3장 랜덤 변수와 변환

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(3.5.1 이산 랜덤 변수)

$(Remark)$ 확률 밀도 함수가 $f_X(x)$인 연속 랜덤 변수 X의 누적 분포 함수 (CDF) $F_X(x) = Pr[X \le x]$는 구간 $(-\infty, x]$에서 PDF의 적분

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, -\infty < x < \infty$로 정의한다.

마찬가지로 이산 랜덤 변수의 CDF도 다음과 같이 정의한다.

(정의) 확률 질량 함수가 $f_K[k]$인 이산 랜덤 변수 K의 누적 분포 함수 (CDF) $F_K(k) = Pr[K \le k]$는 구간 $(-\infty, k]$에서 PMF의 합

$F_K(k) = \sum_{t \le k} f_K[t], -\infty < k < \infty$로 정의한다.

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(예제 1) **베르누이($\boldsymbol{Bernoulli}$) 랜덤 변수** $\boldsymbol{K}$**가 두 가지 이산 값,**

0 또는 1을 갖는다. $\boldsymbol{K}$**의** $\boldsymbol{PMF}$**는** $\boldsymbol{f_K[k] = \begin{cases} p, k = 1 \\ 1-p, k = 0 \\ 0, elsewhere \end{cases}}$ **로 정의되고**

모 수 $\boldsymbol{p}$**는 1이 발생할 확률이다.** $\boldsymbol{K}$**의** $\boldsymbol{CDF}$**를 구하라.**

(풀이는 다음 페이지)

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(풀이)

K의 PMF는 $f_K[k] = \begin{cases} p, k = 1 \\ 1 - p, k = 0 \\ 0, elsewhere \end{cases}$ 이므로

(1) $k < 0$이면 $F_K(k) = Pr[K \le k] = \sum_{t \le k} f_K[t] = 0$이다.

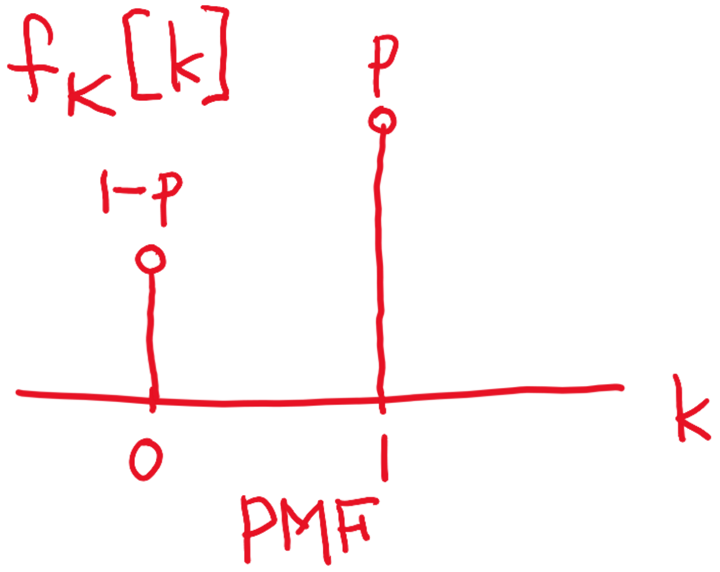
(2) $0 \le k < 1$이면 $F_K(k) = Pr[K \le k] = \sum_{t \le k} f_K[t] = 1 - p$이다.

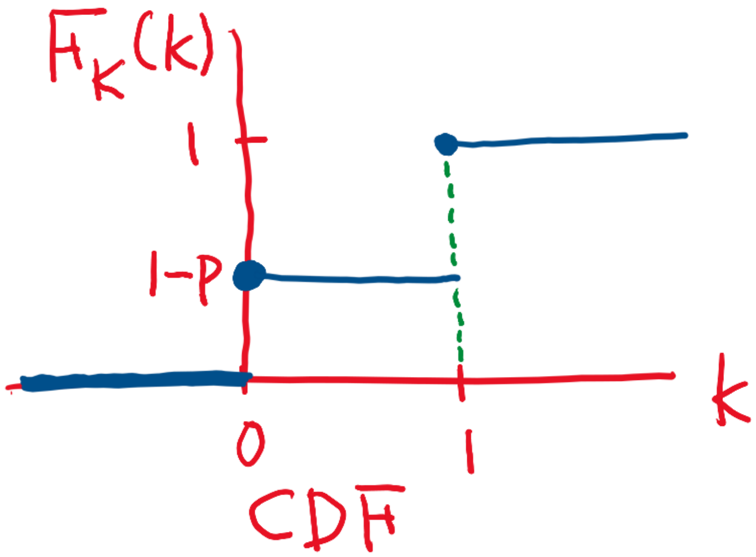
(3) $k \ge 1$이면 $F_K(k) = Pr[K \le k] = \sum_{t \le k} f_K[t] = 1$이다.

