1	2	3	4	5	$\sum$

Exame Qualificação - Topologia Geral

NOME:____ **RA:**____________

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

1. (1,0pt) Considere as seguintes bases de topologia de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_1 = \{(a,b],\ a < b\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{B,\ \mathbb{R}\backslash B \text{ é finito}\}.$$

   Seja $\mathcal{T}_i$ é a topologia associada a $\mathcal{B}_i$ para $i = 1, 2$. Determine se a identidade $I : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_i) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$, dada por $I(x) = x$, é contínua para $i \neq j$ em cada caso $i, j = 1, 2$.

2. (1,0pt) Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ um espaço normal. Mostrar que dados dois fechados disjuntos A e B em $\mathcal{M}$ existem dois abertos U e V em $\mathcal{M}$ tais que $A \subset U$ e $B \subset V$ com $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

3. (2,0pt) Seja $\mathcal{M}$ um espaço de Hausdorff e assuma que existe uma compactificação $(\mathcal{N}, \phi)$ de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{N}\backslash\phi(\mathcal{M})$ contém um único ponto. Mostrar que $\mathcal{M}$ é localmente compacto, mas não compacto.

4. (2,0pt) Seja $\mathcal{A}$ uma base de filtro de $\mathcal{M}$ e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro de $\mathcal{N}$. Mostrar que
   - A familia
   $$\mathcal{C} = \{A \times B,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$
   é uma base de filtro de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.
   - $\mathcal{C} \to (a, b)$ se, e somente se, $\mathcal{A} \to a$ e $\mathcal{B} \to b$.

5. (4,0pt) Determine se verdadeiro ou falso. Justifique.
   - Se $\mathcal{M}$ é conexo por caminhos então $\mathcal{M} \times [0, 1]$ é conexo por caminhos.
   - Existe uma equivalência homotópica entre o Toro e a S^2.
   - Se $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ um espaço de Hausdorff e A, B são dois subespaços localmente compactos de $\mathcal{M}$ então $A \cap B$ é localmente compacto.
   - Se $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ um espaço de regular, K um conjunto fechado de $\mathcal{M}$ e $x \in K^C$ um ponto então sempre existem abertos U e V de $\mathcal{M}$ tais que $K \subset U$ e $x \in V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
IMECC
Departamento de Matemática

MM 719 - Álgebra Linear
Exame de Qualificação de Mestrado
Campinas, 28 de julho de 2023
Período: 2023.1

Nome do Aluno(a): ______________________________

Respostas que não estiverem acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Questão 01 - Responda verdadeiro ou falso em cada uma das afirmações abaixo e justifique a sua resposta.

a) $(1,0$ pts.) - Todo subespaço de dimensão k de um espaço vetorial V de dimensão n é a interseção de $n-k$ hiperespaços de V.

b) $(1,0$ pts.) - Existem vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, tais que a matriz $G = (G_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ dado por $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ satisfaz $det(G) = 0$.

c) $(1,0$pts.) - Dadas matrizes $A, B \in M_n(F)$, tem-se $Tr(A \otimes B) = Tr(A)Tr(B)$, onde Tr denota a aplicação traço sobre matrizes.

d) $(1,0$pts.) - Seja V um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ sobre $\mathbb{C}$ e seja $P\colon V \to V$ uma transformação linear tal que $P^2 = P$. Nestas condições o traço de P é igual ao seu posto.

Questão 02 - $(1,5$ pts.) Seja $T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ uma transformação linear cuja a matriz de representação na base canônica é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determine a forma canônica de Jordan de T.

Questão 03 - Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F e $\beta = \{v_i\}_{i \in I}$ uma base de V. Para cada $i \in I$, defina um funcional linear $f_i : V \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

a) $(0,5$pts.) - Mostre que $\{f_i\}_{i \in I}$ é linearmente independente.

b) $(1,0$pts.) - Mostre que $\{f_i\}_{i \in I}$ é uma base de V^* se, e somente se, I é finito.

Questão 04 - Seja V um espaço vetorial sobre os reais $\mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{B}(V;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as aplicações bilineares de $V \times V$ em $\mathbb{R}$.

a) $(0,5$ pts.) Mostre que $\mathcal{B}(V;\mathbb{R}) = \mathcal{B}_s(V;\mathbb{R}) \oplus \mathcal{B}_a(V;\mathbb{R})$, onde $\mathcal{B}_a(V;\mathbb{R})$ é formado pelos elementos de $\mathcal{B}(V;U)$ antisimétrica enquanto $\mathcal{B}_s(V;\mathbb{R})$ são as formas simétricas.

b) $(1,0$ pts.) Supondo agora que $\dim_{\mathbb{R}} V$ é finita, determine as dimensões de $\mathcal{B}_s(V;\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_a(V;\mathbb{R})$.

Questão 05 - $(1,5$ pts.) Enunciar e demonstrar o Teorema de Cayley-Hamilton.

Boa Prova!

Exame de Qualificação do Programa de Mestrado

Departamento de Matemática - IMECC - UNICAMP

MM 720 - Análise no $\mathbb{R}^n$

24 de julho de 2023.

Escolha e resolva 4 dentre as 5 primeiras questões abaixo e resolva a questão 6.

Questões escolhidas: _____, _____, _____, _____ e <u>6</u>.

1. Seja $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ uma família decrescente de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ tais que $\cap_{i=1}^{\infty} K_i \subset U$, onde U é um aberto.

   (i) Mostre que existe $j \geq 1$ tal que $K_j \subset U$.

   (ii) Dê um contra-exemplo mostrando que não basta supor que os K_i sejam fechados para obter o item anterior.

2. Enuncie o teorema da aplicação inversa. Enuncie e demonstre a forma local das submersões. A partir desta demonstração, estabeleça o teorema da aplicação implícita.

3. Dada uma aplicação de classe C^k, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ descreva a fórmula de Taylor de f a partir de um ponto $a \in U$. Descreva a fórmula de Taylor das funções do tipo: a) f linear; b) $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ bilinear simétrica (mostre claramente qual é a diferencial da φ no ponto (a, b) aplicada ao vetor (u, v)).

4. Utilize o Teorema da Função Implícita para mostrar que o sistema

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ wxy - xyz = 0. \end{cases}$$

   pode ser resolvido em termos de $w = (y; z)$ e $x = x(y; z)$ numa vizinhança do ponto $(x; y; z; w) = (1; 2; 1; 1)$. Calcule as derivadas parciais de w e de x nesses pontos.

5. Ache os valores máximo e mínimo de z onde (x, y, z) satisfazem aos vínculos $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ e $x + y + 2z = 0$.

6. Defina uma 1-forma ω em $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ dada por:

$$\omega_{(x,y)} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) dy.$$

Calcule a integral de ω ao longo de um círculo de raio r centrado na origem. Essa forma é exata? Mostre que o campo de vetores:

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

não é o gradiente de nenhuma função.