

Exercícios - Livro

Analise Funcional

2024S1

Sumário

1	Capítulo 1	1
2	Capítulo 2	24
3	Capítulo 3	44
4	Capítulo 4	56
5	Capítulo 5	72
6	Capítulo 6	95
7	Capítulo 7	107

1 Capítulo 1

Exercício 1 (1.8.1). Complete os detalhes do Exemplo 1.1.2.

Resolução. Sejam $B(X)$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ e a função:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : B(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \end{aligned}.$$

Sabemos que $B(X)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. Veremos que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $B(X)$.

- Dado $f \in B(X)$,

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = 0 &\iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \\ &\iff |f(x)| = 0, \forall x \in X \\ &\iff f(x) = 0, \forall x \in X \\ &\iff f = 0_{B(X)}. \end{aligned}$$

¹Sugestões para os exercícios incompletos podem ser enviadas para o e-mail funcional20241s@gmail.com

- Para $f \in B(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\infty &= \sup_{x \in X} |(\lambda f)(x)| \\
&= \sup_{x \in X} |\lambda(f(x))| \\
&= \sup_{x \in X} |\lambda| \cdot |f(x)| \\
&= |\lambda| \cdot \left(\sup_{x \in X} |f(x)| \right) \\
&= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

- Tomemos $f, g \in B(X)$ arbitrários. Então:

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in X} |(f + g)(x)| \\
&= \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \\
&\leq \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \\
&\leq \left(\sup_{x \in X} |f(x)| \right) + \left(\sup_{x \in X} |g(x)| \right) \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. Provemos agora que $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Tome $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $B(X)$. Dado $a \in X$, tome a sequência $(f_n(a))_{n=1}^\infty$ em \mathbb{K} . Dado $\varepsilon > 0$, como $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $B(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ com:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon, \forall n, m \in N + 1, N + 2, \dots$$

Assim, para $n, m \in N + 1, N + 2, \dots$,

$$\|f_n(a) - f_m(a)\| = \|(f_n - f_m)(a)\| \leq \sup_{x \in X} |(f_n - f_m)(x)| = \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Como \mathbb{K} é completo, temos que $(f_n(a))_{n=1}^\infty$ é convergente para todo $a \in X$.

Fazendo de forma análoga à demonstração do Corolário 2.3.3 (ou apenas aplicando este), podemos definir a função:

$$\begin{aligned}
f: X &\longrightarrow \mathbb{K} \\
x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)
\end{aligned}$$

que será um operador linear contínuo.

Suponha por absurdo que $(f_n)_{n=1}^\infty$ não converge para f , ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > N$ e $\|f_n - f\|_\infty \geq \varepsilon$.

Como $(f_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > M_1$ teremos $\|f_n - f_m\| < \varepsilon/2$. Pelo que supomos, existe $n_0 > M_1$ tal que $\|f_{n_0} - f\| \geq \varepsilon$, isto é, existe $a \in X$ tal que $|(f_{n_0} - f)(a)| \geq \varepsilon$.

Além disso, já que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > M_2$, então $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Assim, tome qualquer $m > \max\{M_1, M_2\}$ e note que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq |(f_{n_0} - f)(a)| = |f_{n_0}(a) - f(a)| = |f_{n_0}(a) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)| \\
&\leq |f_{n_0}(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \leq \|f_{n_0} - f_m\| + |f_m(a) - f(a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como chegamos a um absurdo, temos que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge para f e portanto, $B(X)$ é Banach. □

Exercício 2 (1.8.2). Mostre que o conjunto $\{f \in C[a, b] : f(x) > 0, \forall x \in [a, b]\}$ é aberto em $C[a, b]$.

Resolução. Tome $f_0 \in \{f \in C[a, b] : f(x) > 0, \forall x \in [a, b]\} =: A$. Vamos mostrar que existe uma bola aberta centrada f_0 inteiramente contida em A .

Note que f_0 é uma função contínua em um compacto $[a, b]$, logo existe $c \in [a, b]$ no qual f_0 atinge seu mínimo. Isto é, $\min_{f_0} = f(c) > 0$.

Basta então considerar a bola aberta $B(f_0, \frac{f(c)}{2})$.

De fato, se $f \in B(f_0, \frac{f(c)}{2})$, então $f(x) > f_0(x) - \frac{f(c)}{2} > f(c) - \frac{f(c)}{2} = \frac{f(c)}{2} > 0$.

Segue que $B(f_0, \frac{f(c)}{2}) \subseteq A$. □

Exercício 3 (1.8.3). Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são ditas equivalentes se existirem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in E.$$

Prove que se E é um espaço normado de dimensão finita, então quaisquer duas normas em E são equivalentes.

Resolução. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para E . Podemos tomar a função:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_s : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^n a_i e_i &\longmapsto \|x\|_s = \sum_{i=1}^n |a_i|. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\|\cdot\|_s$ é uma norma. Vamos mostrar que uma norma qualquer $\|\cdot\|$ em E é equivalente a $\|\cdot\|_s$.

Pelo Lema 1.1.5, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que, para todo $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ em E , temos:

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\| \geq c_1 \cdot (|a_1| + \dots + |a_n|),$$

ou seja,

$$\|x\| \geq c_1 \|x\|_s.$$

Por outro lado, tomando $c_2 = n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$, temos:

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \left(|a_i| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right)$$

□

Resolução. Se E é um \mathbb{C} -espaço de dimensão finita, então é um \mathbb{R} -espaço cuja dimensão real é o dobro da complexa e a norma continua sendo a mesma. Então vamos considerar apenas o caso real – o fato de duas normas serem equivalentes não depende do corpo de escalares, então se dois \mathbb{C} -espaços normados tiverem normas equivalentes enquanto vistos como \mathbb{R} -espaços, as normas são claramente equivalentes enquanto \mathbb{C} -espaços.

Primeiro note que podemos artificialmente definir uma norma em \mathbb{R}^n da seguinte forma: se $N := (E, \|\cdot\|, \beta)$ onde $\beta = (x_1, \dots, x_n)$ é uma base de E , podemos considerar o mapa linear $T: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $x_i \mapsto e_i$ (que é bijetivo) e para $v \in \mathbb{R}^n$, definir $\|v\|_N := \|T^{-1}(v)\|$. Pelas propriedades de linearidade, injetividade e norma (em E), é claro que esse mapa é uma norma, e além disso $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_N)$ prescrito por $x \mapsto T(x)$ é um isomorfismo isométrico ($\|T(x)\|_N = \|T^{-1} \circ T(x)\| = \|x\|$). Então basta mostrar que duas quaisquer normas de \mathbb{R}^n são equivalentes – ou ainda, mostrar que qualquer norma é equivalente à norma $\|\cdot\|_1$ em \mathbb{R}^n (pois a equivalências de normas é uma relação de equivalência).

Seja $\|\cdot\|$ uma norma em \mathbb{R}^n . Então, para $x = \sum_i \alpha_i e_i$, $\|x\| = \|\sum_i \alpha_i e_i\| \leq \sum_i |\alpha_i| \|e_i\| \leq \overbrace{\max_i \|e_i\|}^{=:C} \sum_i |\alpha_i| = C\|x\|_1$. Por outro lado, isso nos diz que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ dado por $x \mapsto x$ é contínuo, e como

$x \mapsto \|x\|$ é contínuo nesse segundo espaço, o mapa $x \mapsto \|x\|$ é contínuo (com o domínio munido da topologia induzida de $\|\cdot\|_1$). Em particular, isso que dizer a imagem de $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ (que é fechado e limitado)* é compacta: fechada e limitada (inferiormente por alguma constante c). Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos $\frac{x}{\|x\|_1} \in S$ e portanto $c \leq \|\frac{x}{\|x\|_1}\| \implies c\|x\|_1 \leq \|x\|$; essa igualdade claramente vale para 0 e portanto $c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1$. Com mais algumas desigualdades (da equivalência de normas), temos $c_1\|x\|_N \leq \|x\|_M \leq c_2\|x\|_N$ para certos N e M vindo de duas normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ em E e uma mesma base $\beta \implies$ são construídos a partir da mesma transformação T . Logo $c_1\|T(x)\| \leq \|T(x)\|_M \leq c_2\|T(x)\|_N \implies c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$.

□

Exercício 4 (1.8.4). Prove que a correspondência $f \in C[0, 1] \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt \in \mathbb{R}$ é uma norma em $C[0, 1]$ que não é equivalente à norma $\|\cdot\|_\infty$.

Resolução. Como $|f(t)| \geq 0$, para todo $t \in [0, 1]$, $\int_0^1 |f(t)|dt \geq 0$. Também é claro que $\|0\| = 0$. Reciprocamente, suponha que $f \neq 0$. Logo, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $|f(t_0)| > 0$. Sendo f contínua, existe uma vizinhança $A \subset [0, 1]$ tal que $t_0 \in A$ e $|f| > 0$ em A . Logo,

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt \geq \int_A |f(t)|dt > 0.$$

Também, se $f, g \in C[0, 1]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\|\lambda f\| = \int_0^1 |\lambda f(t)|dt = \int_0^1 |\lambda| |f(t)|dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|dt = |\lambda| \|f\|,$$

$$\|f + g\| = \int_0^1 |f(t) + g(t)|dt \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|)dt = \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\| + \|g\|.$$

Portanto, esta correspondência é de fato uma norma em $C[0, 1]$.

Defina agora $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(t) = \begin{cases} n - \frac{n^2 t}{2}, & 0 \leq t \leq 2/n \\ 0, & 2/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Logo, f_n é contínua. Além disso,

$$\|f_n\| = \int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^{2/n} (n - n^2 t/2)dt = [nt - n^2 t^2/4]_0^{2/n} = 1,$$

$$\|f_n\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} = f(0) = n.$$

Assim, não existe $c > 0$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq c\|f_n\| = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, as duas normas não são equivalentes. □

Exercício 5 (1.8.5). Mostre que em qualquer espaço vetorial E sobre \mathbb{K} pode ser definida uma métrica d que não está associada a norma alguma em E pela igualdade

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Resolução. Considere $d : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Neste caso, d é uma métrica em E . Suponha que exista $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{K}$ norma em E tal que $d(x, y) = \|x - y\|$. Em particular, teríamos que, para qualquer $x \in E$

$$d(x, 0) = \|x\|.$$

Portanto, tome $x \in E \setminus \{0\}$ tal que $\|x\| = 1$. Dessa forma, se $\lambda \in \mathbb{K}$ é não nulo, segue que $\lambda x \neq 0$. Assim, tomando $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \neq 1$, temos que

$$\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) = 1.$$

Por outro lado, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = |\lambda| \neq 1$, o que é contradição. Portanto, não pode existir tal norma $\|\cdot\|$ associada a métrica d . \square

Exercício 6 (1.8.6). Mostre que se $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, então $C^{0,\alpha_2}[a, b] \subsetneq C^{0,\alpha_1}[a, b] \subsetneq C^0[a, b]$.

Resolução. Por definição, $C^{0,\alpha}[a, b] \subset C^0[a, b]$. Seja $f \in C^{0,\alpha_2}[a, b]$. Logo, existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha_2}$, $\forall x, y \in [a, b]$. Mas, se $x \neq y$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha_1}} = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha_2}} |x - y|^{\alpha_2 - \alpha_1} \leq C|x - y|^{\alpha_2 - \alpha_1} \leq C(b - a)^{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Portanto, $f \in C^{0,\alpha_1}[a, b]$, e isto mostra a inclusão.

Para mostrar que a inclusão é própria, por simplicidade, suponha que $[a, b] = [0, 1]$. Seja

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}. \\ x &\mapsto x^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Logo, f é contínua, e, para $0 \leq y < x \leq 1$,

$$\frac{|x^{\alpha_2} - y^{\alpha_2}|}{|x - y|^{\alpha_2}} = \frac{|1 - (y/x)^{\alpha_2}|}{|1 - (y/x)|^{\alpha_2}} \leq \frac{|1 - (y/x)|}{|1 - (y/x)|^{\alpha_2}} \leq 1,$$

pois $0 \leq t^{\alpha_2} \leq t \leq 1$, para todo $t \in [0, 1]$, pois $\alpha_2 < 1$. Logo, $f \in C^{0,\alpha_2}[0, 1]$. Mas

$$\frac{|x^{\alpha_2} - 0^{\alpha_2}|}{|x - 0|^{\alpha_1}} = \frac{x^{\alpha_2}}{x^{\alpha_1}} = x^{\alpha_2 - \alpha_1},$$

e como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha_1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha_2 - \alpha_1} = \infty$, temos que $f \notin C^{0,\alpha_1}[0, 1]$.

Para a outra inclusão própria, basta notar que, para ϵ pequeno, temos $C^{0,\alpha_1}[0, 1] \subsetneq C^{0,\alpha_1+\epsilon}[0, 1] \subset C^0[0, 1]$. \square

Exercício 7 (1.8.7). Mostre que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial.

Resolução. Seja V um espaço vetorial. Como todo espaço vetorial tem base (axioma da escolha), tome B uma base de V . Podemos escrever $v \in V$ como $v = \sum \lambda_i b_i$, com $\lambda_i \in K$ e $b_i \in B$. Como essa soma é finita, podemos definir a norma como

$$\|v\| = \max_i \{|\lambda_i|\}.$$

\square

Exercício 8 (1.8.8). Se A e B são subconjuntos de um espaço normado E , mostre que $a\overline{A} = \overline{aA}$ para todo escalar a e $\overline{A + B} \subseteq \overline{A + B}$.

Resolução.

- (i) $a\overline{A} = \overline{aA}$: Seja $y = ax \in a\overline{A}$, $x \in \overline{A}$, então temos que existe $(x_n) \subset A$ com $x_n \rightarrow x$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \geq 0$ de forma que $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{|a|} \forall n \geq n_0$, então existe sequência $(ax_n) \subset aA$ tal que

$$\|ax_n - ax\| = |a|\|x_n - x\| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Ou seja, $ax_n \rightarrow ax \in aA \implies y = ax \in \overline{aA}$.

Seja agora $y \in \overline{aA}$, i.e., existe $(ax_n) \subset aA$ tal que $ax_n \rightarrow y$. Defina $x = \frac{y}{a}$ e, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > 0$ com $\|ax_n - ax\| < \varepsilon \cdot |a|$. Logo,

$$\|x_n - x\| = \frac{|a|\|x_n - x\|}{|a|} = \frac{\|ax_n - y\|}{|a|} < \frac{\varepsilon \cdot |a|}{|a|} = \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e $x_n \rightarrow x \implies x \in \overline{A} \implies y = ax \in a\overline{A}$.

(ii) $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}$: Sejam $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, então existem sequências $(a_n) \subset A$, $(b_n) \subset B$ convergindo para a e b . Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > 0$ tal que

$$\|a_n - a\|, \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq n_0$. Agora, temos

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \geq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$, i.e., $a_n + b_n \rightarrow a + b$ e, como $(a_n + b_n) \subset A + B$, concluímos que $a + b \in \overline{A+B}$. □

Exercício 9 (1.8.9). Seja E um espaço normado. Se $A \subset E$ é limitado, então \overline{A} é limitado.

Resolução. Como A é limitado, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, $\forall x \in A$.

Seja $x \in \overline{A}$. Logo, existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Assim, para $0 < \epsilon \leq M$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \|x - x_n\| < \epsilon.$$

Daí,

$$\|x\| = \|x - x_N + x_N\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N\| < \epsilon + M \leq 2M.$$

Portanto, \overline{A} é limitado. □

Exercício 10 (1.8.10). Se E é um espaço vetorial normado e G é subespaço de E , mostre que o fecho de G em E também é subespaço de E .

Resolução. Sabemos que \overline{G} é subespaço de E se satisfizer:

$$x + \lambda y \in \overline{G}, \quad \forall x, y \in \overline{G}, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Sejam $x, y \in \overline{G}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, existem sequências (x_n) e (y_n) formada por elementos de G tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Das propriedades aritméticas do limite em espaços métricos, segue que $z_n = x_n + \lambda y_n \in G$ (pois G é subespaço de E) é tal que

$$z_n = x_n + \lambda y_n \rightarrow x + \lambda y.$$

Dessa forma, $x + \lambda y \in \overline{G}$, o que mostra que \overline{G} é subespaço de E . □

Exercício 11 (1.8.11). Prove que subespaços próprios de espaços normados tem interior vazio.

Resolução. Seja M um subespaço próprio de um espaço normado E . Notemos que é suficiente mostrar que $B(0, \varepsilon) \not\subseteq M$ para todo $\varepsilon > 0$, por translação (note que, se $B(m, \varepsilon) \subseteq M$, então $B(0, \varepsilon) \subseteq M$ pelo operador translação).

Pelo Lema de Riesz, existe $y \in E \setminus M$ tal que $\|y\| = 1$ e $d(y, M) \geq 1/2$. Logo,

$$\frac{\varepsilon}{2}y \in B(0, \varepsilon) \text{ e } \left\| \frac{\varepsilon}{2}y - x \right\| = \frac{\varepsilon}{2} \left\| y - \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}x}_{\in M} \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} > 0, \quad \forall x \in M.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $y \in B(0, \varepsilon)$ tal que $y \notin M$ e portanto, pelo argumento anterior, todos os pontos de F são de interior vazio.

Outra forma de fazer: Suponha por contradição que exista $F \subsetneq E$ com interior não vazio; ou seja, existem $y \in F$ e $r > 0$ tais que $B(y; r) \subseteq F$. Tome $z \in E \setminus F$, então $m := y + \frac{r}{2\|z\|} \cdot z \in B(y; r)$ e portanto é elemento de F . Como F é espaço vetorial e $m, y \in F$, temos que $z = \frac{2\|z\|}{r}(m - y) \in F$. Contradição. \square

Exercício 12 (1.8.12). Sejam E_1, \dots, E_n espaços normados.

a) Prove que as expressões

$$\begin{aligned}\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\|, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{1/2}, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}\end{aligned}$$

definem normas equivalentes no produto tensorial $E_1 \times \dots \times E_n$.

b) Sejam $(x_j^1), \dots, (x_j^n)$ seqüências em E_1, \dots, E_n , respectivamente. Prove que $x_j^1 \rightarrow x_1 \in E_1, \dots, x_j^n \rightarrow x_n \in E_n$ se, e somente se, $((x_j^1, \dots, x_j^n))$ converge para (x_1, \dots, x_n) em $E_1 \times \dots \times E_n$ munido de alguma (e portanto de todas) das normas acima.

c) Prove que $E_1 \times \dots \times E_n$ munido de uma (e portanto de todas) das normas acima é Banach se, e somente se, E_1, \dots, E_n são Banach.

Resolução. Denote por $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

a) É claro que todas as normas admitem valores não negativos. Sejam $x, y \in E, a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \|x_i\| = 0 \Leftrightarrow \|x_i\| = 0, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow x_i = 0, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|ax\|_1 = \sum_{i=1}^n \|ax_i\| = \sum_{i=1}^n |a| \|x_i\| = |a| \sum_{i=1}^n \|x_i\| = |a| \|x\|_1,$$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\| \leq \sum_{i=1}^n (\|x_i\| + \|y_i\|) = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right) + \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|\right) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Portanto, $\|\cdot\|_1$ é uma norma. Por sua vez,

$$\begin{aligned}\|x\|_2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x_i\|^2 = 0, 1 \leq i \leq n \\ &\Leftrightarrow \|x_i\| = 0, 1 \leq i \leq n \\ &\Leftrightarrow x_i = 0, 1 \leq i \leq n \\ &\Leftrightarrow x = 0,\end{aligned}$$

$$\|ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \|ax_i\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |a|^2 \|x_i\|^2\right)^{1/2} = (|a|^2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2)^{1/2} = (|a|^2)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} = |a| \|x\|_2,$$

Para a desigualdade triangular, note que, se $|\cdot|$ é a norma euclidiana de \mathbb{R}^n , então $\|x\|_2 = |(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)|$. Daí,

$$\begin{aligned}\|x_i + y + i\| &\leq \|x_i\| + \|y_i\|, 1 \leq i \leq n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^n (\|x_i\| + \|y_i\|)^2 \\ &\Rightarrow |(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)| \leq |(\|x_1\| + \|y_1\|, \dots, \|x_n\| + \|y_n\|)| \\ &\Rightarrow |(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)| \leq |(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)| + |(\|y_1\|, \dots, \|y_n\|)| \\ &\Rightarrow \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.\end{aligned}$$

Portanto, $\|\cdot\|_2$ é uma norma. Por fim,

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max\|x_i\| = 0 \Leftrightarrow \|x_i\| = 0, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow x_i = 0, 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\|ax\|_\infty = \max\{\|ax_i\| : 1 \leq i \leq n\} = \max\{a\|x_i\| : 1 \leq i \leq n\} = a\max\{\|x_i\| : 1 \leq i \leq n\} = a\|x\|_\infty,$$

$$\|x_i + y_i\| \leq \|x_i\| + \|y_i\| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, 1 \leq i \leq n \Rightarrow \|x + y\|_\infty = \max\{\|x_i + y_i\| : 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma.

Para mostrar a equivalência de normas, basta encontrar $a, b, c > 0$ tais que $\|x\|_\infty \leq a\|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \leq c\|x\|_\infty$. Note primeiro que

$$\|x_j\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2, 1 \leq j \leq n \Rightarrow \|x\|_\infty^2 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2.$$

Assim, $a = 1$. Em seguida,

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^2 \Rightarrow \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Assim, $b = 1$. Por fim,

$$\|x_j\| \leq \max\{\|x_i\| : 1 \leq i \leq n\} = \|x\|_\infty, 1 \leq j \leq n \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{j=1}^n \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Portanto, $c = n$. Logo, as três normas são equivalentes.

b) Suponha primeiro que $x_j^i \rightarrow x_i$, para todo $1 \leq j \leq n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $N_i \in \mathbb{N}$ tais que

$$m \geq N_i \Rightarrow \|x_m^i - x_i\| < \epsilon.$$

Tome $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Assim,

$$m \geq N \Rightarrow \|x_m - x\|_\infty = \max\{\|x_m^i - x_i\| : 1 \leq i \leq n\} < \epsilon.$$

Portanto, $x_m \rightarrow x$.

Reciprocamente, suponha que $x_m \rightarrow x$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq N \Rightarrow \|x_m - x\|_\infty < \epsilon.$$

Daí, para todo $1 \leq i \leq n$,

$$m \geq N \Rightarrow \|x_m^i - x_i\| \leq \|x_m - x\|_\infty < \epsilon.$$

Portanto, $x_m^i \rightarrow x_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Suponha que E é Banach. Seja $(x_m^i) \subset E_i$ uma sequência de Cauchy. Defina $(y_m) \subset E$ tal que

$$y_m^j = \begin{cases} x_m^i, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Como $\|y_m - y_k\|_\infty = \|x_m^i - x_k^i\|$, (y_m) é uma sequência de Cauchy. Sendo E completo, existe $y \in E$ tal que $y_m \rightarrow y$. Assim, pelo item (b), $x_m^i = y_m^i \rightarrow y_i \in E_i$. Portanto, E_i é completo, para todo $1 \leq i \leq n$.

Reciprocamente, suponha que E_1, \dots, E_n são espaços de Banach. Seja $(x_m) \subset E$ uma sequência de Cauchy. Então, para todo $1 \leq i \leq n$, $\|x_m^i - x_k^i\| \leq \|x_m - x_k\|_\infty$, assim, $(x_m^i) \subset E_i$ é uma sequência de Cauchy também. Como E_i é Banach, existe $x_i \in E_i$ tal que $x_m^i \rightarrow x_i$. Assim, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, temos, pelo item (b), que $x_m \rightarrow x$. Portanto, E é Banach. \square

Exercício 13 (1.8.13). Seja E um espaço normado. No produto cartesiano considere qualquer uma das normas do exercício 1.8.12.

- (a) Prove que a soma e o produto por escalar são operações contínuas.
- (b) Prove que a norma é uma função contínua.

Resolução.

- (a) Para a soma, dado $\varepsilon > 0$, considere $\delta = \varepsilon/2$, então temos que para todo par de vetores

$$\begin{aligned}\|(x, y) - (u, v)\|_\infty < \varepsilon/2 &\implies \|x + y - u - v\| \leq \|x - u\| + \|y - v\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Para o produto por escalar, considere $(x, a) \in E \times \mathbb{K}$ e $\varepsilon > 0$. Considere $\delta = \min\{\sqrt{\varepsilon/3}, \varepsilon/(3|a|), \varepsilon/(3\|x\|)\}$. Assim, para todo par de vetores

$$\begin{aligned}\|(x, a) - (y, b)\|_\infty < \delta &\implies \|ax - by\| = \|(a - b)(x - y) + a(y - x) + (b - a)x\| \\ &\leq |a - b| \cdot \|x - y\| + |a| \cdot \|x - y\| + |b - a| \cdot \|x\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

- (b) considere $\varepsilon = \delta$ e segue que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

□

Exercício 14 (1.8.14). (Espaço quociente) Sejam E um espaço normado e M um subespaço de E . Dados $x, y \in E$, dizemos que $x \sim y$ se $x - y \in M$. Para cada $x \in E$, definimos $[x] = \{y \in E : x \sim y\}$. Definimos também $E/M = \{[x] : x \in E\}$. Prove que

- (a) \sim é uma relação de equivalência.
(b) As operações $[x] + [y] = [x + y]$ e $a[x] = [ax]$ estão bem definidas e tornam E/M um espaço vetorial.
(c) Se M é fechado em E , então a expressão

$$\|[x]\| = \text{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$$

- (d) Se E é espaço de Banach e M é fechado em E , então E/M também é espaço de Banach.

Resolução.

- (a) • $x \sim x$, pois $0 = x - x \in M$.
• $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M \Leftrightarrow -(y - x) \in M \Leftrightarrow y - x \in M \Leftrightarrow y \sim x$.
• Se $x \sim y$ e $y \sim z$, temos que $x - y \in M$ e $y - z \in M$. Então,

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in M \Rightarrow x \sim z.$$

- (b) vamos mostrar que as operações estão bem definidas em E/M . Veja que, $[x] = x + M$. Assim, dados $[x], [y] \in E/M$ e $a \in \mathbb{K}$, temos

$$[x] + [y] = x + M + y + M = (x + y) + M = [x + y]$$

$$a[x] = a(x + M) = ax + M = [ax]$$

- (c) Vamos verificar as condições de norma:

(N1) É claro que $\|[x]\| \geq 0, \forall x \in E$, pois $0 \leq \|x + v\|, \forall x \in E, \forall v \in M$, donde

$$0 \leq \inf_{v \in M} \|x + v\| = \|[x]\|.$$

Se $\|[x]\| = 0$, então $\inf\{\|x - y\| : y \in M\} = 0$. Assim, existe uma sequência $(y_n) \subset M$ tal que $\|x - y\| \rightarrow 0$. Como M é fechado, segue que $x \in M$. Portanto, $[x] = [0]$.

(N2) Se $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}\|\lambda[x]\| &= \inf\{\|\lambda x - \lambda y\| : y \in M\} \\ &= \inf\{|\lambda|\|x - y\| : y \in M\} \\ &= |\lambda| \inf\{\|x - y\| : y \in M\} = |\lambda|\|[x]\|\end{aligned}$$

(N3) Por fim, $x, y \in E$, temos:

$$\begin{aligned}\|[x] + [y]\| &= \|[x + y]\| = \inf\{\|(x + y) - v\| : v \in M\} \\ &\leq \inf\{\|x - \frac{1}{2}v\| : v \in M\} + \inf\{\|y - \frac{1}{2}v\| : v \in M\} \\ &= \|[x]\| + \|[y]\|\end{aligned}$$

Portanto, $(E/M, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

(d) Seja $([x_n])$ uma sequência de Cauchy em E/M tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\|[x_n]\| = \inf_{m \in M} \|x_n + m\|$. Pela definição de inf, existe $m_n \in M$ tal que

$$\|x_n + m_n\| \leq \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}.$$

Portanto,

$$\sum_n \|x_n + m_n\| \leq \sum_n \left(\|[x_n]\| + \frac{1}{2^n} \right) < \infty$$

Então, a série $\sum_n \|x_n + m_n\|$ é absolutamente convergente em E e portanto converge. Seja y o seu limite. Agora, veja que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=1}^k [x_n] - [y] \right\| &= \left\| \left[\sum_{n=1}^k x_n - y \right] \right\| = \inf \left\| \sum_{n=1}^k x_n - y + m \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^k x_n - y + \sum_{n=1}^k m_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^k (x_n + m_n) - y \right\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Logo $\sum_{n=1}^k [x_n] \rightarrow [y]$ em E/M . Portanto, E/M é Banach.

□

Exercício 15 (1.8.15). Seja E um espaço vetorial. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito convexo se sempre que $x, y \in A$, o segmento fechado

$$\{ax + (1 - a)y : 0 \leq a \leq 1\}$$

estiver inteiramente contido em A . Mostre que o conjunto $\{x \in E : \|x\| \leq r\}$, chamado de bola fechada centrada na origem de raio $r > 0$, é convexo.

Resolução.

Sejam $x, y \in \overline{B}(0, r) = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a \leq 1$. Note que

$$\|ax + (1 - a)y\| \leq \|ax\| + \|(1 - a)y\| = |a|\|x\| + |1 - a|\|y\| \leq ar + (1 - a)r = r$$

Isto é, $ax + (1 - a)y \in A$, para todo $a \in [0, 1]$. Segue que A é convexo.

□

Exercício 16 (1.8.16). Mostre que um subconjunto C de um espaço vetorial é convexo se, e somente se, $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in C$ sempre que $x_1, \dots, x_n \in C$ e $a_1, \dots, a_n \geq 0$ satisfazem $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Resolução. Suponha C convexo. Provemos por indução sobre n que $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in C$ sempre que $x_1, \dots, x_n \in C$ e $a_1, \dots, a_n \geq 0$ satisfazem $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

1. Para $n = 2$, sejam $x_1, x_2 \in C$ e $a_1, a_2 \geq 0$ tais que $a_1 + a_2 = 1$. Temos $a_2 = 1 - a_1$, daí

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1 x_1 + (1 - a_1) x_2 \in C \text{ (pois } C \text{ é convexo)}.$$

2. Para $n = 3$, sejam $x_1, x_2, x_3 \in C$ e $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ tais que $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Note que, se $a_3 = 1$ então $a_3 x_3 \in C$ e $a_1 + a_2 = 0 \implies a_1 = a_2 = 0$. Se $a_3 \neq 1$, então $a_1 + a_2 \neq 0$, daí

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= (a_1 + a_2) \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} x_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} x_2 \right) + a_3 x_3 \\ &= (1 - a_3) \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} x_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} x_2 \right) + a_3 x_3 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2} = 1 \text{ com } \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \frac{a_2}{a_1 + a_2} \geq 0 \text{ e } x_1, x_2 \in C,$$

então, pelo caso $n = 2$,

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} x_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} x_2 \in C.$$

Logo,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (1 - a_3) \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} x_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} x_2 \right) + a_3 x_3 \in C.$$

Hipótese de Indução (H.I.): Suponha $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \in C$ sempre que $x_1, \dots, x_{n-1} \in C$ e $a_1, \dots, a_{n-1} \geq 0$ satisfazem $\sum_{i=1}^{n-1} a_i = 1$.

Provemos que, dados $a_1, \dots, a_n \geq 0$, com $a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = 1$ e $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \in C$, tem-se

$$a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n \in C.$$

De fato, se $a_n = 1 \implies a_1 + \dots + a_{n-1} = 0 \implies a_n x_n \in C$. Se $a_n \neq 1 \implies a_1 + \dots + a_{n-1} > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i x_i &= (a_1 + \dots + a_{n-1}) \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_1 + \dots + a_{n-1}} x_1 + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_1 + \dots + a_{n-1}} x_{n-1} \right)}_{\in C \text{ por H.I.}} + a_n x_n \\ &= (1 - a_n) \left(\frac{a_1}{a_1 + \dots + a_{n-1}} x_1 + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_1 + \dots + a_{n-1}} x_{n-1} \right) + a_n x_n \in C. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in C$ sempre que $x_1, \dots, x_n \in C$ e $a_1, \dots, a_n \geq 0$ satisfazem $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Mostremos que C é convexo.

Se $a_n = 1 \implies x_n = a_n x_n = a_n x_n + (1 - a_n) x_n \in C \implies C$ convexo.

Se $a_n \neq 1 \implies a_1 + \dots + a_n \neq 0$. Como $a_1 + \dots + a_n = 1$, então $1 - a_n = a_1 + \dots + a_{n-1}$, logo

$$(1 - a_n) \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_1 + \dots + a_{n-1}} x_1 + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_1 + \dots + a_{n-1}} x_{n-1} \right)}_{\in C, \text{ pois esta combinação também vale para } n-1} + a_n x_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in C,$$

Portanto, C é convexo. □

Exercício 17 (1.8.17). Seja A um subconjunto de um espaço vetorial E . O conjunto $\text{conv}(A)$, chamado de *envoltória convexa* de A , é definido como a interseção de todos os subconjuntos convexos de E que contém A . Mostre que:

(a) A envoltória convexa de qualquer subconjunto de E é um conjunto convexo;

(b) Para qualquer $A \subset E$,

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_i \geq 0, x_i \in A, i = 1, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Resolução.

(a) Tome $a, b \in \text{conv}(A)$. Seja C um subconjunto de E convexo que contém A . Logo, $a, b \in C$ e portanto, $t \cdot a + (1-t) \cdot b \in C$ para todo $t \in [0, 1]$. Dessa forma, como $t \cdot a + (1-t) \cdot b \in C$ para todo subconjunto convexo de E que contém A , temos que $t \cdot a + (1-t) \cdot b \in \text{conv}(A)$. Pela arbitrariedade de $t \in [0, 1]$, provamos que $\text{conv}(A)$ é convexo.

(b) Seja:

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_i \geq 0, x_i \in A, i = 1, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para $a \in A$, temos que $a = \sum_{i=1}^1 1 \cdot a \in C$ e portanto $A \subset C$.

Agora, tome $x, y \in C$. Então podemos escrever $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ e $y = \sum_{i=1}^m \delta_i y_i$ para $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \delta_1, \dots, \delta_m \geq 0$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in A$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^m \delta_i = 1$.

Assim, para todo $t \in [0, 1]$,

$$t \cdot x + (1-t) \cdot y = \sum_{i=1}^n (t \cdot \lambda_i) x_i + \sum_{i=1}^m ((1-t) \cdot \delta_i) y_i.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (t \cdot \lambda_i) + \sum_{i=1}^m ((1-t) \cdot \delta_i) &= t \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) + (1-t) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \delta_i \right) \\ &= t + (1-t) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $t \cdot x + (1-t) \cdot y \in C$ para todo $t \in [0, 1]$. Isto prova que C é convexo. Uma vez que $A \subset C$, temos que $\text{conv}(A) \subset C$.

Agora, tome D um subconjunto convexo de E que contém A . Dado $x \in C$, temos que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ para $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Uma vez que D é convexo e $x_1, \dots, x_n \in A \subset D$, o Exercício 1.8.16 nos diz que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in D$. Portanto $C \subset D$. Logo, C está contido em todo subconjunto convexo de E que contém A , ou seja, $C \subset \text{conv}(A)$. Dessa forma, $C = \text{conv}(A)$.

□

Exercício 18 (1.8.18). Sejam A e B subconjuntos convexos e compactos do espaço normado E . Prove que $\text{conv}(A \cup B)$ é compacto.

Resolução. Tome $C = \{(1-t)a + tb \mid a \in A, b \in B, t \in [0, 1]\}$. Vamos provar que $C = \text{conv}(A \cup B)$.

Dado $u \in C$, existe $t \in [0, 1]$, $a \in A$ e $b \in B$ tal que $u = (1-t)a + tb$. Logo, $a, b \in A \cup B \subset \text{conv}(A \cup B)$. Assim, como $\text{conv}(A \cup B)$ é convexo, $u = (1-t)a + tb \in \text{conv}(A \cup B)$. Assim, $C \subset \text{conv}(A \cup B)$.

Agora, tome $v \in \text{conv}(A \cup B)$. Pelo Exercício 1.8.17, existem $c_1, \dots, c_n \in A \cup B$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ com $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$. Sendo $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid c_i \in A\}$ e $J = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid c_i \in B\}$. Logo,

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i c_i + \sum_{j \in J} \lambda_j c_j.$$

Se $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$ ou $\sum_{j \in J} \lambda_j = 0$, temos que $v \in A$ ou $v \in B$, fazendo com que $v \in C$. Suponha então que isso não ocorre, assim,

$$v = \left(\sum_{r \in I} \lambda_r \right) \cdot \left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\sum_{r \in I} \lambda_r} c_i \right) + \left(\sum_{s \in J} \lambda_s \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\sum_{s \in J} \lambda_s} c_j \right).$$

Como A é convexo, temos que $A = \text{conv}(A)$. Assim, novamente pelo Exercício 1.8.17, $\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\sum_{r \in I} \lambda_r} c_i \in A$, uma vez que $\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\sum_{r \in I} \lambda_r} = 1$. De modo análogo, $\sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\sum_{s \in J} \lambda_s} c_j \in B$. Portanto, pelo modo que tomamos C e por:

$$v = \left(\sum_{r \in I} \lambda_r \right) \cdot \left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\sum_{r \in I} \lambda_r} c_i \right) + \left(1 - \sum_{r \in I} \lambda_r \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\sum_{s \in J} \lambda_s} c_j \right),$$

temos que $v \in C$. Desse modo, $\text{conv}(A \cup B) \subset C$. Logo, $C = \text{conv}(A \cup B)$.

Vamos provar finalmente que C é compacto. Tome uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em C . Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem então $a_n \in A$, $b_n \in B$ e $t_n \in [0, 1]$ tal que $x_n = t_n a_n + (1 - t_n) b_n$. Como $A, B, [0, 1]$ são compactos, então $A \times B \times [0, 1]$ é um subconjunto compacto de $E \times E \times \mathbb{R}$. Existe então subsequência $(a_{n_k}, b_{n_k}, t_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(a_n, b_n, t_n)_{n=1}^\infty$ que converge para $(a, b, t) \in A \times B \times [0, 1]$. Tomando a norma $\|\cdot\|_\infty$ em $E \times E \times B$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$ vale:

$$\|a_{n_k} - a\|, \|b_{n_k} - b\|, \|t_{n_k} - t\| < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4(1 + \|a\|)}, \frac{\varepsilon}{4(1 + \|b\|)} \right\}.$$

Desse modo, para $k > K$:

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - (ta + (1-t)b)\| &= \|t_{n_k} a_{n_k} + (1 - t_{n_k}) b_{n_k} - (ta + (1-t)b)\| \\ &\leq \|t_{n_k} a_{n_k} - ta_{n_k}\| + \|ta_{n_k} - ta\| + \|(1 - t_{n_k}) b_{n_k} - (1-t)b_{n_k}\| + \|(1-t)b_{n_k} - (1-t)b\| \\ &= |t_{n_k} - t| \|a_{n_k}\| + |t| \|a_{n_k} - a\| + |t - t_{n_k}| \|b_{n_k}\| + |1 - t| \|b_{n_k} - b\| \\ &\leq |t_{n_k} - t| (\|a\| + \|a_{n_k} - a\|) + |t| \|a_{n_k} - a\| + |t - t_{n_k}| (\|b\| + \|b_{n_k} - b\|) + |1 - t| \|b_{n_k} - b\| \\ &< |t_{n_k} - t| (\|a\| + 1) + 1 \|a_{n_k} - a\| + |t - t_{n_k}| (\|b\| + 1) + 1 \|b_{n_k} - b\| \\ &< \frac{\varepsilon}{4(1 + \|a\|)} (\|a\| + 1) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4(1 + \|b\|)} (\|b\| + 1) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dessa forma, $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ converge para $ta + (1-t)b \in C$, provando que C é compacto. □

Exercício 19 (1.8.19). Prove que o fecho de um subconjunto convexo de um espaço normado é convexo.

Resolução. Seja B um subconjunto convexo. Tomemos $(x_i) \rightarrow x \in \overline{B}$ e $(y_i) \rightarrow y \in \overline{B}$, onde $x_i, y_i \in B$ para todo i . Como B é convexo, segue que

$$z_{i,t} = tx_i + (1-t)y_i \in B, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Assim, por um lado, para cada i , $z_{i,t} \in B$, e, como o limite existe e estamos em um espaço vetorial normado, então temos que $(z_{i,t}) \rightarrow z_t = tx + (1-t)y \subseteq \overline{B}$. Concluindo assim o que queríamos. □

Exercício 20 (1.8.20). Seja $1 \leq p < \infty$.

(a) Prove que a expressão

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é norma no espaço vetorial de funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

(b) Mostre que o espaço normado do item (a) não é completo.

Resolução.

- (a) Observe que toda função contínua no intervalo $[a, b]$ é também p -integrável em $[a, b]$. Além disso, a integral de Lebesgue de uma função contínua em um intervalo coincide com sua integral de Riemann no mesmo intervalo. Sendo assim, o fato que $\|\cdot\|_p$ é norma em L_p implica diretamente que também é norma no conjunto das funções contínuas em $[a, b]$.
- (b) Tome o intervalo $[-1, 1]$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função contínua

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [-1, 0) \\ \frac{nx}{2}, & \text{se } x \in [0, 1/n) \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Mostremos primeiramente que $(f_n)_{n=1}^\infty$ é sequência de Cauchy. Segue diretamente da definição das funções f_n que dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$. Consequentemente, $|f_n(x) - f_m(x)|^p \leq |f_n(x) - f_m(x)|$ para todo $p \in [1, +\infty)$ e assim, $\|f_n - f_m\|_p^p \leq \|f_n - f_m\|_1$. Supondo, sem perda de generalidade, que $m < n$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_{-1}^0 |0 - 0| dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \left| \frac{nx}{2} - \frac{mx}{2} \right| dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \left| \frac{1}{2} - \frac{mx}{2} \right| dx + \int_{\frac{1}{m}}^1 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| dx \\ &= \frac{n-m}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} x dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} 1 - mx dx \\ &= \frac{n-m}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{mx^2}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \\ &= \frac{n-m}{2} \cdot \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{n} + \frac{m}{2n^2} \right) \\ &= \frac{n-m}{4n^2} + \frac{n^2 - 2mn + m^2}{4mn^2} \\ &= \frac{n-m}{4mn}. \end{aligned}$$

Segue que $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$. Por conseguinte, $\|f_n - f_m\|_p^p \rightarrow 0$ quando $m, n \rightarrow \infty$, provando que $(f_n)_{n=1}^\infty$ é sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_p$. Considere agora a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Para concluir que o espaço não é completo, basta provar que $f_n \rightarrow f$. Novamente, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}$ para

todo $x \in [-1, 1]$, e assim, $|f_n(x) - f(x)|^p \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $p \in [1, +\infty)$. Dessa forma:

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left| \frac{nx}{2} - \frac{1}{2} \right| dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} 1 - nx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{nx^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{4n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Isso implica que $f_n \rightarrow f$ na norma p . Como f é descontínua, o espaço das funções contínuas não é fechado e, portanto, não é completo na norma p . \square

Exercício 21 (1.8.21). Mostre que $L_\infty(X, \Sigma, \mu) \subseteq L_1(X, \Sigma, \mu)$ se, e somente se, $\mu(X) < \infty$.

Resolução. \Leftarrow Seja $f \in L_\infty(X, F, \mu)$. Então existe $C > 0$ e $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$ tal que $|f(x)| \leq C, \forall x \in X \setminus N$. Assim, como $\mu(N) = 0$, temos

$$\int_X |f(x)| d\mu = \int_{X \setminus N} |f(x)| d\mu \leq \int_{X \setminus N} C d\mu = C\mu(X \setminus N) = C\mu(X) < \infty.$$

Logo, $f \in L_1(X, F, \mu)$ e, consequentemente, $L_\infty(X, \Sigma, \mu) \subseteq L_1(X, \Sigma, \mu)$.

\Rightarrow Tome a função:

$$\begin{aligned}f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1.\end{aligned}$$

Temos que $f \in L_\infty(X, F, \mu)$ pois $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$. Dessa forma, $f \in L_1(X, F, \mu)$. Portanto,

$$\mu(X) = \int_X f(x) d\mu = \int_X |f(x)| d\mu = \|f\|_1 < \infty.$$

\square

Exercício 22 (1.8.22). Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida finita e $1 \leq r \leq p$, então $L_p(X, \Sigma, \mu) \subset L_r(X, \Sigma, \mu)$ e $\|f\|_r \leq \|f\|_p \mu(X)^{1/r - 1/p}$, onde $s = 1/r - 1/p$.

Resolução. Seja $f \in L_p$. Se $|f(x)| \leq 1$, então $|f(x)|^r \leq 1$. Caso contrário, se $|f(x)| > 1$, então $|f(x)|^r \leq |f(x)|^p$, pois $p \geq r$. Assim, $|f|^r \leq |f|^p + 1$. Como $f \in L_p$, e $\mu(X) < \infty$, a função constante 1 é integrável, e

$$\int_X |f|^r d\mu \leq \int_X |f|^p + 1 d\mu = \int_X |f|^p d\mu + \int_X 1 d\mu = \|f\|_p^p + \mu(X) < \infty.$$

Portanto, $f \in L_r$.

Agora, como $f \in L_p$, $|f| \in L_p$, e assim $|f|^r \in L_{p/r}$. Pela desigualdade de Holder, com $g = 1$ e $q = \frac{1}{1 - 1/(p/r)} = \frac{p}{p-r}$, temos

$$\begin{aligned}\| |f|^r \|_1 &\leq \| |f|^r \|_{p/r} \|1\|_q \Rightarrow \int_X |f|^r d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{r/p} \left(\int_X 1 d\mu \right)^{1/q} \\ &\Rightarrow \|f\|_r^r \leq \|f\|_p^r (\mu(X))^{1/q} \\ &\Rightarrow \|f\|_r \leq \|f\|_p \mu(X)^{1/q}.\end{aligned}$$

\square

Exercício 23 (1.8.23). Sejam (X, F, μ) um espaço de medida finita e $f \in L_\infty(X, F, \mu)$. Mostre que $f \in L_p(X, F, \mu)$, para todo $p \geq 1$, e que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Resolução. Como $f \in L_\infty$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ qtp. Daí, sendo X de medida finita,

$$\int_X |f(x)|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty.$$

Portanto, $f \in L_p$ e $\|f\|_p = \|f\|_\infty (\mu(X))^{1/p}$. Também,

$$\limsup_p (\|f\|_p) \leq \limsup_p (\|f\|_\infty (\mu(X))^{1/p}) = \|f\|_\infty \limsup_p ((\mu(X))^{1/p}) = \|f\|_\infty.$$

Agora, se $0 < r < \|f\|_\infty$, seja $C_r = \{x \in X : |f(x)| > r\}$. Pela definição de $\|f\|_\infty$, $\mu(C_r) > 0$, e

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \geq \int_{C_r} |f|^p d\mu \geq \int_{C_r} r^p d\mu = r^p \mu(C_r) \Rightarrow \|f\|_p \geq r \mu(C_r)^{1/p}.$$

Assim,

$$\liminf_p \|f\|_p \geq \liminf_p (r \mu(C_r)^{1/p}) = r \liminf_p (\mu(C_r)^{1/p}) = r.$$

Como isto vale para todo $r < \|f\|_\infty$, temos por fim que

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_p \|f\|_p \leq \limsup_p \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Assim, $\lim_p \|f\|_p$ existe e $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. □

Exercício 24 (1.8.24). Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p, q, s > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$. Prove que

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j b_j|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Resolução. Note que $\frac{s}{p} + \frac{p-s}{p} = 1$. Utilizando a Desigualdade de Holder para os valores $\frac{p}{s}$ e $\frac{p}{p-s}$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^s |b_j|^s \right) \leq \left(\sum_{j=1}^n (|a_j|^s)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{s}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (|b_j|^s)^{\frac{p}{p-s}} \right)^{\frac{p-s}{p}}$$

Agora, $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{1}{p} = \frac{p-s}{sp}$. Daí, $q = s \frac{p}{p-s}$ e $\frac{s}{q} = \frac{p-s}{p}$. Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^s |b_j|^s \right) \leq \left(\sum_{j=1}^n (|a_j|^s)^{\frac{p}{s}} \right)^{\frac{s}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (|b_j|^q)^{\frac{s}{q}} \right)^{\frac{p-s}{p}}$$

O resultado segue ao elevar ambos os lados por $\frac{1}{s}$. □

Exercício 25 (1.8.25). Mostre, sem passar pelo espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, que ℓ_∞ é um espaço de Banach.

Resolução. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $x^n = (x_k^n)_{k=1}^\infty$. Se $(x^n)_{n=1}^\infty$ é sequência de Cauchy em ℓ_∞ , então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$, então

$$\|x^n - x^m\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^n - x_k^m| < \varepsilon. \quad (1)$$

Isso implica que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência (x_k^1, x_k^2, \dots) é de Cauchy em \mathbb{K} , que é completo. Logo, $x_k^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y_k \in \mathbb{K}$. Defina a sequência $y = (y_k)_{k=1}^\infty$ e observe que $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. De fato, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (1):

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^n - y_k| = \|x^n - y\|_\infty < \varepsilon.$$

Por fim, note que $y \in \ell_\infty$, visto que todo $x^n \in \ell_\infty$ e para n grande o suficiente:

$$\|y\|_\infty \leq \|y - x^n\|_\infty + \|x^n\|_\infty < \varepsilon + M < +\infty$$

para algum $M > 0$. Portanto, $y \in \ell_\infty$ e ℓ_∞ é espaço de Banach. \square

Exercício 26 (1.8.26). Um elemento $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ é chamado de função simples se $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ for finito. Mostre que o conjunto das funções simples forma um subconjunto denso em ℓ_∞ .

Resolução. Seja $a = (a_j) \in \ell_\infty$, e seja $\epsilon > 0$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|a\|_\infty < N\epsilon$, ou seja, $\{a_j : j \in \mathbb{N}\} \subset (-N\epsilon, N\epsilon)$.

Defina $b = (b_j) \in \ell_\infty$ por $b_j = n\epsilon$, se $a_j \in [n\epsilon, (n+1)\epsilon]$, para algum $n = -N, \dots, N-1$. Logo, $|a_j - b_j| < \epsilon$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e b é simples, pois $b_j \in \{-N\epsilon, (1-N)\epsilon, \dots, (N-1)\epsilon\}$. Assim, $\|a - b\|_\infty \leq \epsilon$, o que prova que o conjunto das funções simples é denso em ℓ_∞ . \square

Exercício 27 (1.8.27). Considere

$$c = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} a_j \text{ existe em } \mathbb{K} \right\}$$

o conjunto de todas as sequências convergentes formadas por elementos de \mathbb{K} . Mostre que c é subespaço fechado de ℓ_∞ .

Resolução. Dado $(a_j) \in c$, existe $a = \lim a_j$ e $n_0 \geq 0$ com $|a_j - a| < |a|$ para todo $j \geq n_0$. Então

$$|a_j| = |a_j + (a - a)| \leq |a_j - a| + |a| < 2|a|$$

para todo $j \geq n_0$, logo

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \leq \max \left\{ \sup_{j < n_0} |a_j|, 2|a| \right\} < \infty$$

e $(a_j) \in \ell_\infty$, ou seja, $c \subseteq \ell_\infty$.

Vamos mostrar c fechado. Tome $(x_j) \in \bar{c}$, então existe sequência $(a_j)_n \subset c$ com $(a_j)_n \rightarrow (x_j)$. Dado $\frac{\varepsilon}{4} > 0$, existe $n_0 \geq 0$ tal que

$$\|(a_j)_n - (x_j)\| = \sup_j |a_{j,n} - x_j| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $n \geq n_0$. Por outro lado, como existe $a_n = \lim_j (a_j)_n$ em \mathbb{K} , existem $j_n \geq 0$ para cada n tal que $|a_{j,n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $j \geq j_n$. Ou seja,

$$|a_n - x_j| \leq |a_n - a_{j,n}| + |a_{j,n} - x_j| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $n \geq n_0$ e $j \geq j_n$.

