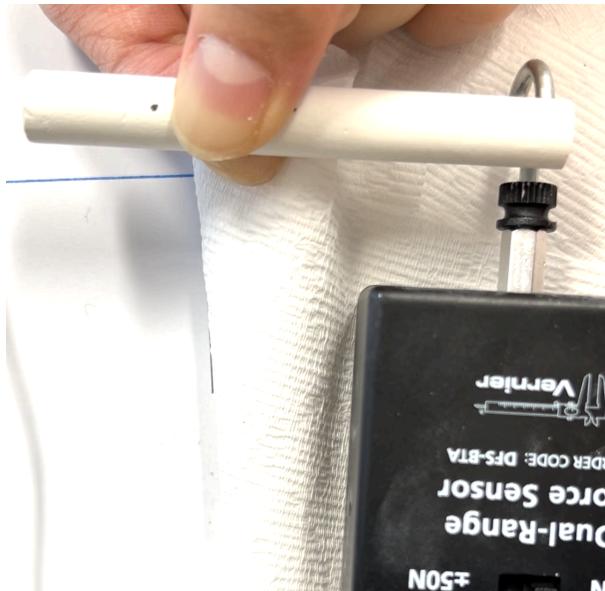


그림 4: 실험 I

2. 손으로 분필의 5cm 위치를 잡고 카메라에 잘 찍히게 위치한다.
3. 힘 센서를 분필의 다른 한 쪽 끝에 분필과 수직하고 카메라와 나란하게 위치한다.
힘 센서의 데이터 수집은 초당 400번 수행하도록 설정한다.
4. 카메라 녹화와 힘 센서 기록을 시작하고 분필 끝을 힘 센서로 살짝 당겼다 놓는다.
5. 손가락으로 분필을 잡는 힘을 다르게 하며 위 과정을 총 3번 반복한다.

휴대폰으로 촬영된 영상과 힘 센서의 데이터 수집의 fps가 일치하지 않아 이를 동기화하기 위한 syncer를 고안하였다. 이산적인 두 데이터 사이의 변화율을 상수로 간주하여, 기준 fps에 두 데이터를 동기화하는 방식을 채택하였다.

손에 의한 복원 토크는 각변위에 비례한다(그림 5).

III.2 실험 II: 분필의 Motion Tracking

Chalk-hopping의 구체적인 운동 양상을 분석하기 위하여 예비 실험을 개선한 실험을 진행한다(그림 6a). 예비 실험에서 촬영한 영상을 tracking하려고 할 때 발생했던 오차의 가장 큰 요인 중 하나는 분필 경계의 불명확성이다. 셔터가 빠르게 열리고 닫히는 초고 속 카메라의 특성상 프레임마다의 밝기가 일정하지 않고, tracking에서 분필의 경계선을 판단할 기준이 명확하지 않다. 이를 해결하기 위해 실험 II에서는 고대비 영상을 얻기

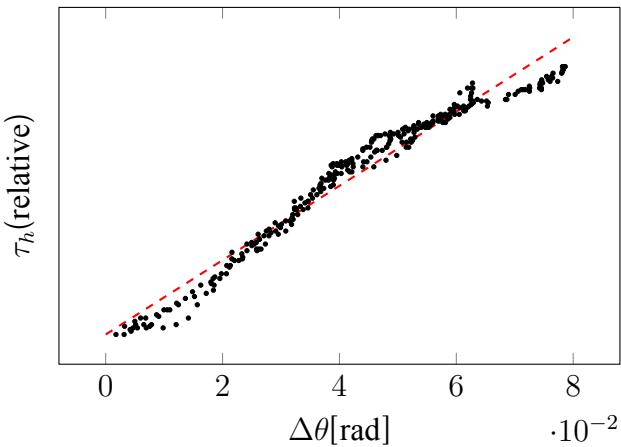


그림 5: 각변위에 따른 τ_h 의 그래프. 빨간색 점선은 $y = ax$ 꼴의 추세선. $R^2 = 0.9596$.

