Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

Functional Analysis | 2025-I

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

§ 1 Dualidad y Espacios Reflexivos

1.1 Duales $L_p(X, \Sigma, \mu)$

■ **1.1** $L_{p^*} \simeq (L_p)'$ isométricamente (para $p = 1$ suponemos $p^* = \infty$ e μ médida σ-finita) con la relación de dualidad dada por

$$L_{p^*} \ni g \mapsto \underset{(L_p)'}{\underset{\Cap}{\varphi_g}} : \overset{L_p}{\overset{\Cup}{f}} \mapsto \int_X fg\, d\mu \in \mathbb{K}.$$

Linealidad inmediata

Continuidad, cálcule $|\varphi_g(f)|$ aplique Hölder $\Rightarrow \varphi_g \in (L_p)'$ y $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_{p^*}$

$\|g\|_{p^*} \leq \|\varphi_g\|$ y $g \neq 0$. Si $p > 1$ tome

$$f(x) = \frac{|g(x)|^{p^*-1}\overline{g(x)}}{\|g\|_{p^*}^{p^*-1}|g(x)|}$$

Sobreyectividad? Bien, gracias

$*$ El caso $p = 1$ no admite resumen, véase [1, pág. 70]. Por lo pronto damos por sentado que $L_\infty \simeq (L_1)'$ isométricamente.

□ **1.1** $\ell_{p^*} \simeq (\ell_p)'$ isométricamente (para $p = 1$ suponemos $p^* = \infty$) con la relación de dualidad

$$\ell_{p^*} \ni (b_j) \mapsto \underset{(\ell_p)'}{\underset{\Cap}{\varphi_b}} : \overset{\ell_p}{\overset{\Cup}{(a_j)}} \mapsto \sum a_j b_j \in \mathbb{K}.$$

Caso particular $L_p(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \mu_c)$, solo busca exhibir como es la relación de dualidad en ℓ_p

$\ell_\infty \simeq (\ell_1)'$, pero $\ell_1 \not\simeq (\ell_\infty)'$, pues sabemos que ℓ_∞ no es separable

□ **1.2** $\ell_1 \simeq (c_0)'$ isométricamente, con la relación de dualidad dada por

$$b \in \ell_1 \mapsto \varphi_b \in (c_0)', \qquad \varphi_b((a_n)) = \sum a_j b_j$$

Bien definida, lineal, continua y $\|\varphi_b\| \leq \|b\|_1$ es todo calcado

Sobreyectividad y $\|b\|_1 \leq \|\varphi\|$. Para $\varphi \in (c_0)'$ considere $(b_j) = (\varphi(e_j))$, defina (α_j)

$$\alpha_j = \frac{\overline{\varphi(e_j)}}{|\varphi(e_j)|}, \quad \varphi(e_j) \neq 0 \text{ y } j \leq n$$

Con eso consigue, para ver que $\varphi_b = \varphi$ acuerdese que $c_0 \ni a = \lim \sum a_j e_j$

1.2 Bidual y Espacios Reflexivos

□ **1.3** Para cada espacio normado E, el operador lineal $J_E : E \to E''$ que envía $E \ni x \mapsto \underset{E'}{\underset{\Cup}{\varphi}}(x) \in \mathbb{K}$ es una isometría lineal llamada *inmersión canónica* de E en E''.

Linealidad y continuidad son inmediatos

Isometría, cálcule $\|J_E(x)\|$, desarrolle y aplique el último colorario de H-B

$*$ Isometría lineal es inyectiva, luego, E'' contiene una copia isometríca de E.

□ **1.4** Todo espacio normado E admite completación, esto es, $\exists \widehat{E}$ Banach que contiene una copia isometríca de E densa en $\widehat{E}$.

Tome $\widehat{E} = \overline{J_E(E)} \subseteq E''$

Demostración aparentemente sencilla, pero recuerde que requirio H-B

◇ **1.1** Un espacio normado E se dice *reflexivo* si $J_E : E \twoheadrightarrow E''$, en cuyo caso $E \simeq E''$.

Directo, recuerde que E' es Banach

☐ **1.5** Todo espacio refléxivo es Banach.

