

## Análisis en $\mathbb{R}^n$ | 2025-I

Nestor Heli Aponte Avila<sup>1</sup>  
n267452@dac.unicamp.br

### Aula 06/03/25

◇ *Derivada Direccional*. Sea  $U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar. Para  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  y  $p \in U$  definimos la derivada de  $f$  con dirección  $v$  en el punto  $p$  como:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h} \quad \sim \quad f(p + hv) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p) \cdot h + \sigma(h)^1.$$

Si  $v = e_i$  entonces la llamamos  $i$ -ésima derivada o *derivada parcial* y la denotamos por  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ .

**Ejemplo**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ . Hint:  $\alpha$ .

**Ejercicio** Sean  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^n$ . Muestre que  $\frac{\partial f}{\partial \lambda v}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p)$ . ¿Vale en general  $\frac{\partial f}{\partial (v+\omega)}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial \omega}(p)$ ?

**Ejemplo**  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x, y) = \arctan(y/x)$ . Hint: voleo.

\* En un punto, la existencia de todas las derivadas parciales no implica que exista la derivada en toda dirección y tampoco implica continuidad de  $f$  en  $p$ .

**Ejemplo**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$ . Hint: direcciones.

**Ejemplo**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$ . Hint: continuidad.

**Ejercicio** Muestre que la existencia de derivadas parciales acotadas en todo punto  $p \in U$  implica  $f$  constante en  $U$ .

◇ *Conexidad*. Sea  $X^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $X$  es conexo sii no existen  $U^{ab}, V^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$  disjuntos, tales que su intersección con  $X$  es no vacía y  $X \subseteq U \cup V$ .

□ **Ejercicio** Sea  $U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$  conexo. Dados  $p, q \in U$  existe un camino poligonal en  $U$  con vértices

$$p = p_0, p_1, \dots, p_k = q,$$

tal que  $p_{i+1} - p_i$  es colineal con algún  $e_j$  para cada  $0 \leq i \leq k-1$  y algún  $j \in \{1, \dots, n\}$ .<sup>2</sup>

□ Sea  $U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$  conexo y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  en  $U$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , entonces  $f$  es constante.

<sup>1</sup>Si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(p + hv) = \alpha h + \sigma(h)$ , entonces  $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \alpha$ .

<sup>2</sup>El lema solo vale cuando  $U$  es abierto, piense en  $\mathbb{S}^1$ .

## Aula 11/03/25

◇ *Derivadas de orden superior.* Sea  $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si existe  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  para cada  $p \in U$  podemos definir  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$  y considerar la *derivada de segundo orden*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(p).$$

\* El orden importa, en general.

◇ Sea  $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Decimos que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^k(U)$  si para cada  $m \leq k$  todas las derivadas de orden  $m$  de  $f$  existen y son continuas en  $U$ . La función  $f$  es *smooth* en  $U$  si es de clase  $C^\infty(U)$ .<sup>3</sup>

---

**Ejemplo** Los elementos de  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ , el anillo de polinomios de  $n$  variables con coeficientes en  $\mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$ .

**Ejemplo**  $\det(T) : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$ .

**Ejemplo**  $x \mapsto x^{1/3}$  es de clase  $C^0$  más no es de clase  $C^1$  en 0.

**Ejercicio** Muestre que  $C^k(U)$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa, con la suma y el producto usual de funciones. Además de eso pruebe que

$$C^0(U) \supsetneq C^1(U) \supsetneq \dots \supsetneq C^\infty(U),$$

Y note que los elementos inversos son aquellos que no se anulan.<sup>4</sup>

**Ejemplo**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$ . Hint: averigue si esta en  $C^2$

---

■ (Schwarz) Sea  $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2(U)$ , entonces para cada  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

---

**Ejercicio Colorario.** Si  $f \in C^k(U)$  entonces no importa el orden en que son tomadas las derivadas de orden  $m \leq k$ .

---

◇ *Diferenciabilidad.* Decimos que una función  $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en un punto  $p \in U$  si existe un funcional lineal  $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(p + v) = f(p) + \ell \cdot v + o(\|v\|) \text{ cuando } v \rightarrow 0.$$

□ Si  $f$  es diferenciable en  $p$  entonces para cada  $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\ell \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$ . En particular  $\ell_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ .<sup>5</sup>

◇ *Diferencial.* Si  $f$  es diferenciable en  $p$  el diferencial de  $f$  en  $p$  es una función lineal  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$df(p) \cdot v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i.$$

\* La existencia de derivadas direccionales sirve para definir  $df(p)$ , sin embargo esto no garantiza que sea lineal y aún si lo fuera no es garantía de diferenciabilidad en el punto.

