Analysis in $\mathbb{R}^n$
IMECC

6th list of exercises
May 16^{st}, 2024

Student: Jaider Torres **RA:** 241343

Q3. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Note que $f(x,y) = \langle x, y\rangle = \sum_{i\in[n]} x_i y_i$. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i$ e $\frac{\partial f}{\partial y_i} = x_i$ para cada $i \in [n]$. Como as derivadas parciais da f existem e são contínuas (pois são constantes), então f é diferenciável em cada ponto de $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Agora,

$$df : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$$

envia $p = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ á

$$df_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\begin{aligned} df_p(v,w) &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i\in[n]} x_i v_i + \sum_{i\in[n]} y_i w_i \\ &= \langle x, v\rangle + \langle y, w\rangle. \end{aligned}$$

Em geral, seja $\Psi : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}$ uma aplicação $k-$linear. Como $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k} \cong \mathbb{R}^{\Sigma = \sum_{i=1}^k m_i}$, seja $\{e_{j_{m_i}}\}_{j=1}^{m_i}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{m_i}$ e denote $\overline{e}_{j_{m_i}} \in \mathbb{R}^{\Sigma}$ o vetor de coordenadas desde $\sum_{k=1}^{m_i-1} m_k + 1$ até $\sum_{k=1}^{m_i} m_k$ iguais a $e_{j_{m_i}}$ e 0 nos demais. Fixe $\overline{x}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \ldots, \overline{x}_{i-1} \in \mathbb{R}^{m_{i-1}}, \overline{x}_{i+1} \in \mathbb{R}^{m_{i+1}}, \ldots, \overline{x}_k \in \mathbb{R}^{m_k}$ e seja $h \in \mathbb{R}$. Então

$$\Psi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i + he_{j_{m_i}}, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_k) = \Psi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_k) + h\Psi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, e_{j_{m_i}}, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_k).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{e}_{j_{m_i}}}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Psi((\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) + h\overline{e}_{j_{m_i}}) - \Psi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) - h\Psi(\overline{x}_1, \ldots, e_{j_{m_i}}, \ldots, \overline{x}_k) - \Psi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k)}{h} \\ &= \Psi(\overline{x}_1, \ldots, e_{j_{m_i}}, \ldots, \overline{x}_k). \end{aligned}$$

Logo, cada derivada parcial da Ψ existe e como Ψ é $k-$linear, elas são contínuas. Portanto, Ψ é diferenciável em $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$.

Defina $det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n}_{n-\text{vezes}} \to \times\mathbb{R}$ por

$$(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} sng(\sigma) \prod_{i\in[n]} v_{i\sigma(i)}.$$

Denote $\overline{e}_{ij} \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ o elemento com 1 na posição (i,j) e 0 nos demais. Seja $\{e_{ij}\}_{i=1}^n$ base para a $j-$ésima componente do $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$. Como det é $n-$linear, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial det}{\partial \overline{e}_{ij}}(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) &= \lim_{h\to 0} \frac{det((\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) - h\overline{e}_{ij}) - det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)}{h} \\ &= \frac{det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_i + he_{ij}, \ldots, \overline{v}_n) - det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)}{h} \\ &= \frac{det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_i, \ldots, \overline{v}_n) + h\, det(\overline{v}_1, \ldots, e_{ij}, \ldots, \overline{v}_n) - det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)}{h} \\ &= det(\overline{v}_1, \ldots, e_{ij}, \ldots, \overline{v}_n), \end{aligned}$$

i.e.,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial det}{\partial x_{ij}}(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n) &= det\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & 0 & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & 1_{(i,j)} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{i+j}C_{ij} \\
&= Adj(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n)^{\mathbf{T}}_{i,j},
\end{aligned}
$$

onde $C_{i,j}$ é o cofator i,j da matriz definida por $(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n)\in\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$. Como as derivadas parciais da função det existem e são funções polinomiais, elas são contínuas e portanto a função det é diferenciável. Além disso,

$$
d\ det : \mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{1,n^2}(\mathbb{R})
$$

definida por

$$
\begin{aligned}
\overline{v} = (\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n) \mapsto d\ det_{(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n)} &: \mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\
\overline{x} = (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n) &\mapsto \left(\tfrac{\partial det}{\partial x_{11}}(\overline{v}) \quad \cdots \quad \tfrac{\partial det}{\partial x_{nn}}(\overline{v})\right)\overline{x} \\
&= \sum_{i,j\in[n]} Adj(\overline{v})^{\mathbf{T}}_{ij}x_{ij} \\
&= \sum_{j\in[n]}\left(\sum_{i\in[n]} Adj(\overline{v})^{\mathbf{T}}_{ij}x_{ij}\right) \\
&= Tr\left(\left(\frac{\partial det}{\partial x_{ij}}\right)^{\mathbf{T}}_{i,j\in[n]}\overline{x}\right),
\end{aligned}
$$

a chamada formula de Jacobi.

Q4. Note que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(x+he_i)-f(x)|}{h} \\
&\le \lim_{h\to 0}\frac{c\|x+he_i-x\|}{h} \\
&= c.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|df_x(v)| &= |\langle \nabla f_x, v\rangle| \\
&= \left|\sum_{i\in[n]}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i\right| \\
&\le \sum_{i\in[n]}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i\right| \\
&= \sum_{i\in[n]}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right||v_i| \\
&\le c\sum_{i\in[n]}|v_i| \\
&= c\|v\|_S,
\end{aligned}
$$

para $v,x\in U$.

Q5. Sejam $f_1 : [0,b]\to\mathbb{R}$ definida por $f_1(s) = \int_0^s\left(\int_y^b f(x,y)dy\right)dx$ e $f_2 : [0,b]\to\mathbb{R}$ definida por $f_2(s) = \int_0^s\left(\int_y^s f(x,y)dx\right)dy$. Como f é contínua, ela é integrável e assim f_i é diferenciável para $i=1,2$. Note que $f_1(0)=f_2(0)=0$. Queremos provar $f_1(b)=f_2(b)$.

Temos que $\frac{df_1}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\left(\int_0^s \left(\int_0^x f(x,y)dy\right)dx\right)$. Seja $u_1(x) = \int_0^x f(x,y)dy$. Pelo teorema fundamental do calculo temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\int_0^s u_1(x)dx\right) &= u_1(s)\\ &= \int_0^s f(s,y)dy.\end{aligned}$$

Agora, seja $u_2(s,y) = \int_y^s f(x,y)dx$. Então f_2 pode se escrever como

$$f_2(s) = \int_0^s u_2(s,y)dy.$$

Usando a regra de Leibniz e o teorema de Schwarz temos que

$$\begin{aligned}\frac{df_2}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\int_{s=0}^{g(s)=s} u_2(s,y)dy\right)\\ &= \int_{s=0}^{g(s)=s} \frac{\partial u_2}{\partial s}(s,y)dy + \frac{\partial g}{\partial s}(s)u_2(s,g(s))\\ &= \int_{s=0}^{g(s)=s} \frac{\partial u_2}{\partial s}(s,y)dy + \frac{\partial g}{\partial s}(s)u_2(s,g(s))\\ &= \int_0^s \frac{\partial u_2}{\partial s}(s,y)dy + 1\cdot u_2(s,g(s)).\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial u_2}{\partial s}(s,y) = \frac{d}{ds}\int_y^s f(x,y)dx = f(s,y)$ e $u_2(s,g(s)) = u_2(s,s) = \int_s^s f(x,s)dx = 0$ para cada $s \in [0,b]$, então

$$\frac{df_2}{ds}(s) = \int_0^s f(s,y)dy$$

Assim, $f_1'(s) = f_2'(s)$ para cada $s \in [0,b]$. Usando o teorema fundamental do calculo novamente, temos

