Student: Jaider Torres **RA:** 241343

Q2. ($\Leftarrow$) Suponha que $f = T|_{\mathbb{S}^m} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^n$, onde $T : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear, então

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| T|_{\mathbb{S}^m}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = T(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que para cada $x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$, temos que $F(x) = T(x)$. Como T é linear, temos que F é diferenciável em $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$. Agora, no ponto $x = 0 \in \mathbb{R}^{m+1}$, dado $h \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$,

$$\begin{aligned} F(0+h) - F(0) &= F(h) \\ &\|h\| T(\frac{h}{\|h\|}) \\ &= T(h). \end{aligned}$$

Então, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{F(0+th) - F(0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{tT(h)}{t} \\ &= T(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial h}(0) \\ &= df_0 \cdot h. \end{aligned}$$

Portanto, F é diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ e assim em $\mathbb{R}^{m+1}$.
($\Rightarrow$) Suponha que F é diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$, onde

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Assim, para qualquer $v \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$, pelo teorema de Hadamard temos que existe $\Phi_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\Phi_0 = df_0$. Assim,

$$\|0 + v\| f\left(\frac{0+v}{\|0+v\|}\right) - F(0) = \Phi_0(v),$$

i.e.,

$$\|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \Phi_0(v),$$

para qualquer $v \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$.
Então, para qualquer $x, v \in \mathbb{R}^{m+1}$, temos

$$\begin{aligned} F(x+v) - F(x) &= \|x+v\| f\left(\frac{x+v}{\|x+v\|}\right) - \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\ &= \Phi_0(x+v) - \Phi_0(x) \\ &= \Phi_0(v) \\ &= \|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right). \end{aligned}$$

Das relações $f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \Phi_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ e $\|x+v\| f\left(\frac{x+v}{\|x+v\|}\right) - \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|v\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$, temos que existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R}^n)$ tal que $f \equiv T|_{\mathbb{S}^m}$.

Q3. Note que a hipótese de $\nabla \Phi_{f(a)} = 0$, para $a \in U$, tomando $f = id_U : U \to U \subset \mathbb{R}^m$ e $\Phi \equiv 0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, temos que $\Phi \circ f \equiv 0$. Então para cada $a \in U$ temos que $\nabla \Phi_{f(a)} = 0$, mas $\det\ df_a = \det\ I_n = 1$.

Suponha que $\nabla\Phi_{f(a)} \neq 0$. Como $\Phi \circ f(x) = 0$, pela regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned} d(\Phi \circ f)(a) &= d\Phi_{f(a)} \cdot df_a \\ &= 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Então $\langle \nabla\Phi_{f(a)}, df_a \cdot e_l \rangle = 0$ para cada $l \in [m]$, onde $\{e_l\}$ são os vetores canônicos de $\mathbb{R}^m$ e $df_a \cdot e_l$ é a $l-$ésima coluna da matriz jacobiana da f. Logo, $df_a \cdot e_l \in \ker d\Phi_{f(a)}$ para cada l e portanto ao menos una das colunas é linearmente dependente, pois a condição $\nabla\Phi_{f(a)} \neq 0$ implica $\dim Im\ d\Phi_{f(a)} = 1$. Assim, $\det\ df_a = 0$.

Nota: Note que a Φ só precisa ser diferenciável para a regra da cadeia ser aplicada, i.e., podemos supor que Φ é diferenciável.

Q5. Seja $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \in \tau_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, onde U é convexo, $0 \in U$, $f(0) = 0$ e $f_i : U \to \mathbb{R}$ são de classe $\mathcal{C}^1$.

a)

forma principal Dado $x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ fixo, seja $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(t) = \langle f(x), f(tx) \rangle.$$

Note que $\gamma'(t) = \langle f(x), df_{tx} \cdot x \rangle$ e assim

$$\begin{aligned} \left|\lambda'(t)\right| &= |\langle f(x), df_{tx} \cdot x \rangle| \\ &\leq \|f(x)\|\|df_{tx} \cdot x\| \\ &\leq \|f(x)\|\|df_{tx}\|\|x\| \\ &\leq \|f(x)\||t|\|x\|\|x\| \\ &= \|f(x)\||t|\|x\|^2. \end{aligned}$$

Note que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f'(t)| \leq |t|$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$, então $|f(t)| \leq \frac{t^2}{2}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, pela hipótese $|f'(t)| \leq |t|$ para cada $t \in [0, x]$. Assim,

$$\left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \int_0^x \left|f'(t)\right| dt \leq \int_0^x |t| dt,$$

i.e., pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(0)| \\ &\leq \int_0^x |t| dt \\ &= \int_0^x t dt \\ &= \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para nossa λ, já que

$$\left|\lambda'(t)\right| \leq |t|\|x\|^2\|f(x)\|,$$

então

$$|\lambda(t)| \leq \frac{|t|^2}{2}\|x\|^2\|f(x)\|,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Em particular, para $t = 1$, i.e.,

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \|f(x)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|f(x)\|\|x\|^2. \end{aligned}$$

Se $\|f(x)\| = 0$, a desigualdade é trivial, e para $\|f(x)\| \neq 0$,

$$\|f(x)\| \leq \frac{\|x\|^2}{2}.$$

outra forma Suponha que $\|df_x\| \leq \|x\|$. Como cada f_i é de classe $\mathcal{C}^1$ e U é convexo, para cada $x \in U$, $\gamma(t) = tx \in U$, $t \in [0, 1]$, e $f_i \circ \gamma$ é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$. Logo, pelo teorema do valor medo para funções temos que, para cada $i \in [m]$, existe $\theta_i \in (0, 1)$ tal que $f_i(x) = d(f_i)_{\theta_i x} \cdot x$.

Note que, tomando $v_0 \in \mathbb{S}^{m-1}$ tal que $\|df_x\| = \|df_x \cdot v_0\|$, temos

$$\begin{aligned}
\|df_x \cdot v_0\|^2 &= \langle df_x \cdot v_0, df_x \cdot v_0 \rangle \\
&= \sum_{i \in [m]} \left(\sum_{j \in [m]} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) v_j \right)^2 \\
&= \sum_{i \in [m]} \langle \nabla (f_i)_x, v_0 \rangle^2 \\
&= \sum_{i \in [m]} (d(f_i)_x \cdot v_0)^2 .
\end{aligned}$$

Logo, como $\|df_x\| \leq \|x\|$, obtemos

$$\sum_{i \in [m]} (d(f_i)_x \cdot v_0)^2 \leq \|x\|^2.$$

Então, como $\|df_x \cdot v_0\| \geq \|df_x \cdot v\|$ para cada $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &\geq \|df_x \cdot v_0\|^2 \\
&= \sum_{i \in [m]} (d(f_i)_x \cdot v_0)^2 \\
&\geq \sum_{i \in [m]} \left(d(f_i)_{\theta_i x} \cdot \frac{x}{\|x\|} \right)^2 \\
&= \sum_{i \in [m]} \frac{1}{\|x\|^2} (d(f_i)_{\theta_i x} \cdot x)^2 \\
&\overset{TVM}{=} \sum_{i \in [m]} \frac{1}{\|x\|^2} (f_i(x))^2 \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} \|f(x)\|^2,
\end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Logo,

$$\frac{1}{\|x\|^2} \|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2,$$

i.e.,

$$\|f(x)\| \leq \|x\|^2$$

b) Seja $g = f'$. Temos que $dg : U \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é definida por

$$dg_x \cdot v \cdot u = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x).$$

Temos que

$$\|dg_x \cdot v \cdot u\| \leq \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x) \right\| \leq \|u\| \|v\|.$$

Considere a norma $\|dg_x\| = \sup_{\|(u,v)\|=1} (dg_x \cdot u \cdot v)$. Então

$$\|dg_x\| \leq 1.$$

Da mesma forma que provamos no item a) que $\|df_x\| \leq \|x\|$ implica $\|f(x)\| \leq \frac{\|x\|^2}{2}$, temos que

$$\|g(x)\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in U$, i.e.,

$$\|df_x\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in U$. Pelo item a), concluímos que

$$\|f(x)\| \leq \frac{\|x\|^2}{2}.$$

Q6. a) Sejam $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ onde $f(x) = x + g(x)$, i.e., $f = Id_n + g$. Então

$$df = d(Id_n + g) = Id_n + dg : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

que envia $x \in \mathbb{R}^n$ a $df_x = Id_n + dg_x$. Então, temos que

$$\begin{aligned}\langle df_x \cdot h, h\rangle &= \langle dg_x \cdot h + h, h\rangle \\ &= \langle dg_x \cdot h, h\rangle + \langle h, h\rangle \\ &= \langle dg_x \cdot h, h\rangle + \|h\|^2.\end{aligned}$$

Se $\langle dg_x \cdot h, h\rangle \geq -\tau\|h\|^2$, obteríamos o resultado. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $|\langle dg_x \cdot h, h\rangle| \leq \|dg_x \cdot h\|\|h\|$. Como $\|dg_x \cdot h\| \leq \tau$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}|\langle dg_x \cdot h, h\rangle| &\leq \|dg_x\|\|h\|\|h\| \\ &= \tau\|h\|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\tau\|h\|^2 \leq \langle dg_x \cdot h, h\rangle$$

e assim

$$\begin{aligned}\langle df_x \cdot h, h\rangle &= \langle dg_x \cdot h, h\rangle + \|h\|^2 \\ &\geq -\tau\|h\|^2 + \|h\|^2 \\ &= (1-\tau)\|h\|^2.\end{aligned}$$

b) Vamos provar primeiro que g é uma $\tau-$contração. Já que g é de classe $\mathcal{C}^1$ e $\mathbb{R}^n$ é convexo, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f \circ \gamma$ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, onde $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ é definida por $\gamma(t) = ty + (1-t)x$. Logo, pela desigualdade do valor medo temos que

$$\begin{aligned}\|g(y) - g(x)\| &= \|g(x + (y-x)) - g(x)\| \\ &= \|dg_x(y-x)\| \\ &\leq \|dg_x\|\|y-x\| \\ &\leq \tau\|y-x\|.\end{aligned}$$

Assim, g é uma função $\tau-$Lipschitz e portanto uma $\tau-$contração.

Agora, note que

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(0)\| &= \|x + g(x) - g(0)\| \\ &\geq \|x\| - \|g(x) - g(0)\| \\ &\geq \|x\| - \|x\|\tau \\ &= \|x\|(1-\tau).\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \|f(x) - f(0) + f(0)\| \\ &\geq \|f(x) - f(0)\| - \|f(0)\| \\ &= \|x + g(x) - g(0)\| - \|g(0)\|,\end{aligned}$$

i.e., $\|f(x)\| + \|g(0)\| \geq (1-\tau)\|x\|$, para $\|x\| \geq \frac{\|g(0)\|}{1-\tau}$.

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\| + \|g(0)\|}{\|x\|} &= \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|g(0)\|}{\|x\|} \\ &= \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|g(0)\|}{\|x\|} \\ &= \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &\geq \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{(1-\tau)\|x\|}{\|x\|} \\ &= (1-\tau),\end{aligned}$$

onde $\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|g(0)\|}{\|x\|} = 0$ já que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (i.e., $\lim_{x\to 0} \|g(x)\| < \infty$).

Q7. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $df_x = T$ para cada $x \in U$. Seja $g(x) = f(x) - T(x)$. Então $dg = df - dT = 0$, i.e., g é uma função constante. Seja $a = f(x) - T(x)$. Assim, $f = T + a$.

Note que, dada uma função $g \in \mathcal{C}^k(U \in \tau_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R})$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $x \in U$, o $k-$tensor descrevendo a $k-$ésima derivada de g é

$$ {}^kT_g(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} {}^kT_g^{i_1\cdots i_k}(x) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k-\text{vezes}} \to \mathbb{R} $$

definido por

$$ \begin{aligned} {}^kT_g(x)(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k) &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} {}^kT_g^{i_1\cdots i_k}(x) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} {}^kT_g^{i_1\cdots i_k}(x) v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \end{aligned} $$

onde

$$ {}^kT_g^{i_1\cdots i_k}(x) = \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x). $$

Assim, se $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{C}^\infty(U \in \tau_{\mathbb{R}^m}, \mathbb{R}^n)$,

$$ d^k f_x = \begin{pmatrix} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} {}^kT_{f_1}^{i_1\cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \\ \vdots \\ \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} {}^kT_{f_m}^{i_1\cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \end{pmatrix}. $$

Como $d^{k+1}(x) = 0$ para cada $x \in U$, para cada $i \in [m]$, $d(f_i)_x = 0$ para cada $x \in U$ e ${}^{k+1}T_{f_i}^{i_1\ldots i_k}(x) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}(x) = 0$, onde $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in [m]$. Portanto, pelo Teorema de Taylor,

$$ \begin{aligned} f_i(x+v) &= f_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_j=1}^{m} {}^jT_{f_i}^{i_1\ldots i_j}(x) v_{i_1} \ldots v_{i_k} \right) + \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=1}^{m} {}^{k+1}T_{f_i}^{i_1\ldots i_{k+1}}(x) \\ &= f_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \, {}^jT_{f_i}(x)(v^{\otimes j}). \end{aligned} $$

Finalmente,

$$ f(x+v) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} d^j f_x(v^{\otimes j}). $$

Q8. $(\Rightarrow)$ Suponha que $0 \in Im\ h$. Então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $h(b) = 0$. Assim, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$ \begin{aligned} \det\ dF_{(a,b)} &= \left. \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} h & \frac{dh}{dy} f \\ 0 & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix} \right|_{(a,b)} \\ &= f'(a)h(b)g'(b) \\ &= 0. \end{aligned} $$

Logo, F não é injetora em $\{(x,b) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ e portanto não pode ser um difeomorfismo.

$(\Leftarrow)$ Suponha agora que F não é um difeomorfismo. Então existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\det\ dF_{(a,b)} = f'(a)h(b)g'(b) = 0$. Pelo Teorema de Darboux (exemple 11 notas de aula), $f'(x) \neq 0$ e $g'(y) \neq 0$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Logo, $h(b) = 0$ e $0 \in Im\ h$.

Q9. Seja $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $|f'(t)| \leq \kappa < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definida por $h(x,y) = (f(y), f(x))$. Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$ \Phi(x,y) = (x,y) + h(x,y), $$

i.e., $\Phi = Id_2 + h$. Note que

$$ dh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & f'(y) \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix} $$

e assim

$$\begin{aligned}
\left\|dh_{(x,y)}\right\| &= \sup_{(u,v)\in\mathbb{S}^1} \left\|\begin{pmatrix} f'(y)v \\ f'(x)u \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} f'(y)v_0 \\ f'(x)u_0 \end{pmatrix}\right\| \\
&= \sqrt{(f'(y))^2v_0^2 + (f'(x))^2u_0^2} \\
&\leq \sqrt{\kappa^2(v_0^2+u_0^2)} \\
&= \kappa\|(u_0,v_0)\| \\
&= \kappa,
\end{aligned}$$

i.e., $\left\|dh_{(x,y)}\right\| \leq \kappa$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, como antes, h é uma $\kappa-$contração e pelo Teorema da pertubação da identidade (exercício feito em listas passadas e aula), temos que Φ é um homeomorfismo, i.e., para cada $x,y \in \mathbb{R}^2$, h é contínua em $[x,y]$ e diferenciável em (x,y), e assim pela desigualdade do valor medo temos que

$$\begin{aligned}
\|h(y)-h(x)\| &= \|h(x+(y-x))-h(x)\| \\
&= \|dh_x(y-x)\| \\
&\leq \kappa\|y-x\|,
\end{aligned}$$

uma vez que $\|dh_x\| \leq \kappa$.

Além disso, como $\|dh_x\| \leq \kappa$, temos que $d\Phi_x = Id_2 + dh_x$ é um isomorfismo pois si $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ é tal que $dh_x(v) = -v$ (e logo $df_x(v) = v - v = 0$), então $\left\|dh_x\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| = \left\|-\frac{v}{\|v\|}\right\| = 1 \leq \|dh_x\|$, uma contradição.

Logo, pelo teorema da aplicação inversa, Φ é um difeomorfismo local uma vez que $d\Phi_x$ é um isomorfismo para cada $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, como $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo, é injetora e portanto Φ é um difeomorfismo global.

Q10. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que para todo $x, v \in \mathbb{R}^m$ tem-se

$$\langle df_x \cdot v, v\rangle \geq \alpha\|v\|^2.$$

a) Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\gamma(t) = yt + x(1-t)$$

e considere $g = f \circ \gamma$ (i.e., $g(t) = f(yt + x(1-t))$).

Note que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dg}{dt}(t), \gamma'(t)\right\rangle &= \langle df_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle \\
&= \langle df_{\gamma(t)} \cdot (y-x), y-x\rangle \\
&\geq \alpha\|y-x\|^2.
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema Fundamental do Calculo para caminhos (Cap II, Pág 88, Teorema Fundamental do Cálculo), temos que

$$\begin{aligned}
f(y)-f(x) &= g(1)-g(0) \\
&= \int_0^1 g'(t)dt \\
&= \int_0^1 df_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)dt.
\end{aligned}$$

Assim, pela monotonia da integral, temos que

$$\begin{aligned}
\langle f(y)-f(x), y-x\rangle &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\langle g(t), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle df_{\gamma(t)} \cdot (y-x), (y-x)\rangle dt \\
&\geq \int_0^1 \alpha\|y-x\|^2 dt \\
&= \alpha\|y-x\|^2.
\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned}\|f(y)-f(x)\|\|x-y\| &\geq \langle f(y)-f(x), y-x\rangle \\ &\geq \alpha\|y-x\|^2,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|f(y)-f(x)\| \geq \alpha\|y-x\|.$$

Logo, pela condição $\|f(y)-f(x)\| \geq \alpha\|y-x\|$ para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^m$, temos que $x \neq y$ implica $\|f(y)-f(x)\| > 0$ e portanto f é injetora. Além disso, pela hipótese $\langle df_x \cdot v, v\rangle \geq \alpha\langle v, v\rangle$, df_x é injetora para cada $x \in \mathbb{R}^m$, pois se $v \in \mathbb{R}^m$ é tal que $df_x \cdot v = 0$, então $\langle df_x \cdot v, v\rangle = 0 \geq \alpha\|v^2\|$ e $v = 0$, e como $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, df_x é sobrejetora. Assim, df_x é uma bijeção para cada $x \in \mathbb{R}^m$.

Em total, $f : \mathbb{R}^m \to f(\mathbb{R}^m)$ é injetora e de classe $\mathcal{C}^1$ (e assim fortemente diferenciável) e df_x é um isomorfismo para cada $x \in U$. Logo, o Teorema da aplicação inversa implica que $f : \mathbb{R}^m \to f(\mathbb{R}^m)$ é um difeomorfismo. Em particular, f é um homeomorfismo e assim $f(\mathbb{R}^m)$ é aberto uma vez que $\mathbb{R}^m$ é aberto.

Finalmente, seja $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset f(\mathbb{R}^m)$ tal que $y_k \to y \in \mathbb{R}^m$. Como f é uma bijeção sobre sua imagem, temos que existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $f(x_k) = y_k$. Vamos provar $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Por contradição, suponha que essa sequencia não é limitada. Então existem uma subsequencia $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_{k_j}\| \to \infty$. Pela propriedade $\|f(x)-f(y)\| \geq \alpha\|x-y\|$ e a convergência da $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_{k_j} - y\| = \|f(x_{k_j}) - y\| \geq \alpha\|x_{k_j} - x\|$ para cada $j \geq N$, onde $x \in \mathbb{R}^m$ é algum valor fixo (não necessariamente $f(x) = y$). Já que $y_{k_j} \to y$, então $\|y_{k_j} - y\| \to 0$ e assim $\alpha\|x_{k_j} - x\| \leq \|y_{k_j} - y\| \to 0$, uma contradição com o fato que $\|x_{k_j}\| \to \infty$. Portanto, existe uma subsequencia $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{k_j} \to x^*$. Logo,

$$\begin{aligned} y &= \lim_{j\to\infty} y_{k_j} \\ &= \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) \\ &= f\left(\lim_{j\to\infty} x_{k_j}\right) \\ &= f(x_*) \end{aligned}$$

e $y \in f(\mathbb{R}^m)$. Portanto, $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, e como também e aberto, $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$ e f é um difeomorfismo sobre sua imagem.

b) Note que no anterior item, para usar o Teorema da aplicação inversa (na versão fraca), precisamos que a f seja $\mathcal{C}^1$. Más, o fato que f seja fortemente diferenciável em $\mathbb{R}^m$ é suficiente para garantir que, na versão forte o Teorema da aplicação inversa, f seja um difeomorfismo. Esse fato não pode se garantir se a f é apenas diferenciável em $\mathbb{R}^m$ pois, inclusive se df_x é um isomorfismo para cada $x \in \mathbb{R}^m$, como vimos na aula não é possível garantir a diferenciabilidade da inversa f^{-1}.