Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

# $^{+2}$Notas de Álgebra Linear II

September 14, 2025

*"No princípio Deus criou os céus, a terra e...*
*a Álgebra Linear"* - Gênesis 1:1

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

** Conteúdo basado na disciplina MM719 (Álgebra Linear) ministrada pelo profesor Adriano Moura e [1], de sua autoría também, no período 2025-II. **

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Notação** | $\diamondsuit$ Definição | $(-)^{\diamondsuit}$ Aberto | $(-)^{\blacklozenge}$ Fechado |
| $\square$ Lema | $\square$ Proposição | $\blacksquare$ Teorema | $\boxtimes$ Corolário |

# § Preliminares

É preciso lembrar algumos resultados do curso de Álgebra Linear I, podem ser aprofundados se queser nos capítulos 5 e 6 de [1]. Também, algumas propiedades e detalhes do anel de polinômios.

## Espaços Vetoriais

$\diamondsuit$ Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, e $V \neq \emptyset$. Um $\mathbb{F}$-*espaço vetorial* é uma tripla $(V, +, \cdot)$ onde, $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ são operações tais que, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\forall v, w \in V$, temos,

(V1) $(V, +)$ é grupo abeliano.

(V2) $(V, \cdot)$ asocia, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.

(V3) Distributividade I, $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

(V4) Distributividade II, $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.

(V5) Neutro da multiplicação (por escalar), $1 \cdot v = v$.

◇ Um subconjunto $W \subseteq V$ não vacío é dito de *subespaço*, denotamos $W \leq V$, se $\forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{F}$, temos $w_1 + \lambda w_2 \in W$.

◇ Sejam $\alpha = (v_i)$ uma familia de vetores em $V$ e $m \in \mathbb{N}$. Uma *combinação linear* de $\alpha$, é um vetor em $V$ da forma $v = \sum_{j \leq m} x_{i_j} v_{i_j}$, onde $x_{i_j} \in \mathbb{F}$.

*Nota.* Denotamos por $[\alpha]$, ao conjunto de todas as combinações lineares de $\alpha$, repare que $[\alpha] \leq V$. Também, se $\alpha = \{v\}$ então $[\alpha] = [v] = \mathbb{F}v$.

◇ Uma familia $\alpha = (v_i)$ é l.i. sse $\forall j \in I$, $v_j \notin [\alpha \setminus \{v_j\}]$. Alem disso, se $[\alpha] = V$ então $\alpha$ é chamada de *base* de $V$.

■ **5.5.1.** Todo espaço vetorial tém base e quaisquer duas bases tém mesma cardinalidade. → [1, Pág. 185]

◇ Seja $\alpha$ uma base de $V$. Então, $\dim V := \#\alpha$ é a *dimensão* de $V$.

◇ Seja $(V_i)$ familia de subespaços em $V$, definimos a soma deles somo sendo $\sum V_i := [\bigcup V_i]$. A soma é direta se $\forall j \in I$, $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i = \{0\}$.

*Nota.* Se a soma é direta escrevemos $\bigoplus V_i$.

□ **5.3.7.** A soma $\sum V_i$ é direta $\leftrightharpoons \forall v \in \sum V_i$, $\exists m \in \mathbb{N}$ e $\exists! v_{i_j} \in V_{i_j}$ tais que $v = \sum_{j \leq m} v_{i_j}$. → [1, Pág. 174]

□ **5.4.6.** Sejam $\alpha = (v_i)$ e $V_i = \mathbb{F}v_i$ então $\alpha$ é l.i. $\leftrightharpoons \sum \mathbb{F}v_i$ é direta.

⊠ $\alpha$ é base $\leftrightharpoons \forall i \in I,\ v_i \neq 0$ e $V = \bigoplus \mathbb{F}v_i$. Logo, da □ 5.3.7. temos que $\forall v \in V$, $\exists m \in \mathbb{N}$ e $\exists! x_{i_j} \in \mathbb{F}$ tais que $v = \sum_{j \leq m} x_{i_j} v_{i_j}$. → [1, Pág. 178]

*Nota.* Os $x_{i_j}$ são as *coordenadas* de $v$ na base $\alpha$, identificamos comumente,

$$(x_{i_j}) =: [v]_\alpha \sim [x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}]^T \in M_{m \times 1}(\mathbb{F}).$$

## Transformações Lineares

◇ Sejam $V$ e $W$ $\mathbb{F}$-espaços vetoriais. Uma função $T : V \to W$ é dita *linear* se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ tém-se que $T(v_1 + \lambda v_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2)$.

◇ Sejam $T : V \to W$ linear, $\alpha = (v_j)$ e $\beta = (w_i)$ bases de $V$ e $W$ respetivamente. Então, se $[T(v_j)]_\beta = (a_{ij})$, a *matriz asociada* $[T]^\alpha_\beta := (a_{ij})$ determina $T$ no sentido que, $\forall v \in V$, $[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta [v]_\alpha$.

*Nota.* Se $W = V$ e $T = \mathbb{1}_V$, então $[\mathbb{1}_V]^\alpha_\beta$ é a matriz cambio de base.

■ **6.1.6.** Sejam $\alpha = (v_i)$ base de $V$ e $\beta = (w_i)$ familia de vetores em $W$, então $\exists! T : V \to W$ linear tal que $\forall i \in I,\ T(v_i) = w_i$.

*Nota.* O espaço vetorial das funções $f : V \to W$, com a soma e o produto usuais é denotado no texto como $\mathcal{F}(V, W)$.

◇ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) := \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T \text{ é linear}\}$. Se $V = W$ então denotamos $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$.[1]

□ **0.1.** Algumas propiedades coletadas de [1, Seç. 6.1].

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \leq \mathcal{F}(V, W)$.

(b) Sejam $\alpha = (v_j)$ e $\beta = (w_i)$ bases de $V$ e $W$ fixas. A função $\zeta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \ni T \mapsto [T]^\alpha_\beta \in M_{\#I \times \#J}(\mathbb{F})$ é linear e injetora.

(c) Sejam $\gamma$, $\alpha$ e $\beta$ bases de $U$, $V$ e $W$, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ e $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ então $T \circ S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, W)$ e $[T \circ S]^\gamma_\beta = [T]^\alpha_\beta [S]^\gamma_\alpha$.

(d) Se $\alpha$ e $\beta$ são bases de $V$ e $W$, e $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é invertivél então $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V)$ e $[T^{-1}]^\beta_\alpha = ([T]^\alpha_\beta)^{-1}$.

◇ $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é um *isomorfismo* se fora sobrejetivo. Dois espaços são *isomorfos*, $V \cong W$, se $\exists T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ isomorfismo.

*Nota.* A transformação $\zeta$ do ítem (b) é sobrejetiva se $\#J < \infty$.

■ **6.1.9.** $V \cong W \leftrightharpoons \dim V = \dim W$. → [1, Pág. 191]

□ Seja $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Se $U \leq V$ e $U' \leq W$ então também $T(U) \leq W$ e $T^{-1}(U') \leq V$. → [1, Pág. 199]

$$◇\ V_T := T^{-1}(\{0\}) = \mathcal{N}(T) \text{ e } \mathrm{Im}(T) := T(V).$$

[1] "Hom" vém de homomorfismo e "End" de endomorfismo.

*Nota.* Chamamos estos espaços especiais de *núcleo* e *imagem* de $T$ e suas dimensões de *nulidade* e *posto*.

■ **6.3.6.** $\dim V = \dim V_T + \dim V(T)$. $\rightarrow$ [1, Pág. 201]

□ **6.3.9.** $T$ é injetora $\leftrightharpoons V_T = \{0\}$. $\rightarrow$ [1, Pág. 202]

◇ Sejam $\lambda \in \mathbb{F}$ e $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$. Se $\exists v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ então $V_\lambda$ é *autoespaço* e $v$ um *autovetor*, ambos associados ao *autovalor* $\lambda$.