---

<sup>3</sup> $C^0(U)$  es la clase de las funciones continuas en  $U$ .

<sup>4</sup>Colorario de esto es que las funciones racionales son  $C^\infty(U)$  en dominios donde no se anulan.

<sup>5</sup>Esto también implica que las derivadas direccionales son lineales en esa dirección.

**Ejemplo**  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ . Hint: separe y contemple.

**Ejercicio** El diferencial de una función lineal es él mismo.

□ Si  $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $p$  entonces es continua en  $p$ .

**Ejemplo**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$ . Hint: verifique derivadas, analice si  $f(v) = \sigma(\|v\|)$ .<sup>6</sup>

**Ejercicio** Estudie la diferenciabilidad de  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$

\* Existencia de derivadas direccionales NO implica diferenciabilidad.

■ Si  $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1(U)$  entonces es diferenciable en cada punto de  $U$ .<sup>7</sup>

**Ejemplo** Toda función polinomial es diferenciable.

**Ejemplo** La proyección  $i$ -ésima  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable. Además, puesto que es lineal  $dx_i(p) = x_i$  para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ . En particular notamos que  $dx_i(p) \cdot e_j = \delta_{ij}$ , osea que  $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$  es una base para  $(\mathbb{R}^n)^*$  (espacio dual)<sup>8</sup>. Suponiendo que pasa para cada  $p \in U$  el diferencial de  $f$  se escribe de forma única como

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

**Ejemplo**  $\Theta(x, y) = \arctan(y/x)$  definida para  $(x, y) \neq 0$ . Hint: Calcule e interprete  $d\Theta$ .

□ **Ejercicio** Si  $f, g : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables, entonces  $f + g$ ,  $fg$  y  $f/g$  (para  $g \neq 0$  en  $U$ ) son funciones diferenciables en  $U$  y

$$d(f + g) = df + dg ; \quad d(fg) = f \cdot dg + df \cdot g ; \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

◇ **Gradiente.** El gradiente de una función diferenciable en  $p$  es el vector compuesto por las derivadas parciales,

$$\nabla f(p) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

\* Interpretando la definición tenemos que  $\langle \nabla f, v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}$ . En este sentido sea  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  un vector unitario, entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(p) \right| = |\langle \nabla f(p), u \rangle| \leq \|\nabla f(p)\| \|u\|,$$

es decir, el gradiente apunta en la dirección de mayor crecimiento de  $f$  en  $p$ .<sup>9</sup>

**Ejercicio** Muestre que si  $f : U^{ab} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y  $f(p)$  es un extremo local, entonces  $\nabla f(p) = 0$ .

<sup>6</sup>Si la derivada direccional en un punto no es lineal (coordenadas  $v_i$ ) entonces el diferencial en ese punto no existe.

<sup>7</sup> $C^1 \Rightarrow C^0 \wedge \exists \frac{\partial f}{\partial v}$ .

<sup>8</sup> $dx_i$  mide los incrementos de las variables independientes y los relaciona con los de la variable dependiente, osea  $df$ .

<sup>9</sup>Esta es la base de lo que se conoce como método del gradiente, para minimizar una función.

## Aula 18/03/25

□ Sean  $f : U^{ab} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in U$  y  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $[p, p + v] \subseteq U$ . Considere  $\varphi(t) = f(p + tv)$ . Si para algún  $t \in (0, 1)$   $f$  es diferenciable en  $p + tv$  entonces  $\varphi$  es diferenciable en  $t$  y  $\varphi'(t) = df(p + tv) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p + tv)$ .

\* TVM implica que si  $f$  es continua en  $[p, p + v]$  y diferenciable en  $(p, p + v)$  entonces existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $f(p + v) - f(p) = df(p + \theta v) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p + \theta v)$ .

◇ Sea  $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un operador lineal. La norma del operador  $|\ell| := \sup \|\ell v\|$  tales que  $v \in \mathbb{S}^n$ .

---

□ **Ejercicio** Muestre que  $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\ell v = \langle w, v \rangle$ .

---

\* Del ejercicio resulta inmediato que  $|\ell| = \|w\|$ . En particular, si  $f$  es diferenciable en  $p$ , entonces  $|df(p)| = \|\nabla f(p)\|$ .

□ Sea  $K \subset U$  dominio convexo diferenciable de  $f$  y  $c \geq 0$  tal que  $\|df(x)\| \leq c$  para cada  $x \in K$ . Entonces para cada  $p, q \in K$  vale que  $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p - q\|$ .

