AULA 07 - 20/03

DEF. Dizemos que f **SE ANULA À ORDEM $k+1$** em p se

$$f(p)=0, \quad df(p)=0, \quad \dots, \quad d^k f(p)=0$$

Equiv.m., $\partial^\alpha f(p)=0 \quad \forall |\alpha|\leq k$ (segue do exercício abaixo)

EXERCÍCIO Se $f(x)=\sum_{|\alpha|\leq d} c_\alpha x^\alpha$ é uma função pol. que se anula identicamente em uma viz. da origem, então $c_\alpha=0 \ \forall \alpha$.

OBS. Em corpo inf, função pol. é equiv. a pol. (alg.)

TEO. Sejam $k\geq 1$ e f uma função k vezes dif. em $0\in\mathbb{R}^n$. Se f se anula à ordem $k+1$, então $f(v)=o(\|v\|^k)$

→ VALE A VOLTA!

DEM. Por indução em k.

$(k=1)$ Imediato da def. de diferenciabilidade.

$(k\geq 2)$ Suponha que o resultado vale até $k-1$. Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é $k-1$ vezes dif. e se anula à ordem k em $0\in\mathbb{R}^n$, pela HI:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(v)=o(\|v\|^{k-1}), \quad v\to 0 \qquad (\text{p/ todo } i=1,\dots,n).$$

→ Temos informação sobre as derivadas parciais, como obter info. sobre f? R: TVM!

Pelo TVM, p/ $v\in\mathbb{R}^n$ suf. pequeno, existe $\theta\in(0,1)$ t.q.

$$f(v)=df(\theta v)v=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)v_i.$$

Dividindo por $\|v\|^k$:

$$\frac{f(v)}{\|v\|^k}=\sum_{i=1}\underbrace{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)}{\|v\|^{k-1}}}\ \underbrace{\frac{v_i}{\|v\|}}_{\text{limitado}} \xrightarrow{v\to 0} 0 \qquad \square$$

↳ $\theta^{k-1}\frac{1}{\|\theta v\|^{k-1}}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)\to 0$, pois $\frac{\partial f}{\partial x_i}(v)=o(\|v\|^{k-1})$, $v\to 0$.

COR. (FÓRMULA TAYLOR INFINITESIMAL) Sejam $k\geq 1$ e f uma função k vezes dif. em $p\in\mathbb{R}^n$, então,

$$f(p+v)=\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!}d f^i(p)\cdot v^{\otimes i}+o(\|v\|^k)$$

$$=f(p)+df(p)\cdot v+\frac{1}{2}d^2f(p)\cdot v^{\otimes 2}+\dots+\frac{1}{k!}df^k(p)\cdot v^{\otimes k}+o(\|v\|^k)$$

DEM. Considere $r_k(v)=$

Basta observar que r_k é <u>k vezes dif. em 0</u> e se anula à ordem $k+1$ em 0 $\square$

EXERCÍCIO verificar

↳ pois f é k vezes dif. em p e os demais termos são polinomiais (e, portanto, C^∞).

OBS. Alternativamente, do último exercício da aula passada, podemos reescrever a fórmula de Taylor

$$f(p+v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p) v^\alpha + o(\|v\|^k)$$

(Precisaríamos provar $\partial^\beta r_k(0) = 0 \quad \forall |\beta| \leq k$) ou

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(p)(x-p)^\alpha + o(\|x-p\|^k).$$

EX. (MÉTODO P/ CALC.) Fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 5 de $f(x,y) = \frac{x}{1+xy}$ em $(x,y) = 0$.

JEITO 1: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(1+xy) - xy}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}$, ...

JEITO 2: $\frac{x}{1+xy} = x \frac{1}{1-(-xy)} = x(1 + (-xy) + (-xy)^2 + \cdots)$ se $|xy| < 1$

$$= \underbrace{x - x^2y + x^3y^2}_{\text{pol. grau} \leq 5} - \underbrace{x^4y^3 + \cdots}_{o(x^4y^3)} \to \text{queremos } o(\|(x,y)\|^5)$$

$$\frac{x^4y^3}{\|(x,y)\|^5} = \underbrace{\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}\right)^4}_{\text{lim.}} \underbrace{\frac{y}{\|(x,y)\|}}_{\text{lim.}} \cdot y^2 \to 0$$

Encontramos uma fórmula $f(x,y) = x - x^2y + x^3y^2 + o(\|(x,y)\|^5)$, porém essa é a fórmula de Taylor?

EXERCÍCIO Supondo f k vezes dif., use a fórmula de Taylor p/ provar a volta do TEU. Conclua a unicidade da FT infinitesimal, ou seja, se

$$f(p+v) = P_0(v) + P_1(v) + \cdots + P_k(v) + o(\|v\|^k),$$

com P_i pol. homogêneos de grau i, então $P_i(v) = \frac{1}{i!} d^i f(p) \cdot v^{\otimes i}$.

OUTRAS FT C/ RESTO EXPLÍCITO

Em uma var., se $\varphi \in C^{k+1}(I)$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e $a \in I$, então p/ todo $x \in I$.

- FT c/ resto de LAGRANGE: $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \varphi^{i}(a)(x-a)^i + \frac{1}{(k+1)!} \varphi^{(k+1)}(c)(x-a)^{k+1}$

p/ algum c entre a e x.

- FT c/ resto INTEGRAL: $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \varphi^{i}(a)(x-a)^i + \int_a^x \frac{1}{k!} \varphi^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt$

→ DEM. $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)dt$ (TFC)

(Aplicamos integração por partes repetidas vezes)

COR. [FT c/ resto de LAGRANGE e INTEGRAL] Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e ~~convexo~~ e $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k+1}. P/ todo $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tal que ~~$p+v \in U$~~ (t.q. $[p, p+v] \subseteq U$), temos

(i) $f(p+v) = T_k(v) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(p+\theta v) \cdot v^{\otimes(k+1)}$, p/ algum $\theta \in (0,1)$;

(ii) $f(p+v) = T_k(v) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k d^{k+1} f(p+tv) \cdot v^{\otimes(k+1)} dt$.

DEM. Basta aplicar as FT correspondentes em uma var. à função $\varphi(t) = f(p+tv)$ e notar que

$$\varphi'(t) = df(p+tv) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv) \cdot v_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv)\right]' v_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p+tv)\, v_i v_j = d^2 f(p+tv) \cdot v^{\otimes 2}$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(k)}(t) = df^k(p+tv) \cdot v^{\otimes k}$$

(Isso tbm. prova que φ é k vezes dif.)