Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

Análisis en $\mathbb{R}^n$ | 2025-I

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

Aula 06/03/25

◇ *Derivada Direccional.* Sea $U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función escalar. Para $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $p \in U$ definimos la derivada de f con dirección v en el punto p como:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h\to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h} \qquad \sim \qquad f(x+hv) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p)\cdot h + \sigma(h)\ ^{1}.$$

Si $v = e_i$ entonces la llamamos i-ésima derivada o *derivada parcial* y la denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Ejemplo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$. Hint: α.

Ejercicio Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^n$. Muestre que $\frac{\partial f}{\partial \lambda v}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p)$. ¿Vale en general $\frac{\partial f}{\partial (v+\omega)}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial \omega}(p)$?

Ejemplo $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = \arctan(y/x)$. Hint: voleo.

$*$ En un punto, la existencia de todas las derivadas parciales no implica que exista la derivada en toda dirección y tampoco implica continuidad de f en p.

Ejemplo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x+y, & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$. Hint: direcciones.

Ejemplo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) = 0 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$. Hint: continuidad.

Ejercicio Muestre que la existencia de derivadas parciales acotadas en todo punto $p \in U$ implica f constante en U.

◇ *Conexidad.* Sea $X^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$, X es conexo sii no existen $U^{ab}, V^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ disjuntos, tales que su intersección con X es no vacía y $X \subseteq U \cup V$.

☐ **Ejercicio** Sea $U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo. Dados $p, q \in U$ existe un camino polígonal en U con vértices

$$p = p_0, p_1, \ldots, p_k = q,$$

tal que $p_{i+1} - p_i$ es colineal con algún e_j para cada $0 \leq i \leq k-1$ y algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. [2]

☐ Sea $U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ una función tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ en U para cada $1 \leq i \leq n$, entonces f es constante.

---

[1] Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(p+hv) = \alpha h + \sigma(h)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \alpha$.
[2] El lema solo vale cuando U es abierto, piense en $\mathbb{S}^1$.

Aula 11/03/25

$\diamond$ *Derivadas de orden superior.* Sea $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to$. Si existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ para cada $p \in U$ podemos definir $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ y considerar la *derivada de segundo orden*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p).$$

$*$ El orden importa, en general.

$\diamond$ Sea $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Decimos que $f : U \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(U)$ si para cada $m \leq k$ todas las derivadas de orden m de f existen y son continuas en U. La función f es *smooth* en U si es de clase $C^\infty(U)$.[3]

Ejemplo Los elementos de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, el anillo de polinomios de n variables con coeficientes en $\mathbb{R}$ es de clase C^∞.

Ejemplo $\det(T) : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞.

Ejemplo $x \mapsto x^{1/3}$ es de clase C^0 más no es de clase C^1 en 0.

Ejercicio Muestre que $C^k(U)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa, con la suma y el produto usual de funciones. Además de es eso pruebe que

$$C^0(U) \supsetneq C^1(U) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(U),$$

Y note que los elementos inversos son aquellos que no se anulan. [4]

Ejemplo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$. Hint: averigue si esta en C^2

$\blacksquare$ (Schwarz) *Sea $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(U)$, entonces para cada $1 \leq i, j \leq n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Ejercicio *Colorario.* Si $f \in C^k(U)$ entonces no importa el orden en que son tomadas las derivadas de orden $m \leq k$.

$\diamond$ *Diferenciabilidad.* Decimos que una función $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $p \in U$ si existe un funcional lineal $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(p+v) = f(p) + \ell \cdot v + \sigma(\|v|\|) \text{ cuando } v \to 0.$$

$\square$ Si f es diferenciable en p entonces para cada $\vec{v_0} \in \mathbb{R}^n$, $\ell \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$. En particular $\ell_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.[5]

$\diamond$ *Diferencial.* Si f es diferenciable en p el diferencial de f en p es una función lineal $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$df(p) \cdot v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i.$$

$*$ La existencia de derivadas direccionales sirve para definir $df(p)$, sin embargo esto no garantiza que sea lineal y aún si lo fuera no es garantía de diferenciabilidad en el punto.

