Topologia Geral
IMECC

Prova 2
Maio 21^{st}, 2024

Estudante: Jaider Torres **RA:** 241343

1. i) Defina rede e filtro.

   Definição: Seja Λ um conjunto dirigido e X um conjunto (ou espaço topológico). Uma *rede* em X é uma função $x : \Lambda \to X$ que envia $\lambda \in \Lambda$ a $x_\lambda \in X$.

   Definição: Seja X um conjunto (ou espacio topológico) e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um filtro em X se:

   a. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

   b. Dados $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.

   c. Dados $A \in \mathcal{F}$ e $B \subset X$ tal que $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}$.

   ii) Defina o que significa uma rede convergir a um ponto $\xi \in X$ onde X é um espaço topológico.

   Sejam X um espaço topológico e $x : \Lambda \to X$ uma rede em X. Dizemos que x converge para um ponto $\xi \in X$ se para cada $U \in \mathcal{U}_\xi$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$

2. Mostre que se A e B são dois conjuntos fechados disjuntos em um compacto K Hausdorff, então existem abertos disjuntos contendo A e B respectivamente.

   Seja $y \in B$ qualquer. Como K es Hausdorff, para cada $x \in A$ existem $U_x \in \mathcal{U}_x$ e $V_x \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \in U$, $y \in V$ e $U_x \cap V_x = \emptyset$. Agora, como K é compacto e $A \subset K$ é fechado, então A é compacto. Assim, dada a cobertura aberta $\mathcal{L} = \{U_x : x \in A\}$ de A, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que $\mathcal{L}' = \{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\} \subset \mathcal{L}$ é uma subcobertura finita. Considerando $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ e $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, temos que $y \in V$, $A \subset U$ e $U \cap V = \emptyset$. Portanto, nós provamos que para cada $y \in B$ existem $V_y, U_y \in \tau_K$ disjuntos tal que $y \in V_y$ e $A \subset U_y$, pois $A \cap B = \emptyset$.

   Agora, como $B \subset K$ é fechado e K é compacto, então B é compacto. Assim, já que $\mathcal{L}_1 = \{V_y : y \in B\}$ é cobertura aberta de B, existem $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tal que $\mathcal{L}_1' = \{V_{y_1}, \ldots, V_{y_m}\} \subset \mathcal{L}_1$ é uma subcobertura finita. Logo, considerando agora $U = \bigcap_{i=1}^m U_{y_i}$ e $V = \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}$, temos que $U, V \in \tau_K$, $B \subset V$, $A \subset U$ e $U \cap V = \emptyset$.

3. a) Defina espaço localmente compacto.

   Definição: Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é localmente compacto si cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças compactas.

   b) Mostre que $\mathbb{Q}$ não é localmente compacto com a topologia usual.

   Seja $x \in \mathbb{Q}$. Por contradição, suponha que $\mathbb{Q}$ é localmente compacto. Então para cada $x \in \mathbb{Q}$ temos uma base de vizinhanças compactas $\mathcal{B}_x$. Seja $K \in \mathcal{B}_x$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset K$. Além disso, sejam $\alpha \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] - \mathbb{Q}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ tal que $x_n \to \alpha$. Então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequencia de pontos em $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ tal que $\alpha \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon] - \mathbb{Q}$ é seu único ponto limite e portanto ela não pode ter subsequencias covergentes em $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Logo, $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ não é compacto. Mas pela topologia de subespaço de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ é fechado, e como $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset K$, temos também que $\mathbb{Q} \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ é compacto, pois $K \subset \mathbb{Q}$ é compacto, uma contradição. Portanto, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ não é localmente compacto.

4. V o F.

   a) Se X é um espaço métrico compacto, então X é separável.

   V Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Note que $\mathcal{U}_\varepsilon = \{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, exitem $P_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_{n_\varepsilon}\} \in X$ tal que $\mathcal{U}_\varepsilon' = \{B_\varepsilon(x_i) : i = 1, \ldots, n_\varepsilon\}$ é uma subcobertura finita.

   Então para cada $\varepsilon \in \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ temos a subcobertura finita U_ε'. Considere

$$\bigcup_{\varepsilon \in \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}} P_\varepsilon.$$

   Esta é uma união enumerável de conjuntos finitos e portanto é enumerável, e é denso pois

$$\overline{\bigcup_{\substack{\varepsilon \in \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \\ x_i \in P_\varepsilon}} B_\varepsilon(x_i)} = \bigcup_{\substack{\varepsilon \in \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \\ x_i \in P_\varepsilon}} \overline{B_\varepsilon(x_i)}$$
$$= X.$$

b) Se X é compacto, então X é separável.

F Seja (Y, τ_d) um espaço topológico, onde Y é um conjunto não enumerável e t_d é a topologia discreta em Y. Seja $x \notin Y$ e considere o espaço $X = Y \cup \{x\}$ com a topologia $\tau = \tau_d \cup \{X\}$. Então X é um espaço topológico compacto não separável pois todos os pontos de Y são isolados em X, i.e., X não contém um subconjunto enumerável e denso. Este contraexemplo prova a fealdade da afirmação.

Contraexemplo adicional (interessante) Seja $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = n^2\}$, para $n = 1, 2$. Sejam $X = C_1 \cup C_2$, $f : C_1 \to C_2$ o homomorfismo radial (i.e., envia $(x, y) \mapsto 2(x, y)$, etc), e defina $O(x, n) \subset C_1$ o arco de longitude $\frac{1}{n}$ centrado no ponto x, para todo $x \in C_1$ e $n \in \mathbb{N}$. Considere a coleção dos conjuntos da forma $B(x, n) = O(x, n) \cup f(O(x, n) - \{x\}) \subset X$. Note que esta coleção é uma base para uma topologia na cual todos os pontos de C_2 são isolados.

Agora, dada uma cobertura aberta $\{A_\alpha\}$ de X, pela topologia definida em X, este também é uma cobertura aberta de C_1, e como $C_1 \subset X$ tem a mesma topologia que $C_1 \subset \mathbb{R}^2$, temos que $C_1 \subset R^2$ é compacto. Logo existe uma subcobertura aberta $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ de C_1. Pela naturaleza de as vizinhanças abertas da topologia definida em X, $X - \{A_{\alpha_1} \cup \dots \cup A_{\alpha_1 n}\}$ consiste de uma coleção finita de pontos. Adicionando vizinhanças abertas para esta quantidade finita de pontos, temos uma subcobertura finita de $\{A_\alpha\}$. Logo, X é compacto.

Mas, como todos os pontos de C_2 são isolados, X não pode ser separável.

5. Sejam A e B dois subespaços conexos do espaço topológico X tais que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Prove que $A \cup B$ é conexo.

Por contradição, suponha que $A \cup B$ não é conexo. Sejam $U, V \in \tau_X$ não vazios disjuntos tal que $A \cup B \subseteq U \cup V$ e $(A \cup B) \cap U \neq \emptyset$ e $(A \cup B) \cap V \neq \emptyset$. Como $A \subset U \cup V$, U e V são abertos, temos que $A \cap U \neq \emptyset$ ou $A \cap V \neq \emptyset$. Mas, se $A \cap U \neq \emptyset$ e $A \cap V \neq \emptyset$, então $(A \cap U) \cap (A \cap V) = A$ é uma cisão não trivial de A, o que contradiz a conexidade de A. Logo, ou $A \cap U \neq \emptyset$ ou $A \cap V \neq \emptyset$. Sem perdida de geralidade, suponha que $A \cap U \neq \emptyset$. Analogamente, vamos obter que ou $B \cap U \neq \emptyset$ ou $B \cap V \neq \emptyset$. Se $B \cap V = \emptyset$, então $(A \cup B) \cap V = (A \cap V) \cup (B \cap V) = \emptyset$ e portanto $V = \emptyset$. Logo, devemos ter que $B \cap V \neq \emptyset$.

Assim, temos que $A \subset U$ e $B \subset V$. Sejam $U_1 = U \cap (A \cup B)$ e $V_1 = V \cap (A \cup B)$. Note que $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ já que $U \cap V = \emptyset$. Seja $p \in A \cap \overline{B}$. Então U é uma vizinhança de p e portanto $U \cap B \neq \emptyset$. No entanto, como $B \subset V$, segue que $U \cap B \subset V$, e assim $U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$, uma contradição.

6. (V ou F) Seja $F_i \subset \mathbb{S}^2$ um conjunto enumerável e denso em $\mathbb{S}^2$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então o conjunto $\prod_{i \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{S}^2 - F_i\right)$ é um conjunto conexo com a topologia produto.