◇  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es *Lipschitz continua* si existe  $c \geq 0$  tal que  $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p - q\|$  para cada  $p, q \in X$ .

\* Osea que TVM también implica  $f$  Lipschitz.

---

**Ejercicio** Muestre que si  $f \in C^1(U)$  y  $K$  es compacto y convexo, entonces la hipótesis de la proposición anterior es automáticamente satisfecha para algún  $c \geq 0$ .

---

## Formula de Taylor

\* La idea es aproximar funciones por polinomios, apuntando a una forma  $f(p + v) = P_k[v] + \Gamma_k[v]$ . Un polinomio en variable  $v$  de orden  $k$  y un error del orden  $\sigma(\|v\|^k)$

---

**Ejemplo** Si  $f \in C^2$  entonces  $f(p + v) = f(p) + \underbrace{\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)v_i v_j}_{P_2[v]} + \underbrace{\sigma(\|v\|^2)}_{\Gamma_2[v]}$

---

◇ Para  $k \geq 2$ , decimos que  $f$  es  $k$ -diff en  $p$  si existe  $B(p; \epsilon)$  donde existe  $df(p)$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  es  $(k - 1)$ -diff.

---

**Ejemplo**  $f \in C^k(U)$  implica que  $f$  es  $k$ -diff en cada  $p \in U$ .

**Ejercicio** Muestre que el Teorema de Schwarz vale en general para funciones 2-diff. Hint: Elon Musk.

---

◇ Sea  $f$  una función  $k$ -diff en  $p$  y  $d^k f(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v \mapsto d^k f(p)v^{\otimes k} = \sum \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(p)v_{i_1} \dots v_{i_k}$ .<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>Función polinomial y homogénea de grado  $v_1 \dots v_k$

---

**Ejemplo** Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tenemos:  $d^2 f(p)v^{\otimes 2} = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)h^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)hk + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)k^2$ .<sup>11</sup>

---

◇ Sea  $f$  2-diff en  $p$  entonces la Hessiana de  $f$  en  $p$  es  $Hf(p) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}$

\*  $Hf(p)$  es única (Schwarz) y simétrica que representa a  $d^2 f(p)v^{\otimes k} = \langle Hf(p) \cdot v, v \rangle = \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} \partial^\alpha f(p)v^\alpha$ .

---

**Ejercicio** Muestre que si  $f$  es  $k$ -diff en  $p$  entonces  $d^k f(p)v^{\otimes k} = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p)v^\alpha$ .

---

## Aula 20/03/25

◇  $f$  se anula al orden  $k+1$  en  $p$  si  $\partial^\alpha f(p) = 0$  para todo  $|\alpha| \leq k$ .

---

**Ejercicio** Si  $f(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$  se anula idénticamente en una vecindad del origen entonces  $c_\alpha = 0$  para cada  $\alpha$ .

---

■ Sean  $k \geq 1$  y  $f$  una función  $k$ -diff en  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Si  $f$  se anula al orden  $k+1$  entonces  $f(v) = \sigma(\|v\|^k)$ .

□ *Colorario.* Para  $p \in \mathbb{R}^n$  tenemos  $f(p+v) = \sum \frac{1}{i!} d^i f(p)v^{\otimes i} + \sigma(\|v\|^k)$ .

---

**Ejercicio** Demuestre el colorario. Hint:  $\Gamma_k(v) = \sigma(\|v\|)$ ?

**Ejercicio** Fórmula de Taylor infinitesimal de orden 5 de  $f(x, y) = \frac{x}{1+xy}$  en 0. Hint: Geometría - Taylor?

**Ejercicio** Sea  $f$  función  $k$ -diff. Use la fórmula de Taylor para probar el revers del Teorema, concluya la unicidad.

---

□ *Resto de Lagrange e Integral.* Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f \in C^{k+1}(U)$ , para cada  $p \in U$ ,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $[p, p+tv] \subseteq U$  tenemos: (i)  $f(p+v) = T_k(v) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(p+\theta v)v^{\otimes(k+1)} =$  (ii)  $T_k(v) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k d^{k+1} f(p+tv)v^{\otimes(k+1)} dt$ .

## Aula 25/03/25

◇ Sea  $f : U^\vee \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Un punto  $p \in U$  es *punto crítico* de  $f$  si  $df(p) = 0 = \nabla f(p)$ .

---

**Ejemplo**  $f(x, y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$ . Hint: calcule no sea flojo.

---

◇ La función  $f$  tiene un máximo (o mínimo) local en  $p$  si  $f(x) \leq f(p)$  en alguna vecindad de  $p$ <sup>12</sup>.