---

[3] $C^0(U)$ es la clase de las funciones continuas en U.

[4] Colorario de esto es que las funciones racionales son $C^\infty(U)$ en dominios donde no se anulan.

[5] Esto también implica que las derivadas direccionales son lineales en esa dirección.

Aula 13/03/25

Ejemplo $f(\mathbf{x}) = \|x\|^2$. Hint: separe y contemple.

Ejercicio El diferencial de una función lineal es él mismo.

☐ Si $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en p entonces es continua en p.

Ejemplo $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$. Hint: verifique derivadas, analice si $f(v) = \sigma(\|v\|)$. [6]

Ejercicio Estudie la diferenciabilidad de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$

$*$ Existencia de derivadas direccionales NO implica diferenciabilidad.

■ Si $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1(U)$ entonces es diferenciable en cada punto de U.[7]

Ejemplo Toda función polinomial es diferenciable.

Ejemplo La proyección i-ésima $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Además, puesto que es lineal $dx_i(p) = x_i$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$. En particular notamos que $dx_i(p) \cdot e_j = \delta_{ij}$, osea que $\{dx_1(p), \ldots, dx_n(p)\}$ es una base para $(\mathbb{R}^n)^*$ *(espacio dual)*[8]. Suponiendo que pasa para cada $p \in U$ el diferencial de f se escribe de forma única como

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Ejemplo $\Theta(x,y) = \arctan(y/x)$ definida para $(x,y) \neq 0$. Hint: Cálcule e interprete $d\Theta$.

☐ **Ejercicio** Si $f, g : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $f+g,\ fg$ y f/g (para $g \neq 0$ en U) son funciones diferenciables en U y

$$d(f+g) = df + dg \ \ ; \ \ d(fg) = f \cdot dg + df \cdot g \ \ ; \ \ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

◇ *Gradiente.* El gradiente de una función diferenciable en p es el vector compuesto por las derivadas parciales,

$$\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right).$$

$*$ Interpretando la definición tenemos que $\langle \nabla f, v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}$. En este sentido sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario, entonces

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(p)\right| = |\langle \nabla f(p), u\rangle| \leq \|\nabla f(p)\|\|u\|,$$

es decir, el gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento de f en p.[9]

Ejercicio Muestre que si $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $f(p)$ es un extremo local, entonces $\nabla f(p) = 0$.

---

[6] Si la derivada direccional en un punto no es lineal (coordenadas v_i) entonces el diferencial en ese punto no existe.
[7] $C^1 \Rightarrow C^0 \wedge \exists \frac{\partial f}{\partial v}$.
[8] dx_i mide los incrementos de las variables independientes y los relaciona con los de la variable dependiente, osea df.
[9] Esta es la base de lo que se conoce como método del gradiente, para minimizar una función.

Aula 18/03/25

☐ Sean $f : U^{ab} \to \mathbb{R}$, $p \in U$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tales que $[p, p+v] \subseteq U$. Considere $\varphi(t) = f(p+tv)$. Si para algún $t \in (0,1)$ f es diferenciable en $p+tv$ entonces φ es diferenciable en t y $\varphi\prime(t) = df(p+tv) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+tv)$.

$*$ TVM implica que si f es continua en $[p, p+v]$ y diferenciable en $(p, p+v)$ entonces existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(p+v) - f(p) = df(p+\theta v) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+\theta v)$.

◇ Sea $\ell : R^n \to \mathbb{R}$ un operador lineal. La norma del operador $|\ell| := \sup \|\ell v\|$ tales que $v \in \mathbb{S}^n$.

☐ **Ejercicio** Muestre que $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\ell v = \langle w, v \rangle$.

$*$ Del ejercicio resulta inmediato que $|\ell| = \|w\|$. En particular, si f es diferenciable en p, entonces $|df(p)| = \|\nabla f(p)\|$.

☐ Sea $K \subset U$ dominio convexo diferenciable de f y $c \geq 0$ tal que $\|df(x)\| \leq c$ para cada $x \in K$. Entonces para cada $p, q \in K$ vale que $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p-q\|$.

