Álgebra Linear Avançada
Quocientes e Propriedades Universais

Adriano Moura

Unicamp

2020

Dados V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e um subespaço U, considere a seguinte relação binária em V : $\quad v_1 \sim v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 - v_2 \in U.$ Vejamos que $\sim$ define uma relação de equivalência em V. A reflexividade segue de $0 \in U$ e a simetria de U ser fechado pela multiplicação por escalar. Para a transitividade, se $v_1 - v_2, v_2 - v_3 \in U$, isto é, $v_1 \sim v_2$ e $v_2 \sim v_3$, então

$$v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in U.$$

Para cada $v \in V$, considere a correspondente classe de equivalência:

$$\overline{v} = \{v' \in V : v' \sim v\} = \{v + u : u \in U\}$$

e defina

$$V/U \leftrightarrow \overline{V} = \{\overline{v} : v \in V\} \quad \text{e} \quad \overline{v} \leftrightarrow v + U.$$

Vejamos que a estrutura de espaço vetorial em V induz uma em $\overline{V}$ via

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v_1 + v_2} \qquad \text{e} \qquad \lambda\overline{v} = \overline{\lambda v}.$$

Verifiquemos que estas operações estão bem definidas, i.e.,

$$v_1 \sim v_1', v_2 \sim v_2' \quad \Rightarrow \quad \overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1' + v_2'} \quad \text{e} \quad v \sim v' \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda v} = \overline{\lambda v'}.$$

De fato, $(v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') \in U$ e $(\lambda v) - (\lambda v') = \lambda(v - v') \in U$.

Projeção Canônica e Transformações Quocientes

A função $\pi : V \to V/U, v \mapsto \overline{v}$, que é obviamente sobrejetora, é chamada de a projeção canônica de V em V/U. Observe que

$$\pi(v_1 + \lambda v_2) = \overline{v_1 + \lambda v_2} = \overline{v_1} + \lambda \overline{v_2} = \pi(v_1) + \lambda \pi(v_2).$$

Ou seja, π é linear. Além disso, $\pi(v) = \overline{0} \Leftrightarrow v \in U$. Logo,

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U).$$

De fato, a demonstração deste fato (Teorema 6.3.6) mostra:

Proposição 6.6.1

Se β é base de U, α é base de V contendo β e $\gamma = \alpha \setminus \beta$, então, $\pi(\gamma)$ é uma base de V/U.

Proposição 6.6.2

Suponha que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ e $U \subseteq \mathcal{N}(T)$. Existe única $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V/U, W)$ satisfazendo $S(\overline{v}) = T(v)$ para todo $v \in V$.

A transformação S dada por esta proposição é chamada de a transformação induzida por T em V/U.

Dem. da Proposição 6.6.2:
Como $U \subseteq \mathcal{N}(T)$, se $v - v' \in U$, temos $T(v - v') = 0$. Assim,

$$T(v') = T(v) \quad \forall\ v \in V, v' \in \overline{v}.$$

Logo, existe única função $S : V/U \to W$ t.q. $S(\overline{v}) = T(v)\ \forall\ v \in V$.
Como $S(\overline{v_1} + \lambda\overline{v_2}) = S(\overline{v_1 + \lambda v_2}) = T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2) = S(\overline{v_1}) + \lambda S(\overline{v_2})$, segue que S é linear. □

Corolário 6.6.3 (Primeiro Teorema do Isomorfismo)

Se $U = \mathcal{N}(T)$, a transformação linear S dada pela Proposição 6.6.2 induz um isomorfismo entre V/U e $Im(T)$.

Dem.: Considere a transformação linear $R : V/U \to Im(T)$ dada por $R(\overline{v}) = S(\overline{v}) = T(v)$ para todo $v \in V$. Por definição, R é sobrejetora. Por outro lado,

$$R(\overline{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \in U \quad \Leftrightarrow \quad \overline{v} = 0.$$

Logo, R é injetora. □

Propriedades Universais

Considere duas propriedades "funcionais" P_1 e P_2, isto é, propriedades que uma função pode satisfazer. Dados conjuntos X, U e $\phi \in \mathcal{F}(X,U)$, diz-se que o par (ϕ, U) é universal sobre X com respeito a P_1 e P_2 se, para toda função com domínio X satisfazendo P_1, digamos $\psi : X \to A$, existir única função $\tilde{\psi} : U \to A$ satisfazendo P_2 tal que

$$\tilde{\psi} \circ \phi = \psi. \tag{1}$$

É comum representar a existência de $\tilde{\psi}$ satisfazendo (1) pelo seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & U \arrow[dl, dashed, "\tilde{\psi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

usualmente chamado de um diagrama comutativo. As propriedades P_1 e P_2 não estão representadas na figura. A função $\tilde{\psi}$ é frequentemente chamada de a função induzida por ψ em U (com respeito a P_2).

Base e Universalidade

Suponha que V seja um $\mathbb{F}$-espaço vetorial, P_1 seja "o contradomínio é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial" e P_2 seja "ser linear".

Dada $\alpha : I \to V$, verifiquemos que (α, V) é universal sobre I com respeito a P_1 e P_2 se, e só se, α for base de V. Seja $v_i = \alpha(i)$ para interpretarmos α como uma família $(v_i)_{i\in I}$ em V.

Se α é base de V, dada $\psi : I \to W$ com W um $\mathbb{F}$-espaço vetorial (ψ satisfaz P_1), $\exists\,!\ \tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ (satisfaz P_2) t.q. $\tilde{\psi}(v_i) = \psi(i)\ \forall\ i \in I$, i.e., $\tilde{\psi} \circ \alpha = \psi$, mostrando que (α, V) é universal.

Reciprocamente, seja $U = [\alpha]$ e escolha W tal que $V = U \oplus W$. Mostremos que $W = \{0\}$, i.e., α gera V. Sejam γ e δ bases de U e W e $\beta = \gamma \cup \delta$ que é base de V. Se $W \neq \{0\}$, fixe $w_0 \in \delta$, escolha um espaço vetorial V' com $\dim(V') \geq 1$ e $\psi : I \to V'$. Tome $v_0 = \tilde{\psi}(w_0)$ e $v_1 \in V' \setminus \{v_0\}$. Finalmente, considere $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V')$ dada por

$$\xi(v) = \tilde{\psi}(v)\ \forall\ v \in \beta \setminus \{w_0\} \quad \text{e} \quad \xi(w_0) = v_1.$$

Como $\xi|_\gamma = \tilde{\psi}|_\gamma$, temos $\xi \circ \alpha = \psi$. Mas $\xi \neq \tilde{\psi}$ pois $v_1 \neq v_0$, contradizendo a unicidade na definição de (α, V) ser universal.

Lei de Cancelamento

Se α não fosse l.i., existiria $i_0 \in I$ tal que $v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} a_i v_i$.

Escolha $\psi : I \to \mathbb{F}$ tal que $\psi(i_0) \neq \sum_{i \neq i_0} a_i \psi(i)$.

Qualquer $\tilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) = V^*$ deve satisfazer $\tilde{\psi}(v_{i_0}) = \sum_{i \neq i_0} a_i \tilde{\psi}(v_i)$. Logo,

$\nexists\ \tilde{\psi} \in V^*$ t.q. $\tilde{\psi} \circ \alpha = \psi$, contrariando a universalidade de (α, V). $\square$

Lema 10.1.2 (Lei de Cancelamento)

Suponha que (ϕ, U) seja universal sobre X com respeito a P_1 e P_2 e que $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}(U, A)$ satisfaçam P_2. Se $\psi_1 \circ \phi$ satisfaz P_1 e coincide com $\psi_2 \circ \phi$, então $\psi_1 = \psi_2$.

Dem.: Seja $\psi = \psi_1 \circ \phi$ que satisfaz P_1 e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\psi_1"'] & X \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"] & U \arrow[dl, "\psi_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

A hipótese $\psi_2 \circ \phi = \psi_1 \circ \phi = \psi$ e a universalidade de (ϕ, U) ($\tilde{\psi}$ é única) implicam que $\psi_1 = \psi_2$. $\square$

Unicidade de Pares Universais a Menos de Isomorfismo

Diremos que uma propriedade P é compatível com composições se $f \circ g$ satisfizer P sempre que f e g forem funções componíveis satisfazendo P.

Lema 10.1.3

Suponha que os pares (ϕ, U) e (ψ, V) sejam universais sobre X com respeito a P_1 e P_2, que ϕ e ψ satisfaçam P_1, que Id_U e Id_V satisfaçam P_2 e que P_2 seja compatível com composições. Então, existe única $f : U \to V$ t.q. $\psi = f \circ \phi$. Além disso, f é bijetora e satisfaz P_2.

Dem.: Usando as propriedades universais e a hipótese que ϕ e ψ satisfazem P_1, sabemos que existem únicas $\tilde{\psi} : U \to V$ e $\tilde{\phi} : V \to U$ satisfazendo P_2 tais que $\tilde{\psi} \circ \phi = \psi$ e $\tilde{\phi} \circ \psi = \phi$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & U \arrow[dl, dashed, shift right, "\tilde{\psi}"'] \\ V \arrow[ur, dashed, shift right, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, $(\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}) \circ \phi = \tilde{\phi} \circ (\tilde{\psi} \circ \phi) = \tilde{\phi} \circ \psi = \phi = \mathrm{Id}_U \circ \phi$, e concluímos que $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi} = \mathrm{Id}_U$ usando a Lei do Cancelamento.

Analogamente, $(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}) \circ \psi = \tilde{\psi} \circ (\tilde{\phi} \circ \psi) = \tilde{\psi} \circ \phi = \psi = \mathrm{Id}_V \circ \psi$, de onde segue que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} = \mathrm{Id}_V$ e, portanto, $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ são inversas uma da outra. Logo, basta tomar $f = \tilde{\psi}$. $\square$