

# <sup>+</sup>1 Notas de Análise no $\mathbb{R}^n$

September 11, 2025

"Tudo posso naquele que me fortalece"

Elon 4:13

Nestor Heli Aponte Avila<sup>1</sup>

[n267452@dac.unicamp.br](mailto:n267452@dac.unicamp.br)

\*\* Conteúdo baseado na disciplina MM720 (Análise no  $\mathbb{R}^n$ ) ministrada pelo professor Tiago Jardim Fonseca no período 2025-I. \*\*

## Notação

□ Lema



Definição



Proposição



(-)<sup>◇</sup> Aberto



Teorema



(-)<sup>◆</sup> Fechado



Corolário

## § 1 Derivadas Direcionais

◇ Seja  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar. Para  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  e  $p \in U$ , a  $v$ -direcional derivada de  $f$  em  $p$ , se existir, é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h} \sim f(p + hv) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p) \cdot h + \sigma(h).$$

Nota. Se  $v = e_i$  então  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  é a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  em  $p$ .

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(p + hv) = f(p) + \alpha h + \sigma(h) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \alpha$$

**Exemplo**  $f : \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2 \in \mathbb{R}$ . → Use produto interno e encontre  $\alpha$

$$\forall j \leq n, \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \not\Rightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p) \not\Rightarrow f \text{ continua em } p$$

**Exemplo**  $(x, y) \mapsto x + y$ , se  $x = 0$  or  $y = 0$ , nula no caso contrario. → Prove diferentes direções em 0

**Exemplo**  $0 \neq (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{\|x\|^2}$ , nula em 0. → Estude a continuidade no 0

◇ (Conexidade)  $X^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  é conexo sse  $\nexists U^\diamond, V^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  não vazios tais que  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $X \subseteq U \cup V$ .

□ Se  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  é conexo, então  $\forall p, q \in U, \exists \Gamma$  caminho poligonal em  $U$  com vértices  $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$ , tais que  $p_{i+1} - p_i$  é colinear com algum  $e_j$ .  
→ É por construção, só lembre que  $U$  é aberto.

□ Seja  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  conexo e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  função tal que  $\forall p \in U, \forall i \leq n$  as derivadas  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$  em  $U$ , então  $f$  é constante.

Use o lemma, aplique TVM para  $\varphi(t) = f(p_i + te_j)$ , quem é  $\varphi'(\theta)$ ?

## § 2 Funções de Classe $C^k$

◇ Seja  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall p \in U, \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos a derivada de segundo ordem de  $f$  como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p).$$

*Nota.* O ordem é importante, em geral. De forma análoga, definimos as  $k$ -ésimas derivadas de  $f$ .

◇ Seja  $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Uma função  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k(U)$  se  $\forall p \in U, \forall m \leq k, \exists \partial^m f(p)$  continua em  $p$ .

*Nota.*  $f \in C^0 \Leftrightarrow f$  continua;  $f \in C^\infty \Leftrightarrow f$  é suave.

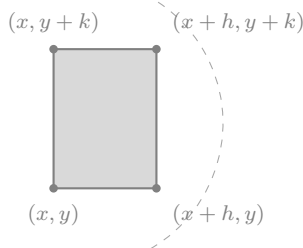
**Exemplo** O anel de polinômios  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemplo**  $\det(T) : M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^\infty$ . → É polinomial

**Exemplo** Seja  $f : x \mapsto x^{1/3}$ , então  $f \in C^0(\mathbb{R})$  mais não é de classe  $C^1$  em 0. → Veja o que acontece com o limite nesse ponto

■ (Schwarz) Se  $f \in C^2(U)$ , então  $\forall i, j \leq n$  temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$



Basta ver  $n = 2$ . Defina  $S = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$  e  $\varphi(t) = f(t, y+k) - f(t, y)$ , aplique TVM  $\times 2$  e manobre até obter uma igualdade a  $S$ . O resultado segue de fazer o mesmo a  $\psi(t)$ , fixando a outra coordenada.

■ Se  $f \in C^k(U)$  então não importa o ordem em que são tomadas as derivadas de ordem  $m \leq k$ .  $\rightarrow$  É uma questão de trabalhá-las 2 a 2

## § 3 O Diferencial

◇ Seja  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$ . Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é *diff* em  $p \in U$  sse  $\exists \ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineal, tal que

$$f(p+v) = f(p) + \ell \cdot v + \sigma(\|v\|), \text{ quando } v \rightarrow 0.$$

□ Se  $f$  é *diff* em  $p$ , então  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , temos  $\ell \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$ .  $\rightarrow$  Vá de uma definição a outra

◇ Se  $f$  é *diff* em  $p$  então o *diferencial* de  $f$  em  $p$  é a função lineal  $df(p) : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$df(p) \cdot v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i.$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \not\Rightarrow df(p) \text{ lineal} \not\Rightarrow f \text{ diff em } p$$

**Exemplo**  $f : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2 \in \mathbb{R}$ .  $\rightarrow$  Como em nosso primeiro exemplo

□ Se  $f$  é *diff* em  $p$ , então  $f$  é continua em  $p$ .  $\rightarrow$  Faz  $v \rightarrow 0$  na definição

$$\nexists df(p) \Leftarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \not\ni \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p) \mid \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists \frac{\partial f}{\partial v}(p) \not\Rightarrow \exists df(p).$$

**Exemplo**  $0 \neq (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{\|\mathbf{x}\|^2}$ , nula em 0.  $\rightarrow f(v) = \sigma(\|v\|)$ ? Estude a linearidade das direcionais no 0

**Exemplo**  $0 \neq (x, y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+y^4}$ , nula em 0.  $\rightarrow$  Proceda como no anterior

*Nota.* A mecânica para **descartar** diff consiste em (i) continuidade no  $p$ ; (ii)  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  lineares e (iii)  $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(p)$  lineares.

■ Se  $f \in C^1(U)$  então  $f$  é diff em  $U$ .

Tome um caminho poligonal  $\Gamma$  de  $p$  até  $p + v$  para escrever  $f(p + v) - f(p) = \sum f(p_i) - f(p_{i-1})$ . Aplique TVM a cada termo da soma e faça aparecer as derivadas parciais. Separe a soma e verifique por definição.

**Exemplo**  $\mathbb{R}[\mathbf{x}] \ni p(\mathbf{x})$  é diff.

**Exemplo**  $\pi_i : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto x_i \in \mathbb{R}$  é diff.

*Nota.* Além de ser linear,  $dx_i(p) = x_i$ . Portanto, o espaço dual  $(\mathbb{R}^n)^* = [dx_i]$ , de modo que o diferencial da  $f$  se escreve de forma única como

$$df(p) = \sum^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i.$$

◇ Se  $f$  é diff em  $p$ , então chamamos de *gradiente* de  $f$  em  $p$  o vector

$$\nabla f(p) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

*Nota.* Para  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  temos  $\langle \nabla f(p), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$ , supondo  $\|v\| = 1$ , então

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(p) \right| = |\langle \nabla f(p), v \rangle| \leq \|\nabla f(p)\| \|v\|,$$

ou seja, o gradiente aponta na direção de maior crescimento de  $f$  em  $p$ .

◇ Seja  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $p \in U$  é extremo local da  $f$  se  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|\mathbf{x} - p\| < \delta$  implica  $f(p) \leq f(\mathbf{x})$  ou  $f(\mathbf{x}) \leq f(p)$ .

**Exercise** Se  $f$  é diff em  $p$  extremo local da  $f$ , então  $\nabla f(p) = 0$ .  $\rightarrow$  Trabalhe o limite em direções opostas

## § 4 Desigualdade do Valor Medio

□ Sejam  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in U$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tais que  $[p, p + v] \subseteq U$ . Se  $\forall t \in (0, 1)$  a função  $\varphi : t \mapsto f(p + tv)$  é diff em  $p + tv$ , então  $\varphi$  é diff em  $t$  e  $\varphi'(t) = df(p + tv) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p + tv)$ .  $\rightarrow$  Faz  $h \rightarrow 0$  de  $\varphi(t + h)$

■ (TVM -  $\mathbb{R}^n$ ) Seja  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua em  $[p, p + v]$  e diff em  $(p, p + tv)$ , então  $\exists \theta \in (0, 1)$  tal que  $f(p + v) - f(p) = df(p + \theta v) \cdot v$ .

Tome  $\varphi(t) = f(p + tv)$ , aplique o lema acima e TVM.

■ (DVM -  $\mathbb{R}^n$ ) Sejam  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diff,  $K \subset U$  convexo e  $c \geq 0$  tal que  $\forall \mathbf{x} \in K$ ,  $\|df(\mathbf{x})\| \leq c$ . Então,  $\forall p, q \in K$  temos  $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p - q\|$ .  $\rightarrow$  Tome  $q = p + v$  no Teorema anterior

◇ Seja  $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ . Definimos  $\|\ell\| := \sup_{\|v\|=1} |\ell v|$ .

**Exercise** Se  $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\ell v = \langle w, v \rangle$ , então  $\|\ell\| = \|w\|$ . Em particular, se  $f$  é diff em  $p$ , então  $\|df(p)\| = \|\nabla f(p)\|$ .  $\rightarrow$  Use Cauchy-Schwarz para provar as duas desigualdades

◇ Uma função  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é *Lipschitz continua* se  $\exists c \geq 0$  tal que  $\forall p, q \in X$ ,  $\|f(p) - f(q)\| \leq c\|p - q\|$ .

■ ■ TVM -  $\mathbb{R}^n$  implica  $f$  Lipschitz em  $K$ .

## § 5 Formula de Taylor

A ideia é aproximar funções por polinômios, visando uma forma  $f(p + v) = P_k[v] + \Gamma_k[v]$ , onde  $P_k$  é um polinômio na variável  $v$  de ordem  $k$  e  $\Gamma_k$  é um erro de ordem  $\sigma(\|v\|^k)$ .

**Exemplo** Se  $f \in C^2(U)$  e  $p \in U$ , então

$$f(p + v) = f(p) + \underbrace{\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)v_i v_j}_{P_2[v]} + \underbrace{\sigma(\|v\|^2)}_{\Gamma_2[v]}.$$

◇ Seja  $k \geq 2$ . Dizemos que  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é  $k$ -diff em  $p \in U$  se  $f$  é diff em  $p$  e  $\exists \mathcal{V}_p$  tal que  $\forall i \leq n$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) : \mathcal{V}_p \rightarrow \mathbb{R}$  são  $(k - 1)$ -diff em  $p$ .

**Exemplo**  $f \in C^k(U)$  é  $k$ -diff em  $p \in U$ .

◇ Seja  $f$  função  $k$ -diff em  $p$ , o diferencial  $k$ -ésimo de  $f$  em  $p$  é dado por

$$v \mapsto d^k f(p)v^{\otimes k} = \sum \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p)v_{i_1} \cdots v_{i_k}.$$

*Nota.*  $d^k f(p)v^{\otimes k}$  é um polinômio homogêneo de grau  $k$

$d^2 f(p)v = vA(p)v^T$  é uma forma bilinear quadrática de grau 2.

**Exemplo** Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $v = (h, k)$  temos

$$d^2 f(p)v^{\otimes 2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)k^2.$$

◇ Seja  $f$  função 2-diff em  $p$ , a Hessiana da  $f$  em  $p$ , é a matriz

$$Hf(p) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}.$$

*Nota.* Pelo ■ (Schwarz),  $\exists! Hf(p) \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$  tal que

$$d^2 f(p) v^{\otimes 2} = \langle Hf(p) \cdot v, v \rangle.$$

◇  $f \in C^k(\mathcal{U}_p)$  se anula à ordem  $k + 1$  em  $p$  se  $\forall \alpha : |\alpha| \leq k, d^\alpha f(p) = 0$ .

**Exercise** Se  $f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$  se anula identicamente numa vizinhança da origem então  $\forall \alpha, c_\alpha = 0$ .  $\rightarrow$  Hmmm

■ Sejam  $k \geq 1$  e  $f$  uma função  $k$ -diff em  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  se anula à ordem  $k + 1$  então  $f(v) = \sigma(\|v\|^k)$ .

Faz por indução, no passo indutivo use o TVM -  $\mathbb{R}^n$  para representar  $f(v)$  e calcule  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v)}{\|v\|^k}$ . Considere a função  $\Gamma_k(v)$  dada por

$$v \mapsto f(p + v) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} d^j f(p) v^{\otimes j},$$

observe que ela é  $k$ -diff no 0 e se anula à ordem  $k + 1$ .

■ (*Fórmula de Taylor Infinitesimal*) Se  $f$  é  $k$ -diff em  $p$  então

$$f(p + v) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(p) v^{\otimes j} + \sigma(\|v\|^k).$$

*Nota.* Fazendo  $\mathbf{x} = p + v$ , obtemos sua versão mais familiar

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} (\mathbf{x} - p)^\alpha + \sigma(\|\mathbf{x} - p\|^k).$$

**Exercise** Seja  $f$  função  $k$ -diff. Usando Taylor prove a volta do último Teorema, conclua a unicidade.  $\rightarrow$  Suponga que  $\exists P_i(v)$  homogêneo...

□ (*Fórmula de Taylor com Restos*) Sejam  $a \in I^\diamond \subset \mathbb{R}$  e  $\varphi \in C^{k+1}(I)$ , então  $\varphi(x) = P_k[x] + \Gamma_k[x]$ , onde  $\Gamma_k(x)$  pode ser,

i.  $\frac{\varphi^{(i+1)}(c)}{(i+1)!} (x - a)^{(i+1)}$  para algum  $c \in I \rightarrow$  Resto de Lagrange.

ii.  $\int_a^x \frac{\varphi^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k dt \rightarrow \text{Resto Integral}.$

■ (Fórmula de Taylor con Restos -  $\mathbb{R}^n$ ) Seja  $f \in C^{k+1}(U)$ . Então  $\forall p \in U$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tais que  $[p, p+tv] \subseteq U$  temos  $f(p+v) = P_k[v] + \Gamma_k[v]$ , onde  $\Gamma_k[v]$  pode ser,

i.  $\frac{d^{k+1}f(p+\theta v)}{(k+1)!} v^{\otimes(k+1)}$  para algún  $\theta \in (0, 1) \rightarrow \text{Resto de Lagrange}.$

ii.  $\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1}f(p+tv) v^{\otimes(k+1)} dt \rightarrow \text{Resto Integral}.$

Aplique o sabido numa variável à função  $\varphi(t) = f(p+tv)$ . Expresse o diferencial como soma, e desenvolva até chegar à forma descrita.

## § 6 Pontos Críticos

◇ Seja  $f$  diff em  $p$ . O ponto  $p$  é *ponto crítico* de  $f$  sse  $df(p) = \nabla f(p) = 0$ .

**Exemplo**  $f(x, y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$ .  $\rightarrow$  Faz a conta

□ Se  $f$  tem um extremo local em  $p$  então  $p$  é ponto crítico.  $\rightarrow$  0 es extremo local de  $\varphi_i(t) = f(p+te_i)$

O comportamento de  $f$  em  $\mathcal{U}_p$  é determinado pelo primeiro termo não nulo de sua expansão de Taylor, ou seja,  $d^2f(p)v^{\otimes 2} = \langle Hf(p) \cdot v, v \rangle$ .

**Exemplo** Se  $Hf(p)$  é diagonal tal que  $Hf(p) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , então

$$f(p+v) = f(p) + \cancel{df(p)} + \frac{1}{2} \sum \lambda_i v_i^2 + \sigma(\|v\|^2);$$

Se  $\forall i \leq n, \lambda_i > 0 \Rightarrow p$  é mínimo local de  $f$ . Analogamente, se  $\forall i \leq n, \lambda_i < 0 \Rightarrow p$  é máximo local de  $f$ .

◇ A forma quadrática de  $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$  é *positiva* se  $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\langle Av, v \rangle > 0$ , *negativa* se  $\langle Av, v \rangle < 0$  ou *indefinida* se for outro o caso.

**Exemplo**  $v \mapsto \|v\|^2$ , é positiva.  $\rightarrow$  É representada pela matriz  $\mathbb{1}_n$



**Exemplo**  $(t, x, y, z) \mapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  é indefinida.  $\rightarrow$  É representada pela matriz diagonal  $A = (1, -1, -1, -1)$

□ Sejam  $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seus autovalores. Então  $A$  é positiva (ou negativa) sse  $\forall i \leq n, \lambda_i > 0$  (ou  $\lambda_i < 0$ ).  $\rightarrow$  Teorema Espectral

■ Seja  $f$  função 2-diff em  $p \in U$  ponto crítico. Se  $Hf(p)$  é positiva (ou negativa) então  $f(p)$  é um mínimo (ou máximo) local.

Use  $\mathbb{S}^{n-1} \ni \vec{u} \mapsto \langle Hf(p)u, u \rangle$  para argumentar a existência de uma cota. Interprete essa cota no desenvolvimento de Taylor de ordem 2.

◇ Seja  $f$  função 2-diff,  $p$  ponto crítico de  $f$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $Hf(p)$ . O ponto  $p$  é *ponto de sela* sse  $\exists i, j \leq n$  tais que  $\lambda_i \lambda_j < 0$ .

*Nota.* Se  $\lambda_i > 0$  então  $f$  tem mínimo local na direção de  $\vec{v}_i$  (seu autovetor),

$$\langle Hf(p) \cdot v_i, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle > 0$$

**Exemplo**  $f(x, y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$ .  $\rightarrow$  Estude os pontos  $p$  tais que  $\nabla f(p) = 0$  e sua classificação segun  $Hf(p)$

◇ Um ponto crítico  $p$  de  $f$  é *degenerado* se  $\det(Hf(p)) = 0$ .

## 6.1 Otimização

■ (*Bolzano-Weierstrass*) Sejam  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto. Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é continua, então tem máximo e mínimo global em  $K$ .

¿+ condições para que funcione mesmo em não compactos?

**Exemplo** Seja  $(x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + (y-1)^2 + 4}$  en  $Q = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ y } y \geq 0\}$ .  
 $\rightarrow$  Estude os pontos críticos ¿O que acontece quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ?

□ Sejam  $F^\star \subseteq \mathbb{R}^n$  não limitado e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua, então

i. Se  $f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , então  $f$  tem mínimo global em  $F$ .

ii. Se  $f(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , então  $f$  tem máximo global em  $F$ .

i.  $\exists R > 0$  tal que se  $\|\mathbf{x}\| > R$ , então  $f(\mathbf{x}) > f(p)$ , onde  $\|p\| \leq R$ .

ii. Mesmo negócio.

## 6.2 Problemas com Condições

◇ Seja  $g \in C^k(U)$  tal que  $\forall p \in \ker(g)$ ,  $dg(p) \neq 0$ . O conjunto  ${}^kH := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$  é *hipersuperfície* de classe  $C^k$  definida por  $g(\mathbf{x}) = 0$ .

**Exemplo**  $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  definida pelos zeros da função  $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$  é  ${}^\infty H \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\rightarrow$  Verifique a condição  $g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$

$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  é fechado e limitado

**Exemplo**  $f(x, y) = \|\mathbf{x}\|^2 + y$  em  $\mathbb{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ .  $\rightarrow$  Halle  $p : \nabla f(p) = 0$  ¿Que hay de los puntos en  $f|_{\mathbb{S}^1}$ ?

■ (*Multiplicadores de Lagrange*) Sejam  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(U)$  e  ${}^1H \subseteq U$  hipersuperfície. Então  $p \in U$  é extremo local de  $f|_H$  sse  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $df(p) = \lambda dg(p)$ .

■ (*Teorema Espectral*) Toda matriz simétrica admite uma base ortonormal de autovetores (é diagonalizável).

Tome  $\mathbb{S}^1 \ni u \mapsto \langle Au, u \rangle$ , e um vetor  $u_1$  que a maximiza. Do sistema observa-se que  $u_1$  é autovetor com autovalor  $\lambda_1$ . Tome o complemento ortogonal de  $[u_1]$  e formule o argumento indutivo.

## § 7 Aplicações Diferenciais

◇ Uma *aplicação* é uma função vetorial  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cujas componentes são funções escalares  $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo** Um *caminho* em  $\mathbb{R}^m$  é uma aplicação  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

◊ Uma aplicação  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é *diff* em  $p \in U$  sse  $\exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  tal que  $F(p + v) = F(p) + Lv + \sigma(\|v\|)$ .

*Nota.*  $\sigma(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , logo,  $r(v) = \sigma(\|v\|)$  sse  $\forall i \leq m$ ,  $r_i(v) = \sigma(\|v\|)$ .

□ Uma aplicação  $F = (F_1, \dots, F_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é *diff* em  $p$  sse  $\forall i \leq m$ ,  $F_i$  é *diff* em  $p$  e  $L_i = dF_i(p)$ .

( $\Rightarrow$ ) É direto da definição tomando a  $L_i$  de  $L$  existente. ( $\Leftarrow$ ) Lembre-se que se  $\exists dF_i$ , é único, use isso para armar  $L$  e exponer a aproximação de  $F(p + v)$  com erro de ordem  $\sigma(\|v\|)$ .

■ Se  $F$  é uma aplicação *diff* em  $p$  então é continua em  $p$ .

◊ Se  $F$  é *diff* em  $p$ , definimos a *derivada* de  $F$  em  $p$  como

$$L = DF(p) = (dF_1(p), dF_2(p), \dots, dF_m(p)).$$

*Nota.* A notação NUNCA é um detalhe menor.

**Exemplo**  $f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  *diff* é uma aplicação *diff* e  $Df(p) = df(p)$ .

◊ Seja  $F$  aplicação *diff* em  $p$ . A *Jacobiana* da  $F$  é a matriz  $JF(p) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  que representa a derivada  $DF(p)$  na base canônica,

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) \ni JF(p) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right) \quad i \leq m, j \leq n.$$

*Nota.* Outra notação comum é  $JF(p) = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(p)$ .

**Exemplo** Para  $f \in C^k(U)$  temos  $Jf(p) = \nabla f(p) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^*$ .

**Exemplo** Seja  $c(t) = (c_1, \dots, c_m) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  caminho *diff*. Para ele temos  $Jc(t) = (c'_1(t), \dots, c'_m(t))^T \in M_{m \times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$ , o *vetor tangente*.

◊ Uma aplicação  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vai ser de classe  $C^k(U; \mathbb{R}^m)$  sse  $\forall i \leq m$ ,  $F_i \in C^k(U)$ .

■ Se  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  então  $F$  é diff em  $U$ .  $\rightarrow$  Imediato de seu semelhante para funções escalares

## 7.1 Derivadas de Ordem Superior

*Nota.* Uma aplicação  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diff induz uma outra aplicação  $DF : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \cong M_{m \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$  tal que  $p \mapsto DF(p)$  y cujas componentes são (sob identificação) as funções  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ . Nesse sentido,

- $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  sse  $F$  é diff e  $DF \in C^0(U; \mathbb{R}^{mn})$ .
- $F \in C^2(U; \mathbb{R}^m)$  sse  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  e  $D^2F \in C^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ , onde

$$D^2F : p \mapsto D(DF)(p).$$

□ Sejam  $V_1, V_2, W$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ , então  $\mathcal{L}(V_1; \mathcal{L}(V_2; W)) \cong \mathcal{L}(V_1 \otimes V_2; W)$ , o espaço de aplicações bilineares.

◇ A derivada  $k$ -ésima de uma aplicação  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se existir, é uma aplicação multilinear  $D^k F(p) : \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$v^{(1)} \otimes \dots \otimes v^{(k)} \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial v^{(1)} \dots \partial v^{(k)}}(p) = \sum \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(p) v_{i_1}^{(1)} \dots v_{i_k}^{(k)}.$$

## 7.2 Regra da Cadeia

■ Sejam  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n, V^\diamond \subseteq \mathbb{R}^r, F : U \rightarrow \mathbb{R}^r$  diff em  $p$  e  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  diff em  $F(p)$ . Então  $G \circ F$  é diff em  $p$  e  $D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p)$ .

Faz  $q = F(p)$ ,  $L = DF(p)$ ,  $M = DG(q)$  e  $H = G \circ F$ . Expanda os restos e escreva  $\Gamma_H(v)$  em termos de  $\Gamma_F(v)$  e  $\Gamma_G(w)$ . Desmonte as expressões e faça análise do erro.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D(G \circ F)(p)} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow DF(p) \quad \curvearrowright \quad \nearrow DG(F(p)) & \\ & \mathbb{R}^r & \end{array}$$

■ Se  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^r)$  e  $G \in C^k(V; \mathbb{R}^m)$  então  $G \circ F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ .

## Um velho conhecido

**Exemplo** Sejam  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $c(t) = p + tv$  e  $\varphi(t) = (f \circ c)(t)$  então temos  $\varphi'(t) = df(p + tv) \cdot v$ .

## § 8 Diffeomorfismos

◇ Sejam  $U^\diamond, V^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$ . Uma aplicação  $F : U \rightarrow V$  é *difeomorfismo* de classe  $C^k$ , se  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$  é bijeção com  $F^{-1} \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$ .

*Nota.* Por praticidade na notação escrevemos  ${}^kF : U \simeq V$ .

**Exemplo**  $F : (t, x) \mapsto (x - ct, x + ct)$  é  ${}^\infty F : U \simeq V$ , onde  $U = V = \mathbb{R}^2$ .  
→ Faça as contas e observe como é a inversa

### Difeomorfismo $\Rightarrow$ Homeomorfismo

**Exemplo** Sea  $I \subset \mathbb{R}$ . ¿  $\exists {}^kF : I \simeq \mathbb{S}^1$ ? → Não, tire um ponto da esfera

$$\diamond \mathbb{B}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}$$

**Exemplo**  $\exists {}^\infty F : \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{B}^n$ . → Tome  $F : \mathbb{B}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}} \in \mathbb{R}^n$

$$F \in C^k(U; \mathbb{R}^n) \text{ bijetiva} \not\Rightarrow F^{-1} \in C^k(F(U); \mathbb{R}^n)$$

**Exemplo**  $F : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^3$  não é  ${}^kF : \mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}$ . →  $F^{-1}$  não é diff em 0

■ Da regra da cadeia, se  $F$  é diffeomorfismo, então  $\forall p \in U$ ,  $DF(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  é invertível, mais ainda, sendo  $F(p) = q$  temos

$$D[F^{-1}](q) = [DF(p)]^{-1}.$$

Em termos de matrizes,  $\det(JF(p)) \neq 0$  e  $[JF^{-1}](q) = [JF(p)]^{-1}$ .

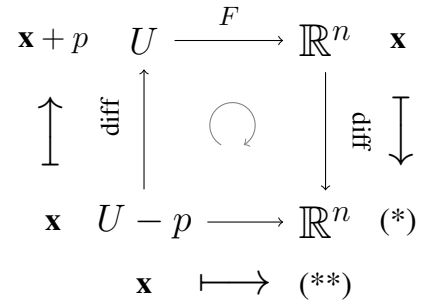
*Nota.* ¿ Vale a volta do corolário em alguma vizinhaza  $\mathcal{V}_p$ ? Sim!

## 8.1 Teorema da Função Inversa

◇  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diffeomorfismo local de classe  $C^k$  em  $p \in U$  se  $\exists \mathcal{V}_p \subseteq U$  tal que  ${}^kF : \mathcal{V}_p \simeq F(\mathcal{V}_p)^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$ . Denotamos  ${}^kF : \mathcal{V}_p$ .

■ (Função Inversa) Sejam  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$  e  $p \in U$ . A aplicação  $F$  é  ${}^kF : \mathcal{V}_p$  sse  $DF(p)$  é isomorfismo.

*Nota.* Basta ver a volta. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $p = 0$ ,  $F(p) = 0$  e  $DF = \mathbb{1}_n$ . Remeta-se ao gráfico, nele,  $(*) = [DF(p)]^{-1}(\mathbf{x} - F(p))$  e  $(**) = [DF(p)]^{-1}(F(\mathbf{x} + p) - F(p))$ . Nestes novos termos  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + R(\mathbf{x})$ , onde  $R(\mathbf{x}) = \sigma(\|\mathbf{x}\|)$ .



□ Seja  $F : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  aplicação diff em  $p \in U$ , então  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \mathcal{V}_p$  tal que  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}_p$ ,  $\|F(\mathbf{x}) - F(p)\| \leq (\|DF(p)\| + \epsilon)\|\mathbf{x} - p\|$ . → Use a definição de diff com  $v = \mathbf{x} - p$

$\exists \mathcal{V}_0$  tal que  $F : \mathcal{V}_0 \hookrightarrow F(\mathcal{V}_0)$

$DR(0) = 0$ , logo para  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists \mathcal{V}_0$  tal que  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{V}_0$ ,  $\|R(\mathbf{x}_1) - R(\mathbf{x}_2)\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ . Reinterprete em termos da  $F$  e conclua.

◇ Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $T : M \rightarrow N$  é uma contração se  $\exists c < 1$  tal que  $\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|$ .

■ (Ponto Fixo Banach) Se  $X^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $T : X \rightarrow X$  é uma contração, então  $\exists! x^* \in X$  tal que  $T(x^*) = x^*$  e  $\forall x_0 \in X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = x^*$ .

$F(\mathcal{V}_0)^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$

Tome  $p \in \mathcal{V}_0$ ,  $q = F(p) \in F(\mathcal{V}_0)$ . Defina  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{V}_0$ ,  $T_{\mathbf{y}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} - R(\mathbf{x})$ . Tome  $r > 0$  tal que  $B[p, r] \subset \mathcal{V}_0$ . Suponha  $\|\mathbf{y} - q\| < \frac{r}{2} = \epsilon$  e  $\mathbf{x} \in B[p, r]$ . Desenvolva  $\|T_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - p\|$  e aplique ■ (Ponto Fixo).

□ Seja  $L \in GL_n(\mathbb{R})$ . A aplicação  $\text{inv} : L \mapsto L^{-1}$  é diff.  $\rightarrow$  Faz direito  $\text{inv}(L + H)$  e use a serie geométrica de Neumann

$$F^{-1} \in C^k(F(\mathcal{V}_0; \mathbb{R}^n))$$

•  $\|DF(p) - \mathbb{1}_n\| = \|DR(p)\| < \frac{1}{2}$  implica  $DF(p)$  invertível. Sendo  $q = F(p)$ , para  $0 < w \ll \epsilon$ ,  $\exists v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(p + v) = q + w$ . Desenvolva a expressão  $F^{-1}(q + w)$ , apondo para a definição de diff.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{V}_0) & \xrightarrow{D[F^{-1}]} & GL(\mathbb{R}^n) \\ \uparrow F & \circlearrowleft & \uparrow \text{inv} \\ \mathcal{V}_0 & \xrightarrow{DF} & GL(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad \begin{array}{c} L^{-1} \\ \uparrow \\ L \end{array}$$

• Para verificar a classe basta usar o lemma no diagrama acima.

■ Seja  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$  tal que  $\forall p \in U$ ,  $\det(JF(p)) \neq 0$ , então  $F$  é uma aplicação aberta. Mais ainda, se  $F$  injeta então  ${}^kF : U \simeq F(U)$ .

## 8.2 Teorema da Função Implícita

■ (Função Implícita) Sejam  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $G \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$  e  $(p, q) \in U$ . Se  $G(p, q) = 0$  e  $\det JG_q(p, q) \neq 0$ , então  $\exists \mathcal{W}_q$  e  $\exists F \in C^k(\mathcal{V}_p; \mathbb{R}^m)$  tais que

$$\mathcal{V}_p \times \mathcal{W}_q \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) = 0.$$

$J\Phi$   
 $\parallel$   
 $\left( \begin{array}{c|c} \mathbb{1}_n & 0 \\ \hline \frac{\partial G_i}{\partial x_j} & \frac{\partial G_i}{\partial y_j} \end{array} \right)$

Tome  $\Phi : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , veja que é  $C^k(U; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$  e  $\det(J\Phi) \neq 0$ . Pelo ■ (TFI)  ${}^k\Phi : \mathcal{V}_p \times \mathcal{W}_q$  e  $\exists \Phi^{-1} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  diffeomorfismo, o resultado segue tomando  $F(\mathbf{x}) := \Psi(\mathbf{x}, 0)$ .

■ Pelo ■ (Regla da Cadeia) temos  $JG_q(p, q) \cdot JF_p = -JG_p(p, q)$ .

O ■ (Função Implícita) garante que podemos despejar algumas variáveis em termos das outras.

**Exemplo**  $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ , encontre  $y = f(x)$  em  $A = \{(x, y) : x > 0\}$ .  $\rightarrow$  Clássico de cálculo, relacione com as hipóteses do Teorema

■  ${}^k H \subseteq \mathbb{R}^n$  hipersuperfície é localmente o gráfico de uma função.

□ Se  ${}^k H \subseteq \mathbb{R}^n$  é hipersuperfície definida por  $g(\mathbf{x}) = 0$ ,  $p \in H$  e  $c \in C^k(\mathcal{V}_\epsilon; H)$  é um caminho em  $H$ , então  $\ker dg(p) := \{c'(0) : c(0) = p\}$ .

( $\supseteq$ ) Aplique ■ (Regra da Cadeia) na função  $(g \circ c)(t)$ . ( $\subseteq$ )  $\exists i \leq n$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \neq 0$ , suponha que é a última  $i = n$ . Tome  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $dg(p) \cdot v = 0$ , aplique ■ (Função Implícita) conseguindo  $c(t) = (p_j + tv_j, f(p_j + tv_j))$ . Use nela o primeiro corolário do mesmo Teorema.

◇ Seja  $p \in {}^k H \subseteq \mathbb{R}^n$ . O *espaço tangente* a  $H$  em  $p$ , é o dado por

$$T_p H := \ker dg(p) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g(p), v \rangle = 0\}.$$

*Nota.*  $T_p H \leq \mathbb{R}^n$  não necessariamente passa por  $p$ .

**Exemplo** Para  $H = \mathbb{S}^{n-1}$  temos  $T_p H := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \langle p, v \rangle = 0\}$ . → Faça o exercício gráfico, note também que  $\forall c > 0$ ,  $\nabla g(p) \perp H = \{g(\mathbf{x}) - c = 0\}$

□ Sejam  $V$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e  $\ell_1, \ell_2 \in V^*$ . Se  $\ker \ell_1 \subseteq \ker \ell_2$  então  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\ell_2 = \lambda \ell_1$ .

■ ■ (Multiplicadores de Lagrange). → Use a definição por caminhos de  $\ker dg(p)$  e aplique o lemma acima

### 8.3 Imersões, Submersões e Posto Constante

◇ Uma aplicação  $F$  diff em  $p$  é *imersão* em  $p$  se  $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  injecta. Em particular,  $n \leq m$ .

**Exemplo** (Imersão Canônica)  $\iota : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^m$ .

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ caminho diff é imersão} \Leftrightarrow c'(t) \neq 0$$

**Exemplo**  $t \mapsto (t^2, t^3)$  e  $s \mapsto (s^2 - 1, s^3 - s)$ . → Faça as contas



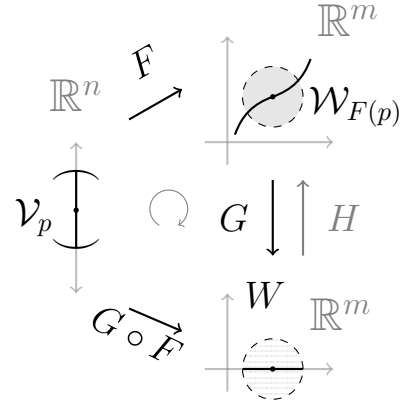
■ (*Forma Local das Imersões*) Seja  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$  imersão em  $p \in U$ . Então,  $\exists \mathcal{V}_p \subseteq U$  e  $\exists {}^k G : \mathcal{W}_{F(p)} \simeq W^\diamond$  tais que

$$G \circ F : \mathcal{V}_p \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Considere a base  $[DF(p) \cdot e_i, v_j] = \mathbb{R}^m$ . Tome  $H : U \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que,

$$(\mathbf{x}, x_j) \mapsto F(\mathbf{x}) + \sum x_j v_j.$$

Use ■ (Função Inversa) a  $H$  em  $(p, 0)$ . Finalmente, faça  $G = H^{-1}$  e estabeleça as vizinhanças.



■ Se  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  é imersão, então  $F$  é localmente injetiva.

◇ Uma aplicação  $F$  diff em  $p$  é *submersão* se  $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é sobrejetiva. Em particular,  $n \geq m$ .

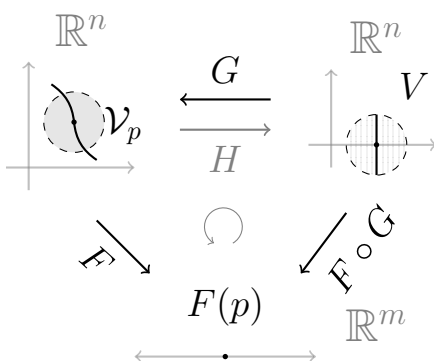
**Exemplo** (Submersão Canônica)  $\pi : \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, x_{m+1}, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ .

$f : U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diff em  $p$  é submersão  $\Leftrightarrow df(p) \neq 0$ .

**Exemplo**  $(x, y) \mapsto xy$  é submersão em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

■ (*Forma Local das Submersões*) Seja  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$  submersão em  $p \in U$ . Então,  $\exists \mathcal{V}_p \subseteq U$  e  $\exists {}^k G : V^\diamond \simeq \mathcal{V}_p$  tais que

$$F \circ G : V \ni (\mathbf{x}, x_{m+1}, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m.$$



Tire uma base l.i.  $[DF(p) \cdot e_j] = \mathbb{R}^m$ . Tome  $H : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  tal que  $\mathbf{x} \mapsto (F(\mathbf{x}), x_j)$ . Estude  $[DH(p) \cdot v]$ , pelo ■ (Função Inversa)  $H$  é diffeomorfismo. Faça  $G = H^{-1}$  e estabeleça as vizinhanças.

■ Se  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  é submersão, então  $F$  é aberta.  $\rightarrow$  Composição de abertas é aberta, projeções também

*Nota.* Imersões e submersões são **localmente** canônicas, salvo mudanças de coordenadas via diffeomorfismo.

◇ (Posto) Se  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ , então  $\text{rank}(L) := \dim[Le_i] \leq \min\{n, m\}$ .

$$\text{rank}(L) = \max\{r : \exists M_r(L) \text{ com } \det(M_r) \neq 0\}.$$

$$\text{rank}(L) = \min\{n, m\} \Leftrightarrow \begin{cases} L \text{ é isomorfismo, } n = m \\ L \text{ é injetiva, } n < m \\ L \text{ é sobrejetiva, } n > m \end{cases}$$

■ (Posto Constante) Seja  $F \in C^k(\mathcal{U}_p; \mathbb{R}^m)$  tal que  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_p, \text{rank}(DF(\mathbf{x})) = r$ . Então,  $\exists^k G : V^\diamond \rightarrow \mathcal{V}_p$  e  $\exists^k H : \mathcal{W}_{F(p)} \rightarrow W^\diamond$  tais que

$$H \circ F \circ G : \mathcal{V}_p \ni \mathbf{x} \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

$$\exists^k G : V^\diamond \rightarrow \mathcal{V}_p$$

$[DF(p)] \cong \mathbb{R}^r \leq \mathbb{R}^m$ . Aplique ■ (FLS) a  $\pi : (\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(m-r)}) \mapsto \mathbf{x}^{(r)}$ . Logo,  $\exists^k G : V^\diamond \simeq \mathcal{V}_p$  tal que  $\pi \circ F \circ G : (\mathbf{x}^{(r)}, \mathbf{x}^{(n-r)}) \mapsto \mathbf{x}^{(r)}$ .

$$F \circ G : \mathbf{x}^{(n)} \mapsto (\mathbf{x}^{(r)}, y_i(\mathbf{x})^{(n-r)})$$

Note que, sendo  $q = G^{-1}(p)$ ,  $\exists \mathcal{V}_q = V$  onde  $\text{rank}(J(F \circ G)(\mathbf{x})) = r$ , ou seja que  $D \equiv 0$ . Logo,  $y_i(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ C & D \end{pmatrix} y_i(\mathbf{x}^{(r)}, q^{(n-r)})$ .

$$\exists^k H : \mathcal{W}_{F(p)} \rightarrow W^\diamond$$

Seja  $\iota : \mathbf{x}^{(r)} \mapsto (\mathbf{x}^{(r)}, q^{(n-r)})$ . Use ■ (FLI) na função  $F \circ G \circ \iota : \mathbf{x}^{(r)} \mapsto (\mathbf{x}^{(r)}, y_i(\mathbf{x}^{(r)}, q))$ . Termine de estabelecer as vizinhanças e conclua.

*Nota.* A função  $\text{rank} : U \rightarrow \mathbb{N}$  é semi-continua inferiormente.

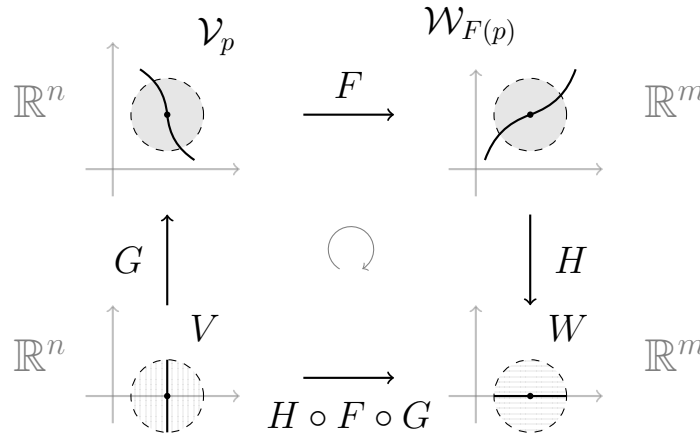


Figure 1: ■ (Posto Constante)

■ Os Teoremas de Função Inversa e Formas Locais (Imersões e Submersões) são diretos. Sejam  $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  e  $p \in U$ . Então

- i. Se  $\text{rank}(JF(p)) = r = \min\{n, m\}$  então  $\exists \mathcal{V}_p$  onde  $JF_r(\mathbf{x}) \in GL_r(\mathbb{R})$ .
- ii. Se  $F$  é localmente injetiva então é imersão em  $V^\diamond \subset U$  denso em  $U$ .  
→ Aplique ■ (Posto Constante), a segunda afirmação segue da semi-continuidade inferior
- iii. Se  $F$  é aberta então é submersão em  $V^\diamond \subset U$  denso em  $U$ .

É preciso que o posto seja consta em TODA uma vizinhanza

**Exemplo**  $F : \mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto (t^2, t^3, s) \in \mathbb{R}^3$  ¿Existem coordenadas como no Teorema em alguma vizinhanza de origem? → Não

## § 9 Variedades Diferenciáveis

◇ Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ , uma aplicação  $F \in C^k(X; Y)$  sse  $\forall p \in X$ ,  $\exists \tilde{F} \in C^k(\mathcal{U}_p; \mathbb{R}^m)$  tal que  $\tilde{F}|_{\mathcal{U}_p \cap X} = F$ .

◇  $F : X \rightarrow Y$  é diffeomorfismo de classe  $C^k$  se  $F \in C^k(X; Y)$  é homeomorfismo e  $F^{-1} \in C^k(Y; X)$ . Denotamos  ${}^k F : X \simeq Y$ .

**Exemplo** Sejam  $X = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\}$  e  $Y = (-1, 1)$ . A aplicação

$\pi : X \ni (x, y) \mapsto x \in Y$  é  $\infty F : X \simeq Y$ .  $\rightarrow$  Verifique as condições

◇ Um subconjunto  ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma *subvariedade* de classe  $C^k$  e dimensão  $d$ , se  $\forall p \in M, \exists {}^k \varphi : \mathcal{U}_p \cap M \simeq V^\diamond \subseteq \mathbb{R}^d$  *carta local*, cujas componentes  $\varphi = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  são *coordenadas locais* de  $M$  em  $p$ . A inversa  $\varphi^{-1} = \psi : V \rightarrow \mathcal{U}_p \cap M$  é uma *parametrização local* da variedade.

*Nota.* Por simplicidade na notação usaremos  $\mathcal{U}_p$  para indicar vizinhança de  $p$  em  $M$  como subespaço de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo**  ${}^\infty_n U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\rightarrow$  Tome  $\varphi = \mathbb{1}_n$

**Exemplo**  ${}^\infty_{n-1} \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\rightarrow$  Construa a projeção estereográfica

□ Sejam  ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n, V^\diamond \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\psi(V) \subseteq M$ . Então,  $\psi$  é uma parametrização local de  $M$  sse  $\psi$  é imersão e homeomorfismo ( $\tau_M$ ).

( $\Leftarrow$ ) A bijeção é imediata de  $\psi(V)^\diamond \subseteq M$ . Aplique ■ (FLI) e faça a composição com a projeção.

Imersão injetiva  $\nrightarrow$  homeomorfismo

**Exemplo** Parametrização local da esfera (coordenadas esféricas). Seja  $\psi : [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$(\theta_i) \mapsto \left( \cos \theta_1, \dots, \prod_{j < i} \sin \theta_j \cdot \cos \theta_i, \dots, \prod \sin \theta_i \right).$$

**Exemplo** Se  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$  então  $\text{graf}(F) := \{(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \in U \times \mathbb{R}^m\} = {}^k_n M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ , com  $\psi : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, F(\mathbf{x}))$  e  $\varphi = \pi : (\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \mapsto \mathbf{x}$ .

**Exemplo** Seja  ${}^k H \subseteq \mathbb{R}^n$  hipersuperfície, então  ${}^k_{n-1} H \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\rightarrow H$  é localmente o gráfico de uma função

□ Seja  $G \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ . Se  $\forall p \in U, G$  é submersão em  $p$ , então

$$\{p \in U : G(p) = 0\} =: {}^k_{n-m} M \subseteq \mathbb{R}^n.$$

◊ Sejam  ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n$  e  ${}^k\psi_a : V^\diamond \simeq \mathcal{U}_p$  uma parametrização local tal que  $\psi_a(a) = p$ . O espaço tangente a  $p \in M$  é o dado por

$$T_p M := \text{Im}(D\psi_a(a)) = \bigoplus \mathbb{R} \frac{\partial \psi_a}{\partial x_i}(a) \leq \mathbb{R}^n.$$

*Nota.* O espaço afim  $p + T_p M$  é o "intuitivamente" tangente a  $M$  em  $p$ .

□ Sejam  ${}^k_d M \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $c \in C^k(\mathcal{V}_\epsilon; M)$  caminho em  $M$ , então

$$T_p M = \{c'(0) : c(0) = p\}.$$

*Nota.* O espaço tangente não depende da parametrização.

**Exemplo** Se  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  então  $T_p U = \mathbb{R}^n$ .

*Nota.* Em diante, para referirnos a  ${}^k_{d_1} M \subseteq \mathbb{R}^n$  e  ${}^k_{d_2} N \subseteq \mathbb{R}^m$  escrevemos simplesmente  $M$  e  $N$ .

□  $F \in C^k(M; N)$  sse  $\forall \psi : V^\diamond \rightarrow \mathcal{U}_p$  parametrização local de  $M$  em  $p$ , tem-se que  $F \circ \psi \in C^k(V; N)$ . → Basta ver só um atlas

◊ Seja  $F \in C^k(M; N)$ . A derivada de  $F$  em  $p \in M$  é a aplicação linear  $DF(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  tal que  $v \mapsto D\tilde{F}(p) \cdot v$ .

□ Se  $F \in C^k(M; N)$  então derivada  $DF(p)$  não depende da  $\tilde{F}$ .

Tome  $\psi_a$  e  $\psi_{a'}$  parametrizações locais de  $p \in M$  e  $F(p) \in N$ . Faça  $\varphi' \circ F \circ \psi : V \rightarrow V'$ , pelo ■ (Regla da Cadeia) temos o diagrama a direita. Note que  $D\tilde{F} : \text{Im}(D\psi_a(a)) \mapsto \text{Im}(D\psi_{a'}(a'))$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{DF} & \mathbb{R}^n \\ \psi \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \psi' \\ \mathbb{R}^{d_1} & \xrightarrow{D(\varphi' \circ F \circ \psi)} & \mathbb{R}^{d_2} \end{array}$$

**Exemplo**  $F : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $(\cos \theta, \sin \theta) \equiv (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \equiv (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ . → Faça as contas

*Nota.* Em geral, tudo o que foi visto para aplicações, vale em variedades:

**Regla da Cadeia** Se  $F \in C^k(M; N)$  e  $G \in C^k(N; P)$  então  $G \circ F \in C^k(M; P)$  e  $D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \cdot DF(p)$ .

**Derivada da Identidade**  $D\mathbb{1}_M = \mathbb{1}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$ .

**Teorema da Função Inversa** Seja  $F \in C^k(M; N)$  tal que  $D\tilde{F}(p)$  é isomorfismo, então  $\exists {}^k F : \mathcal{U}_p \cap M \simeq \mathcal{V}_{F(p)} \cap N$ .

## 9.1 Valores Regulares

◇ Seja  $F \in C^k(M; N)$ . Um ponto  $p \in M$  é *regular* se  $F$  é submersão em  $p$ , se não for regular então é *ponto crítico* de  $F$ .

*Nota.* Se  $\exists p \in M$  ponto regular de  $F$  então  $\dim M \geq \dim N$ .

### ■ (Multiplicadores de Lagrange)

**Exemplo** Seja  $M = {}^k H \subseteq \mathbb{R}^n$  hipersuperfície definida por  $g(\mathbf{x}) = 0$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  função escalar, então

$$p \in M \text{ ponto crítico de } f(M) \Leftrightarrow df(p) : T_p M \not\rightarrow \mathbb{R}.$$

◇ Seja  $F \in C^k(M; N)$ . Um valor  $q \in N$  é *valor crítico* se  $\exists p \in M$  tal que  $p$  é ponto crítico de  $F$  e  $F(p) = q$ , de outra forma é um *valor regular* de  $F$ .

$$p \in M \text{ regular} \not\Rightarrow q = F(p) \text{ regular}$$

*Nota.* Um conjunto da forma  $F^{-1}(q)$  é chamado *fibra*.

■ (*Fibras Regulares*) Sean  ${}^k_{d_1} M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  ${}^k_{d_2} N$ ,  $F \in C^k(M; N)$ . Si  $q \in N$  es un valor regular de  $F$ , entonces  $P = F^{-1}(q)$  es  ${}^k_{d_1-d_2} P \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Sejam  $p = F^{-1}(q)$  e  $d_1 - d_2 = c$ . Note que  $\mathbb{R}^c \cong \ker DF(p) \leq \mathbb{R}^n$ , defina  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^c$  tal que  $L \cdot \ker DF(p)$  é isomorfismo. Faça  $G : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^c$  tal que  $\mathbf{x} \mapsto (F(\mathbf{x}), L(\mathbf{x}))$ . Aplique ■ (TFI) e conclua.

**Exemplo** 1 é valor regular de  $g : \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \sum x_i^2 \in \mathbb{R}$  e  $g^{-1}(1) = \mathbb{S}^{n-1}$ .

## Variedades de dimensão 0

**Exemplo** Sejam  $F \in C^k(M; N)$  com  $\dim M = \dim N$  e  $q \in N$  valor regular de  $F$ . Então,  $P = F^{-1}(q)$  é um conjunto discreto. Ainda mais, se  $M$  for compacto  $\Rightarrow |P| < \infty$ .  $\rightarrow \mathbb{R}^0 = \{0\}$

■ (*Brown-Sard*) Seja  $F \in C^k(M; N)$ . Se  $k \gg 0$  então o subconjunto de valores regulares de  $F$  é denso em  $N$ .

*Nota.* A medida de  $B = (a_i, b_i)^n \subseteq \mathbb{R}^n$  bloco aberto é  $\mu(B) := \prod (b_i - a_i)$ .

◇ Um subconjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  tem *medida nula* se  $\forall \epsilon > 0, \exists B_i$  blocos abertos tais que  $S \subseteq \bigcup B_i$  e  $\sum \mu(B_i) < \epsilon$ .

**Exemplo** Se  $n < m$  então  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$  tem medida nula.

**Exemplo**  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  enumerável tem medida nula.  $\rightarrow$  Pontos isolados

■ (*Sard*) Sejam  $U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$  tal que  $k \geq \{n - m + 1, 1\}$ . Então, o conjunto de valores críticos de  $F$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo** Pelo ■ (*Sard*)  $\overset{k}{d}M \subseteq \mathbb{R}^n$  com  $d < n$  tem medida nula.  $\rightarrow$  Todos os valores da inclusão  $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  são críticos

**Exercise** Se  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  tem medida nula então  $\mathbb{R}^n \setminus S$  é denso.

## § 10 Formas Diferenciais

Nosso objetivo é uma noção geral de integral em variedades que não dependa da escolha da parametrização local.

**Exemplo**

$$\int_a^b \overbrace{f(t) dt}^{\text{Forma Diff}} \stackrel{t \rightarrow 2u}{=} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} f(2u) 2du.$$

## 10.1 Formas Alternadas

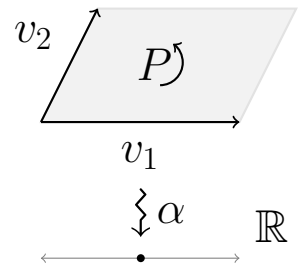
◊ Seja  $V$  espaço vectorial. Uma  $k$ -forma alternada é uma função  $k$ -linear,  $\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, se  $v_i = v_j$  para algum  $i \neq j$  então  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ .

**Exemplo**  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear é 1-forma alternada.  $\rightarrow$  A antissimetria é trivial

*Nota.*  $V^0 = \{\emptyset\}$ , logo, uma 0-forma é simplesmente um  $\alpha(o) \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo** A função  $\det : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é 2-forma alternada em  $V = \mathbb{R}^2$ , onde

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$



*Nota.* A função  $\alpha$  é tipo um "volume"  $k$ -dimensional com sinal, dada pela "orientação" ou ordem de os  $v_i$ .

$$\diamond A^k(V) := \{\alpha \mid \alpha \text{ é } k\text{-forma alternada}\}$$

□ Seja  $\alpha \in A^k(V)$  e  $i < j$ . Então,

- $\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$ .  $\rightarrow$  Denote  $\alpha(v_i, v_j)$  e faça a conta  $0 = \alpha(v_i + v_j, v_i + v_j)$
- Se  $v_1, \dots, v_k$  são l.d. então  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ .  $\rightarrow$  Expresse  $v_1 = \sum \lambda_j v_j$  e faça a conta

■ As formas alternadas são antisimetricas. Se  $S_k$  é o grupo de permutações de ordem  $k$  e  $\text{sgn} : S_k \ni \sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$  então,

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(v_1, \dots, v_k).$$

*Nota.*  $S_k \ni \sigma = \prod \tau_j : \tau_j$  é transposição, assim,  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{|J|}$ .

Espaços não triviais  $\sim \dim V = n$

**Exemplo**  $A^0(V) = \mathbb{R}$ ,  $A^1(V) = V^*$  e  $A^k(V) = \{0\}$  se  $k > n$ .  $\rightarrow$  Segue de o lemma sobre dependencia linear



**Exercise** (Projetor Alternado) Seja  $f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  função  $k$ -linear, então

$$Af : (v_1, \dots, v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

é uma  $k$ -forma alternada. Em particular, se  $f$  é alternada, então  $Af = f$ .

◇ Sejam  $T \in \mathcal{L}(V; W)$  e  $\alpha \in A^k(W)$ . O *pullback* de  $\alpha$  por  $T$  é a função  $T^*\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$ .

$$T^* : A^k(W) \rightarrow A^k(V)$$

**Exemplo**  $\pi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\det \in A^2(\mathbb{R}^2)$  então,

$$\pi^*\alpha((x, y, z), (x', y', z')) = \alpha((x, y), (x', y')) = \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}.$$

◇ Sejam  $\alpha \in A^p(V)$  e  $\beta \in A^q(V)$ . O *produto exterior* de  $\alpha$  e  $\beta$  é a função  $\alpha \wedge \beta : V^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,

$$(v_1, \dots, v_{p+q}) \mapsto \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}).$$

**Exemplo** Sejam  $\alpha, \beta \in A^1(V)$ . Então,  $\alpha \wedge \beta \in A^2(V)$  é a dada por

$$(v_1, v_2) \mapsto \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) = \det \begin{pmatrix} \alpha(v_1) & \beta(v_1) \\ \alpha(v_2) & \beta(v_2) \end{pmatrix}.$$

□ Sejam  $\alpha \in A^p(V)$ ,  $\beta \in A^q(V)$  e  $\gamma \in A^r(V)$ . Então, o produto  $\wedge$  é:

- i.  $A^p(V) \times A^q(V) \ni (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta \in A^{p+q}(V)$ , bém definido.
- ii. Bilinear, se  $p = r \Rightarrow (\alpha + \lambda\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \lambda(\gamma \wedge \beta)$ , na outra coordenada, se  $q = r \Rightarrow \alpha \wedge (\beta + \lambda\gamma) = \alpha \wedge \beta + \lambda(\alpha \wedge \gamma)$ .
- iii. Anticonmutativo,  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ . → Tome a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+q \\ q+1 & \cdots & q+p & 1 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

- iv. Associativo,  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ .  $\rightarrow$  Use o projetor alternado em  $f(v_i)$ ,  $i \in \{n \in \mathbb{N} : n \leq p + q + r\}$  e faça as contas chatas
- v. Compatível com pullback,  $T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*\alpha \wedge T^*\beta$ .

■ Sejam  $V$  espaço vectorial e  $[l_1, \dots, l_n]$  uma base l.i. Então,  $\forall k \leq n$ , temos que  $A^k(V) = [l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}]$ . Em particular,  $\dim A^k(V) = \binom{n}{k}$ .

**Exemplo** Se  $V = [\omega_1, \dots, \omega_n]$  (l.i.) e  $\alpha \in A^n(V)$  então,  $\alpha(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij})\alpha(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , onde  $v_j = \sum a_{ij}\omega_i$ .  $\rightarrow T^*\alpha = \det(T)\alpha$

**Exemplo**

$$(\mathbb{R}^3)^* = [e_1^*, e_2^*, e_3^*] \rightsquigarrow \begin{cases} A^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R} \\ A^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}e_1^* \oplus \mathbb{R}e_2^* \oplus \mathbb{R}e_3^* \\ A^2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}(e_1^* \wedge e_2^*) \oplus \mathbb{R}(e_1^* \wedge e_3^*) \oplus \mathbb{R}(e_2^* \wedge e_3^*) \\ A^3(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*) \sim \det(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

## 10.2 Formas Diferenciais

*Nota.* Se  $\varphi = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma carta local de  ${}^r_d M \subseteq \mathbb{R}^n$ , lembre-se que  $[d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_d] = (T_p M)^* = A^1(T_p M)$ .

◇ Uma  $k$ -forma diff de classe  $C^r$  em  ${}^r_d M \subseteq \mathbb{R}^n$ , é uma associação

$${}^r_k \omega : M \ni p \mapsto \omega(p) = \sum f_{i_1, \dots, i_k} d\mathbf{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}_{i_k} \in A^k(T_p M),$$

tal que,  $\forall \varphi = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ , as funções  $f_{i_1, \dots, i_k} \in C^r(\mathcal{U}_p; \mathbb{R})$ .

*Nota.* Em deante tudo será  $C^\infty$ , variedades, aplicações, formas, etc.

$$\diamond \Omega^k(M) := \{\omega \mid \omega \text{ é } k\text{-forma diff}\}$$

$$\sum f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \omega \in \Omega^k(U^\diamond) \Leftrightarrow f_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(U)$$

- Se  $U = I \subset \mathbb{R}$ , então  $\omega = f(t)dt \in \Omega^1(I)$  sse  $f \in C^\infty(I)$ .
- Se  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $f, g \in C^\infty(U)$  então  $f \in \Omega^0(U)$ ,  $f dx + g dy \in \Omega^1(U)$  e  $f(dx \wedge dy) \in \Omega^2(U)$ .

*Nota.* Em geral,  $\Omega^0(M) = C^\infty(M; \mathbb{R})$  e se  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  então  $df \in \Omega^1(M)$ , pois,  $df(p) \in (T_p M)^* = A^1(T_p M)$ .

**Exercise** Seja  $\varphi = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathbb{R}^d$  carta local de  ${}_dM$ , então

$$df|_{u_p} = \sum \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i, \text{ sendo } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(p) := \frac{\partial}{\partial t_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Onde,  $(t_1, \dots, t_d)$  são as coordenadas canônicas de  $\mathbb{R}^d$ .

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$$

**Exemplo** Em  $M = \mathbb{R}^2$ , têm-se  $(e^{x+y}dx + xdy) \wedge (ydx) = -xy (dx \wedge dy)$ .

□ Uma aplicação  $F \in C^\infty(M; N)$  induz,  $\forall p \in M$ , uma outra aplicação via pullback  $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  tal que,

$$\omega(p) \mapsto F^* \omega(p) = DF(p)^* \omega(F(p)).$$

**Exemplo** Se  $g \in \Omega^0(N)$  então  $F^*g = g \circ F$  e  $F^*(dg) = d(F^*g) = d(g \circ F)$ .

*Nota.* Na hora das contas, se  $\varphi = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d_1})$  e  $\varphi'(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d_2})$  são cartas locais de  $p$  e  $F(p)$  respectivamente, tais que  $F(\mathcal{U}_p) \subseteq \mathcal{V}_{F(p)}$ , então

$$\begin{array}{ccc} \omega \Big|_{\mathcal{V}_{F(p)}} &= \sum g_{i_1, \dots, i_k} d\mathbf{y}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{y}_{i_k} \\ &\Downarrow & \text{---} F^* \mathbf{y}_{i_1} = \sum \frac{\partial F^* \mathbf{y}_{i_1}}{\partial \mathbf{x}_j} d\mathbf{x}_j \\ (F^* \omega) \Big|_{\mathcal{U}_n} &= \sum F^* g_{i_1, \dots, i_k} d(F^* \mathbf{y}_{i_1}) \wedge \dots \wedge d(F^* \mathbf{y}_{i_k}) \end{array}$$

Em particular, se  $F = \iota : M \rightarrow N$  então  $\iota^*\omega = \omega|_M$ .

**Exemplo** Sejam  $\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  e  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva suave, então  $c^*\omega = (f(c(t))c_1'(t) + g(c(t))c_2'(t))dt$ .

**Exemplo** (Forma de angulo)  $d\theta = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ .

◊ Uma variedade  $_dM$  é *orientável* se  $\exists \omega \in \Omega^d(M)$ , chamada *forma de orientação*, tal que  $\forall p \in M, \omega(p) \neq 0$ .

**Exemplo**  $\mathbb{R}^n$  é orientável com  $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  e  $\mathbb{S}^1$  com  $\omega = d\theta \Big|_{\mathbb{S}^1}$ .

**Exemplo** A faixa de Möbius não é orientável.

◇ Sejam  $M$  orientável e  $\omega, \omega' \in \Omega^d(M)$  formas de orientação. Então,  $\omega \sim \omega'$  se  $\exists f > 0$  tal que  $\omega = f\omega'$ . Uma *orientação* de  $M$  é  $[\omega]/\sim$ .

**Exercise** Se  $M$  é conexa e orientável então têm só dois orientações.

◇ Seja  $M$  orientável. A *forma de volume* de  $M$  é a única representante  $\omega_{\text{vol}}$  de  $[\omega] \in \Omega^d(M)/\sim$ , tal que,  $\forall [w_1, \dots, w_d]$  base ortonormal de  $T_p M$ ,

$$\omega_{\text{vol}}(w_1, \dots, w_d) = 1 \text{ e } \omega(w_1, \dots, w_d) > 0.$$

**Exemplo**  $\omega_{\text{vol}} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  é a forma de volume de  $\mathbb{R}^n$ .

$\omega_{\text{vol}}$  em  $_{n-1}H \subseteq \mathbb{R}^n$  hipersuperfície

**Exemplo**  $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$  é orientável. Sendo  $\vec{n}(p) = \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \perp T_p H$ , sua forma de volume é

$$\omega_{\text{vol}} = \sum (-1)^{i+1} \vec{n}_i d\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mathbf{x}_i} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_n \Big|_H. \quad \det \begin{pmatrix} \vec{n} & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

**Exemplo** Em  $H = \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  temos  $\vec{n}(x) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ , logo,

$$\omega_{\text{vol}} = \sum (-1)^{i+1} x_i d\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mathbf{x}_i} \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}_n \Big|_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

## 10.3 Derivada Exterior

*Nota.* A ideia agora é entender como se derivam as formas diferenciais.

■  $\forall M, \forall k \in \mathbb{N}, \exists ! d_i \in \mathcal{L}(\Omega^k(M); \Omega^{k+1}(M))$ , onde  $d_i : \omega \mapsto d\omega$  verifica,

i. Derivada de uma função,  $\Omega^0(M) = C^\infty(M) \ni f \mapsto df \in \Omega^1(M)$ .

ii. Regra de Leibniz com sinal, se  $\omega \in \Omega^p(M)$  e  $\eta \in \Omega^q(M)$  então,

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

iii.  $d^2 = 0$ , se  $\omega \in \Omega^k(M)$  então  $d(d\omega) = 0$ .  $\rightarrow$  Motivada pelo ■ (Schwarz)

iv. Compatível com pullback, se  $F \in C^\infty(M; N)$  e  $\omega \in \Omega^k(N)$  então,

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

**Exemplo** Sendo  $I = (i_1, \dots, i_k)$  e  $\sum f_I d\mathbf{x}_I = \omega \in \Omega^k(M)$ , temos,

$$d\omega = \sum df_I d\mathbf{x}_I.$$

◇  $\omega \in \Omega^k(M)$  é *exata* se  $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M)$  tal que  $\omega = d\eta$ . Por outro lado, se  $d\omega = 0$  dizemos então que é *fechada*.

*Nota.* Ver que  $\omega$  é exata é "resolver" EDPs, ou seja integrar.

## § 11 Integração em Variedades

*Nota.* Nesta seção  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

### 11.1 Integração em Cadeias

◇ Um *k-bloco singular* em  $M$  é uma aplicação  $\sigma \in C^\infty(I^k; M)$ .

**Exemplo** ( $n$ -bloco padrão em  $\mathbb{R}^n$ )  $\mathbb{1}_{I^n} : I^n \rightarrow I^n \subset \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo** Uma curva suave  $c : I \rightarrow M$  é um 1-bloco singular.

$$\sigma \text{ k-bloco singular } \neq \text{ Im}(\sigma) \subseteq M$$

**Exemplo**  $\sigma : I^n \ni \mathbf{x} \mapsto p \in M$  é um  $n$ -bloco singular.

◇ Sejam  $\omega \in \Omega^k(M)$  e  $\sigma$  um  $k$ -bloco singular. Então,

$$\int_\sigma \omega = \int_{I^k} \sigma^* \omega = \int_{I^k} f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{I^k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

## Integral de linha

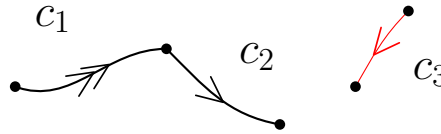
**Exemplo** Sejam  $c(t) : [a, b] \rightarrow U^\diamond \subseteq \mathbb{R}^n$  curva suave e  $\sum^n f_i dx_i = \omega \in \Omega^k(U)$ , então temos

$$\oint_c \omega = \int_a^b c^* \omega dt = \int_a^b \sum^n (f_i \circ c)(t) c_i'(t) dt$$

◊ Uma  $k$ -cadeia de blocos singulares em  $M$  é uma expressão da forma

$$c = \sum^k n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \sigma_i : I^k \rightarrow M.$$

**Exemplo**  $c = 2c_1 + c_2 - c_3$ .



*Nota.* Mais formalmente, as  $k$ -cadeias são elementos do grupo abeliano livre gerado pelos  $k$ -blocos singulares.

◊ Se  $\omega \in \Omega^k(M)$  e  $c$  é uma  $k$ -cadeia singular, então  $\int_c \omega = \sum^k n_i \int_{\sigma_i} \omega$ .

◊ Seja  $\sigma$  um  $k$ -bloco singular. O *borde* de  $\sigma$  é a  $(k-1)$ -cadeia dada por

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \xrightarrow{\partial} \\ \hline \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \sim \partial\sigma = \sum^k (-1)^i (\sigma_{(i,0)} - \sigma_{(i,1)}). \\ \hline \end{array}$$

**Exercise** Se  $c$  é uma  $k$ -cadeia, então  $\partial(\partial c) = 0$ .  $\rightarrow \partial^2 = 0$ , olha no Spivak

■ (*Stokes*) Seja  $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$  e  $c$   $k$ -cadeia em  $M$ , então

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

## References

[1] Lima, Elon Lages (2004). *Análise real Vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro.