Álgebra Linear Avançada
Bases Cíclicas

Adriano Moura

Unicamp

2020

Blocos e Ciclos de Jordan

Suponha que $m_v(t) = (t-\lambda)^k$ para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e lembre que $C_T(v)$ é T-invariante e $\dim(C_T(v)) = k$.

Considere $w_j = (T - \lambda I)^j(v)$, $\beta = w_0, \ldots, w_{k-1}$ e note que $w_k = 0$ e $m_{w_j} = (t-\lambda)^{k-j}$ para $j < k$. Em particular, β é l.i. e, portanto, base de $C_T(v)$. Além disso, $T(w_j) = \lambda w_j + w_{j+1}$ e, portanto,

$$[S]_\beta^\beta = J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(C_T(v))$ é dado por $S(w) = T(w)$ $\forall\ w \in C_T(v)$. A matriz $J_k(\lambda)$ é dita um bloco de Jordan de tamanho k e autovalor λ.

Já uma sequência como β é dita um T-ciclo de Jordan de comprimento k e autovalor λ. Uma base formada por união de T-ciclos de Jordan é dita uma base de Jordan (com respeito a T).

Decomposição de Jordan

Se β é base de Jordan de V com respeito a T com l T-ciclos, temos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan de T.

Teorema da Decomposição de Jordan (TDJ)

Existe base de Jordan com respeito a T para V se, e só se, os fatores primos de m_T tem grau 1. Em quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T, a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam λ e k.

Se os subespaços T-primários de V forem T-cíclicos e escolhermos um gerador para cada T-ciclo, o TDP junto com a página anterior nos diz como encontrar uma base de Jordan.

O que fazer se algum subespaço T-primário não for T-cíclico?

O que fazer se algum fator primo de m_T tiver grau maior que 1?

Teorema da Decomposição Cíclica (TDC)

Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ t.q. $V = \bigoplus_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j < m$. Se $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfazem $V = \bigoplus_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}$ $\forall\ 1 \leq j < l$, então $l = m$ e $m_{u_j} = m_{v_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

Os polinômios m_{v_j} são chamados de os fatores invariantes de T.

Lembre que se $m_v(t) = t^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j$, então $\mathscr{C}_T(v) = v_0, \ldots, v_{k-1}$ com $v_j = T^j(v)$ é base de $C_T(v)$. Se S é o operador induzido por T em $C_T(v)$, temos

$$[S]_{\mathscr{C}_T(v)}^{\mathscr{C}_T(v)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de a matriz de Frobenius do polinômio m_v. (companion matrix)

Uma base formada por união de conjuntos da forma $\mathscr{C}_T(v)$ é dita uma base racional (ou de Frobenius) de V com respeito a T.

Note que $m_T = m_{v_1}$. De fato, já sabemos que $m_{v_1}|m_T$ e, portanto, basta mostrar que $m_{v_1} \in \mathcal{A}_T$. Pelo TDC, dado $w \in V$, existem únicos $w_j \in C_T(v_j), 1 \leq j \leq m$ t.q. $w = w_1 + \cdots + w_m$. Basta mostrar que $m_{v_1}(T)(w_j) = 0\ \forall j$. Mas $w_j \in C_T(v_j) \Rightarrow m_{v_j}(T)(w_j) = 0$ e a conclusão segue pois $m_{v_j}|m_{v_1}\ \forall j$.

Exercício: Se $V = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} V_j$, V_j é T-invariante $\forall j$ e T_j é induzido por T em V_j, mostre que $c_T = \prod_{j=1}^m c_{T_j}$.

Consequentemente c_T é o produto dos fatores invariantes. Além disso, se T possui FCJ, seus autovalores distintos são $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, e k_j é a soma dos tamanhos dos blocos com autovalor λ_j, temos $c_T = \prod_{j=1}^l (t - \lambda_j)^{k_j}$.

A quantidade de blocos de Jordan com autovalor λ é igual a $\dim(V_{t-\lambda})$. O exercício 8.2.4 diz como calcular a quantidade de blocos de cada tamanho sabendo-se $\dim(V_{(t-\lambda)^k})\ \forall\ k$.

