クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2014年度　第2回　**全統記述模試**

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2014年8月実施】

※英語冊子巻末に「**自己採点シート**」と「**学力アップ・志望校合格のための復習法**」を掲載していますので、志望校合格へむけた効果的な復習のためにご活用ください。

河合塾

1461220119501040

【数　　学】

【Ⅰ型受験者用】

1　小問集合

【Ⅰ型共通　必須問題】

（配点　60点）

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=-2, \\ x^2-y=3 \end{cases}$$

を解け．

(2) $5\sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき，$a+\dfrac{1}{a}$，$a^2-\dfrac{1}{a^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) a，b，c を実数の定数として，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は3点 A$(1,\ -32)$，B$(2,\ -30)$，C$(-1,\ -24)$ を通る．

また，$k>0$ を満たす定数 k に対して $g(x)=(x-k)(x+k)$ とおく．

(i) a，b，c の値をそれぞれ求めよ．

(ii) 不等式 $g(x)\leqq 0$ を解け．

(iii) $g(x)\leqq 0$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)\leqq 0$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ．

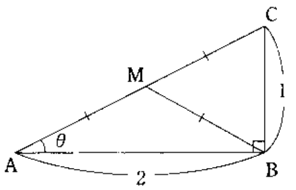
(4) 平面上に直角三角形 ABC があり，

$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{BC}=1\quad \angle\mathrm{ABC}=90^\circ$$

を満たしている．辺 AC 上に点 M を

$$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{CM}$$

を満たすようにとる．



$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，次の値を求めよ．

(i) $\tan\theta$　(ii) $\sin(90^\circ-\theta)$　(iii) $\cos 2\theta$

【配点】

(1) 8点．

(2) 10点．

(3) 24点．

(i) 9点．(ii) 7点．(iii) 8点．

(4) 18点．

(i) 6点．(ii) 6点．(iii) 6点．

【出題のねらい】

(1) 2次方程式の解の公式を用いて連立方程式を解くことができるかをみる問題である．

(2) 無理数を含む分数式の値を，因数分解，分母の有理化などの手法を利用して計算できるかをみる問題である．

(3) グラフの条件から2次関数を決定できるか，2次不等式の条件をグラフを利用して考えることができるかをみる問題である．

(4) 三角比の定義，基本公式，相互関係を正しく理解しているかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$\begin{cases} 2x+y=-2, & \cdots① \\ x^2-y=3. & \cdots② \end{cases}$$

①＋② より，

$$x^2+2x-1=0.$$

解の公式から，

$$x=-1\pm\sqrt{2}.$$

これを ① に代入して，

$$\begin{aligned} y&=-2(x+1) \\ &=-2(\pm\sqrt{2}) \\ &=\mp 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$
（以上，複号同順）

よって，求める解は，

$$(x,\ y)=\boldsymbol{(-1+\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),\ (-1-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})}.$$

(2) $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$ について，

$$7<\sqrt{50}<8$$

が成り立つから，

$$5\sqrt{2}=7+a.$$

よって，

$$a=5\sqrt{2}-7.$$

これより，

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}&=\frac{1}{5\sqrt{2}-7} \\ &=\frac{5\sqrt{2}+7}{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)} \\ &=5\sqrt{2}+7. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} a+\frac{1}{a}&=(5\sqrt{2}-7)+(5\sqrt{2}+7) \\ &=\boldsymbol{10\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

また，

$$a-\frac{1}{a}=(5\sqrt{2}-7)-(5\sqrt{2}+7)$$
$$=-14$$

であるから，

$$a^2-\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$$
$$=10\sqrt{2}(-14)$$
$$=\mathbf{-140\sqrt{2}}.$$

(3) $$f(x)=ax^2+bx+c.$$

(i) 放物線 $y=f(x)$ は 3 点 A$(1,\ -32)$，B$(2,\ -30)$，C$(-1,\ -24)$ を通るから，

$$\begin{cases} a+b+c=-32, & \cdots③ \\ 4a+2b+c=-30, & \cdots④ \\ a-b+c=-24. & \cdots⑤ \end{cases}$$

③−⑤ より，

$$2b=-8.$$
$$b=-4.$$

これを ③，④ に代入して，

$$\begin{cases} a+c=-28, & \cdots⑥ \\ 4a+c=-22. & \cdots⑦ \end{cases}$$

⑦−⑥ より，

$$3a=6.$$
$$a=2.$$

これを ⑥ に代入して，

$$c=-30.$$

以上より，

$$\mathbf{a=2,\ b=-4,\ c=-30}.$$

(ii) $$g(x)=(x-k)(x+k)$$

について，2 次方程式 $g(x)=0$ を解くと，

$$x=-k,\ k.$$

$k>0$ であるから，2 次不等式 $g(x)\leqq 0$ の解は，

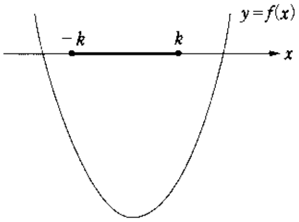
$$\mathbf{-k\leqq x\leqq k}.$$

(iii) (ii) の結果より，$-k\leqq x\leqq k$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)\leqq 0$ が成り立つような k の値の範囲を求めればよい．

そのための条件は，

$$f(-k)\leqq 0 \text{ かつ } f(k)\leqq 0.$$

よって，放物線 $y=f(x)$ が x 軸と次のように交わればよい．



(i) の結果より，

$$f(x)=2(x+3)(x-5)$$

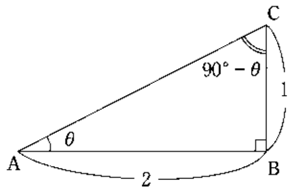
と因数分解できるから，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の座標は，

$$(-3,\ 0),\ (5,\ 0).$$

よって，求める k の値の範囲は，

$$\mathbf{0<k\leqq 3}.$$

(4)



(i) $$\tan\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

(ii) $$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{5}$$

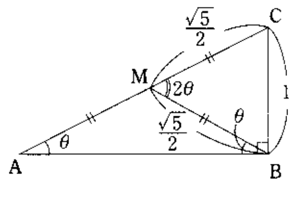
であるから，

$$\sin(90^\circ-\theta)=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$
$$=\mathbf{\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

(iii) $$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{CM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

であるから，三角形 BCM に余弦定理を用いて，

$$\cos 2\theta=\frac{\mathrm{BM}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{BM}\cdot\mathrm{CM}}$$
$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}$$
$$=\frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{2}}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{5}}.$$



【解説】 問題

(1) 与えられた方程式から y を消去すれば x の 2 次方程式が得られるから，

> $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ の解は,
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
> **2次方程式の解の公式**

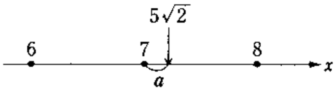
を利用して x の値を求めればよい.

【解答】では,

> $ax^2+2bx+c=0\ (a\neq0)$ の解は,
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$
> **2次方程式の解の公式**

を利用した. 解が2組あることに注意が必要である.

(2) $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$ は数直線上で, $\sqrt{49}(=7)$ と $\sqrt{64}(=8)$ の間にある.



したがって, $7+a=5\sqrt{2}$ より,
$$a=5\sqrt{2}-7$$
を得る.

このあと, 与えられた式の値を求めるためには, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}$ に対して「分母の有理化」を行い, 分母を根号を含まない形に変形することが基本である.

また, $a^2-\dfrac{1}{a^2}$ の値を求めるとき,

> $$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

を用いて計算したが, $a=5\sqrt{2}-7$ を与えられた式に直接代入して計算してもよい.

((2) の別解)

$a=5\sqrt{2}-7$ であるから,
$$\begin{aligned}a+\frac{1}{a}&=\frac{a^2+1}{a}\\&=\frac{(5\sqrt{2}-7)^2+1}{5\sqrt{2}-7}\\&=\frac{(50-70\sqrt{2}+49)+1}{5\sqrt{2}-7}\\&=\frac{10(10-7\sqrt{2})}{5\sqrt{2}-7}\\&=\frac{10\sqrt{2}(5\sqrt{2}-7)}{5\sqrt{2}-7}\\&=10\sqrt{2}.\end{aligned}$$
$$a^2=(5\sqrt{2}-7)^2=99-70\sqrt{2},$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}&=\left(\frac{1}{5\sqrt{2}-7}\right)^2\\&=(5\sqrt{2}+7)^2\\&=99+70\sqrt{2}\end{aligned}$$
より,
$$\begin{aligned}a^2-\frac{1}{a^2}&=(99-70\sqrt{2})-(99+70\sqrt{2})\\&=-140\sqrt{2}.\end{aligned}$$

((2) の別解終り)

(3)(i) 放物線 $y=f(x)$ が3点A, B, Cを通ることから, a, b, c に関する連立方程式③, ④, ⑤が得られる. これを解けばよい.

(ii) 2次不等式を解くには,

> $\alpha<\beta$ とするとき,
> $(x-\alpha)(x-\beta)\geqq0$ の解は $x\leqq\alpha$, $\beta\leqq x$,
> $(x-\alpha)(x-\beta)\leqq0$ の解は $\alpha\leqq x\leqq\beta$
> **2次不等式の解**

を用いればよい.

(iii) 2次不等式 $f(x)\leqq0$ の解は, 放物線 $y=f(x)$ のうち, x 軸上にあるかまたは x 軸の下側にある部分の x の値の範囲に等しい.

したがって, (ii) より得られる範囲 $-k\leqq x\leqq k$ において, 放物線と x 軸の位置関係を調べればよい.

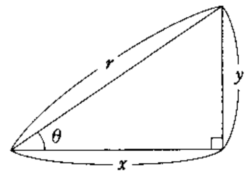
このとき,

> 放物線 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c は実数, $a\neq0$) について調べるには,
> (ア) 軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ の位置(頂点の x 座標),
> (イ) 判別式 $D=b^2-4ac$ の符号(または頂点の y 座標の符号),
> (ウ) 与えられた範囲の端点における関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号
> **放物線の調べ方**

に注目することが基本である.

本問では (ア), (イ) は不要であり, (ウ) だけで解答できる.

(4) (i), (ii) については，



直角三角形の鋭角の1つを θ とし，斜辺の長さを r，他の辺の長さを図のように x，y とするとき，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

三角比の定義

に従えばよいが，(ii) については，

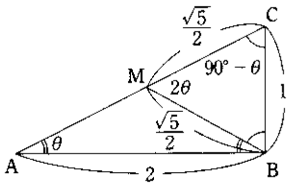
$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta,$$
$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta,$$
$$\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

$90°-\theta$ の三角比

を利用してもよい．

(iii) については，$2\theta=\angle BMC$ に気づくことが大切である．**【解答】**では三角形 BCM に余弦定理を用いたが，次のような考え方もある．

((4)(iii) の別解)



$AM=BM=CM=\frac{\sqrt{5}}{2}$ である．

三角形 BCM に正弦定理を用いて，

$$\frac{BC}{\sin 2\theta}=\frac{BM}{\sin(90°-\theta)}.$$

これより，

$$\sin 2\theta=\frac{BC}{BM}\sin(90°-\theta)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\quad \text{((ii) より)}$$
$$=\frac{4}{5}.$$

$0°<\theta<45°$ より，$\cos 2\theta>0$ であるから，

$$\cos 2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$=\frac{3}{5}.$$

((4)(iii) の別解終り)

2 三角比

【I型数学I　必須問題】

(配点　40点)

平面上に三角形 ABC があり，

$$AB=8,\quad BC=3,\quad CA=7$$

を満たしている．

(1)(i) $\angle ABC$ の大きさを求めよ．

(ii) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(iii) 三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

(2) 三角形 ABC の外接円の弧 AC(B を含まない方)上に点 D をとり，2直線 AC，BD の交点を E とするとき，BE : ED = 3 : 1 が成り立つとする．

(i) 三角形 ACD の面積を求めよ．また，線分の長さの積 AD·CD の値を求めよ．

(ii) 三角形 ACD の周の長さを求めよ．

(iii) 三角形 ACD の内接円の半径を求めよ．

【配点】

(1) 15点．

(i) 5点．(ii) 5点．(iii) 5点．

(2) 25点．

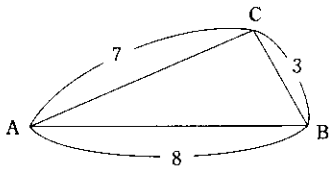
(i) 10点．(ii) 7点．(iii) 8点．

【出題のねらい】

余弦定理や正弦定理などの基本公式を正しく用いることができるか，また，線分比を利用して，面積，さらに内接円の半径などを求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)(i)



三角形 ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}$$
$$=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 3}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

よって，

$$\angle ABC=\mathbf{60°}.$$

(ii) (i)より，$\angle ABC=60^\circ$ であるから，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{6\sqrt{3}}.$$

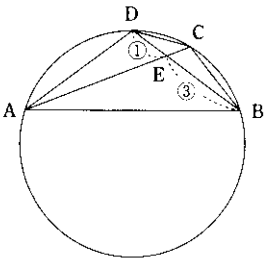
(iii) 三角形 ABC の外接円の半径を R とする．三角形 ABC に正弦定理を用いると，

$$\frac{CA}{\sin\angle ABC}=2R.$$

したがって，

$$R=\frac{CA}{2\sin\angle ABC}$$
$$=\frac{7}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{3}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}.$$

(2)(i)



三角形ACDと三角形ABCにおいて，線分ACを共通の底辺とみると，

$$\triangle ACD:\triangle ABC=DE:BE$$
$$=1:3.$$

したがって，

$$\triangle ACD=\frac{1}{3}\triangle ABC$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}$$
$$=\boldsymbol{2\sqrt{3}}. \quad \cdots①$$

また，四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC$$
$$=180^\circ-60^\circ$$
$$=120^\circ.$$

したがって，

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin\angle ADC$$
$$=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin 120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}AD\cdot CD$$

であるから，

$$AD\cdot CD=\frac{4}{\sqrt{3}}\triangle ACD$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3} \quad (①より)$$
$$=\boldsymbol{8}. \quad \cdots②$$

(ii) 三角形 ACD に余弦定理を用いると，

$$CA^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC.$$
$$7^2=AD^2+CD^2-2\cdot 8\cos 120^\circ. \quad (②より)$$
$$7^2=AD^2+CD^2-2\cdot 8\left(-\frac{1}{2}\right).$$
$$49=(AD+CD)^2-2AD\cdot CD+8.$$
$$49=(AD+CD)^2-2\cdot 8+8. \quad (②より)$$

これより，

$$(AD+CD)^2=57.$$

$AD+CD>0$ より，

$$AD+CD=\sqrt{57}.$$

よって，三角形 ACD の周の長さは，

$$CA+AD+CD=\boldsymbol{7+\sqrt{57}}. \quad \cdots③$$

(iii) 三角形 ACD の内接円の半径を r とすると，

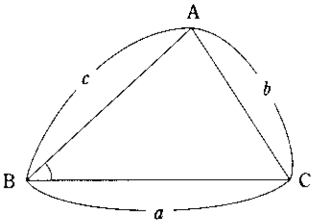
$$\triangle ACD=\frac{r}{2}(CA+AD+CD).$$
$$2\sqrt{3}=\frac{r}{2}(7+\sqrt{57}). \quad (①, ③より)$$

よって，

$$r=\frac{4\sqrt{3}}{7+\sqrt{57}}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}(-7+\sqrt{57})}{(7+\sqrt{57})(-7+\sqrt{57})}$$
$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{57}-7)}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{19}-7\sqrt{3}}{2}}.$$

【解説】 問題

(1)(i) 三角形 ABC において，3 辺の長さが与えられているから，$\angle ABC$ の大きさを求めるには，

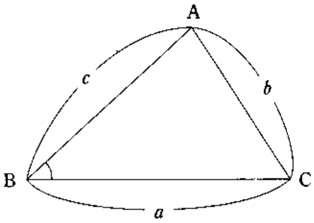


$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

余弦定理

を用いればよい．

(ii)　(i)より，$\angle ABC=60^\circ$ であるから，三角形ABCの面積を求めるには，

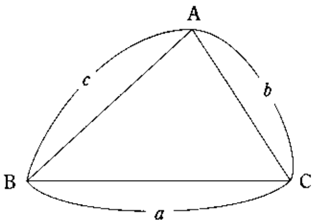


$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B$$

三角形の面積

を用いればよい．

(iii)　外接円の半径を求めるには，



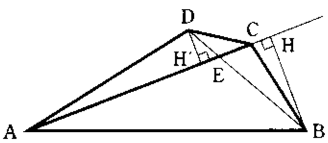
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（R は三角形ABCの外接円の半径）

正弦定理

を用いればよい．

(2)(i)　三角形ACDの面積を求めるために，三角形の面積比と線分比の関係を確認しておこう．



三角形ACDと三角形ABCにおいて，ACを共通の底辺とみれば，上図より，面積比は高さDH′とBHの比に等しい．

このとき，△DEH′∽△BEHが成り立つことからDH′とBHの比はDEとBEの比に等しい．

これより，

$$\triangle ACD:\triangle ABC=DE:BE$$

が成り立つ．

したがって，$ED:BE=1:3$ より，

$$\triangle ACD:\triangle ABC=1:3.$$

よって，

$$\triangle ACD=\frac{1}{3}\triangle ABC.$$

あとは(1)(ii)の結果を代入すればよい．

次に，線分の長さの積AD·CDの値を求めるには，

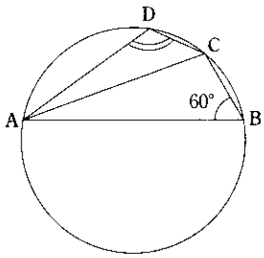
$$\triangle ACD=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin\angle ADC \qquad \cdots④$$

に着目することがポイントとなる．

$\triangle ACD=2\sqrt{3}$ であるから，$\sin\angle ADC$ の値を求めることができれば，④よりAD·CDの値を求めることができる．

そこで，**【解答】**では，次のように $\sin\angle ADC$ の値を求めた．

三角形ABCの外接円は四角形ABCDの外接円でもある．



これに気づけば，

「円に内接する四角形の向かい合う
内角の和は180°である」

ことから，

$$\begin{aligned}\angle ADC&=180^\circ-\angle ABC\\&=180^\circ-60^\circ\\&=120^\circ.\end{aligned}$$

したがって，．

$$\begin{aligned}\sin\angle ADC&=\sin 120^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

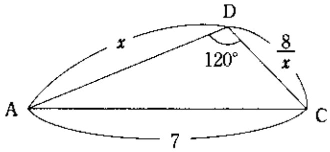
となる．

(ii)　三角形ACDの周の長さは，

$$CA+AD+CD$$

であり，$CA=7$ であるから，$AD+CD$ の値を求めればよい．

(2)(i)より，$AD\cdot CD=8$ であるから，AD の長さを求めることができれば，CD の長さも求まり，したがって $AD+CD$ の値を求めることができる．



これより，$AD=x(>0)$ とおくと，$CD=\dfrac{8}{x}$ であるから，x の値を求めるには，三角形 ACD に余弦定理を用いればよいが，計算が煩雑になる．

そこで，**【解答】**では，「式の対称性」を利用して計算を行った．見やすくするために，以下では，$AD=x$，$CD=y$ とおくことにする．

このとき，(2)(i)より，

$$xy=8. \qquad \cdots⑤$$

また，三角形 ACD に余弦定理を用いると，

$$CA^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC.$$

$$7^2=x^2+y^2-2xy\cos120°.$$

$$49=x^2+y^2-2\cdot8\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (⑤より)$$

$$49=x^2+y^2+8. \qquad \cdots⑥$$

⑥は x と y の対称式であるから，$x+y$ と xy で表すことができる．実際，

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

が成り立つから，⑥より，

$$49=(x+y)^2-2xy+8.$$

$$49=(x+y)^2-2\cdot8+8. \quad (⑤より)$$

これより，

$$(x+y)^2=57.$$

$x+y>0$ であるから，

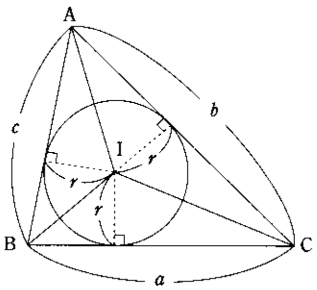
$$x+y=\sqrt{57},$$

すなわち，

$$AD+CD=\sqrt{57}$$

と求めることができる．

(iii) 周の長さが与えられている三角形の内接円の半径 r を求めるには，三角形の内心を I とするとき，



$$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$$

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\frac{r}{2}(a+b+c)$$

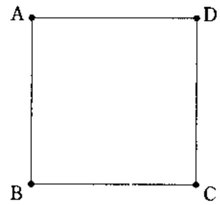
内接円の半径と面積

が成り立つことを利用すればよい．

3 確　率

【I 型数学 I，A　選択問題】

(配点　40点)



図のような一辺の長さ 1 の正方形 ABCD があり，点 P を正方形の辺に沿って頂点から頂点に移動させる次の試行を行う．

- $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 5 枚のカードが入っている袋から同時に 2 枚のカードを取り出し，取り出した 2 枚のカードに書かれた数を記録し，カードを袋に戻す．
- 記録した 2 つの数の積だけ反時計まわりに P を移動させる．

P は最初，頂点 A にあるとする．

(1) 1 回の試行後に P が，頂点 A にいる確率，頂点 B にいる確率，頂点 C にいる確率，頂点 D にいる確率をそれぞれ求めよ．

(2) 2 回の試行後に P が頂点 A にいる確率を求めよ．

(3) 3 回試行を行う．P が，

1 回の試行後にいる頂点を X，

2 回の試行後にいる頂点を Y，

3 回の試行後にいる頂点を Z

とするとき，3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができる確率を求めよ．

【配点】

(1)　16点．

(2)　10点．

(3)　14点．

【出題のねらい】

試行を的確に捉え，事象を正しく解釈して確率を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

袋から同時に2枚のカードを取り出す方法の総数は，

$$_5C_2=10\text{(通り)}$$

あり，これらは同様に確からしい．

このとき，取り出した2枚のカードに書かれた数の積を S とすると，S のとり得る値は，

$$S=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$$

であり，各値をとる確率は順に，

$$\frac{4}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{10}$$

である．

(1)　1回の試行後にPが頂点Aにいるのは，

$$S=0,\ 4,\ 8,\ 12$$

のときである．これが起こるようなカードの取り出し方は互いに排反な事象であるから，Pが頂点Aにいる確率は，

$$\frac{4}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\mathbf{\frac{7}{10}}.$$

S のとり得る値から，1回の試行後にPが頂点Bにいることはない．

よって，Pが頂点Bにいる確率は，

$$\mathbf{0}.$$

1回の試行後にPが頂点Cにいるのは，

$$S=2,\ 6$$

のときである．これが起こるようなカードの取り出し方は互いに排反な事象であるから，Pが頂点Cにいる確率は，

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\mathbf{\frac{1}{5}}.$$

1回の試行後にPが頂点Dにいるのは，

$$S=3$$

のときである．

よって，Pが頂点Dにいる確率は，

$$\mathbf{\frac{1}{10}}.$$

(2)　1回の試行後にPが，

・元の頂点にいる確率を p_0，

・反時計まわりに1つ先の頂点にいる確率を p_1，

・反時計まわりに2つ先の頂点にいる確率を p_2，

・反時計まわりに3つ先の頂点にいる確率を p_3

とすると，(1)の結果より，

$$p_0=\frac{7}{10},\ p_1=0,\ p_2=\frac{1}{5},\ p_3=\frac{1}{10}.$$

2回の試行後にPが頂点Aにいるのは，次の2つの場合がある．

(ア)　Pが1回後，2回後ともにAにいる．

(イ)　Pが1回後にC，2回後にAにいる．

(ア)が起こる確率は，

$$p_0\cdot p_0=\frac{49}{100}.$$

(イ)が起こる確率は，

$$p_2\cdot p_2=\frac{1}{25}.$$

(ア)，(イ)が起こるようなカードのとり出し方は互いに排反な事象であるから，2回の試行後にPが頂点Aにいる確率は，

$$\frac{49}{100}+\frac{1}{25}=\mathbf{\frac{53}{100}}.$$

(3)(i)　X＝Aの場合．

3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができるとき，Y，Zは，

$$(Y,\ Z)=(C,\ B),\ (D,\ B),\ (D,\ C)$$

のいずれかである．これらが起こるようなカードの取り出し方は互いに排反な事象であるから，3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができる確率は，

$$\begin{aligned}&p_0\cdot p_2\cdot p_3+p_0\cdot p_3\cdot p_2+p_0\cdot p_3\cdot p_3\\&=\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\\&=\frac{7}{200}.\end{aligned}$$

(ii)　X＝Cの場合．

3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができるとき，Y，Zは，

$$(Y,\ Z)=(A,\ D),\ (B,\ D),\ (B,\ A)$$

のいずれかである．これらが起こるようなカードの取り出し方は互いに排反な事象であるから，3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができる確率は，

$$p_2 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3 \cdot p_2 + p_2 \cdot p_3 \cdot p_3$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{100}.$$

(iii) X＝D の場合．

3 点 X，Y，Z を頂点とする三角形ができるとき，Y，Z は，

(Y，Z)＝(B，A)，(C，A)，(C，B)

のいずれかである．これらが起こるようなカードの取り出し方は互いに排反な事象であるから，3 点 X，Y，Z を頂点とする三角形ができる確率は，

$$p_3 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_3 \cdot p_2 + p_3 \cdot p_3 \cdot p_3$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{200}.$$

(i)，(ii)，(iii) は互いに排反な事象であるから，3 点 X，Y，Z を頂点とする三角形ができる確率は，

$$\frac{7}{200} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} = \mathbf{\frac{1}{20}}.$$

【解説】 問題

(1) まず，袋から同時に 2 枚のカードを取り出す方法の総数を，

> 異なる n 個のものから r 個取る組合せの総数は，
>
> $${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
>
> **組合せ**

を用いて求めると，

$${}_5\mathrm{C}_2 = 10\text{(通り)}$$

である．それぞれの取り出し方において，取り出した 2 枚のカードに書かれた数の組と，その 2 つの数の積 S の値は次のようになる．

{0，1}，{0，2}，{0，3}，{0，4} のとき，$S=0$，
{1，2} のとき，$S=2$，
{1，3} のとき，$S=3$，
{1，4} のとき，$S=4$，
{2，3} のとき，$S=6$，
{2，4} のとき，$S=8$，
{3，4} のとき，$S=12$．

これより，S が各値をとる確率を，

> 全事象が m 通りあり，すべて同様に確からしいとする．このとき，事象 A の起こる場合が n 通りあれば，A の起こる確率 $P(A)$ は，
>
> $$P(A) = \frac{n}{m}$$
>
> **確率の定義**

を用いて求めた．

P は最初，頂点 A にあり，1 回の試行で S の値の分だけ反時計まわりに正方形 ABCD の頂点を辺に沿って移動する．1 回の試行後に P が頂点 A にあるのは，S が 4 の倍数，すなわち，

$$S=0,\ 4,\ 8,\ 12$$

のときであり，これが起こるようなカードの取り出し方は互いに排反な事象であるから，

$S=0$ となる確率は $\frac{4}{10}$，

$S=4$ となる確率は $\frac{1}{10}$，

$S=8$ となる確率は $\frac{1}{10}$，

$S=12$ となる確率は $\frac{1}{10}$

であり，これらの和が，1 回の試行後に P が頂点 A にいる確率となる．

次に，1 回の試行後に P が頂点 B にいるためには，$S=1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots$ でなければならないが，S はこれらの値をとり得ない．これより，1 回の試行後に P が頂点 B にいることは起こり得ない，すなわち確率は 0 となる．

1 回の試行後に P が頂点 C にいる，頂点 D にいる場合もこれらと同様に考えればよい．

(2) (1) の結果より，1 回の試行による P の移動とその移動が起こる確率は，

・元の頂点にいる確率は $p_0 = \frac{7}{10}$，

・反時計まわりに 2 つ先の頂点にいる確率は

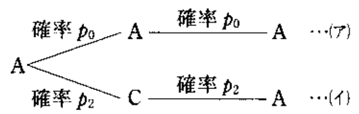
$$p_2 = \frac{1}{5},$$

・反時計まわりに 3 つ先の頂点にいる確率は

$$p_3 = \frac{1}{10}.$$

これより，2 回の試行後に P が頂点 A にいるような P の移動方法は，次の 2 通りが考えられる．

最初　　1 回の試行後　2 回の試行後



あとは，1回目，2回目の試行は独立であるから，

> 2つの試行 T_1，T_2 が独立であるとき，T_1 で事象 A が起こり，T_2 で事象 B が起こる確率は，
>
> $$P(A)\cdot P(B)$$
>
> **独立な試行の確率**

を用いて，(ア)，(イ)の起こる確率を求め，(ア)，(イ)が互いに排反な事象であることより，それぞれの確率の和を求めればよい．

また，2回のカードの取り出し方を根元事象とし，2回の試行後にPが頂点Aにいる確率を求めることもできる．

((2)の別解)

2回の試行におけるカードの取り出し方の総数は，

$${}_5C_2\times{}_5C_2=100(\text{通り})$$

あり，これらは同様に確からしい．

2回の試行後にPが頂点Aにいるのは，次の2つの場合がある．

(ア) Pが1回後，2回後ともにAにいる．

(イ) Pが1回後にC，2回後にAにいる．

(ア)が起こるのは，2回とも $S=0$，4，8，12のいずれかになるときであるから，このときのカードの取り出し方の総数は，

$$(4+1+1+1)\times(4+1+1+1)=49(\text{通り}).$$

(イ)が起こるのは，2回とも $S=2$，6のいずれかになるときであるから，このときのカードの取り出し方の総数は，

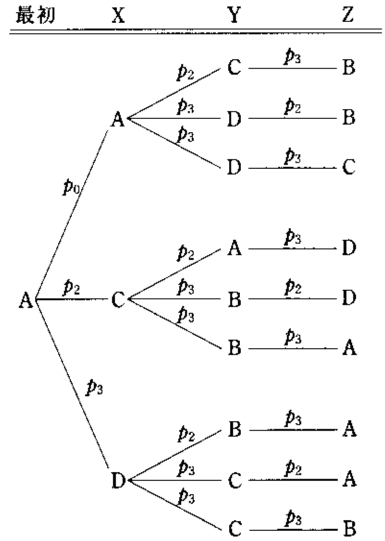
$$(1+1)\times(1+1)=4(\text{通り}).$$

(ア)，(イ)は互いに排反な事象であるから，2回の試行後にPが頂点Aにいる確率は，

$$\frac{49+4}{100}=\frac{53}{100}.$$

((2)の別解終り)

(3) 3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができるのは，3点X，Y，Zが正方形ABCDの異なる3つの頂点のときである．このようなPの移動方法と各移動が起こる確率は次のようになる．



あとは，(2)と同様にして，確率を求めればよい．

また，3点X，Y，Zを頂点とする三角形を先に作り，解答することもできる．

((3)の別解1)

正方形ABCDの頂点により作られる三角形は，三角形ABD，三角形ABC，三角形BCD，三角形ACDの4つが考えられる．

(a) 三角形XYZが三角形ABDのとき．

3点X，Y，Zは，

$$(X,\ Y,\ Z)=(A,\ D,\ B),\ (D,\ B,\ A)$$

のいずれかであり，これらは互いに排反な事象であるから，これが起こる確率は，

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}=\frac{2}{125}.$$

(b) 三角形XYZが三角形ABCのとき．

3点X，Y，Zは，

$$(X,\ Y,\ Z)=(A,\ C,\ B),\ (C,\ B,\ A)$$

のいずれかであり，これらは互いに排反な事象であるから，これが起こる確率は，

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{2}{125}.$$

(c) 三角形XYZが三角形BCDのとき．

3点X，Y，Zは，

$$(X,\ Y,\ Z)=(C,\ B,\ D),\ (D,\ C,\ B)$$

のいずれかであり，これらは互いに排反な事象であるから，これが起こる確率は，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{200}.$$

(d) 三角形XYZが三角形ACDのとき．

3点X，Y，Zは，

$$(X, Y, Z)=(A, D, C), (C, A, D), (D, C, A)$$

のいずれかであり，これらは互いに排反な事象であるから，これが起こる確率は，

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{1000}.$$

(a), (b), (c), (d) は互いに排反な事象であるから，3点X, Y, Zを頂点とする三角形ができる確率は，

$$\frac{2}{125}+\frac{2}{125}+\frac{1}{200}+\frac{13}{1000}=\frac{1}{20}.$$

((3) の別解 1 終り)

さらに，(3) については次のように解答することもできる．

((3) の別解 2)

1回の試行により，

・Pが反時計まわりに2つ先の頂点に移動する事象を Q_2,

・Pが反時計まわりに3つ先の頂点に移動する事象を Q_3

とすると，3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができるのは，

(i) 2回目の試行で Q_2 が起こり，3回目の試行で Q_3 が起こる，

(ii) 2回目の試行で Q_3 が起こり，3回目の試行で Q_2 が起こる，

(iii) 2回目の試行で Q_3 が起こり，3回目の試行で Q_3 が起こる

のいずれかの場合である．

これらは互いに排反な事象であり，Q_2, Q_3 が起こる確率はそれぞれ，

$$p_2=\frac{1}{5},\quad p_3=\frac{1}{10}$$

であるから，求める確率は，

$$\begin{aligned}p_2\cdot p_3+p_3\cdot p_2+p_3\cdot p_3&=\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100}\\&=\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

((3) の別解 2 終り)

4 整 数

【I型数学I，A　選択問題】

(配点　40点)

> n は正の整数とする．
>
> (1) n を3で割ったときの余りが0，1，2のそれぞれの場合について，n^2+2n+4 を3で割った余りを求めよ．
>
> (2) n^2+2n+4 が6で割り切れるとき，n を6で割った余りを求めよ．
>
> (3) $\sqrt{3(n^2+2n+4)}$ が偶数となる50以下の正の整数 n の値をすべて求めよ．

【配点】

(1) 15点．

(2) 8点．

(3) 17点．

【出題のねらい】

整数の除法に関する基本的な性質の理解をみる問題である．

【解答】

(1)(i) n を3で割ったときの余りが0のとき，$n=3k$ (k は正の整数)とおくことができるから，

$$\begin{aligned}n^2+2n+4&=(3k)^2+2\cdot3k+4\\&=9k^2+6k+4\\&=3(3k^2+2k+1)+1.\end{aligned}$$

(ii) n を3で割ったときの余りが1のとき，$n=3k+1$ (k は0以上の整数)とおくことができるから，

$$\begin{aligned}n^2+2n+4&=(3k+1)^2+2(3k+1)+4\\&=9k^2+12k+7\\&=3(3k^2+4k+2)+1.\end{aligned}$$

(iii) n を3で割ったときの余りが2のとき，$n=3k+2$ (k は0以上の整数)とおくことができるから，

$$\begin{aligned}n^2+2n+4&=(3k+2)^2+2(3k+2)+4\\&=9k^2+18k+12\\&=3(3k^2+6k+4).\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より，n を3で割ったときの余りが0，1，2のとき，n^2+2n+4 を3で割った余りはそれぞれ，

1，1，0.

(2) 「n^2+2n+4 が6で割り切れる
$\Longrightarrow$ n^2+2n+4 が3で割り切れる」

が成り立つから，(1) の結果より，

$$n=3k+2 \quad (k\text{ は0以上の整数}) \qquad \cdots①$$

とおくことができる．

さらに，① で表される n に対して，k の偶奇により場合分けする．

(i) $k=2m$ (m は0以上の整数)のとき，

$$n=3k+2$$
$$=3(2m)+2$$
$$=6m+2$$

であり，

$$n^2+2n+4=(6m+2)^2+2(6m+2)+4$$
$$=36m^2+36m+12$$
$$=6(6m^2+6m+2).$$

(ii) $k=2m+1$ (m は0以上の整数)のとき，

$$n=3k+2$$
$$=3(2m+1)+2$$
$$=6m+5$$

であり，

$$n^2+2n+4=(6m+5)^2+2(6m+5)+4$$
$$=36m^2+72m+39$$
$$=6(6m^2+12m+6)+3.$$

(i), (ii) より，n^2+2n+4 が6で割り切れるのは(i)のときだけであるから，n を6で割った余りは，

2.

