Lista 6: difeomorfismos, formas locais, teorema da função implícita

16 de maio de 2025

1. (Qualificação 2006) Mostre que toda submersão $F : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $n > m$, é uma aplicação aberta (isto é, se $A \subset U$ é aberto, então $F(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto).

2. (Qualificação 2007) Considere um planeta com órbita elíptica $x = a\cos\theta$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$. Supondo que o sol está situado no foco $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ e que t é o tempo medido desde o instante que o planeta passa pelo ponto $(a, 0)$, então a equação de Kepler satisfeita é:

$$kt = \theta - \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

   em que $k > 0$ é uma constante e $\varepsilon = b/a$, com $0 < b < a$.

   (a) Mostre que a equação de Kepler pode ser resolvida para θ em função de t.
   (b) Mostre que $\frac{d\theta}{dt}$ assume o máximo no periélio $(a, 0)$ e o mínimo no afélio $(-a, 0)$.

3. (Qualificação 2007) Seja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k, com $k \geq 1$, tal que $\|DG(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que a aplicação $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = x + G(x)$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Mostre que, se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que $\|DG(x)\| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então a aplicação F do item (a) é sobrejetiva.
   (c) Exiba um contra-exemplo que mostre que não basta supor que $\|DG(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ para garantir que F definida no item (a) seja sobrejetiva.

4. (Qualificação 2007) Mostre que uma submersão injetora é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

5. (Qualificação 2008)

   (a) Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3$ é uma aplicação aberta mas não é uma submersão.
   (b) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ que seja injetiva mas não seja uma imersão. Justifique.

6. (Qualificação 2008) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e considere uma aplicação continuamente diferenciável

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$$

   tal que, para um certo $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in U$, tem-se que $D\psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ é injetiva.

   (a) Mostre que, para algum par (i, j), com $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $i < j$, existe um aberto $V \subset U$, com $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in V$, e tal que a aplicação definida para $(x_1, x_2) \in V$ por $h(x_1, x_2) = (\psi_i(x_1, x_2), \psi_j(x_1, x_2))$ é um difeomorfismo C^1 sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^2$.
   (b) Suponha por simplicidade que o resultado do item (a) valha para $i = 1$ e $j = 2$. Mostre que, para todo $(x_1, x_2) \in V$, existe um único $(y_1, y_2) \in W$ e uma aplicação $f = (f_1, f_2) : W \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi(x_1, x_2) = (y_1, y_2, f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))$. Em outras palavras, mostre que $\psi(V)$ é o gráfico de $f : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

7. (Qualificação 2009) Sejam F e G aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, de classe C^1, e suponha que $F(0) = 0$ e que $DF(0)$ é invertível. Para cada $r \in \mathbb{R}$, defina $H_r(x) = F(x) + rG(x)$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $|r| < \varepsilon$, H_r se anula em um ponto x_r, e que $\lim_{r\to 0} x_r = 0$. [Sugestão: forma local das submersões.]

8. (Qualificação 2010)

   (a) Demonstre o teorema da aplicação inversa usando o teorema do posto.

   (b) Considere o seguinte sistema definido no aberto $U = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$:

   $$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{40}x_1^4 + \frac{1}{5}\ln(x_2 + e^2) = a_1 \\ x_2 + \frac{1}{7}\operatorname{sen}(x_1) + 1 = a_2. \end{cases}$$

   Mostre que o sistema acima tem uma única solução $x = (x_1, x_2) \in U$ quando $a_1 = \frac{2}{5}$ e $a_2 = 1$.

9. (Qualificação 2010)

   (a) Demonstre o teorema da função implícita usando o teorema do posto.

   (b) Mostre que, se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^1, então f não é injetora.

   (c) (Qualificação 2013) Mostre que, se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então f não é sobrejetiva.

10. (Qualificação 2012)

    (a) Mostre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.

    (b) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $F : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Mostre que, se existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que o conjunto $F^{-1}(y_0)$ possui um ponto de acumulação $x_0 \in U$, então $DF(x_0)$ não é injetiva.

11. (Qualificação 2014)

    (a) Enuncie o teorema da função inversa.

    (b) Enuncie a forma local das submersões.

    (c) Demonstre a forma local das submersões usando o teorema da função inversa.

12. (Qualificação 2015) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada pela equação $F(x) = \|x\|^2 x$.

    (a) Mostre que F é uma aplicação de classe C^∞ que leva a bola aberta $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ nela mesma, de forma bijetiva.

    (b) Calcule a matriz jacobiana $JF(x)$ e a transformação derivada $DF(x)v$ para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$.

    (c) Mostre que F leva uma bola centrada em $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ em um conjunto aberto.

    (d) Mostre que a inversa de F não é diferenciável na origem.

13. (Qualificação 2015) Seja F um difeomorfismo de classe C^1. Mostre que, se F é uma aplicação de classe C^k, então F é um difeomorfismo de classe C^k.

14. (Qualificação 2016) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

    $$f(x) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos(x_1), x_1^2 + x_2 + 2), \qquad g(y) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1)$$

    e $F = g \circ f$. Mostre que F é invertível numa vizinhança de 0 e calcule a matriz jacobiana $(JF^{-1})(F(0))$.

15. (Qualificação 2017) Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1.

    (a) Quando F é uma imersão? Quando F é uma submersão? Dê exemplos.

    (b) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$. Descreva o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ onde F tem posto constante igual a 3.

