Příklad 1.2.15 Nechť je dán afinní prostor $\mathcal{A}_3$ a v něm afinní báze $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ takto:

$$\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle,$$

přičemž platí:

$$P = [1, 0, -1]_{\mathcal{C}}, \ \mathbf{e}_1 = (2, 0, 1)_{\mathcal{C}_0}, \ \mathbf{e}_2 = (1, 1, 0)_{\mathcal{C}_0}, \ \mathbf{e}_1 = (0, -1, 1)_{\mathcal{C}_0}.$$

Napište transformační rovnice pro přechod od soustavy souřadné dané bází $\mathcal{B}$ k soustavě dané bází $\mathcal{C}$.

Řešení:

K nalezení rovnic pro přechod od $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ k $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ je třeba znát souřadnice prvků báze $\mathcal{C}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ (viz věta 1.2.11).

Jednou z možností je tedy postupem známým z lineární algebry nalézt prvky a_{ij} s vlastností

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + a_{i3}\mathbf{e}_3, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Známým postupem bychom pak zjistili (proveďte!), že:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, -1)_{\mathcal{B}_0}, \ \mathbf{a}_2 = (-1, 2, 1)_{\mathcal{B}_0}, \ \mathbf{a}_1 = (-1, 2, 2)_{\mathcal{B}_0}.$$

Transformační rovnice (1.15) tedy znějí ($[x_1, x_2, x_3]$ jsou souřadnice vůči $\mathcal{B}$, $[y_1, y_2, y_3]$ vůči $\mathcal{C}$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \ \ y_1 - y_2 - y_3 + b_1 \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 + b_2 \\ x_3 &= -y_1 + y_2 + 2y_3 + b_3 \end{aligned}$$

Je tedy již jen třeba nalézt konstanty b_1, b_2, b_3, což lze provést např. tak, že využijeme znalosti souřadnic některého bodu v obou soustavách – tímto je bod P, pro nějž současně platí (proč?):

$$P = [1, 0, -1]_{\mathcal{C}} = [0, 0, 0]_{\mathcal{B}}.$$

Dosazením do rovnic zjistíme, že $b_1 = -2, b_2 = 3$ a $b_3 = 3$.

Lze také postupovat jinak – zřejmě můžeme ihned napsat transformační rovnice pro přechod soustavy souřadnic určené bází $\mathcal{C}$ k soustavě určené bázi $\mathcal{B}$ ($[x_1, x_2, x_3]$ jsou opět souřadnice vůči $\mathcal{B}$, $[y_1, y_2, y_3]$ vůči $\mathcal{C}$):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \quad\quad + 1 \\ y_2 &= \quad\quad x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_1 \quad\quad + x_3 - 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Nalézt předpis pro přechod inverzní, tj. od $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ k $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$, znamená vyjádřit x_1, x_2, x_3 pomocí y_1, y_2, y_3, neboli pohlížet na (1.17) jako na soustavu lineárních rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3 (y_1, y_2, y_3 představují parametry rovnic) a tuto vyřešit. Matice této soustavy zní:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 2 & 1 & 0 & y_1 - 1 \\ 0 & 1 & -1 & y_2 \\ 1 & 0 & 1 & y_3 + 1 \end{array}\right)$$

známým způsobem nalezneme její řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 - 2 \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3 \\ x_3 &= -y_1 + y_2 + 2y_3 + 3 \end{aligned}$$

což právě jsou hledané rovnice.

1.3 Podprostory afinního prostoru

V této podkapitole zavedeme pro jisté podmnožiny bodů afinního prostoru (tj. jisté prostorové útvary) název *podprostor*. Všimneme si jeho analytického vyjádření a v podkapitole 1.4 i možných vzájemných poloh různých podprostorů.

1.3.1 Definice podprostoru afinního prostoru

Definice 1.3.1 Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ afinní prostor. Nechť R je bod z $\mathcal{A}$ a $\mathbf{W}$ je podprostor ve $\mathbf{V}$. Pak se množina $\mathcal{M}$ označovaná $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ a definovaná vztahem

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathbf{A} : \ (X - R) \in \mathbf{W}\}$$

nazývá *podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}$ určený bodem R a zaměřením $\mathbf{W}$. Dimenzí podprostoru $\mathcal{M}$* rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Zaměření podprostoru $\mathcal{M}$ budeme značit symbolem $V(\mathcal{M})$.
Pro skutečnost, že $\mathcal{M}$ je podprostorem afinního prostoru $\mathcal{A}$, budeme užívat zápis $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$.[28]

Poznámka 1.3.2 Kromě názvu *podprostor afinního prostoru* budeme též užívat názvu *afinní podprostor*.

Nebude-li hrozit nebezpečí záměny s podprostorem vektorového prostoru (např. zaměření), budeme užívat též jen pojmu *podprostor*.

Označení 1.3.3 Je-li $\mathcal{M}$ afinní podprostor určený bodem R, jehož zaměření má bázi $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$, budeme $\mathcal{M}$ rovněž označovat

$$\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}.$$

Poznámka 1.3.4 Podmínku pro incidenci bod X s afinním podprostorem $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ lze evidentně vyjádřit takto (proč?):

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow (\exists \mathbf{x} \in \mathbf{W} : \ X = R + \mathbf{x})$$

[28]Krom pojmu *afinní podprostor* se někdy užívá pojmu *lineární podprostor* či *lineární varieta* afinního prostoru.