(3) $\sqrt{3(n^2+2n+4)}$ が偶数となるとき，

$$\sqrt{3(n^2+2n+4)}=2N \quad (N \text{ は正の整数})$$

とおけ，両辺ともに正であるから，2乗すると，

$$3(n^2+2n+4)=4N^2. \qquad \cdots②$$

左辺は3の倍数であるから，右辺も3の倍数であり，3と4は互いに素な整数であるから，N^2 が3の倍数となる．

3は素数であるから，N は3の倍数となり，

$$N=3M \quad (M \text{ は正の整数})$$

とおける．このとき，② より，

$$3(n^2+2n+4)=4(3M)^2.$$
$$n^2+2n+4=12M^2.$$
$$n^2+2n+4=6\cdot 2M^2. \qquad \cdots②'$$

②′ の右辺は6で割り切れるから，(2) の結果より，

$$n=6m+2 \quad (m \text{ は0以上の整数}) \qquad \cdots③$$

とおける．

このとき，(2) の計算より，

$$n^2+2n+4=6(6m^2+6m+2)$$
$$=12(3m^2+3m+1)$$

であるから，②′ より，

$$12(3m^2+3m+1)=6\cdot 2M^2$$
$$3m^2+3m+1=M^2. \qquad \cdots④$$

$1 \leqq n \leqq 50$ と ③ より，

$$0 \leqq m \leqq 8 \qquad \cdots⑤$$

であるから，⑤を満たす整数 m のうち，④ の左辺が平方数になるものを求めればよい．

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3m^2+3m+1$	1	7	19	37	61	91	127	169	217
M	1	$\sqrt{7}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{127}$	13	$\sqrt{217}$

上表より，条件を満たす m は，

$$m=0,\ 7$$

であるから，③ より，求める正の整数 n の値は，

$$\boldsymbol{n=2,\ 44.}$$

【解説】 問題

(1) 整数の除法については，

> 整数 A, B ($B>0$)が与えられたとき，
>
> $$A=Bq+r,\ 0 \leqq r < B$$
>
> を満たす整数 q, r がただ1組存在する．
>
> q, r をそれぞれ，A を B で割ったときの商，余りという
>
> **整数の除法，商，余り**

が成り立つ．

したがって，正の整数 n を3で割ったときの余りが0, 1, 2のとき，整数 k を商として，それぞれ，

$$n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$$

の形で表すことができる．この各々について，n^2+2n+4 に代入して，

$$3\times(\text{整数})+r \quad (r \text{ は0, 1, 2のいずれか})$$

と変形すればよい．

(2) (1) と同様に，n を6で割った余りが0, 1, 2, 3, 4, 5のときのそれぞれの場合について，n^2+2n+4 を6で割った余りを求めることでも解くことはできる((2) の別解参照)が，**【解答】**では，

「n^2+2n+4 が6で割り切れる

$\Longrightarrow$ n^2+2n+4 が3で割り切れる」

が成り立つことに注目し，(1) の結果を利用して計算量を減らした．

すなわち，n^2+2n+4 が3で割り切れるのは，

$$n=3k+2 \quad (k \text{ は0以上の整数}) \qquad \cdots①$$

のときだけである．このとき，$6=2\cdot 3$ であり，2と3は互いに素な整数であるから，① で表される n のうち，

$$n^2+2n+4 \text{ が2で割り切れる}$$

ものを考えればよい．

そのためには，(1) と同様に，n を2で割ったときの余りで分類すればよい．そこで，① において，k を2で割ったときの余りで分類した．

次のように考えてもよい．

（(2) の別解）

n を 6 で割ったときの商を k，余りを r とすると，

$$n=6k+r \quad (k,\ r\ \text{は整数},\ 0 \leqq r<6)$$

とおくことができる．

このとき，

$$\begin{aligned} n^2+2n+4 &= (n+1)^2+3 \\ &= (6k+r+1)^2+3 \\ &= 36k^2+12k(r+1)+(r+1)^2+3 \\ &= 6\{6k^2+2k(r+1)\}+r^2+2r+4 \end{aligned}$$

であるから，n^2+2n+4 が 6 で割り切れるとき，r^2+2r+4 も 6 で割り切れる．

$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$ について，r^2+2r+4 を 6 で割ったときの余りは次のようになる．

r の値	0	1	2	3	4	5
r^2+2r+4 の値	4	7	12	19	28	39
r^2+2r+4 を 6 で割った余り	4	1	0	1	4	3

これより，n^2+2n+4 が 6 で割り切れるとき $r=2$ となるから，n を 6 で割った余りは，

2．

（(2) の別解終り）

(3) $\sqrt{3(n^2+2n+4)}$ に $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 50$ を 1 つずつ代入して偶数になるものを求めればよいが，(2) の結果を利用すれば計算量を減らすことができる．

$\sqrt{3(n^2+2n+4)}$ が偶数となるとき，

$$\sqrt{3(n^2+2n+4)}=2N \quad (N\ \text{は正の整数})$$

とおけ，両辺を 2 乗すると，

$$3(n^2+2n+4)=4N^2. \qquad \cdots②$$

左辺は 3 の倍数であるから，右辺も 3 の倍数であり，3 と 4 は互いに素な整数であるから，N^2 が 3 の倍数である．

これを満たす N の条件を考えるには，(1) と同様に，N を 3 で割ったときの余りで分類してもよいが，**【解答】**では，3 が素数であることから，N が 3 の倍数であることを見抜いて計算量を減らした．

【Ⅱ型受験者用】

1 小問集合

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50 点）

(1) $5\sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき，$a+\dfrac{1}{a}$，$a^2-\dfrac{1}{a^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) x の方程式 $\tan^2 x-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\tan x-1=0$ $(0 \leqq x<2\pi)$ を解け．

(3) $f(x)=x^3-3x+\dfrac{1}{4}$ とおく．xy 平面上において，$y=f(x)$ のグラフに原点 $(0,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ．

(4) $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ．

(i) $\log_{10}5$　　(ii) $\log_{18}12$

(5) a，a，a，a，b，b，c の 7 文字を円形に並べる並べ方は何通りあるか求めよ．また，このうち，b と b が隣り合わないような並べ方は何通りあるか求めよ．

【配点】

(1)　8 点．

(2)　12 点．

(3)　10 点．

(4)　10 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．

(5)　10 点．

【出題のねらい】

(1) 無理数を含む分数式の値を，因数分解，分母の有理化などの手法を利用して計算できるかをみる問題である．

(2) 正接の 2 次方程式の解を求めることができるかをみる問題である．

(3) 微分法を利用して，3 次関数のグラフの接線の方程式を求めることができるかをみる問題である．

(4) 対数の性質を利用して式の計算ができるかをみる問題である．

(5) 円順列，同じものを含む順列の総数を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　**I 型 1** (2)**【解答】**参照．

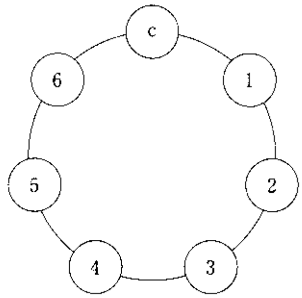
(2)
$$\tan^2 x-\frac{2}{3}\sqrt{3}\tan x-1=0$$
より，
$$3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x-3=0.$$
$$(3\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})=0.$$
よって，
$$\tan x=\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
$0\leqq x<2\pi$ であるから，
$$x=\boldsymbol{\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}.$$

(3)
$$f(x)=x^3-3x+\frac{1}{4}$$
より，
$$f'(x)=3x^2-3$$
であるから，$y=f(x)$のグラフ C 上の点$(t,\ f(t))$における C の接線の方程式は，
$$y=(3t^2-3)(x-t)+\left(t^3-3t+\frac{1}{4}\right)$$
$$=(3t^2-3)x-2t^3+\frac{1}{4}.\qquad\cdots①$$
これが原点$(0,\ 0)$を通るとき，
$$-2t^3+\frac{1}{4}=0$$
より，
$$t^3=\frac{1}{8}.$$
t は実数であるから，
$$t=\frac{1}{2}.$$
これを ① に代入して，求める方程式は，
$$\boldsymbol{y=-\frac{9}{4}x}.$$

(4)(i)
$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=\log_{10}10-\log_{10}2$$
$$=\boldsymbol{1-a}.$$

(ii)　底の変換公式より，
$$\log_{18}12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}18}$$
が成り立ち，
$$\log_{10}12=\log_{10}(2^2\cdot 3)$$
$$=2\log_{10}2+\log_{10}3$$
$$=2a+b,$$
$$\log_{10}18=\log_{10}(2\cdot 3^2)$$
$$=\log_{10}2+2\log_{10}3$$
$$=a+2b$$
であるから，
$$\log_{18}12=\boldsymbol{\frac{2a+b}{a+2b}}.$$

(5)



c の位置を固定し，上図のように 6 つの場所①，②，…，⑥に a，a，a，a，b，b を並べればよい．このとき，4 つある a どうしと，2 つある b どうしは区別できないことに注意すれば，求める並べ方の総数は，
$$\frac{6!}{4!2!}=\boldsymbol{15}(\text{通り}).$$
またこのうち，b と b が隣り合う並べ方の総数は，2 つ並んだ b を b′ とみて，

a，a，a，a，b′，c

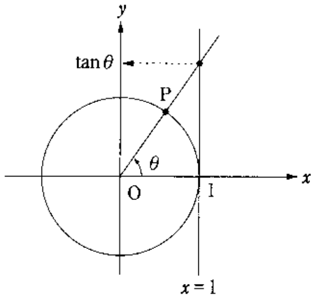
を円形に並べる並べ方の総数に等しいから，上と同様に c の位置を固定して考えて，
$$\frac{5!}{4!}=5(\text{通り}).$$
よって，b と b が隣り合わないような並べ方の総数は，
$$15-5=\boldsymbol{10}(\text{通り}).$$

【解説】　問題

(1)　**I 型 1** (2)**【解説】**参照．

(2)　**【解答】**では因数分解を利用して，$\tan x$ の値を求めたが，2 次方程式の解の公式から，
$$\tan x=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pm\sqrt{\frac{4}{3}+4}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
として $\tan x$ の値を求めることもできる．

$\tan x$ の値から x を求めるには，



一般角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，

$$a=\cos\theta,\quad b=\sin\theta.$$

また，

$$\tan\theta=(\text{直線 OP の傾き})$$

三角関数の定義

を用いればよい.

(3) 一般に，

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

接線の方程式

が成り立つ．本問では接点の座標が与えられていないから，接点の座標を $(t,\ f(t))$ とおいて接線の方程式を作り，この直線が原点を通る条件を考えて解答した.

(4) 対数の計算では，真数を素因数分解し，

$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq1$ で，k は実数とする.

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^k=k\log_a M$$

対数の性質

を利用して計算を進めることが基本である.

(i) では $5=\dfrac{10}{2}$ と変形することがポイントである.

(ii) では与えられている対数と求める対数との底が一致していないので，上の「対数の性質」を利用できるようにするために，

a，b，c は正の数で，$a\neq1$，$b\neq1$，$c\neq1$ とするとき，

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

とくに，

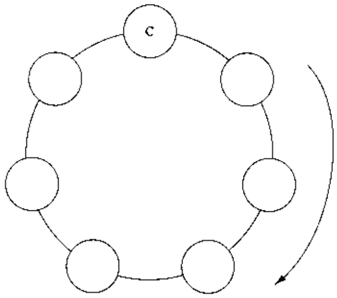
$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

底の変換公式

を用いて，$\log_{18}12$ の底を 10 に直してから計算を進めた.

(5) 円順列は回転して一致する順列を同じものと考えるのであるから，1つだけある c の位置を固定して円の回転を止め，4つある a と 2つある b を c の隣りから時計まわりに並べればよい.

したがって，求める並べ方の総数は，a，a，a，a，b，b を一列に並べる順列の総数に等しい.



このとき，4つある a どうしと 2つある b どうしは互いに区別できないので，

n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，…であるとき，これら n 個のもの全部を一列に並べる順列の総数は，

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}\quad \text{ただし，}p+q+r+\cdots=n$$

同じものを含む順列

を用いて計算すればよい.

また，本問において「b と b が隣り合わない」並べ方の総数を求めるには，より数え易い「b と b が隣り合う」並べ方の総数を求めて，

全体集合を U とし，U の部分集合 A の補集合 $\overline{A}$ を考えると，

$$n(A)=n(U)-n(\overline{A})$$

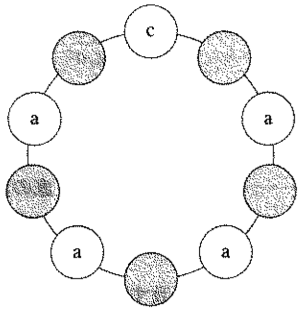
補集合の要素の個数

を用いて解答した.

次のように，直接求めることもできる.

（(5) の後半部分の別解 1）

a，a，a，a，c を円形に並べる．



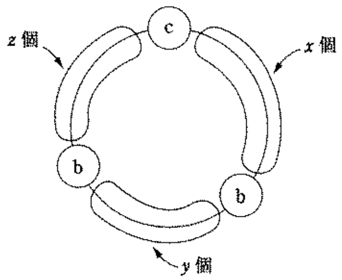
このとき，5 文字の間に 5 つの◯をおき，ここから 2 つの◯を選び，b，b をおけば条件を満たす並べ方が作れる．

したがって，求める並べ方の総数は

$${}_5C_2=10\text{（通り）}.$$

（(5) の後半部分の別解 1 終り）

（(5) の後半部分の別解 2）



上図のように，c と b，b と b，b と c の間に並べる a の個数を順に x，y，z とすると，求める並べ方の総数は，

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x\geqq 0,\ \ y\geqq 1,\ \ z\geqq 0 \end{cases}$$

を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数に等しい．

(i) $y=1$ のとき，$x+z=3$ より，

$$(x,\ z)=(0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0).$$

(ii) $y=2$ のとき，$x+z=2$ より，

$$(x,\ z)=(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0).$$

(iii) $y=3$ のとき，$x+z=1$ より，

$$(x,\ z)=(0,\ 1),\ (1,\ 0).$$

(iv) $y=4$ のとき，$x+z=0$ より，

$$(x,\ z)=(0,\ 0).$$

以上より，

10 通り．

（(5) の後半部分の別解 2 終り）

2 積分法

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50 点）

> m は $m>-1$ を満たす定数とする．xy 平面上に，
>
> 曲線 C：$y=x^2-x-2$，
>
> 直線 l：$y=mx-2$
>
> がある．
>
> (1) C と x 軸で囲まれる領域 D_1 の面積 S_1 を求めよ．
>
> (2) C と l で囲まれる領域 D_2 の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ となるような m の値を求めよ．
>
> (3) (2) のとき，D_1 と D_2 の和集合 $D_1\cup D_2$ を D_3 とする．
>
> k を $k>-1$ を満たす実数の定数とし，D_3 の，
>
> $x\leqq k$ を満たす部分の面積を T_1，
>
> $x\geqq k$ を満たす部分の面積を T_2
>
> とする．$T_1:T_2=3:2$ となるような k の値を求めよ．

【配点】

(1) 10 点．

(2) 16 点．

(3) 24 点．

【出題のねらい】

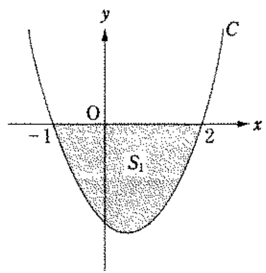
放物線と直線で囲まれる領域の面積を定積分で立式し，正しく求めることができるか，また，与えられた面積の条件を，適切に処理することができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

より，C と x 軸の交点の x 座標は，

$$x=-1,\ 2.$$

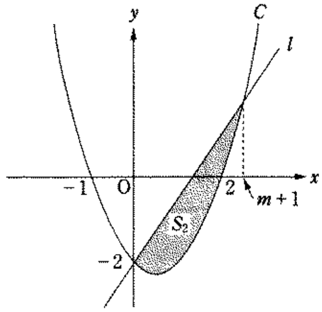


D_1 は，上図の網掛け部分であるから，

$$S_1=\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3$$
$$=\frac{9}{2}.$$

(2) C と l の方程式を連立して，y を消去すると，

$$x^2-x-2=mx-2.$$
$$x^2-(m+1)x=0.$$
$$x\{x-(m+1)\}=0.$$
$$x=0,\ m+1.$$



$m>-1$ より，D_2 は上図の網掛け部分となるから，

$$S_2=\int_0^{m+1}\{(mx-2)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=-\int_0^{m+1}\{x^2-(m+1)x\}dx$$
$$=-\int_0^{m+1}x\{x-(m+1)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}\{(m+1)-0\}^3$$
$$=\frac{1}{6}(m+1)^3.$$

$S_1=S_2$ より，

$$\frac{1}{6}(m+1)^3=\frac{9}{2}.$$
$$(m+1)^3=27.$$

m は実数であるから，

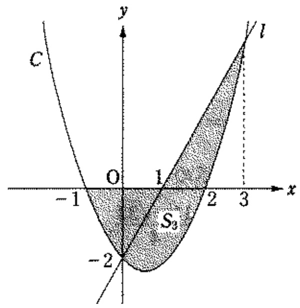
$$m+1=3.$$

よって，

$$m=2.$$

これは $m>-1$ を満たす．

(3) $m=2$ のとき，D_3 は下図の網掛け部分である．



D_3 の面積を S_3 とすると，

$$S_3=\int_{-1}^{1}\{-(x^2-x-2)\}dx$$
$$+\int_1^3\{(2x-2)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$
$$=\frac{10}{3}+\frac{10}{3}$$
$$=\frac{20}{3}.$$

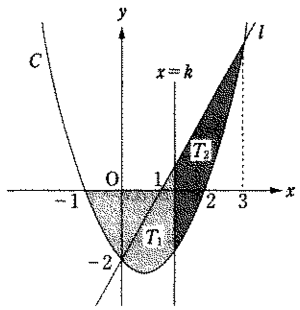
$-1<k\leqq 1$ のとき，

$$T_1\leqq\int_{-1}^{1}\{-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=\frac{10}{3}$$
$$<\frac{3}{5}S_3(=4).$$

よって，$T_1:T_2=3:2$ となる k は

$$1<k<3$$

の範囲に存在する．



このとき，

$$T_2=\int_k^3\{(2x-2)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_k^3$$
$$=\frac{9}{2}+\frac{1}{3}k^3-\frac{3}{2}k^2$$

であり，これが $\frac{2}{5}S_3\left(=\frac{8}{3}\right)$ となればよい．

したがって，

$$\frac{1}{3}k^3-\frac{3}{2}k^2+\frac{9}{2}=\frac{8}{3}.$$
$$2k^3-9k^2+11=0.$$
$$(k+1)(2k^2-11k+11)=0.$$
$$k=-1,\ \frac{11\pm\sqrt{33}}{4}.$$

$1<k<3$ より，求める k の値は，

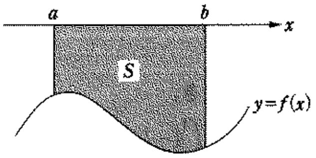
$$\boldsymbol{\frac{11-\sqrt{33}}{4}}.$$

【解説】 問題

(1) $$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

と因数分解できることから，曲線 $C：y=x^2-x-2$ と x 軸の交点の x 座標は $x=-1,\ 2$ となる．

D_1 の面積 S_1 は，

> 関数 $f(x)$ は，区間 $a\leqq x\leqq b$ において $f(x)\leqq 0$ であるとする．
>
> 
>
>
> 曲線 $y=f(x)$ と2直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれる部分の面積を S とすると，
> $$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx$$
> **定積分と面積**

を用いることにより，

$$S_1=\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)\}dx$$

となる．**【解答】**では，これを

$$-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$$

と変形し，定積分の公式

> $$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\qquad\cdots(*)$$
> **定積分の公式**

を用いて，

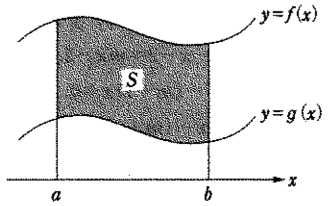
$$S_1=\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$$

と計算したが，次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}S_1&=\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)\}dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}\\&=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\\&=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

(2) C と l の方程式から y を消去して得られる x の2次方程式を解くことにより，C と l の交点の x 座標は $x=0,\ m+1$ となる．

D_2 の面積 S_2 は，

> 関数 $f(x)$，$g(x)$ は，区間 $a\leqq x\leqq b$ において $g(x)\leqq f(x)$ であるとする．
>
> 
>
>
> 2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積を S とすると，
> $$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$
> **定積分と面積**

を用いることにより，

$$S_2=\int_0^{m+1}\{(mx-2)-(x^2-x-2)\}dx$$

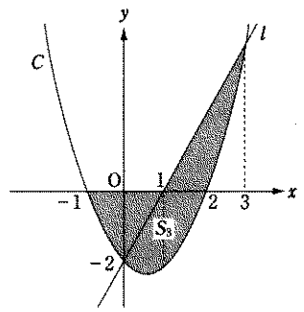
となる．

この定積分の計算も (1) と同様に，(*) を用いることで，

$$\begin{aligned}S_2&=\int_0^{m+1}\{(mx-2)-(x^2-x-2)\}dx\\&=-\int_0^{m+1}\{x^2-(m+1)x\}dx\\&=-\int_0^{m+1}x\{x-(m+1)\}dx\\&=\frac{1}{6}\{(m+1)-0\}^3\\&=\frac{1}{6}(m+1)^3\end{aligned}$$

と計算できる．あとは，方程式 $S_1=S_2$ を解くことにより，m の値を求めればよい．

(3) $D_3=D_1\cup D_2$ であるから，D_3 は次図の網掛け部分である．



D_3 の面積を S_3 とする．D_3 を $-1\leqq x\leqq 1$ の部分と

$1 \leqq x \leqq 3$ の部分に分割して考えることにより，

$$S_3 = \int_{-1}^{1} \{-(x^2-x-2)\}dx$$
$$+\int_{1}^{3} \{(2x-2)-(x^2-x-2)\}dx$$

となる．これを計算することにより，

$$S_3 = \frac{20}{3}$$

を得る．

したがって，$T_1 : T_2 = 3 : 2$ が成り立つとき，

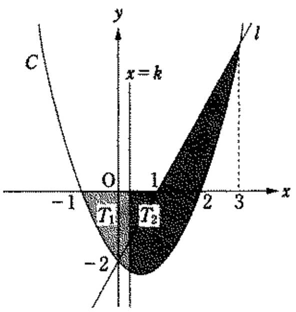
$$T_1 = \frac{3}{5}S_3 = \frac{3}{5}\cdot\frac{20}{3} = 4,$$
$$T_2 = \frac{2}{5}S_3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{20}{3} = \frac{8}{3}$$

となる．

$-1 < k \leqq 1$ のとき，次図からわかるように，

$$T_1 \leqq \int_{-1}^{1} \{-(x^2-x-2)\}dx = \frac{10}{3} < \frac{3}{5}S_3 (=4)$$

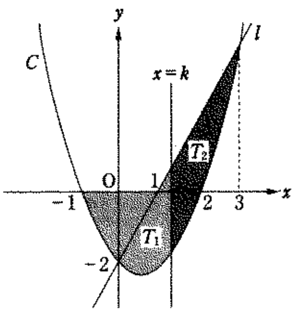
であるから，条件を満たす k は存在しない．



よって，$T_1 : T_2 = 3 : 2$ となるような k が存在するのは，

$$1 < k < 3$$

のときである．



このとき，

$$T_2 = \int_{k}^{3} \{(2x-2)-(x^2-x-2)\}dx$$

となり，方程式 $T_2 = \frac{2}{5}S_3$，すなわち，

$$\int_{k}^{3} \{(2x-2)-(x^2-x-2)\}dx = \frac{8}{3}$$

を解くことにより，k の値を求めることができる．

3 複素数と方程式

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50 点）

> a，b は実数の定数とする．
> $$f(x) = x^3-(b-2)x^2+(a-b+6)x+3a-b+4$$
> とし，$f(x)$ は $x+1$ で割り切れるとする．
> (1) b を a を用いて表せ．
> (2) 方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲を求めよ．
> (3) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの虚数解 α，β をもつとする．
> $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha^2+\beta^2=0$ が成り立つとき，$\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}=-2^{152}$ となるような正の整数 n の値を求めよ．

【配点】

(1) 10 点．

(2) 16 点．

(3) 24 点．

【出題のねらい】

因数定理および 2 次方程式が虚数解をもつ条件を理解しているか，また，2 次方程式の解と係数の関係などを利用して計算を効率よく行うことができるかをみる問題である．

【解答】

(1) $f(x)$ は $x+1$ で割り切れるから，因数定理より，

$$f(-1)=0.$$

よって，

$$-1-(b-2)-(a-b+6)+3a-b+4=0.$$
$$\boldsymbol{b=2a-1}.$$

(2) $b=2a-1$ より，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+(3-2a)x^2+(7-a)x+a+5 \\ &= (2x^2+x-1)(-a)+(x^3+3x^2+7x+5) \\ &= (x+1)(2x-1)(-a)+(x+1)(x^2+2x+5) \\ &= (x+1)\{x^2+(2-2a)x+a+5\}. \end{aligned}$$

$x=-1$ は $f(x)=0$ の実数解であるから，

$f(x)=0$ が虚数解をもつのは，

$$x^2+2(1-a)x+a+5=0 \quad \cdots①$$

が虚数解をもつ場合である．① の判別式を D とすると，求める条件は，

$$\frac{D}{4} = (1-a)^2-(a+5) < 0$$

より，

$$a^2-3a-4<0.$$
$$(a+1)(a-4)<0.$$
$$\boldsymbol{-1<a<4.}$$

(3)　(2) より，$f(x)=0$ が異なる 2 つの虚数解 α，β をもつのは $-1<a<4$ のときである．

このとき，α，β は ① の 2 解であるから，解と係数の関係より，
$$\alpha+\beta=2a-2,\ \alpha\beta=a+5.$$
よって，
$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(2a-2)^2-2(a+5)\\&=4a^2-10a-6\\&=2(2a+1)(a-3).\end{aligned}$$
したがって，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha^2+\beta^2=0$ のとき，
$$\begin{cases}2a-2>0,\\2(2a+1)(a-3)=0\end{cases}$$
より，
$$a=3.$$
これは $-1<a<4$ を満たす．

このとき，① は，
$$x^2-4x+8=0 \qquad \cdots②$$
となる．α は ② の解であるから，
$$\alpha^2-4\alpha+8=0.$$
$$\alpha^2=4\alpha-8. \qquad \cdots③$$
よって，
$$\begin{aligned}\alpha^4&=(\alpha^2)^2\\&=(4\alpha-8)^2 \quad (③ より)\\&=16(\alpha^2-4\alpha+4)\\&=16\{(4\alpha-8)-4\alpha+4\} \quad (③ より)\\&=-64.\end{aligned}$$
同様に，
$$\beta^4=-64.$$
また，② の解と係数の関係より $\alpha+\beta=4$ であるから，
$$\begin{aligned}\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}&=\alpha(\alpha^4)^n+\beta(\beta^4)^n\\&=\alpha(-64)^n+\beta(-64)^n\\&=(\alpha+\beta)(-64)^n\\&=4(-1)^n(2^6)^n\\&=(-1)^n\cdot 2^{6n+2}.\end{aligned}$$
$\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}=-2^{152}$ より，
$$(-1)^n\cdot 2^{6n+2}=-2^{152}.$$
これより，
$$\begin{cases}n\ は奇数,\\6n+2=152\end{cases}$$
であるから，これを満たす正の整数 n は，
$$n=25.$$

【解説】　**問題**

(1)　$f(x)$ が $x+1$ で割り切れるから，**【解答】**では，

> 整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる $\Longleftrightarrow P(\alpha)=0$
> ―― **因数定理**

を用いて a と b の関係式を導いた．

因数定理を用いずに，実際に割り算を実行してもよい．

((1) の別解)

$f(x)$ を $x+1$ で割ると次のようになる．
$$\begin{array}{r}x^2+(-b+1)x+a+5\\ x+1\,\overline{)\,x^3-(b-2)x^2+(a-b+6)x+3a-b+4}\\ \underline{x^3+x^2}\\ (-b+1)x^2+(a-b+6)x+3a-b+4\\ \underline{(-b+1)x^2+\ (-b+1)x}\\ (a+5)x+3a-b+4\\ \underline{(a+5)x+\ a\quad +5}\\ 2a-b-1\end{array}$$
これより，$f(x)$ が $x+1$ で割り切れる条件は，
$$2a-b-1=0.$$
よって，
$$b=2a-1.$$
((1) の別解終り)

(2)　$b=2a-1$ より，
$$f(x)=x^3+(3-2a)x^2+(7-a)x+a+5$$
となる．**【解答】**では $f(x)$ を a で整理して因数分解したが，$f(x)$ を $x+1$ で割り算してもよい．
$$\begin{array}{r}x^2+(2-2a)x+a+5\\ x+1\,\overline{)\,x^3+(3-2a)x^2+(7-a)x+a+5}\\ \underline{x^3+x^2}\\ (2-2a)x^2+(7-a)x+a+5\\ \underline{(2-2a)x^2+(2-2a)x}\\ (a+5)x+a+5\\ \underline{(a+5)x+a+5}\\ 0\end{array}$$
これより，$f(x)$ を $x+1$ で割ると，商は $x^2+(2-2a)x+a+5$ であるから，
$$f(x)=(x+1)\{x^2+(2-2a)x+a+5\}$$
と因数分解できる．

よって，$f(x)=0$ が虚数解をもつのは，
$$x^2+(2-2a)x+a+5=0 \qquad \cdots①$$
が虚数解をもつ場合である．

① の係数はすべて実数であるから，この方程式

の解の種類は，判別式の符号によって分類することができる．

> a，b，c を実数とする．2次方程式
> $$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \qquad \cdots(*)$$
> に対して，b^2-4ac を(*)の判別式といい，
> $D=b^2-4ac$ とおくと，(*)は，
> $$\begin{cases} D>0 \text{ のとき，異なる2つの実数解をもつ} \\ D=0 \text{ のとき，実数の重解をもつ} \\ D<0 \text{ のとき，異なる2つの虚数解をもつ} \end{cases}$$
> **2次方程式の解の種類の判別**

これに従って，$D<0$ を解けばよい．

(3) α，β は①の2つの解であるから，

> x の2次方程式
> $$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$
> の2つの解が α，β であるとき，
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$
> **解と係数の関係**

を用いることで，
$$\alpha+\beta=2a-2,\ \alpha\beta=a+5$$
が得られる．

これを $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ に用いると，
$$\alpha^2+\beta^2=2(2a+1)(a-3)$$
であり，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha^2+\beta^2=0$ が成り立つことから，
$$a=3.$$

このとき，α，β は，
$$x^2-4x+8=0$$
の解であるから，
$$\alpha^2-4\alpha+8=0,\ \beta^2-4\beta+8=0,$$
すなわち，
$$\alpha^2=4\alpha-8,\ \beta^2=4\beta-8.$$

これを繰り返し用いれば，
$$\alpha^4=-64,\ \beta^4=-64$$
が得られるから，
$$\begin{aligned}\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}&=\alpha(\alpha^4)^n+\beta(\beta^4)^n\\&=\alpha(-64)^n+\beta(-64)^n\\&=(\alpha+\beta)(-64)^n.\end{aligned}$$

よって，$\alpha+\beta=4$ より，
$$\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}=(-1)^n\cdot 2^{6n+2}.$$

あとは，$\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}=-2^{152}$ となる n の値を指数に着目して求めればよい．

なお，
$$\alpha^4=-64,\ \beta^4=-64$$
を次のように求めることもできる．

((3)の部分的別解)

$x^2-4x+8=0$ を解くと，
$$x=2\pm 2i \quad (i \text{ は虚数単位})$$
であるから，$\alpha=2+2i$，$\beta=2-2i$ とすると，
$$\alpha^2=(2+2i)^2=8i$$
より，
$$\alpha^4=(8i)^2=-64.$$

また，
$$\beta^2=(2-2i)^2=-8i$$
より，
$$\beta^4=(-8i)^2=-64.$$

((3)の部分的別解終り)

4 図形と方程式

【II型数学I，A，II　選択問題】

(配点　50点)

> Oを原点とする xy 平面上に2点A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 0)$がある．Aを通り直線OAに垂直な直線を l とし，l 上に点C$(2,\ k)$をとる．また，Oを中心としAを通る円を S とする．
>
> (1) l の方程式と k の値を求めよ．
>
> (2) S の方程式を求めよ．また，Bから S に引いた接線のうち，傾きが負であるものの方程式を求めよ．
>
> (3) 線分BC(端点を含む)上に点Pをとり，S の $y>0$ を満たす部分にPから引いた接線の接点をQとする．Pが線分BC上を動くとき，線分PQ(端点を含む)の通過する領域を K とおく．点$(x,\ y)$が K 上を動くとき，$x+3y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【配点】

(1) 12点．

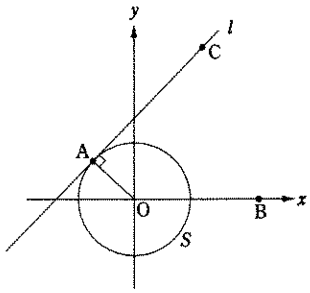
(2) 14点．

(3) 24点．

【出題のねらい】

条件を満たす直線や円の方程式を正しく求めることができるか，また，領域を正しく把握し，領域における式の値の範囲を求めることができるかをみる問題である．

【解答】



(1) 直線OAの傾きは-1.

直線lの傾きをm_1とすると$l\perp$OAより,

$$-1\cdot m_1=-1.$$

$$m_1=1.$$

よって,lの方程式は,

$$y=1\cdot(x+1)+1,$$

すなわち,

$$l : \boldsymbol{y=x+2}.$$

点C$(2,\ k)$がl上にあることから,

$$k=2+2.$$

したがって,

$$\boldsymbol{k=4}.$$

(2) Oを中心とし,半径rの円の方程式は,

$$x^2+y^2=r^2.$$

これがA$(-1,\ 1)$を通るとき,

$$(-1)^2+1^2=r^2.$$

$$r^2=2.$$

よって,Sの方程式は,

$$\boldsymbol{x^2+y^2=2}.$$

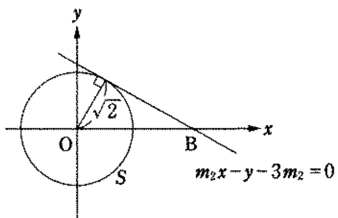
また,Sの半径は$r=\sqrt{2}$である.

Bを通り,傾きm_2 ($m_2<0$)の直線の方程式は,

$$y=m_2(x-3),$$

すなわち,

$$m_2x-y-3m_2=0.$$



この直線がSに接する条件は,Sの中心O$(0,\ 0)$と直線の距離がSの半径$\sqrt{2}$と等しいことであるから,

$$\frac{|m_2\cdot0-0-3m_2|}{\sqrt{m_2{}^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}.$$

これより,

$$|-3m_2|=\sqrt{2}\sqrt{m_2{}^2+1}.$$

$$9m_2{}^2=2(m_2{}^2+1).$$

$$m_2{}^2=\frac{2}{7}.$$

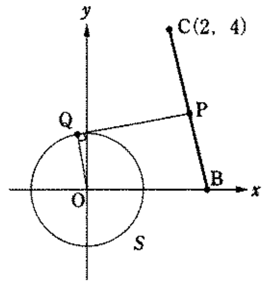
$m_2<0$であるから,

$$m_2=-\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

よって,BからSに引いた接線のうち,傾きが負であるものの方程式は,

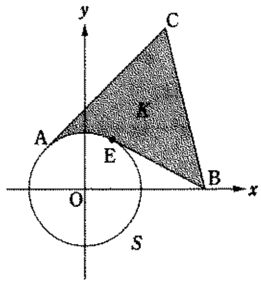
$$\boldsymbol{y=-\sqrt{\frac{2}{7}}(x-3)}.$$

(3)



$l\perp$OAであるから,lはAにおけるSの接線である.

よって,Pが線分BC上を動くとき線分PQの通過する領域Kは次図の網掛け部分になる.ただし,EはBからSに引いた接線の接点である.また,境界は含む.



$x+3y=t$とおくと,

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{t}{3}. \qquad \cdots(*)$$

これは,傾き$-\frac{1}{3}$,y切片$\frac{t}{3}$の直線の方程式である.この直線とKが共有点をもつようなtの値の範囲が$x+3y$のとり得る値の範囲である.

$$(\text{ABの傾き})=-\frac{1}{4}$$

であるから,

$$((*)\text{の傾き})<(\text{ABの傾き})$$

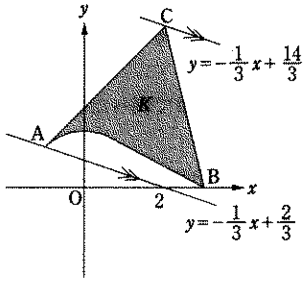
が成り立つことに注意する.

