Álgebra Linear Avançada
Operadores Autoadjuntos

Adriano Moura

Unicamp

2020

Adjunta de uma Transformação Linear

Sejam $\phi \in B(V), \psi \in B(W)$ e $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Uma função $S : W \to V$ é dita uma adjunta de T à direita com respeito a (ϕ, ψ) se

$$\phi(v, S(w)) = \psi(T(v), w) \;\; \forall \;\; v \in V, \;\; w \in W.$$

Se $\phi \in B_s(V)$ e $\psi \in B_s(W)$, esta condição é equivalente a

$$\phi(S(w), v) = \psi(w, T(v)) \;\; \forall \;\; v \in V, \;\; w \in W$$

e o mesmo ocorre se $\phi \in B_a(V)$ e $\psi \in B_a(W)$. Em geral estas condições são distintas e uma função S satisfazendo a segunda condição é dita uma adjunta de T à esquerda com respeito a (ϕ, ψ).

Lema 9.6.2

Suponha que ϕ é não degenerada à direita.

- a) Se S é adjunta à direita de T, então S é linear.
- b) Se S_1 e S_2 forem adjuntas à direita de T, então $S_1 = S_2$.

Denotaremos por T_ψ^ϕ a adjunta à direita de T com respeito a (ϕ, ψ) quando ela existir e ϕ for não degenerada à direita.

Demonstração do Lema 9.6.2

Como ϕ é não degenerada à direita, (a) segue se mostrarmos que

$$S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2) \in \mathcal{N}(D_\phi) \ \ \forall \ \ w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F},$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(v, S(w_1 + \lambda w_2) - S(w_1) - \lambda S(w_2)) = 0 \ \ \forall \ \ v \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{F}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w_1 + \lambda w_2)) &= \psi(T(v), w_1 + \lambda w_2) = \psi(T(v), w_1) + \lambda \psi(T(v), w_2) \\ &= \phi(v, S(w_1)) + \lambda \phi(v, S(w_2)) = \phi(v, S(w_1) + \lambda S(w_2)). \end{aligned}$$

Para mostrar (b), mostremos que $S_1(w) - S_2(w) \in \mathcal{N}(D_\phi)$ $\forall$ $w \in W$:

$$\begin{aligned} \phi(v, S_1(w) - S_2(w)) &= \phi(v, S_1(w)) - \phi(v, S_2(w)) \\ &= \psi(T(v), w) - \psi(T(v), w) = 0 \ \ \forall \ \ v \in V, w \in W. \quad \square \end{aligned}$$

Exercício: Se α for base de V e β de W, $[T_\psi^\phi]_\alpha^\beta = [\phi]_\alpha^{-1} \ ([T]_\beta^\alpha)^t \ [\psi]_\beta$.

Existência

Proposição 9.6.3

Se $\dim(V) < \infty$ e ϕ é não degenerada, existe adjunta à direita de T.

Dem.: As hipóteses garantem que D_ϕ é bijetora. Assim, podemos considerar

$$S = D_\phi^{-1} \circ T^t \circ D_\psi$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "S"] \arrow[d, "D_\psi"'] & V \\ W^* \arrow[r, "T^t"'] & V^* \arrow[u, "D_\phi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Verifiquemos que S é adjunta de T.
Por definição de D_ϕ, dada $f \in V^*$, temos

$$u = D_\phi^{-1}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(v) = \phi(v, u) \ \ \forall \ \ v \in V.$$

Ou seja,

$$f(v) = \phi(v, D_\phi^{-1}(f)) \ \ \forall \ \ v \in V, \ \ f \in V^*.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(v, S(w)) &= \phi\Big(\ v \ , \ D_\phi^{-1}(T^t(D_\psi(w))) \ \Big) = \big(T^t(D_\psi(w))\big)(v) \\ &= (D_\psi(w))(T(v)) = \psi(T(v), w) \ \ \forall \ \ v \in V, \ \ w \in W. \end{aligned}$$

$\square$

Algumas Propriedades

Exercício: Sejam $\phi \in B(V), \psi \in B(W), \xi \in B(U)$ e suponha que V e W têm dimensão finita e ϕ e ψ sejam não degeneradas. Mostre que:

- a) Se $S, T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, vale $(S + \lambda T)_\xi^\psi = S_\xi^\psi + \lambda T_\xi^\psi$.
- b) Se $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ e $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$, vale $(S \circ T)_\xi^\phi = T_\psi^\phi \circ S_\xi^\psi$.
- c) Se $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é invertível, então $(T^{-1})_\phi^\psi = (T_\psi^\phi)^{-1}$.
- d) Se $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, vale $(T_\psi^\phi)_\phi^\psi = T$.