□ Extremo local  $\Rightarrow$  punto crítico.

---

<sup>11</sup>Una forma cuadrática de grado 2.

<sup>12</sup>Más generalmente decimos *extremo local*.

\* El objetivo ahora es clasificar como máximo o mínimo o ninguno de los dos.

---

**Ejemplo** Sea  $f$  una forma cuadrática con Hessiana diagonal  $H = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . En Taylor orden 2 tenemos  $f(p+v) = f(p) + df(p) + \frac{1}{2} \sum \lambda_i v_i^2 + o(\|v\|^2)$ . Entonces  $\lambda_i > 0$  para cada  $i \Rightarrow$  mínimo local en  $p$ ; en cambio si  $\lambda_i < 0$  para cada  $i \Rightarrow$  máximo local en  $p$ .

---

◇ Sea  $A = A^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . La forma cuadrática  $f : v \mapsto \langle Av, v \rangle$  es *positiva* si  $f(v) > 0$ , *negativa* si  $f(v) < 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  o indefinida e.o.c.

---

**Ejemplo** (i)  $v \mapsto \|v\|^2$  - positiva y (ii)  $v \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  - indefinida.

---

■ Toda matriz simétrica posee base ortonormal de autovectores, es diagonalizable.

---

**Ejercicio** Sea  $A = A^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sus autovalores, muestre que  $A$  es positiva (o negativa) si  $\lambda_i > 0$  (o  $\lambda_i < 0$ ) para cada  $1 \leq i \leq n$ .

---

■ Sea  $f$  función 2-diff en  $p \in U$  punto crítico. Si  $Hf(p)$  es definida positiva (o negativa) entonces  $p$  es un mínimo (o máximo) aislado local de  $f$  en  $U$ .

◇ Un punto crítico  $p$  de  $f$  es punto de silla si  $Hf(p)$  tiene por lo menos un  $\lambda_i > 0$  y un  $\lambda_j < 0$ .

\* Sea  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$  con autovectores  $w_1$  y  $w_2$ , entonces  $f$  tiene mínimo local en la dirección de  $w_1$  y máximo local en la dirección de  $w_2$ . Hint:  $\langle Hf(p) \cdot v, v \rangle$ .

◇ Un *punto degenerado* es un punto crítico donde la Hessiana es singular,  $Hf(p) = 0$ .

---

**Ejercicio** Sea  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ . Muestre que 0 es un punto degenerado. Muestre que la restricción de  $f$  a cualquier recta que pasa por el origen tiene mínimo local en 0 (sin embargo no lo tiene en  $f$ ). Hint: considere conjunto donde  $f > 0$  y  $f < 0$ .

---

## Aula 27/03/25

■ Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua, entonces  $f$  tiene máximo y mínimo global en  $K$ .

\* Podemos agregar condiciones para que funcione aún en conjuntos no compactos.

---

**Ejemplo** Sea  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2 + 4}$ . Estudie máximos y mínimos de  $f$  en  $Q = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ y } y \geq 0\}$ .

---

□ Sea  $F^\nabla \subseteq \mathbb{R}^n$  no acotado y  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Tenemos (i) Si  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ , entonces  $f$  tiene un mínimo global y (ii) Si  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ , entonces  $f$  tiene un máximo global.

## Problems with Constraints - Optimización

El objetivo aquí es minimizar o maximizar funciones en conjuntos de la forma  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ . Si  $g \in C^k$  entonces  $H$  es una hipersuperficie de clase  $C^k$  definida por la ecuación  $g(x) = 0$ .

---

**Ejemplo**  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  definida por  $(\sum x_i^2) - 1 = 0$ .

**Ejercicio** Verifique bajo que condiciones  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$  implica  $dg(p) \neq 0$ .

\* La condición encontrada en el ejercicio anterior es garantía de que  $H$  es una variedad de clase  $C^k$  (sin singularidades) y que el espacio tangente de  $H$  en  $p$  es  $T_p H = \ker(dg(p)) = \{v \in \mathbb{R}^n : dg(p) \cdot v = 0\}$ .

**Ejemplo** Máximos y mínimos de  $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$  en el disco  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Hint: Lagrange?.

---

■ *Multiplicadores de Lagrange.* Sea  $f : U^\vee \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  y  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$  una superficie de clase  $C^1$  contenida en  $U$ . Si  $p \in U$  es extremo local de  $H_H : H \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $df(p) = \lambda dg(p)$ .

---

**Ejercicio** Demuestre el Teorema espectral vía Multiplicadores de Lagrange.

---

## References

[1] Lima, Elon Lages (2004). *Análise real Vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro.