회귀분석/분산분석

서울대학교 통계연구소

2024년 2월

이번 강의에서 다룰 내용

- 상관계수를 이용한 상관분석
- 단순 선형회귀 분석, 예측, 모형평가
- 분산분석-일원배치

상관분석이란?

- 두 변수 사이의 관계 중, '직선 형태의 상관관계'에 대해 분석하는 방법을 상관분석(Correlation analysis)이라 한다.
- 두 변수 사이의 직선 관계는 산점도를 통해 대략적으로 확인할 수 있지만, 판단이 애매한 경우 보다 정량적인 척도로 상관계수 (Correlation coefficient)를 사용한다.
- 상관분석에서는 상관계수의 추정량인 '표본상관계수'를 이용한다.

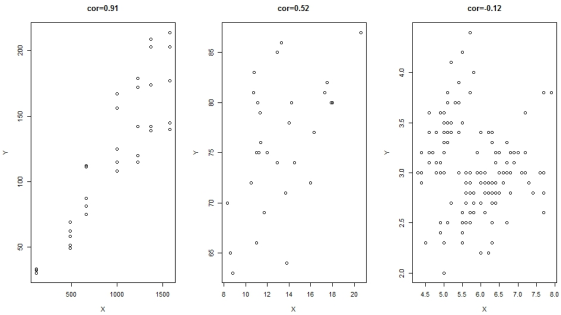
상관계수

- 상관계수 ρ의 정의는 다음과 같다.

$$\rho = Corr(X,Y) = E\left[\left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right] = \frac{Cov(X,Y)}{sd(X)sd(Y)}$$

- 상관계수는 두 변수의 직선관계가 얼마나 강하고 또 어떤 방향인지를 나타내는 척도이다.
- 상관계수 ρ는 -1과 1 사이의 값을 가지며, 일반적으로 상관계수의 절댓값이 1에 가까울 수록 직선관계가 강하다고 본다. 또한 상관계수의 부호가 양이면 두 변수가 증가관계에 있다고 보고, 음이면 감소관계에 있다고 본다.

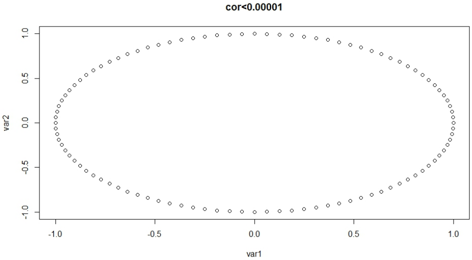
상관계수



상관계수의 크기에 따른 산점도의 형태, 절대값이 클 수록 선형관계가 선명하게 드러난다.

상관계수가 0인 경우

- 상관계수가 측정하는 두 변수 간의 상관관계는 직선 형태의 관계에 한정된다.
- 즉, 상관계수가 0이나 0에 가깝게 측정되었다는 것은, 두 변수 간의 직선관계가 드러나지 않았다는 것으로 이해해야 한다.
- 실제 두 변수 간의 상관관계가 없는 경우 상관계수가 0이 나오는 것이 사실이나, 직선이 아닌 특수한 관계를 가진 변수들끼리도 상관계수가 0이 나올 수 있다.



두 변수가 원점을 중심으로 하는 원의 x좌표와 y좌표 형태인 경우 상관계수는 0에 가까우나 변수 간의 관계가 없다고 볼 수는 없다.

표본상관계수

- 표본상관계수 $\hat{\rho} = r$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \left(= \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{((\sum_{i=1}^{n} x_i^n - n(\bar{x})^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^n - n(\bar{y})^2)}}$$

- 표본상관계수 역시 -1과 1 사이의 값을 가지며, 표본상관계수의 절댓값이 1에 가까울 수록 산점도가 직선에 가까운 형태로 나타난다.

상관계수의 검정

- 모집단에서 각 개체의 두 가지 특성을 변수 X, Y로 나타낼 때, 두 변수 간의 상관계수는 모상관계수 ρ로 나타난다.
- 그리고 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$과 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$이 각각 정규모집단으로부터의 랜덤표본일 때, $H_0 : \rho = 0$에 대한 검정통계량은 다음과 같이 얻을 수 있다.
  $T = \sqrt{n-2}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$ under H_0 (r: 표본상관계수)
- 검정통계량의 관측값을 t_0이라 할 때, 대립가설에 따른 기각역 및 유의확률은 아래와 같이 나타난다.

대립가설	유의확률	유의수준 α의 기각역
$H_1 : \rho > 0$	$P = P(T \geq t_0)$	$T \geq t_\alpha(n-2)$
$H_1 : \rho < 0$	$P = P(T \leq t_0)$	$T \leq -t_\alpha(n-2)$
$H_1 : \rho \neq 0$	$P = P(\lvert T\rvert \geq \lvert t_0\rvert)$	$\lvert T\rvert \geq t_{\alpha/2}(n-2)$

대립가설에 종류에 따른 유의확률과 기각역의 형태

상관계수의 검정

예 : 다음 자료는 어느 고등학교 학생 중에서 랜덤하게 추출된 20 명의 수학능력 모의시험에서 국어영역과 영어영역의 점수이다.

학생 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
국어	42	38	51	53	40	37	41	29	52	39
영어	30	25	34	35	31	29	33	23	36	30
학생 번호	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
국어	45	34	47	35	44	48	47	30	29	34
영어	32	29	34	30	28	29	33	24	30	30

국어영역과 영어영역 성적 간의 표본상관계수를 구해보고, 두 성적이 이변량 정규분포를 따른다고 할 때, 두 성적 사이에 상관관계가 있는지를 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정해보자.

상관계수의 검정

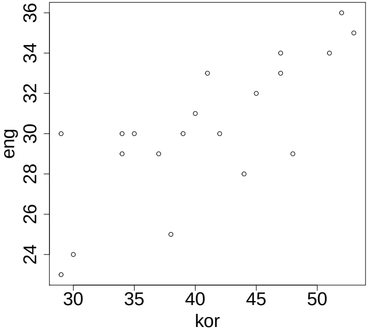
R Code

```
kor <- c(42,38,51,53,40,37,41,29,52,39,45,34,47,35,44,48,47,30,29,34)
eng <- c(30,25,34,35,31,29,33,23,36,30,32,29,34,30,28,29,33,24,30,30)


cor(kor,eng) # 표본상관계수

[1] 0.7567

cor.test(kor,eng) # 상관분석


Pearson's product-moment correlation

data:  kor and eng
t = 4.9, df = 18, p-value = 1e-04
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.4724 0.8984
sample estimates:
   cor
0.7567
```

상관계수의 검정

두 성적의 점수로 산점도를 그려본 결과는 다음과 같다.

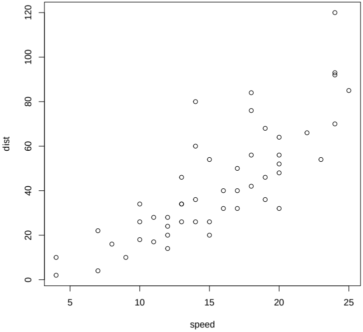
```
par(cex.lab=2,cex.axis=2)
plot(kor,eng)
```



Car 데이터

1920년대에 측정된, 자동차의 속도와 제동거리에 대한 자료

```r
data(cars)
plot(cars)
```



```r
cor(cars$dist,cars$speed)

[1] 0.8069

cor.test(cars$dist,cars$speed)


Pearson's product-moment correlation

data:  cars$dist and cars$speed
t = 9.5, df = 48, p-value = 1e-12
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.6816 0.8862
sample estimates:
   cor
0.8069
```

선형 모형과 회귀분석

- 앞서 살펴본 ‘상관관계’와는 다르게, 하나의 변수가 나머지 하나의 변수에 영향을 끼치는 형태의 관계들 역시 존재한다.
- 이 때, 영향을 끼치는 변수를 설명변수(Explanatory variable)라 하고, 영향을 받는 변수를 반응변수(Response variable)라 한다.
- 설명변수와 반응변수 간에는 다양한 함수 형태의 관계를 가정할 수 있는데, 특히 반응변수가 입력변수의 1차 함수 형태로 나타난다고 가정하는 경우, 이러한 관계를 설명하기 위해 선형 모형(Linear model)을 고려해볼 수 있다.

선형 모형

- 데이터 내의 측정된 변수들 사이의 관계를 찾는 것은 데이터 과학의 큰 주제
  - 집값은 소득의 영향을 받는가?
  - 비료가 작물의 성장 속도를 향상시키는가?
  - 키가 큰 달리기 선수가 더 빠른가?
- 이들 질문은 ‘x’가 ‘y’에 영향을 끼치는가?의 문제로 치환할 수 있다.
- 가장 간단하면서도 활용도가 높은 "영향을 끼치는 방식"으로 선형 모형을 생각할 수 있다. 즉, ‘y’가 ‘x’의 1차 함수라고 가정하는 방법이다.

Car 데이터에서,

- 산점도를 보고, ‘자동차의 제동 거리는 속도에 대한 직선 형태의 함수로 나타날 것이다’ 와 같은 믿음을 갖게 되는 경우, 두 변수 간에 다음과 같은 선형 모형을 고려할 수 있다.
- 거리 $= \beta_0 +$ 속도 $\times \beta_1$
- 이 때, 선형 모형에 사용되는 계수들을 자료를 이용하여 추정하는 분석 방법을 선형 회귀분석(Linear regression analysis)이라 한다. 그리고 회귀분석을 통해 만들어진 모형을 선형회귀모형(Linear regression model)이라고도 부른다.

단순선형회귀

- 하나의 설명변수에 대해 만들어진 회귀모형을 단순선형회귀모형(Simple linear regression model)이라 한다.
- 설명변수의 값 x에 대항하는 반응변수 y의 값이 직선 $\beta_0 + \beta_1 x$ 주위에 나타나고, 직선에서 벗어난 측정치는 측정 오차라고 생각하는 경우, 다음과 같은 선형 모형을 생각해볼 수 있다.

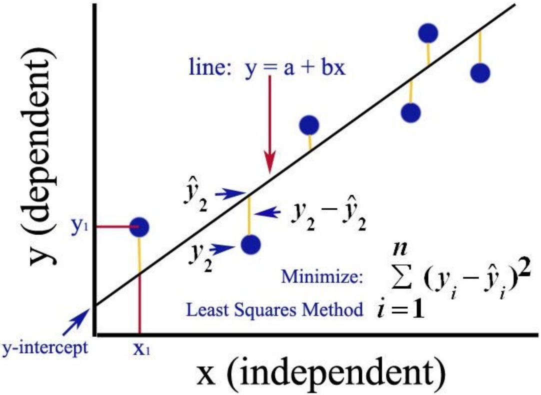
$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon, \;\; E(\epsilon) = 0, \;\; Var(\epsilon) = \sigma^2$$

- 이 때, 모형의 계수들을 회귀계수(Regression coefficient)라 한다.

회귀계수의 추정

- 선형 모형이 실제 자료를 얼마나 잘 설명하는지, 즉, 자료를 가지고 선형모형을 적합 하기 위해서는 최소제곱법(method of least square)이라는 방법을 사용한다.
- 선형회귀모형 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$에서, 설명변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 선형회귀모형에 대입해서 얻은 y_i의 추정값과 실제 y_i 값의 차이를 구하고, 이 차이들을 제곱해서 더한 값을 최소화하는 계수를 구하는 방법을 최소제곱법이라고 부른다.
- 즉, $\sum_{i=1}^{n} \{Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)\}^2$의 값을 최소화하는 β_0, β_1의 값을 실제 β_0, β_1의 추정값으로 하는 것이다.

회귀계수의 추정



최소제곱법의 원리

회귀계수의 추정 : 예

예 : 앞서 상관분석에 사용된 국어영역과 영어영역의 점수이다.

- 모국어에 관련된 어학 능력이 외국어에 관련된 어학 능력에 영향을 끼치는지 알아보기 위해, 국어 점수를 설명변수로 하고 영어 점수를 반응변수로 하는 단순회귀모형을 적합해보도록 한다.
- 회귀계수를 구하는데 사용되는 R Code는 다음과 같다.
- 적합된 회귀모형은 다음과 같다.

$$\hat{Y}_i = 15.99 + 0.35 \times x_i$$

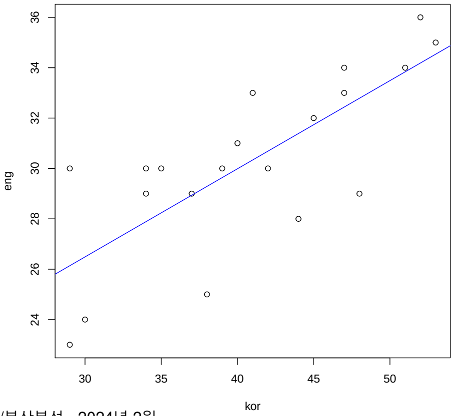
```
lm(eng~kor)


Call:
lm(formula = eng ~ kor)

Coefficients:
(Intercept)          kor
      15.99         0.35
```

Model formula

- $eng = \beta_0 + \beta_1 \times kor + \epsilon$을 `lm()`에서 사용하는 formula로 표시하면 `eng ~ kor`가 된다.
- 절편 β_0는 굳이 쓰지 않아도 항상 존재하는 것으로 취급된다.
- 절편을 제외한 모형 $eng = \beta_1 \times kor + \epsilon$을 사용하고 싶다면 `eng~kor-1` 또는 `eng~0+kor`을 사용해야 한다.

선형회귀분석 결과를 abline() 에 넘겨주어 바로 그래프에 표시할 수 있다.

```
fit1=lm(eng~kor)
plot(kor,eng)
abline(fit1, col="blue")
```



`lm()`으로 찾은 모형을 다음과 같이 살펴볼 수 있다.

```
coef(fit1)      # 회귀 계수

(Intercept)         kor
    15.9899      0.3499

fitted(fit1)[1:6]    # fitted values

    1      2      3      4      5      6
30.69 29.29 33.84 34.54 29.99 28.94

round(residuals(fit1)[1:6],2)     # 잔차

    1      2      3      4      5      6
-0.69 -4.29  0.16  0.46  1.01  0.06

fitted(fit1)[1:6] + residuals(fit1)[1:6]   # eng와 같아야 함

 1  2  3  4  5  6
30 25 34 35 31 29

eng[1:6]

[1] 30 25 34 35 31 29
```

```r
confint(fit1)       # 계수의 신뢰구간
```

```
              2.5 %  97.5 %
(Intercept) 9.7911 22.1886
kor         0.2002  0.4996
```

```r
deviance(fit1)      # 잔차제곱합
```

```
[1] 99.03
```

```r
sum((eng - fitted(fit1))^2)   # 잔차제곱합
```

```
[1] 99.03
```

예측

`lm()`을 통해 만들어진 모델은 predict()를 사용하여 예측할 수 있다.

```
predict(fit1, newdata=data.frame(kor=37))

    1
28.94

coef(fit1)[1] + coef(fit1)[2]*37

(Intercept)
      28.94

predict(fit1, newdata=data.frame(kor=37), interval="confidence")

    fit   lwr   upr
1 28.94 27.7 30.17

# 신뢰구간
predict(fit1, newdata=data.frame(kor=37), interval="prediction")

    fit   lwr   upr
1 28.94 23.86 34.02

# 예측구간
```

모형평가

```
summary(fit1)


Call:
lm(formula = eng ~ kor)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-4.288 -1.138  0.413  1.613  3.862

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  15.9899     2.9505    5.42  3.8e-05
kor           0.3499     0.0713    4.91  0.00011

(Intercept) ***
kor         ***
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.35 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.573,Adjusted R-squared:  0.549
F-statistic: 24.1 on 1 and 18 DF,  p-value: 0.000113
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.98985    2.95048   5.419 3.78e-05 ***
kor          0.34994    0.07125   4.911 0.000113 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

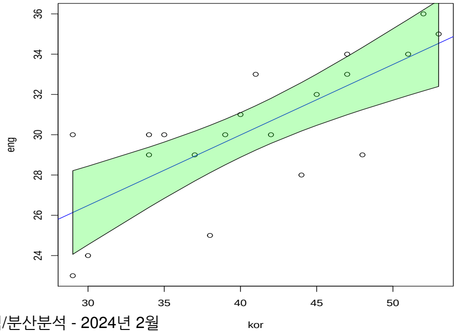
- `Estimate` 열은 절편과 계수의 추정치를 보여줌
- `Pr(> |t|)` 열은 p-value로, t 분포를 사용하여 각 변수가 얼마나 유의한지를 알려준다.
- '*' 또는 '***'로 표시된 문자열은 p-value가 얼마나 유의한지 표시한다. 아무런 표시가 없다면 계수가 통계적으로 유의하지 않음을 뜻한다.

```
Multiple R-squared:  0.5727,Adjusted R-squared:  0.5489
F-statistic: 24.12 on 1 and 18 DF,  p-value: 0.0001125
```

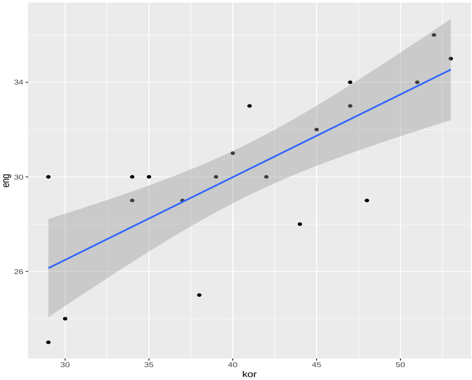
- 결정계수(Multiple R-squared)는 회귀직선이 얼마나 데이터를 잘 설명하는지에 대한 척도이다. 결정계수가 1이면 모든 점들이 회귀직선 상에 있다.
- 그러나 결정계수는 설명 변수가 늘어나면 그 값이 커지는 성질이 있으므로 이를 자유도로 나눈 조정결정계수(Adjusted R-suqared)가 더 많이 사용된다.
- F-statistic은 모형에서 기울기가 유의한지에 대한 척도이다. F 분포를 이용해서 p-value가 계산된다. 단순 선형 회귀분석의 경우 앞 슬라이드의 기울기 계수 (β)가 0인지를 검정할때의 p-value와 같다.

신뢰구간을 포함한 회귀 모형 도시하기

```
plot(kor,eng)
sorted.kor=sort(kor,index.return=TRUE)
s.kor=sorted.kor$x
s.eng=eng[sorted.kor$ix]
p <- predict(fit1, interval = "confidence")
s.p <- p[sorted.kor$ix,]
abline(fit1, col = "blue")
x <- c(s.kor, tail(s.kor, 1), rev(s.kor), s.kor[1])
y <- c(s.p[, "lwr"], tail(s.p[, "upr"], 1), rev(s.p[, "upr"]), s.p[,"l
polygon(x, y, col = rgb(0, 1, 0, 0.25))
```

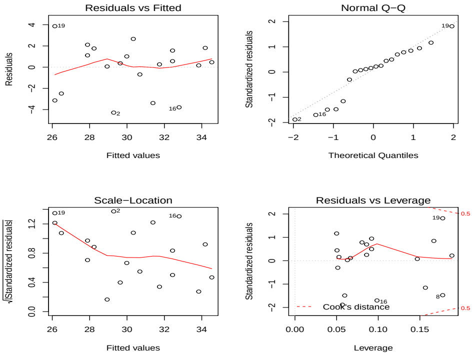


```r
library(ggplot2)
q <- ggplot(data.frame(kor,eng),aes(kor,eng))
q+geom_point()+stat_smooth(method="lm")
```



모형평가 차트

```r
par(mfrow=c(2,2))
plot(fit1)
```



- ‘Residuals vs Fitted’ 차트: 선형 회귀분석에서 오차는 평균이 0이고 분산이 일정한 정규분포임을 가정하였으므로 잔차가 특별한 경향을 보이지 않는 것이 이상적이다.
- ‘Noraml Q-Q’ 차트: 잔차가 정규분포를 따르는지 확인. 기울기 1인 직선이 되는 것이 이상적이다.
- ‘Scale-Location’ 차트: 표준화 잔차가 특별한 경향을 보이지 않는 것이 이상적이다.
- ‘Residuals vs Leverage’ 차트: 이상치(Outlier)의 유무를 검사하는데 유용하다.

단순회귀분석과 상관계수

```
coef(fit1)[2]

   kor
0.3499

cor(eng,kor)*sd(eng)/sd(kor)

[1] 0.3499

cor(eng,kor)^2

[1] 0.5727

summary(fit1)$r.squared

[1] 0.5727
```

직접 해보기

Car 데이터를 가지고 위에서 배운 lm()을 이용하여 *dist* $\sim \beta_0 + \beta_1$ *speed* $+ \epsilon$모형을 적합하고, 회귀계수 추정, 예측, 모형평가, anova, 신뢰구간 포함한 회귀모형 도시, 모형 평가 차트 등을 그려보자.

Car -모형적합

```
m <-lm(dist~speed, data=cars )
summary(m)
```

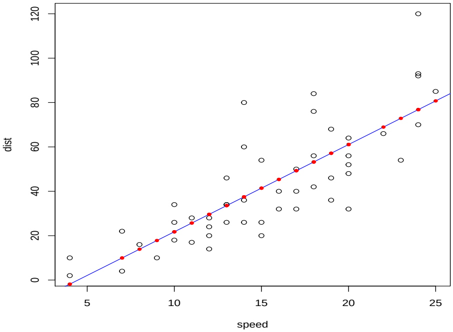
```


Call:
lm(formula = dist ~ speed, data = cars)

Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-29.07   -9.53   -2.27    9.21   43.20

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -17.579      6.758   -2.60    0.012
speed          3.932      0.416    9.46  1.5e-12

(Intercept) *
speed       ***
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 15.4 on 48 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.651,Adjusted R-squared:  0.644
F-statistic: 89.6 on 1 and 48 DF,  p-value: 1.49e-12
```

Car -회귀계수 및 잔차

```
coef(m)

(Intercept)       speed
    -17.579       3.932

fitted(m)[1:6]

     1      2      3      4      5      6
-1.849 -1.849  9.948  9.948 13.880 17.813

residuals(m)[1:6]

     1      2      3      4      5      6
 3.849 11.849 -5.948 12.052  2.120 -7.813

fitted(m)[1:6]+residuals(m)[1:6]

 1  2  3  4  5  6
 2 10  4 22 16 10

cars$dist[1:6]

[1]  2 10  4 22 16 10
```

Car -선형회귀 그래프

```r
plot(cars)
abline(m,col='blue')
points(cars$speed,fitted(m),col='red',pch=20)
```



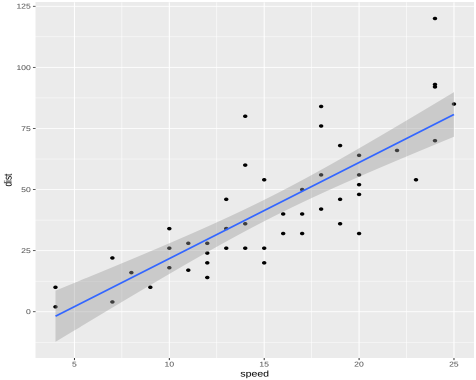
Car -신뢰구간 및 잔차 제곱합

```r
confint(m)

                2.5 % 97.5 %
(Intercept) -31.168 -3.990
speed         3.097  4.768

sum(residuals(m)^2)

[1] 11354
```

Car -예측

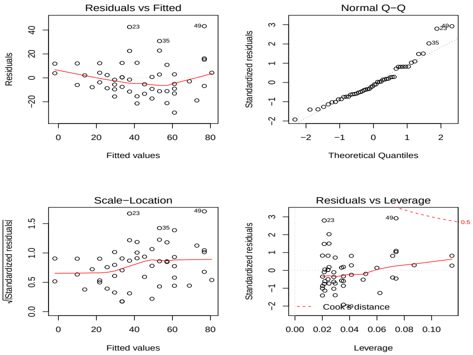
```r
predict(m, newdata=data.frame(speed=3))

     1
-5.782

coef(m)[1]+coef(m)[2]*3

(Intercept)
     -5.782

predict(m,newdata=data.frame(speed=3),interval='confidence')

     fit    lwr   upr
1 -5.782 -17.03 5.463

predict(m,newdata=data.frame(speed=3),interval='prediction')

     fit    lwr   upr
1 -5.782 -38.69 27.12
```

```r
q <- ggplot(cars, aes(speed, dist))
q+geom_point()+ stat_smooth(method='lm')
```



모형평가 차트

```r
par(mfrow=c(2,2))
plot(m)
```



범주형 설명변수

예 : 붓꽃 data의 선형모형

- R의 내장 data인 ‘iris’ dataset을 사용한다.
- ‘iris’ dataset은 150 송이의 붓꽃들의 꽃받침 길이, 꽃받침 너비, 꽃잎 길이, 꽃잎 너비, 품종을 기록한 dataset이다.
- 붓꽃의 다른 수치형 변수들(꽃잎 너비, 꽃받침 길이, 꽃잎 길이)이 붓꽃의 꽃받침 너비에 영향을 주는지 알아보기 위한 회귀선형모형을 생각해 볼 수 있다.

- 범주형 변수를 설명변수로 사용할 경우, 지시변수(Indicator variable)를 사용하여 범주를 표시하게 된다.
- 지시변수란, 범주에 따라 0과 1 중 하나의 값을 배정하는 정수 형태의 변수로, 범주형 변수를 수치화시켜주는 역할을 한다. 일반적으로, 범주의 갯수가 p개일 때, p-1개의 지시변수를 사용하여 범주형 변수들을 수치화시켜준다.
- 이러한 지시변수를 이용하여 회귀모형을 적합시켜주면, 각각의 범주에 따라 회귀식의 상수항이 다르게 나타나게 된다.

Species	지시변수 1	지시변수 2
Setosa	0	0
Versicolor	1	0
Virginica	0	1

붓꽃 자료를 이용하여 만든 지시변수. 2개의 지시변수로 3개의 범주를 구별할 수 있다.

범주형 설명변수

R Code를 통해, 붓꽃 자료에 범주형 설명변수인 ‘품종’을 이용하여 회귀모형을 적합해 보자.

```
iris_lm1 <- lm(Sepal.Width~ Species, data=iris)
summary(iris_lm1)


Call:
lm(formula = Sepal.Width ~ Species, data = iris)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max 
-1.128 -0.228  0.026  0.226  0.972 

Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value
(Intercept)         3.4280     0.0480   71.36
Speciesversicolor  -0.6580     0.0679   -9.69
Speciesvirginica   -0.4540     0.0679   -6.68
                  Pr(>|t|)    
(Intercept)        < 2e-16 ***
Speciesversicolor  < 2e-16 ***
Speciesvirginica   4.5e-10 ***
---
Signif. codes:  
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.34 on 147 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.401,Adjusted R-squared:  0.393 
F-statistic: 49.2 on 2 and 147 DF,  p-value: <2e-16
```

- 회귀직선에 대한 F검정과 범주형 변수를 포함한 각각의 회귀계수에 대한 t검정의 결과, 회귀직선 및 모든 회귀계수가 유의하다는 결론을 얻었다.
- 범주형 변수 'Speciesversicolor'는 'versicolor' 품종에 1을, 나머지 품종에 0을 배정하는 지시변수이다. 또한 'Speciesvirginica'는 1virginica' 품종에 1을, 나머지 품종에 0을 배정하는 지시변수이다.
- 각각의 지시변수의 계수를 통해, 품종에 따라 상수항이 서로 다른 회귀직선을 얻을 수 있다.

분산분석(Analysis of variance, ANOVA)이란?

- 분산분석이란, 실험계획법(Design of experiments)에서 가장 많이 사용하는 분석방법 중 하나이다.
- 분산분석은 특성값의 분산, 혹은 변동을 분석하는 방식으로, 특성값의 변동을 제곱합으로 나타내고 이 제곱합을 실험에 관련된 요인의 수준별로 분해하여 오차에 비해 큰 영향을 주는 요인이 무엇인지 찾아내는 분석 방법이다.

분산분석을 시행하는 실험의 사례

- 여러 공법에 의해 생산되는 금속가공품의 인장강도를 비교하기 위해 실험을 한 결과, 특정한 공법에서 강도가 높게 관측되었다고 하자.
- 이 때, 관측결과는 공법에 따른 강도의 차이로 인해 나타났을 수도 있고, 그 외의 규명되지 않은 요인 (예 : 작업자의 능률) 때문에 나타났을 수도 있다.
- 공법에 따른 인장강도의 차이가 있는가를 제대로 알아내기 위해서는, 각 공법마다 여러 번의 실험이 이루어져야 한다.
- 한 공법에 여러 명의 작업자를 할당하여 각각 실험을 하였을 때, 그 공법에서 관측된 자료들의 변동은 작업자들의 능률 차이로 인한 변동으로 생각할 수도 있다. 한편, 서로 다른 공법에서 관측된 인장강도의 평균값이 다르게 나타나는 것은 공법에 따른 변동으로 생각할 수 있다.
- 따라서, 공법에 따른 변동이 공법 외의 변동보다 크다면, 공법에 따른 인장강도에 차이가 있다고 볼 수 있다.

분산분석의 용어

- 반응변수(특성값) : 관측의 대상이 되는 값(예: 금속공예품의 인장강도)
- 요인(입력변수) : 특성값에 영향을 준다고 판단되는 요소(예: 공법)
- 처리 : 요인의 값 및 서로 다른 요인들의 조합(예: 각각의 서로 다른 공법들)
- 분산분석 : 자료에서 발생하는 변동성을 모형에 의한 변동(요인 및 처리에 의한 변동)과 오차에 의한 변동(그 외의 규명되지 않은 요인에 의한 변동)으로 분해하고 비교하여 요인의 유의성을 검증하는 분석 방법
- 요인이 1개 사용되는 분산분석을 일원배치 분산분석, 혹은 일원배치법(One-way ANOVA)이라 하고, 요인이 2개 사용되는 분산분석을 2원배치 분산분석, 혹은 이원배치법 (Two-way ANOVA)이라 한다.

분산분석의 절차

(1) 요인과 수준, 그리고 반응변수를 설정한다.

(2) 실험을 설계한다.(예 : 변인 통제, 실험의 반복수 설정, 실험 순서의 랜덤화)

(3) 실험을 수행한다.

(4) 자료를 분석하고 결론을 도출한다.

일원배치법

- 반응변수에 대해서 한 종류의 요인의 영향을 조사하고자 할 때 사용하는 방법이다.
- 보통, 3개 이상의 처리에 대한 효과를 비교한다. 각 수준에서의 반복 수는 꼭 같을 필요는 없다.
- 일반적으로, 실험은 랜덤하게 선택된 순서대로 진행된다. (완전랜덤화계획)
- 요인의 수준이 3개, 각각의 수준에 대해 반복수가 5인 실험을 생각해보자. 총 $5 \times 3 = 15$개의 실험단위에 대해 랜덤하게 순서를 매겨 먼저 나오는 순서대로 처리를 적용하고 실험을 진행하는 것이다.

일원배치법의 자료구조

	처리1	처리2	⋯	처리k	평균
	y_{11}	y_{21}	⋯	y_{k1}	
	y_{12}	y_{22}	⋯	y_{k2}	
	⋮	⋮	⋯	⋮	
	y_{1n_1}	y_{2n_2}	⋯	y_{kn_k}	
평균	$\bar{y}_{1\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$	⋯	$\bar{y}_{k\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad \bar{y}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

일원배치법의 자료구조

- $\bar{y}_{i\cdot}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$는 각 처리 별 관측값의 평균이고, $\bar{y}_{\cdot\cdot}$는 전체 관측값의 평균이다. 그리고 N은 전체 관측값의 갯수(= 실험의 총 횟수)이다.
- 반복수가 모두 같은 경우, $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n$, $N = kn$이 된다.

일원배치법 : 모형과 가설

- 일원배치법에서의 모형은 다음과 같다. $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$, $(i = 1, \ldots, k, i = 1, \ldots, n)$, $\epsilon_{ij} \sim$ i.i.d $N(0, \sigma^2)$.
- 위 모형을 다음과 같이 표현할 수 있다. $Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$
- 일원배치법에서의 귀무가설은 다음과 같다. $H_0 : \tau_i = 0$ for all i ($H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k = \mu$)

일원배치법 : 처리효과의 유의성 검정

- F 검정통계량의 관측값이 f_0이면, 유의확률과 기각역은 다음과 같이 주어진다.
  유의확률 : $P(F \geq f_0)$, $F \sim F(k-1, N-k)$
  유의수준 α에서의 기각역 : $f \geq F_\alpha(k-1, N-k)$
- 일원배치법에서의 분산분석표는 다음과 같이 나타난다.

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F값	유의확률
처리	$SStr$	$k-1$	$MStr$	$MStr/MSE$	$P(F > f_0)$
잔차	SSE	$N-k$	MSE		
계	SST	$N-1$			

일원배치법의 분산분석표

일원배치법 : 예

반복수가 모두 같은 경우

- 어떤 직물의 가공시 처리액의 농도가 직물의 인장강도에 영향을 미치는지의 여부를 조사하기 위해 처리액의 농도를 각각 $A_1 = 3.0\%$ $A_2 = 3.5\%$ $A_3 = 4.0\%$ $A_4 = 4.5\%$ 로 설정하고, 각 처리에 대해 반복수 5회의 처리을 하여 총 20회를 랜덤하게 처리한 후 인장강도를 측정했다.
- 이 자료에 대해 일원배치법의 모형을 적용하여 처리액의 농도에 따른 인장강도의 차이가 존재하는 지를 알아보고 적절한 가설을 세워 유의수준 5%에서 검정해 보자.

	A_1	A_2	A_3	A_4		
	47	51	50	22		
	58	62	38	23		
	51	31	47	28		
	61	46	27	42		
	46	49	23	25		
평균	52.6	47.8	37.0	28.0	총평균	41.35

네 가지 농도에 의한 인장강도

R Code

```
A1 <- c(47,58,51,61,46); A2 <- c(51,62,31,46,49)
A3 <- c(50,38,47,27,23); A4 <- c(22,23,28,42,25)
A <- c(A1,A2,A3,A4)
group <- as.factor(rep(1:4,each=5))
fabric <- data.frame(A,group)
A_table <- cbind(A1,A2,A3,A4)
apply(A_table,2,mean) ; mean(A)

  A1   A2   A3   A4
52.6 47.8 37.0 28.0
[1] 41.35

aov_fabric <- lm(A~group, data=fabric)
anova(aov_fabric)

Analysis of Variance Table

Response: A
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
group      3   1827     609    6.46 0.0045 **
Residuals 16   1508      94
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

일원배치법 : 예

반복수가 일정하지 않은 경우

- 세 종류의 공정에서 생산된 철선의 인장강도에 차이가 있는지를 알아보기 위해, 각각의 공정에서 인장강도를 측정해보았다. 일원배치법을 이용하여 공정에 따른 인장강도의 차이가 존재하는 지에 대해 유의수준 5%에서 검정해 보자.

	공정1	공정2	공정3		
	2	4	6		
	3	5	5		
	4	6	7		
	5	4	4		
		3	6		
			8		
평균	3.5	4.4	6.0	총평균	4.8

공정에 의한 인장강도

R Code

```
M1 <- c(2,3,4,5); M2 <- c(4,5,6,4,3); M3 <- c(6,5,7,4,6,8)
M <- c(M1,M2,M3)
group_M <- as.factor(rep(1:3,times=c(4,5,6)))
mean(M1); mean(M2); mean(M3); mean(M)

[1] 3.5
[1] 4.4
[1] 6
[1] 4.8

mechanism <- data.frame(M,group_M)
aov_mechanism <- lm(M~group_M, data=mechanism)
anova(aov_mechanism)

Analysis of Variance Table

Response: M
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
group_M    2   16.2    8.10    4.81  0.029 *
Residuals 12   20.2    1.68
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

정리

- 상관분석을 위해 cor.test()를 이용한다.
- 선형 회귀분석을 위해 ‘lm()’을 사용한다.
- 연관된 많은 함수들을 이용하여 찾아낸 모형을 평가할 수 있다: ‘confint()’, ‘coef()’, ‘summary()’, ‘anova()’ 등.
- 범주형 변수의 선형 회귀분석은 각각의 범주에 맞는 회귀모형을 찾는 것으로 생각할 수 있다.
- 일반적으로, 간단한 모형이 복잡한 모형보다 더 낫다고 간주되고, 모형을 단순화하기 위한 방법으로 ANOVA나 변수 선택을 행한다.
- lm()과 anova()를 이용해서 분산분석을 할 수 있다.

참고자료

- Julian J. Faraway, [Linear Models with R](http://www.amazon.com/Linear-Models-Chapman-Statistical-Science/dp/1439887330),Second Edition, Chapman Hall/CRC, 2014.
- ‘ggplot2‘ documentation <http://docs.ggplot2.org/current/>
- 일반통계학, 서울대학교 통계학과, 영지문화사.