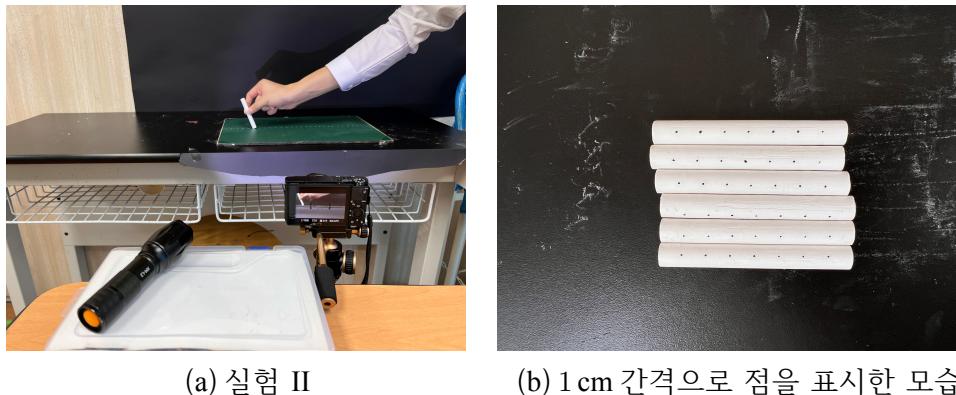


그림 6: 실험 II

위한 과정과 영상 후처리 과정을 포함한다(그림 7). 배경의 밝기를 낮추기 위해 배경에 검은색 종이를 붙이고, 분필의 밝기를 높이기 위해 손전등을 비춘다. 이후 tracking 이전에 배경과 분필의 대비를 위한 후처리로 다음의 과정을 거친다. 적절한 수치는 촬영 환경에 따라 차이가 있을 수 있다.

1. 채도를 0%로 설정한다.
2. 밝기를 60%로 설정한다.
3. 대비를 180%로 설정한다.

분필의 전체 길이에 대한 손으로 잡은 위치까지의 상대적 길이를 이하 λ 로 사용한다. 실험 II는 분필에 점을 찍어 표시한 뒤(그림 6b) $\lambda = 4/8, 5/8, 6/8, 7/8$ 인 경우에 대하여 각 2회 진행하였다. 주기가 너무 짧아 진동하는 부분을 관찰할 수 없었던 시도 1($\lambda = 4/8$)은 데이터에서 제외하였다.

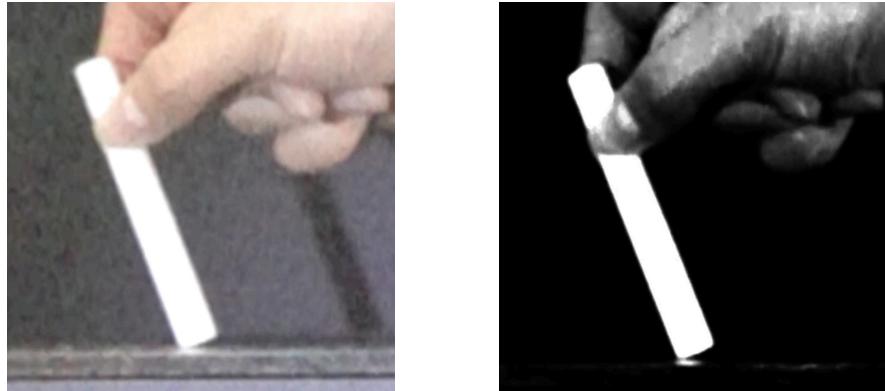


그림 7: 영상의 후처리 전(좌)과 후(우)

