Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

$^{+2}$Notas de Álgebra Linear II

September 12, 2025

"No princípio Deus criou os céus, a terra e...
a Álgebra Linear" - Gênesis 1:1

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

** Conteúdo basado na disciplina MM719 (Álgebra Linear) ministrada pelo profesor Adriano Moura e [1], de sua autoría também, no período 2025-II. **

Notação	$\diamond$ Definição	$(-)^{\diamond}$ Aberto	$(-)^{\blacklozenge}$ Fechado
$\square$ Lema	$\square$ Proposição	$\blacksquare$ Teorema	$\boxtimes$ Corolário

§ Preliminares

É preciso lembrar algumos resultados do curso de Álgebra Linear I, podem ser aprofundados se queser nos capítulos 5 e 6 de [1]. Também, algumas propiedades e detalhes do anel de polinômios.

Espaços Vetoriais

$\diamond$ Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, e $V \neq \emptyset$. Um $\mathbb{F}$-*espaço vetorial* é uma tripla $(V, +, \cdot)$ onde, $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ são operações tais que, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\forall v, w \in V$, temos,

(V1) $(V, +)$ é grupo abeliano.

(V2) $(V, \cdot)$ asocia, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.

(V3) Distributividade I, $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

(V4) Distributividade II, $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

(V5) Neutro da multiplicação (por escalar), $1 \cdot v = v$.

◇ Um subconjunto $W \subseteq V$ não vacío é dito de *subespaço*, denotamos $W \leq V$, se $\forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{F}$, temos $w_1 + \lambda w_2 \in W$.

◇ Sejam $\alpha = (v_i)$ uma familia de vetores em V e $m \in \mathbb{N}$. Uma *combinação linear* de α, é um vetor em V da forma $v = \sum_{j \leq m} x_{i_j} v_{i_j}$, onde $x_{i_j} \in \mathbb{F}$.

Nota. Denotamos por $[\alpha]$, ao conjunto de todas as combinações lineares de α, repare que $[\alpha] \leq V$. Também, se $\alpha = \{v\}$ então $[\alpha] = [v] = \mathbb{F}v$.

◇ Uma familia $\alpha = (v_i)$ é l.i. sse $\forall j \in I$, $v_j \notin [\alpha \setminus \{v_j\}]$. Alem disso, se $[\alpha] = V$ então α é chamada de *base* de V.

■ **5.5.1.** Todo espaço vetorial tém base e quaisquer duas bases tém mesma cardinalidade. $\rightarrow$ [1, Pág. 185]

◇ Seja α uma base de V. Então, $\dim V := \#\alpha$ é a *dimensão* de V.

◇ Seja (V_i) familia de subespaços em V, definimos a soma deles somo sendo $\sum V_i := [\bigcup V_i]$. A soma é direta se $\forall j \in I$, $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{0\}$.

Nota. Se a soma é direta escrevemos $\bigoplus V_i$.

□ **5.3.7.** A soma $\sum V_i$ é direta sse $\forall v \in \sum V_i$, $\exists m \in \mathbb{N}$ e $\exists! v_{i_j} \in V_{i_j}$ tais que $v = \sum_{j \leq m} v_{i_j}$. $\rightarrow$ [1, Pág. 174]

□ **5.4.6.** Sejam $\alpha = (v_i)$ e $V_i = \mathbb{F}v_i$ então α é l.i. sse $\sum \mathbb{F}v_i$ é direta.

⊠ α é base sse $\forall i \in I,\ v_i \neq 0$ e $V = \bigoplus \mathbb{F}v_i$. Logo, da □ 5.3.7. temos que $\forall v \in V$, $\exists m \in \mathbb{N}$ e $\exists! x_{i_j} \in \mathbb{F}$ tais que $v = \sum_{j \leq m} x_{i_j} v_{i_j}$. $\rightarrow$ [1, Pág. 178]

Nota. Os x_{i_j} são as *coordenadas* de v na base α, identificamos comumente,

$$(x_{i_j}) =: [v]_\alpha \sim [x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}]^T \in M_{m \times 1}(\mathbb{F}).$$

Transformações Lineares

◇ Sejam V e W $\mathbb{F}$-espaços vetoriais. Uma função $T : V \rightarrow W$ é dita *linear* se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ tém-se que $T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2)$.

◇ Sejam $T : V \to W$ linear, $\alpha = (v_j)$ e $\beta = (w_i)$ bases de V e W respetivamente. Então, se $[T(v_j)]_\beta = (a_{ij})$, a *matriz asociada* $[T]^\alpha_\beta := (a_{ij})$ determina T no sentido que, $\forall v \in V$, $[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta [v]_\alpha$.

Nota. Se $W = V$ e $T = \mathbb{1}_V$, então $[\mathbb{1}_V]^\alpha_\beta$ é a matriz cambio de base.

■ **6.1.6.** Sejam $\alpha = (v_i)$ base de V e $\beta = (w_i)$ familia de vetores em W, então $\exists! T : V \to W$ linear tal que $\forall i \in I,\ T(v_i) = w_i$.

Nota. O espaço vetorial das funções $f : V \to W$, com a soma e o produto usuais é denotado no texto como $\mathcal{F}(V, W)$.

◇ $\mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T$ é linear$\}$. Se $V = W$ então denotamos $\mathrm{End}_\mathbb{F}(V) = \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, V)$. [1]

□ **0.1.** Algumas propiedades coletadas de [1, Seç. 6.1].

(a) $\mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W) \leq \mathcal{F}(V, W)$.

(b) Sejam $\alpha = (v_j)$ e $\beta = (w_i)$ bases de V e W fixas. A função $\zeta : \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W) \ni T \mapsto [T]^\alpha_\beta \in M_{\#I \times \#J}(\mathbb{F})$ é linear e injetora.

(c) Sejam γ, α e β bases de U, V e W, $S \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(U, V)$ e $T \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W)$ então $T \circ S \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(U, W)$ e $[T \circ S]^\gamma_\beta = [T]^\alpha_\beta [S]^\gamma_\alpha$.

(d) Se α e β são bases de V e W, e $T \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W)$ é invertivél então $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(W, V)$ e $[T^{-1}]^\beta_\alpha = ([T]^\alpha_\beta)^{-1}$.

◇ $T \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W)$ é um *isomorfismo* se fora sobrejetivo. Dois espaços são *isomorfos*, $V \cong W$, se $\exists T \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W)$ isomorfismo.

Nota. A transformação ζ do ítem (b) é sobrejetiva se $\#J < \infty$.

■ **6.1.9.** $V \cong W$ sse $\dim V = \dim W$. $\to$ [1, Pág. 191]

□ **0.1.** Seja $T \in \mathrm{Hom}_\mathbb{F}(V, W)$. Se $U \leq V$ e $U' \leq W$ então também $T(U) \leq W$ e $T^{-1}(U') \leq V$. $\to$ [1, Pág. 199]

$$◇\ V_T := T^{-1}(\{0\}) = \mathcal{N}(T) \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(T) := T(V).$$

[1] "Hom" vém de homomorfismo e "End" de endomorfismo.

Nota. Chamamos estos espaços especiais de *núcleo* e *imagem* de T e suas dimensões de *nulidade* e *posto*.

■ **6.3.6.** $\dim V = \dim V_T + \dim V(T)$. → [1, Pág. 201]

□ **6.3.9.** T é injetora sse $V_T = \{0\}$. → [1, Pág. 202]

Nota. Se $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ então $T^m := \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{m \text{ veces}} \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, por convenção $T^0 = \mathbb{1}_V$. Seguindo o ítem (a) da □ 0.1. , $\forall p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ temos,

$$p(t) = \sum^{m} a_k t^k \quad \sim \quad P(T) = \sum^{m} a_k T^k \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

$$** \quad V_p = V_{p(T)} = \{v \in V : p(T)(v) = 0\} \quad **$$

◇ Sejam $\lambda \in \mathbb{F}$ e $p = t - \lambda$. Se $\exists v \in V_p \setminus \{0\}$ então V_p é *autoespaço*, v um *autovetor*, ambos associados ao *autovalor* λ.

Nota. No [1, Pág. 208] tém a primeira e equivalente definição de autoespaço como sendo $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\} \neq \{0\}$.

◇ T é *diagonalizavél* se $\exists \beta$ base de V formada por autovetores.

Nota. No caso diagonalizavél e tudo perfeito de mais, pois se λ_j são os autovalores dos $v_j \in \beta$ então, $[T]_\beta^\beta = \operatorname{diag}(\lambda_j)$. Em versão matricial temos,

$$[T]_\beta^\beta = [\mathbb{1}_V]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [\mathbb{1}_V]_\alpha^\beta \quad \sim \quad B = P^{-1}AP.$$

É sabido que não todos os operadores são diagonalizavéis. O objetivo do [1, Cap. 8] é ver que, ainda assim, sempre e possivél levar T a uma matriz quasi-diagonal B (Formas Canônicas).

O Anel de Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

◇ Sejam $I = \{t^k : k \in \mathbb{Z}_{\geq} 0\}$ conjunto respeitando as leis usuais de potências[2] e $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ um corpo. Defina, $\forall i \in I$, o espaço vetorial $V_i = \{a_i t^i : a_i \in \mathbb{F},\ t^i \in I\}$, com as operações,

[2]Quer dizer que $t^0 = 1$ e $t^m \cdot t^n = t^{m+n}$.

- $+ : V_i \times V_i \ni (a_i t^i, b_i t^i) \mapsto (a_i + b_i) t^i \in V_i$.
- $\cdot : \mathbb{F} \times V_i \ni (\lambda, a_i t^i) \mapsto (\lambda \cdot a_i) t^i \in V_i$.

Assim, o anel de polinômios com coeficientes em $\mathbb{F}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{F}) := \sum V_i$.

Nota. Em particular, $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ é um espaço vetorial, $\dim \mathcal{P}(\mathbb{F}) = \infty$, $\alpha = \{1, t, t^2, \ldots\}$ é uma base e temos um producto bém definido.[3]

References

[1] Moura, Adriano (2025). *Álgebra Linear com Geometría Analítica*. UNICAMP, Campinas, SP.

[3] Ou todo junto, um álgebra comutativa.