◇ $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *Lipschitz continua* si existe $c \geq 0$ tal que $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p-q\|$ para cada $p, q \in X$.

$*$ Osea que TVM también implica f Lipschitz.

Ejercicio Muestre que si $f \in C^1(U)$ y K es compacto y convexo, entonces la hipótesís de la proposición anterior es automaticamente satisfecha para algún $c \geq 0$.

Formula de Taylor

$*$ La idea es aproximar funciones por polinomios, apuntando a una forma $f(p+v) = P_k[v] + \Gamma_k[v]$. Un polinomio en variable v de orden k y un error del orden $\sigma(\|v\|^k)$

Ejemplo Si $f \in C^2$ entonces $f(p+v) = \underbrace{f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(p)v_i v_j}_{P_2[v]} + \underbrace{\sigma(\|v\|^2)}_{\Gamma_2[v]}$

◇ Para $k \geq 2$, decimos que f es k-diff en p si existe $B(p;\epsilon)$ donde existe $df(p)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es $(k-1)$-diff.

Ejemplo $f \in C^k(U)$ implica que f es k-diff en cada $p \in U$.

Ejercicio Muestre que el Teorema de Schwarz vale en general para funciones 2-diff. Hint: Elon Musk.

◇ Sea f una función k-diff en p y $d^k f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $v \mapsto d^k f(p) v^{\otimes k} = \sum \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p) v_{i_1} \cdots v_{i_k}$. [10]

[10] Función polinomial y homógenea de grado $v_1 \cdots v_k$

Ejemplo Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tenemos: $d^2 f(p)v^{\otimes 2} = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)h^2 + 2\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)hk + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)k^2$. [11]

◇ Sea f 2-diff en p entonces la Hessiana de f en p es $Hf(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}$

$*$ $Hf(p)$ es única (Schwarz) y símetrica que representa a $d^2 f(p)v^{\otimes k} = \langle Hf(p) \cdot v, v \rangle = \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} \partial^\alpha f(p) v^\alpha$.

Ejercicio Muestre que si f es k-diff en p entonces $d^k f(p)v^{\otimes k} = \sum_{|\alpha|=2} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p) v^\alpha$.

Aula 20/03/25

◇ f se anula al orden $k+1$ en p si $\partial^\alpha f(p) = 0$ para todo $|\alpha| \leq k$.

Ejercicio Si $f(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ se anula identicamente en una vecindad del origen entonces $c_\alpha = 0$ para cada α.

■ Sean $k \geq 1$ y f una función k-diff en $0 \in \mathbb{R}^n$. Si f se anula al orden $k+1$ entonces $f(v) = \sigma(\|v\|^k)$.

□ *Colorario.* Para $p \in \mathbb{R}^n$ tenemos $f(p+v) = \sum \frac{1}{i!} d^i f(p)v^{\otimes i} + \sigma(\|v\|^k)$.

Ejercicio Demuestre el colorario. Hint: $\Gamma_k(v) = \sigma(\|v\|)$?

Ejercicio Fórmula de Taylor infinitesimal de orden 5 de $f(x,y) = \frac{x}{1+xy}$ en 0. Hint: Geometría - Taylor?

Ejercicio Sea f función k-diff. Use la fórmula de Taylor para provar el reves del Teorema, concluya la unicidad.

□ *Resto de Lagrange e Integral.* Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in C^{k+1}(U)$, para cada $p \in U$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tales que $[p, p+tv] \subseteq U$ tenemos: (i) $f(p+v) = T_k(v) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(p+\theta v)v^{\otimes(k+1)} =$ (ii) $T_k(v) + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k d^{k+1} f(p+tv)v^{\otimes(k+1)} dt$.

Aula 25/03/25

◇ Sea $f : U^\vee \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Un punto $p \in U$ es *punto crítico* de f sii $df(p) = 0 = \nabla f(p)$.

Ejemplo $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$. Hint: cálcule no sea flojo.

