SCI

Scientia Communio Innovatio

Electromagnetism and Gauge Theory

SCI Lecture Note

Lecturer: 22057 윤명

Date: 25 September 2023

Contents

Part I
CLASSICAL ELECTROMAGNETISM

"Nothing is too wonderful to be true, if it be consistent with the laws of nature." –Michael Faraday

1 Electromagnetic Fields and Potentials

1.1 Maxwell's Equations and Gauge Transformation

고전전자기학은 전자기장과 전하 사이의 상호작용을 정의하는 4개의 Maxwell's equations

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{4}$$

와 전하의 국소적 보존을 보장하는 연속 방정식

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{5}$$

으로 공리화할 수 있다.

전자기장은 스칼라 퍼텐셜 ϕ와 벡터 퍼텐셜 $\mathbf{A}$을 도입하여

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{7}$$

로 작성할 수 있다.

Gradient의 curl은 0이 된다는 점에 주목하자[1]. 함수 χ를 도입하여 벡터 퍼텐셜에 대한 변환

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \tag{8}$$

을 고려하면, 이는 자기장 $\mathbf{B}$에 영향을 주지 않는다. 동시에 스칼라 퍼텐셜을

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{9}$$

와 같이 변환하면, 전기장 $\mathbf{E}$ 역시 불변으로 남는다. 전자기장 자체에는 영향을 미치지 않고 퍼텐셜만을 바꾸는 이 변환을 게이지 변환(gauge transformation)이라 부른다.

[1] 닫힌 경로를 따라 등산을 하면 처음 자리로 돌아왔을 때 높이 변화가 0이다.

1.2 Gauge Fixing

목적에 따라 χ를 적절히 선택하여 ϕ와 $\mathbf{A}$가 일련의 조건을 만족하도록 할 수 있으며, 이를 gauge fixing이라 부른다. Coulomb 게이지란

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{10}$$

인 게이지의 선택이다. 이 경우 Poisson's equation

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{11}$$

가 성립하므로 정전기학(electrostatics)과 비상대론적 양자역학 등에서 유용하게 사용된다. Coulomb 게이지에서 스칼라 퍼텐셜과 벡터 퍼텐셜은 다음과 같이 나타난다:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 x' \, \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}|} \tag{12}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla}{4\pi} \times \int \mathrm{d}^3 x' \, \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}|} \tag{13}$$

Lorenz 게이지[2]는

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{14}$$

인 게이지의 선택이다. 이 gauge fixing하에서는 4-퍼텐셜의 4-divergence가 0이 되기에, 상대론적으로 전자기학을 기술하고자 할 때 자주 이용된다.

2 Special Relativity

2.1 Lorentz Transformation

특수 상대성 이론에서 spacetime interval

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{15}$$

은 좌표계에 불변하게 불변이다. 즉, 4차원 시공간에 대한 스칼라이다[3]. 두 사건 사이의 spacetime interval을 일종의 거리로 본다면[4], 우리는 이 공간이

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{16}$$

을 계량 텐서(metric tensor)로 갖는 pseudo-euclidean space라는 것을 알 수 있다[5].

2차원 유클리드 공간에서 거리를 유지하는 변환은 회전 변환이다.

$$x^i x_i = (x^1)^2 + (x^2)^2 = C \tag{17}$$

[2] Lorentz factor 또는 transform으로 알려진 Hendric Lorentz와는 다른 Ludvig Lorenz이다.

[3] 이런 물리량을 Lorentz scalar라고 부르기도 한다. Spacetime interval의 invariance는 간단한 사고 실험으로 보일 수 있지만, 이곳에서는 생략한다.

[4] 대신 $\mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$을 사용해서 일관되게 이론을 전개하더라도 수학적으로 동등하다.

[5] $\eta^{\mu\nu}$의 성분은 $\eta_{\mu\nu}$의 역행렬이다. $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho}$이기 때문.

가 나타내는 궤적이 원이며, 모든 위치 벡터가 그 위에서 벗어나지 않고 움직일 때 공간 전체에서 거리가 유지되기 때문이다. 3차원적인 거리가 유지되는 변환이 세 종류의 평면(xy, yz, zx)에 대한 회전 변환의 결합이라는 것은 아주 자명하지는 않지만, $SO(3)$의 차원이 3이라는 사실로부터 세 종류의 회전 변환이라면 충분하다는 것을 확신할 수 있다[6].

유사하게, 하나의 시간 차원과 하나의 공간 차원으로 구성된 Minkowski 공간 $\mathbb{R}^{1,1}$을 생각하자.

$$x^\mu x_\mu = (x^1)^2 - (x^2)^2 = C \tag{18}$$

가 나타내는 도형은 쌍곡선이다. 즉, (1, 1)차원 Minkowski 공간에서 거리를 유지하는 변환은 쌍곡 회전 변환

$$\begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \tag{19}$$

이 된다. $SO(4)$의 차원은 6이므로, 역시 tx, ty, tz, xy, yz, zx에 대한 6가지 경우의 수의 조합이 $\mathbb{R}^{1,3}$에서의 회전을 설명한다. Spatial rotation이라고 불리는 뒤의 세 경우는 $\mathbb{R}^3$의 경우와 다를 것이 없다. 시간축을 포함하는 평면에 대한 회전인 앞의 세 경우는 종종 boost라는 이름으로 불리며, 회전 변환 대신 쌍곡 회전 변환으로 기술된다.

$\mathbb{R}^{1,1}$에서 서로 다른 두 좌표계 K, K'을 생각하자. tx 방향 boost는 물리적으로 어떤 의미를 지니는가? 두 좌표계의 관계를 기술할 수 있는 물리량은 상대 속도 v밖에 없으므로, 우리는 hyperbolic angle ψ가 결국은 v의 함수로 나타날 것이라는 것을 추측할 수 있다.

