Álgebra Linear Avançada
Produto Tensorial de Transformações Lineares

Adriano Moura

Unicamp

2020

A Definição

Dadas $T_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_j, W_j), 1 \leq j \leq k$, considere a função k-linear

$$\psi : V_1 \times \cdots \times V_k \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_k, \quad (v_1, \ldots, v_k) \mapsto T_1(v_1) \otimes \cdots \otimes T_k(v_k),$$

e a transformação linear induzida

$$\tilde{\psi} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_k, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto T_1(v_1) \otimes \cdots \otimes T_k(v_k).$$

Assim, fica definida uma função

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_k, W_k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, W_1 \otimes \cdots \otimes W_k),$$

$$\varphi(T_1, \ldots, T_k)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = T_1(v_1) \otimes \cdots \otimes T_k(v_k).$$

Note que φ é k-linear e, portanto, temos a transformação linear induzida

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_k, W_k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, W_1 \otimes \cdots \otimes W_k),$$

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_k \mapsto \varphi(T_1, \ldots, T_k).$$

A transformação linear $\tilde{\psi} = \varphi(T_1, \ldots, T_k)$ será denotada por $T_1 \otimes \cdots \otimes T_k$ e será chamada de o produto tensorial da família $T_1, \ldots, T_k$.

Proposição 10.3.2 e Corolário 10.3.3

A transformação linear $\tilde{\varphi}$ é injetora. Se as dimensões de V_j e W_j forem finitas para todo $1 \leq j \leq k$, então $\tilde{\varphi}$ é isomorfismo.

Dem.: A segunda afirmação segue da primeira já que domínio e contradomínio têm a mesma dimensão (finita).

Procedamos por indução em $k \geq 2$. Para $k = 2$, tome $\Gamma \in \mathcal{N}(\tilde{\varphi})$ e escolha uma expressão para Γ da forma $\Gamma = \sum_{j=1}^{m} T_j \otimes S_j$ com $T_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W_1)$ e $S_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_2, W_2)$ tais que $T_1, \ldots, T_m$ e $S_1, \ldots, S_m$ sejam famílias l.i..
Em particular,

(1) $$\sum_{j=1}^{m} T_j(v) \otimes S_j(v') = 0 \quad \forall\ v \in V_1,\ v' \in V_2.$$

Se $m \neq 0$, então $T_1 \neq 0$ e podemos escolher $v \in V_1$ tal que $T_1(v) \neq 0$.
Seja r a dimensão do subespaço de W_1 gerado por $T_1(v), \ldots, T_m(v)$ e, a menos de re-ordenação, suponha que $T_1(v), \ldots, T_r(v)$ seja l.i..

Assim, para cada $r < l \leq m$, existem escalares $a_{i,l}, 1 \leq i \leq r$, tais que

$$T_l(v) = \sum_{i=1}^{r} a_{i,l}\; T_i(v).$$

Retornando estas expressões em (1), segue que

$$\sum_{j=1}^{r} T_j(v) \otimes \left(S_j(v') + \sum_{l=r+1}^{m} a_{j,l}\; S_l(v') \right) = 0 \quad \forall\; v' \in V_2.$$

Como $T_1(v), \ldots, T_r(v)$ é l.i., segue do Lema 10.2.7 que

$$S_j + \sum_{l=r+1}^{m} a_{j,l}\; S_l = 0 \quad \forall\; 1 \leq j \leq r.$$

Mas isso contradiz o fato de termos escolhido $S_1, \ldots, S_m$ l.i.. Logo, $m = 0 \Rightarrow \mathit{\Gamma} = 0$, completando a demonstração para $k = 2$.

Suponha então que $k > 2$ e introduza a seguinte notação:

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_{k-1}, \qquad W = W_1 \otimes \cdots \otimes W_{k-1},$$

$\tilde{\varphi}_{k-1} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_{k-1}, W_{k-1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, que é injetora por hipótese de indução, e

$$\tilde{\varphi}' : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_k, W_k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V \otimes V_k, W \otimes W_k),$$

que é injetora pelo caso $k = 2$.

Núcleo e Imagem

A associatividade de $\otimes$ induz os seguintes isomorfismos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_k, W_k) \xrightarrow{\psi}$$
$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_{k-1}, W_{k-1})) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_k, W_k),$$
$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_k \mapsto (T_1 \otimes \cdots \otimes T_{k-1}) \otimes T_k,$$

e $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V \otimes V_k, W \otimes W_k) \xrightarrow{\psi'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, W_1 \otimes \cdots \otimes W_k)$.

Facilmente verifica-se que $\tilde{\varphi} = \psi' \circ \tilde{\varphi}' \circ (\tilde{\varphi}_{k-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \psi$.
Como $\psi', \tilde{\varphi}'$ e ψ são injetoras, basta mostrar que $\tilde{\varphi}_{k-1} \otimes \mathrm{Id}$ também é.
Isso é imediato do lema a seguir. □

Lema 10.3.1

- (a) $Im(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k) = Im(T_1) \otimes \cdots \otimes Im(T_k)$.
- (b) Seja $N_j = V_1 \otimes \cdots \otimes V_{j-1} \otimes \mathcal{N}(T_j) \otimes V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_k$, $1 \leq j \leq k$. Então $\mathcal{N}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k) = N_1 + \cdots + N_k$. Em particular, $T_1 \otimes \cdots \otimes T_k$ é injetora se T_j o for para todo $1 \leq j \leq k$.

Dem.: Parte (a) fica de exercício (fácil). A segunda afirmação de (b) é imediata da primeira pois $N_j = \{0\}\ \forall\ j$.

A continência $N_j \subseteq \mathcal{N}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k)$ é óbvia e, portanto, se $N := N_1 + \cdots + N_k$, temos $N \subseteq \mathcal{N}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k)$. Sejam

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \quad \text{e} \quad W = Im(T_1) \otimes \cdots \otimes Im(T_k) = Im(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k).$$

Considere a projeção canônica $\pi : V \to V/N$. Mostraremos que existe $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V/N)$ tal que

$$S \circ (T_1 \otimes \cdots \otimes T_k) = \pi. \tag{2}$$

Assim, $\mathcal{N}(T_1 \otimes \cdots \otimes T_k) \subseteq \mathcal{N}(S \circ (T_1 \otimes \cdots \otimes T_k)) \overset{(2)}{=} N$, e o lema segue.

Vejamos então como definir S satisfazendo (2). Para cada $1 \leq j \leq k$, seja σ_j uma inversa à direita para T_j, i.e., $\sigma_j : Im(T_j) \to V_j$ satisfaz

$$T_j(\sigma_j(w)) = w \quad \forall\, w \in Im(T_j).$$

Isso implica que

$$\sigma_j(T_j(v)) - v \in \mathcal{N}(T_j) \quad \forall\, v \in V_j. \tag{3}$$

De fato, $T_j(\sigma_j(T_j(v)) - v) = T_j(\sigma_j(T_j(v))) - T_j(v) = 0$. Defina $\sigma : Im(T_1) \times \cdots \times Im(T_k) \to V/N, (w_1, \ldots, w_k) \mapsto \pi(\sigma_1(w_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_k(w_k))$.

Mostraremos que σ é k-linear e que $S := \tilde{\sigma}$ satisfaz(2).

Mostremos que $\tilde{\sigma}$ satisfaz (2). Dados $v_j \in V_j, 1 \leq j \leq k$, (3) nos diz que existe $v_j' \in \mathcal{N}(T_j)$ tal que $\sigma_j(T_j(v_j)) = v_j + v_j'$. Então,

$$\begin{aligned} S\big((T_1 \otimes \cdots \otimes T_k)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\big) &= S(T_1(v_1) \otimes \cdots \otimes T_k(v_k)) \\ &= \sigma(T_1(v_1), \ldots, T_k(v_k)) = \pi(\sigma_1(T_1(v_1)) \otimes \cdots \otimes \ \sigma_k(T_k(v_k))) \\ &= \pi((v_1 + v_1') \otimes \cdots \otimes \ (v_k + v_k')) = \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) + \pi(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{v}$ é uma soma de elementos em N. Isso mostra a validade de (2).

Mostremos a linearidade de σ na primeira entrada. Dados $w_j \in Im(T_j)$, $1 \leq j \leq k, w_1' \in Im(T_1)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, note que, como

$$\begin{aligned} T_1\big(\sigma_1(w_1) + \lambda\sigma_1(w_1') - \sigma_1(w_1 + \lambda w_1')\big) \\ = T_1(\sigma_1(w_1)) + \lambda T_1(\sigma_1(w_1')) - T_1(\sigma_1(w_1 + \lambda w_1')) = 0, \end{aligned}$$

$\exists\ v \in \mathcal{N}(T_1)$ t.q. $\sigma_1(w_1 + \lambda w_1') = \sigma_1(w_1) + \lambda\sigma_1(w_1') + v$. Assim,

$$\begin{aligned} &\sigma(w_1 + \lambda w_1', w_2, \cdots, w_k) = \pi(\sigma_1(w_1 + \lambda w_1') \otimes \sigma_2(w_2) \otimes \cdots \otimes \sigma_k(w_k)) \\ &\quad = \pi((\sigma_1(w_1) + \lambda\sigma_1(w_1') + v) \otimes \sigma_2(w_2) \otimes \cdots \otimes \sigma_k(w_k)) \\ &\quad = \pi((\sigma_1(w_1)) \otimes \sigma_2(w_2) \otimes \cdots \otimes \sigma_k(w_k)) \\ &\quad + \lambda\ \pi(\sigma_1(w_1') \otimes \sigma_2(w_2) \otimes \cdots \otimes \sigma_k(w_k)) + \pi(v \otimes \sigma_2(w_2) \otimes \cdots \otimes \sigma_k(w_k)) \\ &\quad = \sigma(w_1, w_2, \cdots, w_k) + \lambda\ \sigma(w_1', w_2, \cdots, w_k). \end{aligned}$$

$\square$