Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

Analisis Funcional | 2025-I

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

Espacios Vectoriales Normados

Definición y Ejemplos

◇ Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una función $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ es *norma* sii $\forall x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,

- $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$*$ $(E, \|\cdot\|)$ espacio normado implica espacio métrico, vale la teoría existente para ellos en particular convergencia.

◇ Sea $(x_n) \subset E$. Decimos que $x_n \to x \in E$ sii $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Ejercicio Las operaciones algebraícas en E son funciones continuas.

◇ $(E, \|\cdot\|)$ es *Banach* sii es completo con la métrica inducida por la norma.

Ejemplo $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ y $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach.

□ Sea E Banach y $F \leq E$ un subespacio vectorial, entonces F es Banach sii F es cerrado en E.

Ejemplo Sea $B(X) := \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ es acotada}\}$ e $\|f\|_\infty := \sup |f(x)|$, entonces $B(X)$ es Banach. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, conjunto compacto, observe que $C^0[a, b] \leq B[a, b]$ normado.

Ejercicio Complete los detalles del ejemplo, y muestre que $C^0[a, b]$ es Banach.

Ejemplo Considere $C^1[a, b] \leq C^0[a, b]$, no es Banach. Sin embargo con $\|f^{(1)}\|_{\infty^1} := \|f\|_\infty + \|f^{(1)}\|_\infty$ si que lo es. En general $C^k[a, b]$ es Banach con $\|f^{(k)}\|_{\infty^k} = \sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty$.

□ Si $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base l.i. de E, entonces $\exists c > 0, \forall a \in \mathbb{K}^n$ tal que $\|\sum a_i x_i\| \geq c \sum |a_i|$.

■ Todo espacio E tal que $\dim(E) < \infty$ es Banach. Consecuentemente, también lo son todos los $F \leq E$ cerrados.

Ejemplo Sea $c_0 = \{(a_k) \subset \mathbb{K} : a_k \to 0\}$ con las operaciones usuales y $\|(a_k)\|_\infty := \sup |a_k|$. Así dado c_0 es Banach.

Ejemplo Sea $c_{00} := \{(a_k) \in c_0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para } k \geq n_0\}$. No cerrado, no Banach.

Espacios $L_p,\ \ell_p$

$\diamondsuit$ Sea $\mathcal{L}(X,\Sigma,\mu)$ espacio de medida. Consideremos $\mathcal{L}_p(X,\Sigma,\mu)$ el subespacio de las $f : X \to \mathbb{K}$ tales que para $1 \leq p < \infty$ el valor $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

■ *Hölder.* Sean $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in \mathcal{L}_p$ e $g \in \mathcal{L}_q$ entonces $fg \in \mathcal{L}_1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

■ *Minkowski.* Si $f, g \in \mathcal{L}_p$ entonces $f + g \in \mathcal{L}_p$ y $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$*$ Note que $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Ello motiva la siguiente consideración.

$\diamondsuit$ Sean $f, g \in \mathcal{L}_p$. Decimos que $f \sim g$ si $f = g$ μ-casi siempre, es decir, $\exists A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \setminus A$.

■ El conjunto $L_p = \mathcal{L}_p/\!\sim$ con las operaciones $[f] + [g] = [f+g]$, $[cf] = c[f]$ y norma $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ es Banach.

$\diamondsuit$ Sea $\mathcal{L}_\infty$ el espacio de las f medibles acotadas μ-cuasi siempre[1]. Para cada $x \in X \setminus N$ sean $S_f(N) = \sup|f(x)|$ y $\|f\|_\infty := \inf S_f(N)$ de los $N \in \Sigma$ tales que $\mu(N) = 0$.

■ El espacio $L_\infty = \mathcal{L}_\infty/\!\sim$ con $\|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty$ es Banach.

