Analysis in $\mathbb{R}^n$
IMECC

3rd list of excercices
April 4^{th}, 2024

Student: Jaider Torres **RA:** 241343

Notation: Again, $[n] := \mathbb{N} \cap [0, n]$ and, if $X = (X, \tau_X)$ is a topological space, we denote $\mathcal{N}(x)$ as the system of neighborhoods of $x \in X$.

1) a) Para $x, y \in \mathcal{O}$, temos que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \|x + \varphi(x) - y - \varphi(y)\| \\ &\leq \|x - y\| + c\|x - y\| \\ &= (1 + c)d(x, y). \end{aligned}$$

Isso nos diz que f é $(1 + c)-$Lipschitz e assim é continua.

Agora, dado $x, y \in \mathcal{O}$ tais que $f(x) = f(y)$, i.e., $x + \varphi(x) = y + \varphi(y)$, então $x - y = \varphi(y) - \varphi(x)$. Isso implica que $d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$, e assim $(1 - c)d(x, y) \leq 0$. Já que $1 - c > 0$ e $d(x, y) \geq 0$, então $d(x, y) = 0$ e assim $x = y$, i.e., f é injetora. Como o contradomínio de f é $f(\mathcal{O})$, f é sobrejetora e assim uma bijeção com inversa $f^{-1} : f(\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$ definida da seguente forma: se $y \in f(\mathcal{O})$, então existe $a \in \mathcal{O}$ tal que $y = a + \varphi(a)$. Assim, $f^{-1}(y) = f^{-1}(a + \varphi(a)) = a$. Como $f \circ f^{-1} = Id_{f(\mathcal{O})}$ e $f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{O}}$, f^{-1} é a inversa de f.

Além disso, dado $z = a + \varphi(a), w = b + \varphi(b) \in f(\mathcal{O})$, temos que

$$\begin{aligned} d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) &= d(f^{-1}(a + \varphi(a)), f^{-1}(b + \varphi(b))) \\ &= d(a, b) \\ &\leq \frac{1}{1 - c} d(z, w), \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\| &= \|a - b - (\varphi(b) - \varphi(a))\| \\ &\geq \|a - b\| - \|(\varphi(b) - \varphi(a))\| \\ &\geq d(a, b) - cd(a, b) \\ &= (1 - c)d(a, b). \end{aligned}$$

Isso implica que f^{-1} é $\left(\frac{1}{1-c}\right)-$Lipschitz e portanto continua. Assim, $f : \mathcal{O} \to f(\mathcal{O})$ é um homeomorfismo entre $\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ e $f(\mathcal{O}) \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Seja $y \in f(\mathcal{O}) = \mathscr{J}$. Queremos provar que $b \in int(\mathscr{J})$.

Como $b \in \mathscr{J}$, existe $a \in \mathcal{O}$ tal que $b = f(a)$. Podemos usar argumentos de contrações para provar que $y = f(x)$ tem una solução para y próximo a b. Como $\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ (i.e., $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto), para todo $x \in \mathcal{O}$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{B_r(x)} =: B_r[x] \subset \mathcal{O}$. Defina $\zeta_y : B_r[a] \to \mathbb{R}^n$ por $x \mapsto y - \varphi(x)$.

Observe que dado $z, w \in B_r[a]$, temos que

$$\begin{aligned} d(\zeta_y(z), \zeta_y(w)) &= \|y - \varphi(z) - y + \varphi(w)\| \\ &\leq cd(z, w), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(\zeta_y(a), a) &= \|y - \varphi(a) - a\| \\ &= \|y - (\varphi(a) + a)\| \\ &= \|y - b\|. \end{aligned}$$

Assim, ζ_y é uma $c-$contração e vai ter um punto fixo se $d(\zeta_y(a), a) = \|y - b\| \leq (1 - c)r$, pois, já que $B_r[a]$ é completo, se esto é satisfeito, dado $z \in B_r[a]$, i.e., $\|x - z\| \leq r$, temos que

$$\begin{aligned} \|\zeta_y(z) - a\| &\leq \|\zeta_y(z) - \zeta_y(a)\| + \|\zeta_y(a) - a\| \\ &\leq cd(a, z) + r(1 - c) \\ &\leq cr + r(1 - c) = r, \end{aligned}$$

i.e., $f(z) \in B_r[a]$ ou $f(B_r[a]) \subset B_r[a]$.

Se ζ_y tem um punto fixo $x \in B_r[a]$, então $\zeta_y(x) = x$, ou, $f(x) = y$, i.e., se ζ_y tem um punto fixo, a acuação $y = f(x)$ tem uma solução.

Assim, $B_{r(1-c)} \subset f(B_r[a]) \subset \mathscr{J}$. Como $b \in \mathscr{J}$ é arbitrário e $j \in int(\mathscr{J})$, temos que $\mathscr{J} \in \tau_{\mathbb{R}^n}$, i.e., é aberto.

c) Se $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, para cada $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}^n$ temos que se $B_r[a] \subset \mathcal{O}$ então $B_{r(1-c)}[f(a)]] \subset f(\mathcal{O}) =: \mathscr{J}$. Tomando $r_k = \frac{k}{1-c}$, $k \in \mathbb{N}$, então $B_k[f(a)] \subset \mathscr{J}$ e

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k[f(a)] \subseteq \mathscr{J},$$

ou seja, $\mathscr{J} = \mathbb{R}^n$.

2) Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por $A \mapsto AA^T$ e escolha $(A_k = (a^k_{ij}))_{k \in \mathbb{N}} \subset M_n(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{kl \to \infty} A_k = A \in M_n(\mathbb{R})$. Então $AA^T = \left(\sum_{m \in [n]} a^k_{im} a^k_{jm}\right)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Agora, para cada $m, i, j \in [n]$ temos que $a^k_{im} a^k_{jm} \to a_{im} a_{jm}$ pois $a^k_{im} \to a_{im}$ e $a^k_{jm} \to a_{jm}$, e assim $\sum_{m \in [n]} a^k_{im} a^k_{jm} \to \sum_{m \in [n]} a_{im} a_{jm}$. Isso implica que $A_k A_k^T \to AA^T$. Portanto, f é contínua.

Observe que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ e assim $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ é fechado. Agora, observe que $(a_{ij})i, j \in [n] \in M_n(R)$ é equivalente ao $(a_{11}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$. Usando a métrica $\|A\| = \sum i, j \in [n] |a_{ij}|$ em $\mathbb{R}^{n^2} \cong M_n(\mathbb{R})$, temos que, para $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $O^2_{ij} \leq \sum_{m \in [n]} O^2_{mj} = (OO^T)_{jj} = 1$ já que $OO^T = I_n$ e assim $\|O\| \leq n^2$. Outra forma, usando a métrica euclídea de $\mathbb{R}^{n^2}$ e o fato anterior, é notar que $\|O\| = n^{\frac{1}{2}}$. Portanto, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ é limitado e assim compacto pois $\mathbb{R}^{n^2}$ é um espacio métrico.

3) Observe que, dada

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

temos que

$$\det\ X =: f_{\det}(x_{11}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{nn}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i \in [n]} x_{i\sigma(i)}.$$

Assim, $\det(\cdot) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ pode ser visto como $f_{\det} \in \mathbb{R}[x_{11}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{nn}]$.

Como $f_{\det} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é polinomial, ela é contínua. Já que $f^{-1}_{\det}(1) = SL_n(\mathbb{R})$, temos que $SL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ é fechado.

Seja $O \in SL_n(\mathbb{R})$, para $n \geq 2$, onde

$$O = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

i.e., 1 na diagonal principal exceto dois elementos, $a, \frac{1}{a}$, e 0 em las as outras entradas. Observe que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que $O^k \in SL_n(\mathbb{R})$, mas

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \left\| O^k \right\| &= \lim_{k \to \infty} \sqrt{a^{2k} + \frac{1}{a^{2k}} + n - 2} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Assim, descobrimos $A \in SL_n(\mathbb{R})$ tal que $\|A\| > R$ para cada $R \in \mathbb{R}^+$.

Portanto, $SL_n(\mathbb{R})$ não é compacto.

4) a) Seja $x_i \in \mathbb{R}$ e considere $U_i = (x_i - \pi, x_i + \pi) \in \tau_{\mathbb{R}}$. Queremos provar que $\xi|_{U_i} : U_i \to \xi(U_i)$ é um homeomorfismo. Note que dado $x, y \in U_i$ tais que $x \neq y$, então $\xi|_{U_i}(x) = (\cos(x), \sin(x)) \neq (\cos(y), \sin(y)) = \xi|_{U_i}(y)$, e assim $\xi|_{U_i}$ é injetora. Além disso, já que $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, temos que para cada $y \in \xi(U_i)$ existe $t_0 \in U_i$ na classe de equivalência de $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $\xi|_{U_i}(t_0) = y$. Dessa forma, $\xi|_{U_i}$ é uma bijecção. Para a inversa, defina $\gamma : \mathbb{S}^1 \to (0, 2\pi] : (\cos(\theta), \sin(\theta)) \mapsto \theta$ e $T_{2k\pi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e tal que $t + 2k\pi \in U_i$. Então $T_{2k\pi} \circ \gamma = \xi|^{-1}_{U_i} : \xi(U_i) \to U_i$ é

a inversa de $\xi|_{U_i}$ pois $\xi|_{U_i} \circ \xi|_{U_i}^{-1} = Id_{\mathbb{S}^1}$ e $\xi|_{U_i}^{-1} \circ \xi|_{U_i} = Id_{U_i}$. Como as funções componente da curva $\xi|_{U_i}$ são contínuas, $\xi|_{U_i}$ é contínua. Agora, seja $\{X_n = (\cos(x_n), \sin(x_n))\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}^1$ tal que $X_n \to X \in \mathbb{S}^1 \backslash \{(\sin(0), \cos(0)), (\sin(2\pi), \cos(2\pi))\}$. Então $x_n \to x$ e portanto γ é contínua. Assim, $\xi|_{U_i}^{-1}$ é continua pois é a composição de fincões contínuas. Portanto, $\xi|_{U_i}$ é um homeomorfismo e ξ é um homeomorfismo local.

b) Seja $A \in \tau_X$ e tome $y \in f(A)$. Existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como f é um homeomorfismo local, então existe um aberto $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $f|_V : V \to f(V)$ é um homeomorfismo. Agora, como $V \supseteq V \cap A \in \tau_X$ (pois $V, A \in \tau_X$), temos que $f|_V(A \cap V) \in \tau_Y$ e assim $f(A \cap V) \in \tau_Y$. Dessa forma $y \in int(f(A))$. Como $y \in f(A)$ é arbitrário, temos que $f(A) \in \tau_Y$ e assim f é uma aplicação aberta.

c) Sejam $y \in Y$ e $x \in f^{-1}(y)$. Por contradição, suponha que $x \in f^{-1}(y)$ é um punto de acumulação. Então para cada $\varepsilon > 0$ temos que $B_\varepsilon(x) \backslash \{x\} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Assim, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(y)$ tal que $x_n \to x$, com $x_n \neq x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que $f(x_n) = y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f é um homeomorfismo local, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $f|_V : V \to f(V)$ é homeomorfismo. Assim, dado $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{\varepsilon_0}(x) \subset V$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_{\varepsilon_0}(x) \subset V$ para cada $n \geq N$ natural. Então $f(x_n) = f(x) = y$, porém $x_n \neq x$, contradizendo a injetividade de $f|_V$. Portanto, $f^{-1}(y)$ é discreto.

5) a) Suponha por contradição que $int \cup_i F_i = F \neq \emptyset$. Seja $A_0 \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ tal que $A_0 \subset F$. Como $intF_1 = \emptyset$, $A_0 \not\subset F_1$. Assim, podemos escolher $a_1 \in A_0 \backslash F_1$. Como F é Hausdorff (usando a topologia do subespaço, com a qual F também é compacto), podemos encontrar uma vicindade aberta $A_1 \in \mathcal{N}(a_1)$ tal que $\overline{A_1} \subset A_0$ e $\overline{A_1} \cap F_1 = \emptyset$. Mantendo a construção dessa forma, ou seja, obtendo um aberto $A_{n-1} \not\subset F_n$, escolhemos $a_n \in A_{n-1} \setminus F_n$ e então escolhemos um aberto $A_n \in \mathcal{N}(a_n)$ tal que $\overline{A_n} \cap F_n = \emptyset$ e $\overline{A_n} \subset A_{n-1}$. Como F é compacto, $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{A} \neq \emptyset$. Seja $w \in \overline{A}$. Assim, notamos que $w \notin F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e então $w \notin F$. Isso significa que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ contém elementos que não estão em F. Assim, F não pode conter conjuntos abertos, contradizendo a suposição. Portanto, $intF = \emptyset$.

b) Seja $U \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ e $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Queremos provar que $U \cap A \neq \emptyset$. Como $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ é denso e U é aberto, existe $x_1 \in U \cap A_1 = U_1$. Como $U_1 \neq \emptyset$ é aberto, existe $U_2 \in \mathcal{N}(x_1)$ tal que $\overline{U_2} \subset U \cap A_1$. Repetimos essa construção com U_2 e o conjunto aberto denso A_2 para obter $x_2 \in U_2 \cap A_2$. Novamente, podemos escolher $U_3 \in \mathcal{N}(x_2)$ tal que $\overline{U_3} \subset U_2 \cap A_2$, já que $U_2 \cap A_2 \in \tau_{\mathbb{R}^n}$. Procedendo dessa forma, obtemos para cada $n \in \mathbb{N}$ um $x_n \in U_n \cap A_n$ e assim podemos escolher $U_{n+1} \in \mathcal{N}(x_n)$ tal que $\overline{U_{n+1}} \subset U_n \cap A_n$. Dessa forma, obtemos a coleção decrescente de conjuntos fechados aninhados $\{\overline{U_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz que $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} = \underline{U} \neq \emptyset$. Como $\underline{U} \subset U_k \cap A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\emptyset \neq \underline{U} \subset U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = U \cap A$, deduzimos que A é denso já que $U \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ é arbitrário.

6) Sejam $A = (A_{ij})_{i,j\in[n]}$ e $B = (b_{ij})_{i,j\in[n]}$ e vamos assumir que $\|A - B\|_{\mathbf{F}} \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned}
|\det A - \det B| &= \left| \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i\in[n]} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)} \right| \\
&= \left| \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \left(\prod_{i\in[n]} a_{i\sigma(i)} - \prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\sigma\in S_n} \left| \prod_{i\in[n]} a_{i\sigma(i)} - \prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)} \right| \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \left| \prod_{i\in[n]} (b_{i\sigma(i)} + l_{i\sigma(i)}) - \prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)} \right|
\end{aligned}$$

Onde $l_{i\sigma(i)} \in \mathbb{R}$ são tais que $a_{i\sigma(i)} = b_{i\sigma(i)} + l_{i\sigma(i)}$, i.e., $A - B = L = (l_{ij})_{i,j\in[n]} \in M_n(\mathbb{R})$. Lembremos que, dado $\{x_i, y_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}$ e $\{n_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{N}$, pelo **teorema multi-binomial** tem que

$$\prod_{i\in[n]} (x_i + y_i)^{n_i} = \sum_{k_1\in[n_1]} \cdots \sum_{k_n\in[n_n]} \prod_{i\in[n]} \binom{n_i}{k_i} x_i^{k_i} y_i^{n_i - k_i}.$$

Assim, temos que

$$\sum_{\sigma\in S_n} \left| \prod_{i\in[n]} (b_{i\sigma(i)} + l_{i\sigma(i)}) - \prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)} \right| = \sum_{\sigma\in S_n} \left| \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \prod_{i\in[n]} \binom{1}{k_i} b_{i\sigma(i)}^{k_i} l_{i\sigma(i)}^{1-k_i} - \prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)} \right|$$

Temos que o último termo é

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_n}\left|\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1}\left(\prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)}^{k_i} l_{i\sigma(i)}^{1-k_i}-\frac{1}{2^n}\prod_{j\in[n]} b_{j\sigma(j)}\right)\right| \\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\left|\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1}\prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)}^{k_i}\left(\prod_{j\in[n]} b_{j\sigma(j)}^{1-k_j} l_{j\sigma(j)}^{1-k_j}-\frac{1}{2^n}\right)\right| \\
&\leq \sum_{\sigma\in S_n}\left|\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1}\prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)}^{k_i} l_{i\sigma(i)}^{1-k_i}\right| \\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\left|\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{1}\prod_{i\in[n]} b_{i\sigma(i)}^{k_i} l_{i\sigma(i)}^{1-k_i}\right|.
\end{aligned}$$

Para $k\in\mathbb{N}$, seja $[n]_k=\{i_1,\ldots,i_n\in\{0,1\}:\sum_{j\in[n]} i_j=k\}$. Temos que o último termo da cadena é

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in S_n}\left|\sum_{m\in[n-1]}\sum_{k\in[n]_m}\prod_{h\in[n]}\left(l_{h\sigma(h)}^{1-k_h} b_{h\sigma(h)}^{k_h}\right)\right| &\leq \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{m\in[n-1]}\sum_{k\in[n]_m}\left|\prod_{h\in[n]}\left(l_{h\sigma(h)}^{1-k_h}\right)\right|\left|\prod_{h\in[n]}\left(b_{h\sigma(h)}^{k_h}\right)\right| \\
&\leq \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{m\in[n-1]}\sum_{k_j\in[m]}\|L\|_F^{n-(k_1+\cdots+k_n)}\|B\|_F^{k_1+\cdots+k_n} \\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{m\in[n-1]}|[n]_m|\|L\|_F^{n-m}\|B\|_F^m \\
&=\sum_{m\in[n-1]} n!\binom{n}{m}\|A-B\|_F^{n-m}\|B\|_F^m
\end{aligned}$$

Logo, $\det(\cdot)$ é localmente contínua e portanto contínua, mas ela não é Lipschitz pois o coeficiente que limita a distancia de suas imagens depende da alguma de suas entradas.