V Sejam $i \in \mathbb{N}$ fixo e $x \in F_i$. Seja $\varphi : \mathbb{S}^2 - \{x\} \to \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica. Note que $\varphi(F_i - \{x\}) \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto enumerável e denso de $\mathbb{R}^2$. É bem sabido que $\mathbb{R}^2 - \varphi(F_i - \{x\})$ é conexo por caminhos. Como em espaços localmente euclidianos (feito em aula) a conexidade por caminhos implica a conexidade, temos que $\mathbb{R}^2 - \varphi(F_i - \{x\})$ é conexo. Esto é válido para cada $i \in \mathbb{N}$. Também, pela conexidade ser um invariante topológico, temos que $\mathbb{S}^2 - F_i$ é conexo e conexo por caminhos. Vamos a usar esse fato para provar que

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{S}^2 - F_i\right)$$

é conexo.

Seja $a \in X$ fixo. Seja $S_{ax} \subset X$ um conjunto conexo contendo $a, x \in X$. Seja $S = \{x \in X : \text{existe } S_{ax}\}$. Note que

$$S = \bigcup_{x \in S} S_{ax} \quad \text{e} \quad a \in \bigcap_{x \in S} S_{ax}.$$

Agora, dados $S \subset A \cup B$, onde $A, B \subset X$ são mutuamente disjuntos, então $S_{ax} \subset A$ ou $S_{ax} \subset B$ para cada $x \in X$, pois S_{ax} é conexo para cada $x \in X$. Lembre que $a \in \bigcap_{x \in S} S_{ax}$. Se $a \in A$ então $S_{ax} \subset A$ para cada $x \in X$ e portanto $B = \emptyset$. Analogamente, se $a \in B$ então $A = \emptyset$. Esto implica que S é conexo.

Para provar que X é conexo, vamos a provar que $\overline{S} = X$ (o que é equivalente já que S é conexo). Seja $b \in X$ e

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \ni b$$

um aberto básico, com U_{i_k} aberto em $\mathbb{S}^2 - F_{i_k}$ para cada $k = 1, \dots, n$. Para cada $k = 1, \dots, n$, seja

$$T_k = \left\{x \in X : x_{i_j} = b_{i_j} \text{ se } j < k,\ x_{i_j} = a_{i_j} \text{ se } j > k,\ x_i = a_i \text{ se } i \neq i_1, \dots, i_n \text{ e } x_{i_k} \in \mathbb{S}^2 - F_{i_k} \text{ é arbitrário}\right\},$$

onde a_{i_j} e b_{i_j} são as componentes de $a \in S$ e $b \in S$, respectivamente. Temos que T_k é homeomorfo a X_{i_k} e portanto é conexo. Além disso, $T_k \cap T_{k+1} \neq \emptyset$ para $k = 1, \dots, n-1$. Assim, por esta razão e o argumento usado anteriormente, $T = \bigcup_{k=1}^{n} T_k$ é conexo. Como $a \in T_1 \subset S$, temos que $T \subset S$. Por outro lado,

$$S \cap U \supset T \cap U \supset T_n \cap U \neq \emptyset.$$

Esto prova que $b \in \overline{S}$, e portanto $X = \overline{S}$.

7. Considere o espaço produto $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$. A quantidade de topologias distintas de forma a tornar este espaço produto compacto é enumerável.

   F Considere a topologia produto em $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$. Pelo Teorema de Tychonoff, este espaço vai ser compacto se e só se cada $\{0,1,2\}$ é compacto com a sua topologia. Agora, $\{0,1,2\}$ tem 29 topologias diferentes e 9 delas não equivalente. Sejam $\tau_1, \ldots, \tau_9$ essas topologias não equivalentes em $\{0,1,2\}$.

   Identificando $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \cong \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0,1,2\} = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \cdots$, fixando a topologia T_i no primeiro membro do produto, temos 9 topologias diferentes o segundo membro. Fixando a topologia τ_{i_1} no segundo membro, temos 9 topologias diferentes na terceiro membro do produto, e continuando de esta forma obtemos vamos obter $9^{|\mathbb{N}|}$ espaços não equivalentes, e portanto uma quantidade não enumerável de topologias que tornar $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.