Note que, para todo $n, m \geq n_0$, temos

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - x_j| + |x_j - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sempre que $j \geq \max\{j_n, j_m\}$. Dessa forma, $(a_n) \subset \mathbb{K}$ é Cauchy $\implies a_n \rightarrow a$ em \mathbb{K} . Logo, existe $n_1 \geq 0$ com $|a_n - a| < \varepsilon/2$ sempre que $n \geq n_1$ e, portanto,

$$|a - x_j| \leq |a - a_n| + |a_n - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geq m := \max\{n_0, n_1\}$ e $j \geq j_m \implies x_j \rightarrow a \implies (x_j) \in c$. \square

Exercício 28 (1.8.28). Seja K um subconjunto relativamente compacto, isto é \overline{K} é compacto, de l_1 . Prove que K é limitado e que para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{(a_n) \in K} \left(\sum_{n \geq n_\epsilon} |a_n| \right) \leq \epsilon.$$

Resolução. Como \overline{K} é compacto, \overline{K} é limitado, e assim K é limitado, pois $K \subset \overline{K}$.

Agora, suponha por absurdo que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $m_\epsilon \in \mathbb{N}$, temos $\sup_{a \in K} \left(\sum_{n \geq m_\epsilon} |a_n| \right) > \epsilon$. Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $a^m \in K$ tal que $\sum_{n \geq m} |a_n^m| \geq \epsilon + 1/m$. Como \overline{K} é compacto, existe $(a^{m_k}) \subset (a^m)$ tal que $a^{m_k} \rightarrow a \in \overline{K}$. Mas, pela desigualdade triangular,

$$\|a^{m_k} - a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{m_k} - a_n| \geq \sum_{n=m_k}^{\infty} |a_n^{m_k} - a_n| \geq \sum_{n=m_k}^{\infty} (|a_n^{m_k}| - |a_n|) \geq \epsilon + 1/m_k - \sum_{n=m_k}^{\infty} |a_n|.$$

Isto implica que

$$\epsilon < \epsilon + 1/m_k \leq \|a^{m_k} - a\|_1 + \sum_{n=m_k}^{\infty} |a_n|.$$

Como $a^{m_k} \rightarrow a$, $\|a^{m_k} - a\|_1 \rightarrow 0$. Como $\sum |a_n| < \infty$, $\sum_{n=m_k}^{\infty} |a_n| \rightarrow 0$ quando $m_k \rightarrow \infty$. Isto implicaria que $\epsilon \leq 0$, o que é uma contradição. \square

Exercício 29 (1.8.29). Determine $\overline{c_{00}}$ em c_0 .

Resolução. Afirimo que $\overline{c_{00}} = c_0$. De fato, é óbvio que $\overline{c_{00}} \subseteq c_0$ porque o fecho é tomado em c_0 . Basta mostrar a inclusão reversa; i.e., mostrar que todo ponto em c_0 é limite de sequência de c_{00} . Seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ qualquer. Considere a sequência de elementos $d^n \in c_0$ tal que

$$d_k^n = \begin{cases} x_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}.$$

Isto é, d^n é a sequência que trunca $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ na n -ésima posição.

É claro que $d_n \in c_{00}$ para cada n , e temos $\|x - d^n\| = \sup_{k > n} |x_k|$ com a norma em c_0 . Como $x \in c_0$, segue que, para todo $\epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ t.q. para todo $k > N_\epsilon$, temos $|x_k| = |x_k - 0| < \epsilon/2$. Em particular, isso significa que $\sup_{n > N_\epsilon} |x_n| \leq \epsilon/2 < \epsilon$. Portanto, em particular, temos que $\|d^n - x\| = \sup_{k > n} |x_k| \leq \sup_{k > N_\epsilon} |x_k| < \epsilon$ sempre que $n \geq N_\epsilon$ e, portanto, $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\epsilon : \|d^n - x\| < \epsilon$; i.e. $d^n \rightarrow x$ e portanto $\overline{c_{00}} = c_0$. \square

Exercício 30 (1.8.30). Determine $\overline{c_{00}}$ em ℓ_p .

Resolução. Mostremos que $\overline{c_{00}} = \ell_p$. A inclusão $\overline{c_{00}} \subseteq \ell_p$ é imediata, dado que ℓ_p é fechado:

$$\overline{c_{00}} \subseteq \overline{\ell_p} = \ell_p.$$

Tome agora $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Tem-se que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p < +\infty,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |y_j|^p < \epsilon.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina a sequência $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots) \in c_{00}$. Mostremos que $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y$ na norma p . Temos:

$$\|x^k - y\|_p^p = \sum_{j=1}^\infty |x_j^k - y_j|^p = \sum_{j=k}^\infty |y_j|^p.$$

Sendo assim, quando $k \geq n_0$:

$$\|x^k - y\|_p^p = \sum_{j=k}^\infty |y_j|^p \leq \sum_{j=n_0}^\infty |y_j|^p < \varepsilon,$$

provando que $y \in \overline{c_{00}}$ e $\overline{c_{00}} = \ell_p$. □

Exercício 31 (1.8.31). Mostre que $\{e_1, e_2, \dots\}$ não é base algébrica (ou de Hamel) de ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Resolução. A ideia é que se $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ fosse base de Hamel, toda sequência em ℓ_p teria suporte finito. De fato, suponha que seja base - então dado $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$, existem $\{n_1, \dots, n_N\} \subseteq \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ escalares tais que $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_{n_i}$. Portanto $a_k = 0$ para todo $k > \max_{1 \leq i \leq N} \{n_i\}$; i.e., \mathbf{a} tem suporte finito. Basta, então, exibir um elemento de ℓ_p com suporte infinito; tome $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $x_n = (1/2)^{n/p}$. □

Exercício 32 (1.8.32). Prove se verdadeiro ou dê um contraexemplo se falso: se K é um subconjunto fechado de um espaço normado, então o subespaço $[K]$ gerado por K também é fechado.

Resolução. Falso!

O conjunto $K = \{e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) : n \in \mathbb{N}\}$ é fechado em c_0 . Mas $[K] = c_{00}$ não é fechado em C_0 , pois C_{00} não é um espaço de Banach)

- Vamos provar que $[K] = c_{00}$. Se $x \in [K]$, então $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{n_i}$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Veja que, cada e_{n_i} tem apenas um termo não nulo, que é o 1 na posição n_i . Assim, a soma x tem no máximo n termos não nulos, o que implica que x é um elemento de c_{00} . Portanto, $[K] \subset c_{00}$. Por outro lado, se $x \in c_{00}$, então $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in [K]$. Portanto, $[K] = c_{00}$. □

Exercício 33 (1.8.33). Sejam E um espaço vetorial normado de dimensão finita e M um subespaço próprio de E . Mostre que existe $y_0 \in E$ com $\|y_0\| = 1$ e $\|y_0 - x\| \geq 1$, para todo $x \in M$.

Resolução. Como E tem dimensão finita, M tem dimensão finita, logo é um espaço de Banach, e portanto, é fechado em E .

Pelo Lema de Riesz, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in E$ tal que $\|y_n\| = 1$ e $\|y_n - x\| \geq 1 - 1/n$, para todo $x \in M$. Já que a bola fechada em E é compacta (pois E tem dimensão finita), existe uma subsequência (y_{n_k}) tal que $y_{n_k} \rightarrow y$, e y pertence à bola unitária fechada. Pela continuidade da norma, $\|y\| = \lim \|y_{n_k}\| = 1$. Tome $\delta > 0$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k \geq N \Rightarrow \|y_{n_k} - y\| < \delta.$$

Daí, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} n_k \geq N &\Rightarrow 1 - 1/n_k \leq \|y_{n_k} - x\| \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y - x\| < \delta + \|y - x\| \\ &\Rightarrow 1 - 1/n_k - \delta < \|y - x\|, \forall n_k \geq N \\ &\Rightarrow 1 - \delta \leq \|y - x\|. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $\delta > 0$, concluímos que $1 \leq \|y - x\|$, para todo $x \in M$. □

Exercício 34 (1.8.34). Sejam $E = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$ e $F = \{f \in E : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

- (a) Prove que E é subespaço fechado de $C[0, 1]$.
- (b) Prove que F é subespaço fechado de E .
- (c) Mostre que não existe $g \in E$ tal que $\|g\| = 1$ e $\|g - f\| \geq 1$ para toda $f \in F$.

Resolução.

- (a) Sejam (f_n) sequência de elementos de E e $f \in C[0, 1]$ tais que $f_n \rightarrow f$ em $C[0, 1]$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Isto é, se $n \geq n_0$,

$$\max_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Em particular, como $f_{n_0} \in E$, segue que $f_{n_0}(0) = 0$ e

$$|f(0)| = |f_{n_0}(0) - f(0)| < \varepsilon.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que $f(0) = 0$ e portanto, $f \in E$, o que mostra que E é fechado.

Claramente, E é um subespaço de $C[0, 1]$, visto que, para $f, g \in C[0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $t \in [0, 1]$, temos que

$$(f + \lambda g)(t) = f(t) + \lambda g(t).$$

- (b) Sejam (f_n) sequência de elementos em F e $g \in E$ tais que $f_n \rightarrow g$.

$$\text{Afirmação 34.1. } \int_0^1 g(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)dt.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $f_n \rightarrow g$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - g\| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Assim, se $n \geq n_0$, para todo $t \in [0, 1]$, temos que

$$|f_n(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

Dessa forma, se $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n(t)dt - \int_0^1 g(t)dt \right| &= \left| \int_0^1 f_n(t) - g(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f_n(t) - g(t)|dt \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

E portanto, demonstramos a afirmação. ■

Como cada $f_n \in F$, temos que

$$\int_0^1 g(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0.$$

Portanto, $g \in F$. Das propriedades aritméticas da integral, segue que F é um subespaço vetorial de E .

- (c) Suponha que exista $g \in E$ tal que $\|g\| = 1$ e $\|g - f\| \geq 1$ para todo $f \in F$. Seja $h \in E \setminus F$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$\int_0^1 g(t)dt = \lambda \int_0^1 h(t)dt.$$

Dessa forma, $g - \lambda h \in F$. Mais ainda, por hipótese,

$$1 \leq \|g - (g - \lambda h)\| = |\lambda| \|h\|.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $h_n(x) = x^{1/n}$. Claramente $h_n \in E \setminus F$, $\|h_n\| = 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Dessa forma, existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que:

- $g - \lambda_n h_n \in F$, e
- $|\lambda_n| = |\lambda_n| \|h_n\| \geq 1$.

Assim,

$$\int_0^1 g(t) dt = \lambda_n \int_0^1 h_n(t) dt.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g(t) dt \right| &= |\lambda_n| \left| \int_0^1 h_n(t) dt \right| \\ &\geq \left| \int_0^1 h_n(t) dt \right| \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Com isso, temos que $\left| \int_0^1 g(t) dt \right| \geq 1$. Mostraremos que isso é uma contradição.

De fato, uma vez que $\|g\| = 1$, temos que

$$\left| \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |g(t)| dt \leq 1.$$

Se $\int_0^1 |g(t)| dt = 1$, teríamos que

$$\int_0^1 (1 - |g(t)|) dt = 0.$$

Como $|g(t)| \leq \|g\| = 1$, isso implicaria que $1 - |g(t)| \geq 0$. Portanto, teríamos que $1 - |g(t)| = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Entretanto, como $g \in E$, segue que $g(0) = 0 \neq 1$. Dessa forma, temos que $\int_0^1 |g(t)| dt < 1$. Portanto,

$$\left| \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |g(t)| dt < 1.$$

Assim, não se pode existir tal $g \in E$.

□

Exercício 35 (1.8.35). Chame de cubo de Hilbert o subconjunto de ℓ_2 formado pelas seqüências (a_j) tais que $|a_j| \leq \frac{1}{j}$ para todo j . Prove que o cubo de Hilbert é compacto em ℓ_2 .

Resolução. Seja $(a_n) \in \ell_2$ e considere o mapa

$$\begin{aligned} F: \quad [-1, 1]^{\mathbb{N}} &\rightarrow \ell_2 \\ (\alpha_n) &\mapsto (\alpha_n a_n). \end{aligned}$$

Provemos que F é contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

então tomando $\delta = 2^{-N}$ segue que

$$d(\alpha_n, \beta_n) < \delta \implies \left\| \sum_{n=N}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) a_n \right\| < \varepsilon.$$

Além disso, $d(\alpha_n, \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n}$, onde $\delta_n = \begin{cases} 0, & \alpha_n = \beta_n \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$ induz a topologia produto, que torna $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ compacto e, portanto a imagem de F é compacta em ℓ_2 , que coincide com o cubo de Hilbert tomando $(a_n) = (1/n)$. \square

Exercício 36 (1.8.36). Mostre que são equivalentes para um espaço de Banach E :

- (a) E é separável.
- (b) A bola unitária fechada $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é separável.
- (c) A esfera unitária $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ é separável.

Resolução. (a) \implies (b) E separável $\implies \exists D \subset E$ enumerável e $\overline{D} = E$. Seja $A = \{x \in D; \|x\| \leq 1\} \subset B_E$.

Af. 1) $A \subset B_E$ é enumerável.

$A \subset D$ e D enumerável $\implies A$ enumerável.

Af. 2) $\overline{A} = B_E$.

Observe que

$$\overline{D} = E \implies B_E = \{x \in \overline{D}; \|x\| \leq 1\}.$$

Daí,

$$A \subset B_E \implies \overline{A} \subset \overline{B_E} = B_E \implies \overline{A} \subset B_E.$$

Por outro lado,

$$\forall y \in \overline{D}, \exists (y_n)_n \subset D; y_n \longrightarrow y$$

Em particular,

$$\forall x \in \overline{D}, \text{ com } \|x\| \leq 1, \exists (x_n)_n \subset D, \text{ com } \|x_n\| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}; x_n \longrightarrow x, \|x\| \leq 1.$$

Como $(x_n)_n \subset D$, com $\|x_n\| \leq 1$, então $(x_n)_n \subset A$, donde segue $x \in \overline{A}$. Assim,

$$B_E = \{x \in \overline{D}; \|x\| \leq 1\} \subset \overline{A}.$$

Logo, vale a igualdade.

Pelas afirmações 1 e 2, conclui-se que B_E é separável.

(b) \implies (a) B_E separável $\implies \exists A = \{x_n \in B_E; \|x\| \leq 1\} \subset_{\text{SUB}} B_E$ enumerável e denso em B_E , i.e., $\overline{A} = B_E$.

Têm-se, $\forall x \in E$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \|x\|$,

$$\left\| \frac{1}{m} x \right\| = \frac{1}{m} \|x\| \leq \frac{1}{m} m = 1 \implies \frac{1}{m} x \in B_E.$$

Dai,

$$\overline{A} = B_E \implies \forall y \in B_E, \exists (y_n) \subset A; y_n \longrightarrow y, \|y\| \leq 1.$$

Em particular,

$$\forall x \in E \text{ e } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{m}x \in B_E, \exists (x_n)_n \subset A; x_n \longrightarrow \frac{1}{m}x,$$

isto é, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, \|x_n - \frac{1}{m}x\| < \frac{\varepsilon}{m}$. Logo, dado $x \in E$, têm-se que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, m \left\| x_n - \frac{1}{m}x \right\| < m \frac{\varepsilon}{m} \implies \|mx_n - x\| < \varepsilon.$$

Isto nos diz que, dado $x \in E, \exists (mx_n) \subset \{mx_n \in E; x_n \in A, m \in \mathbb{N}\}$ tal que $mx_n \longrightarrow x$, consequentemente,

$$x \in \overline{\{mx_n \in E; x_n \in A, m \in \mathbb{N}\}} \implies E \subset \overline{\{mx_n \in E; x_n \in A, m \in \mathbb{N}\}}.$$

Como E é um espaço de Banach, então o fecho de qualquer subconjunto de E está em E , logo a inclusão contrária é óbvia.

Portanto, o subconjunto enumerável $\{mx_n \in E; x_n \in A, m \in \mathbb{N}\} \subset E$ é denso em E , o que prova a separabilidade de E .

(a) \Leftrightarrow (c) Esta equivalência segue de maneira análoga à (a) \Leftrightarrow (b). □

Exercício 37 (1.8.37). Prove que $L_\infty[a, b]$ não é separável.

Resolução. Considere $\chi_r(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq r \\ 0, & r < x \leq b \end{cases}$. Note que $\chi_r = \chi_{r'} \iff r = r'$. Se $L^\infty[a, b]$ é separável, existe um A enumerável de tal forma que, para cada $r \in [a, b]$ existe $a_r \in A$ t.q. $\|\chi_r - a_r\|_\infty < 1/3$. A associação $[a, b] \rightarrow A$ dada por $r \mapsto a_r$ certamente não é injetiva, pois $|\mathbb{R}| = |[a, b]| > |\mathbb{N}| \geq |A|$. Portanto existem r, r' , com s.p.g. $r < r'$ tais que $a_r = a_{r'}$; logo $\|\chi'_r - \chi_r\| = \|(\chi'_r - a_{r'}) - (\chi_r - a_r)\| \leq \|\chi_r - a_r\| + \|\chi'_r - a_{r'}\| < 2/3$. Mas para $L_\infty[a, b]$ com a medida usual de \mathbb{R} , temos $\|\chi'_r - \chi_r\| = \sup_{r < x \leq r'} |\chi'_r(x)| = 1$. Ou seja, temos $1 < 2/3$, absurdo. Portanto $L^\infty[a, b]$ não pode ser separável. □

Exercício 38 (1.8.38). Sejam E um espaço de Banach separável e F um subespaço fechado de E . Prove que E/F é separável.

Resolução. Note que F é separável, pois E é separável (prop. 1.6.9). Agora, seja D o subconjunto enumerável e denso de E . Então $D_1 \subseteq E/F$ induzido por D é seu conjunto enumerável e denso. De fato, seja $[x] \in E/F - D_1$, então, para cada $x \in E$ tal que x representa $[x]$, $B_r(x) \cap D \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Em particular, $B_r([x]) \cap D_1 \neq \emptyset$. □

Exercício 39 (1.8.39). (Recíproca da Desigualdade de Holder) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida σ -finita, $p \geq 1$ e $q > 1$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Chame de S o conjunto de todas as funções simples mensuráveis f que se anulam fora de um conjunto de medida finita, isto é, existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$ e $f(x) = 0$ para todo $x \in A^c$. Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que:

- i $fg \in L_1(X, \Sigma, \mu)$, para toda $f \in S$,
- ii $\sup\{|\int_X fg| : f \in S, \|f\|_p = 1\} < \infty$.

Prove que $g \in L_q(X, \Sigma, \mu)$ e $\|g\|_q = \sup\{|\int_X fg| : f \in S, \|f\|_p = 1\}$.

Resolução. Seja $M_q(g) = \sup\{|\int_X fg| : f \in S, \|f\|_p = 1\}$. Como X é σ -finito, existe $(A_n) \subset \Sigma$ monótona e crescente, com $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ e $\mu(A_n) < \infty$.

Assuma primeiro que $q < \infty$, ou seja, $p > 1$. Como g é mensurável, existe uma sequência (ϕ_n) de funções

simples e mensuráveis tais que $\phi_n \rightarrow g$ em toda parte e $|\phi_n| \leq |g|$. Tome $g_n = \phi_n \chi_{A_n}$ (aqui, χ_A é a função que se anula fora de A e que em A vale 1 em toda parte). Logo, $|g_n| \leq |\phi_n| \leq |g|$ e $g_n \rightarrow g$, pois $\phi_n \rightarrow g$ e $\chi_{A_n} \rightarrow 1$. Também, o produto de funções simples é simples, e assim $g_n \in S$, logo, são L_q -integráveis. Defina $f_n = \|g_n\|_q^{1-q} |g_n|^{q-1} \operatorname{sgn}(g)$. Logo, f_n são simples e

$$\begin{aligned} \int_X |f_n|^p d\mu &= \int_X (\|g_n\|_q^{1-q} |g_n|^{q-1})^p d\mu \\ &= \int_X \|g_n\|_q^{-q} |g_n|^q d\mu \\ &= \|g_n\|_q^{-q} \int_X |g_n|^q d\mu \\ &= \|g_n\|_q^{-q} \|g_n\|_q^q = 1. \end{aligned}$$

Daí, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} &= \left(\int_X \liminf |g_n|^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\liminf \int_X |g_n|^q d\mu \right)^{1/q} \\ &= \liminf \left(\int_X |g_n|^q d\mu \right)^{1/q} \\ &= \liminf \|g_n\|_q \end{aligned}$$

Note que $|f_n g_n| = \|g_n\|_q^{1-q} |g_n|^q$, o que implica que $\int_X |f_n g_n| d\mu = \|g_n\|_q^{1-q} \int_X |g_n|^q d\mu = \|g_n\|_q$. Assim,

$$\left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} \leq \liminf \|g_n\|_q = \liminf \int_X |f_n g_n| d\mu \leq \liminf \int_X |f_n g| d\mu \leq M_q(g).$$

Logo, $g \in L_q(X, \Sigma, \mu)$ e $\|g\|_q \leq M_q(g)$, se $q < \infty$.

No caso em que $p = 1$, então, para todo $\epsilon > 0$, seja $A = \{x \in X : |g(x)| \geq M_\infty(g) + \epsilon\}$. Suponha que $\mu(A) > 0$. Então, tomando $B \subset A$ com $0 < \mu(B) < \infty$, e $f = \frac{\chi_B \operatorname{sgn}(g)}{\mu(B)} \in S$, temos $\|f\|_1 = 1$ e $\int_X f g d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geq \frac{1}{\mu(B)} \int_B (M_\infty(g) + \epsilon) d\mu = M_\infty(g) + \epsilon$, o que é uma contradição. Logo, $\mu(A) = 0$, e assim $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g) + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, ou seja, $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$.

Por fim, para todo $f \in S$, pela Desigualdade de Holder, $\left| \int_X f g d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|g\|_q$. Logo, $M_q(g) \leq \|g\|_q$. \square

2 Capítulo 2

Exercício 1 (2.7.1).

- (a) Prove que todo espaço normado de dimensão finita n sobre \mathbb{K} é isomorfo ao espaço euclidiano $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$;
- (b) Prove que se E e F são espaços normados, sobre o mesmo corpo, de mesma dimensão finita, então E e F são isomorfos.

Resolução.

- (a) Sejam E um espaço normado de dimensão finita n e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base normal de E . Tome o operador linear:

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \sum_{i=1}^n a_i e_i &\longmapsto (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Pelo Exercício 2.7.2, T é contínua. Além disso, podemos tomar o operador linear:

$$S : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i,$$

que será contínua pelo mesmo exercício. É fácil ver que $T^{-1} = S$. Logo, T é um isomorfismo.

- (b) Dados espaços normados E e F de dimensão n , temos que existem isomorfismos $T : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ e $S : F \rightarrow \mathbb{K}^n$. Logo, $T^{-1} \circ S : F \rightarrow E$ é um isomorfismo.

□

Exercício 2 (2.7.2). Todo operador linear cujo domínio é um espaço normado de dimensão finita é contínuo.

Resolução. Seja $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$, com $\{e_i\}_{i=1}^n$ base de E . Pelo **Exercício 1.8.3**, toda norma em E é equivalente, de forma que podemos supor $\|v\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ sem perda de generalidade. Assim, para qualquer $T : E \rightarrow F$ operador, temos

$$\begin{aligned} \|T(v)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|T(e_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \max\{\|T(e_i)\|\} \\ &= \max\{\|T(e_i)\|\} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right) = \max\{\|T(e_i)\|\} \|v\|. \end{aligned}$$

Definindo $C = \max\{\|T(e_i)\|\}$, temos que $\|T(v)\| \leq C \cdot \|v\|$ para todo $v \in E$. Logo, pelo **Teorema 2.1.1**, T é contínua. □

Exercício 3 (2.7.3). Mostre que para todo espaço normado de dimensão infinita E e todo espaço normado $F \neq \{0\}$, existe um operador linear descontínuo $T : E \rightarrow F$.

Resolução. Escolha $\{e_i\}_{i \in I}$ base de E com $\|e_i\| = 1, \forall i \in I$, e tome $\mathbb{N} \subseteq I$ um subconjunto enumerável e um $v \in F$ com $\|v\| = 1$. Podemos definir $T : E \rightarrow F$ por

$$T(e_i) = \begin{cases} i \cdot v, & i \in \mathbb{N} \\ 0, & i \in I \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Então existe $\{T(e_i)\}_{i \in \mathbb{N}} = \{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência estritamente crescente na bola B_E . Logo, pelo **Teorema 2.1.1**, T é descontínua. □

Exercício 4 (2.7.4). Seja E um espaço normado sobre \mathbb{C} . Se φ é um funcional linear descontínuo em E , mostr que $\{\varphi(x) : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \mathbb{C}$.

Resolução. Seja $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ arbitrário com $r > 0$. Como φ é descontínuo, em particular, é ilimitado. Dessa forma, existe $x_0 \in E$, com $\|x_0\| \leq 1$, tal que $|\varphi(x_0)| \geq r$. Uma vez que $r > 0$, temos que $\varphi(x_0) \neq 0$ e portanto,

$$\left| \varphi \left(\frac{rx_0}{|\varphi(x_0)|} \right) \right| = r.$$

Assim, $\varphi \left(\frac{rx_0}{|\varphi(x_0)|} \right) = re^{i\alpha}$ para algum $\alpha \in [0, 2\pi]$. Assim,

$$\varphi \left(\frac{rx_0 e^{i(\theta-\alpha)}}{|\varphi(x_0)|} \right) = e^{i(\theta-\alpha)} \cdot re^{i\alpha} = re^{i\theta} = z.$$

Como

$$\left\| \frac{rx_0 e^{\theta-\alpha}}{|\varphi(x_0)|} \right\| = \frac{r}{|\varphi(x_0)|} \|x_0\| e^{i(\theta-\alpha)} \leq 1,$$

e $z \in \mathbb{C}$ é arbitrário, segue que

$$\{\varphi(x) : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \mathbb{C}.$$

□

Exercício 5 (2.7.5). Sejam E um espaço normado, F um espaço de Banach e G um subespaço de E . Se $T : G \rightarrow F$ é linear e contínua, mostre que existe uma única extensão linear contínua de T ao fecho de G . Mostre também que a norma da extensão coincide com a norma de T e que se T é uma isometria linear, então a extensão também é.

Resolução. Para provar que existe uma única extensão linear contínua de T ao fecho de G , vamos primeiro estabelecer a existência e, em seguida, a unicidade.

• **Existência** - Considere $\tilde{T} : \overline{G} \rightarrow F$ da seguinte maneira:

- Para $x \in \overline{G}$, existe uma sequência $(x_n) \subset G$ tal que $x_n \rightarrow x$. Pelo fato de T ser contínua, $T(x_n)$ converge em F e, como F é fechado, o seu limite é atingido. Tome $\tilde{T}(x)$ como sendo o limite dessa sequência $T(x_n)$, ou seja,

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n).$$

- \tilde{T} está bem definida, pois se (x_n) e (y_n) são sequências em G tais que convergem para x , então $T(x_n)$ e $T(y_n)$ são suas sequências em F que convergem para o mesmo limite, devido a continuidade da T e pela unicidade do limite.
- \tilde{T} é linear e contínua.
- **Unicidade** - Suponha que existam duas extensões \tilde{T}_1 e \tilde{T}_2 de T ao fecho de G . Então, para todo $x \in \overline{G}$, temos $\tilde{T}_1(x) = \tilde{T}_2(x)$. Isso ocorre porque para qualquer sequência $(x_n) \in G$ convergindo para x , temos $\tilde{T}_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \tilde{T}_2(x)$.
- **Norma da extensão:** Para qualquer $x \in \overline{G}$, temos

$$\|\tilde{T}(x)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|T\| \|x\|,$$

o que implica que $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Por outro lado, temos

$$\|T\| = \sup_{x \in B_G} \|T(x)\| = \sup_{x \in B_{\overline{G}}} \|T(x)\| \leq \sup_{x_n \in B_G} \left\| \lim_n T(x_n) \right\| = \sup_{x \in \overline{G}} \|\tilde{T}(x)\| = \|\tilde{T}\|.$$

Portanto, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

- **Isometria linear** (se T é isometria): Se T é uma isometria linear, então para qualquer $x, y \in G$, tem-se:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|.$$

Assim, dados $x, y \in \overline{G}$, temos

$$\|\tilde{T}(x) - \tilde{T}(y)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n - y_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|$$

Portanto, \tilde{T} também é uma isometria linear.

□

Exercício 6 (2.7.6). Sejam E um espaço de Banach, F espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ uma isometria linear. Mostre que $T(E)$ é fechado em F .

Resolução. Seja (y_n) uma sequência em $T(E)$ convergente em F , mostremos que $T(E)$ é sequencialmente fechado. Com efeito, pela sobrejeção, tomemos $y_n = T(x_n)$. Observemos que (x_n) é de Cauchy, pois (y_n) converge. De fato,

$$\|y_m - y_n\| = \|T(x_m) - T(x_n)\| = \|x_m - x_n\|.$$

Como (x_n) é de Cauchy em E que é completo, então $x_n \rightarrow x$ e portanto $y_n \rightarrow T(x) \in T(E)$ pela continuidade. \square

Exercício 7 (2.7.7).

- (a) Prove que se um espaço normado E é isomorfo a um espaço de Banach, então E é Banach.
- (b) Mostre que o item (a) não vale para espaços métricos, isto é, existem espaços métricos homeomorfos que não preservam completude.
- (c) Como você explica a discrepância entre os itens a e b?

Resolução.

- (a) Sejam F um espaço de Banach e $T : E \rightarrow F$ um isomorfismo (contínuo). Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Então, dados $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

Portanto, $(T(x_n))$ é sequência de Cauchy em F . Como F é Banach, existe $y \in F$ tal que $T(x_n) \rightarrow y$. Como T é isomorfismo, existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Portanto, como T^{-1} é contínuo, temos que

$$\|x_n - x\| = \|T^{-1}(T(x_n)) - T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\| \|T(x_n) - T(x)\| \rightarrow 0.$$

Então, (x_n) é convergente e dessa forma, E é de Banach.

- (b) Considere $M = \mathbb{R}$, $N = (0, +\infty)$. Seja $\exp : M \rightarrow N$. Note que

- \exp é um homeomorfismo entre M e N ;
- Se $(x_n) = (1/n)$, então (x_n) é sequência de Cauchy em N que não converge.

Portanto, N não é completo.

- (c) Isso ocorre pois nem todo homeomorfismo de espaços métricos leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Por outro lado, os isomorfismos (topológicos) entre espaços normados preservam sequências de Cauchy.

\square

Exercício 8 (2.7.8).

- (a) Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ linear e contínuo. Mostre que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|.$$

- (b) Prove que $T \mapsto \|T\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

Resolução. Recordamos que $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| \leq 1\}$. Temos que $\sup\{|T(x)| : \|x\| = 1\} \subseteq \sup\{|T(x)| : \|x\| \leq 1\}$, então $\sup_{\|x\|=1} |T(x)| \leq \|T\|$; por outro lado, se $\|x\| \leq 1$, então $|T(x)| = \|x\| |T(x/\|x\|)| \leq \|x\| \|T\| \leq \|T\|$.

Supondo $\|y\|=1$ e, portanto, $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |T(x)|$.

De forma similar, para $x \neq 0$, $\frac{|T(x)|}{\|x\|} = \frac{|T(x/\|x\|)|}{1} \leq \sup_{\|y\|=1} |T(y)| = \|T\|$, e para $\|x\| = 1$, $|T(x)| = \frac{|T(x)|}{\|x\|}$;

tomando os supremos, segue que $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|}$.

É claro que $\sup_{\|x\|<1} |T(x)| \leq \|T\|$. Agora, para qualquer $x \in E$ t.q. $\|x\| = 1$ e para $x_n = (1 - \frac{1}{n})x$, temos $|T(x)| = |T(\lim x_n)| = \lim |T(x_n)| \leq \sup_{\|x\|<1} |T(x)|$ (pois T é contínua) e, tomando os supremos, temos a desigualdade reversa.

Finalmente, como $\frac{|T(x)|}{\|x\|} \leq \|T\|$ para todo $x \neq 0$, segue que $|T(x)| \leq \|T\| \|x\|$, e é claro que a desigualdade também vale em $x = 0$. Seja C t.q. $|T(x)| \leq C\|x\|$ para todo x ; tomando os supremos em $\{x \in E : \|x\| = 1\}$, $\|T\| \leq C$ e, portanto, $\|T\| \leq \inf\{C : |T(x)| \leq C\|x\| \forall x \in E\}$; como $\|T\|$ pertence a este conjunto, temos não só que $\|T\|$ é o ínfimo como é o *mínimo*. Ou seja,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |T(x)| = \sup_{\|x\|<1} |T(x)| \\ &= \inf\{C : |T(x)| \leq C\|x\| \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

□

Exercício 9 (2.7.9). Sejam $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $R \in \mathcal{L}(F, G)$. Prove que $R \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $\|R \circ T\| \leq \|R\| \cdot \|T\|$. Dê um exemplo de $\|R \circ T\| < \|R\| \cdot \|T\|$.

Resolução. $\mathcal{L}(E, F)$ é o espaço dos operadores lineares e contínuos $T : E \rightarrow F$. Assim, pela proposição 2.1.4, segue que

$$\|R \circ T(x)\| \leq \|R\| \cdot \|T(x)\| \leq \|R\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|.$$

Em particular, temos que

$$\|R \circ T\| \leq \|R\| \cdot \|T\|.$$

O contra exemplo segue tomando os morfismos projeção em \mathbb{R}^2 . Então $p_1(x, y) = (x, 0)$ e $p_2(x, y) = (0, y)$. Sua composição é o operador nulo, enquanto cada um tem norma 1. A desigualdade é estrita. □

Exercício 10 (2.7.10). Sejam E e F espaços normados sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Mostre que $E' \times F'$ e $(E \times F)'$ são isometricamente isomorfos considerando-se em $E \times F$ a norma $\|\cdot\|_\infty$ e em $E' \times F'$ a norma $\|\cdot\|_1$.

Resolução. Defina $T : E' \times F' \rightarrow (E \times F)'$ por $T(\phi, \psi)(e, f) = \phi(e) + \psi(f)$, para todos $\phi \in E'$, $\psi \in F'$. De fato, $T(\phi, \psi)$ é linear, pois

$$\begin{aligned} T(\phi, \psi)((e, f) + \lambda(e', f')) &= T(\phi, \psi)(e + \lambda e', f + \lambda f') \\ &= \phi(e + \lambda e') + \psi(f + \lambda f') \\ &= \phi(e) + \lambda\phi(e') + \psi(f) + \lambda\psi(f') \\ &= T(\phi, \psi)(e, f) + \lambda T(\phi, \psi)(e', f'). \end{aligned}$$

Também, note que, se $\|(e, f)\|_\infty \leq 1$, então

$$|T(\phi, \psi)(e, f)| = |\phi(e) + \psi(f)| \leq |\phi(e)| + |\psi(f)| \leq \|\phi\| \|e\| + \|\psi\| \|f\| \leq \|\phi\| + \|\psi\| = \|(\phi, \psi)\|_1.$$

Logo, $T(\phi, \psi) \in (E \times F)'$ e $\|T(\phi, \psi)\| \leq \|(\phi, \psi)\|_1$. Ou seja, T é contínuo e $\|T\| \leq 1$.

Agora, T é sobrejetor: seja $\xi \in (E \times F)'$. Defina

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ e &\mapsto \xi(e, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : F &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \xi(0, f) \end{aligned}$$

Note que

$$|\phi(e)| = |\xi(e, 0)| \leq \|\xi\| \|(e, 0)\|_\infty = \|\xi\| \|e\|.$$

Logo, $\phi \in E'$. Analogamente, $\psi \in F'$. Também,

$$T(\phi, \psi)(e, f) = \phi(e) + \psi(f) = \xi(e, 0) + \xi(0, f) = \xi(e + 0, 0 + f) = \xi(e, f),$$

ou seja, $\xi = T(\phi, \psi)$. Portanto, T é sobrejetor.

Por fim, resta mostrar que T é uma isometria. Já mostramos que $\|T(\phi, \psi)\| \leq \|(\phi, \psi)\|_1$. Para mostrar a igualdade, basta encontrar uma sequência $((e_n, f_n)) \subset E \times F$ com $\|(e_n, f_n)\|_\infty \leq 1$ e $T(\psi, \psi)(e_n, f_n) \rightarrow \|(\phi, \psi)\|_1$.

Tome $(e_n) \subset B_E$ tal que $\phi(e_n) \rightarrow \|\phi\|$ (existe pois $\|\phi\| = \sup\{|\phi(e)| : e \in B_E\}$; sem perda de generalidade, se $|\phi(e_n)| \rightarrow \|\phi\|$, então tomamos $e'_n = e_n \frac{\phi(e_n)}{|\phi(e_n)|}$. Assim, $\|e'_n\| = \|e_n\|$ e $\phi(e'_n) = |\phi(e_n)| \rightarrow \|\phi\|$). Analogamente, tome $(f_n) \subset B_F$ tal que $\psi(f_n) \rightarrow \|\psi\|$. Assim, $\|(e_n, f_n)\|_\infty \leq 1$ e

$$T(\phi, \psi)(e_n, f_n) = \phi(e_n) + \psi(f_n) \rightarrow \|\phi\| + \|\psi\| = \|(\phi, \psi)\|_1.$$

Logo, $\|T(\phi, \psi)\| = \|(\phi, \psi)\|_1$. Portanto, T é uma isometria.

Sendo T uma isometria sobrejetora entre espaços de Banach, pelo Teorema da Aplicação Aberta, T é também um isomorfismo. \square

Exercício 11 (2.7.11). Seja

$$\varphi: c_0 \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi((a_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}.$$

Prove que:

- (a) $\varphi \in (c_0)'$.
- (b) $\|\varphi\| = 1$.
- (b) Não existe $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Resolução. Primeiro mostraremos que φ está bem definida. De fato, como $(a_j)_{j=1}^\infty \in c_0$, temos que $a_n \rightarrow 0$, ou equivalentemente, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $n > N \implies |a_n| < \varepsilon$. Logo, sendo S_n a soma parcial dos n primeiros termos da série, temos, para todos $m \geq n > N$:

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= \left| \sum_{j=n+1}^m \frac{a_j}{2^j} \right| \leq \sum_{j=n+1}^m \left| \frac{a_j}{2^j} \right| \\ &< \sum_{j=n+1}^m \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que a série é de Cauchy e, portanto, converge. A linearidade é clara – $\frac{(a_j + \alpha b_j)}{2^j} = \frac{a_j}{2^j} + \alpha \frac{b_j}{2^j}$, etc. Então φ está bem definida; além disso, se $\|(a_j)_{j=1}^\infty\| = 1$, então aplicando a desigualdade triangular às somas parciais e a definição da norma ℓ_∞ , $|\varphi((a_j)_{j=1}^\infty)| \leq 1 \cdot \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = 1$, e portanto $\varphi \in (c_0)'$; é claro que $\|\varphi\| \leq 1$ pelo argumento anterior, e como $|\varphi(\sum_{i=1}^n e_i)| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$, onde $\|\sum_{i=1}^n e_i\| = 1$, segue que $\|\varphi\| = 1$.

Por outro lado, para todo $x \in c_0$, temos $x_n \rightarrow 0$ e portanto, para algum N_x , temos $|x_n| < 1/2$ para todo $n > N_x$. Se $\|x\| = 1$, temos $|x_n| \leq 1$ para todo n . Portanto

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \sum_{n=1}^{N_x} \frac{|x_n|}{2^n} + \sum_{n>N_x} \frac{x_n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N_x} \frac{|x_n|}{2^n} + \sum_{n>N_x} \frac{|x_n|}{2^n} \\ &\leq \sum_{nr=1}^{N_x} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n>N_x} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \end{aligned}$$

e assim nenhum $x \in c_0$ atinge a norma do funcional φ . \square

Exercício 12 (2.7.12). Sejam E e F espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo.

- (a) Prove que o núcleo de T , definido por $\ker(T) = \{x \in E : T(x) = 0\}$ é um subespaço fechado de E .
- (b) Prove que a imagem de T , definida por $\operatorname{im}(T) = \{T(x) : x \in E\}$, é um subespaço de F . Fechado?

Resolução. (a) Sejam $x, y \in \ker(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = 0 + \lambda 0 = 0$$

Isto é, $x + \lambda y \in \ker(T)$. Segue que $\ker(T)$ é um subespaço de E .

Considere uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\ker(T)$ que converge para um $x \in E$. Vamos mostrar que $x \in \ker(T)$. De fato,

$$T(x) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Segue que $\ker(T)$ é um subespaço fechado.

- (b) Sejam $y_1, y_2 \in \operatorname{im}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem $x_1, x_2 \in E$ tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Logo,

$$y_1 + \lambda y_2 = T(x_1) + \lambda T(x_2) = T(x_1 + \lambda x_2).$$

Isto é, $y_1 + \lambda y_2 \in \operatorname{im}(T)$. Segue que $\operatorname{im}(T)$ é subespaço de F .

Considere a aplicação linear e contínua $T : l_1 \longrightarrow l_1$ dada por

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$$

Observamos que os elementos $(1, 0, 0, \dots)$, $(1, \frac{1}{4}, 0, \dots)$, $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots)$ estão na $\operatorname{im}(T)$, porém seu limite (a sequência $(\frac{1}{n^2})$) não está. De fato, caso estivesse $(\frac{1}{n^2})$ deveria ser imagem da sequência $(\frac{1}{n})$, que por sua vez não está em l_1 . Portanto, $\operatorname{im}(T)$ não é fechado. □

Exercício 13 (2.7.13). Considere $X = \mathbb{R}^2$ munido com a norma $\|(x, y)\| := (x^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}$. Calcule explicitamente a norma de cada funcional $\varphi \in X'$.

Resolução. Dado $\varphi \in X'$, tome $a = \varphi(1, 0)$ e $b = \varphi(0, 1)$. Note que para $(x, y) \in X$, temos $\varphi(x, y) = x \cdot a + y \cdot b$. Assim,

$$\|\varphi\| = \sup\{ax + by \mid (x, y) \in \|(x, y)\| = 1\}.$$

Uma vez que φ é contínua e $B = \{(x, y) \in X \mid \|(x, y)\| = 1\}$ é compacto em X , temos que $\varphi|_B$ é contínua e atinge o seu máximo. Assim,

$$\|\varphi\| = \max\{ax + by \mid (x, y) \in \|(x, y)\| = 1\}.$$

Tomemos as funções:

$$\begin{array}{ccc} f : & X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto ax + by \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g : & X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto (x^4 + y^4) \end{array},$$

queremos saber o valor máximo de f quando vinculada a $g = 1$. Pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange, isso ocorre em um ponto $(r, s) \in X$ tal que $g(r, s) = 1$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(r, s) = \lambda \nabla g(r, s)$. Com isso,

$$(a, b) = \lambda (4r^3, 4s^3) = (4\lambda r^3, 4\lambda s^3).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \max\{f(x, y) \mid (x, y) \in g(x, y) = 1\} \\
&= f(r, s) = ar + bs = 4\lambda r^3 \cdot r + 4\lambda s^3 \cdot s = 4\lambda(r^4 + s^4) = 4\lambda \\
&= \left[(4\lambda)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{3}{4}} = \left[(4\lambda)^{\frac{4}{3}}(r^4 + s^4)\right]^{\frac{3}{4}} = \left[(4\lambda r^3)^{\frac{4}{3}} + (4\lambda s^3)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{3}{4}} = |a|^{\frac{4}{3}} + |b|^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

□

Exercício 14 (2.7.14). Sejam M um subespaço fechado do espaço normado E e $\pi : E \rightarrow E/M$ dada por $\pi(x) = [x]$ (veja Exercício 1.8.14). Prove que:

- (a) $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$.
- (b) Dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$ e $\|y\| \leq \|\pi(x)\| + \epsilon$.
- (c) A imagem da bola unitária aberta de E por π é a bola unitária aberta de E/M .
- (d) $\pi \in L(E, E/M)$, $\text{Ker}(\pi) = M$ e π é uma aplicação aberta.
- (e) Se $M \neq E$, então $\|\pi\| = 1$.
- (f) Para todo espaço normado F e todo operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ existe um único operador linear contínuo $\tilde{T} : E/\text{Ker}(T) \rightarrow F$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Mais ainda, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Resolução. a) Diretamente,

$$\|\pi(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\} \leq \|x - 0\| = \|x\|.$$

- b) Pela definição de $\|\pi(x)\|$, para todo $\epsilon > 0$, existe $z \in M$ tal que $\|\pi(x)\| \leq \|x - z\| < \|\pi(x)\| + \epsilon$. Assim, sendo $y = x - z$, temos que vale a desigualdade requerida e também $\pi(y) = \pi(x) - \pi(z) = \pi(x)$, pelo item (d).
- c) Sejam $B(0, 1)$ e $B([0], 1)$ as bolas unitárias abertas de E e E/M , respectivamente. Pelo item (a), temos que $\pi(B(0, 1)) \subset B([0], 1)$. Reciprocamente, se $\|\pi(x)\| < 1$, pelo item (b), com $\epsilon < 1 - \|\pi(x)\|$, temos que existe $y \in E$ com $\pi(y) = \pi(x)$ e $\|y\| \leq \|\pi(x)\| + \epsilon < 1$. Logo, $\pi(x) = \pi(y) \in \pi(B(0, 1))$. Isto conclui a prova de que $\pi(B(0, 1)) = B([0], 1)$.
- d) Pelo item (a), π é contínua e $\|\pi\| \leq 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker}(\pi) &\Leftrightarrow \pi(x) = [0] \\
&\Leftrightarrow [x] = [0] \\
&\Leftrightarrow x = x - 0 \in M.
\end{aligned}$$

Portanto, $\text{Ker}(\pi) = M$.

Note que, pelo item (c) e pela linearidade de π , $\pi(B(0, r)) = \pi(rB(0, 1)) = r\pi(B(0, 1)) = rB([0], 1) = B([0], r)$. Seja então $A \subset E$ aberto, e seja $x \in A$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Daí, $\pi(B(x, r)) \subset \pi(A)$. Mas $\pi(B(x, r)) = \pi(x + B(0, r)) = \pi(x) + \pi(B(0, r)) = [x] + B([0], r) = B([x], r)$. Isto prova que $[x] = \pi(x)$ é um ponto interior de $\pi(A)$, e assim, como isso vale para todo $x \in A$, concluímos que $\pi(A)$ é aberto, e assim π é uma aplicação aberta.

e) Pelo item (d), sabemos que $\|\pi\| \leq 1$. Como M é um subespaço fechado e próprio, pelo Lema de Riesz, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - y\| \geq 1 - 1/n$, para todo $y \in M$, ou seja, $\|\pi(x_n)\| \geq 1 - 1/n$. Assim, $\|\pi\| \geq \|\pi(x_n)\| \geq 1 - 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\|\pi\| \geq 1$. Isto conclui que $\|\pi\| = 1$.

f) Defina $\tilde{T}([x]) = T(x)$. Note que, se $[y] = [x]$, então

$$x - y \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(x - y) = 0 \Leftrightarrow T(x) = T(y).$$

Assim, \tilde{T} está bem definida. Também,

$$\tilde{T} \circ \pi(x) = \tilde{T}([x]) = T(x), \forall x \in E,$$

ou seja, $T = \tilde{T} \circ \pi$. Claramente \tilde{T} é linear, pois

$$\tilde{T}([x] + \lambda[y]) = \tilde{T}([x + \lambda y]) = T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = \tilde{T}([x]) + \lambda \tilde{T}([y]).$$

Além disso, se $[x] \in E/M$, $\|[x]\| = 1$, para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in E$ tal que $[x] = [x_\epsilon]$ e $\|x_\epsilon\| \leq 1 + \epsilon$. Daí,

$$\|\tilde{T}([x])\| = \|\tilde{T}([x_\epsilon])\| = \|T(x_\epsilon)\| \leq \|T\| \|x_\epsilon\| \leq \|T\| (1 + \epsilon).$$

Como isto vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\|\tilde{T}([x])\| \leq \|T\|$. Portanto, \tilde{T} é contínua e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Reciprocamente,

$$\|T\| = \|\tilde{T} \circ \pi\| \leq \|\tilde{T}\| \|\pi\| \leq \|\tilde{T}\|.$$

Portanto, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

□

Exercício 15 (2.7.15). Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Prove que se $T(E)$ é fechado, então $T(E) \simeq E/\ker T$.

Resolução. Primeiro, pelo exercício anterior item (f), temos que $T: E \rightarrow F$ induz um operador linear contínuo $\tilde{T}: E/\ker T \rightarrow F$ tal que o seguinte diagrama comuta com a projeção:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & T(E) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ E/\ker T & & \end{array}$$

Agora, $E/\ker T$ e $T(E)$ são de Banach, porque $\ker T$ é fechado em E e $T(E)$ é fechado em F que é Banach. Além disso, T e π são sobrejetivas e contínuas entre espaços de Banach, então \tilde{T} é uma aplicação aberta pelo teorema da aplicação aberta (pelo fato de que T e π são abertas).

Por fim, $\tilde{T}([x]) = 0 \iff y \in \ker T$ para todo $y \in [x]$, logo, $\ker \tilde{T} = \{[0]\}$. Portanto, \tilde{T} é bijetor e, portanto, é um isomorfismo (pelo fato dela ser aberta, portanto sua inversa ser contínua).

Observação 15.1. Uma outra forma de enxergar \tilde{T} como aplicação aberta é ver que $\tilde{T}: E/\ker T \rightarrow T(E)$ (o que faz sentido uma vez que $\tilde{T}(E/\ker T) \subseteq T(E)$) é uma aplicação sobrejetora (dado $y = T(x) \in T(E)$, tem-se que $\tilde{T}([x]) = T(x) = y$), contínua e linear entre espaços de Banach. Aí sim, podemos utilizar o Teorema da Aplicação Aberta.

□

Exercício 16 (2.7.16). Sejam E e F espaços normados. Se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in E$, mostre que o operador inverso $T^{-1}: T(E) \rightarrow E$ existe e é contínuo.

Resolução. Existência: Por hipótese, se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in E$, então, para todo $x \in E$ tal que $T(x) = 0$,

$$c\|x\| \leq \|T(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

donde segue T injetora. Assim, $T : E \rightarrow T(E)$ é uma aplicação linear bijetora, consequentemente, existe $T^{-1} : T(E) \rightarrow E$ tal que $T \circ T^{-1} = Id_E$ e $T^{-1} \circ T = Id_{T(E)}$.

Continuidade: Como $T \in \mathcal{L}(E; F)$, então, pelo Teorema 2.1.1 (c) \Rightarrow (g), existe $k \geq 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|, \quad \forall x \in E. \quad (2)$$

Além disso, como existe a inversa T^{-1} da aplicação T , segue da hipótese e de (2) que existe $c > 0$ tal que

$$\|T^{-1}(T(x))\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\| \leq \frac{k}{c}\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Assim,

$$\sup_{\|T(x)\| \leq k} \|T^{-1}(T(x))\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{k}{c}\|x\| = \frac{k}{c} \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \leq \frac{k}{c}.$$

Logo, pelo Teorema 2.1.1 (f) \Rightarrow (c), T^{-1} é contínua. □

Exercício 17 (2.7.17). Sejam E e F espaços normados. Mostre que um operador linear $T : E \rightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $T(A)$ é limitado em F sempre que A é limitado em E .

Resolução.

