Analysis in $\mathbb{R}^n$
IMECC

2nd list of excercices
Match 21^{st}, 2024

Student: Jaider Torres **RA:** 241343

Notation: Again, for $n \in \mathbb{N}$, we define $[n] := \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\} = \mathbb{N} \cap [0, n] \subset \mathbb{R}$.

1. **a.** Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $T : X \to X$ uma $c-$contação. Queremos provar que T tem um único punto fixo $x^\star \in X$. Assim, seja $x_0 \in X$ um punto qualquer de X e defina a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ as $x_n = T(x_{n-1})$. Como T é uma $c-$contração, temos $d(T(x_1), T(x_0)) \leq cd(x_1, x_0)$. Agora suponha que $d(x_n, x_{n-1}) \leq c^{n-1}d(x_1, x_0)$ para algun $k \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} d(T(x_{n+1}), T(x_n)) &\leq cd(x_{n+1}, x_n) \\ &= cd(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq cc^{n-1}d(x_1, x_0) \\ &= c^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

O principio da Indução garantis este fato para cada $n \in \mathbb{N}$.
Vamos a provar agora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Note que, dados $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $n > m$, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq c^{n-1}d(x_1, x_0) + c^{n-2}d(x_1, x_0) + \cdots + c^m d(x_1, x_0) \\ &= c^m d(x_1, x_0) \sum_{k\in[n-m-1]} c^k \\ &\leq c^m d(x_1, x_0) \sum_{k\in\mathbb{N}} c^k \\ &= c^m d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1-c}\right). \end{aligned}$$

Como $c \in [0, 1)$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$c^N \leq \frac{\varepsilon(1-c)}{d(x_1, x_0)}.$$

Assim, considerando $n > m \geq N$, temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq c^m d(x_1, x_0) \left(\frac{1}{1-c}\right) \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon(1-c)}{d(x_1, x_0)}\right) \frac{d(x_1, x_0)}{1-c} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy e como $X \subset \mathbb{R}^n$ é completo, temos que existe um único $x^\star \in X$ tal que

$$x^\star = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = T(x^\star),$$

pela unicidade do límite. Isso prova o resultado.

b. Seja $x_0 \in X$ e defina $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por $x_{k+1} = T^k(x_0)$
Novamente, vejamos que

$$\begin{aligned} d(x_3, x_2) &= d(T(T(x_0)), T(X_0)) \\ &\leq cd(x_2, x_1). \end{aligned}$$

Suponhamos que $d(x_k, x_{k-1}) \leq c^{k-2}d(x_2, x_1)$ para algun $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &\leq d(T^k(x_0), T^{k-1}(x_0)) \\ &= d(T(T^{k-1}(x_0)), T(T^{k-1}(x_0))) \\ &\leq cd(x_k, x_{k-1}) \\ &\leq cc^{k-2}d(x_2, x_1) \\ &= c^{k-1}d(x_2, x_1). \end{aligned}$$

O principio do indução garantis este fato para todo $k \in \mathbb{N}$. Vamos a provar agora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Para isso, sejam $n > m$ em $\mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, d_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq c^{m-2} d(x_2, x_1) + \cdots + c^{n-1} d(x_2, x_1) \\ &\leq c^{n-1} d(x_2, x_1) \sum_{k\in[m-n-1]} c^k \\ &\leq c^{n-1} d(x_2, x_1) \sum_{k\in\mathbb{N}} c^k \\ &= c^{n-1} d(x_2, x_1) \left(\frac{1}{1-c}\right). \end{aligned}$$

Como $c \in [0, 1)$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n^{n-1} d(x_2, x_1) \left(\frac{1}{1-c}\right) < \varepsilon$$

sempre que $n \geq N$, i.e.,

$$c^{n-1} < \frac{\varepsilon(1-c)}{d(x_2, x_1)}.$$

Assim, dados $\varepsilon > 0$ e $m, n > N$, temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \frac{c^{n-1} d(x_2, x_1)}{1-c} \\ &\leq \frac{\varepsilon(1-c)}{d(x_2, x_1)} \frac{d(x_2, x_1)}{1-c} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy e converge para um único punto $x^{\star 1} \in X$ (já que X é completo). Como $x_{k+1} = T(T^{k-1}(x_0))$, temos que

$$\begin{aligned} x^{\star 1} &= \lim_{k\to\infty} x_{k+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} T(T^{k-1}(x_0)) \\ &= T\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) \\ &= T(x^{\star 1}), \end{aligned}$$

i.e., $x^\star = x^{\star 1}$. Isso completa a prova.

c. No punto anterior vimos que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era uma sucessão de Cauchy pelo fato que, para $m > n$ naturais, teve que

$$d(x_m, x_n) \leq c^{n-1} d(x_2, x_1) \sum_{k\in[n-m-1]} c^k.$$

Assim, fazendo m tende a ∞, temos que

$$\lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{n\to\infty} c^{n-1} d(x_2, x_1) \sum_{k\in[n-m-1]} c^k,$$

i.e.,

$$d(x^\star, x_n) \leq \frac{c^{n-1} d(x_2, x_1)}{1-c}.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem, para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$,

$$d(x_n, x^\star) \leq \frac{c^{n-1} d(x_2, x_1)}{1-c} < \varepsilon,$$

i.e., $x_n \in B_{\delta_n}(x^\star)$, onde $\delta_n = \frac{c^{n-1} d(x_2, x_1)}{1-c}$.

d. Considere os seguentes dois exemplos:

- Seja $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ definida por $x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Observe que para $x \neq y$, temos que

$$f(x) - (y) = (x - y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) < x - y,$$

pois $1 - \frac{1}{xy} < 1$ dado que $x, y \geq 1$.

Então,

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \cdot |x - y|,$$

i.e., f é uma $1-$contração. Porém, f não tem puntos fixos.

- Sejam $\Delta := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{C}$ o espacio métrico com a métrica induzida por a métrica usual de $\mathbb{C}$, $\theta \in (0,1)$ irracional e considere $f : \partial\Delta \to \partial\Delta$ definida por $z \mapsto ze^{2\pi i\theta}$. Em o conjunto $\partial\Delta$ considere também a métrica induzida por a métrica no Δ. Então o conjunto $\partial\Delta$ é completo e como $A = \{w \in \partial\Delta : w = ze^{2n\pi i\theta}, z \in \partial\Delta, n \in \mathbb{N}\} \subset \partial\Delta$ é denso em $\partial\Delta$ (um resultado bem maravilhoso), temos que a função $f^n : \partial\Delta \to \partial\Delta$ é uma $1-$contração sem puntos fixos, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

2. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m : X \to X$ é uma $c-$contração. Então existe um único $x^\star \in X$ tal que $T^m(x^\star) = x^\star$ pelo item **a.** no punto anterior, i.e., tem um único punto fixo $x^\star \in X$. Denote $F = T^m$ e defina $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F^k(x_0) \\ &= (T^m)^k(x_0) \\ &= \underbrace{\underbrace{(T \circ \cdots \circ T)}_{\text{m}} \circ \cdots \circ \underbrace{(T \circ \cdots \circ T)}_{\text{m}}}_{\text{k}}(x_0) \end{aligned}$$

para qualquer $x_0 \in X$. Pelo visto no item **b.** do punto anterior temos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergem para $x^\star \in X$. Queremos provar agora que $x^\star \in X$ é de fato un punto fixo de T. Para isso, note que

$$\begin{aligned} T^m(T(x^\star)) &= T^{m+1}(x^\star) \\ &= T(T^m(x^\star)) \\ &= T(x^\star). \end{aligned}$$

Assim, $T(x^\star)$ é um punto fixo de T^n também e portanto $T(x^\star) = x^\star$ pela unicidade de $x^\star \in X$. Se $y \in X$ é algum outro punto fixo de T, então $T^m(y) = y = x^\star$. Isso completa a prova.

3. Sejam

$$\mathcal{E}^n_{\mathbf{a}} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 = 1, a_i > 0 \forall i \in [n] \right\}$$

e $\mathbb{S}^n$ a elipsoide e a $n-$esfera, respetivamente.

Note que o elipsoide pode ser escrito como

$$\mathbf{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{a_n^2} \end{pmatrix}}_{A_{\mathbf{a}}} \mathbf{x} = 1,$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^T \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ é o vector indicador de $\mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$. Como $A_{\mathbf{a}}$ é simétrica, exitem $R \in SO(n)$ e D diagonal tais que $A_{\mathbf{a}} = R^T DR$. Tomando $Y = R\mathbf{x}$, temos que $Y^T DY = 1$. Como D tem números positivos na diagonal, é o quadrado de alguma outra matriz diagonal E, i.e., $D = E^2$. Então EY é um punto de $\mathbb{S}^n$ quando $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$, e como E é invertível, $E^{-1}\mathbf{x}$ é um punto de $\mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$ quando $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$. Neste caso (que é o mais imediato, pois se trata da elipsoide centrada no origem e cujos eixos principais coincidem com os vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$, i.e., não tem rotações), temos que $R = Id_n$ e

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Esta observação permite notar que a aplicação que transforma $\mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$ para $\mathbb{S}^n$ é da forma $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n})$ e seu inversa é da forma $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n)$.

Em poucas palavras, em $\mathbb{S}^n$ e $\mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$ considere a topologia subespacio e defina a função $f : \mathcal{E}^n_{\mathbf{a}} \to \mathbb{S}^n$ como $\mathbf{x} \mapsto E\mathbf{x}$.

Note que se $E\mathbf{x} = E\mathbf{y}$, então $\mathbf{y} = E^{-1}\mathbf{x}E = \mathbf{x}$ e portanto f é injetora. Além disso, dado $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n$, temos que $(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) \in \mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$ é enviado a $(x_1, \ldots, x_n)$. Logo, f é uma bijeção de inversa $f^{-1} : \mathbb{S}^n \to \mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$ definida por $\mathbf{x} \mapsto E^{-1}\mathbf{x}$. Como E é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$, então ela é continua restrita a $\mathbb{S}^n$ e respectivamente para E^{-1}. Mas, note que as funções componentes de f e f^{-1} são todas lineares e portanto são continuas. Isso prova o homeomorfismo entre $\mathbb{S}^n$ e $\mathcal{E}^n_{\mathbf{a}}$.

Observe que isso nos permite encontrar um homeomorfismo entre a esfera e qualquer elipsoide sempre que ele este centrado na origem (ao trabalhar em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ não é um problema já que é possível trasladar a elipsoide de modo que ele este centrado na origem).

4. Seja $f : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n \to \overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x \mapsto k(x)x$, onde

$$\begin{aligned} k : \overline{B_1(0)} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto k(x) &= \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|x\|_M} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Primeiro vejamos que f é uma bijecção. Sejam $x, y \in \overline{B_1(0)}$ tais que $x \neq y$. Então $f(x) = k(x)x \neq k(y)y = f(y)$. Assim, f é injectora. Além disso, dado $x \in \overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)}$, o vector $y = \frac{\|x\|_M}{\|x\|} \in \overline{B_1(0)}$ é tal que $f(y) = x$. Portanto, f es sobrejetora e a função $f^{-1} : \overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)} \to \overline{B_1(0)}$ definida por $x \mapsto \frac{1}{k(x)}x$ para $x \neq 0$ e $0 \mapsto 0$ é sua inversa pois $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(k(x)x) = x$ e $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{k(x)}x\right) = x$.

Agora, dado $a \in \overline{B_1(0)}$ qualquer, para cada $x \in \overline{B_1(0)}$ considere $M = \max\{k(x), k(a)\}$. Assim, como

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_M &\leq M\|x - y\|_M \\ &\leq M\|x - y\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$. Assim, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, temos que si $\|x - y\| < \delta$, então $\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - y\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Portanto, f é continua em $a \in \overline{B_1(0)}$ e como a é arbitrário, f é continua em $\overline{B_1(0)}$.

Para a continuidade de f^{-1}, dado $\varepsilon > 0$, $x, a \in \overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)}$ e considerando $M = \max\left\{\frac{1}{k(x)}, \frac{1}{k(a)}\right\}$, temos que

$$\begin{aligned} \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)\right\| &\leq M\|x - a\| \\ &\leq n^{\frac{1}{2}}M\|x - a\|_M \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{2}}M}$, temos que se $\|x - a\|_M < \delta$, então

$$\begin{aligned} \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)\right\| &\leq n^{\frac{1}{2}}M\|x - a\|_M \\ &< n^{\frac{1}{2}}M\delta \\ &= n^{\frac{1}{2}}M\frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{2}}M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Como o $a \in \overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)}$ é arbitrário, f^{-1} é continua e portanto f é um homeomorfismo entre $\overline{B_1(0)}$ e $\overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)}$.

Agora, a aplicação f transforma $\overline{B_1(0)}$ para $\overline{B_1^{\|\cdot\|_M}(0)}$ dilatando os puntos (pois $k(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|_M} > 1$ para todo $x \neq 0$ dado que $\|x\|_M \leq \|x\|$) e sua inversa faz uma contração (pois $\frac{1}{k(x)} < 1$ para cada $x \neq 0$). Note que, para $x \neq 0$, $k(x) = \frac{1}{k(x)} = 1$ se $\|x\|_M = \|x\|$. Portanto, os únicos puntos fixos de f e f^{-1} são $\{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{e}_i\}_{i\in[n]}$.

5.

- Seja $\pi : T \to Y$ definida por $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{1-z}(x, y)$. Dados $x, y \in T$, note que $x \neq y$ então $\pi(x) \neq \pi(y)$. Além disso, se $(x_1, x_2) \in Y$, então $y = \left(\frac{2x_1}{1+\|(x_1,x_2)\|^2}, \frac{2x_2}{1+\|(x_1,x_2)\|^2}, \frac{\|(x_1,x_2)\|^2-1}{1+\|(x_1,x_2)\|^2}\right) \in T$ é tal que $\pi(y) = (x_1, x_2)$. Assim, π é uma bijecção com inversa $\pi^{-1} : Y \to T$ definida por $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{\|(x_1,x_2)\|^2+1}(2x_1, 2x_2, \|(x_1, x_2)\|^2 - 1)$. Como as funções componente de π e π^{-1} são continuas, então elas são continuas. Assim, $T \overset{\text{Top}}{\cong} Y$.
- Considere a parametrização de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Seja $f : Y \to V$ definida por $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. Se $x, y \in Y$ são tais que $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$. Assim, f é injetora. Agora, se $(x, y, z) \in V$, então $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o ponto $(x, y) \in Y$ é tal que $f(x, y) = (x, y, z)$. Assim, f é sobrejetora. Portanto, f es bijetiva de inversa $f^{-1} : V \to Y$ dada pela projeção das dois primeiras entradas, i.e., $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Note que as funções componente de f são todas continuas e portanto f é continua (pois $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_3(x, y) = f_3(a, b)$ para cada $(x, y) \in Y$, onde $f_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$), e la continuidade de sua inversa f^{-1} é imediata. Por tanto, $V \overset{\text{Top}}{\cong} Y$.

- Considere a parametrização de $X = \{(\cos\theta, \sin\theta, y) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi), r \in \mathbb{R}\}$. Note que a parametrização de X rotamos sobre o eixe z a linha $\{(1, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix},$$

  onde $\theta \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$. Além disso, note que o feixe $(0, \infty)$ é transformado em $\{(1, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Esta não é a única aplicação que faz isso, e de fato uma parametrização conveniente neste caso é $X = \{(\cos\theta, \sin\theta, \ln(r)) \in \mathbb{R}^3 : \theta \in [0, 2\pi), r \in \mathbb{R}^+\}$, onde o feixe $(0, \infty)$ também é transformado em $\{(1, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Com esta nova parametrização, temos que a aplicação $f : Y \to X$ definida por $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, ln(r))$. Note que se $(\cos\theta_1, \sin\theta_1, \ln(r_1)) = (\cos\theta_2, \sin\theta_2, \ln(r_2))$ de $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ e $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ temos que $\theta_1 = \theta_2$ e de $\ln(r_1) = \ln(r_2)$ temos que $r_1 = r_2$. Assim, $(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1) = (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$ e f é injetora. Agora, dado $(x, y, z) \in X$, pela segunda parametrização de X temos que tem a forma $(\cos\theta, \sin\theta, \ln(r))$ para alguns $\theta \in [0, 2\pi)$ e $r \in \mathbb{R}^+$, e assim o punto $(r\sin\theta, r\cos\theta)$ é enviado a (x, y, z), i.e., f é sobrejetora. Portanto, f é uma bijecção e sua inversa $f^{-1} : S \to X$ definida por $(\cos\theta, \sin\theta, \ln(r)) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Novamente, pela continuidade de as funciones componente de f, temos que f é continua e a continuidade de f^{-1} é imediata. Portanto, f é um homeomorfismo entre X e Y, i.e., $X \overset{\text{Top}}{\cong} Y$.

Assim, todas as superfícies mostradas anteriormente são homeomorfas dois a dois pois todas são homeomorfas a Y e a composição de homeomorfismos é homeomorfismo.

6. Seja $\Pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que $\Pi|_{\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{N}\}} = \pi$, onde $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{R}^n$ é a projeção estereográfica. Note que, usando um argumento topológico, Π não pode ser uma extensão continua de π pois $\Pi(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}^n$ deve ser compacto já que a compacidade é um invariante topológico e $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é compacto pelo Teorema de Heine-Borel.

No entanto, note que $\mathbb{R}^n \overset{\pi^{-1}}{\hookrightarrow} \mathbb{S}^n$ e $\overline{\pi^{-1}(\mathbb{R}^n)} = \mathbb{S}^n$, obtendo assim que $\mathbb{S}^n$ é a compactação por um punto de $\mathbb{R}^n$. De fato, a compactação é única salvo isomorfismos em Top. Isso diz que Π não pode ter uma extensão continua.