直線$(*)$がA$(-1,\ 1)$を通るとき,

$$1=\frac{1}{3}+\frac{t}{3}\quad \text{より，}\ t=2.$$

直線(*)が C(2, 4)を通るとき，

$$4=-\frac{2}{3}+\frac{t}{3}\quad \text{より，}\ t=14.$$



よって，図より，直線(*)が K と共有点をもつような t の値の範囲は，

$$2\leqq t\leqq 14$$

であるから，$x+3y$ のとり得る値の範囲は，

$$\mathbf{2\leqq x+3y\leqq 14.}$$

【解説】 問題

(1) 直線 OA は $y=-x$ であり，その傾きは -1 である．

これと，

> 傾きが m_1，m_2 である 2 直線が垂直である条件は，
>
> $$m_1m_2=-1$$
>
> **直線の垂直条件**

を用いて，l の傾きを求めることができる．

あとは，

> 点$(a,\ b)$を通り，傾きが m である直線の方程式は，
>
> $$y=m(x-a)+b$$
>
> **直線の方程式**

を用いれば，直線 l の方程式が得られ，その方程式に$(x,\ y)=(2,\ k)$を代入すれば k の値が得られる．

(2) 円の方程式を求めるには，

> 点$(a,\ b)$を中心とし，半径が r である円の方程式は，
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
>
> **円の方程式**

を用いることが基本である．

【解答】では，S の中心が O(0, 0)であることから，S の方程式を $x^2+y^2=r^2$ とおき，A$(-1,\ 1)$を通ることから r^2 の値を求めたが，次のようにしてもよい．

((2)の部分的別解 1)

S は中心が O で，半径が OA$=\sqrt{2}$ であるから，S の方程式は，

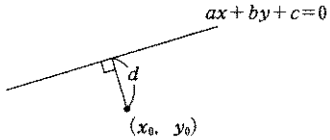
$$x^2+y^2=(\sqrt{2})^2,$$

すなわち，

$$x^2+y^2=2.$$

((2)の部分的別解 1 終り)

次に，B から S に引いた接線のうち，傾きが負であるものを l' とし，その方程式を求めるために，**【解答】**では，B を通り傾き m_2 の直線の方程式を作り，S の中心 O(0, 0)とこの直線の距離 d が S の半径 $\sqrt{2}$ に等しいことから m_2 の値を求めた．その際，d の値を求めるために，

> 
>
>
> 点$(x_0,\ y_0)$と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は，
>
> $$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
>
> **点と直線の距離**

を利用した．

l' の方程式を求めるには，

> 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点$(a,\ b)$における円の接線の方程式は，
>
> $$ax+by=r^2$$
>
> **円の接線**

を用いて，次のように解答してもよい．

((2)の部分的別解 2)

l' と S の接点の座標を$(p,\ q)$ $(q>0)$とする．

$(p,\ q)$は S 上の点であるから，

$$p^2+q^2=2.$$

$(p,\ q)$における S の接線の方程式は $px+qy=2$ と表され，この直線上に B(3, 0)があることから，

$$3p=2.$$

これより，

$$p=\frac{2}{3},\quad q=\sqrt{2-p^2}=\frac{\sqrt{14}}{3}$$

であり，l' の方程式は，

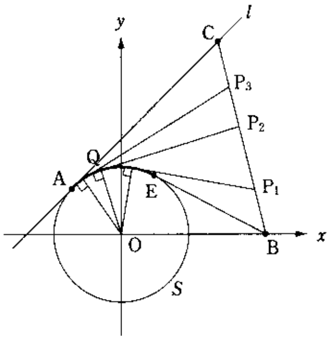
$$\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{14}}{3}y=2.$$

((2)の部分的別解 2 終り)

(3) $l\perp$OA であるから，l は A における S の接線，すなわち，S の $y>0$ を満たす部分に C から引いた

接線であり，その接点がAである．

また，l' と S の接点をEとすると，Pが線分BC上をBからCまで動くとき，Qは S 上をEからAまでくまなく動き，このときつねに∠OQP=90°が成り立つから，K が【解答】に示した網掛け部分になることが判断できる．



あとは，

> 領域 K 上を点 $(x,\ y)$ が動くとき，関数 $f(x,\ y)$ のとり得る値の範囲は，k を定数として $f(x,\ y)=k$ の表す図形と K が共有点をもつような k の値の範囲である
>
> —— **領域における式の値の範囲** ——

を用いればよい．

5 整　数

【Ⅱ型共通　選択問題】

（配点　50点）

> (1) 整数 p，q，r に対して，
> $$a=3p,\quad b=3q+1,\quad c=3r+2$$
> とおく．
> (i) a^3，b^3，c^3 を9で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．
> (ii) a^9，b^9，c^9 を9で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．
>
> (2) 整数 x，y，z に対して，
> $$K=(x-y)(y-z)(z-x),\quad L=x^9-8y^9+z^9$$
> とおく．K が3で割り切れないならば，L は9で割り切れることを示せ．

【配点】

(1) 27点．

(i) 12点．(ii) 15点．

(2) 23点．

【出題のねらい】

整数の剰余に関する基本的な力を問うとともに，余りの組合せを考えるなどして，ある整数が特定の整数で割り切れる条件を求めるなど，幅広い応用力をみる問題である．

【解答】

(1)(i) 与えられた条件より，

$$a^3=(3p)^3=9(3p^3),$$
$$b^3=(3q+1)^3=9(3q^3+3q^2+q)+1,$$
$$c^3=(3r+2)^3=9(3r^3+6r^2+4r)+8.$$

よって，a^3，b^3，c^3 を9で割ったときの余りはそれぞれ，

0，1，8．

(ii) (i)の結果より，

$$a^3=9p',\ b^3=9q'+1,\ c^3=9r'+8$$
$$(p',\ q',\ r' \text{は整数})$$

と表すことができる．これより，$a^9=(a^3)^3$，$b^9=(b^3)^3$，$c^9=(c^3)^3$ に注意して，

$$a^9=(9p')^3=9(81p'^3),$$
$$b^9=(9q'+1)^3=9(81q'^3+27q'^2+3q')+1,$$
$$c^9=(9r'+8)^3$$
$$=9(81r'^3+27\cdot 8r'^2+3\cdot 8^2r'+56)+8.$$

よって，a^9，b^9，c^9 を9で割ったときの余りはそれぞれ，

$$0,\ 1,\ 8.$$

(2) K が 3 で割り切れないのは，

「$x-y$，$y-z$，$z-x$ がすべて 3 で割り切れない」

ときであり，これは，

「x，y，z を 3 で割ったときの余りが互いに異なる」

ことと同値である．したがって，K が 3 で割り切れないとき，x，y，z を 3 で割ったときの余りとして

$$0,\ 1,\ 2$$

がすべて現れる．このとき，(1)(ii) より，x^9，y^9，z^9 を 9 で割ったときの余りとして，

$$0,\ 1,\ 8$$

の 3 種類がすべて現れる．

これより，x^9，y^9，z^9 は，

$$9l,\ 9m+1,\ 9n+8 \quad (l,\ m,\ n \text{ は整数})$$

3 種類の形をすべてとるから，

$$\begin{aligned} L &= (x^9+y^9+z^9)-9y^9 \\ &= \{9l+(9m+1)+(9n+8)\}-9y^9 \\ &= 9(l+m+n+1-y^9). \end{aligned}$$

l，m，n，y^9 は整数であるから，L は 9 で割り切れる．

【解説】 **問題**

(1)(i) **【解答】**では，

> 整数 a と正の整数 b に対して，
>
> $$a=bq+r \quad (0 \leqq r < b)$$
>
> を満たす整数 q，r がただ一通り存在する．q を「a を b で割ったときの商」，r を「a を b で割ったときの余り」という
>
> **整数の除法**

を用いるために，$a^3=(3p)^3$，$b^3=(3q+1)^3$，$c^3=(3r+2)^3$ を計算し，

$$9 \times (\text{整数}) + (0 \text{ から } 8 \text{ までの整数}) \quad \cdots (*)$$

の形を作った．

(ii) (i)の結果より，a^3，b^3，c^3 を 9 で割った余りがそれぞれ 0，1，8 であることがわかるから，**【解答】**のように，

$$a^3=9p',\ b^3=9q'+1,\ c^3=9r'+8$$
$$(p',\ q',\ r' \text{ は整数})$$

とおき，a^9，b^9，c^9 を計算して，再び $(*)$ の形を作った．

次のように，再び 3 で割ったときの余りに注目してもよい．

((1)(ii) の別解)

(i) より，a^3，b^3，c^3 を 3 で割ったときの余りはそれぞれ 0，1，2 である．

$a^9=(a^3)^3$，$b^9=(b^3)^3$，$c^9=(c^3)^3$ であるから，a^9，b^9，c^9 を 9 で割ったときの余りはそれぞれ，

$$0,\ 1,\ 8.$$

((1)(i) の別解終り)

また，整数の合同式を用いて解答することもできる．

> a，b は整数，m は正の整数とする．
>
> $a-b$ が m の倍数となるとき，a と b は m を法として合同であるといい，
>
> $$a \equiv b \pmod{m}$$
>
> と表す．
>
> **整数の合同式**

整数の合同式については次が成り立つ．

> $$a \equiv c \pmod{m},\ b \equiv d \pmod{m}$$
>
> のとき，
>
> (ア) $a+b \equiv c+d \pmod{m}$
>
> (イ) $a-b \equiv c-d \pmod{m}$
>
> (ウ) $ab \equiv cd \pmod{m}$
>
> (エ) $a^k \equiv c^k \pmod{m}$ (k は正の整数)
>
> **整数の合同式の性質**

(証明)

$$a \equiv c \pmod{m},\ b \equiv d \pmod{m}$$

のとき，

$$a-c=mN_1,\ b-d=mN_2 \quad (N_1,\ N_2 \text{ は整数})$$

と表すことができる．

(ア)
$$\begin{aligned} (a+b)-(c+d) &= (a-c)+(b-d) \\ &= m(N_1+N_2) \end{aligned}$$

より，

$$a+b \equiv c+d \pmod{m}.$$

(イ)
$$\begin{aligned} (a-b)-(c-d) &= (a-c)-(b-d) \\ &= m(N_1-N_2) \end{aligned}$$

より，

$$a-b \equiv c-d \pmod{m}.$$

(ウ)
$$\begin{aligned} ab-cd &= ab-bc+bc-cd \\ &= (a-c)b+c(b-d) \\ &= m(bN_1+cN_2) \end{aligned}$$

より，

$$ab \equiv cd \pmod{m}.$$

(エ) (ウ)において，$a=b$ かつ $c=d$ とすると

$$a^2 \equiv c^2 \pmod{m}.$$

これと $a \equiv c \pmod{m}$ に対して，(ウ)の結果を用いれば，

$$a^3 \equiv c^3 \pmod{m}.$$

これを繰り返せば，一般に，

$a^k \equiv c^k \pmod{m}$ （k は正の整数）．

（証明終り）

この性質(エ)と(i)の結果を用いると，

$a^3 \equiv 0 \pmod{9}$ より　$a^9 \equiv 0 \pmod{9}$．

$b^3 \equiv 1 \pmod{9}$ より　$b^9 \equiv 1^3 (=1) \pmod{9}$．

$c^3 \equiv 8 \pmod{9}$ より　$c^9 \equiv (9-1)^3 \equiv (-1)^3$

$\equiv 8 \pmod{9}$．

よって，(ii)の結果が得られる．

(2)　**【解答】**では，

「K は 3 で割り切れない」

$\Longleftrightarrow$「$x-y$，$y-z$，$z-x$ がすべて 3 で割り切れない」

$\Longleftrightarrow$「x と y，y と z，z と x は 3 で割ったときの余りが異なる」

$\Longleftrightarrow$「x，y，z を 3 で割ったときの余りは互いに異なる」

と読み換え，x，y，z に(1)(ii)の結果を適用した．

その際，x，y，z を 3 で割ったときの余りは，0，1，2 すべてが現れるが，x，y，z と 0，1，2 の対応のさせ方は $3!=6$(通り)あるから，すべての場合について調べるのは大変である．

そこで，**【解答】**では，

$$L=(x^9+y^9+z^9)-9y^9$$

と変形し，$x^9+y^9+z^9$ の文字についての対称性を利用した．x，y，z を 3 で割ったときの余りの対応のさせ方に関わらず，x^9，y^9，z^9 を 9 で割ったときの余りは 0，1，8 と 3 種類がすべて現れる．したがって，**【解答】**にあるように，整数 l，m，n を用いて，

$$\begin{aligned} x^9+y^9+z^9 &= 9l+(9m+1)+(9n+8) \\ &= 9(l+m+n+1) \end{aligned}$$

と変形すると，$x^9+y^9+z^9$ は 9 で割り切れることがわかる．$-9y^9$ も 9 で割り切れるから，L も 9 で割り切れる．

また，一般に，

> p が素数のとき，整数 x，y に対して，
>
> $xy \equiv 0 \pmod{p}$
>
> $\Longleftrightarrow$「$x \equiv 0 \pmod{p}$ または $y \equiv 0 \pmod{p}$」

が成り立つことに注意すれば，次のように解答することもできる．

（(2)の別解）

$K \not\equiv 0 \pmod{3}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y \not\equiv 0 \pmod{3} \text{かつ} \\ y-z \not\equiv 0 \pmod{3} \text{かつ} \\ z-x \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \not\equiv y \pmod{3} \text{かつ} \\ y \not\equiv z \pmod{3} \text{かつ} \\ z \not\equiv x \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \text{「}\begin{cases} \{x',\ y',\ z'\}=\{x,\ y,\ z\} \\ x' \equiv 0 \pmod{3} \\ y' \equiv 1 \pmod{3} \\ z' \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

を満たす整数 x'，y'，z' が存在する」．

よって，この x'，y'，z' に対して，(1)(ii)の結果を用いれば，

$(x')^9 \equiv 0 \pmod{9}$，$(y')^9 \equiv 1 \pmod{9}$，$(z')^9 \equiv 8 \pmod{9}$

であるから，

$$\begin{aligned} L &= x^9+y^9+z^9-9y^9 \\ &\equiv x^9+y^9+z^9 \pmod{9} \\ &= x'^9+y'^9+z'^9 \\ &\equiv 0+1+8 \pmod{9} \\ &\equiv 0 \pmod{9}. \end{aligned}$$

したがって，

K が 3 で割り切れないならば，

L は 9 で割り切れる．

（(2)の別解終り）

6　数　列

【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ，B　選択問題】

（配点　50点）

> 数列
>
> 1 | 2, 3 | 6, 7, 8, 9, 10, 11 | 22, 23, … | … 　…(*)
>
> があり，上記のようにグループに分けられている．
>
> n 番目($n=1$, 2, 3, …)のグループの先頭の数を a_n とするとき，この数列は次の規則に従って定められている．
>
> - $a_1=1$ である．
> - n 番目のグループは a_n から始まり，連続する a_n 個の整数が小さい順に並んでいる．
> - n 番目のグループの末尾の数の 2 倍を $n+1$ 番目のグループの先頭の数とする．
>
> したがって，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=6$，$a_4=22$ である．

(1) a_5 を求めよ．

(2)(i) n 番目のグループの末尾の数を a_n を用いて表せ．

(ii) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を求めよ．

(3) (*)において，初項から n 番目のグループの末尾の数までの和を求めよ．

【配点】

(1) 6点．

(2) 24点．

(i) 8点．(ii) 16点．

(3) 20点．

【出題のねらい】

数列の規則性から，それが満たす漸化式を作ることができるか，また，グループ分けを利用して数列の和を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) 4番目のグループは，$a_4=22$ から始まり，a_4 個，つまり，22個の連続する整数が小さい順に並んでいるから，4番目のグループの末尾の数は，

$$22+(22-1)=43$$

である．

よって，5番目のグループの先頭の数は 43×2，すなわち，

$$a_5=\mathbf{86}.$$

(2)(i) n 番目のグループは a_n から始まり，連続する a_n 個の整数が小さい順に並んでいるから，n 番目のグループの末尾の数は，

$$a_n+(a_n-1)=\boldsymbol{2a_n-1}.$$

(ii) n 番目のグループの末尾の数の2倍が $n+1$ 番目のグループの先頭の数であるから，

$$a_{n+1}=2(2a_n-1).$$

よって，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=4a_n-2}.$$

これは，

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=4\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

と変形できるから，数列 $\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$ は，初項が $a_1-\frac{2}{3}$，公比が4の等比数列である．

$a_1=1$ より，$a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ であるから，

$$a_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot4^{n-1}.$$

よって，

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{3}(4^{n-1}+2)}.$$

(3) $k=1, 2, \cdots, n$ に対して，k 番目のグループは，公差が1の等差数列であり，先頭の数は a_k，末尾の数は $2a_k-1$，項数は a_k である．

よって，k 番目のグループに含まれる数の和を S_k とすれば，

$$\begin{aligned}S_k&=\frac{1}{2}a_k\{a_k+(2a_k-1)\}\\&=\frac{1}{2}a_k(3a_k-1)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4^{k-1}+2}{3}\left(3\cdot\frac{4^{k-1}+2}{3}-1\right)\\&=\frac{1}{6}(4^{k-1}+2)(4^{k-1}+1)\\&=\frac{1}{6}(16^{k-1}+3\cdot4^{k-1}+2).\end{aligned}$$

求めるものは(*)における1番目のグループの先頭の数から n 番目のグループの末尾の数までの和である．それを T_n とすれば，

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{n}S_k\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(16^{k-1}+3\cdot4^{k-1}+2)\\&=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}16^{k-1}+3\sum_{k=1}^{n}4^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}2\right)\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{16^n-1}{16-1}+3\cdot\frac{4^n-1}{4-1}+2n\right)\\&=\frac{1}{90}(16^n-1)+\frac{1}{6}(4^n-1)+\frac{1}{3}n\\&=\boldsymbol{\frac{1}{90}\cdot16^n+\frac{1}{6}\cdot4^n+\frac{1}{3}n-\frac{8}{45}}.\end{aligned}$$

【解説】 問題

(1) 数列(*)の定め方の規則により，5番目のグループの先頭の数である a_5 は4番目のグループの末尾の数の2倍である．よって，**【解答】**では，まず，4番目のグループの末尾の数を求めた．

規則により，4番目のグループは $a_4=22$ から始まり a_4 個，つまり22個の連続する整数が小さい順に並んでいるので，4番目のグループの末尾の数は，22から数えて22個目の整数，すなわち，

$$22+(22-1)=43$$

である．

よって，

$$a_5=43\times2=86$$

となる．

(2)(i) n 番目のグループは a_n から始まり，連続する a_n 個の整数が小さい順に並んでいる．よって，n 番目のグループの末尾の数は，a_n から数えて a_n 個目の整数，すなわち，

$$a_n+(a_n-1)=2a_n-1$$

となる．

(ii) n 番目のグループの末尾の数の 2 倍が $n+1$ 番目のグループの先頭の数，すなわち a_{n+1} であるから，(i) より，

$$a_{n+1}=2(2a_n-1).$$

よって，

$$a_{n+1}=4a_n-2$$

となる．あとは，初項 $a_1=1$ に注意して，この漸化式から一般項 a_n を求めればよい．

2 項間漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad (p,\ q \text{ は定数で } p\neq 1)$$

を解くには，次のように変形することが基本である．

> $$a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=p\left(a_n-\frac{q}{1-p}\right)$$
>
> **漸化式の変形**

この変形から，数列 $\left\{a_n-\dfrac{q}{1-p}\right\}$ は公比が p の等比数列であることがわかり，a_n の一般項を求めることができる．

(3) (*)において「初項から n 番目のグループの末尾の数までの和」は，

(1 番目のグループに含まれる数の和)
　＋(2 番目のグループに含まれる数の和)
　　＋…＋(n 番目のグループに含まれる数の和)

と考えることができる．

そこで**【解答】**では，まず，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，k 番目のグループに含まれる数の和を S_k とおき，S_k を k を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ を計算した．

S_k を k を用いて表す際，

> 初項 $a_1=a$，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は，
>
> $$\frac{1}{2}n(a_1+a_n)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$
>
> **等差数列の和**

を利用した．

k 番目のグループは，公差が 1 の等差数列であり，先頭の数は a_k，末尾の数は $2a_k-1$，項数は a_k であるから，

$$S_k=\frac{1}{2}a_k\{a_k+(2a_k-1)\}$$

となる．

さらに，この式に $a_k=\dfrac{1}{3}(4^{k-1}+2)$ を代入すると，

$$S_k=\frac{1}{6}(16^{k-1}+3\cdot 4^{k-1}+2)$$

となる．

あとは，

> 初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和は，
>
> $$\begin{cases} r\neq 1 \text{ のとき } \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, \\ r=1 \text{ のとき } na \end{cases}$$
>
> **等比数列の和**

および，

> 自然数 n に対して，
>
> $$\sum_{k=1}^{n}c=nc \quad (c \text{ は定数})$$
>
> **定数列の和**

を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ を計算すればよい．

これらから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}16^{k-1}&=1+16+16^2+\cdots+16^{n-1}\\&=\frac{1\cdot(16^n-1)}{16-1}\\&=\frac{1}{15}(16^n-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}4^{k-1}&=1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}\\&=\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}\\&=\frac{1}{3}(4^n-1),\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}2=2n$$

となる．

【Ⅲ型　受験者用】

$\boxed{1}$　小問集合

【Ⅲ型　必須問題】

（配点　40点）

(1)　x の方程式 $\tan^2 x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$
　$(0 \leqq x < 2\pi)$ を解け．

(2)　a，a，a，a，b，b，c の7文字を円形に並べる並べ方は何通りあるか求めよ．また，このうち，b と b が隣り合わないような並べ方は何通りあるか求めよ．

(3)　$f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{4}$ とおく．xy 平面上において，$y = f(x)$ のグラフに原点$(0,\ 0)$から引いた接線の方程式を求めよ．

(4)　平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，
$$|\vec{a}| = 3,\quad |\vec{b}| = 4,\quad |\vec{a} - \vec{b}| = 2$$
を満たすとき，$|\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ．

(5)　r を実数の定数とする．$\sum_{n=1}^{\infty} 2r^{n-1} = 3$ が成り立つとき，r の値を求めよ．

【配点】

(1)　8点．
(2)　8点．
(3)　8点．
(4)　8点．
(5)　8点．

【出題のねらい】

(1)　正接の2次方程式の解を求めることができるかをみる問題である．
(2)　円順列，同じものを含む順列の総数を求めることができるかをみる問題である．
(3)　微分法を利用して，3次関数のグラフの接線の方程式を求めることができるかをみる問題である．
(4)　ベクトルの内積を利用して，ベクトルの大きさを求めることができるかをみる問題である．
(5)　無限等比級数が収束する条件および和の公式を用いることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　**Ⅱ型** $\boxed{1}$ (2)**【解答】**参照．
(2)　**Ⅱ型** $\boxed{1}$ (5)**【解答】**参照．
(3)　**Ⅱ型** $\boxed{1}$ (3)**【解答】**参照．
(4)
$$|\vec{a}| = 3,\quad |\vec{b}| = 4 \qquad \cdots ①$$
より，$|\vec{a} - \vec{b}| = 2$ に対して，
$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4.$$
$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4.$$
$$9 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 16 = 4.$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{21}{2}. \qquad \cdots ②$$
これより，
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 9 + 21 + 16 \quad (①,\ ② より)$$
$$= 46.$$
よって，
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \boldsymbol{\sqrt{46}}.$$
(5)　$\sum_{n=1}^{\infty} 2r^{n-1}$ は初項2，公比 r の無限等比級数であるから，収束するための条件は，
$$-1 < r < 1 \qquad \cdots ③$$
であり，このときの和は，
$$\frac{2}{1-r}$$
となる．
　したがって，与えられた条件から，
$$\frac{2}{1-r} = 3.$$
よって，
$$r = \boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$
これは ③ を満たす．

【解説】

問題

(1)　**Ⅱ型** $\boxed{1}$ (2)**【解説】**参照．
(2)　**Ⅱ型** $\boxed{1}$ (5)**【解説】**参照．
(3)　**Ⅱ型** $\boxed{1}$ (3)**【解説】**参照．
(4)　$|\vec{a} + \vec{b}|$ を求めるには，$|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x}$ を用いて内積計算にもちこむことが基本である．
　具体的には，

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　（k は実数）

内積の性質

を利用して $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求め，これから $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ を求めればよい．

(5) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の和については，

> $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束するのは，
>
> $$a=0 \quad \text{または} \quad -1<r<1$$
>
> のときであり，このとき，
>
> $$\begin{cases} a=0 \text{ ならば，和は } 0, \\ a\neq 0 \text{ ならば，和は } \dfrac{a}{1-r} \end{cases}$$
>
> **無限等比級数の和**

が基本である．

これを利用すればよい．

2 微分法

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

> a は $a>1$ を満たす定数とする．
>
> 関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-a}$ とおくとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ が成り立つとする．
>
> (1) a の値を求めよ．
>
> (2) 区間 $0<x<\pi$ における $f(x)$ の極値を求めよ．

【配点】

(1) 15 点．

(2) 25 点．

【出題のねらい】

微分の計算を正しく行い，導関数の符号に着目して極値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-a} \quad (a>1)$$

に対して，

$$f'(x)=\frac{(-\sin x)(\sin x-a)-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x-a)^2}$$
$$=\frac{a\sin x-1}{(\sin x-a)^2}.$$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ より，

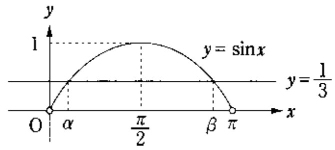
$$\frac{a-1}{(1-a)^2}=\frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{a-1}=\frac{1}{2}.$$
$$a=\mathbf{3}.$$

これは $a>1$ を満たす．

(2) (1) より，

$$f'(x)=\frac{3\sin x-1}{(\sin x-3)^2}$$
$$=\frac{3\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)}{(\sin x-3)^2}.$$

ここで，$\sin x=\dfrac{1}{3}$ $(0<x<\pi)$ を満たす x の値は 2 つ存在する．それらを α，β $(0<\alpha<\beta<\pi)$ とおく．



$(\sin x-3)^2>0$ であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

$\sin x=\dfrac{1}{3}$ のとき，

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x$$
$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{8}{9}$$

となり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$ であるから，

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

以上より，

$$\text{極大値 } f(\beta)=\frac{\cos\beta}{\sin\beta-3}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{極小値 } f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

【解説】　問題

(1) まず，

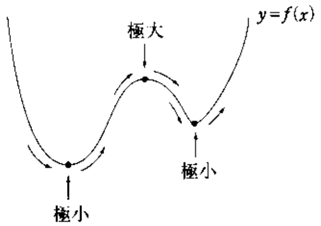
> $$\left\{\frac{F(x)}{G(x)}\right\}'=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{\{G(x)\}^2}$$
>
> **商の微分法**

に従って，$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-a}$ の導関数を求めると，

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(\sin x-a)-\cos x(\sin x-a)'}{(\sin x-a)^2}$$
$$=\frac{-\sin x(\sin x-a)-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x-a)^2}$$
$$=\frac{a\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(\sin x-a)^2}$$
$$=\frac{a\sin x-1}{(\sin x-a)^2}$$

となる．あとは，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$a>1$を用いることで，$a$の値を求めることができる．

(2) まず，関数の極値の定義を確認する．

> 連続な関数$f(x)$が，$x=a$を境目として増加から減少にうつるとき，$f(x)$は$x=a$で極大であるといい，$f(a)$を極大値という．
> また，$f(x)$が，$x=b$を境目として減少から増加にうつるとき，$f(x)$は$x=b$で極小であるといい，$f(b)$を極小値という．
>
> 
>
>
> **関数の極値**

また，$f(x)$が微分可能な関数であるとき，

> $f'(x)>0$となる区間では，$f(x)$は増加し，
> $f'(x)<0$となる区間では，$f(x)$は減少する
>
> **関数の増減**

が成り立つから，$f(x)$の増加，減少を調べるには$f'(x)$の符号を調べればよい．

さらに一般に，

> 微分可能な関数$f(x)$が，$f'(a)=0$を満たすとき，
> $f'(x)$の符号が$x=a$の前後で正から負に変化する $\Longrightarrow$ $f(x)$は$x=a$で極大である，
> $f'(x)$の符号が$x=a$の前後で負から正に変化する $\Longrightarrow$ $f(x)$は$x=a$で極小である
>
> **極値の判定法**

が成り立つ．

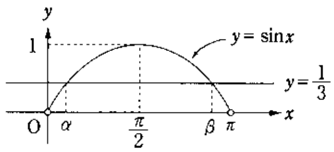
これを用いて，$f(x)$の極値を求めればよい．そのためには$f(x)$の増減表を作ることが基本である．

本問の場合，(1)より，

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-3},$$
$$f'(x)=\frac{3\sin x-1}{(\sin x-3)^2}$$
$$=\frac{3\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)}{(\sin x-3)^2}$$

であるから，$(\sin x-3)^2>0$より$f'(x)$の符号と$\sin x-\frac{1}{3}$の符号は一致する．

そこで，区間$0<x<\pi$において$y=\sin x$のグラフと直線$y=\frac{1}{3}$の位置関係から$f'(x)$の符号を調べた．



グラフより$0<x<\pi$において$\sin x=\frac{1}{3}$を満たすxの値は2つ存在し，それらをα，β $(0<\alpha<\beta<\pi)$とおくと，

$$\sin\alpha=\frac{1}{3},\ \sin\beta=\frac{1}{3} \qquad \cdots(*)$$

が成り立つ．このα，βを用いれば，

$$\begin{cases} 0<x<\alpha \text{ のとき} & \sin x-\frac{1}{3}<0, \\ \alpha<x<\beta \text{ のとき} & \sin x-\frac{1}{3}>0, \\ \beta<x<\pi \text{ のとき} & \sin x-\frac{1}{3}<0 \end{cases}$$

を得るから，これより$f'(x)$の符号を求めることができる．

以上より，$f(\alpha)$，$f(\beta)$が極値になることがわかるが，これらの値を求めるには，

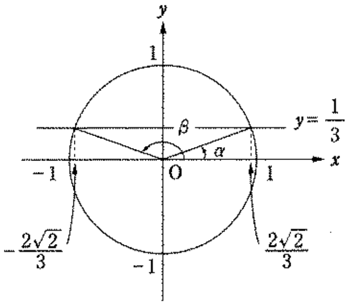
$$f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-3},\ f(\beta)=\frac{\cos\beta}{\sin\beta-3}$$

より，$\cos\alpha$，$\cos\beta$の値が必要である．

$(*)$および$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$より，

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となるから，これらから$f(\alpha)$，$f(\beta)$の値を求めることができる．



③ 図形と方程式

【Ⅲ型　必須問題】

（配点　40点）

> k は正の定数とする．
> xy 平面上に放物線 P：$y=kx^2+2$ がある．
> (1)　P が直線 $y=x+1$ と共有点をもたないような k の値の範囲を求めよ．
> (2)　円 C_a：$(x-a)^2+(y-a+1)^2=1$ があり，a は $a\geqq 0$ の範囲を動くとする．
> (i)　C_a の中心の軌跡を求めよ．
> (ii)　C_a が通過する領域を K とする．k が(1)で求めた範囲にあるとき，点$(0,\ 1)$を通り傾き m の直線が P とも K とも共有点をもたないような実数 m の値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　10点．

(2)　30点．

(i)　10点．(ii)　20点．

【出題のねらい】

曲線の通過する領域を求めることができるか，また，与えられた領域に直線が含まれる条件を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$y=kx^2+2, \qquad \cdots①$$
$$y=x+1 \qquad \cdots②$$

とおく．

①，② から y を消去すると，

$$kx^2+2=x+1.$$
$$kx^2-x+1=0. \qquad \cdots③$$

P が直線 ② と共有点をもたないのは，x の2次方程式 ③ が実数解をもたないときである．

よって，求める k の値の範囲は，

$$(③ \text{の判別式})<0$$

より，

$$1-4k<0.$$
$$k>\frac{1}{4}.$$

これは $k>0$ を満たす．

(2)(i)　円 C_a の中心を$(X,\ Y)$とすると，

$$\begin{cases} X=a, & \cdots④ \\ Y=a-1. & \cdots⑤ \end{cases}$$

さらに条件より，

$$a\geqq 0. \qquad \cdots⑥$$

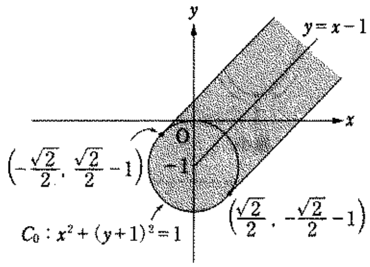
④ より $a=X$ であり，これを ⑤，⑥ に代入すると，

$$\begin{cases} Y=X-1, \\ X\geqq 0. \end{cases}$$

よって，求める軌跡は，

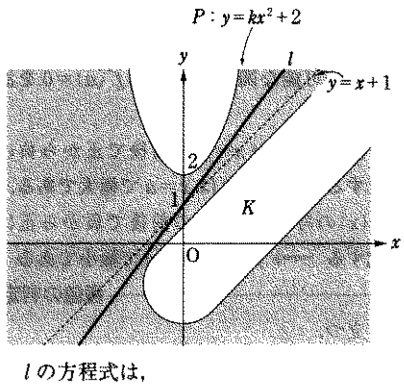
半直線 $y=x-1$ $(x\geqq 0)$．

(ii)　C_a の半径は1であるから，(i)より，K は次図の網掛け部分(境界を含む)となる．



点$(0,\ 1)$を通り傾き m の直線を l とする．

k が(1)で求めた範囲にあるとき，l が P とも K とも共有点をもたないのは，l が次図の網掛け部分(境界を除く)に含まれるときである．



l の方程式は，

$$y=mx+1. \qquad \cdots⑦$$

①，⑦ から y を消去すると，

$$kx^2+2=mx+1.$$
$$kx^2-mx+1=0. \qquad \cdots⑧$$

P と l が共有点をもたないのは，x の 2 次方程式 ⑧ が実数解をもたないときであり，この条件は，(⑧ の判別式)<0 より，

$$m^2-4k<0.$$

$$-2\sqrt{k}<m<2\sqrt{k}. \qquad \cdots ⑨$$

$m<1$ とすると，l は K と共有点をもつから，

$$m \geqq 1 \qquad \cdots ⑩$$

であることが必要であり，このとき l が K と共有点をもたないのは，l と C_0 が共有点をもたないときである．

l と C_0 が共有点をもたない条件は，

$$\frac{|m\cdot 0-(-1)+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1.$$

$$m^2+1<4.$$

$$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}. \qquad \cdots ⑪$$

よって，求める m の値の範囲は，⑨ かつ ⑩ かつ ⑪，すなわち，

$$1 \leqq m<2\sqrt{k} \quad \text{かつ} \quad 1 \leqq m<\sqrt{3}.$$

ここで，$2\sqrt{k}$ と $\sqrt{3}$ の大小を比較すると，

$$\begin{cases} 0<k<\dfrac{3}{4} \text{ のとき，} 2\sqrt{k}<\sqrt{3}, \\ \dfrac{3}{4} \leqq k \text{ のとき，} 2\sqrt{k} \geqq \sqrt{3}. \end{cases}$$

k が (1) で求めた範囲にあるとき，$k>\dfrac{1}{4}$ であるから，求める m の値の範囲は，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}<k<\dfrac{3}{4} \text{ のとき，} \mathbf{1 \leqq m<2\sqrt{k}}, \\ \dfrac{3}{4} \leqq k \text{ のとき，} \mathbf{1 \leqq m<\sqrt{3}}. \end{cases}$$

【解説】 問題

(1)

> 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が共有点をもたない条件は，x の方程式 $f(x)=g(x)$ が実数解をもたないことである
>
> **2 曲線が共有点をもたない条件**

を用いると，放物線 $P: y=kx^2+2$ と直線 $y=x+1$ が共有点をもたない条件は，x の方程式

$$kx^2+2=x+1,$$

すなわち，

$$kx^2-x+1=0 \qquad \cdots ③$$

が実数解をもたないことである．

$k>0$ より，③ は x の 2 次方程式であるから，

> a，b，c は実数とする．x の 2 次方程式
> $$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$
> の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，
> $D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ
> $D=0 \Longleftrightarrow$ 1 つの実数解(重解)をもつ
> $D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない
>
> **2 次方程式の実数解の個数**

を用いればよい．

((1) の別解)

放物線 P 上の点 $(t,\ kt^2+2)$ における P の接線を L とする．

$y=kx^2+2$ のとき，$y'=2kx$ であるから，L の方程式は，

$$y=2kt(x-t)+kt^2+2.$$

L の傾きが 1 となるのは，$2kt=1$ より，

$$t=\frac{1}{2k}$$

のときであり，このとき，

$$L: y=x-\frac{1}{4k}+2.$$

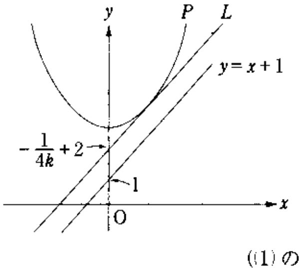
よって，y 切片に注目すると，P が直線 $y=x+1$ と共有点をもたない条件は，

$$-\frac{1}{4k}+2>1.$$

$k>0$ のもとでこれを解くと，

$$1>\frac{1}{4k}.$$

$$k>\frac{1}{4}.$$



((1) の別解終り)

(2)(i)

> 中心 $(a,\ b)$，半径 $r\ (>0)$ の円の方程式は，
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
>
> **円の方程式**