(\Rightarrow): Suponha T contínuo e $A \subseteq E$ limitado com $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$. Sendo T contínua, $\|T\| < +\infty$, o que implica

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot M < +\infty$$

para todo $x \in A$. Ou seja, $T(A) \subseteq F$ é limitado.

(\Leftarrow): Suponha que a imagem por T de todo conjunto limitado em E é limitado em F . Considere $B_E(0, 1)$ a bola unitária fechada centrada na origem de E . Por hipótese, $T(B_E(0, 1)) \subseteq F$ é limitado, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$ para todo $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$. Segue dessa observação que

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \leq M.$$

T é então limitada, portanto contínua. □

Exercício 18 (2.7.18). Sejam E e F espaços normados. Mostre que se $T : E \rightarrow F$ é isomorfismo isométrico, então $\|T\| = 1$. Por outro lado, encontre um espaço de Banach e um isomorfismo topológico $T : E \rightarrow E$ com $\|T\| = 1$, que não é isomorfismo isométrico.

Resolução. Pelo exercício 2.7.8 e hipótese, temos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

Para segunda parte do exercício, definamos $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ dada por $T(x) = (\frac{x_1}{2}, x_2, x_3, \dots)$.

- T é um isomorfismo topológico, mas não é um isomorfismo isométrico. De fato, considere $x = (2, 1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty$. Veja que

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i| = 2,$$

mas

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_i |(1, 1, 1, \dots)| = 1.$$

Portanto, concluímos que T não é um isomorfismo isométrico. □

Exercício 19 (2.7.19). Mostre que os espaços $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ são isomorfos isometricamente e que ambos não são isomorfos isometricamente a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Resolução. Considere a aplicação

$$T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$$

Note que T é uma bijeção. Além disso,

$$\|T(x, y)\|_1 = \left\| \frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\|_1 = \frac{|x-y|}{2} + \frac{|x+y|}{2} = \max\{|x|, |y|\} = \|(x, y)\|_\infty$$

Isto é, T é uma isometria. Segue que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ são isomorfos isometricamente.

Considere os pontos $p = (1, 0)$, $q = (0, 1) \in (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. Note que a distância entre p e q é 2. Também, os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ estão a uma distância 1 tanto de p quanto de q . No entanto, na norma $\|\cdot\|_2$, dados dois pontos que distam 2 só existe um ponto que dista 1 de ambos esses pontos. Segue então que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ não pode ser isometricamente isomorfo a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ e consequentemente a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. \square

Exercício 20 (2.7.20). Diz-se que um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é de *posto finito* se a imagem de T é um subespaço de dimensão finita de F .

- (a) Prove que T é de posto finito se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$, $\phi_1, \dots, \phi_n \in E'$ e $y_1, \dots, y_n \in F$ tais que $T = \phi_1 \otimes y_1 + \dots + \phi_n \otimes y_n$.
- (b) Prove que o conjunto dos operadores lineares contínuos de posto finito de E em F é um subespaço vetorial de $L(E, F)$. Fechado?

Resolução. a) É claro que todo operador escrito dessa forma é de posto finito, pois $\text{Img}(T) \subset [y_1, \dots, y_n]$. Reciprocamente, se T tem posto finito, então existe uma base $\{y_1, \dots, y_n\}$ de $\text{Img}(T)$. Logo para todo $x \in E$, existem únicos $a_x^1, \dots, a_x^n \in \mathbb{K}$ tais que $T(x) = \sum_{j=1}^n a_x^j y_j$. Assim, defina $\phi_j : E \rightarrow \mathbb{K}$ por $\phi_j(x) = a_x^j$. Como

$$\sum_{j=1}^n a_{x+\alpha y}^j y_j = T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y) = \sum_{j=1}^n a_x^j y_j + \alpha \sum_{j=1}^n a_y^j y_j = \sum_{j=1}^n (a_x^j + \alpha a_y^j) y_j,$$

concluimos que $a_{x+\alpha y}^j = a_x^j + \alpha a_y^j$, para todo j , ou seja ϕ_j é linear.

Agora, como $\text{Img}(T)$ tem dimensão finita, todas as normas são equivalentes, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\|y\|_1 \leq C\|y\|$, para todo $y \in \text{Img}(T)$. Então, se $\epsilon > 0$, como T é contínuo, existe $\delta > 0$ tal que $z \in E$, $\|z\| < \delta$ implica que $\|T(z)\| \leq \epsilon/C$. Daí,

$$z \in E, \|z\| < \delta \Rightarrow |\phi_k(z)| \leq \sum_{j=1}^n |\phi_j(z)| \\ = \|T(z)\|_1 \\ \leq C\|T(z)\| < \epsilon$$

Assim, ϕ_k é contínuo na origem, e portanto, $\phi_k \in E'$, para todo k . Por fim, por definição, é claro que

$$T(x) = \sum_{j=1}^n a_x^j y_j = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) y_j = (\phi_1 \otimes y_1 + \dots + \phi_n \otimes y_n)(x), \forall x \in E.$$

- b) Seja $Pf \subset L(E, F)$ o subconjunto de operadores de posto finito de E em F . Se $\text{Img}(T) \subset [y_1, \dots, y_n]$ e $\text{Img}(S) \subset [z_1, \dots, z_m]$, então $\text{Img}(T + \lambda S) \subset [y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m]$, pois $(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x)$.

Assim, Pf é um subespaço de $L(E, F)$.

Pf não é necessariamente fechado: seja $\{e_1, e_2, \dots\}$ a base canônica de l_∞ . Para cada $n \geq 1$, defina $T_n : l_\infty \rightarrow l_\infty$ por

$$T_n(e_j) = \begin{cases} 1/j, & \text{se } j \leq n. \\ 0, & \text{se } j > n. \end{cases}$$

É claro que T_n é linear, e

$$\|T_n(a)\|_\infty = \sup\{|a_j/j| : 1 \leq j \leq n\} \leq \sup\{|a_j| : 1 \leq j \leq n\} \leq \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} = \|a\|_\infty.$$

Portanto, T_n é contínuo. Além disso, como $\text{Im}(T_n) \subset [e_1, \dots, e_n]$, T_n tem posto finito.

Seja $T : l_\infty \rightarrow l_\infty$ definido linealmente por $T(e_j) = 1/j$. Note que, como $|a_j/j| \leq |a_j|$, para todo $a \in l_\infty$, $j \in \mathbb{N}$, T está bem definido e $\|T\| \leq 1$. Além disso, $T_n \rightarrow T$: de fato, se $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N \leq \epsilon$. Assim, para todo $a \in l_\infty$

$$\begin{aligned} \|a\|_\infty = 1, n \geq N \Rightarrow \|T(a) - T_n(a)\|_\infty &= \sup\{|a_j/j| : j > n\} \\ &\leq \sup\{1/j : j > n\} \\ &\leq 1/N \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $\|T - T_n\| \leq \epsilon$. Portanto, $T_n \rightarrow T$, mas claramente T não é de posto finito. Portanto, Pf não é fechado. □

Exercício 21 (2.7.21). Diz-se que um subespaço M de um espaço vetorial E tem deficiência finita se existir um número finito de vetores x_1, \dots, x_n em $E - M$ tais que $E = [M \cup \{x_1, \dots, x_n\}]$. Mostre que o núcleo de um funcional linear não-nulo $T : E \rightarrow \mathbb{K}$ tem (em E) deficiência finita com $n = 1$.

Resolução. Da hipótese, segue que

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) \subset \mathbb{K} \text{ e } T \neq 0 &\Rightarrow \dim_k \text{Im } T = 1 \\ &\Rightarrow \exists y \neq 0 \in E \setminus \ker T \text{ tq } \text{Im}(T) = [T(y)]. \end{aligned}$$

Tome $x \in E$. Se

$$T(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker T \Rightarrow x \in [\ker T] \subset [\ker T \cup \{y\}].$$

Por outro lado, se

$$T(x) \neq 0 \Rightarrow T(x) \in \text{Im } T \Rightarrow T(x) = \lambda T(y) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} T(x - \lambda y) &= T(x) - \lambda T(y) = 0 \\ &\Rightarrow x - \lambda y \in \ker T \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{(x - \lambda y)}_{\in \ker T} + \underbrace{\lambda y}_{\in [y]} \Rightarrow x \in [\ker T \cup \{y\}] \\ \therefore x &\in [\ker T \cup \{y\}], \forall x \in E \\ \text{pois } x \in E &\Rightarrow x \in \ker T \text{ ou } x \notin \ker T. \\ &\Rightarrow E \subset [\ker T \cup \{y\}]. \end{aligned}$$

A outra inclusão é óbvia. Portanto,

$$E = [\ker T \cup \{y\}] \Rightarrow \ker T \text{ tem deficiência finita} = 1. \quad \square$$

Exercício 22 (2.7.22). Sejam $1 \leq p \leq 1 \leq \infty$. Mostre que $\ell_p \subseteq \ell_q$ e que o operador inclusão é linear contínuo. Determine a norma dessa inclusão.

Resolução. É claro que todo $\ell_p \subseteq \ell_\infty$ por definição. Assim, sejam $p < q < \infty$. Então, dado $(x_n) \in \ell_p$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_i |x_i|^q &\leq \sum_i |x_i|^{q-p} |x_i|^p \leq \sup(|x_i|^{q-p}) \sum_i |x_i|^p \\ &\stackrel{q-p>0}{\leq} (\sup(|x_i|))^{q-p} \|x_n\|_p^p \leq \|x_n\|_p^{q-p} \|x_n\|_p^p = \|x_n\|_p^q \leq \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n) \in \ell_q$. Agora, o operador $\iota: \ell_p \rightarrow \ell_q$ é linear por definição. Basta provar que é limitado, para isto, seja $(x_n) \in \ell_p$ tal que $\|(x_n)\|_p = 1$. Então

$$\|\iota((x_n))\| = \|x_n\|_q \leq \|x_n\|_p^q \leq \|(x_n)\|_p^q = 1.$$

Agora, a norma é 1 pelo mesmo motivo. □

Exercício 23 (2.7.23). Considere o conjunto

$$cs = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty a_j \text{ converge} \right\}.$$

- (a) Mostre que cs é um espaço normado com as operações usuais de sequências e com a norma $\|(a_j)_{j=1}^\infty\| = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (b) Prove que cs é isomorfo isometricamente ao espaço c das sequências convergentes definido no Exercício 1.8.27.

Resolução. a) É claro que cs é um espaço vetorial. Note que, se $\sum_{j=1}^\infty a_j, \sum_{j=1}^\infty b_j$ convergem, então $\sum_{j=1}^\infty (a_j + \lambda b_j)$ converge para $\sum_{j=1}^\infty a_j + \lambda \sum_{j=1}^\infty b_j$.

Resta mostrar que a expressão dada define uma norma. É claro que $\|a\| \geq 0$, para todo $a \in cs$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|a\| = 0 &\Leftrightarrow \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_j = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por indução em n , isto equivale a dizer que $a_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a = 0$. Também, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda a\| = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \lambda a_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\} = \sup \left\{ |\lambda| \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\} = |\lambda| \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\} = |\lambda| \|a\|.$$

Por fim, se $a, b \in cs, n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade triangular de \mathbb{K} ,

$$\left| \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n b_j \right| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Logo, $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, e assim, cs é um espaço normado.

- b) Defina $T : cs \rightarrow c$ por $T(a) = \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)_n$. Pela definição de cs , $T(a) \in c$, e portanto está bem definida. Além disso, T é linear, pois

$$\begin{aligned} T(a + \lambda b) &= \left(\sum_{j=1}^n (a_j + \lambda b_j) \right)_n \\ &= \left(\left(\sum_{j=1}^n a_j \right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \right)_n \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)_n + \lambda \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)_n \\ &= T(a) + \lambda T(b). \end{aligned}$$

T é uma isometria, pois, para todo $a \in cs$,

$$\|T(a)\|_\infty = \sup\{|T(a)_n| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_j\right| : n \in \mathbb{N}\right\} = \|a\|.$$

Por fim, definindo $S : c \rightarrow cs$ por $S(b) = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots)$, temos que S está bem definido, pois $\sum_{j=1}^n b_j = \lim b_j$. Por uma verificação direta, vemos que $S = T^{-1}$. Portanto, cs e c são isomorfos isometricamente. □

Exercício 24 (2.7.24). Considere o conjunto

$$bs = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_j\right| : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty \right\}.$$

- (a) Mostre que bs é um espaço normado com as operações usuais de sequências e com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\| = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_j\right| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

- (b) Prove que bs é isomorfo isometricamente a l_∞ .

Resolução. a) É claro que bs é um espaço vetorial. Note que, para todos $a, b \in bs, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\left|\sum_{j=1}^n (a_j + \lambda b_j)\right| \leq \left|\sum_{j=1}^n a_j\right| + |\lambda| \left|\sum_{j=1}^n b_j\right| \leq \|a\| + |\lambda| \|b\|.$$

Assim, bs está fechado pelas operações do espaço vetorial. A prova de que a expressão define uma norma é idêntica à do Exercício 2.7.23.

- b) Defina $T : bs \rightarrow l_\infty$ por $T(a) = \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)_n$. Pela definição de bs , $T(a) \in l_\infty$ e T está bem definido.

Além disso, T é linear, pois

$$\begin{aligned} T(a + \lambda b) &= \left(\sum_{j=1}^n (a_j + \lambda b_j) \right)_n \\ &= \left(\left(\sum_{j=1}^n a_j \right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \right)_n \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j \right)_n + \lambda \left(\sum_{j=1}^n b_j \right)_n \\ &= T(a) + \lambda T(b) \end{aligned}$$

T é uma isometria, pois, para todo $a \in bs$,

$$\|T(a)\|_\infty = \sup \{ |T(a)_n| : n \in \mathbb{N} \} = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\} = \|a\|.$$

Por fim, defina $S : l_\infty \rightarrow bs$ por $S(b) = (b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2, \dots)$. Como $\sum_{j=1}^n S(b)_j = b_n$, então $\sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n S(b)_j \right| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$, e S está bem definido. Também, assim como no Exercício 2.7.23, é direto verificar que $S = T^{-1}$. Assim, bs e l_∞ são isomorfos isometricamente. \square

Exercício 25 (2.7.25). Sejam E, F, G espaços normados e $A : E \times F \rightarrow G$ uma aplicação bilinear. Considere em $E \times F$ qualquer uma das normas do exercício 1.8.12. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

- (a) A é contínua.
- (b) A é contínua na origem.
- (c) $\sup \{ \|A(x, y)\| : x \in B_E, y \in B_F \} < \infty$.
- (d) Existe $C > 0$ tal que $\|A(x, y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$ para todos $x \in E$ e $y \in F$.

Resolução. (a) \implies (b): evidente.

(b) \implies (c): como A é contínua na origem e $A(0, 0) = 0$, tem-se que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|(x, y)\|_\infty < \delta$ implica $\|A(x, y)\| < \varepsilon$, em particular. Note que

$$\left\| \left(\frac{x\delta}{2\|x\|}, \frac{y\delta}{2\|y\|} \right) \right\|_\infty = \frac{\delta}{2} \left\| \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right\|_\infty \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Logo,

$$\left\| A \left(\frac{x\delta}{2\|x\|}, \frac{y\delta}{2\|y\|} \right) \right\| < \varepsilon \implies \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| < \frac{2\varepsilon}{\delta} < \infty$$

para todo $x \in E$ e $y \in F$. Portanto, $\sup \{ \|A(x, y)\| : x \in B_E, y \in B_F \} < \infty$.

(c) \implies (d): tome $C := \sup \{ \|A(x, y)\| : x \in B_E, y \in B_F \}$. Dado $x \in E, y \in F$ quaisquer, considere o vetor $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \in B_E \times B_F$. Portanto,

$$C \geq \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \cdot \|A(x, y)\|$$

e por conseguinte, para todo $x \in E, y \in F$: $\|A(x, y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$.

(d) \implies (a): dados $(a, b) \in E \times F$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, considere $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}$ e

$$\|(x, y) - (a, b)\|_\infty = \|(x - a, y - b)\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|A(x, y) - A(a, b)\| &= \|A(x - a, y - b)\| \\ &\leq C \cdot \|x - a\| \cdot \|y - b\| \\ &< C \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{C}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{C}} = \varepsilon \end{aligned}$$

e A é contínua. □

Exercício 26 (2.7.26). Sejam E, F espaços de Banach e T, T_1, T_2, \dots , operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ tais que $T_n(x) \rightarrow T(x)$ para todo $x \in E$. Mostre que, para todo compacto $K \subset E$, $\sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| \rightarrow 0$.

Resolução. Como $(T_n(x))$ é convergente, $\{T(x)\} \cup \{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, para todo $x \in E$. Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $C > 0$ tal que $\|T\|, \|T_n\| \leq C$.

Suponha por absurdo que $\sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\|$ não converge a 0. Então, existem $\epsilon > 0$ e $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tais que $\sup_{x \in K} \|T_{n_k}(x) - T(x)\| \geq \epsilon$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_{n_k} \in K$ tal que $\|T_{n_k}(x) - T(x)\| \geq \epsilon/2$. Como K é compacto e $(x_{n_k}) \subset K$, existe uma subsequência $(y_m) \subset (x_{n_k})$ tal que $y_m \rightarrow y \in K$. Daí, como $y_m \rightarrow y$ e $T_m(y) \rightarrow T(y)$, para $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_m - y\| < \delta/2C$ e $\|T_m(y) - T(y)\| < \delta/2$, se $m \geq N$. Assim,

$$\begin{aligned} \|T_m(y_m) - T(y)\| &\leq \|T_m(y_m) - T_m(y)\| + \|T_m(y) - T(y)\| \\ &\leq \|T_m\| \|y_m - y\| + \|T_m(y) - T(y)\| \\ &< C(\delta/2C) + \delta/2 = \delta \end{aligned}$$

Logo, $T_m(y_m) \rightarrow T(y)$.

Agora, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m(y_m) - T(y)\| < \epsilon/4$ e $\|y_m - y\| < \epsilon/4C$, se $m \geq M$. Daí,

$$\begin{aligned} \|T_m(y_m) - T(y_m)\| &\leq \|T_m(y_m) - T(y)\| + \|T(y) - T(y_m)\| \\ &\leq \|T_m(y_m) - T(y)\| + \|T\| \|y - y_m\| \\ &< (\epsilon/4) + C(\epsilon/4C) = \epsilon/2, \end{aligned}$$

o que contradiz $\|T_m(y_m) - T(y_m)\| \geq \epsilon/2$. □

Exercício 27 (2.7.27). Complete os detalhes do Exemplo 2.4.3:

Seja $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ o operador linear dado por $T((a_n)_{n=1}^\infty) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$. No Exercício 2.7.28 o leitor comprovará que T é linear, bijetor e contínuo, mas que o operador inverso T^{-1} não é contínuo.

Resolução. **É linear:** Seja $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{00}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$T(\lambda a + b)_n = \frac{1}{n}(\lambda a_n + b_n) = \lambda \frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n} = \lambda T(a)_n + T(b)_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $T(\lambda a + b) = \lambda T(a) + T(b)$.

É bijetor: Defina $T^{-1} : c_{00} \rightarrow c_{00}$ por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$. Então $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = id_{c_{00}}$.

É contínuo: Suponha $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{00}$ tal que $\|a\| \leq 1$ e seja $b = T(a)$. Note que $b_j = a_j/j \leq a_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$, logo

$$\|b\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| = \|a\| \leq 1$$

ou seja, $\sup\{\|T(a)\| \mid a \in c_{00}, \|a\| \leq 1\} \leq 1 < \infty \implies T$ contínua.

A inversa não é contínua: Tome $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em c_{00} onde $e_n = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{n\text{-ésima}}, 0, \dots)$ então $n = \|T^{-1}(e_n)\| \geq \|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, T^{-1} é ilimitada em $B_{c_{00}} \implies T^{-1}$ descontínua. □

Exercício 28 (2.7.28). Prove que a seguinte versão mais forte do Lema 2.4.1: Sejam E espaço de Banach, F espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Se existirem $R, r > 0$ tais que $\overline{T(B_E(0; R))} \supseteq B_F(0; r)$, então $T(B_E(0; R)) \supseteq B_F(0; r)$.

Resolução. Como para todo $M \subseteq E$ e $a \in \mathbb{K}$ tem-se $\overline{aM} = a\overline{M}$, segue que

$$\overline{T(B_E(0; aR))} \supseteq B_F(0; ar), \quad \forall a \in \mathbb{R}, a > 0. \quad (3)$$

Seja $0 < \lambda < 1$ e defina $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_j = \frac{(1-\lambda)}{2^{j-1}}$, para $j \geq 2$.

- Todos os λ_j são menores que 1 e $\lambda_{j+1} < \lambda_j$, pois

$$0 < 1 - \lambda \Leftrightarrow 1 - \lambda < 2(1 - \lambda) \Leftrightarrow \frac{1 - \lambda}{2} < \frac{2(1 - \lambda)}{2} = \frac{(1 - \lambda)}{2^{j-1}} \Leftrightarrow \lambda_{j+1} < \lambda_j$$

- $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j &= \lambda + \frac{1-\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2^2} \cdots + \frac{1-\lambda}{2^n} + \cdots = \\ &= \lambda + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \lambda + (1-\lambda) \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \lambda + (1-\lambda) \cdot \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Agora, seja $y \in B_F(0; \lambda r)$. Por (3) existe $x_1 \in B_E(0; \lambda R)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \lambda_2 r$, isto é, $y - Tx_1 \in B_F(0; \lambda_2 r)$. Novamente por (3), existe $x_2 \in B_E(0; \lambda_2 R)$ tal que $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \lambda_3 r$. Podemos então, para cada n , tomar $x_n \in B_E(0; \lambda_n R)$ tal que

$$\|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \lambda_{n+1} r. \quad (4)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \lambda R + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\lambda)R}{2^{n-1}} = R.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente para todo n , consequentemente,

$$\left\| \sum_{j=n}^m x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^m \|x_j\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

e portanto a sequência $\left(\sum_{j=n}^m x_j \right)_{n=1}^{\infty}$ é Cauchy em E . Como E é Banach, existe $x \in E$ o qual essa sequência

converge. Então $\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < R$, e portanto $x \in B_E(0; R)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (4), obtemos

$\|y - T(x)\| \rightarrow 0$ e, consequentemente, $y = T(x)$. Assim, $y \in T(B_E(0; R))$. Seque que $T(B_E(0; R)) \supseteq B_F(0; \lambda r)$ para todo $0 < \lambda < 1$. Portanto, $T(B_E(0; R)) \supseteq \bigcup_{0 < \lambda < 1} B_F(0; \lambda r) = B_F(0; r)$. \square

Exercício 29 (2.7.29). Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um espaço vetorial E tais que $(E, \|\cdot\|_1)$ e $(E, \|\cdot\|_2)$ são completos.

- (a) Suponha que $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ sempre implique que $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$. Prove que as duas normas são equivalentes (veja definição no Exercício 2.8.3). Em particular, a convergência de uma sequência (não necessariamente para zero) em uma das normas implica em convergência (para o mesmo limite) na outra norma.
- (b) Se existe c tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para todo $x \in E$, então as duas normas são equivalentes.
- (c) Se a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_1$ está contida na topologia gerada por $\|\cdot\|_2$, então as duas normas são equivalentes. Em particular, as topologias geradas pelas duas normas coincidem.

Resolução. Vamos considerar as seguintes funções entre espaços normados:

$$\begin{aligned} I: (E, \|\cdot\|_1) &\rightarrow (E, \|\cdot\|_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

e sua inversa I^{-1} .

I é claramente linear - a nível apenas dos espaços vetoriais, é a função identidade. Provaremos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) Se $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$, então $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$;
- (2) I é contínua;
- (3) I^{-1} é contínua;
- (4) A topologia gerada por $\|\cdot\|_1$ está contida na gerada por $\|\cdot\|_2$;
- (5) $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para algum $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e todos $x \in E$;
- (6) As normas são equivalentes.
- (7) A topologia induzida pelas normas é a mesma.

- (1) \iff (2): (1) é o mesmo que dizer que, se $x_n \rightarrow 0$ em $(E, \|\cdot\|_1)$, então $I(x_n) = x_n \rightarrow 0 = I(0)$ em $(E, \|\cdot\|_2)$; isto é, I é contínua em $0 \in E$. E transformações lineares entre espaços normados são contínuas em 0 se e só se são globalmente contínuas.
- (2) \iff (3): A ida segue do fato de que I é contínua e bijetora entre espaços de Banach, e pelo T.A.A., I^{-1} é contínua. A volta é idêntica.
- (3) \iff (4): Temos que $I^{-1}: (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ é contínua se e só se $(I^{-1})^{-1}(U) = U$ é aberto em $\|\cdot\|_2$ para todo U aberto em $\|\cdot\|_1$; i.e., vale (3) \iff vale (4).
- (4) \iff (5): Temos (4) \iff (3) $\iff \|I^{-1}\| < \infty \iff$ (5).
- (5) \iff (6): Se (5) vale, (3) e (2) valem. Logo

$$\begin{cases} \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leq \|I^{-1}\| \|x\|_2 \\ \|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leq \|I\| \|x\|_1 \end{cases}$$

e, combinando as desigualdades, (6) segue. A volta é óbvia.

- (6) \iff (7): Se (6) vale, (2) e (3) valem. Aplicando o argumento de (4) para I e I^{-1} , segue que as duas topologias estão uma contida na outra; i.e. (7) vale. Por outro lado, se (7) vale, então I é simplesmente a identidade como mapa entre os espaços topológicos induzidos pela norma; i.e. I é contínua e portanto (2) vale e, assim, (6) vale.

Os itens (a)–(c) da questão são casos particulares da afirmação anterior.

□

Exercício 30 (2.7.30). Sejam E, F espaços normados e $T \in L(E, F)$. Para todo $A \subset E$, defina $\|T\|_A = \sup\{\|T(x)\| : x \in A\}$. Prove que, para todo $A \subset E$,

$$\|T\|_A = \|T\|_{\bar{A}} = \|T\|_{\text{conv}(A)} = \|T\|_{\text{conv}(\bar{A})}.$$

Resolução. Note que, para isto, basta mostrar que $\|T\|_A = \|T\|_{\bar{A}}$ e $\|T\|_A = \|T\|_{\text{conv}(A)}$. De fato, mostrando isso, temos $\|T\|_{\text{conv}(\bar{A})} = \|T\|_{\bar{A}} = \|T\|_A$.

Como $A \subset \bar{A}$, é claro que $\|T\|_A \leq \|T\|_{\bar{A}}$. Reciprocamente, seja $y \in \bar{A}$. Logo, existe $(y_n) \subset A$ tal que $x_n \rightarrow y$. Daí, como T é contínuo, $T(x_n) \rightarrow T(y)$, e assim $\|T(x_n)\| \rightarrow \|T(y)\|$. Logo, $\forall \epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(y)\| - \epsilon \leq \|T(x_m)\| \leq \|T\|_A$. Como isto vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $\|T(y)\| \leq \|T\|_A$, para todo $y \in \bar{A}$. Portanto, $\|T\|_{\bar{A}} \leq \|T\|_A$. Isto prova a primeira igualdade.

Agora, note que $A \subset \text{conv}(A)$. Portanto, $\|T\|_A \leq \|T\|_{\text{conv}(A)}$. Se $\|T\|_A = \infty$, a igualdade é imediata. Suponha então que $\|T\|_A < \infty$.

Seja $y \in \text{conv}(A)$. Então, pelo exercício 1.8.17, $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, com $x_i \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i > 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \|T(y)\| &= \|(T(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i))\| = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|T(x_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|T\|_A \\ &= \|T\|_A \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ &= \|T\|_A \end{aligned}$$

Portanto, $\|T\|_{\text{conv}(A)} \leq \|T\|_A$, e isto conclui a segunda igualdade.

□

Exercício 31 (2.7.31). Sejam E espaço de Banach real e $T : E \rightarrow E'$ um operador linear tal que $T(x)(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Prove que T é contínuo.

Resolução. Provemos a continuidade de T pelo Teorema do Gráfico Fechado. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ sequência em E . Suponha, sem perda de generalidade, que $x_n \rightarrow 0$ (no caso em que $x_n \rightarrow x \neq 0$, basta considerar a sequência $(x_n - x)_{n=1}^\infty$). Suponha também que $T(x_n) \rightarrow \varphi \in E'$. Sendo assim, basta mostrar que $\varphi = T(0) = 0$.

Dado $y \in E$ arbitrário e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos da hipótese que $T(x_n + \lambda y)(x_n + \lambda y) \geq 0$. Da linearidade de T :

$$T(x_n + \lambda y)(x_n + \lambda y) = T(x_n)(x_n) + \lambda \cdot (T(x_n)(y) + T(y)(x_n)) + \lambda^2 \cdot T(y)(y) \geq 0.$$

Veja que $T(x_n)$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, assim como $T(y)$. Como $x_n \rightarrow 0$, segue que

$$T(x_n)(x_n) \rightarrow 0 \text{ e } T(y)(x_n) \rightarrow 0.$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + \lambda y)(x_n + \lambda y) = \lambda \cdot \varphi(y) + \lambda^2 \cdot T(y)(y) \geq 0.$$

Em particular, quando $\lambda > 0$: $\varphi(y) + \lambda \cdot T(y)(y) \geq 0$. Fazendo $\lambda \rightarrow 0^+$, segue que $\varphi(y) \geq 0$ para todo $y \in E$. Como $0 \leq \varphi(-y) = -\varphi(y)$, a única possibilidade é que $\varphi = 0 = T(0)$, concluindo a prova.

□

Exercício 32 (2.7.32). Verifique que, no Teorema do Gráfico Fechado, a implicação “ T contínuo $\Rightarrow G(T)$ é fechado em $E \times F$ ” continua válida para operadores lineares entre espaços normados não necessariamente completos.

Resolução. Seja $((x_n, T(x_n))) \subset G(T)$ uma sequência tal que $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \in E \times F$. Logo, usando a norma $\|\cdot\|_1$ em $E \times F$, temos que

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\| = \|(x_n - x, T(x_n) - y)\|_1 = \|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\|_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $x_n \rightarrow x$. De modo análogo, $T(x_n) \rightarrow y$. Pela continuidade de T , $x_n \rightarrow x$ implica que $T(x_n) \rightarrow T(x)$. Assim, pela unicidade do limite (que é válida em todo espaço métrico), $y = T(x)$, e $(x, y) = (x, T(x)) \in G(T)$. Portanto, $G(T)$ é fechado em $E \times F$. \square

Exercício 33 (2.7.33). Prove que o operador linear descontínuo T^{-1} do Exemplo 2.4.3 tem gráfico fechado. Conclua que, no Teorema do Gráfico Fechado, a implicação

$$G(T) \text{ fechado em } E \times F \implies T \text{ contínuo}$$

não continua válida para operadores lineares entre espaços normados não necessariamente completos.

Resolução. Seja $(y, x) \in \overline{G(T^{-1})}$, $y = (a_1, \frac{a_2}{1}, \frac{a_3}{3}, \dots)$, $x = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in c_{00}$. Segue que existe uma sequência $((T(x_n), T^{-1}(T(x_n)))) \subset G(T^{-1})$ tal que $((T(x_n), T^{-1}(T(x_n)))) \rightarrow (y, x)$. Logo, usando a norma $\|\cdot\|_1$ em $c_{00} \times c_{00}$, temos que

$$\|T(x_n) - y\| \leq \|T(x_n) - y\| + \|T^{-1}(T(x_n)) - x\| = \|(T(x_n) - y, T^{-1}(T(x_n)) - x)\|_1 = \|(T(x_n), T^{-1}(T(x_n))) - (y, x)\|_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $T(x_n) \rightarrow y$ e $T^{-1}(T(x_n)) \rightarrow x$, ou seja, $T(x_n) \rightarrow y$ e $x_n \rightarrow x$. Pela continuidade de T (conforme o exercício (27)) e pela unicidade do limite, $T(x_n) \rightarrow T(x) = y$. Assim, $x = T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(y)$. Logo, $((T(x_n), T^{-1}(T(x_n)))) \rightarrow (T(x), T^{-1}(T(x))) \in G(T^{-1})$. Portanto, $G(T)$ é fechado em $c_{00} \times c_{00}$, donde concluímos que a implicação da hipótese não continua válida, visto que $G(T^{-1})$ é fechado, mas T^{-1} é descontínua (conforme o exercício (27)). \square

Exercício 34 (2.7.34). Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T : E \rightarrow F$ um operador linear de gráfico fechado. Mostre que se o operador inverso $T^{-1} : T(E) \rightarrow E$ existe e é contínuo, então a imagem $Im(T)$ é subespaço fechado de F .

Resolução. Tome $y \in \overline{T(E)}$. Existe então uma sequência $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ em $T(E)$ que converge a y . Logo, $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n > N$ temos que $\|T(x_m) - T(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{\|T^{-1}\|}$. Assim, para $m, n > N$:

$$\|x_m - x_n\| = \|T^{-1}(T(x_m)) - T^{-1}(T(x_n))\| \leq \|T^{-1}\| \|T(x_m) - T(x_n)\| < \|T^{-1}\| \frac{\varepsilon}{\|T^{-1}\|} = \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, e portanto converge para algum $x \in E$, já que E é Banach. Logo, $(x_n, T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge para (x, y) em $E \times F$. Uma vez que $(x_n, T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $G(T)$, que é fechado, temos que $(x, y) \in G(T)$, ou seja, $y = T(x)$. Assim, $y \in T(E)$, provando que $Im(T)$ é fechado. \square

Exercício 35 (2.7.35). Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$

para todo $\varphi \in E'$. Mostre que $\sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$

Resolução. Considere $u : E' \rightarrow \ell_1$ dada por $u(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty$. Pela hipótese do exercício segue que u está bem definida. Além disso, u é linear, pois se $\varphi, \psi \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

$$u(\varphi + \lambda\psi) = [(\varphi + \lambda\psi)(x_j)]_{j=1}^\infty = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty + \lambda(\psi(x_j))_{j=1}^\infty = u(\varphi) + \lambda u(\psi).$$

Vamos mostrar que u tem o gráfico fechado. Suponha que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em E' e que $u(\varphi_n) \rightarrow y = (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$, precisamos provar que $u(\varphi) = y$. Como $u(\varphi_n) = (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty$, segue que $\varphi_n(x_j) \rightarrow \varphi(x_j)$ para todo j . Segue que $\varphi(x_j) = y_j$ para todo j . Assim, temos

$$y = (y_j)_{j=1}^\infty = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = u(\varphi).$$

Portanto u tem o gráfico fechado e segue que u é contínuo. Consequentemente, u é limitado e temos o resultado desejado. \square

3 Capítulo 3

Exercício 1 (3.6.1). Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$. Mostre que $E' \neq \{0\}$.

Resolução. Como $E \neq \{0\}$, então existe $0 \neq x_0 \in E$. Pelo Corolário 3.1.4, existe um funcional linear contínuo $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\| \neq 0$. Logo, $\varphi \neq 0$ e, portanto, $E' \neq \{0\}$. \square

Exercício 2 (3.6.2). Seja E um espaço normado. Mostre que E' separa pontos de E , isto é, se $x, y \in E$ com $x \neq y$, então existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Resolução. Segue direto do corolário 3.4.10, pois, $M = \{x\}$ é fechado e $y \in E - M$. \square

Exercício 3 (3.6.3). Sejam x_1, x_2, \dots, x_n vetores linearmente independentes do espaço normado E e a_1, \dots, a_n escalares dados. Mostre que existe um funcional $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_j) = a_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Resolução. Seja $M = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ e considere os funcionais lineares $\varphi_j : M \rightarrow \mathbb{K}$ dados por $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$. Defina

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x)$$

Como M tem dimensão finita n , segue pelo Exercício 2.7.2 que φ é contínuo. Além disso, $\varphi(x_j) = a_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. Agora, pelo Corolário 3.1.3 existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a M coincide com φ . Ou seja, $\tilde{\varphi} \in E'$ e $\tilde{\varphi}(x_j) = a_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. \square

Exercício 4 (3.6.4). Mostre que, em geral, a extensão de Hahn-Banach não é única.

Resolução. Seja G o subespaço de l_1 das seqüências cujo primeiro termo é nulo. Considere o funcional linear contínuo $T : G \rightarrow \mathbb{K}$, dado por

$$(0, a_2, a_3, \dots) \mapsto a_2$$

Note que $\|T\| = 1$. Considere agora os funcionais lineares contínuos

1. $T_1 : l_1 \rightarrow \mathbb{K}$, dado por

$$T_1((a_1, a_2, \dots)) = a_2$$

2. $T_2 : l_1 \rightarrow \mathbb{K}$, dado por

$$T_2((a_1, a_2, \dots)) = a_1 + a_2$$

Observamos que a $T_1|_G = T = T_2|_G$. Além disso, $\|T_1\| = \|T_2\| = 1 = \|T\|$. Isto é, T_1 e T_2 são duas possibilidades para extensão de Hahn-Banach. \square

Exercício 5 (3.6.5). No Teorema 3.1.2, se E é um espaço normado e existe $C > 0$ tal que $p(x) \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$, prove que $\|\tilde{\varphi}\| \leq C$.

Resolução. Pelo Teorema 3.1.2,

$$\|\tilde{\varphi}(x)\| \leq p(x), \forall x \in E; \tilde{\varphi}|_G = \varphi : G \underset{\text{SUB}}{\subseteq} E \longrightarrow K.$$

Da hipótese, $\exists c > 0$ tal que $p(x) \leq c\|x\|$. Logo,

$$\|\tilde{\varphi}(x)\| \leq p(x) \leq c\|x\|.$$

Portanto,

$$\|\tilde{\varphi}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\tilde{\varphi}(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} c\|x\| = c \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \leq c.$$

\square

Exercício 6 (3.6.6). Demonstre o Teorema de Hahn-Banach, na forma do Corolário 3.1.3, no caso em que E é um espaço separável sem usar o Lema de Zorn, isto é, sem usar os Teoremas 3.1.1 e 3.1.2.

Resolução. Sejam G um subespaço de E e $\phi \in G'$. Primeiramente, sem perda de generalidade, podemos considerar G fechado, pois, pelo Exercício 2.7.5, podemos estender ϕ ao fecho de G sem alterar a norma. Num primeiro momento, supomos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. No caso complexo, usamos a técnica da prova do Teorema 3.1.2 para estender ϕ a partir da extensão de $Re(\phi)$.

Como E é separável, existe um conjunto $(x_n) \subset E$ denso e enumerável. Agora, seja $i \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $y_1 = x_i \notin G$. Defina $V_1 = G \oplus [y_1]$, e $\phi_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi_1(x + ty_1) = \phi(x) + t\lambda$, onde $x \in G, t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante a princípio arbitrária. Logo, ϕ_1 é linear e $\phi_1|_G = \phi$. Por esse motivo, $\|\phi\| \leq \|\phi_1\|$. Note que

$$\begin{aligned} |\phi(x) + t\lambda| &\leq \|\phi\| \|x + ty_1\| \Leftrightarrow |t(\phi(x/t) + \lambda)| \leq \|\phi\| |t|(x/t + y_1)| \\ &\Leftrightarrow |t| |\phi(x/t) + \lambda| \leq \|\phi\| |t| |(x/y) + y_1| \\ &\Leftrightarrow |\phi(z) + \lambda| \leq \|\phi\| |(z) + y_1| \\ &\Leftrightarrow -\|\phi\| |z - y_1| - \phi(z) \leq \lambda \leq \|\phi\| |z - y_1| - \phi(z), \forall z \in G. \end{aligned} \tag{5}$$

Mas, note que, para todos $z, z' \in G$,

$$\phi(z - z') \leq |\phi(z - z')| \leq \|\phi\| \|z - z'\| \leq \|\phi\| (\|z - y_1\| + \|z' - y_1\|).$$

Assim,

$$\phi(z) - \phi(z') \leq \|\phi\| \|z - y_1\| + \|\phi\| \|z' - y_1\| \Leftrightarrow -\|\phi\| \|z' - y_1\| - \phi(z') \leq \|\phi\| \|z - y_1\| - \phi(z).$$

Logo, λ sempre pode ser escolhido de modo que a desigualdade 5 sempre seja satisfeita, ou seja, que $\|\phi_1\| \leq \|\phi\|$. Assim, $\|\phi_1\| = \|\phi\|$.

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência (pode ser finita) de subespaços $G \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots$ e de funcionais $\phi_i \in V'_i$ tais que $\phi_i|_{V_{i-1}} = \phi_{i-1}$ e $\|\phi_i\| = \|\phi\|$. Note também que $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ é denso em E , pois (x_i) é denso em E .

Assim, defina $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi(x) = \phi_i(x)$, se $x \in V_i$. De fato, ψ está bem definida, pois cada funcional ψ_i estende o funcional anterior, deste modo não importa a escolha de V_i ao qual x pertence. Também, ψ é linear: se $x \in V_i$ e $y \in V_j$, tomando $k \geq \max\{i, j\}$, temos que $x, y \in V_k$, e

$$\psi(x + \alpha y) = \phi_k(x + \alpha y) = \phi_k(x) + \alpha \phi_k(y) = \psi(x) + \alpha \psi(y).$$

Como ψ estende ϕ para V , temos que $\|\phi\| \leq \|\psi\|$. Por outro lado, se $y \in V$, $\|y\| = 1$, então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $y \in V_i$. Daí,

$$|\psi(y)| = |\phi_i(y)| \leq \|\phi_i\| \|y\| = \|\phi\| \|y\|.$$

Assim, $\|\psi\| \leq \|\phi\|$, provando a igualdade. Por fim, como V é denso em E , basta estendermos linearmente ψ em E para obtermos uma extensão linear $\tilde{\phi} \in E'$ de ϕ que satisfaz $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$. \square

Exercício 7 (3.6.7). Seja F um espaço normado. Prove que se existe um espaço normado $E \neq \{0\}$ tal que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach, então F também é um espaço de Banach.

Resolução. Como $E \neq \{0\}$, pelo Exercício 3.6.1, existe $\varphi \in E'$ e $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$. Com isso, define $T : E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ dada por

$$T(y) = \varphi \otimes y \in \mathcal{L}(E, F),$$

onde

$$(\varphi \otimes y)(x) = \varphi(x)y, \quad \forall x \in E.$$

Claramente, T está bem definida (ie, $\varphi \otimes y \in \mathcal{L}(E, F)$, para todo $y \in F$) e é linear.

Seja (y_n) sequência de Cauchy em F . Então, para cada n , define T_n dada por

$$T_n(x) = \varphi(x)y_n, \quad \forall x \in E.$$

Da observação anterior, segue que, para todo $x \in E$

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|\varphi(x)(y_n - y_m)\| \leq \|\varphi\| \|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\|.$$

Ou seja,

$$\|T_n - T_m\| \leq \|y_n - y_m\|.$$

Portanto, (T_n) é sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Como $\mathcal{L}(E, F)$ é de Banach, existe $S \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n.$$

Em particular, como $\varphi(x_0) = 1$,

$$y_n = \varphi(x_0)y_n \rightarrow S(x_0) \in F.$$

Portanto, y_n é convergente, e assim, segue que F é espaço de Banach. □

Exercício 8 (3.6.8). Sejam E e F espaços normados e $T \in (E, F)$. Prove que

$$\|T\| = \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{F'} \text{ e } x \in B_E\}.$$

Resolução. Note que,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in B_E\}.$$

Agora, pelo corolário 3.1.5, segue que

$$\|T(x)\| = \max\{|\varphi(T(x))|; \varphi \in B_{F'}\}.$$

Como é o máximo (pelo fato de existir pelo menos um funcional que atinge a norma), podemos combinar as duas, segue que

$$\|T\| = \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{F'} \text{ e } x \in B_E\}.$$

□

Exercício 9 (3.6.9). Seja F um subespaço denso do espaço normado E . Prove que F' e E' são isomorfos isometricamente.

Resolução. Considere a aplicação $T : F' \rightarrow E'$ que associa a cada funcional $\varphi \in F'$ a imagem $T(\varphi) = \tilde{\varphi}$, onde $\tilde{\varphi} \in E'$ é uma extensão de Hahn-Banach de φ . Primeiramente, note que T está bem definida, pois se $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in E'$ são duas extensões de Hahn-Banach de $\varphi \in F'$, então $\tilde{\varphi}_1|_F = \tilde{\varphi}_2|_F$. Porém, sendo $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ contínuas e F um subconjunto denso de E , segue que $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$.

Mostremos agora que T é isometria linear sobrejetora:

- T é isometria: como as extensões de Hahn-Banach preservam a norma do funcional linear, segue que $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|T(\varphi)\|$, provando que T é isometria.

- T é linear: dados $\varphi_1, \varphi_2 \in F'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, se $\tilde{\varphi}_1$ e $\tilde{\varphi}_2$ denotam as imagens de φ_1 e φ_2 por T , basta mostrar que $\tilde{\varphi}_1 + \lambda\tilde{\varphi}_2$ estende $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$. De fato:

$$(\tilde{\varphi}_1 + \lambda\tilde{\varphi}_2)|_F = \tilde{\varphi}_1|_F + (\lambda\tilde{\varphi}_2)|_F = \tilde{\varphi}_1|_F + \lambda\tilde{\varphi}_2|_F = \varphi_1 + \lambda\varphi_2.$$

- T é sobrejetora: dado $\psi \in E'$, considere $\psi' := \psi|_F \in F'$. Segue diretamente da definição que ψ' estende ψ . Além disso, tem-se que $\|\psi'\| = \|\psi\|$, pois sendo F denso em E , em particular é denso em B_E , ou seja,

$$\|\psi\| = \sup_{x \in B_E} |\psi(x)| = \sup_{x \in B_E \cap F} |\psi(x)| = \|\psi'\|.$$

Portanto, como F' e E' são de Banach, segue pelo teorema da aplicação aberta que são isomorfos isometricamente. \square

Exercício 10 (3.6.10). Sejam E, F espaços normados, G um subespaço de E e $T \in \mathcal{L}(G, F)$ um operador de posto finito (veja exercício 2.7.20). Prove que existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ que estende T e tem a mesma imagem que T .

Resolução. Como $T : G \rightarrow F$ tem posto finito, pelo exercício 2.7.20(a), existem $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in G'$ e $y_1, y_2, \dots, y_n \in F$ tais que

$$T = \varphi_n \otimes y_1 + \dots + \varphi_1 \otimes y_n.$$

Assim, pelo Teorema de Hahn Banach, existem funcionais lineares $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n \in E'$ tais que $\tilde{\varphi}_i|_G = \varphi_i$. Definamos $\tilde{T} : E \rightarrow F$ dada por $\tilde{T}(g) = \tilde{\varphi}_1(g) \otimes y_1 + \dots + \tilde{\varphi}_n(g) \otimes y_n$, se $g \in G$ e $\tilde{T}(g) = 0$, se $g \in E \setminus G$.

- \tilde{T} é linear, contínua, \tilde{T} estende a T e, além disso, $\tilde{T}(E) = T(G)$. De fato, dado $g \in G$, temos

$$\tilde{T}(g) = \tilde{\varphi}_1(g) \otimes y_1 + \dots + \tilde{\varphi}_n(g) \otimes y_n = \varphi_1(g) \otimes y_1 + \dots + \varphi_n(g) \otimes y_n = T(g).$$

E se $g \in E \setminus G$, então $\tilde{T}(g) = 0 \in T(G)$. \square

Exercício 11 (3.6.11). Seja E um espaço normado e separável. Prove que existe uma sequência (φ_n) em E' tal que $\|\varphi_n\| = 1$ para todo n e, para todo $x \in E$, temos que $\|x\| = \sup_n |\varphi_n(x)|$ no caso complexo, e $\|x\| = \sup_n \varphi_n(x)$ no caso real.

Resolução. Como E é separável, existe um conjunto enumerável e denso em E . Assim, seja (x_n) uma sequência densa em E . Pelo corolário 3.1.4, para cada x_i não nulo, existe um $\varphi_i \in E'$ tal que $\|\varphi_i\| = 1$ e $\varphi_i(x_i) = \|x_i\|$. Agora, provemos que cada um desses φ_i satisfaz a igualdade desejada. Por um lado, para cada $x \in E$, pelo corolário 3.1.5, temos que

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| < 1\} \geq \sup_n |\varphi_n(x)|.$$

Agora, como (x_n) é uma sequência densa, então ou $x \in (x_n)$, ou existe uma subsequência $x_{n_k} \rightarrow x$. Se $x \in (x_n)$, segue que existe índice j tal que

$$\|x\| = \|x_j\| = \varphi_j(x_j) = |\varphi_j(x_j)| \leq \sup_n |\varphi_n(x)|,$$

Assim, $\|x\| = \sup_n |\varphi_n(x)|$. Para o segundo caso, temos que $x - x_{n_k} \rightarrow 0$ e, pela continuidade, $\varphi_{n_k}(x - x_{n_k}) \rightarrow 0$. Agora, observemos que

$$\begin{aligned} \varphi_{n_k}(x_{n_k}) &= \|x_{n_k}\| \rightarrow \|x\| \\ \varphi_{n_k}(x) &= \varphi(x - x_{n_k}) + \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow \|x\|. \end{aligned}$$

Assim, usando o fato que $\|x\| \geq \sup_n |\varphi_n(x)|$ temos a igualdade novamente. \square

Exercício 12 (3.6.12). Sejam E espaço normado e F subespaço de E . Mostre que existe uma aplicação $T: F' \rightarrow E'$ é injetora tal que $\|T(\varphi)\| = \|\varphi\|$ para todo funcional em F' . Isso significa que E' contém um subespaço isomorfo isometricamente a F' ?

Resolução. Seja $\varphi: F \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional e $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{K}$ o funcional correspondente ao corolário 3.1.3 (Hahn-Banach). Então

$$T: F' \rightarrow E', \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$

é linear contínuo, pois $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$.

Assim, F' é isomorfo isometricamente a um subespaço de E' , pelas métricas serem preservadas. \square

Exercício 13 (3.6.13). (Anulador) Sejam E um espaço normado e M um subconjunto não-vazio de E . O anulador de M é definido por

$$M^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Prove que

- (a) M^\perp é subespaço fechado de E .
- (b) Se M é subespaço de E , então M' é isomorfo isometricamente a E'/M^\perp .
- (c) Se M é subespaço fechado de E , então M^\perp é isomorfo isometricamente a $(E/M)'$.

Resolução.

- (a) Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in M^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se que para todo $x \in M$:

$$(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \lambda \cdot \varphi_2(x) = 0,$$

implicando que $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \in M^\perp$ e M^\perp é subespaço vetorial de E' . Considere agora uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ de funcionais de M^\perp com $\varphi_n \rightarrow \varphi \in E'$. Em particular, $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$. No caso em que $x \in M$, $(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty$ é a sequência identicamente nula e assim, $\varphi(x) = 0$, provando que M^\perp é fechado.

- (b) Defina a aplicação

$$\begin{aligned} T: E'/M^\perp &\rightarrow M' \\ [\varphi] &\mapsto \varphi|_M. \end{aligned}$$

Mostremos que está bem-definida, e é isometria linear sobrejetora.

- T está bem-definida: sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$ com $[\varphi_1] = [\varphi_2]$. Daí, $\varphi_1 - \varphi_2 \in M^\perp$, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$ para todo $x \in M$ e $\varphi_1|_M = \varphi_2|_M$. Logo,

$$T([\varphi_1]) = \varphi_1|_M = \varphi_2|_M = T([\varphi_2]).$$

- T é linear: dados $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in M$:

$$\begin{aligned} T([\varphi_1 + \lambda\varphi_2])(x) &= (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) \\ &= \varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) \\ &= T([\varphi_1])(x) + \lambda T([\varphi_2])(x). \end{aligned}$$

- T é sobrejetora: dado $\varphi \in M'$, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{\varphi} \in E'$ com $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in M$. Dessa forma,

$$T([\tilde{\varphi}]) = \tilde{\varphi}|_M = \varphi \in \text{Im}(T).$$

- T é isometria: dado $\varphi \in M'$, sabemos que existe $\tilde{\varphi} \in E'$ tal que $\tilde{\varphi}|_M = \varphi$ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Segue do exercício 2.7.14(a) que

$$\|[\tilde{\varphi}]\| \leq \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = \|T([\tilde{\varphi}])\|.$$

Além disso, pela definição da norma de operadores, dado $\varphi \in E'$ vale que:

$$\|T([\varphi])\| = \|\varphi|_M\| \leq \|\varphi\|,$$

implicando que T é isometria.