Relação entre a Decomposição Cíclica e de Jordan

Exercício: Se S é operador induzido por T em $V_{t-\lambda}^{\infty}$, mostre que uma base de Frobenius com respeito a $S - \lambda I$ é uma base de Jordan com respeito a S (compare com (8.2.16) e (8.2.17) do texto).

Como obter uma base racional a partir de uma base de Jordan? Sejam $\lambda_j, 1 \leq j \leq l$, os autovalores distintos, m_j a quantidade de blocos com autovalor λ_j e $m = \max\{m_j : 1 \leq j \leq l\}$. Sejam $v_{j,1}, \cdots, v_{j,m_j}$ vetores que inciam T-ciclos de Jordan com autovalor λ_j de uma base de Jordan e suponha que estejam ordenados de modo que $m_{v_{j,i+1}} | m_{v_{j,i}}$. Se $m_j < i \leq m$, defina $v_{j,i} = 0$. Defina também

$$v_i = v_{1,i} + \cdots + v_{l,i}.$$

Exercício: $V = \bigoplus_{i=1}^{m} C_T(v_i)$ e $m_{v_{i+1}} | m_{v_i}\ \forall\ 1 \leq i \leq m$.

Exercício: Reverta o processo, isto é, descreva como encontrar a FCJ a partir da FCR, se exisitr FCJ.

Tentem fazer o Exercício 8.3.1.

Como Escolher os Vetores Iniciais dos Ciclos?

Tanto bases de Jordan como de Frobenius são formadas por união de ciclos. Cada ciclo tem seu vetor inicial e a tarefa mais difícil é saber como encontrar vetores que servem como vetores iniciais. Comecemos com um exemplo mostrando que essa escolha não pode ser aleatória.

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $\alpha = e_1, e_2, e_3$, temos $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que já é um bloco de Jordan. Assim, e_1 pode ser escolhido como vetor inicial do único ciclo. Note que $v = e_1 + e_2$ também pode ser escolhido como vetor inicial e o ciclo correspondente será $\beta = v, e_2 + e_3, e_3$. Qualquer vetor cuja coordenada x seja não nula pode ser escolhido como vetor inicial. Porém, se a coordenada x é 0 o vetor não pode ser escolhido como vetor inicial. De fato, se w é um tal vetor, $\mathscr{C}_T(w)$ tem no máximo 2 vetores e o vetor final é múltiplo de e_3. Para justificar estas afirmações, encontre bases para V_t e V_{t^2}.
Isso mostra que não existe subespaço T-invariante W satisfazendo $\mathbb{R}^3 = C_T(w) \oplus W$. Ou seja, $C_T(w)$ não admite subespaço complementar T-invariante!

Subespaços T-admissíveis

A primeira tarefa para encontrar uma base de Frobenius é escolher vetor v_1 tal que $C_T(v_1)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante.
A seguir, precisamos encontrar v_2 tal que $C_T(v_1) \cap C_T(v_2) = \{0\}$ e $C_T(v_1) \oplus C_T(v_2)$ admita subespaço complementar que pode ser escrito como soma direta de ciclos e, portanto, T-invariante. E assim por diante. Isso motiva a seguinte definição.

Um subespaço T-invariante W de V é dito T-admissível se existir subespaço T-invariante W' tal que $V = W \oplus W'$.

Note que V e $\{0\}$ são T-admissíveis. Se V for T-cíclico e v satisfaz $m_v = m_T$, então $V = C_T(v)$ e encontramos uma decomposição como no TDC. Em particular, o TDC é óbvio se $\dim(V) = 1$. Assim, para demonstrar a existência de uma decomposição em soma direta de ciclos, podemos supor que V não é T-cíclico e mostrar que existe subespaço T-cíclico W que é T-admissível. Por HI, o TDC vale para W e W', completando a demonstração.

O Conceito de Condutor

Porém, queremos uma decomposição com a propriedade de ser a mais curta possível. Por isso, precisamos ser ainda mais cuidadosos, mas esta é a filosofia da demonstração. O passo crucial é a Proposição 8.2.5 e o conceito crucial no processo de escolha dos vetores iniciais é o conceito de condutor que passamos a explicar.

