

Random Walks e Equação de Difusão

November 5, 2025

MM433 - EDP I

Prof. Bianca Morelli

Nestor Heli Aponte Avila¹

n267452@dac.unicamp.br

** O objetivo deste pequeno seminário é mostrar como à equação do calor surge num modelo discreto probabilístico e analisar essa relação. O conteúdo aqui exposto segue a linha de [1, Cap. 2] **

Notação

 Definição

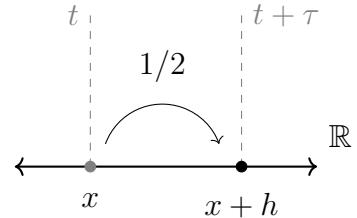
 Proposição

 Teorema

O modelo

Supõe que temos uma partícula no origem da reta que cujo movimento obedece as seguintes regras:

- (R1) Se move ao passo $h > 0$ por unidade de tempo τ .
- (R2) O passo pode ser a esquerda ou direita com mesma probabilidade $\rho = 1/2$ que não depende dos passos anteriores.



A tarefa se torna então encontrar uma função $\rho(x, t)$ que dê a probabilidade de encontrar à partícula na posição x num instante $t = N\tau$.

Contas preliminares

- Suponha que após de N passos, $t = N\tau$, a partícula tá em $x = mh$, pra algúm $m \in \mathbb{Z} : m \leq |N|$.
- Sejam $k := \#$ de passos dados a direita e $N - k$ os dados a esquerda.
- ↓ Temos então $m = k - (N - k) = 2k - N$ e $k = (m + N) \cdot 2^{-1}$. Assim, podemos pensar na probabilidade em termos de k :

$$\rho(x, t) = \rho_k = \frac{\# \text{ } N\text{-caminhos com } k \text{ pasos a direita}}{\# \text{ } N\text{-caminhos totais}} = \binom{N}{k} \cdot 2^{-N}.$$

- Na procura de um modelo contínuo, precisamos fazer $h, \tau \rightarrow 0$, no entanto temos que respeitar parâmetros clave pra não colapsar o modelo, neste caso são o primeiro e o segundo momento:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[mh] = \mathbb{E}[m]h \\ \mathbb{E}[x^2] = \mathbb{E}[(mh)^2] = \mathbb{E}[m^2]h^2 \end{cases} \quad .^{\textcolor{red}{1}} \quad (1)$$

- ↓ A esperança é linear e $m = 2k - N$, então é suficiente com determinar $\mathbb{E}[k]$ e $\mathbb{E}[k^2]$.

¹Queremos variança $\text{Var}(x) = \sigma^2 = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$ (distancia promedio do origen) constante.

◇ Sejam X variable aleatoria discreta tomando valores em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ e ρ_X sua função massa de probabilidade. A função geradora de probabilidade é

$$G(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=1}^N \rho_X(x) \cdot s^x.$$

□ 1. Nas hipótese anteriores, $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = G^{(r)}(1)$.

↓ Temos hipótese pra usar □ 1., só precisamos das derivadas,

$$G(s) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^N \rho_k s^k = \left(\frac{1+s}{2}\right)^N \Rightarrow G^{(1)}(1) = \frac{N}{2}, \quad G^{(2)}(1) = \frac{N(N-1)}{4}.$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[k] = G^{(1)} = \frac{N}{2} \\ \mathbb{E}[k^2] = G^{(2)}(1) - G^{(1)}(1) = \frac{N(N+1)}{4} \end{cases}$$

↓ Voltando a (1) temos $\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[2k-N] = 2\mathbb{E}[k]-N = 0$ e $\mathbb{E}[x^2] = \sigma[x]^2 = \mathbb{E}[4k^2-4k+N^2] = \mathbb{E}[k^2] - 4\mathbb{E}[k] + N^2 = N$. ²

↓ Surgiu então a condição $\sigma^2 = Nh^2$, lembrando que $N = t/\tau$, tá nós dizendo que temos dilatação parabolica do espaço-tempo,

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\tau} \cdot t \sim \rho(x, t) = \rho(\lambda x, \lambda^2 t). \quad (2)$$

Aquela é justamente uma das primeiras condições na procura da solução fundamental da equação do calor vista em aula.

Procura do limite

◇ Seja (Ω, \mathfrak{F}) espaço mensurável. Uma *partição* é uma coleção de eventos $(B_i) \subset \mathfrak{F}$ tal que $\forall i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ e $\bigcup B_i = \Omega$.

■ (*Probabilidade Total*) Sejam $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espaço de probabilidade, $(B_i) \subset \mathfrak{F}$ uma partição e $A \in \mathfrak{F}$ qualquer. Então, $P(A) = \sum P(A | B_i) \cdot P(B_i)$.

→ Da independência no cada passo e do ■ (*PT*) temos,

$$\begin{cases} \rho(x, t + \tau) = \frac{1}{2}\rho(x-h, t) + \frac{1}{2}\rho(x+h, t) \\ \rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}. \quad (3)$$

$B_{\pm} := \{\text{Partícula em } x \pm h \text{ no tempo } t\} \sim \rho(B_{\pm}) = \rho(x \pm h, t)$

²Não é estranho que $\mathbb{E}[x] = 0$, pois é apenas natural num sistema simétrico "justo".