Como toda isometria é injetora, T é isomorfismo isométrico.

- (c) Denote por $\pi : E \rightarrow E/M$ a projeção canônica e defina

$$\begin{aligned} T : (E/M)' &\rightarrow M^\perp \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \pi. \end{aligned}$$

Mostremos novamente que T é bem-definida, e é isometria linear sobrejetora.

- T está bem-definida: dado $\varphi \in (E/M)'$, é necessário provar que $\varphi \circ \pi \in M^\perp$. Sendo π uma aplicação linear contínua, segue que $\varphi \circ \pi$ é também contínua, logo $T(\varphi) \in E' \implies T(\varphi) \in M'$. Agora dado $x \in M$, tem-se $\pi(x) = [0]$ e assim

$$T(\varphi)(x) = \varphi(\pi(x)) = \varphi([0]) = 0 \implies \varphi \circ \pi \in M^\perp.$$

- T é linear: dados $\varphi_1, \varphi_2 \in (E/M)'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) &= (\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \circ \pi \\ &= \varphi_1 \circ \pi + (\lambda\varphi_2) \circ \pi \\ &= \varphi_1 \circ \pi + \lambda(\varphi_2 \circ \pi) \\ &= T(\varphi_1) + \lambda T(\varphi_2). \end{aligned}$$

- T é isometria: denotando por B_E a bola aberta unitária de E e por $B_{E/M}$ a bola unitária aberta de E/M , sabemos do exercício 2.7.14(c) que $\pi(B_E) = B_{E/M}$. Sendo assim, dado $\varphi \in (E/M)'$:

$$\|T(\varphi)\| = \|\varphi \circ \pi\| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(\pi(x))| = \sup_{y \in \pi(B_E)} |\varphi(y)| = \sup_{y \in B_{E/M}} |\varphi(y)| = \|\varphi\|_{E/M}.$$

- T é sobrejetora: dado $\varphi \in E'$, o item (f) do exercício 2.7.14 mostra que existe $\tilde{\varphi} : E/M \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$, ou seja, $T(\tilde{\varphi}) = \varphi$. Resta apenas provar que $\tilde{\varphi}$ é contínuo para concluir a prova. De fato, temos $\tilde{\varphi} \circ \pi \in E'$, então $\|\tilde{\varphi} \circ \pi\| < +\infty$. Usando o fato que T é isometria, inferimos que $\|\tilde{\varphi} \circ \pi\| = \|\tilde{\varphi}\|_{E/M} < +\infty$ e assim, $\tilde{\varphi} \in (E/M)'$.

Portanto, T é isomorfismo isométrico. □

Exercício 14 (3.6.14). Sejam F e G subespaços fechados e distintos do espaço normado E . Prove que $F^\perp \neq G^\perp$.

Resolução. Suponha, sem perda de generalidade, que existe $x \in F - G$. Pelo Corolário 3.4.10, existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(G) = \{0\}$. Logo, $\varphi \in G^\perp$ mas $\varphi \notin F^\perp$. Dessa forma $F^\perp \neq G^\perp$. □

Exercício 15 (3.6.15). Seja F um subespaço de um espaço de Banach E cujo dual E' é separável. Prove que F' é separável.

Resolução. Pela **Proposição 1.6.9**, sabemos que todo subespaço $V \subseteq E'$ é separável. Assim, basta mostrar que F' é isomorfo isometricamente à algum subespaço em E' .

Seja $F^\perp = \{\varphi \in E' \mid \varphi(x) = 0 \forall x \in F\}$ o anulador de F . Pelo **Exercício 3.6.13**, $F^\perp \subseteq E'$ é subespaço fechado e F' é isomorfo isometricamente à $E'/F^\perp \subseteq E'$. □

Exercício 16 (3.6.16). Dados um espaço normado E e um vetor $x_0 \in E$, prove que o conjunto

$$\{\varphi \in E'; \|\varphi\| = \|x_0\| \text{ e } \varphi(x_0) = \|x_0\|^2\}$$

é não-vazio, convexo e fechado em E' .

Resolução. Pelo corolário 3.1.4, temos que dado $x_0 \in E$ não nulo, existe φ com $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$. Assim, tomando $\varphi' = \|x_0\| \cdot \varphi$, provamos que é não-vazio (no caso de $x_0 = 0$, basta tomar $\varphi \equiv 0$). Agora, para provar que é fechado, tomemos uma sequência $\varphi_n \rightarrow \varphi$ com ponto limite em E' e cada φ_n neste conjunto. Como cada operador é contínuo temos que $\|\varphi_n\| \rightarrow \|\varphi\| = \|x_0\|$ por continuidade. Similarmente, a convergência pontual garante o mesmo. Logo, φ está neste conjunto, concluindo que é fechado. Por fim a convexidade segue diretamente que $\{\varphi \in E'; \|\varphi\| \leq \|x_0\| \text{ e } \varphi(x_0) = \|x_0\|^2\} = \{\varphi \in E'; \|\varphi\| = \|x_0\| \text{ e } \varphi(x_0) = \|x_0\|^2\}$. De fato, o primeiro conjunto é convexo e o segundo está contido no primeiro. Agora, o fato que $\|\varphi\| \leq \|x_0\|$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|^2$ implica que sua norma do sup atinge o máximo (basta tomar $\varphi(x_0/\|x_0\|)$ se segue). Portanto, temos o outro lado, e como o primeiro conjunto é convexo, segue que o outro também.

□

Exercício 17 (3.6.17). Sejam F um subespaço do espaço normado E e $T \in L(F, B(X))$, onde $B(X)$ é o espaço do Exemplo 1.1.2. Prove que existe $\tilde{T} \in L(E, B(X))$ extensão de T a E tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Resolução. Denote por $T_f = T(f) : X \rightarrow \mathbb{K}$. Como T é limitado, temos que $\|T_f\| \leq \|T\| \|f\|$, para todo $f \in F$, ou seja, $\sup\{|T_f(x)| : x \in X\} \leq \|T\| \|f\|$.

Para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} \phi_x : F &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto T_f(x) \end{aligned}$$

é um funcional linear: de fato,

$$\begin{aligned} \phi_x(f_1 + \lambda f_2) &= (T(f_1 + \lambda f_2))(x) \\ &= (T(f_1) + \lambda T(f_2))(x) \\ &= (T(f_1))(x) + \lambda (T(f_2))(x) \\ &= \phi_x(f_1) + \lambda \phi_x(f_2). \end{aligned}$$

Além disso, como $|\phi_x(f)| = |T_f(x)| \leq \|T\| \|f\|$, $\phi_x \in F'$ e $\|\phi_x\| \leq \|T\|$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\psi_x : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende ϕ_x e $\|\psi_x\| = \|\phi_x\|$. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{T}_e : X &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \psi_x(e) \end{aligned}$$

e seja $\tilde{T} : E \rightarrow B(X)$ tal que $\tilde{T}(e) = \tilde{T}_e$. Note que

$$|\tilde{T}_e(x)| = |\psi_x(e)| \leq \|\psi_x\| \|e\| \leq \|T\| \|e\| \Rightarrow \tilde{T}_e \in B(X).$$

É claro que $\tilde{T}|_F = T$, pois toda ψ_x estende ϕ_x . Além disso, pela desigualdade acima, $\|\tilde{T}_e\| \leq \|T\| \|e\|$, para todo $e \in E$, ou seja, \tilde{T} é contínuo e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Também, por definição,

$$\|T\| = \sup\{\|T_f\| : f \in F, \|f\| = 1\} = \sup\{\|\tilde{T}_f\| : f \in F, \|f\| = 1\} \leq \sup\{\|\tilde{T}_e\| : e \in E, \|e\| = 1\} = \|\tilde{T}\|.$$

Portanto, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

Exercício 18 (3.6.18). Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço complementado de E . Prove que se $E = F \oplus M$ e $E = F \oplus N$, então M é isomorfo a N .

Resolução. Como F é complementado e $F \oplus M = E = F \oplus N$, então M e N são complementados em E . Assim, existem projeções $P_1, P_2 : E \rightarrow E$ em M e N , respectivamente, e $\text{Ker}(P_1) = F = \text{Ker}(P_2)$. Daí, pelo Teorema do Isomorfismo,

$$M = \text{Img}(P_1) \cong \frac{E}{\text{Ker}(P_1)} = \frac{E}{\text{Ker}(P_2)} \cong \text{Img}(P_2) = N.$$

□

Exercício 19 (3.6.19). O Teorema de Sobczyk diz o seguinte: Sejam F um subespaço fechado do espaço normado separável E e $T \in L(E, c_0)$. Então, existe $\tilde{T} \in L(E, c_0)$ que estende T e $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$. Usando o Teorema de Sobczyk, mostre que se c_0 é subespaço complementado de um espaço normado separável E , então é 2-complementado em E .

Resolução. Note que c_0 é fechado em E , pois c_0 é completo. Seja $I : c_0 \rightarrow c_0$ a identidade. Logo, existe, pelo Teorema de Sobczyk, $\tilde{I} : E \rightarrow c_0$ que estende I e que satisfaz $\|\tilde{I}\| \leq 2\|I\| = 2$.

Seja $i : c_0 \rightarrow E$ a inclusão. Logo, $\|i\| = 1$. Seja $P = i \circ \tilde{I} : E \rightarrow E$. Logo, P é uma projeção, pois, para todo $x \in E$,

$$P^2(x) = i \circ \tilde{I} \circ i \circ \tilde{I}(x) = i \circ \tilde{I}(\tilde{I}(x)) = i \circ I(\tilde{I}(x)) = i(\tilde{I}(x)) = i \circ \tilde{I}(x) = P(x),$$

pois $\tilde{I}(x) \in c_0$. Além disso,

$$\|P\| = \|i \circ \tilde{I}\| \leq \|i\| \|\tilde{I}\| \leq 1 \cdot 2 = 2.$$

Portanto, c_0 é 2-complementado em E .

□

Exercício 20 (3.6.20). Sejam F um subespaço fechado do espaço de Banach E tal que E/F tem dimensão finita. Prove que F é complementado em E .

Resolução. Como o espaço quociente tem dimensão finita, existe uma base $\{[x_1], [x_2], \dots, [x_n]\}$ deste espaço. Definamos $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \subset E$ o subespaço gerado por x_1, x_2, \dots, x_n . Vamos mostrar que $E = F \oplus G$.

- $E = F + G$.

Dado $z \in E$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$[z] = \alpha_1[x_1] + \alpha_2[x_2] + \dots + \alpha_n[x_n].$$

Consequentemente,

$$[z - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n] = [0],$$

o que implica que $z - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \in F$. Logo existe $x \in F$ tal que

$$z = x + y, \quad y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \in G.$$

Portanto, $E = F + G$

- $F \cap G = 0$.

□

Exercício 21 (3.6.21). Sejam F um subespaço do espaço de Banach E , $P : E \rightarrow E$ uma projeção sobre F e $Q \in \mathcal{L}(E, E)$. Se $P \circ Q = Q$ e $Q \circ P = P$, então Q também é uma projeção sobre F .

Resolução. Como $P \circ Q = Q$, temos que $\text{Im}(Q) \subset \text{Im}(P)$. Agora, a igualdade $Q \circ P = P$ nos diz que $\text{Im}(P) \subset \text{Im}(Q)$. Assim, $\text{Im}(Q) = \text{Im}(P) = F$. Agora, para $x \in E$, temos que $Q(x) \in F = \text{Im}(P)$. Existe então $y \in E$ tal que $P(y) = Q(x)$. Logo,

$$Q(x) = P \circ Q(x) = P \circ P(y) = P(y) = Q \circ P(y) = Q \circ Q(x),$$

provando que $Q = Q \circ Q$. Logo, Q é uma projeção de E sobre F .

□

Exercício 22 (3.6.22). Considere o seguinte operador de translação

$$T: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty, \quad T((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots).$$

(a) Prove que $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_\infty)$ e calcule a norma de T .

(b) Prove que existe um funcional $\varphi \in (\ell_\infty)'$ tal que

$$\varphi \circ T = \varphi \text{ e } \liminf_j (a_j) \leq \varphi((a_j)) \leq \limsup_j (a_j), \quad \forall (a_j) \in \ell_\infty.$$

Resolução.

(a) Note que T é linear por definição. Provemos que T é contínua. Com efeito, seja $(a_n) \in \ell_\infty$ com norma 1. Então

$$\|T((a_n))\| \leq \|(a_n)\| = 1.$$

Logo, T é contínua e $\|T\| \leq 1$. De fato, vale a igualdade, pois $T(e_2) = e_1$ e $\|T(e_2)\| = \|e_1\| = 1 = \|e_2\|$.

(b) ?

□

Exercício 23 (3.6.23). Seja C um subconjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado real E . Porque que se C é limitado e simétrico (isto é, $C = -C$), então o funcional de Minkowski p_C de C é uma norma equivalente à norma original de E .

Resolução. Veja que:

$$\begin{aligned} p_C(0) &= \inf \left\{ a > 0 \mid \frac{0}{a} \in C \right\} \\ &= \inf \{ a > 0 \mid 0 \in C \} \\ &= \inf \{ a > 0 \} = 0. \end{aligned}$$

Como C é limitado, existe $K > 0$ com $\|b\| \leq K$ para todo $b \in C$. Logo, dado $x \in E$, se $0 < a < \frac{\|x\|}{K}$, então $\|\frac{x}{a}\| > K$ e portanto $\frac{x}{a} \notin C$. Portanto,

$$p_C(x) \geq \frac{\|x\|}{K}, \quad \forall x \in E. \quad (6)$$

Assim, dado $x \in E$ com $p_C(x) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{\|x\|}{K} \implies \|x\| = 0 \\ &\implies x = 0. \end{aligned}$$

Concluimos assim que:

$$x = 0 \iff p_C(x) = 0.$$

Agora, dado $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, se $\lambda > 0$, então $p_C(\lambda x) = \lambda p_c(x)$ pela Proposição 3.4.5(a). Se $\lambda = 0$, pelo que já foi provado, $p_C(\lambda x) = 0 = \lambda p_c(x)$. Agora, se $\lambda < 0$, pela simetria de C e novamente pela Proposição 3.4.5(a):

$$\begin{aligned} p_C(\lambda x) &= \inf \left\{ a > 0 \mid \frac{\lambda x}{a} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ a > 0 \mid -\frac{\lambda x}{a} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ a > 0 \mid \frac{(-\lambda)x}{a} \in C \right\} \\ &= p_C((-\lambda)x) = (-\lambda)p_C(x) = |\lambda|p_c(x). \end{aligned}$$

A Proposição 3.4.5(d) prova a desigualdade triangular. Desse modo, p_C é uma norma em E . Pela Proposição 3.4.5(c), existe $M > 0$ com $\|x\| \leq M \cdot p_C(x)$ para todo $x \in E$. Por 6 e pelo comentado,

$$K \cdot p_C(x) \leq \|x\| \leq M \cdot p_C(x), \forall x \in E.$$

Assim, p_C e $\|\cdot\|$ são equivalentes. \square

Exercício 24 (3.6.24). Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado real. Prove que o funcional de Minkowski da bola aberta $B(0; 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ coincide com $\|\cdot\|$.

Resolução. Relembramos que o funcional de Minkowski é definido por

$$p_C(x) = \inf\{a > 0 : \frac{x}{a} \in C\},$$

onde C é um conjunto convexo, aberto e contém a origem de E . Considere $C = B(0; 1)$. Dado $a > 0$ tal que $\frac{x}{a} \in C$, temos que

$$\left\| \frac{x}{a} \right\| \leq 1 \Rightarrow \|x\| \leq a,$$

ou ainda, $\|x\| \leq \inf\{a > 0 : \frac{x}{a} \in C\} = p_C(x)$. Logo, $\|\cdot\| \leq p_C$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, pela proposição 3.4.5 temos que $p_C\left(\frac{x}{\|x\| + \varepsilon}\right) < 1$, ou seja,

$$\frac{p_C(x)}{\|x\| + \varepsilon} = p_C\left(\frac{x}{\|x\| + \varepsilon}\right) < 1 \Rightarrow p_C(x) < \|x\| + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ segue que $p_C \leq \|\cdot\|$. Portanto, $p_C = \|\cdot\|$. \square

Exercício 25 (3.6.25). Sejam A e B subconjuntos convexos do espaço normado real E tais que

$$\delta := \text{dist}(A, B) = \inf\{\|x - y\| : x \in A \text{ e } y \in B\} > 0.$$

Prove que existe um funcional $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\inf \varphi(A) = \sup \varphi(B) + \delta$.

Resolução. $B + B(0, \delta)$ é um conjunto aberto (a saber, cada ponto tem uma vizinhança básica de raio δ) que é disjunto de A : se tivessem pontos em comum, existiriam $a \in A$, $b \in B$ e $x \in B(0, \delta)$ tais que $b + x = a \Rightarrow \|b - a\| = \|x\| < \delta = \inf(\|A - B\|)$. Portanto, utilizando a primeira forma geométrica de Hahn-Banach e tomando supremos e ínfimos, há um $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$ e um $M \in \mathbb{R}$ tais que $\sup \varphi(B + B(0, \delta)) \leq M \leq \inf \varphi(A)$. Mas $\varphi(B + B(0, \delta)) = \varphi(B) + \delta \varphi(B(0, 1)) \subseteq \varphi(B) + (-\delta, \delta)$, onde a primeira igualdade segue da linearidade e a continência segue do fato que $\|\varphi\| = 1$; portanto $\sup \varphi(B + B(0, \delta)) \leq \sup \varphi(B) + \delta$. Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ pequeno existem $b \in B$ e $x = \delta - \varepsilon/3 \in B(-\delta, \delta)$ tais que $\sup \varphi(B) - \varphi(b) < \varepsilon/2$ e $\delta - x < \varepsilon/2 \Rightarrow \sup(\varphi(B) + \delta) - (\varphi(b) + x) < \varepsilon$; ou seja, a cota superior que demos é de fato o supremo. Portanto

$$R + \delta := \sup \varphi(B) + \delta \leq M \leq \inf(\varphi(A)) =: S.$$

Se $S > R + \delta$, seja $S = R + \delta + \varepsilon$. Então $\varphi(b) \leq R + \delta < R + \delta + \varepsilon \leq \varphi(a)$ e portanto $\varphi(a - b) \geq (R - \varphi(b)) + \delta + \varepsilon \geq 0 + \delta + \varepsilon = \delta + \varepsilon$ (pois R é o supremo). Logo $|\varphi(a - b)| \geq \delta + \varepsilon$ para todos a, b e como $\|a - b\| = \|\varphi\| \|a - b\| \geq |\varphi(a - b)| \geq \delta + \varepsilon$, segue que $\inf \|A - B\| \geq \delta + \varepsilon > \delta = \inf \|A - B\|$, contradição. Logo a desigualdade é de fato uma igualdade, e $\sup \varphi(B) = \inf A + \delta$. Em particular, nossa igualdade sempre vale para conjuntos convexos com distância positiva e funcionais contínuos de norma 1 que os separam. \square

Exercício 26 (3.6.26). Sejam E um espaço normado complexo e A e B subconjuntos disjuntos, não vazios e convexos de E .

(a) Se A é aberto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e um número real a tais que

$$\operatorname{Re}(\varphi(x)) \leq a \leq \operatorname{Re}(\varphi(y)) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B$$

(b) Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e números reais a e b tais que

$$\operatorname{Re}(\varphi(x)) < a < b < \operatorname{Re}(\varphi(y)) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Resolução. Se E é espaço normado complexo, visto que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, E é espaços normados real. Além disso, se A é convexo na primeira estrutura, é convexo na segunda de forma trivial; se é aberto (resp. fechado, sequencialmente compacto) na primeira, é aberto (resp. fechado, sequencialmente compacto) na segunda, pois essas propriedades dependem exclusivamente da métrica induzida pela norma.

O mapa $i: E \rightarrow E$ dado por $x \mapsto ix$ é uma \mathbb{C} (e \mathbb{R})-transformação linear que também é contínua, pois $\|I(x)\| = \|i\|\|x\| = 1$ para $\|x\| = 1$. Assim, se $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, o mapa $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{C}$, com E visto novamente como \mathbb{C} -espaço, e definido por $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - i\varphi(i(x))$ é \mathbb{R} -linear, satisfaz $\tilde{\varphi}(ix) = \varphi(ix) - i(\varphi(i(ix))) = \varphi(ix) - i\varphi(-x) = \varphi(ix) + i\varphi(x) = i(\varphi(x) - i\varphi(ix)) = i\tilde{\varphi}(x)$ e portanto é \mathbb{C} -linear. Além disso, $|\tilde{\varphi}(x)|^2 = |\varphi(x)|^2 + |\varphi(ix)|^2 \leq \|x\| + \|ix\| = 2\|x\|$ e portanto é um funcional contínuo.

a) Aplicando o caso real, existe um funcional contínuo $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ e um real a tal que $\varphi(x) < a \leq \varphi(y)$ para todos $x \in A$, $y \in B$. Portanto $\tilde{\varphi}$, como na construção anterior, é um funcional contínuo que satisfaz os requerimentos pois $\operatorname{Re}(\tilde{\varphi}) = \varphi$.

b) Aplicando o caso real, existe um funcional contínuo $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ e reais a, b tais que $\varphi(x) < a < b < \varphi(y)$ para todos $x \in A$, $y \in B$. Portanto $\tilde{\varphi}$, como na construção anterior, é um funcional contínuo que satisfaz os requerimentos pois $\operatorname{Re}(\tilde{\varphi}) = \varphi$. \square

Exercício 27 (3.6.27). Um *semi-espaço fechado* em um espaço normado real E é um conjunto da forma

$$\phi^{-1}([a, \infty)) = \{x \in E : \phi(x) \geq a\},$$

onde $\phi \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que todo subconjunto fechado e convexo de um espaço normado real é a interseção de todos os semi-espaços fechados que o contém.

Resolução. Sejam A fechado e convexo em E e \mathfrak{F} a família de semi-espaços fechados que o contém. Note que $E = \phi^{-1}([0, \infty))$, onde $\phi = 0$, e assim $E \in \mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

É claro que $A \subset \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$. Por outro lado, seja $x \in A^c$. Como $\{x\}$ é compacto, pela Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existem $\phi \in E'$, $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\phi(x) \leq a < b \leq \phi(y)$, para todo $y \in A$. Logo, $A \subset \phi^{-1}([b, \infty))$, mas $x \notin \phi^{-1}([b, \infty))$. Logo, $x \notin \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$, ou seja, $A^c \subset (\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F)^c \Leftrightarrow \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \subset A$. \square

Exercício 28 (3.6.28).

(a) Prove que o operador

$$\begin{aligned} T: \quad \ell_\infty &\rightarrow \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2) \\ (\alpha_n) &\mapsto T((\alpha_n))(\beta_n) = (\alpha_j \beta_j) \end{aligned}$$

é uma isometria linear.

(b) conclua que $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ não é separável.

Resolução. Que é linear, é imediato. Vamos provar que é uma isometria. Para isso, seja $(b_n) \in \ell_2$ com norma 1, segue que

$$\|T((a_n))(b_n)\|_2 \leq \|T(a_n)\|_{\mathcal{L}} \cdot \|(b_n)\|_2 \leq \sup \|a_n\| \cdot \|(b_n)\|_2 \leq \|a_n\|_\infty.$$

Assim, basta tomar $(a_n) = e_1$ e pode-se verificar que o sup é atingido, logo, $\|T(a_n)\| = \|(a_n)\|$. Outra maneira de ver é direto da definição

$$\|T((a_n))\|_{\mathcal{L}}^2 = \sup\{\|T((a_n))(b_n)\|_2^2; \|(b_n)\|_2 = 1\} = \sup\left\{\sum |a_j b_j|^2; \sum |b_j| = 1\right\} = \|a_n\|_\infty^2.$$

Agora, um espaço separável não contém um subespaço não separável (Prop 1.6.9), e como ℓ_∞ não é separável e T é isometria, segue que $\text{Im}(T)$ não é separável. \square

Exercício 29 (3.6.29). Prove que um subespaço vetorial M do espaço normado E é denso em E se, e somente se, o único funcional $\varphi \in E'$ que se anula em M é o funcional nulo

Resolução. (\rightarrow) Tome $\varphi \in E'$ que se anula em M . Dado $a \in E$, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em M que converge a a . Logo, como φ é contínua,

$$\varphi(a) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Portanto, φ é o funcional nulo.

(\leftarrow) Suponha, por absurdo, que $\overline{M} \neq E$. Portanto, existe $x \in E - \overline{M}$. Pelo Corolário 3.4.10, existe $\varphi \in E'$ com $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(M) = \{0\}$. Por hipótese, φ é o ideal nulo mas isso é uma contradição com $\varphi(x) = 1$. Dessa forma, provamos o desejado. \square

Exercício 30 (3.6.30). Sejam x e $(x_i)_{i \in I}$ vetores de um espaço normado E . Prove que $x \in \overline{[x_i \mid i \in I]}$ se, e somente se, $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_i) = 0$ para todo $i \in I$.

Resolução. Defina $M := [x_i \mid i \in I] \subseteq E$.

(\Rightarrow) Seja $y \in \overline{M}$, então existe $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \subset M$ sequência com $x_\alpha \rightarrow y$. Como $x_\alpha = \sum^{n_\alpha} \lambda_i x_i$, temos

$$\varphi(x_\alpha) = \varphi\left(\sum^{n_\alpha} \lambda_i x_i\right) = \sum^{n_\alpha} \lambda_i \varphi(x_i) = 0$$

para todo $\varphi \in E'$ com $\varphi(x_i) = 0 \forall i \in I$; e note que $\varphi(x_\alpha) \rightarrow 0$. Pela continuidade de φ , temos que $\varphi(x_\alpha) \rightarrow \varphi(y)$, então $\varphi(y) = 0$.

(\Leftarrow) Seja $y \in E$ com a propriedade que $\varphi(y) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ com $\varphi(x_i) = 0 \forall i \in I$. Suponha, por absurdo, que $y \in E - \overline{M}$. Então, pela **Proposição 3.3.1**, existe $\varphi \in E'$, $\|\varphi\| = 1$, de forma que $\varphi(y) = \text{dist}(y, \overline{M}) \neq 0$ e $\varphi(x) = 0 \forall x \in \overline{M}$. Pela última condição, $\varphi(x_i) = 0$ para todo $i \in I$, pois $x_i \in \overline{M}$, mas $\varphi(y) \neq 0$, levando à uma contradição. Logo, $y \in \overline{M}$. \square

Exercício 31 (3.6.31). Sejam K_1, \dots, K_n subconjuntos convexos do espaço normado real E , cada um deles contendo a origem, e sejam também c_1, \dots, c_n números reais positivos. Prove que se $x \in E$ e $\|x - c_1 x_1 - \dots - c_n x_n\| \geq \delta$ para algum $\delta > 0$ e todos $x_i \in K_i$, $i = 1, \dots, n$, então existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) > 1$ e $\varphi(y) \leq \frac{1}{c_i}$ para todos $i = 1, \dots, n$ e $y \in K_i$.

Resolução. Defina $K := \sum_{i=1}^n c_i K_i$. Como $0 \in K_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, segue que $0 \in K$. Além disso, K é convexo. De fato, dados $a, b \in K$ e $0 < t < 1$, temos que existem $y_i, z_i \in K_i$ para todo i tais que $a = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ e $b = \sum_{i=1}^n c_i z_i$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} ta + (1-t)b &= t \sum_{i=1}^n c_i y_i + (1-t) \sum_{i=1}^n c_i z_i \\ &= tc_1 y_1 + \dots + tc_n y_n + (1-t)c_1 z_1 + \dots + (1-t)c_n z_n \\ &= c_1(ty_1 + (1-t)z_1) + \dots + c_n(ty_n + (1-t)z_n) \in K, \end{aligned}$$

já que todos os K_i são convexos. Considerando então o fecho \overline{K} , temos que este também é convexo. Além disso, como $\|x - c_1 x_1 - \dots - c_n x_n\| \geq \delta$ para algum $\delta > 0$ e todos $x_i \in K_i$, temos que $x \notin \overline{K}$.

Temos então que \overline{K} é fechado e convexo e $\{x\}$ é fechado, convexo e compacto com $\overline{K} \cap \{x\} = \emptyset$. Aplicando a forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, sabemos que existem um funcional linear $\phi \in E'$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(y) < c < \phi(x) \text{ para todo } y \in \overline{K}.$$

Como $0 \in \overline{K}$ e $\phi(0) = 0$, segue que $c > 0$. Dessa forma, definindo $\varphi := \frac{\phi}{c} \in E'$, temos de imediato que $\varphi(x) > 1$. Por fim, dado qualquer $y \in K_i$, tem-se que $c_i y \in \overline{K}$, ou seja, $\varphi(c_i y) < 1 \implies \varphi(y) < \frac{1}{c_i}$. \square

4 Capítulo 4

Exercício 1 (4.5.1). Sem passar pelos espaços L_p , prove que, para $1 < p < \infty$, a relação de dualidade (4.1) de fato estabelece um isomorfismo isométrico entre $(l_p)'$ e $l_{p'}$.

Resolução. Lembramos que a relação $T : l_{p'} \rightarrow (l_p)'$ é dada por $T(b) = \phi_b$, onde $\phi_b(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$. Pela Desigualdade de Holder, ϕ_b está bem definido, e assim, ϕ_b é linear e

$$|\phi_b(a)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| = \|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_{p'}.$$

Ou seja, ϕ_b é contínuo e $\|\phi_b\| \leq \|b\|_{p'}$.

É claro também que $\phi_{b+\lambda b'} = \phi_b + \lambda \phi_{b'}$, para todos $b, b' \in l_{p'}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo, T é linear, e pela desigualdade acima, $\|T(b)\| \leq \|b\|_{p'}$, para todo $b \in l_{p'}$.

Para provar a igualdade, seja $a = (a_j)$ uma sequência tal que

$$a_j = \begin{cases} |b_j|^{p'-2} \overline{b_j}, & \text{se } b_j \neq 0. \\ 0, & \text{se } b_j = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p(p'-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p'} = \|b\|_{p'}^{p'},$$

ou seja, $a \in l_p$ e $\|a\|_p = \|b\|_{p'}^{p'/p} = \|b\|_{p'}^{p'-1}$. Também,

$$|\phi_b(a)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p'-2} \overline{b_j} b_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^{p'} \right| = \|b\|_{p'}^{p'} = \|a\|_p \|b\|_{p'}.$$

Logo, $\|\phi_b\| = \|b\|_{p'}$, para todo $b \in l_{p'}$, e assim, T é uma isometria.

Por fim, seja $\phi \in (l_p)'$. Defina $b_j = \phi(e_j)$, onde e_j é o j -ésimo vetor canônico de l_p . Note que, para todo $a \in c_{00} \subset l_p$, $ab \in l_1$ (pois essa soma é finita). Além disso, se $a \in c_{00}$, então

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \right| = \left| \sum_{j=1}^N a_j \phi(e_j) \right| = \left| \phi \left(\sum_{j=1}^N a_j e_j \right) \right| \leq \|\phi\| \left\| \sum_{j=1}^N a_j e_j \right\|_p = \|\phi\| \|a\|_p.$$

Logo, pela Recíproca da Desigualdade de Holder (Exercício 1.8.39), $b \in l_{p'}$. Além disso, é claro que, pela linearidade, $\phi(a) = \phi_b(a)$, para todo $a \in c_{00}$. Como $\overline{c_{00}} = l_p$, concluímos que $\phi = \phi_b$, ou seja, T é um isomorfismo. \square

Exercício 2 (4.5.2). Seja $1 < p < \infty$. Prove, sem usar reflexividade, que todo funcional contínuo em ℓ_p atinge a norma, isto é, para todo $\varphi \in (\ell_p)'$ existe $x \in \ell_p$ tal que $\|x\|_p = 1$ e $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Resolução. Seja q t.q. $1/p + 1/q = 1$. Sejam e_i a base (de Schauder) canônica $(e_i)_j = \delta_{ij}$ e $y_i := \varphi(e_i)$. Se $\|\varphi\| = 0$, que é o caso $y_i = 0 \ \forall i$, não há o que provar; tomemos $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\equiv 0$.

Se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, como φ é contínuo e linear, $\varphi(x) = \varphi(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Sempre podemos rearranjar os sinais dos elementos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mantendo a sequência em ℓ_p , de forma que a imagem por φ seja uma série em termos positivos e que a norma da sequência seja a mesma. Formalmente, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$ qualquer e

$$f : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{|y_n|}{y_n} |x_n| & \text{se } y_n \neq 0 \\ |x_n| & \text{se } y_n = 0 \end{cases}.$$

É claro que $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p$ (pois $|a_n| = |x_n|$) e, assim, temos $\frac{1}{\|a\|_p} \varphi(a) = \frac{1}{\|x\|_p} \varphi(a) = \frac{1}{\|x\|_p} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n|$; logo $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1$ e, da desigualdade triangular aplicada à série que define $\varphi(x)$, temos $|\varphi(x)| \leq \varphi(f(x))$ para todo $x \in E$.

Seja $N_k := (\sum_{i=1}^k |y_i|^q)^{1/q}$; tomamos, para cada $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (t.q. $\exists i \leq k$ com $y_i \neq 0$, i.e. $N_k \neq 0$), a sequência $r_k \in c_{00} \subseteq \ell_p \cap \ell_q$ t.q.

$$r_{k,n} = \begin{cases} \frac{|y_n|^{q/p}}{N_k^{q/p}}, & \text{se } n \leq k \\ 0, & \text{se } n > k \end{cases}.$$

É claro que $\|r_k\|_p = 1$. Assim, $\varphi(f(r_k)) = \frac{\sum_{n=1}^k |y_n|^{q/p+1}}{N_k^{q/p}}$. Mas como $1/p + 1/q = 1$, então $q/p + 1 = q$ e portanto a soma no numerador é N_k^q . Logo a última expressão é o mesmo que $N_k^q / N_k^{q/p} = N_k^{q(1-1/p)} = N_k^{q \cdot (1/q)} = N_k$. Em particular, isso mostra que a sequência (em k) N_k é crescente e limitada superiormente por $\|\varphi\| \|r_k\|_p = \|\varphi\|$, e portanto N_k^q também é crescente e limitada superiormente por $\|\varphi\|^q$; logo, N_k^q converge, i.e. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$. Então, pela desigualdade de Hölder, notamos que $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_p=1} \varphi(x) = \sup_{\|x\|_p=1} \varphi(f(x)) =$

$\sup_{\|x\|_p=1} \|x_n y_n\|_1 \leq \|y\|_q$. Portanto, tomando $z = \left(\left(\frac{y_n^{q/p}}{\|y\|_q^{p/q}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \in \ell^p$ e fazendo contas análogas às de $\varphi(f(r_k))$, notamos que $\varphi(f(z)) = \|y\|_q \geq \|\varphi\|$; pela nossa cota anterior. Como $|\varphi(f(z))| \leq \|\varphi\| \|f(z)\|_p = \|\varphi\|$, segue que $\|\varphi\| = \|y\|_q$. Com $x = f(z)$, temos $|\varphi(x)| = \varphi(x) = \|y\|_q = \|\varphi\|$; isto é, φ atinge máximo.

□

Exercício 3 (4.5.3). Sejam $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de escalares e $p \geq 1$. Suponha que, para toda sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ seja convergente. Prove que $a \in \ell_{\infty}$ se $p = 1$ e $a \in \ell_{p'}$ se $p > 1$.

Resolução. Defina $q = \infty$, se $p = 1$, e $q = p'$, se $p > 1$.

Seja $\psi_k : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ a transformação linear definida por $\psi_k((b_n)_n) = \sum_{n=1}^k a_n b_n$. Note que φ_k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, para todo $b \in \ell_p$, $\|b\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \|\psi_k(b)\| &= \left| \sum_{n=1}^k a_n b_n \right| \leq \sum_{n=1}^k |a_n| |b_n| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^k |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{n=1}^k |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^k |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \overbrace{\|b\|}^{\leq 1} \end{aligned}$$

(para o caso $q = \infty$, basta tomar $\max_{n \leq k} |a_n|$ ao invés da desigualdade de Holder e usar que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p$). Logo, $\|\psi\|$ é limitada em $B_{\ell_p} \implies \psi$ contínua $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\sum_{n=1}^k a_n b_n)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente, segue que é de Cauchy em \mathbb{K} . E como

$$\|\psi_m - \psi_n\| = |x_m - x_n|,$$

concluimos que $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em ℓ'_p , que é completo. Logo, $\psi_k \rightarrow \psi \in \ell_p$. E como $\hat{\psi} : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$, $b \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, é aplicação linear tal que

$$\|\hat{\psi}(b) - \phi_k(b)\| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \sum_{n=1}^k a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n b_n \right| \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

para todo $b \in \ell_p$, concluímos que $\psi = \hat{\psi}$.

Por fim, usando da correspondência da **Proposição 4.2.1**, concluímos que existe $x \in \ell_q$ tal que $\psi = \varphi_x \implies a = x \in \ell_q$. \square

Exercício 4 (4.5.4). Seja c o espaço das sequências escalares que são convergentes munido da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$. Prove que c é isomorfo a c_0 , conclua que c' é isomorfo a ℓ_1 e descreva a relação de dualidade obtida.

Resolução. Seja $(x_n) \in c$ com limite $x = \lim_n x_n$. Defina o operador

$$\begin{aligned} \varphi: \quad c &\rightarrow c_0 \\ (x_n) &\mapsto (x, x_1 - x, x_2 - x, \dots). \end{aligned}$$

Note que, φ tem um inverso natural

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \quad c_0 &\rightarrow c \\ (x_n) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, \dots). \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi^{-1}(x_n) &= \varphi(x_1 + x_2, x_1 + x_3, \dots) = (x_1, x_1 + x_2 - x_1, x_1 + x_3 - x_1, \dots) = (x_n); \\ \varphi^{-1} \circ \varphi(x_n) &= \varphi^{-1}(0, x_1, x_2, \dots) = (x_n). \end{aligned}$$

Além disso, tanto φ quanto φ^{-1} são funções limitadas, pois

$$\|\varphi(x_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|(x, x_1 - x, \dots)|) \leq |x| + \sup |x_n| \leq 2\|(x_n)\|,$$

Pois $\lim x_n \leq \|(x_n)\|$. Análogo para φ^{-1} . \square

Exercício 5 (4.5.5). Seja $\varphi \in (\ell_\infty)'$. Prove que a série $\sum_n |\varphi(e_n)|$ é convergente e que sua soma é menor ou igual a $\|\varphi\|$.

Resolução. Observe que, todo funcional linear de ℓ_∞ pode ser restrito a c_0 . Portanto, como $(c_0)'$ é isometricamente isomorfo a ℓ_1 pelo isomorfismo isométrico

$$b = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1 \mapsto \varphi_b \in (c_0)', \quad \varphi_b((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j, \quad \forall (a_j)_{j=1}^\infty \in c_0,$$

segue que existe $b = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$ tal que $\varphi|_{c_0} = \varphi_b$. Assim,

$$\sum_{n=1}^\infty |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^\infty |\varphi_b(e_n)| = \sum_{n=1}^\infty \left| \left(\sum_{j=1}^\infty b_j \delta_{nj} \right) \right| = \sum_{n=1}^\infty |b_n| \leq \infty,$$

pois $b \in \ell_1$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ onde

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{\varphi(e_j)}{|\varphi(e_j)|}, & \text{se } \varphi(e_j) \neq 0 \text{ e } j \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim $|\alpha_j| \leq 1$ e se $j \leq n$ for tal que $\varphi(e_j) \neq 0$, então

$$\alpha_j \varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|.$$

Trivialmente, a equação anterior vale se $\varphi(e_j) = 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\varphi(e_j)| &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(e_j) \\ &= \varphi \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) \\ &\leq \|\varphi\| \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\| \\ &= \|\varphi\| \max\{|\alpha_j|; j \in \{1, \dots, n\}\} \\ &\leq \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)| \leq \|\varphi\|.$$

Observação 5.1. Para mostrar que a série é convergente, bastaria mostrar que é limitada por $\|\varphi\|$, que é finito pois $\varphi \in (\ell_{\infty})'$. □

Exercício 6 (4.5.6). Prove, sem usar reflexividade, que c_0 e ℓ_p , $1 < p < \infty$, não contém subespaço isomorfo a ℓ_1 .

Resolução. Suponha por contradição que c_0 contenha algum subespaço F isomorfo a ℓ_1 . Assim, existe um operador linear $T : F \rightarrow \ell_1$ bijetivo. Pela proposição 4.3.11, implica que $T' : (\ell_1)' \rightarrow (F)'$ também é bijetivo. Como $\ell_{\infty} = (\ell_1)'$, temos que $(F)' \simeq \ell_{\infty}$ e, conseqüentemente, $(F)'$ não é separável, pois ℓ_{∞} não é separável (exemplo 1.6.5). Pelo exercício 3.6.15 implica que $\ell_1 = (c_0)'$ não é separável, o que é um absurdo. Portanto, c_0 não contém subespaço isomorfo a ℓ_1 . De forma análoga mostra-se para o caso de ℓ_p , $1 < p < \infty$. □

Exercício 7 (4.5.7). Sejam $1 < p < \infty$ e $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Defina

$$(\sum E_n)_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in E_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Prove que $((\sum E_n)_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach e que $((\sum E_n)_p)'$ é isometricamente isomorfo a $(\sum E_n')_{p'}$.

Exercício 8 (4.5.8). Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e E um espaço de Banach. Defina

$$l_p(E) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e } \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

com a modificação óbvia no caso $p = \infty$. Prove que:

(a) $(l_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

(b) Para $1 \leq p < \infty$, $l_p(E)'$ é isometricamente isomorfo a $l_{p'}(E')$.

Exercício 9 (4.5.9). Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função $g_n \in L_\infty[0, 1]$ tal que

$$p(0) + p'(0) - 3p''(1) = \int_0^1 p(t)g_n(t)dt,$$

para todo polinômio p de grau menor ou igual a n . Prove ainda que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L_1[0,1]} = +\infty.$$

Resolução. Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, considere o subespaço $P_n \subseteq L_1[0, 1]$ dos polinômios de grau menor ou igual a n . Para $p \in P_n$, defina $\varphi : P_n \rightarrow \mathbb{K}$ por $\varphi(p) = p(0) + p'(0) - 3p''(1)$. Temos que φ é linear. De fato, dados $p, q \in P_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \varphi(p + \lambda q) &= (p + \lambda q)(0) + (p + \lambda q)'(0) - 3(p + \lambda q)''(1) \\ &= p(0) + \lambda q(0) + (p' + \lambda q')(0) - 3(p'' + \lambda q'')(1) \\ &= p(0) + \lambda q(0) + p'(0) + \lambda q'(0) - 3p''(1) - 3\lambda q''(1) \\ &= p(0) + p'(0) - 3p''(1) + \lambda q(0) + \lambda q'(0) - 3\lambda q''(1) \\ &= \varphi(p) + \lambda \varphi(q). \end{aligned}$$

Como P_n tem dimensão finita, o exercício 2.7.2 garante que a aplicação φ é contínua. Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão de φ para $L_1[0, 1]$ que preserva a norma. Uma vez estendido para $L_1[0, 1]$, sabemos que a relação de dualidade garante a existência de uma função $g_n \in L_\infty[0, 1]$ tal que

$$\varphi(p) = p(0) + p'(0) - 3p''(1) = \int_0^1 p(t)g_n(t)dt.$$

Com esse fato demonstrado, dado $n \in \mathbb{N}$, considere o polinômio $p_n(t) = \frac{t^n}{n+1} \in L_1[0, 1]$. Temos:

$$|\varphi(p_n)| = \left| \frac{0^n}{n+1} + n \cdot \frac{0^{n-1}}{n+1} - 3n(n-1) \frac{1^{n-2}}{n+1} \right| = \frac{3n(n-1)}{n+1}.$$

E também

$$|\varphi(p_n)| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} \cdot g_n(t)dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} \cdot |g_n(t)|dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n \cdot |g_n(t)|dt.$$

Juntando esses dois fatos com a observação de que $t \in [0, 1]$ implica $t^n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$3n(n-1) \leq \int_0^1 t^n \cdot |g_n(t)|dt \leq \int_0^1 |g_n(t)|dt = \|g_n\|_{L_1[0,1]}.$$

Como $3n(n-1) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, essa desigualdade implica diretamente o resultado procurado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L_1[0,1]} = +\infty.$$

□

Exercício 10 (4.5.10). Considere os conjuntos

$$L := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ e } |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|, \forall x, y \in [0, 1]\},$$

$$S := \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : g(t) = \sum_{i=2}^{100} \lambda_i t^{1/i}, \lambda_i \geq 0, \forall i \text{ e } \sum_{i=2}^{100} \lambda_i = 1\}.$$

Mostre que existe uma função $\phi \in L_\infty[0, 1]$ tal que

$$\sup_{f \in L} \int_0^1 f(t)\phi(t)dt < \inf_{g \in S} \int_0^1 g(t)\phi(t)dt.$$

Exercício 11 (4.5.11). Seja E um espaço normado. Prove que o conjunto $J_E(E)$ separa pontos de E' , isto é, dados $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, existe $f \in J_E(E)$ tal que $f(\varphi_1) \neq f(\varphi_2)$.

Resolução. Recordamos quem é o mapa J_E : para cada $x \in E$, $J_E(x) \in E''$ é o funcional que manda $\phi \in E'$ para $\varphi(x) \in \mathbb{K}$. Assim, se $\varphi_1 \neq \varphi_2$, então $\phi = \varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$; ou seja, existe $x \in E$ tal que $\phi(x) \neq 0$. Mas $\phi(x) = J_E(x)(\phi) = J_E(x)(\varphi_1) - J_E(x)(\varphi_2) \neq 0$. Tomando $f = J_E(x) \in J_E(E)$, segue. \square

Exercício 12 (4.5.12). Seja B um subconjunto de um espaço normado E tal que $\varphi(B)$ é limitado para cada $\varphi \in E'$. Mostre que B é limitado.

Resolução. Da hipótese, para cada $\varphi \in E'$, existe $c_\varphi \in \mathbb{K}$ tal que

$$|\varphi(x)| \leq c_\varphi, \quad \forall x \in B.$$

Assim, temos que,

$$|J_E(x)(\varphi)| \leq c_\varphi, \quad \forall x \in B.$$

Como cada operador $J_E(x) \in \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ (que é um espaço de Banach), podemos utilizar o Teorema de Banach-Steinhaus. Para isso, basta considerar a família de operadores $\{J_E(x) : x \in B\}$ em $\mathcal{L}(E', \mathbb{K})$. Assim,

$$\sup_{x \in B} \|J_E(x)\| < \infty.$$

Como J_E é uma isometria, segue que, para cada $x \in B$,

$$\|x\| = \|J_E(x)\| \leq \sup_{x \in B} \|J_E(x)\| < \infty.$$

Portanto, B é um conjunto limitado. \square

Exercício 13 (4.5.13). Sejam F e G subespaços fechados do espaço de Banach E tais que $E = F \oplus G$. Prove que:

- (a) $E' = F^\perp \oplus G^\perp$;
- (b) E' contém cópias isométricas complementadas de F' e G' ;
- (c) E' é isomorfo isometricamente a $(F' \times G', \|\cdot\|_1)$.

Exercício 14 (4.5.14). Sejam E um espaço normado, \hat{E} seu complemento e F um espaço de Banach. Prove que os espaços $\mathcal{L}(E, F)$ e $\mathcal{L}(\hat{E}, F)$ são isomorfos isometricamente. Em particular, $(\hat{E})' = E'$

Resolução. Definamos o operador

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathcal{L}(\hat{E}, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ T &\mapsto \Phi(T) = T|_E. \end{aligned}$$

- Φ é linear. Além disso, pelo exercício 2.7.5 implica que para cada $T \in \mathcal{L}(\hat{E}, F)$ tem-se $\|T\| = \|T|_E\|$. Vamos provar que Φ é uma isometria. Assim,

$$\|\Phi(T)\| = \sup_{x \in B_{\hat{E}}} \|\Phi(T)(x)\| = \sup_{x \in B_E} \|T|_E(x)\| = \|T|_E\| = \|T\|,$$

o que implica que Φ é uma isometria.

- Φ é sobrejetiva, pois dado $T|_E \in \mathcal{L}(E, F)$ consideramos a sua extensão contínua (exercício 2.7.5) $T \in \mathcal{L}(\hat{E}, F)$. Assim, $\Phi(T) = T|_E$ o que implica que Φ é sobrejetiva.

A segunda parte da questão segue diretamente da primeira. Se Φ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(\hat{E}, F)$ e $\mathcal{L}(E, F)$, então $(\hat{E})' = \mathcal{L}(\hat{E}, \mathbb{K})$ e $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ também são isomorfos isometricamente. \square

Exercício 15 (4.5.15). Seja M um subespaço fechado do espaço normado E . Prove que

(a) $M \subset (M^\perp)^\perp$.

(b) Se E é reflexivo, então $(M^\perp)^\perp = M$.

Resolução. a) Seja $x \in M$. Então, para todo $\phi \in M^\perp$, $\phi(x) = 0$. Assim,

$$J_E(x)(\phi) = \phi(x) = 0, \forall \phi \in M^\perp.$$

Portanto, $J_E(x) \in (M^\perp)^\perp$. Como J_E é uma isometria, temos que $M \cong J_E(M) \subset (M^\perp)^\perp$.

b) Seja $T \in (M^\perp)^\perp \subset E''$. Como E é reflexivo, existe $x \in E$ tal que $T = J_E(x)$. Assim,

$$J_E(x) \in (M^\perp)^\perp \Leftrightarrow J_E(x)(\phi) = 0, \forall \phi \in M^\perp \Leftrightarrow \phi(x) = 0, \forall \phi \in M^\perp.$$

Suponha, por absurdo, que $x \notin M$. Logo, existe $\psi \in E'$ tal que $\psi|_M = 0$ e $\psi(x) = 1$. Logo, $\psi \in M^\perp$, mas $\psi(x) \neq 0$, o que é uma contradição. Logo, $x \in M$, e portanto, $(M^\perp)^\perp \subset J_E(M) \cong M$. \square

Exercício 16 (4.5.16). Determine os adjuntos $T' : l_\infty \rightarrow l_\infty$ dos seguintes operadores $T : l_1 \rightarrow l_1$:

(a) $T((a_1, a_2, \dots)) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$, onde $n \in \mathbb{N}$ está fixado.

(b) $T((a_n)) = (b_n a_n)$, onde $(b_n) \in B_{l_\infty}$ está fixada.