Example Si $\dim(E) = n < \infty$ entonces E es reflexivo. $\rightarrow \dim(E'') = n$

Example c_{00} no es reflexivo. $\rightarrow$ Contrarrecíproca de la última proposición

Example c_0 no es reflexivo. $\rightarrow$ Despliegue el bidual

Directo, F' separable $\Rightarrow F$ separable

☐ **1.6** Si E es separable y reflexivo, entonces E' es separable.

Example ℓ_1 no es reflexivo. $\rightarrow$ Inmediato de la proposición anterior

◇ **1.2** Sean E, F espacios normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. El operador $T' : F' \rightarrow E'$ que envía $\varphi \mapsto \varphi(T(x))$ es llamado *operador adjunto* de T.

Example Sea $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_p)$ que envía $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_2, a_3, \ldots)$, *backward shift operator* para los amigos, tiene como adjunto $T' \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, \ell_{p^*})$ que envía $(b_1, b_2, \ldots) \mapsto (0, b_1, b_2, \ldots)$, bien llamado *forward shift operator*. $\rightarrow$ Desarrolle $(\varphi_b)(T(x))$

Linealidad es inmediata

Continuidad, desarrolle $\|T'\|$, de aqui también sale que $\|T'\| \leq \|T\|$

$\|T\| \leq \|T'\|$ se consigue aplicando el colorario de H-B a $\|T(x)\|$

+ Isomorfismo. Para ver que T' es sobreyectivo, use T^{-1}, inyectividad se consigue $\ker(T')$

+ Isometría. Desarrolle $\|T'(\varphi)\|$, tenga presente que $x \in B_E \Leftrightarrow T(x) \in B_F$

☐ **1.7** Para cada $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tenemos $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ y $\|T\| = \|T'\|$. Más aun, si T es isomorfismo (isométrico) entonces T' también es isomorfismo (isométrico).

Tome los isomorfismos isométricos $T : L_{p^*} \rightarrow (L_p)'$, $S : L_p \rightarrow (L_{p^*})'$ e $(T^{-1})'$

Muestre que $(T^{-1})' \circ S = J_{L_p} : L_p \rightarrow (L_p)'$. Tome $f \in L_p, \varphi \in (L_p)'$ e defina $g = T^{-1}(\varphi) \in L_{p^*}$. Desarrolle $((T^{-1})' \circ S)(f)(\varphi)$

☐ **1.8** Para $1 < p < \infty$ los espacios L_p son reflexivos.

($\Rightarrow$) Tome $\zeta''' \in E'''$, trabaje con $J_{E'}$ e $(J_E)'$ para hallar la preimagen

($\Leftarrow$) Supongo que no es reflexivo, y contradiga la existencia de $0 \neq \varphi \in E'''$ que separe $J_E(E)$ en E'' (Prop. Aplicaciones de H-B)

☐ **1.9** Un espacio E Banach es reflexivo sii E' es reflexivo.

Example ℓ_∞ no es reflexivo. $\rightarrow \ell_1$ no es reflexivo

§ 2 Espacios de Hilbert

2.1 Espacios con Producto Interno

◇ **2.1** Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interno* sobre E es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{K}$ tal que $\forall x, x', y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ se tiene,

(P1) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$.

(P2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

(P3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(P4) Si $x \neq 0$ entonces $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}^+$.

□ **2.1** **Exercise** Demuestre que (a) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$; (b) $\langle x, x\rangle = 0$ sii $x = 0$; (c) $\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$; (d) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$; (e) Si $\forall z \in E$ tenemos $\langle z, y\rangle = \langle z, y'\rangle$ entonces $y = y'$. $\to$ Consecuencia de las propiedades en la definición

☐ **2.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean E espacio con producto interno e $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Entonces, $\forall x, y \in E$ tenemos $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, igualdad cuando $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tal que $y = \alpha x$ (son l.d.).

Suponga $x, y \neq 0$. Tome $a = \langle y, y\rangle$, $b = \langle x, y\rangle$ y desarrolle el término

$$0 \leq \langle ax - by, ax - by\rangle$$

Para la otra afirmación suponga la igualdad y vea que pasa

∗ *Colorario.* La función $\|\cdot\| : E\times E \to \mathbb{R}^+$ define una norma en E. $\to$ (N1) y (N2) son directas. Para (N3) desarme $\|x + y\|^2$ y aplique Cauchy-Schwarz

Example Sean $(x_n), (y_n) \in \ell_2$, la función que envía $\langle (x_n), (y_n)\rangle \mapsto \sum a_n\overline{b_n}$ define un producto interno en ℓ_2 cuya norma inducida de hecho coincide con $\|\cdot\|_2$.