Suponha, $\dim(V) < \infty, \phi \in B_{as}(V)$ é ϕ não degenerada e $\psi \in B_{as}(W)$.

Lema 9.6.5

- a) Se ψ é não degenerada, $\mathcal{N}(T) = Im(T_\psi^\phi)^{\perp_\phi}$. Em particular, T é injetora se, e só se, T_ψ^ϕ for sobrejetora. Além disso, se $\mathcal{N}(T)$ for não degenerado, $V = \mathcal{N}(T) \oplus Im(T_\psi^\phi)$.
- b) $\mathcal{N}(T_\psi^\phi) = Im(T)^{\perp_\psi}$. Assim, se ψ é não degenerada, T_ψ^ϕ é injetora se, e só se, T for sobrejetora. Além disso, se $\dim(W) < \infty$ e ambos W e $\mathcal{N}(T_\psi^\phi)$ forem não degenerados, $W = \mathcal{N}(T_\psi^\phi) \oplus Im(T)$.

Demonstração do Lema 9.6.5

Sendo ψ não degenerada,

$$v \in \mathcal{N}(T) \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi(T(v), w) = 0 \;\; \forall \;\; w \in W.$$

Logo,

$$v \in \mathcal{N}(T) \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi(v, T_\psi^\phi(w)) = 0 \;\; \forall \;\; w \in W,$$

demonstrando a primeira afirmação em (a). A segunda afirmação segue da primeira observando que, como ϕ é não degenerada, para um subespaço U de V vale: $U^{\perp_\phi} = \{0\} \Leftrightarrow U = V$. Para a última afirmação, sendo $\mathcal{N}(T)$ não degenerado, segue que $V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp_\phi}$ pela Proposição 9.4.3. Assim, pela primeira afirmação

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus (Im(T_\psi^\phi)^{\perp_\phi})^{\perp_\phi} \stackrel{*}{=} \mathcal{N}(T) \oplus Im(T_\psi^\phi),$$

onde $*$ segue da Proposição 9.4.1(c). Isso demonstra a parte (a). A demonstração da parte (b) é idêntica e fica de exercício. $\square$

O último objetivo é obter uma versão dos teoremas espectrais estudados na Seção 7.5 no contexto de formas bilineares simétricas.

Operadores Auto-Adjuntos

Suponha então que $\phi \in B_s(V)$ e $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Denotaremos a adjunta de T com respeito a (ϕ, ϕ) simplesmente por T^ϕ. T é dito auto-adjunto (com respeito a ϕ) se $T^\phi = T$, i.e., $\phi(T(v), w) = \phi(v, T(w)) \ \forall\ v, w \in V$.

Teorema Espectral

Suponha que $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que V é anisotrópico com respeito a ϕ. Existe base ortogonal de V com repeito a ϕ formada por autovetores de T se, e somente se, T for auto-adjunto.

Suponha que α seja base ortogonal de V com repeito a ϕ formada por autovetores de T, de modo que

$$[T]_\alpha^\alpha = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad [\phi]_\alpha = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Como $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} \ ([T]_\alpha^\alpha)^t \ [\phi]_\alpha$, segue que $[T^\phi]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^\alpha$, i.e., $T^\phi = T$.

Lema 9.6.6

Suponha que T seja autoadjunto com respeito a ϕ.

a. Os auto-espaços de T são mutuamente ortogonais.
b. Se $v \in V_\lambda$, então $\{v\}^{\perp_\phi}$ é T-invariante.

Demonstração do Teorema Espectral

Suponha que T é auto-adjunto. Como $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, existe um autovetor w para T. Seja $W = [w]$. Como V é anisotrópico, W é não degenerado e, portanto, $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$. Como ϕ é não degenerada, $W^{\perp_\phi}$ é não degenerado e, pela parte (b) do lema anterior, $W^{\perp_\phi}$ é T-invariante.

Assim, procedendo por indução na dimensão de V (que obviamente se inicia), existe base α de $W^{\perp_\phi}$ ortogonal com respeito a ϕ e formada por autovetores de T. Logo, $\beta = \alpha \cup \{w\}$ é uma base ortogonal de V com repeito a ϕ formada por autovetores de T. $\square$

Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e ϕ é um p.i. o teorema continua válido. Precisamos garantir existência de autovetor. Para isso, precisamos das teorias de produto interno e adjunta hermitiana em espaços complexos. Se V é $\mathbb{C}$-espaço vetorial, $\phi : V \times V \to \mathbb{C}$ é dita um p.i. em V se for linear na 1^a entrada,

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} \;\; \forall \;\; u, v \in V \quad \text{e} \quad \phi(v, v) \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Se $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ é base de V e $[\phi]_\alpha = (\phi(v_j, v_i))_{(i,j)}$, temos $\phi(u, v) = [v]_\alpha^* \; [\psi]_\alpha \; [u]_\alpha$. Note que $[\phi]_\alpha = ([\phi]_\alpha)^*$ e $[\phi]_\beta = ([I]_\alpha^\beta)^* [\phi]_\alpha \; [I]_\alpha^\beta$.

Operadores Normais

A definição de adjunta de uma transformação linear com respeito a produtos internos dados é a mesma. A verificação de unicidade requer pouca modificação e a de existência requer um pouco mais de atenção. Alternativamente, ver Proposição 7.4.9.Além disso,

$$[T^\phi]_\alpha^\alpha = [\phi]_\alpha^{-1} \left([T]_\alpha^\alpha\right)^* [\phi]_\alpha$$

Se α é base ortonormal de V com repeito a ϕ formada por autovetores de T, temos $[T]_\alpha^\alpha = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $[\phi]_\alpha = I$. Com isso, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha [T^\phi]_\alpha^\alpha = [T^\phi]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha.$$

T é dito normal se $T \circ T^\phi = T^\phi \circ T$. Operadores auto-adjuntos são normais.

Teorema Espectral

Se V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e ϕ é produto interno em V, existe base ortogonal de V com respeito a ϕ formada por autovetores de T se, e somente se, T for normal.

Demonstração do T. Espectral para Produtos Internos

Lema 7.5.3

Suponha que T seja normal.

- (a) Se $T(v) = \lambda\ v$, então $T^{\phi}(v) = \overline{\lambda}\ v$.
- (b) Os auto-espaços de T são mutuamente ortogonais.
- (c) Se $v \in V_\lambda$, então $\{v\}^\perp$ é T-invariante.

Dem.: Escrevendo $\phi(v,w) = \langle v, w\rangle$ e $\|v\|^2 = \phi(v,v)$, temos

$$\begin{aligned}
\|T^{\phi}(v) - \overline{\lambda}v\|^2 &= \langle T^{\phi}(v), T^{\phi}(v)\rangle - \lambda\langle T^{\phi}(v), v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, T^{\phi}(v)\rangle + |\lambda|^2\ \|v\|^2 \\
&= \langle v, (T\circ T^{\phi})(v)\rangle - \lambda\langle v, T(v)\rangle - \overline{\lambda}\langle T(v), v\rangle + |\lambda|^2\ \|v\|^2 \\
&= \langle v, (T^{\phi}\circ T)(v)\rangle - \lambda\langle v, \lambda v\rangle - \overline{\lambda}\langle \lambda v, v\rangle + |\lambda|^2\ \|v\|^2 \\
&= \langle T(v), T(v)\rangle - |\lambda|^2\ \langle v, v\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Suponha agora que $v \in V_\lambda, w \in V_\mu$ e $\lambda \neq \mu$ e mostremos que $v \perp w$:

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^{\phi}(w)\rangle = \langle v, \overline{\mu}w\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

Segue que $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$ e, portanto, $\langle v, w\rangle = 0$.

Finalmente, se $w \perp v$: $\langle T(w), v\rangle = \langle w, T^{\phi}(v)\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0 \Rightarrow T(w) \perp v$.

Corolário 7.5.4

Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, T é normal e c_T fatora em produto de termos de grau 1, existe base ortogonal de V formada por autovetores de T.

Lema 7.5.5

Se T é auto-adjunto, todas as raízes de seu polinômio característico, visto como elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, são números reais.

Dem.: Visto como elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, temos $c_T(t) = \prod_{j=1}^{n}(t - \lambda_j)$ com $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Porém, λ_j é autovalor de T se, e somente se, $\lambda_j \in \mathbb{F}$.
Seja α uma base ortonormal de V. Considere $W = \mathbb{C}^n$ e seja ψ o produto interno usual em W. Considere também o único operador linear S em W que satisfaz $[S]_\beta^\beta = [T]_\alpha^\alpha$, sendo β a base canônica.

Como T é auto-adjunto e α é ortonormal, vale $([T]_\alpha^\alpha)^* = [T]_\alpha^\alpha$. Então, por definição de S e ψ, segue que $([S]_\beta^\beta)^* = [S]_\beta^\beta$. Logo, S é auto-adjunto. Como $c_T = c_S$, segue que λ_j é autovalor de S para todo $1 \leq j \leq n$.

Seja λ um autovalor de S e $w \in W_{(S-\lambda I_W)} \setminus \{0\}$. Sendo S auto-adjunto, temos
$$\lambda\langle w, w\rangle = \langle S(w), w\rangle = \langle w, S(w)\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$$
Assim, $\lambda = \overline{\lambda}$, mostrando que $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$