회귀분석/분산분석- 추가내용

서울대학교 통계연구소

상관분석

4개의 데이터셋

- Anscombe's quartet
  - four datasets that have nearly identical simple descriptive statistics, yet appear very different when graphed. https://en.wikipedia.org/wiki/Anscombe%27s_quartet

```r
head(anscombe)
```

```
  x1 x2 x3 x4   y1   y2    y3   y4
1 10 10 10  8 8.04 9.14  7.46 6.58
2  8  8  8  8 6.95 8.14  6.77 5.76
3 13 13 13  8 7.58 8.74 12.74 7.71
4  9  9  9  8 8.81 8.77  7.11 8.84
5 11 11 11  8 8.33 9.26  7.81 8.47
6 14 14 14  8 9.96 8.10  8.84 7.04
```

1, 2, 3, 4 4개 데이터셋

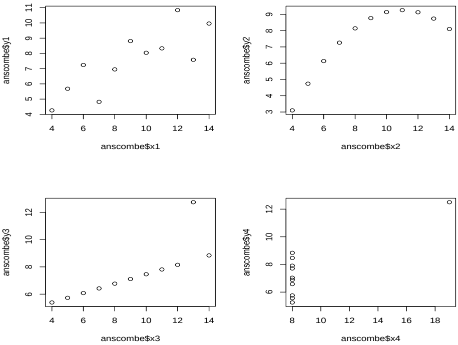
```r
summary(anscombe)

       x1             x2             x3       
 Min.   : 4.0   Min.   : 4.0   Min.   : 4.0  
 1st Qu.: 6.5   1st Qu.: 6.5   1st Qu.: 6.5  
 Median : 9.0   Median : 9.0   Median : 9.0  
 Mean   : 9.0   Mean   : 9.0   Mean   : 9.0  
 3rd Qu.:11.5   3rd Qu.:11.5   3rd Qu.:11.5  
 Max.   :14.0   Max.   :14.0   Max.   :14.0  
       x4           y1               y2       
 Min.   : 8   Min.   : 4.26   Min.   :3.10  
 1st Qu.: 8   1st Qu.: 6.32   1st Qu.:6.70  
 Median : 8   Median : 7.58   Median :8.14  
 Mean   : 9   Mean   : 7.50   Mean   :7.50  
 3rd Qu.: 8   3rd Qu.: 8.57   3rd Qu.:8.95  
 Max.   :19   Max.   :10.84   Max.   :9.26  
       y3              y4        
 Min.   : 5.39   Min.   : 5.25  
 1st Qu.: 6.25   1st Qu.: 6.17  
 Median : 7.11   Median : 7.04  
 Mean   : 7.50   Mean   : 7.50  
 3rd Qu.: 7.98   3rd Qu.: 8.19  
 Max.   :12.74   Max.   :12.50  
```

평균이 동일하다.

```r
cor(anscombe$x1,anscombe$y1)

[1] 0.8164

cor(anscombe$x2,anscombe$y2)

[1] 0.8162

cor(anscombe$x3,anscombe$y3)

[1] 0.8163

cor(anscombe$x4,anscombe$y4)

[1] 0.8165
```

데이터 1, 2, 3, 4의 각 상관계수가 동일하다.

```r
par(mfrow=c(2,2))
plot(anscombe$x1,anscombe$y1)
plot(anscombe$x2,anscombe$y2)
plot(anscombe$x3,anscombe$y3)
plot(anscombe$x4,anscombe$y4)
```



하지만 실제 데이터를 확인하면
가지각색으로 개판이다.

<- 영향이 큰 값

점 하나가 전체 피팅 데이터를
좌지우지한다.
즉 먼저 plot을 그려보자

분산분석-이원배치법

- 반응변수에 대해서 두 종류의 요인의 영향을 조사하고자 할 때 사용하는 방법을 이원배치법(Two-way ANOVA)라 한다.
- 이원배치법은, 두 인자의 각 수준의 조합에 대해 반복이 있는 경우와 반복이 없는 두 가지 경우로 크게 나눌 수 있다.
- 이원배치법에서 반복의 여부는, 모형에 교호작용(Interaction)을 추가할 수 있는지 여부로 이어진다.