Example En L_2 pasa exactamente lo mismo definiendo $\langle f, g\rangle \mapsto \displaystyle\int_X f\,\overline{g}\,d\mu$.

☐ **2.2** Sean E espacio con producto interno e $y_0 \in E$ fijo. Las funciones $x \mapsto \langle x, y_0\rangle$ e $x \mapsto \langle y_0, x\rangle$ son continuas.

Tome $x_0 \in E$ fijo, agrupe la diferencia de las imagenes y aplique Cauchy-Schwarz

Este detalle es importante pues nos garantiza compatibilidad topologica.

Hilbert $\Rightarrow$ Banach.

◇ **2.2** Un espacio con producto interno, completo con la norma inducida es llamado *espacio de Hilbert*.

Example L_2 e ℓ_2 son espacios de Hilbert.

☐ **2.3** Sea E espacio con producto interno, entonces $\forall x, y \in E$ se cumplen

i. Ley del Paralelogramo $\to$ $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

ii. Polarización (en $\mathbb{R}$) $\to$ $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

iii. Polarización (en $\mathbb{C}$) $\to$ $\langle x, y\rangle = \text{ii.} + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$.

i. Desarme con producto interno y simplifique la suma

ii. Misma cosa

iii. Haga un ejercicio similar con los términos que incluyen iy, junte los sumandos y simplifique

2.2 Ortogonalidad

◇ **2.3** Dos vectores $x, y \in E$ espacio con producto interno, se dicen *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$, en cuyo caso denotamos $x \perp y$.

□ **2.2** Exercise (Teorema de Pitágoras) Si $x \perp y$, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. $\rightarrow$ Es cosa de reescribir con producto interno, y ver los términos que se anulan

■ **2.1** Sean E espacio con producto interno e $M \leq E$ Banach. Entonces, $\forall x \in E, \exists! p \in M$ tal que $\|x-p\| = \text{dist}(x, M)$.

Aplique la ϵ-propiedad al inf planteado con $\epsilon = \frac{1}{n}$, de esto $\exists (y_n) \subseteq M$

Use (i.) en los índices n, m, desarrolle los términos apuntando a mostrar que (y_n) es Cauchy e $y_n \to p \in M$

Para la unicidad suponga un $q \in M$ que cumple lo mismo e use (i.) para argumentar $\|p-q\| = 0$

◇ **2.4** Sea $A \subset E$ espacio con producto interno, llamamos *complemento ortogonal* de A al conjunto $A^\perp : \{y \in E : \forall x \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}$.

La notación $A^\perp$ puede parecer en conflicto con $M^\perp$ del *aniquilador* de M, pero es la misma cosa

□ **2.3** Exercise El complemento ortogonal verifica (a) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$, $E^\perp = \{0\}$ y $\{0\}^\perp = E$; (b) $(A^\perp)^\blacklozenge \leq E$; (c) $A \cap A^\perp = \{0\}$ si $0 \in A$, vacío en otro caso. $\rightarrow$ (a) es directa; (b) recuerde que el producto interno es continuo por coordenadas; (c) solo describa el conjunto

■ **2.2** Sean H Hilbert e $M^\blacklozenge \leq H$, entonces

(a) $H = M \oplus M^\perp$, es decir, $\forall x \in H$ existen únicos $p \in M$ e $q \in M^\perp$, tales que $x = p + q$, más aún, $\|x-p\| = \text{dist}(x, M)$.

(b) $P, Q : H \to H$ tales que $P(x) = p$ e $Q(x) = q$ son proyecciones, $P(H) = M$ e $Q(H) = M^\perp$. También $\|P\| = \|Q\| = 1$ si $M < H$.

(c) $P \circ Q = Q \circ P = 0$.

(a) Tome p como en Teorema previo e muestre que $x - p = q \in M^\perp$, tomando $p + \lambda y \in M$ y desarrollando

$$\|q\|^2 \leq \|x - (p + \lambda y)\|^2$$

La unicidad es quasi inmediata

(b) La primera parte es inmediata de (a), para desigualdad restante de las normas, recuerde que $H \ni x = p + q$ donde $p \perp q$, pitágoras hace el resto

(c) Es inmediato

Es preciso en (a) que M sea completo, piense en $[e_j] \leq \ell_2$

$*$ (Colorario) En H Hilbert, todo $M^\blacklozenge < H$ no trivial es 1-complementado.