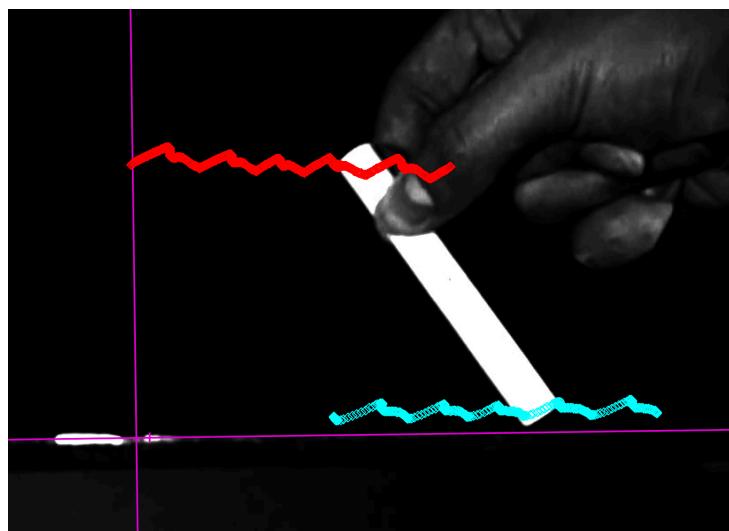


그림 8: Tracker 화면

θ 를 분필이 칠판면과 이루는 둔각이라고 할 때, 손에 의한 토크 τ_h 를 $-\kappa\dot{\theta} - b\ddot{\theta}$ (κ, b 는 상수)의 꼴로 쓸 수 있다고 가정하고, 검증을 위해 분필의 각진동을 damped harmonic oscillation의 일반해 $\theta = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + \theta_0$ 꼴로 fitting하였다(그림 9). 이러한 가정이 실제로 어느 정도 맞아 떨어진다는 것을 확인할 수 있으므로(표 2), 이를 토대로 시뮬레이션을 구현한다.

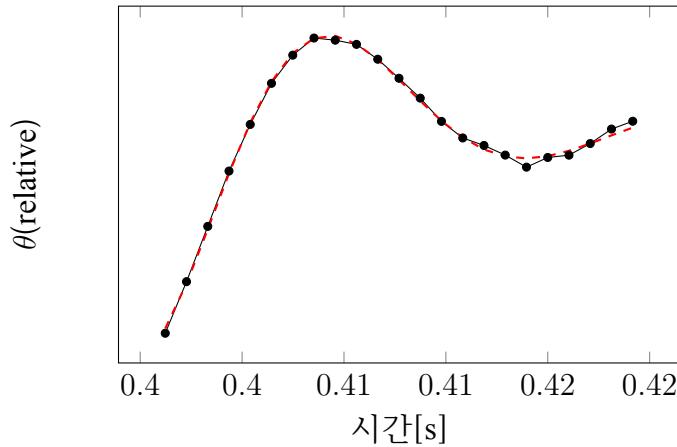


그림 9: 시도 6에서의 t - θ 그래프. 검은색 그래프가 실험값, 빨간색 점선이 추세선이다.

Table 2: 각 시도마다 4개의 주기를 택해 graph fitting으로 산출한 평균 ω 와 γ .

시도	λ	$\omega[\text{s}^{-1}]$	$\gamma[\text{kg/s}]$
2	4/8	330	110
3	5/8	300	101
4	5/8	316	119
5	6/8	229	102
6	6/8	239	82.8
7	7/8	199	78.5
8	7/8	211	81.1

IV 시뮬레이션 알고리즘

Algorithm 1: chalk hopping

```
1 while do
2   Function Holding Point():
3   Function Motion State():
4     if MotionState is 'rot' then
5       if  $\kappa \times (\theta - \theta_0) \geq cof \times chalk_m \times g \times (ChalkLength_0 - HoldingLength) \times \frac{0.08}{200} \times |\sin(\theta)|$ 
6         then
7            $MotionState \leftarrow 'par'$ 
8
9         if  $\theta \geq \pi \times \frac{3}{2} \vee \theta < \pi$  then
10          else if MotionState is 'par' then
11            if  $ChalkY_1 > StandardY + BlackboardH \wedge StateFrm > 5$  then
12               $MotionState \leftarrow 'rot'$ 
13
14
15   Function A  $\alpha()$ :
16   Function Accelerate():
17   Function Translate():
18   Function Rotate():
19
20   Function Draw Chalk():
21   Function Chalk Center of Mass():
22   Function Draw Chalk Center of Mass():
23   Function Draw Blackboard():
24   Function Time():
25
26 Function Data Plot():
```

알고리즘 1은 매 프레임마다 분필의 움직임을 계산한다. 함수 Motion State()는 제1기와 제2기를 전환해준다. 제2기 운동을 하던 중 분필이 칠판에 닿았다면 제1기로 전환한다. 함수 $A\alpha()$, Accelerate(), Translate(), Rotate()는 분필의 움직임을 직접적으로 계산하는 함수이다. 함수 Chalk Center of Mass()는 분필의 질량 중심의 위치를 계산한다. 함수 Time()는 시뮬레이션에 필요한 시간을 계산한다. 함수 DataPlot은 시뮬레이션에서 발생한 정보들을 그래프로 출력한다.