(정답과 그래프는 다음 페이지)

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

그러므로 K의 CDF는 $F_K(k) = \begin{cases} 0, k < 0 \\ 1 - p, 0 \le k < 1 \\ 1, k \ge 1 \end{cases}$이다.





$(Remark)$ CDF는 불연속이 될 수 있는 셀 수 있는 점들만 제외하고 모든 점에서 연속이고 미분가능이다.

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

$(\boldsymbol{Remark})$**이제 단위 임펄스 $\boldsymbol{\delta(x)}$를 이용하여 이산 랜덤 변수 $\boldsymbol{K}$의 $\boldsymbol{PDF}$ $\boldsymbol{f_K(k)}$도 $\boldsymbol{CDF}$ $\boldsymbol{F_K(k)}$의 도함수로 정의하자.**

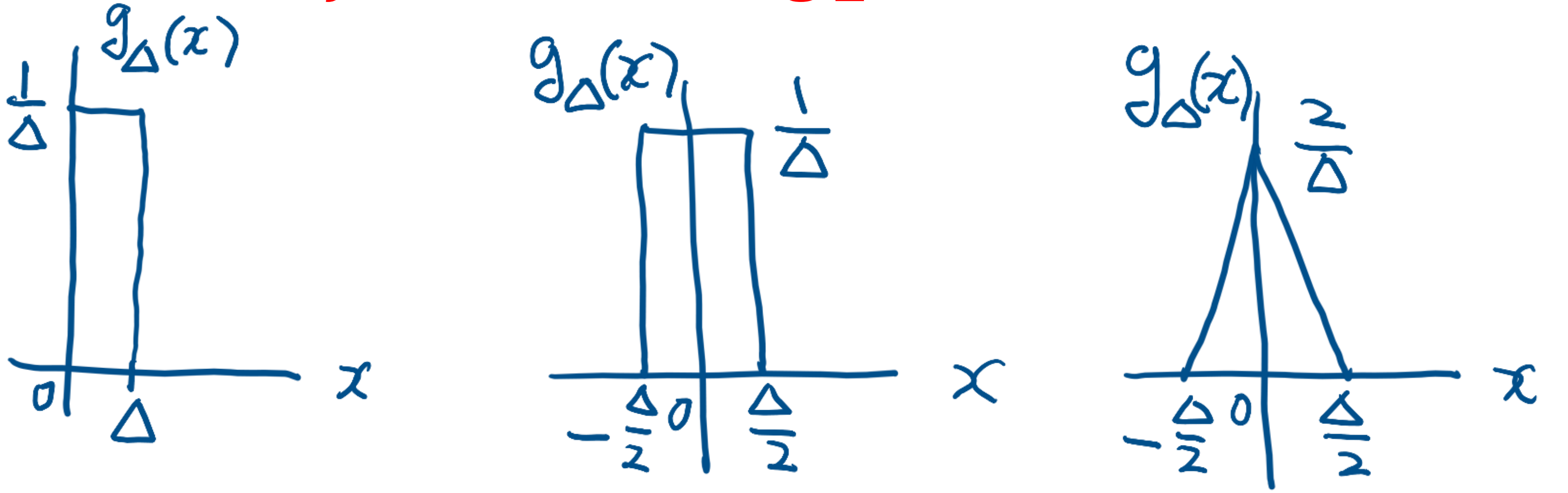
즉, $\boldsymbol{f_K(k) = \frac{dF_K(k)}{dk}}$**이다.**

다음 페이지에서 단위 임펄스 $\boldsymbol{\delta(x)}$를 공부하자.