2.3 Conjuntos Ortonormales en Espacios de Hilbert

◇ **2.5** Sea E espacio con producto interno. Un conjunto $S = \{x_i\} \subseteq E$ es un *sistema ortonormal* si $\forall i, j$ se tiene $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$.

Si $S^\perp = \{0\}$, entonces es un *sistema ortonormal completo*

Example $\{e_j : j \leq n < \infty\} \subseteq \mathbb{K}^n$ es sistema ortonormal completo.

Example $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell_2$ es sistema ortonormal completo.

□ **2.4** Sea H Hilbert e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sistema ortonormal finito de H.

(a) Si $M = [x_1, \ldots, x_n]$ e $x \in H$, entonces $\left\| x - \sum^n \langle x, x_j\rangle x_j \right\| = \text{dist}(x, M)$.

(b) $\forall x \in H$, se tiene $\sum^n |\langle x, x_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(a) $x = p + q$, represente p en la base de M y cálcule $\langle x - p, x_j\rangle$

(b) Desarme la expresión

$$\left\langle x - \sum \langle x, x_j\rangle x_j, x - \sum \langle x, x_j\rangle x_j \right\rangle$$

Solemos referirnos a esa suma en (a) como la *mejor aproximación* de $x \in M$

□ **2.4** Sean H Hilbert e $S = \{x_i\}$ sistema ortonormal de H. Entonces, $\forall x \in H \setminus \{0\}$ el conjunto $J = \{j : \langle x, x_j \rangle \neq 0\}$ es finito o contable.

$$J_k := \left\{ j : |\langle x, x_j \rangle| > \frac{1}{k} \right\}$$

Vea que es finito usando el item (b) de la proposición anterior

■ **2.3** (Desigualdad de Bessel) Sean H Hilbert, $S = \{x_i\}$ un sistema ortonormal de H e J como en el lemma anterior. Entonces, $\forall x \in H$,

$$\sum |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Suponga que J es infinito contable, reordene los sumandos

Use el ítem (b) y haga $n \to \infty$ de las sumas parciales

◇ **2.6** Sean E espacio normado e $(x_n) \subset E$. La serie $\sum x_n < \infty$ sii

$$\sum^{N} x_j = S_N \to x \in E \ \sim \ \sum x_n = x.$$

Es *incondicionalmente convegente* si para cualquier reordenamiento $\sum x_{\sigma(n)} < \infty$.

□ **2.5** Sean E espacio normado e $\sum x_n \in E$ incondicionalmente convergente. Entonces, para cualesquiera reordenamientos σ_1, σ_2, tenemos

$$\sum x_{\sigma_1(n)} = \sum x_{\sigma_2(n)}.$$

Tome $\varphi \in E'$, y considere la serie de las imagenes, observe la igualdad de las imagenes por φ y aplique el penultimo colorario de Hahn-Banach

□ **2.5** Sean H Hilbert, $S = \{x_i\}$ un sistema ortonormal de H e J como en el último lemma. Entonces, $\forall x \in H$, la serie

$$\sum \langle x, x_j \rangle x_j$$

es incondicionalmente convergente.

Tome $\{y_j\}$ reordenación de J y defina

$$S_n = \sum^{n} \langle x, y_j \rangle y_j$$

Use la desigualdad de Bessel para mostrar que es Cauchy

■ **2.4** Sean H Hilbert, $S = \{x_i\}$ un sistema ortonormal de H e $x, y \in H$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $x = \sum \langle x, x_j \rangle x_j$.

(b) $S^{\perp} = \{0\}$.

(c) $\overline{[S]} = H$.