V 결과

V.1 운동 양상

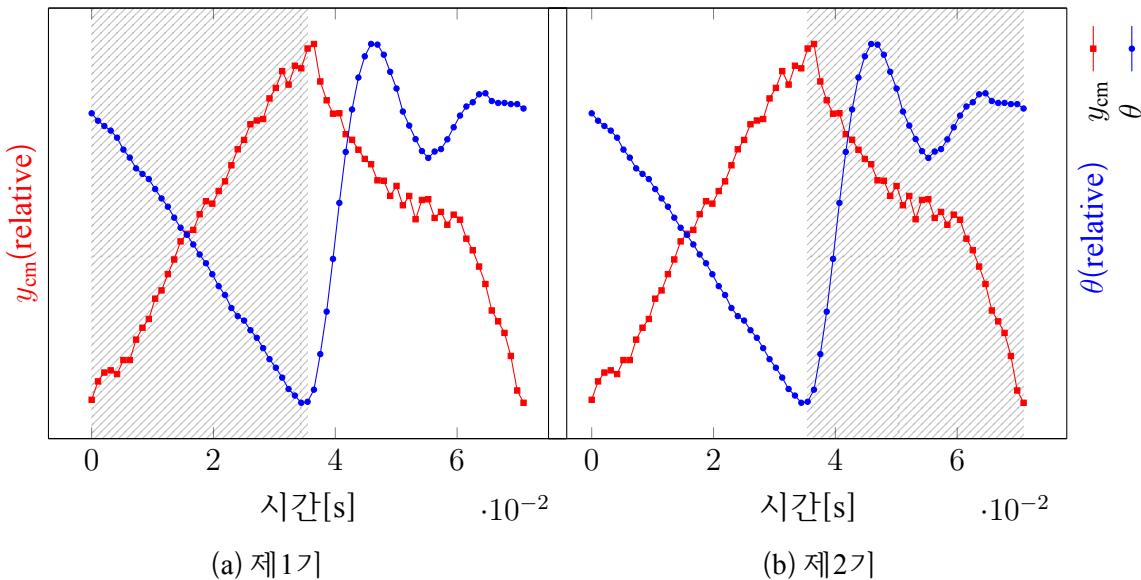


그림 10: 시도 1($\lambda = 4/8$)의 한 주기 동안 y_{cm} 과 θ 의 변화

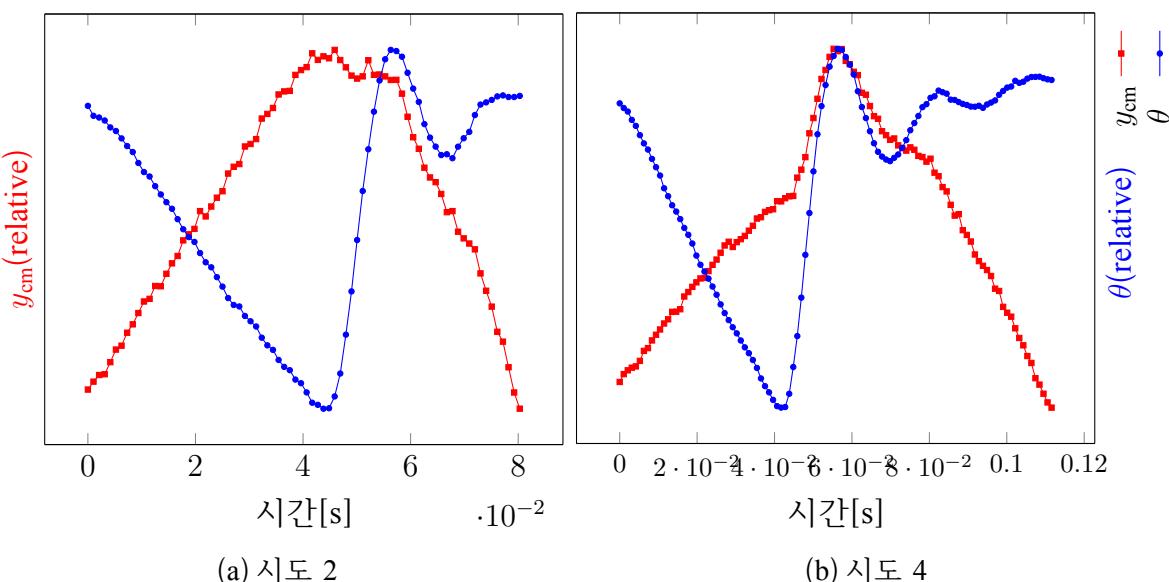


그림 11: 시도 2($\lambda = 5/8$), 4($\lambda = 6/8$)의 한 주기 동안 y_{cm} 과 θ 의 변화

한 주기는 크게 제1기와 제2기로 나눌 수 있다(그림 10). 제1기는 분필이 칠판에 닿은 상태로 세워지는 단계로, 이때의 y_{cm} 개형이 직선에 가까운 것은 $\Delta\theta$ 가 충분히 작기 때문이다. 분필이 칠판과의 접촉을 유지하기 위해 요구되는 마찰력이 최대정지마찰

