Lista 1: derivadas direcionais e funções de classe C^k

7 de março de 2025

1. Encontre todas as derivadas parciais de $f(x,y,z) = (x+y)^z$.

2. Seja $p = (1, y_0)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$, onde
$$f(x,y) = x^{x^{x^y}} + (\log x)\arctan(\arctan(\cos(xy) - \log(x+y))).$$

3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Encontre as derivadas parciais com respeito a x e y das funções $\int_0^{xy} g(t)dt$ e $\int_x^y g(t)dt$.

4. Estude a continuidade e a existência de derivadas direcionais da função
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

5. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se, para todos $p, q \in X$, o segmento $[p,q]$ está contido em X. Mostre que, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ em U, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, então f não depende da variável x_j. A hipótese de convexidade em U é necessária?

6. Mostre que, se λ é um real e v é um vetor, então
$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$
Se v, w são dois vetores, vale em geral que
$$\frac{\partial f}{\partial(v+w)}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial w}(p)?$$

7. Existe uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais na origem, mas não admite todas as derivadas direcionais?

8. A "fórmula de adição" da função arctan diz que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$ com $xy \neq 1$,
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + n\pi,$$
onde n é um inteiro que depende de x, y. Demonstre a fórmula acima usando derivadas parciais e calcule n explicitamente.

9. Lembre que podemos identificar o espaço de matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$ (digamos, com coordenadas x_{ij}). Encontre uma fórmula para as derivadas parciais da função determinante $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e calcule
$$\frac{\partial \det}{\partial x_{21}}(A), \qquad \text{onde } A = \begin{pmatrix} 3 & -81 & 0 \\ 7 & 42 & -5 \\ 1 & -4 & 25 \end{pmatrix}.$$
[Dica: Laplace.]

10. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Mostre que, se todas as derivadas parciais de $f : U \to \mathbb{R}$ existem e são *limitadas* em U, então f é contínua em U.

11. Mostre que, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo e $p, q \in U$, então existe um caminho poligonal em U com vértices $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$ de maneira que, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, o vetor $p_{i+1} - p_i$ é colinear com algum vetor da base canônica.

12. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua que possui todas as derivadas direcionais em qualquer ponto. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial v}(v) > 0$ sempre que $\|v\| = 1$. Mostre que existe um ponto em $\mathbb{R}^n$ no qual todas as derivadas direcionais de f se anulam. [Dica: a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.]

13. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, mostre que o conjunto das funções de classe C^k em U, denotado $C^k(U)$, é uma $\mathbb{R}$-álgebra comutativa com unidade. Mostre que todas as inclusões
$$C^0(U) \supset C^1(U) \supset \cdots \supset C^k(U) \supset \cdots \supset C^\infty(U)$$
são estritas.

14. Verifique que a função
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$
é de classe C^1 e admite derivadas parciais de segunda ordem em todo $\mathbb{R}^2$, mas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$.

15. Seja $n \geq 3$ e
$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$
Mostre que h é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e satisfaz a equação diferencial
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} = 0.$$
O que acontece se $n = 2$ e $n = 1$? Existe uma função h de classe C^∞ que satisfaz a equação acima e $\lim_{x \to 0} h(x) = \infty$?[1]

16. Dado $k \geq 1$, qual é o número máximo de derivadas parciais de ordem k *distintas* que uma função de classe C^k pode ter?

17. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \geq 1$ um inteiro, $f, g \in C^k(U)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de comprimento $|\alpha| \leq k$. Demonstre a seguinte fórmula de Leibniz
$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g,$$
onde $\beta \leq \alpha$ significa que $\beta_i \leq \alpha_i$ para todo i e $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

18. Mostre que a função
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$
é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$. Construa uma função C^∞ em $\mathbb{R}^n$ que seja positiva no bloco aberto
$$(-1, 1)^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 < x_i < 1, \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$
e se anule fora deste conjunto.

[1]O operador $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ é dito *Laplaciano*. Uma função h que satisfaz $\Delta h = 0$ é dita *harmônica*.