Dado um subespaço T-invariante W, o conjunto
$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) \in W\}$$
é chamado de o T-condutor de v em W.

Note que $\mathscr{C}_{T,v}(\{0\}) = \mathcal{A}_{T,v} := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)(v) = 0\}$ e $\mathcal{A}_{T,v} \subseteq \mathscr{C}_{T,v}(W)$.

Exercício (8.1.7): m_v divide todo elemento de $\mathcal{A}_{T,v}$.

Exercício: $\exists!$ polinômio mônico que divide todo elemento de $\mathscr{C}_{T,v}(W)$. Este polinômio será denotado por $c_{v,W}$.

Segue que $c_{v,W} | c_{v,W'}$ se $W' \subseteq W$ e, portanto, $c_{v,W} | m_v$. Além disso, $c_{v,W} = 1$ se $v \in W$.

Escolhendo os Vetores Iniciais dos Ciclos

Proposição 8.2.5

Seja W um subespaço próprio e T-admissível de V.

- (a) Para todo $v \in V \setminus W$, existe $v' \in V$ tal que $W + C_T(v) = W \oplus C_T(v')$ e, além disso, $m_{v'} = c_{v,W}$.
- (b) $W + C_T(v)$ é T-admissível se $v \in V$ satisfaz $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e $\mathrm{gr}(m_v) = \max\{\mathrm{gr}(m_u) : u \in V, C_T(u) \cap W = \{0\}\}$.

Lema 8.2.6

Seja v um vetor como na parte (b) da Proposição 8.2.5. Então, para todo vetor $u \in V$ satisfazendo $C_T(u) \cap (W \oplus C_T(v)) = \{0\}$, vale $m_u | m_v$.

Para demonstrar a Prop., precisaremos da seguinte caracterização técnica do conceito de T-admissibilidade em termos do de condutor.

Se W é T-invariante, então W é T-admissível se, e só se, para todo $v \in V$ e $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$, existir $w \in W$ satisfazendo $f(T)(w) = f(T)(v)$.

Mais Observações Técnicas

Lema 8.2.1

Dado $v \in V$, temos $C_T(v) \cap W = \{0\}$ se, e somente se, $m_v = c_{v,W}$.

Dem.: Suponha que $C_T(v) \cap W = \{0\}$ e tome $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Então $f(T)(v) \in C_T(v) \cap W = \{0\}$, mostrando que $f \in \mathcal{A}_{T,v}$. Em particular, tomando $f = c_{v,W}$, concluímos que $m_v | c_{v,W}$, de onde segue que $m_v = c_{v,W}$. Reciprocamente, se $m_v = c_{v,W}$, segue que $f(T)(v) \in W$ se, e só se, $f(T)(v) = 0$, mostrando que $C_T(v) \cap W = \{0\}$. $\square$

Lema 8.2.4

Seja W um subespaço T-invariante de V e suponha que $u, v \in V$ satisfazem $v - u \in W$. Então, $\mathscr{C}_{T,v}(W) = \mathscr{C}_{T,u}(W)$.

Dem.: Seja $w = v - u$ e note que

$$f(T)(v) - f(T)(u) = f(T)(w) \in W \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Logo, $f \in \mathscr{C}_{T,u}(W)$ se, e somente se, $f \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. $\square$

Dem. da Prop. 8.2.5

(a) Seja $w \in W$ satisfazendo $c_{v,W}(T)(v) = c_{v,W}(T)(w)$ e considere $v' = v - w$. Como $W, C_T(v)$ e $C_T(v')$ são T-invariantes, temos $W + C_T(v) = W + C_T(v')$ e precisamos mostrar que $W \cap C_T(v') = \{0\}$. Do Lema 8.2.4, $c_{v,W} = c_{v',W}$ e, além disso,

$$c_{v',W}(T)(v') = c_{v,W}(T)(v - w) = 0.$$

Logo, $c_{v',W} \in \mathcal{A}_{T,v'} \Rightarrow c_{v',W} = m_{v'}$. Pelo Lema 8.2.1, $C_T(v') \cap W = \{0\}$

