Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

Topología | 2025-I

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

Conjuntos

☐ **Ejercicio** *(Leyes de De Morgan.)* $X\backslash\bigcup A_i = \bigcap X\backslash A_i$ y $X\backslash\bigcap A_i = \bigcup X\backslash A_i$.

Ejercicio La imagen inversa es bien portada, con uniones, intersecciones y complementos.

Ejercicio (a) $f\left(\bigcup A_i\right) = \bigcup f(A_i)$; (b) $f\left(\bigcap A_i\right) \subset \bigcap f(A_i)$ [1]; (c) $\overset{\hookrightarrow}{f}(X\backslash A) \subset Y\backslash f(A)$; (d) $\overset{\twoheadrightarrow}{f}(X\backslash A) \supset Y\backslash f(A)$.

☐ **Ejercicio** (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ igualdad si $\overset{\hookrightarrow}{f}$; (b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ igualdad si $\overset{\twoheadrightarrow}{f}$.

Espacios Métricos

◇ *Métrica.* Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ es métrica si $\forall x, y, z \in X$

- $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo Las métricas estándar en $\mathbb{R}^n$ inducidas por las normas $\|\cdot\|_j$ con $j = 1, 2$ y ∞.

Ejemplo Métrica discreta y métrica inducida.

◇ *Bola abierta* $\to B(a; r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$; *Bola cerrada* $\to B[a; r] := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$.

◇ $\mathcal{U}^\vee \subset X$ sii $\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq \mathcal{U}$. En contraposición, $\mathcal{F}^\triangledown \subset X$ sii $X\backslash\mathcal{F}$ es abierto.

Ejercicio Las bolas abiertas son abiertos y las cerradas son cerradas en X.

☐ Sea X un espacio métrico, entonces: (a) $\emptyset$ y X son abiertos; (b) Unión de una familia arbitraria de abiertos es abierto y (c) Intersección de una familia finita de abiertos es abierto.

$*$ Colorario de esto es la contra-versión para cerrados.

◇ *Continuidad.* Sean X y Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua en $a \in X$ sii $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$.

☐ $f : X \to Y$ es continua en $a \in X$ sii $\forall \overset{\overset{f(a)}{\Cap}}{V^\vee} \subset Y, \exists \overset{\overset{a}{\Cap}}{U^\vee} \subset X$ tal que $f(U) \subset V$.

☐ f es continua $\Leftrightarrow$ $\forall V^\vee \subset Y$ tenemos $f^{-1}(V)^\vee \subset X \Leftrightarrow \forall F^\triangledown \subset Y$ tenemos $f^{-1}(F)^\triangledown \subset X$.

[1] Igualdad si f inyecta.

Espacios Topológicos

$\diamondsuit$ *Espacio Topológico.* Sea X un conjunto. Una topología en X es un conjunto $\tau \subseteq \wp(X)$ que verifica:

- $\emptyset, X \in \tau$.
- Si $A_i \in \tau$ entonces $\bigcup A_i \in \tau$. $A \in \tau$ es abierto
- Si $A_k \in \tau$ con $|k| < \infty$ entonces $\bigcap A_k \in \tau$.

Ejemplo El conjunto de abiertos de un espacio métrico es una topología τ_d para X. Caso de la topología usual τ_{d_2} para $\mathbb{R}^n$ dada por los abiertos de la métrica euclidiana.

Ejemplo La topología discreta $\tau_{\mathrm{T}} = \wp(X)$ y la topología trivial $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$.

$\diamondsuit$ (X, τ) es metrizable sii una métrica d tal que $\tau = \tau_d$.

$\diamondsuit$ Sean τ_1, τ_2 dos topogías para X. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ entonces τ_2 es mas fina-fuerte que τ_1.

$*$ Acá de nuevo los cerrados se definen como complementos de abiertos y existe también la definición en términos de conjuntos cerrados.

Adherencia e Interior

$\diamondsuit$ *Adherencia.* Para $A \subset X$ sea $\mathcal{F} = \{F^{\nabla} \subset X : A \subset F\}$, definimos $\overline{A} := \bigcap \mathcal{F}$.

$\square$ (a) $A \subset \overline{A}$; (b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; (c) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; (d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; (e) $A^{\nabla} \Leftrightarrow A = \overline{A}$.

$*$ Sea $f : \wp(X) \to \wp(X)$ tal que $A \mapsto \overline{A}$ y $\mathcal{F} := \{A \subset X : A = \overline{A}\}$. Si la familia $\mathcal{F}$ verifica las propiedades en la proposición anterior, entonces $\mathcal{F}$ define los cerrados de una topología τ sobre X.

