Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 2

06/03/25

Objetivo: generalizar a derivada para funções de várias variáveis

Notação: norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \rightsquigarrow \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

1) Derivadas direcionais

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto

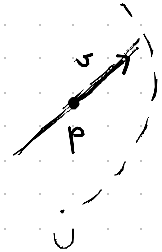
Umgebung

↳ para todo $p \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|x - p\| < \varepsilon \Rightarrow x \in U$

$f : U \to \mathbb{R}$ função, $v \in \mathbb{R}^n$ vetor

Def Dado $p \in U$, a derivada direcional de f em p na direção de v é o limite (quando existir)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}$$



Isto é, $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é a derivada de $x \mapsto f(p + xv)$ em $x = 0$.

↳ função de uma variável!

⚠ Depende também de $\|v\|$ e não apenas da direção!

Forma equivalente da definição:

$$f(p + hv) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p)\, h + o(h), \quad h \to 0$$

Ordnung

Notação de Bachmann-Landau

$f(x) = o(g(x))$ quando $x \to a$

se $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

"perto de $h = 0$, $h \mapsto f(p + hv)$ é aproximada por $h \mapsto f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p) h$"

Importante: se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(p+hv) = f(p) + \alpha h + o(h), \quad h \to 0$$

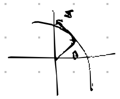
então necessariamente $\alpha = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

Ex $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = ?$ (v e p quaisquer)

$$f(p+hv) = \langle p+hv, p+hv \rangle$$

produto interno $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$



$$= \underbrace{\|p\|^2}_{f(p)} + 2\langle p, v\rangle h + \underbrace{h^2 \|v\|^2}_{o(h)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(p) = 2\langle p, v\rangle = 2(p_1 v_1 + \dots + p_n v_n)$$

Exercício Mostre que, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

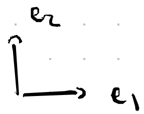
$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda v)}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, vale em geral

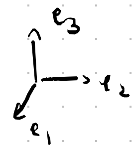
$$\frac{\partial f}{\partial (v+w)}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial w}(p) \ ?$$

Base canônica de $\mathbb{R}^n$: $e_1, \dots, e_n$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



Def i-ésima derivada parcial de f em p:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(p)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p)}{h}$$

pensando em f como função nas "variáveis $x_1, \dots, x_n$"

Obs • Outras notações:

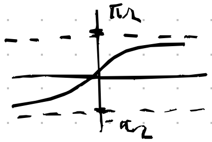
$f_{x_i}(p)$, $\partial_i f(p)$, $\partial_{x_i} f(p)$, $D_i f(p)$, $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f$, ...

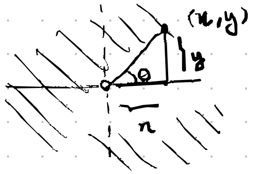
EDP

• Em $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), variáveis x, y (resp. x, y, z)

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

Ex $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$





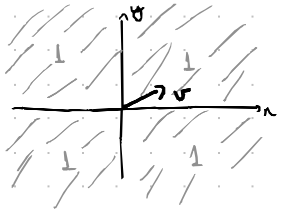
$$\Theta : U \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \arctan(y/x)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

A existência de todas as derivadas parciais <u>não</u> implica na existência de derivadas direcionais em todas as direções.

Ex $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} x+y, & x=0 \text{ ou } y=0 \\ 1, & \text{se não} \end{cases}$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 1$$

Mas, se $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ não é proporcional a e_1 ou e_2:

$$\frac{f(hv) - f(0)}{h} = \frac{1}{h}$$ <u>não</u> tem limite quando $h \to 0$!

Nota: f acima não é contínua em 0.
(mas é "diferenciável" nas direções horizontal e vertical)

Mesmo a existência de $\frac{\partial f}{\partial v}$ em <u>todas</u> as direções v <u>não</u> implica continuidade!

Ex $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Como $f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4} \equiv \frac{1}{2}$, f

não é contínua em $(x,y) = 0$. Mas,
se $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(hv) - f(0)}{h} = \frac{h^{\cancel{3}\,1} v_1 v_2^2}{\cancel{h^2}(v_1^2 + h^2 v_2^2)} = h \, \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^2}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0$. //

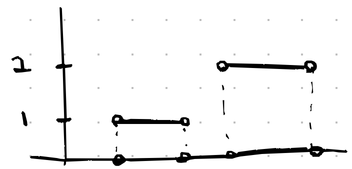
Exercício Mostre que a existência de derivadas parciais limitadas de $f: U \to \mathbb{R}$ (aberto) em todo ponto de U implica que f é contínua em U.

—

Em uma variável: $f: I \to \mathbb{R}$ (intervalo aberto) tal que $f'(x) \equiv 0$ em I $\Rightarrow$ f constante.

Análogo em várias variáveis?

Obs É importante que I seja um intervalo (conexo):



derivada $\equiv 0$
mas não constante!

Def $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se não existem abertos disjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tais que $X \cap U \neq \emptyset$, $X \cap V \neq \emptyset$ e $X \subset U \cup V$.

conexo desconexo

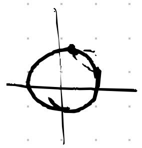
Lema Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo e $p, q \in U$, então existe um caminho poligonal em U com vértices

$$p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$$

tal que, para todo $i = 1, \dots, k$, $p_{i+1} - p_i$ é colinear a algum e_j.

Dem.: Exercício!

<u>Obs</u> Hipótese "aberto" é importante:

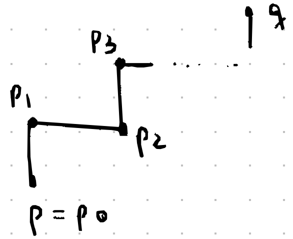


$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo, mas não vale a conclusão do lema!

Prop. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo e $f: U \to \mathbb{R}$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ em U para todo $i = 1, \dots, n$, então f é constante.

Dem.: Fixe $p \in U$. Queremos mostrar: $f(q) = f(p)$ para todo $q \in U$. Considere

um caminho poligonal de p a q como no lema. Por indução, basta mostrar que $f(p_{i+1}) = f(p_i)$ para todo $i = 0, \dots, k-1$.



Seja $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p_{i+1} = p_i + \lambda e_j$.

def. em $[0,\lambda]$ ou $[\lambda,0]$

Aplicando o TVM a $\varphi(t) = f(p_i + t e_j)$, obtemos

$$f(p_{i+1}) - f(p_i) = \varphi(\lambda) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)\lambda$$

para algum θ entre 0 e λ.

Mas

$$\varphi'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_i + (\theta + h)e_j) - f(p_i + \theta e_j)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_i + \theta e_j) = 0.$$

Logo, $f(p_{i+1}) = f(p_i)$. $\square$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 3 11/03/25

Aula passada: derivadas direcionais e parciais

$\begin{cases} f: U \to \mathbb{R} \\ p \in U \end{cases} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial v}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$

2) Funções de classe C^k

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: U \to \mathbb{R}$

Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ existe em todo $p \in U$, obtemos uma função

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$$

e podemos considerar a "derivada de segunda ordem":

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(p) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

Em geral, uma "derivada de ordem m" é:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}\right)\cdots\right)\right)$$

⚠ Em geral, a ordem importa!

Convenção: "derivada de ordem 0" é a própria função.

<u>Def</u> Dado $k \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, dizemos que $f: U \to \mathbb{R}$ é <u>de classe C^k</u> se para todo $m \leq k$, todas as derivadas parciais de ordem m de f existem e são contínuas em U.

Dizemos que f é <u>de classe C^∞</u>, ou <u>suave</u>, se f é de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

<u>Obs</u> • C^0: função contínua

• C^1: função <u>continuamente</u> <u>diferenciável</u>

Notação:

$$C^k(U) = \{ f : U \to \mathbb{R} : f \text{ de classe } C^k \}$$

($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto)

Ex Funções polinomiais são de classe C^∞

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sum_{|\alpha| \le d} c_\alpha x^\alpha$$

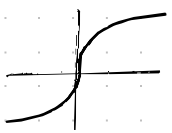
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ "multi-índice"

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Ex $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞

$\underline{\underline{n=2}}$ $\quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

Ex $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ é de classe C^0 mas não de classe C^1



Não diferenciável em $x=0$!

Exercício • Mostre que $C^k(U)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra comutativa (soma e produto usual de funções) e que se $f \in C^k(U)$ não se anula em nenhum ponto de U, então $\frac{1}{f} \in C^k(U)$.

• Mostre que temos inclusões estritas

$$C^0(U) \supsetneq C^1(U) \supsetneq C^2(U) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(U)$$

Ex (Exercício)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

• f é C^∞ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

• $$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ...

contínuas em 0

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = -\frac{h^5}{h^4} = -h \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = -1$$

- $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \cdots = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$!

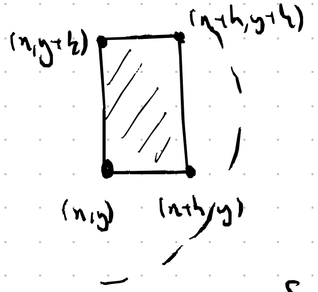
<u>Teorema</u> (Schwarz)

Se $f \in C^2(U)$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$$

para todos $i,j = 1,\dots,n$.

Dem. $(n=2)$: Tome $p=(x,y)\in U$ e $h,k\in\mathbb{R}$ tais que o retângulo de



vértices (x,y), $(x+h,y)$, $(x,y+k)$, $(x+h,y+k)$ esteja contido em U.

Seja

$$S = f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)$$

Se $\varphi(t) = f(t,y+k) - f(t,y)$, então

$$S = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

Pelo TVM (x,y,h,k fixos!)

$$S = \varphi'(x+\theta h)\,h, \quad 0<\theta<1$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y)\right) h$$

TVM de novo:

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x+\theta h, y+\theta' k)\,kh, \quad 0<\theta,\theta'<1$$

Repetindo o mesmo argumento com a função $\varphi(t) = f(x+h,t) - f(x,t)$, obtemos

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x+\rho h, y+\rho' k)\,hk, \quad 0<\rho,\rho'<1$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x+\theta h, y+\theta' k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x+\rho h, y+\rho' k)$$

Como as derivadas de ordem 2 de f são contínuas, concluímos a demonstração fazendo $h, k \to 0$. □

Segue por indução (exercício!) que, se $f \in C^k(U)$ com $k \geq 2$, então a ordem em que são tomadas as derivadas de ordem $\leq k$ não importa!

<u>Notação</u>: se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

(α_i derivadas parciais com relação a x_i)

---

3) Diferencial de uma função

Em uma variável:

f diferenciável em p $\iff$ existe uma <u>reta tangente</u> ao gráfico de f em p

<u>reta</u> <u>tangente</u> = gráfico da função afim que melhor aproxima f em p

$f'(p)$ é unicamente determinada por

$$f(p+h) = \underbrace{f(p) + f'(p)h}_{\text{função afim em } h} + o(h)$$

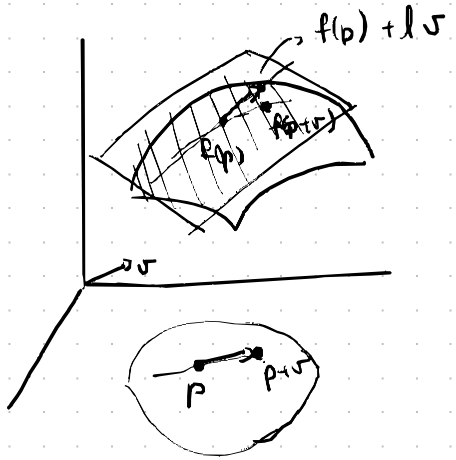
<u>Lembrete</u>: um <u>funcional</u> <u>linear</u> em $\mathbb{R}^n$ é uma função da forma

$$l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad lv = l_1 v_1 + \dots + l_n v_n$$

$(l_i = le_i \in \mathbb{R})$

<u>Def</u> Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}$ (aberto em $\mathbb{R}^n$) é <u>diferenciável</u> em $p \in U$ se existe um funcional linear $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(p+v) = f(p) + lv + o(\underbrace{\|v\|}_{\text{norma}}), \quad v \to 0$$



"v está variando, se aproximando da origem"

Lema Se f é diferenciável em p, então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$lv = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

Em particular, $l_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Dem.: Fixe v e considere hv, com $h \to 0$ na definição de diferenciabilidade:

$$f(p+hv) = f(p) + l(hv) + o(h\|v\|)$$

$$= f(p) + (lv) \cdot h + o(h).$$ $\square$

↳ definição da derivada direcional.

Def Se f é diferenciável em p, a diferencial de f em p é o funcional linear ↳ derivada!

$$df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i$$

Com esta notação:

$$f(p+v) = f(p) + df(p)\,v + o(\|v\|), \quad v \to 0.$$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 4 13/03/25

Aula passada:

- funções de classe C^k
- $f: U \to \mathbb{R}$ diferenciável em p:

$$f(p+v) = f(p) + df(p)v + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

$$df(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i$$

↳ vale quando f é diferenciável!

funcional linear!

3) Diferencial de uma função (cont.)

Ex $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

$$f(p+v) = \langle p+v, p+v \rangle$$
$$= \|p\|^2 + 2\langle p, v\rangle + \underbrace{\|v\|^2}_{o(\|v\|)}, \quad v \to 0$$

$v \mapsto 2\langle p, v\rangle$ funcional linear!

$$\left(\begin{aligned} df(p)v &= 2\langle p, v\rangle = 2p_1v_1 + \cdots + 2p_nv_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)v_n \end{aligned} \right)$$

— Diferencial de um funcional linear —

Prop. Se $f: U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p, então f é contínua em p.

Dem.:

$$f(p+v) = f(p) + \underbrace{df(p)v}_{o(1)} + \underbrace{o(\|v\|)}_{o(1)}, \quad v \to 0$$
$$= f(p) + o(1), \quad v \to 0. \quad \square$$

Ex $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

f é contínua em 0 pois $f(0)=0$ e

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\|(x,y)\| \cdot \cancel{\|(x,y)\|^2}}{\cancel{\|(x,y)\|^2}} = \|(x,y)\|$$

f é diferenciável em 0?

$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Neste caso,

f é diferenciável em 0 $\iff f(v) = o(\|v\|)$ $v \to 0$

Mas, $v = (h,h) \Rightarrow f(v) = \frac{h^3}{2h^2} = \frac{h}{2} \neq o(|h|)$

Obs Dado $v = (v_1, v_2) \neq 0$

$$f(hv) = \frac{hv_1 (hv_2)^2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = h \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0)$ não é linear!

$\Rightarrow f$ não é dif. //

Exercício Estude a diferenciabilidade de

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Existência de derivadas direcionais não garante diferenciabilidade, mas:

Teorema Se $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então f é diferenciável em (todo ponto de) U.

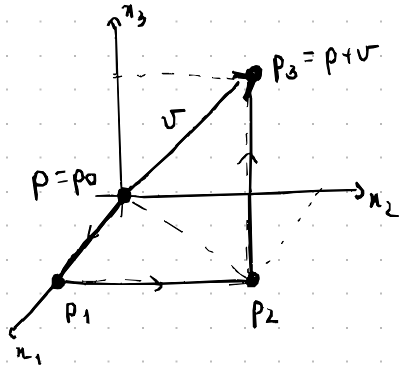
Dem.: Seja $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno. Queremos:

$$f(p+v) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i + o(\|v\|)$$
$(v \to 0)$

Considere os pontos

$p_0 = p$, $p_1 = p + v_1 e_1$, $p_2 = p + v_1 e_1 + v_2 e_2, \dots$

$p_n = p + v$



de forma que

$$f(p+v) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) - f(p_{i-1})$$

Aplicando TVM em $\varphi_i(t) = f(p_{i-1} + t e_i)$,

$$f(p_i) - f(p_{i-1}) = \varphi_i(v_i) - \varphi_i(0)$$
$$= \varphi_i'(\theta_i) v_i$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i) v_i$$

para algum θ_i entre 0 e v_i.

Logo,

$$f(p+v) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i) v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) v_i}_{(A)}$$

O termo (A) é $o(\|v\|)$ quando $v \to 0$ pois:

- $\frac{v_i}{\|v\|}$ é limitado
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \longrightarrow 0$

(continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$!)

$\square$

$$\boxed{\text{classe } C^1} \Rightarrow \boxed{\text{diferenciável}} \begin{cases} \Rightarrow \boxed{\text{contínua}} \\ \Rightarrow \boxed{\text{todas as derivadas direcionais existem}} \end{cases}$$

Ex $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 (Exercício 1.14).

Ex Toda função polinomial é diferenciável (pois é de classe C^∞)

Ex Seja $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$

(projeção na i-ésima coordenada)

x_i é diferenciável (pois C^∞) e

$$dx_i(p)v = v_i \qquad (\underbrace{p_i + v_i}_{x_i(p+v)} = \underbrace{p_i}_{x_i(p)} + v_i + \underbrace{0}_{o(\|v\|)})$$

Em particular,

$$dx_i(p)\, e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

Isto é:

$dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ é a base de $(\mathbb{R}^n)^*$

dual a $e_1, \dots, e_n$.

Segue do exemplo que, se f é diferenciável em p, então

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\, dx_1(p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\, dx_n(p)$$

se f é diferenciável em (todo ponto de) U, escrevemos simplesmente

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

(identidade de aplicações $U \to (\mathbb{R}^n)^*$)

Intuitivamente, se $y = f(x)$,

- dx_i = incremento infinitesimal na "variável independente" x_i

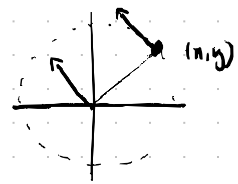
- $dy = df$ = incremento infinitesimal na "variável dependente" y

Ex $\theta(x,y) = \arctan(y/x)$ $(U = \{x \neq 0\})$

$$d\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

("elemento de ângulo")

$$\langle \underbrace{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)}_{\text{vetor unitário ortogonal a }(x,y)}, \overbrace{(dx, dy)}^{\text{variação infinitesimal em }(x,y)} \rangle$$



Exercício Mostre que, se $f, g : U \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $f+g$, $f \cdot g$ e f/g (se g nunca se anula) e valem

$$d(f+g) = df + dg, \quad d(fg) = f\, dg + g\, df$$

$$d(f/g) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}$$

Def O gradiente de uma função diferenciável no ponto p é o vetor

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Relação entre gradiente e diferencial:

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df(p)v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

Seja $u \in \mathbb{R}^n$ unitário ($\|u\|=1$). Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(p)\right| \leq \|\nabla f(p)\|$$

e vale a igualdade $\Leftrightarrow$ u é colinear a $\nabla f(p)$ (supondo $\nabla f(p) \neq 0$!):

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad \text{maximiza} \quad u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(p)$$

" $\nabla f(p)$ aponta na direção de maior crescimento de f em p e a norma $\|\nabla f(p)\|$ é a taxa de

crescimento nesta direção."

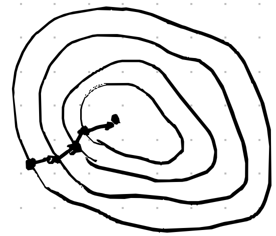
Obs $-\nabla f(p) \rightsquigarrow$ maior decrescimento

Método do gradiente ("gradient descent")

Objetivo: minimizar uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- $x_{n+1} = x_n - \gamma_n \nabla f(x_n)$, $\gamma_n =$ "passo"

$$f(x_0) \geq f(x_1) \geq \dots$$



Exercício Mostre que, se $f: U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $p \in U$ é um extremo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

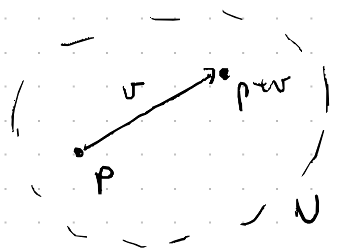
Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 5 18/03/25

4) Desigualdade do valor médio

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}$

Dado $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$, suponha que

$$[p, p+v] = \{p + tv : 0 \le t \le 1\} \subset U$$



Lema Seja $\varphi(t) = f(p+tv)$. Para todo $t \in (0,1)$ tal que f é diferenciável em $p+tv$, vale

$$\varphi'(t) = df(p+tv)v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+tv)$$

$$\left(= \langle \nabla f(p+tv), v \rangle \right)$$

Dem.: Quando $h \to 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(t+h) &= f(p+tv+hv) \\ &= f(p+tv) + df(p+tv)(hv) + o(\|hv\|) \\ &= \underbrace{f(p+tv)}_{\varphi(t)} + \underbrace{df(p+tv)v}_{\varphi'(t)}\, h + o(h). \end{aligned}$$ $\square$

Obs • Já sabíamos: considere $\psi(s) = \varphi(s+t) = f(\underbrace{p+tv}_{q} + sv) \rightsquigarrow \psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(q) = df(q)v$.

• Caso particular da "regra da cadeia" que veremos mais à frente.

Teo. (do valor médio)

Se f é contínua em $[p, p+v]$ (segmento fechado) e diferenciável em $(p, p+v)$ (segmento aberto), então existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(p+v) - f(p) = df(p+\theta v)v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+\theta v)$$

$$\left(= \langle \nabla f(p+\theta v), v \rangle \right)$$

Dem.: Seja $\varphi(t) = f(p+tv)$. Segue do lema e do TVM em uma variável. □

Se $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, a "norma de operador" é

$$\|l\| = \sup\{\, |lv| : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\|=1 \,\}$$
$$= \sup\left\{ \frac{|lv|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Note: $|lv| \le \|l\|\,\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$

Exercício Mostre que, se $w \in \mathbb{R}^n$ é tal que $lv = \langle w, v\rangle$, então
$\|w\| = \|l\|$ $\quad$ ($lv = l_1v_1 + \dots + l_nv_n \Rightarrow w = (l_1, \dots, l_n)$)
↳ norma euclidiana

Em particular, se f é diferenciável em p,

$$\underbrace{\|df(p)\|}_{\text{norma de operador}} = \overbrace{\|\nabla f(p)\|}^{\text{norma euclidiana}}.$$

Coro. (Desigualdade do valor médio)

Seja $K \subset U$ um subconjunto convexo onde f é diferenciável e $C \geq 0$ uma constante tal que $\|df(x)\| \le C$ para todo $x \in K$. Então, para todos $p, q \in K$, vale

$$|f(q) - f(p)| \le C\|q-p\|$$

Dem.: Dados $p, q \in K$, $[p,q] \subset K$. Pelo TVM,

$$f(\underbrace{q}_{p+v}) - f(p) = df(p + \theta\cdot(\underbrace{q-p}_{v}))\,(\underbrace{q-p}_{v})$$

para algum $\theta \in (0,1)$. Logo,

$$|f(q) - f(p)| \le \|df(p+\theta\cdot(q-p))\|\,\|q-p\|$$
$$\le C\|q-p\|. \quad □$$

Def Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita de Lipschitz se existe

$C \geq 0$ tal que $|f(q) - f(p)| \leq C \|q - p\|$ para todos $p, q \in X$.

A desigualdade do valor médio mostra que f é de Lipschitz em K.

<u>Exercício</u> Mostre que, se f é de classe C^1 e K é compacto (além de convexo), a hipótese do corolário é automaticamente satisfeita para alguma constante $C \geq 0$.

5) Fórmulas de Taylor

Derivada: aproximação em 1ª ordem

Taylor: aproximação em ordens maiores

$$f(p+v) = P_k(v) + \underbrace{r_k(v)}_{\text{resto } o(\|v\|^k)}$$

↳ polinômio de grau k
$\sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha v^\alpha$ (depende de f e p)

<u>Ex</u> • f diferenciável

$$f(p+v) = f(p) + df(p)v + o(\|v\|)$$

$$= \underbrace{f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i}_{P_1(v)} + \underbrace{o(\|v\|)}_{r_1(v)}$$

• f duas vezes diferenciável

$$f(p+v) = \underbrace{f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) v_i v_j}_{P_2(v)} + \underbrace{o(\|v\|^2)}_{r_2(v)}$$

<u>Def</u> Dado $k \geq 2$, uma função $f: U \to \mathbb{R}$ é <u>k vezes diferenciável</u> em $p \in U$ se

f é diferenciável na vizinhança de p e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é $k-1$ vezes diferenciável em p, para todo $i = 1, \dots, n$.

Ex $f \in C^k(U) \Rightarrow f$ k vezes diferenciável em todo ponto de U.

Exercício Mostre que o teorema de Schwarz vale mais geralmente para funções 2 vezes diferenciáveis. (Ver Elon.)

Def A k-ésima diferencial em p de uma função f k vezes diferenciável em p é a função:

$$d^k f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto d^k f(p) v^{\otimes k}$$

$$\underbrace{d^k f(p) v^{\otimes k}}_{\text{notação}} := \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p)\, v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

$d^k f(p)$ é uma função polinomial homogênea de grau k

Ex Em $\mathbb{R}^2$, denotando $v = (h, k)$,

$$d^2 f(p) v^{\otimes 2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) kh + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) k^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) k^2$$

forma quadrática em (h, k):

$$\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}}_{\text{matriz simétrica (Schwarz)}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Mais geralmente:

Def Se f é duas vezes diferenciável em p, a matriz Hessiana de f em p é:

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Note: $Hf(p)$ é a única matriz (simétrica) que representa a forma quadrática $d^2f(p)$:

Schwarz

$$d^2 f(p)\, v^{\otimes 2} = \langle Hf(p)v, v\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p)\, v_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i v_j$$

$$= \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha$$

$\alpha = (0,\dots,2,\dots,0)$ ou $\alpha = (0,\dots,1,\dots,1,\dots,0)$

Exercício Mostre que, se f é k vezes diferenciável em p, então

$$d^k f(p)\, v^{\otimes k} = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha$$

$\hookrightarrow \dfrac{k!}{\alpha!} = \dfrac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}$

"número de maneiras de separar k objetos em n caixas, com α_i objetos na i-ésima caixa"

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 6 20/03/25

Aula passada:

- funções k vezes diferenciáveis
- k-ésima diferencial

$$d^k f\, v^{\otimes k} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}(p)\, v_{i_1}\cdots v_{i_n}$$

Exercício

$$= \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha$$

5) Fórmulas de Taylor (cont.)

