

計算機数学 レポート (CA-1)

202020114 伊藤綾音

2021 年 2 月 11 日

課題 1.

(補題 3-41)

(1) フェルマーの小定理より $(a^{\frac{q}{p}})^p = a^q = a$ が成り立つため, これを $\frac{1}{p}$ 乗すれば得られる.

(2) 左辺を展開すると, $(a+b)^{p^j} = \sum_{i=0}^{p^j} \binom{p^j}{i} a^{p^j-i} b^i$. 右辺の初項と最終項以外の係数は p の倍数であるため,

$(a+b)^{p^j} = a^{p^j} + b^{p^j}$. (定理 3-42)

(十分性)

$f(x) = g(x)^p$ より $f'(x) = p \cdot g(x)' \cdot g(x)^{p-1} = 0$. (必要性)

$f'(x) = 0$ より, $f(x)$ の非ゼロの項の x の指数は p の倍数である. よって $\exists k \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.t. $f(x) = \sum_{i=0}^k a_{ip} x^{ip}$. ここで,

$g(x) = \sum_{i=0}^k g_i x^i$, ただし $g_i = a_{ip}^{\frac{1}{p}} = a_{ip}^{p^{j-1}}$ ($i = 0, \dots, k$) とすれば, 補題 3-41 より

$$\begin{aligned} g(x)^p &= \sum_{i=0}^k g_i^p x^{ip} \\ &= \sum_{i=0}^k a_{ip} x^{ip} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

課題 2.