Topologia Geral
IMECC - Unicamp

Prova P3
Junho 28^{th}, 2024

Name: Jaider Torres **RA: 241343**

1. Vamos provar que $\mathbb{R}$ é paracompacto. Seja $\mathcal{U}$ um cobrimento aberto de $\mathbb{R}$. Defina $\mathtt{B}_0 = \emptyset$ e $\mathtt{B}_\mathtt{m} = \mathtt{B}(0, \mathtt{m})$ o intervalo aberto de radio $\mathtt{m} \in \mathbb{N}$ e centro 0. Para cada $\mathtt{m} \in \mathbb{N}^{>0}$, $\bar{\mathtt{B}}_\mathtt{m} = \mathtt{B}[0, \mathtt{m}]$ é compacto já que é fechado e limitado. Assim, podemos escolher, para cada $\mathtt{m}$, um recobrimento finito de $\bar{\mathtt{B}}_\mathtt{m}$. Denotando por $\mathcal{C}_\mathtt{m}$ os membros do recobrimento aberto de $\bar{\mathtt{B}}_\mathtt{m}$ que intersectan $\bar{\mathtt{B}}_{\mathtt{m}-1}$, seja $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathtt{m}\geq 0} \mathtt{C}_\mathtt{m}$. Note que $\mathcal{C}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ pois cada elementos de $\mathcal{C}$ já é um elemento de $\mathcal{U}$. Além disso, $\mathcal{C}$ é um cobrimento aberto de $\mathbb{R}$ pois para qualquer $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $\mathtt{m} \in \mathbb{N}$, digamos, $\mathtt{m}$ tal que $|\mathtt{x}| \leq \mathtt{m} < |\mathtt{x} + 1|$, e assim a vizinhança $\mathtt{B}_\mathtt{m}$ contem $\mathtt{x}$. A mesma vizinhança $\mathtt{B}_\mathtt{m}$ de $\mathtt{x}$ é tal que intersecta só uma quantidade finita de vezes com membros de $\mathcal{C}$, no máximo os elementos de $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_\mathtt{m}$. Logo, $\mathcal{C}$ é um refinamento localmente finito do cobrimento arbitrário $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{R}$ é uma espaço topológico paracompacto.

2. a. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathtt{X})$ laços basados em $\mathtt{x}_0 \in \mathtt{X}$, i.e., $\alpha(\mathtt{i}) = \beta(\mathtt{i})$ para $\mathtt{i} = 0, 1$. uma homotopia entre α e β é uma aplicação contínua $\mathtt{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathtt{X}$ tal que $\mathtt{H}(\mathtt{t}, 0) = \alpha(\mathtt{t})$, $\mathtt{H}(\mathtt{t}, 1) = \beta(\mathtt{t})$ e $\mathtt{H}(0, \mathtt{s}) = \mathtt{H}(1, \mathtt{s}) = \mathtt{x}_0$ (o caminho constante).

   b. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathtt{X})$ dois laços basados em $\mathtt{x}_0 \in \mathtt{X}$ equivalentes modulo homotopia e $\mathtt{f} : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ um homeomorfismo, onde $\mathtt{I} = [0,1]$. Como α e β são contínuas, $\mathtt{f} \circ \alpha, \mathtt{f} \circ \beta \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathtt{Y})$ são dois laços basados em $\mathtt{y} = \mathtt{f}(\mathtt{x}_0) \in \mathtt{Y}$. Seja $\tilde{\mathtt{H}} : \mathtt{I} \times \mathtt{I} \to \mathtt{Y}$ definida por $\tilde{\mathtt{H}}(\mathtt{t}, \mathtt{s}) = \mathtt{f} \circ \mathtt{H}(\mathtt{s}, \mathtt{t})$, onde $\mathtt{H}$ é uma homotopia entre $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathtt{X})$. Como $\mathtt{H}$ é continua e $\mathtt{f}$ é um homeomorfismo, $\mathtt{f} \circ \mathtt{H}$ é continua e satisfaz $\tilde{\mathtt{H}}(\mathtt{t}, 0) = \mathtt{f}(\mathtt{H}(\mathtt{t}, 0)) = \mathtt{f} \circ \alpha(\mathtt{t})$, $\tilde{\mathtt{H}}(\mathtt{t}, 1) = \mathtt{f}(\mathtt{H}(\mathtt{t}, 1)) = \mathtt{f} \circ \beta(\mathtt{t})$ e $\tilde{\mathtt{H}}(\mathtt{i}, \mathtt{s}) = \mathtt{f}(\mathtt{H}(\mathtt{i}, \mathtt{s})) = \mathtt{y}$, para $\mathtt{i} = 0, 1$. Portanto $\tilde{\mathtt{H}}$ é uma homotopia entre $\mathtt{f} \circ \alpha$ e $\mathtt{f} \circ \beta$, i.e., $\mathtt{f} \circ \alpha$ é homotópico a $\mathtt{f} \circ \beta$.

