IMECC/Unicamp
MA720 e MM720 - Análise no $\mathbb{R}^n$
Prova 2, 03/07/2025

RA: ____________ **Nome:** GABARITO

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	3	3	2	11
Nota:					

Instruções:

1. Escute atentamente as orientações.
2. Esta prova terá 2h de duração.
3. Coloque seu nome e RA nesta página.
4. Não faça uso de telefone celular ou outro recurso eletrônico durante a prova.

As questões começam na próxima página.

Q1. (3 pontos) (a) Marque verdadeiro (V) ou falso (F). Não precisa justificar.

- (F) Uma aplicação suave $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuja derivada tem posto r em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é, a menos de difeomorfismos, da forma $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ em uma vizinhança de p.
- (F) Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $F : U \to \mathbb{R}^m$ é uma imersão suave em todo ponto de U, então a imagem $F(U)$ é uma variedade de dimensão n.
- (V) Se M é uma n-variedade com bordo, então o bordo ∂M é uma $(n-1)$-variedade sem bordo.
- (V) Não existe uma aplicação suave injetiva $F : \mathbb{R}^{2025} \to \mathbb{R}^{2024}$.
- (V) Se ω é uma 2-forma exata e η é uma 3-forma fechada, então $\omega \wedge \eta$ é uma 5-forma exata.

(b) Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(i) Calcule a matriz jacobiana de F em todo ponto de $\mathbb{R}^2$ e mostre que F induz um difeomorfismo local de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sobre si mesmo.

(ii) Calcule o pullback $F^* d\theta$, onde

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

(i) $JF = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, então $\det JF = 4(x^2+y^2) \neq 0$, logo $F|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ é um difeomorfismo local (pelo TFI).

Em coordenadas polares, $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = $

$= (r^2\cos(2\theta), r^2 \sin(2\theta)) = (s\cos(\varphi), s\sin(\varphi))$ se, e só se, $r = \sqrt{s}$ e $\theta = \frac{1}{2}\varphi + k\pi$. Isto mostra que $F(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(ii) Cálculo direto:

$$F^* d\theta = \frac{(x^2-y^2)\,d(2xy) - (2xy)\,d(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2}$$

$$= \frac{(x^2-y^2)\,2(x\,dy + y\,dx) - 2xy\,(2x\,dx - 2y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(2x^3 - 2y^2x + 4xy^2)\,dy + (2x^2y - 2y^3 - 4x^2y)\,dx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x\,\cancel{(x^2+y^2)}\,dy - 2y\,\cancel{(x^2+y^2)}\,dx}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}$$

$$= 2\,d\theta$$

<u>Obs</u> Também é possível notar que a conta é trivial em coordenadas polares pois F age da forma $(r, \theta) \mapsto (r^2, 2\theta)$.

Q2. **(3 pontos)** (a) Enuncie o teorema da função implícita.

(b) Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ wxy - xyz = 0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = w(y, z)$ e $x = x(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (1, 2, 1, 1)$.

(c) Calcule as derivadas parciais de w e de x com relação a y neste ponto.

(a) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um aberto com coordenadas $(x,y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ $G : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Se $(p,q) \in U$ é tal que

$$\det \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(p,q) \right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0$$

então existe uma viz. $V \times W$ de (p,q) e $F : V \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k tal que, se $(x,y) \in V \times W$, então

$$G(x,y) = 0 \iff y = F(x).$$

(b) Seja

$$G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,w) \mapsto (w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6,\ wxy - xyz)$$

Basta verificar a hipótese do teo. da função implícita para as variáveis (x, w).

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial w} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 2w \\ y(w-z) & xy \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\det M(\overset{x}{1},\overset{y}{2},\overset{z}{1},\overset{w}{1}) = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0 .$$

(c) Supondo $x = x(y,z)$, $w = w(y,z)$ e derivando implicitamente:

$$\begin{cases} 2w \frac{\partial w}{\partial y} + 4x \frac{\partial x}{\partial y} + 2y = 0 \\ xy \frac{\partial w}{\partial y} + wy \frac{\partial x}{\partial y} + wx - yz \frac{\partial x}{\partial y} - xz = 0 \end{cases}$$

Avaliando em $p = (1,2,1,1)$:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial w}{\partial y}(p) + 4 \frac{\partial x}{\partial y}(p) + 4 = 0 \\ 2 \frac{\partial w}{\partial y}(p) + \cancel{2 \frac{\partial x}{\partial y}(p)} + \cancel{1} - \cancel{2 \frac{\partial x}{\partial y}(p)} \cancel{-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y}(p) = 0 \quad e \quad \frac{\partial x}{\partial y}(p) = -1 .$$

Q3. (3 pontos) (a) Seja $R > 0$. Mostre que a esfera $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$ é uma variedade suave de dimensão $n-1$ e calcule os espaços tangentes T_pS_R em todo $p \in S_R$.

(b) Seja M uma variedade suave conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que, para todo $p \in M$, o funcional linear $df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ se anula. Mostre que f é constante.

(c) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Mostre que, se existe uma função $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = g(x)x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então f é constante em S_R para todo $R > 0$. [Você pode supor conhecido, sem demonstração, que S_R é conexa.]

(a) $S_R = g_R^{-1}(0)$ onde $g_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2 - R^2$

Como 0 é um valor regular de g_R (pois $dg_R(p) = 2(p_1 dx_1(p) + \cdots + p_n dx_n(p)) = 0 \iff p = 0$) e g_R é C^∞, segue de um teorema visto em aula que S_R é uma variedade C^∞ de dim. $n-1$ e $T_p S_R = \ker dg_R(p) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, p\rangle = 0\}$

(b) Se $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^d \to M$ (conexo) é uma parametrização local de M, então, pela regra da cadeia, $d(f\circ\varphi)(x) = df(\cancel{\varphi}(x)) \circ D\varphi(x) = 0$ para todo $x \in V$. Logo, a função C^∞ $f\circ\varphi$ é constante em V (visto em aula) e, portanto, f é constante em $\varphi(V)$. Como podemos cobrir M por parametrizações locais, isto mostra que f é localmente constante. Como M é conexa, f é constante.

(c) Por hipótese, $df(x)v = g(x)\langle v, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Se $p \in S_R$ e $v \in T_pS_R$, segue do item (a) que

$$d(f|_{S_R})(p)v = df(p)v = g(p)\langle v, p\rangle = 0.$$

Logo $d(f|_{S_R}) = 0$ e segue do item (b) que $f|_{S_R}$ é constante.

Q4. (2 pontos) Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1,\, x \geq 0\}$.

(a) Mostre que M é uma variedade suave com bordo compacta e determine ∂M.

(b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_M dy \wedge dz$, a menos de um sinal.

(a) Note que $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4+y^2+z^2 = 1\}$ é uma variedade suave (sem bordo) pois 1 é um valor regular de $(x,y,z) \mapsto x^4+y^2+z^2$ ($d(x^4+y^2+z^2) = 4x^3dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0 \iff (x,y,z) = (0,0,0)$).

Se $g : N \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x$, então 0 é um valor regular de g (pois $dg = dx$ nunca se anula) e $M = g^{-1}([0,\infty))$. Por um teorema visto em aula, M é uma variedade suave com bordo $\partial M = g^{-1}(0) = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2=1\}$ (difeomorfo a S^1).

Note que $M \subseteq \mathbb{R}^3$ é fechado e limitado ($x^4+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow |x|, |y|, |z| \leq 1$), logo M é compacto.

(b) Note que $dy \wedge dz = d(y\, dz)$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_M dy \wedge dz = \int_M d(y\, dz) = \int_{\partial M} y\, dz$$

Parametrizando ∂M menos um ponto via

$\varphi : (0, 2\pi) \to \partial M$, $t \mapsto (0, \cos t, \operatorname{sen} t)$, temos

(por um resultado visto em aula):

$$\int_{\partial M} y\, dz = \pm \int_0^{2\pi} \varphi^*(y\, dz) = \pm \int_0^{2\pi} \cos t \; d(\operatorname{sen} t)$$

$$= \pm \int_0^{2\pi} \cos^2 t \; dt = \pm \pi$$

<u>Obs</u> Pode-se verificar que φ é positiva, e portanto $\int_{\partial M} y\, dz = +\pi$:

(i) Forma de orientação em M:

$$\omega = 4x^3\, dy \wedge dz - 2y\, dx \wedge dz + 2x\, dx \wedge dy$$

(ii) Se $p = (0, \cos t, \operatorname{sen} t) \in \partial M$, então

$$\vec{n}(p) = (-1, 0, 0) \in T_p M$$

é um vetor unitário ortogonal a ∂M

que aponta para fora (pois M é dada por $x \geq 0$)

(iii) Logo,

$$\omega(p)(\vec{n}(p), \varphi'(t)) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2\cos t & 0 & -\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$= 2 > 0.$$