Álgebra Linear Avançada
Dualidade

Adriano Moura

Unicamp

2020

Funcionais Lineares e o Espaço Dual

Dado um espaço vetorial V, o espaço vetorial dual de V é

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) =: V^*.$$

Os elementos de V^* são chamados de funcionais lineares em V.

Observe que a seguinte função é 2-linear:

$$V^* \times V \to \mathbb{F}, \qquad (f, v) \mapsto f(v).$$

Esta função é chamada de função de avaliação. Em geral, dado um espaço vetorial W, um elemento de $\mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(W, V, \mathbb{F})$ é chamado de um pareamento bilinear entre W e V.

Segue da Proposição 9.1.4 que, dada uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V, temos família l.i. $\alpha^* = (f_i)_{i \in I}$ de elementos de V^* definida por

$$f_i(v_j) = \delta_{i,j} \qquad \text{para todo} \qquad i, j \in I,$$

que é base se $\dim(V) < \infty$ (base dual a α).

Se $v \in V$ satisfaz $f(v) = 0$ para todo $f \in V^*$, então $v = 0$.

Dem.: Suponha que $v \neq 0$ satisfaz a hipótese dada e seja α base de V contendo v, digamos $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ e $v = v_{i_0}$. O elemento f_{i_0} de α^* satisfaz $f_{i_0}(v) = 1 \neq 0$, gerando contradição. $\square$

"Base" Dual Nem Sempre é Base

Se $\dim(V) = \infty$, o fato de α^* ser l.i. implica que $\dim(V^*) \geq \dim(V)$. Porém, α^* não gera V^* como veremos a seguir.

Proposição 9.2.2

Se I é conjunto satisfazendo $\#I = \dim(V)$, V^* é isomorfo a $\mathcal{F}(I, \mathbb{F})$.

Dem.: Cada elemento de $\mathcal{F}(I, \mathbb{F})$ é uma família em $\mathbb{F}$. Denotemos por $(a_i)_{i \in I}$ a função a dada por $a(i) = a_i$. Fixe uma base $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ de V e considere a função $T : V^* \to \mathcal{F}(I, \mathbb{F})$ dada por $T(f) = (f(v_i))_{i \in I}$, que é linear. Por outro lado, a função $S : \mathcal{F}(I, \mathbb{F}) \to V^*$ dada por $S((a_i)_{i \in I})(v_j) = a_j, j \in I$, também é linear e vale $S \circ T = I_{V^*}$, assim como $T \circ S = I_{\mathcal{F}(I, \mathbb{F})}$. □

Para ver que α^* não gera V^* se $\dim(V) = \infty$, basta ver que o subespaço de $\mathcal{F}(I, \mathbb{F})$ gerado por $T(\alpha^*)$ é um subespaço próprio. De fato, tal subespaço é o subconjunto

$$\{a \in \mathcal{F}(I, \mathbb{F}) : a(i) \neq 0 \text{ para finitos valores de } i\}.$$

O Bidual

Sendo V^* um espaço vetorial, podemos considerar $(V^*)^*$, que denotaremos por V^{**}. Considere a função $\Phi : V \to V^{**}$ dada por

$$\Phi(v)(f) = f(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V, f \in V^*.$$

Observe que $\Phi(v)$ está bem definida, isto é, $\Phi(v) \in V^{**}\ \forall\ v \in V$. De fato, dados $\lambda \in \mathbb{F}, f, g \in V^*$, temos

$$\Phi(v)(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(v) = f(v) + \lambda g(v) = \Phi(v)(f) + \lambda\Phi(v)(g).$$

Além disso, Φ é linear: dados $\lambda \in \mathbb{F}, v, w \in V, f \in V^*$, temos

$$\Phi(v + \lambda w)(f) = f(v + \lambda w) = f(v) + \lambda f(w) = (\Phi(v) + \lambda\Phi(w))(f).$$

Finalmente, vejamos que Φ é injetora. Temos $\Phi(v) = 0$ se, e somente se, $f(v) = 0$ para qualquer $f \in V^*$. Mas isso só acontece se $v = 0$.

Assim, se $\dim(V)$ é finita, temos $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$ e, portanto, Φ é um isomorfismo entre V e V^{**}.

Transposição

Suponha que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ e considere a função

$$W^* \to V^*, \qquad f \mapsto f \circ T$$

que é chamada de a transposta de T e será denotada por T^t (a notação T^* também é muito comum). Observe que T^t é linear:

$$T^t(f + \lambda g) = (f + \lambda g) \circ T = (f \circ T) + \lambda(g \circ T) = T^t(f) + \lambda T^t(g).$$

Proposição 9.2.3

Suponha que V e W tenham dimensões finitas e que α e β sejam bases para V e W, respectivamente. Então $[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = ([T]_\beta^\alpha)^t$.

Dem.: Escreva $\alpha = v_1, \ldots, v_n, \beta = w_1, \ldots, w_m, \alpha^* = f_1, \ldots, f_n$ e $\beta^* = g_1, \ldots, g_m$. Assim, se $[T]_\beta^\alpha = (a_{i,j})$, temos $T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i$. Por outro lado, a entrada (j, i) de $[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*}$ é a j-ésima coordenada de $T^t(g_i)$ com respeito a α^*. Veja que, dada $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \in V^*$, temos $f(v_j) = a_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n$. Logo, esta coordenada é

$$T^t(g_i)(v_j) = g_i(T(v_j)) = g_i\left(\sum_{k=1}^m a_{k,j} w_k\right) = \sum_{k=1}^m a_{k,j} g_i(w_k) = a_{i,j}. \ \square$$