MM453 – Topologia – Qualificação Mestrado DD/MM/AAAA

NOME: .... RA: ....

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Nota

Atenção: Respostas que não estejam acompanhadas de argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

Responda a **3** das questões abaixo dentre as primeiras 5; e marque com $\times$ no quadro acima aquelas que excluir. **Na sequência,** responda **2** letras da questão 6; marque com $\times$ as letras que exclue.

BOA PROVA!

1. Seja X um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Defina $X^+ = X \cup \{\infty\}$, onde ∞ representa um ponto que não está em X.

   Um subconjunto $A \subset X^+$ é aberto em X^+ se e somente se A verifica uma das duas propriedades: (a) $A \subset X$ e A é aberto em X; (b) $A = X^+ \backslash K$ para algum K subconjunto compacto de X.

   Mostar que

   (a) A coleção de abertos definida acima fazem de X^+ um espaço topológico compacto e Hausdorff.

   (b) X é compacto se e somente se ∞ é um aberto de X^+.

   (c) Se X não é compacto, então é denso em X^+.

2. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito estrelado se existe um $a \in A$ de forma que para todo $p \in A$, o conjunto $\{ta + (1-t)p : \ t \in [0,1]\}$ está contido em A. Mostrar que se A é estrelado então é conexo e simplesmente conexo.

3. Seja X um espaço topológico discreto. Mostrar que uma sequência $(x_n) \subset X$ converge a um ponto $x \in X$ se e somente se existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$, $\forall n \geq N$.

4. Em $\mathbb{R}$ considere a relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Mostre que a aplicação cociente $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ não é fechada e a topologia quociente em $\mathbb{R}/\sim$ é a trivial.

5. Mostre que o produto arbitrario de espaços topológicos é conexo se e somente se cada espaço é conexo.

6. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique detalhadamente sua escolha.

   (a) Se $K \subset X$ é um subespaço compacto, então o fecho $\bar{K}$ é compacto.

   (b) Seja X um espaço topológico Hausdorff e compacto. Então X é metrizável se e somente se X possui uma base enumerável.

   (c) $\mathbb{S}^1$ é homeomorfo a $[0,1)$.

   (d) Se $A \subset \mathbb{R}$ é conexo e contém pelo menos dois pontos, então $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$.

Exame de Qualificação de MM719 - Fevereiro de 2025

Nome: ____ RA: ________

Respostas sem argumentos que as justifiquem serão desconsideradas! As contas feitas nas resoluções fazem parte do argumento e, portanto, não devem ser descartadas.

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, -4x_1 + 4x_2 + 2x_4, -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_4).$$

   (a) (15pts) Encontre uma base de Jordan e a correspondente forma canônica de Jordan.

   (b) (10pts) Encontre uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja a forma canônica racional de T e calcule $P^{-1}AP$, sendo A a matriz de T na base canônica.

   (c) (10pts) Mostre que um subespaço T-invariante de dimensão 3 ou 4 é soma direta de subespaços T-invariantes cujas dimensões são 1 e 2 e caracterize os que tem dimensão 1 e 2.

2. (10pts) Suponha que $\dim(V)$ seja finita e α seja uma base de V. Mostre que, se $\alpha^* = f_1, \ldots, f_n$ é a base dual, então a família $(f_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ definida por $f_{i,j}(v, w) = f_i(v)f_j(w)$ para todo $v, w \in V$, é uma base para $B(V)$, o espaço das formas bilineares em V.

3. (10pts) Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Mostre que, se T é operador linear autoadjunto em V, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V$, existe autovalor μ de T tal que $|\lambda - \mu| \|v\| \le \|T(v) - \lambda v\|$.

4. Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) (10pts) Se $V_1, \ldots, V_m$ são os subespaços T-primários de V e W é um subespaço de V satisfazendo $W = \oplus_{j=1}^{m}(W \cap V_j)$, então W é T-invariante.

   (b) (10pts) Se $1 < \dim(V) \in \mathbb{Z}$, existe $T : S^2 V \to \bigwedge^2 V$ linear sobrejetora. (Aqui, $S^2 V$ e $\bigwedge^2 V$ denotam as potências simétrica e exterior de V.)

   (c) (10pts) Se T e S são operadores lineares cujas formas de Jordan possuem m e n blocos de Jordan, respectivamente, então $T \otimes S$ possui forma de Jordan com mn blocos.

5. (15pts) Mostre que existe única transformação linear $\Gamma : V \otimes W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^*, W)$ satisfazendo $\Gamma(v \otimes w)(f) = f(v)w$ para quaisquer $v \in V, w \in W, f \in V^*$. Além disso, se $\dim(V)$ é finita, Γ é um isomorfismo. (Aqui, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V^*, W)$ denota o espaço vetorial das transformações lineares de V^* em W, sobre o corpo $\mathbb{F}$.)

6. (10pts) Considere a forma quadrática no $\mathbb{R}^3$ dada por $q(x, y, z) = -2xy + 4xz - 6yz$ e seja ϕ a forma bilinear simétrica tal que $q(v) = \phi(v, v)$. Encontre base de $\mathbb{R}^3$ que seja ortogonal com respeito a ϕ e use-a para descrever os vetores isotrópicos com respeito a ϕ.

MM720 - Análise no Rn - Qualificação Mestrado 17/02/2025

NOME: ________________________ RA: ________________________

Q1 Sejam γ, f, g, h difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ de tal forma que $\gamma = h \circ g \circ f$, $f(0,0) = (1,1)$, $g(1,1) = (2,2)$ e $h(2,2) = (0,0)$. Calcule a derivada da inversa de h no ponto $(0,0)$ (i.e. $Dh^{-1}(0,0)$) sabendo que

$$D\gamma(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Df(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Dg(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q2 Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $Df(x)$ é invertível para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e $f^{-1}(K)$ é compacto sempre que $K \subset \mathbb{R}^3$ for compacto. Mostre que $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$.

Q3 a) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função. Defina a derivada de f no ponto $x \in U$.

b) Sejam $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma transformação bilinear. Exiba a derivada de B (mostrando porquê é a derivada de fato).

c) Considere $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ definida por

$$f(X) := XX^T$$

onde X é uma matriz n por n. O contradomínio de f são as matrizes simétricas e os espaços euclidianos respectivos referem-se as coordenadas das matrizes. Mostre que I é um valor regular de f.

d) Ainda nas notações do item anterior. Mostre que o conjunto $\{X \in \mathbb{R}^{n^2} | XX^T = I\}$ é uma variedade diferenciável em R^{n^2} e calcule a dimensão desta variedade.

Q4 a) Enuncie o teorema de Stokes (na versão com formas diferenciáveis).

b) Se M é uma variedade com bordo e M é orientável explique o que significa M ser orientável e como é definida a orientação em ∂M.