반복이 없는 이원배치법

- 2개의 인자를 A, B로 표시하고, 각각의 인자의 수준을 다음과 같이 표시하자.
  인자 A의 수준 : $A_1, A_2, \cdots, A_p$
  인자 B의 수준 : $B_1, B_2, \cdots, B_q$
- 이원배치법에서는 인자 A의 한 수준과 인자 B의 한 수준이 처리가 된다. 따라서, 처리의 총 개수는 $p \times q$개이다.
- 이원배치법에서 완전랜덤화계획은, 총 pq개의 실험의 순서를 랜덤하게 선택하여 시행하는 것이다.
- 인자 A의 수준을 고정시켜놓고, B의 수준을 변화시켜가며 차례대로 실험을 하면, 확률화의 원칙에 벗어나므로 이원배치법에 의한 실험이 아니다.

반복이 없는 이원배치법의 자료구조

각 조합을 한 번 씩만 진행..

인자B / 인자A	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_q	평균
A_1	y_{11}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1q}	$\bar{y}_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_i	y_{i1}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{iq}	$\bar{y}_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_p	y_{p1}	$\cdots$	y_{pj}	$\cdots$	y_{pq}	$\bar{y}_{p\cdot}$
평균	$\bar{y}_{\cdot 1}$	...	$\bar{y}_{\cdot j}$	...	$\bar{y}_{\cdot q}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} y_{ij}, \quad \bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{ij}, \quad \bar{y}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} y_{ij}$$

반복이 없는 이원배치법의 자료구조

- $\bar{y}_{i\cdot}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$는 각 인자 A의 각 수준 별 관측값의 평균이고, $\bar{y}_{\cdot j}$ $(j = 1, 2, \cdots, q)$는 각 인자 B의 각 수준 별 관측값의 평균이다. 그리고 $\bar{y}_{\cdot\cdot}$는 전체 관측값의 평균이다.

가로평균 혹은 세로평균 내부의 차이가 크다 ->

반복이 없는 이원배치법의 모집단 모형

- 반복이 없는 이원배치법에서는 인자 A와 B의 효과가 관측값에 영향을 주게 된다.
- 처리효과 전체의 평균을 μ라 하고, 인자 A의 i번째 처리효과를 α_i, 인자 B의 j번째 처리효과를 β_j라 하면, 모형은 다음과 같이 나타난다.$(i = 1, 2, \cdots, p, \ j = 1, 2, \cdots, q)$

$$\begin{cases} Y_{ij} = \ \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \\ \epsilon_{ij} \sim_{iid} \boldsymbol{N}(0, \sigma^2) \\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0, \ \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 0 \end{cases}$$

반복이 없는 이원배치법의 제곱합 분해와 처리효과의 유의성 검정

- 이원배치법에서 관심이 있는 가설은, 인자의 각 수준에 따라 처리효과의 차이가 있는가 하는 것으로서, 그 인자의 유의성을 검정하는 것이다.
- 각 인자의 유의성을 검정하기 위한 가설은 다음과 같이 나타난다.

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0, \;\; H_1 : not\ H_0$$

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0, \;\; H_1 : not\ H_0$$

- 가설의 검정법을 유도하기 위해, 총제곱합을 인자 A의 효과에 의한 제곱합과 인자 B의 효과에 의한 제곱합, 그리고 잔차제곱합으로 분해할 수 있다.

