Analysis in $\mathbb{R}^n$
IMECC

5th list of exercises
April 29^{th}, 2024

Student: Jaider Torres **RA:** 241343

Q2. a. Sejam $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixo e $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $t \mapsto (tx, ty)$. Note que $h = f \circ \lambda$ pois $h(t) = f(\lambda(t)) = f(tx, ty)$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial p}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(x,y)) - f(0,0)}{t}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \|p\| g\left(\frac{t}{|t|}\frac{p}{\|p\|}\right).$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^-} \frac{|t|}{t} \|p\| g\left(\frac{t}{|t|}\frac{p}{\|p\|}\right) &= -\|p\| g\left(-\frac{p}{\|p\|}\right) \\
&= -\|p\| g\left(-\frac{p}{\|p\|}\right) \\
&= \|p\| g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) \\
&= f(x, y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \|p\| g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) &= \|p\| g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) \\
&= f(x, y),
\end{aligned}$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial p}(0,0) = h'(0) = f(x,y).$$

Note que essa relação vale para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Isso prova que h é diferenciável no $t = 0$. Agora, veja que

$$\begin{aligned}
h(t) &= \begin{cases} t\|p\|g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) & \text{para } t > 0 \\ -t\|p\|g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) & \text{para } t < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} tf(p) & \text{para } t \neq 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{dh}{dt}(a) = f(x, y)$ para cada $a \neq 0$ e portanto $\frac{dh}{dt}(a) = f(x, y)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Logo, h é diferenciável.

b. Temos pelo item anterior que $\frac{\partial f}{\partial p}(0,0) = f(x, y)$ para cada $\mathbf{0} \neq p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Lembre que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e $p, q \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial(\alpha p)}(q) = \alpha\frac{\partial f}{\partial p}(q)$, sempre que $\frac{\partial f}{\partial p}$ exista no punto $q \in \mathbb{R}^2$, onde $p \neq \mathbf{0}$.

Suponha que $g \not\equiv 0$ (i.e., $f \not\equiv 0$). Seja $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(p) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
0 \neq \frac{\partial f}{\partial p}(0,0) &= f(p) \\
&\neq x\frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) \\
&= xf(1,0) + yf(0,1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, f não é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

Q3. Defina $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ por $(x,y) \mapsto x|y|$. Note que g é contínua já que x e $|y|$ são funções contínuas (produto de campos escalares contínuos é contínuo). Além disso, $g(e_1 = g(e_2) = 0$ e $g(-(x,y)) = -x|y| = -g(x,y)$, para cada $(x,y) \in \mathbb{S}^1$. Seja $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Note que

$$\begin{aligned} \|p\| g\left(\frac{p}{\|p\|}\right) &= \|p\| \frac{x}{\|p\|} \frac{|y|}{\|p\|} \\ &= \frac{x|y|}{\|p\|} \\ &= \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(p) = \begin{cases} \|p\| g\left(\frac{p}{\|p\|}\right), & \text{para } p \neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{para } p = \mathbf{0} \end{cases},$$

i.e., f tem a mesma estrutura da função na questão 2 e portanto f não é diferenciável no ponto $p = \mathbf{0}$.

Q6. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e convexo e $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(q)$ existe para cada $q \in U$. Suponha que $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq M_0$. Queremos provar que

$$|f(x) - f(y)| \leq m M_0 \|x - y\|_E,$$

para cada $x, y \in U$.

Sejam $x, y \in U$, onde $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Defina $\{v_i\}_{i \in [m+1]} \subset U$ como $v_1 = x$, $v_{m+1} = y$ e

$$v_i = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

para cada $i = 2, \ldots, m$. Note que é possível escrever $f(x) - f(y)$ como a soma telescópica

$$f(x) - f(y) = \sum_{i \in [m]} f(v_i) - f(v_{i+1}).$$

Denote $U_i := \pi_i(U) \subseteq \mathbb{R}$ e considere $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ por $t \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_m)$. Como U é aberto e convexo, U_i é aberto e conexo. Como f é diferenciável, temos que f_i é diferenciável em U_i. Usando o Teorema de Valor Medo, exite $c_i \in U_i$ tal que

$$f_i'(c_i) = \frac{f_i(b_i) - f_i(a_i)}{b_i - a_i},$$

onde $a_i, b_i \in U_i$ são os extremos do intervalo U_i. Suponha que $a_i = x_i$ e $b_i = y_i$ para cada $i \in [m]$. Então

$$\sum_{i \in [m]} f(v_i) - f(v_{i+1}) \leq \sum_{i \in [m]} (x_i - y_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{c_i}),$$

onde $\overline{c_i}$ é o vetor com c_i na $i-$ésima entrada e o resto deles como v_i. Note que cada $v_i \in U$ pois U é convexo e assim $\overline{c_i} \in U$, i.e., a expressão anterior faz sentido.

Logo, temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_{i \in [m]} f(v_i) - f(v_{i+1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i \in [m]} (x_i - y_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{c_i}) \right| \\ & \left| \left\langle x - y, \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{c_1}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\overline{c_m}) \right) \right\rangle \right| \\ &\leq \|x - y\|_E \sqrt{\sum_{i \in [m]} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{c_i}) \right)^2} \\ &\leq \|x - y\|_E \sqrt{m M_0^2} \\ &\leq m M_0 \|x - y\|_E. \end{aligned}$$

Assim, f é Lipschitz em U pois dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{nM_0}$, para cada $x, y \in U$ tais que $\|x-y\|_E < \delta$, temos que

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq nM_0\|x-y\|_E \\ &< nM_0\delta \\ &= nM_0\frac{\varepsilon}{nM_0} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Contudo, se $U \in \tau_{\mathbb{R}^m}$ não é convexo, esto não é necessariamente satisfeito. Por exemplo, seja $X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, denote $U = \mathbb{R}^2 \backslash X$ e defina $f : U \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \text{e } y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Seja $V = \{z \in U : \|z\| < 2\}$ e considere $g = f|_U$. Assim, $|Dg(z)| \leq \max\limits_{\substack{\|z\|<2 \\ 1 \leq i \leq 2}} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right| \leq 4$ para cada $z \in V$.

Mas, seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Temos que

$$\begin{aligned}|g(1,\varepsilon) - g(1,-\varepsilon)| &= |1-0| \\ &= 1,\end{aligned}$$

enquanto $\|(1,\varepsilon) - (1,-\varepsilon)\| = 2\varepsilon$. Isso implica que f não é Lipschitz pois não existe uma constante de Lipschitz universal.

Q7. Como f é contínua, temos que, para cada $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, f tem um mínimo em algum ponto de A. Assim, $f|_{B[0,1]}$ tem um mínimo em algum $p \in B[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\}$. Vamos provar que $p \in B(0,1)$. Seja $\lambda : (1-\varepsilon, 1) \to B[0,1]$ definida por $t \mapsto v - tv$, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeno. Suponha por contradição que $p \in S^{m-1}$. Seja $a = f(p)$. Como $\frac{\partial f}{\partial v}(v) > 0$ para cada $v \in \mathbb{S}^{m-1}$, temos que $f(u - ut_0) < a$ para algum $t_0 \in (1-\varepsilon, 1)$, pois f próximo a $v \in \mathbb{S}^{m-1}$ tem o maior crescimento ao longo da $\lambda((1-\varepsilon,1))$ em $v \in \mathbb{S}^{m-1}$. Isso contradiz a escolha de p. Logo, f tem seu mínimo em $B(0,1)$. Neste ponto, por ser um mínimo, todas as derivadas direcionais em direção a $v \in \mathbb{S}^{m-1}$ são 0.