Ejemplo Sean $p \geq 1$ y $\ell_p = \left\{(a_k) \subset \mathbb{K} : \sum |a_k|^p < \infty\right\}$. Considere $\Sigma = \wp(\mathbb{N})$ y μ_c la medida de conteo. El espacio ℓ_p coincide con $L_p(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \mu_c)$, en este caso las operaciones son simplemente las usuales de sucesiones y $\|(a_n)\|_p = \left(\sum |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Entonces ℓ_p es Banach.

$\square$ *Hölder-Minkowski en sucesiones.* Para $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\sum^n |a_i b_i| \leq \left(\sum^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{y} \quad \left(\sum^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ejemplo El espacio $\ell_\infty = \{(a_k) \subset \mathbb{K} : \sup|a_k| < \infty\}$ con la norma $\|(a_k)\|_\infty = \sup|a_k|$ es Banach. Esto es directo observando que $\ell_\infty = L_\infty(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \mu_c) = B(\mathbb{N})$[2].

Compacidad

$\diamondsuit$ $A \subseteq X$ es compacto sii todo cubrimiento abierto de A admite un subcubrimiento finito.

$*$ En espacios métricos vale decir que toda $(a_k) \subset A$ admite una subsucesión (a_{k_i}) tal que $a_{k_i} \to a \in A$.

$\square$ Sea $(E, \|\cdot\|)$ con $\dim(E) < \infty$, entonces los compactos de E son precisamente los cerrados y acotados.

$*$ *Colorario.* La *bola unitaria* $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es compacta en espacios de dimensión finita.

$\square$ *Riesz.* Si $M < E$ cerrado y $\theta \in (0,1)$, entonces $\exists y \in E \setminus M, \forall x \in M$ tal que $\|y\| = 1$ y $\|y - x\| \leq \theta$.

■ $\dim(E) < \infty$ sii B_E es compacta en E.

[1] $|f(x)| \leq k < \infty$ para cada $x \in X \setminus N$ donde $\mu(N \in \Sigma) = 0$.
[2] Verificando alguna de las dos igualdades.

Espacios Separables

◇ E es separable sii $\exists D \subset E$ enumerable y denso en E.

Ejemplo Espacios con $\dim(E) < \infty$ son separables. Caso de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

□ E es separable sii $\exists A \subset E$ enumerable tal que $\langle A \rangle$ es denso en E.

Ejemplo c_0 y ℓ_p son separables, mientras ℓ_∞ no lo es.

■ *Aproximación de Weierstrass.* $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continua $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que $|P(x) - f(x)| < \epsilon$.

Ejemplo $C[a, b]$ es separable. Hint:$\langle t \rangle$.

Ejemplo $L_p[a, b]$ es separable. Hint: continuas y polinomios.

□ Si E es separable entonces $F \leq E$ también lo es.

Operadores Lineales

◇ Un *operador lineal continuo* es una función $T : E \to F$ que verifica lo siguiente,

- $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ tenemos $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.
- $\forall x_0 \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$.

$*$ $\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F \mid T$ es lineal continuo$\}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $F = \mathbb{K}$ entonces $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$, el espacio dual, cuyos elementos son funciones.

◇ $E \cong F$ sii $\exists T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectivo cuyo inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

◇ Una función $f : E \to F$ es una *isometría* sii $\forall x \in E$ tenemos $\|f(x)\| = \|x\|$.

$*$ Si f es lineal entonces es una *isometría lineal*. Si f es un isomorfismo entonces le llamamos *isomorfimo isométrico*.

Ejercicio Toda isometría lineal es inyectiva y continua.

Caracterización

◇ Una función $f : M \to N$ es *Lipschitz* si $\exists L > 0, \forall x, y \in M$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$.

◇ f es *uniforme continua* si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in M$ tal que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

$*$ Lipschitz $\Rightarrow$ uniforme continua $\Rightarrow$ continua $\Rightarrow$ continua en x_0.

■ Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. T es Lipschitz $\Leftrightarrow T$ es uniforme continuo $\Leftrightarrow$ T es continuo $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en $x_0 \Leftrightarrow$ T es continuo en $0 \Leftrightarrow$ $\sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\} < \infty \Leftrightarrow \exists C \geq 0, \forall x \in E$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$.

$*$ *Colorario.* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ biyectivo es isomorfismo sii $\exists C_1, C_2 > 0, \forall x \in E$ tal que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$.

□ Sean E, F espacios normados, entonces (a) $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_E\}$ es norma en $\mathcal{L}(E, F)$; (b) $\forall T \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E$ tenemos $\|T(x)\| = \|T\| \cdot \|x\|$ y (c) F Banach $\Rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ Banach.

∗ *Colorario (c).* E' es Banach.

Ejemplo El operador identidad $1_E : E \to E \in \mathcal{L}(E,E)$ para el cual $\|1_E\| = 1$; Operador nulo $O : E \to F \in \mathcal{L}(E,F)$ que envía $x \mapsto 0_F$ tenemos $\|O\| = 0$.

Ejemplo Sea $\varphi \in E'$ e $y \in F$. Sea $\varphi \otimes y : x \mapsto \varphi(x)y \in \mathcal{L}(E,F)$ y tiene norma $\|\varphi\| \cdot \|y\|$.

Ejemplo Sea $(b_n) \in \ell_p$. Considere $T : \ell_\infty \to \ell_p$ tal que $(a_n) \mapsto (a_n b_n)$ [3].

Ejemplo Sea $g \in L_p[0,1]$. Como en el ejemplo anterior considere $T : C[0,1] \to L_p[0,1],\ T(f) = fg$. El operador $T \in \mathcal{L}(C[0,1], L_p[0,1])$ y es llamado *operador multiplicación*.

Ejercicio T lineal en E con $\dim(E) < \infty \Rightarrow\ T$ continuo. En dimensión infinita no siempre es cierto.

Ejemplo Sea $\mathcal{P}[0,1] \subset C[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. El operador derivación es lineal, suponga continuo, entonces $\exists C, \forall p \in \mathcal{P}[0,1]$ tal que $\|T(p)\|_\infty \leq C\|p\|_\infty$. Sea $f_n = t^n$, tenemos $n = \|f_n'\|_\infty = \|T(f_n)\|_\infty \leq C\|f_n\|_\infty = C$.

Teorema Banach-Steinhaus

■ *Baire.* Sea M espacio métrico completo y $\left(F_n^{\triangledown}\right) \subseteq M$ tal que $M = \bigcup F_n$. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

■ *Banach-Steinhaus.* Sean E Banach, F espacio normado y (T_i) una sucesión de operadores en $\mathcal{L}(E,F)$ tales que $\forall x \in E, \exists C_x < \infty$ tal que $\sup \|T_i(x)\| < C_x$. Entonces $\sup \|T_i\| < \infty$.

∗ *Colorario.* Sea $(T_n) \subset \mathcal{L}(E,F)$. Si $\forall x \in E$ la sucesión $(T_n(x)) \to y \in F$ entonces $T(x) = \lim T_n(x) \in \mathcal{L}(E,F)$.

Ejemplo $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(0,0) \mapsto 0$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, en aplicaciones *bilineales* no existen cosas así.

◇ Sean E_1, E_2 y F espacios vectoriales. Una aplicación $B : E_1 \times E_2 \to F$ es *bilineal* sii $\forall x_1 \in E_1, \forall x_2 \in E_2$ fijos, los operadores $B(x_1, \cdot) : E_2 \to F$ y $B(\cdot, x_2) : E_1 \to F$ son lineales.

∗ *Colorario.* Si E_2 es completo y $B : E_1 \times E_2 \to F$ es bilineal y continuo a trozos entonces $B \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$.