Resolução. a) Sejam $c \in l_\infty$ e $d = T'(c)$. Logo, para todo $a \in l_1$,

$$T'(c)(a) = c(T(a)) \Leftrightarrow d(a) = c(a_1, \dots, a_n, 0, \dots) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} d_j a_j = \sum_{j=1}^n c_j a_j$$

Tomando $a = e_i$, concluímos que

$$d_i = \begin{cases} c_i, & \text{se } i \leq n. \\ 0, & \text{se } i > n \end{cases}$$

Logo, $T'(c) = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots)$.

b) Analogamente ao item (a),

$$T'(c)(a) = c(T(a)) \Leftrightarrow d(a) = c((b_j a_j)_j) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} d_j a_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j b_j a_j.$$

Tomando $a = e_i$, concluímos que $d_i = c_i b_i$, ou seja, $T'(c) = cb$. \square

Exercício 17 (4.5.17). Sejam $1 \leq p < \infty$ e $g \in L_\infty[0, 1]$. Defina:

$$\begin{aligned} T_g : L_p[0, 1] &\longrightarrow L_p[0, 1] \\ f &\longmapsto f \cdot g \end{aligned}$$

(a) Prove que $T_g \in \mathcal{L}(L_p[0, 1], L_p[0, 1])$ e $\|T_g\| = \|g\|_\infty$;

(b) Prove que, enxergando $T'_g : \mathcal{L}_{p'}[0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_{p'}[0, 1]$, T'_g tem a mesma lei de formação, isto é, $T'_g(f) = f \cdot g$ para toda $f \in \mathcal{L}_{p'}[0, 1]$;

(c) Conclua que $T'_g = T_g$ no caso $p = 2$.

Resolução. (a) É fácil ver que T_g é linear. Agora, dado $f \in L_p[0, 1]$, temos que:

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|_p &= \|f \cdot g\|_p = \left(\int_{[0,1]} |f \cdot g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{[0,1]} |f|^p \cdot |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{[0,1]} |f|^p \cdot \|g\|_\infty^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = (\|g\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[0,1]} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_\infty \|f\|_p. \end{aligned}$$

Dessa forma, $T_g \in \mathcal{L}(L_p[0, 1], L_p[0, 1])$ e $\|T_g\| \leq \|g\|$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $A \subset [0, 1]$ de medida não nula com $|g(x)| > \|g\| - \varepsilon$, para todo $x \in A$. Sabendo que $0 < \mu(A) \leq 1$, podemos tomar $f = \chi_A$, onde $\chi_A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função característica de A . Logo,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f|^p &= \int_{[0,1]} |\chi_A|^p d\mu = \left(\int_{[0,1]-A} |\chi_A|^p d\mu \right) + \left(\int_A |\chi_A|^p d\mu \right) \\ &= 0 + \left(\int_A 1^p d\mu \right) = \int_A 1 d\mu = \mu(A). \end{aligned}$$

Portanto, $f \in \mathcal{L}_p[0, 1]$ e $\|f\|_p = \mu(A)^{\frac{1}{p}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|^p &= \int_{[0,1]} |f \cdot g|^p d\mu = \int_{[0,1]} |\chi_A \cdot g|^p d\mu = \left(\int_{[0,1]-A} |\chi_A \cdot g|^p d\mu \right) + \left(\int_A |\chi_A \cdot g|^p d\mu \right) \\ &= \left(\int_{[0,1]-A} |0 \cdot g|^p d\mu \right) + \left(\int_A |1 \cdot g|^p d\mu \right) = 0 + \left(\int_{[0,1]-A} |0 \cdot g|^p d\mu \right) + \left(\int_A |g|^p d\mu \right) \\ &\geq \left(\int_A (\|g\|_\infty - \varepsilon)^p d\mu \right) = (\|g\|_\infty - \varepsilon)^p \cdot \mu(A). \end{aligned}$$

Desse modo, $\|T_g(f)\| \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot (\mu(A))^{\frac{1}{p}} = (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \|f\|_p$, provando que $\|T_g\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, $\|T_g\| \geq \|g\|$. Provamos assim que $\|T_g\| = \|g\|$.

(b) Pelo Teorema 4.1.2, temos o isomorfismo isométrico:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : L_{p'}[0, 1] & \rightarrow & (L_p[0, 1])' \\ h & \mapsto & \varphi_h : \begin{array}{ccc} L_p[0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0,1]} f \cdot h d\mu \end{array} \end{array}.$$

Vamos provar que $\varphi^{-1} \circ T'_g \circ \varphi : L_{p'}[0, 1] \rightarrow L_{p'}[0, 1]$ tem a mesma lei de formação que T , ou seja, para $f \in L_{p'}[0, 1]$,

$$\varphi^{-1} \circ T'_g \circ \varphi(f) = f \cdot g.$$

Note que, para $f \in L_{p'}[0, 1]$ e $h \in L_p[0, 1]$,

$$\begin{aligned} (T'_g \circ \varphi(f))(h) &= (T'_g(\varphi(f)))(h) = (\varphi(f) \circ T_g)(h) = \varphi_f(T_g(h)) = \varphi_f(h \cdot g) \\ &= \int_{[0,1]} (h \cdot g) \cdot f d\mu = \int_{[0,1]} h \cdot (f \cdot g) d\mu \\ &= \varphi_{fg}(h). \end{aligned}$$

Portanto, $T'_g \circ \varphi(f) = \varphi_{fg} = \varphi(fg)$. Dessa forma, $\varphi^{-1} \circ T'_g \circ \varphi(f) = \varphi^{-1}(\varphi(fg)) = fg$. Assim, provamos o desejado.

(c) No caso $p = 2$, temos que $\varphi : L_2[0, 1] \rightarrow (L_2[0, 1])'$ e portanto $\varphi^{-1} \circ T'_g \circ \varphi : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ e $T_g : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ possuem a mesma lei de formação. Então $T_g = \varphi^{-1} \circ T'_g \circ \varphi$. \square

Exercício 18 (4.5.18). Sejam E e F espaços normados. Prove que a correspondência $T \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto T' \in \mathcal{L}(F', E')$ é um isomorfismo isométrico sobre a sua imagem.

Resolução. **É injetivo:** Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T' \equiv 0$, então

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) = 0, \quad \forall \varphi \in F', x \in E.$$

Tome $\varphi = \|\cdot\|_F$, então $\|T(x)\| = 0$ para todo $x \in E \iff T(x) = 0 \forall x \in E \iff T \equiv 0$. Ou seja, é isomorfismo na imagem.

É isometria: Pela **Proposição 4.3.11**, sabemos que $\|T\| = \|T'\|$ em seus respectivos espaços, logo é isometria. \square

Exercício 19 (4.5.19). Sejam E, F, G espaços normados. Dados $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $U \in \mathcal{L}(F, G)$, mostre que $(U \circ T)' = T' \circ U'$.

Resolução. Primeiramente, observe que

$$T' : F' \longrightarrow E', \quad U' : G' \longrightarrow F'$$

Afirmção 1: $(U \circ T)'$ e $T' \circ U'$ têm o mesmo domínio.

De fato,

$$U : F \longrightarrow G \text{ e } T : E \longrightarrow F \implies U \circ T : E \longrightarrow G \implies (U \circ T)' : G' \longrightarrow E'.$$

e,

$$G' \xrightarrow{U'} F' \xrightarrow{T'} E' \implies T' \circ U' : G' \longrightarrow E'.$$

Afirmção 2: $(U \circ T)'$ e $T' \circ U'$ são iguais em todos os pontos.

De fato, como

$$T' : F' \longrightarrow E' \text{ é definida por } T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)), \quad \forall \varphi \in F' \text{ e } x \in E$$

e

$$U' : G' \longrightarrow F' \text{ é definida por } U'(\psi)(y) = \psi(U(y)), \quad \forall \psi \in G' \text{ e } y \in F,$$

então

$$T' \circ U' : G' \longrightarrow E' \text{ é definida por } (T' \circ U')(\psi)(x), \quad \forall \psi \in G' \text{ e } x \in E.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (T' \circ U')(\psi)(x) &= T'(U'(\psi))(x) \\ &= U'(\psi)(T(x)) \\ &= \psi(U(T(x))) \\ &= \psi(U \circ T(x)) \\ &= (U \circ T)'(\psi)(x), \quad \forall \psi \in G', \forall x \in E. \end{aligned}$$

\square

Exercício 20 (4.5.20). Sejam E, F espaços de Banach. Dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, prove que T'' é uma extensão de T a E'' no sentido de que $T'' \circ J_E = J_F \circ T$. Em particular, $T''(J_E(E)) \subseteq J_F(F)$ e $T = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E$ onde $J_F^{-1} : J_F(F) \rightarrow F$.

Resolução. Seja $x \in E$ e tome $\psi \in F'$. Então

$$\begin{aligned} T''(J_E(x))(\psi) &= J_E(x)(T'(\psi)) \\ &= T'(\psi)(x) \\ &= \psi(T(x)) \\ &= J_F(T(x))(\psi) \\ &= (J_F \circ T)(x)(\psi). \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de ψ e x , segue que

$$T'' \circ J_E = J_F \circ T.$$

Com isso, segue diretamente que

$$T''(J_E(E)) \subseteq J_F(F).$$

Mais ainda, J_F é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, $J_F(F)$. Dessa forma, uma vez que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, segue que

$$T = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E.$$

□

Exercício 21 (4.5.21). Sejam E e F espaços normados com E reflexivo e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Prove que $T'' = T$.

Resolução. Sendo E reflexivo, segue que para todo $\varphi \in E''$, há apenas um $x_\varphi \in E$ correspondente tal que $J_E(x_\varphi) = \varphi$. Considerando a restrição adequada, podemos tomar a função inversa $J_F^{-1} : J_F(F) \rightarrow F$. Pelo exercício 4.5.20, $T''(E'') = T''(J_E(E)) \subseteq J_F(F)$, ou seja, podemos calcular

$$J_F^{-1}(T''(\varphi)) = J_F^{-1}(T''(J_E(x_\varphi))).$$

Aplicando novamente o exercício 4.5.20, segue que

$$J_F^{-1}(T''(\varphi)) = J_F^{-1}(T''(J_E(x_\varphi))) = T(x_\varphi),$$

donde concluímos que $T'' = T$.

□

Exercício 22 (4.5.22). Sejam E, F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Prove que se T tem inversa $T^{-1} : F \rightarrow E$ contínua, então T' tem inversa $(T')^{-1} : E' \rightarrow F'$ contínua e $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Resolução. Como T^{-1} é contínua, temos que $(T^{-1})' \in \mathcal{L}(E', F')$. Além disso, pelo Exercício 4.5.19, $T' \circ (T^{-1})' = (T^{-1} \circ T)' = (Id_E)'$ e $(T^{-1})' \circ T' = (T \circ T^{-1})' = (Id_F)'$. Agora, note que:

$$\begin{aligned} (Id_E)' : E' &\longrightarrow E' \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ Id_E = \varphi. \end{aligned}$$

Assim, $(Id_E)' = Id_{E'}$. Analogamente, $(Id_F)' = Id_{F'}$. Portanto, $T' \circ (T^{-1})' = Id_{E'}$ e $(T^{-1})' \circ T' = Id_{F'}$.

□

Exercício 23 (4.5.23). Seja E um espaço normado. Prove que $T \in L(E, E)$ é uma projeção se, e somente se, $T' \in L(E', E')$ é uma projeção.

Resolução. Se T é uma projeção, então $T^2 = T$. Logo, pelo Exercício 4.5.19, $T' = (T^2)' = T' \circ T'$, ou seja, T' é uma projeção.

Reciprocamente, suponha que T' é uma projeção. Suponha, por contradição, que $T^2 \neq T$, ou seja, existe $y \in E$ tal que $z = (T^2 - T)(y) \neq 0$. Logo, existe $\phi \in E'$ tal que $\psi(z) \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} T' \circ T' = T' &\Leftrightarrow (T^2)' = T' \\ &\Leftrightarrow (T^2 - T)' = 0 \\ &\Leftrightarrow (T^2 - T)'(\phi) = 0, \forall \phi \in E' \\ &\Leftrightarrow (T^2 - T)'(\phi)(x) = 0, \forall x \in E, \phi \in E' \\ &\Leftrightarrow \phi((T^2 - T)(x)) = 0, \forall x \in E, \phi \in E' \end{aligned}$$

Mas em particular para $\phi = \psi$ e $x = y$, $\psi((T^2 - T)(y)) = \psi(z) \neq 0$, o que é uma contradição. Logo, $T^2 = T$.

□

Exercício 24 (4.5.24). (a) Seja B um subconjunto do dual E' do espaço normado E . Prove que

$${}^{\perp}B := \{x \in E : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \varphi \in B\}$$

é um subespaço fechado de E .

(b) Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Prove que $\ker(T) = {}^{\perp}(T'(F'))$ e $\ker(T') = (T(E))^{\perp}$

Resolução. (a) Observe que

$${}^{\perp}B = \bigcap_{\varphi \in B} \ker(\varphi).$$

Como cada $\varphi \in B \subset E'$, segue que $\ker(\varphi)$ é um subespaço fechado de E . Portanto, ${}^{\perp}B$ é intersecção de subespaços fechados, e assim, é um conjunto fechado.

Além disso, se $x, y \in {}^{\perp}B$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda \varphi(y) = 0, \quad \forall \varphi \in B.$$

Ou seja, $x + \lambda y \in {}^{\perp}B$. Dessa forma, ${}^{\perp}B$ é um subespaço fechado de E .

(b) • $\ker(T) = {}^{\perp}(T'(F'))$:

Seja $x \in \ker(T)$. Tome $\varphi \in T'(F')$. Daí, existe $\psi \in F'$ tal que $T'(\psi) = \varphi$. Assim,

$$\varphi(x) = T'(\psi)(x) = \psi(T(x)) = \psi(0) = 0.$$

Da arbitrariedade de φ , segue que $x \in {}^{\perp}(T'(F'))$ e portanto,

$$\ker(T) \subseteq {}^{\perp}(T'(F')).$$

Por outro lado, seja $x \in {}^{\perp}(T'(F'))$. Para cada $\psi \in F'$ tal que $\|\psi\| \leq 1$, temos que

$$|\psi(T(x))| = |T'(\psi)(x)| = 0,$$

pois, $T'(\psi) \in T'(F')$. Assim,

$$\|T(x)\| = \sup_{\psi \in B_{F'}} |\psi(T(x))| = 0.$$

Logo, $T(x) = 0$, e dessa forma, $x \in \ker(T)$. Portanto,

$$\ker(T) = {}^{\perp}(T'(F')).$$

• $\ker(T') = (T(E))^{\perp}$:

Seja $\psi \in \ker(T')$. Dado $y \in T(E)$, existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Então,

$$\psi(y) = \psi(T(x)) = T'(\psi)(x) = 0.$$

Assim,

$$\psi \in \psi \in F' : \psi(y) = 0, \quad \forall y \in T(E) =: (T(E))^{\perp}.$$

Dessa forma, mostramos que

$$\ker(T') \subseteq (T(E))^{\perp}.$$

Por outro lado, seja $\psi \in (T(E))^{\perp}$. Se $x \in E$,

$$T'(\psi)(x) = \psi(T(x)) = 0,$$

pois $T(x) \in T(E)$ e $\psi \in (T(E))^{\perp}$. Da arbitrariedade de $x \in E$, segue que $T'(\psi) = 0$ e portanto, $\psi \in \ker(T')$. Com isso, temos que

$$\ker(T') = (T(E))^{\perp}.$$

□

Exercício 25 (4.5.25). Seja E um espaço normado. Prove que:

- (a) $(J_E)' \circ J_{E'} = Id_{E'}$.
- (b) $(J_E)' : E''' \rightarrow E'$ é sobrejetivo.
- (b) E' é complementado em E''' .

Resolução. a) Note que $J_{E'} : E' \rightarrow E'''$, onde, $\forall \phi \in E'$, $J_{E'}(\phi) : E'' \rightarrow \mathbb{K}$ é definido por $J_{E'}(\phi)(T) = T(\phi)$. Também, $J_E \in L(E, E'')$, o que implica que $J'_E \in L(E''', E')$, e assim $J'_E \circ J_{E'} \in L(E', E')$. Daí, para todos $\phi \in E'$, $x \in E$,

$$\begin{aligned} [J'_E \circ J_{E'}(\phi)](x) &= J'_E(J_{E'}(\phi)(x)) \\ &= J_{E'}(\phi)(J_E(x)) \\ &= J_E(x)(\phi) \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

Assim, $J'_E \circ J_{E'}(\phi) = \phi$, para todo $\phi \in E'$, ou seja, $J'_E \circ J_{E'} = Id_{E'}$.

b) Direto do item (a).

c) Defina $S = J_{E'} \circ J'_E : E''' \rightarrow E'''$. Logo, S é contínua, e, pelo item (a),

$$S^2 = J_{E'} \circ J'_E \circ J_{E'} \circ J'_E = J_{E'} \circ Id_{E'} \circ J'_E = J_{E'} \circ J'_E = S.$$

Ou seja, S é uma projeção, com $Img(S) \subset J_{E'}(E')$. Mas, de fato, para todo $\phi \in E'$,

$$S(J_{E'}(\phi)) = J_{E'} \circ J'_E \circ J_{E'}(\phi) = J_{E'} \circ Id_{E'}(\phi) = J_{E'}(\phi).$$

Logo, $Img(S) = J_{E'}(E')$. Portanto, $E' \cong J_{E'}(E')$ é complementado em E''' .

□

Exercício 26 (4.5.26). Seja E um espaço normado. Prove que:

- (a) Existe um espaço normado F tal que E é isomorfo isometricamente a F' se, e somente se, existe um espaço de Banach G tal que E é isomorfo isometricamente a G' . Nesse caso diz-se que E é um espaço dual.
- (b) Se E é um espaço dual, então E é completado no seu bidual E'' . Use que c_0 não é completado em ℓ_∞ para concluir que c_0 não é dual.

Resolução.

- (a) A volta é imediata. Para a ida, basta considerar o completamento de F , que é Banach e que, pelo exercício 4.5.14 tem seus espaços duais isomorfos.
- (b) Se E é um espaço dual, então existe um espaço normado F tal que E e F' são isomorfos isometricamente. Logo, E'' é isomorfo isometricamente a F''' . Pelo Exercício 4.5.25, F' é complementado em F''' . Logo, E é complementado em E'' .

□

Exercício 27 (4.5.27). Prove que todo espaço normado isomorfo a um reflexivo também é reflexivo.

Resolução. Sejam E reflexivo e $T : E \rightarrow F$ um isomorfismo. Dado $\psi \in F''$, Pela proposição 4.3.11 $T'' : E'' \rightarrow F''$ é um isomorfismo, em particular, $(T'')^{-1}(\psi) \in E''$. Como J_E é um isomorfismo isométrico, então existe $x \in E$ tal que

$$J_E(x) = (T'')^{-1}(\psi) \implies T''(J_E(x)) = \psi.$$

Agora, provemos que $J_F(T(x)) = T''(J_E(x))$. Com efeito, para todo funcional $f \in F'$, temos que

$$\psi(f) = T''(J_E(x))(f) = J_E(x)(T'(f)) = T'(f)(x) = f(T(x)) = J_F(T(x))(f).$$

Logo, $J_F(T(x)) = T''(J_E(x))$, como queríamos. □

Exercício 28 (4.5.28). Seja E um espaço reflexivo. Prove que todo funcional linear contínuo em E atinge a norma, isto é, para todo $\varphi \in E'$, existe $x \in E$, $\|x\| = 1$, tal que $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Resolução. Para $\varphi \in E'$, pelo Corolário 3.1.4, existe $\psi \in E''$ com $\|\psi\| = 1$ e $\psi(\varphi) = \|\varphi\|$. Uma vez que E é reflexivo, existe $x \in E$ com $J_E(x) = \psi$. Assim, $\|x\| = \|J_E(x)\| = \|\psi\| = 1$ e:

$$\|\varphi\| = \psi(\varphi) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

como desejado. □

Exercício 29 (4.5.29). Prove que o subespaço fechado $E = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$ de $C[0, 1]$, estudado no Exercício 1.8.34, não é reflexivo.

Resolução. Suponha, por absurdo, que E é reflexivo. Considere

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow \mathbb{R}. \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

Como todo $f \in C[0, 1]$ é contínuo e $[0, 1]$ é compacto, ϕ está bem definido e é linear. Também,

$$|\phi(f)| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty.$$

Logo, $\phi \in E'$ e $\|\phi\| \leq 1$. De fato, $f_n(x) = x^{1/n} \in E$, $\|f_n\|_\infty = 1$ e

$$\phi(f_n) = \int_0^1 x^{1/n} dx = \left[\frac{n}{n+1} x^{(n+1)/n} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim, $\|\phi\| = 1$. Pelo Exercício 4.5.28, como E é reflexivo, existe $f \in E$, $\|f\|_\infty = 1$, tal que $\phi(f) = 1$. Mas como $f(0) = 0$ e $0 \leq |f| \leq 1$ é contínua,

$$1 = \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx < \int_0^1 1 dx = 1,$$

o que é uma contradição. Logo, E não é reflexivo. □

Exercício 30 (4.5.30). Sejam E e F espaços de Banach. No produto cartesiano considere qualquer uma das normas usuais (veja Exercício 1.8.12).

- (a) Prove que $E' \times F'$ é isomorfo a $(E \times F)'$.
- (b) Prove que se E e F são reflexivos então $E \times F$ é reflexivo.

Resolução. a) Vamos considerar a norma no produto cartesiano dada pela soma das normas. Considere os mapas $R: (E \times F)' \rightarrow E' \times F'$ e $S: E' \times F' \rightarrow (E \times F)'$ dados por

$$\begin{cases} R(f) = (f_E, f_F), & f_E = x \in E \mapsto f(x, 0), \quad f_F = y \in F \mapsto f(0, y) \\ S(f, g) = ((x, y) \mapsto f(x) + g(y)) \end{cases}$$

São mapas bem definidos – são claramente lineares, e como $\frac{|f_E(x)|}{\|x\|_E} = \frac{|f(x,0)|}{\|(x,0)\|} \leq \|f\| < \infty$, f_E é um funcional contínuo. O mesmo argumento vale para f_F e assim R é bem definido. Além disso, $\frac{\|(f_E, f_F)\|}{\|f\|} = \frac{\|f_E\|}{\|f\|} + \frac{\|f_F\|}{\|f\|} \leq 2 < \infty$, logo R é um mapa contínuo entre os espaços normados.

Temos $\|(x, y)\| \geq \|x\|_E, \|y\|_F$, e então $\frac{|f(x)+g(y)|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|f(x)|}{\|(x,y)\|} + \frac{|g(y)|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} + \frac{|g(y)|}{\|y\|_F} \leq \|f\| + \|g\| < \infty$, logo $S(f, g)$ é um elemento de $(E \times F)'$ e o mapa está bem definido. Além disso, pela desigualdade anterior, $\frac{\|S(f,g)\|}{\|(f,g)\|_{E' \times F'}} = \frac{\|S(f,g)\|}{\|f\| + \|g\|} \leq 1$, então é contínuo. Temos $(S \circ R(f))(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) = f(x, y)$ logo $S \circ R = \text{id}_{(E \times F)'}$, e a primeira coordenada h_E de $R \circ S((f, g))$, como funcional é $h_E(x) = S(f, g)(x, 0) = f(x) + g(0) = f(x)$, e o análogo para h_F ; isto é, $R \circ S = \text{id}_{E' \times F'}$. Portanto R e S dão isomorfismos (topológicos) destes espaços.

b) Sejam J_E e J_F os isomorfismos dos espaços aos seus biduals. Então $J := J_E \times J_F = (x, y) \in E \times F \mapsto (J_E(x), J_F(y))$ é um isomorfismo de $E \times F$ até $E'' \times F''$. Considere ainda

$T: E'' \times F'' \rightarrow (E' \times F')'$ e $G: (E \times F)' \rightarrow E' \times F'$ dadas por

$$\begin{cases} T(\varphi, \psi) = (f, g) \mapsto \varphi(f) + \psi(g) \\ G(f) = (a \mapsto \phi(a, 0), b \mapsto \phi(0, b)) \end{cases}$$

que são isomorfismos pelo item anterior. Como G é isomorfismo, o adjunto G' é um isomorfismo e portanto temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} E \times F & \xrightarrow{J} & E'' \times F'' & \xrightarrow{T} & (E' \times F')' & \xrightarrow{G'} & (E \times F)'' \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & J_{E \times F} & & \end{array}$$

onde a sequência de setas superior é composição de isomorfismos e a curva inferior é a injeção canônica. Se mostrarmos que esse diagrama comuta, então $J_{E \times F}$ é composição de isomorfismos e portanto $E \times F$ é reflexivo.

De fato, tomemos $(x, y) \in E \times F$. Pela definição de adjunto, $G' \circ T \circ J(x, y)$ é o funcional $T \circ J(x, y) \circ G \in (E \times F)''$ que leva $\phi \in (E \times F)'$ em $(T \circ J(x, y))G(\phi)$. Temos $T \circ J(x, y) = (\varphi, \psi) \mapsto J_E(x)(\varphi) + J_F(y)(\psi) = \varphi(x) + \psi(y)$ e portanto, para toda ϕ ,

$$\begin{aligned} (G' \circ T \circ J(x, y))(\phi) &= (T \circ J(x, y) \circ G) \circ \phi \\ &= (T \circ J(x, y))(G \circ \phi) \\ &= (T \circ J(x, y))\left(\overbrace{(a \mapsto \phi(a, 0))}^p, \overbrace{(b \mapsto \phi(0, b))}^q\right) \\ &= p(x) + q(y) \\ &= \phi(x, 0) + \phi(0, y) = \phi(x, y) = (J_{E \times F}(x, y))(\phi) \end{aligned}$$

Como isso vale para todos $(x, y) \in E \times F$ e todo $\phi \in (E \times F)''$, concluímos que o diagrama de fato comuta. Isto é, $E \times F$ é reflexivo. \square

Exercício 31 (4.5.31). Seja M um subespaço fechado do espaço de Banach E .

(a) Para cada $\varphi \in M'$, o Teorema de Hahn-Banach estende φ a um funcional $\tilde{\varphi} \in E'$. Prove que

$$T_M : M' \rightarrow E'/M^\perp, T_M(\varphi) = [\tilde{\varphi}]$$

é um isomorfismo isométrico (como a extensão de Hahn-Banach não é única, é necessário provar que T_M está bem definida).

(b) Seja $\pi_M : E \rightarrow E/M$ a aplicação quociente. Prove que

$$T^M : (E/M)' \rightarrow M^\perp, T^M(f) = f \circ \pi_M$$

é um isomorfismo isométrico (não se esqueça de provar que T^M de fato toma valores em M^\perp).

(c) Conclua que subespaço fechado de espaço reflexivo é reflexivo.

Resolução. (a) **É bem definido:** Seja $\varphi \in M'$ funcional e $\tilde{\varphi}, \psi \in E'$ duas extensões. Então, para todo $x \in M$, temos

$$(\tilde{\varphi} - \psi)(x) = \tilde{\varphi}(x) - \psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

i.e., $(\tilde{\varphi} - \psi) \in M^\perp \implies [\tilde{\varphi}] = [\psi]$ em E'/M^\perp .

É injetivo: Seja $\varphi \in M'$ tal que $[\tilde{\varphi}] = 0$, então $\tilde{\varphi} \in M^\perp \implies \varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) = 0$ para todo $x \in M \iff \varphi \equiv 0$ em M' .

É sobrejetivo: Seja $[\psi] \in E'/M^\perp$, então existe $\psi \in E'$ representante da classe. Defina $\varphi := \psi|_M \in M'$ um funcional e tome $\tilde{\varphi} \in E'$ extensão de Hahn-Banach. Então,

$$(\tilde{\varphi} - \psi)(x) = \tilde{\varphi}(x) - \psi(x) = \psi(x) - \psi(x) = 0$$

para todo $x \in M$, i.e., $(\tilde{\varphi} - \psi) \in M^\perp \implies [\tilde{\varphi}] = [\psi]$ em E'/M^\perp .

É isometria: Seja $\psi \in E'$ tal que $\psi|_M = \varphi \in M'$. Sabemos que $\|[\psi]\| = \inf\{\|\psi + \eta\| \mid \eta \in M^\perp\}$, logo $\|[\psi]\| \leq \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$; mas

$$\|\psi + \eta\| \geq \|(\psi + \eta)|_M\| = \|\psi|_M\| = \|\varphi\|$$

para todo $\eta \in M^\perp$, i.e., $\|\varphi\| = \|[\psi]\|$.

(b) **É bem definido:** Primeiro, note que $f \circ \pi_M \in E'$ por construção. Dado $x \in M$, temos

$$(f \circ \pi_M)(x) = f(\pi_M(x)) = f(0) = 0$$

i.e., $(f \circ \pi_M) \in M^\perp$.

É injetivo: Seja $f \in (E/M)'$ tal que $f \circ \pi_M = 0$. Dado $[x] \in E/M$, existe $x \in E$ tal que $\pi_M(x) = [x]$. Logo,

$$f([x]) = f(\pi_M(x)) = (f \circ \pi_M)(x) = 0$$

e portanto $f \equiv 0$.

É sobrejetivo: Seja $g \in M^\perp$ funcional e tome $f : E/M \rightarrow \mathbb{K}, x+M \mapsto g(x)$. Se $x+M = y+M \in E/M$, então $(x-y) \in M$, e temos

$$f(x+M) = g(x) = g(x) - g(x-y) = g(x-x) + g(y) = f(y+M)$$

pois $g(x-y) = 0$. Logo, f é bem definida e $f \in (E/M)'$. Por construção, $\forall x \in E$,

$$T^M(f)(x) = (f \circ \pi_M)(x) = f(x+M) = g(x)$$

e portanto $T^M(f) = g$.

É isometria: Pelo **Exercício 2.7.14**, $\pi_M(B_E) = B_{E/M}$ (para as bolas abertas) e, pelo **Exercício 2.7.8**, sabemos que basta calcular a norma de um operador na bola aberta centrada na origem. Logo,

$$\|T^M(f)\| = \sup_{x \in B_E} \|f(\pi_M(x))\| = \sup_{[x] \in B_{E/M}} \|f([x])\| = \|f\|.$$

- (c) Suponha $E = E''$. Como T_M é isomorfismo isométrico, temos $M' \simeq E'/M^\perp \implies M'' \simeq (E'/M^\perp)'$. Usando que $M^\perp \subset E'$ é fechado (**Exercício 3.6.13**), temos ainda que T^{M^\perp} é isomorfismo isométrico, e portanto $(E'/M^\perp)' \simeq (M^\perp)^\perp$. Por fim, pelo **Exercício 4.5.15**, sabemos que $(M^\perp)^\perp \simeq M$, logo

$$M \simeq (M^\perp)^\perp \simeq (E'/M^\perp)' \simeq M''.$$

□

Exercício 32 (4.5.32). Sejam E e F espaços normados. Prove que :

- (a) $\mathcal{L}(E, F)$ contém uma cópia isométrica de E' ;
(b) $(\mathcal{L}(E, F'))'$ contém uma cópia isométrica de F ;

Resolução. (a) Se $F = \{0\}$, então $\mathcal{L}(E, F) = \{0\}$ e portanto são isomorfos isometricamente. Agora, se $F \neq \{0\}$, tome $y \in F$ com $\|y\| = 1$. Assim, tome a função:

$$\begin{array}{ccc} T : E' & \rightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ \varphi & \mapsto & T_\varphi : E \rightarrow F \\ & & x \mapsto \varphi(x) \cdot y \end{array}.$$

Como $T_\varphi = \varphi \otimes y$, temos que T está bem definida. Além disso, é fácil ver que T é linear. Agora, provaremos que T é uma isometria. Dado $\varphi \in E'$,

$$\|T_\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_\varphi(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\varphi(x) \cdot y\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \|\varphi\|.$$

Assim, T é isometria e E' é isometricamente isomorfo a $T(E')$.

- (b) Se $E = \{0\}$, já temos o desejado pois $(\mathcal{L}(E, F'))' = \{0\}' = \{0\}$. Agora, caso $E \neq \{0\}$, fixemos $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Tome a função:

$$\begin{array}{ccc} T : F & \rightarrow & (\mathcal{L}(E, F'))' \\ y & \mapsto & T_y : \mathcal{L}(E, F') \rightarrow \mathbb{R} \\ & & u \mapsto u(x)(y) \end{array}.$$

Temos que T está bem definida pois para cada $y \in F$,

$$\sup_{\|u\|=1} \|T_y(u)\| = \sup_{\|u\|=1} |u(x)(y)| \leq \sup_{\|u\|=1} \|u(x)\| \cdot \|y\| \leq \sup_{\|u\|=1} \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = 1 \cdot 1 \cdot \|y\| = \|y\|.$$

Disso também segue que $\|T_y\| \leq \|y\|$ para todo $y \in F$.

Agora, dado $y \in F$, aplicando o Corolário 3.1.4 para x e y , temos:

- Existe $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x) = \|x\| = 1$;
- Existe $\psi \in F'$ com $\|\psi\| = 1$ e $\psi(y) = \|y\|$.

Assim, podemos tomar:

$$\begin{array}{ccc} u = \varphi \otimes \psi : E & \longrightarrow & F' \\ a & \longmapsto & \varphi(a) \cdot \psi \end{array}.$$

Logo, $u \in \mathcal{L}(E, F')$. Assim como mostrado no item (a), como $\|\psi\| = 1$, temos que $\|u\| = \|\varphi \otimes \psi\| = \|\varphi\| = 1$. Além disso,

$$T_y(u) = u(x)(y) = (\varphi(x) \cdot \psi)(y) = \varphi(x) \cdot \psi(y) = 1 \cdot \|y\|.$$

Assim, como $\|u\| = 1$, temos que $\|T(y)\| \geq |T_y(u)| = \|y\|$. Portanto, provamos que $\|T_y\| = \|y\|$. Assim, T é isometria e F é isometricamente isomorfo a $(\mathcal{L}(E, F'))'$.

□

Exercício 33 (4.5.33). Sejam E e F espaços de Banach. Prove que :

- (a) Se $\mathcal{L}(E, F)$ é reflexivo, então E é reflexivo;
- (b) Se $(\mathcal{L}(E, F'))'$ é reflexivo, então F é reflexivo;

Resolução. (a) Pelo Exercício 4.5.32(a), existe uma isometria $T : E' \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Como E' é um espaço de Banach, $A := T(E')$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$. Pelo Exercício 4.5.31(c), temos que A é reflexivo. Com isso, como A é isomorfo a E' por $T : E' \rightarrow A$, temos que E' é reflexivo pelo Exercício 4.5.27. Pela Proposição 4.3.13 então, temos que E é reflexivo.

(b) Segue de modo análogo ao item anterior. □

Exercício 34 (4.5.34). Seja E um espaço normado. Assim como havíamos definido $E'' = (E')'$, definimos $E^{(3)} = (E'')'$, $E^{(4)} = (E^{(3)})'$, ..., $E^{(n)} = (E^{(n-1)})'$, ...

(a) Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) E é reflexivo.
- (ii) $E^{(n)}$ é reflexivo para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) $E^{(n)}$ é reflexivo para algum $n \in \mathbb{N}$.

(b) Se E não é reflexivo, então todas as inclusões naturais

$$E \subseteq E'' \subseteq E^{(4)} \subseteq \dots \quad \text{e} \quad E' \subseteq E^{(3)} \subseteq E^{(5)} \subseteq \dots$$

são estritas.

Resolução. Observação: O exercício exige a hipótese de E ser completo. De fato, se considerarmos um espaço reflexivo E e um subespaço próprio denso $F \subset E$, temos que $E' = F'$, e assim F' é reflexivo, mas F não o é, pois não é completo. Por exemplo, considere $c_{00} \subset l_2$.

(a) Note que, pela Proposição 4.3.13,

$$E \text{ é reflexivo} \Leftrightarrow E' \text{ é reflexivo} \Leftrightarrow E'' \text{ é reflexivo} \Leftrightarrow \dots$$

Assim, as equivalências entre i, ii e iii são óbvias.

(b) Pelo item (a), $E^{(n)}$ não é reflexivo. Logo, $J_{E^{(n)}} : E^{(n)} \rightarrow E^{(n+2)}$ não é sobrejetor, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

5 Capítulo 5

Exercício 1 (5.8.1). Mostre que a função produto interno (de $E \times E$ em \mathbb{K}) é contínua.

Resolução. Em $E \times E$ escolheremos a norma $\| \cdot \|_1$ dada por

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|.$$

No Exercício 12, vimos que de fato $\| \cdot \|_1$ define uma norma em $E \times E$.

Lembre também que, se (X, d) e (Y, e) são espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ é uma função, então f é contínua no ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, dada qualquer sequência (x_n) de pontos de X tal que $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$ tem-se que $e(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0$.

Portanto, fixemos $(x_0, y_0) \in E \times E$. Seja $\{(x_n, y_n)\}$ sequência em $E \times E$ tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ (na norma $\|\cdot\|_1$). Pelo exercício 12, $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow y_0$. Logo, tais sequências são limitadas, ie, existe $M > 0$ tal que

$$\|x_n\| \leq M \quad \text{e} \quad \|y_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, note que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\| \\ &\leq M \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

se $n \rightarrow \infty$. Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua em $(x_0, y_0) \in E \times E$. Como (x_0, y_0) é arbitrário, segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua em $E \times E$. \square

Exercício 2 (5.8.2). (a) Seja E um espaço vetorial real com produto interno. Prove que a vale a recíproca do teorema de Pitágoras: se $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, então $x \perp y$.

(b) Vale o mesmo no caso complexo?

Resolução. (a) Em \mathbb{R} , temos $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, logo

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

se, e somente se, $\langle x, y \rangle = 0$, i.e., $x \perp y$.

(b) Não vale, pois $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ em \mathbb{C} . Logo,

$$\|x + y\|^2 = \langle x, x \rangle + (\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}) + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

se, e somente se, $\langle x, y \rangle = -\overline{\langle x, y \rangle}$. Por exemplo, em $E = \mathbb{C}$ com o produto interno $\langle x, y \rangle = x \cdot \bar{y}$ podemos escolher $x = 1$ e $y = i$ e temos

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot \overline{i} = -i = -\overline{(1 \cdot \overline{i})} = -\overline{\langle x, y \rangle}.$$

Logo, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, mas $x \not\perp y$. \square

Exercício 3 (5.8.3). Prove que, para $p \neq 2$, ℓ_p não é um espaço com produto interno.

Resolução. Considere as sequências $(a_n) = (1, 0, 0, \dots)$, $(b_n) = (0, 1, 0, \dots) \in \ell_p$. Então,

$$\|(a_n)\|_p = 1, \quad \|(b_n)\|_p = 1, \quad \|(a_n) + (b_n)\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, \quad \|(a_n) - (b_n)\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

Agora,

$$\|(a_n) + (b_n)\|_p^2 + \|(a_n) - (b_n)\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2^{1+\frac{2}{p}} \neq 4 = 2(\|(a_n)\|_p^2 + \|(b_n)\|_p^2)$$

onde igualdade não ocorre pois $p \neq 2$.

Isto é, a Lei do Paralelogramo não foi satisfeita. Segue que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, com $p \neq 2$, não pode ser um espaço com produto interno. \square

Exercício 4 (5.8.4). Mostre que $S = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ é um sistema ortonormal completo em ℓ_2 .

Resolução. Dizemos que um conjunto S é um sistema ortonormal completo se

- $\langle x, x \rangle = 1$, para todo $x \in S$;

- $\langle x, y \rangle = 0$, para quaisquer $x, y \in S$ tais que $x \neq y$;
- $S^\perp = \{0\}$.

Em ℓ_2 , consideraremos o seguinte produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \bar{y}_j.$$

Assim,

- $\langle e_j, e_j \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{ij} \delta_{ij} = 1$;
- $\langle e_j, e_i \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_{kj} \delta_{ki} = 0$, se $i \neq j$.

Logo, S é sistema ortonormal. Além disso, se $x \in \ell_2$, $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, e

$$\langle x, e_j \rangle = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

então,

$$x_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \delta_{ij} = \langle x, e_j \rangle = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, $S^\perp = \{0\}$. Com isso, concluímos que S é sistema ortonormal completo. \square

Exercício 5 (5.8.5). Verifique que no caso real o conjunto formado pelas funções

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad n \in \mathbb{N},$$

é um sistema ortonormal em $L_2[-1, 1]$

Resolução. Seja $S := \left\{ f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt); n \in \mathbb{N} \right\}$. Como a integral de Lebesgue coincide com a integral de Riemann no compacto $[-1, 1]$, temos, para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle f_0(t), f_0(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1; \\ \langle f_0(t), f_n(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = 0; \\ \langle f_0(t), g_n(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt = 0; \\ \langle f_n(t), f_n(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \right|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2nt) dt = 1; \\ \langle g_n(t), g_n(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \right|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2nt) dt = 1; \\ \langle f_n(t), g_m(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \sin(mt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin((n+m)t) + \sin((n-m)t) dt = 0; \\ \langle f_n(t), f_m(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \cos(mt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos((n+m)t) + \cos((n-m)t) dt = 0; \\ \langle g_n(t), g_m(t) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \sin(mt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos((n+m)t) - \cos((n-m)t) dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto, S é um sistema ortonormal em $L_2[-1, 1]$. \square

Exercício 6 (5.8.6). Prove que no caso complexo o conjunto formado pelas funções $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, é um sistema ortonormal em $L_2[0, 2\pi]$.

Resolução. Como $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$, $t \in [0, 2\pi]$, temos que

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos nt + i \sin nt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Veja que $f_n(t)$ é contínua, pois as funções $\cos nt$ e $\sin nt$ são contínuas. Logo, $\{f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \subset L_2[0, 2\pi]$. Além disso, o conjugado é

$$\overline{f_n(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos nt - i \sin nt) = e^{-int}.$$

Então, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_0^{2\pi} f_m(t) \overline{f_n(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{imt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt.$$

Se $m = n$, temos

$$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-n)t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$$

Se $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned} \langle f_m, f_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(m-n) \cdot 2\pi}}{i(m-n)} - \frac{e^{i(m-n) \cdot 0}}{i(m-n)} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos[(m-n) \cdot 2\pi] + i \sin[(m-n) \cdot 2\pi] - \cos[(m-n) \cdot 0] - i \sin[(m-n) \cdot 0]}{i(m-n)} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1+0-1-0}{i(m-n)} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\{f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$ é ortonormal. \square

Exercício 7 (5.8.7). 1. Sejam E um espaço vetorial real com produto interno. Prove que o operador

$$T: E \longrightarrow E', \quad T(x)(y) = \langle x, y \rangle \quad \text{para todos } x, y \in E,$$

está bem definido (isto é, $T(x) \in E'$ para todo $x \in E$), é linear contínuo e isometria.

2. Vale o mesmo no caso complexo? E se definirmos $T(x)(y) = \langle y, x \rangle$?

Resolução. 1. Vamos mostrar primeiramente que $T(x) \in E'$, isto é, $T(x)$ é um operador linear contínuo, para todo $x \in E$.

Sejam $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$T(x)(y + \lambda z) = \langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle = T(x)(y) + \lambda T(x)(z)$$

Isto é, $T(x)$ é linear. Agora,

$$\|T(x)(y)\| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{para todo } x, y \in E$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq \|x\|$ e $T(x)$ é contínuo. Segue que T está bem definida.

Resta mostrar que T é linear, contínua e uma isometria.

$$T(x + \lambda y)(z) = \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle = T(x)(z) + \lambda T(y)(z) = (T(x) + \lambda T(y))(z)$$

Isto é, T é linear.

Agora, como $\|T(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in E$, segue que T é contínuo. Além disso, para $x \neq 0$,

$$T(x) \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|} \langle x, x \rangle = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$$

Segue que T é uma isometria.

2. No caso complexo teríamos que $T(x)(y + \lambda z) = T(x)(y) + \bar{\lambda}T(x)(z)$ e portanto T não estaria bem definida, já que $T(x)$ não seria linear.

Agora, se definirmos $T(x)(y) = \langle y, x \rangle$ teríamos que $T(x + \lambda y)(z) = T(x)(z) + \bar{\lambda}T(y)(z)$. Isto é, T não seria linear.

□

Exercício 8 (5.8.8). Sejam E e F espaços com produto interno e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Prove que T é uma isometria linear se, e somente se, $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E$.

Resolução.

$$(\Leftarrow) \quad \|T(x)\| = \sqrt{\langle T(x), T(y) \rangle} = \sqrt{\langle x, y \rangle} = \|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

(\Rightarrow) Note que $\|T(x) + T(y)\| = \|T(x + y)\| = \|x + y\|$ para todo $x, y \in E$. Usando a **Proposição 5.1.7**, temos

$$\begin{aligned} 4\langle T(x), T(y) \rangle &= \|T(x) + T(y)\|^2 - \|T(x) - T(y)\|^2 + i(\|T(x) + iT(y)\|^2 - \|T(x) - iT(y)\|^2) \\ &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) = 4\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

i.e., $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E$.

□

Exercício 9 (5.8.9). (a) Sejam E um espaço vetorial complexo com produto interno e $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Prove que se $\langle T(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in E$ então $T = 0$.

(b) Vale o mesmo no caso real?

Resolução. (a) Para $x, y \in E$ e $a, b \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(ax + by), ax + by \rangle \\ &= \langle T(ax), ax \rangle + \langle T(ax), by \rangle + \langle T(by), ax \rangle + \langle T(by), by \rangle \\ &= a\bar{b}\langle T(x), y \rangle + \bar{a}b\langle T(y), x \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = a\bar{b}\langle T(x), y \rangle + \bar{a}b\langle T(y), x \rangle, \forall a, b \in \mathbb{C} \quad (7)$$

Para $a = b = 1$ em (7), temos que $0 = \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle$, ou seja,

$$\langle T(x), y \rangle = -\langle T(y), x \rangle$$

Agora, substituindo $a = 1$ e $b = i$ em (7), veja que:

$$\begin{aligned} 0 &= -i\langle T(x), y \rangle + i\langle T(y), x \rangle \implies 0 = i(-\langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle) \\ &\implies \langle T(x), y \rangle = \langle T(y), x \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle T(y), x \rangle = \langle T(x), y \rangle = -\langle T(y), x \rangle$. Assim, $\langle T(y), x \rangle = 0$ para todo $x, y \in E$. Portanto, para $x \in E$, $\langle T(x), T(x) \rangle = 0$, ou seja, $T(x) = 0$, como desejado.

(b) Considere a transformação linear:

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x) \end{aligned}$$

e o produto interno usual em \mathbb{R}^2 . Como $T(1, 1) = (-1, 1)$, temos que $T \neq 0$. Além disso, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle T(x, y), (x, y) \rangle = \langle (-y, x), (x, y) \rangle = -yx + xy = 0,$$

provando que o resultado não vale no caso real.

□

Exercício 10 (5.8.10). Seja E um espaço normado. Prove que a norma de E é induzida por produto interno se, e somente se, vale a lei do Paralelogramo.

Resolução. \Rightarrow) : Se a norma $\| \cdot \|$ é induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ temos

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle, \quad x \in E.$$

Veja que, vale

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2,$$

e

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2.$$

Somando as duas igualdades acima obtemos a lei do Paralelogramo.

\Leftarrow) : Utilizaremos as fórmulas de polarização da proposição. 5.1.7. Para o caso real, definamos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2. \quad (8)$$

Provemos que esta relação de fato define um produto interno e que este induz a norma $\| \cdot \|$. Tomando $x, y, z \in E$, verificamos

$$i) \langle x + y, z \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, z \rangle_{\mathbb{R}} + \langle y, z \rangle_{\mathbb{R}};$$

Utilizando a definição do produto interno (8) e a lei do Paralelogramo temos

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle_{\mathbb{R}} + \langle y, z \rangle_{\mathbb{R}} &= \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2) - \frac{1}{4} (\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{8} (\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{x + y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x + y}{2} - z \right\|^2 \right) = 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Se $y = 0$, então $\langle x, z \rangle_{\mathbb{R}} = 2 \left\langle \frac{x}{2}, z \right\rangle_{\mathbb{R}}$, pois $\langle 0, z \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ (segue da definição (8)). Usando isso e o que foi feito acima (igualdade $*$) podemos afirmar

$$\langle x + y, z \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \langle x + y, 2z \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{8} (\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2) = \langle x, z \rangle_{\mathbb{R}} + \langle y, z \rangle_{\mathbb{R}}.$$

$$ii) \langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

Usando o item anterior temos que para $n = 2$ vale

$$\langle 2x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x + x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} + \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = 2 \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Justificando de maneira análoga segue que

$$\langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, y \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x - x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} + \langle -x, y \rangle_{\mathbb{R}} \implies \langle -x, y \rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}. \\ \implies \langle -nx, y \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle n(-x), y \rangle_{\mathbb{R}} = n \langle -x, y \rangle_{\mathbb{R}} = -n \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$. Agora note que

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \sum_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} x, y \right\rangle_{\mathbb{R}} = n \left\langle \frac{1}{n} x, y \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dos dois últimos resultados podemos concluir que

$$\langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Para obter o resultado para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, basta observar que a função norma é contínua e, como o produto interno foi definido a partir da norma, ele também é uma função contínua. Assim, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, tomamos uma sequência $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha$ e obtemos $\langle \alpha_n x, y \rangle = \alpha_n \langle x, y \rangle$, donde

$$\langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \forall x, y \in E, \alpha \in \mathbb{R}.$$

iii) Simetria;

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 = \frac{1}{4} \|y + x\|^2 - \frac{1}{4} \|y - x\|^2 = \langle y, x \rangle_{\mathbb{R}}.$$

iv) Positiva definida;

$$\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4} \|x + x\|^2 - \frac{1}{4} \|x - x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0.$$

Daí,

$$\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \iff x = 0.$$

Agora, para o caso complexo, definamos o produto interno da seguinte maneira

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle x, iy \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Dados $x, y \in E$, temos

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} &= \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) + \frac{i}{4} (\|x + ix\|^2 - \|x - ix\|^2) = \\ &= \|x\|^2 + \frac{1}{4} (|1 + i|^2 \|x\|^2 - |1 - i|^2 \|x\|^2) = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Assim, como $\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} = \|x\|^2$ implica que $\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} \geq 0$ e, além disso, $\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Observamos agora que $\frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ é a parte real e $\frac{1}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$ é a parte imaginária de $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$. Veja também que

$$\langle y, x \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{4} (\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2) + \frac{i}{4} (\|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2).$$

Como $|i| = 1$, $y + ix = i(x - iy)$ e $y - ix = i(x + iy)$, temos $\|y + ix\| = \|x - iy\|$ e $\|y - ix\| = \|x + iy\|$ e assim

$$\langle y, x \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - \frac{i}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) = \overline{\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}}.$$

Para mostrar que $\langle x_1 + x_2, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_1, y \rangle_{\mathbb{C}} + \langle x_2, y \rangle_{\mathbb{C}}$ usamos um processo análogo ao que foi usado para o caso real. Também usamos um processo análogo ao que foi usado no caso real para mostrar $\langle 0, y \rangle_{\mathbb{C}} = 0$, $\langle -x, y \rangle_{\mathbb{C}} = -\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ e $\langle \alpha x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \alpha \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ para quaisquer $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Se $x, y \in E$, temos

$$\begin{aligned} \langle ix, y \rangle_{\mathbb{C}} &= \frac{1}{4} (\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2) + \frac{i}{4} (\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2) = \\ &= i \left(\frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \right) = i \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Agora, se r_1 e r_2 são racionais, então $\langle (r_1 + r_2 i)x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle r_1 x + r_2 ix, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle r_1 x, y \rangle_{\mathbb{C}} + \langle r_2 ix, y \rangle_{\mathbb{C}} = r_1 \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} + r_2 \langle ix, y \rangle_{\mathbb{C}} = r_1 \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} + r_2 i \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$. Fixemos agora $x, y \in E$ (arbitrários) e definamos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $f(\lambda) = \langle \lambda x, y \rangle_{\mathbb{C}} - \lambda \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$. Segue da continuidade da norma e do produto por escalar que f é contínua. Assim, como $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i = \{r_1 + r_2 i \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$ é denso em \mathbb{C} e $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$, temos que f é identicamente nula e, portanto, $\langle \lambda x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Desta forma, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ é um produto interno em E . \square

Exercício 11 (5.8.11). Demonstre, sem usar a reflexividade, que as normas de ℓ_1 e $C[a, b]$ não são induzidas por produtos internos.

