ØVING 4

KJ1041: KJEMISK BINDING, SPEKTROSKOPI OG KINETIKK

1) Vinkelmomentet $\mathbf{L}$ er i klassisk mekanikk definert som $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, der $\mathbf{r}$ er posisjonen til partikkelen og $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ er bevegelsesmengden. Hvis vi lar $\mathbf{r} = (x, y, z)$ og $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, så kan vi skrive

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,p_z - z\,p_y \\ z\,p_x - x\,p_z \\ x\,p_y - y\,p_x \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   a) Bruk substitusjonene $x \to \hat{x}$, $p_x \to \hat{p}_x$ (og tilsvarende for y og z) for å finne operatorene $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ og $\hat{L}_z$ som representerer x-, y-, og z-komponenten til vinkelmomentet $\mathbf{L}$.

   b) Bekreft at

$$[\hat{x}, \hat{y}] = 0 \tag{2}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0 \tag{3}$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0 \tag{4}$$

   ved å se på effekten av kommutatorene på på en vilkårlig funksjon $\varphi(x, y)$.

   c) Vi har sett tidligere at

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar, \quad [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar. \tag{5}$$

   Bruk dette for å vise at

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\,\hat{L}_z. \tag{6}$$

   Hint: Man kan ekspandere kommutatorer på likt vis som vi gjør ved multiplikasjon av tall, f.eks. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$:

$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C} + \hat{D}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{D}] + [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{D}]. \tag{7}$$

   d) Anta at et system er i en tilstand med en bestemt verdi av L_z lik $\hbar$. Hva sier usikkerhetsprinsippet da om usikkerheten i observablene L_x og L_y?

2) Schrödinger-likningen for en partikkel på en ring av radius r_0 er

$$\hat{H}\,\psi_{m_l}(\vartheta) = E_{m_l}\psi_{m_l}(\vartheta), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}, \tag{8}$$

   der ϑ er vinkelen med x-aksen (der vi antar at partikkelen lever i xy-planet)

   a) Bekreft at $\psi_{m_l}(\vartheta) = e^{im_l\vartheta}$ er en løsning av likning (8) for et vilkårlig reellt tall m_l.

   b) Hvorfor kan vi kreve at $\psi_{m_l}(0) = \psi_{m_l}(2\pi)$? Vis at dette kravet fører til kvantiseringen $m_l = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

   c) Normaliser $\psi_{m_l}(\vartheta)$.

d) I polarkoordinater kan vi skrive $\hat{L}_z = -i\hbar\,\partial/\partial\vartheta$. Bekreft at $\psi_{m_l}(\vartheta)$ er en egenfunksjon av $\hat{L}_z$ med egenverdi $m_l\hbar$. Gitt den klassiske definisjonen $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$, hvordan kan man forstå løsningene $\psi_{m_l}(\vartheta)$ for kvantetallene m_l og $-m_l$?

e) Gi en forklaring på hvorfor kommutasjonsrelasjonen $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$ medfører at energien og z-komponenten av vinkelmomentet er kompatible observabler.