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

$(\boldsymbol{Remark})$공학과 물리학에서 **아주 짧은 시간** 동안 전달되는 **유한 에너지**를 고려해야 하는 상황들이 있다. 예를 들어 **전자 카메라 플래시**는 플래시 전구에 의해 생성된 빛은 **굉장히 밝지만** 순간적인 **짧은 시간 동안**만 존재하고 이 때 카메라의 초점 평면에 도달한 **빛의 세기**는 **노출 시간 동안 합쳐진다.** 이런 상황에서 **극도로 좁지만** 원점에서 값이 **충분히 커서 적분 값이 유한 양수 값, 말하자면 $\mathbf{1}$**을 갖는 **펄스 류의 함수**

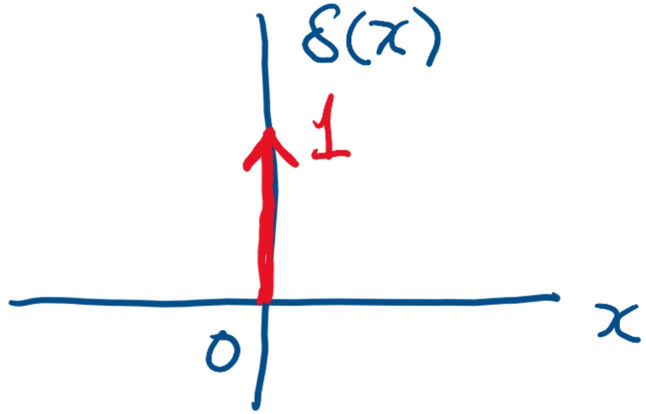
$\boldsymbol{(pulse-like\ function)}$ 를 $\boldsymbol{g_\Delta(x)}$라고 하자.



3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

$(\boldsymbol{Remark})$ 위의 그림의 모든 경우에 있어 **펄스 류의 함수**들은 모두 **면적 1**을 갖는다. 그러므로 $\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g_\Delta(x)dx = 1$이다.

이 때 $\delta(x)$를 $\delta(x) = \lim_{\Delta\to 0} g_\Delta(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ \infty, x = 0 \end{cases}$이고 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$를 만족하는 함수로 정의하자. $\delta(x)$를 단위 임펄스 $(unit\ impulse)$라고 한다.
단위 임펄스의 그래프는 원점에서 위를 가리키는 **높이는 ∞이고 넓이가 1인 굵은 화살표**로 표현한다.



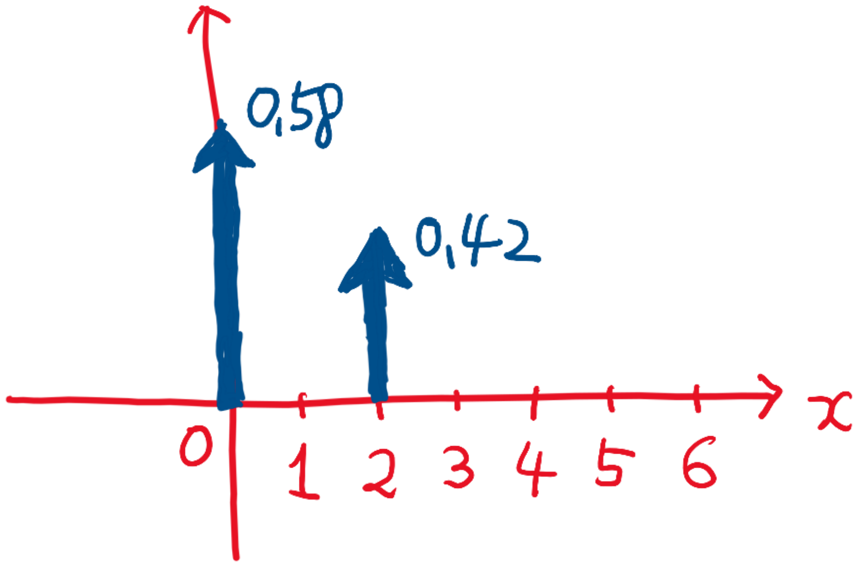
3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

$(\boldsymbol{Remark})$ **면적 $\boldsymbol{A}$을 갖는 임펄스는 간단히 $\boldsymbol{A\delta(x)}$로 표현한다.**

임펄스는 $\boldsymbol{x}$ 축으로 이동하여 생길 수도 있다.

즉, $\boldsymbol{\delta(x-a)}$는 $\boldsymbol{\delta(x)}$를 $\boldsymbol{x}$ 축으로 $\boldsymbol{a}$ 만큼 이동하여 그린다.

예를 들어 $\boldsymbol{0.58\delta(x)+0.42\delta(x-2)}$의 그래프는 다음과 같다.

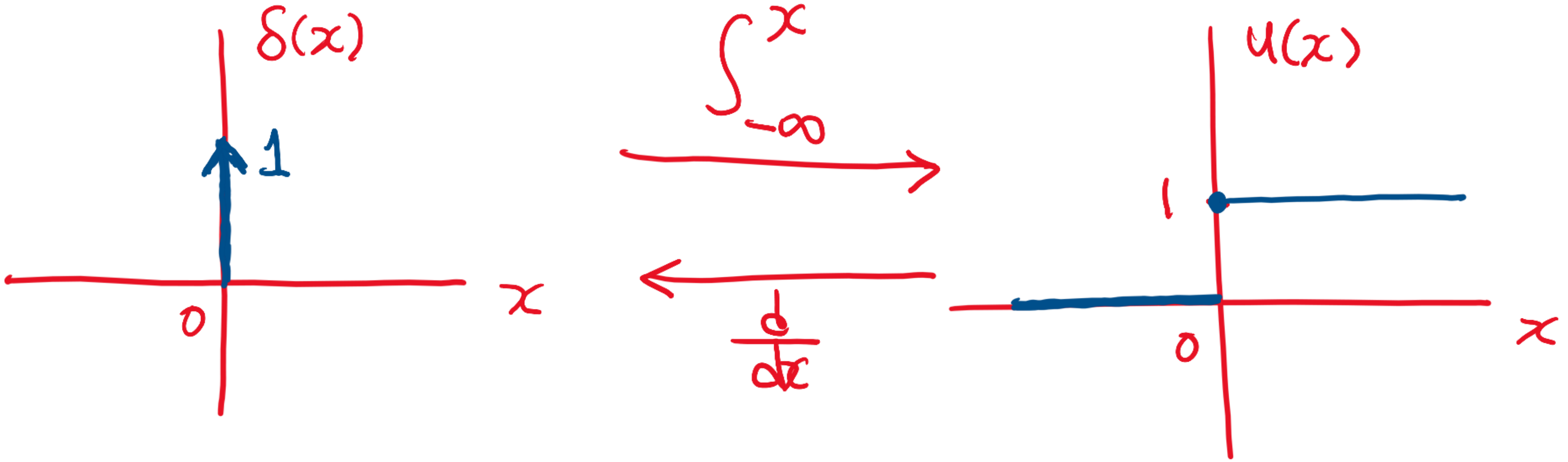


3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(Remark) 단위 임펄스 $\delta(x)$는 $u(x)$**로 표기되는 단위 계단 함수**

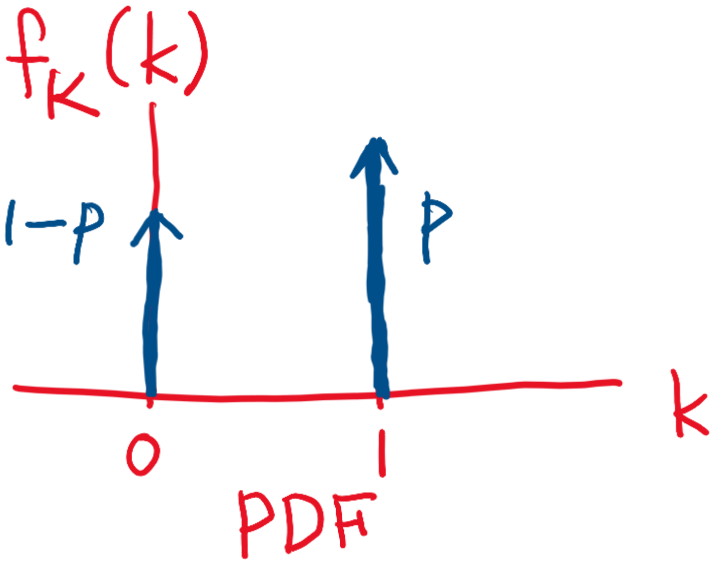
$u(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$**의 형식적인 도함수로 간주** 될 수 있다. $\left(\frac{du(x)}{dx} = \delta(x)\right)$

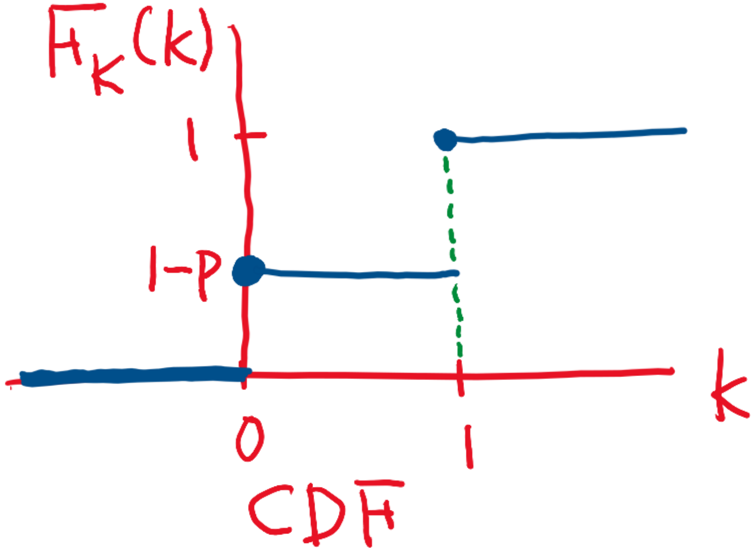
즉, $u(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi) d\xi$**로 정의하자.** 즉, **다음 그림과 같은 관계**이다.



3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

$(\boldsymbol{Remark})$**임펄스 $\boldsymbol{\delta(x)}$를 사용하면 모든 랜덤 변수에 대한 $\boldsymbol{PDF}$는 연속이든 불연속이든 $\boldsymbol{CDF}$의 도함수로 정의될 수 있다. 이를 이용하여 베르누이$\boldsymbol{(Bernoulli)}$ 랜덤 변수의 $\boldsymbol{CDF}$에 대한 $\boldsymbol{PDF}$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.**





3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(*Remark*) ***CDF*의 식을 구하면** $F_K(k) = \sum_{i=0}^{1} f_K[i]u(k-i)$이다.

그러므로 K의 PDF는

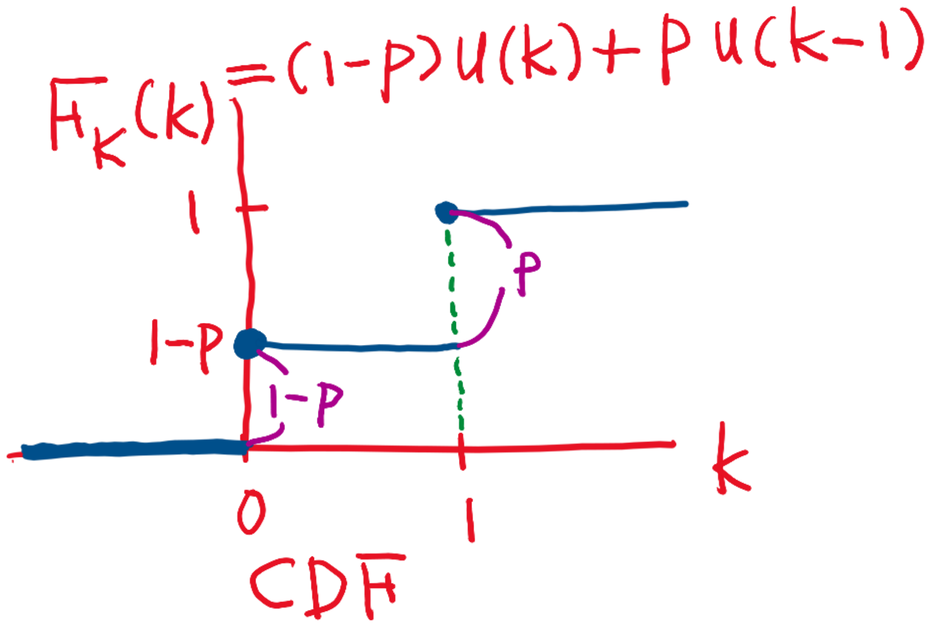
$$f_K(k) = \frac{d}{dk}F_K(k) = \frac{d}{dk}\sum_{i=0}^{1} f_K[i]u(k-i) = \sum_{i=0}^{1} f_K[i]\delta(k-i)$$ **이다.**

