IMECC/Unicamp
MA720 e MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Prova 1, 15/04/2025

RA: ____________ **Nome:** GABARITO

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	2	3	3	11
Nota:					

Instruções:

1. Escute atentamente as orientações.
2. Esta prova terá 2h de duração.
3. Coloque seu nome e RA em todas as páginas.
4. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.

As questões começam na próxima página.

Q1. (3 pontos) (a) Marque verdadeiro (V) ou falso (F). Não precisa justificar.

(F) A diferenciabilidade de uma função em $\mathbb{R}^n$ pode depender da norma escolhida.

(V) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em todos os pontos, mas é descontínua, então pelo menos uma das duas funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ é ilimitada.

(F) Duas funções de classe C^∞ com mesmos polinômios de Taylor de ordem k num ponto p, para todo $k \geq 0$, são iguais numa vizinhança de p.

(V) Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e $p \in \mathbb{R}^4$ é um ponto crítico de f tal que $\det Hf(p) < 0$, então p é um ponto de sela de f.

(F) Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação bijetiva e diferenciável em $p \in \mathbb{R}^3$, é uma consequência da regra da cadeia que a inversa F^{-1} é diferenciável em $q = F(p)$ e satisfaz $JF^{-1}(q) = JF(p)^{-1}$.

(b) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z + y^2 + e^{x^2 - z}$.

(i) Justifique rapidamente que f é de classe C^∞ e calcule a fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 3 de f na origem.

(ii) Calcule o gradiente $\nabla f(0)$ e a matriz hessiana $Hf(0)$ de f na origem. Determine se a origem é um extremo local de f.

(i) f é C^∞ pois é soma e composição de funções polinomiais e exponenciais.

Usando $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

e que todo monômio em x, y, z de grau ≥ 4 é $o(\|(x,y,z)\|^3)$, obtemos

$$f(x,y,z) = \cancel{z} + y^2 + \left(1 + x^2 - \cancel{z} + \frac{(x^2-z)^2}{2} + \frac{(x^2-z)^3}{6} + o\left((x^2-z)^3\right)\right)$$

$$= 1 + x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} - x^2 z - \frac{z^3}{6} + o\left(\|(x,y,z)\|^3\right).$$

(ii) Se $v = (x, y, z)$, o segundo polinômio de Taylor de f em 0 é

$$f(0) + \langle \nabla f(0), v \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(0) v, v \rangle$$

Comparando com o item (i), obtemos:

$$\nabla f(0) = (0,0,0) \quad e \quad Hf(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como 0 é ponto crítico ($\nabla f(0) = 0$) e $Hf(0)$ é definida positiva (autovalores positivos), 0 é um mínimo local de f.

Q2. **(2 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função *homogênea de grau 1*, isto é, $f(tx) = tf(x)$ para todos $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que, se f é diferenciável em 0, então f é um funcional linear.

(b) Determine todos os $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais a função

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+\beta xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em 0.

(a) Note que $f(0) = 0$ pois $f(0) = f(2\cdot 0)$

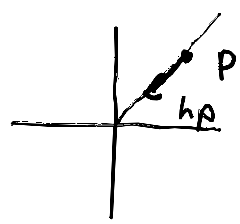
$= 2 \cdot f(0)$. Se $\ell = df(0)$, temos

$$f(v) = \ell v + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Para $h > 0$,

$$h\, f(p) = f(hp) = \ell(hp) + o(\|hp\|), \quad h \to 0^+$$

$$= h\,\ell(p) + o(h)$$



$\iff \quad f(p) = \ell(p) + o(1)$ $\to 0$ quando $h \to 0$

Como $f(p)$ e $\ell(p)$ são constantes, concluímos que $f(p) = \ell(p)$. Isto é, $f = \ell$.

(b) Note que f é homogênea de grau 1 pois $f(0)=0$ e, se $(x,y)\neq 0$ e $t>0$,

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^3+\beta(tx)(ty)^2}{(tx)^2+(ty)^2} = t\, f(x,y).$$

Pelo item (a), f é diferenciável em 0 se, e só se, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$x^3+\beta x y^2 = (\lambda x+\mu y)(x^2+y^2)$$
$$= \lambda x^3 + \lambda x y^2 + \mu x^2 y + \mu y^3$$

para todos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Comparando coeficientes:

$$1 = \lambda = \beta \quad , \quad \mu = 0$$

Logo, f é diferenciável em 0 se, e somente se, $\underline{\underline{\beta = 1}}$.

Q3. (3 pontos) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ e fixe $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seja

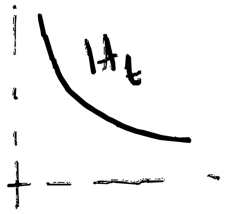
$$f : U \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(a) Explique por que, para todo $t > 0$, a restrição de f à hipérbole $xy = t$ possui um ponto de mínimo global. Denote-o por (x_t, y_t).

(b) Utilizando multiplicadores de Lagrange, mostre que $x_t^p = y_t^q$.

(c) Mostre que $f(x_t, y_t) = t$ e conclua que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ para todos $x, y \geq 0$.

(a) A hipérbole $H_t = \{(x,y) : xy = t\}$ é um



conjunto fechado e ilimitado. Como f é contínua e $f(x,y) \to +\infty$ quando $\|(x,y)\| \to \infty$ em H_t, segue de um lema visto em aula que $f|_{H_t}$ tem um mínimo global.

(b) Seja $g(x,y) = xy - t$. O ponto (x_t, y_t) satisfaz (para algum $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} df = \lambda\, dg \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_t^{p-1} dx + y_t^{q-1} dy = \lambda (y_t dx + x_t dy) \\ x_t y_t - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_t^{p-1} = \lambda y_t \\ y_t^{q-1} = \lambda x_t \\ x_t y_t = t \end{cases} \implies \begin{cases} x_t^p = \lambda y_t x_t = \lambda t \\ y_t^q = \lambda x_t y_t = \lambda t \end{cases}$$

Logo, $x_t^p = y_t^q$.

(c) $$f(x_t, y_t) = \frac{x_t^p}{p} + \frac{y_t^q}{q} \overset{\text{item (b)}}{=} x_t^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = x_t^p$$

$$= (x_t^p)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = x_t \cdot x_t^{\frac{p}{q}} = x_t \cdot (x_t^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\overset{\text{item (b)}}{=} x_t (y_t^q)^{\frac{1}{q}} = x_t y_t = t$$

Dados $x, y > 0$, se $t = xy$, então

$$xy = t = f(x_t, y_t) \leq f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Q4. (3 pontos) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação.

(a) Relembre a definição de diferenciabilidade de F em um ponto $p \in U$ e a definição de norma de operador $\|L\|$ de uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(b) Suponha que F seja diferenciável em p. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de p tal que

$$\|F(x) - F(p)\| \leq (\|DF(p)\| + \varepsilon)\|x - p\|$$

para todo $x \in V$.

(c) Admita a seguinte desigualdade do valor médio para aplicações:

Se F é diferenciável em todo ponto de um subconjunto convexo $K \subset U$ e $C \geq 0$ é uma constante tal que $\|DF(x)\| \leq C$ para todo $x \in K$, então

$$\|F(x) - F(y)\| \leq C\|x - y\|$$

para todos $x, y \in K$.

Suponha que F seja de classe C^1 em U. Mostre que, dados $p \in U$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de p tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq (\|DF(p)\| + \varepsilon)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in V$.

(a) • F é diferenciável em $p \in U$ se existe $L \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$F(p+v) = F(p) + Lv + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

L é única e denotada $DF(p)$.

• $$\|L\| = \sup\left\{ \frac{\|Lv\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \sup\{ \|Lv\| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 \}$$

(b) Escreva $F(x) = F(p) + DF(p)(x-p) + r(x)$.

Por definição, $\dfrac{r(x)}{\|x-p\|} \to 0$ quando $x \to p$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de p tal que $\dfrac{\|r(x)\|}{\|x-p\|} < \varepsilon$ se $x \in V$.

Portanto, para todo $x \in V$,

$$
\begin{aligned}
\|F(x) - F(p)\| &= \|DF(p)(x-p) + r(x)\| \\
&\leq \|DF(p)(x-p)\| + \|r(x)\| \\
&\leq \|DF(p)\| \, \|x-p\| + \varepsilon \|x-p\| \\
&= (\|DF(p)\| + \varepsilon) \|x-p\|
\end{aligned}
$$

(c) Pela continuidade de DF em p, existe uma vizinhança V de p tal que $\|DF(x) - DF(p)\| < \varepsilon$ para todo $x \in V$.

Em particular,

$$\|DF(x)\| \leq \|DF(p)\| + \|DF(x) - DF(p)\|$$
$$< \|DF(p)\| + \varepsilon$$

para todo $x \in V$. Reduzindo V, se necessário, podemos supor que V é convexo (ex: uma bola). O resultado segue então imediatamente da desigualdade do valor médio para $K = V$ e $C = \|DF(p)\| + \varepsilon$.