좌표계 K에서 K'의 원점의 위치는 다음과 같은 변환 식에서 도출할 수 있다:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct'\cosh\psi \\ ct'\sinh\psi \end{pmatrix}. \tag{20}$$

따라서, K에 대한 K'의 상대 속도는

$$v = \frac{x}{ct} = \tanh\psi \tag{21}$$

이다[7]. $\sinh\psi$와 $\cosh\psi$를 v에 대한 식으로 다시 쓰면 우리가 아는 Lorentz 변환의 식을 얻는다:

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\nu[tx, v] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & & \\ -\gamma v/c & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.} \tag{22}$$

[6] $Q^T Q = I$이기 위해서 ${}_nC_2 + n$개 제약 발생

[7] 속도의 $\tanh^{-1}$값 ψ는 어떤 실수든 될 수 있는 값으로, rapidity라고 부른다.

2.2 Electromagnetism in Covariant Form

전하가 스칼라라는 것을 인정한다면 입자의 역학을 기술할 수 있는 벡터량은 오직 전자기장과 관련된 물리량만 남는다. 벡터 퍼텐셜 **A**는 spatial rotation에 대해서 여전히 벡터처럼 변환되므로, 이것을 세 공간 성분으로 갖는 4-벡터를 구성해볼 수 있다. 실제로 이때 시간 성분은 스칼라 퍼텐셜이 되며, 그렇게 구성한 벡터

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \tag{23}$$

를 4-퍼텐셜이라 부른다. 4-퍼텐셜에 대한 게이지 변환은

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{24}$$

로 나타난다. 전자기장은 electromagnetic field strength tensor라 불리는 반대칭 텐서

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

의 성분으로서

$$E_i/c = F_{0i} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^0} \tag{26}$$

$$B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x^j} \tag{27}$$

와 같이 나타난다.

전류 밀도 역시 4-벡터의 공간 성분이 되는데, 이때 시간 성분은 전하 밀도가 되며, 이것을 4-전류라 부른다:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Homegenous Maxwell's equations eq. (1)과 eq. (2), inhomogeneous Maxwell's equations eq. (3)와 eq. (4)는 다음과 같은 두 줄의 covariant한 방정식과 동치이다:

$$\boxed{\begin{aligned} 3\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0, &\quad (29) \\ \partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\nu. &\quad (30) \end{aligned}}$$

2.3 Single Particle Motion

자유 공간에서 상대론적 입자의 action과 lagrangian은 각각

$$S = \int L\mathrm{d}t = -mc\int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s, \tag{31}$$

$$L = -\gamma mc^2 \tag{32}$$

이다. 여기에 전자기적 상호작용을 고려하면 lagrangian은

$$L_{EM} = -\gamma mc^2 + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - q\phi \tag{33}$$

이 된다.

따라서 대전된 입자의 공간 방향의 일반화 운동량은

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \nabla L = \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - q\nabla\phi \tag{34}$$

이고, 항등식

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a} + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) \tag{35}$$

와 Euler–Lagrange 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{36}$$

을 이용하면 운동 방정식

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - q\nabla\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{37}$$

를 얻는다.

Part II

LAGRANGIAN FIELD THEORY

"NEWTON WAS THE GREATEST GENIUS THAT EVER EXISTED, AND THE MOST FORTUNATE, FOR WE CANNOT FIND MORE THAN ONCE A SYSTEM OF THE WORLD TO ESTABLISH." – Joseph-Louis Lagrange

3 Classical Field Theory

3.1 Hamilton's Principle

입자 각각에 대하여 lagrangian을 계산하고 이를 시간에 대해 적분하여 action을 도출하는 방식은, 4차원 시공간 전체에 걸쳐 lagrangian density를 적분하는 과정으로 일반화할 수 있다. 즉, 다음과 같이 action functional을 정의한다:

$$S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}. \tag{38}$$

입자의 질량이나 속도 등으로 lagrangian을 구성했던 것과는 달리, lagrangian density는 일반적으로 공간 전체에 걸쳐 정의된 함수를 도입하고, 이로써 action을 구성한다. 이 일반화된 방법론에서 lagrangian density를 구성하기 위해 도입된 함수를 장(field)이라 칭한다. 이것이 드러나도록 eq. (38)를 다시 작성하면 다음과 같다:

$$S[\varphi(x^\mu)] \equiv \int_\Omega \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(\varphi, \nabla\varphi) = \int_\Omega \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}\left[\varphi(x^\mu), \frac{\partial\varphi(x^\mu)}{\partial x^\nu}\right]. \tag{39}$$

이때 d^4x는 volume form이다.

3.2 Calculus of Variations

점입자 고전역학에서는 t의 함수로 x가 작게 변할 때 이것을 x의 변분이라 불렀다. 비슷하게, 고전장론에서는 x^μ의 함수로 $\varphi(x^\mu)$가 공간 전체에 걸쳐 살짝 변할 때 action의 변화를 확인하고자 한다.

우선 변분을 취한다.

$$\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi)\right] \tag{40}$$

점입자 고전역학에서의 유도 과정과 유사하게, 두 번째 항은

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\delta\varphi \tag{41}$$

임을 참고하여 부분적분을 통해 변형하면 된다[8]:

$$\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right)\right] \delta\varphi + \oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}S_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi. \tag{42}$$

변분법의 기본 정리에 의해, 모든 $\delta\varphi$에 대해서 위와 같은 δS가 사라지기 위해서는 Euler–Lagrange equation

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) = 0} \tag{43}$$

이 만족되어야 한다.

4 Noether's Theorem

4.1 Internal Symmetry

내부 대칭(internal symmetry)이란

$$\varphi(x^\mu) \mapsto \varphi'(x^\mu) = \varphi(x^\mu) + \delta\varphi(x^\mu) \tag{44}$$

와 같이 시공간 상의 각 점에서 장만을 바꾸는 변환 하에 action이 불변인 것을 말한다. 즉, lagrangian density는 변환 전과 4-divergence만큼 다를 수 있다:

$$\mathcal{L}(\varphi, \nabla\varphi) \mapsto \mathcal{L}'(\varphi, \nabla\varphi) = \mathcal{L}(\varphi, \nabla\varphi) + \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(\mathbf{x}). \tag{45}$$

다음과 같이 lagrangian density의 변분을 고려하자:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) && (46) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right)\right] \delta\varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta\varphi\right). && (47) \end{aligned}$$

이때 첫째 항은 (field-theoretic) Euler–Lagrange equation eq. (43)에 의해 사라지므로, eq. (45)와 eq. (47)에서의 $\delta\mathcal{L}$이 같다고 하면

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta\varphi - \mathcal{J}^\mu} \tag{48}$$

와 같이 Noether current j^μ의 4-divergence가 0이라는 사실을 연역할 수 있다. $\delta\varphi$는 변환의 생성자로써 ϵG와 같이 그 명시적인 형태를 적을 수 있다.

