UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Taller 5: Integración Númerica

Néstor Heli Aponte Ávila
Métodos Númericos
Cód. 20182167052
2022 - I

August 10, 2022

1 Ejercicios

1. Utilizando el método compuesto del trapecio calcule la integral:

$$\iint_R \sqrt{xy+y^2}\ \ dA$$

Donde R esta acotado por $x+y=6$, $3y-x=2$ & $3x-y=2$

(a) *Interpretar la integral.* El dominio es el triangulo formado por las rectas: $y=6-x$, $y=\frac{(x+2)}{3}$ & $y=3x-2$, con vertices en (1,1), (2,4) y (4,2). De manera que integral sobre el dominio

$$\iint_{\triangle ABC} f(x,y)\ dA = \iint_{\triangle ADC} f(x,y)\ dA - \iint_{\triangle ADC} f(x,y)\ dA \tag{1}$$

$$= \int_1^4 \int_{\frac{(x+2)}{3}}^{6-x} f(x,y)\ dydx - \int_1^2 \int_{\frac{(x+2)}{3}}^{6-x} f(x,y)\ dydx \tag{2}$$

(b) *Programa trapecio compuesto.*

```

var('x y') # Indicacion x e y como variables simbolicas

# INPUT (Ejemplo del libro para probar el codigo)
f = 2+sin(2*sqrt(x)) # funcion a integrar
a = 1 # limite inferior
b = 6 # limite superior
M = 10 # Numero de intervalos deseados

# FUNCION
def trapeciocompuesto(f,a,b,M,par): # nombre funcion + datos de entrada
    # par, lo voy a usar para adaptar a las integrales dobles 0 para dx, 1 pada dy
    # PREVIA
    h = (b-a)/M # Tamano del paso
    x_k = [0]*(M+1) # Vector que recogera los nodos
    INT = 0 # Inicilizacion de la variable que guarda el valor de mi integral
```

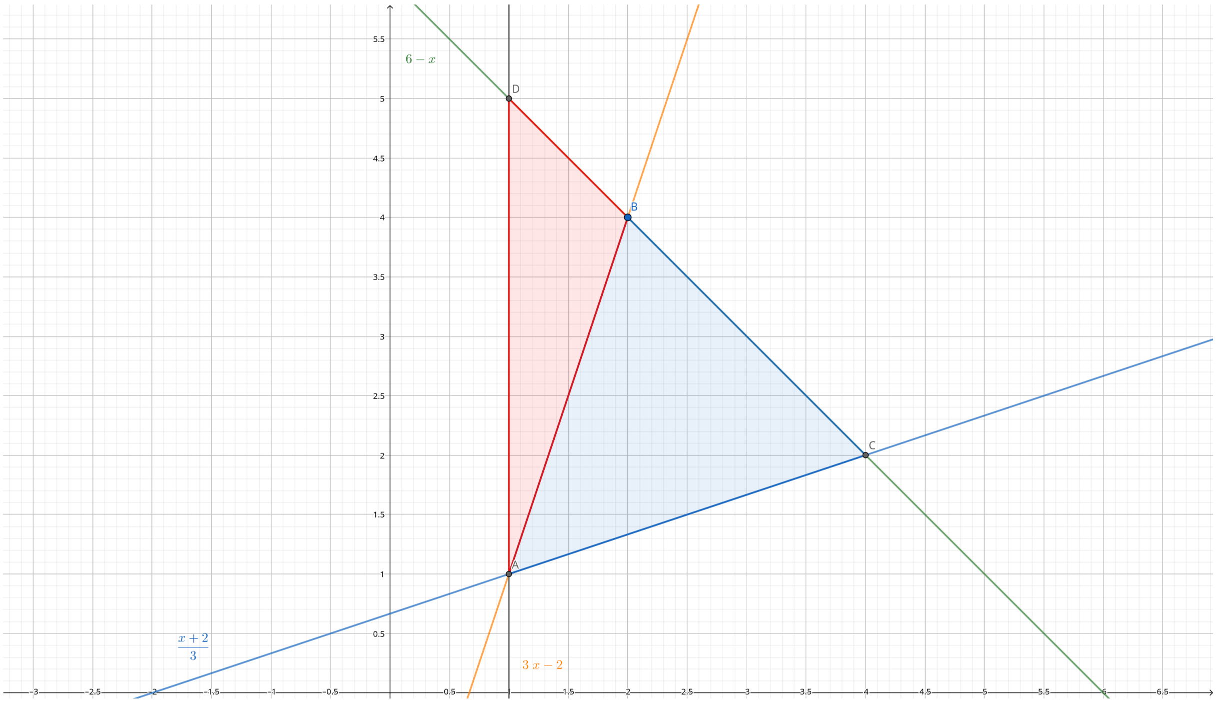

Figure 1: Dominio R en azúl

```
    # CALCULO DE LA INTEGRAL
    for i in range(M+1):
        x_k[i] = a + i*h # Calculo de los nodos
        if i != 0: # Condicional (necesito el siguiente y el anterior en la formula)
            if par == 0:
                INT += h/2 * (f(x = x_k[i-1]) + f(x = x_k[i])) # Formulilla
            elif par ==1:
                INT += h/2 * (f(y = x_k[i-1]) + f(y = x_k[i])) # Formulilla
    #OUTPUT
    return INT

print(N(trapeciocompuesto(f,a,b,M,par))) # El codigo ya estuvo
```

(c) *Paso de datos por el programa.*

```

# PRIMERA INTEGRAL
f = sqrt(x*y+y**2) # funcion a integrar
a = 1 # limite inferior
b = 4 # limite superior
c = (x+2)/3
d = 6-x
M = 6 # Numero de intervalos deseados

Integral1 = trapeciocompuesto(trapeciocompuesto(f,c,d,M,1),a,b,M,0)

# SEGUNDA INTEGRAL
a = 1
b = 2

Integral2 = trapeciocompuesto(trapeciocompuesto(f,c,d,M,1),a,b,M,0)

NETO = Integral1 - Integral2

print(N(NETO))

```

Lo cual me arroja un valor para la integral de:

$$9.38528209808420$$

2. Para los mismos M, N y método del ejercicio anterior, estime

$$\int_1^e \int_1^x \ln(xy)\ dydx$$

```

# SEGUNDO PUNTO
f = log(x*y) # funcion a integrar
a = 1 # limite inferior
b = e # limite superior
c = 1
d = x
M = 6 # Numero de intervalos deseados

Integral = trapeciocompuesto(trapeciocompuesto(f,c,d,M,1),a,b,M,0)

print(N(Integral))

```

Entrada que me devueven un valor de:

$$1.73404302827948$$

3. Demuestre la formúla asociada al refinamiento de Romberg.

.

La demostración usa fuertemente los siguientes dos resultados.

$$E(h) = Ch^p \quad \text{Extrapolación de Richarlison} \tag{3}$$

Donde $C \in \mathbb{R}$ y p es el exponente del término del error. La generalización de (3), sobre

$$\begin{cases} G = g(h_1) + Ch_1^p \\ G = g(h_2) + Ch_2^p \end{cases}$$

Multiplicando por los h_i contrarios,

$$(G = g(h_1) + Ch_1^p)(h_2)$$
$$(G = g(h_2) + Ch_2^p)(h_1)$$

Y ahora haciendo la diferencia entre estos,

$$G(h_2^p - h_1^p) = h_2^p g(h_1) - h_1^p g(h_2)$$
$$G = \frac{h_1^p g(h_2) - h_2^p g(h_1)}{h_1^p - h_2^p}$$

Y dado que la convensión es hacer $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$, llegamos a la generalización...

$$G = \frac{h_1^p g(\frac{h_1}{2}) - \left(\frac{h_1}{2}\right)^p g(h_1)}{h_1^p - \left(\frac{h_1}{2}\right)^p} \tag{4}$$

$$= \frac{2^p g\left(\frac{h_1}{2}\right) - g(h_1)}{2^p - 1} \tag{5}$$

La propiedad anterior se combina con

$$T(J) = \frac{T(J-1)}{2} + h\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}) \quad \text{Regla compuesta del trapecio} \tag{6}$$

Se define la sucesión de Romberg de formúlas de cuadratura (refinamientos) para la estimación de la integral de alguna $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, $\{R(J, K) : J \geq K\}_{J=0}^{\infty}$, donde

$$R(J, 0) = T(J) \quad J \geq 0$$

Si usamos la extrapolación general de Richarlison sobre $T(J,0)$ y $T(J,1)$ los cuales, recordermos tienen un error de $O(h^2)$, osea $p = 2$, obtenemos nuestra siguiente familia en la sucesión...

$$R(J,1) = \frac{2^2 T(J,1) - T(J,0)}{2^2 - 1} \tag{7}$$

$$R(J,1) = S(J,1) = \frac{4T(J,1) - T(J,0)}{3} = \frac{4^1 R(J,0) - R(J-1,0)}{4^1 - 1} \quad J \geq 1 \tag{8}$$

Lo cual no es otra cosa que la compuesta de Simpson, que recordemos tiene un error de $O(h^4)$, al hacer un proceso similar al anterior para $S(J,1)$ y $S(J,2)$, nuestra siguiente familia en la sucesión

$$R(J,2) = \frac{16S(J,2) - S(J,1)}{15} = \frac{4^2 R(J,1) - R(J-1,1)}{4^2 - 1} \quad J \geq 2$$

El error disminuye en potencias de dos por lo que al aplicar (5) reiteradamente, $R(J, K-1)$ tiene un error de $O(h^{2K})$ y en la formula de Richarlison puedo bajar ese dos a la base, que se convertiria en 4, y mi formula entonces cumple que:

$$R(J,K) = \frac{4^K R(J,K-1) - R(J-1,K-1)}{4^K - 1} \quad J \geq K \tag{9}$$

La sucesión converge al valor de la integral.

References

[1] Jhon H. Mathews - Kurtis D. Fink, *Métodos Númericos con MATLAB*, Pretince Hall, (2000)