Def Dizemos que f se anula à ordem $k+1$ em p se

$$f(p)=0,\quad df(p)=0,\quad \dots,\quad d^k f(p)=0$$

funções

Equivalentemente:

$$\partial^\alpha f(p) = 0 \quad \text{para todo } |\alpha|\le k$$

pelo exercício seguinte:

Exercício Mostre que, se $f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha x^\alpha$ é uma função polinomial que se anula identicamente em uma vizinhança da origem, então $c_\alpha = 0$ para todo α.

Teorema Seja $k \geq 1$ e f uma função k vezes diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$. Se f se anula à ordem $k+1$ em 0, então

$$f(v) = o(\|v\|^k), \quad v \to 0.$$

Dem.: Indução em k.

$k=1$: imediato da definição de diferenciabilidade

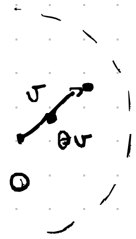
$k \geq 2$: Suponha que o resultado vale até $k-1$. Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é $k-1$ vezes diferenciável e se anula à ordem k em 0,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(v) = o(\|v\|^{k-1}), \quad v \to 0$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

Pelo TVM, para todo v suficientemente pequeno, existe um $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(v) = df(\theta v)\, v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)\, v_i$$



Dividindo por $\|v\|^k$:

$$\frac{f(v)}{\|v\|^k} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)}{\|v\|^{k-1}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{v_i}{\|v\|}}_{\text{limitado}} \xrightarrow[v \to 0]{} 0$$

$\square$

Coro. (Fórmula de Taylor infinitesimal)
Se f é k vezes diferenciável em p, então, quando $v \to 0$,

$$f(p+v) = f(p) + df(p)\,v + \cdots + \frac{1}{k!} d^k f(p)\, v^{\otimes k} + o(\|v\|^k)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{d^i f(p)\, v^{\otimes i}}{i!} + o(\|v\|^k)$$

Dem.: Basta notar que

$$r_k(v) := f(p+v) - f(p) - df(p)v - \cdots - \frac{1}{k!} d^k f(p) v^{\otimes k}$$

é k vezes diferenciável em 0 e se anula à ordem $k+1$ em 0 (verifique!). $\square$

Obs Pelo exercício da aula passada, podemos escrever

$$f(\underbrace{p+v}_{x}) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} v^\alpha + o(\|v\|^k).$$

ou

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha + o(\|x-p\|^k)$$ //

Ex Fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 5 de $f(x,y) = \frac{x}{1+xy}$ em $(x,y) = 0$?

$f(0) = 0$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1 \quad \ldots$

Mais inteligente:

$$\frac{x}{1+xy} = x \cdot \frac{1}{1-(-xy)}$$

$$= x\left(1 + (-xy) + (-xy)^2 + (-xy)^3 + \cdots\right), \quad |xy|<1$$

$$= \underbrace{x - x^2y + x^3y^2}_{\text{polinômio de grau} \leq 5} + x^4y^3 \underbrace{(1 + x^2y + \cdots)}_{\text{limitado}}$$

$$\frac{x^4y^3}{\|(x,y)\|^5} = \underbrace{\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}\right)^4}_{\text{limitado}} \cdot \underbrace{\left(\frac{y}{\|(x,y)\|}\right)}_{\text{limitado}} \cdot \underbrace{y^2}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = x - x^2y + x^3y^2 + o(\|(x,y)\|^5)}$$ //

Exercício Use a fórmula de Taylor infinitesimal para mostrar que vale a volta do teorema. Conclua a unicidade da fórmula de Taylor infinitesimal: se f é k vezes diferenciável em p e $P_i(v)$ são funções polinomiais homogêneas de grau i em v tais que

$$f(p+v) = P_0(v) + P_1(v) + \dots + P_k(v) + o(\|v\|^k),$$
$$v \to 0$$

então $P_i = \dfrac{d^i f(p)}{i!}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Em uma variável, se $\varphi \in C^{k+1}(I)$ onde I é um intervalo aberto contendo a, então para todo $x \in I$:

- Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

para algum c entre a e x

- Fórmula de Taylor com resto integral:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \int_a^x \frac{\varphi^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \, dt$$

Obs $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)\, dt$

IPP com $u = \varphi'$, $v = t - x$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \left[(t-x)\varphi'(t) \right]_a^x - \int_a^x \varphi''(t)(t-x)\, dt$$
$$= \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \int_a^x \varphi''(t)(x-t)\, dt$$

IPP com $u = \varphi''$, $v = -(x-t)^2/2$

... etc

Coro. (Fórmulas de Taylor com resto de Lagrange e resto integral)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k+1}. Para todo $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno,

(i) $$f(p+v) = \sum_{i=0}^{k} \frac{d^i f(p)}{i!} v^{\otimes i} + \frac{d^{k+1} f(p+\theta v)\, v^{\otimes k+1}}{(k+1)!}$$

para algum $\theta \in (0,1)$

(ii) $f(p+v) = \sum_{i=0}^{k} \frac{d^i f(p)\, v^{\otimes i}}{i!} +$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(p+tv)\, v^{\otimes k+1}\, dt$$

Dem.: Basta aplicar as fórmulas de Taylor correspondentes em uma variável à função $\varphi(t) = f(p+tv)$ e notar que

$$\varphi'(t) \overset{\text{aula passada}}{=} df(p+tv)\,v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv)\, v_i$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv) \right)' v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p+tv)\, v_j \right) v_i$$

$$= d^2 f(p+tv)\, v^{\otimes 2}$$

$\vdots$

$$\varphi^{(i)}(t) = d^i f(p+tv)\, v^{\otimes i}.$$

$\square$

6) Pontos críticos

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: U \to \mathbb{R}$ diferenciável

Def Dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de f se $df(p) = 0$ (ou $\nabla f(p) = 0$).

($\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$)

Ex $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$

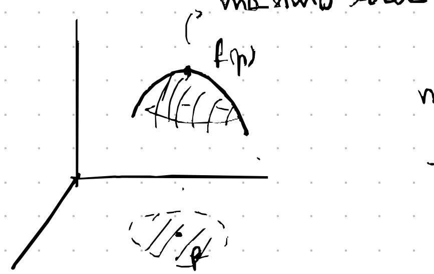
Pontos críticos de f?

$$df \doteq 2x\,dx + (12y^3 + 12y^2 - 24y)\,dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 12y\underbrace{(y^2 + y - 2)}_{(y-1)(y+2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{e} \\ y \in \{0, -2, 1\} \end{cases}$$

Pontos críticos: $\{(0,0), (0,-2), (0,1)\}$

Def f tem um máximo local (resp. mínimo local) em p se $f(x) \leq f(p)$ (resp. $f(x) \geq f(p)$) para todo x em uma vizinhança de p



máximo ou mínimo local = extremo local

Prop. Se f tem um extremo local em p, então p é um ponto crítico de f.

Dem.: Se p é um extremo local de f, então 0 é um extremo local de

$$\varphi_i(t) = f(p + te_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, $0 = \varphi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. $\square$

Como determinar se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local (ou nenhum dos dois)?

Obs Princípio geral: "o comportamento de uma função f na vizinhança de um ponto p é determinado pelo primeiro termo não nulo na expansão de Taylor de $f - f(p)$."

$df(p) = 0 \rightsquigarrow$ olhamos para $\underbrace{d^2 f(p)}_{\text{forma quadrática}}$

supondo f 2 vezes diferenciável

$$d^2 f(p)\, v^{\otimes 2} = \langle \underbrace{Hf(p)}_{\text{hessiana}} v, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i v_j$$

$$Hf(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right) \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ simétrica}$$

Ex Suponha que $df(p) = 0$ e

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ matriz diagonal

Fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 2:

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}(\lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2) + \underset{v\to 0}{o}(\|v\|^2),$$

Se todos $\lambda_i > 0$:

$$f(p+v) = f(p) + (\text{termo positivo})$$

$\Rightarrow$ mínimo local em p

Se todos $\lambda_i < 0$:

$$f(p+v) = f(p) + (\text{termo negativo})$$

$\Rightarrow$ máximo local em p

"resto vai para zero mais rápido que $\|v\|^2$, logo é negligenciável perto de $\sum \lambda_i v_i^2$ para v suficientemente pequeno" //

Def Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. Dizemos que A (ou que a forma quadrática $v \mapsto \langle Av, v\rangle$) é:

- definida positiva se $\langle Av, v\rangle > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- definida negativa se $\langle Av, v\rangle < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- indefinida caso contrário

Ex • $v \mapsto \|v\|^2$ $(A = I)$ é definida positiva

• Em $\mathbb{R}^4$,

$$(t,x,y,z) \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad \left(A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\right)$$

é indefinida. (Minkowsky)

Obs Teorema espectral: Toda matriz simétrica tem uma base ortonormal de autovetores. ($\Rightarrow$ diagonalizável)

Exercício Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ seus auto-valores.

Mostre que A é definida positiva (resp. negativa) se, e somente se, $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) para todo $i = 1, \dots, n$.

<u>Teorema</u> Seja $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $p \in U$ e suponha que p é um ponto crítico de f. Se $Hf(p)$ é definida positiva (resp. definida negativa), então p é um mínimo local (resp. máximo local) de f.

Dem.: Pela fórmula de Taylor infinitesimal:

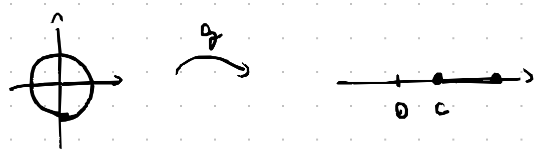
$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}\langle Hf(p)v, v\rangle + r(v)$$

com $r(v) = o(\|v\|^2)$ quando $v \to 0$.

Se $Hf(p)$ é definida positiva, então existe um $c > 0$ tal que $\langle Hf(p)u, u\rangle \geq c$ para todo $\|u\| = 1$:

- $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$ é compacto
- $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \langle Hf(p)u, u\rangle$ é

contínua, logo atinge um mínimo global $g(u_0) =: c > 0$ (pois $g(u) > 0$ para todo u).



Logo,

$$\frac{f(p+v) - f(p)}{\|v\|^2} = \frac{1}{2}\left\langle Hf(p)\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle + \frac{r(v)}{\|v\|}$$

$$\geq \frac{1}{2}c + \frac{r(v)}{\|v\|^2}$$

Como $r(v) = o(\|v\|^2)$, $\frac{|r(v)|}{\|v\|^2} \leq \frac{c}{4}$ para todo v suficientemente pequeno, donde

$$\frac{f(p+v) - f(p)}{\|v\|^2} \geq \frac{c}{2} - \frac{c}{4} \geq \frac{c}{4} > 0$$

$(\Leftrightarrow f(p+v) > f(p))$

Isto é, p é um mínimo local.

O outro caso é análogo. $\square$

Ex $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$

Pontos críticos: $(0,0)$, $(0,-2)$, $(0,1)$

Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(12y^3 + 12y^2 - 24y\right) = 36y^2 + 24y - 24$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{2} & 0 \\ 0 & \underset{<0}{-24} \end{pmatrix}, \quad Hf(0,1) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{2} & 0 \\ 0 & \underset{>0}{36} \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,-2) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{2} & 0 \\ 0 & \overset{>0}{72} \end{pmatrix}$$

$(0,-2)$ e $(0,1)$ são mínimos locais

$(0,0)$ é um ponto de sela!

Def Um ponto crítico p de f é dito ponto de sela se $Hf(p)$ tem pelo menos

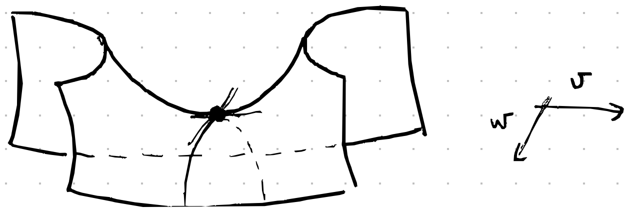
um autovalor positivo (>0) e um negativo (<0).

Note: se v (resp. w) é um autovetor com autovalor $\lambda > 0$ (resp. $\mu < 0$), então f tem um mínimo (resp. máximo) local na direção de v (resp. w):

$$\varphi(t) = f(p+tv) \Rightarrow \varphi''(0) = \langle Hf(p)v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle > 0$$

$$\left(\varphi''(t) = d^2 f(p+tv)\, v^{\otimes 2}\right)$$

$$\psi(t) = f(p+tw) \Rightarrow \psi''(0) = \cdots = \mu \langle w, w\rangle < 0$$



Def Um ponto crítico tal que $Hf(p)$ não é invertível ($\Leftrightarrow \det Hf(p) = 0 \Leftrightarrow$ algum dos autovalores se anula) é dito degenerado.

Exercício Seja $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$.
Mostre que a origem é um ponto crítico degenerado. Mostre que a restrição de f a qualquer reta pela origem tem mínimo local na origem, mas a origem não é um mínimo local de f!
[Dica: considere os conjuntos onde $f>0$ e $f<0$.]

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 8

27/03/25

Aula passada:

- pontos críticos ($df(p)=0$)
- extremo local $\Rightarrow$ ponto crítico
- "critério da segunda derivada"

7) Otimização

Como encontrar máximos e mínimos de funções?

__Fato topológico importante:__ se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto (fechado e limitado) e $f: K \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo *global* em K.

Às vezes é possível aplicá-lo mesmo em domínios não compactos!

Ex $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$

máx ou min em

$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\}$?

↳ fechado mas ilimitado

- $f(x,y) \geq 0$ em Q

  $f(0,y) = 0 \Rightarrow \{(0,y) : y \geq 0\}$ pontos de mínimo (global)

- Comportamento quando $\|(x,y)\| \to \infty$:

$$0 \leq f(x,y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4} \leq \frac{\|(x,y-1)\|}{\|(x,y-1)\|^2+4}$$

$$\leq \frac{1}{\|(x,y-1)\|} \longrightarrow 0$$

- Logo f tem um máximo em Q!
  (segue do fato topológico; justificativa depois)

Máximo ocorre no interior de Q ou no eixo x $(y=0)$

- Pontos críticos no interior de Q:

$$df = \frac{1}{(x^2+(y-1)^2+4)^2}\Big((-x^2+(y-1)^2+4)\,dx - 2x(y-1)\,dy\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (y-1)^2+4 \\ x(y-1) = 0 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (2,1)$$

$$f(2,1) = \frac{2}{4+4} = \frac{1}{4}$$

- Pontos críticos de $\varphi(t) = f(t,0) = \dfrac{t}{t^2+5}$ para $t > 0$:

$$d\varphi = \frac{-t^2+5}{(t^2+5)^2}\,dt = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 5 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{5}$$

$$f(\sqrt{5},0) = \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{4}$$

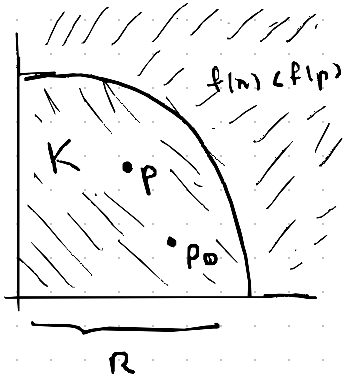
Máximo global: $f(2,1) = \frac{1}{4}$. //

Lema Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado ilimitado e $f : F \to \mathbb{R}$ contínua.

(i) Se $f(x) \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$ em F, então f tem mínimo global em F.

(ii) Se $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$ em F e existe $p \in F$ tal que $f(p) > 0$ (resp. $f(p) < 0$), então f tem máximo (resp. mínimo) global em F.

Dem.: (Apenas de (ii), no caso $f(p) > 0$)



Como $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$ em F, existe $R > 0$ tal que, se $\|x\| > R$, então $f(x) < f(p)$

O conjunto $K := \{x \in F : \|x\| \leq R\}$ é compacto (pois fechado e limitado), logo f tem um máximo, digamos $f(p_0)$ para algum $p_0 \in K$.
Este é o máximo global em F pois, se $x \in F \setminus K$, $f(x) < f(p) \leq f(p_0)$. $\square$

↳ note que $p \in K$ pela def. de R

Problemas de otimização com condições:
("problems with constraints")

Minimizar ou maximizar uma função num conjunto da forma

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \text{ ?}$$

Se g é de classe C^k $(k \geq 1)$ e $dg(p) \neq 0$ para todo $p \in H$, dizemos que H é a hipersuperfície de classe C^k definida pela equação $g = 0$.

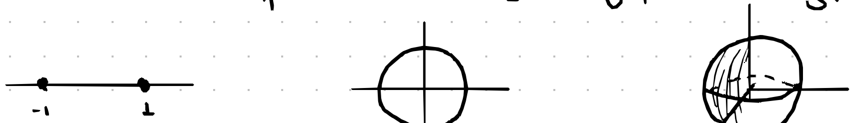
Ex A esfera unitária de dimensão $n-1$

$$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$$

é a hiperfuperfície de classe C^∞ definida pela equação

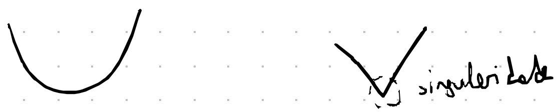
$$g(x) = \|x\|^2 - 1 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 .$$

(Exercício: verifique a condição "$g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$")



$n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad$ $n=3$

Obs Veremos que a condição "$g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$" garante que H é uma variedade de classe C^1 (sem singularidades)

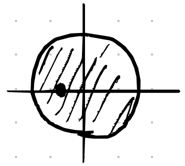


curva C^1 $\quad$ curva não C^1

e que o espaço tangente a H em p é

$$T_p H = \{ v \in \mathbb{R}^n : dg(p) = 0 \}.$$

Ex Máximo e mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$?



Pontos críticos no interior do disco:

$$df = 2x\,dx + (2y+1)\,dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(0, -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{f(0, -1/2) = -1/4}$$

Resta analizar o bordo $S^1 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = 1 \}$ ($g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$) $\leadsto$ problema de otimização com condições.

Teorema (Multiplicador de Lagrange)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in C^1(U)$ e $H = \{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0 \}$ uma hipersuperfície de classe C^1 contida em U. Se $p \in H$ é um extremo local de $f|_H : H \to \mathbb{R}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$df(p) = \underline{\lambda}\, dg(p)$$

↳ multiplicador de Lagrange

Obs Demonstração em uma aula futura!

Ideia: basta mostrar que p é um ponto crítico de $f|_H$, isto é, $df(p)|_{T_pH} \equiv 0$.

Ex (de volta ao exemplo anterior)

Queremos resolver $\begin{cases} df = \lambda\, dg \\ g = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\,dx + (2y+1)\,dy = \lambda\,(2x\,dx + 2y\,dy) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 2y+1 = \lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = \underset{\lambda=3}{1} \text{ ou } \underset{\lambda=1}{-1}$$

$f(0,1) = 2$, $f(0,-1) = 0$

Máximo global: $f(0,1) = 2$

Mínimo global: $f(0,-1/2) = -1/4$

(**Obs** Na verdade, o exemplo é trivial pois $f|_{S^1} = 1+y$)

Ex (Teorema espectral)

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica e $f(x) = \langle Ax, x\rangle$

Seja $u_1 \in S^{n-1}$ um ponto de máximo (global) de $f|_{S^{n-1}}$.

Pelo teorema, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$df(u_1) = \lambda_1\, dg(u_1)$$

onde $g(x) = \|x\|^2 - 1 = \langle x, x\rangle - 1$.

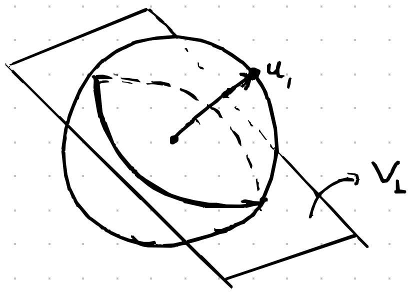
Para todo $v \in \mathbb{R}^n$:

$$df(u_1)v = 2\langle Au_1, v\rangle = \lambda_1\, dg(u_1)v = \lambda_1 2\langle u_1, v\rangle$$

$$\Leftrightarrow 2\langle Au_1 - \lambda_1 u_1, v\rangle = 0$$

Logo, $Au_1 = \lambda_1 u_1$. (u_1 é um autovetor com autovalor λ_1)

Seja $V_1 = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u_1\rangle = 0\}$ o complemento ortogonal de $\mathbb{R}u_1$.



$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}u_1 \oplus V_1$$

Note que A preserva V_1 pois:

$$\langle v, u_1\rangle = 0 \implies \langle Av, u_1\rangle = \langle v, Au_1\rangle$$
$$= \langle v, \lambda_1 u_1\rangle$$
$$= \lambda_1 \langle v, u_1\rangle = 0$$

Considere a forma quadrática

$$f|_{V_1} : V_1 \cong \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Ax, x\rangle$$

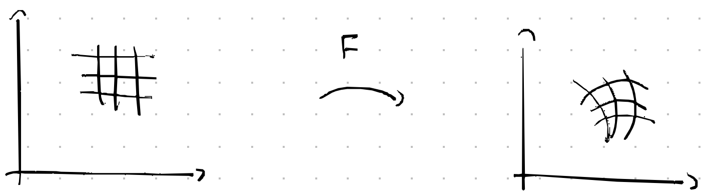
Maximizando $f|_{V_1}$ em $S^{n-1} \cap V_1 \cong S^{n-2}$, obtemos $u_2 \in V_1$ com $\|u_2\| = 1$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(u_2) = \lambda_2 u_2$.

Indução ... //

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 9 03/04/25

8) Aplicações diferenciáveis

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $F : U \to \mathbb{R}^m$ aplicação ($m \geq 1$)



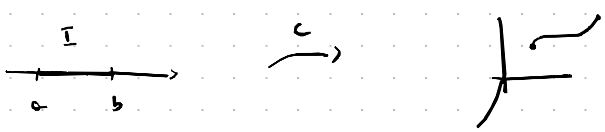
"funções a valores vetoriais"

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$$

$F_i : U \to \mathbb{R}$ função, i-ésima componente

Ex Um caminho em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação

$$c : I \to \mathbb{R}^m, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ intervalo}$$



Def Seja $p \in U$. A aplicação $F : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p se existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(p+v) = F(p) + Lv + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

"L é a trasf. linear que melhor aproxima $F(p+v) - F(p)$ quando $v \to 0$"

Note: O resto $r(v) = F(p+v) - F(p) - Lv$ toma valores em $\mathbb{R}^m$!

$$r(v) = o(\|v\|) \overset{def}{\iff} \frac{r(v)}{\|v\|} \to 0 \quad \text{(limite em } \mathbb{R}^m\text{)}$$

isto é, se $r(v) = (r_1(v), \dots, r_m(v))$,

$$r(v) = o(\|v\|) \iff r_i(v) = o(\|v\|) \quad \forall i$$

Lema Se $F = (F_1, \dots, F_m)$ é diferenciável em p e $L = (L_1, \dots, L_m)$ é como na definição, então F_i é diferenciável em p e $L_i = dF_i(p)$ para todo $i = 1, \dots, m$.

componentes de L

Dem.: $L_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um funcional linear (i-ésima componente de $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)
Tomando a i-ésima componente na def. de diferenciabilidade:

$$F_i(p+v) = F_i(p) + L_i v + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

$\square$

Exercício Mostre que vale a volta: se cada F_i é diferenciável em p, então F é diferenciável em p.

Segue do lema que L é única!

Def Se $F : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p, a derivada de F em p é a única transformação linear $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(p+v) = F(p) + DF(p)v + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

Obs Outros nomes e notações:
"aplicação tangente", "~~diferencial~~"
T_pF, F_*, $F'(p)$, $\cancel{dF(p)}$

Ex Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função, $Df(p) = df(p)$.

Ex Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim, digamos

$$F(x) = b + Lx \qquad (b \in \mathbb{R}^n,\ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear})$$

então
$$F(p+v) = b + L(p+v) = b + Lp + Lv = F(p) + Lv + \underbrace{0}_{o(\|v\|)}$$

Logo, $DF(p) = L$. //

Exercício Mostre que se $F : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p, então F é contínua em p.

Em geral: "os componentes da derivada são os diferenciais"

$$DF(p) = (dF_1(p), \dots, dF_m(p))$$

e podemos definir

- derivada direcional:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(p) = DF(p)v = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(p), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial v}(p)\right) \in \mathbb{R}^m$$

• derivadas parciais:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = DF(p)e_j = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(p), \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_j}(p)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\, e_i$$

<u>Def</u> A <u>matriz jacobiana</u> de $F : U \to \mathbb{R}^m$ em p representa a derivada $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$:

$$JF(p) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

<u>Obs</u> Notação em função das componentes:

$$JF(p) = \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

útil para "mudança de variáveis"

⚠ No caso $m = n$, alguns autores usam "$JF(p)$" para o <u>determinante jacobiano</u> $\det JF(p)$.

Lembre:

• linhas de JF: diferenciais de F_i

$$JF = \begin{pmatrix} — & dF_1 & — \\ & \vdots & \\ — & dF_m & — \end{pmatrix}$$

• colunas de JF: derivadas parciais de F

$$JF = \begin{pmatrix} | & & | \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{lll} \text{matriz linha : funcional linear} & & M_{1 \times n}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^* \\ \text{matriz coluna : vetor} & & M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \end{array}\right]$$

Ex $f: U \to \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$

$$Jf(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$$

$$= \nabla f(p)^t \qquad \left(\nabla f(p) \in \mathbb{R}^n \cong M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \right)$$

Ex $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto

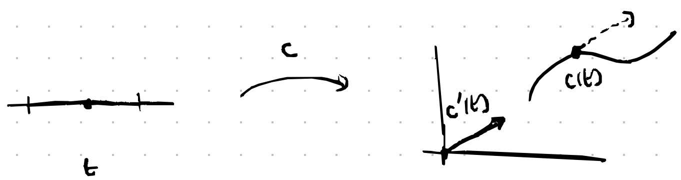
$c: I \to \mathbb{R}^n$ caminho diferenciável

$$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)), \quad c_i: I \to \mathbb{R}$$

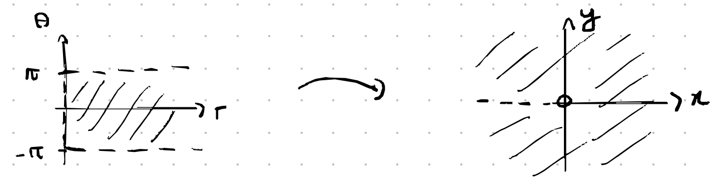
$$Jc(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} =: c'(t) \in \mathbb{R}^n \cong M_{n1}(\mathbb{R})$$

$$(= Dc(t)1)$$

"vetor tangente", "vetor velocidade"



Ex $U = \{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \ -\pi < \theta < \pi \}$



$$(x,y): U \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Def Uma aplicação $F: U \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^k se todas as suas componentes F_i são funções de classe C^k.

Notação: $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$

Lema Se $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, então F é diferenciável (em todo ponto de) U.

Dem.: Segue do resultado análogo para funções ($m=1$) e do exercício (diferenciável $\Leftrightarrow$ componentes diferenciáveis). $\square$

Derivadas de ordem superior:

<u>Notação</u>: $L(V;W)$ = espaço das transformações lineares $T: V \to W$

Note:

$$L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cong M_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

$$T \mapsto A=(a_{ij})_{i,j} \mapsto (a_{11},\dots,a_{1n},$$
$$\left(Te_j = \sum_i a_{ij}e_i\right) \qquad \dots,a_{m1},\dots,a_{mn})$$

Uma aplicação diferenciável $F: U \to \mathbb{R}^m$ induz uma aplicação

$$DF: U \to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{mn}$$
$$p \mapsto DF(p)$$

cujas componentes sob a identificação $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{mn}$ são $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

Logo:

- $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow F$ é diferenciável em U e DF é contínua.
- $F \in C^2(U;\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ e $DF \in C^1(U, L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$

Segunda derivada:

$$D^2F: U \to L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$$
$$p \mapsto D(DF)(p)$$

$$L(V_1; L(V_2;W)) \cong L(V_1 \otimes V_2; W)$$
(aplicações bilineares $V_1 \times V_2 \to W$)

Em geral:

a k-ésima derivada de F em p é uma aplicação multilinear

$$D^kF(p) : \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_{k \text{ cópias}} \to \mathbb{R}^m$$

$$v^{(1)} \otimes \cdots \otimes v^{(k)} \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial v^{(1)} \cdots \partial v^{(k)}}(p)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p)\, v^{(1)}_{i_1} \cdots v^{(k)}_{i_k}$$

Obs Se f é uma função:

$$d^k f(p)\, v^{\otimes k} = D^k f(p)\, v \otimes \cdots \otimes v. \quad //$$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 10

08/04/25

Aula passada:

- Aplicações diferenciáveis

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \rightsquigarrow DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

↳ "derivada"

- $DF(p) = (dF_1(p), \dots, dF_m(p))$

representada pela matriz jacobiana

$$JF(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

- Derivadas superiores $D^kF(p) \in L((\mathbb{R}^n)^{\otimes k}; \mathbb{R}^m)$

Ex: $D^2F(p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$(v, w) \mapsto \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i w_j$$

aplicação bilinear

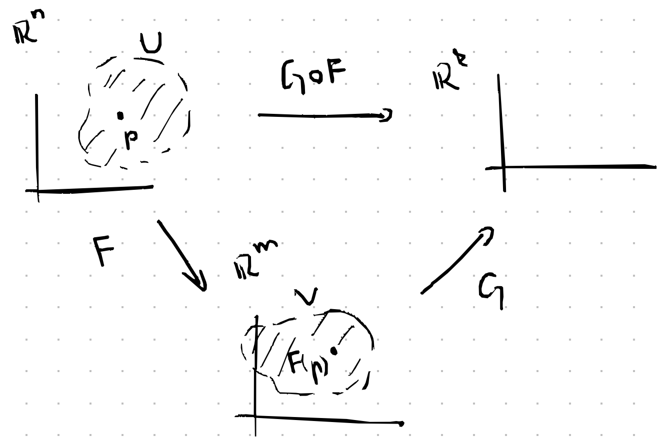
Note: Se F é de classe C^2 (funciona também para "duas vezes diferenciável"):

Teorema de Schwarz $\iff$ $D^2F(p)$ é simétrica

9) Regra da cadeia

↳ derivadas de composições

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, $F: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em $p \in U$ e $G: V \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação diferenciável em $F(p)$.



Teorema Nas hipóteses acima, $G \circ F$ é diferenciável em p e

$$D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p)$$

"a derivada da composição é a composição das derivadas"

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "G\circ F"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathbb{R}^k \\ & V \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "D(G\circ F)(p)"] \arrow[dr, "DF(p)"'] & & \mathbb{R}^k \\ & \mathbb{R}^m \arrow[ur, "DG(F(p))"'] & \end{tikzcd}$$

Dem.: Denotemos $q = F(p)$, $L = DF(p)$, $M = DG(q)$, $H = G \circ F$.

Queremos mostrar:

$$H(p+v) = H(p) + (M \circ L)v + o(\|v\|), \quad v \to 0$$

Considere os restos:

$$r_H(v) = H(p+v) - H(p) - (M \circ L)v$$ → "quero mostrar que é $o(\|v\|)$"

$$r_F(v) = F(p+v) - F(p) - Lv$$ → "sei que é $o(\|v\|)$"

$$r_G(w) = G(q+w) - G(q) - Mw$$ "sei que é $o(\|w\|)$"

Escreve $r_H(v)$ em funções de r_F e r_G:

$$r_H(v) = \underbrace{H}_{G\circ F}(p+v) - H(p) - (M\circ L)v$$

$$= G(F(p+v)) - G(\underbrace{F(p)}_{q})$$

$$- M(F(p+v) - \underbrace{F(p)}_{q} - r_F(v))$$

$$= G(F(p+v)) - G(q) - M(F(p+v) - q) + M\, r_F(v)$$

$w := F(p+v) - q$

$$= G(q+w) - G(q) - Mw + M\, r_F(v)$$

$$= r_G(w) + M\, r_F(v).$$

Logo,

$$\frac{r_H(v)}{\|v\|} = \frac{r_G(w)}{\|v\|} + M\left(\frac{r_F(v)}{\|v\|}\right)$$

$$= \frac{r_G(w)}{\|w\|}\cdot\frac{\|w\|}{\|v\|} + M\left(\frac{r_F(v)}{\|v\|}\right)$$

Mas,

$$\frac{\|w\|}{\|v\|} = \frac{\|F(p+v) - F(p)\|}{\|v\|} = \frac{\|Lv + r_F(v)\|}{\|v\|}$$

desigualdade triangular

$$\leq \frac{\|Lv\|}{\|v\|} + \frac{\|r_F(v)\|}{\|v\|} \leq \|L\| + \frac{\|r_F(v)\|}{\|v\|}$$

norma de operador!

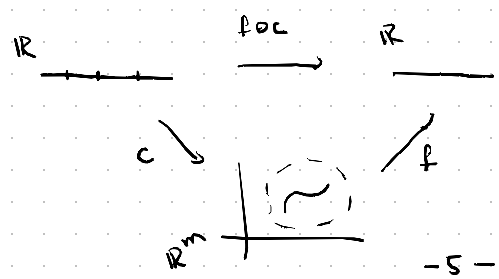
$$\sup\left\{\frac{\|Lv\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$$

donde:

$$0 \leq \frac{r_H(v)}{\|v\|} \leq \underbrace{\frac{r_G(w)}{\|w\|}}_{\to 0\ (F \text{ contínua})} \underbrace{\left(\|L\| + \underbrace{\frac{r_F(v)}{\|v\|}}_{\to 0}\right)}_{\text{limitado}} + \underbrace{M\left(\underbrace{\frac{r_F(v)}{\|v\|}}_{\to 0}\right)}_{\to 0\ (M \text{ contínua})}$$

$\square$

Ex $(n = k = 1)$

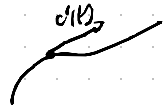


$c : I \to U \subset \mathbb{R}^m$

$f : U \to \mathbb{R}$

$f\circ c : I \to \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(f\circ c)'(t) &= D(f\circ c)(t)\,1 \\
&= Df(c(t))\circ \overbrace{Dc(t)\,1}^{c'(t)} \\
&= Df(c(t))\,c'(t) \\
&= df(c(t))\,c'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t))\,c_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c(t))\,c_n'(t)
\end{aligned}
$$



(Ex: $c(t) = p + tv$, $\varphi(t) = (f\circ c)(t)$

$$\rightsquigarrow \varphi'(t) = df(p+tv)\,v \;) \quad //$$

<u>Coro.</u> Nas condições do teorema:

$$J(G\circ F)(p) = JG(F(p))\cdot JF(p). \quad \square$$

↳ multiplicação de matrizes

Com coordenadas $x_1,\dots,x_n$ em $\mathbb{R}^n$ e $y_1,\dots,y_m$ em $\mathbb{R}^m$, obtemos:

$$\frac{\partial (G_i\circ F)}{\partial x_j}(p) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_l}(F(p))\,\frac{\partial F_l}{\partial x_j}(p)$$

<u>Coro.</u> $F \in C^\infty(U;\mathbb{R}^m)$, $G \in C^\infty(V;\mathbb{R}^k)$

$\Rightarrow G\circ F \in C^\infty(U;\mathbb{R}^k)$. $\square$

Por <u>abuso</u>, pensando em termos de "variáveis"

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1,\dots,x_n) \\ &\;\vdots \\ y_m &= F_m(x_1,\dots,x_n)\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} z_1 &= G_1(y_1,\dots,y_m) \\ &\;\vdots \\ z_k &= G_k(y_1,\dots,y_m)\end{aligned}\right.$$

temos:

$$\frac{\partial(z_1,\dots,z_k)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\partial(z_1,\dots,z_k)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\cdot\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$$

isto é,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_l}\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

<u>Ex</u> (Equação da onda em dimensão 1)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad c\in\mathbb{R} \text{ (fixo)}$$

$(f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad f = f(t,x))$

Solução geral?

Considere a mudança de variáveis: (D'Alembert)

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ t = \frac{u-v}{2c} \end{cases}$$

e $g(u,v) = f(t,x) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$ ⇝ classe C^2

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$= \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{1}{2c}\left(\cancel{-\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\cancel{-\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\right)\right.$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(u), \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$

Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ uma primitiva de h

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{d\varphi}{du}(u) \implies g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

com $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Logo: $f(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$ //

Exercício Verifique que, se $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ ⇝ quaisquer, então $\varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$ é uma solução da eq. da onda.

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 11 10/04/25

Aula passada:

Regra da cadeia:

- $D(G\circ F)(p) = DG(F(p))\circ DF(p)$
- $y_\ell = F_\ell(x)$, $z_i = G_i(y)$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_\ell}\,\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}$$

10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa

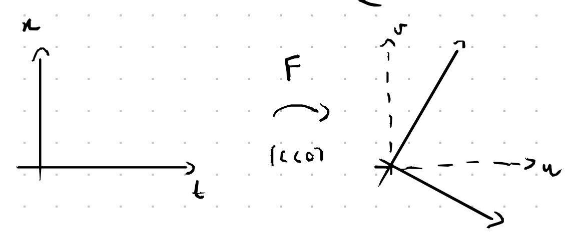
difeomorfismo → maneira de "identificar" conjuntos (de forma diferenciável)

difeomorfismo → mudança de sistema de coordenadas

Def Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Dizemos que $F: U \to V$ é um <u>difeomorfismo</u> de classe C^k $(k\geq 1)$ se $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$ e F admite uma inversa $F^{-1}: V \to U$ com $F^{-1} \in C^k(V;\mathbb{R}^n)$.

Ex $F(t,x) = (x-ct,\, x+ct)$ $\quad U = V = \mathbb{R}^2$

$F^{-1}(u,v) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$

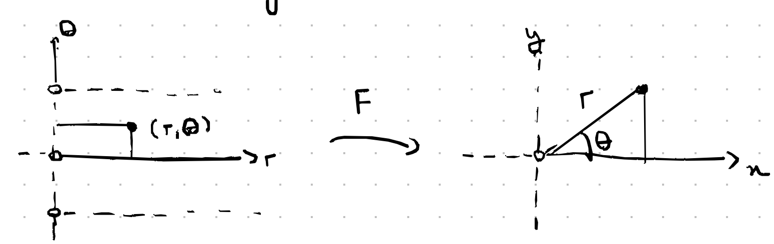


difeomorfismo de classe C^∞

$$\begin{pmatrix} -c & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

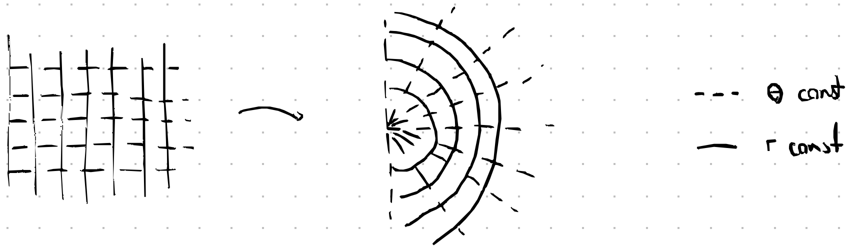
Ex $U = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$

$V = \{(x,y) : x>0\}$



$F(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$F^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{arctg}(y/x)\right)$$



Note: F identifica os segmentos verticais com semi-círculos: | e ⊃ são difeomorfos.

Pergunta: existe um difeomorfismo que identifica um segmento de reta com o círculo inteiro S^1?

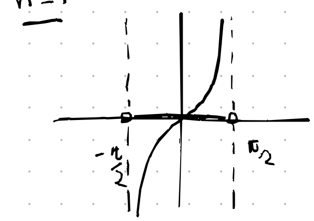
↓ aberto ou fechado

Obs Todo difeomorfismo é um homeomorfismo (aplicação contínua com inversa contínua). Em particular, difeomorfismos preservam propriedades topológicas (aberto, fechado, compacto, conexo, ...)

(Resposta: não ...)

Ex Difeomorfismo entre uma bola e o espaço euclidiano?

n=1

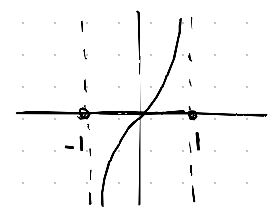


$f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$t \mapsto tg(t)$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

$s \mapsto \operatorname{arctg}(s)$



$g : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

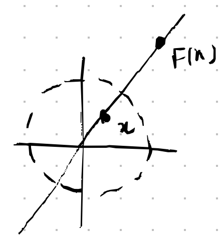
$g^{-1} : \mathbb{R} \to (-1,1)$

$s \mapsto \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}$

n>1

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1 \}$$

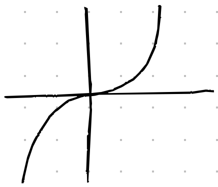
$$F : B \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \qquad C^\infty$$



$$F^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+\|y\|^2}} \qquad C^\infty$$

Para que $F : U \to V$ seja um difeomorfismo de classe C^k <u>não</u> basta que F seja bijetiva e de classe C^k.

<u>Ex</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$



homeo!

f é uma bijeção C^∞, mas $f^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ não é diferenciável em $t = 0$!

<u>Coro</u>. (da regra da cadeia)

Se $F : U \to V$ é um difeomorfismo, então para todo $p \in U$, $DF(p) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é <u>invertível</u> e, se $q = F(p)$,

$$DF^{-1}(q) = DF(p)^{-1}$$

"A derivada da inversa é a inversa da derivada"

Dem.: Pela regra da cadeia:

$$F \circ F^{-1} = id_V \Rightarrow DF(p) \circ DF^{-1}(q) = id_{\mathbb{R}^m}$$

$$F^{-1} \circ F = id_U \Rightarrow DF^{-1}(q) \circ DF(p) = id_{\mathbb{R}^n}. \quad \square$$

<u>Importante</u>: espaços vetoriais isomorfos têm mesma dimensão. Se existe um difeomorfismo $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$, então, necessariamente $\underline{\underline{n = m}}$.

"difeomorfismo preserva dimensão"

(não é óbvio para homeomorfismo. "Teorema da invariância do domínio"...)

Em termos da jacobiana: se $F : U \to V$ é um difeomorfismo e $p \in U$, então $JF(p) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é invertível ($\Leftrightarrow$ $\det JF(p) \neq 0$) e

$$JF^{-1}(q) = JF(p)^{-1}$$

↳ inversa de matriz

Ex $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$

$$JF(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det JF(r,\theta) = r > 0$$

$$JF(r,\theta)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = JF^{-1}(x,y)$$

$$\left(\det JF^{-1}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r} \right)$$

Pergunta: vale a volta do corolário?
(na vizinhança de p)

Teorema (da função inversa)

Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$ $p \in U$ tal que $DF(p)$ é invertível ($\det JF(p) \neq 0$). Então, existe uma vizinhança V de p tal que $F(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e $F : V \to F(V)$ é um difeomorfismo de classe C^k.

"se a aproximação de primeira ordem em p invertível, então F é invertível na vizinhança de p"

Obs Denotando $y_i = F_i(x_1, \dots, x_n)$:

se $dy_1(p), \dots, dy_n(p)$ são l.i. (base de $(\mathbb{R}^n)^*$)

então, na vizinhança de p, podemos "resolver"

$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = F_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = G_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = G_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

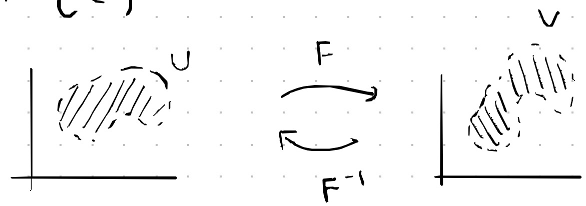
(onde $G = F^{-1}$)

$(y_1, \dots, y_n)$ é um novo "sistema de coordenadas" na viz. de p

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 12 22/04/25

Aula passada:

- Difeomorfismos: $F: U \to V$
  ($U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, F bijetiva C^k, F^{-1} C^k)



"mudança de sistema de coordenadas"

Note: composição de difeos. é difeo.!

- F difeo. $\Rightarrow$ $DF(p): \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ isomorfismo ($\iff$ $\det JF(p) \neq 0$) e

$$DF(p)^{-1} = DF^{-1}(F(p))$$

10) Difeomorfismos e o teorema de função inversa (cont.)

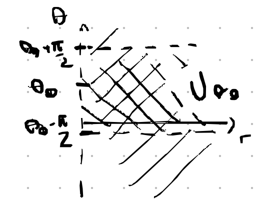
Def Uma aplicação $F: U \to \mathbb{R}^n$ é

dita um difeomorfismo local em $p \in U$ se existe uma vizinhança V de p tal que $F(V)$ é aberto e $F: V \to F(V)$ é um difeomorfismo.

Dizemos que F é um difeomorfismo local (em U) se F é um difeomorfismo local em todo ponto $p \in U$.

Ex $F: U \to \mathbb{R}^2$, $U = \{(r,\theta) : r > 0\}$

$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

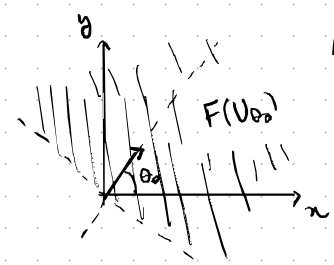


é um difeomorfismo local: Para todo $\theta_0 \in \mathbb{R}$, se

$U_{\theta_0} = \{(r,\theta) : r > 0,\ \theta_0 - \pi/2 < \theta < \theta_0 + \pi/2\}$, então

$F: U_{\theta_0} \to F(U_{\theta_0})$ é um difeo.

$\qquad\qquad\quad = \{(x,y) : \langle (x,y), (\cos\theta_0, \mathrm{sen}\,\theta_0)\rangle > 0\}$



Uma maneira de ver (reduzindo ao caso U_0):

$$\begin{tikzcd}
(r,\theta+\theta_0) & U \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^2 \\
(r,\theta) \arrow[u, mapsto] & U \arrow[u, "T_{\theta_0}"] \arrow[ur] & (r,\theta) \arrow[r, mapsto] & (r\cos(\theta+\theta_0),\ r\,\mathrm{sen}(\theta+\theta_0))
\end{tikzcd}$$

T_{θ_0} "translação de θ_0"

$$= R_{\theta_0}\underbrace{(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)}_{F(r,\theta)}$$

↳ rotação de ângulo θ_0

$$\begin{tikzcd}
(r,\theta+\theta_0) & U \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^2 & (\cos\theta_0 x - \mathrm{sen}\,\theta_0 y,\ \mathrm{sen}\,\theta_0 x + \cos\theta_0 y) \\
(r,\theta) \arrow[u, mapsto] & U \arrow[u, "T_{\theta_0}"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "R_{\theta_0}"'] & (x,y) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U_{\theta_0} \arrow[r, "F"] & F(U_{\theta_0}) \\
U_0 \arrow[u, "T_{\theta_0}", "\text{difeo.}"'] \arrow[r, "F"', "\text{difeo.}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & F(U_0) \arrow[u, "\text{difeo.}", "R_{\theta_0}"']
\end{tikzcd}$$

$F(U_0) = \{(x,y) : x > 0\}$

↳ $\langle (x,y), e_1\rangle > 0$

$$\left(F|_{U_{\theta_0}}^{-1}(x,y) = T_{\theta_0} \circ F|_{U_0}^{-1} \circ R_{\theta_0}^{-1}(x,y) \right) \quad //$$

$= \ldots$

Teorema (da função inversa)

Seja $F \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. F é um difeomorfismo local em $p \in U$ se, e somente se, $DF(p)$ é um isomorfismo.

Dem.: Basta mostrar a volta.

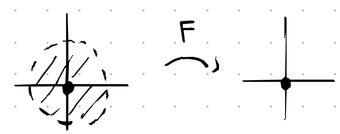
Podemos supor $p = 0$, $F(p) = 0$ e $DF(p) = id_{\mathbb{R}^n}$:

$$\begin{tikzcd}
x+p & U \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{difeo.}"'] & x \arrow[d, mapsto] \\
x \arrow[u, mapsto] & U-p \arrow[u, "\text{difeo.}"'] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^n & DF(p)^{-1}(x - F(p))
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto DF(p)^{-1}(F(x+p) - F(p))$$

Logo, na vizinhança de 0:

$$F(x) = x + R(x), \qquad R(x) = o(\|x\|)$$



1) F é injetiva na viz. de 0:

Hipótese: classe C^1

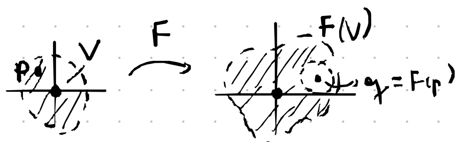
Como $DR(0) = 0$, segue do lema da P1 (Q4.(c)) para $\varepsilon = 1/2$ que existe uma vizinhança V de 0 tal que, para $x_1, x_2 \in V$,

$$\underbrace{\| R(x_1) - R(x_2) \|}_{\| F(x_1) - F(x_2) - (x_1 - x_2) \| \,\geq\, \|x_1 - x_2\| - \|F(x_1) - F(x_2)\|} < \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

$$\Rightarrow \quad \|F(x_1) - F(x_2)\| > \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

Em particular, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$.

2) $F(V)$ é aberto:



Seja $q = F(p) \in F(V)$ $(p \in V)$.

Queremos $\varepsilon > 0$ tal que $\|y - q\| < \varepsilon \Rightarrow y \in F(V)$, isto é,

$$y = F(x) = x + R(x)$$

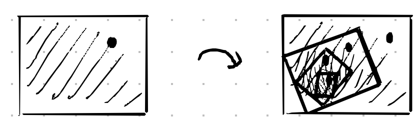
para algum $x \in V$.

"Ideia: transformar em um problema de ponto fixo". Dado $y \in \mathbb{R}^n$, seja

$$T_y : V \to \mathbb{R}^n, \quad T_y(x) = x - (F(x) - y) = y - R(x)$$

Note: $T_y(x) = x \iff y = F(x)$.

Teorema (Ponto fixo de Banach)
Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado e $T : X \to X$ é uma contração (Lipschitz com const. < 1) então T tem um único ponto fixo $x^* \in X$ $(T(x^*) = x^*)$.
[Dado qualquer $x_0 \in X$, $x^* = \lim_{n \to \infty} \underbrace{T^n(x_0)}_{T(T(\cdots(T(x_0))\cdots))}$]



Queremos $\varepsilon > 0$ tal que $\|y - q\| < \varepsilon \Rightarrow T_y$ é uma contração em algum fechado em V.

Seja $r > 0$ tal que $\bar{B} = \bar{B}(p, r) \subseteq V$.
↳ bola fechada centro p, raio r

Se $\|y-q\| < \frac{r}{2}^{\varepsilon}$ e $x \in \bar{B}$:

$$\|T_y(x) - p\| \leq \|T_y(x) - T_y(p)\| + \|T_y(p) - p\|$$

$$= \|R(x) - R(p)\| + \|\overset{q}{F(p)} - y\|$$

$$< \frac{1}{2}\|x-p\| + \frac{r}{2} < r$$

Logo, $T_y(\bar{B}) \subseteq \bar{B}$ e T_y é uma contração em $\bar{B}$ pois, se $x_1, x_2 \in \bar{B} \subseteq V$:

$$\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| = \|R(x_1) - R(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Pelo teorema do pto. fixo de Banach, existe $x \in \bar{B}$ tal que $T_y(x) = x \iff y = F(x)$.

3) A inversa $F^{-1}: F(V) \to V$ é C^k:

Note que V é construída pela condição $\|DR(p) - DR(0)\| = \|DR(p)\| < 1/2$ para todo $p \in V$ (ver lema da P1). Logo:

$$\|DF(p) - id_{\mathbb{R}^n}\| = \underbrace{\|DR(p)\|}_{F(x) = x + R(x)} < 1/2.$$

Em particular, $DF(p)$ é inversível.

