

⁺²Notas de Álgebra Linear II

September 19, 2025

"No princípio Deus criou os céus, a terra e...

a Álgebra Linear" - Gênesis 1:1

Nestor Heli Aponte Avila¹

n267452@dac.unicamp.br

** Conteúdo baseado na disciplina MM719 (Álgebra Linear) ministrada pelo professor Adriano Moura e [1], de sua autoria também, no período 2025-II. **

Notação

□ Lema



Definição



Proposição

(−)[◇] Aberto



Teorema

(−)[◆] Fechado



Corolário

§ Preliminares

É preciso lembrar alguns resultados do curso de Álgebra Linear I, podem ser aprofundados se quiser nos capítulos 5 e 6 de [1]. Também, algumas propriedades e detalhes do anel de polinômios.

Espaços Vetoriais

◇ Sejam \mathbb{F} um corpo, e $V \neq \emptyset$. Um \mathbb{F} -*espaço vetorial* é uma tripla $(V, +, \cdot)$ onde, $+: V \times V \rightarrow V$ e $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ são operações tais que, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\forall v, w \in V$, temos,

(V1) $(V, +)$ é grupo abeliano.

(V2) (V, \cdot) associa, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.

(V3) Distributividade I, $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

(V4) Distributividade II, $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

(V5) Neutro da multiplicação (por escalar), $1 \cdot v = v$.

◇ Um subconjunto $W \subseteq V$ não vacío é dito de *subespaço*, denotamos $W \leq V$, se $\forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{F}$, temos $w_1 + \lambda w_2 \in W$.

◇ Sejam $\alpha = (v_i)$ uma família de vetores em V e $m \in \mathbb{N}$. Uma *combinação linear* de α , é um vetor em V da forma $v = \sum_{j \leq m} x_{i_j} v_{i_j}$, onde $x_{i_j} \in \mathbb{F}$.

Nota. Denotamos por $[\alpha]$, ao conjunto de todas as combinações lineares de α , repare que $[\alpha] \leq V$. Também, se $\alpha = \{v\}$ então $[\alpha] = [v] = \mathbb{F}v$.

◇ Uma família $\alpha = (v_i)$ é l.i. sse $\forall j \in I, v_j \notin [\alpha \setminus \{v_j\}]$. Além disso, se $[\alpha] = V$ então α é chamada de *base* de V .

■ **5.5.1.** Todo espaço vetorial têm base e quaisquer duas bases têm mesma cardinalidade. \rightarrow [1, Pág. 185]

◇ Seja α uma base de V . Então, $\dim V := \#\alpha$ é a *dimensão* de V .

◇ Seja (V_i) família de subespaços em V , definimos a soma deles somo sendo $\sum V_i := [\bigcup V_i]$. A soma é direta se $\forall j \in I, V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{0\}$.

Nota. Se a soma é direta escrevemos $\bigoplus V_i$.

□ **5.3.7.** A soma $\sum V_i$ é direta $\Leftrightarrow \forall v \in \sum V_i, \exists m \in \mathbb{N}$ e $\exists ! v_{i_j} \in V_{i_j}$ tais que $v = \sum_{j \leq m} v_{i_j}$. \rightarrow [1, Pág. 174]

□ **5.4.6.** Sejam $\alpha = (v_i)$ e $V_i = \mathbb{F}v_i$ então α é l.i. $\Leftrightarrow \sum \mathbb{F}v_i$ é direta.

⊠ α é base $\Leftrightarrow \forall i \in I, v_i \neq 0$ e $V = \bigoplus \mathbb{F}v_i$. Logo, da □ 5.3.7. temos que $\forall v \in V, \exists m \in \mathbb{N}$ e $\exists ! x_{i_j} \in \mathbb{F}$ tais que $v = \sum_{j \leq m} x_{i_j} v_{i_j}$. \rightarrow [1, Pág. 178]

Nota. Os x_{i_j} são as *coordenadas* de v na base α , identificamos comumente,

$$(x_{i_j}) =: [v]_\alpha \sim [x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]^T \in M_{m \times 1}(\mathbb{F}).$$

Transformações Lineares

◇ Sejam V e W \mathbb{F} -espaços vetoriais. Uma função $T : V \rightarrow W$ é dita *linear* se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ têm-se que $T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2)$.