Resolução. Sejam $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (0, 1, 0, \dots)$ em ℓ_1 . Temos

$$\|x_1\|_1 = 1; \|x_2\|_1 = 1; \|x_1 + x_2\|_1 = 2; \|x_1 - x_2\|_1 = 2.$$

Note que,

$$\|x_1 + x_2\|_1^2 + \|x_1 - x_2\|_1^2 = 8 > 4 = 2(\|x_1\|_1^2 + \|x_2\|_1^2).$$

Logo, $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ não satisfaz a Lei do Paralelogramo. Portanto, pelo Exercício 5.8.10, a norma de ℓ_1 não é induzida pelo produto interno.

Agora, sejam $f, g \in C[a, b]$ definidas, respectivamente, por $f(x) = x$ e $g(x) = b$. Temos

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = |f(b)| = |b|; \\ \|g\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| = |b|; \\ \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |(f + g)(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |x + b| = 2|b|; \\ \|f - g\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |(f - g)(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |x - b| = |a - b|.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 &= 4|b|^2 + |a - b|^2 \\ &> 4b^2 \\ &= 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2).\end{aligned}$$

Logo, $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ não satisfaz a Lei do Paralelogramo. Portanto, sua norma não é induzida pelo produto interno. \square

Exercício 12 (5.8.12). Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ seqüências na bola unitária fechada de um espaço de Hilbert. Prove que se $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$, então $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Resolução. De fato, como o espaço é Hilbert e $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$ são seqüências na bola unitária fechada,

$$\|x_n - y_n\|^2 = \langle x_n - y_n, x_n - y_n \rangle = \overbrace{\|x_n\|^2}^{\leq 1} - \langle x_n, y_n \rangle - \overline{\langle x_n, y_n \rangle} + \overbrace{\|y_n\|^2}^{\leq 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto, $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. \square

Exercício 13 (5.8.13). Prove que em $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ existem um subespaço fechado M e $x \notin M$ tais que não é único o vetor $p \in M$ com

$$\|x - p\| = \text{dist}(x, M).$$

Resolução. Considere $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ a reta horizontal na origem e tome $x = (0, 1) \notin M$ ponto. Note que, para $p = (a, 0) \in M$ qualquer, temos

$$\|x - p\|_\infty = \|(-a, 1)\|_\infty = \begin{cases} |a|, & \text{se } |a| > 1 \\ 1, & \text{se } |a| \leq 1 \end{cases}$$

Logo, $\|x - p\|_\infty = \text{dist}(x, M)$ sempre que $p \in M \cap B_{\leq 1}((0, 0))$. \square

Exercício 14 (5.8.14).

- a) Seja E um espaço com produto interno e A um subconjunto não-vazio, completo e convexo em E . Prove que para $x \in E$, existe um único $p \in A$ tal que

$$\|x - p\| = d(x, A).$$

- b) Mostre que todo subconjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert existe um único vetor de menor norma.

Resolução. a) Seja $d = d(x, A) = \inf\{\|x - q\| : q \in A\}$. Logo, existe uma sequência $(q_n) \subset A$ tal que $d \leq \|x - q_n\| < d + 1/n$. Como, pela Lei do Paralelogramo,

$$2(\|x - q_n\|^2 + \|x - q_m\|^2) = \|2x - q_n - q_m\|^2 + \|q_m - q_n\|^2,$$

e como A é convexo, $(q_n + q_m)/2 \in A$, e assim

$$\begin{aligned} \|q_m - q_n\|^2 &= 2(\|x - q_n\|^2 + \|x - q_m\|^2) - \|2x - q_n - q_m\|^2 \\ &= 2(\|x - q_n\|^2 + \|x - q_m\|^2) - 4\|x - (q_n + q_m)/2\|^2 \\ &< 2((d + 1/n)^2 + (d + 1/m)^2) - 4d^2 \\ &= 4d(1/n + 1/m) + 2(1/n^2 + 1/m^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

quando $n, m \rightarrow \infty$. Logo, (q_n) é de Cauchy. Como A é completo, existe $p \in A$ tal que $q_n \rightarrow p$. Pela continuidade da norma,

$$d \leq \|x - q_n\| < d + 1/n \Rightarrow d \leq \|x - p\| \leq d \Rightarrow \|x - p\| = d.$$

Suponha que $q \in A$ também satisfaz $\|x - q\| = d$. Daí,

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2d^2 + 2d^2 \\ &= 2\|x - p\|^2 + 2\|x - q\|^2 \\ &= \|2x - p - q\|^2 + \|q - p\|^2 \\ &= 4\|x - (p + q)/2\|^2 + \|q - p\|^2 \\ &\geq 4d^2 + \|q - p\|^2 \end{aligned}$$

Logo, $\|q - p\| \leq 0$, o que implica que $q = p$.

b) Se $0 \in A$, então 0 é o único elemento de menor norma de A . Suponha então que $0 \notin A$. Como H é Hilbert e A é fechado, A é completo. Logo, pelo item anterior, existe um único $p \in A$ tal que

$$\|p\| = \|p - 0\| = d(0, A) = \inf\{\|q\| : q \in A\}.$$

Exercício 15 (5.8.15). (Teorema de Hellinger-Toeplitz) Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador linear tal que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$. Para todos $x, y \in H$. Prove que T é contínuo.

Resolução. Provemos que T possui gráfico fechado. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ sequência em H com $x_n \rightarrow x \in H$ e $T(x_n) \rightarrow y$. Basta mostrar que $y = T(x)$ para concluir a continuidade. Tome então $z \in H$ arbitrário. Tem-se para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle T(x_n), z \rangle = \langle x_n, T(z) \rangle$$

e da continuidade do produto interno, quando $n \rightarrow \infty$:

$$\langle y, z \rangle = \langle x, T(z) \rangle.$$

Aplicando novamente a propriedade de T , obtemos $\langle y, z \rangle = \langle T(x), z \rangle$. Como essa igualdade é válida para todo $z \in H$, segue que $y = T(x)$ e T é contínua. □

Exercício 16 (5.8.16). Verifique que em todo espaço vetorial V pode ser definido um produto interno. Mais ainda, para cada base de Hamel B de V pode-se definir um produto interno em V de modo que os vetores de B sejam ortogonais.

Resolução. Para uma base de Hamel B , defina $\langle \sum_{b \in B} \lambda_b b, \sum_{b \in B} \mu_b b \rangle = \sum_{b \in B} \lambda_b \overline{\mu_b}$. Isto está bem definido, pois todo elemento de V pode ser escrito como uma única combinação linear finita de elementos de B .

Note que, para $x = \sum \lambda_b b, y = \sum \mu_b b, z = \sum \rho_b b \in V, \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\langle x, x \rangle = \sum \lambda_b \overline{\lambda_b} = \sum |\lambda_b|^2 \geq 0,$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum |\lambda_b|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_b = 0, \forall b \in B \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle x + \alpha y, z \rangle &= \langle \sum \lambda_b b + \alpha \sum \mu_b b, \sum \rho_b b \rangle \\ &= \langle \sum (\lambda_b + \alpha \mu_b) b, \sum \rho_b b \rangle \\ &= \sum (\lambda_b + \alpha \mu_b) \overline{\rho_b} \\ &= \sum \lambda_b \overline{\rho_b} + \alpha \sum \mu_b \overline{\rho_b} \\ &= \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum \lambda_b \overline{\mu_b} = \sum \overline{\mu_b \lambda_b} = \overline{\sum \mu_b \lambda_b} = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V . Também, se $b, b' \in B$, claramente temos

$$\langle b, b' \rangle = \begin{cases} 1, & b = b'. \\ 0, & b \neq b' \end{cases}$$

□

Exercício 17 (5.8.17). Prove, sem usar reflexividade, que se M é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, então $M = (M^\perp)^\perp$.

Resolução. Tome $x \in M$. Assim, para todo $y \in M^\perp$, temos que $\langle x, y \rangle = 0$, fazendo com que $x \in (M^\perp)^\perp$. Logo, $M \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Agora, tome $x \in (M^\perp)^\perp$. Pelo Teorema 5.2.5, existe $p \in M$ e $q \in M^\perp$ com $x = p + q$. Logo,

$$\|q\|^2 = \langle q, q \rangle = \langle x - p, q \rangle = \langle x, q \rangle - \langle p, q \rangle = 0 - 0 = 0.$$

Portanto, $q = 0$, ou seja, $x = p \in M$. Provamos assim que $(M^\perp)^\perp \subseteq M$. Desse modo, $M = (M^\perp)^\perp$. □

Exercício 18 (5.8.18). Seja $M = \{p : p \text{ é polinômio com coeficientes reais e grau menor ou igual a } 1\}$ como subespaço de $L_2[-1, 1]$. Determine a melhor aproximação de $f(x) = e^x$ em M .

Resolução. Note que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{2} (x)_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1 - (-1)) = 1, \\ \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1 - (-1)) = 1, \\ \text{e } \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\}$ é sistema ortonormal em M . Ainda, como para todo $ax + b \in M$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ax + b = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}a \right) \sqrt{\frac{3}{2}}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{1}b \right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

vemos que $M = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right]$.

Defina

$$f_M = \langle e^x, \sqrt{\frac{3}{2}}x \rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x + \langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a melhor aproximação de f em M . Sabemos que

$$\langle e^x, \sqrt{\frac{3}{2}}x \rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x = \frac{3}{2}\langle e^x, x \rangle x$$

$$\text{e } \langle e^x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\langle e^x, 1 \rangle.$$

Vamos calcular $\langle e^x, x \rangle$ e $\langle e^x, 1 \rangle$:

$$\langle e^x, x \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot e^x dx$$

$$(\text{integ. por partes}) = (xe^x)|_{-1}^1 - e^x|_{-1}^1 = \left(e + \frac{1}{e}\right) - \left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

$$\text{e } \langle e^x, 1 \rangle = e^x|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}.$$

Logo,

$$f_M = \frac{3}{e}x + \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

□

Exercício 19 (5.8.19). Se $(y_j)_{j=1}^\infty$ e $(z_j)_{j=1}^\infty$ são enumerações de $\{x_i : i \in I_x\}$ no Lema 5.3.9, mostre diretamente (sem usar a Proposição 5.3.8) que

$$\sum_{i=1}^\infty \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=1}^\infty \langle x, y_i \rangle y_i.$$

Resolução. Sejam $S_n = \sum_{i=1}^n \langle x, y_i \rangle y_i$ e $R_n = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i \rangle z_i$. Sabemos que, pelo Lema 5.3.9, $S_n \rightarrow s$ e $R_n \rightarrow r$, para certos, $s, r \in H$.

Seja $\epsilon > 0$. Logo, existem $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$m \geq m_0 \Rightarrow \sum_{i=m+1}^\infty |\langle x, y_i \rangle|^2 = \|S_m - s\|^2 < \epsilon^2,$$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{i=n+1}^\infty |\langle x, z_i \rangle|^2 = \|R_n - r\|^2 < \epsilon^2.$$

Dados $m_1 \geq m_0$, existe $n_1 \geq n_0$ tal que $\{y_1, \dots, y_{m_1}\} \subset \{z_1, \dots, z_{n_1}\}$. Assim,

$$R_{n_1} - S_{m_1} = \sum_{j \in J} \langle x, y_j \rangle y_j,$$

onde $J \subset \{m_1 + 1, m_1 + 2, \dots\}$. Daí,

$$\|R_{n_1} - S_{n_1}\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, y_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=m_1+1}^\infty |\langle x, y_j \rangle|^2 \leq \epsilon^2.$$

Logo,

$$\|r - s\| \leq \|r - R_{n_1}\| + \|R_{n_1} - S_{n_1}\| + \|S_{n_1} - s\| < 3\epsilon.$$

Portanto, $r = s$. □

Exercício 20 (5.8.20). Seja E um espaço com produto interno. Sejam $S_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $S_2 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ conjuntos ortonormais em E tal que $[x_1, \dots, x_n] = [y_1, \dots, y_n]$ para todo n . Mostre que existe uma sequência (a_n) de escalares com módulo 1, tais que $y_n = a_n x_n$ para todo n .

Resolução. Como S_i são conjuntos ortonormais, então $\|x_i\| = \|y_j\| = 1$ para todo i, j . Faremos por indução. Seja $n = 1$, como $[x] = [y] \implies x = ay$ com $\|a\| = 1$, pois $\|x\| = \|y\| = 1$. Agora, seja

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [y_1, \dots, y_{n+1}].$$

Então,

$$y_{n+1} = a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}.$$

Além disso, para cada $j < n + 1$, temos que $y_j = \lambda_j x_j$ e

$$0 = \langle y_{n+1}, y_j \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle a_i x_i, y_j \rangle = \langle a_j x_j, \lambda_j x_j \rangle = a_j \bar{\lambda}_j.$$

Observe que $a_j = 0$, pois $\|\lambda_j\| = 1$ por hipótese de indução, concluindo por indução que $\|a_{n+1}\| = 1$. \square

Exercício 21 (5.8.21). Sejam E um espaço com produto interno e S um conjunto ortonormal infinito em E . Prove que S não é compacto, mas é fechado e limitado.

Resolução. Escreva $S = (e_i)_{i \in I}$, onde $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in I$. Note que

$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 - \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_j, e_i \rangle + \|e_j\|^2 = 2 - 2\delta_{ij}$$

e portanto

$$\|e_i - e_j\| = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ \sqrt{2}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Vamos mostrar que não é compacto. Tome $A_i = \{x \in E \mid \|x - e_i\| < \sqrt{2}\} \cap S$, para cada $i \in I$, abertos em S . Como $e_i \in A_i$ para todo $i \in I$, temos $S = \bigcup A_i$. Mas

$$e_j \in A_i \iff \|e_j - e_i\| < \sqrt{2} \iff i = j$$

logo, dado $i_1, \dots, i_n \in I$ um conjuntos finito qualquer da família, temos

$$\bigcup_{k=1}^n A_{i_k} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\} \neq S$$

ou seja, $\{A_i\}_{i \in I}$ não possui subcobertura finita.

Mas é fechado e limitado. Como $\|e_i\| = 1$ para todo $i \in I$, temos $S \subset B_{\leq 1}(0)$, i.e., é limitado. E dado $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ convergente, tomando $\varepsilon = \sqrt{2} > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \sqrt{2} \quad \forall n, m \geq n_0$$

$\implies \|x_n - x_m\| = 0$, ou seja, $x_n = x_m = x_{n_0}$ para todo $n, m \neq n_0$. Logo, a sequência é eventualmente constante e $\lim x_n = x_{n_0} \in S$, i.e., é fechado. \square

Exercício 22 (5.8.22). Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) S é um sistema ortonormal completo;
- b) Se $\varphi \in E'$ é um funcional que se anula em todos x_i , então $\varphi \equiv 0$;
- c) S é maximal no sentido de que nenhum outro conjunto ortonormal o contém propriamente;
- d) Se $x \in H$ é ortogonal com todos $x_i \in S$, então $x \equiv 0$.

Resolução. a) \implies b) Seja $y_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle$ onde $\varphi(x_i) = 0$ para todo $x_i \in S$. Então $y_0 \in S^\perp = \{0\}$, logo, $\varphi \equiv 0$.

b) \implies c) Seja S' um sistema ortonormal que contém S . Suponha por contradição que exista $x \in S'$ tal que

$x \notin S$ e φ ou funcional associado a x . Então $\varphi(x_i) = \langle x_i, x \rangle$. Como $x_i \in S'$ e S' é um sistema ortonormal completo, então $\varphi(x_i) = 0$ para todo $x_i \in S$. Por hipótese, $\varphi \equiv 0$, portanto $x \equiv 0$. Mas $\langle 0, 0 \rangle = 0$, logo, $x \notin S'$, absurdo. Por fim, segue que S é maximal.

c) \implies d) imediatamente, pois se $\langle x, x_j \rangle = 0$, então x é ortogonal com todos, em particular $y = x/\|x\|$ é ortonormal, portanto se $x \neq 0$, $S' = \{x\} \cup S$ é um sistema ortonormal que contém S , absurdo.

d) \implies a) por definição, pois se $\langle x, x_j \rangle = 0 \implies x \in S^\perp$. Mas se isso só acontece quando $x = 0$, então $S^\perp = \{0\}$. \square

Exercício 23 (5.8.23). Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert H . Prove que para toda sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ existe $x \in H$ tal que

$$a_n = \langle x, x_n \rangle \quad \text{para todo } n \text{ e } \|x\| = \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_2.$$

Resolução. Como $S = (x_n)_{n=1}^\infty$ é um sistema ortonormal completo, segue que $[S] \subset \overline{[S]} = H$ (Teorema 5.3.10). Como $\dim([S]) = \infty$, implica que H tem dimensão infinita. Daí, como S é enumerável, pelo Teorema 5.4.3 implica que H é separável. Além disso, do Teorema 5.4.4 segue que H é isometricamente isomorfo a ℓ_2 dado pelo seguinte isomorfismo isométrico

$$T : H \rightarrow \ell_2, \quad T(x) = (\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^\infty.$$

Seja $(a_n)_n^\infty \in \ell_2$ uma sequência qualquer. Como T é sobrejetiva, existe $x \in H$ tal que $T(x) = ((a_n)_n^\infty)$, ou seja, $a_n = \langle x, x_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por T ser uma isometria, temos que

$$\|x\| = \|T(x)\| = \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_2.$$

\square

Exercício 24 (5.8.24). Enuncie e demonstre resultado análogo ao do Exercício 5.8.23 para espaços de Hilbert de dimensão Finita.

Resolução. Seja $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert H . Prove que para toda n -upla $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ existe $x \in H$ tal que

$$a_i = \langle x, x_i \rangle \quad \text{para todo } n \text{ e } \|x\| = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_2$$

Seja T o isomorfismo isométrico entre H e $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ obtido no exercício 5.8.25. Em particular, T é sobrejetor, logo existe $x \in H$ tal que $T(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Então

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = T(x) = (\langle x, x_1 \rangle, \langle x, x_2 \rangle, \dots, \langle x, x_n \rangle)$$

Isto é, $a_i = \langle x, x_i \rangle$, para $i = 1, \dots, n$. (outro jeito de se ter esse resultado é considerar desde o início $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in E$ e ver que $T(x) = (a_1, \dots, a_n)$). Além disso, já que T é uma isometria,

$$\|x\| = \|T(x)\|_2 = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_2$$

\square

Exercício 25 (5.8.25). Prove que todo espaço de Hilbert de dimensão n é isomorfo isometricamente a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Conclua que dois espaços de Hilbert de dimensão finita sobre o mesmo corpo têm a mesma dimensão se, e somente se, são isomorfos isometricamente.

Resolução. Seja E espaço de Hilbert com dimensão $\dim E = n$ e $\{x_n\}_{i=1}^n$ base ortonormal. Defina

$$T : E \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad x_i \mapsto e_i$$

então

$$\|T(x)\|^2 = \|T\left(\sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i\right)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \|T(x_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2 \overbrace{\|e_i\|^2}^1 = \|x\|^2$$

e vemos que T é contínua com $\|T\| = 1$. Vamos provar que T é bijetiva, então, pelo **Teorema da Aplicação Aberta**, teremos que é isomorfismo isométrico.

Se $x \in E$ é tal que $T(x) = 0$, então $\|x\| = \|T(x)\| = 0$, i.e., $x = 0 \implies T$ é injetiva. Dado $y = \sum^n a_i e_i \in \mathbb{K}$, existe $x = \sum^n a_i x_i \in E$ tal que $T(x) = y \implies T$ é sobrejetiva.

Agora, dados $E_1 \simeq E_2$, temos $\mathbb{K}^n \simeq E_1 \simeq E_2 \simeq \mathbb{K}^m$ para algum $n, m \in \mathbb{N}$. Mas, $\mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}^m \iff n = m$, i.e., $\dim E_1 = \dim E_2$. \square

Exercício 26 (5.8.26). Prove que, no caso separável, a representação do Teorema 5.3.10(a) é única, isto é, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$, então $b_n = \langle x, x_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolução. Primeiramente, se H é de dimensão finita, digamos $\dim H = n$, dada uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de H , podemos construir uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ por Gram-Schmidt. Nesse caso, se $x = \sum_{i=1}^n b_i e_i$, obtemos da linearidade do produto interno que

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n b_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n b_i \langle e_i, e_j \rangle = b_j,$$

como procurado.

Agora, se H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, existe um conjunto $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormal, completo e enumerável (Teorema 5.4.3). Aplicando o Teorema 5.3.10, sabemos que todo $x \in H$ pode ser escrito na forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$. Supondo, além disso, que $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ com escalares $b_i \in \mathbb{K}$, defina $S_k = \sum_{i=1}^k b_i e_i$. Veja que $S_k \rightarrow x$. Da continuidade do produto interno, fixado $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle S_k, e_j \rangle = \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} S_k, e_j \right\rangle = \langle x, e_j \rangle.$$

Por outro lado,

$$\langle S_k, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k b_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k b_i \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } j > k \\ b_j & \text{se } j \leq k, \end{cases}$$

ou seja, temos $(\langle S_k, e_j \rangle)_{k=1}^{\infty} = (0, 0, \dots, 0, b_j, b_j, \dots)$, onde o primeiro b_j ocorre no j -ésimo termo. Disto fica claro que $\langle S_k, e_j \rangle \rightarrow b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Segue da unicidade do limite que $b_j = \langle x, e_j \rangle$ para todo $j \in \mathbb{N}$, como queríamos. \square

Exercício 27 (5.8.27). (Lei do Paralelogramo Generalizada) Seja H um espaço de Hilbert. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_1, \dots, x_n \in H$,

$$\sum_{\epsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|^2 = 2^n \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Resolução. Se $n = 2$, pela Lei do Paralelogramo,

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^2 \epsilon_j x_j \right\|^2 &= \|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 + \| -x_1 + x_2 \|^2 + \| -x_1 - x_2 \|^2 \\ &= 2(\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2) \\ &= 4 \sum_{j=1}^2 \|x_j\|^2. \end{aligned}$$

Agora, suponha que a fórmula vale para $n = m \geq 2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{\epsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^{m+1} \epsilon_j x_j \right\|^2 &= \left[\sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \leq m} \left\| \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right) + x_{m+1} \right\|^2 \right] + \left[\sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \leq m} \left\| \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right) - x_{m+1} \right\|^2 \right] \\
&= \sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \leq m} \left[\left\| \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right) + x_{m+1} \right\|^2 + \left\| \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right) - x_{m+1} \right\|^2 \right] \\
&= \sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \leq m} \left[2 \left\| \sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right\|^2 + 2 \|x_{m+1}\|^2 \right] \\
&= 2 \sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \leq m} \left\| \sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right\|^2 + 2 \|x_{m+1}\|^2 \sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \leq m} 1 \\
&= 2 \left(2^m \sum_{j=1}^m \|x_j\|^2 \right) + 2 \|x_{m+1}\|^2 \cdot 2^m \\
&= 2^{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \|x_j\|^2.
\end{aligned}$$

□

Exercício 28 (5.8.28). Considere o caso $\varphi \neq 0$ na demonstração do Teorema de Riesz-Fréchet. A unicidade do vetor y_0 pode aparecer contraditório com a liberdade da escolha do vetor x_0 . O que está por trás disso é que M^\perp tem dimensão 1. Prove isso.

Resolução. Definamos $M = \{x \in E; \varphi(x) = 0\} = \ker(\varphi)$ (igual na demonstração do Teorema de Riez). Como M é fechado em H , pelo Teorema 5.2.5 temos que $H = M \oplus M^\perp$. Logo, dado $x \in H$ implica que $x = p + q$, onde $p \in M$ e $q \in M^\perp$. Consideramos a projeção $Q : H \rightarrow H$ dada por $Q(x) = q$ (Teorema 5.2.5b)). Como $Q(H) = M^\perp$, pelo teorema do isomorfismo implica que $H/\ker(Q) \simeq Q(H)$, ou seja,

$$H/M \simeq M^\perp \quad (*).$$

Além disso, por hipótese $\varphi \neq 0$, o que implica que $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ é sobrejetivo, ou seja, $\varphi(H) = \mathbb{K}$. Novamente pelo teorema do isomorfismo, temos que $H/\ker(\varphi) \simeq \mathbb{K}$, isto é,

$$H/M \simeq \mathbb{K} \quad (**).$$

Portanto, por (*) e (**) segue que $M^\perp \simeq H/M \simeq \mathbb{K}$. Consequentemente, M^\perp tem dimensão 1. □

Exercício 29 (5.8.29). Sejam H um espaço de Hilbert, F um espaço de Banach, G um subespaço de H e $\varphi : G \rightarrow F$ um operador linear e contínuo. Mostre que existe um operador linear e contínuo $\tilde{\varphi} : H \rightarrow F$ que estende φ e preserva norma.

Resolução. Note que \bar{G} é um subespaço fechado de H . Logo,

$$H = \bar{G} \oplus (\bar{G})^\perp.$$

Seja $P : H \rightarrow \bar{G}$ projeção ortogonal de H em \bar{G} . Como F é espaço de Banach, existe uma única extensão $\tilde{\varphi}$ de φ a \bar{G} linear e contínua (veja o Exercício 5). Defina $\tilde{\varphi} : H \rightarrow F$ dada por $\tilde{\varphi} = \varphi \circ P$. Então, naturalmente temos

- $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in G,$
- $\tilde{\varphi}$ é limitada e contínua.

Provemos que $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Observe que, como $\tilde{\varphi}$ estende φ de G a \bar{G} , então

$$\|\tilde{\varphi}\| = \sup_{x \in \bar{G}} \|\tilde{\varphi}(x)\| \geq \sup_{x \in G} \|\tilde{\varphi}(x)\| = \sup_{x \in G} \|\varphi(x)\| = \|\varphi\|.$$

Portanto, $\|\tilde{\varphi}\| \geq \|\varphi\|$. Além disso, como T é contínuo e G é denso em \bar{G} , dado $x \in \bar{G}$, existe $(x_n) \in G$ tal que $x_n \rightarrow x$ e dessa forma,

$$\|\tilde{\varphi}(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(x_n)\| \leq \|\varphi\| \|x\|.$$

Assim, $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Como $\|P\| = 1$, segue que $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Assim, $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$, o que conclui a demonstração. \square

Exercício 30 (5.8.30). Mostre que a extensão do exercício anterior, em geral, não é única.

Resolução. Tome em ℓ_2 o subespaço:

$$G = \{(a, 0, 0, \dots) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Alguns cálculos simples verificam que realmente G é subespaço vetorial de ℓ_2 e é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_G$ induzida de $\|\cdot\|_2$. Considere o funcional linear:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad G &\longrightarrow \ell_2 \\ (a, 0, \dots) &\longmapsto (a, 0, \dots) \end{aligned}.$$

Veja que:

$$\sup_{\|(a, 0, \dots)\|_G=1} \|\varphi(a, 0, \dots)\|_2 = \sup_{\|(a, 0, \dots)\|_G=1} \|(a, 0, \dots)\|_2 = \sup_{\|(a, 0, \dots)\|_G=1} 1 = 1.$$

Logo, φ é contínua e de norma 1. Uma extensão de φ é a identidade em ℓ_2 , que denotaremos por Id_2 e terá norma 1.

Agora, tome a função:

$$\begin{aligned} \psi: \quad \ell_2 &\longrightarrow \ell_2 \\ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longmapsto (a_1, a_2, 0, \dots) \end{aligned}.$$

É fácil ver que ψ é extensão de φ . Além disso, para $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, temos que:

$$\|\psi((a_i)_{i \in \mathbb{N}})\|_2 = \|(a_1, a_2, 0, \dots)\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2} = \|(a_i)_{i \in \mathbb{N}}\|_2,$$

fazendo com que ψ seja contínua e $\|\psi\| \leq 1$.

Além disso, temos que, sendo $e_1 = (1, 0, \dots)$, temos que $\|e_1\|_2 = 1$ e $\|\psi(e_1)\|_2 = \|e_1\|_2 = 1$. Assim, $\|\psi\| \geq 1$. Portanto, concluímos que $\|\psi\| = 1 = \|\varphi\|$. Assim, Id_2 e ψ são extensões de φ que preservam a sua norma. Como $Id_2 \neq \psi$, temos o desejado. \square

Exercício 31 (5.8.31). (O Teorema de Hahn-Banach para espaços de Hilbert) Sejam H um espaço de Hilbert, F subespaço de H e $\varphi \in F'$. Prove, sem usar o Teorema de Hahn-Banach, que existe um *único* funcional $\tilde{\varphi} \in H'$ que estende φ e preserva a norma.

Resolução. Primeiramente, aplicando o exercício 2.7.5, estendemos de forma única o funcional linear $\varphi \in F'$ para o funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} \in \bar{F}'$ que satisfaz $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Sendo \bar{F} subespaço fechado de H , segue que \bar{F} é Hilbert.

Aplicando então o Teorema de Riesz-Fréchet, sabemos que existe um único $y_0 \in \bar{F}$ tal que $\tilde{\varphi}(z) = \langle z, y_0 \rangle$ para todo $z \in \bar{F}$ com $\|\tilde{\varphi}\| = \|y_0\|$. Defina então $\tilde{\varphi}: H \rightarrow \mathbb{K}$ por $\tilde{\varphi}(x) = \langle x, y_0 \rangle$ para todo $x \in H$. É evidente que $\tilde{\varphi} \in H'$. Além disso, $\tilde{\varphi}|_F = \varphi$ por construção. E como $\tilde{\varphi}|_F = \varphi$, segue que $\tilde{\varphi}|_F = \varphi|_F = \varphi$. A norma de φ também é preservada, posto que $\|\tilde{\varphi}\| = \|y_0\| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Resta apenas provar a unicidade de $\tilde{\varphi}$. Suponha então $\psi \in H'$ extensão de φ a H . Novamente por Riesz-Fréchet, existe único $w \in H$ tal que $\psi(x) = \langle x, w \rangle$ para todo $x \in H$. Tem-se também as igualdades

$\|\varphi\| = \|\psi\| = \|w\|$. Sendo $\tilde{\varphi}$ e ψ extensões do mesmo funcional $\varphi \in F'$, elas devem coincidir em F , ou seja, para todo $z \in F$:

$$\langle z, y_0 \rangle = \tilde{\varphi}(z) = \psi(z) = \langle z, w \rangle \implies \langle z, y_0 - w \rangle = 0.$$

Logo, $y_0 - w \in F^\perp$. Sendo $y_0 \in \overline{F}$, da continuidade do produto interno, segue que $y_0 \perp y_0 - w$. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\|w\|^2 = \|y_0\|^2 + \|y_0 - w\|^2.$$

Porém, $\|y_0\|^2 = \|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 = \|w\|^2$, ou seja, é necessário que $\|y_0 - w\|^2 = 0$ e $w = y_0$, implicando $\psi = \tilde{\varphi}$. \square

Exercício 32 (5.8.32). a) Suponha $F = \mathbb{K}$ e G fechado na situação do Exercício 5.8.29. Definindo

$$\mathfrak{F} = \{\psi \in H' : \psi \text{ é extensão (contínua) de } \phi\},$$

encontre uma expressão (se necessário em função da cardinalidade de G) para a cardinalidade de \mathfrak{F} .

b) No caso em que F é um espaço de Banach, definindo

$$\mathfrak{G} = \{\phi : H \rightarrow F : \psi \text{ é extensão (linear) de } \phi\} \text{ e}$$

$$\mathfrak{H} = \{\psi : H \rightarrow F : \psi \text{ é uma extensão (não necessariamente linear) de } \phi\},$$

encontre uma expressão (se necessário em função da cardinalidade de F e/ou G ou conjuntos relacionados) para as cardinalidades de \mathfrak{G} e \mathfrak{H} .

Resolução. a) Como $\phi \in G'$ e G é fechado (portanto, um espaço de Hilbert), pelo Teorema de Riesz, existe um único $y \in G$ tal que $\phi(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in G$.

Seja $\psi \in \mathfrak{F}$. Pelo Teorema de Riesz, existe um único $z \in H$ tal que $\psi(x) = \langle x, z \rangle$, $\forall x \in H$. Escreva $z = w_0 + w_1$, onde $w_0 \in G$ e $w_1 \in G^\perp$ (note que, sendo G fechado, $H = G \oplus G^\perp$). Assim, para todo $x \in G$,

$$\langle x, w_0 \rangle = \langle x, w_0 \rangle + \langle x, w_1 \rangle = \langle x, w_0 + w_1 \rangle = \langle x, z \rangle = \psi(x) = \phi(x) = \langle x, y \rangle.$$

Pela unicidade, $w_0 = y$. Também, não há restrições para o vetor $w_1 \in G^\perp$, e todo w_1 determina uma extensão linear contínua diferente de ϕ . Portanto, $|\mathfrak{F}| = |G^\perp|$.

b) Seja B uma base de G^\perp . Assim, todo $\psi \in \mathfrak{G}$ está unicamente definido pelo seu valor nos elementos de B , pois ψ é linear e $\psi|_G = \phi$. Logo, $|\mathfrak{G}| = |F^B|$.

Agora, se $\psi \in \mathfrak{H}$, então o valor de ψ em G^c pode ser qualquer, já que ψ pode nem mesmo ser linear. Logo, $|\mathfrak{H}| = |F^{H-G}|$. \square

Exercício 33 (5.8.33). Sejam I um conjunto qualquer e $1 \leq p \leq \infty$. Chamemos de \mathcal{F} a coleção dos subconjuntos finitos de I . Dada uma coleção de escalares $(a_j)_{j \in I}$ indexada por I , escrevemos:

$$\|(a_j)_{j \in I}\|_p = \sup_{A \in \mathcal{F}} \left(\sum_{j \in A} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } p < \infty \text{ e } \|(a_j)_{j \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} |a_i|.$$

(a) Prove que:

$$\ell_p(I) := \left\{ (a_j)_{j \in I} : a_i \in K \text{ para todo } i \in I \text{ e } \|(a_j)_{j \in I}\|_p < \infty \right\},$$

é um espaço vetorial no qual $\|\cdot\|_p$ é uma norma;

(b) Prove que $(\ell_p(I), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach;

(c) Prove que, para $1 \leq p < \infty$, $(\ell_p(I))'$ é isometricamente isomorfo a $\ell_q(I)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1' = \infty$;

(d) Seja $\{x_i : i \in I\}$ um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert H . Prove que H é isometricamente isomorfo a $\ell_2(I)$;

(e) Prove que todo espaço de Hilbert é isometricamente isomorfo ao seu dual.

Resolução. Resolveremos esse exercício apenas para o caso $p < \infty$.

(a) Análogo à ℓ_p .

(b) Tome $a = (a_j)_{j \in I} \in \ell_p(I)$. Escrevendo $J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$, vamos mostrar que cada J é enumerável. Dado $k \in \mathbb{N}$, sendo $J_k = \{i \in I \mid |a_i|^p > \frac{1}{k}\}$, veremos que J_k é finito. Para $i_1, \dots, i_n \in J_k$ distintos dois a dois, temos que:

$$\frac{n}{k} \leq |a_{i_1}|^p + \dots + |a_{i_n}|^p \leq \|a\|_p^p,$$

portanto $n \leq k \cdot \|a\|_p^p$, fazendo com que J_k seja finito. Logo, $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$ é enumerável.

Tomemos agora uma sequência $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy em $\ell_p(I)$. Cada $a^{(n)}$ é escrito da forma $(a_i^{(n)})_{i \in I}$ e o conjunto $J_{a^{(n)}} = \{i \in I \mid a_i^{(n)} \neq 0\}$ é enumerável. Logo, $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_{a^{(n)}}$ é enumerável. Seja $\{j_1, \dots, j_n, \dots\}$ uma enumeração de J . Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar:

$$b^{(n)} = (a_{j_i}^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}.$$

Alguns cálculos nos mostram que $b^{(n)} \in \ell_p$ e para $n, m \in \mathbb{N}$ temos $\|b^{(n)} - b^{(m)}\|_{\ell_p} = \|a^{(n)} - a^{(m)}\|_p$. Portanto, $(b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em ℓ_p . Logo converge para algum $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Assim, tomemos $a = (a_i)_{i \in I}$, onde:

$$a_i = \begin{cases} b_i, & \text{se } i \in J \\ 0, & \text{se } i \notin J \end{cases}.$$

Pode-se provar que $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a a em $\ell_p(I)$, provando que $\ell_p(I)$ é Banach.

(c) Vamos provar que:

$$\begin{aligned} T : \quad \ell_q(I) &\rightarrow (\ell_p(I))' \\ a = (a_i)_{i \in I} &\mapsto \varphi_a : \begin{aligned} \ell_p(I) &\rightarrow \mathbb{K} \\ (b_i)_{i \in I} &\mapsto \sum_{i \in I} b_i \cdot a_i \end{aligned} \end{aligned},$$

é isomorfismo isométrico.

Primeiro veremos que T está bem definida, isto é, $\varphi_a \in (\ell_p(I))'$ para todo $a = (a_i)_{i \in I} \in \ell_q(I)$. Como $J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$ é enumerável, tomando uma enumeração $J = \{j_1, \dots, j_n, \dots\}$, temos:

$$\varphi_a(b_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} a_i b_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{j_i} b_{j_i}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $b = (b_i)_{i \in I}$, pela Desigualdade de Hölder,

$$\sum_{i=1}^n a_{j_i} b_{j_i} \leq \sum_{i=1}^n |a_{j_i}| \cdot |b_{j_i}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_{j_i}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |b_{j_i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|a\|_q \cdot \|b\|_p,$$

fazendo com que $|\varphi_a(b_i)_{i \in I}| = |\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{j_i} b_{j_i}| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{j_i}| \cdot |b_{j_i}| \leq \|a\|_q \cdot \|b\|_p$.

Portanto, $\varphi_a \in (\ell_p(I))'$ e $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$. Com isso, T está bem definida e obviamente é linear.

Agora, tome para cada $i \in I$,

$$b_i = \begin{cases} \frac{|a_i|^{\frac{p}{q}}}{\|a\|_q^{\frac{p}{q}}} \cdot \frac{\overline{a_i}}{|a_i|}, & \text{se } i \in J \\ 0, & \text{se } i \notin J \end{cases}.$$

Dados finitos $i_1, \dots, i_n \in I$, temos que:

$$\sum_{j=1}^n |b_{i_j}|^q \leq \sum_{j=1}^n \frac{|a_{i_j}|^p}{\|a\|_q^p} = \frac{\sum_{j=1}^n |a_{i_j}|^p}{\|a\|_q^p} \leq \frac{\|a\|_p^p}{\|a\|_q^p} = 1. \quad (9)$$

Portanto, $b = (b_i)_{i \in I} \in \ell_p(I)$ e $\|(b_i)_{i \in I}\| \leq 1$. Além disso,

$$|\varphi_a(b)| = \left| \sum_{i \in I} a_i \cdot b_i \right| = \left| \sum_{i \in I} \frac{|a_i|^{\frac{p}{q}+1}}{\|a\|_q^{\frac{p}{q}}} \right| = \frac{\sum_{i \in \mathbb{N}} |a_{j_n}|^q}{\|a\|_q^{\frac{p}{q}}}. \quad (10)$$

Dado $A \in \mathcal{F}$ finito, temos que:

$$\left(\sum_{j \in A} |a_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j \in A \cap J} |a_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{j_n}|^q = \sum_{j \in J} |a_j|^q \geq \sum_{j \in A \cap J} |a_j|^q = \sum_{j \in A} |a_j|^q.$$

Como isso acontece para todo $A \in \mathcal{F}$, temos que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{j_n}|^q \geq \|a\|_q^q$. Portanto, em (10),

$$|\varphi_a(b)| \geq \frac{\|a\|_q^q}{\|a\|_q^{\frac{p}{q}}} = \|a\|_q^{q-\frac{p}{q}} = \|a\|_q.$$

Assim, $\|\varphi_a\| \geq \|a\|_q$, ou seja, $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Portanto, T é uma isometria, faltando provar que é sobrejetora.

Dado $\varphi \in (\ell_p(I))'$, seja e_i o elemento de $\ell_p(I)$ em que é nula em toda coordenada, com exceção da coordenada i em que é 1. Assim, tome para cada $i \in I$, $a_i = \varphi(e_i)$. Para cada $c = (c_i)_{i \in I} \in \ell_p(I)$, temos que $J = \{i \in I \mid c_i \neq 0\}$ é enumerável. Sendo $\{j_1, j_2, \dots\}$ uma enumeração de J , vamos provar que $c = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j_n} e_{j_n}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\sum_{n=1}^m |c_{j_n}|^p \leq \|c\|_p^p.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{j_n}|^p$ é convergente. Por outro lado,

$$\left\| c - \sum_{n=1}^m c_{j_n} e_{j_n} \right\|_p \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_{j_n}|^p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto, $c = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j_n} e_{j_n}$. Com isso, como φ é linear e contínua

$$\varphi(c) = \varphi \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j_n} e_{j_n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j_n} \varphi(e_{j_n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{j_n} a_{j_n} = \sum_{i \in I} c_i a_i.$$

Resta apenas provar então que $a = (a_i)_{i \in I} \in \ell_q(I)$.

Para cada $i \in I$, tome:

$$b_i = \begin{cases} |a_i|^{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\overline{a_i}}{|a_i|}, & \text{se } a_i \neq 0 \\ 0, & \text{se } a_i = 0 \end{cases}.$$

Para $A \in \mathcal{F}$, escrevendo $\{i_1, \dots, i_n\} = A$, temos que:

$$\sum_{i \in A} |a_i|^q = \sum_{j=1}^n |a_{i_j}|^q = \sum_{j=1}^n b_{i_j} a_{i_j} = \sum_{j=1}^n b_{i_j} \varphi(e_{i_j}) = \varphi \left(\sum_{j=1}^n b_{i_j} e_{i_j} \right) \leq \|\varphi\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^n b_{i_j} e_{i_j} \right\|_p.$$

Veja que $\sum_{j=1}^n b_{i_j} e_{i_j} = (f_i)_{i \in I}$ com:

$$f_i = \begin{cases} b_{i_j}, & \text{se } i = i_j \text{ para algum } j \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Com isso,

$$\left\| \sum_{j=1}^n b_{i_j} e_{i_j} \right\|_p^p = \sum_{j=1}^n |b_{i_j}|^p = \sum_{j=1}^n |a_{i_j}|^q.$$

Logo, $\left\| \sum_{j=1}^n b_{i_j} e_{i_j} \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |a_{i_j}|^q \right)^{\frac{1}{p}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} |a_i|^q &\leq \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_{i_j}|^q \right)^{\frac{1}{p}} \implies \left(\sum_{i \in A} |a_i|^q \right)^{1 - \frac{1}{p}} \leq \|\varphi\| \\ &\implies \left(\sum_{i \in A} |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Uma vez que tomamos qualquer $A \in \mathcal{F}$, temos que $a \in \ell_q(I)$.

(d) Tome a função:

$$\begin{aligned} T: H &\longrightarrow \ell_2(I) \\ x &\longmapsto (\langle x, x_i \rangle)_{i \in I} \end{aligned}.$$

Vamos provar que T está bem definido e é um isomorfismo isométrico.

Dado $x \in H$, tome $A \in \mathcal{F}$. Pelo visto em sala, $J = \{i \in I \mid \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$ é enumerável. Portanto, pela Desigualdade de Bessel,

$$\sum_{i \in A} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \sum_{i \in A \cap J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Portanto, $(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I} \in \ell_2(I)$ e $\|(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}\|_2 \leq \|x\|$. Portanto, T está bem definida e obviamente é linear.

Agora, pela Identidade de Parseval, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2$. Sendo $\{j_1, \dots, j_n, \dots\}$ uma enumeração de J , para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, x_{j_i} \rangle|^2 \leq \|(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}\|_2^2.$$

Assim,

$$\|(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}\|_2^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_{j_i} \rangle|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, x_j \rangle|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Dessa forma, $\|x\| = \|(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}\|_2$. Assim, T é isometria. Resta então provar que T é sobrejetora.

Dado $a = (a_i)_{i \in I} \in \ell_2(I)$, seja $K = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$. Então K é enumerável e podemos tomar uma enumeração $\{k_1, \dots, k_n, \dots\}$. Assim, escrevemos para $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^n a_{k_i} x_{k_i}$. Note que $\sum_{i=1}^n |a_{k_i}|^2 \leq \|a\|_2^2$, fazendo com que $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{k_i}|^2$ seja convergente. Assim, para $n, m \in \mathbb{N}$, supondo $n > m$,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n a_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |a_i|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Logo, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Assim, existe $x \in H$ com $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo a x . Portanto,

$$\langle x, x_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, x_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k_i} x_{k_i}, x_i \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{k_i} \langle x_{k_i}, x_i \rangle = a_i.$$

Assim, $T(x) = a$, provando o desejado.

- (e) Se $H = \{0\}$ não tem o que fazer. Caso $H \neq \{0\}$, tome $x \in H - \{0\}$ e $y = \frac{x}{\|x\|}$. Portanto $S_0 = \{y\}$ é um sistema ortonormal completo. Assim, H admite um sistema ortonormal completo $S = \{x_i \mid i \in I\}$ que contém S_0 . Pelos itens (c) e (d), existem isomorfismos isométricos $\alpha : \ell_2(I) \rightarrow (\ell_2(I))'$ e $\beta : H \rightarrow \ell_2(I)$. Com isso, $\beta' : (\ell_2(I))' \rightarrow H'$ é isomorfismo isométrico. Temos então um isomorfismo isométrico $\beta' \circ \alpha \circ \beta : H \rightarrow H'$.

□

Exercício 34 (5.8.34). (Funções de Rademacher) A função sinal é definida por

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima função de Rademacher é a função $r_n(t) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi t))$, para todo $t \in [0, 1]$. Prove que:

- O conjunto (r_n) é ortonormal em $L_2[0, 1]$;
- (r_n) não é um sistema ortonormal completo em $L_2[0, 1]$.

Resolução. É claro que $r_n \in L_2[0, 1]$, pois são funções limitadas em um compacto (portanto, 2-integráveis). Primeiro, note que $\sin(2^n \pi t)$ é 0 se $2^n \pi t$ é múltiplo de π , ou seja, se $t = 2^{-n}k$, para $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Nos intervalos $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, r_n é constante e vale ± 1 . Como os pontos onde r_n se anula são discretos, ao integrar uma função que é múltipla de r_n , ou seja, $f = r_n g$, basta integrar em cada subintervalo, e então somar o resultado de todos eles.

- É claro que para todo $n \geq 1$,

$$\|r_n\|_2^2 = \int_0^1 |r_n(t)|^2 dt = \int_0^1 1 dt = 1 \Rightarrow \|r_n\|_2 = 1.$$

Agora, considere $m > n \geq 1$. Sejam $A_k = (k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$ e $B_l = (l2^{-n}, (l+1)2^{-n})$. Como vimos acima, para calcular $\langle r_n, r_m \rangle = \int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt$, basta integrar em cada subintervalo B_l . Note que

$$\begin{aligned} A_k \subset B_l &\Leftrightarrow (k2^{-m}, (k+1)2^{-m}) \subset (l2^{-n}, (l+1)2^{-n}) \\ &\Leftrightarrow l2^{-n} \leq k2^{-m}, (k+1)2^{-m} \leq (l+1)2^{-n} \\ &\Leftrightarrow l2^{m-n} \leq k \leq (l+1)2^{m-n} - 1. \end{aligned}$$

Assim, todo intervalo A_k está contido em algum intervalo B_l . Em particular, fixado l , temos $A_k \subset B_l$ se $l2^{m-n} \leq k \leq (l+1)2^{m-n} - 1$. Em B_l , r_n é constante. Além disso, como o sinal de r_m se alterna entre A_k e A_{k+1} , temos que $\int_{A_k} r_n(t)r_m(t)dt = -\int_{A_{k+1}} r_n(t)r_m(t)dt$, para todo k par neste intervalo. Assim, concluímos que $\int_{B_l} r_n(t)r_m(t)dt = 0$, e portanto, $\int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt = 0$, ou seja, r_n e r_m são ortogonais. Logo, (r_n) é um conjunto ortonormal.

Note que, na verdade, demonstramos que $\int_{B_l} r_m(t)dt = 0$, para todos $0 \leq l \leq 2^n - 1$ e $m > n$.

b) Seja $f(t) = r_1(t)r_2(t)$. É claro que

$$\begin{aligned} \langle f, r_1 \rangle &= \int_0^1 r_1^2(t)r_2(t)dt = \int_0^1 r_2(t)dt = 0, \\ \langle f, r_2 \rangle &= \int_0^1 r_1(t)r_2^2(t)dt = \int_0^1 r_1(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Sejam $B_l = (l/4, (l+1)/4)$, para $0 \leq l < 4$. Assim, f é constante em cada B_l (pois r_1 e r_2 são constantes nesses intervalos), valendo ± 1 . Pelo mesmo argumento usado no item (a), se $n > 2$, então $\int_{B_l} f(t)r_n(t)dt = \int_{B_l} \pm r_n(t)dt = 0$, para todo l . Logo,

$$\langle f, r_n \rangle = \int_0^1 f(t)r_n(t)dt = \sum_{l=0}^3 \int_{B_l} f(t)r_n(t)dt = 0.$$

Portanto, mostramos que $f \in (r_n)^\perp$. Como $(r_n)^\perp \neq \{0\}$, (r_n) não é completo. \square

Exercício 35 (5.8.35). Seja (r_n) a sequência de funções de Rademacher. Prove que, para todos inteiros positivos $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ e p_1, \dots, p_k , vale que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \dots r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resolução. Se p_j é par, então $r_{n_j}^{p_j} = 1$ em quase toda parte. Logo, se p_1, \dots, p_k são todos pares, então temos que $\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \dots r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \int_0^1 1dt = 1$.

Suponha então que nem todos os p_j são pares. Como $r_{n_j}^{p_j} = 1$ em quase toda parte, se p_j é par, e $r_{n_j}^{p_j} = r_{n_j}$, se p_j é ímpar, podemos sem perda de generalidade, supor que $p_1 = \dots = p_k = 1$. Assim, basta mostrar que $\int_0^1 r_{n_1}(t) \dots r_{n_k}(t)dt = 0$.

Se $k = 1$, isto é imediato. Se $k = 2$, já está provado no Exercício 5.8.34, onde demonstramos que $\langle r_{n_1}, r_{n_2} \rangle = 0$.

Assim, suponha que $k > 2$.

Note que a função $r_{n_1}(t) \dots r_{n_{k-1}}(t)$ é constante ± 1 nos intervalos $B_l = (l2^{n_k-1}, (l+1)2^{n_k-1})$. Assim, $\int_{B_l} r_{n_1}(t) \dots r_{n_k}(t)dt = \pm \int_{B_l} r_{n_k}(t)dt = 0$, como demonstramos no exercício 5.8.34, pois $n_k > n_{k-1}$. Logo, como isto vale para todo intervalo B_l , concluímos que $\int_0^1 r_{n_1}(t) \dots r_{n_k}(t)dt = 0$. \square

Exercício 36 (5.8.36). Sejam (X_1, Σ_1, μ_1) e (X_2, Σ_2, μ_2) espaços de medida σ -finitos tais que $L_2(\mu_1)$ e $L_2(\mu_2)$ são separáveis. Sejam $(f_n)_{n=1}^\infty$ e $(g_n)_{n=1}^\infty$ sistemas ortonormais completos em $L_2(\mu_1)$ e $L_2(\mu_2)$, respectivamente. Prove que definindo $h_{mn}(x, y) = f_m(x)g_n(y)$ tem-se que $(h_{mn})_{m,n=1}^\infty$ é um sistema ortonormal completo em $L_2(\mu_1 \otimes \mu_2)$, onde $\mu_1 \otimes \mu_2$ é a medida produto.

Resolução. Note primeiro que, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle h_{mn}, h_{m'n'} \rangle &= \int_{X_1 \times X_2} h_{mn}(x, y) h_{m'n'}(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \int_{X_1 \times X_2} f_m(x) f_{m'}(x) g_n(y) g_{n'}(y) d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_m(x) f_{m'}(x) g_n(y) g_{n'}(y) d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{X_1} \left(f_m(x) f_{m'}(x) \int_{X_2} g_n(y) g_{n'}(y) d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{X_1} f_m(x) f_{m'}(x) \langle g_n, g_{n'} \rangle d\mu_1 \\
&= \left(\int_{X_1} f_m(x) f_{m'}(x) d\mu_1 \right) \langle g_n, g_{n'} \rangle \\
&= \langle f_m, f_{m'} \rangle \langle g_n, g_{n'} \rangle
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle h_{mn}, h_{m'n'} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } (m, n) = (m', n') \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo, (h_{mn}) é ortonormal. Agora, se $f \in L_2(\mu_1 \otimes \mu_2)$, então, pelo Teorema de Fubini e pela convergência das séries,

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^{\infty} \langle f, h_{mn} \rangle h_{nm}(x_0, y_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) h_{mn}(x, y) d(\mu_1 \otimes \mu_2) \right) h_{mn}(x_0, y_0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{X_1} \left(f_m(x) \int_{X_2} f(x, y) g_n(y) d\mu_2 \right) d\mu_1 \right) f_m(x_0) g_n(y_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{X_1} f_m(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_2} f(x, y) g_n(y) d\mu_2 g_n(y_0) \right) d\mu_1 \right) f_m(x_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{X_1} f_m(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle f(x, \cdot), g_n \rangle g_n(y_0) \right) d\mu_1 \right) f_m(x_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{X_1} f_m(x) f(x, y_0) d\mu_1 \right) f_m(x_0) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \langle f(\cdot, y_0), f_m \rangle f_m(x_0) \\
&= f(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Portanto, (h_{mn}) é completo. □

Exercício 37 (5.8.37). Prove a unicidade do vetor x_0 no Teorema de Lax-Milgram (Teorema 5.6.4).

Resolução. Como $T : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear coerciva, existe $\beta > 0$ tal que $T(x, x) \geq \beta \|x\|^2$, para todo $x \in H$.

Suponha, por absurdo, que x_0 não seja único, ou seja, existe $y \in H$ tal que $T(x, x_0) = \phi(x) = T(x, y)$, para todo $x \in H$. Pela bilinearidade de T , $T(x, x_0 - y) = 0$, para todo $x \in H$. Em particular, $T(x_0 - y, x_0 - y) = 0$. Mas, pela coercividade de T ,

$$0 = T(x_0 - y, x_0 - y) \geq \beta \|x_0 - y\|^2 \Rightarrow \|x_0 - y\|^2 \leq 0 \Rightarrow x_0 - y = 0 \Rightarrow x_0 = y.$$

□

6 Capítulo 6

Exercício 1 (6.8.1). Demonstre a Proposição 6.1.1.

Proposição 6.1.1 Existe uma topologia τ em X que tem Φ como base, isto é, os elementos de τ são uniões de elementos de Φ .

Resolução. Pelo **Teorema B.18**, é suficiente mostrar que $X = \bigcup_{B \in \Phi} B$ e que, dado $B_1, B_2 \in \Phi$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \Phi$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Para mostrar a primeira propriedade, note que, fixado $f = f_i : X \rightarrow Y_i = Y$ para $i \in I$ qualquer, existe para todo $x \in \Phi$ uma vizinhança $A_x \in Y$ tal que $f(x) \in A_x \implies x \in f^{-1}(A_x)$. Logo, $X = \bigcup_{x \in X} f^{-1}(A_x) \subseteq \bigcup_{B \in \Phi} B$, pois $f^{-1}(A_x) \in \Phi$.

Para segunda, escreva $B_1, B_2 \in \Phi$ da forma

$$B_1 = f_{i_1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_n}(A_{i_n}) \quad \text{e} \quad B_2 = f_{i_{n+1}}(A_{i_{n+1}}) \cap \dots \cap f_{i_{n+m}}(A_{i_{n+m}})$$

então existe $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \Phi$ da forma

$$B_3 = f_{i_1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_n}(A_{i_n}) \cap f_{i_{n+1}}(A_{i_{n+1}}) \cap \dots \cap f_{i_{n+m}}(A_{i_{n+m}})$$

e vemos que $x \in B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$. □

Exercício 2 (6.8.2). Demonstre a Proposição 6.1.3.

Seja τ a topologia em X gerada pela família de funções $(f_i)_{i \in I}$. Então:

- (a) Para cada $i \in I$ a função $f_i : X \rightarrow Y_i$ é contínua.
- (b) τ é a menor topologia em X tal que vale (a).
- (c) τ é a interseção de todas as topologias em X em relação às quais todas as f_i são contínuas.
- (d) Para cada $x \in X$, os conjuntos da forma $f_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(A_n)$ onde $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ e A_j é vizinhança de $f_{i_j}(x)$, $j \in 1, \dots, n$, constituem uma base de vizinhanças para x .
- (e) Seja (x_λ) uma rede em X . Então $x_\lambda \rightarrow x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_i(x_\lambda) \rightarrow f_i(x)$ em Y_i para todo $i \in I$.
- (f) Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \rightarrow (X, \tau)$. Então f é contínua se, e somente se, $f_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$ é contínua para todo $i \in I$.
- (g) Suponha que todos os Y_i sejam espaços de Hausdorff. Então a topologia τ é de Hausdorff se, e somente se, a família $(f_i)_{i \in I}$ separa pontos de X , isto é, para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Resolução.

- (a) Seja $A_i \subset Y_i$ aberto, então $f_i^{-1}(A_i) \subset X$ é aberto na topologia $\tau \implies f_i$ é contínua $\forall i \in I$.
- (b) Seja τ' outra topologia na qual vale (a). Então $f_i^{-1}(A_i) \in \tau'$ para todo $i \in I$ e $A_i \subset Y_i$ aberto. Ainda, $f_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) \in \tau'$ para toda coleção finita $i_1, \dots, i_n \in I$, uma vez que τ' é topologia. Logo, $\Phi \subset \tau'$, que é base de τ , e portanto $\tau \leq \tau'$.
- (c) Por (b), $\tau \leq \tau'$ para toda topologia τ' na qual vale (a). Seja $(\tau_j)_{j \in J}$ a família das topologias nas quais vale (a), então $\tau \leq \tau_j$ para todo $j \in J$ e, portanto, $\tau \leq \bigcap_{j \in J} \tau_j$.
- (d) Suponha $U \in \mathcal{U}_x$ conjunto no sistema de vizinhanças de x , i.e., tal que existe $V \subset U$ aberto com $x \in V$. Como Φ é base de τ , existe $B \in \Phi$ com $x \in B \subset V$ pela **Proposição B.17**. Agora, pela definição de Φ , B é da forma

$$B = f_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(A_n)$$

onde $i_1, \dots, i_n \in I$ e A_j é aberto em Y_i ; ainda, como $f_j(x) \in A_j$, A_j é vizinhança de $f_j(x)$ em Y_i . Logo, o conjunto dos B da forma acima constitui uma base de vizinhanças para x .

- (e) Por (a), as funções $f_i : X \rightarrow Y_i$ são contínuas para todo $i \in I$; e, pelo **Teorema B.31 (d)**, uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ para toda rede (x_λ) em X tal que $x_\lambda \rightarrow x$ em X .
- (f) f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto para todo aberto $A \subset Z$. Como Φ é base de τ e pela **Proposição B.17**, $f^{-1}(A)$ é aberto em X se, e somente se, existe $B = f_{i_1}(A_1) \cap \cdots \cap f_{i_n}(A_n) \in \Phi$ com $x \in B \subset f^{-1}(A)$ para todo $x \in f^{-1}(A)$.
- (g) *g* Suponha primeiro que (f_i) separa pontos de X . Sejam $x, y \in X$ distintos. Então, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Daí, sendo Y_i Hausdorff, existem $A_1, A_2 \subset Y_i$ abertos disjuntos tais que $f_i(x) \in A_1, f_i(y) \in A_2$. Logo, $f_i^{-1}(A_1), f_i^{-1}(A_2) \in \tau$ são disjuntos e $x \in f_i^{-1}(A_1), y \in f_i^{-1}(A_2)$. Portanto, H é Hausdorff. Reciprocamente, suponha por absurdo que (f_i) não separa pontos de X , ou seja, existem $x, y \in X$ distintos tais que $f_i(x) = f_i(y)$, para todo $i \in I$. Logo, se $\bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(A_k)$ é um aberto da base de τ que contém x , então este contém y também. Logo, todo aberto $A \in \tau$ com $x \in A$ contém y também. Portanto, X não é Hausdorff.

□

Exercício 3 (6.8.3). Sejam F um subespaço do espaço normado E e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em F . Prove que $x_n \xrightarrow{w} x$ em F se, e somente se, $x_n \xrightarrow{w} x$ em E .

Resolução.

- (\rightarrow) Tome $\varphi \in E'$. Logo, $\varphi|_F \in F'$. Logo, pela Proposição 6.2.2(c), como $x_n \xrightarrow{w} x$ em F , temos que $\varphi|_F(x_n) = \varphi(x_n)$ converge para $\varphi|_F(x) = \varphi(x)$. Novamente pela Proposição 6.2.2(c), como $\varphi \in E'$ é arbitrário, temos que $x_n \xrightarrow{w} x$ em E .
- (\leftarrow) Tome $\varphi \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{\varphi} \in E'$ que estende φ . Uma vez que $x_n \xrightarrow{w} x$ em E , temos que $\tilde{\varphi}(x_n) = \varphi(x_n)$ converge para $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Mais uma vez, a Proposição 6.2.2(c) nos diz que $x_n \xrightarrow{w} x$ em F .

□

Exercício 4 (6.8.4). Seja F um subespaço do espaço normado E . Prove que a topologia fraca $\sigma(F, F')$ de F é a topologia induzida em F pela topologia fraca $\sigma(E, E')$ de E .

Resolução. Seja τ a topologia de F induzida por $\sigma(E, E')$, ou seja, é a coleção de subconjuntos da forma $A \cap F$, onde $A \in \sigma(E, E')$.

Sejam $A \in \tau$ e $x \in A$. Logo, existe $B \in \sigma(E, E')$ tal que $A = B \cap F$. Como $x \in B$, existem $\phi_1, \dots, \phi_n \in E'$ e $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{K}$ abertos tais que $x \in \bigcap_{k=1}^n \phi_k^{-1}(A_k) \subset B$. Daí, $\phi_k|_F \in F'$ e

$$x \in \bigcap_{k=1}^n \phi_k|_F^{-1}(A_k) = \bigcap_{k=1}^n (\phi_k^{-1}(A_k) \cap F) = \left(\bigcap_{k=1}^n \phi_k^{-1}(A_k) \right) \cap F \subset B \cap F = A.$$

Logo, x é um ponto interior de A na topologia $\sigma(F, F')$, e como isto vale para todo $x \in A$, concluímos que $A \in \sigma(F, F')$. Portanto, $\tau \subset \sigma(F, F')$.

Reciprocamente, seja $\phi \in F'$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\psi \in E'$ tal que $\psi|_F = \phi$. Logo, para todo $A \subset \mathbb{K}$ aberto, $\psi^{-1}(A) \in \sigma(E, E')$, e assim $\phi^{-1}(A) = \psi^{-1}(A) \cap F \in \tau$. Como isto vale para todo A , ϕ é contínua em (F, τ) . Como isto vale para toda $\phi \in F'$, e $\sigma(F, F')$ é a menor topologia onde todos os funcionais em F' são contínuos, concluímos que $\sigma(F, F') \subset \tau$. □

Exercício 5 (6.8.5). Analise a convergência fraca da sequência $(e_n)_{n=1}^\infty$ formada pelos vetores unitários canônicos nos seguintes espaços: c_{00} , ℓ_1 , ℓ_p , com $1 < p < \infty$ e ℓ_∞ .

Resolução.

Dado $\varphi \in (c_0)'$, sabemos que existe uma sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$ tal que $\varphi((b_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j$, para toda sequência $(b_j)_{j=1}^\infty \in c_0$. Em particular, $\varphi(e_n) = a_n$.

Note que $\sum_{j=1}^\infty |a_j| < \infty$ e portanto $(a_j)_{j=1}^\infty$ converge para zero. Daí,

$$\varphi(e_n) = a_n \longrightarrow 0 = \varphi(0)$$

Isto é, $e_n \xrightarrow{w} 0$ em c_0 . Agora, como c_{00} é um subespaço de c_0 e c_0 é um subespaço de ℓ_∞ , segue pelo Exercício 6.8.3 que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em c_{00} e ℓ_∞ .

Seja agora $\varphi \in (\ell_p)'$, com $1 < p < \infty$. Pela teoria, sabemos que existe uma sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p'}$ tal que $\varphi((b_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j$, para toda sequência $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Em particular, $\varphi(e_n) = a_n$.

Assim como no caso anterior, temos que $(a_j)_{j=1}^\infty$ converge para zero e portanto

$$\varphi(e_n) = a_n \longrightarrow 0 = \varphi(0)$$

Isto é, $e_n \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_p . □

Exercício 6 (6.8.6). Prove que toda sequência ortonormal em um espaço de Hilbert converge fracamente para zero.

Resolução. Tome $\{x_n\} \subset H$ sequência ortonormal e considere a sequência $\{\sum_j^n |\varphi(x_n)|^2\}$ para um $\varphi \in H'$ qualquer. Vamos mostrar que é convergente, de forma que $\|\varphi(x_n)\| \rightarrow 0$. Pelo **Teorema de Riesz-Fréchet**, sabemos que existe $y_0 \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle$. Logo, pela **Desigualdade de Bessel**,

$$\sum_j |\varphi(x_j)|^2 = \sum_j |\langle x_j, y_0 \rangle|^2 \leq \|y_0\|^2$$

e portanto é convergente.

Agora, pela **Proposição 6.2.2**, sabemos que $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x) \forall \varphi \in H'$. Como $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ para todo $\varphi \in H'$, sabemos que $\{x_n\}$ é fracamente convergente para um elemento em $\bigcap_{\varphi \in H'} \ker \varphi = \{0\}$. Ou seja, $x_n \xrightarrow{w} 0$. □

Exercício 7 (6.8.7).

- (a) Prove que se $x_n \xrightarrow{w} x$ e $y_n \rightarrow y$ em um espaço com produto interno, então $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.
- (b) Dê um exemplo em que $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} y$ mas $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n=1}^\infty$ não é convergente.

Resolução.

(a) Sendo E o espaço com produto interno, para cada $n \in \mathbb{N}$, tome:

$$\begin{aligned} \varphi_n : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \langle a, y_n \rangle \end{aligned}.$$

Assim, pelo já visto em sala, $\varphi_n \in E'$. Defina também:

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \langle a, y \rangle \end{aligned}.$$

Logo, podemos tomar o funcional linear contínuo $\varphi_n - \varphi$ e ele é da forma:

$$\begin{aligned} \varphi_n - \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \langle a, y_n - y \rangle \end{aligned}.$$

Assim, também como já vimos em aula, $\|\varphi_n - \varphi\| = \|y_n - y\|$ converge para 0. Portanto, φ_n converge para φ em E' . Logo, pela Proposição 6.2.5, $(\varphi_n(x_n))_{n=1}^\infty = (\langle x_n, y_n \rangle)_{n=1}^\infty$ converge para $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$.

- (b) Em ℓ_2 , considere $(e_n)_{n=1}^\infty$ a sequência de vetores unitários canônicos. Pelo Exercício 6.8.5, temos que $e_n \xrightarrow{w} 0$. Agora, tome a sequência $(a_n)_{n=1}^\infty$ dada por:

$$a_n = \begin{cases} e_n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -e_n, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tome qualquer $\varphi \in \ell'_2$. Existe então $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ em que:

$$\begin{aligned} \varphi : \ell_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (c_n)_{n=1}^\infty &\longmapsto \sum_{n=1}^\infty c_n b_n. \end{aligned}$$

Dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(a_n) = \begin{cases} b_n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -b_n, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Uma vez que $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$, é fato que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para $n > N$, temos que $|\varphi(a_n)| = |b_n| < \varepsilon$. Provamos assim que $\varphi(a_n)$ converge a $0 = \varphi(0)$. Pela arbitrariedade de $\varphi \in \ell'_2$, é fato que $a_n \xrightarrow{w} 0$.

Porém, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle e_n, a_n \rangle = \begin{cases} \langle e_n, e_n \rangle, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \langle e_n, -e_n \rangle, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Portanto, $(\langle e_n, a_n \rangle)_{n=1}^\infty$ não converge em \mathbb{K} .

□

Exercício 8 (6.8.8). É possível adaptar a demonstração do Teorema 6.2.12 para provar que redes fracamente convergentes em l_1 são convergentes em norma?

Resolução. Sim: suponha que (z_λ) é uma rede que converge fracamente para 0, mas não converge em norma para 0. Logo, existem $\epsilon > 0$ e uma sequência (z_{λ_n}) , com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ e $\|z_{\lambda_n}\| \geq 5\epsilon$. Então procedemos como na demonstração, tomando a sequência $x_n = z_{\lambda_n}$, que converge fracamente para 0 mas não converge em norma, e obtemos uma contradição. □

Exercício 9 (6.8.9). Prove que todo conjunto não vazio e aberto na topologia fraca de um espaço de dimensão infinita é ilimitado. Use isso para dar outra demonstração de que as topologias fraca e da norma nunca coincidem em dimensão infinita.

Resolução. Mostremos a primeira parte do enunciado. Seja U um aberto na topologia fraca. Então, U contem algum aberto básico na forma

$$V_{\varepsilon, J} = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \alpha_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n\},$$

onde $\varepsilon > 0$, $J = \{1, \dots, n\}$, $\varphi_i \in E'$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in J$. Seja $K = \bigcap_{i \in J} \ker(\varphi_i)$.

Afirmção 9.1. $K \neq \{0\}$.

Demonstração. Se $K = \{0\}$, o operador linear $T : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ dado por

$$T(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

será injetor, o que contradiz o fato de E ter dimensão infinita. ■

Se $y \in K$ e $x \in V_{\varepsilon, J}$ então, $y + x \in V_{\varepsilon, J}$, pois

$$|\varphi_i(y + x) - \alpha_i| = |\varphi_i(x) - \alpha_i| < \varepsilon, \quad \forall i \in J.$$

Como K não é limitado, então podemos tomar $y \in U$ a tornar $y + x$ quão grande queiramos, o que prova que $V_{\varepsilon, J}$ é ilimitado e portanto, U é ilimitado.

Para a segunda parte, seja $B = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. Então, B é aberto na topologia da norma. Entretanto, como B é ilimitado, segue que B não é aberto na topologia fraca. Isso prova a segunda parte do enunciado. \square

Exercício 10 (6.8.10). Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E tal que $x_n \xrightarrow{w} x \in E$. Prove que existem combinações convexas $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ do conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$ tais que $y_n \rightarrow x$. (Uma combinação convexa do conjunto do subconjunto A de um espaço vetorial é um vetor da forma $\sum_{j=1}^m a_j z_j$ onde $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \geq 0$, $a_1 + \dots + a_m = 1$ e $z_1, \dots, z_m \in A$.)

Resolução. Seja $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Consideramos $\text{Conv}(A)$ a envoltória convexa do conjunto A , ou seja, é a interseção de todos os subconjuntos convexas de E que contém A . Além disso, temos que

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_i \geq 0, x_i \in A, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pelo exercício 1.8.19, $\overline{\text{Conv}(A)}^{\|\cdot\|}$ é convexo. Do Teorema de Mazur, temos que $\overline{\text{Conv}(A)}^{\|\cdot\|} = \overline{\text{Conv}(A)}^{\sigma(E, E')}$. Veja que $x_n \in \text{Conv}(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \xrightarrow{w} x$, o que implica que $x \in \overline{\text{Conv}(A)}^{\sigma(E, E')} = \overline{\text{Conv}(A)}^{\|\cdot\|}$. Logo, existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \text{Conv}(A)$ tal que $y_n \rightarrow x$. Além disso, como $y_n \in \text{Conv}(A)$, segue que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são combinações convexas do conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$. \square

Exercício 11 (6.8.11). Demonstre o item (b) da Proposição 6.3.2: Seja E um espaço normado. Então, para cada $\phi_0 \in E'$, os conjuntos da forma

$$W_{J, \epsilon} = \{\phi \in E' : |\phi(x_i) - \phi_0(x_i)| < \epsilon, \forall i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in J$ e $\epsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de ϕ_0 para a topologia fraca-estrela.

Resolução. Seja $A \in \sigma(E', E)$ tal que $\phi_0 \in A$. Como $\sigma(E', E)$ é gerada pela família $(J_E(x))_{x \in E}$, então existem $x_1, \dots, x_n \in E$ e $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{K}$ abertos tais que $\phi_0 \in \bigcap_{k=1}^n J_E(x_k)^{-1}(I_k) \subset A$. Como $\phi_0 \in J_E(x_k)^{-1}(I_k) \Leftrightarrow \phi_0(x_k) = J_E(x_k)(\phi_0) \in I_k$ e I_k é aberto, existe $\epsilon_k > 0$ tal que $B(\phi_0(x_k), \epsilon_k) \subset I_k$. Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Daí,

$$\begin{aligned} B(\phi_0(x_k), \epsilon) \subset B(\phi_0(x_k), \epsilon_k) \subset I_k, \forall k &\Rightarrow \phi_0 \in J_E(x_k)^{-1}(B(\phi_0(x_k), \epsilon)) \subset J_E(x_k)^{-1}(I_k), \forall k \\ &\Rightarrow \phi_0 \in \bigcap_{k=1}^n J_E(x_k)^{-1}(B(\phi_0(x_k), \epsilon)) \subset \bigcap_{k=1}^n J_E(x_k)^{-1}(I_k) \subset A \end{aligned}$$

Como $B(\phi_0(x_k), \epsilon)$ são abertos, $\bigcap_{k=1}^n J_E(x_k)^{-1}(B(\phi_0(x_k), \epsilon)) \in \sigma(E', E)$. Mas

$$\begin{aligned} \phi \in \bigcap_{k=1}^n J_E(x_k)^{-1}(B(\phi_0(x_k), \epsilon)) &\Leftrightarrow \phi \in J_E(x_k)^{-1}(B(\phi_0(x_k), \epsilon)), \forall k \\ &\Leftrightarrow \phi(x_k) = J_E(x_k)(\phi) \in B(\phi_0(x_k), \epsilon), \forall k \\ &\Leftrightarrow |\phi(x_k) - \phi_0(x_k)| < \epsilon, \forall k \\ &\Leftrightarrow \phi \in \{\psi \in E' : |\psi(x_k) - \phi_0(x_k)| < \epsilon, \forall k\} \end{aligned}$$

Logo, os conjuntos $W_{J, \epsilon}$ formam uma base de vizinhanças abertas de ϕ_0 em $\sigma(E', E)$. \square

Exercício 12 (6.8.12). Demonstre os itens (b) e (c) da Proposição 6.3.3.

Resolução. (b) Se E é Banach e $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi$ em E' então a sequência $(\|\varphi_n\|)_{n=1}^\infty$ é limitada e $\|\varphi\| \leq \liminf_n \|\varphi_n\|$.

Para todo $x \in E$, temos que $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$. Logo, a sequência $(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty$ é limitada para todo $x \in E$. Segue pelo Teorema de Banach-Steinhaus que $(\|\varphi_n\|)_{n=1}^\infty$ é limitada. Agora,

$$|\varphi(x)| = \lim_n |\varphi_n(x)| = \liminf_n |\varphi_n(x)| \leq \liminf_n \|\varphi_n\| \|x\|$$

Isto é, $\|\varphi\| \leq \liminf_n \|\varphi_n\|$

(c) Se E é Banach, $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi$ em E' e $x_n \rightarrow x$ em E , então $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ em K .

Para todo $x \in E$, $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ pela Proposição 6.3.2. Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \epsilon \text{ e } |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Agora, pelo item (b) existe $C > 0$ tal que $\|\varphi_n\| \leq C$, para todo n . Portanto,

$$|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| \leq |\varphi_n(x_n) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \|\varphi_n\| \|x_n - x\| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq C\epsilon + \epsilon$$

para $n \geq n_0$. Concluimos que $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$. □

Exercício 13 (6.8.13). Considere o funcional linear $\phi : l_1 \rightarrow \mathbb{K}$, $\phi((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty a_j$. Mostre que é contínuo em norma mas não é contínuo na topologia fraca-estrela de $l_1 = (c_0)'$. Conclua que a Proposição 6.2.9 não vale para a topologia fraca-estrela.

Resolução. Note que $(l_1)' = l_\infty$, e o funcional ϕ corresponde à sequência constante 1, que é um elemento de l_∞ . Logo, ϕ está bem definido e é contínuo.

Lembramos que (e_n) converge para 0 na topologia fraca-estrela em l_1 , pelo Exemplo 6.3.4. Assim, se ϕ fosse contínuo em $(l_1, \sigma(l_1, c_0))$, teríamos $\phi(e_n) \rightarrow \phi(0) = 0$. Mas $\phi(e_n) = 1 \rightarrow 1$. Logo, ϕ não é contínuo na topologia fraca-estrela.

De fato, não temos que $T \in L(E', F')$ se, e somente se, $T \in ((E', \sigma(E', E)), (F', \sigma(F', F)))$: Como \mathbb{K} tem dimensão finita, $(\mathbb{K}, \sigma(\mathbb{K}', \mathbb{K})) = \mathbb{K}$. Daí, pelo exemplo acima, $\phi : c'_0 \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua em norma, mas $\phi : (c'_0, \sigma(c'_0, c_0)) \rightarrow \mathbb{K}$ não é contínua. □

Exercício 14 (6.8.14). Seja E um espaço normado. Prove que se W é uma vizinhança de $f \in E''$ na topologia fraca-estrela, então existe uma vizinhança W_0 da origem na topologia fraca-estrela tal que $W = f + W_0$.

Resolução. Suponha $W = \{h \in E'' : |h(\varphi_i) - f(\varphi_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$ com $\epsilon > 0$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$, e defina a vizinhança da origem em E'' por

$$W_0 := \{h \in E'' : |h(\varphi_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}, \epsilon > 0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} f + W_0 &= f + \{h \in E'' : |h(\varphi_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}, \epsilon > 0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E' \\ &= \{f + h \in E'' : h \in W_0\} \\ &= \{f + h \in E'' : |h(\varphi_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}, \epsilon > 0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'. \end{aligned}$$

Tome $x \in f + W_0$ arbitrário. Temos que $x = f + h$, $h \in W_0$. Para mostrar que $x \in W$, devemos provar que $|x(\varphi_i) - f(\varphi_i)| < \epsilon$; $\epsilon > 0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |x(\varphi_i) - f(\varphi_i)| &= |(f + h)(\varphi_i) - f(\varphi_i)| \\ &= |f(\varphi_i) + h(\varphi_i) - f(\varphi_i)| \\ &= |h(\varphi_i)| < \epsilon; \epsilon > 0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'. \end{aligned}$$

Assim, $x \in W$ e, pela arbitrariedade de x , segue $f + W_0 \subseteq W$.

Agora, provemos que $W \subseteq f + W_0$. Para tanto, tome $x \in W$. Temos

$$|x(\varphi_i) - f(\varphi)_i| < \varepsilon; \quad \varepsilon > 0, \varphi_i, \dots, \varphi_n \in E'.$$

Dai,

$$|(x - f)(\varphi_i)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \varphi_i, \dots, \varphi_n \in E' \implies x - f \in W + 0 \text{ (por definição de } W_0 \text{)}.$$

Logo, $x = f + x - f \in f + W_0$. Pela arbitrariedade de x , $W \subseteq f + W_0$. Portanto, $W = f + W_0$. □

Exercício 15 (6.8.15). Uma sequência (x_n) em um espaço normado E é denominada *sequência fracamente de Cauchy* se para cada $\varphi: E' \rightarrow \mathbb{K}$, a sequência $(\varphi(x_n))$ for de Cauchy em \mathbb{K} . Diz-se que E é *fracamente sequencialmente completo* se toda sequência fracamente de Cauchy em E for fracamente convergente.

- a) Mostre que toda sequência fracamente de Cauchy é limitada.
- b) Prove que os espaços reflexivos são fracamente sequencialmente completos.

Resolução.

- a) Seja (x_n) fracamente de Cauchy e defina os operadores

$$\begin{aligned} T_n: E' &\rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x_n) \end{aligned}$$

Observe que $T_n \in E''$, ou seja, uma sequência de operadores lineares contínuos, pois

$$T_n(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x_n) = T(\varphi) + T(\psi).$$

Além disso,

$$\|T_n(\varphi)\| \leq \underbrace{\|\varphi\|}_{\text{limitado}} \underbrace{\|x_n\|}_{\text{continuidade fixo}} \implies \|T_n\| = \|x_n\| =: C_{x_n}$$

Assim, o limite de T_n é limitado por Banach-Steinhaus e $\sup \|T_n\| < \infty$, mas $\sup \|T_n\| = \sup \|x_n\| < \infty$. Assim (x_n) é limitado.

- b) Vamos provar que dada uma sequência fracamente de Cauchy (x_n) em E , que $\varphi(x_n)$ converge para todo $\varphi \in E'$. Primeiro, observemos que dado $f \in E'$, $(f(x_n))$ é de Cauchy em \mathbb{K} , que é completo, logo, $f(x_n) \rightarrow y \in \mathbb{K}$. Assim, defina

$$\begin{aligned} \varphi: E' &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \lim f(x_n) = y. \end{aligned}$$

Note que é linear, e é contínua, pois

$$\|J_E(x_n)(f)\| \leq \|f\| \|x_n\| \implies \|\varphi(f)\| \leq \sup_n \|f\| \|x_n\|.$$

Então $\varphi \in E''$, e por ser reflexivo, existe $w \in E$ tal que $J_E(w) = \varphi$. Assim,

$$f(x) = J_E(w)(f) = \lim_n f(x_n).$$

Logo, sempre que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in E'$, temos que $x_n \xrightarrow{w} x$. □

Exercício 16 (6.8.16). Prove que, para $1 < p < \infty$, L_p não contém cópia isomorfa de nenhum dos seguintes espaços: c_0 , l_∞ e l_1 .

Resolução. Sabemos, pelo **Teorema 4.1.2**, que os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)'$ e $L_{p^*}(X, \Sigma, \mu)$ são isomorfos isometricamente, de forma que $L_p(X, \Sigma, \mu)'' \simeq L_p(X, \Sigma, \mu)$ é reflexivo. Por outro lado, os **Exemplos 4.3.6 e 4.3.8** garantem que c_0 , l_1 e l_∞ não são reflexivos. Logo, pelo **Corolário 6.4.6**, são podem ser subespaços de um espaço reflexivo. □

Exercício 17 (6.8.17). Seja F um subespaço fechado de um espaço de Banach reflexivo de E . Prove que E/F é reflexivo.

Resolução. Lembre que, um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, seu dual também é reflexivo. Portanto, mostraremos que $(E/F)'$ é reflexivo. Pelo Exercício 13 (3.6.13), uma vez que F é fechado, F^\perp definido como

$$F^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0, \quad \forall x \in F\}$$

é isomorfo isometricamente a $(E/F)'$.

Como F é subespaço fechado de E , então F é reflexivo (veja Corolário 6.4.6 do Teorema de Kakutani). De forma análoga, como F^\perp é subespaço fechado de E' , segue que F^\perp também é reflexivo.

Dessa forma, $(E/F)'$ é reflexivo, e assim, E/F é reflexivo. \square

Exercício 18 (6.8.18). Conforme comentado na Seção 4.4, um teorema muito delicado devido a R. C. James afirma que em todo espaço de Banach não-reflexivo E existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $\varphi_0(x) < \|\varphi_0\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$. Prove a recíproca do Teorema 6.5.4 usando este resultado de James.

Teorema 6.5.4 Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.

Resolução. Queremos mostrar que é reflexivo todo espaço de Banach com a propriedade de que toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente. Fazemos a contra-positiva.

Suponha que E é não-reflexivo. Então, pelo resultado de James, existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $\varphi_0(x) < \|\varphi_0\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Sem perda de generalidade, suponha $\|\varphi_0\| = 1$, então

$$\varphi_0(x) < \|\varphi_0\| \cdot \|x\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

e vemos que $\varphi_0(x) = 1$ só pode acontecer quando $\|x\| > 1$.

Agora, como $1 = \|\varphi_0\| = \sup\{|\varphi_0(x)| : \|x\| \leq 1\}$ podemos tomar $\{x_n\} \subset \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ tal que $1 > \varphi_0(x_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$. Claramente, $\{x_n\}$ é limitada, mas não existe $\{x_{n_k}\}$ subsequência fracamente convergente: caso contrário, teríamos que $\varphi_0(x_{n_k}) \rightarrow \varphi_0(x) = 1$ e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\| = 1$, o que é uma contradição. \square

Exercício 19 (6.8.19). Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Para a definição de $\ell_p(E)$ veja exercício 4.5.8. Prove que:

- (a) $\ell_p(E)$ contém cópias isométricas 1-complementadas de ℓ_p e E .
- (b) Para todo espaço de Banach E , $\ell_1(E)$ não é reflexivo.
- (c) São equivalentes:
 - i) E é reflexivo;
 - ii) $\ell_p(E)$ é reflexivo para todo $1 < p < \infty$;
 - iii) $\ell_p(E)$ é reflexivo para algum $1 < p < \infty$.

Resolução. a) Primeiro, defina em $\ell_p(E)$ o mapa $T : \ell_p(E) \rightarrow \ell_p(E)$ dado por

$$(T(x))_n = \begin{cases} x_1, & \text{se } n = 1. \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

É claro que T é linear e $\|T(x)\|_p \leq \|x\|_p$, ou seja, $\|T\| \leq 1$. Também, $T^2 = T$, ou seja, T é uma projeção, e $\text{Img}(T) = \{x \in \ell_p(E) : x_n = 0 \text{ se } n > 1\}$ é 1-complementado em $\ell_p(E)$. Vamos mostrar que $\text{Img}(T)$ é isometricamente isomorfo a E : defina $U : E \rightarrow \text{Img}(E)$ que leva $x \in E$ ao elemento $U(x) \in \ell_p(E)$ que é igual a x na primeira coordenada e zero nas restantes. Como $\|(y_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^p\right)^{1/p}$, temos que $\|U(x)\|_p = \|x\|$, ou seja, U é uma isometria. Além disso, é claro que U é linear e sobrejetora. Portanto, U é um isomorfismo isométrico, e E é 1-complementado em $\ell_p(E)$.

l_p é 1-complementado em $l_p(E)$?

b) Suponha por absurdo que $l_1(E)$ é reflexivo. Pelo item (a), $l_1(E)$ contém uma cópia isométrica de l_1 . Logo, pelo Corolário 6.4.6 e pelo Exercício 4.5.27, l_1 é reflexivo, o que é uma contradição.

c) i implica ii?

É claro que ii implica iii. Por fim, iii implica i, pois E é um subespaço fechado de $l_p(E)$, e portanto, sendo $l_p(E)$ reflexivo, E é reflexivo, pelo Corolário 6.4.6.

□

Exercício 20 (6.8.20). Prove que a função d da demonstração da Proposição 6.5.1 está bem definida e é uma métrica.

Resolução. Pela demonstração, $X = \{x_n\}$ é denso em B_E , e $d : B_{E'} \times B_{E'} \rightarrow [0, \infty)$ é dado por $d(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)|$.

Note que $|\phi(x_n) - \psi(x_n)| = |(\phi - \psi)(x_n)| \leq \|\phi - \psi\| \|x_n\| \leq \|\phi\| + \|\psi\| \leq 2$. Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Logo, d está bem definida. Além disso, como $|\phi(x_n) - \psi(x_n)| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $d(\phi, \psi) \geq 0$. Além disso, $d(\phi, \psi) = 0$ se, e somente se, $\phi(x_n) - \psi(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\phi = \psi$ em X . Mas sendo X denso em B_E , concluímos que $\phi = \psi$ em B_E , e portanto, em todo E (pois

$$\phi(x) = \phi \left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) = \|x\| \phi \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \|x\| \psi \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = \psi \left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) = \psi(x),$$

para todo $x \in E$).

É claro que d é simétrica, pois

$$d(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |-(\phi(x_n) - \psi(x_n))| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\psi(x_n) - \phi(x_n)| = d(\psi, \phi).$$

Por fim, se $\phi, \psi, \rho \in B_{E'}$, temos que

$$\begin{aligned} d(\phi, \rho) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \rho(x_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n) + \psi(x_n) - \rho(x_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (|\phi(x_n) - \psi(x_n)| + |\psi(x_n) - \rho(x_n)|) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\psi(x_n) - \rho(x_n)| \\ &= d(\phi, \psi) + d(\psi, \rho), \end{aligned}$$

pois ambas as séries são convergentes. Assim, d é uma métrica.

□

Exercício 21 (6.8.21). Relembre que um espaço normado E é de Schur se sequências fracamente convergentes em E convergem em norma. Prove que:

- (a) Subespaço de espaço de Schur é de Schur.
- (b) Espaço que é isomorfo a um espaço de Schur é também de Schur.
- (c) Um espaço normado reflexivo é de Schur se, e somente se, tem dimensão finita.
- (d) Um espaço que contém um espaço reflexivo de dimensão infinita não é de Schur.

Resolução. a) Suponha que E é de Schur e F é um subespaço de E . Seja $(x_n) \subset F$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{w} x \in F$. Pelo Exercício 6.8.3, $x_n \xrightarrow{w} x$ em E . Daí, sendo E de Schur, $x_n \rightarrow x$, e como a topologia da norma de F é induzida pela norma de E , $x_n \rightarrow x$ em F . Portanto, F é um espaço de Schur.

b) Seja E um espaço de Schur e seja $T : E \rightarrow F$ um isomorfismo. Seja $(x_n) \subset F$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Pela continuidade de T^{-1} , $T^{-1}(x_n) \xrightarrow{w} T^{-1}(x)$: se $\phi \in E'$, $\phi \circ T^{-1} \in F'$. Logo, $\phi \circ T^{-1}(x_n) \rightarrow \phi \circ T^{-1}(x)$, e portanto, $T^{-1}(x_n) \xrightarrow{w} T^{-1}(x)$. Daí, como E é de Schur, $T^{-1}(x_n) \rightarrow T^{-1}(x)$. Assim, pela continuidade de T , $x_n = T(T^{-1}(x_n)) \rightarrow T(T^{-1}(x)) = x$. Portanto, F é um espaço de Schur.

c) Se E tem dimensão finita, então pela Proposição 6.2.6 as topologias fraca e da norma coincidem, e portanto, toda sequência fracamente convergente é convergente. Reciprocamente, suponha que E é um espaço reflexivo com dimensão infinita. Logo, existe uma sequência ortonormal $(x_n) \subset E$. Assim, pelo Exercício 6.8.6, $x_n \xrightarrow{w} 0$. Mas $x_n \not\rightarrow 0$, pois $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Suponha, por absurdo, que existe um espaço de Schur E que contém um subespaço reflexivo de dimensão infinita F . Pelo item (a), F é de Schur. Mas daí pelo item (c), F tem dimensão infinita, o que é absurdo. \square

Exercício 22 (6.8.22). Prove que ℓ_1 não tem subespaço reflexivo de dimensão infinita.

Resolução. Pelo Teorema 6.2.12 (Teorema de Schur), ℓ_1 é de Schur. Pelo item (d) do Exercício 6.8.21, se ℓ_1 tivesse um subespaço reflexivo de dimensão infinita, teríamos que ℓ_1 não seria de Schur, o que é um absurdo. \square

Exercício 23 (6.8.23). Um espaço de Banach E é *fracamente compactamente gerado* se existe um subconjunto fracamente compacto K de E tal que $E = \overline{[K]}$. Prove que:

- (a) E é fracamente compactamente gerado se, e somente se, existe um subconjunto K de E que é convexo, simétrico (isto é, $-x \in K$ se $x \in K$) e fracamente compacto tal que $E = \overline{[K]}$.
- (b) Espaços reflexivos são fracamente compactamente gerados.
- (c) Espaços separáveis são fracamente compactamente gerados.

Resolução. a) Se E é fracamente compactamente gerado, então existe um subconjunto fracamente compacto K de E tal que $E = \overline{[K]}$. Seja $K' = \overline{\text{conv}(K \cup (-K))}$. Como K e $-K$ são compactos, portanto limitados, $\text{conv}(K \cup (-K))$ é limitado (pois $K \cup (-K)$ está contido em uma bola), e portanto K' é limitado.

Seja $x \in K'$, e seja $\epsilon > 0$. Logo, existe $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \text{conv}(K \cup (-K))$, onde $x_j \in K \cup (-K)$, $\lambda_j > 0$ e $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$. Como $K \cup (-K)$ é simétrico, $-x_j \in K \cup (-K)$. Daí, $-y = \sum_{j=1}^n \lambda_j (-x_j) \in \text{conv}(K \cup (-K))$, e $\| -x - (-y) \| < \epsilon$. Ou seja, $-x \in K'$. Portanto, K' é simétrico.

Sejam $x, y \in K'$, $\lambda \in [0, 1]$. Logo, existem seqüências $(x_n), (y_n) \subset \text{conv}(K \cup (-K))$ tais que $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Assim, $\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$ é uma seqüência em $\text{conv}(K \cup (-K))$ que converge para $\lambda x + (1 - \lambda)y$. Portanto, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K'$, ou seja, K' é convexo.

K' é fracamente compacto?

Assim, como $K \subset K'$, temos que $E = \overline{K'}$. A recíproca é imediata.

b) Se E é reflexivo, então, pelo Teorema de Kakutani, B_E é fracamente compacta. E como $[B_E] = E$, temos que E é fracamente compactamente gerado.

c) Seja E separável. Logo, a esfera S_E é separável, ou seja, existe uma seqüência $(x_n) \subset S_E$ densa. Seja $K = \{x_n/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Logo, K é compacto: seja $\{A_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de K . Como $0 \in K$, existe $j \in I$ tal que $0 \in A_j$, e assim, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(0, 1/m) \subset A_j$. Assim, $x_n/n \in A_j$ para todo $n > m$. Para cada $n \leq m$, seja $i_n \in I$ tal que $x_n/n \in A_{i_n}$. Portanto, $K \subset A_j \cup_{n=1}^m A_{i_n}$. Portanto, K é compacto, e assim, fracamente compacto.

Seja $x \in E$, $x \neq 0$. Logo, como $x/\|x\| \in S_E$ e (x_n) é denso em S_E , então para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x/\|x\|) - x_n\| < \epsilon/\|x\|$. Daí, $\|x\|x_n = n\|x\|(x_n/n) \in [K]$ e

$$\|x - (\|x\|x_n)\| = \left\| \|x\| \left(\frac{x}{\|x\|} - x_n \right) \right\| = \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - x_n \right\| < \|x\| \frac{\epsilon}{\|x\|} = \epsilon.$$

Portanto, $[K]$ é denso em E , e assim E é fracamente compactamente gerado. □

Exercício 24 (6.8.24). Prove que toda rede de Cauchy (veja definição no enunciado do Lema 6.6.5) em um espaço de Banach é convergente.

Resolução. Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede de Cauchy em um espaço de Banach E . Assim, existe $\alpha_1 \in I$ tal que $\alpha, \beta \geq \alpha_1 \Rightarrow \|x_\alpha - x_\beta\| < 1$. Analogamente, existe $\alpha_2 \in I$ tal que $\alpha, \beta \geq \alpha_2 \Rightarrow \|x_\alpha - x_\beta\| < 1/2$. Como I é um conjunto direcionado, sem perda de generalidade, podemos tomar $\alpha_2 \geq \alpha_1$ (substituindo, se necessário, α_2 por um certo $\alpha'_2 \geq \alpha_1, \alpha_2$).

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma seqüência $(x_{\alpha_n})_n$ tal que

$$m \geq n \Rightarrow \|x_{\alpha_n} - x_{\alpha_m}\| < 1/n.$$

Logo, essa é uma seqüência de Cauchy. Como E é de Banach, existe $x \in E$ tal que $x_{\alpha_n} \rightarrow x$. Vamos mostrar que a rede (x_α) converge para x : seja $\epsilon > 0$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_{\alpha_n}\| < \epsilon/2$ e $1/n \leq \epsilon/2$. Logo,

$$\alpha \geq \alpha_n \Rightarrow \|x - x_\alpha\| = \|x - x_{\alpha_n} + x_{\alpha_n} - x_\alpha\| \leq \|x - x_{\alpha_n}\| + \|x_{\alpha_n} - x_\alpha\| < \epsilon/2 + 1/n \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Portanto, $x_\alpha \rightarrow x$. □

Exercício 25 (6.8.25). Se um espaço uniformemente convexo contém uma cópia isométrica do espaço normado E , prove que E é uniformemente convexo.

Resolução. Seja F um espaço uniformemente convexo, e seja G um subespaço de F . Então, G é uniformemente convexo: se $\epsilon > 0$, como F é uniformemente convexo, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in B_F, \|x - y\| \geq \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Em particular, isto vale para $x, y \in B_G \subset B_F$ tais que $\|x - y\| \geq \epsilon$. Portanto, G é uniformemente convexo. Agora, suponha que G é uniformemente convexo, e seja $T : E \rightarrow G$ um isomorfismo isométrico. Dado $\epsilon > 0$,

existe $\delta > 0$ que satisfaz a definição de uniformemente convexo para G . Assim,

$$\begin{aligned} x, y \in B_E, \|x - y\| \geq \epsilon &\Rightarrow T(x), T(y) \in B_G, \|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\| \geq \epsilon \\ &\Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = \left\| T\left(\frac{x + y}{2}\right) \right\| = \left\| \frac{T(x) + T(y)}{2} \right\| \leq 1 - \delta. \end{aligned}$$

Portanto, E é uniformemente convexo. \square

Exercício 26 (6.8.26). Prove que um espaço normado E é uniformemente convexo se, e somente se, E'' é uniformemente convexo.

Resolução. Suponha que E é uniformemente convexo. Seja \hat{E} o completamento de E . Então, \hat{E} é uniformemente convexo: se $\epsilon > 0$, sendo E uniformemente convexo, existe $\delta = \delta(\epsilon/2) > 0$ satisfazendo a definição. Assim, se $x, y \in B_{\hat{E}}$ com $\|x - y\| \geq \epsilon$, existem seqüências $(x_n), (y_n) \subset B_E$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Pela continuidade da norma, podemos supor, a menos de finitos termos, que $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon/2$. Logo, $\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| < 1 - \delta$, e novamente, pela continuidade da norma, temos que $\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta$. Portanto, \hat{E} é uniformemente convexo.

Assim, pelo Teorema de Milman-Pettis, \hat{E} é reflexivo. Assim, pelos Exercícios 3.6.9 6.8.25, $E'' \cong (\hat{E})''$ é uniformemente convexo, pois $J_{\hat{E}} : \hat{E} \rightarrow \text{hat } E''$ é um isomorfismo isométrico.

Reciprocamente, se E'' é uniformemente convexo, como $J_E : E \rightarrow E''$ é uma isometria, pelo Exercício 6.8.25, E é uniformemente convexo. \square

Exercício 27 (6.8.27). Seja E um espaço normado. Prove que as implicações

E uniformemente convexo $\Rightarrow E'$ uniformemente convexo, e

E' uniformemente convexo $\Rightarrow E$ uniformemente convexo,

são equivalentes, e portanto basta um contraexemplo de uma delas para concluir que ambas são falsas.

Resolução. Suponha primeiro que vale a primeira implicação. Seja E um espaço normado tal que E' é uniformemente convexo. Pela primeira implicação, E'' é uniformemente convexo, e portanto, pelo Exercício 6.8.26, E é uniformemente convexo.

Reciprocamente, suponha que vale a segunda implicação. Seja E um espaço normado uniformemente convexo. Pelo Exercício 6.8.26, E'' é uniformemente convexo. Daí, pela segunda implicação, E' é uniformemente convexo.

De fato, a primeira implicação é falsa: considere c_{00} como subespaço de l_2 . \square

Exercício 28 (6.8.28). Prove que todo espaço normado que é isomorfo a um espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.

Resolução. Direto do Exercício 4.5.27 e do Teorema de Milman-Pettis. \square

Exercício 29 (6.8.29). Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado E :

(a) E é uniformemente convexo.

(b) Se $x_n, y_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim(2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2) = 0$, e $(x_n)_{n=1}^\infty$ é limitada, então $\lim\|x_n - y_n\| = 0$.

(c) Se $x_n, y_n \in B_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\|x_n + y_n\| = 2$, então $\lim\|x_n - y_n\| = 0$.

Resolução. Suponha primeiro que E é uniformemente convexo. Sejam $x, y \in E$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x + y\| = 2$. Suponha por absurdo que $x \neq y$. Assim, como E é uniformemente convexo, para $\epsilon = \|x - y\|$,

existe $\delta > 0$ tal que $\|w - z\| \geq \|x - y\|$ implica que $\left\|\frac{w+z}{2}\right\| < 1 - \delta < 1$. Mas em particular, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, o que é uma contradição. Portanto, $x = y$.

Suponha agora que vale a implicação (b), e sejam $x_n, y_n \in B_E$ tais que $\lim\|x_n + y_n\| = 2$. Note que, para todos $a, b \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Assim,

$$\|x_n + y_n\|^2 \leq (\|x_n\| + \|y_n\|)^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2.$$

Portanto, $0 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2 \leq 4 - \|x_n + y_n\|^2$. Como $\|x_n + y_n\|$ converge para 2, $4 - \|x_n + y_n\|^2 \rightarrow 0$. Portanto, pelo Teorema do Sanduíche, $\lim(2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2) = 0$. Pela afirmação (b), $\lim\|x_n - y_n\| = 0$.

Por fim, suponha que vale (c), e suponha por absurdo que E não é uniformemente convexo. Logo, existe $\epsilon > 0$, e para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in B_E$ tais que $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$, mas $\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \geq 1 - 1/n$. Note que

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| = \frac{\|x_n + y_n\|}{2} \leq \frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim\|x_n + y_n\| = 2$. Por (c), $\lim\|x_n - y_n\| = 0$, o que contradiz $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$. \square

Exercício 30 (6.8.30). Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado E :

- (a) Se $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x + y\| = 2$, então $x = y$.
- (b) Se $x, y \in E$ e $\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, então $x = y$.
- (c) Se $x, y \in E$, $x \neq y$ e $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, então x é um múltiplo positivo de y .

Diz-se que E é *estritamente convexo* quando satisfaz as condições equivalentes acima.

Exercício 31 (6.8.31). Mostre que todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo.

Exercício 32 (6.8.32). Mostre que os espaços $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, c_0 , l_1 e l_∞ não são estritamente convexos.

Exercício 33 (6.8.33). (Um espaço estritamente convexo que não é uniformemente convexo) Para $f \in C[0, 1]$, defina $\|f\|_0 = (\|f\|_\infty^2 + \|f\|_2^2)^{1/2}$, onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do sup usual de $C[0, 1]$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma usual de $L_2[0, 1]$.

- (a) Prove que $\|\cdot\|_0$ é uma norma em $C[0, 1]$ equivalente à norma usual $\|\cdot\|_\infty$.
- (b) Prove que $(C[0, 1], \|\cdot\|_0)$ é estritamente convexo.
- (c) Prove que $(C[0, 1], \|\cdot\|_0)$ não é uniformemente convexo.

7 Capítulo 7

Exercício 1 (7.7.1). Seja E Banach e $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Prove que $\sigma(T) = \sigma(T')$.

Resolução. Provemos o seguinte resultado:

Afirmção 1.1. Seja E Banach, então $T: E \rightarrow E$ é invertível se, e somente se, $T': E' \rightarrow E'$ é invertível.

Com efeito, a ida é um teorema dado em sala. Para a volta provemos a seguinte afirmação

Afirmção 1.2. Se T' é invertível, então $Im T$ é um subespaço fechado.

De fato, seja $Tx_n \rightarrow y$. Logo $\{Tx_n\}$ é de Cauchy, logo,

$$\|x_m - x_n\| = \sup_{\|f\|=1} \{f(x_m - x_n)/f \in E'\} = \sup\{T' \circ T'^{-1}(f(x_m - x_n))\} \leq \|T'^{-1}\| \|Tx_m - Tx_n\|.$$

Dessa maneira, (x_n) é de Cauchy, e, portanto, converge $x_n \rightarrow x$. Pela continuidade de T , segue que $y = Tx$.

Afirmção 1.3. T é injetora.

Com efeito, dado $x \in E$ tal que $Tx = 0$ temos que para todo $f \in E'$, $T'(f)(x) = f(Tx) = 0$ para todo f . Como T' é sobrejetora, então existe $g \in E'$ tal que $T'(g) = f$. Assim,

$$f(x) = T'g(x) = g(Tx) = g(0) = 0 \implies x = 0.$$

Afirmção 1.4. T é sobrejetiva.

Suponha por contradição que exista $y \in E \setminus Im T$. Como provamos que $Im T$ é fechado, existe $g \in E'$ tal que $g(y) = 1$ e $g(Tx) = 0$ para todo x (Teorema de Hahn-Banach). Assim

$$0 = gTx = T'(g)(x) \implies T'g = 0 \implies g = 0.$$

Pelo teorema da aplicação aberta segue que T é um isomorfismo. Assim, segue imediatamente que $\lambda \in \rho(T) \iff \lambda \in \rho(T')$. \square

Exercício 2 (7.7.2). Sejam E um espaço Banach, $T \in \mathcal{L}(E, E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Suponha que

- (i) $(T - \lambda I)^{-1} : (T - \lambda I)(E) \rightarrow E$ existe;
- (ii) O operador linear $(T - \lambda I)^{-1} : (T - \lambda I)(E) \rightarrow E$ é contínuo;
- (iii) $(T - \lambda I)(E)$ é denso em E .

Prove que $(T - \lambda I)(E) = E$ e portanto $\lambda \in \rho(T)$.

Resolução. Suponha $y \in E$ qualquer. Como $(T - \lambda I)(E)$ é denso, existe sequência $\{x_n\} \subset (T - \lambda I)(E)$ com $x_n \rightarrow y$. Ainda, sabemos que $x_n = (T - \lambda I)(z_n)$ para algum $z_n \in E$, e temos que $\{z_n\}$ é convergente pois

$$\|z_n - z_m\| = \|(T - \lambda I)^{-1}(x_n - x_m)\| \leq \|(T - \lambda I)^{-1}\| \cdot \|x_n - x_m\| \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}$$

e temos $z_n \rightarrow y' \in E$. Logo,

$$(T - \lambda I)(z_n) = x_n \rightarrow y = (T - \lambda I)(y')$$

pela unicidade do limite e continuidade de $(T - \lambda I)$, ou seja, $y \in (T - \lambda I)(E)$, assim, $(T - \lambda I)(E) = E$. \square

Exercício 3 (7.7.3). Sejam E e F espaços normados. Prove que $\mathcal{K}(E, F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$.

Resolução. Seja T o operador nulo de E em F . Logo, para qualquer sequência limitada $(x_n)_n \subset E$, a sequência $(T(x_n))_n = (0, \dots, 0, \dots)$ converge para zero e, portanto, possui subsequência convergente pela Proposição 7.2.3 (c) \Rightarrow (a). Com isso mostramos que $T \equiv 0 \in \mathcal{K}(E, F)$. Agora, sejam $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ e $(x_n)_n \subset E$ uma sequência limitada qualquer. Como T é compacto, pela Proposição 7.2.3 (a) \Rightarrow (c), $(T(x_{n_k}))_k$ é uma subsequência convergente de $(T(x_n))_n$.

Note que $(x_{n_k})_k$ é uma subsequência de $(x_n)_n$, portanto limitada. Como S é compacto então $(S(x_{n_{k_l}}))_l$ é

uma subsequência convergente de $(S(x_{n_k}))_k$. Logo, $\left((T+S)(x_{n_{k_l}})\right)_l$ é uma subsequência convergente de $((T+S)(x_{n_k}))$. Portanto, $T+S \in \mathcal{K}(E, F)$ para todos $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$.

Agora, seja $(x_n)_n$ uma sequência limitada em E , i.e., existe $c > 0$ tal que $\|x_n\| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|\lambda x_n\| = |\lambda| \|x_n\| \leq |\lambda| c, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in K.$$

Logo, $(\lambda x_n)_n$ é uma sequência limitada em E e, portanto, $(\lambda T(x_{n_k}))_k = (T(\lambda x_{n_k}))_k$ é uma subsequência convergente de $(\lambda T(x_n))_n = (T(\lambda x_n))_n$, para todo $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $\lambda \in K$. \square

Exercício 4 (7.7.4). Mostre que o operador integral T do Exemplo 7.2.4 está bem definido e é linear.

Resolução. Lembrando que $T : C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ é definido por

$$T(f)(t) = \int_a^b K(s, t) f(s) ds, \quad \forall t \in [c, d],$$

onde $K : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua.

Como K e f são funções contínuas, $K(\cdot, t)f$ é contínua, para todo $t \in [c, d]$, e sendo $[a, b]$ compacto, $\int_a^b K(s, t)f(s)ds < \infty$, e assim T está bem definido. Além disso, como essa função é contínua, se $t_n \rightarrow t \in [c, d]$, então

$$\begin{aligned} T(f)(t) &= \int_a^b K(s, t) f(s) ds = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} K(s, t_n) f(s) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K(s, t_n) f(s) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(f)(t_n), \end{aligned}$$

ou seja, $T(f)$ é contínua. Por fim, se $f, g \in C[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} T(f + \lambda g)(t) &= \int_a^b K(s, t) (f + \lambda g)(s) ds \\ &= \int_a^b K(s, t) (f(s) + \lambda g(s)) ds \\ &= \int_a^b K(s, t) f(s) ds + \lambda \int_a^b K(s, t) g(s) ds \\ &= T(f)(t) + \lambda T(g)(t) \\ &= [T(f) + \lambda T(g)](t), \end{aligned}$$

ou seja, $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$. Portanto, T é linear. \square

Exercício 5 (7.7.5). Mostre que o operador $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ dado por $T((a_j)) = \left(\frac{a_j}{j}\right)$ é compacto mas não tem posto finito.

Resolução. Usaremos o fato que, pela proposição 7.2.5, $\mathcal{K}(\ell_2, \ell_2)$ é um subespaço fechado e $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$. Assim, considere os operadores

$$\begin{aligned} T_n : \ell_2 &\rightarrow \ell_2 \\ (a_n) &\mapsto (a_1, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_n}{n}, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Como cada T_n tem posto finito, então pela proposição 7.2.2, $T_n \in \mathcal{K}(\ell_2, \ell_2)$. Por outro lado,

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)x\| = \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\left|\frac{x_i}{i}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Como $1/i \rightarrow 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$ e para todo $n > \bar{n}$

$$\sup_{\|x\|=1} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\left| \frac{x_i}{i} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=n+1}^{\infty} (|x_i|^2)^{1/2} < \varepsilon$$

Assim, do fato que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, logo $T_n \rightarrow T$ e, assim T é compacto.

Que não tem posto finito é imediato, pois para todo n , existe (a_j) com coordenadas não nulas maior que n . \square

Exercício 6 (7.7.6). Decida se o operador $T : l_2 \rightarrow l_2$ dado por $T((a_j)_{j=1}^{\infty}) = (a_1, 0, a_3, 0, \dots)$ é compacto ou não.

Resolução. Note que (e_{2n-1}) é uma sequência limitada em l_2 tal que $T(e_{2n-1}) = e_{2n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $\|e_{2n-1} - e_{2m-1}\|_2 = \sqrt{2}$, se $n \neq m$. Logo, $(T(e_{2n-1}))$ não admite subsequência convergente. Portanto, T não é compacto. \square

Exercício 7 (7.7.7). Sejam E um espaço normado de dimensão infinita e $T : E \rightarrow E$ um operador linear compacto e bijetor. Mostre que o operador inverso T^{-1} não é contínuo.

Resolução. Como $T : E \rightarrow E$ é bijetiva, então existe $T^{-1} : E \rightarrow E$. Se $T^{-1} : E \rightarrow E$ é contínua, então a seguinte composição $Id = T^{-1} \circ T \circ Id$ é compacta pela proposição 7.2.6. Sendo $Id : E \rightarrow E$ compacta, pelo item c) da proposição 7.2.2 segue que E tem dimensão finita, o que é um absurdo. Portanto, segue que T^{-1} não é contínua. \square

Exercício 8 (7.7.8). Sejam E um espaço normado de dimensão infinita e $T : E \rightarrow E$ um operador linear compacto e bijetor. Mostre que E não é completo.

Resolução. Suponha, por absurdo, que E seja completo. Como T é compacto, é contínuo pela **Proposição 7.2.2** e, portanto, vale o **Teorema da Aplicação Aberta** e $T^{-1} : E \rightarrow E$ é também operador linear contínuo.

Considere a composição $T^{-1} \circ T \circ Id_E : E \rightarrow E$. Como T é compacto e T^{-1} e Id_E são contínuos, segue que essa composição é compacta pela **Proposição 7.2.6**. Mas, $T^{-1} \circ T \circ Id_E = Id_E$ e a **Proposição 7.2.2** garante que E tem identidade compacta se, e somente se, tem dimensão finita, levando a uma contradição. \square

Exercício 9 (7.7.9). Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T : (C[a, b], \|\cdot\|_p) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ o operador integral definido exatamente como no Exemplo 7.2.4. Prove que T está bem definido, é linear e compacto.

Resolução. Pelo 4, o operador é bem definido e linear. Vamos mostrar que é compacto. Pelo **Teorema B.7 (Ascoli)**, $\overline{T(B_{\leq 1})}$ é compacto se, e somente se, são satisfeitas

(a) $\overline{T(B_{\leq 1})}$ é equicontínua, i.e., para todo $t_0 \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|T(f)(t) - T(f)(t_0)| < \varepsilon \text{ para todos } t \in [a, b] \text{ com } |t - t_0| < \delta \text{ e } f \in T(B_{\leq 1}).$$

(b) O conjunto $\{T(f)(t) \mid f \in T(B_{\leq 1})\}$ é limitado em $[a, b]$ para todo $t \in [a, b]$.

Para verificar (b), note que

$$\begin{aligned}\|T(f)(t)\|_\infty &= \sup_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(s,t) f(s) ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [a,b]} \int_a^b \overbrace{|K(s,t)|}^{\leq C_1} |f(s)| ds \\ &\leq \sup_{t \in [a,b]} C_1 \overbrace{\left(\int_a^b |f(s)| ds \right)}^{\|f\|_1} = C_1 \overbrace{\|f\|_1}^{\leq \|f\|_p \cdot C_2} \leq C_1 \cdot C_2\end{aligned}$$

vale tanto para o caso $\|f\|_1 \leq 1$, quanto para o caso $\|f\|_p \leq 1$, quando $1 < p < \infty$.

Para (a), note que

$$|T(f)(t) - T(f)(t_0)| = \left| \int_a^b K(s,t) f(s) ds - \int_a^b K(s,t_0) f(s) ds \right| \leq \int_a^b |K(s,t) - K(s,t_0)| \overbrace{|f(s)|}^{\leq C_3} ds$$

Ainda, como $K(s,t)$ é contínua em um compacto, é uniformemente contínua e, portanto, dado $\frac{\varepsilon}{|b-a| \cdot C_3} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $|t - t_0| = |(s,t) - (s,t_0)| < \delta$, temos

$$|K(s,t) - K(s,t_0)| < \frac{\varepsilon}{|b-a| \cdot C_3}.$$

Assim,

$$C_3 \int_a^b |K(s,t) - K(s,t_0)| ds \leq C_3 |b-a| \max_{s \in [a,b]} \{|K(s,t) - K(s,t_0)|\} < \varepsilon$$

sempre que $|t - t_0| < \delta$ e para todo $f \in B_{\leq 1}$. □

Exercício 10 (7.7.10). Prove Que $K(E, l_1) = L(E, l_1)$ para todo espaço reflexivo E .

Resolução. Seja $T \in L(E, l_1)$. Seja $(x_n) \subset E$ tal que (x_n) converge fracamente para $x \in E$. Como T é contínua, $T(x_n)$ converge fracamente para $T(x)$: de fato, se $\phi \in l'_1$, então $\phi \circ T \in E'$, e como x_n converge fracamente para x , $\phi(T(x_n)) \rightarrow \phi(T(x))$, ou seja, $(T(x_n))$ converge fracamente para $T(x)$. Daí, pelo Teorema de Schur, $T(x_n) \rightarrow T(x)$, e assim, pela Proposição 7.2.8, T é compacto. □

Exercício 11 (7.7.11). Prove que $\mathcal{K}(c_0, E) = \mathcal{L}(c_0, E)$ para todo espaço reflexivo E .

Resolução. Seja $T \in \mathcal{L}(c_0, E)$. Precisamos mostrar que $T : c_0 \rightarrow E$ é compacto. Como T é contínua, temos que $T' : E' \rightarrow (c_0)' = \ell_1$ é contínua, ou seja, $T' : E' \rightarrow \ell_1 \in \mathcal{L}(E, \ell_1)$. Pelo exercício 7.7.10, temos que $T' : E' \rightarrow (c_0)' = \ell_1$ é compacto. Logo, pelo teorema de Schauder segue que $T : c_0 \rightarrow E$ é compacto. Portanto, $T \in \mathcal{K}(c_0, E)$ e, consequentemente, $\mathcal{K}(c_0, E) = \mathcal{L}(c_0, E)$. □

Exercício 12 (7.7.12). Dados um operador compacto $T \in \mathcal{K}(E, E)$ e $n \in \mathbb{N}$, prove que existe um operador compacto $S \in \mathcal{K}(E, E)$ tal que $(I - T)^n = I - S$.

Resolução. Observe que

$$(I - T)^n = \sum_{k=0}^n (-T)^{n-k} = I + \sum_{k=0}^{n-1} (-T)^{n-k}.$$

Como $T \in \mathcal{K}(E, E)$, temos que $-T \in \mathcal{K}(E, E)$, e pela propriedade de ideal, $(-T)^{n-k} \in \mathcal{K}(E, E)$, para todo $k \in 0, \dots, n-1$. Como $\mathcal{K}(E, E)$ é espaço vetorial, segue que

$$S := (I - T)^n - I = \sum_{k=0}^{n-1} (-T)^{n-k} \in \mathcal{K}(E, E).$$

□

Exercício 13 (7.7.13). Sejam \hat{E} e \hat{F} os completamentos dos espaços normados E e F , $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador compacto e $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{E}, \hat{F})$, a extensão linear e contínua de T a \hat{E} . Prove que

(a) $\hat{T}(\hat{E}) \subseteq F$ e \hat{T} é compacto.

(b) No caso em que $E = F$, T e \hat{T} tem os mesmos autovalores não nulos.

Resolução. Lembre que \hat{E} é um espaço de Banach que contém uma cópia isométrica de E que é densa em \hat{E} . Aqui, por um abuso de notação, teremos que $E \subset \hat{E}$ e $\bar{E} = \hat{E}$. O mesmo vale para F e \hat{F} . Mais ainda, a extensão linear e contínua de \hat{T} é dada por

$$\hat{T}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n),$$

onde $x \in \hat{E}$ e (x_n) é uma sequência formada por elementos de E tal que $x_n \rightarrow x$.

Como $\bar{E} = \hat{E}$, então dado $x \in \hat{E}$, existe (x_n) em E tal que $x_n \rightarrow x$. Uma vez que T é um operador compacto e (x_n) é limitada, existe subsequência de (x_n) , digamos (x_{n_k}) tal que $(T(x_{n_k}))_k$ é convergente a um elemento de F . Seja $y \in F$ tal que $T(x_{n_k}) \rightarrow y$. Assim, da unicidade do limite, temos que

$$\hat{T}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_{n_k}) = y \in F.$$

Ou seja, $\hat{T}(\hat{E}) \subseteq F$.

Mostremos que \hat{T} é compacto. Seja (x_n) sequência limitada em \hat{E} e seja $C > 0$ tal que

$$\|x_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\bar{E} = \hat{E}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in E$ tal que

$$\|x_n - y_n\| < 1/n.$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|y_n\| \leq C + 1/n \leq C + 1.$$

Assim, (y_n) é sequência limitada em E . Como T é operador compacto, existe subsequência limitada convergente de $(T(y_{n_k}))$ em F . Sejam (y_{n_k}) e $z \in F$ tais que

$$T(y_{n_k}) \rightarrow z.$$

Portanto, se $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \|\hat{T}(x_{n_k}) - z\| &\leq \|\hat{T}(x_{n_k}) - \hat{T}(y_{n_k})\| + \|T(y_{n_k}) - z\| \\ &\leq \|\hat{T}\| \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|T(y_{n_k}) - z\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que $\hat{T}(x_n)$ possui subsequência convergente. Logo, \hat{T} é operador compacto.

Agora, suponha $E = F$. Como \hat{T} é extensão de T e $E \subset \hat{E}$, todo autovalor de T é autovalor de \hat{T} . Seja λ um autovalor não nulo de \hat{T} . Então, existe $x \in \hat{E}$ tal que $\hat{T}(x) = \lambda x$. Do item (a), sabemos que $\hat{T}(\hat{E}) \subset E$. Dessa forma, $\lambda x \in \hat{T}(\hat{E}) \subset E$. Como $\lambda \neq 0$, temos que $x \in E$. Portanto, λ é autovalor de T . \square

Exercício 14 (7.7.14). Seja $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares que converge para 0. Construa um operador compacto T tal que $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Resolução. Defina $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, dado por

$$T((a_j)_{j=1}^{\infty}) = (\lambda_j a_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Note que,

$$T(e_n) = (\lambda_j \delta_{jn})_{j=1}^{\infty} = \lambda_n e_n.$$

Logo, λ_n é autovalor de T . Mais ainda, como $\lambda_n \rightarrow 0$, existe $C > 0$ tal que $|\lambda_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|T((a_j)_{j=1}^\infty)\|_2^2 = \sum_{j=0}^\infty |\lambda_j a_j|^2 \leq C^2 \|(a_j)_{j=1}^\infty\|.$$

Assim, $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$.

Para ver que T é compacto, defina para cada $n \in \mathbb{N}$ o operador $T_n : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ dado por

$$T_n((a_j)_{j=1}^\infty) = (\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n, 0, \dots).$$

Procedendo exatamente como feito na resolução do Exercício 5, vemos que $T_n \rightarrow T$ em ℓ_2 . Dessa forma, como $\mathcal{K}(\ell_2)$ é fechado em $\mathcal{L}(\ell_2)$, temos que $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$, pois cada $T_n \in \mathcal{K}(\ell_2)$. \square

Exercício 15 (7.7.15). Mostre que a reflexividade de E é essencial na Proposição 7.2.8(b).

Resolução. Considere o espaço não reflexivo $E = \ell_1$. Do Teorema 6.2.12, a convergência fraca de uma sequência em ℓ_1 equivale à convergência em norma. Em particular

$$x_n \xrightarrow{w} x \implies \text{id}(x_n) = x_n \rightarrow x = \text{id}(x).$$

No entanto, $\text{id} : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ não é operador compacto, pois ℓ_1 tem dimensão infinita. Isso completa o contraexemplo. \square

Exercício 16 (7.7.16). Seja E um espaço de Banach tal que para todo compacto $K \subseteq E$ e todo $\varepsilon > 0$ existe um operador de posto finito $T \in \mathcal{L}(E, E)$ tal que $\sup_{x \in K} \|x - T(x)\| < \varepsilon$. Prove que E tem a propriedade da aproximação (todo operador compacto de $\mathcal{L}(E, E)$ é limite de uma sequência de operadores de posto finito). Vale também a recíproca deste exercício - veja [64, Theorem 3.4.32].

Resolução. Tome $T \in \mathcal{L}(E, E)$ operador compacto qualquer. Tem-se que $\overline{T(B_E)}$ é compacto. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$, segue da hipótese que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $T_n \in \mathcal{L}(E, E)$ de posto finito tal que

$$\sup_{y \in \overline{T(B_E)}} \|y - T_n(y)\| < \frac{1}{n}.$$

Agora, dado $x \in B_E$ qualquer, $T(x) \in \overline{T(B_E)}$, ou seja,

$$\sup_{x \in B_E} \|T(x) - T_n(T(x))\| < \frac{1}{n}.$$

Donde inferimos que $\|T - (T_n \circ T)\| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando n tende a infinito, $T_n \circ T \rightarrow T$. A demonstração é finalizada observando que como T_n tem posto finito para todo $n \in \mathbb{N}$, o operador $T_n \circ T$ também é de posto finito para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Exercício 17 (7.7.17). Sejam E um espaço normado, H um espaço de Hilbert e $T : E \rightarrow H$ um operador compacto. Mostre que existe uma sequência de operadores de posto finito que converge para T em $\mathcal{L}(E, H)$.

Resolução. Desde que T é compacto, $\overline{T(B_E)}$ é compacto. Daí, toda cobertura aberta de $\overline{T(B_E)}$ admite uma subcobertura finita de $\overline{T(B_E)}$. Assim, dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$, a coleção $(B(y, \frac{1}{2n}))_{y \in \overline{T(B_E)}}$ é uma cobertura aberta do compacto $\overline{T(B_E)}$, logo existem $y_1, \dots, y_n \in \overline{T(B_E)}$ tais que $\overline{T(B_E)} \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(y_j, \frac{1}{2n})$, ou seja, $\bigcup_{j=1}^n B(y_j, \frac{1}{2n})$ é uma subcobertura finita do compacto $\overline{T(B_E)}$.

Sejam $M = [y_1, \dots, y_n]$ um subconjunto de dimensão finita de H e P_n a projeção ortogonal de H sobre M (Teorema 5.2.5(b), pois M é fechado em H , visto que é um espaço de dimensão finita e, consequentemente, é Banach pelo Teorema 1.1.6). Como T e P_n são contínuas, então $\tilde{P}_n := P_n \circ T$ é contínua e,

$$\tilde{P}_n(E) = P_n \circ T(E) = P(T(E)) \subseteq P(H) = M,$$

logo $\dim_k \tilde{P}_n(E) < \infty$ e, portanto, \tilde{P}_n tem posto finito. Além disso, para todo $x \in B_E$, segue do Teorema 5.2.5(a) que

$$\begin{aligned} \|T(x) - \tilde{P}_n(x)\| &= \|T(x) - P_n \circ T(x)\| \\ &= \|T(x) - P_n(T(x))\| \\ &= \inf_{y \in M} \|T(x) - y\| \\ &\leq \inf_{j=1, \dots, n} \|T(x) - y_j\| \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Logo, $\|T - \tilde{P}_n\| < \frac{1}{n}$. Fazendo n tender ao infinito, concluímos que $\tilde{P}_n \rightarrow T$, com \tilde{P}_n de posto finito, o que prova o resultado. \square

Exercício 18 (7.7.18). Sejam E e F espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito **nuclear** se existem seqüências $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subseteq E'$ e $(b_n)_{n=1}^\infty \subseteq F$ tais que $T(x) = \sum_{n=1}^\infty \|\varphi_n\| b_n < \infty$ e $T(x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x) b_n$ para todo $x \in E$. Prove que todo operador nuclear é compacto.

Resolução. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador nuclear, logo existem $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subseteq E'$ e $(b_n)_{n=1}^\infty \subseteq F$ tais que $\sum_{n=1}^\infty \|\varphi_n\| \|b_n\| < \infty$ e $T(x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x) b_n$, para todo $x \in E$. Como

$$\varphi_n \otimes b_n : E \rightarrow F, \quad \varphi_n \otimes b_n(x) = \varphi_n(x) b_n$$

é um operador linear contínuo de norma $\|\varphi_n\| \|b_n\|$,

$$T(x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x) b_n = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n \otimes b_n(x), \quad \forall x \in E,$$

com $\sum_{n=1}^\infty \|\varphi_n\| \|b_n\| < \infty$ (pois T é nuclear).

Seja $S_n = \varphi_1 \otimes b_1 + \dots + \varphi_n \otimes b_n$, então S_n é um operador de posto finito pelo Exercício 2.7.20(a). Pela Proposição 7.2.2(b), S_n é compacto. Além disso, como F é Banach, segue da Proposição 7.2.5 que $\mathcal{K}(E, F)$ é fechado e, portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = T = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n \otimes b_n \in \mathcal{K}(E, F)$, donde concluímos que T é compacto. \square

Exercício 19 (7.7.19). Seja E um espaço de Banach. Prove que

- (a) Se $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$ são tais que T é um isomorfismo e $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, então S é um isomorfismo e

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \cdot \|S - T\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|S - T\|}.$$

- (b) O conjunto \mathcal{C} dos isomorfismos de E em E é um subconjunto aberto de $\mathcal{L}(E, E)$ e a função $T \rightarrow T^{-1}$ é um homeomorfismo de \mathcal{C} em \mathcal{C} .

Resolução. a) : Veja que,

$$\|T^{-1} \circ (T - S)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T - S\| < \|T^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|T^{-1}\|} = 1,$$

ou seja, $\|T^{-1} \circ (T - S)\| < 1$. Pela proposição 7.1.3, $[I - T^{-1} \circ (T - S)]$ é bijetor e possui inversa contínua. Como os operadores estão definidos em um espaço de Banach E , segue do Teorema da Aplicação aberta que

$$I - T^{-1} \circ (T - S) = I - I + T^{-1} \circ S = T^{-1} \circ S \quad (*)$$

é um isomorfismo e, consequentemente, S é um isomorfismo. Mais ainda, da proposição 7.1.3, temos

$$(I - T^{-1} \circ (T - S))^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (T^{-1} \circ (T - S))^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S^{-1} &= (T - (T - S))^{-1} \stackrel{(*)}{=} (T \circ (T - T^{-1} \circ (T - S)))^{-1} = (I - T^{-1} \circ (T - S))^{-1} \circ T^{-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1} \circ (T - S))^n \circ T^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|S^{-1} - T^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (T^{-1} \circ (T - S))^n \circ T^{-1} - T^{-1} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (T^{-1} \circ (T - S))^n \circ T^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(T^{-1} \circ (T - S))^n \circ T^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\|T - S\| \cdot \|T^{-1}\|)^n. \end{aligned}$$

Veja que $\sum_{n=1}^{\infty} (\|T - S\| \cdot \|T^{-1}\|)^n = \frac{\|T - S\| \cdot \|T^{-1}\|}{1 - \|T - S\| \cdot \|T^{-1}\|}$ pois é uma série geométrica de razão $q = \|T - S\| \cdot \|T^{-1}\|$. Logo, pelo que foi visto acima, obtemos que

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T\|^2 \cdot \|S - T\|}{1 - \|T - S\| \cdot \|T^{-1}\|}.$$

(b): Seja $T \in \mathcal{C}$. Precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que $B(T, \delta) \subset \mathcal{C}$. Como $T \in \mathcal{C}$, então existe T^{-1} . Tome $\delta = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ e considere a bola $B(T, \delta) \subset E$. Note que, dado $S \in B(T, \delta)$, temos que $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ e pelo item (a) segue que S é um isomorfismo, ou seja, $S \in \mathcal{C}$. Portanto, $B(T, \delta) \subset \mathcal{C}$ e o conjunto \mathcal{C} é um aberto de $\mathcal{L}(E, E)$.

Agora consideramos o mapa $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\Phi(T) = T^{-1}$. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{C}$ tais que $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$. Assim, $T_1^{-1} = T_2^{-1}$ e veja que

$$T_1 = T_1 \circ Id = T_1 \circ (T_2^{-1} \circ T_2) = (T_1 \circ T_1^{-1}) \circ T_2 = T_2,$$

o que implica que Φ é injetiva. Para provar a sobrejetividade, dado $T \in \mathcal{C}$, basta tomar $T^{-1} \in \mathcal{C}$ e temos que $\Phi(T^{-1}) = (T^{-1})^{-1} = T$. Portanto, Φ é bijetiva. Consequentemente, existe Φ^{-1} e como $\Phi^{-1}(\mathcal{C})$ é um aberto, implica que Φ é contínua. Além disso, $(\Phi^{-1})^{-1}(\mathcal{C}) = \Phi(\mathcal{C})$ é aberto também, ou seja, Φ^{-1} é contínua e, concluímos que Φ é um homeomorfismo. \square

Exercício 20 (7.7.20). Sejam E um espaço de Banach e $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$ tais que $T \circ S = S \circ T$. Prove que $S \circ T$ é um isomorfismo se, e somente se, T e S são isomorfismos.

Resolução. Se S, T são isomorfismos, é claro que $S \circ T$ é isomorfismo, pois é composição de isomorfismos.

Suponha que $S \circ T = T \circ S$ seja isomorfismo. Vamos mostrar que T é injetiva e sobrejetiva. Tome $x, y \in E$ tais que $T(x) = T(y)$, então

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) = S(T(y)) = (S \circ T)(y)$$

e, como $S \circ T$ é injetiva, temos que $x = y$. Logo, T é injetiva.

Suponha agora que T não é sobrejetiva. Então $T(E) \subsetneq E$ e temos

$$(T \circ S)(E) = T(S(E)) \subseteq T(E) \subsetneq E$$

mas $T \circ S$ é sobrejetiva, levando a uma contradição. Logo, T é sobrejetiva e, pelo **Teorema da Aplicação Aberta**, T é isomorfismo, pois é bijetiva.

O argumento é análogo para verificar S bijetiva, então o teorema acima garante que é também isomorfismo. \square

Exercício 21 (7.7.21). Sejam E um espaço de Banach e $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(E, E)$ tais que $T_{\pi(1)} \circ \dots \circ T_{\pi(n)} = T_1 \circ \dots \circ T_n$ para toda bijeção $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Mostre que $T_1 \circ \dots \circ T_n$ é um isomorfismo se, e somente se, T_i é isomorfismo para todo $i = 1, \dots, n$.

Resolução.

(\leftarrow) Segue do fato de composição de isomorfismos ser um isomorfismo.

(\rightarrow) Vamos provar por indução sobre n . Para $n = 1$, é direto. Agora, suponha que isto é válido para n operadores lineares. Tome $T_1, \dots, T_{n+1} \in \mathcal{L}(E, E)$ tais que $T_{\pi(1)} \circ \dots \circ T_{\pi(n+1)} = T_1 \circ \dots \circ T_{n+1}$ para toda bijeção $\pi : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$. Assim, tome a função:

$$\begin{aligned} \sigma : \{1, \dots, n+1\} &\longrightarrow \{1, \dots, n+1\} \\ i &\longmapsto \begin{cases} i-1, & \text{se } i \geq 2 \\ n+1, & \text{se } i = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, por hipótese,

$$T_{n+1} \circ T_1 \circ \dots \circ T_n = T_{\sigma(1)} \circ \dots \circ T_{\sigma(n+1)} = T_1 \circ \dots \circ T_{n+1},$$

ou seja, se tomarmos $S = T_1 \circ \dots \circ T_n \in \mathcal{L}(E, E)$, teremos que $T_{n+1} \circ S = S \circ T_{n+1}$.

Logo, pelo Exercício 7.7.20, S e T_{n+1} são isomorfismos. Agora, falta provar que T_1, \dots, T_n são isomorfismos. Para toda bijeção $\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, podemos definir uma bijeção:

$$\begin{aligned} \beta : \{1, \dots, n+1\} &\longrightarrow \{1, \dots, n+1\} \\ i &\longmapsto \begin{cases} \alpha(i), & \text{se } i \leq n \\ n+1, & \text{se } i = n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, por hipótese e lembrando que T_{n+1} é isomorfismo:

$$\begin{aligned} T_{\alpha(1)} \circ \dots \circ T_{\alpha(n)} &= T_{\alpha(1)} \circ \dots \circ T_{\alpha(n)} \circ T_{n+1} \circ T_{n+1}^{-1} \\ &= T_{\beta(1)} \circ \dots \circ T_{\beta(n)} \circ T_{\beta(n+1)} \circ T_{n+1}^{-1} \\ &= T_1 \circ \dots \circ T_n \circ T_{n+1} \circ T_{n+1}^{-1} \\ &= T_1 \circ \dots \circ T_n. \end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese de indução, T_1, \dots, T_n são isomorfismos. □

Exercício 22 (7.7.22). Sejam E um espaço de Banach complexo, $T \in L(E, E)$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\sigma(T^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Resolução. Note primeiro que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as n -ésimas raízes de λ , então $x^n - \lambda = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. Logo,

$$T^n - \lambda I = (T - \lambda_1 I) \circ \dots \circ (T - \lambda_n I).$$

Também, por serem polinômios em T , $T - \lambda_1 I, \dots, T - \lambda_n I$ comutam entre si. Assim, pelo exercício 7.7.21,

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(T^n) &\Leftrightarrow T^n - \lambda I \text{ é um isomorfismo} \\ &\Leftrightarrow T - \lambda_i I \text{ é um isomorfismo, } \forall i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \rho(T). \end{aligned}$$

Logo, $\lambda \in \sigma(T^n)$ se, e somente se, existe $\mu \in \sigma(T)$ tal que $\mu^n = \lambda$. □

Exercício 23 (7.7.23). Prove o item (c) da Proposição 7.4.1.

Proposição 7.4.1 Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Definindo $T^* := u_{H_1}^{-1} \circ T' \circ u_{H_2}$ é verdade que:

- (a) $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$.
- (b) $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ para todos $x \in H_1$ e $y \in H_2$.
- (c) T^* é o único operador em $\mathcal{L}(H_2, H_1)$ satisfazendo (b).
- (d) A correspondência $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ é bijetora e $\|T\| = \|T^*\|$. No caso real, essa correspondência é um isomorfismo isométrico.

Resolução. Suponha $T_1^*, T_2^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ dois operadores satisfazendo (b). Como $\langle x, T_1^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T_2^*(y) \rangle$ para todo $x \in H_1$ e $y \in H_2$, temos

$$\begin{aligned} \langle x, (T_1^* - T_2^*)(y) \rangle &= \langle x, T_1^*(y) - T_2^*(y) \rangle = \overline{\langle T_1^*(y) - T_2^*(y), x \rangle} \\ &= \overline{\langle T_1^*(y), x \rangle} - \overline{\langle T_2^*(y), x \rangle} = \langle x, T_1^*(y) \rangle - \langle x, T_2^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle - \langle T(x), y \rangle = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in H_1, y \in H_2 \implies (T_1^* - T_2^*)(y) = 0$ para todo $y \in H_2$. Ou seja, $T_1^* = T_2^*$. \square

Exercício 24 (7.7.24). Seja H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $S, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Prove que

- a) $(S + T)^* = S^* + T^*$
- b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$.
- c) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$;
- d) Vale o item d) da proposição 7.4.1.

Resolução. a) Por um lado $\langle (S + T)x, y \rangle = \langle x, (S + T)^*y \rangle$. Por outro lado,

$$\langle (S + T)x, y \rangle = \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle = \langle x, (S^* + T^*)y \rangle.$$

b) Segue similar.

- c) Já provamos que $\|T\| = \|T^*\|$, concluindo imediatamente. **Não concordo que seja tão direto assim. Abaixo segue uma demonstração um pouco mais detalhada.**

Note que, para quaisquer $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ e $x, y \in H_1$

$$\langle T^*(x), y \rangle = \overline{\langle y, T^*(x) \rangle} = \overline{\langle T(y), x \rangle} = \langle x, T(y) \rangle.$$

Ou seja, $(T^*)^* = T$. Mais ainda, é fácil ver que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Logo, $(T^*T)^* = T^*T$, ou seja, T^*T é autoadjunto. Além disso,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^*T(x) \rangle.$$

Dessa forma,

$$\|T^*T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^*T(x) \rangle| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|^2 = \|T\|^2.$$

Segue de forma análoga para TT^* .

- d) A prova segue definindo a inversa. \square

Exercício 25 (7.7.25). Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $T \in \mathcal{L}(H, H)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Prove que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $\lambda \in \sigma(T^*)$.

Resolução. Seja $\lambda \in \rho(T)$, então $(T - \lambda I)$ é bijeção e como $(T - \lambda I)^* = u_{H_2}^{-1} \circ (T - \lambda I) \circ u_{H_1}$ é composição de bijetoras, é também bijeção. Mas, pelo **Exercício 7.7.24**,

$$(T - \lambda I)^* = T^* - (\lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$$

logo $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$. A recíproca é equivalente.

$$\text{Logo, } \lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \notin \rho(T^*) \iff \bar{\lambda} \notin \rho(T^*) \iff \bar{\lambda} \in \sigma(T^*). \quad \square$$

Exercício 26 (7.7.26). Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H, H)$. Prove que $\text{Ker}(T) = T^*(H)^\perp$, e portanto, $H = \text{Ker}(T) \oplus T^*(H)$.

Resolução. Diretamente,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(T) &\iff T(x) = 0 \\ &\iff \langle T(x), y \rangle = 0, \forall y \in H \\ &\iff \langle x, T^*(y) \rangle = 0, \forall y \in H \\ &\iff x \in T^*(H)^\perp. \end{aligned}$$

A segunda afirmação é falsa: tome, por exemplo, o operador $T : l_2 \rightarrow l_2$ definido no Exercício 7.7.5. Este operador é injetor, portanto $\text{Ker}(T) = \{0\}$, e é autoadjunto, pelo Exercício 7.7.29. Mas T não é sobrejetor, pois a sequência $(1/j)_j$ não pertence a $T(H)$, já que a sequência constante 1 não pertence a l_2 . Portanto, $H \neq \{0\} \oplus T(H) = \text{Ker}(T) \oplus T^*(H)$. \square

Exercício 27 (7.7.27). Sejam H um espaço de Hilbert e $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$. Mostre que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Resolução. Diretamente, para todos $x, y \in H$,

$$\langle x, S^*(T^*(y)) \rangle = \langle S(x), T^*(y) \rangle = \langle T(S(x)), y \rangle.$$

Pela unicidade da Proposição 7.4.1, $S^* \circ T^* = (T \circ S)^*$ \square

Exercício 28 (7.7.28). Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ e M e N subespaços fechados de H_1 e H_2 , respectivamente. Mostra que $T(M) \subseteq N$ se, e somente se, $T^*(N^\perp) \subseteq M^\perp$.

Resolução.

(\rightarrow) Tomemos $y \in N^\perp$ e $m \in M$. Como $T(m) \in T(M) \subseteq N$, temos que:

$$0 = \langle T(m), y \rangle = \langle m, T^*(y) \rangle.$$

Portanto, $\langle m, T^*(y) \rangle = 0$ para todo $m \in M$. Logo, $T^*(y) \in M^\perp$. Uma vez que tomamos qualquer $y \in N^\perp$, provamos que $T^*(N^\perp) \subseteq M^\perp$.

(\leftarrow) Como N é subespaço fechado de H_2 , pelo Teorema 5.2.5, $H_2 = N \oplus N^\perp$. Assim, para $m \in M$, temos que $T(m) = a + b$ onde $a \in N$ e $b \in N^\perp$. Além disso, por hipótese, $T^*(N^\perp) \subseteq M^\perp$, o que implica em $T^*(b) \in M^\perp$. Dessa forma,

$$0 = \langle m, T^*(b) \rangle = \langle T(m), b \rangle = \langle a + b, b \rangle = \langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle = \langle b, b \rangle.$$

Portanto, $b = 0$, fazendo com que $T(m) = a \in N$. Pela arbitrariedade de $m \in M$, provamos que $T(M) \subseteq N$. \square

Exercício 29 (7.7.29). Mostre que o operador $T : l_2 \rightarrow l_2$ dado por $T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$, é autoadjunto.

Resolução. Tome $(a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$. Note que:

$$\begin{aligned}\langle T((a_j)_{j=1}^\infty), (b_j)_{j=1}^\infty \rangle &= \left\langle \left(\frac{a_j}{j} \right)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \right\rangle = \sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{j} \cdot \overline{b_j} = \sum_{j=1}^\infty a_j \cdot \overline{\frac{b_j}{j}} \\ &= \left\langle (a_j)_{j=1}^\infty, \left(\frac{b_j}{j} \right)_{j=1}^\infty \right\rangle = \langle (a_j)_{j=1}^\infty, T((b_j)_{j=1}^\infty) \rangle.\end{aligned}$$

Logo, $T^* = T$. □

Exercício 30 (7.7.30). Sejam H um espaço de Hilbert, $T \in L(H, H)$ um operador autoadjunto e $n \in \mathbb{N}$. Prove que T^n é autoadjunto e $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Resolução. Note diretamente que, para todos $x, y \in H$,

$$\langle T^n(x), y \rangle = \langle T^{n-1}(x), T(y) \rangle = \cdots = \langle T(x), T^{n-1}(y) \rangle = \langle x, T^n(y) \rangle.$$

Portanto, T^n é autoadjunto, pela unicidade da Proposição 7.4.1.

É imediato, do Exercício 2.7.9, que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Além disso, pelo Exercício 7.7.24, $\|T^2\| = \|T\|^2$. Suponha então que $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$, para certo $k \in \mathbb{N}$. Daí, como T^{2^k} é autoadjunto,

$$\|T^{2^{k+1}}\| = \|T^{2^k+2^k}\| = \|T^{2^k}T^{2^k}\| = \|T^{2^k}\|^2 = \left(\|T\|^{2^k}\right)^2 = \|T\|^{2^{k+1}}.$$

Portanto, $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $1 \leq n < 2^k$,

$$\|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\| = \|T^n T^{2^k-n}\| \leq \|T^n\| \|T^{2^k-n}\| \leq \|T^n\| \|T\|^{2^k-n} \leq \|T\|^n \|T\|^{2^k-n} = \|T\|^{2^k}.$$

Portanto, $\|T\|^n \|T\|^{2^k-n} = \|T\|^{2^k}$, o que implica que $\|T^n\| = \|T\|^n$. □

Exercício 31 (7.7.31). Sejam H um espaço de Hilbert e $S, T \in L(H, H)$ operadores autoadjuntos. Mostre que $T \circ S$ é autoadjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.

Resolução. Como S, T são autoadjuntos, pelo Exercício 7.7.27, $(T \circ S)^* = S^* \circ T^* = S \circ T$. Logo, $T \circ S$ é autoadjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$. □

Exercício 32 (7.7.32). Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H, H)$ um isomorfismo adjunto. Prove que se T é *positivo*, isto é, $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, então a expressão

$$[x, y] := \langle T(x), y \rangle, \quad x, y \in H,$$

define um produto interno em H cuja norma induzida é equivalente à norma original de H .

Resolução. Para verificar que $[\cdot, \cdot]$ é norma, basta verificar as propriedades:

(P1) $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y],$

(P2) $[\lambda x, y] = \lambda [x, y],$

(P3) $[x, y] = \overline{[y, x]},$

(P4) Para todo $x \neq 0$, $[x, x]$ é um número real estritamente positivo.

Vamos verificá-las:

(P1) e (P2) São satisfeitas pela linearidade de T e de $\langle \cdot, y \rangle$, $\forall y \in H$.

(P3) Note que $[x, y] = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \overline{[y, x]}.$

(P4) Primeiro, note que $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pela **Proposição 7.4.4**. Ainda, $[x, x] = \langle Tx, x \rangle \geq 0$ por hipótese. Faremos agora (P4) por absurdo: Suponha $[x, x] = 0$ com $x \neq 0$, então $Tx \neq 0$ pela injetividade e, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} [Tx + \lambda x, Tx + \lambda x] &= \langle T(Tx + \lambda x), Tx + \lambda x \rangle = \langle T^2x + \lambda Tx, Tx + \lambda x \rangle \\ &= \langle T^2x, Tx \rangle + \langle T^2x, \lambda x \rangle + \langle \lambda Tx, Tx \rangle + \langle \lambda Tx, \lambda x \rangle \\ &= \underbrace{\langle T^2x, Tx \rangle}_{=[Tx, Tx] \geq 0} + 2\lambda \underbrace{\langle Tx, Tx \rangle}_{\geq 0} + \lambda^2 \underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{=[x, x] = 0} \geq 0 \end{aligned}$$

usando que $[Tx + \lambda x, Tx + \lambda x] \geq 0$ por hipótese, novamente. Entretanto, essa última expressão tende a $-\infty$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$, levando a uma contradição. □

Exercício 33 (7.7.33). Sejam H um espaço de Hilbert sobre os complexos e $T : H \rightarrow H$ um operador linear contínuo. Mostre que existem únicos operadores autoadjuntos $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H, H)$ tais que $T = T_1 + iT_2$.

Resolução. Basta tomar $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ e $T_2 = \frac{-i}{2}(T - T^*)$. De fato,

$$T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}(T + T^*) + i \frac{-i}{2}(T - T^*) = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*) = T$$

Além disso, T_1 e T_2 são autoadjuntos, pois

$$(T_1)^* = \left(\frac{1}{2}(T + T^*)\right)^* = \frac{1}{2}(T^* + (T^*)^*) = \frac{1}{2}(T + T^*) = T_1$$

e

$$(T_2)^* = \left(\frac{-i}{2}(T - T^*)\right)^* = \frac{i}{2}(T^* - (T^*)^*) = \frac{-i}{2}(T - T^*) = T_2$$

Agora, T_1 e T_2 estão em $\mathcal{L}(H, H)$ pois são múltiplo escalar e soma de operadores contínuos lineares.

Resta apenas mostrar a unicidade. Suponha que $T = G_1 + iG_2$, com $G_1, G_2 \in \mathcal{L}(H, H)$ e G_1 e G_2 autoadjuntos. Então,

$$\begin{aligned} G_1 + iG_2 = T = T_1 + iT_2 &\iff G_1 - T_1 = i(T_2 - G_2) \\ &\iff (G_1 - T_1)^* = (i(T_2 - G_2))^* \\ &\iff G_1^* - T_1^* = -i(T_2^* - G_2^*) \\ &\iff G_1 - T_1 = -i(T_2 - G_2) \end{aligned}$$

Segue que $G_1 = T_1$ e $G_2 = T_2$. □

Exercício 34 (7.7.34). Seja H um espaço de Hilbert no qual existe um operador $T \in \mathcal{L}(H, H)$ compacto, autoadjunto e injetor. Prove que H é separável.

Resolução. Como T é compacto e autoadjunto, podemos aplicar a decomposição espectral do Teorema 7.5.6. Sendo I um conjunto de índices, existem $(v_i)_{i \in I}$ autovetores de T com autovalores associados $(\lambda_i)_{i \in I}$ de tal forma que, para todo $x \in H$:

$$T(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x, v_i \rangle v_i.$$

Tomando $S = \{v_i : i \in I\}$, provemos que H é separável mostrando que $\overline{[S]} = H$.

Primeiramente, verificamos que S é enumerável. Da compacidade de T , segue que seu conjunto de autovalores é no máximo enumerável (Teorema 7.3.7). Como T é injetor, 0 não é um autovalor, ou seja, $V_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I)$ é de dimensão finita para todo $i \in I$. Logo, S é reunião enumerável de conjuntos finitos, portanto é enumerável.

Agora, $\overline{[S]}$ é subespaço fechado de H , ou seja, do Teorema 5.2.5: $H = \overline{[S]} \oplus \overline{[S]}^\perp$. A separabilidade de H então se reduz a provar que $\overline{[S]}^\perp = \{0\}$. Considere $x \in \overline{[S]}^\perp$. Em particular, $x \perp v_i$ para todo $i \in I$. Dessa forma,

$$T(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x, v_i \rangle v_i = 0.$$

A injetividade de T então implica $x = 0$, finalizando a demonstração. \square

Exercício 35 (7.7.35). Sejam H um espaço de Hilbert separável^a e $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador compacto e autoadjunto. Prove que $\sigma(T)$ é o fecho do conjunto dos autovalores de T .

^aseparável não parece necessário.

Resolução. Se H tem dimensão finita, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}$, que é um conjunto finito e, portanto, fechado.

Suponha H de dimensão infinita. Note que, pelo **Teorema 7.3.6**,

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}$$

pois o operador é compacto. Logo, basta demonstrar que $0 \in \overline{\{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}}$.

Suponha que 0 não é um autovalor. Pelo **Teorema 7.5.6**, sabemos que H admite uma base ortonormal infinita $\{v_n\}$ por autovetores de T com autovalores $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ (**Proposição 7.5.1**), com valores distintos no máximo enumeráveis (**Proposição 7.3.7**). Ainda, como $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ tem dimensão finita pela **Proposição 7.3.1**, é necessário que $\{\lambda_n\}$ admita infinitos valores distintos para que $\{v_n\}$ seja infinita.

Como $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, admite uma ordenação completa, então podemos criar uma sequência $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $|\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$, i.e., é monótona decrescente. Ainda, como $\{\lambda_n\} \subset [-\|T\|, \|T\|]$ é contida em um compacto, a sequência $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ admite subsequência $\{\lambda_{i_k}\}$ convergente e, como 0 é o único ponto de acumulação possível de $\sigma(T)$ pela **Proposição 7.3.7**, temos que $\lambda_{i_k} \rightarrow 0$. \square

Exercício 36 (7.7.36). Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$:

- a) T é invertível, $T \circ T^* = Id_{H_2}$ e $T^* \circ T = Id_{H_1}$;
- b) T é sobrejetiva e $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.

Resolução. $a \implies b$). Se T é isomorfismo, então T é sobrejetiva e

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^* \circ Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

$b \implies a$. Primeiro, T é injetiva pois dado x tal que $Tx = 0$

$$0 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle.$$

Além disso, segue imediatamente que

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T \circ T^* x, y \rangle = \langle x, T^* \circ Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

OUTRA SOLUÇÃO

Dados $x, y \in H_1$,

$$\langle x, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, T^* T(y) \rangle.$$

Assim, $T^* \circ T = id_{H_1}$. Por hipótese, temos que T é sobrejetor. Como contém inversa à esquerda, é sobrejetor, e assim, T é invertível. Agora, dados $z, w \in H_2$, existem $x, y \in H_1$ tais que

$$T(x) = z \quad \text{e} \quad T(y) = w.$$

Dessa forma,

$$\langle T^*(z), T^*(w) \rangle = \langle T^*(T(x)), T^*(T(y)) \rangle = \langle x, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle = \langle z, w \rangle.$$

Portanto, uma vez que $(T^*)^* = T$, provamos que $T \circ T^* = id_{H_2}$. \square

Exercício 37 (7.7.37). Seja H um espaço de Hilbert. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes para um operador $T \in \mathcal{L}(H, H)$:

1. $T \circ T^* = T^* \circ T$.
2. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*(x), T^*(y) \rangle$ para todos $x, y \in H$.

Neste caso, T é chamado de operador normal.

Resolução.

$$\begin{aligned}
 T \circ T^* = T^* \circ T &\iff T(T^*(x)) = T^*(T(x)) \quad \text{para todo } x \\
 &\iff \langle T(T^*(x)), y \rangle = \langle T^*(T(x)), y \rangle \quad \text{para todos } x, y \\
 &\iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \langle T^*(T(x)), y \rangle \quad \text{para todos } x, y \\
 &\iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \overline{\langle y, T^*(T(x)) \rangle} \quad \text{para todos } x, y \\
 &\iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \overline{\langle T(y), T(x) \rangle} \quad \text{para todos } x, y \\
 &\iff \langle T^*(x), T^*(y) \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle \quad \text{para todos } x, y
 \end{aligned}$$

□