(d) $\|x\|^2 = \sum |\langle x, x_j \rangle|^2$. $\to$ Identidad de Parseval

(e) $\langle x, y \rangle = \sum \langle x, x_j \rangle \overline{\langle y, x_j \rangle}$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) La ida es directa, para la vuelta tome la serie, un reordenamiento y muestre que

$$\left\langle x - \sum \langle x, x_{k_j} \rangle x_{k_j}, x_j \right\rangle = 0$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Defina $M = \overline{[S]}$, vea que pasa con los ortogonales y concluya que M solo puede ser todo H

(c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) No admiten resumen, véase [1, pág. 98]

(e) $\Rightarrow$ (b) Tome $x_0 \in S^{\perp}$ e $x = x_0 = y$ en la hipótesis

2.4 Ortoganilización y Consecuencias

□ **2.6** (Ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea (x_n) sucesión l.i. de vectores en E espacio con producto interno. Entonces, $\exists (e_n)$ sucesión l.i. ortonormal tal que,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [e_1, e_2, \ldots, e_n].$$

Igualita a la de Álgebra Lineal

$$x_{n+1} = \left(\sum \langle x_{n+1}, e_j \rangle e_j \right) + v_{n+1}$$

Donde $v_{n+1} \in [e_1, \ldots, e_n]^{\perp}$, tome

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}$$

■ **2.5** Sea H Hilbert tal que $\dim(H) = \infty$. Entonces, H es separable sii $\exists S = \{x_j\}$ contable, tal que S es sistema ortonomal completo de H.

- ($\Leftarrow$) Es inmediata de la equivalencia (c)
- ($\Rightarrow$) Tome D enumerable e denso en H, este tiene base infinita que se puede ortonormalizar y sigue siendo densa

■ **2.6** (Riesz-Fischer) Todo espacio de Hilbert infinito-dimesional separable es isometricamente isomorfo a ℓ_2.

- Existe un $S = \{x_n\}$ sistema ortonormal completo contable de H. Por Bessel sabemos que $(\langle x, x_n \rangle) \in \ell_2$
- Tome $T : H \ni x \mapsto (\langle x, x_n \rangle) \in \ell_2$
- Bien definida e Inyectividad, represente x en serie como en (a)
- Isometría, Identidad de Parseval (d)
- Sobreyectividad, para $(a_n) \in \ell_2$ plantee $\sum a_j x_j < \infty$, luego defina
$$S_N = \sum^N a_j x_j.$$
Use Pitágoras para ver que S_n es Cauchy, finalmente concluya

Exercise Si E espacio normado es isomorfo a un espacio reflexivo, entonces E es reflexivo también.

$*$ (Colorario) Los espacios de Hilbert separables son reflexivos.

■ **2.7** Sean H espacio con producto interno e S_0 sistema ortonormal de H. Entonces, $\exists S \supseteq S_0$ sistema ortonormal completo de H.

- Defina $\mathcal{F}$ la familia de todos los sistemas ortonormales de H tales que $\mathcal{F} \ni S_i \supseteq S_0$
- Plantee el orden contención y muestre que $\bigcup S_i \in \mathcal{F}$ es cota superior
- Use el Lemma de Zorn para garantizar que $\exists S$ máximal de $\mathcal{F}$
- Suponga que S no es completo y busque la contradicción (del máximal)

2.5 Funcionales Lineales y Teorema de Riesz-Fréchet

Example Sean H Hilbert e $\varphi_{y_0} : H \ni x \mapsto \langle x, y_0 \rangle$, entonces el funcional $\varphi_{y_0} \in H'$ e $\|\varphi_{y_0}\| = \|y_0\|$. $\to$ La continuidad la da Cauchy-Schwarz, para la igualdad de normas tome $x = \frac{y_0}{\|y_0\|}$

■ **2.8** (Riesz-Fréchet) Sean H espacio de Hilbert e $\varphi \in H'$. Entonces, $\exists! y_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle$, más aún $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

- Suponga que $\varphi \not\equiv 0$, luego defina $H > M^{\blacklozenge} = \ker(\varphi)$
- Tome $x_0 \in M^\perp$ tal que $\|x_0\| = 1$ e
$$y_0 := \overline{\varphi(x_0)} x_0$$
- Cálcule $\langle x, y_0 \rangle$ escribiendo x como
$$\left(x + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \right) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$$
- Cauchy-Schwarz completa la igualdad de normas, la unicidad es quasi-directa

$*$ (Colorario) Todo H Hilbert (sobre $\mathbb{R}$) es isométricamente isomorfo a H'. $\to$ Combine el Example e Teorema previos

Exercise Si H es Hilbert, entonces $H \simeq H'$ isométricamente. $\rightarrow$ pend.

☐ **2.7** Si H es Hilbert, entonces H' también es Hilbert.

