Notas de Topologia Geral

Jorge Mujica

Disciplina ministrada no IMECC-UNICAMP
durante o primeiro semestre de 2005

Sumário

1. Teoria de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, diremos que A é *subconjunto* de B, e escreveremos $A \subset B$, se cada elemento de A pertence a B, ou seja se $x \in A$ implica $x \in B$.

Diremos que A é *igual* a B, e escreveremos $A = B$, se A e B tem os mesmos elementos, ou seja se $A \subset B$ e $B \subset A$.

A *união*, a *interseção*, e a *diferença* de dois conjuntos A e B é definida por

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}.$$

Se estamos considerando subconjuntos de um conjunto fixo X, então o conjunto $X \setminus A$ é chamado de *complementar* de A em X, e é denotado por A^c.

A *união* e a *interseção* de uma família de conjuntos A_i $(i \in I)$ é definida por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \quad \text{para algum} \quad i \in I\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \quad \text{para todo} \quad i \in I\}.$$

Dado um conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto formado pelos subconjuntos de X, ou seja

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}.$$

$\emptyset$ denota o conjunto vazio. $\mathbf{N}$ denota o conjunto dos números naturais, ou seja o conjunto dos inteiros positivos. $\mathbf{Z}$ denota o conjunto dos inteiros. $\mathbf{Q}$ denota o conjunto dos números racionais. $\mathbf{R}$ denota o conjunto dos números reais. $\mathbf{C}$ denota o conjunto dos números complexos.

O *produto cartesiano* $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$. O produto cartesiano $X_1 \times ... \times X_n$ de n conjuntos X_1,...,X_n é o conjunto das n-tuplas $(x_1, ..., x_n)$ tais que $x_i \in X_i$ para $i = 1, ..., n$. Escreveremos X^n em lugar de $X \times ... \times X$ (n vezes).

Uma *função* ou *aplicação* f de X em Y, denotada por $f : X \to Y$, é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $f(x) \in Y$. O conjunto X é chamado de *domínio* de f. O conjunto Y é chamado de *contradomínio* de f.

f é dita *injetiva* se $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. f é dita *sobrejetiva* se para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. f é dita *bijetiva* se é injetiva e sobrejetiva. Se $f : X \to Y$ é bijetiva, a *função inversa* $f^{-1} : Y \to X$ é definida por $f^{-1}(y) = x$ se $f(x) = y$.

O *gráfico* de f é o conjunto

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, a *imagem* de A e a *imagem inversa* de B são os conjuntos

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algum } x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Dadas duas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a *aplicação composta* $g \circ f : X \to Z$ é definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo $x \in X$.

Uma *relação* R num conjunto X é um subconjunto R de $X \times X$. Com freqüência escreveremos xRy se $(x, y) \in R$.

Uma relação R em X é dita *reflexiva* se xRx para todo $x \in X$. R é dita *simétrica* se xRy implica yRx. R é dita *transitiva* se xRy e yRz implicam xRz. Diremos que R é uma *relação de equivalência* se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Exercícios

1.A. Se $A_i \subset X$ para cada $i \in I$, prove las *leis de De Morgan*:

$$(a) \qquad X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

$$(b) \qquad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

1.B. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dados $B \subset Y$ e $B_i \subset Y$ para cada $i \in I$, prove que:

$$(a) \qquad f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

$$(b) \qquad f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

$$(c) \qquad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

1.C. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dados $A \subset X$ e $A_i \subset X$ para cada $i \in I$, prove que:

$$(a) \qquad f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

$$(b) \qquad f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i), \quad \text{com igualdade se } f \text{ for injetiva.}$$

$$(c) \qquad f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A) \quad \text{se } f \text{ for injetiva.}$$

$$(c') \qquad f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A) \quad \text{se } f \text{ for sobrejetiva.}$$

1.D. (a) Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tais que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(b) Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.

1.E. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que:

$$(a) \qquad A \subset f^{-1}(f(A)), \quad \text{com igualdade se} \quad f \quad \text{for injetiva.}$$

$$(b) \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad \text{com igualdade se} \quad f \quad \text{for sobrejetiva.}$$

1.F. (a) Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $A \neq f^{-1}(f(A))$.

(b) Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $B \subset Y$ tal que $f(f^{-1}(B)) \neq B$.

1.G. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ aplicações tais que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in X$. Prove que f é injetiva e g é sobrejetiva.

2. Espaços métricos

2.1. Definição. Seja X um conjunto. Uma função $d : X \times X \to \mathbf{R}$ é chamada de *métrica* se verifica as seguintes propriedades para $x, y, z \in X$:
(a) $d(x, y) \geq 0$;
(b) $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
(c) $d(x, y) = d(y, x)$;
(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
A desigualdade (d) é chamada de *desigualdade triangular.* O par (X, d) é chamado de *espaço métrico.* Com freqüência falaremos do espaço métrico X em lugar do espaço métrico (X, d).

2.2. Exemplos.
(a) $X = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

(b) $X = \mathbf{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$. Esta é a *métrica euclideana.*

(c) $X = \mathbf{R}^n$, $d(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$.

(d) $X = \mathbf{R}^n$, $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$.

Em (b),(c) e (d), $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$.

(e) Se X é um conjunto qualquer, então a métrica $d : X \times X \to \mathbf{R}$ definida por $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$ se $x = y$, é chamada de *métrica discreta.*

(f) Seja (X, d) um espaço métrico, e seja $S \subset X$. Então S é um espaço métrico com a métrica induzida d_S, ou seja $d_S(x, y) = d(x, y)$ para todo $x, y \in S$.

2.3. Definição. Seja X um espaço métrico. Dados $a \in X$ e $r > 0$, consideremos os conjuntos

$$B(a; r) = \{x \in X : d(x, a) < r\},$$

$$B[a; r] = \{x \in X : d(x, a \leq r\}.$$

O conjunto $B(a; r)$ é chamado de *bola aberta* de centro a e raio r. O conjunto $B[a; r]$ é chamado de *bola fechada* de centro a e raio r.

2.4. Definição. Seja X um espaço métrico. Um conjunto $U \subset X$ é dito *aberto* em X se para cada $a \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset U$. Um conjunto $F \subset X$ é dito *fechado* em X se $X \setminus F$ é aberto.

2.5. Exemplos. (a) Cada bola aberta é um subconjunto aberto.
(b) Cada bola fechada é um subconjunto fechado.

Demonstração. (a) Seja $x \in B(a; r)$. Usando a desigualdade triangular é fácil verificar que

$$B(x; r - d(x, a)) \subset B(a; r),$$

e portanto $B(a; r)$ é aberto.

(b) Para provar que $B[a;r]$ é fechado, basta provar que $X \setminus B[a;r]$ é aberto. Seja $x \in X \setminus B[a;r]$. Usando a desigualdade triangular não é difícil provar, por absurdo, que

$$B(x; d(x,a) - r) \subset X \setminus B[a;r],$$

e portanto $X \setminus B[a;r]$ é aberto.

2.6. Proposição. *Seja X um espaço métrico. Então:*
(a) $\emptyset$ e X são abertos.
(b) A união de uma família arbitrária de abertos é um aberto.
(c) A interseção de uma família finita de abertos é um aberto.

Demonstração. (a) é claro.
(b) Seja U_i aberto em X para cada $i \in I$, e seja $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Então $a \in U_{i_0}$ para algum $i_0 \in I$. Como U_{i_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset U_{i_0}$. Logo $B(a;r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e $\bigcup_{i \in I} U_i$ é aberto.

(c) Seja U_i aberto em X para cada $i \in I$, sendo I finito. Seja $a \in \bigcap_{i \in I} U_i$, ou seja $a \in U_i$ para cada $i \in I$. Para cada $i \in I$ existe $r_i > 0$ tal que $B(a;r_i) \subset U_i$. Seja $r = \min_{i \in I} r_i$. Segue que $B(a;r) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$ e $\bigcap_{i \in I} U_i$ é aberto.

2.7. Corolário. *Seja X um espaço métrico. Então:*
(a) X e $\emptyset$ são fechados.
(b) A interseção de uma família arbitrária de fechados é um fechado.
(c) A união de uma família finita de fechados é um fechado.

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 2.6 e as leis de De Morgan.

2.8. Definição. Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métrico. Diremos que f é *contínua num ponto* $a \in X$ se dado $\epsilon > 0$, podemos achar $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,a) < \delta \quad \text{implica} \quad d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon,$$

ou seja

$$f(B_X(a;\delta)) \subset B_Y(f(a);\epsilon).$$

Diremos que f é *contínua* se for contínua em cada ponto de X. Denotaremos por $C(X;Y)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to Y$. Se $Y = \mathbf{R}$, escreveremos $C(X)$ em lugar de $C(X;\mathbf{R})$.

2.9. Proposição. *Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métricos. Então f é contínua num ponto $a \in X$ se e só se, para cada aberto V de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Seja V um aberto de Y contendo $f(a)$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(f(a);\epsilon) \subset V$. Por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(a;\delta)) \subset B_Y(f(a);\epsilon)$. Logo basta tomar $U = B_X(a;\delta)$.
($\Leftarrow$): Dado $\epsilon > 0$, seja $V = B_Y(f(a);\epsilon)$. Por hipótese existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$. Seja $\delta > 0$ tal que $B_X(a;\delta) \subset U$. Segue que $f(B_X(a;\delta)) \subset B_Y(f(a);\epsilon)$.

2.10. Proposição. *Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métricos. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) f é contínua.
(b) $f^{-1}(V)$ é aberto em X para cada aberto V de Y.
(c) $f^{-1}(B)$ é fechado em X para cada fechado B de Y.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja V um aberto de Y. Pela Proposição 2.9, para cada $a \in f^{-1}(V)$, existe um aberto U_a de X contendo a tal que $f(U_a) \subset V$, ou seja $U_a \subset f^{-1}(V)$. Segue que

$$f^{-1}(V) = \bigcup\{U_a : a \in f^{-1}(V)\}$$

é aberto em X.

$(b) \Rightarrow (a)$: Basta provar que f é contínua em cada $a \in X$. Seja $a \in X$, e seja V um aberto de Y contendo $f(a)$. Por hipótese $f^{-1}(V)$ é um aberto de X contendo a, e $f(f^{-1}(V)) \subset V$ pelo Exercício 1.G. Pela Proposição 2.9 f é contínua em a.

A equivalência $(b) \Leftrightarrow (c)$ é conseqüência direta do Exercício 1.B(c).

Exercícios

2.A. Prove que as seguintes funções são métricas em $C[a, b]$:
(a) $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : a \leq x \leq b\}$.
(b) $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

2.B. Seja X um espaço métrico.
(a) Prove a desigualdade

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y) \quad \text{para todo} \quad x, y, a \in X.$$

(b) Prove que, para cada $a \in X$ a função $x \in X \to d(x, a) \in \mathbf{R}$ é contínua.
(c) Prove que a esfera

$$S(a; r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$$

é um subconjunto fechado.

2.C. Seja X um espaço métrico, e seja $S \subset X$, com a métrica induzida.
(a) Dados $a \in S$ e $r > 0$, prove que $B_S(a; r) = S \cap B_X(a; r)$.
(b) Prove que um conjunto $U \subset S$ é aberto em S se e só se existe um aberto V de X tal que $U = S \cap V$.

2.D. Seja $X = \mathbf{R}$, e seja $S = \mathbf{Z}$, com a métrica induzida. Prove que cada subconjunto de S é aberto em S.

2.E. (a) Dê exemplo de uma seqüência de abertos de $\mathbf{R}$ cuja interseção não seja um aberto.
(b) Dê exemplo de uma seqüência de fechados de $\mathbf{R}$ cuja união não seja um fechado.

3. Espaços topológicos

3.1. Definição. Seja X um conjunto. Chamaremos de *topologia* em X uma família τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:
(a) $\emptyset$ e X pertencem a τ.
(b) A união de uma família arbitrária de membros de τ pertence a τ.
(c) A interseção de uma família finita de membros de τ pertence a τ.
Os membros de τ são chamados de *abertos*. O par (X, τ) é chamado de *espaço topológico*. Com freqüência diremos que X é um espaço topológico.

3.2. Exemplos.
(a) Se (X, d) é um espaço métrico, então segue da Proposição 2.6 que os abertos de (X, d) formam uma topologia τ_d em X.

(b) Se $X = \mathbf{R}^n$, então a topologia τ_d dada pela métrica euclideana

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

é chamada de *topologia usual*.

(c) Seja X um conjunto qualquer, e seja τ a família de todos os subconjuntos de X. Claramente τ é uma topologia em X, chamada de *topologia discreta*.

(d) Seja X um conjunto qualquer, e seja $\tau = \{\emptyset, X\}$. Claramente τ é uma topologia em X, chamada de *topologia trivial*.

3.3. Definição. Diremos que um espaço topológico (X, τ) é *metrizável* se existir uma métrica d em X tal que $\tau = \tau_d$.

Notemos que a topologia discreta é sempre metrizável, e vem dada pela métrica discreta.

3.4. Definição. Dadas duas topologias τ_1 e τ_2 num conjunto X, diremos que τ_1 é *mais fraca* que τ_2, ou que τ_2 é *mais forte* que τ_1, ou que τ_2 é *mais fina* que τ_1 se $\tau_1 \subset \tau_2$.

A topologia trivial em X é mais fraca que qualquer outra topologia em X. A topologia discreta em X é mais fina que qualquer outra topologia em X.

3.5. Definição. Seja X um espaço topológico. Diremos que um conjunto $F \subset X$ é *fechado* se $X \setminus F$ é aberto.

3.6. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Então:*
(a) X e $\emptyset$ são fechados.
(b) A interseção de uma família arbitrária de fechados é um fechado.
(c) A união de uma família finita de fechados é um fechado.

Demonstração. Basta aplicar as leis de de Morgan.

Reciprocamente temos:

3.7. Proposição. *Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*
(a) X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{F}$.
(b) A interseção de uma família arbitrária de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.
(c) A união de uma família finita de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.
Seja $\tau = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Então τ é uma topologia em X, e $\mathcal{F}$ coincide com a família dos fechados de (X, τ).

Demonstração. Basta aplicar as leis de De Morgan.

Exercícios

3.A. Prove que as métricas dos Exemplos 2.2(b), 2.2(c) e 2.2(d) definem a mesma topologia em $\mathbf{R}^n$.

3.B. Seja $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$, e seja

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}.$$

Prove que τ é uma topologia em X. O espaço (X, τ) é chamado de *espaço de Sierpinski*.

3.C. Seja X um conjunto, e seja

$$\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ é finito}\}.$$

Prove que $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia em X, conhecida como *topologia cofinita*. Você reconhece esta topologia quando X é finito?

3.D. Seja X um conjunto, e seja

$$\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ é enumerável}\}.$$

Prove que $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia em X, conhecida como *topologia coenumerável*. Você reconhece esta topologia quando X é enumerável?

3.E. Seja X um conjunto, seja $A \subset X$, e seja

$$\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{U : A \subset U \subset X\}.$$

(a) Prove que τ_A é uma topologia em X.
(b) Descreva os fechados de (X, τ_A).
(c) Você reconhece τ_A quando $A = \emptyset$ e quando $A = X$?

4. Aderência e interior de um conjunto

4.1. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $A \subset X$. Chamaremos de *aderência* de A o conjunto

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \quad \text{é fechado e} \quad F \supset A\}.$$

Claramente $\overline{A}$ é o menor subconjunto fechado de X que contém A.

4.2. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Então a aplicação $A \to \overline{A}$ tem as seguintes propriedades:*
(a) $A \subset \overline{A}$.
(b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(c) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(e) A *é fechado se e só se* $A = \overline{A}$.

Demonstração. (a) é óbvio.

(b) Por (a) $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. E como $\overline{A}$ é um fechado contendo $\overline{A}$, segue que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$.

(c) Como $\emptyset$ é um fechado contendo $\emptyset$, segue que $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$.

(d) Antes de provar (d) notemos que

$$A \subset B \quad \text{implica} \quad \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Logo $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por outro lado $\overline{A} \cup \overline{B}$ é um fechado contendo $A \cup B$. Logo $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

(e) é óbvio.

Reciprocamente temos:

4.3. Proposição. *Seja X um conjunto, e seja $A \in \mathcal{P}(X) \to \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:*
(a) $A \subset \overline{A}$.
(b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(c) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Seja $\mathcal{F} = \{A \subset X : A = \overline{A}\}$. Então $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia τ em X. $\overline{A}$ é a aderência de A para cada $A \subset X$.

Demonstração. Utilizaremos a Proposição 3.7. É claro que $X \in \mathcal{F}$. E segue de (c) que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Segue de (d) que a união de dois membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.

Antes de provar que qualquer interseção de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$, provemos que

$$(*) \qquad A \subset B \text{ implica } \overline{A} \subset \overline{B}.$$

De fato usando (d) vemos que:

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{(B \setminus A)} \Rightarrow \overline{B} \supset \overline{A}.$$

Seja $A_i \in \mathcal{F}$ para cada $i \in I$. Então $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i$, e portanto $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \overline{A_i} = A_i$ para cada $i \in I$. Logo $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} A_i$, e segue que $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Assim $\mathcal{F}$ é a família de fechados para uma topologia τ em X. Para provar que $\overline{A}$ é a aderência de A com relação a τ, fixemos $A \subset X$. Segue de (*) que

$$\overline{A} \subset \overline{F} = F \quad \text{para cada} \quad F \in \mathcal{F} \quad \text{tal que} \quad F \supset A,$$

e portanto

$$\overline{A} \subset \bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset A\}.$$

Por outro lado segue de (a) e (b) que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ e $\overline{A} \supset A$. Logo

$$\bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset A\} \subset \overline{A}.$$

Isto prova que $\overline{A}$ é a aderência de A.

4.4. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $A \subset X$. Chamaremos de *interior* de A o conjunto

$$A^\circ = \bigcup \{U \subset X : U \quad \text{é aberto e} \quad U \subset A\}.$$

Claramente A° é o maior subconjunto aberto de X que está contido em A. As vezes escreveremos $\overset{\circ}{A}$ em lugar de A°.

4.5. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e seja $A \subset X$. Então:*

$$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ \qquad \text{e} \qquad X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}.$$

Demonstração. Basta aplicar as leis de De Morgan.

Deixamos como exercício as demonstrações das duas proposições seguintes. Elas podem ser demonstradas diretamente, ou podem ser deduzidas das Proposições 4.2 e 4.3 utilizando a Proposição 4.5 e as leis de De Morgan.

4.6. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Então a aplicação $A \to A^\circ$ tem as seguintes propriedades:*

(a) $A^\circ \subset A$.
(b) $A^{\circ\circ} = A^\circ$.
(c) $X^\circ = X$.
(d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(e) A é aberto se e só se $A = A^\circ$.

4.7. Proposição. *Seja X um conjunto, e seja $A \in \mathcal{P}(X) \to A^\circ \in \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:*
(a) $A^\circ \subset A$.
(b) $A^{\circ\circ} = A^\circ$.
(c) $X^\circ = X$.
(d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
Seja $\tau = \{A \subset X : A = A^\circ\}$. Então τ é uma topologia em X. A° é o interior de A para cada $A \subset X$.

Exercícios

4.A. Seja X um espaço topológico, com a topologia cofinita do Exercício 3.C.
(a) Descreva $\overline{A}$ para cada $A \subset X$.
(b) Descreva A° para cada $A \subset X$.

4.B. Seja X um conjunto, seja $A \subset X$, e seja τ_A a topologia do Exercício 3.E.
(a) Descreva $\overline{B}$ para cada $B \subset X$.
(b) Descreva B° para cada $B \subset X$.

4.C. Seja X um espaço topológico.
(a) Prove que $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ para todo $A, B \subset X$.

(b) Dê exemplo de conjuntos $A, B \subset \mathbf{R}$ tais que $\overline{(A \cap B)} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4.D. Seja X um espaço topológico.
(a) Prove que $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ para todo $A, B \subset X$.

(b) Dê exemplo de conjuntos $A, B \subset \mathbf{R}$ tais que $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

4.E. Dado $A \subset X$, chamaremos de *fronteira* de A o conjunto

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

(a) Prove que $\overline{A} = A \cup \partial A$.

(b) Prove que $A^\circ = A \setminus \partial A$.

4.F. Para cada $A \subset \mathbf{N}$ seja

$$\overline{A} = \{kn : n \in A, k \in \mathbf{N}\}.$$

(a) Prove que a aplicação $A \to \overline{A}$ tem as propriedades da Proposição 4.3, e define portanto uma topologia τ em $\mathbf{N}$.
(b) Descreva os fechados de $(\mathbf{N}, \tau)$.
(c) Descreva os abertos de $(\mathbf{N}, \tau)$.

5. Sistemas de vizinhanças

5.1. Definição. Seja X um espaço topológico não vazio, e seja $x \in X$. Diremos que um conjunto $U \subset X$ é uma *vizinhança* de x se $x \in U^\circ$. $\mathcal{U}_x$ denota o conjunto de todas as vizinhanças de x.

5.2. Proposição. *Seja X um espaço topológico não vazio. Então os conjuntos $\mathcal{U}_x$ tem as seguintes propriedades:*
(a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$.
(b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
(c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$, $V \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V$.
(d) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{U}_x$.
(e) Um conjunto $U \subset X$ é aberto se e só se $U \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in U$.

Demonstração. (a) Se $U \in \mathcal{U}_x$, então $x \in U^\circ \subset U$.

(b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $x \in U^\circ \cap V^\circ = (U \cap V)^\circ$. Logo $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

(c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, seja $V = U^\circ$. Se $y \in V = U^\circ$, então $U \in \mathcal{U}_y$.

(d) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $x \in U^\circ \subset V^\circ$. Logo $V \in \mathcal{U}_x$.

(e) Se U é aberto, então $U = U^\circ$. Segue que $U \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in U$. Reciprocamente suponhamos que $U \in \mathcal{U}_x$ para cada $x \in U$. Segue que $U = U^\circ$. Logo U é aberto.

Reciprocamente temos:

5.3. Proposição. *Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{U}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*
(a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$.
(b) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
(c) Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$, $V \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_y$ para cada $y \in V$.
(d) Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{U}_x$.
Seja

$$\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{U}_x \quad \textit{para cada} \quad x \in U\}.$$

Então τ é uma topologia em X, e $\mathcal{U}_x$ é o sistema de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$.

Demonstração. Primeiro provaremos que τ é uma topologia em X.
É claro que $\emptyset \in \tau$. Para provar que $X \in \tau$, seja $x \in X$, e seja $U \in \mathcal{U}_x$. Como $U \subset X$, segue de (d) que $X \in \mathcal{U}_x$. Logo $X \in \tau$.

Seja $U_i \in \tau$ para cada $i \in I$, e seja $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Então $x \in U_i$ para algum $i \in I$. Como $U_i \in \tau$, temos que $U_i \in \mathcal{U}_x$. Como $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, segue de (d) que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}_x$. Logo $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Sejam $U, V \in \tau$, e seja $x \in U \cap V$. Então $U, V \in \mathcal{U}_x$, e segue de (b) que $U \cap V \in \mathcal{U}_x$. Logo $U \cap V \in \tau$.

A seguir provaremos que cada vizinhança de x pertence a $\mathcal{U}_x$. Seja U uma vizinhança de x. Então $x \in U^\circ$. Como $U^\circ \in \tau$, segue que $U^\circ \in \mathcal{U}_x$. Como $U^\circ \subset U$, segue de (d) que $U \in \mathcal{U}_x$.

Finalmente provaremos que cada $U \in \mathcal{U}_x$ é uma vizinhança de x. Seja $U \in \mathcal{U}_x$, e seja $V = \{y \in U : U \in \mathcal{U}_y\}$. Segue de (a) que $x \in U$, e como $U \in \mathcal{U}_x$, vemos que $x \in V$.

A seguir veremos que $V \in \tau$. Dado $y \in V$, temos que $U \in \mathcal{U}_y$. Por (c) existe $W \in \mathcal{U}_y$, $W \subset U$, tal que $U \in \mathcal{U}_z$ para todo $z \in W$. Segue então de (a) que $W \subset V$. Segue de (d) que $V \in \mathcal{U}_y$. Logo $V \in \tau$.

Como $x \in V$ e $V \in \tau$, segue que $x \in U^\circ$. Logo U é uma vizinhança de x.

5.4. Definição. Seja X um espaço topológico não vazio, e seja $x \in X$. Diremos que uma família $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ é uma *base de vizinhanças* de x se cada $U \in \mathcal{U}_x$ contém algum $V \in \mathcal{B}_x$.

5.5. Exemplos.

(a) Seja X um espaço topológico, seja $x \in X$, e seja

$$\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{U}_x : U \quad \text{é aberto}\}.$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x.

(b) Seja X um espaço métrico, seja $x \in X$, e seja

$$\mathcal{B}_x = \{B(x; r) : r > 0\}.$$

Ent ao $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x.

(c) Seja X um espaço métrico, seja $x \in X$, e seja

$$\mathcal{B}_x = \{B[x; r] : r > 0\}.$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x.

5.6. Proposição. *Seja X um espaço topológico não vazio, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x, para cada $x \in X$. Então:*

(a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$.

(b) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.

(c) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subset U$.

(d) Um conjunto $U \subset X$ é aberto se e só se para cada $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.

Demonstração. As afirmaç oes (a), (b), (c) e (d) seguem diretamente das afirmações (a), (b), (c) e (e) na Proposição 5.2.

Reciprocamente temos:

5.7. Proposição. *Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{B}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$.

(b) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.

(c) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subset U$.

Seja

$$\tau = \{U \subset X : \text{para cada} \;\; x \in U \;\; \text{existe} \;\; V \in \mathcal{B}_x \;\; \text{tal que} \;\; V \subset U\}.$$

Então τ é uma topologia em X e $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$.

Demonstração. Para cada $x \in X$ seja

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X : U \supset V \;\; \text{para algum} \;\; V \in \mathcal{B}_x\}.$$

É claro que as famílias $\mathcal{U}_x$ verificam as propriedades (a), (b), (c) e (d) da Proposição 5.3, e que

$$\tau = \{U \subset X : U \in \mathcal{U}_x \;\; \text{para cada} \;\; x \in U\}.$$

Pela Proposição 5.3 τ é uma topologia em X e $\mathcal{U}_x$ é o sistema de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $X \in X$. Segue que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em (X, τ) para cada $x \in X$.

A proposição seguinte é muito útil. Ela caracteriza abertos, fechados, aderência de um conjunto e interior de um conjunto em termos de bases de vizinhanças.

5.8. Proposiçao. *Seja X um espaço topológico não vazio, seja $A \subset X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x, para cada $x \in X$.Então:*

(a) A é aberto se e só se para cada $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset A$.

(b) A é fechado se e só se para cada $x \notin A$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$.

(c) $\overline{A} = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \;\; \text{para cada} \;\; V \in \mathcal{B}_x\}$.

(d) $A^\circ = \{x \in X : V \subset A \;\; \text{para algum} \;\; V \in \mathcal{B}_x\}$.

Demonstracção. Já vimos (a) na Proposição 5.6(d). (b) é conseqüência imediata de (a).

(c) Lembremos que

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \;\; \text{fechado}, \quad F \supset A\}.$$

Se $x \notin \overline{A}$, então por (b) existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Reciprocamente suponhamos que exista $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Então $x \in V^\circ$ e $A \subset X \setminus V \subset X \setminus V^\circ$. Como $X \setminus V^\circ$ é fechado, segue que $\overline{A} \subset X \setminus V^\circ$. Logo $x \notin \overline{A}$.

(d) Pela Proposição 4.5, $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$. Se B denota o conjunto da direita em (d), então usando (c) segue que

$$x \notin A^\circ \Leftrightarrow x \in \overline{(X \setminus A)} \Leftrightarrow V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \;\; \text{para cada} \;\; V \in \mathcal{B}_x$$

$$\Leftrightarrow V \not\subset A \quad \text{para cada} \quad V \in \mathcal{B}_x \Leftrightarrow x \notin B.$$

5.9. Definição. Seja X um espaço topológico. Diremos que X satisfaz o *primeiro axioma de enumerabilidade* se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ que é enumerável.

5.10. Exemplo. Cada espaço métrico satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Exercícios

5.A. Seja X um espaço topológico, seja $A \subset X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x para cada $x \in X$. Prove que

$$\partial A = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \quad \text{e} \quad V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \quad \text{para cada} \quad V \in \mathcal{B}_x\}.$$

5.B. Dados $f \in C[a,b]$ e $r > 0$, seja

$$U(f,r) = \{g \in C[a,b] : |g(x) - f(x) < r \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b]\}.$$

Prove que os conjuntos $U(f,r)$, com $r > 0$ formam uma base de vizinhanças de f no espaço métrico $C[a,b]$ do Exercício 2.A(a).

5.C. Dados $f \in C[a,b]$, $A \subset [a,b]$, A finito, e $r > 0$, seja

$$V(f,A,r) = \{g \in C[a,b] : |g(x) - f(x)| < r \quad \text{para todo} \quad x \in A\}.$$

Prove que os conjuntos $V(f,A,r)$, com $A \subset [a,b]$, A finito, e $r > 0$, formam uma base de vizinhanças de f para uma certa topologia em $C[a,b]$. Esta topologia é mais fraca que a topologia do exercício anterior.

5.D. Seja X um espaço topológico e seja $A \subset X$. Diremos que um ponto $x \in X$ é um *ponto de acumulação* de A se dado $U \in \mathcal{U}_x$ existe $a \in U \cap A$, com $a \neq x$. A' denota o conjunto dos pontos de acumulação de A. Prove que $\overline{A} = A \cup A'$.

5.E. Dê exemplo de um conjunto $A \subset \mathbf{R}$ tal que os seguintes conjuntos sejam todos diferentes entre si:

$$A, \quad \overline{A}, \quad \mathring{A}, \quad \mathring{\overline{A}}, \quad \overline{\mathring{A}}, \quad \overline{\mathring{\overline{A}}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{A}}}.$$

6. Bases para os abertos

6.1. Definição. Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que uma família $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma *base* para τ se dado $U \in \tau$ existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup \{V : V \in \mathcal{C}\}.$$

6.2. Exemplos.
(a) Os intervalos (a, b), com $a < b$ em $\mathbf{R}$, formam uma base para a topologia usual em $\mathbf{R}$.

(b) Se (X, d) é um espaço métrico, então as bolas $B(a; r)$, com $a \in X$ e $r > 0$, formam uma base para a topologia τ_d.

(c) Se (X, τ) é um espaço topológico discreto, então $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base para τ.

6.3. Proposição. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base para τ se e só se, dados $U \in \tau$ e $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$.*

Esta proposição é conseqüência imediata da definição.

6.4. Proposição. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base para τ se e só se, para cada $x \in X$, a família*

$$\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$$

é uma base de vizinhanças de x.

Esta proposição é conseqüência fácil da proposição anterior.

6.5. Proposição. *Seja (X, τ) um espaço topológico, e seja $\mathcal{B}$ uma base para τ. Então:*
(a) $X = \bigcup \{V : V \in \mathcal{B}\}$.
(b) Dados $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{B}$ tais que $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Demonstração. (a) é conseqüência imediata da definição de base. (b) é conseqüência da Proposição 6.4, junto com a Proposição 5.6.

Reciprocamente temos:

6.6. Proposição. *Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*
(a) $X = \bigcup \{V : V \in \mathcal{B}\}$.
(b) Dados $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{B}$ tais que $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.
Seja τ a família de todos os conjuntos da forma

$$U = \bigcup \{V : V \in \mathcal{C}\}, \quad \text{com } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}.$$

Então τ é uma topologia em X, e $\mathcal{B}$ é uma base para τ.

Demonstração. É claro que $\emptyset = \bigcup\{V : V \in \emptyset\} \in \tau$. E $X \in \tau$ por (a).

Seja $U_i \in \tau$ para cada $i \in I$, ou seja

$$U_i = \bigcup\{V : V \in \mathcal{C}_i\}, \quad \text{com} \quad \mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}$$

para cada $i \in I$. Então

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup\{V : V \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i\} \in \tau.$$

Finalmente sejam $U_1, U_2 \in \tau$, ou seja

$$U_i = \bigcup\{V_1 : V_1 \in \mathcal{C}_1\}, \quad U_2 = \bigcup\{V_2 : V_2 \in \mathcal{C}_2\},$$

com $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}$. Então

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup\{V_1 \cap V_2 : V_1 \in \mathcal{C}_1, V_2 \in \mathcal{C}_2\}.$$

Segue de (b) que cada interseção $V_1 \cap V_2$ é união de membros de $\mathcal{B}$. Segue que $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Temos provado qur τ é uma topologia em X. É claro que $\mathcal{B}$ é uma base para τ.

6.7. Definição. Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que (X, τ) satisfaz o *segundo axioma de enumerabilidade* se existe uma base $\mathcal{B}$ para τ que é enumerável.

6.8. Exemplo. $\mathbf{R}$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade: os intervalos (a, b) com $a < b$ racionais, formam uma base para os abertos.

Exercícios

6.A. Prove que o segundo axioma de enumerabilidade implica o primeiro.

6.B. Prove que os intervalos (a, ∞), com $a \in \mathbf{R}$, formam uma base para uma topologia τ_1 em $\mathbf{R}$, mais fraca que a topologia usual. Prove que $(\mathbf{R}, \tau_1)$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

6.C. Prove que os intervalos $[a, b)$, com $a < b$ em $\mathbf{R}$, formam uma base para uma topologia τ_2 em $\mathbf{R}$, mais fina que a topologia usual. $(\mathbf{R}, \tau_2)$ é conhecido como a *reta de Sorgenfrey*.

6.D. Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que uma família $\mathcal{C} \subset \tau$ é uma *subbase* para τ se as interseções finitas de membros de $\mathcal{C}$ formam uma base para τ. Prove que os intervalos (a, ∞), com $a \in \mathbf{R}$, junto com os intervalos $(-\infty, b)$, com $b \in \mathbf{R}$, formam uma subbase para a topologia usual em $\mathbf{R}$.

7. Subespaços

7.1. Definição. Seja (X, τ) um espaço topológico, e seja $S \subset X$. É claro que a família

$$\tau_S = \{S \cap U : U \in \tau\}$$

é uma topologia em S, que chamaremos de *topologia induzida*. Diremos que (S, τ_S) é um *subespaço* de (X, τ), ou simplesmente que S é um subespaço de X.

7.2. Exemplos.
(a) $\mathbf{Z}$, com a topologia induzida por $\mathbf{R}$, é um espaço topológico discreto.

(b) $\mathbf{R}$ é um subespaço de $\mathbf{R}^2$.

7.3. Proposição. *Seja S um subespaço de um espaço topológico X. Então:*
(a) U é aberto em S se e só se $U = S \cap U_1$, sendo U_1 aberto em X.
(b) F é fechado em S se e só se $F = S \cap F_1$, sendo F_1 fechado em X.
(c) Se $A \subset S$, então $\overline{A}^S = S \cap \overline{A}^X$.
(d) Se $x \in S$, então U é vizinhança de x em S se e só se $U = S \cap U_1$, sendo U_1 uma vizinhança de x em X.

Demonstração. (a) é a própria definição.

(b) Usando (a) vemos que: F é fechado em $S \Leftrightarrow S \setminus F$ é aberto em $S \Leftrightarrow S \setminus F = S \cap U_1$, com U_1 aberto em $X \Leftrightarrow F = S \cap (X \setminus U_1)$, com U_1 aberto em $X \Leftrightarrow F = S \cap F_1$, com F_1 fechado em X.

(c) Usando (b) vemos que:

$$\overline{A}^S = \bigcap\{F : F \text{ fechado em } S, \quad F \supset A\}$$

$$= \bigcap\{S \cap F_1 : F_1 \text{ fechado em } X, \quad F_1 \supset A\} = S \cap \overline{A}^X.$$

(d) Seja U_1 uma vizinhança de x em X. Então existe um aberto V_1 em X tal que $x \in V_1 \subset U_1$. Logo $x \in S \cap V_1 \subset S \cap U_1$. Como $S \cap V_1$ é aberto em S, segue que $S \cap U_1$ é uma vizinhança de x em S.

Reciprocamente seja U uma vizinhança de x em S. Então existe um aberto V de S tal que $x \in V \subset U$. Então $V = S \cap V_1$, com V_1 aberto em X. Seja

$$U_1 = V_1 \cup (U \setminus V).$$

Então

$$S \cap U_1 = V \cup (U \setminus V) = U.$$

Como $x \in V_1 \subset U_1$, segue que U_1 é uma vizinhança de x em X.

Exercícios

7.A. Seja X um espaço topológico, e seja S um subespaço de X.

(a) Se X tem a topologia discreta, prove que S também tem a topologia discreta.

(b) Se X tem a topologia trivial, prove que S também tem a topologia trivial.

7.B. Seja X um espaço topológico, e seja S um subespaço de X. Se X é metrizável, prove que S é metrizável também.

Sugestão: Use o Exercício 2.C.

7.C. Seja X um espaço topológico, seja S um subespaço de X, e seja $x \in S$.

(a) Se $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em X, prove que a família $\{S \cap U : U \in \mathcal{B}_x\}$ é uma base de vizinhanças de x em S.

(b) Se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, prove que S satisfaz o mesmo axioma.

7.D. Seja X um espaço topológico, e seja S um subespaço de X.

(a) Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia de X, prove que a família $\{S \cap U : U \in \mathcal{B}\}$ é uma base para a topologia de S.

(b) Se X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, prove que S satisfaz o mesmo axioma.

8. Funções contínuas

8.1. Definição. Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços topológicos. Diremos que f é *contínua num ponto* $a \in X$ se para cada aberto V de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$. Diremos que f é *contínua* se for contínua em cada pontos de X. Denotaremos por $C(X;Y)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to Y$. Se $Y = \mathbf{R}$, escreveremos $C(X)$ em lugar de $C(X;\mathbf{R})$.

8.2. Proposição. *Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços topológicos. Seja $\mathcal{B}_a$ uma base de vizinhanças de um ponto $a \in X$, e seja $\mathcal{B}_{f(a)}$ uma base de vizinhanças de $f(a)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) f é contínua em a.
(b) Para cada $V \in \mathcal{U}_{f(a)}$, existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(U) \subset V$.
(c) Para cada $V \in \mathcal{B}_{f(a)}$, existe $U \in \mathcal{B}_a$ tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja $V \in \mathcal{U}_{f(a)}$. Seja V_1 um aberto de Y contendo $f(a)$ tal que $V_1 \subset V$. Por (a) existe um aberto U_1 de X contendo a tal que $f(U_1) \subset V_1 \subset V$. É claro que $U_1 \in \mathcal{U}_a$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Seja $V \in \mathcal{B}_{f(a)}$. Por (b) existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(U) \subset V$. Seja $U_1 \in \mathcal{B}_a$ tal que $U_1 \subset U$. Então $f(U_1) \subset f(U) \subset V$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Seja V um aberto de Y contendo $f(a)$. Seja $V_1 \in \mathcal{B}_{f(a)}$ tal que $V_1 \subset V$. Por (c) existe $U_1 \in \mathcal{B}_a$ tal que $f(U_1) \subset V_1$. Seja U um aberto de X contendo a tal que $U \subset U_1$. Então $f(U) \subset f(U_1) \subset V_1 \subset V$.

8.3. Proposição. *Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços topológicos. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) f é contínua.
(b) $f^{-1}(V)$ é aberto em X para cada aberto V de Y.
(c) $f^{-1}(B)$ é fechado em X para cada fechado B de Y.

Demonstração. Basta repetir a demonstração da Proposição 2.10.

8.4. Proposição. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, sendo X, Y e Z espaços topológicos. Se f é contínua num ponto $a \in X$ e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.*

Demonstração. Utilizaremos a Proposição 8.2. Seja $W \in \mathcal{U}_{g \circ f(a)}$. Como g é contínua em $f(a)$, existe $V \in \mathcal{U}_{f(a)}$ tal que $g(V) \subset W$. Como f é contínua em a, existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(U) \subset V$. Segue que $g(f(U)) \subset g(V) \subset W$.

8.5. Corolário. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, sendo X, Y e Z espaços topológicos. Se f e g são contínuas, então $g \circ f$ é contínua também.*

8.6. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja S um subespaço de X. Se $f : X \to Y$ é contínua, então a restrição $f|S : S \to Y$ é contínua também.*

Demonstração. Seja V um aberto de Y. Como f é contínua, $f^{-1}(V)$ é aberto em X. Segue que $(f|S)^{-1}(V) = S \cap f^{-1}(V)$ é aberto em S.

8.7. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos. Suponhamos que $X = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são ambos abertos ou ambos fechados. Seja $f : X \to Y$ uma função tal que $f|S_1 : S_1 \to Y$ e $f|S_2 : S_2 \to Y$ são contínuas. Então f é contínua.*

Demonstração. Suponhamos S_1 e S_2 abertos. Seja V um aberto de Y. Como $f|S_1$ é contínua, $(f|S_1)^{-1}(V) = S_1 \cap f^{-1}(V)$ é aberto em S_1. Como $f|S_2$ é contínua, $(f|S_2)^{-1}(V) = S_2 \cap f^{-1}(V)$ é aberto em S_2. Segue que

$$S_1 \cap f^{-1}(V) = S_1 \cap U_1 \quad \text{e} \quad S_2 \cap f^{-1}(V) = S_2(V) \cap U_2,$$

sendo U_1 e U_2 abertos em X. Como $X = S_1 \cup S_2$, segue que

$$f^{-1}(V) = (S_1 \cap f^{-1}(V)) \cup (S_2 \cap f^{-1}(V)) = (S_1 \cap U_1) \cup (S_2 \cap U_2)$$

é aberto em X.

Deixamos como exercício a demonstração do caso em que S_1 e S_2 são fechados.

8.8. Definição. Sejam X e Y espaços topológicos.

(a) Diremos que $f : X \to Y$ é um *homeomorfismo* se f é bijetiva e f e f^{-1} são contínuas.

(b) Diremos que $f : X \to Y$ é um *mergulho* se f é um homeomorfismo entre X e o subespaço $f(X)$ de Y.

(c) Diremos que $f : X \to Y$ é *aberta* se $f(U)$ é aberto em Y para cada aberto U de X.

(d) Diremos que $f : X \to Y$ é *fechada* se $f(A)$ é fechado em Y para cada fechado A de X.

O resultado seguinte é conseqüência fácil das definições e resultados anteriores.

8.9. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$ uma função bijetiva. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) f é um homeomorfismo.

(b) f é contínua e aberta.

(c) f é contínua e fechada.

Exercícios

X e Y denotam espaços topológicos.

8.A. Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de Y. Prove que uma função $f : X \to Y$ é contínua se e só se $f^{-1}(V)$ é aberto em X para cada $V \in \mathcal{B}$.

8.B. Prove que uma função $f : X \to Y$ é contínua se e só se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$.

8.C. Prove que cada função constante $f : X \to Y$ é contínua.

8.D. Prove que se $f : X \to \mathbf{R}$ e $g : X \to \mathbf{R}$ são contínuas num ponto $a \in X$, então as funções $f + g$ e fg são também contínuas em a.

8.E. Dado $A \subset X$, a *função característica* $\chi_A : X \to \mathbf{R}$ é definida por $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Prove que a função χ_A é contínua se e só se A é aberto e fechado.

8.F. Seja $X = \mathbf{N}$, com a topologia do Exercício 4.F. Prove que uma função $f : X \to X$ é contínua se e só se, cada vez que m divide n, tem-se que $f(m)$ divide $f(n)$.

8.G. Diremos que um conjunto $D \subset X$ é *denso* em X se $\overline{D} = X$. Seja $f : X \to \mathbf{R}$ uma função contínua tal que $f(x) = 0$ para todo x num subconjunto denso $D \subset X$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

8.H. Prove que os seguintes pares de intervalos são homeomorfos entre si:
(a) (a, b) e $(0, 1)$.
(b) $(1, \infty)$ e $(0, 1)$.
(c) $(-\pi/2, \pi/2)$ e $(-\infty, \infty)$.
Use (a), (b) e (c) para provar que todos os intervalos abertos de $\mathbf{R}$ são homeomorfos entre si.

8.I. Seja $f : X \to \mathbf{R}$. Diremos que f é *semicontínua inferiormente* se $f^{-1}(a, \infty)$ é aberto em X para cada $a \in \mathbf{R}$. Diremos que f é *semicontínua superiormente* se $f^{-1}(-\infty, b)$ é aberto em X para cada $b \in \mathbf{R}$. Prove que f é contínua se e só se f é semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente.

8.J. Seja $A \subset X$.
(a) Prove que $\chi_A : X \to \mathbf{R}$ é semicontínua inferiormente se e só se A é aberto.
(b) Prove que $\chi_A : X \to \mathbf{R}$ é semicontínua superiormente se e só se A é fechado.

9. Produtos infinitos e o axioma da escolha

9.1. Definição. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos. Chamaremos de *produto cartesiano* da família $\{X_i : i \in I\}$ o conjunto

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : x(i) \in X_i \quad \text{para cada} \quad i \in I\}.$$

Escreveremos x_i em lugar de $x(i)$ para cada $x \in \prod_{i\in I}$ e $i \in I$. Para cada $j \in I$ a *projeção* π_j é definida por

$$\pi_j : x \in \prod_{i\in I} X_i \to x_j \in X_j.$$

Cada $x \in \prod_{i\in I} X_i$ é usualmente denotado por $(x_i)_{i\in I}$.

Mesmo que cada X_i seja não vazio, não é claro que o produto $\prod_{i\in I} X_i$ seja não vazio. Isto é conseqüência do axioma seguinte.

9.2. Axioma da escolha. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos disjuntos não vazios. Então existe uma função $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para cada $i \in I$. A função f é chamada de função escolha.*

9.3. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Então o produto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ é não vazio.*

Demonstração. Se os conjuntos X_i fossem disjuntos, a conclusão seria conseqüência imediata do axioma da escolha. No caso geral definamos $Y_i = X_i \times \{i\}$ para cada $i \in I$. É claro que $\{Y_i : i \in I\}$ é uma família não vazia de conjuntos disjuntos não vazios. Pelo axioma da escolha existe uma função $f : I \to \bigcup_{i\in I} Y_i$ tal que $f(i) \in Y_i$ para cada $i \in I$. Podemos escrever $f(i) = (x_i, i)$, com $x_i \in X_i$ para cada $i \in I$. Se definimos $x(i) = x_i$ para cada $i \in I$, então $x \in \prod_{i\in I} X_i$.

Temos provado que o axioma da escolha implica a Proposição 9.3. Mas é claro que a Proposição 9.3 implica o axioma da escolha. Assim o axioma da escolha e a Proposição 9.3 são equivalentes.

Vamos ilustrar o uso do axioma da escolha com um exemplo do dia a dia. Seja I um conjunto infinito, e seja X_i um par de sapatos para cada $i \in I$. Neste caso não precisamos do axioma da escolha para garantir que o produto $\prod_{i\in I} X_i$ é não vazio. Se definimos $x(i)$ como sendo aquele sapato em X_i que corresponde ao pé direito para cada $i \in I$, então é claro que a função $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ assim definida pertence a $\prod_{i\in I} X_i$. Por outro lado seja Y_i um par de meias para cada $i \in I$. Como em geral não há como distinguir entre as duas meias de um mesmo par, não temos como definir uma função $y : I \to \bigcup_{i\in I} Y_i$ que pertença ao produto $\prod_{i\in I} Y_i$ sem usar o axioma da escolha.

Exercícios

9.A. Prove que o axioma da escolha é equivalente à afirmação seguinte: Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos disjuntos não vazios. Então existe um conjunto $Y \subset \bigcup_{i \in I} X_i$ tal que $Y \cap X_i$ contém um único elemento para cada $i \in I$.

O exercício seguinte mostra como conciliar a definição usual de produtos cartesianos finitos, que vimos na Seção 1, com a definição de produtos cartesianos infinitos.

9.B. Sabemos que, dados n conjuntos $X_1, ..., X_n$, o produto cartesiano $X_1 \times ... \times X_n$ é dado por

$$X_1 \times ... \times X_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in X_i \quad \text{para} \quad i = 1, ..., n\}.$$

Seja

$$(X_1 \times ... \times X_n)^* = \{x : \{1, ..., n\} \to X_1 \cup ... \cup X_n : x(i) \in X_i \quad \text{para} \quad i = 1, ..., n\}.$$

Ache uma aplicação bijetiva entre $X_1 \times ... \times X_n$ e $(X_1 \times ... \times X_n)^*$.

10. O espaço produto

10.1. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{i\in I} X_i$. Seja*

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} U_i : U_i \quad \textit{é aberto em} \quad X_i \quad \textit{para cada} \quad i \in I\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em X, que chamaremos de topologia das caixas.

Demonstração. É claro que $\mathcal{B}$ verifica as condições (a) e (b) da Proposição 6.6.

Se $I = \{1, ..., n\}$ e $X_i = \mathbf{R}$ para cada $i \in I$, então é claro que a topologia das caixas coincide com a topologia usual em $\mathbf{R}^n$. Mas se I é um conjunto infinito, então a topologia das caixas, mesmo sendo bastante natural, é pouco conveniente. Mais adiante veremos várias propriedades P tais que, embora cada X_i tenha a propriedade P, o produto $\prod_{i\in I} X_i$, com a topologia das caixas, não tem a propriedade P. Por essa razão a topologia usual no produto $\prod_{i\in I} X_i$ vem dada pela proposição seguinte.

10.2. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{i\in I} X_i$. Seja $\mathcal{B}$ a família de todos os produtos $\prod_{i\in I} U_i$ tais que:*
(a) U_i é aberto em X_i para cada $i \in I$;
(b) $U_i = X_i$ para cada $i \in I \setminus J$, com $J \subset I$, J finito.
Então $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em X, que chamaremos de topologia produto.

Demonstração. É fácil verificar que $\mathcal{B}$ verifica as condições (a) e (b) da Proposição 6.6. É conveniente notar que cada $U \in \mathcal{B}$ pode ser escrito na forma

$$U = (\prod_{j\in J} U_j) \times (\prod_{i\in I\setminus J} X_i) = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j).$$

10.3. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{i\in I} X_i$. A topologia produto é a topologia mais fraca em X tal que todas as projeções $\pi_j : X \to X_j$ são contínuas.*

Demonstração. Seja τ_p a topologia produto. Se U_j é aberto em X_j, então $\pi_j^{-1}(U_j)$ pertence a $\mathcal{B}$, e é portanto aberto em (X, τ_p). Logo $\pi_j : X \to X_j$ é contínua para cada $j \in I$.

Seja τ uma topologia em X tal que $\pi_j : (X, \tau) \to X_j$ é contínua para cada $j \in I$. Provaremos que $\tau_p \subset \tau$. Para isso basta provar que cada $U \in \mathcal{B}$ pertence a τ. Se $U \in \mathcal{B}$, então

$$U = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j),$$

com J finito e U_j aberto em X_j para cada $j \in J$. Segue que $\pi_j^{-1}(U_j)$ é aberto em (X, τ) para cada $j \in J$, e dai U é aberto em (X, τ).

A menos que digamos o contrário, sempre consideraremos o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ com a topologia produto.

10.4. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos, e seja $X = \prod_{i \in I} X_i$. Seja Y um espaço topológico, e seja $g : Y \to X$. Então a função g é contínua se e só se a função composta $\pi_j \circ g : Y \to X_j$ é contínua para cada $j \in I$.*

Demonstração. A implicação $\Rightarrow$ é imediata.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\pi_j \circ g : Y \to X_j$ seja contínua para cada $j \in I$. Para provar que $g : Y \to X$ é contínua, basta provar que $g^{-1}(U)$ é aberto em Y para cada $U \in \mathcal{B}$. Se $U \in \mathcal{B}$, então

$$U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j),$$

com J finito e U_j aberto em X_j para cada $j \in J$. Logo

$$g^{-1}(U) = \bigcap_{j \in J} g^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j)) = \bigcap_{i \in I} (\pi_j \circ g)^{-1}(U_j).$$

Como $\pi_j \circ g : Y \to X_j$ é contínua para cada j, segue que $g^{-1}(U)$ é aberto em Y.

Os resultados anteriores motivam o conceito seguinte:

10.5. Proposição. *Seja X um conjunto, seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, e seja $f_i : X \to X_i$ para cada $i \in I$. Seja*

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) : J \ \ \textit{finito}, \ \ U_j \ \ \textit{aberto em} \ \ X_j\}.$$

Então:

(a) $\mathcal{B}$ é base para uma topologia τ_w em X.

(b) τ_w é a topologia mais fraca em X tal que $f_i : X \to X_i$ é contínua para cada $i \in I$.

(c) Se Y é um espaço topológico, então uma função $g : Y \to X$ é contínua se e só se $f_i \circ g : Y \to X_i$ é contínua para cada $i \in I$.

Diremos que τ_w é a topologia fraca em X definida pela família de funções $\{f_i : i \in I\}$.

Demonstração. Não é difícil adaptar as demonstrações dos resultados anteriores.

10.6. Proposição. *Seja X um espaço topológico, que tem a topologia fraca definida por uma família de funções $f_i : X \to X_i$ $(i \in I)$. Seja S um* *subespaço topológico de X. Então S tem a topologia fraca definida pela família de restrições $f_i|S : S \to X_i$ $(i \in I)$.*

Demonstração. Nós sabemos que

$$\mathcal{B}_X = \{\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) : J \quad \text{finito}, \quad U_j \quad \text{aberto em} \quad X_j\}$$

é base para a topologia de X, e que

$$\mathcal{B}_S = \{S \cap \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) : J \quad \text{finito}, \quad U_j \quad \text{aberto em} \quad X_j\}$$

é base para a topologia de S. Como

$$S \cap \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) = \bigcap_{j \in J} S \cap f_j^{-1}(U_j = \bigcap_{j \in J} (f_j|S)^{-1}(U_j),$$

vemos que S tem a topologia fraca definida pela família de restrições $f_i|S : S \to X_i$ $(i \in I)$.

10.7. Definição. Seja $f_i : X \to X_i$ para cada $i \in I$. Diremos que a família $\{f_i : i \in I\}$ *separa os pontos* de X se dados $x \neq y$ em X, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

A proposição seguinte da condições necessárias e suficientes para que um espaço topológico seja homeomorfo a um subespaço de um espaço produto.

10.8. Proposição. *Seja $f_i : X \to X_i$ para cada $i \in I$, sendo X e cada X_i espaços topológicos. Seja*

$$\epsilon : x \in X \to (f_i(x))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i.$$

Então ϵ é um mergulho se e só se se verificam as seguintes condições:
(a) A família $\{f_i : i \in I\}$ separa os pontos de X.
(b) X tem a topologia fraca definida pela família $\{f_i : i \in I\}$.
A aplicação ϵ é chamada de avaliação.

Demonstração. Notemos que $\pi_i \circ \epsilon = f_i$, para cada i.

$(\Rightarrow)$ Por hipótese ϵ é um homeomorfismo entre X e o subespaço $\epsilon(X)$ de $\prod_{i \in I} X_i$.
Como ϵ é injetivo, é claro que $\{f_i : i \in I\}$ separa os pontos de X.
Pela Proposição 10.6 $\epsilon(X)$ tem a topologia fraca definida pela família de restrições

$$\pi_i|\epsilon(X) : \epsilon(X) \to X_i.$$

Como $\epsilon : X \to \epsilon(X)$ é um homeomorfismo, segue que X tem a topologia fraca definida pela família de funções

$$(\pi_i|\epsilon(X)) \circ \epsilon = f_i : X \to X_i.$$

($\Leftarrow$) Como $\{f_i : i \in I\}$ separa os pontos de X, é claro que ϵ é injetivo.

Segue de (b) que $\pi_i \circ \epsilon = f_i : X \to X_i$ é contínua para cada $i \in I$. Logo $\epsilon : X \to \prod_{i \in I} X_i$ é contínua. Para provar que ϵ é um mergulho provaremos que $\epsilon : X \to \epsilon(X)$ é aberta. Por (b) a família

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) : J \quad \text{finito}, \quad U_j \quad \text{aberto em} \quad X_j\}$$

é uma base para X. Seja $U = \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{B}$. Então

$$U = \bigcap_{j \in J} (\pi_j \circ \epsilon)^{-1}(U_j) = \bigcap_{j \in J} \epsilon^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j)).$$

Como ϵ é injetiva,

$$\epsilon(U) = \bigcap_{j \in J} \epsilon(\epsilon^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j))) = \bigcap_{j \in J} \epsilon(X) \cap \pi_j^{-1}(U_j) = \epsilon(X) \cap \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j).$$

Logo $\epsilon(U)$ é aberto em $\epsilon(X)$, como queriamos.

Exercícios

10.A. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos, e seja $X = \prod_{i \in I} X_i$. Prove que cada projeção $\pi_i : X \to X_i$ é uma função aberta.

10.B. Prove que as projeções canônicas em $\mathbf{R}^2$ não são funções fechadas.

10.C. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{i \in I} X_i$. Prove que cada X_i é homeomorfo a um subespaço de X.

10.D. Um espaço topológico X é dito *não trivial* se tiver pelo menos dois pontos, e *trivial* em caso contrário. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Suponhamos que exista J, $\emptyset \neq J \subset I$ tal que X_i é trivial para todo $i \in I \setminus J$. Prove que $\prod_{i \in I} X_i$ é homeomorfo a $\prod_{j \in J} X_j$.

10.E. Se $\alpha_i < \beta_i$ para cada $i \in I$, prove que o produto $\prod_{i \in I} [\alpha_i, \beta_i]$ é homeomorfo ao produto $[0, 1]^I$.

10.F. Seja S um subespaço de um espaço topológico X. Prove que a topologia de X coincide com a topologia fraca definida pela inclusão $S \hookrightarrow X$.

11. O espaço quociente

11.1. Proposição. *Seja X um espaço topológico, seja Y um conjunto, e seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva. Então a coleção*

$$\tau_\pi = \{V \subset Y : \pi^{-1}(V) \quad \textit{é aberto em} \quad X\}$$

é uma topologia em Y, que chamaremos de topologia quociente definida por π.

A demonstração é simples e é deixada como exercício.

11.2. Definição. Diremos que $\pi : X \to Y$ é uma *aplicação quociente* se X é um espaço topológico, $\pi : X \to Y$ é uma aplicação sobrejetiva e Y tem a topologia quociente definida por π.

11.3. Proposição. *Seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente. Então a topologia quociente é a topologia mais fina em Y tal que a aplicação π é contínua.*

A proposição é conseqüência imediata da definição de τ_π.

11.4. Proposição. *Seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente e seja Z um espaço topológico. Então uma função $g : Y \to Z$ é contínua se e só se a função composta $g \circ \pi : X \to Z$ é contínua.*

Demonstração. A implicação $\Rightarrow$ é imediata. Para provar a implicação oposta, seja W um aberto de Z. Como $g \circ \pi$ é contínua, temos que $(g \circ \pi)^{-1}(W) = \pi^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto em X. Segue que $g^{-1}(W)$ é aberto em Y.

