

Lògica en la Informàtica

Codificació de restriccions numèriques en SAT

José Miguel Rivero Robert Nieuwenhuis

Facultad de Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Tardor 2022



Codificació de restriccions numèriques en SAT

- 👉 Vídeos de la web de LI sobre:
Codificació de restriccions numèriques en SAT
- 👉 Apunts de la web de LI:
Breu resumen escrit sobre això

- ALO, AMO, exactly one
- Cardinality constraints en general:

$$l_1 + \dots + l_n \leq K$$

$$l_1 + \dots + l_n \geq K$$

$$l_1 + \dots + l_n = K$$

- Pseudo-Boolean constraints:

$$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n \leq K$$

$$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n \geq K$$

$$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n = K$$

- ▶ ALO (at least one), AMO (at most one), exactly one

Per exemple, *exactly 1 of* $\{l_1, l_2, \dots, l_9\}$ és equivalent a:

- *at least 1 of* $\{l_1, l_2, \dots, l_9\}$ que pot ser codificat amb una sola clàusula: $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_9$
- *at most 1 of* $\{l_1, l_2, \dots, l_9\}$ per $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ clàusules binaries: $\neg l_1 \vee \neg l_2, \neg l_1 \vee \neg l_3, \dots, \neg l_8 \vee \neg l_9$.

Codificació de restriccions numèriques en SAT

- ▶ ALO (at least one), AMO (at most one), exactly one

En lloc de $\text{AMO}(l_1, \dots, l_n)$ escriurem: $l_1 + \dots + l_n \leq 1$.

Nota: aquí l_1, \dots, l_n poden ser literals positius o negatius (variables negades).

Codificació	num vars auxiliars	num clausulas
Quadràtica	0	$\binom{n}{2}$
Ladder	n	$3n$
Heule 3	$n/2$	$3n$
Heule 4	$n/3$	$3.3n$
Log	$\log n$	$n \log n$

► Cardinality constraints en general:

$$l_1 + \dots + l_n \leq K$$

$$l_1 + \dots + l_n \geq K$$

$$l_1 + \dots + l_n = K$$

👉 Pràctica 3: miSudoku.pl

```
exactly(K, Lits) :- atLeast(K, Lits), atMost(K, Lits), !.
```

```
atMost(K, Lits) :- % l1+...+ln <= k: in all subsets of size k+1,  
                  % at least one is false:  
    negateAll(Lits, NLits),  
    K1 is K+1, subsetOfSize(K1, NLits, Clause), writeClause(Clause), fail.  
atMost(_, _).
```

```
atLeast(K, Lits) :- % l1+...+ln >= k: in all subsets of size n-k+1,  
                  % at least one is true:  
    length(Lits, N),  
    K1 is N-K+1, subsetOfSize(K1, Lits, Clause), writeClause(Clause), fail.  
atLeast(_, _).
```

► Cardinality constraints en general:

$$l_1 + \dots + l_n \leq K$$

$$l_1 + \dots + l_n \geq K$$

$$l_1 + \dots + l_n = K$$

👉 Pràctica 3: miSudoku.pl

```
atMost(K, Lits) :- % l1+...+ln <= k: in all subsets of size k+1,  
                  % at least one is false:  
    negateAll(Lits, NLits),  
    K1 is K+1, subsetOfSize(K1, NLits, Clause), writeClause(Clause), fail.  
atMost(_, _).
```

Per exemple: el constraint `atMost(2, [x,y,z,u])` que representa $x+y+z+u \leq 2$ genera 4 clàusules:

```
-x v -y v -z  
-x v -y      v -u  
-x      v -z v -u  
      -y v -z v -u
```

► Cardinality constraints en general:

$$l_1 + \dots + l_n \leq K$$

$$l_1 + \dots + l_n \geq K$$

$$l_1 + \dots + l_n = K$$

👉 Pràctica 3: miSudoku.pl

```
atLeast(K, Lits) :- % l1+...+ln >= k: in all subsets of size n-k+1,  
                    %                               at least one is true:  
    length(Lits, N),  
    K1 is N-K+1, subsetOfSize(K1, Lits, Clause), writeClause(Clause), fail  
atLeast(_, _).
```

Per exemple: el constraint `atLeast(3, [x,y,z,u])` que representa $x+y+z+u \geq 3$ genera 6 clàusules:

```
x v y  
x      v z  
x          v u  
      y v z  
      y      v u  
          z v u
```

Codificació de restriccions numèriques en SAT

► Cardinality constraints en general:

$$l_1 + \dots + l_n \leq K$$

$$l_1 + \dots + l_n \geq K$$

$$l_1 + \dots + l_n = K$$

Codificacions més compactes fent servir variables auxiliars:

Codificació	num vars auxiliars	num clausulas
Polinòmic	0	$\binom{n}{k}$
Ladder encoding	n	$3n$
Sorting networks	$n \log^2 n$	$n \log^2 n$
Cardinality networks	$n \log^2 n$	$n \log^2 k$

► Pseudo-Boolean constraints:

$$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n \leq K$$

$$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n \geq K$$

$$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n = K$$

Es codifiquen en SAT fent servir BDD's, i definint una nova variable auxiliar i quatre clàusules per cada node del BDD.