Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estadística e Computaçao Científica
Programa de Pós-Graduaçao em Matemática

$^{+1}$Notas de Análise no $\mathbb{R}^n$

July 9, 2025

"Tudo posso naquele que me fortalece"
Elon 4:13

Nestor Heli Aponte Avila[1]
n267452@dac.unicamp.br

** Conteúdo basado na disciplina MM720 (Análise no R(n)) ministrada pelo professor Tiago Jardím Fonseca no período 2025-I. **

Notação $\diamondsuit$ Definição $(-)^{\diamond}$ Aberto $(-)^{\blacklozenge}$ Fechado
$\square$ Lema $\square$ Proposição $\blacksquare$ Teorema

§ 1 Derivadas Direcionais

$\diamondsuit$ Seja $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Para $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $p \in U$, a v-*direcional derivada* de f em p, se existir, é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h} \sim f(p+hv) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p) \cdot h + \sigma(h).$$

Nota. Se $v = e_i$ então $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ é a i-ésima *derivada parcial* de f em p.

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(p+hv) = f(p) + \alpha h + \sigma(h) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \alpha$$

Exemplo $f : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto ||\mathbf{x}||^2 \in \mathbb{R}$. $\to$ Use produto interno e encontre α

$$\forall j \leq n,\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \not\Rightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p) \not\Rightarrow f \text{ continua em } p$$

Exemplo $(x, y) \mapsto x + y$, se $x = 0$ or $y = 0$, nula no caso contrario. $\to$ Prove diferentes direções em 0

Exemplo $0 \neq (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{||x||^2}$, nula em 0. $\to$ Estude a continuidade no 0

◇ (*Conexidade*) $X^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n$ é *conexo* sse $\nexists U^{✧}, V^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazios tais que $U \cap V \neq \emptyset$ e $X \subseteq U \cup V$.

□ Se $U^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n$ é conexo, então $\forall p, q \in U, \exists \Gamma$ caminho poligonal em U com vértices $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$, tais que $p_{i+1} - p_i$ é colinear com algum e_j. $\rightarrow$ É por construção, só lembre que U é aberto.

□ Seja $U^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que $\forall p \in U,\ \forall i \leq n$ as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ em U, então f é constante.

Use o lemma, aplique TVM para $\varphi(t) = f(p_i + te_j)$, quem é $\varphi'(\theta)$?

§ 2 Funções de Classe C^k

◇ Seja $f : U^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in U, \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) : U \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a *derivada de segundo ordem* de f como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p).$$

Nota. O ordem é importante, em geral. De forma análoga, definimos as k-ésimas derivadas de f.

◇ Seja $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Uma função $f : U^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^k(U)$ se $\forall p \in U, \forall m \leq k, \exists \partial^m f(p)$ continua em p.

Nota. $f \in C^0 \Leftrightarrow f$ continua; $f \in C^\infty \Leftrightarrow f$ é *suave*.

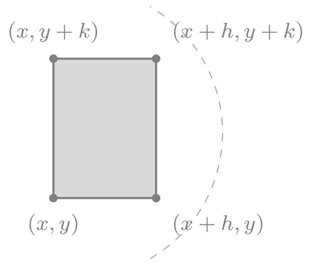
Exemplo O anel de polinômios $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo $\det(T) : M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞. $\rightarrow$ É polinomial

Exemplo Seja $f : x \mapsto x^{1/3}$, então $f \in C^0(\mathbb{R})$ mais não é de classe C^1 em 0. $\rightarrow$ Veja o que acontece com o límite nesse punto

■ (*Schwarz*) Se $f \in C^2(U)$, então $\forall i, j \leq n$ temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$



Basta ver $n = 2$. Defina $S = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$ e $\varphi(t) = f(t, y+k) - f(t, y)$, aplique TVM $\times 2$ e manobre até obter uma igualdade a S. O resultado segue de fazer o mesmo a $\psi(t)$, fixando a outra coordenada.

Corolário. Se $f \in C^k(U)$ então não importa o ordem em que são tomadas as derivadas de ordem $m \leq k$. $\to$ É uma questão de trabalhá-las 2 a 2

§ 3 O Diferencial

◇ Seja $U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é *diff* em $p \in U$ sse $\exists \ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal, tal que

$$f(p+v) = f(p) + \ell \cdot v + \sigma(\|v\|), \quad \text{quando } v \to 0.$$

□ Se f é diff em p, então $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, temos $\ell \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$. $\to$ Vá de uma definição a outra

◇ Se f é diff em p então o *diferencial* de f em p é a função lineal $df(p) : \mathcal{U}_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$df(p) \cdot v := \sum^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i.$$

$$\boxed{\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \not\Rightarrow df(p) \text{ lineal} \not\Rightarrow f \text{ diff en } p}$$

Exemplo $f : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2 \in \mathbb{R}$. $\to$ Como em nosso primeiro exemplo

□ Se f é diff em p, então f é continua em p. $\to$ Faz $v \to 0$ na definição

$\nexists df(p) \Leftarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \not\ni \exists\frac{\partial f}{\partial v}(p) \mid \forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n,\ \exists\frac{\partial f}{\partial v}(p) \not\Rightarrow \exists df(p).$

Exemplo $0 \neq (x,y) \mapsto \frac{xy^2}{\|\mathbf{x}\|^2}$, nula em 0. $\to f(v) = \sigma(\|v\|)$? Estude a linearidade das direcionais no 0

Exemplo $0 \neq (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+y^4}$, nula em 0. $\to$ Proceda como no anterior

Nota. A mecânica para **descartar** diff consiste em (i) continuidade no p; (ii) $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ lineares e (iii) $\exists\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ lineares.

■ Se $f \in C^1(U)$ então f é diff em U.

Tome un caminho poligonal Γ de p até $p+v$ para escrever $f(p+v) - f(p) = \sum f(p_i) - f(p_{i-1})$. Aplique TVM a cada termo da soma e faça aparecer as derivadas parciais. Separe a soma e verifique por definição.

Exemplo $\mathbb{R}[\mathbf{x}] \ni p(\mathbf{x})$ é diff.

Exemplo $\pi_i : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ é diff.

Nota. Além de ser linear, $dx_i(p) = x_i$. Portanto, o espaço dual $(\mathbb{R}^n)^* = [dx_i]$, de modo que o diferencial da f se escreve de forma única como

$$df(p) = \sum^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, dx_i.$$

◇ Se f é diff em p, então chamamos de *gradiente* de f em p o vector

$$\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right).$$

Nota. Para $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ temos $\langle \nabla f(p), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$, supoendo $\|v\| = 1$, então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(p)\right| = |\langle \nabla f(p), v\rangle| \leq \|\nabla f(p)\|\|v\|,$$

ou seja, o gradiente aponta na direção de maior crescimento de f em p.

◇ Seja $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que $p \in U$ é extremo local da f se $\exists\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x} - p\| < \delta$ implica $f(p) \leq f(\mathbf{x})$ ou $f(\mathbf{x}) \leq f(p)$.

Exercise Se f é diff em p extremo local da f, então $\nabla f(p) = 0$. $\to$ Trabalhe o limite em direções opostas

§ 4 Desigualdade do Valor Medio

□ Sejam $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in U$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tais que $[p, p+v] \subseteq U$. Se $\forall t \in (0,1)$ a função $\varphi : t \mapsto f(p+tv)$ é diff em $p+tv$, então φ é diff em t e $\varphi'(t) = df(p+tv) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+tv)$. $\to$ Faz $h \to 0$ de $\varphi(t+h)$

■ (*TVM* - $\mathbb{R}^n$) Seja $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua em $[p, p+v]$ e diff em $(p, p+tv)$, então $\exists\theta \in (0,1)$ tal que $f(p+v) - f(p) = df(p+\theta v) \cdot v$.

Tome $\varphi(t) = f(p+tv)$, aplique o lema acima e TVM.

Corolário. (*DVM* - $\mathbb{R}^n$) Sejam $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff, $K \subset U$ convexo e $c \geq 0$ tal que $\forall\mathbf{x} \in K$, $\|df(\mathbf{x})\| \leq c$. Então, $\forall p, q \in K$ temos $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p - q\|$. $\to$ Tome $q = p + v$ no Teorema anterior

◇ Seja $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Definimos $\|\ell\| := \sup\limits_{\|v\|=1} |\ell v|$.