여기서 $k-i=\zeta$로 치환하면

$$\frac{d}{dk}u(k-i) = \frac{d}{d\zeta}u(\zeta)\frac{d}{dk}\zeta$$

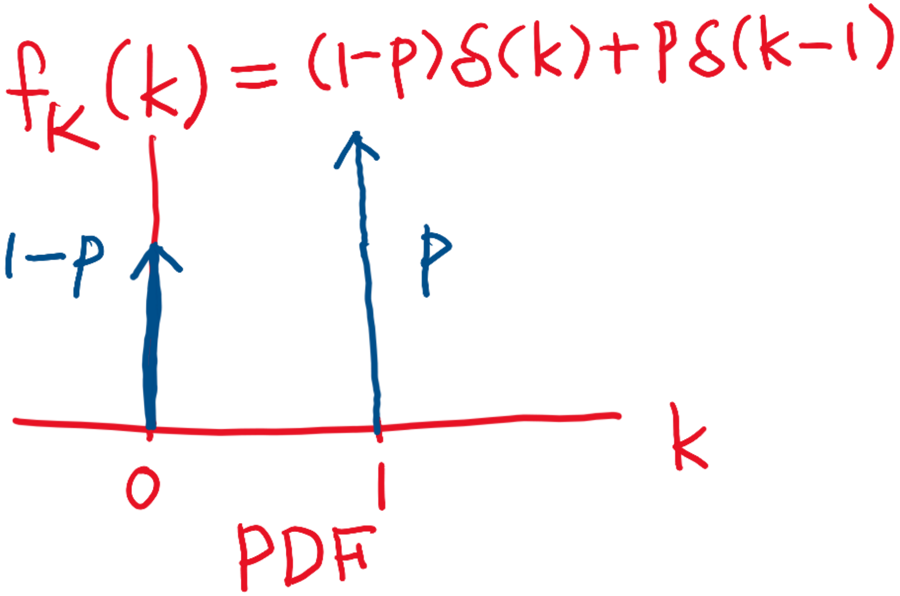
$$= \frac{d}{d\zeta}u(\zeta)\frac{d}{dk}(k-i) = \delta(\zeta)\times 1$$

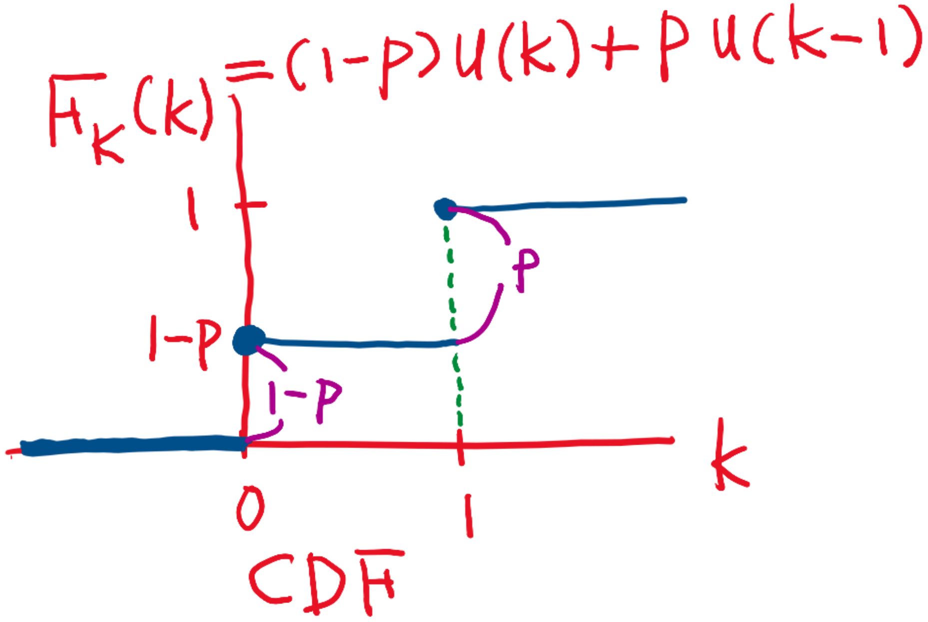
$$= \delta(\zeta) = \delta(k-i)$$ **이다.**



3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

($\boldsymbol{Remark}$) **이제 PDF를 PMF와 비교하면 이산적인 값의 확률이 그와 동일한 면적을 가지는 임펄스로 대체되었다. 이 면적은 대응되는 CDF의 불연속 점의 높이와 같다. PMF와 임펄스 함수를 이용하여 PDF를 표현하는 공식은 $f_K(k) = \sum_i f_K[i]\delta(k-i)$이다. 여기서 $k = i$에서 발생되는 임펄스의 면적은 $f_K[i]$ 값이 주어진다.**

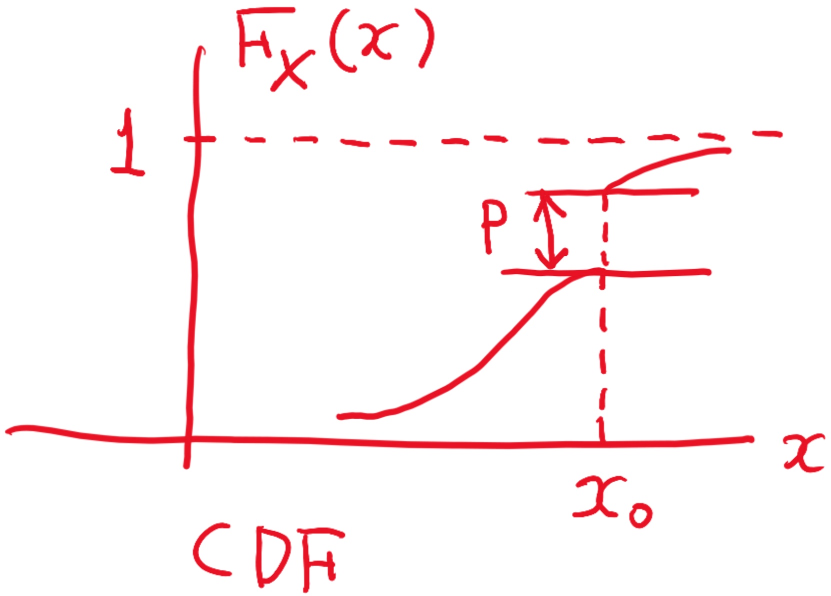


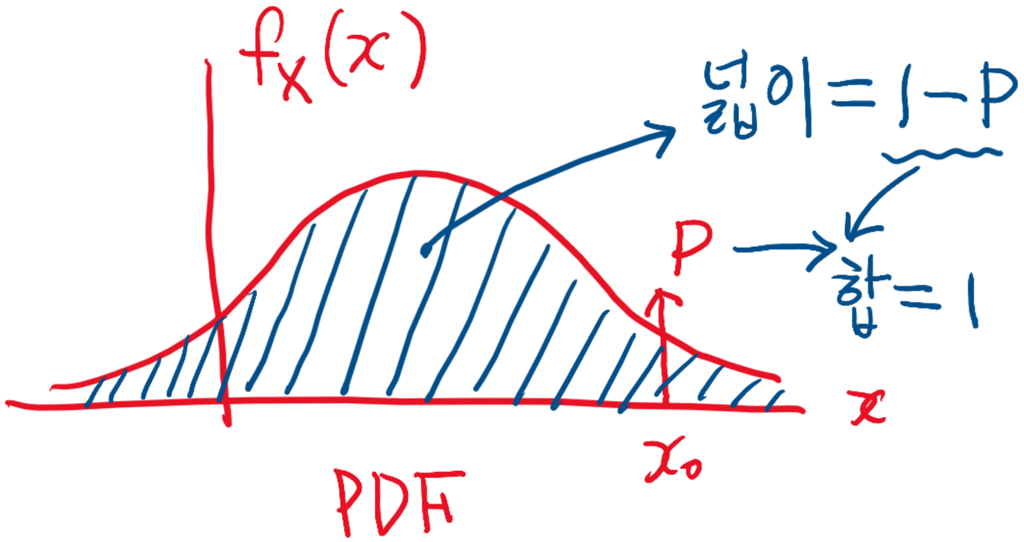


3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(3.5.2 혼합 랜덤 변수) 연속 랜덤 변수와 이산 랜덤 변수의 두 가지 형태 특성을 모두 가지고 있는 랜덤 변수를 혼합 랜덤 변수라고 부른다.

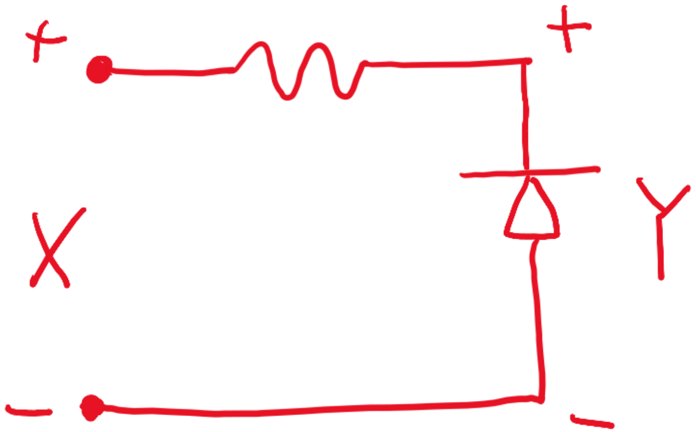
즉, 대부분의 x의 값에서 $Pr[X = x] = 0$이다. 그러나 어떤 점 x_0에 대해 $Pr[X = x_0] = P > 0$이다. 단, 임펄스를 포함하여 확률 밀도 함수 전체 면적은 1이다.

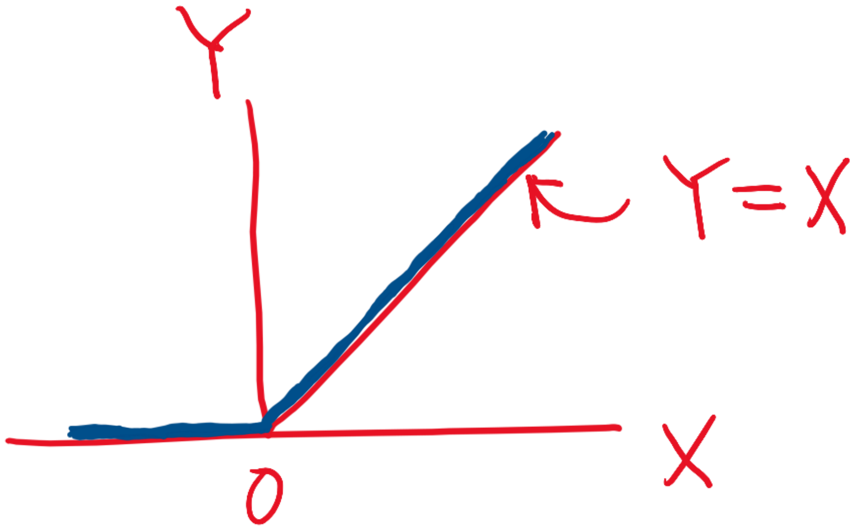




3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(예제 2) 아래와 같은 **단순 정류 회로($simple\ rectifier\ circuit$)**에 대한 **입력 전압 X는 평균 $\mu = 0$이고 분산 $\sigma^2 = 1$인 표준 정규 랜덤 변수**이다. **이 회로는 전 방향 저항이 0이고 역 방향 저항이 무한대(∞)인 이상적인 다이오드를 포함하고 있다. 출력 전압 Y는 입력 전압 $X \leq 0$에 대해 0이고 입력 전압 $X > 0$에 대해 X와 같다. 출력 전압 Y의 PDF를 그려라.**





3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

(풀이) 이 회로의 동작은 이상 다이오드가 입력 X를 반파 정류하여 $Y = max(0, X)$로 만드는 것이다. 입력 전압 X는 평균 $\mu = 0$이고 분산 $\sigma^2 = 1$인 표준 정규 랜덤 변수이다. X의 PDF를 $f_X(x)$라고 하면 음의 값이 입력 될 확률 $Pr[X \le 0]$은 $\int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx = 0.5$이다. 그러므로 음의 입력 확률에 대응되는 사건인 출력 0의 확률 $Pr[Y = 0]$은 0.5이다. 그러므로 Y의 PDF는 $y = 0$에서 면적이 0.5인 임펄스를 갖는다. 양의 입력 X에 대해서는 $Y = X$이므로 Y의 PDF는 X의 PDF와 같다. 그러므로 Y의 PDF는 다음과 같다.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, y > 0 \end{cases} + 0.5\delta(y)$$

이다. (그래프는 다음 페이지)

3.5 이산 랜덤 변수와 혼합 랜덤 변수의 CDF와 PDF

$$Y\text{의 } PDF\ f_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, y > 0 \end{cases} + 0.5\delta(y)$$ **의 그래프는 다음과 같다.**