반복이 없는 이원배치법의 제곱합 분해와 처리효과의 유의성 검정

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F값	유의확률
인자A	SSA	$p-1$	MSA	$f_1 = MSA/MSE$	$P(F_1 > f_1)$
인자B	SSB	$q-1$	MSB	$f_2 = MSB/MSE$	$P(F_2 > f_2)$
잔차	SSE	$(p-1)(q-1)$	MSE		
계	SST	$pq-1$			

반복이 없는 이원배치법의 분산분석표

반복이 없는 이원배치법 : 예

- 무연탄에서 코크스를 제조하는 데 첨가하는 역청탄(A)를 총 5 종류($A_1, \cdots, A_5$) 선택하고, 타르피치의 첨가량(B)를 총 4수준 (B_1 : 4%, B_2 : 6%, B_3 : 8%, B_4 : 10%) 선택하여 첨가한 후에 가열 성형하고, 코크스의 내압강도(kg/cm^2)를 측정한 결과가 다음과 같다. 각 요인의 효과가 유의한지에 대해 이원배치법을 활용하여 유의수준 5%에서 검정해 보자.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	평균
B_1	79	72	51	58	68	65.6
B_2	75	66	48	56	65	62
B_3	69	64	44	51	61	57.8
B_4	65	62	41	45	58	54.2
평균	72	66	46	52.5	63	총평균 59.9

코크스의 내압강도 자료

반복이 없는 이원배치법 : 예

R Code

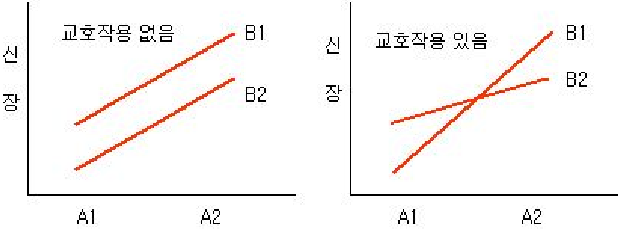
```
pres <- c(79,72,51,58,68,75,66,48,56,65,69,64,44,51,61,65,62,41,45,58)
coal <- factor(rep(1:5, 4))
tar <- factor(rep(1:4,each=5))
cokes <- data.frame(coal,tar,pres)
anova(lm(pres~coal+tar,data=cokes))

Analysis of Variance Table

Response: pres
          Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
coal       4   1765     441   264.7 1.4e-11 ***
tar        3    369     123    73.8 5.3e-08 ***
Residuals 12     20       2
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

반복이 있는 이원배치법

- 이원배치법에서 2개의 인자를 A($A_1, \cdots, A_P$), B($B_1, \cdots, B_q$)로 표시하도록 하자.
- 반복이 없는 이원배치법에서는, 총 pq개의 처리에 대해 각각 1회씩의 실험을 하게 된다. 이 경우, 각 처리에 대한 변동이 존재하지 않게 된다.
- 반복이 있는 이원배치법이란, 각 처리에 대해 각각 반복수 r의 실험을 하는 방법이다.이 경우, 각각의 처리에 대해서도 변동이 발생하며, 이를 통해 인자 수준의 조합에서 발생하는 효과를 분리하여 구할 수 있다.
- 인자수준의 조합에서 발생하는 효과를 교호작용(interaction)이라 하며, 인자 A의 효과가 인자 B의 수준에 따라 달라지는 모형에서 존재한다.

교호작용

- 서로 다른 보충제 A와 B를 각 인자의 수준에 따라 먹여 성장시킨 기니피그들의 평균 신장을 표시한 그래프를 그려본다고 하자. 교호작용 유무에 따라 그래프는 다음과 같이 나타날 것이다.



왼쪽 : 교호작용이 없는 경우, 오른쪽 : 교호작용이 있는 경우

반복이 있는 이원배치법의 모집단 모형

- 처리효과 전체의 평균을 μ라 하고, 인자 A의 i번째 처리효과를 α_i, 인자 B의 j번째 처리효과를 β_j, 그리고 인자 A의 i번째 수준과 인자 B의 j번째 수준의 교호작용을 γ_{ij} 라 하면, 모형은 다음과 같이 나타난다.($i = 1, 2, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, q, k = 1, 2, \cdots, r$)

$$
\begin{cases}
Y_{ijk} = & \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk} \\
\epsilon_{ijk} \sim_{iid} \boldsymbol{N}(0, \sigma^2) \\
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0,\ \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 0 \\
\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij} = 0,\ \sum_{i=1}^{q} \gamma_{ij} = 0
\end{cases}
$$

반복이 있는 이원배치법의 제곱합 분해와 처리효과의 유의성 검정

교호작용이 강한 경우 각 조합들을 하나의 그룹으로 생각해서 일원아노바를 실행하는 것이 좋을 수 있다.

- 반복이 있는 이원배치법에서 관심이 있는 가설은, 인자의 각 수준에 따른 처리효과가 유의한지와 함께, 인자의 조합으로 인해 발생하는 교호작용이 유의한지에 대한 것이다.
- 각 인자 및 교호작용의 유의성을 검정하기 위한 가설은 다음과 같이 나타난다.

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0, \;\; H_1 : not \; H_0$$

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0, \;\; H_1 : not \; H_0$$

$$H_0 : \gamma_{ij} = 0, (i = 1, 2, \cdots, p, \; j = 1, 2, \cdots, q) \; H_1 : not \; H_0$$

- 가설의 검정법을 유도하기 위해, 총제곱합을 인자 A의 효과에 의한 제곱합과 인자 B의 효과에 의한 제곱합,교호작용에 의한 제곱합, 그리고 잔차제곱합으로 분해할 수 있다.

반복이 있는 이원배치법의 제곱합 분해와 처리효과의 유의성 검정

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F값	유의확률
인자A	SSA	$p-1$	MSA	$f_1 = MSA/MSE$	$P(F_1 > f_1)$
인자B	SSB	$q-1$	MSB	$f_2 = MSB/MSE$	$P(F_2 > f_2)$
교호작용	$SSA \times B$	$(p-1)(q-1)$	$MSA \times B$	$f_3 = MSA \times B/MSE$	$P(F_3 > f_3)$
잔차	SSE	$pq(r-1)$	MSE		
계	SST	$pqr-1$			

반복이 있는 이원배치법의 분산분석표

반복이 있는 이원배치법 : 예

- 세 종류의 기계(A_1, A_2, A_3)와 세 사람의 기능공(B_1, B_2, B_3)이 제품 품질에 미치는 영향을 조사하고자 하여 2회 반복이 있는 이원배치법에 의해 생산성을 측정하였다. 이원배치법을 활용하여 인자에 의한 처리효과와 교호작용을 유의수준 5%에서 검정해보자.

	B_1	B_2	B_3	평균
A_1	9 14	14 16	19 22	15.67
A_2	13 16	18 26	14 18	17.5
A_3	11 12	11 17	15 16	13.67
평균	12.5	17	17.33	총평균 15.61

기계와 기능공에 따른 제품의 생산성 자료

반복이 있는 이원배치법 : 예

- 요인의 수준의 개수 $p = 3, q = 3$, 반복수 $r = 2$
- 각 효과의 유의성을 검증하기 위한 가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,\ H_1 : not\ H_0$$

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,\ H_1 : not\ H_0$$

$$H_0 : \gamma_{ij} = 0, (i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3),\ H_1 : not\ H_0$$

반복이 있는 이원배치법 : 예

R Code

```
machine <- factor(rep(1:3,each=6))
technician <- factor(rep(1:3,each=2,3))
quality <- c(9,14,14,16,19,22,13,16,18,26,14,18,11,12,11,17,15,16)
product <- data.frame(machine,technician,quality)
anova(lm(quality~machine*technician,data=product))

Analysis of Variance Table

Response: quality
                   Df  Sum Sq Mean Sq F value
machine             2    44.1    22.1    2.41
technician          2    87.4    43.7    4.77
machine:technician  4    74.2    18.6    2.02
Residuals           9    82.5     9.2
                   Pr(>F)
machine             0.146
technician          0.039 *
machine:technician  0.174
Residuals
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

차이는 오직 기능공에서만,
교호작용은 없다.