$$\begin{aligned}f_1(b) &= f_1(0) + \int_0^b f_1'(s)ds\\ &= f_2(0) + \int_0^b f_2'(s)ds\\ &= f_2(b),\end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_0^b \left(\int_0^x f(x,y)dy\right)dx = \int_0^b \left(\int_y^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Por ultimo, seja $g : [0,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Usando o que acabamos de provar, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\int_0^x g(y)dy\right)dx &= \int_0^t \left(\int_y^t g(y)dx\right)dy\\ &= \int_0^t g(y)x|_y^t dy\\ &= \int_0^t g(y)(t-y)dy,\end{aligned}$$

onde $g(y) = f(x,y)$ e $t = b$.

Q6. Seja $U \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ e $f \in \mathcal{C}^2(U)$ e $T \in O_n(\mathbb{R})$ uma transformação ortogonal. Note que, por definição, temos que

$$df : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$$

é definida como

$$\begin{aligned}df(x) = df_x &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\\ (v_1,\dots,v_n) &\mapsto df_x(v)\\ &= \sum_{i\in[n]} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i\\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right), v\right\rangle.\end{aligned}$$

Denotando $\nabla f_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$, temos que ∇f_x é a única função tal que

$$\langle v, \nabla f_x \rangle = df_x(v),$$

para cada $x, v \in U$. e assim é possível considerar $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como a aplicação que envia $x \mapsto \nabla f_x$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} d[\nabla f] : \mathbb{R}^n &\to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ x &\mapsto d[\nabla f]_x = Jac[\nabla f]_x = Hess(f)_x^T, \end{aligned}$$

pois $f \in \mathcal{C}^2(U)$.

Então

$$\begin{aligned} \langle v, \nabla[f \circ T]_x \rangle &= d[f \circ T]_x(v) \\ &= df_{T(x)}(dT_x(v)) \leftarrow \text{ usando a regra da cadeia} \\ &= df_{T(x)}(T(v)) \leftarrow \text{ a diferencial de uma aplicação linear é sua matriz associada e portanto ela mesma} \\ &= \langle T(v), \nabla f_{T(x)} \rangle \\ &= \langle v, T^{-1}(\nabla f_{T(x)}) \rangle, \leftarrow \text{ Já que } T \text{ é ortogonal} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\langle v, \nabla[f \circ T]_x \rangle = \langle v, T^{-1}(\nabla f_{T(x)}) \rangle.$$

Assim, temos que $\nabla[f \circ T]_x = T^{-1} \circ (\nabla f) \circ T$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta[f \circ T](x) &= Tr\ d[T^{-1} \circ (\nabla f) \circ T]_x \\ &= Tr\ dT^{-1}_{[(\nabla f) \circ T](x)} \cdot d[\nabla f]_{T(x)} \cdot dT_x \\ &= Tr\ T^{-1} \cdot d[\nabla f]_{T(x)} \cdot T \\ &= Tr\ d[\nabla f]_{T(x)} \cdot T^{-1} \cdot T \\ &= Tr\ d[\nabla f]_{T(x)} \cdot Id_n \\ &= Tr\ d[\nabla f]_{T(x)} \\ &= Tr\ Hess(f)_{T(x)}^T \\ &= Tr\ Hess(f)_{T(x)} \\ &= [\Delta f] \circ T(x). \end{aligned}$$

Q8. Seja $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ positivamente homogênea de grau $k \in \mathbb{Z}^+$. Vamos provar primeiro que $\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j}}$ são funções $k - j$ homogêneas para cada $j \in [k]$ e $i_1, \ldots, i_j \in [n]$.

Como $f(tx) = t^k f(x)$, pela regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)t = t^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $i \in [n]$. Por indução, suponha que esto es certo para funções positivamente homogêneas de grau $k-1$, onde $k \geq 2$. Como $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ são positivamente homogêneas de grau $k-1$, para cada $i \in [n]$. Assim, pela hipótese de indução, para $i \in [n]$, temos que

$$\frac{\partial^j \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j}}(tx) = t^{k-1-j} \frac{\partial^j \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j}}(x),$$

para cada $i_1, \ldots, i_j \in [n]$ e $j \in [k-1]$. Portanto,

$$\frac{\partial^{j+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j} \partial x_i}(tx) = t^{k-1-j} \frac{\partial^{j+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j} \partial x_i},$$

para cada $j + 1 = 2, \ldots, k$ e $i_1, \ldots, i_j, i \in [n]$. Logo, f satisfaz

$$d^j f_{tx}(v_1, \ldots, v_j) = t^{k-j} d^j f_x(v_1, \ldots, v_j),$$

para cada $j \in [k]$, onde avaliamos a diferencial da f em j vetores pois $d^j f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n}_{j-\text{vezes}}, \mathbb{R})$, i.e., una aplicação que envia um vetor de $\mathbb{R}^n$ em uma forma $j-$linear.

Logo, $d^k f_{tx}(v_1, \dots, v_k) = d^k f_x(v_1, \dots, v_k)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $d^k f_x = d_k f_0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, já que

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $1_i, \dots, i_k \in [n]$, temos que todas as derivadas parciais de ordem k da f são constantes. Logo, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $d^j f_x = 0$ para cada $j \geq k+1$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Agora, seja $\varphi(t) = f(tx) = t^k f(x)$. Temos que $\varphi^{(j)}(t) = 0$ para cada $j \geq k+1$, $\varphi^{(j)}(t) = \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-i} f(x)$ para $j \in [k]$ e $\varphi^{(j)} = d^j f_{tx} x^j$. Quando $j \in [k-1]$, temos que $\frac{k!}{(k-j)!} t^{k-i} f(x) = d^j f_{tx} x^j$ e assim $d^j f_0 x^j = 0$. Agora, quando $j = k$, temos que $d^j f_0 x^j = k! f(x)$. Portanto, $d^j f(0) x^j = 0$ quando $j \neq k$ e $d^j f_0 x^j = k! f(x)$ quando $j = k$.

Então, $f(x) = \frac{1}{k!} d^k f_0 x^k$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, i.e., f é uma forma $k-$linear.

Q9. Seja $\psi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x, y) = g(x) - \int_0^y (t^2 - 1) dt$. Note que

$$\begin{aligned} \psi(x, f(x)) &= g(x) - \int_0^{f(x)} (t^2 + 1) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, $\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = -(y^2 + 1) \neq 0$ para cada $y \in \mathbb{R}$. Em particular, $\frac{\partial \psi(x, f(x))}{\partial y} = -(f(x)^2 + 1) \neq 0$. Assim, tomando $y = f(x)$ e $p = (x, y)$, pelo teorema da função implícita, existem vizinhanças $N(x) \subset U$ e $N(y) = (y - \delta, y + \delta)$ e uma função $\eta_p : N(x_0) \to N(y)$ de classe $\mathcal{C}^k$ tal que $\psi^{-1}(0)\big|_{N(x_0) \times N(y)} = graph(\eta_p)$, i.e.,

$$g(x) = \int_0^{\eta_p(x)} (t^2 + 1) dt,$$

implicando isso que $\eta_{p_0}(x) = f|_{N(p)}(x)$, onde $N(p) = N(x) \times N(y)$. Portanto, se $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ então $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Q10. Seja $x_0[0, 1]$ fixo. Considere $h : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Como f é positiva e contínua, h é crescente, pois $h(x) \leq h(y)$ sempre que $x \leq y$, e de classe $\mathcal{C}^1$.

Assim, se $x_0 \in (0, 1)$ então $h(1) < \int_1^2 f(x) dx = 1 < h(2)$. Logo, o teorema do valor intermediário implica a existência de $y_0 \in (1, 2)$ tal que

$$h(y_0) = \int_{x_0}^{y_0} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt = 1.$$

Seja $F : (0, 1) \times (1, 2) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = \int_x^y f(t) dt$. Como a f é contínua, as derivadas parciais da f são contínua e F de classe $\mathcal{C}^1$. Note que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_x^y f(t) dt = f(y) > 0$ e para cada $x_0 \in (0, 1)$ existe $y_0 \in (1, 2)$ tal que $F(x_0, y_0) = 1$ pela observação anterior.

Como $\frac{\partial F}{\partial y}$ é não em lugar nenhum, o teorema da função implícita implica a existência de $\zeta : I \subset [0, 1] \to J \subset [1, 2]$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ e para cada $x \in I$, $F(x, \zeta(x)) = 1$. Além disso, como

$$\zeta'(s) = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(s, \zeta(s)) \right) = -\left(\frac{-f(s)}{f(\zeta(s))} \right) > 0, \tag{1}$$

o teorema da função inversa exitem $I' \subseteq I$, $J' \subset J$ tal que ζ é uma bijeção entre I' e J', e portanto para cada $x \in I'$ existe um único $\zeta(x) \in J'$ tal que $F(x, \zeta(x)) = 1$. Como h é estritamente crescente quando $x_0 \in (0, 1)$, é possível estender ζ a $(0, 1)$ de forma única.

Desta forma, defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \zeta(x) & \text{se } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Para que g seja de classe $\mathcal{C}^1$, temos que provar que g é continua e diferenciável em $x = 0, 1$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ tal que $x_n \to 0$. Já que para qualquer $c \in (1, 2)$ temos que $\int_0^c f(t) dt > 1$ e para $1 < d < c$ temos que $\int_0^d f(t) dt < \int_0^c f(t) dt$, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{x_0}^{\zeta(x)} f(t) dt - 1 \right| = |g(x_n) - 1| < \varepsilon$$

quando $n \geq N$. Portanto, g é continua em $x = 0$. É provado de forma análoga que g é contínua em $x = 1$.

Agora, como antes, pelo teorema da função implícita temos que

$$g'(x) = \frac{f(x)}{f(g(x))} = \frac{f(x)}{f(\zeta(x))}$$

e como f é uma função contínua não em lugar nenhum e g é contínua em $(0,1)$, g' é uma função contínua em $(0,1)$. Então, para $x=0$ temos que, como g é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, $g'_d(0)$ (derivada lateral direita) existe e $g'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{f(g(x))} = \frac{f(0)}{f(1)}$. O mesmo argumento nos diz que $g'_e(1)$ (derivada lateral esquerda) existe e $g'_e(1) = \frac{f(1)}{f(2)}$.

Portanto, g assim definida é de classe $\mathcal{C}^1$.

Q11. Teorema do Multiplicador de Lagrange. Sejam $f, \varphi : U \tau_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^k(U)$ $(k \geq 1)$, $c \in \mathbb{R}$ um valor regular da função φ e considere a hipersuperficie $M = f^{-1}(c) \subseteq U$ de classe $\mathcal{C}^k$. Então $p \in M$ é ponto critico de $f|_M$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f_p = \lambda \nabla \varphi_p$.

Seja $\mathbf{0} \neq y \in \mathbb{R}^n$ fixo e $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f(x) = \langle y, x\rangle \qquad \text{e} \qquad g(x) = \|x\|_p^p - 1.$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i$ e $\frac{\partial g}{\partial x_i} = p|x_i|^{p-2}x_i$ para cada $i \in [n]$. Logo, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\nabla f_x = y$ e $\nabla g_x = p(|x_1|^{p-2}x_1, \ldots, |x_n|^{p-2}x_n)$.[1]

Denote $\mathbb{S}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ a esfera unitária na $p-$norma no $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{S}_p$ é compacta, $f|_{\mathbb{S}_p}$ alcança o valor máximo em um ponto $\overline{x} \in \mathbb{S}_p$, i.e., $f|_{\mathbb{S}_p}(\overline{x}) \geq f|_{\mathbb{S}_p}(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}_p$. Além disso, $\nabla g_{\overline{x}} \neq 0$ pois

$$\begin{aligned} dg_{\overline{x}}(\overline{x}) &= \langle \nabla g_{\overline{x}}, \overline{x}\rangle \\ &= \sum_{i\in[n]} p|x_i|^{p-2}x_i x_i \\ &= \sum_{i\in[n]} p|x_i|^{p-2}|x_i|^2 \\ &= p\|x\|_p^p \\ &= p > 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Multiplicador de Lagrange, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f_{\overline{x}} = \lambda \nabla g_{\overline{x}}$, i.e., $y_i = \lambda p |x_i|^{p-2}x_i$(*) para cada $i \in [n]$. Multiplicando por $\overline{x}_i$ obtemos $\overline{x}_i y_i = \lambda p |\overline{x}_i|^p$ e assim

$$f(\overline{x}) = \sum_{i\in[n]} \overline{x}_i y_i = \langle \overline{x}, y\rangle = \lambda p \|x\|_p^p = \lambda p.$$

Agora, se $\hat{y} = \frac{y}{\|y\|_p}$ então $\hat{y} \in \mathbb{S}_p$ e

$$\begin{aligned} \lambda p &= \langle y, \overline{x}\rangle \\ &\geq \langle y, \hat{y}\rangle \\ &= \frac{1}{\|y\|_p}\langle y, y\rangle \\ &= \frac{\|y\|_2^2}{\|y\|_p} > 0. \end{aligned}$$

Isso implica $\lambda > 0$.

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ou $p = (p-1)q$, considerando a $q-$ésima potencia do valor absoluto de (*) temos que

$$\begin{aligned} |y_i|^q &= (\lambda p)^q \left(|\overline{x}_i|^{p-2}|\overline{x}_i|\right) \\ &= (\lambda p)^q |\overline{x}_i|^{(p-1)q}. \end{aligned}$$

Isto nos leva a

$$\begin{aligned} \sum_{i\in[n]} |y_i|^q = \|y\|_q^q \\ &= (\lambda p)^q \sum_{i\in[n]} |\overline{x}_i|^{(p-1)q} \\ &= (\lambda p)^q \|\overline{x}\|_p^p \\ &(\lambda p)^q, \end{aligned}$$

[1]Como $\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$ e $\frac{d}{dx}g(x)^p = pg(x)^{p-1}g'(x)$, temos que $\frac{d}{dx}|g(x)|^p = p|g(x)|^{p-1}\frac{g(x)}{|g(x)|}g'(x)$ pela regra da cadeia.

i.e.

$$\|y\|_q = \lambda p,$$

o que implica $f(\overline{x}) = \|y\|_q$.

Assim, se $\hat{x} \in \mathbb{S}_p$ então $\langle \hat{x}, y\rangle = f(\hat{x}) \leq f(\overline{x}) = \|y\|_q$ **(**)**.

Para $\mathbf{0} \neq x \in \mathbb{R}^n$ qualquer, seja $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_p} \in \mathbb{S}_p$. Pela mesma consideração que acabamos de fazer temos que $\langle x, y\rangle \leq \|y\|_q \|x\|_p$, i.e., $\langle x, y\rangle = \|x\|_p \langle \hat{x}, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Finalmente, note que $f(-\overline{x}) = -\langle y, \overline{x}\rangle = -\langle p = -f(\overline{x})$ e como $f(\overline{x}) \geq f(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}_p$, então $f(-\overline{x}) \leq f(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}_p$. Portanto, $-\overline{x} \in \mathbb{S}_p$ é mínimo de $f|_{\mathbb{S}_p}$. Assim, para $\mathbf{0} \neq x \in \mathbb{R}^n$ qualquer, $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$ é tal que $\langle \hat{x}, y\rangle = \frac{1}{\|x\|_p}\langle x, y\rangle \geq -\langle \overline{x}, y\rangle = -f(\overline{x}) = -\|y\|_q$, i.e., $-\|x\|_p \|y\|_q \leq \langle x, y\rangle$.

Portanto, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.