◇ Sejam $T : V \rightarrow W$ linear, $\alpha = (v_j)$ e $\beta = (w_i)$ bases de V e W respetivamente. Então, se $[T(v_j)]_\beta = (a_{ij})$, a *matriz associada* $[T]_\beta^\alpha := (a_{ij})$ determina T no sentido que, $\forall v \in V$, $[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha$.

Nota. Se $W = V$ e $T = \mathbb{1}_V$, então $[\mathbb{1}_V]_\beta^\alpha$ é a matriz cambio de base.

■ **6.1.6.** Sejam $\alpha = (v_i)$ base de V e $\beta = (w_i)$ familia de vetores em W , então $\exists ! T : V \rightarrow W$ linear tal que $\forall i \in I$, $T(v_i) = w_i$.

Nota. O espaço vetorial das funções $f : V \rightarrow W$, com a soma e o produto usuais é denotado no texto como $\mathcal{F}(V, W)$.

◇ $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$. Se $V = W$ então denotamos $\text{End}_{\mathbb{F}}(V) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$.¹

□ **0.1.** Algumas propiedades coletadas de [1, Seç. 6.1].

(a) $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \leq \mathcal{F}(V, W)$.

(b) Sejam $\alpha = (v_j)$ e $\beta = (w_i)$ bases de V e W fixas. A função $\zeta : \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \ni T \mapsto [T]_\beta^\alpha \in M_{\#I \times \#J}(\mathbb{F})$ é linear e injetora.

(c) Sejam γ, α e β bases de U, V e W , $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ e $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ então $T \circ S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ e $[T \circ S]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\alpha [S]_\alpha^\gamma$.

(d) Se α e β são bases de V e W , e $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é invertível então $T^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$ e $[T^{-1}]_\alpha^\beta = ([T]_\beta^\alpha)^{-1}$.

◇ $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é um *isomorfismo* se for sobrejetivo. Dois espaços são *isomorfos*, $V \cong W$, se $\exists T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ isomorfismo.

Nota. A transformação ζ do ítem (b) é sobrejetiva se $\#J < \infty$.

■ **6.1.9.** $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$. \rightarrow [1, Pág. 191]

□ Seja $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Se $U \leq V$ e $U' \leq W$ então também $T(U) \leq W$ e $T^{-1}(U') \leq V$. \rightarrow [1, Pág. 199]

◇ $V_T := T^{-1}(\{0\}) = \mathcal{N}(T)$ e $\text{Im}(T) := T(V)$.

¹"Hom" vêm de homomorfismo e "End" de endomorfismo.

Nota. Chamamos estes espaços especiais de *núcleo* e *imagem* de T e suas dimensões de *nulidade* e *posto*.

■ **6.3.6.** $\dim V = \dim V_T + \dim V(T)$. \rightarrow [1, Pág. 201]

□ **6.3.9.** T é injetora $\Leftrightarrow V_T = \{0\}$. \rightarrow [1, Pág. 202]

◇ Sejam $\lambda \in \mathbb{F}$ e $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$. Se $\exists v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ então V_λ é *autoespaço* e v um *autovetor*, ambos associados ao *autovalor* λ .

◇ T é *diagonalizável* se $\exists \beta$ base de V formada por autovetores.

Nota. No caso diagonalizável e tudo perfeito de mais, pois se λ_j são os autovalores dos $v_j \in \beta$ então, $[T]_\beta^\beta = \text{diag}(\lambda_j)$. Em versão matricial temos,

$$[T]_\beta^\beta = [\mathbb{1}_V]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [\mathbb{1}_V]_\alpha^\beta \sim B = P^{-1}AP.$$

É sabido que não todos os operadores são diagonalizáveis. O objetivo do [1, Cap. 8] é ver que, ainda assim, sempre é possível levar T a uma matriz quasi-diagonal B (Formas Canônicas).

O Anel de Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Não vou aprofundar nos detalhes relacionados com anéis, fica muito longe. Por tanto, recomendo rever os conceitos de anel, ideal, domínio de integridade, ideal principal, PID e UFD-Algoritmo de Euclides.