력과 같아지면 접촉을 잃고 제2기로 도입한다. 제2기는 분필이 칠판과 분리된 후 진동이 나타나는 구간으로, λ 값에 따라 y_{cm} 의 증감 경향이 다른 것이 특징적이다(그림 11). 본 연구는 운동의 전체적인 양상에 초점을 두고 있고, 서로 다른 물리량의 개형 변화를 비교할 때의 용이함을 위해 그래프의 세로축 눈금에는 상댓값 사용을 지향한다.

V.2 Chalk-Hopping 발생 조건

초기 상태에서 분필과 칠판이 이루는 예각을 θ_0 , 수평 방향과 \mathbf{F}_h 의 방향이 이루는 예각을 ϕ 라 하자. 물체의 운동방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ml\alpha \sin \theta_0 = F \cos \phi - f \\ \frac{1}{2}ml\alpha \cos \theta_0 = N - F \sin \phi \\ F\lambda l \cos(\theta_0 - \phi) = I_0\alpha \end{cases} \quad (2)$$

결정인자 $\xi = f/N$ 으로 정의하면, 결정인자가 μ 보다 큰 경우 분필은 미끄러지고, 그렇지 않은 경우 chalk-hopping이 발생할 수 있으므로 chalk-hopping의 발생 가능 여부를 판단할 수 있다. 식 2으로부터 다음을 얻는다.

$$\xi = \frac{4I_0 \cos \phi - m\lambda l^2 \sin \theta_0 \cos(\theta_0 - \phi)}{4I_0 \sin \phi - m\lambda l^2 \cos \theta_0 \cos(\theta_0 - \phi)} \quad (3)$$

식 3로부터 ξ 는 분필의 질량이나 손에서 가하는 힘의 크기와는 무관하며, 오직 기하학적 특성(r/l , θ_0 , ϕ)과 λ 에만 의존한다는 사실을 알 수 있다. 그림 12은 본 연구의 실험에서 사용한 분필의 치수를 기준으로 λ 에 따른 chalk-hopping 가능 여부를 θ_0 - ϕ 공간($0 \leq \theta_0, \phi \leq \pi/2$)에 도시한 것이다. 파란색으로 칠해진 영역이 chalk-hopping이 가능함을 나타내내고, 본 연구에서는 특정한 λ 값에서 파란색 넓이가 최대가 된다는 것을 확인하였다. 어떤 θ_0 값에서 ξ 가 항상 μ 보다 작다면, 이는 ϕ 에 무관하게 chalk-hopping이 가능하는 것을 의미한다. 이것이 가능할 θ_0 의 범위가 최대가 되는 조건은 파란 영역의 넓이가 최대일 조건과 동일하다.

r/l 가 증가할수록 파란색 영역의 넓이는 감소한다. 즉 이상적으로 chalk-hopping에 가장 유리한 분필의 형태는 두께가 없는 막대이다. r/l 값에 따라 넓이를 최대로 하는

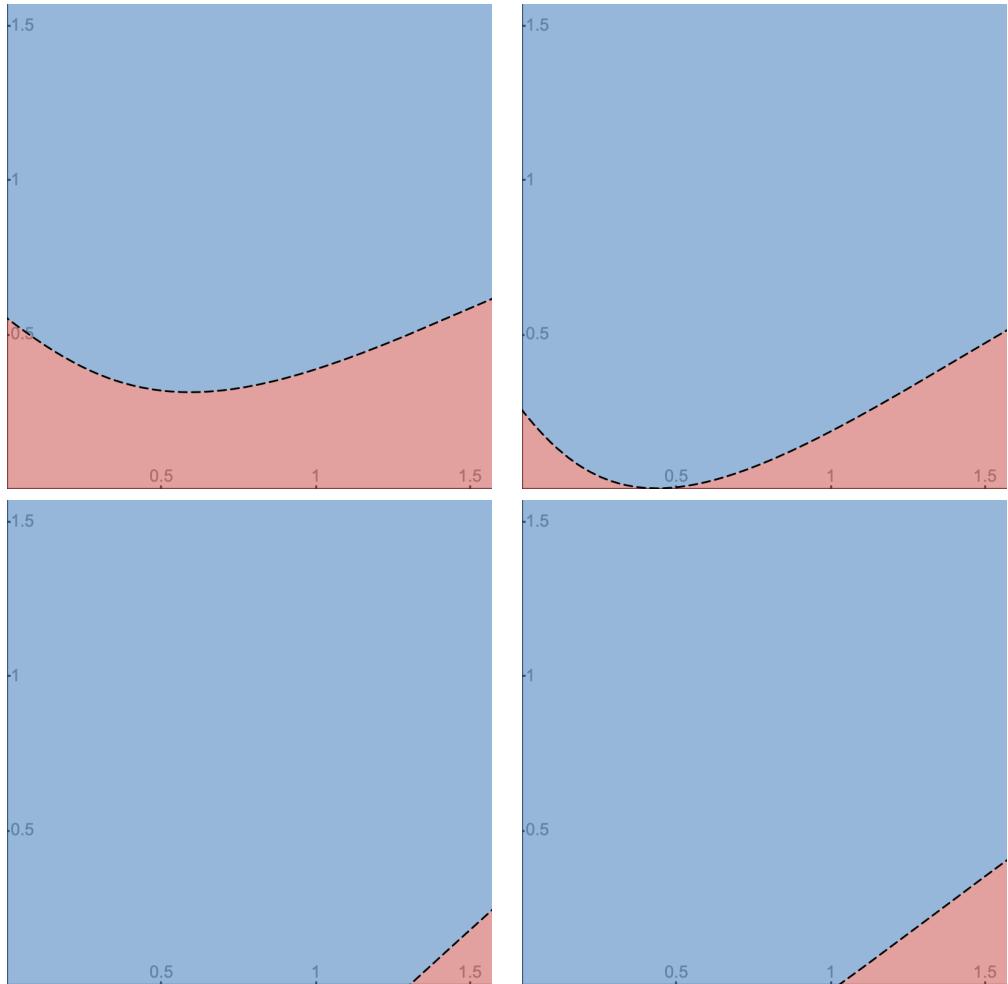


그림 12: 좌횡서순으로 $\lambda = 0.2$, $\lambda \approx 0.262$, $\lambda \approx 0.58$, $\lambda = 1$.

λ 값은 증가하는 경향을 보였다. $r/l = 0$ 인 경우 $\lambda \approx 0.58$, $r/l = 1$ 인 경우 $\lambda \approx 0.77$ 이
파란색 영역의 넓이를 극대화하는 λ 값임을 확인하였다.

V.3 시뮬레이션을 통한 예측

앞서 가정한 모델을 따르는 운동이 실제 운동과 매우 유사하다는 것을 시뮬레이션
을 통하여 검증할 수 있다(그림 13).

V.3.1 F_h 과 T

그림 14의 그래프에서 F_h 가 증가하면 T 가 감소하는 것을 확인할 수 있다. 이는 F_h
가 증가하면 분필이 칠판에서 떨어지는 것과 칠판에 닿는 것 모두 시간이 짧아지기 때
문이다.

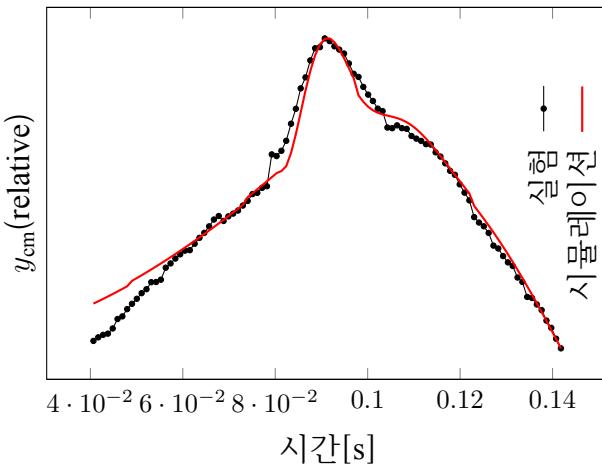


그림 13: 시도 5의 실험 데이터와 시뮬레이션 결과 비교

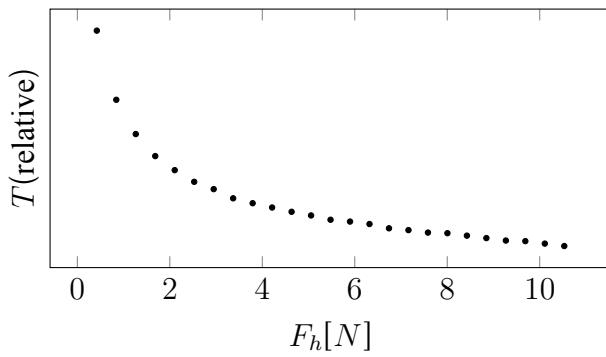


그림 14: F_h 에 따른 주기

V.3.2 θ_0 과 T

그림 15의 그래프에서 θ_0 가 증가하면 T 가 감소하는 것을 확인할 수 있다. 분필이 제2기로 도입하기 위한 조건은 특정한 θ 에 도달하는 것인데, θ_0 가 클수록 이 각도에 도달하는 시간이 짧기 때문이다.

V.3.3 λl 과 T

그림 16의 그래프로부터 λl 이 증가하면 $\lambda l \approx 0.35$ 일 때, T 가 최대가 됨을 알 수 있다. λl 이 클 때, 그래프의 개형이 미끄럽지 않은 이유는 진동이 오래 지속되어 진동하는 동안 분필이 칠판에 닿기 때문이다.

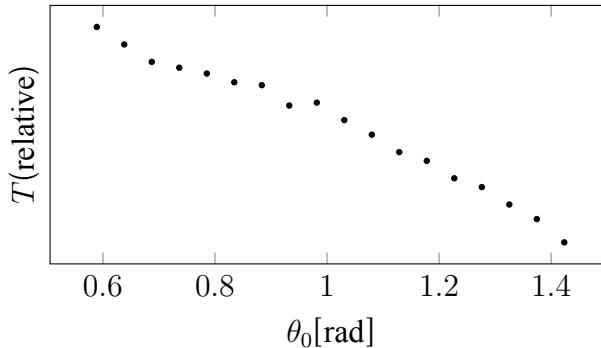


그림 15: θ_0 에 따른 주기

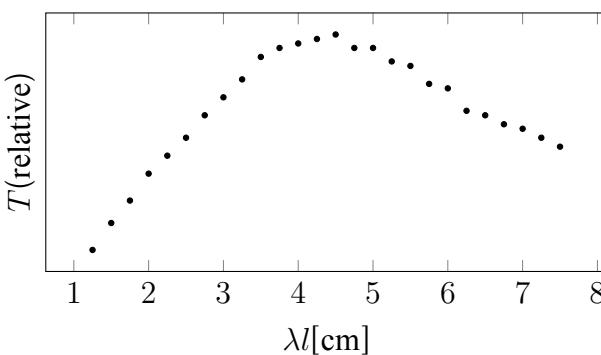


그림 16: λl 에 따른 주기

VI 결론

본 연구에서는 손이 분필에 가하는 토크와 각변위의 관계를 규명함으로써 chalk-hopping에서 분필의 각운동을 damping harmonic oscillation으로 모델링한 수 있음을 보였다. 이후 영상 분석을 통해 분필의 운동에서 두드러지는 몇 가지 운동 양상을 분류하였다. 여기서 분필을 잡는 위치에 따른 운동 양상의 차이를 제시하였고, 이것이 진폭에 의존적임을 정성적으로 밝혔다. 전술한 일련의 분석을 토대로 구체적인 운동방정식을 결정하였고, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 본 연구에서 제시한 방식의 운동이 실험적으로 얻어진 것과 매우 유사한 운동 양상을 나타낸다는 것을 검증하였다.

참고문헌

- [1] Sanders, J. W. (2018). "Could Chalk Hopping Be Caused by Reverse Chatter?", (Volume 3: Modeling and Validation; Multi-Agent and Networked Systems; Path Planning and Motion Control; Tracking Control Systems; Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) and Application; Unmanned Ground and Aerial Vehicles; Vibration in Mechanical Systems; Vibrations and Control of Systems; Vibrations: Modeling, Analysis, and Control,) [V003T39A001]. <https://doi.org/10.1115/DSCC2018-8906>
- [2] Feng, Y., Goree, J., & Liu, B. (2011). "Errors in particle tracking velocimetry with high-speed cameras", *The Review of scientific instruments*, Vol. 82, pp. 053707. <https://doi.org/10.1063/1.3589267>