Equation (48)이 Noether current에 대한 연속 방정식이라는 점에 주목하면, 일종의

[8]변분과 편미분은 독립적인 연산이므로 교환 가능하다.

전하량이 국소적으로 보존되고 있다는 것을 눈치챌 수 있다. 즉,

$$\boxed{Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \; j^0} \tag{49}$$

와 같이 정의된 Noether charge는

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \; \frac{\partial j^0}{\partial t} = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \; \nabla \cdot \mathbf{j} = -\int_{\partial\mathbb{R}^3} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \tag{50}$$

와 같이 보존된다.

4.2 Spacetime Symmetry for Scalar Fields

공간의 병진 대칭성이나 회전 대칭성 등은 단지 주어진 점에서 장의 변화만을 고려하는 내부 대칭과는 달리 좌표 자체를 변환하는 것으로, 시공간 대칭에 대한 Noether's theorem을 새롭게 고려할 필요가 있다. 좌표 변환 하에 대상이 변하는 방식은 제법 복잡하기에, 이 강의에서는 스칼라 장에 대한 시공간 대칭만을 고려할 것이다.

정의에 따라, 스칼라는 좌표 변환 후에 그 값이 바뀌어서는 안 되므로 다음과 같이 변분을 쓸 수 있다:

$$\delta\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu) - \phi(x^\mu) = 0. \tag{51}$$

항등적으로 0인 값은 의미가 없으므로, 다음과 같이 $\bar{\delta}$를 도입한다: 그렇다면 $\delta\phi$는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$\delta\phi(x^\mu) = (\partial_\mu\phi')\Big|_{x^\mu} \delta x^\mu + \bar{\delta}\phi \approx (\partial_\mu\phi)\Big|_{x^\mu} \delta x^\mu + \bar{\delta}\phi, \quad \bar{\delta}\phi = \phi'(x^\mu) - \phi(x^\mu). \tag{52}$$

시공간 대칭을 논할 때의 변환은 4차원 시공간 상에서 적분 영역과 volume form (미소부피) 자체에 변화를 주기에, 단순히 lagrangian의 변분만을 고려하는 것으로는 충분하지 않다. 따라서 다음과 같이 action의 변분을 계산한다:

$$0 = \delta S = \int \mathrm{d}^4x' \; \mathcal{L}(\phi', \partial'\phi') - \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \tag{53}$$

$$= \int \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(\phi', \partial'\phi') - \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \tag{54}$$

$$= \int \det\left(\delta^\mu_\nu + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\nu}\right) \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(\phi', \partial'\phi') - \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \tag{55}$$

$$\approx \int (1 + \partial_\mu\delta x^\mu)\mathrm{d}^4x \; (\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu + \bar{\delta}\mathcal{L}) - \int \mathrm{d}^4x \; \mathcal{L} \tag{56}$$

$$= \int \mathrm{d}^4x \; \left[\partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) + \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\bar{\delta}\phi)\right\} + \mathcal{O}(\delta x^2 + \delta x\bar{\delta}\mathcal{L})\right] \tag{57}$$

$$\approx \int \mathrm{d}^4x \left[\partial_\mu\left(\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi\right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\bar{\delta}\phi\right]. \tag{58}$$

피적분함수의 둘째 항은 Euler–Lagrange equation의 좌변이므로 사라지고, 첫 항이 0이라

는 것은 다음과 같은 Noether current의 보존과 동치이다:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu.} \tag{59}$$

Example: Conservation of Electric Charge

전자를 기술하는 lagrangian density는

$$\mathcal{L}_{\text{electron}} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu \partial_\mu - mc^2)\psi \tag{60}$$

임이 알려져 있다. 스피너 장 ψ는

$$\psi \mapsto e^{i\theta}\psi, \quad \bar{\psi} \mapsto e^{i\theta}\psi \tag{61}$$

하에 lagrangian이 불변임을 보장하며, 이를 global gauge symmetry라 한다. 변분 $\delta\psi$가

$$\delta\psi = i\theta\psi \sim i\psi \tag{62}$$

임을 고려하면, 이에 대응되는 Noether current는

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta\varphi - \mathcal{J}^\mu \qquad (63)\\ &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)}\left[\bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu \partial_\mu - mc^2)\psi\right] - \mathcal{J}^\mu \qquad (64)\\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \mathcal{J}^\mu = 0 \qquad (65)\end{aligned}$$

이며, Noether charge는

$$Q = \int \mathrm{d}^3x \; \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{66}$$

가 된다는 유도할 수 있다. 우리는 전자기학의 $U(1)$ 대칭성에 의한 Noether charge와 Noether current를 각각 전하와 전류라고 부른다.

4.3 Energy-Momentum Tensor

우리는 점입자 고전역학의 결과로부터 공간의 병진 대칭성에 대응되는 물리량이 운동량이며, 시간의 병진 대칭성에 대응되는 물리량이 에너지라는 사실을 배웠다. 유사한 논증을 4차원 시공간 상에서 수행하면 시공간 상에서의 병진 대칭성은 4-운동량을, 회전 대칭성은 4-각운동량을 줄 것이라는 사실을 추론할 수 있다[9].

