Álgebra Linear Avançada
Bases Hiperbólicas e Ortogonais

Adriano Moura

Unicamp

2020

Denotaremos por $B_s(V)$ e $B_a(V)$ os subespaços de $B(V)$ formados pelas formas bilineares simétricas e alternadas em V, respectivamente. Defina também $B_{as}(V) = B_s(V) \cup B_a(V)$.

Suporemos que $\dim(V) < \infty$ e que $\phi \in B_{as}(V)$. Assim, $\perp_\phi$ é simétrica e ${}^{\perp_\phi}\alpha = \alpha^{\perp_\phi}$ para toda família de vetores α em V. Escreveremos apenas $\perp$ ao invés de $\perp_\phi$. O objetivo principal é desenvolver um procedimento que encontre base α de V de modo que ${}_\alpha[\phi]_\alpha$ seja "o mais simples possível". Escreveremos simplesmente $[\phi]_\alpha$ ao invés de ${}_\alpha[\phi]_\alpha$.

Um subespaço W de V é dito degenerado (ou singular) com respeito a ϕ se $\phi|_W$ for degenerada. Defina

$$\mathrm{rad}(W) = W \cap W^\perp$$

e note que o posto de $\phi|_W$ é $\dim(W) - \dim(\mathrm{rad}(W))$. Assim, W é degenerado se, e somente se, $\mathrm{rad}(W) \neq \{0\}$. Note também que

$$(1) \qquad V = V^\perp \oplus W \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rad}(W) = \{0\}.$$

De fato, se $w \in \mathrm{rad}(W)$, então $v \perp w$ para todo $v \in V^\perp$ e $w' \perp w$ para todo $w' \in W$. Portanto, $w \in V^\perp \cap W = \{0\}$.

Degenerecência de Subespaços

Proposição 9.4.1

Suponha que ϕ é não degenerada e seja W um subespaço de V.

- (a) $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$.
- (b) $V = W + W^\perp$ se, e somente se, $W \cap W^\perp = \{0\}$.
- (c) $(W^\perp)^\perp = W$.
- (d) $\operatorname{rad}(W) = \operatorname{rad}(W^\perp)$. Em particular, W é não degenerado se, e somente se, $W^\perp$ também o for.

Dem.: Seja $T : V \to W^*, v \mapsto {}_\phi D(v)|_W$. Como todo elemento de W^* é a restrição a W de um elemento de V^* (Exc. 9.2.3) e ${}_\phi D$ é sobrejetora (pois ϕ é não deg.), T é sobrejetora e $\dim(V) = \dim(W^*) + \dim(\mathcal{N}(T))$.

Por outro lado, $v \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow \phi(v, w) = 0$ para todo $w \in W$. Ou seja, $\mathcal{N}(T) = W^\perp$, o que demonstra (a). A parte (b) é óbvia da (a). Como $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ (mesmo que ϕ seja deg.) e (a)$\Rightarrow \dim((W^\perp)^\perp) = \dim(W)$, (c) segue já que as dimensões são finitas. Finalmente, $\operatorname{rad}(W^\perp) = W^\perp \cap (W^\perp)^\perp = W^\perp \cap W = \operatorname{rad}(W)$. $\square$

Degenerecência de Subespaços

Suponha que $V = \mathbb{F}^2$ e que $[\phi]_\alpha = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ sendo α a base canônica. Seja $W = [e_2]$ e veja que $V^\perp = W$ e $W^\perp = V$ mostrando que a parte (a) da última proposição não é válida. Como $V = V + V^\perp$ e $V \cap V^\perp = [e_2]$, a parte (b) também falha. Além disso, $([e_1]^\perp)^\perp = [e_2]^\perp = V$, mostrando que a parte (c) também falha. Finalmente, (d) falha pois $\mathrm{rad}([e_1]) = \{0\}$ e $\mathrm{rad}([e_1]^\perp) = \mathrm{rad}([e_2]) = [e_2]$.

Proposição 9.4.3

Seja W um subespaço de V. Então $V = W \oplus W^\perp$ se, e somente se, W for não degenerado.

Dem.: Como $\mathrm{rad}(W) = W \cap W^\perp$, se $V = W \oplus W^\perp$, segue que $\mathrm{rad}(W) = 0$. Reciprocamente, sendo W não degenerado e $\psi := \phi|_W$, a transformação linear $T : V \to W^*, v \mapsto {}_\phi D(v)|_W$ é sobrejetora, pois ${}_\phi D|_W = {}_\psi D : W \to W^*$ que é um isomorfismo. A conclusão agora segue como na demonstração das partes (a) e (b) da proposição anterior. $\square$

Pares Hiperbólicos

Suponha que ϕ seja alternada. Um par ordenado (v, w) de vetores de V é dito hiperbólico se $\phi(v, w) = -1$. Neste caso, o subespaço por eles gerado é chamado de um plano hiperbólico. Diremos que V é um espaço hiperbólico se for soma direta de planos hiperbólicos mutuamente ortogonais.

Suponha que V seja hiperbólico, digamos $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ com V_j um plano hiperbólico gerado por v_j, w_j com (v_j, w_j) um par hiperbólico para todo $1 \leq j \leq m$. Então, se $\alpha = v_1, w_1, \ldots, v_m, w_m$, temos

$$[\phi]_\alpha = H_m := \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & H \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em particular, ϕ é não degenerada.

Teorema 9.4.4

Se $\phi \in B_a(V)$, todo subespaço de V complementar a $V^\perp$ é hiperbólico. Em particular, existe base α de V tal que

$$[\phi]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_m \end{bmatrix} \qquad \text{com } m = \mathrm{pt}(\phi)/2.$$

Dem.: A segunda afirmação é consequência imediata da primeira. Por (1), W é não degenerado e podemos supor spg que ϕ é não degenerada. Procederemos por indução em $\dim(V)$. Se $V = \{0\}$, não há nada para fazer. Caso contrário, $\exists\ v, u \in V$ t.q. $\phi(v,u) = a$ com $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Definindo $w = -a^{-1}u$, segue que (v,w) é um par hiperbólico.

Sejam $V_1 = [v,w]$ e $V' = V_1^\perp$. Como V_1 é não degenerado (pois é um plano hiperbólico), segue da Proposição 9.4.3 que $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ e, como ϕ é não degenerada, a Proposição 9.4.1(d) diz que $V_1^\perp$ é não degenerado. Logo, por hipótese de indução, $V_1^\perp$ é hiperbólico e, portanto, V também o é. $\square$

Exemplo 9.4.5

Suponha que $\mathbb{F}$ tenha característica zero, $V = \mathbb{F}^4$ e que, se $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, então

$$\phi(v, w) = x_2y_1 - x_1y_2 - 2x_1y_4 + 2x_4y_1 + 3x_3y_4 - 3x_4y_3.$$

Sendo α a base canônica, temos

$$[\phi]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\phi \in B_a(V)$ e queremos encontrar uma base hiperbólica. Observe que o par (e_1, e_2) é um par hiperbólico, assim como os pares $(e_1, e_4/2)$ e $(e_3/3, -e_4)$. Seja $V_1 = [e_1, e_2]$ e encontremos $V_1^\perp$. Dado $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, temos $v \in V_1^\perp$ se, e somente se, $v \perp e_1$ e $v \perp e_2$, isto é, $x_2 + 2x_4 = 0$ e $x_1 = 0$. Logo, $V_1^\perp = \{(0, -2x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{F}\}$ e $e_3, u = (0, -2, 0, 1)$ foram uma base de $V_1^\perp$. Observe que $\phi(e_3, u) = 3$ e, portanto, $(e_3, -u/3)$ é um par hiperbólico e a base $e_1, e_2, e_3, -u/3$ é uma base hiperbólica para V com respeito a ϕ.

Bases Ortogonais

Uma base α é dita ortogonal (com resp. a ϕ) se $v \perp v' \ \forall \ v, v' \in \alpha, v \neq v'$. Se $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ for uma base ortogonal para $\phi \in B(V)$, então

$$\#\{i : \phi(v_i, v_i) \neq 0\} = \mathrm{pt}(\phi) \quad \text{e} \quad [\{v_i : 1 \leq i \leq n, \phi(v_i, v_i) = 0\}] = V^\perp.$$

Teorema 9.4.6

Se $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ e $\phi \in B_s(V)$, existe base ortogonal de V.

Se $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 2$ isso não é sempre possível pois $B_a(V) \subseteq B_s(V)$.

Dem.: Se $\phi = 0$ ou $V = \{0\}$ não há nada a fazer. Caso contrário, como $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, temos $B_s(V) \cap B_a(V) = \{0\}$. Portanto, ϕ não é alternada e existe $v_1 \in V$ tal que $\phi(v_1, v_1) \neq 0$. Definindo $V_1 = [v_1]$, segue da Proposição 9.4.3 que $V = V_1 \oplus V_1^\perp$. Como a restrição de ϕ a $V_1^\perp$ é obviamente simétrica, podemos proceder por indução na dimensão para concluir que existe base ortogonal de $V_1^\perp$ com respeito a ϕ que complementa v_1 a uma base de V que é ortogonal com respeito a ϕ. $\square$

Existência de Base Ortonormal

Seja W um subespaço complementar a $V^\perp$ e $\beta = w_1, \ldots, w_p$ uma base ortogonal de W com respeito a ϕ. Suponha que, para todo $1 \leq i \leq p$,

$$\exists \; a_i \in \mathbb{F} \quad \text{tal que} \quad a_i^2 = \frac{1}{\phi(w_i, w_i)}.$$

Assim, tomando $v_i = a_i w_i$, segue que

$$\phi(v_i, v_i) = 1 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq p.$$

Neste caso, se $\alpha = \gamma \cup \{v_1, \ldots, v_p\}$ sendo γ uma base de $V^\perp$, temos

$$[\phi]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

Em particular, se ϕ é não degenerada, α é uma base ortonormal com respeito a ϕ. Tal normalização só é possível se $\mathbb{F}$ contiver as raízes quadradas dos elementos $\phi(w_i, w_i)$. Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$, este pode não ser o caso pois podemos ter $w \in V$ satisfazendo

$$\phi(w, w) < 0.$$

Neste caso, podemos escolher $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = \frac{-1}{\phi(w,w)}$ de modo que, tomando $v = aw$, temos $\phi(v, v) = -1$.

Base de Sylvester Positividade

Isso mostra que, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e p é o posto de ϕ, existem $0 \leq i \leq p$ e base $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ de V tais que

$$[\phi]_\alpha = \begin{bmatrix} -I_i & 0 & 0 \\ 0 & I_{p-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quando $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$, nos referiremos a uma base deste tipo como uma base de Sylvester para V com respeito ϕ (não é uma terminologia comum).

Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que $\phi \in B_s(V)$ é semi-definida positiva se

$$\phi(v,v) \geq 0 \ \forall \ v \in V (\rightsquigarrow \phi \geq 0)$$

e positiva definida se

$$\phi(v,v) > 0 \ \forall \ v \in V (\rightsquigarrow \phi > 0).$$

Lembre: $A \in M_n(\mathbb{C})$ é positiva definida se $X^*AX \in \mathbb{R}_{>0} \ \forall \ X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Dada uma base α de V, como ϕ é simétrica se, e só se $[\phi]_\alpha$ for simétrica (e portanto diagonalizável sobre $\mathbb{R}$), segue que ϕ é um produto interno se, e só se, ϕ for definida positiva ou, equivalentemente, $[\phi]_\alpha$ for positiva definida (e, portanto, todos seus autovalores são positivos pelo Teorema 7.1.8).

Índice de uma Forma Bilinear Real

Analogamente definem-se os conceitos de ϕ ser (semi-)definida negativa. Defina também

$$\mathrm{i}(\phi) = \max\{\dim(W) : W \text{ é subespaço tal que } \phi|_W < 0\}.$$

Evidentemente, $\mathrm{i}(\phi) \leq \mathrm{pt}(\phi)$, $\phi \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}(\phi) = 0$ e $\phi < 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}(\phi) = \dim(V)$. Chamaremos $\mathrm{i}(\phi)$ de o índice de negatividade de ϕ. O número

$$\mathrm{sign}(\phi) := \mathrm{pt}(\phi) - 2\mathrm{i}(\phi)$$

é chamado de a assinatura de ϕ.

Teorema 9.4.7 (Lei da Inércia de Sylvester)

Suponha que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $\phi \in B_s(V)$ e $\alpha = v_1, \ldots, v_n$ uma base ortogonal para V com respeito a ϕ. Então, $\mathrm{i}(\phi) = \#\{j : \phi(v_j, v_j) < 0\}$.

Dem.: Seja $i = \#\{j : \phi(v_j, v_j) < 0\}$. Evidentemente, $i \leq p = \mathrm{pt}(\phi)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\phi(v_j, v_j) = 0$ se $j > p$ e que $\phi(v_j, v_j) < 0$ para $j \leq i$. Sejam $W^- = [v_1, \ldots, v_i]$ e $W^+ = [v_{i+1}, \ldots, v_p]$. Como $\phi|_{W^-} < 0$, segue que $i \leq \mathrm{i}(\phi)$. Assim, basta mostrar que

$$\phi|_W < 0 \quad \Rightarrow \quad \dim(W) \leq i.$$

Por sua vez, isso segue se mostrarmos que

$$\phi|_W < 0 \quad \Rightarrow \quad W \cap (V^{\perp} \oplus W^{+}) = \{0\}. \tag{2}$$

De fato, como $V^{\perp} = [v_{p+1}, \dots, v_n]$, temos $V = W^{-} \oplus W^{+} \oplus V^{\perp}$ e segue de (2) que

$$\begin{aligned} n &\geq \dim(W) + \dim(V^{\perp}) + \dim(W^{+}) = \dim(W) + (n-p) + (p-i) \\ &= \dim(W) + n - i, \end{aligned}$$

mostrando que $\dim(W) \leq i$. Para mostrar (2), tome $w \in W \cap (V^{\perp} \oplus W^{+})$, digamos $w = u + v$ com $u \in W^{+}$ e $v \in V^{\perp}$ e veja que

$$\phi(w,w) = \phi(u,u) + 2\phi(u,v) + \phi(v,v) = \phi(u,u) \geq 0.$$

Como $\phi|_W < 0$, segue que $w = 0$. □

Formas Quadráticas

Uma forma quadrática em n variáveis a valores em $\mathbb{F}$ é uma função polinomial proveniente de um polinômio homogêneo de grau 2 com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Uma maneira de produzir um tal polinômio é a partir de uma forma bilinear $\phi \in B(V)$ e uma base α de um $\mathbb{F}$-espaço vetorial V:

$$q_\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} [\phi]_\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, dado um polinômio homogêneo de grau 2, digamos

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{i,j}\ x_i x_j,$$

escolha matriz $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ t.q. $a_{i,j} + a_{j,i} = c_{i,j}\ \forall\ 1 \leq i < j \leq n$ e $a_{i,i} = c_{i,i}\ \forall\ 1 \leq i \leq n$, e seja $\phi \in B(V)$ t.q. $[\phi]_\alpha = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Veja que, se $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, podemos escolher A simétrica: $a_{i,j} = a_{j,i} = c_{i,j}/2$ para todo $1 \leq i < j \leq n$. Assim, o estudo de formas quadráticas está intimamente relacionado ao estudo de formas bilineares simétricas.

Sistema de Eixos Principais

Objetivo: encontrar mudança linear de variáveis $(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow (y_1, \ldots, y_n)$ de modo que

$$q(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i \; y_i^2.$$

Os eixos do correspondente novo sistema de coordenadas são frequentemente chamados de um sistema de eixos principais para q.

Observe que encontrar tal sistema de eixos é equivalente a encontrar uma base de $\mathbb{F}^n$ que seja ortogonal com respeito à correspondente forma bilinear simétrica.

No caso que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, em muitos casos é de interesse que esta nova base seja ortonormal com respeito ao produto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Isto é possível devido ao Teorema Espectral (Corolário 7.5.8(b)).

Teorema Espectral Real para Matrizes

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonalmente diagonalizável se, e somente se, for simétrica.

Lembre que uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ é dita ortogonal se $P^tP = I$ e que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita ortogonalmente diagonalizável se existir $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que P^tAP é diagonal.

Exercício 9.3.2: Se α e β são bases de V, vale $[\phi]_\beta = ([I]_\alpha^\beta)^t[\phi]_\alpha[I]_\alpha^\beta$.

O conceito de matriz ortogonal está relacionado ao conceito de operador linear ortogonal. Na Seção 9.5 estudaremos a generalização deste conceito no contexto de formas bilineares simétricas e alternadas.

O Teorema Espectral é o ponto culminante da teoria de operadores auto-adjuntos estudada no Capítulo 7. Na Seção 9.6 estenderemos esta teoria ao contexto de formas bilineares simétricas e alternadas.