Exercise Se $\exists\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\ell v = \langle w, v\rangle$, então $\|\ell\| = \|w\|$. Em particular, se f é diff em p, então $\|df(p)\| = \|\nabla f(p)\|$. $\to$ Use Cauchy-Schwarz para provar as duas desigualdades

◇ Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *Lipschitz continua* se $\exists c \geq 0$ tal que $\forall p, q \in X$, $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p - q\|$.

Corolário. ■ TVM - $\mathbb{R}^n$ implica f Lipschitz em K.

§ 5 Formula de Taylor

A ideia é aproximar funções por polinômios, visando uma forma $f(p+v) = P_k[v] + \Gamma_k[v]$, onde P_k é um polinômio na variável v de ordem k e Γ_k é um erro de ordem $\sigma(\|v\|^k)$.

Exemplo Se $f \in C^2(U)$ e $p \in U$, então

$$f(p+v) = \underbrace{f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(p) v_i v_j}_{P_2[v]} + \underbrace{\sigma(\|v\|^2)}_{\Gamma_2[v]}.$$

◇ Seja $k \geq 2$. Dizemos que $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *k-diff* em $p \in U$ se f é diff em p e $\exists \mathcal{V}_p$ tal que $\forall i \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) : \mathcal{V}_p \to \mathbb{R}$ são $(k-1)$-diff em p.

Exemplo $f \in C^k(U)$ é k-diff em $p \in U$.

◇ Seja f função k-diff em p, o *diferencial k-ésimo* de f em p é dado por

$$v \mapsto d^k f(p) v^{\otimes k} = \sum \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p) v_{i_1} \cdots v_{i_k}.$$

Nota. $d^k f(p) v^{\otimes k}$ é um polinômio homogêneo de grau k

$d^2 f(p) v = v A(p) v^T$ é uma forma bilinear quadrâtica de grau 2.

Exemplo Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sendo $v = (h,k)$ temos

$$d^2 f(p) v^{\otimes 2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) k^2.$$

◇ Seja f função 2-diff em p, a *Hessiana* da f em p, é a matriz

$$Hf(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}.$$

Nota. Pelo ■ (Schwarz), $\exists! Hf(p) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$d^2 f(p) v^{\otimes 2} = \langle Hf(p) \cdot v, v \rangle.$$

◇ $f \in C^k(\mathcal{U}_p)$ se anula à ordem $k+1$ em p se $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$, $d^\alpha f(p) = 0$.

Exercise Se $f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ se anula identicamente numa vizinhaza do origem então $\forall \alpha,\ c_\alpha = 0$. $\rightarrow$ Hmmm

■ Sejam $k \geq 1$ e f uma função k-diff em $0 \in \mathbb{R}^n$. Se f se anula à ordem $k+1$ então $f(v) = \sigma(\|v\|^k)$.

Faz por indução, no paso indutivo use o TVM - $\mathbb{R}^n$ para representar $f(v)$ e calcule $\lim\limits_{v \to 0} \frac{f(v)}{\|v\|^k}$. Considere a função $\Gamma_k(v)$ dada por

$$v \mapsto f(p+v) - \sum^k \frac{1}{j!} d^j f(p) v^{\otimes j},$$

observe que ela é k-diff no 0 e se anula à ordem $k+1$.

Corolário. (*Fórmula de Taylor Infinitesimal*) Se f é k-diff em p então

$$f(p+v) = \sum^k \frac{1}{j!} d^j f(p) v^{\otimes j} + \sigma(\|v\|^k).$$

Nota. Fazendo $\mathbf{x} = p + v$, obtemos sua versão mais familiar

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} (\mathbf{x} - p)^\alpha + \sigma(\|\mathbf{x} - p\|^k).$$

Exercise Seja f função k-diff. Usando Taylor prove a volta do último Teorema, conclua a unicidade. $\rightarrow$ Suponga que $\exists P_i(v)$ homógeneo...

□ (*Fórmula de Taylor com Restos*) Sejam $a \in I^{\diamondsuit} \subset \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^{k+1}(I)$, então $\varphi(x) = P_k[x] + \Gamma_k[x]$, onde $\Gamma_k(x)$ pode ser,

i. $\frac{\varphi^{(i+1)}(c)}{(i+1)!} (x-a)^{(i+1)}$ para algum $c \in I$ $\rightarrow$ *Resto de Lagrange*.

ii. $\int_a^x \frac{\varphi^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\, dt \quad \to$ *Resto Integral.*

Corolário. (*Fórmula de Taylor con Restos* - $\mathbb{R}^n$) Seja $f \in C^{k+1}(U)$. Então $\forall p \in U$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tais que $[p, p+tv] \subseteq U$ temos $f(p+v) = P_k[v] + \Gamma_k[v]$, onde $\Gamma_k[v]$ pode ser,

i. $\frac{d^{k+1}f(p+\theta v)}{(k+1)!}v^{\otimes(k+1)}$ para algún $\theta \in (0,1) \quad \to$ *Resto de Lagrange.*

ii. $\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}d^{k+1}f(p+tv)v^{\otimes(k+1)}dt \quad \to$ *Resto Integral.*

Aplique o sabido numa variável à função $\varphi(t) = f(p+tv)$. Expresse o diferencial como soma, e desenvolva até chegar à forma descrita.

§ 6 Pontos Críticos

◇ Seja f diff em p. O ponto p é *ponto crítico* de f sse $df(p) = \nabla f(p) = 0$.

Exemplo $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$. $\to$ Faz a conta

□ Se f tem um extremo local em p então p é ponto crítico. $\to$ 0 es extremo local de $\varphi_i(t) = f(p+te_i)$

O comportamento de f em $\mathcal{U}_p$ é determinado pelo primeiro termo não nulo de sua expansão de Taylor, ou seja, $d^2f(p)v^{\otimes 2} = \langle Hf(p)\cdot v, v\rangle$.

Exemplo Se $Hf(p)$ é diagonal tal que $Hf(p) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então

$$f(p+v) = f(p) + \cancel{df(p)} + \frac{1}{2}\sum \lambda_i v_i^2 + \sigma(\|v\|^2);$$

Se $\forall i \leq n,\ \lambda_i > 0 \Rightarrow p$ é mínimo local de f. Analogamente, se $\forall i \leq n,\ \lambda_i < 0 \Rightarrow p$ é máximo local de f.

◇ A forma quadrâtica de $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ é *positiva* se $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\langle Av, v\rangle > 0$, *negativa* se $\langle Av, v\rangle < 0$ ou *indefinida* se for outro o caso.

Exemplo $v \mapsto \|v\|^2$, é positiva. $\to$ É representada pela matriz $\mathbb{1}_n$

Exemplo $(t,x,y,z) \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ é indefinida. $\to$ É representada pela matriz diagonal $A = (1,-1,-1,-1)$

□ Sejam $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seus autovalores. Então A é positiva (ou negativa) sse $\forall i \le n,\ \lambda_i > 0$ (ou $\lambda_i < 0$). $\to$ Teorema Espectral

■ Seja f função 2-diff em $p \in U$ ponto crítico. Se $Hf(p)$ é positiva (ou negativa) então $f(p)$ é um mínimo (ou máximo) local.

> Use $\mathbb{S}^{n-1} \ni \vec{u} \mapsto \langle Hf(p)u, u\rangle$ para argumentar a existência de uma cota. Interprete essa cota no desenvolvimiento de Taylor de ordem 2.

◇ Seja f função 2-diff, p ponto crítico de f e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de $Hf(p)$. O ponto p é *ponto de sela* sse $\exists\, i, j \le n$ tais que $\lambda_i \lambda_j < 0$.

Nota. Se $\lambda_i > 0$ então f tem mínimo local na direção de $\vec{v_i}$ (seu autovetor),

$$\langle Hf(p) \cdot v_i, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle > 0$$

Exemplo $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$. $\to$ Estude os pontos p tais que $\nabla f(p) = 0$ e sua clasificação segum $Hf(p)$

◇ Um ponto crítico p de f é *degenerado* se $\det(Hf(p)) = 0$.

6.1 Otimização

■ (*Bolzano-Weierstrass*) Sejam $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}$ é continua, então tem máximo e mínimo global em K.

> ¿+ condições para que funcione mesmo em não compactos?
>
> **Exemplo** Seja $(x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4}$ en $Q = \{(x,y) : x \ge 0 \text{ y } y \ge 0\}$. $\to$ Estude os pontos críticos ¿O que acontece quando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$?

□ Sejam $F^{\blacklozenge} \subseteq \mathbb{R}^n$ não limitado e $f : X \to \mathbb{R}$ continua, então

i. Se $f(\mathbf{x}) \to \infty$ quando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, então f tem mínimo global em F.

ii. Se $f(\mathbf{x}) \to 0$ quando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, então f tem máximo global em F.

i. $\exists R > 0$ tal que se $\|\mathbf{x}\| > R$, então $f(\mathbf{x}) > f(p)$, onde $\|p\| \leq R$.
ii. Mesmo negócio.

6.2 Problemas com Condições

◇ Seja $g \in C^k(U)$ tal que $\forall p \in \ker(g),\ dg(p) \neq 0$. O conjunto ${}^kH := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$ é *hipersuperficie* de classe C^k definida por $g(\mathbf{x}) = 0$.

Exemplo $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ definida pelos ceros da função $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$ é ${}^\infty H \subseteq \mathbb{R}^n$. $\to$ Verifique a condição $g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$

$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ é fechado e limitado

Exemplo $f(x, y) = \|\mathbf{x}\|^2 + y$ en $\mathbb{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. $\to$ Halle $p : \nabla f(p) = 0$ ¿Que hay de los puntos en $f|_{\mathbb{S}^1}$?

■ (*Multiplicadores de Lagrange*) Sejam $U^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$ e ${}^1H \subseteq U$ hipersuperficie. Então $p \in U$ é extremo local de $f\Big|_H$ sse $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $df(p) = \lambda dg(p)$.

■ (*Teorema Espectral*) Toda matriz símetrica admite uma base ortonormal de autovetores (é diagonalizável).

Tome $\mathbb{S}^1 \ni u \mapsto \langle Au, u\rangle$, e um vetor u_1 que a máximiza. Do sistema observa-se que u_1 é autovetor com autovalor λ_1. Tome o complemento ortogonal de $[u_1]$ e formule o argumento indutivo.

§ 7 Aplicações Diferenciais

◇ Uma *aplicação* é uma função vetorial $F : U^{✧} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cujas componentes são funções escalares $F_i : U \to \mathbb{R}$.

Exemplo Um *caminho* em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

$\diamond$ Uma aplicação $F : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *diff* em $p \in U$ sse $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tal que $F(p+v) = F(p) + Lv + \sigma(\|v\|)$.

Nota. $\sigma(v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, logo, $r(v) = \sigma(\|v\|)$ sse $\forall i \leq m,\ r_i(v) = \sigma(\|v\|)$.

$\square$ Uma aplicação $F = (F_1, \ldots, F_m) : U \to \mathbb{R}^m$ é diff em p sse $\forall i \leq m,\ F_i$ é diff em p e $L_i = dF_i(p)$.

> ($\Rightarrow$) É direto da definição tomando a L_i de L existente. ($\Leftarrow$) Lembre-se que se $\exists dF_i$, é único, use isso para armar L e exponer a aproximação de $F(p+v)$ com erro de ordem $\sigma(\|v\|)$.

Corolário. Se F é uma aplicação diff em p então é continua em p.

$\diamond$ Se F é diff em p, definimos a *derivada* de F em p como

$$L = DF(p) = (dF_1(p), dF_2(p), \ldots, dF_m(p)).$$

Nota. A notação NUNCA é um detalhe menor.

Exemplo $f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff é uma aplicação diff e $Df(p) = df(p)$.

$\diamond$ Seja F aplicação diff em p. A *Jacobiana* da F é a matriz $JF(p) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que representa a derivada $DF(p)$ na base canônica,

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \ni JF(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right) \quad i \leq m,\ j \leq n.$$

Nota. Outra notação comum é $JF(p) = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(p)$.

Exemplo Para $f \in C^k(U)$ temos $Jf(p) = \nabla f(p) \in M_{1\times n}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^*$.

Exemplo Seja $c(t) = (c_1, \ldots, c_m) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ caminho diff. Para ele temos $Jc(t) = (c_1'(t), \ldots, c_m'(t))^T \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$, o *vetor tangente*.

$\diamond$ Uma aplicação $F : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vai ser de classe $C^k(U; \mathbb{R}^m)$ sse $\forall i \leq m$, $F_i \in C^k(U)$.

Corolário. Se $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ então F é diff em U. $\to$ Imediato de seu semelhante para funções escalares

7.1 Derivadas de Ordem Superior

Nota. Uma aplicação $F : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diff induce uma outra aplicação $DF : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cong M_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ tal que $p \mapsto DF(p)$ y cujas componentes são (sob identificação) as funções $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Nesse sentido,

- $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ sse F é diff e $DF \in C^0(U;\mathbb{R}^{mn})$.
- $F \in C^2(U;\mathbb{R}^m)$ sse $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ e $D^2F \in C^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$, onde

$$D^2F : p \mapsto D(DF)(p).$$

$\square$ Sejam V_1, V_2, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, então $\mathcal{L}(V_1;\mathcal{L}(V_2;W)) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes V_2; W)$, o espaço de aplicações bilineares.

$\diamondsuit$ A derivada k-ésima de uma aplicação $F : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se existir, é uma aplicação multilinear $D^kF(p) : \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_{k \text{ veces}} \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$v^{(1)} \otimes \cdots \otimes v^{(k)} \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial v^{(1)} \cdots \partial v^{(k)}}(p) = \sum \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} x_{i_k}}(p)\, v^{(1)}_{i_1} \cdots v^{(k)}_{i_k}.$$

7.2 Regla da Cadeia

$\blacksquare$ Sejam $U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$, $V^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^r$, $F : U \to \mathbb{R}^r$ diff en p e $G : V \to \mathbb{R}^m$ diff em $F(p)$. Então $G \circ F$ é diff em p e $D(G\circ F)(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p)$.

Faz $q = F(p)$, $L = DF(p)$, $M = DG(q)$ e $H = G \circ F$. Expanda os restos e escreva $\Gamma_H(v)$ em termos de $\Gamma_F(v)$ e $\Gamma_G(w)$. Desmonte as expressões e faza análise do erro.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "D(G\circ F)(p)"] \arrow[dr, "DF(p)"'] & & \mathbb{R}^m \\ & \mathbb{R}^r \arrow[ur, "DG(F(p))"'] & \end{tikzcd}$$

Corolário. Se $F \in C^k(U;\mathbb{R}^r)$ e $G \in C^k(V;\mathbb{R}^m)$ então $G \circ F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$.

Um velho conhecido

Exemplo Sejam $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $c(t) = p + tv$ e $\varphi(t) = (f \circ c)(t)$ então temos $\varphi'(t) = df(p + tv) \cdot v$.

§ 8 Diffeomorfismos

◇ Sejam $U^{\diamond}, V^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $F : U \to V$ é *diffeomorfismo* de classe C^k, se $F \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$ é bijeção com $F^{-1} \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$.

Nota. Por praticidade na notação escrevemos ${}^kF : U \simeq V$.

Exemplo $F : (t, x) \mapsto (x - ct, x + ct)$ é ${}^{\infty}F : U \simeq V$, onde $U = V = \mathbb{R}^2$.
$\to$ Faza as contas e observe como é a inversa

Diffeomorfismo $\Rightarrow$ Homeomorfismo

Exemplo Sea $I \subset \mathbb{R}$. ¿ $\exists\, {}^kF : I \simeq \mathbb{S}^1$? $\to$ Não, tire um ponto da esfera

$$◇ \quad \mathbb{B}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}$$

Exemplo $\exists\, {}^{\infty}F : \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{B}^n$. $\to$ Tome $F : \mathbb{B}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}} \in \mathbb{R}^n$

$F \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$ bijetiva $\not\Rightarrow$ $F^{-1} \in C^k(F(U); \mathbb{R}^n)$

Exemplo $F : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^3$ não é ${}^kF : \mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}$. $\to$ F^{-1} não é diff em 0

Corolário. Da regla da cadeia, se F é diffeomorfismo, então $\forall p \in U$, $DF(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é invertível, mais ainda, sendo $F(p) = q$ temos

$$D[F^{-1}](q) = [DF(p)]^{-1}.$$

Em termos de matrices, $\det(JF(p)) \neq 0$ e $[JF^{-1}](q) = [JF(p)]^{-1}$.

Nota. ¿Vale a volta do corolário em alguma vizinhaza $\mathcal{V}_p$? Sim!

8.1 Teorema da Função Inversa

◇ $F : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *diffeomorfismo local* de classe C^k em $p \in U$ se $\exists \mathcal{V}_p \subseteq U$ tal que ${}^kF : \mathcal{V}_p \simeq F(\mathcal{V}_p)^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$. Denotamos ${}^kF : \mathcal{V}_p$.

■ (*Função Inversa*) Sejam $F \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ e $p \in U$. A aplicação F é ${}^kF : \mathcal{V}_p$ sse $DF(p)$ é isomorfismo.

> *Nota.* Basta ver a volta. Sem perda de generalidade, podemos supor que $p = 0$, $F(p) = 0$ e $DF = \mathbb{1}_n$. Remeta-se ao gráfico, nele, (*) $= [DF(p)]^{-1}(\mathbf{x} - F(p))$ e (**) $= [DF(p)]^{-1}(F(\mathbf{x}+p) - F(p))$. Nestes novos termos $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + R(\mathbf{x})$, onde $R(\mathbf{x}) = \sigma(\|\mathbf{x}\|)$.
>
> $$\begin{tikzcd} \mathbf{x}+p & U \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{diff}"] & \mathbf{x} \arrow[d] \\ \mathbf{x} \arrow[u] & U-p \arrow[u, "\text{diff}"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^n & (*) \\ & \mathbf{x} \arrow[r, mapsto] & (**) & \end{tikzcd}$$

□ Seja $F : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicação diff em $p \in U$, então $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mathcal{V}_p$ tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_p$, $\|F(\mathbf{x}) - F(p)\| \leq (\|DF(p)\| + \epsilon)\|\mathbf{x} - p\|$. $\to$ Use a definição de diff com $v = \mathbf{x} - p$

> $\exists \mathcal{V}_0$ tal que $F : \mathcal{V}_0 \hookrightarrow F(\mathcal{V}_0)$
>
> ---
>
> $DR(0) = 0$, logo para $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \mathcal{V}_0$ tal que $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{V}_0$, $\|R(\mathbf{x}_1) - R(\mathbf{x}_2)\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. Reinterprete em termos da F e concluia.

◇ Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $T : M \to N$ é uma *contração* se $\exists c < 1$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|$.

■ (*Ponto Fixo Banach*) Se $X^{\blacklozenge} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $T : X \to X$ é uma contração, então $\exists!\ x^* \in X$ tal que $T(x^*) = x^*$ e $\forall x_0 \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0) = x^*$.

> $F(\mathcal{V}_0)^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$
>
> ---
>
> Tome $p \in \mathcal{V}_0$, $q = F(p) \in F(\mathcal{V}_0)$. Defina $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{V}_0$, $T_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} - R(\mathbf{x})$. Tome $r > 0$ tal que $B[p,r] \subset \mathcal{V}_0$. Suponha $\|\mathbf{y} - q\| < \frac{r}{2} = \epsilon$ e $\mathbf{x} \in B[p,r]$. Desenvolva $\|T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - p\|$ e aplique ■ (Punto Fixo).

□ Seja $L \in GL_n(\mathbb{R})$. A aplicação $\mathrm{inv} : L \mapsto L^{-1}$ é diff. → Faz direito $\mathrm{inv}(L+H)$ e use a serie geométrica de Neumann

$$F^{-1} \in C^k(F(\mathcal{V}_0; \mathbb{R}^n))$$

• $\|DF(p) - \mathbb{1}_n\| = \|DR(p)\| < \frac{1}{2}$ implica $DF(p)$ invertível. Sendo $q = F(p)$, para $0 < w \ll \epsilon$, $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(p+v) = q + w$. Desenvolva a expressão $F^{-1}(q+w)$, apontando para a definição de diff.

$$\begin{tikzcd}
F(\mathcal{V}_0) \arrow[r, "D[F^{-1}]"] & GL(\mathbb{R}^n) & L^{-1} \\
\mathcal{V}_0 \arrow[u, "F"] \arrow[r, "DF"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & GL(\mathbb{R}^n) \arrow[u, "\mathrm{inv}"'] & L \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

• Para verificar a classe basta usar o lemma no diagrama acima.

Corolário. Seja $F \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$ tal que $\forall p \in U$, $\det(JF(p)) \neq 0$, então F é uma aplicação aberta. Mais ainda, se F injeta então ${}^kF : U \simeq F(U)$.

8.2 Teorema da Função Implícita

■ (*Função Implícita*) Sejam $U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $G \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ e $(p,q) \in U$. Se $G(p,q) = 0$ e $\det JG_q(p,q) \neq 0$, então $\exists \mathcal{W}_q$ e $\exists F \in C^k(\mathcal{V}_p; \mathbb{R}^m)$ tais que

$$\mathcal{V}_p \times \mathcal{W}_q \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) = 0.$$

$$J\Phi = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{1}_n & 0 \\ \hdashline \frac{\partial G_i}{\partial x_j} & \frac{\partial G_i}{\partial y_j} \end{array}\right)$$

Tome $\Phi : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, veja que é $C^k(U; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e $\det(J\Phi) \neq 0$. Pelo ■ (TFI) ${}^k\Phi : \mathcal{V}_p \times \mathcal{W}_q$ e $\exists \Phi^{-1} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ diffeomorfismo, o resultado segue tomando $F(\mathbf{x}) := \Psi(\mathbf{x}, 0)$.

Corolário. Pelo ■ (Regla da Cadeia) temos $JG_q(p,q) \cdot JF_p = -JG_p(p,q)$.

O ■ (Função Implícita) garante que podemos despejar algumas variáveis em termos das outras.

Exemplo $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, encontre $y = f(x)$ em $A = \{(x,y) : x > 0\}$. → Clássico de cálculo, relacione com as hipóteses do Teorema

Corolário. ${}^kH \subseteq \mathbb{R}^n$ hipersuperficie é localmente o gráfico de uma função.

□ Se ${}^kH \subseteq \mathbb{R}^n$ é hipersuperficie definida por $g(\mathbf{x}) = 0$, $p \in H$ e $c \in C^k(\mathcal{V}_\epsilon; H)$ é um caminho em H, então $\ker dg(p) := \{c'(0) : c(0) = p\}$.

($\supseteq$) Aplique ■ (Regla da Cadeia) na função $(g \circ c)(t)$. ($\subseteq$) $\exists i \leq n$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \neq 0$, suponha que é a última $i = n$. Tome $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $dg(p) \cdot v = 0$, aplique ■ (Função Implícita) conseguindo $c(t) = (p_j + tv_j, f(p_j + tv_j))$. Use nela o primero corolário do mesmo Teorema.

◇ Seja $p \in {}^kH \subseteq \mathbb{R}^n$. O *espaço tangente* a H em p, é o dado por

$$T_pH := \ker dg(p) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g(p), v \rangle = 0\}.$$

Nota. $T_pH \leq \mathbb{R}^n$ não necessariamente passa por p.

Exemplo Para $H = \mathbb{S}^{n-1}$ temos $T_pH := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \langle p, v \rangle = 0\}$. $\to$ Faça o exercício gráfico, note também que $\forall c > 0,\ \nabla g(p) \perp H = \{g(\mathbf{x}) - c = 0\}$

□ Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\ell_1, \ell_2 \in V^*$. Se $\ker \ell_1 \subseteq \ker \ell_2$ então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\ell_2 = \lambda \ell_1$.

Corolário. ■ (Multiplicadores de Lagrange). $\to$ Use a definição por caminhos de $\ker dg(p)$ e aplique o lemma acima

8.3 Imersões, Submersões e Posto Constante

◇ Uma aplicação F diff em p é *imersão* em p se $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ inyecta. Em particular, $n \leq m$.

Exemplo (Imersão Canônica) $\iota : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^m$.

$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ caminho diff é imersão $\Leftrightarrow c'(t) \neq 0$

Exemplo $t \mapsto (t^2, t^3)$ e $s \mapsto (s^2 - 1, s^3 - s)$. $\to$ Faça as contas

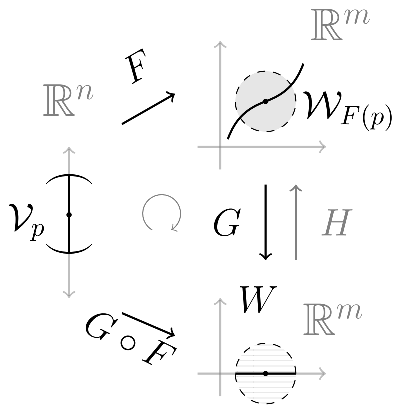
■ (*Forma Local das Imersões*) Seja $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$ imersão em $p \in U$. Então, $\exists \mathcal{V}_p \subseteq U$ e $\exists\, {}^k G : \mathcal{W}_{F(p)} \simeq W^{\diamond}$ tais que

$$G \circ F : \mathcal{V}_p \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Considere a base $[DF(p) \cdot e_i, v_j] = \mathbb{R}^m$. Tome $H : U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ tal que,

$$(\mathbf{x}, x_j) \mapsto F(\mathbf{x}) + \sum x_j v_j.$$

Use ■ (Função Inversa) a H em $(p, 0)$. Finalmente, faça $G = H^{-1}$ e estabeleça as vizinhanzas.



Corolário. Se $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ é imersão, então F é localmente injetiva.

◇ Uma aplicação F diff em p é *submersão* se $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva. Em particular, $n \geq m$.

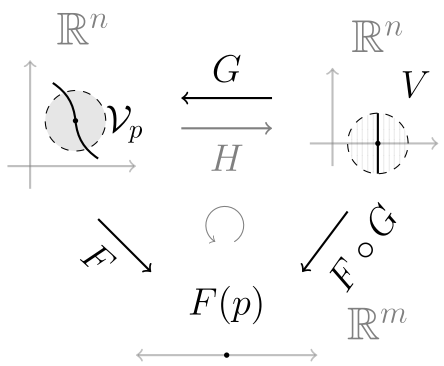
Exemplo (Submersão Canônica) $\pi : \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

$f : U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff em p é submersão $\Leftrightarrow df(p) \neq 0$.

Exemplo $(x, y) \mapsto xy$ é submersão em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

■ (*Forma Local das Submersões*) Seja $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$ submersão em $p \in U$. Então, $\exists \mathcal{V}_p \subseteq U$ e $\exists\, {}^k G : V^{\diamond} \simeq \mathcal{V}_p$ tais que

$$F \circ G : V \ni (\mathbf{x}, x_{m+1}, \ldots, x_n) \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m.$$



Tire uma base l.i. $[DF(p) \cdot e_j] = \mathbb{R}^m$. Tome $H : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $\mathbf{x} \mapsto (F(\mathbf{x}), x_j)$. Estude $[DH(p) \cdot v]$, pelo ■ (Função Inversa) H é diffeomorfismo. Faça $G = H^{-1}$ e estabeleça as vizinhanzas.

Corolário. Se $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ é submersão, então F é aberta. $\to$ Composição de abertas é aberta, projeções também

Nota. Imersões e submersões são **localmente** canônicas, salvo mudanças de coordenadas via diffeomorfismo.

◇ (Posto) Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, então $\operatorname{rank}(L) := \dim[Le_i] \leq \min\{n,m\}$.

$$\operatorname{rank}(L) = \max\{r : \exists M_r(L) \text{ com } \det(M_r) \neq 0\}.$$

$$\operatorname{rank}(L) = \min\{n,m\} \Leftrightarrow \begin{cases} L \text{ é isomorfismo }, \ n = m \\ L \text{ é injetiva }, \ n < m \\ L \text{ é sobrejetiva }, \ n > m \end{cases}$$

■ (*Posto Constante*) Seja $F \in C^k(\mathcal{U}_p;\mathbb{R}^m)$ tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_p$, $\operatorname{rank}(DF(\mathbf{x})) = r$. Então, $\exists^k G : V^\diamond \to \mathcal{V}_p$ e $\exists^k H : \mathcal{W}_{F(p)} \to W^\diamond$ tais que

$$H \circ F \circ G : \mathcal{V}_p \ni \mathbf{x} \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

$$\exists^k G : V^\diamond \to \mathcal{V}_p$$

$[DF(p)] \cong \mathbb{R}^r \leq \mathbb{R}^m$. Aplique ■ (FLS) a $\pi : (\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(m-r)}) \mapsto \mathbf{x}^{(r)}$. Logo, $\exists\ ^k G : V^\diamond \simeq \mathcal{V}_p$ tal que $\pi \circ F \circ G : (\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(n-r)}) \mapsto \mathbf{x}^{(r)}$.

$$F \circ G : \mathbf{x}^{(n)} \mapsto (\mathbf{x}^{(r)}, y_i(\mathbf{x})^{(n-r)})$$

Note que, sendo $q = G^{-1}(p)$, $\exists \mathcal{V}_q = V$ onde $\operatorname{rank}(J(F \circ G)(\mathbf{x})) = r$, ou seja que $D \equiv 0$. Logo, $y_i(\mathbf{x}) = y_i(\mathbf{x}^{(r)}, q^{(n-r)})$.

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

$$\exists^k H : \mathcal{W}_{F(p)} \to W^\diamond$$

Seja $\iota : \mathbf{x}^{(r)} \mapsto (\mathbf{x}^{(r)}, q^{(n-r)})$. Use ■ (FLI) na função $F \circ G \circ \iota : \mathbf{x}^{(r)} \mapsto (\mathbf{x}^{(r)}, y_i(\mathbf{x}^{(r)}, q))$. Termine de establecer as vizinhanzas e concluia.

Nota. A função $\operatorname{rank} : U \to \mathbb{N}$ é semi-continua inferiormente.

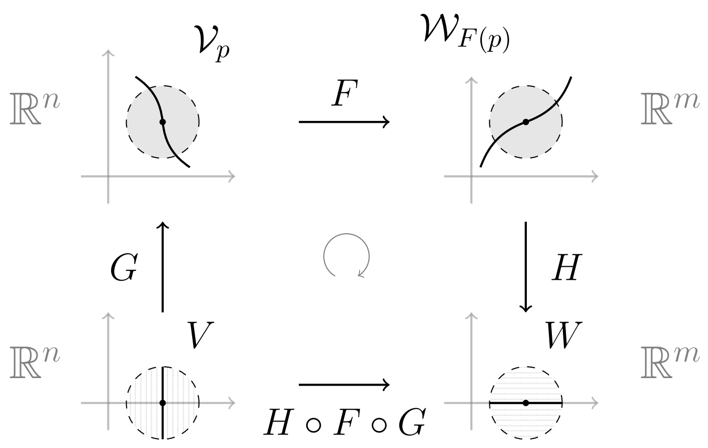


Figure 1: ■ (Posto Constante)

Corolário. Os Teoremas de Função Inversa e Formas Locais (Imersões e Submersões) são diretos. Sejam $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ e $p \in U$. Então

i. Se $\operatorname{rank}(JF(p)) = r = \min\{n, m\}$ então $\exists \mathcal{V}_p$ onde $JF_r(\mathbf{x}) \in GL_r(\mathbb{R})$.

ii. Se F é localmente injetiva então é imersão em $V^{\diamond} \subset U$ denso em U.
$\to$ Aplique ■ (Posto Constante), a segunda afirmação segue da semi-continuidade inferior

iii. Se F é aberta então é submersão em $V^{\diamond} \subset U$ denso em U.

É preciso que o posto seja consta em TODA uma vizinhanza

Exemplo $F : \mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto (t^2, t^3, s) \in \mathbb{R}^3$ ¿Existem coordenadas como no Teorema em alguma vizinhanza de origem? $\to$ Não

§ 9 Variedades Differenciáveis

◇ Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, uma aplicação $F \in C^k(X; Y)$ sse $\forall p \in X$, $\exists \widetilde{F} \in C^k(\mathcal{U}_p; \mathbb{R}^m)$ tal que $\widetilde{F}|_{\mathcal{U}_p \cap X} = F$.

◇ $F : X \to Y$ é *diffeomorfismo* de classe C^k se $F \in C^k(X; Y)$ é homeomorfimso e $F^{-1} \in C^k(Y; X)$. Denotamos ${}^kF : X \simeq Y$.

Exemplo Sejam $X = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\}$ e $Y = (-1, 1)$. A aplicação

$\pi : X \ni (x,y) \mapsto x \in Y$ é ${}^{\infty}F : X \simeq Y$. $\to$ Verifique as condições

$\Diamond$ Um subconjunto ${}^{k}_{d}M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma *subvariedade* de classe C^k e dimensão d, se $\forall p \in M$, $\exists\, {}^{k}\varphi : \mathcal{U}_p \cap M \simeq V^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^d$ *carta local*, cujas componentes $\varphi = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ são *coordenadas locais* de M em p. A inversa $\varphi^{-1} = \psi : V \to \mathcal{U}_p \cap M$ é uma *parametrização local* da variedade.

Nota. Por simplicidade na notação usaremos $\mathcal{U}_p$ para indicar vizinhanza de p em M como subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo ${}^{\infty}_{n}U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\to$ Tome $\varphi = \mathbb{1}_n$

Exemplo ${}^{\infty}_{n-1}\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\to$ Construa a projeção estereográfica

$\square$ Sejam ${}^{k}_{d}M \subseteq \mathbb{R}^n$, $V^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^d$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(V) \subseteq M$. Então, ψ é uma paremetrização local de M sse ψ é imersão e homeomorfismo (τ_M).

($\Leftarrow$) A bijeção é imediata de $\psi(V)^{\diamond} \subseteq M$. Aplique $\blacksquare$ (FLI) e faça a composição com a projeção.

Imersão injetiva $\not\Rightarrow$ homeomorfismo

Exemplo Parametrização local da esfera (coordenadas esféricas). Seja $\psi : [0,\pi]^{n-2} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$(\theta_i) \mapsto \left(\cos\theta_1, \dots, \prod^{j<i} \sin\theta_j \cdot \cos\theta_i, \dots, \prod \sin\theta_i \right).$$

Exemplo Se $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ então $\mathrm{graf}(F) := \{(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \in U \times \mathbb{R}^m\} = {}^{k}_{n}M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, com $\psi : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}))$ e $\varphi = \pi : (\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \mapsto \mathbf{x}$.

Exemplo Seja ${}^{k}H \subseteq \mathbb{R}^n$ hipersuperficie, então ${}^{k}_{n-1}H \subseteq \mathbb{R}^n$. $\to$ H é localmente o gráfico de uma função

$\square$ Seja $G \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$. Se $\forall p \in U,\ G$ é submersão em p, então

$$\{p \in U : G(p) = 0\} =: {}^{\;\;k}_{n-m}M \subseteq \mathbb{R}^n.$$

$\diamondsuit$ Sejam ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n$ e ${}^k\psi_a : V^{\diamond} \simeq \mathcal{U}_p$ uma parametrização local tal que $\psi_a(a) = p$. O *espaço tangente* a $p \in M$ é o dado por

$$T_p M := \operatorname{Im}(D\psi_a(a)) = \bigoplus \mathbb{R}\frac{\partial \psi_a}{\partial x_i}(a) \leq \mathbb{R}^n.$$

Nota. O espaço afim $p + T_p M$ é o "intuitivamente" tangente a M en p.

$\square$ Sejam ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n$ e $c \in C^k(\mathcal{V}_\epsilon; M)$ caminho em M, então

$$T_p M = \{c'(0) : c(0) = p\}.$$

Nota. O espaço tangente não depende da parametrização.

Exemplo Se $U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$ então $T_p U = \mathbb{R}^n$.

Nota. Em diante, para refererinos a ${}^{\,k}_{d_1} M \subseteq \mathbb{R}^n$ e ${}^{\,k}_{d_2} N \subseteq \mathbb{R}^m$ escrevemos simplesmente M e N.

$\square$ $F \in C^k(M; N)$ sse $\forall \psi : V^{\diamond} \to \mathcal{U}_p$ parametrização local de M em p, tem-se que $F \circ \psi \in C^k(V; N)$. $\to$ Basta ver só um atlas

$\diamondsuit$ Seja $F \in C^k(M; N)$. A derivada de F em $p \in M$ é a aplicação linear $DF(p) : T_p M \to T_{F(p)} N$ tal que $v \mapsto D\widetilde{F}(p) \cdot v$.

$\square$ Se $F \in C^k(M; N)$ então derivada $DF(p)$ não depende da $\widetilde{F}$.

Tome ψ_a e $\psi_b{}'$ parametrizações locais de $p \in M$ e $F(p) \in N$. Faça $\varphi' \circ F \circ \psi : V \to V'$, pelo $\blacksquare$ (Regla da Cadeia) temos o diagrama a dereita. Note que $D\widetilde{F} : \operatorname{Im}(D\psi_a(a)) \mapsto \operatorname{Im}(D\psi_{a'}(a'))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "DF"] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^{d_1} \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "D(\varphi' \circ F \circ \psi)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^{d_2} \arrow[u, "\psi'"']
\end{tikzcd}$$

Exemplo $F : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $(\cos\theta, \sin\theta) \equiv (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \equiv (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$. $\to$ Faça as contas

Nota. Em geral, tudo o que foi visto para aplicações, vale em variedades:

Regla da Cadeia Se $F \in C^k(M; N)$ e $G \in C^k(N; P)$ então $G \circ F \in C^k(M; P)$ e $D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p)$.

Derivada da Identidade $D\mathbb{1}_M = \mathbb{1}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.

Teorema da Função Inversa Seja $F \in C^k(M;N)$ tal que $D\widetilde{F}(p)$ é isomorfismo, então $\exists\, {}^kF : \mathcal{U}_p \cap M \simeq \mathcal{V}_{F(p)} \cap N$.

9.1 Valores Regulares

$\diamond$ Seja $F \in C^k(M;N)$. Um ponto $p \in M$ é *regular* se F é submersão em p, se não fora regular então é *ponto crítico* de F.

Nota. Se $\exists p \in M$ ponto regular de F então $\dim M \geq \dim N$.

■ (Multiplicadores de Lagrange)

Exemplo Seja $M = {}^kH \subseteq \mathbb{R}^n$ hipersuperficie definida por $g(\mathbf{x}) = 0$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função escalar, então

$$p \in M \text{ ponto crítico de } f(M) \Leftrightarrow df(p) : T_pM \not\twoheadrightarrow \mathbb{R}.$$

$\diamond$ Seja $F \in C^k(M;N)$. Um valor $q \in N$ é *valor crítico* se $\exists p \in M$ tal que p é ponto crítico de F e $F(p) = q$, de outra forma é um *valor regular* de F.

$$p \in M \text{ regular} \not\Rightarrow q = F(p) \text{ regular}$$

Nota. Um conjunto da forma $F^{-1}(q)$ é chamado *fibra*.

■ (*Fibras Regulares*) Sean ${}^k_{d_1}M \subseteq \mathbb{R}^n$, ${}^k_{d_2}N$, $F \in C^k(M;N)$. Si $q \in N$ es un valor regular de F, entonces $P = F^{-1}(q)$ es ${}^{\ \ k}_{d_1-d_2}P \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sejam $p = F^{-1}(q)$ e $d_1 - d_2 = c$. Note que $\mathbb{R}^c \cong \ker DF(p) \leq \mathbb{R}^n$, defina $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ tal que $L \cdot \ker DF(p)$ é isomorfirsmo. Faça $G : M \to N \times \mathbb{R}^c$ tal que $\mathbf{x} \mapsto (F(\mathbf{x}), L(\mathbf{x}))$. Aplique ■ (TFI) e conclua.

Exemplo 1 é valor regular de $g : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \sum x_i^2 \in \mathbb{R}$ e $g^{-1}(1) = \mathbb{S}^{n-1}$.

Variedades de dimensão 0

Exemplo Sejam $F \in C^k(M;N)$ com $\dim M = \dim N$ e $q \in N$ valor regular de F. Então, $P = F^{-1}(q)$ é um conjunto discreto. Ainda mais, se M fora compacto $\Rightarrow |P| < \infty$. $\to$ $\mathbb{R}^0 = \{0\}$

■ (*Brown-Sard*) Seja $F \in C^k(M;N)$. Se $k \gg 0$ então o subconjunto de valores regulares de F é denso em N.

Nota. A medida de $B = (a_i, b_i)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ bloque aberto é $\mu(B) := \prod(b_i - a_i)$.

◇ Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tém *medida nula* se $\forall \epsilon > 0$, $\exists B_i$ bloques abertos tais que $S \subseteq \bigcup B_i$ e $\sum \mu(B_i) < \epsilon$. .

Exemplo Se $n < m$ então $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ tém medida nula.

Exemplo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ enumerável tém medida nula. $\to$ Pontos isolados

■ (*Sard*) Sejam $U^{\diamond} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$ tal que $k \geq \{n-m+1, 1\}$. Então, o conjuntos de valores críticos de F tém medida nula em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo Pelo ■ (Sard) ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n$ com $d < n$ tém medida nula. $\to$ Todos os valores da inclusão $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ são críticos

Exercise Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tém medida nula então $\mathbb{R}^n \setminus S$ é denso.

§ 10 Formas Differenciais

Nosso objetivo é uma noção geral de integral em variedades que não dependa da escolha da parametrização local.

Exemplo

$$\int_a^b \overbrace{f(t)\,dt}^{\substack{\text{Forma Diff} \\ \uparrow}} \overset{t \to 2u}{=} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} f(2u)\,2du.$$

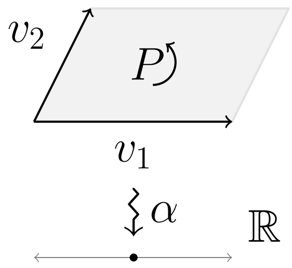
10.1 Formas Alternadas

◇ Seja V espaço vectorial. Uma k-*forma* alternada é uma função k-linear, $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ tal que, se $v_i = v_j$ para algum $i \neq j$ então $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Exemplo $\alpha : V \to \mathbb{R}$ linear é 1-forma alternada. $\to$ A antissimetria é trivial

Nota. $V^0 = \{\emptyset\}$, logo, uma 0-forma é simplesmente um $\alpha(o) \in \mathbb{R}$.

Exemplo A função $\det : (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ é 2-forma alternada em $V = \mathbb{R}^2$, onde



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Nota. A função α é tipo um "volume" k-dimensional com sinal, dada pela "orientação" ou ordem de os v_i.

$$◇ \quad A^k(V) := \{\alpha \mid \alpha \text{ é } k\text{-forma alternada}\}$$

□ Seja $\alpha \in A^k(V)$ e $i < j$. Então,

i. $\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$. $\to$ Denote $\alpha(v_i, v_j)$ e faça a conta $0 = \alpha(v_i + v_j, v_i + v_j)$

ii. Se $v_1, \ldots, v_k$ são l.d. então $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$. $\to$ Expresse $v_1 = \sum \lambda_j v_j$ e faça a conta

Corolário. As formas alternadas são antisimetricas. Se S_k é o grupo de permutações de ordem k e $\operatorname{sgn} : S_k \ni \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ então,

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_k).$$

Nota. $S_k \ni \sigma = \prod \tau_j : \tau_j$ é transposição, assim, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{|J|}$.

Espaços não triviais $\sim$ $\dim V = n$

Exemplo $A^0(V) = \mathbb{R}$, $A^1(V) = V^*$ e $A^k(V) = \{0\}$ se $k > n$. $\to$ Segue de o lemma sobre dependencia linear

Exercise (Projetor Alternado) Seja $f : V^k \to \mathbb{R}$ função k-linear, então

$$Af : (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

é uma k-forma alternada. Em particular, se f é alternada, então $Af = f$.

$\diamond$ Sejam $T \in \mathcal{L}(V; W)$ e $\alpha \in A^k(W)$. O *pullback* de α por T é a função $T^*\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ tal que $(v_1, \ldots, v_k) \mapsto \alpha(Tv_1, \ldots, Tv_k)$.

$$T^* : A^k(W) \to A^k(V)$$

Exemplo $\pi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\det \in A^2(\mathbb{R}^2)$ então,

$$\pi^*\alpha((x, y, z), (x', y', z')) = \alpha((x, y), (x', y')) = \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ Sejam $\alpha \in A^p(V)$ e $\beta \in A^q(V)$. O *produto exterior* de α e β é a função $\alpha \wedge \beta : V^{p+q} \to \mathbb{R}$ dada por,

$$(v_1, \ldots, v_{p+q}) \mapsto \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Exemplo Sejam $\alpha, \beta \in A^1(V)$. Então, $\alpha \wedge \beta \in A^2(V)$ é a dada por

$$(v_1, v_2) \mapsto \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) = \det \begin{pmatrix} \alpha(v_1) & \beta(v_1) \\ \alpha(v_2) & \beta(v_2) \end{pmatrix}.$$

$\square$ Sejam $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A^q(V)$ e $\gamma \in A^r(V)$. Então, o produto $\wedge$ é:

i. $A^p(V) \times A^q(V) \ni (\alpha, \beta) \to \alpha \wedge \beta \in A^{p+q}(V)$, bém definido.

ii. Bilinear, se $p = r \Rightarrow (\alpha + \lambda\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \lambda(\gamma \wedge \beta)$, na outra coordenada, se $q = r \Rightarrow \alpha \wedge (\beta + \lambda\gamma) = \alpha \wedge \beta + \lambda(\alpha \wedge \gamma)$.

iii. Anticonmutativo, $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. $\to$ Tome a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 \cdots p+q \\ q+1 \cdots q+p & & 1 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

iv. Associativo, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. $\rightarrow$ Use o projetor alternado em $f(v_i)$, $i \in \{n \in \mathbb{N} : n \leq p + q + r\}$ e faça as contas chatas

v. Compativél com pullback, $T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*\alpha \wedge T^*\beta$.

■ Sejam V espaço vectorial e $[l_1, \ldots, l_n]$ uma base l.i. Então, $\forall k \leq n$, temos que $A^k(V) = [l_{i_1} \wedge \cdots \wedge l_{i_k}]$. Em particular, $\dim A^k(V) = \binom{n}{k}$.

Exemplo Se $V = [\omega_1, \ldots, \omega_n]$ (l.i.) e $\alpha \in A^n(V)$ então, $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \det(a_{ij})\alpha(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, onde $v_j = \sum a_{ij}\omega_i$. $\rightarrow$ $T^*\alpha = \det(T)\alpha$

Exemplo

$$(\mathbb{R}^3)^* = [e_1^*, e_2^*, e_3^*] \rightsquigarrow \begin{cases} A^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R} \\ A^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}e_1^* \oplus \mathbb{R}e_2^* \oplus \mathbb{R}e_3^* \\ A^2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}(e_1^* \wedge e_2^*) \oplus \mathbb{R}(e_1^* \wedge e_3^*) \oplus \mathbb{R}(e_2^* \wedge e_3^*) \\ A^3(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*) \sim \det(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

10.2 Formas Differenciais

Nota. Se $\varphi = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma carta local de ${}^r_dM \subseteq \mathbb{R}^n$, lembre-se que $[d\mathbf{x}_1, \ldots, d\mathbf{x}_d] = (T_pM)^* = A^1(T_pM)$.

◇ Uma k-*forma diff* de classe C^r em ${}^r_dM \subseteq \mathbb{R}^n$, é uma associação

$${}^r_k\omega : M \ni p \mapsto \omega(p) = \sum f_{i_1,\ldots,i_k}\, d\mathbf{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_{i_k} \in A^k(T_pM),$$

tal que, $\forall \varphi = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$, as funções $f_{i_1,\ldots,i_k} \in C^r(\mathcal{U}_p; \mathbb{R})$.

Nota. Em deante tudo será C^∞, variedades, aplicações, formas, etc.

$$\diamond \; \Omega^k(M) := \{\omega \mid \omega \text{ é } k\text{-forma diff}\}$$

$$\sum f_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \omega \in \Omega^k(U^{\diamond}) \Leftrightarrow f_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U)$$

- Se $U = I \subset \mathbb{R}$, então $\omega = f(t)dt \in \Omega^1(I)$ sse $f \in C^\infty(I)$.
- Se $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f, g \in C^\infty(U)$ então $f \in \Omega^0(U)$, $fdx + gdy \in \Omega^1(U)$ e $f(dx \wedge dy) \in \Omega^2(U)$.

Nota. Em geral, $\Omega^0(M) = C^\infty(M;\mathbb{R})$ e se $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ então $df \in \Omega^1(M)$, pois, $df(p) \in (T_pM)^* = A^1(T_pM)$.

Exercise Seja $\varphi = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d) : \mathcal{U}_p \to \mathbb{R}^d$ carta local de ${}_dM$, então

$$df\Big|_{\mathcal{U}_p} = \sum \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}\, d\mathbf{x}_i, \text{ sendo } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(p) := \frac{\partial}{\partial t_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Onde, $(t_1, \ldots, t_d)$ são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^d$.

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$$

Exemplo Em $M = \mathbb{R}^2$, tém-se $(e^{x+y}dx + xdy) \wedge (ydx) = -xy\,(dx \wedge dy)$.

□ Uma aplicação $F \in C^\infty(M;N)$ induce, $\forall p \in M$, uma outra aplicação via pullback $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ tal que,

$$\omega(p) \mapsto F^*\omega(p) = DF(p)^*\omega(F(p)).$$

Exemplo Se $g \in \Omega^0(N)$ então $F^*g = g \circ F$ e $F^*(dg) = d(F^*g) = d(g \circ F)$.

Nota. Na hora das contas, se $\varphi = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{d_1})$ e $\varphi'(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{d_2})$ são cartas locais de p e $F(p)$ respetivamente, tais que $F(\mathcal{U}_p) \subseteq \mathcal{V}_{F(p)}$, então

$$\omega\Big|_{\mathcal{V}_{F(p)}} = \sum g_{i_1,\ldots,i_k} d\mathbf{y}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{y}_{i_k}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad F^*\mathbf{y}_{i_1} = \sum \frac{\partial F^*\mathbf{y}_{i_1}}{\partial \mathbf{x}_j} d\mathbf{x}_j$$

$$(F^*\omega)\Big|_{\mathcal{U}_p} = \sum F^* g_{i_1,\ldots,i_k} d(F^*\mathbf{y}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(F^*\mathbf{y}_{i_k})$$

Em particular, se $F = \iota : M \to N$ então $\iota^*\omega = \omega|_M$.

Exemplo Sejam $\omega = fdx + gdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ e $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave, então $c^*\omega = (f(c(t)){c_1}'(t) + g(c(t)){c_2}'(t))dt$.

Exemplo (Forma de angulo) $d\theta = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

◇ Uma variedade ${}_dM$ é *orientavél* se $\exists \omega \in \Omega^d(M)$, chamada *forma de orientação*, tal que $\forall p \in M,\ \omega(p) \neq 0$.

Exemplo $\mathbb{R}^n$ é orientavél com $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ e $\mathbb{S}^1$ com $\omega = d\theta\Big|_{\mathbb{S}^1}$.

Exemplo A faixa de Möbius não é orientavél.

◇ Sejam M orientavél e $\omega, \omega' \in \Omega^d(M)$ formas de orientação. Então, $\omega \sim \omega'$ se $\exists f > 0$ tal que $\omega = f\omega'$. Uma *orientação* de M é $[\omega]/\sim$.

Exercise Se M é conexa e orientavél então têm só dois orientações.

◇ Seja M orientavél. A *forma de volume* de M é a única representante ω_{vol} de $[\omega] \in \Omega^d(M)/\sim$, tal que, $\forall [w_1, \ldots, w_d]$ base ortonormal de T_pM,

$$\omega_{\text{vol}}(w_1, \ldots, w_d) = 1 \text{ e } \omega(w_1, \ldots, w_d) > 0.$$

Exemplo $\omega_{\text{vol}} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ é a forma de volume de $\mathbb{R}^n$.

ω_{vol} em ${}_{n-1}H \subseteq \mathbb{R}^n$ hipersuperficie

Exemplo $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$ é orientavél. Sendo $\vec{n}(p) = \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \perp T_pH$, sua forma de volume é

$$\omega_{\text{vol}} = \sum (-1^{i+1})\vec{n}_i \, d\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mathbf{x}_i} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_n\Big|_H.$$

$$\det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{n} & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Exemplo Em $H = \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ temos $\vec{n}(x) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, logo,

$$\omega_{\text{vol}} = \sum (-1)^{i+1} x_i \, d\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mathbf{x}_i} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_n\Big|_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

10.3 Derivada Exterior

Nota. A idea agora é entender como se derivam as formas diferenciais.

■ $\forall M$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists! d_i \in \mathcal{L}(\Omega^k(M); \Omega^{k+1}(M))$, onde $d_i : \omega \mapsto d\omega$ verifica,

i. Derivada de uma função, $\Omega^0(M) = C^\infty(M) \ni f \mapsto df \in \Omega^1(M)$.

ii. Regla de Leibniz com sinal, se $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega^q(M)$ então,

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

iii. $d^2 = 0$, se $\omega \in \Omega^k(M)$ então $d(d\omega) = 0$. $\to$ Motivada pelo ■ (*Schwarz*)

iv. Compativél com pullback, se $F \in C^\infty(M; N)$ e $\omega \in \Omega^k(N)$ então,

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Exemplo Sendo $I = (i_1, \ldots, i_k)$ e $\sum f_I \, d\mathbf{x}_I = \omega \in \Omega^k(M)$, temos,

$$d\omega = \sum df_I \, d\mathbf{x}_I.$$

◇ $\omega \in \Omega^k(M)$ é *exata* se $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$. Por outro lado, se $d\omega = 0$ dezimos então que é *fechada*.

Nota. Ver que ω é exata é "resolver" EDPs, ou seja integrar.

§ 11 Integração em Variedades

Nota. Nesta seção $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

11.1 Integração em Cadeias

◇ Um *k-bloco singular* em M é uma aplicação $\sigma \in C^\infty(I^k; M)$.

Exemplo (n-bloco padrão em $\mathbb{R}^n$) $\mathbb{1}_{I^n} : I^n \to I^n \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo Uma curva suave $c : I \to M$ é um 1-bloco singular.

σ k-bloco singular $\neq$ $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq M$

Exemplo $\sigma : I^n \ni \mathbf{x} \mapsto p \in M$ é um n-bloco singular.

◇ Sejam $\omega \in \Omega^k(M)$ e σ um k-bloco singular. Então,

$$\int_\sigma \omega = \int_{I^k} \sigma^*\omega = \int_{I^k} f(\mathbf{x}) \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{I^k} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Integral de linha

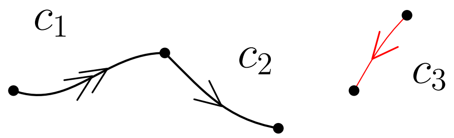
Exemplo Sejam $c(t) : [a,b] \to U^{\text{✧}} \subseteq \mathbb{R}^n$ curva suave e $\sum^n f_i\ dx_i = \omega \in \Omega^k(U)$, então temos

$$\oint_c \omega = \int_a^b c^*\omega\ dt = \int_a^b \sum^n (f_i \circ c)(t) {c_i}'(t)\ dt$$

◇ Uma *k-cadeia* de blocos singulares em M é uma expresão da forma

$$c = \sum^k n_i \sigma_i,\ n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \sigma_i : I^k \to M.$$

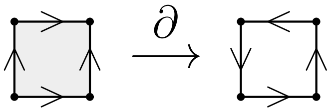
Exemplo $c = 2c_1 + c_2 - c_3$.



Nota. Mais formalmente, as k-cadeias são elementos do grupo abeliano livre gerado pelos k-blocos singulares.

◇ Se $\omega \in \Omega^k(M)$ e c é uma k-cadeia singular, então $\displaystyle\int_c \omega = \sum^k n_i \int_{\sigma_i} \omega.$

◇ Seja σ um k-bloco singular. O *borde* de σ é a $(k-1)$-cadeia dada por



$$\sim \quad \partial\sigma = \sum^k (-1)^i (\sigma_{(i,0)} - \sigma_{(i,1)}).$$

Exercise Se c é uma k-cadeia, então $\partial(\partial c) = 0$. $\to \partial^2 = 0$, olha no Spivak

■ (*Stokes*) Seja $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e c k-cadeia em M, então

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

References

[1] Lima, Elon Lages (2004). *Análise real Vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro.