AULA 08 - 25/03 Pontos críticos

CONTEXTO $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ dif.

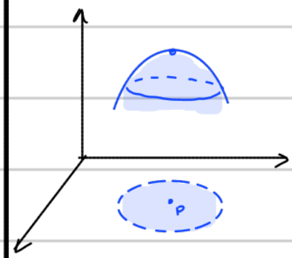
DEF. Dizemos que $p \in U$ é um **PONTO CRÍTICO** de f se $df(p) = 0$

EQUIV.: $\nabla f(p) = 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

EX. $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$.

Temos $df = 2x\,dx + (12y^3 + 12y^2 - 24y)\,dy$.

Os pontos críticos são: $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,-2)$



DEF. f tem um **MÁXIMO LOCAL** (resp. **MÍNIMO LOCAL**) em p se $f(x) \leq f(p)$ (resp. $f(x) \geq f(p)$) p/ todo x em uma viz. de p.

Se mín. local ou máx. local, dizemos **EXTREMO LOCAL**

PROP. Extremo local em $p \Rightarrow p$ é ponto crítico.

DEM. Se p é um extremo local de f, então 0 é extremo local de

$$\varphi_i(t) = f(p + te_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \varphi_i'(0) = 0$ ← ANÁLISE $\mathbb{R}$ □

MOTIVAÇÃO Como determinar se um ponto crítico é máx. ou mín. local (ou nenhum dos dois)

PRINCÍPIO GERAL O comportamento de uma função f na viz. de um ponto p é determinado pelo primeiro termo não nulo da expansão de Taylor de $f - f(p)$

Assim, supondo f duas vezes dif., se $df(p) = 0$, então olhamos p/ $d^2f(p)$.

LEMBRANDO FORMA QUADRÁTICA: $d^2f(p) \cdot v^{\otimes 2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i v_j = \langle \underbrace{Hf(p)}_{\text{Matriz Hessiana (sim.)}} v, v \rangle$

EX. Suponha $df(p) = 0$ e $Hf(p) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

A F. TAYLOR infinitesimal de ordem 2 é: $f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}(\lambda_1 v_1^2 + \cdots + \lambda_n v_n^2) + o(\|v\|^2)$

Se todos $\lambda_i > 0$, então $f(p+v) = f(p) + (\text{termo positivo})$

$\Rightarrow f$ tem mín. local em p.

→ O resto vai p/ zero mais rápido que $\|v\|^2$, logo é negligenciável perto de $\frac{1}{2}(\lambda_1 v_1^2 + \cdots + \lambda_n v_n^2)$ p/ v suf. pequeno

Se todos $\lambda_i < 0$, então $f(p+v) = f(p) + (\text{termo negativo})$

$\Rightarrow f$ tem máx. local em p.

ÁLGEBRA LINEAR

DEF. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. Dizemos que A (ou que a forma quadrática $v \mapsto \langle Av, v\rangle$) é

- DEFINIDA POSITIVA se $\langle Av, v\rangle > 0$ p/ todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- DEFINIDA NEGATIVA se $\langle Av, v\rangle < 0$ p/ todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- INDEFINIDA c.c.

EX. (1) $v \mapsto \|v\|^2$ $(A = I)$ é definida positiva

(2) Em $\mathbb{R}^4$, $(t,x,y,z) \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ $(A = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1))$ é indefinida → MINKOWSKY

TEO. [ESPECTRAL] Toda matriz simétrica tem uma base ortonormal de autovetores. Em particular, é diagonalizável (c/ matriz mudança de base ortogonal).

EXERCÍCIO Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ seus autovalores. Mostre que A é def. positiva (resp. def. negativa) se, e somente se, $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) p/ todo $i = 1, \dots, n$.

TEO. Seja $f: U \to \mathbb{R}$ duas vezes dif. em $p \in U$ ponto crítico. Se $Hf(p)$ é def. positiva (resp. def. negativa), então p é um mín. local (resp. máx. local) de f.

isolado (*) isolado

DEM. Pela F. TAYLOR infinitesimal:

$$f(p+v) = f(p) + \tfrac{1}{2}\langle Hf(p)v, v\rangle + r(v), \quad \text{com } r(v) = o(\|v\|^2) \text{ quando } v \to 0.$$

Suponha $Hf(p)$ é def. positiva. Existe um $c > 0$ t.q. $\langle Hf(p)\cdot u, u\rangle \geq c$ $\forall \|u\| = 1$ → $u \mapsto \langle Hf(p)\cdot u, u\rangle$ é cont. e, portanto, a imagem de S^{n-1} (compacto e conexo) é um intervalo $[a,b]$

De fato, S^{n-1} é compacto e $S^1 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \langle Hf(p)u, u\rangle$ é cont.,

tal função atinge um mínimo global.

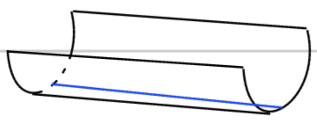
Logo, $$\frac{1}{\|v\|^2}[f(p+v) - f(p)] = \frac{1}{2}\left\langle Hf(p)\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle + \frac{r(v)}{\|v\|^2} \geq \frac{1}{2}c + \frac{r(v)}{\|v\|^2}$$

Como $r(v) = o(\|v\|^2)$, então $\frac{|r(v)|}{\|v\|^2} \leq \frac{c}{4}$ p/ todo v suf. pequeno, donde

$$\frac{1}{\|v\|^2}[f(p+v) - f(p)] \geq \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}c > 0$$

(*) Concluímos, $f(p+v) > f(p)$, i.e., p é um mínimo local (isolado). □

DEM. 2 (Diagonalizar $Hf(p)$)

EX.  Os pontos em azul são mínimos locais, mas a $Hf(p)$ não é def. positiva.

Note, porém, que os pontos mínimos não são isolados.

EX. Voltando ao primeiro exemplo da aula: $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$.

Sabemos que os pontos críticos são $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,-2)$

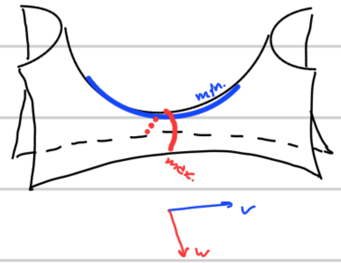
A matriz Hessiana é $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 36y^2 + 24y - 24 \end{pmatrix}$

Temos $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,1)$ é mín. local.

$Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 72 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,-2)$ é mín. local.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela

DEF. Um ponto crítico p de f é dito **PONTO DE SELA** se $Hf(p)$ tem pelo menos um autovalor >0 e um <0.



OBS. Se v (resp. w) é um autovetor com autovalor $\lambda > 0$ (resp. $\mu < 0$), então f tem um mín. (resp. máx.) local na direção de v (resp. w):

$\varphi(t) = f(p+tv) \Rightarrow \varphi''(0) = \langle Hf(p) \cdot v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2 > 0$

$\psi(t) = f(p+tw) \Rightarrow \psi''(0) \overset{(\dots)}{=} \mu \|w\|^2 < 0$

DEF. Um ponto crítico p t.q. $Hf(p)$ não é invertível (equiv., $\det(Hf(p)) = 0$ ou algum autovalor é nulo) é dito **DEGENERADO**.

EXERCÍCIO Seja $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

Mostre que a origem é um ponto crítico degenerado

Mostre que a restrição de f a qq. reta pela origem tem mín. local na origem, mas a origem não é um mín. local de f.

Dica: Considere os conjuntos onde $f > 0$ e $f < 0$.