AULA 08 - 03/04

APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $\boxed{F}: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Pensamos em uma "função à valores vetoriais" e escrevemos $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, com $F_i : U \to \mathbb{R}$ função (a i-ésima componente).

→ NOTAÇÃO NO CURSO: Letra maiúscula.

EX. Um caminho em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo; $c: I \to \mathbb{R}^m$

→ versão dual de uma função: $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ vs. $(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m)$
Frequentemente conseguimos reduzir os problemas a funções e caminhos.

DEF. Seja $p \in U$. A apl. $F: U \to \mathbb{R}^m$ é DIFERENCIÁVEL em p se existe uma transf. linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.q. $F(p+v) = \underbrace{F(p) + L \cdot v}_{\text{afim}} + o(\|v\|)$ quando $v \to 0$.

→ A notação $o(\cdot)$ denota o análogo em $\mathbb{R}^m$

Intuitivamente, L é a transf. linear que melhor aprox. $F(p+v) - F(p)$ quando $v \to 0$.

OBS. O resto $r(v) = F(p+v) - F(p) - Lv$ toma valores em $\mathbb{R}^m$. Além disso,

$$r(v) = o(\|v\|^k) \overset{\text{def.}}{\iff} \frac{r(v)}{\|v\|^k} \to 0 \text{ quando } v \to 0,$$

isto é, se $r(v) = (r_1(v), \dots, r_m(v))$, então $r(v) = o(\|v\|^k) \iff r_i(v) = o(\|v\|^k)\ \forall i$.

LEMA Se $F = (F_1, \dots, F_m)$ é dif. em p, com $L = (L_1, \dots, L_m)$ como na def. Então F_i é dif. em p e $L_i = dF_i(p)$ $\forall i = 1, \dots, m$.

→ As componentes de L são funcionais lineares

Além disso, vale a volta: se cada F_i é dif. em p, então F é dif. em p.

DEM. $(\Rightarrow)$ Temos que $L_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um funcional linear e, olhando p/ i-ésima coord. da def. dif. de F, temos $F_i(p+v) = F_i(p) + L_i \cdot v + o(\|v\|)$, $v \to 0$ #

$(\Leftarrow)$ EXERCÍCIO □

COR. L é única!

DEF. Se $F: U \to \mathbb{R}^m$ é dif. em p, a DERIVADA de F em p é a única transf. linear $DF(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.q. $F(p+v) = F(p) + DF(p) \cdot v + o(\|v\|)$ quando $v \to 0$.

OBS. Outros nomes e notação: "APLICAÇÃO TANGENTE" e "~~DIFERENCIAL~~"

$$T_pF, \quad F_*, \quad \underset{\text{ECON}}{F'(p)} \qquad \cancel{dF(p)}$$

→ Mais comum reservarmos este nome/notação p/ funções

No caso $m=1$, i.e., temos $f: U \to \mathbb{R}$, então $DF(p) = df(p)$.

$(m=1)$ diferencial = derivada

RESUMO

LEMA $F=(F_1,\dots,F_m)$ é dif. em $p \iff$ cada F_i é dif. em p. Nesse caso $DF=(dF_1,\dots,dF_m)$

EX. Se $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim, digamos $F(x)=Lx+b$, então $DF(p)=L$.

De fato, $F(p+v)=(Lp+b)+L\cdot v=F(p)+L\cdot v+\overset{o(\|v\|)}{0}$

PROP. Se $F:U\to\mathbb{R}^m$ é dif. em p, então F é cont. em p.

DEM. EXERCÍCIO

Podemos definir DERIVADA DIRECIONAL de uma ap. numa dir. $v\in\mathbb{R}^n$ de maneira análoga (também sem pedir dif.), utilizando o limite (se existir):

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(p+tv)-F(p)}{t}$$

No caso que F é dif. em p, temos

$$\frac{\partial F}{\partial v}(p)=DF(p)\cdot v=(dF_1(p)\cdot v,\dots,dF_m(p)\cdot v)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(p),\dots,\frac{\partial F_m}{\partial v}(p)\right)\in\mathbb{R}^m$$

Em particular, as DERIVADAS PARCIAIS são

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)=DF(p)\cdot e_j=\left(\frac{\partial F_1}{\partial e_j}(p),\dots,\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(p)\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\cdot e_i$$

DEF. A MATRIZ JACOBIANA de $F:U\to\mathbb{R}^m$ em p representa a derivada $DF(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

Nas bases canônicas: $JF(p)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{1\le i\le m;\ 1\le j\le n}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

OBS. Notação em função das componentes $JF(p)=\dfrac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$. ← Notação comum p/ mudança de variável, quando não queremos nomear $(F_1,\dots,F_m)$.

⚠ No caso $m=n$, alguns autores usam $JF(p)$ p/ o DETERMINANTE JACOBIANO $\det JF(p)$.

↳ Distinção na língua: A (MATRIZ) JACOBIANA vs. O (DET.) JACOBIANO.

OBS. As linhas de JF são dF_i, as colunas são $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$

Fazemos as identificações: Matriz linha ~ funcional linear (i.e., $M_{1,n}(\mathbb{R})\cong(\mathbb{R}^n)^*$)

Matriz coluna ~ vetor (i.e., $M_{n,1}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^n$)

EX. Considere $f:U\to\mathbb{R}$, então $Jf(p)=\overset{\in M_{1\times n}(\mathbb{R})}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)\right)}=\nabla f(p)^T$

$\uparrow$ $\mathbb{R}^n\cong M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

EX. Considere $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $c: I \to \mathbb{R}^m$ um caminho diferenciável.

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$; $c_i : I \to \mathbb{R}$.

Temos $Jc(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) & \cdots & c_m'(t) \end{pmatrix}^T \in M_{m \times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$

$=: c'(t) \in \mathbb{R}^m$

$Dc(t) \cdot \underbrace{1}_{\text{(único) el-to de base can. de } \mathbb{R}} = c'(t)$

$c'(t)$ é chamado VETOR TANGENTE / VETOR VELOCIDADE.

EX. $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \ -\pi < \theta < \pi\}$ e $(x,y) : U \to \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$

Temos $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$

DEF. Uma apl. $F: U \to \mathbb{R}^n$ é DE CLASSE C^k se cada uma das suas componentes são funções de classe C^k.

NOTAÇÃO $C^k(U; \mathbb{R}^m)$

LEMA Se $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, então F é dif. em (todo ponto de) U.

DEM. Segue do resultado análogo p/ funções $(m=1)$ e do LEMA (dif. cas componentes dif.) $\square$

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

NOTAÇÃO $L(V; W)$ = espaço de transf. lin. $V \to W$

Temos as identificações $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m \times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$ → enfileiramos as linhas

$T \mapsto A = (a_{ij})$ t.q. $Te_j = \sum a_{ij} e_i$ $\mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{mn})$

Uma aplicação dif. $F: U \to \mathbb{R}^m$ induz uma apl. $dF: U \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

$p \mapsto DF(p)$

cujas componentes (sob a identificação $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{mn}$) são $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$

Logo,

- $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m) \iff F$ é dif. em U e DF é $\underbrace{\text{contínua}}_{\text{"componentes contínuas"}}$
- $F \in C^2(U; \mathbb{R}^m) \iff F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ e $DF \in C^1(U; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$

Segunda derivada: $D^2F : U \to L(\mathbb{R}^m; L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$

$$p \mapsto D(DF)(p)$$

Temos a identificação: $L(V_1; L(V_2; W)) \cong L(V_1 \otimes V_2; W)$.

(apl. bilin. $V_1 \times V_2 \to W$)

Em geral, a k-ésima der. de F em p é uma apl. multilinear

$D^k F(p) : \mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ← PU: única linear t.q. ...

$$V^{(1)} \otimes \cdots \otimes V^{(k)} \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial v^{(1)} \cdots \partial v^{(k)}}(p) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p)\, v_{i_1}^{(1)} \cdots v_{i_k}^{(k)}$$

OBS. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função, a k-ésima diferencial que definimos é ligeiramente diferente: $d^k f(p) \cdot v^{\otimes k} = Df(p) \cdot v \otimes \cdots \otimes v$