Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

Random Walks e Equação de Difussão

October 29, 2025

MM433 - EDP I | Nestor Heli Aponte Avila[1]
Prof. Bianca Morelli | n267452@dac.unicamp.br

** O objetivo deste pequeno seminario é mostrar como à equação do calor surge de um modelo discreto puramente probabilistico e analisar um pouco essa relação. O conteúdo aquí exposto segue a linha de [1, Cáp. 2] **

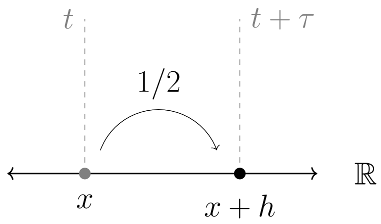
Notação ◇ Definição ☐ Proposição ■ Teorema

O modelo

Supõe que temos uma particula no origem da reta que cujo movemento obedece as seguintes reglas:

(R1) Se move ao paso $h > 0$ por unidade de tempo τ.

(R2) O paso pode ser a esquerda ou direita com mesma probabilidade $\rho = 1/2$ que não depende dos pasos anteriores.



A tarea se torna então encontrar uma função $\rho(x, t)$ que dei a probabilidade de encontrar à particula na posição x num instante $t = N\tau$.

Contas Preliminares

→ Suponha que depois de N instantes, $t = N\tau$, a particula tá em $x = mh$, pra algúm $m \in \mathbb{Z} : m \leq |N|$.

→ Sejam $k := \#$ de pasos dados a direita e $N - k$ os dados a esquerda.

↓ Temos então $m = k - (N-k) = 2k - N$ e $k = (m+N)\cdot 2^{-1}$. Assim, podemos pensar na probabilidade em termos de k:

$$\rho(x,t) = \rho_k = \frac{\#\ N\text{-caminos com } k \text{ pasos a direita}}{\#\ N\text{-caminos totais}} = \binom{N}{k}\cdot 2^{-N}.$$

→ Na procura de um modelo continuo, precisamos fazer $h, \tau \to 0$, no entanto temos que respeitar parâmetros clave pra não colapsar o modelo, neste caso são o primeiro e o segundo momento:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_N[x] = \mathbb{E}_N[mh] = \mathbb{E}_N[m]h \\ \mathbb{E}_N[x^2] = \mathbb{E}_N[(mh)^2] = \mathbb{E}_N[m^2]h^2 \end{cases}.^{1} \tag{1}$$

↓ A esperanza matemática é linear e $m = 2k - N$, então é suficiente com determinar os valores de $\mathbb{E}_N[k]$ e $\mathbb{E}_N[k^2]$.

◇ Sejam X variable aleatoria discreta tomando valores em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ e ρ_X sua função masa de probabilidade. A função geradora de probabilidade é

$$G(s) := \mathbb{E}_N[s^X] = \sum_{x=1}^{N} \rho_X(x)\cdot s^x.$$

☐ **1.** Nas hipotese anteriores, $\mathbb{E}_N[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = G^{(r)}(1)$.

↓ Temos hipotese pra usar ☐ 1., só precisamos das derivaradas,

$$G(s) = \frac{1}{2^N}\sum^{N} \rho_k s^k = \left(\frac{1+s}{2}\right)^N \Rightarrow\ G^{(1)}(1) = \frac{N}{2},\ G^{(2)}(1) = \frac{N(N-1)}{4}.$$

[1] Queremos varianza $\sigma^2 = \mathbb{E}_N[x^2] - \mathbb{E}_N[x]^2$ (distancia promedio do origen) constante.

↓ Das nossas conclusões anteriores pra $D = h^2/\tau$, temos $h = \sqrt{2Dt/N}$, logo, o desplaçamento da partícula após de N passos é

$$x_{N} = h\sum^{N} \xi_j = \sqrt{2Dt}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum^{N} \xi_j.$$

Segue do ■ (*TLC*) que $x_{N} \xrightarrow{\rho} \mathcal{N}(0, 2Dt)$.

◇ Seja $(\Omega, \Im, \rho)$ espaço de probabilidade. Um *proceso estocástico* é uma familia $(X(t))$ de v.a., usualmente indexada pelo tempo, $t \in [0, \infty)$.

◇ O *movimento browniano* é um proceso estocástico $(W(t))$ tal que:

(B1) Começa no origem, $W(0) = 0$.

(B2) $W : t \mapsto W(t, \omega)$ continua quasi-sempre.

(B3) Incrementos independentes, se $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, então a familia de v.a. $(W(t_j) - W(t_{j-1}))$ é independente.

(B4) Pra cada $0 \le s < t$, $W(s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

↓ Fazendo $D = 1/2$, o feito até agora não é outra coisa que a construção do movimento browniano 1-dimensional estándar como o límite de passeios aleatorios.

References

[1] Salsa, S. (2016). *Partial differential equations in action*. Cham: Springer International Publishing.

[2] Evans, L. (2010). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society.

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{N}[k] = G^{(1)} = \frac{N}{2} \\ \mathbb{E}_{N}[k^2] = G^{(2)}(1) - G^{(1)}(1) = \frac{N(N+1)}{4} \end{cases}$$

↓ Voltando a (1) temos $\mathbb{E}_{N}[x] = \mathbb{E}_{N}[2k - N] = 2\mathbb{E}_{N}[k] - N = 0$ e $\mathbb{E}_{N}[x^2] = \sigma[x]^2 = \mathbb{E}_{N}[4k^2 - 4k + N^2] = \mathbb{E}_{N}[k^2] - 4\mathbb{E}_{N}[k] + N^2 = N.$ [2]

↓ Surgio então a condição $\sigma^2 = Nh^2$, lembrando que $N = t/\tau$, tá nós dizendo que temos dilatação parabolica do espaço-tempo,

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\tau} \cdot t \;\sim\; \rho(x, t) = \rho(\lambda x, \lambda^2 t). \tag{2}$$

Aquela é justamente uma das primeiras condições na procura da solução fundamental da equação do calor vista em aula.

Procura do límite

◇ Seja $(\Omega, \Im)$ espaço mensurável. Uma *partição* é uma coleção de eventos $(B_i) \subset \Im$ tal que $\forall i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ e $\bigcup B_i = \Omega$.

■ (***Probabilidade Total***) Sejam $(\Omega, \Im, \rho)$ espaço de probabilidade, $(B_i) \subset \Im$ uma partição e $A \in \Im$ qualquer. Então,

$$\rho(A) = \sum \rho(A \mid B_i) \cdot \rho(B_i).$$

→ Da independência no cada paso e do ■ (*PT*) temos,

$$\begin{cases} \rho(x, t + \tau) = \frac{1}{2}\rho(x - h, t) + \frac{1}{2}\rho(x + h, t) \\ \rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}. \tag{3}$$

$$\boxed{B_{\pm} := \{\text{Partícula em } x \pm h \text{ no tempo } t\} \sim \rho(B_{\pm}) = \rho(x \pm h, t)}$$

[2] Não é estranho que $\mathbb{E}_{N}[x] = 0$, pois é apenas natural num sistema simétrico "justo".

→ Suponha que $\rho(x,t)$ é suave em $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, função *densidade* (continua) no lugar de função *masa* (discreta), que têm límite trivial.

↓ Usando fórmula de Taylor em t e x conseguimos,

$$\rho(x,t+\tau)=\rho(x,t)+\rho_t(x,t)\tau+\sigma|\tau|$$
$$\rho(x\pm h,t)=\rho(x,t)\pm\rho_x(x,t)h+\frac{1}{2}\rho_{xx}(x,t)h^2+\sigma|h^2|$$

Substituindo em (3) temos,

$$\cancel{\rho(x,t)}+\rho_t(x,t)\tau+\sigma|\tau|=\cancel{\rho(x,t)}+\frac{1}{2}\rho_{xx}(x,t)h^2+\sigma|h^2|$$
$$\Downarrow$$
$$\rho_t+\sigma|1|=\frac{1}{2}\frac{h^2}{\tau}\rho_{xx}+\sigma\left|\frac{h^2}{\tau}\right|.$$

Na nossa procura de límite não trivial precisamos que $\lim_{(x,\tau)\to(0,0)}\frac{h^2}{\tau}$ seja constante, digamos $2D$ pra algúm $D>0$.

→ Fazendo $h,\tau\to 0$ obtemos $\rho_t-D\rho_{xx}=0$, a equação do calor. Se $D=1$, como no [2, Seç. 2.3] a gente sabe

$$\rho(x,t)=\Phi(x,t):=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

é solução única do nosso modelo.

Interpretações Importantes

No [1, Cáp. 2] o autor considera desde o principio a constante que chamamos de D (*coeficiente de difussão*), e consegui a solução fundamental,

$$\Gamma_D(\mathbf{x},t):=\frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}}\cdot\exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}\right).$$

↓ Lembrando da equação (2) a gente tinha $\sigma^2/t=h^2/\tau=2D$, ou seja, difussão promedio de $\sqrt{2D}$ por unidade de tempo. Também,

↓ $\lim_{h\to0}\frac{h}{\tau}=\lim_{h\to0}\frac{2D}{h}\to\infty\equiv$ Velocidade de propagação infinita.

Brownian Motion 1-dimensional

◇ Sejam $(\Omega,\Im,\rho)$ espaço de probabilidade e X v.a. discreta tomando valores em $\{x_j\}\subset\mathbb{R}$ enumerável. Então,

$$\mathbb{E}[X]:=\sum x_j\cdot\rho(X=x_j).$$

◇ Seja $(\Omega,\Im,\rho)$ espaço de probabilidade. Uma familia (X_i) de variavéis aleatorias é *independente* se $\forall(B_{i_j})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ j\leq m\in\mathbb{Z}_{\geq0}$,

$$\rho(X_{i_1}\in B_{i_1},\ldots,X_{i_m}\in B_{i_m})=\prod^m\rho(X_{i_j}\in B_{i_j}).$$

■ (***T**eorema do **L**ímite **C**entral*) Sejam $(\Omega,\Im,\rho)$ espaço de probabilidade e (X_j) familia de v.a. independentes e identicamente ditribuidas com $\mathbb{E}[X_j]=\mu$ e $\mathbb{V}[X_j]=\sigma^2>0$. Então, sendo (S_n) sequência de somas parcias,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=\mathcal{N}(0,1).$$

→ Sejam $x_j:=$ posição após j passos e $\forall j\in\mathbb{N},\ h\xi_j:=x_j-x_{j-1}$. A familia de (ξ_j) de v.a. é independente e idênticamente distribuída.

$$\xi_j:(x_j)\to\{-1,1\}\text{ com }\rho(\xi_j=\pm1)=\frac{1}{2}.$$

Além disso, $\mathbb{E}[\xi_j]=\mu=0$ e $\mathbb{V}[\xi_j]=\sigma=1$.

Independência. Sejam $l\leq k\in\mathbb{N}$, $(\xi_{j_l})\subset(\xi_j)$ e $(a_l)\in\{-1,1\}^k$,

$$\rho(\xi_{j_1}=a_1,\ldots,\xi_{j_k}=a_k)=2^{N-k}\cdot2^{-N}=2^{-k}=\prod^k\rho(\xi_{j_l}=a_l)$$

Esperança. $\mathbb{E}[\xi_j]=(-1)\cdot\rho(\xi_j=-1)+(1)\cdot\rho(\xi_j=1)=0.$

Variança. $\mathbb{V}[\xi_j]=\mathbb{E}[\xi_j^2]=(-1)^2\cdot\rho(\xi_j=-1)+(1)^2\cdot\rho(\xi_j=1)$