◇ La función f tiene un máximo (o mínimo) local en p si $f(x) \leq f(p)$ en alguna vecindad de p [12].

□ Extremo local $\Rightarrow$ punto crítico.

[11] Una forma cuadrática de grado 2.

[12] Más generalmente decimos *extremo local*.

$*$ El objetivo ahora es clasificar como máximo o mínimo o ninguno de los dos.

Ejemplo Sea f una forma cuadrática con Hessiana diagonal $H = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En Taylor orden 2 tenemos $f(p+v) = f(p) + df(p) + \frac{1}{2}\sum \lambda_i v_i^2 + \sigma(\|v\|^2)$. Entonces $\lambda_i > 0$ para cada $i \Rightarrow$ mínimo local en p; en cambio si $\lambda_i < 0$ para cada $i \Rightarrow$ máximo local en p.

$\diamondsuit$ Sea $A = A^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La forma cuadrática $f : v \mapsto \langle Av, v\rangle$ es *positiva* si $f(v) > 0$, *negativa* si $f(v) < 0$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ o indefinida e.o.c.

Ejemplo (i) $v \mapsto \|v\|^2$ – positiva y (ii) $v \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ – indefinida.

■ Toda matriz símetrica posee base ortonormal de autovectores, es diagonalizable.

Ejercicio Sea $A = A^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores, muestre que A es positiva (o negativa) si $\lambda_i > 0$ (o $\lambda_i < 0$) para cada $1 \le i \le n$.

■ Sea f función 2-diff en $p \in U$ punto crítico. Si $Hf(p)$ es definida positiva (o negativa) entonces p es un mínimo (o máximo) isolado local de f en U.

$\diamondsuit$ Un punto crítico p de f es punto de silla sii $Hf(p)$ tiene por lo menos un $\lambda_i > 0$ y un $\lambda_j < 0$.

$*$ Sea $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ con autovectores w_1 y w_2, entonces f tiene mínimo local en la dirección de w_1 y máximo local en la dirección de w_2. Hint: $\langle Hf(p)\cdot v, v\rangle$.

$\diamondsuit$ Un *punto degenerado* es un punto crítico donde la Hessiana es singular, $Hf(p) = 0$.

Ejercicio Sea $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Muestre que 0 es un punto degenerado. Muestre que la restricción de f a cualquier recta que pasa por el origen tiene mínimo local en 0 (sin embargo no lo tiene en f). Hint: considere conjunto donde $f > 0$ y $f < 0$.

Aula 27/03/25

■ Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : K \to \mathbb{R}$ continua, entonces f tiene máximo y mínimo global en K.

$*$ Podemos agregar condiciones para que funcione aún en conjuntos no compactos.

Ejemplo Sea $f(x, y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$. Estudie máximos y mínimos de f en $Q = \{(x, y) : x \ge 0 \text{ y } y \ge 0\}$.

□ Sea $F^{\triangledown} \subseteq \mathbb{R}^n$ no acotado y $f : F \to \mathbb{R}^n$ continua. Tenemos (i) Si $f(x) \to \infty$ cuando $\|(x, y)\| \to \infty$, entonces f tiene un mínimo global y (ii) Si $f(x) \to 0$ cuando $\|(x, y)\| \to \infty$, entonces f tiene un máximo global.

Problems with Constraints - Optimización

El objetivo aquí es mínimizar o máximizar funciones en conjuntos de la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Si $g \in C^k$ entonces H es una hipersuperficie de clase C^k definida por la ecuación $g(x) = 0$.

Ejemplo $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ definida por $\left(\sum x_i^2\right) - 1 = 0$.

Ejercicio Verifique bajo que condiciones $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ implica $dg(p) \neq 0$.

$*$ La condición encontrada en el ejercicio anterior es garantía de que H es una variedad de clase C^k (sin singularidades) y que el espacio tangente de H en p es $T_pH = \ker(dg(p)) = \{v \in \mathbb{R}^n : dg(p) \cdot v = 0\}$.

Ejemplo Máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$ en el disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Hint: Lagrange?.

