Álgebra Linear Avançada - Revisão
Espaços Vetoriais

Adriano Moura

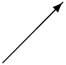
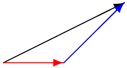
Unicamp 2020

Ao entrar na sala virtual, certifique-se que seu microfone e câmera estejam desligados

Vetores - Intuição

Tarefa: Definir de maneira abstrata o conceito de "vetor".

Intuição: "operações com setas"

$\lambda \times$  $=$  λ um "escalar" e  $+$  $=$ 

Duas operações "algébricas": soma de setas (resultando em seta) e multiplicação de seta por escalar (resultando em seta).

Mas o que são setas (vetores) e escalares ("números")?

Algumas definições dizem que vetores são objetos "geométricos" com 3 características: magnitude, direção e sentido.

Mas o que significa "magnitude", "direção" e "sentido"?

De fato, vetores podem ser usados para definir (coincidência de) direção, enquanto magnitude e mais ainda sentido só são definíveis quando trabalhamos com conjuntos "especiais" de números.

Operações Binárias

Definição

Uma operação binária $*$ num conjunto A é uma função $* : A \times A \to A$.

Notação: $*(a, b) \leftrightarrow a * b$.

Possíveis propriedades:

1. Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)\ \forall\ a, b, c \in A$.
2. Existência de elemento neutro: $\exists\ e \in A$ satisfazendo $a * e = a = a * e\ \forall\ a \in A$. (necessariamente único)
3. Invertibilidade: Para todo $a \in A, \exists\ b \in A$ tal que $a * b = e = b * a$. (necessariamente único se $*$ é associativa)
4. Comutatividade: $a * b = b * a\ \forall\ a, b \in A$.

Definição

Um grupo abeliano é um par $(A, +)$ sendo $+$ uma operação binária no conjunto A satisfazendo todas as propriedades acima.
Notação: 0 para o neutro e $-a$ para o inverso de a.

Corpos

Definição

Um corpo é uma terna $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ sendo $+$ e $\cdot$ operações binárias no conjunto $\mathbb{F}$ (chamadas soma e multiplicação) satisfazendo:

1. $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo abeliano (com neutro chamado 0 e $-x$ denotando o inverso de x por $+$);
2. $\cdot$ é associativa, comutativa e $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é grupo abeliano (com neutro chamado 1 e x^{-1} denotando o inverso de x por $\cdot$);
3. Distributividade: $(x+y)\cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\ \forall\ x, y, z \in \mathbb{F}$

Exemplos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Com frequência denotaremos por $\mathbb{F}^\times$ o conjunto $\mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Corpos serão os conjuntos de “escalares” que consideraremos.

Espaços Vetoriais

Definição

Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ (ou um $\mathbb{F}$-espaço vetorial) é uma terna $(V, +, \cdot)$ sendo $+$ uma operação binária em V e $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, (chamada multiplicação por escalar) satisfazendo:

1. $(V, +)$ é um grupo abeliano
(com neutro chamado 0 e $-v$ denotando o inverso de v);
2. $\cdot$ é associativa: $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V$;
3. Distributividade 1: $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V$;
4. Distributividade 2: $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F}, v, w \in V$;
5. Neutralidade do 1 para a mult. por escalar: $1 \cdot v = v\ \forall\ v \in V$.

Exemplo

$V = \mathbb{F}^n$ com as operações $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$ e

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Espaços Vetoriais - Mais Exemplos

Fábrica de Exemplos

Dado um $\mathbb{F}$-espaço vetorial W e um conjunto $I \neq \emptyset$, considere o conjunto $V = \mathcal{F}(I, W)$ das funções de I em W. As seguintes operações completam os dados para que V se torne um $\mathbb{F}$-espaço vetorial:

$$(f+g)(i) := f(i) + g(i) \quad \text{e} \quad (\lambda \cdot f)(i) := \lambda \cdot (f(i)) \quad \forall\ f, g \in V, i \in I.$$

O exemplo anterior é "recuperado" com $I = \{1, \ldots, n\}$ e $W = \mathbb{F}$.
O conjunto de matrizes $M_{m,n}(\mathbb{F})$ se torna um espaço vetorial com $I = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ e $W = \mathbb{F}$.

Subespaços

Um subconjunto $W \neq \emptyset$ do espaço vetorial V é dito um subespaço se

1. $w_1 + w_2 \in W\ \forall\ w_1, w_2 \in W$ (fechamento pela soma);
2. $\lambda w \in W\ \forall \lambda \in \mathbb{F}, w \in W$ (invariância pela mult. por escalar).

