

# Random Walks e Equação de Difusão

November 5, 2025

MM433 - EDP I

Prof. Bianca Morelli

Nestor Heli Aponte Avila<sup>1</sup>

[n267452@dac.unicamp.br](mailto:n267452@dac.unicamp.br)

\*\* O objetivo deste pequeno seminário é mostrar como a equação do calor surge num modelo discreto probabilístico e analisar essa relação. O conteúdo aqui exposto segue a linha de [1, Cap. 2] \*\*

## Notação



Definição



Proposição



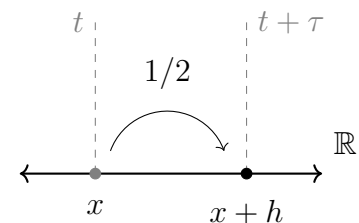
Teorema

## O modelo

Supõe que temos uma partícula no origem da reta que cujo movimento obedece as seguintes regras:

(R1) Se move ao passo  $h > 0$  por unidade de tempo  $\tau$ .

(R2) O passo pode ser a esquerda ou direita com mesma probabilidade  $\rho = 1/2$  que não depende dos passos anteriores.



A tarefa se torna então encontrar uma função  $\rho(x, t)$  que dei a probabilidade de encontrar a partícula na posição  $x$  num instante  $t = N\tau$ .

## Contas preliminares

→ Suponha que após de  $N$  passos,  $t = N\tau$ , a partícula tá em  $x = mh$ , pra algum  $m \in \mathbb{Z} : m \leq |N|$ .

→ Sejam  $k := \#$  de passos dados a direita e  $N - k$  os dados a esquerda.

↓ Temos então  $m = k - (N - k) = 2k - N$  e  $k = (m + N) \cdot 2^{-1}$ . Assim, podemos pensar na probabilidade em termos de  $k$ :

$$\rho(x, t) = \rho_k = \frac{\# \text{ N-caminos com } k \text{ passos a direita}}{\# \text{ N-caminos totais}} = \binom{N}{k} \cdot 2^{-N}.$$

→ Na procura de um modelo contínuo, precisamos fazer  $h, \tau \rightarrow 0$ , no entanto temos que respeitar parâmetros chave pra não colapsar o modelo, neste caso são o primeiro e o segundo momento:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[mh] = \mathbb{E}[m]h \\ \mathbb{E}[x^2] = \mathbb{E}[(mh)^2] = \mathbb{E}[m^2]h^2 \end{cases} \quad .^1 \quad (1)$$

↓ A esperança é linear e  $m = 2k - N$ , então é suficiente com determinar  $\mathbb{E}[k]$  e  $\mathbb{E}[k^2]$ .

<sup>1</sup>Queremos variância  $\text{Var}(x) = \sigma^2 = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$  (distancia promedio do origen) constante.

◊ Sejam  $X$  variable aleatoria discreta tomando valores em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  e  $\rho_X$  sua função masa de probabilidade. A função geradora de probabilidade é

$$G(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=1}^N \rho_X(x) \cdot s^x.$$

□ 1. Nas hipotese anteriores,  $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = G^{(r)}(1)$ .

↓ Temos hipotese pra usar □ 1., só precisamos das derivadas,

$$G(s) = \frac{1}{2^N} \sum \rho_k s^k = \left(\frac{1+s}{2}\right)^N \Rightarrow G^{(1)}(1) = \frac{N}{2}, G^{(2)}(1) = \frac{N(N-1)}{4}.$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[k] = G^{(1)} = \frac{N}{2} \\ \mathbb{E}[k^2] = G^{(2)}(1) - G^{(1)}(1) = \frac{N(N+1)}{4} \end{cases}$$

↓ Voltando a (1) temos  $\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}[2k - N] = 2\mathbb{E}[k] - N = 0$  e  $\mathbb{E}[x^2] = \sigma[x]^2 = \mathbb{E}[4k^2 - 4k + N^2] = \mathbb{E}[k^2] - 4\mathbb{E}[k] + N^2 = N$ .<sup>2</sup>

↓ Surgio então a condição  $\sigma^2 = Nh^2$ , lembrando que  $N = t/\tau$ , tá nós dizendo que temos dilatação parabolica do espaço-tempo,

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\tau} \cdot t \sim \rho(x, t) = \rho(\lambda x, \lambda^2 t). \quad (2)$$

Aquela é justamente uma das primeiras condições na procura da solução fundamental da equação do calor vista em aula.

## Procura do limite

◊ Seja  $(\Omega, \mathfrak{S})$  espaço mensurável. Uma *partição* é uma coleção de eventos  $(B_i) \subset \mathfrak{S}$  tal que  $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$  e  $\bigcup B_i = \Omega$ .

■ (**Probabilidade Total**) Sejam  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  espaço de probabilidade,  $(B_i) \subset \mathfrak{S}$  uma partição e  $A \in \mathfrak{S}$  qualquer. Então,  $P(A) = \sum P(A | B_i) \cdot P(B_i)$ .

→ Da independência no cada paso e do ■ (PT) temos,

$$\begin{cases} \rho(x, t + \tau) = \frac{1}{2}\rho(x - h, t) + \frac{1}{2}\rho(x + h, t) \\ \rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}. \quad (3)$$

$$B_{\pm} := \{\text{Partícula em } x \pm h \text{ no tempo } t\} \sim \rho(B_{\pm}) = \rho(x \pm h, t)$$

<sup>2</sup>Não é estranho que  $\mathbb{E}[x] = 0$ , pois é apenas natural num sistema simétrico "justo".

- Suponha que  $\rho(x, t)$  é suave em  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , função *densidade* (continua) no lugar de função *masa* (discreta), que têm limite trivial.
- ↓ Usando Taylor em  $t, x$  e substituindo em (3) temos,

$$\begin{aligned} \rho(x, t) + \rho_t(x, t)\tau + \sigma|\tau| &= \frac{1}{2} \left( \cancel{2\rho(x, t)} + \cancel{\rho_x(x, t)h} - \cancel{\rho_x(x, t)h} + 2 \cdot \frac{1}{2} \rho_{xx}(x, t)h^2 + \sigma|h^2| \right) \\ \rho_t + \sigma|1| &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} \rho_{xx} + \sigma \left| \frac{h^2}{\tau} \right| \end{aligned}$$

Na nossa procura de limite não trivial precisamos que  $\lim_{(h, \tau) \rightarrow (0, 0)} h^2/\tau$  seja constante, digamos  $2D$  pra algum  $D > 0$ .

- Fazendo  $h, \tau \rightarrow 0$  obtemos  $\rho_t - D\rho_{xx} = 0$ , a equação do calor. Se  $D = 1$ , como no [2, Seç. 2.3] a gente sabe que temos solução única dada por,

$$\rho(x, t) = \Phi(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

## Interpretações importantes

No [1, Cáp. 2] o autor considera desde o principio a constante que chamamos de  $D$  (*coeficiente de difusão*), e consegui a solução fundamental,

$$\Gamma_D(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4Dt}\right).$$

- ↓ Lembrando da equação (2) a gente tinha  $\sigma^2/t = h^2/\tau = 2D$ , ou seja, difusão promedio de  $\sqrt{2D}$  por unidade de tempo. Também,
- ↓  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tau} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2D}{h} \rightarrow \infty \equiv$  Velocidade de propagação infinita.

## Brownian Motion 1-dimensional

◊ Sejam  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  espaço de probabilidade e  $X$  v.a. discreta tomando valores em  $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$  enumerável. Então,  $\mathbb{E}[X] := \sum x_j \cdot P(X = x_j)$ .

◊ Seja  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  espaço de probabilidade. Uma família  $(X_i)$  de variáveis aleatórias é *independente* se  $\forall (B_{i_j}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}), j \leq m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_m} \in B_{i_m}) = \prod_{j=1}^m P(X_{i_j} \in B_{i_j})$ .

■ (**Teorema do Limite Central**) Sejam  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  espaço de probabilidade e  $(X_j)$  família de v.a.i. e identicamente distribuídas com  $\mathbb{E}[X_j] = \mu$  e  $\text{Var}[X_j] = \sigma^2 > 0$ . Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \mathcal{N}(0, 1).$$

→ Sejam  $x_j :=$  posição após  $j$  passos e  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $h\xi_j := x_j - x_{j-1}$ . A família  $(\xi_j)$  de v.a. é independente e idênticamente distribuída.

$$\xi_j : (x_j) \rightarrow \{-1, 1\} \text{ com } \rho(\xi_j = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

Além disso,  $\mathbb{E}[\xi_j] = \mu = 0$  e  $\text{Var}[\xi_j] = \sigma^2 = 1 = \sigma$ .

**Independência.** Sejam  $l \leq k \in \mathbb{N}$ ,  $(\xi_{j_l}) \subset (\xi_j)$  e  $(a_l) \in \{-1, 1\}_k^k$ ,

$$\rho(\xi_{j_1} = a_1, \dots, \xi_{j_k} = a_k) = 2^{N-k} \cdot 2^{-N} = 2^{-k} = \prod_k \rho(\xi_{j_l} = a_l)$$

**Esperança.**  $\mathbb{E}[\xi_j] = (-1) \cdot \rho(\xi_j = -1) + (1) \cdot \rho(\xi_j = 1) = 0$ .

**Variança.**  $\text{Var}[\xi_j] = \mathbb{E}[\xi_j^2] = (-1)^2 \cdot \rho(\xi_j = -1) + (1)^2 \cdot \rho(\xi_j = 1) = 1$ .

↓ Das nossas conclusões anteriores pra  $D = h^2/\tau$ , temos  $h = \sqrt{2Dt/N}$ , logo, o deslocamento da partícula após de  $N$  passos é

$$x_N = h \sum_{j=1}^N \xi_j = \sqrt{2Dt} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j.$$

Segue do ■ (TLC) que  $x_N \xrightarrow{p} \mathcal{N}(0, 2Dt)$ .

◇ Seja  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  espaço de probabilidade. Um *processo estocástico* é uma família  $(X(t))$  de v.a., usualmente indexada pelo tempo,  $t \in [0, \infty)$ .

◇ O *movimento browniano* é um processo estocástico  $(W(t))$  tal que:

(B1) Começa no origem,  $W(0) = 0$ .

(B2)  $W : t \mapsto W(t, \omega)$  continua quasi-sempre.

(B3) Incrementos independentes, se  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , então a família de v.a.  $(W(t_j) - W(t_{j-1}))$  é independente.

(B4) Pra cada  $0 \leq s < t$ ,  $W(s) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

↓ Fazendo  $D = 1/2$ , o feito até agora não é outra coisa que a construção do movimento browniano 1-dimensional estándar como o limite de passeios aleatórios.

## References

- [1] Salsa, S. (2016). *Partial differential equations in action*. Cham: Springer International Publishing.
- [2] Evans, L. (2010). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society.