を用いると，円 $C_a: (x-a)^2+(y-a+1)^2=1$ は，中心 $(a,\ a-1)$，半径 1 の円であることがわかる．

そこで，C_a の中心を $(X,\ Y)$ とおくと，

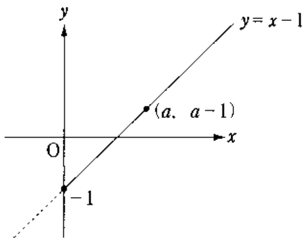
$$X=a,\quad Y=a-1.$$

ここから，a を消去すると，

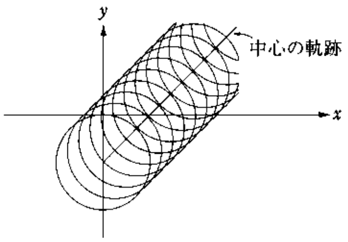
$$Y=X-1$$

となり，C_a の中心は直線 $y=x-1$ 上にあることがわかる．

あとは，$a \geqq 0$ から $X \geqq 0$ となり，C_a の中心の軌跡は半直線 $y=x-1$ $(x \geqq 0)$ となる．



(ii) 中心$(a,\ a-1)$の動きに従って C_a を動かすと，半径が1(一定)であることから，領域 K を求めることができる．



【解答】のように，点$(0,\ 1)$を通り傾き m の直線を l とする．

l と P が共有点をもたない条件は，①，⑦から y を消去した x の方程式

$$kx^2-mx+1=0 \qquad \cdots⑧$$

が実数解をもたないことである．この条件は，(1)と同様にして，

$$-2\sqrt{k}<m<2\sqrt{k} \qquad \cdots⑨$$

となる．

次に，l と K が共有点をもたない条件について考える．

$m<1$ とすると，l は K と $x \geqq 0$ の範囲において共有点をもつから，

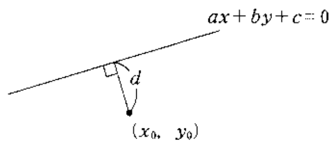
$$m \geqq 1 \qquad \cdots⑩$$

であることが必要である．

⑩は l の $x \geqq 0$ の部分と K が共有点をもたないことと同値である．

⑩のもとで l と K が共有点をもたないのは，l と C_0 が共有点をもたないときである．

l と C_0 が共有点をもたない条件は，



点$(x_0,\ y_0)$と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は，

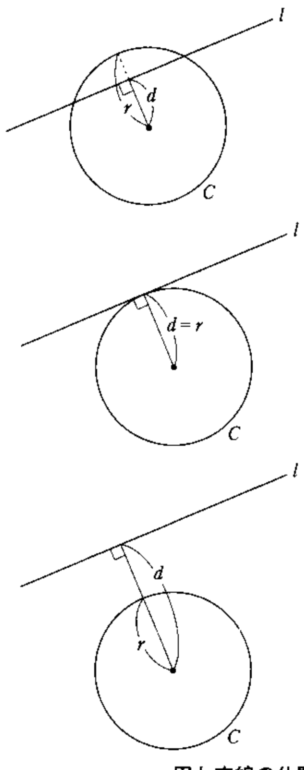
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

点と直線の距離の公式

を用いて C_0 の中心$(0,\ -1)$と l の距離を求め，

円 C と直線 l について，C の半径を r，C の中心と l の距離を d とすると，

- $d<r$ のとき，C と l は異なる2点で交わる，
- $d=r$ のとき，C と l は接する，
- $d>r$ のとき，C と l は共有点をもたない



円と直線の位置関係

に従って，

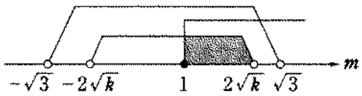
$$\frac{|m\cdot 0-(-1)+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1,$$

すなわち，

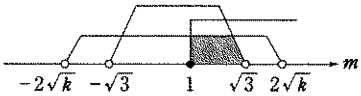
$$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3} \qquad \cdots⑪$$

となる．

あとは $2\sqrt{k}$ と $\sqrt{3}$ の大小で場合分けをして，⑨ かつ ⑩ かつ ⑪ から m の値の範囲を求めればよい．



($2\sqrt{k}<\sqrt{3}$ のとき)



($2\sqrt{k}\geqq\sqrt{3}$ のとき)

4 数　列

【Ⅲ型　必須問題】

（配点　40点）

> 数列 $\{a_n\}$ が，
> $$\begin{cases} a_1=1, \\ a_{n+1}=2a_n+n^2+(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$
> で与えられている．a_n を 4 で割ったときの余りを b_n とする．
>
> (1)　a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．
>
> (2)　一般項 b_{2m-1}，b_{2m} $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をそれぞれ推定し，それらが正しいことを数学的帰納法を用いて示せ．
>
> (3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が 4 で割り切れるための n の条件を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

【配点】

(1)　6 点．

(2)　20 点．

(3)　14 点．

【出題のねらい】

漸化式から項の値を求め，一般項を推定してそれが正しいことを数学的帰納法で証明することができるか，また，数列の各項を 4 で割った余りを利用して，数列の和を 4 で割ったときの余りについて，正しく考察することができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$a_2=2a_1+1^2+(-1)^1=\mathbf{2},$$
$$a_3=2a_2+2^2+(-1)^2=\mathbf{9},$$
$$a_4=2a_3+3^2+(-1)^3=\mathbf{26}.$$

(2)　$a_1=1$ および(1)の結果より，
$$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=1,\ b_4=2.$$
よって，$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，
$$「b_{2m-1}=1,\ b_{2m}=2」 \qquad \cdots(*)$$
と推定できる．

$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して(*)が成り立つことを数学的帰納法により示す．

［Ⅰ］　$m=1$ のとき，
$$b_1=1,\ b_2=2$$
であるから，(*)は成り立つ．

［Ⅱ］　$m=k$ のとき，(*)の成立，すなわち，
$$b_{2k-1}=1,\ b_{2k}=2$$
が成り立つと仮定する．

a_{2k} を 4 で割ったときの余りは $b_{2k}=2$ であるから，
$$a_{2k}=4A+2 \quad (A \text{ は整数})$$
と表すことができる．

これより，
$$\begin{aligned} a_{2k+1}&=2a_{2k}+(2k)^2+(-1)^{2k} \\ &=2(4A+2)+4k^2+1 \\ &=4(2A+k^2+1)+1. \end{aligned}$$
$2A+k^2+1$ は整数であるから，a_{2k+1} を 4 で割ったときの余りは 1 である．

また，
$$\begin{aligned} a_{2k+2}&=2a_{2k+1}+(2k+1)^2+(-1)^{2k+1} \\ &=2\{4(2A+k^2+1)+1\}+(4k^2+4k+1)-1 \\ &=4(4A+3k^2+k+2)+2. \end{aligned}$$
$4A+3k^2+k+2$ は整数であるから，a_{2k+2} を 4 で割ったときの余りは 2 である．

よって，
$$b_{2(k+1)-1}=b_{2k+1}=1,\ b_{2(k+1)}=b_{2k+2}=2$$
であるから，$m=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

以上［Ⅰ］，［Ⅱ］より，$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して(*)は成り立つ．

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおく．

$S_n-T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$ は 4 の倍数であるから，S_n が 4 で割り切れることと T_n が 4 で割り切れることは同値である．

(2)より，
$$T_n=\begin{cases} 1+2+1+2+\cdots+1+2 & (n \text{ が偶数のとき}), \\ 1+2+1+2+\cdots+1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 3\cdot\dfrac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}), \\ 3\cdot\dfrac{n-1}{2}+1=\dfrac{3n-1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

(i)　n が偶数のとき．

$T_n=3\cdot\dfrac{n}{2}$ が 4 の倍数となる条件は，$\dfrac{n}{2}$ が 4 の倍数となること，すなわち n が 8 の倍数となることである．

(ii) n が奇数のとき．

$T_n=3\cdot\dfrac{n-3}{2}+4$ が 4 の倍数となる条件は，

$\dfrac{n-3}{2}$ が 4 の倍数となること，すなわち n が 8 で割って 3 余る整数となることである．

以上(i)，(ii)より，求める n の条件は，

n を 8 で割ったときの余りが 0 または 3 であること

である．

【解説】 問題

(1) 2 項間漸化式

$$a_{n+1}=2a_n+n^2+(-1)^n$$

を用いれば，a_n の値が定まるとき a_{n+1} の値を定めることができる．

本問では，$a_1=1$ が与えられているので，漸化式に $n=1$，2，3 を順次代入することで，a_2，a_3，a_4 の値が得られる．

(2) a_1，a_2，a_3，a_4 の値が得られたので，これらを 4 で割ったときの余りを求めることで，b_1，b_2，b_3，b_4 の値が得られ，順に 1，2，1，2 となることがわかる．

このことから，**【解答】**では，

「$b_{2m-1}=1$，$b_{2m}=2$」 …(*)

と推定し，すべての自然数 m に対して(*)が成り立つことを，数学的帰納法により示した．

一般に，数学的帰納法は次のように用いるのが基本である．

> 自然数 n についての命題 $P(n)$ を証明するには，次の 2 つのことを示せばよい．
> [Ⅰ] $P(1)$ が成り立つ．
> [Ⅱ] $P(k)$ $(k\geqq1)$ が成り立つと仮定すれば，$P(k+1)$ が成り立つ．
>
> **数学的帰納法**

本問では，証明すべき命題(*)が 2 つの内容を含むので，

「$m=k$ のとき(*)が成り立つこと，
すなわち，$b_{2k-1}=1$，$b_{2k}=2$」

を仮定して，

「$m=k+1$ のとき(*)が成り立つこと，
すなわち，$b_{2(k+1)-1}=1$，$b_{2(k+1)}=2$」

を示した．

その際，a_{n+1} が a_n から定まることに着目して，$b_{2(k+1)-1}$ については b_{2k} の値をもとに考察し，$b_{2(k+1)}$ については $b_{2(k+1)-1}$ の値をもとに考察した．

(3) b_n は a_n を 4 で割ったときの余りであるから，a_n-b_n は 4 の倍数であり，$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$ であるから $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$ も 4 の倍数である．

よって，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ を 4 で割ったときの余りと，$\sum_{k=1}^{n}b_k$ を 4 で割ったときの余りは一致するから，すでに一般項がわかっている数列 $\{b_n\}$ を用いて，$\sum_{k=1}^{n}b_k$ が 4 で割り切れる条件を求めればよい．

【解答】では，$\sum_{k=1}^{n}b_k$ が n の偶奇に応じて異なる n の式で表されることから，n が偶数のときと奇数のときのそれぞれについて，$\sum_{k=1}^{n}b_k$ が 4 で割り切れるための条件を求めた．

数列 $\{b_n\}$ が 1，2 の繰り返しからなることを利用し，次のように解答してもよい．

((3) の別解)

a_n を 4 で割ったときの余りが b_n であるから，

$$a_n=4N_n+b_n \quad (N_n \text{ は整数})$$

と表すことができる．

これより，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=4\sum_{k=1}^{n}N_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

が成り立つから，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ が 4 で割り切れるための条件は $\sum_{k=1}^{n}b_k$ が 4 で割り切れることである．

(2)の結果より，$\{b_n\}$ は，

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

のように，1，2 が周期 2 で繰り返し並ぶ．

ここで，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおいて，$n=1$，2，3，… に対して T_n を 4 で割ったときの余りを調べると次のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
T_n	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15
T_n を 4 で割った余り	1	3	0	2	3	1	2	0	1	3

またこのとき，

$$T_{n+8}-T_n=4\cdot(1+2)=4\cdot3$$

が成り立つので，T_n を 4 で割ったときの余りと T_{n+8} を 4 で割ったときの余りは一致する．

よって，T_n を 4 で割ったときの余りは

$$1,\ 3,\ 0,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 0$$

が周期 8 で繰り返し並ぶ.

以上より，求める n の条件は,

n を 8 で割ったときの余りが 0 または 3 であることである.

((3)の別解終り)

5 整 数

【Ⅲ型 選択問題】

(配点 40点)

(1) 整数 p, q, r に対して,

$$a=3p,\quad b=3q+1,\quad c=3r+2$$

とおく.

(i) a^3, b^3, c^3 を 9 で割ったときの余りをそれぞれ求めよ.

(ii) a^9, b^9, c^9 を 9 で割ったときの余りをそれぞれ求めよ.

(2) 整数 x, y, z に対して,

$$K=(x-y)(y-z)(z-x),\quad L=x^9-8y^9+z^9$$

とおく. K が 3 で割り切れないならば, L は 9 で割り切れることを示せ.

【配点】

(1) 21 点.

(i) 9 点. (ii) 12 点.

(2) 19 点.

【出題のねらい】

整数の剰余に関する基本的な力を問うとともに余りの組合せを考えるなどして，ある整数が特定の整数で割り切れる条件を求めるなど，幅広い応用力をみる問題である.

【解答】 Ⅱ型 5【解答】参照.

【解説】 Ⅱ型 5【解説】参照.

問題

6 積分法

【Ⅲ型 選択問題】

(配点 40点)

関数 $f(x)=-x\log x\ (x>0)$ に対して $y=f(x)$ のグラフを C とする.

(1) $f(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，C の概形をかけ. 必要ならば, $\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてよい.

(2) 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めよ.

(3) $f(0)=0$ と定め, xy 平面上において不等式 $0\leqq y\leqq f(x)$ で表される領域を D とする. また, $a>0$ とし, 2 直線 $y=ax$, $y=2ax$ と C の交点をそれぞれ A, B とする.

・D のうち, A を通り x 軸に垂直な直線と, B を通り x 軸に垂直な直線の間にある部分の面積を $S(a)$,

・D のうち, 不等式 $ax\leqq y\leqq 2ax$ を満たす部分の面積を $T(a)$

とする.

(i) $S(a)$ を求めよ.

(ii) a が $a>0$ を満たして変化するときの $T(a)$ の最大値, および, そのときの a の値を求めよ.

【配点】

(1) 10 点.

(2) 6 点.

(3) 24 点.

(i) 10 点. (ii) 14 点.

【出題のねらい】

導関数を利用して，関数の増減，グラフの凹凸を調べることができるか，また，部分積分法を用いて不定積分を求めることができるか，グラフの位置関係を把握し，定積分を用いて面積を求め，さらにその最大値を求めることができるかをみる問題である.

【解答】

(1) $f(x)$ の定義域は,

$$x>0.$$

$f(x)=-x\log x$ に対して,

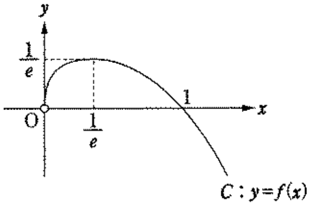
$$f'(x)=-\log x+(-x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=-\log x-1,$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x}$$

となるから, $f(x)$ の増減とグラフの凹凸は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f''(x)$		−	−	−
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

$$\lim_{x\to+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

となるから，C の概形は次のようになる．



(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int(-x\log x)\,dx$

$$=\int\left(-\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\log x-\int\left(-\frac{1}{2}x^2\right)(\log x)'\,dx$$

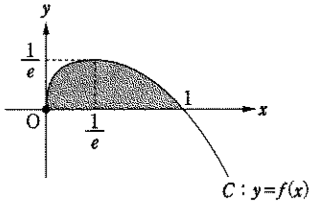
$$=-\frac{1}{2}x^2\log x-\int\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2+C.$$

（C は積分定数）

(3) D は次図の網掛け部分である（境界は含む）．



また，$x>0$ において，方程式 $f(x)=ax$ を解くと，

$$-x\log x=ax.$$

$$\log x=-a.$$

$$x=e^{-a}.$$

同様に，$x>0$ において，方程式 $f(x)=2ax$ を解くと，

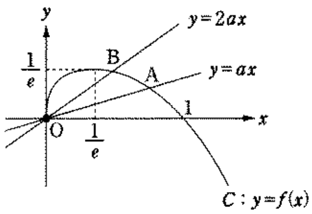
$$-x\log x=2ax.$$

$$\log x=-2a.$$

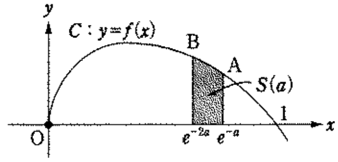
$$x=e^{-2a}.$$

よって，

$$\mathrm{A}(e^{-a},\ ae^{-a}),\ \mathrm{B}(e^{-2a},\ 2ae^{-2a}).$$



(i) $a>0$ より，$0<e^{-2a}<e^{-a}<1$ であるから，$S(a)$ は次図の網掛け部分の面積である．

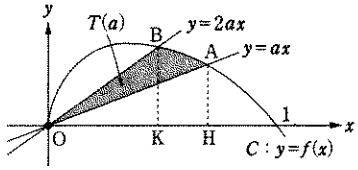


$$S(a)=\int_{e^{-2a}}^{e^{-a}} f(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2(1-2\log x)\right]_{e^{-2a}}^{e^{-a}}\quad ((2)\text{ より})$$

$$=\frac{1}{4}\{e^{-2a}(1+2a)-e^{-4a}(1+4a)\}.$$

(ii) $T(a)$ は次図の網掛け部分の面積である．



$\mathrm{H}(e^{-a},\ 0)$，$\mathrm{K}(e^{-2a},\ 0)$ とおく．

$$T(a)=S(a)+\triangle\mathrm{OKB}-\triangle\mathrm{OHA}$$

$$=\frac{1}{4}\{e^{-2a}(1+2a)-e^{-4a}(1+4a)\}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot e^{-2a}\cdot 2ae^{-2a}-\frac{1}{2}\cdot e^{-a}\cdot ae^{-a}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-2a}-e^{-4a})$$

となり，

$$T'(a)=\frac{1}{4}(-2e^{-2a}+4e^{-4a})$$

$$=\frac{1}{2e^{4a}}(\sqrt{2}+e^a)(\sqrt{2}-e^a).$$

よって，$a>0$ における $T(a)$ の増減は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log 2$	$\cdots$
$T'(a)$		$+$	0	$-$
$T(a)$		↗	極大	↘

以上より，$T(a)$ は

$$a=\frac{1}{2}\log 2$$

のとき最大となり，

$$\text{最大値 } T\left(\frac{1}{2}\log 2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{16}.$$

【解説】 問題

(1) $f(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べるには，$f'(x)$ および $f''(x)$ の符号を考えればよい．

$$\{F(x)G(x)\}'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$$

積の微分法

を用いることで，$f(x)$の導関数を求めることができる．

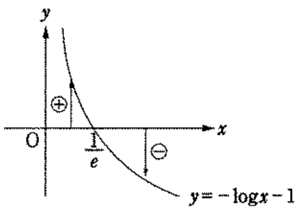
$f'(x)=-\log x-1$ となるから，

$$\begin{cases} 0<x<\dfrac{1}{e} \text{ のとき } f'(x)>0, \\ \dfrac{1}{e}<x \text{ のとき } f'(x)<0 \end{cases}$$

となり，これより，

$$\begin{cases} 0<x<\dfrac{1}{e} \text{ において } f(x) \text{ は増加し，} \\ \dfrac{1}{e}<x \text{ において } f(x) \text{ は減少する} \end{cases}$$

ことがわかる．



また，$f(x)$の第2次導関数の符号を調べることで，曲線 $y=f(x)$の凹凸を調べることができる．

$f'(x)=-\log x-1$ より，

$$f''(x)=-\frac{1}{x}$$

となるから，$x>0$ において $f''(x)<0$ となる．

$f''(x)>0$ となる（x の）区間で，
曲線 $y=f(x)$ は下に凸，
$f''(x)<0$ となる（x の）区間で，
曲線 $y=f(x)$ は上に凸

曲線の凹凸

であるから，曲線 $y=-x\log x$ は $x>0$ において上に凸となる．

あとは，$x\to+0$ および $x\to+\infty$ のときの C の様子や，C と x 軸の交点などに着目して，グラフの概形をかけばよい．

(2)　2つの関数の積で表された関数の不定積分を求めるには，

$$\int F'(x)G(x)\,dx=F(x)G(x)-\int F(x)G'(x)\,dx$$

部分積分法

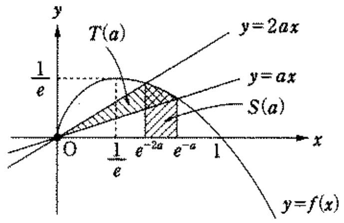
が有効なことが多い．本問では，上の公式において，

$$F'(x)=-x,\quad G(x)=\log x$$

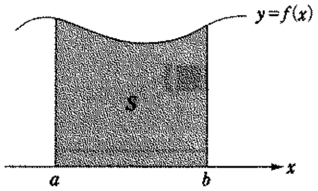
として，不定積分 $\displaystyle\int(-x\log x)\,dx$ を求めた．

(3)　いくつかの図形で囲まれる部分の面積を考える際には，座標平面上でのグラフの位置関係が重要となる．

$y=f(x)$ と2直線 $y=ax$，$y=2ax$ の交点や曲線 $y=f(x)$の凹凸，また $0<a<2a$ であることなどに注意してグラフの概形をかくと次のようになる．



(i)



$f(x)>0$ $(a\leqq x\leqq b)$のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積を S とすると，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

定積分と面積

を用いて，$S(a)$を立式し，定積分を求めればよい．

(ii)　**【解答】**では，(i)で求めた $S(a)$と2つの三角形の面積を組み合わせることで，$T(a)$を求めた．

直接計算を行うことで，$T(a)$を求めることもできる．

((3)(ii)の $T(a)$を求める別解)

$$T(a)=\int_0^{e^{-2a}}(2ax-ax)\,dx+\int_{e^{-2a}}^{e^{-a}}\{f(x)-ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{e^{-2a}}+\left[-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}ax^2\right]_{e^{-2a}}^{e^{-a}}$$

$$=\frac{1}{2}ae^{-4a}+\left(\frac{1}{2}ae^{-2a}+\frac{1}{4}e^{-2a}-\frac{1}{2}ae^{-2a}\right)$$

$$-\left(ae^{-4a}+\frac{1}{4}e^{-4a}-\frac{1}{2}ae^{-4a}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-2a}-e^{-4a}).$$

((3)(ii)の $T(a)$を求める別解終り)

【解答】では，$T(a)$を a を用いて表したあと，$T(a)$を a の関数と考えて導関数 $T'(a)$を求め，$T(a)$の増減を調べて，$T(a)$の最大値とそのときの a の値を求めた．

$T(a)=\frac{1}{4}(e^{-2a}-e^{-4a})$ を導いたあとは，次のように解答することもできる．

((3)(ii)の $T(a)$ の最大値を求める別解)

$e^{-2a}=t$ とおくと，$a>0$ のとき $0<t<1$ であり，

$$T(a)=\frac{1}{4}(t-t^2)$$
$$=-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}.$$

よって，$T(a)$ は $t=\frac{1}{2}$ すなわち $a=\frac{1}{2}\log 2$ のとき最大となり，

$$\text{最大値は }\frac{1}{16}.$$

((3)(ii)の $T(a)$ の最大値を求める別解終り)

7 式と曲線

【Ⅲ型　選択問題】

(配点　40点)

> Oを原点とする xy 平面上に双曲線
>
> $$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3^2}=1 \quad (a\text{ は正の定数})$$
>
> があり，C の焦点の座標は $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ である．C の第1象限の部分に点Pをとる．Pにおける C の接線を l とし，C の2本の漸近線と l の交点をQ，Rとする．ただし，Qの y 座標はRの y 座標より大きいものとする．
>
> (1) a の値を求めよ．
>
> (2) (1)で求めた a の値に対してPの座標を $(as,\ 3t)$ $(s>0,\ t>0)$ とおくとき，Q，Rそれぞれの座標を s，t を用いて表せ．
>
> (3) A$(8,\ 3)$ とする．Pが C 上の第1象限の部分を動くとき，四角形OQARの面積の最小値を求めよ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 10点．

(3) 20点．

【出題のねらい】

双曲線の焦点，漸近線などの基本公式や，図形量の最小値を求める手法が身についているかをみる問題である．

【解答】

(1) 焦点の座標が $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ であることから，

$$a^2+3^2=5^2 \text{ より，} a^2=16.$$

$a>0$ に注意すると，

$$a=4.$$

(2) (1)より，C の方程式は，

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$$

であるから，C の漸近線の方程式は，

$$y=\pm\frac{3}{4}x. \qquad \cdots①$$

また，P$(4s,\ 3t)$ は C 上の点であるから，

$$\frac{(4s)^2}{4^2}-\frac{(3t)^2}{3^2}=1$$

より，s，t は

$$s^2-t^2=1 \qquad \cdots②$$

を満たす．これを

$$(s-t)(s+t)=1$$

と変形し，$s>0$，$t>0$ に注意すると，

$$s-t>0 \qquad \cdots③$$

が成り立つ．

一方，Pにおける C の接線 l の方程式は，

$$\frac{4sx}{4^2}-\frac{3ty}{3^2}=1,$$

すなわち，

$$l:\frac{sx}{4}-\frac{ty}{3}=1. \qquad \cdots④$$

①，④を連立して y を消去すると，

$$(s\mp t)x=4$$

となるから，③より，Q，Rの x 座標は，

$$x=\frac{4}{s\mp t}.$$

これより，Q，Rの y 座標は，

$$y=\pm\frac{3}{4}x=\frac{\pm 3}{s\mp t}. \quad (\text{以上すべて，複号同順})$$

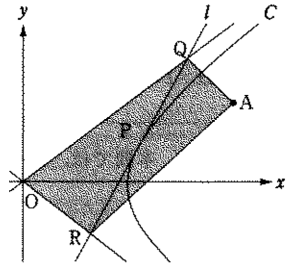
よって，③より，

$$-\frac{3}{s+t}<0<\frac{3}{s-t}$$

であるから，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{4}{s-t},\ \frac{3}{s-t}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{4}{s+t},\ -\frac{3}{s+t}\right).$$

(3) 四角形OQARは次図の網掛け部分になる．



(2)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{s-t}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{s+t}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OQR}&=\frac{1}{2}\left|\frac{4}{s-t}\cdot\left(\frac{-3}{s+t}\right)-\frac{3}{s-t}\cdot\frac{4}{s+t}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\frac{-24}{s^2-t^2}\right|\\&=12.\quad(②より)\end{aligned}$$

また,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\begin{pmatrix}\frac{4}{s-t}-8\\\frac{3}{s-t}-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\begin{pmatrix}\frac{4}{s+t}-8\\-\frac{3}{s+t}-3\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{AQR}\\&=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{4}{s-t}-8\right)\left(-\frac{3}{s+t}-3\right)-\left(\frac{3}{s-t}-3\right)\left(\frac{4}{s+t}-8\right)\right|\\&=\frac{1}{2|s^2-t^2|}|-24+12(s+t)+36(s-t)|\\&=12|2s-t-1|.\quad(②より)\end{aligned}$$

O, A は l に関して反対側にあるので,

$$\begin{aligned}(四角形\mathrm{OQAR}の面積)&=\triangle\mathrm{OQR}+\triangle\mathrm{AQR}\\&=12+12|2s-t-1|.\end{aligned}$$

ここで, s, t が,

$$s>0,\ t>0,\ s^2-t^2=1$$

を満たしながら動くときの $|2s-t-1|$ の最小値を求める.

$$s=\sqrt{t^2+1},\ t>0$$

であるから,

$$|2s-t-1|=|2\sqrt{t^2+1}-t-1|.$$

$f(t)=2\sqrt{t^2+1}-t-1$ とおくと,

$$\begin{aligned}f'(t)&=2\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}-1\\&=\frac{2t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\frac{3t^2-1}{\sqrt{t^2+1}(2t+\sqrt{t^2+1})}.\end{aligned}$$

これより, $t>0$ における $f(t)$ の増減は次のようになる.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(1)	↘	$\sqrt{3}-1$	↗

$f(t)$ は, $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ において最小値 $\sqrt{3}-1$ をとる.

よって, $|2s-t-1|$ の最小値は $\sqrt{3}-1$ である.

以上より, 四角形 OQAR の面積の最小値は,

$$12+12(\sqrt{3}-1)=\mathbf{12\sqrt{3}}.$$

【解説】 問題

(1) 双曲線 C の焦点の座標が与えられているから,

> 双曲線
> $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$$
> の焦点の座標は,
> $$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$
> **双曲線の焦点の座標**

を用いれば,

$$a^2+3^2=5^2$$

が成り立つ. ここから a を求めることができる.

(2)

> 双曲線
> $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$$
> の漸近線の方程式は,
> $$y=\frac{b}{a}x\ および\ y=-\frac{b}{a}x$$
> **双曲線の漸近線の方程式**

を用いることで, C の漸近線を求めることができる. 本問では, $a=4$, $b=3$ とすればよい.

また, 双曲線 C 上の点 P における C の接線については,

> 双曲線
> $$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$$
> 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線の方程式は,
> $$\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$
> **双曲線の接線の方程式**

が成り立つ.

本問においては,

$$a=4,\ b=3,\ p=4s,\ q=3t$$

とすればよい.

この公式を用いずに接線の方程式を求めることもできる.

((2) の部分的別解 1)

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$$

の両辺を x で微分すると,

$$\frac{x}{8}-\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

これより, $y\neq0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{9x}{16y}.$$

よって，P$(4s,\ 3t)$における C の接線の傾きは，

$$\frac{9\cdot 4s}{16\cdot 3t}=\frac{3s}{4t}$$

であるから，接線 l の方程式は，

$$y=\frac{3s}{4t}(x-4s)+3t,$$

すなわち，

$$l:\frac{3s}{4t}x-y=\frac{3(s^2-t^2)}{t}$$

となるが，② を用いると，

$$l:\frac{sx}{4}-\frac{ty}{3}=1.$$

((2) の部分的別解 1 終り)

あるいは，判別式を用いて次のように求めることもできる．

((2) の部分的別解 2)

直線 l は，P$(4s,\ 3t)$において C と接するから，$t>0$ より y 軸に平行ではない．

よって，傾きを k として，

$$l: y=k(x-4s)+3t=kx-4sk+3t$$

とおける．これを $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$，すなわち

$$9x^2-16y^2=9\cdot 16$$

と連立して y を消去すると，

$$9x^2-16(kx-4sk+3t)^2=9\cdot 16.$$
$$9x^2-16\{k^2x^2+2(-4sk+3t)kx+(-4sk+3t)^2\}=9\cdot 16.$$
$$(9-16k^2)x^2-32(-4sk+3t)kx-16\{(-4sk+3t)^2+9\}=0. \quad \cdots(*)$$

l は漸近線と平行にならないから，

$$k\neq\pm\frac{3}{4},\ \text{すなわち}\ 9-16k^2\neq 0.$$

よって，(*) は x の 2 次方程式であり，l と C が接することより，(*) の判別式を D とすると，$D=0$ となる．

よって，

$$\frac{D}{4}=16^2(-4sk+3t)^2k^2+16(9-16k^2)\{(-4sk+3t)^2+9\}$$

より，

$$16(-4sk+3t)^2k^2+(9-16k^2)(-4sk+3t)^2+9(9-16k^2)=0.$$
$$(-4sk+3t)^2+9-16k^2=0.$$
$$16(s^2-1)k^2-24stk+9(t^2+1)=0.$$

ここで，② より，

$$s^2-1=t^2,\quad t^2+1=s^2$$

であるから，

$$16t^2k^2-24stk+9s^2=0.$$
$$(4tk-3s)^2=0.$$
$$k=\frac{3s}{4t}.$$

したがって，

$$l: y=\frac{3s}{4t}(x-4s)+3t$$

となり，これを変形して ② を用いれば，

$$l:\frac{sx}{4}-\frac{ty}{3}=1.$$

((2) の部分的別解 2 終り)

漸近線 $y=\pm\frac{3}{4}x$ と l の方程式を求めたあとは，これらを連立して解くことにより，Q，R の座標を求めることができる．ただし，分母に $s+t$ や $s-t$ が現れることには注意を要する．

$s>0$，$t>0$ であるから，$s+t>0$ はすぐにわかるが，$s-t\neq 0$ を保証するために，

$$s^2-t^2=1 \qquad \cdots②$$

を用いた．

(3) A$(8,\ 3)$は，

$$\frac{8^2}{4^2}-\frac{3^2}{3^2}>1$$

を満たすことから，A と O は l に関して反対側にあることがわかる．したがって，四角形 OQAR の概形は**【解答】**の図のようになり，

(四角形 OQAR の面積)＝△OQR＋△AQR

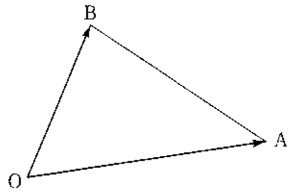
が成り立つ．あとは，三角形 OQR と三角形 AQR の面積を s，t で表せばよい．ここで，次の公式を用いた．

三角形 OAB において，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

のとき，三角形 OAB の面積は，

$$\frac{1}{2}|ad-bc|.$$



2 つのベクトルでつくる三角形の面積

（証明）

$\angle \mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2(1-\cos^2\theta)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2c^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}\\&=\frac{1}{2}|ad-bc|.\end{aligned}$$

（証明終り）

上記の公式を用いずに解くこともできる．

（四角形 OQAR の面積を求める別解）

線分 QR の長さは，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\sqrt{\left(\frac{4}{s-t}-\frac{4}{s+t}\right)^2+\left(\frac{3}{s-t}-\frac{3}{s+t}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{64t^2}{(s^2-t^2)^2}+\frac{36s^2}{(s^2-t^2)^2}}\\&=2\sqrt{16t^2+9s^2}.\ (s^2-t^2=1\text{ より})\end{aligned}$$

直線 l：$3sx-4ty-12=0$ と原点の距離 d_1 は，

$$d_1=\frac{|-12|}{\sqrt{9s^2+16t^2}}=\frac{12}{\sqrt{9s^2+16t^2}}.$$

l と A(8, 3) の距離 d_2 は，

$$d_2=\frac{|3s\cdot8-4t\cdot3-12|}{\sqrt{9s^2+16t^2}}=\frac{12|2s-t-1|}{\sqrt{9s^2+16t^2}}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot d_1\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{16t^2+9s^2}\cdot\frac{12}{\sqrt{9s^2+16t^2}}\\&=12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{AQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot d_2\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{16t^2+9s^2}\cdot\frac{12|2s-t-1|}{\sqrt{9s^2+16t^2}}\\&=12|2s-t-1|.\end{aligned}$$

以上より，四角形 OQAR の面積は，

$$12+12|2s-t-1|.$$

（四角形 OQAR の面積を求める別解終り）

（四角形 OQAR の面積）$=12+12|2s-t-1|$ を得たあとは

$$s>0,\ t>0,\ s^2-t^2=1$$

という条件下で，

$$|2s-t-1|$$

の最小値を求めればよい．

【解答】では，s を消去して t だけの関数としたあと，微分法を用いて関数の増減を調べた．

【解答】の方針とは別に，最小値を求める部分を，図形的に考えることもできる．

（$|2s-t-1|$ の最小値を求める別解）

条件

$$s>0,\ t>0,\ s^2-t^2=1 \qquad \cdots(ア)$$

のもとで

$$2s-t-1=k \qquad \cdots(イ)$$

とおくと，k のとり得る値の範囲は，(ア)と(イ)を同時に満たす実数 s，t が存在するための条件として得られる．

st 平面において，(ア)は双曲線の第1象限の部分を表し，(イ)は直線を表すから，これらが少なくとも1つの共有点をもつ条件を求めればよい．

(イ)で表される直線は，

$$t=2s-k-1$$

と変形できるから，傾きが2で t 切片が $-k-1$ である．

この直線が双曲線 $s^2-t^2=1$ と第1象限において接するときの接点の座標を，

$$(p,\ q)\ (p>0,\ q>0)$$

とおくと，接線の方程式は，

$$ps-qt=1,\ \text{すなわち}\ t=\frac{p}{q}s-\frac{1}{q}$$

であるから，その傾きが2であることより，

$$\frac{p}{q}=2.$$

また，$(p,\ q)$ が $s^2-t^2=1$ 上にあることより，

$$p^2-q^2=1.$$

これらより，

$$p=\frac{2}{\sqrt{3}},\ q=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

を得る．したがって，直線 $t=2s-k-1$ が $s^2-t^2=1$ と接するとき，

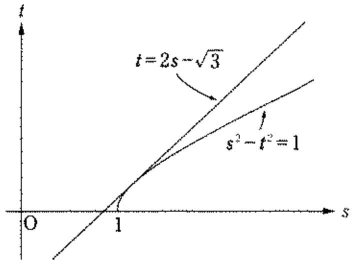
$$\frac{1}{\sqrt{3}}=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-k-1$$

より，

$$k=\sqrt{3}-1.$$

よって，次図より，k のとり得る値の範囲は，

$$k\geqq\sqrt{3}-1.$$



したがって，$|2s-t-1|$，すなわち $|k|$ の最小値は，

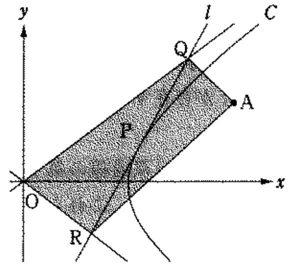
$$\sqrt{3}-1.$$

（$|2s-t-1|$ の最小値を求める別解終り）

(3) については，次のように解答することもできる．

〔(3) の別解 1〕

四角形 OQAR は次図の網掛け部分になる．



② より

$$(s-t)(s+t)=1$$

が成り立つから，(2) の結果より，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{s-t}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=(s+t)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{s+t}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=(s-t)\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}.$$

ここで，

$$u=s-t,\ v=s+t$$

とおくと，

$$u>0,\ v>0,\ uv=1 \qquad \cdots ⑤$$

であり，

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}4v\\3v\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}4u\\-3u\end{pmatrix}.$$

これより，

$$\triangle OQR=\frac{1}{2}|4v(-3u)-3v(4u)|$$
$$=12uv$$
$$=12.$$

また，

$$\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}4v-8\\3v-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AR}=\begin{pmatrix}4u-8\\-3u-3\end{pmatrix}$$

より，

$$\triangle AQR=\frac{1}{2}|(4v-8)(-3u-3)-(3v-3)(4u-8)|$$
$$=6|3u+v-2uv|$$
$$=6\left|3u+\frac{1}{u}-2\right| \ (⑤ より). \qquad \cdots ⑥$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係式から，

$$3u+\frac{1}{u}\geqq 2\sqrt{3u\cdot\frac{1}{u}}=2\sqrt{3}.$$

等号が成立するのは $3u=\frac{1}{u}$ かつ $u>0$ より，

$$u=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

このとき，$v=\sqrt{3}$ となるから，

$$s+t=\sqrt{3},\ s-t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

より，

$$s=\frac{2}{\sqrt{3}},\ t=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

よって，⑥ より，

$$\triangle AQR=6\left|3u+\frac{1}{u}-2\right|$$
$$\geqq 6|2\sqrt{3}-2|$$
$$=12(\sqrt{3}-1).$$

