

受験番号		氏 名		クラス		出席番号	
------	--	-----	--	-----	--	------	--

試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

2014年度 全統マーク高2模試問題

数 学 ② [数学Ⅱ 数学Ⅱ・数学B] (100点 60分)

2015年2月実施

I 注 意 事 項

- 1 解答用紙は、第1面(表面)及び第2面(裏面)の両面を使用しなさい。
解答用紙に、正しく記入・マークされていない場合は、採点できないことがあります。特に、解答用紙の**解答科目欄**にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は、0点となることがあります。

解答科目については、間違いのないよう十分に注意し、マークしなさい。

- 2 出題科目、ページ及び選択方法は、下表のとおりです。

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
数 学 Ⅱ	4～14	左の2科目のうちから1科目を選択し、解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15～27	

- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 4 選択問題については、解答する問題を決めたあと、その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし、**指定された問題数をこえて解答してはいけません。**
- 5 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。

II 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

河合塾



数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1] 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 2^{2x+2} - 2^{x+5} - 2^x + 8$$

とする。

(1) $f(3) = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $2^x = t$ とおく。 x がすべての実数をとって変化するとき、 t は $t > \boxed{\text{イ}}$ を満たすすべての実数を取り得る。また、 $f(x)$ を t を用いて表すと

$$f(x) = \boxed{\text{ウ}} t^2 - \boxed{\text{エオ}} t + \boxed{\text{カ}}$$

となるから、 x の不等式 $f(x) \leq 0$ を解くと

$$\boxed{\text{キク}} \leq x \leq \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(数学 II 第 1 問 は次ページに続く。)

(3) 二つの曲線

$$C_1: y = 2^x$$

$$C_2: y = 3^{-x+n}$$

を考える。ただし、 n は整数である。

$n = 1$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は \log_6 である。

また、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標を x_1 とするとき、 $\leq x_1 \leq$

となるような n の値は全部で 個ある。

(数学Ⅱ 第1問 は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x - \frac{1}{4}$$

とする。また、以下においては x の値の範囲は $0 \leq x < 2\pi$ とする。

(1) $\sin x = u$ とおくと、 u のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シス}} \leq u \leq \boxed{\text{セ}}$ である。

また、 $\cos 2x = \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} \sin^2 x$ であるから、 $g(x)$ を u を用いて表すと

$$g(x) = \left(u - \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \right)^2 - \boxed{\text{テ}}$$

となる。よって、 $g(x)$ は

$$x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ト}}}, \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \pi \text{ のとき, 最小値 } \boxed{\text{ヌネ}}$$

をとる。

(数学Ⅱ 第1問は次ページに続く。)

- (2) k を実数の定数とし、 x の方程式 $g(x) = k$ が異なる 3 個の実数解をもつとする。

このとき、 k の値は $\frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であり、3 個の解の和は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\pi$ である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \boxed{\text{ア}}x^2 - \boxed{\text{イ}}$ であるから、 $f(x)$ は

$x = \boxed{\text{ウエ}}$ で極大値 $\boxed{\text{オ}}$

$x = \boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$

をとる。

また、 x の方程式 $f(x) = 0$ は負の解を $\boxed{\text{ケ}}$ 個、正の解を $\boxed{\text{コ}}$ 個もつ。

(数学Ⅱ 第2問 は次ページに続く。)

- (2) 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = (\boxed{\text{サ}} t^2 - \boxed{\text{シ}}) x - \boxed{\text{ス}} t^3 + \boxed{\text{セ}}$$

である。

以下、 k を実数とし、 ℓ が点 $A(2, k)$ を通るときを考える。このとき

$$k = \boxed{\text{ソタ}} t^3 + \boxed{\text{チ}} t^2 - \boxed{\text{ツ}}$$

が成り立つことから、点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{テト}} < k < \boxed{\text{ナ}}$$

である。

- (3) 曲線 C 上の点 $(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キク}})$ における C の接線を ℓ_1 とする。 C と ℓ_1 の共有

点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{ニヌ}}$ であり、 C と ℓ_1 で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$

である。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

O を原点とする座標平面上に 3 直線

$$\begin{cases} \ell_1: y = x \\ \ell_2: y = 2x \\ \ell_3: y = -x + 6 \end{cases}$$

がある。

ℓ_1 と ℓ_3 の交点 A の座標は (,) であり、 ℓ_2 と ℓ_3 の交点 B の座標は (,) である。

$\angle OAB = \frac{\pi}{\text{オ}}$ であるから、3 点 O, A, B を通る円 C の中心 D の座標は

(,) であり、円 C の半径は $\sqrt{\text{ク}}$ である。

直線 AD の傾きは $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ であるから、点 A における円 C の接線 m_1 の方程式は

$$y = \text{サシ}x + \text{ス}$$

である。

(数学Ⅱ 第3問 は次ページに続く。)

また、点 B における円 C の接線 m_2 の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x + \boxed{\text{チ}}$$

である。よって、2 直線 m_1 と m_2 の交点 E の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}, \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \right)$ であり、

三角形 ABE の面積は $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

k を実数とし、 x の3次式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 - (k-2)x^2 + kx + 2k - 1$$

とする。

$P(-1) = \boxed{\text{ア}}$ であるから、 $P(x)$ は

$$P(x) = (x + \boxed{\text{イ}}) \{ x^2 - (k - \boxed{\text{ウ}})x + \boxed{\text{エ}}k - \boxed{\text{オ}} \}$$

と因数分解できる。

(1) $k=2$ のとき、 x の方程式 $P(x)=0$ の解は

$$\boxed{\text{カキ}}, \frac{\boxed{\text{ク}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}i}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(2) x の方程式 $P(x)=0$ の異なる実数解の個数がちょうど2個となるような k の値は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

であり、とくに $k = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき、その2個の実数解は $\boxed{\text{チツ}}$ と $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

(数学Ⅱ 第4問 は次ページに続く。)

(3) x の方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}} < k < \boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$$

であり, このときの虚数解を α, β とする。解と係数の関係により

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k - \boxed{\text{ネ}} \\ \alpha\beta = \boxed{\text{ノ}}k - \boxed{\text{ハ}} \end{cases}$$

が成り立つ。

$\alpha + \beta = \alpha^3 + \beta^3$ を満たすような整数 k の値は $\boxed{\text{ヒ}}$ であり, $k = \boxed{\text{ヒ}}$ のとき, $\alpha^{2014} + \beta^{2014} = \boxed{\text{フヘ}}$ である。

数学Ⅱ

(下書き用紙)

数学Ⅱ・数学B

問 題	選 択 方 法
第1問	必 答
第2問	必 答
第3問	} いずれか2問を選択し、 解答しなさい。
第4問	
第5問	

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 2^{2x+2} - 2^{x+5} - 2^x + 8$$

とする。

(1) $f(3) = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $2^x = t$ とおく。 x がすべての実数をとって変化するとき、 t は $t > \boxed{\text{イ}}$ を満たすすべての実数を取り得る。また、 $f(x)$ を t を用いて表すと

$$f(x) = \boxed{\text{ウ}} t^2 - \boxed{\text{エオ}} t + \boxed{\text{カ}}$$

となるから、 x の不等式 $f(x) \leq 0$ を解くと

$$\boxed{\text{キク}} \leq x \leq \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

(3) 二つの曲線

$$C_1: y = 2^x$$

$$C_2: y = 3^{-x+n}$$

を考える。ただし、 n は整数である。

$n = 1$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は \log_6 コ である。

また、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標を x_1 とするとき、キク $\leq x_1 \leq$ ケ

となるような n の値は全部で サ 個ある。

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

〔2〕 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x - \frac{1}{4}$$

とする。また、以下においては x の値の範囲は $0 \leq x < 2\pi$ とする。

(1) $\sin x = u$ とおくと、 u のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シス}} \leq u \leq \boxed{\text{セ}}$ である。

また、 $\cos 2x = \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} \sin^2 x$ であるから、 $g(x)$ を u を用いて表すと

$$g(x) = \left(u - \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \right)^2 - \boxed{\text{テ}}$$

となる。よって、 $g(x)$ は

$$x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ト}}}, \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \pi \text{ のとき, 最小値 } \boxed{\text{ヌネ}}$$

をとる。

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

- (2) k を実数の定数とし、 x の方程式 $g(x) = k$ が異なる 3 個の実数解をもつとする。

このとき、 k の値は $\frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であり、3 個の解の和は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\pi$ である。

第2問 (必答問題) (配点 30)

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \boxed{\text{ア}}x^2 - \boxed{\text{イ}}$ であるから、 $f(x)$ は

$x = \boxed{\text{ウエ}}$ で極大値 $\boxed{\text{オ}}$

$x = \boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$

をとる。

また、 x の方程式 $f(x) = 0$ は負の解を $\boxed{\text{ケ}}$ 個、正の解を $\boxed{\text{コ}}$ 個もつ。

(数学Ⅱ・数学B 第2問 は次ページに続く。)

- (2) 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = (\boxed{\text{サ}} t^2 - \boxed{\text{シ}}) x - \boxed{\text{ス}} t^3 + \boxed{\text{セ}}$$

である。

以下、 k を実数とし、 ℓ が点 $A(2, k)$ を通るときを考える。このとき

$$k = \boxed{\text{ソタ}} t^3 + \boxed{\text{チ}} t^2 - \boxed{\text{ツ}}$$

が成り立つことから、点 A から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{テト}} < k < \boxed{\text{ナ}}$$

である。

- (3) 曲線 C 上の点 $(\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キク}})$ における C の接線を ℓ_1 とする。 C と ℓ_1 の共有

点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{ニヌ}}$ であり、 C と ℓ_1 で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$

である。

第3問 (選択問題) (配点 20)

等差数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_3 + a_4 = 19 \end{cases}$$

を満たしている。このとき、初項は ア であり、公差は イ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \text{ウ}n - \text{エ}$$

である。

(1) 自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} (\text{オ}n + \text{カ})$$

$$\sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} = n (\text{キ}n^2 + \text{ク}n + \text{ケ})$$

である。

(数学Ⅱ・数学B 第3問 は次ページに続く。)

(2) 数列 $\{b_n\}$ は、初項が $\frac{15}{4}$ で、漸化式

$$b_{n+1} = 2b_n - 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。この漸化式は

$$b_{n+1} - \boxed{\text{コ}} = 2(b_n - \boxed{\text{コ}}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と変形できる。ここで、 $c_n = b_n - \boxed{\text{コ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とすると、数列 $\{c_n\}$

は初項が $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ 、公比が $\boxed{\text{セ}}$ の等比数列である。

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{ソ}} \boxed{\text{タ}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{タ}}$ については、当てはまるものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ① n | ② $n - 1$ | ③ $n + 1$ | ④ $n - 2$ |
| ⑤ $n + 2$ | ⑥ $n - 3$ | ⑦ $n + 3$ | |

次に、数列 $\{d_n\}$ は

$$d_n = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

$$d_{n+1} - d_n = b_n - \boxed{\text{チ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であるから、数列 $\{d_n\}$ の項のうち、最大である項は

$$d_{\boxed{\text{ツ}}} = \boxed{\text{テト}}$$

である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

$OA=3$, $OC=2$, $\angle AOC=\frac{\pi}{3}$ である平行四辺形 $OABC$ において、線分 BC を $3:1$ に内分する点を D とし、線分 AB を $2:1$ に内分する点を E とする。以下、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\vec{c}, \quad \overrightarrow{OE}=\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

であり、 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{オ}}$ である。

直線 AD と直線 OE の交点を P とする。点 P は直線 AD 上にあるから、実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AD}$ と表される。よって

$$\overrightarrow{OP}=\left(1-\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)s\vec{a}+s\vec{c}$$

となる。さらに、点 P は直線 OE 上にあるから、実数 t を用いて $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OE}$ と表される。したがって

$$s=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \quad t=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B 第4問 は次ページに続く。)

次に、点 P から直線 OC に引いた垂線と直線 OC の交点を H とする。

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PH} = \boxed{\text{シ}}$ であるから

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}} \vec{c}$$

であり、 $|\overrightarrow{PH}| = \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である。

点 P を中心とし、点 H を通る円を K とする。点 B は円 K の $\boxed{\text{ツ}}$ にある。

$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① 内部

② 周上

③ 外部

第5問 (選択問題) (配点 20)

2個のさいころを同時に1回振ったとき

出た目の和が4の倍数のとき1点、

出た目の和を4で割った余りが2のとき2点、

出た目の和を4で割った余りが1または3のとき4点

をもらえるゲームを3回行う。

n 回目のゲームにおける得点を X_n ($n=1, 2, 3$) とし、 $S=X_1+X_2+X_3$ とする。

(1) $X_1=1$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $X_1=2$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$, $X_1=4$ となる

確率は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。 $S=6$ となる確率は $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。 $X_1=1$ かつ $S=6$

となる確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B 第5問 は次ページに続く。)

(2) X_1 の期待値(平均) $E(X_1)$ は $\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり, 分散 $V(X_1)$ は $\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(3) 確率変数 X_1 と X_2 は互いに $\boxed{\text{ト}}$ 。確率変数 X_1 と S は互いに $\boxed{\text{ナ}}$ 。

$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを, 次の①～③のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを選んでもよい。

① 独立である

② 独立でない

③ 排反である

(4) S の期待値(平均) $E(S)$ は $\frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であり, 分散 $V(S)$ は $\frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である。

II 解答上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。
- 2 問題の文中の **ア**，**イウ** などには、特に指示がないかぎり、符号(－)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 **アイウ** に $-8a$ と答えたいとき

ア	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
イ	○	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d
ウ	○	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●	b	c	d

なお、同一の問題文中に **ア**，**イウ** などが2度以上現れる場合、2度目以降は、**ア**，**イウ** のように細字で表記します。

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として答えなさい。

また、それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば、 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{2a+1}{3}$ と答えるところを、 $\frac{6}{8}$ ， $\frac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

- 4 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $4\sqrt{2}$ ， $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $6\sqrt{2a}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ ， $\frac{\sqrt{52}}{4}$ ， $3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

問題を解く際には、「問題」冊子にも必ず自分の解答を記録し、試験終了後に配付される「学習の手引き」にそって自己採点し、再確認しなさい。