◇ $T$ é *diagonalizavél* se $\exists \beta$ base de $V$ formada por autovetores.

*Nota.* No caso diagonalizavél e tudo perfeito de mais, pois se $\lambda_j$ são os autovalores dos $v_j \in \beta$ então, $[T]_\beta^\beta = \mathrm{diag}(\lambda_j)$. Em versão matricial temos,

$$[T]_\beta^\beta = [\mathbb{1}_V]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [\mathbb{1}_V]_\alpha^\beta \quad \sim \quad B = P^{-1}AP.$$

É sabido que não todos os operadores são diagonalizavéis. O objetivo do [1, Cap. 8] é ver que, ainda assim, sempre e possivél levar $T$ a uma matriz quasi-diagonal $B$ (Formas Canônicas).

## O Anel de Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Não vou aprofundar nos detalhes relaçoados com anels, fica muito longe. Por tanto, recomendo rever os conceitos de anel, ideal, domínio de integridade, ideal principal, PID e UFD-Algoritmo de Euclides.

◇ Sejam $I = \{t^k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ conjunto respeitando as leis usuais de potências e $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ um corpo.[2] Defina, $\forall i \in I$, o espaço vetorial $V_i = \{a_i t^i : a_i \in \mathbb{F},\ t^i \in I\}$, com as operações,

- $+ : V_i \times V_i \ni (a_i t^i, b_i t^i) \mapsto (a_i + b_i) t^i \in V_i$.
- $\cdot : \mathbb{F} \times V_i \ni (\lambda, a_i t^i) \mapsto (\lambda \cdot a_i) t^i \in V_i$.

Assim, o anel de polinômios com coeficientes em $\mathbb{F}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{F}) := \sum V_i$.

[2] Quer dizer que $t^0 = 1$ e $t^m \cdot t^n = t^{m+n}$.

*Nota.* $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ é uma estructura maravilhosa pois, só por mençõar algumas de suas carateristícas que seram de nosso interes aquí,

- É espaço vetorial de dimensão infinita e $\alpha = \{1, t, t^2, \ldots\}$ é uma base, seguindo a $\square$ 5.3.7., $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \ni p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_{i_k} t^{i_k}$.
- Temos um produto bém definido e comutativo que distribui a soma, o que faz dele um anel e mais geralmente uma álgebra comutativa.
- É PID, ou seja que todo ideal é gerado.
- PID $\Rightarrow$ UFD, ou seja que temos fatorização única em primos, propiedades de divisibilidade e algoritmo da divisão.

$\diamondsuit$ Seja $g(t) = \sum^{m} a_k t^k \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $a_m \neq 0$. Então o *grau*, $\mathrm{gr}(g) := m$ e no caso de $a_m = 1$ dizemos que $g$ é *mônico*.

$\diamondsuit$ $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \ni g$ divide $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $g \mid f$, sse $\exists q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $f = gq$. Também, o conjunto dos divisores é $\mathrm{Div}(f) := \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : g \mid f\}$.

$\diamondsuit$ Diz-se que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \mathbb{F}^{\times}$ é *primo* sse $\mathrm{Div}(p) = \{1, p\}$.

$\blacksquare$ (*Fatoração em primos*) Seja $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \setminus \{1\}$ mônico. Então, $\{p_j \in \mathrm{Div}(f) : p_j$ e primo$\}$ é finito e $\exists! k_j \in \mathbb{N}$ tais que $f = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

$\square$ **0.2.** Algumas propiedades da divisibilidade,

(a) $g \mid f$ e $f \mid h \Rightarrow g \mid h$.

(b) $g \mid f \;\; \not\Leftarrow\;\; \mathrm{gr}(g) \leq \mathrm{gr}(f)$.

(c) $g \mid f$ e $g \mid h \Rightarrow g \mid (f+h)$.