(b) Seja $W' = W + C_T(v)$. Se $W' = V$, não há nada a fazer. Caso contrário, tome $u \in V \setminus W'$ e sejam $w \in W$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

$$(1) \qquad c_{u,W'}(T)(u) = w + p(T)(v).$$

Mostraremos que

$$(2) \qquad c_{u,W'}|p \qquad \text{e} \qquad w = c_{u,W'}(T)(w') \quad \text{para algum} \quad w' \in W.$$

Supondo que isto é válido, tomando $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = qc_{u,W'}$ e $w'' = w' + q(T)(v) \in W'$, temos

$$c_{u,W'}(T)(u) = c_{u,W'}(T)(w') + c_{u,W'}(T)(q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(w''),$$

mostrando que W' é T-admissível.

Para mostrar (2), escreva a divisão de p por $c_{u,W'}$: $p = qc_{u,W'} + r$. Seja $u' = u - q(T)(v) \in V \setminus W'$ e note que, pelo Lema 8.2.4, temos $c_{u,W'} = c_{u',W'}$. Além disso, pela parte (a) e escolha de v,

$$\mathrm{gr}(m_v) \geq \mathrm{gr}(c_{u',W}) \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} c_{u,W'}(T)(u') &= c_{u,W'}(T)(u - q(T)(v)) = c_{u,W'}(T)(u) - (p(T) - r(T))(v) \\ &\overset{(1)}{=} w + p(T)(v) - (p(T) - r(T))(v) = w + r(T)(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\exists\ h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ t.q. $c_{u',W} = hc_{u',W'} = hc_{u,W'}$. Assim,

$$c_{u',W}(T)(u') = h(T)(c_{u,W'}(T(u')) = h(T)(w + r(T)(v)),$$

mostrando que $hr \in \mathscr{C}_{T,v}(W)$. Se fosse $r \neq 0$, seguiria que

$$\mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{v,W}) = \mathrm{gr}(m_v) \overset{(3)}{\geq} \mathrm{gr}(c_{u',W}) = \mathrm{gr}(h) + \mathrm{gr}(c_{u,W'})$$

e, portanto, $\mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(c_{u,W'})$, gerando uma contradição. Assim, mostramos a primeira afirmação em (2). A segunda agora segue pois

$$c_{u,W'}(T)(u') = w + r(T)(v) = w \in W,$$

mostrando que $c_{u,W'} \in \mathscr{C}_{T,u'}(W)$. Sendo W T-adm., $\exists\ w' \in W$ t.q. $c_{u,W'}(T)(w') = c_{u,W'}(T)(u') = w$. $\square$

Dem. do TDC - Existência

TDC - Versão "mais forte" - Existência

Se W é subespaço próprio e T-admissível de V, existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ satisfazendo

1. A soma $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ é direta e $V = W \oplus W'$;
2. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 1 \leq j < m$.

Dem.: Por indução em $k := \dim(V) - \dim(W) \geq 1$. Se $k = 1$, é imediato da Proposição 8.2.5(a). Neste caso, $m = 1$ e $v_1 = v'$ dado pela Proposição 8.2.5(a) é um autovetor. Suponha que $k > 1$ e, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para qualquer subespaço T-admissível U de V satisfazendo $\dim(V) - \dim(U) < k$. Escolha v_1 como na Proposição 8.2.5(b) (que existe pela Proposição 8.2.5(a)) e seja $U = W \oplus C_T(v_1)$ que satisfaz a hipótese de indução. Logo, existem vetores $v_2, \ldots, v_m$ t.q. $V = U \oplus C_T(v_2) \oplus \cdots \oplus C_T(v_m)$ e $m_{v_{j+1}} | m_{v_j} \ \forall\ 2 \leq j < m$. O Lema 8.2.6 garante que $m_{v_2} | m_{v_1}$. $\square$

Polinômio Mínimo da Imagem de um Vetor

Lema 8.2.7

Sejam $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e suponha que S seja invertível e $S \circ T = T \circ S$. Então, $m_{T,S(v)} = m_{T,v}$ para todo $v \in V$.

Dem.: Simplificando, escrevamos m_v e $m_{S(v)}$. Por um lado, $m_v(T)(S(v)) = S(m_v(T)(v)) = 0$, mostrando que $m_{S(v)} | m_v$ (Exercício 8.1.7). Resta mostrar que $m_{S(v)}(T)(v) = 0$. Seja $u = S(v)$. Como $S^{-1} \circ T = T \circ S^{-1}$, temos

$$m_{S(v)}(T)(v) = m_u(T)(S^{-1}(u)) = S^{-1}(m_u(T)(u)) = 0. \quad \square$$

Lema 8.2.8

Se $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V, u = f(T)(v)$ e $p = \mathrm{mdc}(f, m_v)$, vale $m_v = p\, m_u$.

Dem.: Spg, podemos supor que $V = C_T(v)$ (caso contrário, aplique o argumento a seguir ao operador T' induzido por T em $C_T(v)$). Suponha primeiro que f e m_v sejam relativamente primos e mostremos que $m_u = m_v$. Se $S = f(T)$, então $S \circ T = T \circ S$ e segue do Lema 8.1.6 que S é bijetora (pois $\dim(V) < \infty$). A conclusão segue do Lema 8.2.7.

Suponha agora que f seja primo. Se f não dividir m_v, $\mathrm{mdc}(f, m_v) = 1$ e voltamos ao caso anterior. Caso contrário, $f = \mathrm{mdc}(f, m_v)$ e precisamos mostrar que $m_u = g$ com $g = \frac{m_v}{f}$. Por um lado,

$$g(T)(u) = g(T)(f(T)(v)) = (gf)(T)(v) = m_v(T)(v) = 0,$$

mostrando que $m_u | g$. Se fosse $m_u \neq g$, teríamos

$$\mathrm{gr}(m_u) < \mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(m_v) - \mathrm{gr}(f).$$

Mas veja que

$$(m_u f)(T)(v) = m_u(T)(f(T)(v)) = m_u(T)(u) = 0,$$

mostrando que $m_v | m_u f$ e, portanto,

$$\mathrm{gr}(m_v) \leq \mathrm{gr}(m_u) + \mathrm{gr}(f),$$

gerando uma contradição.

Procedamos por indução em $\mathrm{gr}(f) \geq 1$, que começa pelo caso anterior. Suponha $\mathrm{gr}(f) > 1$ e sejam h um fator irredutível de f, $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $hg = f, u' = g(T)(v), q = \mathrm{mdc}(g, m_v)$ e $r = \mathrm{mdc}(h, m_{u'})$. Note que $u = h(T)(u')$. Por hipótese de indução, temos

$$m_v = q\ m_{u'} \qquad \text{e} \qquad m_{u'} = r\ m_u.$$

As propriedades de mdc implicam que $q\ r = p$. $\square$

Dem. do TDC - Unicidade

TDC - Versão "mais forte" - Unicidade

Seja W subespaço próprio e T-admissível de V e suponha que $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ e $u_1, \ldots, u_l \in V \setminus \{0\}$ satisfaçam

1. As somas $W' := \sum_{j=1}^{m} C_T(v_j)$ e $W'' := \sum_{j=1}^{l} C_T(u_j)$ são diretas;
2. $V = W \oplus W' = W \oplus W''$;
3. $m_{v_{j+1}} | m_{v_j}\ \forall\ 1 \leq j < m$, e $m_{u_{j+1}} | m_{u_j}\ \forall\ 1 \leq j < l$.

Então $l = m$ e $m_{v_j} = m_{u_j}$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Dem.: Suponha $m \leq l$ e note que $l = m$ segue se mostrarmos

$$(4) \qquad m_{u_j} = m_{v_j} \qquad \text{para todo} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

De fato, essas igualdades implicam que

$$\dim(V) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(v_j)) = \dim(W) + \sum_{j=1}^{m} \dim(C_T(u_j)),$$

e, portanto, não pode haver mais parcelas na segunda decomposição.

Para mostrar (4), considere $S_j = m_{v_j}(T), 1 \leq j \leq m$. Aplique S_1 a ambas as decomposições para obter

$$S_1(W) = S_1(W) \oplus S_1(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_1(C_T(u_l)).$$

Assim, $m_{v_1}(T)(u_1) = 0$, mostrando que $m_{u_1}|m_{v_1}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_1}|m_{u_1}$ e, portanto, $m_{u_1} = m_{v_1}$. Se $m = 1$, (4) fica demonstrada. Caso contrário, aplique $S_2 = m_{v_2}(T)$ para obter

$$S_2(W) \oplus S_2(C_T(v_1)) = S_2(W) \oplus S_2(C_T(u_1)) \oplus \cdots \oplus S_2(C_T(u_l)).$$

Como $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)(v)) \ \forall \ f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), v \in V$ (Exer. 8.1.10),

$$S_2(W) \oplus C_T(S_2(v_1)) = S_2(W) \oplus C_T(S_2(u_1)) \oplus \cdots \oplus C_T(S_2(u_l)).$$

Pelo Lema 8.2.8, $m_{S_2(v_1)} = \frac{m_{v_1}}{m_{v_2}} = \frac{m_{u_1}}{m_{v_2}} = m_{S_2(u_1)}$. Logo,

$$\dim(C_T(S_2(v_1))) = \dim(C_T(S_2(u_1)))$$

e $C_T(S_2(u_j)) = \{0\} \ \forall \ j \geq 2$. Assim, $m_{v_2}(T)(u_2) = S_2(u_2) = 0$, mostrando que $m_{u_2}|m_{v_2}$. Analogamente, concluímos que $m_{v_2}|m_{u_2}$ e, portanto, $m_{u_2} = m_{v_2}$.

Procedendo recursivamente usando os demais S_j, (4) é verificada. $\square$

TDP + TDC $\Rightarrow$ TDJ

Considere a decomposição T-primária de V, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, e obtenha uma decomposição de cada V_i como no TDC:

$$V_i = C_T(v_{i,1}) \oplus \cdots \oplus C_T(v_{i,l_i}).$$

Então, $m_{v_{i,j}} = p_i^{k_{i,j}}$ com $k_{i,1} \geq \cdots \geq k_{i,l_i}$, sendo p_i o correspondente fator primo de m_T. Segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{l_i} C_T(v_{i,j})$$

Se $p_i = t - \lambda_i \ \forall\ i$, para cada $v_{i,j}$, construa o correspondente T-ciclo de Jordan como na primeira página $\rightsquigarrow \mathscr{J}_{i,j}$. Assim, $\mathscr{J} = \cup_{i,j} \mathscr{J}_{i,j}$ é base de Jordan de V com respeito a T.

Reciprocamente, supondo que existe base de Jordan com respeito a T para V e utilizando uma tal base para calcular c_T, conclui-se que $\mathrm{gr}(p_i) = 1 \ \forall\ i$.

Estude a demonstração da Proposição 8.2.11.

Semelhança

Dados operadores $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, diz-se que S e T são semelhantes se existirem bases α e β de V tais que $[S]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$. (É relação de equiv..)

Teorema

S e T são semelhantes se, e somente se, possuírem a mesma FCR. Se T possuir FCJ, então $S \sim T$ se, e só se, possuir a mesma FCJ de T.

Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, A e B são ditas semelhantes sobre $\mathbb{F}$ se existirem $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ e bases α e β de $\mathbb{F}^n$ tais que

$$A = [T]_\alpha^\alpha \text{ e } B = [T]_\beta^\beta.$$

Assim, podemos definir FCR e FCJ de uma matriz como sendo a correspondente FC de T. Equivalentemente, $A \sim B$ sobre $\mathbb{F}$ se

$$\exists\ P \in M_n(\mathbb{F}) \text{ t.q. } B = PAP^{-1}.$$

Se $\mathbb{K}$ é subcorpo de $\mathbb{F}$, pode ser que A e B sejam semelhantes sobre $\mathbb{F}$, mas não sobre $\mathbb{K}$.

Exercício: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Determine se é V ou F: A e B são semelhantes sobre $\mathbb{K}$ se, e só se, o forem sobre $\mathbb{F}$.