Lista 5: aplicações diferenciáveis e regra da cadeia

25 de abril de 2025

1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(t,s) = (t\cos(2\pi s), t\,\mathrm{sen}(2\pi s), 1-t).$$

   (a) Mostre que a imagem de F é um cone com vértice $e_3 = (0,0,1)$. Qual é a imagem do quadrado $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t, s \le 1\}$?

   (b) Calcule o posto da matriz jacobiana $JF(t,s)$ para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \neq 0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Denote $r = \|(x,y,z)\|$. Mostre que, para quaisquer $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$, a função

$$f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z,t) = \frac{\varphi(r-ct)+\psi(r+ct)}{r}$$

   satisfaz a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right).$$

   Tais soluções são ditas *ondas esféricas*.

3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F, G : U \to \mathbb{R}^m$ aplicações diferenciáveis em $p \in U$. Mostre que

$$\langle F, G\rangle : U \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \langle F(x), G(x)\rangle$$

   é diferenciável em p e

$$\nabla\langle F, G\rangle(p) = JF(p)^t \cdot G(p) + JG(p)^t \cdot F(p).$$

   Na fórmula acima, A^t denota a transposta de uma matriz A e estamos identificando vetores com matrizes coluna.

4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Calcule o jacobiano da aplicação gradiente $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$.

5. Sejam $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável tal que $F(0) = 0$. Mostre que existem aplicações $G_1, \ldots, G_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x) = x_1 G_1(x) + \cdots + x_n G_n(x).$$

   [Dica: dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere $c_x(t) = F(tx)$.]

6. Demonstre a seguinte *desigualdade do valor médio para aplicações*: se F é diferenciável em todo ponto de um subconjunto convexo $K \subset U$ e $C \ge 0$ é uma constante tal que $\|DF(x)\| \le C$ para todo $x \in K$, então

$$\|F(x) - F(y)\| \le C\|x - y\|$$

   para todos $x, y \in K$.

7. (Qualificação 2022) Forneça um contra-exemplo para a seguinte generalização ingênua do teorema do valor médio: *"dada uma aplicação diferenciável $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe um ponto c no segmento que liga x a y tal que $F(x) - F(y) = DF(c)(x-y)$"*.

8. (Qualificação 2016) Seja $F : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 em um aberto U de $\mathbb{R}^n$. Mostre que, se $DF(a) = 0$, onde $a \in U$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|$ para todos $x, y \in B(a, \varepsilon)$.

9. Determine se a seguinte questão da Qualificação 2006 está correta: *"Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Se $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 com determinante jacobiano não-nulo em todo ponto de Ω, mostre que existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\|F(x) - F(y)\| \geq c\|x - y\|$ se $\|x - y\| < \delta$ e $x, y \in \Omega$."*

10. (Qualificação 2010) Sejam $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $F : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Suponha que
$$\|F(x) - F(y)\|^{\theta_1} \leq K\|x - y\|^{\theta_2}$$
para todos $x, y \in U$, onde $K > 0$ é uma constante. Mostre que F é constante em U.

11. Generalize a questão 16 da lista 2 para aplicações. Ou seja, se $V_1, \dots, V_k, V$ são espaços vetoriais de dimensão finita, mostre que toda aplicação multilinear $F : V_1 \times \cdots \times V_k \to V$ é diferenciável e calcule a sua diferencial.

12. Calcule a diferencial do produto de matrizes
$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times p}(\mathbb{R}) \to M_{m\times p}(\mathbb{R}), \qquad (A, B) \mapsto AB.$$

13. (Qualificação 2011)

    (a) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo (de espaços vetoriais), mostre que
    $$\|Tv\| \geq \frac{\|v\|}{\|T^{-1}\|}.$$

    (b) Se $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x_0 \in U$ e $DF(x_0)$ é um isomorfismo, mostre que existem constantes positivas δ e c tais que
    $$\|v\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(x_0 + v) - F(x_0)\| \geq c\|v\|.$$

14. (Qualificação 2017, 2022) Seja $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis.

    (a) Mostre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é aberto em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

    (b) Mostre que a aplicação $F : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = X^{-1}$ é diferenciável e calcule $DF(X)$.

    (c) Se $n = 2$ e $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, exiba a matriz 2×2 dada por $DF(A)A$.

15. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $A : I \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ um caminho diferenciável (isto é, $A(t)$ são matrizes invertíveis dependendo, de maneira diferenciável, de um parâmetro real t). Mostre que, em I, vale
$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

16. Lembremos que uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita uma *isometria* se L preserva o produto interno euclidiano: $\langle Lv, Lw\rangle = \langle v, w\rangle$ para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Mostre que, se A é a matriz de L na base canônica, L é uma isometria se, e somente se, A é uma matriz ortogonal (isto é, as colunas de A formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$).

    Uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita *conforme* se L é injetiva e L preserva ângulos:
    $$\frac{\langle Lv, Lw\rangle}{\|Lv\|\|Lw\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

(b) Mostre que L é conforme se, e somente se, existe uma constante $\mu > 0$ tal que $\mu^{-1}L$ é uma isometria. Em particular, a matriz de uma transformação conforme é da forma μA, onde A é uma matriz ortogonal. [Dica: dados $u, u' \in S^{n-1}$, os vetores $u + u'$ e $u - u'$ são sempre ortogonais. Use isto para concluir que, se L é conforme, então $u \mapsto \|Lu\|$ é constante sobre a esfera.]

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $F : U \to \mathbb{R}^n$ é dita *conforme* se $DF(p)$ é uma transformação linear conforme para todo $p \in U$.

(c) Mostre que F é conforme se, e somente se, existe uma função $\mu : U \to (0, \infty)$ tal que, para todo $p \in U$:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(p), \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \right\rangle = 0 \quad \text{para todos } i \neq j \qquad \text{e} \qquad \left\| \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \right\| = \mu(p) \quad \text{para todo } i.$$

(d) Mostre que, se F é conforme, então $\mu(p) = |\det JF(p)|^{1/n}$.

(e) Seja $n = 2$ e denote $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Suponha que F *preserva orientação* em todo ponto, isto é, $\det JF(p) > 0$ para todo $p \in U$. Mostre que F é conforme se, e somente se, u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[Dica: uma matriz ortogonal 2×2 com determinante positivo é uma matriz de rotação.] Conclua que aplicações conformes no plano, que preservam orientação, correspondem a funções holomorfas $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

17. Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear de matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C^2(U)$. Mostre que, se $g = f \circ L$, então

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \circ L$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$.

18. Com a notação do exercício anterior, mostre que, se L é uma isometria, então

$$\Delta g = \Delta f \circ L,$$

isto é, o Laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ é invariante por isometrias.