시공간 좌표에 대한 임의의 병진 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\delta x^\mu = -\epsilon^\mu; \quad x^\mu \mapsto x^\mu - \epsilon^\mu \tag{67}$$

[9] 여전히 벡터인 4-운동량과는 달리 4-각운동량은 2차 텐서이다. 4차원 상에서의 회전은 공간 좌표간 회전 세 종류와, 공간-시간 좌표간 회전인 Lorentz 변환 세 종류를 포함하기 때문이다. ${}_4C_2 = 6$이니 4×4 반대칭 행렬의 자유도가 6이라고도 이해할 수 있다.

이때

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi - \partial_\mu\phi\delta x^\mu = 0 - \epsilon^\mu\partial_\mu\phi \tag{68}$$

이므로, Noether current

$$j^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu\right]\epsilon^\nu \tag{69}$$

의 4-divergence가 0이 된다는 것을 알 수 있다. 이때 대괄호 내의 부분

$$\boxed{T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu} \tag{70}$$

을 에너지-운동량 텐서(energy-monentum tensor) 또는 응력-에너지 텐서(stress-energy tensor)라 한다. $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$이므로 에너지와 운동량이 보존된다:

$$E \equiv \int \mathrm{d}^3x\ T^{00}, \quad P^i \equiv \int \mathrm{d}^3x\ T^{0i}. \tag{71}$$

고전전자기학에서 Maxwell's equations의 lagrangian density은 4-current j^μ와 4-potential A_μ, 그리고 electromagnetic field strength tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$에 대한 식으로

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{72}$$

와 같다는 사실이 알려져 있다[10]. 이 계의 에너지-운동량 텐서는

$$\begin{aligned}
T^\mu{}_\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}(\partial_\nu A_\rho) - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu && (73)\\
&= -\frac{\partial_\nu A_\rho}{4\mu_0}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}(2\partial_{[\sigma}A_{\tau]})(2\partial^{[\sigma}A^{\tau]}) - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu && (74)\\
&= -\frac{\partial_\nu A_\rho}{\mu_0}[\delta^\mu{}_{[\sigma}\delta^\rho{}_{\tau]}F^{\sigma\tau} + F_{\sigma\tau}\delta^{\mu[\sigma}\delta^{\tau]\rho}] - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu && (75)\\
&= -\frac{\partial_\nu A_\rho}{4\mu_0}(F^{\mu\rho} - F^{\rho\mu} + F^{\mu\rho} - F^{\rho\mu}) - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu && (76)\\
&= \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}(F_{\rho\nu} - \partial_\rho A_\nu) + \frac{1}{4\mu_0}\delta^\mu{}_\nu F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - \delta^\mu{}_\nu j^\rho A_\rho && (77)
\end{aligned}$$

와 같이 계산할 수 있다[11]. 관습적으로 전체에 -1을 곱해서 electromagnetic stress-energy tensor라고 칭하므로 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$T^{\mu\nu} = -\eta^{\nu\tau}T^\mu{}_\tau = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) + \eta^{\mu\nu}j^\rho A_\rho + \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}\partial_\rho A_\nu. \tag{78}$$

[10] 여기서 j^μ는 Noether current가 아니라 일반적인 electric current이다.

[11] 사실, 스칼라 장 ϕ에 대해서 유도한 에너지-운동량 텐서인 eq. (70)에 곧바로 벡터 장인 A_μ를 대입하는 것에는 (매우 큰) 논리적 비약이 숨어있다. 다만 전술했듯 벡터 장에 대한 Noether's theorem을 유도하는 것은 복잡하므로, 우선은 받아들이기로 하자.

4.4 Belinfante–Rosenfeld Procedure

시공간 좌표의 병진 대칭성에 기인하는 보존량으로서 $T^{\mu\nu}$를 도출한 것과 같이, 회전 대칭성에 기인하는 보존량인 각운동량은 마지막 두 인덱스에 대해 반대칭인 Noether current

$$M^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\lambda T^{\mu\nu} \tag{79}$$

와 그 보존

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = \delta^\nu_\mu T^{\mu\lambda} + x^\nu \partial_\mu T^{\mu\lambda} - \delta^\lambda_\mu T^{\mu\nu} - x^\lambda \partial_\mu T^{\mu\nu} = T^{\nu\lambda} - T^{\lambda\nu} = 2T^{[\mu\lambda]} = 0 \tag{80}$$

기술된다. 이 결과를 보면 eq. (78)의 마지막 항은 물리적으로 부자연스럽다는 것을 알 수 있는데, $T^{\mu\nu}$가 대칭이 아니라면 각운동량이 보존되지 않기 때문이다[12].

이는 벡터장으로 기술되는 입자가 필연적으로 스핀을 가지므로, 보존되는 각운동량은 시공간 회전 대칭성에 대응되는 보존량인 궤도 각운동량(orbital angular momentum)과 (벡터) 장의 회전 대칭성에 대응되는 내부 각운동량(intrinsic (spin) angular moentum)의 합이기 때문이다. 스핀에 대한 보정 항이 등장해야 하기 때문이다. 따라서

$$\partial_\mu S^{\mu\nu\lambda} = T^{\lambda\mu} - T^{\nu\lambda} \tag{81}$$

인 내부 각운동량 텐서를 도입하여,

$$J^{\mu\nu\lambda} = M^{\mu\nu\lambda} + S^{\mu\nu\lambda} \tag{82}$$

가 총 각운동량으로서 보존된다고 말하는 것이 옳다.

이를 고려하여 canonical stress-energy tensor를 대칭화(symmetrise)한 결과

$$T^{\mu\nu}_B = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda (S^{\mu\nu\lambda} + S^{\nu\mu\lambda} - S^{\lambda\nu\mu}) \tag{83}$$

는 대칭적이며, 이를 Belinfante–Rosenfeld tensor라 한다. 고전전자기학의 lagrangian density eq. (72)의 병진 대칭성에 대응되는 Belinfante–Rosenfeld tensor

$$T^{\mu\nu}_B = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right] + \eta^{\mu\nu} j^\rho A_\rho = T^{\mu\nu}_{EM} + \eta^{\mu\nu} j^\rho A_\rho \tag{84}$$

는 우리가 아는 electromagnetic stress-energy tensor와 Lorentz force에 관련된 항의 합으로 나타난다.