Mas formalmente, seja $\lambda : [0,1] \to R^m$ definida por $t \mapsto (1-2t)u$, onde $u \in \mathbb{S}^{m-1}$ é fixo pero arbitrário. Seja $h = f \circ \lambda$. Note que h é contínua em $[0,1]$ pois é a composição de funções contínuas. Como $\frac{\partial f}{\partial v}(u)$ existe para cada $u \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, temos que h é diferenciável. Explicitamente, seja $t \in (0,1)$. Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} \frac{h(t+s) - h(t)}{s} &= \lim_{s\to 0} \frac{f((1-2(t+s))u) - f((1-2t)u)}{s} \\ &= -2\lim_{r\to 0} \frac{f((1-2t)u + ru) - f((1-2t)u)}{r} \\ &= -2\frac{\partial f}{\partial u}((1-2t)u)\end{aligned}$$

existe para todo $t \in [0,1]$. Note que $h'(0) = -2\frac{\partial f}{\partial u}(u) < 0$ e $\frac{\partial f}{\partial(-u)}(-u) = -\frac{\partial f}{\partial u}(-u) > 0$, para cada $u \in \mathbb{S}^{m-1}$, e assim $h'(1) = -2\frac{\partial f}{\partial u}(-u) > 0$. Então, pelo teorema do valor médio, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h'(t_0) = 0$ e portanto $c_0 = h(c_0)$ é um mínimo pela definição da f. Isso prova que qualquer ponto $u \in \mathbb{S}^{m-1}$ não é um mínimo da f em $B[0,1]$. Logo, o mínimo da f é um ponto interior, i.e., um elemento de $B(0,1)$.

Obs: Note que no exercício anterior, a existência das derivadas direcionais em cada ponto e cada direção garantis a diferenciabilidade das f_i e portanto a hipótese da diferenciabilidade da f pode ser removida.

Q8. Sejam $x_0 \in U$ um máximo de f e considere $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ definida por $t \mapsto x_0 + tv$, para algum $v \in \mathbb{R}^m$ não nulo tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ exista. Defina $h = f \circ \lambda$. Note que

$$\begin{aligned}|h(0)| &= |f(x_0)| \\ &\geq |f(x_0 + tv)| \\ &= |h(t)|,\end{aligned}$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Assim, h tem um máximo em $t = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = h'(0) = 0.$$

Q9. a. Seja $f : \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ positivamente homogênea de grau $k > 0$. Note que

$$f\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^k f\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Como $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^{m-1}$ para cada $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, temos que f é determinada por seus valores na esfera $\mathbb{S}^{m-1}$.

Assim, dada $g_{\mathbb{S}}^{m-1} \to \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = \|x\|^k g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

é uma função positivamente homogênea de grau $k > 0$ determinada por g. Cada propriedade que a função $g : \mathbb{S}^{m-1} \to R$ possui, f possui sempre que usamos uma norma em $\mathbb{R}^m$ conveniente. Usando a norma Euclidiana, temos que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}, \mathbb{R})$ se e somente se $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{m-1}, \mathbb{R})$.

Assim, seja $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{m-1}, (0\infty))$ e defina

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^+ &\to \mathcal{C}(\mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}, \mathbb{R}^+) \\ k &\mapsto f : \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^+ \\ &\qquad x \mapsto f(x) = \|x\|^k g\left(\frac{x}{\|x\|}\right). \end{aligned}$$

Se $k \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, f não pode ser um polinômio. Se $k \in \mathbb{N}$, escolha g de tal maneira que $g(p) \neq g(p)$, para algum $p \in \mathbb{S}^{m-1}$. Então $g^{(n)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{m-1}, \mathbb{R}^+)$ e $g^{(n)}(p) \neq g^{(n)}(-p)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo g não pode ser escrito como sua expansão de Taylor em finitos termos. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{m-1}, \mathbb{R}^+)$ tal que $\Psi(k)$ não é um polinômio.

b. ($\Rightarrow$) Suponha que f é diferenciável em $U \in \tau_{\mathbb{R}^m}$ conexo e é positivamente homogênea de grau $k > 0$. Então para cada $t > 0$ temos que $t^k f(x) = f(tx)$, para cada $x \in U$. Diferenciando com repeito a t nesta expressão, temos que

$$kt^{k-1} f(x) = \sum_{i \in [m]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda(t)) \cdot \lambda_i'(t),$$

onde $\lambda : (0, \infty) \to U$ é definida por $t \mapsto tx$.