(d) Se $g \mid f \Rightarrow \forall r \in \mathcal{P}(\mathbb{F}),\ g \mid fr$.

(e) $g \mid f$ e $f \mid g \;\; \Leftrightarrow\;\; \exists \lambda \in \mathbb{F}^{\times} : f = \lambda g$.

$\blacksquare$ (*Algoritmo da Divisão*) Sejam $f,\ g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ com $g \neq 0$. Então, $\exists! q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $f = gq + r$ e $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

$\blacksquare$ Sejam $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e $f_1, f_2, \ldots, f_n$ não todos nulos, então $\exists! d \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ mônico ao que chamamos de $\mathrm{mdc}(f_j)$ que verifica,

i. $d \in \bigcap^n \mathrm{Div}(f_j)$

ii. Se $e \in \bigcap^n \mathrm{Div}(f_j) \Rightarrow e \mid d$.

■ (*Bézout*) Se $d = \mathrm{mdc}(f_j)$ então $\exists a_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $\sum^n a_j f_j = d$.

*Nota.* Caso particular $\mathrm{mdc}(f_1, f_2) = 1$, tá dizendo que $\exists a, b \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $a(t)f_1(t) + b(t)f_2(t) = 1$, isso sería importante mais pra frente.[3]

# § 1 Teoria Geral de Operadores Lineares

Se $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ então $T^m := \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{m \text{ veces}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, por convenção $T^0 = \mathbb{1}_V$. Seguindo o ítem (a) da □ 0.1. , $\forall p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ temos,

$$p(t) = \sum^m a_k t^k \quad \rightsquigarrow \quad P(T) = \sum^m a_k T^k \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

Também, seguindo a notação dos preliminares $V_p = V_{p(T)} = \{v \in V : p(T)(v) = 0\}$. De aquí pra frente seja $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ fixo.

*Nota.* Sendo $p = t - \lambda$, temos uma definição equivalente de autoespaço como sendo $V_p \neq \{0\}$.

## 1.1 Polinômio Mínimo e Descomposição Primária

◇ Sejam $\lambda \in \mathbb{F}$, $m \in \mathbb{N}$ e $p(t) = (t - \lambda)^m$. Se $\exists v \in V_p \setminus \{0\}$ é chamado de *autovetor geralizado* associado ao autovalor $\lambda$.

◇ $W \leq V$ é $T$*-invariante* se $T(W) \subseteq W$, e a restrição de $T|_W$ e chamada de o *operador inducido* em $W$.

□ **8.1.1.** Se $S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ são tais que $S \circ T = T \circ S$, então $V_S$ é $T$-inv.
$\to$ Se $w \in V_S \Rightarrow S(T(w)) = T(S(w)) = 0 \Rightarrow T(w) \in V_S$

*Nota.* Dado que $p(T) \circ T = T \circ p(T)$ os subespaços $V_p$ são $T$-inv, e também, $\forall p, f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $V_p \subseteq V_{fp}$. Em particular, $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}}$.

◇ Sejam $\lambda \in F$ e $V_p^\infty := \bigcup_{k \geq 0} V_{p^k}$. No caso, $p = (t - \lambda)$ então $V_p^\infty$ é chamado de *autoespaço geralizado* associado ao $\lambda$.

[3] Não falei, mais quando isso acontece diz-se que $f_1$ e $f_2$ são coprimos

*Nota.* $V_p^\infty$ é $T$-inv e se $\dim V = n < \infty$ então $V_p^\infty = V_{p^n}$.

$$\diamond \quad \mathscr{A}_T := \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) = 0\}$$

☐ **8.1.3.** Se $\dim V = n < \infty$ então $\mathscr{A}_T \neq \{0\}$.

> Lembre-se que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$, logo, $\exists m \leq n^2$ tal que $\{T^j\}_{j=0}^m$ é l.d. Tome $m$ mínimo e faça $f(T) := T^m - \sum^{m-1} a_k T^k \in \mathscr{A}_T$.

☐ **8.1.4.** Se $\mathscr{A}_T \neq \{0\}$ então $\exists! m_T \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ mônico tal que $\forall f \in \mathscr{A}_T,\ m_T \mid f$.

> $\mathscr{A}_T$ é ideal então $\exists! m_T$ tal que $\mathscr{A}_T = \langle m_T \rangle$. Se prefer pegue $m_T$ de menor grau possivél, suponha $f = m_T q + r$ e conclua que $r = 0$. Para unicidade suponha outro e usei ☐ 0.2. (e).

*Nota.* No caso que $\mathscr{A}_T = \{0\}$ fazemos $m_T := 0$ é assim que $V = V_{m_T}$. Se $S = T|_{V_p}$ então $p \in \mathscr{A}_S$. Também, pose-se verificar que o polinômio construido na ☐ 8.1.3. é de fato $m_T$.

▫ **8.1.6.** Se $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ co-primos então, a restrição de $f|_{V_g}$ é injetora. $\to$ Faz usando o ■ *(Bézout)*, lembre-se que $1 \rightsquigarrow \mathbb{1}_V$

☐ **8.1.7.** Seja $\mathscr{A}_T \neq \{0\}$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo. Então, $V_p \neq \{0\} \leftrightharpoons p \mid m_T$.

> $(\Rightarrow)$ Suponha $p \nmid m_T$ então são co-primos, aplique ▫ 8.1.6. e conclua $V_p = \{0\}$. $(\Leftarrow)$ Suponha $p \mid m_T$ e $V_p = \{0\}$ e contradiga.

⊠ **8.1.8.** Seja $\mathscr{A}_T \neq \{0\}$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Então, $V_p \neq \{0\} \leftrightharpoons \exists f \in \mathrm{Div}(m_T)$ e $\exists g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que $p = gf$. Se $\nexists q \in \mathrm{Div}(m_T)$ tal que $q \mid g$ então $V_p = V_f$.

> É coisa de fatorar em primos, ter prensentes as propiedades ☐ 0.2. (a), $V_p \subseteq V_{fp}$ e conseguir as hipótese da ☐ 8.1.7..

$\diamond$ Sejam $v \in V$ e $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ v_k = T^k(v)$. A familia $\mathscr{C}_T^\infty(v) := (v_k)$ é chamada de *$T$-ciclo* gerado por $v$, enquanto $C_T(v) := [\mathscr{C}_T^\infty(v)]$ é o *subespaço $T$-cíclico* gerado por $v$.

*Nota.* É fácil ver que $C_T(v)$ é $T$-inv. Alternativamente, pode-se definir $C_T(v) = \mathscr{C}_T^m(v)$, onde $m = \dim C_T(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

◇ Para $\alpha = (v_i)$ familia em $V$ definimos $C_T(\alpha) := \sum C_T(v_i)$.

*Nota.* Se $\dim V = n < \infty$ então num análise analogo da □ 8.1.3. pode-se construir $m_{T,v} = m_v$ pensando no mínimo $m$ tal que $\mathscr{C}_T^m(v)$ é l.d.. Também, $C_T(v) \subseteq V_{m_v} \leftarrow T$-inv, sendo $S = T|_{V_{m_v}}$ temos $m_v = m_S$.

⊠ **8.1.9.** $\forall v \in V$ temos $m_v \mid m_T$. $\rightarrow$ Segue da observação acima e □ 8.1.7.

□ **8.1.11.** Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ co-primos dois a dois. Então a soma $\sum^m V_{p_j}^\infty$ é direta.

> Seguendo □ 5.4.6., pega $v_j \in V_{p_j}^\infty \setminus \{0\}$ e mostra que $\alpha = (v_j)$ é l.i.. Faz por indução, no paso indutivo suponha $\sum^m a_j v_j = 0$ e $g = \prod_{j<m} p_j$. Usa o □ 8.1.6. com cada $g_j = p_j$ e $f = p_m$ pra concluir $a_m = 0$.

□ **8.1.12.** Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ co-primos dois a dois e $f = \prod^m f_j$. Então, $V_f = \bigoplus V_{f_j}$. $\rightarrow$ Não suporta resumo, olha [1, Pág. 261]

■ **8.1.13.** (*Descomposição Primária*) Sejam $\mathscr{A}_T \neq \{0\}$ e $\prod^m p_j^{k_j}$ a fatoração em primos de $m_T$. Então, $V = \bigoplus V_{p_j^{k_j}}$.

> Faça $p_j^{k_j} = f_j$ na □ 8.1.12., o resultado segue do fato de $V = V_{m_T}$.

*Nota.* Os termos da soma são chamados de *subespaços $T$-primarios*.

□ **8.1.16.** Sejam $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo e $u, v \in V$ tais que $m_u = m_v = p$. Então, ocurre exatamente uma das duas opções a seguir,

i. $C_T(u) = C_T(v)$. ii. $C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}$.

$* \; C_T(v) = \{q(T)(v) : q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\} \; *$ $\rightarrow$ Prova meramente conjuntista

> O resultado segue de mostrar $\forall w \in C_T(v)$, $C_T(v) = C_T(w)$. Prova as duas contenções usando a igualdade acima e o ■ (*Bézout*).

☐ **8.1.17.** Seja $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo tal que $\dim V_p < \infty$. Então, $\exists l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_l \in V_p$ tais que $V_p = \bigoplus^l C_T(v_k)$.

> Basta ver que $\forall v \in V_p \backslash \bigoplus^{l-1} C_T(v_k)$ temos $C_T(v) \cap \bigoplus^{l-1} C_T(v_k) = \{0\}$. Suponha $w \neq 0$ naquela interseção e usa os varios fatos em □ 8.1.16. pra contradizer, conseguindo ver que $v \in \bigoplus^{l-1} C_T(v_k)$.

☐ **8.1.18.** Seja $p_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ primo tal que $\dim V_{p_j}^\infty < \infty$. Então,

$$\mathrm{gr}(p_j) \mid \dim V_{p_j}^\infty \quad \text{e} \quad n_j := \frac{\dim V_{p_j}^\infty}{\mathrm{gr}(p_j)} \geq \min\{k : V_{p_j}^\infty = V_{p_j^k}\}.$$

> A demostração não suporta resumo, olha se queser [1, Pág. 263].

*Nota.* Pode e debe-se verificar que $\min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\} = k_j$ do ■ 8.1.13., é assim que conseguimos definir o *polinômio carateristico* como sendo $c_T := \prod^m p_j^{n_j} \in \mathscr{A}_T$, exatamente o mesmo do ■ (*Caley-Hamilton*).

> **Encontrando a Descomposição Primária**
>
> **Paso 1.** Escolha uma base $\alpha$ pra seu espaço $V$ e determine $[T]_\alpha^\alpha = A$.
>
> **Paso 2.** Encontre $c_T = \det(t\mathbb{1}_V - A)$ e sua fatoração em primos $c_T = \prod^m p_j^{n_j}$. → Precisa habilidade na hora das contas do det
>
> **Paso 3.** Estude subespaços e encontre o $\min k : \dim V_{p_j^k} = \mathrm{gr}(p_j) n_j$.

*Nota.* Na hora das contas são úteis as propiedades,

i. $\det(a_{ij}) = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$. → Formula de Laplace

ii. $\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \det A \det B$ . → $A$ e $B$ quadradas

iii. $\begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ \mu a_{i1} & \cdots & \mu a_{in} \\ | & \cdots & | \end{bmatrix} = \mu \det\left(\begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}\right)$. → Saca múltiplos das filas

## 1.2 Complementos Invariantes e Bases Cíclicas

## 1.3 Formas Canônicas

# References

[1] Moura, Adriano (2025). *Álgebra Linear com Geometría Analítica*. UNICAMP, Campinas, SP.