[12] 그뿐만 아니라, 일반상대론에서 시공간의 왜곡과 물질을 연관짓는 방정식 Einstein field equation $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$에도 문제를 만드는데, 수학적으로 Einstein tensor $G_{\mu\nu}$는 언제나 대칭 텐서이기 때문이다.

전자기장이 '가진' energy-momentum인 $T^{\mu\nu}_{EM}$은

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E} &= T^{00} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right), && (85) \\ \boldsymbol{\mathcal{P}} &= T^{0i} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{S} && (86) \\ \Theta_{ij} &= T^{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right)\delta_{ij} && (87) \end{aligned}}$$

의 보존을 함의하며, 우리는 이것이 차례로 전자기장의 energy density, momentum density, Maxwell stress tensor라는 것을 알고 있다.

Part III
GAUGE THEORY

"Well, gauge theory is very fundamental to our understanding of physical forces these days. But they are also dependent on a mathematical idea, which has been around for longer than gauge theory has."

– Roger D. Penrose

---

5 Dirac Fields and Electrons

5.1 Klein–Gordon Equation

1차 양자화는 에너지와 운동량에 대응되는 연산자

$$E \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \mapsto -i\hbar\nabla \tag{88}$$

를 통해 이루어진다. 상대론적 에너지-운동량 관계식 $E^2 - (\mathbf{p}c)^2 = (mc^2)^2$을 4-벡터 형태로 다시 쓰면

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \tag{89}$$

이므로, 이를 연산자에 대한 식으로 바꾸고 양변의 오른쪽에 파동함수 ψ를 취해주면

$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\psi - m^2c^2\psi = 0,$$

즉

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right]\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi \tag{90}$$

을 얻는다. 이를 Klein–Gordon 방정식이라고 하며, 양자장론에서 스핀이 0인 입자를 기술하는 장이 이 방정식을 만족한다. D'Alembertian을 이용하여

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{91}$$

꼴로 표현하기도 한다.

5.2 Dirac Equation and Dirac Spinor

상대론적으로 입자를 기술할 때는 스핀을 무시할 수 없다. 전자의 스핀은 1/2이므로, Klein–Gordon 방정식과는 다른 형태의 파동 방정식으로 기술되어야 한다. Dirac은 에너지-운동량 관계를 여전히 만족하면서도 스핀이라는 특성을 반영하는 방정식을 찾기 위하여 에너지-운동량 관계식을 다음과 같이 인수분해하는 전략을 시도했다:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0. \tag{92}$$

우변에서 p_μ에 대한 일차항을 소거하기 위하여 $\beta^\mu = \gamma^\mu$가 되도록 하면,

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \tag{93}$$

와 같은 관계식을 얻는다. 이 등식은 γ^μ가

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{94}$$

를 만족하는 행렬일 때 성립한다[13].

Equation (94)을 만족하는 4×4 행렬 γ^μ로는 다음과 같은 Dirac 행렬이 가장 일반적으로 쓰인다:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & \\ & -I_{2\times2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}. \tag{95}$$

여기서 σ^i는 다음과 같이 정의되는 Pauli 행렬이다:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Equation (92)의 우변에서 한 부분만 취하고, p_μ를 $i\hbar\partial_\mu$로 치환하면 연산자에 대한 새로운 항등식을 얻는다. 그 양변에 파동 함수 ψ를 취한 형태인

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \tag{97}$$

을 Dirac 방정식이라 부른다. 스칼라 장으로 기술되는 입자를 설명했던 Klein–Gordon 방정식의 경우와는 달리, Dirac 방정식에서 스핀 1/2의 입자를 기술하기 위해서 ψ는 4-벡터가 아니라 Dirac 스피너가 되어야 한다. 스핀 1/2 입자는 Lorentz 군의 스피너 표현을 따르기 때문이다.

이 변환 방식을 명시적으로 쓰면

$$\psi \mapsto \psi' = S\psi, \quad S = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} - \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\gamma^0\gamma^1 \tag{98}$$

와 같다. 이러한 변환 하에 불변성을 유지하기 위하여, Dirac 스피너 ψ의 크기 또는 relativistic invariant는 그 adjoint

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix} {\psi_1}^* & {\psi_2}^* & -{\psi_3}^* & {\psi_4}^* \end{pmatrix}^T \tag{99}$$

와의 곱

$$\bar{\psi}\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \tag{100}$$

로 정의된다.

Dirac 스피너 ψ와 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$에 대하여, 다음과 같은 사실이 알려져 있다:

[13]중괄호로 묶인 순서쌍은 anticommutator를 나타낸다: $\{A, B\} = AB + BA$.

1. $\bar{\psi}\psi$ is a scalar,
2. $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ is a pseudoscalar,
3. $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ is a vector,
4. $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ is a pseudovector,
5. $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ is an antisymmetric tensor.

이 다섯 가지 경우의 수 외에 ψ로 구성할 수 있는 새로운 텐서 또는 유사 텐서는 없다. $1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}$의 16개의 선형 결합으로 모든 4×4 행렬을 만들 수 있기 때문이다. 유일하게 구성할 수 있는 벡터는 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$라는 사실을 알 수 있는데, 후술하겠으나 이는 실제로 전류 4-벡터 j^μ이다.

6 Local $U(1)$ Symmetry and the Gauge Boson

이 장부터는 Planck 단위계를 사용한다.

6.1 Local Phase Transformations

Dirac 방정식 eq. (97)을 Euler–Lagrange 방정식으로 취하는 lagrangian density는

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi \tag{101}$$

이다. 자명하게,

$$\psi \mapsto e^{i\theta}\psi \tag{102}$$

의 변환 하에 이 lagrangian density는 불변이다. 단위원의 대칭성은 Lie group $U(1)$으로 기술되므로, 이러한 대칭성은 global $U(1)$ symmetry라 하고, eq. (102)은 global phase transform이라 불린다.

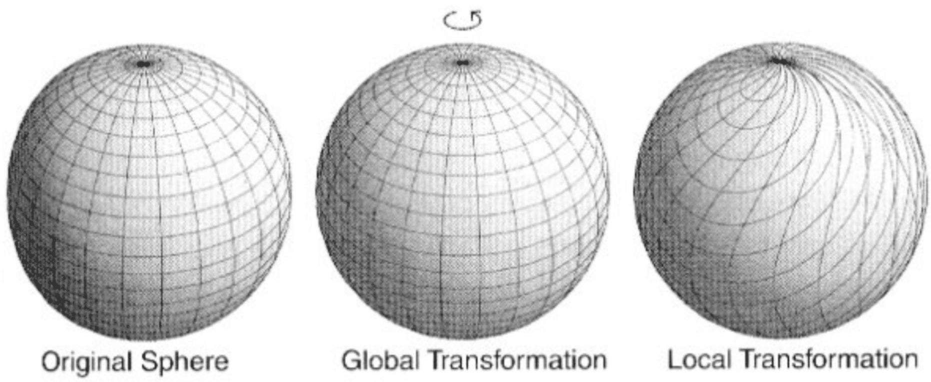

Figure 1: Global and local transformations

전자에 global $U(1)$ symmetry가 존재한다면, local $U(1)$ symmetry도 존재하는가? 즉,

$$\psi \mapsto \psi' = e^{i\theta(x^\mu)}\psi, \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}' = e^{-i\theta(x^\mu)}\bar{\psi} \tag{103}$$

와 같은 변환 하에서도 Dirac lagrangian density eq. (101)이 불변하는가?

$$\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_\mu\psi \tag{104}$$

이므로, eq. (103)과 같은 변환 하에 eq. (101)의 lagrangian density는

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \mapsto \mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta)\psi \tag{105}$$

와 같이 변화한다. 따라서 불변이 아니다. 위상각 θ를

$$\lambda = -\frac{1}{e}\theta \tag{106}$$

와 같이 치환하면 eq. (105)을

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \mapsto \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\lambda \tag{107}$$

와 같이 다시 쓸 수 있다.

새로운 lagrangian density

$$\mathcal{L}^{\text{ad hoc}}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi - (e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)a_\mu \tag{108}$$

를 생각하자. 새롭게 도입한 벡터장 a_μ가 local phase transformation

$$\psi \mapsto e^{-ie\lambda}\psi \tag{109}$$

하에

$$a_\mu \mapsto a_\mu + \partial_\mu\lambda \tag{110}$$

와 같이 변환된다면, 기존 Dirac lagrangian density에서 local $U(1)$ symmetry가 성립하지 않았던 문제를 해결할 수 있다. 이는, ∂_μ를 다음과 같이 정의된 $\mathcal{D}_\mu$로 교체하는 것으로도 생각할 수 있다:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iea_\mu \tag{111}$$

6.2 The QED Lagrangian

우리가 새롭게 도입한 항은 벡터장 a_μ와 Dirac 스피너 ψ가 곱해진 꼴이므로, 스핀이 1인 어떤 입자와 전자의 상호작용을 기술하는 항으로 볼 수 있다. 따라서, a_μ에 의해 기술되는 미지의 입자 자체에 대한 항도 lagrangian에 고려되어야 한다.

벡터장 a_μ에 의해 기술되는 스핀이 1인 입자는 다음과 같은 Proca lagrangian density 로 기술된다:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu)(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu) + \frac{1}{2}m^2 a^\mu a_\mu. \tag{112}$$

따라서, $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{ad hoc}}$과 $\mathcal{L}_{\text{Proca}}$를 더한 것이 이 계의 최종적인 lagrangian density가 된다. 이때 $\mathcal{L}_{\text{Proca}}$ 추가가 local $U(1)$ symmetry를 깨지 않기 위해서는 eq. (112)의 2번째 항이 0이 되어야만 한다. $a^\mu a_\mu$는 eq. (110) 하에 불변이 아니기 때문이다. 따라서 $m = 0$이며, 전자와 상호작용하고 있는 입자는 질량이 없는 gauge boson이라는 것을 알 수 있다. 이 gauge boson 자체 에너지와 전자와의 상호작용 에너지 사이의 비율은 fine structure constant로 알려진 무차원 상수로[14], 실험적으로만 측정될 수 있는 값이다.

최종적으로, SI 단위계에서 다음과 같은 양자전기역학의 lagrangian을 얻는다[15]:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - (e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)a_\mu - \frac{1}{4}(\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu)(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu).} \tag{113}$$

6.3 Electromagnetism as Byproduct

우리는 방금 전자를 기술하는 스피너 장의 local phase symmetry를 가정함으로써, 전자는 질량이 없는 gauge boson을 매개로 상호작용한다는 사실을 유도해 내었다. 이 입자를 우리는 지금까지 광자라고 불러왔다.

광자의 자체 에너지를 기술하는 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu$는 Faraday 텐서로, a^μ는 우리가 아는 4-벡터 전자기 퍼텐셜 A^μ와 완전히 동일하다. 에너지와 장의 크기뿐 아니라, 우리가 아는 고전전자기학의 규칙인 Maxwell 방정식 역시 이 체계에서는 매우 자연스럽게 얻어진다.

우선, 전기장의 curl과 자기장의 divergence에 대한 Maxwell 방정식인 eq. (1)과 eq. (2)는 단지 벡터 미적분학의 연산 결과에 불과하다.

전자기장과 전자 사이의 상호작용을 기술하는 다른 두 방정식 얻기 위해서는 앞서 유도한 QED의 lagrangian density을 직접적으로 사용해야 한다. A^ν에 대한 변분을 계산하기 위해 Euler-Lagrange 방정식

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\delta A^\nu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QED}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \tag{114}$$

을 고려하자. 곧

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{115}$$

을 얻고, 이는 Gauss' law eq. (3)와 Ampére's law eq. (4)를 동시에 쓴 것과 같다.

7 A Glimpse into Yang–Mills Theory

7.1 Non-Abelian Yang–Mills Theory

Yang–Mills 이론은 $U(1)$보다 일반적인 special unitary Lie group $SU(N)$으로 기술되는 대칭성에 대한 게이지 이론이다.

적당한 $G = SU(n)$에 대하여, 그 생성자는

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad 1 \le a, b, c \le \dim G \tag{116}$$

[14] $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137.035999177(21)$

[15] SI 단위계에서는 $\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi - (e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)a_\mu - \frac{1}{4\mu_0}(\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu)(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu)$.

의 교환자 관계를 만족한다[16]. 이때 f^{abc}는 (antisymmetric) structure coefficients라 불리는 algebra의 속성이다. 3차원 special unitary group인 $SU(2)$에서는 f^{abc}가 Levi-Civita symbol로, T^a가 Pauli matrices로 나타난다. 각 생성자는

$$\mathrm{tr} T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{117}$$

가 되도록 정규화된다.

G가 주어졌을 때 그 Lie algebra $\mathfrak{g}$의 각 기저, 즉 각 생성자 T^a에는 각각의 게이지 장 A^a_μ가 대응된다. 이것을 계수로 하고, T^a를 기저로 하는 Lie-algebra valued 게이지 장은

$$A_\mu = A^a_\mu T^a \tag{118}$$

와 같이 정의된다. 게이지 대칭성을 보장하도록 하는 eq. (110)와 같이, 보다 일반적으로 ∂_μ를

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig[A_\mu, \cdot] = \partial_\mu - igA^a_\mu T^a \tag{119}$$

로 대체함으로써 게이지 변환의 개념을 확장할 수 있다. 여기서 g는 gauge coupling constant로, 상호작용의 종류에 따라 달라지는 상수이다. 이러한 방식의 새로운 미분 연산자를 gauge covariant derivative라 칭한다. 두 gauge covariant derivative 연산자의 교환자는 curvature라 부르며, curvature로부터 다음과 같이 field strength가 정의된다:

$$F_{\mu\nu} = i[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \tag{120}$$

Yang–Mills 이론에서의 lagrangian density는

$$S_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\ F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu} \tag{121}$$

로 주어지며, 그 행동을 기술하는 방정식

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \mathcal{D}_\mu\left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) = \mathcal{D}\star F^{\mu\nu} = 0 \tag{122}$$

은 Maxwell 방정식의 일반화로 볼 수 있다.

게이지 장의 개수가 많아진 만큼, 고차원의 Yang–Mills theory에서는 그만큼 게이지 입자의 종류도 많아진다. 약한 상호작용은 W^1, W^2, W^3 입자에 의해 매개되며, 강한 상호작용은 세 종류의 색전하가 8가지 경우의 수로 중첩되어 있는 8종의 글루온이 매개한다. 또한, $U(1)$보다 높은 차원의 special unitary groups는 non-abelian이기 때문에 게이지 보존 사이의 상호작용이 존재한다.

7.2 Spontaneous Symmetry Breaking and the Higgs Mechanism

Proca lagrangian density의 mass term은, 전자기학의 경우에서 보았듯 약한 상호작용이나 강한 상호작용에서도 locally gauge invariant하지 않다. 따라서, 약력을 매개하는

[16] 1차원 special unitary group인 $U(1) = SU(1)$에서는 고려할 필요가 없었던 성질이다.

게이지 입자 역시 이론적으로 광자나 글루온과 같이 질량이 없는 게이지 보존이어야 한다. 그러나 약력의 매개 입자로 알려진 $W^{\pm}$ 입자와 Z^0 입자는 실험적으로 질량을 갖는다.

질량이란 무엇인가? 여러 파동 방정식에 대한 lagrangian density를 관찰하자.

1. Klein–Gordon equation: $[\Box + m^2]\phi = 0 \leftrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$
2. Dirac equation: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \leftrightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$
3. Porca equation: $\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 a^\mu = 0 \leftrightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 a^\mu a_\mu$

자유롭게 진행하는 파동을 나타내는 일차항은 라그랑지안에서는 이차항으로 나타나야만 한다[17]. 따라서 라그랑지안에서 장에 대한 이차항의 계수는 입자의 질량과 관계가 있다. 그보다 높은 차수의 항은 파동 방정식에 비선형성을 만들며, 따라서 '상호작용'이라고 해석된다.

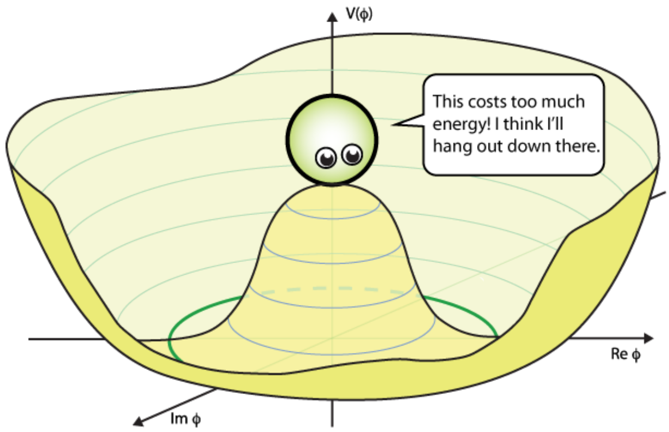

Figure 2: Mexican hat potential with an innocent sphere at the centre

자기 자신과 상호작용하는 다음과 같은 스칼라 입자를 고려하자:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4. \tag{123}$$

Klein–Gordon lagrangian density

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{124}$$

의 형태를 생각해볼 때 이 스칼라 입자는 언뜻 음의 질량을 가지는 입자인 것처럼 보이지만, 바닥 상태가 $\phi = 0$이 아니라는 점을 유념해야 한다. 바닥 상태로부터의 섭동을 고려하기 위해

$$\eta = \phi \pm \frac{\mu}{\lambda} \tag{125}$$

의 치환을 도입하면,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2 \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 \tag{126}$$

[17] 더 정확히는 propagator의 형태로부터 알 수 있다. 장의 차수와 Feynman diagram의 vertex의 차수가 같다.

로 주어진 lagrangian density를 변형할 수 있다. 따라서, 이 스칼라 입자는 사실 음이 아니라 양수인 $m = \sqrt{2}\mu$의 질량을 갖는 입자였던 것이다.

세 종류의 위크 보존을 정확히 기술하기 위해서는 left-chiral fermion에 대한 약한 상호작용과 관련된 $SU(2)$[18], 약한 상호작용과 전자기 상호작용을 결합하기 위해 요구되는 weak hypercharge[19]에 대한 $U(1)$을 함께 고려하여 $SU(2)_L \times U(1)_Y$의 대칭성에 대한 게이지 이론을 전개해야 하지만[20], 우리가 초점을 두고 있는 것은 어떻게 게이지 보존이 질량을 얻는가에 대한 궁금증이므로, 간단히 $U(1)$ 모델에서 가상의 massive gauge boson이 나타나는 예시를 살펴보자.

스칼라장 ϕ가 $U(1)$의 위상 게이지 대칭성을 가졌다고 하면, 전자기학에서의 경우와 유사하게

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{127}$$

을 도입하여

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\phi)^*(\mathcal{D}_\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{128}$$

와 같이 이 스칼라 입자와 상호작용하는 게이지 보존을 라그랑지안에 반영할 수 있다.

이 라그랑지안은 복소평면 상에서 $SO(2)$의 대칭성을 가졌지만, 자발대칭깨짐에 의해 그 대칭성은 무너질 것이다. 바닥 상태로부터의 섭동을 고려하기 위해

$$\eta = \mathfrak{Re}\ \phi - \mu/\lambda = \phi_1 - \mu/\lambda, \quad \xi = \mathfrak{Im}\ \phi = \phi_2 \tag{129}$$

의 치환을 도입하면, eq. (128)는

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi)\right] + \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\ &+ \Bigg[q(\eta\partial_\mu\xi - \xi\partial_\mu\eta)A^\mu + \frac{\mu}{\lambda}q^2\eta A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2(\xi^2+\eta^2)A_\mu A^\mu \\ &-\lambda\mu(\eta^3+\eta\xi^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 + \xi^4)\Bigg] + \left(\frac{\mu}{\lambda}q\right)(\partial_\mu\xi)A^\mu + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2\end{aligned} \tag{130}$$

로 다시 쓰인다. 앞의 세 대괄호 항은 차례로 질량 $\sqrt{2}\mu$의 스칼라 입자 η, 질량이 없는 스칼라 입자 ξ[21], 그리고 상호작용을 기술하는 게이지 입자처럼 보인다. Proca lagrangian의 형태를 고려할 때, 이 게이지 보존은 이제 massless가 아니라 질량 $q\mu/\lambda$을 갖는다는 사실 역시 확인할 수 있다.

다만 이 결과는 Feynman rule을 적용하기에 적절한 형태가 아닌데, 불필요한 Goldstone 보존 ξ와, (상호작용으로 해석될 수 없는) 일차항 등이 lagrangian에 포함되어 있기 때문이다. 대신, 다음과 같은 ϕ를 실수로 만들 수 있도록

$$\phi \mapsto \phi' = e^{-\tan^{-1}(\phi_2/\phi_1)}\phi \tag{131}$$

[18] weak isospin의 보존과 관련된 대칭성이다.
[19] Weak hypercharge Y와 3번째 weak isospin T_3에 대하여 전기적 전하는 $Q = T_3 + Y/2$로 나타난다.
[20] Glashow–Weinberg–Salam 모델을 사용하여 정확히 $W^\pm$과 Z^0가 질량을 얻는 과정은 arXiv:2306.01019을 참고.
[21] Goldstone boson이라고도 불린다.

의 global phase transform을 고려하자. 새로운 입자 ξ가 ϕ의 허수부로부터 나왔다는 점을 생각할 때 이러한 변환은 자연스럽다. 이때 A_μ는 우리가 알던 방식대로

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \left(\frac{1}{q}\theta \right) \tag{132}$$

와 같이 변환된다. 그러면, eq. (128)는

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial_\mu \eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(q\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\ &+ \left[q\frac{\mu}{\lambda}\eta A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2\eta^2 A^\mu A^\mu - \lambda\mu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4\right] + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2\end{aligned}} \tag{133}$$

와 같이 쓸 수 있다. 이렇듯 Goldstone 보존을 사라지도록 하는 게이지의 선택을 unitary gauge라 한다.

이 예시에서는 ϕ로 표현되는 스칼라 입자의 Mexican hat potential이 바닥상태를 원점에서 벗어나게 하며 global한 $SO(2) \cong U(1)$의 대칭성을 깼다. 이를 자발대칭깨짐이라 하며, global한 게이지 대칭성이 자발대칭깨짐을 겪으며 게이지 보존에 질량이 부여되는 일련의 메커니즘을 Higgs mechanism이라 한다[22].

초전도 현상 역시 Cooper pair에서 global $U(1)$ symmetry가 깨지는 자발대칭깨짐의 일종인데, 앞서 살펴보았듯 전자기학은 $U(1)$ 대칭성으로부터 유도되는 이론이므로 이 대칭성이 깨졌을 때 우리가 아는 것과 물리 법칙이 달라지는 것은 그리 이상한 상황이 아니다.

References

[1] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1980). *The Classical Theory of Fields* (4th ed.). Butterworth-Heinemann.

[2] oh my physics. (2023). *Noether's theorem*. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=Ie3ZikXUnKw

[3] Griffiths, D. (2008). *Introduction to Elementary Particles* (2nd ed.). Wiley-VCH.

[4] Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press.

[5] Tong, D. (2006). *Quantum Field Theory*, University of Cambridge. https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf

[6] Tong, D. (2018). *Gauge Theory*, University of Cambridge. https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory/gt.pdf

[7] Abokhalil, A. (2023). The Higgs Mechanism and Higgs Boson: Unveiling the Symmetry of the Universe. *arXiv preprint*, arXiv:2306.01019.

[22] Local gague symmetry는 자발대칭깨짐을 겪을 수 없다(Elitur's theorem).