Topologia Geral - T1

Nome completo: ______________________________

1. • Seja X um espaço topológico, e seja S um subespaço de X. Se $\mathcal{B}$ é uma base para X, mostre que
$$\{S \cap U : U \in \mathcal{B}\}$$
é uma base para S.
   • Mostre que a função característica $\chi_S : S \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se S é um aberto e fechado de X.

2. Seja $\{M_i, i \in I\}$ uma família de espaços topológicos. Suponha que $A_i \subset M_i$ é fechado para cada $i \in I$.

   Mostre que $\Pi_{i\in I} A_i$ é fechado em $\Pi_{i\in I} M_i$, considerando a topologia produto.

3. • Verdadeiro ou falso? Para toda topologia τ em $\mathbb{R}$, tem-se que $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$, dada por $f(x) = -x$, é contínua.
   • Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\pi : X \to Y$ sobrejetiva e contínua. Se π for fechada, mostre que a topologia de Y coincide com a topologia quociente.

4. • Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é dita *universal* se, dado $A \subset X$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que
$$\{x_\lambda : \lambda \geqslant \lambda_0\} \subset A \text{ ou } \{x_\lambda : \lambda \geqslant \lambda_0\} \subset X \setminus A\,.$$
Mostre que se x é um ponto de acumulação de uma rede universal, então esta rede converge para x.
   • Considere $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}\}$. Mostre que τ é uma topologia em $\mathbb{R}$. A sequência $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nessa topologia?

5. (Bônus: 0.5) Verdadeiro ou falso? Suponha que $f_i : X \to M_i$ seja contínua, para cada $i \in I$. Então a aplicação definida por
$$f : X \to M \doteq \Pi_{i\in I} M_i$$
$$x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$$
é contínua, considerando em M a topologia das caixas.