$\diamondsuit$ *Interior.* Para $A \subset X$ sea $\mathcal{U} = \{U^{\vee} \subset X : U \subset A\}$, definimos $\overset{\circ}{A} := \bigcup \mathcal{U}$.

$\square$ $X \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$ y $X \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{X \backslash A}$. Hint: De Morgan.

$\square$ (a) $\overset{\circ}{A} \subset A$; (b) $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$; (c) $\overset{\circ}{X} = X$; (d) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$; (e) $A^{\vee} \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

$*$ De nuevo, una familia $\mathcal{U} := \{A \subset X : A = \overset{\circ}{A}\}$ que verifique las propiedades anteriores define los abiertos de una topología τ sobre X.

Sistemas de Vecindades

$\diamondsuit$ Sea X espacio topológico y $U \subset X$, el conjunto $U \in \mathcal{U}_x$ sii $x \in \overset{\circ}{U}$.

$\square$ Las vecindades cumplen: (a) $\forall U \in \mathcal{U}_x$ el punto $x \in U$; (b) $U, V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x$; (c) $\forall U \in \mathcal{U}_x, \exists V \in \mathcal{U}_x, \forall y \in V$ se tiene $V \subset U \in \mathcal{U}_y$; (d) $\mathcal{U}_x \ni U \subset V \subset X \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$; (e) $U^{\vee} \subset X$ sii $\forall x \in U$ se tiene $U \in \mathcal{U}_x$.

$*$ Un sistema de vecindades define una topología en X dada por $\tau := \{U \subset X : \forall x \in U$ se tiene $U \in \mathcal{U}_x\}$.

$\diamondsuit$ Una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ es base de vecindades de x si $\forall U \in \mathcal{U}_x, \exists \mathcal{B}_x \ni V \subset U$.

Ejemplo $\mathcal{B}_x := \{U \in \mathcal{U}_x : U^{\vee} \subset X\}$.

Ejemplo En un espacio métrico $\mathcal{B}_x := \{B(x; r) : r > 0\}$ es base del sistema de vecindades de x [2].

[2] PD. Las bolas cerradas también.

$\square$ Una base de vecindades $\mathcal{B}_x$ verifica: (a) $\forall U \in \mathcal{B}_x$ el punto $x \in U$; (b) $U, V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$; (c) $\forall U \in \mathcal{B}_x, \exists V, W \in \mathcal{B}_x, \forall y \in V$ se tiene $V \subset U$ y $\mathcal{B}_y \ni W \subset U$; (d) $U^\vee \subset X$ sii $\forall x \in U, \exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.

$*$ Un familia $\mathcal{B}_x$ que verifique las propiedades (a), (b) y (c) es una base para la topología $\tau = \{U \subset X : \forall x \in U, \exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U\}$.

$\square$ Sea $A \subset X$ e $\mathcal{B}_x$ una base para la topología τ. Entonces: (a) $A^\vee$ sii $\forall x \in A, \exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset A$; (b) A^∇ sii $\forall x \notin A, \exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $A \cap V = \emptyset$; (c) $\overline{A} = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{B}_x$ se tiene $V \cap A \neq \emptyset\}$; (d) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : \exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset A\}$.

$\diamondsuit$ X satisface el *primer axioma de enumerabilidad* sii $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}_x$ enumerable.

Ejemplo Todo espacio métrico satisface el primer axioma de enumerabilidad.

Bases to Abiertos

$\diamondsuit$ Sea (X, τ). Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ es base sii $\forall U^\vee \in \tau, \exists \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup\{V : V \in \mathcal{C}\}$.

Ejemplo $\{(a,b)\}$ en la topología usual de $\mathbb{R}$.

Ejemplo $\{\{x\} : x \in X\}$ para la topología discreta.

$\square$ $\mathcal{B}$ es base sii $\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$ es una base de vecindades de x.

$\square$ *Base Juliana.* Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ un familia de subconjuntos de X tal que: (a) $X = \bigcup\{V : V \in \mathcal{B}\}$; (b) $\forall U, V \in \mathcal{B}$ si $x \in U \cap V$ entonces $\exists \underset{\underset{x}{\Cup}}{W} \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$. El conjunto $\mathcal{B}$ es base para la topología,

$$\tau = \left\{U : U = \bigcup\{V : V \in \mathcal{C}\} \text{ con } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\right\}.$$

$\diamondsuit$ X satisface el *segundo axioma de enumarabilidad* si $\exists \mathcal{B}$ enumerable para la topología.

Subespacios

$\diamondsuit$ Sea (X, τ) e $S \subset X$. La familia $\tau_S := \{S \cap U : U \in \tau\}$ es una topología (inducida) sobre S.

Ejemplo $\mathbb{Z}$ con la topología inducida por $\mathbb{R}$, es una espacio discreto.

Ejemplo $\mathbb{R}$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$.

$\square$ Sea $S \leq X$, entonces: (a) $U^\vee \subset S$ sii $\exists V^\vee \subset X$ tal que $U = S \cap V$; (b) $F^\nabla \subset S$ sii $\exists G^\nabla \subset X$ tal que $F = S \cap G$; (c) $A \subset S \Rightarrow \overline{A}^S = S \cap \overline{A}^X$; (d) Si $x \in U \subset S$ entonces $U \in \mathcal{U}_x$ en S sii $\exists U' \in \mathcal{U}'_x$ en X tal que $U = S \cap U'$.

Funciones Continuas

◇ $f : X \to Y$ es continua en $a \in X$ sii $\forall \overset{f(a)}{\overset{\cap}{V^{\vee}}} \subset Y, \exists \overset{a}{\overset{\cap}{U^{\vee}}} \subset X$ tal que $f(U) \subset V$.

$*$ Denotamos $C(X,Y)$ al conjunto de todas las $f : X \to Y$ continuas, $C(X)$ si $Y = \mathbb{R}$.

□ Sean $\mathcal{B}_a$ y $\mathcal{B}_{f(a)}$ bases de vecindades. Entonces, son equivalentes: f continua en $a \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}, \exists U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(U) \subset V \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}_{f(a)}, \exists U \in \mathcal{B}_a$ tal que $f(U) \subset V$.

□ Sea $f : X \to Y$, son equivalentes: f continua en $a \Leftrightarrow \forall V^{\vee} \subset Y$ se tiene $f^{-1}(V)^{\vee} \subset X \Leftrightarrow \forall F^{\nabla} \subset Y$ se tiene $f^{-1}(F)^{\nabla} \subset X$.

□ Sean $f : X \to Y$ continua en a y $g : Y \to Z$ continua en $f(a)$, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua en a.

□ Sean $f : X \to Y$ continua y $S \leq X$, entonces $f|_S$ es continua.

□ Sean $X = S_1 \cup S_2$, ambos abiertos y $f : X \to Y$ tal que $f|_{S_1}$ y $f|_{S_2}$ son ambas continuas, entonces f es continua.

◇ f es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y ambas f y f^{-1} son continuas. Le llamamos *inmersión* si f es un homeomorfismo de X en algún subespacio de Y.

◇ f es *abierta* si $\forall U^{\vee} \subset X$ se tiene $f(U)^{\vee} \subset Y$, *cerrada* si $\forall F^{\nabla} \subset X$ se tiene $f(F)^{\nabla} \subset Y$.

□ f es un homeomorfismo $\Leftrightarrow$ f es biyectiva, continua y abierta $\Leftrightarrow$ f es biyectiva, continua y cerrada.

Topología Producto

◇ Para una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ no vacía, su *producto cartesiano* es $\prod X_i = \{(x_i) : x_i \in X_i\}$. Para cada $j \in I$ la proyección $\pi_j : x \in \prod X_i \mapsto x_j \in X_j$.

$*$ No hay garantía de $\prod X_i \neq \emptyset$ en el caso de que $|I| = \infty$, se hace necesario el axioma de elección.

◇ *Axioma de Elección.* Sea $\mathcal{A} = \{X_i\}$ familia no vacía de conjuntos disjuntos no vacíos, entonces $\exists f, \forall i \in I$, tal que $f : I \to \bigcup X_i$ envia $i \mapsto f(i) \in X_i$.

□ Si $\{X_i\} \neq \emptyset$ con $X_i \neq \emptyset$, entonces $\prod X_i \neq \emptyset$.

□ Sean X_i espacios topológicos y $X = \prod X_i$. El conjunto $\mathcal{B} = \{\prod U_i : U_i^{\vee} \subset X_i\}$ es base para una una topología sobre X que llamamos *topología de cajas*.

Ejemplo Sea $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $X_i = \mathbb{R}$ para cada $i \in I$, entonces $\prod X_i$ es la topología usual en $\mathbb{R}^n$.

$*$ La topología de cajas resulta inconveniente en conjuntos de indices infinitos.

□ Sean $X = \prod X_i$ y $\mathcal{B} = \prod U_i$ tales que (a) $U_i^{\vee} \subset X_i$ y (b) $\forall J \subset I$ finito , $\forall i \in I \setminus J$ se tiene $U_i = X_i$, entonces $\mathcal{B}$ es base para de una topología llamada *topología producto* sobre X.

□ La topología producto en la más fina en X tal que todas las proyecciones $\pi_j : X \to X_j$ son continuas.

□ Sean $X = \prod X_i$ y Y espacios topológicos y $g : X \to Y$ una función, entonces g es continua sii $\forall j \in I$, se tiene $\pi_j \circ g : Y \to X_j$ es continua.

□ Sean X conjunto, $\{X_i\}$ familia no vacía de espacios topológicos e $\forall i \in I$ sea $f_i : X \to X_i$. Sea también $\mathcal{B} = \left\{\bigcap f_j^{-1}(U_j) : J \text{ es finito y } \mathcal{U}_j^{\vee} \subset X_j\right\}$, entonces (a) $\mathcal{B}$ es base de una topología τ_w en X; (b) τ_w es la topología más fina tal que f_i es continua; (c) Si Y es espacio topológico, entonces $g : Y \to X$ es continua sii $\forall i \in I$ la función $f_i \circ g : Y \to X_i$ es continua [3].

□ Sean X el espacio topológico definido por las $\{f_i\}$ y $S \leq X$, entonces S tiene la topológia más fina definida por la familia $f_i|_S : S \to X_i$.

◇ La familia $\{f_i\}$ separa puntos en X si $\forall x \neq y \in X, \exists i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

□ $\forall i \in I$ sean $f_i : X \to X_i$ funciones entre espacios topológicos. Considere $\epsilon : x \in X \to (f_i(x)) \in \prod X_i$, entonces ϵ es una inmersión sii verifica (a) $\{f_i\}$ separa puntos en X y (b) X tiene la topología más fina definida por $\{f_i\}$ [4].

[3] τ_w es la topología más fina definida por la familia de funciones $\{f_i\}$.
[4] A la función ϵ se le conoce como *evaluación*

Espacio Cociente

☐ Sean X espacio topológico, Y un conjunto y $\overset{\twoheadrightarrow}{\pi} : X \to Y$. La colección $\tau_\pi = \{V \subset Y : \pi^{-1}(V)^\vee \subset X\}$ es una topología sobre Y a la que llamamos *topología cociente*.

◇ $\overset{\twoheadrightarrow}{\pi} : X \to Y$ es una *función cociente* si Y tiene la topología cociente definida por π.

☐ Si π es función cociente, entonces τ_π es la topología más fina en Y tal que π es continua.

☐ Sean π función cociente y Z espacio topológico. Entonces $f : Y \to Z$ es continua sii $g \circ \pi : X \to Z$ es continua.

☐ Sea $\overset{\twoheadrightarrow}{\pi} : X \to Y$ función continua entre espacios topológicos. Si π es abierta, entonces $\tau_Y = \tau_\pi$.

Ejemplo Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y $\pi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{S}^1$.

☐ Sean X un espacio topológico y $\mathcal{D} = \{A_i \subset X\}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ y $\bigcup A_i = X$. Considere

$$\tau_{\mathcal{D}} = \left\{\mathcal{A} \subset \mathcal{D} : \left(\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}\right)^\vee \subset X\right\}$$

El conjunto $\tau_{\mathcal{D}}$ es una topología en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es una descomposición de X. Si $x \in X$ entonces $\exists! P_x \in \mathcal{D}$ tal que $x \in P_x$. La función $P_x : X \to \mathcal{D}$ es llamada *función descomposición*.

☐ Toda descomposición $P_x : X \to \mathcal{D}$ es una función cociente.

☐ Si π función cociente, entonces $\exists P_x : X \to \mathcal{D}$ y un homeomorfismo $f : Y \to \mathcal{D}$ tales que $f \circ \pi = P$.

◇ Sea $X/\!\sim$ una relación de equivalencia. La descomposición $\mathcal{D}$ formada por las clases de equivalencia de es llamada *espacio de identificación* de X módulo $\sim$.

Ejemplo Como vimos $\mathbb{S}^1$ es un cociente del intérvalo $[0, 2\pi]$. Aquí $\mathcal{D} = \{\{x\} : x \in (0, 2\pi)\} \cup \{\{0, 2\pi\}\}$, donde $x \sim y$ si $x - y = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Figure 1: $[0, 2\pi]/\!\sim$

Ejemplo Sea $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_1 - x_2 = 2k\pi$ y $y_1 = y_2$. El espacio $X/\!\sim\ \cong \mathbb{S}^1 \times [0, 2\pi]$.

Ejemplo Mismo X ahora con $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_1 - x_2 = 2k\pi$ y $y_1 = y_2$ o si $x_1 = x_2$ y $y_1 - y_2 = 2k\pi$. En este caso $X/\!\sim\ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, el toro.

(a) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (b) Banda de Möbius

Ejemplo Mismo X con $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_1 - x_2 = 2k\pi$ y $y_1 = y_2$ y $y_1 + y_2 = 2\pi$. En este caso $X/\!\sim$ es la banda de Möbius.

Convergencia

◇ Sea X espacio métrico. $X \supset (x_n) \to x \in X$ sii $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ tenemos $d(x_n, x) < \epsilon$.

□ Sea $A \subset X$ e $x \in X$. El punto $x \in \overline{A}$ sii $\exists (x_n) \subset A$ tal que $(x_n) \to x$.

□ Sea $f : X \to Y$. La función f es continua en a sii $\forall (x_n) \to a \in X$ se tiene $(f(x_n)) \to f(a) \in Y$.

◇ Sea X espacio topológico. $(x_n) \to x \in X$ sii $\forall U \in \mathcal{U}_x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ la sucesión $(x_n) \subset U$ [5].

◇ (x_{n_k}) es una *subsucesión* de (x_n) siempre que $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ sea estrictamente creciente.

Redes

◇ $(\Lambda, \leq) = \Lambda$ es un *conjunto dirigido* si verifica:

- $\forall \lambda \in \Lambda,\ \lambda \leq \lambda$.
- $\forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ si $\lambda \leq \mu$ y $\mu \leq \nu$, entonces $\lambda \leq \nu$.
- $\forall \lambda, \mu \in \Lambda, \exists \nu \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \nu$ y $\mu \leq \nu$.

Ejemplo $\mathbb{N}$ con el orden usual es dirigido.

◇ Sea X espacio topológico y $x : \Lambda \to X$. Llamamos *red* a la imagen $x(\Lambda) = (x_\lambda) \subset X$. Decimos que $(x_\lambda) \to x \in X$ sii $\forall U \in \mathcal{U}_x, \exists \lambda_0 \in \Lambda, \forall \lambda \geq \lambda_0$ tenemos $(x_\lambda) \subset U$.

Ejemplo Las sucesiones son un tipo particular de redes.

Ejemplo Sean $x \in U$ e $x_U \in U \in \mathcal{U}_x$, entonces $X \ni x \leftarrow (x_U) \subset X$ es una red.

□ Sea $x \in A \subset X$. El punto $x \in \overline{A}$ sii $\exists (x_\lambda) \subset A$ tal que $(x_\lambda) \to x$.

□ $f : X \to Y$ es continua en a sii $\forall (x_\lambda) \subset X$ tal que $(x_\lambda) \to a \in X$ se tiene $(f(x_\lambda)) \to f(a) \in Y$.

□ Sea $X = \prod X_i$. La red $(x_\lambda) \to x \in X$ sii $\forall i \in I$ tenemos $(\pi_i(x_\lambda)) \to \pi_i(x) \in X_i$.

◇ Sea $(x_\lambda) \subset X$. Un punto $x \in X$ es de *acumulación* en (x_λ) sii $\forall U \in \mathcal{U}_x, \lambda_0 \in \Lambda, \exists \lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.

◇ Sean X e $x : \Lambda \to X$ una red. Llamamos *subred* a cualquier red de la forma $x \circ \phi : M \to X$ denotada $(x_{\phi(\mu)})$ tal que $\phi : (M, \leq) \to \Lambda$ es una función que verifica,

- $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$.
- $\forall \lambda \in \Lambda, \exists \mu \in M$ tal que $\phi(\mu) \geq \lambda$.

□ Sea $(x_\lambda) \subset X$. El punto $x \in X$ es de acumulación sii $\exists (x_{\phi(\mu)}) \to x \in X$.

◇ La red $(x_\lambda) \subset X$ es *red universal* si $\forall A \subset X, \exists \lambda_0 \in \Lambda, \forall \lambda \geq \lambda_0$ se tiene que $(x_\lambda) \subset A$ o $(x_\lambda) \subset X \setminus A$.

Ejemplo Toda red constante es universal.

□ Sea $(x_\lambda) \subset X$ red universal e x punto de acumulación, entonces $(x_\lambda) \to x$.

References

[1] Mujica, Jorge (2005). *Notas de topologia geral*. IMECC-UNICAMP, Campinas.

[5] La definición es equivalente al tomar $\mathcal{B}_x$ en lugar de $\mathcal{U}_x$.