3장 랜덤 변수와 변환

3.3 연속 랜덤 변수

모든 랜덤 변수가 이산 집합의 값을 갖는 것은 아니다. 예를 들어, **뇌우 발생 시 전력선을 모니터링하는 실험**을 생각 해 보자. **전력선의 전력 급등**으로 부터 **측정** 된 **피크 전압**은 가능한 구간에서 **연속된 값**의 **랜덤 변수**로 나타낼 수 있다. 이 때 **피크 전압이 2000 볼트 보다 낮은 사건은 상당한 발생 가능성**이 있다. 하지만 그 전압이 **정확히 2000 볼트와 일치할 가능성은 거의 없다.** **연속 랜덤 변수**가 **정확히 어느 하나의 값을 가지게 될 확률은 0이라고 생각한다.** 그러므로 확률 분포는 이산 확률 분포에서처럼 표로 나타낼 수는 없다. 따라서 **연속 확률 분포에서는 랜덤 변수의 어느 한 점 보다는 어떤 구간에 더 관심**을 갖는다. X**가 연속 랜덤 변수**이면 $Pr[a < X \le b] = Pr[a < X < b] + Pr[X = b] = Pr[a < X < b]$

3.3 연속 랜덤 변수

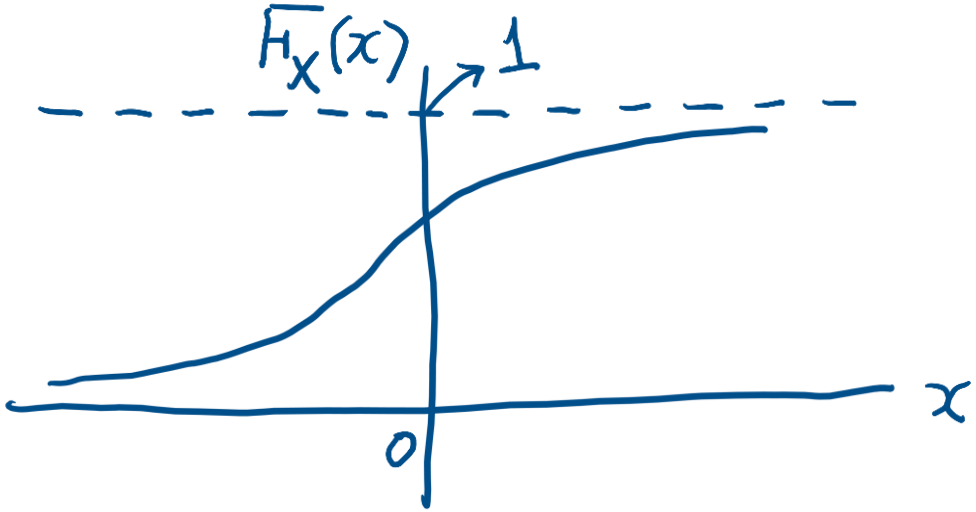
(정의) X가 연속 랜덤 변수이면 함수 $F_X(x) = Pr[X \le x]$를 X의 누적 분포 함수($CDF, cumulative\ distribution\ function$)라고 부른다.

$F_X(x)$는 다음 조건을 만족한다.

1. $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$이다.

2. $\Delta x > 0$이면 $Pr[X \le x] \le Pr[X \le x + \Delta x]$이다.(증가 함수)

3. $F_X(\infty) = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$이다.



3.3 연속 랜덤 변수

$(Remark) a < b$일 때 $Pr[X \leq b] = Pr[X \leq a] + Pr[a < X \leq b]$이므로

$Pr[a < X \leq b] = Pr[X \leq b] - Pr[X \leq a] = F_X(b) - F_X(a)$이다.

이 때 $F_X(x)$**가 미분 가능이라고 가정**하고

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$라고 하자. 그러면

$Pr[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = [F_X(x)]_a^b = \int_a^b f_X(x)dx$이다.

(정의)

함수 $f_X(x)$를 **X의 확률 밀도 함수**
$(PDF, probability\ density\ function)$ 혹은 확률 분포
$(probability\ distribution)$라고 한다.

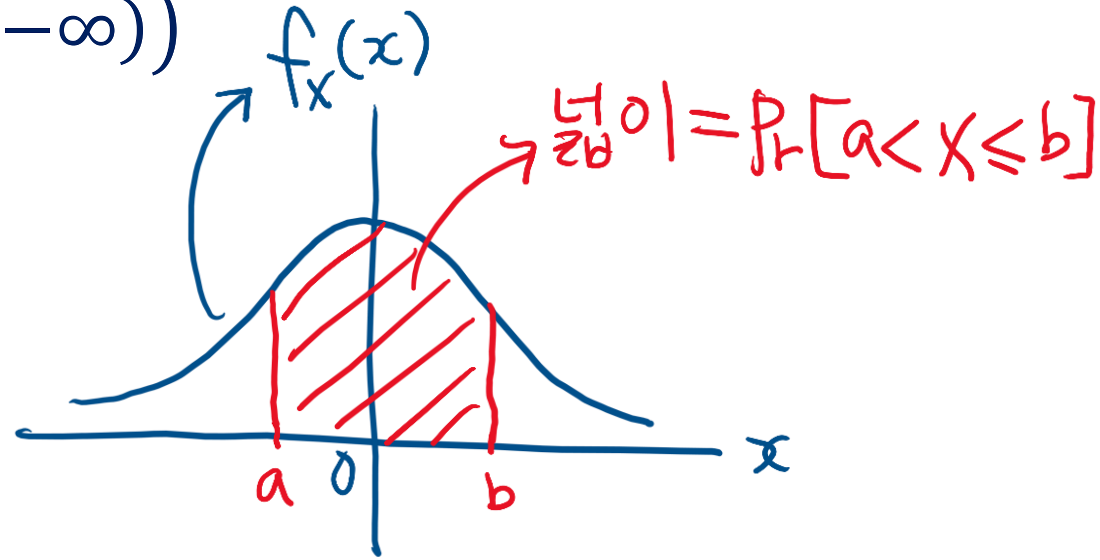
3.3 연속 랜덤 변수

(3.3.2 확률 밀도 함수(PDF)) 다음 조건이 만족되면 함수 $f_X(x)$를 실수의 집합 R에서 정의된 **연속 랜덤 변수 X의 확률 밀도 함수**라고 부른다.

1. 모든 $x \in R$에 대하여 $f_X(x) \geq 0$ $\left(\because f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}\right)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ $\left(\because F_X(\infty) - F_X(-\infty)\right)$

3. $Pr[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx$



3.3 연속 랜덤 변수

$(Remark)$

1. 확률 밀도 함수 $f_X(x)$는 **확률이 아님**에 주의하라.$(f_X(x) \neq Pr[X = x])$

$Pr[a < X \leq a + \Delta x] = \int_{a}^{a+\Delta x} f_X(x)dx \approx f_X(a) \times \Delta x$이다.

$f_X(x)$ 자체는 확률이 아니고 $f_X(x)$**에** Δx**가 곱해져야**

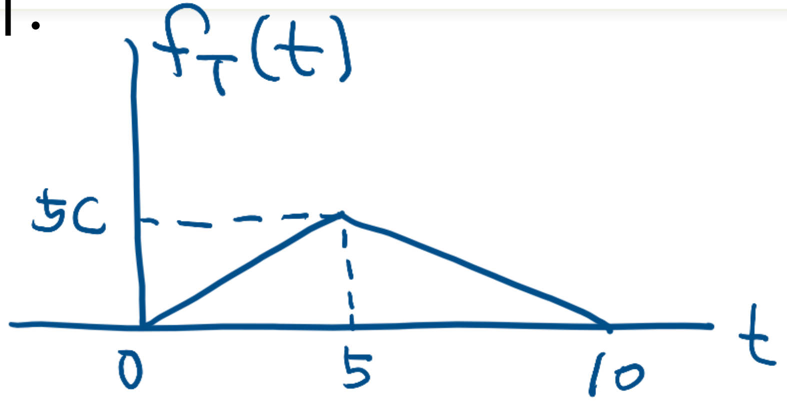
구간의 확률이 된다.

2. $F_X(x) = Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, -\infty < x < \infty$이다.

3.3 연속 랜덤 변수

(예제 1) **두 연속 사건이 완료되는 시간 T(단위: 초)**가 **다음과 같은 PDF를 갖는 연속 랜덤 변수**라고 하자.

$$f_T(t) = \begin{cases} Ct, 0 < t \le 5 \\ C(10-t), 5 < t \le 10 \\ 0, elsewhere \end{cases}$$



(문제 1) $f_T(t)$가 PDF가 되기 위한 상수 C는 얼마인가?

(문제 2) 두 사건이 3 초 이내에 끝날 확률은?

(문제 3) 두 사건이 6 초 이내에 끝날 확률은?

3.3 연속 랜덤 변수

(풀이)

(문제 1) $f_T(t) = \begin{cases} Ct, 0 < t \leq 5 \\ C(10-t), 5 < t \leq 10 \\ 0, elsewhere \end{cases}$가 PDF가 되려면

$\mathbf{1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\,dt = \int_0^{10} f_T(t)dt}$ =**삼각형의 넓이**= $\mathbf{25}C$이므로

$\boldsymbol{C = \frac{1}{25}}$이다.

여기서 $\boldsymbol{\int_0^{10} f_T(t)dt = \int_0^5 Ctdt + \int_5^{10} C(10-t)dt}$로 계산한다.

