Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta UJEP

Zadání 1. seminární práce z předmětu Matematický software (KI/MSW)

Vyučující: RNDr. Zbyšek Posel, Ph.D.

Informace

- Seminární práce se skládá z **programové** části a **textové** části.
- Programová část obsahuje kódy v jazyce Python.
- Textová část je protokol o vypracování a minimálně obsahuje:
  - Zadání
  - Postup řešení, zjednodušenou verzi programu nebo vývojový diagram a rovnice.
  - Výsledky (grafy, tabulky, obrázky). Všechny grafy budou mít popsané osy a legendu.
  - Slovní zhodnocení výsledků, diskuze a závěr.
  - Literaturu.
- Na programové části je povolená spolupráce.
- Protokol odevzdá každý sám za sebe (lze ve formě Jupyter notebooků).
- Seminární práci posílejte na Zbysek.Posel@ujep.cz.
- Seminární práci lze odevzdat nejpozději dne 4. 7. 2023. Po tomto datu nebudou již žádné práce ani jejich opravy přijímány.

1 Matice a vektory

1.1 Průměrování matice

Nagenerujte náhodnou černobílou bitmapu $A(n,n)$, kde $n > 500$ a $a_{ij} \in \{0, 255\}$. Pomocí následujícího algoritmu proveďte průměrování prvků matice.

- Náhodně vyberte prvek matice a_{ij} a spočítejte průměr všech nejbližších sousedů.
$$\overline{a_{ij}} = \frac{a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}}{4} \tag{1}$$
- Hodnotu $\overline{a_{ij}}$ uložte na náhodně vybranou pozici místo a_{ij}.
- Postup opakujte N_p-krát.

Okraje matice ošetřete tak, aby se průměrovaly i krajní hodnoty. Lze uvažovat buď periodické okrajové podmínky, kde např. pro $i = 1$ vypadá výpočet následovně

$$\overline{a_{1,j}} = \frac{a_{i+1,j} + a_{n,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}}{4}$$

nebo uvažujte pro krajní body průměrnou hodnotu pouze ze tří nejbližších sousedů

$$\overline{a_{1,j}} = \frac{a_{i+1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}}{3}$$

Výstupem bude:

- Grafické zobrazení původní a vyhlazené bitmapy.
- Histogramy rozložení hodnot v matici A ukazující vliv počtu pokusů N_p na kvalitu vyhlazování.

1.2 Laplaceův rozvoj pro výpočet determinantu matice

Dle Laplaceova rozvoje lze získat determinant matice $A(n,n)$ součtem determinantů n matic $A(n-1, n-1)$ jako

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\ M_{ij} &= \left|S_{ij}^{A}\right| \end{aligned}$$

kde, S_{ij}^A je submatice k matici A, která vznikne vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce matice A. M_{ij} je tzv. minor matice A a je roven hodnotě determinantu S_{ij}^A, a_{ij} je prvek matice A na $i-$tém řádku a v $j-$tém sloupci. Postup je platný i pro případ, kdy děláme rozvoj přes $i-$tý sloupec a $j-$tý řádek.

- Náhodně nagenerujte matici $A(n, n)$.
- Interval celých čísel zvolte v rozmezí $\langle -6, 6\rangle$.
- Ověřte, že je matice čtvercová.
- Zvolte, zda uděláte rozvoj dle řádku nebo dle sloupce.

Výstupem bude:

- Graf časové náročnosti výpočtu Laplaceova rozvoje v závislosti na velikosti matice $n \in (5, 100)$.
- Porovnání časové náročnost Laplaceova rozvoje a funkce `det`.

2 Numerická integrace

Vypočítejte následující integrál

$$\int_4^{20} \frac{\sin(x)}{x} + 3\mathrm{d}x$$

pomocí

- Vlastním programem na složené Simpsonovo pravidlo.
- Vlastním programem na metodou Monte Carlo (viz rovnice (2)).

Výstupem bude:

- Hodnota integrálu pro jednotlivé metody.
- Graf konvergence složeného Simpsonova pravidla k přesné hodnotě integrálu v závislosti na dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
- Graf konvergence metody Monte Carlo v závislosti na počtu pokusů N.

2.1 Metoda Monte Carlo pro výpočet integrálu

Mějme funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Věta o střední hodnotě

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$$

nám říká, že na existuje bod $f\xi \in \langle a,b\rangle$ takový, že hodnota integrálu I je rovna obsahu obdélníka $(b-a)f(\xi)$.

Metodou Monte Carlo pro výpočet střední hodnoty se nyní budeme snažit aproximovat funkci $f(\xi)$ aritemtickým průměrem $\overline{f(x)}$. Takže

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\overline{f(x)} = \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{2}$$

Body $x_i \in (a,b)$ volíme na intervalu náhodně a přitom požadujeme co nejrovnoměrnější vzorkování. Volba bodu x_i probíhá následovně:

- Nagenerujte náhodné číslo $\gamma \in (0,1)$.
- Transformací čísla γ z intervalu $(0,1)$ na interval (a,b) získejte číslo x_i.