Subespaços se tornam espaços vetoriais via restrição das operações.

Combinações Lineares (c.l.) e Dependência Linear

Dada família de vetores α, uma c.l. de vetores em α é uma soma

$$x_1v_1 + \cdots + x_mv_m \quad \text{com} \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ x_j \in \mathbb{F},\ v_j \in \alpha.$$

O conjunto de tais c.l., denotado por $[\alpha]$, é chamado de o subespaço gerado por α (é o menor subespaço de V contendo α).

Diz-se que α gera V se $V = [\alpha]$.

Diz-se que α é linearmente independente (l.i.) se $v \notin [\alpha \setminus v]\ \forall\ v \in \alpha$ (nenhum vetor de α é combinação linear dos demais).
Caso contrário, α dita linearmente dependente (l.d.).

Diz-se que α é uma base de V se for l.i. e gerar V.

Teorema

Todo espaço vetorial contém uma base e quaisquer duas bases possuem a mesma cardinalidade.

A dimensão de V ($\dim(V)$) é a cardinalidade de suas bases.

A demonstração geral deste teorema não é feita em MA327.
Estudar na Seção 5.5 do livro.

Somas de Subespaços

Se $(V_i)_{i\in I}$ é família de subespaços de V, define-se sua soma como o subespaço
$$\sum_{i\in I} V_i := \left[\bigcup_{i\in I} V_i\right].$$
Tal soma é dita direta se
$$V_j \bigcap \sum_{i\in I\setminus\{j\}} V_i = \{0\} \quad \text{para todo} \quad j\in I.$$
A notação $\bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ indica que $\sum\limits_{i\in I} V_i$ é direta.

Proposição

$\sum\limits_{i\in I} V_i$ é direta se, e somente se, para todo $v\in\sum\limits_{i\in I} V_i$, existirem únicos $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, i_j\in I$, e $v_{i_j}\in V_{i_j}, 1\leq j\leq m$, t.q. $v = v_{i_1}+\cdots+v_{i_m}$.

Proposição

Sejam $\alpha=(v_i)_{i\in I}$ uma família em V e $V_i=[v_i]$. Então, α é l.i. se, e somente se, $v_i\neq 0\ \forall i\in I$ e $\sum\limits_{i\in I} V_i$ for direta.

Coordenadas

Dado um vetor $v \in V$, veja que $[v] = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{F}\}$, o que motiva a notação $\mathbb{F}v$ ao invés de $[v]$.

Corolário

Uma família $\alpha = (v_i)_{i\in I}$ é base de V se, e só se, $V = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{F}v_i$ e $v_i \neq 0\ \forall i$.

Neste caso, para cada $v \in V$, existe única família de escalares $(x_i)_{i\in I}$, com $x_i \neq 0$ para finitos valores de I, tal que

$$v = \sum_{i\in I} x_i v_i.$$

Esta família de escalares, denotada por $[v]_\alpha$, é dita a família de coordenadas de v com respeito a α.

O escalar x_i é chamado de a coordenada v na direção de v_i com respeito a α.

Se $I = \{1, \ldots, n\}$, costuma-se identificar $[v]_\alpha$ com a matriz $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Mais Detalhes

Fizemos uma rápida revisão dos conceitos mais importantes da teoria básica espaços vetoriais. Nenhum aspecto computacional prático foi abordado aqui e outros detalhes relevantes não foram mencionados. O aluno deve ler as seguintes seções do texto base (e procurar visões alternativas em outros livros) para suprir essas lacunas:

- Seções 1.4, 1.6 e 1.7 (operações binárias e corpos).
- Capítulo 5 (demais conceitos). Uma comparação com as seções 3.1, 3.2 e 3.3 (GA) deve elucidar várias dúvidas também.

Aconselho visitar os exercícios do Capítulo 5 para diagnosticar seu entendimento. Dificuldade operacional para resolver exercícios é indício de baixa absorção da teoria. A identificação de tal dificuldade reforça a necessidade de revisar a correspondente seção teórica com atenção especial ao manuseio dos conceitos na resolução dos exemplos. Lembre: exemplos são exercícios resolvidos!

Aqueles que estiverem se sentindo confortável com esta parte da teoria devem pôr isso à prova fazendo os seguintes exercício teóricos: 5.2.5, 5.3.4, 5.3.5, 5.4.8, 5.4.18, todos da seção 5.5.