- Suponha que $\rho(x, t)$ é suave em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, função *densidade* (continua) no lugar de função *massa* (discreta), que tem limite trivial.
- ↓ Usando Taylor em t, x e substituindo em (3) temos,

$$\begin{aligned}\rho(x, t) + \rho_t(x, t)\tau + \sigma|\tau| &= \frac{1}{2} \left(\cancel{2\rho(x, t)} + \cancel{\rho_x(x, t)}h - \cancel{\rho_x(x, t)}h + 2 \cdot \frac{1}{2} \rho_{xx}(x, t)h^2 + \sigma|h^2| \right) \\ \rho_t + \sigma|1| &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} \rho_{xx} + \sigma \left| \frac{h^2}{\tau} \right|\end{aligned}$$

Na nossa procura de limite não trivial precisamos que $\lim_{(h, \tau) \rightarrow (0, 0)} h^2/\tau$ seja constante, digamos $2D$ pra algúm $D > 0$.

- Fazendo $h, \tau \rightarrow 0$ obtemos $\rho_t - D\rho_{xx} = 0$, a equação do calor. Se $D = 1$, como no [2, Seç. 2.3] a gente sabe que temos solução única dada por,

$$\rho(x, t) = \Phi(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Interpretações importantes

No [1, Cáp. 2] o autor considera desde o principio a constante que chamamos de D (*coeficiente de difusão*), e consegui a solução fundamental,

$$\Gamma_D(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}\right).$$

- ↓ Lembrando da equação (2) a gente tinha $\sigma^2/t = h^2/\tau = 2D$, ou seja, difusão promedio de $\sqrt{2D}$ por unidade de tempo. Também,
- ↓ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tau} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2D}{h} \rightarrow \infty \equiv$ Velocidade de propagação infinita.

Brownian Motion 1-dimensional

◇ Sejam $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espaço de probabilidade e X v.a. discreta tomando valores em $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$ enumerável. Então, $\mathbb{E}[X] := \sum x_j \cdot P(X = x_j)$.

◇ Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espaço de probabilidade. Uma familia (X_i) de variáveis aleatorias é *independente* se $\forall (B_{i_j}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $j \leq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in B_{i_m}) = \prod^m P(X_{i_j} \in B_{i_j})$.

■ (**Teorema do Límite Central**) Sejam $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espaço de probabilidade e (X_j) familia de v.a.i. e identicamente ditribuidas com $\mathbb{E}[X_j] = \mu$ e $\text{Var}[X_j] = \sigma^2 > 0$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum^n X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \mathcal{N}(0, 1).$$

- Sejam $x_j :=$ posição após j passos e $\forall j \in \mathbb{N}$, $h\xi_j := x_j - x_{j-1}$. A familia (ξ_j) de v.a. é independente e idênticamente distribuída.

$$\xi_j : (x_j) \rightarrow \{-1, 1\} \text{ com } \rho(\xi_j = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Além disso, $\mathbb{E}[\xi_j] = \mu = 0$ e $\text{Var}[\xi_j] = \sigma^2 = 1 = \sigma$.

Independência. Sejam $l \leq k \in \mathbb{N}$, $(\xi_{j_l}) \subset (\xi_j)$ e $(a_l) \in \{-1, 1\}_k^k$,

$$\rho(\xi_{j_1} = a_1, \dots, \xi_{j_k} = a_k) = 2^{N-k} \cdot 2^{-N} = 2^{-k} = \prod \rho(\xi_{j_l} = a_l)$$

Esperança. $\mathbb{E}[\xi_j] = (-1) \cdot \rho(\xi_j = -1) + (1) \cdot \rho(\xi_j = 1) = 0$.

Variança. $\text{Var}[\xi_j] = \mathbb{E}[\xi_j^2] = (-1)^2 \cdot \rho(\xi_j = -1) + (1)^2 \cdot \rho(\xi_j = 1) = 1$.

- ↓ Das nossas conluções anteriores pra $D = h^2/\tau$, temos $h = \sqrt{2Dt/N}$, logo, o desplaçamento da partícula após de N passos é

$$x_N = h \sum_{j=1}^N \xi_j = \sqrt{2Dt} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j.$$

Segue do ■ (**TLC**) que $x_N \xrightarrow{\rho} \mathcal{N}(0, 2Dt)$.

◇ Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ espaço de probabilidade. Um *processo estocástico* é uma familia $(X(t))$ de v.a., usualmente indexada pelo tempo, $t \in [0, \infty)$.

◇ O *movimento browniano* é um processo estocástico $(W(t))$ tal que:

- (B1) Começa no origem, $W(0) = 0$.
- (B2) $W : t \mapsto W(t, \omega)$ continua quasi-sempre.
- (B3) Incrementos independentes, se $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, então a familia de v.a. $(W(t_j) - W(t_{j-1}))$ é independente.
- (B4) Pra cada $0 \leq s < t$, $W(s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

- ↓ Fazendo $D = 1/2$, o feito até agora não é outra coisa que a construção do movimento browniano 1-dimensional estándar como o limite de passeios aleatorios.

References

- [1] Salsa, S. (2016). *Partial differential equations in action*. Cham: Springer International Publishing.
- [2] Evans, L. (2010). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society.