Lista 3: desigualdade do valor médio e fórmulas de Taylor

26 de março de 2025

1. Seja $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Lembremos que a *norma de operador* de ℓ é definida por
$$\|\ell\| = \sup\{\|\ell v\| : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\}.$$
Mostre que, se $w \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\ell(v) = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, então $\|\ell\| = \|w\|$. Conclua que, se f é uma função diferenciável em p, então $\|df(p)\| = \|\nabla f(p)\|$.

2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C^1(U)$. Mostre que, se $K \subset U$ é compacto e convexo, então a restrição de f a K é uma função de Lipschitz.

3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Mostre que, se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e de Lipschitz em U, então a função
$$U \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|df(x)\|$$
é limitada.

4. (Qualificação 2012, 2013, 2015) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que, se $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| \leq M$, para todo $x \in U$ e $i = 1, \dots, n$, então $f(\Omega)$ é limitado quando $\Omega \subset U$ é limitado e convexo.

5. Mostre que o teorema de Schwarz, visto em aula para funções de classe C^2, vale mais geralmente para funções duplamente diferenciáveis. (Ver [1, §3.7].)

6. Sea $k \geq 1$ um inteiro. Mostre que, se f é k vezes diferenciável em p, então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, vale
$$d^k f(p) v^{\otimes k} = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p) v^\alpha,$$
onde $\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$.

7. Mostre que, se $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha x^\alpha$ é uma função polinomial que se anula em uma vizinhança da origem, então $c_\alpha = 0$ para todo α.

8. Um teorema visto em aula afirma que, se f é k vezes diferenciável e se anula à ordem $k+1$ na origem, então $f(v) = o(\|v\|^k)$ quando $v \to 0$. Deduza a fórmula de Taylor infinitesimal deste resultado. Em seguida, use a fórmula de Taylor infinitesimal para mostrar que vale a volta do teorema. Conclua que a fórmula de Taylor infinitesimal é única, isto é, se f é k vezes diferenciável em p e $P_j(v)$ são funções polinomiais homogêneas de grau i em v tais que
$$f(p+v) = \sum_{j=0}^{k} P_j(v) + o(\|v||^k), \qquad v \to 0,$$
então $P_j = d^j f(p)/j!$ para todo $j = 0, \dots, k$.

9. Calcule a fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 7 na origem da função $\ln\left(\frac{1}{1-\|x\|^2}\right)$.

10. Calcule a matriz hessiana na origem da função do exercício anterior.

11. Encontre todas as derivadas parciais de ordem 2025 na origem da função $f(x,y) = e^{x^2+y^4}$.

12. Mostre, sem usar a fórmula de Taylor infinitesimal, que, nas fórmulas de Taylor com resto de Lagrange e restro integral de ordem k, os restos são funções $o(\|v\|^k)$ quando $v \to 0$.

13. (Qualificação 2010)

    (a) Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja tal que $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$ e seja $K > 0$ uma constante. Mostre que, se
    $$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq K, \qquad \text{para todo } \|x\| \leq 1 \text{ e } i, j \in \{1, \ldots, n\},$$
    então existe $C > 0$ e uma vizinhança da origem Ω tais que
    $$|f(x)| \leq C\|x\|^2, \qquad \text{para todo } x \in \Omega.$$

    (b) Mostre que a recíproca do resultado contido no item (a) é falsa.

14. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma função $f \in C^\infty(U)$ é dita *analítica (real)* se, para todo $p \in U$, a *série* de Taylor de f em p converge *absolutamente* para f em uma vizinhança de p. Assim, podemos escrever
    $$f(p+v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j f(p)}{j!} v^{\otimes j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} v^\alpha$$
    para todo $v \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno, ou, de maneira equivalente,
    $$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j f(p)}{j!} (x-p)^{\otimes j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha$$
    para todo x em uma vizinhança de p. Note que a convergência absoluta garante que não precisamos nos preocupar com a ordem da soma indexada nos multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$. O conjunto das funções analíticas em U é denotado $C^\omega(U)$. Exemplos de funções analíticas incluem as funções elementares, como polinômios, exponencial, logaritmo, seno, cosseno, etc.

    (a) Mostre que a função
    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$
    é de classe C^∞, mas não analítica.

    (b) Seja $f \in C^\infty(U)$. Mostre que $f \in C^\omega(U)$ se, e somente se, para todo compacto $K \subset U$, existe uma constante $C \geq 0$ tal que
    $$\sup_{x \in K} \frac{|\partial^\alpha f(x)|}{\alpha!} \leq C^{|\alpha|+1}$$
    para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. [Dica: use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange ou resto integral.]

    (c) Mostre que $C^\omega(U)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra e que, se $f \in C^\omega(U)$ não se anula em nenhum ponto de U, então $\frac{1}{f} \in C^\omega(U)$.

15. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita *homogênea* de grau k se $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demonstre a seguinte *identidade de Euler*: se f é homogênea de grau k e diferenciável em p, então
    $$p_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = k f(p).$$

16. Lembremos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é dito *simétrico* se permanece inalterado após uma permutação qualquer de suas variáveis. Por exemplo, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é simétrico, mas $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ não é, pois $g(x_2, x_1) \neq g(x_1, x_2)$. Os *polinômios simétricos elementares*

$$
\begin{aligned}
s_1(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = x_1 + \cdots + x_n \\
s_2(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\
&\vdots \\
s_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 \cdots x_n
\end{aligned}
$$

são definidos pela fórmula

$$(y - x_1) \cdots (y - x_n) = y^n - s_1(x_1, \ldots, x_n) y^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Um teorema, geralmente atribuído a Newton, afirma que qualquer polinômio simétrico pode se escrever como um polinômio nos polinômios simétricos elementares. Por exemplo, $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = s_1(x_1, \ldots, x_n)^2 - 2s_2(x_1, \ldots, x_n)$. Em geral, não é fácil descrever uma fórmula explícita que exprime as somas de potências

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

como combinação dos polinômios simétricos elementares, mas a seguinte *identidade de Newton* fornece uma solução recursiva para este problema:

$$k s_k = s_{k-1} p_1 - s_{k-2} p_2 + \cdots + (-1)^{k-2} s_1 p_{k-1} + (-1)^{k-1} s_0 p_k,$$

onde $s_0 = 1$ e $s_i = 0$ para $k > n$. O objetivo deste exercício é demonstrar a identidade de Newton.

(a) Mostre que

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n).$$

(b) Utilizando o "operador de Euler" $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, mostre que

$$\frac{s_1 + 2s_2 + \cdots + n s_n}{s_0 + s_1 + \cdots + s_n} = \frac{x_1}{1 + x_1} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_n}.$$

(c) Conclua considerando as expansões de Taylor do termo à direita.

Referências

[1] E. L. Lima, *Curso de análise. Vol. 2* (décima segunda edição), Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2020.