Lista 4: pontos críticos e otimização

1 de abril de 2025

1. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ seus autovalores. Mostre que A é definida positiva (resp. definida negativa) se, e somente se, $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) para todo $i = 1, \ldots, n$.

2. Seja $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Mostre que a origem é um ponto crítico degenerado. Mostre que a restrição de f a qualquer reta pela origem tem mínimo local na origem, mas a origem *não* é um mínimo local de f. [Dica: considere os conjuntos onde $f > 0$ e $f < 0$.]

3. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $f \in C^2(U)$ e $p \in U$ um ponto crítico de f. Sejam $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)$ e $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)$. Mostre que:

   (a) Se $ac - b^2 < 0$, então p é um ponto de sela de f.

   (b) Se $ac - b^2 > 0$ e $a > 0$, então p é um ponto de mínimo local de f.

   (c) Se $ac - b^2 > 0$ e $a < 0$, então p é um ponto de máximo local de f.

   O que você pode dizer sobre o caso $ac - b^2 = 0$?

4. Determine os extremos locais e globais de $f(x, y) = xy - xy^2 + x^2y$.

5. Estude os pontos críticos de $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$ e determine se f tem extremos locais ou globais.

6. (Qualificação 2006, 2013) Seja $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ o espaço das matrizes reais $n\times n$. Mostre que o máximo da função $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det(x)$ restrita à esfera $\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2 = n$ é atingido por uma matriz ortogonal e vale 1.

7. (Qualificação 2010, 2013)

   (a) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Dizemos que um ponto crítico $a \in U$ é *não-degenerado* quando a matriz hessiana de f em a é invertível. Mostre que, se $a \in U$ é um ponto crítico não-degenerado, então a é um ponto crítico isolado.[1]

   (b) Mostre que a recíproca do resultado contido no item anterior é falsa, mesmo no caso em que f não é constante.

8. (Qualificação 2012) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo.

   (a) Mostre que, se f é convexa de classe C^2, então sua forma quadrática hessiana é não-negativa em todos os pontos de U (isto é, $\langle Hf(x)v, v\rangle \geq 0$ para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$). [Sugestão: considere a função $\varphi(t) = f(x + tv)$ com $x \in U$, $x + v \in U$ e $t \in [0, 1]$. Depois, use o fato que, no caso $n = 1$ e f de classe C^2, ser convexa é equivalente a $f''(t) \geq 0$ para todo t em U.]

   (b) Mostre que, se f é convexa e de classe C^2, então todo ponto crítico de f é um ponto de mínimo global.

[1] Dica (não estava na qualificação): obtenha primeiro a equação $\nabla f(a + v) = Hf(a)v + o(\|v\|)$, quando $v \to 0$.

9. (Qualificação 2009) Seja Ω um aberto convexo em $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, estritamente convexa em Ω, isto é, uma função cuja hessiana é definida positiva em todo ponto de Ω. Mostre que a aplicação $\nabla F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é injetiva.

10. Determine os extremos locais da função $f(x, y, z) = x \ln(x) + y \ln(y) + z \ln(z)$ restrita ao plano $x+y+z = 2025$.

11. (Qualificação 2018) Seja $S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ a esfera de raio r centrada na origem.
    (a) Calcule o maior valor da função $f(x) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ com $x \in S(0, r)$.
    (b) Mostre que, se a, b, c são números reais não-negativos, então $(abc)^{1/3} \leq (a + b + c)/3$.

12. (Qualificação 2019) Dados $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ positivos tais que $1/p + 1/q = 1$, sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}, \qquad g(x, y) = xy.$$

    (a) Sejam $c > 0$ (uma constante positiva arbitrária) e (x_c, y_c) o ponto de mínimo da função f restrita à curva definida pela equação $g(x, y) = c$. Usando multiplicadores de Lagrange, mostre que $x_c^p = y_c^q$.
    (b) Usando o item anterior, mostre que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ para todos $x, y \geq 0$.

13. (Qualificação 2023) Ache os valores máximo e mínimo de z onde (x, y, z) satisfazem aos vínculos $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ e $x + y + 2z = 0$.

14. Determine os extremos locais da função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada pelo produto interno euclidiano $f(x, y) = \langle x, y \rangle$, restrita à esfera unitária $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$. Deduza a desigualdade de Schwarz.