3.3 연속 랜덤 변수

(문제 2) 두 사건이 3 초 이내에 끝날 확률은?

$$Pr[T \leq 3] = \int_{-\infty}^{3} f_T(t)\, dt = \int_0^3 f_T(t) dt = \int_0^3 Ct dt = \int_0^3 \frac{1}{25} t dt$$

$$= \left[\frac{1}{50} t^2\right]_0^3 = \frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 0.18$$ 이다.

3.3 연속 랜덤 변수

(문제 3) 두 사건이 6 초 이내에 끝날 확률은?

$$Pr[T \le 6] = \int_{-\infty}^{6} f_T(t)\,dt = \int_0^6 f_T(t)dt = \int_0^5 f_T(t)dt + \int_5^6 f_T(t)dt$$

$$= \int_0^5 Ctdt + \int_5^6 C(10-t)dt = \int_0^5 \frac{1}{25}tdt + \int_5^6 \frac{1}{25}(10-t)dt$$

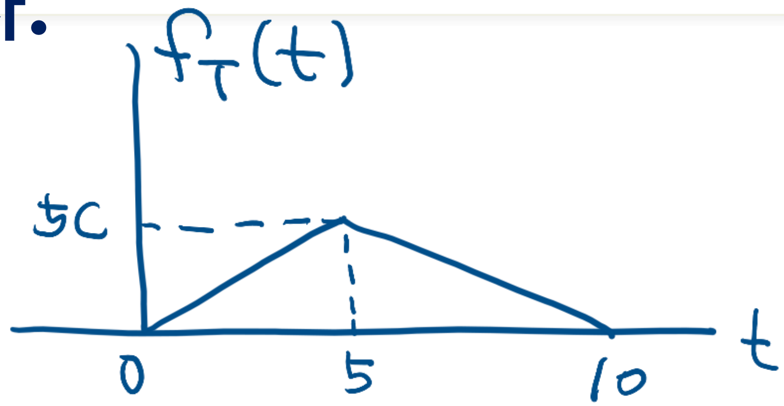
$$= \left[\frac{1}{50}t^2\right]_0^5 + \left[\frac{10}{25}t - \frac{1}{50}t^2\right]_5^6 = \frac{25}{50} + \frac{10}{25} - \frac{11}{50} = \frac{25+20-11}{50}$$

$= \dfrac{34}{50} = 0.68$이다.

3.3 연속 랜덤 변수

(예제 2) **두 연속 사건이 완료되는 시간 T(단위: 초)**가 **다음과 같은 PDF를 갖는 연속 랜덤 변수라고 하자.**

$$f_T(t) = \begin{cases} Ct, 0 < t \leq 5 \\ C(10 - t), 5 < t \leq 10 \\ 0, elsewhere \end{cases}$$



(문제 1) 이 사건의 **종료 시간**으로 **가장 가능성 높은 값**은 얼마인가?

(문제 2) 이 사건이 **종료 시간**으로 **가장 가능성 높은 시간에서 $10msec$ (밀리 초) 이내**에 종료될 적절한 확률은 **대략 얼마인가?**

3.3 연속 랜덤 변수

(풀이)

(문제 1) 이 사건의 종료 시간으로 가장 가능성 높은 값은 얼마인가?

두 연속 사건이 완료되는 시간 T는 연속 랜덤 변수이므로 특정 시간 t에 사건이 종료될 확률 $\boldsymbol{Pr[T = t] = 0}$이다. 그러므로 **사건이 구간 $(t, t + \Delta t)$에 종료될 확률**을 생각하자.

$\boldsymbol{Pr[t \le T \le t + \Delta t] = \int_t^{t+\Delta t} f_T(t)\,dt \approx f_T(t) \times \Delta t}$이므로

$f_T(t)$가 최대일 때 이 값 $\boldsymbol{f_T(t) \times \Delta t}$**가 최대**이다. 그러므로 $\boldsymbol{t = 5}$이다.

3.3 연속 랜덤 변수

(문제 2) 이 사건이 **종료 시간**으로 **가장 가능성 높은 시간에서 $10msec$ 이내에 종료**될 적절한 확률은 **대략 얼마인가?**

$1msec = \frac{1}{1000}sec$이므로 **가장 가능성 높은 시간 $t = 5$에서**

$10msec = \frac{1}{100}sec$ **이내에 종료될 확률**은 시간 구간이

$[5 - 0.01, 5 + 0.01] = [4.99, 5.01]$이므로

$$Pr[4.99 \le T \le 5.01] = 2 \times Pr[4.99 \le T \le 5] = 2 \times \int_{4.99}^{5} f_T(t)\,dt$$

$\approx 2 \times f_T(5) \times 0.01 = 2 \times \frac{5}{25} \times 0.01 = 0.004$**이다.(근삿값)** 여기서

$f_T(5) = C \times 5 = \frac{1}{25} \times 5$이다. **(참값)** $2 \times \int_{4.99}^{5} f_T(t)\,dt = 0.003996$**이다.**