11.5. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva e contínua. Se π é aberta ou fechada, então a topologia τ de Y coincide com a topologia quociente τ_π.*

Demonstração. Suponhamos que π seja aberta. Como π é contínua, é claro que $\tau \subset \tau_\pi$. Para provar que $\tau_\pi \subset \tau$, seja $V \in \tau_\pi$. Então $\pi^{-1}(V)$ é aberto em X. Como π é aberta e sobrejetiva, segue que $V = \pi(\pi^{-1}(V)) \in \tau$.

Quando π é fechada, a demonstração é parecida.

11.6. Exemplo. Seja

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e seja

$$\pi : t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \operatorname{sen} t) \in S^1.$$

Claramente π é sobrejetiva e contínua. Usando resultados de compacidade em $\mathbf{R}^n$ não é difícil provar que π é fechada. Logo S^1 tem a topologia quociente definida por π.

11.7. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{D}$ uma família de subconjuntos disjuntos de X cuja união é X. Seja*

$$\tau_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{D} : \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} \quad \textit{é aberto em} \quad X\}.$$

Então $\tau_{\mathcal{D}}$ é uma topologia em $\mathcal{D}$. Diremos que $\mathcal{D}$ é uma decomposição de X. Dado $x \in X$ seja $P(x)$ o único elemento de $\mathcal{D}$ que contém x. A aplicação $P : X \to \mathcal{D}$ assim definida é chamada de aplicação decomposição.

Demonstração. É claro que $\emptyset, \mathcal{D} \in \tau_{\mathcal{D}}$.

Se $\mathcal{A}_i \in \tau_{\mathcal{D}}$ para cada $i \in I$, então $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \in \tau_{\mathcal{D}}$, pois

$$\bigcup\{A : A \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i\} = \bigcup_{i\in I}\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}_i\}$$

é aberto em X.

Se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \tau_{\mathcal{D}}$, então $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \tau_{\mathcal{D}}$, pois

$$\bigcup\{C : C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}\} = (\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}) \cap (\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$$

é aberto em X. Para provar a igualdade anterior é necessário observar que se $A, B \in \mathcal{D}$ e $A \cap B \neq \emptyset$, então $A = B$.

11.8. Proposição. *Toda aplicação decomposição $P : X \to \mathcal{D}$ é uma aplicação quociente.*

Demonstração. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, é claro que

$$P^{-1}(\mathcal{A}) = \{x \in X : P(x) \in \mathcal{A}\} = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Segue que

$$\tau_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{D} : P^{-1}(\mathcal{A}) \ \text{ é aberto em } \ X\}.$$

Logo $\tau_{\mathcal{D}}$ é a topologia quociente definida por P.

Reciprocamente temos o resultado seguinte.

11.9. Proposição. *Seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente. Então existe uma aplicaão decomposição $P : X \to \mathcal{D}$ e existe um homeomorfismo $f : Y \to \mathcal{D}$ tal que $f \circ \pi = P$.*

Demonstração. Seja

$$\mathcal{D} = \{\pi^{-1}(y) : y \in Y\}.$$

Como π é sobrejetiva, é claro que $\mathcal{D}$ é uma decomposição de X. Seja $P : X \to \mathcal{D}$ a aplicação canônica. Seja $f : Y \to \mathcal{D}$ definida por $f(y) = \pi^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. É claro que f é bijetiva. Como $f(\pi(x)) = \pi^{-1}(\pi(x))$ contém x, segue que $f(\pi(x)) = P(x)$ para cada $x \in X$.

Como $f \circ \pi = P$ é contínua, segue que f é contínua. E como $f^{-1} \circ P = \pi$ é contínua, segue que f^{-1} é contínua.

11.10. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $\sim$ uma relação de equivalência em X. A decomposição $\mathcal{D}$ formada pelas classes de equivalência definidas pela relação $\sim$ é denotada por $X/\sim$ e é chamada de *espaço de identificação* de X módulo $\sim$.

11.11. Exemplos.

(a) Já vimos que o círculo unitário S^1 é um quociente do intervalo $[0, 2\pi]$. Aqui

$$\mathcal{D} = \{\{x\} : 0 < x < 2\pi\} \cup \{\{0, 2\pi\}\}.$$

Para $x, y \in [0, 2\pi]$, tem-se que $x \sim y$ se $x - y$ é um múltiplo inteiro de 2π.

(b) Seja $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$, definamos $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se $x_1 - x_2$ é um múltiplo inteiro de 2π e $y_1 = y_2$. Então $\sim$ é uma relação de equivalência em X e o espaço de identificação $X/\sim$ é homeomorfo ao cilindro $S^1 \times [0, 2\pi]$. A aplicação quociente vem dada por

$$\pi : (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to ((\cos x, \operatorname{sen} x), y) \in S^1 \times [0, 2\pi].$$

(c) Seja $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ definamos $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se $x_1 - x_2$ é um múltiplo inteiro de 2π e $y_1 = y_2$ ou se $x_1 = x_2$ e $y_1 - y_2$ é um múltiplo inteiro de 2π. Neste caso $X/\sim$ é homeomorfo ao toro $S^1 \times S^1$. A aplicação quociente vem dada por

$$\pi : (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to ((\cos x, \operatorname{sen} x), (\cos y, \operatorname{sen} y)) \in S^1 \times S^1.$$

(d) Seja $X = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ definamos $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se $x_1 - x_2$ é um múltiplo inteiro de 2π e $y_1 + y_2 = 2\pi$. Neste caso $X/\sim$ é homeomorfo à fita de Möbius.

Exercícios

11.A. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva. Prove que é condição necessária e suficiente para que π seja uma aplicação quociente que B seja fechado em Y se e só se $\pi^{-1}(B)$ é fechado em X.

11.B. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se existir uma aplicação contínua $\sigma : Y \to X$ tal que $\pi \circ \sigma(y) = y$ para todo $y \in Y$, prove que π é uma aplicação quociente.

11.C. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente.

(a) Prove que π é aberta se e só se $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em X para cada aberto U de X.

(b) Prove que π é fechada se e só se $\pi^{-1}(\pi(A))$ é fechado em X para cada fechado A de X.

11.D. Seja $X = [0, 1]$, com a topologia induzida por $\mathbf{R}$. Seja $Y = \{0, 1\}$, e seja $\pi : X \to Y$ a função característica do intervalo $[1/2, 1]$.

(a) Prove que a topologia quociente τ_π em Y vem dada por $\tau_\pi = \{\emptyset, Y, \{0\}\}$. Y é o espaço de Sierpinski, que encontramos no Exercício 3.B.

(b) Prove que π não é aberta nem fechada.

12. Convergência de seqüências

12.1. Definição. Seja X um espaço métrico. Diremos que uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ *converge* a um ponto $x \in X$ se dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso escreveremos $x_n \to x$.

12.2. Proposição. *Seja X um espaço métrico, e sejam $A \subset X$ e $x \in X$. Tem-se que $x \in \overline{A}$ se e só se existe uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ que converge a x.*

Demonstração. Pela Proposição 5.8 $x \in \overline{A}$ se e só se $A \cap B(x; \epsilon) \neq \emptyset$ para cada $\epsilon > 0$.

($\Rightarrow$) Se $x \in \overline{A}$, então existe $x_n \in A \cap B(x; 1/n)$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Segue que $x_n \to x$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que exista $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $x_n \to x$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Segue que $A \cap B(x; \epsilon) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$. Logo $x \in \overline{A}$.

12.3. Corolário. *Seja X um espaço métrico, e seja $A \subset X$. Então A é fechado se e só se, cada vez que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ e $x_n \to x$, então $x \in A$.*

12.4. Proposição. *Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métricos. Então f é contínua num ponto $a \in X$ se e só se, cada vez que $x_n \to a$ em X, então $f(x_n) \to f(a)$ em Y.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se f é contínua em a, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$. Se $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $d(x_n, a) < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Segue que $d(f(x_n), f(a)) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo $f(x_n) \to f(a)$.

($\Leftarrow$) Se f não é contínua em a, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ tem-se que $f(B(a; \delta)) \not\subset B(f(a); \epsilon)$. Em particular para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $x_n \in B(a; 1/n)$ tal que $f(x_n) \notin B(f(a); \epsilon)$. Segue que $x_n \to a$ em X, mas $f(x_n) \not\to f(a)$ em Y.

12.5. Definição. Seja X um espaço topológico. Diremos que uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ *converge* a um ponto $x \in X$ se dado $U \in \mathcal{U}_x$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso escreveremos $x_n \to x$.

Na definição anterior podemos trocar o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ por qualquer base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$.

12.6. Definição. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em X. Chamaremos de *subseqüência* de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qualquer seqüência da forma $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, sendo $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência estritamente crescente em $\mathbf{N}$.

Exercícios

X e Y denotam espaços topológicos.

12.A. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, prove que qualquer subseqüência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

também converge a x.

12.B. Seja $A \subset X$.

(a) Prove que, se existir uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $x_n \to x$, então $x \in \overline{A}$.

(b) Suponhamos que X verifique o primeiro axioma de enumerabilidade. Prove que, se $x \in \overline{A}$, então existe uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $x_n \to x$.

12.C. Seja $f : X \to Y$, e seja $a \in X$.

(a) Prove que, se f é contínua em a, então, cada vez que $x_n \to a$ em X, tem-se que $f(x_n) \to f(a)$ em Y.

(b) Suponhamos que X verifique o primeiro axioma de enumerabilidade. Prove que, se cada vez que $x_n \to a$ em X tem-se que $f(x_n) \to f(a)$ em Y, então f é contínua em a.

12.D. Seja $X = \prod_{i \in I} X_i$ o produto cartesiano de uma família de espaços topológicos. Prove que $x_n \to x$ em X se e só se $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$ em X_i para cada $i \in I$.

12.E. Seja $X = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Prove que $f_n \to f$ em X se e só se $f_n(t) \to f(t)$ em $\mathbf{R}$ para cada $t \in \mathbf{R}$.

12.F. Seja $X = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ e seja $M = \{\chi_A : A \subset \mathbf{R}, \quad A \text{ finito}\} \subset X$.

(a) Prove que $\chi_{\mathbf{R}} \in \overline{M}$.

(b) Prove que não existe nenhuma seqüência $(\chi_{A_n})_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que $\chi_{A_n} \to \chi_{\mathbf{R}}$.

(c) Prove que X não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

12.G. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em X e seja $x \in X$. Se cada subseqüência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência que converge a x, prove que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

13. Convergência de redes

13.1. Definição. Um conjunto Λ, junto com uma relação $\leq$, é chamado de *conjunto dirigido* se verifica as seguintes propriedades:

(a) $\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

(b) Se $\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \nu$, então $\lambda \leq \nu$.

(c) Dados $\lambda, \mu \in \Lambda$, existe $\nu \in \Lambda$ tal que $\nu \geq \lambda$ e $\nu \geq \mu$.

13.2. Exemplos.

(a) $\mathbf{N}$, com a relação de ordem usual, é um conjunto dirigido.

(b) Seja X um espaço topológico, e seja $x \in X$. Se definimos $U \leq V$ quando $U \supset V$, então o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ é um conjunto dirigido. De maneira análoga, qualquer base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ é um conjunto dirigido.

13.3. Definição. Seja X um espaço topológico.

(a) Chamaremos de *rede* em X qualquer função da forma $x : \Lambda \to X$, sendo Λ um conjunto dirigido. Escreveremos x_λ em lugar de $x(\lambda)$, e falaremos da rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

(b) Diremos que a rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *converge* a um ponto $x \in X$ se dada $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\lambda_0 \in I$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Neste caso escreveremos $x_\lambda \to x$.

É claro que a definição em (b) não muda se trocamos o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ por qualquer base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$.

13.4. Exemplos. Seja X um espaço topológico.

(a) Qualquer seqüência em X é uma rede, e a convergência de redes generaliza a convergência de seqüências.

(b) Seja $x \in X$. Se escolhemos $x_U \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$, então $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ é uma rede em X que converge a x.

(c) Seja $x \in X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x. Se escolhemos $x_U \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$, então $(x_U)_{U \in \mathcal{B}_x}$ é uma rede em X que converge a x.

Notemos que, nos Exemplos 13.4(b) e 13.4(c) estamos usando a Proposição 9.3, ou seja o axioma da escolha.

O resultado seguinte generaliza a Proposição 12.2.

13.5. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e sejam $A \subset X$ e $x \in X$. Tem-se que $x \in \overline{A}$ se e só se existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$ que converge a x.*

Demonstração. Pela Proposição 5.8, $x \in \overline{A}$ se e só se $U \cap A \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$.

($\Rightarrow$) Se $x \in \overline{A}$, podemos escolher $x_U \in U \cap A$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$. Então a rede $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ está contida em A e converge a x.

($\Leftarrow$) Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em A que converge a x. Dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Em particular $x_{\lambda_0} \in U \cap A$. Segue que $x \in \overline{A}$.

O resultado seguinte generaliza a Proposição 12.4.

13.6. Proposição. *Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços topológicos. Então f é contínua num ponto $x \in X$ se e só se, para cada rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a x em X, a rede $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x)$ em Y.*

Demonstração. Pela Proposição 8.2, f é contínua em x se e só se, dado $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset V$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que f seja contínua em x. Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X que converge a x. Então, dada $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset V$. Seja $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Então $f(x_\lambda) \in f(U) \subset V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Logo $f(x_\lambda) \to f(x)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que f não seja contínua em x. Então existe $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ tal que $f(U) \not\subset V$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$. Se escolhemos $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$, então $x_U \to x$, mas $f(x_U) \not\to f(x)$.

13.7. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e seja $X = \prod_{i\in I} X_i$. Então uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x em X se e só se a rede $(\pi_i(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\pi_i(x)$ em X_i para cada $i \in I$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $x_\lambda \to x$ em X, então $\pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x)$ em X_i, para cada $i \in I$, pois cada π_i é contínua.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x)$ para cada $i \in I$. Seja U uma vizinhança aberta básica de x em X, ou seja

$$x \in U = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j), \quad \text{com} \quad J \quad \text{finito}, \quad U_j \quad \text{aberto em} \quad X_j.$$

Para cada $j \in J$ $\pi_j(x) \in U_j$. Logo existe $\lambda_j \in \Lambda$ tal que

$$\pi_j(x_\lambda) \in U_j \quad \text{para todo} \quad \lambda \geq \lambda_j.$$

Como Λ é um conjunto dirigido existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \geq \lambda_j$ para cada $j \in J$. Segue que

$$x_\lambda \in \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) \quad \text{para todo} \quad \lambda \geq \lambda_0.$$

Logo $x_\lambda \to x$.

13.8. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Diremos que $x \in X$ é um *ponto de acumulação* de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ se dados $U \in \mathcal{U}_x$ e $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq \lambda_0$, tal que $x_\lambda \in U$.

Se $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x, é claro que x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

13.9. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $x : \Lambda \to X$ uma rede em X. Chamaremos de *subrede* de $x : \Lambda \to X$ qualquer rede da forma $x \circ \phi : M \to X$, sendo M um conjunto dirigido, e sendo $\phi : M \to \Lambda$ uma função com as seguintes propriedades:

(a) $\mu_1 \leq \mu_2$ implica $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$ (ϕ é *crescente*);

(b) dado $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\phi(\mu) \geq \lambda$ (ϕ é *cofinal*).

A subrede $x \circ \phi : M \to X$ será denotada por $(x_{\phi(\mu)})_{\mu \in M}$.

13.10. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Então $x \in X$ é um ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ se e só se existe uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a x.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a x. Sejam $U \in \mathcal{U}_x$ e $\lambda_0 \in \Lambda$ dados. Por um lado existe $\mu_1 \in M$ tal que $\phi(\mu_1) \geq \lambda_0$. Por outro lado existe $\mu_2 \in M$ tal que $x_{\phi(\mu)} \in U$ para todo $\mu \geq \mu_2$. Seja $\mu \in M$ tal que $\mu \geq \mu_1$ e $\mu \geq \mu_2$. Segue que $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_1) \geq \lambda_0$ e $x_{\phi(\mu)} \in U$. Logo x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

($\Rightarrow$) Seja x um ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Seja

$$M = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times \mathcal{U}_x : x_\lambda \in U\}.$$

Definamos $(\lambda_1, U_1) \leq (\lambda_2, U_2)$ se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $U_1 \supset U_2$. Claramente M é um conjunto dirigido. Definamos $\phi : M \to \Lambda$ por $\phi(\lambda, U) = \lambda$. Claramente $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ é uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Provaremos que $x_{\phi(\mu)} \to x$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}_x$. Como x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_0} \in U$. Então $(\lambda_0, U_0) \in M$ e é claro que $x_\lambda \in U_0$ para todo $(\lambda, U) \in M$ tal que $(\lambda, U) \geq (\lambda_0, U_0)$. Ou seja $x_{\phi(\mu)} \to x$.

13.11. Definição. Diremos que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em X é uma *rede universal* ou *ultrarede* se dado $A \subset X$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subset A \quad \text{ou} \quad \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subset X \setminus A.$$

É claro que toda rede constante é uma rede universal, chamada de *rede universal trivial.*

13.12. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede universal em X. Se x é um ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, então $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{U}_x$. Como $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é rede universal, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subset U \quad \text{ou} \quad \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subset X \setminus U.$$

Como x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$. Segue que

$$\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \subset U.$$

Logo $x_\lambda \to x$.

Exercícios

13.A. Se uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x, prove que qualquer subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ também converge a x.

13.B. Se x é ponto de acumulação de uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, prove que x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

13.C. Seja x um ponto de acumulação de uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ no produto $X = \prod_{i\in I} X_i$. Prove que $\pi_i(x)$ é ponto de acumulação da rede $(\pi_i(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ em X_i para cada $i \in I$.

13.D. Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X, e seja $x \in X$. Se cada subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admite uma subrede que converge a x, prove que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x.

13.E. Prove que cada subrede de uma rede universal é uma rede universal.

13.F. Seja $f : X \to Y$. Se $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede universal em X, prove que $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede universal em Y.

14. O lema de Zorn e o teorema de Zermelo

14.1. Definição. Chamaremos de *relação de ordem parcial* num conjunto X uma relação $\leq$ em X com as seguintes propriedades:

(a) $x \leq x$ para todo $x \in X$ ($\leq$ é reflexiva);

(b) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ ($\leq$ é antisimétrica);

(c) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ ($\leq$ é transitiva).

Neste caso diremos que X é um *conjunto parcialmente ordenado*.

Diremos que $\leq$ é uma *relação de ordem total* se além de verificar (a), (b) e (c), também verifica

(d) dados $x, y \in X$, tem-se que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Neste caso diremos que X é um *conjunto totalmente ordenado*.

14.2. Exemplos.

(a) Se X é um conjunto, então a relação de inclusão é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}(X)$.

(b) A relação de ordem usual em $\mathbf{R}$ é uma relação de ordem total.

14.3. Definição. Seja X um conjunto parcialmente ordenado, e seja $A \subset X$.

(a) Se existir $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$, diremos que a_0 é o *elemento mínimo* de A. De maneira análoga definimos *elemento máximo*.

(b) Se existir $a_0 \in A$ tal que $a = a_0$ sempre que $a \in A$ e $a \leq a_0$, diremos que a_0 é um *elemento minimal* de A. De maneira análoga definimos *elemento minimal.*

(c) Se existir $c \in X$ tal que $c \leq a$ para todo $a \in A$, diremos que A é *limitado inferiormente* e que c é uma *cota inferior* de A. De maneira análoga definimos conjunto *limitado superiormente* e *cota superior*.

(d) Diremos que A é uma *cadéia* em X se A é totalmente ordenado sob a relação de ordem parcial induzida por X.

(e) Diremos que A é *bem ordenado* se cada subconjunto não vazio de A possui um elemento mínimo.

14.4. Exemplos.

(a) $\mathbf{N}$, com a ordem usual, é um conjunto bem ordenado.

(b) $\mathbf{R}$, com a ordem usual, é um conjunto totalmente ordenado, que não é bem ordenado: o intervalo aberto (a, b) não possui elemento mínimo.

14.5. Lema de Zorn. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadéia em X é limitada superiormente. Então X possui pelo menos um elemento maximal.*

14.6. Teorema de Zermelo. *Cada conjunto não vazio pode ser bem ordenado.*

14.7. Teorema. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) O axioma da escolha.
(b) O lema de Zorn.
(c) O teorema de Zermelo.

Demonstração. $(b) \Rightarrow (c)$: Seja X um conjunto não vazio. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os pares $(A, \leq_A)$ tais que $\emptyset \neq A \subset X$ e $(A, \leq_A)$ é um conjunto bem ordenado. É fácil verificar que $\mathcal{F}$ é um conjunto parcialmente ordenado não vazio se definimos $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ quando:

(i) $A \subset B$;

(ii) se $x, y \in A$, então $x \leq_A y$ se e só se $x \leq_B y$;

(iii) se $x \in A$ e $y \in B \setminus A$, então $x \leq_B y$.

Provaremos que cada cadéia em $\mathcal{F}$ é limitada superiormente. De fato, seja $\{(A_i, \leq_{A_i}) : i \in I\}$ uma cadéia em $\mathcal{F}$, e seja $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Dados $x, y \in A$ definamos $x \leq_A y$ se $x, y \in A_i$ e $x \leq_{A_i} y$. É fácil verificar que a relação $\leq_A$ está bem definida, e é uma relação de ordem parcial em A. Afirmamos que $(A, \leq_A)$ é um conjunto bem ordenado. Seja $\emptyset \neq B \subset A$, e seja

$$J = \{j \in I : B \cap A_j \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $\leq_A$ coincide com $\leq_{A_i}$ em A_i para cada $i \in I$. Como $(A_i, \leq_{A_i})$ é bem ordenado para cada $i \in I$, segue que todos os conjuntos $B \cap A_j$, com $j \in J$, tem o mesmo elemento mínimo, que denotaremos por b_0. Segue que b_0 é o elemento mínimo de B. Logo $(A, \leq_A)$ é bem ordenado, ou seja pertence a $\mathcal{F}$. Agora é claro que $(A, \leq_A)$ é uma cota superior da cadéia $\{(A_i, \leq_{A_i}) : i \in I\}$.

Pelo lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui pelo menos um elemento maximal $(A, \leq_A)$. Segue da maximalidade de $(A, \leq_A)$ que $A = X$. Logo $(X, \leq_X)$ é um conjunto bem ordenado.

$(c) \Rightarrow (a)$: Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Pelo teorema de Zermelo, existe uma boa ordenação para $\bigcup_{i \in I} X_i$. Para cada $i \in I$ seja $f(i)$ o elemento mínimo de X_i. Então $f \in \prod_{i \in I} X_i$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Esta é a implicação mais difícil de provar. Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio no qual cada cadéia é limitada superiormente.

Seja $\mathcal{X}$ a família de todas as cadéias de X. Então $\mathcal{X}$ é um conjunto parcialmente ordenado não vazio, por inclusão de conjuntos.

A estratégia da demonstração é trabalhar com a família de conjuntos $\mathcal{X}$, que é parcialmente ordenada por inclusão, em lugar de trabalhar com o conjunto parcialmente ordenado abstrato X. Depois de provar que $\mathcal{X}$ possui um elemento maximal, será fácil provar que X possui um elemento maximal.

O primeiro passo é caracterizar os elementos maximais de $\mathcal{X}$. Para cada $C \in \mathcal{X}$ seja

$$\hat{C} = \{x \in X : C \cup \{x\} \in \mathcal{X}\}.$$

É claro que $C \subset \hat{C}$. Além disso, C é maximal em $\mathcal{X}$ se e só se $C = \hat{C}$.

Pelo axioma da escolha, existe uma função $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

Seja $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definida por:

$$g(C) = C \qquad \text{se} \quad C = \hat{C},$$

$$g(C) = C \cup \{f(\hat{C} \setminus C)\} \qquad \text{se} \quad C \neq \hat{C}.$$

A função g está bem definida, pois se $C \neq \hat{C}$, então $f(\hat{C} \setminus C) \in \hat{C} \setminus C$, e portanto $C \cup \{f(\hat{C} \setminus C)\} \in \mathcal{X}$. Além disso, C é maximal em $\mathcal{X}$ se e só se $g(C) = C$.

Diremos que uma família $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$ é uma *torre* se:
(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$;
(ii) se $C \in \mathcal{T}$, então $g(C) \in \mathcal{T}$;
(iii) se $\mathcal{C}$ é uma cadéia em $\mathcal{T}$, então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$.

É claro que $\mathcal{X}$ é uma torre. É claro que a interseção de uma família de torres é uma torre. Seja $\mathcal{T}_0$ a interseção de todas as torres de $\mathcal{X}$. Então $\mathcal{T}_0$ é a menor torre de $\mathcal{X}$. Nosso próximo objetivo é provar que $\mathcal{T}_0$ é uma cadéia em $\mathcal{X}$. Isto vai nos dar muito trabalho.

Diremos que $C \in \mathcal{T}_0$ é *comparável* se dado $D \in \mathcal{T}_0$, tem-se que $C \subset D$ ou $D \subset C$.

Para provar que $\mathcal{T}_0$ é cadéia, basta provar que cada $C \in \mathcal{T}_0$ é comparável.

Para provar que cada $C \in \mathcal{T}_0$ é comparável, basta provar que os conjuntos comparáveis em $\mathcal{T}_0$ formam uma torre.

É claro que $\emptyset$ é comparável. É claro também que se $\mathcal{C}$ é uma cadéia de conjuntos comparáveis, então $\bigcup \mathcal{C}$ é comparável. O mais difícil vai ser provar que se C é comparável, então $g(C)$ é comparável também.

Fixemos $C \in \mathcal{T}_0$, C comparável.

Afirmamos que se $D \in \mathcal{T}_0$ e $D \subset C$, $D \neq C$, então $g(D) \subset C$. Como $\mathcal{T}_0$ é torre, $g(D) \in \mathcal{T}_0$. Como C é comparável, tem-se que $g(D) \subset C$ ou $C \subset g(D)$, $C \neq g(D)$. Mas $C \subset g(D)$, $C \neq g(D)$ é impossível, pois $D \subset C$, $D \neq C$ e $g(D) = D$ ou $g(D) = D \cup \{x\}$.

Seja

$$\mathcal{U} = \{D \in \mathcal{T}_0 : D \subset C \quad \text{ou} \quad g(C) \subset D\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{U}$ é uma torre. É claro que $\emptyset \in \mathcal{U}$. É claro também que se $\mathcal{D}$ é uma cadéia em $\mathcal{U}$, então $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{U}$. Falta provar que se $D \in \mathcal{U}$, então $g(D) \in \mathcal{U}$. Há tres possibilidades:

(i) $D \subset C$, $D \neq C$. Neste caso já sabemos que $g(D) \subset C$, e portanto $g(D) \in \mathcal{U}$.
(ii) $D = C$. Neste caso $g(D) = g(C)$, e portanto $g(D) \in \mathcal{U}$.
(iii) $g(C) \subset D$. Neste caso $g(D) \supset D \supset g(C)$, e portanto $g(D) \in \mathcal{U}$.

Como $\mathcal{U}$ é torre e $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_0$, segue que $\mathcal{U} = \mathcal{T}_0$. Logo, dado $D \in \mathcal{T}_0 = \mathcal{U}$, tem-se que $D \subset C \subset g(C)$ ou $g(C) \subset D$. Logo $g(C)$ é comparável.

Temos provado assim que os conjuntos comparáveis de $\mathcal{T}_0$ formam uma torre. Segue que cada $C \in \mathcal{T}_0$ é comparável, e dai $\mathcal{T}_0$ é uma cadéia em $\mathcal{X}$.

Como $\mathcal{T}_0$ é torre, temos que $C_0 := \bigcup \mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_0$. Como $\mathcal{T}_0$ é torre, temos que $g(C_0) \in \mathcal{T}_0$, e portanto $g(C_0) = C_0$. Logo C_0 é maximal em $\mathcal{X}$.

Por hipótese existe $m \in X$ tal que $c \leq m$ para todo $c \in C_0$. Como C_0 é uma cadéia maximal, é claro que $m \in C_0$.

Afirmamos que m é um elemento maximal em X. De fato seja $n \in X$, com $m \leq n$. Como C_0 é uma cadéia maximal, segue que $n \in C_0$. Logo $n \leq m$, e portanto $n = m$. Isto completa a demonstração.

Exercícios.

14.A. Seja $X = \{n \in \mathbf{N} : n \geq 2\}$. Dados $m, n \in X$, definamos $m \leq n$ se m divide n.

(a) Prove que $\leq$ é uma relaçãp de ordem parcial em X.

(b) Prove que, dada uma cadéia $C \subset X$ e um elemento $n \in C$, existe apenas um número finito de elementos $n_1, ..., n_k \in C$ que dividem n.

(c) Prove que cada cadéia $C \subset X$ é limitada inferiormente.

(d) Identifique os elementos minimais de X.

14.B. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado com pelo menos dois elementos. Dados $x, y \in X$, escreveremos $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

(a) Prove que os conjuntos $\{x \in X : a < x\}$, com $a \in X$, junto com os conjuntos $\{x \in X : x < b\}$, com $b \in X$, formam uma sub-base para uma topologia em X, chamada de *topologia da ordem*.

(b) Prove que a topologia usual em $\mathbf{R}$ coincide com a topologia da ordem usual em $\mathbf{R}$.

14.C. Seja E um espaço vetorial, $E \neq \{0\}$. Usando o lema de Zorn prove que cada subconjunto linearmente independente de E está contido em alguma base de E.

14.D. Sejam E e F espaços vetoriais sobre o mesmo corpo, seja E_0 um subespaço vetorial de E, e seja $T_0 : E_0 \to F$ uma aplicação linear. Use o lema de Zorn para provar a existência de uma aplicação linear $T : E \to F$ tal que $Tx = T_0 x$ para todo $x \in E_0$.