   c. Seja $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$ um laço não sobrejetor em $\mathbb{S}^\mathtt{n}$ basado em $\mathtt{x}_0 \in \mathbb{S}^\mathtt{n}$ e $\varphi : \mathbb{S}^\mathtt{n} \backslash \{\mathtt{y}\} \to \mathbb{R}^\mathtt{n}$ o homeomorfismo projeção estereográfica, onde $\mathtt{y} \notin \mathtt{Im}\ \alpha$. Então $\varphi \circ \alpha \in \mathtt{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{R}^\mathtt{n})$ é um laço basado em $\varphi(\mathtt{x}_0) \in \mathbb{R}^\mathtt{n}$ e como $\mathbb{R}^\mathtt{n}$ é simplesmente conexo para $\mathtt{n} \geq 2$, existe uma homotopia $\mathtt{H} \in \mathtt{C}^0(\mathtt{I} \times \mathtt{I}, \mathbb{R}^\mathtt{n})$ entre $\varphi \circ \alpha$ e o laço constante $\varphi(\mathtt{x}_0) \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{R}^\mathtt{n})$. Então $\tilde{\mathtt{H}} = \varphi^{-1} \circ \mathtt{H}$ é uma homotopia entre α e o laço $\mathtt{x}_0 \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$.

   Agora, seja $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$ um laço sobrejetor basado em $\mathtt{x}_0 \in \mathbb{S}^\mathtt{n}$. Seja $\mathcal{U} = \{\mathtt{U}_\mathtt{i}\}$ o cobrimento aberto de $\mathbb{S}^\mathtt{n}$ dado por os meridianos abertos de $\mathbb{S}^\mathtt{n}$, i.e., $\mathtt{U}_{\mathtt{i}^+} = \{(\mathtt{x}_0, \cdots, \mathtt{x}_\mathtt{i}, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}) \in \mathbb{S}^\mathtt{n} : \mathtt{x}_\mathtt{i} > 0\}$ e $\mathtt{U}_{\mathtt{i}^-} = \{(\mathtt{x}_0, \cdots, \mathtt{x}_\mathtt{i}, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}) \in \mathbb{S}^\mathtt{n} : \mathtt{x}_\mathtt{i} < 0\}$, para cada $\mathtt{i} = 0, \ldots, \mathtt{n}$. Como $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$, α induz um cobrimento aberto $\{\alpha^{-1}(\mathtt{U}_\mathtt{i}) : \mathtt{U}_\mathtt{i} \in \mathcal{U}\}$ sobre $\mathtt{I}$. Como $\mathbb{S}^\mathtt{n}$ é um espaço métrico compacto pela métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}^{\mathtt{n}+1}$, pelo Lema do numero de Lebesgue existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ correspondente ao cobrimento $\mathcal{U}$ de $\mathbb{S}^\mathtt{n}$ tal que para cada $\mathtt{V} \subset \mathbb{S}^\mathtt{n}$ com $\mathtt{diam}\ \mathtt{V} = \sup_{\mathtt{x},\mathtt{y} \in \mathtt{V}} \mathtt{d}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) < \lambda$ satisfaz-se que $\mathtt{V} \subset \mathtt{U}_\mathtt{i}$, para algum $\mathtt{i}$. Vamos escolher qualquer $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\mathtt{n}} < \lambda$ e considere a partição de $\mathtt{I}$ em subintervalos de comprimento $\frac{1}{\mathtt{n}}$, $\mathtt{I} = [\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1] \cup [\mathtt{x}_1, \cup \mathtt{X}_2] \cup \cdots \cup [\mathtt{x}_{\mathtt{n}-1}, \mathtt{x}_\mathtt{n}]$. Então $\alpha|_{[\mathtt{x}_{\mathtt{i}-1}, \mathtt{x}_\mathtt{i}]}$ é um caminho contido em um único hemisfério, para cada $\mathtt{i} = 1, \ldots, \mathtt{n}$. Seja $\delta_\mathtt{i}$ o único segmento da geodésica em $\mathtt{U}_\mathtt{i}$ tendo os mesmos pontos finais que $\alpha|_{[\mathtt{x}_{\mathtt{i}-1}, \mathtt{x}_\mathtt{i}]}$. Como $\mathtt{U}_\mathtt{i} \cong \mathtt{B}(0, 1) \cong \mathbb{R}^\mathtt{n}$, onde $\mathtt{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^\mathtt{n}$, $\delta_\mathtt{i}$ e $\alpha|_{[\mathtt{x}_{\mathtt{i}-1}, \mathtt{x}_\mathtt{i}]}$ são homotópicos. Portanto, α é homotópico a concatenação $\delta = \delta_1 * \cdots * \delta_\mathtt{n}$. Como δ não é sobrejetora. podemos o argumento acima para provar que δ é homotópico ao laço constante $\mathtt{x}_0 \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$.

   Portanto, dado qualquer laço $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$ basado em $\mathtt{x}_0 \in \mathbb{S}^\mathtt{n}$, temos que α é homotópico a $\mathtt{x}_0 \in \mathcal{C}^0(\mathtt{I}, \mathbb{S}^\mathtt{n})$ e logo $\Omega(\mathbb{S}^\mathtt{n}, \mathtt{x}_0)/\sim = \pi(\mathbb{S}^\mathtt{n}) = 0$, onde $= \in \mathtt{Grp}$ é o grupo trivial.

a. Sejam $\mathtt{X}$ um espaço topológico e $\pi : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ sobrejetora. Denote $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$ a topologia quociente e $\tau_{\mathtt{Y}} = \{\mathtt{U} \subset \mathtt{Y} : \pi^{-1}(\mathtt{U}) \in \tau_{\mathtt{X}}\}$. Note que $\tau_{\mathtt{Y}}$ é de fato uma topologia em $\mathtt{Y}$ pois $\mathtt{Y}, \emptyset \in \tau_{\mathtt{Y}}$, se $\{\mathtt{V_i}\}_{\mathtt{i}\in\mathtt{I}} \subset \tau_{\mathtt{Y}}$ é uma coleção arbitraria, então $\cup_{\mathtt{i}\in\mathtt{I}}\pi^{-1}(\mathtt{V_i}) \in \tau_{\mathtt{X}}$ e $\cup_{\mathtt{i}\in\mathtt{I}}\mathtt{V_i} \in \tau_{\mathtt{Y}}$, e se $\mathtt{I}$ é finito, então $\cap_{\mathtt{i}\in\mathtt{I}}\pi^{-1}(\mathtt{V_i}) \in \tau_{\mathtt{X}}$ e $\cap_{\mathtt{i}\in\mathtt{I}}\mathtt{V_i} \in \tau_{\mathtt{Y}}$. Pela definição de $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$, temos que $\tau_{\mathtt{Y}} \subseteq \tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$. Também, por definição, a fim de que $\mathtt{V} \in \tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$, $\mathtt{f}$ tem que ser continua com respeito a esta topologia e portanto $\pi^{-1}(\mathtt{V}) \in \tau_{\mathtt{X}}$. Assim, $\mathtt{V} \in \tau_{\mathtt{Y}}$ e temos a inclusão $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}} \subseteq \tau_{\mathtt{Y}}$.

b. Suponhamos que $\mathtt{f} : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ é aberta. Como $\mathtt{f}$ é sobrejetora, podemos considerar a topologia quociente $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}} = \{\mathtt{V} \subset \mathtt{Y} : \mathtt{f}^{-1}(\mathtt{V})\}$. Pela definição de topologia quociente, $\tau_{\mathtt{Y}} \subseteq \tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$, onde $\tau_{\mathtt{Y}}$ é a topologia de $\mathtt{Y}$. Vamos provar que $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}} \subset \tau_{\mathtt{Y}}$. Seja $\mathtt{V} \in \tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$. Como $\mathtt{f}$ é continua com respeito a $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}}$ pela definição, $\mathtt{f}^{-1}(\mathtt{V}) \in \tau_{\mathtt{X}}$. Como $\mathtt{f}$ é aberta, $\mathtt{f}(\mathtt{f}^{-1}(\mathtt{V}))$ é aberto com respeito a $\tau_{\mathtt{Y}}$. Logo $\mathtt{f}(\mathtt{f}^{-1}(\mathtt{V})) = \mathtt{V} \in \tau_{\mathtt{Y}}$ e assim $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}} \subset \tau_{\mathtt{Y}}$. Portanto $\tau_{\mathtt{Y}}^{\mathtt{Quot}} = \tau_{\mathtt{Y}}$ e $\mathtt{Y}$ é um espaço quociente de $\mathtt{X}$.

c. Note que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$ pois é simétrica e reflexa, e se $\mathtt{x} \sim \mathtt{y}$ e $\mathtt{y} \sim \mathtt{z}$, então $\mathtt{x} - \mathtt{y} = \mathtt{n_1}$ e $\mathtt{y} - \mathtt{z} = \mathtt{n_2}$, i.e., $\mathtt{x} - \mathtt{z} = \mathtt{n_3}$ e $\mathtt{x} \sim \mathtt{z}$. Considere o homomorfismo sobrejetor de grupos aditivos $\mathtt{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dado por $\mathtt{f}(\mathtt{x}) = \mathtt{e}^{2\pi\mathtt{ix}}$. Note que $\ker \mathtt{f} = \{\mathtt{x} \in \mathbb{R} : \mathtt{e}^{2\pi\mathtt{ix}} = 1\} = \mathbb{Z}$ e assim $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim$. Portanto, existe $\overline{\mathtt{f}} : \mathbb{R}/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$ definida por $\mathtt{x} + \mathbb{Z} \mapsto \mathtt{e}^{2\pi\mathtt{ix}}$. Seja $\mathtt{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ a projeção natural e consideremos em $\mathbb{R}/\sim$ a topologia quociente. Considerando a topologia subespaço em $\mathbb{S}^1$, temos que $\mathtt{f}$ é continua pois é a composição de funções contínuas. Como $\mathtt{f} = \overline{\mathtt{f}} \circ \mathtt{p}$, então $\overline{\mathtt{f}}$ debe ser continua. Além disso, note que $\mathbb{R}/\sim = \mathtt{p}([0,1])$ e portanto é compacto pois $\mathtt{p}$ é contínua. Como $\overline{\mathtt{f}}$ é contínua, $\mathbb{R}/\sim$ é compacto e $\mathbb{S}^1$ é Hausdorff, $\overline{\mathtt{f}}$ é um homeomorfismo pois, dado $\mathtt{F} \subset \mathtt{X}$ fechado (e logo compacto), $(\overline{\mathtt{f}}^{-1})^{-1}(\mathtt{F}) = \overline{\mathtt{f}}(\mathtt{F})$ é compacto, i.e., fechado pela propriedade Hausdorff de $\mathtt{Y}$. Portanto, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim \cong \mathbb{S}^1$.

d. Note que si $\mathtt{U} \subset \mathbb{R}$ é aberto, então

$$\mathtt{p}^{-1}(\mathtt{p}(\mathtt{U})) = \bigcup_{\mathtt{a}\in\mathbb{Z}} (\mathtt{a} + \mathtt{U})$$

é a união das traslações por números inteiros de $\mathtt{U}$, que é aberto. Isso implica que $\mathtt{p}$ é aberta. Além disso, dado $\mathtt{m} < \frac{1}{2}$, tomando $\varepsilon = \frac{\mathtt{m}}{2}$, temos que $\mathbb{Z} \cap (\mathtt{B}_\varepsilon(\mathtt{n}) - \{\mathtt{n}\}) = \emptyset$ para cada $\mathtt{n} \in \mathbb{Z}$ e assim $\mathbb{Z}$ é discreto em $\mathbb{R}$. Logo, como $\mathtt{p}$ é aberta e $\mathbb{Z}$ é discreto, temos que

$$\mathtt{p}^{-1}(\mathtt{p}(\mathtt{B}_\varepsilon(\mathtt{x}))) = \bigcup_{\mathtt{a}\in\mathbb{Z}} (\mathtt{a} + \mathtt{B}_\varepsilon(\mathtt{x})) \tag{1}$$

é a união disjunta dos abertos respetivo a translações de $\mathtt{B}_\varepsilon(\mathtt{x})$, para cada $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$. Assim, para cada $\mathtt{y} \in \mathbb{S}^1$, dada uma vizinhança $\mathtt{U_y} \in \tau_{\mathbb{S}^1}$ suficientemente pequena, temos que $\mathtt{f}^{-1}(\mathtt{U_y})$ é a união disjunta de abertos (pois $\mathtt{f} = \overline{\mathtt{f}} \circ \mathtt{p}$, onde $\overline{\mathtt{f}}$ é o homeomorfismos do item anterior). Do item anterior temos que $\mathtt{f} = \overline{\mathtt{f}} \circ \mathtt{p}$ é continua e sobrejetora. Resta provar que cada um dos membros $\mathtt{V_y} \subset \mathtt{R}$ que compõem $\mathtt{f}^{-1}(\mathtt{U_y})$ é homeomorfo com $\mathtt{U_y}$. Mas, $\mathtt{f}_{\mathtt{V_y}}$ é um homeomorfismo entre $\mathtt{V_y}$ e $\mathtt{U_y}$ pois $\mathtt{V_y}$ é mapeado injetiva e sobrejetivamente em $\mathbb{R}/\sim$. Em total, $\mathtt{f}$ é continua, sobrejetora, para cada ponto $\mathtt{y} \in \mathbb{S}^1$ existe uma vizinhança tal que sua imagem inversa pela $\mathtt{f}$ é uma união disjunta de abertos e sua restrição a cada um dos abertos é um homeomorfismo com a respetiva vizinhança.

Portanto, $\mathtt{R} = (\mathtt{R}, \mathtt{f})$ é um espaço de cobertura de $\mathbb{S}^1$.