Então,

$$\lim_{t \to 1} kt^{k-1} f(x) = \lim_{t \to 1} \sum_{i \in [m]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda(t)) \cdot \lambda_i'(t)$$

e assim

$$\begin{aligned} kf(x) &= \sum_{i \in [m]} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\lim_{t \to 1} \lambda(t)\right) \cdot x_i \\ &= \sum_{i \in [m]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Suponha que

$$kf(x) = \sum_{i \in [m]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i, \tag{1}$$

onde $k > 0$.

Como $U \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, para cada $x \in U$ existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Seja $g : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to U$ definida por $t \mapsto tx$. Note que g esta bem definida. Então a equação (1) da hipótese implica que $\sum_{i \in [m]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot (tx_i) = t(f \circ g)'(t) = kf(tx) = k(f \circ g)(t)$. Denotando $h = f \circ g$, temos a equação diferencial $th'(t) = kh(t)$, que é uma equação diferencial de variáveis separáveis. Escrevendo $\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{k}{t}$, temos a expressão $\int \frac{h'(t)}{h(t)} dt = k \int \frac{1}{t}$. Escrevendo $u = h(t)$, e assim $du = h'(t)dt$, temos $\int \frac{du}{u} = k \ln(t)$ e logo $u = h(t) = c_1 t^k$. Como $h(1) = f(x)$, temos que $c_1 = h(1)$. Logo, a a solução é $h(t) = h(1)t^k$. Como $t \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, de (1) temos que

$$f(tx) = h(t) = t^k h(1) = t^k f(x).$$

Esta é uma equação diferencial parcial que em termos de h é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Fazendo algumas considerações, obtemos que h pode ser estendido de forma única a todos os valores positivos de t tais que $tx \in U$ para cada $x \in U$, pelo teorema de existência e unicidade.

c. Note que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é positivamente homogênea de grau $k = 1$ pois, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, temos que $f(t \cdot (x, y)) = t^1 f(x, y)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Explicitamente, temos que f satisfaz a relação de Euler: veja que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + x^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y &= \frac{x^5 + 3x^3y^2 - 2y^2x^3}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^5 + x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^3}{x^2 + y^2} \\
&= f(x, y).
\end{aligned}$$

Agora, para $(x, y) \neq (0, 0)$, note que,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \cos(\theta) \sin(\theta),$$

onde θ é o angulo entre (x, y) é o semieixo $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\}$.

Assim, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y} \cos(\theta) \sin(\theta)$ não existe pois

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x,0)} f(x, y) = 0 \text{ e} \\
&\lim_{(x,y)\to(0,y)} f(x, y) = \pm\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, f não é contínua no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

d. Note que, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, temos que

$$f(tx) = t^{2k}\langle x, x\rangle = t^{2k}\|x\|^{2k}.$$

Logo, f é positivamente homogênea de grau $2k$.

Também, veja que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2kx_i \left(\sum_{i\in[n]} x_i^2\right)^{k-1}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in[n]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i &= \sum_{i\in[n]} 2kx_i^2\langle x, x\rangle^{k-1} \\
&= 2k\langle x, x\rangle^{k-1} \sum_{i\in[n]} x_i^2 \\
&= 2k\langle x, x\rangle^{k-1}\langle x, x\rangle \\
&= 2k\langle x, x\rangle \\
&= 2kf(x).
\end{aligned}$$

Q10. Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa no aberto e conexo U. Vamos escrever $f = u + iv$. Como f é holomorfa, tomando $z = x + iy$, temos que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, i.e., $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Como $v|_U(z) = 0$ para cada $z \in U$, temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

e assim $u(z) = c$, para todo $z \in U$ e alguma constante $c \in \mathbb{R}$, pois U é conexo.