14.E. Seja A um anel comutativo com elemento unidade. Um conjunto $I \subset A$ é chamado de *ideal* se verifica as seguintes condições:

(a) $x - y \in I$ para todo $x, y \in I$;

(b) $xy \in I$ para todo $x \in I$, $y \in A$.

Um ideal $I \neq A$ é chamado de *ideal próprio*. Um ideal próprio que não está contido em nenhum outro ideal próprio é chamado de *ideal maximal*. Use o lema de Zorn para provar que cada ideal próprio de A está contido em algum ideal maximal.

15. Convergência de filtros

15.1. Definição. Seja X um conjunto não vazio. Diremos que uma família não vazia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ é um *filtro* em X se verifica as seguintes condições:
(a) $A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$;
(b) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;
(c) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \subset X$, então $B \in \mathcal{F}$.

15.2. Definição. Seja X um conjunto não vazio. Diremos que uma família não vazia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma *base de filtro* em X se a família

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \supset B \ \text{ para algum } \ B \in \mathcal{B}\}$$

é um filtro em X. Neste caso diremos que $\mathcal{F}$ é o *filtro gerado por* $\mathcal{B}$.

É claro que todo filtro em X é uma base de filtro em X.

15.3. Proposição. *Seja X um conjunto não vazio. Uma família não vazia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma base de filtro em X se e só se se verificam as seguintes condições:*
(a) $A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{B}$;
(b) dados $A, B \in \mathcal{B}$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que a família

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \supset B \ \text{ para algum } \ B \in \mathcal{B}\}$$

seja um filtro em X. É claro que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, e portanto (a) vale. Para provar (b) sejam $A, B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Então $A \cap B \in \mathcal{F}$, e dai $A \cap B \supset C$ para algum $C \in \mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Supondo (a) e (b) queremos provar que a família

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A \supset B \ \text{ para algum } \ B \in \mathcal{B}\}$$

é um filtro em X.
Seja $A \in \mathcal{F}$. Então $A \supset B$ para algum $B \in \mathcal{B}$. Como $B \neq \emptyset$, segue que $A \neq \emptyset$.
Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Então $A_1 \supset B_1$ e $A_2 \supset B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Segue que $A_1 \cap A_2 \supset B_1 \cap B_2 \supset B_3$, e portanto $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.
Finalmente sejam $A_1 \in \mathcal{F}$ e $A_1 \subset A_2 \subset X$. $A_1 \supset B_1$ para algum $B_1 \in \mathcal{B}$. Segue que $A_2 \supset A_1 \supset B_1$, e portanto $A_2 \in \mathcal{F}$.

15.4. Exemplos.
(a) Seja X um conjunto, seja $\emptyset \neq B \subset X$, e seja $\mathcal{B} = \{B\}$. É claro que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X. O filtro gerado por $\mathcal{B}$ é a família $\mathcal{F} = \{A : B \subset A \subset X\}$.

(b) Seja X um espaço topológico, e seja $x \in X$. Então o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ é um filtro em X. Qualquer base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ é uma base de filtro em X que gera o filtro $\mathcal{U}_x$.

(c) A família $\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbf{R}\}$ é uma base de filtro em $\mathbf{R}$.

15.5. Definição. Uma base de filtro $\mathcal{B}$ em X é dita *fixa* se $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$, e *livre* se $\bigcap \mathcal{B} = \emptyset$.

Seja $\mathcal{F}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. É claro que $\mathcal{F}$ é fixo se e só se $\mathcal{B}$ é fixa.
Os filtros ou bases de filtro dos Exemplos 15.4 (a) e 15.4 (b) são fixos. A base de filtro do Exemplo 15.4 (c) é livre.

15.6. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X. Diremos que $\mathcal{B}$ *converge* a um ponto $x \in X$, e escreveremos $\mathcal{B} \to x$, se dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$.

É claro que um filtro $\mathcal{F}$ converge a x se e só se $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. É claro também que uma base de filtro $\mathcal{B}$ converge a x se e só se o filtro gerado por $\mathcal{B}$ converge a x.

Trabalhar com filtros ou com bases de filtro é equivalente. Em geral, escolheremos um ou outro, de maneira que os enunciados fiquem mais simples.

15.7. Exemplos. Seja X um espaço topológico, e seja $x \in X$. Então o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ converge a x. Qualquer base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ converge a x.

15.8. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e sejam $E \subset X$ e $x \in X$. Tem-se que $x \in \overline{E}$ se e só se existe um filtro $\mathcal{F}$ em X tal que $E \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \to x$.*

Demonstraç ão. Sabemos que $x \in \overline{E}$ se e só se $U \cap E \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$.
($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{F}$ um filtro em X tal que $E \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \to x$. Como $\mathcal{F} \to x$, tem-se que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. Segue que $U \cap E \in \mathcal{F}$, e portanto $U \cap E \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$. Logo $x \in \overline{E}$.
($\Rightarrow$) Suponhamos que $x \in \overline{E}$. Seja

$$\mathcal{B} = \{U \cap E : U \in \mathcal{U}_x\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X, e que $\mathcal{B} \to x$. Seja $\mathcal{F}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. É claro que $E \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \to x$.

15.9. Proposição. *Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X, e seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Então a família*

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base de filtro em Y.

Demonstração: exercício.

15.10. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$. Então f é contínua num ponto $x \in X$ se e só se $f(\mathcal{B}) \to f(x)$ para cada base de filtro $\mathcal{B}$ em X que converge a x.*

Demonstração. Sabemos que f é contínua em x se e só se, dado $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset V$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que f seja contínua em x, e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X que converge a x. Dada $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset V$. Como $\mathcal{B} \to x$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$. Segue que $f(B) \subset f(U) \subset V$, e portanto $f(\mathcal{B}) \to f(x)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $f(\mathcal{B}) \to f(x)$ para cada base de filtro $\mathcal{B}$ que converge a x. Como em particular $\mathcal{U}_x \to x$, tem-se que $f(\mathcal{U}_x) \to f(x)$. Logo, dada $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subset V$. Logo f é contínua em x.

15.11. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, seja $X = \prod_{i \in I} X_i$, e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X. Então $\mathcal{B}$ converge a x em X se e só se $\pi_i(\mathcal{B})$ converge a $\pi_i(x)$ em X_i para cada $i \in I$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{B} \to x$ em X, então $\pi_i(\mathcal{B}) \to \pi_i(x)$ em X_i, para cada $i \in I$, pois cada π_i é contínua.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\pi_i(\mathcal{B}) \to \pi_i(x)$ em X_i para cada $i \in I$. Seja U uma vizinhança aberta básica de x em X, ou seja

$$x \in U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j), \quad \text{com} \quad J \quad \text{finito}, \quad U_j \quad \text{aberto em} \quad X_j.$$

Como $\pi_j(\mathcal{B}) \to \pi_j(x)$, existe $B_j \in \mathcal{B}$ tal que $\pi_j(B_j) \subset U_j$, para cada $j \in J$. Seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset \bigcap_{j \in J} B_j$. Então

$$B \subset \bigcap_{j \in J} B_j \subset \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) = U.$$

Logo $\mathcal{B} \to x$.

15.12. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X. Diremos que $x \in X$ é um *ponto de acumulação* de $\mathcal{B}$ se $U \cap B \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $B \in \mathcal{B}$, ou seja se $x \in \bigcap\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$.

Se $\mathcal{B}$ converge a x, é claro que x é ponto de acumulação de $\mathcal{B}$. É claro que x é ponto de acumulação de $\mathcal{B}$ se e só se x é ponto de acumulação do filtro gerado por $\mathcal{B}$.

15.13. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e seja $\mathcal{F}$ um filtro em X. Então x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$ se e só se existe um filtro $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ que converge a x.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{G}$ um filtro em X tal que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ e $\mathcal{G} \to x$. Então $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{G}$, e dai segue que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $A \in \mathcal{F}$. Logo x é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que x seja ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. Seja

$$\mathcal{B} = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}_x, A \in \mathcal{F}\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X que converge a x. Seja $\mathcal{G}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. É claro que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ e $\mathcal{G} \to x$.

15.14. Definição. Diremos que $\mathcal{F}$ é um *ultrafiltro* em X se $\mathcal{F}$ é um filtro maximal em X, ou seja, cada vez que existir um filtro $\mathcal{G}$ em X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, tem-se que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

15.15. Proposição. *Um filtro $\mathcal{F}$ em X é um ultrafiltro se e só se, dado $E \subset X$, tem-se que $E \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus E \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos que, dado $E \subset X$, tem-se que $E \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus E \in \mathcal{F}$. Suponhamos que exista um filtro $\mathcal{G}$ em X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Seja $E \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Segue que $X \setminus E \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Logo $\emptyset = E \cap (X \setminus E) \in \mathcal{G}$, absurdo.

($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro em X, e seja $E \subset X$. Dado $A \in \mathcal{F}$, é claro que $A \cap E \neq \emptyset$ ou $A \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. Consideremos dois casos.

Primeiro suponhamos que $A \cap E \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Seja

$$\mathcal{B} = \{A \cap E : A \in \mathcal{F}\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X. Seja $\mathcal{G}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. É claro que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ e $E \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ é ultrafiltro, tem-se que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Segue que $E \in \mathcal{F}$.

A seguir suponhamos que $A_0 \cap E = \emptyset$ para algum $A_0 \in \mathcal{F}$. Então $A_0 \subset X \setminus E$, e segue que $X \setminus E \in \mathcal{F}$.

15.16. Proposição. *Seja X um espaço topológico, e seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro em X. Se x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ converge a x.*

Demonstração. Suponhamos que x seja ponto de acumulação de $\mathcal{F}$, ou seja $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $A \in \mathcal{F}$.

Afirmamos que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. De fato, suponhamos que exista $U \in \mathcal{U}_x$, com $U \notin \mathcal{F}$. Teriamos que $X \setminus U \in \mathcal{F}$, e portanto $U \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, absurdo. Logo $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$, e portanto $\mathcal{F} \to x$.

15.17. Proposição. *Cada filtro em X está contido em algum ultrafiltro.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ a família de todos os filtros $\mathcal{G}$ em X tais que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$. $\mathcal{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado por inclusão de conjuntos. Seja $\{\mathcal{G}_i : i \in I\}$ uma cadéia em $\mathcal{P}$. É claro que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i$ é um filtro em X, e é portanto uma cota superior para a cadéia $\{\mathcal{G}_i : i \in I\}$. Pelo lema de Zorn $\mathcal{P}$ possui pelo menos um elemento maximal $\mathcal{G}$. Segue que $\mathcal{G}$ é um ultrafiltro em X que contém $\mathcal{F}$.

Exercícios

15.A. Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X e seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Prove que a família

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base de filtro em Y.

15.B. Seja $\mathcal{A}$ uma base de filtro em X e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em Y.
(a) Prove que a família

$$\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base de filtro em $X \times Y$.
(b) Prove que $\mathcal{C} \to (x, y)$ se e só se $\mathcal{A} \to x$ e $\mathcal{B} \to y$.

15.C. Seja
$$\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbf{R}\}.$$
Pelo Exercício 6.D $\mathcal{B}$ é base para uma topologia τ em $\mathbf{R}$. Pelo Exemplo 15.4 $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em $\mathbf{R}$. Prove que $\mathcal{B} \to x$ para cada $x \in \mathbf{R}$.

15.D. Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita do Exercício 3.C. Seja
$$\mathcal{G} = \{A \subset X : X \setminus A \ \text{ é finito}\}.$$
(a) Prove que $\mathcal{G}$ é um filtro em X.
(b) Prove que $\mathcal{G} \to x$ para cada $x \in X$.

15.E. Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X, e seja $\mathcal{B} = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, onde $B_\lambda = \{x_\mu : \mu \geq \lambda\}$ para cada $\lambda \in \Lambda$.
(a) Prove que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X, que chamaremos de *base de filtro gerada por* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
(b) Prove que $x_\lambda \to x$ se e só se $\mathcal{B} \to x$.
(c) Prove que x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ se e só se x é ponto de acumulação de $\mathcal{B}$.
(d) Prove que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma rede universal se e só se o filtro gerado por $\mathcal{B}$ é um ultrafiltro.

15.F. Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X, e seja

$$\Lambda = \{(a, A) : a \in A \in \mathcal{B}\}.$$

(a) Prove que Λ é um conjunto dirigido se definimos $(a, A) \leq (b, B)$ quando $A \supset B$. A rede $x : \Lambda \to X$ definida por $x(a, A) = a$ é chamada de *rede gerada por* $\mathcal{B}$, e é denotada por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
(b) Prove que $\mathcal{B} \to x$ se e só se $x_\lambda \to x$.
(c) Prove que x é ponto de acumulação de $\mathcal{B}$ se e só se x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
(d) Prove que o filtro gerado por $\mathcal{B}$ é um ultrafiltro se e só se $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma rede universal.

16. Espaços de Hausdorff

16.1. Definição. Diremos que um espaço topológico X é um *espaço* T_0 se dados dois pontos distintos em X, existe uma vizinhança de um deles que não contém o outro.

16.2. Exemplos.
(a) Cada espaço topológico discreto é um espaço T_0.
(b) Seja X um espaço topológico trivial, com pelo menos dois pontos. Então X não é um espaço T_0.

16.3. Proposição. *Um espaço topológico X é um espaço T_0 se e só se, dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, tem-se que $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja X um espaço T_0, e sejam $a, b \in X$, $a \neq b$. Se existir $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $b \notin U$, então $a \in \overline{\{a\}}$, mas $a \notin \overline{\{b\}}$. Se existir $V \in \mathcal{U}_b$ tal que $a \notin V$, então $b \in \overline{\{b\}}$, mas $b \notin \overline{\{a\}}$. Em ambos casos $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que X não seja um espaço T_0. Então existem $a, b \in X$, com $a \neq b$, tais que $b \in U$ para cada $U \in \mathcal{U}_a$, e $a \in V$ para cada $V \in \mathcal{U}_b$. Logo $a \in \overline{\{b\}}$ e $b \in \overline{\{a\}}$. Segue que $\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}}$.

16.4. Definição. Diremos que um espaço topológico X é um *espaço* T_1 se dados dois pontos distintos em X, existe uma vizinhança de cada um deles que não contém o outro.

É claro que cada espaço T_1 é um espaço T_0.

16.5. Exemplos.
(a) Cada espaço topológico discreto é um espaço T_1.
(b) O espaço de Sierpinski é um espaço T_0, mas não é um espaço T_1.

16.6. Proposição. *Um espaço topológico X é um espaço T_1 se e só se cada subconjunto unitário de X é fechado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja X um espaço T_1, e seja $a \in X$. Para cada $b \in X$, com $b \neq a$, existe $V \in \mathcal{U}_b$ tal que $a \notin V$. Segue que $X \setminus \{a\}$ é aberto, ou seja $\{a\}$ é fechado.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\{a\}$ seja fechado para cada $a \in X$. Dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, sejam $U = X \setminus \{b\}$ e $V = X \setminus \{a\}$. Então U e V são abertos, $a \in U$, $b \notin U$, $b \in V$, $a \notin V$.

16.7. Definição. Diremos que um espaço topológico X é um *espaço de Hausdorff* ou um *espaço* T_2 se dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, existem $U \in \mathcal{U}_a$ e $V \in \mathcal{U}_b$, com $U \cap V = \emptyset$.

É claro que cada espaço T_2 é um espaço T_1.

16.8. Exemplos.
(a) Cada espaço topológico discreto é um espaço de Hausdorff.
(b) Cada espaço métrico é um espaço de Hausdorff.

(c) Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita. Então X é um espaço T_1, mas não é um espaço T_2. Deixamos a demonstração como exercício.

16.9. Proposição. *Para um espaço topológico X as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X é Hausdorff.

(b) Cada rede convergente em X tem um limite único.

(c) Cada filtro convergente em X tem um limite único.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Suponhamos que X seja Hausdorff, e seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X que converge a x e a y, com $x \neq y$. Sejam $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$, com $U \cap V = \emptyset$. Como $x_\lambda \to x$, existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$. Como $x_\lambda \to y$, existe $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_2$. Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_1$ e $\lambda \geq \lambda_2$. Então $x_\lambda \in U \cap V$, contradição.

$(b) \Rightarrow (a)$: Suponhamos que X não seja Hausdorff. Então existem $x, y \in X$, com $x \neq y$, tais que $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$. Seja $x_{UV} \in U \cap V$ para cada $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$. Segue que $(x_{UV})_{(U,V) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y}$ é uma rede em X que converge a x e a y, com $x \neq y$.

$(a) \Rightarrow (c)$: Suponhamos que X seja Hausdorff, e seja $\mathcal{F}$ um filtro em X que converge a x e a y, com $x \neq y$. Sejam $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$, com $U \cap V = \emptyset$. Como $\mathcal{F} \to x$, tem-se que $U \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \to y$, tem-se que $V \in \mathcal{U}_y \subset \mathcal{F}$. Logo $U \cap V \in \mathcal{F}$, absurdo, pois $U \cap V = \emptyset$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Suponhamos que X não seja Hausdorff. Então existem $x, y \in X$, com $x \neq y$, tais que $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$. Seja

$$\mathcal{B} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}_x, \quad V \in \mathcal{U}_y\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X. Seja $\mathcal{F}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. É claro que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ e $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{F}$. Logo $\mathcal{F}$ converge a x e a y, com $x \neq y$.

16.10. Proposição. *Cada subespaço de um espaço de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Seja X um espaço de Hausdorff, e seja S um subespaço de X. Sejam $a, b \in S$, com $a \neq b$. Como X é Hausdorff, existem abertos U_1 e V_1 em X tais que $a \in U_1$, $b \in V_1$ e $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Sejam $U = S \cap U_1$ e $V = S \cap V_1$. Então U e V são abertos em S, $a \in U$, $b \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

16.11. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é Hausdorff se e só se cada X_i é Hausdorff.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Esta implicação segue da Proposição 16.10 e do Exercício 10.C.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que cada X_i seja Hausdorff, e sejam $a, b \in X$, com $a \neq b$. Escrevamos $a = (a_i)_{i \in I}$, $b = (b_i)_{i \in I}$. Como $a \neq b$, existe $i \in I$ tal que $a_i \neq b_i$. Como X_i é Hausdorff, existem abertos U_i e V_i em X_i tais que $a_i \in U_i$, $b_i \in V_i$ e

$U_i \cap V_i = \emptyset$. Sejam $U = \pi_i^{-1}(U_i)$ e $V = \pi_i^{-1}(V_i)$. Então U e V são abertos em X, $a \in U$, $b \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

16.12. Proposição. *Sejam X e Y espaços topológicos, com Y Hausdorff. Sejam f e g duas funções contínuas de X em Y tais que $f(x) = g(x)$ para todo x num subconjunto denso $D \subset X$. Então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Como $X = \overline{D}$, para cada $x \in X$, existe uma rede $(x_i)_{i\in I} \subset D$ tal que $x_i \to x$. Como f e g são contínuas, segue que $f(x_i) \to f(x)$ e $g(x_i) \to g(x)$. Como $f(x_i) = g(x_i)$ para todo $i \in I$, e Y é Hausdorff, a Proposição 16.9 garante que $f(x) = g(x)$.

Exercícios

16.A. Seja $X = \mathbf{N}$, com a topologia do Exercício 4.F. Prove que X é um espaço T_0, mas não é um espaço T_1.

16.B. Prove que cada subespaço de um espaço T_0 (resp. T_1) é um espaço T_0 (resp. T_1).

16.C. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Prove que o produto $X = \prod_{i\in I} X_i$ é um espaço T_0 (resp. T_1) se e só se cada X_i é um espaço T_0 (resp. T_1).

16.D. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva e fechada. Prove que se X é um espaço T_1, então Y também é um espaço T_1.

16.E. Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita. Prove que X é um espaço T_1, mas não é um espaço T_2.

16.F. Seja X um espaço de Hausdorff. Dados n pontos distintos $x_1, ..., x_n \in X$, prove que existem n abertos disjuntos $U_1, ..., U_n \subset X$ tais que $x_j \in U_j$ para $j = 1, ..., n$.

16.G. Seja X um espaço topológico.

(a) Prove que X é um espaço T_1 se e só se, para cada $a \in X$ tem-se que $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}_a\} = \{a\}$.

(b) Prove que X é um espaço T_2 se e só se, para cada $a \in X$ tem-se que $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}_a\} = \{a\}$.

16.H. Prove que um espaço topológico X é Hausdorff se e só se o conjunto $D = \{(x, x) : x \in X\}$ é fechado em $X \times X$.

16.I. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y Hausdorff. Sejam f e g duas funções contínuas de X em Y.

(a) Prove que o conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.

(b) Use (a) para dar outra demonstração da Proposição 16.12.

17. Espaços regulares

17.1. Definição. Diremos que um espaço topológico X é *regular* se dados um fechado A em X e um ponto $b \notin A$, existem abertos disjuntos U, V em X tais que $A \subset U$ e $b \in V$. Diremos que X é um *espaço* T_3 se X é um espaço T_1 que é regular.

É claro que cada espaço T_3 é um espaço T_2.

17.2. Exemplos.
(a) Cada espaço discreto é um espaço T_3.

(b) Cada espaço métrico é um espaço T_3. A demonstração é deixada como exercício.

(c) Seja X um espaço topológico trivial, com pelo menos dois pontos. Então X é regular, mas não é um espaço T_3.

(d) O espaço de Sierspinski não é regular. A demonstração é deixada como exercício.

17.3. Proposição. *Para um espaço topológico X as seguintes condições são equivalentes:*
(a) X é regular.
(b) Dados um aberto $U \subset X$ e um ponto $a \in U$, existe um aberto $V \subset X$ tal que $a \in V \subset \overline{V} \subset U$.
(c) Cada ponto de X admite uma base de vizinhanças fechadas.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja $a \in U$, sendo U aberto em X. Então $a \notin X \setminus U$, e $X \setminus U$ é fechado. Como X é regular, existem abertos disjuntos V, W em X tais que $a \in V$ e $X \setminus U \subset W$. Logo $a \in V \subset X \setminus W \subset U$. Como $X \setminus W$ é fechado, segue que

$$a \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U.$$

$(b) \Rightarrow (c)$: imediato.
$(c) \Rightarrow (a)$: Seja $b \notin A$, sendo A fechado em X. Então $b \in X \setminus A$, e $X \setminus A$ é aberto. Por (c) existe $V \in \mathcal{U}_b$, V fechado, tal que $b \in V \subset X \setminus A$. Segue que

$$A \subset X \setminus V, \qquad b \in V^\circ, \qquad (X \setminus V) \cap V^\circ = \emptyset.$$

17.4. Proposição. *Cada subespaço de um espaço regular é um espaço regular.*

Demonstração. Seja X um espaço regular e seja S um subespaço de X. Seja A um subconjunto fechado de S, e seja $b \in S \setminus A$. Sabemos que $A = S \cap A_1$, sendo A_1 um subconjunto fechado de X. Como $b \notin A_1$ e X é regular, existem abertos disjuntos U_1, V_1 em X tais que $A_1 \subset U_1$ e $b \in V_1$. Sejam $U = S \cap U_1$ e $V = S \cap V_1$. Então U e V são dois abertos disjuntos de S, $A \subset U$ e $b \in V$.

17.5. Corolário. *Cada subespaço de um espaço T_3 é um espaço T_3.*

17.6. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é regular se e só se cada X_i é regular.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Esta implicação segue da Proposição 17.4 e do Exercício 10.C.

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada X_i seja regular, e sejam $a \in X$ e $U \in \mathcal{U}_a$. Então

$$U \supset \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j),$$

sendo $J \subset I$, J finito, e U_j aberto em X_j para cada $j \in J$. Como X_j é regular cada U_j contém uma vizinhança fechada V_j de $\pi_j(a)$. Segue que

$$a \in \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(V_j) \subset \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) \subset U.$$

Logo X é regular.

17.7. Corolário. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é um espaço T_3 se e só se cada X_i é um espaço T_3.*

Exercícios

17.A. Prove que cada espaço métrico é um espaço T_3.

17.B. Prove que o espaço de Sierpinski não é regular.

17.C. Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita. Prove que X não é regular.

17.D. Prove que a reta de Sorgenfrey do Exercício 6.C é um espaço T_3.

17.E. (a) Prove que a família

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{R}, a < b\} \cup \{(a,b) \cap \mathbf{Q} : a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$$

é uma base para uma topologia τ em $\mathbf{R}$.

(b) Prove que $(\mathbf{R}, \tau)$ é Hausdorff.

(c) Prove que $(\mathbf{R}, \tau)$ não é regular.

17.F. Seja X um espaço regular. Prove que, dados um fechado A em X e um ponto $b \notin A$, existem abertos U e V em X tais que $A \subset U$, $b \in V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

18. Espaços normais

18.1. Definição. Diremos que um espaço topológico X é *normal* se dados dois fechados disjuntos A e B em X, existem dois abertos disjuntos U e V em X tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Diremos que X é um *espaço* T_4 se X é um espaço T_1 que é normal.

É claro que cada espaço T_4 é um espaço T_3.

18.2. Exemplos.
(a) Cada espaço discreto é um espaço T_4.

(b) Cada espaço métrico é um espaço T_4. A demonstração é deixada como exercício.

(c) O espaço de Sierpinski é normal, mas não é regular nem Hausdorff. A demonstração é deixada como exercício.

18.3. Proposição. *Um espaço topológico X é normal se e só se, dados um fechado A e um aberto U, com $A \subset U$, existe um aberto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subset U$, sendo A fechado e U aberto. Então A e $X \setminus U$ são dois fechados disjuntos de X. Como X é normal, existem abertos disjuntos V e W tais que $A \subset V$ e $X \setminus U \subset W$. Logo $V \subset X \setminus W$. Como $X \setminus W$ é fechado, segue que

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U.$$

($\Leftarrow$) Sejam A e B dois fechados disjuntos de X. Então $A \subset X \setminus B$, e $X \setminus B$ é aberto. Por hipótese existe um aberto U tal que

$$A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B.$$

Segue que

$$A \subset U, \qquad B \subset X \setminus \overline{U}, \qquad U \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset.$$

18.4. Proposição. *Cada subespaço fechado de um espaço normal é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço normal, e seja S um subespaço fechado de X. Sejam A e B dois subconjuntos fechados disjuntos de S. Então $A = S \cap A_1$ e $B = S \cap B_1$, sendo A_1 e B_1 dois subconjuntos fechados de X. Como S é fechado em X, vemos que A e B são fechados em X. Como X é normal, existem abertos U_1 e V_1 em X tais que

$$A \subset U_1, \qquad B \subset V_1, \qquad U_1 \cap V_1 = \emptyset.$$

Seja $U = S \cap U_1$ e $V = S \cap V_1$. Então U e V são abertos em X e

$$A \subset U, \qquad B \subset V, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

18.5. Corolário. *Cada subespaço fechado de um espaço T_4 é um espaço T_4.*

18.6. Proposição. *A imagem contínua e fechada de um espaço normal é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço normal, seja Y um espaço topológico, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva, contínua e fechada. Provaremos que Y é normal. Sejam B_1 e B_2 dois fechados disjuntos de Y. Como f é contínua, $f^{-1}(B_1)$ e $f^{-1}(B_2)$ são dois fechados disjuntos de X. Como X é normal, existem dois abertos disjuntos U_1 e U_2 de X tais que $f^{-1}(B_1) \subset U_1$ e $f^{-1}(B_2) \subset U_2$.

Sejam V_1 e V_2 definidos por

$$V_i = Y \setminus f(X \setminus U_i) \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Como f é fechada, vemos que cada V_i é aberto em Y.

Notemos que

$$f^{-1}(V_i) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U_i)) \subset X \setminus (X \setminus U_i) = U_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Como U_1 e U_2 são disjuntos, vemos que $f^{-1}(V_1)$ e $f^{-1}(V_2)$ são disjuntos também. Dai segue que V_1 e V_2 são disjuntos.

Finalmente provaremos que $B_1 \subset V_1$ e $B_2 \subset V_2$. Suponhamos que exista $y \in B_i$ tal que $y \notin V_i$. $y \notin V_i$ implica que $y \in f(X \setminus U_i)$, ou seja $y = f(x)$, com $x \notin U_i$. Por outro lado $f(x) = y \in B_i$ implica que $x \in f^{-1}(B_i) \subset U_i$, absurdo. Isto completa a demonstração.

18.7. Corolário. *A imagem contínua e fechada de um espaço T_4 é um espaço T_4.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 18.6 e o Exercício 16.E.

Em um espaço normal, dois fechados disjuntos podem ser separados por meio de abertos. A seguir veremos que dois fechados disjuntos podem ser separados por meio de funções contínuas.

18.8. Lema de separação de Urysohn. *Um espaço topológico X é normal se e só se, dados dois fechados disjuntos A e B de X, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(B) \subset \{1\}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Sejam A e B dois fechados disjuntos de X, e seja $f : X \to [0, 1]$ uma função contínua tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(B) \subset \{1\}$. Sejam

$$U = f^{-1}([0, 1/2)), \qquad V = f^{-1}((1/2, 1]).$$

Então U e V são abertos, $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Logo X é normal.

($\Rightarrow$) Seja X um espaço normal, e sejam A e B dois fechados disjuntos de X. Como $A \subset X \setminus B$, existe um aberto $U_{1/2}$ tal que

$$A \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset X \setminus B.$$

Logo existem abertos $U_{1/4}$ e $U_{3/4}$ tais que

$$A \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset X \setminus B.$$

Seja

$$D = \{k/2^n : n \in \mathbf{N}, k = 1, 2, ..., 2^n - 1\}.$$

Notemos que D é denso em $[0, 1]$. Procedendo por indução podemos achar, para cada $r \in D$ um aberto U_r tal que

$$A \subset U_{1/2^n} \subset \overline{U_{1/2^n}} \subset U_{2/2^n} \subset \overline{U_{2/2^n}} \subset ... \subset U_{(2^n-1)/2^n} \subset \overline{U_{(2^n-1)/2^n}} \subset X \setminus B.$$

Notemos que:

$$A \subset U_r \quad \text{para todo} \quad r \in D,$$

$$B \subset X \setminus \overline{U_s} \quad \text{para todo} \quad s \in D,$$

$$\overline{U_s} \subset U_r \quad \text{para todo} \quad s, r \in D \quad \text{com} \quad s < r.$$

Seja $f : X \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\} \qquad \text{se} \quad x \in \bigcup\{U_r : r \in D\},$$

$$f(x) = 1 \qquad \text{se} \quad x \notin \bigcup\{U_r : r \in D\}.$$

Notemos que:

$$f(x) \leq r \qquad \text{se} \quad x \in U_r,$$

$$f(x) \geq s \qquad \text{se} \quad x \notin \overline{U_s},$$

$$s \leq f(x) \leq r \qquad \text{se} \quad x \in U_r \setminus \overline{U_s}.$$

É claro que

$$0 \leq f(x) \leq 1 \qquad \text{para todo} \quad x \in X,$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{para todo} \quad x \in A,$$

$$f(x) = 1 \qquad \text{para todo} \quad x \in B.$$

Para completar a demonstração provaremos que f é contínua em cada ponto $a \in X$. Seja $\epsilon > 0$ dado.

Se $f(a) = 0$, então $a \in U_r$ para todo $r \in D$. Seja $r \in D$ tal que $r < \epsilon$. Então para cada $x \in U_r$ tem-se que $f(x) \leq r < \epsilon$.

Se $f(a) = 1$, então $a \notin \overline{U_s}$ para todo $s \in D$. Seja $s \in D$ tal que $s > 1 - \epsilon$. Então para cada $x \notin \overline{U_s}$ tem-se que $f(x) \geq s > 1 - \epsilon$.

Se $0 < f(x) < 1$, sejam $r, s \in D$ tais que

$$f(a) - \epsilon < s < f(a) < r < f(a) + \epsilon.$$

É fácil ver que $a \in U_r \setminus \overline{U_s}$. Além disso, para cada $x \in U_r \setminus \overline{U_s}$ tem-se que

$$f(a) - \epsilon < s \leq f(x) \leq r < f(a) + \epsilon.$$

Logo f é contínua em cada ponto de X.

18.9. Teorema de extensão de Tietze. *Para um espaço topológico X as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X é normal.

(b) Dados um conjunto fechado $A \subset X$ e uma função contínua $f : A \to [c, d]$, com $c < d$, existe uma função contínua $F : X \to [c, d]$ tal que $F|A = f$.

(c) Dados um conjunto fechado $A \subset X$ e uma função contínua $f : A \to \boldsymbol{R}$, existe uma função contínua $F : X \to \boldsymbol{R}$ tal que $F|A = f$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Como $[c, d]$ é homeomorfo a $[-1, 1]$, podemos supor que $f : A \to [-1, 1]$. Sejam

$$A_1 = \{x \in A : f(x) \leq -1/3\}, \qquad B_1 = \{x \in A : f(a) \geq 1/3\}.$$

Pelo Lema de Urysohn existe uma função contínua

$$f_1 : X \to [-1/3, 1/3]$$

tal que

$$f_1(A_1) \subset \{-1/3\}, \qquad f_1(B_1) \subset \{1/3\}.$$

Então

$$|f(x) - f_1(x)| \leq 2/3 \qquad \text{para todo} \quad x \in A.$$

Seja

$$g_1 = f - f_1 : X \to [-2/3, 2/3],$$

e sejam

$$A_2 = \{x \in A : g_1(x) \leq -2/3^2\}, \qquad B_2 = \{x \in A : g_1(x) \geq 2/3^2\}.$$

Pelo Lema de Urysohn existe uma função contínua

$$f_2 : X \to [-2/3^2, 2/3^2]$$

tal que

$$f_2(A_2) \subset \{-2/3^2\}, \qquad f_2(B_2) \subset \{2/3^2\}.$$

Então

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x)| \leq (2/3)^2 \qquad \text{para todo} \quad x \in A.$$

Seja

$$g_2 = f - f_1 - f_2 : X \to [-(2/3)^2, (2/3)^2$$

e sejam

$$A_3 = \{x \in A : g_2(x) \leq -2^2/3^3\}, \qquad B_3 = \{x \in A : g_2(x) \geq 2^2/3^3\}.$$

Pelo Lema de Urysohn existe uma função contínua

$$f_3 : X \to [-2^2/3^3, 2^2/3^3]$$

tal que

$$f_3(A_3) \subset \{-2^2/3^3\}, \qquad f_3(B_3) \subset \{2^2/3^3\}.$$

Então

$$|f(x) - f_1(x) - f_2(x) - f_3(x)| \leq (2/3)^3 \quad \text{para todo} \;\; x \in A.$$

Procedendo por indução vamos achar uma seqüência de funções contínuas

$$f_k : X \to [-2^{k-1}/3^k, 2^{k-1}/3^k]$$

tais que

$$(*) \qquad |f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq (2/3)^n \quad \text{para todo} \;\; x \in A, n \in \mathbf{N}$$

Seja

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^k = 1 \quad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

Segue do Exercício 18.D que $F : X \to [-1, 1]$ está bem definida e é contínua. E segue de (*) que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in A$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Como $\mathbf{R}$ é homeomorfo a $(-1, 1)$, podemos supor que $f : A \to (-1, 1)$. Por (b) existe uma função contínua $G : X \to [-1, 1]$ tal que $G|A = f$. Seja

$$B = \{x \in X : |G(x)| = 1\}.$$

Então A e B são dois fechados disjuntos de X. Seja $h : A \cup B \to [0, 1]$ definido por

$$h(x) = 1 \quad \text{para todo} \;\; x \in A,$$

$$h(x) = 0 \quad \text{para todo} \;\; x \in B.$$

Pela Proposição 8.7 h é contínua. Por (b) existe uma função contínua $H : X \to [0, 1]$ tal que $H|A \cup B = h$. Seja

$$F(x) = G(x)H(x) \quad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

Então F é uma função contínua de X em $(-1, 1)$ e $F|A = f$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sejam A e B dois fechados disjuntos de X. Seja $f : A \cup B \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo} \;\; x \in A,$$

$$f(x) = 1 \quad \text{para todo} \;\; x \in B.$$

Pela Proposição 8.7 f é contínua. Por (c) existe uma função contínua $F : X \to \mathbf{R}$ tal que $F|A \cup B = f$. Seja $G : X \to [0,1]$ definida por $G = (F \vee 0) \wedge 1$. Pelo Exercício 18.E G é contínua, e claramente $G|A \cup B = f$. Logo $G(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $G(x) = 1$ para todo $x \in B$.

Exercícios

18.A. Prove que cada espaço métrico é um espaço T_4.

18.B. Prove que o espaço de Sierpinski é normal, mas não é regular nem Hausdorff.

18.C. Seja X um espaço normal. Prove que, dados dois fechados disjuntos A e B em X, existem dois abertos U e V em X tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

18.D. Seja X um espaço topológico, e seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $C(X)$ que converge uniformemente a uma função f. Prove que f é contínua.

18.E. Seja X um espaço topológico. Dadas $f : X \to \mathbf{R}$ e $g : X \to \mathbf{R}$, sejam $f \vee g : X \to \mathbf{R}$ e $f \wedge g : X \to \mathbf{R}$ definidas por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Prove que, se f e g são contínuas, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ são contínuas também.

18.F. Prove que um espaço topológico X é normal se e só se, dados dois fechados disjuntos A e B em X, existe uma função contínua $f : X \to \mathbf{R}$ tal que $f(A) \subset \{\alpha\}$ e $f(B) \subset \{\beta\}$, com $\alpha \neq \beta$.

18.G. Seja X um espaço métrico, e seja A um subconjunto não vazio de X. Para cada $x \in X$, seja

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

(a) Prove que $d(x, A) = 0$ se e só se $x \in \overline{A}$.
(b) Prove que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in X.$$

(c) Prove que a a função $x \in X \to d(x, A) \in \mathbf{R}$ é contínua.

18.H. Seja X um espaço métrico, e sejam A e B dois subconjuntos fechados disjuntos de X. Usando o Exercício 18.G ache uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in B$. Isto da outra demonstração de que cada espaço métrico é normal.

19. Espaços completamente regulares

O Lema de Urysohn motiva a seguinte definição.

19.1. Definição. Diremos que um espaço topológico X é *completamente regular* se dados um fechado A em X e um ponto $b \notin A$ existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(b) = 1$. Diremos que X é um *espaço de Tychonoff* se X é um espaço T_1 que é completamente regular.

19.2. Proposição. *Cada espaço T_4 é um espaço de Tychonoff.*

Demonstração. Basta aplicar o lema de Urysohn.

19.3. Proposição. *Cada espaço completamente regular é regular.*

Demonstração. Seja X um espaço completamente regular. Dados um fechado A em X e um ponto $b \notin A$, seja $f : X \to [0,1]$ uma função contínua tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(b) = 1$. Sejam

$$U = f^{-1}([0,1/2)), \qquad V = f^{-1}(1/2,1]).$$

Então U e V são dois abertos disjuntos de X, $A \subset U$ e $b \in V$. Logo X é regular.

19.4. Corolário. *Cada espaço de Tychonoff é um espaço T_3.*

19.5. Exemplos.
(a) Cada espaço discreto é um espaço de Tychonoff.

(b) Cada espaço métrico é um espaço de Tychonoff.

(c) O espaço de Sierpinski não é completamente regular.

19.6. Proposição. *Cada subespaço de um espaço completamente regular é completamente regular.*

Demonstração. Seja X um espaço completamente regular, e seja S um subespaço de X. Seja A um fechado de S, e seja $b \in S \setminus A$. Sabemos que $A = S \cap A_1$, sendo A_1 un fechado de X. Como $b \notin A_1$, e X é completamente regular, existe uma função contínua $g : X \to [0,1]$ tal que $g(A_1) \subset \{0\}$ e $g(b) = 1$. Seja $f = g|S : S \to [0,1]$. Então f é contínua, $f(A) \subset \{0\}$ e $f(b) = 1$.

19.7. Corolário. *Cada subespaço de um espaço de Tychonoff é um espaço de Tychonoff.*

19.8. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i\in I} X_i$ é completamente regular se e só se cada X_i é completamente regular.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Esta implicação segue da Proposição 19.7 e do Exercício 10.C.

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada X_i seja completamente regular, e sejam A um fechado de X, e $b \in X \setminus A$. Então

$$b \in \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) \subset X \setminus A,$$

sendo $J \subset I$, J finito, e U_j aberto em X_j para cada $j \in J$. Notemos que

$$\pi_j(b) \in U_j \quad \text{ para cada } \; j \in J,$$

e

$$A \subset X \setminus \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \bigcup_{j \in J} (X \setminus \pi_j^{-1}(U_j)) = \bigcup_{j \in J} \pi_j^{-1}(X_j \setminus U_j).$$

Como X_j é completamente regular, para cada $j \in J$ existe uma função contínua $g_j : X_j \to [0, 1]$ tal que

$$g_j(X_j \setminus U_j) \subset \{0\}, \qquad g_j(\pi_j(b)) = 1.$$

Seja

$$f = \min{}_{j \in J} g_j \circ \pi_j : X \to [0, 1].$$

Então f é contínua, $f(A) \subset \{0\}$ e $f(b) = 1$.

19.9. Corolário. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é um espaço de Tychonoff se e só se cada X_i é um espaço de Tychonoff.*

Lembremos que, se X é um espaço topológico, então $C(X)$ denota o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbf{R}$. Denotaremos por $C_b(X)$ o subconjunto de todas as $f \in C(X)$ que são limitadas, ou seja $\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$.

19.10. Teorema. *Um espaço topológico X é completamente regular se e só se X tem a topologia fraca definida por $C_b(X)$.*

Demonstração. Denotemos por τ a topologia de X e por τ_w a topologia fraca em X definida por $C_b(X)$. A inclusão $\tau_w \subset \tau$ vale sempre. Devemos provar que X é completamente regular se e só se $\tau \subset \tau_w$.

($\Rightarrow$) Sejam $U \in \tau$ e $a \in U$. Como X é completamente regular, existe uma função contínua $f_a : X \to [0, 1]$ tal que $f_a(a) = 0$ e $f_a(x) = 1$ para todo $x \in X \setminus U$. Seja

$$V_a = \{x \in X : f_a(x) < 1\}.$$

Então $V_a \in \tau_w$ e $a \in V_a \subset U$. Segue que

$$U = \bigcup \{V_a : a \in U\} \in \tau_w.$$

($\Leftarrow$) Seja A um fechado de X, e seja $b \in X \setminus A$. Como $\tau \subset \tau_w$, temos que

$$b \in V \subset X \setminus A,$$

onde

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(W_j),$$

com $f_j \in C_b(X)$ e W_j aberto em $\mathbf{R}$ para $j = 1, ..., n$. Como cada aberto de $\mathbf{R}$ é uma união de intervalos abertos, podemos supor que $W_j = (\alpha_j, \beta_j)$ para $j = 1, ..., n$. Notemos que

$$f_j^{-1}(W_j) = \{x \in X : \alpha_j < f_j(x) < \beta_j\}$$

$$= \{x \in X : f_j(x) > \alpha_j\} \cap \{x \in X : -f_j(x) > -\beta_j\}.$$

Logo podemos supor que $W_j = (\alpha_j, \infty)$ para $j = 1, ..., n$. Seja

$$g_j = (f_j - \alpha_j) \vee 0 \quad \text{ para } \ j = 1, ...n.$$

Então $g_j \in C_b(X)$, $g_j \geq 0$ e

$$f_j^{-1}(W_j) = f_j^{-1}((\alpha_j, \infty)) = g_j^{-1}((0, \infty)).$$

Logo

$$b \in V = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(W_j) = \bigcap_{j=1}^{n} g_j^{-1}((0, \infty)) \subset X \setminus A.$$

Seja $g = g_1 g_2 ... g_n$. Então $g \in C_b(X)$ e $g \geq 0$. Além disso,

$$g(b) = g_1(b) g_2(b) ... g_n(b) > 0,$$

$$g(x) = g_1(x) g_2(x) ... g_n(x) = 0 \ \text{ para todo } \ x \in A.$$

Logo X é completamente regular.

19.11. Teorema. *Para um espaço topológico X as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X é um espaço de Tychonoff.

(b) X é homeomorfo a um subespaço do produto $[0,1]^{C_b(X)}$.

(c) X é homeomorfo a um subespaço do produto $[0,1]^I$, para algum I.

Demonstração.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*): Seja X um espaço de Tychonoff. Para cada $f \in C_b(X)$ seja I_f um intervalo fechado e limitado que contém $f(X)$. Consideremos a aplicação avaliação

$$\epsilon_X : x \in X \to (f(x))_{f \in C_b(X)} \in \prod_{f \in C_b(X)} I_f.$$

É claro que $C_b(X)$ separa os pontos de X. Pelo Teorema 19.10 X tem a topologia fraca definida por $C_b(X)$. Pela Proposição 10.8 a aplicação ϵ_X é um mergulho. Pelo Exercício 10.E o produto $\prod_{f \in C_b(X)} I_f$ é homeomorfo ao produto $[0,1]^{C_b(X)}$. Segue que X é homeomorfo a um subespaço do produto $[0,1]^{C_b(X)}$.

$(b) \Rightarrow (c)$: óbvio.

$(c) \Rightarrow (a)$: O produto $[0,1]^I$ é um espaço de Tychonoff, e qualquer subespaço de $[0,1]^I$ é um espaço de Tychonoff.

Mais adiante vamos precisar de uma versão mais refinada do teorema anterior. Com esse propósito introduzimos a seguinte definição.

19.12. Definição. Sejam X e X_i $(i \in I)$ espaços topológicos, e seja $f_i : X \to X_i$ para cada $i \in I$. Diremos que a família $\{f_i : i \in I\}$ *separa pontos de fechados* se dados um fechado $A \subset X$ e um ponto $b \in X \setminus A$, existe $i \in I$ tal que $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$.

19.13. Proposição. *Sejam X e X_i $(i \in I)$ espaços topológicos, e seja $f_i : X \to X_i$ contínua para cada $i \in I$. Então a família $\{f_i : i \in I\}$ separa pontos de fechados se e só se os conjuntos $f_i^{-1}(V_i)$, com $i \in I$ e V_i aberto em X_i, formam uma base para a topologia de X.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja U aberto em X, e seja $a \in U$. Como $a \notin X \setminus U$, existe $i \in I$ tal que $f_i(a) \notin \overline{f_i(X \setminus U)}$. Se definimos

$$V_i = X_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)},$$

então é fácil ver que

$$a \in f_i^{-1}(V_i) \subset U.$$

$(\Leftarrow)$ Seja A fechado em X, e seja $b \in X \setminus A$. Por hipótese temos que

$$b \in f_i^{-1}(V_i) \subset X \setminus A,$$

sendo $i \in I$ e V_i aberto em X_i. Segue que $f_i(b) \in V_i$ e $V_i \cap f_i(A) = \emptyset$. Logo $f_i(b) \notin \overline{f_i(A)}$.

19.14. Corolário. *Sejam X e X_i $(i \in I)$ espaços topológicos, e seja $f_i : X \to X_i$ contínua para cada $i \in I$. Se a família $\{f_i : i \in I\}$ separa pontos de fechados, então X tem a topologia fraca definida pela família $\{f_i : i \in I\}$.*

Demonstração. Basta aplicar as Proposições 19.13 e 10.5.

19.15. Corolário. *Sejam X e X_i $(i \in I)$ espaços topológicos, e seja $f_i : X \to X_i$ contínua para cada $i \in I$. Suponhamos que X seja um espaço T_1 e que a família $\{f_i : i \in I\}$ separe pontos de fechados. Então a avaliação*

$$\epsilon : x \in X \to (f_i(x))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$$

é um mergulho.

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 19.14 e a Proposição 10.8.

Exercícios

19.A. Se X é um espaço topológico, prove que as seguintes condições são equivalentes:

(a) X é completamente regular.

(b) Dados um fechado $A \subset X$ e um ponto $b \notin A$, existe uma função contínua $f : X \to \mathbf{R}$ tal que $f(A) \subset \{\alpha\}$ e $f(b) = \{\beta\}$, sendo $\alpha < \beta$.

(c) Dados um fechado A em X e um ponto $b \notin A$, existe uma função contínua $f : X \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) \leq \alpha$ para todo $x \in A$ e $f(b) \geq \beta$, sendo $\alpha < \beta$.

19.B. Seja X um espaço métrico, e seja $A \subset X$. Use a função distancia $x \in X \to d(x, A) \in \mathbf{R}$ para provar diretamente que cada espaço métrico é completamente regular.

19.C. Sejam X e Y dois espaços de Tychonoff. Para cada $f \in C_b(X)$ seja I_f um intervalo fechado e limitado que contém $f(X)$. Dada uma função contínua $h : X \to Y$, prove que existe uma função contínua

$$H : \prod_{f \in C_b(X)} I_f \longrightarrow \prod_{g \in C_b(Y)} I_g$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & Y \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ \prod_{f \in C_b(X)} I_f \arrow[r, "H"] & \prod_{g \in C_b(Y)} I_g \end{tikzcd}$$

20. Primeiro e segundo axioma de enumerabilidade

Lembremos que um espaço topológico X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade se existe uma base enumerável de vizinhanças de x para cada $x \in X$. Lembremos que X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se existe uma base enumerável para os abertos de X. Nesta seção estudaremos os espaços que satisfazem estes axiomas. Estudaremos também os espaços separáveis e os espaços de Lindelöf, que definiremos a seguir.

20.1. Definição. Um espaço topológico X é dito *separável* se existir em X um subconjunto denso enumerável.

20.2. Definição. Seja X um espaço topológico. Diremos que $\{U_i : i \in I\}$ é uma *cobertura aberta* de X se $\{U_i : i \in I\}$ é uma família de abertos de X tal que $\bigcup\{U_i : i \in I\} = X$. Diremos que X é um *espaço de Lindelöf* se cada cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável, ou seja, para cada cobertura aberta $\{U_i : i \in I\}$ de X, existe $J \subset I$, J enumerável, tal que $\bigcup\{U_i : i \in J\} = X$.

20.3. Proposição. *Seja X um espaço topológico que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Então:*

(a) X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

(b) X é separável.

(c) X é um espaço de Lindelöf.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para os abertos de X.

(a) Para cada $x \in X$ seja

$$\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}.$$

É claro que $\mathcal{B}_x$ é uma base enumerável de vizinhanças de x.

(b) Seja $x_V \in V$ para cada $V \in \mathcal{B}$, e seja

$$D = \{x_V : V \in \mathcal{B}\}.$$

É claro que D é um conjunto enumerável que é denso em X.

(c) Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Para cada $x \in X$ seja $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$, e seja $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subset U_x$. Seja

$$\mathcal{B}' = \{V_x : x \in X\}.$$

Como $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ é enumerável. Escrevamos

$$\mathcal{B}' = \{V_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $V_n \subset U_n$. Seja

$$\mathcal{U}' = \{U_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

Então $\mathcal{U}'$ é um subconjunto enumerável de $\mathcal{U}$, e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X.$$

Logo $\mathcal{U}'$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$.

20.4. Proposição. *Para um espaço métrico X, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

(b) X é separável.

(c) X é Lindelöf.

Demonstração. Já sabemos que $(a) \Rightarrow (b)$ e $(a) \Rightarrow (c)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Seja

$$D = \{x_m : m \in \mathbf{N}\}$$

um subconjunto enumerável denso de X, e seja

$$\mathcal{B} = \{B(x_m; 1/n) : \quad m, n \in \mathbf{N}\}.$$

$\mathcal{B}$ é enumerável. Provaremos que $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X. Seja U um aberto não vazio de X, e seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $B(x; 1/n) \subset U$. Como D é denso em X, existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $x_m \in B(x; 1/2n)$. Segue que

$$x \in B(x_m; 1/2n) \subset B(x; 1/n) \subset U.$$

Logo $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X.

$(c) \Rightarrow (a)$: Para cada $n \in \mathbf{N}$ seja

$$\mathcal{U}_n = \{B(x; 1/n) : x \in X\}.$$

Então $\mathcal{U}_n$ é uma cobertura aberta de X. Como X é Lindelöf, $\mathcal{U}_n$ admite uma subcobertura enumerável $\mathcal{V}_n$. Seja

$$\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{V}_n : n \in \mathbf{N}\}.$$

$\mathcal{B}$ é enumerável. Provaremos que $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X. Seja U um aberto não vazio de X, e seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $B(x; 1/n) \subset U$. Como $\mathcal{V}_{2n}$ é uma cobertura de X, existe $B(a; 1/2n) \in \mathcal{V}_{2n} \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in B(a; 1/2n)$. Segue que

$$x \in B(a; 1/2n) \subset B(x; 1/n) \subset U.$$

Logo $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X.

Vimos nos Exercícios 7.A e 7.B que se um espaço topológico X satisfaz o primeiro ou o segundo axioma de enumerabilidade, então cada subespaço de X satisfaz o mesmo axioma.

Veremos nos Exercícios 20.A e 20.B que a imagem contínua e aberta de um espaço topológico que satisfaz o primeiro ou o segundo axioma de enumerabilidade, também satisfaz o mesmo axioma.

20.5. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços T_1 não triviais. Então o produto $X = \prod_{i\in I} X_i$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade se e só se cada X_i satisfaz o mesmo axioma e I é enumerável.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Como cada X_i é homeomorfo a um subespaço de X, segue que cada X_i também satisfaz o mesmo axioma.

Suponhamos que I não seja enumerável. Seja $a = (a_i)_{i\in I} \in X$, e seja $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ uma base enumerável de vizinhanças de a em X. Para cada $n \in \mathbf{N}$ temos que

$$a \in V_n = \bigcap_{j\in J_n} \pi_j^{-1}(V_{nj}) \subset U_n,$$

sendo $J_n \subset I$, J_n finito, e sendo V_{nj} uma vizinhança aberta de a_j em X_j para cada $j \in J_n$. É claro que $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ também é uma base de vizinhanças de a em X. Seja $J = \bigcup\{J_n : n \in \mathbf{N}\}$, e seja $k \in I \setminus J$. Seja $b_k \neq a_k$, seja $b_i = a_i$ para cada $i \neq k$, e seja $b = (b_i)_{i\in I}$. Como X_k é um espaço T_1, existe um aberto W_k em X_k tal que $a_k \in W_k$, mas $b_k \notin W_k$. Seja $W = \pi_k^{-1}(W_k)$. Notemos que $b \in V_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$, mas $b \notin W$. Logo $V_n \not\subset W$ para cada $n \in \mathbf{N}$, contradição. Logo I é enumerável.

($\Leftarrow$) Suponhamos que X_i satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade para cada $i \in I$, e que I seja enumerável. Sem perda de generalidade podemos supor que $I = \mathbf{N}$. Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X$, e seja $\{V_{nk} : k \in \mathbf{N}\}$ uma base enumerável decrescente de vizinhanças de a_n em X_n para cada $n \in \mathbf{N}$. Segue que os conjuntos da forma

$$\bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(V_{n,k_n}) \quad (N \in \mathbf{N}, k_n \in \mathbf{N})$$

formam uma base enumerável de vizinhanças de a em X.

De maneira análoga podemos provar o resultado seguinte. Deixamos a demonstração detalhada como exercício.

20.6. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços T_1 não triviais. Então o produto $X = \prod_{i\in I} X_i$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se e só se cada X_i satisfaz o mesmo axioma e I é enumerável.*

Veremos no Exercício 20.C que cada subespaço aberto de um espaço topológico separável é separável. Veremos no Exercício 20.E que a imagem contínua de cada espaço topológico separável é separável.

20.7. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços de Hausdorff não triviais. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é separável se e só se cada X_i é separável e $|I| \leq |\boldsymbol{R}|$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que X seja separável. Como $X_i = \pi_i(X)$ para cada $i \in I$, segue que cada X_i é separável.

Para provar que $|I| \leq |\mathbf{R}|$, seja D um subconjunto denso enumerável de X. Para cada $i \in I$ sejam U_i e V_i dois abertos disjuntos não vazios em X_i, e seja $D_i = D \cap \pi_i^{-1}(U_i)$. Como D é denso em X, segue que cada D_i é não vazio.

Afirmamos que $D_i \neq D_j$ sempre que $i \neq j$. De fato, se $i \neq j$, é claro que

$$\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) \neq \emptyset,$$

e portanto

$$D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) \neq \emptyset.$$

Seja

$$a \in D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) \subset D_i.$$

Como $U_j \cap V_j = \emptyset$, segue que

$$a \notin D \cap \pi_j^{-1}(U_j) = D_j,$$

provando a afirmação.

Logo a aplicação

$$f : i \in I \to D_i \in \mathcal{P}(D)$$

é injetiva, e portanto

$$|I| \leq |\mathcal{P}(D)| \leq 2^{|\mathbf{N}|} = |\mathbf{R}|.$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada X_i seja separável, e que $|I| \leq |\mathbf{R}|$. Seja $D_i = \{x_{in} : n \in \mathbf{N}\}$ um subconjunto denso enumerável de X_i para cada $i \in I$. Como $|I| \leq |\mathbf{R}|$, podemos supor que $I \subset \mathbf{R}$.

Para cada conjunto $\{T_1, ..., T_p\}$ de intervalos fechados disjuntos com extremos racionais, e cada conjunto $\{n_1, ..., n_p\} \subset \mathbf{N}$, definamos um ponto $y = y(T_1, ..., T_p, n_1, ..., n_p) \in X$ da maneira seguinte:

$$y_i = x_{in_k} \quad \text{se} \quad i \in T_k,$$

$$y_i = x_{i1} \quad \text{se} \quad i \notin T_1 \cup ... \cup T_p.$$

Seja D o conjunto formado pelos pontos $y = y(T_1, ..., T_p, n_1, ..., n_p)$. É claro que D é enumerável. Provaremos que D é denso em X. Seja U um aberto básico em X, ou seja

$$U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j),$$

com $J \subset I$, J finito, e U_j aberto não vazio em X_j para cada $j \in J$. Para cada $j \in J$ seja $x_{jn_j} \in D_j \cap U_j$, e seja T_i um intervalo fechado, com extremos racionais, contendo j. Se escrevemos $J = \{i_1, ..., i_p\}$, então

$$y = y(T_{i_1}, ...T_{i_p}, n_{i_1}, ..., n_{i_p}) \in U,$$

pois $\pi_{i_k}(y) = y_{i_k} = x_{i_k, n_{i_k}} \in U_{i_k}$ para $k = 1, ..., p$. Logo $D \cap U \neq \emptyset$, completando a demonstração.

Veremos no Exercício 20.F que cada subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é um espaço de Lindelöf. Veremos no Exercício 20.G que a imagem contínua de cada espaço de Lindelöf é um espaço de Lindelöf.

20.8. Teorema. *Cada espaço de Lindelöf regular é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço de Lindelöf regular, e sejam A e B dois fechados disjuntos não vazios de X. Como X é regular, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a tal que $a \in U_a$ e $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$. De maneira análoga, para cada $b \in B$ existe um aberto V_b tal que $b \in V_b$ e $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$. Como A é Lindelöf, a cobertura aberta $\{U_a : a \in A\}$ de A admite uma subcobertura enumerável $\{U_{a_j} : j \in \mathbf{N}\}$. De maneira análoga, a cobertura aberta $\{V_b : b \in B\}$ de B admite uma subcobertura enumerável $\{V_{b_k} : k \in \mathbf{N}\}$.

