Lista 1

30 de março de 2025

1. Mostre que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é homeomorfo ao círculo $\mathbb{S}^1$, considerando $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com a topologia quociente, e $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ com a topologia usual. Denotamos por $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o conjunto $\mathbb{R}/\sim$ com a relação de equivalência dada por:
$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

2. Considere a relação de equivalência $\sim$ em $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ dada por $(x, y) \sim (x_0, y_0)$ se e só se ($x - x_0$ é múltiplo inteiro de 2π e $y = y_0$) ou ($y - y_0$ é múltiplo inteiro de 2π e $x = x_0$). Seja
$$\mathbb{T} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]/\sim \quad \text{(com a topologia quociente)}.$$
   (a) Descreva a aplicação quociente e mostre que $\mathbb{T}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
   (b) Seja $F : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$F(s, t) = ((R + r\cos(t))\cos(s), (R + r\cos(t))\sin(s), r\sin(t))\,.$$
   Mostre que F induz uma aplicação $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^3$ e que esta aplicação é um homeomorfismo entre T e sua imagem.

3. Verdadeiro ou Falso? (Prove ou dê contra-exemplo.)

   ( ) Se X é um conjunto finito e τ é uma topologia em X com cardinalidade $|\tau| \geq 2^n - 1$, então τ é a topologia discreto.

   ( ) Se $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ é contínua se, e somente se, para todo $A \subset X$ temos $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

4. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{R}$. Tome em $M_2(\mathbb{R})$ a topologia induzida pela bijeção $\psi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$,
$$\begin{aligned} \psi : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} &\longmapsto (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}) \end{aligned}$$
   Ou seja, $U \subset M_2(\mathbb{R})$ é aberto se, e so se, $\psi(U) \subset \mathbb{R}^4$ é aberto.

(a) Mostre que $GL(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A \text{ é invertível}\}$ é um aberto de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que

$$\begin{aligned} SL(2) &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \\ O(2) &= \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t A = AA^t = I\} \end{aligned}$$

são fechados de $M_2(\mathbb{R})$.

5. Generalize o exercício anterior para $M_n(\mathbb{R})$. Construa a topologia de $M_n(\mathbb{R})$ de maneira análoga ao exercício anterior.

6. Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Dizemos que G é um grupo topológico se G está munido de uma topologia τ que é T_1 (para esse exercício não é necessário usar essa hipótese) e de modo que as aplicações

$$\begin{aligned} p : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned}$$

são contínuas. Mostre que, para quaisquer $a, b \in G$, existe um homeomorfismo $f : G \to G$ tal que $f(a) = b$.

7. Estude a convergência da sequência $x_n = 1/n$ em $\mathbb{R}$, considerando $\mathbb{R}$ com a topologia co-finita. Repita com a topologia co-enumerável.

8. Mostre que, se X é um espaço topológico e $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas, então

$$\Delta = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$$

é um conjunto fechado.

9. Sejam $\{(M_i, T_i), i \in \Lambda\}$ uma família de espaços topológicos. Seja $A_i \subset M_i$ um subconjunto para cada i. Considere a topologia produto em $\prod_{i\in\Lambda} M_i$.

   (a) Mostre que se A_i é fechado em M_i, então $\prod_{i\in\Lambda} A_i$ é fechado em $\prod_{i\in\Lambda} M_i$.

   (b) $\prod_{i\in\Lambda} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in\Lambda} A_i}$

   Qual das propriedades anteriores continua válida se, no lugar da topologia produto, consideramos a topologia das caixas?

10. Seja A o subconjunto de $\Pi_{i\in\mathbb{N}} X_i$, onde $X_i = \mathbb{R}$ consistindo dos elementos $(x_1, x_2, \dots)$ em que $x_i \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices. Determine $\bar{A}$ na topologia produto e na topologia das caixas.

11. Demonstre que $D^n/\sim$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^n$, onde consideramos $D^n/\sim$ com a topologia quociente identificando os pontos do disco D^n de norma 1 e $\mathbb{S}^n$ com a topologia usual.

    Dica: Considere a inversa da projeção estereográfica:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} \\ x &\longmapsto \left(\frac{2x}{1 + ||x||^2}, \frac{1 - ||x||^2}{1 + ||x||^2} \right) \end{aligned}$$

    e considere o homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : D^n \setminus \partial D^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{1 - ||x||^2} . \end{aligned}$$

    Tome o homeomorfismo $f := \varphi \circ \psi : D^n \setminus \partial D^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$.

12. Definimos a **União Disjunta** de dois conjuntos A, B como:

$$A \sqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) \subset (A \cup B) \times \{0, 1\}$$

    Se (A, τ_1) e (B, τ_2) são dois espaços topológicos, podemos definir uma topologia em $A \sqcup B$. Sejam $i_0 : A \hookrightarrow A \sqcup B$ e $i_1 : B \hookrightarrow A \sqcup B$ as inclusões canônicas, ou seja, $i_0(x) = (x, 0)$, para todo $x \in A$, e $i_1(y) = (y, 1)$, para todo $y \in B$. Definimos uma topologia em $A \sqcup B$ como:

$$\tau := \{U \subset A \sqcup B \ : \ i_0^{-1}(U) \in \tau_1 \text{ e } i_1^{-1}(U) \in \tau_2\}.$$

    (a) Prove que $(A \sqcup B, \tau)$ é um espaço topológico.
    (b) Podemos generalizar a construção acima para uma união disjunta arbitrária, tomando $\{(A_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ família de espaços topológicos, assim:

$$\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \times \{\alpha\}) = \{(x, \alpha) \ : \ x \in A_\alpha \, , \, \alpha \in I\}$$

        tomando $i_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ a inclusão canônica, para todo $\alpha \in I$. Defina uma topologia

$$\boldsymbol{\tau} := \left\{ U \subset \bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha \ : \ i_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \text{ , para todo } \alpha \in I \right\}.$$

        Mostre que $\boldsymbol{\tau}$ é topologia em $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

13. Seja (X, τ_1) e (Y, τ_2) dois espaços topológicos, e $A \subset X$ com a topologia induzida. Se $f : A \to Y$ é uma função contínua, definimos o **Espaço de Adjunção**

$$X \cup_f Y := (X \sqcup Y)/\sim$$

com a relação de equivalência $(a, 0) \sim (f(a), 1)$ para todo $a \in A$.[1]

Podemos pensar o espaço de adjunção como uma colagem de X em Y ao longo do mapa f; graficamente:

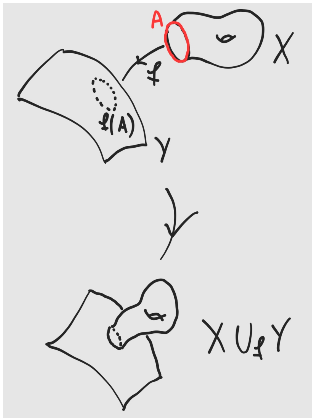

Figura 1: Representação da adjunção de $X \cup_f Y$.

Denotamos por $X \vee Y$ a colagem de X e Y por um único ponto, ou seja, $A = \{a\} \subset X$ e $f(a) = b \in Y$. (Quando os espaços X e Y são conexos por caminhos, veremos que podemos omitir o ponto em que realizamos a colagem.)

(a) Tome $[0, 1] \sqcup [0, 1]$, com a relação de equivalência

$$(0, 0) \sim (0, 1) \sim (1, 0) \sim (1, 1)$$

Prove que $[0, 1] \sqcup [0, 1]/\sim$ é homeomorfo a $S^1 \vee S^1$.

(b) Descreva graficamente essa adjunção.

14. Considere $\mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia canônica e considere sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a relação de equivalência dada por

$$x \sim y \quad \text{se, e somente se, } x = \lambda y, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

[1]Comumente denotamos $(a, 0) \in X \sqcup Y$ somente por $a \in X \sqcup Y$, e escrevermos $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$

O espaço quociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ é chamado de **Espaço Projetivo Real** de dimensão n, e denotamos por $\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$.

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ o mapa quociente, isto é, $\pi(x)$ é a classe de equivalência $[x]$ de x em $\mathbb{R}P^n$.

(a) Mostre que os conjuntos

$$U_i = \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$$

são abertos na topologia quociente, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$, e que

$$\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

(b) Prove que $\mathbb{R}P^1$, com a topologia quociente, é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, com a topologia canônica.