AULA 07 - 27/03 - OTIMIZAÇÃO

OBJETIVO Encontrar pontos de máximo e mínimo de uma função

TEO. (TOPOLOGIA) Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto e $f: K \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máx. e min. GLOBAL em K.

Podemos tentar aplicar esse resultado mesmo quando K não é compacto.

EX. $f(x,y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$. Quais são os máx. e min. em $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$?

Observe que Q é fechado, mas não é limitado.

Como $0 \leq f(x,y) \leq 1$ em Q e $f(0,y) = 0$ $\forall y \geq 0$, temos $\{(0,y) : y \geq 0\}$ é o conj. de pontos de mínimo global ($x \neq 0 \Rightarrow f(x,y) > 0 \Rightarrow (x,y)$ não é min. global).

Estudamos o comportamento quando $\|(x,y)\| \to \infty$:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{\|(x,y-1)\|}{\|(x,y-1)\|^2+4} \leq \frac{1}{\|(x,y-1)\|^2} \to 0$$

Logo, f tem um máximo global em Q (segue do TEO. acima)

Agora que sabemos que f tem um máximo global, vamos tentar encontrá-lo.

Ele está no interior de Q ou no eixo x ($y=0$)

No interior de Q, procuramos os pontos críticos (candidatos à ponto máx.)

Análogo ao método p/ achar máx. e mín. em Análise na Reta! Estudamos o interior do intervalo e depois os extremos.

$$0 = df = \frac{1}{(x^2+(y-1)^2+4)^2}\big((-)dx + (-)dy\big)$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = (y-1)^2+4 \\ x(y-1) = 0 \\ x, y > 0 \end{cases} \iff (x,y) = (2,1)$$

Temos $f(2,1) = \frac{1}{4}$.

No eixo x, procuramos os pontos críticos de $\varphi(t) = f(t,0) = \frac{t}{t^2+5}$, $t > 0$.

Como $\varphi'(t) = \frac{-t^2+5}{(t^2+5)^2}$, segue que $\varphi'(t) = 0, t > 0 \iff t = \sqrt{5}$.

Temos $f(\sqrt{5}, 0) = \frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{4} = f(2,1)$

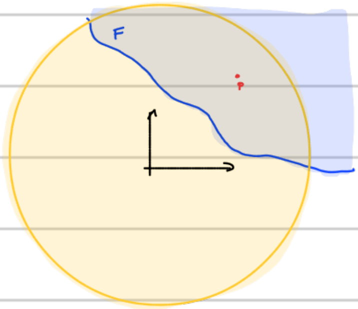
? Logo, $(2,1)$ é ponto de máximo global.

LEMA Sejam $F \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado e ilimitado e $f: F \to \mathbb{R}$ contínua.

(1) Se $f(x) \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$ em F, então f tem mínimo global em F.

(2) Se $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$ em F e existe $p \in F$ t.q. $f(p) > 0$ (resp. $f(p) < 0$), então f tem um máx. (resp. mín.) global em F.

DEM. (caso (2), com $f(p)>0$; ex. anterior) Como $f(x)\to 0$ quando $\|x\|\to\infty$ e $f(p)>0$, então existe $R>0$ t.q. $f(x)<f(p)\ \forall \|x\|>R$.
Seja $K=\{x\in F : \|x\|\leq R\}$. Temos K é compacto e $p\in K$, logo $f|_K$ tem um máximo, digamos $f(p_0)$ p/ algum $p_0\in K$.
Este é o max. global em F, pois $x\in F\setminus K \Rightarrow f(x)<f(p)\leq f(p_0)$



OTIMIZAÇÃO c/ CONDIÇÕES (en.: "problems w/ constraints")

Agora, minimizar e maximizar uma função num conj. da forma
$$H=\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)=0\}$$

Se g é C^k e $dg(p)\neq 0\ \forall p\in H$, então H é uma HIPERSUPERFÍCIE de classe C^k definida pela eq. $g=0$.

→ $k\geq 1$, c.c. não podemos aplicar TEO. APL. IMPL.
→ 0 é um valor regular de g.

↳ ELON: HIPERFÍCIE

ex. A esfera unitária de dim. $n-1$, $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$, é a hipersuperfície de classe C^∞ definida pela eq. $g(x)=\|x\|^2-1 = x_1^2+\dots+x_n^2-1$.

EXERCÍCIO verificar a condição $p\in S^{n-1}\Rightarrow dg(p)\neq 0$.

OBS. veremos que a condição "$g(p)=0\Rightarrow dg(p)\neq 0$" garante que H é uma variedade de classe C^k (sem singularidades) e que o espaço tangente de H em p é
$$T_pH=\ker(dg(p))=\{v\in\mathbb{R}^n : dg(p)\cdot v=0\}.$$

ex. Máx. e mín. de $f(x,y)=x^2+y^2+y$ no disco $\{x^2+y^2\leq 1\}$.

- Pontos críticos no interior do disco:
$$0=df = 2x\,dx+(2y+1)\,dy \iff \begin{cases} 2x=0 \\ 2y+1=0 \\ x^2+y^2<1\end{cases} \iff x=(0,-\tfrac{1}{2})\ ,\ f(0,-\tfrac12)=-\tfrac14$$

- Bordo do disco, S^1 : Problema de otimização c/ condições.

Vamos aplicar o:

TEO. [MULTIPLICADORES DE LAGRANGE] Seja $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $f: U\to\mathbb{R}$ de classe C^1 e $H=\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)=0\}$ uma superfície de classe C^1 contida em U. Se $p\in U$ é um extremo local de $f|_H : H\to\mathbb{R}$, então existe $\lambda\in\mathbb{R}$ t.q. $df(p)=\lambda\, dg(p)$.

→ λ é chamado MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

(equiv., $\ker(dg(p))\subseteq\ker(df(p))$; $\ker(dg(p)) = T_pH$)

DEM. [IDEIA] Basta mostrar que p é um ponto crítico de $f|_H$, i.e., $df(p)|_{T_pH}=0$.

Ex. (voltando) Queremos resolver $\begin{cases} df = \lambda\, dg \\ g = 0 \end{cases}$ → n equações $\left(g(x) = x^2+y^2-1\right)$

$$\iff \begin{cases} 2x\,dx + (2y+1)\,dy = \lambda(2x\,dx + 2y\,dy) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda x \\ 2y+1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\iff x=0$ e $y = \pm 1$ $\left(\lambda = \frac{3}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}\right)$. Temos $f(0,1)=2$, $f(0,-1)=0$

Máximo global: $f(0,1)=2$ e Mínimo global: $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

Dem. [TEO. ESPECTRAL VIA MULT. LAGRANGE] Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sim.

Considere $f(x) = \langle Ax, x\rangle$. Seja $u_1 \in S^{n-1}$ máx. global de $f|_{S^{n-1}}$.

Pelo TEO., existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $df(u_1) = \lambda_1\, dg(u_1)$, onde $g(x) = \|x\|^2 - 1$.

P/ todo $v \in \mathbb{R}^n$, temos

$$2\langle Au_1, v\rangle = df(u_1)\cdot v = \lambda\, dg(u_1)\cdot v = \lambda_1 2\langle u_1, v\rangle,$$

Portanto, $\langle Au_1, v\rangle = \langle \lambda_1 u_1, v\rangle$.

Como isso vale p/ todo v, segue $Au_1 = \lambda_1 u_1$, ou seja, u_1 é autovetor c/ autovalor λ_1.

Seja $V_1 = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u_1\rangle = 0\}$ o compl. ort. de $\mathbb{R}u_1$.

$\left(\mathbb{R}^n = \mathbb{R}u_1 \oplus V_1 \rightsquigarrow V_1 \simeq \mathbb{R}^{n-1}\right)$.

Note que A preserva V_1, pois:

$$\langle u_1, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1, Av\rangle = \langle Au_1, v\rangle = \langle \lambda_1 u_1, v\rangle = \lambda_1\langle u_1, v\rangle = 0.$$

Podemos considerar a forma quadrática $f|_{V_1} : V_1 \simeq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$

← Escrevemos x em uma base de V_1 e Ax na mesma base.

O resultado segue por indução: Maximizando $f|_{V_1}$ em $S^{n-1}\cap V_1 \simeq S^{n-2}$, obtemos $u_2 \in V_1$, com $\|u_2\| = 1$, e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $A(u_2) = \lambda_2 u_2$; (...) □

Ideia: Considere A já diag.

$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

ordenada por $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Temos $f(x) = \langle Ax, x\rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda_1 \|x\|^2$

Portanto, em S^{n-1}, $f(x) \leq \lambda_1$

Note que f atinge: $f(x_1) = \lambda_1$

Portanto, λ_1 é máximo global de f em S^{n-1} (valor é atingido no autovetor associado, x_1)