> Tome $\varphi_1(x) = \langle x, y_1 \rangle$ e $\varphi_2(x) = \langle x, y_2 \rangle \in H'$, defina
> $$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \langle y_2, y_1 \rangle$$

$*$ (Colorario) Todo espacio de Hilbert es reflexivo.

> Use Riesz-Fréchet$\times 3$ para desarmar el dual del dual y mostrar que en efecto para $\Phi \in H''$, $\psi \in H'$,
> $$J_H(y)(\psi) = \Phi(\psi)$$

◇ **2.7** Sean E e F Banach. Una forma bilinieal $T : E \times F \to \mathbb{K}$ es

(a) *Coerciva* si $E = F$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\exists \beta > 0, \forall x \in E$ tal que $T(x,x) \geq \beta \|x\|^2$.

(b) *Simetrica* si $E = F$ e $\forall x, y \in E$ se tiene $T(x,y) = T(y,x)$.

(c) *No degenerada* si $\forall x \in E, \forall y \in F$ se tiene que $T(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$.

Example Las formas bilineales $T_{1,2} : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{K}$ tales que

- $T_1 : (a,b) \mapsto \sum a_j b_j \quad \rightarrow$ Símetrica, coerciva, continua y no degenerada.
- $T_2 : (a,b) \mapsto \sum a_{2j} b_{2j} \quad \rightarrow$ Símetrica, continua, no coerciva y degenerada.

☐ **2.8** Sean H Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e $T : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineal, símetrica, continua y coerciva. Entonces, $\forall \varphi' \in H', \exists!\ x_0 \in H$ tal que $\forall x \in H$ se tiene $\varphi(x) = T(x, x_0)$.

> T es define un producto interno en H

> Vea que (x_n) Cauchy en $\|\cdot\|_T \Rightarrow$ Cauchy en $\|\cdot\|$, y van al mismo límite

> Aplique Riesz-Fréchet

■ **2.9** (Lax-Milgram) Sean H Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e $T : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineal continua y coerciva. Entonces, $\forall \varphi \in H', \exists! x_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = T(x, x_0)$.

> $\forall x \in H$, $T_x : y \mapsto T(y,x) \in H'$, por Riesz-Fréchet $T_x(y) = \langle y, w_x \rangle$

> Pruebe que $A : x \mapsto w_x \in \mathcal{L}(H,H)$, e use coercividad para ver que es un isomorfismo en su imagen

> Vea que Ran(A) $= G^{\blacklozenge} \leq H$ y muestre que $G^{\perp} = \{0\}$

> Aplique Riesz-Fréchet y complete el argumento, $\exists x_0$ tal que $\varphi(x) = \langle x, A(x_0) \rangle = \langle x, w_o \rangle = T(x, x_0)$

■ **2.10** (Lax-Milgram (Versión Banach)) Sean E e F Banach, con F reflexivo. Sea $T : E \times F \to \mathbb{K}$ forma bilineal continua no degenerada. Entonces $\forall \varphi \in F', \exists!\ x_0 \in E$ tal que $\varphi(y) = T(x_0, y)$ sii $\exists \beta > 0, \forall x \in E$ tal que $\sup\limits_{\|y\|=1} |T(x,y)| \geq \beta \|x\|$.

> Defina $A : E \to F'$ tal que $A(x)(y) = T(x,y)$, inyectiva e continua

> ($\Rightarrow$) Admita la representación, aplique Teorema de la Aplicación Abierta

> ($\Leftarrow$) Suponga que $A : E \not\twoheadrightarrow F'$, Hahn-Banach y la reflexividad para buscar la contradicción

§ 3 Weak Topology

3.1 Topología Generada por una Familia de Funciones

◇ **3.1** Sean $X \neq \emptyset$, (Y_i, τ_i) familia de espacios topológicos e (f_i) familia de funciones $f_i : X \to Y_i$. Llamamos *weak topology* (sobre X) a la generada por,

$$\Phi := \left\{ \bigcap f_j^{-1}(A_j) : A_j^{\lozenge} \subseteq Y_j \right\},$$

a la cual denotamos en adelante τ_w, topología generada por las (f_i).

◇ **3.2** Sea E espacio normado. Denotamos $(E, \sigma(E, E')) = (E, \tau_w)$ al espacio E con la weak topology generada por $(\varphi_i) = E'$.

$*$ Si $(x_n) \subseteq E$ converge en τ_w, escribimos $x_n \xrightarrow{w} x$.

(a), (c) y (e) son inmediatos de resultados básicos de topología

(b) Tome $U^{\diamond} \subseteq \tau_w$ y planteelo como intersección finita de preimágenes

(d) Recuerde que E' separa puntos, e $\mathbb{K}$ es Hausdorff

☐ **3.1** Sea E espacio normado. Entonces,

(a) $\forall \varphi \in E'$, $\varphi : (E, \tau_w) \to \mathbb{K}$ es continua.

(b) $\forall x_0 \in E$, los conjuntos de la forma $B_{J,\epsilon} = \{x \in E : |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \epsilon\}$ forman una base de vecindades $\mathcal{B}_{x_0}$ en τ_w.

(c) $x_n \xrightarrow{w} x$ sii $\forall \varphi \in E'$, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$.

(d) (E, τ_w) es Hausdorff.

(e) $f : (Z, \tau) \to (E, \tau_w)$ es continua sii $\forall \varphi \in E'$, $\varphi \circ f : Z \to \mathbb{K}$ es continua.

$\varphi \in E'$ continua + ítem (c)

$*$ (Colorario) En E espacio normado, si $x_n \to x$, entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.

Example Para $(e_n) \subseteq c_0$ tenemos $e_n \xrightarrow{w} 0$ mientras en $\tau_{\|\cdot\|}$ ni siquiera es Cauchy.
→ Tome $\varphi \in (c_0)'$ e use la dualidad + ítem (c) para ver que $\varphi(e_n) \to 0 = \varphi(0)$

$x_n \xrightarrow{w} x \not\Rightarrow x_n \to x$

☐ **3.2** Sean E espacio normado e $x_n \xrightarrow{w} x$. Entonces,

(a) Por el ítem (c) previo $(\varphi(x_n))$ es acotada en E' $\Rightarrow$ (x_n) acotada en E

Note que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \liminf \|x_n\|$, luego aplique colorario de H-B

(a) $(\|x_n\|)$ es acotada, y $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Exercise (4.5.12) Sean E espacio normado e $B \subseteq E$. Si $\forall \varphi \in E'$, $\varphi(B)$ es acotado, entonces B es acotado también.

Amarre $|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)|$ a ϵ usando las convergencias y el ítem previo

(b) Si $\varphi_n \to \varphi \in E'$, entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

La primera afirmación es un facto topológico, $\nexists\, \tau \subset \tau_w$ que haga todas las (f_i) continuas en (X, τ)

No admite resumen, véase [1, pág. 121]

☐ **3.3** Si E es espacio normado entonces $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, con igualdad sii $\dim E < \infty$.

$*$ (Colorario) Si E es espacio normado, entonces $E' = (E, \tau_w)'$.

Tome una red $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \to (x, y) \in X \times Y$, use la continuidad de las proyecciones y del luego la de f

☐ **3.1** Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua. Si (Y, τ') es Hausdorff entonces $\operatorname{graf}(f)^{\blacklozenge} \subseteq X \times Y$ con la topología producto.

$(\Rightarrow)$ $\forall \varphi \in F'$, $\varphi \circ T_\sigma \in (E, \tau_w^E)'$

$(\Leftarrow)$ Por el lemma anterior $\operatorname{graf}(T_\sigma)^{\blacklozenge}$ en $(E, \tau_w^E) \times (F, \tau_w^F) \subseteq (E \times F, \tau_{\|\cdot\|})$, se sigue de Teorema del Gráfico Cerrado

☐ **3.4** Sean E e F Banach. Un operador lineal $T : E \to F$ es continuo sii $T_\sigma : (E, \tau_w^E) \to (F, \tau_w^F)$ es continuo.

$(\subseteq)$ Es inmediato de la "preservación" de convergencia en sucesiones

$(\supseteq)$ Sea $x_0 \in \overline{K}^{\tau_w} \setminus \overline{K}^{\tau_{\|\cdot\|}}$, consiga aplicar versión geométrica H-B (estricta) y busque la contradicción

■ **3.1** (Mazur) Sean E espacio normado e $K \subseteq E$ convexo. Entonces $\overline{K}^{\tau_{\|\cdot\|}} = \overline{K}^{\tau_w}$. En particular, $K^{\blacklozenge} \subseteq (E, \tau_{\|\cdot\|})$ sii $K^{\blacklozenge} \subseteq (E, \tau_w)$.