◇ Sejam $I = \{t^k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ conjunto respeitando as leis usuais de potências e $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ um corpo.² Defina, $\forall i \in I$, o espaço vetorial $V_i = \{a_i t^i : a_i \in \mathbb{F}, t^i \in I\}$, com as operações,

- $+: V_i \times V_i \ni (a_i t^i, b_i t^i) \mapsto (a_i + b_i) t^i \in V_i$.
- $\cdot: \mathbb{F} \times V_i \ni (\lambda, a_i t^i) \mapsto (\lambda \cdot a_i) t^i \in V_i$.

Assim, o anel de polinômios com coeficientes em \mathbb{F} é $\mathcal{P}(\mathbb{F}) := \sum V_i$.

²Quer dizer que $t^0 = 1$ e $t^m \cdot t^n = t^{m+n}$.

Nota. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ é uma estrutura maravilhosa pois, só por mençoar algumas de suas caraterísticas que seram de nosso interesse aquí,

- É espaço vetorial de dimensão infinita e $\alpha = \{1, t, t^2, \dots\}$ é uma base, seguindo a [5.3.7.](#), $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \ni p(t) = \sum_{k=0}^m a_{i_k} t^{i_k}$.
- Temos um produto bém definido e comutativo que distribui a soma, o que faz dele um anel e mais geralmente uma álgebra comutativa.
- É PID, ou seja que todo ideal é gerado.
- PID \Rightarrow UFD, ou seja que temos fatorização única em primos, propriedades de divisibilidade e algoritmo da divisão.

◊ Seja $g(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $a_m \neq 0$. Então o *grau*, $\text{gr}(g) := m$ e no caso de $a_m = 1$ dizemos que g é *mônico*.

◊ $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \ni g$ divide $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $g \mid f$, sse $\exists q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = gq$. Também, o conjunto dos divisores é $\text{Div}(f) := \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g \mid f\}$.

◊ Diz-se que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \mathbb{F}^\times$ é *primo* sse $\text{Div}(p) = \{1, p\}$.

■ (*Fatoração em primos*) Seja $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{1\}$ mônico. Então, $\{p_j \in \text{Div}(f) : p_j \text{ é primo}\}$ é finito e $\exists! k_j \in \mathbb{N}$ tais que $f = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

□ **0.2.** Algumas propiedades da divisibilidade,

- (a) $g \mid f$ e $f \mid h \Rightarrow g \mid h$. (b) $g \mid f \Leftrightarrow \text{gr}(g) \leq \text{gr}(f)$.
- (c) $g \mid f$ e $g \mid h \Rightarrow g \mid (f + h)$. (d) Se $g \mid f \Rightarrow \forall r \in \mathcal{P}(\mathbb{F}), g \mid fr$.
- (e) $g \mid f$ e $f \mid g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{F}^\times : f = \lambda g$.

■ (*Algoritmo da Divisão*) Sejam $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ com $g \neq 0$. Então, $\exists! q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $f = gq + r$ e $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$.

■ Sejam $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e f_1, f_2, \dots, f_n não todos nulos, então $\exists! d \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ mônico ao que chamamos de $\text{mdc}(f_j)$ que verifica,

- i. $d \in \bigcap^n \text{Div}(f_j)$ ii. Se $e \in \bigcap^n \text{Div}(f_j) \Rightarrow e \mid d$.

■ (Bézout) Se $d = \text{mdc}(f_j)$ então $\exists a_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $\sum^n a_j f_j = d$.

Nota. Caso particular $\text{mdc}(f_1, f_2) = 1$, tá dizendo que $\exists a, b \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $a(t)f_1(t) + b(t)f_2(t) = 1$, isso seria importante mais pra frente.³

§ 1 Teoria Geral de Operadores Lineares

Se $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ então $T^m := \overbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}^{m \text{ vezes}} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, por convenção $T^0 = \mathbb{1}_V$. Seguindo o item (a) da \square 0.1., $\forall p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ temos,

$$p(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k \rightsquigarrow P(T) = \sum_{k=0}^m a_k T^k \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

Também, seguindo a notação dos preliminares $V_p = V_{p(T)} = \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$. De aquí pra frente seja $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ fixo.

Nota. Sendo $p = t - \lambda$, temos uma definição equivalente de autoespaço como sendo $V_p \neq \{0\}$.

1.1 Polinômio Mínimo e Descomposição Primária

◇ Sejam $\lambda \in \mathbb{F}$, $m \in \mathbb{N}$ e $p(t) = (t - \lambda)^m$. Se $\exists v \in V_p \setminus \{0\}$ é chamado de *autovetor generalizado* associado ao autovalor λ .

◇ $W \leq V$ é *T-invariante* se $T(W) \subseteq W$, e a restrição de $T|_W$ é chamada de *o operador inducido em W*.

□ **8.1.1.** Se $S, T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são tais que $S \circ T = T \circ S$, então V_S é *T-inv.*
 \rightarrow Se $w \in V_S \Rightarrow S(T(w)) = T(S(w)) = 0 \Rightarrow T(w) \in V_S$

Nota. Dado que $p(T) \circ T = T \circ p(T)$ os subespaços V_p são *T-inv.*, e também, $\forall p, f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p \subseteq V_{fp}$. Em particular, $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}}$.

◇ Sejam $\lambda \in F$ e $V_p^\infty := \bigcup_{k \geq 0} V_{p^k}$. No caso, $p = (t - \lambda)$ então V_p^∞ é chamado de *autoespaço generalizado* associado ao λ .

³Não falei, mais quando isso acontece diz-se que f_1 e f_2 são coprimos

Nota. V_p^∞ é T -inv e se $\dim V = n < \infty$ então $V_p^\infty = V_{p^n}$.

$$\diamond \mathcal{A}_T := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$$

□ **8.1.3.** Se $\dim V = n < \infty$ então $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$.

Lembre-se que $\dim(\text{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$, logo, $\exists m \leq n^2$ tal que $\{T^j\}_{j=0}^m$ é l.d. Tome m mínimo e faça $f(T) := T^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k \in \mathcal{A}_T$.

□ **8.1.4.** Se $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ então $\exists! m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ mônico tal que $\forall f \in \mathcal{A}_T, m_T \mid f$.

\mathcal{A}_T é ideal então $\exists! m_T$ tal que $\mathcal{A}_T = \langle m_T \rangle$. Se prefer pegue m_T de menor grau possível, suponha $f = m_T q + r$ e conclua que $r = 0$. Para unicidade suponha outro e usei □ 0.2. (e).

Nota. No caso que $\mathcal{A}_T = \{0\}$ fazemos $m_T := 0$ é assim que $V = V_{m_T}$. Se $S = T|_{V_p}$ então $p \in \mathcal{A}_S$. Também, pode-se verificar que o polinômio construído na □ 8.1.3. é de fato m_T .

□ **8.1.6.** Se $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ co-primos então, a restrição de $f|_{V_g}$ é injetora. \rightarrow Faz usando o ■ (Bézout), lembre-se que $1 \rightsquigarrow \mathbb{1}_V$

□ **8.1.7.** Seja $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo. Então, $V_p \neq \{0\} \Leftrightarrow p \mid m_T$.

(\Rightarrow) Suponha $p \nmid m_T$ então são co-primos, aplique □ 8.1.6. e conclua $V_p = \{0\}$. (\Leftarrow) Suponha $p \mid m_T$ e $V_p = \{0\}$ e contradiga.

⊠ **8.1.8.** Seja $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Então, $V_p \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists f \in \text{Div}(m_T)$ e $\exists g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $p = gf$. Se $\nexists q \in \text{Div}(m_T)$ tal que $q \mid g$ então $V_p = V_f$.

É coisa de fatorar em primos, ter presentes as propriedades □ 0.2. (a), $V_p \subseteq V_{fp}$ e conseguir as hipótese da □ 8.1.7..

◇ Sejam $v \in V$ e $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, v_k = T^k(v)$. A família $\mathcal{C}_T^\infty(v) := (v_k)$ é chamada de T -ciclo gerado por v , enquanto $C_T(v) := [\mathcal{C}_T^\infty(v)]$ é o *subespaço* T -cíclico gerado por v .

Nota. É fácil ver que $C_T(v)$ é T -inv. Alternativamente, pode-se definir $C_T(v) = \mathcal{C}_T^m(v)$, onde $m = \dim C_T(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

◇ Para $\alpha = (v_i)$ família em V definimos $C_T(\alpha) := \sum C_T(v_i)$.

Nota. Se $\dim V = n < \infty$ então num análise analogo da □ 8.1.3. pode-se construir $m_{T,v} = m_v$ pensando no mínimo m tal que $\mathcal{C}_T^m(v)$ é l.d.. Também, $C_T(v) \subseteq V_{m_v} \leftarrow T$ -inv, sendo $S = T|_{V_{m_v}}$ temos $m_v = m_S$.

⊠ 8.1.9. $\forall v \in V$ temos $m_v \mid m_T$. \rightarrow Segue da observação acima e □ 8.1.7.

□ 8.1.11. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ co-primos dois a dois. Então a soma $\sum^m V_{p_j}^\infty$ é direta.

Seguendo □ 5.4.6., pega $v_j \in V_{p_j}^\infty \setminus \{0\}$ e mostra que $\alpha = (v_j)$ é l.i.. Faz por indução, no passo indutivo suponha $\sum^m a_j v_j = 0$ e $g = \prod_{j < m} p_j$. Usa o □ 8.1.6. com cada $g_j = p_j$ e $f = p_m$ pra concluir $a_m = 0$.

□ 8.1.12. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ co-primos dois a dois e $f = \prod^m f_j$. Então, $V_f = \bigoplus V_{f_j}$. \rightarrow Não suporta resumo, olha [1, Pág. 261]

■ 8.1.13. (*Descomposição Primária*) Sejam $\mathcal{A}_T \neq \{0\}$ e $\prod^m p_j^{k_j}$ a fatoração em primos de m_T . Então, $V = \bigoplus_{p_j} V_{p_j}^{k_j}$.

Faça $p_j^{k_j} = f_j$ na □ 8.1.12., o resultado segue do fato de $V = V_{m_T}$.

Nota. Os termos da soma são chamados de *subespaços T -primarios*.

□ 8.1.16. Sejam $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo e $u, v \in V$ tais que $m_u = m_v = p$. Então, ocorre exatamente uma das duas opções a seguir,

- i. $C_T(u) = C_T(v)$. ii. $C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}$.

* $C_T(v) = \{q(T)(v) : q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\}$ * \rightarrow Prova meramente conjuntista

O resultado segue de mostrar $\forall w \in C_T(v)$, $C_T(v) = C_T(w)$. Prova as duas contenções usando a igualdade acima e o ■ (Bézout).

□ **8.1.17.** Seja $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo tal que $\dim V_p < \infty$. Então, $\exists l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $v_1, v_2, \dots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = \bigoplus^l C_T(v_k)$.

Basta ver que $\forall v \in V_p \setminus \bigoplus^{l-1} C_T(v_k)$ temos $C_T(v) \cap \bigoplus^{l-1} C_T(v_k) = \{0\}$. Suponha $w \neq 0$ naquela interseção e usa os varios fatos em □ 8.1.16. pra contradizer, conseguindo ver que $v \in \bigoplus^{l-1} C_T(v_k)$.

□ **8.1.18.** Seja $p_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo tal que $\dim V_{p_j}^\infty < \infty$. Então,

$$\text{gr}(p_j) \mid \dim V_{p_j}^\infty \quad \text{e} \quad n_j := \frac{\dim V_{p_j}^\infty}{\text{gr}(p_j)} \geq \min\{k : V_{p_j}^\infty = V_{p_j^k}\}.$$

→ A demonstração não suporta resumo, olha se quiser [1, Pág. 263].

Nota. Pode e deve-se verificar que $\min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\} = k_j$ do ■ 8.1.13., é assim que conseguimos definir o *polinômio carateristico* como sendo $c_T := \prod^m p_j^{n_j} \in \mathcal{A}_T$, exatamente o mesmo do ■ (Caley-Hamilton).

Encontrando a Descomposição Primária

Paso 1. Escolha uma base α pra seu espaço V e determine $[T]_\alpha^\alpha = A$.

Paso 2. Encontre $c_T = \det(t\mathbb{1}_V - A)$ e sua fatoração em primos $c_T = \prod^m p_j^{n_j}$. → Precisa habilidade na hora das contas do det

Paso 3. Estude subespaços e encontre o $\min k : \dim V_{p_j^k} = \text{gr}(p_j)n_j$.

Nota. Na hora das contas são úteis as propriedades,

i. $\det(a_{ij}) = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$. → Formula de Laplace

ii. $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det A \det B$. → A e B quadradas

iii. $\det \begin{bmatrix} | & & | \\ \mu a_{i1} & \cdots & \mu a_{in} \\ | & & | \end{bmatrix} = \mu \det \begin{bmatrix} | & & | \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ | & & | \end{bmatrix}$. → Saca múltiplos das filas

1.2 Complementos Invariantes e Bases Cíclicas

1.3 Formas Canônicas

§ 2 Multilinearidade

Em diante entendemos $\Pi V_j = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$ como o espaço vetorial dado pelo produto cartesiano dos \mathbb{F} -espaços vetoriais V_j com $j \leq k \in \mathbb{N}$.

◇ Sejam ΠV_j e W \mathbb{F} -espaços vetoriais. Denotamos por $\mathcal{F}(\Pi V_j, W)$ o conjunto de todas as funções $\phi : \Pi V_j \rightarrow W$.

◇ Uma função $\phi \in \mathcal{F}(\Pi^k V_j, W)$ é *k-linear* se é linear em cada entrada. Ou seja, $\forall j \leq k, \forall (v_{i_0}) \in \Pi V_j$ fixo : $v_{j_0} = 0, \forall (v_i), (v'_i) \in \Pi V_j$ e $\forall \lambda \in \mathbb{F}$,

$$\phi_j((v_{i_0}) + (v_i + \lambda v'_i)_{\delta_j}) = \phi((v_{i_0}) + (v_i)_{\delta_j}) + \lambda \phi((v_{i_0}) + (v'_i)_{\delta_j}).^4$$

$$\diamond \text{Hom}_{\mathbb{F}}^k(\Pi V_j, W) := \{\phi \in \mathcal{F}(\Pi V_j, W) : \phi \text{ é } k\text{-linear}\}$$

Nota. Se $\forall j \leq k, V_j = V$ então $\text{Hom}_{\mathbb{F}}^k(\Pi V_j, W) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}^k(V, W)$. Também, se $W = \mathbb{F}$, chamamos seus elementos de *formas k-lineares* em V .

$$U \leq \Pi V_j \not\Rightarrow \phi(U) \leq W$$

Exemplo Sejam $V = \mathbb{F}^2, W = \mathbb{F}^4$ e $\phi : \mathbb{F}^2 \times \mathbb{F}^2 \ni ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 x_2, x_1 y_2, y_1 x_2, y_1 y_2) \in \mathbb{F}^4$. → Veja que é bilinear, logo que $\text{Im}(\phi) = \{(a_j) : a_1 a_4 = a_2 a_3\}$, pegue dois caras $u, v \in \text{Im}(\phi) : u + v \notin \text{Im}(\phi)$

■ **9.1.3.** Pra cada $j \leq k$ sejam $\alpha_j = (v_{i,j})_{i \in I_j}$ uma base de $V_j, I = \Pi^k I_j$ e $(w_i)_{i \in I}$, família de vetores em W . Então, $\exists! \phi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}^k(\Pi V_j, W)$ tal que $\forall \mathbf{i} \in I$ temos $\phi((v_{\mathbf{i},j})) = w_{\mathbf{i}}$.

→ A demonstração é completamente análoga da feita pra ■ 6.1.6., mudando, claro, o não despreciável negócio da gestão dos índices

□ **9.1.4.** Sejam V_j, α_j como no ■ 9.1.3., $\beta = (w_s)_{s \in S}$ uma base de W , $\mathbf{v}_i := (v_{i,j})_{i \in I}$ e $\forall (\mathbf{i}, s) \in I \times S$ seja $\phi_{\mathbf{i},s} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}^k(\Pi V_j, W)$ o único tal que

⁴Entendase $(v_i)_{\delta_j} := (v_i \cdot \delta_j)$.

$\forall \mathbf{i}' \in I, \phi_{\mathbf{i},s}(v_{\mathbf{i}'}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{i}'} w_s$. Então $(\phi_{\mathbf{i},s})$ é l.i., mas ainda, se $\forall j \leq k, \dim V_j < \infty$ então $(\phi_{\mathbf{i},s})$ é base do $\text{Hom}_{\mathbb{F}}^k(\Pi V_j, W)$.

dsakfj

References

- [1] Moura, Adriano (2025). *Álgebra Linear com Geometria Analítica*. UNICAMP, Campinas, SP.