

Álgebra Linear Avançada

Transformações Ortogonais e Simpléticas

Adriano Moura

Unicamp

2020

Transformações Compatíveis com Formas Bilineares

Dados \mathbb{F} -espaços vetoriais V e W , suponha que $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$(1) \quad \psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v) \quad \forall \quad u, v \in V.$$

Se ϕ e ψ forem produtos internos (em particular, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$), esta definição coincide com a de transformação ortogonal da Seção 7.4. Por isso, se ϕ e ψ são simétricas e não degeneradas, diz-se que tal T é uma transf. linear ortogonal. Já se ambas forem alternadas, T é dita simplética.

Proposição 9.5.1 (Ver Proposição 7.4.2.)

As seguintes afirmações são equivalentes.

- i T é compatível com (ϕ, ψ) .
- ii Para toda base α de V , $[\phi]_{\alpha} = [\psi]_{T(\alpha)}$.
- iii Existe base α de V tal que $[\phi]_{\alpha} = [\psi]_{T(\alpha)}$.

Note que (1) não impõe nenhuma condição em $\psi(w_1, w_2)$ se w_1 ou w_2 não está em $\text{Im}(T)$. Assim, podemos supor que T é sobrejetora.

Existência de Transformações Compatíveis

Neste caso,

$$v \in V^{\perp\phi} \Rightarrow T(v) \in W^{\perp\psi}.$$

De fato, dado $w \in W$, digamos $w = T(u)$, temos

$$\psi(T(v), w) = \phi(v, u) = 0.$$

Todavia, não há outra condição para a restrição de T a $V^{\perp\phi}$. Portanto, basta estudar o caso em que ϕ é não degenerada. Neste caso, pelo Exercício 9.3.10, $\det([\phi]_{\alpha}) \neq 0$ para todo subconjunto l.i. finito α de V . Como $[\psi]_{T(\alpha)} = [\phi]_{\alpha}$, $T(\alpha)$ é l.i. (Exerc. 9.4.3) e, portanto, T é injetora. Com estes fatos em mente, a demonstração da seguinte proposição fica de exercício.

Proposição 9.5.2

Se $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$ com ϕ não degenerada, $\exists T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ sobrejetora e compatível com (ϕ, ψ) se, e só se, $\dim(V) = \dim(W)$ e existirem bases α de V e β de W t.q. $[\phi]_{\alpha} = [\psi]_{\beta}$. Neste caso, T é necessariamente um isomorfismo.

O Caso de Operadores Lineares

Passamos ao estudo do caso $V = W$ e $\phi = \psi$ é não degenerada. O objetivo é descrever o conjunto dos operadores lineares em V compatíveis com ϕ , isto é, com (ϕ, ϕ) , no caso em que $\phi \in B_{as}(V)$ é não degenerada e $\dim(V)$ é finita. Considere

$$\text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) = \{T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V) : \phi(T(u), T(v)) = \phi(u, v), \quad u, v \in V\}.$$

Segue da proposição anterior que todo elemento de $\text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é bijetor. Facilmente verifica-se que $\text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ é fechado por composição, isto é,

$$T \circ S \in \text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para quaisquer } T, S \in \text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V),$$

e que

$$T^{-1} \in \text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V) \quad \text{para todo } T \in \text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V).$$

Ou seja, o par $(\text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V), \circ)$ é um grupo. Este grupo é dito um grupo ortogonal, se ϕ é simétrica, e simplético, se ϕ é alternada. Além disso, dada uma base α de V , tomando $\beta = T(\alpha)$, que também é base de V , temos $[\phi]_{\alpha} = [\phi]_{\beta}$ e segue que $[\phi]_{\alpha} = ([I]_{\alpha}^{\beta})^t [\phi]_{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta}$. Por definição de β temos $[I]_{\alpha}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ e, portanto, $\det([\phi]_{\alpha}) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha})^t \det([\phi]_{\alpha}) \det([T]_{\alpha}^{\alpha})$. Como $\det([\phi]_{\alpha}) \neq 0$, concluímos que $\det(T) = \pm 1$.

Operadores Ortogonais e Reflexões

Suponha que $\phi \in B_s(V)$ e que $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$. T é dita uma rotação se $\det(T) = 1$ e uma reflexão se $\det(T) = -1$. Em particular, o subconjunto formado pelas rotações formam um subgrupo de $\text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$, enquanto que a composta de duas reflexões é uma rotação. Dado um vetor não isotrópico $w \in V$, considere $W = [w]$ e a função

$$R_W^{\phi} : V \rightarrow V, \quad R_W^{\phi}(v) = v - 2 \frac{\phi(v, w)}{\phi(w, w)} w.$$

Facilmente verifica-se que R_W^{ϕ} é linear e que a fórmula dada depende de fato apenas de W , isto é, trocando-se w por qualquer um de seus múltiplos não nulos na expressão definidora de R_W^{ϕ} resulta na mesma função. Verificaremos a seguir que R_W^{ϕ} é uma reflexão. Por isso, ela é chamada de a reflexão simples associada a W (com respeito a ϕ).

Precisamos verificar que R_W^{ϕ} é compatível com ϕ e $\det(R_W^{\phi}) = -1$.

Comece observando que

$$(2) \quad R_W^{\phi}(v) = \begin{cases} -v, & \text{se } v \in W, \\ v, & \text{se } v \in W^{\perp\phi}. \end{cases}$$

Reflexões

Como w é não isotrópico, temos $V = W \oplus W^{\perp_\phi}$ e, portanto, podemos escolher base $\alpha = v_1, \dots, v_n$ de V tal que $v_1 \in W$ e $v_j \in W^{\perp_\phi}$ para $j > 1$. Com esta escolha, segue de (2) que

$$[R_W^\phi]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de onde segue que $\det(R_W^\phi) = -1$ assim como

$$\phi(R_W^\phi(v_i), R_W^\phi(v_j)) = (-1)^{\delta_{i,1} + \delta_{j,1}} \phi(v_i, v_j) = \phi(v_i, v_j) \quad \forall \quad 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Logo, $[\phi]_{T(\alpha)} = [\phi]_\alpha$ e segue da Proposição 9.5.1 que R_W^ϕ é compatível com ϕ . Observe que (2) também mostra que

$$(3) \quad R_W^\phi \circ R_W^\phi = \text{Id}_V.$$

Se ϕ é um produto interno, o conjunto das reflexões simples coincide com o das reflexões ortogonais com respeito a hiperplanos (revisar a Seção 7.3).

Caracterização de Operadores Ortogonais via Reflexões

Teorema 9.5.7

Suponha que $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e que $0 \neq \dim(V) < \infty$. Sejam $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.

Lema 9.5.3 (Execício 9.5.2)

Se $\phi \in B_{as}(V)$, $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}^{\phi}(V)$ e W é um subespaço não degenerado com respeito a ϕ e T -invariante, $W^{\perp_{\phi}}$ também é T -invariante.

Lema 9.5.6

Suponha que $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, $\phi \in B_s(V)$ seja não degenerada e que $u, v \in V$ satisfaçam $\phi(u, u) = \phi(v, v) \neq 0$. Então, existe reflexão simples R tal que $R(v) \in \{u, -u\}$.

Dem.: Considere $w_{\pm} = v \pm u$ e $W_{\pm} = [w_{\pm}]$. Mostremos que pelo menos um dos dois vetores w_+ e w_- não é isotrópico. De fato,

$$\phi(w_{\pm}, w_{\pm}) = 2(\phi(u, u) \pm \phi(u, v)).$$

Demonstração do Teorema 9.5.7

Logo, se fosse $\phi(w_+, w_+) = \phi(w_-, w_-) = 0$, teríamos $\phi(u, u) = \pm\phi(u, v)$ e, portanto, $\phi(u, u) = 0$, contradizendo a hipótese sobre u . Note também que $\phi(w_+, w_-) = 0$. Assim, se w_+ não for isotrópico, temos

$$R_{W_+}^\phi(w_\pm) = \mp w_\pm$$

e, portanto, $R_{W_+}^\phi(v) = \frac{1}{2} R_{W_+}^\phi(w_+ + w_-) = \frac{1}{2}(w_- - w_+) = -u$.

Analogamente, se w_- não for isotrópico, segue que $R_{W_-}^\phi(v) = u$. □

Dem. do Teor: Sendo $\text{End}_{\mathbb{F}}^\phi(V)$ um grupo, composições de reflexões simples são operadores ortogonais. Provaremos a recíproca por indução em $n = \dim(V) \geq 1$. Se $n = 1$, então $V = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$ e temos $T(v) = \lambda v$. Como $\det(T) = \pm 1$, segue que $T = \pm \text{Id}_V$. Como $-\text{Id}_V = R_V^\phi$ e $\text{Id}_V = (R_V^\phi)^2$, fica demonstrado o caso $n = 1$.

Se $n > 1$, escolha um vetor não isotrópico u (existe pois $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e ϕ é não degenerada). Tome $v = T(u)$ e seja R uma reflexão simples t.q.

$R(v) = \pm u$, que existe pelo Lema 9.5.6. Em particular, $U = [u]$ é $(R \circ T)$ -invariante e, como $U^{\perp\phi}$ é não degenerado, segue do Lema 9.5.3 que $U^{\perp\phi}$ também é $(R \circ T)$ -invariante.

Seja S o operador linear em $U^{\perp\phi}$ induzido por $R \circ T$. Por hipótese de indução, S é uma composição de reflexões simples. Digamos,

$$S = S_1 \circ \cdots \circ S_m.$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, seja R_j o único operador linear em V satisfazendo

$$R_j(u) = u \quad \text{e} \quad R_j(w) = S_j(w) \quad \text{para todo } w \in U^{\perp\phi}.$$

Considere também

$$(4) \quad R_0 = \begin{cases} \text{Id}_V, & \text{se } R(v) = u, \\ R_U^\phi, & \text{se } R(v) = -u. \end{cases}$$

Para completar a demonstração verificaremos que

$$(5) \quad T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ \cdots \circ R_m$$

e que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$.

Comece observando que $R_0(w) = w$ para todo $w \in U^{\perp\phi}$ e, portanto, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ \cdots \circ R_m$ em $U^{\perp\phi}$. Por outro lado, como $R_j(u) = u$ para todo $1 \leq j \leq m$, temos

$$(R_0 \circ \cdots \circ R_m)(u) = R_0(u) \stackrel{(4)}{=} R(T(u)).$$

Como $V = U \oplus U^{\perp\phi}$, segue que $R \circ T = R_0 \circ \cdots \circ R_m$, de onde conclui-se

(5) já que $R^{-1} = R$ por (3).

Finalmente, mostremos que R_j é uma reflexão simples em V para todo $1 \leq j \leq m$. Seja ψ a restrição de ϕ a $U^{\perp\phi}$ e, dado $1 \leq j \leq m$, seja $w_j \in U^{\perp\phi}$ tal que

$$S_j = R_{W_j}^{\psi} \quad \text{com} \quad W_j = [w_j].$$

Mostremos que $R_j = R_{W_j}^{\phi}$. Como $\phi(u, w_j) = 0$, temos

$R_{W_j}^{\phi}(u) = u = R_j(u)$. Por outro lado, se $w \in U^{\perp\phi}$, temos

$$R_{W_j}^{\phi}(w) = w - 2 \frac{\phi(w, w_j)}{\phi(w_j, w_j)} w_j = w - 2 \frac{\psi(w, w_j)}{\psi(w_j, w_j)} w_j = S_j(w) = R_j(w).$$