(c) Suponha que F tem posto constante. Mostre que F é localmente injetiva se, e somente se, F é uma imersão.

16. (Qualificação 2017)

(a) Enuncie o teorema da função inversa e da função implícita.

(b) É verdade que, se uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 é localmente invertível em p, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, então ela é bijetiva? Mostre ou dê um contra-exemplo.

(c) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ wxy - xyz = 0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = w(y, z)$ e $x = x(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (1, 2, 1, 1)$. Calcule as derivadas parciais de w e x nestes pontos.

17. (Qualificação 2017) Prove o *Lema de Morse*. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^∞ e seja $p \in U$ um ponto crítico não-degenerado de f com $f(p) = 0$. Mostre que existe um difeomorfismo local ϕ em p tal que

$$(f \circ \phi^{-1})(x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

onde λ é o índice do ponto crítico, ou seja, a dimensão máxima do subespaço onde a restrição da hessiana é definida negativa.

18. (Qualificação 2017) Seja $U \subset L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ um subconjunto aberto. Mostre que $\det : U \to \mathbb{R}$ é uma submersão se, e somente se, nenhuma matriz em U tem posto menor ou igual a $n - 2$.

19. (Qualificação 2018) Seja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e suponha que exista $M > 0$ tal que

$$\|G(x) - x\| \leq M\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que G é localmente invertível perto da origem e calcule $DG(0)$.

20. (Qualificação 2018) Seja p um polinômio com coeficientes reais e grau maior ou igual a 1. Defina a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(x, y) = (p(x + y), p(x - y))$. Prove que existe um conjunto aberto e denso de pontos de $\mathbb{R}^2$ para os quais a aplicação F é um difeomorfismo local quando restrita a alguma vizinhança de cada um desses pontos.

21. (Qualificação 2019) Sejam U um abero de $\mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão de classe C^k, $k \geq 1$. Mostre que, para todo ponto $p \in U$, existe um aberto $V \subset U$ contendo p tal que $f|_V : V \to f(V)$ é um homeomorfismo e $(f|_V)^{-1}$ é a restrição de uma aplicação de classe C^k definida num aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$.

22. (Qualificação 2019) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f(2, -1) = -1$. Defina

$$\begin{cases} G(x, y, u) = f(x, y) + u^2 \\ H(x, y, u) = ux + 3y^3 + u^3 \end{cases}$$

(a) Encontre $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} G(x, y, u) = 0 \\ H(x, y, u) = 0 \end{cases}$$

tem solução $(x, y, u) = (2, -1, \alpha)$.

(b) Sob quais condições existem funções $x = g(y)$ e $u = h(y)$, de classe C^1 e definidas em abertos de $\mathbb{R}$, tais que $G(g(y), y, h(y)) = 0$ e $H(g(y), y, h(y)) = 0$ com $g(-1) = 2$ e $h(-1) = \alpha$? Enuncie detalhadamente todos os teoremas necessários.

(c) Nas condições encontradas em (b), supondo $Df(2, -1) = (1, -3)$, encontre $g'(-1)$ e $h'(-1)$. Enuncie detalhadamente todos os teoremas necessários.

23. (Qualificação 2021 e 2023) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo.

24. (Qualificação 2021) Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação de classe C^k com $k \geq 1$ e U aberto. Mostre que se, para todo $x \in U$ vale que

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0,$$

então todo $x \in U$ admite uma vizinhança $W \subset U$ tal que $F(W)$ é o gráfico de uma função $y_{n+1} = \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ de classe C^k.

25. (Qualificação 2021) Seja $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Seja $p = (1, 2, -1, 3, 0)$. Suponha que $F(p) = 0$ e que

$$JF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que existe uma aplicação $G : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$F(x_1, G_1(x), G_2(x), x_2, x_3) = 0$$

para $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ e $G(1, 3, 0) = (2, -1)$.

(b) Calcule $JG(1, 3, 0)$.

(c) Dê um exemplo de uma aplicação F que satisfaça o enunciado e encontre a correspondente aplicação G do item (a).

26. (Qualificação 2021)

(a) Defina o posto de uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em um ponto $x \in U$.

(b) Dada $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, mostre que existe um aberto denso $V \subset U$ onde o posto de F é constante em toda componente conexa de V.

27. (Qualificação 2022) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

(a) Mostre que o conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ onde $DF(x)$ possui posto n é aberto.

(b) Use o teorema da função inversa para mostrar que $F(S)$ também é aberto.

28. (Qualificação 2022) Prove que não existe um difeomorfismo de classe C^1 de um aberto de $\mathbb{R}^n$ num aberto de $\mathbb{R}^m$ se $m < n$.

29. (Qualificação 2022) Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xy + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

(a) Esboce o lugar geométrico dos pontos que satisfazem cada uma das equações do sistema. Use seu esboço para estudar se o sistema possui solução.

(b) Use o teorema da função implícita para mostrar que o sistema pode ser resolvido, digamos com $x = \phi(x)$ e $y = \psi(z)$ na vizinhança de $(1, 2, 1)$.

(c) Encontre dx/dz no ponto $(1, 2, 1)$.

30. (Qualificação 2023) Utilize o teorema da função implícita para mostrar que o sistema

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ wxy - xyz = 0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = w(y, z)$ e $x = x(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (1, 2, 1, 1)$. Calcule as derivadas parciais de w e de x nesses pontos.