

多段階 let 挿入を行うコード生成言語の型システムの設計

大石 純平 亀山 幸義

コード生成法は、プログラムの実行性能の高さと保守性・再利用性を両立できるプログラミング手法として有力なものである。本研究は、コード生成法で必要とされる「多段階 let 挿入」等を簡潔に表現できるコントロールオペレータである `shift0/reset0` を持つコード生成言語とその型システムを構築し、生成されたコードの型安全性を保証するための型システムを構築した。多段階 let 挿入は、入れ子になった for ループを飛び越えたコード移動を許す仕組みであり、ループ不変式の移動などのために必要である。コード生成言語の型安全性に関して、破壊的代入を持つ体系に対する Sudo らの研究等があるが、本研究は、彼らの環境識別子にジョインを追加するという拡張により、`shift0/reset0` を持つコード生成言語に対する型システムが構築できることを示した。

1 はじめに

コード生成法は、プログラムの生産性・保守性と実行性能の高さを両立させられるプログラミング手法として有力なものである。本研究は、コード生成法で必要とされる「多段階 let 挿入」等を簡潔に表現できるコントロールオペレータである `shift0/reset0` を持つコード生成言語とその型システムを構築し、生成されたコードの型安全性を静的に保証する言語体系および型システムを設計する。これにより、コード生成器のコンパイル段階、すなわち、実際にコードが生成されてコンパイルされるより遥かに前の段階でのエラーの検出が可能となるという利点がある。

コード生成における let 挿入は、生成されたコードを移動して効率良いコードに変形するための機能であり、ループ不変式を for ループの外側に移動したり、コードの計算結果を共有するなどのコード変換 (コード最適化) において必要な機能である。多段階 let 挿入は、入れ子になった for ループ等を飛び越え

て、コードを移動する機能である。

本研究は、多段階 let 挿入を可能とするコード生成体系の構築のため、比較的最近になって理論的性質が解明された `shift0/reset0` というコントロールオペレータに着目する。このコントロールオペレータに対する型規則を適切に設計することにより、型安全性を解決することを目的とする。コントロールオペレータを含む項の計算について分析した結果、スコープの包含関係が逆転することや 2 つのスコープの合流があることから、変数スコープを表す識別子にジョイン (和集合) を追加すればよいという着想を得て、型システムを設計することに成功した。

本研究に関連した従来研究としては、束縛子を越えない範囲でのコントロールオペレータを許した研究や、局所的な代入可能変数を持つ体系に対する須藤らの研究 [4]、後者を、グローバルな代入可能変数を持つ体系に拡張した研究 [1] などがある。しかし、いずれの研究でも 多段階の for ループを飛び越えた let 挿入は許していない。本研究は、須藤らの研究をベースに、`shift0/reset0` を持つコード生成体系を設計した点に新規性がある。

2 コード生成と let 挿入

コード生成, すなわち, プログラムによるプログラム (コード) の生成の手法は, 対象領域に関する知識, 実行環境, 利用可能な計算機リソースなどのパラメータに特化した (実行性能の高い) プログラムを生成する目的で広く利用されている. 生成されるコードを文字列として表現する素朴なコード生成法では, 構文エラーなどのエラーを含むコードを生成してしまう危険があり, さらに, 生成されたコードのデバッグが非常に困難であるという問題がある.

これらの問題を解決するため, コード生成器 (コード生成をするプログラム) を記述するためのプログラム言語の研究が行われており, 特に静的な型システムのサポートを持つ言語として, MetaOCaml, Template Haskell, Scala LMS などがある.

本研究は, MetaOCaml などの値呼び関数型言語に基づいたコード生成言語を対象としているが, 言語のプレゼンテーションでは, 先行研究にないコードコンビネータ (Code Combinator) 方式を使う. MetaML/MetaOCaml などにおける擬似引用 (Quasi-quotation) 方式は, コード生成に関する言語要素として「ブラケット (コード生成, quotation)」と「エスケープ (コード合成, anti-quotation)」を用いるのに対して, コードコンビネータ方式では, 各演算子に対して, 「コード生成版の演算子 (コードコンビネータ)」を用意してコード生成器を記述する. たとえば, 加算 $e_1 + e_2$ に対して, コードコンビネータ版は $e_1 \underline{+} e_2$ というように, 演算子名に下線をつけてあらわす.

本章では, 例に基づいてコード生成器と let 挿入について説明する. 対象言語の構文・意味論などの形式的体系の説明は後に行う.

2.1 コードコンビネータ方式のプログラム例

まず, (完成した) コードは, $\langle 3 \rangle$ や $\langle 3 + 5 \rangle$ のようにブラケットで囲んで表す. 次の例は, これらを生成

するプログラムである.

$$(\underline{\text{int}}\ 3) \rightsquigarrow^* \langle 3 \rangle$$

$$(\underline{\text{int}}\ 3) \underline{+} (\underline{\text{int}}\ 5) \rightsquigarrow^* \langle 3 + 5 \rangle$$

$\underline{\text{int}}$ は整数を整数のコードに変換し, $\underline{+}$ は, 整数のコード 2 つをもらって, それらの加算をおこなうコードを生成するコードコンビネータである. なお, \rightsquigarrow^* は 0 ステップ以上の簡約を表す.

$\lambda x.e$ と $\underline{@}$ はそれぞれラムダ抽象と関数適用のコードを生成する.

$$\lambda x.x \underline{+} (\underline{\text{int}}\ 3) \rightsquigarrow^* \langle \lambda u.u + 3 \rangle$$

$$(\lambda x.x \underline{+} (\underline{\text{int}}\ 3)) \underline{@} (\underline{\text{int}}\ 5) \rightsquigarrow^* \langle (\lambda u.u + 3)\ 5 \rangle$$

ラムダ抽象のコードコンビネータにおいて, x は「(コードレベルの) 変数」そのものを表すのではなく, 「変数のコード」をあらわす. 上記の例の計算過程で, x は $\langle u \rangle$ (ここで u は新たに作成されたコードレベルの変数) に簡約され, 計算が進む.

$\underline{\text{let}}$ は let 式のコードを生成する.

$$\underline{\text{let}}\ x = (\underline{\text{int}}\ 3)\ \underline{\text{in}}\ x \underline{+} (\underline{\text{int}}\ 7)$$

$$\rightsquigarrow^* \langle \underline{\text{let}}\ u = 3\ \underline{\text{in}}\ u + 7 \rangle$$

実は, $\underline{\text{let}}$ は, コードコンビネータとしてのラムダ抽象と適用によりマクロ定義され, 上記の式は, 以下の式と同じである.

$$(\lambda x.x \underline{+} (\underline{\text{int}}\ 7)) \underline{@} (\underline{\text{int}}\ 3)$$

$$\rightsquigarrow^* \langle \underline{\text{let}}\ u = 3\ \underline{\text{in}}\ u + 7 \rangle$$

本研究の対象言語は, MetaML や MetaOCaml と同様, 静的束縛の言語であり, 以下の例では, 束縛変数の名前が正しく付け換えられる.

$$\lambda y.\underline{\text{let}}\ x = y\ \underline{\text{in}}\ \lambda y.x \underline{+} y \rightsquigarrow^* \langle \lambda u.\lambda u'.u + u' \rangle$$

この例では, 2 つのラムダ抽象が y という変数をもっているが, これらは異なる束縛変数であるので, 計算の過程で衝突が起きるときは名前換えが発生する.

2.2 コード生成における let 挿入

$\underline{\text{for}}$ は for 式を生成するコードコンビネータである.

ここで, (コードレベルの) 配列 a の第 n 要素に対する代入を $a[n] \leftarrow e$ と表し, $\underline{\text{aryset}}\ a\ e_1\ e_2$ は対応するコードコンビネータであると仮定する. また, a は

適宜 n 次元のものを考えることにする.

```

for  $x = (\text{int } 3) \text{ to } (\text{int } 7) \text{ do}$ 
  aryset  $\langle a \rangle x (\text{int } 0)$ 
   $\rightsquigarrow^*$   $\langle \text{for } i = 3 \text{ to } 7 \text{ do } a[i] \leftarrow 0 \rangle$ 

```

for を入れ子にすると、入れ子の for 式が生成できる.

```

for  $x = (\text{int } 3) \text{ to } (\text{int } 7) \text{ do}$ 
  for  $y = (\text{int } 1) \text{ to } (\text{int } 9) \text{ do}$ 
    aryset  $\langle a \rangle (x, y) (\text{int } 0)$ 
   $\rightsquigarrow^*$   $\langle \text{for } i = 3 \text{ to } 7 \text{ do}$ 
    for  $j = 1 \text{ to } 9 \text{ do}$ 
       $a[i, j] \leftarrow 0 \rangle$ 

```

この二重ループの中で、複雑な計算をするループ不変式があったとする. たとえば、配列の初期値として 0 でなく、(何らかの複雑な) 計算結果を代入するが、その計算にはループ変数 i, j を使わない場合を考える. それを e とすると、

```

 $\langle \text{for } i = 3 \text{ to } 7 \text{ do}$ 
  for  $j = 1 \text{ to } 9 \text{ do}$ 
     $a[i, j] \leftarrow e \rangle$ 

```

というコードの代わりに

```

 $\langle \text{let } z = e \text{ in}$ 
  for  $i = 3 \text{ to } 7 \text{ do}$ 
    for  $j = 1 \text{ to } 9 \text{ do}$ 
       $a[i, j] \leftarrow z \rangle$ 

```

というコードの方が実行性能が高くなることが期待できる.

このように、生成するコードの上部 (トップレベルに近い方) に let 式を挿入することができれば、早い段階で値を計算できたり、また、同一の部分式がある場合は計算結果を再利用できたり、という利点がある^{†1}.

そこで、コード生成器に let 挿入の機能を組み込もう. let 挿入は部分計算の分野等で研究されており、CPS 変換あるいはコントロールオペレータを用いる

ことで実現できることが知られている. 本研究では、shift0/reset0 というコントロールオペレータを用いて let 挿入を実現する.

上記のコード生成器にコントロールオペレータを組みこんだものが次のプログラムである.

```

reset0 (for  $x = (\text{int } 3) \text{ to } (\text{int } 7) \text{ do}$ 
  (for  $y = (\text{int } 1) \text{ to } (\text{int } 9) \text{ do}$ 
    shift0  $k_1 \rightarrow \text{let } z = e \text{ in}$ 
    throw  $k_1 (\text{aryset } \langle a \rangle (x, y) z)))$ 

```

赤字の reset0, shift0, throw がコントロールオペレータであり、それらに対するインフォーマルな^{†2} 計算規則は以下の通りである.

```

reset0  $v \rightarrow v$ 
reset0 ( $E[\text{shift0 } k \rightarrow \dots (\text{throw } k v) \dots]$ )
 $\rightarrow \dots (\text{reset0}(E[v])) \dots$ 

```

ここで v は値、 E は評価文脈である. 2 行目では、reset0 と shift0 に挟まれた文脈が切り取られ、変数 k に束縛され、**throw** $k e$ の形の式の場所で利用される. ここで切り取られる文脈には、トップにあった **reset0** も含まれているため、簡約後のトップから **reset0** が消えている. よく知られている shift/reset では、この **reset0** が残る点が異なっている.

上記のコード生成器をこの計算規則により計算すると、2 重の for 式に相当する文脈 **for** $x = \dots \text{ to } \dots \text{ do for } y = \dots \text{ to } \dots \text{ do } []$ が切り取られ **throw** の部分の k_1 で使われる. 結果として、**let** $z = e \text{ in}$ の部分が、この文脈の外側に移動する効果が得られ、let 挿入が実現できる.

上記の例では、一番外側まで let 挿入を行ったが、式 e が x に相当するループ変数を含むときは、一番外側まで持っていくことはできず、2 つの for 式の間地点まで移動することになる. このためには、reset0 の設置場所を変更すればよい.

問題は、このように let 挿入をしたい式が複数ある場合である. 「let 挿入をする先」に reset0 を 1 つ置くため、いくつかの let 挿入においては直近の reset0 まで移動するのではなく、2 つ以上先の (遠く

^{†1} この変形・最適化は、コードを生成してから行なうのでよければ技術的に難しいものではない. しかし、コード生成においては、生成されるコード量の爆発が問題になることが多く、無駄なコードはできるだけ早い段階で除去したい、すなわち、コードを生成してから最適化するのではなく生成段階でコードを変形・最適化したいという強い要求がある.

^{†2} 精密な意味論は後述する.

の)reset0 まで let を移動したいことがある。これは、shift0/reset0 を入れ子にすることにより、以下のよう
に実現できる。

```
reset0 (for x = (int 3) to (int 7) do
reset0 (for y = (int 1) to (int 9) do
  shift0  $k_2$  → shift0  $k_1$  → let  $z = e$  in
    throw  $k_1$  (throw  $k_2$  (aryset <a> (x,y) z))))
```

青字のコントロールオペレータをいれた場合、let 挿入の「目的地」であるトップの位置 (赤字の reset0 で指定された位置) は、2 つ先の reset0 になってしまったが、これは、shift0 と throw をそれぞれ 2 回入れ子にすることにより実現できる。これが多段階 let 挿入である。

なお、このように直近の reset0 を越えた地点までの移動 (あるいは文脈の切り取り) は、shift/reset では実現できず、その拡張である階層的 shift/reset や shift0/reset0 が必要となる。本研究では、簡潔さのため、shift0/reset0 を用いることとした。

さて、以上のように shift0/reset0 を使うことにより多段階 let 挿入が実現できることがわかったが、自由な使用を許せば、危ないコード生成器を書けてしまう。上記の例では、項 e がどのループ変数に依存するかによって、let をどこまで移動してよいかが変わってきた。例えば、トップレベルまで移動するコード生成器の場合、 e が $\langle 7 \rangle$ のときは型がつき、 x や y のとき型が付かないようにしたい。このような精密な区別を実現する型システムを構築するのが本研究の目的である。

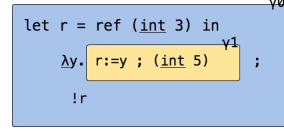
3 環境識別子による型システムの構築

3.1 先行研究のアイデア

Taha ら [3] は、純粋な (副作用のない) コード生成の言語の型安全性を保証するため、環境識別子 (Environment Classifier) を導入した。環境識別子 α は、コード生成のステージに対応し、「そのステージで使える (コードレベル) の変数とその型の集合 (あるいは型文脈)」を抽象的に表現した変数であり、 $\langle \text{int} \rangle^\alpha$ のように、コード型の一部として使用される。

須藤ら [4] は、破壊的変数を持つコード生成言語に対する型安全性を保証するため、環境識別子を精密

化した。本節では、須藤らのアイデアを解説する。以下の図は、彼らの言語における危険なプログラム例である。

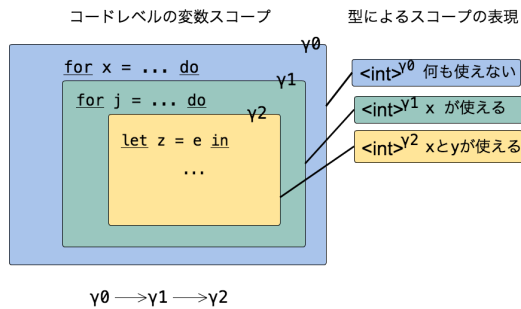


須藤らの「危険な」例

ここで、 r は、整数のコードを格納する参照 (破壊的セル) であり、 $r := y$ と $!r$ はそれぞれ、 r への代入と r の中身の読み出しを表す。上記のプログラムは、コードレベルのラムダ抽象 (y に対するラムダ抽象) で生成されるコードレベル変数を u とするとき、 $\langle u \rangle$ を r に格納し、 u のスコープ (黄色で示したもの) が終わったあとに取り出しているため、計算結果は、自由変数をもつコード $\langle u \rangle$ となり、危険である。

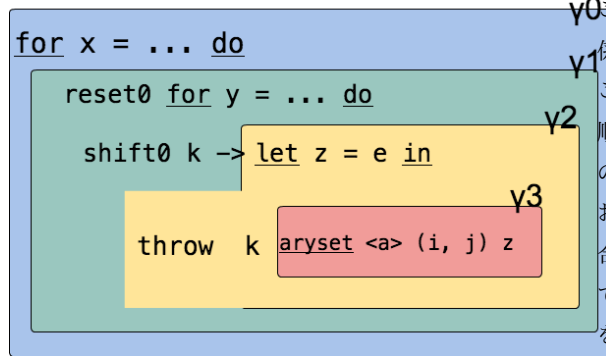
上記のようなプログラムを型エラーとするため、須藤らは、コードレベル変数のスコープごとに環境識別子を割り当てた。上記では外側のスコープ (青) が γ_0 、内側のスコープ (黄) が γ_1 という環境識別子で表現される。 γ_0 で有効なコードレベル変数はなく、 γ_1 で有効なコードレベル変数は y (に対応して生成される変数) である。 γ_0 のスコープは γ_1 のスコープを含む。言い換えれば、 γ_1 で使える変数の方が γ_0 で使える変数の方が (同じか) 多い。このことを $\gamma_1 \geq \gamma_0$ と表すことにする。 r は $\langle \text{int} \rangle^{\gamma_0}$ 型を持つ。 y は γ_1 で使える変数であるが、 γ_0 では使えないため、 r に y を代入することはできず、 $r := y$ のところで型エラーとなる。

コードレベルの変数スコープと、型によるスコープの表現をあらわしたのが、以下の図である。for や let などコードレベルの束縛子があるたびに、新しいスコープが開かれ、使える変数が増えていくことが分かるだろう。

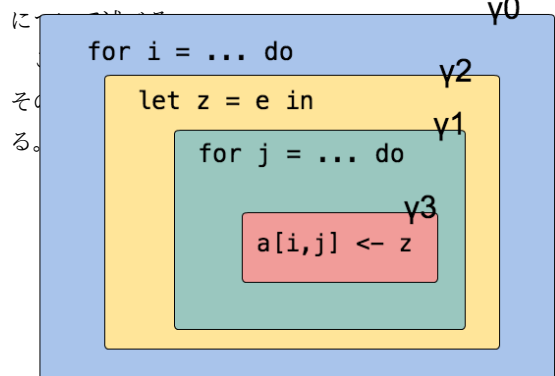


コードレベルの変数の型に、(精密化した) 環境識別子を付与することで、その変数が使えるスコープがわかり、破壊的代入などの副作用があるプログラムにおいてもスコープや型の安全性を保つことができる。

なお、須藤らの対象としていた言語が持っていた計算エフェクトは、「局所的なスコープをもつ参照」で



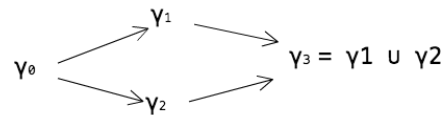
も扱うことができない。本節では、その問題点を明らかにし、その問題の解決の鍵となる join (U) の導入に



ここで、コードレベル変数の束縛子は3つ (for 式が2つと let 式が1つ) あるので、一番外側のスコープを含め4つのスコープ (青、緑、黄、赤) が存在する。これらに外側から順に $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ と名付ける。須藤らの体系通りであれば、これらの環境識別子には、

$$\gamma_0 \rightarrow \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_3$$

という順序がつくはずである。しかし、コントロールオペレータによる計算を進めると (上記の右側の図)、 γ_1 と γ_2 の位置関係が入れ代わる。この計算結果の式も型が整合する (束縛変数が自由になることはない等) ためには、 γ_2 において γ_1 で使える変数を使ってはいけないことがわかる。一方で、赤字で示された γ_3 においては、 γ_1 の変数も γ_2 の変数も使って構わない。これらを考慮すると、環境識別子は、以下の図の形となる。



ここでのポイントは、 γ_0 から、2つの異なる (包含関係のない) γ_1 と γ_2 に別れたあと、再び γ_3 で合流することである。須藤らの体系では、環境識別子のなす半順序集合は必ず木であったが、本研究の体系では、このように1度わかれたものが合流することがある。なお、 γ_3 で使える変数は γ_1 と γ_2 で使える変数の和集合 (それより大きくはない) ので、 $\gamma_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ としてよい。このように、環境識別子の世界に Join (U) を導入することにより、コントロールオペレータによる文脈の移動に対応できるようになった。

3.3 本研究: 型システムの構築

本研究の基本アイディアは前項で述べたようなシンプルなものであるが、言語体系と型システムの構築にあたってはいくつかの困難があった。ここでは、そのうち、コントロールオペレータが切りとった継続に関する多相性について述べる。

前節の例では、shift0 が切り取る文脈 (継続) は、穴が γ_1 のスコープにあり (その型は $\langle t_1 \rangle^{\gamma_1}$ の型)、文脈全体が γ_0 のスコープのにある (その型は $\langle t_0 \rangle^{\gamma_0}$ の形) となっている。これを throw において使うときは、 γ_3 スコープのものを γ_2 スコープに変換している。すなわち、 k は $\langle t_1 \rangle^{\gamma_3}$ 型から $\langle t_0 \rangle^{\gamma_2}$ 型への関数であるように振る舞う。

この2つのギャップを埋めるのは、継続 (評価文脈)

のある種の多相性である。このケースでは、

$$\langle t_1 \rangle^{\gamma_1} \rightarrow \langle t_0 \rangle^{\gamma_0}$$

という型で定義された継続変数 k が、任意の $\gamma_2 \geq \gamma_0$ に対して、

$$\langle t_1 \rangle^{\gamma_1 \cup \gamma_2} \rightarrow \langle t_0 \rangle^{\gamma_0 \cup \gamma_2}$$

という型を持つことが言えれば良いことがわかる。
($\gamma_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ あること、また、 $\gamma_2 \geq \gamma_0$ ならば $\gamma_0 \cup \gamma_2 = \gamma_2$ であることに注意されたい。)

このような多相性 (サブタイプのもとでの多相性) は、継続の研究ではいくつか知られており、今回のケースでも成立すると考えられる^{†3}。

本研究では、将来的に型推論アルゴリズムを構築することを考慮して、環境識別子に関する一般的な多相性を導入することとを避け、継続変数について特別な型を与え、その変数を `throw` で使うときに、多相性を利用できるようにするという方策をとった。これにより型システムを複雑化させることなく、コントロールオペレータの導入ができ、簡潔な型保存性の証明につながった。

最終的に得られた `throw` の型付け規則は以下のものであり、継続変数 k には、特別な関数型 \Rightarrow を与えていること (通常の関数型は \rightarrow で表現している)、また、 γ_1 から γ_0 への変換子として得られた k を、 $\gamma_1 \cup \gamma_2$ から $\gamma_2 = \gamma_0 \cup \gamma_2$ への変換子として利用していることがわかる。

$$\frac{\Gamma \vdash v : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1 \cup \gamma_2}; \sigma \quad \Gamma \models \gamma_2 \geq \gamma_0}{\Gamma, k : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1} \xrightarrow{\sigma} \langle t_0 \rangle^{\gamma_0} \vdash \mathbf{throw} \ k \ v : \langle t_0 \rangle^{\gamma_2}; \sigma}$$

なお、継続が作用する型 (上記の $\langle t_1 \rangle^{\gamma_1}$ など) は、本研究ではコード型に限定した。その理由は、須藤らの体系の方式で、参照 (ref) が関数型を持つことを許すとコードレベル変数が束縛域を脱出してしまい、本研究のコントロールオペレータを持つ体系でも同様の事態が生じると予想されたからである。なお、コード型のみを扱うことのできるコントロールオペレータであっても、多段階 `let` 挿入の表現のためには十分である。

4 対象言語: 構文と意味論

本研究における対象言語は、ラムダ計算にコード生成機能とコントロールオペレータ `shift0/reset0` を追加したものに型システムを導入したものである。

本稿では、最小限の言語のみについて考えるため、コード生成機能の「ステージ (段階)」は、コード生成段階 (レベル 0、現在ステージ) と生成されたコードの実行段階 (レベル 1、将来ステージ) の 2 ステージのみを考える。

前述したように、本研究の言語では、コードコンビネータ (Code Combinator) 方式を使い、コードコンビネータは、+ や if のように下線を引いて表す。

4.1 構文の定義

対象言語の構文を定義する。

変数は、レベル 0 変数 (x)、レベル 1 変数 (u)、(レベル 0 の) 継続変数 (k) の 3 種類がある。レベル 0 項 (e^0)、レベル 1 項 (e^1) およびレベル 0 の値 (v) を下の通り定義する。

$$\begin{aligned} c &::= i \mid b \mid \mathbf{int} \mid \underline{\text{@}} \mid + \mid \underline{+} \mid \mathbf{if} \\ v &::= x \mid c \mid \lambda x. e^0 \mid \langle e^1 \rangle \\ e^0 &::= v \mid e^0 e^0 \mid \mathbf{if} \ e^0 \ \mathbf{then} \ e^0 \ \mathbf{else} \ e^0 \\ &\quad \mid \lambda x. e^0 \mid \underline{\lambda u. e^0} \\ &\quad \mid \mathbf{reset0} \ e^0 \mid \mathbf{shift0} \ k \rightarrow e^0 \mid \mathbf{throw} \ k \ v \\ e^1 &::= u \mid c \mid \lambda u. e^1 \mid e^1 e^1 \mid \mathbf{if} \ e^1 \ \mathbf{then} \ e^1 \ \mathbf{else} \ e^1 \end{aligned}$$

ここで i は整数の定数、 b は真理値定数である。

定数のうち、下線がついているものはコードコンビネータである。変数は、ラムダ抽象 (下線なし、下線つき、二重下線つき) および `shift0` により束縛され、 α 同値な項は同一視する。`let` $x = e_1$ `in` e_2 および `let` $x = e_1$ `in` e_2 は、それぞれ、 $(\lambda x. e_2) e_1$ および $(\lambda x. e_2) \underline{\text{@}} e_1$ の省略形である。前述の例でのべた `for` は、コード構築定数とコードレベル適用 \cap を用いて導入することとし、(この導入にあたっての型システムの拡張は容易なので) ここでは省略する。

^{†3} この型付けが問題ないことは直感的には明らかであるが、意味論上で、このような型付け規則が「正しい」ことの証明は、将来課題である。

4.2 操作的意味論

対象言語は、値呼びで left-to-right の操作的意味論を持つ。ここでは評価文脈に基づく定義を与える。

評価文脈を以下のように定義する。

$$E ::= [] \mid E e^0 \mid v E \\ \mid \text{if } E \text{ then } e^0 \text{ else } e^0 \mid \text{reset0 } E \mid \underline{\lambda}u.E$$

コード生成言語で特徴的なことは、コードレベルのラムダ抽象の内部で評価が進行する点である。実際、上記の定義には、 $\underline{\lambda}u.E$ が含まれている。たとえば、 $\underline{\lambda}u.u \pm []$ は評価文脈である。

この評価文脈 E と次に述べる計算規則 $r \rightarrow l$ により、評価関係 $e \rightsquigarrow e'$ を次のように定義する。

$$\frac{r \rightarrow l}{E[r] \rightsquigarrow E[l]}$$

計算規則は以下の通り定義する。

$$\begin{aligned} &(\lambda x.e) v \rightarrow e\{x := v\} \\ &\text{if true then } e_1 \text{ else } e_2 \rightarrow e_1 \\ &\text{if false then } e_1 \text{ else } e_2 \rightarrow e_2 \\ &\underline{\lambda}x.e \rightarrow \underline{\lambda}u.(e\{x := \langle u \rangle\}) \\ &\underline{\lambda}u.\langle e \rangle \rightarrow \langle \lambda u.e \rangle \\ &\text{reset0 } v \rightarrow v \end{aligned}$$

$$\text{reset0}(E[\text{shift0 } k \rightarrow e]) \rightarrow e\{k \leftarrow E\}$$

ただし、4 行目の u はフレッシュなコードレベル変数とし、最後の行の E は穴の周りに **reset0** を含まない評価文脈とする。また、この行の右辺のトップレベルに **reset0** がない点が、shift/reset の振舞いとの違いである。すなわち、shift0 を 1 回計算すると、reset0 が 1 つはづれるため、shift0 を N 個入れ子にすることにより、 N 個分外側の reset0 までアクセスすることができ、多段階 let 挿入を実現できるようになる。

上記における継続変数に対する代入 $e\{k \leftarrow E\}$ は次の通り定義する。

$$\begin{aligned} &(\text{throw } k v)\{k \leftarrow E\} \equiv \text{reset0}(E[v]) \\ &(\text{throw } k' v)\{k \leftarrow E\} \equiv \text{throw } k' (v\{k \leftarrow E\}) \\ &\text{ただし } k \neq k' \end{aligned}$$

上記以外の e に対する代入の定義は透過的であるとする。上記の定義の 1 行目で **reset0** を挿入しているのは **shift0** の意味論に対応しており、これを挿入しない場合は別のコントロールオペレータ (Felleisen の control/prompt に類似した control0/prompt0) の振

舞いとなる。

コードコンビネータ定数の振舞い (ラムダ計算における δ 規則に相当) は以下のように定義する。

$$\begin{aligned} &\underline{\text{int}} n \rightarrow \langle n \rangle \\ &\langle e_1 \rangle @ \langle e_2 \rangle \rightarrow \langle e_1 e_2 \rangle \\ &\langle e_1 \rangle \pm \langle e_2 \rangle \rightarrow \langle e_1 + e_2 \rangle \\ &\underline{\text{if}} \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \langle e_3 \rangle \rightarrow \langle \text{if } e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3 \rangle \end{aligned}$$

5 型システム

本研究での型システムについて述べる。

基本型 b 、環境識別子 (Environment Classifier) γ を以下の通り定義する。

$$\begin{aligned} b &::= \text{int} \mid \text{bool} \\ \gamma &::= \gamma_x \mid \gamma \cup \gamma \end{aligned}$$

γ の定義における γ_x は環境識別子の変数を表す。すなわち、環境識別子は、変数であるかそれらを \cup で結合した形である。以下では、メタ変数と変数を区別せず γ_x を γ と表記する。ここで環境識別子として \cup を導入した理由は後述する。

$L ::= \mid \gamma$ は現在ステージと将来ステージをまとめて表す記号である。たとえば、 $\Gamma \vdash^L e : t ; \sigma$ は、 $L =$ のとき現在ステージの判断で、 $L = \gamma$ のとき将来ステージの判断となる。

レベル 0 の型 t^0 、レベル 1 の型 t^1 、(レベル 0 の) 型の有限列 σ 、(レベル 0 の) 継続の型 κ を次の通り定義する。

$$\begin{aligned} t^0 &::= b \mid t^0 \xrightarrow{\sigma} t^0 \mid \langle t^1 \rangle^\gamma \\ t^1 &::= b \mid t^1 \rightarrow t^1 \\ \sigma &::= \epsilon \mid \sigma, t^0 \\ \kappa^0 &::= \langle t^1 \rangle^\gamma \xrightarrow{\sigma} \langle t^1 \rangle^\gamma \end{aligned}$$

レベル 0 の関数型 $t^0 \xrightarrow{\sigma} t^0$ は、エフェクトをあらわす列 σ を伴っている。これは、その関数型をもつ項を引数に適用したときに生じる計算エフェクトであり、具体的には、**shift0** の answer type の列である。前述したように shift0 は多段階の reset0 にアクセスできるため、 n 個先の reset0 の answer type まで記憶するため、このように型の列 σ で表現している。ただし、本研究の範囲では、answer type modification に対応する必要はないので、エフェクトはシンプルに型

の列 (n 個先の `reset0` の answer type を $n = 1, \dots, k$ に対して並べた列) で表現している。この型システムの詳細は、Materzok ら [2] の研究を参照されたい。

本稿の範囲では、コントロールオペレータは現在ステージのみにあられ、生成されるコードの中にはあらわれないため、レベル 1 の関数型は、エフェクトを表す列を持たない。また、本項では、`shift0/reset0` はコードを操作する目的にのみ使うため、継続の型は、コードからコードへの関数の形をしている。ここでは、後の定義を簡略化するため、継続を、通常の関数とは区別しており、そのため、継続の型も通常の関数の型とは区別して二重の横線で表現している。

型判断は、以下の 2 つの形である。

$$\Gamma \vdash^L e : t ; \sigma$$

$$\Gamma \models \gamma \geq \gamma$$

ここで、型文脈 Γ は次のように定義される。

$$\Gamma ::= \emptyset \mid \Gamma, (\gamma \geq \gamma) \mid \Gamma, (x : t) \mid \Gamma, (u : t)^\gamma$$

型判断の導出規則を与える。まず、 $\Gamma \models \gamma \geq \gamma$ の形に対する規則である。

$$\overline{\Gamma \models \gamma_1 \geq \gamma_1} \quad \overline{\Gamma, \gamma_1 \geq \gamma_2 \models \gamma_1 \geq \gamma_2}$$

$$\frac{\Gamma \models \gamma_1 \geq \gamma_2 \quad \Gamma \models \gamma_2 \geq \gamma_3}{\Gamma \models \gamma_1 \geq \gamma_3}$$

$$\overline{\Gamma \models \gamma_1 \cup \gamma_2 \geq \gamma_1} \quad \overline{\Gamma \models \gamma_1 \cup \gamma_2 \geq \gamma_2}$$

$$\frac{\Gamma \models \gamma_3 \geq \gamma_1 \quad \Gamma \models \gamma_3 \geq \gamma_2}{\Gamma \models \gamma_3 \geq \gamma_1 \cup \gamma_2}$$

次に、 $\Gamma \vdash^L e : t ; \sigma$ の形に対する導出規則を与える。まずは、レベル 0 における単純な規則である。

$$\overline{\Gamma, x : t \vdash x : t ; \sigma} \quad \overline{\Gamma, (u : t)^\gamma \vdash u : t ; \sigma}$$

$$\overline{\Gamma \vdash^L c : t^c ; \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^L e_1 : t_2 \rightarrow t_1 ; \sigma \quad \Gamma \vdash^L e_2 : t_2 ; \sigma}{\Gamma \vdash^L e_1 e_2 : t_1 ; \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, x : t_1 \vdash e : t_2 ; \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. e : t_1 \xrightarrow{\sigma} t_2 ; \sigma'} \quad \frac{\Gamma, (u : t_1)^\gamma \vdash e : t_2 ; \sigma}{\Gamma \vdash^\gamma \lambda x. e : t_1 \rightarrow t_2 ; \sigma'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^L e_1 : \text{bool} ; \sigma \quad \Gamma \vdash^L e_2 : t ; \sigma \quad \Gamma \vdash^L e_3 : t ; \sigma}{\Gamma \vdash^L \text{if } e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3 : t ; \sigma}$$

次にコードレベル変数に関するラムダ抽象の規則である。

$$\frac{\Gamma, \gamma_1 \geq \gamma, x : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1} \vdash e : \langle t_2 \rangle^{\gamma_1} ; \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \langle t_1 \rightarrow t_2 \rangle^\gamma ; \sigma} \quad (\gamma_1 \text{ is eigen var})$$

$$\frac{\Gamma, \gamma_1 \geq \gamma, x : (u : t_1)^{\gamma_1} \vdash e : \langle t_2 \rangle^{\gamma_1} ; \sigma}{\Gamma \vdash \lambda u^1. e : \langle t_1 \rightarrow t_2 \rangle^\gamma ; \sigma}$$

コントロールオペレータに対する型導出規則である。

$$\frac{\Gamma \vdash e : \langle t \rangle^\gamma ; \langle t \rangle^\gamma, \sigma}{\Gamma \vdash \text{reset0 } e : \langle t \rangle^\gamma ; \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, k : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1} \xrightarrow{\sigma} \langle t_0 \rangle^{\gamma_0} \vdash e : \langle t_0 \rangle^{\gamma_0} ; \sigma \quad \Gamma \models \gamma_1 \geq \gamma_0}{\Gamma \vdash \text{shift0 } k \rightarrow e : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1} ; \langle t_0 \rangle^{\gamma_0}, \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash v : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1 \cup \gamma_2} ; \sigma \quad \Gamma \models \gamma_2 \geq \gamma_0}{\Gamma, k : \langle t_1 \rangle^{\gamma_1} \xrightarrow{\sigma} \langle t_0 \rangle^{\gamma_0} \vdash \text{throw } k v : \langle t_0 \rangle^{\gamma_2} ; \sigma}$$

コード生成に関する補助的な規則として、Subsumption に相当する規則等がある。

$$\frac{\Gamma \vdash e : \langle t \rangle^{\gamma_1} ; \sigma \quad \Gamma \models \gamma_2 \geq \gamma_1}{\Gamma \vdash e : \langle t \rangle^{\gamma_2} ; \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\gamma_1} e : t ; \sigma \quad \Gamma \models \gamma_2 \geq \gamma_1}{\Gamma \vdash^{\gamma_2} e : t ; \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash^\gamma e : t^1 ; \sigma}{\Gamma \vdash \langle e \rangle : \langle t^1 \rangle^\gamma ; \sigma}$$

5.1 型付け例

上記の型システムのもとで、いくつかの項の型付けについて述べる。

```
e1 = reset0 let x1 = %3 in
      reset0 let x2 = %5 in
      shift0 k → let y = t in
      throw k (x1 + x2 + y)
```

この式 e_1 に対して、もし、 $t = \%7$ あるいは $t = x_1$ であれば、 e_1 は型付け可能である。一方、 $t = x_2$ であれば、 e_1 は型付けできない。


```

 $e_2 = \text{reset0 } \underline{\text{let}} \ x_1 = \%3 \ \underline{\text{in}}$ 
 $\quad \text{reset0 } \underline{\text{let}} \ x_2 = \%5 \ \underline{\text{in}}$ 
 $\quad \text{shift0 } k_2 \rightarrow \text{shift0 } k_1 \rightarrow \underline{\text{let}} \ y = t \ \underline{\text{in}}$ 
 $\quad \text{throw } k_1 (\text{throw } k_2 (x_1 \pm x_2 \pm y))$ 

```

この式 e_2 に対して、もし $t = \%7$ であれば e_1 は型付け可能である。一方、 $t = x_2$ あるいは $t = x_1$ であれば、 e_1 は型付けできない。

このように、(少なくとも) 上記の例については安全な式と危険な式を正しく峻別できていることがわかった。

5.2 型安全性について

本研究の型システムに対する型保存 (Subject Reduction) 定理について述べる。型保存定理は、(証明できれば) 進行 (Progress) 定理とあわせて型システムの健全性を導く定理である。

(型保存性) $\vdash e : t ; \sigma$ かつ $e \rightsquigarrow e'$ であれば、 $\vdash e' : t ; \sigma$ である。

この定理は reset0-shift0 の計算規則が多相性を持たない場合には容易に証明できるが、多相性については精密な扱いが必要であり、現段階では、型保存定理の証明は進行中である。

6 まとめと今後の課題

本研究では、効率的コード生成に有用な技法である let 挿入を、型安全に実現するための言語と型システムについて述べた。局所的な代入可能変数を持つ体系に対する須藤らの研究[4] などにに基づき、多段階の for ループを飛び越えた let 挿入を実現するために、shift0/reset0 を持つコード生成体系を設計した。須藤らの研究で精密化された環境識別子 (Environment Classifier) に join (\cup) を導入することで、計算の順序を変更するようなコントロールオペレータ

(shift0/reset0) を扱えるようにし、安全に多段階の let 挿入を行えるように型システムを構築した。このような let 挿入が束縛子を越えるケースは、ループにおける不変式の括り出しなどの有用な最適化を含むが、これまでの研究では一般的な let 挿入を安全に実現した体系の提案はなく、我々の知る限り本研究がはじめてである。

今後の課題として、まずあげられるのは、進行 (Progress) の性質および型推論アルゴリズムの開発である。また、理論的には Kiselyov らのグローバルな参照を持つ体系との融合が可能になれば、広い範囲のコード生成技法・最適化技法をカバーできるため極めて有用である。また、既存の MetaOCaml との比較においては、2 レベルのみのコード生成に限定している点や run (生成したコードの実行) や cross-stage persistence (現在ステージの値をコードに埋め込む機能) などに対応していない点が欠点であり、これらの拡張が可能であるかどうかの検討は非常に興味深い将来課題である。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 15K12007 の支援を受けている。

参考文献

- [1] Kiselyov, O., Kameyama, Y., and Sudo, Y.: Refined Environment Classifiers: Type- and Scope-safe Code Generation with Mutable Cells, *Proceedings of the 14th Asian Symposium on Programming Languages and Systems*, APLAS 2016, to appear.
- [2] Materzok, M. and Biernacki, D.: Subtyping Delimited Continuations, *SIGPLAN Not.*, Vol. 46, No. 9(2011), pp. 81–93.
- [3] Taha, W. and Nielsen, M. F.: Environment Classifiers, *Proceedings of the 30th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, POPL '03, New York, NY, USA, ACM, 2003, pp. 26–37.
- [4] 須藤悠斗, Kiselyov, O., 亀山幸義: コード生成のための自然演繹. 日本ソフトウェア科学会第 31 回大会, 2014 年 9 月, 名古屋大学. PPL4-4, 9 ページ.