Lista 0: revisão de topologia euclidiana

18 de fevereiro de 2025

Notação (norma euclidiana): dado $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

1. Revise as seguintes definições, bem como caracterizações equivalentes, para um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ com a topologia euclidiana: *aberto*, *fechado*, *limitado*, *conexo* e *compacto*. Revise também as noções de *interior*, *fecho* e *bordo* de um subconjunto. Qual é a diferença entre *ponto aderente* e *ponto de acumulação*?

2. Calcule o interior e o bordo de cada um dos seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \qquad \mathbb{Q}^n.$$

3. O que dizem os teoremas de Heine–Borel e de Bolzano–Weierstrass?

4. Seja $(p_k)_{k\geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ e denote por $p_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,n})$ as coordenadas de p_k. Seja $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $(p_k)_{k\geq 1}$ converge para q em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, cada $(p_{k,i})_{k\geq 1}$ converge para q_i em $\mathbb{R}$.

5. Uma sequência $(p_k)_{k\geq 1}$ em $\mathbb{R}^n$ é dita *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que, se $k, l \geq k_0$, então $\|p_k - p_l\| < \varepsilon$. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é *completo*, isto é, que toda sequência de Cauchy converge.

6. Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, lembremos que uma aplicação $F : X \to \mathbb{R}^m$ é *contínua* em um ponto $p \in X$ se, para toda vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^m$ de $F(p)$ existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ de p tal que $F(U \cap X) \subset V$. Mostre que esta definição é equivalente à "definição por ε e δ": $F : X \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ satisfaz $\|x - p\| < \delta$, então $\|F(x) - F(p)\| < \varepsilon$.

7. Com a notação do exercício anterior, mostre que $F : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua em (todo ponto de) X se, e somente se, para todo aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F^{-1}(V) = U \cap X$ ("imagem inversa de aberto é aberto").

8. Ainda com a notação anterior, sejam $F_1, \dots, F_m : X \to \mathbb{R}$ as componentes de F, isto é, $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$. Mostre que $F : X \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in X$ se, e somente se, todas as $F_i : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em p.

9. Lembremos que um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ é *discreto* se todo ponto $p \in E$ admite uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^m$ tal que $E \cap U = \{p\}$. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto conexo e $f : X \to E$ uma aplicação contínua. Mostre que f é constante.

10. Mostre que todo subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ é enumerável. Um subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ é necessariamente fechado?

11. Mostre que um aberto não-vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, quaisquer dois pontos $p, q \in U$ podem ser conectados por um *caminho poligonal*, isto é, uma coleção de segmentos em U da forma

$$[p, p_1], [p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, q].$$

12. Considere subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Um *homeomorfismo* entre X e Y é uma aplicação contínua $F : X \to Y$ que admite uma inversa contínua, isto é, existe uma aplicação contínua $G : Y \to X$ tal que

$$F \circ G = \mathrm{id}_Y \quad \text{e} \quad G \circ F = \mathrm{id}_X\,.$$

Exiba um homeomorfismo explícito entre

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{e} \quad Y = \mathbb{R}^2.$$

Existe um homeomorfismo entre

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad Y = \mathbb{R}?$$

13. Um *bloco aberto* em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto da forma

$$U = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

onde cada $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto limitado. Mostre que os blocos abertos formam uma *base* para a topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$, isto é, todo aberto em $\mathbb{R}^n$ é uma união de blocos abertos.

14. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $D \subset X$ um subconjunto. Dizemos que D é *denso* em X se para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ de x, a interseção $D \cap U$ é não-vazia. Mostre que, se $F, G : X \to \mathbb{R}^m$ são aplicações contínuas tais que $F(x) = G(x)$ para todo x em um subconjunto denso de X, então $F = G$.

15. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma *função polinomial*:

$$f(x) = \sum_{i_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{d_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

Mostre que, se f não é identicamente nula, então $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ é denso em $\mathbb{R}^n$.

16. Identificando o espaço de matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$, mostre que o subconjunto das *matrizes ortogonais*:

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = A^t A = I\}$$

é compacto.