Exercise (1.8.19) $K \subseteq E$ es convexo $\Rightarrow$ $\overline{K}$ convexo.

No admite resumén, véase [1, pág. 124]

■ **3.2** (Schur) Sea $(x_n) \subseteq \ell_1$. Entonces $x_n \to x$ sii $x_n \xrightarrow{w} x$.

3.2 Weak-Star Topology

◇ **3.3** Sea E espacio normado la *weak-star topology* definida en E' y a la cual denotamos $\sigma(E',E) = (E', \tau_{w^*})$ es la generada por la familia $J_E(E) \subseteq E''$.

$*$ Análogamente, cuando $(\varphi_n) \subseteq E'$ converge en τ_{w^*}, escribimos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

(a), (c) y (e) de nuevo son consecuencias de resultados topológicos

(b) Es una adaptación de su análogo

(d) $J_E(E)$ separa puntos también, veáse Exercise 4.5.11

☐ **3.5** Sea E espacio normado. Entonces,

(a) $\forall x \in E$, $J_E(x) : (E', \tau_{w^*}) \to \mathbb{K}$ es continua.

(b) $\forall \varphi_0 \in E'$, los conjuntos de la forma $B_{J,\epsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi_j(x_j) - \varphi_0(x_j)| < \epsilon\}$ forman una base de vecindades $\mathcal{B}_{\varphi_0}$ en τ_{w^*}.

(c) $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ sii $\forall x \in E$, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$.

(d) (E', τ_{w^*}) es Hausdorff.

(e) $f : (Z, \tau) \to (E', \tau_{w^*})$ es continua sii $\forall x \in E,\ J_E(x) \circ f : Z \to \mathbb{K}$ es continua.

Example Sea $(e_n) \subseteq \ell_1 = (c_0)'$. Dada $x = (x_n) \in c_0$, entonces $e_n(x) = x_n \to 0$, luego por el ítem (c) $e_n \xrightarrow{w^*} 0$.

Todos los ítems son adaptaciones de resultados anteriores

☐ **3.6** Sea E espacio normado. Entonces,

(a) Si $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$ entonces $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

(b) Si E es Banach e $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ entonces $(\|\varphi_n\|)$ es acotada y $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.

(c) Si E es Banach, $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ e $x_n \to x \in E$, entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x) \in \mathbb{K}$.

Tome $T : V \ni x \mapsto (\varphi_j(x)) \in \mathbb{K}^n$

Haga $U : T(V) \ni x \to \varphi(x) \in \mathbb{K}$, vea que está bien definida, planteé una extensión y concluya

□ **3.2** Sean V espacio vectorial e $\varphi_j \in V'$ tales que $\bigcap \ker \varphi_j \subseteq \ker \varphi$, entonces $\exists a_j \in \mathbb{K}$ tales que $\varphi = \sum a_j \varphi_j$.

Tome $f \in (E', \tau_{w^*})$, entonces $f(0) = 0$, luego $\exists B_{J,\epsilon}$ donde $|f(\varphi)| < 1$

$$B_{J,\epsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_j)| < \epsilon\}$$

Suponga que $\forall j,\ J_E(x_j)(\varphi) = 0$, apunte a mostrar que $f(\varphi) = 0$,

$$\bigcap \ker(J_E(x_j)) \subseteq \ker f$$

Aplique el lemma y concluya

☐ **3.7** Si E es espacio normado entonces $(E', \tau_{w^*})' = J_E(E)$.

$*$ (Colorario) Si E es espacio normado, entonces $(E'', \tau_{w^*})' = J_{E'}(E')$

Recuerde que $J_E(E) \subseteq E''$

☐ **3.8** Sea E espacio normado. Entonces, $(E', \tau_{w^*}) \subseteq (E', \tau_w)$, más aún, coinciden sii E es reflexivo.

No admite resumen, veáse [1, pág. 129]

■ **3.3** (Banach-Alaoglu-Bourbaki) Sea E espacio normado, entonces la bola $B_{E'}$ es compacta en $\subseteq (E', \tau_{w^*})$.

References

[1] Botelho, Geraldo and Pellegrino, Daniel and Teixeira, Eduardo. *Introduction to Functional Analysis*, Springer, 2025.