■ *Multiplicadores de Lagrange.* Sea $f : U^\vee \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ una superficie de clase C^1 contenida en U. Si $p \in U$ es extremo local de $H_H : H \to \mathbb{R}$, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $df(p) = \lambda dg(p)$.

Ejercicio Demuestre el Teorema espectral vía Multiplicadores de Lagrange.

Aula 03/04/25

◇ Llamamos *función vectorial* a una función $F : U^\vee \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuyas componentes son funciones escalares $F : x \mapsto (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))$.

◇ F es diferenciable en $p \in U$ sii $\exists L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal tal que $F(p + v) = F(p) + Lv + \sigma(\|v\|)$ cuando $v \to 0$.

$*$ El resto $r(v) = (r_1(v), r_2(v), \ldots, r_m(v)) = \sigma(\|v\|^k)$ sii $\forall i$ se tiene que $r_i(v) = \sigma(\|v\|^k)$.

□ F es diferenciable en p sii $\forall i$ tenemos F_i diferenciable en p e $L_i = dF_i(p)$.

Ejercicio Pruebe ($\Leftarrow$) de la proposición anterior.

◇ Si F es diferenciable en p entonces $\exists! DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal a la que llamamos $derivada$ de F en p, la cual verifica $F(p + v) = F(p) + DF(p)v + \sigma(\|v\|)$ cuando $v \to 0$.

$*$ En resumén $DF(p) = (dF_1(p), dF_2(p), \ldots, dF_m(p))$.

Ejemplo Si F es afín, digamos $F(x) = Lx + b$ entonces $DF(p) = L$. En efecto $F(p + v) = (Lp + b) + Lv + 0$.

□ Si F es diferenciable en p entonces es continua en p.

◇ *Derivada Direccional.* Sea $v \in \mathbb{R}^n$ la derivada de F en dirección v se define como $\frac{\partial F}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{F(p+t)-F(p)}{t}$.

$*$ En caso de existir $\frac{\partial F}{\partial v}(p) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(p), \frac{\partial F_2}{\partial v}(p), \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial v}(p)\right)$. Es todo análogo, incluyendo las derivadas parciales.

◇ *Matriz Jacobiana.* Representa la derivada $DF(p)$ en la base canónica.

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \ni JF(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right) \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \text{ [13]}.$$

[13] En otra notación $JF(p) = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(p)$.

$*$ Las filas de $JF(p)$ son $dF_i(p) \in M_{1\times n}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^*$ mientras las columnas son vectores $\left(\frac{\partial F}{x_j}\right) \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \cong R^m$.

Ejemplo Si $f : U \to \mathbb{R}$ entonces $Jf(p) = (\nabla f)^T \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo Sea $c : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ un camino diferenciable, es decir, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_m(t))$. Tenemos $Jc(t) = (c_1'(t), c_2'(t), \ldots, c_m'(t))^T \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$, el *vector tangente*.

Ejemplo $U = \{(r, \theta) : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ e $F : U \ni (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Hint: cálcule.

◇ $F : U \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^k sii cada una de sus componentes es de clase C^k. Denotamos $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$.

□ Si $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ entonces F es diferenciable en U.

Derivadas de orden superior

díficil

Aula 08/04/25

■ Sean $U^\vee \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V^\vee \subseteq\to \mathbb{R}^m$. Considere $F : U \to R^m$ diferenciable, suponga también que $F(U) \subseteq V$ y $G : V \to \mathbb{R}^k$ diferenciable. Entonces $G \circ F$ es diferenciable y $D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p)$.

Ejemplo Sea $c : I \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces $D(f \circ c)(t) = Df(c(t)) \cdot Dc(t) = df(c(t)) \cdot c'(t)$. Si tomamos $c(t) = p + tv$ e $\varphi(t) = (f \circ c)(t)$ entonces $\varphi'(t) = df(p + tv) \cdot v$.

$*$ En versión matricial el Teorema queda $J(G \circ F)(p) = JG(F(p)) \cdot JF(p)$.

References

[1] Lima, Elon Lages (2004). *Análise real Vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro.