Lista 2: diferencial de uma função

21 de março de 2025

1. Seja $f(x,y) = e^{4x-y^2}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ onde $p = (1,-2)$ e $v = (3/5, 4/5)$.
2. Considere um cone de altura 5 cm e base de raio 3 cm. Se a altura for aumentada de 0.2 cm, estime o quanto deve diminuir o raio para que o volume se mantenha constante.
3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Calcule $df(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.
4. Estude a diferenciabilidade de
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$
5. (Qualificação 2006) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $|f(x)| \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostre que f é diferenciável em $x = 0$.
6. (Qualificação 2019) Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$
A função f é contínua? Tem derivadas parciais na origem? É diferenciável?
7. (Qualificação 2017) Para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^4z^6)}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, & (x,y,z) \neq 0 \\ 0 & (x,y,z) = 0 \end{cases}$$
é diferenciável em $\mathbb{R}^3$? Para quais ela não é?
8. (Qualificação 2021) Seja $\rho \in \mathbb{R}$ e considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e
$$f(x,y) = \frac{x^\rho y(x-y)}{x^2+y^2}$$
se $(x,y) \neq 0$.
   (a) Estude a continuidade de f dependendo do valor de ρ.
   (b) Calcule, se possível, $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$.
   (c) Estude a diferenciabilidade na origem de f dependendo do valor de ρ.
9. (Qualificação 2010, 2013) Sejam f e g duas funções diferenciáveis em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $f(0) = g(0)$ e que $\nabla f(0) = \nabla g(0)$. Seja h uma função definida em uma vizinhança U de 0 tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em U. Mostre que h é diferenciável em $x = 0$.

10. Uma *forma quadrática* é uma função da forma

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle,$$

onde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica. Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e calcule os funcionais lineares $df(p)$.

11. Seja V_n o espaço vetorial das funções polinomiais em uma variável de grau menor ou igual a n, isto é, funções da forma $p(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$, com $x_i \in \mathbb{R}$. Note que podemos identificar V_n com $\mathbb{R}^{n+1}$ tomando os coeficientes x_i como coordenadas. Estude a diferenciabilidade da função

$$f : V_n \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \int_0^1 \operatorname{sen}(tp(t))dt.$$

12. Calcule a diferencial da função $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

13. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Mostre que, se f e g são funções diferenciáveis em U, então $f+g$, fg e f/g (se g nunca se anula em U) são funções diferenciáveis em U e valem as fórmulas

$$d(f+g) = df + dg, \qquad d(fg) = fdg + gdf, \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Se $k \geq 1$ é inteiro, vale também

$$d(f^k) = kf^{k-1}df.$$

14. Mostre que

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|$$

é diferenciável e calcule seu gradiente em todo ponto $p \neq 0$.

15. Considere as funções $f_i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_i(x) = x_i/\|x\|$. Mostre que

$$x_1 df_1 + \cdots + x_n df_n = 0.$$

16. Sejam $V_1, \ldots, V_k$ espaços vetoriais de dimensão finita. Uma função $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R}$ é dita *multilinear* se é linear em cada V_i, isto é:

$$f(v_1, \ldots, u_i + \lambda w_i, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_n) + \lambda f(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_n).$$

   (a) Considerando normas apropriadas $\|\cdot\|_i$ em cada um dos espaços V_i, obtenha uma estimativa do tipo

   $$|f(v_1, \ldots, v_k)| \leq C\|v_1\|_1 \cdots \|v_k\|_k,$$

   onde C é uma constante e $v_i \in V_i$ são arbitrários.

   (b) Mostre que toda função multilinear é diferenciável e calcule sua diferencial.

17. (Qualificação 2009) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada *homogênea de grau 1* se, para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$ tivermos $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, homogênea de grau 1.

   (a) Seja $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e suponha que f é diferenciável em p. Mostre que, para qualquer $\lambda > 0$, f é diferenciável em λp e que $\nabla f(\lambda p) = \lambda \nabla f(p)$.

   (b) Mostre que, se f é diferenciável em 0, então f é linear.

18. Um *extremo local* de uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é um ponto $p \in U$ para o qual existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(p) = \max_{\|x-p\|<\varepsilon} |f(x)|$ ou $f(p) = \min_{\|x-p\|<\varepsilon} |f(x)|$. Mostre que, se f é diferenciável e $p \in U$ é um extremo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

19. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* se, para todos $p, q \in U$, vale

$$f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q), \qquad t \in [0,1].$$

Mostre que, se f é convexa em U e diferenciável em um ponto $p \in U$, então, para todo $q \in U$, temos

$$f(q) - f(p) \geq df(p)(q-p). \tag{1}$$

Conclua que, se $\nabla f(p) = 0$, então p é um mínimo global de f em U.

20. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* se, para todos $p, q \in U$, vale

$$f((1-t)p + tq) < (1-t)f(p) + tf(q), \qquad t \in (0,1).$$

Mostre que, se f é estritamente convexa em U e diferenciável em p, então, para todo $q \in U$, temos

$$f(q) - f(p) > df(p)(q-p). \tag{2}$$

[Dica: considere $g(x) \coloneqq f(x) - f(p) - df(p)(x-p)$ e observe que g também é estritamente convexa.]

21. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Mostre a seguinte recíproca para os exercícios anteriores: se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto de U e satisfaz (1) (resp. (2)) para todos $p, q \in U$, então f é convexa (resp. estritamente convexa).