したがって，

$$(\text{四角形 OQAR の面積})=\triangle OQR+\triangle AQR$$
$$\geqq 12+12(\sqrt{3}-1)$$
$$=12\sqrt{3}$$

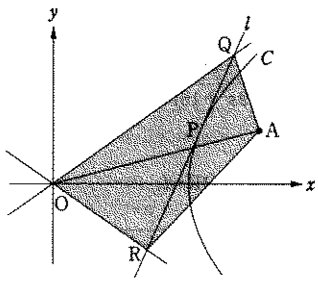
より，求める面積の最小値は，

$$12\sqrt{3}.$$

（(3) の別解 1 終り）

〔(3) の別解 2〕

四角形 OQAR は次図の網掛け部分になる．



(2) の結果から，

$$(\text{四角形 OQAR の面積})=\triangle OAQ+\triangle OAR$$
$$=\frac{1}{2}\left|8\cdot\frac{3}{s-t}-3\cdot\frac{4}{s-t}\right|$$
$$+\frac{1}{2}\left|8\cdot\left(-\frac{3}{s+t}\right)-3\cdot\frac{4}{s+t}\right|$$
$$=\left|\frac{6}{s-t}\right|+\left|\frac{18}{s+t}\right|.$$

ここで，② および $s>0$，$t>0$ より，

$$s+t>0 \text{ かつ } s-t>0$$

であるから，

$$(\text{四角形 OQAR の面積})=\frac{6}{s-t}+\frac{18}{s+t}.$$

このとき，相加平均と相乗平均の関係式から

$$\frac{6}{s-t}+\frac{18}{s+t} \geqq 2\sqrt{\frac{6}{s-t}\cdot\frac{18}{s+t}}$$
$$=2\cdot 6\cdot\sqrt{\frac{3}{s^2-t^2}}$$
$$=12\sqrt{3}.\ (s^2-t^2=1 \text{ より})$$

等号が成立するのは

$$\frac{6}{s-t}=\frac{18}{s+t} \text{ かつ } s^2-t^2=1 \text{ かつ } s>0 \text{ かつ } t>0$$

より，

$$s=\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad t=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

のとき．

よって，求める面積の最小値は

$$12\sqrt{3}.$$

((3)の別解2終り)

【理　　科】

物　　理

1　鉛直面内の円運動

【解答】

問1	(1) $\sqrt{2gl}$ 〔m/s〕	(2) $3Mg$〔N〕	問2	$v_1=\sqrt{2gl}$〔m/s〕	
問3	(1) $\sqrt{v_0^2-2gl(1-\cos\theta)}$〔m/s〕	(2) $\dfrac{mv_0^2}{l}+mg(3\cos\theta-2)$〔N〕	(3) 0〔N〕		
問4	$v_2=\sqrt{5gl}$〔m/s〕				
問5	(1) $(M+m)(g\sin\theta+a)$〔N〕	(2) $\sqrt{2al\theta}$〔m/s〕	(3) $\dfrac{f}{N}=\dfrac{g\sin\theta+a}{g\cos\theta+2a\theta}$		

【配点】（33点）

問1　(1)　3点　　(2)　4点

問2　3点

問3　(1)　3点　　(2)　4点　　(3)　3点

問4　4点

問5　(1)　3点　　(2)　3点　　(3)　3点

【出題のねらい】

鉛直面内の円運動に関する問題。前半は，力学的エネルギー保存則や円運動の方程式について基本的な知識，考え方を問う。**問3** (2)までは確実に解けることを期待する。後半は応用力，思考力を要する問題である。状況を把握し，力学の法則に従って考え，立式，計算できるかどうかをはかる。

【解説】　問題

問1 (1)　点Aでの速さを v_A〔m/s〕とする。力学的エネルギー保存則より，

$$Mgl=\frac{1}{2}Mv_A{}^2$$

したがって，

$$v_A=\underline{\sqrt{2gl}}\,〔m/s〕$$

(2)　点Aで板が棒から受ける力を，中心Oに向かう向きを正として S〔N〕とする。板の半径方向（点Oに向かう向き）の加速度は，$\dfrac{v_A{}^2}{l}$ である。

【ポイント】

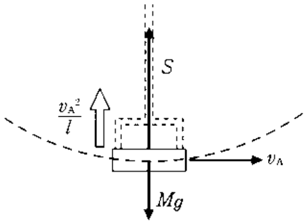
ここでは棒から受ける力は仕事をしないので，力学的エネルギーが保存する。

円運動の加速度

半径 r，速さ v で円運動する物体の半径方向の加速度（向心加速度）a は，

$$a=\frac{v^2}{r}$$

向きは，中心に向かう向き。



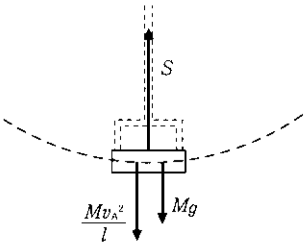
板について，半径方向の運動方程式は，

$$M\cdot\frac{v_A{}^2}{l}=S-Mg$$

v_A を代入して，

$$S=Mg+\frac{M}{l}\cdot 2gl=\underline{3Mg}\,[\mathrm{N}]$$

（別解）　板とともに円運動する観測者を考える。このとき，板に半径方向で外向きの遠心力 $\frac{Mv_A{}^2}{l}$ が現れ，半径方向の力がつり合う。



$$S=Mg+\frac{Mv_A{}^2}{l}$$

これより，

$$S=\underline{3Mg}\,[\mathrm{N}]$$

問 2　棒は変形しないので，点Cに達するには，点Cで速さが0以上であればよい。点Dで板に与える初速度が v_1（点Cに達するのに必要な最小値）のとき，点Cで板の速さがちょうど0となるので，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}Mv_1{}^2=Mgl$$

したがって，

$$v_1=\underline{\sqrt{2gl}}\,[\mathrm{m/s}]$$

問 3 (1)　求める速さを v[m/s] とする。板と小物体を一体のものとして，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}(M+m)v_0{}^2=\frac{1}{2}(M+m)v^2+(M+m)gl(1-\cos\theta)$$

したがって，

$$v=\underline{\sqrt{v_0{}^2-2gl(1-\cos\theta)}}\,[\mathrm{m/s}]$$

遠心力

円運動している観測者から見たときに現れる力。

半径 r，速さ v の円運動をしている観測者から見たとき，質量 m の物体にはたらく遠心力の大きさ F は，

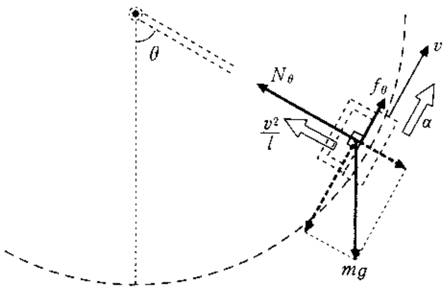
$$F=\frac{mv^2}{r}$$

向きは，半径方向外向き。円運動の向心加速度に対する慣性力である。

このとき，板が棒から受ける力は，途中で半径方向外向きとなる。棒の代わりに糸を使った場合，糸はたるんでしまう。

物理

(2) 小物体のみについて考える。



板から受ける垂直抗力の大きさを N_θ〔N〕とすると，半径方向の運動方程式は，

$$m\cdot\frac{v^2}{l}=N_\theta-mg\cos\theta$$

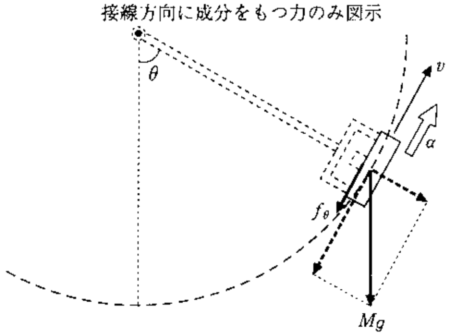
これより，

$$N_\theta=mg\cos\theta+\frac{mv^2}{l}$$

$$=\frac{mv_0{}^2}{l}+mg(3\cos\theta-2)\text{〔N〕}$$

(3) 板と小物体の間にはたらく摩擦力(静止摩擦力)の大きさを f_θ とする。板にはたらく摩擦力の向きを速度と逆向きと仮定すると，小物体にはたらく摩擦力の向きは速度の向きとなる(上図)。

接線方向に成分をもつ力のみ図示



接線方向の加速度を a〔m/s²〕とすると，板の接線方向の運動方程式は，

$$Ma=-Mg\sin\theta-f_\theta$$

小物体の接線方向の運動方程式は，

$$ma=-mg\sin\theta+f_\theta$$

これらより，

$$a=-g\sin\theta\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

$$f_\theta=\underline{0}\text{〔N〕}$$

(注) 板上で観測した場合，板の接線方向の加速度(上記の a)に対する慣性力も現れる。これも含めて，板上で小物体にはたらく力のつり合いを考えてもよい。

小物体が板から受ける力を調べるには，小物体と板を別々に考えなければならない。

板上で観測し，遠心力を含めた半径方向の力のつり合いを考えてもよい。

摩擦力の向きは仮定でよい。計算結果が負になったとき，仮定と逆向きになっている。

作用・反作用の法則により，板と小物体が及ぼし合う摩擦力は，同じ大きさで反対向き。

問 4　問 3 の N_θ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$〔rad〕の範囲で成り立つ。したがって，$\theta=\pi$ で $N_\theta \geqq 0$ であればよい。$\theta=\pi$ のとき，

$$N_\theta=\frac{mv_0^2}{l}-5mg \geqq 0$$

より，

$$v_0 \geqq \sqrt{5gl}$$

したがって，

$$v_2=\underline{\sqrt{5gl}}\text{〔m/s〕}$$

問 5 (1)　板と小物体を一体のものとして考える。外力の大きさを F〔N〕とすると，接線方向の運動方程式は，

$$(M+m)a=F-(M+m)g\sin\theta$$

これより，

$$F=\underline{(M+m)(g\sin\theta+a)}\text{〔N〕}$$

(2)　点 A からこの位置までの接線方向の変位(進んだ距離)は $l\theta$ である。この位置での速さを v'〔m/s〕とすると，等加速度運動の公式を利用して，

$$v'^2-0^2=2a(l\theta)$$

これより，

$$v'=\underline{\sqrt{2al\theta}}\text{〔m/s〕}$$

(3)　小物体について，半径方向の運動方程式は，

$$m\cdot\frac{v'^2}{l}=N-mg\cos\theta$$

これより，

$$N=m(g\cos\theta+2a\theta)$$

接線方向の運動方程式は，

$$ma=f-mg\sin\theta$$

これより，

$$f=m(g\sin\theta+a)$$

したがって，

$$\frac{f}{N}=\underline{\frac{g\sin\theta+a}{g\cos\theta+2a\theta}}$$

物体が面から離れない条件は，垂直抗力を N として(もちろん面が押す向きが正)，

$N \geqq 0$

半径 r，中心角 θ〔rad〕の扇型の弧の長さ L は，

$L=r\theta$

変位の方向(円周方向)の加速度が一定であるので，等加速度直線運動の公式が利用できる(円周を直線状に伸ばしたものと同じ)。このことに気付けたかどうか。

等加速度直線運動

加速度 a(一定)，時刻 $t=0$ での速度が v_0 のとき，時刻 t での速度を v，変位を x とすると，

$$\begin{cases} v=v_0+at \\ x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\ v^2-v_0^2=2ax \end{cases}$$

2 平行板コンデンサーの性質

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>(a) $\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$</td><td>(b) $\dfrac{\varepsilon_0 SV}{d}$</td><td>(c) $\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$</td><td>(d) $\dfrac{V}{d}$</td><td>(e) $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d$</td><td>(f) $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="6">(計算)
金属板Aが受ける静電気力の大きさ F は,
$F=\dfrac{1}{2}QE=\dfrac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}$
垂直抗力の大きさを N とすると,
力のつり合いより,
$N+F=mg$
$\therefore\quad N=mg-F=mg-\dfrac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}$
$N\geqq 0$ であればよいので,
$mg-\dfrac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\geqq 0$
したがって, $V\leqq d\sqrt{\dfrac{2mg}{\varepsilon_0 S}}$
(答) $V\leqq d\sqrt{\dfrac{2mg}{\varepsilon_0 S}}$</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">$C_a=\dfrac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}$</td><td colspan="2">$C_b=\dfrac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{(1+\varepsilon_r)d}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>問4</td><td colspan="2">(1) $-\dfrac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 SV}{d}$</td><td colspan="2">(2) $\dfrac{2\varepsilon_r V}{d}$</td><td>問5</td><td>$V\leqq\dfrac{d}{\varepsilon_r}\sqrt{\dfrac{mg}{2\varepsilon_0 S}}$</td></tr>
</table>

【配点】 (34点)

問1 (a) 2点　(b) 2点　(c) 2点　(d) 2点　(e) 3点　(f) 3点

問2 5点

問3 C_a 3点　C_b 3点

問4 (1) 3点　(2) 3点

問5 3点

【出題のねらい】

平行板コンデンサーに関する問題。**問1** (a)～(d)は基本的な知識の確認で，確実に正解しなければならない。**問1** (e)，(f)と**問2**はその応用である。**問3**以後は誘電体を入れたコンデンサーの問題で，適切な状況判断と思考力，応用力を試している。

【解説】 問題

問1 極板面積 S，極板間隔 d で，極板間が空気(誘電率 ε_0)の平行板コンデンサーの電気容量 C は，

$$C=\underline{\frac{\varepsilon_0 S}{d}}_{\text{(a)}}$$

コンデンサーに電圧 V を加えたとき，蓄えられている電気量 Q は，

$$Q=CV=\underline{\frac{\varepsilon_0 SV}{d}}_{\text{(b)}}$$

蓄えられている静電エネルギー U は，

$$U=\frac{Q^2}{2C}=\underline{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}}_{\text{(c)}}$$

極板間には一様な電場ができているので，電場の強さ E は，

$$E=\underline{\frac{V}{d}}_{\text{(d)}}$$

【ポイント】

平行板コンデンサー

極板面積 S，極板間隔 d で，極板間が誘電率 ε の物質で満たされている平行板コンデンサーの電気容量 C は，

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

極板間が真空の場合，誘電率は ε_0(真空の誘電率)。

コンデンサーの電気量

コンデンサーの電気容量 C，電圧 V，蓄えられる電気量 Q の関係は，

$$Q=CV$$

極板間隔を Δd だけ広げると，電気容量が $C'=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d+\Delta d}$ となる。スイッチは開かれているので，電気量は変わらない。したがって，

$$\Delta U=\frac{Q^2}{2C'}-\frac{Q^2}{2C}$$
$$=\frac{Q^2(d+\Delta d)}{2\varepsilon_0 S}-\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$
$$=\underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d}\ \text{(e)}$$

この静電エネルギーの変化量は，極板間の静電気力に抗してした外力の仕事 W に等しい。この外力の大きさ(静電気力の大きさに等しい)を F とすると，

$$W=F\Delta d$$

であり，$W=\Delta U$ より，

$$F\Delta d=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d$$

したがって，

$$F=\underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}\ \text{(f)}$$

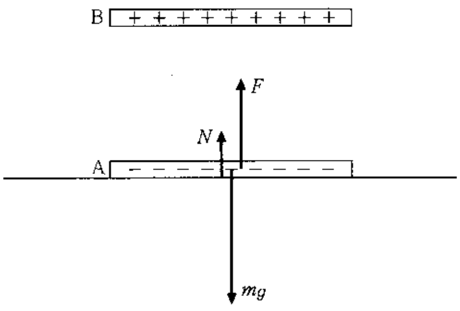
(別解)　静電気力の仕事が静電エネルギーの減少分に等しいことを利用してもよい。静電気力の大きさを F とすると，静電気力の向きと極板の移動の向きは逆向きなので，静電気力の仕事は $-F\Delta d$ となる。静電エネルギーの減少分は $-\Delta U$ なので，

$$-F\Delta d=-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d$$

これより，

$$F=\underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}\ \text{(f)}$$

問 2　固定を外したときの金属板 A にはたらく力を考える。



垂直抗力の大きさを N，静電気力の大きさを F とすると，A にはたらく力のつり合いは，

$$N+F=mg$$

ここで，$Q=\dfrac{\varepsilon_0 SV}{d}$，$E=\dfrac{V}{d}$ であるので，静電気力の大きさ

静電エネルギー

電気容量 C，電圧 V，蓄えられている電気量 Q のコンデンサーに蓄えられている静電エネルギー U は，

$$U=\frac{1}{2}CV^2$$
$$=\frac{1}{2}QV$$
$$=\frac{Q^2}{2C}$$

一様電場中の電位差

強さ E の一様な電場中で，電場の方向に距離 d だけ離れた 2 点間の電位差 V は，

$$V=Ed$$

電荷は導線を通って移動する。スイッチが開いていると，電荷は移動できないため，極板の電気量は変わらない。(電気量保存の法則)

仕事とエネルギーの関係をきちんと理解しておこう。

保存力の仕事は，その保存力の位置エネルギーの減少分に等しい。

F は問1より，

$$F=\frac{1}{2}QE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 SV}{d}\cdot\frac{V}{d}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}$$

したがって，

$$N=mg-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}$$

$N\geqq 0$ であればよいので，

$$mg-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\geqq 0$$

$$\therefore\quad \underline{V\leqq d\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 S}}}$$

面から離れない条件は，垂直抗力がはたらいていること。

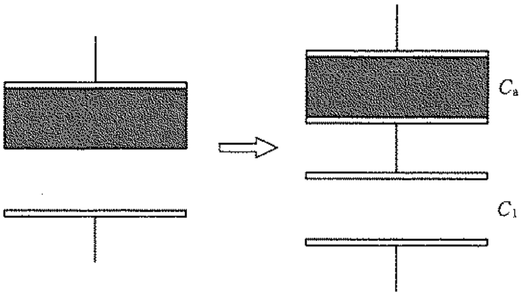
問3　金属板A，Bの間隔が $\frac{1}{2}d$ で，その間が空気の場合の電気容量 C_1 は，

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{\frac{1}{2}d}=\frac{2\varepsilon_0 S}{d}$$

図2のように，極板間にすきまなく誘電体を入れた場合，その電気容量は比誘電率倍になるので，

$$C_a=\varepsilon_r C_1=\underline{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}}$$

図3は，誘電体部分と空気部分に分けて，それらが直列接続されていると考える。



$$\frac{1}{C_b}=\frac{1}{C_a}+\frac{1}{C_1}$$

$$=\frac{d}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}+\frac{d}{2\varepsilon_0 S}=\frac{(1+\varepsilon_r)d}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}$$

よって，

$$C_b=\underline{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{(1+\varepsilon_r)d}}$$

比誘電率

誘電体の誘電率 ε と真空の誘電率 ε_0 の比のことで，比誘電率 ε_r は，

$$\varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

誘電体をすきまなく入れた場合の電気容量は，

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$
$$=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}$$
$$=\varepsilon_r C_0$$

C_0：極板間が真空のときの電気容量

極板間の一部に誘電体が挿入されている場合，誘電体部分と真空(空気) 部分に分けて考える。

電気容量の合成

電気容量が C_1，C_2 のコンデンサーが直列に接続されているときの合成容量 C は，

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

電気容量が C_1，C_2 のコンデンサーが並列に接続されているときの合成容量 C は，

$$C=C_1+C_2$$

問4 (1)　図2の状態からスイッチを開いた後図3の状態にするので，コンデンサーに蓄えられている電気量 Q' は，図2の状態と同じである。

$$Q'=C_a V=\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 SV}{d}$$

スイッチが開いているので，極板上の電荷は動けない。

金属板Aには負電荷が蓄えられているので，金属板Aに蓄えら

れている電気量 Q_A は,

$$Q_A=-Q'=-\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 SV}{d}$$

(2) **問3** で C_b を求めたときの，空気部分について考えると，電気容量 C_1 のコンデンサーに電気量 Q' が蓄えられているものと同様である。したがって，この部分の電位差 V_1 は,

$$V_1=\frac{Q'}{C_1}=\varepsilon_r V$$

よって，電場の強さ E' は,

$$E'=\frac{V_1}{\frac{1}{2}d}=\frac{2\varepsilon_r V}{d}$$

(別解1) ガウスの法則を用いる。面積 S を，$\frac{Q'}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線が一様に貫いているので，電場の強さ E' は,

$$E'=\frac{\frac{Q'}{\varepsilon_0}}{S}=\frac{\frac{2\varepsilon_r SV}{d}}{S}=\frac{2\varepsilon_r V}{d}$$

(別解2) 金属板 AB 間の電位差 V' は,

$$V'=\frac{Q'}{C_b}=(1+\varepsilon_r)V$$

空気部分の電場の強さを E' とする(空気の誘電率が真空の誘電率と等しいので，これは真空中の電場と同じである)。このとき，誘電体部分の電場の強さは $\frac{E'}{\varepsilon_r}$ である。したがって,

$$V'=E'\cdot\frac{d}{2}+\frac{E'}{\varepsilon_r}\cdot\frac{d}{2}$$

より,

$$(1+\varepsilon_r)V=\frac{1+\varepsilon_r}{2\varepsilon_r}E'd$$

$$\therefore\quad E'=\frac{2\varepsilon_r V}{d}$$

(注) 誘電体部分の電場の強さは，金属板の電荷が変わらないので図2の状態と同じである。これが理解できれば

$$\frac{E'}{\varepsilon_r}=\frac{V}{\frac{d}{2}}\text{より,}\quad E'=\frac{2\varepsilon_r V}{d}$$

とすぐに求められる。

問5 金属板 A にはたらく静電気力の大きさ F' は，**問1** より,

$$F'=\frac{1}{2}Q'E'=\frac{2\varepsilon_r{}^2\varepsilon_0 SV^2}{d^2}$$

水平面から受ける垂直抗力の大きさを N' とすると，**問2** と同様に,

$$N'=mg-F'\geqq 0$$

より,

$$mg-\frac{2\varepsilon_r{}^2\varepsilon_0 SV^2}{d^2}\geqq 0$$

極板に蓄えられている電気量は，符号も含めて答える(単に「コンデンサーに蓄えられている電気量」と問われた場合は正の値で)。

ガウスの法則

真空中で電気量 Q の電荷から出る($-Q$ に入る) 電気力線の総本数 N は,

$$N=4\pi kQ=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

k：クーロンの法則の比例定数

ε_0：真空の誘電率

電場の強さは，単位面積を垂直に貫く電気力線の本数に等しい。

誘電体中の電場の強さは，真空中の電場の強さの $\frac{1}{(\text{比誘電率})}$ 倍になる。

E' は C_b を用いなくても求められる(別解1など)。これから V' を求め，$Q'=C_bV'$ から C_b を求めることができる。

したがって，

$$\underline{V \leqq \frac{d}{\varepsilon_r}\sqrt{\frac{mg}{2\varepsilon_0 S}}}$$

3　気体の状態変化

【解答】

問1	$\dfrac{PS}{g}$		
問2	(1) $2T$	(2) $Q_1=\dfrac{3}{2}PV$	(3) $\dfrac{4}{3}T$
問3	(1) $\dfrac{3}{2}P$	(2) $Q_2=\dfrac{3}{2}PV$	
問4	(1) $V'=\dfrac{7}{10}V$	(2) $\dfrac{17}{15}T$	(3) $Q_3=\dfrac{3}{2}PV$

【配点】（33点）

問1　4点

問2　(1)　3点　　(2)　4点　　(3)　4点

問3　(1)　3点　　(2)　4点

問4　(1)　3点　　(2)　4点　　(3)　4点

【出題のねらい】

気体の状態変化，混合に関する問題。状況を把握し，状態方程式や熱力学第1法則が正しく適用できるかどうかを問う。**問3**までは比較的単純な状態変化で，基本的な知識，考え方を確認する。**問4**はやや複雑で，正解するためには判断力，思考力，応用力を必要とする。問題をよく読み，状況を整理して考えていくことが大切である。

【解説】

問題

問1　容器Bのピストンの質量を M とする。

ピストンにはたらく力のつり合い

$$2PS=PS+Mg$$

より，

$$M=\underline{\frac{PS}{g}}$$

問2 (1)　はじめの状態における容器A内の気体の状態方程式は，気体定数を R として，

$$PV=nRT \quad \cdots\cdots ①$$

状態1-1での容器A内の気体の温度を T_A として，状態方程式は，

$$2P\cdot V=nRT_A$$

これらより，

$$T_A=\underline{2T}$$

（別解）　ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{2P\cdot V}{T_A}$$

よって，

$$T_A=\underline{2T}$$

(2)　容器A内の気体は定積変化をするので，気体がする仕事は

【ポイント】

自由に動けるピストンが静止もしくはゆっくりと動くときは，力のつり合いを考える。

状態方程式

気体の圧力 P，体積 V，温度(絶対温度) T の関係式。

$PV=nRT$

n：気体の物質量(モル数)

R：気体定数

ボイル・シャルルの法則

一定量の気体において，圧力 P，体積 V，温度(絶対温度) T について，

$\dfrac{PV}{T}=$(一定)

0である。したがって，熱力学第1法則から，気体に与えた熱量(気体が吸収した熱量)は気体の内部エネルギーの変化量に等しい。

$$Q_1=\frac{3}{2}nRT_A-\frac{3}{2}nRT$$
$$=\frac{3}{2}nR(2T)-\frac{3}{2}nRT$$
$$=\frac{3}{2}nRT$$
$$=\underline{\frac{3}{2}PV}\quad(状態方程式①式を用いた)$$

(3) はじめの状態における容器Bの体積 V_B は，容器B内の気体の状態方程式

$$2P\cdot V_B=2n\cdot RT$$

および①式より，$V_B=V$ である。

したがって，状態1-2での容器AB内の気体の体積は $V+V_B=2V$ となる。また，圧力は，ピストンにはたらく力のつり合いから $2P$ である。状態1-2での気体の温度を T_1 として，状態方程式は，

$$2P\cdot 2V=(n+2n)RT_1$$

①式を用いて，

$$T_1=\frac{4}{3}\cdot\frac{PV}{nR}=\underline{\frac{4}{3}T}$$

(別解) 状態1-1から状態1-2への変化で，容器AB内の気体は，熱を吸収しておらず，外部に仕事もしていない。したがって熱力学第1法則から，容器AB内の気体全体で内部エネルギーの変化はない。

$$\frac{3}{2}nR(2T)+\frac{3}{2}(2n)RT=\frac{3}{2}(n+2n)RT_1$$

これより，

$$T_1=\underline{\frac{4}{3}T}$$

問3 (1) はじめの状態から状態2-1まで，気体は熱を吸収せず，仕事もしない。したがって，内部エネルギーの変化はなく，状態2-1での気体の温度は T のままである。

状態2-1での気体の圧力を P' として，状態方程式は，

$$P'\cdot 2V=3n\cdot RT$$

①式を用いて，

$$P'=\frac{3}{2}\cdot\frac{nRT}{V}=\underline{\frac{3}{2}P}$$

(2) 状態2-2では，ピストンにはたらく力のつり合いから圧力は $2P$ である，また，ピストンが動かなかったことから容器Bの体積は V，したがって，容器AB内の気体全体の体積は $2V$ である。状態2-2での気体の温度を T_2 とすると，状態方程式

熱力学第1法則

気体のエネルギーのやり取りに関する法則。気体の内部エネルギー変化を ΔU，気体が吸収した熱量を Q，気体が外部にした仕事を W とすると，

$$Q=\Delta U+W$$

定積変化の場合，気体の仕事は0。

単原子分子理想気体の内部エネルギー

気体の温度(絶対温度) T で決まる。

$$U=\frac{3}{2}nRT$$

n：気体の物質量

R：気体定数

$$2P\cdot 2V=3n\cdot RT_2$$

と ① 式から

$$T_2=\frac{4}{3}T$$

気体は仕事をしていない(ピストンが動いていない)ので，気体に与えた熱量 Q_2 は内部エネルギーの変化量に等しく，

$$Q_2=\frac{3}{2}(3n)RT_2-\frac{3}{2}(3n)RT$$

$$=\frac{3}{2}(3n)R\left(\frac{4}{3}T\right)-\frac{3}{2}(3n)RT$$

$$=\frac{3}{2}nRT$$

$$=\underline{\frac{3}{2}PV}$$

状態 2-2 は，状態 1-2 と等しい。

$Q_2=Q_1$ である。

問 4 (1) ピストンはゆっくりと移動するので，ピストンにはたらく力はつり合っており，圧力が一定($2P$)で変化していると考えてよい。はじめの状態から状態 3-1 になるまでに気体がした仕事 W_1 は，

$$W_1=2P(V'-V)$$

である。

状態 3-1 での気体の温度を T' とすると，はじめの状態から状態 3-1 になる間の内部エネルギーの変化 $\varDelta U_1$ は，

$$\varDelta U_1=\frac{3}{2}(3n)RT'-\left(\frac{3}{2}nRT+\frac{3}{2}(2n)RT\right)$$

$$=\frac{9}{2}nR(T'-T)$$

定圧変化における気体の仕事

圧力が P(一定)で気体の体積が $\varDelta V$ だけ変化したとき，気体が外部にした仕事 W は，

$W=P\varDelta V$

体積が増加しているとき

$\varDelta V>0,\ W>0$

体積が減少しているとき

$\varDelta V<0,\ W<0$

気体が外部からされた仕事 W' は，

$W'=-P\varDelta V$

状態 3-1 での状態方程式は，

$$2P(V+V')=3n\cdot RT' \qquad \cdots\cdots ②$$

はじめの状態から状態 3-1 までは気体に熱量を与えていないので，熱力学第 1 法則から，

$$0=\varDelta U_1+W_1$$

$$=\frac{9}{2}nR(T'-T)+2P(V'-V)$$

$$=\frac{9}{2}\left\{\frac{2}{3}P(V+V')-PV\right\}+2P(V'-V)$$

$$=P\left(5V'-\frac{7}{2}V\right)$$

① 式から

$nRT=PV$

② 式から

$nRT'=\frac{2}{3}P(V+V')$

これより，

$$V'=\underline{\frac{7}{10}V}$$

$V'<V$ より，$W_1<0$

気体は仕事をされている。

(2) ② 式は，

$$2P\cdot\frac{17}{10}V=3n\cdot RT'$$

となる。これより，

$$T'=\frac{17}{15}\cdot\frac{PV}{nR}=\underline{\frac{17}{15}T}$$

(3) 状態 3-2 での気体の温度を T_3 とすると，状態方程式は，

$$2P\cdot 2V=3n\cdot RT_3$$

より，

$$T_3=\frac{4}{3}T$$

状態 3-1 から状態 3-2 への変化は定圧変化なので，この間に気体が外部にした仕事 W_2 は，

$$W_2=2P\{(V+V)-(V+V')\}=\frac{3}{5}PV$$

内部エネルギーの変化量 $\varDelta U_2$ は，

$$\varDelta U_2=\frac{3}{2}(3n)RT_3-\frac{3}{2}(3n)RT'$$

$$=\frac{9}{10}nRT=\frac{9}{10}PV$$

したがって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_3=\varDelta U_2+W_2$$

$$=\frac{9}{10}PV+\frac{3}{5}PV$$

$$=\underline{\frac{3}{2}PV}$$

（別解） 状態 3-1 から状態 3-2 への変化は定圧変化である。気体に与えた熱量 Q_3 は，定圧モル比熱 $\frac{5}{2}R$ を用いて，

$$Q_3=3n\cdot\frac{5}{2}R(T_3-T')$$

$$=\frac{15}{2}nR\left(\frac{4}{3}T-\frac{17}{15}T\right)$$

$$=\frac{3}{2}nRT$$

$$=\underline{\frac{3}{2}PV}$$

状態 3-2 は，状態 1-2，状態 2-2 と等しい。

$Q_3=Q_2=Q_1$

エネルギーのやり取りを考えれば当然の結果。

定圧モル比熱

定圧変化において，1 mol の気体を 1 K 温度変化させる熱量。

n [mol] の気体が定圧変化で $\varDelta T$ 温度上昇したとき，吸収した熱量 Q は，定圧モル比熱を C_p として，

$Q=nC_p\varDelta T$

単原子分子理想気体の場合，定圧モル比熱 C_p は，

$C_p=\frac{5}{2}R$

R：気体定数

化　学

1　熱化学，15 族元素の単体と化合物

【解答】

I	問1	あ	燃焼	い	生成	問2	75	問3	435 (kJ/mol)	問4	3.1 L
II	問5	15	問6	(イ)	問7	$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O$					
	問8	20 mol	問9	(イ)	(オ)	問10	6.1 kg				

【配点】（30点）

I　問1　各2点×2　　問2　3点　　問3　3点　　問4　3点

II　問5　2点　　問6　2点　　問7　3点　　問8　3点　　問9　各2点×2　　問10　3点

【出題のねらい】

I　熱化学に関する基本的な知識と計算の問題である。

II　15 族元素の単体と化合物に関する基本的な知識と計算の問題である。

【解説】　問題

I

問1　① 式は，C(黒鉛) 1 mol と O_2(気)が反応(完全燃焼)して CO_2(気) 1 mol が生成するときに 394 kJ の熱が発生することを表している。したがって，C(黒鉛)の燃焼熱と CO_2(気)の生成熱は，いずれも 394 kJ/mol である。

問2　① 式＋③ 式×2－④ 式より，

$$\text{C(黒鉛)} + 2H_2\text{(気)} = CH_4\text{(気)} + 75\,\text{kJ} \quad \therefore \quad Q = 75$$

【別解】

反応熱と生成熱の間には，次の関係が成立する。

(反応熱)＝(生成物の生成熱の総和)
－(反応物の生成熱の総和)

① 式，② 式，③ 式から，CO_2(気)，CH_4(気)，H_2O(液)の生成熱は，それぞれ 394 kJ/mol，Q [kJ/mol]，286 kJ/mol であるから，④ 式について，上記の関係を適用すると，

$$891\,\text{kJ} = 394\,\text{kJ/mol} \times 1\,\text{mol} + 286\,\text{kJ/mol} \times 2\,\text{mol} - Q\,[\text{kJ/mol}] \times 1\,\text{mol}$$

$$\therefore \quad Q = 75$$

問3　水の蒸発熱は 44 kJ/mol だから，

$$H_2O\text{(液)} = H_2O\text{(気)} - 44\,\text{kJ} \quad \cdots\cdots ⑤$$

③ 式＋⑤ 式より，

$$H_2\text{(気)} + \frac{1}{2}O_2\text{(気)} = H_2O\text{(気)} + 242\,\text{kJ} \quad \cdots\cdots ⑥$$

反応熱と結合エネルギーの間には，次の関係が成立する。

【ポイント】

燃焼熱

物質 1 mol が完全燃焼するときの反応熱

生成熱

物質 1 mol が成分元素の最も安定な単体から生成するときの反応熱

ヘスの法則(総熱量保存の法則)

反応熱の総和は変化の経路によらず，反応の最初と最後の物質の種類とその状態によって決まる。

反応熱と生成熱の関係

(反応熱)＝(生成物の生成熱の総和)
－(反応物の生成熱の総和)

ただし，最も安定な単体の生成熱は 0 である。

蒸発熱

液体の物質 1 mol が蒸発して気体になるときに吸収する熱

結合エネルギー

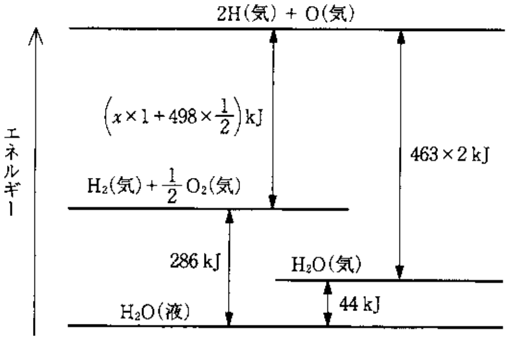
結合 1 mol を切断して気体状態の原子にするのに必要なエネルギー

(反応熱)＝(生成物の結合エネルギーの総和)
　　　　　　　－(反応物の結合エネルギーの総和)

H_2 分子中の H－H の結合エネルギーを x〔kJ/mol〕として，⑥式に上記の関係を適用すると，

$$242\ \mathrm{kJ} = 463\ \mathrm{kJ/mol}\times 2\ \mathrm{mol} - \left(x\ [\mathrm{kJ/mol}]\times 1\ \mathrm{mol} + 498\ \mathrm{kJ/mol}\times\frac{1}{2}\ \mathrm{mol}\right)$$

$$\therefore\ x = 435\ \mathrm{kJ/mol}$$



反応熱と結合エネルギーの関係

(反応熱)
　＝(生成物の結合エネルギーの総和)
　－(反応物の結合エネルギーの総和)

問 4　10.0 °C の水 1.0 kg を 39.7 °C まで上昇させるのに必要な熱量は，

$$4.2\ \mathrm{J/(g\cdot K)}\times 1.0\times10^3\ \mathrm{g}\times(39.7-10.0)\ \mathrm{K} = 1.24\times10^5\ \mathrm{J} = 1.24\times10^2\ \mathrm{kJ}$$

④式より，CH_4 1 mol(標準状態において 22.4 L)が完全燃焼するときに 891 kJ の熱が発生するので，1.24×10^2 kJ の熱を発生させるのに必要な CH_4 の体積(標準状態)は，

$$22.4\ \mathrm{L/mol}\times\frac{1.24\times10^2\ \mathrm{kJ}}{891\ \mathrm{kJ/mol}} = 3.11 \fallingdotseq 3.1\ \mathrm{L}$$

物質の温度変化と比熱と熱量の関係

熱量〔J〕＝物質の比熱〔J/(g·K)〕
　　×物質の質量〔g〕×温度変化〔K〕

II

問 5　N は周期表の第 2 周期，15 族に位置する元素である。

問 6　(ア)　NH_3 は刺激臭のある無色の気体で，空気より軽く，水に溶けやすい。

(イ)　NO は無色の気体で，水に溶けにくい。

(ウ)　NO_2 は赤褐色の気体で，水に溶けて酸性を示す。

(エ)　HNO_3 は強い酸化力があるため，Cu や Ag を溶かすことができる。なお，Cu に希硝酸を加えたときは NOが，Cu に濃硝酸を加えたときは NO_2 が発生する。

$$3Cu + 8HNO_3 \longrightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$$
$$Cu + 4HNO_3 \longrightarrow Cu(NO_3)_2 + 2H_2O + 2NO_2$$

よって，(イ)が誤りである。

問 7　(工程 1)で，触媒を用いて NH_3 と O_2 を高温で反応させると，次の反応が起こる。

$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O \quad \cdots\cdots(\mathrm{i})$$

問 8　(工程 2)，(工程 3)では，次の反応が起こる。

アンモニアの性質

① 無色・刺激臭の空気よりも軽い気体である。
② 水によく溶け，水溶液は弱塩基性を示す。
③ 塩化水素に触れると，塩化アンモニウムの白煙を生じる。

一酸化窒素の性質

① 水に溶けにくい無色の気体である。
② 空気に触れると，赤褐色の二酸化窒素に変化する。

二酸化窒素の性質

① 赤褐色・刺激臭の気体で，水に溶けやすい。
② 水と反応して，硝酸を生じる。

硝酸の性質

① 揮発性の酸である。
② 水に溶けて，強酸性を示す。
③ 光や熱によって分解する。
④ 酸化作用を示す。

(工程２）　$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$　……(ii)

(工程３）　$3NO_2 + H_2O \longrightarrow 2HNO_3 + NO$　……(iii)

{(i)式＋(ii)式×3＋(iii)式×2}×$\frac{1}{4}$より，NOとNO_2を消去すると，オストワルト法を一つにまとめた反応式が得られる。

$$NH_3 + 2O_2 \longrightarrow HNO_3 + H_2O$$

この反応式から，NH_3 10 mol から HNO_3 10 mol をつくるのに必要なO_2は 20 mol であることがわかる。

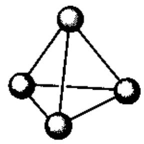
問９　(ア)　Pの同素体には，黄リンや赤リンなどがある。同位体とは，原子番号は同じで，質量数が異なる原子どうしのことである。

(イ)　黄リンは空気中で自然発火するが，赤リンは自然発火しない。

(ウ)　黄リンは水に溶けにくく，空気中で自然発火するので，通常は水中に保存する。

(エ)　赤リンは多数のP原子が共有結合してできた高分子であり，組成式Pで表される。

黄リンは４個のP原子が共有結合してできた分子であり，分子式P_4で表される。



黄リンの分子構造

(オ)　赤リンは黄リンより毒性が低い。

よって，(イ)と(オ)が正しい。

問10　$Ca_3(PO_4)_2$（式量310）1 mol と H_2SO_4 2 mol から $Ca(H_2PO_4)_2$（式量234）1 mol と $CaSO_4$（式量136）2 mol の混合物が得られるから，目的の混合物を 10 kg つくるために必要な $Ca_3(PO_4)_2$ の質量を x [kg] とすると，次に示す量的関係より，

$Ca_3(PO_4)_2$ + $2H_2SO_4$ ⟶	$Ca(H_2PO_4)_2$ +	$2CaSO_4$
1 mol	1 mol	2 mol
310 g	234 g	136×2 g
	合計 506 g	
x [kg]	10 kg	

$$\frac{310\ \mathrm{g}}{x \times 10^3\ [\mathrm{g}]} = \frac{506\ \mathrm{g}}{10 \times 10^3\ \mathrm{g}} \qquad \therefore\ x = 6.12 \fallingdotseq 6.1\ \mathrm{kg}$$

同素体

同じ元素の単体で，構造や性質が異なるもの

S(斜方硫黄，単斜硫黄，ゴム状硫黄)

C(黒鉛，ダイヤモンド，フラーレン)

O(酸素 O_2，オゾン O_3)

P(黄リン，赤リン)

リンの単体

黄リン

① 分子式P_4で表される淡黄色の固体

② 空気中で自然発火するため，水中に保存する。

③ 毒性が強い。

赤リン

① 組成式Pで表される暗赤色の粉末

② 毒性が低い。

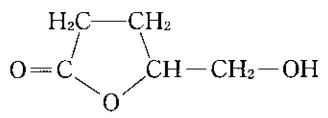
十酸化四リンの性質

① 吸湿性の強い白色の粉末

② 水に溶かして加熱すると，リン酸H_3PO_4が得られる。

[2] 脂肪族化合物

【解答】

I	問1	A	エタノール	B	アセトアルデヒド	問2	(ウ)	問3	A	(エ)	B	(イ)
	問4	$CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_3$										
II	問5	(1)	CHI_3	(2)	(エ)	(3)	4種類					
	問6	$CH_3-CH(OH)-C(CH_3)_2-CH_3$				問7						

【配点】 (25点)

I　問1　各2点×2　　問2　2点　　問3　各2点×2　　問4　3点

II　問5　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点　　問6　3点　　問7　3点

【出題のねらい】

脂肪族化合物に関する基本事項の確認と，アルコールおよびエステルの構造決定の問題である。

【解説】

問題

I

問1　分子式C_2H_6Oで表される化合物には，エタノールCH_3CH_2OHとジメチルエーテルCH_3OCH_3がある。**A**は金属ナトリウムと反応して水素を発生することから，ヒドロキシ基-OHをもつエタノールと決まる。

$$2CH_3CH_2OH + 2Na \longrightarrow 2CH_3CH_2ONa + H_2$$

CH_3CH_2OH(**A**)をおだやかに酸化すると，アセトアルデヒドCH_3CHO(**B**)が生じ，**B**をさらに酸化すると，酢酸CH_3COOH(**C**)が生成する。

$$CH_3-CH_2(OH) \xrightarrow[\text{酸化}]{K_2Cr_2O_7} CH_3-C(=O)-H \xrightarrow[\text{酸化}]{K_2Cr_2O_7} CH_3-C(=O)-OH$$

問2　酢酸はカルボキシ基-COOHをもち，水溶液中では次式のように電離して酸性を示す。

$$CH_3COOH \rightleftarrows CH_3COO^- + H^+$$

問3　(ア)　C=CやC≡Cをもつ化合物は臭素Br_2と付加反応するため，臭素水の赤褐色が脱色される。

(イ)　アルデヒド基-CHOをもつ**B**は還元性を示すため，アンモニア性硝酸銀水溶液を加えて加熱すると，銀が析出する(銀鏡反応)。

$$[Ag(NH_3)_2]^+ + e^- \longrightarrow Ag + 2NH_3$$

(ウ)　カルボン酸RCOOHは炭酸より強い酸だから，**C**を

【ポイント】

エタノールの性質

- 沸点78℃の液体
- 水と任意の割合で混ざり合う。
- 金属Naと反応してH_2が発生する。
- 濃硫酸とともに加熱すると，130〜140℃ではジエチルエーテルが，160〜170℃ではエチレンが生じる。
- ヨードホルム反応を示す。

アルコールの酸化

(第一級アルコール)

$$R-CH_2OH \xrightarrow{-2H} R-CHO \xrightarrow{+O} R-COOH$$

(第二級アルコール)

$$R-CH(OH)-R' \xrightarrow{-2H} R-C(=O)-R'$$

(第三級アルコール)

$$R-C(R')(OH)-R'' \nrightarrow \text{(酸化されにくい)}$$

$NaHCO_3$ 水溶液に加えると，CO_2 が発生する。

$$CH_3COOH + NaHCO_3 \longrightarrow CH_3COONa + H_2O + CO_2$$

(エ) $CH_2=CH_2$ に H_2O を付加させると，CH_3CH_2OH(**A**)が得られる。

$$CH_2=CH_2 + H_2O \longrightarrow CH_3CH_2OH$$

(オ) 酢酸カルシウム$(CH_3COO)_2Ca$ を乾留すると，アセトン CH_3COCH_3 が得られる。

$$(CH_3COO)_2Ca \longrightarrow CH_3COCH_3 + CaCO_3$$

問 4 カルボン酸とアルコールを脱水縮合させると，芳香をもつエステルが得られる(エステル化)。CH_3COOH(**C**)と CH_3CH_2OH(**A**)から得られるエステルは酢酸エチル $CH_3COOCH_2CH_3$ である。

$$CH_3COOH + CH_3CH_2OH \longrightarrow CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-CH_3 + H_2O$$

II

問 5 (1) $CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R$ または $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R$ $\left(\begin{array}{l}R：H原子または\\ \quad 炭化水素基\end{array}\right)$

の構造をもつ化合物に I_2 と NaOH 水溶液を加えて加熱すると，特異臭をもつヨードホルム CHI_3 の黄色沈殿が生じる(ヨードホルム反応)。

(2) (ア)～(エ)の化合物の構造式を示す。

(ア) $CH_3-CH=CH_2$　　(イ) $CH_3-CH_2-CH_2-OH$

(ウ) $\begin{array}{l}CH_2-OH\\ |\\ CH-OH\\ |\\ CH_2-OH\end{array}$　　(エ) $CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$

これらのうち，ヨードホルム反応を示すのは(エ)である。

(3) 分子式 $C_6H_{14}O$ の化合物のうち，$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R$ の構造をもつ化合物は，次の①～④の4種類である。

① $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{*}{C}H}-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$

② $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{*}{C}H}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\overset{*}{C}H}-CH_2-CH_3$

③ $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{*}{C}H}-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$　　④ $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{*}{C}H}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}-CH_3$

(*C：不斉炭素原子)

問 6 **D** を濃硫酸とともに加熱して生成するアルケンが1種類のみであることから，その構造は**問 5** (3)の④と決まる。

付加反応

炭素原子間の二重結合や三重結合をもつ化合物は付加反応を起こしやすい。

$$CH_2=CH_2 \xrightarrow[付加]{Br_2} \underset{\underset{Br}{|}}{CH_2}-\underset{\underset{Br}{|}}{CH_2}$$

アルデヒドの検出反応

$-CHO$ は酸化されやすいため，他の物質を還元する性質がある。これを利用した検出反応には次の二つがある。

① 銀鏡反応

アンモニア性硝酸銀水溶液と加熱すると，銀 Ag が析出する。

② フェーリング液の還元

フェーリング液と加熱すると，酸化銅(I) Cu_2O の赤色沈殿が生成する。

エステル

カルボン酸(RCOOH)とアルコール(R′OH)が脱水縮合するとエステル(RCOOR′)が生成する。

$$R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-OH + R'-OH \rightleftharpoons R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O-R' + H_2O$$

ヨードホルム反応

$CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R$，または，$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R$

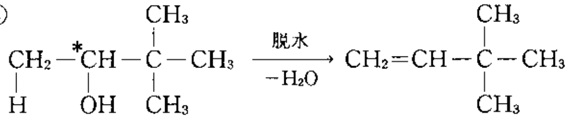
(R：H原子または炭化水素基)

の構造をもつ化合物に I_2 と NaOH 水溶液を加えて加熱すると，特有の臭いをもつ CHI_3 の黄色沈殿が生じる。

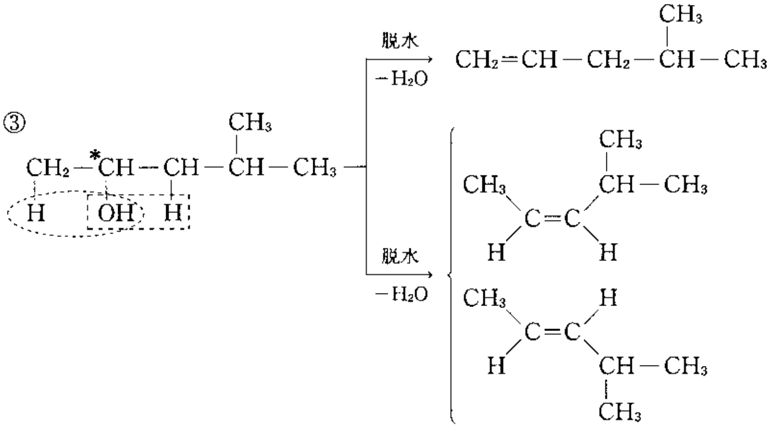
不斉炭素原子と光学異性体

炭素原子に4個の異なる原子や原子団が結合している場合，その炭素原子を不斉炭素原子という。

分子内に不斉炭素原子をもつ化合物には，光学異性体(鏡像異性体)が存在する。

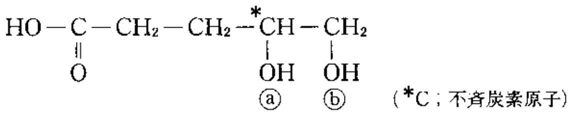
④


①，②，③から生成するアルケンはいずれも３種類である（幾何異性体を含む）。③についてのみ以下に示す。

③


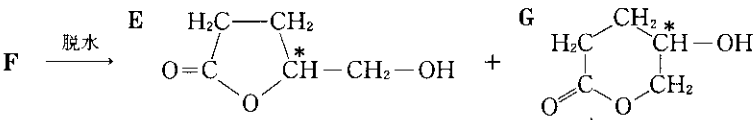
問７　分子式 $C_5H_8O_3$ で，五員環構造をもつエステル**E**は，金属ナトリウムと反応して H_2 を発生することから，エステル結合 -COO- とともにヒドロキシ基 -OH を１個もっている。したがって，**E**のエステル結合を加水分解して得られるヒドロキシ酸**F**には，-COOH１個と -OH２個がある。

Fの分子内の -COOH と -OH との間の脱水により，五員環エステル**E**と六員環エステル**G**が生成することに着目すると，２個の -OH の位置が決まり，**F**の構造は次のように決定できる。

F


（*C；不斉炭素原子）

この構造なら，ⓐの -OH と -COOH の間で脱水すれば，五員環エステル**E**が得られ，ⓑの -OH と -COOH の間で脱水すれば，六員環エステル**G**が得られる。



（*C；不斉炭素原子）

よって，**E**の構造は上のように決まる。なお，**E**，**F**，**G**は，いずれも不斉炭素原子を１個もっている。

3 電離平衡

【解答】

問1	ア	$C(1-\alpha)$	イ	$\dfrac{C\alpha^2}{1-\alpha}$	問2	(1)	6.7 mL	(2)	1.5×10^{-2}	(3)	11.2	
問3	緩衝	問4	$NH_4^+ + OH^- \longrightarrow NH_3 + H_2O$		問5	9.4		問6	70 mL			

【配点】 (24点)

問1 各2点×2　**問2** (1) 3点 (2) 3点 (3) 3点

問3 2点　**問4** 2点　**問5** 3点　**問6** 4点

【出題のねらい】

アンモニアの電離平衡についての理解を試す問題である。

【解説】 問題

問1 C〔mol/L〕のアンモニア水において，NH_3 の電離度を α とすると，平衡時の NH_3，NH_4^+，OH^- のモル濃度は次のようになる。

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$$

	NH_3		NH_4^+	OH^-
電離前	C		0	0
変化量	$-C\alpha$		$+C\alpha$	$+C\alpha$
平衡時	$C(1-\alpha)$		$C\alpha$	$C\alpha$

（単位；mol/L）

よって，$[NH_3]=C(1-\alpha)$，$[NH_4^+]=[OH^-]=C\alpha$ であり，これらを②式に代入すると，

$$K_b=\frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]}=\frac{C\alpha\times C\alpha}{C(1-\alpha)}=\frac{C\alpha^2}{1-\alpha}$$

問2 (1) 必要なNH_3(分子量 17)の物質量は，

$0.10\ \mathrm{mol/L}\times1.0\ \mathrm{L}=0.10\ \mathrm{mol}$

したがって，必要な濃アンモニア水の体積を v〔mL〕とすると，$1\ \mathrm{cm^3}=1\ \mathrm{mL}$ だから，

$$\frac{v\,[\mathrm{mL}]\times0.90\ \mathrm{g/mL}\times\dfrac{28}{100}}{17\ \mathrm{g/mol}}=0.10\ \mathrm{mol}$$

$\therefore\ v=6.74\fallingdotseq6.7\ \mathrm{mL}$

(2) 0.10 mol/L のアンモニア水においては $1-\alpha\fallingdotseq1$ が成り立つので，

$$K_b=C\alpha^2\qquad\therefore\ \alpha=\sqrt{\frac{K_b}{C}}$$

これに $C=0.10\ \mathrm{mol/L}$，$K_b=2.3\times10^{-5}\ \mathrm{mol/L}$ を代入すると，

$$\alpha=\sqrt{\frac{2.3\times10^{-5}\ \mathrm{mol/L}}{0.10\ \mathrm{mol/L}}}=\sqrt{2.3}\times10^{-2}\fallingdotseq1.5\times10^{-2}$$

(3) $[OH^-]=C\alpha=0.10\ \mathrm{mol/L}\times\sqrt{2.3}\times10^{-2}=\sqrt{2.3}\times10^{-3}\ \mathrm{mol/L}$ だから，

$$[H^+]=\frac{K_w}{[OH^-]}=\frac{1.0\times10^{-14}\ \mathrm{mol^2/L^2}}{\sqrt{2.3}\times10^{-3}\ \mathrm{mol/L}}=2.3^{-\frac{1}{2}}\times10^{-11}\ \mathrm{mol/L}$$

【ポイント】

アンモニアの電離平衡

C〔mol/L〕のアンモニア水中のアンモニアの電離度を α とすると，

$$電離定数\ K_b=\frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]}=\frac{C\alpha^2}{1-\alpha}$$

$1-\alpha\fallingdotseq1$ のとき，$K_b\fallingdotseq C\alpha^2$

水のイオン積

水のイオン積　$K_w=[H^+][OH^-]$

25°C では，$K_w=1.0\times10^{-14}\ \mathrm{mol^2/L^2}$

$\therefore \quad pH = -\log_{10}[H^+] = -\log_{10}(2.3^{-\frac{1}{2}} \times 10^{-11})$

$= 11 + \dfrac{1}{2}\log_{10} 2.3 = 11 + \dfrac{1}{2} \times 0.36 = 11.18 \fallingdotseq 11.2$

問 3　弱酸とその塩の混合溶液や，弱塩基とその塩の混合溶液には，そこに少量の酸や塩基を加えても，pH の値をほぼ一定に保つはたらきがある。このようなはたらきを緩衝作用といい，緩衝作用を示す水溶液を緩衝液という。

問 4　NH_3 と NH_4Cl の混合溶液は，緩衝液である。この混合溶液中では，① 式の平衡が成立している。

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^- \quad \cdots ①$$

このとき，NH_4Cl は次式のように完全に電離している。

$$NH_4Cl \longrightarrow NH_4^+ + Cl^-$$

よって，この混合溶液中には NH_4^+ が多量に存在しているので，アンモニア水に比べて NH_3 の電離が著しく抑えられているため，NH_3 はほとんど電離していない状態となる。したがって，この混合溶液中には NH_3 と NH_4^+ がともに多量に存在することになる。

この混合溶液に少量の酸を加えると，H^+ が NH_3 と反応して NH_4^+ が生成する。

$$NH_3 + H^+ \longrightarrow NH_4^+$$

このため，混合溶液中の H^+ の濃度はほとんど増加せず，pH の変化も小さい。

また，少量の塩基を加えると，OH^- が NH_4^+ と反応して NH_3 が生成する。

$$NH_4^+ + OH^- \longrightarrow NH_3 + H_2O$$

このため，混合溶液中の OH^- の濃度はほとんど増加せず，pH の変化も小さい。

問 5　$C_b = C_s = 0.10\ \mathrm{mol/L}$ であるから，

$$[OH^-] = \frac{C_b}{C_s}K_b = K_b = 2.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol/L}$$

よって，

$$[H^+] = \frac{K_w}{[OH^-]} = \frac{1.0 \times 10^{-14}\ \mathrm{mol^2/L^2}}{2.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol/L}} = 2.3^{-1} \times 10^{-9}\ \mathrm{mol/L}$$

$\therefore \quad pH = -\log_{10}[H^+] = -\log_{10}(2.3^{-1} \times 10^{-9})$

$= 9 + \log_{10} 2.3 = 9 + 0.36 = 9.36 \fallingdotseq 9.4$

問 6　アンモニア水に塩酸を加えると，次の反応が起こる。

$$NH_3 + HCl \longrightarrow NH_4Cl$$

反応後の水溶液は pH 9.00 であり塩基性だから，一部の NH_3 が未反応のまま残っている NH_3 と NH_4Cl の混合溶液であることがわかる。すなわち，pH 9.00 の緩衝液をつくればよい。

pH 9.00 より，$[H^+] = 10^{-9.00}\ \mathrm{mol/L}$ だから，

水素イオン指数

$pH = -\log_{10}[H^+]$,　$[H^+] = 10^{-pH}$

緩衝液

少量の酸や塩基を加えても pH がわずかしか変化しない溶液。一般に，弱酸とその塩（または弱塩基とその塩）の混合溶液は緩衝液になる。

緩衝液の水素イオン濃度

NH_3 : C_b [mol/L],

NH_4Cl : C_s [mol/L] とすると，

電離定数 $K_b = \dfrac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]}$ より，

$[OH^-] = \dfrac{[NH_3]}{[NH_4^+]} \times K_b = \dfrac{C_b}{C_s}K_b$

$$[\mathrm{OH^-}] = \frac{K_w}{[\mathrm{H^+}]} = \frac{1.0\times10^{-14}\,\mathrm{mol^2/L^2}}{10^{-9.00}\,\mathrm{mol/L}} = 1.0\times10^{-5}\,\mathrm{mol/L}$$

このとき，②式より，

$$\frac{[\mathrm{NH_4^+}]}{[\mathrm{NH_3}]} = \frac{K_b}{[\mathrm{OH^-}]} = \frac{2.3\times10^{-5}\,\mathrm{mol/L}}{1.0\times10^{-5}\,\mathrm{mol/L}} = 2.3$$

$$\therefore\quad \frac{C_s}{C_b} \fallingdotseq \frac{[\mathrm{NH_4^+}]}{[\mathrm{NH_3}]} = 2.3 \qquad \cdots③$$

したがって，$C_b : C_s = 1.0 : 2.3$ となるように塩酸を加えればよい。

NH_3 と HCl は物質量比 1 ： 1 で反応するので，0.10 mol/L のアンモニア水 100 mL に加える 0.10 mol/L の塩酸の体積を v〔mL〕とすると，$v < 100$ mL であり，混合後の水溶液の体積は $100+v$〔mL〕だから，

$$C_b = \frac{0.10\,\mathrm{mol/L}\times\frac{100}{1000}\mathrm{L} - 0.10\,\mathrm{mol/L}\times\frac{v}{1000}〔\mathrm{L}〕}{\frac{100+v}{1000}〔\mathrm{L}〕}$$

$$= 0.10\times\frac{100-v}{100+v}〔\mathrm{mol/L}〕$$

$$C_s = \frac{0.10\,\mathrm{mol/L}\times\frac{v}{1000}〔\mathrm{L}〕}{\frac{100+v}{1000}〔\mathrm{L}〕} = 0.10\times\frac{v}{100+v}〔\mathrm{mol/L}〕$$

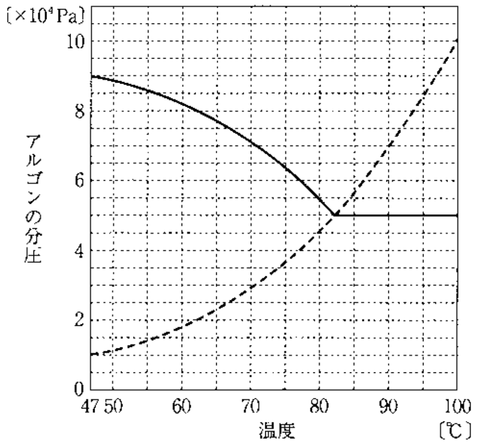
③式より，

$$\frac{C_s}{C_b} = \frac{0.10\times\frac{v}{100+v}}{0.10\times\frac{100-v}{100+v}} = \frac{v}{100-v} = 2.3$$

$$\therefore\quad v = 69.6 \fallingdotseq 70\,\mathrm{mL}$$

4 気体・蒸気圧

【解答】

問1	(1)	(イ)	(2)	(エ)	問2	3.4×10^4 Pa	問3	2.5×10^4 Pa
問4	5.0×10^4 Pa	問5	4.4×10^{-2} mol	問6	1.5 L			
問7								

【配点】 (21点)

問1 (1) 2点 (2) 2点 **問2** 3点 **問3** 3点

問4 2点 **問5** 3点 **問6** 3点 **問7** 3点

【出題のねらい】

気体の法則および，飽和蒸気圧に関する理解度を試す問題である。

【解説】

問題

問1 (1) Ar の物質量と圧力が一定だから，

$$\frac{V\,[\mathrm{L}]}{T\,[\mathrm{K}]} = 一定\ (シャルルの法則)$$

が成り立つ。$T(x)$ と $V(y)$ の関係は $y = ax$ (a：定数) となるので，これを表すグラフは(イ)である。

(2) Ar の物質量と温度が一定だから，

$$P\,[\mathrm{Pa}] \times V\,[\mathrm{L}] = 一定\ (ボイルの法則)$$

が成り立つ。$V(x)$ と $P(y)$ の関係は $xy = b$ (b：定数) となるので，これを表すグラフは(エ)である。

問2 容器内の圧力を P [Pa] とすると，

$$P\,[\mathrm{Pa}] \times 4.15\,\mathrm{L}$$
$$= 5.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol} \times 8.3 \times 10^3\,\mathrm{Pa \cdot L/(K \cdot mol)} \times (273+67)\,\mathrm{K}$$
$$\therefore \quad P = 3.4 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$$

問3 H_2O がすべて気体であると仮定し，その圧力を P' [Pa] とすると，**問2** と同様に $P' = 3.4 \times 10^4$ Pa である。

しかし，この値は 67 ℃ における水の飽和蒸気圧(2.5×10^4 Pa)よりも大きいので，仮定は誤りであり，容器内では H_2O の一部

【ポイント】

理想気体の状態方程式

$PV = nRT$

P；圧力，V；体積，n：物質量

T；絶対温度，R；気体定数

飽和蒸気圧

ある物質の液体と気体が共存して気液平衡の状態にあるときの圧力。

飽和蒸気圧は，温度だけで決まり，共存する液体や気体の量によらない。

が液体となり，気液平衡の状態になっている。したがって，このときの水蒸気の圧力は 67 ℃の飽和蒸気圧に等しく，2.5×10^4 Pa である。

問 4　容器内には Ar と H_2O が同じ物質量(5.0×10^{-2} mol)ずつ入っているので，H_2O がすべて気体であると仮定したときの水蒸気の分圧は，(分圧) = (全圧)×(モル分率)より，

$$1.00\times10^5\ \mathrm{Pa}\times\frac{5.0\times10^{-2}\ \mathrm{mol}}{5.0\times10^{-2}\ \mathrm{mol}+5.0\times10^{-2}\ \mathrm{mol}}=5.0\times10^4\ \mathrm{Pa}$$

この値は 100 ℃における水の飽和蒸気圧(1.0×10^5 Pa)よりも小さいので仮定は正しく，H_2O はすべて気体として存在し，その分圧は 5.0×10^4 Pa である。

混合気体について
全圧＝分圧の総和
分圧＝全圧×モル分率
$\left(\text{モル分率}=\dfrac{\text{ある成分気体の物質量}}{\text{混合気体の全物質量}}\right)$
同温・同体積では，
物質量比＝分圧比

問 5　温度を 47 ℃にしたとき，H_2O がすべて気体であると仮定し，その分圧を P''〔Pa〕とすると，**問 4** と同様に $P''=5.0\times10^4$ Pa である。

しかし，この値は 47 ℃における水の飽和蒸気圧(1.0×10^4 Pa)よりも大きいので，仮定は誤りであり，H_2O の一部が液体となり，気液平衡の状態になっている。したがって，このときの水蒸気の分圧は 47 ℃の飽和蒸気圧に等しく，1.0×10^4 Pa である。

よって，Ar の分圧は，

$$1.00\times10^5\ \mathrm{Pa}-1.0\times10^4\ \mathrm{Pa}=9.0\times10^4\ \mathrm{Pa}$$

となる。

同一容器内では，同温・同体積であり，(物質量比) = (分圧比)だから，水蒸気の物質量は，

$$5.0\times10^{-2}\ \mathrm{mol}\times\frac{1.0\times10^4\ \mathrm{Pa}}{9.0\times10^4\ \mathrm{Pa}}=5.55\times10^{-3}\ \mathrm{mol}$$

よって，液体の H_2O の物質量は，

$$5.0\times10^{-2}\ \mathrm{mol}-5.55\times10^{-3}\ \mathrm{mol}=4.44\times10^{-2}$$
$$\fallingdotseq 4.4\times10^{-2}\ \mathrm{mol}$$

問 6　**問 5** より，温度を 47 ℃にしたとき，Ar の分圧は 9.0×10^4 Pa である。容器内の体積を V〔L〕とすると，Ar について，

$$9.0\times10^4\ \mathrm{Pa}\times V\ [\mathrm{L}]$$
$$=5.0\times10^{-2}\ \mathrm{mol}\times8.3\times10^3\ \mathrm{Pa\cdot L/(K\cdot mol)}\times(273+47)\ \mathrm{K}$$
$$\therefore\ V=1.47\fallingdotseq1.5\ \mathrm{L}$$

なお，**問 5** より，47℃における水蒸気の物質量が 5.55×10^{-3} mol であり，その分圧が 1.0×10^4 Pa だから，水蒸気について，

$$1.0\times10^4\ \mathrm{Pa}\times V\ [\mathrm{L}]$$
$$=5.55\times10^{-3}\ \mathrm{mol}\times8.3\times10^3\ \mathrm{Pa\cdot L/(K\cdot mol)}\times320\ \mathrm{K}$$

また，気体全体について，

$$1.0\times10^5\ \mathrm{Pa}\times V\ [\mathrm{L}]$$
$$=(5.0\times10^{-2}+5.55\times10^{-3})\ \mathrm{mol}\times8.3\times10^3\ \mathrm{Pa\cdot L/(K\cdot mol)}\times320\ \mathrm{K}$$

どの式を用いて V を求めても同じ結果が得られる。

問7　**問4** より，H_2O がすべて気体であるときには，

$$\text{Ar の分圧} = \text{水蒸気の分圧} = 5.0\times10^4\ \text{Pa}$$

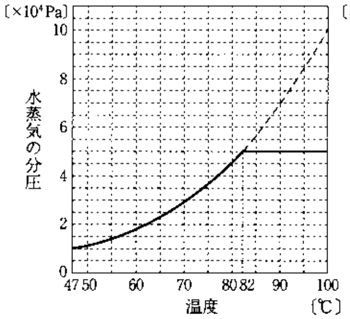
であり，Ar の分圧は一定となる。

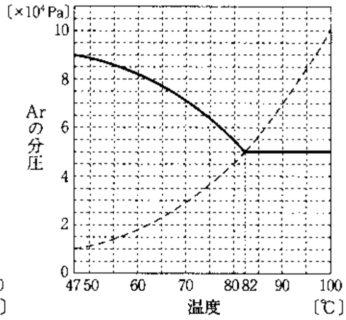
水の飽和蒸気圧が 5.0×10^4 Pa となる温度(グラフより約 82 ℃)以下では，液体の水が共存するので，水蒸気の分圧はその温度における飽和蒸気圧に等しい。よって，

$$\text{Ar の分圧} = 1.00\times10^5\ \text{Pa} - \text{水の飽和蒸気圧 [Pa]}$$

である。温度が低くなるほど水の飽和蒸気圧が小さくなるため，Ar の分圧は大きくなる。

したがって，Ar の分圧を表すグラフは，水蒸気の分圧と Ar の分圧の和(すなわち全圧)が，1.00×10^5 Pa になるように描けばよい。





生　物

1　染色体と遺伝

【解答】

問1	1	メンデル	2	ヒストン	問2	ウ	問3	$2n=8$
問4	(1)	a, g	(2)	雄				
問5	染色体bとfは相同染色体で，減数分裂第一分裂で対合し，これらが分離して別々の娘細胞に分配される。(48字)							
問6	検定交雑		問7	ア	オ	カ	問8	20％
問9	(1)	①：②：⑦：⑧＝1：1：1：1				(2)	5％	

【配点】（25点）

問1　各2点×2，　問2　1点，　問3　2点，　問4　(1)　2点(完答)　(2)　1点

問5　3点，　問6　2点，　問7　3点(完答)，　問8　2点

問9　(1)　2点　(2)　3点

【出題のねらい】

キイロショウジョウバエを題材に，染色体に関する知識を問う問題と，3対の対立遺伝子に着目した遺伝の問題を出題した。

【解説】

問題

問1　メンデルは，純系のエンドウを用いて交配実験を行い，優性の法則，分離の法則，および独立の法則と呼ばれる3つの遺伝の法則を見いだした。これらの法則は，その後，配偶子形成時の減数分裂における染色体の動きとよく合致することが示され，遺伝子は染色体に存在するという染色体説の根拠の1つになった。

真核細胞では，遺伝子の本体であるDNAは塩基性のタンパク質であるヒストンと結合して染色体を構成する。ヒストンは遺伝子発現の調節などに関係している。

問2　多くの細胞小器官や染色体はほぼ無色であるため，特定の構造体を光学顕微鏡で観察するときには，染色液でこれらを染色する。染色体は酢酸カーミンや酢酸オルセインのような色素で赤色に染まるので，これらを利用して染色体や核を観察することができる。なお，ナイル青は発生過程を追跡する局所生体染色法などに用いられる生体に無害な色素であり，ヤヌスグリーンはミトコンドリアを青緑色に染める色素である。また，アントシアンは花弁の細胞などに含まれる色素で，主として液胞に貯えられている。

問3　図1は体細胞分裂中期の染色体の模式図である。同形同大の相同染色体(常染色体)が3対6本と性染色体が1対2本の合計8本存在するので，染色体構成は$2n=8$と表すことができる。nは相同染色体の対の数を示し，相同染色体の一方は母親に由来

【ポイント】

ヒストン
DNAと結合して染色体を構成するタンパク質

酢酸カーミン・酢酸オルセイン
核や染色体を赤く染める。

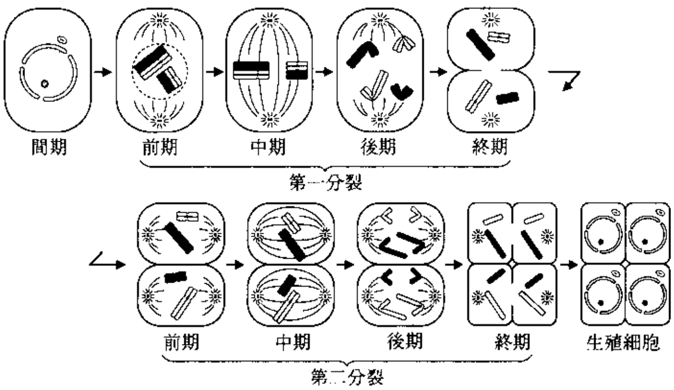
し，もう一方は父親に由来する。なお，体細胞分裂中期に観察される染色体は間期に複製されたものであるため縦裂して見えるが，縦裂している部分を含めた全体を１本の染色体として扱う。

問４　キイロショウジョウバエの体細胞の染色体は，上で述べたように雌雄共通の常染色体が３対６本と，雌雄で構成の異なる性染色体が１対２本からなる。図１では，同形同大であるｃとｅ，ｂとｆ，およびｄとｈが相同な常染色体であり，形と大きさの異なるａとｇが性染色体である。キイロショウジョウバエの性決定様式はヒトと同じ XY 型で，XX が雌，XY が雄である。染色体ａとｇがＸ染色体またはＹ染色体に相当するので，この個体は雄である。

常染色体
雌雄に共通してみられる。

性染色体
雌雄で構成が異なり，XY 型ではＸ染色体は雌雄ともに，Ｙ染色体は雄のみに存在する。

問５　配偶子形成の過程では次の図のような減数分裂が行われる（$2n=4$ の動物細胞の場合）。



第一分裂では，２本の相同染色体が対合したのち，中期にこれらが赤道面にならび，後期には相同染色体がそれぞれ対合面で分離して両極に移動して娘細胞に分配される。対合した相同染色体間では染色体の一部で乗換えが起こるので，その結果として遺伝子の組換えが起こることがある。第二分裂では，各々の相同染色体が縦裂面で分離して両極に移動し，生殖細胞に分配される。

染色体ｂとｆは相同染色体であり，図示された染色体をもつ雄の一次精母細胞が減数分裂第一分裂を行う過程でｂとｆは必ず異なる二次精母細胞に分配される。したがって，これらの染色体が同時に同じ細胞に分配されることはない。

問６　F_1 の表現型は３つの形質すべてについて野生型となったので，黒檀体色，そり翅，紫色眼の形質は野生型に対して劣性であることがわかる。このような劣性形質を合わせもつ劣性ホモ個体との交配を検定交雑といい，これにより交配相手の個体の遺伝子型や交配相手の個体のつくる配偶子の遺伝子型とその分離比などを調べることができる。

検定交雑
劣性ホモ個体との交配
検定交雑を行った個体がつくる配偶子がわかる。

問７　表１は検定交雑の結果であり，得られた子の表現型とその分

離比は，検定交雑を行った個体がつくる配偶子の遺伝子型とその分離比に一致する。すなわち，表1の①～⑧は，F_1がつくる配偶子の比を表すと考えてよい。

遺伝の問題を解くときは，優性遺伝子を大文字，劣性遺伝子を小文字としてアルファベットを用いて示すとわかりやすい。褐体色の遺伝子を A，黒檀体色の遺伝子を a，正常翅の遺伝子を B，そり翅の遺伝子を b，赤眼の遺伝子を D，紫色眼の遺伝子を d として表1の結果を書き直すと，次のようになる。なお，[ ]は表現型を表す。

①	$[ABD]$	103
②	$[ABd]$	98
③	$[AbD]$	23
④	$[Abd]$	26
⑤	$[aBD]$	24
⑥	$[aBd]$	27
⑦	$[abD]$	102
⑧	$[abd]$	97
	合計	500

2対の対立遺伝子について，F_1(たとえば $AaBb$)の検定交雑の結果を考えてみると，これら2対が独立の関係にあれば，次世代は $[AB]:[Ab]:[aB]:[ab]=1:1:1:1$ に，連鎖しており組換えが起こる場合は，次世代は $[AB]:[Ab]:[aB]:[ab]=n:1:1:n$ (A と B，a と b が同一染色体上にある場合)あるいは $[AB]:[Ab]:[aB]:[ab]=1:n:n:1$ (A と b，a と B が同一染色体上にある場合)のようになる($n>1$)。この問題は3対の対立遺伝子 $A(a)$，$B(b)$，および $D(d)$ についての検定交雑の結果を示しているが，これらをそれぞれ2対の対立遺伝子について整理してみるとよい。

独立の関係
着目した2対の対立遺伝子が異なる相同染色体に存在

連鎖の関係
着目した2対の対立遺伝子が同一の相同染色体に存在

体色と翅の形の遺伝子(A，a と B，b)のみについて表1の結果をまとめると，$[AB]:[Ab]:[aB]:[ab]=201:49:51:199$ となり $n:1:1:n$ の形になっているので，A と B，a と b が同一染色体上にあることがわかる。したがってアは正しい。また，体色と眼色の遺伝子(A，a と D，d)のみについて表1の結果をまとめると，$[AD]:[Ad]:[aD]:[ad]=126:124:126:124 \fallingdotseq 1:1:1:1$ となり，$A(a)$ と $D(d)$ は独立の関係にあることがわかる。したがってオは正しい。同様に，翅の形と眼色の遺伝子(B，b と D，d)についても $[BD]:[Bd]:[bD]:[bd]=127:125:125:123 \fallingdotseq 1:1:1:1$ となり，$B(b)$ と $D(d)$ は独立の関係にあることがわかる。したがってカは正しい。

問8 **問7** で説明したように，F_1 で連鎖している遺伝子は A と B，a と b であり，F_1 がつくる配偶子の遺伝子型の分離比は

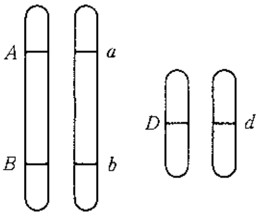
$AB : Ab : aB : ab = 201 : 49 : 51 : 199$ である。

$$組換え価(\%) = \frac{組換えを起こした配偶子数}{全配偶子数} \times 100$$ であるので，

$\frac{49 + 51}{500} \times 100 = 20(\%)$ となり，組換え価は 20％となる。

問 9　問題文に，「キイロショウジョウバエの雄では乗換えが起こらないことが知られている」とある。すなわち，雌では染色体の乗換えにより遺伝子の組換えが起こるが，雄では同一染色体上に連鎖している遺伝子間で組換えが起こらず，完全連鎖となる。

(1)　F_1 の染色体と遺伝子 $A(a)$，$B(b)$，および $D(d)$ の位置関係の模式図は下のようになる。



完全連鎖の雄がつくる配偶子は，ABD，ABd，abD，abd の 4 種類がほぼ同数となる（A-B と a-b の組は完全連鎖なので変わらない）ので，劣性ホモの雌と交配した検定交雑の結果は $[ABD] : [ABd] : [abD] : [abd] = 1 : 1 : 1 : 1$，すなわち①：②：⑦：⑧＝1：1：1：1 となる。

(2)　F_1 の雌がつくる配偶子の比は，表 1 の個体数そのままの値を用いるのではなく，**問 8** で算出した組換え価 20％を用いる。すなわち $A(a)$ と $B(b)$ について，組換えを起こした配偶子が 20％$(=\frac{1}{5})$，起こさなかった配偶子が 80％$(=\frac{4}{5})$ となるので，$ABD : ABd : AbD : Abd : aBD : aBd : abD : abd = 4 : 4 : 1 : 1 : 1 : 1 : 4 : 4$ となる。これと (1) で求めた F_1 の雄がつくる配偶子の比である $ABD : ABd : abD : abd = 1 : 1 : 1 : 1$ をかけ合わせる交配表をつくってもよいが，かなり大変な作業である。ここで問われているのは次世代の⑧の $[abd]$，すなわち遺伝子型 $aabbdd$ の個体の出現する割合（％）であり，このような個体は両親の配偶子がともに abd のときに生じるので，次式のように雌雄の配偶子のうち abd の占める割合を掛け合わせて求めることができる。

$$\underbrace{\frac{4}{4+4+1+1+1+1+4+4}}_{\text{雌の配偶子が } abd \text{ となる確率}} \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{雄の配偶子が } abd \text{ となる確率}} \times 100 = 5(\%)$$

組換え価（％）

$$\frac{組換えを起こした配偶子数}{全配偶子数} \times 100$$

② 光合成

【解答】

問1	1	炭酸	2	水(H_2O)	3	ストロマ	問2	ウ
問3	(1)	イ	(2)	カロテノイド(カロテン，キサントフィル)				
問4	(1)	カルビン・ベンソン回路	(2)	5				
問5	電子供与体として水ではなく硫化水素を利用する。(23字)							
問6	(1)	Ⅰ	(2)	Ⅱ				
問7	タンパク質複合体は，波長Pの光の照射によって光化学系Ⅰに電子を渡して酸化されているが，波長Qの光の照射によって光化学系Ⅱから電子が渡されて還元される。(75字)							
問8	ウ							

【配点】(25点)

問1　各2点×3，　問2　2点，　問3　(1)　2点　(2)　2点，　問4　(1)　2点　(2)　2点

問5　2点，　問6　1点(完答)，　問7　4点，　問8　2点

【出題のねらい】

光合成について，光化学系Ⅰ，光化学系Ⅱ，タンパク質複合体(電子伝達系)，およびATP合成酵素のはたらきに関する知識問題と考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　生物体内での化学反応を代謝と呼ぶ。代謝には，複雑な物質を単純な物質に分解する異化と，単純な物質から複雑な物質を合成する同化がある。異化には呼吸や発酵などがあり，同化には炭酸同化や窒素同化などがある。

　生物が二酸化炭素を原料にして有機物を合成する同化反応を，炭酸同化という。炭酸同化の代表的な反応は光合成であり，植物の光合成は葉緑体で行われる。葉緑体のチラコイド膜上には，光化学系Ⅰ，光化学系Ⅱ，タンパク質複合体(電子伝達系)，およびATP合成酵素が存在する。光化学系Ⅰや光化学系Ⅱにはクロロフィルなどの光合成色素が含まれており，光エネルギーを吸収する。光化学系Ⅰでは光エネルギーの吸収により電子(e^-)が放出され，電子は補酵素である$NADP^+$に渡されてNADPHが生成される($NADP^+ + 2e^- + H^+ \rightarrow NADPH$)。電子を放出した光化学系Ⅰにはタンパク質複合体から電子が渡され，失った電子が補われる。タンパク質複合体が放出した電子は，光化学系Ⅱから移動した電子によって補われる。さらに，光化学系Ⅱが失った電子は，水の分解によって生成した電子によって補われ，酸素が発生する($H_2O \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + 2H^+ + 2e^-$)。また，生成されたNADPHとATPは，葉緑体のストロマのカルビン・ベンソン回路で利用される。

問2　タンパク質複合体(電子伝達系)では，流れた電子のエネルギーを用いてストロマからチラコイド内腔へのH^+の輸送が起こ

【ポイント】

葉緑体の**チラコイド**
光化学系Ⅰ　NADPHの生成
光化学系Ⅱ　水の分解と酸素の発生
タンパク質複合体(**電子伝達系**)
H^+のストロマからチラコイド内腔への輸送

る。この輸送はエネルギーを用いているので，能動輸送の一種である。この結果，チラコイド内腔の H^+ 濃度が高くなり，ストロマとの間に H^+ の濃度勾配が生じる。H^+ は濃度勾配にしたがってチラコイド内腔からATP合成酵素の内部を通ってストロマに流出し，このときにATPが合成される。

ATP合成酵素
チラコイド内腔からストロマへの H^+ の流出によりATPを合成

問3 緑色植物の光合成色素には，クロロフィル(クロロフィルa，クロロフィルb)，およびカロテノイド(カロテン，キサントフィル)がある。クロロフィルaおよびクロロフィルbは赤色光と青色光をよく吸収して光合成に用いるが，緑色光はほとんど吸収しない。

緑色植物の光合成色素
クロロフィルa，クロロフィルb，カロテン，キサントフィル

クロロフィル　赤色光と青色光を吸収

問4 ストロマでは，二酸化炭素から有機物が合成される。この反応系はカルビン・ベンソン回路と呼ばれる。カルビン・ベンソン回路では，二酸化炭素1分子が炭素数5のリブロースビスリン酸(RuBP)1分子と結合し，炭素数3のホスホグリセリン酸(PGA)2分子が生成する。ホスホグリセリン酸は，チラコイドでつくられたATPやNADPHを用いて，多くの段階の反応を経て，リブロースビスリン酸にもどり，この過程で糖が合成される。

葉緑体の**ストロマ**
カルビン・ベンソン回路
とり込まれた CO_2 は C_5 化合物(RuBP)と結合して2分子の C_3 化合物(PGA)がつくられる。

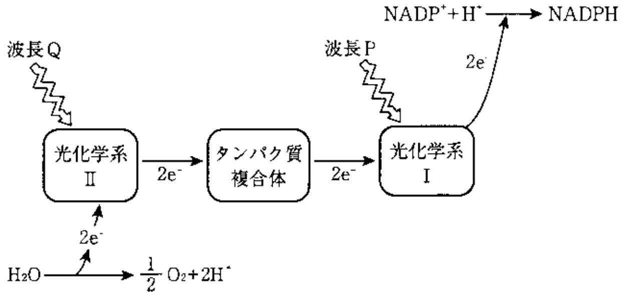
問5 細菌類の中には光合成能力をもつものがあり，このうち緑色植物とは異なるしくみで光合成を行う細菌を光合成細菌と呼ぶ。代表的な光合成細菌には，紅色硫黄細菌や緑色硫黄細菌がある。これらの光合成細菌では，電子を供給する物質として水ではなく硫化水素などが用いられる。硫化水素を用いた場合には，下の反応式に示すように酸素は発生せず，硫黄が生じる。

緑色植物　$6CO_2 + 12H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2 + 6H_2O$

光合成細菌　$6CO_2 + 12H_2S \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 12S + 6H_2O$

光合成細菌
紅色硫黄細菌，緑色硫黄細菌
水のかわりに硫化水素を用いる。
酸素は発生せず硫黄が生じる。
光合成色素としてバクテリオクロロフィルをもつ。

問6・7 物質が電子を放出する(失う)ことを酸化されるといい，電子を受け取ることを還元されるという。図2より，タンパク質複合体は波長Pの光の照射によって酸化されており，このことはタンパク質複合体が電子を放出したことを意味する。光化学系Ⅰが光エネルギーを吸収すると光化学系Ⅰから $NADP^+$ に電子が渡され，光化学系Ⅰから放出された電子はタンパク質複合体から移動した電子で補われる。このとき，タンパク質複合体は電子を放出して酸化されるので，波長Pの光は光化学系Ⅰに吸収されたことがわかる。さらに波長Pの光に加えて波長Qの光を照射するとタンパク質複合体は還元されており，このことはタンパク質複合体が電子を受け取ったことを意味する。光化学系Ⅱが光エネルギーを吸収するとタンパク質複合体に電子が渡され，このときタンパク質複合体は電子を受け取って還元されるので，波長Qの光は光化学系Ⅱに吸収されたことがわかる(次図)。



問8　電子は水の分解により生成し，光化学系II → タンパク質複合体 → 光化学系 I の順に流れて，最後に $NADP^+$ に渡される。この過程のうちのどこか 1 か所でもはたらきが止まれば，電子の流れは止まることになる。波長 P の光だけを照射した場合，波長 Q の光が照射されていないので光化学系IIがはたらかず，電子の流れは止まる。波長 P の光と波長 Q の光を同時に照射した場合には，光化学系 I と光化学系IIの両方がはたらくので，流れる電子の量は多くなる。この結果，水の分解がさかんになり，酸素発生速度が大きくなると考えられる。

この実験はある藻類を用いて行われたものであり，波長 P の光は 680 nm，波長 Q の光は 562 nm の波長の光である。この問題では，波長 P の光は光化学系 I のみ，波長 Q の光は光化学系IIのみで吸収されるというように単純化したが，実際には光化学系 I も光化学系IIも両方の波長の光を吸収しており，その吸収率が異なる(光化学系 I では波長 680 nm の光を中心に吸収し，光化学系IIでは波長 562 nm の光を中心に吸収する)。このちがいは，主として光化学系 I と光化学系IIに含まれる補助色素のちがいに起因すると考えられている。また，この実験が行われたときにはすでに光化学系 I と光化学系IIの存在が見いだされていたが，この実験の結果から 2 つの反応系が独立した反応ではなく，電子を介して連結していることが証明された。

3 発　生

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>1</td><td>割球</td><td>2</td><td>桑実</td><td>3</td><td>神経</td><td>問2</td><td>ア</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>c</td><td>胞胚腔</td><td>d</td><td colspan="4">原腸</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>記号</td><td>j</td><td>名称</td><td>脊索</td><td>(3)</td><td>エ</td><td>カ</td></tr>
<tr><td>問4</td><td colspan="8">細胞間に存在するBMPが洗浄により除かれたため。(24字)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問5</td><td>(1)</td><td colspan="7">正常なII型受容体が過剰に発現した変異型受容体と複合体を形成してしまい，正常なI型受容体と複合体を形成できなくなる。(57字)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="7">エ</td></tr>
</table>

【配点】(25点)

問1　各2点×3，　問2　2点，　問3　(1)　各2点×2　(2)　2点(完答)　(3)　各1点×2(順不同)
問4　3点，　問5　(1)　4点　(2)　2点

【出題のねらい】

発生について，両生類の初期発生に関する知識問題と，神経誘導のしくみを題材にした考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　両生類の受精卵は，卵割をくり返して細胞数を増やす。卵割によって生じた細胞を割球という。やがて，細胞数が増して32～64細胞期をすぎると，胚がクワの実のようにみえる桑実胚と呼ばれる胚になる。その後，胚は，胞胚，原腸胚，神経胚，尾芽胚を経てふ化し，幼生になる。

問2　卵割においては，分裂後に割球が成長せずに次の分裂を行うため，分裂ごとにしだいに割球の大きさが小さくなる。したがって，アは誤りである。初期の卵割は，分裂が同調している(すべての割球がほぼ同時に分裂する)ため，2細胞，4細胞，8細胞，16細胞，…というように，細胞数が2の累乗になっていく。したがって，イは正しい。両生類の卵は，卵黄が植物極側に偏って分布している端黄卵である。卵黄は卵割を妨げるので，両生類では動物極側の割球に比べて植物極側の割球のほうが大きくなる。したがって，ウは正しい。両生類の第一卵割と第二卵割は，動物極と植物極を通る面で起こる経割であり，どちらも大きさの等しい割球を生じる等割である。一方，第三卵割は，赤道面と平行な面で起こる緯割であるが，植物極側は卵黄を多く含むため，赤道面よりも動物極側に卵割面ができる不等割となる。したがって，エは正しい。

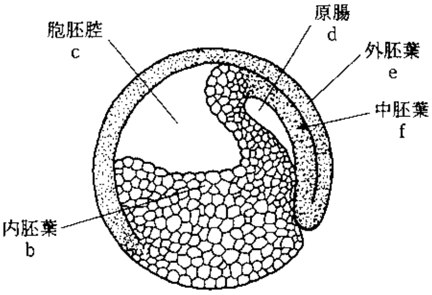
問3(1)　図1のb～fはそれぞれ，次図のように，bが内胚葉，cが胞胚腔，dが原腸，eが外胚葉，fが中胚葉を示している。

【ポイント】

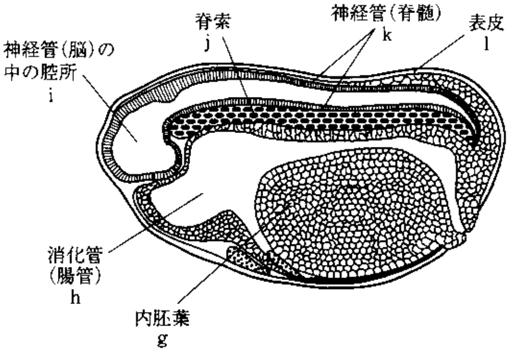
卵割によって生じた細胞を割球という。

卵割の特徴
- 分裂後に割球が成長せず，分裂ごとにしだいに割球が小さくなる。
- 細胞周期が短い(分裂速度が速い)。
- 分裂が同調している。

端黄卵
卵黄が植物極側に偏って分布している。
両生類では，第一卵割と第二卵割は等割であり，第三卵割は不等割である。



(2) 図2のg～lはそれぞれ，下図のように，gが内胚葉，hが消化管(腸管)，iが神経管(脳)の中の腔所，jが脊索，kが神経管(脊髄)，lが表皮を示している。この中で，中胚葉に由来するのは，jの脊索である。



(3) bの内胚葉はgの内胚葉になるので，アは誤りである。原腸胚から先に発生が進むと，原腸が大きく広がり，cの胞胚腔は消滅するので，イとウは誤りである。dの原腸はやがて消化管(腸管)になるので，エが正しく，オは誤りである。eは外胚葉であり，kの神経管(脊髄)とlの表皮はどちらも外胚葉に由来するが，eの外胚葉はfにより神経管に誘導される予定神経域である。したがって，カが正しく，キは誤りである。fの中胚葉はjの脊索になるので，クは誤りである。

問4　**B**の問題文に，「外胚葉の細胞は本来神経に分化する予定運命をもっているが，胚全体の細胞間に存在するBMPと呼ばれる分泌性のタンパク質が外胚葉の細胞の神経への分化を阻害し，表皮への分化を促進する」とある。**実験3**のようにばらばらの細胞にして培養液で洗浄すると，細胞間に存在するBMPが失われる。この結果，ノギンやコーディンがはたらいたときと同様に，アニマルキャップの細胞は本来の予定運命にしたがって神経に分化したと考えられる。

BMP
外胚葉の細胞の神経への分化を阻害して表皮を分化させる。

ノギン・コーディン
BMPと結合してそのはたらきを抑制し，外胚葉の細胞を神経に分化させる。

問5(1)　設問文に，「BMP受容体は，細胞膜を貫通するI型とII型の2種類の受容体から構成されており，図4aのようにI型とII型で複合体を形成してBMPと結合することで，はじめて細胞

内にBMP受容のシグナルを伝えることができる」とある。したがって，変異型受容体を過剰に発現させると，細胞自身がもとからもつ正常なII型受容体のほとんどが変異型受容体と複合体を形成してしまうため，正常なI型受容体とII型受容体の複合体はほとんど形成されなくなると考えられる。

(2) 前述のとおり，BMPは外胚葉の細胞を表皮へと分化させるはたらきがあり，BMPの作用を阻害すると外胚葉は神経へと分化する。mRNAの注入によって「腹側にも背側の構造(神経)が形成」されたことから，腹側に変異型受容体を合成するmRNA(変異型mRNA)を注入した結果，BMPの作用が阻害され，こちらにも背側の構造が形成されて二次胚が生じたと考えることができる。したがって，エが正解である。

4 免疫

【解答】

問1	1 骨髄	2 胸腺	3 体液性	4 細胞性			
問2	イ	問3	好中球，マクロファージ　などから1つ				
問4	一度目に抗原が侵入した際に反応したT細胞やB細胞の一部が記憶細胞となって残り，二度目の抗原侵入時にはこれらが速やかに増殖して大量の抗体が産生される。(74字)						
問5	核酸は細菌やウイルスの内部に存在するので細胞膜上のTLRでは認識できないが，エンドソーム内で分解されることでエンドソームの膜上のTLRで認識可能となる。(76字)						
問6	(1) ウ	(2)(i) ウ	(ii) ア				

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　2点，　問3　2点，　問4　4点，　問5　4点

問6　(1)　2点　(2)　3点(完答)

【出題のねらい】

ヒトの免疫に関する知識問題と，自然免疫ではたらくTLR(トル様受容体)に関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　獲得免疫において重要な役割をはたしているB細胞とT細胞の2種類のリンパ球のもとになる細胞は，ともに骨髄の造血幹細胞からつくられる。B細胞はそのまま骨髄で成熟するが，T細胞は胸腺に移動して，胸腺で成熟する。また，獲得免疫は，体液性免疫と細胞性免疫に分けられる。T細胞の刺激によってB細胞から分化した抗体産生細胞がつくる抗体が関与する免疫を，体液性免疫と呼ぶ。一方，T細胞が直接作用してウイルスに感染した細胞などが排除される免疫を，細胞性免疫と呼ぶ。

問2　だ液や涙にはリゾチームやディフェンシンと呼ばれるタンパク質が含まれており，細菌の細胞壁を分解したり細胞膜を破壊したりして，細菌を死滅させる。したがって，アは正しい。体外へ

【ポイント】

B細胞
骨髄で成熟

T細胞
骨髄から胸腺に移動し，胸腺で成熟

体液性免疫
抗体が関与する免疫

細胞性免疫
リンパ球が直接細胞を攻撃する免疫

リゾチーム・ディフェンシン
だ液や涙に含まれる，細菌を死滅させるタンパク質

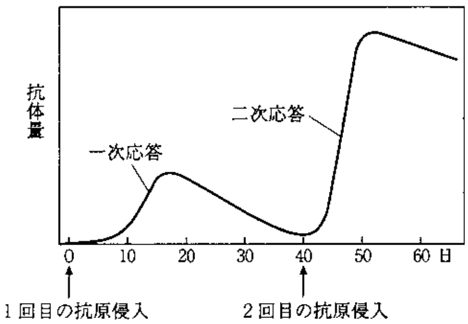
分泌される涙や汗などは弱酸性，胃液は強酸性であり，これらは細菌の増殖を抑える化学的な防御機構としてはたらいている。胃液は強アルカリ性ではないので，イは誤りである。表皮の表層にある角質層は，外界の病原体が体内に侵入するのを物理的に防いでいる。したがって，ウは正しい。気管支の内面の繊毛上皮細胞は，粘液を分泌して表面をおおい，異物が細胞に付着するのを防ぐとともに繊毛の動きによって異物を体外に排出している。したがって，エは正しい。

問 3　食細胞は，体内に侵入した異物を細胞膜ごと包み込んで膜小胞の形で取り込む。これを食作用と呼び，取り込んだ異物を分解することによって異物を体内から排除している。免疫担当細胞のうち食作用をもつ細胞としては，樹状細胞以外にマクロファージ，好中球などがある。

食細胞
　樹状細胞，マクロファージ，好中球など

問 4　獲得免疫では，抗原に対して特異的に応答するB細胞やT細胞が増殖するが，その一部は記憶細胞となって体内に残る。その後，同じ抗原が再度侵入した際には，記憶細胞が応答して速やかに増殖し，一度目よりも急速で強い免疫反応が起こる。これを二次応答と呼ぶ。抗体産生による体液性免疫の二次応答においては，一部の記憶細胞が速やかに増殖して抗体産生細胞に分化し，次図のように大量の抗体を短期間のうちに産生して分泌するので，速やかに抗原が排除される。

二次応答
　一度目の抗原侵入時に形成された記憶細胞が，二度目の侵入時に速やかに応答する。



問 5　細菌の細胞壁に含まれる成分や細菌のべん毛に含まれる成分は病原体の表面に存在するため，食細胞の細胞膜上のTLRで受容される。しかし，細菌のDNAやウイルスのもつDNAおよびRNAは病原体内部に存在するので，食細胞の細胞膜上のTLRでは認識できない。細菌やウイルスが食作用によって取り込まれると，エンドソーム内で分解を受けるので，内部にあった核酸が細菌やウイルスの外に出てくる。したがって，細菌やウイルスの核酸は，エンドソームの膜上に発現するTLRによって受容され，認識される。

問 6 (1)　チミンはDNAのみに含まれる塩基であり，DNAが合成されるときにはチミンを用いるので，細胞内に ^{3}H- チミジンが

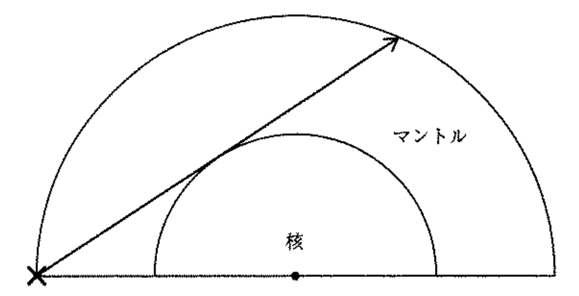
取り込まれる。チミンはRNAには含まれないので，mRNAが合成される転写やそれをもとにタンパク質が合成される翻訳のときには細胞内に^{3}H-チミジンは取り込まれない。したがって，アとイは誤りである。細胞分裂時には，分裂に先立ってDNAが複製される。このとき，DNAがさかんに合成されるので，^{3}H-チミジンが細胞内に多量に取り込まれる。したがって，ウは正しい。アポトーシスとは，動物の器官形成などの過程で，決められた時期に決められた細胞が死んで失われていくような，プログラムされた細胞死のことである。アポトーシスの過程では，多くの場合DNAが断片化されて分解を受けるが，合成はされないので，エは誤りである。

(2) **実験1**において，細菌のDNAをマウスに注射した場合には，図1のように野生型マウスとTLR4ノックアウトマウスで，注射する細菌のDNA濃度が増加するにしたがってひ臓細胞に取り込まれる^{3}H-チミジンの量が増加していることがわかる。これは，食細胞のTLRが細菌のもつDNAを認識し，これによってリンパ球や抗原提示細胞が活性化されて，さかんに増殖することを示している。一方，TLR9ノックアウトマウスでは，細菌のDNAを注射しても^{3}H-チミジンは細胞に取り込まれない。この結果は，TLR9がない場合には細菌のDNAを認識できず，リンパ球や抗原提示細胞が増殖しなかったことを意味する。したがって，TLR9は細菌のDNAを認識する受容体であることがわかる。同様に，**実験3**において細菌の細胞壁成分をマウスに注射した場合には，図3のように野生型マウスとTLR9ノックアウトマウスで注射する細菌の細胞壁成分濃度が増加するにしたがってひ臓細胞に取り込まれる^{3}H-チミジンの量が増加しているが，TLR4ノックアウトマウスでは^{3}H-チミジンはほとんど取り込まれない。この結果より，TLR4は細菌の細胞壁成分を認識する受容体であることがわかる。一方，**実験2**において哺乳類のDNAを注射した場合には，図2のように野生型マウス，TLR4ノックアウトマウス，およびTLR9ノックアウトマウスのひ臓細胞のいずれもが，^{3}H-チミジンをほとんど取り込まない。このことから，TLR4およびTLR9を含め，マウスのTLRは哺乳類のDNAに対しては反応しないことがわかる。

地　学

1　地球内部の構造

【解答】

問1	1	小さ	2	深	3	Fe	4	Ni
問2	(1)	5.0 km/s	(2)	7.5 km/s	(3)	3.3×10 km	問3	イ
問4	大小	大きい			問5	P波の影の領域に，微弱なP波が観測される。		
								

【配点】　(20点)

問1　各1点×4，　問2　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点，
問3　2点，　問4　図：3点　大小：1点，　問5　3点

【出題のねらい】

地球内部の物質を直接観察できるのは，地殻付近に限られる。それより深部のマントルや核の様子は，地震波の伝わり方の解析や高温高圧実験などによって間接的に知ることができる。今回は地球表層から深層に向かって，地球内部の構造を地震波のさまざまな特性を利用して読み解いていく問題を出題した。この問題を通して，地球内部を伝わり，地表に達する地震波とその特徴から地下の構造を読み取る方法を身につけよう。

【解説】　問題

問1　地殻は，大陸地殻(図1－1)と海洋地殻(図1－2)に分類される。花こう岩は玄武岩と比較して密度が小さく(1)，大陸地殻は二層構造で上層が花こう岩質岩石，下層が玄武岩質岩石からなり，厚さは約30～60 km である。また，海洋地殻は一層構造で玄武岩質岩石からなり，厚さは約5～10 km である。したがって，モホロビチッチ不連続面(モホ面，モホ不連続面)までの深さは大陸地殻の方が海洋地殻より深くなる(2)。

マントルは約2900 km の厚さをもち，深さ約700 km までを上部マントルと呼び，おもにかんらん岩質岩石からなる。その下層の深さ2900 km までを下部マントルと呼び，上部マントルとは異なる結晶構造をもつ鉱物を主体とした岩石からなると考えられている(**問3** 参照)。

核は金属であるFe(鉄)(3)からなり，その他にNi(ニッ

【ポイント】

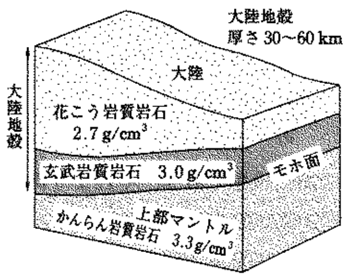


図1－1　大陸地殻

ケル)($\boxed{4}$)が5～10％ほど含まれている。核は液体の外核と固体の内核から構成されている。外核は厚さ約2200 km で地磁気発生の場となっている。

問2 (1) 問題図1より，走時曲線が折れ曲がる地点の震央距離が150 km で，走時が30秒であることから，直接波の速度 V_1 は次の式で求めることができる。

$$V_1=\frac{150}{30}=5.0(\mathrm{km/s})$$

(2) 問題図1より，走時曲線が折れ曲がる地点の震央距離150 km とその先の300 km で，走時がそれぞれ30秒と50秒であることから，屈折波の速度 V_2 は次の式で求めることができる。

$$V_2=\frac{300-150}{50-30}=7.5(\mathrm{km/s})$$

(3) 走時曲線が折れ曲がる地点(直接波と屈折波が同時に到達する地点)までの震央距離を S，直接波の速度を V_1，屈折波の速度を V_2 とすると，地殻の厚さ d は次の式で表される。

$$d=\frac{S}{2}\sqrt{\frac{V_2-V_1}{V_2+V_1}}$$

この式より，走時曲線が折れ曲がる地点までの震央距離が大きいほど，地殻の厚さは厚くなることがわかる。

問題図1より $S=150$ km であり，V_1・V_2 は(1)・(2)で求められているので，d は次の式で求めることができる。

$$d=\frac{150}{2}\sqrt{\frac{7.5-5.0}{7.5+5.0}}=75\sqrt{\frac{1}{5}}=75\times\frac{\sqrt{5}}{5}=33.0=3.3\times10(\mathrm{km})$$

問3 地震波速度は，地球内部の物質のかたさや密度などの物理的性質の違いによって変化する。深さ約700 km の上部マントルと下部マントルの境界でP波，S波の速度が深さとともに不連続に増加する。これはマントルを構成する鉱物の結晶構造が，温度・圧力の違いによって，この境界の上下で不連続に変化しているからである。したがって，イが正解となる。

ア：部分溶融は，おもに深さ約100 km 付近のアセノスフェアで起こる現象である。アセノスフェアの構成物質はやわらかく，地震波速度は小さい。

ウ：構成物質の金属への変化は，深さ2900 km のマントル，核の境界であり，それより深部の核内ではP波の速度は低下し，S波は伝わらなくなる。

エ：上部マントル，下部マントルは，ともに固体である。

問4 この問では，地球内部を伝わる地震波速度が一定であると仮定していることから，S波が地球内部を伝わる経路は直線になる。S波は液体である外核を伝わることができないことから，解答の図のように震源からマントルと外核の境界に接するように直線を地表に向かって描いたものが，最も遠方まで到達する経路で

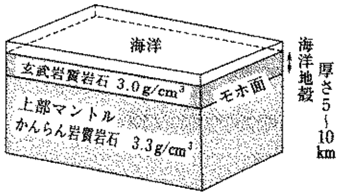


図1－2 海洋地殻

直接波
地殻を伝わる波。
走時は地殻の地震波速度を反映する。

屈折波
地殻からマントルに伝わった波が屈折して，再び地殻に現れた波。
走時はマントルの地震波速度を反映する。

地殻の厚さ
地殻の厚さは，走時曲線が折れ曲がる地点の震央距離に比例する。

上部マントルと下部マントル
境界の深さは約700 km で，構成物質の結晶構造が変化する。

S波
横波の性質をもち，液体中を伝わることができない。

ある。したがって，その経路が再び地表に達した地点で震央角距離が最大となる。

実際には地球内部の物質は均質ではなく，地震波速度は場所によって異なっており，マントル内部は深部に行くほど地震波速度が大きくなる。図１－３のように地震波は速度が大きくなる物質境界に入射すると，入射角より屈折角が大きくなるように屈折する。よって，マントルでは深部に行くほど連続的に図１－３のような屈折をすることになり，図１－４の破線のような下に凸の経路をとることになる。したがって，地震波の経路を直線(図１－４の実線)にすると，最大となる震央角距離を実際より大きく見積もってしまうことになる。

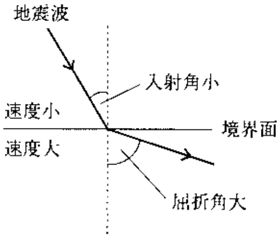


図１－３　地震波の屈折

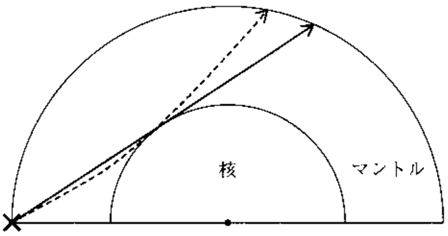


図１－４　マントルの地震波経路

問５　図１－５に地球内部を伝わる地震波の経路を示す。外核が液体であるため，震央角距離 103° 以遠にはＳ波が伝わらない。また，震央角距離 103° ～ 143° の範囲にＰ波が伝わらないのは，マントル・外核の境界で外核に入射したＰ波の速度が急に小さくなり，Ｐ波は地球の中心方向に屈折して，震央角距離 143° 以遠の経路になるからである。

しかし，地震波の影の領域にも，震央角距離 110° 付近に弱いＰ波が観測されることがある(図１－５の破線)。これは外核と内核の境界で内核に入射したＰ波の速度が急増し，Ｐ波が図１－３のように地表方向に屈折した結果で，内核の存在を示唆する観測事実である。

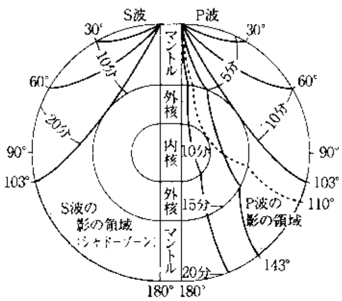


図１－５　地震波の経路

2 鉱物と岩石

【解答】

問1	1	閃緑	2	色指数	3	続成	問2	ウ
問3	(1)	ケイ素：２個	酸素：５個	(2)	ア			
	(3)	性質：へき開	割れ方：層状に薄くはがれる				問4	ア，ウ，オ
問5	高温の条件下では，形成に高い圧力が必要な藍晶石は含まれない。							

【配点】 (20点)

問１　各１点×３，　問２　２点，　問３　(1)　３点(完答)　(2)　２点　(3)　性質：２点　割れ方：２点，
問４　３点(完答・順不同)，　問５　３点

【出題のねらい】

鉱物や岩石の分野は必要とされる知識の多くが「地学基礎」と「地学」にまたがって存在し，大学入試で出題の頻度は高い。今回は，鉱物や岩石の知識を問う問題を中心に出題した。

【解説】　問題

問１　$\boxed{1}$：火成岩のうち特に深成岩は，含まれる鉱物の量比によって分類することができる(図２－１)。火成岩Ａは，「比較的粒の大きさのそろった粗粒の」とあるので深成岩と判断でき，斜長石，輝石，角閃石，少量の黒雲母が見られることから閃緑岩である。ちなみに，火山岩は石基が微細な結晶やガラスからなるので鉱物の量比で分類をしにくいため，**問２**で扱う SiO_2 質量％などで分類する。

$\boxed{2}$：火成岩をつくるおもな鉱物はケイ酸塩鉱物である。ケイ酸塩鉱物は，FeやMgを含み色のついた有色鉱物とFeやMgを含まず無色や淡い色の無色鉱物に分類することができる。火成岩に含まれる有色鉱物の体積％を色指数といい，色指数が大きいほど岩石は黒っぽく，色指数が小さいほど岩石は白っぽくなる。

$\boxed{3}$：上にたまった堆積物の重みにより堆積物から水が絞り出され，堆積物の粒子と粒子のすき間を埋めるように化学成分が入り込み，新たな鉱物ができることで，堆積物はかたい堆積岩に変わっていく。このような作用を続成作用という。

問２　火成岩は SiO_2 質量％により，超塩基性岩，塩基性岩，中性岩，酸性岩に区分される。またこれは，色指数による分類である超苦鉄質岩，苦鉄質岩，中間質岩，ケイ長質岩に対応している。次の図２－１に火成岩と SiO_2 質量％による分類，色指数，含まれる造岩鉱物を示す。閃緑岩は中性岩にあたるため，SiO_2 質量％は52％から66％(63％とする場合もある)である。また，色指数は10～20から40である。よって，正解はウとなる。

【ポイント】

ケイ酸塩鉱物
火成岩のおもな造岩鉱物。SiO_4 四面体を基本の構造とする。

有色鉱物
FeやMgを含み，色のついた鉱物。かんらん石，輝石，角閃石，黒雲母。

無色鉱物
FeやMgを含まない無色や淡い色の鉱物。斜長石，カリ長石，石英。

色指数
岩石中に含まれる有色鉱物の体積％。色指数が大きいほど岩石は黒っぽくなる。

続成作用
堆積物が上の堆積物の重みを受けて水が抜け，構成粒子が結びつき，固結する作用。

火成岩の分類(SiO_2 質量％による)

超塩基性	塩基性	中性	酸性

～45％～52％～66(63)％～

分類		組織						
分類	火山岩	組織	斑状組織	結晶とガラス		玄武岩	安山岩	流紋岩（デイサイト／流紋岩）
	深成岩		等粒状組織	全て結晶	かんらん岩	斑れい岩	閃緑岩	花こう岩
SiO₂質量%と分類					超塩基性　45%　塩基性　52%　中性　66(63)%　酸性			
色指数と分類					超苦鉄質　60~70　苦鉄質　40　中間質　10~20　ケイ長質			
造岩鉱物の体積% 80- 60- 40- 20- □ 無色鉱物 ■ 有色鉱物								

図2－1　火成岩の分類

問3　(1)　火成岩のおもな造岩鉱物は，かんらん石，輝石，角閃石，黒雲母，斜長石，カリ長石，石英である。これらの鉱物はすべてSiO_4四面体を基本とした結晶構造をもつケイ酸塩鉱物である。それぞれの鉱物は，SiO_4四面体のつながり方が異なる。

黒雲母はSiO_4四面体が同一平面内で網状につながった構造を示す。右の図2－2に問題図3の一部を拡大し加筆したものを示す。図中の点線で囲まれた領域内では，四面体が2個あるため，その内部にケイ素原子が2個あり，領域内に酸素原子が3個(図中の○)，点線上に酸素原子が4個(図中の●)ある。点線上の酸素原子は，隣り合う四面体と共有しあう原子であるため0.5個として扱い，0.5×4＝2個と考える。よって，ケイ素は2個，酸素は3＋2＝5個となる。

(2)　肉眼による観察では岩石中の鉱物を決定できない場合でも，岩石を光が透過するまで薄くし，偏光顕微鏡で観察することで鉱物を決定することができる。偏光顕微鏡には，ステージの下と鏡筒にそれぞれ偏光板がある。鏡筒の偏光板は使用するかどうか選ぶことができ，偏光板を鏡筒に入れない(使用しない)場合を開放(平行)ニコル，鏡筒に入れた(使用する)場合を直交ニコルと呼ぶ。それぞれの場合で，鉱物ごとに見え方が異なり，それによって鉱物の種類を決定できる。

開放ニコルでステージを回転すると有色鉱物の多くは色が変化する。これを多色性(たしきせい)という。また，直交ニコルでステージを回転すると，90度ごとに鉱物は暗くなる。これを消光と呼ぶ。消光した場合，開放ニコルに変えると視野の十字線と鉱物のへき開の方向が一致する場合を直消光，そうでない場合を斜消光という。

黒雲母は，強い多色性を示し，直消光が特徴であるため，本問はアが正解である。他の選択肢の鉱物について述べると，イは，常に黒色で多色性も消光も示さないことから磁鉄鉱の可能性が高い。ウは，多色性を示さずしま状の消光を示すことから斜長石である。エは，多色性を示さず波状消光を示すことから石英である。偏光顕微鏡による観察については，黒雲母，斜長石，石英の特徴は覚えておこう。

(3)　SiO_4四面体のつながり方のうち，酸素を共有する部分のつ

ケイ酸塩鉱物の基本骨格

ケイ酸塩鉱物は，一般に4個のO原子のつくる正四面体の中心に1個のSi原子が位置する基本骨格をもつ。

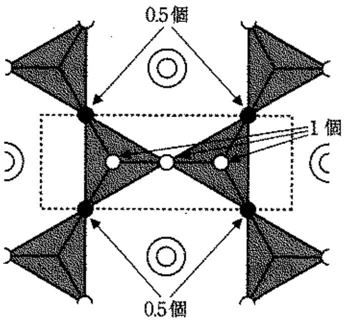


図2－2　黒雲母のケイ素原子と酸素原子の数の考え方

開放(平行)ニコル

偏光顕微鏡の偏光板を1枚しか使用していない状態。多色性の確認などに使う。

直交ニコル

偏光顕微鏡の偏光板を2枚使った状態。消光の確認などに使う。

ながりは強いが，それ以外の部分は弱い。例えば黒雲母は，問題図3のように SiO_4 四面体が同一平面内で網状につながっているが，平面と平面の間はつながりが弱く，薄く層状に割れやすい。このように，鉱物が特定の面に沿って割れる性質をへき開という。本問の黒雲母は薄くはがれるように平面上にへき開が発達すること，逆に石英やかんらん石は，へき開をもたないかほとんど見られないことは覚えておこう。

問4　堆積岩のうち，おもに生物の遺骸(いがい)が集積して形成された岩石を生物岩という。おもな生物岩としては，炭酸カルシウム($CaCO_3$)に富む殻をもつ生物の遺骸が集まった石灰岩と二酸化ケイ素(SiO_2)に富む殻をもつ生物の遺骸が集まったチャートがある。石灰岩には，フズリナ(紡錘虫(ぼうすいちゅう))，造礁(ぞうしょう)サンゴ，貝などの遺骸が，チャートには，放散虫，珪藻(けいそう)などの遺骸が含まれることがある。よって，本問の正解はア，ウ，オとなる。

問5　一度形成された岩石が，高温または高圧の条件下で融(と)けることなく他の岩石に変化する作用を変成作用といい，形成された岩石を変成岩と呼ぶ。このうち貫入したマグマの熱による変成作用を接触変成作用といい，プレートの衝突・沈み込み帯で起こる造山運動に伴う高温・高圧条件下の変成作用を広域変成作用という。

化学組成が同じでありながら結晶構造が異なる鉱物どうしの関係を多形という。これは結晶が晶出するときの温度と圧力の条件の違いにより，異なった結晶構造が形成されたものである。代表的なものとして，Al_2SiO_5 組成の鉱物である藍晶(らんしょう)石・紅柱石・珪線(けいせん)石，炭素(C)からなるダイヤモンドと石墨(せきぼく)などがある。温度と圧力の違いによって多形の関係の各鉱物が形成されるため，逆にどの多形鉱物が含まれるかによって，岩石の形成時の温度と圧力の条件が推定できる。

広域変成岩が形成される深さはおよそ地下5～10 km以深である。接触変成作用は，それよりも浅い環境下の変成作用であるため，圧力はほとんど加わらず，マグマ貫入の熱のみが加わった条件と考えてよい。よって，高温の条件下では，高い圧力が加わったときにしか形成されない藍晶石は含まれないと考えられる。

なお，問題図4を見ると，地表付近の温度・圧力は藍晶石の安定領域に含まれるため，地表にある Al_2SiO_5 組成の鉱物は藍晶石になりそうである。しかし，地上の温度では鉱物内部の結晶構造の変化は極めてゆっくりである。そのため，高温の環境下で紅柱石や珪線石として形成されて地表にもたらされた鉱物は，ただちに藍晶石に変化することはなく，地表ではそのままの姿を保つ。

へき開
鉱物の結合の弱い方向に割れやすい性質。鉱物はへき開面に沿って割れやすい。

生物岩
・石灰岩…炭酸カルシウム($CaCO_3$)，フズリナ(紡錘虫)，造礁サンゴ，貝などから形成される。
・チャート…二酸化ケイ素(SiO_2)，放散虫，珪藻などから形成される。

変成作用
岩石が，高温や高圧の条件下で融けずに他の岩石に変化する作用。マグマの貫入の熱による接触変成作用とプレートの衝突や沈み込みに伴う広域変成作用がある。

多形
同じ化学組成でありながら結晶構造が異なる鉱物の関係。
(例)　C…ダイヤモンドと石墨
　　　Al_2SiO_5…藍晶石・紅柱石・珪線石

3 地質図

【解答】

問1	ク	問2	＋	問3	C	中生代	G	新第三紀	F	石炭紀	
問4	傾斜不整合			問5	(1)	垂直断層	(2)	イ	問6	ア	
問7	種としての生存期間が短く，広範囲の地層から多数の化石が見つかるから。										

【配点】 (20点)

問1　3点，　問2　3点，　問3　各1点×3，　問4　2点，　問5　(1)　2点　(2)　2点，
問6　2点，　問7　3点

【出題のねらい】

今回は，地質図の読解問題を出題した。さらに，示準化石，絶対年代など，地球の歴史に関わる基礎知識も問題とした。地質図はセンター試験でも二次試験でも出題されやすい問題なので，読図できる力を養ってほしい。

【解説】　問題

問1　図3－1のように，B層とC層の地層境界線が200 mの等高線と交わる点を結び，標高200 mの走向線を引く（直線a）。同様に，B層とC層の地層境界線が220 mの等高線と交わる点を結び，標高220 mの走向線を引く（直線b）。走向線は真北から約60°西の方向を向くので，B層の走向はN60°Wである。傾斜の方向は，走向線の高度が低くなっていく方位であるから，SWである。したがって，正解はクである。

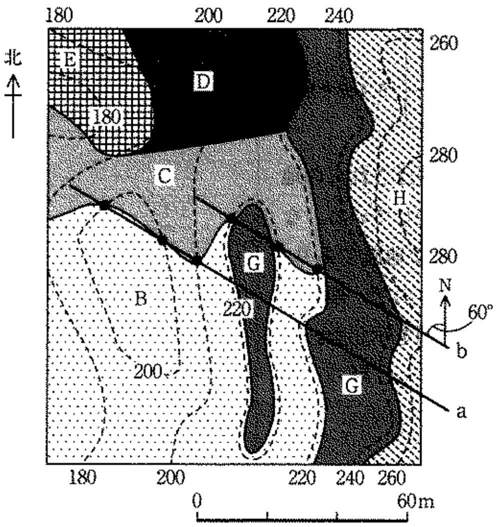


図3－1　B層とC層の地層境界に引いた走向線の例

問2　G層は等高線に沿って分布している。したがって，水平な地層である。水平な地層の場合は，＋の記号を用いて表現する。

【ポイント】

走向

層理面と水平面の交線の方向。

地質図上では，地層境界線が同一高度の等高線と交わる点を結ぶ方向。

傾斜方向

層理面が地下に潜っていく方位。

地質図上では，走向線の高度が低くなる方位。

なお，走向・傾斜の一般的な記号は，図3－2のように表す。

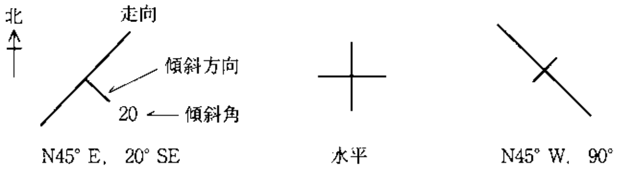


図3－2　走向・傾斜の記号

問3　おもな示準化石を表3－1に示した。C層からイノセラムスの化石が産出しているので，C層は中生代(ジュラ紀～白亜紀)，G層からはデスモスチルスの歯の化石が産出しているので，G層は新生代新第三紀の地層である。

覚えておくべき時代境界の絶対年代も，表3－1に示した。F岩体の絶対年代は約3億年前であるから石炭紀に形成された岩体である。この3億年前という数値は，二次試験では比較的よく出題されるので，石炭紀に相当することを知っておいてほしい。

表3－1　おもな示準化石

新生代	第四紀	ナウマン象，マンモス	260万年前
	新第三紀	デスモスチルス，ビカリヤ(ビカリア)	2300万年前
	古第三紀	カヘイ石(ヌンムリテス)	6600万年前
中生代		イノセラムス，アンモナイト 三角貝(トリゴニア)，恐竜	2.5億年前
古生代		紡錘(ぼうすい)虫(フズリナ類)…石炭紀，ペルム紀 三葉虫 バージェス動物群(アノマロカリスなど) …カンブリア紀	5.4億年前
先カンブリア時代		エディアカラ生物群	

問4　D層とE層は褶曲(しゅうきょく)しており，その上位のC層はこれらの地層境界線を切っているので，傾斜不整合の関係で接している。なお，G層とそれよりも下位の地層も，G層が水平な地層であり，下位の地層は傾斜していたり，褶曲していたりするので，傾斜不整合の関係で接している。図3－3に断面図の一例を示した。なお，この断面図は，問題の地質図北東隅からA層～C層の走向に直交するように作成したものである。

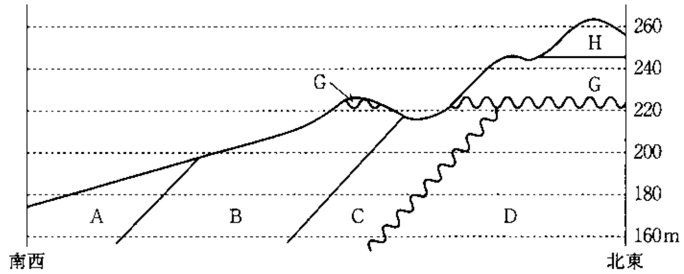


図３－３　断面図

問５　(1)　断層 f－f′ は地形に左右されず，直線状にのびている。このような断層の傾斜は垂直である。したがって，この断層は垂直断層である。なお，擦痕(断層運動による擦り傷)が，走向方向についていれば，横ずれ断層である。

断層面の擦痕
横ずれ断層：走向方向
縦ずれ断層：走向と直交する方向

(2)　この地域の地質現象の順序は，問題文中の示準化石と「切る－切られる関係」を用いて判断できる。断層 f－f′ は A 層，B 層，C 層，E 層および F 岩体を切っているので，これらよりも新しい。G 層と断層 f－f′ は直接接しているところがないため，その新旧関係は不明である。以上をまとめると，次の図３－４のようになる。したがって，断層の活動時期は，イの A 層堆積以後が確実である。G 層堆積以前か以後かはわからないので，オやカは選択できない。

地層の新旧
切る－切られる関係
切られる方が古く，切る方が新しい。

E 層 → D 層 F 岩体	→ C 層	→ B 層	→ A 層	→	G 層 → H 層 断層 f－f′

図３－４　地質現象の順序

問６　アは，級化層理(級化成層)の記述である。図３－５のように，１枚の地層中で粒径が変化していれば，粗粒の方から細粒の方に向かって堆積が行われたと判断できる。イの「凝灰岩の鉱物組成」からは，凝灰岩のもとになった火山灰を噴出した火山活動の性質がわかるだけである。ウとエからは，特に重要な情報は得られない。

級化層理(級化成層)
単層中で砕屑物の粒径が上方へ向かって細粒化する堆積構造。

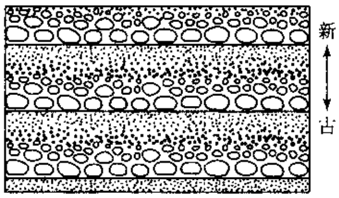


図３－５　級化層理

問７　相対年代の決定や地層の対比に有効な化石を示準化石という。示準化石の条件は次の三つである。この問では，これらをもれなく論述してほしい。

・種としての生存期間が短い(進化の速度が大きい)。
・広範囲の地層から産出する。
・多数の化石が見つかる(個体数が多い)。

示準化石
相対年代の決定や地層の対比に有効な化石。
(条件)
・種としての生存期間が短い。
・広範囲の地層から産出する。
・多数の化石が見つかる。

4 日本列島の天気

【解答】

問1	1	偏西風	2	谷	3	尾根	4	停滞		
問2	イ	ウ	問3	a	1月	b	4月	c	7月	
問4	(1)	名称	オホーツク海高気圧	性質	寒冷で湿潤な気団					
	(2)	4倍	(3)	ウ						

【配点】 (20点)

問1　各1点×4，　問2　3点(完答・順不同)，　問3　3点(完答)，

問4　(1)　名称：1点　性質：2点　(2)　4点　(3)　3点

【出題のねらい】

今回の大気海洋分野では日本列島の天気を扱い，① 日本列島の天気に大きな影響を与える偏西風波動および温帯低気圧，② 日本列島の各季節に特徴的な天候の知識を問うとともに，③ 地上天気図から読み取れる天気の概況と気候要素の関係についての分析能力を問う問題を出題した。

【解説】　問題

問1 $\boxed{1}$：地表の単位面積が単位時間あたりに受ける太陽放射エネルギーは高緯度ほど小さいので，一般に地表付近の大気は，低緯度で膨張，高緯度では収縮している。このため，上空の等圧面の高度は低緯度ほど高く，上空の同一高度で気圧を比べると，低緯度の方が気圧は高い(図4－1のA点とB点)。よって，中緯度の上空では，高緯度方向にはたらく気圧傾度力が，低緯度に向かってはたらくコリオリの力(転向力)とつり合いながら，西から東(北半球では北極のまわりを反時計回り)に向かって風が吹く。

この西風は，風速や風が吹く緯度帯は季節によって変動するものの，南北両半球の中緯度域に年間を通して存在し，偏西風と呼ばれる。偏西風は南北方向に蛇行しながら吹くため，低緯度の熱を高緯度へ運ぶ役割をもつ。この蛇行運動は偏西風波動と呼ばれている。

$\boxed{2}$・$\boxed{3}$：地上天気図が，等圧線を用いて地表面の気圧分布を表すものであるのに対し，高層天気図は，等圧面の高度を等高線で表現したものである。上空の等圧面高度は低緯度で高く，高緯度で低いので(図4－1)，南北方向に蛇行する等高線が低緯度側(等圧面高度が高い方)に向かって凸状に張り出しているところを気圧の谷，その逆に高緯度側(等圧面高度が低い方)に向かって凸状に張り出しているところを気圧の尾根という(図4－2)。

$\boxed{4}$：異なる性質をもつ二つの気団が接するとき，その境界面と地表面の交線が前線である。二つの気団の勢力が拮抗(きっこう)し，一

【ポイント】

気圧傾度力

2地点に気圧差がある場合，高圧部から低圧部に向かってはたらく力。2地点の気圧差を2地点間の距離で割った値に比例する。

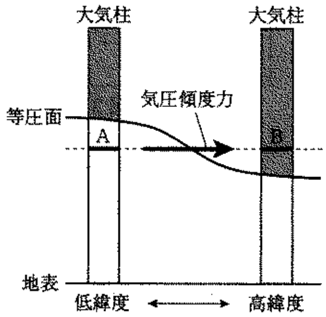


図4－1　上空の気圧傾度力
同一高度では，気圧はA>Bである。

コリオリの力(転向力)

地球の自転に伴い，地球上で運動する物体にはたらく見かけの力。物体の進行方向に対して北半球では直角右向き，南半球では直角左向きにはたらく。

偏西風波動

中緯度上空を南北に蛇行しながら西から東へ向かう大気の流れ。偏西風の風速は圏界面付近で最大となり，その強い風をジェット気流という。

定期間にほぼ同じ位置にとどまっている前線が停滞前線である(問題図2)。日本列島で見られる梅雨前線は，オホーツク海高気圧と北太平洋高気圧(太平洋高気圧，小笠原高気圧)との間にできる停滞前線である。

問2　ア：周囲から熱が吸収されてしまうと，低気圧の発生・発達に必要なエネルギーが奪われてしまうので誤りである。

イ：大気中の水蒸気が凝結すると凝結熱(潜熱)が生じる。このエネルギーは，熱帯低気圧の発生・発達の主要なエネルギー源であるが，温帯低気圧の発生・発達のエネルギー源の一つにもなっているので正しい。

ウ：寒気と暖気が接するところでは，寒気の方が密度が大きいので，寒気が暖気の下に潜り込んでいく。このとき，寒気の下降により空気塊のもつ位置エネルギーが解放され，大気の運動エネルギーに変化する。このエネルギーは温帯低気圧の発生・発達に関わる主要なエネルギーとなっているので正しい。

エ：暖気は密度が小さいので寒気の下には潜り込まない。よって，誤りである。

オ：地殻熱流量の平均的な値は約 0.085 W/m^2 であり，地表および地球大気の 1 m^2 が受け取る平均的な太陽放射のエネルギー約 240 W/m^2 に比べてはるかに小さい。よって，大気中で起こる気象現象にはほとんど影響しないので誤りである。

問3　春季と秋季には温帯低気圧と移動性高気圧が交互に日本列島を通過していくので，夏季や冬季に比べて気温・気圧の変動が大きくなりやすい。よって，気圧の変動が最も大きい折れ線bが4月である。また,「梅雨明けは7月6日で，その後，数日間，日本列島は北太平洋高気圧に覆われて天気は安定していた」という記述から，7月6日以降数日間の気圧の変動は小さいと考えれば，折れ線cが7月，残りの折れ線aが1月となる。なお，一般に冬季はシベリア高気圧の影響が強く，日本列島は全体に冷たく重い空気に覆われるため，日本の東の海上の低気圧の影響を受ける北日本を除き，地上の気圧は概して夏季よりも高くなる(図4－4，図4－5を参照)。

問4　問題図2の特徴として，日本列島上に停滞前線が東西にのびている，停滞前線を挟んで二つの高気圧が接している，南西諸島の南に台風が存在する，などの点を指摘できる。台風は6月～10月に日本列島に近づくことが多いので，問題図2の気圧配置は6月～7月の梅雨期だけでなく，9月～10月の秋雨期にも現れる。

(1)　梅雨期の場合，停滞前線は温暖で湿潤な気団からなる北太平洋高気圧(小笠原気団)と寒冷で湿潤な気団からなるオホーツク海高気圧(オホーツク海気団)の間に形成される。前線の北側の高気

気圧の谷

高層天気図において，等圧面の等高線が高度の高い方に向かって凸状に張り出しているところ。気圧の谷の東側では温帯低気圧が発生・発達しやすい。

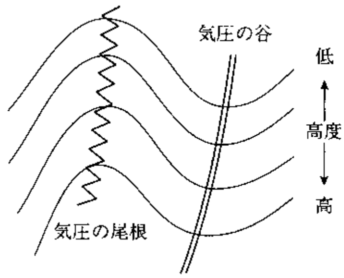


図4－2　気圧の谷と気圧の尾根
曲線は等圧面高度の等高線である。

日本列島で各季節に現れやすい天気

- 冬季→冬型(西高東低型)の気圧配置時には日本海側で雪，太平洋側で晴天。
- 春季・秋季→移動性高気圧と温帯低気圧の通過により数日おきに天気が変化する。
- 梅雨→停滞前線がとどまり，くもりや雨の日が続く。
- 盛夏→北太平洋高気圧に覆われて高温で多湿の日が続く。
- 秋雨→停滞前線と台風の襲来により雨の日が多い。

梅雨前線

春から夏にかけて，温暖で湿潤な気団からなる北太平洋高気圧(小笠原気団)と寒冷で湿潤な気団からなるオホーツク海高気圧(オホーツク海気団)の間に形成される停滞前線。

圧が問われているので，オホーツク海高気圧が正解となる。

(2)　問題図 2 の風は地上の風であるが，本問では摩擦力や遠心力の作用は考えなくてよいので，気圧傾度力とコリオリの力がつり合う地衡風とみなして風速を求めればよいことになる(図 4 － 3)。

コリオリの力は風速と sin α(α：緯度)の積に比例するが，本問では緯度の違いは無視できるので，風速はコリオリの力＝気圧傾度力に比例すると考えればよい。気圧傾度力は 2 地点間の気圧差を距離で割った値に比例する。地上天気図の等圧線は 4 hPa ごとに実線で引かれ，中心気圧の値によってはその間に 2 hPa の破線を入れることもある。P 点は 1000 hPa と 1004 hPa，Q 点は 1012 hPa と 1014 hPa の等圧線にそれぞれ挟まれている。また，P 点を挟む等圧線の間隔は Q 点を挟む間隔の約 1/2 倍と読み取れる。よって，P 点は Q 点に対して気圧差が 2 倍，距離(間隔)が約 1/2 倍であるので，P 点の気圧傾度力は Q 点の約 4 倍になる。この比がそのまま風速の比になるので，「4 倍」が正解となる。

なお，台風の進行方向の右側領域は，台風のまわりを反時計回りに吹く風の速度に台風の進行速度が加わるため，進行方向の左側領域に比べて風速が強くなる。問題図 2 では，P 点が台風の進行方向の右側領域にあるため，等圧線から読み取れる値よりも風速が台風の進行速度 15 km/h≒4 m/s だけ大きくなるからである。しかし，本問の条件に「台風の進行速度の影響は考えない」と入れてあるので，その点は考慮しなくてよい。

(3)　表アは，どの地点も風速が大きく，北日本の都市で雪，南の太平洋側の都市で晴天である。よって，西高東低型の冬型の気圧配置時と推察され，問題図 2 には該当しない(図 4 － 4)。

表エは，軒並み風速が大きく，暴風雨や大雨のところがあるので，台風接近時と推察される。問題図 2 の場合，天気が暴風雨か大雨になるとしたら台風に最も近い地点 8 (那覇)であるが，表エでは地点 4 (東京)が暴風雨になっている。このことも問題図 2 の気象状況に合致しないので，表エは該当しないと考えるべきである。

表イは，北日本ではくもりや雨，東京以南は晴天と，南北で天気が明瞭に異なっている。一方，表ウは，仙台と東京の天気が悪く，他の都市は概ね晴天やくもりである。停滞前線付近には雲が広くかかるので，前線に近い仙台と東京の天気が悪くなりやすい。よって，問題図 2 の日には表ウが該当する。なお，表ウの那覇の天気は，停滞前線の影響による雨ではなく，台風の影響によるものである。ちなみに表イは，関東甲信地方以南が梅雨明けした 3 日後である(図 4 － 5)。地点 4 (東京)以南は本格的に夏を迎え晴天であるが，東北地方以北は梅雨が明けていないため，概して天気はよくない。

地上の風

気圧傾度力が，コリオリの力・摩擦力の合力とつり合った状態で吹く風。

摩擦力は陸上＞海上であるため，風速は海上で大きくなる。

地衡風

気圧傾度力とコリオリの力がつり合った状態で上空を吹く風。高層天気図では，風向は等圧面の等高線に平行になる。

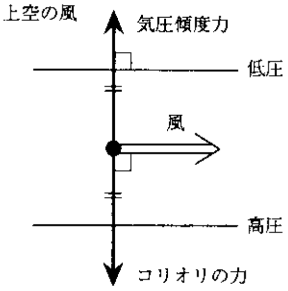


図 4 － 3　地衡風(北半球)

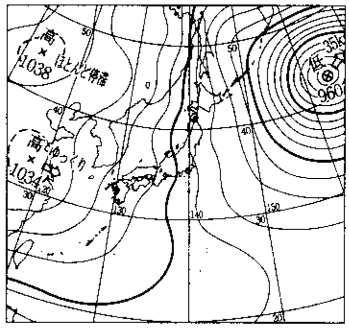


図 4 － 4　表アの日の地上天気図(冬季)

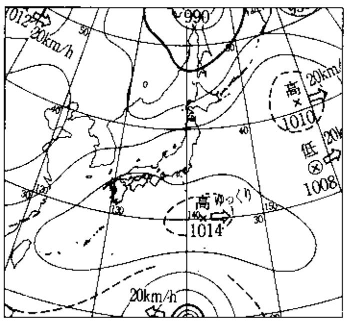


図 4 － 5　表イの日の地上天気図(夏季)

5 恒星

【解答】

問1	1	ヒッパルコス	2	暗線	3	A	4	F

問2	1×10^{11} 倍	問3	(1)	$M-m=5-5\log_{10}d$	(2)	ウ，エ	問4	カ

問5	(1)	表面温度	(2)	1×10^{4} 倍
	(3)	膨張して巨星となり，その後，外層部のガスを放出して白色矮星となる。		

【配点】 (20点)

問1 $\boxed{1}$・$\boxed{2}$：各2点×2 $\boxed{3}$・$\boxed{4}$：各1点×2， 問2 2点，

問3 (1) 2点 (2) 2点(完答・順不同)，

問4 2点， 問5 (1) 2点 (2) 2点 (3) 2点

【出題のねらい】

恒星の明るさと距離の関係，および，HR図上で示される恒星の特徴と進化について出題した。

【解説】 問題

問1 現在用いられている等級のもととなる等級を用いたのは紀元前の天文学者ヒッパルコス($\boxed{1}$)である。

スペクトル型は恒星のスペクトル中の暗線(吸収線)($\boxed{2}$)の現れ方によって分類されている。暗線は，連続スペクトル中の特定の波長の光が恒星の大気によって吸収されるために現れ，暗線の波長や強度は，大気の元素組成や大気の状態を示す。恒星の元素組成はどれもほぼ同じであるが，表面温度が異なるため，大気の電離状態が異なり，暗線の現れ方に違いが生じる。この違いによって，表面温度の高いものから順に，O，B，A($\boxed{3}$)，F($\boxed{4}$)，G，K，M型に分類されている。

問2 ポグソンは1等星の明るさが6等星の明るさの約100倍であることに着目し，5等級ごとに明るさが100倍となると定義した。等級が m_1，m_2 である恒星の明るさをそれぞれ l_1，l_2 とすると，

$$\frac{l_1}{l_2}=(\sqrt[5]{100})^{m_2-m_1}=10^{\frac{2}{5}(m_2-m_1)}$$

と表すことができる。よって，太陽とベテルギウスの見かけの等級をそれぞれ m_1，m_2 に代入すると，

$$\frac{\text{太陽の明るさ}}{\text{ベテルギウスの明るさ}}=10^{\frac{2}{5}\{0.5-(-27)\}}=1\times10^{11}$$

したがって，太陽の明るさはベテルギウスの明るさの 1×10^{11} 倍である。

問3 (1) 恒星の見かけの明るさは距離の2乗に反比例し，近いほど明るく見える。この関係を，**問2** で示された，明るさと等級の関係にあてはめて考える。絶対等級 M を定義する距離は10パ

【ポイント】

スペクトル型
スペクトルに現れる暗線(吸収線)による分類。表面温度の高い方から，
O型，B型，A型，F型，G型，K型，M型。

等級と明るさ
5等級小さいと100倍明るい。

見かけの明るさと距離
見かけの明るさは距離の2乗に反比例する。

ーセクで，実際の恒星の距離が d パーセクなので，10パーセクの距離で見たときの明るさ L と見かけの明るさ l の関係は

$$\frac{L}{l}=\frac{d^2}{10^2} \quad \cdots ①$$

一方，これらの明るさと絶対等級 M，見かけの等級 m の間には，ポグソンの定義より，

$$\frac{L}{l}=10^{\frac{2}{5}(m-M)} \quad \cdots ②$$

の関係がある。①，② 式より，

$$\frac{d^2}{10^2}=10^{\frac{2}{5}(m-M)} \qquad \therefore \quad \frac{d}{10}=10^{\frac{1}{5}(m-M)}$$

両辺の対数を取ると，

$$\log_{10}d-\log_{10}10=\frac{1}{5}(m-M)$$

この式を変形すると，

$$M-m=5-5\log_{10}d \quad \cdots ③$$

となり，等級差と距離の関係を示すことができる。

(2) (1)の ③ 式に $M-m=0$ を代入すると，

$5-5\log_{10}d=0$ よって $d=10$ となる。

したがって，アは誤りである。10パーセクは，絶対等級の基準の距離なので，この距離にある恒星の見かけの等級は絶対等級と等しくなる。

$M-m>0$ のときは $5>5\log_{10}d$ なので，$d<10$ となり，$M-m<0$ のときは $d>10$ となる。

したがって，イは誤りで，ウは正しい。

$M-m>0$ のときは $M>m$ であり，絶対等級よりも見かけの等級の方が小さい，つまり実際の位置にある方が明るく見えるので d は10パーセクよりも小さいことがわかる。逆に $M-m<0$ のときは $M<m$ となり，見かけの明るさの方が暗く見えるので，d は10パーセクよりも大きいことがわかる。

また，③ 式より，$M-m$ が大きくなるほど，d は小さくなることがわかるので，エは正しく，オは誤りである。

したがって，正解はウとエである。

問4　HR図上のスペクトル型は左ほど高い表面温度に対応している。したがって，主系列星は左上ほど表面温度が高い。また，左上ほど質量が大きいため，放射するエネルギーの元となる水素を多くもっているが，中心での核融合反応が激しく起こっているので，進化が速く，主系列星にとどまる期間，つまり寿命が短い。

したがって，正解はカである。

問5　図5－1に，HR図と，縦軸・横軸の示す特徴を示した。

(1) 恒星Pと恒星Qはスペクトル型が同じなので，表面温度が等しい。また，恒星の放射エネルギーが最大となる電磁波の波長

絶対等級 M
10パーセクの距離から見たときの等級。

見かけの等級 m
地球から見たときの等級。

絶対等級 M と見かけの等級 m と距離
恒星の距離を d(パーセク)とすると，$M-m=5-5\log_{10}d$ が成り立つ。

HR図
縦軸に絶対等級，横軸にスペクトル型をとって恒星をプロットした図。

主系列星
HR図上の左上から右下にのびる帯状の領域(主系列)に分布。
左上ほど，質量が大きく寿命が短い。

は表面温度によって決まり，波長によって色も決まる。しかし，色は物理量ではないので解答としては不適当である。

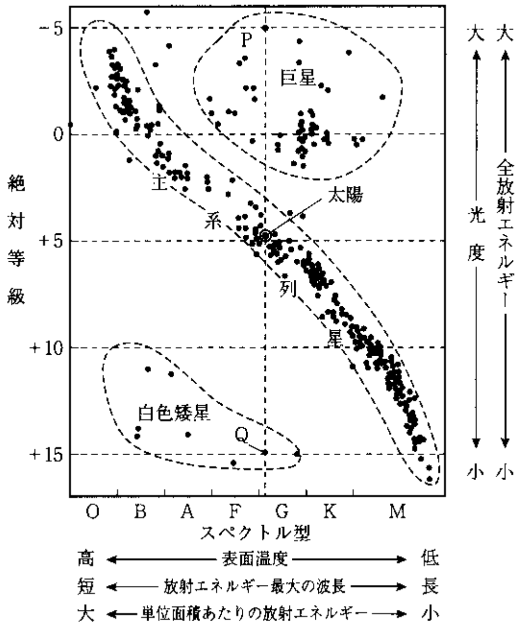


図5－1　HR図

HR図の横軸：スペクトル型
左ほど表面温度が高い。
左ほど放射エネルギーが最大となる波長が短い。
左ほど単位面積あたりの放射エネルギーが大きい。

HR図の縦軸：絶対等級
上ほど絶対等級が小さい(明るい)。
上ほど光度(全放射エネルギー)が大きい。

(2)　表面温度 T の恒星の単位面積あたりの放射エネルギー E は $E=\sigma T^4$(σ は定数)であり，これをシュテファン・ボルツマンの法則という。半径 R の恒星の明るさは，恒星から放射される全エネルギー L によって決まり，L は E に表面積をかけた値なので，$L=4\pi R^2\cdot\sigma T^4$ である。よって，明るさは半径の2乗と表面温度の4乗に比例する。

シュテファン・ボルツマンの法則
恒星の単位面積あたりの放射エネルギー量は表面温度の4乗に比例。

問題の恒星Pの絶対等級は－5等，恒星Qの絶対等級は＋15等で，その差は20等なので，恒星Pの明るさは恒星Qの明るさの 100^4 倍である。両者のスペクトル型が等しいことから表面温度が等しいので，この明るさの比は表面積の比と等しい。したがって半径は $\sqrt{100^4}$ 倍 $=10^4$ 倍である。

(3)　太陽は約46億年前，星間物質から誕生し(原始星)，収縮して中心温度が1000万Kを超えると中心部で水素からヘリウムへの核融合反応が始まって主系列星となった。現在の太陽は，主系列星の段階である。太陽の寿命は約100億年なので，約50億年後，中心がヘリウム核となり，水素の核融合がヘリウム核の外側の領域に移るため恒星は膨張して巨星(赤色巨星)(領域X)となる。このとき中心部は収縮し，やがてヘリウムが核融合によって炭素や酸素に変わっていく。中心部のヘリウム核の核融合反応が終わると，外層部がゆっくり放出されて惑星状星雲となり，中心部には高温高密度の白色矮星(わいせい)(領域Y)が残る。

太陽の進化
原始星→主系列星(現在の太陽)→巨星(赤色巨星)→惑星状星雲→白色矮星。

巨星
低温で半径が大きく密度が小さい。

白色矮星
高温で半径が小さく密度が大きい。