$v \neq 0 \implies \|DF(p)v\| = \|(DF(p) - id)v + v\|$

$\geq \|v\| - \|DF(p) - id\|\|v\|$

$\geq \frac{1}{2}\|v\| \neq 0$

(Em geral: $\|L - id\| < 1 \implies L^{-1} = id + L + L^2 + \cdots$)

Se $q = F(p) \in F(V)$, queremos:

$$F^{-1}(q+w) = F^{-1}(q) + DF(p)^{-1}w + o(\|w\|), \quad w \to 0$$

Para w suf. pequeno, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $q + w = F(p+v)$. Logo,

$$\|\underbrace{F^{-1}(q+w)}_{p+v} - \underbrace{F^{-1}(q)}_{p} - DF(p)^{-1}w\| = \|v - DF(p)^{-1}w\|$$

$$= \|-DF(p)^{-1}(F(p+v) - F(p) - DF(p)v)\|$$

$$\leq \|DF(p)^{-1}\| \, \|F(p+v) - F(p) - DF(p)v\|$$

$$\implies \frac{\|F^{-1}(q+w) - F^{-1}(q) - DF(p)^{-1}w\|}{\|w\|} \leq$$

$$\|DF(p)^{-1}\| \cdot \frac{\|F(p+v) - F(p) - DF(p)v\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|w\|}$$

Agora,

$$\|v\| - \|w\| \leq \|w - v\| = \|F(p+v) - F(p) - v\|$$

$$= \|R(p+v) - R(p)\| \leq \frac{\|v\|}{2}$$

$\Rightarrow \|w\| \geq \frac{\|v\|}{2} \Rightarrow \frac{\|v\|}{\|w\|}$ é limitado e

$v \to 0$ quando $w \to 0$

Isto mostra que F^{-1} é diferenciável em q com derivada $DF(p)^{-1}$.

...

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 13

24/04/25

Aula passada:

- Difeomorfismos locais
- Teo. da função inversa:

Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 1$.

F é difeo. local de classe C^k em $p \in U$

$\Updownarrow$

$DF(p)$ é invertível

- Demonstração ($\Leftarrow$):

$F(x) = x + R(x)$, $R(x) = o(\|x\|)$

$(p = 0,\ F(p) = 0,\ DF(p) = id)$

1) ✓ F é injetiva em uma viz. V de 0.

2) ✓ $F(V)$ é aberto.

3) $F : V \to F(V)$ é um difeo. de classe C^k

Já mostramos: $F^{-1} : F(V) \to V$ é diferenciável

---

10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa (cont.)

Fim da demonstração do teo. da função inversa:

Para ver que F^{-1} é de classe C^k, denote

$$GL(\mathbb{R}^n) := \{ L \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) : L \text{ isomorfismo} \}$$

↳ aberto em $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$\left(GL(\mathbb{R}^n) \cong GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0 \} \right)$

Pela regra da cadeia:

Considere a fórmula

$$DF^{-1}(\underbrace{q}_{F(p)}) = DF(\underbrace{F^{-1}(q)}_{p})^{-1}, \qquad q \in F(V),$$

isto é,

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r, "DF^{-1}"] \arrow[d, "F^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GL(\mathbb{R}^n) & L^{-1} \\
V \arrow[r, "DF"'] & GL(\mathbb{R}^n) \arrow[u, "inv"] & L \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Note que $inv : GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ (exercício).

(Use $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, adj(A) = \frac{1}{\det(A)} \, C^t$)
↳ cofatores

Como DF é contínua (pois $F \in C^k$, $k \geq 1$) e F^{-1} também (pois é diferenciável), $DF^{-1} = inv \circ DF \circ F^{-1}$ é contínua.

Isto mostra que F^{-1} é de classe C^1.

Se $k \geq 2$, note que $DF^{-1} = \underbrace{inv}_{C^\infty} \circ \underbrace{DF}_{C^k} \circ \underbrace{F^{-1}}_{C^1}$

é de classe C^1. Logo, F^{-1} é de classe C^2.

Por indução, mostramos que F^{-1} é de classe C^k. $\square$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$

Corolário: Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 1$.

1) Se $\det JF(p) \neq 0$ para todo $p \in U$, então F é uma aplicação aberta ($F(V)$ é aberto para todo aberto $V \subseteq U$)

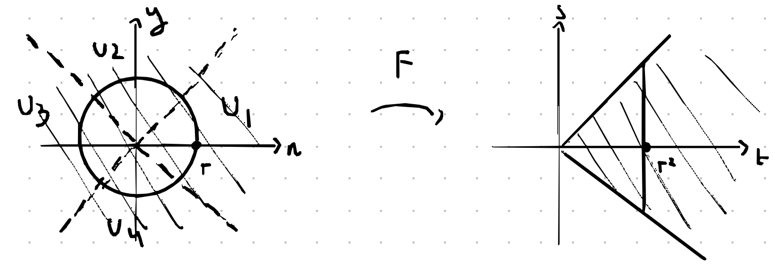
2) Se $\det JF(p) \neq 0$ para todo $p \in U$ e F é injetiva, então $F : U \to F(U)$ é um difeomorfismo. //

Ex Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (\underbrace{x^2+y^2}_{t}, \underbrace{2xy}_{s})$$

Note:

$$t + s = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 \geq 0$$
$$t - s = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0$$



$(F(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = (r^2, r^2\,\mathrm{sen}(2\theta)))$

$F(\mathbb{R}^2) = \{(t,s) : t+s \geq 0,\ t-s \geq 0\}$ fechado!
(não-aberto)

$$\det JF = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2-y^2)$$

F é difeo. local no aberto

$$U = \{(x,y) : x \neq \pm y\} = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \sqcup U_4$$

$$F(U) = F(U_i) = \{(t,s) : t+s > 0,\ t-s > 0\} =: V$$

F é injetiva (e portanto difeo. sobre V) cada um dos U_i.

Por exemplo:

$$F|_{U_2}^{-1} : V \to U_1$$

$$(t,s) \mapsto \left(\frac{\sqrt{t+s} + \sqrt{t-s}}{2} , \frac{\sqrt{t+s} - \sqrt{t-s}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = t \\ 2xy = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 = t+s \\ (x-y)^2 = t-s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \sqrt{t+s} \\ x-y = \sqrt{t-s} \end{cases}$$

//

11) Teorema da função implícita

Seja $g : U \to \mathbb{R}$ uma função. Como garantir que a equação

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

pode ser "resolvida" em alguma das variáveis x_i? Isto é,

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0 \overset{?}{\iff} x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

↳ não depende de x_i

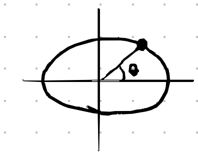
Neste caso, dizemos que g define x_i como uma <u>função implícita</u> das outras variáveis $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

Em outras palavras: podemos descrever os pontos de $\{(x_1, \dots, x_n) : g(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ como <u>gráfico de uma função</u> de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$?

<u>Ex</u> (Equação de Kepler)

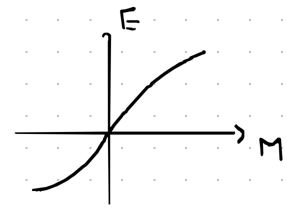
$$M = E - e \operatorname{sen}(E)$$

↳ cond. $0 < e < 1$



($E \approx \theta$, $M \approx$ tempo)

E como função de M? Neste caso: função inversa.

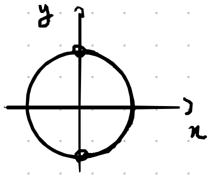


$$f(t) = t - e \operatorname{sen}(t) \quad , \quad f'(t) = 1 - e\cos(t) > 0$$

$\Rightarrow$ existe uma inversa f^{-1}

Obs.: f^{-1} não se escreve em termos de funções elementares (mas, veja: "fórmula de inversão de Lagrange) //

Ex $g(x,y) = x^2+y^2-1$



Não é possível descrever S^1 globalmente como gráfico de uma função.

Considere o pedaço $A = \{(x,y) \in S^1 : x>0\}$

A não é o gráfico de uma função de x mas é de y: $(x,y) \in A \iff x = \sqrt{1-y^2}$ //

Teorema (da função implícita, para uma única equação)

Seja $g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geq 1$. Se $p \in U$ é tal que $g(p)=0$ e $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ e uma função $f: V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida em uma vizinhança V de $(p_1, \dots, p_{n-1})$ tal que:

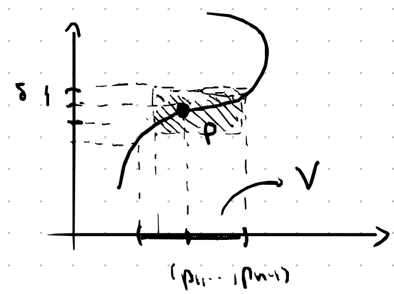
(i) Se $x \in V$ e $|y-p_n| < \delta$, então

$$g(x_1,\dots,x_{n-1},y) = 0 \iff y = f(x)$$

(ii) f é de classe C^k e

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x, f(x))}$$

" Se $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$, o conjunto $\{g=0\}$ é o gráfico de uma função de $x_1,\dots,x_{n-1}$ na vizinhança de $p_1,\dots,p_{n-1}$ "



Obs.: Se $g(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ é linear, a condição $\frac{\partial g}{\partial x_n}(x) = a_n \neq 0$

implica trivialmente que podemos resolver $g=0$ em x_n. //

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 14 28/04/25

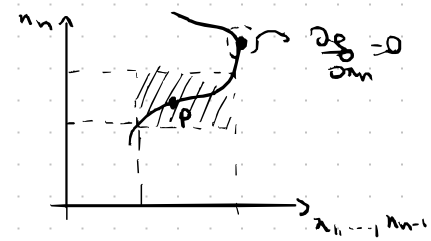
Aula passada:

- Fim da prova do TFI (+ exemplo)
- Teo. da função implícita para uma única eq. (enunciado)

" $g(x_1,\dots,x_n)=0$, $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x_n = f(x_1,\dots,x_{n-1})$ na viz. de p."

(função implícita)



$\frac{\partial g}{\partial x_n}=0$ ⇝ x_n não é função de $x_1,\dots,x_{n-1}$

Obs: Enunciado análogo para qualquer variável x_i no lugar de x_n!

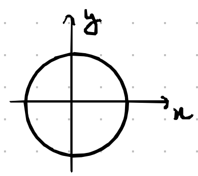
11) Teorema da função implícita (cont.)

Coro. Se $g \in C^k(U)$ $(k \geq 1)$ e $p \in U$ é tal que $dg(p) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que

$\{x \in V : g(x) = 0\}$ é o gráfico de uma função de classe C^k.

Dem.: $dg(p) \neq 0 \iff$ existe i tal que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \neq 0$ e o enunciado segue do teo. da função implícita aplicado à variável x_i. $\square$

__Ex__ $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



$p = (x_0, y_0) \in S^1$

$dg(p) = 2(x_0\, dx(p) + y_0\, dy(p))$

Se $x_0 \neq 0 \rightsquigarrow S^1$ é o gráfico de uma função de y na viz de p $(y \mapsto \pm\sqrt{1-x^2})$

Se $y_0 \neq 0 \rightsquigarrow$ ... função de x ... //

__Lembre__: se $g \in C^k(U)$, $k \geq 1$ e

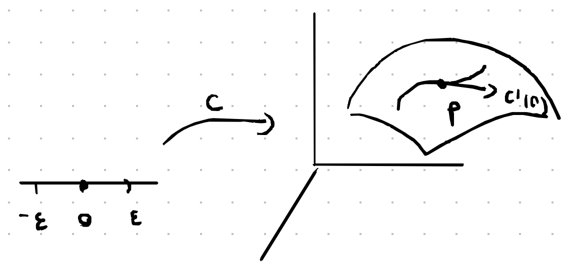
$H = \{x \in U : g(x) = 0\}$

é tal que $dg(p) \neq 0$ para todo $p \in H$, dizemos que H é a __hipersuperfície__ (de classe C^k) definida por $g = 0$.

" corolário $\Rightarrow$ uma hipersuperfície é localmente o gráfico de uma função "

__Prop.__ Se H é uma hipersuperfície de classe C^k $(k \geq 1)$ def. por $g = 0$ e $p \in H$, então

$$\ker dg(p) = \left\{ c'(0) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H \subseteq \mathbb{R}^n \text{ é} \\ \text{um caminho de} \\ \text{classe } C^k,\ c(0) = p \end{array} \right\}$$



Dem.: Se $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ é um caminho tal que $c(0) = p$, então

$g \circ c(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow \quad dg(\underbrace{c(0)}_{p})\, c'(0) = 0 \iff c'(0) \in \ker dg(p)$.

Para a outra inclusão, como $dg(p) \neq 0$, podemos supor $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$ ("a menos de reordenar as variáveis"). Pelo teorema da função implícita, H é o gráfico de uma função (de classe C^k) $f(x_1, \dots, x_{n-1})$ na viz. de p tal que

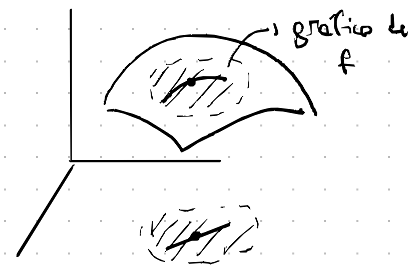
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x, f(x))}$$

Dado $\overset{(v_1, \dots, v_n)}{\overset{\shortparallel}{v}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $dg(p)v = 0$, queremos $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ de classe C^k tal que $c'(0) = v$.

Como $g(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \equiv 0$, o caminho

$$c(t) := \left(p_1 + tv_1, \dots, p_{n-1} + tv_{n-1}, f(p_1 + tv_1, \dots, p_{n-1} + tv_{n-1})\right)$$

é de classe C^k e sua imagem está contida em H. Além disso,



$$c'(0) = \left(v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p)\right)$$

Mas, $v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} =$

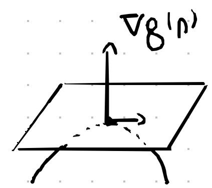
$$= - \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(p)} \left(v_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) + \dots + v_{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \right)$$

$$\overset{dg(p)v = 0}{=} - \frac{1}{\cancel{\frac{\partial g}{\partial x_n}(p)}} \left(- v_n \cancel{\frac{\partial g}{\partial x_n}}(p) \right) = v_n .$$

Portanto, $c'(0) = v$. $\square$

<u>Def</u> O subespaço $T_p H = \ker dg(p)$ é dito <u>espaço tangente</u> a H em p.

"espaço de vetores tangentes em p de caminhos em H"



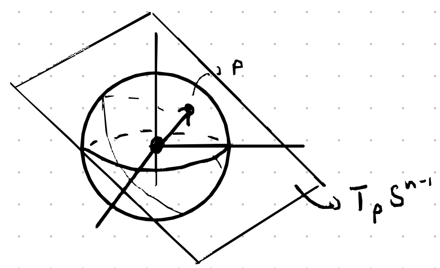
Note: T_pH é o subespaço dos vetores ortogonais a $\nabla g(p)$:

$$v \in T_pH \iff \langle v, \nabla g(p) \rangle = 0$$

⚠ $T_pH \leq \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial e não passa por p necessariamente!

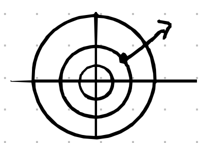
Ex $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$

$$p \in S^{n-1} \rightsquigarrow T_p S^{n-1} = \{ v \in \mathbb{R}^n : v_1 p_1 + \cdots + v_n p_n = 0 \}$$



Obs O gradiente ∇g é ortogonal a todas as "hipersuperfícies de nível"

$$\{ x \in U : \underbrace{g(x) = c}_{\iff g(x) - c = 0} \}, \quad c \in \mathbb{R}$$



Aplicação da prop.:

Dem. do teorema dos multiplicadores de Lagrange:

$$\hookrightarrow \begin{cases} f \in C^1(U) \\ H = \{ \underset{\hookrightarrow \in C^1(U)}{g} = 0 \} \subseteq U \end{cases}$$

p extremo local de $f|_H \Rightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $df(p) = \lambda\, dg(p)$.

Se p é um extremo local de $f|_H$, então 0 é um extremo local de $f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ para qualquer caminho (C^1) $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ com $c(0) = p$.

Logo:

$$0 = (f \circ c)'(0) = df(\overset{p}{\widetilde{c(0)}})\, c'(0)$$

Pela prop., $T_pH = \ker dg(p) \subseteq \ker df(p)$. $\square$

(Lema de álgebra linear: se $l, l' \in V^*$ e $\ker(l) \subseteq \ker(l')$, então $l' = \lambda l$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.) ✓

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 15 06/05/25

Aula passada:

- Hipersuperfícies de classe C^k $(k \geq 1)$

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{g(x)}_{C^k} = 0 \}$$

$dg(p) \neq 0$ para todo $p \in H$

- Teo. da função implícita: H é localmente o gráfico de uma função (de classe C^k) de $n-1$ variáveis

- Espaço tangente:

$$T_p H = \ker dg(p) = \{ c'(0) : \begin{array}{l} c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H \\ 0 \mapsto p \end{array} \}$$

- Aplicação: multiplicadores de Lagrange.

11) Teorema da função implícita (cont.)

Versão geral:

Teorema (da função implícita)

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ um aberto (coordenadas $(x,y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$) e $G : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(k \geq 1)$.

Se $(p,q) \in U$ é tal que

↳ Caso $k=1$ eq: $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

$$\det \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(p,q) \right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0$$

então existe uma vizinhança W de q e uma aplicação $F : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, definida em uma vizinhança V de p, tal que: se $(x,y) \in V \times W$, então

$$G(x,y) = 0 \iff y = F(x).$$

Obs

$$JG = \left(\underbrace{\frac{\partial G_i}{\partial x_j}}_{m \times n} \;\vdots\; \underbrace{\frac{\partial G_i}{\partial y_j}}_{m \times m} \right)_{m \times (n+m)}$$

Note: $JG(p,q)$ representa o sistema linear em $v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m})$:

$$\underbrace{JG(p,q)}_{A}\, v = 0 \iff \begin{cases} dG_1(p,q)\, v = 0 \\ \vdots \\ dG_m(p,q)\, v = 0 \end{cases}$$

"Mais incógnitas que equações" underdetermined system

$$Av = 0 \iff \left(B \;\vdots\; C \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+m} \end{pmatrix} = 0$$

"$\det C \neq 0$"

$$\iff \left(\underset{n\times m}{C^{-1}B} \;\vdots\; \underset{m\times m}{I} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+m} \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff C^{-1}B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+m} \end{pmatrix} = 0$$

$\rightsquigarrow$ v_{n+i} em função de $v_1, \dots, v_n$ //

Dem.: Define

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$
$$(x,y) \mapsto (x, G(x,y))$$

Φ é de classe C^k e $\det J\Phi(p,q) \neq 0$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \dfrac{\partial G_i}{\partial x_j} & \dfrac{\partial G_i}{\partial y_j} \end{pmatrix}$$

Pelo TFI, existe uma vizinhança $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (p,q) tal que $\Phi|_Y : Y \to \Phi(Y)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Podemos supor que Y é da forma $Y = V \times W$, onde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (resp. $W \subseteq \mathbb{R}^m$) é uma viz. de p (resp. q). Note que Φ^{-1} é da forma

$$\Phi^{-1}(x,y) = (x, \Psi(x,y)) \in V \times W$$

Tome $F(x) := \Psi(x,0)$. Dado $(x,y) \in V \times W$,

$$G(x,y) = 0 \iff \Phi(x,y) = (x, G(x,y)) = (x,0)$$

$\Leftrightarrow \quad (x,y) = \Phi^{-1}(x,0) = (x, \Psi^{-1}(x,0))$

$\Leftrightarrow \quad y = \Psi^{-1}(x,0) = F(x). \quad \square$

Obs $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ pode se calcular derivando

$G(x, F(x)) \equiv 0$ e resolvendo o sistema linear em $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}, \dots, \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}$:

se $y_j := F_j(x)$, então

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(G(x, F(x)) \Big)$$

$$= \frac{\partial G}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial G}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial G}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial G}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{\sim}{C} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ matriz do enunciado

12) Imersões, submersões e posto constante

Def Uma aplicação diferenciável $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita imersão em $p \in U$ se $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva.

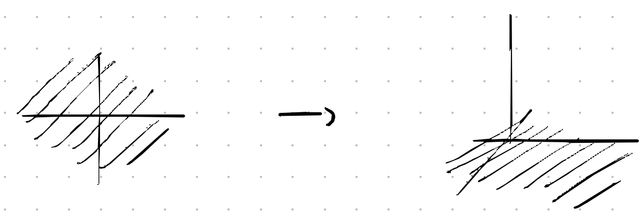
Se F é imersão em todo $p \in U$, dizemos que F é uma imersão (em U).

Obs $DF(p)$ injetiva $\Rightarrow$ $n \leq m$

Ex (Imersão canônica)

$n \leq m \leadsto \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

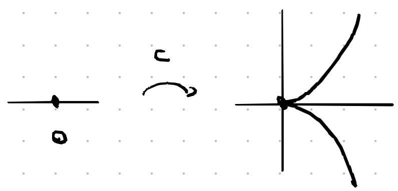
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

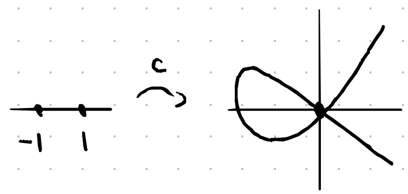


Ex $c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ caminho diferenciável

imersão em $t \in I \iff c'(t) \neq 0$

$c_1(t) = (t^2, t^3)$ | $c_2(t) = (t^2-1, \overbrace{t^3-t}^{t(t^2-1)})$





$c_1'(t) = (3t^2, 2t)$ | $c_2'(t) = (2t, 3t^2-1)$

c_1 não é imersão em $t=0$ (mas é injetiva!)

c_2 é imersão em todo ponto (mas não é injetiva!)

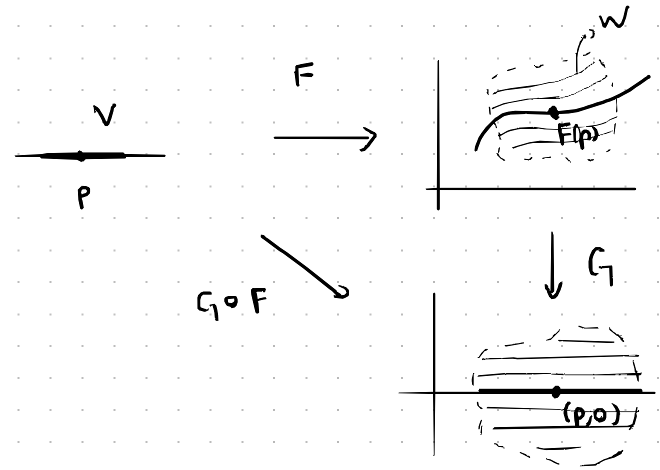
(existência de reta tangente) //

Teorema (Forma local das imersões)

Se $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$, $k \geq 1$, é uma imersão em $p \in U$, então existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p e um difeomorfismo, $G : W \to G(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ de classe C^k

definido em uma vizinhança W de $F(p)$ tais que

$$G \circ F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$



"Toda imersão é localmente canônica, a menos de uma mudança de sistema de coordenadas (difeomorfismo) no contra-domínio"

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 16 08/05/25

12) Imersões, submersões e posto constante (cont.)

<u>Teorema</u> (Forma local das imersões)

Se $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$, $k \geq 1$, é uma imersão em $p \in U$, então existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p e um difeomorfismo $G: W \to G(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ de classe C^k tal que

$$G \circ F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

Dem.: Por hipótese,

$$v_1 := DF(p)e_1, \ \dots, \ v_n := DF(p)e_n$$

são linearmente independentes e podemos completá-los a uma base $v_1, \dots, v_m$ de $\mathbb{R}^m$.

Define

$$H : U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$$

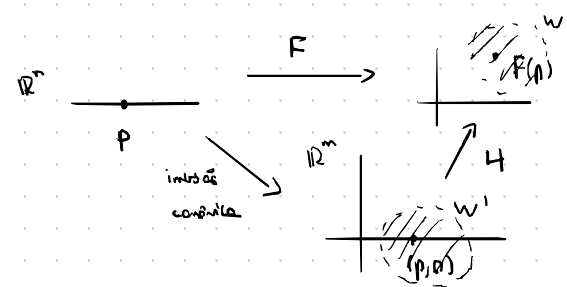
$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \mapsto F(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}v_{n+1} + \dots + x_m v_m$$

Note que H é de classe C^k e $DH(p,0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. ✓

$$JH(p,0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Pelo TFI, existe uma vizinhança W' de $(p,0)$ tal que $H: W' \to H(W')$ é um difeomorfismo de classe C^k.

Tome $W := H(W')$, $G = H^{-1}$ e $V = F^{-1}(W)$.



Como

$$H(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = F(x_1, \dots, x_n)$$
$$\|$$
$$G^{-1}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

concluímos que

$$G \circ F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0). \quad \square$$

Coro. Se $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ é uma imersão em $p \in U$, então existe uma viz. V de p onde F é injetiva. $\square$

"Imersões são localmente injetivas"

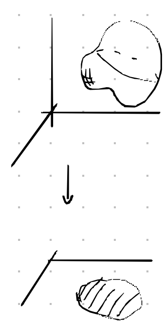
Obs Também segue do teorema que F é uma imersão em uma vizinhança de p.

Def Uma aplicação diferenciável $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita submersão em $p \in U$ se $DF(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva.

Se F é submersão em todo $p \in U$, dizemos que F é uma submersão (em U).

Obs $DF(p)$ sobrejetiva $\Rightarrow n \geq m$

Ex (Submersão canônica) "projeção"



$$n \geq m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) \longmapsto (x_1,\dots,x_m)$$

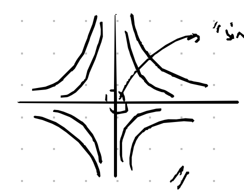
Ex $f: U \to \mathbb{R}$ função diferenciável

submersão em $p \in U \iff df(p) \neq 0$
(ponto regular)

Ex $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$

$df = y\,dx + x\,dy$

Curvas de nível:



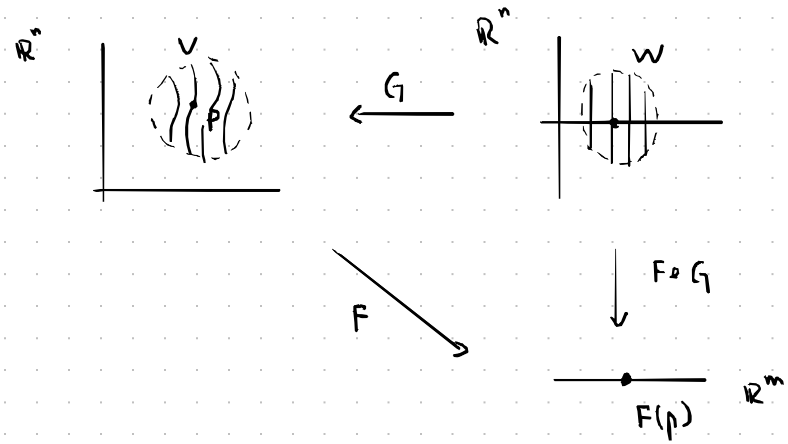
submersão em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Obs Em geral, $DF(p)$ é sobrejetiva $\iff$ os funcionais $dF_1(p),\dots,dF_m(p)$ são l.i.

Teorema (Forma local das submersões)

Se $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$, $k \geq 1$, é uma submersão em $p \in U$, então existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p e um difeomorfismo $G: W \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ de classe C^k tal que

$$F \circ G(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_m)$$



"Toda submersão é localmente canônica, a menos de uma mudança de sistema de coordenadas (difeomorfismo) no domínio."

Dem.: Por hipótese,

$$\underbrace{DF(p)e_1}_{\frac{\partial F}{\partial x_1}(p)}, \ldots, \underbrace{DF(p)e_n}_{\frac{\partial F}{\partial x_n}(p)} \in \mathbb{R}^m$$

geram $\mathbb{R}^m$, logo m destes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^m$. A menos de uma permutação dos x_j (difeo. no domínio), podemos supor que $DF(p)e_1, \ldots, DF(p)e_m$ forme uma base de $\mathbb{R}^m$.

Define $H: U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto (\underbrace{F(x)}_{(F_1(x), \ldots, F_m(x))}, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

Note que H é de classe C^k e

$$DH(p)v = (DF(p)v, v_{m+1}, \ldots, v_n)$$

Logo,

$$\overbrace{DH(p)e_1 = (DF(p)e_1, 0, \ldots, 0), \ldots, DH(p)e_m = (DF(p)e_m, 0, \ldots, 0)}^{\text{base de } \mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n}$$

$$DH(p)e_{m+1} = e_{m+1}, \ldots, DH(p)e_n = e_n$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$. Pelo TFI, H é um difeomorfismo em uma viz. de p e tomamos $G = H^{-1}$. Δ

<u>Obs</u> A hipótese sobre $DF(p)e_1, \ldots, DF(p)e_m$ na demonstração é equivalente a

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0$$

Coro. Se $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ é uma submersão em $p \in U$, então existe uma viz. V de p tal que $F|_V$ é aberta. $\square$

"submersões são aplicações abertas"

Exercício Demonstre o corolário. (Composição de aplicações abertas é aberta; projeções são abertas.)

—

Lembre: o posto de uma transformação linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a dimensão da imagem. Se A é a matriz de L, o posto é

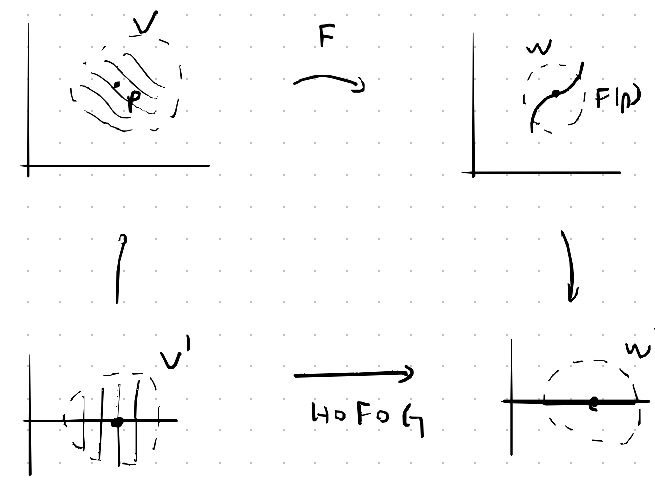
número máximo de colunas de A l.i.	=	número máximo de linhas de A l.i.
$\downarrow$		$\downarrow$
$Le_1, \dots, Le_n \in \mathbb{R}^n$		$L_1, \dots, L_m \in (\mathbb{R}^n)^*$

(maior posto possível: $\min(m,n)$)

Teorema (do posto constante)

Seja $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, $k \geq 1$. Suponha que o posto de DF seja constante igual a $r \leq \min(m,n)$ em uma vizinhança de $p \in U$. Então, existem vizinhanças V de p e W de $F(p)$ e difeomorfismos $G: V' \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ e $H: W \subseteq \mathbb{R}^m \to W'$ tais que

$$H \circ F \circ G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$



"Uma aplicação C^k de posto constante $= r$ é localmente da forma $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$"

a menos de difeomorfismos (no domínio e
no contra-domínio)."

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 17 13/05/25

Aula passada:

- Forma local das imersões : ↗ DF injetiva

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \qquad (n \leq m)$$

- Forma local das submersões : ↗ DF sobrejetiva

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m) \qquad (n \geq m)$$

12) Imersões, submersões e posto constante (cont.)

Lembre: o posto de uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a dimensão da imagem. Se A é a matriz de L, o posto é

número máximo de colunas de A l.i.	=	número máximo de linhas de A l.i.
↓		↓
$Le_1, \dots, Le_n \in \mathbb{R}^n$		$L_1, \dots, L_m \in (\mathbb{R}^n)^*$

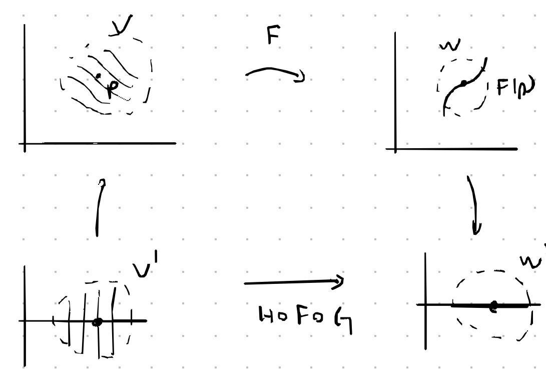
Posto máximo (maior posto possível):

$$\min(m, n)$$

Teorema (do posto constante)

Seja $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, $k \geq 1$. Suponha que o posto de DF seja constante igual a $r \leq \min(m,n)$ em uma vizinhança de $p \in U$. Então, existem vizinhanças V de p e W de $F(p)$ e difeomorfismos $G : V' \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ e $H : W \subseteq \mathbb{R}^m \to W'$ tais que

$$H \circ F \circ G (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

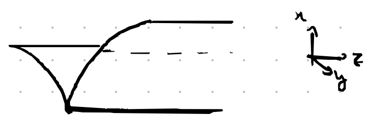


"Uma aplicação C^k de posto constante r é localmente da forma $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_r,0,\dots,0)$ a menos de difeomorfismos (no domínio e no contra-domínio."

⚠ É importante que o posto seja constante em toda uma viz. de p!

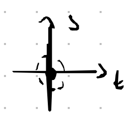
Ex $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(t,s) \mapsto (\underbrace{t^2}_{x}, \underbrace{t^3}_{y}, \underbrace{s}_{z})$$



$$JF = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 3t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto de $JF(0,0) = 1$



Mas não é verdade que existem sistemas de coordenadas nos quais F é da forma $(t,s) \mapsto (t,0,0)$ na viz. de $(0,0)$.

(F é um homeo. local, mas $(t,s) \mapsto (t,0,0)$ não é.)

O TFI e as formas locais de imersão e submersão são corolários imediatos do teorema do posto constante pois:

(i) O posto de uma matriz A é a maior ordem (= número de linhas ou colunas) possível de um menor (= determinante de uma submatriz quadrada de A) não-nulo de A.

(ii) Se $JF(p)$ tem posto máximo igual a r, então existe um menor não-nulo de ordem r. Se F é C^1, o menor análogo de $JF(x)$ será não nulo para todo x em uma viz. de p. Como r é máximo, $JF(x)$ tem posto r para todo x em uma viz. de p.

"Se $DF(p)$ tem posto máximo, então DF tem posto máximo em uma viz. de p"
↳ constante

(iii) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tem posto máximo

$$\iff \begin{cases} L \text{ é um isomorfismo, se } m = n \\ L \text{ é injetiva, se } n \leq n \\ L \text{ é sobrejetiva, se } n \geq m. \end{cases}$$

<u>Obs</u> O argumento anterior mostra mais geralmente que, se F é de classe C^1, a função

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{posto de } DF(x) \end{aligned}$$

é <u>semi-contínua inferiormente</u>, isto é,

para todo $p \in U$, existe uma viz. $V \subseteq U$ de p tal que

$$\text{posto de } DF(x) \geq \text{posto de } DF(p)$$

para todo $x \in V$.

Dem. do teorema: Por hipótese, $\operatorname{im}(DF(p)) \leq \mathbb{R}^m$ é um subespaço de dim. r.
A menos de uma mudança de base (isomorfismo linear $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$), podemos supor que
$\operatorname{im}(DF(p)) = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_r = \mathbb{R}^r \times \{0\} \leq \mathbb{R}^m$.
Considere a projeção

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^r \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

Pela FLS existe uma viz. V de p e um difeo. (de classe C^k) $G : V' \subseteq \mathbb{R}^n \to V$, tal que:

$$P \circ F \circ G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$$

Logo,

$$F \circ G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, \underbrace{y_{r+1}(x), \dots, y_m(x)}_{\text{funções } C^k})$$

Note:

$$J(F \circ G) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{r} & \overbrace{}^{n-r} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, m-r \end{array} \end{array}$$

onde

$$D = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{r+1 \leq i \leq m \\ r+1 \leq j \leq n}}$$

Como

$$\text{posto de } J(F \circ G)(x) \overset{G \text{ difeo} \Rightarrow DG(x) \text{ isom.}}{=} \text{posto de } JF(G(x))$$

é constante igual a r em uma viz. de $p' = G^{-1}(p)$, temos $D \equiv 0$ nesta mesma vizinhança, que podemos supor convexa e igual a V'. Logo, $y_{r+1}, \ldots, y_m$ "não dependem das variáveis $x_{r+1}, \ldots, x_n$".

Considere

$$I : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, p'_{r+1}, \ldots, p'_n)$$

de forma que

$$F \circ G \circ I|_{G^{-1}(V_0')}(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, y_1(x_1, \ldots, x_r, p'_{r+1}, \ldots, p'_n), \ldots, y_n(\ldots))$$

é uma imersão em p'. Pela FLI, existe uma viz. W de $F(p)$, que podemos supor $V \subseteq F^{-1}(W)$, e um difeo. $H : W \longrightarrow W' \subseteq \mathbb{R}^m$ (de classe C^k) tal que

$$(H \circ F \circ G \circ I)(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

Como $F \circ G \circ I(x_1, \ldots, x_r) = F \circ G(x_1, \ldots, x_n)$, concluímos que

$$H \circ F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

$\square$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 18 15/05/25

Aula passada:

Teorema do posto constante:

$F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, C^k $k \geq 1$, posto constante r em uma viz. de p
$\Rightarrow$ "F é da forma"

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

na viz. de p.

<u>Coro.</u> Seja $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1

(i) Se F é localmente injetiva, então F é uma imersão em um aberto denso em U. Em particular, $n \leq m$.

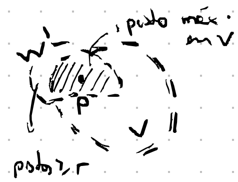
(ii) Se F é aberta, então F é uma submersão em um aberto denso em U. Em particular, $n \geq m$.

Dem. de (i).: Seja $W \subseteq U$ um aberto onde o posto de DF é constante $= r$. Pelo teorema do posto, F "é da forma"

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Tal aplicação é injetiva se, e somente se, $r = n$. Logo, F é uma imersão em W.

Se V é um aberto qualquer em U, seja $p \in V$ onde $DF(p)$ tem posto máximo $= r$ em V (Lembre: posto $\leq \min\{m, n\}$).

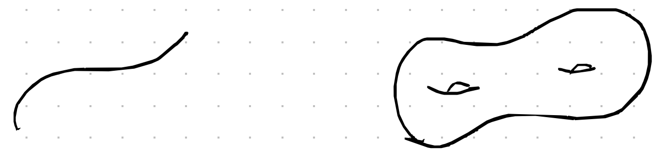


Pela semi-continuidade inferior, existe uma viz. W' de p onde o posto de DF é $\geq r$. Logo, o posto de DF é constante igual a r em $W := W' \cap V$.

Pelo parágrafo anterior, $r = n$ e F é uma imersão em W. $\square$

13) Variedades diferenciáveis ("suaves")

Generalizações de curvas e superfícies para "objetos geométricos" de dimensão arbitrária.

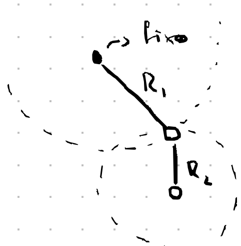


dim 1 — curva

dim 2 — superfície

Obs Existe uma noção intrínseca de variedade. Neste curso: subvariedades de algum $\mathbb{R}^n$.

Ex (Pêndulo duplo)

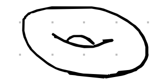


Espaço de configurações (estados):

$$S_{R_1} \times S_{R_2}$$

onde $S_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = R^2\}$

$S_{R_1} \times S_{R_2} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ é um toro!



Queremos: uma noção de "objeto geométrico" (variedade) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ que nos permita fazer cálculo diferencial em M. Ex.: diferenciabilidade de uma função $f: M \to \mathbb{R}$? Pontos críticos?

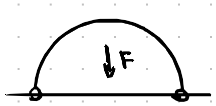
Propriedade fundamental: M é uma "variedade de dim. d" se M "é localmente" um $\mathbb{R}^d$.

Def (Milnor) Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ subconjuntos (arbitrários!) e $k \geq 1$. Uma aplicação $F: X \to Y$ é dita de classe C^k se, para todo $p \in X$, existe uma viz. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p e uma aplicação de classe C^k $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{F}|_{U \cap X} = F|_{U \cap X}$.

Diremos que $F : X \to Y$ é um *difeomorfismo de classe C^k* se F é um homeomorfismo e F e F^{-1} são de classe C^k.

Obs "de classe C^∞" = *suave*

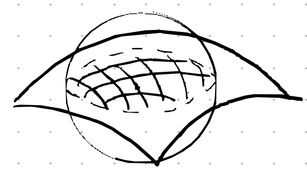
Ex $X = \{ (x,y) \in S^1 : y > 0 \}$, $Y = (-1,1)$



$F : X \to Y$, $(x,y) \mapsto x$
é um difeomorfismo (suave)

$(F^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2}))$

Def Um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma *subvariedade de classe C^k* ($k \geq 1$) e *dimensão* d se, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p tal que $M \cap U$ é difeomorfo (classe C^k) a um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^d$.



Um difeomorfismo $\varphi : M \cap U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ é dito uma *carta* (*local*). O difeomorfismo inverso $\psi = \varphi^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^d \to M \cap U$ é dito uma *parametrização*.

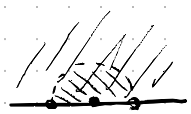
As componentes de uma carta local $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ são ditos *coordenadas locais*.

Obs • "M" vem de *Mannigfaltigkeit* (manifold)

• "carta" = mapa (cartografia)

Ex Um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade suave de dim. n. ($\varphi = id_U : U \to U$)

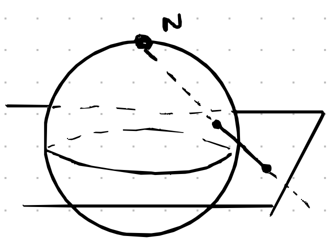
⚠ O semi-plano $F = \{(x,y) : y \geq 0\}$ **não** é uma variedade no sentido acima.



Se $p \in \partial F$ e $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma viz. de p, $U \cap F$ não é difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^k$ (para qualquer k). Exercício!

Obs Veremos que F é uma "variedade com bordo".

Ex $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ é uma variedade suave de dim. $n-1$.



Seja $N = (0,0,\dots,1) = e_n$.

Projeção estereográfica:

$\varphi_N : S^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$x \mapsto \varphi_N(x)$ = interseção entre $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e a reta definida por N e x

$$N + t(x - N) = (0,0,\dots,1) + t(x_1, x_2, \dots, x_n - 1)$$
$$= (tx_1, tx_2, \dots, 1 + t(x_n - 1))$$

pertence a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \iff 1 + t(x_n - 1) = 0$

$\iff t = \dfrac{1}{1 - x_n}$

Logo, $\varphi_N(x) = \left(\dfrac{x_1}{1-x_n}, \dots, \dfrac{x_{n-1}}{1-x_n} \right)$.

Afirmação: $\varphi_N : S^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ é um difeo. suave.

Se $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 1\}$, então

$S^{n-1} \cap U = S^{n-1} \setminus \{N\}$ e $\varphi_N : S^{n-1} \cap U \to \mathbb{R}^{n-1}$

se estende a uma aplicação suave

$\tilde{\varphi}_N : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ (mesma fórmula).

Inversa?

$\varphi_N(x) = y \iff \frac{x_i}{1-x_n} = y_i \quad , \quad i=1,\dots,n-1$

$\Rightarrow \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}{(1-x_n)^2} = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2$

$\iff \frac{1+x_n}{1-x_n} = \frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2} = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2$

$\iff x_n = \frac{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 1}$

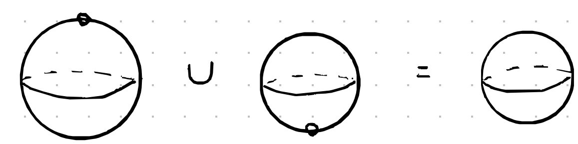
$\left(1 - x_n = \frac{2}{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 1} \right)$

$\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \cap U$

$y \longmapsto \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 1} \left(2y_1, \dots, 2y_{n-1}, y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 - 1 \right)$

Projeção estereográfica análoga com respeito a $S = (0,0,\dots,-1) = -e_n$.

...



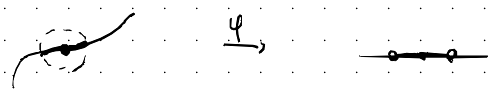
//

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 19 22/05/25

Aula passada:

- Variedades: "localmente $\mathbb{R}^d$"

$M \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \cap M \xrightarrow[\text{difeo.}]{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^d$



φ = carta local, φ^{-1} = parametrização local

- Exemplo: $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ variedade de dim. $n-1$

13) Variedades diferenciáveis (cont.)

<u>Lema</u> Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade de classe C^k ($k \geq 1$) e dimensão d. Uma aplicação $\varphi : V \underset{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(V) \subseteq M$ é uma parametrização local de M se, e somente se,

(i) φ é uma imersão

(ii) $\varphi : V \to \varphi(V) \underbrace{\subseteq M}_{\text{com a topologia induzida de } \mathbb{R}^n}$ é um homeomorfismo.

Dem.: ($\Leftarrow$)

Por (ii), $\varphi(V)$ é um aberto de M, isto é, existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que $\varphi(V) = U \cap M$. $\varphi : V \to U \cap M$ é uma bijeção. Resta ver que é um difeo. (de classe C^k).
no sentido da aula passada

(isto é, localmente, φ^{-1} se estende a uma aplicação C^k definida em um aberto de $\mathbb{R}^n$)

Pela FLI, a menos de reduzir V e U, existe um difeo. de classe C^k $G : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que, para $x = (x_1, \dots, x_d) \in V$,

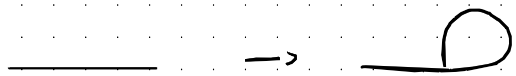
$$G \circ \varphi(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$$

Logo, se $P : U' \to \mathbb{R}^d$ é a projeção $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d)$, então

$$\underbrace{(P \circ G)}_{\text{extensão de } \varphi^{-1} \text{ a } U} \circ \varphi = id_V \quad \square$$

<u>Obs</u> • Definição de variedade do Elon: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ pode ser coberto por abertos U tais que $M \cap U$ é imagem de uma φ como no Lema.

• φ imersão e injetiva ==não== garante homeo. sobre imagem:



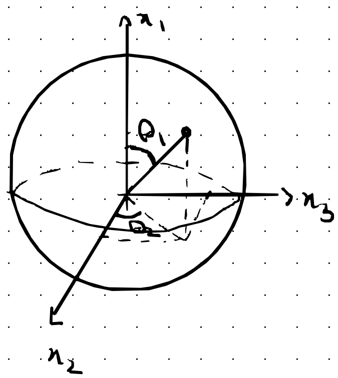
$\not\cong$

Ex ("Coordenadas esféricas" em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta_1) \\ x_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ x_3 = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3) \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}) \\ x_n = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-2})\,\mathrm{sen}(\theta_{n-1}) \end{cases}$$

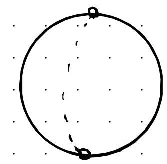
onde $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi$, $0 \leq \theta_{n-1} < 2\pi$.

$\underline{n=3}$



$$x_1 = r\cos(\theta_1)$$
$$x_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)$$
$$x_3 = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)$$

Parametrização local de S^{n-1}:



$$\varphi : (0,\pi)^{n-2} \times (0,2\pi) \longrightarrow U \cap S^{n-1}$$

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) \mapsto (\cos(\theta_1), \dots, \mathrm{sen}(\theta_1)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-1}))$$

($\underline{n=3}$ $\rightsquigarrow$ $U = \mathbb{R}^n \setminus \{x : x_3 = 0,\ x_2 \geq 0\}$) //

Ex (Gráficos)

Se $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^k, o gráfico

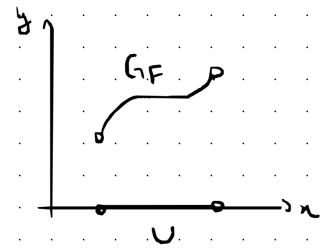
$$G_F = \{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^m : y = G(x)\}$$

é uma variedade de classe C^k e dim. n.

$\varphi : U \to G_F \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ é uma parametrização (global)

$x \mapsto (x, F(x))$

(carta: projeção)



Ex (Hipersuperfície definida por uma eq.)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $g \in C^k(U)$ tq $g(p)=0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$

$H = \{ p \in U : g(p) = 0 \}$ ($\neq \emptyset$ suponha) é uma variedade de classe C^k e dim. $n-1$.

Pelo teorema da função implícita, H é localmente um gráfico!

Exercício 1) Mostre que, se $G : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão em todo ponto $p \in U$ tal que $G(p) = 0$, então $\{ p \in U : G(p) = 0 \}$ é uma variedade de dim $n-m$.

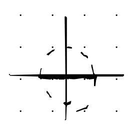
("variedade definida pelas equações $G_1 = \dots = G_m = 0$")

$dG_1, \dots, dG_m$ l.i.

→ defn. do Spivak.

2) Mostre que $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dim. d se, e somente se, todo $p \in M$ admite uma viz. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e um difeo. $F : U \to V$ tal que

$$F(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^d \times \{0\}$$
$$= \{ y \in V : y^{d+1} = \dots = y^n = 0 \}$$

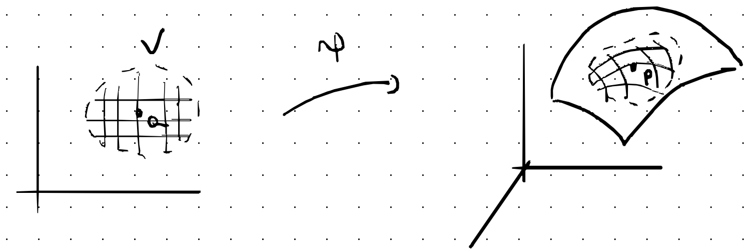


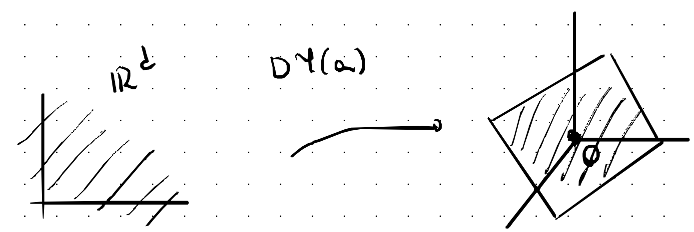
Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade de dim. d.

Def Dado $p \in M$, o espaço tangente a M em p é definido por

$$T_pM = \mathrm{im}\left(D\varphi(a) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \right)$$

onde $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^d \to U \cap M$ é uma parametrização local em p e $\varphi(a) = p$





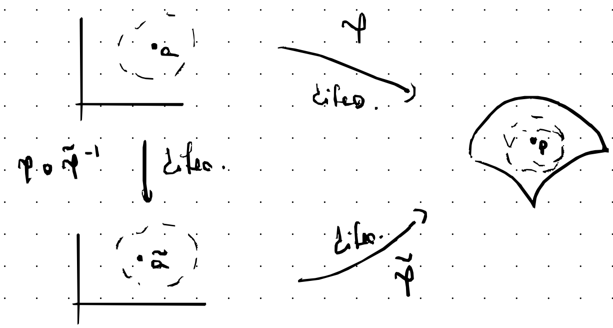
⚠ T_pM é um subespaço vetorial!

↳ "direções tangentes"

(O espaço afim $p + T_pM$ é o que

de fato "tangencia" M em p.)

Obs T_pM não depende da escolha da parametrização φ: se $\tilde\varphi : \tilde V \to \tilde U \cap M$ é uma outra parametrização, com $\tilde\varphi(\tilde a) = p$, então $\tilde\varphi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo de uma viz. de a em uma viz. de $\tilde a$



(composição de difeos é difeo.), logo $D(\tilde\varphi^{-1}\circ\varphi)(a)$ é um isomorfismo

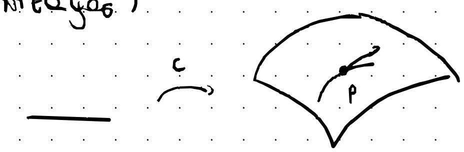
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[dr, "D\varphi(a)"] \arrow[dd, "D(\tilde\varphi^{-1}\circ\varphi)(a)"', "\text{isom.}"] & \\ & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^2 \arrow[ur, "D\tilde\varphi(a)"'] & \end{tikzcd}$$

Logo, $D\varphi(a)$ e $D\tilde\varphi(a)$ têm mesma imagem.