Sejam $(C_j)_{j=1}^\infty$ e $(D_j)_{k=1}^\infty$ duas seqüências de abertos definidos da maneira seguinte:

$$C_1 = U_{a_1}, \qquad D_1 = V_{b_1} \setminus \overline{C_1},$$

$$C_2 = U_{a_2} \setminus \overline{D_1}, \qquad D_2 = V_{b_2} \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}),$$

$$C_3 = U_{a_3} \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2}), \qquad D_3 = V_{b_3} \setminus (\overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \overline{C_3}),$$

....

Sejam $C = \bigcup_{j=1}^\infty C_j$ e $D = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$. Para completar a demonstração provaremos que $A \subset C$, $B \subset D$ e $C \cap D = \emptyset$.

Para provar que $A \subset C$, seja $a \in A$. Então $a \notin \overline{V_{b_k}}$, e portanto $a \notin \overline{D_k}$ para cada k. Seja j tal que $a \in U_{a_j}$. Então $a \in C_j \subset C$, e portanto $A \subset C$. De maneira análoga podemos provar que $B \subset D$.

Para provar que $C \cap D = \emptyset$, suponhamos que exista $x \in C_j \cap D_k$. Se $j > k$, então $x \in C_j$ implica que $x \notin D_k$, contradição. E se $j \leq k$, então $x \in D_k$ implica que $x \notin C_j$, contradição também. Logo $C \cap D = \emptyset$.

Exercícios

20.A. Prove que a imagem contínua e aberta de um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, também satisfaz o mesmo axioma.

20.B. Prove que a imagem contínua e aberta de um espaço topológico que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, também satisfaz o mesmo axioma.

20.C. Prove que cada subespaço aberto de um espaço topológico separável é separável.

20.D. Prove que cada subespaço de um espaço métrico separável é separável.

20.E. Prove que a imagem contínua de cada espaço topológico separável é separável.

20.F. Prove que cada subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é um espaço de Lindelöf.

20.G. Prove que a imagem contínua de cada espaço de Lindelöf é um espaço de Lindelöf.

21. Espaços compactos

21.1. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $K \subset X$. Diremos que X é um espaço topológico *compacto* se cada cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita. Diremos que K é um subconjunto *compacto* de X se K, com a topologia induzida por X, é um espaço topológico compacto. Diremos que K é um subconjunto *relativamente compacto* de X se $\overline{K}$ é um subconjunto compacto de X.

21.2. Exemplos.
(a) $\mathbf{R}$ não é compacto. Deixamos a demonstração como exercício.
(b) Se X é um espaço topológico qualquer, então cada subconjunto finito de X é compacto. Deixamos a demonstração como exercício.

21.3. Proposição. *Cada intervalo fechado e limitado em $\boldsymbol{R}$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$, com $a < b$. Seja C o conjunto dos pontos $c \in [a, b]$ tais que $[a, c] \subset \bigcup \mathcal{V}$ para alguma família finita $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Para completar a demonstração basta provar que $b \in C$.

Seja $U_a \in \mathcal{U}$ tal que $a \in U_a$, e seja $\delta > 0$ tal que $a + 2\delta < b$ e

$$[a, b] \cap (a - 2\delta, a + 2\delta) \subset U_a.$$

Isto implica que $[a, a + \delta] \subset U_a$, e portanto $a + \delta \in C$.

Seja $s = \sup C$. Então $s \geq a + \delta > a$. Seja $U_s \in \mathcal{U}$ tal que $s \in U_s$, e seja $\epsilon > 0$ tal que $s - 2\epsilon > a$ e

$$[a, b] \cap (s - 2\epsilon, s + 2\epsilon) \subset U_s.$$

Seja $c \in C \cap (s - 2\epsilon, s]$, e seja $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ finita, tal que

$$[a, c] \subset \bigcup \mathcal{V}.$$

Segue que

$$[a, s] \subset [a, c] \cup (s - 2\epsilon, s] \subset (\bigcup \mathcal{V}) \cup U_s.$$

Isto prova que $s \in C$. Se fosse $s < b$, poderiamos supor que $s + 2\epsilon < b$ e teriamos que

$$[0, s + \epsilon] \subset [a, c] \cup (s - 2\epsilon, s + 2\epsilon) \subset (\bigcup \mathcal{V}) \cup U_s.$$

Mas isto implicaria que $s + \epsilon \in C$, e s não seria o supremo de C. Logo $s = b$, e portanto $b \in C$.

21.4. Definição. Seja X um conjunto não vazio, e seja $\mathcal{A}$ uma família não vazia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{A}$ tem a *propriedade da interseção finita* se $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ para cada família finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.

21.5. Exemplos. Seja X um conjunto não vazio.
(a) Cada filtro em X tem a propriedade da interseção finita.
(b) Cada base de filtro em X tem a propriedade da interseção finita.

O teorema seguinte da várias caracterizações de espaços compactos.

21.6. Teorema. *Seja X um espaço topológico não vazio. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X é compacto.

(b) Cada família de fechados de X com a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia.

(c) Cada filtro em X tem pelo menos um ponto de acumulação.

(d) Cada filtro em X está contido em algum filtro convergente.

(e) Cada ultrafiltro em X é convergente.

(f) Cada rede em X tem pelo menos um ponto de acumulação.

(g) Cada rede em X admite uma subrede convergente.

(h) Cada rede universal em X é convergente.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja X compacto, e seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de fechados de X com a propriedade da interseção finita. Suponhamos que $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Então $X = \bigcup_{i \in I}(X \setminus A_i)$, e $X \setminus A_i$ é aberto para cada $i \in I$. Como X é compacto, existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $X = \bigcup_{i \in J} A_i$. Segue que $\bigcap_{i \in J} A_i = \emptyset$, contradição. Isto prova que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Seja $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de X, e suponhamos que $\bigcup_{i \in J} U_i \neq X$ para cada conjunto finito $J \subset I$. Segue que $\{X \setminus U_i : i \in I\}$ é uma família de fechados de X tal que $\bigcap_{i \in J}(X \setminus U_i) \neq \emptyset$ para cada conjunto finito $J \subset I$. Segue de (b) que $\bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i) \neq \emptyset$. Isto implica que $\bigcup_{i \in I} U_i \neq X$, contradição. Logo existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Seja $\mathcal{F}$ um filtro em X. Então $\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\}$ é uma família de fechados de X com a propriedade da interseção finita. Segue de (b) que $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Então cada $x \in \bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\}$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

$(c) \Rightarrow (b)$: Seja $\mathcal{A}$ uma família de fechados de X com a propriedade da interseção finita. Seja $\mathcal{B}$ a família de todas as interseções finitas de membros de $\mathcal{A}$. É claro que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X. Seja $\mathcal{F}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. Segue de (c) que $\mathcal{F}$ tem pelo menos um ponto de acumulação, ou seja $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, e cada $A \in \mathcal{A}$ é fechado, segue que $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$.

$(c) \Leftrightarrow (d)$: Basta aplicar a Proposição 15.13.

$(d) \Leftrightarrow (e)$: A implicação $(d) \Rightarrow (e)$ é imediata, e a implicação $(e) \Rightarrow (d)$ segue da Proposição 15.17.

$(b) \Rightarrow (f)$: Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X. Seja $A_\lambda = \{x_\mu : \mu \geq \lambda\}$ para cada $\lambda \in \Lambda$, e seja $\mathcal{A} = \{\overline{A_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$. Então $\mathcal{A}$ é uma família de fechados de X com a propriedade da interseção finita. Segue de (b) que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Se $x \in \bigcap \mathcal{A} = \bigcap\{\overline{A_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, então, para cada $U \in \mathcal{U}_x$ tem-se que $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Logo x é um ponto de acumulação da rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

$(f) \Rightarrow (b)$: Seja $\mathcal{A}$ uma família de fechados de X com a propriedade da interseção finita. Seja $\mathcal{B}$ a família de toas as interseções finitas de membros de $\mathcal{A}$. É claro que $\mathcal{B}$ é um conjunto dirigido se definimos $A \leq B$ quando $A \supset B$. Seja $x_B \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Segue de (f) que a rede $(x_B)_{B\in\mathcal{B}}$ tem pelo menos um ponto de acumulação x. Logo, dados $U \in \mathcal{U}_x$ e $A \in \mathcal{B}$, existe $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$, tal que $x_B \in U$, e portanto $x_B \in U \cap B \subset U \cap A$. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, segue que

$$x \in \bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{B}\} = \bigcap \mathcal{B} \subset \bigcap \mathcal{A}.$$

$(f) \Leftrightarrow (g)$: Basta aplicar a Proposição 13.10.

$(f) \Rightarrow (h)$: Basta aplicar a Proposição 13.12.

$(h) \Rightarrow (e)$: Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro em X, e seja

$$\Lambda = \{(a, A) : a \in A \in \mathcal{F}\}.$$

É claro que Λ é um conjunto dirigido se definimos $(a, A) \leq (b, B)$ quando $A \supset B$. Denotaremos por $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ a rede $x : \Lambda \to X$ definida por $x(a, A) = a$ para cada $(a, A) \in \Lambda$. Afirmamos que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede universal. De fato, como $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro, dado $E \subset X$, tem-se que $E \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus E \in \mathcal{F}$. Se $E \in \mathcal{F}$, seja $e \in E$. Então

$$\{x(a, A) : (a, A) \geq (e, E)\} \subset E.$$

De maneira análoga, se $X \setminus E \in \mathcal{F}$, seja $d \in X \setminus E$. Então

$$\{x(a, A) : (a, A) \geq (d, X \setminus E)\} \subset X \setminus E.$$

Logo $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede universal. Segue de (h) que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a um ponto x. Logo dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $(a, A) \in \Lambda$ tal que $b = x(b, B) \in U$ para todo $(b, B) \geq (a, A)$. Segue que $U \supset A$, e portanto $\mathcal{F}$ converge a x.

21.7. Proposition. *(a) Cada subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*
(b) Cada subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.

Demonstração. (a) Seja X um espaço compacto e seja S um subespaço fechado de X. Seja $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de S. Para cada $i \in I$ existe um aberto V_i de X tal que $U_i = S \cap V_i$. Segue que $\{V_i : i \in I\} \cup \{X \setminus S\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $X = \{X \setminus S\} \cup \bigcup_{i\in J} V_i$. Segue que $S = \bigcup_{i\in J} U_i$, e portanto S é compacto.

(b) Seja X um espaço de Hausdorff e seja S um subespaço compacto de X. Para provar que S é fechado em X, seja $x \in \overline{S}$. Então existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ que converge a x. Como S é compacto, a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admite uma subrede $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ que converge a um ponto $y \in S$. Como $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in M}$ converge a x também, e X é Hausdorff, segue que $x = y \in S$. Logo S é fechado em X.

21.8. Proposição. *A imagem contínua de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos, com X compacto, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva e contínua. Para provar que Y é compacto, seja $\{V_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de Y. Então $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i)$. Como f é sobrejetivo, segue que $Y = \bigcup_{i \in J} V_i$. Logo Y é compacto.

21.9. Corolário. *Seja X um espaço compacto, seja Y um espaço de Hausdorff, e seja f uma aplicação contínua. Então:*
(a) f é fechada.
(b) Se f é sobrejetiva, então f é uma aplicação quociente.
(c) Se f é bijetiva, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. (a) Seja A fechado em X. Pela Proposição 21.8 $f(A)$ é compacto em Y. Pela Proposição 21.7 $f(A)$ é fechado em Y.
(b) segue de (a) pela Proposição 11.5.
(c) segue de (a) pela Proposição 8.9.

21.10. Teorema de Tychonoff. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é compacto se e só se cada X_i é compacto.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se X é compacto, então $X_i = \pi_i(X)$ é compacto para cada $i \in I$, pela Proposição 21.8.

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada X_i seja compacto, e seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede universal em X. Pelo Exercício 13.F $(\pi_i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ é uma rede universal em X_i, para cada $i \in I$. Pelo Teorema 21.6, a rede $(\pi_i(x_{\lambda \in \Lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ converge a um ponto $x_i \in X_i$ para cada $i \in I$. Seja $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Então $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a x. Pelo Teorema 21.6 X é compacto.

21.11. Corolário. *O produto $[0,1]^I$ é compacto para cada conjunto não vazio I.*

21.12. Corolário. *Um conjunto $K \subset \mathbf{R}^n$ é compacto se e só se K é fechado e limitado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos K compacto. Como $\mathbf{R}^n$ é Hausdorff, K é fechado em $\mathbf{R}^n$, pela Proposição 21.7. Por outro lado

$$K \subset \mathbf{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(0; j).$$

Como K é compacto, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(0; j) = B(0; k).$$

Logo K é limitado.

($\Leftarrow$) Suponhamos K fechado e limitado. Sendo K limitado, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que

$$K \subset B(0; k) \subset [-k, k]^n.$$

Sendo K fechado em $\mathbf{R}^n$, segue que K é fechado em $[-k, k]^n$. Pelo Corolário 21.11 $[-k, k]^n$ é compacto. Pela Proposição 21.7 K é compacto.

21.13. Teorema. *Cada espaço de Hausdorff compacto é um espaço T_4.*

Demonstração. Sabemos que cada espaço de Lindelöf regular é normal. Como cada espaço compacto é claramente Lindelöf, basta provar que cada espaço de Hausdorff compacto é regular.

Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Seja A um fechado de X, e seja $b \notin A$. Para cada $a \in A$ sejam U_a e V_a dois abertos disjuntos de X tais que $a \in U_a$ e $b \in V_a$. Como $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$ e A é compacto, existem $a_1, ..., a_n \in A$ tais que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{a_j}.$$

Sejam

$$U = \bigcup_{j=1}^{n} U_{a_j}, \qquad V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{a_j}.$$

Então U e V são abertos disjuntos em X, $A \subset U$ e $b \in V$.

21.14. Corolário. *O produto $[0, 1]^I$ é um espaço T_4 para cada conjunto não vazio I.*

Agora podemos complementar o Teorema 19.11 da maneira seguinte.

21.15. Teorema. *Para um espaço topológico X as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X é um espaço de Tychonoff.
(b) X é homeomorfo a um subespaço do produto $[0, 1]^I$, para algum I.
(c) X é homeomorfo a um subespaço de um espaço de Hausdorff compacto.
(d) X é homeomorfo a um subespaço de um espaço T_4.

Demonstração. A implicação $(a) \Rightarrow (b)$ segue do Teorema 19.11. A implicação $(b) \Rightarrow (c)$ segue do Corolário 21.11. A implicação $(c) \Rightarrow (d)$ segue do Teorema 21.13. E a implicação $(d) \Rightarrow (a)$ segue do Corolário 19.7.

Exercícios

21.A. Seja X um espaço topológico, e seja $K \subset X$. Prove que K é compacto se e só se, dada uma família $\{U_i : i \in I\}$ de abertos de X tal que $K \subset \bigcup\{U_i : i \in I\}$, existe uma família finita $J \subset I$ tal que $K \subset \bigcup\{U_i : i \in J\}$.

21.B. Prove que $\mathbf{R}$ não é compacto.

21.C. Prove que cada subconjunto finito de um espaço topológico qualquer é compacto.

21.D. Prove que um espaço topológico discreto X é compacto se e só se X é finito.

21.E. Usando a Proposição 21.8 prove que o círculo unitário

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

é compacto.

21.F. Seja X um espaço compacto, e seja $f : X \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Prove que existem $a, b \in X$ tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in X$.

21.G. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$.

(a) Se Y é Hausdorff, e f é contínua, prove que o gráfico de f é fechado em $X \times Y$.

(b) Se Y é compacto, e o gráfico de f é fechado em $X \times Y$, prove que f é contínua.

21.H. Seja X um espaço de Hausdorff.

(a) Seja K um subconjunto compacto de X, e seja $b \notin K$. Prove que existem abertos disjuntos U e V de X tais que $K \subset U$ e $b \in V$.

(b) Sejam K e L dois subconjuntos compactos disjuntos de X. Prove que existem abertos disjuntos U e V de X tais que $K \subset U$ e $L \subset V$.

21.I. Seja X um espaço de Hausdorff, seja K um subconjunto compacto de X, e sejam U_1 e U_2 dois abertos de X tais que $K \subset U_1 \cup U_2$. Prove que existem dois subconjuntos compactos K_1 e K_2 de X tais que $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \subset U_1$ e $K_2 \subset U_2$.

Sugestão: Primeiro prove que existem abertos disjuntos V_1 e V_2 de X tais que $K \setminus U_1 \subset V_1$ e $K \setminus U_2 \subset V_2$. A seguir defina $K_1 = K \setminus V_1$ e $K_2 = K \setminus V_2$.

21.J. Sejam X e Y espaços topológicos, sejam K e L subconjuntos compactos de X e Y, respectivamente, e seja W um aberto de $X \times Y$ tal que $K \times L \subset W$. Prove que existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $K \subset U$, $L \subset V$ e $U \times V \subset W$.

21.K. Sejam X, Y e Z espaços topológicos, e seja $f : X \times Y \to Z$ uma aplicação contínua. Sejam K e L subconjuntos compactos de X e Y, respectivamente, e seja W um aberto de Z tal que $f(K \times L) \subset W$. Prove que existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $K \subset U$, $L \subset V$ e $f(U \times V) \subset W$.

21.L. Seja X um espaço compacto.

(a) Prove que a função

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é uma métrica em $C(X)$.

(b) Prove que uma seqüência (f_n) converge a f no espaço métrico $(C(X), d)$ se e só se (f_n) converge a f uniformemente sobre X. Por essa razão a topologia τ_d definida pela métrica d é chamada de *topologia da convergência uniforme.*

21.M. Seja X um espaço topológico qualquer. Dados $f \in C(X)$, $A \subset X$ finito e $\epsilon > 0$, seja

$$V(f, A, \epsilon) = \{g \in C(X) : |g(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in A\}.$$

(a) Prove que os conjuntos $V(f, A, \epsilon)$, com $A \subset X$ finito e $\epsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de f para uma topologia em $C(X)$, que denotaremos por τ_p.

(b) Prove que uma seqüência (f_n) converge a f em $(C(X), \tau_p)$ se e só se $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$. Por essa razão a topologia τ_p é chamada de *topologia da convergência pontual.*

(c) Prove que a inclusão $(C(X), \tau_p) \hookrightarrow \mathbf{R}^X$ é um mergulho.

21.N. Seja X um espaço topológico qualquer, e seja $\mathcal{F} \subset C(X)$. Diremos que $\mathcal{F}$ é *equicontínua num ponto* $a \in X$ se dado $\epsilon > 0$, existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$ e $x \in U$. Diremos que $\mathcal{F}$ é *equicontínua* se for equicontínua em cada ponto de X.

(a) Se $\mathcal{F}$ é equicontínua, prove que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ é equicontínua também.

(b) Se $\mathcal{F}$ é equicontínua e X é compacto, prove que as topologias τ_p e τ_d coincidem em $\mathcal{F}$.

21.O. Seja X um espaço topológico qualquer, e seja $\mathcal{F} \subset C(X)$. Diremos que $\mathcal{F}$ é *pontualmente limitada* se $\sup\{|f(a)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ para cada $a \in X$. Diremos que $\mathcal{F}$ é *localmente limitada* se para cada $a \in X$ existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $\sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}, x \in U\} < \infty$.

(a) Se $\mathcal{F}$ é pontualmente limitada, prove que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ é pontualmente limitada também.

(b) Se $\mathcal{F}$ é equicontínua e pontualmente limitada, prove que $\mathcal{F}$ é localmente limitada.

21.P. Seja X um espaço compacto, e seja $\mathcal{F} \subset C(X)$ equicontínua e pontualmente limitada. Prove que $\mathcal{F}$ é um subconjunto relativamente compacto de $(C(X), \tau_d)$. Este é o *teorema de Arzela-Ascoli.*

22. Espaços localmente compactos

22.1. Definição. Diremos que um espaço topológico X é *localmente compacto* se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças compactas.

22.2. Proposição. *Um espaço de Hausdorff X é localmente compacto se e só se cada $x \in X$ tem pelo menos uma vizinhança compacta.*

Demonstração. Para provar a implicação não trivial, seja $x \in X$, e seja U_0 uma vizinhança compacta de x. Seja $U \in \mathcal{U}_x$, e seja $V = (U_0 \cap U)^\circ$. Então V é uma vizinhança aberta de x em X e $V \subset U_0$. Logo V é uma vizinhança aberta de x em U_0. Notemos que U_0 é um espaço de Hausdorff compacto, e portanto regular. Logo existe um subconjunto aberto W de U_0 tal que

$$x \in W \subset \overline{W}^{U_0} \subset V \subset U.$$

Temos que $W = U_0 \cap W_1$, sendo W_1 aberto em X. Segue que

$$W = V \cap W = V \cap U_0 \cap W_1 = V \cap W_1.$$

Logo W é aberto em X. Segue que $\overline{W}^{U_0}$ é uma vizinhança compacta de x em X e $\overline{W}^{U_0} \subset U$.

22.3. Exemplos.
(a) Cada espaço de Hausdorff compacto é localmente compacto.
(b) $\mathbf{R}^n$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto que no é compacto.
(c) Seja X um conjunto infinito, com a topologia discreta. X é um espaço de Hausdorff localmente compacto que não é compacto.

Segue da definição que cada espaço de Hausdorff localmente compacto é regular. Mas podemos provar mais.

22.4. Teorema. *Cada espaço de Hausdorff localmente compacto é um espaço de Tychonoff.*

Demonstração. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Provaremos que X é completamente regular. Seja A um fechado de X, e seja $b \in X \setminus A$. Por hipótese $X \setminus A$ contém uma vizinhança compacta U de b. Seja $V = U^\circ$. Temos que U é um espaço de Hausdorff compacto, e portanto completamente regular. Como V é aberto em U, e $b \in V$, existe uma função contínua $\phi : U \to [0,1]$ tal que $\phi(U \setminus V) \subset \{0\}$ e $\phi(b) = 1$. Notemos que $X = U \cup (X \setminus V)$. Seja $f : X \to [0,1]$ definida por $f = \phi$ em U e $f = 0$ em $X \setminus V$. A função f está bem definida, pois $\phi = 0$ em $U \cap (X \setminus V) = U \setminus V$. A função f é contínua, pois U e $X \setminus V$ são fechados. E como $A \subset X \setminus V$, segue que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(b) = 1$.

Nos exercícios veremos que a interseção de um subespaço aberto e um subespaço fechado de um espaço de Hausdorff localmente compacto é um subespaço localmente compacto. Reciprocamente temos o resultado seguinte.

22.5. Proposição. *Seja C um subespaço localmente compacto de um espaço de Hausdorff X. Então existem subespaços A e B de X, com A aberto e B fechado, tais que $C = A \cap B$.*

A demonstração está baseada no lema seguinte.

22.6. Lema. *Seja C um subespaço localmente compacto de um espaço de Hausdorff X. Então C é aberto em $\overline{C}^X$.*

Demonstração. Seja $c \in C$, e seja U uma vizinhança aberta de c em C tal que $\overline{U}^C$ é compacto. Seja V um aberto de X tal que $U = C \cap V$. Então

$$C \cap \overline{C \cap V}^X = C \cap \overline{U}^X = \overline{U}^C.$$

Esse conjunto é compacto, e portanto fechado em X. Esse conjunto contém $U = C \cap V$, e portanto $\overline{C \cap V}^X$. Logo

$$\overline{C \cap V}^X \subset C \cap \overline{C \cap V}^X \subset C.$$

Afirmamos que

$$\overline{C}^X \cap V \subset C.$$

De fato seja $x \in \overline{C}^X \cap V$. Logo existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset C$ que converge a x. Como $x \in V$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Logo $x_\lambda \in C \cap V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, e dai $x \in \overline{C \cap V}^X \subset C$.

Como $\overline{C}^X \cap V$ é aberto em $\overline{C}^X$, segue que C é uma vizinhança de c em $\overline{C}^X$. Logo C é aberto em $\overline{C}^X$.

Demonstração da Proposição 22.5. Pelo Lema 22.6 C é aberto em $\overline{C}^X$. Logo existe um aberto A de X tal que $C = A \cap \overline{C}^X$. Assim basta tomar $B = \overline{C}^X$ para completar a demonstração.

No Exercício 22.F veremos que a imagem contínua e aberta de um espaço localmente compacto é um espaço localmente compacto.

22.7. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é localmente compacto se e só se se verificam as seguintes condições:*

(a) Cada X_i é localmente compacto.

(b) Existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que X_i é compacto para cada $i \in I \setminus J$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que X seja localmente compacto. Então $X_i = \pi_i(X)$ é localmente compacto para cada $i \in I$, pelo Exercício 22.F. Isto prova (a).

Para provar (b) seja $x \in X$ e seja U uma vizinhança compacta de x em X. Então U contém uma vizinhança básica V, ou seja

$$U \supset V = \prod_{j \in J} V_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_j,$$

sendo $J \subset I$, J finito, e sendo V_j uma vizinhança aberta de $\pi_j(x)$ em X_j, para cada $j \in J$. Segue que $\pi_i(U) = X_i$ para todo $i \in I \setminus J$, e (b) segue.

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada X_i seja localmente compacto, e que X_i seja compacto para cada $i \in I \setminus J$, com J finito. Seja $x \in X$, e seja U uma vizinhança básica de x em X. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$U = \prod_{j \in J_1} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J_1} X_i,$$

sendo $J \subset J_1 \subset I$, J_1 finito, e sendo U_j uma vizinhança aberta de $\pi_j(x)$ em X_j para cada $j \in J_1$. Para cada $j \in J_1$ seja V_j uma vizinhança compacta de $\pi_j(x)$ em X_j, com $V_j \subset U_j$, e seja

$$V = \prod_{j \in J_1} V_j \times \prod_{i \in I \setminus J_1} X_i.$$

Então V é uma vizinhança compacta de x em X, contida em U.

22.8. Corolário. *$\boldsymbol{R}^I$ é localmente compacto se e só se I é finito.*

Exercícios

22.A. Prove que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais, com a topologia induzida por $\mathbf{R}$, não é localmente compacto.

22.B. Prove que o conjunto $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ dos números irracionais, com a topologia induzida por $\mathbf{R}$, não é localmente compacto.

22.C. Seja X um espaço localmente compacto. Prove que cada subespaço aberto de X é localmente compacto.

22.D. Seja X um espaço localmente compacto. Prove que cada subespaço fechado de X é localmente compacto.

22.E. Seja X um espaço de Hausdorff. Prove que a interseção de dois subespaços localmente compactos de X é localmente compacto.

22.F. Prove que a imagem contínua e aberta de um espaço localmente compacto é um espaço localmente compacto.

22.G. Seja X um espaço localmente compacto, seja Y um espaço de Hausdorff, e seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva, contínua e aberta. Prove que, dado um compacto $L \subset Y$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $f(K) = L$.

22.H. Seja X um espaço localmente compacto. Prove que um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se e só se $A \cap K$ é aberto em K para cada compacto $K \subset X$.

23. A compactificação de Alexandroff

23.1. Definição. Seja X um espaço de Hausdorff. Chamaremos de *compactificação* de X um par (Y, ϕ) tal que:

(a) Y é um espaço de Hausdorff compacto;

(b) ϕ é um homeomorfismo entre X e um subespaço denso de Y.

23.2. Teorema. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto, que não é compacto. Seja $p \notin X$, e seja $X^* = X \cup \{p\}$. Para cada $x \in X$ seja $\mathcal{B}_x(X)$ uma base de vizinhanças abertas de x em X, e seja $\mathcal{B}_x(X^*) = \mathcal{B}_x(X)$. Seja*

$$\mathcal{B}_p(X^*) = \{\{p\} \cup (X \setminus K) : K \quad \text{é compacto em} \quad X\}.$$

Então:

(a) As famílias $\mathcal{B}_x(X^*)$ $(x \in X)$ e $\mathcal{B}_p(X^*)$ definem uma topologia em X^* que induz em X a sua topologia original.

(b) X^* é um espaço de Hausdorff compacto.

(c) X é um subespaço aberto denso de X^*.

Demonstração. (a) Para provar (a) devemos verificar as condições da Proposição 5.7:

(i) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x(X^*)$.

(ii) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x(X^*)$, existe $W \in \mathcal{B}_x(X^*)$ tal que $W \subset U \cap V$.

(iii) Dado $U \in \mathcal{B}_x(X^*)$, existe $V \in \mathcal{B}_x(X^*)$, $V \subset U$, tal que para cada $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y(X^*)$ tal que $W \subset U$.

Se $x \in X$, então $\mathcal{B}_x(X)$ satisfaz (i), (ii) e (iii), pela Proposição 5.6. Logo $\mathcal{B}_x(X^*)$ satisfaz (i), (ii) e (iii).

Verifiquemos que $\mathcal{B}_p(X^*)$ satisfaz (i), (ii) e (iii).

(i) Se $U = \{p\} \cup (X \setminus K)$, então $p \in U$.

(ii) Se $U = \{p\} \cup (X \setminus K)$, e $V = \{p\} \cup (X \setminus L)$, então $U \cap V = \{p\} \cup (X \setminus (K \cup L))$.

(iii) Seja $U = \{p\} \cup (X \setminus K)$, e seja $V = U$. Se $y = p$, seja $W = U$. Então $W \in \mathcal{B}_p(X^*)$ e $W \subset U$. Se $y \in V$, com $y \neq p$, então $y \in X \setminus K$. Como $X \setminus K$ é aberto em X, existe $W \in \mathcal{B}_y(X) = \mathcal{B}_y(X^*)$ tal que $y \in W \subset X \setminus K \subset U$.

Se U é aberto em X, é claro que U é aberto em X^*. Em particular X é aberto em X^*. E se V é aberto em X^*, é claro que $X \cap V$ é aberto em X.

(b) Provemos que X^* é Hausdorff. Dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem U e V abertos em X, e portanto em X^*, tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Dado $x \in X$, seja U uma vizinhança compacta de x em X, e seja $V = \{p\} \cup (X \setminus U)$. Então $U \in \mathcal{U}_x(X^*)$, $V \in \mathcal{U}_p(X^*)$ e $U \cap V = \emptyset$. Logo X^* é Hausdorff.

Para provar que X^* é compacto, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X^*. Seja $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U_0$. Então existe um compacto $K \subset X$ tal que

$$\{p\} \cup (X \setminus K) \subset U_0.$$

K é compacto em X, e portanto em X^*. Logo existem $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tais que

$$K \subset U_1 \cup ... \cup U_n.$$

Segue que
$$X^* = U_0 \cup U_1 \cup ... \cup U_n.$$
Logo X^* é compacto.

(c) Já sabemos que X é aberto em X^*. Para provar que X é denso em X^*, seja $U = \{p\} \cup (X \setminus K) \in \mathcal{B}_p(X^*)$. Como X não é compacto, $X \setminus K \neq \emptyset$. Logo
$$U \cap X \supset X \setminus K \neq \emptyset.$$
Logo X^* é compacto.

23.3. Definição. Seja X é um espaço de Hausdorff localmente compacto que não é compacto. Então o espaço X^* construido no teorema anterior é chamado de *compactificação de Alexandroff* de X.

Exercícios

23.A. Seja X um espaço de Hausdorff. Suponhamos que exista uma compactificação (Y, ϕ) de X tal que $Y \setminus \phi(X)$ contém um único ponto. Prove que X é localmente compacto, mas não é compacto.

23.B. (a) Prove que o intervalo $(0, 1]$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto, que não é compacto.

(b) Prove que o intervalo $[0, 1]$ é a compactificação de Alexandorff do intervalo $(0, 1]$.

23.C. (a) Prove que $\mathbf{N}$, com a topologia discreta, é um espaço de Hausdorff localmente compacto, que não é compacto.

(b) Prove que a compactificação de Alexandroff de $\mathbf{N}$ é homeomorfa ao subespaço $S = \{1/n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$ de $\mathbf{R}$.

23.D. Seja
$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\},$$
e sejam $C = (0, ..., 0, 1/2)$ e $N = (0, ..., 0, 1)$.

(a) Prove que a projeção estereográfica
$$(x_1, ..., x_{n+1}) \in (C + \frac{1}{2}S^n) \setminus \{N\} \to \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right) \in \mathbf{R}^n$$
é um homeomorfismo.

(b) Conclua que a compactificação de Alexandroff de $\mathbf{R}^n$ é homeomorfa a S^n.

24. A compactificação de Stone-Cech

Se um espaço topológico X admite uma compactificação, segue do Teorema 21.15 que X é um espaço de Tychonoff. A seguir veremos que vale a recíproca.

Seja X um espaço de Tychonoff. Para cada $f \in C_b(X)$ seja I_f um intervalo fechado e limitado que contém $f(X)$. Segue da demonstração do Teorema 19.11 que a aplicação

$$\epsilon_X : x \in X \to (f(x))_{f\in C_b(X)} \in \prod_{f\in C_b(X)} I_f$$

é um mergulho.

24.1. Definição. Dado um espaço de Tychonoff X, denotaremos por βX a aderência do conjunto $\epsilon_X(X)$ no produto $\prod_{f\in C_b(X)} I_f$. É claro que o par $(\beta X, \epsilon_X)$ é uma compactificação de X. Diremos que βX é a *compactificação de Stone-Cech* de X.

A compactificação de Stone-Cech tem a seguinte propriedade:

24.2. Teorema. *Seja X um espaço de Tychonoff, e seja Y um espaço de Hausdorff compacto. Então, para cada função contínua $h : X \to Y$, existe uma função contínua $\tilde{h} : \beta X \to Y$ tal que $h = \tilde{h} \circ \epsilon_X$, ou seja o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\epsilon_X"'] & & Y \\ & \beta X \arrow[ur, "\tilde{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Como Y é um espaço de Tychonoff, a aplicação

$$\epsilon_Y : y \in Y \to (g(y))_{g\in C_b(Y)} \in \prod_{g\in C_b(Y)} I_g$$

é um mergulho. Consideremos a aplicação

$$H : (\xi_f)_{f\in C_b(X)} \in \prod_{f\in C_b(X)} I_f \to (\xi_{g\circ h})_{g\in C_b(Y)} \in \prod_{g\in C_b(Y)} I_g.$$

É fácil ver que

$$\pi_g \circ H = \pi_{g\circ h} \quad \text{para todo} \quad g \in C_b(Y),$$

e portanto H é contínua. É fácil ver que

$$H(\epsilon_X(x)) = \epsilon_Y(h(x)) \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

ou seja o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \epsilon_X \downarrow & & \downarrow \epsilon_Y \\ \prod_{f \in C_b(X)} I_f & \xrightarrow{H} & \prod_{g \in C_b(Y)} I_g \end{array}$$

Em particular

$$H(\epsilon_X(X)) = \epsilon_Y(h(X)) \subset \epsilon_Y(Y).$$

Como $\beta X = \overline{\epsilon_X(X)}$ e Y é compacto, segue que

$$H(\beta X) = H(\overline{\epsilon_X(X)}) \subset \overline{H(\epsilon_X(X))} \subset \overline{\epsilon_Y(Y)} = \beta Y = \epsilon_Y(Y).$$

Assim temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \epsilon_X \downarrow & & \downarrow \epsilon_Y \\ \beta X & \xrightarrow{H|\beta X} & \beta Y = \epsilon_Y(Y) \end{array}$$

Se definimos

$$\tilde{h} = \epsilon_Y^{-1} \circ (H|\beta X) : \beta X \to Y,$$

então é claro que $\tilde{h} \circ \epsilon_X = h$.

Exercícios

24.A. Seja X um espaço de Tychonoff. Prove que, para cada $f \in C_b(X)$, existe $\tilde{f} \in C_b(\beta X)$ tal que $f = \tilde{f} \circ \epsilon_X$.

24.B. Considerando a função $f(t) = \text{sen}(1/t)$ $(0 < t \leq 1)$, prove que o intervalo $[0, 1]$ não é a compactificação de Stone-Cech do intervalo $(0, 1]$.

24.C. Seja ℓ^∞ o conjunto de todas as seqüências (x_n) em $\mathbf{R}$ que são limitadas. Dadas $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em ℓ^∞, seja $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$.

(a) Prove que ℓ^∞ é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$, e que d é uma métrica em ℓ^∞

(b) Prove que existe um isomorfismo entre os espaços vetoriais ℓ^∞ e $C(\beta\mathbf{N})$, que é também uma *isometria*, ou seja $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in \ell^\infty$.

24.D. Seja X um espaço de Tychonoff, e seja (Y, ϕ) uma compactificação de X.

(a) Se $\phi(X)$ é aberto em Y, prove que X é localmente compacto.

(b) Se $x \in X$, e se U é uma vizinhança compacta de x em X, prove que $\phi(U)$ é uma vizinhança de $\phi(x)$ em Y.

(c) Prove que $\phi(X)$ é aberto em Y se e só se X é localmente compacto.

24.E. Identifiquemos $\mathbf{N}$ com sua imagem canônica em $\beta\mathbf{N}$.

(a) Prove que $\mathbf{N}$ é aberto em $\beta\mathbf{N}$.

(b) Prove que cada $n \in \mathbf{N}$ é um *ponto isolado* de $\beta\mathbf{N}$, ou seja $\{n\}$ é aberto em $\beta\mathbf{N}$.

(c) Prove que os únicos pontos isolados de $\beta\mathbf{N}$ são os pontos de $\mathbf{N}$.

24.F. Seja X um espaço de Tychonoff, e seja (Y, ϕ) uma compactificação de X tal que, dados um espaço de Hausdorff compacto Z, e uma função contínua $h : X \to Z$, existe uma função contínua $\tilde{h} : Y \to Z$ tal que $\tilde{h} \circ \phi = h$. Prove que existe um homeomorfismo $\tilde{\phi} : \beta X \to Y$ tal que $\tilde{\phi} \circ \epsilon_X = \phi$. Isto nos diz que a compactificação de Stone-Cech está caracterizada pela propriedade de extensão dada pelo Teorema 24.2.

25. Espaços metrizáveis

Lembremos que um espaço topológico X é metrizável se existe uma métrica em X que define a topologia de X. É claro que cada subespaço de um espaço metrizável é metrizável.

25.1. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não triviais. Então o produto $X = \prod_{i\in I} X_i$ é metrizável se e só se cada X_i é metrizável e I é enumerável.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que X seja metrizável. Como cada X_i é homeomorfo a um subespaço de X, segue que cada X_i é metrizável. Como X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, I é enumerável, pela Proposição 20.5.

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada X_i seja metrizável, e que I seja enumerável. Sem perda de generalidade podemos supor que $I = \mathbf{N}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ seja d_n uma métrica em X_n que define a topologia de X_n. Pelo Exercício 25.B podemos supor que cada d_n é limitada por 1. Dados $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ e $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ em $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$, definamos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

É claro que d é uma métrica em X. Provemos que d define a topologia de X.

Por um lado, dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2},$$

e seja

$$V = \prod_{n=1}^{N} B_{d_n}(x_n; \frac{\epsilon}{2\mathrm{N}}) \times \prod_{n=N+1}^{\infty} X_n.$$

Então V é uma vizinhança de x em X e é fácil ver que $V \subset B_d(x; \epsilon)$.

Por outro lado, seja U uma vizinhança aberta básica de x em X, ou seja

$$U = \prod_{n=1}^{N} B_{d_n}(x_n; \delta_n) \times \prod_{n=N+1}^{\infty} X_n.$$

Se definimos

$$\delta = \min\{2^{-n}\delta_n : n = 1, ..., N\},$$

então é fácil verificar que $B_d(x; \epsilon) \subset U$.

25.2. Teorema de metrizabilidade de Urysohn. *Para um espaço T_1 as seguintes condições são equivalentes:*

(a) X é metrizável e separável.

(b) X é regular e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

(c) X é homeomorfo a um subespaço do produto $[0,1]^{\boldsymbol{N}}$.

Demonstração. As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(c) \Rightarrow (a)$ são imediatas. A primeira segue da Proposição 20.4, e a segunda segue das Proposições 25.1 e 20.7.

Para provar que $(b) \Rightarrow (c)$, seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para a topologia de X, e seja

$$\mathcal{C} = \{(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U} \subset V\}.$$

Pela Proposição 20.3 X é um espaço de Lindelöf. Pelo Teorema 20.8 X é um espaço normal. Dai para cada $(U,V) \in \mathcal{C}$ existe uma função contínua $f_{UV} : X \to [0,1]$ tal que

$$f_{UV}(\overline{U}) \subset \{0\} \quad \text{e} \quad f_{UV}(X \setminus V) \subset \{1\}.$$

Seja

$$\mathcal{F} = \{f_{UV} : (U,V) \in \mathcal{C}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados. De fato seja A um fechado em X, e seja $b \in X \setminus A$. Seja $V \in \mathcal{B}$ tal que $b \in V \subset X \setminus A$. Como X é regular, existe um aberto U_1 em X tal que

$$b \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset V \subset X \setminus A.$$

Seja $U \in \mathcal{B}$ tal que $b \in U \subset U_1$. Segue que

$$b \in U \subset \overline{U} \subset V \subset X \setminus A$$

e portanto $(U,V) \in \mathcal{C}$. Segue que

$$f_{UV}(b) \in f_{UV}(\overline{U}) \subset \{0\} \quad \text{e} \quad f_{UV}(A) \subset f_{UV}(X \setminus V) \subset \{1\}.$$

Pelo Corolário 19.15 a avaliação

$$\epsilon : x \in X \to (f(x))_{f \in \mathcal{F}} \in [0,1]^{\mathcal{F}}$$

é um mergulho. Como $\mathcal{F}$ é enumerável, temos provado (c).

25.3. Corolário. *A imagem contínua de um espaço métrico compacto em um espaço de Hausdorff é metrizável.*

Demonstração. Seja X um espaço métrico compacto, seja Y um espaço de Hausdorff, e seja $f : X \to Y$ contínua e sobrejetiva. Então Y é compacto e portanto regular. Pelo Teorema 25.2, para provar que Y é metrizável, basta provar que Y satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para a topologia de X. Seja $\mathcal{C}$ a família das uniões finitas de membros de $\mathcal{B}$, e seja

$$\mathcal{D} = \{Y \setminus f(X \setminus U)\}.$$

$\mathcal{D}$ é uma família enumerável de abertos de Y. Provaremos que $\mathcal{D}$ é uma base para a topologia de Y. Seja V aberto em Y, e seja $y \in V$. Então $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$, $f^{-1}(y)$ é compacto, e $f^{-1}(V)$ é aberto em X. Usando a compacidade de $f^{-1}(y)$ podemos achar $U_1, ..., U_n \in \mathcal{B}$ tais que

$$f^{-1}(y) \subset U_1 \cup ... \cup U_n \subset f^{-1}(V).$$

Seja $U = U_1 \cup ... \cup U_n$. Então $U \in \mathcal{C}$ e é fácil verificar que

$$y \in Y \setminus f(X \setminus U) \subset V.$$

Logo $\mathcal{D}$ é uma base enumerável para a topologia de Y.

O teorema de Urysohn caracteriza os espaços topológicos que são metrizáveis e separáveis. Há outro teorema, mais geral, que caracteriza os espaços topológicos que são apenas metrizáveis. Não veremos esse teorema aqui.

Exercícios

25.A. Prove que as seguintes funções são crescentes:

(a) $f(t) = t/(1+t) \quad (t \geq 0)$.

(b) $g(t) = t/(1-t) \quad (0 \leq t < 1)$.

25.B. Seja d uma métrica em um conjunto X, e seja $d_1 : X \times X \to \mathbf{R}$ definida por

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

(a) Prove que d_1 é uma métrica em X.

(b) Prove que as métricas d e d_1 definem os mesmos abertos em X.

Sugestão: Use o exercício anterior.

25.C. Seja X um espaço métrico localmente compacto, e seja X^* a compactificação de Alexandroff de X. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

(a) X é separável.

(b) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, com K_n compacto e $K_n \subset (K_{n+1})^\circ$ para cada n.

(c) X^* é metrizável.

26. Espaços conexos

26.1. Definição. Um espaço topológico X é dito *desconexo* se existem dois abertos disjuntos não vazios A e B em X tais que $X = A \cup B$. Caso contrário X é dito *conexo*. Um conjunto $S \subset X$ é dito *desconexo* se S, com a topologia induzida por X, é um espaço desconexo. Caso contrário S é dito *conexo*

26.2. Exemplos.
(a) Cada espaço topológico discreto, com pelo menos dois pontos, é desconexo.
(b) O espaço de Sierpinski é conexo.

26.3. Proposição. *Cada intervalo fechado e limitado em* $\boldsymbol{R}$ *é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que $[a, b]$ seja desconexo, sendo $a < b$. Então $[a, b] = A \cup B$, sendo A e B dois abertos disjuntos não vazios de $[a, b]$. Sem perda de generalidade podemos supor que $b \in B$. Como B é aberto, segue que $(b - \epsilon, b] \subset B$ para algum $\epsilon > 0$. Seja $c = \sup A$. Então $c < b$ e $(c, b] \subset B$. Se $c \in A$, então, como A é aberto, existiria $\epsilon > 0$ tal que $[c, c+\epsilon) \subset A$, absurdo, pois $c = \sup A$. Logo $c \in B$. Se $c > a$, então, como B é aberto, existiria $\epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c] \subset B$, absurdo, pois $c = \sup A$. Logo $c = a$, e portanto $[a, b] = [c, b] \subset B$, absurdo de novo. Logo $[a, b]$ é conexo.

Deixamos como exercício as demonstrações dos dois resultados seguintes.

26.4. Proposição. *Um espaço topológico* X *é conexo se e só se* X *e* $\emptyset$ *são os únicos subconjuntos de* X *que são abertos e fechados.*

26.5. Proposição. *A imagem contínua de um espaço conexo é conexo.*

26.6. Proposição. *Seja* X *um espaço topológico, e seja* S *um subconjunto conexo de* X*. Então* $\overline{S}$ *também é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que

$$\overline{S} = A \cup B,$$

sendo A e B dois subconjuntos abertos não vazios de $\overline{S}$. Segue que

$$S = (S \cap A) \cup (S \cap B),$$

sendo $S \cap A$ e $S \cap B$ dois subconjuntos abertos não vazios de S. Isto é absurdo, pois S é conexo.

26.7. Corolário. *Seja* X *um espaço topológico, seja* S *um subconjunto conexo de* X*, e seja* $S \subset T \subset \overline{S}$*. Então* T *é conexo.*

Demonstração. Basta aplicar a proposição anterior com $X = T$.

26.8. Definição. Seja X um espaço topológico. Diremos que dois conjuntos $A, B \subset X$ são *mutuamente separados* se $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

26.9. Proposição. *Um espaço topológico X é desconexo se e só se existem dois conjuntos mutuamente separados não vazios A e B tais que $X = A \cup B$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se X é desconexo, então existem dois abertos disjuntos não vazios A e B tais que $X = A \cup B$. Como A e B são abertos e fechados, é claro que A e B são mutuamente separados.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $X = A \cup B$, sendo A e B dois conjuntos mutuamente separados não vazios. Como

$$X = \overline{A} \cup B \quad \text{e} \quad \overline{A} \cap B = \emptyset,$$

vemos que $B = X \setminus \overline{A}$ é aberto. De maneira análoga segue que A é aberto. Logo X é desconexo.

26.10. Corolário. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $S \subset X$ é desconexo se e só se existem dois conjuntos não vazios A e B, mutuamente separados em X, tais que $S = A \cup B$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $S = A \cup B$, sendo A e B dois conjuntos não vazios, mutuamente separados em X. Então é claro que A e B são mutuamente separados em S.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $S = A \cup B$, sendo A e B dois conjuntos não vazios, mutuamente separados em S. Então

$$\overline{A}^X \cap B = \overline{A}^X \cap S \cap B = \overline{A}^S \cap B = \emptyset.$$

De maneira similar podemos provar que $A \cap \overline{B}^X = \emptyset$. Logo A e B são mutuamente separados em X.

26.11. Corolário. *Seja X um espaço topológico, sejam A e B dois conjuntos mutuamente separados, e seja S um subconjunto conexo de $A \cup B$. Então $S \subset A$ ou $S \subset B$.*

Demonstração. É claro que

$$S = (S \cap A) \cup (S \cap B),$$

e os conjuntos $S \cap A$ e $S \cap B$ são mutuamente separados em X. Como S é conexo, segue da proposição anterior que $S \cap A = \emptyset$ ou $S \cap B = \emptyset$. Logo $S \subset B$ ou $S \subset A$.

26.12. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Suponhamos que $X = \bigcup_{i \in I} S_i$, onde cada S_i é conexo e $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$. Então X é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que $X = A \cup B$, sendo A e B dois conjuntos mutuamente separados. Segue do corolário anterior que $S_i \subset A$ ou $S_i \subset B$ para cada $i \in I$. Seja $s \in \bigcap_{i \in I} S_i$. Se $s \in A$, então $S_i \subset A$ para cada $i \in I$, e portanto $B = \emptyset$. De maneira análoga, se $s \in B$, então $A = \emptyset$. Logo X é conexo.

26.13. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Suponhamos que cada par de pontos $x, y \in X$ pertence a um conjunto conexo $S_{xy} \subset X$. Então X é conexo.*

Demonstração. Fixemos $a \in X$. Segue da hipótese que

$$X = \bigcup_{x \in X} S_{ax} \quad \text{e} \quad a \in \bigcap_{x \in X} S_{ax}.$$

Pela proposição anterior X é conexo.

26.14. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Suponhamos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, onde cada S_n é conexo e $S_n \cap S_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Então X é conexo.*

Demonstração. Seja $T_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Usando a Proposição 26.12 e indução segue que cada T_n é conexo. Como

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n \neq \emptyset,$$

outra aplicação da Proposição 26.12 implica que X é conexo.

26.15. Exemplos.

(a) $\mathbf{R}$ é conexo pela Proposição 26.12, pois

$$\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] \quad \text{e} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1].$$

(b) $\mathbf{R}^n$ é conexo pela Proposição 26.12, pois $\mathbf{R}^n$ é a união de todas as retas que passam pela origem.

26.16. Proposição. *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Então o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é conexo se e só se cada X_i é conexo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se X é conexo, então $X_i = \pi_i(X)$ é conexo para cada $i \in I$.

($\Leftarrow$) Fixemos $a \in X$ e denotemos por S o conjunto de todos os $x \in X$ tais que existe um conjunto conexo $S_{ax} \subset X$ contendo a e x. Como

$$S = \bigcup_{x \in S} S_{ax} \quad \text{e} \quad a \in \bigcap_{x \in S} S_{ax},$$

vemos que S é conexo., pela Proposição 26.12. Pela ~~Proposição 26.5,~~ para provar que X é conexo basta provar que $X = \overline{S}$. Seja $b \in X$ e seja U um aberto básico contendo b, ou seja

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}),$$

com U_{i_k} aberto em X_{i_k} para $k = 1, ..., n$. Seja T_1,...,T_n definidos da maneira seguinte. T_k é o conjunto dos $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ tais que:

$x_{i_k} \in X_{i_k}$ é arbitrário;
$x_{i_j} = b_{i_j}$ se $j < k$;
$x_{i_j} = a_{i_j}$ se $j > k$;
$x_i = a_i$ se $i \neq i_1, ... i_n$.

É claro que T_k é homeomorfo a X_{i_k}, que é conexo, e $T_k \cap T_{k+1} \neq \emptyset$ para $k = 1, ..., n-1$. Pela Proposição 26.14 $T = \bigcup_{k=1}^{n} T_k$ é conexo. Como $a \in T_1 \subset T$, segue que $T \subset S$. Por outro lado

$$S \cap U \supset T \cap U \supset T_n \cap U \neq \emptyset.$$

Isto prova que $b \in \overline{S}$, e portanto $X = \overline{S}$.

Exercícios

26.A. Prove que um espaço topológico X é conexo se e só se X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados.

26.B. Prove que a imagem contínua de um espaço conexo é conexo.

26.C. Seja S um subconjunto conexo de $\mathbf{R}$. Prove que, dados $a < b$ em S, tem-se que $[a, b] \subset S$.

26.D. Prove que cada subconjunto enumerável de $\mathbf{R}$, com pelo menos dois pontos, é desconexo.

26.E. Seja X um conjunto infinito, com a topologia cofinita. Prove que X é conexo.

26.F. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Prove que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. .

26.G. Prove que o círculo unitário S^1 é conexo.

26.H. Prove que a esfera

$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}$$

é conexa para cada $n \in \mathbf{N}$.

27. Componentes conexas

27.1. Definição. Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, denotaremos por C_x a união dos subconjuntos conexos de X que contém x. Então C_x é o maior subconjunto conexo de X que contém x. Diremos que C_x é a *componente conexa* de X que contém x.

27.2. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Dados $x, y \in X$, tem-se que $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$.*

Demonstração. Se $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, então $C_x \cup C_y$ é conexo, e portanto

$$C_x = C_x \cup C_y = C_y.$$

27.3. Proposição. *As componentes conexas de um espaço topológico são sempre fechadas.*

Demonstração. Como C_x é conexo, segue que $\overline{C_x}$ é conexo também. Logo $C_x = \overline{C_x}$.

27.4. Definição. Um espaço topológico X é dito *localmente conexo* se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças abertas e conexas.

27.5. Exemplo. O espaço $[0, 1) \cup (1, 2]$ é localmente conexo, mas não é conexo.

27.6. Proposição. *Um espaço topológico X é localmente conexo se e só se as componentes conexas de cada aberto de X são abertas em X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que X seja localmente conexo. Seja U um aberto de X, e seja C uma componente conexa de U. Por hipótese para cada $x \in C$ existe um aberto conexo V tal que $x \in V \subset U$. Segue que $x \in V \subset C$, e portanto C é aberto em X.

($\Leftarrow$) Suponhamos que as componentes conexas de cada aberto de X sejam abertas em X. Seja $x \in X$, e seja U uma vizinhança aberta de x em X. Seja C a componente conexa de U que contém x. Como por hipótese C é aberto em X, concluimos que X é localmente conexo.

27.7. Corolário. *As componentes conexas de um espaço localmente conexo são abertas e fechadas.*

27.8. Proposição. *Cada quociente de um espaço localmente conexo é localmente conexo.*

Demonstração. Seja X um espaço localmente conexo e seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente. Provaremos que as componentes conexas de cada aberto de Y são abertas em Y.

Seja V um aberto não vazio em Y, e seja D uma componente conexa de V. Para provar que D é aberta em Y basta provar que $\pi^{-1}(D)$ é aberto em X. Seja $x \in \pi^{-1}(D)$, e seja C_x a componente conexa de $\pi^{-1}(V)$ que contém x.

$\pi(C_x)$ é conexo e $\pi(x) \subset \pi(C_x) \subset V$. Como $\pi(x) \in D$, segue que $\pi(C_x) \subset D$, e portanto $C_x \subset \pi^{-1}(D)$. Como C_x é aberto em X, segue que $\pi^{-1}(D)$ é aberto em X, como queriamos.

Exercícios

27.A. Se $X = \mathbf{Q}$, prove que $C_x = \{x\}$ para cada $x \in \mathbf{Q}$.

27.B. Seja X um espaço topológico discreto, com pelo menos dois pontos.
(a) Prove que X é localmente conexo, mas não é conexo.
(b) Prove que $C_x = \{x\}$ para cada $x \in X$.

27.C. Prove que um espaço topológico X é localmente conexo se e só se a topologia de X admite uma base formada por conjuntos abertos e conexos.

27.D. Se um espaço topológico X é compacto e localmente conexo, prove que X tem apenas um número finito de componentes conexas.

27.E. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Prove que a imagem de cada componente conexa de X está contida numa componente conexa de Y.

27.F. Se X e Y são homeomorfos, prove que cada componente conexa de X é homeomorfa a uma componente conexa de Y.

28. Espaços conexos por caminhos

28.1. Definição. Um espaço topológico X é dito *conexo por caminhos* se dados $a, b \in X$, existe uma função contínua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Diremos que f é um *caminho* em X entre a e b.

28.2. Proposição. *Cada espaço conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração. Seja X um espaço conexo por caminhos. Suponhamos que existam dois abertos disjuntos não vazios A e B tais que $X = A \cup B$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$, e seja $f : [0,1] \to X$ um caminho em X entre a e b. Segue que

$$[0,1] = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B,$$

e $[0,1]$ não seria conexo.

28.3. Exemplos.

(a) $\mathbf{R}^n$ é conexo por caminhos. De fato, dados $a, b \in \mathbf{R}^n$, seja $f : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ definida por $f(t) = (1-t)a + tb$.

(b) $\mathbf{R}^2 \setminus E$ é conexo por caminhos para cada conjunto enumerável $E \subset \mathbf{R}^2$. De fato, para cada $a \in \mathbf{R}^2 \setminus E$, existe uma família não enumerável de retas em $\mathbf{R}^2 \setminus E$ que passam por a. Dai, dados $a, b \in \mathbf{R}^2 \setminus E$, existem duas retas L_1 e L_2 em $\mathbf{R}^2 \setminus E$ que passam por a e b, respectivamente, e que tem interseção não vazia. Essa retas fornecem um caminho em $\mathbf{R}^2 \setminus E$ entre a e b.

(c) Se $n \geq 2$, então $\mathbf{R}^n \setminus E$ é conexo por caminhos para cada conjunto enumerável $E \subset \mathbf{R}^n$. De fato, dados $a, b \in \mathbf{R}^n \setminus E$, seja S um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^n$ de dimensão 2 que contém a e b. Segue de (b) que existe um caminho em $S \cap (\mathbf{R}^n \setminus E) = S \setminus (S \cap E)$ entre a e b.

28.4. Definição. Seja X um espaço topológico, seja $f : [0,1] \to X$ um caminho entre a e b, e seja $g : [0,1] \to X$ um caminho entre b e c. Seja $f * g : [0,1] \to X$ o caminho entre a e c definido por

$$(f * g)(t) = f(2t) \qquad (0 \leq t \leq \frac{1}{2}),$$

$$(f * g)(t) = g(2t-1) \qquad (\frac{1}{2} \leq t \leq 1).$$

28.5. Definição. Um espaço topológico X é dito *localmente conexo por caminhos* se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças abertas e conexas por caminhos.

28.6. Proposição. *Se X é conexo e localmente conexo por caminhos, então X é conexo por caminhos.*

Demonstração. Seja $a \in X$, e seja S o conjunto dos $x \in X$ tais que existe um caminho em X entre a e x. Claramente $a \in S$. Para provar que $S = X$, basta provar que S é aberto e fechado.

Para provar que S é aberto, seja $b \in S$, e seja U uma vizinhança aberta de b que é conexa por caminhos. Seja f um caminho em X entre a e b, e seja g um caminho em X entre b e $c \in U$. Então $f * g$ é um caminho em X entre a e c, e portanto $U \subset S$. Logo S é aberto.

Para provar que S é fechada, seja $c \in \overline{S}$, e seja U uma vizinhança aberta de c que é conexa por caminhos. Seja $b \in U \cap S$, seja f um caminho em X entre a e b, e seja g um caminho em X entre b e c. Então $f * g$ é um caminho em X entre a e c, e portanto $c \in S$. Logo S é fechado.

Exercícios

28.A. Um conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ é dito *convexo* se $(1-t)a + tb \in S$ para todo $a, b \in S$ e $t \in [0,1]$. Prove que cada conjunto convexo em $\mathbf{R}^n$ é conexo por caminhos.

28.B. Prove que a imagem contínua de um espaço conexo por caminhos é conexo por caminhos.

28.C. Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Prove que o produto $X = \prod_{i \in I} X_i$ é conexo por caminhos se e só se cada X_i é conexo por caminhos.

28.D. (a) Prove que S^1 é conexo por caminhos.
(b) Prove que S^n é conexo por caminhos para cada $n \in \mathbf{N}$.

28.E. Prove que os espaços $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}^n$ não são homeomorfos se $n \geq 2$.

28.F. Prove que os espaços $[0,1]$ e S^1 não são homeomorfos.

28.G. Prove que os espaços S^1 e S^n não são homeomorfos se $n \geq 2$.

28.H. Prove que cada subconjunto aberto e conexo de $\mathbf{R}^n$ é conexo por caminhos.

28.I. Consideremos os conjuntos

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x \leq 1, \quad y = \operatorname{sen}(1/x)\},$$

$$T = S \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

(a) Prove que S é conexo.
(b) Prove que T é conexo.
(c) Prove que S é conexo por caminhos.
(d) Prove que T não é conexo por caminhos.

Sugestão: Para provar (d) suponha que $f = (f_1, f_2) : [0,1] \to T$ seja um caminho em T entre $(0,0)$ e $(1/\pi, 0)$. Prove que f_1 toma todos os valores $1/n\pi$, com $n \in \mathbf{N}$. A seguir prove que, em cada vizinhança de 0 em $[0,1]$ f_2 toma os valores 1 e -1. Conclua que f_2 não é contínua em 0.

28.J. Seja X um espaço topológico, e sejam f, g e h caminhos em X entre a e b, entre b e c, e entre c e d, respectivamente.

(a) Prove que

$$[(f * g) * h](t) = f(4t) \qquad (0 \leq t \leq \frac{1}{4}),$$

$$[(f * g) * h](t) = g(4t - 1) \qquad (\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}),$$

$$[(f * g) * h](t) = h(2t - 1) \qquad (\frac{1}{2} \leq t \leq 1).$$

(b) Prove que

$$[f * (g * h)](t) = f(2t) \qquad (0 \leq t \leq \frac{1}{2}),$$

$$[f * (g * h)](t) = g(4t - 2) \qquad (\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}),$$

$$[f * (g * h)](t) = h(4t - 3) \qquad (\frac{3}{4} \leq t \leq 1).$$

29. Homotopia

29.1. Definição. Sejam X e Y espaços topológicos, e sejam $f, g \in C(X;Y)$. Diremos que f e g são *homotópicas*, e escreveremos $f \simeq g$, se existir uma função contínua

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que

$$H(x,0) = f(x) \qquad (x \in X),$$

$$H(x,1) = g(x) \qquad (x \in X).$$

Diremos que H é uma *homotopia* entre f e g, e escreveremos $H : f \simeq g$.

Se definimos

$$f_t(x) = H(x,t) \qquad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

vemos que H representa uma família de funções contínuas $f_t : X \to Y$ $(0 \leq t \leq 1)$ tais que $f_0 = f$ e $f_1 = g$.

29.2. Exemplo. Seja X um espaço topológico qualquer, e seja Y um subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$. Então qualquer par de funções $f, g \in C(X;Y)$ são homotópicas entre si. Basta definir

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x) \qquad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

29.3. Proposição. *A relação $f \simeq g$ é uma relação de equivalência em $C(X;Y)$.*

Demonstração. Se $f \in C(X;Y)$, então $H : f \simeq f$, onde

$$H(x,t) = f(x) \qquad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Se $H_1 : f \simeq g$, então $H_2 : g \simeq f$, onde

$$H_2(x,t) = H_1(x, 1-t) \qquad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Se $H_1 : f \simeq g$ e $H_2 : g \simeq h$, então $H_3 : f \simeq h$, onde

$$H_3(t) = H_1(x, 2t) \qquad (x \in X, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}),$$

$$H_3(t) = H_2(x, 2t-1) \qquad (x \in X, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1).$$

29.4. Proposição. *Sejam X, Y, Z espaços topológicos, e sejam $f_1, g_1 \in C(X;Y)$ e $f_2, g_2 \in C(Y;Z)$. Se $f_1 \simeq g_1$ e $f_2 \simeq g_2$, então $f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.*

Demonstração. Sejam

$$H_1 : f_1 \simeq g_1, \qquad H_2 : f_2 \simeq g_2,$$

e seja $H_3 : X \times [0,1] \to Z$ definida por

$$H_3(x,t) = H_2(H_1(x,t), t) \qquad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Então

$$H_3(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = f_2 \circ f_1(x) \qquad (x \in X),$$

$$H_3(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(g_1(x),1) = g_2 \circ g_1(x) \qquad (x \in X),$$

e portanto

$$H_3 : f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1.$$

29.5. Definição. Um espaço topológico X é dito *contrátil* se a função identidade $i_X(x) = x$ é homotópica a uma função constante $c(x) = x_0$.

29.6. Proposição. *Um espaço topológico X é contrátil se e só se, para cada espaço topológico Y, qualquer par de funções $f, g \in C(Y;X)$ são homotópicas entre si.*

Demonstração. Para provar a implicação não trivial, suponhamos que X seja contrátil, ou seja $i_X \simeq c$, e sejam $f, g \in C(Y;X)$. Então, usando a proposição anterior, segue que

$$f = i_X \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq i \circ g = g.$$

29.7. Exemplo. Segue do Exemplo 29.2 que cada subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ é contrátil.

Sabemos que dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos se e só se existem $f \in C(X;Y)$ e $g \in C(Y;X)$ tais que $g \circ f = i_X$ e $f \circ g = i_Y$.

29.8. Definição. Diremos que dois espaços topológicos X e Y são *homotopicamente equivalentes* se existem $f \in C(X;Y)$ e $g \in C(Y;X)$ tais que $g \circ f \simeq i_X$ e $f \circ g \simeq i_Y$.

Se X e Y são homeomorfos, é claro que X e Y são homotopicamente equivalentes, mas a recíproca é falsa em geral.

29.9. Proposição. *Um espaço topológico X é contrátil se e só se X é homotopicamente equivalente a um espaço unitário.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que a identidade em X seja homotópica a uma função constante $c(x) = x_0$. Seja $Y = \{x_0\}$, e seja $j : Y \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. Então $j \circ c = c \simeq i_X$ e $c \circ j = i_Y$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que X seja homotopicamente equivalente a $Y = \{y_0\}$. Sejam $f \in C(X;Y)$ e $g \in C(Y;X)$ tais que $g \circ f \simeq i_X$ e $f \circ g \simeq i_Y$. Como $g \circ f$ é uma função constante, vemos que X é contrátil.

Na próxima seção precisaremos de uma variante da noção de homotopia, conhecida como homotopia relativa.

29.10. Definição. (a) Diremos que (X, A) é um *par topológico* se X é um espaço topológico, e $A \subset X$.

(b) Diremos que $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma *função contínua* se $f : X \to Y$ é uma função contínua tal que $f(A) \subset B$.

(c) Diremos que (X, A) e (Y, B) são *homeomorfos* se existem funções contínuas $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (X, A)$ tais que $g \circ f = i_X$ e $f \circ g = i_Y$. Notemos que neste caso $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e $f(A) = B$.

(d) Diremos que duas funções contínuas $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são *homotópicas* se existir uma função contínua

$$H : X \times [0, 1] \to Y$$

tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) && (x \in X), \\ H(x, 1) &= g(x) && (x \in X), \\ H(x, t) &= f(x) = g(x) && (x \in A, 0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

Neste caso diremos que H é uma *homotopia entre f e g relativa a A*, e escreveremos $H : f \simeq g[A]$.

(e) Diremos que (X, A) e (Y, B) são *homotopicamente equivalentes* se existem funções contínuas $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (X, A)$ tais que $g \circ f \simeq i_X[A]$ e $f \circ g \simeq i_Y[B]$.

Exercícios

29.A. Prove que cada espaço contrátil é conexo por caminhos.

29.B. Prove que a relação $f \simeq g[A]$ é uma relação de equivalencia no conjunto de todas as funções contínuas $f : (X, A) \to (Y, B)$.

29.C. Prove que, se (X, A) e (Y, B) são homotopicamente equivalentes, então X e Y são homotopicamente equivalentes.

29.D. Prove que, se (X, A) e (Y, B) são homotopicamente equivalentes, então A e B são homeomorfos.

29.E. Seja X um espaço topológico, e sejam $a, b, c \in X$. Sejam f_1 e g_1 dois caminhos em X entre a e b, e sejam f_2 e g_2 dois caminhos em X entre b e c. Se

$$f_1 \simeq g_1[\{0, 1\}] \quad \text{e} \quad f_2 \simeq g_2[\{0, 1\}],$$

prove que

$$f_1 * f_2 \simeq g_1 * g_2[\{0, 1\}].$$

30. O grupo fundamental

30.1. Definição. Seja X um espaço topológico, e seja $x_0 \in X$.

(a) Diremos que $f : [0,1] \to X$ é um *laço com base em* x_0 se f é contínua e $f(0) = f(1) = x_0$. Denotaremos por $\Omega(X, x_0)$ o conjunto de todos os laços em X com base em x_0.

(b) Diremos que $f, g \in \Omega(X, x_0)$ são *homotópicos* se $f \simeq g[\{0,1\}]$. Neste caso escreveremos $f \simeq_{x_0} g$. Denotaremos por $\Pi_1(X, x_0)$ o conjunto das classes de equivalência em $\Omega(X, x_0)$ sob a relação $\simeq_{x_0}$.

30.2. Teorema. *O conjunto* $\Pi_1(X, x_0)$, *com a operação*

$$[f] * [g] = [f * g],$$

é um grupo, chamado de grupo fundamental de X, *com base em* x_0.

Demonstração. Se $f_1 \simeq_{x_0} f_2$ e $g_1 \simeq_{x_0} g_2$, segue do Exercício 29.E que

$$f_1 * g_1 \simeq_{x_0} f_2 * g_2.$$

Logo a operação está bem definida.

Para provar que a operação é associativa basta provar que

$$(1) \qquad (f * g) * h \simeq_{x_0} f * (g * h)$$

para todo $f, g, h \in \Omega(X, x_0)$. Pelo Exercício 28.G, por um lado temos que

$$[(f * g) * h](s) = f(4s) \qquad (0 \le 4s \le 1),$$

$$[(f * g) * h](s) = g(4s - 1) \qquad (1 \le 4s \le 2),$$

$$[(f * g) * h](s) = h(2s - 1) \qquad (2 \le 4s \le 4).$$

E por outro lado

$$[f * (g * h)](s) = f(2s) \qquad (0 \le 4s \le 2),$$

$$[f * (g * h)](s) = g(4s - 2) \qquad (2 \le 4s \le 3),$$

$$[f * (g * h)](s) = h(4s - 3) \qquad (3 \le 4s \le 4).$$

Definamos

$$H(s,t) = f\left(\frac{4\mathrm{s}}{1+\mathrm{t}}\right) \qquad (0 \le 4s \le 1 + t),$$

$$H(s,t) = g(4s - 1 - t) \qquad (1 + t \le 4s \le 2 + t),$$

$$H(s,t) = h\left(\frac{4\mathrm{s} - 2 - \mathrm{t}}{2 - \mathrm{t}}\right) \qquad (2 + t \le 4s \le 4).$$

Não é difícil verificar que H é contínua e que

$$H(s, 0) = [(f * g) * h](s) \qquad (0 \le s \le 1),$$

$$H(s,1) = [f*(g*h)](s) \qquad (0 \le s \le 1),$$
$$H(0,t) = [(f*g)*h](0) = [f*(g*h)](0) \qquad (0 \le t \le 1),$$
$$H(1,t) = [(f*g)*h](1) = [f*(g*h)](1) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Isto prova (1).

Seja $e(s) = x_0$ para todo $s \in [0,1]$. Para provar que $[e]$ é o elemento identidade de $\Pi_1(X, x_0)$, basta provar que

$$(2) \qquad f * e \simeq_{x_0} f$$

e

$$(3) \qquad e * f \simeq_{x_0} f$$

para todo $f \in \Omega(X, x_0)$. Notemos que

$$(f*e)(s) = f(2s) \qquad (0 \le 2s \le 1),$$

$$(f*e)(s) = x_0 \qquad (1 \le 2s \le 2).$$

Definamos

$$H(s,t) = f(\frac{2\mathrm{s}}{1+\mathrm{t}}) \qquad (0 \le 2s \le 1+t),$$
$$H(s,t) = x_0 \qquad (1+t \le 2s \le 2).$$

Não é difícil verificar que H é contínua e que

$$H(s,0) = (f*e)(s) \qquad (0 \le s \le 1),$$

$$H(s,1) = f(s) \qquad (0 \le s \le 1),$$
$$H(0,t) = (f*e)(0) = f(0) \qquad (0 \le t \le 1),$$
$$H(1,t) = (f*e)(1) = f(1) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Isto prova (2). A demonstração de (3) é análoga.

Dado $f \in \Omega(X, x_0)$, seja $f^{-1} \in \Omega(X, x_0)$ definido por $f^{-1}(s) = f(1-s)$ para todo $s \in [0,1]$. Para provar que $[f^{-1}]$ é o inverso de $[f]$ basta provar que

$$(4) \qquad f * f^{-1} \simeq_{x_0} e$$

e

$$(5) \qquad f^{-1} * f \simeq_{x_0} e$$

Notemos que

$$(f*f^{-1})(s) = f(2s) \qquad (0 \le 2s \le 1),$$
$$(f*f^{-1})(s) = f(2-2s) \qquad (1 \le 2s \le 2).$$

Definamos

$$H(s,t) = f(t) \qquad (0 \le 2s \le 2t),$$

$$H(s,t) = f(2s-t) \qquad (2t \leq 2s \leq 1+t),$$

$$H(s,t) = f(2-2s+t) \qquad (1+t \leq 2s \leq 2).$$

Não é difícil verificar que H é contínua e que

$$H(s,0) = (f * f^{-1})(s) \qquad (0 \leq s \leq 1),$$

$$H(s,1) = e(s) \qquad (0 \leq s \leq 1),$$

$$H(0,t) = (f * f^{-1})(0) = e(0) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

$$H(1,t) = (f * f^{-1})(1) = e(1) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Isto prova (4) A demonstração de (5) é análoga.

30.3. Proposição. *Seja $\phi : [0,1] \to X$ um caminho em X entre x_0 e x_1. Então a função*

$$\phi^* : [f] \in \Pi_1(X, x_0) \to [\phi^{-1} * f * \phi] \in \Pi_1(X, x_1)$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Usando o Exercício 29.E segue que, se $f_1 \simeq_{x_0} f_2$, então

$$\phi^{-1} * f_1 * \phi \simeq_{x_0} \phi^{-1} * f_2 * \phi.$$

Isto prova que ϕ^* está bem definida. É fácil ver que ϕ^* é um homomorfismo de grupos, e que $(\phi^{-1})^*$ é seu inverso. Deixamos a demonstração detalhada como exercício.

30.4. Corolário. *Se X é conexo por caminhos, então todos os grupos $\Pi_1(X, x_0)$, com $x_0 \in X$, são isomorfos entre si.*

30.5. Definição. Um espaço topológico X é dito *simplesmente conexo* se X é conexo por caminhos e o grupo $\Pi_1(X, x_0)$ é trivial para algum, e portanto, para todo $x_0 \in X$.

30.6. Exemplo. Cada subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ é simplesmente conexo.

Com efeito basta provar que $f \simeq_{x_0} g$ para todo $f, g \in \Omega(X, x_0)$. Seja $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida por

$$H(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s).$$

Então

$$H(s,0) = f(s) \qquad (0 \leq s \leq 1),$$

$$H(s,1) = g(s) \qquad (0 \leq s \leq 1),$$

$$H(0,t) = x_0 \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

$$H(1,t) = x_0 \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Isto prova que $f \simeq_{x_0} g$.

Exercícios

30.A. Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $\phi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uma função contínua. Prove que a função

$$\phi_* : [f] \in \Pi_1(X, x_0) \to [\phi \circ f] \in \Pi_1(Y, y_0)$$

é um homomorfismo de grupos.

30.B. Se ϕ é a identidade em X, prove que ϕ_* é a identidade em $\Pi_1(X, x_0)$.

30.C. Sejam X, Y e Z espaços topológicos, e sejam $\phi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ funções contínuas. Prove que

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*.$$

30.D. Se $\phi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é um homeomorfismo, prove que a função

$$\phi_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$$

é um isomorfismo de grupos.

30.E. Sejam X e Y espaços topológicos, e sejam $\phi, \psi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ funções contínuas tais que $\phi \simeq \psi[\{x_0\}]$. Prove que $\phi \circ f \simeq_{y_0} \psi \circ f$ para todo $f \in \Omega(X, x_0)$, ou seja $\phi_* = \psi_*$.

30.F. Se (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes, prove que os grupos $\Pi_1(X, x_0)$ e $\Pi_1(Y, y_0)$ são isomorfos.

30.G. Sejam X e Y espaços topológicos, e sejam $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Prove que o grupo $\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ é isomorfo ao grupo $\Pi(X, x_0) \times \Pi(Y, y_0)$.

31. O grupo fundamental do círculo unitário

Consideremos o círculo unitário

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}.$$

Nesta seção provaremos o teorema seguinte.

31.1. Teorema. *O grupo $\Pi_1(S^1, 1)$ é isomorfo a $\boldsymbol{Z}$.*

Para provar este teorema vamos precisar de dois lemas auxiliares. Antes de enunciar esses lemas, consideremos a função

$$p : t \in \mathbf{R} \to e^{2\pi t i} \in S^1.$$

É claro que:

(a) p é sobrejetiva, contínua e aberta, com $p(0) = 1$.

(b) A restrição $p|(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to S^1 \setminus \{-1\}$ é um homeomorfismo, com inversa q.

(c) $p(s+t) = p(s)p(t)$ para todo $s, t \in \mathbf{R}$.

(d) $p(t) = 1$ se e só se $t \in \mathbf{Z}$.

É claro que $\mathbf{R}$ é um grupo abeliano sob adição de números reais, S^1 é um grupo abeliano sob multiplicação de números complexos, e $p : \mathbf{R} \to S^1$ é um homomorfismo de grupos cujo núcleo é $\mathbf{Z}$.

31.2. Lema. *Seja g um caminho em S^1, com $g(0) = 1$. Então existe um único caminho f em $\boldsymbol{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $p \circ f = g$.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Demonstração. Como $[0,1]$ é compacto, a função $g : [0,1] \to S^1$ é uniformemente contínua. Logo existe $\delta > 0$ tal que se $|s - t| < \delta$, então $|g(s) - g(t)| < 2$. Então $g(s)/g(t) \neq -1$ e $q(g(s)/g(t))$ está bem definida. Seja $n \in \mathbf{N}$ tal que $1/n < \delta$, e seja $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} q\left(\frac{g(\frac{k}{n}t)}{g(\frac{k-1}{n}t)}\right).$$

Então f é contínua, $f(0) = 0$ e

$$p \circ f(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{g(\frac{k}{n}t)}{g(\frac{k-1}{n}t)} = g(t),$$

provando existência. Para provar unicidade, suponhamos que exista uma função contínua $f_1 : [0,1] \to \mathbf{R}$ tal que $f_1(0) = 0$ e $p \circ f_1 = g$. Então

$$p \circ (f_1 - f)(t) = 1 \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

e portanto

$$(f_1 - f)(t) \in \mathbf{Z} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Como $[0,1]$ é conexo, segue que

$$(f_1 - f)(t) = 0 \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

31.3. Lema. *Sejam g_1 e g_2 caminhos em S^1 tais que $g_1(0) = g_2(0) = 1$, e sejam f_1 e f_2 os únicos caminhos em $\boldsymbol{R}$ tais que $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $p \circ f_1 = g_1$ e $p \circ f_2 = g_2$.*

(a) Dada uma função contínua $G : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ tal que $G(0) = 1$, existe uma única função contínua $F : [0,1] \times [0,1] \to \boldsymbol{R}$ tal que $F(0) = 0$ e $p \circ F = G$.

(b) Se $G : g_1 \simeq g_2[\{0,1\}]$, então $F : f_1 \simeq f_2[\{0,1\}]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1] \times [0,1]} \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "G"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Demonstração. (a) A demonstração de (a) é similar à demonstração do lema anterior. Como G é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $|z - w| < \delta$, então $|G(z) - G(w)| < 2$, e portanto $q(G(z)/G(w))$ está bem definida. Seja $n \in \mathbf{N}$ tal que $1/n < \delta$, e seja $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} q\left(\frac{G(\frac{k}{n}z)}{G(\frac{k-1}{n}z)}\right).$$

Então F é contínua, $F(0) = 0$ e $p \circ F = G$. Se existir uma função contínua $F_1 : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ tal que $F_1(0) = 0$ e $p \circ F_1 = G$, então podemos provar como antes que $F_1 = F$.

(b) Suponhamos que $G : g_1 \simeq g_2[\{0,1\}]$. Então

$$p \circ F(s,0) = G(s,0) = g_1(s) = p \circ f_1(s) \qquad (0 \leq s \leq 1).$$

Pela unicidade no lema anterior, segue que

$$F(s,0) = f_1(s) \qquad (0 \leq s \leq 1).$$

De maneira análoga podemos provar que

$$F(s,1) = f_2(s) \qquad (0 \leq s \leq 1).$$

Por outro lado temos que

$$p \circ F(0,t) = G(0,t) = g_1(0) = g_2(0) = p \circ f_1(0) = p \circ f_2(0) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Pela unicidade do lema anterior segue que

$$F(0,t) = f_1(0) = f_2(0) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

De maneira análoga podemos provar que

$$F(1,t) = f_1(1) = f_2(1) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Logo $F : f_1 \simeq f_2[\{0,1\}]$.

Demonstração do Teorema 31.1. Se $g \in \Omega(S^1, 1)$, então segue do Lema 31.2 que existe um único caminho $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $p \circ f(1) = g(1) = 1$. Então $f(1) \in \mathbf{Z}$. Definamos

$$\sigma : [g] \in \Pi_1(S^1, 1) \to f(1) \in \mathbf{Z}.$$

Dados $g_1, g_2 \in \Omega(S^1, 1)$, sejam f_1 e f_2 os únicos caminhos em $\mathbf{R}$ tais que $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $p \circ f_1 = g_1$ e $p \circ f_2 = g_2$. Se $G : g_1 \simeq g_2[\{0,1\}]$, então segue do Lema 31.3 que $F : f_1 \simeq f_2[\{0,1\}]$. Em particular $F(1,t) = f_1(1) = f_2(1)$. Isto prova que a função σ está bem definida.

Para provar que σ é um homomorfismo de grupos, sejam $g_1, g_2 \in \Omega(S^1, 1)$, e sejam f_1 e f_2 os únicos caminhos em $\mathbf{R}$ tais que $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $p \circ f_1 = g_1$ e $p \circ f_2 = g_2$. Sejam

$$n_1 = f_1(1), \qquad n_2 = f_2(1).$$

Seja $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definido por

$$f(s) = n_1 + f_2(s) \qquad (0 \leq s \leq 1).$$

Então

$$f(0) = n_1 + f_2(0) = n_1 = f_1(1), \qquad f(1) = n_1 + f_2(1) = n_1 + n_2,$$

$$p(f(s)) = p(n_1)p(f_2(s) = g_2(s) \qquad (0 \leq s \leq 1).$$

Segue que
$$p \circ (f_1 * f) = (p \circ f_1) * (p \circ f) = g_1 * g_2,$$
$$(f_1 * f)(0) = f_1(0) = 0, \qquad (f_1 * f)(1) = f(1) = n_1 + n_2.$$
Assim $f_1 * f$ é o único caminho em $\mathbf{R}$ tal que $(f_1 * f)(0) = 0$ e $\phi \circ (f_1 * f) = g_1 * g_2$. Segue que
$$\sigma([g_1] * [g_2]) = \sigma([g_1 * g_2]) = (f_1 * f)(1)$$
$$= n_1 + n_2 = f_1(1) + f_2(1) = \sigma([g_1]) + \sigma([g_2]).$$
Isto prova que σ é um homomorfismo de grupos.

Para provar que σ é sobrejetiva, seja $n \in \mathbf{Z}$, e sejam $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ e $g : [0,1] \to S^1$ definidos por
$$f(s) = ns \quad (0 \leq s \leq 1), \qquad g = p \circ f.$$
Então $f(0) = 0$ e $g(0) = g(1) = 1$, e dai segue que
$$\sigma([g]) = f(1) = n.$$

Para provar que σ é injetiva, seja $g \in \Omega(S^1, 1)$ tal que $\sigma([g]) = 0$. Seja f o único caminho em $\mathbf{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $\phi \circ f = g$. Então $f(1) = \sigma([g]) = 0$, e portanto $f \in \Omega(\mathbf{R}, 0)$. Como $\mathbf{R}$ é simplesmente conexo, temos que $f \simeq_0 0$, e dai segue que
$$g = p \circ f \simeq_1 p(0) = 1.$$
Isto completa a demonstração.

Exercícios

31.A. Usando o Exercício 30.G prove que o grupo $\Pi_1(S^1 \times S^1, (1,1))$ é isomorfo a $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

31.B. Seja
$$B^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$
e seja $j : S^1 \hookrightarrow B^2$ a inclusão. Usando o Exercício 30.C prove que não existe uma aplicação contínua $r : B^2 \to S^1$ tal que $r \circ j$ seja a identidade.

31.C. Seja $f : B^2 \to B^2$ uma função contínua. Usando o exercício anterior prove que existe $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.

Sugestão: Se $f(x) \neq x$ para cada $x \in B^2$, seja $r(x)$ o ponto onde a reta de $f(x)$ a x intercepta S^1.

31.D. Prove que o homomorfismo de grupos $p : \mathbf{R} \to S^1$ induz um isomorfismo de grupos $\tilde{p} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to S^1$ que é também um homeomorfismo.

31.E. Seja G um *grupo topológico*, ou seja G é um grupo, G é também um espaço topológico, e a aplicação $(x,y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$ é contínua.

(a) Prove que a aplicação $(x, y) \in G \times G \to xy \in G$ é contínua.

(b) Prove que a aplicação $x \in G \to x^{-1} \in G$ é um homeomorfismo.

(c) Prove que a aplicação $y \in G \to xy \in G$ é um homeomorfismo para cada $x \in G$.

(d) Prove que U é uma vizinhança aberta de 1 em G se e só se xU é uma vizinhança aberta de x em G.

31.F. Seja G um grupo topológico abeliano, e seja H um subgrupo de G. Prove que a aplicação quociente $\pi : G \to G/H$ é aberta.

31.G. Seja G um grupo topológico abeliano, e seja H um subgrupo discreto de G. Seja $\pi : G \to G/H$ a aplicação quociente, e seja $g : [0, 1] \to G/H$ um caminho com $g(0) = 1$.

(a) Prove que existe uma vizinhança aberta U de 1 em G tal que $\pi(U)$ é uma vizinhança aberta de 1 em G/H e a restrição $\pi|U : U \to \pi(U)$ é um homeomorfismo.

(b) Adaptando a demonstração do Lema 31.2 prove que existe um único caminho $f : [0, 1] \to G$ tal que $f(0) = 1$ e $\pi \circ f = g$.

De maneira análoga podemos adaptar as demonstrações do Lema 31.3 e do Teorema 31.1 para provar o teorema seguinte:

Teorema. *Seja G um grupo topológico abeliano simplesmente conexo, e seja H um subgrupo discreto de G. Então o grupo $\Pi_1(G/H, 1)$ é isomorfo a H.*

31.H. Sejam E e X espaços topológicos, e seja $p : E \to X$ uma função contínua. Diremos que $p : E \to X$ é um *espaço de recobrimento* se cada $x \in X$ admite uma vizinhança aberta V tal que $p^{-1}(V)$ e uma união disjunta de abertos U_i tais que a restrição $p|U_i : U_i \to V$ é um homeomorfismo para cada i.

Se $p(t) = e^{2\pi ti}$ para cada $t \in \mathbf{R}$, prove que $p : \mathbf{R} \to S^1$ é um espaço de recobrimento.

31.I. Seja $p : E \to X$ um espaço de recobrimento. Seja G o conjunto de todos os homeomorfismos $\phi : E \to E$ tais que $p \circ \phi = p$.

(a) Prove que p é sobrejetiva e aberta, em particular p é uma aplicação quociente.

(b) Prove que $p^{-1}(x)$ é um subconjunto discreto de E para cada $x \in X$.

(c) Prove que G é um grupo sob composição, que chamaremos de *grupo de transformações* do recobrimento.

31.J. Prove que o grupo de transformações do recobrimento $p : \mathbf{R} \to S^1$ é isomorfo a $\mathbf{Z}$.

Adaptando as demonstrações dos Lemas 31.2 e 31.3 e do Teorema 31.1, podemos provar o teorema seguinte:

Teorema. *Seja $p : E \to X$ um espaço de recobrimento, e seja G o grupo de transformações do recobrimento. Se E é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, então o grupo $\Pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a G para cada $x_0 \in X$.*

Bibliografia

[1] **J. Dugundji**, Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[2] **M. Greenberg**, Lectures on Algebraic Topology, Benjamin, New York, 1967.

[3] **J. Kelley**, General Topology, Van Nostrand, New York, 1955. Tradução ao espanhol: Topología General, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1962.

[4] **S. Willard**, General Topology, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970. Reimpresso por Dover, Mineola, New York, 2004.