Topologia Geral - P2

Nome completo: ______________________________

1.
   - Mostre que se cada filtro convergente em X tem um limite único, então X é Hausdorff.
   - Prove que X é um espaço T_2 se, e somente se, para cada $a \in X$ tem-se que $\bigcap\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}_a\} = \{a\}$.

2.
   - Considere o subespaço $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$ de $\mathbb{R}^2$ com a topologia usual. Defina uma relação de equivalência em X declarando que $(x, 0) \sim (x, 1)$ se $x \neq 0$. O espaço quociente $Y = X/\sim$ obtido dessa forma é chamado de *reta com duas origens*. Mostre que Y não é Hausdorff.
   - Mostre que se todo subespaço aberto de um espaço X é Lindelöf, então todo subespaço de X é Lindelöf.

3.
   - Mostre que o Teorema de Tietze implica o Lema de Urysohn, enunciando ambos.
   - Mostre que subespaços fechados de um espaço normal são normais.

4.
   - Giuliano deu a demonstração abaixo para o exercício: Mostre que o produto cartesiano de um espaço Lindelöf X por um espaço compacto Y é Lindelöf.

     Seja $\mathcal{G}$ uma cobertura de $X \times Y$ por abertos. Para cada $y \in Y$, o espaço $X \times \{y\}$ é compacto, logo eu consigo uma subcobertura finita $\mathcal{G}_y = \{G_{y,1}, G_{y,2}, \ldots, G_{y,m_y}\} \subset \mathcal{G}$ de $X \times \{y\}$.
     Como as imagens dos elementos de $\bigcup_{y \in Y} \mathcal{G}_y$ pela projeção $\pi_2 : X \times Y \to Y$ formam uma cobertura de Y, este, por ser Lindelöf, poderá ser coberto por abertos $\{\pi_2(G) : G \in \mathcal{G}_{y_j}, j \in \mathbb{N}\}$.
     Dessa forma, teremos uma subcobertura enumerável $\{G : G \in \mathcal{G}_{y_j}, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{G}$ de $X \times Y$, provando o resultado.

     Detecte o erro desta demonstração e justifique.

- Suponha que $p : X \to Y$ é uma aplicação contínua, fechada, sobrejetiva e, para cada $y \in Y$, tem-se que $p^{-1}(\{y\})$ é compacto. Mostre que, nessas condições, se X é Hausdorff, então Y é Hausdorff.

5. (1 point) Sejam X um espaço completamente regular, $A \subset X$ compacto e $B \subset X$ fechado, disjuntos. Mostre que existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.