Exercício 1) Mostre que

$$T_pM = \{ c'(0) \in \mathbb{R}^n : c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^n,\ c(0) = p \}$$

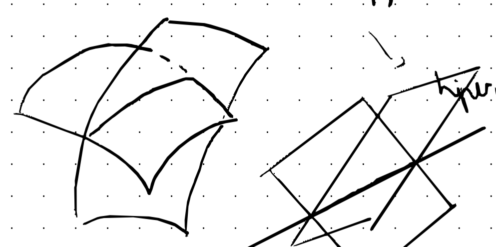
(isto também mostra que T_pM não depende da parametrização)



2) Mostre que, se M é definida por $G = 0$ na viz. de p, onde $G : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão, então

$$T_pM = \ker(DG(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$$
$$= \ker(dG_1) \cap \dots \cap \ker(dG_m)$$

hiperplanos



Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 20 27/05/25

Aula passada:

- Variedades via parametrizações locais ou equações

<u>Obs</u> Uma coleção de cartas ou parametrizações locais $\{\varphi_i : V_i \to U_i \cap M\}_{i \in I}$ tais que $M = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(V_i)$ é dito um <u>atlas</u> de M.

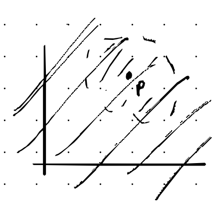
- Espaço tangente:

$$T_pM = \mathrm{im}\left(D\varphi(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n\right) = \mathbb{R}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

$\varphi : V \to U \cap M$ parametrização local com $\varphi(a) = p$.

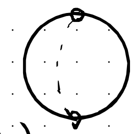
<u>Ex</u> $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $p \in U$

$T_pU = \mathbb{R}^n$



<u>Ex</u> $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$p \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : z = 0,\ y \geq 0\}$



p $=$ $\varphi(\theta_1, \theta_2) = (\cos\theta_1,\ \mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2,\ \mathrm{sen}\,\theta_1\, \mathrm{sen}\,\theta_2)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = (-\mathrm{sen}\,\theta_1,\ \cos\theta_1 \cos\theta_2,\ \cos\theta_1\, \mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = (0,\ -\mathrm{sen}\,\theta_1\, \mathrm{sen}\,\theta_2,\ \mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2)$$

$$T_pS^2 = \mathbb{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \oplus \mathbb{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2}$$

Note: • $\langle p, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \rangle = \cos\theta_1 \cdot (-\mathrm{sen}\,\theta_1) + (\mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2) \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2) + (\mathrm{sen}\,\theta_1\, \mathrm{sen}\,\theta_2)(\cos\theta_1\, \mathrm{sen}\,\theta_2)$

$= -\cos\theta_1\, \mathrm{sen}\,\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_1 (\cos^2\theta_2 + \mathrm{sen}^2\theta_2) = 0$

• $\langle p, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \rangle = \cdots = 0$

$\Rightarrow T_pS^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle v, p \rangle = 0\}$

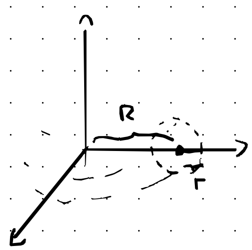
Óbvio pois S^2 é definida pela eq.

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1=0$, logo

$T_p S^2 = \ker dg(p)$, onde

$dg = 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$. //

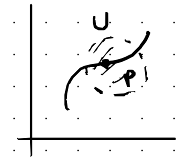
Exercício Determine uma parametrização do toro em $\mathbb{R}^3$ obtido pela revolução de um círculo de raio r e centro a uma distância R da origem. Calcule os espaços tangentes.



—

Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$ variedades de classe C^k e $F: M \to N$ uma aplicação de classe C^k, isto é, todo $p \in M$ admite uma vizinhança

U e uma extensão $\tilde{F}: U \to N \subseteq \mathbb{R}^m$ de $F|_{U\cap M}$ a U.

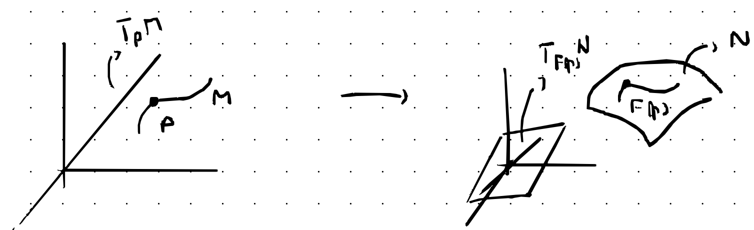


Exercício Mostre que $F: M \to N$ é de classe C^k se, e somente se, $F\circ\varphi: V \to N \subseteq \mathbb{R}^m$ é de classe C^k para toda parametrização local $\varphi: V \to M\cap U$ de M. (Defn. do Elon)

Obs Basta verificar para um atlas.

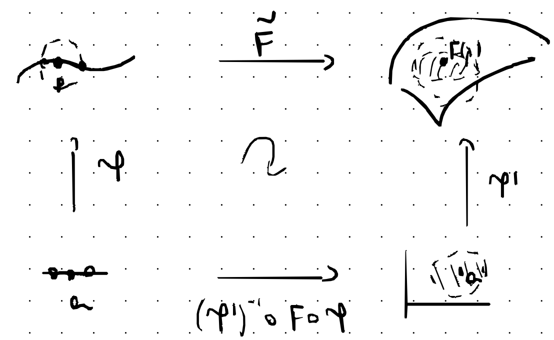
Def A derivada de $F: M \to N$ em p é a aplicação linear

$$DF(p): T_pM \to T_pN$$
$$v \mapsto D\tilde{F}(p)\,v$$



Lema Não depende da escolha de $\tilde F$.

Dem.: Sejam $\varphi : V \to U \cap M$, $\varphi' : V' \to U' \cap N$ parametrizações locais de M e N, com $p \in U$ e $\tilde F(U) \subseteq U'$.



Note que $(\varphi')^{-1}\circ F \circ \varphi : V \to V'$ é uma aplicação suave. Pela regra da cadeia, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D\tilde F(p)"] & \mathbb{R}^m \\
\mathbb{R}^d \arrow[u, "D\varphi(a)"] \arrow[r, "D((\varphi')^{-1}\circ F\circ\varphi)(a)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^{d'} \arrow[u, "D\varphi'(a')"']
\end{tikzcd}$$

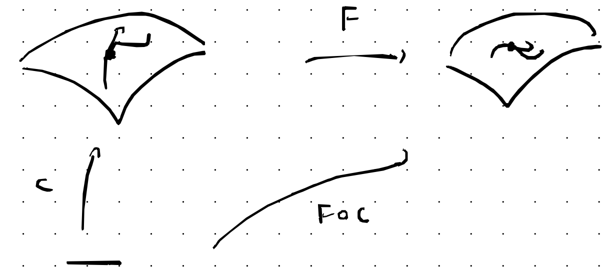
$d = \dim M$

$d' = \dim N$

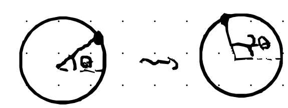
Segue que $D\tilde F(p)$ leva $T_pM = \operatorname{im} D\varphi(a)$ em $T_{F(p)}N = \operatorname{im} D\varphi'(a')$. $\square$

Exercício Mostre que, se $v = c'(0) \in T_pM$, onde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é um caminho C^k com $c(0) = p$, então

$$DF(p)\, c'(0) = (F\circ c)'(0).$$



Ex $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



$$F : S^1 \to S^1$$
$$(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$
$$\left(\begin{array}{c} (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \\ z = x + iy \mapsto z^2 \end{array} \right)$$

$p = (a,b) \rightsquigarrow DF(p) : T_pS^1 \to T_{F(p)}S^1$

$\tilde F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

$$D\tilde F(p)\, v = \begin{pmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} av_1 - bv_2 \\ bv_1 + av_2 \end{pmatrix}$$

Nota: $v \in T_pS \iff av_1 + bv_2 = 0$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)(av_1 - bv_2) + 2ab(bv_1 + av_2)$$
$$= (a^2-b^2)\,2av_1 + 2a(b^2v_1 - a^2v_1) = 0$$
$$\iff D\tilde F(p)\, v \in T_{F(p)}S^1.$$

Conta via parametrizações locais:

$$p = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0) \rightsquigarrow F(p) = (\cos(2\theta_0), \operatorname{sen}(2\theta_0))$$

$$\begin{array}{ccccc} (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) & S^1 & \xrightarrow{F} & S^1 & (\cos\theta', \operatorname{sen}\theta') \\ \uparrow & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi' & \uparrow \\ \theta & (\theta_0-\varepsilon, \theta_0+\varepsilon) & \xrightarrow{(\varphi')^{-1}\circ F\circ\varphi} & (2\theta_0-\varepsilon', 2\theta_0+\varepsilon') & \theta' \\ & \theta & \longmapsto & 2\theta & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_pS^1 & \xrightarrow{DF(p)} & T_{F(p)}S^1 \\ D\varphi(\theta_0)\uparrow \text{isom.} & & D\varphi'(2\theta_0)\uparrow \text{isom.} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & 2v \end{array}$$

("mult. por 2") //

Todas as propriedades de derivadas valem no contexto de variedades:

- Regra da cadeia: $F: M \to N$, $G: N \to P$ aplicações de classe C^k,

$$D(G\circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p)$$

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{DF(p)} & T_{F(p)}N \\ & \searrow^{D(G\circ F)(p)} \; ? & \downarrow DG(F(p)) \\ & & T_{G(F(p))}P \end{array}$$

- Derivada da identidade: $id_M: M \to M$

$$D\, id_M(p) = id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$$

- Teorema da função inversa: se $F: M \to N$ é tal que $DF(p): T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo, então F é um difeomorfismo local em p.

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 21 29/05/25

Aula passada:

- M, N variedades, $F: M \to N$, $p \in M$

$\rightsquigarrow DF(p): T_pM \to T_{F(p)}N$

"a derivada é uma transformação linear entre os espaços tangentes"

- Propriedades análogas à derivada de aplicações entre abertos.

14) Valores regulares

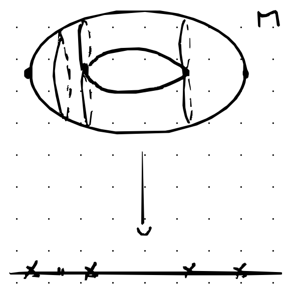
Sejam M, N variedades de classe C^k $(k \geq 1)$ e $F: M \to N$ uma aplicação de classe C^k.

<u>Def</u> Um ponto $p \in M$ é dito um <u>ponto</u> <u>regular</u> de $F: M \to N$ se

se F é uma <u>submersão em p</u>, isto é, se $DF(p): T_pM \to T_{F(p)}N$ é sobrejetiva.
Se p não é regular, dizemos que p é um <u>ponto</u> <u>crítico</u> de F.

<u>Obs</u> Se F admite um ponto regular, então $\dim M \geq \dim N$.

<u>Ex</u>



$\bullet$ = pontos críticos

<u>Ex</u> Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície definida pela equação $g=0$ e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função, então $p \in M$ é um ponto crítico de $f|_M : M \to \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow df(p)|_{T_pM} : T_pM \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva

$\Leftrightarrow df(p)|_{T_pM} = 0 \Leftrightarrow T_pM \subseteq \ker df(p)$

$\Leftrightarrow \ker dg(p) \subseteq \ker df(p) \Leftrightarrow df(p) = \lambda\, dg(p)$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ ("multiplicador de Lagrange"). //

Def Para M, N, F como na definição anterior, um ponto $q \in N$ é dito um valor crítico de $F: M \to N$ se é imagem de algum ponto crítico de F. Caso contrário, q é dito um valor regular de F.

Ex No exemplo do toro: $\times$ = valores críticos.

⚠ Um valor regular não é definido como a imagem de um ponto regular! É preciso que todos os pontos na fibra $p \in F^{-1}(q)$ sejam regulares.

Obs Se $F^{-1}(q) = \emptyset$, q é valor regular!

Obs Um conjunto da forma $F^{-1}(q)$ é dito "fibra" ou "conjunto de nível".

Teorema ("das fibras regulares") Se $q \in N$ é um valor regular de uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) $F: M \to N$, então $F^{-1}(q) \subseteq M$ é uma variedade de classe C^k e dimensão

$$\dim F^{-1}(q) = \dim M - \dim N$$

Dem.: Seja $p \in F^{-1}(q)$. Por hipótese, $DF(p): T_pM \to T_qN$ é sobrejetiva. Logo, $\ker DF(p)$ é um espaço vetorial de dimensão $\dim M - \dim N =: e$.
Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$, considere uma aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^e$ que induz um isomorfismo $L|_{\ker DF(p)}: \ker DF(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^e$ e define

$$G: M \to N \times \mathbb{R}^e \quad \rightsquigarrow \text{classe } C^k$$
$$x \mapsto (F(x), L(x))$$

Note que

$$DG(p)v = (DF(p)v, Lv) \in T_q N \times \mathbb{R}^e,$$

logo $DG(p)$ é injetiva e, portanto um isomorfismo, por dimensão! Pelo TFI, G é um difeomorfismo de uma vizinhança de $p \in M$ sobre uma viz. de $(q, L(p)) \in N \times \mathbb{R}^e$. Nesta viz., $F^{-1}(q)$ corresponde via G a $\underbrace{\{q\} \times \mathbb{R}^e}$. $\square$

↳ variedade de dim. e

Ex $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dim. $n-1$ pois $1 \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ e $S^{n-1} = g^{-1}(1)$. //

Ex Se $\dim M = \dim N$ e $q \in N$ é um valor regular de F, então $F^{-1}(q)$ é um conjunto discreto!

↳ variedade de dim. 0

(Se M é compacto, $F^{-1}(q)$ é finito!)

↳ ver "grau" de uma aplicação

Exercício Verifique que $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = A^tA = I\}$ é uma variedade compacta de dim. $\frac{n(n-1)}{2}$ e calcule $T_I O(n)$.

$O(n)$ é conexo?

Exercício ("fibras de posto constante")

Mostre que, se $F: M \to N$ tem posto constante r em uma viz. de $F^{-1}(q)$, então $F^{-1}(q)$ é uma variedade de dim. $\dim M - r$.

O que podemos dizer sobre a existência de valores regulares?

Teorema (Brown-Sard)

Sejam M, N variedades de classe C^k e $F: M \to N$ uma aplicação de classe

C^k ($k \geq 1$). Suponha que $k \geq \dim M - \dim N + 1$. Então o subconjunto dos valores regulares de F é <u>denso</u> em N.

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 22 03/06/25

Aula passada:

- <u>Valores regulares</u> de $F : M \to N$:
  $q \in N$ t.q. $DF(p) : T_p M \to T_{F(p)} N$ é sobrejetiva para todo $p \in F^{-1}(q)$.
- $q \in N$ valor regular $\Rightarrow$ $F^{-1}(q)$ variedade ($\dim F^{-1}(q) = \dim M - \dim N$)
- <u>Brown - Sard</u> : se $k \gg 0$, então $\{q \in N : q \text{ valor regular de } F : M \to N\}$ é denso em N

  (<u>Obs</u> Nem sempre é aberto!)

<u>Teorema</u> (Sard)

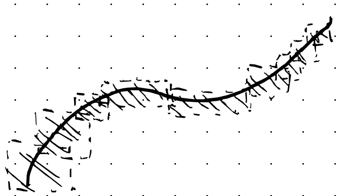
Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k, com $k \geq \max\{n-m+1, 1\}$. O conjunto dos valores críticos de F tem <u>medida nula</u> em $\mathbb{R}^m$.

Def A medida ("volume") de um bloco aberto $B = (a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ é

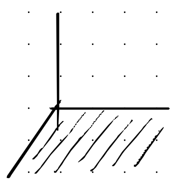
$$\mu(B) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Dizemos que um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tem medida nula se, para todo $\varepsilon > 0$, existem blocos abertos $B_0, B_1, B_2, \dots$ tais que

- $S \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$
- $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) < \varepsilon$.



Ex $n < m \Rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ tem medida nula



Ex $S \subseteq \mathbb{R}^n$ enumerável $\Rightarrow$ S tem medida nula!

Ex Pelo teorema de Sard, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ variedade de dim. $< n$ tem medida nula.

(Ou use que "imagem de um conjunto de medida nula por uma aplicação localmente Lipschitz tem medida nula")

Exercício Mostre que, se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então $\mathbb{R}^n \setminus S$ é denso.

Exercício Leia o capítulo "Conjuntos de medida nula" no Elon. § 6.2

15) Formas alternadas

Objetivo: teoria de integração em variedades

Integrandos?

~~Funções~~ Formas diferenciais ✓

Idéia básica: integrar em uma variedade via parametrizações locais.

Mas a integral não pode depender da parametrização!

Ex $$\int_a^b \underbrace{f(t)\,dt}_{\text{forma diferencial}} \overset{t=2u}{=} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} f(2u)\,2du$$

"Forma diferencial = integrando que se transforma de maneira que a integral seja invariante por mudança de coordenadas"

Formalmente, uma forma diferencial ω em uma variedade M é uma associação

$$p \in M \rightsquigarrow \omega_p \text{ forma alternada em } T_pM$$

que varia diferenciavelmente com respeito a p.

"versão linearizada (infinitesimal) de uma forma diferencial"

Def Uma k-forma alternada (ou forma alternada de grau k) em um espaço vetorial V é uma função

$$\alpha : V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

(i) α é k-linear — linear em cada "coordenada" V

(ii) $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$ se $v_i = v_j$ para algum $i \neq j$.

Ex 1-forma alternada = funcional linear

$\alpha : V \to \mathbb{R}$ (condição (ii) é vazia)

Ex $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2-forma alternada em $\mathbb{R}^2$

Obs $(k=0)$

$V^0 = \{0\}$ (espaço vetorial nulo)

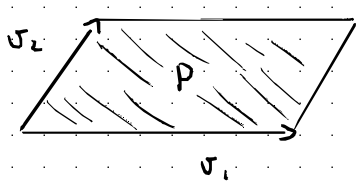
0-forma alternada:

função $\alpha : \{0\} \to \mathbb{R}$ $\leftrightarrow$ $\alpha(0) \in \mathbb{R}$ //

Intuição geométrica:

k-forma alternada = dispositivo algébrico que atribui uma "medição" a todo paralelepípedo k-dimensional orientado em V

$$P = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in V : 0 \le t_i \le 1\}$$



$(v_1, \dots, v_k)$ = geradores

ordem dos v_i ⇝ orientação

Ex (e_1, e_2) (e_2, e_1)

mesmos paralelepípedos em $\mathbb{R}^2$, mas orientações opostas.

Propriedades da forma alternada:

$\alpha(v_1, \dots, v_n)$ se comporta como um volume k-dimensional (com sinal)

Ex: $v_i = v_j$ ⇝ dimensão $< k$ ⇝ volume $= 0$

Lema Seja $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ uma forma alternada.

(i) Se $0 \le i < j \le k$, então

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

(ii) Se $v_1, \dots, v_k$ são l.d., então $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Dem.: (i) Denote $\alpha(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) = \alpha(v_i,v_j)$

Temos:

$$0 = \alpha(v_i+v_j,\, v_i+v_j)$$
$$= \cancel{\alpha(v_i,v_i)} + \alpha(v_i,v_j) + \alpha(v_j,v_i) + \cancel{\alpha(v_j,v_j)}$$
$$= \alpha(v_i,v_j) + \alpha(v_j,v_i).$$

(ii) Podemos supor $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$.

Logo:

$$\alpha(v_1,\dots,v_k) = \alpha(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k,\, \dots,\, v_k)$$
$$= \sum_{i=2}^{k} \lambda_i\, \alpha(v_i,\dots,v_k) = 0. \qquad \square$$

__Obs__ Item (i) acima: formas alternadas são __antissimétricas__. Mais geralmente, se σ é uma permutação de $\{1,\dots,k\}$

$$\alpha(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)\, \alpha(v_1,\dots,v_k)$$

↳ __sinal__ de σ, em $\{\pm 1\}$

Note: $sgn(\sigma\circ\tau) = sgn(\sigma)\cdot sgn(\tau)$

$$sgn(\sigma) = (-1)^{n(\sigma)}$$

$n(\sigma)$ = número de __transposições__ (trocas de posição entre dois elementos de $\{1,\dots,k\}$) até obter σ.

__Ex__ •
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow \sigma & \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} \qquad sgn(\sigma) = (-1)^1 = -1$$

•
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow \sigma & \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 1 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad sgn(\sigma) = (-1)^2 = 1$$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 23   05/06/25

Aula passada:

- k-forma alternada em V:

$$\alpha : V^k \to \mathbb{R}$$

(i) α é k-linear

(ii) $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ se $v_i = v_j$, $i \neq j$

- Antissimetria:

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_1, \dots, v_k)$$

(σ permutação de $\{1, \dots, k\}$)

15) Formas alternadas (cont.)

Exercício (Projetor alternado)

Mostre que, se $f : V^k \to \mathbb{R}$ é k-linear, então

$$Af : V^k \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

σ → percorre todas as permutações de $\{1, \dots, k\}$

é uma k-forma alternada.

Mostre que, se f é alternada, então $Af = f$.

Notação: $A^k(V) = \{\alpha : V^k \to \mathbb{R} : \alpha$ k-forma alternada$\}$

Note: $A^k(V)$ é um espaço vetorial!

Ex $A^0(V) = \mathbb{R}$

$A^1(V) = V^*$

Ex Se $\dim V = n$ então $A^k(V) = \{0\}$ para todo $k > n$ (segue do lema da aula passada)

Espaços não-triviais de formas alternadas:

$$A^0(V) = \mathbb{R},\ A^1(V) = V^*,\ A^2(V),\ \dots,\ A^n(V)$$

Def Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $\alpha \in A^k(W)$, o pullback de α por T é:

$$T^*\alpha : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

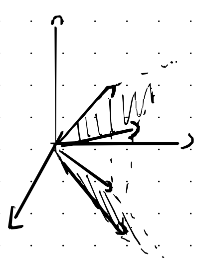
Note: $T^*\alpha \in A^k(V)$ e o pullback é uma aplicação linear

$$T^* : A^k(W) \longrightarrow A^k(V)$$

Ex $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\alpha = \det \in A^2(\mathbb{R}^2)$

$(x, y, z) \mapsto (x, y)$ $\qquad$ $\rightsquigarrow \pi^*\alpha \in A^2(\mathbb{R}^3)$

$$\pi^*\alpha((x,y,z),(x',y',z'))$$
$$= \alpha((x,y),(x',y')) = \det\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$



(Pergunta da aula passada: considere $(1,0,1)$, $(1,0,2)$)

Def O produto wedge (ou produto exterior) de $\alpha \in A^p(V)$ e $\beta \in A^q(V)$ é:

$$\alpha \wedge \beta : V^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v_1, \dots, v_{p+q}) \mapsto \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Note (exercício!): $\alpha \wedge \beta \in A^{p+q}(V)$ e obtemos uma aplicação

$$A^p(V) \times A^q(V) \longrightarrow A^{p+q}(V)$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

Ex $\alpha_1, \alpha_2 \in A^1(V) = V^*$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in A^2(V)$

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 (v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$$
$$= \det\begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) \end{pmatrix}$$

Ex (e_1, e_2) base canônica de $\mathbb{R}^2$

(e_1^*, e_2^*) base dual de $(\mathbb{R}^2)^*$

$A^0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, $A^1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}e_1^* \oplus \mathbb{R}e_2^*$

$A^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}\, e_1^* \wedge e_2^*$

$\left(\alpha \in A^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \alpha = \alpha(e_1, e_2)\, e_1^* \wedge e_2^* \right)$

Ex $\alpha \in A^2(V)$, $\beta \in A^1(V)$

$$\alpha \wedge \beta\,(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2}\Big(\alpha(v_1,v_2)\,\beta(v_3) - \alpha(v_1,v_3)\,\beta(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\,\beta(v_1) - \alpha(v_2,v_1)\,\beta(v_3) + \alpha(v_3,v_1)\,\beta(v_2) - \alpha(v_3,v_2)\,\beta(v_1) \Big)$$

$$= \alpha(v_1,v_2)\,\beta(v_3) - \alpha(v_1,v_3)\,\beta(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\,\beta(v_1) \quad //$$

Teorema (Propriedades de $\wedge$)

Sejam $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A^q(V)$, $\gamma \in A^r(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto $\wedge$ é:

(i) bilinear:

$$(\alpha + \lambda\beta) \wedge \gamma = \alpha + \lambda \beta \wedge \gamma$$
$$\alpha \wedge (\beta + \lambda\gamma) = \alpha \wedge \beta + \lambda \alpha \wedge \gamma$$

(ii) anticomutativo:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha$$

(iii) associativo:

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

(iv) compatível com pullback:

$$T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*\alpha \wedge T^*\beta$$

Dem.: Exercício!

(i) e (iv): aplicação direta da definição

(ii): considere a permutação

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+q \\ q+1 & q+2 & \cdots & q+p & 1 & \cdots & q \end{matrix}$$

(iii): considere Af, onde

$$f(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}, v_{p+q+1}, \dots, v_{p+q+r})$$
$$= \alpha(v_1, \dots, v_p)\, \beta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})\, \gamma(v_{p+q+1}, \dots, v_{p+q+r}) \qquad \square$$

Teorema Se $l_1, \dots, l_n$ é uma base de $V^* = A^1(V)$, então, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$l_{i_1} \wedge \cdots \wedge l_{i_k} \quad , \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

é uma base de $A^k(V)$. Em particular:

$$\dim A^k(V) = \binom{n}{k}.$$

Ex e_1^*, e_2^*, e_3^* base dual canônica de $(\mathbb{R}^3)^*$ —

$A^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$

$A^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}\, e_1^* \oplus \mathbb{R}\, e_2^* \oplus \mathbb{R}\, e_3^*$

$A^2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}\, e_1^* \wedge e_2^* \oplus \mathbb{R}\, e_1^* \wedge e_3^* \oplus \mathbb{R}\, e_2^* \wedge e_3^*$

$A^3(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}\, \underbrace{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*}_{\det}$

Obs $A^{\overset{\dim V}{n}}(V)$ sempre tem dimensão 1!

Se $w_1, \dots, w_n$ é uma base de V e

$\alpha \in A^n(V)$, então, para todos $v_1, \dots, v_n$,

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij})\, \omega(w_1, \dots, w_n)$$

onde $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$.

(Se $T: V \to V$ é uma transformação linear, $T^* \omega = \det(T)\, \omega$.)

16) Formas diferenciais

Seja M uma variedade de classe C^r $(r \geq 1)$ e dimensão d.

$x_i : U \to \mathbb{R}$ "funções coordenadas"

Se $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) : U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ é uma carta local de M, para todo $p \in U$, temos

$$d\varphi_1(p), \dots, d\varphi_d(p) \in (T_pM)^* = A^1(T_pM)$$

Base de $A^k(T_pM)$:

$d\varphi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}(p)$, $\quad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d$

Def Uma <u>k-forma diferencial</u> (de classe C^r) ω em M é uma associação

$$p \in M \mapsto \omega(p) \in A^k(T_pM)$$

tal que, para toda carta local $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) : U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ de M, as funções $f_{i_1,\dots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\dots,i_k}(p)\, d\varphi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}(p)$$

são de classe C^r.

Obs Basta verificar a propriedade acima para um atlas. (Exercício!)

Notação: $\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\dots,i_k}\, d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 24 — 10/06/25

Aula passada:

- Espaço das k-formas alternadas $A^k(V)$

(i) Pullback

$$T : W \to V \rightsquigarrow T^* : A^k(V) \to A^k(W)$$

(ii) Produto $\wedge$ (wedge)

$$A^p(V) \times A^q(V) \to A^{p+q}(V)$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

anticomutativo: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$

cuidado, não vale para forma de grau par!

$$\boxed{\alpha \in A^1(V) \Rightarrow \alpha \wedge \alpha = 0}$$

(iii) $\dim V = n \rightsquigarrow \dim A^k(V) = \binom{n}{k}$ $\quad (k \le n)$

base $\ell_{i_1} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k}$, $\quad i_1 < \cdots < i_k$

($\ell_1, \dots, \ell_n$ base de $V^* = A^1(V)$)

- k - forma diferencial ω em uma variedade M é de classe C^r

$$p \in M \mapsto \omega(p) \in A^k(T_pM)$$

tal que, se $\varphi = (x_1, \dots, x_d) : U \to \mathbb{R}^d$ é uma carta local,

$$\omega|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

onde $f_{i_1, \dots, i_k} : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^r

—

16) Formas diferenciais (cont.)

De agora em diante, para simplificar, tudo será C^∞ (variedades, aplicações, formas diferenciais, etc.)

Notações : $\Omega^k(M)$ = espaço vetorial das k-formas diferenciais em M

Ex $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto,

$$\omega \in \Omega^k(U) \iff \omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} \underbrace{f_{i_1, \dots, i_k}}_{\in C^\infty(U)}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

($x_1, \dots, x_n : U \to \mathbb{R}$ coordenadas canônicas

Lembre: $dx_i(p) = e_i^*$)

Ex $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto (coord. t)

$$\omega \in \Omega^1(I) \iff \omega = \underbrace{f(t)}_{\in C^\infty(I)}\, dt$$

Ex $U \subseteq \mathbb{R}^3$ com coordenadas x, y, z

$\Omega^0(U)$: f

$\Omega^1(U)$: $f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$\Omega^2(U)$: $f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dz$

$\Omega^3(U)$: $f\,dx \wedge dy \wedge dz$

$(f, g, h \in C^\infty(U))$

Ex $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$

(Uma 0-forma é só uma função $f: M \to \mathbb{R}$)

Ex $f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow df \in \Omega^1(M)$

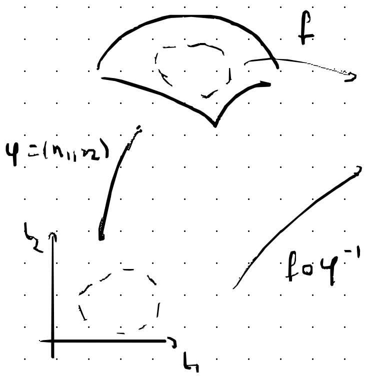
Nota: para todo $p \in M$,

$$df(p) \in (T_pM)^* = A^1(T_pM)$$

Se $\varphi = (x_1, \dots, x_d): U \to \mathbb{R}^d$ são coordenadas locais:

$$df|_U = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

onde, por defn., $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p) := \frac{\partial}{\partial t_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$



onde $(t_1, \dots, t_d)$ denotam as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^d$.

Exercício Mostre a fórmula acima.

↳ Aplicação da regra da cadeia

Produto wedge ("ponto a ponto"):

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$$
$$(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

$$\omega \wedge \eta(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$$

Ex Em $\mathbb{R}^2$:

$$(e^{x+y} dx + x\, dy) \wedge (y\, dx)$$
$$= e^{x+y} y\, \cancel{dx \wedge dx} + x\, dy \wedge dx = -x\, dx \wedge dy$$

Pullback:

Uma aplicação suave $F: M \to N$ induz: (para todo k)

$$F^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$$
$$\omega \mapsto F^*\omega$$

onde $(F^*\omega)(p) = DF(p)^* \omega(F(p))$

Se $g \in \Omega^0(N) = C^\infty(N)$, então

(i) $F^*g = g \circ F$

(ii) $F^*(dg) = d(F^*g) = d(g \circ F)$

↳ $F^*(dg)(p) = DF(p)^* dg(F(p)) = dg(F(p)) \circ DF(p)$

$= d(g \circ F)(p)$ (Regra da cadeia)

(iii) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$

<u>Obs</u> Se $\varphi = (x_1, \dots, x_k) : U \to \mathbb{R}^k$, $\varphi' = (y_1, \dots, y_\ell) : U' \to \mathbb{R}^\ell$ são coordenadas locais em M e N tais que $F(U) \subseteq U'$ e $\omega|_{U'} = \sum g_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$, então

$$(F^*\omega)|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} F^* g_{i_1, \dots, i_k} \underbrace{d(F^* y_{i_1})}_{\sum_j \frac{\partial F^* y_{i_1}}{\partial x_j} dx_j} \wedge \dots \wedge d(F^* y_{i_k})$$

$$= \cdots \quad //$$

<u>Ex</u> Seja $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ e $c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ caminho suave

$$c^*\omega = (f \circ c)\, dc_1 + (g \circ c)\, dc_2$$

$$= \big(f(c(t))\, c_1'(t) + g(c(t))\, c_2'(t)\big)\, dt \quad //$$

<u>Ex</u> Se $i : M \hookrightarrow N$ é uma inclusão e $\omega \in \Omega^k(N)$, denotamos $\omega|_M = i^*\omega$

<u>Ex</u> $d\theta = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$

"elemento de ângulo"

⇝ $d\theta|_{S^1} \in \Omega^1(S^1)$ //

<u>Def</u> Uma variedade M de dim. d é <u>orientável</u> se existe $\omega \in \Omega^d(M)$, dita <u>forma de orientação</u>, tal que $\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in M$.

<u>Ex</u> $\mathbb{R}^n$ é orientável: $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

<u>Ex</u> S^1 é orientável: $\omega = d\theta$.

<u>Ex</u> Faixa de Möbius <u>não</u> é orientável

Duas formas de orientação $\omega, \omega' \in \Omega^d(M)$ são equivalentes se $\omega = f\,\omega'$, $f > 0$.

Uma orientação em M é uma classe de equivalência $[\omega]$ de formas de orientação.

Exercício: Mostre que, se M é conexa e orientável, existem apenas duas orientações.

Def: Seja $(M \subseteq \mathbb{R}^n, [\omega])$ uma d-variedade orientada. A forma volume de M é a única d-forma ω_{vol} equivalente a ω tal que

$$\omega_{vol}(p)(w_1, \dots, w_d) = 1$$

com respeito a $\langle , \rangle$ de $\mathbb{R}^n$

para qualquer base ortonormal de T_pM tal que $\omega(p)(w_1, \dots, w_d) > 0$.

Obs: Não depende de $(w_1, \dots, w_d)$ pois duas bases ortonormais diferem de uma isometria (matriz ortogonal).

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 25 12/06/25

Aula passada:

- $\Omega^k(M)$ = k-formas diferenciais em M

$$p \in M \rightsquigarrow \omega(p) \in A^k(T_pM)$$

Em coordenadas locais $\varphi = (x_1, \dots, x_d)$:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \underbrace{f_{i_1, \dots, i_k}}_{\in C^\infty(U)} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

- Produto wedge, pullback (restrição)
- Forma volume: $(M, [\omega])$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$\omega_{vol} \in \Omega^d(M)$ tq $\omega_{vol} \in [\omega]$ e

$\omega_{vol}(p)(w_1, \dots, w_d) = 1$ para toda base ortonormal positiva $w_1, \dots, w_d$ de T_pM

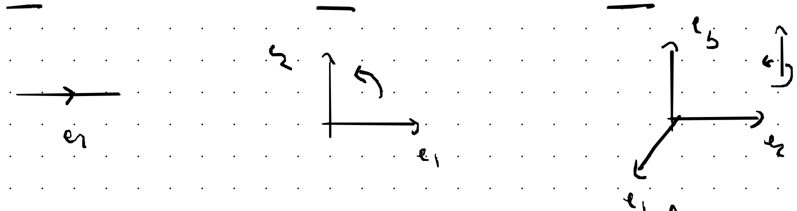
$\hookrightarrow \omega(p)(w_1, \dots, w_d) > 0$

Ex $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ é a forma volume de $(\mathbb{R}^n, [dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n])$

↳ "orientação positiva"

"regra da mão direita"

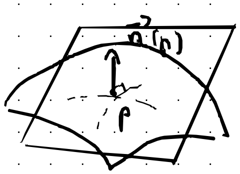
$\underline{n=1}$ $\underline{n=2}$ $\underline{n=3}$



Ex Se $H \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície definida pela equação $g=0$, então H é orientável:

Seja $\vec{n} = \dfrac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$. Para todo $p \in H$, $\vec{n}(p)$ é um vetor unitário ortogonal a T_pH.

("Campo de vetores normais a H.")



Forma volume:

omitido

$$\omega_{vol} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \vec{n}_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \Big|_H$$

↳ i-ésima componente de $\vec{n}$: $\dfrac{1}{\|\nabla g\|}\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$

Note: se $v_2, \dots, v_n \in T_pH$, então

$$\omega_{vol}(p)(v_2, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{n}(p) & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

(fórmula de Laplace: expansão na primeira coluna).

Ex (Forma volume de $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$g(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 \rightsquigarrow \vec{n}(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

(Note: $\vec{n}(x) = x$ se $x \in S^{n-1}$)

$$\omega_{vol} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \Big|_{S^{n-1}}$$

Exercício Calcule o pullback de ω_{vol} pela parametrização por coordenadas esféricas (Ex: $n=1 \rightsquigarrow \varphi^*(x\,dy - y\,dx) = d\theta$, onde $\varphi(\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}\theta)$)

17) Derivada exterior

↳ "como derivar uma forma diferencial"

<u>Ideia</u>: estender

$$d : C^\infty(M) = \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$$
$$f \mapsto df$$

para operadores lineares

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M) \qquad (A)$$
$$\omega \mapsto d\omega$$

<u>Teorema</u> Existe uma única família de operadores lineares (A), para toda variedade M e todo $k \in \mathbb{N}$, tais que:

(i) (Derivada de função)

Se $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, então df é a diferencial de f

(ii) (Regra de Leibniz com sinal)

Se $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega^q(M)$, então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

(iii) ($d^2 = 0$)

Se $\omega \in \Omega^k(M)$, então

$$d(d\omega) = 0$$

"naturalidade"

(iv) (Compatibilidade com pullback)

Dada $F : M \to N$ e $\omega \in \Omega^k(N)$, então

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

<u>Ex</u> $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $\omega \in \Omega^k(U)$

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$d\omega \overset{\text{linearidade}}{=} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} d\left(f_{i_1,\dots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right)$$

$$\overset{(ii)}{=} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} df_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + f_{i_1,\dots,i_k}\, \underbrace{d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})}_{\overset{(ii)+(iii)}{=} 0}$$

$$\overset{(i)}{=} \sum_i \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

__Obs__ Resumindo, em coordenadas locais e notação de multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$

$$d\Big(\sum_I f_I\, dx_I\Big) = \sum_I df_I \wedge dx_I$$

__Ex__ (Por que $d^2 = 0$?)

$f \in C^\infty(U) \rightsquigarrow df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \in \Omega^1(U)$

$$d^2 f = d\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i<j} \underbrace{\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big)}_{0} dx_i \wedge dx_j$$

0 pelo Teo. de Schwarz!

__Ex__ $U \subseteq \mathbb{R}^2$

$$d(f\,dx + g\,dy) = df \wedge dx + dg \wedge dy$$

$$= \Big(\cancel{\frac{\partial f}{\partial x} dx} + \frac{\partial f}{\partial y} dy\Big) \wedge dx + \Big(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \cancel{\frac{\partial g}{\partial y} dy}\Big) \wedge dy$$

$$= \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

__Ex__ $U \subseteq \mathbb{R}^3$

- $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

- $d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) = \cdots$

$$= \Big(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\Big) dz \wedge dx$$

$$+ \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

- $d(f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy)$

$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\Big) dx \wedge dy \wedge dz$$

Obs Identificando

- $\Omega^1(U) \cong C^\infty(U;\mathbb{R}^3)$

  $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \mapsto F = (F_1, F_2, F_3)$

- $\Omega^2(U) \cong C^\infty(U;\mathbb{R}^3)$

  $F_1\,dy\wedge dz + F_2\,dz\wedge dx + F_3\,dx\wedge dy \mapsto F = (F_1, F_2, F_3)$

- $\Omega^3(U) \cong C^\infty(U)$

  $f\,dx\wedge dy\wedge dz \mapsto f$

obtemos

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \Omega^3(U) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\nabla"'] & C^\infty(U;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] & C^\infty(U;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty(U)
\end{tikzcd}$$

$d^2 = 0$ equivale a $\begin{cases} \mathrm{rot}\circ\nabla = 0 \\ \mathrm{div}\circ\mathrm{rot} = 0 \end{cases}$ //

Def Uma k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita:

(i) exata se existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$

(ii) fechada se $d\omega = 0$.

Nota: mostrar que uma forma é exata é "resolver" uma equação diferencial
↳ integrar

Ex Uma 1-forma $\omega = f_1\,dx_1 + \dots + f_n\,dx_n$ é exata se admite uma "primitiva":

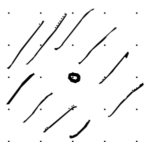
$$\omega = df \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = f_n \end{cases}$$ //

Nota: $d^2 = 0 \iff$ toda forma exata é fechada

⚠ A volta não vale em geral.
↳ topologia!

Ex $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$

é fechada (exercício) mas não é exata.

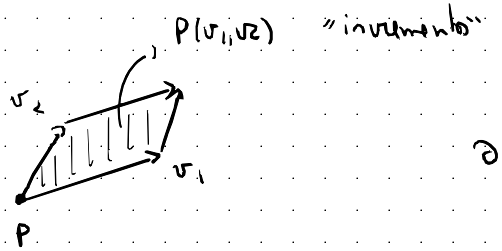


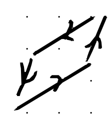
(Porém, é exata em abertos da forma $\mathbb{R}^2 \setminus$ (semi-reta partindo de 0))

↳ $\arctan(y/x)$

Interpretação geométrica da derivada exterior:

ω 1-forma $\rightsquigarrow$ $d\omega$ 2-forma



$\partial P(v_1, v_2) =$ 

$$\int_{\partial P(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2)} \omega = \varepsilon^2 \, d\omega(p)(v_1, v_2) + o(\varepsilon^2)$$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 25 17/06/25

18) Integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$

↳ "integrais múltiplas"

Seja $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ um bloco fechado e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função.

Objetivo: definir

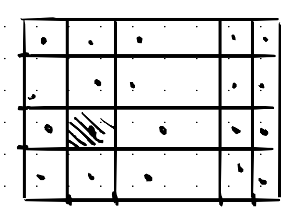
$$\int_B f = \int_B f(x)\, dx = \int_B f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Def: Uma partição $P = (P_1, \dots, P_n)$ de B é uma partição P_i de $[a_i, b_i]$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Um subbloco de B é um bloco da forma

$$S = I_1 \times \cdots \times I_n$$

onde I_i é um subintervalo de P_i.



Notação: $S \in P$

O **diâmetro** de P é

$$d(P) = \max\{\operatorname{diam}(S) : S \in P\}$$

($\operatorname{diam}(S) = \sup\{\|x-y\| : x,y \in S\}$)

Uma **partição pontilhada** (P, x^*) é uma partição P com $x^*_S \in S$ para todo $S \in P$.

Def Uma função **limitada** $f : B \to \mathbb{R}$ é **(Riemann-)integrável** se o limite, dito **integral de Riemann**, existe:

$$\int_B f(x)\,dx := \lim_{d(P)\to 0} \underbrace{\sum_{S\in P} f(x^*_S)\,\mu(S)}_{\text{"soma de Riemann"}}$$

Obs A hipótese "limitada" é **necessária** para a integrabilidade. (Exercício!)

Obs Somas de Darboux:

$$L(f,P) = \sum_{S\in P} \inf_{x\in S} f(x) \cdot \mu(S)$$

$$U(f,P) = \sum_{S\in P} \sup_{x\in S} f(x) \cdot \mu(S)$$

Critério de Darboux: f é (Riemann-)integrável se, para todo $\varepsilon > 0$, existe P tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

$$\Big(\underset{\underline{\int}_B f(x)\,dx}{\overset{\shortparallel}{\sup_P L(f,P)}} = \int_B f(x)\,dx = \underset{\overline{\int}_B f(x)\,dx}{\overset{\shortparallel}{\inf_P U(f,P)}} \Big).$$

Teorema (1) As funções integráveis em B formam um espaço vetorial e

$$\int_B (f(x) + \lambda g(x))\,dx = \int_B f(x)\,dx + \lambda \int_B g(x)\,dx$$

(2) Se f é integrável, então $|f|$ é integrável e vale

$$\left| \int_B f(x)\,dx \right| \le \int_B |f(x)|\,dx$$

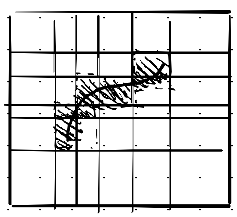
(3) Se f é contínua, então f é integrável.

Dem.: Exercício. (Tudo igual ao caso de uma variável). Δ

Teorema (Lebesgue)

$f : B \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se,
$\text{discont}(f) = \{x \in B : f \text{ é descontínua em } x\}$
tem medida nula.
("integrável $\Leftrightarrow$ contínua qtp")

Ideia ($\Leftarrow$) $B_\varepsilon = \{x \in B : \underset{\text{oscilação}}{\omega(f;x)} \geq \varepsilon\}$



$\mu(B_\varepsilon) = 0 \rightsquigarrow \mu(▨) < \varepsilon$

$\rightsquigarrow$ partição P tq $\omega(f;x) < \varepsilon$ fora de ▨ ...

$\square$

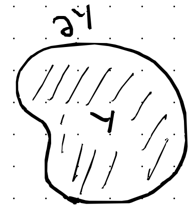
Ex Se $f, g : B \to \mathbb{R}$ são integráveis, então $f \cdot g$ é integrável, pois

$$\text{discont}(f \cdot g) \subseteq \text{discont}(f) \cup \text{discont}(g)$$

Ex Dado $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, seja

$$\underset{\text{"função característica"}}{\chi_Y} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x \notin Y \\ 1, & x \in Y \end{cases}$$

Nota: $\text{discont}(\chi_Y) = \partial Y$. Logo, χ_Y é integrável se, e somente se, ∂Y tem medida nula (ex: ∂Y = variedade de dim $< n$)
↳ suave



Def Se Y é limitado e ∂Y tem medida nula, Y é dito Jordan-mensurável e definimos

$$\mu(Y) = \int_B \chi_Y(x)\,dx$$ "conteúdo" "medida de Jordan"

onde B é qualquer bloco contendo Y.

Notação: $\int_Y f(x)\,dx = \int_B f(x)\,\chi_Y(x)\,dx$.

Exercício (1) Mostre que, se Y_1, Y_2 são Jordan-mensuráveis e $\mu(Y_1 \cap Y_2) = 0$, então

$$\int_{Y_1 \cup Y_2} f(x)\,dx = \int_{Y_1} f(x)\,dx + \int_{Y_2} f(x)\,dx$$

(2) Mostre que, se $f \geq 0$ em Y e $\int_Y f(x)\,dx = 0$, então $f = 0$ qtp em Y.

versão Zorich

Teorema (Fubini)
Sejam $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $B_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ blocos fechados e $f: B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$ integrável. Então

$$\int_{B_1 \times B_2} f(x,y) \underbrace{d(x,y)}_{dx\,dy} = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{B_2} \left(\int_{B_1} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Obs: Se $y \mapsto f(x,y)$ não é integrável, $\int_{B_2} f(x,y)\,dy$ denota qualquer valor entre $\underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy$ e $\overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy$.

Dem.: P_i partição de B_i $\rightsquigarrow$ $P = P_1 \times P_2$ partição de $B_1 \times B_2$

$$L(f,P) = \sum_{S_1 \times S_2} \inf_{S_1 \times S_2} f(x,y) \overbrace{\mu(S_1 \times S_2)}^{\mu(S_1)\cdot\mu(S_2)}$$

$$\leq \sum_{S_1} \left(\sum_{S_2} \inf_{x \in S_1} \left(\inf_{y \in S_2} f(x,y) \right) \mu(S_2) \right) \mu(S_1)$$

$$\leq \sum_{S_1} \inf_{x \in S_1} \left(\sum_{S_2} \inf_{y \in S_2} f(x,y)\, \mu(S_2) \right) \mu(S_1)$$

$$\leq \sum_{S_1} \inf_{x \in S_1} \left(\int_{B_2} f(x,y)\,dy \right) \mu(S_1)$$

$$\leq \sum_{S_1} \sup_{x \in S_1} \left(\int_{B_2} f(x,y)\,dy \right) \mu(S_1)$$

$$\vdots$$

$$\leq U(f,P)$$

Tome $d(P) \to 0$. $\square$

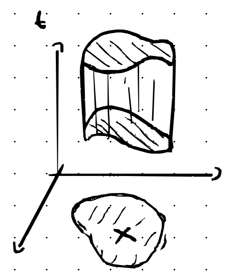
Exercício Mostre que, se $f: B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$ é integrável, então $\int_{B_2} f(x,y)\,dy$ e $\int_{B_1} f(x,y)\,dx$ existem qtp.

Ex $X \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-mensurável e $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então

$$Y = \{ (x,t) \in X \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leq t \leq \varphi_2(x) \}$$

é Jordan-mensurável e

$$\int_Y f(x,t)\,dt = \int_X \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,t)\,dt \right) dx$$



Se $f \equiv 1$, obtemos

$$\mu(Y) = \int_X (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx$$

Ex $D_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\}$

$$\mu(D_r) = \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-y^2} - \left(-\sqrt{r^2-y^2}\right)\right) dy = \dots = \pi r^2 \quad //$$

Teorema (Mudança de variável para compactos)

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e $G: U \to V$ um difeomorfismo (C^1). Seja $K \subseteq U$ um

compacto Jordan-mensurável e $f: G(K) \to \mathbb{R}$ integrável. Então $f\circ G : K \to \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_{G(K)} f(y)\,dy = \int_K (f\circ G)(x)\,|\det JG(x)|\,dx \quad //$$

Obs Em uma variável:

$$\int_{G([a,b])} f(y)\,dy = \int_{[a,b]} (f\circ G)(x)\,\underset{\text{note o módulo!}}{|G'(x)|}\,dx$$

É a mesma fórmula do cálculo 1 (sem módulo) pois

$$\int_{[a,b]} h(t)\,dt = \begin{cases} \int_a^b h(t)\,dt, & a\le b \\ -\int_a^b h(t)\,dt, & b\le a \end{cases} \quad //$$

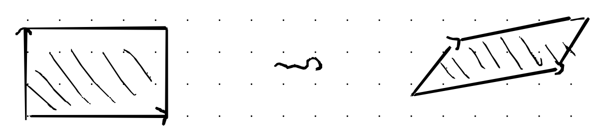
Coro. Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é Jordan-mensurável e $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear, então

$$\mu(L(Y)) = |\det L|\,\mu(Y)$$

Dem.: Se L não é iso., $\mu(L(Y)) = 0$. Se L é iso. e K é um compacto Jordan-mensurável contendo Y:

$$\mu(L(Y)) = \int_{L(K)} \chi_{L(Y)}(y)\,dy = \int_K \underbrace{\chi_{L(Y)}\circ L(x)}_{\chi_Y(x)}\,|\det L|\,dx \qquad \square$$

Obs Na verdade, a demonstração do teorema consiste, primeiro, em demonstrar o resultado acima para um bloco B. //



Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 27 24/06/25

Aula passada:

- Integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$:

$$\int_B f = \int_{(B)} f(x)\,dx$$

↳ bloco fechado

- $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mensurável $\rightsquigarrow \int_Y f(x)\,dx$

- Teoremas:

(1) Lebesgue

(2) Fubini

(3) Mudança de variáveis:

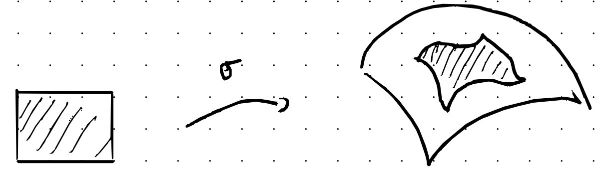
$$\int_{G(K)} f(y)\,dy = \int_K (f \circ G)(x)\,|\det JG(x)|\,dx$$

(G difeo., K compacto J-mensurável)

19) Integrais de formas diferenciais em cadeias

<u>Notação</u>: $I = [0,1]$

<u>Def</u> Seja M uma variedade. Um <u>k-bloco singular</u> em M é uma aplicação de classe C^∞ $\sigma : I^k \to M$

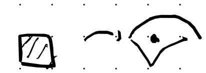


<u>Ex</u> (n-bloco singular padrão em $\mathbb{R}^n$)

$id_{I^n} : I^n \to I^n \subseteq \mathbb{R}^n$

<u>Ex</u> Um 1-bloco singular $c : I \to M$ é um caminho C^∞ (não necessariamente injetiva)

<u>Obs</u> O bloco singular é a <u>aplicação</u>, não a sua imagem. <u>Ex</u>: dado $p \in M$, $\sigma : I^n \to M$, $\sigma(x) = p$ $\forall x \in I^n$ é um n-bloco singular.



Def Se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\sigma : I^k \to M$ é um k-bloco singular, então

$$\sigma^* \omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

e definimos

$$\int_\sigma \omega = \int_{I^k} f(x)\, dx$$

Ex (Integral de linha)

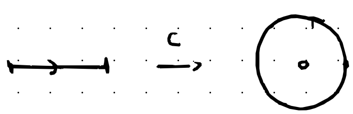
$c : I \to U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega = f_1\, dx_1 + \dots + f_n\, dx_n$

↳ variável t

$$c^*\omega = \big((f_1 \circ c)(t)\, c_1'(t) + \dots + (f_n \circ c)(t)\, c_n'(t)\big)\, dt$$

$$\int_c \omega = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n (f_i \circ c)(t)\, c_i'(t) \Big)\, dt$$

Ex $c(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$



$$\omega = d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

$$\int_c \omega = \int_0^1 \big(\cos(2\pi t)\, 2\pi \cos(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t)\, 2\pi \operatorname{sen}(2\pi t)\big)\, dt = 2\pi$$

Obs Um 0-cubo singular em M é um ponto $p \in M$. Se $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$,

$$\int_p f = f(p).$$

Def Uma cadeia de k-cubos singulares em M (ou uma k-cadeia) é uma expressão da forma

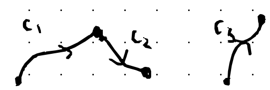
$$c = n_1 \sigma_1 + \dots + n_r \sigma_r$$

onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_i : I^k \to M$ são k-cubos singulares.

("Combinação formal de cubos singulares com coefs. inteiros")

Obs Formalmente: grupo abeliano livre gerado pelo conjunto dos k-cubos singulares

Ex



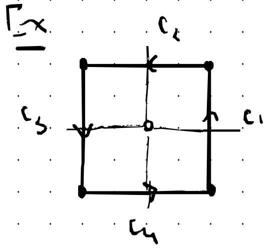
$$c = 2c_1 + c_2 - c_3$$

"Pense: percorrer c_1 2 vezes, c_2 uma vez e c_3 uma vez em sentido contrário"

Se $c = \sum_i n_i \sigma_i$ é uma cadeia, definimos

$$\int_c \omega = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} \omega$$

Ex.



$$\omega = d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$\int_{c_1+c_2+c_3+c_4} \omega = \int_{c_1} \omega + \dots + \int_{c_4} \omega$$

$$= \dots = 2\pi \quad \text{(Verifique!)}$$

Def Se $\sigma : I^k \to M$ é um k-cubo singular, o bordo de σ é a $(k-1)$-cadeia

$$\partial \sigma = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\sigma_{(i,0)} - \sigma_{(i,1)} \right)$$

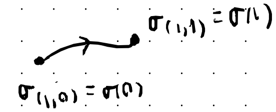
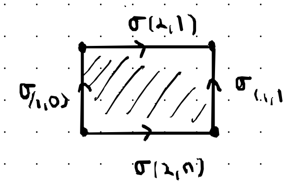
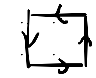
onde $\sigma_{(i,j)} : I^{k-1} \to M$ é dado por

$$(x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \overset{\to\, 0 \text{ ou } 1}{j}, x_i, \dots, x_{k-1})$$

Se $c = \sum_i n_i \sigma_i$ é uma k-cadeia, definimos

$$\partial c = \sum_i n_i \partial \sigma_i .$$

Ex

	$\sigma : I^k \to M$	$\partial\sigma$
$k=0$	$\bullet$	0
$k=1$		$\sigma(1) - \sigma(0)$
$k=2$		$\sigma_{(2,0)} + \sigma_{(1,1)} - \sigma_{(2,1)} - \sigma_{(1,0)}$ 

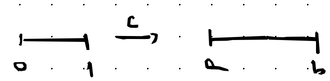
Exercício Mostre que, se c é uma k-cadeia, $\partial(\partial c) = 0$ (ou seja, $\partial^2 = 0$). (Ver Spivak.)

Teorema (Stokes, v1)

Seja M uma variedade. Se $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e c é uma k-cadeia em M, então

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Ex Em $\mathbb{R}$: $c : I \to [a,b]$, $t \mapsto a(1-t) + bt$



$w = f \rightsquigarrow dw = f'(t)\,dt$

$$\int_c dw = \int_0^1 c^*(dw) = \int_0^1 d(f\circ c) = \int_0^1 (f\circ c)'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f'(c(t))\,c'(t)\,dt \overset{u=c(t)}{=} \int_a^b f'(u)\,du$$

$$\int_{\partial c} w = f(b) - f(a)$$

<u>Coro.</u> Se $w \in \Omega^k(M)$ é exata e c é uma k-cadeia <u>fechada</u> (isto é, $\partial c = 0$), então

$$\int_c w = 0.$$

↳ também dizemos <u>k-ciclo</u>

Dem.: Se $w = d\eta$, então

$$\int_c w = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = \int_0 \eta = 0. \quad \square$$

<u>Ex</u> $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ não é exata!

<u>Obs</u> Se c é tal que $\int_c \underbrace{d\theta}_{\text{fechada}} \neq 0$, $\overset{\text{stokes}}{\Longrightarrow}$ c não é o bordo de uma 2-cadeia!

Dem. do Teo. de Stokes, v1:

(i) Podemos supor que $c = \sigma$ é um k-bloco:

Se $c = \sum_i n_i \sigma_i$, então

$$\int_c dw = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} dw \overset{\text{Stokes para } c=\sigma}{=} \sum_i n_i \int_{\partial\sigma_i} w$$

$$= \int_{\sum_i n_i \partial\sigma} w = \int_{\partial c} w.$$

(ii) Podemos supor que $\sigma = id_{I^k}$ e M uma viz. de I^k:

Por def.,

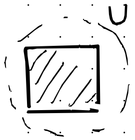
$$\int_\sigma dw = \int_{id_{I^k}} \sigma^*(dw) = \int_{id_{I^k}} d(\underbrace{\sigma^* w}_{(k-1)\text{-forma em uma viz. de } I^k})$$

$$\overset{\text{Stokes para } id_{I^k}}{=} \int_{\partial id_{I^k}} \sigma^* w = \int_{\partial\sigma} w$$

↳ verificaçãozinha

(iii) Podemos supor $w = f\,dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$:

Se $w \in \Omega^{k-1}(U)$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^k$ é aberto contendo I^k, então



$$w = \sum_{i=1}^{k} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k ,$$

logo:

$$\int_{i_{I^k}} dw = \sum_{i=1}^{k} \int_{i_{I^k}} d(f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k).$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial i_{I^k}} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$$

$$= \int_{\partial i_{I^k}} w .$$

Seja então $w = f \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$ e $\sigma = i_{I^k}$. Por um lado,

$$\int_{\partial \sigma} w = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\int_{\sigma_{(j,0)}} w - \int_{\sigma_{(j,1)}} w \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\int_{I^{k-1}} \sigma_{(j,0)}^* w - \int_{I^{k-1}} \sigma_{(j,1)}^* w \right) \quad (\Delta)$$

Se $j \neq i$, então $\sigma_{(j,0)}^* w = \sigma_{(j,1)}^* w = 0$ (pois x_j constante $\rightsquigarrow dx_j = 0$)

Logo,

$$(\Delta) = (-1)^i \int_{I^{k-1}} \big(f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) \big) \underset{\downarrow}{dx}$$

$dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k$

Por outro lado:

$$\int_\sigma dw = \int_\sigma d(f \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k)$$

$$= \int_\sigma (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx \quad (\Delta\Delta)$$

Usando Fubini e o TFC:

$$(\Delta\Delta) \overset{\text{Fubini}}{=} (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k$$

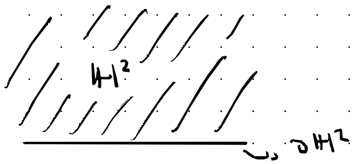
$$\overset{\text{TFC}}{=} (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \big(f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) \big) \, dx$$

$\square$

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 28 26/06/25

20) Variedades com bordo

Seja $\mathbb{H}^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$

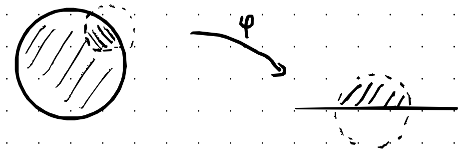


"semi-espaço fechado"

Bordo: $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$

Def Um subconjunto $N \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade com bordo de dimensão d se todo $p \in N$ admite uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $N \cap U$ é difeomorfo a um aberto $V \cap \mathbb{H}^d$ de $\mathbb{H}^d$. O bordo de N é o subconjunto ∂N que corresponde a $\partial\mathbb{H}^d$ sob um tal difeomorfismo. O interior de N é o subconjunto $N \setminus \partial N$.

Ex $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ é uma variedade com bordo de dim. n.



bordo: $\partial D^n = S^{n-1}$

interior: bola aberta

Obs O interior de N é uma variedade (sem bordo) de dim. d. O bordo ∂N é uma variedade (sem bordo) de dim. $d-1$.

Como no caso sem bordo:

- Parametrização local: difeo.

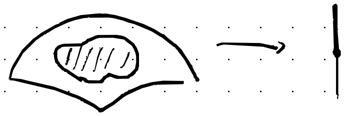
$$\varphi : V \cap \mathbb{H}^d \longrightarrow U \cap N$$

- Carta local: difeo.

$$\varphi : U \cap N \longrightarrow V \cap \mathbb{H}^d$$

Teorema Seja M uma variedade (sem bordo) de dim. d e $g: M \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Se 0 é um valor regular de g, então $N := g^{-1}([0,\infty))$ é uma variedade com bordo de dim. d e $\partial N = g^{-1}(0)$.

$N = \{x \in M : g(x) \geq 0\}$



Dem.: Exercício. Separe em casos $g(p)>0$ ($g^{-1}((0,\infty))$ é aberto!) e $g(p)=0$ (use forma local das submersões). □

Ex $D^n = g^{-1}([0,\infty))$, onde

$$g(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Def Se N é uma variedade com bordo e $p \in N$ o espaço tangente é:

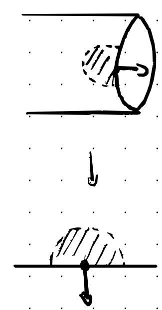
$$T_pN = \operatorname{im}(D\tilde{\varphi}(a) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n)$$

onde $\tilde{\varphi} : V \to \mathbb{R}^n$ é uma extensão de uma parametrização local φ em p e $a \in V \cap \mathbb{H}^d$ é tal que $\varphi(a) = p$.

Ex Se $N = g^{-1}([0,\infty))$ como no teorema, $T_pN = T_pM$.

Obs • T_pN sempre tem dimensão d.

• Se $p \in \partial N$, $T_p(\partial N)$ é um subespaço de dim. $d-1$ de T_pN.

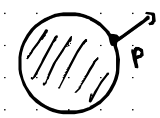


Importante: dado $p \in \partial N$, existe um único vetor unitário

$$\vec{n}(p) \in T_pN$$

ortogonal a $T_p\partial N$ e que "aponta para fora".

Ex $p \in S^1 = \partial D^2$



$$\vec{n}(p) = p \in T_pD^2 \cong \mathbb{R}^2$$ //

Formas diferenciais em variedades com bordo $\omega \in \Omega^k(N)$ são definidas da mesma maneira

$$p \in N \rightsquigarrow \omega(p) \in A^k(T_pN)$$

"localmente da forma"

$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_k} \underbrace{f_{i_1,\dots,i_k}}_{C^\infty} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

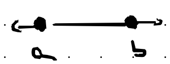
Ex (Orientação induzida)

Uma forma de orientação $\omega \in \Omega^d(N)$ em uma variedade com bordo N induz uma forma de orientação $\eta \in \Omega^{d-1}(\partial N)$ no bordo definida por:

$$\eta(p)(v_1,\dots,v_{d-1}) = \omega(p)(\vec{n}(p), v_1,\dots,v_{d-1})$$

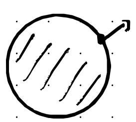
onde $\vec{n}(p) \in T_pN$ é o vetor unitário ortogonal a $T_p(\partial N)$ que aponta para fora.

Ex • $N = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightsquigarrow \partial N = \{a,b\}$



$\omega = dt \rightsquigarrow \begin{cases} \eta(b) = 1 \\ \eta(a) = -1 \end{cases}$

• $N = D^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \partial N = S^1$



$\omega = dx \wedge dy \rightsquigarrow \eta(p)(v) = \overbrace{\omega(p)}^{dt}(p, v)$

$\eta = d\theta|_{S^1}$

21) Integração em variedades (com bordo)

Objetivo: se M é uma variedade com bordo orientável e compacta de dim. n e $\omega \in \Omega^n(M)$, definir

$$\int_M \omega.$$

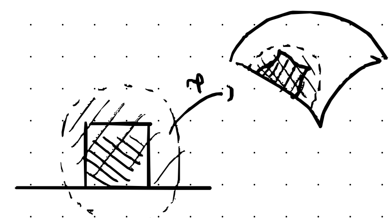
não precisa ser uma forma de orientação

(i) Se $\sigma : I^n \to M$ é um n-bloco singular, definimos

$$\int_\sigma \omega = \int_{I^n} \sigma^* \omega$$

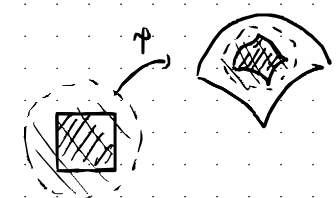
como no caso sem bordo.

(ii) Suponha que $\sigma = \varphi|_{I^n}$, onde φ é uma parametrização local positiva



na viz. do bordo

ou



no interior

(Positiva = compatível com a orientação: se ω' é uma forma de orientação,

$$\omega'(\varphi(x))\,(D\varphi(x)e_1, \dots, D\varphi(x)e_n) > 0$$

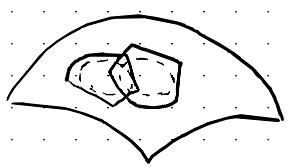
para todo $x \in V$.)

Se $\omega = 0$ fora de $\sigma(I^n)$, definimos

$$\int_M \omega = \int_\sigma \omega$$

Não depende da escolha de σ! (Pela fórmula de mudança de variável; ver Spivak.) (**Obs**: positividade é crucial aqui!)

(iii) No caso geral, considere uma cobertura aberta finita $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que, para todo $i \in I$, existe um n-cubo singular σ_i como em (ii) tal que $U_i \subseteq \sigma_i(I^n)$.



Se $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$

defina $\int_M \omega = \sum_{j \in J} \int_M \varphi_j \omega$.

Def Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto e $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta de X. Uma partição da unidade para X subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de funções C^∞ $\{\varphi_j : U \to \mathbb{R}\}_{j \in J}$ em um aberto U contendo X tais que:

(1) Para todo $x \in X$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

(2) Para todo $x \in X$, existe uma viz. V de x tal que $\{ j \in J : \varphi_j|_{X \cap V} \not\equiv 0 \}$ é finito.

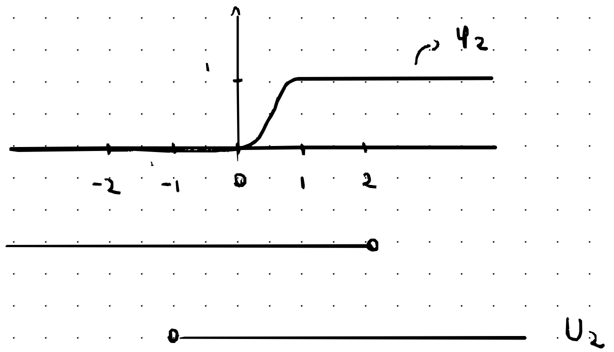
(3) Para todo $x \in X$, $\sum_{j \in J} \varphi(x) = 1$.

(4) O suporte de φ_j está contido em algum U_i. $\hookrightarrow \overline{\{x \in X : \varphi_j(x) \neq 0\}}$

Partições da unidade como acima sempre existem (ver Spivak.) Se $X = M$ é uma variedade, podemos tomar $J = I$.

Ex $X = \mathbb{R}$, $U_1 = (-\infty, 2)$, $U_2 = (-1, \infty)$

$\psi_1 = 1 - \psi_2$



Próxima aula:

Teorema (Stokes, v2)

Seja M uma variedade com bordo compacta orientada de dim n e $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Então

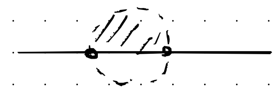
$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

onde ∂M tem a orientação induzida.

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Aula 29 — 31/06/25

Aula passada:

- Variedade com bordo: localmente

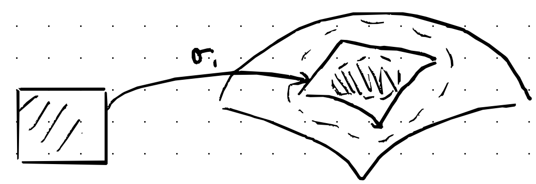


$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$

- M n-variedade com bordo orientada e compacta, $\omega \in \Omega^n(M)$

$$\int_M \omega = \sum_j \underbrace{\int_M \psi_j \omega}_{\int_{\mathbb{H}^n} \sigma_i^*(\psi_j \omega)}$$

$\{\psi_j\}_{j \in J}$ partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$ (I finito)



Obs sempre podemos tomar $J = I$.

21) Integração em variedades (cont.)

<u>Obs</u> Se M não é compacta, ainda é possível definir a integral da mesma forma, desde que

$$\sum_{j\in J} \int_{I^n} |f_j(x)|\,dx \qquad \text{“absolutamente conv.”}$$

convirja, onde $f_j(x)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n = \sigma_j^*(\varphi_j w)$.
Dizemos que w é <u>integrável</u>.
A convergência e a integral não dependem de nenhuma escolha (cf. Spivak, Thm 3.12)

<u>Prop</u>. ("Mudança de variáveis")
Sejam M, N n-variedades (com ou sem bordo) orientadas e $F: M \to N$ um difeomorfismo que preserva orientação. Se $w \in \Omega^n(N)$ é integrável, então

$$\int_N w = \int_M F^* w$$

Dem.: Exercício (direto da def. + $(F\circ G)^* = G^* \circ F^*$) $\square$

<u>Prop</u>. (Irrelevância dos fechados de medida nula)
Se M é uma n-variedade orientada e $F \subseteq M$ é um subconjunto fechado de medida nula (e.g. $F \subseteq N$ variedade de dim. $\leq n-1$), então

$$\int_M w = \int_{M\setminus F} w$$

para toda $w \in \Omega^n(M)$ integrável.

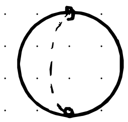
(Ideia: dado $\varepsilon > 0$, cobre F com um aberto U tal que $|\int_U w| < \varepsilon$ e considere uma partição da unidade subordinada a $\{U, M\setminus F\}$. Ver Elon, seção 7.6.)

<u>Coro</u>. Se $\varphi: V \to \varphi(V) \subseteq M$ é uma parametrização local positiva tal que $M \setminus \varphi(V)$ tem medida nula, então

$$\int_M w = \int_V \varphi^* w|_{\varphi(V)}$$

para toda $w \in \Omega^n(M)$ integrável.

Ex $\varphi : V = (0,\pi)^{n-2} \times (0, 2\pi) \longrightarrow S^{n-1}$



(coordenadas esféricas)

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_V \varphi^* \omega$$

$\left(n = 2 \ , \ \omega = \overset{\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}}{d\theta} \rightsquigarrow \int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \right)$

Teorema (Stokes, v2)

Se M é uma n-variedade com bordo compacta orientada e $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

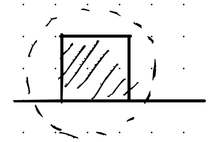
onde ∂M tem a orientação induzida.

positivo

Dem.: (i) Suponha que $\omega = 0$ fora da imagem de um bloco singular $\sigma : I^n \to M \setminus \partial M$ (tal que $\sigma = \varphi|_{I^n}$, onde φ é uma parametrização local de $M \setminus \partial M$). Então

$$\int_M d\omega = \int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega = \underset{\omega|_{\partial\sigma(I^n)} = 0}{0} = \int_{\partial M} \omega .$$

(ii) Suponha agora que $\sigma(I^n) \cap \partial M \neq \emptyset$, mas que $\sigma_{(n,0)}$ é a única face em M.



Então

$$\int_M d\omega = \int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

(iii) No caso geral, considere uma cobertura finita $\{U_i\}_{i \in I}$ e $\sigma_i : I^n \to M$ tais que $U_i \subset \sigma_i(I^n)$ como em (i) ou (ii) e seja $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$.

$$\int_M d\omega = \sum_{i \in I} \int_M \varphi_i \, d\omega = \sum_{i \in I} \int_M \left(d(\varphi_i \omega) - d\varphi_i \wedge \omega \right)$$

$$= \sum_{i \in I} \int_{\partial M} \varphi_i \omega - \int_M \cancel{d \Big(\underbrace{\sum_{i \in I} \varphi_i}_{1} \Big) \wedge \omega}^{\,0}$$

$$= \int_{\partial M} \omega . \ \square$$

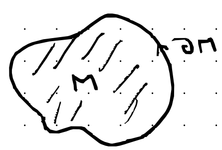
Coro. Seja M uma n-variedade compacta orientada sem bordo. Se $\omega \in \Omega^n(M)$ é exata, então $\int_M \omega = 0$.

Dem.: $\omega = d\eta \Rightarrow \int_M \omega = \int_{\underset{\emptyset}{\partial M}} \eta = 0$. $\square$

22) Green, Gauß, Stokes

Teo. (Green)

Seja $M \subseteq \mathbb{R}^2$ uma 2-variedade compacta com bordo. Se $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(M)$,



então

$$\int_{\partial M} f\,dx + g\,dy = \int_M \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx\,dy$$

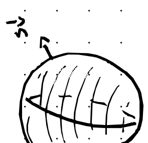
Dem.: Consequência imediata de Stokes, v2. □

Obs Se $r : I \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de ∂M e $F = (f, g)$ é um "campo",

$$\int_{\partial M} f\,dx + g\,dy = \int_{\partial M} \underbrace{\overbrace{\langle F, dr \rangle}^{\text{ou } F \cdot dr}}_{\text{notação do cálculo}}$$

Teo. (Gauß, ou da divergência)

Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma 3-variedade compacta com bordo e $\vec{n}$ o vetor unitário normal a ∂M que aponta para fora. Se $\underset{\text{"campo"}}{F \in C^\infty(M; \mathbb{R}^3)}$, então



$$\int_M \underbrace{\operatorname{div} F}_{\nabla \cdot F} \underbrace{dV}_{dx\,dy\,dz} = \int_{\partial M} \langle F, \vec{n} \rangle \underbrace{dA}_{\text{forma volume de } \partial M}$$

Dem.: Se $\omega = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy$, então $d\omega = \operatorname{div}(F)\, dx \wedge dy \wedge dz$, logo

$$\int_M \operatorname{div} F\, dV = \int_{\partial M} \omega .$$

Para todo $p \in \partial M$, temos

$$dA(p)(\underbrace{v_1, v_2}_{\in T_p \partial M}) = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{n} & v_1 & v_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

isto é, $dA = \vec{n}_1\, dy \wedge dz + \vec{n}_2\, dz \wedge dx + \vec{n}_3\, dx \wedge dy$.

Note que
$$\begin{cases} \vec{n}_1\, dA = dy \wedge dz \\ \vec{n}_2\, dA = dz \wedge dx \\ \vec{n}_3\, dA = dx \wedge dy \end{cases}$$

(Se $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal, então

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_2 c_3 - c_2 b_3,\ -(b_1 c_3 - c_1 b_3),\ (b_1 c_2 - c_1 b_2)))$$

Logo, $\langle F,\vec{n}\rangle\, dA = F_1 n_1\, dA + F_2 n_2\, dA + F_3 n_3\, dA$
$= \omega$. $\square$

Teo. (Stokes, clássico)

Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma 2-variedade com bordo orientada compacta e seja $\vec{n}$ o vetor unitário

normal a M que aponta para fora. Seja T o campo de vetores em ∂M tal que $ds(T)=1$, onde ds é a forma volume de ∂M. Se $F \in C^\infty(M;\mathbb{R}^3)$, então

$$\int_M \langle \underbrace{\mathrm{rot}(F)}_{\nabla\times F}, \vec{n}\rangle \underbrace{dA}_{\text{forma volume de } M} = \int_{\partial M} \langle F, T\rangle\, ds$$

$$\left(\iint_M \left(n_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) + \cdots \right) dS = \int_{\partial M} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \right)$$

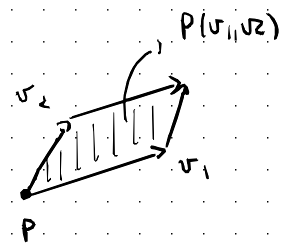
Dem.: Se $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \in \Omega^1(M)$, então $\langle \mathrm{rot}(F), \vec{n}\rangle\, dA = d\omega$. Por outro lado, $T_1\, ds = dx$, $T_2\, ds = dy$ e $T_3\, ds = dz$. $\square$

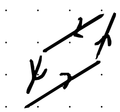
Obs. Se r é uma parametrização de ∂M, o lado da direita se escreve classicamente:

$$\int_{\partial M} F\cdot dr.$$

Interpretação geométrica da derivada exterior:

ω 1-forma $\rightsquigarrow$ $d\omega$ 2-forma



$\partial P(v_1, v_2) =$ 

$$\int_{\partial P(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2)} \omega = \varepsilon^2\, d\omega(p)(v_1, v_2) + O(\varepsilon^2)$$