Como $R_{W_j}^{\phi}$ coincide com R_j em U e $U^{\perp\phi}$, segue que $R_{W_j}^{\phi} = R_j$. □

Exemplo 9.5.8 (Relembrar Seção 4.5)

$V = \mathbb{R}^3$, ϕ é o p.i. usual e $T = \text{Rot}_{\theta}^w$ com $\|w\| = 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Escolha $w_1, w_2 \in V$ t.q. $\beta = w_1, w_2, w$ seja uma base ortonormal e $w = w_1 \times w_2$. Assim

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a = \cos(\theta) \quad \text{e} \quad b = \sin(\theta).$$

Se $b = 0$ e $a = 1$, temos $T = \text{Id}_V = (R_W^{\phi})^2$ para qualquer de reta W .

Caso contrário, escolha $u = w_1$ e $v = T(u)$ como na demonstração do teorema. Segue que

$$w_- = v - u = (a - 1)w_1 + bw_2 \neq 0$$

e, portanto, w_- não é isotrópico. Assim, tomando $R = R_{W_-}^\phi$ com $W_- = [w_-]$ e $W = [u]^\perp = [w_2, w]$, segue da demonstração do teorema que $R(T(u)) = u$ e W é $(R \circ T)$ -invariante. Seja S_1 o operador linear induzido por $R \circ T$ em W e $\psi = \phi|_W$. Como T e R fixam w , temos $S_1(w) = w$. Como $[w]$ é não degenerado com respeito a ψ , $[w]^\perp_\psi = [w_2]$ também é S_1 -invariante. Logo, $S_1(w_2) = \lambda w_2$ para algum escalar λ . Segue que $\det(S_1) = \lambda$ e, portanto, $\lambda = \pm 1$.

Seja $R_1 \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ t.q. $R_1|_W = S_1$ e $R_1(u) = u$ (como na dem. do teor.). Segue do argumento acima que $R_1(u) = R(T(u))$, $R(T(w)) = w$ e $R(T(w_2)) = R_1(w_2)$. Isto é, $R \circ T = R_1 \leftrightarrow T = R \circ R_1$. Como $\det(T) = 1$, $\det(R) = -1$ e $\det(R_1) = \lambda$, segue que $\lambda = -1$ e, portanto, $R_1 = R_{[w_2]}^\phi$. Note que esta conclusão segue dos seguintes fatos verificados acima:

$$R(T(w_1)) = w_1, \quad R(T(w)) = w \quad \text{e} \quad R(T(w_2)) = -w_2.$$

Assim, $\text{Rot}_\theta^w = R_{W_-}^\phi \circ R_{[w_2]}^\phi$.

Transvecções Simpléticas

Suponha que $\phi \in B_a(V)$ seja não degenerada. Dados $w \in V, a \in \mathbb{F}$, considere a função $T_{w,a} : V \rightarrow V$ dada por

$$T_{w,a}(v) = v + a \phi(v, w) w \quad \text{para todo } v \in V.$$

Evidentemente, $T_{w,a}$ é linear. Estes operadores lineares são chamados de transvecções simpléticas e fazem o papel que as reflexões simples fazem no caso de formas bilineares simétricas. Verifiquemos eles de fato são simpléticos:

$$\begin{aligned} \phi(T_{w,a}(v_1), T_{w,a}(v_2)) &= \phi(v_1 + a \phi(v_1, w) w, v_2 + a \phi(v_2, w) w) \\ &= \phi(v_1, v_2) + a \phi(v_2, w) \phi(v_1, w) \\ &\quad + a \phi(v_1, w) \phi(w, v_2) = \phi(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Teorema 9.5.11

Suponha que $0 \neq \dim(V) < \infty$ e sejam $\phi \in B_a(V)$ não degenerada e $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é simplética se, e somente se, T for uma composição de transvecções simpléticas.

Dem.: Exercício de leitura.