Topologia Geral - P1

Nome completo: ______________________________

Escolha 5 dentre as 6 questões a seguir

1.
   - Mostre que se Y é um subespaço de X e Z é um subespaço de Y, então a topologia de Z como subespaço de Y coincide com a topologia de Z como subespaço de X.
   - Mostre que o conjunto dos números reais com a topologia de Sorgenfrey não possui base enumerável. Dica: construa uma função injetiva de $\mathbb{R}$ em uma tal base.

2.
   - Seja S um subespaço de um espaço topológico X. Prove que a topologia de S coincide com a topologia fraca definida pela aplicação inclusão $i : S \to X$.
   - Se $f : X \to Y$ é contínua, mostre que X é homeomorfo ao subespaço $G(f) \doteq \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$.

3.
   - Mostre que, com a topologia usual de $\mathbb{R}$, se f e g são aplicações contínuas de X em $\mathbb{R}$, então $\{x \in X : f(x) \leqslant g(x)\}$ é fechado em X.
   - Seja $\{X_i, i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, e $X \doteq \Pi_{i\in I} X_i$ com a topologia das caixas. Mostre que cada X_i é homeomorfo a um subespaço de X. Isso também ocorre na topologia produto?

4.
   - Se $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede que converge a x, prove que qualquer subrede sua também converge a x.
   - Se cada subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admite uma subrede que converge a x, prove que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ também converge a x. Dica: Contrapositiva.

5. Seja $X = [0, 1]$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$. Seja $Y = \{0, 1\}$, e seja $\pi : X \to Y$ a função característica do intervalo $[1/2, 1]$.
   - Prove que a topologia quociente τ_π é dada por $\{\emptyset, \{0\}, Y\}$.
   - Mostre que π não é aberta nem fechada.

6.
   - Seja $\{X_i, i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, e $X \doteq \Pi_{i\in I} X_i$ com a topologia das caixas. Mostre que cada $\pi_i : X \to X_i$ é uma aplicação aberta.
   - Seja A o subconjunto de $\Pi_{i\in\mathbb{N}} X_i$, onde $X_i = \mathbb{R}$, consistindo dos elementos $(x_1, x_2, \dots)$ em que $x_i \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices. Determine $\bar{A}$ na topologia produto.