Álgebra Linear Avançada
Pareamentos e Ortogononalidade

Adriano Moura

Unicamp

2020

Dados $\mathbb{F}$-espaços vetoriais V e W, defina

$$B(V,W) = \mathrm{Hom}^2_{\mathbb{F}}(V,W,\mathbb{F}) \qquad \text{e} \qquad B(V) = B(V,V).$$

Um elemento de $B(V,W)$ é dito um pareamento bilinear entre V e W. No caso $V = W$, diz-se que um pareamento bilinear é uma forma bilinear em V. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, um produto interno em V é um exemplo de uma forma bilinear. Porém, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, um produto interno não é um elemento de $B(V)$ pois não é linear na segunda entrada.

Exercício: Suponha que $\dim(V) = m, \dim(W) = n$ e sejam α e β bases para V e W, respectivamente. Mostre que para qualquer matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, a fórmula

$$\phi(v,w) = [v]^t_\alpha \; A \; [w]_\beta$$

define um elemento $\phi \in B(V,W)$. (Compare com (7.1.7))

“Matriz de Gram”

Dados $\phi \in B(V,W)$ e famílias $\alpha = v_1, \dots, v_m$ em V e $\beta = w_1, \dots, w_n$ em W, a matriz de ϕ com respeito a α e β, denotada por ${}_\alpha[\phi]_\beta$, é a matriz cuja entrada na posição (i,j) é $\phi(v_i, w_j)$:

$$ {}_\alpha[\phi]_\beta = \begin{bmatrix} \phi(v_1,w_1) & \phi(v_1,w_2) & \cdots & \phi(v_1,w_n) \\ \phi(v_2,w_1) & \phi(v_2,w_2) & \cdots & \phi(v_2,w_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(v_m,w_1) & \phi(v_m,w_2) & \cdots & \phi(v_m,w_n) \end{bmatrix} $$

Se α e β forem bases, temos (compare com a demonstração de (7.1.5)):

$$ \phi(v,w) = [v]_\alpha^t \ {}_\alpha[\phi]_\beta \ [w]_\beta \quad \text{para quaisquer} \quad v \in V, w \in W. $$

Proposição 9.3.1

Se $\dim(V) = m$ e $\dim(W) = n$ e α e β forem bases para V e W, respectivamente, a seguinte função é um isomorfismo:

$$ B(V,W) \to M_{m,n}(\mathbb{F}), \qquad \phi \mapsto {}_\alpha[\phi]_\beta. $$

Em particular, $\dim(B(V,W)) = \dim(V)\dim(W)$.

Dado $\phi \in B(V,W)$, considere as funções

$$ {}_{\phi}D : V \to W^* \qquad \text{e} \qquad D_{\phi} : W \to V^* $$

dadas por

$$ {}_{\phi}D(v)(w) = \phi(v,w) = D_{\phi}(w)(v) \quad \text{para quaisquer} \quad v \in V,\ w \in W. $$

Note que ${}_{\phi}D$ e D_{ϕ} são lineares. O núcleo de ${}_{\phi}D$ é chamado de o radical de ϕ à esquerda, enquanto que $\mathcal{N}(D_{\phi})$ é o radical à direita. Diz-se que ϕ é não degenerada à esquerda se ${}_{\phi}D$ é injetora. Caso contrário, ela é dita singular à esquerda. Analogamente define-se o conceito de ϕ ser singular ou não degenerada à direita usando-se D_{ϕ}.

Vetores em $\mathcal{N}(D_{\phi})$ são ditos degenerados à direita, enquanto que os de $\mathcal{N}({}_{\phi}D)$ são ditos degenerados à esquerda (com respeito a ϕ).

Se $\alpha = v_1, \dots, v_m$ e $\beta = w_1, \dots, w_n$ forem bases de V e W, então

$$ [D_{\phi}]^{\beta}_{\alpha^*} = {}_{\alpha}[\phi]_{\beta} \qquad \text{e} \qquad [{}_{\phi}D]^{\alpha}_{\beta^*} = ([D_{\phi}]^{\beta}_{\alpha^*})^t. $$

Se $\dim(V)$ e $\dim(W)$ forem finitas, os postos de D_{ϕ} e ${}_{\phi}D$ coincidem.

Formas Bilin. Simétricas, Antissimétricas e Alternadas

De agora em diante, $\phi \in B(V)$. Neste caso, se $\dim(V) < \infty$, ϕ é degenerada à esquerda se, e somente se, for degenerada à direita. Por isso, passaremos a dizer simplesmente "ϕ é (não) degenerada".

Diz-se que ϕ é simétrica se

$$\phi(v, w) = \phi(w, v) \quad \text{para quaisquer} \quad v, w \in V,$$

antissimétrica se

$$\phi(v, w) = -\phi(w, v) \quad \text{para quaisquer} \quad v, w \in V,$$

e alternada se

$$\phi(v, v) = 0 \quad \text{para qualquer} \quad v \in V.$$

Se $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 2$, então ϕ é simétrica se, e só se, for antissimétrica.

Proposição 9.3.5

Seja $\alpha = (v_i)_{i \in I}$ uma base de V.

- a) ϕ é simétrica se, e só se, ${}_\alpha[\phi]_\alpha$ o for.
- b) ϕ é antissimétrica se, e só se, ${}_\alpha[\phi]_\alpha$ o for.
- c) ϕ é alternada se, e só se, ${}_\alpha[\phi]_\alpha$ for antissim. e $\phi(v_i, v_i) = 0 \ \forall \ i \in I$.

Ortogonalidade

Dados $v, w \in V$, diz-se que

$$v \perp_\phi w \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi(v,w) = 0.$$

Assim, $\perp_\phi$ define uma relação binária em V. Em geral, $\perp_\phi$ não é simétrica, isto é,

$$v \perp_\phi w \qquad \not\Rightarrow \qquad w \perp_\phi v.$$

Proposição 9.3.7

A relação de ortogonalidade $\perp_\phi$ é simétrica se, e somente se, ϕ for simétrica ou alternada.

Um vetor v é dito isotrópico com respeito a ϕ se $v \perp_\phi v$.
Assim, ϕ é alternada se, e somente se, todo vetor é isotrópico.

Dada uma família α de vetores em V, define-se

$$\alpha^{\perp_\phi} = \{w \in V : v \perp_\phi w \, \forall \, v \in \alpha\} \quad \text{e} \quad {}^{\perp_\phi}\alpha = \{v \in V : v \perp_\phi w \, \forall \, w \in \alpha\}.$$

Estes conjuntos são subespaços, mas $\alpha^{\perp_\phi} \neq {}^{\perp_\phi}\alpha$ em geral. A igualdade vale se ϕ for simétrica ou antissimétrica. Além disso,

$$\mathcal{N}(D_\phi) = V^{\perp_\phi} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}({}_\phi D) = {}^{\perp_\phi}V.$$

Demonstração da Proposição 9.3.7

Suponha que $\perp_\phi$ é simétrica e considere a relação binária em V dada por

$$v \sim w \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi(v,w) = \phi(w,v)$$

que é simétrica e reflexiva. Dados $u, v, w \in V$, defina

$$\vartheta = \vartheta^u_{v,w} = \phi(u,v)w - \phi(u,w)v$$

e observe que

$$\phi(u,\vartheta) = \phi(u,v)\phi(u,w) - \phi(u,w)\phi(u,v) = 0.$$

Ou seja, $u \perp_\phi \vartheta$. Como $\perp_\phi$ é simétrica, segue que $\vartheta \perp_\phi u$. Isto é,

$$\phi(u,v)\phi(w,u) = \phi(u,w)\phi(v,u) \;\; \forall\, u,v,w \in V.$$

Em particular,

$$u \sim v \quad \Rightarrow \quad \phi(u,v)(\phi(w,u) - \phi(u,w)) = 0 \;\; \forall\, w \in V.$$

Invertendo o papel de u e v na construção de ϑ segue que

$$u \sim v \qquad \Rightarrow \qquad \phi(u,v)(\phi(w,v) - \phi(v,w)) = 0 \;\; \forall\, w \in V.$$

Juntando ambas as conclusões temos

(1) $$u \sim v \quad \Rightarrow \quad u \perp_\phi v \quad \text{ou} \quad u \sim V \ \text{ e } \ v \sim V.$$

Como $\sim$ é reflexiva, também temos, para todo $v \in V$,

(2) $$v \perp_\phi v \quad \text{ou} \quad v \sim V.$$

Observe também que, se u e v são isotrópicos, vale

$$\phi(u \pm v, u \pm v) = \pm(\phi(u,v) + \phi(v,u)).$$

Portanto,

(3) $$u \pm v \ \text{ são isotrópicos} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(u,v) = -\phi(v,u).$$

Mostremos que, se ϕ não é simétrica, então ϕ deve ser alternada. Tome $u, v \in V$ tais que $\phi(u,v) \neq \phi(v,u)$. Em particular, segue de (2) que u e v são isotrópicos. Suponha, por contradição, que ϕ não é alternada e tome $w \in V$ não isotrópico. Segue novamente de (2) que $u \sim w$ e $v \sim w$. Mas então, por (1), temos $u \perp_\phi w$ e $v \perp_\phi w$. Logo,

(4) $$u + w \perp_\phi u.$$

Por outro lado, $\phi(u+w, v) = \phi(u,v) \neq \phi(v,u) = \phi(v, u+w)$ e segue de (2) que $u+w$ é isotrópico. Usando (3) junto com (4), concluímos que $w = (u+w) - u$ é isotrópico, que é uma contradição. □

Lema 9.3.6

Se $\dim(V)$ é finita, são equivalentes:

1. ϕ é degenerada.
2. $V^{\perp_\phi} \neq \{0\}$.
3. ${}^{\perp_\phi}V \neq \{0\}$.

Além disso, $\mathrm{pt}(\phi) = \dim(V) - \dim(V^{\perp_\phi}) = \dim(V) - \dim({}^{\perp_\phi}V)$.

Veja também o Corolário 9.3.4,

Dado um subespaço W de V, a restrição de $\phi \in B(V)$ a $W \times W$ é um elemento de $B(W)$. Denotaremos tal restrição por $\phi|_W$.

Observe que, mesmo que ϕ seja não degenerada, a restrição pode o ser. De fato, se $w \in V$ é isotrópico e $W = [w]$, então a restrição de ϕ a W é nula e, portanto, degenerada.

Reciprocamente, mesmo que ϕ seja degenerada, se w não é isotrópico, então a restrição de ϕ a $[w]$ é não degenerada.