Ejemplo $\forall n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n : c_{00} \ni (a_j) \mapsto n a_n \in \mathbb{K}$. Es claro que $(\varphi_n) \subset (c_{00})'$ y $\|\varphi_n\| = n$, aquí $\forall x \in c_{00}$ se tiene $\sup \|\varphi_n(x)\| < \infty$, sin embargo, $\sup \|\varphi_n\| = \infty$.

Teorema de la Aplicación Abierta

◇ Nos referimos a $B_E(x_0; r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$ como bola abierta en E centrada en x_0 de radio $r > 0$.

□ Sean E Banach, F espacio normado y $F \leftarrow E : T \in \mathcal{L}(E,F)$. Si existieran $R, r > 0$ tales que $\overline{T(B_E(0;R))} \supseteq B_F(0;r)$ entonces $T(B_E(0;R)) \supseteq B_F\left(0; \frac{r}{2}\right)$.

■ *Aplicación Abierta.* Sean E e F Banach. Si $F \leftarrow E : \overset{\twoheadrightarrow}{T} \in \mathcal{L}(E,F)$ entonces T es una aplicación abierta.

∗ *Colorario.* En particular si T es una biyección entonces $E \cong F$.

Ejercicio Muestre que $T : c_{00} \to c_{00}$ tal que $(a_n) \mapsto \left(\frac{a_n}{n}\right)$ es lineal, continuo y biyectivo.

Ejemplo En el ejercicio anterior T^{-1} no es continuo.

[3] T es llamado *operador diagonal* por (b_n).

Ejemplo Todo subespacio $F^{\nabla} \leq C[0,1]$ tal que $\dim(F) = \infty$ tiene al menos una función f tal que $f \notin C^1[0,1]$. Hint: Contradicción – Aplicación Abierta – Teorema de Riesz.

◇ Sean E e F espacios normados y $T : E \to F$ lineal. El *gráfico* de T es el conjunto,

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

■ *Gráfico Cerrado.* Sean E e F Banach y $T : E \to F$ lineal. El operador T es continuo sii $G(T)$ es cerrado en $E \times F$.

Ejercicio Si T no es continuo una de las implicaciones en el Teorema del Gráfico Cerrado continua valiendo.

Ejemplo Sean E Banach y $T : E \to E'$ lineal *símetrico*, es decir, $\forall x, y \in E$ tenemos $T(x)(y) = T(y)(x)$. El operador T es continuo. Hint: Gráfico Cerrado.

Teoremas de Hahn-Banach

□ *Lemma de Zorn.* Todo conjunto parcialmente ordenado, no vacío y en el cual todo subconjunto totalmente ordenado tiene cota superior, tiene un elemento máximal.

Ejercicio Lemma de Zorn ⇔ Axioma de Elección.

■ *Hanh-Banach (en $\mathbb{K}$).* Sean E un espacio (sobre $\mathbb{K}$) normado y $p : E \to \mathbb{R}$ una función tal que,

- $\forall a > 0, \forall x \in E$ se tiene $p(ax) = |a|p(x)$.
- $\forall x, y \in E$ su cumple $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Si $G \leq E$ y $\varphi : G \to \mathbb{K}$ es un operador lineal tal que $\forall x \in G$ se tiene $|\varphi(x)| \leq p(x)$, entonces $\exists \widetilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ lineal que extiende a φ, es decir, $\widetilde{\varphi}(x)\Big|_G = \varphi(x)$ y que además satisface $\forall x \in E$ que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$.

$*$ *Colorario(s).*

- Si φ es continuo entonces $\widetilde{\varphi}$ también y $\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$.
- Si E es un espacio normado entonces $\forall x_0 \in E \setminus \{0\}, \exists \varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.
- Si $E \neq \{0\}$ y $x \in E$ entonces $\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E'$ y $\|x\| \in B_E\}$ cuyo valor alcanza.

References

[1] Martin, D. y Ahlfors, L.V. (1966). *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill.