

# Fundamentos de Análise Funcional

Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira

Com 342 exercícios

# Prefácio

O título deste livro traz duas informações igualmente importantes. A primeira, e mais óbvia, estabelece que se trata de um livro de Análise Funcional. A segunda, não menos importante, informa que se trata de um texto introdutório. É necessário que isso fique claro desde o primeiro contato do leitor com o livro: trata-se de livro escrito para estudantes que *não* sabem Análise Funcional e pretendem *aprender* a teoria. É claro que desejamos que o livro se torne uma referência também para leitores mais experientes, mas isso – se acontecer – será um ganho adicional. O objetivo central em torno do qual o livro foi escrito é servir para a instrução de estudantes que não tenham conhecimento prévio do assunto, e servir também de guia e roteiro para um curso introdutório. Para o professor, sugerimos adiante roteiros para cursos de doutorado e de mestrado.

Em seu livro [56], Elon L. Lima define, com muita propriedade, a Álgebra Linear como *o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles*. Seguindo essa linha, podemos definir a Análise Funcional como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach, e dos operadores lineares contínuos entre eles. Essas definições, além de precisas, evidenciam as semelhanças e as diferenças entre essas duas teorias matemáticas. Ambas tratam de espaços vetoriais e de transformações lineares, e a diferença central é que na Análise Funcional exigimos também a continuidade. Por que isso? Por que em Álgebra Linear não nos importamos com continuidade e em Análise Funcional dela fazemos questão? O leitor encontrará as respostas lendo o texto, mas já adiantamos o seguinte: o ponto central é que a Álgebra Linear, para ter a valiosa ferramenta que são as matrizes à disposição, trata essencialmente de espaços vetoriais de dimensão finita. E como o leitor comprovará ao estudar este livro, qualquer que seja a maneira com que um espaço vetorial de dimensão finita é normado, as transformações lineares nele definidas são automaticamente contínuas. Ou seja, em dimensão finita a continuidade é consequência automática da linearidade. Já em dimensão infinita a situação é bem diferente. Nem todo operador linear definido em um espaço de dimensão infinita é contínuo, e o leitor terá várias oportunidades ao longo do texto de explorar esse fenômeno. Daí a necessidade de se considerar e estudar aqueles operadores lineares que são contínuos, e é exatamente isso o que faz a Análise Funcional. Com muita liberdade e um pouco de picardia, pode-se dizer que a Álgebra Linear é uma Análise Funcional em dimensão finita, ao mesmo tempo que a Análise Funcional é uma Álgebra Linear em dimensão infinita.

E de onde vem essa necessidade de se estudar operadores lineares entre espaços de dimensão infinita? A matemática passou por um desenvolvimento vertiginoso entre

os séculos 17 e 19, e uma das consequências foi que a matemática passou a resolver uma grande quantidade (e variedade) de problemas que antes não podiam ser tratados matematicamente de forma satisfatória. Muitos desses problemas têm funções – e não números ou figuras geométricas – como soluções, por exemplo, equações diferenciais funcionais, ordinárias ou parciais. Devemos então buscar as soluções desses problemas em conjuntos de funções. Ilustremos essa situação com um exemplo histórico clássico. Dentre os vários problemas que passaram a ser tratados matematicamente após o advento do Cálculo, um dos mais célebres foi o problema da corda vibrante. Chamemos de  $u(x, t)$  o deslocamento vertical em relação à posição de repouso sofrido pelo ponto de abscissa  $x$  no instante  $t$  (deslocamento positivo para cima e negativo para baixo). Em 1747 o eminente matemático francês Jean-le-Rond d'Alembert concluiu que toda solução  $u$  do problema da corda vibrante satisfaz necessariamente a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

e, além disso, disse que funções do tipo

$$u(t, x) = f(x + t) + g(x - t),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções reais arbitrárias de uma variável real, são soluções da equação diferencial e portanto são boas candidatas a serem soluções do problema original. Na época de d'Alembert nem o conceito de continuidade existia, mas ao longo do tempo os matemáticos perceberam que as funções  $f$  e  $g$  devem ser buscadas no conjunto das funções que têm pelo menos duas derivadas contínuas. Ocorre que o conjunto formado por essas funções, assim como todos os outros conjuntos de funções que são úteis, são espaços vetoriais de dimensão infinita. Basta observar que os polinômios já geram um espaço de dimensão infinita. Um segundo exemplo: assim como uma solução de um sistema linear com  $n$  incógnitas a coeficientes reais é uma  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n)$  do  $\mathbb{R}^n$ , uma solução de um sistema linear com infinitas incógnitas a coeficientes reais é uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  de números reais; e conjuntos de sequências também são espaços vetoriais de dimensão infinita. Em resumo, essa nova abrangência alcançada pela matemática colocou os espaços de dimensão infinita em voga, pois é neles que são encontradas as soluções dessa grande variedade de problemas. E espaços vetoriais de dimensão infinita são, antes de mais nada, espaços vetoriais, portanto as funções naturais que devemos considerar entre eles são as transformações lineares. Por fim, como já vimos, no caso de transformações lineares entre espaços de dimensão infinita devemos levar em conta a continuidade, completando a justificativa para o estudo dos operadores lineares contínuos entre espaços de dimensão infinita.

A escolha dos tópicos de um livro nunca é tarefa fácil. No presente livro a situação não foi diferente e alguns temas interessantes tiveram que ser preteridos. Sabemos que isso aborrecerá alguns leitores, na verdade nossa opinião é que dado um leitor existe (pelo menos) um tópico cuja omissão este leitor não nos perdoará. Dito isso, falemos um pouco dos temas incluídos. Nossa seleção de tópicos procurou, além dos assuntos obrigatórios de um curso introdutório de Análise Funcional, incluir alguns tópicos

standard mas não tão obrigatórios e também um esboço de alguns avanços recentes, muitos dos quais imaginamos serem desconhecidos inclusive por muitos profissionais da área. Os assuntos obrigatórios encontram-se dentro dos sete primeiros capítulos. Ainda dentro dos sete primeiros capítulos, elencamos os seguintes tópicos como não obrigatórios, e que, portanto, dependendo dos objetivos do professor e/ou do estudante, podem ser omitidos em uma primeira leitura:

Corolário 2.3.5, Seção 3.2, Proposição 3.3.3, Teorema 5.4.4, Teorema 6.2.12, Seção 6.5, Seção 6.6, Teorema 7.2.7 e Proposição 7.2.8.

Após estudar o conteúdo básico da disciplina, o estudante tem três possíveis caminhos à frente: (i) estudar uma teoria mais geral, (ii) aplicar os conteúdos estudados, (iii) aprofundar o estudo já realizado. Os três capítulos finais do livro, os quais passamos a descrever em seguida, oferecem ao leitor uma opção em cada uma dessas três direções.

No Capítulo 8 apresentamos uma introdução aos Espaços Vetoriais Topológicos, teoria esta que é a generalização natural do estudo dos Espaços Normados e dos Espaços de Banach. Neste capítulo o leitor verificará que muito do que foi estudado anteriormente vale em um ambiente mais abrangente, e que algumas construções anteriores são casos particulares de construções mais gerais.

O Capítulo 9, no qual introduzimos o leitor a técnicas de Análise Não-Linear, é uma oportunidade de aplicar os conhecimentos de Análise Funcional recentemente adquiridos. Em Matemática Aplicada, principalmente na Modelagem Matemática, normalmente a linearidade não está presente; e neste capítulo o leitor aprenderá que, mesmo abrindo mão da linearidade, muito pode ser feito com os conceitos e as técnicas da Análise Funcional.

No Capítulo 10 aprofundamos o estudo dos Espaços de Banach ao introduzir alguns teoremas importantes que não são abordados em cursos introdutórios de Análise Funcional. Os tópicos apresentados neste capítulo exemplificam o altíssimo grau de sofisticação alcançado pela Teoria dos Espaços de Banach ao longo do século 20, processo este que culminou, no final do século, com a recente teoria de espaços hereditariamente indecomponíveis, devida, principalmente, a W. T. Gowers e B. Maurey. Esta teoria, que rendeu a Gowers uma Medalha Fields em 1994, foi concebida com o objetivo de resolver problemas centrais da teoria dos espaços de Banach, mas acabou rejuvenescendo e fortalecendo toda a Análise Funcional por meio das novas técnicas introduzidas e, principalmente, por meio das novas conexões estabelecidas com outras áreas da Matemática. A teoria de Gowers–Maurey resolveu problemas célebres da Análise Funcional (detalhes podem ser encontrados em [10]) e os pontos altos da teoria são o Teorema da Dicotomia de Gowers [10, Teorema 6.3] e a construção de espaços de Banach que gozam de propriedades ultra-especiais.

É bem sabido que se uma área de pesquisa matemática perde conexões com outras áreas, corre o risco de se transformar em “arte pela arte” (“art for art’s sake” como escreveu von Neumann em [69]). O objetivo dos três últimos capítulos do livro é convencer o leitor de que esse certamente não é o caso da Análise Funcional. Além de servir de base para teorias mais gerais, encontrar aplicações variadas, e oferecer sustentação para diversas áreas, como Equações Diferenciais Parciais, Cálculo das

Variações, Teoria da Aproximação e Análise Harmônica, a Análise Funcional tem, hoje, sua beleza intrínseca revalorizada e suas conexões com outras áreas fortalecidas por meio de suas aplicações e da repercussão de seus avanços internos, como bem exemplifica a teoria de Gowers–Maurey, cujas técnicas têm caráter universal.

Ainda sobre a organização do livro, cada capítulo termina com duas seções, uma de comentários e notas históricas e outra de exercícios. A seção de comentários e notas históricas tem vários objetivos: contextualizar e relacionar o conteúdo do capítulo com outros assuntos, complementar o material apresentado com resultados e exemplos adicionais, comentar aspectos históricos da teoria desenvolvida. A seção de exercícios é parte integrante e de alta importância no livro. É resolvendo os exercícios que o estudante pode aferir se aprendeu ou não a teoria estudada. Além disso, resolvendo os exercícios o estudante trará conhecimento com resultados e exemplos importantes que não couberam no texto. Por exemplo, a teoria de espaços quocientes está desenvolvida nos exercícios ao longo dos capítulos. Os exercícios marcados com \* são especialmente difíceis e/ou trabalhosos. Algumas (poucas) vezes usaremos resultados contidos nos exercícios. No final do livro há uma seção – Apêndice D – de dicas para alguns exercícios selecionados. Como de praxe alertamos que o estudante deve consultar a dica de um exercício apenas após várias tentativas de resolvê-lo, caso contrário o ganho auferido na resolução dos exercícios estará comprometido.

Antes de sugerir roteiros para cursos, cabe um esclarecimento. Ao escrever este livro procuramos nos distanciar ao máximo do modelo *notas de aula compiladas*. É claro que nos beneficiamos dos cursos de Análise Funcional que ministramos em nossas universidades, mas o foco deste livro é o estudante. Confiamos que o professor tenha maturidade para adaptar o texto às suas aulas; enquanto que o estudante, na maioria das vezes, ainda não está pronto para seguir um texto mais árido como normalmente – ou talvez forçosamente – são as notas de aula. Daí nossa opção por um texto mais explicativo e recheado de comentários em detrimento de outro mais direto e econômico. Dito isso, para um primeiro curso de Análise Funcional em nível de doutorado sugerimos que o professor siga os sete primeiros capítulos, eventualmente omitindo os itens listados acima como não obrigatórios. Para um curso de mestrado, sugerimos os capítulos 1 (exceto Seção 1.6), 2, 3 (exceto Seções 3.2 e 3.3), 4, 5 e as três primeiras seções do Capítulo 6, naturalmente omitindo os tópicos listados acima como não obrigatórios. Os capítulos 8, 9 e 10 podem servir de núcleo para um segundo curso de Análise Funcional em nível de doutorado, e, além disso, são adequados para servir de base para projetos com estudantes.

Falemos um pouco dos pré-requisitos para estudar este livro. Supõe-se que o leitor tenha conhecimentos sólidos de Análise na Reta no nível de [30, 54] e de Álgebra Linear no nível de [16, 56]. No Apêndice A o leitor encontrará o que será necessário sobre o Lema de Zorn. Em relação à Topologia, o leitor deve dominar a teoria dos Espaços Métricos para estudar os primeiros capítulos e rudimentos de Topologia Geral a partir do Capítulo 6. Conhecimentos mais avançados de Topologia apenas são necessários para a boa compreensão dos capítulos 8, 9 e 10. O Apêndice B é um resumo do que se necessita de Topologia. Exemplos importantes e alguns teoremas demandam conhecimento de

Teoria da Medida e Integração, no nível e na extensão do que se encontra no Apêndice C.

Agradecimentos ...

Uberlândia, João Pessoa, Fortaleza  
Dezembro de 2011.

# Sumário

Sumário	vi
<b>1 Espaços Vetoriais Normados</b>	<b>1</b>
1.1 Definições e primeiros exemplos . . . . .	1
1.2 Os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . . . . .	6
1.3 O espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ . . . . .	9
1.4 Espaços de sequências . . . . .	11
1.5 Conjuntos compactos em espaços vetoriais normados . . . . .	12
1.6 Espaços normados separáveis . . . . .	15
1.7 Comentários e notas históricas . . . . .	18
1.8 Exercícios . . . . .	20
<b>2 Operadores Lineares Contínuos</b>	<b>24</b>
2.1 Caracterizações dos operadores lineares contínuos . . . . .	25
2.2 Exemplos . . . . .	27
2.3 O Teorema de Banach–Steinhaus . . . . .	28
2.4 O Teorema da Aplicação Aberta . . . . .	32
2.5 O Teorema do Gráfico Fechado . . . . .	34
2.6 Comentários e notas históricas . . . . .	36
2.7 Exercícios . . . . .	38
<b>3 Teoremas de Hahn–Banach</b>	<b>43</b>
3.1 O teorema da extensão de Hahn–Banach . . . . .	43
3.2 Versões vetoriais do Teorema de Hahn–Banach . . . . .	47
3.3 Aplicações do Teorema de Hahn–Banach para espaços separáveis . . . . .	50
3.4 Formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach (caso real) . . . . .	52
3.5 Comentários e notas históricas . . . . .	58
3.6 Exercícios . . . . .	59
<b>4 Dualidade e Espaços Reflexivos</b>	<b>63</b>
4.1 O dual dos espaços $L_p$ . . . . .	63
4.2 Os duais dos espaços $\ell_p$ e $c_0$ . . . . .	66
4.3 Bidual e espaços reflexivos . . . . .	67
4.4 Comentários e notas históricas . . . . .	72

4.5	Exercícios . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Espaços de Hilbert</b>	<b>77</b>
5.1	Espaços com produto interno . . . . .	77
5.2	Ortogonalidade . . . . .	81
5.3	Conjuntos ortonormais em espaços de Hilbert . . . . .	84
5.4	Processo de ortogonalização e suas consequências . . . . .	91
5.5	Funcionais lineares em espaços de Hilbert: o Teorema de Riesz–Fréchet . . . . .	94
5.6	Comentários e notas históricas . . . . .	97
5.7	Exercícios . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Topologias Fracas</b>	<b>103</b>
6.1	A topologia gerada por uma família de funções . . . . .	103
6.2	A topologia fraca em um espaço normado . . . . .	105
6.3	A topologia fraca-estrela . . . . .	111
6.4	Compacidade fraca e reflexividade . . . . .	115
6.5	Metrizabilidade e separabilidade . . . . .	119
6.6	Espaços uniformemente convexos . . . . .	122
6.7	Comentários e notas históricas . . . . .	128
6.8	Exercícios . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos</b>	<b>134</b>
7.1	Espectro de um operador linear contínuo . . . . .	135
7.2	Operadores compactos . . . . .	137
7.3	Teoria espectral de operadores compactos . . . . .	141
7.4	Operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert . . . . .	146
7.5	Teoria espectral de operadores autoadjuntos . . . . .	149
7.6	Comentários e notas históricas . . . . .	154
7.7	Exercícios . . . . .	155
<b>8</b>	<b>Espaços Vetoriais Topológicos</b>	<b>159</b>
8.1	Exemplos e primeiras propriedades . . . . .	160
8.2	Espaços localmente convexos . . . . .	166
8.3	Seminormas e topologias . . . . .	171
8.4	Revisitando Hahn–Banach e Goldstine . . . . .	176
8.5	Comentários e notas históricas . . . . .	181
8.6	Exercícios . . . . .	182
<b>9</b>	<b>Introdução à Análise Não-Linear</b>	<b>187</b>
9.1	Continuidade na topologia da norma . . . . .	187
9.2	Continuidade na topologia fraca . . . . .	189
9.3	Problemas de minimização . . . . .	192
9.4	Teoremas do ponto fixo . . . . .	194
9.5	Operadores não-lineares compactos . . . . .	197



9.6	Elementos do cálculo diferencial em espaços de Banach . . . . .	202
9.7	Integração vetorial . . . . .	206
9.8	Comentários e notas históricas . . . . .	211
9.9	Exercícios . . . . .	213
<b>10</b>	<b>Elementos da Teoria dos Espaços de Banach</b>	<b>217</b>
10.1	Séries e o Teorema de Dvoretzky–Rogers . . . . .	217
10.2	A desigualdade de Grothendieck . . . . .	227
10.3	Bases de Schauder e sequências básicas . . . . .	232
10.4	O princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński . . . . .	242
10.5	Comentários e notas históricas . . . . .	250
10.6	Exercícios . . . . .	251
<b>A</b>	<b>O Lema de Zorn</b>	<b>255</b>
<b>B</b>	<b>Noções de Topologia Geral</b>	<b>258</b>
<b>C</b>	<b>Noções de Medida e Integração</b>	<b>265</b>
<b>D</b>	<b>Respostas/dicas para exercícios selecionados</b>	<b>272</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>294</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>300</b>

# Capítulo 1

## Espaços Vetoriais Normados

Em espaços vetoriais sabemos somar seus elementos e multiplicar seus elementos por escalares, enquanto que em espaços métricos sabemos calcular a distância entre dois de seus elementos. Espaço normado é a estrutura matemática na qual tudo isso pode ser feito em um mesmo ambiente.

### 1.1 Definições e primeiros exemplos

O símbolo  $\mathbb{K}$  denotará, indistintamente, o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais ou o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos. Os elementos de  $\mathbb{K}$  são chamados de escalares. A função módulo – ou valor absoluto –

$$a \in \mathbb{K} \mapsto |a| \in \mathbb{R}$$

satisfaz as seguintes condições:

- $|a| \geq 0$  para todo  $a$  e  $|a| = 0 \iff a = 0$ .
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$  para todos  $a$  e  $b$ .
- $|a + b| \leq |a| + |b|$  para todos  $a$  e  $b$ .

Por isso, o número  $|a - b|$  é interpretado como a distância entre  $a$  e  $b$ . Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Qualquer função que reproduza as condições acima servirá para induzir uma noção de distância em  $E$ . Mais precisamente, uma função

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma *norma* se as seguintes propriedades estiverem satisfeitas:

- (N1)  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in E$  e  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
- (N2)  $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$  para todo escalar  $a$  e todo  $x \in E$ .
- (N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para quaisquer  $x, y \in E$ .

Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Assim como no caso do corpo dos escalares, um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.1)$$

Nesse caso dizemos que a métrica  $d$  é induzida pela norma  $\|\cdot\|$ . Portanto toda a teoria de espaços métricos (veja Apêndice 2) se aplica aos espaços normados. Em particular, uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em um espaço normado  $E$  converge para o vetor  $x \in E$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Nesse caso dizemos que  $x$  é o limite da sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  e escrevemos  $x = \lim_n x_n$  ou  $x_n \longrightarrow x$ .

O que torna compatíveis as estruturas algébrica e topológica de um espaço normado é o fato de que, em um espaço normado, as operações algébricas são funções contínuas (veja Exercício 1.8.13).

Um espaço normado  $E$  é chamado *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma. Dos cursos elementares de Análise sabemos que  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  e  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  são espaços de Banach.

A proposição abaixo evidencia a importância dos subespaços fechados de um espaço de Banach.

**Proposição 1.1.1** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um subespaço vetorial de  $E$ . Então  $F$  é um espaço de Banach, com a norma induzida de  $E$ , se, e somente se,  $F$  é fechado em  $E$ .*

**Demonstração.** Suponha  $F$  Banach e tome  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $F$  tal que  $x_n \longrightarrow x \in E$ . Então  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $F$ , e portanto convergente pois  $F$  é completo por hipótese. Existe então  $y \in F$  tal que  $x_n \longrightarrow y$ . Da unicidade do limite temos  $x = y \in F$ , provando que  $F$  é fechado em  $E$ .

Reciprocamente, suponha  $F$  fechado em  $E$  e seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $F$ . Logo  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $E$ , e portanto existe  $x \in E$  tal que  $x_n \longrightarrow x$ . Como  $F$  é fechado segue que  $x \in F$ , o que prova que  $F$  é completo. ■

**Exemplo 1.1.2** Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma função  $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$  é *limitada* se sua imagem for um subconjunto limitado de  $\mathbb{K}$ , ou seja, se existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in X$ . O conjunto  $B(X)$  de todas as funções limitadas  $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ , que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, torna-se um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

De fato, é fácil ver que  $\|\cdot\|_\infty$  é uma norma. Para mostrar a completude, toma-se uma sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  de Cauchy em  $B(X)$  e verifica-se que, para todo  $x \in X$ , a sequência correspondente  $(f_n(x))_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $\mathbb{K}$ . O resultado segue facilmente da completude de  $\mathbb{K}$ .

**Exemplo 1.1.3** Como  $[a, b]$  é compacto em  $\mathbb{R}$ , o conjunto  $C[a, b]$  de todas as funções contínuas de  $[a, b]$  em  $\mathbb{K}$  é um subespaço vetorial do espaço de Banach  $B[a, b]$ , e portanto é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Mais ainda,  $C[a, b]$  é um espaço de Banach. De fato, pela Proposição 1.1.1 basta provar que  $C[a, b]$  é um subespaço fechado de  $B[a, b]$ . Para tanto, observe que se  $f_n \rightarrow f$  em  $C[a, b]$ , então  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente para  $f$ . Segue que  $f$  é contínua por ser o limite uniforme de funções contínuas.

Dos seus estudos de Cálculo, o leitor sabe que funções com certas propriedades de diferenciabilidade são muito úteis nas aplicações. Um dos principais objetivos do Cálculo é o estudo da taxa de variação instantânea de uma função real  $f$ . Essa taxa de variação é chamada de derivada de  $f$  e denotada por  $f'$ . Aprendemos no Cálculo que se  $f$  e  $g$  são diferenciáveis, então  $(f + g)$  é uma função diferenciável e  $(f + g)' = f' + g'$  e se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda f)' = \lambda f'$ . Em nossa linguagem isso significa que o conjunto de todas as funções diferenciáveis possui uma estrutura natural de espaço vetorial. Estudamos no próximo exemplo os espaços de funções continuamente diferenciáveis.

**Exemplo 1.1.4** Definimos o espaço das funções continuamente diferenciáveis por :

$$C^1[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C[a, b]\}.$$

De forma usual, nos extremos do intervalo consideramos os limites laterais correspondentes. Como vimos acima,  $C^1[a, b]$  é subespaço vetorial de  $C[a, b]$ . Entretanto, conforme comprovaremos no Exemplo 2.4.4,  $C^1[a, b]$  não é fechado em  $C[a, b]$ , e portanto não é completo na norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  pela Proposição 1.1.1. Vejamos que a norma

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty},$$

faz de  $C^1[a, b]$  um espaço de Banach. Deixamos para o leitor a verificação dos axiomas de norma. Provemos que  $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{C^1})$  é completo. De fato, dada uma sequência de Cauchy  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{C^1})$ , como  $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{C^1}$  e  $\|f'\|_{\infty} \leq \|f\|_{C^1}$ , segue que as sequências  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  e  $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$  são de Cauchy em  $C[a, b]$ . Do exemplo anterior sabemos que  $C[a, b]$  é completo, logo existem  $f, g \in C[a, b]$  tais que  $f_n \rightarrow f$  e  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt$$

para todos  $x \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  concluímos que  $f \in C^1[a, b]$  e que  $f' = g$ . Segue que  $f_n \rightarrow f$  em  $C^1[a, b]$ .

Sabemos ainda do Cálculo que a segunda derivada fornece informações sobre concavidade ou convexidade local da função. Podemos também tratar funções duas

vezes diferenciáveis na linguagem de espaços normados. Definimos assim o espaço das funções duas vezes continuamente diferenciáveis por:

$$C^2[a, b] := \{f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C^1[a, b]\}.$$

De forma análoga,  $C^2[a, b]$  se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^2} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty}.$$

Indutivamente, definimos o espaço das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis,  $k \in \mathbb{N}$ , por

$$C^k[a, b] := \{f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C^{k-1}[a, b]\}.$$

Como o leitor já percebeu,  $C^k[a, b]$  se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \cdots + \|f^{(k)}\|_{\infty},$$

onde  $f^{(j)}$  denota a  $j$ -ésima derivada de  $f$ .

Quanto aos espaços normados de dimensão finita, o leitor provavelmente está familiarizado com as normas usuais dos espaços  $\mathbb{K}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = (|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ e}$$

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_{\infty} = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}.$$

Talvez saiba também que esses espaços são completos. Nosso objetivo imediato agora é mostrar que isso, em essência, é dizer que todo espaço normado de dimensão finita é completo. Para isso precisamos do

**Lema 1.1.5** *Seja  $B = \{x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado  $E$ . Então existe uma constante  $c > 0$ , que depende do conjunto  $B$ , tal que*

$$\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \cdots + |a_n|),$$

para quaisquer escalares  $a_1, \dots, a_n$ .

**Demonstração.** Primeiro relembremos da Análise no  $\mathbb{R}^n$  que, dadas duas normas  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_b$  em  $\mathbb{R}^n$ , existe uma constante  $c > 0$ , que depende das normas, tal que  $\|x\|_a \leq c\|x\|_b$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . O mesmo, com demonstração totalmente análoga, vale para  $\mathbb{C}^n$ . Voltemos então para o caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . O leitor não terá dificuldade em verificar que a correspondência

$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \longrightarrow \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \in \mathbb{R}$$

é uma norma em  $\mathbb{K}^n$ . O resultado segue pois, conforme vimos acima, a expressão  $\|(a_1, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$  também é uma norma em  $\mathbb{K}^n$ . ■

**Teorema 1.1.6** *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado  $E$  é fechado em  $E$ .*

**Demonstração.** Sejam  $E$  um espaço normado de dimensão  $n$  e  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  uma base normalizada (isto é, os vetores têm norma 1) de  $E$ . Dada uma sequência de Cauchy  $(x_k)_{k=1}^\infty$  em  $E$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  existem únicos escalares  $a_1^k, \dots, a_n^k$  tais que  $x_k = a_1^k \beta_1 + \dots + a_n^k \beta_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_k - x_m\| < c \cdot \varepsilon$  sempre que  $k, m \geq n_0$ , onde  $c$  é a constante do Lema 1.1.5 para o conjunto linearmente independente  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Segue então que

$$\sum_{j=1}^n |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^k - a_j^m) \beta_j \right\| = \frac{1}{c} \|x_k - x_m\| < \varepsilon,$$

sempre que  $k, m \geq n_0$ . Segue que, para cada  $j = 1, \dots, n$ , a sequência de escalares  $(a_j^k)_{k=1}^\infty$  é de Cauchy, portanto convergente. Digamos  $b_j = \lim_k a_j^k$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Nesse caso temos  $\lim_k \sum_{j=1}^n |a_j^k - b_j| = 0$ . Definindo  $x = b_1 \beta_1 + \dots + b_n \beta_n$  temos  $x \in E$  e

$$\lim_k \|x_k - x\| = \lim_k \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^k - b_j) \beta_j \right\| \leq \lim_k \sum_{j=1}^n |a_j^k - b_j| = 0$$

provando que  $x_k \rightarrow x$  e completando a demonstração de que  $E$  é Banach. A segunda afirmação segue da primeira e da Proposição 1.1.1. ■

Como já era de se esperar, existem espaços normados, de dimensão infinita, é claro, que não são completos. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 1.1.7** Por  $c_0$  denotamos o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^\infty : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \rightarrow 0\}.$$

É claro que  $c_0$  é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências (operações coordenada a coordenada). É fácil comprovar que a expressão

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

torna  $c_0$  um espaço normado. O motivo do subscrito  $\infty$  ficará claro na Seção 1.4. Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $c_0$ . Digamos que  $x_n = (a_n^k)_{k=1}^\infty$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , a desigualdade

$$|a_n^j - a_m^j| \leq \sup\{|a_n^k - a_m^k| : k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty$$

deixa claro que a sequência de escalares  $(a_n^j)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $\mathbb{K}$ , logo convergente. Digamos  $a_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_j$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Chamando  $x = (a_j)_{j=1}^\infty$  não é difícil checar que

$x \in c_0$  e que  $x_n \rightarrow x$  em  $c_0$ . Concluimos então que  $c_0$  é um espaço de Banach.

Chame agora de  $c_{00}$  o subespaço de  $c_0$  formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^\infty \in c_0 : \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Considere os seguintes vetores de  $c_{00}$ :

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots, \quad x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \dots$$

É claro que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência em  $c_{00}$ . Tomando  $x = (\frac{1}{k})_{k=1}^\infty \in c_0$ , de  $\|x_n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ , concluimos que  $x_n \rightarrow x$  em  $c_0$ . Como  $x \notin c_{00}$  segue que  $c_{00}$  é um subespaço não-fechado de  $c_0$ . Da Proposição 1.1.1 resulta que  $c_{00}$  é um espaço normado incompleto.

## 1.2 Os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$

Nesta seção e na próxima usaremos os conceitos e a terminologia da Teoria da Medida, os quais o leitor pode encontrar no Apêndice C. Os próximos exemplos envolvem funções integráveis, e alguns resultados preliminares são necessários. Estabeleceremos as desigualdades de Hölder e Minkowski para integrais, que serão úteis adiante.

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e  $1 \leq p < \infty$ . O conjunto de todas as funções mensuráveis de  $X$  em  $\mathbb{K}$  tais que

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por  $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ .

**Teorema 1.2.1** (Desigualdade de Hölder para integrais) *Sejam  $p, q > 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$  e  $g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$ , então  $fg \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$  e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

**Demonstração.** O caso  $\|f\|_p = 0$  ou  $\|g\|_q = 0$  é simples. Suponha então  $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$ . Primeiro é conveniente mostrar que, para quaisquer  $a$  e  $b$  não-negativos, temos

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (1.2)$$

Para tanto, considere, para cada  $0 < \alpha < 1$ , a função  $f = f_\alpha: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = t^\alpha - \alpha t$ . Note que  $f$  tem um máximo em  $t = 1$  e portanto  $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$  para todo  $t > 0$ . Fazendo  $t = \frac{a}{b}$  e  $\alpha = \frac{1}{p}$  obtém-se (1.2). Tomando

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{e} \quad b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

em (1.2), o resultado segue. ■

**Teorema 1.2.2** (Desigualdade de Minkowski para integrais) *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ , então  $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$  e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (1.3)$$

**Demonstração.** Se  $p = 1$  ou  $\|f + g\|_p = 0$ , o resultado é claro. Podemos então supor  $\|f + g\|_p \neq 0$  e  $p > 1$ . Perceba que, para todo  $x \in X$ , temos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= 2^p (\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

e daí segue que  $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ . Agora vamos provar (1.3). Observe primeiro que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot (|f(x)| + |g(x)|) \\ &= |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

para todo  $x \in X$ . Tomando  $q > 1$  tal que  $1/p + 1/q = 1$  temos  $(p-1)q = p$ , e portanto  $|f + g|^{p-1} = |f + g|^{\frac{p}{q}} \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$ . Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu &\leq \left( \int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades acima e combinando com (1.4) temos

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left( \int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left[ \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right],$$

e dividindo ambos os membros por  $\left( \int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ , o resultado segue. ■

Note que  $\|\cdot\|_p$  não é, em geral, uma norma em  $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ , pois pode acontecer  $\|f\|_p = 0$  para  $f$  não identicamente nula. De modo geral, se  $(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de medida, introduzimos uma relação de equivalência dizendo que duas funções  $f, g: X \rightarrow \mathbb{K}$  são equivalentes se  $f = g$   $\mu$ -quase sempre, isto é, se existe um conjunto



$A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \notin A$ . Denotando a classe de equivalência de uma função  $f$  por  $[f]$ , é imediato que no conjunto quociente

$$L_p(X, \Sigma, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)\},$$

as operações

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } c[f] = [cf]$$

estão bem definidas e tornam  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  um espaço vetorial. Além disso, definindo

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p,$$

corrigimos o que faltava para  $\|\cdot\|_p$  ser uma norma. Assim  $(L_p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$  é um espaço vetorial normado. A seguir, mostraremos que  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de Banach.

Devemos ter em mente que os vetores de  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  são classes de equivalência, mas no cotidiano as classes de equivalências são omitidas e escrevemos  $f$  no lugar de  $[f]$ . Faremos, propositalmente, a demonstração a seguir escrevendo  $[f]$  para que o leitor perceba que este é um preciosismo desnecessário.

**Teorema 1.2.3** *Se  $1 \leq p < \infty$ , então  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de Banach com a norma*

$$\|[f]\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Demonstração.** Já sabemos que  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço normado. Resta provar que é um espaço completo. Para isso seja  $([f_n])_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon^p \text{ sempre que } m, n \geq M.$$

Seja  $(g_k)_{k=1}^\infty$  uma subsequência de  $(f_n)_{n=1}^\infty$  tal que  $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Considere a função

$$g: X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \quad (1.5)$$

Sabemos que  $g$  é mensurável e não-negativa. Além disso,

$$|g(x)|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right)^p.$$

Pelo Lema de Fatou (veja Teorema C.17), segue que

$$\int_X |g|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \left( |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu.$$

Elevando ambos os membros a  $\frac{1}{p}$  e usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\left( \int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|g_{k+1} - g_k\|_p \right) \leq \|g_1\|_p + 1. \quad (1.6)$$

Então, definindo  $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$ , de (1.6) podemos concluir que  $\mu(X - A) = 0$ . Logo a série em (1.5) converge exceto talvez no conjunto de medida nula  $X - A$ , isto é, a série converge  $\mu$ -quase sempre. Segue que a função  $g \cdot \chi_A \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ , onde  $\chi_A$  é a função característica de  $A$  (veja o Apêndice C). Defina então  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Como  $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_k - g_{k-1})$ , temos

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x)$$

para todo  $x$  e  $g_k(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in A$ , isto é, a sequência  $(g_k)_{k=1}^{\infty}$  converge para  $f$   $\mu$ -quase sempre. Pelo Teorema da Convergência Dominada (veja Teorema C.21), segue que  $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ . Como

$$|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2g)^p \cdot \chi_A \quad \mu\text{-quase sempre e}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f - g_k|^p = 0 \quad \mu\text{-quase sempre,}$$

novamente pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f - g_k|^p d\mu = \int_X 0 d\mu = 0.$$

Daí concluímos que  $g_k \rightarrow f$  em  $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ , e portanto  $[g_k] \rightarrow [f]$  em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Assim  $([f_n])_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência  $([g_k])_{k=1}^{\infty}$  que converge para  $[f]$ . Segue imediatamente que  $[f_n] \rightarrow [f]$  em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . ■

### 1.3 O espaço $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$

Seja  $\mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$  o conjunto de todas as funções mensuráveis que são limitadas  $\mu$ -quase sempre, isto é, existem um conjunto  $N \in \Sigma$  e um número real  $K$  tais que  $\mu(N) = 0$  e  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \notin N$ . Se  $f \in \mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$  e  $N \in \Sigma$  é um conjunto de medida nula, definimos

$$S_f(N) = \sup \{|f(x)| : x \notin N\} \quad \text{e}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}. \quad (1.7)$$

Note que, novamente, pode acontecer  $\|f\|_\infty = 0$  com  $f$  não identicamente nula. Para contornar esse problema, também recorreremos às classes de equivalência. Como na seção anterior, dizemos que duas funções são equivalentes (pertencem à mesma classe de equivalência) se coincidem  $\mu$ -quase sempre. O conjunto  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$  é o conjunto de todas as classes de equivalência das funções mensuráveis  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  que são limitadas  $\mu$ -quase sempre. É claro que  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço vetorial com as mesmas operações da seção anterior. Se  $[f] \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ , definimos

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty. \quad (1.8)$$

No Exercício 1.8.23 o leitor provará que se a medida  $\mu$  é finita e  $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ , então  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  para todo  $p \geq 1$  e  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ . Isso justifica a notação  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ .

Deixamos a cargo do leitor a demonstração de que  $\|\cdot\|_\infty$  está bem definida e é uma norma em  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ . Vejamos que se  $[f] \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ , então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ } \mu\text{-quase sempre.} \quad (1.9)$$

Com efeito, pela definição de  $\|f\|_\infty$  existe uma sequência  $(N_n)_{n=1}^\infty$  de conjuntos de medida nula tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(N_n) = \|f\|_\infty \text{ e } |f(x)| \leq S_f(N_n) \text{ para todo } x \notin N_n.$$

Logo, tomando  $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$  resulta que  $N$  tem medida nula e

$$|f(x)| \leq S_f(N_n) \text{ para todo } x \notin N.$$

Fazendo o limite com  $n \rightarrow \infty$  obtemos (1.9).

**Teorema 1.3.1**  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de Banach.

**Demonstração.** Só resta mostrar que o espaço é completo. Para isso, seja  $([f_n])_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ . Por (1.9), para cada  $j \in \mathbb{N}$  existe  $M_j \in \Sigma$  tal que  $\mu(M_j) = 0$  e

$$|f_j(x)| \leq \|f_j\|_\infty \text{ para todo } x \notin M_j.$$

Tomando  $M_0 = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ , temos

$$|f_j(x)| \leq \|f_j\|_\infty \text{ para todo } x \notin M_0.$$

Mais ainda, para cada par  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  existe  $M_{n,m} \in \Sigma$  com  $\mu(M_{n,m}) = 0$  e

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \text{ para todo } x \notin M_{n,m}.$$

Seja  $M = M_0 \cup \left( \bigcup_{n,m=1}^{\infty} M_{n,m} \right)$ . Então  $\mu(M) = 0$  e para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} |f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \text{ para todo } x \notin M \text{ e} \\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty} \text{ para todo } x \notin M. \end{cases} \quad (1.10)$$

Então, para cada  $x \notin M$ , a sequência  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy em  $\mathbb{K}$ , portanto convergente. Podemos então definir

$$f: X \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & \text{se } x \notin M \\ 0, & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

Segue que  $f$  é mensurável. Por (1.10) e como  $([f_n])_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$  sempre que  $m, n \geq n_0$ . Fazendo  $m \longrightarrow \infty$  segue que

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (1.11)$$

sempre que  $n \geq n_0$ . Assim,  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  é uniformemente convergente para  $f$  em  $X - M$ . De (1.11) segue que  $f_n - f \in \mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$  para  $n$  suficientemente grande. Daí, como  $f = f_n - (f_n - f)$ , segue que  $[f] \in L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ . Assim, podemos reescrever (1.11), concluindo que

$$\|[f_n] - [f]\|_{\infty} = \|f_n - f\|_{\infty} \leq \sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

sempre que  $n \geq n_0$ . Portanto  $([f_n])_{n=1}^{\infty}$  converge para  $[f]$  em  $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$  ■

**Notação.** A ocorrência mais frequente dos espaços  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  se dá quando  $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\Sigma$  é a sigma-álgebra dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis (que contém os borelianos) e  $\mu$  é a medida de Lebesgue. Nesse caso escrevemos  $L_p[a, b]$ .

## 1.4 Espaços de sequências

Já estudamos os espaços de sequências  $c_0$  e  $c_{00}$ . Nesta seção estudaremos outros espaços notáveis de sequências. Para cada número real  $p \geq 1$ , definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Considerando o conjunto  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  das partes de  $\mathbb{N}$  e a medida de contagem  $\mu_c$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , não é difícil verificar que  $\ell_p$  é na verdade o espaço  $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ . Ainda mais, nesse caso as operações usuais de funções se transformam nas operações usuais de sequências e a norma  $\|\cdot\|_p$  se transforma em

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dessa forma resulta que  $\ell_p$  é um espaço de Banach com as operações usuais de seqüências e com a norma  $\|\cdot\|_p$ . Em particular, dos Teoremas 1.2.1 e 1.2.2 temos:

**Proposição 1.4.1** (Desigualdade de Hölder para seqüências) *Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $p, q > 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então*

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

**Proposição 1.4.2** (Desigualdade de Minkowski para seqüências) *Para  $p \geq 1$ , temos*

$$\left( \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e escalares  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

Para  $p = \infty$ , definimos  $\ell_\infty$  como o espaços das seqüências limitadas de escalares, ou seja:

$$\ell_\infty = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty \right\}.$$

Podemos concluir que  $\ell_\infty$  é um espaço de Banach com as operações usuais de funções e com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$$

por duas maneiras: observando que  $\ell_\infty = L_\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$  ou que  $\ell_\infty = B(\mathbb{N})$  (Exemplo 1.1.2). O fato de toda seqüência convergente ser limitada implica que  $c_0$  é subespaço de  $\ell_\infty$ ; e por ser Banach,  $c_0$  é subespaço fechado de  $\ell_\infty$  pela Proposição 1.1.1.

## 1.5 Conjuntos compactos em espaços vetoriais normados

A compacidade, além de ser um dos invariantes topológicos mais importantes, desempenha papel fundamental na Análise. Por exemplo, um resultado central – e muito útil – da análise elementar diz que toda função contínua definida em um compacto é limitada e assume máximo e mínimo.

Além de sua importância natural, na Análise Funcional a compacidade ganha ainda mais relevo pois representa uma forte ruptura entre as dimensões finita e infinita. Veremos adiante que a bola unitária fechada em um espaço vetorial normado de dimensão finita é sempre compacta. Já em dimensão infinita, será provado que a bola nunca é compacta na topologia da norma. Para contornar esse problema da

não compacidade da bola unitária em dimensão infinita, estudaremos no Capítulo 6 as topologias fraca e fraca estrela, que, por terem menos abertos, facilitam a ocorrência de conjuntos compactos.

Por definição, um subconjunto  $K$  de um espaço topológico é compacto se toda cobertura aberta de  $K$  admite subcobertura finita. Em espaços métricos, vale a seguinte caracterização: um subconjunto  $K$  de um espaço métrico é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência formada por elementos de  $K$  admite uma subsequência que converge para um elemento de  $K$  (veja [53, Proposição 8.5.7]).

**Proposição 1.5.1** *Se  $E$  é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em  $E$  são precisamente os conjuntos limitados e fechados.*

**Demonstração.** Conjuntos compactos em espaços métricos são sempre fechados e limitados (veja [53, Proposições 8.1.1 e 8.1.2]). Basta então provar que todo conjunto limitado e fechado  $K \subseteq E$  é compacto. Suponha que  $\dim E = n$  e seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base normalizada de  $E$ . Como estamos em espaços métricos, basta mostrar que toda sequência em  $K$  admite subsequência convergente em  $K$ . Seja portanto  $(x_m)_{m=1}^\infty$  uma sequência em  $K$ . Para cada  $m$  existem escalares  $a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$  tais que  $x_m = \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} e_j$ .

Como  $K$  é limitado, existe  $L > 0$  tal que  $\|x_m\| \leq L$  para todo  $m$ . Consideremos em  $\mathbb{K}^n$  a norma da soma  $\|\cdot\|_1$ . Pelo Lema 1.1.5 existe  $c > 0$  tal que

$$L \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \left( \sum_{j=1}^n |a_j^{(m)}| \right) = c \cdot \|(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})\|_1$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Assim a sequência  $\left( (a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}) \right)_{m=1}^\infty$  é limitada em  $\mathbb{K}^n$ . Pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass esta sequência possui uma subsequência  $\left( (a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)}) \right)_{k=1}^\infty$  que converge para um certo  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ . De

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j^{(m_k)} e_j - \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |a_j^{(m_k)} - b_j| = \left\| (a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)}) - b \right\|_1 \longrightarrow 0,$$

concluimos que  $x_{m_k} \longrightarrow \sum_{j=1}^n b_j e_j$ . Por  $K$  ser fechado sabemos que  $\sum_{j=1}^n b_j e_j \in K$ . ■

Seja  $E$  um espaço normado. O conjunto

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

é chamado de *bola unitária fechada* de  $E$ .

**Corolário 1.5.2** *A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta.*

A seguir apresentamos um famoso resultado, devido a F. Riesz, que será útil para mostrar que a bola unitária fechada em espaços de dimensão infinita nunca é compacta.

**Lema 1.5.3** (Lema de Riesz) *Seja  $M$  um subespaço fechado próprio de um espaço normado  $E$  e seja  $\theta$  um número real tal que  $0 < \theta < 1$ . Então existe  $y \in E - M$  tal que  $\|y\| = 1$  e  $\|y - x\| \geq \theta$  para todo  $x \in M$ .*

**Demonstração.** Seja  $y_0 \in E - M$  e considere o número

$$d = \text{dist}(y_0, M) := \inf_{x \in M} \|y_0 - x\|.$$

Como  $M$  é fechado e  $y_0 \notin M$ , temos  $d > 0$ . De fato, supondo  $d = 0$  existiria uma sequência de elementos de  $M$  convergindo para  $y_0$ , e nesse caso teríamos  $y_0 \in M$  pois  $M$  é fechado. Como  $\frac{d}{\theta} > d$ , podemos escolher  $x_0 \in M$  tal que

$$\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\theta}.$$

Vejamos que escolhendo

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|},$$

as condições requeridas estão satisfeitas. É claro que  $y$  tem norma 1 e não pertence a  $M$ . Seja  $x \in M$ . Como  $M$  é subespaço vetorial,  $(x_0 + \|y_0 - x_0\| x) \in M$ , e portanto  $d \leq \|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\| x)\|$ . Por fim

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\| x)\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} \geq \theta.$$

■

**Teorema 1.5.4** *Um espaço normado  $E$  tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de  $E$  é compacta.*

**Demonstração.** O Corolário 1.5.2 garante uma das implicações. Resta-nos provar que se a bola é compacta, então o espaço tem dimensão finita. Suponha que  $E$  tenha dimensão infinita. Escolha  $x_1 \in E$  com norma 1. Como  $\dim E = \infty$ , subespaço  $[x_1]$  gerado por  $x_1$  é um subespaço próprio de  $E$ . Por ter dimensão finita,  $[x_1]$  é subespaço fechado de  $E$  pelo Teorema 1.1.6. Pelo Lema de Riesz, com  $\theta = \frac{1}{2}$ , existe  $x_2 \in E - [x_1]$  de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Aplicando novamente o argumento para o subespaço  $[x_1, x_2]$  gerado por  $\{x_1, x_2\}$ , que continua sendo um subespaço fechado próprio pelas mesmas razões, existe  $x_3 \in E - [x_1, x_2]$  de norma 1 tal que

$$\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2} \text{ para } j = 1, 2.$$

Podemos continuar esse procedimento indefinidamente pois em todas as etapas teremos um subespaço de dimensão finita de  $E$ , logo fechado e próprio. Procedendo dessa forma, construímos uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $B_E$  tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$$

sempre que  $m \neq n$ . Assim,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência em  $B_E$  que não possui subsequência convergente, o que impede que  $B_E$  seja compacta. ■

## 1.6 Espaços normados separáveis

Ao longo do seu treinamento matemático, o leitor certamente passou por diversas situações em que a densidade do conjunto dos números racionais na reta desempenha papel crucial. Da mesma forma, a presença de um subconjunto enumerável e denso em um espaço normado é útil em diversas situações. Ocorre que, como veremos em breve, nem todo espaço normado contém um subconjunto enumerável e denso. Por isso destacamos a classe dos espaços que gozam dessa propriedade:

**Definição 1.6.1** Um espaço normado  $E$  que contém um subconjunto enumerável e denso em  $E$  é dito *separável*. Mais geralmente, um espaço métrico  $M$  é separável quando contém um subconjunto denso e enumerável.

**Exemplo 1.6.2** Espaços normados de dimensão finita são separáveis. Seja  $E$  um espaço normado de dimensão  $n$ . Escolha  $\{x_1, \dots, x_n\}$  uma base de  $E$  e, no caso real, considere o conjunto

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j x_j : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \right\},$$

das combinações lineares dos vetores da base com escalares racionais. No caso complexo substitua  $\mathbb{Q}$  por  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{p + iq : p, q \in \mathbb{R}\}$ . O leitor pode comprovar facilmente que  $A$  é enumerável e denso em  $E$ .

O Lema a seguir será muito útil na demonstração de que vários dos espaços com que estamos trabalhando são separáveis. Dado um subconjunto  $A$  de um espaço vetorial  $E$ , por  $[A]$  estamos denotando o subespaço de  $E$  gerado por  $A$ , isto é, o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de elementos de  $A$ .

**Lema 1.6.3** *Um espaço normado  $E$  é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável  $A \subseteq E$  tal que  $[A]$  é denso em  $E$ .*

**Demonstração.** Se  $A$  for enumerável e denso em  $E$ , então  $E = \overline{A} \subseteq \overline{[A]} \subseteq E$ , e portanto  $[A]$  é denso em  $E$ . Reciprocamente, suponhamos que exista um subconjunto enumerável  $A \subseteq E$  tal que  $\overline{[A]} = E$ . Chamemos de  $B$  o conjunto formado por todas as



combinações lineares finitas de elementos de  $A$  com coeficientes em  $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ , onde  $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ , ou seja:

$$B = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n : x_1, \dots, x_n \in A, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

É fácil ver que  $B$  é enumerável: como  $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  é enumerável, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto das combinações lineares de  $n$  elementos de  $A$  com coeficientes em  $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  é enumerável. Segue que  $B$  é enumerável por ser a união enumerável de conjuntos enumeráveis. Provaremos agora que  $B$  é denso em  $E$ . Para isso sejam  $x \in E$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $\overline{[A]} = E$ , existe  $y_0 \in [A]$  tal que  $\|x - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Digamos  $y_0 = b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{K}$  e  $x_1, \dots, x_k \in A$ . Como  $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  é denso em  $\mathbb{K}$ , existem  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$  tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2 \left(1 + \sum_{i=1}^k \|x_i\|\right)} \text{ para todo } j = 1, \dots, k.$$

Tomando  $y = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$  temos  $y \in B$  e

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - y_0 + y_0 - y\| \leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_k - a_k)x_k\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{j=1, \dots, k} |b_j - a_j| (\|x_1\| + \cdots + \|x_k\|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2 \left(1 + \sum_{i=1}^k \|x_i\|\right)} \cdot \sum_{i=1}^k \|x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova que  $\overline{B} = E$ . Assim  $B \subseteq E$  é enumerável e denso, completando a demonstração de que  $E$  é separável. ■

**Exemplo 1.6.4**  $c_0$  e  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , são separáveis. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

a sequência formada por 1 na  $n$ -ésima coordenada e 0 nas demais coordenadas. Os vetores  $e_1, e_2, \dots$  são chamados de *vetores unitários canônicos* dos espaços de sequências. Dado  $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ , temos

$$\lim_k \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\|_{\infty} = \lim_k \|(0, 0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_{\infty} = \lim_k \sup_{j > k} |a_j| = 0,$$

pois  $a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , e segue que  $\sum_{j=1}^k a_j e_j \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$  em  $c_0$ . Como  $\sum_{j=1}^k a_j e_j \in [e_1, e_2, \dots]$  para todo  $k$ , do Lema 1.6.3 segue que  $c_0$  é separável. Dado  $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ , como

$$\lim_k \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\|_p = \lim_k \|(0, 0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_p = \lim_k \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j|^p = 0,$$

pois a série  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$  é convergente, o mesmo argumento mostra que  $\ell_p$  é separável.

**Exemplo 1.6.5**  $\ell_{\infty}$  não é separável. Suponha que  $\ell_{\infty}$  contenha uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  densa. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escrevamos  $x_n = (a_j^n)_{j=1}^{\infty}$ . Seja  $y = (b_j)_{j=1}^{\infty}$  a sequência definida por  $b_j = 0$  se  $|a_j^n| \geq 1$  e  $b_j = a_j^n + 1$  se  $|a_j^n| < 1$ . É claro que  $y \in \ell_{\infty}$  pois  $|b_j| < 2$  para todo  $j$ . Da densidade da sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|y - x_{n_0}\|_{\infty} < 1$ . Mas

$$\begin{aligned} \|y - x_n\|_{\infty} &= \sup\{|b_1 - a_1^n|, |b_2 - a_2^n|, \dots, |b_n - a_n^n|, |b_{n+1} - a_{n+1}^n|, \dots\} \geq |b_n - a_n^n| \\ &= \begin{cases} |0 - a_n^n| & \text{se } |a_n^n| \geq 1 \\ |a_n^n + 1 - a_n^n| & \text{se } |a_n^n| < 1 \end{cases} = \begin{cases} |a_n^n| & \text{se } |a_n^n| \geq 1 \\ 1 & \text{se } |a_n^n| < 1 \end{cases} \geq 1 \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  – contradição. Segue que  $\ell_{\infty}$  não é separável.

Para provar a separabilidade do espaço  $C[a, b]$  precisamos de um teorema clássico cujo caso real é demonstrado em livros de Análise na Reta (veja, por exemplo, [30, Teorema 9.17]). Na linguagem da Análise na Reta esse resultado diz que toda função contínua em  $[a, b]$  pode ser uniformemente aproximada por polinômios. Na nossa linguagem diz que o conjunto dos polinômios é denso em  $C[a, b]$ :

**Teorema 1.6.6** (Teorema da Aproximação de Weierstrass) *Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  uma função contínua. Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe um polinômio  $P: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in [a, b]$ .*

**Exemplo 1.6.7**  $C[a, b]$  é separável. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos a função  $t \in [a, b] \mapsto f_n(t) = t^n \in \mathbb{K}$ . Tomando  $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  temos  $A \subseteq C[a, b]$  e  $[A]$  é o conjunto de todos os polinômios. Segue do Teorema 1.6.6 que  $\overline{[A]} = C[a, b]$  e portanto  $C[a, b]$  é separável pelo Lema 1.6.3.

**Exemplo 1.6.8**  $L_p[a, b]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , é separável. Sejam  $f \in L_p[a, b]$  e  $\varepsilon > 0$ . Conforme veremos no Teorema 1.7.1, o conjunto das funções contínuas é denso em  $L_p[a, b]$ , e portanto existe  $g \in C[a, b]$  tal que  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Do Teorema 1.6.6 existe um polinômio  $P$  tal que  $\|g - P\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Assim,

$$\|f - P\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - P\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + (b - a)\|g - P\|_{\infty} < \varepsilon,$$

o que prova que o conjunto dos polinômios é denso em  $L_p[a, b]$ . A separabilidade de  $L_p[a, b]$  segue agora exatamente como no Exemplo 1.6.7.

Da teoria dos espaços métricos sabe-se que todo subconjunto de um espaço métrico separável é também separável (veja, por exemplo, [53, Exemplo 9.1.4]). Podemos então enunciar o seguinte:

**Proposição 1.6.9** *Todo subespaço de um espaço normado separável é também separável.*

## 1.7 Comentários e notas históricas

Os axiomas de espaço vetorial, sobre os números reais, foram estabelecidos pela primeira vez pelo italiano G. Peano em 1888. A definição abstrata de corpo apareceu com H. Weber em 1893. O primeiro livro sobre espaços vetoriais, escrito pelo também italiano S. Pincherle em colaboração com seu aluno U. Amaldi em 1901, já trabalhava com alguns espaços de funções. Como o Cálculo trata de funções definidas em conjuntos numéricos e seu livro tratava de funções definidas em conjuntos de funções, Pincherle chamou seu estudo de *Cálculo Funcional*. Em 1903, J. Hadamard passou a chamar uma transformação linear a valores no corpo de escalares de *funcional*, e o nome de nossa disciplina, *Análise Funcional*, apareceu pela primeira vez em um livro de P. Lévy publicado em 1922.

Os axiomas de norma apareceram nos anos 1920-1922 em trabalhos de N. Wiener, E. Helly, S. Banach e H. Hahn. Os axiomas de Wiener eram confusos, Helly não exigia que a norma estivesse definida em todos os elementos do espaço e Hahn incluiu muitas exigências adicionais, inclusive a completude. Em um notável trabalho de abstração a partir de problemas mais concretos estudados por Volterra e Hadamard, Banach apresentou os axiomas como os conhecemos hoje em sua tese [6], defendida em 1920 e publicada em 1922. Banach e seus companheiros poloneses se referiam aos espaços normados completos como *espaços de tipo B*. O termo *espaço de Banach* foi cunhado pelo matemático francês M. Fréchet em 1928. Mais detalhes podem ser encontrados em [24] e [15].

A desigualdade de Hölder, para sequências, foi na verdade provada pela primeira vez por L. C. Rogers em 1888. A demonstração de Hölder apareceu em 1889. A desigualdade (1.2) é chamada de *Desigualdade de Young*.

Como funções contínuas em  $[a, b]$  são Riemann-integráveis e funções Riemann-integráveis são Lebesgue-integráveis, é claro que o conjunto das funções contínuas é subespaço de  $L_p[a, b]$ . Mais ainda:

**Teorema 1.7.1** Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $C[a, b]$  é denso em  $L_p[a, b]$ .

Para uma demonstração veja [80, Theorem 3.14].

Para  $0 < p < 1$  as definições de  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  e  $\|\cdot\|_p$  são as mesmas do caso  $p \geq 1$ . Neste caso  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  continua sendo espaço vetorial, a diferença é que  $\|\cdot\|_p$  não é mais uma norma, pois não vale a desigualdade triangular. O interessante é que a desigualdade triangular não apenas não vale como vale ao contrário para funções não-negativas, o que nos dá o que é conhecido como *desigualdade de Minkowski invertida*:

**Teorema 1.7.2** Sejam  $0 < p < 1$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $f, g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  e  $f, g \geq 0$ , então

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leq \|f + g\|_p.$$

Para a demonstração veja [14, página 76] ou [32, Proposition 5.3.1].

Os espaços de funções diferenciáveis, introduzidos no Exemplo 1.1.4, bem como suas versões análogas para funções de várias variáveis  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , fornecem uma linguagem apropriada para o estudo de equações diferenciais parciais.

Por outro lado, em muitos casos nos confrontamos com funções que, apesar de não serem diferenciáveis, gozam de um módulo de continuidade apropriado, como é o caso das *funções Hölder contínuas*:

**Definição 1.7.3** Dado um número real  $0 < \alpha < 1$ , definimos

$$C^{0,\alpha}[a, b] := \{f \in C[a, b] : \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in [a, b]\}.$$

Para  $f \in C^{0,\alpha}[0, b]$  definimos

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{x, y \in [a, b], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Verifica-se que  $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}$  define uma norma em  $C^{0,\alpha}[a, b]$  e, com algum trabalho, pode-se constatar que  $(C^{0,\alpha}[a, b], \|\cdot\|_{C^{0,\alpha}})$  é um espaço de Banach.

O caso limite  $\alpha = 1$  representa o espaço das *funções Lipschitz contínuas* e é denotado por  $\text{Lip}[a, b]$ . O caso  $\alpha > 1$  é desinteressante pois, neste caso,  $C^{0,\alpha}[a, b]$  tem dimensão 1.

Muitas situações práticas nos conduzem ao estudo dos espaços  $C^{k,\alpha} := \{f \in C^k : D^k f \in C^{0,\alpha}\}$ . Conforme deixa claro o teorema a seguir, os espaços de funções Hölder contínuas são particularmente importantes para a teoria das equações diferenciais parciais elípticas:

**Teorema 1.7.4** (Teorema de Regularidade de Schauder) *Sejam  $B_1$  e  $B_{1/2}$  as bolas abertas no  $\mathbb{R}^n$  de raios 1 e  $1/2$ , respectivamente, centradas na origem. Seja  $u: B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f \text{ em } B_1.$$

*Se  $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ , então  $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$  e  $\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)})$ , onde  $C$  depende apenas da dimensão  $n$ .*

O teorema acima, cuja demonstração pode ser encontrada em [34, Theorem 4.6], tem caráter fundamental no estudo de equações diferenciais parciais e é ótimo em vários aspectos. Por exemplo, se  $f$  for meramente contínua, não podemos garantir que  $u \in C^2(B_{1/2})$ , o que mostra que o espaço das funções Hölder contínuas é o ambiente apropriado para a teoria de regularidade em problemas elípticos de segunda ordem.

O Lema 1.5.3 foi provado por F. Riesz em 1918. No Exercício 1.8.33 o leitor comprovará que o lema se estende para  $\theta = 1$  no caso de espaços normados de dimensão finita. E verá no Exercício 1.8.34 que o mesmo não ocorre, em geral, em espaços de dimensão infinita.

O termo *espaço separável* foi cunhado, no contexto de espaços topológicos, por Fréchet em 1906, no mesmo artigo em que introduziu os espaços métricos. Não conseguimos apurar com fidedignidade o motivo que o levou a escolher exatamente este termo.

## 1.8 Exercícios

**Exercício 1.8.1** Complete os detalhes do Exemplo 1.1.2.

**Exercício 1.8.2** Mostre que o conjunto  $\{f \in C[a, b] : f(x) > 0 \text{ para todo } x \in [a, b]\}$  é aberto em  $C[a, b]$ .

**Exercício 1.8.3** Duas normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  em um espaço vetorial  $E$  são ditas *equivalentes* se existirem constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Prove que se  $E$  é um espaço normado de dimensão finita, então quaisquer duas normas em  $E$  são equivalentes.

**Exercício 1.8.4** Prove que a correspondência  $f \in C[0, 1] \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt \in \mathbb{R}$  é uma norma em  $C[0, 1]$  que não é equivalente à norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Exercício 1.8.5** Dê exemplo de um espaço vetorial  $E$  e de uma métrica  $d$  em  $E$  que não está associada a uma norma pela igualdade (1.1).

**Exercício 1.8.6** Mostre que se  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ , então  $C^1[a, b] \subsetneq C^{\alpha_2}[a, b] \subsetneq C^{\alpha_1}[a, b] \subsetneq C[a, b]$ .

**Exercício 1.8.7** Mostre que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial.

**Exercício 1.8.8** Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de um espaço normado  $E$ , mostre que  $a\overline{A} = \overline{aA}$  para todo escalar  $a$  e  $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$ .

**Exercício 1.8.9** Seja  $E$  um espaço normado. Um subconjunto  $A \subseteq E$  é dito *limitado* se existir  $M > 0$  tal que  $\|x\| \leq M$  para todo  $x \in A$ . Se  $A$  for limitado em um espaço normado  $E$ , mostre que  $\overline{A}$  também é limitado.

**Exercício 1.8.10** Se  $E$  é um espaço de Banach e  $G$  é subespaço de  $E$ , mostre que o fecho  $\overline{G}$  de  $G$  também é subespaço de  $E$ .

**Exercício 1.8.11** Prove que subespaços próprios de espaços normados têm interior vazio.

**Exercício 1.8.12** (Espaço produto) Sejam  $E_1, \dots, E_n$  espaços normados.

(a) Prove que as expressões

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\|, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ e} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}, \end{aligned}$$

definem normas equivalentes no produto cartesiano  $E_1 \times \dots \times E_n$ .

(b) Sejam  $(x_j^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_j^n)_{j=1}^\infty$  seqüências em  $E_1, \dots, E_n$ , respectivamente. Prove que  $x_j^1 \rightarrow x_1 \in E_1, \dots, x_j^n \rightarrow x_n \in E_n$  se, e somente se,  $((x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty$  converge para  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $E_1 \times \dots \times E_n$  munido de alguma (e portanto todas) das normas acima.

(c) Prove que  $E_1 \times \dots \times E_n$  munido de uma (e portanto todas) das normas acima é Banach se, e somente se,  $E_1, \dots, E_n$  são Banach.

**Exercício 1.8.13** Seja  $E$  um espaço normado. No produto cartesiano considere qualquer uma das normas do Exercício 1.8.12.

(a) Prove que as operações algébricas de  $E$ :

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E \quad \text{e} \quad (x, a) \in E \times \mathbb{K} \mapsto ax \in E,$$

são funções contínuas.

(b) Prove que a norma  $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$  é uma função contínua.

**Exercício 1.8.14\*** (Espaço quociente) Sejam  $E$  um espaço normado e  $M$  um subespaço de  $E$ . Dados  $x, y \in E$ , dizemos que  $x \sim y$  se  $x - y \in M$ . Para cada  $x \in E$ , definimos  $[x] = \{y \in E : x \sim y\}$ . Definimos também  $E/M = \{[x] : x \in E\}$ . Prove que

(a)  $\sim$  é uma relação de equivalência.

(b) As operações  $[x] + [y] = [x + y]$  e  $a[x] = [ax]$  estão bem definidas e tornam  $E/M$  um espaço vetorial.

(c) Se  $M$  é fechado em  $E$ , então a expressão

$$\|[x]\| = \text{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$$

define uma norma em  $E/M$ .

(d) Se  $E$  é espaço de Banach, então  $E/M$  também é espaço de Banach.

**Exercício 1.8.15** Seja  $E$  um espaço vetorial. Um subconjunto  $A \subseteq E$  é dito *convexo* se sempre que  $x, y \in A$ , o “segmento fechado”

$$\{ax + (1 - a)y : 0 \leq a \leq 1\}$$

estiver inteiramente contido em  $A$ . Mostre que o conjunto  $\{x \in E : \|x\| \leq r\}$ , chamado de bola fechada centrada na origem de raio  $r > 0$ , é convexo.

**Exercício 1.8.16** Mostre que um subconjunto  $C$  de um espaço vetorial é convexo se, e somente, se  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in C$  sempre que  $x_1, \dots, x_n \in C$  e  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  satisfazem  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ .

**Exercício 1.8.17** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço vetorial  $E$ . O conjunto  $\text{conv}(A)$ , chamado de *envoltória convexa* de  $A$ , é definido como a interseção de todos os subconjuntos convexos de  $E$  que contém  $A$ . Mostre que

(a) A envoltória convexa de qualquer subconjunto de  $E$  é um conjunto convexo.

(b) Para qualquer  $A \subseteq E$ ,

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_i \geq 0, x_i \in A, i = 1, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Exercício 1.8.18** Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos convexos e compactos do espaço normado  $E$ . Prove que  $\text{conv}(A \cup B)$  é compacto.

**Exercício 1.8.19** Prove que o fecho de um subconjunto convexo de um espaço normado é convexo.

**Exercício 1.8.20** Seja  $1 \leq p < \infty$ .

(a) Prove que a expressão

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma no espaço vetorial das funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ .

(b) Mostre que espaço normado do item (a) não é completo.

**Exercício 1.8.21** Mostre que  $L_\infty(X, \Sigma, \mu) \subseteq L_1(X, \Sigma, \mu)$  se, e somente se,  $\mu(X) < \infty$ .

**Exercício 1.8.22** Se  $(X, \Sigma, \mu)$  é um espaço de medida finita e  $1 \leq r \leq p$ , então  $L_p(X, \Sigma, \mu) \subseteq L_r(X, \Sigma, \mu)$  e  $\|f\|_r \leq \|f\|_p \mu(X)^s$  onde  $s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ .

**Exercício 1.8.23** Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida finita e  $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ . Mostre que  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  para todo  $p \geq 1$  e que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ .

**Exercício 1.8.24** (Desigualdade de Hölder generalizada) Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p, q, s > 0$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$ . Prove que

$$\left( \sum_{j=1}^n |a_j b_j|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

**Exercício 1.8.25** Mostre, sem passar pelo espaço  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ , que  $\ell_\infty$  é um espaço de Banach.

**Exercício 1.8.26** Um elemento  $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$  é chamado de função simples se  $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$  for finito. Mostre que o conjunto das funções simples forma um subconjunto denso de  $\ell_\infty$ .

**Exercício 1.8.27** Considere

$$c = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \text{ existe em } \mathbb{K} \right\},$$

o conjunto de todas as seqüências convergentes formadas por elementos de  $\mathbb{K}$ . Mostre que  $c$  é subespaço fechado de  $\ell_\infty$ .

**Exercício 1.8.28\*** Seja  $K$  um subconjunto relativamente compacto, isto é  $\overline{K}$  é compacto, de  $\ell_1$ . Prove que  $K$  é limitado e que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sup_{(a_n)_{n=1}^\infty \in K} \left( \sum_{n \geq n_\varepsilon} |a_n| \right) \leq \varepsilon.$$

**Exercício 1.8.29** Determine  $\overline{c_{00}}$  em  $c_0$ .

**Exercício 1.8.30** Determine  $\overline{c_{00}}$  em  $\ell_p$ .

**Exercício 1.8.31** Mostre que  $\{e_1, e_2, \dots\}$  não é base algébrica (ou de Hamel) de  $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$ .

**Exercício 1.8.32** Prove se verdadeiro ou dê um contraexemplo se falso: Se  $K$  é um subconjunto fechado de um espaço normado, então o subespaço  $[K]$  gerado por  $K$  também é fechado.

**Exercício 1.8.33** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão finita e  $M$  um subespaço próprio de  $E$ . Mostre que existe  $y_0 \in E$  com  $\|y_0\| = 1$  e  $\|y_0 - x\| \geq 1$  para todo  $x \in M$ .

**Exercício 1.8.34** (Limitação do Lema de Riesz) Sejam  $E = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$  e  $F = \left\{f \in E : \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$ .

(a) Prove que  $E$  é subespaço fechado de  $C[0, 1]$ .

(b) Prove que  $F$  é subespaço fechado de  $E$ .

(c) Mostre que não existe  $g \in E$  tal que  $\|g\| = 1$  e  $\|g - f\| \geq 1$  para toda  $f \in F$ .

**Exercício 1.8.35\*** (O cubo de Hilbert) Chame de *cubo de Hilbert* o subconjunto de  $\ell_2$  formado pelas sequências  $(a_j)_{j=1}^\infty$  tais que  $|a_j| \leq \frac{1}{j}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Prove que o cubo de Hilbert é compacto em  $\ell_2$ .

**Exercício 1.8.36** Mostre que são equivalentes para um espaço de Banach  $E$ :

(a)  $E$  é separável.

(b) A bola unitária fechada  $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  é separável.

(c) A esfera unitária  $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  é separável.

**Exercício 1.8.37** Prove que  $L_\infty[a, b]$  não é separável.

**Exercício 1.8.38** Sejam  $E$  um espaço de Banach separável e  $F$  um subespaço fechado de  $E$ . Prove que  $E/F$  é separável.

**Exercício 1.8.39\*** (Recíproca da desigualdade de Hölder) Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida  $\sigma$ -finita e  $p, q \geq 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Chame de  $S$  o conjunto de todas as funções simples mensuráveis  $f$  que se anulam fora de um conjunto de medida finita, isto é, existe um conjunto  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) < \infty$  e  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A^c$ . Seja  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável tal que:

(i)  $fg \in L_1(X, \Sigma, \mu)$  para toda  $f \in S$ ,

(ii)  $\sup \left\{ \left| \int_X fg \right| : f \in S \text{ e } \|f\|_p = 1 \right\} < \infty$ .

Prove que  $g \in L_q(X, \Sigma, \mu)$  e  $\|g\|_q = \sup \left\{ \left| \int_X fg \right| : f \in S \text{ e } \|f\|_p = 1 \right\}$ .



## Capítulo 2

# Operadores Lineares Contínuos

Os espaços normados têm uma estrutura algébrica de espaço vetorial, à qual estão associadas as transformações lineares, e uma estrutura topológica de espaço métrico, à qual estão associadas as funções contínuas. Assim os morfismos entre espaços normados são as funções que são simultaneamente lineares e contínuas. Tais funções são normalmente chamadas de operadores lineares contínuos. Sendo assim, um *operador linear contínuo* do espaço normado  $E$  no espaço normado  $F$ , ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ , é uma função  $T: E \longrightarrow F$  que é linear, isto é

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$  e
- $T(ax) = aT(x)$  para todo  $a \in \mathbb{K}$  e qualquer  $x$  em  $E$ ;

e contínua, isto é, para todos  $x_0 \in E$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$  sempre que  $x \in E$  e  $\|x - x_0\| < \delta$ .

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de  $E$  em  $F$  será denotado por  $\mathcal{L}(E, F)$ . É claro que  $\mathcal{L}(E, F)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com as operações usuais de funções. Quando  $F$  é o corpo dos escalares, escrevemos  $E'$  no lugar de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ , chamamos esse espaço de *dual topológico de  $E$* , ou simplesmente *dual de  $E$* , e dizemos que seus elementos são *funcionais lineares contínuos*.

Seguindo a linha de que os morfismos entre espaços normados são os operadores lineares contínuos, dizemos que dois espaços normados  $E$  e  $F$  são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um operador linear contínuo bijetor  $T: E \longrightarrow F$  cujo operador inverso  $T^{-1}: F \longrightarrow E$  – que é sempre linear – é também contínuo. Tal operador  $T$  é chamado de *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*.

Um função  $f: E \longrightarrow F$  – não necessariamente linear – tal que  $\|f(x)\| = \|x\|$  para todo  $x \in E$  é chamada de *isometria*. Um operador linear  $T: E \longrightarrow F$  que é uma isometria é chamado de *isometria linear*. Observe que toda isometria linear é injetora e contínua. Um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de *isomorfismo isométrico*, e nesse caso dizemos que os espaços são *isomorfos isometricamente*.

## 2.1 Caracterizações dos operadores lineares contínuos

Relembremos duas classes importantes de funções no contexto de espaços métricos: uma função  $f: M \longrightarrow N$  entre espaços métricos é

- *lipschitziana* se existe uma constante  $L > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$  para todos  $x, y \in M$ ;
- *uniformemente contínua* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$  sempre que  $x, y \in M$  e  $d(x, y) < \delta$ .

Sabe-se que para funções entre espaços métricos, as implicações

lipschitziana  $\implies$  uniformemente contínua  $\implies$  contínua  $\implies$  contínua em um ponto

são verdadeiras e que, em geral, todas as implicações inversas são falsas. O próximo resultado, que remonta aos trabalhos de F. Riesz, mostra que todos esses conceitos são equivalentes no contexto de operadores lineares entre espaços normados. Ou seja, a linearidade, ou em última instância a estrutura algébrica, simplifica o comportamento topológico. Além disso provaremos outras equivalências que muito úteis serão no decorrer do texto.

**Teorema 2.1.1** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $T: E \longrightarrow F$  linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- $T$  é lipschitziano.
- $T$  é uniformemente contínuo.
- $T$  é contínuo.
- $T$  é contínuo em algum ponto de  $E$ .
- $T$  é contínuo na origem.
- $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$ .
- Existe uma constante  $C \geq 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in E$ .

**Demonstração.** As implicações (a) $\implies$ (b)  $\implies$ (c)  $\implies$ (d) são válidas no contexto de espaços métricos, isto é, não dependem da linearidade de  $T$ .

(d) $\implies$ (e) Suponha  $T$  contínuo no ponto  $x_0 \in E$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$  sempre que  $\|x - x_0\| < \delta$ . Tome  $x \in E$  tal que  $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$ . Então  $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$ . Portanto

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

provando que  $T$  é contínuo na origem.

(e) $\implies$ (f) Da continuidade de  $T$  na origem existe  $\delta > 0$  tal que  $\|T(x)\| < 1$  sempre que  $\|x\| < \delta$ . Se  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$ , e então  $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\frac{\delta}{2}x)\| < 1$ . Isso prova que  $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$ .

(f)  $\implies$  (g) Para  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\},$$

e portanto  $\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\})\|x\|$  para todo  $x \neq 0$ . O resultado segue pois essa desigualdade é trivialmente verificada para  $x = 0$ .

(g)  $\implies$  (a) Dados  $x_1, x_2 \in E$ ,

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|,$$

e portanto  $T$  é lipschitziano com constante  $C$ . ■

**Corolário 2.1.2** *Seja  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear bijetor entre espaços normados. Então  $T$  é um isomorfismo se, e somente, se existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que  $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$  para todo  $x \in E$ .*

**Observação 2.1.3** Da condição (f) do Teorema 2.1.1 segue que os operadores lineares contínuos são exatamente aqueles que transformam conjuntos limitados no domínio em conjuntos limitados no contradomínio. Por isso os operadores lineares contínuos são muitas vezes chamados de *operadores lineares limitados*. Apesar de ser uma terminologia amplamente difundida, não a adotaremos por ser inconsistente com a noção de função limitada do Exemplo 1.1.2. Lá uma função é limitada se sua imagem é limitada; aqui um operador é limitado se transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados. Para evitar ambiguidade seguiremos com o termo operador linear contínuo e com a noção de função limitada como aquela que tem imagem limitada.

Por outro lado, a mesma condição (f) nos ensina como normar o espaço  $\mathcal{L}(E, F)$  dos operadores lineares contínuos de  $E$  em  $F$ :

**Proposição 2.1.4** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

*define uma norma no espaço  $\mathcal{L}(E, F)$ .*

(b)  $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  para todos  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $x \in E$ .

(c) *Se  $F$  for Banach, então  $\mathcal{L}(E, F)$  também é Banach.*

**Demonstração.** Deixamos (a) e (b) a cargo do leitor. Provemos (c). Seja  $(T_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(E, F)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$  sempre que  $n, m \geq n_0$ . Logo

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (2.1)$$

para todos  $x \in E$  e  $n, m \geq n_0$ . Segue que para cada  $x \in E$ , a sequência  $(T_n(x))_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $F$ , logo convergente pois  $F$  é Banach. Podemos então definir

$$T: E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

A linearidade de  $T$  segue das propriedades dos limites. Fazendo  $m \longrightarrow \infty$  em (2.1) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (2.2)$$

para todos  $x \in E$  e  $n \geq n_0$ . Em particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

para todo  $x \in E$ , o que nos garante que  $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$ . Portanto  $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ . De (2.2) segue também que  $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , e assim segue que  $T_n \longrightarrow T$  em  $\mathcal{L}(E, F)$ . ■

No Exercício 2.7.8 o leitor provará várias expressões alternativas para  $\|T\|$ . Uma que será especialmente útil é a seguinte:

$$\|T\| = \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

No caso de funcionais lineares, a norma de operadores se transforma em

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

para todo espaço normado  $E$  e todo funcional  $\varphi \in E'$ . Da Proposição 2.1.4(c) temos

**Corolário 2.1.5** *O dual  $E'$  de qualquer espaço normado  $E$  é um espaço de Banach.*

## 2.2 Exemplos

É claro que, em qualquer espaço normado  $E$ , a identidade em  $E$  é um operador linear contínuo de norma 1, e que, entre dois espaços normados quaisquer, o operador nulo é um operador linear contínuo de norma 0. Também é muito simples verificar que se  $\varphi \in E'$  e  $y \in F$ , então

$$\varphi \otimes y : E \longrightarrow F, \quad \varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y,$$

é um operador linear contínuo de norma  $\|\varphi\| \cdot \|y\|$ . Vejamos alguns exemplos em espaços específicos:

**Exemplo 2.2.1** Seja  $1 \leq p < \infty$ . Escolha uma sequência  $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$  e considere o operador

$$T : \ell_\infty \longrightarrow \ell_p, \quad T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_j b_j)_{j=1}^\infty.$$

A linearidade de  $T$  é imediata. De

$$\begin{aligned} \|T((a_j)_{j=1}^\infty)\|_p &= \left( \sum_{j=1}^\infty |a_j b_j|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \right)^{1/p} \cdot \sup_j |a_j| \\ &= \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p \cdot \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \end{aligned}$$

para toda sequência  $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ , concluímos que  $T$  é contínuo e que  $\|T\| \leq \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$ . Tomando  $x = (1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty$  temos  $\|x\|_\infty = 1$  e  $\|T(x)\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$ , logo  $\|T\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$ . Este operador  $T$  é chamado de *operador diagonal* pela sequência  $(b_j)_{j=1}^\infty$ .

**Exemplo 2.2.2** Transportando o exemplo acima para os espaços de funções, considere  $1 \leq p < \infty$  e escolha uma função  $g \in L_p[0, 1]$ . Assim como antes, o operador

$$T: C[0, 1] \longrightarrow L_p[0, 1], \quad T(f) = fg,$$

é linear, contínuo e  $\|T\| = \|g\|_p$ . Neste caso  $T$  é chamado de *operador multiplicação* pela função  $g$ .

No Exercício 2.7.2 o leitor provará que todo operador linear definido em um espaço normado de dimensão finita é contínuo. Veremos a seguir, e com mais ênfase ainda no Exercício 2.7.3, que nem sempre operadores lineares em espaços de dimensão infinita são contínuos. Essa é a diferença básica entre Álgebra Linear e Análise Funcional. Se o leitor imagina que para um operador linear ser descontínuo ele deve ser algo muito complicado, certamente se surpreenderá com a simplicidade do exemplo a seguir.

**Exemplo 2.2.3** Considere o subconjunto  $\mathcal{P}[0, 1]$  de  $C[0, 1]$  formado pelas funções polinomiais (ou polinômios). É claro que  $\mathcal{P}[0, 1]$  é um subespaço vetorial de  $C[0, 1]$ , logo é um espaço normado com a norma  $\|\cdot\|_\infty$  herdada de  $C[0, 1]$ . É claro também que o operador derivação

$$T: \mathcal{P}[0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}[0, 1], \quad T(f) = f' = \text{derivada de } f,$$

é linear. Suponha que  $T$  seja contínuo. Nesse caso existe  $C$  tal que  $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$  para todo polinômio  $f \in \mathcal{P}[0, 1]$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tome  $f_n \in \mathcal{P}[0, 1]$  a função dada por  $f_n(t) = t^n$ . Então

$$n = \|f'_n\|_\infty = \|T(f_n)\|_\infty \leq C\|f_n\|_\infty = C$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e isso configura uma contradição, logo  $T$  é descontínuo.

## 2.3 O Teorema de Banach–Steinhaus

Um dos principais motivos do sucesso da Análise Funcional é a existência de um conjunto de teoremas estruturais que, ao mesmo tempo em que flexibilizam a teoria e permitem sua interação com diversas outras áreas, a tornam repleta de exemplos interessantes. Começaremos a descrever e demonstrar esses teoremas nesta seção e terminaremos apenas no próximo capítulo com o Teorema de Hahn–Banach e suas aplicações.

Muitos dos principais teoremas em análise estão associados a algum tipo de controle uniforme baseado em hipóteses pontuais. Um exemplo clássico é o fato de que funções

contínuas em conjuntos compactos são uniformemente contínuas. O principal resultado desta seção, o Teorema de Banach–Steinhaus, garante que uma família de operadores lineares contínuos é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada. Importantes consequências deste teorema serão vistas a seguir e também em vários outros pontos do texto. Para sua demonstração precisamos do seguinte clássico da topologia dos espaços métricos:

**Teorema 2.3.1** (Teorema de Baire) *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico completo e  $(F_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de subconjuntos fechados de  $M$  tais que  $M = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F_{n_0}$  tem interior não-vazio.*

**Demonstração.** Denotemos por  $\text{int}(A)$  o interior de um subconjunto  $A$  de  $M$ . Façamos por absurdo, e para isso suponhamos que  $\text{int}(F_n) = \emptyset$  para todo  $n$ . Chamando  $A_n = (F_n)^c = (M - F_n)$ , cada  $A_n$  é aberto e

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = (\text{int}(F_n))^c = \emptyset^c = M$$

para todo  $n$ . Em particular, cada  $A_n$  é não-vazio. Escolha  $x_1 \in A_1$  e use o fato de  $A_1$  ser aberto para garantir a existência de  $0 < \delta_1 < 1$  tal que a bola fechada de centro  $x_1$  e raio  $\delta_1$ , denotada por  $B[x_1, \delta_1]$ , está contida em  $A_1$ . De  $\overline{A_2} = M$  temos  $A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$ , onde  $B(x_1, \delta_1)$  denota a bola aberta de centro  $x_1$  e raio  $\delta_1$ . E como  $A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$  é aberto, existem  $x_2 \in A_2$  e  $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$  tais que  $B[x_2, \delta_2] \subseteq A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \subseteq A_2 \cap B[x_1, \delta_1]$ . Continuando o processo construímos uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $M$  e uma sequência  $(\delta_n)_{n=1}^\infty$  de números reais tais que

$$0 < \delta_n < \frac{1}{n} \text{ e } B[x_{n+1}, \delta_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B[x_n, \delta_n]$$

para todo  $n$ . Dado  $\varepsilon > 0$  escolha  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ . Se  $m, n \geq n_0$ , como  $B[x_n, \delta_n] \cap B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$ , temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Isso mostra que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $M$ , logo convergente. Digamos  $x_n \rightarrow x \in M$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x_m \in B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_n, \delta_n]$  para todo  $m \geq n$  e  $B[x_n, \delta_n]$  é um conjunto fechado, segue que  $x \in B[x_n, \delta_n] \subseteq A_n$ . Portanto

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_{n=1}^\infty (F_n)^c = \left( \bigcup_{n=1}^\infty F_n \right)^c = M^c = \emptyset,$$

contradição esta que conclui a demonstração. ■

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Banach–Steinhaus) *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $(T_i)_{i \in I}$  uma família de operadores em  $\mathcal{L}(E; F)$  satisfazendo a condição de que para cada  $x \in E$  existe  $C_x < \infty$  tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x. \quad (2.3)$$

Então  $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$ .

**Demonstração.** Da continuidade de  $T_i$  resulta que o conjunto  $\{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$  é fechado para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada  $i \in I$ . Dessa forma, o conjunto

$$A_n := \left\{ x \in E : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n \right\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado por ser uma interseção de fechados. De (2.3) segue que  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  e, pelo Teorema 2.3.1, algum  $A_n$  possui interior não-vazio. Seja  $n_0$  um número natural tal que  $A_{n_0}$  tenha interior não-vazio, e sejam  $a \in \text{int}(A_{n_0})$  e  $r > 0$  tais que  $\{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subseteq \text{int}(A_{n_0})$ . Seja  $y \in E$  com  $\|y\| \leq 1$ . Se  $x = a + ry$ , então  $\|x - a\| = \|ry\| \leq r$  e portanto  $x \in A_{n_0}$ . Assim

$$\|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0$$

para todo  $i \in I$ . Logo  $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0$  e  $\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r}$  para todo  $i$  em  $I$ . Portanto  $\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}$ . ■

Da Análise na Reta sabemos que o limite uniforme de funções contínuas definidas em um intervalo da reta tomando valores na reta é uma função contínua, enquanto que o limite pontual de funções contínuas pode não ser uma função contínua. Veremos abaixo que, na presença da linearidade, a convergência pontual é suficiente.

**Corolário 2.3.3** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $(T_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência em  $\mathcal{L}(E; F)$  tal que  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  é convergente em  $F$  para todo  $x$  em  $E$ . Se definirmos*

$$T: E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$$

*então  $T$  é um operador linear contínuo.*

**Demonstração.** A linearidade de  $T$  segue das propriedades aritméticas dos limites. Por hipótese, para cada  $x \in E$  a sequência  $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$  é convergente, e portanto limitada. Assim  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$  para todo  $x \in E$ . Pelo Teorema 2.3.2 existe  $c > 0$  tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \leq c$ . Segue então que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq c \|x\|$$

para todos  $x \in E$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $n \longrightarrow \infty$  obtemos  $\|T(x)\| \leq c \|x\|$  para todo  $x \in E$ , o que completa a demonstração de que  $T$  é contínuo. ■

Para apreciar a próxima aplicação do Teorema de Banach–Steinhaus, lembremos um exemplo clássico do Cálculo: a função

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0,$$

é separadamente contínua, isto é,  $f(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f(\cdot, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas para quaisquer  $x, y$  fixos. Entretanto  $f$  não é contínua: tomando  $y = tx$  com  $x \neq 0$ ,  $f(x, tx) = \frac{t}{1+t^2}$ , portanto não existe o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . A seguir verificamos que para aplicações *bilineares*, o fenômeno acima não ocorre, mesmo em dimensão infinita.

**Definição 2.3.4** Sejam  $E_1, E_2$  e  $F$  espaços vetoriais. Uma aplicação  $B: E_1 \times E_2 \rightarrow F$  é dita *bilinear* se  $B(x_1, \cdot): E_2 \rightarrow F$  e  $B(\cdot, x_2): E_1 \rightarrow F$  são operadores lineares para quaisquer  $x_1 \in E_1$  e  $x_2 \in E_2$  fixados.

**Corolário 2.3.5** Sejam  $E_1, E_2$  e  $F$  espaços vetoriais normados,  $E_2$  completo e  $B: E_1 \times E_2 \rightarrow F$  uma aplicação bilinear. Suponha que  $B$  seja separadamente contínua, isto é,  $B(x, \cdot): E_2 \rightarrow F$  e  $B(\cdot, y): E_1 \rightarrow F$  são operadores lineares contínuos para quaisquer  $x \in E_1$  e  $y \in E_2$  fixados. Então  $B: E_1 \times E_2 \rightarrow F$  é uma aplicação contínua.

**Demonstração.** Considere  $\mathcal{F} = \{B(x, \cdot) : x \in E_1, \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathcal{L}(E_2, F)$ . Por hipótese,  $B(\cdot, y)$  é linear e contínuo para cada  $y \in E_2$ , portanto, para todo  $x \in E_1$ ,  $\|x\| \leq 1$ , temos

$$\|B(x, y)\| \leq \|B(\cdot, y)\|_{\mathcal{L}(E_1, F)} =: C_y.$$

Assim a família  $\mathcal{F}$  é pontualmente limitada e, pelo Teorema de Banach–Steinhaus, existe uma constante  $C$  tal que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|B(x, y)\| < C.$$

Segue da bilinearidade de  $B$  que  $\|B(x, y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$  para todos  $x \in E_1$  e  $y \in E_2$ . A continuidade de  $B$  segue agora do Exercício 2.7.25. ■

Finalizamos esta seção verificando a necessidade da completude do domínio no enunciado do Teorema de Banach–Steinhaus.

**Exemplo 2.3.6** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere o funcional linear contínuo

$$\varphi_n: c_{00} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = na_n.$$

É claro que  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subseteq (c_{00})'$  e  $\|\varphi_n\| = n$  para todo  $n$ . Dada uma sequência  $(a_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}$ , tomando  $j_0$  tal que  $a_j = 0$  para todo  $j \geq j_0$ , segue que  $\varphi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = 0$  para todo  $n \geq j_0$ . Assim,  $\sup_n |\varphi_n(x)| < \infty$  para todo  $x \in c_{00}$  mas  $\sup_n \|\varphi_n\| = \infty$ .



## 2.4 O Teorema da Aplicação Aberta

O Teorema da Aplicação Aberta é mais um resultado famoso da Análise Funcional, devido a Banach (1929), e garante que se  $E$  e  $F$  são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor  $T: E \longrightarrow F$  é uma *aplicação aberta*, isto é,  $T(A)$  é aberto em  $F$  sempre que  $A$  for aberto em  $E$ . Para demonstrá-lo, precisamos do seguinte lema. Por  $B_E(x_0; r)$  denotaremos a bola aberta em  $E$  centrada em  $x_0$  de raio  $r$ , isto é,  $B_E(x_0; r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$ .

**Lema 2.4.1** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear contínuo. Se existirem  $R, r > 0$  tais que  $\overline{T(B_E(0; R))} \supseteq B_F(0; r)$ , então  $T(B_E(0; R)) \supseteq B_F(0; \frac{r}{2})$ .*

**Demonstração.** Como para todo subconjunto  $M \subseteq E$  e todo escalar  $a \in \mathbb{K}$  tem-se  $\overline{aM} = a\overline{M}$  (Exercício 1.8.8), segue da hipótese que

$$\overline{T(B_E(0; aR))} \supseteq B_F(0; ar) \quad (2.4)$$

para todo  $a \in \mathbb{R}$  positivo. Seja  $y \in B_F(0; \frac{r}{2})$ . Por (2.4) existe  $x_1 \in B_E(0; \frac{R}{2})$  tal que  $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}$ , isto é,  $y - T(x_1) \in B_F(0; \frac{r}{4})$ . Novamente por (2.4), existe  $x_2 \in B_E(0; \frac{R}{4})$  tal que

$$\|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \frac{r}{8}.$$

Como (2.4) vale para todo  $a > 0$ , podemos continuar esse procedimento indefinidamente de forma a construir uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $E$  tal que  $x_n \in B_E(0; \frac{R}{2^n})$  e

$$\|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| < \frac{r}{2^{n+1}} \quad (2.5)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A série  $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$  é convergente pois  $\|x_n\| < \frac{R}{2^n}$  para todo  $n$ , logo

$$\left\| \sum_{j=n}^m x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^m \|x_j\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

e portanto a sequência  $\left( \sum_{j=1}^n x_j \right)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $E$ . Como  $E$  é Banach, existe  $x \in E$  para o qual essa sequência converge. Segue então que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \|x_j\| = \|x_1\| + \sum_{n=2}^\infty \|x_n\| \\ &< \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^\infty \frac{R}{2^n} \leq \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^\infty \frac{R}{2^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{R}{2^n} = R, \end{aligned}$$

e portanto  $x \in B_E(0; R)$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \|y - T(x)\| &= \left\| y - T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j\right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2^{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

e conseqüentemente  $y = T(x)$ . Daí  $y \in T(B_E(0; R))$  e o resultado está provado. ■

**Teorema 2.4.2** (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T: E \rightarrow F$  linear, contínuo e sobrejetor. Então  $T$  é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

**Demonstração.** De  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0; n)$  e da sobrejetividade de  $T$  segue que

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0; n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}.$$

Pelo Teorema 2.3.1 existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\overline{T(B_E(0; n_0))}$  tem interior não-vazio. Assim existem  $b \in F$  e  $r > 0$  tais que  $B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}$ . Como

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} = -\overline{T(B_E(0; n_0))},$$

resulta que

$$B_F(-b; r) = -B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Como  $x = \frac{1}{2}(b + x) + \frac{1}{2}(-b + x)$ ,

$$\begin{aligned} B_F(0; r) &\subseteq \frac{1}{2}B_F(b; r) + \frac{1}{2}B_F(-b; r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0; n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0; n_0))} = \overline{T(B_E(0; n_0))}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da convexidade do conjunto  $\overline{T(B_E(0; n_0))}$ . Pelo Lema 2.4.1 sabemos que  $T(B_E(0; n_0)) \supseteq B_F(0; \rho)$  para  $\rho = \frac{r}{2}$ , e portanto  $T(B_E(0; cn_0)) \supseteq B_F(0; c\rho)$  para todo real positivo  $c$ . Vejamos que

$$T(B_E(x; cn_0)) \supseteq B_F(T(x); c\rho)$$

para todo  $x \in E$  e todo  $c > 0$ . De fato,  $B_E(x; cn_0) = x + B_E(0, cn_0)$ , e então

$$T(B_E(x; cn_0)) = T(x) + T(B_E(0; cn_0)) \supseteq T(x) + B_F(0; c\rho) = B_F(T(x); c\rho).$$

Agora podemos provar que  $T(U)$  é aberto em  $F$  para cada  $U$  aberto em  $E$ . Sejam  $x \in U$  e  $c > 0$  tais que  $B_E(x, cn_0) \subseteq U$ . Então  $T(U) \supseteq T(B_E(x; cn_0)) \supseteq B_F(T(x); c\rho)$ ,

provando que  $T(U)$  é aberto em  $F$ .

A segunda afirmação é consequência imediata da primeira. ■

A sobrejetividade do operador é hipótese essencial no Teorema da Aplicação Aberta, pois toda aplicação linear aberta  $T: E \longrightarrow F$  entre espaços normados é necessariamente sobrejetora. Com efeito, dada uma bola aberta centrada na origem de  $E$ , sua imagem por  $T$ , por ser aberta, contém uma bola centrada na origem de  $F$ . A sobrejetividade segue facilmente da linearidade de  $T$ .

O próximo exemplo mostra que a hipótese dos espaços serem completos também é essencial.

**Exemplo 2.4.3** Seja  $T: c_{00} \longrightarrow c_{00}$  o operador linear dado por  $T((a_n)_{n=1}^\infty) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$ . No Exercício 2.7.28 o leitor provará que  $T$  é linear, bijetor e contínuo, mas que o operador inverso  $T^{-1}$  não é contínuo.

**Exemplo 2.4.4** (Subespaços fechados de  $C[0, 1]$ ) Vejamos que todo subespaço fechado  $F$  de dimensão infinita de  $C[0, 1]$  contém uma função que não pertence a  $C^1[0, 1]$ . Isso prova, em particular, que  $C^1[0, 1]$  não é fechado em  $C[0, 1]$ . Suponha, com propósito de contradição, que  $F \subseteq C^1[0, 1]$ . Como  $F$  é fechado em  $C[0, 1]$ , os espaços  $E_1 := (F, \|\cdot\|_\infty)$  e  $E_2 := (F, \|\cdot\|_{C^1})$  são ambos completos. A aplicação identidade  $i: E_2 \longrightarrow E_1$  é claramente bijetora e linear. É também contínua pois, para toda  $g \in F$ ,

$$\|i(g)\|_{E_1} = \|g\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|g\|_{E_2}.$$

Assim, o Teorema da Aplicação Aberta garante a existência de uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|g'\|_\infty \leq C\|g\|_\infty$$

para toda função  $g \in F$ . Seja  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência na bola unitária de  $E_1$ , isto é,  $\max_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| \leq 1$  para todo  $n$ . Pela desigualdade acima,  $\max_{t \in [0, 1]} |f'_n(t)| \leq C$  para todo  $n$ .

O conjunto formado pelas funções  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , satisfaz então as condições (a) e (b) do Teorema de Ascoli (Teorema B.7 do Apêndice 2); e portanto seu fecho é compacto em  $C[0, 1]$ . Obtemos assim uma subsequência  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  e uma função  $f \in C[0, 1]$  tais que  $f_{n_j} \longrightarrow f$  em  $C[0, 1]$ . Sabemos que  $f \in F$  pois  $F$  é fechado. Provamos então que a bola fechada unitária de  $E_1$  é compacta. Pelo Teorema de Riesz (Teorema 1.5.4),  $F$  teria obrigatoriamente dimensão finita, o que contradiz nossa hipótese inicial.

## 2.5 O Teorema do Gráfico Fechado

Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear. O *gráfico* de  $T$  é o conjunto

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Note que  $G(T)$  é um subespaço vetorial de  $E \times F$  (que será munido com qualquer uma das normas equivalentes do Exercício 1.8.12). Em geral  $G(T)$  pode ser um subconjunto fechado de  $E \times F$  ou não. Vejamos que, para operadores lineares entre espaços de Banach, a continuidade de  $T$  é equivalente ao fato de  $G(T)$  ser fechado.

**Teorema 2.5.1** (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear. Então  $T$  é contínuo se, e somente se,  $G(T)$  é fechado em  $E \times F$ .*

**Demonstração.** Suponha  $T$  contínuo. Então a função

$$f: E \times F \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \|T(x) - y\|$$

é contínua, e portanto  $G(T) = f^{-1}(\{0\})$  é fechado por ser a imagem inversa do fechado  $\{0\}$  pela função contínua  $f$ .

Reciprocamente, suponha  $G(T)$  fechado. Do Exercício 1.8.12 sabemos que  $E \times F$  é espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_1$ . A função

$$\pi: G(T) \longrightarrow E, \quad \pi(x, T(x)) = x,$$

é claramente linear e bijetora. Além disso,  $\pi$  é contínua pois

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1.$$

Do Teorema da Aplicação Aberta segue então que  $\pi^{-1}$  é contínua e portanto existe  $C > 0$  tal que  $\|(x, T(x))\|_1 \leq C \|x\|$  para todo  $x \in E$ . Logo

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C \|x\|$$

para todo  $x \in E$ . Isso prova que  $T$  é contínuo. ■

No Teorema 2.6.1 e no Exercício 2.7.34 o leitor se certificará de que uma e apenas uma das implicações do Teorema do Gráfico Fechado continua válida para operadores entre espaços normados não-completos.

A grande utilidade do Teorema do Gráfico Fechado reside na seguinte observação: para mostrar a continuidade de um operador  $T: E \longrightarrow F$  (linear ou não) via definição, devemos provar que, para toda sequência convergente  $x_n \longrightarrow x$  em  $E$ , é verdade que:

- (a)  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  é convergente em  $F$ , isto é, existe  $y \in F$  tal que  $T(x_n) \longrightarrow y$ ;
- (b)  $y = T(x)$ .

Em geral, provar (a), isto é, provar que  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$  converge, é uma tarefa difícil, especialmente em dimensão infinita. O Teorema do Gráfico Fechado nos fornece, no caso em que  $T$  é linear e atua entre espaços de Banach, o item (a) gratuitamente, ou seja, podemos supor a convergência de  $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ , restando apenas verificar (b). O exemplo a seguir ilustra o que acabamos de dizer:

**Exemplo 2.5.2** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T: E \longrightarrow E'$  um operador linear *simétrico*, isto é,  $T$  é linear e

$$T(x)(y) = T(y)(x) \text{ para todos } x, y \in E.$$

Mostremos que  $T$  é contínuo. Em vista do Teorema do Gráfico Fechado, basta verificar que  $G(T)$  é fechado. Para isto, seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência convergindo para  $x$  em  $E$  e suponha que  $T(x_n) \longrightarrow \varphi$  em  $E'$ . Fixado  $y \in E$ , tomando o limite quando  $n \longrightarrow \infty$ ,

$$\varphi(y) \longleftarrow T(x_n)(y) = T(y)(x_n) \longrightarrow T(y)(x) = T(x)(y),$$

o que nos permite concluir que  $T(x)(y) = \varphi(y)$ . Como  $y \in E$  foi escolhido arbitrariamente, segue que  $\varphi = T(x)$ , e portanto  $G(T)$  é fechado.

## 2.6 Comentários e notas históricas

Seja  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear contínuo. Da Proposição 2.1.4(b) sabemos que na expressão

$$\|T\| = \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\},$$

o ínfimo é atingido. É natural então imaginar que na expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| = 1\},$$

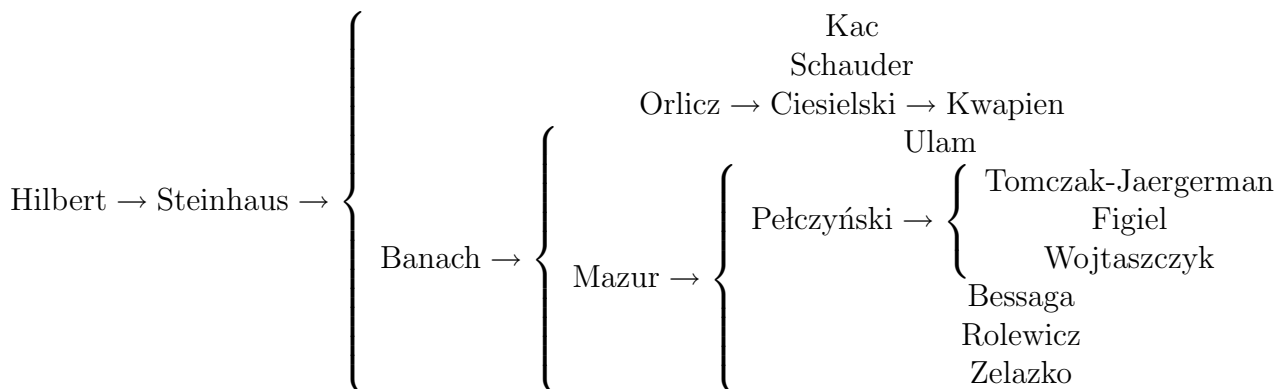
o supremo também é atingido. Entretanto, como o leitor verificará no Exercício 2.7.11, isso nem sempre acontece e o assunto é bem mais delicado do que pode parecer à primeira vista. Diz-se que um operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$  *atinge a norma* se existe  $x \in E$  com norma 1 tal que  $\|T(x)\| = \|T\|$ . Um resultado profundo, conhecido como Teorema de Bishop–Phelps, garante que, se  $E$  e  $F$  são espaços normados (sobre os reais), então o conjunto dos *funcionais* lineares contínuos que atingem a norma é denso em  $E'$ . A monografia [23] é uma boa referência em português sobre o assunto. Para outras versões do Teorema de Bishop–Phelps e relações com métodos variacionais e aplicações às equações diferenciais parciais elípticas sugerimos o livro [29].

O Teorema de Baire tem várias formulações equivalentes (veja, por exemplo [53, Seção 7.7]). Enunciamos no Teorema 2.3.1 aquela que é mais conveniente para os nossos propósitos. A demonstração que apresentamos é a que aparece em [75].

O Teorema 2.3.2 foi provado por Banach e Steinhaus em um artigo conjunto publicado em 1927. O Corolário 2.3.3 também é chamado de Teorema de Banach–Steinhaus, e ambos são também conhecidos como Princípio da Limitação Uniforme. São conhecidas algumas demonstrações do Teorema de Banach–Steinhaus que não utilizam o Teorema de Baire – veja, por exemplo [17, 14.1] e [39].

S. Banach e H. Steinhaus são personagens centrais da Análise Funcional e da já lendária escola polonesa de matemática do século 20. A parte da árvore genealógica (matematicamente falando) de Banach e Steinhaus exibida abaixo, em que todos –

exceto Hilbert, é claro – são matemáticos poloneses de grande renome internacional, é prova da influência da matemática polonesa ao longo de todo o século 20 e deste início de século 21 (o símbolo  $A \rightarrow B$  indica que  $A$  foi orientador de  $B$ ):



Para fazer justiça à matemática polonesa devemos mencionar que a árvore acima ilustra apenas um lado da escola polonesa, a saber, o ramo de Lwów, ou o ramo de Análise Funcional. Tão importante quanto o ramo de Lwów é o ramo de Varsóvia, que inclui, entre outros nomes ilustres, os seguintes matemáticos: Zaremba, Sierpiński, Mazurkiewicz, Kuratowski, Saks, Borsuk, Zygmund, Tarski, Marcinkiewicz e Janiszewski.

O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado foram publicados por Banach em 1932 no livro [7], que é normalmente considerado como o marco da fundação da Análise Funcional como disciplina matemática. A primeira demonstração do Teorema da Aplicação Aberta é devida a J. Schauder em 1930.

No Teorema do Gráfico Fechado, a implicação ‘ $T$  contínuo  $\implies$  gráfico de  $T$  fechado’ vale em um contexto muito mais geral, que será demonstrada e utilizada no Capítulo 6 (veja Lema 6.2.8):

**Teorema 2.6.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos com  $Y$  de Hausdorff. Se a função  $f: X \longrightarrow Y$  é contínua, então o gráfico de  $f$  é fechado em  $X \times Y$ .*

Uma das lições centrais deste capítulo é o fato de que propriedades algébricas afetam, de forma significativa, o comportamento topológico das funções entre espaços normados. Há um exemplo notável, devido a S. Mazur e S. Ulam (1932), de como propriedades topológicas também podem afetar o comportamento algébrico:

**Teorema 2.6.2** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados reais e  $f: E \longrightarrow F$  uma função sobrejetora tal que  $f(0) = 0$  e*

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

*para quaisquer  $x, y$  em  $E$ . Então  $f$  é linear.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [84, Chapitre X, Lecture 1].

## 2.7 Exercícios

**Exercício 2.7.1** (a) Prove que todo espaço normado de dimensão finita  $n$  sobre  $\mathbb{K}$  é isomorfo ao espaço euclidiano  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ .

(b) Prove que se  $E$  e  $F$  são espaços normados, sobre o mesmo corpo, de mesma dimensão finita, então  $E$  e  $F$  são isomorfos.

**Exercício 2.7.2** Todo operador linear cujo domínio é um espaço normado de dimensão finita é contínuo.

**Exercício 2.7.3** Mostre que para todo espaço normado de dimensão infinita  $E$  e todo espaço normado  $F \neq \{0\}$ , existe um operador linear descontínuo  $T: E \rightarrow F$ .

**Exercício 2.7.4** Seja  $E$  um espaço normado sobre  $\mathbb{C}$ . Se  $\varphi$  é um funcional linear descontínuo em  $E$ , mostre que  $\{\varphi(x) : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \mathbb{C}$ .

**Exercício 2.7.5** Sejam  $E$  um espaço normado,  $F$  um espaço de Banach e  $G$  um subespaço de  $E$ . Se  $T: G \rightarrow F$  é linear e contínua, mostre que existe uma única extensão linear contínua de  $T$  ao fecho de  $G$ . Mostre também que a norma da extensão coincide com a norma de  $T$  e que se  $T$  é uma isometria linear, então a extensão também é.

**Exercício 2.7.6** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  uma isometria linear. Mostre que  $T(E)$  é fechado em  $F$ .

**Exercício 2.7.7** (a) Prove que se um espaço normado  $E$  é isomorfo a um espaço de Banach, então  $E$  é espaço de Banach.

(b) Mostre que o item (a) não vale em espaços métricos, isto é, existem espaços métricos homeomorfos  $M$  e  $N$  com  $M$  completo e  $N$  não-completo.

(c) Como você explica a discrepância entre os itens (a) e (b)?

**Exercício 2.7.8** (a) Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T: E \rightarrow F$  linear e contínuo. Mostre que

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| \\ &= \inf \{C : \|T(x)\| \leq C \|x\| \text{ para todo } x \in E\}. \end{aligned}$$

(b) Prove que  $T \mapsto \|T\|$  é uma norma em  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Exercício 2.7.9** Sejam  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $R \in \mathcal{L}(F, G)$ . Prove que  $R \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$  e  $\|R \circ T\| \leq \|R\| \cdot \|T\|$ . Dê um exemplo em que  $\|R \circ T\| < \|R\| \cdot \|T\|$ .

**Exercício 2.7.10** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . Mostre que  $E' \times F'$  e  $(E \times F)'$  são isometricamente isomorfos considerando-se em  $E \times F$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$  e em  $E' \times F'$  a norma  $\|\cdot\|_1$  (veja as definições das normas no Exercício 1.8.12).

**Exercício 2.7.11** (Um funcional linear contínuo que não atinge a norma) Seja

$$\varphi: c_0 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{2^j}.$$

Prove que:

- (a)  $\varphi \in (c_0)'$  (não se esqueça de provar, primeiro, que  $\varphi$  está bem definido).
- (b)  $\|\varphi\| = 1$ .
- (c) Não existe  $x \in c_0$  tal que  $\|x\| \leq 1$  e  $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$ .

**Exercício 2.7.12** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear contínuo.

- (a) Prove que o *núcleo de  $T$* , definido por  $\ker(T) = \{x \in E : T(x) = 0\}$ , é um subespaço fechado de  $E$ .
- (b) Prove que a *imagem de  $T$* , definida por  $\text{Im}(T) = \{T(x) : x \in E\}$ , é um subespaço de  $F$ . Fechado?

**Exercício 2.7.13\*** Considere  $X = \mathbb{R}^2$  munido com a norma  $\|(x, y)\| := (x^4 + y^4)^{1/4}$ . Calcule explicitamente a norma de cada funcional  $\varphi \in X'$ .

**Exercício 2.7.14\*** (Aplicação quociente) Sejam  $M$  um subespaço fechado do espaço normado  $E$  e  $\pi: E \longrightarrow E/M$  dada por  $\pi(x) = [x]$  (veja Exercício 1.8.14). Prove que:

- (a)  $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$  para todo  $x \in E$ .
- (b) Dados  $x \in E$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $y \in E$  tal que  $\pi(x) = \pi(y)$  e  $\|y\| \leq \|\pi(x)\| + \varepsilon$ .
- (c) A imagem da bola unitária aberta de  $E$  por  $\pi$  é a bola unitária aberta de  $E/M$ .
- (d)  $\pi \in \mathcal{L}(E, E/M)$ ,  $\ker(\pi) = M$  e  $\pi$  é uma aplicação aberta.
- (e) Se  $M \neq E$ , então  $\|\pi\| = 1$ .
- (f) Para todo espaço normado  $F$  e todo operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$  existe um único operador linear contínuo  $\tilde{T}: E/M \longrightarrow F$  tal que  $T = \tilde{T} \circ \pi$ . Mais ainda,  $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ .

**Exercício 2.7.15** (Teorema do Isomorfismo) Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Prove que se  $T(E)$  é fechado em  $F$  então  $T(E)$  é isomorfo a  $E/\ker(T)$ .

**Exercício 2.7.16** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Se  $T \in \mathcal{L}(E; F)$  e existe  $c > 0$  tal que  $\|T(x)\| \geq c\|x\|$  para todo  $x \in E$ , mostre que o operador inverso  $T^{-1}$  existe e é contínuo.

**Exercício 2.7.17** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Mostre que um operador linear  $T: E \longrightarrow F$  é contínuo se, e somente, se  $T(A)$  é limitado em  $F$  sempre que  $A$  for limitado em  $E$  (veja a definição de conjunto limitado no Exercício 1.8.9).

**Exercício 2.7.18** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Mostre que se  $T: E \longrightarrow F$  é isomorfismo isométrico, então  $\|T\| = 1$ . Por outro lado, encontre um espaço de Banach  $E$  e um isomorfismo topológico  $T: E \longrightarrow E$  com  $\|T\| = 1$ , que não é isomorfismo isométrico.



**Exercício 2.7.19** Mostre que quaisquer dois espaços dentre os espaços  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  e  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  não são isomorfos isometricamente.

**Exercício 2.7.20** (Operadores de posto finito) Diz-se que um operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$  é de *posto finito* se a imagem de  $T$  é um subespaço de dimensão finita de  $F$ .

(a) Prove que  $T$  é de posto finito se, e somente, se existem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$  e  $y_1, \dots, y_n \in F$  tais que  $T = \varphi_1 \otimes y_1 + \dots + \varphi_n \otimes y_n$ .

(b) Prove que o conjunto dos operadores lineares contínuos de posto finito de  $E$  em  $F$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Fechado?

**Exercício 2.7.21** Diz-se que um subespaço  $M$  de um espaço vetorial  $E$  tem *deficiência finita* se existir um número finito de vetores  $x_1, \dots, x_n$  em  $E - M$  tais que  $E = [M \cup \{x_1, \dots, x_n\}]$ . Mostre que o núcleo de um funcional linear não-nulo  $T: E \longrightarrow \mathbb{K}$  tem (em  $E$ ) deficiência finita com  $n = 1$ .

**Exercício 2.7.22** Sejam  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ . Mostre que  $\ell_p \subseteq \ell_q$  e que a inclusão  $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$  é um operador linear contínuo. Determine a norma dessa inclusão.

**Exercício 2.7.23** Considere o conjunto

$$cs = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty a_j \text{ converge} \right\}.$$

(a) Mostre que  $cs$  é um espaço normado com as operações usuais de seqüências e com

$$\text{a norma } \|(a_j)_{j=1}^\infty\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^n a_j \right|.$$

(b) Prove que  $cs$  é isomorfo isometricamente ao espaço  $c$  das seqüências convergentes definido no Exercício 1.8.27.

**Exercício 2.7.24** Considere o conjunto

$$bs = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| < \infty \right\}.$$

(a) Mostre que  $bs$  é um espaço normado com as operações usuais de seqüências e com

$$\text{a norma } \|(a_j)_{j=1}^\infty\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^n a_j \right|.$$

(b) Prove que  $bs$  é isomorfo isometricamente a  $\ell_\infty$ .

**Exercício 2.7.25** Sejam  $E, F, G$  espaços normados e  $A: E \times F \longrightarrow G$  uma aplicação bilinear. Considere em  $E \times F$  qualquer uma das normas do Exercício 1.8.12. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

- (a)  $A$  é contínua.
- (b)  $A$  é contínua na origem.
- (c)  $\sup\{\|A(x, y)\| : x \in B_E, y \in B_F\} < \infty$ .
- (d) Existe  $C \geq 0$  tal que  $\|A(x, y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$  para todos  $x \in E$  e  $y \in F$ .

**Exercício 2.7.26** Seja  $1 \leq p < \infty$ . Se  $(b_j)_{j=1}^\infty$  é uma sequência numérica tal que  $\sum_{j=1}^\infty a_j b_j < \infty$  para toda sequência  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ , mostre que  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p^*}$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ .

**Exercício 2.7.27** Sejam  $E, F$  espaços de Banach e  $T, T_1, T_2, \dots$ , operadores em  $\mathcal{L}(E, F)$  tais que  $T_n(x) \rightarrow T(x)$  para todo  $x \in E$ . Mostre que, para todo compacto  $K \subseteq E$ ,  $\sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| \rightarrow 0$ .

**Exercício 2.7.28** Complete os detalhes do Exemplo 2.4.3.

**Exercício 2.7.29\*** Prove a seguinte versão mais forte do Lema 2.4.1: Sejam  $E$  espaço de Banach,  $F$  espaço normado e  $T \in \mathcal{L}(E; F)$ . Se existirem  $R, r > 0$  tais que  $\overline{T(B_E(0; R))} \supseteq B_F(0; r)$ , então  $T(B_E(0; R)) \supseteq B_F(0; r)$ .

**Exercício 2.7.30** Sejam  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  duas normas em um espaço vetorial  $E$  tais que  $(E, \|\cdot\|_1)$  e  $(E, \|\cdot\|_2)$  são completos.

- (a) Suponha que  $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$  sempre implique que  $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$ . Prove que as duas normas são equivalentes (veja definição no Exercício 1.8.3). Em particular, a convergência de uma sequência (não necessariamente para zero) em uma das normas implica em convergência (para o mesmo limite) na outra norma.
- (b) Se existe  $c$  tal que  $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$  para todo  $x \in E$ , então as duas normas são equivalentes.
- (c) Se a topologia gerada pela norma  $\|\cdot\|_1$  está contida na topologia gerada por  $\|\cdot\|_2$ , então as duas normas são equivalentes. Em particular, as topologias geradas pelas duas normas coincidem.

**Exercício 2.7.31** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T: E \rightarrow E'$  um operador linear tal que  $T(x)(y) = T(y)(x)$  para todos  $x, y \in E$ . Prove que  $T$  é contínuo.

**Exercício 2.7.32\*** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T: E \rightarrow E'$  um operador linear tal que  $T(x)(x) \geq 0$  para todo  $x \in E$ . Prove que  $T$  é contínuo.

**Exercício 2.7.33** Verifique que, no Teorema do Gráfico Fechado, a implicação

$$T \text{ contínuo} \implies G(T) \text{ fechado em } E \times F$$

continua válida para operadores lineares entre espaços normados não necessariamente completos.

**Exercício 2.7.34** Prove que o operador linear descontínuo  $T^{-1}$  do Exemplo 2.4.3 tem gráfico fechado. Conclua que, no Teorema do Gráfico Fechado, a implicação

$$G(T) \text{ fechado em } E \times F \implies T \text{ contínuo}$$

não continua válida para operadores lineares entre espaços normados não necessariamente completos.

**Exercício 2.7.35** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear de gráfico fechado. Mostre que se o operador inverso  $T^{-1}$  existe e é contínuo, então a imagem  $\text{Im}(T)$  é subespaço fechado de  $F$ .

**Exercício 2.7.36** Seja  $(x_j)_{j=1}^{\infty}$  uma sequência no espaço de Banach  $E$  tal que  $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$  para todo  $\varphi \in E'$ . Mostre que  $\sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$ .

## Capítulo 3

# Teoremas de Hahn–Banach

É difícil mensurar a importância do Teorema de Hahn–Banach na Análise Funcional, tantos são seus corolários e suas aplicações. Encontra também aplicações em outras áreas da matemática; por exemplo, Análise Complexa, Teoria da Medida, Teoria do Controle, Programação Convexa e Teoria dos Jogos (para referências precisas veja [67, página 194]). Aplicações recentes à Análise Combinatória podem ser encontradas em [36]. Na verdade, seu alcance ultrapassa os limites da matemática, veja, por exemplo, uma aplicação à Termodinâmica em [27]. Provaremos neste capítulo várias formas do Teorema da Hahn–Banach, começando com resultados puramente algébricos, passando por resultados topológicos, primeiro no caso real e depois no caso complexo, e culminando nas formas geométricas do teorema, também chamadas de teoremas de separação. Algumas primeiras consequências dessas diversas formas do Teorema de Hahn–Banach também serão exploradas.

### 3.1 O teorema da extensão de Hahn–Banach

A essência do Teorema de Hahn–Banach, em sua versão para espaços normados, é que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço  $G$  de um espaço normado  $E$  podem ser estendidos a todo o espaço  $E$  preservando linearidade, continuidade e até mesmo o valor da norma. A peça fundamental da demonstração do Teorema de Hahn–Banach é um argumento algébrico que mostra que tal extensão é possível de  $G$  para  $G \oplus [v]$  com  $v \notin G$ . Em seguida o Lema de Zorn é aplicado como instrumento técnico de indução, que pode ser substituído por um argumento canônico de indução finita no caso em que  $E$  for separável.

Para acompanhar a demonstração do teorema abaixo, o leitor pouco familiarizado com o Lema de Zorn deve consultar o Apêndice A.

**Teorema 3.1.1** (Teorema de Hahn–Banach – caso real) *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e  $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \text{ e} \tag{3.1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Sejam também  $G$  um subespaço vetorial de  $E$  e  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear tal que  $\varphi(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in G$ . Então existe um funcional linear  $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{R}$  que estende  $\varphi$ , isto é  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  para todo  $x \in G$ , e que satisfaz  $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ .

**Demonstração.** Considere a seguinte família  $\mathcal{P}$  de funcionais lineares definidos em subespaços de  $E$  que contém  $G$ :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \phi: D(\phi) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R} : D(\phi) \text{ é subespaço vetorial de } E, \\ \phi \text{ é linear, } G \subseteq D(\phi), \phi(x) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in G \\ \text{e } \phi(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \text{ em } D(\phi) \end{array} \right\}.$$

Em  $\mathcal{P}$ , definimos a relação de ordem parcial

$$\begin{aligned} \phi_1 \leq \phi_2 &\iff D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1, \\ \text{isto é } \phi_2(x) &= \phi_1(x) \text{ para todo } x \in D(\phi_1). \end{aligned}$$

Note que  $\mathcal{P}$  é não-vazio pois  $\varphi \in \mathcal{P}$ . Vejamos que todo subconjunto totalmente ordenado de  $\mathcal{P}$  admite uma cota superior. Com efeito, dado  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$  totalmente ordenado, defina  $\phi: D(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$D(\phi) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta) \text{ e } \phi(x) = \theta(x) \text{ se } x \in D(\theta).$$

Note que a boa definição de  $\phi$  decorre da ordenação total de  $\mathcal{Q}$ . É imediato que  $\phi \in \mathcal{P}$  e que  $\phi$  é cota superior para  $\mathcal{Q}$ . Podemos então usar o Lema de Zorn e concluir que  $\mathcal{P}$  admite um elemento maximal, que será denotado por  $\tilde{\varphi}$ . Observe que para obter o resultado basta mostrar que  $D(\tilde{\varphi}) = E$ . Para isso suponha que  $D(\tilde{\varphi}) \neq E$ . Nesse caso podemos escolher  $x_0 \in E - D(\tilde{\varphi})$  e definir  $\tilde{\phi}: D(\tilde{\phi}) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$D(\tilde{\phi}) = D(\tilde{\varphi}) + [x_0] \text{ e } \tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\varphi}(x) + t\alpha,$$

onde  $\alpha$  é uma constante que será escolhida posteriormente de forma a garantir que  $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}$ . Queremos, por enquanto, que  $\alpha$  satisfaça as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) + \alpha &= \tilde{\phi}(x + x_0) \leq p(x + x_0) \text{ para todo } x \in D(\tilde{\varphi}) \text{ e} \\ \tilde{\varphi}(x) - \alpha &= \tilde{\phi}(x - x_0) \leq p(x - x_0) \text{ para todo } x \in D(\tilde{\varphi}). \end{aligned}$$

Para tanto basta escolher  $\alpha$  de modo que

$$\sup_{x \in D(\tilde{\varphi})} \{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(\tilde{\varphi})} \{p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)\}.$$

Felizmente tal escolha é possível pois para  $x, y \in D(\tilde{\varphi})$  temos

$$\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

e consequentemente

$$\tilde{\varphi}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)$$

para quaisquer  $x, y \in D(\tilde{\varphi})$ . Está estabelecido então que é possível escolher  $\alpha$  atendendo àquelas duas exigências iniciais. Feito isso, concluímos que:

- Para  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x + tx_0) &= \tilde{\phi}\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = t\tilde{\phi}\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \\ &= t\left(\tilde{\varphi}\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).\end{aligned}$$

- Para  $t < 0$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x + tx_0) &= \tilde{\phi}\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -t\tilde{\phi}\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \\ &= -t\left(\tilde{\varphi}\left(\frac{-x}{t}\right) - \alpha\right) \leq -tp\left(\frac{-x}{t} - x_0\right) = p(x + tx_0).\end{aligned}$$

- Para  $t = 0$ ,

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}(x) = \tilde{\varphi}(x) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Segue então que  $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}$ ,  $\tilde{\varphi} \leq \tilde{\phi}$  e  $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\phi}$ . Como isso fere a maximalidade de  $\tilde{\varphi}$ , temos  $D(\tilde{\varphi}) = E$  e o teorema está provado. ■

A seguir demonstraremos a versão do Teorema de Hahn–Banach que também é válida para espaços vetoriais complexos:

**Teorema 3.1.2** (Teorema de Hahn–Banach) *Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in E, \text{ e} \quad (3.2)$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E. \quad (3.3)$$

*Se  $G \subseteq E$  é um subespaço vetorial e  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}$  é um funcional linear tal que  $|\varphi(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in G$ , então existe um funcional linear  $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{K}$  que estende  $\varphi$  a  $E$  e que satisfaz  $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ .*

**Demonstração.** Antes de tudo, vejamos que de (3.2) e (3.3) segue que  $p(x) \geq 0$  para todo  $x \in E$ , fato este que será usado na parte final da demonstração. Com efeito, de (3.3) resulta que  $p(0) = p(0 + 0) \leq 2p(0)$ , e consequentemente  $p(0) \geq 0$ . De (3.2) segue que  $p(x) = p(-x)$  e assim, para todo  $x \in E$ ,

$$2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(0) \geq 0.$$

Tratemos primeiro o caso real, isto é  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Nesse caso a hipótese nos garante que  $\varphi(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in G$ . O Teorema 3.1.1 garante a existência de um funcional

linear  $\tilde{\varphi}: E \longrightarrow \mathbb{R}$  que estende  $\varphi$  a  $E$  e que satisfaz  $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ . Dessa desigualdade e de (3.2) temos

$$-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

para todo  $x \in E$ . Logo  $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ .

Façamos agora o caso complexo  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Nesse caso  $E$  é um espaço vetorial complexo e  $\varphi$  toma valores em  $\mathbb{C}$ . Definindo  $\varphi_1, \varphi_2: E \longrightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x))$  e  $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}(\varphi(x))$ , é claro que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são lineares, tomam valores reais e  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ . Como artifício, chamemos de  $E_{\mathbb{R}}$  e  $G_{\mathbb{R}}$  os espaços vetoriais reais subjacentes a  $E$  e  $G$  (isto é, como conjunto o respectivo espaço é o mesmo, a operação de adição é a mesma e a multiplicação por escalar é feita apenas com escalares reais). Então  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são funcionais lineares sobre  $G_{\mathbb{R}}$ . Para  $x \in G_{\mathbb{R}}$ , obtemos

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema 3.1.1 existe então um funcional linear  $\widetilde{\varphi}_1: E_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$  que estende  $\varphi_1$  a  $E_{\mathbb{R}}$  e que satisfaz  $\widetilde{\varphi}_1(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in E_{\mathbb{R}}$ . Estudemos agora o caso de  $\varphi_2$ . Note que para  $x \in G$ ,

$$i(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) = i\varphi(x) = \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix).$$

Portanto  $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$  para todo  $x \in G$ . Definindo então

$$\tilde{\varphi}: E \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}_1(x) - i\widetilde{\varphi}_1(ix),$$

segue que  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  para todo  $x \in G$ . Vejamos que  $\tilde{\varphi}$  é um funcional linear no espaço complexo  $E$ . É imediato que  $\tilde{\varphi}(x + y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y)$  para todos  $x, y \in E$ . Dados  $(a + bi) \in \mathbb{C}$  e  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((a + bi)x) &= \widetilde{\varphi}_1(ax + ibx) - i\widetilde{\varphi}_1((i(a + bi)x)) \\ &= a\widetilde{\varphi}_1(x) + b\widetilde{\varphi}_1(ix) - i(a\widetilde{\varphi}_1(ix) - b\widetilde{\varphi}_1(x)) \\ &= (a + bi)(\widetilde{\varphi}_1(x) - i\widetilde{\varphi}_1(ix)) = (a + bi)\tilde{\varphi}(x). \end{aligned}$$

Mostremos finalmente que  $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in E$ . Se  $\tilde{\varphi}(x) = 0$ , então a desigualdade é óbvia pois  $p(x) \geq 0$ . Tome  $x \in E$  tal que  $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$ . Então existe  $\theta$  tal que  $\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{\varphi}(x)|e^{i\theta}$ . Segue que  $|\tilde{\varphi}(x)| = e^{-i\theta}\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(e^{-i\theta}x)$ . Como  $|\tilde{\varphi}(x)|$  é real, por (3.2), temos

$$|\tilde{\varphi}(x)| = \tilde{\varphi}(e^{-i\theta}x) = \widetilde{\varphi}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

■

Para ser coerente com a terminologia consagrada pela literatura, chamaremos a seguinte consequência imediata também de Teorema de Hahn–Banach.

**Corolário 3.1.3** (Teorema de Hahn–Banach) *Seja  $G$  um subespaço de um espaço normado  $E$  sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e seja  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo  $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $G$  coincide com  $\varphi$  e  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .*

**Demonstração.** Basta aplicar o Teorema 3.1.2 com  $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$ . ■

A partir de agora voltamos ao procedimento anterior no qual um espaço normado significa um espaço normado sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Corolário 3.1.4** *Seja  $E$  um espaço normado. Para todo  $x_0 \in E$ ,  $x_0 \neq 0$ , existe um funcional linear  $\varphi \in E'$  tal que  $\|\varphi\| = 1$  e  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ .*

**Demonstração.** Aplique o Corolário 3.1.3 para  $G = [x_0]$  e  $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$ . ■

A próxima aplicação do Teorema de Hahn–Banach será utilizada várias vezes ao longo do texto.

**Corolário 3.1.5** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $E \neq \{0\}$ , e  $x \in E$ . Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}$$

*e o supremo é atingido.*

**Demonstração.** Para cada funcional  $\varphi \in E'$ ,  $\|\varphi\| \leq 1$ , é imediato que  $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ . Isso mostra que o supremo é menor ou igual a  $\|x\|$ . O fato do supremo ser atingido é garantido pelo Corolário 3.1.4. ■

## 3.2 Versões vetoriais do Teorema de Hahn–Banach

Em vista do Teorema de Hahn–Banach, é natural especular se operadores lineares contínuos podem ser estendidos para espaços maiores. Mais precisamente, se  $G$  é um subespaço do espaço normado  $E$  e  $T \in \mathcal{L}(G, F)$ , será que sempre existe um operador  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$  que coincide com  $T$  em  $G$ ? Para tratar dessa questão precisamos dos conceitos de projeção e subespaço complementado.

**Definição 3.2.1** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Um operador linear contínuo  $P: E \rightarrow E$  é uma projeção se  $P^2 := P \circ P = P$ . É claro que se  $P \neq 0$  é uma projeção, então  $\|P\| \geq 1$ .*

**Proposição 3.2.2** *Seja  $F$  um subespaço do espaço de Banach  $E$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Existe uma projeção  $P: E \rightarrow E$  cuja imagem coincide com  $F$ . Neste caso dizemos que  $P$  é uma projeção de  $E$  sobre  $F$ .*
- (b)  *$F$  é fechado e existe um subespaço fechado  $G$  de  $E$  tal que  $E = F \oplus G$ , isto é,  $E = F + G$  e  $F \cap G = \{0\}$ .*

*Neste caso  $F = \{x \in E : P(x) = x\}$  e  $G = \ker(P)$ .*



**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Provemos primeiro a igualdade  $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ . Se  $x \in F$ , tomando  $y \in E$  tal que  $P(y) = x$  segue que  $x = P(y) = P(P(y)) = P(x)$ . Se  $x = P(x)$ , então claramente  $x \in \text{Im}(P) = F$ . Consequentemente, chamando de  $\text{id}_E$  o operador identidade em  $E$ , é verdade que

$$F = \{x \in E : P(x) = x\} = \{x \in E : (P - \text{id}_E)(x) = 0\} = (P - \text{id}_E)^{-1}(\{0\}),$$

que é fechado como a imagem inversa do fechado  $\{0\}$  pela função contínua  $P - \text{id}_E$ .

Tome agora  $G = \ker(P)$ . É claro que  $G$  é subespaço fechado de  $E$ . Para todo  $x \in E$  vale que  $(x - P(x)) \in G$ ,  $P(x) \in F$  e  $x = (x - P(x)) + P(x)$ . Se  $x \in G \cap F$ , temos  $x = P(x)$  pois  $x \in F$  e  $P(x) = 0$  pois  $x \in G$ . Segue que  $x = 0$ .

(b)  $\implies$  (a) Para cada  $x \in E$ , existem únicos  $x_1 \in F$  e  $x_2 \in G$  tais que  $x = x_1 + x_2$ . É imediato que o operador  $P: E \longrightarrow E$  dado por  $P(x) = x_1$  está bem definido, é linear,  $P^2 = P$ ,  $\text{Im}(P) = F$ ,  $\ker(P) = G$  e  $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ . Resta provar que  $P$  é contínuo. Para isso seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $E$  tal que  $x_n \longrightarrow x$  e  $P(x_n) \longrightarrow y$ . Para cada  $n$ , escreva  $x_n = y_n + z_n$  com  $y_n \in F$  e  $z_n \in G$ . Então  $z_n = x_n - y_n = x_n - P(x_n) \longrightarrow x - y$ . Como  $G$  é fechado,  $x - y \in G$ , e portanto  $P(x) = P(y)$ . Por outro lado,  $y_n = P(x_n) \longrightarrow y$ . Como  $F$  é fechado,  $y \in F$ . Assim  $y = P(y) = P(x)$ . Pelo Teorema do Gráfico Fechado resulta que o operador linear  $P$  é contínuo. ■

**Definição 3.2.3** Um subespaço  $F$  do espaço de Banach  $E$  é *complementado* se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 3.2.2. Dizemos que  $F$  é  $\lambda$ -complementado,  $\lambda \geq 1$ , se  $F$  é complementado por uma projeção de norma igual a  $\lambda$ .

Segue da Proposição 3.2.2 que todo subespaço complementado de um espaço de Banach é fechado.

**Exemplo 3.2.4** (a) Todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado. Seja  $F$  um subespaço de dimensão  $n$  do espaço de Banach  $E$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base para  $F$ . Para cada  $j = 1, \dots, n$ , considere o funcional linear contínuo  $\varphi_j \in F'$  dado por  $\varphi_j \left( \sum_{k=1}^n a_k e_k \right) = a_j$ . Pelo Teorema de Hahn–Banach existe  $\tilde{\varphi}_j \in E'$  extensão de  $\varphi_j$  a  $E$ ,  $j = 1, \dots, n$ . O leitor não terá dificuldade em checar que o operador  $P := \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j \otimes e_j$  é uma projeção de  $E$  sobre  $F$ .

(b) Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Por meio da projeção  $(x, y) \in E \times F \mapsto (x, 0) \in E \times F$ , vemos que  $E = E \times \{0\}$  é 1-complementado em  $E \times F$ .

(c) Já sabemos que um subespaço não-fechado de um espaço de Banach não é complementado. Por exemplo,  $c_{00}$  não é complementado em  $c_0$ . Acredita-se que a existência de subespaços fechados não-complementados foi provada pela primeira vez em 1937 por Murray [65], que provou que para todo  $2 \neq p > 1$ ,  $\ell_p$  contém um subespaço fechado não-complementado. Em 1940, Phillips [72] provou que  $c_0$  não é complementado em  $\ell_\infty$ .

É fácil ver que os operadores definidos em subespaços complementados podem ser estendidos (mantendo a continuidade) ao espaço todo:

**Proposição 3.2.5** *Sejam  $G$  um espaço de Banach,  $F$  um subespaço complementado do espaço de Banach  $E$  e  $T \in \mathcal{L}(F, G)$ . Então existe  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, G)$  extensão de  $T$  a  $E$ .*

**Demonstração.** Tome  $P$  uma projeção de  $E$  sobre  $F$  e defina  $\tilde{T} = T \circ P$ . ■

Entretanto, quando o subespaço não é complementado a situação pode se alterar radicalmente. Vejamos que, ao contrário dos funcionais lineares contínuos, operadores lineares contínuos nem sempre podem ser estendidos. Ou seja, não existe uma versão vetorial do Teorema de Hahn–Banach:

**Proposição 3.2.6** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um subespaço não-complementado de  $E$ . Então não existe operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$  tal que  $T(x) = x$  para todo  $x \in F$ , ou seja, o operador identidade em  $F$  não pode ser estendido continuamente a  $E$ .*

**Demonstração.** Suponha que exista um operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$  tal que  $T(x) = x$  para todo  $x \in F$ . É claro que a inclusão  $i_F: F \longrightarrow E$  é linear e contínua, logo  $i_F \circ T$  é um operador linear contínuo de  $E$  em  $E$ . Como  $T(x) \in F$  para todo  $x \in E$ , segue que  $T^2(x) = T(T(x)) = T(x)$  para todo  $x \in E$ . Assim  $i_F \circ T$  seria uma projeção sobre  $F$ , o que contradiz o fato de  $F$  não ser complementado em  $E$ . ■

Mesmo não havendo versão vetorial do Teorema de Hahn–Banach, está aberta a possibilidade de operadores lineares contínuos em determinados espaços serem estendíveis. Por exemplo, operadores lineares contínuos tomando valores em  $\ell_\infty$  podem sempre ser estendidos:

**Teorema 3.2.7** (Teorema de Phillips) *Sejam  $F$  um subespaço do espaço normado  $E$  e  $T \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty)$ . Então existe  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty)$  extensão de  $T$  a  $E$ . Mais ainda,  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .*

**Demonstração.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere o funcional linear contínuo de norma 1 dado por

$$\varphi_n: \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = a_n.$$

Então  $\varphi_n \circ T \in F'$  para todo  $n$  e  $T(x) = ((\varphi_n \circ T)(x))_{n=1}^\infty$  para todo  $x \in F$ . Pelo Teorema de Hahn–Banach, para cada  $n$  existe  $\widetilde{\varphi}_n$  extensão de  $\varphi_n \circ T$  a  $E$  com  $\|\varphi_n \circ T\| = \|\widetilde{\varphi}_n\|$ . É fácil ver que o operador

$$\tilde{T}: E \longrightarrow \ell_\infty, \quad \tilde{T}(x) = (\widetilde{\varphi}_n(x))_{n=1}^\infty,$$

é linear, contínuo e estende  $T$ . Por fim, lembrando que  $B_G$  denota a bola unitária fechada do espaço normado  $G$ , temos

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}\| &= \sup_{x \in B_E} \|\tilde{T}(x)\| = \sup_{x \in B_E} \sup_n |\tilde{\varphi}_n(x)| = \sup_n \sup_{x \in B_E} |\tilde{\varphi}_n(x)| \\ &= \sup_n \|\tilde{\varphi}_n\| = \sup_n \|\varphi_n \circ T\| = \sup_n \sup_{x \in B_F} |\varphi_n(T(x))| \\ &= \sup_{x \in B_F} \sup_n |\varphi_n(T(x))| = \sup_{x \in B_F} \|T(x)\| = \|T\|.\end{aligned}$$

■

**Corolário 3.2.8** *Se  $\ell_\infty$  é subespaço fechado de um espaço de Banach  $E$ , então é 1-complementado em  $E$ .*

**Demonstração.** Aplique o Teorema 3.2.7 para o operador identidade em  $\ell_\infty$  para obter um operador  $T: E \rightarrow \ell_\infty$  que estende a identidade e  $\|T\| = 1$ . Chamando de  $i$  a inclusão de  $\ell_\infty$  em  $E$  segue que  $i \circ T$  é uma projeção de  $E$  sobre  $\ell_\infty$  de norma 1. ■

### 3.3 Aplicações do Teorema de Hahn–Banach para espaços separáveis

Como já havíamos adiantado, os espaços separáveis gozam de propriedades especiais que tornam a teoria dos espaços separáveis bem mais rica que a teoria geral. Veremos nesta seção os primeiros indícios deste fenômeno. Lembre-se que se  $A$  é um subconjunto de um espaço normado  $E$  e  $x \in E$ , então  $\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ .

**Proposição 3.3.1** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $M$  um subespaço fechado de  $E$ ,  $y_0 \in E - M$  e  $d = \text{dist}(y_0, M)$ . Então existe um funcional linear  $\varphi \in E'$  tal que  $\|\varphi\| = 1$ ,  $\varphi(y_0) = d$  e  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in M$ .*

**Demonstração.** Seja  $N = M + [y_0]$ . Então, para  $z \in N$  existem únicos  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in M$  tais que  $z = x + ay_0$ . Defina

$$\varphi_0: N \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_0(x + ay_0) = ad.$$

É claro que  $\varphi_0$  é linear,  $\varphi_0(M) = \{0\}$  e que  $\varphi_0(y_0) = d$ . Provemos que  $\|\varphi_0\| = 1$ . Seja  $z = x + ay_0 \in N$ . Para  $a \neq 0$ ,

$$\|z\| = \|x + ay_0\| = |a| \cdot \left\| \frac{x}{-a} - y_0 \right\| \geq d|a| = |\varphi_0(z)|,$$

e para  $a = 0$  a desigualdade  $\|z\| \geq |\varphi_0(z)|$  é óbvia. Segue que  $\|\varphi_0\| \leq 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_\varepsilon \in M$  tal que  $d \leq \|y_0 - x_\varepsilon\| \leq d + \varepsilon$ . Seja  $z_\varepsilon = \frac{y_0 - x_\varepsilon}{\|y_0 - x_\varepsilon\|}$ . Então  $z_\varepsilon \in N$ ,  $\|z_\varepsilon\| = 1$  e

$$\varphi_0(z_\varepsilon) = \frac{d}{\|y_0 - x_\varepsilon\|} \geq \frac{d}{d + \varepsilon}.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, segue que  $\|\varphi_0\| \geq 1$ , e portanto  $\|\varphi_0\| = 1$ . Pelo Teorema de Hahn–Banach existe  $\varphi \in E'$  que estende  $\varphi_0$  a  $E$  tal que  $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$ . ■

**Teorema 3.3.2** *Se  $E'$  é separável, então  $E$  também é separável.*

**Demonstração.** Seja  $S_{E'}$  a esfera unitária de  $E'$ , ou seja,  $S_{E'} = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1\}$ . Conforme já mencionamos antes, subconjunto de espaço métrico separável é também separável, logo  $S_{E'}$  é separável. Seja  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável e denso de  $S_{E'}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos tomar  $x_n \in S_E$  tal que  $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$ . Chamemos  $M = \overline{\{x_1, x_2, \dots\}}$  e provemos que  $M = E$ . Para tanto, suponhamos que  $M$  seja diferente de  $E$  e escolhamos  $y_0 \in E - M$ . Pela Proposição 3.3.1 existe um funcional  $\varphi \in E'$  com  $\|\varphi\| = 1$  tal que  $\varphi(y_0) = d = \text{dist}(y_0, M)$  e  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in M$ . Então

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \sup_{x \in B_E} |(\varphi - \varphi_n)(x)| \geq |(\varphi - \varphi_n)(x_n)| = |\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}.$$

Mas isso é um absurdo pois  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  é denso em  $S_{E'}$ . Portanto  $M = E$  e a separabilidade de  $E$  segue do Lemma 1.6.3. ■

Veremos na Observação 4.2.2 que a recíproca do Teorema 3.3.2 não é verdadeira.

É surpreendente a existência de um espaço de Banach dentro do qual podemos encontrar todos os espaços separáveis. Mais surpreendente ainda é o fato de que esse super-espaço é um dos nossos velhos conhecidos:

**Proposição 3.3.3** *Todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de  $\ell_\infty$ .*

**Demonstração.** Sejam  $E$  um espaço normado separável e  $\mathcal{D} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável denso em  $E$ . Podemos claramente supor que  $0 \notin \mathcal{D}$ . Pelo Corolário 3.1.4, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe um funcional linear  $\varphi_n \in E'$  tal que  $\|\varphi_n\| = 1$  e  $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$ . Considere o operador

$$T: E \longrightarrow \ell_\infty, \quad T(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^\infty.$$

É claro que  $|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\| \|x\| = \|x\|$  para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in E$ , portanto  $T$  está bem definido no sentido de que  $(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$  para todo  $x \in E$ . Além disso,  $T$  é claramente linear e

$$\|T(x)\| = \sup\{|\varphi_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|, \quad (3.4)$$

o que prova, em particular, que  $T$  é contínuo. Note que

$$\|T(x_k)\| = \sup\{|\varphi_n(x_k)| : n \in \mathbb{N}\} \geq |\varphi_k(x_k)| = \|x_k\| \quad (3.5)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De (3.4) e (3.5) resulta que  $\|T(x_k)\| = \|x_k\|$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Da densidade do conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  e da continuidade da função  $x \in E \mapsto \|T(x)\| \in \mathbb{R}$  segue que  $\|T(x)\| = \|x\|$  para todo  $x$  em  $E$ . Assim  $T$  é um isomorfismo isométrico entre  $E$  e  $T(E) \subseteq \ell_\infty$ . ■

### 3.4 Formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach (caso real)

Nesta seção demonstraremos dois teoremas, conhecidos como primeira e segunda formas geométricas do teorema de Hahn–Banach. Esses resultados dizem, essencialmente, que se  $A$  e  $B$  são subconjuntos do espaço normado real  $E$  que não são muito entrelaçados (em um sentido que ficará claro no momento apropriado), então existe um funcional linear contínuo em  $E$  tal que

$$\varphi(x) < \varphi(y) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Sob determinadas condições sobre  $A$  e  $B$  pode-se ir mais longe e garantir que

$$\sup\{\varphi(x) : x \in A\} < \inf\{\varphi(x) : x \in B\}.$$

Podemos interpretar esses resultados sob a perspectiva de que o funcional  $\varphi$  separa os conjuntos  $A$  e  $B$ . Por isso, esses resultados são também chamados de *teoremas de separação*. A abordagem desses resultados demanda algumas definições e resultados preliminares. Por simplicidade trataremos apenas o caso real, embora existam resultados parecidos para o caso complexo (veja Exercício 3.6.27). Assim, ao longo desta seção todos os espaços vetoriais são reais, isto é,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . No Capítulo 8 as formas geométricas de Hahn–Banach serão tratadas num contexto mais geral.

**Definição 3.4.1** Seja  $V$  um espaço vetorial não-nulo. Um *hiperplano* de  $V$  é um subespaço  $W \neq V$  tal que se  $W_1$  é subespaço de  $V$  e  $W \subseteq W_1$ , então  $W_1 = V$  ou  $W_1 = W$ .

Vejamos que os hiperplanos são exatamente os núcleos dos funcionais lineares:

**Proposição 3.4.2** *Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $V \neq \{0\}$ , e  $W$  um subespaço de  $V$ . Então  $W$  é um hiperplano de  $V$  se, e somente se, existe um funcional linear não-nulo  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\ker(\varphi) = W$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $W$  seja hiperplano de  $V$ . Como  $W \neq V$ , podemos escolher  $v_0 \in V - W$ . Tomando  $W_1 = [W \cup \{v_0\}]$ , como  $W \subseteq W_1$  e  $W \neq W_1$ , temos  $W_1 = V$ . Assim segue facilmente que cada  $v \in V$  se escreve de modo único como  $v = u + av_0$  com  $u \in W$  e  $a \in \mathbb{R}$ . É imediato que o funcional

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(u + av_0) = a,$$

é não-nulo, linear e  $\ker(\varphi) = W$ .

Reciprocamente, seja  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear não-nulo tal que  $\ker(\varphi) = W$ . É claro que  $\ker(\varphi) \neq V$  pois  $\varphi \neq 0$ . Seja  $W$  subespaço de  $V$  tal que  $\ker(\varphi) \subseteq W$ . Basta mostrar que se  $\ker(\varphi) \neq W$ , então  $W = V$ . É exatamente isso que vamos fazer! Suponha

então  $\ker(\varphi) \neq W$  e escolha  $v_0 \in W - \ker(\varphi)$ . Dado  $v \in V$ , tomando  $u = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0$  temos  $u \in \ker(\varphi) \subseteq W$ . Agora segue que  $v = u + \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \in W$ . ■

Se  $H$  é um hiperplano de  $V$  e  $v_0 \in V$ , o conjunto

$$v_0 + H = \{v_0 + v : v \in H\}$$

é chamado *hiperplano afim* de  $V$ . Da Proposição 3.4.2 segue que os hiperplanos afins de  $V$  são precisamente os conjuntos da forma

$$\{v \in V : \varphi(v) = a\},$$

onde  $\varphi$  é um funcional linear não-nulo em  $V$  e  $a$  é um número real. De agora em diante chamaremos os hiperplanos afins simplesmente de hiperplanos.

**Proposição 3.4.3** *Seja  $H = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$  um hiperplano de um espaço normado  $E$ , onde  $\varphi$  é um funcional linear em  $E$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Então o hiperplano  $H$  é fechado se, e somente se, o funcional linear  $\varphi$  é contínuo.*

**Demonstração.** Supondo  $\varphi$  contínuo, o hiperplano  $H = \varphi^{-1}(\{a\})$  é fechado como imagem inversa de conjunto fechado por função contínua. Reciprocamente, suponha que  $H$  seja fechado. Então  $E - H$  é aberto e não-vazio, logo existem  $x_0 \in E - H$  e  $r > 0$  tais que  $B_E(x_0; r) \subseteq E - H$ . Como  $\varphi(x_0) \neq a$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\varphi(x_0) < a$ .

**Afirmção.**  $\varphi(x) < a$  para todo  $x \in B(x_0; r)$ .

De fato, se existisse  $x_1 \in B(x_0; r)$  com  $\varphi(x_1) > a$ , tomando  $t = \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}$  teríamos  $tx_0 + (1 - t)x_1 \in B(x_0; r)$  e

$$\begin{aligned} \varphi(tx_0 + (1 - t)x_1) &= t\varphi(x_0) + (1 - t)\varphi(x_1) \\ &= \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}\varphi(x_0) + \left(1 - \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}\right)\varphi(x_1) = a. \end{aligned}$$

A afirmação segue pois isso contradiz o fato de que  $B_E(x_0; r) \subseteq E - H$ . Portanto,  $\varphi(x_0) + r\varphi(z) = \varphi(x_0 + rz) < a$  para todo  $z \in E$  com  $\|z\| < 1$ . Como  $\| -z \| = \|z\|$ , segue que

$$\frac{\varphi(x_0) - a}{r} < \varphi(z) < \frac{a - \varphi(x_0)}{r},$$

para todo  $z \in E$  com  $\|z\| < 1$ . Isso implica que  $\|\varphi\| \leq \frac{a - \varphi(x_0)}{r}$ , o que garante a continuidade de  $\varphi$ . ■

Introduziremos a seguir o funcional de Minkowski, que no momento nos será útil na obtenção das formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach, mas que no Capítulo 8 desempenhará um papel central na construção da teoria de Espaços Vetoriais Topológicos.

**Definição 3.4.4** Seja  $C$  um subconjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado  $E$ . A aplicação

$$p_C: E \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad p_C(x) = \inf \left\{ a > 0 : \frac{x}{a} \in C \right\} ,$$

é chamada *funcional de Minkowski de  $C$* .

**Proposição 3.4.5** *O funcional de Minkowski goza das seguintes propriedades:*

- (a)  $p_C(bx) = bp_C(x)$  para todo  $b > 0$  e todo  $x \in E$ .
- (b)  $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$ .
- (c) Existe  $M > 0$  tal que  $0 \leq p_C(x) \leq M \|x\|$  para todo  $x$  em  $E$ .
- (d)  $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ .

**Demonstração.** (a)  $p_C(bx) = \inf\{a > 0 : \frac{bx}{a} \in C\} = b \cdot \inf\{a > 0 : \frac{x}{a} \in C\} = bp_C(x)$ .

(b) Como  $C$  é aberto, para todo  $x \in C$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(1 + \varepsilon)x \in C$ . Assim  $\frac{x}{(1+\varepsilon)^{-1}} \in C$  e portanto  $p_C(x) \leq (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$ . Reciprocamente, se  $p_C(x) < 1$ , então da definição de ínfimo existe  $0 < a < 1$  tal que  $\frac{x}{a} \in C$ . Como  $C$  é convexo temos  $x = a \left(\frac{x}{a}\right) + (1 - a) \cdot 0 \in C$ .

(c) Seja  $r > 0$  tal que  $B(0; r) \subseteq C$ . Para  $0 < s < r$  temos  $s \frac{x}{\|x\|} \in C$  para todo  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . De (a) e (b) segue que  $p_C(x) \leq \frac{\|x\|}{s}$  para todo  $x \in E$  não-nulo. É claro que essa última desigualdade também vale para  $x = 0$ , e consequentemente o resultado está provado com  $M = 1/s$ .

(d) Sejam  $x, y \in E$  e  $\varepsilon > 0$  dados. Vejamos que  $\frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} \in C$ . Com efeito, por (a),

$$p_C \left( \frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} \right) = \frac{1}{p_C(x) + \varepsilon} p_C(x) < 1,$$

e por (b) segue que  $\frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} \in C$ . Da mesma forma,  $\frac{y}{p_C(y) + \varepsilon} \in C$ . Como  $C$  é convexo, tomando  $0 < t := \frac{p_C(x) + \varepsilon}{p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon} < 1$ , temos

$$\frac{x + y}{p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon} = t \frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} + (1 - t) \frac{y}{p_C(y) + \varepsilon} \in C.$$

De (a) e (b) concluímos que

$$\frac{1}{p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon} p_C(x + y) = p_C \left( \frac{x + y}{p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon} \right) < 1,$$

e portanto  $p_C(x + y) < p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$ . O resultado segue fazendo  $\varepsilon \longrightarrow 0$ . ■

A essa altura o leitor já deve ter percebido que a ideia é aplicar o Teorema de Hahn–Banach com o funcional de Minkowski fazendo o papel do funcional  $p$ .

**Lema 3.4.6** *Seja  $C$  um subconjunto convexo, aberto, próprio e não-vazio do espaço normado  $E$  e seja  $x_0 \in E - C$ . Então existe um funcional linear  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) < \varphi(x_0)$  para todo  $x \in C$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $0 \notin C$ . Escolha  $z_0 \in C$ , considere  $D = \{x - z_0 : x \in C\}$  e chame  $y_0 = x_0 - z_0$ . Temos assim que  $y_0 \notin D$ ,  $0 \in D$  e  $D$  é convexo e aberto. Podemos então considerar o funcional de Minkowski  $p_D$  de  $D$ . Definindo  $G = [y_0]$  e  $g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos  $g(x) \leq p_D(x)$  para todo  $x \in G$ . De fato, para  $t > 0$ ,

$$g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0) = p_D(ty_0)$$

pela Proposição 3.4.5(a). E para  $t \leq 0$ ,

$$g(ty_0) = t \cdot p_D(y_0) \leq 0 \leq p_D(ty_0),$$

pois  $p_D(x) \geq 0$  para todo  $x \in E$ . Pelo Teorema de Hahn–Banach existe um funcional linear  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x) = g(x)$  para todo  $x \in G$  e  $\varphi(x) \leq p_D(x)$  para todo  $x \in E$ . Pela Proposição 3.4.5(c), existe  $M > 0$  tal que  $\varphi(x) \leq p_D(x) \leq M \|x\|$  para todo  $x \in E$ , o que garante a continuidade de  $\varphi$ . Da Proposição 3.4.5(b) segue que  $\varphi(y) \leq p_D(y) < 1$  para todo  $y \in D$ . Como  $p_D(y_0) \geq 1$  pois  $y_0 \notin D$ ,

$$\varphi(y) < 1 \leq p_D(y_0) = g(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(x_0 - z_0)$$

para todo  $y \in D$ . Da desigualdade anterior e da definição de  $D$  segue que

$$\varphi(x) = \varphi(x - z_0) + \varphi(z_0) < \varphi(x_0 - z_0) + \varphi(z_0) = \varphi(x_0)$$

para todo  $x$  em  $C$ . Se  $0 \in C$ , basta tomar  $z_0 = 0$ . ■

O último ingrediente que nos falta é uma propriedade interessante dos funcionais lineares contínuos em espaços normados:

**Lema 3.4.7** *Sejam  $E$  um espaço normado,  $\varphi \in E'$  um funcional não-nulo e  $A$  um subconjunto convexo, aberto e não-vazio de  $E$ . Então  $\varphi(A)$  é um intervalo aberto (não necessariamente limitado).*

**Demonstração.** Em primeiro lugar observe que como  $\varphi \neq 0$ , então  $\varphi$  é sobrejetor, pois sua imagem é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}$ . Da linearidade de  $\varphi$  e da convexidade de  $A$  segue facilmente que  $\varphi(A)$  é um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}$ , ou seja, um intervalo. No caso em que o intervalo  $\varphi(A)$  for limitado superiormente, chamemos de  $a$  sua extremidade superior. Suponhamos que  $a \in \varphi(A)$ . Então existe  $x \in A$  tal que  $\varphi(x) = a$  e  $\varphi(y) \leq a$  para todo  $y \in A$ . Como  $A$  é aberto existe  $\varepsilon > 0$  tal que a bola aberta de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$  está contida em  $A$ . Seja  $z \in E$  um vetor não-nulo. De

$$\left\| x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot z - x \right\| = \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot \|z\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

segue que  $x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot z$  pertence a  $A$ . Nesse caso,

$$a \geq \varphi \left( x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot z \right) = \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot \varphi(z) = a + \frac{\varepsilon}{2\|z\|} \cdot \varphi(z),$$



o que nos leva a concluir que  $\varphi(z) \leq 0$ . Como  $z$  é um vetor não-nulo arbitrário em  $E$ , isso viola a sobrejetividade de  $\varphi$ , e portanto  $a \notin \varphi(A)$ . Analogamente prova-se que se  $\varphi(A)$  for limitado inferiormente então  $\varphi(A)$  não contém sua extremidade inferior. Está completa a demonstração de que o intervalo  $\varphi(A)$  é aberto. ■

Para simplificar a notação, o hiperplano  $H = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$  será denotado pelo símbolo  $[\varphi = a]$ .

**Teorema 3.4.8** (Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach) *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado  $E$ . Se  $A$  é aberto, então existem um funcional  $\varphi \in E'$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que*

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y) \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

*Neste caso diz-se que o hiperplano fechado  $[\varphi = a]$  separa  $A$  e  $B$ .*

**Demonstração.** Chame  $C = A - B$ . Note que

(i)  $C$  é aberto, pois  $C = \bigcup_{b \in B} (A - \{b\})$ .

(ii)  $C$  é convexo, pois para  $x_1, x_2 \in A$ ,  $y_1, y_2 \in B$  e  $0 < t < 1$ ,

$$t(x_1 - y_1) + (1 - t)(x_2 - y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2) - (ty_1 + (1 - t)y_2) \in A - B.$$

(iii)  $\emptyset \neq C \neq E$ , pois  $A$  e  $B$  são disjuntos e não-vazios.

Como  $0 \notin C$ , pois  $A \cap B = \emptyset$ , pelo Lema 3.4.6 existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(z) < \varphi(0) = 0$  para todo  $z \in C$ . Logo

$$\varphi(x) = \varphi(x - y) + \varphi(y) < \varphi(y) \quad (3.6)$$

para todos  $x \in A$  e  $y \in B$ . Por  $B$  ser não-vazio,  $a := \sup_{x \in A} \varphi(x)$  é um número real.

Obviamente é verdade que  $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a]$  e de (3.6) segue que  $a \leq \varphi(y)$  para todo  $y \in B$ . Do Lema 3.4.7 sabemos que  $\varphi(A)$  é um intervalo aberto, logo  $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a)$ , isto é,  $\varphi(x) < a$  para todo  $x \in A$ . ■

**Teorema 3.4.9** (Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach) *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado  $E$ . Se  $A$  é fechado e  $B$  é compacto, então existem um funcional  $\varphi \in E'$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y) \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

*Para  $c \in (a, b)$  diz-se que o hiperplano fechado  $[\varphi = c]$  separa  $A$  e  $B$  estritamente.*

**Demonstração.** Vejamos que é possível escolher  $\varepsilon > 0$  de modo que  $A + B(0; \varepsilon)$  e  $B + B(0; \varepsilon)$  sejam abertos, convexos e disjuntos:

(i) Para qualquer escolha de  $\varepsilon > 0$ , os conjuntos  $A + B(0; \varepsilon)$  e  $B + B(0; \varepsilon)$  são abertos. De fato,

$$A + B(0; \varepsilon) = \bigcup_{\alpha \in A} (\alpha + B(0; \varepsilon)) = \bigcup_{\alpha \in A} B(\alpha; \varepsilon),$$

e o mesmo ocorre para  $B + B(0; \varepsilon)$ .

(ii) Para qualquer escolha de  $\varepsilon > 0$ , como  $A$ ,  $B$  e  $B(0; \varepsilon)$  são convexos, é imediato que os conjuntos  $A + B(0; \varepsilon)$  e  $B + B(0; \varepsilon)$  são convexos.

(iii) Basta então provar que é possível escolher  $\varepsilon$  de modo que  $A + B(0; \varepsilon)$  e  $B + B(0; \varepsilon)$  sejam disjuntos. Suponha que isso não seja possível. Nesse caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$(A + B(0; \frac{1}{n})) \cap (B + B(0; \frac{1}{n})) \neq \emptyset.$$

Logo existem  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ ,  $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq B$  e  $(z_n)_{n=1}^\infty, (w_n)_{n=1}^\infty \subseteq B(0; \frac{1}{n})$  tais que  $x_n + z_n = y_n + w_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim

$$\|x_n - y_n\| = \|z_n - w_n\| < \frac{2}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Como  $B$  é compacto, a sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  tem subsequência convergente em  $B$ , digamos  $y_{n_k} \rightarrow \beta \in B$ . Por (3.7) segue que  $x_{n_k} \rightarrow \beta$ . Como  $A$  é fechado, sabemos que  $\beta \in A$ , e assim  $\beta \in A \cap B$ , o que contradiz o fato de serem  $A$  e  $B$  disjuntos.

Fixemos então  $\varepsilon > 0$  tal que  $A + B(0; \varepsilon)$  e  $B + B(0; \varepsilon)$  sejam disjuntos. Pelo Teorema 3.4.8 existe um hiperplano fechado  $[\varphi = c]$  de  $E$  que separa  $A + B(0; \varepsilon)$  e  $B + B(0; \varepsilon)$ . Logo, para  $x \in A$  e  $y \in B$ ,

$$\varphi(x) + \sup_{\|z_1\| < \varepsilon} \varphi(z_1) \leq c \leq \varphi(y) + \inf_{\|z_2\| < \varepsilon} \varphi(z_2),$$

e, da linearidade de  $\varphi$ ,

$$\varphi(x) + \varepsilon \cdot \sup_{\|\frac{z_1}{\varepsilon}\| < 1} \varphi\left(\frac{z_1}{\varepsilon}\right) \leq c \leq \varphi(y) + \varepsilon \cdot \inf_{\|\frac{z_2}{\varepsilon}\| < 1} \varphi\left(\frac{z_2}{\varepsilon}\right).$$

Disso segue que  $\varphi(x) + \varepsilon \|\varphi\| \leq c \leq \varphi(y) - \varepsilon \|\varphi\|$  para todos  $x \in A$  e  $y \in B$ . Basta tomar  $a = c - \frac{\varepsilon \|\varphi\|}{2}$  e  $b = c + \frac{\varepsilon \|\varphi\|}{2}$ . ■

A seguinte variação da Proposição 3.3.1 segue muito facilmente:

**Corolário 3.4.10** *Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço normado  $E$ . Então para todo  $x_0 \in E - M$  existe um funcional  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x_0) = 1$  e  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in M$ .*

**Demonstração.** Aplicando o Teorema 3.4.9 para  $A = M$  e  $B = \{x_0\}$ , existem um funcional  $\Phi \in E'$  e  $c \in \mathbb{R}$  tais que  $\Phi(x) < c < \Phi(x_0)$  para todo  $x \in M$ . Mas a imagem de um subespaço por um operador linear é um subespaço do contradomínio, logo  $\Phi(x) = 0$  para todo  $x \in M$ . Assim  $\Phi(x_0) > 0$  e portanto basta tomar  $\varphi = \frac{1}{\Phi(x_0)} \Phi$ . ■

**Corolário 3.4.11** *Seja  $M$  um subespaço do espaço normado  $E$ . Então para todo  $x_0 \in E$ ,  $x_0 \in \overline{M}$  se, e somente, se  $\varphi(x_0) = 0$  para todo  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in M$ . Ou seja,*

$$\overline{M} = \bigcap \{\ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subseteq \ker(\varphi)\}.$$

**Demonstração.** Suponha  $x_0 \in \overline{M}$ . Para todo  $\varphi \in E'$  tal que  $M \subseteq \ker(\varphi)$ ,  $\overline{M} \subseteq \ker(\varphi) = \ker(\varphi)$ , pois  $\ker(\varphi)$  é fechado.

Reciprocamente, suponha que  $x_0 \notin \overline{M}$ . Como  $\overline{M}$  é um subespaço fechado de  $E$ , pelo Corolário 3.4.10 existe um funcional  $\varphi_0 \in E'$  tal que  $\varphi_0(x_0) = 1$  e  $\varphi_0(x) = 0$  para todo  $x \in \overline{M}$ . Logo  $x_0 \notin \bigcap \{\ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subseteq \ker(\varphi)\}$ . ■

### 3.5 Comentários e notas históricas

Formas mais simples, ou menos gerais, do Teorema de Hahn–Banach foram provadas por Helly em 1912 e por Hahn em 1922. Hahn melhorou seu resultado e em 1927 publicou uma forma do teorema para funcionais definidos em espaços de Banach. A forma definitiva do Teorema de Hahn–Banach, para funcionais definidos em espaços normados, foi publicada por Banach em 1929. Essas primeiras demonstrações usavam indução transfinita; o Lema de Zorn apareceu apenas em 1935. Duas fontes históricas confiáveis, [68] e [73], enfatizam que Helly teve uma importância no nascimento da Análise Funcional muito maior do que a que normalmente lhe é creditada.

O caso complexo do Teorema da Hahn–Banach foi demonstrado primeiramente para os espaços  $L_p$ ,  $p > 1$ , por F. Murray em 1936. O caso geral foi provado de forma independente em dois trabalhos, um de G. A. Soukhomlinov e outro de H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk, ambos curiosamente publicados no mesmo ano de 1938. Em 1975 J. Holbrook provou uma versão que vale em corpos arquimedianos quaisquer.

Na demonstração do Teorema de Hahn–Banach usamos o Axioma da Escolha na forma do Lema de Zorn. O leitor pode se perguntar se, a exemplo do próprio Lema de Zorn, do Teorema de Zermelo (Princípio da Boa Ordenação) e de vários outros enunciados conhecidos, o Teorema de Hahn–Banach é equivalente ao Axioma da Escolha. A resposta é negativa e a demonstração pode ser encontrada em [68, 7.11].

A busca de versões vetoriais do Teorema de Hahn–Banach, no sentido da Seção 3.2, se tornou uma vertente importante da teoria dos espaços de Banach. Como vimos no Teorema 3.2.7, operadores a valores em  $\ell_\infty$  podem sempre ser estendidos. O mesmo vale para outros espaços, por exemplo, o espaço de funções limitadas  $B(X)$  do Exemplo 1.1.2 (veja Exercício 3.6.18) e o espaço  $L_\infty(\mu)$ , onde  $\mu$  é uma medida de probabilidade (veja [20, Theorem 4.14]). Nesse contexto diz-se que um espaço de Banach  $E$  é *injetivo* se vale a tese do Teorema de Hahn–Banach para operadores a valores em  $E$ , isto é, se para todos espaços de Banach  $F$  e  $G$  com  $F \subseteq G$ , todo operador linear contínuo de  $G$  em  $E$  admite uma extensão linear contínua a  $F$  de mesma norma. Por enquanto sabemos então que  $\ell_\infty$ ,  $B(X)$  e  $L_\infty(\mu)$ , com  $\mu$  medida de probabilidade, são injetivos. A mesma demonstração do Corolário 3.2.8 nos mostra que todo espaço injetivo é 1-complementado em qualquer espaço que o contenha. A. Grothendieck provou em 1953 que todo espaço injetivo é não-separável. Injetividade é uma propriedade escorregadia e às vezes surpreendente, por exemplo, não é hereditária: sabemos  $\ell_\infty$  é injetivo mas seu subespaço fechado  $c_0$  não é injetivo (por ser separável). A estrutura dos espaços injetivos foi desvendada pelo trabalho de vários matemáticos no período 1950-1958,

incluindo o eminente matemático brasileiro Leopoldo Nachbin (1922-1993):

**Teorema 3.5.1** (Nachbin, Goodner, Kelley, Hasumi) *As seguintes afirmações são equivalentes sobre um espaço de Banach (real ou complexo)  $E$ :*

- (a)  $E$  é injetivo.
- (b)  $E$  é 1-complementado em qualquer espaço de Banach que o contenha como subespaço.
- (c)  $E$  tem a propriedade da interseção binária, isto é, toda coleção de bolas fechadas em  $E$  com interseção mútua tem interseção não-vazia.
- (d)  $E$  isometricamente isomorfo ao espaço  $C(K)$  das funções contínuas a valores escalares definidas em um espaço topológico compacto extremamente desconexo  $K$  com a norma do supremo.

Um espaço topológico  $K$  é extremamente desconexo se o fecho de qualquer conjunto aberto em  $K$  é aberto. L. Nachbin, em 1950, também resolveu definitivamente a questão dos espaços injetivos reais de dimensão finita:

**Teorema 3.5.2** (Nachbin [66]) *Um espaço de Banach real  $E$  de dimensão finita  $n \in \mathbb{N}$  é injetivo se, e somente se,  $E$  é isomorfo isometricamente a  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ .*

Exibir um subespaço fechado não-complementado de um espaço de Banach, ou mesmo provar sua existência, nunca é uma tarefa muito fácil. Além dos exemplos mencionados no texto, sabe-se também que  $\ell_1$  contém um subespaço fechado não-complementado (veja [2, Corollary 2.3.3]), que  $L_1[0, 1]$  contém um subespaço não-complementado isomorfo a  $\ell_2$  (veja [20, página 14]) e que para  $1 < p < \infty$ ,  $p \neq 2$ ,  $L_p[0, 1]$  contém um subespaço não-complementado isomorfo a  $\ell_p$  (veja [20, página 26]).

A primeira versão do Teorema 3.4.8 foi provada por Mazur em 1933. Para enunciá-la precisamos do seguinte conceito: um *subespaço afim* (ou *variedade linear*) de um espaço vetorial  $V$  é o translado de um subespaço vetorial, ou seja, é um conjunto da forma  $x_0 + W$  onde  $x_0 \in V$  e  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Teorema 3.5.3** [68, Theorem 7.7.3] *Sejam  $A$  um subconjunto aberto e convexo de um espaço normado  $E$  e  $M$  um subespaço afim de  $E$  tais que  $M \cap A = \emptyset$ . Então existe um hiperplano fechado  $H$  de  $E$  contendo  $M$  tal que  $H \cap A = \emptyset$ .*

Este resultado de Mazur foi chamado de *forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach* nos livros da coleção Bourbaki. O motivo desta denominação é que este resultado generaliza o fato de que toda reta em  $\mathbb{R}^3$  que não fura uma dada esfera está contida em um plano que não intersecta o interior da esfera. A partir daí resultados deste tipo passaram a ser chamados de formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach.

## 3.6 Exercícios

**Exercício 3.6.1** Seja  $E$  um espaço normado,  $E \neq \{0\}$ . Mostre que  $E' \neq \{0\}$ .

**Exercício 3.6.2** Seja  $E$  um espaço normado. Mostre que  $E'$  *separa pontos* de  $E$ , isto é, se  $x, y \in E$  e  $x \neq y$ , então existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

**Exercício 3.6.3** Sejam  $x_1, \dots, x_n$  vetores linearmente independentes do espaço normado  $E$  e  $a_1, \dots, a_n$  escalares dados. Mostre que existe um funcional  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x_j) = a_j$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

**Exercício 3.6.4** Mostre que, em geral, a extensão de Hahn–Banach não é única.

**Exercício 3.6.5** No Teorema 3.1.2, se  $E$  é um espaço normado e existe  $C > 0$  tal que  $p(x) \leq C\|x\|$  para todo  $x \in E$ , prove que  $\|\tilde{\varphi}\| \leq C$ .

**Exercício 3.6.6** Demonstre o Teorema de Hahn–Banach, na forma do Corolário 3.1.3, no caso em que  $E$  é um espaço separável sem usar o Lema de Zorn, isto é, sem usar os Teoremas 3.1.1 e 3.1.2.

**Exercício 3.6.7** Seja  $F$  um espaço normado. Prove que se existe um espaço normado  $E \neq \{0\}$  tal que  $\mathcal{L}(E, F)$  é um espaço de Banach, então  $F$  também é um espaço de Banach.

**Exercício 3.6.8** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Prove que  $\|T\| = \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{F'} \text{ e } x \in B_E\}$ .

**Exercício 3.6.9** Seja  $F$  um subespaço denso do espaço normado  $E$ . Prove que  $F'$  e  $E'$  são isomorfos isometricamente.

**Exercício 3.6.10** Sejam  $E, F$  espaços normados,  $G$  um subespaço de  $E$  e  $T \in \mathcal{L}(G, F)$  um operador de posto finito (veja Exercício 2.7.20). Prove que existe  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$  que estende  $T$  e tem a mesma imagem que  $T$ .

**Exercício 3.6.11** Seja  $E$  um espaço normado separável. Prove que existe uma sequência  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  de funcionais em  $E'$  tais que  $\|\varphi_n\| = 1$  para todo  $n$  e, para todo  $x \in E$ ,  $\|x\| = \sup_n |\varphi_n(x)|$  no caso complexo e  $\|x\| = \sup_n \varphi_n(x)$  no caso real.

**Exercício 3.6.12** Sejam  $E$  um espaço normado e  $F$  um subespaço de  $E$ . Mostre que existe uma aplicação  $T: F' \rightarrow E'$  injetora tal que  $\|T(\varphi)\| = \|\varphi\|$  para todo funcional  $\varphi \in F'$ . Isso significa que  $E'$  contém um subespaço isomorfo isometricamente a  $F'$ ?

**Exercício 3.6.13** Seja  $B$  um subconjunto de um espaço normado  $E$  tal que  $\varphi(B)$  é limitado para cada  $\varphi \in E'$ . Mostre que  $B$  é limitado.

**Exercício 3.6.14\*** (Anulador) Sejam  $E$  um espaço normado e  $M$  um subconjunto não-vazio de  $E$ . O *anulador* de  $M$  é definido por

$$M^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Prove que:

- (a)  $M^\perp$  é um subespaço fechado de  $E'$ .
- (b) Se  $M$  é subespaço de  $E$ , então  $M'$  é isomorfo isometricamente a  $E'/M^\perp$ .
- (c) Se  $M$  é subespaço fechado de  $E$ , então  $M^\perp$  é isomorfo isometricamente a  $(E/M)'$ .

**Exercício 3.6.15** Sejam  $F$  e  $G$  subespaços fechados e distintos do espaço normado  $E$ . Prove que  $F^\perp \neq G^\perp$ .

**Exercício 3.6.16** Seja  $F$  um subespaço do espaço de Banach  $E$  cujo dual  $E'$  é separável. Prove que  $F'$  é separável.

**Exercício 3.6.17** Dados um espaço normado  $E$  e um vetor  $x_0 \in E$ , prove que o conjunto

$$\{\varphi \in E' : \|\varphi\| = \|x_0\| \text{ e } \varphi(x_0) = \|x_0\|^2\}.$$

é não-vazio, convexo e fechado em  $E'$ .

**Exercício 3.6.18** Sejam  $F$  um subespaço do espaço normado  $E$  e  $T \in \mathcal{L}(F, B(X))$ , onde  $B(X)$  é o espaço do Exemplo 1.1.2. Prove que existe  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, B(X))$  extensão de  $T$  a  $E$  tal que  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

**Exercício 3.6.19** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $F$  um subespaço complementado de  $E$ . Prove que se  $E = F \oplus M$  e  $E = F \oplus N$ , então  $M$  é isomorfo a  $N$ .

**Exercício 3.6.20** O Teorema de Sobczyk diz o seguinte: Sejam  $F$  um subespaço fechado do espaço normado separável  $E$  e  $T \in \mathcal{L}(F, c_0)$ . Então existe  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E; c_0)$  que estende  $T$  e  $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$ . Para uma demonstração, veja [2, Theorem 2.5.8].

Usando o Teorema de Sobczyk, mostre que se  $c_0$  é subespaço complementado de um espaço normado separável  $E$ , então é 2-complementado em  $E$ .

**Exercício 3.6.21** Seja  $F$  um subespaço fechado do espaço de Banach  $E$  tal que  $E/F$  tem dimensão finita. Prove que  $F$  é complementado em  $E$ .

**Exercício 3.6.22** Sejam  $F$  subespaço do espaço normado  $E$ ,  $P: E \rightarrow E$  uma projeção sobre  $F$  e  $Q \in \mathcal{L}(E, E)$ . Se  $P \circ Q = Q$  e  $Q \circ P = P$ , então  $Q$  também é uma projeção sobre  $F$ .

**Exercício 3.6.23** Considere o seguinte operador de translação

$$T: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty, \quad T((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

(a) Prove que  $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)$  e calcule a norma de  $T$ .

(b) Prove que existe um funcional  $\varphi \in (\ell_\infty)'$  tal que

$$\varphi \circ T = \varphi \text{ e } \liminf_n a_n \leq \varphi((a_j)_{j=1}^\infty) \leq \limsup_n a_n \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty.$$

**Exercício 3.6.24** Seja  $C$  um subconjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado real  $E$ . Prove que se  $C$  é limitado e simétrico (isto é,  $C = -C$ ), então o funcional de Minkowski  $p_C$  de  $C$  é uma norma equivalente à norma original de  $E$ .

**Exercício 3.6.25** Seja  $(E, \|\cdot\|)$  um espaço normado real. Prove que o funcional de Minkowski da bola aberta  $B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$  coincide com  $\|\cdot\|$ .

**Exercício 3.6.26\*** Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos convexos do espaço normado real  $E$  tais que

$$\delta := \text{dist}(A, B) = \inf\{\|x - y\| : x \in A \text{ e } y \in B\} > 0.$$

Prove que existe um funcional  $\varphi \in E'$  tal que  $\|\varphi\| = 1$  e  $\inf \varphi(A) = \sup \varphi(B) + \delta$ .

**Exercício 3.6.27** (Caso complexo das formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach) Sejam  $E$  um espaço normado complexo e  $A$  e  $B$  subconjuntos disjuntos, não-vazios e convexos de  $E$ .

(a) Se  $A$  é aberto, então existem um funcional  $\varphi \in E'$  e um número real  $a$  tais que

$$\text{Re}(\varphi(x)) \leq a \leq \text{Re}(\varphi(y)) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

(b) Se  $A$  é fechado e  $B$  é compacto, então existem um funcional  $\varphi \in E'$  e números reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\text{Re}(\varphi(x)) < a < b < \text{Re}(\varphi(y)) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

**Exercício 3.6.28** Um *semi-espaço fechado* em um espaço normado real  $E$  é um conjunto da forma

$$\varphi^{-1}([a, \infty)) = \{x \in E : \varphi(x) \geq a\},$$

onde  $\varphi \in E'$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Prove que todo subconjunto fechado e convexo de um espaço normado real é a interseção de todos os semi-espaços fechados que o contém.

**Exercício 3.6.29** (a) Prove que o operador

$$T: \ell_\infty \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2), \quad T((a_j)_{j=1}^\infty)((b_j)_{j=1}^\infty) = (a_j b_j)_{j=1}^\infty$$

é uma isometria linear.

(b) Conclua que  $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$  não é separável.

**Exercício 3.6.30** Prove que um subespaço vetorial  $M$  do espaço normado  $E$  é denso em  $E$  se, e somente se, o único funcional  $\varphi \in E'$  que se anula em  $M$  é o funcional nulo.

**Exercício 3.6.31** Sejam  $x$  e  $(x_i)_{i \in I}$  vetores de um espaço normado  $E$ . Prove que  $x \in \overline{[x_i : i \in I]}$  se, e somente se,  $\varphi(x) = 0$  para todo  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x_i) = 0$  para todo  $i \in I$ .

**Exercício 3.6.32** Sejam  $K_1, \dots, K_n$  subconjuntos fechados e convexos do espaço normado real  $E$ , cada um deles contendo a origem, e sejam também  $c_1, \dots, c_n$  números reais positivos. Prove que se  $x \in E$  e  $x$  não pode ser escrito da forma  $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  com  $x_i \in K_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , então existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) > 1$  e  $\varphi(y) \leq \frac{1}{c_i}$  para todos  $i = 1, \dots, n$  e  $y \in K_i$ .



# Capítulo 4

## Dualidade e Espaços Reflexivos

Começaremos este capítulo mostrando que é possível descrever todos os funcionais lineares contínuos em alguns dos espaços clássicos com os quais vimos trabalhando. A característica relevante dessa descrição dos espaços duais é que os funcionais são descritos como objetos pertencentes à mesma classe dos elementos do espaço, a saber, funcionais lineares contínuos em espaços de funções serão descritos como funções e funcionais lineares contínuos em espaços de sequências serão descritos como sequências.

Ainda no contexto da dualidade, ao tomarmos o dual do dual de um espaço normado, às vezes nos vemos de volta ao espaço original. Esses são os espaços reflexivos, tema da Seção 4.3. O estudo dos espaços reflexivos nos proporcionará uma excelente oportunidade para introduzir e aplicar a importante noção de adjunto de um operador linear contínuo.

### 4.1 O dual dos espaços $L_p$

A partir de agora, dado  $1 < p < \infty$ , por  $p^*$  denotaremos o (único) número maior que 1 tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Para  $p = 1$  tomaremos  $p^* = \infty$ . Diz-se que  $p^*$  é o *conjugado* de  $p$  e vice-versa.

Vejamos primeiramente como elementos de  $L_{p^*}$  geram funcionais lineares em  $L_p$ :

**Exemplo 4.1.1** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Dada uma função  $g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ , considere o funcional

$$\varphi_g: L_p(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_g(f) = \int_X fg \, d\mu.$$

Da desigualdade de Hölder 1.2.1 segue que

$$|\varphi_g(f)| = \left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq \int_X |fg| \, d\mu \leq \|g\|_{p^*} \cdot \|f\|_p$$

para toda  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Isso garante que  $\varphi_g$  está bem definida e, como nesse caso a linearidade é clara, segue também que  $\varphi_g \in L_p(X, \Sigma, \mu)'$  e  $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_{p^*}$ .



Para provar a igualdade  $\|\varphi_g\| = \|g\|_{p^*}$  precisamos dividir a demonstração em dois casos. Se  $g = 0$  em  $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ , não há o que fazer. Podemos então supor  $\|g\|_{p^*} \neq 0$ . Suponhamos primeiro que  $p > 1$ . Nesse caso  $p^* < \infty$  e portanto está bem definida a função

$$f(x) = \frac{|g(x)|^{p^*-1} \cdot \overline{g(x)}}{\|g\|_{p^*}^{p^*-1} \cdot |g(x)|} \text{ se } g(x) \neq 0 \text{ e } f(x) = 0 \text{ se } g(x) = 0.$$

Como  $(p^* - 1)p = p^*$  segue que  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  e  $\|f\|_p = 1$ . Uma conta rápida fornece  $|\varphi_g(f)| = \|g\|_{p^*}$ , e portanto  $\|\varphi_g\| = \|g\|_{p^*}$ .

Para o caso  $p = 1$ , suponhamos que a medida  $\mu$  seja  $\sigma$ -finita, isto é, existem conjuntos  $(A_n)_{n=1}^\infty$  em  $\Sigma$ , todos de medida finita, tais que  $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ . Seja  $0 < c < \|g\|_\infty$ . Tomando  $A = \{x \in X : |g(x)| > c\}$ , da definição de  $\|\cdot\|_\infty$  segue que  $\mu(A) > 0$ . De  $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$  resulta que  $\mu(A \cap A_n) > 0$  para algum  $n$ . Chamando  $B = A \cap A_n$  segue que  $0 < \mu(B) < \infty$  e  $|g(x)| > c$  para todo  $x \in B$ . Definindo

$$f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{\mu(B)|g(x)|} \text{ se } x \in B \text{ e } f(x) = 0 \text{ se } x \notin B,$$

temos  $\|f\|_1 = 1$  e portanto  $\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \int_B \frac{|g|}{\mu(B)} d\mu \geq c$ . Como isso vale para todo  $0 < c < \|g\|_\infty$  segue que  $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_\infty$ .

Sabemos então que a correspondência

$$g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu) \mapsto \varphi_g \in L_p(X, \Sigma, \mu)' , \quad \varphi_g(f) = \int_X fg d\mu,$$

é uma isometria linear (logo injetora); com a ressalva de que a medida deve ser  $\sigma$ -finita no caso  $p = 1$ . Para que os espaços  $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$  e  $L_p(X, \Sigma, \mu)'$  sejam isometricamente isomorfos falta verificar que essa correspondência é sobrejetora, isto é, que todo funcional em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  provém de uma função de  $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . É exatamente isso que diz o próximo teorema, um dos vários resultados conhecidos como *Teorema da Representação de Riesz*. No caso de escalares reais e  $1 < p < \infty$ , uma demonstração essencialmente independente da Teoria da Medida será apresentada no Teorema 6.6.13.

**Teorema 4.1.2** *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. No caso  $p = 1$  supomos que  $\mu$  seja uma medida  $\sigma$ -finita. Então a correspondência  $g \mapsto \varphi_g$  estabelece um isomorfismo isométrico entre  $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$  e  $L_p(X, \Sigma, \mu)'$  em que a relação de dualidade é dada por*

$$\varphi_g(f) = \int_X fg d\mu \text{ para toda } f \in L_p(X, \Sigma, \mu).$$

**Demonstração.** Demonstraremos neste momento apenas o caso em que a medida  $\mu$  é  $\sigma$ -finita e  $1 \leq p < \infty$ . Isso engloba os espaços de medida mais usados, inclusive nas

aplicações. De toda forma, o caso em que  $p > 1$  e  $\mu$  é uma medida arbitrária será demonstrado no Apêndice C.

De nossa discussão prévia basta provar que dado um funcional  $\varphi \in L_p(X, \Sigma, \mu)'$ , existe  $g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$  tal que  $\varphi_g = \varphi$ . Suponhamos primeiramente que a medida  $\mu$  seja finita. Não é difícil checar que a correspondência  $A \in \Sigma \mapsto \varphi(\mathcal{X}_A)$ , onde  $\mathcal{X}_A$  é a função característica de  $A$ , é uma medida (note que  $\mathcal{X}_A \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  pois estamos supondo  $\mu$  finita). Como  $\varphi(0) = 0$  temos  $\varphi(\mathcal{X}_A) = 0$  para todo  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$ . Pelo Teorema de Radon–Nikodým (veja Teorema C.0.31) existe uma função  $g \in L_1(X, \Sigma, \mu)$  tal que  $\varphi(\mathcal{X}_A) = \int_A g d\mu$  para todo  $A \in \Sigma$ . Portanto,  $\varphi(f) = \int_X fg d\mu$  para toda função simples  $f$ . Assim, para toda função simples  $f$  temos  $fg \in L_1(X, \Sigma, \mu)$  e

$$\left| \int_X fg d\mu \right| = |\varphi(f)| \leq \|f\|_p \cdot \|\varphi\|.$$

Segue da recíproca da desigualdade de Hölder (Exercício 1.8.39) que  $g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . Como o conjunto das funções simples é denso em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  [31, Proposition 6.7], da linearidade e da continuidade de  $\varphi$  segue que  $\varphi(f) = \int_X fg d\mu$  para toda  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ , isto é,  $\varphi_g = \varphi$ .

Façamos agora o caso em que  $\mu$  é  $\sigma$ -finita. Nesse caso podemos considerar uma sequência crescente  $(A_n)_{n=1}^\infty$  de conjuntos mensuráveis tal que  $0 < \mu(A_n) < \infty$  para todo  $n$  e  $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , chamando  $\Sigma_n = \{A \cap A_n : A \in \Sigma\}$  e  $\mu_n = \mu|_{\Sigma_n}$ , resulta que  $(A_n, \Sigma_n, \mu_n)$  é um espaço de medida finita. Definindo  $\varphi_n$  por

$$f_n \in L_p(A_n, \Sigma_n, \mu_n) \longrightarrow \varphi_n(f_n) = \varphi(f_n \mathcal{X}_{A_n}),$$

temos  $\varphi_n \in L_p(A_n, \Sigma_n, \mu_n)'$ . Pelo caso anterior existe  $g_n \in L_{p^*}(A_n, \Sigma_n, \mu_n)$  tal que  $\varphi_n(f_n) = \int_{A_n} f_n g_n d\mu_n$  para toda  $f_n \in L_p(A_n, \Sigma_n, \mu_n)$ . Mais ainda,

$$\|g_n\|_{L_{p^*}(A_n, \Sigma_n, \mu_n)} = \|\varphi_n\|_{(L_p(A_n, \Sigma_n, \mu_n))'} \leq \|\varphi\|_{L_p(X, \Sigma, \mu)'}$$

Tal  $g_n$  é única (sugerimos que o leitor verifique isso. Se tiver em mente  $\mathcal{L}_{p^*}$  ao invés de  $L_{p^*}$ , o leitor poderá interpretar que  $g_n$  é única a menos de conjuntos de medida nula, isto é, outra função com as mesmas propriedades de  $g_n$  coincide com  $g_n$  a menos de um conjunto de medida nula). Podemos estender  $g_n$  a  $X$  fazendo  $g_n(x) = 0$  para todo  $x \notin A_n$ . Como a sequência  $(A_n)_{n=1}^\infty$  é crescente, segue que se  $n < m$  então  $g_n = g_m$   $\mu$ -quase sempre em  $A_n$ . Está então bem definida e é mensurável a função  $g$  dada por  $g(x) = g_n(x)$  se  $x \in A_n$ . Pelo Teorema da Convergência Monótona concluímos que

$$\|g\|_{L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L_{p^*}(A_n, \Sigma_n, \mu_n)} \leq \|\varphi\|_{L_p(X, \Sigma, \mu)'},$$

o que nos garante que  $g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . Para cada  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ , pelo Teorema da Convergência Dominada sabemos que  $\|f \mathcal{X}_{A_n} - f\|_p \longrightarrow 0$ , isto é,  $f \mathcal{X}_{A_n} \longrightarrow f$  em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . A continuidade de  $\varphi$  implica que

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f \mathcal{X}_{A_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(f|_{A_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f g_n d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f g d\mu = \int_X f g d\mu, \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é consequência da definição de  $\mu_n$  e  $g$  e a última igualdade é mais uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada. Isso prova que  $\varphi_g = \varphi$ . ■

## 4.2 Os duais dos espaços $\ell_p$ e $c_0$

Seja  $1 \leq p < \infty$ . Relembre que  $\ell_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$  para  $X = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma =$  partes dos naturais,  $\mu =$  medida de contagem, e que a medida de contagem nas partes dos naturais é  $\sigma$ -finita. Sendo assim, podemos aplicar o Teorema 4.1.2 a esse caso. É imediato que a relação de dualidade, aplicada a esse caso, se transforma em

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*} \mapsto \varphi_b \in (\ell_p)' , \quad \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p. \quad (4.1)$$

O Teorema 4.1.2 se transforma então em

**Proposição 4.2.1** *Para  $1 \leq p < \infty$  a correspondência  $b \in \ell_{p^*} \mapsto \varphi_b \in (\ell_p)'$  estabelece um isomorfismo isométrico entre  $\ell_{p^*}$  e  $(\ell_p)'$  em que a relação de dualidade é dada por (4.1).*

**Observação 4.2.2** À luz da informação de que o dual de  $\ell_1$  é isomorfo isometricamente a  $\ell_{\infty}$ , concluímos que a recíproca do Teorema 3.3.2 não é verdadeira, pois  $\ell_1$  é separável enquanto que  $\ell_{\infty}$  é não-separável.

A mesma relação de dualidade acima descreve também o dual de  $c_0$ :

**Proposição 4.2.3** *Os espaços  $\ell_1$  e  $(c_0)'$  são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \mapsto \varphi_b \in (c_0)' , \quad \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0. \quad (4.2)$$

**Demonstração.** Deixamos ao leitor a verificação de que a correspondência está bem definida, é linear e  $\|\varphi_b\|_{\infty} \leq \|b\|_1$ . Vejamos que é sobrejetora e  $\|\varphi_b\|_{\infty} \geq \|b\|_1$ . Seja  $\varphi \in (c_0)'$ . Considere a sequência  $b = (\varphi(e_j))_{j=1}^{\infty}$ , onde  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  são os vetores unitários canônicos (veja Exemplo 1.6.4). Devemos mostrar que  $b \in \ell_1$ ,  $\varphi_b = \varphi$  e  $\|b\|_1 \leq \|\varphi\|$ . Para isso, para cada  $n \in \mathbb{N}$  considere a sequência  $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$  onde

$$\alpha_j = \frac{\overline{\varphi(e_j)}}{|\varphi(e_j)|} \text{ se } \varphi(e_j) \neq 0 \text{ e } j \leq n , \quad \alpha_j = 0 \text{ caso contrário.}$$

É claro que  $|\alpha_j| \leq 1$  para todo  $j$ . Seja  $j \leq n$  tal que  $\varphi(e_j) \neq 0$ . Então

$$\alpha_j \varphi(e_j) = \frac{\overline{\varphi(e_j)}}{|\varphi(e_j)|} \cdot \varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|.$$

É claro também que  $\alpha_j \varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|$  se  $\varphi(e_j) = 0$ . Então  $\alpha_j \varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|$  para todo  $j \leq n$ . Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\varphi(e_j)| &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(e_j) = \varphi \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) \leq \|\varphi\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\| \\ &= \|\varphi\| \cdot \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\} \leq \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Como isso vale para todo  $n$ , fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos

$$\|b\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)| \leq \|\varphi\|.$$

o que mostra que  $b \in \ell_1$  e  $\|b\|_1 \leq \|\varphi\|$ . Seja  $x = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ . No Exemplo 1.6.4 vimos, entre outras coisas, que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j e_j$ . Segue então que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j e_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left( \sum_{j=1}^n a_j e_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi(e_j) = \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \varphi_b(x), \end{aligned}$$

provando que  $\varphi_b = \varphi$ . ■

Em vista do que provamos nesta seção e na anterior, é usual escrever  $(L_p(X, \Sigma, \mu))' = L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ ,  $(\ell_p)' = \ell_{p^*}$  para  $1 \leq p < \infty$ , e  $(c_0)' = \ell_1$ , sendo que cada igualdade deve ser entendida a menos do isomorfismo isométrico correspondente.

## 4.3 Bidual e espaços reflexivos

Para todo espaço normado  $E$ , podemos considerar seu dual  $E'$ , que já sabemos ser um espaço de Banach. Podemos então considerar o dual de  $E'$ , chamado de *bidual de  $E$*  e denotado por  $E''$ . Ou seja,  $E'' = (E')'$ . Começamos esta seção mostrando que todo espaço normado  $E$  pode ser encontrado dentro do seu bidual  $E''$  da forma mais natural possível:

**Proposição 4.3.1** *Para todo espaço normado  $E$ , o operador linear*

$$J_E: E \longrightarrow E'', \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E',$$

*é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de  $E$  em  $E''$ .*

**Demonstração.** Deixamos a cargo do leitor a verificação de que  $J_E$  está bem definido (isto é,  $J_E(x) \in E''$  para todo  $x \in E$ ) e é linear. Para cada  $x \in E$ , de

$$\|J_E(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |J(x)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|,$$

onde a última igualdade segue do Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.5, concluimos que  $J_E$  é uma isometria linear. ■

**Observação 4.3.2** (a) Se o espaço normado  $E$  contém um subespaço isomorfo ao espaço normado  $F$ , dizemos que  $E$  contém uma *cópia isomorfa de  $F$* . E se  $E$  contém um subespaço isomorfo isometricamente a  $F$ , dizemos que  $E$  contém uma *cópia isométrica de  $F$* . Da Proposição 4.3.1 temos, em particular, que para todo espaço normado  $E$ , seu bidual  $E''$  contém uma cópia isométrica de  $E$ . Nesta linguagem, a Proposição 3.3.3 diz que  $\ell_\infty$  contém uma cópia isométrica de todo espaço separável.

(b) Como  $E$  e  $J_E(E)$  são isometricamente isomorfos, é comum identificar os dois espaços e a ambos se referir simplesmente como  $E$ . Ou seja, em um contexto em que  $E$  seja visto como subespaço de  $E''$ , estaremos cometendo o abuso de notação de escrever  $E$  onde deveríamos ter escrito  $J_E(E)$ .

Como uma primeira aplicação da Proposição 4.3.1, damos abaixo uma demonstração curtíssima de que todo espaço normado admite um completamento. O leitor deve lembrar-se que a demonstração do teorema do completamento em espaços métricos é longa e trabalhosa. Além disso, adaptá-la para espaços normados, no sentido de mostrar que o completamento de um espaço normado é também um espaço normado (logo um espaço de Banach), agrega mais trabalho ainda à tarefa.

**Proposição 4.3.3** *Para todo espaço normado  $E$  existe um um espaço de Banach  $\widehat{E}$  que contém uma cópia isométrica de  $E$  que é densa em  $\widehat{E}$ .*

**Demonstração.** Dado  $E$ , tome  $\widehat{E} = \overline{J_E(E)} \subseteq E''$ . ■

O espaço  $\widehat{E}$  é chamado de *completamento* do espaço normado  $E$ . O leitor não deve se iludir com a simplicidade da demonstração acima, pois nela embutida encontra-se o Teorema de Hahn–Banach, usado na demonstração da Proposição 4.3.1.

Para que o mergulho canônico  $J_E$  de  $E$  no seu bidual  $E''$  seja um isomorfismo isométrico falta apenas que seja sobrejetor. Essa propriedade caracteriza uma classe importante de espaços:

**Definição 4.3.4** Um espaço normado  $E$  é dito *reflexivo* se o mergulho canônico  $J_E: E \longrightarrow E''$  for sobrejetor, ou seja,  $J_E(E) = E''$ . Neste caso  $J_E$  é um isomorfismo isométrico, e o abuso de notação  $E = J_E(E)$  se transforma em  $E = E''$ .

O próximo resultado mostra que não há perda de generalidade em definir reflexividade exclusivamente em espaços de Banach:

**Proposição 4.3.5** *Todo espaço normado reflexivo é um espaço de Banach.*

**Demonstração.** Um espaço normado reflexivo é isomorfo isometricamente ao seu bidual, que é Banach por ser um espaço dual (Corolário 2.1.5). ■

**Exemplo 4.3.6**

(a) Espaços normados de dimensão finita são reflexivos. De fato, se  $E$  tem dimensão finita  $n$ , sabemos da Álgebra Linear que seu dual algébrico  $E^*$  também tem dimensão  $n$  e, pelo Exercício 2.7.2, o dual algébrico coincide com o dual topológico. Repetindo o argumento resulta que  $E''$  também tem dimensão  $n$  e segue facilmente que  $J_E$  é sobrejetora, e portanto  $E$  é reflexivo.

(b) Espaços normados incompletos, por exemplo  $c_{00}$ , não são reflexivos (Proposição 4.3.5).

(c)  $c_0$  não é reflexivo. Já sabemos das Proposições 4.2.1 e 4.2.3 que

$$(c_0)'' = ((c_0)')' = (\ell_1)' = \ell_\infty.$$

É fácil verificar que o mergulho canônico  $J_{c_0}: c_0 \longrightarrow (c_0)'' = \ell_\infty$  é na verdade a inclusão de  $c_0$  em  $\ell_\infty$ , que obviamente não é sobrejetora.

O passo natural agora é investigar a reflexividade dos espaços  $\ell_p$ . Dividiremos essa análise em três etapas:  $p = 1$ ,  $1 < p < \infty$  e  $p = \infty$ . Cada uma delas sairá como consequência de resultados que são interessantes por si mesmos e que terão outras aplicações ao longo do texto. Começamos com o caso  $p = 1$ :

**Proposição 4.3.7** *Se  $E$  é separável e reflexivo, então  $E'$  é separável.*

**Demonstração.** Como  $E$  é isomorfo isometricamente a  $E''$ , sabemos que  $E''$  também é separável. Pelo Teorema 3.3.2 segue então que  $E'$  é separável. ■

**Exemplo 4.3.8**  $\ell_1$  não é reflexivo. De fato, como  $\ell_1$  é separável (Exemplo 1.6.4) e seu dual  $\ell_\infty$  não é separável (Exemplo 1.6.5), pela Proposição 4.3.7 segue que  $\ell_1$  não é reflexivo.

Aproveitamos a oportunidade do estudo da reflexividade dos espaços  $\ell_p$ ,  $1 < p < \infty$ , para introduzir a noção de operador adjunto:

**Definição 4.3.9** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $T \in \mathcal{L}(E; F)$  um operador linear contínuo. Definimos o operador  $T': F' \longrightarrow E'$  por

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F'.$$

O operador  $T'$  é chamado *adjunto* de  $T$ .

**Exemplo 4.3.10** Dado  $1 \leq p < \infty$ , considere o operador ‘*shift para trás*’

$$T: \ell_p \longrightarrow \ell_p, \quad T((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, \dots).$$

É fácil ver que  $T$  é linear e contínuo. Por definição, o operador adjunto  $T'$  vai de  $(\ell_p)'$  em  $(\ell_p)'$ . Fazemos a identificação de  $(\ell_p)'$  com  $\ell_{p'}$ , isto é, enxergaremos um funcional  $\varphi \in (\ell_p)'$  como uma sequência  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p'}$  e a ação do funcional  $\varphi$  sobre os elementos de  $\ell_p$  se dá pela relação de dualidade (4.1):

$$\varphi((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_n b_n \text{ para todo } (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p.$$

Assim procedendo, dados  $\varphi = (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p'}$  e  $x = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ ,

$$\begin{aligned} T'(\varphi)(x) &= \varphi(T(x)) = \varphi((a_2, a_3, \dots)) = b_1 a_2 + b_2 a_3 + \dots \\ &= 0a_1 + b_1 a_2 + b_2 a_3 + \dots = \psi(x), \end{aligned}$$

onde  $\psi := (0, b_1, b_2, \dots) \in \ell_{p'}$ . Isso revela que  $T'(\varphi) = \psi$ , ou seja, o operador adjunto  $T'$  é o ‘*shift para frente*’

$$T': \ell_{p'} \longrightarrow \ell_{p'}, \quad T'((b_1, b_2, b_3, \dots)) = (0, b_1, b_2, \dots).$$

É interessante observar que no caso  $p = 2$  tem-se  $T \circ T' = \text{id}_{\ell_2}$  mas  $T' \circ T \neq \text{id}_{\ell_2}$ .

**Proposição 4.3.11** *Seja  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Então  $T' \in \mathcal{L}(F', E')$  e  $\|T'\| = \|T\|$ . Mais ainda, se  $T$  é um isomorfismo (isométrico), então  $T'$  também é um isomorfismo (isométrico).*

**Demonstração.** O leitor deve verificar que  $T'$  está bem definido (isto é,  $T'(\varphi) \in E'$  para cada  $\varphi \in F'$ ) e é linear. Para cada  $\varphi \in F'$  temos

$$\|T'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi)(x)| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(T(x))| \leq \|\varphi\| \cdot \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|\varphi\| \cdot \|T\|,$$

o que mostra que  $\|T'\| \leq \|T\|$ . Por outro lado, para cada  $x \in E$ , pelo Corolário 3.1.5 temos

$$\|T(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(T(x))| = \sup_{\varphi \in B_{F'}} |T'(\varphi)(x)| \leq \|x\| \cdot \sup_{\varphi \in B_{F'}} \|T'(\varphi)\| = \|x\| \cdot \|T'\|,$$

provando que  $\|T\| \leq \|T'\|$ . Suponha agora que  $T$  seja um isomorfismo. Vejamos que  $T'$  é sobrejetor. Para isso seja  $\varphi \in E'$ . Considere  $\phi \in F'$  dado por  $\phi(z) = \varphi(T^{-1}(z))$  e perceba que  $T'(\phi) = \varphi$ , provando que  $T'$  é sobrejetor. Vejamos que  $T'$  é injetor. Se  $\psi \in \ker(T')$ , então

$$\psi(T(x)) = T'(\psi)(x) = 0 \text{ para todo } x \in E.$$

Como  $T$  é sobrejetor segue que  $\psi = 0$ . Supondo que  $T$  seja um isomorfismo isométrico, basta mostrar que  $\|T'(\varphi)\| = \|\varphi\|$  para todo  $\varphi \in F'$ . Como  $T$  é isomorfismo isométrico,  $x \in B_E$  se, e somente se,  $T(x) \in B_F$ , e portanto

$$\|T'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi)(x)| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(T(x))| = \sup_{T(x) \in B_F} |\varphi(T(x))| = \sup_{z \in B_F} |\varphi(z)| = \|\varphi\|.$$

■

**Proposição 4.3.12** *Para  $1 < p < \infty$ , os espaços  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  e  $\ell_p$  são reflexivos.*

**Demonstração.** Basta fazer o caso de  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Chame de  $T: L_p(X, \Sigma, \mu) \rightarrow (L_p(X, \Sigma, \mu))'$  e  $S: L_p(X, \Sigma, \mu) \rightarrow (L_{p^*}(X, \Sigma, \mu))'$  os isomorfismos isométricos do Teorema 4.1.2. Logo  $T^{-1}$  é também um isomorfismo isométrico e pela Proposição 4.3.11 segue que seu adjunto  $(T^{-1})': (L_{p^*}(X, \Sigma, \mu))' \rightarrow (L_p(X, \Sigma, \mu))''$  é um isomorfismo isométrico também. Logo o operador  $(T^{-1})' \circ S: L_p(X, \Sigma, \mu) \rightarrow (L_p(X, \Sigma, \mu))''$  é um isomorfismo isométrico. Basta então provar que  $(T^{-1})' \circ S = J_{L_p(X, \Sigma, \mu)}$ . Para isso sejam  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ ,  $\varphi \in (L_p(X, \Sigma, \mu))'$  e  $g = T^{-1}(\varphi) \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . Então

$$\begin{aligned} ((T^{-1})' \circ S)(f)(\varphi) &= (T^{-1})'(S(f))(\varphi) = S(f)((T^{-1})(\varphi)) = S(f)(g) \\ &= \int_X fg \, d\mu = T(g)(f) = \varphi(f) = J_{L_p(X, \Sigma, \mu)}(f)(\varphi), \end{aligned}$$

completando a demonstração. ■

Finalmente, para o caso  $p = \infty$  usaremos o seguinte resultado:

**Proposição 4.3.13** *Um espaço de Banach  $E$  é reflexivo se, e somente se, seu dual  $E'$  também é reflexivo.*

**Demonstração.** Suponha que  $E$  seja reflexivo. Então o mergulho canônico  $J_E: E \rightarrow E''$  é sobrejetor. Mostremos que o mergulho canônico  $J_{E'}: E' \rightarrow E'''$  também é sobrejetor. Seja  $x''' \in E'''$ . Pela Proposição 4.3.11 sabemos que  $(J_E)': E''' \rightarrow E'$  é um isomorfismo isométrico. Chame  $x' = (J_E)'(x''') \in E'$ . Provemos que  $J_{E'}(x') = x'''$ . Para cada  $x \in E$ , temos

$$J_{E'}(x')(J_E(x)) = J_E(x)(x') = x'(x) = (J_E)'(x''')(x) = x'''(J_E(x)).$$

Daí, como  $J_E(E) = E''$ , concluímos que  $J_{E'}(x') = x'''$ .

Suponhamos agora que  $E'$  seja reflexivo. Por absurdo, suponhamos que  $E$  não seja reflexivo. Então  $J_E: E \rightarrow E''$  não é sobrejetor. Como  $J_E: E \rightarrow J_E(E)$  é uma isometria linear, resulta que  $J_E(E)$  é fechado em  $E''$  e não coincide com  $E''$ . Pela Proposição 3.3.1, existe  $0 \neq \varphi \in E''' = J_{E'}(E')$  tal que  $\varphi(J_E(E)) = \{0\}$ . Como  $E'$  é reflexivo,  $\varphi = J_{E'}(\phi)$  para algum  $\phi \in E'$ . Assim, para todo  $x \in E$ ,

$$0 = \varphi(J_E(x)) = (J_{E'}(\phi))(J_E(x)) = J_E(x)(\phi) = \phi(x).$$

Isso prova que  $\phi = 0$  e portanto  $\varphi = J_{E'}(\phi) = 0$ , o que é uma contradição. ■



**Exemplo 4.3.14**  $\ell_\infty$  não é reflexivo. Segue da não reflexividade de  $\ell_1$  (Exemplo 4.3.8), da igualdade  $(\ell_1)' = \ell_\infty$  (Proposição 4.2.1) e da Proposição 4.3.13.

Outros exemplos e propriedades dos espaços reflexivos serão vistos nas Seções 6.4 e 6.5. Mostraremos, em particular, que os espaços  $C[a, b]$ ,  $L_1[a, b]$  e  $L_\infty[a, b]$  não são reflexivos.

## 4.4 Comentários e notas históricas

Existe também uma versão do teorema da representação de Riesz que descreve os funcionais lineares contínuos no espaço  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ , em que  $K$  é um espaço topológico compacto de Hausdorff, da seguinte forma: a cada funcional  $\varphi \in C(K)'$  corresponde uma medida de Radon  $\mu$  nos borelianos de  $K$  tal que

$$\varphi(f) = \int_K f d\mu \text{ para toda } f \in C(K).$$

Detalhes podem ser encontrados em [31, 7.3]. No caso de  $C[a, b]$ , os funcionais lineares são representados por funções de variação limitada, e a relação de dualidade é dada pela integral de Riemann–Stieltjes. Para maiores detalhes veja [40, Seção II.9] ou [68, Theorem 7.4.4].

A noção de reflexividade surgiu com Helly, que em 1921 constatou que o mergulho canônico do espaço  $c$  das seqüências convergentes com a norma  $\|\cdot\|_\infty$  no seu bidual não é sobrejetor. Diante desse exemplo tornou-se necessário separar a classe dos espaços para os quais o mergulho canônico é sobrejetor, e isso foi feito por Hahn em 1927. Hahn chamou tais espaços de *regulares*, um termo infeliz pois aparece inúmeras vezes em outros contextos. Felizmente E. Lorch cunhou o termo *espaço reflexivo* em 1939.

O estudo que fizemos da reflexividade é claramente incompleto, por exemplo, não tocamos na questão de se subespaço fechado de espaço reflexivo é também reflexivo (no Exercício 4.5.30 o leitor provará este fato usando espaços quocientes). O estudo da reflexividade será retomado no Capítulo 6 e a questão acima, bem como várias outras, serão respondidas satisfatoriamente.

Vimos que se um espaço normado  $E$  é reflexivo, então  $E$  é isomorfo isometricamente ao seu bidual  $E''$  por meio do mergulho canônico  $J_E$ . Se  $E$  for isométrico isometricamente a  $E''$  por meio de outro isomorfismo isométrico, será então  $E$  necessariamente reflexivo? A resposta é não: em 1950, R. C. James [42] construiu um espaço, a partir de então conhecido como *espaço de James*, que é isomorfo isometricamente ao seu bidual mas não é reflexivo. O espaço de James encontrou muitas outras aplicações e muitos outros espaços relacionados, com propriedades muito especiais, foram construídos. A monografia [28] é uma excelente referência para o espaço de James, suas propriedades, suas aplicações e seus espaços relacionados.

Na Seção 2.6 comentamos sobre operadores que atingem a norma, e no Exercício 2.7.11 vimos que nem mesmo funcionais lineares contínuos sempre atingem a norma.

Por outro lado, no Exercício 4.5.27 veremos que funcionais lineares contínuos em espaços reflexivos atingem a norma. A recíproca foi provada pelo mesmo R. C. James em [43]: um espaço de Banach  $E$  é reflexivo se, e somente se, todo funcional linear contínuo  $\varphi \in E'$  atinge a norma. Para uma demonstração veja [26, Corollary 3.56].

## 4.5 Exercícios

**Exercício 4.5.1** Sem passar pelos espaços  $L_p$ , prove que, para  $1 < p < \infty$ , a relação de dualidade (4.1) de fato estabelece um isomorfismo isométrico entre  $(\ell_p)'$  e  $\ell_{p'}$ .

**Exercício 4.5.2** Seja  $1 < p < \infty$ . Prove, sem usar reflexividade, que todo funcional linear contínuo em  $\ell_p$  atinge a norma, isto é, para todo  $\varphi \in (\ell_p)'$  existe  $x \in \ell_p$  tal que  $\|x\|_p = 1$  e  $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$ .

**Exercício 4.5.3** Sejam  $a = (a_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de escalares e  $p \geq 1$ . Suponha que, para toda sequência  $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ , a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$  seja convergente. Prove que  $a \in \ell_\infty$  se  $p = 1$  e  $a \in \ell_{p'}$  se  $p > 1$ .

**Exercício 4.5.4** Chame de  $c$  o espaço das sequências escalares que são convergentes munido da norma do supremo  $\|\cdot\|_\infty$  (veja Exercício 1.8.27). Prove que  $c$  é isomorfo a  $c_0$ , conclua que  $c'$  é isomorfo a  $\ell_1$  e descreva a relação de dualidade obtida.

**Exercício 4.5.5** Seja  $\varphi \in (\ell_\infty)'$ . Prove que a série  $\sum_{n=1}^\infty |\varphi(e_n)|$  é convergente e que sua soma é menor ou igual a  $\|\varphi\|$ .

**Exercício 4.5.6** Prove, sem usar reflexividade, que  $c_0$  e  $\ell_p$ ,  $1 < p < \infty$ , não contém subespaço isomorfo a  $\ell_1$ .

**Exercício 4.5.7** Sejam  $1 < p < \infty$  e  $(E_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de espaços de Banach. Defina

$$(\sum E_n)_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in E_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left( \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Prove que  $((\sum E_n)_p, \|\cdot\|_p)$  é um espaço de Banach e que  $((\sum E_n)_p)'$  é isometricamente isomorfo a  $((\sum E'_n)_{p'})$ .

**Exercício 4.5.8** Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $E$  um espaço de Banach. Defina

$$\ell_p(E) = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in E \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left( \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

com a modificação óbvia no caso  $p = \infty$ . Prove que:

- (a)  $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$  é um espaço de Banach.
- (b) Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $\ell_p(E)'$  é isometricamente isomorfo a  $\ell_{p'}(E')$ .

**Exercício 4.5.9\*** Mostre que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe uma função  $g_n \in L_\infty[0, 1]$  tal que

$$p(0) + p'(0) - 3p''(1) = \int_0^1 p(t)g_n(t)dt,$$

para todo polinômio  $p$  de grau menor ou igual a  $n$ . Prove ainda que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L_1[0,1]} = +\infty.$$

**Exercício 4.5.10\*** Considere os conjuntos

$$L := \{f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ e } |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|, \forall x, y \in [0, 1]\},$$

$$S := \left\{g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : g(t) = \sum_{i=2}^{100} \lambda_i t^{1/i}, \lambda_i \geq 0 \forall i \text{ e } \sum_{i=2}^{100} \lambda_i = 1\right\}.$$

Mostre que existe uma função  $\phi \in L_\infty[0, 1]$  tal que

$$\sup_{f \in L} \int_0^1 f(t)\phi(t)dt < \inf_{g \in S} \int_0^1 g(t)\phi(t)dt.$$

**Exercício 4.5.11** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que o conjunto  $J_E(E)$  separa pontos de  $E'$ , isto é, dados  $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$ ,  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , existe  $f \in J_E(E)$  tal que  $f(\varphi_1) \neq f(\varphi_2)$ .

**Exercício 4.5.12\*** Sejam  $F$  e  $G$  subespaços fechados do espaço de Banach  $E$  tais que  $E = F \oplus G$ . Prove que:

- (a)  $E' = F^\perp \oplus G^\perp$ .
- (b)  $E'$  contém cópias isométricas complementadas de  $F'$  e de  $G'$ .
- (c)  $E'$  é isomorfo isometricamente a  $(F' \times G', \|\cdot\|_1)$ .

**Exercício 4.5.13** Sejam  $E$  um espaço normado,  $\widehat{E}$  seu completamento e  $F$  um espaço de Banach. Prove que os espaços  $\mathcal{L}(E, F)$  e  $\mathcal{L}(\widehat{E}, F)$  são isomorfos isometricamente. Em particular,  $(\widehat{E})' = E'$ .

**Exercício 4.5.14** Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço de normado  $E$ . Prove que:

- (a)  $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ . (Veja a definição de  $M^\perp$  no Exercício 3.6.14)
- (b) Se  $E$  é reflexivo, então  $(M^\perp)^\perp = M$ .

**Exercício 4.5.15** Determine os adjuntos  $T': \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$  dos seguintes operadores  $T: \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ :

- (a)  $T((a_1, a_2, \dots)) = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ , onde  $n \in \mathbb{N}$  está fixado.
- (b)  $T((a_n)_{n=1}^\infty) = (b_n a_n)_{n=1}^\infty$ , onde  $(b_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$  está fixada.

**Exercício 4.5.16** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $g \in L_\infty[0, 1]$ . Defina

$$T_g: L_p[0, 1] \longrightarrow L_p[0, 1], \quad T_g(f) = f \cdot g.$$

- (a) Prove que  $T_g \in \mathcal{L}(L_p[0, 1], L_p[0, 1])$  e  $\|T_g\| = \|g\|_\infty$ .
- (b) Prove que, enxergando  $T'_g: L_{p'}[0, 1] \longrightarrow L_{p'}[0, 1]$ ,  $T'_g$  tem a mesma lei de formação de  $T$ , isto é,  $T'_g(f) = f \cdot g$  para toda  $f \in L_{p'}[0, 1]$ .
- (c) Conclua que  $T'_g = T_g$  no caso  $p = 2$ .

**Exercício 4.5.17** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Prove que a correspondência  $T \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto T' \in \mathcal{L}(F', E')$  é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem.

**Exercício 4.5.18** Sejam  $E, F, G$  espaços normados. Dados  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $U \in \mathcal{L}(F, G)$ , mostre que  $(U \circ T)' = T' \circ U'$ .

**Exercício 4.5.19** Sejam  $E, F$  espaços de Banach. Dado  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , prove que  $T''$  é uma extensão de  $T$  a  $E''$  no sentido de que  $T'' \circ J_E = J_F \circ T$ . Em particular,  $T''(J_E(E)) \subseteq J_F(F)$  e  $T = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E$  onde  $J_F^{-1}: J_F(F) \longrightarrow F$ .

**Exercício 4.5.20** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados com  $E$  reflexivo e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Prove que  $T'' = T$ .

**Exercício 4.5.21** Sejam  $E, F$  espaços normados e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Prove que se  $T$  tem inversa  $T^{-1}: F \longrightarrow E$  contínua, então  $T'$  tem inversa  $(T')^{-1}: E' \longrightarrow F'$  contínua e  $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ .

**Exercício 4.5.22** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  é uma projeção se, e somente se,  $T' \in \mathcal{L}(E', E')$  é uma projeção.

**Exercício 4.5.23\*** (a) Seja  $B$  um subconjunto do dual  $E'$  do espaço normado  $E$ . Prove que

$${}^\perp B := \{x \in E : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \varphi \in B\}$$

é um subespaço fechado de  $E$ .

(b) Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Prove que  $\ker(T) = {}^\perp(T'(F'))$  e  $\ker(T') = (T(E))^\perp$ .

**Exercício 4.5.24\*** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que:

- (a)  $(J_E)' \circ J_{E'} = \text{id}_{E'}$ .
- (b)  $(J_E)': E''' \longrightarrow E'$  é sobrejetora.
- (c) (Teorema de Dixmier)  $E'$  é complementado em  $E'''$ .

**Exercício 4.5.25** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que:

- (a) Existe um espaço normado  $F$  tal que  $E$  é isomorfo isometricamente a  $F'$  se, e somente, se existe um espaço de Banach  $G$  tal que  $E$  é isomorfo isometricamente a  $G'$ . Nesse caso diz-se que  $E$  é um *espaço dual*.
- (b) Se  $E$  é um espaço dual, então  $E$  é complementado no seu bidual  $E''$ . Use que  $c_0$  não é complementado em  $\ell_\infty$  para concluir que  $c_0$  não é um espaço dual.

**Exercício 4.5.26** Prove que todo espaço normado que é isomorfo a um espaço reflexivo é também reflexivo.

**Exercício 4.5.27** Seja  $E$  um espaço reflexivo. Prove que todo funcional linear contínuo em  $E$  atinge a norma, isto é, para todo  $\varphi \in E'$  existe  $x \in E$ ,  $\|x\| = 1$ , tal que  $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$ .

**Exercício 4.5.28** Prove que o subespaço fechado  $E = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$  de  $C[0, 1]$ , estudado no Exercício 1.8.34, não é reflexivo.

**Exercício 4.5.29** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. No produto cartesiano considere qualquer uma das normas usuais (veja Exercício 1.8.12).

(a) Prove que  $E' \times F'$  é isomorfo a  $(E \times F)'$ .

(b) Prove que se  $E$  e  $F$  são reflexivos então  $E \times F$  é reflexivo.

**Exercício 4.5.30\*** Seja  $M$  um subespaço fechado do espaço de Banach  $E$ .

(a) Para cada  $\varphi \in M'$  o Teorema de Hahn–Banach estende  $\varphi$  a um funcional  $\tilde{\varphi} \in E'$ . Prove que

$$T_M: M' \longrightarrow E'/M^\perp, \quad T_M(\varphi) = [\tilde{\varphi}],$$

é um isomorfismo isométrico (como a extensão de Hahn–Banach não é única, é necessário provar que  $T_M$  está bem definida).

(b) Seja  $\pi_M: E \longrightarrow E/M$  a aplicação quociente. Prove que

$$T^M: (E/M)' \longrightarrow M^\perp, \quad T^M(f) = f \circ \pi_M,$$

é um isomorfismo isométrico (não se esqueça de provar que  $T^M$  de fato toma valores em  $M^\perp$ ).

(c) Conclua que subespaço fechado de espaço reflexivo é reflexivo.

**Exercício 4.5.31** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Prove que:

(a)  $\mathcal{L}(E, F)$  contém uma cópia isométrica de  $E'$ .

(b)  $(\mathcal{L}(E, F'))'$  contém uma cópia isométrica de  $F$ .

**Exercício 4.5.32** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Prove que:

(a) Se  $\mathcal{L}(E, F)$  é reflexivo, então  $E$  é reflexivo.

(b) Se  $\mathcal{L}(E, F')$  é reflexivo, então  $F$  é reflexivo.

**Exercício 4.5.33** Seja  $E$  um espaço normado. Assim como havíamos definido  $E'' = (E')'$ , definimos  $E^{(3)} = (E'')'$ ,  $E^{(4)} = (E^{(3)})'$ , ...,  $E^{(n)} = (E^{(n-1)})'$ , ...

(a) Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i)  $E$  é reflexivo.

(ii)  $E^{(n)}$  é reflexivo para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(iii)  $E^{(n)}$  é reflexivo para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Se  $E$  não é reflexivo, então todas as inclusões naturais

$$E \subseteq E'' \subseteq E^{(4)} \subseteq \dots \quad \text{e} \quad E' \subseteq E^{(3)} \subseteq E^{(5)} \subseteq \dots$$

são estritas.

# Capítulo 5

## Espaços de Hilbert

Dos cursos de Cálculo e Geometria Analítica o leitor sabe que o produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , é uma ferramenta essencial na construção da teoria. Sabe também que a norma euclidiana é induzida pelo produto interno no sentido de que

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

E do curso de Álgebra Linear certamente se recorda da utilidade de se munir um espaço vetorial de um produto interno, principalmente no sentido de que o produto interno permite ‘geometrizarmos’ o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares. Veremos neste capítulo que na Análise Funcional também não é pequeno o ganho auferido quando se trabalha com espaços com produto interno.

Pode-se dizer que, no nosso caminho neste livro até agora, temos nos distanciado cada vez mais dos espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$ . Ao considerar espaços com produto interno, estamos fazendo o caminho inverso e nos aproximando novamente dos espaços euclidianos. Lembrando que esses espaços são completos, para nos aproximar ainda mais devemos considerar espaços com produto interno que são completos na norma induzida pelo produto interno. Estes são os *espaços de Hilbert*. Devido a essa proximidade com os espaços euclidianos, os espaços de Hilbert são, por larga margem, os espaços de Banach mais utilizados nas aplicações.

### 5.1 Espaços com produto interno

Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Um *produto interno* em  $E$  é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

tal que para quaisquer  $x, x_1, x_2, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$(P1) \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,$$

$$(P2) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$(P3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$(P4) \text{ Para todo } x \neq 0, \langle x, x \rangle \text{ é um número real estritamente positivo.}$$

Note que das propriedades acima segue que, para todos  $x, y, y_1, y_2 \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0;$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0;$$

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle, \quad \langle x, y_1 - y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle - \langle x, y_2 \rangle; \quad (5.1)$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \text{ e}$$

$$\text{Se } \langle z, y_1 \rangle = \langle z, y_2 \rangle \text{ para todo } z \in E, \text{ então } y_1 = y_2. \quad (5.2)$$

Além disso é importante ter em mente que no caso real o produto interno é uma forma bilinear simétrica.

O par  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é chamado de *espaço com produto interno*. Neste caso dizemos que a função

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

é a *norma induzida pelo produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Antes de provar que a função acima é de fato uma norma, vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 5.1.1** (a) Dadas as sequências numéricas  $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}, y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ , a expressão

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

define um produto interno em  $\ell_2$ . A convergência da série acima decorre da desigualdade de Hölder 1.4.1. A norma induzida obviamente coincide com a norma original  $\| \cdot \|_2$  de  $\ell_2$ .

(b) A expressão

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} d\mu$$

define um produto interno em  $L_2(X, \Sigma, \mu)$ . A existência da integral acima decorre da desigualdade de Hölder 1.2.1. A norma induzida obviamente coincide com a norma original  $\| \cdot \|_2$  de  $L_2(X, \Sigma, \mu)$ .

Precisamos da desigualdade abaixo para provar que de fato a correspondência  $x \in E \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é uma norma em  $E$ .

**Proposição 5.1.2** (Desigualdade de Cauchy–Schwarz) *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

*para quaisquer  $x, y$  em  $E$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, se os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes.*

**Demonstração.** O resultado é imediato se  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Podemos então supor  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Chame  $a = \langle y, y \rangle$  e  $b = \langle x, y \rangle$  para concluir que

$$a\bar{b}\langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle \bar{b}b = |b|^2 \langle y, y \rangle$$

é um número real positivo. Lembrando que  $a$  também é um número real positivo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle ax - by, ax - by \rangle \\ &= a\bar{a}\langle x, x \rangle - b\bar{a}\langle y, x \rangle - a\bar{b}\langle x, y \rangle + b\bar{b}\langle y, y \rangle \\ &= a^2\langle x, x \rangle - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}\langle x, y \rangle) + |b|^2 \langle y, y \rangle \\ &= a^2\langle x, x \rangle - 2|b|^2 \langle y, y \rangle + |b|^2 \langle y, y \rangle \\ &= a^2\langle x, x \rangle - |b|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle y, y \rangle (\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |b|^2) \\ &= \langle y, y \rangle (\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como  $\langle y, y \rangle > 0$  segue que

$$\|y\|^2\|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 = \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0,$$

o que prova a desigualdade desejada. Passemos agora à segunda afirmação. Se os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes é fácil ver que vale a igualdade. Por outro lado, suponha que a igualdade seja verdadeira, ou seja,  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ . Neste caso, tomando novamente  $a = \langle y, y \rangle$  e  $b = \langle x, y \rangle$ , obtemos  $|b|^2 = \langle x, x \rangle a$ . De (5.3) podemos concluir que

$$\langle ax - by, ax - by \rangle = a^2\langle x, x \rangle - |b|^2 \langle y, y \rangle = 0.$$

Do axioma (P4) obtemos  $ax - by = 0$ . Se  $y = 0$ , então os vetores  $x$  e  $y$  são obviamente linearmente dependentes. Se  $y \neq 0$ , então  $a > 0$  e portanto  $y = \frac{b}{a}x$ , provando que também neste caso os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes. ■

Agora sim podemos provar que o produto interno induz uma norma no espaço:

**Corolário 5.1.3** *Seja  $E$  um espaço com produto interno. A função*

$$\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

*é uma norma em  $E$ .*

**Demonstração.** Provaremos apenas a desigualdade triangular, uma vez que a verificação dos demais axiomas é imediata. Para todos  $x, y \in E$ , usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$



Extraindo a raiz quadrada a desigualdade triangular segue. ■

Sempre que nos referirmos a um espaço com produto interno  $E$ , estaremos automaticamente considerando em  $E$  a norma induzida e a consequente estrutura topológica. Uma segunda aplicação da desigualdade de Cauchy–Schwarz garante que o produto interno convive bem com essa estrutura topológica:

**Proposição 5.1.4** *Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $y \in E$  um vetor fixado. Então as funções*

$$x \in E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K} \quad \text{e} \quad x \in E \mapsto \langle y, x \rangle \in \mathbb{K}$$

*são contínuas.*

**Demonstração.** Seja  $x_0 \in E$ . De

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| = |\langle x - x_0, y \rangle| \leq \|x - x_0\| \cdot \|y\|,$$

segue a continuidade da primeira função. Em vista de (5.1), o caso da segunda função é análogo. ■

**Definição 5.1.5** Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de *espaço de Hilbert*. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

**Exemplo 5.1.6** Como já sabemos que  $\ell_2$  e  $L_2(X, \Sigma, \mu)$  são completos nas suas respectivas normas, do Exemplo 5.1.1 segue que esses espaços são espaços de Hilbert com seus respectivos produtos internos.

Vejamos alguns resultados úteis que relacionam o produto interno com a norma por ele induzida:

**Proposição 5.1.7** *Seja  $E$  um espaço vetorial com um produto interno. Então, para quaisquer  $x, y \in E$ ,*

(i) (Lei do Paralelogramo)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(ii) (Fórmula de Polarização, caso real)

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

(iii) (Fórmula de Polarização, caso complexo)

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)].$$

**Demonstração.** Somando as igualdades

$$\begin{cases} \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \end{cases},$$

obtemos (i); e, no caso real, subtraindo-as obtemos (ii).

Provemos (iii). Subtraindo as igualdades

$$\begin{cases} \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, iy \rangle + \langle iy, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, -iy \rangle + \langle -iy, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + i\langle x, y \rangle - i\langle y, x \rangle + \|y\|^2 \end{cases},$$

obtemos

$$\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 = -2i\langle x, y \rangle + 2i\langle y, x \rangle.$$

Subtraindo novamente as duas igualdades usadas na demonstração dos itens (i) e (ii), segue que

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle.$$

Combinando essas duas últimas igualdades,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) &= 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle + 2\langle x, y \rangle - 2\langle y, x \rangle \\ &= 4\langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

completando a demonstração. ■

## 5.2 Ortogonalidade

Diz-se que o produto interno geometriza o estudo dos espaços vetoriais pois é por meio dele que definimos o conceito de vetores ortogonais. Iniciemos recordando que em  $\mathbb{R}^2$  a ortogonalidade é um conceito geométrico e que dois vetores  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  são ortogonais se, e somente se,

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$$

Em outras palavras, dois vetores do  $\mathbb{R}^2$  são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre eles é igual a zero. Essa é a chave para se definir ortogonalidade em espaços vetoriais com produto interno:

**Definição 5.2.1** Seja  $E$  um espaço com produto interno. Dizemos que os vetores  $x$  e  $y$  de  $E$  são *ortogonais* se  $\langle x, y \rangle = 0$ . Neste caso escrevemos  $x \perp y$ .

Para se convencer de que o produto interno introduz de fato um viés geométrico no estudo, o leitor pode facilmente demonstrar o **Teorema de Pitágoras**: Se  $x$  e  $y$  são vetores ortogonais em um espaço com produto interno, então

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

O teorema abaixo é central no estudo dos espaços normados. Em breve o leitor entenderá por que ele é, às vezes, chamado de teorema da projeção ortogonal.

**Teorema 5.2.2** *Seja  $E$  um espaço com produto interno e seja  $M$  um subespaço completo de  $E$ . Para todo  $x \in E$  existe um único  $p \in M$  tal que*

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

**Demonstração.** Chamemos  $d = \text{dist}(x, M)$ . Da definição de ínfimo podemos tomar uma sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  de vetores de  $M$  tal que

$$d \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n} \quad (5.4)$$

para todo  $n$ . Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ . Aplicamos a Lei do Paralelogramo para os vetores  $x - y_n$  e  $x - y_m$  para obter

$$2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 = \|x - y_n + x - y_m\|^2 + \|x - y_n - x + y_m\|^2.$$

Como  $M$  é subespaço vetorial,  $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$ , da igualdade acima e de (5.4) segue que

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\ &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \longrightarrow 0 \text{ se } m, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Isso prova que a sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy no espaço completo  $M$ , logo convergente para um certo  $p \in M$ . Como  $y_n \longrightarrow p$ , fazendo  $n \longrightarrow \infty$  em (5.4) concluímos que  $\|x - p\| = d$ .

Para provar a unicidade, seja  $q \in M$  tal que  $\|x - q\| = d$ . Aplicando a Lei do Paralelogramo para os vetores  $x - p$  e  $x - q$  obtemos

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2d^2 + 2d^2 = 2\|x - p\|^2 + 2\|x - q\|^2 \\ &= \|x - p + x - q\|^2 + \|x - p - x + q\|^2 \\ &= \|2x - p - q\|^2 + \|p - q\|^2 = 4\left\|x - \frac{p + q}{2}\right\|^2 + \|p - q\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\frac{p+q}{2} \in M$ , disso segue que

$$0 \leq \|p - q\|^2 = 4d^2 - 4\left\|x - \frac{p + q}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

o que é suficiente para concluir que  $p = q$ . ■

**Definição 5.2.3** Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $A$  um subconjunto de  $E$ . Denominamos o subconjunto

$$A^\perp = \{y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in A\}$$

de *complemento ortogonal de  $A$* .

As seguintes propriedades são facilmente verificadas:

- $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ ,  $E^\perp = \{0\}$  e  $\{0\}^\perp = E$ .
- $A^\perp$  é um subespaço fechado de  $E$ , mesmo que  $A$  não seja nem subespaço (o fato de ser fechado decorre da Proposição 5.1.4).
- $A \cap A^\perp = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } 0 \in A, \\ \emptyset, & \text{se } 0 \notin A. \end{cases}$

**Observação 5.2.4** A notação  $A^\perp$  parece estar em conflito com a notação  $M^\perp$  dos Exercícios 3.6.14 e 4.5.14. Em breve o Teorema 5.5.2 mostrará que essas notações são consistentes.

**Teorema 5.2.5** *Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $M$  um subespaço completo de  $E$ . Então*

(a)  $E = M \oplus M^\perp$ , isto é, cada  $x \in E$  admite uma única representação na forma

$$x = p + q \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp.$$

Além disso,

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, M).$$

O vetor  $p$  é chamado de projeção ortogonal de  $x$  sobre  $M$ .

(b) Os operadores

$$P, Q: E \longrightarrow E, P(x) = p \text{ e } Q(x) = q$$

são projeções, isto é, são lineares, contínuos e  $P^2 = P$  e  $Q^2 = Q$ . Mais ainda,  $P(E) = M$ ,  $Q(E) = M^\perp$ ,  $\|P\| = 1$  se  $M \neq \{0\}$  e  $\|Q\| = 1$  se  $M \neq E$ . O operador  $P$  é chamado de projeção ortogonal de  $E$  sobre  $M$ .

(c)  $P \circ Q = Q \circ P = 0$ .

**Demonstração.** (a) Dado  $x \in E$ , pelo Teorema 5.2.2 existe um único vetor  $p \in M$  tal que

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, M).$$

Tomando  $q = x - p$  segue imediatamente que  $x = p + q$ . Basta então provar que  $q \in M^\perp$ . Para todo  $y \in M$  e todo escalar  $\lambda$ , o vetor  $p + \lambda y$  pertence a  $M$ , logo

$$\begin{aligned} \|q\|^2 &= \|x - p\|^2 = \text{dist}(x, M)^2 \leq \|x - (p + \lambda y)\|^2 = \|q - \lambda y\|^2 \\ &= \langle q - \lambda y, q - \lambda y \rangle = \|q\|^2 - \lambda \langle y, q \rangle - \bar{\lambda} \langle q, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \|y\|^2. \end{aligned}$$

Disso concluímos que

$$0 \leq |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2 \text{Re}(\lambda \langle y, q \rangle).$$

Escreva  $\langle y, q \rangle$  na forma polar  $|\langle y, q \rangle| e^{i\theta}$  e para cada  $t \in \mathbb{R}$  chame  $\lambda = t e^{-i\theta}$ . Da desigualdade acima segue que

$$0 \leq t^2 \|y\|^2 - 2t |\langle y, q \rangle| \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e conseqüentemente o discriminante do binômio é menor ou igual a zero. Isso nos dá  $|\langle y, q \rangle| = 0$ , e portanto  $q \in M^\perp$ .

Para provar a unicidade, suponha que  $p + q = p_1 + q_1$  com  $p, p_1 \in M$  e  $q, q_1 \in M^\perp$ . Como  $M$  e  $M^\perp$  são subespaços,

$$p - p_1 = q_1 - q \in M \cap M^\perp = \{0\}.$$

Segue que  $p = p_1$  e  $q = q_1$ .

(b) Segue de (a) e da Proposição 3.2.2 que  $P$  e  $Q$  são lineares, contínuos e projeções. Para cada  $x \in E$ , pelo item (a) podemos escrever  $x = p + q$  com  $p \perp q$ . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \|p + q\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2,$$

e portanto

$$\|P(x)\|^2 = \|p\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ e } \|Q(x)\|^2 = \|q\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Daí concluímos que  $\|P\| \leq 1$  e  $\|Q\| \leq 1$ . As desigualdades inversas seguem do fato, por nós já conhecido (veja Definição 3.2.1) de que projeções não-nulas têm normas maiores ou iguais a 1.

(c) Essas afirmações são de fácil verificação, por isso são deixadas a cargo do leitor. ■

**Observação 5.2.6** É interessante observar que mesmo o item (a) do teorema anterior não é válido, em geral, sem a hipótese de  $M$  ser um subespaço completo. Como exemplo tome  $E = \ell_2$  e  $M = [e_j : j \in \mathbb{N}]$ . No Exercício 5.7.4 o leitor comprovará que  $M^\perp = \{0\}$ , e assim está claro que neste caso  $E \neq M \oplus M^\perp$ .

O corolário a seguir é imediato a partir do Teorema 5.2.5. Optamos por enunciá-lo por se tratar de uma das propriedades fundamentais dos espaços de Hilbert.

**Corolário 5.2.7** *Todo subespaço fechado não-nulo de um espaço de Hilbert é 1-complementado.*

## 5.3 Conjuntos ortonormais em espaços de Hilbert

O fato de todo espaço vetorial ter base (Proposição A.4) garante que todo vetor de um espaço vetorial pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base. Em dimensão finita o leitor está acostumado com isso e seguramente convencido das vantagens de se ter tal tipo de representação. Entretanto, em dimensão infinita essa representação em geral não tem utilidade alguma. Nesta seção veremos uma maneira extremamente útil de representar vetores de um espaço Hilbert como somas (nem sempre finitas) de múltiplos de vetores convenientemente escolhidos. Isso aproxima ainda mais os espaços de Hilbert dos espaços euclidianos.

**Definição 5.3.1** Seja  $E$  um espaço com produto interno. Um conjunto  $S \subseteq E$  é dito *ortonormal* se para todos  $x, y \in S$ ,

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y, \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Um conjunto ortonormal  $S$  tal que  $S^\perp = \{0\}$  é chamado de *sistema ortonormal completo*.

**Exemplo 5.3.2** A base canônica  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  do  $\mathbb{K}^n$  é um sistema ortonormal completo. O conjunto  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  dos vetores unitários canônicos é um sistema ortonormal completo em  $\ell_2$ .

O leitor não terá dificuldade em verificar que todo conjunto ortonormal em um espaço com produto interno é linearmente independente. Na verdade acreditamos que isso já tenha sido feito no curso de Álgebra Linear.

Para simplificar a notação introduzimos agora o *delta de Kronecker*: dados um conjunto qualquer  $I$  e  $i, j \in I$ , definimos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Dessa forma, um conjunto  $\{x_i : i \in I\}$  de vetores de um espaço com produto interno é ortonormal se, e somente se,  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$  para todos  $i, j \in I$ .

Já vimos no Teorema 5.2.2 que quando  $M$  for um subespaço completo de um espaço com produto interno  $E$ , todo vetor  $x$  de  $E$  admite uma (única) melhor aproximação em  $M$ . O resultado seguinte fornece uma descrição dessa melhor aproximação de  $x$  em um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno.

**Proposição 5.3.3** Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto ortonormal finito em  $E$ .

(a) Se  $M = [x_1, \dots, x_n]$  e  $x \in E$ , então

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\| = \text{dist}(x, M).$$

(b) Para todo  $x$  em  $E$ ,  $\sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ .

**Demonstração.** (a) Pelo Teorema 5.2.5 podemos tomar  $p \in M$  e  $q \in M^\perp$  tais que

$$x = p + q \quad \text{e} \quad \|x - p\| = \text{dist}(x, M).$$

Como  $p \in M$ , existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tais que  $p = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ . E como  $x - p = q \in M^\perp$ , temos  $(x - p) \perp x_j$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Segue então que

$$0 = \langle x - p, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \alpha_j,$$

isto é,  $\alpha_j = \langle x, x_j \rangle$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ . O item (a) está provado.

(b) Dado  $x \in E$ , sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  como em (a). Assim, como  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$  para todos  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i, x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

**Observação 5.3.4** A expressão  $\sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$  é, por motivos óbvios, chamada de *melhor aproximação* de  $x$  em  $M = [x_1, \dots, x_n]$ .

Caminharemos agora na direção de estabelecer duas relações fundamentais da teoria dos espaços de Hilbert, a saber, a desigualdade de Bessel e a identidade de Parseval. Para isso precisamos do:

**Lema 5.3.5** *Seja  $S = \{x_i : i \in I\}$  um conjunto ortonormal no espaço com produto interno  $E$ . Então, para cada  $0 \neq x \in E$ , o conjunto*

$$J = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$$

*é finito ou enumerável.*

**Demonstração.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos

$$J_k = \left\{ i \in I : |\langle x, x_i \rangle| > \frac{1}{k} \right\}$$

para obter  $J = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ . Basta então mostrar que cada  $J_k$  é finito. Da Proposição 5.3.3(a) sabemos que para todo subconjunto finito  $J_0$  de  $J$  é verdade que

$$\sum_{i \in J_0} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Em particular, dado um número finito de elementos  $i_1, \dots, i_n$  de  $J_k$ ,

$$\frac{n}{k^2} = \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < |\langle x, x_{i_1} \rangle|^2 + \dots + |\langle x, x_{i_n} \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Consequentemente  $n \leq k^2 \|x\|^2$ . Isso significa que o número de elementos de qualquer subconjunto finito de  $J_k$  não excede  $k^2 \|x\|^2$ . Segue que  $J_k$  é finito. ■

**Teorema 5.3.6** (Desigualdade de Bessel) *Seja  $S = \{x_i : i \in I\}$  um conjunto ortonormal no espaço com produto interno  $E$ . Então, para todo  $x \in E$ ,*

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

onde  $J = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$ .

**Demonstração.** Sabemos pelo Lema 5.3.5 que  $J$  é finito ou enumerável. A Proposição 5.3.3 resolve o caso em que  $J$  é finito. Basta então fazer o caso em que  $J$  é enumerável. Como todos os termos da série são positivos, não importa a ordem em que fazemos a soma da série. Podemos então considerar uma enumeração qualquer  $i_1, i_2, \dots$  dos elementos de  $J$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a Proposição 5.3.3 garante que

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Agora basta fazer  $n$  tender a infinito nesta desigualdade para obter

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_{i_k} \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

Nosso objetivo é mostrar que todo vetor em um espaço de Hilbert pode ser escrito como uma soma de múltiplos de vetores de um conjunto ortonormal. Como em geral essa soma não é finita, precisamos explorar o conceito de séries em espaços normados. Esse assunto será tratado em detalhes na Seção 10.1. No momento nos restringimos apenas às definições necessárias e a um resultado auxiliar.

**Definição 5.3.7** Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência no espaço normado  $E$ . Dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é *convergente* se existe  $x \in E$  tal que a sequência das somas parciais  $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)_{n=1}^{\infty}$  converge para  $x$ . Nesse caso dizemos que  $x$  é a soma da série e escrevemos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Diz-se que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é *incondicionalmente convergente* se for convergente em qualquer ordenação em que considerarmos suas parcelas; mais precisamente, se para toda função bijetora  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  for convergente.



De acordo com essas definições está aberta a possibilidade de uma série incondicionalmente convergir para limites diferentes considerando ordenações diferentes de  $\mathbb{N}$ . É importante estabelecer neste momento que isso não ocorre:

**Proposição 5.3.8** *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado  $E$ . Se  $\sigma_1, \sigma_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  são funções bijetoras, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

**Demonstração.** Seja  $\varphi \in E'$ . Da continuidade de  $\varphi$  é claro que a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$  é incondicionalmente convergente. Mas séries numéricas incondicionalmente convergentes convergem para mesmo limite independentemente da ordem das parcelas (veja, por exemplo, [54, Teorema IV.22]), logo

$$\varphi \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma_1(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma_2(n)}) = \varphi \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)} \right).$$

Como isso vale para todo  $\varphi \in E'$ , o resultado segue do Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.5 (ou, se preferir, do Exercício 3.6.3). ■

Queremos mostrar que se  $\{x_i : i \in I\}$  for um sistema ortonormal completo em  $E$ , então todo vetor  $x$  de  $E$  pode ser escrito na forma

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i, \quad (5.5)$$

fato este que evidencia o papel central desempenhado pelos sistemas ortonormais completos na teoria de espaços de Hilbert. Como sabemos pelo Lema 5.3.5 que  $\{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$  é finito ou enumerável, fica claro que a soma que aparece em (5.5) denota, na verdade, uma soma finita ou uma soma em um conjunto enumerável de índices, ou seja, uma série. Entretanto, ainda não está clara a convergência da série e menos ainda a convergência incondicional. O próximo lema demonstra esse fato.

**Lema 5.3.9** *Seja  $S = \{x_i : i \in I\}$  um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert  $H$ . Então, para cada  $x \in H$ , denotando  $I_x = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$ , a série*

$$\sum_{i \in I_x} \langle x, x_i \rangle x_i$$

*é incondicionalmente convergente.*

**Demonstração.** Não há o que fazer no caso em que  $I_x$  é finito. Suponha que  $I_x$  seja infinito e tome  $(y_j)_{j=1}^\infty$  uma enumeração qualquer de  $I_x$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina  $S_n = \sum_{i=1}^n \langle x, y_i \rangle y_i$ . Da desigualdade de Bessel sabemos que a série  $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, y_n \rangle|^2$  é convergente. Como  $\langle y_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$ ,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n \langle x, y_i \rangle y_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |\langle x, y_i \rangle|^2$$

para  $n > m$ , e portanto a sequência  $(S_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $H$ , logo convergente. ■

Resolvida a questão da convergência podemos provar (5.5):

**Teorema 5.3.10** *Seja  $S = \{x_i : i \in I\}$  um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert  $H$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Para cada  $x \in H$ ,  $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$ .*
- (b)  *$S$  é um sistema ortonormal completo.*
- (c)  *$\overline{[S]} = H$ .*
- (d) *Para cada  $x \in H$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$ . (Identidade de Parseval)*
- (e) *Para todos  $x, y \in H$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}$ .*

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Seja  $x \in S^\perp$ . Como  $\langle x, x_i \rangle = 0$  para todo  $i \in I$ , de (a) segue imediatamente que  $x = 0$ . Assim  $S^\perp = \{0\}$  e  $S$  é completo.

(b)  $\implies$  (a) Seja  $x \in H$ . Tratemos do caso em que  $J := \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$  é infinito, e portanto enumerável. Seja  $\{i_1, i_2, \dots\}$  uma enumeração qualquer de  $J$ . Do Lema 5.3.9 e da Proposição 5.3.8 sabemos que

$$\sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i = \sum_{j=1}^\infty \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}.$$

Seja  $i \in I$ . Se  $i \notin J$ , então

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^\infty \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}, x_i \right\rangle = 0.$$

E se  $i \in J$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $i = i_k$ . Nesse caso, como  $\langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle = \delta_{i_j i_k} = \delta_{jk}$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle x - \sum_{j=1}^\infty \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}, x_i \right\rangle &= \left\langle x - \sum_{j=1}^\infty \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}, x_{i_k} \right\rangle \\ &= \langle x, x_{i_k} \rangle - \sum_{j=1}^\infty \langle x, x_{i_j} \rangle \langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como  $S$  é completo segue que

$$x - \sum_{j \in I} \langle x, x_j \rangle x_j = x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j} = 0.$$

O argumento acima se adapta facilmente ao caso em que  $J$  é finito.

(b)  $\implies$  (c) Chamemos  $M = \overline{[S]}$ . Por  $S$  ser subconjunto de  $M$  segue que  $M^\perp$  é subespaço de  $S^\perp = \{0\}$ , logo  $M^\perp = \{0\}$ . Mas  $H = M \oplus M^\perp$  pelo Teorema 5.2.5, e daí concluímos que  $H = M = \overline{[S]}$ .

(c)  $\implies$  (d) Sejam  $x \in H$  e  $\varepsilon > 0$ . Por (c) existe  $y_\varepsilon \in [S]$  tal que  $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Como  $y_\varepsilon \in [S]$ , existem um subconjunto finito  $J_\varepsilon$  de  $I$  e escalares  $(a_i)_{i \in J_\varepsilon}$  tais que  $y_\varepsilon = \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i x_i$ .

Da Proposição 5.3.3 sabemos que o vetor  $\sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i$  é a melhor aproximação de  $x$  em  $[x_i : i \in J_\varepsilon]$ , portanto

$$\left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i x_i \right\| = \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Como  $J_\varepsilon$  é ortonormal,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - \sum_{i \in J_\varepsilon} |\langle x, x_i \rangle|^2 &= \left\langle x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i, x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle \\ &= \left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2 < \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Combinando isso com a desigualdade de Bessel obtemos

$$\|x\|^2 < \sum_{i \in J_\varepsilon} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \varepsilon^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \varepsilon^2 \leq \|x\|^2 + \varepsilon^2.$$

O resultado segue fazendo  $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ .

(d)  $\implies$  (e) Sejam  $x, y \in E$  e  $a$  um escalar. Por (d),

$$\langle ax + y, ax + y \rangle = \|ax + y\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle ax + y, x_i \rangle|^2 = \sum_{i \in I} \langle ax + y, x_i \rangle \overline{\langle ax + y, x_i \rangle},$$

e daí,

$$\begin{aligned} |a|^2 \|x\|^2 + a \langle x, y \rangle + \bar{a} \langle y, x \rangle + \|y\|^2 &= \langle ax + y, ax + y \rangle \\ &= \sum_{i \in I} (|a|^2 |\langle x, x_i \rangle|^2 + a \langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle + \bar{a} \langle y, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle + |\langle x_i, y \rangle|^2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in I} |a|^2 |\langle x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in I} a \langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle + \sum_{i \in I} \bar{a} \langle y, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle + \sum_{i \in I} |\langle x_i, y \rangle|^2 \\ &= |a|^2 \|x\|^2 + \sum_{i \in I} a \langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle + \sum_{i \in I} \bar{a} \langle y, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

A passagem (\*) está justificada pois cada uma das quatro séries é convergente: a primeira e a última por (d) e a segunda e a terceira pela desigualdade de Hölder. Então

$$\begin{aligned} a\langle x, y \rangle + \bar{a}\langle y, x \rangle &= \sum_{i \in I} a\langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle + \sum_{i \in I} \bar{a}\langle y, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle \\ &= a \left( \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle} \right) + \bar{a} \left( \sum_{i \in I} \langle y, x_i \rangle \overline{\langle x, x_i \rangle} \right). \end{aligned}$$

Escolhendo primeiro  $a = 1$  e depois  $a = i$ , obtemos

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \left( \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle} \right) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \operatorname{Im} \left( \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle} \right),$$

e o resultado segue.

(e)  $\implies$  (b) Seja  $x \in S^\perp$ . Logo  $\langle x, x_i \rangle = 0$  para todo  $i \in I$ . Usando (e) com  $x = y$  obtemos  $\langle x, x \rangle = 0$  e consequentemente  $x$  é o vetor nulo. ■

## 5.4 Processo de ortogonalização e suas consequências

Na seção anterior vimos que um sistema ortonormal completo é algo muito desejável em um espaço de Hilbert. O objetivo desta seção é mostrar que todo espaço de Hilbert contém sistemas ortonormais completos.

Iniciamos mostrando como transformar um conjunto linearmente independente em um conjunto ortonormal com boas propriedades de preservação dos subespaços gerados. Qualquer semelhança com o processo de Gram–Schmidt que todos conhecemos da Álgebra Linear **não** é mera coincidência.

**Proposição 5.4.1** (Processo de ortogonalização de Gram–Schmidt) *Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de vetores linearmente independentes em  $E$ . Existe uma sequência ortonormal  $(e_n)_{n=1}^\infty$  em  $E$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$[x_1, \dots, x_n] = [e_1, \dots, e_n]$$

**Demonstração.** Supomos que, do curso de Álgebra Linear, o leitor já conheça a construção. Por isso apenas indicaremos os passos a serem seguidos. Primeiro definimos  $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$  e escrevemos  $x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2$  com  $v_2 \in [e_1]^\perp$ . Definimos então  $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$  para obter  $[x_1, x_2] = [e_1, e_2]$ . Prosseguindo por indução, suponha que tenhamos construído vetores ortonormais  $e_1, \dots, e_n$  tais que

$$[x_1, \dots, x_n] = [e_1, \dots, e_n].$$

Escrevemos

$$x_{n+1} = \langle x_{n+1}, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x_{n+1}, e_n \rangle e_n + v_{n+1}$$

com  $v_{n+1} \in [e_1, \dots, e_n]^\perp$ . Definindo  $e_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$  é verdade que os vetores  $e_1, \dots, e_{n+1}$  são ortonormais e

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [e_1, \dots, e_{n+1}].$$

■

**Corolário 5.4.2** *Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de vetores linearmente independentes em  $E$ . Existe uma sequência ortonormal  $(e_n)_{n=1}^\infty$  tal que*

$$[x_n : n \in \mathbb{N}] = [e_n : n \in \mathbb{N}].$$

**Demonstração.** Seja  $(e_n)_{n=1}^\infty$  a sequência obtida na Proposição 5.4.1. Dado  $v \in [x_n : n \in \mathbb{N}]$  podemos tomar  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $v \in [x_1, \dots, x_k]$ . Pela construção do processo de Gram–Schmidt sabemos que  $[x_1, \dots, x_k] = [e_1, \dots, e_k]$ . É claro que  $[e_1, \dots, e_k] \subseteq [e_n : n \in \mathbb{N}]$ , logo  $v \in [e_n : n \in \mathbb{N}]$ , e consequentemente  $[x_n : n \in \mathbb{N}] \subseteq [e_n : n \in \mathbb{N}]$ . A outra inclusão é obtida analogamente. ■

Não precisamos de mais nada para provar que espaços de Hilbert separáveis admitem sistemas ortonormais completos:

**Teorema 5.4.3** *Um espaço de Hilbert  $H$  de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em  $H$  um sistema ortonormal completo enumerável.*

**Demonstração.** Suponha que  $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  seja um sistema ortonormal completo em  $H$ . Pelo Teorema 5.3.10, todo  $x$  em  $H$  pode ser escrito na forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Isso garante, em particular, que  $[S]$  é denso em  $H$ . A separabilidade de  $H$  segue do Lema 1.6.3.

Reciprocamente, suponha que  $H$  seja separável. Seja  $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável denso em  $H$ . Podemos extrair de  $D$  uma base  $\mathcal{B}$  para  $[D]$  (o leitor em dúvida neste ponto deve consultar a Proposição A.4 no Apêndice A). Suponha que essa base  $\mathcal{B} \subseteq D$  seja finita, digamos  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Nesse caso, como  $[D]$  também é denso em  $H$  (por conter  $D$  que é denso) e como subespaços de dimensão finita de espaços completos são fechados, temos

$$H = \overline{[D]} = \overline{[v_1, \dots, v_n]} = [v_1, \dots, v_n].$$

Mas isso não pode acontecer pois  $H$  tem dimensão infinita. Concluímos que a base  $\mathcal{B}$  de  $[D]$  é infinita. Mas  $\mathcal{B} \subseteq D$  e  $D$  é enumerável, logo  $\mathcal{B}$  também é enumerável,

digamos  $\mathcal{B} = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Pelo processo de ortogonalização de Gram–Schmidt existe um conjunto ortonormal  $S$  em  $H$  tal que  $[S] = [v_n : n \in \mathbb{N}]$ . Assim,

$$\overline{[S]} = \overline{[v_n : n \in \mathbb{N}]} = \overline{[D]} = H,$$

e pelo Teorema 5.3.10 concluímos que  $S$  é sistema ortonormal completo. ■

A existência de um sistema ortonormal completo enumerável engessa de tal forma a estrutura do espaço que – surpreendentemente – o único espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, a menos de isomorfismo isométrico, é o nosso velho conhecido  $\ell_2$ :

**Teorema 5.4.4** (Teorema de Riesz–Fischer) *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a  $\ell_2$ .*

**Demonstração.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Pelo Teorema 5.4.3 existe um sistema ortonormal completo enumerável  $S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$  em  $H$ . Da desigualdade de Bessel sabemos que, para todo  $x \in H$ ,  $(\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ . Então está bem definido o operador

$$T: H \longrightarrow \ell_2, \quad T(x) = (\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^\infty.$$

É fácil verificar que  $T$  é linear. Além disso, pelo Teorema 5.3.10 sabemos que todo  $x$  em  $H$  é representado pela série

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i,$$

e assim a identidade de Parseval revela que  $\|T(x)\| = \|x\|$ . Em particular,  $T$  é injetora. Resta provar que  $T$  é sobrejetora. Para isso seja  $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$ . Vejamos primeiramente que a série  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$  converge em  $H$ . De fato, escrevendo, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $S_k = \sum_{j=1}^k a_j x_j$ , do Teorema de Pitágoras resulta que, para  $n > m$ ,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n a_j x_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n \|a_j x_j\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |a_j|^2.$$

Como a série  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$  é convergente, segue que  $(S_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy em  $H$ , portanto converge. Logo  $x := \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in H$  está bem definido e da condição  $\langle x_j, x_n \rangle = \delta_{jn}$  segue imediatamente que  $T(x) = (a_j)_{j=1}^\infty$ . ■

Para o caso não-separável do Teorema de Riesz–Fischer veja o Exercício 5.7.33. Com um pouco mais de teoria provaremos na próxima seção que os espaços de Hilbert são reflexivos. Mas para o caso separável já temos teoria suficiente:

**Corolário 5.4.5** *Espaços de Hilbert separáveis são reflexivos.*

**Demonstração.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável. Pelo Teorema de Riesz–Fischer sabemos que  $H$  é isomorfo a  $\ell_2$ . Como  $\ell_2$  é reflexivo, do Exercício 4.5.26 segue que  $H$  é reflexivo. ■

Para provar a existência de um sistema ortonormal completo em espaços de Hilbert não-separáveis precisamos recorrer ao Lema de Zorn, aquele mesmo usado na demonstração do Teorema de Hahn–Banach. Reiteramos que o leitor pouco familiarizado com essa ferramenta deve consultar o Apêndice A. A demonstração abaixo é similar à demonstração do fato de que todo conjunto gerador de um espaço vetorial contém uma base do espaço (veja Proposição A.4).

**Teorema 5.4.6** *Sejam  $H$  um espaço com produto interno e  $S_0$  um conjunto ortonormal em  $H$ . Então existe um sistema ortonormal completo em  $H$  que contém  $S_0$ .*

**Demonstração.** Chame de  $\mathcal{F}$  a família de todos os conjuntos ortonormais em  $H$  que contêm  $S_0$ . Note que  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  pois  $S_0 \in \mathcal{F}$ . Consideramos  $\mathcal{F}$  com a ordem parcial dada pela relação de continência:  $S_1, S_2 \in \mathcal{F}, S_1 \leq S_2$  se, e somente se,  $S_1 \subseteq S_2$ . Seja  $\{S_i : i \in I\}$  um subconjunto de  $\mathcal{F}$  totalmente ordenado. Vejamos  $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{F}$ . De fato, se  $x, y \in \bigcup_{i \in I} S_i$ , então existem  $i_1, i_2 \in I$  tais que  $x \in S_{i_1}$  e  $y \in S_{i_2}$ . Se  $x = y$  então  $\langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle = 1$  pois  $S_{i_1}$  é ortonormal. Suponhamos agora que  $x \neq y$ . Como  $\{S_i : i \in I\}$  é totalmente ordenado, temos  $S_{i_1} \subseteq S_{i_2}$  ou  $S_{i_2} \subseteq S_{i_1}$ . Portanto,  $x, y \in S_{i_1}$  ou  $x, y \in S_{i_2}$ . Em ambos os casos  $x$  é ortogonal a  $y$ , pois tanto  $S_{i_1}$  como  $S_{i_2}$  são ortogonais. Segue que  $\bigcup_{i \in I} S_i$  é um conjunto ortonormal. É claro que  $\bigcup_{i \in I} S_i$  é uma cota superior para o conjunto  $\{S_i : i \in I\}$ , portanto todo conjunto parcialmente ordenado tem cota superior. O Lema de Zorn garante a existência de um conjunto ortonormal  $S \in \mathcal{F}$  que é maximal. Resta mostrar que  $S$  é completo. Supondo que  $S$  não seja completo, existe  $z \in H$  não-nulo tal que  $z \in S^\perp$ . Nesse caso o conjunto

$$S^1 := S \cup \left\{ \frac{z}{\|z\|} \right\}$$

é ortonormal, distinto de  $S$  e  $S \leq S^1$ . Mas isso contradiz a maximalidade de  $S$ , e portanto  $S$  é completo. ■

## 5.5 Funcionais lineares em espaços de Hilbert: o Teorema de Riesz–Fréchet

Obteremos nesta seção uma descrição de todos os funcionais lineares contínuos em um espaço de Hilbert. Vejamos primeiramente que é muito fácil criar tais funcionais:

**Exemplo 5.5.1** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Para cada  $y \in H$ , o funcional

$$\varphi_y: H \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$$

é claramente linear. Da desigualdade de Cauchy–Schwarz segue que  $\varphi_y$  é contínuo e que  $\|\varphi_y\| \leq \|y\|$ . Para  $y = 0$  é imediato que  $\|\varphi_y\| = \|y\|$ , e para  $y \neq 0$  isso também vale pois

$$\left| \varphi_y \left( \frac{y}{\|y\|} \right) \right| = \frac{|\varphi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\|.$$

Em resumo,  $\varphi_y \in H'$  e  $\|\varphi_y\| = \|y\|$ .

O próximo resultado, um clássico devido a Riesz e Fréchet, garante que todos os funcionais lineares contínuos em um espaço de Hilbert são da forma descrita no exemplo anterior.

**Teorema 5.5.2** (Teorema de Riesz–Fréchet) *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $\varphi: H \longrightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear contínuo. Então existe um único  $y_0 \in H$  tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \text{para todo } x \in H.$$

*Além disso,  $\|\varphi\| = \|y_0\|$ .*

**Demonstração.** Se  $\varphi$  é o funcional identicamente nulo, basta tomar  $y_0 = 0$ . Consideremos agora o caso em que  $\varphi$  não é identicamente nulo. Nesse caso o núcleo de  $\varphi$ ,

$$M := \{x \in H : \varphi(x) = 0\},$$

é um subespaço fechado próprio de  $H$ . Do Teorema 5.2.5(a) sabemos que  $M^\perp \neq \{0\}$ , e então podemos escolher  $x_0 \in M^\perp$  de norma 1 (lembre-se que  $M^\perp$  é subespaço vetorial). Provemos que  $y_0 := \varphi(x_0)x_0$  é o vetor procurado. Dado  $x \in H$ ,

$$x = \left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0,$$

onde  $\left( x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 \right) \in M$  e  $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 \in M^\perp$ . Como  $y_0 \in M^\perp$  e  $\|x_0\| = 1$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, y_0 \rangle &= \left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0, y_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0, y_0 \right\rangle \\ &= 0 + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \langle x_0, y_0 \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \langle x_0, \overline{\varphi(x_0)}x_0 \rangle = \varphi(x). \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy–Schwarz temos  $\|\varphi\| \leq \|y_0\|$ . A igualdade  $|\varphi(x_0)| = \|y_0\|$  garante a desigualdade inversa e portanto  $\|\varphi\| = \|y_0\|$ . A unicidade segue de (5.2). ■

Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Combinando o Exemplo 5.5.1 com o Teorema 5.5.2 segue que a correspondência

$$y \in H \longleftrightarrow \varphi_y \in H' \tag{5.6}$$

é bijetora e isometria. É também linear no caso real, isto é, quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Portanto temos o



**Corolário 5.5.3** *Todo espaço de Hilbert real é isometricamente isomorfo ao seu dual por meio da correspondência (5.6).*

No Exercício 5.7.33 o leitor verificará que um espaço de Hilbert complexo também é isometricamente isomorfo ao seu dual, mas não por meio da correspondência (5.6). Por enquanto fiquemos com mais algumas consequências interessantes do Teorema de Riesz–Fréchet. Os dois resultados a seguir são imediatos no caso de espaços de Hilbert separáveis; entretanto nosso contexto envolve também o caso não-separável:

**Proposição 5.5.4** *O dual de um espaço de Hilbert é também um espaço de Hilbert.*

**Demonstração.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Como  $H'$  é completo, basta mostrar que a norma em  $H'$  é induzida por um produto interno. Dados  $\varphi_1, \varphi_2 \in H'$ , pelo Teorema 5.5.2 existem únicos  $y_1, y_2 \in H$  tais que

$$\varphi_1(x) = \langle x, y_1 \rangle \text{ e } \varphi_2(x) = \langle x, y_2 \rangle \text{ para todos } x \in H, \quad \|\varphi_1\| = \|y_1\| \text{ e } \|\varphi_2\| = \|y_2\|.$$

É fácil verificar que a expressão

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \langle y_2, y_1 \rangle \tag{5.7}$$

define um produto interno em  $H'$  (não é um erro de digitação; a ordem de aparição dos  $y_j$  na definição acima tem que ser invertida mesmo, pois na ordem natural o axioma (P2) não seria satisfeito no caso complexo). De

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle = \|y_1\|^2 = \|\varphi_1\|^2$$

segue que esse produto interno induz a norma em  $H'$ . ■

**Corolário 5.5.5** *Espaços de Hilbert são reflexivos.*

**Demonstração.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Dado  $\Phi \in H''$ , como  $H'$  é um espaço de Hilbert pela Proposição 5.5.4, do Teorema de Riesz–Fréchet sabemos que podemos tomar  $\varphi \in H'$  tal que  $\Phi(\psi) = \langle \psi, \varphi \rangle$  para todo  $\psi \in H'$ . Uma segunda aplicação do Teorema de Riesz–Fréchet nos fornece um vetor  $y \in H$  tal que  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$  para todo  $x \in H$ . Seja  $\psi \in H'$ . Usando o Teorema de Riesz–Fréchet pela terceira vez, existe  $z \in H$  tal que  $\psi(x) = \langle x, z \rangle$  para todo  $x \in H$ . De (5.7) sabemos que  $\langle \psi, \varphi \rangle = \langle y, z \rangle$ . Dessa forma,

$$J_H(y)(\psi) = \psi(y) = \langle y, z \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle = \Phi(\psi).$$

Como isso vale para todo  $\psi \in H'$ , segue que  $J_H(y) = \Phi$ , provando que  $H$  é reflexivo. ■

Veremos na Seção 6.6 que os espaços de Hilbert satisfazem uma propriedade mais forte que a reflexividade.

## 5.6 Comentários e notas históricas

D. Hilbert usou em 1906 a bola unitária fechada de  $\ell_2$  como domínio de formas lineares, bilineares e quadráticas. Por isso o termo *espaço de Hilbert* foi cunhado por Schoenflies em 1908. Por algum tempo entendia-se por espaço de Hilbert o espaço  $\ell_2$  ou sua bola unitária fechada. O conceito abstrato de espaço de Hilbert apareceu com a axiomatização de von Neumann em 1927.

A definição de von Neumann exige a separabilidade, e a razão disso é o processo de Gram–Schmidt. Em dimensão finita, esse processo remonta a Laplace e Cauchy, e o caso de dimensão infinita veio com Gram em 1883 e Schmidt em 1908. Mas a demonstração de Schmidt funciona apenas no caso separável, daí a definição de von Neumann. Apenas em 1934 F. Riesz forneceu uma demonstração que não exige a separabilidade, e só a partir daí espaços de Hilbert foram considerados na generalidade que conhecemos hoje.

Schmidt também é lembrado, junto com F. Riesz, por trazer a linguagem da geometria euclidiana (desigualdade triangular, Teorema de Pitágoras, etc) para a teoria dos espaços normados e espaços de Hilbert.

A história da desigualdade de Cauchy–Schwarz é longa e envolve vários personagens. As primeiras versões remontam a Lagrange e Cauchy no caso de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^n$ . A versão com integrais foi provada por Buniakowsky em 1859 e por Schwarz em 1885. O caso de  $\ell_2$  foi provado por Schmidt em 1908 e a versão abstrata por von Neumann em 1930. Apesar de Buniakowsky ter precedido Schwarz em mais de 25 anos, a literatura ocidental usualmente esquece seu nome e consolida a expressão desigualdade de Cauchy–Schwarz.

É usual que resultados gerais mantenham o nome do descobridor de um caso particular, mesmo que o caso particular esteja muito distante da versão geral. É o que acontece com a identidade de Parseval (1799) e a desigualdade de Bessel (1828).

O fato de todo subespaço fechado de um espaço de Hilbert ser complementado (Corolário 5.2.7) na verdade caracteriza os espaços de Hilbert a menos de isomorfismos: J. Lindenstrauss e L. Tzafriri [59] provaram em 1971 que quando todo subespaço fechado de um espaço de Banach  $E$  é complementado,  $E$  é isomorfo a um espaço de Hilbert.

As séries incondicionalmente convergentes desempenham um papel central na teoria dos espaços de Banach. Na Seção 10.1 exploraremos esse conceito de forma adequada.

Os sistemas ortonormais completos são também chamados de *bases hilbertianas* ou *sistemas ortonormais maximais*. A igualdade do Teorema 5.3.10(a) justifica o termo base hilbertiana e o Exercício 5.7.22 justifica o termo maximal. Os sistemas trigonométricos dos Exercícios 5.7.5 (caso real) e 5.7.6 (caso complexo) são sistemas ortonormais completos em  $L_2[0, 2\pi]$  (veja [81, Theorem 4.6] e [17, Theorem 5.2]). Na verdade, no caso separável essas bases hilbertianas são casos particulares do conceito de *base de Schauder*, que será tratado na Seção 10.3.

Sejam  $\{x_i : i \in I\}$  um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert  $H$  e  $x \in H$ . Os números  $\langle x, x_i \rangle$  são muitas vezes chamados de *coeficientes de Fourier de  $x$* , e a série  $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$  do Teorema 5.3.10(a) é chamada de *expansão de Fourier de  $x$*  ou *série de Fourier de  $x$* .

A teoria dos operadores compactos e autoadjuntos em espaços de Hilbert será

abordada no Capítulo 7. A seguir damos sugestões de leituras para alguns tópicos clássicos da teoria dos espaços de Hilbert não tratados neste livro: os Teoremas de Stampacchia e Lax–Milgram ([12, 5.3] e [70, Teorema 19.10]), polinômios ortogonais [49, 3.7], operadores normais e  $C^*$ -álgebras [17, Chapters VIII e IX], Análise de Fourier ([81, 4.3] e [76, 6.10]), operadores lineares ilimitados (descontínuos) ([49, Chapter 10] e [85, Section 22]), operadores de Hilbert–Schmidt ([20, Chapter 4] e [88, VI.6]) e o Teorema de Hille–Yosida [12, Chapter 7].

## 5.7 Exercícios

**Exercício 5.7.1** Mostre que a função produto interno (de  $E \times E$  em  $\mathbb{K}$ ) é contínua.

**Exercício 5.7.2** (a) Seja  $E$  um espaço vetorial real com produto interno. Prove que a vale a recíproca do teorema de Pitágoras: se  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  então  $x \perp y$ .  
(b) Vale o mesmo no caso complexo?

**Exercício 5.7.3** Prove que, para  $p \neq 2$ ,  $\ell_p$  não é um espaço com produto interno.

**Exercício 5.7.4** Mostre que  $S = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$  é um sistema ortonormal completo em  $\ell_2$ .

**Exercício 5.7.5** Verifique que no caso real o conjunto formado pelas funções

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad n \in \mathbb{N},$$

é um sistema ortonormal em  $L_2[0, 2\pi]$ .

**Exercício 5.7.6** Prove que no caso complexo o conjunto formado pelas funções  $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , é um sistema ortonormal em  $L_2[0, 2\pi]$ .

**Exercício 5.7.7** (a) Sejam  $E$  um espaço vetorial real com produto interno. Prove que o operador

$$T: E \longrightarrow E', \quad T(x)(y) = \langle x, y \rangle \text{ para todos } x, y \in E,$$

está bem definido (isto é,  $T(x) \in E'$  para todo  $x \in E$ ), é linear contínuo e isometria.

(b) Vale o mesmo no caso complexo? E se definirmos  $T(x)(y) = \langle y, x \rangle$ ?

**Exercício 5.7.8** Sejam  $E$  e  $F$  espaços com produto interno e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear. Prove que  $T$  é uma isometria linear se, e somente se,  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  para todos  $x, y \in E$ .

**Exercício 5.7.9** (a) Sejam  $E$  um espaço vetorial complexo com produto interno e  $T: E \longrightarrow E$  um operador linear. Prove que se  $\langle T(x), x \rangle = 0$  para todo  $x \in E$  então  $T = 0$ .

(b) Vale o mesmo no caso real?

**Exercício 5.7.10** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que a norma de  $E$  é induzida por um produto interno se, e somente se, vale a Lei do Paralelogramo.

**Exercício 5.7.11** Demonstre, sem usar reflexividade, que as normas de  $\ell_1$  e  $C[a, b]$  não são induzidas por produtos internos.

**Exercício 5.7.12** Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  seqüências na bola unitária fechada de um espaço de Hilbert. Prove que se  $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow 1$  então  $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$ .

**Exercício 5.7.13** Prove que em  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  existem um subespaço fechado  $M$  e  $x \notin M$  tais que não é único o vetor  $p \in M$  com

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, M).$$

**Exercício 5.7.14** (a) Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $A$  um subconjunto não-vazio, completo e convexo de  $E$ . Prove que para cada  $x \in E$  existe um único  $p \in A$  tal que

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, A).$$

(b) Mostre que em todo subconjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert existe um único vetor de menor norma.

**Exercício 5.7.15** (Teorema de Hellinger–Toeplitz) Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T: H \longrightarrow H$  um operador linear tal que  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$  para todos  $x, y \in H$ . Prove que  $T$  é contínuo.

**Exercício 5.7.16** Verifique que em todo espaço vetorial  $V$  pode ser definido um produto interno. Mais ainda, para cada base de Hamel  $\mathcal{B}$  de  $V$  pode-se definir um produto interno em  $V$  de modo que os vetores de  $\mathcal{B}$  sejam ortogonais.

**Exercício 5.7.17** Prove, sem usar reflexividade, que se  $M$  é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, então  $M = (M^\perp)^\perp$ .

**Exercício 5.7.18** Seja  $M = \{p : p \text{ é polinômio com coeficientes reais e grau menor ou igual a } 1\}$  como subespaço de  $L_2[-1, 1]$ . Determine a melhor aproximação de  $f(x) = e^x$  em  $M$ .

**Exercício 5.7.19\*** Se  $(y_j)_{j=1}^\infty$  e  $(z_j)_{j=1}^\infty$  são enumerações de  $\{x_i : i \in I_x\}$  no Lema 5.3.9, mostre diretamente (sem usar a Proposição 5.3.8) que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, y_i \rangle y_i.$$

**Exercício 5.7.20** Seja  $E$  um espaço com produto interno. Sejam  $S_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  e  $S_2 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  conjuntos ortonormais em  $E$  tais que  $[x_1, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_n]$  para cada  $n$  natural. Mostre que existe uma seqüência  $(a_n)$  de escalares com módulo 1, tais que  $y_n = a_n x_n$  para todo  $n$ .

**Exercício 5.7.21** Sejam  $E$  um espaço com produto interno e  $S$  um conjunto ortonormal infinito em  $E$ . Prove que  $S$  não é compacto, mas é fechado e limitado.

**Exercício 5.7.22** Seja  $S = \{x_i : i \in I\}$  um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert  $H$ . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $S$  é um sistema ortonormal completo.
- (b) Se  $\varphi \in E'$  é um funcional que se anula em todos os  $x_i, i \in I$ , então  $\varphi = 0$ .
- (c)  $S$  é maximal no sentido de que nenhum outro conjunto ortonormal o contém propriamente.
- (d) Se  $x \in H$  é ortogonal a todos os  $x_i, i \in I$ , então  $x = 0$ .

**Exercício 5.7.23** Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert  $H$ . Prove que para toda sequência  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$  existe  $x \in H$  tal que

$$a_n = \langle x, x_n \rangle \text{ para todo } n \text{ e } \|x\| = \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_2.$$

**Exercício 5.7.24** Enuncie e demonstre resultado análogo ao do Exercício 5.7.23 para espaços de Hilbert de dimensão finita.

**Exercício 5.7.25** Prove que todo espaço de Hilbert de dimensão  $n$  é isomorfo isometricamente a  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ . Conclua que dois espaços de Hilbert de dimensão finita sobre o mesmo corpo têm a mesma dimensão se, e somente se, são isomorfos isometricamente.

**Exercício 5.7.26** Prove que, no caso separável, a representação do Teorema 5.3.10(a) é única, isto é, se  $x = \sum_{n=1}^\infty b_n x_n$ , então  $b_n = \langle x, x_n \rangle$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 5.7.27** (Lei do Paralelogramo Generalizada) Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Prove que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todos  $x_1, \dots, x_n \in H$ ,

$$\sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\|^2 = 2^n \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

**Exercício 5.7.28** Considere o caso  $\varphi \neq 0$  na demonstração do Teorema de Riesz–Fréchet. A unicidade do vetor  $y_0$  pode parecer contraditória com a liberdade de escolha do vetor  $x_0$ . O que está por trás disso é que  $M^\perp$  tem dimensão 1. Prove isso.

**Exercício 5.7.29** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $F$  um espaço de Banach,  $G$  um subespaço de  $H$  e  $\varphi: G \rightarrow F$  um operador linear e contínuo. Mostre que existe um operador linear e contínuo  $\tilde{\varphi}: H \rightarrow F$  que estende  $\varphi$  e preserva a norma.

**Exercício 5.7.30** Mostre que a extensão do exercício anterior, em geral, não é única.

**Exercício 5.7.31** (O Teorema de Hahn–Banach para espaços de Hilbert) Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $F$  um subespaço de  $H$  e  $\varphi \in F'$ . Prove, sem usar o Teorema de Hahn–Banach, que existe um *único* funcional  $\tilde{\varphi} \in H'$  que estende  $\varphi$  e preserva a norma.

**Exercício 5.7.32** (a) Suponha  $F = \mathbb{K}$  e  $G$  fechado na situação do Exercício 5.7.29. Definindo

$$\mathcal{F} = \{\tilde{\varphi} \in H' : \tilde{\varphi} \text{ é extensão (contínua) de } \varphi\},$$

encontre uma expressão (se necessário em função da cardinalidade de  $G$ ) para a cardinalidade de  $\mathcal{F}$ .

(b) No caso em que  $F$  é um espaço de Banach, definindo

$$\mathcal{G} = \{\tilde{\varphi} : H \longrightarrow F : \tilde{\varphi} \text{ é extensão (linear) de } \varphi\} \text{ e}$$

$$\mathcal{H} = \{\tilde{\varphi} : H \longrightarrow F : \tilde{\varphi} \text{ é extensão (não necessariamente linear) de } \varphi\},$$

encontre uma expressão (se necessário em função da cardinalidade de  $F$  e/ou  $G$  ou conjuntos relacionados) para as cardinalidades de  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{H}$ .

**Exercício 5.7.33\*** Sejam  $I$  um conjunto qualquer e  $1 \leq p \leq \infty$ . Chamemos de  $\mathcal{F}$  a coleção dos subconjuntos finitos de  $I$ . Dada uma coleção de escalares  $(a_j)_{j \in I}$  indexada por  $I$ , escrevemos

$$\|(a_j)_{j \in I}\|_p = \sup_{A \in \mathcal{F}} \left( \sum_{j \in A} |a_j|^p \right)^{1/p} \text{ se } p < \infty \text{ e } \|(a_j)_{j \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} |a_i|.$$

(a) Prove que

$$\ell_p(I) := \{(a_j)_{j \in I} : a_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in I \text{ e } \|(a_j)_{j \in I}\|_p < \infty\}$$

é um espaço vetorial no qual  $\|\cdot\|_p$  é uma norma.

(b) Prove que  $(\ell_p(I), \|\cdot\|_p)$  é um espaço de Banach.

(c) Prove que, para  $1 \leq p < \infty$ ,  $(\ell_p(I))'$  é isometricamente isomorfo a  $\ell_{p'}(I)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $1' = \infty$ .

(d) Seja  $\{x_i : i \in I\}$  um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert  $H$ . Prove que  $H$  é isometricamente isomorfo a  $\ell_2(I)$ .

(e) Prove que todo espaço de Hilbert é isometricamente isomorfo ao seu dual.

**Exercício 5.7.34** (Funções de Rademacher) A função sinal é definida por

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  a  $n$ -ésima função de Rademacher é a função  $r_n(t) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi t))$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Prove que:

(a) O conjunto  $(r_n)_{n=1}^\infty$  é ortonormal em  $L_2[0, 1]$ .

(b)  $(r_n)_{n=1}^\infty$  não é um sistema ortonormal completo em  $L_2[0, 1]$ .

**Exercício 5.7.35\*** Seja  $(r_n)_{n=1}^\infty$  a sequência das funções de Rademacher. Prove que para todos inteiros positivos  $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$  e  $p_1, \dots, p_k$ , vale que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdots r_{n_k}^{p_k}(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Exercício 5.7.36\*** Sejam  $(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$  e  $(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$  espaços de medida  $\sigma$ -finitos tais que  $L_2(\mu_1)$  e  $L_2(\mu_2)$  são separáveis. Sejam  $(f_n)_{n=1}^\infty$  e  $(g_n)_{n=1}^\infty$  sistemas ortonormais completos em  $L_2(\mu_1)$  e  $L_2(\mu_2)$ , respectivamente. Prove que definindo  $h_{mn}(x, y) = f_m(x) \cdot g_n(y)$  tem-se que  $(h_{mn})_{m,n=1}^\infty$  é um sistema ortonormal completo em  $L_2(\mu_1 \otimes \mu_2)$ , onde  $\mu_1 \otimes \mu_2$  é a medida produto.

# Capítulo 6

## Topologias Fracas

No Teorema 1.5.4 provamos que a bola unitária fechada de um espaço normado de dimensão infinita não é compacta. Este forte contraste com a dimensão finita indica que a existência de compactos que não estão contidos em subespaços de dimensão finita é uma questão delicada. Exemplos existem, vimos no Exercício 1.8.35 que o cubo de Hilbert é compacto em  $\ell_2$ . A questão não é apenas a existência ou não de muitos compactos; o ponto central é que aqueles conjuntos que gostaríamos que fossem compactos, ou seja as bolas fechadas, não o são.

Para contornar esta situação recorreremos a um expediente topológico clássico, chamado de *enfraquecer a topologia* e descrito na Seção 6.1. A seguir, na Seção 6.2, aplicaremos este expediente ao caso dos espaços normados em geral e, na Seção 6.3, ao caso dos espaços duais. Ainda na Seção 6.3, e também na Seção 6.4, comprovaremos que o ganho de compactos é real: em espaços reflexivos a bola unitária fechada é compacta na topologia fraca e em espaços normados duais quaisquer a bola unitária fechada é compacta na topologia fraca-estrela.

No tratamento das topologias fracas usaremos o instrumento topológico conhecido como *redes* (veja Apêndice B). Essa opção se justifica no fato de que os argumentos usando redes são muito semelhantes aos argumentos usando sequências, com os quais o leitor certamente está familiarizado. Além disso, ao aprender a usar redes o estudante ganhará uma ferramenta a mais para seus estudos posteriores, uma vez que redes têm muitas aplicações nas mais variadas áreas da Análise (veja, por exemplo, [1, 13, 86]).

Na Seção 6.6 estudaremos os espaços uniformemente convexos, uma classe de espaços normados muito usados nas aplicações. Veremos que os espaços uniformemente convexos formam uma classe intermediária entre os espaços de Hilbert e os espaços reflexivos, gozando assim – de forma parcial, é claro – das propriedades dos espaços de Hilbert e da generalidade dos espaços reflexivos.

### 6.1 A topologia gerada por uma família de funções

Por se tratar de assunto típico e clássico da Topologia Geral, omitiremos as demonstrações desta seção. O leitor pouco acostumado com os conceitos de Topologia



Geral deve consultar o Apêndice B. Dizemos que uma topologia tem menos abertos que uma outra se estiver contida propriamente nesta outra. A expressão *menos abertos* será usada sempre nesse contexto, sem conexão com a ideia de cardinalidade.

O princípio básico é que quanto menos abertos tiver um espaço, maior a chance de determinado conjunto ser compacto, pois menos serão suas coberturas abertas. A ideia inicial então é considerar topologias com menos abertos, e é isso o que significa a expressão *enfraquecer a topologia*. O cuidado a ser tomado é que, considerando topologias com menos abertos em determinado espaço, ao mesmo tempo em que há chance de ganharmos compactos, diminui a chance de funções nele definidas serem contínuas. E pagar o preço de perder a continuidade de determinadas funções pode não compensar o (eventual) ganho com compactos. Deve-se então escolher as funções que devem ser (ou permanecer) contínuas e procurar a menor topologia que garanta a continuidade das funções previamente escolhidas. Mãos à obra:

Sejam  $X$  um conjunto,  $(Y_i)_{i \in I}$  uma família de espaços topológicos e  $(f_i)_{i \in I}$  uma família de funções  $f_i: X \longrightarrow Y_i$  para cada  $i \in I$ . Queremos definir em  $X$  a menor topologia que torna todas as funções  $f_i$  contínuas.

Para cada  $i \in I$  e cada aberto  $A_i$  em  $Y_i$  considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : f_i(x) \in A_i\}.$$

Chame de  $\Phi$  a coleção dos subconjuntos de  $X$  que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma  $f_i^{-1}(A_i)$ .

**Proposição 6.1.1** *Existe uma topologia  $\tau$  em  $X$  que tem  $\Phi$  como base, isto é, os elementos de  $\tau$  são uniões de elementos de  $\Phi$ .*

**Definição 6.1.2** A topologia  $\tau$  da Proposição 6.1.1 é chamada de *topologia gerada pela família de funções  $(f_i)_{i \in I}$* .

Apesar de todas as demonstrações serem elementares, algumas até beirando a tautologia, é conveniente listar as propriedades da topologia que acabamos de definir:

**Proposição 6.1.3** *Seja  $\tau$  a topologia em  $X$  gerada pela família de funções  $(f_i)_{i \in I}$ . Então:*

- (a) *Para cada  $i \in I$  a função  $f_i: X \longrightarrow Y_i$  é contínua.*
- (b)  *$\tau$  é a menor topologia em  $X$  tal que vale (a).*
- (c)  *$\tau$  é a interseção de todas as topologias em  $X$  em relação às quais todas as  $f_i$  são contínuas.*
- (d) *Para cada  $x \in X$ , os conjuntos da forma  $f_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(A_n)$  onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_1, \dots, i_n \in I$  e  $A_j$  é vizinhança de  $f_{i_j}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , constituem uma base de vizinhanças para  $x$ .*
- (e) *Seja  $(x_\lambda)$  uma rede em  $X$ . Então  $x_\lambda \longrightarrow x$  em  $(X, \tau)$  se, e somente se,  $f_i(x_\lambda) \longrightarrow f_i(x)$  em  $Y_i$  para todo  $i \in I$ .*
- (f) *Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $f: Z \longrightarrow (X, \tau)$ . Então  $f$  é contínua se, e somente*

se,  $f_i \circ f: Z \longrightarrow Y_i$  é contínua para todo  $i \in I$ .

(g) Suponha que todos os  $Y_i$  sejam espaços de Hausdorff. Então a topologia  $\tau$  é de Hausdorff se, e somente se, a família  $(f_i)_{i \in I}$  separa pontos de  $x$ , isto é, para todos  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , existe  $i \in I$  tal que  $f_i(x) \neq f_i(y)$ .

## 6.2 A topologia fraca em um espaço normado

Aplicamos a construção da seção anterior a um espaço normado  $E$ . As funções que queremos manter contínuas são os funcionais lineares contínuos  $\varphi \in E'$ .

**Definição 6.2.1** A topologia fraca no espaço normado  $E$ , denotada por  $\sigma(E, E')$ , é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos  $\varphi \in E'$ . Quando uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $E$  converge para  $x \in E$  na topologia fraca escrevemos  $x_n \xrightarrow{w} x$ .

As primeiras propriedades da topologia fraca seguem, basicamente, da construção geral que fizemos na seção anterior:

**Proposição 6.2.2** Seja  $E$  um espaço normado. Então:

- (a) Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo  $\varphi \in E'$ ,  $\varphi: (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{K}$  é contínuo.
- (b) Para cada  $x_0 \in E$ , os conjuntos da forma

$$V_{J, \varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde  $J$  é um conjunto finito,  $\varphi_i \in E'$  para todo  $i \in J$  e  $\varepsilon > 0$ , formam uma base de vizinhanças abertas de  $x_0$  para a topologia fraca.

(c) Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $E$ . Então  $x_n \xrightarrow{w} x$  se, e somente se,  $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$  para todo  $\varphi \in E'$ .

(d) A topologia fraca  $\sigma(E, E')$  é de Hausdorff.

(e) Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $f: Z \longrightarrow (E, \sigma(E, E'))$  uma função. Então  $f$  é contínua se, e somente se,  $\varphi \circ f: Z \longrightarrow \mathbb{K}$  é contínua para todo  $\varphi \in E'$ .

**Demonstração.** Os itens (a), (c) e (e) seguem imediatamente da Proposição 6.1.3.

(b) Seja  $U$  uma vizinhança de  $x_0$  na topologia fraca. Pela Proposição 6.1.3(d) existem um conjunto finito  $J$ , funcionais  $\varphi_j \in E'$  e abertos  $V_j$  em  $\mathbb{K}$  contendo  $\varphi_j(x_0)$ ,  $j \in J$ , tais que  $\bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$  é um aberto da topologia fraca contendo  $x_0$  e contido em  $U$ . Como  $J$  é finito e  $\varphi_j(x_0) \in V_j$  para todo  $j \in J$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\varphi_j(x_0), \varepsilon) \subseteq V_j$  para todo  $j \in J$ . Disso segue que

$$\begin{aligned} V_{J, \varepsilon} &= \{x \in E : |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } j \in J\} \\ &= \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(B(\varphi_j(x_0), \varepsilon)) \subseteq \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subseteq U, \end{aligned}$$

e portanto os conjuntos da forma  $V_{J,\varepsilon}$  formam uma base de vizinhanças abertas de  $x_0$  para a topologia fraca.

(d) O fato de que  $E'$  separa pontos de  $E$  segue facilmente do Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.4. O resultado segue então da Proposição 6.1.3(g). ■

**Corolário 6.2.3** *Em um espaço normado  $E$ , se  $x_n \longrightarrow x$  então  $x_n \xrightarrow{w} x$ .*

**Demonstração.** Se  $x_n \longrightarrow x$ , da continuidade dos funcionais de  $E'$  segue que  $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$  para todo  $\varphi \in E'$ . Da Proposição 6.2.2(c) segue que  $x_n \xrightarrow{w} x$ . ■

Um exemplo simples mostra que convergência fraca não implica convergência em norma:

**Exemplo 6.2.4** Considere a sequência  $(e_n)_{n=1}^\infty$  formada pelos vetores unitários canônicos de  $c_0$ . Dado  $\varphi \in (c_0)'$  sabemos que existe  $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$  tal que  $\varphi((b_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j$  para toda sequência  $(b_j)_{j=1}^\infty \in c_0$ . Em particular,  $\varphi(e_n) = a_n \longrightarrow 0 = \varphi(0)$  pois  $a_n$  é o termo geral de um série convergente. Da Proposição 6.2.2(c) resulta que  $e_n \xrightarrow{w} 0$ . Como  $\|e_{n+1} - e_n\| = 1 \not\longrightarrow 0$ , a sequência  $(e_n)_{n=1}^\infty$  não é de Cauchy, e portanto não converge em norma.

Sequências fracamente convergentes podem até não ser convergentes, mas felizmente são limitadas:

**Proposição 6.2.5** *Seja  $E$  um espaço normado.*

(a) *Se  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ , então a sequência  $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ .*

(b) *Se  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$  e  $\varphi_n \longrightarrow \varphi$  em  $E'$ , então  $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$  em  $\mathbb{K}$ .*

**Demonstração.** (a) Para todo  $\varphi \in E'$ ,  $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$  pela Proposição 6.2.2(c). Logo a sequência  $(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty$  é limitada para todo  $\varphi \in E'$ . Do Exercício 3.6.13 segue que o conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  é limitado em  $E$ , provando a primeira afirmação. Seja novamente  $\varphi \in E'$ . De  $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$  e  $|\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_n\|$  para todo  $n$ , segue que

$$|\varphi(x)| = \lim_n |\varphi(x_n)| = \liminf_n |\varphi(x_n)| \leq \liminf_n \|\varphi\| \cdot \|x_n\| = \|\varphi\| \cdot \liminf_n \|x_n\|.$$

Do Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.5 concluímos que

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left( \|\varphi\| \cdot \liminf_n \|x_n\| \right) = \liminf_n \|x_n\|.$$

(b) Dado  $\varepsilon > 0$ , das convergências  $\varphi_n \longrightarrow \varphi$  e  $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$  existe um número natural  $n_0$  tal que

$$\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon \text{ e } |\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Pelo item (a) existe  $C > 0$  tal que  $\|x_n\| \leq C$  para todo  $n$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &= |(\varphi_n - \varphi)(x_n) + \varphi(x_n - x)| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\| \|x_n\| + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \\ &\leq C\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

para todo  $n \geq n_0$ . Isso prova que  $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ . ■

O Exemplo 6.2.4 mostra, em particular, que em  $c_0$  a topologia da norma não coincide com a topologia fraca. Vejamos que isso na verdade caracteriza os espaços de dimensão infinita:

**Proposição 6.2.6** *Seja  $E$  um espaço normado.*

(a) *A topologia fraca está contida na topologia da norma.*

(b) *As topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se,  $E$  tem dimensão finita.*

**Demonstração.** (a) Basta observar que os funcionais  $\varphi \in E'$  são contínuos na topologia da norma e que a topologia fraca é a menor topologia em  $E$  que mantém esses funcionais contínuos.

(b) Suponha que  $E$  tenha dimensão finita. Do item (a) já sabemos que todo aberto da topologia fraca é também aberto da topologia da norma. Basta então provar que abertos da topologia da norma são abertos da topologia fraca. Sejam então  $U$  um aberto não-vazio da topologia da norma e  $x_0 \in U$ . Para provar que  $U$  é aberto na topologia fraca basta mostrar que  $x_0$  é ponto interior de  $U$  para a topologia fraca. Em outras palavras, devemos encontrar um aberto  $V$  na topologia fraca contendo  $x_0$  e contido em  $U$ . Para isso escolha  $r$  suficientemente pequeno de modo que  $B(x_0, r) \subseteq U$  e fixe uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  com  $\|e_j\| = 1$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Para cada  $j = 1, \dots, n$ , considere o funcional

$$\varphi_j: E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \varphi_j(x) = x_j.$$

Note que cada  $\varphi_j$  é linear e contínuo pois  $E$  tem dimensão finita. Pela Proposição 6.2.2(b) sabemos que o conjunto

$$V = \left\{ x \in E : |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \frac{r}{2n}, j = 1, \dots, n \right\}$$

é um aberto na topologia fraca contendo  $x_0$ . Mais ainda, dado  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in V$ ,

escrevendo  $x_0 = \sum_{j=1}^n x_j^{(0)} e_j$ ,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{(0)}) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(0)}| \\ &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x - x_0)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{r}{2n} = \frac{r}{2} < r. \end{aligned}$$

Logo  $V \subseteq B(x_0, r) \subseteq U$ , como queríamos.

Suponha agora que  $E$  tenha dimensão infinita. Seja  $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  a esfera unitária de  $E$ . É claro que  $S$  é fechado na topologia da norma. Basta então mostrar que  $S$  não é fechado na topologia fraca. Para tanto mostraremos que o conjunto  $\{x \in E : \|x\| < 1\}$  está contido no fecho de  $S$  na topologia fraca. Seja  $x_0 \in E$  tal que  $\|x_0\| < 1$  e seja  $V$  um aberto na topologia fraca contendo  $x_0$ . Para mostrar que  $x_0$  pertence ao fecho de  $S$  na topologia fraca, basta mostrar que  $S \cap V \neq \emptyset$ . É claro que basta considerar  $V$  como sendo um aberto da base de vizinhanças de  $x_0$ . Neste caso existem  $\varepsilon > 0$  e funcionais  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  em  $E'$  tais que

$$V = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Vejamos que existe  $y_0 \in E - \{0\}$  tal que  $\varphi_i(y_0) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . De fato, caso contrário o operador linear

$$T: E \longrightarrow \mathbb{K}^n, T(z) = (\varphi_i(z))_{i=1}^n,$$

seria injetor, mas isso não ocorre pois  $E$  tem dimensão infinita. Podemos então considerar a função  $r(t) = \|x_0 + ty_0\|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $r$  é contínua,  $r(0) = \|x_0\| < 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$ , o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de um número real  $t_0$  tal que  $\|x_0 + t_0 y_0\| = r(t_0) = 1$ . Portanto  $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$ . ■

Ao passar da topologia da norma para a topologia fraca, não perdemos funcionais lineares contínuos pela Proposição 6.2.2(a) e tampouco os ganhamos pela Proposição 6.2.6(a). É melhor deixar isso registrado. Denotemos por  $(E, \sigma(E, E'))'$  o conjunto formado pelos funcionais lineares em  $E$  que são contínuos quando  $E$  está munido da topologia fraca.

**Corolário 6.2.7**  $E' = (E, \sigma(E, E'))'$  para todo espaço normado  $E$ .

Com o caso de funcionais lineares resolvido, voltamos nossa atenção para os operadores lineares. Como a topologia fraca está contida na topologia da norma, é claro que se o operador linear  $T: E \longrightarrow F$  é contínuo, então  $T: E \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$  também é contínuo. Por outro lado, o operador identidade  $\text{id}_{c_0}: c_0 \longrightarrow c_0$  é contínuo mas do Exemplo 6.2.4 sabemos que  $\text{id}_{c_0}: (c_0, \sigma(c_0, \ell_1)) \longrightarrow c_0$  não é contínuo. Na verdade, pela Proposição 6.2.6(b) isso ocorre em qualquer espaço de dimensão infinita. Resta o caso em que trocamos de topologia no domínio e no contradomínio. Para tratar este caso precisamos demonstrar o Teorema 2.6.1:

**Lema 6.2.8** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos com  $Y$  de Hausdorff. Se a função  $f: X \longrightarrow Y$  é contínua, então o gráfico de  $f$  é fechado em  $X \times Y$  com a topologia produto.*

**Demonstração.** Seja  $(x_\lambda, f(x_\lambda))_\lambda$  uma rede no gráfico de  $f$  convergindo para  $(x, y) \in X \times Y$ . Como as projeções

$$(t, w) \in X \times Y \mapsto t \in X \quad \text{e} \quad (t, w) \in X \times Y \mapsto w \in Y$$

são contínuas,  $x_\lambda \longrightarrow x$  em  $X$  e  $f(x_\lambda) \longrightarrow y$  em  $Y$ . Da continuidade de  $f$  segue que  $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$  em  $Y$ , e como  $Y$  é de Hausdorff temos  $f(x) = y$ , isto é,  $(x, y)$  pertence ao gráfico de  $f$ . ■

**Proposição 6.2.9** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Um operador linear  $T: E \longrightarrow F$  é contínuo se, e somente se,  $T: (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$  é contínuo.*

**Demonstração.** Para tornar a notação mais precisa, denotemos  $T: (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$  por  $T_\sigma$ . Suponha  $T: E \longrightarrow F$  contínuo. Para cada  $\varphi \in F'$ ,  $\varphi \circ T_\sigma \in (E, \sigma(E, E'))'$  pela Proposição 6.2.2(a). Como isso vale para todo  $\varphi \in F'$ , o resultado segue da Proposição 6.2.2(e).

Reciprocamente, suponha  $T_\sigma: (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$  contínuo. Neste caso o Lema 6.2.8 revela que o gráfico de  $T_\sigma$  é fechado em  $E \times F$  na topologia produto das topologias fracas  $(E, \sigma(E, E'))$  e  $(F, \sigma(F, F'))$ . Mas essas topologias fracas estão contidas nas respectivas topologias das normas, e consequentemente o gráfico de  $T$  é fechado em  $E \times F$  com a topologia induzida pelas normas. A continuidade de  $T: E \longrightarrow F$  segue do Teorema do Gráfico Fechado. ■

**Observação 6.2.10** A Proposição 6.2.9 vale também para operadores entre espaços normados. Veja [63, Theorem 2.5.11].

Da Proposição 6.2.6(b) sabemos que, em dimensão infinita, existem conjuntos fechados que não são fechados na topologia fraca. Ao impormos uma condição algébrica – a convexidade – esta possibilidade desaparece:

**Teorema 6.2.11** (Teorema de Mazur) *Sejam  $E$  um espaço normado e  $K$  um subconjunto convexo de  $E$ . Então o fecho de  $K$  na topologia da norma coincide com o fecho de  $K$  na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

**Demonstração.** Façamos o caso real. Como a topologia da norma é descrita por sequências, do Corolário 6.2.3 segue que  $\overline{K}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{K}^{\sigma(E, E')}$ . Suponha que exista  $x_0 \in \overline{K}^{\sigma(E, E')} \setminus \overline{K}^{\|\cdot\|}$ . Neste caso  $\{x_0\}$  é convexo e compacto,  $\overline{K}^{\|\cdot\|}$  é convexo (Exercício 1.8.19) e fechado e  $\{x_0\} \cap \overline{K}^{\|\cdot\|} = \emptyset$ ; então, pelo Teorema 3.4.9, existem um funcional  $\varphi \in E'$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que

$$\varphi(x_0) > a > \varphi(x) \text{ para todo } x \in \overline{K}^{\|\cdot\|}. \quad (6.1)$$

Entretanto, como  $x_0 \in \overline{K}^{\sigma(E, E')}$  existe uma rede  $(x_\lambda)$  em  $K$  convergindo para  $x_0$  na topologia fraca. Da continuidade de  $\varphi$  na topologia fraca segue que  $(\varphi(x_\lambda))$  converge para  $\varphi(x_0)$ . Como cada  $x_\lambda \in K$ , isso contradiz (6.1) e completa a demonstração. O caso complexo é análogo usando o Exercício 3.6.27. ■

Vimos no Corolário 6.2.3(c) que sequências convergentes em norma são fracamente convergentes e na Proposição 6.2.6(b) que em dimensão infinita as topologias fraca e

da norma nunca coincidem. Como nem toda topologia é descrita pela convergência de seqüências, esses dois fatos não impedem que, em algum espaço de dimensão infinita, as seqüências fracamente convergentes sejam convergentes em norma. Na verdade, é exatamente isso o que ocorre em  $\ell_1$ :

**Teorema 6.2.12** (Teorema de Schur) *Em  $\ell_1$  uma seqüência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

**Demonstração.** Do Corolário 6.2.3 basta provar que toda seqüência fracamente convergente é também convergente em norma. É claro que basta provar que toda seqüência fracamente convergente para zero converge em norma para zero. Seja então  $(z^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência em  $\ell_1$  que converge fracamente para zero. Suponhamos que  $(z^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  não convirja para zero em norma. Neste caso existem  $\varepsilon > 0$  e uma subsequência  $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  de  $(z^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\|x^{(n)}\|_1 \geq 5\varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevamos  $x^{(n)} = (x_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como essa subsequência converge fracamente para zero, da dualidade  $(\ell_1)' = \ell_{\infty}$  tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n)} = 0 \quad \text{para toda seqüência } b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}. \quad (6.2)$$

Como os vetores unitários canônicos  $e_j$  pertencem a  $\ell_{\infty}$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Defina indutivamente duas seqüências estritamente crescentes  $(m_k)_{k=1}^{\infty}$  e  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  formadas por números naturais da seguinte maneira:  $m_0 = n_0 = 1$  e, para  $k \geq 1$ ,  $n_k$  é o menor inteiro maior que  $n_{k-1}$  de modo que

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{(n_k)}| < \varepsilon;$$

e  $m_k$  é o menor inteiro maior que  $m_{k-1}$  satisfazendo

$$\sum_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{(n_k)}| < \varepsilon.$$

Definimos uma seqüência  $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$  da seguinte maneira: para  $m_{k-1} < j \leq m_k$ , tome

$$b_j = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x_j^{(n_k)} = 0 \\ \frac{x_j^{(n_k)}}{|x_j^{(n_k)}|} & , \text{ se } x_j^{(n_k)} \neq 0. \end{cases}$$

Note que  $|b_j| \leq 1$  para todo  $j$ . Logo

$$\begin{aligned}
5\varepsilon - \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n_k)}| \right| - \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} \left( |x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left( |x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)} \right) + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \left( |x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)} \right) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left( |x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left( |x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)} \right) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left( |x_j^{(n_k)}| - b_j x_j^{(n_k)} \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left( |x_j^{(n_k)}| + |b_j x_j^{(n_k)}| \right) + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left( |x_j^{(n_k)}| + |b_j x_j^{(n_k)}| \right) \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo  $k$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$  a desigualdade acima entra em contradição com (6.2) e completa a demonstração. ■

### 6.3 A topologia fraca-estrela

No dual  $E'$  de um espaço normado  $E$ , até o momento podemos considerar a topologia da norma e a topologia fraca  $\sigma(E', E'')$ , que é a topologia gerada pelos elementos de  $E''$ . Ocorre que, considerando o mergulho canônico  $J_E: E \rightarrow E''$ , o conjunto  $J_E(E)$  também forma um conjunto notável de funções definidas em  $E'$ . Veremos no transcorrer deste capítulo que é muito proveitoso considerar em  $E'$  a topologia gerada pelos elementos de  $J_E(E)$ .

**Definição 6.3.1** A topologia fraca-estrela no dual  $E'$  do espaço normado  $E$ , denotada por  $\sigma(E', E)$ , é a topologia em  $E'$  gerada pelas funções pertencentes ao conjunto  $J_E(E) = \{J_E(x) : x \in E\}$ , isto é, pelas funções  $\varphi \in E' \mapsto J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \in \mathbb{K}$ , onde  $x \in E$ .

Quando uma sequência  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E'$  converge para  $\varphi \in E'$  na topologia fraca-estrela escrevemos  $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ .

Como no caso da topologia fraca, as primeiras propriedades da topologia fraca-estrela seguem da Proposição 6.1.3:

**Proposição 6.3.2** *Seja  $E$  um espaço normado. Então:*

- (a) *Para todo  $x \in E$ ,  $J_E(x): (E', \sigma(E', E)) \rightarrow \mathbb{K}$  é contínuo.*
- (b) *Para cada  $\varphi_0 \in E'$ , os conjuntos da forma*

$$W_{J, \varepsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

*onde  $J$  é um conjunto finito,  $x_i \in E$  para todo  $i \in J$  e  $\varepsilon > 0$ , formam uma base de vizinhanças abertas de  $\varphi_0$  para a topologia fraca-estrela.*



- (c) Seja  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência em  $E'$ . Então  $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$  se, e somente se,  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  para todo  $x \in E$ .
- (d) A topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  é de Hausdorff.
- (e) Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $f: Z \rightarrow (E', \sigma(E', E))$ . Então  $f$  é contínua se, e somente se,  $J_E(x) \circ f: Z \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua para todo  $x \in E$ .

**Demonstração.** Os itens (a), (c) e (e) seguem imediatamente da Proposição 6.1.3. Para o item (d) basta combinar o Exercício 4.5.11 com a Proposição 6.1.3(g). O item (b) é obtido a partir de uma adaptação da demonstração da Proposição 6.2.2(b). ■

Com relação à convergência de sequências temos:

**Proposição 6.3.3** *Seja  $E$  um espaço normado.*

- (a) Se  $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$  em  $E'$  então  $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ .
- (b) Se  $E$  é Banach e  $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$  em  $E'$  então a sequência  $(\|\varphi_n\|)_{n=1}^{\infty}$  é limitada e  $\|\varphi\| \leq \liminf_n \|\varphi_n\|$ .
- (c) Se  $E$  é Banach,  $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$  em  $E'$  e  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , então  $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$  em  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** (a) Segue das Proposições 6.2.2(c) e 6.3.2(c).

(b) Segue de uma adaptação da demonstração da Proposição 6.2.5(a) usando o Teorema de Banach–Steinhaus.

(c) É consequência de uma adaptação da demonstração da Proposição 6.2.5(b). ■

Novamente um exemplo simples mostra que convergência fraca-estrela não implica convergência fraca:

**Exemplo 6.3.4** Considere a sequência  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  formada pelos vetores unitários canônicos de  $\ell_1 = (c_0)'$ . Dado  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ ,  $e_n(x) = x_n \rightarrow 0$ , o que pela Proposição 6.3.2(c) garante que  $e_n \xrightarrow{w^*} 0$  em  $\ell_1$ . Por outro lado, tomando  $f = (-1, 1, -1, 1, \dots) \in \ell_{\infty} = (\ell_1)'$ ,  $f(e_n) = (-1)^n$  para todo  $n$ , logo a sequência  $(f(e_n))_{n=1}^{\infty}$  não converge, e portanto pela Proposição 6.2.2(c) a sequência  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  não converge fracamente em  $\ell_1$ .

Denotemos por  $(E', \sigma(E', E))'$  o espaço formado pelos funcionais lineares de  $E'$  em  $\mathbb{K}$  que são contínuos na topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$ . Pela Proposição 6.3.2(a) sabemos que  $J_E(E) \subseteq (E', \sigma(E', E))'$ . Para provar a inclusão inversa precisamos de um resultado auxiliar da Álgebra Linear:

**Lema 6.3.5** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  funcionais lineares em  $V$  tais que  $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$ . Então existem escalares  $a_1, \dots, a_n$  tais que  $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ .*

**Demonstração.** Considere as transformações lineares

$$T: V \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad T(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad \text{e}$$

$$U: T(V) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad U(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \varphi(x).$$

Vejamos que  $U$  está bem definida. Se  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y))$ , então  $(\varphi_1(x-y), \dots, \varphi_n(x-y)) = (0, \dots, 0)$ , e neste caso  $(x-y) \in \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$ . Isso implica que  $(x-y) \in \ker(\varphi)$  e portanto  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . A linearidade de  $U$  é óbvia. Seja  $\tilde{U}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$  uma extensão linear de  $U$ . Da representação matricial das transformações lineares entre espaços de dimensão finita existem escalares  $a_1, \dots, a_n$  tais que

$$\tilde{U}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n a_j z_j \quad \text{para todos } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}.$$

Em particular,

$$\varphi(x) = U(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \tilde{U}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x),$$

para todo  $x \in V$ . ■

**Proposição 6.3.6** *Sejam  $E$  um espaço normado e  $f: (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear e contínuo. Então existe  $x \in E$  tal que  $f = J_E(x)$ . Em outras palavras,  $(E', \sigma(E', E))' = J_E(E)$ .*

**Demonstração.** Como  $f$  é contínuo na topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  e  $f(0) = 0$ , existe uma vizinhança  $V$  da origem em  $E'$  na topologia fraca-estrela tal que  $|f(\varphi)| < 1$  para todo funcional  $\varphi \in V$ . Da Proposição 6.3.2(b) podemos tomar  $V$  da forma

$$V = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n\},$$

onde  $\varepsilon > 0$  e  $x_1, \dots, x_n \in E$ . Se  $J_E(x_i)(\varphi) = \varphi(x_i) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , temos claramente que  $\varphi \in V$ . Neste caso, para todo natural  $k$  é verdade que  $(k\varphi)(x_i) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , e portanto  $k\varphi \in V$ . Isso implica que  $|f(k\varphi)| < 1$ , ou seja,  $|f(\varphi)| < \frac{1}{k}$  para todo  $k$  natural, e portanto  $f(\varphi) = 0$ . Acabamos de mostrar que  $\bigcap_{i=1}^n \ker(J_E(x_i)) \subseteq \ker(f)$ . Pelo Lema 6.3.5 existem escalares  $a_1, \dots, a_n$  tais que

$$f = \sum_{i=1}^n a_i J_E(x_i) = J_E\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right). \quad \blacksquare$$

**Corolário 6.3.7**  $(E'', \sigma(E'', E'))' = J_{E'}(E')$  para todo espaço normado  $E$ .

Podemos agora estabelecer com precisão a relação entre as topologias fraca e fraca-estrela:

**Proposição 6.3.8** *Seja  $E$  um espaço normado.*

- (a) *Em  $E'$ , a topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  está contida na topologia fraca  $\sigma(E', E'')$ .*  
(b) *As topologias fraca  $\sigma(E', E'')$  e fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  coincidem em  $E'$  se, e somente se,  $E$  é reflexivo.*

**Demonstração.** (a) A topologia fraca  $\sigma(E', E'')$  mantém contínuos todos os funcionais de  $E''$ , em particular mantém contínuos os funcionais da forma  $J_E(x)$  com  $x \in E$ . Como a topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  é a menor topologia que mantém esses últimos funcionais contínuos, segue que  $\sigma(E', E) \subseteq \sigma(E', E'')$ .

(b) Se  $E$  é reflexivo,  $\sigma(E', E)$  e  $\sigma(E', E'')$  coincidem com a menor topologia em  $E'$  que mantém contínuos os funcionais da forma  $J_E(x)$  com  $x \in E$ , logo coincidem entre si. Reciprocamente, suponha que  $E$  não seja reflexivo. Neste caso existe  $f \in E''$ ,  $f \notin J_E(E)$ . Então  $f$  é contínuo na norma de  $E'$ , e portanto é contínuo na topologia fraca  $\sigma(E', E'')$  pelo Corolário 6.2.7. Mas pela Proposição 6.3.6 sabemos que  $f$  não é contínuo na topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$ , o que prova que as duas topologias não coincidem. ■

É tempo de mostrar que com essas topologias fracas ganhamos a compacidade das bolas fechadas. Fazemos agora o caminho inverso: começamos com a topologia fraca-estrela para depois chegarmos na topologia fraca. Relembre que, dado um espaço normado  $E$ ,  $B_E$  representa a bola unitária fechada de  $E$ , isto é,

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Em forte contraste com o fato de que, em dimensão infinita,  $B_E$  nunca é compacta na topologia da norma, temos o

**Teorema 6.3.9** (Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki) *Para todo espaço normado  $E$ , a bola  $B_{E'}$  é compacta na topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  de  $E'$ .*

**Demonstração.** Considere o produto cartesiano generalizado  $Y := \prod_{x \in E} \mathbb{K}$ , ou seja, os elementos de  $Y$  têm a forma  $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$  com  $\omega_x \in \mathbb{K}$  para todo  $x \in E$ . Para cada  $x \in E$  considere a função

$$\pi_x : Y \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \pi_x(\omega) = \omega_x.$$

De modo simplificado, podemos dizer que  $\pi_x$  é a projeção na  $x$ -ésima coordenada. Munimos  $Y$  com a topologia produto, que é a menor topologia em  $Y$  que torna contínuas as funções  $(\pi_x)_{x \in E}$ . Considere a função

$$\Psi : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow Y, \quad \Psi(\varphi) = (\varphi(x))_{x \in E}.$$

Para cada  $x \in E$ ,  $\pi_x \circ \Psi = J_E(x)$ , que é contínua na topologia fraca-estrela; logo, da Proposição 6.1.3(f), concluímos que  $\Psi$  é contínua. É evidente que  $\Psi$  é

injetora. Para provar que  $\Psi$  é um homeomorfismo sobre sua imagem falta mostrar que  $\Psi^{-1}: \Psi(E') \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$  é contínua. Para isso seja  $x \in E$ . De

$$J_E(x) \circ \Psi^{-1}((\varphi(y))_{y \in E}) = J_E(x) (\Psi^{-1}((\varphi(y))_{y \in E})) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

concluimos que  $J_E(x) \circ \Psi^{-1}$  é a restrição de  $\pi_x$  a  $\Psi(E')$ , e portanto contínua. Assim  $J_E(x) \circ \Psi^{-1}$  é contínua para todo  $x \in E$ , o que nos permite garantir, pela Proposição 6.3.2(e), que  $\Psi^{-1}$  é contínua. Provamos então que  $\Psi: (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \Psi(E')$  é um homeomorfismo. Em particular,  $(B_{E'}, \sigma(E', E))$  é homeomorfo a  $\Psi(B_{E'})$  com a topologia produto. Basta então provar que  $\Psi(B_{E'})$  é compacto em  $\Psi(E')$  na topologia produto. É claro que basta mostrar que  $\Psi(B_{E'})$  é compacto em  $Y$ . Como  $|\varphi(x)| \leq \|x\|$  para todos  $x \in E$  e  $\varphi \in B_{E'}$ ,  $\Psi(B_{E'}) \subseteq \prod_{x \in E} B_{\mathbb{K}}[0, \|x\|]$ . Cada bola fechada  $B_{\mathbb{K}}[0, \|x\|]$  é compacta em  $\mathbb{K}$ , logo  $\prod_{x \in E} B_{\mathbb{K}}[0, \|x\|]$  é compacto em  $Y$  pelo Teorema de Tychonof.

Resta provar que  $\Psi(B_{E'})$  é fechado em  $Y$ . Essa é, entretanto, uma tarefa fácil. Para isso considere  $\varphi_\lambda \in B_{E'}$  para todo  $\lambda$  e uma rede  $(\Psi(\varphi_\lambda))$  em  $\Psi(B_{E'})$  que converge na topologia produto para  $w = (\omega_x)_{x \in E} \in Y$ . Pela Proposição 6.1.3(e) sabemos que

$$\varphi_\lambda(x) = \pi_x((\varphi_\lambda(x))_{x \in E}) = \pi_x(\Psi(\varphi_\lambda)) \xrightarrow{\lambda} \pi_x(w) = w_x,$$

para todo  $x \in E$ . Definamos

$$\varphi: E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi(x) = \omega_x.$$

A linearidade de  $\varphi$  segue da continuidade das operações de espaço vetorial. Para a continuidade de  $\varphi$ , como  $|\varphi_\lambda(x)| \leq \|x\|$  para todo  $\lambda$  e todo  $x \in E$ , da continuidade do módulo segue que

$$|\varphi(x)| = |\omega_x| = \lim_{\lambda} |\varphi_\lambda(x)| \leq \|x\|,$$

para todo  $x \in E$ . Isso prova que  $\varphi \in B_{E'}$ . É claro que  $\omega = \Psi(\varphi) \in \Psi(B_{E'})$ . ■

## 6.4 Compacidade fraca e reflexividade

Um dos principais resultados envolvendo compacidade em Análise Funcional é o fato de que a bola unitária fechada de um espaço reflexivo é compacta na topologia fraca. Esse resultado é uma consequência imediata do Lema abaixo e do Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki.

**Lema 6.4.1** *Seja  $E$  um espaço de Banach. O mergulho canônico  $J_E$  é um homeomorfismo de  $(E, \sigma(E, E'))$  sobre sua imagem  $J_E(E)$  com a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de  $E''$ . Isto é, a função*

$$J_E: (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow J_E(E) \subseteq (E'', \sigma(E'', E'))$$

*é um homeomorfismo.*

**Demonstração.** É claro que a função é bijetora. O fato de ser contínua e ter inversa contínua segue do fato de que, para toda rede  $(x_\lambda)_\lambda$  em  $E$ ,

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{w} x \text{ em } E &\iff \varphi(x_\lambda) \longrightarrow \varphi(x) \text{ para todo funcional } \varphi \in E' \\ &\iff J_E(x_\lambda)(\varphi) \longrightarrow J_E(x)(\varphi) \text{ para todo funcional } \varphi \in E' \\ &\iff J_E(x_\lambda) \xrightarrow{w^*} J_E(x) \text{ em } E'' \\ &\iff J_E(x_\lambda) \xrightarrow{w^*} J_E(x) \text{ em } J_E(E). \end{aligned}$$

A primeira equivalência decorre de uma aplicação da Proposição 6.1.3(e) para a topologia fraca, a segunda é óbvia, a terceira decorre de uma nova aplicação da Proposição 6.1.3(e), agora para a topologia fraca-estrela, e a última do fato de que em  $J_E(E)$  estamos considerando a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de  $E''$ . ■

**Teorema 6.4.2** *Para todo espaço reflexivo  $E$ , a bola  $B_E$  é compacta na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ .*

**Demonstração.** Por  $E$  ser reflexivo,  $J_E(E) = E''$ , logo  $J_E: (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (E'', \sigma(E'', E'))$  é homeomorfismo pelo Lema 6.4.1. O Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki garante que  $B_{E''}$  é compacta na topologia  $\sigma(E'', E')$ , portanto  $B_E = J_E^{-1}(B_{E''})$  é compacta na topologia  $\sigma(E, E')$ . ■

Trabalharemos agora no sentido de provar que a recíproca do resultado acima é válida, isto é, apenas em espaços reflexivos a bola unitária é compacta na topologia fraca. Para isso precisamos de alguns resultados preparatórios.

**Lema 6.4.3** (Lema de Helly) *Sejam  $E$  um espaço de Banach real,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$  funcionais fixados e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  escalares fixados. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in B_E$  tal que  $|\varphi_j(x) - a_j| < \varepsilon$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .*
- (b) *Para todos escalares  $b_1, \dots, b_n$ ,  $\left| \sum_{j=1}^n b_j a_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right\|$ .*

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Sejam  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  escalares fixados. Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $x \in B_E$  de acordo com (a). Então

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n b_j a_j \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^n b_j a_j - \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x) \right| + \left| \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|b_j| \cdot |\varphi_j(x) - a_j|) + \left| \left( \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right) (x) \right| \leq \varepsilon \left( \sum_{j=1}^n |b_j| \right) + \left\| \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right\|, \end{aligned}$$

pois  $\|x\| \leq 1$ . Como isso é verdade para todo  $\varepsilon > 0$ , basta fazer  $\varepsilon \longrightarrow 0$  para obter (b).

(b)  $\implies$  (a) Considere o operador linear contínuo

$$T: E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Observe que (a) é equivalente a dizer que  $(a_1, \dots, a_n) \in \overline{T(B_E)}$ . Suponhamos que (a) não seja válido, isto é,  $(a_1, \dots, a_n) \notin \overline{T(B_E)}$ . Neste caso, em  $\mathbb{R}^n$  o conjunto convexo e compacto  $\{(a_1, \dots, a_n)\}$  é disjunto do conjunto convexo e fechado  $\overline{T(B_E)}$ . Pela forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach (Teorema 3.4.9), existem um funcional  $\varphi \in (\mathbb{R}^n)'$  e um número real  $r$  tais que

$$\varphi(T(x)) < r < \varphi((a_1, \dots, a_n)) \text{ para todo } x \in B_E.$$

Podemos tomar  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tais que  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n b_j x_j$  para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Daí,

$$\sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x) < r < \sum_{j=1}^n b_j a_j \text{ para todo } x \in B_E.$$

Para cada  $x \in B_E$ , como  $-x \in B_E$ ,

$$-\sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(-x) < r.$$

Portanto

$$\left| \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x) \right| < r < \sum_{j=1}^n b_j a_j \text{ para todo } x \in B_E.$$

Tomando o supremo para  $x \in B_E$  chegamos a

$$\left\| \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right\| \leq r < \sum_{j=1}^n b_j a_j \leq \left| \sum_{j=1}^n b_j a_j \right|.$$

A demonstração está completa pois isso contradiz (b). ■

**Teorema 6.4.4** (Teorema de Goldstine) *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $J_E: E \longrightarrow E''$  o mergulho canônico. Então  $J_E(B_E)$  é denso em  $B_{E''}$  na topologia fraca-estrela.*

**Demonstração.** Queremos mostrar que  $\overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')} = B_{E''}$ . Como  $J_E$  é uma isometria,  $J_E(B_E) \subseteq B_{E''}$ . Pelo Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki sabemos que  $B_{E''}$  é compacto na topologia fraca-estrela, e portanto fechado na topologia fraca-estrela, pois esta topologia é de Hausdorff. Assim  $\overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')} \subseteq \overline{B_{E''}}^{\sigma(E'', E')} = B_{E''}$ .

Provaremos a inclusão inversa apenas no caso real. Para o caso complexo o leitor terá que esperar até o Capítulo 8, onde daremos uma demonstração que inclui o caso complexo. Seja  $f \in B_{E''}$ . Devemos provar que  $J_E(B_E)$  intersecta toda vizinhança de  $f$

na topologia fraca-estrela. É claro que basta provar que isso ocorre para toda vizinhança básica. Seja então  $V$  uma tal vizinhança básica de  $f$  na topologia fraca-estrela. Pela Proposição 6.3.2(b) existem  $\varepsilon > 0$  e funcionais  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$  tais que

$$V = \{g \in E'' : |g(\varphi_i) - f(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Para todos  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i f(\varphi_i) \right| = \left| f \left( \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i \right) \right| \leq \|f\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i \right\|.$$

Pelo Lema 6.4.3 existe  $x \in B_E$  tal que

$$|J_E(x)(\varphi_i) - f(\varphi_i)| = |\varphi_i(x) - f(\varphi_i)| < \varepsilon$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Isso prova que  $J_E(x) \in J_E(B_E) \cap V$  e completa a demonstração. ■

Estamos agora em condições de caracterizar os espaços reflexivos como aqueles nos quais a bola unitária fechada é fracamente compacta:

**Teorema 6.4.5** (Teorema de Kakutani) *Um espaço de Banach  $E$  é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada  $B_E$  é compacta na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ .*

**Demonstração.** Uma das implicações já foi provada no Teorema 6.4.2. Para a implicação inversa, suponha que  $B_E$  seja compacta na topologia fraca. Como função contínua leva compactos em compactos, do Lema 6.4.1 segue que  $J_E(B_E)$  é compacto na topologia fraca-estrela. Mas a topologia fraca-estrela é de Hausdorff (Proposição 6.3.2(d)), portanto  $J_E(B_E)$  é fechado na topologia fraca-estrela pois compactos em espaços de Hausdorff são fechados. Isso quer dizer que  $J_E(B_E) = \overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')}$ , e do Teorema de Goldstine segue que  $J_E(B_E) = B_{E''}$ . Da linearidade de  $J_E$  concluímos que  $J_E(E) = E''$ . ■

**Corolário 6.4.6** *Se  $E$  é reflexivo, então todo subespaço fechado de  $E$  é reflexivo.*

**Demonstração.** Seja  $F$  um subespaço fechado de  $E$ . É fácil verificar (cf. Exercício 6.8.4) que a topologia fraca  $\sigma(F, F')$  de  $F$  é precisamente a topologia induzida em  $F$  pela topologia fraca  $\sigma(E, E')$  de  $E$ . Como  $B_F$  é convexa e fechada em  $F$ , pelo Teorema 6.2.11  $B_F$  é fechada na topologia fraca  $\sigma(F, F')$ . Assim,  $B_F$  é um subconjunto de  $B_E$  fechado na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ . Como  $B_E$  é compacta nesta topologia  $\sigma(E, E')$  pelo Teorema 6.3.9 e como fechados dentro de compactos são compactos, resulta que  $B_F$  é também compacta na topologia fraca  $\sigma(E, E')$  e consequentemente na topologia  $\sigma(F, F')$ . O Teorema 6.4.5 revela que  $F$  é reflexivo. ■

## 6.5 Metrizabilidade e separabilidade

Já vimos que em dimensão infinita as topologias fraca e fraca-estrela nunca coincidem com a topologia da norma. O máximo então que podemos esperar dessas topologias fracas é que sejam metrizáveis. O objetivo desta seção é mostrar que essa possibilidade está intimamente relacionada com a separabilidade do espaço.

**Proposição 6.5.1** *Se  $E$  é separável então  $(B_{E'}, \sigma(E', E))$  é metrizável.*

**Demonstração.** Seja  $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  um subconjunto enumerável e denso em  $E$ . Defina  $X = \{x_n \in Y : x_n \in B_E\}$ , note que  $X$  é denso em  $B_E$  e considere

$$d: B_{E'} \times B_{E'} \longrightarrow [0, +\infty) \quad , \quad d(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi(x_n) - \psi(x_n)|.$$

É fácil ver que  $d$  está bem definida e é uma métrica. Para mostrar que a topologia em  $B_{E'}$  induzida pela métrica  $d$  coincide com a topologia fraca-estrela devemos provar que, para cada  $\varphi_0 \in B_{E'}$ , toda vizinhança de  $\varphi_0$  na topologia fraca-estrela está contida em uma bola aberta centrada em  $\varphi_0$  segundo a métrica  $d$  e vice-versa. Para isso seja  $\varphi_0 \in B_{E'}$ . Começemos com uma vizinhança  $V$  de  $\varphi_0$  na topologia fraca-estrela. Pela Proposição 6.3.2(b) existem  $\varepsilon > 0$  e  $z_1, \dots, z_m \in E$  tais que

$$V = \{\varphi \in B_{E'} : |\varphi(z_i) - \varphi_0(z_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, m\}.$$

É claro que podemos supor que os vetores  $z_i$  são não-nulos. Chame  $M = \max\{\|z_1\|, \dots, \|z_m\|\}$ ,  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  e  $y_i = \frac{z_i}{\|z_i\|}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Então

$$V' := \{\varphi \in B_{E'} : |\varphi(y_i) - \varphi_0(y_i)| < \delta, i = 1, \dots, m\}$$

é também uma vizinhança de  $\varphi_0$  na topologia fraca-estrela,  $V' \subseteq V$  e  $\|y_i\| = 1$  para  $i = 1, \dots, m$ . Para cada  $i = 1, \dots, m$ , da densidade de  $X$  em  $B_E$  existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_{n_i} - y_i\| < \frac{\delta}{4}$ . Escolha  $r > 0$  tal que  $r < \min\left\{\frac{\delta}{2^{n_i+1}} : i = 1, \dots, m\right\}$ . Dessa forma  $r \cdot 2^{n_i} < \frac{\delta}{2}$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Se  $\varphi \in B_{E'}$  e  $d(\varphi, \varphi_0) < r$ , então

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\varphi(x_{n_i}) - \varphi_0(x_{n_i})| < r \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq m.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} |\varphi(y_i) - \varphi_0(y_i)| &= |\varphi(y_i - x_{n_i}) - \varphi_0(y_i - x_{n_i}) + \varphi(x_{n_i}) - \varphi_0(x_{n_i})| \\ &\leq \|\varphi - \varphi_0\| \cdot \|y_i - x_{n_i}\| + |\varphi(x_{n_i}) - \varphi_0(x_{n_i})| \\ &< (\|\varphi\| + \|\varphi_0\|) \frac{\delta}{4} + r \cdot 2^{n_i} \leq 2 \cdot \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, \dots, m$ , e portanto  $\varphi \in V'$ . Provamos então que

$$B(\varphi_0, r) = \{\varphi \in B_{E'} : d(\varphi, \varphi_0) < r\} \subseteq V' \subseteq V.$$



Reciprocamente consideremos a bola aberta  $B(\varphi_0, r_0) = \{\varphi \in B_{E'} : d(\varphi, \varphi_0) < r_0\}$ , onde  $\varphi_0 \in B_{E'}$  e  $r_0 > 0$ . Como a série  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$  converge, podemos tomar  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande a ponto de

$$2 \left( \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) < \frac{r_0}{2}.$$

Escolha agora  $0 < \varepsilon < \frac{r_0}{2}$ . Então

$$W := \{\varphi \in B_{E'} : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, m\}$$

é uma vizinhança de  $\varphi_0$  na topologia fraca-estrela. Basta provar que  $W \subseteq B(\varphi_0, r_0)$  para completar a demonstração. Mas isso é verdade pois, dado  $\varphi \in W$ ,

$$\begin{aligned} d(\varphi, \varphi_0) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i} |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| \\ &< \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i} \right) + \|\varphi - \varphi_0\| \left( \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \|x_i\| \right) < r_0. \end{aligned}$$

■

Conversaremos sobre a (não) metrizabilidade da topologia fraca em  $E$  e da topologia fraca-estrela em  $E'$  na Seção 6.7.

**Corolário 6.5.2** *Se  $E$  é separável, então  $E'$  é separável na topologia fraca-estrela.*

**Demonstração.** Para cada  $n$  natural, na topologia fraca-estrela o conjunto  $nB_{E'}$  é compacto pelo Teorema 6.3.9 e metrizável pela Proposição 6.5.1. Como subconjuntos compactos de espaços métricos são separáveis (veja [53, Exemplo 9.1.5]), segue que  $nB_{E'}$  é separável na topologia fraca-estrela para todo  $n$ . Portanto  $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_{E'}$  é separável na topologia fraca-estrela como a união enumerável de conjuntos separáveis nesta topologia. ■

**Proposição 6.5.3** *Se  $E'$  é separável, então  $(B_E, \sigma(E, E'))$  é metrizável.*

**Demonstração.** Como subconjunto de espaço separável é também separável, podemos considerar um conjunto  $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$  denso no conjunto  $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1\}$ . Agora basta proceder como na demonstração da Proposição 6.5.1 com a métrica

$$d: B_E \times B_E \longrightarrow [0, +\infty) \text{ , } d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x - y)|.$$

■

O seguinte resultado é bastante útil. Conversaremos sobre sua recíproca na Seção 6.7.

**Teorema 6.5.4** *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência limitada no espaço reflexivo  $E$ . Chame de  $F$  o fecho do subespaço gerado pelos elementos da sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Então  $F$  é separável pelo Lema 1.6.3 e reflexivo pelo Corolário 6.4.6. Segue do Teorema 4.3.7 que  $F'$  é separável. Assim, na topologia fraca,  $B_F$  é compacta pelo Teorema 6.4.5 e metrizável pela Proposição 6.5.3. Tomando  $L$  tal que  $\|x_n\| \leq L$  para todo  $n$  resulta que a sequência  $(\frac{x_n}{L})_{n=1}^\infty$  encontra-se no espaço métrico compacto  $(B_F, \sigma(F, F'))$ . Como em espaços métricos sequências em compactos admitem subsequências convergentes, segue que  $(\frac{x_n}{L})_{n=1}^\infty$  tem subsequência que converge na topologia fraca  $\sigma(F, F')$ , e portanto converge também na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ . A volta para a sequência original  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é trivial. ■

Vejamos uma outra consequência bastante interessante da Proposição 6.5.1. Na Proposição 3.3.3 provamos que  $\ell_\infty$  contém cópias isométricas de todos os espaços separáveis. Mas  $\ell_\infty$  não é separável, o que leva a questionar se existe um espaço separável que contém cópia isométrica de todo espaço separável. Veremos a seguir que tal espaço separável universal existe e é um dos nossos velhos conhecidos.

**Teorema 6.5.5** (Teorema de Banach–Mazur) *Seja  $E$  um espaço normado separável. Então  $E$  é isometricamente isomorfo a um subespaço de  $C[0, 1]$ .*

**Demonstração.** Como  $E$  é separável,  $(B_{E'}, \sigma(E', E))$  é compacto pelo Teorema 6.3.9 e metrizável pela Proposição 6.5.1. Assim, pelo Teorema de Hahn–Mazurkiewicz (veja [53, Proposição 9.4.6]) existe uma função

$$f: [0, 1] \longrightarrow (B_{E'}, \sigma(E', E))$$

sobrejetora e contínua. Defina

$$g: E \longrightarrow C[0, 1], \quad g(x)(t) = f(t)(x).$$

Vejamos que, para cada  $x \in E$ ,  $g(x) \in C[0, 1]$ . De fato se  $t_n \longrightarrow t$  em  $[0, 1]$ , da continuidade de  $f$  resulta que  $f(t_n) \xrightarrow{w^*} f(t)$ , e portanto

$$g(x)(t_n) = f(t_n)(x) = J_E(x)(f(t_n)) \longrightarrow J_E(x)(f(t)) = f(t)(x) = g(x)(t).$$

É imediato que  $g$  é linear. Usando a sobrejetividade de  $f$  e o Corolário 3.1.5 concluímos que

$$\|g(x)\| = \sup_{t \in [0, 1]} |g(x)(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)(x)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|$$

para todo  $x \in E$ . Isso prova que  $g$  é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. ■

**Corolário 6.5.6** *Os espaços  $C[0, 1]$ ,  $L_1[0, 1]$  e  $L_\infty[0, 1]$  não são reflexivos.*

**Demonstração.** Como  $c_0$  é separável,  $C[0, 1]$  contém uma cópia de  $c_0$  pelo Teorema 6.5.5. Mas  $c_0$  não é reflexivo (Exemplo 4.3.6(c)), logo  $C[0, 1]$  não é reflexivo pelo Corolário 6.4.6. Mas  $C[0, 1]$  é subespaço fechado de  $L_\infty[0, 1]$ , logo esse mesmo Corolário 6.4.6 garante que  $L_\infty[0, 1]$  não é reflexivo. Como  $L_\infty[0, 1] = (L_1[0, 1])'$  (Teorema 4.1.2), a não reflexividade de  $L_1[0, 1]$  segue da Proposição 4.3.13. ■

## 6.6 Espaços uniformemente convexos

Nossa intuição geométrica nos diz claramente que a bola unitária fechada do espaço euclidiano  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  é redonda, enquanto que as dos espaços  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  e  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  não são nada redondas; na verdade são quadradas. Esses dois últimos exemplos são extremos, pois suas esferas unitárias contém segmentos de retas.

Para evitar que a esfera unitária fechada  $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$  de um espaço  $E$  contenha segmentos de reta, basta pedir que se  $x, y \in B_E$ , então o ponto médio do segmento que liga  $x$  a  $y$  esteja no interior da bola, isto é,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 \text{ sempre que } \|x\| \leq 1 \text{ e } \|y\| \leq 1.$$

Mas a esfera unitária de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ , ou seja, a circunferência, satisfaz uma propriedade bem mais forte do que simplesmente não conter segmentos de reta. Fixe uma distância  $\varepsilon > 0$  e tome dois pontos  $x$  e  $y$  quaisquer na circunferência que distem (pelo menos)  $\varepsilon$  entre si. Apelando novamente para a intuição geométrica, percebemos que, independentemente de onde se localizam os pontos  $x$  e  $y$  na circunferência, o ponto médio do segmento que os une permanece dentro da circunferência e, mais importante, a uma distância segura da circunferência. Ou seja, podemos variar os pontos  $x$  e  $y$  na circunferência, apenas mantendo-os a uma distância  $\varepsilon$ , que não há risco do ponto médio do intervalo que os une se aproximar perigosamente da circunferência. Estudaremos nesta seção os espaços normados que compartilham com os espaços euclidianos esse comportamento uniforme dos pontos da bola unitária.

**Definição 6.6.1** Dizemos que um espaço normado  $E$  é *uniformemente convexo* ou, mais precisamente, que sua norma é *uniformemente convexa* se, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \text{ sempre que } x, y \in B_E \text{ e } \|x - y\| \geq \varepsilon.$$

Como dois pontos de  $B_E$  distam no máximo 2 entre si, é suficiente mostrar a condição acima para  $0 < \varepsilon \leq 2$ .

Alguns livros mais recentes empregam o termo *espaço uniformemente redondo* (uniformly rotund space), que de fato traduz melhor a ideia geométrica subjacente.

**Exemplo 6.6.2** Todo espaço de Hilbert  $H$  é uniformemente convexo. Com efeito, dados  $x, y \in B_H$  e  $0 < \varepsilon \leq 2$ , da Lei do Paralelogramo (Proposição 5.1.7(a)), resulta que se  $\|x - y\| \geq \varepsilon$  então

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x - y\|^2}{4} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Basta então tomar  $\delta = 1 - (\varepsilon^2/4)^{\frac{1}{2}} > 0$ .

**Exemplo 6.6.3** Os espaços  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  e  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  não são uniformemente convexos. De fato, dado  $0 < \varepsilon < 1$ , basta tomar dois vetores que estão no mesmo segmento de reta da esfera unitária e distam  $\varepsilon$  um do outro. Completando com zero nas demais coordenadas, transformamos esses pares ordenados em sequências, o que prova que os espaços  $c_0$ ,  $\ell_1$  e  $\ell_\infty$  não são uniformemente convexos.

**Observação 6.6.4** Como  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  é Hilbert, os exemplos acima mostram, em particular, que espaço isomorfo a espaço uniformemente convexo nem sempre é uniformemente convexo.

Trabalharemos agora no sentido de provar que espaços uniformemente convexos são reflexivos, o que, por um lado garante uma boa propriedade aos espaços uniformemente convexos e, por outro lado, fornece muitos exemplos de espaços que não são uniformemente convexos.

Seja  $(I, \leq)$  um conjunto dirigido. Em  $I \times I$  consideramos a direção natural dada por  $(\alpha_1, \alpha_2) \leq (\beta_1, \beta_2)$  se, e somente se,  $\alpha_1 \leq \beta_1$  e  $\alpha_2 \leq \beta_2$ .

**Lema 6.6.5** *Seja  $E$  um espaço uniformemente convexo. Se  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  é uma rede em  $B_E$  tal que  $\lim_{(\alpha, \beta)} \left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\| = 1$ , então  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  é uma rede de Cauchy, isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\alpha_0 \in I$  tal que  $\|x_\alpha - x_\beta\| < \varepsilon$  para todos  $\alpha, \beta \in I$  com  $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ .*

**Demonstração.** Suponha que a rede  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  não seja de Cauchy. Neste caso existe  $0 < \varepsilon \leq 2$  tal que para todo índice  $\alpha_0 \in I$  correspondem índices  $\alpha, \beta \geq \alpha_0$  tais que  $\|x_\alpha - x_\beta\| \geq \varepsilon$ . Tomemos o número  $\delta > 0$  que corresponde a este  $\varepsilon > 0$  de acordo com a definição de espaço uniformemente convexo. Temos, em particular, que

$$\left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

O resultado segue pois isso contradiz a convergência  $\lim_{(\alpha, \beta)} \left\| \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right\| = 1$ . ■

**Teorema 6.6.6** (Teorema de Milman–Pettis) *Espaços de Banach uniformemente convexos são reflexivos.*

**Demonstração.** Seja  $E$  um espaço de Banach uniformemente convexo. Dado um funcional  $f \in E''$ ,  $\|f\| = 1$ , pelo Teorema 6.4.4 existe uma rede  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$  em  $B_E$  tal que  $J_E(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} f$ . Vejamos que, com a direção natural em  $I \times I$ ,

$$J_E\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right) \xrightarrow{w^*} f. \quad (6.3)$$

Para isso considere uma vizinhança  $W$  de  $f$  na topologia fraca-estrela. No Exercício 6.8.14 o leitor comprovará que existe uma vizinhança  $W_0$  da origem na topologia fraca-estrela tal que  $W = f + W_0$ . Seja

$$V = \{g \in E'' : |g(\varphi_i)| < \delta, \ i = 1, \dots, m\}$$

uma vizinhança básica da origem na topologia fraca-estrela contida em  $W_0$ , onde  $\delta > 0$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E'$ . Então

$$V_0 := \left\{g \in E'' : |g(\varphi_i)| < \frac{\delta}{2}, \ i = 1, \dots, m\right\}$$

é uma vizinhança da origem na topologia fraca-estrela e  $V_0 + V_0 \subseteq V \subseteq W_0$ . Como  $\frac{f}{2} + V_0$  é vizinhança de  $\frac{f}{2}$  na topologia fraca-estrela e  $J_E\left(\frac{x_\alpha}{2}\right) \xrightarrow{w^*} \frac{f}{2}$ , existe  $\alpha_1 \in I$  tal que

$$J_E\left(\frac{x_\alpha}{2}\right) \in \frac{f}{2} + V_0 \text{ sempre que } \alpha \geq \alpha_1.$$

Logo,

$$J_E\left(\frac{x_\alpha}{2}\right) + J_E\left(\frac{x_\beta}{2}\right) \in \left(\frac{f}{2} + V_0\right) + \left(\frac{f}{2} + V_0\right) \subseteq (f + W_0) = W$$

sempre que  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha_1, \alpha_1)$ . Isso comprova (6.3). Seja  $\varepsilon > 0$ . Da definição de  $\|f\|$  existe  $\varphi_0 \in E'$  tal que  $\|\varphi_0\| = 1$  e  $|f(\varphi_0)| > \|f\| - \varepsilon$ . De (6.3) segue que

$$\lim_{(\alpha, \beta)} \left| J_E\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)(\varphi_0) \right| = |f(\varphi_0)| > \|f\| - \varepsilon,$$

e portanto existe  $(\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \in I \times I$  tal que

$$\left| J_E\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)(\varphi_0) \right| > \|f\| - \varepsilon \text{ sempre que } (\alpha, \beta) \geq (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon).$$

Como  $\left\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right\| \leq 1$  e  $J_E$  é uma isometria,

$$1 \geq \left\| J_E\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right) \right\| \geq \left| J_E\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)(\varphi_0) \right| > \|f\| - \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

sempre que  $(\alpha, \beta) \geq (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon)$ . Decorre então que

$$\left\| \frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta) \right\| = \left\| J_E\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right) \right\| \longrightarrow 1.$$

Segue do Lema 6.6.5 que  $(x_\alpha)_\alpha$  é uma rede de Cauchy em  $E$ . Como  $E$  é completo existe  $x_0 \in E$  tal que  $x_\alpha \longrightarrow x_0$  (veja Exercício 6.8.24), e portanto  $J_E(x_\alpha) \longrightarrow J_E(x_0)$ . Mas convergência em norma implica convergência fraca-estrela, logo,  $J_E(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} J_E(x_0)$ . O fato da topologia fraca-estrela ser de Hausdorff implica que  $J_E(x_0) = f$ , provando que  $E$  é reflexivo. ■

Antes de seguir em frente vejamos mais uma consequência interessante do Lema 6.6.5:

**Proposição 6.6.7** *Sejam  $E$  um espaço de Banach uniformemente convexo e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $E$ . Se  $x_n \xrightarrow{w} x$  e  $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ , então  $x_n \longrightarrow x$ .*

**Demonstração.** Não há o que fazer no caso em que  $x = 0$ . Suponhamos então  $x \neq 0$ . Neste caso, de  $\|x_n\| \longrightarrow \|x\| > 0$  podemos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n\| > 0$  para todo  $n \geq n_0$ . Chamemos  $y = \frac{x}{\|x\|}$  e  $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$  para todo  $n \geq n_0$ . É imediato que  $y_n \xrightarrow{w} y$ . Como  $y \neq 0$ , pelo Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.4 existe  $\varphi \in E'$  com  $\|\varphi\| = 1$  e  $\varphi(y) = \|y\| = 1$ . Para todos  $n, m \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{\varphi(y_n)}{2} + \frac{\varphi(y_m)}{2} \right| = \left| \varphi\left(\frac{y_n + y_m}{2}\right) \right| \leq \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\| \leq \frac{\|y_n\|}{2} + \frac{\|y_m\|}{2} = 1.$$

Desta desigualdade e da convergência  $\varphi(y_n) \longrightarrow \varphi(y) = 1$  decorre que  $\lim_{m,n} \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\| = 1$ .

O Lema 6.6.5 nos diz que a sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy, logo convergente na topologia da norma, e por conseguinte na topologia fraca, para um certo  $z$ . Como a topologia fraca é de Hausdorff, é claro que  $z = y$ . O resultado segue pois

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \| \|x_n\| y_n - \|x\| y \| \leq \| \|x_n\| y_n - \|x_n\| y \| + \| \|x_n\| y - \|x\| y \| \\ &= \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \| \|x_n\| - \|x\| \| \cdot \|y\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

■

Do Teorema 6.6.6 e do Corolário 6.5.6 concluímos que  $L_1(X, \Sigma, \mu)$  e  $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$  não são uniformemente convexos. O objetivo agora é mostrar que os espaços  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  são uniformemente convexos para  $1 < p < \infty$ . Para isso provaremos as desigualdades de Clarkson.

**Lema 6.6.8** *Sejam  $2 \leq p < \infty$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então*

$$|a + b|^p + |a - b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p).$$

**Demonstração.** Use a desigualdade de Hölder (Proposição 1.4.1) para obter

$$\begin{aligned} (|a + b|^p + |a - b|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq ((a + b)^2 + (a - b)^2)^{\frac{1}{2}} = (2a^2 + 2b^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} (|a|^2 + |b|^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} (|a|^2 \cdot 1 + |b|^2 \cdot 1)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} \left[ \left( (|a|^2)^{\frac{p}{2}} + (|b|^2)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \cdot (1 + 1)^{\frac{p-2}{p}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{p-1}{p}} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Eleve os dois lados a  $p$  para obter o resultado. ■

**Proposição 6.6.9** (Primeira desigualdade de Clarkson) *Sejam  $2 \leq p < \infty$  e  $f, g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Então*

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leq 2^{p-1} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

**Demonstração.** Basta fazer  $a = f(t)$  e  $b = g(t)$  no Lema 6.6.8 e integrar. ■

O caso  $1 < p < 2$  é um pouco mais trabalhoso. Assim como no caso anterior precisamos de um lema aritmético. Por simplicidade denotaremos por  $q$  o conjugado do número  $p > 1$ , isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Lema 6.6.10** *Seja  $1 < p \leq 2$ . Então*

$$|a + b|^q + |a - b|^q \leq 2(|a|^p + |b|^p)^{q-1} \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração.** Considere a função  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(\alpha, t) = (1 + \alpha^{1-q}t)(1 + \alpha t)^{q-1} + (1 - \alpha^{1-q}t)(1 - \alpha t)^{q-1}.$$

Note que  $(1 - \alpha^{-q}) \leq 0$  e  $(1 + \alpha t)^{q-2} - (1 - \alpha t)^{q-2} \geq 0$  pois  $q \geq 2$ . Logo

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = (q-1)t(1 - \alpha^{-q}) [(1 + \alpha t)^{q-2} - (1 - \alpha t)^{q-2}] \leq 0.$$

Como  $t^{p-1} \leq 1$ ,

$$(1 + t)^q + (1 - t)^q = f(1, t) \leq f(t^{p-1}, t) = 2(1 + t^p)^{q-1},$$

provando que

$$(1 + t)^q + (1 - t)^q \leq 2(1 + t^p)^{q-1} \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1. \quad (6.4)$$

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Como a desigualdade que queremos provar é simétrica em  $a$  e  $b$ , podemos supor  $a \leq b$ . O caso  $a = b$  é imediato, então podemos na verdade supor  $a < b$ . Dividamos em casos.

Caso  $a, b > 0$ . Basta aplicar (6.4) para  $t = \frac{a}{b}$  para obter a desigualdade desejada.

Caso  $a, b < 0$ . Aplique o caso anterior para  $-b$  e  $-a$ .

Caso  $a < 0$  e  $b > 0$ . Aplique o primeiro caso para  $-a$  e  $b$  (ou  $b$  e  $-a$ ). ■

**Proposição 6.6.11** (Segunda desigualdade de Clarkson) *Sejam  $1 < p \leq 2$  e  $f, g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Então*

$$\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q \leq 2 \left( \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right)^{q-1}.$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q &= \| |f + g|^q \|_{p-1} + \| |f - g|^q \|_{p-1} \leq \| |f + g|^q + |f - g|^q \|_{p-1} \\
&= \left( \int_X (|f + g|^q + |f - g|^q)^{p-1} d\mu \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq 2 \left( \int_X (|f|^p + |g|^p)^{(p-1)(q-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= 2 \left( \int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p-1}} = 2 \left( \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Na primeira passagem usamos que  $\|h\|_p^q = \| |h|^q \|_{p-1}$  pois  $q = \frac{p}{p-1}$ ; na segunda usamos a desigualdade de Minkowski invertida (Teorema 1.7.2) pois  $0 < p-1 < 1$ ; na terceira usamos a definição de  $\|\cdot\|_{p-1}$ ; na quarta usamos o Lema 6.6.10 para  $a = f(t)$  e  $b = g(t)$ ; na quinta e na sexta usamos que  $(p-1)(q-1) = 1$ . ■

**Teorema 6.6.12**  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  é uniformemente convexo para todo  $1 < p < \infty$ .

**Demonstração.** Sejam  $0 < \varepsilon \leq 2$  e  $f, g \in B_{L_p(X, \Sigma, \mu)}$  tais que  $\|f - g\|_p \geq \varepsilon$ . Façamos primeiro o caso  $2 \leq p < \infty$ . Da Proposição 6.6.9 decorre que

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1} \left( \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right) - \|f - g\|_p^p \leq 2^{p-1}(1 + 1) - \varepsilon^p = 2^p - \varepsilon^p.$$

Portanto

$$\left\| \frac{f + g}{2} \right\|_p \leq \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Basta tomar  $\delta = 1 - \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Para  $1 < p < 2$ , da Proposição 6.6.11 decorre que

$$\|f + g\|_p^q \leq 2(1 + 1)^{q-1} - \|f - g\|_p^q \leq 2^q - \varepsilon^q.$$

De forma análoga ao caso anterior basta tomar  $\delta = 1 - \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$ . ■

Conforme prometido no Capítulo 4, exibiremos a seguir uma demonstração alternativa do Teorema 4.1.2 para o caso de escalares reais e  $1 < p < \infty$ . Naquela ocasião obtivemos a reflexividade dos espaços  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , a partir do Teorema 4.1.2. Observe que acabamos de provar, sem usar o Teorema 4.1.2 ou alguma de suas consequências, que  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , é uniformemente convexo, portanto reflexivo. Temos assim uma demonstração da reflexividade de tais espaços que independe do Teorema 4.1.2. É exatamente isso que nos permitirá dar agora uma nova demonstração do Teorema 4.1.2 para  $1 < p < \infty$  no caso real:

**Teorema 6.6.13** Sejam  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $1 < p < \infty$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Então a correspondência  $g \mapsto \varphi_g$  estabelece um isomorfismo isométrico entre  $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$  e  $L_p(X, \Sigma, \mu)'$  em que a relação de dualidade é dada por

$$\varphi_g(f) = \int_X fg d\mu \text{ para toda } f \in L_p(X, \Sigma, \mu).$$



**Demonstração.** Pelo Exemplo 4.1.1 basta mostrar que o operador linear

$$T: L_{p^*}(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow L_p(X, \Sigma, \mu)', \quad T(g)(f) = \int_X fg \, d\mu,$$

é sobrejetor. A imagem de  $T$  é fechada por ser isometricamente isomorfa ao espaço de Banach  $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . Logo é suficiente mostrar que  $T(L_{p^*}(X, \Sigma, \mu))$  é denso em  $L_p(X, \Sigma, \mu)'$ . Argumentando por absurdo, suponhamos que não seja denso. Neste caso existe  $\varphi \in L_p(X, \Sigma, \mu)' - \overline{T(L_{p^*}(X, \Sigma, \mu))}$ . Pelo Corolário 3.4.10 existe  $\psi \in L_p(X, \Sigma, \mu)''$  tal que  $\|\psi\| = 1$  e  $\psi(h) = 0$  para toda  $h \in \overline{T(L_{p^*}(X, \Sigma, \mu))}$ . Em particular,  $\psi(T(g)) = 0$  para toda  $g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . Como  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  é reflexivo, existe  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  tal que  $\psi = J_{L_p(X, \Sigma, \mu)}(f)$ . Assim,

$$\int_X fg \, d\mu = T(g)(f) = J_{L_p(X, \Sigma, \mu)}(f)(T(g)) = \psi(T(g)) = 0$$

para toda  $g \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ . Tomando  $g = |f|^{p-2} \cdot f \in L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ , segue que

$$0 = \left( \int_X f \cdot |f|^{p-2} \cdot f \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p = \|J_{L_p(X, \Sigma, \mu)}(f)\| = \|\psi\| = 1.$$

Essa contradição completa a demonstração. ■

## 6.7 Comentários e notas históricas

A topologia gerada por uma família de funções também é chamada de *topologia induzida* (ou *topologia fraca induzida*) pela família de funções. Isso porque se considerarmos um subconjunto  $Y$  do espaço topológico  $X$ , a topologia induzida em  $Y$  por  $X$  coincide com a topologia gerada pela inclusão  $Y \hookrightarrow X$ . O termo *topologia inicial* é usado pelo grupo Bourbaki [11] e seus seguidores. Como vimos na demonstração do Teorema 6.3.9, essa topologia está intimamente relacionada com a topologia produto no produto cartesiano generalizado. Uma boa discussão sobre isso pode ser encontrada em [90, Section 8].

Sequências fracamente convergentes foram estudadas primeiramente por Hilbert em  $L_2[0, 1]$ , por Riesz em  $L_p[0, 1]$  e por Schur em  $\ell_1$ , mas a compreensão de que se tratava de uma topologia – e muito útil – veio apenas com von Neumann na década de 1930.

O Teorema 6.2.12 foi provado por I. Schur em 1921. Por causa deste teorema, um espaço no qual toda sequência fracamente convergente é convergente em norma é chamado de *espaço de Schur* (algumas vezes se diz que o espaço tem a *propriedade de Schur*). Entre os espaços de dimensão infinita com os quais temos trabalhado neste livro, apenas  $\ell_1$  é de Schur. O outro candidato natural seria  $L_1[0, 1]$ , que não é de Schur por conter uma cópia de  $\ell_2$  (veja [20, Theorem 1.2]), e de acordo com o Exercício 6.8.21 espaços que contêm subespaços reflexivos de dimensão infinita não são de Schur. O Capítulo 11 de [52] é inteiramente dedicado ao estudo dos subespaços reflexivos de  $L_1(\mu)$ .

Em 1928 Banach provou que bola unitária do dual de um espaço normado separável é sequencialmente compacta na topologia fraca-estrela. A forma geral do Teorema 6.3.9 foi provada por L. Alaoglu em 1940. O Teorema 6.4.5 também foi provado inicialmente por Banach para o caso separável e compacidade sequencial. Versões mais abstratas foram provadas sucessivamente por S. Kakutani, V. I. Smulian e W. F. Eberlein.

No Teorema 6.2.12 vimos que, mesmo em um espaço de dimensão infinita, pode acontecer das sequências convergentes em norma coincidirem com as sequências fracamente convergentes. Em trabalhos independentes publicados em 1975, B. Josefson e A. Nissenzweig provaram que isso nunca ocorre com a topologia fraca-estrela:

**Teorema 6.7.1** (Teorema de Josefson–Nissenzweig) *Todo espaço de Banach dual de dimensão infinita admite uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  tal que  $x_n \xrightarrow{w^*} 0$  e  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$ .*

Para a demonstração veja [19, Chapter XII].

A Proposição 6.5.1 induz ao questionamento sobre a metrizabilidade da topologia fraca-estrela em  $E'$  e também da topologia fraca em  $E$ . Em dimensão finita a resposta é obviamente verdadeira, ao contrário da dimensão infinita:

**Proposição 6.7.2** [63, Propositions 2.5.14 e 2.6.12]

- (a) *Se  $E$  é um espaço normado de dimensão infinita, então a topologia fraca em  $E$  não é metrizável.*
- (b) *Se  $E$  é um espaço de Banach de dimensão infinita, então a topologia fraca-estrela em  $E'$  não é metrizável.*

Em espaços métricos, em particular na topologia da norma de um espaço normado, um conjunto  $K$  é compacto se, e somente se, toda sequência em  $K$  admite subsequência convergente em  $K$ . A compreensão de que a topologia fraca goza dessa propriedade começou em 1940 quando V. L. Smulian provou toda sequência em um subconjunto fracamente compacto  $K$  de um espaço de Banach admite subsequência fracamente convergente em  $K$ . Em 1947 W. F. Eberlein provou a recíproca:

**Teorema 6.7.3** (Teorema de Eberlein–Smulian) *Um subconjunto  $K$  de um espaço de Banach é fracamente compacto se, e somente se, toda sequência em  $K$  admite subsequência fracamente convergente em  $K$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [19, Chapter III]. Combinando este resultado com o Teorema 6.4.5 obtemos a recíproca do Teorema 6.5.4. Resultado análogo ao Teorema de Eberlein–Smulian para a topologia fraca-estrela não é verdadeiro (veja [19, Exercise III.1]).

A noção de espaço uniformemente convexo foi introduzida por J. A. Clarkson em 1936, no mesmo trabalho em que demonstrou o Teorema 6.6.12. O Teorema 6.6.6 foi demonstrado, de forma independente, por D. P. Milman (1939), B. J. Pettis (1939) e S. Kakutani (1939).

Nenhuma das implicações

$$E \text{ uniformemente convexo} \iff E' \text{ uniformemente convexo}$$

é verdadeira. O exemplo a seguir foi comunicado aos autores por V. Ferenczi, a quem agradecemos publicamente. Chame de  $C$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado pela interseção do disco aberto centrado em 1 e raio 2 com o disco aberto centrado em -1 e raio 2. Chamando de  $\|\cdot\|_C$  o funcional de Minkowski de  $C$  (veja Definição 3.4.4 e Exercício 3.6.24),  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_C)$  é uniformemente convexo mas seu dual não é. A noção dual ao conceito de espaço uniformemente convexo é a noção de *espaço uniformemente suave*. Para maiores informações veja o Capítulo 5 de [63].

Os exemplos que vimos de espaços reflexivos que não são uniformemente convexos são todos de dimensão finita (Exemplo 6.6.3). Não é tarefa fácil exibir um espaço reflexivo de dimensão infinita que não é uniformemente convexo. Para isso veja [26, página 294], [68, Exercise 16.205] ou [87, Example 3, p. 166].

A Proposição 6.6.7 foi provada primeiramente para os espaços  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  por J. Radon em 1913 e F. Riesz em 1928. Por isso diz-se que um espaço no qual vale o resultado tem a *propriedade de Radon–Riesz*. Ou seja, a Proposição 6.6.7 comprova que espaços de Banach uniformemente convexos têm a propriedade de Radon–Riesz. Na literatura esta propriedade também é chamada de *propriedade de Kadets–Klee* e de *propriedade (H)*.

O conceito de espaço estritamente convexo foi mencionado – sem chamar a atenção para a terminologia – no início da Seção 6.6. Este conceito será formalmente introduzido e explorado nos exercícios. Para um exemplo de espaço estritamente convexo que não é reflexivo veja [63, Example 5.1.8].

Diz-se que uma propriedade dos espaços de Banach é uma *propriedade analítica* se é invariante por isomorfismos. Já uma *propriedade geométrica* é aquela que é invariante apenas por isomorfismos isométricos. Ou seja, uma propriedade geométrica tem a ver com a norma do espaço enquanto que uma propriedade analítica tem a ver apenas com a topologia induzida pela norma. Por exemplo, reflexividade é propriedade analítica (Exercício 4.5.26) e convexidade uniforme é propriedade geométrica (Observação 6.6.4 e Exercício 6.8.25). Nas últimas décadas a *geometria dos espaços de Banach*, ou seja, o estudo das propriedades geométricas dos espaços de Banach, tem sido uma das áreas mais efervescentes dentro da Análise Funcional, culminando com os avanços espetaculares descritos na Introdução deste livro. A atividade na área pode ser comprovada pelos dois (pesados) volumes do manual da geometria dos espaços de Banach [45, 46].

## 6.8 Exercícios

**Exercício 6.8.1** Demonstre a Proposição 6.1.1.

**Exercício 6.8.2** Demonstre a Proposição 6.1.3.

**Exercício 6.8.3** Sejam  $F$  um subespaço do espaço normado  $E$  e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $F$ . Prove que  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $F$  se, e somente se,  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ .

**Exercício 6.8.4** Seja  $F$  um subespaço do espaço normado  $E$ . Prove que a topologia fraca  $\sigma(F, F')$  de  $F$  é a topologia induzida em  $F$  pela topologia fraca  $\sigma(E, E')$  de  $E$ .

**Exercício 6.8.5** Analise a convergência fraca da sequência  $(e_n)_{n=1}^\infty$  formada pelos vetores unitários canônicos nos seguintes espaços:  $c_{00}, \ell_1, \ell_p$  com  $1 < p < \infty$  e  $\ell_\infty$ .

**Exercício 6.8.6** Prove que toda sequência ortonormal em um espaço de Hilbert converge fracamente para zero.

**Exercício 6.8.7** (a) Prove que se  $x_n \xrightarrow{w} x$  e  $y_n \rightarrow y$  em um espaço com produto interno, então  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

(b) Dê um exemplo em que  $x_n \xrightarrow{w} x$ ,  $y_n \xrightarrow{w} y$  mas  $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n=1}^\infty$  não é convergente.

**Exercício 6.8.8** É possível adaptar a demonstração do Teorema 6.2.12 para provar que redes fracamente convergentes em  $\ell_1$  são convergentes em norma?

**Exercício 6.8.9** Prove que todo conjunto não-vazio e aberto na topologia fraca de um espaço de dimensão infinita é ilimitado. Use isso para dar outra demonstração de que as topologias fraca e da norma nunca coincidem em dimensão infinita.

**Exercício 6.8.10** Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência no espaço de Banach  $E$  tal que  $x_n \xrightarrow{w} x \in E$ . Prove que existem combinações convexas  $(y_n)_{n=1}^\infty$  do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots\}$  tais que  $y_n \rightarrow x$ . (Uma combinação convexa do subconjunto  $A$  de um espaço vetorial é um vetor da forma  $\sum_{j=1}^m a_j z_j$  onde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_m \geq 0$ ,  $a_1 + \dots + a_m = 1$  e  $z_1, \dots, z_m \in A$ .)

**Exercício 6.8.11** Demonstre o item (b) da Proposição 6.3.2.

**Exercício 6.8.12** Demonstre os itens (b) e (c) da Proposição 6.3.3.

**Exercício 6.8.13** Considere o funcional linear

$$\varphi: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j.$$

Mostre que é contínuo em norma mas não é contínuo na topologia fraca-estrela de  $\ell_1 = (c_0)'$ . Conclua que a Proposição 6.2.9 não vale para a topologia fraca-estrela.

**Exercício 6.8.14** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que se  $W$  é uma vizinhança de  $f \in E''$  na topologia fraca-estrela, então existe uma vizinhança  $W_0$  da origem na topologia fraca-estrela tal que  $W = f + W_0$ .

**Exercício 6.8.15** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em um espaço normado  $E$  é denominada *sequência fracamente de Cauchy* se para cada  $\varphi \in E'$ , a sequência  $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$  for de Cauchy em  $\mathbb{K}$ . Diz-se que  $E$  é *fracamente sequencialmente completo* se toda sequência fracamente de Cauchy em  $E$  for fracamente convergente.

(a) Mostre que toda sequência fracamente de Cauchy é limitada.

(b) Prove que espaços reflexivos são fracamente sequencialmente completos.

**Exercício 6.8.16** Prove que, para  $1 < p < \infty$ ,  $\ell_p$  não contém cópia isomorfa de nenhum dos seguintes espaços:  $c_0$ ,  $\ell_{\infty}$  e  $\ell_1$ .

**Exercício 6.8.17** Seja  $F$  um subespaço fechado de um espaço de Banach reflexivo  $E$ . Prove que  $E/F$  é reflexivo.

**Exercício 6.8.18** Conforme comentado na Seção 4.4, um teorema muito delicado devido a R. C. James afirma que em todo espaço de Banach não-reflexivo  $E$  existe  $\varphi_0 \in E'$  tal que  $\varphi_0(x) < \|\varphi_0\| \cdot \|x\|$  para todo  $x \in X$ . Prove a recíproca do Teorema 6.5.4 usando este resultado de James.

**Exercício 6.8.19\*** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $1 \leq p < \infty$ . Para a definição do espaço  $\ell_p(E)$  veja o Exercício 4.5.8. Prove que:

(a)  $\ell_p(E)$  contém cópias isométricas 1-complementadas de  $\ell_p$  e de  $E$ .

(b) Para todo espaço de Banach  $E$ ,  $\ell_1(E)$  não é reflexivo.

(c) Para um dado espaço de Banach  $E$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

(i)  $E$  é reflexivo.

(ii)  $\ell_p(E)$  é reflexivo para todo  $1 < p < \infty$ .

(iii)  $\ell_p(E)$  é reflexivo para algum  $1 < p < \infty$ .

**Exercício 6.8.20** Prove que a função  $d$  da demonstração da Proposição 6.5.1 está bem definida e é uma métrica.

**Exercício 6.8.21** Relembre que um espaço normado  $E$  é de Schur se sequências fracamente convergentes em  $E$  convergem em norma. Prove que:

(a) Subespaço de espaço de Schur é de Schur.

(b) Espaço que é isomorfo a um espaço de Schur é também de Schur.

(c) Um espaço normado reflexivo é de Schur se, e somente se, tem dimensão finita.

(d) Um espaço que contém um espaço reflexivo de dimensão infinita não é de Schur.

**Exercício 6.8.22** Prove que  $\ell_1$  não tem subespaço reflexivo de dimensão infinita.

**Exercício 6.8.23\*** Um espaço de Banach  $E$  é *fracamente compactamente gerado* se existe um subconjunto fracamente compacto  $K$  de  $E$  tal que  $E = \overline{[K]}$ . Prove que:

(a)  $E$  é fracamente compactamente gerado se, e somente se, existe um subconjunto  $K$  de  $E$  que é convexo, simétrico (isto é,  $-x \in K$  se  $x \in K$ ) e fracamente compacto tal que  $E = \overline{[K]}$ .

(b) Espaços reflexivos são fracamente compactamente gerados.

(c) Espaços separáveis são fracamente compactamente gerados.

**Exercício 6.8.24** Prove que toda rede de Cauchy (veja definição no enunciado do Lema 6.6.5) em um espaço de Banach é convergente.

**Exercício 6.8.25** Se um espaço uniformemente convexo contém uma cópia isométrica do espaço normado  $E$ , prove que  $E$  é uniformemente convexo.

**Exercício 6.8.26** Prove que um espaço normado  $E$  é uniformemente convexo se, e somente se,  $E''$  é uniformemente convexo.

**Exercício 6.8.27** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que as implicações

$E$  uniformemente convexo  $\implies E'$  uniformemente convexo, e

$E'$  uniformemente convexo  $\implies E$  uniformemente convexo,

são equivalentes, e portanto basta um contraexemplo para uma delas para concluir que ambas são falsas.

**Exercício 6.8.28** Prove que todo espaço normado que é isomorfo a um espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.

**Exercício 6.8.29\*** Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes para um espaço de Banach  $E$ :

(a)  $E$  é uniformemente convexo.

(b) Se  $x_n, y_n \in E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2) = 0$ , e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é limitada, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ .

(c) Se  $x_n, y_n \in B_E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ .

**Exercício 6.8.30\*** Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado  $E$ :

(a) Se  $x, y \in E$ ,  $\|x\| = \|y\| = 1$  e  $\|x + y\| = 2$ , então  $x = y$ .

(b) Se  $x, y \in E$  e  $\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ , então  $x = y$ .

(c) Se  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$  e  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , então  $x$  é um múltiplo positivo de  $y$ .

Diz-se que  $E$  é *estritamente convexo* quando satisfaz as condições equivalentes acima.

**Exercício 6.8.31** Mostre que todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo.

**Exercício 6.8.32** Mostre que os espaços  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ,  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ ,  $c_0$ ,  $\ell_1$  e  $\ell_\infty$  não são estritamente convexos.

**Exercício 6.8.33** (Um espaço estritamente convexo que não é uniformemente convexo)  
Para  $f \in C[0, 1]$ , defina

$$\|f\|_0 = (\|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

onde  $\|\cdot\|_\infty$  é a norma do sup usual de  $C[0, 1]$  e  $\|\cdot\|_2$  é a norma usual de  $L_2[0, 1]$ .

(a) Prove que  $\|\cdot\|_0$  é uma norma em  $C[0, 1]$  equivalente à norma usual  $\|\cdot\|_\infty$ .

(b) Prove que  $(C[0, 1], \|\cdot\|_0)$  é estritamente convexo.

(c) Prove que  $(C[0, 1], \|\cdot\|_0)$  não é uniformemente convexo.

## Capítulo 7

# Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos

Assim como na Álgebra Linear, na Análise Funcional é muito útil o estudo dos autovalores e autovetores de um operador linear e contínuo. Os seguintes conceitos certamente são familiares ao leitor:

**Definição.** Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $T: V \longrightarrow V$  um operador linear. Um *autovalor* de  $T$  é um escalar  $\lambda$  para o qual existe um vetor não-nulo  $x \in V$  tal que  $T(x) = \lambda x$ . O subespaço

$$V_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$$

é chamado de *autoespaço* associado ao autovalor  $\lambda$  e seus elementos são chamados de *autovetores* de  $T$  associados ao autovalor  $\lambda$ .

Por simplicidade, neste capítulo denotaremos o operador identidade em um espaço vetorial por  $I$ . Suponha que  $V$  tenha dimensão finita. Neste caso,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ é autovalor de } T &\iff \ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\iff T - \lambda I \text{ não é injetora} \\ &\iff T - \lambda I \text{ não é bijetora} \\ &\iff \text{ não existe } (T - \lambda I)^{-1}: V \longrightarrow V. \end{aligned}$$

Ou seja, em dimensão finita os autovalores são exatamente os escalares  $\lambda$  para os quais  $T - \lambda I$  não é invertível. Em dimensão infinita esse argumento não funciona e, além disso, quando  $(T - \lambda I)^{-1}$  existir, devemos levar em conta sua continuidade. Essa necessidade nos levará ao conceito de *espectro* de um operador linear.

Estudaremos neste capítulo os autovalores, os autovetores e o espectro de duas classes importantes de operadores, a saber, os operadores compactos entre espaços normados e os operadores autoadjuntos entre espaços de Hilbert.

## 7.1 Espectro de um operador linear contínuo

Sejam  $E$  um espaço normado,  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  e  $\lambda$  um escalar que *não* é um autovalor de  $T$ . Então  $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$  e faz sentido considerar o operador

$$(T - \lambda I)^{-1}: (T - \lambda I)(E) \subseteq E \longrightarrow E,$$

que é injetor e linear. Nada sabemos, entretanto, sobre a continuidade de  $(T - \lambda I)^{-1}$  e a sobrejetividade de  $(T - \lambda I)$ . Essas preocupações nos levam à seguinte definição:

**Definição 7.1.1** O escalar  $\lambda$  é um *valor regular* do operador  $T$  se  $(T - \lambda I)$  é bijetora e

$$(T - \lambda I)^{-1}: E \longrightarrow E$$

é contínua. O conjunto dos valores regulares de  $T$  é chamado de *conjunto resolvente* de  $T$  e denotado por  $\rho(T)$ . Seu complementar  $(\mathbb{K} - \rho(T))$  é chamado de *espectro* de  $T$  e denotado por  $\sigma(T)$ .

Se  $E$  é um espaço de Banach, do Teorema da Aplicação Aberta sabemos que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (T - \lambda I) \text{ é bijetora}\}.$$

Em espaços normados a continuidade da inversa  $(T - \lambda I)^{-1}$  não segue sempre da continuidade de  $(T - \lambda I)$  (veja Exemplo 2.4.3).

Da definição segue que todo autovalor de  $T$  pertence ao espectro de  $T$ . O exemplo a seguir mostra que nem sempre o espectro coincide com o conjunto dos autovalores:

**Exemplo 7.1.2** No Exemplo 4.3.10 estudamos o operador linear e contínuo

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2, \quad T((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (0, a_1, a_2, \dots).$$

Observe que  $T$  não possui autovalores. Por outro lado,  $T$  é injetor mas não é bijetor, portanto a origem pertence ao espectro de  $T$  mesmo não sendo um autovalor de  $T$ .

O objetivo principal desta seção é provar a compacidade do espectro de um operador linear contínuo em um espaço de Banach. O resultado a seguir será de grande ajuda. Para  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , escrevemos  $T^n = T \circ \overset{(n)}{\dots} \circ T$  e  $T^0 = I$ .

**Proposição 7.1.3** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  com  $\|T\| < 1$ . Então  $1 \in \rho(T)$  e, em particular,  $(I - T)$  tem inversa contínua e*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(E, E).$$



**Demonstração.** Como  $\|T^j\| \leq \|T\|^j$  para todo  $j$  e  $\sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j < \infty$  pois  $\|T\| < 1$ , segue que  $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| < \infty$ . Dados naturais  $m > n$ , de

$$\left\| \sum_{j=0}^m T^j - \sum_{j=0}^n T^j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^m T^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|T^j\| \longrightarrow 0 \text{ se } m, n \longrightarrow \infty,$$

concluimos que a sequência  $\left( \sum_{j=0}^n T^j \right)_{n=1}^{\infty}$  é de Cauchy no espaço de Banach  $\mathcal{L}(E, E)$ , logo convergente. Isso quer dizer que a série  $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$  converge, digamos  $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in \mathcal{L}(E, E)$ . Um cálculo simples revela que

$$(I - T) \circ (I + T + \cdots + T^n) = I - T^{n+1} = (I + T + \cdots + T^n) \circ (I - T)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $n \longrightarrow \infty$ , como  $T^{n+1} \longrightarrow 0$  uma vez que  $\|T\| < 1$ , obtemos

$$(I - T) \circ S = I = S \circ (I - T).$$

Isso mostra que  $(I - T)$  é invertível e que  $(I - T)^{-1} = S$ , provando o resultado. ■

**Teorema 7.1.4** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T \in \mathcal{L}(E, E)$ . Então o espectro de  $T$  é um compacto contido no disco (caso complexo) ou intervalo (caso real)  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ .*

**Demonstração.** Seja  $\lambda \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| > \|T\|$ . Então  $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$ , e portanto da Proposição 7.1.3 temos  $1 \in \rho(\frac{1}{\lambda}T)$ . Disso decorre que  $\lambda \in \rho(T)$ , mais precisamente,

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{1}{\lambda}T \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda}T \right)^j \right) \in \mathcal{L}(E, E).$$

Provamos que  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| > \|T\|\} \subseteq \rho(T)$ , logo  $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ . Em particular o resolvente é não-vazio e o espectro é limitado.

Para completar a demonstração basta provar que  $\sigma(T)$  é fechado. Para isso mostraremos que  $\rho(T)$  é aberto. Já sabemos que  $\rho(T) \neq \emptyset$ . Seja  $\lambda_0 \in \rho(T)$ . Então  $(T - \lambda_0 I)^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$ , e em particular  $\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| > 0$ . Seja  $\lambda \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|}$ . De

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I) \circ (I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}),$$

chamando  $U = I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}$  temos  $T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) \circ U$ . Como

$$\|(\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1,$$

a Proposição 7.1.3 nos garante que  $U$  tem inversa contínua definida em todo  $E$ . Assim

$$U^{-1} \circ (T - \lambda_0 I)^{-1} = ((T - \lambda_0 I) \circ U)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

existe e é contínua, provando que  $\lambda \in \rho(T)$ . Então  $\left\{ \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|} \right\}$  é uma vizinhança de  $\lambda_0$  inteiramente contida em  $\rho(T)$ , provando que  $\rho(T)$  é aberto. ■

## 7.2 Operadores compactos

Sejam  $E$  um espaço normado de dimensão infinita e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear contínuo. Sabemos que  $B_E$  não é compacto em  $E$ , logo se  $T(B_E)$  for compacto em  $F$ , o operador  $T$  terá a grande vantagem de ‘consertar’ a não compacidade da bola unitária. Apesar de sempre ser limitado,  $T(B_E)$  pode não ser fechado, logo é razoável pedir apenas que seu fecho seja compacto:

**Definição 7.2.1** Um operador linear  $T: E \longrightarrow F$  entre espaços normados é dito *compacto* se  $\overline{T(B_E)}$  é compacto em  $F$ .

O próximo resultado contém alguns exemplos e contraexemplos.

### Proposição 7.2.2

- (a) *Todo operador compacto é contínuo.*
- (b) *Todo operador linear contínuo de posto finito é compacto.*
- (c) *Um espaço normado  $E$  tem dimensão finita se, e somente se, a identidade em  $E$  é um operador compacto.*

**Demonstração.** (a) Seja  $T: E \longrightarrow F$  um operador compacto. Por ser subconjunto do compacto  $\overline{T(B_E)}$ , o conjunto  $T(B_E)$  é limitado, e portanto  $T$  é contínuo pela Proposição 2.1.1(f).

(b) Conjuntos fechados e limitados em espaços de dimensão finita são compactos (Proposição 1.5.1).

(c) Segue do Teorema 1.5.4. ■

As seguintes caracterizações são simples mas muito úteis.

**Proposição 7.2.3** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear  $T: E \longrightarrow F$ .*

- (a)  *$T$  é compacto.*
- (b)  *$\overline{T(A)}$  é compacto em  $F$  para todo limitado  $A$  em  $E$ .*
- (c) *Para toda sequência limitada  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $E$ , a sequência  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  tem subsequência convergente em  $F$ .*

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Seja  $A$  limitado em  $E$ , digamos  $\|x\| \leq C$ , com  $C > 0$  para todo  $x \in A$ . Então  $\frac{1}{C}A \subseteq B_E$ , e portanto  $\frac{1}{C}\overline{T(A)} = \overline{\frac{1}{C}T(A)} \subseteq \overline{T(B_E)}$ . Segue que  $\frac{1}{C}\overline{T(A)}$  é compacto por ser um fechado dentro de um compacto. A compacidade de  $\overline{T(A)}$  é agora imediata.

(b)  $\implies$  (c) Segue do fato de que em espaços métricos, em particular em espaços normados, toda sequência em um compacto tem subsequência convergente.

(c)  $\implies$  (a) Seja  $(y_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $\overline{T(B_E)}$ . Para cada  $n$  podemos tomar  $x_n \in B_E$  tal que

$$\|T(x_n) - y_n\| < \frac{1}{n}.$$

Por hipótese  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  possui subsequência convergente, digamos  $T(x_{n_j}) \longrightarrow y \in F$ . De

$$\|y_{n_j} - y\| \leq \|y_{n_j} - T(x_{n_j})\| + \|T(x_{n_j}) - y\| \leq \frac{1}{n_j} + \|T(x_{n_j}) - y\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

segue que  $y_{n_j} \longrightarrow y$ . Isso prova que  $\overline{T(B_E)}$  é compacto. ■

O exemplo a seguir é muito utilizado nas aplicações.

**Exemplo 7.2.4** (Operadores integrais) Seja  $K: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Considere o operador

$$T: C[a, b] \longrightarrow C[c, d], \quad T(f)(t) = \int_a^b K(s, t)f(s) ds \text{ para todo } t \in [c, d].$$

Deixamos ao leitor a tarefa de provar que  $T$  está bem definido, isto é,  $T(f) \in C[c, d]$  para toda  $f \in C[a, b]$ , e que  $T$  é linear. Queremos mostrar que o operador  $T$  é compacto, ou seja,  $\overline{T(B_{C[a, b]})}$  é compacto em  $C[c, d]$ . Para isso usaremos o Teorema de Ascoli (Teorema B.7 do Apêndice B). Devemos provar que  $\overline{T(B_{C[a, b]})}$  satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema B.7.

(a) Sejam  $t_0 \in [c, d]$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $[a, b] \times [c, d]$  é compacto e  $K$  é contínua concluímos que  $K$  é uniformemente contínua. Existe então  $\delta > 0$  tal que

$$|K(s, t_1) - K(s, t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ para todos } s \in [a, b] \text{ e } t_1, t_2 \in [c, d] \text{ com } |t_1 - t_2| < \delta.$$

Assim, se  $f \in B_{C[a, b]}$  e  $|t - t_0| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} |T(f)(t) - T(f)(t_0)| &= \left| \int_a^b K(s, t)f(s) ds - \int_a^b K(s, t_0)f(s) ds \right| \\ &\leq \int_a^b |K(s, t) - K(s, t_0)| \cdot |f(s)| ds \\ &\leq \int_a^b |K(s, t) - K(s, t_0)| ds \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que  $T(B_{C[a, b]})$  é equicontínuo em  $C[c, d]$ .

(b) Sejam  $t_0 \in [c, d]$  e  $f \in C[a, b]$ ,  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Então

$$|T(f)(t_0)| \leq \int_a^b |K(s, t_0)| \cdot |f(s)| ds \leq \int_a^b |K(s, t_0)| ds.$$

Segue que o operador  $T$  é compacto. A função  $K$  é chamada de *núcleo* do operador integral  $T$ .

Denotamos por  $\mathcal{K}(E, F)$  o conjunto dos operadores compactos de  $E$  em  $F$ .

**Proposição 7.2.5** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Então  $\mathcal{K}(E, F)$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Se  $F$  é espaço de Banach então  $\mathcal{K}(E, F)$  é fechado em  $\mathcal{L}(E, F)$ .*

**Demonstração.** Deixamos para o leitor provar que  $\mathcal{K}(E, F)$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Suponhamos  $F$  completo e provemos que  $\mathcal{K}(E, F)$  é fechado em  $\mathcal{L}(E, F)$ . Para isso seja  $(T_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de operadores compactos tal que  $T_n \rightarrow T$  em  $\mathcal{L}(E, F)$ . A demonstração estará completa ao provarmos que  $T$  é compacto. Seja  $(x_m)_{m=1}^\infty$  uma sequência limitada em  $E$ , digamos  $\|x_m\| \leq C$  para todo  $m$  e algum  $C > 0$ . Pelo Teorema 7.2.3 basta mostrar que  $(T(x_m))_{m=1}^\infty$  possui subsequência convergente em  $F$ . Como  $T_1$  é compacto,  $(x_m)_{m=1}^\infty$  tem subsequência  $(x_{1,m})_{m=1}^\infty$  tal que  $(T_1(x_{1,m}))_{m=1}^\infty$  é de Cauchy em  $F$ . Pelos mesmos motivos, a sequência  $(x_{1,m})_{m=1}^\infty$  possui subsequência  $(x_{2,m})_{m=1}^\infty$  tal que  $(T_2(x_{2,m}))_{m=1}^\infty$  é de Cauchy em  $F$ . Em cada passo desse processo a sequência construída é limitada e o operador seguinte é compacto, portanto o processo pode ser repetido indefinidamente. Podemos assim considerar a sequência diagonal

$$(y_m)_{m=1}^\infty = (x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}, \dots),$$

que é subsequência de  $(x_m)_{m=1}^\infty$  e satisfaz a condição de que  $(T_n(y_m))_{m=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy em  $F$  para todo  $n$  natural. Temos, em particular, que  $\|y_m\| \leq C$  para todo  $m$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $T_n \rightarrow T$  podemos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|T - T_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Por  $(T_{n_0}(y_m))_{m=1}^\infty$  ser de Cauchy, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|T_{n_0}(y_j) - T_{n_0}(y_k)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todos } j, k > n_1.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \|T(y_j) - T(y_k)\| &\leq \|T(y_j) - T_{n_0}(y_j)\| + \|T_{n_0}(y_j) - T_{n_0}(y_k)\| + \|T_{n_0}(y_k) - T(y_k)\| \\ &\leq \|T - T_{n_0}\| \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_{n_0} - T\| \|y_k\| < \frac{\varepsilon}{3C} C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C} C = \varepsilon \end{aligned}$$

para todos  $j, k > n_1$ . Isso mostra que  $(T(y_m))_{m=1}^\infty$  é de Cauchy e portanto convergente em  $F$ . ■

**Proposição 7.2.6** (Propriedade de ideal) *Sejam  $E_0, E, F, F_0$  espaços normados e  $S: E_0 \rightarrow E$ ,  $T: E \rightarrow F$  e  $U: F \rightarrow F_0$  operadores lineares com  $S$  e  $U$  contínuos e  $T$  compacto. Então  $U \circ T \circ S$  é compacto.*

**Demonstração.** Provaremos a compacidade de  $U \circ T \circ S$  usando a condição (c) da Proposição 7.2.3. Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência limitada em  $E_0$ . Como operadores lineares contínuos transformam conjuntos limitados em conjuntos limitados, a sequência  $(S(x_n))_{n=1}^\infty$  é limitada em  $E$ . Da compacidade de  $T$  segue que  $(T(S(x_n)))_{n=1}^\infty$  tem subsequência convergente em  $F$ , digamos  $T(S(x_{n_k})) \rightarrow y \in F$ . A continuidade de  $U$  revela que  $U(T(S(x_{n_k}))) \rightarrow U(y) \in F_0$ , provando a compacidade de  $U \circ T \circ S$ . ■

**Teorema 7.2.7** (Teorema de Schauder) *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Então  $T$  é compacto se, e somente se,  $T': F' \longrightarrow E'$  é compacto.*

**Demonstração.** Suponha  $T$  compacto. Dada uma sequência  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  em  $B_{F'}$  devemos provar que a sequência  $(T'(\varphi_n))_{n=1}^\infty$  tem subsequência convergente em  $E'$ . Chamando  $K = \overline{T(B_E)}$  temos da compacidade de  $T$  que  $K$  é um espaço métrico compacto. Para cada  $n$  chame de  $f_n$  a restrição de  $\varphi_n$  a  $K$ ,  $f_n = \varphi_n|_K \in C(K)$ . Então  $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  é um subconjunto de  $C(K)$ . Vejamos que as condições (a) e (b) do Teorema de Ascoli (Teorema B.7 do Apêndice B) estão satisfeitas:

(a) Dados  $t_0 \in K$  e  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \varepsilon$ . Se  $t \in K$  é tal que  $\|t - t_0\| < \delta$ , então

$$\sup_n |f_n(t) - f_n(t_0)| = \sup_n |\varphi_n(t - t_0)| \leq \sup_n \|\varphi_n\| \cdot \|t - t_0\| \leq \|t - t_0\| < \delta = \varepsilon.$$

(b) Para todo  $t \in K$ ,

$$\sup_n |f_n(t)| = \sup_n |\varphi_n(t)| \leq \sup_n \|\varphi_n\| \cdot \|t\| \leq \|t\|.$$

Do Teorema de Ascoli segue que  $\overline{A}$  é compacto em  $C(K)$ , e portanto existem uma subsequência  $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$  de  $(f_n)_{n=1}^\infty$  e  $f \in C(K)$  tais que  $\varphi_{n_k}|_K = f_{n_k} \longrightarrow f$  em  $C(K)$ . Essa convergência quer dizer que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi_{n_k})(x) - f(T(x))| &= \sup_{x \in B_E} |\varphi_{n_k}(T(x)) - f(T(x))| \leq \sup_{t \in T(B_E)} |\varphi_{n_k}(t) - f(t)| \\ &= \|f_{n_k} - f\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ se } k \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da desigualdade triangular concluímos que

$$\|T'(\varphi_{n_k}) - T'(\varphi_{n_j})\| = \sup_{x \in B_E} |T'(\varphi_{n_k})(x) - T'(\varphi_{n_j})(x)| \longrightarrow 0 \text{ se } k, j \longrightarrow \infty,$$

provando que a subsequência  $(T'(\varphi_{n_k}))_{k=1}^\infty$  é de Cauchy no espaço de Banach  $E'$ , logo convergente.

Reciprocamente suponha  $T'$  compacto. Pelo que acabamos de provar sabemos que o operador  $T'': E'' \longrightarrow F''$  é compacto. E do Exercício 4.5.19 sabemos que  $T = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E$ , logo  $T$  é compacto pela Proposição 7.2.6. ■

Terminamos esta seção caracterizando os operadores compactos definidos em espaços reflexivos como sendo exatamente aqueles que transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes.

**Proposição 7.2.8** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

(a) *Se  $T$  é compacto, então vale a implicação*

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ em } E \implies T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } F. \quad (7.1)$$

(b) *Se  $E$  é reflexivo, então  $T$  é compacto se, e somente se, vale (7.1).*

**Demonstração.** (a) Da hipótese  $x_n \xrightarrow{w} x$  e da implicação da Proposição 6.2.9 que não exige completude segue que  $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ . Suponha que  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  não convirja em norma para  $T(x)$ . Neste caso existem  $\varepsilon > 0$  e uma subsequência  $(T(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$  tais que

$$\|T(x_{n_k}) - T(x)\| \geq \varepsilon \text{ para todo } k. \quad (7.2)$$

De  $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$  segue que  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  é limitada, e portanto, pela compacidade de  $T$ ,  $(T(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$  admite subsequência  $(T(x_{n_{k_j}}))_{j=1}^\infty$  convergente, digamos

$$T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y \in F.$$

Por maior razão  $T(x_{n_{k_j}}) \xrightarrow{w} y$  e, como a topologia fraca é de Hausdorff, concluímos que  $T(x) = y$ . Então  $T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow T(x)$ , o que contradiz (7.2).

(b) Suponha  $E$  reflexivo e que valha (7.1). Dada uma sequência limitada  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $E$ , pelo Teorema 6.5.4, podemos extrair uma subseqüência fracamente convergente, digamos  $x_{n_k} \xrightarrow{w} x \in E$ . Por hipótese  $T(x_{n_k}) \longrightarrow T(x)$  e portanto  $T$  é compacto pela Proposição 7.2.3. ■

## 7.3 Teoria espectral de operadores compactos

O objetivo desta seção é descrever o espectro de um operador compacto. Começamos mostrando que os autoespaços associados aos autovalores não-nulos de um operador compacto são todos de dimensão finita.

**Proposição 7.3.1** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $T: E \longrightarrow E$  um operador compacto e  $\lambda$  um escalar não-nulo. Então:*

- (a)  $V_\lambda := \ker(T - \lambda I)$  tem dimensão finita.
- (b)  $(T - \lambda I)(E)$  é fechado em  $E$ .

**Demonstração.** (a) Pelo Teorema 1.5.4 basta mostrar que a bola unitária fechada  $B_{V_\lambda}$  é compacta. Para isso seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $B_{V_\lambda}$ . Da compacidade de  $T$  podemos extrair de  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  uma subsequência convergente, digamos  $T(x_{n_k}) \longrightarrow x \in E$ . Como cada  $x_n \in \ker(T - \lambda I)$ ,  $T(x_n) = \lambda x_n$  e portanto

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda} T(x_{n_k}) \longrightarrow \frac{1}{\lambda} x.$$

É claro que  $\frac{1}{\lambda}x \in B_{V_\lambda}$  pois  $B_{V_\lambda}$  é fechado. Segue que a bola  $B_{V_\lambda}$  é compacta.

(b) Pelo item (a) sabemos que  $V_\lambda$  tem dimensão finita, logo é complementado em  $E$  (veja o Exemplo 3.2.4). Da Proposição 3.2.2 existe um subespaço fechado  $M$  de  $E$  tal que  $E = V_\lambda \oplus M$ . Considere o operador linear contínuo

$$S: M \longrightarrow E, \quad S(x) = T(x) - \lambda x.$$

Como  $M \cap \ker(T - \lambda I) = M \cap V_\lambda = \{0\}$ , segue que  $S$  é injetora. O operador  $(T - \lambda I)$  se anula em  $V_\lambda$ , logo  $S(M) = (T - \lambda I)(E)$  e portanto basta provar que  $S(M)$  é fechado. Vejamos que existe  $r > 0$  tal que

$$r\|x\| \leq \|S(x)\| \quad \text{para todo } x \in M. \quad (7.3)$$

Suponha que (7.3) não seja válida. Neste caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos tomar  $0 \neq z_n \in M$  tal que  $\|S(z_n)\| < \frac{1}{n}\|z_n\|$ . Chamando  $x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$  temos  $\|S(x_n)\| < \frac{1}{n}$  para todo  $n$ . Assim  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$  e  $S(x_n) \rightarrow 0$ . Da compacidade de  $T$  podemos extrair de  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  uma subsequência convergente, digamos  $T(x_{n_k}) \rightarrow x_0 \in E$ . Assim

$$\lambda x_{n_k} = T(x_{n_k}) - S(x_{n_k}) \rightarrow x_0. \quad (7.4)$$

Como  $M$  é subespaço fechado segue que  $x_0 \in M$ . Mais ainda,

$$S(x_0) = \lim_k S(\lambda x_{n_k}) = \lambda \lim_k S(x_{n_k}) = 0.$$

Da injetividade de  $S$  obtemos  $x_0 = 0$ . Por outro lado, (7.4) nos informa que

$$\|x_0\| = \lim_k \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| > 0$$

pois  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$ . Essa contradição prova a existência de  $r > 0$  satisfazendo (7.3). Seja agora  $(S(y_n))_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $S(M)$ . De

$$\|y_m - y_n\| \leq \frac{1}{r} \|S(y_m - y_n)\| = \frac{1}{r} \|S(y_m) - S(y_n)\|$$

concluimos que a sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $M$ , logo convergente, digamos  $y_n \rightarrow y \in M$ . Da continuidade de  $S$  segue que  $S(y_n) \rightarrow S(y) \in S(M)$ . Isso prova que  $S(M)$  é completo, portanto fechado. ■

**Observação 7.3.2** Não se deve esperar que a Proposição 7.3.1(a) funcione para  $\lambda = 0$ . Um exemplo extremo é o operador identicamente nulo em um espaço de dimensão infinita, que é compacto e para o qual  $V_0$  tem dimensão infinita por coincidir com o espaço todo.

O seguinte lema elementar será útil para a demonstração do Lema 7.3.4, que é o ingrediente principal para a demonstração da Alternativa de Fredholm:

**Lema 7.3.3** *Sejam  $A$  um conjunto qualquer e  $f: A \rightarrow A$  uma função injetora que não é sobrejetora. Então  $f(f(A))$  é subconjunto próprio de  $f(A)$ .*

**Demonstração.** É claro que  $f(f(A)) \subseteq f(A)$ . Como  $f$  não é sobrejetora, podemos tomar  $x \in (A - f(A))$ . É claro que  $f(x) \in f(A)$ . Suponha que  $f(x) \in f(f(A))$ . Neste caso existe  $y \in A$  tal que  $f(x) = f(f(y))$ . Como  $f$  é injetora segue que  $x = f(y) \in f(A)$ . Esse absurdo mostra que  $f(x) \notin f(f(A))$ , logo  $f(f(A))$  é subconjunto próprio de  $f(A)$ . ■

**Lema 7.3.4** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $T: E \longrightarrow E$  um operador compacto e  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Então o operador  $(T - \lambda I)$  é injetor se, e somente se, é sobrejetor.*

**Demonstração.** Se  $E$  tiver dimensão finita, o resultado é imediato. Tratemos então do caso em que  $E$  tem dimensão infinita. Suponha que  $(T - \lambda I)$  seja injetor mas não sobrejetor. Neste caso  $E_1 := (T - \lambda I)(E)$  é um subespaço próprio de  $E$ . Da Proposição 7.3.1(b) sabemos que  $E_1$  é um espaço de Banach. Além disso, dado  $x \in E_1$  existe  $y \in E$  tal que  $x = T(y) - \lambda y$ . Chamando  $z = T(y) \in E$ ,

$$T(x) = T(T(y)) - \lambda T(y) = T(z) - \lambda z \in (T - \lambda I)(E) = E_1,$$

provando que  $T(E_1) \subseteq E_1$ . É claro que a restrição de operador compacto é um operador compacto, logo a restrição de  $T$  a  $E_1$ ,

$$T|_{E_1}: E_1 \longrightarrow E_1,$$

é um operador compacto e definido no espaço de Banach  $E_1$ . Então  $E_2 := (T - \lambda I)(E_1) = (T - \lambda I)^2(E)$  é subespaço fechado de  $E_1$  pela Proposição 7.3.1(b). Como  $(T - \lambda I)$  é injetora, pelo Lema 7.3.3 temos  $E_2 \neq E_1$ . Procedendo desta forma construímos uma sequência estritamente decrescente  $(E_n)_{n=1}^\infty$  de subespaços fechados de  $E$  onde  $E_n = (T - \lambda I)^n(E)$  para todo  $n$ . Pelo Lema de Riesz (Lema 1.5.3) podemos construir uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  tal que cada  $x_n \in E_n$ ,  $\|x_n\| = 1$  e

$$\text{dist}(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Por um lado, a sequência  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  admite subsequência convergente por  $T$  ser compacto. Por outro lado, para  $n > m$  temos  $(T(x_n) - \lambda x_n) \in E_{n+1} \subseteq E_{m+1}$ ,  $(T(x_m) - \lambda x_m) \in E_{m+1}$  e  $\lambda x_n \in E_n \subseteq E_{m+1}$ , e portanto

$$\frac{1}{\lambda} [(T(x_n) - \lambda x_n) - (T(x_m) - \lambda x_m) + \lambda x_n] \in E_{m+1}.$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - T(x_m)\| &= \|(T(x_n) - \lambda x_n) - (T(x_m) - \lambda x_m) + \lambda x_n - \lambda x_m\| \\ &= \left\| \lambda \left( \frac{1}{\lambda} [(T(x_n) - \lambda x_n) - (T(x_m) - \lambda x_m) + \lambda x_n] - x_m \right) \right\| \\ &= |\lambda| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} [(T(x_n) - \lambda x_n) - (T(x_m) - \lambda x_m) + \lambda x_n] - x_m \right\| \\ &\geq |\lambda| \cdot \text{dist}(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{|\lambda|}{2} \end{aligned}$$

para todos  $n > m$ . Isso claramente contradiz o fato de  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  ter subsequência convergente e completa a demonstração de que a injetividade de  $(T - \lambda I)$  implica em sua sobrejetividade.



Reciprocamente suponha  $(T - \lambda I)$  sobrejetor, isto é  $(T - \lambda I)(E) = E$ . Como o adjunto da identidade em  $E$  é a identidade em  $E'$ ,

$$\ker(T' - \lambda I) = \ker((T - \lambda I)') = ((T - \lambda I)(E))^\perp = E^\perp = \{0\}$$

(veja Exercício 4.5.23). Daí concluímos que  $(T' - \lambda I)$  é injetor. Mas  $T'$  é compacto pelo Teorema 7.2.7; então a primeira parte da demonstração nos informa que  $(T - \lambda I)' = (T' - \lambda I)$  é sobrejetor. Usando novamente o Exercício 4.5.23,

$$\ker(T - \lambda I) = {}^\perp((T - \lambda I)'(E')) = {}^\perp(E') = \{0\},$$

o que prova que  $(T - \lambda I)$  é injetor. ■

Apliquemos o Lema 7.3.4 para o escalar  $\lambda = 1$ . A condição  $(T - I)$  ser injetor quer dizer que  $T$  não tem ponto fixo não-nulo, e a condição  $(T - I)$  ser sobrejetor quer dizer que a equação  $T(x) - x = y$  tem solução para todo  $y \in E$ . Temos então o

**Teorema 7.3.5** (Alternativa de Fredholm) *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T: E \longrightarrow E$  um operador compacto. Então uma e apenas uma das possibilidades abaixo ocorre:*

- (a)  *$T$  tem um ponto fixo não-nulo.*
- (b) *A equação  $T(x) - x = y$  tem solução para todo  $y \in E$ .*

Usaremos agora o Lema 7.3.4 para provar que, com a possível exceção da origem, o espectro de um operador compacto é formado apenas por autovalores.

**Teorema 7.3.6** *Sejam  $E$  um espaço de Banach de dimensão infinita e  $T: E \longrightarrow E$  um operador compacto. Então*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}.$$

**Demonstração.** É claro que  $0 \in \sigma(T)$ , pois se fosse  $0 \in \rho(T)$ ,  $T^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$  e então  $I = T \circ T^{-1}$  seria compacto pela Proposição 7.2.6, o que é uma contradição, pela Proposição 7.2.2(c). O fato de todo autovalor pertencer ao espectro decorre das definições. Reciprocamente, suponha  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Então o operador  $(T - \lambda I)$  não é injetor ou não é sobrejetor. Mas, se for injetor, pelo Lema 7.3.4 será também sobrejetor. Resta então apenas a possibilidade de  $(T - \lambda I)$  não ser injetor, e isso quer dizer exatamente que  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ . ■

O último resultado desta seção diz, essencialmente, que o espectro de um operador compacto se comporta como uma sequência cujas únicas subsequências convergentes, caso existam, convergem para zero.

**Teorema 7.3.7** *O espectro de um operador compacto  $T: E \longrightarrow E$  em um espaço de Banach  $E$  é enumerável, podendo ser finito, e o único ponto de acumulação possível é o zero.*

**Demonstração.** Em vista do Teorema 7.3.6 basta mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , o conjunto dos autovalores  $\lambda$  tais que  $|\lambda| \geq \varepsilon$  é finito. Suponha que isso não aconteça. Neste caso existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que o conjunto dos autovalores  $\lambda$  tais que  $|\lambda| \geq \varepsilon_0$  é infinito. Podemos então considerar uma sequência  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  formada por autovalores distintos de  $T$  tais que  $|\lambda_n| \geq \varepsilon_0$  para todo  $n$ . Logo, para cada  $n$  existe  $x_n \neq 0$  tal que  $T(x_n) = \lambda_n x_n$ . Desde o curso de Álgebra Linear o leitor sabe que autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, portanto o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots\}$  é linearmente independente. Para cada  $n$  considere o espaço  $n$ -dimensional  $M_n = [x_1, \dots, x_n]$ . Então cada  $z \in M_n$  tem representação única na forma

$$z = \sum_{j=1}^n a_j x_j, \text{ onde } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}.$$

Assim

$$(T - \lambda_n I)(z) = \sum_{j=1}^n a_j T(x_j) - \sum_{j=1}^n \lambda_n a_j x_j = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^n \lambda_n a_j x_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_j (\lambda_j - \lambda_n) x_j,$$

e conseqüentemente

$$(T - \lambda_n I)(z) \in M_{n-1} \text{ para todo } z \in M_n. \quad (7.5)$$

Cada  $M_n$  é obviamente fechado; portanto usando o Lema de Riesz (Lema 1.5.3) construímos uma sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  tal que para todo  $n$ ,

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1 \text{ e } \text{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

De uma maneira muito similar ao que fizemos na demonstração da Proposição 7.3.4 mostraremos que

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \text{ para todos } n > m,$$

o que estará em clara contradição com a compacidade de  $T$ . Comece observando que  $T(M_n) \subseteq M_n$  pois cada  $x_j$  é autovalor de  $T$ . Sejam  $m, n$  inteiros positivos com  $n > m$ . Como  $y_m \in M_m \subseteq M_{n-1}$ ,

$$T(y_m) \in T(M_{n-1}) \subseteq M_{n-1}.$$

Como  $y_n \in M_n$ , de (7.5) segue que

$$\lambda_n y_n - T(y_n) = -(T - \lambda_n I)(y_n) \in M_{n-1}.$$

Logo  $(\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m) \in M_{n-1}$ . Decorre então que

$$\begin{aligned} \|T(y_m) - T(y_n)\| &= \|\lambda_n y_n - T(y_n) + T(y_m) - \lambda_n y_n\| \\ &= \left\| \lambda_n \left( \frac{1}{\lambda_n} [(\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m)] - y_n \right) \right\| \\ &= |\lambda_n| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda_n} [(\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m)] - y_n \right\| \\ &\geq |\lambda_n| \cdot \text{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}, \end{aligned}$$

para todos  $n > m$ . A demonstração está completa. ■

## 7.4 Operadores autoadjuntos em espaços de Hilbert

Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Chamemos de  $u_H: H \longrightarrow H'$  a aplicação dada por

$$u_H(x)(y) = \langle y, x \rangle \text{ para todos } x, y \in H,$$

que do Teorema de Riesz–Fréchet (Teorema 5.5.2) sabemos ser bijetora e satisfazer a condição  $\|u_H(x)\| = \|x\|$  para todo  $x \in H$ . Em particular,  $u_H$  é contínua. No caso real  $u_H$  é um isomorfismo isométrico (Corolário 5.5.3), mas no caso complexo  $u_H$  não é linear, uma vez que

$$u_H(\lambda x) = \bar{\lambda} \cdot u_H(x). \quad (7.6)$$

Se  $H_1$  e  $H_2$  são espaços de Hilbert reais e  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , sabemos que o operador adjunto  $T': H'_2 \longrightarrow H'_1$  é linear contínuo e tem a mesma norma que  $T$  (Proposição 4.3.11). Vejamos que a cadeia

$$H_2 \xrightarrow{u_{H_2}} H'_2 \xrightarrow{T'} H'_1 \xrightarrow{u_{H_1}^{-1}} H_1$$

nos ensina a reconhecer o adjunto de  $T$  como operador de  $H_2$  em  $H_1$ :

**Proposição 7.4.1** *Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Definindo  $T^* := u_{H_1}^{-1} \circ T' \circ u_{H_2}$  é verdade que:*

- (a)  $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ .
- (b)  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$  para todos  $x \in H_1$  e  $y \in H_2$ .
- (c)  $T^*$  é o único operador em  $\mathcal{L}(H_2, H_1)$  satisfazendo (b).
- (d) A correspondência  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  é bijetora e  $\|T\| = \|T^*\|$ . No caso real esta correspondência é um isomorfismo isométrico.

**Demonstração.** Para a linearidade de  $T^*$  falta apenas provar a homogeneidade, isto é,  $T^*(\lambda x) = \lambda T^*(x)$ . Como  $\overline{\bar{\lambda}} = \lambda$ , homogeneidade de  $T^*$  segue da linearidade de  $T'$  e da aplicação de (7.6) para  $u_{H_1}^{-1}$  e para  $u_{H_2}$ . O operador  $T^*$  é contínuo por ser a composição de aplicações contínuas. Dados  $x \in H_1$  e  $y \in H_2$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(y) \rangle &= u_{H_1}(T^*(y))(x) = [(u_{H_1} \circ T^*)(y)](x) = [(T' \circ u_{H_2})(y)](x) \\ &= T'(u_{H_2}(y))(x) = u_{H_2}(y)(T(x)) = \langle T(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} \|T^*(y)\| &= \|u_{H_1}^{-1} \circ T' \circ u_{H_2}(y)\| = \|u_{H_1}^{-1}(T' \circ u_{H_2}(y))\| = \|T' \circ u_{H_2}(y)\| \\ &\leq \|T'\| \cdot \|u_{H_2}(y)\| = \|T\| \cdot \|y\|, \end{aligned}$$

provando que  $\|T^*\| \leq \|T\|$ . Por outro lado, procedendo analogamente para a igualdade  $T' = u_{H_1} \circ T^* \circ u_{H_2}^{-1}$  obtemos  $\|T\| = \|T'\| \leq \|T^*\|$ .

Deixamos as demais informações como exercício. ■

**Definição 7.4.2** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Um operador  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  é chamado de *autoadjunto* se  $T = T^*$ .

**Exemplo 7.4.3** (a) É claro que o operador nulo e o operador identidade em um espaço de Hilbert são autoadjuntos.

(b) O que provamos no Exemplo 4.3.10 nos diz que o operador ‘shift para trás’

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2, \quad T((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, \dots),$$

não é autoadjunto.

(c) Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e  $g \in L_\infty(\mu)$ . Como  $|g| \leq \|g\|_\infty$   $\mu$ -quase sempre, o operador multiplicação

$$T_g: L_2(\mu) \longrightarrow L_2(\mu), \quad T_g(f) = fg,$$

é linear e contínuo ( $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$ ). Vejamos sob quais condições o operador  $T_g$  é autoadjunto. Sabemos que

$$u_{L_2(\mu)}: L_2(\mu) \longrightarrow L_2(\mu)', \quad u_{L_2(\mu)}(h)(f) = \int_X f \bar{h} d\mu, \text{ e}$$

$$T'_g: L_2(\mu)' \longrightarrow L_2(\mu)', \quad T'_g(\varphi)(f) = \varphi(fg).$$

Observe que

$$\begin{aligned} T_g^*(f) &= (u_{L_2(\mu)})^{-1}(T'_g(u_{L_2(\mu)}(f))) = (u_{L_2(\mu)})^{-1}\left(T'_g\left(h \mapsto \int_X h \bar{f} d\mu\right)\right) \\ &= (u_{L_2(\mu)})^{-1}\left(h \mapsto \int_X hg \bar{f} d\mu\right). \end{aligned}$$

Aplicando  $u_{L_2(\mu)}$  segue que

$$u_{L_2(\mu)}(T_g^*(f)) = \left(h \mapsto \int_X hg \bar{f} d\mu\right),$$

isto é,

$$u_{L_2(\mu)}(T_g^*(f))(h) = \int_X hg \bar{f} d\mu.$$

Impondo a condição  $T_g^*(f) = T_g(f)$  resulta que

$$\int_X hg \bar{f} d\mu = u_{L_2(\mu)}(T_g^*(f))(h) = u_{L_2(\mu)}(T_g(f))(h) = \int_X h \overline{T_g(f)} d\mu = \int_X h \bar{f} \bar{g} d\mu$$

para toda  $h \in L_2(\mu)$ . Assim

$$\begin{aligned} T_g^* = T_g &\iff T_g^*(f) = T_g(f) \text{ para toda } f \in L_2(\mu) \\ &\iff \int_X hg \bar{f} d\mu = \int_X h \bar{f} \bar{g} d\mu \text{ para todas } f, h \in L_2(\mu) \\ &\iff g = \bar{g} \text{ em } L_2(\mu) \iff g(x) \in \mathbb{R} \text{ } \mu\text{-quase sempre.} \end{aligned}$$

Em palavras,  $T_g$  é autoadjunto se, e somente se, a função  $g$  assume valores reais  $\mu$ -quase sempre. No caso real  $T_g$  sempre é autoadjunto.

No caso complexo é fácil identificar os operadores autoadjuntos:

**Proposição 7.4.4** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert complexo e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$ . Então  $T$  é autoadjunto se, e somente se,  $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in H$ .*

**Demonstração.** Suponha  $T$  autoadjunto. Para todo  $x \in H$ ,

$$\langle T(x), x \rangle = \langle x, T^*(x) \rangle = \langle x, T(x) \rangle = \overline{\langle T(x), x \rangle}.$$

Reciprocamente, supondo que  $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in H$ , temos

$$\begin{aligned} \langle T(x), x \rangle + \bar{\lambda} \langle T(x), y \rangle + \lambda \langle T(y), x \rangle + |\lambda|^2 \langle T(y), y \rangle \\ = \langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle = \overline{\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle} \\ = \langle T(x), x \rangle + \lambda \langle y, T(x) \rangle + \bar{\lambda} \langle x, T(y) \rangle + |\lambda|^2 \langle T(y), y \rangle, \end{aligned}$$

e portanto

$$\bar{\lambda} \langle T(x), y \rangle + \lambda \langle T(y), x \rangle = \lambda \langle y, T(x) \rangle + \bar{\lambda} \langle x, T(y) \rangle,$$

para todos  $x, y \in H$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Tomando  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -i$  obtemos

$$\langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle = \langle y, T(x) \rangle + \langle x, T(y) \rangle \quad \text{e}$$

$$\langle T(x), y \rangle - \langle T(y), x \rangle = -\langle y, T(x) \rangle + \langle x, T(y) \rangle.$$

Somando as duas equações temos  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$  para todos  $x, y \in H$ . O item (c) da Proposição 7.4.1 revela que  $T^* = T$ . ■

O próximo resultado fornece uma caracterização útil da norma de um operador autoadjunto.

**Teorema 7.4.5** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador autoadjunto. Então*

$$\|T\| = \sup \{ |\langle T(x), x \rangle| : \|x\| = 1 \}.$$

**Demonstração.** Se  $T = 0$ , o resultado é imediato. Suponhamos  $T \neq 0$ . Note que, da desigualdade de Cauchy–Schwarz (Proposição 5.1.2),

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|T(x)\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2$$

para todo  $x \in H$ , e portanto

$$\sup \{ |\langle T(x), x \rangle| : \|x\| = 1 \} \leq \|T\|.$$

Resta provar a desigualdade inversa. Como  $T \neq 0$ , podemos tomar  $x_0 \in H$  com  $\|x_0\| = 1$  e  $T(x_0) \neq 0$ . Chamemos

$$x := \|T(x_0)\|^{\frac{1}{2}} \cdot x_0 \quad \text{e} \quad y = \|T(x_0)\|^{-\frac{1}{2}} \cdot T(x_0).$$

Então  $\|x\|^2 = \|y\|^2 = \|T(x_0)\|^2$ . É claro que  $\langle T(x), y \rangle = \|T(x_0)\|^2$  e, como  $T$  é autoadjunto,

$$\langle T(y), x \rangle = \langle y, T(x) \rangle = \overline{\langle T(x), y \rangle} = \|T(x_0)\|^2,$$

provando que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle T(y), x \rangle = \|T(x_0)\|^2.$$

Definindo  $u = x + y$  e  $v = x - y$ , e subtraindo as equações

$$\begin{aligned}\langle T(u), u \rangle &= \langle T(x), x \rangle + \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle + \langle T(y), y \rangle \\ \langle T(v), v \rangle &= \langle T(x), x \rangle - \langle T(x), y \rangle - \langle T(y), x \rangle + \langle T(y), y \rangle,\end{aligned}$$

obtemos

$$\langle T(u), u \rangle - \langle T(v), v \rangle = 2\langle T(x), y \rangle + 2\langle T(y), x \rangle = 4\|T(x_0)\|^2.$$

Escrevamos  $C = \sup \{|\langle T(z), z \rangle| : \|z\| = 1\}$  para simplificar a notação e vejamos que

$$|\langle T(w), w \rangle| \leq C \|w\|^2 \text{ para todo } w \in H.$$

De fato, para  $w = 0$  o resultado é imediato, e para  $w \neq 0$ ,

$$\frac{1}{\|w\|^2} \cdot |\langle T(w), w \rangle| = \left| \left\langle T\left(\frac{w}{\|w\|}\right), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle \right| \leq C.$$

Usando a Lei do Paralelogramo e lembrando que  $\langle T(w), w \rangle \in \mathbb{R}$  para todo  $w \in H$  (Proposição 7.4.4), temos

$$\begin{aligned}4\|T(x_0)\|^2 &= \langle T(u), u \rangle - \langle T(v), v \rangle \leq |\langle T(u), u \rangle| + |\langle T(v), v \rangle| \\ &\leq C\|u\|^2 + C\|v\|^2 = C\|x + y\|^2 + C\|x - y\|^2 \\ &= 2C(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4C\|T(x_0)\|^2.\end{aligned}$$

Como  $T(x_0) \neq 0$  concluímos que  $\|T(x_0)\| \leq C$ . Isso vale para todo  $x_0 \in H$  tal que  $\|x_0\| = 1$  e  $T(x_0) \neq 0$ . Então,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x_0)\| : \|x_0\| = 1\} = \sup\{\|T(x_0)\| : \|x_0\| = 1 \text{ e } T(x_0) \neq 0\} \leq C.$$

■

## 7.5 Teoria espectral de operadores autoadjuntos

Exploraremos nesta seção as propriedades espectrais dos operadores autoadjuntos e também dos operadores que são simultaneamente compactos e autoadjuntos. Começamos mostrando que os autovalores de um operador autoadjunto são sempre reais e que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais:

**Proposição 7.5.1** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador autoadjunto. Então:*

- (a) *Os autovalores de  $T$  são números reais.*
- (b) *Se  $\lambda$  e  $\mu$  são autovalores distintos de  $T$  então  $V_\lambda \perp V_\mu$ , isto é,  $\langle x, y \rangle = 0$  para quaisquer  $x \in V_\lambda$  e  $y \in V_\mu$ .*

**Demonstração.** (a) Dado um autovalor  $\lambda$  de  $T$  tome  $x_0$  um autovetor não-nulo associado a  $\lambda$ . Da Proposição 7.4.4 sabemos que  $\langle T(x_0), x_0 \rangle \in \mathbb{R}$ , logo

$$\lambda = \frac{1}{\|x_0\|^2} \cdot \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \frac{1}{\|x_0\|^2} \cdot \langle T(x_0), x_0 \rangle \in \mathbb{R}.$$

(b) Por (a) sabemos que  $\lambda$  e  $\mu$  são números reais. Então, para  $x \in V_\lambda$  e  $y \in V_\mu$ ,

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Logo  $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ , e portanto  $\langle x, y \rangle = 0$  pois  $\lambda \neq \mu$ . ■

Nosso próximo objetivo (Teorema 7.5.3) refinará a informação acima e provará que todo o espectro de um operador autoadjunto é real.

**Proposição 7.5.2** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador autoadjunto e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Então  $\lambda \in \rho(T)$  se, e somente se, existe  $C > 0$  tal que  $\|T(x) - \lambda x\| \geq C \|x\|$  para todo  $x \in H$ .*

**Demonstração.** Se  $\lambda \in \rho(T)$ , então  $T - \lambda I: E \rightarrow E$  é bijetora, logo é um isomorfismo pelo Teorema da Aplicação Aberta. Então  $\|x\| \leq \|(T - \lambda I)^{-1}\| \cdot \|T(x) - \lambda x\|$  para todo  $x \in H$  e o resultado segue.

Reciprocamente suponha que exista  $C > 0$  tal que  $\|T(x) - \lambda x\| \geq C \|x\|$  para todo  $x \in H$ . Devemos provar que  $T - \lambda I$  é bijetora. A injetividade é simples: se  $T(x) - \lambda x = 0$  então

$$0 \leq C \|x\| \leq \|T(x) - \lambda x\| = 0,$$

provando que  $x = 0$ . Para a sobrejetividade basta provar que  $(T - \lambda I)(H)$  é fechado e denso em  $H$ . Suponha que exista  $0 \neq x_0 \in \overline{(T - \lambda I)(H)}^\perp$ . Então para todo  $x \in H$ ,

$$0 = \langle T(x) - \lambda x, x_0 \rangle = \langle T(x), x_0 \rangle - \lambda \langle x, x_0 \rangle.$$

Como  $T$  é autoadjunto segue que

$$\langle x, T(x_0) \rangle = \langle T(x), x_0 \rangle = \lambda \langle x, x_0 \rangle = \langle x, \bar{\lambda} x_0 \rangle$$

para todo  $x \in H$ , provando que  $T(x_0) = \bar{\lambda} x_0$ . Isso quer dizer que  $\bar{\lambda}$  é um autovalor do operador autoadjunto  $T$ , logo  $\lambda$  é um número real pela Proposição 7.5.1(a). Neste caso

$$0 = \|T(x_0) - \lambda x_0\| \geq C \|x_0\| > 0,$$

absurdo este que nos garante que  $\overline{(T - \lambda I)(H)}^\perp = \{0\}$ . Do Teorema 5.2.5(a) concluímos que

$$H = \overline{(T - \lambda I)(H)} \oplus \overline{(T - \lambda I)(H)}^\perp = \overline{(T - \lambda I)(H)},$$

e portanto  $(T - \lambda I)(H)$  é denso em  $H$ .

Sejam agora  $y \in \overline{(T - \lambda I)(H)}$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $(T - \lambda I)(H)$  que converge para  $y$ . Para cada  $n$  podemos tomar  $x_n \in H$  tal que  $y_n = T(x_n) - \lambda x_n$ . Logo

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C} \|T(x_n - x_m) - \lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{C} \|y_n - y_m\|$$

para todos naturais  $n, m$ . Da convergência da sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  concluímos que a sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy, portanto convergente, digamos  $x_n \rightarrow x \in H$ . A continuidade de  $T - \lambda I$  revela que

$$y_n = (T - \lambda I)(x_n) \rightarrow (T - \lambda I)(x) \in (T - \lambda I)(H).$$

Isso prova que  $(T - \lambda I)(H)$  é fechado. ■

**Teorema 7.5.3** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert. O espectro  $\sigma(T)$  de um operador autoadjunto  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  é real.*

**Demonstração.** Basta mostrar que se  $\lambda = a + ib$  com  $a$  e  $b$  reais e  $b \neq 0$ , então  $\lambda \in \rho(T)$ . Seja então  $\lambda$  desta forma. Dado  $0 \neq x \in H$ , da Proposição 7.4.4 sabemos que  $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ . Subtraindo as equações

$$\begin{aligned} \langle (T - \lambda I)(x), x \rangle &= \langle T(x), x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle, \\ \overline{\langle (T - \lambda I)(x), x \rangle} &= \overline{\langle T(x), x \rangle} - \overline{\lambda} \langle x, x \rangle = \langle T(x), x \rangle - \overline{\lambda} \langle x, x \rangle, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} -2i \operatorname{Im}(\langle (T - \lambda I)(x), x \rangle) &= \overline{\langle (T - \lambda I)(x), x \rangle} - \langle (T - \lambda I)(x), x \rangle \\ &= (\lambda - \overline{\lambda}) \langle x, x \rangle = 2ib \|x\|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$|b| \cdot \|x\|^2 = |\operatorname{Im}(\langle (T - \lambda I)(x), x \rangle)| \leq |\langle (T - \lambda I)(x), x \rangle| \leq \|(T - \lambda I)(x)\| \cdot \|x\|.$$

Dividindo por  $\|x\|$  obtemos  $|b| \|x\| \leq \|T(x) - \lambda x\|$  para todo  $x \neq 0$ . Como esta desigualdade vale trivialmente para  $x = 0$ , da Proposição 7.5.2 concluímos que  $\lambda \in \rho(T)$ . ■

Já vimos que tanto operadores compactos como operadores autoadjuntos têm espectros com propriedades especiais. Natural é então esperar que operadores que são simultaneamente compactos e autoadjuntos tenham uma teoria espectral ainda mais rica. De fato isso acontece: vamos agora em busca da decomposição espectral dos operadores compactos e autoadjuntos, que nos dirá que se  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  é compacto e autoadjunto, então  $H$  admite um sistema ortonormal completo formado exclusivamente por autovetores de  $T$ . Neste caso todo vetor de  $H$  poderá ser escrito como uma soma (eventualmente infinita) de autovetores. Para provar este resultado precisamos da



**Proposição 7.5.4** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador não-nulo, compacto e autoadjunto. Então  $\|T\|$  ou  $-\|T\|$  é um autovalor de  $T$  associado ao qual existe um autovetor  $x \in H$  tal que  $\|x\| = 1$  e  $|\langle T(x), x \rangle| = \|T\|$ .*

**Demonstração.** Pelo Teorema 7.4.5 podemos tomar uma sequência de vetores unitários  $(z_n)_{n=1}^\infty$  tais que  $|\langle T(z_n), z_n \rangle| \rightarrow \|T\|$ . A sequência  $(\langle T(z_n), z_n \rangle)_{n=1}^\infty$  é então limitada, e portanto admite uma subsequência  $(\langle T(x_n), x_n \rangle)_{n=1}^\infty$  convergente. É claro que  $|\langle T(x_n), x_n \rangle| \rightarrow \|T\|$ , logo  $(\langle T(x_n), x_n \rangle)_{n=1}^\infty$  converge para  $\|T\|$  ou para  $-\|T\|$ . Isso quer dizer que definindo  $\lambda = \lim_n \langle T(x_n), x_n \rangle$ , temos  $\lambda = \|T\|$  ou  $\lambda = -\|T\|$ . Devemos então provar que  $\lambda$  é autovalor de  $T$ . Como  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 = \langle T(x_n) - \lambda x_n, T(x_n) - \lambda x_n \rangle \\ &= \|T(x_n)\|^2 - \lambda \langle T(x_n), x_n \rangle - \lambda \langle x_n, T(x_n) \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle T(x_n), x_n \rangle + \lambda^2 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Segue que  $T(x_n) - \lambda x_n \rightarrow 0$ . Como  $T$  é compacto, da sequência  $(T(x_n))_{n=1}^\infty$  podemos extrair uma subsequência convergente  $(T(y_n))_{n=1}^\infty$ . Logo  $T(y_n) - \lambda y_n \rightarrow 0$  e portanto  $(\lambda y_n)_{n=1}^\infty$  também converge, digamos  $\lambda y_n \rightarrow y$ . Note que  $y \neq 0$  pois  $\|y_n\| = 1$  para todo  $n$  e  $\lambda \neq 0$ . Por um lado é claro que  $T(y_n) \rightarrow y$ ; por outro lado, da continuidade de  $T$  temos

$$\lambda T(y_n) = T(\lambda y_n) \rightarrow T(y).$$

Isso nos permite concluir que  $T(y) = \lambda y$ , provando que  $\lambda$  é autovalor de  $T$ . Verifica-se facilmente que o autovetor  $\frac{y}{\lambda}$  satisfaz as condições desejadas. ■

**Corolário 7.5.5** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador compacto e autoadjunto. Então:*

- (a)  $\sigma(T) \neq \emptyset$ .
- (b) Se  $\sigma(T) = \{0\}$  então  $T = 0$ .

**Demonstração.** (a) Se  $T = 0$  então 0 é autovalor de  $T$ . Se  $T \neq 0$ , então  $T$  tem um autovalor pela Proposição 7.5.4.

(b) Se  $T$  fosse não-nulo,  $T$  teria um autovalor não-nulo pela Proposição 7.5.4. ■

Da Álgebra Linear o leitor se recorda que quando  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, uma transformação linear  $T: V \rightarrow V$  é diagonalizável se, e somente se,  $V$  admite uma base formada por autovetores de  $T$ . Nesse sentido, substituindo convenientemente a noção de base algébrica, o teorema abaixo diz que operadores compactos e autoadjuntos em espaços de Hilbert são diagonalizáveis.

**Teorema 7.5.6** (Decomposição espectral de operadores compactos e autoadjuntos) *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T: H \rightarrow H$  um operador compacto e autoadjunto. Então  $H$  admite um sistema ortonormal completo formado por autovetores de  $T$ . Mais*

ainda, existem seqüências (finitas ou infinitas) de autovalores  $(\lambda_n)_n$  de  $T$  e de vetores  $(v_n)_n$  tais cada  $v_n$  é autovetor associado a  $\lambda_n$  e

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$$

para todo  $x \in H$ .

**Demonstração.** Do Teorema 7.3.7 sabemos que  $T$  tem no máximo uma quantidade enumerável de autovalores. Seja então  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  uma enumeração dos autovalores distintos e não-nulos de  $T$ . Note que essa seqüência pode ser finita ou infinita. Chamamos  $\alpha_0 = 0$  e definimos

$$E_0 = \ker(T) \text{ e } E_n = V_{\alpha_n} = \ker(T - \alpha_n I), \quad n \geq 1.$$

Por ser subespaço fechado de um espaço de Hilbert,  $E_0$  também é um espaço de Hilbert, logo admite um sistema ortonormal completo  $\mathcal{B}_0$  pelo Teorema 5.4.6. A Proposição 7.3.1(a) nos diz que  $0 < \dim(E_n) < \infty$  para todo  $n \geq 1$ , portanto podemos considerar um sistema ortonormal completo finito  $\mathcal{B}_n$  em cada  $E_n$ ,  $n \geq 1$ . Da Proposição 7.5.1(b) sabemos que os subespaços  $E_0, E_1, E_2, \dots$  são dois a dois ortogonais, logo o conjunto formado pelos vetores de  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ , é ortonormal e contém apenas autovetores de  $T$ . Definindo  $S := \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots$ , pelo Teorema 5.3.10 basta provar que  $[S]$  é denso em  $H$ . Como todo elemento de  $[S]$  é uma combinação linear de autovetores de  $T$ , é imediato que  $T(S) \subseteq T([S]) \subseteq [S]$ . Dados  $x \in S^\perp$  e  $y \in S$ , como  $T(y) \in [S]$ ,

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = 0,$$

provando que  $T(S^\perp) \subseteq S^\perp$ . É claro que restrição de operador compacto é compacto e restrição de operador autoadjunto é autoadjunto, logo  $T_0 := T|_{S^\perp} : S^\perp \longrightarrow S^\perp$  é compacto e autoadjunto. Suponha que exista  $\lambda \in \sigma(T_0)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Neste caso, pelo Teorema 7.3.6 sabemos que  $\lambda$  é um autovalor de  $T_0$ , e portanto existe  $x \in S^\perp$ ,  $x \neq 0$ , tal que  $T(x) = T_0(x) = \lambda x$ . Por ser um autovalor não-nulo de  $T$ ,  $\lambda = \alpha_n$  para algum  $n \geq 1$ . Assim  $x \in E_n \cap S^\perp \subseteq [S] \cap S^\perp$ , e portanto  $x = 0$ . Esta contradição nos informa que  $\sigma(T_0) \subseteq \{0\}$ , e portanto  $\sigma(T_0) = \{0\}$  pelo Corolário 7.5.5(a). Do Corolário 7.5.5(b) concluímos que  $T_0 = 0$ . Consequentemente,

$$S^\perp \subseteq \ker(T) = \overline{[\mathcal{B}_0]} \subseteq \overline{[S]},$$

o que, pela continuidade do produto interno, nos dá  $S^\perp = \{0\}$ . Como  $\overline{[S]}^\perp \subseteq S^\perp$ , temos  $\overline{[S]}^\perp = \{0\}$ . Do Teorema 5.2.5(a) sabemos que  $H = \overline{[S]} \oplus \overline{[S]}^\perp$ , logo  $[S]$  é denso em  $H$ . Isso completa a demonstração de que  $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots$  é um sistema ortonormal completo para  $H$  formado por autovetores de  $T$ . Como  $E_n$  tem dimensão finita para todo  $n \geq 1$ , podemos tomar uma base (finita ou enumerável)  $(v_n)_n$  para o espaço gerado por  $E_1, E_2, \dots$ . É claro que cada  $v_n$  é autovetor de  $T$ . Tomamos também  $\lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , autovalor de  $T$  ao qual  $v_n$  é associado. Dado  $x \in H$ , pelo Teorema 5.3.10 temos

$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n$  onde  $x_0 \in E_0 = \ker(T)$ . Suponha que existam infinitos  $v_1, v_2, \dots$ . Como  $T$  é linear e contínuo,

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n\right) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n\right) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle T(v_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n. \end{aligned}$$

No caso em que a sequência  $(v_n)_n$  é finita basta a linearidade de  $T$  para obter, *mutatis mutandis*, esta mesma fórmula. ■

## 7.6 Comentários e notas históricas

A noção de operador compacto remonta aos trabalhos de Hilbert de 1906 sobre a resolução de sistemas de infinitas equações lineares. A definição veio com Riesz em 1918 sob o nome de *operador completamente contínuo*. Desde 1950, a partir de uma sugestão de E. Hille, o termo *operador compacto* tem sido usado. O termo *operador completamente contínuo* é reservado para os operadores que transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes, isto é, satisfazem a implicação (7.1). Conforme vimos na Proposição 7.2.8, para operadores definidos em espaços reflexivos, em particular para operadores entre espaços de Hilbert, essas duas noções coincidem.

Das Proposições 7.2.2(b) e 7.2.5 segue que todo operador que é limite de uma sequência de operadores de posto finito é compacto. Em 1931 T. W. Hildebrandt perguntou se a recíproca era verdadeira. Esse problema ficou sem resposta durante várias décadas e Pietsch [73, página 54] manifesta que esta foi a pergunta mais importante em toda a história da teoria dos espaços de Banach. Diz-se que um espaço de Banach  $E$  tem a *propriedade da aproximação* se todo operador compacto de  $E$  em  $E$  é o limite de uma sequência de operadores de posto finito. A pergunta então se transforma em: é verdade que todo espaço de Banach tem a propriedade da aproximação? P. Enflo resolveu o problema em 1972 ao provar que para  $1 < p < \infty$ ,  $p \neq 2$ ,  $\ell_p$  contém um subespaço que não tem a propriedade da aproximação. O estudo da propriedade da aproximação e de suas muitas variantes se tornou uma tendência que continua muito ativa até nossos dias. Uma boa referência para o assunto é [45, Chapter 7]. No Exercício 7.7.17 o leitor comprovará que espaços de Hilbert têm a propriedade da aproximação.

Recentemente os operadores compactos protagonizaram um grande acontecimento no meio matemático. Uma das principais perguntas que emergiram ao final da teoria de Gowers e Maurey mencionada na Introdução deste livro foi a seguinte: será que existe um espaço de Banach  $E$  de dimensão infinita tal que todo operador  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  pode ser escrito na forma

$$T = \lambda \cdot \text{id}_E + U,$$

onde  $U$  é um operador compacto? Em outras palavras: existe um espaço de dimensão infinita  $E$  tal que todo operador de  $E$  em  $E$  é uma perturbação compacta da identidade? Por motivos óbvios costuma-se dizer que um tal espaço tem pouquíssimos operadores e, de acordo com as palavras de Gowers em seu weblog, tal espaço tem quase que nenhuma estrutura não-trivial. Em 2009, S. Argyros e R. Haydon [4] anunciaram a demonstração da existência de tal espaço, descoberta esta publicada em 2011 na (quase lendária) revista *Acta Mathematica*.

O Corolário 7.3.5 foi provado primeiramente por I. Fredholm em 1903 para os operadores integrais do Exemplo 7.2.4. Fredholm interpretou as equações integrais como limites de sistemas de equações lineares considerando as integrais como limites de somas de Riemann e passando ao limite na regra de Cramer para o cálculo dos determinantes associados a esses sistemas lineares. Os termos *conjunto resolvente* e *espectro* foram cunhados por Hilbert em 1906. A teoria espectral dos operadores compactos também é conhecida como *teoria de Riesz–Schauder*. O objetivo desta teoria iniciada por Riesz em 1918 e completada por Schauder em 1930 era exatamente evitar os ‘determinantes infinitos’ de Fredholm.

Os operadores autoadjuntos são chamados algumas vezes de *operadores hermitianos*, em homenagem a C. Hermite, matemático francês do século 19. Alguns livros usam o termo operador autoadjunto para o caso real e operador hermitiano para o caso complexo.

O Corolário 7.5.5 vale para operadores que são apenas autoadjuntos (não necessariamente compactos). Para uma demonstração veja [12, Corollary 6.10].

O teorema espectral (Teorema 7.5.6) tem muitas aplicações na teoria de equações diferenciais; veja, por exemplo, [12, 8.6, 9.8] e [17, II.6].

Os operadores unitários e os operadores normais em espaços de Hilbert são introduzidos nos Exercícios 7.7.36 e 7.7.37, respectivamente. Os operadores normais gozam de uma decomposição espectral similar à decomposição dos operadores compactos e autoadjuntos que vimos na Seção 7.5. Para maiores detalhes veja [26, Theorem 7.53].

## 7.7 Exercícios

**Exercício 7.7.1** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T \in \mathcal{L}(E, E)$ . Prove que  $\sigma(T) = \sigma(T')$ .

**Exercício 7.7.2** Sejam  $E$  um espaço Banach,  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Suponha que

- (i)  $(T - \lambda I)^{-1}: (T - \lambda I)(E) \rightarrow E$  existe;
- (ii) O operador linear  $(T - \lambda I)^{-1}: (T - \lambda I)(E) \rightarrow E$  é contínuo;
- (iii)  $(T - \lambda I)(E)$  é denso em  $E$ .

Prove que  $(T - \lambda I)(E) = E$  e portanto  $\lambda \in \rho(T)$ .

**Exercício 7.7.3** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Prove que  $\mathcal{K}(E, F)$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E, F)$

**Exercício 7.7.4** Mostre que o operador integral  $T$  do Exemplo 7.2.4 está bem definido e é linear.

**Exercício 7.7.5** Mostre que o operador  $T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$  dado por  $T((a_j)_{j=1}^\infty) = \left(\frac{a_j}{j}\right)_{j=1}^\infty$  é compacto mas não é de posto finito.

**Exercício 7.7.6** Decida se o operador  $T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$  dado por  $T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_1, 0, a_3, 0, \dots)$  é compacto ou não.

**Exercício 7.7.7** Sejam  $E$  um espaço normado de dimensão infinita e  $T: E \longrightarrow E$  um operador linear compacto e bijetor. Mostre que o operador inverso  $T^{-1}$  não é contínuo.

**Exercício 7.7.8** Sejam  $E$  um espaço normado de dimensão infinita e  $T: E \longrightarrow E$  um operador linear compacto e bijetor. Mostre que  $E$  não é completo.

**Exercício 7.7.9** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $T: (C[a, b], \|\cdot\|_p) \longrightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  o operador integral definido exatamente como no Exemplo 7.2.4. Prove que  $T$  está bem definido, é linear e compacto.

**Exercício 7.7.10** Prove que  $\mathcal{K}(E, \ell_1) = \mathcal{L}(E, \ell_1)$  para todo espaço reflexivo  $E$ .

**Exercício 7.7.11** Prove que  $\mathcal{K}(c_0, E) = \mathcal{L}(c_0, E)$  para todo espaço reflexivo  $E$ .

**Exercício 7.7.12** Dados um operador compacto  $T \in \mathcal{K}(E, E)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , prove que existe um operador compacto  $S \in \mathcal{K}(E, E)$  tal que  $(I - T)^n = I - S$ .

**Exercício 7.7.13** Sejam  $\widehat{E}$  e  $\widehat{F}$  os completamentos dos espaços normados  $E$  e  $F$ ,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  um operador compacto e  $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{E}, \widehat{F})$  a extensão linear e contínua de  $T$  a  $\widehat{E}$ . Prove que:

(a)  $T(\widehat{E}) \subseteq F$  e  $\widehat{T}$  é compacto.

(b) No caso em que  $E = F$ ,  $T$  e  $\widehat{T}$  têm os mesmos autovalores não-nulos.

**Exercício 7.7.14** Seja  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de escalares que converge para 0. Construa um operador compacto  $T$  tal que  $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercício 7.7.15** Mostre que a reflexividade de  $E$  é hipótese essencial na Proposição 7.2.8(b).

**Exercício 7.7.16** Seja  $E$  um espaço de Banach tal que para todo compacto  $K \subseteq E$  e todo  $\varepsilon > 0$  existe um operador de posto finito  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  tal que  $\sup_{x \in K} \|x - T(x)\| < \varepsilon$ .

Prove que  $E$  tem a propriedade da aproximação (veja definição na Seção 7.6). Vale também a recíproca deste exercício – veja [63, Theorem 3.4.32].

**Exercício 7.7.17\*** Sejam  $E$  um espaço normado,  $H$  um espaço de Hilbert e  $T: E \longrightarrow H$  um operador compacto. Mostre que existe uma sequência de operadores de posto finito que converge para  $T$  em  $\mathcal{L}(E, H)$ .

**Exercício 7.7.18** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Um operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  é dito *nuclear* se existem sequências  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subseteq E'$  e  $(b_n)_{n=1}^\infty \subseteq F$  tais que  $\sum_{n=1}^\infty \|\varphi_n\| \cdot \|b_n\| < \infty$  e  $T(x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x)b_n$  para todo  $x \in E$ . Prove que todo operador nuclear é compacto.

**Exercício 7.7.19\*** Seja  $E$  um espaço de Banach. Prove que

(a) Se  $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$  são tais que  $T$  é um isomorfismo e  $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ , então  $S$  é um isomorfismo e

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \cdot \|S - T\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|S - T\|}.$$

(b) O conjunto  $\mathcal{C}$  dos isomorfismos de  $E$  em  $E$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{L}(E, E)$  e a função  $T \longrightarrow T^{-1}$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}$ .

**Exercício 7.7.20** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$  tais que  $T \circ S = S \circ T$ . Prove que  $S \circ T$  é um isomorfismo se, e somente se,  $T$  e  $S$  são isomorfismos.

**Exercício 7.7.21** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(E, E)$  tais que  $T_{\pi(1)} \circ \dots \circ T_{\pi(n)} = T_1 \circ \dots \circ T_n$  para toda bijeção  $\pi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ . Mostre que  $T_1 \circ \dots \circ T_n$  é um isomorfismo se, e somente se,  $T_i$  é isomorfismo para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Exercício 7.7.22** Sejam  $E$  um espaço de Banach complexo,  $T \in \mathcal{L}(E, E)$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Prove que  $\sigma(T^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(T)\}$ . (Lembre-se que  $T^n = T \circ \dots \circ T$ )

**Exercício 7.7.23** Prove o item (c) da Proposição 7.4.1.

**Exercício 7.7.24** Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert e  $S, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Prove que:

(a)  $(S + T)^* = S^* + T^*$ .

(b)  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ .

(c)  $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$ .

(d) Vale o item (d) da Proposição 7.4.1.

**Exercício 7.7.25** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert complexo,  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Prove que  $\lambda \in \sigma(T)$  se, e somente se,  $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$ .

**Exercício 7.7.26** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$ . Prove que  $\ker(T) = T^*(H)^\perp$ , e portanto  $H = \ker(T) \oplus T^*(H)$ .

**Exercício 7.7.27** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$ . Mostre que  $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ .

**Exercício 7.7.28** Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  e  $M$  e  $N$  subespaços fechados de  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente. Mostre que  $T(M) \subseteq N$  se, e somente se,  $T^*(N^\perp) \subseteq M^\perp$ .

**Exercício 7.7.29** Mostre que o operador  $T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$  dado por  $T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$ , é autoadjunto.

**Exercício 7.7.30** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador autoadjunto e  $n \in \mathbb{N}$ . Prove que  $T^n$  é autoadjunto e  $\|T^n\| = \|T\|^n$ .

**Exercício 7.7.31** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$  operadores autoadjuntos. Mostre que  $T \circ S$  é autoadjunto se, e somente se,  $T \circ S = S \circ T$ .

**Exercício 7.7.32** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um isomorfismo autoadjunto. Prove que se  $T$  é *positivo*, isto é,  $\langle T(x), x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in H$ , então a expressão

$$[x, y] := \langle T(x), y \rangle, \quad x, y \in H,$$

define um produto interno em  $H$  cuja norma induzida é equivalente à norma original de  $H$ .

**Exercício 7.7.33** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert complexo e  $T: H \longrightarrow H$  um operador linear contínuo. Mostre que existem únicos operadores autoadjuntos  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H, H)$  tais que  $T = T_1 + iT_2$ .

**Exercício 7.7.34** Seja  $H$  um espaço de Hilbert no qual existe um operador  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  compacto, autoadjunto e injetor. Prove que  $H$  é separável.

**Exercício 7.7.35** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert separável e  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  um operador compacto e autoadjunto. Prove que  $\sigma(T)$  é o fecho do conjunto dos autovalores de  $T$ .

**Exercício 7.7.36** Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um operador  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ :

- (a)  $T$  é invertível,  $T \circ T^* = \text{id}_{H_2}$  e  $T^* \circ T = \text{id}_{H_1}$ .
- (b)  $T$  é sobrejetor e  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  para todos  $x, y \in H_1$ .

Neste caso  $T$  é chamado de *operador unitário*.

**Exercício 7.7.37** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um operador  $T \in \mathcal{L}(H, H)$ :

- (a)  $T \circ T^* = T^* \circ T$ .
- (b)  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*(x), T^*(y) \rangle$  para todos  $x, y \in H$ .

Neste caso  $T$  é chamado de *operador normal*.

## Capítulo 8

# Espaços Vetoriais Topológicos

Seja  $A$  um subconjunto de um espaço normado  $E$ . Solicitamos ao leitor um pouco de paciência para nos acompanhar na demonstração da seguinte implicação:

Se  $A$  é convexo, então  $\overline{A}$  também é convexo. (8.1)

Dados  $x, y \in \overline{A}$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ , devemos provar que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \overline{A}$ . Podemos tomar sequências  $(x_n)_{n=1}^\infty$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  formadas por elementos de  $A$  tais que  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Da convexidade de  $A$  sabemos que  $(1 - \lambda)x_n + \lambda y_n \in A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e como as operações algébricas em  $E$  – adição e multiplicação por escalar – são contínuas,

$$(1 - \lambda)x_n + \lambda y_n \rightarrow (1 - \lambda)x + \lambda y.$$

Isso é suficiente para concluir que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \overline{A}$ , provando que  $\overline{A}$  é convexo.

O que nos interessa no argumento acima é o seguinte: em nenhum momento usamos a norma de  $E$ , ou seja, em nenhum momento foi necessário saber que a cada vetor  $x \in E$  está associado um número real  $\|x\|$  satisfazendo determinadas condições. A única informação que usamos foi o fato das operações algébricas em  $E$  serem contínuas quando consideramos em  $E$  a topologia induzida pela norma. O ponto central é que não foi a norma que resolveu o problema, e sim o fato da topologia induzida pela norma tornar contínuas as operações algébricas. O leitor mais atento pode alegar que, para argumentar por meio de sequências, usamos também o fato da topologia da norma ser metrizável. Isso é verdade, mas abstraindo a metrizabilidade pode-se substituir sequências por redes de forma que o argumento continue funcionando. Ou seja, de fato o argumento depende apenas da continuidade das operações algébricas.

Na verdade já passamos por esta situação antes neste livro (veja, por exemplo, a demonstração do Teorema 6.3.9). Isso quer dizer que muitas das propriedades dos espaços normados dependem apenas do fato da topologia induzida pela norma tornar contínuas as operações algébricas. O tema deste capítulo é justamente o estudo dos espaços vetoriais munidos de uma topologia em relação à qual as operações de adição e de multiplicação por escalar são contínuas. Tais espaços incluem os espaços normados, mas como veremos ao longo do capítulo, incluem também muitos espaços interessantes



e úteis que não são espaços normados. No decorrer do capítulo revisitaremos alguns resultados antes obtidos para espaços normados, por exemplo os teoremas de Hahn–Banach e de Goldstine, e também as topologias fracas.

## 8.1 Exemplos e primeiras propriedades

A discussão acima nos deixou prontos para a seguinte definição:

**Definição 8.1.1** Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e  $\tau$  uma topologia em  $E$ . Dizemos que o par  $(E, \tau)$  é um *espaço vetorial topológico* se as operações algébricas

$$AD: E \times E \longrightarrow E, \quad AD(x, y) = x + y \quad e$$

$$ME: \mathbb{K} \times E \longrightarrow E, \quad ME(a, y) = ay$$

são contínuas quando consideramos em  $E \times E$  e em  $\mathbb{K} \times E$  as respectivas topologias produto.

Em palavras, em um espaço vetorial topológico as estruturas algébrica e topológica são compatíveis.

**Exemplo 8.1.2** (a) Espaços normados são espaços vetoriais topológicos.

(b) Considere no espaço vetorial  $E$  a topologia caótica  $\tau_c = \{\emptyset, E\}$ . É imediato que  $(E, \tau_c)$  é um espaço vetorial topológico. Vejamos que este espaço não é normado no caso em que  $E \neq \{0\}$ . Suponha que exista uma norma  $\|\cdot\|$  em  $E$  que induza a topologia  $\tau_c$ . Neste caso, por ser um conjunto aberto, a bola aberta  $B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$  coincide com  $\emptyset$  ou com  $E$ . Como a origem pertence à bola,  $B(0, 1) = E$ . Isso claramente não pode ocorrer pois espaços normados não-triviais não são limitados (tome  $0 \neq x \in E$  e observe que o conjunto  $\{ax : a \in \mathbb{K}\}$  é ilimitado).

(c) Considere no espaço vetorial  $E \neq \{0\}$  a topologia discreta  $\tau_d = \{A : A \subseteq E\}$ . Vejamos que  $(E, \tau_d)$  não é um espaço vetorial topológico. Seja  $A = \{a\} \subseteq E$  com  $a \neq 0$ . Como todo subconjunto de  $E$  é aberto, é claro que  $A$  é aberto. Vejamos que  $ME^{-1}(A)$  não é aberto. Comprovaremos isso mostrando que  $(1, a) \in ME^{-1}(A)$  mas  $(1, a)$  não é um ponto interior de  $ME^{-1}(A)$ . Isso é verdade pois se  $V \subseteq \mathbb{K} \times E$  é um aberto contendo  $(1, a)$ , existem abertos  $1 \in V_1 \subseteq \mathbb{K}$  e  $a \in V_2 \subseteq E$  tais que  $V_1 \times V_2 \subseteq V$ . Assim, podemos tomar  $1 \neq \alpha \in V_1$ , e neste caso  $(\alpha, a) \in V_1 \times V_2 \subseteq V$ , enquanto que

$$ME(\alpha, a) = \alpha a \notin \{a\} = A.$$

Isso prova que não existe aberto em  $\mathbb{K} \times E$  contendo  $(1, a)$  e contido em  $ME^{-1}(A)$ . Portanto  $(1, a)$  não é ponto interior de  $ME^{-1}(A)$  e assim a multiplicação por escalar  $ME$  não é contínua.

(d) Sejam  $E$  um espaço normado,  $\sigma(E, E')$  a topologia fraca em  $E$  e  $\sigma(E', E)$  a topologia fraca-estrela em  $E'$ . Então  $(E, \sigma(E, E'))$  e  $(E', \sigma(E', E))$  são espaços vetoriais

topológicos. Sejam  $(x_\lambda)_\lambda$  e  $(y_\lambda)_\lambda$  redes em  $E$  tais que  $x_\lambda \xrightarrow{w} x$  e  $y_\lambda \xrightarrow{w} y$ . Da definição da topologia fraca sabemos que todo funcional  $\varphi \in E'$  é contínuo na topologia fraca, logo  $\varphi(x_\lambda) \longrightarrow \varphi(x)$  e  $\varphi(y_\lambda) \longrightarrow \varphi(y)$  para todo  $\varphi \in E'$ . Disso,

$$\varphi(x_\lambda + y_\lambda) = \varphi(x_\lambda) + \varphi(y_\lambda) \longrightarrow \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$$

para todo  $\varphi \in E'$ . Da Proposição 6.2.2(c) concluímos que  $x_\lambda + y_\lambda \xrightarrow{w} x + y$ . Isso prova que a adição é contínua. Argumento análogo prova que a multiplicação por escalar também é contínua, logo  $(E, \sigma(E, E'))$  é espaço vetorial topológico. Deixamos ao leitor a tarefa de mostrar que  $(E', \sigma(E', E))$  também é espaço vetorial topológico. Conforme vimos na Proposição 6.7.2, esses dois espaços vetoriais topológicos não são sequer metrizáveis, logo não são normados.

(e) Para  $0 < p < 1$ , defina  $\ell_p$  exatamente como antes, isto é:

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty \right\}.$$

Vejamos que  $\ell_p$  é espaço vetorial com as operações usuais de seqüências e que

$$d_p: \ell_p \times \ell_p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_p((a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty |a_j - b_j|^p,$$

é uma métrica em  $\ell_p$ . Para isso fixe  $s \geq 0$  e considere a função diferenciável

$$f_s: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_s(t) = s^p + t^p - (s + t)^p.$$

A condição  $0 < p < 1$  implica facilmente que  $f_s$  tem derivada não-negativa, logo é monótona não-decrescente em  $[0, +\infty)$ . Como  $f_s(0) = 0$ , segue que  $f_s(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Isso revela que

$$(s + t)^p \leq s^p + t^p \text{ para todos } s, t \geq 0. \quad (8.2)$$

Disso segue imediatamente que  $\ell_p$  é fechado para adição, e como é obviamente fechado para multiplicação por escalar, concluímos que  $\ell_p$  é espaço vetorial. A desigualdade triangular para  $d_p$  segue também (8.2), e como os demais axiomas de métrica são imediatos, resulta que  $d_p$  é uma métrica em  $\ell_p$ .

Vejamos agora que as operações algébricas em  $\ell_p$  são contínuas em relação à topologia induzida pela métrica  $d_p$ . É claro que a métrica  $d_p$  é invariante por translações, isto é,

$$d_p(x + z, y + z) = d_p(x, y) \text{ para todos } x, y, z \in \ell_p.$$

Dados então  $x, y \in \ell_p$  e seqüências  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$  em  $\ell_p$  tais que  $x_n \longrightarrow x$  e  $y_n \longrightarrow y$ ,

$$\begin{aligned} d_p(x_n + y_n, x + y) &= d_p(x_n + y_n - x, x + y - x) = d_p(x_n + y_n - x, y) \\ &= d_p(x_n + y_n - x - y_n, y - y_n) = d_p(x_n - x, y - y_n) \\ &\leq d_p(x_n - x, 0) + d_p(0, y - y_n) \\ &= d_p(x_n, x) + d_p(y_n, y) \longrightarrow 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Isso prova que  $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ , e portanto a adição é contínua. Para a multiplicação por escalar usaremos as seguintes propriedades da métrica  $d_p$ , igualmente óbvias:

$$d_p(ax, ay) = |a|^p \cdot d_p(x, y) \quad \text{para todos } x, y \in \ell_p \text{ e } a \in \mathbb{K},$$

$$d_p(ax, bx) = |a - b|^p \cdot d_p(x, 0) \quad \text{para todos } x \in \ell_p \text{ e } a, b \in \mathbb{K}.$$

Dados então  $x \in \ell_p$ ,  $a \in \mathbb{K}$  e sequências  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $\ell_p$  e  $(a_n)_{n=1}^\infty$  em  $\mathbb{K}$  tais que  $x_n \longrightarrow x$  e  $a_n \longrightarrow a$ ,

$$\begin{aligned} d_p(a_n x_n, ax) &\leq d_p(a_n x_n, a_n x) + d_p(a_n x, ax) \\ &= |a_n|^p \cdot d_p(x_n, x) + |a_n - a|^p \cdot d_p(x, 0) \longrightarrow 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

pois a sequência  $(|a_n|^p)_{n=1}^\infty$  é limitada (por ser convergente). Isso prova que a multiplicação por escalar é contínua, e portanto  $(\ell_p, d_p)$  é um espaço vetorial topológico metrizável. Em breve veremos que, neste caso em que  $0 < p < 1$ , este espaço não é normado.

(f) Seja  $X$  um espaço topológico não-vazio. É fácil ver que o conjunto

$$C(X, \mathbb{K}) = \left\{ f: X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua e } \sup_{t \in X} |f(t)| < \infty \right\},$$

é um espaço vetorial com as operações pontuais de funções. Para  $f \in C(X, \mathbb{K})$  e  $n \in \mathbb{N}$ , considere o conjunto

$$U(n) = \left\{ g \in C(X, \mathbb{K}) : \sup_{t \in X} |g(t)| < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{e} \quad U(n, f) = \{f + g : g \in U(n)\}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de mostrar que, para cada  $f \in C(X, \mathbb{K})$ , os conjuntos  $(U(n, f))_{n=1}^\infty$  formam uma base de vizinhanças para  $f$ , e que  $C(X, \mathbb{K})$  torna-se um espaço vetorial topológico quando munido da (única) topologia gerada por essas bases de vizinhanças.

(g) Sejam  $(E, \tau)$  um espaço vetorial topológico e  $M$  um subespaço vetorial de  $E$ . Como a topologia produto em  $M \times M$  coincide com a topologia induzida pela topologia produto em  $E \times E$  (e o mesmo para  $\mathbb{K} \times M$ ), e como restrição de função contínua é contínua,  $M$  munido da topologia induzida por  $E$  é espaço vetorial topológico.

Quando não houver necessidade nem perigo de ambiguidade, ao nos referirmos a um espaço vetorial topológico escreveremos simplesmente  $E$  no lugar de  $(E, \tau)$ .

**Definição 8.1.3** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais topológicos. Um homeomorfismo linear  $T: E \longrightarrow F$  é chamado de *isomorfismo* entre  $E$  e  $F$ . Neste caso dizemos que os espaços vetoriais topológicos  $E$  e  $F$  são *isomorfos*.

**Proposição 8.1.4** *As translações e as homotetias são homeomorfismos em um espaço vetorial topológico. Mais precisamente, se  $E$  é um espaço vetorial topológico,  $x_0 \in E$  e  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$ , então as funções*

$$x \in E \mapsto x + x_0 \in E \quad \text{e} \quad x \in E \mapsto ax \in E$$

*são homeomorfismos. A homotetia é também um isomorfismo.*

**Demonstração.** É claro que essas funções são bijetoras. Para a continuidade, basta enxergar a translação como a composição das aplicações

$$x \in E \mapsto (x, x_0) \in E \times E \mapsto x + x_0 \in E,$$

e a homotetia como a composição das aplicações

$$x \in E \mapsto (a, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto ax \in E,$$

e observar que a definição de espaço vetorial topológico e a definição da topologia produto garantem que todas as funções envolvidas são contínuas. As funções inversas também são contínuas pois a inversa da translação por  $x_0$  é a translação por  $-x_0$  e a inversa da homotetia por  $a$  é a homotetia por  $\frac{1}{a}$ . A linearidade da homotetia é clara. ■

**Corolário 8.1.5** *As seguintes afirmações são equivalentes para um subconjunto  $V$  do espaço vetorial topológico  $E$ :*

- (a)  $V$  é uma vizinhança da origem em  $E$ .
- (b)  $\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$  é uma vizinhança da origem em  $E$  para algum  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$ .
- (c)  $\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$  é uma vizinhança da origem em  $E$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \neq 0$ .
- (d)  $x_0 + V = \{x_0 + x : x \in V\}$  é uma vizinhança de  $x_0$  para algum  $x_0 \in E$ .
- (e)  $x_0 + V = \{x_0 + x : x \in V\}$  é uma vizinhança de  $x_0$  para todo  $x_0 \in E$ .

**Demonstração.** Basta lembrar que homeomorfismos transformam abertos em abertos. ■

Algumas propriedades algébricas desempenham papel relevante na teoria dos espaços vetoriais topológicos. Uma delas, a convexidade, já é nossa conhecida. Outras duas são as seguintes:

**Definição 8.1.6** Um subconjunto  $A$  do espaço vetorial  $E$  é dito:

- (a) *absorvente* se para todo  $x \in E$  existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $x \in \lambda A$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| \geq \lambda_0$ .
- (b) *equilibrado* se  $\lambda x \in A$  para todo  $x \in A$  e todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  com  $|\lambda| \leq 1$ ; isto é,  $\lambda A \subseteq A$  sempre que  $|\lambda| \leq 1$ .

**Proposição 8.1.7** *Seja  $\mathcal{U}$  a família de todas as vizinhanças da origem do espaço vetorial topológico  $E$ . Se  $U \in \mathcal{U}$ , então*

- (a)  $U$  é absorvente.
- (b) Existe  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $V + V \subseteq U$ .
- (c) Existe  $V \in \mathcal{U}$ ,  $V$  equilibrado, tal que  $V \subseteq U$ .

**Demonstração.** (a) Seja  $x_0 \in E$ . A aplicação

$$f: \mathbb{K} \longrightarrow E, \quad f(\lambda) = \lambda x_0,$$

é contínua, pois é a composição das aplicações contínuas

$$\lambda \in \mathbb{K} \mapsto (\lambda, x_0) \in \mathbb{K} \times E \quad \text{e} \quad (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E.$$

Como  $U$  é uma vizinhança da origem em  $E$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(\lambda) \in U$  sempre que  $|\lambda| < \delta$ , ou seja,

$$\lambda x_0 \in U \text{ sempre que } |\lambda| < \delta,$$

ou ainda,

$$x_0 \in \mu U \text{ sempre que } |\mu| > 1/\delta.$$

(b) Como a adição  $AD: E \times E \longrightarrow E$  é contínua e  $AD(0, 0) = 0$ , existe  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $AD(V \times V) \subseteq U$ , ou seja,  $V + V \subseteq U$ .

(c) Seja  $\overline{\Delta} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$  o disco fechado em  $\mathbb{K}$ . Como a multiplicação por escalar  $ME: \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$  é contínua e  $ME(\lambda, 0) = 0$ , para cada  $\lambda \in \overline{\Delta}$  existem  $A_\lambda$ , vizinhança aberta de  $\lambda$  em  $\mathbb{K}$ , e  $V_\lambda \in \mathcal{U}$  tais que  $\mu x \in U$  sempre que  $\mu \in A_\lambda$  e  $x \in V_\lambda$ . Da compacidade do disco  $\overline{\Delta}$  podemos tomar  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \overline{\Delta}$  tais que

$$\overline{\Delta} \subseteq A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}.$$

Tomando  $W = V_{\lambda_1} \cap \dots \cap V_{\lambda_n} \in \mathcal{U}$  vejamos que

$$\mu x \in U \text{ sempre que } \mu \in \overline{\Delta} \text{ e } x \in W.$$

De fato, se  $\mu \in \overline{\Delta}$ , então  $\mu \in A_{\lambda_i}$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ ; e se  $x \in W$ , então  $x \in V_{\lambda_i}$ . Definindo

$$V = \{\mu x : x \in W \text{ e } \mu \in \overline{\Delta}\},$$

segue que  $V$  é equilibrado e  $V \subseteq U$ . Mais ainda,  $V \in \mathcal{U}$  pois  $W \subseteq V$ . ■

**Proposição 8.1.8** *Seja  $A$  um subconjunto de um espaço vetorial topológico  $E$ .*

(a) *Se  $A$  é convexo então  $\overline{A}$  também é convexo.*

(b) *Se  $A$  é equilibrado então  $\overline{A}$  também é equilibrado.*

**Demonstração.** Já provamos o item (a) no caso normado ao demonstrar (8.1) no início deste capítulo. Dissemos também que o caso geral segue de um argumento análogo com redes. O leitor é convidado a preencher os detalhes no Exercício 8.6.10.

Provemos o item (b). Pela Proposição 8.1.4, se  $\lambda \in \mathbb{K}$  é um escalar fixo, a homotetia

$$M_\lambda: E \longrightarrow E, \quad M_\lambda(x) = \lambda x,$$

é um isomorfismo. Assim, se  $0 < |\lambda| \leq 1$ , como  $A$  é equilibrado,

$$\lambda \overline{A} = M_\lambda(\overline{A}) = \overline{M_\lambda(A)} = \overline{\lambda A} \subseteq \overline{A},$$

provando que  $\overline{A}$  é equilibrado. ■

**Proposição 8.1.9** *Toda vizinhança da origem em um espaço vetorial topológico contém uma vizinhança fechada e equilibrada da origem.*

**Demonstração.** Seja  $V$  uma vizinhança da origem. Dos itens (b) e (c) da Proposição 8.1.7 podemos tomar uma vizinhança equilibrada  $U$  da origem tal que  $U + U \subseteq V$ . Da Proposição 8.1.8(b) já sabemos que  $\bar{U}$  é equilibrado, logo basta mostrar que  $\bar{U} \subseteq V$ . Seja  $x \in \bar{U}$ . Do Corolário 8.1.5 sabemos que  $x + U$  é vizinhança de  $x$ , então  $(x + U) \cap U \neq \emptyset$ , isto é, existe  $y \in U$  tal que  $x + y \in U$ . Como  $U$  é equilibrado,  $-y \in U$ , logo

$$x \in -y + U \subseteq U + U \subseteq V.$$

■

A seguir veremos como se comportam os operadores lineares entre espaços vetoriais topológicos. Lembrando que a essência da definição de funções uniformemente contínuas entre espaços métricos é que pontos próximos têm imagens próximas; esse conceito pode ser naturalmente generalizado para o âmbito dos espaços vetoriais topológicos:

**Definição 8.1.10** Uma função  $f: E \longrightarrow F$  entre espaços vetoriais topológicos é *uniformemente contínua* se para toda vizinhança  $U$  da origem em  $F$  existe uma vizinhança  $V$  da origem em  $E$  tal que  $f(x) - f(y) \in U$  sempre que  $x, y \in E$  e  $x - y \in V$ .

**Proposição 8.1.11** *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear  $T: E \longrightarrow F$  entre espaços vetoriais topológicos.*

- (a)  $T$  é contínuo.
- (b)  $T$  é contínuo na origem de  $E$ .
- (c)  $T$  é contínuo em algum ponto de  $E$ .
- (d)  $T$  é uniformemente contínuo.

**Demonstração.** As implicações (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c) e (d)  $\implies$  (a) são óbvias. Suponha (c) e seja  $x_0 \in E$  um ponto no qual  $T$  é contínuo. Seja  $U$  uma vizinhança da origem em  $F$ . Pelo Corolário 8.1.5 sabemos que  $T(x_0) + U$  é vizinhança de  $T(x_0)$ . Da continuidade de  $T$  em  $x_0$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $T(V) \subseteq T(x_0) + U$ . Novamente pelo Corolário 8.1.5 sabemos que  $-x_0 + V$  é vizinhança da origem em  $E$ . Dados  $x, y \in E$  com  $x - y \in -x_0 + V$ , da linearidade de  $T$  concluímos que

$$\begin{aligned} T(x) - T(y) &= T(x - y) \in T(-x_0 + V) \\ &= -T(x_0) + T(V) \subseteq -T(x_0) + T(x_0) + U = U. \end{aligned}$$

Isso prova a continuidade uniforme de  $T$  e completa a demonstração. ■

Para funcionais lineares valem algumas caracterizações adicionais que aproximam a teoria ainda mais do caso normado:

**Proposição 8.1.12** *As seguintes afirmações são equivalentes para um funcional linear  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{K}$  no espaço vetorial topológico  $E$ .*

(a)  $\varphi$  é contínuo.

(b)  $\ker(\varphi)$  é fechado em  $E$ .

(c)  $\varphi$  é limitado em alguma vizinhança da origem de  $E$ , isto é, existe uma vizinhança  $W$  da origem de  $E$  tal que  $\varphi(W)$  é limitado em  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Esta implicação é clara pois o conjunto unitário  $\{0\}$  é fechado em  $\mathbb{K}$ .

(b)  $\implies$  (c) Se  $\ker(\varphi) = E$  não há nada a fazer. Supondo  $\ker(\varphi) \neq E$ , o conjunto  $V := E - \ker(\varphi)$  é um aberto não-vazio em  $E$ . Tome  $x \in V$ . Como  $V$  é uma vizinhança aberta de  $x$ ,  $U := -x + V$  é uma vizinhança aberta da origem. Pela Proposição 8.1.7(c) podemos tomar uma vizinhança equilibrada  $W$  da origem contida em  $U$ . Assim,

$$W \subseteq U = -x + V,$$

logo  $x + W \subseteq V$ , e portanto

$$(x + W) \cap \ker(\varphi) = \emptyset. \quad (8.3)$$

A linearidade de  $\varphi$  garante que  $\varphi(W)$  é um subconjunto equilibrado de  $\mathbb{K}$ . Assim,  $\varphi(W)$  é limitado ou é o próprio  $\mathbb{K}$  (veja Exercício 8.6.9). Suponha  $\varphi(W) = \mathbb{K}$ . Neste caso existe  $w \in W$  tal que  $\varphi(w) = -\varphi(x)$ , e daí  $\varphi(x + w) = 0$ . Por (8.3) sabemos que isso não ocorre, logo  $\varphi(W)$  é limitado, provando (c).

(c)  $\implies$  (a) Por hipótese existem uma vizinhança  $W$  da origem em  $E$  e algum  $K > 0$  tais que  $|\varphi(v)| < K$  para todo  $v \in W$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos portanto que  $|\varphi(x)| < \varepsilon$  sempre que  $x \in \frac{\varepsilon}{K}W$ . Como  $\frac{\varepsilon}{K}W$  é uma vizinhança da origem pelo Corolário 8.1.5, segue que  $\varphi$  é contínuo na origem. A continuidade de  $\varphi$  segue da Proposição 8.1.11. ■

## 8.2 Espaços localmente convexos

O estudo dos espaços normados foi favorecido pelo fato, garantido principalmente pelo Teorema de Hahn–Banach, de que espaços normados não-triviais ostentam um belo suprimento de funcionais lineares contínuos. As aplicações dos Corolários 3.1.3 e 3.1.4 que fizemos ao longo do texto constituem prova evidente disso. Entretanto, como veremos logo abaixo, isso não se repete no contexto dos espaços vetoriais topológicos. Mantendo a notação de  $E'$  para o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos em  $E$ , existem espaços vetoriais topológicos  $E \neq \{0\}$  tais que  $E' = \{0\}$  (veja Exemplo 8.2.3(e)). Uma maneira de evitar esta situação desfavorável é descobrir condições necessárias para que se tenha  $E' \neq \{0\}$ , por exemplo:

**Proposição 8.2.1** *Seja  $E$  um espaço vetorial topológico tal que  $E' \neq \{0\}$ . Então existe uma vizinhança convexa da origem  $V \neq E$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\varphi \in E'$ ,  $\varphi \neq 0$ , e  $x_0 \in E$  tais que  $\varphi(x_0) \neq 0$ . O conjunto

$$V := |\varphi|^{-1} \left( \left( -\infty, \frac{|\varphi(x_0)|}{2} \right) \right) = \left\{ x \in E : |\varphi(x)| < \frac{|\varphi(x_0)|}{2} \right\},$$

é aberto pois a função  $|\varphi|$  é contínua e, obviamente, contém a origem. É claro também que  $x_0 \notin V$ , logo  $V \neq E$ . Uma conta rotineira mostra que  $V$  é convexo. ■

Está claro então que a existência de funcionais lineares contínuos não-nulos depende da existência de abertos convexos não-triviais. Por isso estudamos os espaços vetoriais topológicos que contém fartos estoques de abertos convexos:

**Definição 8.2.2** Um *espaço localmente convexo* é um espaço vetorial topológico no qual a origem admite uma base de vizinhanças convexas, ou seja, toda vizinhança da origem contém um aberto convexo contendo a origem.

Como as translações são homeomorfismos (Proposição 8.1.4) e transformam conjuntos convexos em conjuntos convexos, um espaço vetorial topológico  $E$  é localmente convexo se, e somente se, todo vetor de  $E$  admite uma base de vizinhanças convexas.

**Exemplo 8.2.3** (a) Espaços normados são espaços localmente convexos, uma vez que as bolas abertas  $(B(0, \varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  formam uma base de vizinhanças convexas da origem.

(b) É claro que se  $E$  é um espaço vetorial e  $\tau_c = \{\emptyset, E\}$  é a topologia caótica, então  $(E, \tau_c)$  é espaço localmente convexo.

(c) Seja  $E$  um espaço normado. Cálculos elementares mostram que as bases de vizinhanças abertas da topologia fraca  $\sigma(E, E')$  em  $E$  e da topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  em  $E'$  descritas nas Proposições 6.2.2(b) e 6.3.2(b), respectivamente, são formadas por conjuntos convexos. Assim,  $(E, \sigma(E, E'))$  e  $(E', \sigma(E', E))$ , que já sabemos serem espaços vetoriais topológicos não-metrizáveis pelo Exemplo 8.1.2(d), são espaços localmente convexos.

(d) Seja  $0 < p < 1$ . Provaremos agora que o espaço vetorial topológico metrizável  $\ell_p$  do Exemplo 8.1.2(e) não é localmente convexo. Seja  $r > 0$ . Então a bola aberta  $B(0, r) = \{x \in \ell_p : d_p(x, 0) < r\}$  é uma vizinhança da origem. Suponha que exista uma vizinhança convexa da origem  $V$  contida na bola  $B(0, r)$ . Existe então  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(0, \varepsilon) \subseteq V$ . Escolha  $0 < \delta < \varepsilon$  e considere os vetores unitários canônicos  $e_1, e_2, \dots$  de  $\ell_p$ . Como  $d_p(\delta^{1/p}e_n, 0) = \delta < \varepsilon$ , segue que  $\delta^{1/p}e_n \in V$  para todo  $n$ . Por convexidade,

$$\frac{\delta^{1/p}}{n} \cdot \sum_{j=1}^n e_j = \frac{1}{n} \delta^{1/p} e_1 + \dots + \frac{1}{n} \delta^{1/p} e_n \in V$$

para todo  $n$ . Mas,

$$d_p \left( \frac{\delta^{1/p}}{n} \cdot \sum_{j=1}^n e_j, 0 \right) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\delta^{1/p}}{n} \right)^p = \sum_{j=1}^n \frac{\delta}{n^p} = \delta n^{1-p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$



pois  $0 < p < 1$ . Isso mostra que  $V$  é ilimitado, o que é uma contradição pois  $V \subseteq B(0, r)$ . Concluimos então que  $B(0, r)$  não contém vizinhança convexa alguma da origem, provando que o espaço vetorial topológico  $\ell_p$ , apesar de metrizável, não é localmente convexo. Em particular,  $\ell_p$  não é normado para  $0 < p < 1$ .

(e) Sejam  $0 < p < 1$  e  $L_p[0, 1]$  o conjunto das (classes de) funções Lebesgue-mensuráveis  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\int_{[0,1]} |f|^p dm < \infty$ , onde  $m$  é a medida de Lebesgue em  $[0, 1]$ . No Exercício 8.6.6 o leitor comprovará que  $L_p[0, 1]$  é espaço vetorial com as operações usuais de (classes de) funções e que a expressão

$$d_p(f, g) = \int_{[0,1]} |f - g|^p dm$$

define uma métrica em  $L_p[0, 1]$  que assim se torna espaço vetorial topológico. Seja  $U$  uma vizinhança convexa da origem de  $L_p[0, 1]$ . Podemos tomar  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(0, \varepsilon) \subseteq U$ . Dada  $f \in L_p[0, 1]$ ,  $f \neq 0$ , tome  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d_p(f, 0) < n^{1-p} \cdot \varepsilon$ , o que é possível pois  $0 < p < 1$ . Do Teorema Fundamental do Cálculo (veja [31, Theorem 3.36]), a função

$$F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{[0,t]} |f|^p dm,$$

é absolutamente contínua, logo contínua. Como  $F$  é monótona não-decrescente e não-nula,  $F(1) > 0$ . Logo  $F(0) = 0 < \frac{n-1}{n} \cdot F(1) < F(1)$ . Do Teorema do Valor Intermediário podemos tomar  $0 < t_{n-1} < t_n := 1$  tal que  $F(t_{n-1}) = \frac{n-1}{n} \cdot F(1)$ . Assim,

$$F(t_n) - F(t_{n-1}) = F(1) - \frac{n-1}{n} \cdot F(1) = \frac{1}{n} F(1).$$

Como  $F(0) = 0 < \frac{n-2}{n} \cdot F(1) < \frac{n-1}{n} \cdot F(1) = F(t_{n-1})$ , novamente pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $0 < t_{n-2} < t_{n-1}$  tal que  $F(t_{n-2}) = \frac{n-2}{n} \cdot F(1)$ . Assim,

$$F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) = \frac{n-1}{n} \cdot F(1) - \frac{n-2}{n} \cdot F(1) = \frac{1}{n} F(1).$$

Chamando  $t_0 = 0$ , após  $n$  passos teremos construído uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  tal que

$$\int_{[t_j, t_{j-1}]} |f|^p dm = F(t_j) - F(t_{j-1}) = \frac{1}{n} F(1) = \frac{1}{n} \int_{[0,1]} |f|^p dm,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ . Para cada  $j = 1, \dots, n$ , relembre que  $\mathcal{X}_{[t_{j-1}, t_j]}$  denota a função característica do intervalo  $[t_{j-1}, t_j]$  e considere a função  $f_j \in L_p[0, 1]$  dada por

$$f_j(t) = n f(t) \mathcal{X}_{[t_{j-1}, t_j]}(t).$$

Dessa forma,

$$d_p(f_j, 0) = n^p \int_{[t_{j-1}, t_j]} |f|^p dm \leq n^{p-1} \int_{[0,1]} |f|^p dm = n^{p-1} d_p(f, 0) < \varepsilon,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ . Assim cada  $f_j \in B(0, \varepsilon) \subseteq U$ . Como

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f_j = \frac{1}{n} f_1 + \dots + \frac{1}{n} f_n = f \mathcal{X}_{[t_0, t_1)} + \dots + f \mathcal{X}_{[t_{n-1}, t_n)} = f,$$

e  $U$  é convexo, segue que  $f \in U$ , ou seja  $U = L_p[0, 1]$ . Provamos então que a única vizinhança convexa da origem é o próprio  $L_p[0, 1]$ . Isso nos diz que  $L_p[0, 1]$  não é localmente convexo, em particular não é normado. Mais ainda, pela Proposição 8.2.1 concluímos que  $L_p[0, 1]' = \{0\}$ .

(f) Sejam  $E$  um espaço localmente convexo e  $M$  um subespaço vetorial de  $E$ . Então  $M$  munido da topologia induzida por  $E$  é também espaço localmente convexo.

Para espaços localmente convexos vale a seguinte versão mais forte da Proposição 8.1.7, que diz que em todo espaço localmente convexo a origem tem base de vizinhanças formada por conjuntos equilibrados, convexos e fechados:

**Proposição 8.2.4** *Seja  $\mathcal{U}$  a família de todas as vizinhanças da origem do espaço localmente convexo  $E$ . Se  $U \in \mathcal{U}$ , então*

- (a)  *$U$  é absorvente.*
- (b) *Existe  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $V + V \subseteq U$ .*
- (c) *Existe  $V_0 \in \mathcal{U}$ ,  $V_0$  equilibrada, convexa e fechada, tal que  $V_0 \subseteq U$ .*

**Demonstração.** As condições (a) e (b) já são conhecidas. Mostremos (c). Seja  $U$  uma vizinhança da origem. Contida em  $U$  existe uma vizinhança fechada  $U_1$  da origem; e contida em  $U_1$  podemos considerar uma vizinhança convexa  $U_2$  da origem, pois  $E$  é um espaço localmente convexo. Pela Proposição 8.1.7(c) sabemos que  $U_2$  contém uma vizinhança equilibrada  $W$  da origem. Para cada  $s \in \mathbb{K}$  com  $|s| = 1$ , temos, pelo fato da vizinhança  $W$  ser equilibrada, que

$$sW \subseteq W \text{ e } s^{-1}W \subseteq W.$$

Assim,

$$W = s^{-1}(sW) \subseteq s^{-1}W \text{ e } W = s(s^{-1}W) \subseteq sW,$$

e portanto

$$sW = W = s^{-1}W$$

para todo escalar  $s$  com módulo 1. Em particular, para cada tal  $s$ ,

$$s^{-1}W = W \subseteq U_2,$$

e portanto  $W \subseteq sU_2$ . Defina  $V = \bigcap_{|s|=1} sU_2$ . Assim  $W \subseteq V \subseteq U_2$ . Logo  $V$  é uma vizinhança da origem contida em  $U_2$ . Além disso, cada  $sU_2$  é convexo, e como interseção de convexos é ainda convexa, segue que a vizinhança  $V$  é convexa.

Vamos agora mostrar que a vizinhança  $V$  é equilibrada. Seja  $t$  um escalar com  $|t| \leq 1$ . Se  $v \in V$ , da definição de  $V$  resulta que  $v \in sU_2$  para todo escalar  $s$  com  $|s| = 1$ . Logo, para qualquer tal escalar  $s$ ,

$$tv \in tsU_2 = s_1 |t| U_2,$$

para  $s_1 = se^{i\theta}$ , onde  $t = |t| e^{i\theta}$ . Vejamos que

$$s_1 |t| U_2 \subseteq s_1 U_2.$$

De fato, se  $u \in U_2$ , então

$$s_1 |t| u = |t| (s_1 u) + (1 - |t|)0 \in s_1 U_2,$$

pois  $s_1 U_2$  é convexo e contém a origem, uma vez que  $U_2$  é convexo e contém a origem. Portanto  $tv \in s_1 U_2$ . Como  $s$  percorre todos os escalares de módulo 1,  $s_1$  também percorre todos esses escalares, logo

$$tv \in \bigcap_{|s_1|=1} s_1 U_2 = V.$$

Assim, encontramos uma vizinhança convexa e equilibrada  $V$  da origem contida em  $U_2$ . Da Proposição 8.1.8 segue que  $\bar{V}$  é também vizinhança convexa e equilibrada da origem. Como  $U_1$  é fechado e  $V \subseteq U_2 \subseteq U_1 \subseteq U$ , segue que  $V_0 := \bar{V}$  é vizinhança convexa, fechada e equilibrada da origem e  $V_0 \subseteq U_1 \subseteq U$ . ■

Os conjuntos convexos e equilibrados desempenham papel central na teoria dos espaços localmente convexos. Vejamos algumas propriedades de estabilidade de tais conjuntos, cujas demonstrações deixamos a cargo do leitor:

**Proposição 8.2.5** (a) *Combinações lineares e interseções arbitrárias de conjuntos convexos e equilibrados são conjuntos convexos e equilibrados.*

(b) *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais,  $T: E \rightarrow F$  linear e  $A \subseteq E$  e  $B \subseteq F$  conjuntos convexos e equilibrados. Então os conjuntos  $T(A) \subseteq F$  e  $T^{-1}(B) \subseteq E$  são convexos e equilibrados.*

Como homeomorfismos levam bases de vizinhanças em bases de vizinhanças, o resultado seguinte segue agora imediatamente:

**Proposição 8.2.6** *Espaço vetorial topológico isomorfo a espaço localmente convexo é também localmente convexo.*

O próximo resultado generaliza a Proposição 8.2.1 e reforça a necessidade de vizinhanças convexas para a existência de operadores lineares e contínuos.

**Proposição 8.2.7** *Sejam  $E$  um espaço vetorial topológico sem vizinhanças convexas próprias da origem e  $F$  um espaço localmente convexo de Hausdorff. Então o único operador linear contínuo de  $E$  em  $F$  é o operador nulo.*

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{U}$  uma base de vizinhanças convexas e equilibradas da origem de  $F$ . A propriedade de Hausdorff garante que  $\{0\} = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A$ . Seja  $T: E \rightarrow F$  linear e contínuo. Da Proposição 8.2.5 sabemos que, para cada  $A \in \mathcal{U}$ ,  $T^{-1}(A)$  é convexo e equilibrado. A continuidade de  $T$  implica que  $T^{-1}(A)$  é vizinhança da origem em  $E$ . Por hipótese segue que  $T^{-1}(A) = E$  para todo  $A \in \mathcal{U}$ . Assim,

$$\ker(T) = T^{-1}(\{0\}) = T^{-1}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} T^{-1}(A) = E,$$

provando que  $T$  é o operador nulo. ■

Combinando a proposição acima com o Exemplo 8.2.3(e) obtemos:

**Corolário 8.2.8** Para  $0 < p < 1$ , o único operador linear e contínuo de  $L_p[0, 1]$  em qualquer espaço vetorial topológico de Hausdorff é o operador nulo.

## 8.3 Seminormas e topologias

Aprenderemos nesta seção um método muito utilizado para introduzir topologias localmente convexas em espaços vetoriais. Veremos, na verdade, que todo espaço localmente convexo pode ser gerado por este método. Em um espaço normado consideramos normalmente a topologia gerada pela norma. Vejamos que famílias de seminormas também geram topologias, nem sempre normadas mas sempre localmente convexas.

**Definição 8.3.1** Uma *seminorma* no espaço vetorial  $E$  é uma função  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições:

- (a)  $p(x) \geq 0$  para todo  $x \in E$ .
- (b)  $p(ax) = |a|p(x)$  para todos  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ .
- (c)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ .

Das condições (b) e (c) concluímos que  $p(0) = 0$  e que

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \quad \text{para todos } x, y \in E. \quad (8.4)$$

**Exemplo 8.3.2** É claro que toda norma é seminorma. Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $\varphi$  um funcional linear em  $E$ . Então a correspondência  $x \in E \mapsto |\varphi(x)|$  é uma seminorma em  $E$ . Mais geralmente, dados um espaço vetorial  $E$ , um espaço normado  $F$  e  $T: E \rightarrow F$  linear, a correspondência  $x \in E \mapsto \|T(x)\|$  é uma seminorma em  $E$ .

Introduziremos agora a topologia determinada em um espaço vetorial por uma família de seminormas. Seja  $\mathcal{P}$  uma família de seminormas no espaço vetorial  $E$ . Dados  $x_0 \in E$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ , definimos

$$V(x_0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon) = \{x \in E : p_i(x - x_0) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Para cada  $x \in E$ , chamamos de  $\mathcal{V}_x$  a coleção de todos os subconjuntos de  $E$  da forma  $V(x, p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$  e  $\varepsilon > 0$ .

**Teorema 8.3.3** *Seja  $\mathcal{P}$  uma família de seminormas no espaço vetorial  $E$ . Então:*

(a) *Existe uma topologia  $\tau_{\mathcal{P}}$  em  $E$  que, para cada  $x \in E$ , admite  $\mathcal{V}_x$  como base de vizinhanças, isto é,*

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{G \subseteq E : \text{para cada } x \in G \text{ existe } U \in \mathcal{V}_x \text{ tal que } U \subseteq G\}.$$

(b)  *$(E, \tau_{\mathcal{P}})$  é espaço localmente convexo.*

(c) *Cada seminorma  $p \in \mathcal{P}$  é  $\tau_{\mathcal{P}}$ -contínua.*

(d)  *$(E, \tau_{\mathcal{P}})$  é um espaço de Hausdorff se, e somente se, para cada  $0 \neq x \in E$  existe uma seminorma  $p \in \mathcal{P}$  tal que  $p(x) \neq 0$ .*

A topologia  $\tau_{\mathcal{P}}$  será chamada de *topologia determinada (ou gerada) pela família de seminormas  $\mathcal{P}$* . Apesar da terminologia, o leitor deve estar atento para o fato de que  $\tau_{\mathcal{P}}$  não é a menor topologia em  $E$  que torna contínuas as seminormas da família  $\mathcal{P}$  no sentido da Seção 6.1 (veja Exercício 8.6.24). No Exercício 8.6.27 o leitor entenderá por que não usamos aqui a construção da Seção 6.1.

**Demonstração.** O leitor não terá dificuldade em verificar que os conjuntos  $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in E}$  satisfazem as condições (a)-(c) do Teorema B.15. Isso prova o item (a).

Para provar a continuidade da adição  $AD: E \times E \rightarrow E$ , sejam  $(x_0, y_0) \in E \times E$  e  $W$  uma vizinhança de  $x_0 + y_0$  em  $E$ . Não há perda de generalidade em considerar  $W$  uma vizinhança básica de  $x_0 + y_0$ . Logo existem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $W = V(x_0 + y_0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$ . Definindo  $U := V(0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$ , temos  $W = x_0 + y_0 + U$ . Então  $V := V(0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon/2)$  é vizinhança da origem, e portanto  $(x_0 + V) \times (y_0 + V)$  é vizinhança de  $(x_0, y_0)$ . Como  $V + V \subseteq U$ , temos

$$\begin{aligned} AD((x_0 + V) \times (y_0 + V)) &= x_0 + V + y_0 + V = x_0 + y_0 + V + V \\ &\subseteq x_0 + y_0 + U = W, \end{aligned}$$

provando a continuidade da adição  $AD$  em  $(x_0, y_0)$ .

Passamos agora à verificação da continuidade da multiplicação por escalar  $ME: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ . Para isso considere  $(a_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$  e  $W$  uma vizinhança básica de  $a_0 x_0$  em  $E$ . Como antes, existe uma vizinhança básica da origem, que denotaremos por  $W_0$ , tal que  $a_0 x_0 + W_0 = W$ . Também como antes existem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $U := V(0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon) \subseteq W_0$ . Para cada  $j = 1, \dots, n$ , defina

$$\eta_j = \frac{\varepsilon}{2(p_j(x_0) + 1)}, \quad \eta = \min\{\eta_j, j = 1, \dots, n\},$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + \eta)}, \quad A = \{a \in \mathbb{K} : |a| < \eta\} \quad \text{e} \quad V = V(0, p_1, \dots, p_n; \delta).$$

Sendo assim,  $(a_0 + A) \times (x_0 + V)$  é vizinhança de  $(a_0, x_0)$ . Como

$$a_0 x_0 + U \subseteq a_0 x_0 + W_0 = W,$$

para garantir a continuidade de  $ME$  basta provar que

$$ME((a_0 + A) \times (x_0 + V)) \subseteq a_0x_0 + U. \quad (8.5)$$

De fato isso ocorre pois, dados  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a \in a_0 + A$  e  $x \in x_0 + V$ ,

$$\begin{aligned} p_j(ax - a_0x_0) &= p_j(ax - ax_0 + ax_0 - a_0x_0) \leq p_j(ax - ax_0) + p_j(ax_0 - a_0x_0) \\ &= |a|p_j(x - x_0) + |a - a_0|p_j(x_0) \leq |a|\delta + \eta p_j(x_0) \\ &\leq |a|\frac{\varepsilon}{2(|a_0| + \eta)} + \frac{\varepsilon}{2(p_j(x_0) + 1)}p_j(x_0) \\ &\leq (|a_0| + \eta)\frac{\varepsilon}{2(|a_0| + \eta)} + \frac{\varepsilon}{2(p_j(x_0) + 1)}p_j(x_0) < \varepsilon, \end{aligned}$$

e daí  $(ax - a_0x_0) \in U$ , o que implica  $ax \in a_0x_0 + U$  e comprova (8.5).

A convexidade dos conjuntos da forma  $V(x, p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$  é imediata, e isso nos fornece (b).

Para provar (c), sejam  $p \in \mathcal{P}$ ,  $x_0 \in E$  e  $\varepsilon > 0$ . Então  $V(x_0, p; \varepsilon)$  é vizinhança de  $x_0$ . Para todo  $x \in V(x_0, p; \varepsilon)$ , de (8.4) segue que

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \varepsilon,$$

provando que  $p$  é contínua em  $x_0$ .

Finalmente provemos (d). Suponha que  $E$  seja um espaço de Hausdorff. Então, dado  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , existe uma vizinhança básica  $V = V(0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$  da origem que não contém  $x$ . Segue que

$$p_j(x) = p_j(x - 0) \geq \varepsilon > 0$$

para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Reciprocamente, suponha que para cada  $x \in E$  com  $x \neq 0$ , exista  $p \in \mathcal{P}$  tal que  $p(x) \neq 0$ . Dados  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ , tome  $p \in \mathcal{P}$  tal que  $p(x - y) > 0$ . Então  $V(x, p; p(x - y)/2)$  é vizinhança de  $x$  e  $V(y, p; p(x - y)/2)$  é vizinhança de  $y$ . Da desigualdade triangular segue que  $V(x, p; p(x - y)/2) \cap V(y, p; p(x - y)/2) = \emptyset$ , conseqüentemente  $(E, \tau_{\mathcal{P}})$  é espaço de Hausdorff. ■

**Exemplo 8.3.4** (a) Tendo em vista o Teorema 8.3.3(a) e as Proposições 6.2.2(b) e 6.3.2(b), fica claro que a topologia fraca  $\sigma(E, E')$  no espaço normado  $E$  é gerada pela família de seminormas  $(x \in E \mapsto |\varphi(x)|)_{\varphi \in E'}$ , e que a topologia fraca-estrela  $\sigma(E', E)$  em  $E'$  é gerada pela família de seminormas  $(\varphi \in E' \mapsto |\varphi(x)|)_{x \in E}$ .

(b) Sejam  $X$  um conjunto qualquer e  $E$  um espaço vetorial (com as operações usuais de funções) formado por funções  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ . Por exemplo, podemos tomar o espaço vetorial de todas as funções de  $X$  em  $\mathbb{K}$ . Para cada  $t \in X$ , a função

$$p_t: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_t(f) = |f(t)|,$$

é uma seminorma em  $E$ . Tomando  $\mathcal{P} = \{p_t\}_{t \in X}$  sabemos que  $(E, \tau_{\mathcal{P}})$  é espaço localmente convexo. Vejamos que a convergência de seqüências na topologia  $\tau_{\mathcal{P}}$  coincide

com a convergência pontual de seqüências de funções (o mesmo pode ser feito para redes). Isto é, dadas  $(f_n)_{n=1}^\infty$  e  $f$  em  $E$ ,

$$f_n \xrightarrow{\tau_P} f \iff f_n(t) \longrightarrow f(t) \text{ para todo } t \in X. \quad (8.6)$$

Suponha  $f_n \xrightarrow{\tau_P} f$  e tome  $t \in X$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $V(f, p_t; \varepsilon)$  é um aberto em  $E$  contendo  $f$ . Logo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_n \in V(f, p_t; \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ . Dessa forma,

$$|f_n(t) - f(t)| = p_t(f_n - f) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0,$$

provando que  $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ . Reciprocamente, suponha que  $f_n(t) \longrightarrow f(t)$  para todo  $t \in X$ . Dada uma vizinhança  $U$  de  $f$ , podemos tomar  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_k \in X$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $V(f, p_{t_1}, \dots, p_{t_k}; \varepsilon) \subseteq U$ . Para cada  $j = 1, \dots, k$ , existe  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(t_j) - f(t_j)| < \varepsilon$  sempre que  $n \geq n_j$ . Tomando  $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$  é imediato que  $f_n \in V(f, p_{t_1}, \dots, p_{t_k}; \varepsilon) \subseteq U$  para todo  $n \geq n_0$ . Isso mostra que  $f_n \xrightarrow{\tau_P} f$ . Em vista de (8.6),  $\tau_P$  é chamada de *topologia da convergência pontual*.

O objetivo agora é mostrar que todo espaço localmente convexo tem sua topologia gerada por uma família de seminormas. Para isso é necessário estabelecer a relação, muito próxima, de seminormas com o funcional de Minkowski, por nós já estudado na Seção 3.4. Esse é o propósito dos dois próximos resultados.

**Proposição 8.3.5** *Seja  $A$  um subconjunto convexo, equilibrado e absorvente do espaço vetorial  $E$ . Então o funcional de Minkowski de  $A$ , definido por*

$$p_A: E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\},$$

*é uma seminorma em  $E$ . Além disso,*

$$\{x \in E : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}. \quad (8.7)$$

**Demonstração.** A função  $p_A$  está bem definida pois  $A$  é absorvente. É claro que  $p_A(x) \geq 0$ . Mostremos primeiramente que  $p(ax) = |a|p(x)$  para todos  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ . Se  $a = 0$ , a igualdade desejada segue trivialmente. Suponhamos  $a \neq 0$  e escrevamos  $a = |a|e^{i\theta}$ . Seja  $\lambda > 0$  tal que  $x \in \lambda A$ . Logo

$$ax \in a\lambda A = |a|\lambda e^{i\theta} A = |a|\lambda A,$$

pois  $A$  é equilibrado. Assim,  $p_A(ax) \leq |a|\lambda$  sempre que  $x \in \lambda A$ . Decorre que

$$p_A(ax) \leq |a| \cdot \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} = |a|p_A(x).$$

Para a desigualdade inversa, seja  $\lambda > 0$  tal que  $ax \in \lambda A$ . Como  $a \neq 0$ ,

$$x \in \frac{\lambda}{a}A = \frac{\lambda}{|a|}e^{-i\theta}A = \frac{\lambda}{|a|}A,$$

pois  $A$  é equilibrado, portanto  $p_A(x) \leq \frac{\lambda}{|a|}$ . Assim,  $|a|p_A(x) \leq \lambda$  para todo  $\lambda > 0$  tal que  $ax \in \lambda A$ . Segue que  $|a|p_A(x) \leq p_A(ax)$ .

Provemos agora a desigualdade triangular  $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ . Sejam  $\lambda, \mu > 0$  tais que  $x \in \lambda A$  e  $y \in \mu A$ . Logo  $x + y \in \lambda A + \mu A$ . Como  $A$  é convexo,  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \leq 1$ ,  $\frac{\mu}{\lambda + \mu} \leq 1$  e  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1$ ,

$$x + y \in (\lambda + \mu) \left( \frac{\lambda A + \mu A}{\lambda + \mu} \right) = (\lambda + \mu) \left( \frac{\lambda A}{\lambda + \mu} + \frac{\mu A}{\lambda + \mu} \right) \subseteq (\lambda + \mu)A.$$

Portanto  $p_A(x + y) \leq \lambda + \mu$ , donde segue a desigualdade triangular.

Resta demonstrar (8.7). A segunda inclusão é óbvia. Provemos a primeira. Se  $p_A(x) < 1$ , então existe  $\lambda > 0$  tal que  $p_A(x) \leq \lambda < 1$  e  $x \in \lambda A$ . Então  $x \in A$  pois  $A$  é equilibrado. Daí  $\{x \in E : p_A(x) < 1\} \subseteq A$ . ■

Vale também a recíproca:

**Proposição 8.3.6** *Seja  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  uma seminorma no espaço vetorial  $E$ . Então o conjunto  $A := \{x \in E : p(x) \leq 1\}$  é convexo, equilibrado, absorvente e  $p_A(x) = p(x)$  para todo  $x \in E$ .*

**Demonstração.** Sejam  $a, b > 0$ ,  $a + b = 1$ , e  $x, y \in A$ . De

$$p(ax + by) \leq ap(x) + bp(y) \leq a + b = 1,$$

concluimos que  $ax + by \in A$  e portanto  $A$  é convexo.

Se  $|\lambda| \leq 1$  e  $x \in A$ , então  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \leq 1$ , provando que  $A$  é equilibrado.

Da definição de  $A$  e das propriedades de seminorma segue facilmente que se  $x \in \lambda_0 A$  e  $|\lambda_1| \geq |\lambda_0|$ , então  $x \in \lambda_1 A$ . Para mostrar que  $A$  é absorvente, seja  $x \in E$ . Façamos primeiramente o caso em que  $x \in A$ . Como  $x \in A = 1A$ , segue que  $x \in \lambda A$  sempre que  $|\lambda| \geq 1$ , o que resolve o problema no caso em que  $x \in A$ . Façamos agora o caso em que  $x \notin A$ . Neste caso  $p(x) > 1$ , e portanto  $x = p(x) \frac{x}{p(x)} \in p(x)A$ . Consequentemente  $x \in \lambda A$  sempre que  $|\lambda| \geq p(x)$ .

Vamos agora provar que  $p_A(x) = p(x)$  para todo  $x$  em  $E$ . Da Proposição 8.3.5 sabemos que

$$\{x \in E : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}.$$

Seja  $x \in E$ . Suponha  $p(x) = 0$ . A definição de  $A$  nos informa que  $\frac{x}{\lambda} \in A$  para todo  $\lambda > 0$ , e portanto  $x \in \lambda A$  para todo  $\lambda > 0$ . Segue que  $p_A(x) = 0 = p(x)$ . Suponha agora  $p(x) \neq 0$ . Neste caso  $\frac{rx}{p(x)} \notin A$  para todo  $r > 1$ . Pela primeira inclusão acima concluimos que  $p_A(\frac{rx}{p(x)}) \geq 1$ , e portanto  $rp_A(x) = p_A(rx) \geq p(x)$ , para todo  $r > 1$ . Faça  $r \rightarrow 1^+$  para obter  $p_A(x) \geq p(x)$ . Por outro lado, como  $\frac{x}{p(x)} \in A$ , temos  $p_A(\frac{x}{p(x)}) \leq 1$  pela segunda inclusão acima. Logo  $p_A(x) \leq p(x)$ . ■



Vejam agora que as topologias geradas por famílias de seminormas esgotam todas as topologias localmente convexas. Relembre que todo espaço localmente convexo admite base de vizinhanças da origem formada por conjuntos convexos e equilibrados (Proposição 8.2.4).

**Teorema 8.3.7** *Seja  $\mathcal{B}_0$  uma base de vizinhanças convexas e equilibradas da origem no espaço localmente convexo  $E$ . Então a topologia de  $E$  é gerada pela família de seminormas  $\mathcal{P} = \{p_V\}_{V \in \mathcal{B}_0}$ .*

**Demonstração.** Cada vizinhança  $V \in \mathcal{B}_0$  é absorvente pela Proposição 8.1.7, logo  $p_V$  é seminorma em  $E$  e

$$\{x \in E : p_V(x) < 1\} \subseteq V \subseteq \{x \in E : p_V(x) \leq 1\}$$

pela Proposição 8.3.5. Disso segue que, para todos  $V \in \mathcal{B}_0$  e  $\varepsilon > 0$ ,

$$\{x \in E : p_V(x) < \varepsilon\} \subseteq \varepsilon V \subseteq \{x \in E : p_V(x) \leq \varepsilon\} \subseteq \{x \in E : p_V(x) < 2\varepsilon\}.$$

Basta então mostrar que os conjuntos da forma  $\{x \in E : p_V(x) < \varepsilon\}$ , com  $V \in \mathcal{B}_0$  e  $\varepsilon > 0$ , formam uma base de vizinhanças da origem na topologia  $\tau_{\mathcal{P}}$ . É claro que cada conjunto dessa forma é uma vizinhança aberta da origem na topologia  $\tau_{\mathcal{P}}$ . Seja  $0 \in U \in \tau_{\mathcal{P}}$ . Do Teorema 8.3.3 existem  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{B}_0$  tais que  $V(0, p_{V_1}, \dots, p_{V_n}; \varepsilon) \subseteq U$ . Como  $\mathcal{B}_0$  é base de vizinhanças da origem, existe  $V \in \mathcal{B}_0$  tal que  $V \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_n$ . Da definição do funcional de Minkowski segue que  $p_{V_j} \leq p_V$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , assim

$$\{x \in E : p_V(x) < \varepsilon\} \subseteq V(0, p_{V_1}, \dots, p_{V_n}; \varepsilon) \subseteq U,$$

o que completa a demonstração. ■

Combine os Teoremas 8.3.3 e 8.3.7 para obter o

**Corolário 8.3.8** *Um espaço vetorial topológico é um espaço localmente convexo se, e somente se, sua topologia é gerada por uma família de seminormas.*

## 8.4 Revisitando Hahn–Banach e Goldstine

Para dar uma ideia ao leitor de que partes importantes da teoria dos espaços normados podem ser estendidas aos espaços localmente convexas, provaremos nesta seção algumas versões localmente convexas do Teorema de Hahn–Banach. E, para saldar uma dívida contraída com o leitor na Seção 6.4, provaremos o caso complexo do Teorema de Goldstine.

**Teorema 8.4.1** (Teorema de Hahn–Banach para espaços localmente convexas) *Sejam  $E$  um espaço localmente convexo e  $M$  um subespaço vetorial de  $E$ . Então todo funcional linear e contínuo  $\varphi_0 \in M'$  pode ser estendido a  $E'$  preservando linearidade e continuidade, isto é, existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) = \varphi_0(x)$  para todo  $x \in M$ .*

**Demonstração.** A continuidade de  $\varphi_0$  implica que o conjunto

$$U = \{x \in M : |\varphi_0(x)| \leq 1\}$$

é uma vizinhança fechada da origem em  $M$ . Existe então uma vizinhança aberta  $W$  da origem em  $E$  tal que

$$U \supseteq \text{int}(U) = M \cap W,$$

onde  $\text{int}(U)$  denota o interior do conjunto  $U$ . Como  $E$  é localmente convexo, existe portanto uma vizinhança convexa e equilibrada  $V$  da origem tal que  $V \subseteq W$ . Em particular,  $M \cap V \subseteq U$ . É claro que  $V$  é absorvente, pois toda vizinhança da origem é absorvente (Proposição 8.2.4). Da Proposição 8.3.5 sabemos que o funcional de Minkowski  $p_V$  é uma seminorma em  $E$  e

$$\{x \in E : p_V(x) < 1\} \subseteq V \subseteq \{x \in E : p_V(x) \leq 1\}.$$

Verifiquemos que

$$|\varphi_0(x)| \leq p_V(x) \text{ para todo } x \in M. \quad (8.8)$$

Sejam  $x \in M$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $p_V\left(\frac{x}{p_V(x)+\varepsilon}\right) < 1$ , segue que  $\frac{x}{p_V(x)+\varepsilon} \in V$  e consequentemente

$$\frac{x}{p_V(x)+\varepsilon} \in V \cap M \subseteq U.$$

Daí e da definição de  $U$ ,

$$\left| \varphi_0\left(\frac{x}{p_V(x)+\varepsilon}\right) \right| \leq 1,$$

e consequentemente  $|\varphi_0(x)| \leq p_V(x) + \varepsilon$ . Faça  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  para obter (8.8). Como a seminorma  $p_V$  satisfaz as condições (3.2) e (3.3), pelo Teorema 3.1.2 existe um funcional linear  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{K}$  que estende  $\varphi_0$  a  $E$  e

$$|\varphi(x)| \leq p_V(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda V\}$$

para todo  $x \in E$ . Disso decorre que, para qualquer  $\delta > 0$ ,  $|\varphi(x)| \leq \delta$  para todo  $x \in \delta V$ . Mas  $\delta V$  é vizinhança da origem, portanto a continuidade de  $\varphi$  segue da Proposição 8.1.12. ■

A convexidade local entrou em cena na Proposição 8.2.1 como condição necessária para a existência de funcionais lineares contínuos não-nulos. Vejamos que, quando acompanhada da propriedade de Hausdorff, a convexidade local é também condição suficiente:

**Corolário 8.4.2** Seja  $E$  um espaço localmente convexo de Hausdorff. Para cada  $0 \neq x \in E$  existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) = 1$ . Em particular,  $E' \neq \{0\}$  se  $E \neq \{0\}$ .

**Demonstração.** Dado  $0 \neq x \in E$ , chame de  $M$  o subespaço 1-dimensional de  $E$  gerado por  $x$  e considere o funcional

$$\varphi_0: M \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_0(\lambda x) = \lambda.$$

A linearidade de  $\varphi_0$  é óbvia. Como  $E$  é espaço de Hausdorff, o conjunto  $\{0\} = \ker(\varphi_0)$  é fechado em  $E$ , logo também é fechado em  $M$ . Da Proposição 8.1.12 segue que o funcional linear  $\varphi_0$  é contínuo em  $M$ . O resultado segue do Teorema 8.4.1. ■

Trabalharemos agora no sentido de demonstrar uma versão geométrica do Teorema de Hahn–Banach para espaços localmente convexos. Alguns resultados preparatórios são necessários.

**Proposição 8.4.3** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma seminorma  $p$  no espaço vetorial topológico  $E$ :*

- (a)  $p$  é contínua na origem.
- (b)  $p$  é contínua.
- (c)  $p$  é limitada em alguma vizinhança da origem.

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Sejam  $x_0 \in E$  e  $(x_\alpha)_\alpha$  uma rede em  $E$  convergindo para  $x_0$ . Da Proposição 8.1.4 sabemos que a translação

$$x \in E \mapsto x - x_0 \in E$$

é um homeomorfismo, portanto  $x_\alpha - x_0 \longrightarrow 0$ . Da continuidade de  $p$  na origem segue que  $p(x_\alpha - x_0) \longrightarrow p(0) = 0$ . Da desigualdade (8.4) temos

$$0 \leq |p(x_\alpha) - p(x_0)| \leq p(x_\alpha - x_0) \longrightarrow 0,$$

e portanto  $p(x_\alpha) \longrightarrow p(x_0)$ . Isso prova a continuidade de  $p$  em  $x_0$ .

(a)  $\implies$  (c) Como  $p(0) = 0$ , por hipótese existe uma vizinhança  $U$  da origem tal que  $p(U) \subseteq \{t \in \mathbb{K} : |t| < 1\}$ . Logo  $p$  é limitada em  $U$ .

(c)  $\implies$  (a) Por hipótese existem uma vizinhança  $V$  da origem e uma constante  $C > 0$  tal que  $|p(x)| < C$  para todo  $x \in V$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\frac{\varepsilon}{C}V$  é vizinhança da origem e

$$|p(x) - p(0)| = |p(x)| < \varepsilon$$

para todo  $x \in \frac{\varepsilon}{C}V$ . Isso prova a continuidade de  $p$  na origem. ■

**Corolário 8.4.4** *Seja  $A$  uma vizinhança convexa e equilibrada da origem de um espaço vetorial topológico. Então o funcional de Minkowski  $p_A$  é contínuo.*

**Demonstração.** O funcional  $p_A$  está bem definido pois  $A$  é absorvente pela Proposição 8.1.7. Como  $p_A(x) \leq 1$  para todo  $x \in A$ ,  $p_A$  é limitado na vizinhança da origem  $A$ , logo contínuo pela Proposição 8.4.3. ■

**Proposição 8.4.5** *Se  $V$  é uma vizinhança convexa e equilibrada da origem do espaço vetorial topológico  $E$ , então*

$$\overline{V} = \{x \in E : p_V(x) \leq 1\}.$$

*Em particular, se  $V$  é uma vizinhança convexa, equilibrada e fechada da origem, então*

$$V = \{x \in E : p_V(x) \leq 1\}.$$

**Demonstração.** A continuidade de  $p_V$  garante que o conjunto  $\{x \in E : p_V(x) \leq 1\}$  é fechado. Como  $V$  é absorvente por ser vizinhança da origem, da Proposição 8.3.5 sabemos que

$$\{x \in E : p_V(x) < 1\} \subseteq V \subseteq \{x \in E : p_V(x) \leq 1\},$$

logo  $\overline{V} \subseteq \{x \in E : p_V(x) \leq 1\}$ . Por outro lado, sejam  $x_0 \in E$  tal que  $p_V(x_0) \leq 1$  e  $W$  uma vizinhança de  $x_0$ . É fácil ver que o operador linear

$$T: \mathbb{K} \longrightarrow E, \quad T(a) = ax_0,$$

é contínuo. Como  $T(1) = x_0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $ax_0 = T(a) \in W$  sempre que  $|a - 1| < \varepsilon$ . Pela Proposição 8.3.5 sabemos que  $p_V$  é seminorma, logo

$$p_V(ax_0) = |a|p_V(x_0) \leq |a|.$$

Assim,  $p_V(ax_0) < 1$  – e portanto  $ax_0 \in V$  – sempre que  $|a| < 1$ . Tomando então  $a \in \mathbb{K}$  tal que  $|a - 1| < \varepsilon$  e  $|a| < 1$ , temos  $ax_0 \in V \cap W$ . Em particular,  $V \cap W \neq \emptyset$ , e portanto  $x_0 \in \overline{V}$ . ■

Além de estender as formas geométricas do Teorema de Hahn–Banach para o contexto dos espaços localmente convexos, o próximo resultado será útil na demonstração do Teorema de Goldstine.

**Teorema 8.4.6** (Forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach para espaços localmente convexos) *Seja  $A$  um subconjunto convexo, equilibrado e fechado do espaço localmente convexo  $E$ , com  $0 \in A$ . Para cada  $b \in E$ ,  $b \notin A$  e  $c > 0$ , existe um funcional linear contínuo  $\varphi \in E'$  tal que*

$$\varphi(b) = c > \sup\{|\varphi(x)| : x \in A\}.$$

**Demonstração.** Vejamos que existe uma vizinhança da origem convexa, equilibrada e fechada  $U$  tal que

$$(b + U) \cap A = \emptyset. \quad (8.9)$$

De fato, como  $A$  é fechado e  $b \notin A$ ,  $E - A$  é aberto e contém  $b \neq 0$ . Assim,  $-b + (E - A)$  é uma vizinhança aberta da origem (Corolário 8.1.5). Pela Proposição 8.2.4 existe vizinhança da origem convexa, equilibrada e fechada  $U$  tal que

$$0 \in U \subseteq (E - A) - b.$$

Logo  $b + U \subseteq (E - A)$ , provando (8.9). Vejamos que disso podemos concluir que

$$\left(b + \frac{1}{2}U\right) \cap \left(A + \frac{1}{2}U\right) = \emptyset. \quad (8.10)$$

Para isso suponha que exista  $z \in (b + \frac{1}{2}U) \cap (A + \frac{1}{2}U)$ . Neste caso podemos tomar  $x, y \in U$  e  $a \in A$  tais que

$$b + \frac{1}{2}x = z = a + \frac{1}{2}y,$$

e assim temos

$$b + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y)\right) = a \in A.$$

Como  $U$  é equilibrado,  $-y \in U$ ; e como  $U$  é convexo,  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y) \in U$ . Logo

$$b + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y)\right) \in (b + U) \cap A,$$

o que contradiz (8.9) e, portanto, prova (8.10). Em particular,  $b \notin (b + \frac{1}{2}U) \cap (A + \frac{1}{2}U)$ , o que nos permite afirmar que

$$b \notin V := \overline{A + \frac{1}{2}U},$$

pois  $(b + \frac{1}{2}U)$  é vizinhança de  $b$ . Como  $A$  e  $U$  são convexos e equilibrados,  $A + \frac{1}{2}U$  é uma vizinhança convexa e equilibrada da origem. Logo  $V = \overline{A + \frac{1}{2}U}$  é uma vizinhança da origem convexa, equilibrada e fechada pela Proposição 8.1.8. Da Proposição 8.4.5,

$$V = \{x \in E : p_V(x) \leq 1\},$$

e portanto  $p_V(b) > 1$  pois  $b \notin V$ . Considere o funcional linear

$$\varphi_0: [b] \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi_0(\lambda b) = \lambda c,$$

e a seminorma

$$q: E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad q(x) = \frac{cp_V(x)}{p_V(b)}.$$

Note que

$$|\varphi_0(\lambda b)| = |c\lambda| = q(\lambda b)$$

para todo escalar  $\lambda$ . O Teorema 3.1.2 garante então a existência de um funcional linear  $\varphi: E \longrightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\varphi(\lambda b) = \varphi_0(\lambda b)$  para todo escalar  $\lambda$  e  $|\varphi(x)| \leq q(x)$  para todo  $x \in E$ . A seminorma  $q$  é contínua pois o funcional de Minkowski  $p_V$  é contínuo pelo Corolário 8.4.4. Segue então que  $\varphi$  é contínuo. Observe que  $A \subseteq V$ , uma vez que  $0 \in U$ . Então, para todo  $x \in A$ ,  $p_V(x) \leq 1$ , logo

$$|\varphi(x)| \leq q(x) \leq \frac{c}{p_V(b)} < c = \varphi(b).$$

Assim,  $\sup\{|\varphi(x)| : x \in A\} \leq \frac{c}{p_V(b)} < \varphi(b)$ . ■

Terminamos o capítulo com uma demonstração do Teorema de Goldstine que funciona nos casos real e complexo. Relembre que, dado um espaço normado  $E$ ,  $J_E: E \rightarrow E''$  denota o mergulho canônico dado por  $J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$  para todos  $x \in E$  e  $\varphi \in E'$ .

**Teorema 8.4.7** (Teorema de Goldstine) *Seja  $E$  um espaço de Banach. Então  $J_E(B_E)$  é denso em  $B_{E''}$  na topologia fraca-estrela  $\sigma(E'', E')$  de  $E''$ .*

**Demonstração.** A inclusão  $\overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')} \subseteq B_{E''}$  está provada no início da demonstração do Teorema 6.4.4, logo basta provar a inclusão inversa. Pela Proposição 8.2.5(b), o conjunto  $J_E(B_E)$  é convexo e equilibrado. Logo, o conjunto  $\overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')}$  é convexo e equilibrado pela Proposição 8.1.8 e, obviamente, é fechado na topologia fraca-estrela e contém a origem. Seja  $f \in E'' - \overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')}$ . Como a topologia fraca-estrela é localmente convexa, pelo Teorema 8.4.6 existe  $\Phi \in (E'', \sigma(E'', E'))'$  tal que  $\Phi(f) \in \mathbb{R}$  e

$$\Phi(f) > \sup \left\{ |\Phi(g)| : g \in \overline{J_E(B_E)}^{\sigma(E'', E')} \right\}.$$

Por maior razão,

$$\Phi(f) > \sup \{ |\Phi(g)| : g \in J_E(B_E) \}. \quad (8.11)$$

Mas, pelo Corolário 6.3.7,  $(E'', \sigma(E'', E'))' = J_{E'}(E')$ ; logo existe  $\varphi \in E'$  tal que  $J_{E'}(\varphi) = \Phi$ . A desigualdade (8.11) pode então ser reescrita na forma

$$f(\varphi) > \sup \{ |g(\varphi)| : g \in J_E(B_E) \}.$$

Como para cada  $g \in J_E(B_E)$  existe um único  $x \in B_E$  tal que  $g = J_E(x)$ ,

$$f(\varphi) > \sup \{ |\varphi(x)| : x \in B_E \} = \|\varphi\|.$$

Portanto  $f\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) > 1$ , o que nos permite concluir que  $f \notin B_{E''}$ . ■

## 8.5 Comentários e notas históricas

O tema espaços vetoriais topológicos é muito vasto e existem muitos livros tratando especificamente do assunto. Por isso o material visto neste capítulo deve ser entendido como uma breve introdução ao tema. Para estudos mais aprofundados sugerimos [44, 68, 82].

O conceito de espaço vetorial topológico foi formalizado por A. N. Kolmogorov em 1934. Entretanto, em 1933 S. Mazur e W. Orlicz já consideravam espaços vetoriais munidos de topologias metrizáveis. O primeiro a generalizar para espaços vetoriais munidos de topologias com bases de vizinhanças convexas foi J. von Neumann em 1935. No mesmo ano, A. N. Tychonoff cunhou o termo *espaço localmente convexo*.

Conjuntos equilibrados e convexos de espaços vetoriais topológicos são usualmente chamados de *absolutamente convexos*. O motivo ficará claro no Exercício 8.6.11. A Proposição 8.2.4 diz então que em todo espaço localmente convexo a origem admite uma base de vizinhanças formada por conjuntos absolutamente convexos e fechados.

No Exemplo 8.2.3(e) provamos que  $L_p[0, 1]' = \{0\}$  para  $0 < p < 1$ , fato este estabelecido por M. M. Day em 1940. Para conhecimento do leitor informamos que o mesmo não se passa com os espaços  $\ell_p$ . Na verdade, para  $0 < p < 1$ ,  $(\ell_p)'$  é normado, e, em certo sentido, bem grande, pois é isomorfo isometricamente ao espaço de Banach  $\ell_\infty$  pela mesma relação de dualidade que estabelece a fórmula  $(\ell_1)' = \ell_\infty$  (veja [44, Example 6.10B]).

Os espaços  $\ell_p$  e  $L_p[a, b]$ ,  $0 < p < 1$ , são casos particulares de uma classe importante de espaços vetoriais topológicos metrizáveis. Dado  $0 < p < 1$ , uma  $p$ -norma no espaço vetorial  $E$  é uma função  $\|\cdot\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (a)  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in E$  e  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
- (b)  $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$  para todos  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ ;
- (c)  $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$  para todos  $x, y \in E$ .

Neste caso a expressão

$$d_p: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_p(x, y) = \|x - y\|^p,$$

define uma métrica em  $E$  e a topologia induzida por esta métrica faz de  $E$  um espaço vetorial topológico. O par  $(E, \|\cdot\|)$  é chamado de *espaço  $p$ -normado* e, quando for completo na métrica  $d_p$ , é chamado de *espaço  $p$ -Banach*. Como vimos no texto, esses espaços em geral não são localmente convexos. O artigo [48] é uma boa leitura sobre o tema.

Outras versões, enunciados equivalentes e aplicações do Teorema de Hahn–Banach em espaços localmente convexos podem ser encontradas em [68, Chapter 7]. Para versões vetoriais, na linha do que fizemos na Seção 3.2, veja o Capítulo 10 da mesma referência.

Existem versões dos teoremas de Banach–Steinhaus, do Gráfico Fechado e da Aplicação Aberta para operadores lineares contínuos entre espaços vetoriais topológicos satisfazendo determinadas condições, muitas delas relacionadas a convexidade local e metrizabilidade. Uma boa referência para o assunto é [68, Section 11.9 e Chapter 14].

O Teorema 8.4.7 foi provado por H. Goldstine em 1938.

## 8.6 Exercícios

**Exercício 8.6.1** Seja  $E$  um espaço normado. Prove que  $E'$  munido da topologia fraca-estrela é espaço vetorial topológico.

**Exercício 8.6.2** Diz-se que  $(G, \cdot, \tau)$  é um *grupo topológico* se  $(G, \cdot)$  é um grupo e  $\tau$  é uma topologia em  $G$  que torna contínuas as funções

$$(x, y) \in G \times G \mapsto x \cdot y \in G \quad \text{e} \quad x \in G \mapsto x^{-1} \in G.$$

Seja  $(E, \tau)$  um espaço vetorial topológico. Prove que  $(E, +, \tau)$  é um grupo topológico abeliano (comutativo).

**Exercício 8.6.3** Complete os detalhes do Exemplo 8.1.2(f).

**Exercício 8.6.4** Seja  $B$  um subconjunto de um espaço vetorial topológico. Prove que  $\bigcap_{t>1} (tB) \subseteq \overline{B}$ .

**Exercício 8.6.5** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais topológicos reais com  $F$  de Hausdorff. Prove que se  $T: E \rightarrow F$  é uma aplicação contínua tal que  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ , então  $T$  é linear.

**Exercício 8.6.6\*** Sejam  $0 < p < 1$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Defina  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  como o conjunto das funções mensuráveis  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ , com a convenção usual de identificar funções que são iguais  $\mu$ -quase sempre. Prove que:

- (a)  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  é espaço vetorial com as operações pontuais de (classes de) funções.
- (b) A expressão

$$d_p(f, g) = \int_X |f - g|^p d\mu$$

define uma métrica em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ .

- (c) O espaço métrico  $(L_p(X, \Sigma, \mu), d_p)$  é completo.
- (d) A topologia induzida pela métrica  $d_p$  torna  $L_p(X, \Sigma, \mu)$  um espaço vetorial topológico.

**Exercício 8.6.7** Verifique que o espaço métrico  $(\ell_p, d_p)$  do Exemplo 8.1.2(e) é completo.

**Exercício 8.6.8** Chame de  $s$  o espaço vetorial de todas as seqüências de escalares com as operações usuais de seqüências. Prove que a expressão

$$d((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n + b_n|},$$

define uma métrica que faz de  $s$  espaço vetorial topológico metrizável completo.

**Exercício 8.6.9** Prove que se  $A \subseteq \mathbb{K}$  é equilibrado, então  $A$  é limitado ou  $A = \mathbb{K}$ .

**Exercício 8.6.10** Seja  $A$  um subconjunto de um espaço vetorial topológico  $E$ . Prove que:

- (a) Se  $A$  é convexo então  $\overline{A}$  também é convexo.
- (b) Se  $A$  é subespaço vetorial de  $E$  então  $\overline{A}$  também é subespaço vetorial de  $E$ .



**Exercício 8.6.11** Um subconjunto  $A$  do espaço vetorial  $E$  é dito *absolutamente convexo* se  $ax + by \in A$  para quaisquer  $x, y \in A$  e escalares  $a, b$  com  $|a| + |b| \leq 1$ . Mostre que  $A$  é absolutamente convexo se, e somente se,  $A$  é convexo e equilibrado.

**Exercício 8.6.12** Considere o conjunto  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$  e chame de  $X$  o espaço topológico  $(\mathbb{R}^2, \tau)$  onde  $\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset, B\}$ .

- (a) Encontre um subespaço  $A$  de  $X$  tal que  $\overline{A}$  não é convexo.
- (b) O item (a) não contradiz a Proposição 8.1.8(a)?

**Exercício 8.6.13** Seja  $A$  um subconjunto equilibrado de um espaço vetorial. Prove que a envoltória convexa de  $A$  (veja Exercício 1.8.17) também é um conjunto equilibrado.

**Exercício 8.6.14** Exiba um conjunto convexo  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  cuja envoltória equilibrada

$$\text{eq}(A) = \{\lambda x : |\lambda| \leq 1 \text{ e } x \in A\}$$

não seja convexa.

**Exercício 8.6.15** Considere  $\mathbb{C}$  como espaço vetorial sobre si mesmo. Mostre que o conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < 1\}$  é convexo, absorvente, mas não é equilibrado.

**Exercício 8.6.16** (Espaço produto) Sejam  $E_1, \dots, E_n$  espaços vetoriais topológicos. Prove que:

- (a)  $E_1 \times \dots \times E_n$  munido da topologia produto é espaço vetorial topológico.
- (b)  $E_1 \times \dots \times E_n$  é espaço localmente convexo se, e somente se,  $E_1, \dots, E_n$  são espaços localmente convexos (fazer, não tenho certeza).

**Exercício 8.6.17** Prove a Proposição 8.2.5.

**Exercício 8.6.18** Prove a desigualdade (8.4).

**Exercício 8.6.19** Seja  $\varphi$  um funcional linear no espaço vetorial  $E \neq \{0\}$ . Prove que a seminorma  $x \in E \mapsto |\varphi(x)|$  é uma norma se, e somente se,  $E$  tem dimensão 1.

**Exercício 8.6.20** Sejam  $p_1, \dots, p_n$  seminormas no espaço vetorial  $E$ ,  $x_0 \in E$  e  $\varepsilon > 0$ . Mostre que

$$V(x_0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon) = x_0 + V(0, p_1, \dots, p_n; \varepsilon).$$

**Exercício 8.6.21** Sejam  $p_1$  e  $p_2$  seminormas no espaço vetorial  $E$ . Mostre que

$$p(x) := p_1(x) + p_2(x) \text{ e } q(x) := \max\{p_1(x), p_2(x)\}$$

são seminormas em  $E$ .

**Exercício 8.6.22** Demonstre o item (a) do Teorema 8.3.3.

**Exercício 8.6.23** Seja  $\mathcal{P}$  uma família de seminormas em um espaço vetorial  $E$ . Mostre que uma rede  $(x_\alpha)_\alpha$  converge para zero em  $(E, \tau_{\mathcal{P}})$  se, e somente se,  $p(x_\alpha) \rightarrow 0$  para toda seminorma  $p \in \mathcal{P}$ .

**Exercício 8.6.24** Nas mesmas condições do exercício anterior, mostre que pode ocorrer  $p(x_\alpha) \rightarrow p(x)$  para toda seminorma  $p \in \mathcal{P}$  sem que a rede  $(x_\alpha)_\alpha$  seja convergente para  $x$  na topologia  $\tau_{\mathcal{P}}$ . Conclua que  $\tau_{\mathcal{P}}$  nem sempre coincide com a menor topologia em  $E$  que torna contínuas as seminormas de  $\mathcal{P}$ .

**Exercício 8.6.25** Se  $E$  é um espaço normado e  $B$  denota a bola fechada de raio  $r$  centrada na origem, mostre que  $p_B(x) = \frac{\|x\|}{r}$  para todo  $x \in E$ .

**Exercício 8.6.26** Verifique se a topologia em  $\mathbb{R}$  gerada pela família unitária  $\mathcal{P} = \{p\}$ , composta pela seminorma  $p(x) = |x|$ , é de Hausdorff.

**Exercício 8.6.27** Chame de  $\tau$  a menor topologia em  $\mathbb{R}$  que torna contínua a seminorma  $p(x) = |x|$ . Mostre que  $(\mathbb{R}, \tau)$  não é espaço vetorial topológico.

**Exercício 8.6.28** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais topológicos localmente convexos e  $T: E \rightarrow F$  um operador linear. Mostre que  $T$  é contínuo se, e somente se, para cada seminorma contínua  $q: F \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q \circ T$  é uma seminorma contínua em  $E$ .

**Exercício 8.6.29** Sejam  $p$  e  $q$  seminormas no espaço vetorial topológico  $E$  tais que  $q$  é contínua e  $p(x) \leq q(x)$  para todo  $x \in E$ . Prove que  $p$  é contínua.

**Exercício 8.6.30** Prove que um espaço localmente convexo  $E$  é de Hausdorff se, e somente se, seu dual  $E'$  separa pontos de  $E$ , isto é, para todos  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ , existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

**Exercício 8.6.31\*** Em  $C[0, 1]$ , chame de  $\tau_1$  a topologia induzida pela métrica

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx,$$

e de  $\tau_2$  a topologia gerada pela família de seminormas  $\{p_x\}_{x \in [0, 1]}$  definidas por  $p_x(f) = |f(x)|$ . Mostre que a identidade  $(C[0, 1], \tau_2) \rightarrow (C[0, 1], \tau_1)$ :

- (a) É sequencialmente contínua, isto é,  $f_n \xrightarrow{\tau_1} f$  sempre que  $f_n \xrightarrow{\tau_2} f$ .
- (b) Não é contínua.

**Exercício 8.6.32\*** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e chame de  $L_0(X, \Sigma, \mu)$  o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Prove que a expressão

$$d(f, g) = \inf\{\{1\} \cup \{\varepsilon > 0 : \mu\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon\}\}$$

define uma métrica em  $L_0(X, \Sigma, \mu)$ .

(b) Prove que uma sequência em  $L_0(X, \Sigma, \mu)$  é de Cauchy em relação à métrica  $d$  se, e somente se, é de Cauchy em medida.

(c) Prove que a convergência no espaço métrico  $(L_0(X, \Sigma, \mu), d)$  coincide com a convergência em medida.

(d) Prove que o espaço métrico  $(L_0(X, \Sigma, \mu), d)$  é completo.

A topologia em  $L_0(X, \Sigma, \mu)$  induzida pela métrica  $d$  é chamada de *topologia da convergência em medida*. A partir de agora consideraremos  $L_0(X, \Sigma, \mu)$  munido desta topologia.

(e) Prove que a adição  $AD: L_0(X, \Sigma, \mu) \times L_0(X, \Sigma, \mu) \longrightarrow L_0(X, \Sigma, \mu)$  é contínua.

(f) No caso da medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  escrevemos  $L_0(\mathbb{R})$ . Encontre uma função  $f \in L_0(\mathbb{R})$  tal que a sequência  $(n^{-1}f)_{n=1}^\infty$  não converge em medida para zero. Conclua que, neste caso, a multiplicação por escalar não é contínua e portanto  $L_0(\mathbb{R})$  não é espaço vetorial topológico.

(g) Prove que se  $\mu(X) < \infty$ , então a multiplicação por escalar em  $L_0(X, \Sigma, \mu)$  é contínua, e portanto  $L_0(X, \Sigma, \mu)$  é espaço vetorial topológico.

(h) No caso da medida de Lebesgue no intervalo  $[0, 1]$  escrevemos  $L_0[0, 1]$ . Prove que a única vizinhança convexa da origem em  $L_0[0, 1]$  é o próprio  $L_0[0, 1]$ , e conclua que  $L_0[0, 1]$  não é espaço localmente convexo e tem dual trivial.

# Capítulo 9

## Introdução à Análise Não-Linear

“...o mundo é não linear”. Neste capítulo nos distanciamos um pouco da rígida, porém bastante útil, estrutura linear dos capítulos anteriores, para nos aventurarmos em um mundo não-linear. O objetivo do presente capítulo é oferecer uma pequena amostra da teoria de operadores não-lineares entre espaços de Banach, introduzindo algumas ferramentas básicas no estudo de problemas não-lineares, comumente encontrados em modelos matemáticos.

Da Seção 9.1 à Seção 9.5 exploraremos propriedades de continuidade de operadores não-lineares. Nas Seções 9.6 e 9.7 estenderemos as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral para funções entre espaços de Banach.

Ao longo deste capítulo, o corpo dos escalares será sempre o corpo dos números reais, embora alguns dos resultados tenham versões naturais para espaços sobre o corpo dos números complexos.

### 9.1 Continuidade na topologia da norma

Ao longo dos primeiros capítulos deste livro já nos deparamos com alguns exemplos de aplicações não-lineares. Certamente o primeiro exemplo é a própria norma de um espaço vetorial normado; outro exemplo ilustrativo é o produto interno em espaços de Hilbert  $H$ , como aplicação de  $H \times H$  em  $\mathbb{R}$ .

A primeira noção relevante no estudo de aplicações entre espaços de Banach é a continuidade em relação às topologias naturais. A definição de continuidade no contexto geral de espaços topológicos pode ser encontrada no Apêndice B (Definição B.22); e, para aplicações entre espaços normados, a caracterização usual usando  $\varepsilon$  e  $\delta$  está enunciada no preâmbulo do Capítulo 2. Discutimos nesta seção a continuidade em relação à topologia forte, isto é, a topologia gerada pela norma.

De acordo com o que fizemos no Exemplo 1.1.2, dizemos que uma aplicação arbitrária  $\Phi: M_1 \longrightarrow M_2$  entre espaços métricos é *limitada* se o conjunto  $\Phi(A)$  for limitado em  $M_2$  sempre que  $A$  for limitado em  $M_1$ . Do Teorema 2.1.1 sabemos que as noções de limitação e continuidade são equivalentes para operadores lineares entre espaços normados. Entretanto, em geral, limitação não implica em continuidade. Por outro

lado, qualquer aplicação contínua definida em um espaço vetorial normado de dimensão finita é limitada.

**Exemplo 9.1.1** Na Seção 2.1 definimos a noção de função lipschitziana entre espaços métricos. Para o caso particular de espaços normados, é claro que uma aplicação  $\Phi: E \longrightarrow F$  será lipschitziana se existir uma constante  $K > 0$  tal que  $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq K\|x - y\|$  para todos  $x, y \in E$ . Neste caso, o número  $\inf\{K : \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq K\|x - y\|\}$  é chamado de *norma Lipschitz de  $\Phi$*  e denotado por  $\|\Phi\|_{\text{Lip}}$ . Facilmente verifica-se que toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua e limitada.

**Exemplo 9.1.2** Considere a aplicação

$$m: L_p[0, 1] \longrightarrow L_p[0, 1], \quad m(f)(x) := |f(x)|.$$

Pela desigualdade triangular vemos que  $\|m(f) - m(g)\|_p \leq \|f - g\|_p$ , isto é,  $m$  é lipschitziana e  $\|m\|_{\text{Lip}} = 1$ .

A aplicação estudada no exemplo acima sugere uma classe bastante importante de operadores não-lineares atuando entre espaços do tipo  $L_p$ , conhecidos na literatura como *operadores de substituição* ou *operadores de Nemytskii*, os quais passamos a estudar em seguida.

**Definição 9.1.3** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Dizemos que uma aplicação  $\varphi: X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  *satisfaz a condição de Carathéodory* se:

(a) A função

$$\varphi(\cdot, r): X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \in X \mapsto \varphi(x, r),$$

é mensurável para todo  $r \in \mathbb{R}$  fixado,

(b) A função

$$\varphi(x, \cdot): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x, r),$$

é contínua para quase todo ponto  $x \in X$ , isto é, existe  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $\varphi(x, \cdot)$  é contínua para todo  $x \notin A$ .

A partir de agora escreveremos  $L_p(X)$  no lugar de  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ .

**Teorema 9.1.4** *Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida,  $\varphi: X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação satisfazendo a condição de Carathéodory,  $1 \leq p, q < \infty$  e  $k \in L_q(X)$  uma função positiva. Suponha que exista uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\varphi(x, t) \leq C|t|^{p/q} + k(x) \quad \text{para quase todo } x \in X \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

*Então o operador de substituição*

$$\Phi: L_p(X) \longrightarrow L_q(X), \quad \Phi(f)(x) := \varphi(x, f(x)),$$

*está bem definido, é limitado e contínuo.*

**Demonstração.** Deixamos a cargo do leitor a demonstração de que  $\Phi(f)$  é mensurável sempre que  $f$  for mensurável. Note que

$$\|\Phi(f)\|_q \leq C \cdot \|f\|_p^{pq} + \|k\|_q,$$

e assim  $\Phi$  de fato está bem definida como aplicação de  $L_p(X)$  em  $L_q(X)$  e é limitada.

Para mostrar a continuidade de  $\Phi$ , considere uma sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  tal que  $f_n \rightarrow f$  em  $L_p(X)$ . Suponha que  $(\Phi(f_n))_{n=1}^\infty$  não convirja para  $\Phi(f)$  em  $L_q(X)$ . Neste caso existem uma vizinhança  $V$  de  $\Phi(f)$  em  $L_q(X)$  e uma subsequência  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  de  $(f_n)_{n=1}^\infty$  tais que  $\Phi(f_{n_j}) \notin V$  para todo  $j$ . Como  $f_{n_j} \rightarrow f$  em  $L_p(X)$ , sabemos pelo Exercício 9.9.1 que existe uma subsequência  $(f_{n_{j_k}})_{k=1}^\infty$  de  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  tal que  $f_{n_{j_k}} \rightarrow f$   $\mu$ -quase sempre e que existe uma função  $g \in L_p(X)$  tal que  $|f_{n_{j_k}}| \leq g$   $\mu$ -quase sempre. Assim,

$$|\Phi(f_{n_{j_k}})(x)| \leq C|g(x)|^{p/q} + k(x) \in L_q(X),$$

para todo  $k$ . Segue do Teorema da Convergência Dominada que  $\Phi(f_{n_{j_k}}) \rightarrow \Phi(f)$  em  $L_q(X)$ . Isso contradiz o fato de que  $\Phi(f_{n_j}) \notin V$  para todo  $j$ , e portanto  $\Phi(f_n) \rightarrow \Phi(f)$  em  $L_q(X)$ , provando a continuidade de  $\Phi$ . ■

## 9.2 Continuidade na topologia fraca

Considerando a relevância da compacidade como invariante topológico e considerando a falta de compacidade local na topologia da norma em espaços de dimensão infinita, as topologias fracas tornam-se vitais no estudo de problemas modelados em espaços normados. Assim, a compreensão do comportamento de operadores não-lineares entre espaços normados em relação à convergência fraca é fundamental em análise não-linear. O objetivo desta seção é apresentar ao leitor alguns resultados sobre continuidade sequencial fraca de operadores não-lineares, um dos temas de pesquisa mais relevantes da análise moderna.

**Definição 9.2.1** Sejam  $E, F$  espaços normados e  $\Phi: E \rightarrow F$  uma aplicação arbitrária. Dizemos que:

- (a)  $\Phi$  é *sequencialmente fracamente contínua* se  $\Phi(x_n) \xrightarrow{w} \Phi(x)$  em  $F$  sempre que  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ .
- (b)  $\Phi$  é *demicontínua* se  $\Phi(x_n) \xrightarrow{w} \Phi(x)$  em  $F$  sempre que  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ .
- (c)  $\Phi$  é *completamente contínua* se  $\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x)$  em  $F$  sempre que  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ .

Aplicações completamente contínuas são obviamente contínuas e sequencialmente fracamente contínuas. Também é claro que toda aplicação contínua ou sequencialmente fracamente contínua é demicontínua. A relação entre continuidade e continuidade sequencial fraca é um pouco mais delicada. Para operadores lineares, a Proposição 6.2.9 garante que continuidade sequencial fraca é equivalente à continuidade; mas, em geral, não há qualquer relação entre continuidade e continuidade sequencial fraca.

Ilustraremos este fenômeno no próximo exemplo, para o qual relembramos a seguinte notação clássica: dados um conjunto qualquer  $X$  e uma função arbitrária  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos

$$f^+: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^+(x) := \max\{0, f(x)\}.$$

**Exemplo 9.2.2** É imediato que a função

$$\varphi: [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, t) = \max\{0, t\},$$

satisfaz as condições do Teorema 9.1.4, portanto seu operador de substituição associado

$$p: L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi], \quad p(f)(x) := f^+(x),$$

é contínuo. Na verdade é simples mostrar que  $p$  é lipschitziano. Estudemos seu comportamento em relação à convergência fraca. Pelo Exercício 9.9.2, a sequência de funções  $f_n(x) = \sin(nx)$  converge fracamente para 0. Usando mudança de variáveis,

$$\int_0^\pi \sin^+(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \sin^+(y) dy.$$

Tomando  $n = 2s - 1$  concluímos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\sin(nx)) dx \geq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(2s-1)} \sum_{k=1}^s \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(y) dy = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s}{(2s-1)} = 1.$$

Portanto o operador de substituição  $p(f) := f^+$  não é sequencialmente fracamente contínuo, mesmo sendo contínua e linear por partes a função  $t \mapsto t^+ := \max\{0, t\}$ .

**Definição 9.2.3** Um espaço de Banach  $E$  é *compactamente imerso* no espaço de Banach  $F$  se  $E$  é subespaço vetorial de  $F$  e a inclusão  $i: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  é um operador compacto.

A definição acima só tem interesse quando a norma de  $E$  não é equivalente à norma induzida por  $F$ , pois caso contrário  $E$  tem dimensão finita (Exercício 9.9.8), caso em que a inclusão é automaticamente compacta.

O teorema principal desta seção, embora com caráter elementar, mostra-se muito útil em várias aplicações. Para demonstrá-lo precisamos do seguinte lema topológico elementar:

**Lema 9.2.4** *Sejam  $X$  um espaço topológico,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $X$  e  $x \in X$ . Se  $(x_n)_{n=1}^\infty$  não converge para  $x$  e toda subsequência de  $(x_n)_{n=1}^\infty$  tem subsequência convergente, então existem uma subsequência  $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$  e  $x \neq y \in X$  tais que  $x_{n_j} \rightarrow y$ .*

**Teorema 9.2.5** *Sejam  $F$  um espaço de Banach reflexivo,  $\Phi: F \rightarrow F$  um operador demicontínuo e  $E$  um espaço de Banach reflexivo compactamente imerso em  $F$ . Se  $\Phi(E) \subseteq E$  e a aplicação  $\Phi: E \rightarrow E$  é limitada, então  $\Phi: E \rightarrow E$  é sequencialmente fracamente contínuo.*

**Demonstração.** Seja  $x_n \xrightarrow{w} x$  em  $E$ . Como seqüências fracamente convergentes são limitadas (Proposição 6.2.5) e  $\Phi$  é um operador limitado em  $E$ , a seqüência  $(\Phi(x_n))_{n=1}^{\infty}$  é limitada em  $E$ , e portanto todas as suas subsequências são limitadas em  $E$ . Como  $E$  é reflexivo, o Teorema 6.5.4 garante que toda subsequência de  $(\Phi(x_n))_{n=1}^{\infty}$  admite subsequência fracamente convergente em  $E$ . Suponha que  $(\Phi(x_n))_{n=1}^{\infty}$  não convirja fracamente para  $\Phi(x)$  em  $E$ . Pelo Lema 9.2.4 existem uma subsequência  $(\Phi(x_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$  e  $\Phi(x) \neq y \in E$  tais que  $\Phi(x_{n_j}) \xrightarrow{w} y$  em  $E$ . Como a inclusão de  $E$  em  $F$  é compacta,  $E$  é reflexivo e  $x_{n_j} \xrightarrow{w} x$  em  $E$ , segue da Proposição 7.2.8(b) que  $x_{n_j} \longrightarrow x$  em  $F$ . Pela demicontinuidade de  $\Phi$  em  $F$  concluímos que

$$\Phi(x_{n_j}) \xrightarrow{w} \Phi(x) \text{ em } F. \quad (9.1)$$

Lembrando novamente que a inclusão de  $E$  em  $F$  é compacta e que  $E$  é reflexivo, a condição  $\Phi(x_{n_j}) \xrightarrow{w} y$  em  $E$  implica, usando a Proposição 7.2.8(b) uma vez mais, que

$$\Phi(x_{n_j}) \longrightarrow y \text{ em } F. \quad (9.2)$$

De (9.1) e (9.2) segue que  $\Phi(x) = y$ . Essa contradição prova que  $\Phi(x_n) \xrightarrow{w} \Phi(x)$  em  $E$  e completa a demonstração. ■

Vejamos a seguir um exemplo de operador completamente contínuo, e portanto sequencialmente fracamente contínuo.

**Exemplo 9.2.6** Seja  $T: L_2[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$  um operador linear contínuo. Por exemplo, escolha uma função  $g \in C[0, 1]$  e defina

$$T: L_2[0, 1] \longrightarrow C[0, 1], \quad T(f)(t) := \int_0^1 f(s)g(t-s) ds.$$

Vejamos inicialmente que  $T: L_2[0, 1] \longrightarrow L_2[0, 1]$  é um operador compacto. Como  $L_2[0, 1]$  é reflexivo, pela Proposição 7.2.8(b) basta provar que  $T$  é completamente contínuo. De fato, dada uma seqüência  $f_n \xrightarrow{w} f$  em  $L_2[0, 1]$ , pela Proposição 6.2.9 segue que  $T(f_n) \xrightarrow{w} T(f)$  em  $C[0, 1]$ . É claro que, para cada  $t \in [0, 1]$ , a correspondência

$$g \in C[0, 1] \mapsto g(t),$$

define um funcional linear contínuo em  $C[0, 1]$ . Portanto  $T(f_n)(t) \longrightarrow T(f)(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Pela Proposição 6.2.5(a) existe  $K_1 > 0$  tal que  $\|T(f_n)\|_{\infty} \leq K_1$  para todo  $n$ , portanto segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que  $T(f_n) \longrightarrow T(f)$  em  $L_2[0, 1]$ .

Em seguida, considere uma função contínua  $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  qualquer e defina o operador não-linear

$$\Phi: L_2[0, 1] \longrightarrow L_2[0, 1], \quad \Phi(f)(x) := \varphi(T(f)(x)).$$

Vejamos que o operador  $\Phi$  é completamente contínuo, e portanto sequencialmente fracamente contínuo. De fato, se  $f_n \xrightarrow{w} f$  em  $L_2[0, 1]$ , então, como vimos,  $T(f_n) \longrightarrow T(f)$  em  $L_2[0, 1]$  e  $|T(f_n)(x)| \leq K_1$  para todos  $x \in [0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Como funções contínuas são limitadas em conjuntos limitados, existe  $K_2 > 0$  tal que  $|\varphi(T(f_n)(x))| \leq K_2$  para todos  $x \in [0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que  $\Phi(f_n) \longrightarrow \Phi(f)$  em  $L_2[0, 1]$ .



## 9.3 Problemas de minimização

Vários modelos matemáticos apresentam-se como problemas de minimização de uma determinada função  $\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}$  definida em um espaço de Banach  $E$ . Como sabemos desde o primeiro curso de Cálculo, a existência de mínimos e/ou máximos está intrinsecamente relacionada com propriedades de compacidade. Em espaços de Banach arbitrários de dimensão infinita, não temos sequer garantida a compacidade da bola unitária fechada na topologia fraca. Sabemos, pelo Teorema de Kakutani (Teorema 6.4.5), que tal compacidade está garantida apenas em espaços reflexivos. Por outro lado, a continuidade fraca de operadores não-lineares é de difícil verificação. Estes fatos tornam problemas de minimização em espaços de dimensão infinita bastante interessantes.

O objetivo desta seção é apresentar e aplicar uma técnica de minimização de operadores não-lineares definidos em espaços de Banach.

**Definição 9.3.1** Seja  $V$  um espaço vetorial. Uma função  $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}$  é *convexa* se

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y),$$

para todos  $t \in [0, 1]$  e  $x, y \in V$ . Se a desigualdade for estrita para  $t \in (0, 1)$ , a função é dita *uniformemente convexa*.

**Teorema 9.3.2** Sejam  $E$  um espaço de Banach reflexivo e  $\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e convexa. Suponha que  $\varphi$  seja coerciva, isto é,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$ . Então, para todo subconjunto convexo e fechado  $C$  de  $E$  existe  $x_0 \in C$  tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{y \in C} \varphi(y).$$

**Demonstração.** Inicialmente observamos que da continuidade e da convexidade de  $\varphi$  segue que, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $\{y \in E : \varphi(y) \leq \lambda\}$  é fechado e convexo. Portanto, pelo Teorema de Mazur (Teorema 6.2.11), o conjunto  $\{y \in E : \varphi(y) \leq \lambda\}$  é fracamente fechado, e assim o conjunto  $\{y \in E : \varphi(y) > \lambda\}$  é aberto na topologia fraca para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Suponha  $x_n \xrightarrow{w} x_0$  em  $E$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$x_n \in \{y \in E : \varphi(y) > \varphi(x_0) - \varepsilon\}$$

para  $n$  suficientemente grande. Isso nos permite concluir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x_0) \tag{9.3}$$

sempre que  $x_n \xrightarrow{w} x_0$  em  $E$ .

Voltemos à demonstração do teorema. Dado  $C \subseteq E$  convexo e fechado, podemos tomar uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $C$  tal que  $\varphi(x_n) \longrightarrow \inf_{y \in C} \varphi(y) < +\infty$ . Da coercividade de  $\varphi$  concluímos que  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência limitada. Como  $E$  é reflexivo, pelo

Teorema 6.5.4 existem uma subsequência  $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$  e  $x_0 \in E$  tais que  $x_{n_j} \xrightarrow{w} x_0$ . Aplicando uma vez mais o Teorema de Mazur, agora para o convexo e fechado  $C$ , sabemos que  $C$  é fracamente fechado, logo  $x_0 \in C$ . E como  $\varphi(x_{n_j}) \rightarrow \inf_{y \in C} \varphi(y)$ , de (9.3) segue que

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \varphi(x_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(x_{n_j}) = \inf_{y \in C} \varphi(y) \leq \varphi(x_0).$$

Concluimos que  $\varphi(x_0) = \inf_{y \in C} \varphi(y) = \min_{y \in C} \varphi(y)$ . ■

Como aplicação oferecemos uma nova demonstração – que na verdade é uma generalização – do teorema da projeção ortogonal em espaços de Hilbert (Teorema 5.2.2).

**Proposição 9.3.3** *Seja  $C$  um subconjunto convexo e fechado do espaço de Hilbert  $H$ . Para todo vetor  $x_0 \in H$  existe um único vetor  $y_0 \in C$  tal que*

$$\text{dist}(x_0, C) = \|x_0 - y_0\|.$$

*Além disso, o vetor  $y_0$  goza da seguinte caracterização geométrica:  $y_0$  é o único vetor de  $H$  tal que*

$$\langle x_0 - y_0, x - y_0 \rangle \leq 0 \tag{9.4}$$

*para todo  $x \in C$ .*

**Demonstração.** Dado  $x_0 \in H$ , considere a função

$$\varphi: H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \|x_0 - x\|^2.$$

A função  $\varphi$  é contínua, convexa e, pela desigualdade triangular, coerciva. Como  $C$  é convexo e fechado, o Teorema 9.3.2 garante existência de um mínimo  $y_0$  para  $\varphi$  em  $C$ , que claramente satisfaz a condição desejada. A unicidade segue da convexidade uniforme de  $\varphi$ . Para verificar a desigualdade 9.4, fixado  $x \in C$ , definimos a função

$$\psi_x: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_x(t) = \|x_0 - (tx + (1-t)y_0)\|^2.$$

Como  $t = 0$  é ponto de mínimo de  $\psi_x$ , temos

$$0 \leq \left. \frac{d}{dt} \psi_x(t) \right|_{t=0} = -\langle x_0 - y_0, x - y_0 \rangle.$$

■

Observe que, na Proposição acima, se  $C$  é um subespaço fechado de  $H$ , então a desigualdade (9.4) é equivalente à condição  $(x_0 - y_0) \perp C$ . Isso mostra que a Proposição 9.3.3 generaliza o Teorema 5.2.2.

## 9.4 Teoremas do ponto fixo

Teoremas do ponto fixo constituem uma área clássica em Análise Não-Linear e, como veremos nesta seção e na seguinte, são muito úteis nas aplicações.

**Definição 9.4.1** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  espaços métricos. Uma aplicação  $\Phi: M_1 \rightarrow M_2$  é uma *contração* se  $\|\Phi\|_{\text{Lip}} < 1$ , isto é, se existir uma constante  $\theta < 1$  tal que

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \theta d(x, y) \text{ para todos } x, y \in M_1.$$

Por serem lipschitzianas, contrações são funções uniformemente contínuas, logo contínuas.

Exemplos clássicos de contrações são funções diferenciáveis  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $\|Df(x)\| \leq \theta < 1$  para todo  $x \in U$ . Esta observação é consequência da Desigualdade do Valor Médio para aplicações diferenciáveis.

A seguir apresentamos o famoso Teorema do ponto fixo de Banach, cuja importância seria dificilmente exagerada.

**Teorema 9.4.2** (Teorema do ponto fixo de Banach) *Sejam  $M$  um espaço métrico completo e  $\Phi: M \rightarrow M$  uma contração. Então existe um único ponto  $x_0 \in M$  tal que  $\Phi(x_0) = x_0$ .*

**Demonstração.** Seja  $\theta < 1$  a constante da contração  $\Phi$ . Considere o número não-negativo

$$\iota := \inf\{d(\Phi(x), x) : x \in M\}.$$

Inicialmente verifiquemos que  $\iota = 0$ . De fato, caso contrário teríamos  $\theta^{-1}\iota > \iota$ , e então existiria  $x \in M$  tal que  $d(\Phi(x), x) < \theta^{-1}\iota$ . Teríamos assim

$$d(\Phi(\Phi(x)), \Phi(x)) \leq \theta d(\Phi(x), x) < \iota,$$

o que é incompatível com o fato de  $\iota$  ser o ínfimo.

Sabendo que  $\inf\{d(\Phi(x), x) : x \in M\} = 0$ , podemos tomar uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $M$  tal que  $d(\Phi(x_n), x_n) \rightarrow 0$ . Pela desigualdade triangular podemos estimar

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(\Phi(x_n), x_n) + d(\Phi(x_m), x_m) + d(\Phi(x_n), \Phi(x_m)) \\ &\leq d(\Phi(x_n), x_n) + d(\Phi(x_m), x_m) + \theta d(x_n, x_m), \end{aligned}$$

para todos  $n, m \in \mathbb{N}$ . Portanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{1-\theta} [d(\Phi(x_n), x_n) + d(\Phi(x_m), x_m)] \rightarrow 0,$$

quando  $n, m \rightarrow \infty$ . Isso prova que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy e, como  $M$  é completo,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  converge para um certo  $x_0 \in M$ . Da continuidade de  $\Phi$  temos  $\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0)$ , e da continuidade da métrica segue que

$$d(\Phi(x_0), x_0) = \lim_n d(\Phi(x_n), x_n) = 0,$$

provando que  $x_0$  é um ponto fixo para  $\Phi$ .

A unicidade segue da seguinte observação: se  $x_0$  e  $x_1$  são pontos fixos, então  $d(x_0, x_1) = d(\Phi(x_0), \Phi(x_1)) \leq \theta d(x_0, x_1)$ . ■

Teoremas de ponto fixo são ferramentas muito poderosas na resolução de problemas não-lineares. Do ponto de vista computacional, ou numérico, é importante descobrir algoritmos para encontrar pontos fixos e também estimar a velocidade de convergência de tais algoritmos. Em geral estes questionamentos são difíceis de serem respondidos satisfatoriamente; entretanto, para contrações o Teorema do ponto fixo de Banach nos garante a seguinte consequência imediata (relembre que  $\Phi^n = \Phi \circ \dots \circ \Phi$ ):

**Corolário 9.4.3** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $\Phi: E \longrightarrow E$  uma contração com constante  $\theta$  e  $x_0$  seu único ponto fixo. Então*

$$\|\Phi^n(x) - x_0\| \leq \theta^n \|x - x_0\|$$

para todos  $x \in E$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, para qualquer  $x \in E$ , a sequência  $(\Phi^n(x))_{n=1}^\infty$  converge para o único ponto fixo de  $\Phi$ .

Como primeira aplicação do Teorema 9.4.2, generalizaremos para o contexto não-linear o Teorema 7.1.4, que garante que o espectro  $\sigma(T)$  de um operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow E$  está contido no disco  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ .

**Exemplo 9.4.4** (Teoria espectral de operadores não-lineares) Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $\Phi: E \longrightarrow E$  uma aplicação lipschitziana. Mantendo a notação do Capítulo 7, o operador identidade em  $E$  será denotado por  $I$ . Vejamos que, para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda| > \|\Phi\|_{\text{Lip}}$ , a aplicação  $\Phi - \lambda I$  é uma bijeção lipschitziana com inversa lipschitziana. De fato, para provar a bijetividade, dado  $y \in E$  precisamos mostrar que a equação

$$\Phi(x) - \lambda x = y,$$

possui uma única solução. Reescrevendo a equação acima, temos que mostrar que o operador

$$\varphi: E \longrightarrow E, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\lambda}(\Phi(x) - y),$$

possui um único ponto fixo. Como  $|\lambda| > \|\Phi\|_{\text{Lip}}$ , decorre imediatamente que  $\varphi$  é uma contração, e a bijetividade de  $\Phi - \lambda I$  segue do Teorema do ponto fixo de Banach. É claro que  $\Phi - \lambda I$  é lipschitziana. Para verificar que  $(\Phi - \lambda I)^{-1}$  é lipschitziana, suponha que  $\Phi(x_i) - \lambda x_i = y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Subtraindo as equações, a desigualdade triangular nos fornece

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot \|x_1 - x_2\| &= \|(y_1 - y_2) + (\Phi(x_2) - \Phi(x_1))\| \leq \|y_1 - y_2\| + \|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \|\Phi\|_{\text{Lip}} \cdot \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|(\Phi - \lambda \text{Id})^{-1}(y_1) - (\Phi - \lambda \text{Id})^{-1}(y_2)\| = \|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|\Phi\|_{\text{Lip}}} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

A seguir apresentamos uma célebre aplicação do Teorema do ponto fixo de Banach em análise aplicada. Suporemos que uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^n$  foi escolhida e fixada.

**Teorema 9.4.5** (Teorema de Cauchy–Picard) *Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r > 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $f: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B[z_0, r] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua e lipschitziana na segunda variável, isto é,*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|,$$

*para algum  $L > 0$  e todos  $x_1, x_2 \in B[z_0, r]$  e  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Então a equação diferencial ordinária*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = z_0 \end{cases}$$

*possui uma única solução local  $x: [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'] \longrightarrow B[z_0, r]$ , para algum  $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ .*

**Demonstração.** Chame

$$K := \sup\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B[z_0, r]\}$$

e defina

$$\varepsilon' = \min \left\{ \varepsilon, \frac{r}{K}, \frac{1}{2L} \right\}.$$

Considere agora o conjunto

$$M := \{y : [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'] \longrightarrow B[z_0, r] : y \text{ é contínua}\},$$

munido da métrica  $d(y_1, y_2) := \|y_1 - y_2\|_\infty$ . No Exercício 9.9.12 o leitor provará que o espaço métrico  $(M, d)$  é completo. Defina agora a aplicação

$$\Phi: M \longrightarrow M, \quad \Phi(y)(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

É claro que  $\Phi(y)$  é contínua para todo  $y \in M$  e, para  $t \in [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon']$ , temos

$$\|\Phi(y)(t) - z_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\| ds \leq \varepsilon' K \leq r.$$

Portanto, de fato  $\Phi$  aplica  $M$  em  $M$ . Mostraremos agora que  $\Phi$  é uma contração. Para isto, para todo  $t \in [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon']$ , estimamos

$$\begin{aligned} \|\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \\ &\leq L\varepsilon' \|y_1 - y_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Segue do Teorema do ponto fixo de Banach que  $\Phi$  possui um único ponto fixo  $x \in M$ , que é precisamente a solução da equação diferencial requerida. ■

## 9.5 Operadores não-lineares compactos

Como já vimos nos capítulos anteriores, muitos dos resultados válidos em espaços euclidianos não são válidos quando exportados para ambientes de dimensão infinita. O *vilão* é quase sempre a falta de compacidade local. No caso linear, vimos no Capítulo 7 que muito pode ser feito na presença da compacidade local. Nesta seção veremos que também no caso não-linear a compacidade local nos permite ir mais longe.

**Definição 9.5.1** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U \subseteq E$ . Uma aplicação  $\varphi: U \longrightarrow F$  é *compacta* se:

- (a)  $\varphi$  é contínua com relação às topologias das normas,
- (b) Para todo subconjunto limitado  $V \subseteq U$ ,  $\overline{\varphi(V)}$  é compacto em  $F$ .

A motivação da definição acima é repassar a responsabilidade da compacidade para a aplicação. Vejamos alguns exemplos iniciais.

**Exemplo 9.5.2** Seja  $\varphi: E \longrightarrow F$  uma aplicação entre espaços de Banach.

- (a) Se  $E$  e  $F$  têm dimensão finita, então  $\varphi$  é compacto se, e somente se, é contínuo.
- (b) Se  $F$  tem dimensão finita, então  $\varphi$  é compacto se, e somente se, é contínuo e limitado.
- (c) Se  $E$  é reflexivo, então a noção de aplicação compacta é a mesma de aplicação completamente contínua, conforme definido em 9.2.1. Em particular, a aplicação do Exemplo 9.2.6 é compacta.
- (d) Operadores lineares compactos foram estudados nas seções 7.2 e 7.3 e atendem à definição 9.5.1. Por exemplo, o operador integração,

$$\mathcal{I}: C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1], \quad \mathcal{I}(f)(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

é compacto.

Heuristicamente, um operador atuando entre espaços de funções é compacto se possuir algum efeito de suavização, isto é, se o operador melhorar a regularidade das funções do domínio. Por exemplo, o operador integração mencionado acima aplica funções meramente contínuas em funções de classe  $C^1$ . O operador do Exemplo 9.2.6 associa funções de  $L_2[0, 1]$  em funções contínuas. Em geral tais aplicações são obtidas como inversas de operadores diferenciais.

**Exemplo 9.5.3** Sejam  $a, b, c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas com  $a(x) > \gamma > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Defina o operador diferencial linear

$$L(f) := a(x)f'' + b(x)f' + c(x)f.$$

Segue do Teorema de Cauchy–Picard 9.4.5 (veja Exercício 9.9.23) que, para qualquer função contínua  $g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ , o Problema de Valor Inicial

$$L(f) = g, \quad f(0) = a_0, \quad f'(0) = v_0, \tag{9.5}$$

possui uma única solução  $u: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . O operador  $\Phi$  definido por

$$\Phi: C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1], \quad \Phi(g) = u,$$

onde  $u$  é a única solução da equação (9.5), é compacto (Exercício 9.9.24).

Recordemos que um operador linear  $T: E \longrightarrow F$  tem *posto finito* se a imagem de  $T$ ,  $\text{Im}(T)$ , tem dimensão finita. É natural então estender este conceito para funções arbitrárias da seguinte forma:

**Definição 9.5.4** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados e  $U \subseteq E$ . Dizemos que uma aplicação arbitrária  $\varphi: U \longrightarrow F$  tem *posto finito* se o subespaço  $[\varphi(U)]$  de  $F$  gerado pela imagem de  $\varphi$  tem dimensão finita.

Na seção 7.6 discorreremos sobre a importância do problema de aproximação de operadores lineares compactos por operadores lineares de posto finito no desenvolvimento da Análise Funcional. Apresentamos a seguir um resultado sobre aproximação de operadores não-lineares compactos por operadores (não-lineares, é claro) de posto finito que será muito útil na demonstração do Teorema do ponto fixo de Schauder.

**Teorema 9.5.5** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U$  um subconjunto limitado de  $E$ . Uma aplicação  $\varphi: U \longrightarrow F$  é compacta se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma função limitada, contínua e de posto finito  $\varphi_\varepsilon: U \longrightarrow F$  tal que

$$\|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$$

para todo  $x \in U$ .

**Demonstração.** Suponha  $\varphi: U \longrightarrow F$  compacta. Por definição,  $\overline{\varphi(U)}$  é um subconjunto compacto de  $F$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $k \in \mathbb{N}$  e vetores  $y_1, y_2, \dots, y_k \in F$  tais que

$$\varphi(U) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon). \quad (9.6)$$

Seja  $G_\varepsilon = [y_1, y_2, \dots, y_k]$ . Passamos a construir uma partição da unidade. Para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ , considere a aplicação

$$\lambda_i: U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda_i(x) = \max\{\varepsilon - \|\varphi(x) - y_i\|, 0\},$$

e, normalizando,

$$\sigma_i: U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\sum_{j=1}^k \lambda_j(x)}.$$

Observe que  $\sum_{j=1}^k \lambda_j(x) > 0$  para todo  $x \in U$ , uma vez que, devido a (9.6),  $\varphi(x) \in B(y_j, \varepsilon)$  para algum  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . As funções  $\sigma_i$  são contínuas,  $0 \leq \sigma_i(x) \leq 1$  e, para todo  $x \in U$ ,  $\sum_{i=1}^k \sigma_i(x) = 1$ . Finalmente, definimos a aproximação

$$\varphi_\varepsilon: U \longrightarrow G_\varepsilon \subseteq F, \quad \varphi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k \sigma_i(x) y_i. \quad (9.7)$$

Facilmente verifica-se que, para todo  $x \in U$ ,

$$\|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\| \leq \sum_{i=1}^k \sigma_i(x) \cdot \|\varphi(x) - y_i\| \leq \varepsilon.$$

A recíproca é clara pois, conforme o leitor comprovará no Exercício 9.9.13, se  $(\varphi_n: U \longrightarrow F)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de operadores compactos e  $\varphi_n \longrightarrow \varphi$  uniformemente, então  $\varphi$  é compacto. ■

Como exemplificado na seção anterior, teoremas do ponto fixo são muito importantes em análise matemática pois fornecem ferramentas poderosas para mostrar a existência de soluções de determinados problemas sem necessariamente construí-las; tarefa esta que em geral é muito difícil ou até mesmo impossível de ser feita. É provável que o primeiro teorema do ponto fixo que o leitor conheceu seja a seguinte consequência imediata do Teorema do Valor Intermediário: toda função contínua  $f: [a, b] \longrightarrow [a, b]$  tem um ponto fixo. Um dos mais célebres teoremas do ponto fixo é uma generalização espetacular dessa propriedade:

**Teorema 9.5.6** (Teorema do ponto fixo de Brouwer) *Seja  $C$  um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo do  $\mathbb{R}^n$ . Qualquer aplicação contínua  $f: C \longrightarrow C$  tem pelo menos um ponto fixo.*

Em geral a demonstração deste teorema repousa em ferramentas avançadas de Cálculo Vetorial ou Topologia Algébrica (veja, por exemplo, [35, Theorem 18.9] ou [55, página 447] para uma versão menos geral). Passamos a seguir a discutir a validade do Teorema do ponto fixo de Brouwer em ambientes de dimensão infinita. Começamos mostrando que apenas com continuidade não é possível ir muito longe:

**Exemplo 9.5.7** Denotando por  $B$  a bola unitária fechada de  $\ell_2$ , considere a aplicação contínua

$$f: B \longrightarrow B, \quad f(a = (a_j)_{j=1}^\infty) = \left( (1 - \|a\|_2^2)^{1/2}, a_1, a_2, \dots \right).$$

Observe que

$$\|f(a)\|^2 = 1 - \|a\|^2 + \sum_{j=1}^\infty a_j^2 = 1.$$



Verificamos a seguir que  $f$  não possui ponto fixo. De fato, se existisse  $b \in B$  tal que  $f(b) = b$ , teríamos  $\|b\|_2 = \|f(b)\|_2 = 1$  e então

$$(b_1, b_2, \dots) = b = f(b) = \left( (1 - \|b\|_2^2)^{1/2}, b_1, b_2, \dots \right) = (0, b_1, b_2, \dots).$$

Isso implica que  $b = 0$ , o que é uma contradição pois  $\|b\|_2 = 1$ . Concluimos que  $f$ , mesmo sendo contínua, não tem ponto fixo.

O exemplo acima mostra que o Teorema do ponto fixo de Brouwer é mais um resultado confinado aos espaços euclidianos. Entretanto, mostraremos a seguir que tal resultado pode ser exportado para espaços de Banach sob a hipótese correta: a compacidade da aplicação.

**Teorema 9.5.8** (Teorema do ponto fixo de Schauder) *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C \subseteq E$  um conjunto fechado, convexo e limitado e  $f: C \rightarrow C$  uma aplicação compacta. Então  $f$  tem pelo menos um ponto fixo.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 9.5.5 existe uma sequência de operadores  $(f_n)_{n=1}^\infty$  contínuos, limitados e de posto finito que aproximam  $f$  uniformemente. Aproveitando a notação usada na demonstração do Teorema 9.5.5 e chamando de  $C_n$  a envoltória convexa do conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , da definição da aproximação em (9.7), é verdade que  $f_n(C) \subseteq C_n \subseteq C$ , sendo a última inclusão consequência da convexidade de  $C$ . Chamando de  $G_n$  o subespaço gerado por  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , restringindo  $f_n$  ao conjunto convexo e fechado  $C_n \subseteq G_n$ , e lembrando que  $f_n(C_n) \subseteq C_n$ , pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer existe  $x_n \in C_n$  tal que  $f_n(x_n) = x_n$ . Como  $C$  é limitado e  $f$  é compacta, existem uma subsequência  $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$  e  $y \in E$  tais que  $f(x_{n_j}) \rightarrow y$ . Mas  $C$  é fechado, logo  $y \in C$ . Combinando a convergência uniforme de  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  para  $f$  em  $C$  com a convergência  $f(x_{n_j}) \rightarrow y$ , a desigualdade

$$\|x_{n_j} - y\| \leq \|x_{n_j} - f(x_{n_j})\| + \|f(x_{n_j}) - y\| = \|f_{n_j}(x_{n_j}) - f(x_{n_j})\| + \|f(x_{n_j}) - y\|,$$

nos permite concluir que  $x_{n_j} \rightarrow y$ . Da continuidade de  $f$  segue que  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(y)$ , e portanto  $y = f(y)$ . ■

Como aplicação do Teorema 9.5.8, voltamos à teoria de existência de solução local do Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= z_0 \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

O Teorema de Cauchy-Picard, Teorema 9.4.5, garante existência e unicidade de solução quando  $f(t, x)$  é lipschitziana na variável  $x$ . Em algumas aplicações, não é possível garantir tal regularidade do campo  $f$  e apenas a continuidade é assegurada. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 9.5.9** Considere o problema de valor inicial

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, \quad x(0) = 0.$$

O campo referente a este problema é  $f(x) = \sqrt{x}$ , que é contínuo mas não é lipschitziano próximo à origem. Como as funções  $x(t) = 0$  e  $x(t) = \frac{1}{4}t^2$  são soluções, o problema tem solução mas a unicidade não é mais garantida.

O exemplo acima sugere o questionamento sobre o que podemos dizer a respeito da resolubilidade da equação diferencial ordinária (PVI) quando  $f$  é meramente um campo contínuo. A resposta é dada pelo Teorema de Peano, cuja demonstração é uma simples aplicação do Teorema do ponto fixo de Schauder.

**Teorema 9.5.10** (Teorema de Peano) *Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $f: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B[z_0, r] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua. Então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= z_0 \end{cases}$$

*possui pelo menos uma solução local  $x: [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'] \rightarrow B[z_0, r]$ , para algum  $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ .*

**Demonstração.** Escolha uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^n$  e, como na demonstração do Teorema 9.4.5, defina

$$K = \sup\{\|f(s, z)\| : (s, z) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B[z_0, r]\}.$$

Tome  $\varepsilon' = \frac{r}{K}\varepsilon$  e considere o espaço de Banach

$$C([t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'], \mathbb{R}^n) := \{y : [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'] \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ é contínua}\},$$

munido com a norma do máximo. Chamando a imagem da função  $y$  de  $\text{Im}(y)$ , é fácil ver que o subconjunto

$$M := \{y \in C([t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'], \mathbb{R}^n) : \text{Im}(y) \subseteq B[z_0, r]\} \subseteq C([t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon'], \mathbb{R}^n)$$

é fechado, convexo e limitado. A escolha de  $\varepsilon'$  garante que a aplicação

$$\Phi: M \rightarrow M, \quad \Phi(y)(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds,$$

está bem definida no sentido de aplicar  $M$  em  $M$ . A continuidade de  $\Phi$  é imediata. Observe que soluções do problema de valor inicial do enunciado são exatamente os pontos fixos de  $\Phi$ . Pelo Teorema do ponto fixo de Schauder basta então mostrar que o operador  $\Phi$  é compacto. Sejam  $V \subseteq M$ ,  $y \in V$  e  $t_1, t_2 \in [t_0 - \varepsilon', t_0 + \varepsilon']$ . Podemos estimar

$$\|\Phi(y)(t_1) - \Phi(y)(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, y(s))\| ds \leq K \cdot |t_1 - t_2|.$$

Segue que o conjunto  $\Phi(V)$  é limitado e equicontínuo. O Teorema de Ascoli (Teorema B.7) garante que  $\Phi(V)$  é relativamente compacto em  $M$ , provando que o operador  $\Phi$  é compacto. ■

## 9.6 Elementos do cálculo diferencial em espaços de Banach

Nesta seção passamos a discutir a noção de diferenciabilidade de funções  $f: U \subseteq E \longrightarrow F$ , onde  $U$  é um aberto e  $E$  e  $F$  são espaços de Banach. De acordo com o cálculo infinitesimal em dimensão finita, iniciamos nossa análise buscando aproximar localmente funções não-lineares  $f$  por funções afins:

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

onde  $f'(x_0)$  é uma aplicação linear contínua de  $E$  em  $F$ . Esse objetivo nos conduz à definição de funções Fréchet-diferenciáveis:

**Definição 9.6.1** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U$  um aberto em  $E$ . Dizemos que uma função  $f: U \longrightarrow F$  é *Fréchet-diferenciável* no ponto  $x_0 \in U$  se existe um operador linear contínuo  $A: E \longrightarrow F$  tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h),$$

para todo  $h$  tal que  $x_0 + h$  pertence a uma bola aberta centrada em  $x_0$  e contida em  $U$ , onde  $R(x_0, h) = o(\|h\|)$ , isto é:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso  $A$  é chamada de *derivada de Fréchet de  $f$  em  $x_0$*  e denotada por  $A = Df(x_0)$ .

Como é usual, dizemos que  $f$  é *Fréchet-diferenciável* se  $f$  for Fréchet-diferenciável em todos os pontos de  $U$ .

Na definição acima utilizamos a notação clássica  $o(\|h\|)$ . Abrimos um pequena digressão para discutir um pouco das vantagens desta notação, conhecida como ‘*little-o*’. Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Dadas duas funções  $f: U \subseteq E \longrightarrow F$  e  $g: U \subseteq E \longrightarrow [0, \infty)$ , onde  $U$  é um aberto contendo a origem, dizemos que  $f = o(g)$  se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} = 0.$$

A igualdade  $f = o(g)$  é chamada de *igualdade assintótica*. A ideia é que, quando  $x \longrightarrow 0$ ,  $\|f(x)\|$  tende para zero mais rapidamente do que  $g(x)$ . Com essa notação, dizer que  $f(x) \longrightarrow 0$  quando  $x \longrightarrow 0$  é equivalentemente a escrever  $f = o(1)$ . No nosso contexto estamos privilegiando a origem, mas obviamente igualdades assintóticas podem ser definidas para  $x \longrightarrow x_0$  com  $x_0 \neq 0$ .

Observemos inicialmente que a definição de Fréchet-diferenciabilidade pressupõe apenas a existência do operador linear contínuo  $A$  de tal sorte que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Vejamos agora algumas consequências da Fréchet-diferenciabilidade:

**Proposição 9.6.2** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U \subseteq E$  aberto. Se a função  $f: U \rightarrow F$  é Fréchet-diferenciável em  $x_0 \in E$ , então a derivada de Fréchet de  $f$  em  $x_0$  é única e  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$  sejam tais que

$$f(x_0 + h) - (f(x_0) + A(h)) = o(\|h\|) \quad \text{e} \quad f(x_0 + h) - (f(x_0) + B(h)) = o(\|h\|).$$

Subtraindo as igualdades assintóticas acima concluímos que

$$\|(A - B)(h)\| = o(\|h\|). \quad (9.8)$$

Ora, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, existe  $h_\varepsilon$  com  $\|h_\varepsilon\| = 1$  tal que, para qualquer  $\delta > 0$ ,

$$\|A - B\| \leq \|(A - B)(h_\varepsilon)\| + \varepsilon = \frac{\|(A - B)(\delta h_\varepsilon)\|}{\|\delta h_\varepsilon\|} + \varepsilon.$$

Em vista de (9.8), tomando o limite quando  $\delta \rightarrow 0$  e posteriormente fazendo  $\varepsilon$  tender a zero, concluímos a unicidade da derivada de  $f$  em  $x_0$ . Para verificar continuidade de  $f$  em  $x_0$ , basta estimar, via desigualdade triangular

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \|Df(x_0)\| \cdot \|h\| + \|R(x_0, h)\| \rightarrow 0,$$

quando  $h \rightarrow 0$  em  $E$ . ■

Vejamos alguns exemplos preliminares.

**Exemplo 9.6.3** (a) Toda função constante em um aberto de um espaço de Banach é Fréchet-diferenciável e tem derivada nula. Para a recíproca desta propriedade, veja o Corolário 9.6.7.

(b) Toda aplicação linear contínua  $A: E \rightarrow F$  é Fréchet-diferenciável e  $DA(x_0) = A$  para todo  $x_0 \in E$ .

(c) Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e

$$f: H \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2.$$

Então  $f$  é Fréchet-diferenciável e  $Df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$  para todos  $x, h \in H$ . De fato,

$$\|x + h\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x, h \rangle = \|h\|^2 = o(\|h\|).$$

Mais geralmente, se  $A: H \rightarrow H$  é uma aplicação linear, então a função

$$f_A: H \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_A(x) = \langle A(x), x \rangle,$$

é Fréchet-diferenciável e

$$Df_A(x)(h) = \langle (A + A^*)x, h \rangle,$$

para todos  $x, h \in H$ . De fato, de

$$\langle A(x + h), x + h \rangle = \langle A(x), x \rangle + \langle A(x), h \rangle + \langle A(h), x \rangle + \langle A(h), h \rangle,$$

segue que

$$f_A(x + h) - f_A(x) - \langle (A + A^*)x, h \rangle = \langle A(h), h \rangle = o(\|h\|).$$

**Proposição 9.6.4** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U \subseteq E$  aberto. Se as funções  $f, g: U \rightarrow F$  são Fréchet-diferenciáveis em  $x_0 \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então a função  $f + \lambda g$  é Fréchet-diferenciável em  $x_0$  e  $D(f + \lambda g)(x_0) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$ .*

**Demonstração.** Simplesmente escrevemos

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x_0 + h) - (f + \lambda g)(x_0) - (Df(x_0) + \lambda Dg(x_0))(h) \\ = o(\|h\|) + \lambda o(\|h\|) = o(\|h\|). \end{aligned}$$

■

A seguir provaremos a regra da cadeia para a composição de funções Fréchet-diferenciáveis. Antes observamos o seguinte fato elementar sobre análise assintótica. Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $U \subseteq E$  um aberto,  $A: E \rightarrow F$  um operador linear contínuo e  $R: U \rightarrow F$  uma aplicação de ordem  $R(h) = o(\|A(h) + o(\|h\|)\|)$ . Então  $R(h) = o(\|h\|)$ . Ou seja

$$R(h) = o(\|A(h) + o(\|h\|)\|) \text{ implica } R(h) = o(\|h\|). \quad (9.9)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} &= \frac{\|A(h) + o(\|h\|)\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|R(h)\|}{\|A(h) + o(\|h\|)\|} \\ &\leq \left( \|A\| + \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \right) \cdot \frac{\|R(h)\|}{\|A(h) + o(\|h\|)\|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $\|h\| \rightarrow 0$ . Esta observação será utilizada a seguir.

**Teorema 9.6.5** (Regra da Cadeia) *Sejam  $E, F, G$  espaços de Banach,  $f: U \subseteq E \rightarrow F$ ,  $g: V \subseteq F \rightarrow G$ , com  $U$  e  $V$  abertos e  $f(U) \subseteq V$ . Se  $f$  é Fréchet-diferenciável em  $x_0 \in U$  e  $g$  é Fréchet-diferenciável em  $f(x_0)$ , a aplicação  $g \circ f: U \rightarrow G$  é Fréchet-diferenciável em  $x_0$  e*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

**Demonstração.** Pela diferenciabilidade de  $f$  em  $x_0$ , sabemos que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + o(\|h\|).$$

Assim, aplicando  $g$  e utilizando a diferenciabilidade de  $g$  em  $f(x_0)$ , obtemos

$$\begin{aligned} g \circ f(x_0 + h) &= g(f(x_0) + Df(x_0)(h) + o(\|h\|)) \\ &= g \circ f(x_0) + Dg(f(x_0)) [Df(x_0)(h) + o(\|h\|)] + o(\|Df(x_0)(h) + o(\|h\|)\|) \\ &= g \circ f(x_0) + [Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)](h) + o(\|h\|), \end{aligned}$$

em vista de (9.9). ■

Um dos principais objetivos da análise não-linear é inferir propriedades de uma aplicação Fréchet-diferenciável  $f: U \subseteq E \longrightarrow F$  via inspeção quantitativa e qualitativa de sua derivada  $Df$ . Por exemplo, uma das interpretações primárias da derivada de uma função real  $g: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  refere-se à taxa de variação da função  $g$ . Portanto, controlar o máximo de  $|g'(x)|$  é estimar o quanto a função  $g$  pode expandir. De fato este resultado é bastante conhecido para funções reais e a seguir o generalizamos para o contexto de funções entre espaços de Banach.

**Teorema 9.6.6** (Desigualdade do Valor Médio) *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $U \subseteq E$  aberto e  $f: U \longrightarrow F$  uma aplicação Fréchet-diferenciável. Sejam  $x_1, x_2 \in U$  tais que o segmento  $\ell := \{tx_1 + (1-t)x_2 : 0 \leq t \leq 1\}$  está contido em  $U$ . Então*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

**Demonstração.** Fixado  $\varphi \in F'$  com  $\|\varphi\| = 1$ , a função real

$$f_\varphi: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_\varphi(t) = \varphi(f(tx_1 + (1-t)x_2)),$$

é diferenciável. Pela Regra da Cadeia (Teorema 9.6.5),

$$\frac{d}{dt}f_\varphi(t) = \varphi(Df(tx_1 + (1-t)x_2) \cdot (x_1 - x_2)),$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, sabemos que existe  $c \in [0, 1]$  tal que

$$f_\varphi(1) - f_\varphi(0) = \frac{d}{dt}f_\varphi(c).$$

Portanto podemos estimar

$$|\varphi(f(x_1) - f(x_2))| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

Para completar a demonstração, basta selecionar, via Teorema de Hahn–Banach, um funcional  $\varphi \in F'$  tal que  $|\varphi(f(x_1) - f(x_2))| = \|f(x_1) - f(x_2)\|$ . ■

**Corolário 9.6.7** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U \subseteq E$  aberto e conexo. Se  $f: U \longrightarrow F$  é uma aplicação Fréchet-diferenciável tal que  $Df(x) = 0$  para todo  $x \in U$ , então  $f$  é constante.*

**Demonstração.** Seja  $x_0 \in U$  um vetor qualquer. Defina  $V := \{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$ . É claro que  $V$  é não-vazio e, por continuidade (Proposição 9.6.2),  $V$  é fechado. Dado  $y_0 \in V$ , escolha  $r > 0$  tal que  $B(y_0, r) \subseteq U$ . Pelo Teorema 9.6.6 temos  $f(z) = f(y_0)$  para todo  $z \in B(y_0, r)$ . Isso prova que  $B(y_0, r) \subseteq V$ , e portanto  $V$  é aberto. Por conexidade segue que  $V = U$ . ■

## 9.7 Integração vetorial

Nesta seção  $X$  é um conjunto não-vazio,  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  e  $\mu$  é uma medida  $\sigma$ -finita em  $\Sigma$ . Relembre que os elementos de  $\Sigma$  são chamados de conjuntos mensuráveis e que, para cada conjunto mensurável  $A \in \Sigma$ , a função característica de  $A$  é denotada por  $\chi_A$ .

O objetivo desta seção é descrever uma teoria de integração para funções vetoriais  $f: X \rightarrow E$ , em que  $E$  é um espaço de Banach. Nossa primeira missão, portanto, é definir a noção de funções mensuráveis.

**Definição 9.7.1** Uma função  $f: X \rightarrow E$  é uma *função simples mensurável* se existem conjuntos mensuráveis  $A_1, \dots, A_k \in \Sigma$  com  $\mu(A_j) < \infty$  para  $j = 1, \dots, k$ , tais que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  sempre que  $i \neq j$ , e vetores  $b_1, \dots, b_k \in E$  tais que

$$f = \sum_{i=1}^k \chi_{A_i} b_i.$$

Uma função  $g: X \rightarrow E$  é *mensurável* se existe uma sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  de funções simples mensuráveis tal que  $f_n \rightarrow g$   $\mu$ -quase sempre.

Para funções a valores no corpo dos escalares, a definição acima coincide com o conceito de mensurabilidade da teoria clássica da medida.

Inicialmente é válido destacar que a imagem de uma função simples mensurável está contida em um subespaço de dimensão finita. Assim, se  $g$  é mensurável, então existe um conjunto mensurável  $\mathcal{O}$  tal que  $\mu(\mathcal{O}) = 0$  e

$$g(X - \mathcal{O}) \subseteq F \subseteq E,$$

onde  $F$  é um subespaço fechado e separável. Para verificar esse fato, basta observar que se  $g$  é mensurável, então existem funções simples mensuráveis

$$f_n = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{A_i^n} b_i^n,$$

e um conjunto mensurável  $\mathcal{O}$  tais que  $\mu(\mathcal{O}) = 0$  e  $f_n(x) \rightarrow g(x)$  para todo  $x \in X - \mathcal{O}$ . Portanto

$$g(x) \in \overline{[b_i^n : n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, k_n]}.$$

Concluimos portanto que a teoria de integração vetorial pode ser naturalmente restrita a funções tomando valores em espaços de Banach separáveis. Portanto, nesta seção  $E$  denotará sempre um espaço de Banach separável.

Então, a partir de agora  $\mu$  é uma medida  $\sigma$ -finita em uma  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  de subconjuntos do conjunto  $X$  e  $E$  é um espaço de Banach separável.

A seguinte observação também segue imediatamente da Definição 9.7.1:

**Proposição 9.7.2** *Seja  $(f_n: X \longrightarrow E)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de funções mensuráveis e  $f: X \longrightarrow E$ . Se  $f_n \longrightarrow f$   $\mu$ -quase sempre, então  $f$  é mensurável.*

A princípio não é fácil verificar pela definição se uma dada função é mensurável ou não. O próximo resultado remedia em parte esta dificuldade.

**Teorema 9.7.3** (Teorema da mensurabilidade de Pettis) *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função  $f: X \longrightarrow E$ :*

- (a)  $f$  é mensurável.
- (b)  $f$  é fracamente mensurável, isto é,  $\varphi \circ f: X \longrightarrow \mathbb{R}$  é mensurável para todo  $\varphi \in E'$ .
- (c)  $\|f\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$  é mensurável.

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Segue imediatamente da Definição 9.7.1.

(b)  $\implies$  (c) Como  $E$  é separável, pelo Exercício 3.6.11 existem funcionais lineares  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  em  $E'$  tais que  $\|\varphi_i\| = 1$  para todo  $i$  e  $\|y\| = \sup_i \varphi_i(y)$  para todo  $y \in E$ . Fixado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por hipótese os conjuntos  $A_i := \{x \in X : \varphi_i \circ f(x) \leq \lambda\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , são mensuráveis. Portanto também é mensurável o conjunto

$$\begin{aligned} \{x \in X : \|f(x)\| \leq \lambda\} &= \{x \in X : \sup_i \varphi_i(f(x)) \leq \lambda\} \\ &= \{x \in X : \varphi_i(f(x)) \leq \lambda \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i. \end{aligned}$$

Isso prova que a função  $\|f\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$  é mensurável.

(c)  $\implies$  (a) Seja  $(y_i)_{i=1}^{\infty}$  uma sequência densa em  $E$ . Por hipótese, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , a função

$$\tau_i: X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau_i(x) = \|f(x) - y_i\|,$$

é mensurável. Portanto, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  fixado, o conjunto

$$X_i^n := \left\{x \in X : \tau_i(x) \leq \frac{1}{n}\right\} = \left\{x \in X : f(x) \in B\left[y_i, \frac{1}{n}\right]\right\}$$

é mensurável. Além disso, a densidade da sequência  $(y_i)_{i=1}^{\infty}$  garante que  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i^n$ .

Defina em seguida a sequência  $(A_j^n)_{j=1}^{\infty}$  de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois dados por

$$A_1^n = X_1^n, \quad A_j^n = X_j^n - \bigcup_{i=1}^{j-1} X_i^n, \quad j = 2, 3, \dots,$$

e a função mensurável

$$f_n: X \longrightarrow E, \quad f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i^n} y_i.$$



É claro que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i^n = X$ . Assim, dado  $x \in X$ , podemos tomar  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in A_j^n$ . Neste caso  $x \in X_j^n$  e  $f_n(x) = y_j$ . Segue que  $f_n(x) = y_j$  e  $f(x) \in B[y_j, \frac{1}{n}]$ , e portanto

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \|f(x) - y_j\| \leq \frac{1}{n}.$$

Concluimos então que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$  e assim  $f$  é mensurável pela Proposição 9.7.2. ■

**Corolário 9.7.4** *Sejam  $M$  um espaço métrico e  $\mu$  uma medida nos borelianos de  $M$ . Se  $f: M \rightarrow E$  é contínua, então  $f$  é mensurável.*

Passamos agora à definição da integral de uma função mensurável  $f: X \rightarrow E$ . Assim como na teoria de integração clássica, começamos definindo a integral de uma função simples mensurável da forma natural:

$$\int_X \left( \sum_{i=1}^k \chi_{A_i} b_i \right) d\mu := \sum_{i=1}^k \mu(A_i) b_i.$$

Esta definição da integral de funções simples mensuráveis é consistente no sentido de que não depende da representação da função. Entretanto não seria razoável estendê-la pontualmente para funções mensuráveis arbitrárias, pois a expressão do lado direito da igualdade acima não tem motivo para ser somável quando  $k \rightarrow \infty$ . Uma rápida reflexão nos leva à seguinte definição de integral:

**Definição 9.7.5** Dizemos que a função mensurável  $f: X \rightarrow E$  é *Bochner-integrável* se existe uma sequência de funções simples mensuráveis  $f_n: X \rightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -quase sempre e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|f - f_n\| d\mu = 0. \quad (9.10)$$

Neste caso, para cada conjunto mensurável  $A \in \Sigma$ , definimos a *integral de Bochner da função  $f$  sobre  $A$*  por:

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \chi_A f_n d\mu. \quad (9.11)$$

Para que a definição acima seja consistente, é necessário verificar que o limite em (9.11) existe e que não depende da sequência de funções simples mensuráveis que aproxima  $f$  no sentido (9.10). Ora, se  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de funções simples mensuráveis satisfazendo (9.10) e  $A$  é um conjunto mensurável, então, pela desigualdade triangular,

$$\left\| \int_X \chi_A f_m d\mu - \int_X \chi_A f_n d\mu \right\| \leq \int_X \|f - f_m\| d\mu + \int_X \|f - f_n\| d\mu.$$

Isso é suficiente para concluir que a sequência  $(\int_X \chi_A f_n d\mu)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em  $E$ , portanto convergente. Verificaremos em seguida que o limite em (9.11) independe da sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$ . De fato se  $(f_n)_{n=1}^\infty$  e  $(g_n)_{n=1}^\infty$  são sequências de funções simples mensuráveis, ambas satisfazendo (9.10), então

$$\left\| \int_X \chi_A f_n d\mu - \int_X \chi_A g_n d\mu \right\| \leq \int_X \|f - f_n\| d\mu + \int_X \|f - g_n\| d\mu \longrightarrow 0$$

quando  $n \longrightarrow \infty$ .

Outra observação fácil de ser verificada é que se  $f: X \longrightarrow E$  é Bochner-integrável, então a função real  $\|f\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$  é Lebesgue-integrável: com efeito, se  $(f_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de funções simples mensuráveis verificando (9.10), então

$$\left| \int_X \|f_m\| - \|f_n\| d\mu \right| \leq \int_X \left| \|f_m\| - \|f_n\| \right| d\mu \leq \int_X \|f_m - f_n\| d\mu.$$

Portanto a sequência  $(\|f_n\|)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy no espaço de Banach  $L_1(X)$ . Como  $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$   $\mu$ -quase sempre, concluímos que  $\|f\| \in L_1(X)$ .

A recíproca desta observação é verdadeira, o que é de grande ajuda na verificação da Bochner-integrabilidade de uma determinada função mensurável  $f: X \longrightarrow E$ :

**Teorema 9.7.6** *Uma função mensurável  $f: X \longrightarrow E$  é Bochner-integrável se, e somente se, a função real  $\|f\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$  é Lebesgue-integrável.*

**Demonstração.** Suponha que  $\|f\| \in L_1(X)$ . Seja  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de funções simples mensuráveis convergindo  $\mu$ -quase sempre para  $f$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere o conjunto mensurável

$$A_n := \{x \in X : \|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|(1 + 2^{-n})\}$$

e a função simples mensurável

$$g_n: X \longrightarrow E, \quad g_n(x) = f_n(x)\chi_{A_n}(x).$$

Como  $f_n \longrightarrow f$   $\mu$ -quase sempre, é fácil observar que  $g_n \longrightarrow f$   $\mu$ -quase sempre e

$$\|g_n(x)\| \leq \|f(x)\|(1 + 2^{-n}),$$

para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$ . Concluímos a demonstração aplicando o Teorema da Convergência Dominada para a sequência de funções  $(\|g_n - f\|)_{n=1}^\infty$ . ■

Como bônus da demonstração do Teorema 9.7.6 concluímos que se  $f: X \longrightarrow E$  é Bochner-integrável, então existe uma sequência  $(g_n)_{n=1}^\infty$  de funções simples mensuráveis tal que  $g_n \longrightarrow f$   $\mu$ -quase sempre,  $\|g_n - f\| \longrightarrow 0$  em  $L_1(X)$  e  $\|g_n\| \longrightarrow \|f\|$  em  $L_1(X)$ .

O próximo resultado, que pode ser entendido como uma desigualdade triangular para a integral de Bochner, é muito útil em situações práticas.

**Corolário 9.7.7** *Sejam  $f: X \longrightarrow E$  uma função Bochner-integrável e  $A$  um conjunto mensurável. Então*

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| \, d\mu.$$

**Demonstração.** Da observação acima podemos tomar uma sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  de funções simples mensuráveis tal que  $\|f_n\| \longrightarrow \|f\|$  em  $L_1(X)$ . A desigualdade triangular garante que a desigualdade que queremos provar é verdadeira para funções simples mensuráveis, logo

$$\left\| \int_A f_n \, d\mu \right\| \leq \int_A \|f_n\| \, d\mu,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Basta tomar o limite quando  $n \longrightarrow \infty$  para concluir a demonstração. ■

Concluimos esta introdução à integração vetorial estabelecendo a harmonia entre a integral de Bochner e os operadores lineares contínuos:

**Proposição 9.7.8** *Sejam  $f: X \longrightarrow E$  uma função Bochner-integrável e  $T: E \longrightarrow F$  um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então a função  $T \circ f: X \longrightarrow F$  é Bochner-integrável e*

$$\int_X T \circ f \, d\mu = T \left( \int_X f \, d\mu \right).$$

**Demonstração.** A Bochner-integrabilidade  $T \circ f$  é consequência da estimativa

$$\|T(f(x))\| \leq \|T\| \cdot \|f(x)\|,$$

para todo  $x \in X$ , em combinação com o Teorema 9.7.6. Seja agora  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de funções simples mensuráveis a valores em  $E$  tal que  $f_n \longrightarrow f$   $\mu$ -quase sempre e  $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$  em  $L_1(X)$ . Então  $(T \circ f_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de funções simples mensuráveis a valores em  $F$  que converge  $\mu$ -quase sempre para  $T \circ f$  e

$$\int_X \|T \circ f_n - T \circ f\| \, d\mu \leq \|T\| \cdot \int_X \|f_n - f\| \, d\mu \longrightarrow 0,$$

quando  $n \longrightarrow \infty$ . Finalmente, da definição de integração a Bochner segue que

$$\int_X T \circ f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X T \circ f_n \, d\mu = T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu \right) = T \left( \int_X f \, d\mu \right).$$

■

## 9.8 Comentários e notas históricas

A recíproca no Teorema 9.1.4 foi demonstrada por M. M. Vainberg na década de 1960: se um operador de substituição  $\Phi(f) := \varphi(x, f(x))$  aplica  $L_p(X)$  em  $L_q(X)$ , então existe uma função  $k \in L_q(X)$  tal que

$$\varphi(x, t) \leq C|t|^{p/q} + k(x),$$

para quase todo  $x \in X$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ .

O Teorema 9.2.5 foi primeiramente demonstrado em [86] com propósito de estudar equações diferenciais parciais envolvendo o operador maximal de Hardy–Littlewood. Os exemplos clássicos de pares  $E, F$  de espaços de Banach reflexivos para os quais a inclusão  $E \hookrightarrow F$  é um operador compacto são os espaços de Sobolev  $E = W^{1,p}(X)$  (veja, por exemplo, [12, 8.2]) e  $F = L_p(X)$ , onde  $X$  é um aberto limitado. Neste panorama, é provado em [86] que o operador maximal de Hardy–Littlewood é sequencialmente fracamente contínuo de  $W^{1,p}(X)$  em  $W^{1,p}(X)$ . Um outro exemplo didático da aplicabilidade do Teorema 9.2.5 é o seguinte:

**Exemplo 9.8.1** Sejam  $1 < p < \infty$  e  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função lipschitziana com  $\|\varphi\|_{\text{Lip}(\mathbb{R})} \leq C$ . Dado um aberto limitado  $X$  do  $\mathbb{R}^n$ , considere o operador

$$N_\varphi: W^{1,p}(X) \rightarrow W^{1,p}(X), \quad N_\varphi(f) = \varphi(f(x)).$$

Então  $N_\varphi$  é sequencialmente fracamente contínuo. De fato, aplicando o Teorema 9.2.5 para  $F = L_p(X)$  e  $E = W^{1,p}(X)$ , basta verificar que o operador  $N_\varphi: W^{1,p}(X) \rightarrow W^{1,p}(X)$  é limitado. Mas isso é simples, pois

$$\|N_\varphi(f)\|_{W^{1,p}(X)} = \|N_\varphi(f)\|_{L^p(X)} + \|DN_\varphi(f)\|_{L^p(X)}.$$

Agora,  $\|N_\varphi(f)\|_{L^p(X)} \leq C \|f\|_{L^p(X)}$  e

$$\|DN_\varphi(f)\|_{L^p(X)} = |D\varphi(f(x)) \cdot Df(x)| \leq C |Df(x)|.$$

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, em geral, é enunciado para a bola unitária fechada do  $\mathbb{R}^n$  ao invés de um conjunto compacto e convexo. Ele foi obtido, para  $n = 3$ , por L. E. J. Brouwer em 1909. Um resultado similar, para funções diferenciáveis, havia sido obtido em 1904 por P. Bohl. O caso geral foi demonstrado por J. Hadamard em 1910 e Brouwer em 1912. O Teorema 9.5.6 é às vezes chamado de versão forte do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

O Teorema 9.5.8 foi provado por J. Schauder em 1930 seguindo a linha de um resultado anterior de G. D. Birkhoff e O. D. Kellogg para funções contínuas definidas em subconjuntos compactos e convexos de  $L_2[0, 1]$ . Para mais detalhes sobre teoremas de ponto fixo, sugerimos [37, 60].

Provamos o Teorema 9.4.5 (Cauchy–Picard) como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 9.4.2). Entretanto, cronologicamente os fatos ocorreram

de maneira invertida. O Teorema 9.4.5 foi provado por E. Picard, em uma série de artigos iniciada em 1890, como um refinamento de técnicas anteriormente aplicadas por Cauchy e por Liouville na primeira metade do século 19. A técnica de Picard ficou conhecida como *método das aproximações sucessivas*. O Teorema do Ponto Fixo de Banach, provado por Banach em sua tese, defendida em 1920 e publicada em 1922, é uma abstração estupenda do método de Picard e muito útil na resolução de equações de vários tipos.

O Teorema 9.5.10, publicado por G. Peano em 1890 – após uma demonstração incorreta publicada em 1886 – também foi provado usando o método das aproximações sucessivas. A continuidade do campo  $f$  não é hipótese essencial: existem funções descontínuas  $f$  – chamadas de *funções absolutamente contínuas* – para as quais vale o Teorema 9.5.10. Este resultado, chamado de Teorema da Existência de Carathéodory, pode ser demonstrado da mesma forma que o Teorema 9.5.10 usando o fato de que o Teorema Fundamental do Cálculo também vale para funções absolutamente contínuas (veja [80, Theorem 7.18]).

Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. Uma aplicação  $f: U \subseteq E \longrightarrow F$  é *não-expansiva* (ou *contração fraca*) se  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$  para todos  $x, y \in U$ . Nos Exercícios 9.9.19 a 9.9.22 discutimos a existência de pontos fixos de aplicações não-expansivas. O seguinte exemplo mostra que mesmo aplicações não-expansivas definidas em conjuntos convexos e fracamente compactos podem não ter pontos fixos:

**Exemplo 9.8.2** (D. Alspach, 1981) O conjunto

$$K := \left\{ f \in L_1[0, 1] : 0 \leq f \leq 2, \int_0^1 f dt = 1 \right\}$$

é convexo e fracamente compacto em  $L_1[0, 1]$  e a aplicação

$$T: K \longrightarrow K, \quad T(f)(t) := \begin{cases} \min\{2f(2t), 2\} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \max\{0, 2f(2t - 1) - 2\} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é uma isometria (em particular não-expansiva) que não tem pontos fixos.

Lembremos que do Teorema da Aplicação Aberta segue-se se  $E$  e  $F$  são espaços de Banach, então um operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$  é um isomorfismo precisamente quando, para todo  $y \in F$ , a equação  $T(x) = y$  possui uma única solução em  $E$ . Esta é uma propriedade qualitativa do operador  $T$ ; é natural, portanto, questionar se o fato da derivada  $Df(x_0)$  de uma função diferenciável  $f$  ser bijetora garante que  $f$  seja bijetora em uma vizinhança de  $x_0$ . A resposta é dada por um dos principais teoremas do cálculo diferencial: o Teorema da Função Inversa, nosso velho conhecido da Análise no  $\mathbb{R}^n$  e que pode ser transportado para funções entre espaços de Banach da seguinte forma. Sejam  $U \subseteq E$  um aberto e  $f: E \longrightarrow F$  uma função Fréchet diferenciável. Dizemos que  $f$  é *de classe  $C^1$*  em  $U$ , e neste caso escrevemos  $f \in C^1(U, F)$ , se a aplicação derivada  $Df: U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$  for contínua. Se  $O_1$  e  $O_2$  são abertos em  $E$  e  $F$ , respectivamente, dizemos que uma função  $f: O_1 \longrightarrow O_2$  é um *difeomorfismo de classe  $C^1$*  se  $f$  for uma bijeção de classe  $C^1$  e  $f^{-1}: O_2 \longrightarrow O_1$  também for de classe  $C^1$ .

**Teorema 9.8.3** (Teorema da Função Inversa) *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $f \in C^1(U, F)$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $E$ . Se  $Df(x_0)$  é um isomorfismo, então existem vizinhanças  $O_1$  de  $x_0$  e  $O_2$  de  $f(x_0)$  tais que  $f: O_1 \rightarrow O_2$  é um difeomorfismo.*

Para uma demonstração veja [79, Theorem 10.39].

Para um tratamento elementar da integração de funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow E$ , onde  $E$  é um espaço normado, veja [3, 3.2]. A integral de Bochner também é chamada de *integral de Dunford e Schwartz* e de *primeira integral de Dunford*. O trabalho pioneiro de S. Bochner foi publicado em 1932, e o mesmo conceito foi reintroduzido por N. Dunford em 1935. A integral de Bochner é um caso particular da integral mais geral estudada no clássico [25] de N. Dunford e J. T. Schwartz. O Teorema 9.7.3 foi publicado por B. J. Pettis em 1938. Para um estudo mais aprofundado da integral de Bochner, e também das integrais de Bartle e de Pettis, veja [21, Chapter II].

## 9.9 Exercícios

**Exercício 9.9.1** Mostre que se  $f_n \rightarrow f$  em  $L_p(X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , então existem uma subsequência  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  e uma função  $g \in L_p(X)$  tais que:

- (i)  $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$   $\mu$ -quase sempre, e
- (ii)  $|f_{n_j}(x)| \leq g(x)$   $\mu$ -quase sempre.

**Exercício 9.9.2** Mostre que a sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  em  $L_2[0, \pi]$  dada por  $f_n(x) = \sin(nx)$  converge fracamente para zero.

**Exercício 9.9.3\*** Sejam  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada com suporte compacto, isto é, o fecho do conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$  é compacto, e  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ . Para cada inteiro positivo  $m$  considere a função  $f_m(x) := f(x + mv)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que a sequência  $(f_m)_{m=1}^\infty$  converge fracamente para zero em  $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercício 9.9.4\*** Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Sabendo que toda sequência fracamente convergente em  $L_\infty(\Omega)$  converge quase sempre (para o mesmo limite), prove que toda sequência fracamente convergente em  $L_\infty(\Omega)$  é convergente em  $L_p(\Omega)$  para todo  $p > 1$ .

**Exercício 9.9.5\*** Sejam  $1 < q, p < \infty$  e  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua satisfazendo  $|\varphi(t)| \leq C|t|^{p/q}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Considere o operador de substituição

$$N: L_p[0, 1] \rightarrow L_q[0, 1], \quad N(f)(t) = \varphi \circ f(t).$$

Seja também  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência limitada em  $L_p[0, 1]$  e suponha que  $f_n \rightarrow f$  quase sempre. Mostre que  $(N(f_n))_{n=1}^\infty$  converge fracamente para  $N(f)$  em  $L_q[0, 1]$ .

**Exercício 9.9.6** Seja  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência limitada em  $L_p[0, 1]$ ,  $p > 1$ , e suponha que  $f_n \rightarrow f$  quase sempre, onde  $f$  é mensurável. Mostre que  $f_n \rightarrow f$  em  $L_q[0, 1]$  para todo  $1 \leq q < p$ .

**Exercício 9.9.7** Demonstre o Lema 9.2.4.

**Exercício 9.9.8** Seja  $E$  um espaço de Banach compactamente imerso no espaço de Banach  $F$ . Prove que a norma de  $E$  é equivalente à norma induzida por  $F$  se, e somente se,  $E$  tem dimensão finita.

**Exercício 9.9.9** (a) Exiba uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  coerciva e injetora.  
(b) Mostre que a função do item (a) tem necessariamente um número infinito de descontinuidades. Na verdade, prove que se  $E$  é um espaço de Banach e  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  é coerciva e injetora, então  $f$  tem infinitas descontinuidades.

**Exercício 9.9.10** Prove que a completude do espaço é hipótese essencial no Teorema do ponto fixo de Banach. Ou seja, exiba um espaço métrico  $M$  (incompleto, é claro) e uma contração  $f: M \rightarrow M$  que não tem ponto fixo.

**Exercício 9.9.11** Seja  $E$  um espaço de Banach. Sem usar o Teorema do ponto fixo de Banach, prove que toda contração linear não-nula de  $E$  em  $E$  tem um único ponto fixo.

**Exercício 9.9.12** Prove que o espaço métrico  $(M, d)$  da demonstração do Teorema 9.4.5 é completo.

**Exercício 9.9.13** Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados,  $U \subseteq E$  e  $\varphi_n, \varphi: U \rightarrow F$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Prove que se cada  $\varphi_n$  é compacto e  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  uniformemente, então  $\varphi$  é compacto.

**Exercício 9.9.14\*** Sejam  $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $f \in C[0, 1]$ . Mostre que para todo  $\lambda$  com  $|\lambda| \leq \|K\|_\infty$  existe uma única função contínua  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$g(t) = f(t) + \lambda \cdot \int_0^1 K(t, s)u(s) ds,$$

para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Exercício 9.9.15\*** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $A: [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$  uma aplicação contínua. Mostre que existe uma única função  $X: [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$  tal que  $X(0) = \text{id}_E$  e

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t) \circ X(t),$$

para  $t \in (0, 1]$ .

**Exercício 9.9.16** Sejam  $X$  um espaço topológico de Hausdorff e  $f: X \rightarrow X$  uma função contínua. Prove que o conjunto dos pontos fixos de  $f$  é fechado em  $X$ . Conclua que o conjunto dos pontos fixos de  $f$  é denso em  $X$  se, e somente se,  $f$  é a identidade em  $X$ .

**Exercício 9.9.17** Prove que a função  $f$  do Exemplo 9.5.7 é contínua mas não é completamente contínua.

**Exercício 9.9.18\*** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert separável e  $\Phi: B_H \rightarrow B_H$  uma aplicação (não-linear) sequencialmente fracamente contínua, definida na bola unitária fechada  $B_H$  de  $H$ . Mostre que  $\Phi$  possui um ponto fixo.

**Exercício 9.9.19\*** Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e  $\varphi: B_H \rightarrow B_H$  uma aplicação *não-expansiva* (ou *contração fraca*), isto é,  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|x - y\|$  para todos  $x, y \in B_H$ , definida na bola unitária fechada  $B_H$  de  $H$ . Mostre que  $\varphi$  possui um ponto fixo.

**Exercício 9.9.20** Exiba uma isometria, em particular uma aplicação não-expansiva, de  $S_{c_0} := \{x \in c_0 : \|x\|_\infty = 1\}$  em  $S_{c_0}$  que não tem pontos fixos.

**Exercício 9.9.21\*** Seja  $C$  um subconjunto não-vazio, convexo, fechado e limitado do espaço de Banach  $E$  com  $0 \in C$ . Prove que se  $f: C \rightarrow C$  é não-expansiva, então existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq E$  tal que  $\lim_n \|x_n - f(x_n)\| = 0$ . Tal sequência é chamada de *sequência de pontos fixos aproximados para  $f$* .

**Exercício 9.9.22** Seja  $C$  um subconjunto não-vazio, convexo, fechado e limitado do espaço de Banach  $E$ . Prove que se  $f: C \rightarrow C$  é não-expansiva, então  $\inf\{\|T(x) - x\| : x \in C\} = 0$ .

**Exercício 9.9.23** Mostre que, dada uma função contínua  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , o Problema de Valor Inicial (9.5) do Exemplo 9.5.3 possui uma única solução de classe  $C^2$ .

**Exercício 9.9.24** Mostre que o operador  $\Phi$  do Exemplo 9.5.3 é compacto.

**Exercício 9.9.25** Sejam  $E_1, E_2$  e  $F$  espaços de Banach e  $A: E_1 \times E_2 \rightarrow F$  uma aplicação bilinear contínua. Prove que  $A$  é Fréchet-diferenciável e que

$$DA(x_1, x_2)(t_1, x_2) = A(t_1, x_2) + A(x_1, t_2)$$

para todos  $x_1, t_1 \in E_1$  e  $x_2, t_2 \in E_2$ .

**Exercício 9.9.26** Prove que as operações algébricas – adição e multiplicação por escalar – em um espaço de Banach são Fréchet-diferenciáveis.

**Exercício 9.9.27** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $A$  um subconjunto aberto, não-vazio e convexo de  $E$  e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação Fréchet-diferenciável tal que  $Df$  é constante em  $A$ . Prove que  $f$  é a restrição a  $A$  de uma aplicação afim contínua, isto é, existem  $T \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $b \in F$  tais que  $f(x) = T(x) + b$  para todo  $x \in A$ .

Nos exercicios a seguir,  $\mu$  é uma medida  $\sigma$ -finita em uma  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma$  de subconjuntos do conjunto  $X$  e  $E$  é um espaço de Banach separável.



**Exercício 9.9.28** Demonstre a Proposição 9.7.2.

**Exercício 9.9.29** Seja  $f: X \longrightarrow E$  uma função Bochner-integrável. Prove que

$$\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A f d\mu = 0.$$

**Exercício 9.9.30** Prove que a integral de Bochner é  $\sigma$ -aditiva, isto é, se  $f: X \longrightarrow E$  é Bochner-integrável e  $(A_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos tais que  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) < \infty$ , então

$$\int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f d\mu.$$

**Exercício 9.9.31** (Teorema de Egorov) Seja  $f_n: X \longrightarrow E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de funções mensuráveis com  $f_n \longrightarrow f$   $\mu$ -quase sempre e suponha que  $\mu(X) < \infty$ . Mostre que dado  $\varepsilon > 0$  existe um conjunto mensurável  $X_\varepsilon$  tal que  $\mu(X - X_\varepsilon) < \varepsilon$  e

$$\sup_{x \in X_\varepsilon} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

**Exercício 9.9.32** Seja  $f: [a, b] \longrightarrow E$  uma função contínua. Prove que

$$\int_{[a,b]} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

onde  $m$  é a medida de Lebesgue em  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e  $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, n-1\} = 0$ .

**Exercício 9.9.33\*** Diz-se que uma função mensurável  $f: X \longrightarrow E$  é *fracamente integrável* se existe um vetor  $I \in E$  tal que

$$\int_X \varphi \circ f d\mu = \varphi(I),$$

para todo  $\varphi \in E'$ . Neste caso escrevemos  $w\text{-}\int_X f d\mu =: I$ . Mostre que se  $f$  é Bochner-integrável, então  $f$  é fracamente integrável e

$$w\text{-}\int_X f d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Exercício 9.9.34\*** Seja  $f: X \longrightarrow E$  uma função Bochner-integrável. Prove que, para todo  $A \in \Sigma$  com  $0 < \mu(A) < \infty$ , é verdade que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in \overline{\text{conv}(f(X))}.$$

Veja a definição da envoltória convexa no Exercício 1.8.17.

# Capítulo 10

## Elementos da Teoria dos Espaços de Banach

Desde os primórdios da Análise Funcional, nas primeiras décadas do século XX, a teoria dos espaços de Banach tem se desenvolvido a passos largos tanto no sentido horizontal como no sentido vertical. Por sentido horizontal nos referimos ao alargamento das fronteiras da teoria e ao estabelecimento de conexões com outras áreas. Exemplos disso são o Capítulo 9 sobre Análise Não-Linear, a criação da Teoria das Distribuições e suas conexões, as aplicações dos espaços de Sobolev à teoria de Equações Diferenciais Parciais, a teoria de Álgebras de Banach (em particular,  $C^*$ -álgebras) e as aplicações do Teorema de Hahn–Banach mencionadas no preâmbulo do Capítulo 3. Por sentido vertical entendemos desenvolvimentos no sentido de compreender melhor a estrutura dos espaços de Banach, tanto provando teoremas de longo alcance como produzindo exemplos de espaços de Banach com propriedades ultra-especiais, de cujas existências todos duvidaram por muitos anos. Demos vários exemplos disso nas seções de comentários e notas históricas dos capítulos precedentes, e o exemplo mais luminoso é a teoria de Gowers–Maurey mencionada na Introdução.

O propósito deste capítulo é ilustrar esse desenvolvimento vertical da teoria dos espaços de Banach, introduzindo o leitor a alguns conceitos, resultados, técnicas e exemplos centrais dentro da teoria.

### 10.1 Séries e o Teorema de Dvoretzky–Rogers

Da definição de série convergente de números reais fica claro que, para falar de séries convergentes, basta saber fazer somas finitas e saber tomar limites de sequências. Em espaços normados podemos fazer as duas coisas, portanto é este o ambiente adequado para tratar de séries convergentes. Já definimos séries convergentes e incondicionalmente convergentes na Definição 5.3.7, mas para comodidade do leitor repetimos essas definições:

**Definição 10.1.1** Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  um sequência no espaço normado  $E$ . Diz-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n:$$

(a) *converge* para  $x \in E$  se a sequência das somas parciais  $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)_{n=1}^{\infty}$  converge para

$x$ . Neste caso escrevemos  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ .

(b) é *absolutamente convergente* se  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ .

(c) é *incondicionalmente convergente* se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  é convergente, qualquer que seja a permutação  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Neste caso, da Proposição 5.3.8 sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  para toda permutação  $\sigma$ .

**Observação 10.1.2** (Critério de Cauchy) Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  em um espaço de Banach é convergente se, e somente se, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\left\|\sum_{j=n}^m x_j\right\| < \varepsilon$  sempre que  $m > n \geq n_0$ .

**Exemplo 10.1.3** Sejam  $(e_j)_{j=1}^{\infty}$  os vetores canônicos dos espaços de sequências. O que foi feito no Exemplo 1.6.4 mostra que se  $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$  pertence a  $c_0$  ou  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , então  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ .

Da Análise na Reta o leitor deve se lembrar que séries absolutamente convergentes de números reais são convergentes, e talvez se lembre também de que a demonstração desse fato depende da completude da reta. Banach observou que essa propriedade na verdade caracteriza os espaços completos:

**Proposição 10.1.4** *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado  $E$ :*

- (a) *Toda série absolutamente convergente em  $E$  é incondicionalmente convergente.*
- (b) *Toda série absolutamente convergente em  $E$  é convergente.*
- (c)  *$E$  é um espaço de Banach.*

**Demonstração.** É claro que (a)  $\implies$  (b) é trivial.

(b)  $\implies$  (c) Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de Cauchy em  $E$ . Dado  $k \in \mathbb{N}$  podemos tomar  $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$  sempre que  $n, m \geq n_0^{(k)}$ . Logo, existem  $n_1 < n_2 < \dots$  tais que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k} \text{ para todo } k.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Portanto a série  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$  é absolutamente convergente e, por hipótese, é convergente. Como

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \text{ para todo } k,$$

segue que a sequência  $(x_{n_{k+1}})_{k=1}^{\infty}$  é convergente. Dessa forma  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de Cauchy que tem subsequência convergente, logo é convergente.

(c)  $\implies$  (a) Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência absolutamente convergente em  $E$ . Devido a um resultado de Dirichlet, sabemos que, para séries de números reais, convergências absoluta e incondicional coincidem, logo para qualquer bijeção  $\sigma$  dos naturais a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\|$  converge. Portanto, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^m x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_{\sigma(k)}\| < \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_{\sigma(k)}\| < \varepsilon$$

sempre que  $n > m > n_0$ . A convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  segue do critério de Cauchy. ■

Conforme usamos na demonstração anterior, séries absolutamente convergentes de números reais são precisamente as séries incondicionalmente convergentes. Trabalhando com a convergência coordenada a coordenada, esse fato se estende facilmente para espaços de dimensão finita. Entretanto, em espaços de Banach de dimensão infinita a situação é diferente:

**Exemplo 10.1.5** Sejam  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  os vetores unitários canônicos dos espaços de sequências e defina  $x_n = \frac{e_n}{n}$ . É claro que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  não é absolutamente convergente em  $c_0$  e  $\ell_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Vejamos que essa série converge incondicionalmente para  $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$  em  $c_0$ : dados uma permutação  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , tome um inteiro  $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . É claro que para cada  $j = 1, \dots, N$ , existe  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma(n_j) = j$ . Chame  $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ . Então, para cada  $n \geq n_0$ , o vetor  $\sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)}$  tem suas primeiras  $N$  coordenadas iguais às de  $x$ . Portanto,

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)} - x \right\| \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

para todo  $n \geq n_0$ . Isso prova que  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x$ .

Existem então séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes em espaços de Banach, de dimensão infinita, é claro. O leitor não terá dificuldade em verificar que o exemplo acima não funciona em  $\ell_1$ . Será então que em  $\ell_1$  também existem séries incondicionalmente mas não-absolutamente convergentes? E em um espaço de dimensão infinita qualquer? Em outras palavras, será que a existência de séries incondicionalmente mas não-absolutamente convergentes caracteriza os espaços de dimensão infinita? O objetivo principal desta seção é provar o Teorema de Dvoretzky–Rogers, que resolve afirmativamente esta questão. Para isso precisaremos, entre outras coisas, das seguintes caracterizações de séries incondicionalmente convergentes.

**Teorema 10.1.6** *A afirmações a seguir são equivalentes para uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em um espaço de Banach  $E$ :*

- (a) *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é incondicionalmente convergente.*
- (b) *Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  tal que  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$  sempre que  $M$  for um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  com  $\min M > n_{\varepsilon}$ .*
- (c) *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é subsérie-convergente, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente  $(k_n)_{n=1}^{\infty}$  de inteiros positivos, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$  é convergente.*
- (d) *A série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  é sinal-convergente, ou seja,  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  é convergente qualquer que seja a escolha de sinais  $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração.** (a)  $\implies$  (b) Suponha, por absurdo, que exista  $\delta > 0$  tal que para todo  $m \in \mathbb{N}$  exista  $M \subseteq \mathbb{N}$  finito com  $\min M > m$  e  $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| \geq \delta$ . Neste caso existe uma sequência  $(M_n)_{n=1}^{\infty}$  de subconjuntos finitos dos naturais tais que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\min M_n > \max M_{n-1} + 1 \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{j \in M_n} x_j \right\| \geq \delta.$$

O símbolo  $|A|$  denota o número de elementos do conjunto finito  $A$ . Seja  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção que leva os inteiros de cada intervalo  $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$  no conjunto  $M_n$ . Isso é possível pois tanto os intervalos quanto os conjuntos  $M_n$  são disjuntos dois a dois. Provemos que a sequência  $\left( S_n = \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} \right)_{n=1}^{\infty}$  não é de Cauchy em  $E$ . Para tanto, observe que para todo  $m \in \mathbb{N}$  podemos escolher  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\min M_n > m$  e  $\left\| \sum_{j \in M_n} x_j \right\| \geq \delta$ . Tomando  $p = \min M_n - 1$  e  $q = \min M_n + |M_n| - 1$ , temos  $q \geq p + 1 > m$

e

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta.$$

Por não ser de Cauchy, a sequência  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$  não é convergente, o que contradiz a hipótese.

(b)  $\implies$  (a) Seja  $\sigma$  uma permutação dos naturais. Fixe  $\varepsilon > 0$  e escolha  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  de acordo com (b). Seja  $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subseteq \{\sigma(1), \dots, \sigma(m_\varepsilon)\}$ . Assim, se  $q, p \in \mathbb{N}$  são tais que  $q \geq p+1 \geq m_\varepsilon$ , então  $\sigma(p+1), \dots, \sigma(q) > n_\varepsilon$ , e portanto

$$\left\| \sum_{k=p+1}^q x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{n \in \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(q)\}} x_n \right\| < \varepsilon.$$

A convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$  segue do critério de Cauchy.

(b)  $\implies$  (c) Seja  $(k_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência estritamente crescente de naturais. É claro que  $k_n \geq n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  de acordo com (b). Se  $q, p$  são inteiros positivos com  $q \geq p+1 > n_\varepsilon$  e  $M_1 = \{k_{p+1}, \dots, k_q\}$ , então

$$\left\| \sum_{j=p+1}^q x_{k_j} \right\| = \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| < \varepsilon.$$

A convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$  segue do critério de Cauchy.

(c)  $\implies$  (d) Seja  $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência tal que  $\varepsilon_n = \pm 1$  para todo  $n$ . Considere os conjuntos

$$S^+ = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = 1\} \quad \text{e} \quad S^- = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = -1\},$$

ordenados com a ordem herdada de  $\mathbb{N}$ . No caso em que  $S^+$  ou  $S^-$  é finito, a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  decorre imediatamente de (c). No caso em que  $S^+$  e  $S^-$  são infinitos, considere as sequências

$$S_n^{(1)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in S^+}}^n x_k \quad \text{e} \quad S_n^{(2)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \in S^-}}^n x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , como as séries  $\sum_{n \in S^+} x_n$  e  $\sum_{n \in S^-} x_n$  são convergentes por hipótese, existe  $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|S_q^{(1)} - S_p^{(1)}\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^q x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|S_q^{(2)} - S_p^{(2)}\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^q x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que  $q > p > m_\varepsilon$ . Dessa forma,

$$\left\| \sum_{k=p+1}^q \varepsilon_k x_k \right\| = \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^q x_k - \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^q x_k \right\| \leq \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^+}}^q x_k \right\| + \left\| \sum_{\substack{k=p+1 \\ k \in S^-}}^q x_k \right\| < \varepsilon$$

sempre que  $q > p > m_\varepsilon$ . A convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  segue do critério de Cauchy.

(d)  $\implies$  (b) Suponha, por absurdo, que existam  $\delta > 0$  e uma sequência  $(M_k)_{k=1}^{\infty}$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  tais que  $\max M_k < \min M_{k+1}$  e  $\left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| \geq \delta$  para todo  $k$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina  $\varepsilon_n = 1$  se  $n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$  e  $\varepsilon_n = -1$  caso contrário. Para cada inteiro positivo  $m$ , escolha  $k_m \in \mathbb{N}$  tal que  $m < \min M_{k_m}$ . Logo

$$\left\| \sum_{j=\min M_{k_m}}^{\max M_{k_m}} (1 + \varepsilon_j) x_j \right\| = \left\| \sum_{n \in M_{k_m}} 2x_n \right\| \geq 2\delta.$$

Isso implica, pelo critério de Cauchy, que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \varepsilon_n) x_n$  não é convergente, e portanto pelo menos uma das séries  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  não converge. O resultado segue uma vez que isso contradiz a hipótese. ■

**Definição 10.1.7** Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  de escalares. O *traço* de  $A$  é o número

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Analogamente, se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita,  $\beta$  é uma base para  $V$ ,  $T: V \longrightarrow V$  é um operador linear, então o *traço* de  $T$  é o número

$$\text{tr}(T) := \text{tr}([T]_\beta),$$

onde  $[T]_\beta$  é a matriz de  $T$  em relação à base  $\beta$ . O Exercício 10.6.6 garante que o traço de  $T$  está bem definido, no sentido de que o número  $\text{tr}([T]_\beta)$  independe da base  $\beta$ .

**Exemplo 10.1.8** Se  $P_m: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  sobre um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $m \leq n$ , então  $\text{tr}(P_m) = m$ .

Os três lemas a seguir, curiosamente enunciados no contexto de espaços de dimensão finita, são peças fundamentais para a demonstração do Teorema de Dvoretzky–Rogers. Por  $I_n$  denotamos a matriz identidade de ordem  $n$ .

**Lema 10.1.9** *Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz (quadrada de ordem  $n$ ) de escalares. Então para todo escalar  $\varepsilon$  existe um escalar  $c_n(\varepsilon)$  tal que*

$$\det(I_n + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + c_n(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_n(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0.$$

**Demonstração.** Faremos por indução sobre  $n$ . Para  $n = 2$ , como

$$\begin{aligned} \det(I_2 + \varepsilon A) &= (1 + \varepsilon a_{11})(1 + \varepsilon a_{22}) - \varepsilon^2 a_{21} a_{12} \\ &= 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + \varepsilon^2 (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}), \end{aligned}$$

basta tomar  $c_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})$ .

Suponhamos que o desejado seja válido para qualquer matriz quadrada de ordem  $n - 1$ . Dada uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  de ordem  $n \geq 3$ , note que

$$\begin{aligned} \det(I_n + \varepsilon A) &= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{13} & \cdots & \varepsilon a_{1n} \\ \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{32} & 1 + \varepsilon a_{33} & \cdots & \varepsilon a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n1} & \varepsilon a_{n2} & \varepsilon a_{n3} & \cdots & 1 + \varepsilon a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (1 + \varepsilon a_{11}) \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} & \cdots & \varepsilon a_{2n} \\ \varepsilon a_{32} & 1 + \varepsilon a_{33} & \cdots & \varepsilon a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n2} & \varepsilon a_{n3} & \cdots & 1 + \varepsilon a_{nn} \end{vmatrix} + c_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

com  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_0(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$ . Da hipótese de indução segue que

$$\det(I_n + \varepsilon A) = (1 + \varepsilon a_{11}) [1 + \varepsilon (a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + c_{n-1}(\varepsilon)] + c_0(\varepsilon),$$

com  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_{n-1}(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$ . Tomando

$$c_n(\varepsilon) = c_{n-1}(\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{11} (a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \varepsilon a_{11} c_{n-1}(\varepsilon) + c_0(\varepsilon),$$

temos  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_n(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$  e

$$\det(I_n + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + c_n(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + c_n(\varepsilon).$$

■

A técnica usada na demonstração do próximo lema é conhecida como *argumento de perturbação*.

**Lema 10.1.10** *Se  $E$  é um espaço normado de dimensão  $2n$ , então existe um isomorfismo  $u: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \longrightarrow E$  de norma 1 tal que*

$$|\operatorname{tr}(u^{-1} \circ v)| \leq 2n \|v\|$$

para todo operador linear  $v: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \longrightarrow E$ .



**Demonstração.** Fixadas a base canônica em  $\mathbb{K}^{2n}$  e uma base qualquer em  $E$ , dado um operador linear  $v: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \longrightarrow E$ , por  $\det(v)$  entendemos o determinante da matriz de  $v$  em relação às bases fixadas. Como a função

$$|\det|: \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E) \longrightarrow [0, \infty)$$

é contínua e o conjunto  $\{v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E) : \|v\| = 1\}$  é compacto, podemos tomar  $u_0 \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E)$  tal que  $\|u_0\| = 1$  e

$$|\det(u_0)| = \max \{|\det(v)| : v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E), \|v\| = 1\}.$$

Tome  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  tal que  $\det(u_0) = |\det(u_0)| e^{i\theta_0}$  e defina

$$u: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \longrightarrow E, \quad u(x) = e^{-\frac{i\theta_0}{2n}} u_0(x).$$

Então  $u \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E)$ ,  $\|u\| = \|u_0\| = 1$  e

$$\begin{aligned} \det(u) &= \det\left(e^{-\frac{i\theta_0}{2n}} u_0\right) = \left(e^{-\frac{i\theta_0}{2n}}\right)^{2n} \cdot \det(u_0) = e^{-i\theta_0} |\det(u_0)| e^{i\theta_0} = |\det(u_0)| \\ &= \max \{|\det(v)| : v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E), \|v\| = 1\} > 0. \end{aligned}$$

Em particular,  $u$  é invertível, e portanto um isomorfismo. Sejam  $v \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2), E)$  e  $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{K}$ . Pela escolha de  $u$  temos

$$\frac{|\det(u + \varepsilon v)|}{\|u + \varepsilon v\|^{2n}} = \left| \det\left(\frac{u + \varepsilon v}{\|u + \varepsilon v\|}\right) \right| \leq \det(u)$$

sempre que  $u + \varepsilon v \neq 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} |\det(u + \varepsilon v)| &\leq \det(u) \|u + \varepsilon v\|^{2n} \leq \det(u) (\|u\| + |\varepsilon| \cdot \|v\|)^{2n} \\ &= \det(u) (1 + |\varepsilon| \cdot \|v\|)^{2n}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

É claro que a desigualdade (10.1) também é verdadeira para o caso  $u + \varepsilon v = 0$ . Como  $u$  é invertível,

$$\begin{aligned} |\det(u + \varepsilon v)| &= |\det(u \circ (I_{2n} + \varepsilon(u^{-1} \circ v)))| = |\det(u) \det(I_{2n} + \varepsilon(u^{-1} \circ v))| \\ &= \det(u) |\det(I_{2n} + \varepsilon(u^{-1} \circ v))|. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Pelo Lema 10.1.9 sabemos que

$$\det(I_{2n} + \varepsilon(u^{-1} \circ v)) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) + c_{2n}(\varepsilon) \tag{10.3}$$

com  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|c_{2n}(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0$ . De (10.2) e (10.1),

$$\det(u) |\det(I_{2n} + \varepsilon(u^{-1} \circ v))| = |\det(u + \varepsilon v)| \leq \det(u) (1 + |\varepsilon| \cdot \|v\|)^{2n},$$

e assim de (10.3) segue que

$$|1 + \varepsilon \operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) + c_{2n}(\varepsilon)| \leq (1 + |\varepsilon| \cdot \|v\|)^{2n} = 1 + 2n|\varepsilon| \cdot \|v\| + O(|\varepsilon|^2),$$

com  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(|\varepsilon|^2)}{\varepsilon} = 0$ . Logo, para todo  $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} |1 + \varepsilon \operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) - |c_{2n}(\varepsilon)|| &\leq |1 + \varepsilon \operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) + c_{2n}(\varepsilon)| \\ &\leq 1 + 2n|\varepsilon| \cdot \|v\| + O(|\varepsilon|^2). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Seja  $\theta_v \in [0, 2\pi)$  tal que  $\operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) = |\operatorname{tr}(u^{-1} \circ v)| e^{i\theta_v}$ . Nos restringimos agora aos escalares  $\varepsilon \neq 0$  que estão sobre a reta que liga a origem ao número  $e^{-i\theta_v}$ , isto é,  $\varepsilon = |\varepsilon| e^{-i\theta_v}$ . Para tais escalares,

$$\varepsilon \operatorname{tr}(u^{-1} \circ v) = |\varepsilon| e^{-i\theta_v} |\operatorname{tr}(u^{-1} \circ v)| e^{i\theta_v} = |\varepsilon| |\operatorname{tr}(u^{-1} \circ v)|. \quad (10.5)$$

De (10.4) e (10.5) segue que, para tais escalares,

$$|\varepsilon| \cdot |\operatorname{tr}(u^{-1} \circ v)| \leq 2n|\varepsilon| \cdot \|v\| + |c_{2n}(\varepsilon)| + O(|\varepsilon|^2).$$

Primeiro divida por  $|\varepsilon|$  e depois faça  $\varepsilon \rightarrow 0$  (ambas as operações podem ser feitas ao longo dos escalares que estamos considerando) para obter o resultado. ■

**Lema 10.1.11** *Seja  $E$  um espaço normado de dimensão  $2n$ . Então existem  $n$  vetores  $y_1, \dots, y_n$  em  $E$  tais que  $\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1$  para  $j = 1, \dots, n$ , e*

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\| \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{1/2}$$

quaisquer que sejam os escalares  $a_1, \dots, a_n$ .

**Demonstração.** Seja  $u: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow E$  o operador cuja existência é garantida pelo Lema 10.1.10. Se  $P: (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  é a projeção ortogonal de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  sobre um subespaço de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  de dimensão  $m \leq 2n$ , então, pelo Exemplo 10.1.8,

$$m = \operatorname{tr}(P) = \operatorname{tr}(u^{-1} \circ u \circ P) \leq 2n \|u \circ P\|.$$

Como  $\|u\| = 1$ , existe  $z_1 \in (\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  tal que  $\|z_1\| = 1$  e  $\|u(z_1)\| = 1$ . Seja  $P_1$  a projeção ortogonal de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  sobre  $[z_1]^\perp$ . Por  $[z_1]^\perp$  ter dimensão  $2n - 1$ ,

$$\|u \circ P_1\| \geq \frac{2n - 1}{2n}.$$

Existe então  $z_2 \in [z_1]^\perp$  tal que  $\|z_2\| = 1$  e  $\|u(z_2)\| = \|u(P_1(z_2))\| \geq \frac{2n-1}{2n}$ . Chamando de  $P_2$  a projeção ortogonal de  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  sobre  $[z_1, z_2]^\perp$ , segue que

$$\|u \circ P_2\| \geq \frac{2n - 2}{2n}.$$

Existe então  $z_3 \in [z_1, z_2]^\perp$  tal que  $\|z_3\| = 1$  e  $\|u(z_3)\| = \|u(P_2(z_3))\| \geq \frac{2n-2}{2n}$ . Após  $n$  aplicações desse procedimento obtemos  $n$  vetores ortonormais  $z_1, \dots, z_n$  em  $(\mathbb{K}^{2n}, \|\cdot\|_2)$  tais que  $\|u(z_j)\| \geq \frac{2n-j+1}{2n}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Defina  $y_j = u(z_j)$  para obter

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n-j+1}{2n} \leq \|u(z_j)\| = \|y_j\| = \|u(z_j)\| \leq \|u\| \cdot \|z_j\| = 1,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ . Além disso, lembrando que  $\|u\| = 1$  e que  $\{z_1, \dots, z_n\}$  é um conjunto ortonormal, do Teorema de Pitágoras temos

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\| = \left\| u \left( \sum_{j=1}^n a_j z_j \right) \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j z_j \right\| = \left( \sum_{j=1}^n \|a_j z_j\|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{1/2},$$

para quaisquer escalares  $a_1, \dots, a_n$ . ■

Finalmente estamos em condições de mostrar que, no contexto dos espaços de Banach, a dimensão infinita é caracterizada pela existência de séries absolutamente convergentes não-absolutamente convergentes.

**Teorema 10.1.12** (Teorema de Dvoretzky–Rogers) *Seja  $E$  um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para qualquer sequência  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$  existe uma série incondicionalmente convergente  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  em  $E$  tal que  $\|x_n\| = |a_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, se  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2 - \ell_1$ , então a série correspondente  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  é incondicionalmente convergente mas não-absolutamente convergente.*

**Demonstração.** Dada  $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ , seja  $(n_k)_{k=1}^\infty$  uma sequência crescente de inteiros positivos tais que

$$\sum_{n \geq n_k} |a_n|^2 \leq 2^{-2k} \quad (10.6)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $E$  tem dimensão infinita, para cada  $k \in \mathbb{N}$  podemos tomar um subespaço vetorial  $E_k$  de  $E$  com  $\dim E_k = 2(n_{k+1} - n_k)$ . Pelo Lema 10.1.11 existem  $(n_{k+1} - n_k)$  vetores  $y_{n_k}, y_{n_k+1}, \dots, y_{n_{k+1}-1}$  com normas entre  $1/2$  e  $1$  tais que

$$\left\| \sum_{n=n_k}^N b_n y_n \right\| \leq \left( \sum_{n=n_k}^N |b_n|^2 \right)^{1/2} \quad (10.7)$$

para todo inteiro  $N$  entre  $n_k$  e  $n_{k+1} - 1$  e para quaisquer escalares  $b_{n_k}, \dots, b_N$ . Para  $j \geq n_1$ , defina  $x_j = \frac{a_j y_j}{\|y_j\|}$ . É claro que  $\|x_n\| = |a_n|$  para todo  $n \geq n_1$ . Observe ainda que para toda escolha de sinais  $\varepsilon_n = \pm 1$ , de (10.7) e (10.6) temos, para todo inteiro  $N$  entre  $n_k$  e  $n_{k+1} - 1$ , que

$$\left\| \sum_{n=n_k}^N \varepsilon_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=n_k}^N \frac{\varepsilon_n a_n y_n}{\|y_n\|} \right\| \leq \left( \sum_{n=n_k}^N \frac{|\varepsilon_n|^2 |a_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{1/2} \leq 2 \left( \sum_{n=n_k}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq 2^{-k+1}.$$

Veja também que se  $n_k < n < m < n_{k+1}$ , fazendo  $b_{n_k} = 0, \dots, b_{n-1} = 0, b_n = \varepsilon_n, \dots, b_m = \varepsilon_m$ , novamente de (10.7) e (10.6) segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=n}^m \varepsilon_j x_j \right\| &= \left\| \sum_{j=n_k}^m b_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n_k}^m \frac{b_j a_j y_j}{\|y_j\|} \right\| \\ &\leq \left( \sum_{j=n_k}^m \frac{|b_j|^2 |a_j|^2}{\|y_j\|^2} \right)^{1/2} \leq 2 \left( \sum_{j=n_k}^m |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $k_0 = k_0(\varepsilon)$  um inteiro positivo tal que  $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon$ . Para  $m > n > n_{k_0}$  existem um inteiro não-negativo  $t$  e um inteiro  $k \geq k_0$  tais que  $n_k \leq n \leq n_{k+1} - 1$  e  $n_{k+t} \leq m \leq n_{k+t+1} - 1$ . Se  $t = 0$ , o que já foi provado revela que

$$\left\| \sum_{j=n}^m \varepsilon_j x_j \right\| \leq 2^{-k+1} < \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon.$$

E se  $t > 0$ , então

$$\left\| \sum_{j=n}^m \varepsilon_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=n}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \varepsilon_j x_j \right\| + \dots + \left\| \sum_{j=n_{k+t}}^m \varepsilon_j x_j \right\| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon.$$

Pelo critério de Cauchy a série  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$  converge, e assim a série  $\sum_{n=n_1}^{\infty} x_n$  é incondicionalmente convergente pelo Teorema 10.1.6. Para completar a demonstração basta tomar  $x_1, \dots, x_{n_1-1} \in E$  satisfazendo  $\|x_j\| = |a_j|$  para todo  $j = 1, \dots, n_1 - 1$ . ■

## 10.2 A desigualdade de Grothendieck

Em algumas áreas da Teoria dos Espaços de Banach, por exemplo, Ideais de Operadores, Normas Tensoriais, Teoria Local, Operadores Absolutamente Somantes, tornou-se lugar comum dizer que determinada ideia ou resultado encontra-se implicitamente no *Résumé*. Trata-se de um trabalho de A. Grothendieck [38], publicado em 1953, que nas décadas seguintes revolucionou a teoria dos espaços de Banach. O resultado principal do *Résumé*, chamado por Grothendieck de *Teorema fundamental da teoria métrica de produtos tensoriais*, é conhecido hoje como *Desigualdade de Grothendieck*. Em 1968, J. Lindenstrauss e A. Pełczyński [58] reescreveram muitos dos resultados de Grothendieck, inclusive o teorema fundamental, tornando-os mais acessíveis e compreensíveis. A partir de então as ideias do *Résumé* de Grothendieck tornaram-se universalmente conhecidas, admiradas, generalizadas e aplicadas.

Nesta seção demonstraremos a desigualdade de Grothendieck, bem como sua interpretação na linguagem dos operadores absolutamente somantes, que diz que todo operador linear contínuo de  $\ell_1$  em  $\ell_2$  é absolutamente somante, resultado conhecido como *Teorema de Grothendieck*.

**Lema 10.2.1** Para uma função  $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ , define

$$\widehat{f}: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \begin{cases} \min \{f(t), 1\}, & \text{se } f(t) \geq 0 \\ \max \{f(t), -1\}, & \text{se } f(t) < 0. \end{cases}$$

Então  $|\widehat{f}(t)| \leq 1$  e  $|f(t) - \widehat{f}(t)| \leq \frac{f(t)^2}{4}$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Demonstração.** Seja  $t \in [0, 1]$ . É claro que  $|\widehat{f}(t)| \leq 1$ . A segunda desigualdade é óbvia se  $f(t) = \widehat{f}(t)$ . Suponhamos então que  $f(t) \neq \widehat{f}(t)$ . Vejamos primeiramente que

$$|f(t) - \widehat{f}(t)| = |f(t)| - 1. \quad (10.8)$$

De fato, se  $f(t) \geq 0$ , então  $\widehat{f}(t) = 1 < f(t)$  e, neste caso,

$$|f(t) - \widehat{f}(t)| = |f(t) - 1| = f(t) - 1 = |f(t)| - 1.$$

Por outro lado, se  $f(t) < 0$ , então  $\widehat{f}(t) = -1 > f(t)$  e portanto

$$|f(t) - \widehat{f}(t)| = |f(t) + 1| = -f(t) - 1 = |f(t)| - 1.$$

Como  $a - 1 \leq a^2/4$  para qualquer número real  $a$ , de (10.8) segue que

$$|f(t) - \widehat{f}(t)| = |f(t)| - 1 \leq \frac{f(t)^2}{4}.$$

■

**Teorema 10.2.2** (Desigualdade de Grothendieck) *Existe uma constante positiva  $K_G$  tal que, para todo espaço de Hilbert  $H$ , todo natural  $m \in \mathbb{N}$ , toda matriz quadrada de escalares  $(a_{ij})_{m \times m}$  e quaisquer vetores  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in B_H$ , é verdade que*

$$\left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i|, |t_j| \leq 1 \right\}.$$

**Demonstração.** Façamos a demonstração do caso real. Para cada  $m$  fixado, é claro que qualquer conjunto de vetores  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$  está contido em um subespaço de dimensão  $2m$  de  $H$ . Como todos os espaços de Hilbert de mesma dimensão finita são isomorfos isometricamente por meio de isomorfismos que preservam o produto interno (Exercícios 5.7.25 e 5.7.8), temos liberdade para trabalhar em um espaço de Hilbert de dimensão  $n = 2m$  específico. Trabalharemos com o subespaço  $H_n = [r_1, \dots, r_n]$  de  $L_2[0, 1]$  gerado pelas funções de Rademacher  $r_1, \dots, r_n$  (veja Exercício 5.7.34). Chame

$$\alpha = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i|, |t_j| \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad \widetilde{\alpha} = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle z_i, w_j \rangle \right| : z_i, w_j \in B_H \right\}.$$

Sejam  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in B_{H_n}$ . Do Lema 10.2.1 sabemos que  $|\widehat{x}_i(t)|, |\widehat{y}_j(t)| \leq 1$  para todos  $i, j = 1, \dots, m$ , e  $t \in [0, 1]$ . Logo

$$\left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle \widehat{x}_i, \widehat{y}_j \rangle \right| = \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \int_0^1 \widehat{x}_i(t) \widehat{y}_j(t) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \widehat{x}_i(t) \widehat{y}_j(t) \right| dt \leq \alpha. \quad (10.9)$$

Por simplicidade denotaremos a norma de  $H_n \subseteq L_2[0, 1]$  por  $\|\cdot\|$ . Seja agora  $x = \sum_{i=1}^n b_j r_j \in H_n = [r_1, \dots, r_n] \subseteq L_2[0, 1]$  com  $\|x\| \leq 1$ . Do Lema 10.2.1 e do Exercício 5.7.35, temos

$$\begin{aligned} \|x - \widehat{x}\|^2 &= \int_0^1 |x(t) - \widehat{x}(t)|^2 dt \leq \frac{1}{16} \int_0^1 x(t)^4 dt \\ &= \frac{1}{16} \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n b_i r_i(t) \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j r_j(t) \right) \left( \sum_{l=1}^n b_l r_l(t) \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k r_k(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{16} \left( \sum_{i,j,l,k=1}^n b_i b_j b_l b_k \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_l(t) r_k(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{16} \left( \sum_{i=j=1}^n \sum_{l=k=1}^n b_i b_j b_l b_k + \sum_{i=l=1}^n \sum_{j=k=1}^n b_i b_j b_l b_k + \sum_{i=k=1}^n \sum_{j=l=1}^n b_i b_j b_l b_k - 2 \sum_{i=1}^n b_i^4 \right) \\ &= \frac{1}{16} \left( 3 \left( \sum_{i,j=1}^n b_i^2 b_j^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^n b_i^4 \right) \leq \frac{3}{16} \left( \sum_{i,j=1}^n b_i^2 b_j^2 \right) \\ &= \frac{3}{16} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^2 = \frac{3}{16} \|x\|^4 \leq \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

e portanto  $\|x - \widehat{x}\| \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Em particular,  $\left\| \frac{x_i - \widehat{x}_i}{\sqrt{3}/4} \right\|, \left\| \frac{y_j - \widehat{y}_j}{\sqrt{3}/4} \right\| \leq 1$ . Disso, de (10.9) e de  $\|x_i\|, \|\widehat{y}_j\| \leq 1$ , concluimos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| &\leq \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle \widehat{x}_i, \widehat{y}_j \rangle \right| + \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle x_i - \widehat{x}_i, \widehat{y}_j \rangle \right| + \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \langle x_i, y_j - \widehat{y}_j \rangle \right| \\ &\leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \left\langle \frac{x_i - \widehat{x}_i}{\sqrt{3}/4}, \widehat{y}_j \right\rangle \right| + \frac{\sqrt{3}}{4} \left| \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \left\langle x_i, \frac{y_j - \widehat{y}_j}{\sqrt{3}/4} \right\rangle \right| \\ &\leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \widetilde{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{4} \widetilde{\alpha} = \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \widetilde{\alpha}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in B_{H_n}$ , obtemos  $\widetilde{\alpha} \leq \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \widetilde{\alpha}$ , ou seja,  $\widetilde{\alpha} \leq \left( \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \right) \alpha$ . Tome  $K_G = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$  para obter a desigualdade desejada.

A maneira mais simples de obter o caso complexo a partir do caso real é fazer a decomposição usual em partes real e imaginária e aplicar o caso real para as matrizes reais resultantes. Procedendo desta forma a constante obtida para o caso complexo será maior que a constante obtida para o caso real. ■

**Observação 10.2.3** A menor das constantes  $K_G$  satisfazendo o Teorema 10.2.2 é chamada de *constante de Grothendieck*, que, conforme visto na demonstração acima, pode depender do corpo sobre o qual se está trabalhando. Para maiores detalhes veja a Seção 10.5.

Para provar uma aplicação importante da desigualdade de Grothendieck precisamos introduzir os operadores absolutamente somantes.

Seja  $E$  um espaço de Banach. Nos Exercícios 4.5.8 e 6.8.19 estudamos o espaço  $\ell_1(E)$  das sequências de vetores  $E$  que são absolutamente somáveis. E no Exercício 2.7.36 trabalhamos com sequências  $(x_j)_{j=1}^\infty$  de vetores de  $E$  que satisfazem a condição

$$(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1 \text{ para todo } \varphi \in E'.$$

Tais sequências são chamadas de *fracamente somáveis* e o espaço formado por elas é denotado por  $\ell_1^w(E)$ . Dado um operador linear contínuo  $T: E \longrightarrow F$ , o leitor verificará no Exercício 10.6.9 que  $T$  transforma sequências absolutamente (fracamente) somáveis em  $E$  em sequências absolutamente (fracamente) somáveis em  $F$ , isto é,

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E) \text{ e}$$

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(E).$$

Segue que  $T$  transforma sequências absolutamente somáveis em  $E$  em sequências fracamente somáveis em  $F$ , pois  $\ell_1(E) \subseteq \ell_1^w(E)$ . Vejamos que nem todo operador linear contínuo transforma sequências fracamente somáveis em sequências absolutamente somáveis:

**Exemplo 10.2.4** Vimos no Exercício 4.5.5 que a sequência  $(e_j)_{j=1}^\infty$  é fracamente somável em  $\ell_\infty$ . Como  $\|e_j\| = 1$  para todo  $j$ , é claro que  $(e_j)_{j=1}^\infty$  não é absolutamente somável em  $\ell_\infty$ . Isso revela que o operador identidade em  $\ell_\infty$ , que é linear e contínuo, não transforma sequências fracamente somáveis em sequências absolutamente somáveis.

Como  $\ell_1(E) \subseteq \ell_1^w(E)$ , um operador que transforma sequências fracamente somáveis em sequências absolutamente somáveis melhora a convergência de séries. Por isso os operadores que gozam dessa propriedade são estudados:

**Definição 10.2.5** Um operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  entre espaços de Banach é *absolutamente somante* se  $T$  transforma sequências fracamente somáveis em  $E$  em sequências absolutamente somáveis em  $F$ , isto é,

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(E).$$

Vimos acima que o operador identidade em  $\ell_\infty$  não é absolutamente somante. Exemplos de operadores absolutamente somantes são os operadores de posto finito (Exercício 10.6.11).

Aplicaremos agora a desigualdade de Grothendieck para demonstrar um dos resultados centrais da teoria dos operadores absolutamente somantes, que, em particular, nos fornece exemplos de operadores absolutamente somantes que não são de posto finito:

**Teorema 10.2.6** (Teorema de Grothendieck) *Todo operador linear contínuo de  $T: \ell_1 \longrightarrow \ell_2$  é absolutamente somante.*

**Demonstração.** Seja  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(\ell_1)$  tal que  $\sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)| \leq 1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , lembre-se do Exemplo 10.1.3 para considerar o operador (projeção nas  $n$  primeiras coordenadas)

$$T_n: \ell_1 \longrightarrow \ell_1, \quad T_n \left( \sum_{i=1}^\infty a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

É fácil ver que cada  $T_n$  é linear contínuo e  $\|T_n\| \leq 1$ . Então, para cada  $\varphi \in B_{(\ell_1)'}$  tem-se  $\varphi \circ T_n \in B_{(\ell_1)'}$ , e portanto

$$\sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi(T_n(x_j))| \leq \sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)| \leq 1,$$

para todo  $n$ . Escrevendo  $x_k = (a_{jk})_{j=1}^\infty$  para todo  $k$ , temos

$$x_k = \sum_{j=1}^\infty a_{jk} e_j \quad \text{e} \quad T_n(x_k) = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j,$$

para todos  $n, k$ . Para qualquer inteiro positivo  $N$  considere escalares  $s_1, \dots, s_N, t_1, \dots, t_N$  em  $B_{\mathbb{K}}$ . Chamando  $s = (s_1, \dots, s_N)$  e considerando o funcional linear  $\varphi_s \in B_{(\ell_1)'}$  definido por

$$\varphi_s(e_j) = s_j \text{ se } j \leq N \quad \text{e} \quad \varphi_s(e_j) = 0 \text{ se } j > N,$$

temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} s_j t_k \right| &\leq \sum_{k=1}^N \left( |t_k| \cdot \left| \sum_{j=1}^N a_{jk} s_j \right| \right) \leq \sum_{k=1}^N \left| \sum_{j=1}^N a_{jk} \varphi_s(e_j) \right| \\ &= \sum_{k=1}^N |\varphi_s(T_n(x_k))| \leq \sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{k=1}^\infty |\varphi(T_n(x_k))| \leq 1. \end{aligned} \quad (10.10)$$



Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq m$ . Para cada  $1 \leq k \leq m$ , aplicando primeiro o Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.4 e em seguida o Teorema de Riesz–Fréchet (Teorema 5.5.2), existe  $y_{k,n} \in \ell_2$  tal que

$$\|y_{k,n}\|_2 = 1 \text{ e } \|T(T_n(x_k))\|_2 = \langle T(T_n(x_k)), y_{k,n} \rangle.$$

Se  $m < n$  tomamos  $y_{(m+1),n} = \dots = y_{n,n} = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \|T(T_n(x_k))\|_2 &= \left| \sum_{k=1}^m \langle T(T_n(x_k)), y_{k,n} \rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{jk} \langle T(e_j), y_{k,n} \rangle \right| \\ &\leq \max \{ \|T(e_j)\|_2 + \varepsilon : j = 1, \dots, n \} \cdot \left| \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{jk} \left\langle \frac{T(e_j)}{\|T(e_j)\|_2 + \varepsilon}, y_{k,n} \right\rangle \right| \\ &\leq (\|T\| + \varepsilon) \left| \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{jk} \left\langle \frac{T(e_j)}{\|T(e_j)\|_2 + \varepsilon}, y_{k,n} \right\rangle \right| \\ &\leq (\|T\| + \varepsilon) K_G \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{jk} s_j t_k \right| : |s_j|, |t_k| \leq 1 \right\} \\ &\leq K_G (\|T\| + \varepsilon), \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade é justamente a desigualdade de Grothendieck (Teorema 10.2.2) e a última é consequência de (10.10). Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  temos

$$\sum_{k=1}^m \|T(T_n(x_k))\|_2 \leq K_G \|T\|,$$

para todos  $n \geq m$ . Como  $T_n(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_k$ , fazendo primeiro  $n \rightarrow \infty$  e em seguida  $m \rightarrow \infty$  na desigualdade acima concluímos, como queríamos, que  $(T(x_k))_{k=1}^\infty \in \ell_1(\ell_2)$ .

Para uma sequência não-nula qualquer  $(z_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(\ell_1)$ , basta aplicar o que acabamos de fazer para a sequência dada por  $x_j = \frac{z_j}{\sup_{\varphi \in B_{(\ell_1)'}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi(z_j)|}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . ■

## 10.3 Bases de Schauder e sequências básicas

Na Análise Funcional, as bases algébricas (ou bases de Hamel – veja Apêndice A) dos espaços de Banach têm pouca utilidade pois, entre outros motivos, elas nunca são enumeráveis:

**Proposição 10.3.1** *Bases algébricas de espaços de Banach nunca são enumeráveis.*

**Demonstração.** É claro que as bases algébricas de espaços de dimensão finita são finitas. Suponhamos que exista uma base algébrica enumerável  $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{N}\}$  de

um espaço de Banach de dimensão infinita  $E$ . Neste caso  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , onde cada  $F_n$  é o subespaço gerado por  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Por ter dimensão finita, cada  $F_n$  é fechado, e portanto pelo Teorema de Baire (Teorema 2.3.1) existe  $n_0$  tal que  $F_{n_0}$  tem interior não-vazio. Isso é um absurdo, pois  $F_{n_0} \neq E$  por  $E$  ter dimensão infinita e subespaços próprios de espaços normados sempre têm interior vazio (Exercício 1.8.11). ■

Apresentamos agora ao leitor o conceito que substitui as bases algébricas na Análise Funcional:

**Definição 10.3.2** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  no espaço de Banach  $E$  é chamada de *base de Schauder* de  $E$  se cada  $x \in E$  tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde  $a_n \in \mathbb{K}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^*: E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x_n^* \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = a_n,$$

$n \in \mathbb{N}$ , que são chamados de *funcionais coeficientes* (ou *funcionais coordenadas* ou ainda *funcionais biortogonais associados*).

A unicidade da representação também garante que os vetores de uma base de Schauder são linearmente independentes.

**Exemplo 10.3.3** (a) Em dimensão finita as bases de Schauder coincidem com as bases algébricas.

(b) Do Exemplo 10.1.3 segue facilmente que os vetores unitários canônicos  $(e_j)_{j=1}^{\infty}$  formam uma base de Schauder para  $c_0$  e para  $\ell_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

(c) Combinando os Teoremas 5.3.10(a) e 5.4.3 com o Exercício 5.7.26 concluímos que sistemas ortonormais completos em espaços de Hilbert separáveis são bases de Schauder.

(d) Argumento análogo ao da demonstração do Lema 1.6.3 comprova que espaços com base de Schauder são separáveis. Assim, espaços não-separáveis, em particular  $\ell_{\infty}$ , não têm base de Schauder.

(e) Vejamos que o espaço  $C[0, 1]$  possui base de Schauder. Considere a sequência  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  de vetores de  $C[0, 1]$  dados por  $s_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$$s_0(t) = 1, \quad s_1(t) = t,$$

e, para  $n \geq 2$ , chame de  $m$  o inteiro positivo com  $2^{m-1} < n \leq 2^m$  e defina

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m \left( t - \left( \frac{2n-2}{2^m} - 1 \right) \right), & \text{se } \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1 \\ 1 - 2^m \left( t - \left( \frac{2n-1}{2^m} - 1 \right) \right), & \text{se } \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1 \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Verifiquemos que a sequência  $(s_n)_{n=0}^{\infty}$  é uma base de Schauder de  $C[0, 1]$ . Dada  $f \in C[0, 1]$ , considere a sequência  $(p_n)_{n=0}^{\infty}$  em  $C[0, 1]$  dada por

$$\begin{aligned} p_0 &= f(0) s_0, \\ p_1 &= p_0 + (f(1) - p_0(1)) s_1, \\ p_2 &= p_1 + (f(1/2) - p_1(1/2)) s_2, \\ p_3 &= p_2 + (f(1/4) - p_2(1/4)) s_3, \\ p_4 &= p_3 + (f(3/4) - p_3(3/4)) s_4, \\ p_5 &= p_4 + (f(1/8) - p_4(1/8)) s_5, \\ p_6 &= p_5 + (f(3/8) - p_5(3/8)) s_6, \\ p_7 &= p_6 + (f(5/8) - p_6(5/8)) s_7, \\ p_8 &= p_7 + (f(7/8) - p_7(7/8)) s_8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que  $p_0$  coincide com  $f$  no ponto 0;  $p_1$  coincide com  $f$  nos pontos 0 e 1 e seu gráfico é um segmento de reta que liga os pontos  $(0, f(0))$  e  $(1, f(1))$ ;  $p_2$  coincide com  $f$  nos pontos 0, 1 e  $1/2$ , e seu gráfico é composto por dois segmentos de reta ligando os pontos  $(0, f(0))$ ,  $(1/2, f(1/2))$  e  $(1, f(1))$ , e assim por diante. Ou seja, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a função  $p_n$  coincide com  $f$  nos  $n + 1$  primeiros pontos do conjunto  $D = \{0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, \dots\} \subseteq [0, 1]$ , e seu gráfico é uma justaposição de segmentos de reta cujos extremos têm abscissas no conjunto  $D$ .

Para cada inteiro não-negativo  $m$ , chame de  $a_m$  o coeficiente de  $s_m$  na expressão que define  $p_m$ . Assim  $p_n = \sum_{m=0}^n a_m s_m$  para cada inteiro positivo  $n$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Da continuidade uniforme de  $f$  podemos tomar  $\delta > 0$  tal que

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon \text{ sempre que } t_1, t_2 \in [0, 1], |t_1 - t_2| < \delta.$$

Tome inteiros positivos  $m$  tal que  $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{2}$  e  $n_0$  tal que  $f$  e  $p_{n_0}$  coincidam no conjunto  $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{2^m-1}{2^m}\}$ . Dado  $t \in [0, 1]$ , existe  $k \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$  tal que  $t - \frac{k}{2^m} < \delta$ . Então

$$\begin{aligned} |f(t) - p_n(t)| &\leq \left| f(t) - f\left(\frac{k}{2^m}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(t) \right| \\ &< \varepsilon + \left| p_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(t) \right| \leq \varepsilon + \left| p_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \right| \\ &= \varepsilon + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \right| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $n > n_0$ . Concluimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_{\infty} = 0$ , e portanto  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n$ . Deixamos para o leitor a verificação da unicidade da representação.

Nosso próximo objetivo é provar a continuidade dos funcionais coeficientes. Para isso vejamos que todo espaço com base de Schauder pode ser visto como um espaço de seqüências.

**Definição 10.3.4** Dada uma base de Schauder  $(x_n)_{n=1}^\infty$  do espaço de Banach  $E$ , chame de  $\mathcal{L}_E$  o espaço vetorial formado pelas seqüências de escalares  $(a_n)_{n=1}^\infty$  tais que a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  é convergente.

**Lema 10.3.5** *Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$ . Então a função*

$$\eta: \mathcal{L}_E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \eta((a_n)_{n=1}^\infty) := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : n \in \mathbb{N} \right\},$$

*é uma norma em  $\mathcal{L}_E$  e  $(\mathcal{L}_E, \eta)$  é um espaço de Banach. Além disso, o operador*

$$T_E: \mathcal{L}_E \longrightarrow E, \quad T_E((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n,$$

*é um isomorfismo.*

**Demonstração.** Os axiomas de norma são imediatos e os deixamos a cargo do leitor. Provemos que o espaço  $(\mathcal{L}_E, \eta)$  é completo. Seja  $(y_n)_{n=1}^\infty = ((a_n^k)_{k=1}^\infty)_{n=1}^\infty$  uma seqüência de Cauchy em  $(\mathcal{L}_E, \eta)$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  é verdade que

$$\begin{aligned} \|a_n^k - a_n^j\| \cdot \|x_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j) x_i - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| \leq 2\eta(y_k - y_j). \end{aligned}$$

Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a seqüência  $(a_n^k)_{k=1}^\infty$  é de Cauchy em  $\mathbb{K}$ , logo convergente, digamos  $a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k$ . Chamemos  $y = (a_n)_{n=1}^\infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\eta(y_k - y_j) \leq \frac{\varepsilon}{4}$  sempre que  $k, j \geq n_\varepsilon$ . Logo,

$$\left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } k, j \geq n_\varepsilon.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  concluímos que

$$\left\| \sum_{i=1}^n (a_i - a_i^j) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } j \geq n_\varepsilon. \quad (10.11)$$

Pela desigualdade triangular segue que

$$\left\| \sum_{i=n}^m (a_i - a_i^{n_\varepsilon}) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todos } n \in \mathbb{N} \text{ e } m > n.$$

Como  $y_{n_\varepsilon} = (a_j^{n_\varepsilon})_{j=1}^\infty \in \mathcal{L}_E$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\left\| \sum_{i=n}^m a_i^{n_\varepsilon} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  sempre que  $m > n > n_0$ . Assim, se  $m > n > n_0$  então

$$\left\| \sum_{i=n}^m a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=n}^m (a_i - a_i^{n_\varepsilon}) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=n}^m a_i^{n_\varepsilon} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Do critério de Cauchy segue que a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  é convergente, logo  $y \in \mathcal{L}_E$ . De (10.11) temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ , e portanto  $(\mathcal{L}_E, \eta)$  é completo.

Como  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é base de Schauder, o operador  $T_E$  é claramente linear e bijetor. Mais ainda, para toda  $(a_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{L}_E$ ,

$$\|T_E((a_j)_{j=1}^\infty)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq \eta((a_j)_{j=1}^\infty),$$

o que prova a continuidade de  $T_E$ . Do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 2.4.2) segue que  $T_E$  é um isomorfismo. ■

**Teorema 10.3.6** *Os funcionais coeficientes associados a uma base de Schauder de um espaço de Banach sempre são contínuos.*

**Demonstração.** Sejam  $(x_j)_{j=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $x \in E$ , mantenha a notação do Lema 10.3.5 e tome uma sequência  $(a_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{L}_E$  tal que  $x = T_E((a_j)_{j=1}^\infty) \in E$ . Então

$$\begin{aligned} |x_n^*(x)| \cdot \|x_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^*(x) x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \leq 2\eta((a_j)_{j=1}^\infty) \leq 2\|T_E^{-1}\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

de onde resulta a continuidade do funcional  $x_n^*$ . ■

**Corolário 10.3.7** *Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , é contínuo o operador linear*

$$P_n: E \longrightarrow E, \quad P_n \left( \sum_{j=1}^\infty a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j.$$

**Demonstração.** Observe que  $P_n = \sum_{j=1}^n x_j^* \otimes x_j$  e aplique o Teorema 10.3.6. ■

É claro que  $P_n^2 = P_n$  para todo  $n$ , por isso os operadores  $(P_n)_{n=1}^\infty$  são chamados de *projeções canônicas* associadas à base de Schauder  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Em particular,  $\|P_n\| \geq 1$  para todo  $n$ . A questão que resta é se as projeções canônicas são uniformemente limitadas, isto é, será que  $\sup_n \|P_n\| < \infty$ ? A resposta é sim:

**Proposição 10.3.8** *Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$  e  $(P_n)_{n=1}^\infty$  suas projeções canônicas. Então  $\sup_n \|P_n\| < \infty$ .*

O número  $\sup_n \|P_n\|$  é chamado de *constante da base*  $(x_n)_{n=1}^\infty$  e denotado por  $K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$ . Como  $\|P_n\| \geq 1$  para todo  $n$ , segue que  $K_{(x_n)_{n=1}^\infty} \geq 1$ .

**Demonstração.** Sabemos que, para cada  $x \in E$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j^*(x)x_j = \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x)x_j = x.$$

Então, por ser convergente, a sequência  $(\|P_n(x)\|)_{n=1}^\infty$  é limitada para cada  $x \in E$ . Como  $E$  é espaço de Banach e os operadores  $P_n, n \in \mathbb{N}$ , são contínuos pelo Corolário 10.3.7, o resultado segue do Teorema de Banach–Steinhaus (Teorema 2.3.2). ■

**Corolário 10.3.9** *Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$  e  $(x_n^*)_{n=1}^\infty$  seus funcionais coeficientes. Então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$1 \leq \|x_k^*\| \cdot \|x_k\| \leq 2K_{(x_n)_{n=1}^\infty}.$$

**Demonstração.** Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= x_k^*(x_k) \leq \|x_k^*\| \cdot \|x_k\| = \|x_k^* \otimes x_k\| = \left\| \sum_{j=1}^k x_j^* \otimes x_j - \sum_{j=1}^{k-1} x_j^* \otimes x_j \right\| \\ &= \|P_k - P_{k-1}\| \leq \|P_k\| + \|P_{k-1}\| \leq 2K_{(x_n)_{n=1}^\infty}. \end{aligned}$$

■

Antes de seguir em frente vejamos mais uma aplicação interessante do Lema 10.3.5.

**Definição 10.3.10** Dizemos que a base de Schauder  $(x_n)_{n=1}^\infty$  do espaço de Banach  $E$  é *equivalente* à base de Schauder  $(y_n)_{n=1}^\infty$  do espaço de Banach  $F$ , e neste caso escrevemos  $(x_n)_{n=1}^\infty \approx (y_n)_{n=1}^\infty$ , se, para qualquer sequência de escalares  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  é convergente se, e somente se, a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n y_n$  é convergente.

**Teorema 10.3.11** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach com bases de Schauder  $(x_n)_{n=1}^\infty$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  respectivamente. Então  $(x_n)_{n=1}^\infty \approx (y_n)_{n=1}^\infty$  se, e somente se, existe um isomorfismo  $T: E \longrightarrow F$  tal que  $T(x_n) = y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demonstração.** Suponha que as bases sejam equivalentes. Tomando  $(Z, (z_n)_{n=1}^\infty) \in \{(E, (x_n)_{n=1}^\infty), (F, (y_n)_{n=1}^\infty)\}$ , do Lema 10.3.5 sabemos que o operador

$$T_Z: (\mathcal{L}_Z, \eta_Z) \longrightarrow Z, \quad T_Z((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty a_n z_n,$$

é um isomorfismo. Da equivalência das bases resulta que  $\mathcal{L}_E$  e  $\mathcal{L}_F$  coincidem como espaços vetoriais, ou seja, a aplicação identidade  $\text{id}: \mathcal{L}_E \longrightarrow \mathcal{L}_F$  é linear e bijetora. Deixamos para o leitor a tarefa de mostrar que  $\text{id}$  tem gráfico fechado, e como  $\mathcal{L}_E$  e  $\mathcal{L}_F$  são espaços de Banach pelo Lema 10.3.5, concluímos pelo Teorema 2.5.1 que  $\text{id}$  é contínua. Do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 2.4.2) segue que  $\text{id}$  é um isomorfismo. Portanto o operador

$$T := T_F \circ \text{id} \circ T_E^{-1}: E \longrightarrow F$$

também é um isomorfismo. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T(x_n) = T_F(\text{id}(T_E^{-1}(x_n))) = T_F(\text{id}(e_n)) = T_F(e_n) = y_n.$$

Reciprocamente, seja  $T: E \longrightarrow F$  um isomorfismo com  $T(x_n) = y_n$  para todo  $n$ . Dada uma sequência de escalares  $(a_n)_{n=1}^\infty$  com  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n = x \in E$ , da linearidade e da continuidade de  $T$  temos

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n T(x_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n y_n,$$

e disso resulta que a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n y_n$  converge. A implicação oposta segue do mesmo modo usando o isomorfismo inverso  $T^{-1}$ . ■

Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  pode não ser uma base de Schauder para um espaço de Banach  $E$  por  $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$  não alcançar todo o espaço  $E$ . Neste caso dizemos que

**Definição 10.3.12** Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  no espaço de Banach  $E$  é dita *sequência básica* se for base de Schauder de  $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ .

É importante perceber que, nas condições da definição acima, se  $x = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j \in E$ , então  $a_j = x_j^*(x)$  para todo  $j$ , onde, neste caso, os funcionais coeficientes  $x_j^*$  estão definidos em  $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ .

O próximo resultado é um critério prático e útil para decidir se uma dada sequência é básica ou não.

**Teorema 10.3.13** (Critério de Banach–Grunblum) *Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  de vetores não-nulos de um espaço de Banach  $E$  é básica se, e somente se, existe uma constante  $M \geq 1$  tal que para toda sequência de escalares  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ,*

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \text{ sempre que } n \geq m. \quad (10.12)$$

**Demonstração.** Suponha que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  seja uma sequência básica e considere suas projeções canônicas  $(P_n)_{n=1}^\infty$ . Da Proposição 10.3.8 sabemos que

$$1 \leq K_{(x_n)_{n=1}^\infty} = \sup \{ \|P_n\| : n \in \mathbb{N} \} < \infty.$$

Dada uma sequência de escalares  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , se  $n \geq m$ , então

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| = \left\| P_m \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \right\| \leq \|P_m\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq K_{(x_n)_{n=1}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Reciprocamente, suponha a validade de (10.12) com  $M \geq 1$ . Vejamos que os vetores  $\{x_1, x_2, \dots\}$  são linearmente independente. De fato, se  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ , então

$$\|a_1 x_1\| \leq M \|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n\| = 0,$$

de onde resulta que  $a_1 = 0$ , pois  $x_1 \neq 0$ . Logo

$$\|a_2 x_2\| = \|a_1 x_1 + a_2 x_2\| \leq M \|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n\| = 0,$$

de onde resulta, da mesma forma, que  $a_2 = 0$ . Repetindo esse processo concluímos que  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

Considere o subespaço  $F = [x_n : n \in \mathbb{N}]$  e, para cada  $n$ , o funcional linear

$$\varphi_n : F \longrightarrow \mathbb{K} \quad , \quad \varphi_n \left( \sum_{j=1}^k a_j x_j \right) = a_n,$$

bem como o operador linear

$$T_n : F \longrightarrow \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]} \quad , \quad T_n \left( \sum_{j=1}^k a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j,$$

admitindo tacitamente que  $k \geq n$ , pois caso contrário definimos  $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$ . Por (10.12), temos

$$\left\| T_n \left( \sum_{j=1}^k a_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^k a_j x_j \right\|,$$



e segue a continuidade de  $T_n$  com  $\|T_n\| \leq M$ . Para  $x = \sum_{j=1}^k a_j x_j \in F$  e  $n \in \mathbb{N}$ , lembrando que podemos supor  $k \geq n$ , tem-se  $|\varphi_n(x)| = |a_n|$ . Assim, se  $n \leq k$ , então

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| \cdot \|x_n\| &= |a_n| \cdot \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \right\| \leq 2M\|x\|. \end{aligned}$$

Disso resulta a continuidade de  $\varphi_n$ . Como  $\mathbb{K}$  e  $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$  são espaços de Banach e  $F$  é denso em  $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ , existem únicas extensões lineares e contínuas de  $\varphi_n$  e  $T_n$  ao espaço  $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ , denotadas por  $\Phi_n$  e  $R_n$ , respectivamente. Além disso,  $\|\varphi_n\| = \|\Phi_n\|$  e  $\|T_n\| = \|R_n\|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Note ainda que, como  $T_n(z) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(z)x_j$  para todo  $z \in F$ , então

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x)x_j \text{ para todo } x \in \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}. \quad (10.13)$$

Dados  $x \in \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$  e  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $y = \sum_{j=1}^m a_j x_j \in F$  tal que  $\|x - y\| < \varepsilon$ . Dessa forma, para todo  $n > m$  temos

$$\begin{aligned} \|x - R_n(x)\| &\leq \|x - y\| + \|y - R_n(y)\| + \|R_n(y) - R_n(x)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - y\| + \|R_n\| \cdot \|x - y\| < (1 + M)\varepsilon. \end{aligned}$$

Disso e de (10.13) concluímos que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \Phi_j(x)x_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x)x_j.$$

Resta mostrar a unicidade da representação acima. É suficiente mostrar que se  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j = 0$  então  $a_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Suponha então  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j = 0$  e tome  $\varepsilon > 0$ . Escolhendo  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| < \varepsilon \leq M\varepsilon \text{ sempre que } n \geq n_0,$$

de (10.12) segue que,

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n_0} a_j x_j \right\| < M\varepsilon \text{ sempre que } n \leq n_0.$$

Para cada  $n$  fixado,

$$|a_n| \cdot \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \right\| \leq 2M\varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Como  $x_n \neq 0$ , fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  segue que  $a_n = 0$ . ■

**Corolário 10.3.14** *Toda subsequência de uma sequência básica em um espaço de Banach é também uma sequência básica.*

O critério de Banach–Grunblum também é útil para o cálculo da constante da base:

**Corolário 10.3.15** *Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência básica no espaço de Banach  $E$ . Então*

$$K_{(x_n)_{n=1}^\infty} = \inf\{M : M \text{ satisfaz (10.12)}\},$$

*e o ínfimo é atingido.*

**Demonstração.** Na primeira parte da demonstração do Teorema 10.3.13 vimos que  $K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$  satisfaz (10.12), logo o ínfimo é menor ou igual a  $K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$ . Para a desigualdade restante, suponha que  $M$  satisfaça (10.12). Dado  $\sum_{j=1}^\infty a_j x_j \in \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ , temos

$$\left\| P_n \left( \sum_{j=1}^\infty a_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\| \text{ sempre que } m \geq n.$$

Logo

$$\left\| P_n \left( \sum_{j=1}^\infty a_j x_j \right) \right\| \leq M \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\| = M \left\| \sum_{j=1}^\infty a_j x_j \right\|$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Resulta que

$$K_{(x_n)_{n=1}^\infty} = \sup \{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} \leq M.$$

Tomando o ínfimo sobre as constantes  $M$  que satisfazem (10.12) obtemos a desigualdade que faltava. Uma vez estabelecida a igualdade, o ínfimo é atingido pois, conforme já vimos,  $K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$  satisfaz (10.12). ■

Em um primeiro momento o leitor pode suspeitar que qualquer subconjunto linearmente independente e enumerável de um espaço de Banach é uma sequência básica. Uma segunda aplicação do critério de Banach–Grunblum mostra que isso não acontece em geral:

**Exemplo 10.3.16** Considere a sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $\ell_p$ ,  $1 < p \leq \infty$ , definida por

$$x_1 = e_1, \quad x_j = -\frac{1}{j-1} e_{j-1} + \frac{1}{j} e_j \text{ para } j \geq 2.$$

É fácil checar que os vetores  $x_1, x_2, \dots$  são linearmente independentes. Por outro lado, para todo inteiro positivo  $n$  é verdade que

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|_p = \frac{1}{n}.$$

Não existe então constante  $M$  que satisfaça (10.12), portanto a sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  não é básica em  $\ell_p$  pelo critério de Banach–Grunblum.

## 10.4 O princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński

Na página 238 do livro [7] que inaugurou a Análise Funcional, Banach afirma, sem demonstração e em apenas duas linhas, que em todo espaço de Banach de dimensão infinita existe um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder. Ou, equivalentemente, que todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma sequência básica infinita. Em um célebre artigo [8] de 1958, C. Bessaga e A. Pełczyński obtém este resultado como uma aplicação de seu resultado principal, atualmente conhecido como *princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński*. A essência de um “princípio de seleção” é a possibilidade de extrair sequências básicas com propriedades especiais a partir de certas sequências em espaços de Banach. O objetivo da presente seção é demonstrar o princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński e aplicá-lo na obtenção de sequências básicas em espaços de Banach arbitrários.

Alguns conceitos e resultados preparatórios são necessários.

**Definição 10.4.1** Um subconjunto  $N$  do dual  $E'$  de um espaço de Banach  $E$  é dito *normante para  $E$*  se

$$\|x\| = \sup \{ |\varphi(x)| : \varphi \in N \text{ e } \|\varphi\| \leq 1 \} \text{ para todo } x \text{ em } E.$$

O Teorema de Hahn–Banach na forma do Corolário 3.1.5 diz que  $E'$  é normante para  $E$ . Segue da Proposição 4.3.1 que  $E = J_E(E)$  é normante para  $E'$ . É imediato que todo conjunto  $N$  normante para  $E$  separa pontos de  $E$ , isto é, para todos  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ , existe  $\varphi \in N$  tal que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

**Lema 10.4.2** *Sejam  $N$  um conjunto normante para o espaço de Banach  $E$  e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $E$  tais que  $\inf_n \|x_n\| > 0$  e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0 \text{ para todo } \varphi \in N.$$

Então, para cada  $0 < \varepsilon < 1$ , cada inteiro positivo  $k$  e cada subespaço de dimensão finita  $F$  de  $E$ , existe um inteiro  $n \geq k$  tal que

$$\|y + ax_n\| \geq (1 - \varepsilon) \|y\| \text{ para todos } y \in F \text{ e } a \in \mathbb{K}.$$

**Demonstração.** É simples verificar que basta provar a desigualdade desejada para vetores unitários  $y \in F$ . Suponha, por absurdo, que o resultado não seja verdadeiro. Neste caso existem  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $k$  inteiro positivo e  $F$  subespaço de dimensão finita de  $E$  com a seguinte propriedade: para todo  $n \geq k$  existem um vetor unitário  $y_n \in F$  e um escalar  $a_n$  tais que

$$\|y_n + a_n x_n\| < 1 - \varepsilon.$$

Como  $F$  tem dimensão finita, por compacidade existe uma subsequência de  $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$  que converge para um certo  $y_0 \in F$ . É claro que o vetor  $y_0$  também é unitário. De

$$|a_{n_j}| \cdot \|x_{n_j}\| = \|a_{n_j} x_{n_j}\| \leq \|y_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j}\| + \|y_{n_j}\| < (1 - \varepsilon) + \|y_{n_j}\| = 2 - \varepsilon,$$

segue que, para todo  $n_j \geq k$ ,

$$|a_{n_j}| < \frac{2 - \varepsilon}{\|x_{n_j}\|} \leq \frac{2 - \varepsilon}{\inf \{\|x_i\| : i \geq k\}}.$$

A sequência  $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$  é então limitada. Disso, da hipótese e da convergência  $y_{n_j} \longrightarrow y_0$  segue que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(y_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j}) = \varphi(y_0) + \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(a_{n_j} x_{n_j}) = \varphi(y_0) + \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} \varphi(x_{n_j}) = \varphi(y_0)$$

para todo  $\varphi \in N$ . Como  $N$  é normante para  $E$  e  $\|y_0\| = 1$ , existe  $\varphi_0 \in N$  tal que  $\|\varphi_0\| \leq 1$  e  $|\varphi_0(y_0)| > 1 - \varepsilon$ . Por outro lado,

$$1 - \varepsilon > \|y_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j}\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(y_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j})| \geq |\varphi_0(y_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j})|$$

para todo  $n_j \geq k$ , logo

$$1 - \varepsilon \geq \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_0(y_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j})| = |\varphi_0(y_0)| > 1 - \varepsilon,$$

contradição esta que completa a demonstração. ■

**Teorema 10.4.3** (Bessaga–Mazur) *Sejam  $N$  um conjunto normante para o espaço de Banach  $E$  e  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $E$  tais que  $\inf_n \|x_n\| > 0$  e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0 \text{ para todo } \varphi \in N.$$

*Então  $(x_n)_{n=1}^\infty$  contém uma subsequência básica  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  com  $x_{n_1} = x_1$ .*

**Demonstração.** Tomemos uma sequência  $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$  de números reais com  $0 < \varepsilon_n < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  satisfazendo

$$0 < \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 - \varepsilon_n) < 1.$$

É interessante que o leitor se convença da existência de tal sequência  $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ . Chamando  $n_1 = 1$ ,  $F_1 = [x_{n_1}]$ ,  $k = n_1$  e  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , pelo Lema 10.4.2 existe  $n_2 > n_1$  tal que

$$\|a_1 x_{n_1} + a_2 x_{n_2}\| \geq (1 - \varepsilon_1) \|a_1 x_{n_1}\|$$

para escalares  $a_1, a_2$  quaisquer. Indutivamente, suponha a existência de inteiros  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  tais que

$$\|a_1 x_{n_1} + \dots + a_k x_{n_k}\| \geq (1 - \varepsilon_{k-1}) \|a_1 x_{n_1} + \dots + a_{k-1} x_{n_{k-1}}\|$$

para escalares  $a_1, \dots, a_k$  quaisquer. Então, chamando  $F_k = [x_{n_1}, \dots, x_{n_k}]$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_k$ ,  $k = n_k$ , pelo Lema 10.4.2 existe  $n_{k+1} > n_k$  tal que

$$\|a_1 x_{n_1} + \dots + a_{k+1} x_{n_{k+1}}\| \geq (1 - \varepsilon_k) \|a_1 x_{n_1} + \dots + a_k x_{n_k}\|.$$

A subsequência  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  está então construída, resta mostrar que é básica. Para todos  $k, m \in \mathbb{N}$  e escalares  $a_1, \dots, a_{k+m}$ , é verdade que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{k+m} a_i x_{n_i} \right\| &\geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) \left\| \sum_{i=1}^{k+m-1} a_i x_{n_i} \right\| \geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) \dots (1 - \varepsilon_k) \left\| \sum_{i=1}^k a_i x_{n_i} \right\| \\ &\geq \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) \right) \left\| \sum_{i=1}^k a_i x_{n_i} \right\|. \end{aligned}$$

Tomando  $M = \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) \right)^{-1}$  no critério de Banach–Grunblum (Teorema 10.3.13) segue que a subsequência  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  é básica. ■

**Definição 10.4.4** Sejam  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma base de Schauder de um espaço de Banach  $E$  e  $(k_n)_{n=0}^{\infty}$  uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos, com  $k_0 = 0$ . Uma sequência de vetores não-nulos  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $E$  definida por

$$y_n = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} b_i x_i,$$

em que cada  $b_i \in \mathbb{K}$ , é chamada de *sequência de blocos básica relativa a  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$* .

O próximo resultado justifica o adjetivo “básica” na definição acima:

**Proposição 10.4.5** *Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de blocos básica com relação a  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Então  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência básica em  $E$  e  $K_{(y_n)_{n=1}^\infty} \leq K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$ .*

**Demonstração.** Sejam  $m$  e  $k$  inteiros positivos e  $a_1, \dots, a_{m+k}$  escalares. Do Corolário 10.3.15 resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k_1} a_1 b_i x_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_2 b_i x_i + \cdots + \sum_{i=k_{m-1}+1}^{k_m} a_m b_i x_i \right\| \\ &\leq K_{(x_n)_{n=1}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{k_1} a_1 b_i x_i + \cdots + \sum_{i=k_{m-1}+1}^{k_m} a_m b_i x_i + \cdots + \sum_{i=k_{m+k-1}+1}^{k_{m+k}} a_{m+k} b_i x_i \right\| \\ &= K_{(x_n)_{n=1}^\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m+k} a_i y_i \right\|. \end{aligned}$$

O critério de Banach–Grünblum garante que a sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é básica e a definição da constante da base garante que  $K_{(y_n)_{n=1}^\infty} \leq K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$ . ■

Mais um resultado é necessário para a demonstração do princípio de seleção. Precisamos antes do seguinte lema elementar, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor.

**Lema 10.4.6** *Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  base de Schauder do espaço de Banach  $E$ ,  $(y_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência básica de  $E$  e  $T: E \rightarrow E$  um isomorfismo com  $T(x_n) = y_n$  para todo  $n$ . Então  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é base de Schauder de  $E$ .*

**Teorema 10.4.7** (Bessaga–Pelczyński) *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência básica em  $E$  e  $(x_n^*)_{n=1}^\infty$  seus funcionais coeficientes. Se  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência em  $E$  tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|x_n^*\| =: \lambda < 1, \quad (10.14)$$

*então  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência básica em  $E$  equivalente a  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Além disso, se  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é base de Schauder de  $E$ , então  $(y_n)_{n=1}^\infty$  também é base de Schauder de  $E$ .*

**Demonstração.** Dada uma sequência  $(a_n)_{n=1}^\infty$  de escalares, de

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) (x_i - y_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left| x_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \right| \cdot \|x_i - y_i\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \left( \sum_{i=1}^n \|x_i^*\| \cdot \|x_i - y_i\| \right) \leq \lambda \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|, \end{aligned}$$

resulta que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Consequentemente,

$$(1 - \lambda) \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq (1 + \lambda) \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \quad (10.15)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é sequência básica, pelo critério de Banach–Grunblum (Teorema 10.3.13) existe  $M \geq 1$  tal que se  $m \geq n$  então

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq (1 + \lambda) \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq (1 + \lambda) M \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq \frac{(1 + \lambda) M}{(1 - \lambda)} \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\|.$$

Usando mais uma vez o critério de Banach–Grunblum concluímos que  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é sequência básica de  $E$ . De (10.15) e do critério de Cauchy (Observação 10.1.2) segue imediatamente que  $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  converge se, e somente se,  $\sum_{n=1}^\infty a_n y_n$  converge, ou seja,  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é equivalente a  $(y_n)_{n=1}^\infty$ .

Suponha agora que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  seja uma base de Schauder de  $E$ . Como  $\lambda < \infty$ , está bem definido o operador linear

$$T: E \longrightarrow E, \quad T(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x)(x_j - y_j).$$

Mais ainda,  $\|T\| \leq \lambda < 1$ , e com isso a Proposição 7.1.3 garante que o operador  $(\text{id}_E - T): E \longrightarrow E$  é um isomorfismo. Como  $(\text{id}_E - T)(x_n) = y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue do Lema 10.4.6 que  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é base de Schauder de  $E$ . ■

Agora estamos em condições de provar o resultado principal da seção:

**Teorema 10.4.8** (Princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński) *Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder de um espaço de Banach  $E$  e  $(x_n^*)_{n=1}^\infty$  seus funcionais coeficientes. Se  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência em  $E$  tal que  $\inf_n \|y_n\| > 0$  e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^*(y_n) = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$

*então  $(y_n)_{n=1}^\infty$  contém uma subsequência básica equivalente a uma sequência de blocos básica relativa a  $(x_n)_{n=1}^\infty$ .*

**Demonstração.** Para simplificar a notação chamaremos de  $M$  a constante da base  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Chame  $\varepsilon = \inf_n \|y_n\|$ ,  $n_1 = 1$  e escolha  $m_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_1}) x_i \right\| < \frac{1}{2^3}.$$

Escolha agora um inteiro  $n_2 > n_1$  tal que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=1}^{m_1} x_i^*(y_{n_2}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^3}.$$

Isso é possível pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^*(y_n) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , e em particular para todo  $i = 1, \dots, m_1$ . Seleccionamos então um inteiro  $m_2 > m_1$  tal que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_2}) x_i \right\| < \frac{1}{2^4}.$$

Continuando esse processo obtemos seqüências crescentes  $(n_k)_{k=1}^\infty$  e  $(m_k)_{k=1}^\infty$  de inteiros positivos tais que

$$\left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=m_k+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_k}) x_i \right\| < \frac{1}{2^{k+2}} \quad \text{e} \quad \left(\frac{4M}{\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^{k+2}}. \quad (10.16)$$

Definindo, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$z_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i.$$

segue que

$$y_{n_{k+1}} = \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i + z_k + \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i. \quad (10.17)$$

Como  $M \geq 1$ , de (10.17) e (10.16) segue que

$$\begin{aligned} \|z_k\| &\geq \|y_{n_{k+1}}\| - \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i \right\| - \left\| \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i \right\| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4M2^{k+2}} - \frac{\varepsilon}{4M2^{k+3}} \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} - \frac{\varepsilon}{2^{k+5}} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Resulta que  $z_k \neq 0$  para todo  $k$  e portanto  $(z_k)_{k=1}^\infty$  é uma seqüência de blocos básica com relação a  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Da Proposição 10.4.5 sabemos que a seqüência  $(z_k)_{k=1}^\infty$  é básica.



Chamando de  $(z_k^*)_{k=1}^\infty$  os funcionais coeficientes e de  $M_1$  a constante da sequência básica  $(z_k)_{k=1}^\infty$ , do Corolário 10.3.9 e da Proposição 10.4.5 segue que

$$1 \leq \|z_k^*\| \cdot \|z_k\| \leq 2M_1 \leq 2M,$$

e de (10.18) temos

$$\|z_k^*\| \leq \frac{2M}{\|z_k\|} \leq \frac{4M}{\varepsilon}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Finalmente, da desigualdade acima e de (10.17), temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^*\| \cdot \|z_k - y_{n_{k+1}}\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4M}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i + \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4M}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\varepsilon}{4M} \left( \frac{1}{2} \right)^{k+2} + \frac{\varepsilon}{4M} \left( \frac{1}{2} \right)^{k+3} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{k+2} + \left( \frac{1}{2} \right)^{k+3} \right) < 1. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 10.4.7 concluímos que  $(y_{n_{k+1}})_{k=1}^\infty \approx (z_k)_{k=1}^\infty$ . ■

Como consequência obtemos um princípio de seleção com enunciado mais econômico:

**Corolário 10.4.9** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $E$  com  $\inf_n \|y_n\| > 0$  e  $y_n \xrightarrow{w} 0$ . Então  $(y_n)_{n=1}^\infty$  admite uma subsequência básica.*

**Demonstração.** Considere o subespaço  $\overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}$  de  $E$ , que é separável pelo Lema 1.6.3. Pelo Teorema de Banach–Mazur (Teorema 6.5.5) existe uma isometria linear  $T: \overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]} \rightarrow C[0, 1]$ . Observe que  $\inf_n \|T(y_n)\| = \inf_n \|y_n\| > 0$ . Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder de  $C[0, 1]$  – Exemplo 10.3.3(e) – e  $(x_n^*)_{n=1}^\infty$  os funcionais coeficientes associados. De  $y_n \xrightarrow{w} 0$  e da Proposição 6.2.9 concluímos que  $T(y_n) \xrightarrow{w} 0$ . Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^*(T y_n) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Pelo princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński existe uma subsequência básica  $(T(y_{n_k}))_{k=1}^\infty$  de  $(T(y_n))_{n=1}^\infty$ . Como  $T^{-1}: T\left(\overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}\right) \rightarrow \overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}$  é isomorfismo isométrico, segue que  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty = (T^{-1}(T(y_{n_k})))_{k=1}^\infty$  é sequência básica. ■

Para concluir aplicamos o princípio de seleção na obtenção de sequências básicas em espaços de Banach de dimensão infinita arbitrários:

**Teorema 10.4.10** (Banach–Mazur, Bessaga–Pełczyński, Gelbaum) *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder.*

**Demonstração.** Como todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço separável de dimensão infinita (verifique!), basta provar o resultado para espaços separáveis. Conforme fizemos na demonstração anterior, com a ajuda do Teorema 6.5.5 podemos supor que  $E$  é um subespaço de  $C[0, 1]$  de dimensão infinita. Ainda como na demonstração anterior, denotemos por  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma base de Schauder de  $C[0, 1]$  e por  $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$  seus funcionais coeficientes. Para cada inteiro positivo  $k$ , defina

$$N_k = \{x \in E : x_1^*(x) = \cdots = x_k^*(x) = 0\} = \bigcap_{j=1}^k (\ker(x_j^*) \cap E).$$

É claro que cada  $N_k$  é subespaço fechado de  $E$ . Mais ainda, como  $N_k$  é o núcleo do operador linear

$$x \in E \mapsto (x_1^*(x), \dots, x_k^*(x)) \in \mathbb{K}^k,$$

e  $\mathbb{K}^k$  tem dimensão  $k$ , segue que  $N_k$  tem dimensão infinita para  $k \geq 1$ . É claro que

$$\cdots \subseteq N_3 \subseteq N_2 \subseteq N_1.$$

Suponha que essa sequência  $(N_k)_{k=1}^{\infty}$  fique estacionária a partir de algum índice, ou seja, suponha que exista  $n_0 \geq 1$  tal que  $N_j = N_{n_0}$  para todo  $j > n_0$ . Vejamos que, neste caso,  $N_{n_0} = \{0\}$ . De fato, dado  $x \in N_{n_0}$ , por definição de  $N_{n_0}$  temos

$$x_1^*(x) = \cdots = x_{n_0}^*(x) = 0.$$

Seja  $j > n_0$ . Como  $N_j = N_{n_0}$ ,  $x \in N_j$ , e portanto  $x_j^*(x) = 0$ . Assim  $x_j^*(x) = 0$  para todo  $j$ . Da expressão

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x) x_j,$$

concluimos que  $x = 0$ . Como  $N_{n_0}$  tem dimensão infinita, não ocorre  $N_{n_0} = \{0\}$ , e portanto a sequência  $(N_k)_{k=1}^{\infty}$  nunca fica estacionária. Isso significa que existe uma infinidade de índices  $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$  tais que as inclusões

$$\cdots \subseteq N_{j_3} \subseteq N_{j_2} \subseteq N_{j_1}$$

são todas estritas. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tomando  $y_k \in N_{j_k} - N_{j_{k+1}}$ , a sequência  $(y_k)_{k=1}^{\infty}$  é formada por vetores distintos de  $E$ . É claro que podemos supor  $\|y_j\| = 1$  para todo  $j$ . Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  com  $k \geq n$ . Então  $j_k \geq j_n \geq n$ , e portanto

$$y_k \in N_{j_k} \subseteq N_{j_n} \subseteq N_n.$$

Disso segue que  $x_n^*(y_k) = 0$ , ou seja,  $x_n^*(y_k) = 0$  para todo  $k \geq n$ , o que revela que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^*(y_k) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pelo princípio de seleção de Bessaga-Pelczyński existe uma subsequência básica  $(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}$  de  $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ . Logo  $\overline{[(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]}$  é subespaço de dimensão infinita de  $E$  com base de Schauder.

■

## 10.5 Comentários e notas históricas

Foi em 1837 que G. P. G. L. Dirichlet provou que convergências absoluta e incondicional coincidem para séries de números reais.

A Proposição 10.1.4 foi provada por Banach em sua tese de 1922 e se constituiu em um dos primeiros indícios de que a completude é de fato uma propriedade importante para o estudo da convergência de séries.

Banach e seus companheiros de Lwów (então na Polônia e hoje na Ucrânia) tinham o hábito de discutir matemática em um bar chamado Scottish Café. Como escreviam em mesas e guardanapos, muita coisa se perdia a cada encontro. Łucja, esposa de Banach, providenciou então um livro, que se tornou conhecido como *Scottish Book* [62], que ficava no bar e no qual os participantes tomavam notas, principalmente de problemas propostos e suas soluções, bem como de prêmios oferecidos por suas soluções. Prêmios singelos, normalmente uma garrafa de vinho, mas um caso ficou particularmente conhecido. Em 1936, S. Mazur ofereceu um ganso vivo para quem solucionasse um problema – Problema 153 do *Scottish Book* – que A. Grothendieck mostrou em 1955 estar intimamente relacionado ao problema da aproximação mencionado na Seção 7.6. Após resolver o problema em 1972, P. Enflo viajou a Varsóvia para receber o ganso das mãos de Mazur, o qual mataram e comeram na mesma noite em um belo repasto na casa de W. Zelazko (a foto de Enflo recebendo o ganso das mãos de Mazur é célebre, veja, por exemplo, [81, página 122]).

O problema da caracterização da dimensão infinita por meio da existência de séries incondicionalmente convergentes mas não-absolutamente convergentes foi um dos problemas do *Scottish Book* e também foi mencionado por Banach em [7, página 240]. O problema se mostrou especialmente difícil, e mesmo o caso de  $\ell_1$  teve que esperar até 1947 para ser resolvido por M. S. Macphail. A solução geral de A. Dvortezky e C. A. Rogers foi publicada em 1950.

O *Résumé* [38], que contém a desigualdade de Grothendieck, foi concebido, escrito e publicado durante o período em que Grothendieck trabalhou no Brasil, mais especificamente na Universidade de São Paulo, de meados de 1952 ao final de 1954. Foi publicado no número 8, ano de 1953, do Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo. Sociedade e revista estas que foram extintas para dar lugar à atual Sociedade Brasileira de Matemática e ao seu atual Boletim. Um relato da passagem de Grothendieck pelo Brasil pode ser encontrado em [5].

O valor exato da constante de Grothendieck ainda não é conhecido. Na verdade, os valores não são conhecidos, pois sabe-se que as constantes no caso real e no caso complexo, denotadas por  $K_G^{\mathbb{R}}$  e  $K_G^{\mathbb{C}}$ , respectivamente, são distintas. A demonstração que demos pode dar a impressão de que  $K_G^{\mathbb{R}} \leq K_G^{\mathbb{C}}$ , mas na verdade, de acordo com as estimativas conhecidas descritas abaixo, o que ocorre é o seguinte:

$$1,338 \leq K_G^{\mathbb{C}} \leq 1,4049 \dots < 1,66 \leq K_G^{\mathbb{R}} \leq 1,782 \dots$$

Isso em nada conflita com o que fizemos, mostra apenas que o argumento que usamos na demonstração está longe de obter as melhores constantes. Para maiores detalhes e

créditos para as estimativas acima, veja [74].

A classe dos operadores absolutamente somantes, que, como não poderia deixar de ser, tem suas origens no Résumé de Grothendieck, foi formalmente isolada por A. Pietsch em 1967, e ganhou relevância já em 1968 com o já citado trabalho [58] de Lindenstrauss e Pełczyński. O livro [20] é todo dedicado à teoria dos operadores absolutamente somantes.

As bases de Schauder foram introduzidas por J. Schauder, membro do círculo de Banach em Lwów, em 1927. Neste mesmo trabalho Schauder construiu a base de  $C[0, 1]$  exibida no Exemplo 10.3.3(e). As funções dessa base já haviam sido estudadas por G. Faber em 1909, daí o uso eventual da expressão *base de Faber–Schauder*. Em 1928 Schauder provou que o sistema de Haar (veja, por exemplo, [63, Example 4.1.27]) é uma base de Schauder para  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Em sua definição original, Schauder exigia a continuidade dos funcionais coeficientes; exigência esta que, de acordo com o Teorema 10.3.6 – devido a Banach – se mostrou desnecessária.

O Teorema 10.3.6 e uma das implicações do Teorema 10.3.13 foram provados por Banach em seu livro [7] de 1932. A outra implicação do Teorema 10.3.13 foi provada por M. Grunbaum em 1941. Este critério se tornou ferramenta corrente na teoria de bases de Schauder a partir da menção a ele feita no artigo clássico de Bessaga e Pełczyński [8] de 1958, que deu origem a toda a teoria da Seção 10.4.

O Teorema 10.4.3 é usado por Pełczyński [71] para demonstrar que se todo subespaço com base de Schauder de um espaço de Banach  $E$  for reflexivo, então  $E$  é reflexivo. Além do que foi visto no texto, o princípio de seleção de Bessaga–Pełczyński – formulado originalmente em [8] no ano de 1958 – tem várias aplicações notáveis, por exemplo: se  $E'$  contém uma cópia de  $c_0$ , então  $E$  contém uma cópia de  $\ell_1$  [63, Lemma 4.4.17]; se  $1 \leq q < p < \infty$ , então todo operador linear contínuo de  $\ell_p$  em  $\ell_q$  é compacto (este é o Teorema de Pitt – veja, por exemplo, [26, Proposition 6.25]). Outras aplicações do princípio de seleção podem ser encontradas em [19].

Expliquemos a atribuição de crédito múltiplo no Teorema 10.4.10. Como já vimos, este resultado apareceu sem demonstração no livro de Banach [7] de 1932. As primeiras demonstrações aparecerem em dois trabalhos publicados em 1958, o já citado artigo de Bessaga e Pełczyński e outro de B. Gelbaum, este último publicado nos Anais da Academia Brasileira de Ciências. Em 1962 Pełczyński [71] apresenta nova demonstração e atribui a ideia a Mazur. Acredita-se então que Banach conhecia esse argumento de Mazur.

## 10.6 Exercícios

**Exercício 10.6.1** Prove que convergências absoluta e incondicional coincidem para séries em espaços normados de dimensão finita.

**Exercício 10.6.2** Demonstre o critério de Cauchy enunciado na Observação 10.1.2.

**Exercício 10.6.3** Sejam  $1 < p < \infty$  e  $(a_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência que está em  $\ell_p$  mas não está em  $\ell_1$ . Prove que a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$  converge incondicionalmente mas não absolutamente em  $\ell_p$ .

**Exercício 10.6.4** Demonstre a Proposição 5.3.8 usando o Teorema 10.1.6.

**Exercício 10.6.5** Prove que se  $A$  e  $B$  são duas matrizes quadradas de escalares de ordem  $n$ , então  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Exercício 10.6.6** Sejam  $E$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $T: E \rightarrow E$  um operador linear. Prove que o traço de  $T$ ,  $\text{tr}(T)$ , independe da base escolhida para  $E$ .

**Exercício 10.6.7** Prove o caso complexo da desigualdade de Grothendieck (Teorema 10.2.2) a partir do caso real.

**Exercício 10.6.8** Prove que o espaço  $\ell_1^w(E)$  das sequências fracamente somáveis no espaço de Banach  $E$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_w = \sup \left\{ \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)| : \varphi \in B_{E'} \right\}.$$

Considere sempre a norma  $\|\cdot\|_w$  no espaço  $\ell_1^w(E)$ .

**Exercício 10.6.9** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Prove que:

- (a) O operador  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E) \mapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1(F)$  está bem definido, é linear contínuo e tem a mesma norma que  $T$ .
- (b) O operador  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(E) \mapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(F)$  está bem definido, é linear contínuo e tem a mesma norma que  $T$ .

**Exercício 10.6.10** Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear contínuo  $T: E \rightarrow F$  entre espaços de Banach:

- (a)  $T$  é absolutamente somante.
- (b) Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\| \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|,$$

para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

- (c) O operador  $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^w(E) \mapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1(F)$  está bem definido, é linear contínuo.

**Exercício 10.6.11** Prove que todo operador linear contínuo de posto finito entre espaços de Banach é absolutamente somante.

**Exercício 10.6.12** Dados espaços de Banach  $E$  e  $F$ , chame de  $\Pi(E, F)$  o subconjunto de  $\mathcal{L}(E, F)$  formado pelos operadores absolutamente somantes. Prove que:

- (a)  $\Pi(E, F)$  o subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
- (b) (Propriedade de ideal) Se  $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$ ,  $U \in \Pi(E, F)$  e  $V \in \mathcal{L}(F, F_0)$ , então  $V \circ U \circ T \in \Pi(E_0, F_0)$ .

**Exercício 10.6.13\*** Seja  $(a_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de escalares tal que  $\left| \sum_{n \in M} a_n \right| \leq 1$  para todo conjunto finito  $M \subseteq \mathbb{N}$ . Prove que  $\sum_{n=1}^\infty |a_n| \leq 4$ .

**Exercício 10.6.14** Dado um espaço de Banach  $E$ , defina

$$\ell_1^u(E) = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1^w(E) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_n)_{n=k}^\infty\|_w = 0 \right\}.$$

Prove que:

- (a)  $\ell_1^u(E)$  é subespaço fechado de  $\ell_1^w(E)$ .
- (b) Uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  pertence a  $\ell_1^u(E)$  se, e somente se, a série  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  é incondicionalmente convergente.

**Exercício 10.6.15** Prove que os vetores de uma base de Schauder de um espaço de Banach são linearmente independentes.

**Exercício 10.6.16** Prove a unicidade da representação em relação à base de Schauder de  $C[0, 1]$  exibida no Exemplo 10.3.3(e).

**Exercício 10.6.17** Prove que, para todo espaço de Banach  $E$ ,  $\eta$  é uma norma em  $\mathcal{L}_E$ .

**Exercício 10.6.18** Mostre que todo espaço com base de Schauder é separável.

**Exercício 10.6.19** Prove que todo espaço de Banach com base de Schauder tem a propriedade da aproximação (veja definição na Seção 7.6).

**Exercício 10.6.20** Mostre que  $(e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_4 - e_3, \dots)$  é base de Schauder de  $\ell_1$ . Mostre também que a convergência da série que representa um vetor de  $\ell_1$  em relação a essa base nem sempre é incondicional.

**Exercício 10.6.21** (a) Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$  e  $(a_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de escalares não-nulos. Prove que  $(a_n x_n)_{n=1}^\infty$  também é base de Schauder de  $E$ .

(b) Prove que se o espaço de Banach  $E$  tem base de Schauder, então  $E$  admite uma base de Schauder  $(x_n)_{n=1}^\infty$  normalizada, isto é,  $\|x_n\| = 1$  para todo  $n$ .

**Exercício 10.6.22** Prove que o operador  $\text{id}: \mathcal{L}_E \longrightarrow \mathcal{L}_F$  da demonstração do Teorema 10.3.11 tem gráfico fechado.

**Exercício 10.6.23** Sejam  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder do espaço de Banach  $E$  e  $(x_n^*)_{n=1}^\infty$  seus funcionais coeficientes. Prove que

$$\sup_n \|x_n\| < \infty \iff \inf_n \|x_n^*\| > 0 \quad \text{e} \quad \inf_n \|x_n\| > 0 \iff \sup_n \|x_n^*\| < \infty.$$

**Exercício 10.6.24** Prove que todo espaço de Banach separável admite um conjunto normante enumerável.

**Exercício 10.6.25** Demonstre o Lema 10.4.6.

**Exercício 10.6.26\*** Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder de um espaço de Hilbert tal que  $\|x_n\| = \|x_n^*\| = 1$  para todo  $n$ . Prove que  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é um sistema ortonormal completo.

**Exercício 10.6.27\*** Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $(y_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de blocos básica com relação à base  $(e_n)_{n=1}^\infty$  de  $\ell_p$ . Prove que:

- (a)  $\overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}$  é isometricamente isomorfo a  $\ell_p$ .
- (b) Se  $0 < \inf_n \|y_n\| \leq \sup_n \|y_n\| < \infty$ , então  $(y_n)_{n=1}^\infty \approx (e_n)_{n=1}^\infty$ .

**Exercício 10.6.28** (Teorema de Krein–Milman–Rutman) Sejam  $E$  um espaço de Banach com base de Schauder e  $\mathcal{D}$  um subconjunto denso de  $E$ . Prove que existe uma base de Schauder de  $E$  formada apenas por elementos de  $\mathcal{D}$ .

**Exercício 10.6.29** Seja  $1 \leq p \leq \infty$ .

- (a) Para cada  $t \in (0, 1)$ , seja  $x_t = (t, t^2, t^3, \dots)$ . Mostre que o conjunto  $\{x_t : 0 < t < 1\}$  é linearmente independente em  $\ell_p$ .
- (b) Mostre que  $\dim(\ell_p) = \mathfrak{c}$ , onde  $\mathfrak{c}$  é a cardinalidade do contínuo, isto é, a cardinalidade de  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 10.6.30\*** Dado um espaço de Banach  $E \neq \{0\}$ , considere o subespaço

$$c_{00}(E) = \{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0 \text{ para todo } j \geq n_0\}$$

do espaço de Banach  $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$  (veja Exercício 4.5.8). Responda:

- (a)  $c_{00}(E)$  é denso em  $\ell_\infty(E)$ ?
- (b)  $c_{00}(E)$  é completo com a norma  $\|\cdot\|_\infty$ ?
- (c) Qual é a dimensão de  $c_{00} = c_{00}(\mathbb{K})$ ?
- (d) Exiba uma base de Hamel de  $c_{00}$ .
- (e) Estendendo a definição de base de Schauder para espaços normados, existe base de Schauder para  $c_{00}$ ? Em caso positivo, exiba uma tal base.
- (f) Qual é a dimensão de  $c_{00}(E)$ ?

# Apêndice A

## O Lema de Zorn

**Definição A.1** (a) Uma *ordem parcial* no conjunto  $P$  é uma relação  $\leq$  em  $P$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- $x \leq x$  para todo  $x \in P$  (reflexiva).
- Se  $x, y \in P$ ,  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$  (antissimétrica).
- Se  $x, y, z \in P$ ,  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$  (transitiva).

Neste caso diz-se que  $(P, \leq)$  é um *conjunto parcialmente ordenado*.

No que segue  $(P, \leq)$  é um conjunto parcialmente ordenado fixado.

- (b) Uma *cota superior* de um subconjunto  $Q$  de  $P$ , se existir, é um elemento  $q \in P$  tal que  $p \leq q$  para todo  $p \in Q$ .
- (c) Um *elemento maximal* de  $P$ , se existir, é um elemento  $m \in P$  tal que se  $p \in P$  e  $q \leq p$  para todo  $q \in P$ , então  $m = p$ .
- (d) Um subconjunto  $Q$  de  $P$  é dito *totalmente ordenado* se para todos  $p, q \in Q$ , é verdade que  $p \leq q$  ou  $q \leq p$ .

**Teorema A.2** (Lema de Zorn) *Todo conjunto parcialmente ordenado, não-vazio, e no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.*

O Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha. A demonstração dessa equivalência pode ser encontrada em qualquer bom livro de Teoria dos Conjuntos, por exemplo em [18, Capítulo 7]. Como já dissemos na Seção 3.5, a demonstração de M. Zorn apareceu em 1935. Entretanto, o mesmo resultado já havia sido provado por K. Kuratowski em 1922. Apesar da anterioridade, o crédito a Kuratowski é usualmente omitido.

Uma aplicação simples e bastante conhecida do Lema de Zorn garante que todo espaço vetorial possui uma base (veja, por exemplo, [16, Teorema 2.8.1]). Neste livro utilizamos uma propriedade um pouco mais forte:

**Definição A.3** Seja  $V$  um espaço vetorial.

- (a) Um *gerador* de  $V$  é um subconjunto  $A$  de  $V$  tal que todo elemento de  $V$  pode ser escrito como combinação linear (finita) de elementos de  $A$ .
- (b) Um subconjunto  $B$  de  $V$  é *linearmente independente* se todo subconjunto finito de



$B$  é formado por vetores linearmente independentes.

(c) Uma *base* (ou *base algébrica*, ou *base de Hamel*) de  $V$  é um gerador linearmente independente de  $V$ .

**Proposição A.4** *Se  $A$  é um gerador de um espaço vetorial  $V \neq \{0\}$ , então existe uma base de  $V$  contida em  $A$ .*

**Demonstração.** Considere o conjunto

$$\mathcal{F} = \{(W, B) : W \text{ é subespaço de } V \text{ e } B \subseteq A \text{ é linearmente independente e gera } W\}$$

munido da ordem parcial

$$(W, B), (W_1, B_1) \in \mathcal{F}, (W, B) \leq (W_1, B_1) \iff W \subseteq W_1 \text{ e } B \subseteq B_1.$$

Tomando  $x \in A$  temos  $([x], \{x\}) \in \mathcal{F}$ , e portanto  $\mathcal{F}$  é não-vazio. Seja  $\mathcal{G}$  um subconjunto totalmente ordenado de  $\mathcal{F}$ , digamos  $\mathcal{G} = (W_i, B_i)_{i \in I}$ . Argumentos rotineiros mostram que  $\left(\bigcup_{i \in I} W_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right)$  pertence a  $\mathcal{F}$  e é cota superior de  $\mathcal{G}$ . Pelo Lema de Zorn,  $\mathcal{F}$  tem um elemento maximal  $(\widetilde{W}, \widetilde{B})$ . Basta mostrar que  $\widetilde{W} = V$ . Suponha, por absurdo, que  $\widetilde{W} \neq V$ . Observe que, nesse caso,  $A$  não está contido em  $\widetilde{W}$ , pois se  $A \subseteq \widetilde{W}$  teríamos

$$V = [A] \subseteq [\widetilde{W}] = \widetilde{W} \subseteq V,$$

o que contradiz a suposição de que  $\widetilde{W} \neq V$ . Podemos então tomar  $x_0 \in A - \widetilde{W}$  e definir

$$W_N = \widetilde{W} \oplus [x_0], \quad B_N = \widetilde{B} \cup \{x_0\}.$$

Como  $\widetilde{B}$  gera  $\widetilde{W}$ , tanto os elementos de  $[B_N]$  como os elementos de  $W_N$  têm a forma  $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0x_0$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_n, a_0 \in \mathbb{K}$  e  $x_1, \dots, x_n \in \widetilde{W}$ . Portanto  $[B_N] = W_N$ . A independência linear de  $B_N$  é clara, pois  $\widetilde{B}$  é linearmente independente e  $x_0 \notin \widetilde{W}$ . Por fim, de  $\widetilde{B} \subseteq A$  e  $x_0 \in A$  concluímos que  $B_N \subseteq A$ , e portanto  $(W_N, B_N) \in \mathcal{F}$ . Das definições de  $W_N$  e de  $B_N$  fica claro que  $(\widetilde{W}, \widetilde{B}) \leq (W_N, B_N)$ . A maximalidade de  $(\widetilde{W}, \widetilde{B})$  implica que  $(\widetilde{W}, \widetilde{B}) = (W_N, B_N)$ . Em particular,  $\widetilde{W} = W_N$ , logo  $x_0 \in \widetilde{W}$ . Esta contradição garante que  $\widetilde{W} = V$  e completa a demonstração. ■

Concluimos este apêndice com uma aplicação interessante aos espaços de Banach:

**Proposição A.5** *Seja  $E$  um espaço de Banach separável de dimensão infinita. Então todo subconjunto denso e enumerável de  $E$  admite um subconjunto linearmente independente e enumerável.*

**Demonstração.** Seja  $D$  um subconjunto denso e enumerável de  $E$ . É claro que  $D$  é gerador de  $[D]$ . Pela Proposição A.4 existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $[D]$  contida em  $D$ . Suponha,

por um momento, que  $\mathcal{B}$  seja finita. Neste caso  $[D]$  tem dimensão finita, logo  $[D]$  é fechado em  $E$ . Como  $D$  é denso em  $E$ , temos

$$E = \overline{D} \subseteq \overline{[D]} = [D] \subseteq E,$$

o que prova que  $E = [D]$ , e portanto  $E$  tem dimensão finita. Como isso contradiz a hipótese, segue que a base  $\mathcal{B}$  de  $[D]$  é infinita. Por ser base de  $[D]$ ,  $\mathcal{B}$  é linearmente independente, e por ser infinita e estar contida no conjunto enumerável  $D$ ,  $\mathcal{B}$  é enumerável. ■

# Apêndice B

## Noções de Topologia Geral

### Espaços métricos

**Definição B.1** Um *espaço métrico* é um par ordenado  $(M, d)$  formado por um conjunto  $M$  e uma função  $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ , chamada *métrica*, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z$  em  $M$ :

- (a)  $d(x, y) \geq 0$ ,
- (b)  $d(x, x) = 0$ ,
- (c)  $d(x, y) = 0$  implica  $x = y$ ,
- (d)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (e)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Se  $E$  e  $F$  são subconjuntos de  $M$ , a *distância entre  $E$  e  $F$*  é definida por

$$\text{dist}(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

**Definição B.2** Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência no espaço métrico  $(M, d)$ .

- (a) A sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  *converge* para  $x \in M$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Neste caso escrevemos  $x = \lim_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ou  $x_n \longrightarrow x$ .

- (b) A sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é dita *convergente* se existe  $x \in M$  tal que  $x_n \longrightarrow x$ . Caso contrário é dita *divergente*.

- (c) A sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  é uma *sequência de Cauchy* se

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

É imediato que toda sequência convergente é de Cauchy.

- (d) O espaço métrico  $(M, d)$  é um *espaço métrico completo* se toda sequência de Cauchy em  $M$  convergir para um elemento de  $M$ .

**Definição B.3** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico.

- (a) Dados  $a \in M$  e  $\varepsilon > 0$ , o conjunto  $B(a, \varepsilon) = \{x \in M : d(x, a) < \varepsilon\}$  é chamado de *bola aberta com centro  $a$  e raio  $\varepsilon$* .
- (b) Um subconjunto  $A \subseteq M$  é *aberto* se para cada  $x \in A$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ .
- (c) Um subconjunto  $F \subseteq M$  é *fechado* se seu complementar  $F^c := M - F$  é aberto.

**Definição B.4** Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $A \subseteq M$ .

- (a) O *interior* de  $A$  é o conjunto  $\text{int}(A) = \bigcup \{B \subseteq M : B \text{ é aberto e } B \subseteq A\}$ .
- (b) O *fecho* de  $A$  é o conjunto  $\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq M : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}$ .
- (c) Diz-se que  $A$  é *denso* em  $M$  se  $\overline{A} = M$ .

**Proposição B.5** Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico,  $x \in M$  e  $A, B \subseteq M$ . Então

- (a)  $\text{int}(A)$  é um conjunto aberto e  $\overline{A}$  é um conjunto fechado.
- (b)  $A$  é aberto se, e somente se,  $A = \text{int}(A)$ .
- (c)  $A$  é fechado se, e somente se,  $A = \overline{A}$ .
- (d) Se  $A \subseteq B$ , então  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .
- (e)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (f)  $x \in \overline{A}$  se, e somente se, existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  em  $A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .
- (g)  $A$  é denso em  $M$  se, e somente se, para todos  $x \in M$  e  $\varepsilon > 0$ , tem-se  $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ .

Quando não houver necessidade de explicitar a métrica, escrevemos apenas  $M$  para denotar o espaço métrico  $(M, d)$ .

**Definição B.6** Um espaço métrico  $M$  é *compacto* se para toda coleção de abertos  $(A_i)_{i \in I}$  tais que  $M = \bigcup_{i \in I} A_i$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $i_1, \dots, i_n \in I$  tais que  $M = \bigcup_{k=1}^n A_{i_k}$ .

Neste livro usamos dois teoremas fundamentais da teoria dos espaços métricos. O primeiro é o Teorema de Baire, enunciado e demonstrado no Teorema 2.3.1. O segundo é o Teorema de Ascoli, enunciado abaixo, que caracteriza os subconjuntos relativamente compactos do espaço métrico completo  $C(K)$  das funções contínuas  $f: K \rightarrow \mathbb{K}$ , onde  $K$  é um espaço métrico compacto, com a métrica

$$d(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in K\}.$$

**Teorema B.7** (Teorema de Ascoli) *Sejam  $K$  um espaço métrico compacto e  $A$  um subconjunto de  $C(K)$ . Então  $\overline{A}$  é compacto em  $C(K)$  se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

- (a)  $A$  é equicontínuo, isto é, para todos  $t_0 \in K$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \text{ para todos } t \in K \text{ com } d(t, t_0) < \delta \text{ e } f \in A.$$

- (b) O conjunto  $\{f(t) : f \in A\}$  é limitado em  $\mathbb{K}$  para todo  $t \in K$ .

Em [41, Teorema III.2.1] o leitor encontra a demonstração de uma forma do Teorema de Ascoli mais geral que a enunciada acima.

## Espaços topológicos

**Definição B.8** Uma *topologia* em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , chamados *conjuntos abertos*, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) Qualquer união de elementos de  $\tau$  é um elemento de  $\tau$ .
- (b) Qualquer interseção finita de elementos de  $\tau$  pertence a  $\tau$ .
- (c)  $X$  e  $\emptyset$  pertencem a  $\tau$ .

Neste caso dizemos que  $(X, \tau)$  é um *espaço topológico*, que naturalmente abreviaremos para  $X$  quando não houver perigo de ambiguidade ou de imprecisão. Um subconjunto  $F$  de  $X$  é chamado de *conjunto fechado* se seu complementar for aberto, isto é, se  $F^c = X - F \in \tau$ .

**Proposição B.9** Em um espaço topológico valem as seguintes propriedades:

- (a) Qualquer interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- (b) Qualquer união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- (c)  $X$  e  $\emptyset$  são conjuntos fechados.

Os conjuntos abertos – segundo a Definição B.3(b) – de um espaço métrico  $M$  formam uma topologia em  $M$ , chamada de *topologia em  $M$  induzida pela métrica*. É neste sentido que um espaço métrico será entendido como espaço topológico. Um espaço topológico  $X$  é dito *metrizável* se existe uma métrica em  $X$  que induz sua topologia.

O interior  $\text{int}(A)$ , o fecho  $\overline{A}$  e a densidade de um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  são definidos exatamente como na Definição B.4. Os itens (a)–(e) da Proposição B.5 permanecem válidos exatamente como lá enunciados. Além disso:

**Proposição B.10** Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de um espaço topológico  $X$ . Então:

- (a)  $\text{int}(A) = X - \overline{X - A}$  e  $X - \overline{A} = \text{int}(X - A)$ .
- (b) Se  $A \subseteq B$ , então  $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$ .
- (c)  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ .

## Vizinhanças

**Definição B.11** Uma *vizinhança* de um elemento  $x$  do espaço topológico  $X$  é um subconjunto  $U$  de  $X$  que contém um aberto  $V$  contendo  $x$ , isto é,  $x \in V \subseteq U$ . A coleção  $\mathcal{U}_x$  de todas as vizinhanças de  $x$  é chamada de *sistema de vizinhanças* de  $x$ .

**Proposição B.12** O sistema de vizinhanças  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  em um espaço topológico  $X$  tem as seguintes propriedades:

- (a) Se  $U \in \mathcal{U}_x$ , então  $x \in U$ .
- (b) Se  $U, V \in \mathcal{U}_x$ , então  $U \cap V \in \mathcal{U}_x$ .
- (c) Se  $U \in \mathcal{U}_x$ , então existe  $V \in \mathcal{U}_x$  tal que  $U \in \mathcal{U}_y$  para cada  $y \in V$ .
- (d) Se  $U \in \mathcal{U}_x$  e  $U \subseteq V$ , então  $V \in \mathcal{U}_x$ .
- (e)  $A \subseteq X$  é aberto se, e somente se,  $A$  contém uma vizinhança de cada um de seus pontos.

**Proposição B.13** Se a cada ponto  $x$  de um conjunto  $X$  é associada uma coleção não-vazia  $\mathcal{U}_x$  de subconjuntos de  $X$  satisfazendo (a)–(d) da Proposição B.12, então a coleção

$$\tau = \{A \subseteq X : \text{para todo } x \in A \text{ existe } U \in \mathcal{U}_x \text{ tal que } x \in U \subseteq A\}$$

é uma topologia para  $X$  na qual  $\mathcal{U}_x$  é o sistema de vizinhanças de  $x$  para todo  $x \in X$ .

**Definição B.14** Uma base de vizinhanças de um elemento  $x$  de um espaço topológico  $X$  é uma subcoleção  $\mathcal{B}_x$  de  $\mathcal{U}_x$  tal que cada  $U \in \mathcal{U}_x$  contém algum  $V \in \mathcal{B}_x$ . Neste caso  $\mathcal{U}_x$  está determinado por  $\mathcal{B}_x$  da seguinte forma:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : V \subseteq U \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Os elementos de  $\mathcal{B}_x$  são chamados de vizinhanças básicas de  $x$ .

**Teorema B.15** Seja  $X$  um espaço topológico e, para cada  $x \in X$ , seja  $\mathcal{B}_x$  uma base de vizinhanças em  $x$ . Então:

- (a) Se  $V \in \mathcal{B}_x$ , então  $x \in V$ .
- (b) Se  $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$ , então existe  $V_3 \in \mathcal{B}_x$  tal que  $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$ .
- (c) Se  $V \in \mathcal{B}_x$ , então existe  $V_0 \in \mathcal{B}_x$  tal que se  $y \in V_0$ , então existe  $W \in \mathcal{B}_y$  com  $W \subseteq V$ .
- (d)  $A \subseteq X$  é aberto se, e somente se,  $A$  contém uma vizinhança básica de cada um de seus pontos.

Reciprocamente, se a cada elemento  $x$  de um conjunto  $X$  é associada uma coleção  $\mathcal{B}_x$  de subconjuntos de  $X$  satisfazendo as condições (a)–(c) acima, ao usarmos (d) para definir conjuntos abertos obtemos uma topologia em  $X$  na qual  $\mathcal{B}_x$  é uma base de vizinhanças para cada  $x \in X$ .

## Bases

**Definição B.16** Uma base do espaço topológico  $(X, \tau)$  é uma subcoleção  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  tal que todo conjunto aberto pode ser escrito como uma união de elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Proposição B.17** Uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos do espaço topológico  $X$  é uma base para  $X$  se, e somente se, para todo aberto  $A \subseteq X$  e todo  $x \in A$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subseteq A$ .

**Teorema B.18** Uma coleção  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  é base para uma topologia em  $X$  se, e somente se,  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  e é verdade que se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  e  $x \in B_1 \cap B_2$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

**Teorema B.19** Uma coleção  $\mathcal{B}$  de abertos do espaço topológico  $X$  é uma base para  $X$  se, e somente se,  $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  é uma base de vizinhanças de cada  $x \in X$ .

## Subespaços

**Definição B.20** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $A \subseteq X$ . A coleção  $\tau_A := \{B \cap A : B \in \tau\}$  é uma topologia em  $A$ , chamada *topologia relativa* ou *topologia em  $A$  induzida por  $\tau$* . Com esta topologia, dizemos que  $A$  é um *subespaço de  $X$* .

**Teorema B.21** *Seja  $A$  um subespaço de um espaço topológico  $X$ . Então:*

- (a)  $C \subseteq A$  é aberto em  $A$  se, e somente se,  $C = B \cap A$  para algum  $B$  aberto em  $X$ .
- (b)  $F \subseteq A$  é fechado em  $A$  se, e somente se,  $F = K \cap A$  para algum  $K$  fechado em  $X$ .
- (c) Se  $C \subseteq A$ , então o fecho de  $C$  em  $A$  coincide com  $A \cap \overline{C}$ .
- (d) Se  $x \in A$ , então  $V \subseteq X$  é uma vizinhança de  $x$  em  $A$  se, e somente se,  $V = U \cap A$  para alguma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $X$ .
- (e) Se  $x \in A$  e  $\mathcal{B}_x$  é uma base de vizinhanças para  $x$  em  $X$ , então  $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}_x\}$  é uma base de vizinhanças para  $x$  em  $A$ .
- (f) Se  $\mathcal{B}$  é uma base de  $X$ , então  $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$  é base de  $A$ .

## Funções contínuas

**Definição B.22** Uma função  $f: X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos é *contínua* se  $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$  é aberto em  $X$  para todo aberto  $A$  em  $Y$ .

**Proposição B.23** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função  $f: X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos:*

- (a)  $f$  é contínua.
- (b)  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $X$  para todo fechado  $F$  em  $Y$ .
- (c) Para todo  $x \in X$  e toda vizinhança  $U$  de  $f(x)$  em  $Y$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  em  $X$  tal que  $f(V) \subseteq U$ .

*Se  $X$  e  $Y$  são espaços métricos, então essas afirmações também são equivalentes a:*

- (d)  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  para toda sequência  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $X$  tal que  $x_n \rightarrow x \in X$ .

**Proposição B.24** (a) *Se  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  são funções contínuas entre espaços topológicos, então a função composta  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é contínua.*

(b) *Se  $A$  é subespaço do espaço topológico  $X$  e a função  $f: X \rightarrow Y$  é contínua, então a restrição de  $f$  a  $A$ ,  $f|_A: A \rightarrow Y$ , é contínua.*

**Definição B.25** Um *homeomorfismo* entre os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  é uma função  $f: X \rightarrow Y$  que é contínua, bijetora e tem inversa contínua.

## Redes

Ao contrário do que ocorre em espaços métricos, sequências convergentes não descrevem topologias em geral. Por exemplo, as Proposições B.5(f) e B.23(d) não são verdadeiras em espaços topológicos em geral. Trabalhamos neste livro com o conceito de *redes*, que

é uma generalização do conceito de sequência muito útil na descrição de topologias em geral. As redes foram introduzidas por E. Moore e H. Smith em 1922.

**Definição B.26** Um *conjunto dirigido* é um par  $(\Lambda, \leq)$  em que  $\leq$  é uma *direção* no conjunto  $\Lambda$ , isto é, é uma relação em  $\Lambda$  tal que:

- (a)  $\lambda \leq \lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ .
- (b) Se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  e  $\lambda_2 \leq \lambda_3$ , então  $\lambda_1 \leq \lambda_3$ .
- (c) Para todos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  existe  $\lambda_3 \in \Lambda$  tal que  $\lambda_1 \leq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \leq \lambda_3$ .

**Definição B.27** Uma *rede* em um conjunto  $X$  é uma função  $P : \Lambda \longrightarrow X$ , onde  $\Lambda$  é um conjunto dirigido. Usualmente se denota  $P(\lambda)$  por  $x_\lambda$ , e neste caso nos referimos à rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ .

**Definição B.28** Dizemos que a rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  no espaço topológico  $X$  *converge* para  $x \in X$ , e neste caso escrevemos  $x_\lambda \longrightarrow x$ , se para cada vizinhança  $U$  de  $x$  existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $x_\lambda \in U$  para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ .

O exemplo a seguir é fundamental nas demonstrações das propriedades que o seguem e que comprovam que a convergência de redes descreve a topologia do espaço.

**Exemplo B.29** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $x \in X$  e  $\mathcal{B}_x$  uma base de vizinhanças de  $x$ . A relação de continência invertida  $U_1 \leq U_2 \iff U_2 \subseteq U_1$  torna  $\mathcal{B}_x$  um conjunto dirigido. Neste caso, escolhendo  $x_U \in U$  para cada  $U \in \mathcal{B}_x$ , temos uma rede  $(x_U)_{U \in \mathcal{B}_x}$  em  $X$  que converge para  $x$ .

**Definição B.30** Um espaço topológico  $X$  é um *espaço de Hausdorff* se para todos  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , existem vizinhanças  $U$  de  $x$  e  $V$  de  $y$  tais que  $U \cap V = \emptyset$ .

**Teorema B.31** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos,  $A \subseteq X$  e  $x \in X$ .

- (a) (Unicidade do limite)  $X$  é um espaço de Hausdorff se, e somente se, toda rede em  $X$  converge para no máximo um ponto.
- (b)  $x \in \overline{A}$  se, e somente se, existe uma rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  em  $X$  tal que  $x_\lambda \longrightarrow x$ .
- (c)  $A$  é fechado se, e somente se, para toda rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  em  $A$  com  $x_\lambda \longrightarrow x$ , tem-se  $x \in A$ .
- (d) Uma função  $f : X \longrightarrow Y$  é contínua se, e somente se,  $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$  para toda rede  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  em  $X$  tal que  $x_\lambda \longrightarrow x \in X$ .

## Compacidade e o Teorema de Tychonoff

**Definição B.32** Um subconjunto  $K$  do espaço topológico  $X$  é *compacto* se para toda coleção  $(A_i)_{i \in I}$  de abertos em  $X$  tal que  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $i_1, \dots, i_n \in I$  tais que  $K \subseteq (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n})$ . Ou seja, se toda cobertura aberta de  $K$  admite subcobertura finita.



Listamos abaixo as propriedades dos compactos importantes neste livro:

**Proposição B.33** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $K \subseteq X$ .*

- (a) *Se  $X$  é compacto e  $K$  é fechado, então  $K$  é compacto.*
- (b) *Se  $X$  é Hausdorff e  $K$  é compacto, então  $K$  é fechado.*
- (c) *Se  $X$  é um espaço métrico, então  $K$  é compacto se, e somente se, toda sequência em  $K$  admite subsequência convergente em  $K$ .*
- (d) *Se  $f: X \rightarrow Y$  é contínua e  $K$  é compacto em  $X$ , então  $f(K)$  é compacto em  $Y$ .*
- (e)  *$A \subseteq K$  é compacto em  $K$  se, e somente se,  $A$  é compacto em  $X$ .*
- (f) *Se  $A \subseteq K$ ,  $A$  é fechado em  $X$  e  $K$  é compacto, então  $A$  é compacto em  $X$ .*

**Definição B.34** *Seja  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  uma coleção de conjuntos.*

- (a) O *produto cartesiano generalizado* dos conjuntos  $X_\alpha, \alpha \in \Gamma$ , é definido como sendo o seguinte conjunto de funções:

$$\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha = \left\{ f: \Gamma \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Gamma \right\}.$$

Denotando  $f(\alpha)$  por  $x_\alpha$  para cada  $\alpha \in \Gamma$ , podemos nos referir ao elemento  $f \in \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  por  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ . Fixado  $\beta \in \Gamma$ , a função

$$\pi_\beta: \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha \rightarrow X_\beta, \quad \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}) = x_\beta,$$

é chamada de *projeção na  $\beta$ -ésima coordenada*.

- (b) Se cada  $X_\alpha$  é um espaço topológico, a topologia em  $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  gerada pelas funções  $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  no sentido da Seção 6.1 é chamada de *topologia produto*.

**Teorema B.35** (Teorema de Tychonoff) *Seja  $(X_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$  uma família de espaços topológicos. Então o produto cartesiano generalizado  $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$  é compacto na topologia produto se, e somente se,  $X_\alpha$  é compacto para todo  $\alpha \in \Gamma$ .*

# Apêndice C

## Noções de Medida e Integração

### Espaços mensuráveis e a reta estendida

**Definição C.1** Uma  $\sigma$ -álgebra no conjunto  $X$  é uma família  $\Sigma$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $\emptyset, X \in \Sigma$ .
- (b) Se  $A \in \Sigma$ , então  $A^C := X - A \in \Sigma$ .
- (c) Se  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ .

Neste caso o par  $(X, \Sigma)$  é chamado de *espaço mensurável*. Cada elemento da  $\sigma$ -álgebra é chamado de *conjunto mensurável*.

Dada uma coleção  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$ , a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contêm  $\mathcal{F}$  é ainda uma  $\sigma$ -álgebra, chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{F}$  e denotada por  $\Sigma(\mathcal{F})$ . Note que  $\Sigma(\mathcal{F})$  é a menor  $\sigma$ -álgebra em  $X$  que contém  $\mathcal{F}$ .

Quando  $(X, \tau)$  é um espaço topológico, a  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma(\tau)$  é chamada de  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  e denotada por  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ . Os elementos de  $\mathcal{B}$  são chamados de *conjuntos de Borel* ou *borelianos*.

**Definição C.2** A *reta estendida* é o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\},$$

também denotado por  $[-\infty, \infty]$ , onde  $\infty$  e  $-\infty$  são símbolos que têm as propriedades que intuitivamente deles esperamos, isto é:

$$-\infty < x < \infty \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- Operamos aritmeticamente com os símbolos  $\infty$  e  $-\infty$  da seguinte forma: para  $a \in \mathbb{R}$ ,
- $a + \infty = \infty + a = \infty$ ,  $a - \infty = -\infty + a = -\infty$ ,  $\infty + \infty = \infty$  e  $-\infty + (-\infty) = -\infty$ .
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & \text{se } a > 0 \\ -\infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}$  e  $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, & \text{se } a > 0 \\ +\infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}$ .
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  e  $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$ .
- $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$ .

Observe que, por não haver opção coerente, as adições  $\infty + (-\infty)$  e  $(-\infty) + \infty$  não estão definidas. A multiplicação de 0 pelos símbolos  $-\infty$  e  $\infty$  definida acima pode parecer artificial, mas é extremamente importante na Teoria da Medida. As seguintes notações são usuais:

$$[-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \cup \{-\infty\} \quad \text{e} \quad (a, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \cup \{\infty\}.$$

**Definição C.3** A topologia usual de  $\mathbb{R}$  induz uma topologia em  $\overline{\mathbb{R}}$  considerando como abertos os subconjuntos  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  da forma:

- (a)  $A \subseteq \mathbb{R}$  é aberto em  $\mathbb{R}$ , ou
- (b)  $A = [-\infty, a)$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ , ou
- (c)  $A = (a, \infty]$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ , ou
- (d)  $A$  é uma união de conjuntos como os de (a), (b) ou (c).

Consideraremos  $\overline{\mathbb{R}}$  como espaço mensurável com a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  relativa a esta topologia.

## Funções mensuráveis

**Definição C.4** Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável. Uma função  $f: (X, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é *mensurável* se  $f^{-1}(A) \in \Sigma$  para todo boreliano  $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ . O conjunto formado por tais funções será denotado por  $M(X, \Sigma)$ . Consideraremos ainda o subconjunto  $M^+(X, \Sigma) := \{f \in M(X, \Sigma) : f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X\}$ .

No caso em que  $f(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in X$ ,  $f$  é mensurável se  $f^{-1}(A) \in \Sigma$  para todo boreliano  $A$  de  $\mathbb{R}$ . Caso  $f$  assuma (pelo menos) um dos valores  $\infty$  e  $-\infty$ , temos:

**Proposição C.5** Uma função  $f: (X, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é mensurável se, e somente se, os conjuntos  $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$  e  $\{x \in X : f(x) = \infty\}$  pertencem a  $\Sigma$  e é mensurável a função

$$f_0: (X, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{se } f(x) = -\infty \text{ ou } f(x) = \infty \end{cases}.$$

**Proposição C.6** Se  $f, g: (X, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  são funções mensuráveis e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então também são mensuráveis as seguintes funções (desde que bem definidas):  $\lambda f$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $|f|$ ,  $\max\{f, g\}$  e  $\min\{f, g\}$ .

**Proposição C.7** Dada uma sequência  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  em  $M(X, \Sigma)$ , as seguintes funções definidas em  $(X, \Sigma)$  são mensuráveis:  $f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ ,  $F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ ,  $f^*(x) = \liminf_n f_n(x)$  e  $F^*(x) = \limsup_n f_n(x)$ . Em particular, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$  então  $f \in M(X, \Sigma)$ .

**Exemplo C.8** Dados um espaço mensurável  $(X, \Sigma)$  e  $A \subseteq X$ , a *função característica* de  $A$  é definida por

$$\chi_A: X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

É claro que  $\chi_A$  é mensurável se, e somente se,  $A \in \Sigma$ . Uma combinação linear de funções características mensuráveis é chamada de *função simples mensurável*. Assim, uma função simples mensurável é uma função mensurável que assume apenas um número finito de valores. Toda função simples mensurável  $\varphi$  admite uma única representação da forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_n$  são números reais não-nulos e distintos, e  $A_1, \dots, A_n$  são conjuntos mensuráveis não-vazios e disjuntos dois a dois. Esta é a *representação canônica* da função simples mensurável  $\varphi$ .

## Medidas

**Definição C.9** Uma *medida* no espaço mensurável  $(X, \Sigma)$  é uma função  $\mu: \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$  que satisfaz as seguintes condições:

- (a)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (b) Se  $(A_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de  $\Sigma$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

A medida  $\mu$  é dita *finita* se  $\mu(X) < \infty$ , e é dita  $\sigma$ -*finita* se existirem conjuntos  $(A_n)_{n=1}^\infty$  em  $\Sigma$  tais que  $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$  e  $\mu(A_n) < \infty$  para todo  $n$ . O terno  $(X, \Sigma, \mu)$  é chamado de *espaço de medida*.

**Proposição C.10** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $A, B \in \Sigma$ . Então:

- (a) Se  $A, B \in \Sigma$  e  $A \subseteq B$ , então  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .
- (b) Se  $A, B \in \Sigma$ ,  $A \subseteq B$  e  $\mu(A) < \infty$ , então  $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ .
- (c) Se  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , então  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$ .
- (d) Se  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  e  $\mu(A_1) < \infty$ , então  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$ .
- (e) Se  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ .

**Teorema C.11** (Convergência em medida) *As seguintes afirmações são equivalentes para uma sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  de funções mensuráveis no espaço de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ :*

- (a)  $(f_n)_{n=1}^\infty$  converge em medida, isto é, existe uma função mensurável  $f \in M(X, \Sigma)$  tal que  $\lim_n \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ .
- (b)  $(f_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em medida, isto é,  $\lim_{n,m} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

**Definição C.12** Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida,  $f, g, f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Diz-se que:

- (a)  $f$  é igual a  $g$   $\mu$ -quase sempre se existe  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A^c$ . Neste caso escreve-se  $f = g$   $\mu$ -quase sempre ou  $f = g$   $\mu$ -q.s.
- (b)  $(f_n)_{n=1}^\infty$  converge para  $f$   $\mu$ -quase sempre se existe  $A \in \Sigma$  tal que  $\mu(A) = 0$  e  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in A^c$ . Neste caso escreve-se  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -quase sempre ou  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -q.s. ou  $f = \lim_n f_n$   $\mu$ -q.s.

**Proposição C.13** *Se a sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  de funções mensuráveis no espaço de medida  $(X, \Sigma, \mu)$  converge em medida para a função mensurável  $f \in M(X, \Sigma)$ , então existe uma subsequência  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  que converge  $\mu$ -quase sempre para  $f$ .*

## Integração

**Definição C.14** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida.

- (a) A *integral* da função simples  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ , cuja representação canônica é  $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ , em relação à medida  $\mu$  é definida por

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

- (b) A *integral* da função  $f \in M^+(X, \Sigma)$  em relação à medida  $\mu$  é definida por

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

- (c) Para  $f \in M^+(X, \Sigma)$  e  $A \in \Sigma$ , define-se

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

**Proposição C.15** *Sejam  $f, g \in M^+(X, \Sigma)$  e  $A, B \in \Sigma$ .*

- (a) *Se  $f \leq g$ , então  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .*
- (b) *Se  $A \subseteq B$ , então  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .*
- (c)  *$\int_X f d\mu = 0$  se, e somente se,  $f = 0$   $\mu$ -q.s.*

**Teorema C.16** (Teorema da Convergência Monótona) *Seja  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $M^+(X, \Sigma)$  tal que  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$  para todo  $x \in X$ .*

(a) *Se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ , então  $f \in M^+(X, \Sigma)$  e  $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ .*

(b) *Se  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -q.s. e  $f \in M^+(X, \Sigma)$ , então  $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ .*

**Teorema C.17** (Lema de Fatou) *Se  $(f_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência em  $M^+(X, \Sigma)$ , então*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Teorema C.0.31** (Teorema de Radon–Nikodým) *Sejam  $(X, \Sigma, \mu)$  e  $(X, \Sigma, \lambda)$  medidas  $\sigma$ -finitas tais que  $\lambda(A) = 0$  sempre que  $A \in \Sigma$  e  $\mu(A) = 0$ . Então existe  $f \in M^+(X, \Sigma)$  tal que*

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \text{ para todo } A \in \Sigma.$$

**Definição C.18** (a) Dada uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , as funções  $f^+, f^-: X \rightarrow [0, \infty)$  são definidas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

É fácil ver que  $f$  é mensurável se, e somente se,  $f^+$  e  $f^-$  são mensuráveis.

(b) Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Uma função  $f \in M(X, \Sigma)$  é dita *Lebesgue-integrável* (ou *integrável*) se  $\int_X f^+ d\mu < \infty$  e  $\int_X f^- d\mu < \infty$ . Neste caso definimos

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

**Proposição C.19** (a) *Uma função mensurável  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se, e somente se,  $|f|$  é integrável. Neste caso tem-se*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

(b) *Sejam  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis e  $a \in \mathbb{R}$ . Então  $af$  e  $f + g$  são integráveis e*

$$\int_X af d\mu = a \int_X f d\mu \text{ e } \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

**Definição C.20** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  é *Lebesgue-integrável* (ou *integrável*) se as funções  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f_1(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \text{ e } f_2(x) = \operatorname{Im}(f(x)),$$

são integráveis. Neste caso definimos

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu.$$

O conjunto de todas as funções integráveis  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  é denotado por  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ .

**Teorema C.21** (Teorema da Convergência Dominada) *Seja  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de funções em  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$  que converge  $\mu$ -quase sempre para uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ . Se existe  $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$  tal que  $|f_n| \leq |g|$  para todo  $n$ , então  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$  e*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

## Caso geral do Teorema da representação de Riesz

No Teorema 4.1.2 enunciamos o Teorema da Representação de Riesz na forma geral e demonstramos apenas o caso em que a medida  $\mu$  é  $\sigma$ -finita. Apresentamos a seguir a demonstração que falta para completar o que foi enunciado, ou seja, a demonstração do caso em que  $p > 1$  e  $\mu$  é uma medida arbitrária.

**Demonstração.** (Teorema da Representação de Riesz – Teorema 4.1.2 – no caso  $p > 1$  e  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida arbitrário)

O procedimento é praticamente uma repetição do que foi feito na demonstração do Teorema 4.1.2. Seja  $\varphi \in L_p(X, \Sigma, \mu)'$ . Para cada conjunto  $\sigma$ -finito  $A$ , definindo  $\Sigma_A$ ,  $\mu_A$  e  $\varphi_A$  nos moldes do que foi feito na demonstração do Teorema 4.1.2, pelo caso já demonstrado existe uma função  $g_A \in L_{p^*}(A, \Sigma_A, \mu_A)$ , que é única a menos de conjuntos de medida nula, tal que  $\varphi_A(f_A) = \int_A f_A g_A d\mu_A$  para toda  $f_A \in L_p(A, \Sigma_A, \mu_A)$  e  $\|g_A\|_{L_{p^*}(A, \Sigma_A, \mu_A)} \leq \|\varphi\|_{L_p(X, \Sigma, \mu)'}$ . É fácil verificar que se  $B$  é um conjunto  $\sigma$ -finito que contém  $A$ , então  $g_B = g_A$   $\mu$ -quase sempre em  $A$ , e portanto  $\|g_A\|_{L_{p^*}(A, \Sigma_A, \mu_A)} \leq \|g_B\|_{L_{p^*}(B, \Sigma_B, \mu_B)}$ . Chame  $K = \sup\{\|g_A\|_{L_{p^*}(A, \Sigma_A, \mu_A)} : A \text{ é } \sigma\text{-finito}\}$ . Podemos então tomar uma sequência  $(A_n)_{n=1}^\infty$  de conjuntos  $\sigma$ -finitos tal que  $\|g_{A_n}\|_{L_{p^*}(A_n, \Sigma_{A_n}, \mu_{A_n})} \rightarrow K$ .

Definindo  $C = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$  resulta que  $C$  é  $\sigma$ -finito e  $\|g_{A_n}\|_{L_{p^*}(A_n, \Sigma_{A_n}, \mu_{A_n})} \leq \|g_C\|_{L_{p^*}(C, \Sigma_C, \mu_C)}$  para todo  $n$ . Segue imediatamente que  $\|g_C\|_{L_{p^*}(C, \Sigma_C, \mu_C)} = K$ . Para todo conjunto  $\sigma$ -finito  $A$  contendo  $C$ , como  $p^* < \infty$ ,  $g_A = g_C$  e  $\mu_A = \mu_{A-C}$  em  $A - C$  e  $g_A = g_{A-C}$  e  $\mu_A = \mu_{A-C}$  em  $A - C$ , temos

$$\int_C |g_C|^{p^*} d\mu_C + \int_{A-C} |g_{A-C}|^{p^*} d\mu_{A-C} = \int_A |g_A|^{p^*} d\mu_A \leq K^{p^*} = \int_C |g_C|^{p^*} d\mu_C,$$

e portanto  $\int_{A-C} |g_{A-C}|^{p^*} d\mu_{A-C} = 0$ . Existe então um conjunto  $N_A \subseteq (A - C)$  tal que  $\mu(N_A) = \mu_{A-C}(N_A) = 0$  e  $g_A = g_{A-C} = 0$  em  $A - (C \cup N_A)$ . Chamemos ainda de  $g_C$  a extensão óbvia de  $g_C$  a  $X$  (isto é,  $g_C(x) = 0$  para  $x \notin C$ ) e vejamos que  $\varphi = \varphi_{g_C}$ . Para isso seja  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Então  $A := \{x \in X : f(x) \neq 0\} \cup C$  é um conjunto  $\sigma$ -finito contendo  $C$  e podemos considerar seu conjunto  $N_A$  correspondente. Como  $f = 0$  em  $X - A$ , temos  $\varphi(f\chi_{(X-C) \cap (X-A)}) = 0$ . E como  $\mu(N_A) = 0$ , temos  $f\chi_{N_A} + f\chi_{(X-C) \cap (X-A)} = f\chi_{(X-C) \cap (X-A)}$  em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ , portanto  $\varphi(f\chi_{N_A} + f\chi_{(X-C) \cap (X-A)}) = 0$ . De  $(X - C) \cap A = N_A \cup [(X - C) \cap (A - N_A)]$ , sendo

que esta última união é disjunta, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \varphi(f\chi_C + f\chi_{X-C}) = \varphi(f\chi_C) + \varphi(f\chi_{X-C}) \\
&= \varphi(f\chi_C) + \varphi(f\chi_{(X-C)\cap A} + f\chi_{(X-C)\cap(X-A)}) \\
&= \varphi(f\chi_C) + \varphi(f\chi_{(X-C)\cap A}) + \varphi(f\chi_{(X-C)\cap(X-A)}) \\
&= \varphi(f\chi_C) + \varphi(f\chi_{N_A}) + \varphi(f\chi_{(X-C)\cap(A-N_A)}) + \varphi(f\chi_{(X-C)\cap(X-A)}) \\
&= \varphi(f\chi_C) + \varphi(f\chi_{(X-C)\cap(A-N_A)}).
\end{aligned}$$

Mas  $(X - C) \cap (A - N_A) = A - (C \cup N_A)$ , logo

$$\varphi(f) = \varphi(f\chi_C) + \varphi(f\chi_{A-(C\cup N_A)}).$$

Como  $A - (C \cup N_A) \subseteq A$ , temos  $g_{A-(C\cup N_A)} = g_A = 0$  em  $A - (C \cup N_A)$ . Por fim,

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \varphi_C(f|_C) + \varphi_{A-(C\cup N_A)}(f|_{A-(C\cup N_A)}) \\
&= \int_C f|_C g_C d\mu_C + \int_{A-(C\cup N_A)} f|_{A-(C\cup N_A)} g_{A-(C\cup N_A)} d\mu_{A-(C\cup N_A)} \\
&= \int_C f|_C g_C d\mu_C = \int_C f g_C d\mu = \int_X f g_C d\mu,
\end{aligned}$$

provando que  $\varphi = \varphi_{g_C}$ . ■



# Apêndice D

## Respostas/dicas para exercícios selecionados

### Exercícios do Capítulo 1

- Exercício 1.8.3. Escolha uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  para um espaço  $E$  de dimensão  $n$  e defina  $\left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\|_1 = \sum_{j=1}^n |a_j|$ . Mostre que  $\|\cdot\|_1$  é uma norma e que qualquer outra norma em  $E$  é equivalente a  $\|\cdot\|_1$ . A compacidade da bola unitária pode ser útil.
- Exercício 1.8.4. Considere as funções  $f_n \in C[0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dadas por  $f_n(x) = 1 - nx$  se  $x \in [0, \frac{1}{n}]$  e  $f_n(x) = 0$  caso contrário.
- Exercício 1.8.6: Se  $f \in C^{\alpha_2}[a, b]$ , então é claro que  $f \in C^\alpha[a, b]$  para todo  $\alpha \leq \alpha_2$ . Para a segunda parte basta considerar a função  $f_1(x) = |x - a|^{\alpha_1} \in C^{\alpha_1}[a, b] - C^{\alpha_2}[a, b]$ . Similarmente, a função  $f_2(x) = |x - a|^{\alpha_2} \in C^{\alpha_2}[a, b] - C^1[a, b]$ . Fixado  $\alpha_1$ , a função  $g(x) = |x - a|^{\alpha_1/2} \in C[a, b] - C^{\alpha_1}[a, b]$ .
- Exercício 1.8.16. Note que um dos lados é claro: se essa propriedade vale, então  $C$  é convexo. Para demonstrar a outra implicação, note que se  $\lambda_3 \neq 1$ , temos

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i = (\lambda_1 + \lambda_2) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right) + \lambda_3 x_3.$$

Proceda por indução.

- Exercício 1.8.22. Mostre primeiramente que  $|f|^r \leq 1 + |f|^p$ . Para isso, observe que se  $|f(x)| \geq 1$ , então  $|f(x)|^r \leq |f(x)|^p \leq 1 + |f(x)|^p$ . E se  $|f(x)| < 1$ , então  $|f(x)|^r \leq 1 \leq 1 + |f(x)|^p$ . Aplique a desigualdade de Hölder.
- Exercício 1.8.23. Use (1.9) para mostrar que  $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  para todo  $p \geq 1$  e que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ . Para a desigualdade inversa, dado  $\varepsilon > 0$ , integre  $|f|^p$  sobre o conjunto  $\{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ , faça primeiro o limite quando  $p \rightarrow \infty$  e depois o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- Exercício 1.8.32. Falso: o conjunto  $K = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  é fechado em  $c_0$ , mas  $[K] = c_{00}$  não é fechado em  $c_0$ .
- Exercício 1.8.33. Use o Lema de Riesz para construir uma sequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  de vetores unitários em  $E$  tais que  $\|y_n - x\| \geq 1 - \frac{1}{n}$  para todo  $x \in M$ . Extraia uma subsequência  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$  convergente e faça  $k \rightarrow \infty$  na desigualdade acima.
- Exercício 1.8.34. Suponha que exista  $g \in E$  com  $\|g\| = 1$  tal que  $\|g - f\| \geq 1$  para toda  $f \in F$ . Dada  $h \in E - F$ , tome  $\lambda$  tal que  $\int_0^1 g(t)dt = \lambda \int_0^1 h(t)dt$ . Então  $g - \lambda h \in F$  e  $1 \leq \|g - (g - \lambda h)\| = |\lambda| \cdot \|h\|$ . Para cada  $n$  tome  $h_n(t) = t^{\frac{1}{n}}$ . Então  $h_n \in E - F$ ,  $\|h_n\| = 1$  e  $\int_0^1 h_n(t)dt \rightarrow 1$ . Conclua que  $\left| \int_0^1 g(t)dt \right| \geq 1$  e use a continuidade de  $g$  em zero para chegar a uma contradição.
- Exercício 1.8.37. Considere o conjunto não-enumerável  $\{\chi_A : A \subseteq [a, b] \text{ é Lebesgue - mensurável}\}$ . Observe que as bolas abertas  $B(\chi_A, \frac{1}{2})$  são disjuntas duas a duas.
- Exercício 1.8.39. Chame de  $M_q(g)$  o supremo do enunciado. Sejam  $(A_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência monótona crescente de conjuntos mensuráveis tais que  $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ ,  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de funções simples mensuráveis tais que  $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$  e  $|\varphi_n| \leq |g|$  para todo  $n$ , e defina  $g_n = \varphi_n \chi_{A_n}$ . Então  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  para todo  $x \in X$ ,  $|g_n| \leq |g|$  e  $g_n \in S$  para todo  $n$ . Defina  $f_n = \|g_n\|_q^{1-q} \cdot |g_n|^{q-1} \cdot \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|}$ , onde  $\frac{z}{|z|} = 0$  se  $z = 0$ . Então  $\|f_n\|_p = 1$  e, do Lema de Fatou,

$$\|g\|_q \leq \liminf_n \|g_n\|_q = \liminf_n \int_X |f_n g_n| d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n g d\mu \leq M_q(g).$$

No caso em que  $q = \infty$ , para cada  $\varepsilon > 0$  considere o conjunto  $A = \{x \in X : |g(x)| \geq M_\infty(g) + \varepsilon\}$ . Se  $\mu(A) > 0$ , então escolha  $B \subseteq A$  com  $0 < \mu(B) < \infty$ . Definindo  $f = \frac{1}{\mu(B)} \cdot \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \chi_B$ , temos  $\|f\|_1 = 1$  e  $\int_X f g \geq M_\infty(g) + \varepsilon$ . Esta contradição prova que  $\mu(A) = 0$ , e portanto  $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$ . A desigualdade inversa segue da Desigualdade de Hölder.

## Exercícios do Capítulo 2

- Exercício 2.7.4. Seja  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$  arbitrário (com  $r > 0$ ). Como

$$\sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \infty,$$

existe  $x_0 \in E$ ,  $\|x_0\| \leq 1$ , tal que  $|\varphi(x_0)| \geq r$ . Como  $\varphi(x_0) \neq 0$ , temos  $\left| \varphi\left(\frac{rx_0}{|\varphi(x_0)|}\right) \right| = r$ . Daí  $\varphi\left(\frac{rx_0}{|\varphi(x_0)|}\right) = re^{i\alpha}$  para algum  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Portanto

$$\varphi\left(\frac{rx_0 e^{i(\theta-\alpha)}}{|\varphi(x_0)|}\right) = e^{i(\theta-\alpha)} \cdot re^{i\alpha} = re^{i\theta} = z.$$

Como  $\left\| \frac{rx_0 e^{i(\theta-\alpha)}}{|\varphi(x_0)|} \right\| \leq 1$ , segue que  $\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \mathbb{C}$ .

• Exercício 2.7.7. (c) Funções contínuas não necessariamente levam seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy, enquanto que operadores lineares contínuos são uniformemente contínuos, e portanto levam seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

• Exercício 2.7.13. Dado  $\varphi \in X'$ , existem números reais  $a, b$  tais que

$$\varphi(x, y) = ax + by \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Por definição,

$$\|\varphi\|_{X'} = \max\{ax + by : (x^4 + y^4)^{1/4} = 1\}.$$

Defina  $g(x, y) = x^4 + y^4$  e  $f(x, y) = ax + by$ . Aplicando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange no ponto de máximo  $(x_m, y_m)$  da função  $f$  sob o vínculo  $g$ , tem-se

$$(a, b) = \nabla f = \lambda \nabla g(x_m, y_m) = \lambda(x_m^3, y_m^3).$$

Assim,  $\lambda x_m^3 = a$ ,  $\lambda y_m^3 = b$  e

$$\|\varphi\|_{X'} = ax_m + by_m = \lambda x_m^4 + \lambda y_m^4 = \lambda.$$

Por outro lado,

$$\lambda^{4/3} x_m^4 + \lambda^{4/3} y_m^4 = |a|^{4/3} + |b|^{4/3}.$$

e, como  $x_m^4 + y_m^4 = 1$ , segue que  $\|\varphi\|_{X'} = \lambda = (|a|^{4/3} + |b|^{4/3})^{3/4}$ .

• Exercício 2.7.14(f). Use o item (c).

• Exercício 2.7.15. Use o item (f) do Exercício 2.7.14 e o Teorema da Aplicação Aberta.

• Exercício 2.7.18.  $T: \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$  dada por  $T(x) = (\frac{x_1}{2}, x_2, x_3, \dots)$ .

• Exercício 2.7.20. Para dar um exemplo em que não é fechado, considere os operadores  $u_n \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$ ,  $u_n((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_n}{n}, 0, 0, \dots)$ .

• Exercício 2.7.21. Seja  $y \notin \ker(T)$ . Vamos mostrar que  $E = [\ker(T) \cup \{y\}]$ . Se  $z \in E$ , considere os seguintes casos:

(i)  $T(z) = 0$ . Nesse caso é claro que  $z \in [\ker(T) \cup \{y\}]$ .

(ii)  $T(z) \neq 0$ . Nesse caso existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $T(z) = \lambda T(y)$  e daí segue que  $z - \lambda y \in \ker(T)$ . Logo  $z = (z - \lambda y) + \lambda y \in [\ker(T) \cup \{y\}]$ .

• Exercício 2.7.24. (b) Defina  $T: bs \longrightarrow \ell_\infty$  por  $T((x_j)_{j=1}^\infty) = \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)_{n=1}^\infty$  e verifique que é linear, bijetiva e preserva a norma.

• Exercício 2.7.26. Para cada  $n$ , defina  $\varphi_n \in (\ell_p)'$  por  $\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ . É fácil ver que cada  $\varphi_n$  é linear e contínua. Note que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j y_j$ , e esse limite existe

(por hipótese). Logo, pelo Corolário 2.3.3, segue que a função (linear)

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

pertence a  $\mathcal{L}(\ell_p, \mathbb{K})$ . Pela caracterização do dual de  $\ell_p$  segue que  $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$ .

• Exercício 2.7.27. Proceda por contradição e use o Teorema de Banach–Steinhaus para garantir que  $\sup\{\|T\|, \|T_1\|, \|T_2\|, \dots\} < \infty$ .

• Exercício 2.7.31. Teorema do Gráfico Fechado.

• Exercício 2.7.32. Aplique o Teorema do Gráfico Fechado da seguinte forma: seja  $x_n \rightarrow x \in E$  tal que  $T(x_n) \rightarrow \varphi \in E'$ . Seja  $y \in E$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  em  $(T(x_n) - T(y))(x_n - y) = T(x_n - y)(x_n - y) \geq 0$ , segue que  $(\varphi - T(y))(x - y) \geq 0$ . Fazendo  $z = y - x$ , obtém-se  $(\varphi - T(x + z))(z) \geq 0$  para todo  $z \in E$ . Segue que  $(\varphi - T(x))(z) = \varphi(z) - T(x)(z) \geq T(z)(z) \geq 0$  para todo  $z \in E$ . Isso implica que  $\varphi = T(x)$ .

• Exercício 2.7.36. Defina  $u: E' \rightarrow \ell_1$  por  $u(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ . Da hipótese  $u$  está bem definido, e neste caso é linear. Vamos mostrar que  $u$  tem o gráfico fechado. Suponha que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $E'$  e que  $u(\varphi_n) \rightarrow y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ . Como  $u(\varphi_n) = (\varphi_n(x_j))_{j=1}^{\infty}$ , segue que  $\varphi_n(x_j) \rightarrow y_j$  para todo  $j$ . Por outro lado, como  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , temos  $\varphi_n(x_j) \rightarrow \varphi(x_j)$  para todo  $j$ . Segue que  $\varphi(x_j) = y_j$  para todo  $j$ . Assim, temos

$$y = (y_j)_{j=1}^{\infty} = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} = u(\varphi).$$

Portanto  $u$  tem gráfico fechado e segue que  $u$  é contínuo. A continuidade de  $u$  fornece imediatamente o resultado desejado.

## Exercícios do Capítulo 3

• Exercício 3.6.4.  $E = \ell_1$ ,  $G = \{(0, a_1, a_2, \dots) : a_j \in \mathbb{K} \text{ para } j \geq 1\}$  e  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}$  dado por  $\varphi(x) = x_2$ .

• Exercício 3.6.7. Prove que  $F$  é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de  $\mathcal{L}(E, F)$  por meio do operador  $y \in F \mapsto \varphi \otimes y \in \mathcal{L}(E, F)$ , onde  $\varphi \in E'$  é um funcional de norma 1 cuja existência é garantida pelo Exercício 3.6.1.

• Exercício 3.6.11. Seja  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  uma sequência densa em  $E$ . Pelo Corolário 3.1.4, para cada  $n$  existe  $\varphi_n \in E'$  tal que  $\|\varphi_n\| = 1$  e  $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$ . Dado  $x \in E$ , pelo Corolário 3.1.5,  $\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \geq \sup_n |\varphi_n(x)|$ . Por outro lado, a densidade garante que  $x = x_j$  para algum  $j$  ou então existe uma subsequência  $x_{n_k} \rightarrow x$ . No primeiro caso,  $\|x\| = \|x_j\| = \varphi_j(x_j) = |\varphi_j(x_j)| \leq \sup_n |\varphi_n(x_j)| = \sup_n |\varphi_n(x)|$ . No segundo caso,  $x - x_{n_k} \rightarrow 0$ , e portanto  $\varphi_{n_k}(x - x_{n_k}) \rightarrow 0$ , e  $\varphi_{n_k}(x_{n_k}) = \|x_{n_k}\| \rightarrow \|x\|$ . Então,

$\varphi_{n_k}(x) = \varphi_{n_k}(x - x_{n_k}) + \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \longrightarrow \|x\|$ . Segue que  $|\varphi_{n_k}(x)| \longrightarrow \|x\|$ , o que combinado com a desigualdade  $\|x\| \geq \sup_n |\varphi_n(x)|$  fornece a igualdade.

- Exercício 3.6.12. A cada  $\varphi \in F'$  associe uma extensão de Hahn–Banach de  $\varphi$  a  $E$ .
- Exercício 3.6.13. Use os teoremas de Banach–Steinhaus e de Hahn–Banach.
- Exercício 3.6.14. (b) Defina  $T: E'/M^\perp \longrightarrow M'$  por  $T([\varphi])(x) = \varphi(x)$  para todos  $\varphi \in E'$  e  $x \in M$ . Prove que  $T$  está bem definido, é linear, isometria e sobrejetor. Use o Corolário 3.1.3.  
(c) Defina  $T: (E/M)' \longrightarrow M^\perp$  por  $T(\varphi)(x) = \varphi([x])$  para todos  $\varphi \in (E/M)'$  e  $x \in E$ . Verifique que  $T$  está bem definido, é linear, isometria e sobrejetor. Para a isometria use o Exercício 2.7.14(c).
- Exercício 3.6.15. Use a Proposição 3.3.1.
- Exercício 3.6.16. Combine os Exercícios 1.8.38 e 3.6.14(b).
- Exercício 3.6.17. Para a convexidade prove que o conjunto em questão coincide com  $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq \|x_0\| \text{ e } \varphi(x_0) = \|x_0\|^2\}$ .
- Exercício 3.6.18. Adapte a demonstração do Teorema 3.2.7.
- Exercício 3.6.19. Use o Teorema do Isomorfismo (Exercício 2.7.15).
- Exercício 3.6.23. (b) Defina  $T_n((a_j)_{j=1}^\infty) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ ,  $G = \{x \in \ell_\infty : \text{existe } \lim_n T_n(x)\}$ ,  $p(x) = \limsup_n T_n(x)$  e aplique Hahn–Banach.
- Exercício 3.6.24. Seja  $K > 0$  tal que  $\|y\| \leq K$  para todo  $y \in C$ . Dado  $x \in E$ , tome  $a > 0$  tal que  $\frac{x}{a} \in C$ . Se  $a < \frac{\|x\|}{L}$ , então  $\|\frac{x}{a}\| > L$  – absurdo. Logo  $\|x\| \leq Lp_C(x)$ .
- Exercício 3.6.25. Chame  $C = B(0, 1)$ . Se  $a > 0$  é tal que  $\frac{x}{a} \in C$  então  $\|x\| \leq a$ ; logo  $\|\cdot\| \leq p_C$ . Para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\frac{p_C(x)}{\|x\| + \varepsilon} = p_C(\frac{x}{\|x\| + \varepsilon}) < 1$ , logo  $p_C(x) < \|x\| + \varepsilon$ . Fazendo  $\varepsilon \longrightarrow 0$  segue que  $p_C \leq \|\cdot\|$ .
- Exercício 3.6.26. O conjunto  $G := B(0, \delta) + B$  é aberto, convexo e disjunto de  $A$ . Pelo Teorema 3.4.8 existe  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi(x) < \varphi(y)$  para todos  $x \in A$  e  $y \in G$ . Dividindo por  $\|\varphi\|$  se necessário, podemos supor  $\|\varphi\| = 1$ . Chame  $\alpha = \inf \varphi(A)$  e  $\beta = \sup \varphi(B)$ . Então  $\alpha - \beta \leq \varphi(x) - \varphi(y) \leq \|x - y\|$  para todos  $x \in A$  e  $y \in B$ , e portanto  $\alpha - \beta \leq \delta$ . Se  $z \in B(0, \delta)$ , então  $\varphi(y + z) \leq \alpha$  para todo  $y \in B$ , portanto  $\beta \leq \alpha - \varphi(z)$  ou ainda  $\varphi(z) \leq \alpha - \beta$ . Como  $\sup \varphi(B(0, \delta)) = \delta$  segue que  $\delta \leq \alpha - \beta$ .
- Exercício 3.6.27. Use a parte da demonstração do Teorema 3.1.2 que ensina como estender um funcional que é real-linear para um funcional que é complexo-linear.
- Exercício 3.6.28. Seja  $F$  um subconjunto fechado e convexo do espaço normado real  $E$ . É claro que  $F$  está contido na interseção de todos os semi-espacos fechados que o contém. Para a outra inclusão, seja  $x \notin F$ . Por  $F^c$  ser aberto, existe  $\delta > 0$  tal que a bola aberta  $B_E(x; \delta)$  está contida em  $F^c$ , isto é,  $F \cap B_E(x; \delta) = \emptyset$ . Pelo Teorema 3.4.8 existem  $\varphi \in E'$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que  $\varphi(y) < a \leq \varphi(z)$  para todos  $y \in B_E(x; \delta)$  e  $z \in F$ .

Em particular,  $\varphi(x) < a$ , e portanto  $x$  não pertence ao semi-espço fechado  $\varphi^{-1}([a, \infty))$  que contém  $F$ .

- Exercício 3.6.31. Prove que, para cada  $\varphi \in E'$ ,  $\varphi(x_i) = 0$  para todo  $i \in I$  se, e somente se,  $\varphi(y) = 0$  para todo  $y \in \overline{[x_i : i \in I]}$ . Em seguida aplique o Corolário 3.4.11.
- Exercício 3.6.32. Chame  $K := \sum_{i=1}^n c_i K_i$  e prove que  $K$  é fechado e convexo. Como  $\{x\}$  é fechado e compacto e  $K \cap \{x\} = \emptyset$ , pela Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn–Banach podemos tomar  $c \in \mathbb{R}$  e  $\Phi \in E'$  tais que  $\Phi(y) < c < \Phi(x)$  para todo  $y \in K$ . É claro que  $0 \in K$ , logo  $c > 0$ . Verifique que  $\varphi := \frac{\Phi}{c}$  satisfaz as condições desejadas.

## Exercícios do Capítulo 4

- Exercício 4.5.2. Dada  $\varphi = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p'} = (\ell_p)'$ , tome  $x = (a_j)_{j=1}^\infty$  onde  $a_j = 0$  se  $b_j = 0$  e  $a_j = \frac{\|\varphi\|_{p'}^{1-p'} \cdot |b_j|^{p'}}{b_j}$  caso contrário.
- Exercício 4.5.3. Para cada  $n$ , defina  $\varphi_n: \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$  por  $\varphi_n((b_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$ , e prove que  $\varphi_n \in (\ell_p)'$  e que  $\|\varphi_n\| = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$  se  $p = 1$  e  $\|\varphi_n\|^p = \sum_{j=1}^n |a_j|^p$  se  $p > 1$ . Use a hipótese da convergência para mostrar que a família  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  é pontualmente limitada e o Teorema de Banach–Steinhaus para garantir que é uniformemente limitada.
- Exercício 4.5.4.  $(a_j)_{j=1}^\infty \in c_0 \mapsto (a_1 + a_{j+1})_{j=1}^\infty \in c$ .
- Exercício 4.5.5. Restrinja  $\varphi$  a  $c_0$  e aplique a Proposição 4.2.3.
- Exercício 4.5.6. Combine o Exercício 3.6.16 com o fato de  $\ell_\infty = (\ell_1)'$  não ser separável.
- Exercício 4.5.7. Para a primeira parte, o mesmo argumento que funciona para  $\ell_p$  funciona nesse caso. Na verdade,  $\ell_p$  é o caso particular em que  $E_n = \mathbb{K}$  para todo  $n$ . Para a segunda parte, use o operador

$$\varphi \in \left( \left( \sum_p E_n \right)' \right)' \mapsto (\varphi_n)_{n=1}^\infty \text{ onde } \varphi_n \in E_n' \text{ para todo } n \text{ e } \varphi((x_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x_n).$$

- Exercício 4.5.8. Faça  $E_n = E$  para todo  $n$  no Exercício 4.5.7.
- Exercício 4.5.9. Considere o subespaço  $\mathcal{P}_n \subseteq L_1[0, 1]$  dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$ . O funcional  $\varphi(p) := p(0) + p'(0) - 3p''(1)$  é linear e contínuo, pois  $\mathcal{P}_n$  tem dimensão finita. O Teorema de Hahn–Banach garante a existência de uma extensão de  $\varphi$  a  $L_1[0, 1]$ , preservando sua norma. Como funcionais lineares em  $L_1[0, 1]$  são representados por funções de  $L^\infty[0, 1]$ , a primeira parte do exercícios está concluída.

Para a segunda parte, basta usar a primeira parte com as funções  $p_n(t) = \frac{t^n}{n+1} \in L_1[0, 1]$ , para obter

$$|\varphi(p_n)| = \frac{3n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 |g_n(t)| dt.$$

• Exercício 4.5.10. Primeiro se convença de que  $L \cup S \subseteq L_1[0, 1]$ . Verifique que: (i)  $L$  é convexo e, pelo Teorema de Ascoli, compacto em  $L_1[0, 1]$ ; (ii)  $S$  é convexo e fechado em  $L_1[0, 1]$ ; (iii)  $L \cap S = \emptyset$ . Para (iii) use que  $0 \notin L$  e que

$$\frac{|g(t) - g(0)|}{|t|} = \sum_{i=2}^{100} \lambda_i t^{1/i-1} \longrightarrow +\infty,$$

a menos que todos os  $\lambda_i$  sejam nulos. O resultado segue agora pela segunda forma geométrica do Teorema de Hanh–Banach.

• Exercício 4.5.13.  $T \in \mathcal{L}(\widehat{E}, F) \mapsto T|_E \in \mathcal{L}(E, F)$  e Exercício 2.7.5.

• Exercício 4.5.14. (b) Pelo item (a) basta mostrar que  $(M^\perp)^\perp \subseteq J_E(M)$ . Dado  $f \in (M^\perp)^\perp$ , temos  $f \in E''$  e  $f(\varphi) = 0$  para todo  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi|_M = 0$ . Como  $E$  é reflexivo, existe  $x \in E$  tal que  $J_E(x) = f$ . Assim,  $\varphi(x) = J_E(x)(\varphi) = f(\varphi) = 0$  para todo  $\varphi \in E'$  tal que  $\varphi|_M = 0$ . Segue do Corolário 3.4.10 que  $x \in M$ , logo  $f = J_E(x) \in J_E(M)$ .

• Exercício 4.5.20. Use o Exercício 4.5.19.

• Exercício 4.5.21. Use o Exercício 4.5.18.

• Exercício 4.5.22. É fácil ver que  $T'$  é projeção se  $T$  for projeção. Para a outra implicação, use a implicação anterior e o Exercício 4.5.19.

• Exercício 4.5.23. (a)  ${}^\perp B = \bigcap \{\ker(\varphi) : \varphi \in B\}$ .

• Exercício 4.5.24. (a)  $(J_E)' \circ J_{E'}(\varphi)(x) = (J_E)'(J_{E'}(\varphi))(x) = J_{E'}(\varphi)(J_E(x)) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$ .

(b) Use o item (a).

(c) A projeção procurada é o operador  $J_{E'} \circ (J_E)'$ :  $(J_{E'} \circ (J_E'))^2 = J_{E'} \circ (J_E)' \circ J_{E'} \circ (J_E)' = J_{E'} \circ \text{id}_{E'} \circ (J_E)' = J_{E'} \circ (J_E)'$ . E de (b) segue que  $J_{E'} \circ (J_E)'(E''') = J_{E'}((J_E)'(E''')) = J_{E'}(E') = E'$ .

• Exercício 4.5.25. (a) Use o Exercício 4.5.13.

(b) Use o Exercício 4.5.24.

• Exercício 4.5.26. Sejam  $E$  reflexivo e  $T: E \longrightarrow F$  um isomorfismo. Dado  $\Phi \in F''$ , use a Proposição 4.3.11 duas vezes para assegurar que  $(T'')^{-1}(\Phi) \in E''$ . Logo existe  $x \in E$  tal que  $J_E(x) = (T'')^{-1}(\Phi)$ , ou seja,  $T''(J_E(x)) = \Phi$ . Basta verificar que  $J_F(T(x)) = T''(J_E(x))$ .

• Exercício 4.5.27. Use o Corolário 3.1.5.

- Exercício 4.5.28. Considere o funcional  $\varphi \in E'$  dado por  $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$  e aplique o Exercício 4.5.27.
- Exercício 4.5.29. (a) Considere a norma  $\|\cdot\|_1$  em  $E \times F$ , a norma  $\|\cdot\|_\infty$  em  $E' \times F'$  e prove que  $T_{E,F}(\varphi, \psi)(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  é um isomorfismo.  
(b)  $J_{E \times F} = [(T_{E,F})']^{-1} \circ T_{E',F'} \circ (J_E \times J_F)$ .
- Exercício 4.5.30. (c) Exercício 4.5.14 e  $J_M = (T_M)' \circ [T^{M^\perp}]^{-1} \circ J_E|_M$ .
- Exercício 4.5.31. (b) Fixe  $x \in E$  de norma 1 e considere o operador  $y \in F \mapsto T(y) \in (\mathcal{L}(E, F'))'$  dado por  $T(y)(u) = u(x)(y)$ . É fácil ver que  $\|T(y)\| \leq \|y\|$ . Para provar a igualdade use o Corolário 3.1.4 para considerar funcionais  $\varphi \in E'$  e  $\psi \in F'$  tais que  $\varphi(x) = \|\psi\| = 1$  e  $\psi(y) = \|y\|$ .
- Exercício 4.5.32. Use os Exercícios 4.5.26, 4.5.30(c) e 4.5.31.

## Exercícios do Capítulo 5

- Exercício 5.7.2. (b) Tome  $y = ix$ .
- Exercício 5.7.3. Use a Lei do Paralelogramo.
- Exercício 5.7.8. Desenvolva  $\langle T(x + \lambda y), T(x + \lambda y) \rangle$  de duas formas e depois tome  $\lambda = 1$  no caso real e  $\lambda = i$  no caso complexo.
- Exercício 5.7.9. (a) Dados  $x, y \in E$ , desenvolva  $\langle T(ax + by), ax + by \rangle$  e aplique para os casos  $a = 1, b = i$ , e  $a = i, b = 1$ .  
(b) Considere a rotação por um ângulo de 90 graus em  $\mathbb{R}^2$ .
- Exercício 5.7.10. No caso real defina  $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$  e no caso complexo  $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle x, iy \rangle_{\mathbb{R}}$ .
- Exercício 5.7.11. Lei do Paralelogramo.
- Exercício 5.7.14. (a) Basta retrabalhar a demonstração do Teorema 5.2.2. Veja que todas as passagens continuam válidas com essas novas hipóteses.  
(b) Tome  $x = 0$  no item (a).
- Exercício 5.7.15. Teorema do Gráfico Fechado.
- Exercício 5.7.19. Sejam  $S_n = \sum_{i=1}^n \langle x, y_i \rangle y_i$  e  $R_n = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i \rangle z_i$ . Sabe-se que  $S_n$  converge para um certo  $s \in E$  e que  $R_n$  converge para um certo  $t \in E$ . Deve-se mostrar que  $s = t$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existem números naturais  $m_0$  e  $n_0$  tais que

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |\langle x, y_i \rangle|^2 = \|S_m - s\|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ para } m \geq m_0,$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, z_i \rangle|^2 = \|R_n - t\|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ para } n \geq n_0.$$



Fixando  $m_1 \geq m_0$  e tomando  $n_1 \geq n_0$  tal que  $\{y_1, \dots, y_{m_1}\} \subseteq \{z_1, \dots, z_{n_1}\}$ , temos  $R_{n_1} - S_{m_1} = \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle y_j$ , onde  $J \subseteq \mathbb{N} - \{1, \dots, m_1\}$ . Daí

$$\|R_{n_1} - S_{m_1}\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, y_j \rangle|^2 \leq \sum_{i=m_1+1}^{\infty} |\langle x, y_i \rangle|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Logo  $\|t - s\| \leq \|t - R_{n_1}\| + \|R_{n_1} - S_{m_1}\| + \|S_{m_1} - s\| \leq 3\varepsilon$ .

• Exercício 5.7.20. Como  $[x_1] = [y_1]$ , segue que  $y_1 = a_1 x_1$ . Como  $\|x_1\| = \|y_1\| = 1$ , segue que  $|a_1| = 1$ . Agora, procedemos por indução. Suponha que

$$y_1 = a_1 x_1 \text{ com } |a_1| = 1, \dots, y_n = a_n x_n \text{ com } |a_n| = 1.$$

Vamos mostrar que  $y_{n+1} = a_{n+1} x_{n+1}$  com  $|a_{n+1}| = 1$ . Como  $[x_1, \dots, x_{n+1}] = [y_1, \dots, y_{n+1}]$ , temos

$$y_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}. \quad (\text{D.1})$$

Para qualquer  $j = 1, \dots, n$ , usando a hipótese de indução,

$$0 = \langle y_{n+1}, y_j \rangle = \langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}, a_j x_j \rangle = \lambda_j \overline{a_j}.$$

Como  $|a_j| = 1$ , segue que  $\lambda_j = 0$ . Portanto  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Assim, de (D.1), concluímos que  $y_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1}$ . Como  $\|y_{n+1}\| = \|x_{n+1}\| = 1$ , segue que  $|\lambda_{n+1}| = 1$ .

- Exercício 5.7.27. Indução em  $n$ .
- Exercício 5.7.28. Considere  $x, y \in M^\perp$  e estude o vetor  $v = \varphi(x)y - \varphi(y)x$ .
- Exercício 5.7.30. Considere a inclusão de  $\{(a, 0, 0, \dots) : a \in \mathbb{K}\}$  em  $\ell_2$ .
- Exercício 5.7.31. Use o Teorema de Riesz–Fréchet duas vezes, uma vez para a existência e outra vez para a unicidade.
- Exercício 5.7.32. Como  $G$  é espaço de Hilbert, pelo Teorema de Riesz–Fréchet existe  $g_\varphi \in G$  tal que  $\varphi(x) = \langle x, g_\varphi \rangle$ . Seja  $\tilde{\varphi}: H \rightarrow \mathbb{K}$  a única extensão linear e contínua de  $\varphi$  que preserva a norma. Pelo Teorema de Riesz–Fréchet, existe  $x_0 \in H$  tal que  $\tilde{\varphi}(x) = \langle x, x_0 \rangle$ . Escreva  $x_0 = x_0^G + x_0^{G^\perp}$ . Para  $x \in G$ ,

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) = \langle x, x_0^G + x_0^{G^\perp} \rangle = \langle x, x_0^G \rangle.$$

Logo,  $g_\varphi = x_0^G$ . Então,  $\text{card}(\mathcal{F}) = \text{card}(G^\perp)$ . Calcular a cardinalidade de  $\mathcal{G}$  é mais fácil. Seja  $B$  uma base (de Hamel) de  $G^\perp$ . Como  $H = G \oplus G^\perp$ , para definir uma extensão linear de  $\varphi$  basta definir  $\tilde{\varphi}(b)$  para  $b \in B$ . Segue que  $\text{card}(\mathcal{G}) = \text{card}(F^B)$ . O cálculo da cardinalidade de  $\mathcal{H}$  é mais fácil ainda. Como não se requer sequer a linearidade,  $\text{card}(\mathcal{H}) = \text{card}(F^{H-G})$ .

- Exercício 5.7.33. (a), (b) e (c): análogos ao caso de  $\ell_p$ . Para (d) use o Teorema 5.3.10. Para (e) use o item (d).

- Exercício 5.7.34. (a) Desenhe os gráficos de  $r_1, r_2, r_3$ .  
(b) A função  $r_1 \cdot r_2$  é ortogonal a  $r_n$  para todo  $n$ .
- Exercício 5.7.36. Verifique que o sistema  $(h_{mn})_{m,n=1}^\infty$  é ortonormal. Para  $f \in L_2(\mu_1 \otimes \mu_2)$ , use a condição do Teorema 5.3.10(a) duas vezes para justificar as passagens

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f, h_{mn} \rangle h_{mn} \right) (x_0, y_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{X_1 \times X_2} f(x, y) h_{mn}(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \right) h_{mn}(x_0, y_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x, y) f_n(x) g_m(y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \right) f_n(x_0) g_m(y_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_{X_2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_1} f(x, y) f_n(x) g_m(y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \right) f_n(x_0) g_m(y_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_{X_2} \left( \left( \sum_{n=1}^{\infty} \langle f(\cdot, y) g_m(y), f_n \rangle f_n \right) (x_0) \right) d\mu_2(y) \right) g_m(y_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_{X_2} f(x_0, y) g_m(y) d\mu_2(y) \right) g_m(y_0) = \left( \sum_{m=1}^{\infty} \langle f(x_0, \cdot), g_m \rangle g_m \right) (y_0) = f(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

e uma vez mais para concluir o resultado.

## Exercícios do Capítulo 6

- Exercício 6.8.7(b). Considere as sequências  $(e_1, e_2, e_3, \dots)$  e  $(e_2, e_2, e_4, e_4, \dots)$  onde  $(e_n)_{n=1}^\infty$  é ortonormal.
- Exercício 6.8.9. Use o Lema 6.3.5.
- Exercício 6.8.10. Considere o fecho da envoltória convexa do conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  e use o Teorema de Mazur (Teorema 6.2.11).
- Exercício 6.8.13. Note que a base canônica de  $\ell_1$  converge para zero na topologia fraca-estrela.
- Exercício 6.8.14. Pode-se supor  $W = \{h \in E'' : |h(\varphi_i) - f(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$ , onde  $\varepsilon > 0$  e  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ . Tome  $W_0 := \{h \in E'' : |h(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$  e verifique que  $W = f + W_0$ .
- Exercício 6.8.15. (a) Use o Teorema de Banach-Steinhaus.  
(b) Mostre que o funcional linear  $f: E' \longrightarrow \mathbb{K}$  dado por  $f(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$  é contínuo e use a reflexividade de  $E$ .

- Exercício 6.8.17. Use o Exercício 3.6.14(c) e o Corolário 6.4.6.
- Exercício 6.8.18. Suponha que  $E$  não seja reflexivo. Pode-se supor que  $\|\varphi_0\| = 1$ . Neste caso, é claro que  $\{x \in E : \varphi_0(x) = 1\} \cap \{x \in E : \|x\| \leq 1\} = \emptyset$ . Como  $1 = \|\varphi_0\| = \sup \{\varphi_0(x) : \|x\| \leq 1\}$ , existe uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  tal que  $1 > \varphi_0(x_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$  para todo  $n$ . Se existisse uma subsequência  $(y_n)_{n=1}^\infty$  de  $(x_n)_{n=1}^\infty$  tal que  $y_n \xrightarrow{w} x_0$ , seria verdade que  $\varphi_0(x_0) = 1$  e  $\|x_0\| \leq \liminf_n \|x_n\| = 1$ .
- Exercício 6.8.19. (c) Para (i)  $\implies$  (ii) use o Exercício 4.5.8, e para (iii)  $\implies$  (i) use o item (a) e o Corolário 6.4.6.
- Exercício 6.8.21. (c) Use os Teoremas 6.5.4 e 1.5.4.
- Exercício 6.8.23. (a) Se  $E = \overline{[K]}$ , então  $E = \overline{[\text{conv}(K \cup -K)]}$ .  
(b)  $E = [B_E]$ .  
(c) Tome uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  densa na esfera unitária  $S_E$  e o conjunto compacto (logo fracamente compacto)  $K = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^\infty \cup \{0\}$ .
- Exercício 6.8.24. Sejam  $(I, \leq)$  um conjunto dirigido e  $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$  uma rede de Cauchy no espaço de Banach  $E$ . Para  $\lambda, \alpha \in I$ , a notação  $\lambda < \alpha$  quer dizer que  $\lambda \leq \alpha$  e  $\lambda \neq \alpha$ . Escolha  $\lambda_0, \lambda_1 \in I$ ,  $\lambda_0 \neq \lambda_1$ . Como  $I$  é dirigido, existe  $\lambda_2 \in I$  tal que  $\lambda_0 \leq \lambda_2$  e  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Então  $\lambda_0 < \lambda_2$  ou  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Se  $\lambda_0 < \lambda_2$ , chame  $\alpha_1 = \lambda_0$  e  $\alpha_2 = \lambda_2$ ; caso contrário chame  $\alpha_1 = \lambda_1$  e  $\alpha_2 = \lambda_2$ . Em ambos os casos tem-se  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Como  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , o mesmo procedimento produz  $\alpha_3 \in I$  tal que  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ . Repita o processo para construir uma sequência  $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$  em  $I$  tal que  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ . Verifique que a sequência  $(x_{\alpha_j})_{j=1}^\infty$  é de Cauchy em  $E$ , e portanto  $x_{\alpha_j} \xrightarrow{j} x \in E$ . Conclua que  $x_\alpha \xrightarrow{\alpha} x$ .
- Exercício 6.8.26. Para uma implicação use o Teorema 6.6.6 e para a implicação contrária use o Exercício 6.8.25.
- Exercício 6.8.27. Use o Exercício 6.8.26.
- Exercício 6.8.28. Combine o Teorema 6.6.6 com o Exercício 4.5.26.
- Exercício 6.8.29. (c) $\implies$ (b) Sejam  $x_n, y_n \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , com  $(x_n)_{n=1}^\infty$  limitada e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2) = 0$ . Disso e de

$$2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2 \geq 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - (\|x_n\| + \|y_n\|)^2 = (\|x_n\| - \|y_n\|)^2 \geq 0,$$

segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n\| - \|y_n\|) = 0$ , e portanto  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é limitada. Passando a uma subsequência, pode-se supor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = a$ . Para  $a = 0$  o limite desejado segue imediatamente. Se  $a > 0$ , podemos supor, sem perda de generalidade,  $x_n, y_n$  não-nulos, e neste caso temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2a$ . Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| = 2,$$

e de (c) decorre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| = 0.$$

• Exercício 6.8.30. (a)  $\implies$  (b) O caso em que  $x = 0$  ou  $y = 0$  é trivial. Suponhamos  $x, y \neq 0$ . De

$$0 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0,$$

segue que  $\|x\| = \|y\|$ . Assim, como  $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0$ , temos

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 4.$$

Chamando  $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$  e  $y_0 = \frac{y}{\|y\|}$ , obtemos  $2 = \|x_0 + y_0\|$  e pelo item (a) concluímos que  $x_0 = y_0$ , ou ainda  $x = y$ .

(a)  $\implies$  (c) Suponha  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  para  $x, y \neq 0$ . Suponha, sem perda de generalidade,  $\|y\| \geq \|x\| > 0$ . Então

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} (\|x + y\|) - \left\| \left( \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) y \right\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} (\|x\| + \|y\|) - \|y\| \left( \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) = 2. \end{aligned}$$

Assim  $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$  e o resultado segue.

• Exercício 6.8.33. (b) Use o Exercício 6.8.30.

(c) Considere, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  a função constante igual a 1 e  $g_n$  a função que une os pontos  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{n}, 1)$  e  $(1, 1)$  por segmentos de reta, e aplique o Exercício 6.8.29.

## Exercícios do Capítulo 7

• Exercício 7.7.2. Inspire-se no final da demonstração da Proposição 7.5.2.

• Exercício 7.7.10. Use os seguintes resultados: Teorema 6.5.4, Proposição 6.2.9, Teorema 6.2.12 e Proposição 7.2.3.

• Exercício 7.7.11. Use o Exercício 7.7.10 e o Teorema 7.2.7.

• Exercício 7.7.12.  $(I - T)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} T^j = I + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} T^j.$

• Exercício 7.7.13. Se  $f$  é contínua então  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

• Exercício 7.7.14.  $T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ ,  $T((a_n)_{n=1}^\infty) = (\lambda_n a_n)_{n=1}^\infty.$

- Exercício 7.7.15. Considere o operador identidade em  $\ell_1$ .
- Exercício 7.7.17. Dado  $\varepsilon > 0$ , a coleção  $(B(y, \frac{\varepsilon}{2}))_{y \in T(B_E)}$  é uma cobertura aberta do compacto  $\overline{T(B_E)}$ . Existem então  $y_1, \dots, y_n \in T(B_E)$  tais que  $T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$ .  
Sejam  $M = [y_1, \dots, y_n]$ ,  $P$  a projeção ortogonal de  $H$  sobre  $M$  (Teorema 5.2.5) e  $P_0 = P \circ T$ . Então  $P_0$  é linear, contínuo, tem posto finito e  $\|T - P_0\| < \varepsilon$  pois, para todo  $x \in B_E$ ,

$$\|T(x) - P_0(x)\| = \|T(x) - P(T(x))\| = \inf_{y \in M} \|T(x) - y\| \leq \inf_{j=1, \dots, n} \|T(x) - y_j\| < \varepsilon.$$

- Exercício 7.7.18. Prove que  $T = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \otimes b_n$  em  $\mathcal{L}(E, F)$  e aplique as Proposições 7.2.2(b) e 7.2.5.
- Exercício 7.7.19. (a) De  $\|T^{-1} \circ (T - S)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T - S\|$  e da Proposição 7.1.3 segue que  $I - T^{-1} \circ (T - S) = T^{-1} \circ S$  é um isomorfismo, e portanto  $S$  é um isomorfismo. Mais ainda,  $(I - T^{-1} \circ (T - S))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1} \circ (T - S))^n$ , logo

$$S^{-1} = (T - (T - S))^{-1} = (T \circ (I - T^{-1} \circ (T - S)))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1} \circ (T - S))^n \circ T^{-1},$$

e portanto

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(T^{-1} \circ (T - S))^n \circ T^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\|T - S\| \|T^{-1}\|)^n.$$

(b) Use o item (a).

- Exercício 7.7.20. Suponha que  $S \circ T$  seja um isomorfismo. Trabalhe com  $S \circ T$  para provar que  $T$  é injetora, e com  $T \circ S$  para provar que  $S$  é injetora. Se  $S$  não fosse sobrejetora, teríamos  $(S \circ T)(E) = S(T(E)) \subseteq S(E) \neq X$ , o que contradiz o fato de  $S \circ T$  ser isomorfismo. O caso de  $T$  é análogo.
- Exercício 7.7.21. Use o Exercício 7.7.20.
- Exercício 7.7.22. Dado  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  as raízes do polinômio  $t^n - \lambda$ . Obtenha a fatoração  $(T^n - \lambda I) = (T - \lambda_1 I) \circ \dots \circ (T - \lambda_n I)$  e use o Exercício 7.7.21.
- Exercício 7.7.30. Para  $n = 2$  use o Exercício 7.7.24(c). Como  $T$  é autoadjunto, do Exercício 7.7.27 segue que  $T^k$  é autoadjunto para todo inteiro positivo  $k$ . Decorre então que  $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$  para todo  $k$ . Se  $1 \leq n < 2^k$ , então

$$\|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\| = \|T^n \circ T^{2^k-n}\| \leq \|T^n\| \cdot \|T\|^{2^k-n} \leq \|T\|^n \cdot \|T\|^{2^k-n} = \|T\|^{2^k}.$$

- Exercício 7.7.33.  $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ,  $T_2 = -\frac{1}{2}i(T - T^*)$ .

- Exercício 7.7.34. Retrabalhe a demonstração do Teorema 7.5.6.
- Exercício 7.7.37.  $T \circ T^* = T^* \circ T \iff T(T^*(x)) = T^*(T(x))$  para todo  $x \iff \langle T(T^*(x)), y \rangle = \langle T^*(T(x)), y \rangle$  para todos  $x, y \iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \langle T^*(T(x)), y \rangle$  para todos  $x, y \iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \overline{\langle y, T^*(T(x)) \rangle}$  para todos  $x, y \iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \overline{\langle T(y), T(x) \rangle}$  para todos  $x, y \iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle$  para todos  $x, y$ .

## Exercícios do Capítulo 8

- Exercício 8.6.5. Verifique que  $T(0) = 0$  e que  $T(nx) = nT(x)$  para todo inteiro positivo  $n$ . Se  $p, q$  são inteiros com  $q \neq 0$ , de

$$pT(x) = T(px) = T\left(q\left(\frac{p}{q}x\right)\right) = qT\left(\frac{p}{q}x\right),$$

segue que  $T\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}T(x)$ . Dado  $r \in \mathbb{R}$ , tome uma sequência  $(q_n)_{n=1}^\infty$  de racionais tais que  $q_n \rightarrow r$ . Logo  $q_n x \rightarrow rx$ , e portanto  $T(q_n x) \rightarrow T(rx)$ . Por outro lado,  $T(q_n x) = q_n T(x) \rightarrow rT(x)$ . Segue que  $T(rx) = rT(x)$  pois  $F$  é de Hausdorff.

- Exercício 8.6.6(c). Seja  $(f_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy em  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ . Para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) &= \int_{\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}} 1 d\mu \\ &\leq \varepsilon^{-p} \int_{\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}} |f_n - f_m|^p d\mu \\ &\leq \varepsilon^{-p} d(f_n, f_m), \end{aligned}$$

o que prova que a sequência  $(f_n)_{n=1}^\infty$  é de Cauchy em medida. Pelo Teorema C.11 existe uma função mensurável  $f$  para a qual  $(f_n)_{n=1}^\infty$  converge em medida. Da Proposição C.13 existe uma subsequência  $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$  que converge para  $f$   $\mu$ -quase sempre. Dado  $\varepsilon > 0$  tome um inteiro positivo  $N_0$  tal que  $d(f_m, f_n) < \varepsilon$  sempre que  $m, n \geq N_0$ . Se  $n \geq N_0$ , então

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f|^p d\mu &= \int_X \lim_j |f_{n_j}(x) - f(x)|^p d\mu \\ &\leq \liminf_j \int_X |f_{n_j}(x) - f(x)|^p d\mu = \liminf_j d(f_{n_j}, f) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo  $f = (f - f_{N_0}) + f_{N_0} \in L_p(X, \Sigma, \mu)$  e o resultado segue.

- Exercício 8.6.7. Aplique o Exercício 8.6.6 para a  $\sigma$ -álgebra das partes de  $\mathbb{N}$  com a medida de contagem.
- Exercício 8.6.10. Dados  $x, y \in \overline{A}$ , tome redes da forma  $(x - x_\lambda)_\lambda$  e  $(y - y_\lambda)_\lambda$ , com  $x_\lambda, y_\lambda \in A$ , ambas convergindo para zero e indexadas pelo sistema de vizinhanças de zero.

- Exercício 8.6.22. Use o Teorema B.15.
- Exercício 8.6.24. Tome um espaço normado  $E$  munido da topologia fraca  $\sigma(E, E')$ ,  $0 \neq x_0 \in E$  e a sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty = ((-1)^n x_0)_{n=1}^\infty$ .
- Exercício 8.6.27. Use as sequências  $((-1)^n)_{n=1}^\infty$  e  $((-1)^{n+1})_{n=1}^\infty$  para provar que a adição não é contínua.
- Exercício 8.6.30. Corolário 8.4.2 e Teorema 8.3.3.
- Exercício 8.6.31. (a) Suponha  $f_n \xrightarrow{\tau_2} f$ . É claro que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Para cada  $n$ , defina  $g_n \in C[0, 1]$  por

$$g_n(x) = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}.$$

Então  $g_n \rightarrow 0$  e  $|g_n(x)| \leq 1$  para todos  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, 1]$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada segue que  $d(f_n, f) = \int_0^1 g_n(x) dx \rightarrow 0$ .

(b) Suponha, por contradição, que seja contínua. Neste caso, dado  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  existem  $\delta > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  tais que

$$A := \{f \in C[0, 1] : |f(x_i)| \leq \delta \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

está contido na bola aberta de centro 0 e raio  $\varepsilon$  de  $(C[0, 1], \tau_1)$ . Para cada inteiro positivo  $k$  defina  $g_k(x) = k(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ . Como  $g_k \in A$  para todo  $k$ , segue que

$$\int_0^1 \frac{|g_k(x)|}{1 + |g_k(x)|} dx = d(g_k, 0) < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (\text{D.2})$$

para todo  $k$ . Defina ainda, para cada  $k$ ,  $h_k(x) = \frac{|g_k(x)|}{1 + |g_k(x)|}$ . Como  $h_k \rightarrow 1$   $m$ -quase sempre, onde  $m$  é a medida de Lebesgue em  $[0, 1]$ , e  $|h_k(x)| \leq 1$  para todos  $k \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, 1]$ , o Teorema da Convergência Dominada garante que  $\int_0^1 h_k(x) dx \rightarrow \int_0^1 1 = 1$ . Isso contradiz (D.2).

- Exercício 8.6.32. (d) Teorema C.11.

(e) Prove que a métrica é invariante por translações, isto é,  $d(f + h, g + h) = d(f, g)$ , e proceda como foi feito no Exemplo 8.1.2(e).

(f)  $f = \sum_{k=0}^\infty k \chi_{[k, k+1)}$ .

(g) Suponha  $a_n \rightarrow a$  em  $\mathbb{K}$  e  $f_n \rightarrow f$  em  $L_0(X, \Sigma, \mu)$ . Escolha  $(b_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência decrescente de números reais positivos convergindo para zero tal que  $|a_n - a| \leq b_n$  para todo  $n$  e também uma constante  $C$  tal que  $|a_n| \leq C$  para todo  $n$ . Por  $[f > \delta]$  denotaremos o conjunto  $\{x \in X : f(x) > \delta\}$ . Para todos  $\varepsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$[|a_n f_n - a f| > \varepsilon] \subseteq [|a_n f_n - a_n f| > \varepsilon/2] \cup [|a_n f - a f| > \varepsilon/2].$$

Faça  $n \rightarrow \infty$  na desigualdade

$$\begin{aligned} \mu([|a_n f_n - a f| > \varepsilon]) &\leq \mu([|a_n f_n - a_n f| > \varepsilon/2]) + \mu([|a_n f - a f| > \varepsilon/2]) \\ &\leq \mu([C|f_n - f| > \varepsilon/2]) + \mu([b_n|f| > \varepsilon/2]) \\ &= \mu([|f_n - f| > \varepsilon/2C]) + \mu([|f| > \varepsilon/2b_n]). \end{aligned}$$

(h) Dada uma vizinhança convexa  $V$  não-vazia da origem, tome  $\varepsilon$  tal que  $B(0, \varepsilon) \subseteq V$ . Seja  $f \in L_0[0, 1]$ . Escolha  $n$  natural tal que  $1/n < \varepsilon/2$ . Para cada  $j$  defina  $f_j(t) = nf(t)\chi_{[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]}$ . De  $m(\{|f_j| > \varepsilon/2\}) \leq 1/n < \varepsilon/2$  para cada  $j$ , segue cada  $f_j \in V$ . Como  $V$  é convexa e  $f = \sum_{j=1}^n n^{-1}f_j$ , temos  $f \in V$ , e portanto  $V = L_0[0, 1]$ .

## Exercícios do Capítulo 9

- Exercício 9.9.1. Adapte os argumentos usados na demonstração do Teorema 1.2.3.
- Exercício 9.9.8. Para uma implicação, seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $B_E$ . Como a inclusão em  $F$  é compacta, existe uma subsequência  $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$  convergente na norma de  $F$ , logo de Cauchy na norma de  $F$ . Como as normas são equivalentes por hipótese, é também de Cauchy na norma de  $E$ , logo convergente em  $E$ . Isso prova que a bola  $B_E$  é compacta, e portanto  $E$  tem dimensão finita pelo Teorema 1.5.4. Para a outra implicação use o Exercício 1.8.3.
- Exercício 9.9.9(b). Suponha que  $f$  tenha apenas um número finito de descontinuidades. Neste caso existe  $r > 0$  tal que  $f$  é contínua em  $E - B(0, r)$ . Então a função

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(tx_0),$$

onde  $x_0 \in E$  é um vetor unitário fixado, é contínua em  $(-\infty, -r]$  e em  $[r, +\infty)$ . Escolha  $y > \max\{g(r), g(-r)\}$ . Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ , existe  $t_1 > r$  tal que  $g(t_1) > y$ ; e como  $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = +\infty$ , existe  $t_2 < -r$  tal que  $g(t_2) > y$ . Da continuidade de  $g$  em  $[r, +\infty)$ , como  $g(r) < y < g(t_1)$ , existe  $c_1 \geq r > 0$  tal que  $g(c_1) = y$ . E da continuidade de  $g$  em  $(-\infty, -r]$ , como  $g(-r) < y < g(t_2)$ , existe  $c_2 \leq -r < 0$  tal que  $g(c_2) = y$ . Como  $c_2 < 0 < c_1$ , é claro que  $c_2x_0 \neq c_1x_0$ , e assim a igualdade  $f(c_1x_0) = g(c_1) = y = g(c_2) = f(c_2x_0)$  contraria a injetividade de  $f$ .

- Exercício 9.9.10.  $f: (0, 1] \longrightarrow (0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{x}{2}$ .
- Exercício 9.9.11. Use a Proposição 7.1.3.
- Exercício 9.9.13. Veja a demonstração da Proposição 7.2.5.
- Exercício 9.9.16. Prove e aplique o seguinte resultado mais geral: se  $X$  é um espaço topológico,  $Y$  é um espaço topológico de Hausdorff e  $f, g: X \longrightarrow Y$  são funções contínuas, então o conjunto dos pontos em que  $f$  e  $g$  coincidem é fechado em  $X$ .
- Exercício 9.9.17. A continuidade da norma garante que a função

$$g: B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(a) = (1 - \|a\|_2^2)^{1/2},$$

é contínua. Dados  $a \in B$  e  $\varepsilon > 0$ , tome  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$  tal que  $|g(a) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  sempre que  $x \in B$  e  $\|x - a\|_2 < \delta$ . Segue que  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$  sempre que  $x \in B$  e  $\|x - a\|_2 < \delta$ ,



provando que  $f$  é contínua. E  $f$  não é completamente contínua pois  $e_n \xrightarrow{w} 0$  em  $B$  mas  $\|f(e_n) - f(0)\|_2 = \|e_{n+1} - e_1\|_2 = \sqrt{2}$  para todo  $n$ .

- Exercício 9.9.19. Verifique e use que, para todo  $t < 1$ , a aplicação  $t\varphi$  possui ponto fixo.

- Exercício 9.9.20.  $T(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots)$ .

- Exercício 9.9.21. Dado  $0 < \varepsilon < 1$ , chame  $C_\varepsilon = \{(1 - \varepsilon)x : x \in C\}$  e observe que  $C_\varepsilon$  é fechado. Dado  $x \in C_\varepsilon$ ,  $x = \varepsilon \cdot 0 + (1 - \varepsilon)y$  para algum  $y \in C$ . Como  $0, y \in C$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  e  $C$  é convexo, segue que  $x \in C$ . Provamos que  $C_\varepsilon \subseteq C$  e portanto podemos considerar a função

$$f_\varepsilon: C_\varepsilon \longrightarrow C_\varepsilon, \quad f_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon)f(x).$$

É imediato que  $f_\varepsilon$  é uma contração, logo tem um ponto fixo, digamos  $x_\varepsilon \in C_\varepsilon \subseteq C$ , pelo Teorema do ponto fixo de Banach. Então

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|f(x_\varepsilon) - f_\varepsilon(x_\varepsilon)\| = \|\varepsilon \cdot f(x_\varepsilon)\| = \varepsilon \cdot \|f(x_\varepsilon)\|.$$

O resultado segue tomando  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- Exercício 9.9.22. Escolha  $x_0 \in C$  e aplique o Exercício 9.9.21 para a função  $g: x_0 - C \longrightarrow x_0 - C$ ,  $g(x_0 - x) = x_0 - f(x)$ .

- Exercício 9.9.23. Faça  $y = f'$  e use o Teorema de Cauchy–Picard.

- Exercício 9.9.24. Use o Teorema de Ascoli (Teorema B.7).

- Exercício 9.9.25. Use a norma  $\|\cdot\|_\infty$  em  $E_1 \times E_2$  e o Exercício 2.7.25.

- Exercício 9.9.26. A adição é linear e a multiplicação por escalar é bilinear, e ambas são contínuas.

- Exercício 9.9.27. Use o Corolário 9.6.7.

- Exercício 9.9.29. Use que  $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A \|f\| d\mu = 0$  e aplique o Corolário 9.7.7.

- Exercício 9.9.30. Prove primeiro que a integral de Bochner é finitamente aditiva. Use a  $\sigma$ -aditividade no caso escalar e o Corolário 9.7.7 para assegurar que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$  é absolutamente convergente, logo convergente. Da aditividade finita segue que, para todo  $m$ ,

$$\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu - \sum_{n=1}^m \int_{A_n} f d\mu \right\| = \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n} f d\mu \right\|.$$

Como  $\lim_m \mu \left( \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \right) = 0$ , o Exercício 9.9.29 garante que  $\lim_m \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n} f d\mu \right\| = 0$ .

- Exercício 9.9.31. Aplique o caso escalar do Teorema de Egorov para a sequência  $(\|f_n - f\|)_{n=1}^{\infty}$ .

- Exercício 9.9.32. Adapte a demonstração da caracterização da integral de Riemann como limite de somas de Riemann (veja, por exemplo, [54, Teorema IX.15]).
- Exercício 9.9.34. Suponha que exista  $A \in \Sigma$ , com  $0 < \mu(A) < \infty$ , não verificando a tese. Pela Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn–Banach existem  $\varphi \in E'$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu\right) < \alpha \leq \varphi(f(x))$$

para todo  $x \in E$ . Da Proposição 9.7.8 segue que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \varphi \circ f d\mu < \alpha \leq \varphi(f(x))$$

para todo  $x \in E$ . Integrando a segunda desigualdade acima sobre  $A$  obtemos a contradição

$$\int_A \varphi \circ f d\mu < \alpha \mu(A) = \int_A \alpha d\mu \leq \int_A \varphi \circ f d\mu.$$

## Exercícios do Capítulo 10

- Exercício 10.6.5. Sejam  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  duas matrizes de ordem  $n \times n$ . Então  $AB = (c_{ij})_{n \times n}$  com  $c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}$ . Consequentemente,  $\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n c_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}b_{lk}$ . Do mesmo modo  $BA = (d_{ij})_{n \times n}$  com  $d_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il}a_{jl}$ . Assim  $\text{tr}(BA) = \sum_{l=1}^n d_{ll} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{lk}a_{kl}$  e o resultado segue.

- Exercício 10.6.6. Sejam  $\alpha$  e  $\alpha'$  bases para  $F$ . Considere  $A$  e  $A'$  as matrizes de  $\omega$  com respeito a  $\alpha$  e  $\alpha'$ , respectivamente. Então, existe uma matriz  $B$  tal que  $A' = B^{-1}AB$ . Logo

$$\text{tr}(A') = \text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(ABB^{-1}) = \text{tr}(A).$$

- Exercício 10.6.13. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  defina

$$M_{\text{Re}}^+ = \{1 \leq n \leq k : \text{Re}(a_n) > 0\}, \quad M_{\text{Re}}^- = \{1 \leq n \leq k : \text{Re}(a_n) < 0\}, \\ M_{\text{Im}}^+ = \{1 \leq n \leq k : \text{Im}(a_n) > 0\}, \quad M_{\text{Im}}^- = \{1 \leq n \leq k : \text{Im}(a_n) < 0\},$$

para obter

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |a_n| &\leq \sum_{n=1}^k |\text{Re}(a_n)| + \sum_{n=1}^k |\text{Im}(a_n)| \\ &= \sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} \text{Re}(a_n) + \sum_{n \in M_{\text{Re}}^-} (-\text{Re}(a_n)) + \sum_{n \in M_{\text{Im}}^+} \text{Im}(a_n) + \sum_{n \in M_{\text{Im}}^-} (-\text{Im}(a_n)). \end{aligned}$$

Como  $\left| \sum_{n \in M} a_n \right| \leq 1$  para qualquer  $M$  finito, temos

$$\left| \sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} \text{Re}(a_n) \right| = \left| \text{Re} \left( \sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} a_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} a_n \right| \leq 1.$$

Da mesma forma os números  $\left| \sum_{n \in M_{\text{Re}}^-} (-\text{Re}(a_n)) \right|$ ,  $\left| \sum_{n \in M_{\text{Im}}^+} \text{Im}(a_n) \right|$  e  $\left| \sum_{n \in M_{\text{Im}}^-} (-\text{Im}(a_n)) \right|$  são todos menores ou iguais a 1. O resultado segue uma vez que  $k$  é arbitrário.

- Exercício 10.6.14(b). Use o Exercício 10.6.13.
- Exercício 10.6.16. Seja  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n \in C[0, 1]$ . Se  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de escalares tais que  $f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s_n$ , então  $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) s_n(t) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Vejamos que usando isso para  $t = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots$  segue que  $a_n = b_n$  para todo  $n$ . De fato, para  $t = 0$  temos  $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) s_n(0) = 0$ , e portanto  $b_0 - a_0 = 0$ . Decorre daí que  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) s_n(t) = 0$ , e aplicando em  $t = 1$  obtemos  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) s_n(1) = 0$ , e portanto  $b_1 - a_1 = 0$ . Basta continuar o processo.
- Exercício 10.6.17.

$$\eta(a) = 0 \implies 0 = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : n \in \mathbb{N} \right\} \geq \|a_1 x_1\| \implies a_1 = 0.$$

Disso segue que

$$0 = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : n \in \mathbb{N} \right\} \geq \|a_1 x_1 + a_2 x_2\| = \|a_2 x_2\| \implies a_2 = 0.$$

Repetindo o procedimento conclui-se que  $a_i = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

- Exercício 10.6.19. Sejam  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  as projeções canônicas associadas a uma base de Schauder de  $E$ . Como  $P_n(x) \rightarrow x$  para todo  $x \in E$ , do Exercício 2.7.27 sabe-se que  $\sup_{x \in K} \|P_n(x) - x\| \rightarrow 0$  para todo compacto  $K \subseteq E$ . Use agora o Exercício 7.7.16.

- Exercício 10.6.20. Escolha

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \dots$$

Então  $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$  e sua representação nessa base de Schauder dada é  $x = 1e_1 + \frac{1}{2}(e_2 - e_1) + \frac{1}{3}(e_3 - e_2) + \dots$ . Se essa convergência fosse incondicional, então,

em particular, a série  $1e_1 + \frac{1}{3}(e_3 - e_2) + \frac{1}{5}(e_5 - e_4) + \dots$  seria convergente em  $\ell_1$ , mas isso não ocorre.

• Exercício 10.6.22. Considere uma sequência da forma  $(\alpha_n, \alpha_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{L}_E \times \mathcal{L}_F$  convergindo para  $(\beta, \gamma) \in \mathcal{L}_E \times \mathcal{L}_F$ , onde  $\beta = (b_n)_{n=1}^\infty$  e  $\gamma = (c_n)_{n=1}^\infty$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_E(\alpha_n - \beta) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_F(\alpha_n - \gamma).$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\eta_E(\alpha_n - \beta) \leq \varepsilon$  e  $\eta_F(\alpha_n - \gamma) \leq \varepsilon$  para todo  $n \geq n_\varepsilon$ . Escrevendo  $\alpha_j = (\alpha_j^n)_{n=1}^\infty$  para cada  $j$ , temos

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m (\alpha_i^n - b_i) x_i \right\| : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \varepsilon \text{ e } \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m (\alpha_i^n - c_i) y_i \right\| : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \varepsilon$$

para todo  $n \geq n_\varepsilon$ . Daí, para todo  $m$  natural, temos

$$\begin{aligned} |\alpha_m^{n_\varepsilon} - b_m| \cdot \|x_m\| &= \left\| \sum_{i=1}^m (\alpha_i^{n_\varepsilon} - b_i) x_i - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{n_\varepsilon} - b_i) x_i \right\| \leq 2\varepsilon, \\ |\alpha_m^{n_\varepsilon} - c_m| \cdot \|y_m\| &= \left\| \sum_{i=1}^m (\alpha_i^{n_\varepsilon} - c_i) y_i - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{n_\varepsilon} - c_i) y_i \right\| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Para todos  $m \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$  segue que

$$|b_m - c_m| = |b_m - \alpha_m^{n_\varepsilon} + \alpha_m^{n_\varepsilon} - c_m| \leq |\alpha_m^{n_\varepsilon} - b_m| + |\alpha_m^{n_\varepsilon} - c_m| \leq \frac{2\varepsilon}{\|x_m\|} + \frac{2\varepsilon}{\|y_m\|}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos  $b_m = c_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , e portanto  $\gamma = \beta$ .

• Exercício 10.6.23. Corolário 10.3.9.

• Exercício 10.6.24. Pelo Exercício 1.8.36 podemos tomar uma sequência  $(x_n)_{n=1}^\infty$  densa na esfera unitária  $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ . Pelo Corolário 3.1.4, para cada  $n$  existe  $\varphi_n \in E'$  tal que  $\|\varphi_n\| = 1 = \|x_n\| = \varphi_n(x_n)$ . Seja  $x \in E$  com  $\|x\| = 1$ . É claro que  $\sup_n |\varphi_n(x)| \leq \|x\|$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $n_0$  tal que  $\|x - x_{n_0}\| < \varepsilon$ . Então  $|\|x\| - \|x_{n_0}\|| \leq \|x - x_{n_0}\| < \varepsilon$ . Logo  $\|x\| - \varepsilon \leq \|x_{n_0}\| = \varphi(x_{n_0})$ . Isso prova que  $\sup_n |\varphi_n(x)| = \|x\|$  se  $\|x\| = 1$ . A passagem para um elemento qualquer de  $E$  é imediata.

• Exercício 10.6.26. Suponha que existam  $k, j$  tais que  $\langle x_j, x_k \rangle \neq 0$ . Existe então  $y \in E$  tal que  $\|y\| = 1$ ,  $y \in [x_k, x_j]$  e  $y \perp x_k$ . Note que  $|\langle x_j, y \rangle| > 0$ . Escrevendo  $x_j = \langle x_j, y \rangle y + \langle x_j, x_k \rangle x_k$ , temos  $1 = |\langle x_j, y \rangle|^2 + |\langle x_k, x_j \rangle|^2$ , e portanto  $|\langle x_j, y \rangle| < 1$ . De  $1 = |x_j^*(x_j)| = |\langle x_j, y \rangle| \cdot |x_j^*(y)|$  segue que  $\|x_j^*\| \geq |x_j^*(y)| > 1$ .

- Exercício 10.6.27. (a) Seja  $y_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \lambda_i e_i$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m a_j \frac{y_j}{\|y_j\|} \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{\|y_j\|} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \lambda_i e_i \right\| = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \frac{|a_j|^p}{\|y_j\|^p} |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{j=1}^m \frac{|a_j|^p}{\|y_j\|^p} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |\lambda_i|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{j=1}^m \frac{|a_j|^p}{\|y_j\|^p} \|y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \sum_{j=1}^m a_j e_j \right\|. \end{aligned}$$

Segue que  $(e_n)_{n=1}^\infty \approx \left( \frac{y_n}{\|y_n\|} \right)_{n=1}^\infty$ . Note que  $T: F := \overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]} \longrightarrow \ell_p$  dado por

$$T \left( \sum_{j=1}^\infty a_j y_j \right) = \sum_{j=1}^\infty a_j \|y_j\| e_j \text{ é uma isometria linear de } \ell_p \text{ sobre } F.$$

(b) Suponha

$$0 < \alpha := \inf \{ \|y_n\| ; n \in \mathbb{N} \} \leq \sup \{ \|y_n\| ; n \in \mathbb{N} \} := \beta < \infty.$$

Se  $\sum_{j=1}^\infty a_j y_j \in F$  então, como  $\sum_{j=1}^\infty a_j y_j = \sum_{j=1}^\infty a_j \|y_j\| \frac{y_j}{\|y_j\|}$ , segue que  $\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \|y_j\|^p < \infty$ .

Conclua que  $\sum_{j=1}^\infty a_j e_j \in \ell_p$ . Por outro lado, se  $\sum_{j=1}^\infty a_j e_j \in \ell_p$ , então  $\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty$ , e portanto  $\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \|y_j\|^p < \infty$ . Logo  $\sum_{j=1}^\infty a_j \|y_j\| e_j \in \ell_p$  e por conseguinte  $\sum_{j=1}^\infty a_j y_j = \sum_{j=1}^\infty a_j \|y_j\| \frac{y_j}{\|y_j\|} \in F$ . Segue que  $(y_n)_{n=1}^\infty \approx (e_n)_{n=1}^\infty$ .

- Exercício 10.6.28. Seja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  uma base de Schauder de  $E$  e sejam  $(x_n^*)_{n=1}^\infty$  os seus funcionais coeficientes. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , escolha  $y_k \in \mathcal{D}$  tal que  $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{2^{k+1} \|x_k^*\|}$ .

Logo,

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_k - y_k\| \cdot \|x_k^*\| \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^{k+1}} < 1,$$

e o Teorema 10.4.7 garante que  $(y_n)_{n=1}^\infty$  é uma base de Schauder de  $E$ .

- Exercício 10.6.29. (a) Se  $x_{t_1}, \dots, x_{t_n}$  são vetores distintos e  $a_1 x_{t_1} + \dots + a_n x_{t_n} = 0$ , então

$$a_1(t_1, t_1^2, \dots) + a_2(t_2, t_2^2, \dots) + \dots + a_n(t_n, t_n^2, \dots) = 0.$$

Logo

$$\begin{cases} t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n = 0 \\ \vdots \\ t_1^n a_1 + t_2^n a_2 + \dots + t_n^n a_n = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Para que o sistema infinito tenha solução, em particular as  $n$  primeiras igualdades devem ser satisfeitas. Vejamos que não há solução não-trivial para o sistema formado pelas  $n$  primeiras igualdades (note que as variáveis são  $a_1, \dots, a_n$ ). Só haveria solução não-trivial se

$$\det \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} = 0.$$

Mas

$$\det \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} = t_1 \cdots t_n \det \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

é não-nulo, pois é um determinante de Vandermonde com  $t_1, \dots, t_n$  distintos.

(b) Lembre-se que a dimensão de um espaço vetorial é a cardinalidade de alguma de suas bases de Hamel (todas as bases de Hamel de um mesmo espaço vetorial têm a mesma cardinalidade). Do item (a) segue que  $\dim(\ell_p) \geq \text{card}(\mathbb{R})$  e use que  $\text{card}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) = \text{card}(\mathbb{R})$ .

• Exercício 10.6.30(f). Para cada  $x \in E$  e  $j$  natural, defina  $e_j(x) = (0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ , onde  $x$  aparece na  $j$ -ésima coordenada. Se  $\mathcal{A}$  é base de Hamel de  $E$ , mostre que  $\mathcal{B} = \{e_j(x) : j \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathcal{A}\}$  é base de Hamel de  $c_{00}(E)$ . Conclua que  $\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathbb{N}) \cdot \text{card}(\mathcal{A})$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] M. D. Acosta, A multilinear Lindenstrauss Theorem, *J. Funct. Anal.* **235** (2006), 122–136.
- [2] F. Albiac e N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 2005.
- [3] G. R. Allan, *Introduction to Banach Spaces and Algebras*, Oxford Graduate Texts in Mathematics **20**, Oxford University Press, 2011.
- [4] S. Argyros e R. Haydon, A hereditarily indecomposable  $\mathcal{L}_\infty$ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Math.* **206** (2011), 1–54.
- [5] A. Azevedo, Grothendieck no Brasil, *Matemática Universitária* **44** (2008), 39–42.
- [6] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.* **3** (1922), 133–181.
- [7] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warsaw, 1932.
- [8] C. Bessaga e A. Pełczyński, On basis and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.* **17** (1958), 151–164.
- [9] R. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library, 1995.
- [10] G. Botelho e D. Pellegrino, Os problemas da base incondicional e do espaço homogêneo, *Matemática Universitária* **40** (2006), 7–20.
- [11] N. Bourbaki, *Topological Vector Spaces*, Chapters 1–5, *Elements of Mathematics*, Springer-Verlag, 1987.
- [12] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [13] D. Carando, D. García e M. Maestre, Homomorphisms and composition operators on algebras of analytic functions of bounded type, *Adv. Math.* **197** (2005), 607–629.

- [14] N. L. Carothers, A short course on Banach space theory, London Mathematical Society Student Texts 64, Cambridge University Press, 2005.
- [15] K. Ciesielski, On Stefan Banach and some of his results, Banach J. Math. Anal. **1** (2007), 1–10.
- [16] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, Curso de Álgebra Linear, 2a. Edição, EdUSP, 2005.
- [17] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd Ed., Springer, 1990 (Corrected fourth printing, 1997).
- [18] C. A. Di Prisco, Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas, Coleção CLE-UNICAMP, Volume 20, Campinas, 1997.
- [19] J. Diestel, Sequences and series in Banach spaces, Springer, 1984.
- [20] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1995.
- [21] J. Diestel e J. J. Uhl, Vector Measures, American Mathematical Society Mathematical Surveys **15**, American Mathematical Society, 1977.
- [22] U. Dini, Sui prodotti infiniti, Annali di Matem. **2** (1868), 28–38.
- [23] D. Diniz, Aplicações entre espaços de Banach que atingem a norma, Anais das Jornadas de Iniciação Científica do IMPA (2004), 448–477.
- [24] R. Duda, The discovery of Banach spaces, *in*: European mathematics in the last centuries (W. Wieslaw, ed.), Wroclaw (2005), 37–46.
- [25] N. Dunford e J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I, Interscience, New York and London, 1958.
- [26] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Santalucía, J. Pelant e V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CBS Books in Mathematics, Springer Verlag 2001.
- [27] M. Feinberg e R. Lavine, Thermodynamics based on the Hahn–Banach theorem: The Clausius inequality, Arch. Rat. Mech. and Anal. **82** (1983), 203–293.
- [28] H. Fetter e B. Gamboa, The James forest, London Mathematical Society Lecture Notes Series, 236, 1997.
- [29] D. G. Figueiredo, Lectures on the Ekeland Variational Principle with applications and detours, Springer Verlag, 1989.
- [30] D. G. Figueiredo, Análise I, 2a. Ed., LTC Editora, 1996.



- [31] G. B. Folland, Real Analysis, modern techniques and their applications, John Wiley & Sons, 1984.
- [32] D. J. H. Garling, Inequalities: a journey into linear analysis, Cambridge University Press, 2007.
- [33] B. R. Gelbaum, Notes on Banach spaces and bases, An. Acad. Bras. Cienc. **30** (1958), 29–36.
- [34] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 2001.
- [35] K. Goebel e W. A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28, Cambridge, 1990.
- [36] W. T. Gowers, Decompositions, approximate structure, transference, and the Hahn–Banach theorem, Bull. London Math. Soc. **42** (2010), 573–606.
- [37] A. Granas e J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.
- [38] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8** (1953), 1–79.
- [39] J. Hennefeld, A Nontopological Proof of the Uniform Boundedness Theorem, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 217.
- [40] C. S. Hönic, Análise Funcional e Aplicações, Vol. I, Publicações do IME-USP, 1970.
- [41] C. S. Hönic, Análise Funcional e Aplicações, Vol. II, Publicações do IME-USP, 1970.
- [42] R. C. James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 174–177.
- [43] R. C. James, Weak compactness and reflexivity, Israel J. Math. **2** (1964), 101–119.
- [44] H. Jarchow, Locally convex spaces, Teubner, Stuttgart, 1981.
- [45] W. B. Johnson e J. Lindenstrauss (editores), Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 1, North-Holland, 2001.
- [46] W. B. Johnson e J. Lindenstrauss (editores), Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 2, North-Holland, 2003.
- [47] V. M. Kadets, On a problem of Banach, "Problem 106 in the Scottish Book", Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 317–319.

- [48] N. Kalton, Quasi-Banach spaces, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 2, pp. 1099-1130, North-Holland, 2003.
- [49] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley Classics Library Edition, 1989.
- [50] S. Lang, Real and Functional Analysis, Springer Verlag 1993.
- [51] P. Lévy, Sur les séries semi-convergentes, Nouv. Ann. de Math. **64** (1905), 506–511.
- [52] D. Li e H. Queffélec, Introduction à l'étude des espaces de Banach, Analyse et probabilités, Cours Spécialisés 12, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [53] E. L. Lima, Espaços Métricos, Projeto Euclides.
- [54] E. L. Lima, Curso de Análise Vol. 1, Projeto Euclides.
- [55] E. L. Lima, Curso de Análise Vol. 2, Projeto Euclides.
- [56] E. L. Lima, Álgebra Linear, IMPA.
- [57] E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- [58] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in  $\mathcal{L}_p$  spaces and their applications, Studia Math. **29** (1968), 275–326.
- [59] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, On the complemented subspace problem, Israel J. Math. **9** (1971), 263–269.
- [60] E. Llorens Fuster, Análisis Funcional No Lineal: Una Introducción, Valencia, 1999.
- [61] M. C. Matos, Notas de Aula de Análise Funcional.
- [62] R. Maudlin, The Scottish Book, Birkhauser-Verlag, Boston-Basel-Stuttgart 1981.
- [63] R. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, Graduate Texts in Mathematics 183, Springer, 1998.
- [64] J. Mujica, Notas de Aula de Análise Funcional.
- [65] F. J. Murray, On complementary manifolds and projections in spaces  $L_p$  and  $\ell_p$ , Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 138–152.
- [66] L. Nachbin, A theorem of Hahn–Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 28–46.
- [67] L. Narici e E. Beckenstein, The Hahn–Banach theorem: the life and times, Topology and its Applications **77** (1997), 193–211.

- [68] L. Narici e E. Beckenstein, Topological vector spaces, 2a. edição, CRC Press, 2011.
- [69] J. von Neumann, The mathematician. In: The works of the mind, R. B. Heywood (ed.), Chicago Univ. Press, 1947, 180–196.
- [70] C. R. Oliveira, Introdução à Análise Funcional, Projeto Euclides, IMPA, 2010.
- [71] A. Pełczyński, A note on the paper of I. Singer “Basic sequences and reflexivity of Banach spaces”, *Studia Math.* **21** (1962), 371–374.
- [72] R. S. Phillips, On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **48** (1940), 516–541.
- [73] A. Pietsch, History of Banach spaces and linear operators, Birkhäuser, 2007.
- [74] G. Pisier, Grothendieck’s Theorem, past and present, *Bulletin of the American Mathematical Society*, a aparecer (disponível em arXiv:1101.4195v, 2011).
- [75] D. P. Pombo Jr, Introdução à Análise Funcional, EdUFF, 1999.
- [76] S. Ponnusamy, Foundations of Functional Analysis, Alpha Science International Ltd., 2002.
- [77] B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, *Habilitationsschrift Universität Göttingen* (1854) (DoverPubl. 1953).
- [78] H. L. Royden, Real Analysis, 3a. Edição, Macmillan Publishing Company, 1989.
- [79] W. Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill Publising, Company, 1976.
- [80] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill Book Company, 1986.
- [81] K. Saxe, Beginning Functional Analysis, Springer, 2002.
- [82] H. H. Schaefer, Espacios vectoriales topológicos, Editorial Teide, Barcelona, 1974.
- [83] G. Simmons, Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, 1963.
- [84] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, 1998.
- [85] V. A. Trenoguin, B. M. Pisarievski, T. S. Sóboleva, Problemas y ejercicios de Análisis Funcional, Editora Mir Moscú, 1987.
- [86] E. Teixeira, Strong solutions for differential equations in abstract spaces, *J. Differential Equations* **214** (2005), 65–91.
- [87] D. van Dulst, Reflexive and superreflexive Banach spaces, spaces, *Mathematical Centre Tracts* 102, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.
- [88] D. Werner, Funktionalanalysis, Springer, 1997.

- [89] I. F. Wilde, Functional Analysis (TVS version), Notes, King's College, London.
- [90] S. Willard, General Topology, Dover Publications, 2004.

# Índice Remissivo

- $\sigma$ -álgebra, 265
- $p$ -norma, 182
- adjunto, 69
- Alternativa de Fredholm, 144
- anulador, 60
- aplicação
  - aberta, 32
  - bilinear, 31
  - completamente contínua, 189
  - demicontínua, 189
  - quociente, 39
  - sequencialmente fracamente contínua, 189
- autoespaço, 134
- autovalor, 134
- autovetor, 134
- base
  - algébrica ou de Hamel, 256
  - de espaço topológico, 261
  - de Schauder, 233
  - de vizinhanças, 261
  - equivalente, 237
- cópia
  - isométrica, 68
  - isomorfa, 68
- coeficiente de Fourier, 97
- complemento ortogonal, 82
- conjunto
  - absolutamente convexo, 184
  - absorvente, 163
  - compacto, 259
  - convexo, 21
  - de Borel ou boreliano, 265
  - dirigido, 263
  - equilibrado, 163
  - mensurável, 265
  - normante, 242
  - ortonormal, 85
  - parcialmente ordenado, 255
  - resolvente, 135
  - totalmente ordenado, 255
- constante
  - da base, 237
  - de Grothendieck, 230
- contração, 194
- convergência em medida, 268
- cota superior, 255
- critério de Banach-Grumblum, 239
- cubo de Hilbert, 23
- decomposição espectral de operadores compactos e autoadjuntos, 152
- delta de Kronecker, 85
- desigualdade
  - de Bessel, 87
  - de Cauchy-Schwarz, 78
  - de Clarkson
    - primeira, 126
    - segunda, 126
  - de Grothendieck, 228
  - de Hölder generalizada, 22
  - de Hölder para integrais, 6
  - de Hölder para sequências, 12
  - de Hölder recíproca, 23
  - de Minkowski para integrais, 7
  - de Minkowski para sequências, 12

- de Young, 18
- do valor médio, 205
- difeomorfismo, 212
- elemento maximal, 255
- envoltória convexa, 21
- espaço
  - $L_\infty$ , 9
  - $L_p$ , 6
  - $\ell_\infty$ , 12
  - $\ell_p$ , 11
  - $c_o$ , 5
  - $c_{00}$ , 6
  - bidual, 67
  - com deficiência finita, 40
  - com produto interno, 78
  - compactamente imerso, 190
  - completamento do, 68
  - das funções Lipschitz contínuas, 19
  - de Banach, 2
  - de funções contínuas, 3
  - de funções continuamente diferenciáveis, 3
  - de Hausdorff, 263
  - de Hilbert, 80
  - de James, 72
  - de medida, 267
  - de operadores lineares contínuos, 24
  - de Schur, 128
  - dual, 24
  - estritamente convexo, 133
  - fracamente compactamente gerado, 132
  - fracamente sequencialmente completo, 132
  - localmente convexo, 167
  - métrico, 258
  - mensurável, 265
  - metrizável, 260
  - normado, 1
  - produto, 20
  - quociente, 21
  - reflexivo, 68
  - separável, 15
  - topológico, 260
  - uniformemente convexo, 122
  - vetorial topológico, 160
- espaços
  - isomorfos, 24
  - isomorfos isometricamente, 24
- espectro, 135
- fórmula de polarização
  - caso complexo, 80
  - caso real, 80
- função
  - Bochner-integrável, 208
  - característica, 267
  - coerciva, 192
  - convexa, 192
  - de Rademacher, 101
  - Fréchet-diferenciável, 202
  - integrável, 269
  - limitada, 2
  - limitada quase sempre, 9
  - lipschitziana, 25
  - mensurável, 266
  - simples, 267
  - separadamente contínua, 31
  - uniformemente contínua, 25
  - uniformemente convexa, 192
- funcional
  - de Minkowski, 54
  - linear contínuo, 24
- gráfico, 34
- hiperplano, 52
  - afim, 53
- homeomorfismo, 262
- homotetia, 163
- identidade de Parseval, 89
- integral, 268
- isometria linear, 24
- isomorfismo, 24
- isomorfismo isométrico, 24

- lei do paralelogramo, 80
- lema
  - de Fatou, 269
  - de Helly, 116
  - de Riesz, 14
  - de Zorn, 255
- métrica, 258
- medida, 267
  - $\sigma$ -finita, 267
  - finita, 267
- melhor aproximação, 86
- mergulho canônico, 67
- norma, 1
  - induzida pelo produto interno, 78
  - Lipschitz, 188
- normas equivalentes, 20
- operador
  - diagonal, 28
  - multiplicação, 28
- operador linear
  - $\varphi \otimes y$ , 27
  - absolutamente somante, 230
  - adjunto de, 69
  - autoadjunto, 147
  - compacto, 137
  - contínuo, 24
  - de posto finito, 40
  - imagem de, 39
  - integral, 138
  - limitado, 26
  - núcleo de, 39
  - norma de, 27
  - normal, 158
  - positivo, 158
  - que atinge a norma, 36
  - simétrico, 36
  - unitário, 158
- operador não-linear
  - compacto, 197
  - de substituição ou de Nemytskii, 188
- ordem parcial, 255
- princípio
  - da limitação uniforme, 36
  - de seleção de Bessaga–Pełczyński, 246
- processo de ortogonalização de Gram–Schmidt, 91
- produto interno, 77
- projeção, 47
  - canônica, 237
  - ortogonal, 83
- propriedade da aproximação, 154
- rede, 263
  - convergente, 263
  - de Cauchy, 123
- regra da cadeia, 204
- série
  - absolutamente convergente, 218
  - convergente, 87
  - incondicionalmente convergente, 87
- Scottish book, 250
- seminorma, 171
- sequência
  - básica, 238
  - de blocos básica, 244
  - fracamente de Cauchy, 132
  - fracamente somável, 230
- sistema ortonormal completo, 85
- subespaço complementado, 48
- teorema
  - da Aplicação Aberta, 33
  - da aproximação de Weierstrass, 17
  - da convergência dominada, 270
  - da convergência monótona, 269
  - da função inversa, 213
  - da mensurabilidade de Pettis, 207
  - da projeção ortogonal, 81
  - da regularidade de Schauder, 19
  - da representação de Riesz, 64
  - de Ascoli, 259
  - de Baire, 29
  - de Banach–Alaoglu–Bourbaki, 114
  - de Banach–Mazur, 121

de Banach–Mazur, Bessaga–Pelczyński, Gelbaum, 248  
 de Banach–Steinhaus, 29  
 de Bessaga–Mazur, 243  
 de Bessaga–Pelczyński, 245  
 de Bishop–Phelps, 36  
 de Cauchy–Picard, 196  
 de Dixmier, 75  
 de Dvoretzky–Rogers, 226  
 de Eberlein–Smulian, 129  
 de Goldstine, 117  
   caso complexo, 181  
 de Grothendieck, 231  
 de Hahn–Banach  
   caso complexo das formas geométricas, 62  
   caso real, 43  
   casos real e complexo, 45  
   forma geométrica para espaços localmente convexos, 179  
   para espaços localmente convexos, 176  
   primeira forma geométrica, 56  
   segunda forma geométrica, 56  
 de Hellinger–Toeplitz, 99  
 de Josefson–Nissenzweig, 129  
 de Kakutani, 118  
 de Krein–Milman–Rutman, 254  
 de Mazur, 109  
 de Milman–Pettis, 123  
 de Peano, 201  
 de Phillips, 49  
 de Pitágoras, 81  
 de Radon–Nikodým, 269  
 de Riesz–Fischer, 93  
 de Riesz–Fréchet, 95  
 de Schauder, 140  
 de Schur, 110  
 de Sobczyk, 61  
 de Tychonoff, 264  
 do Gráfico Fechado, 35  
 do isomorfismo, 39  
 do ponto fixo  
   de Banach, 194  
   de Brouwer, 199  
   de Schauder, 200  
   espectral para operadores compactos e autoadjuntos, 152  
   topologia, 260  
   da convergência em medida, 186  
   da convergência pontual, 174  
   determinada ou gerada por uma família de seminormas, 172  
   fraca, 105  
   fraca-estrela, 111  
   gerada por uma família de funções, 104  
   produto, 264  
   traço, 222  
   translação, 163  
   valor regular, 135  
   vetores ortogonais, 81  
   vizinhança, 260



