クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2012年度

第3回 全統記述模試問題

数　　学

（Ⅰ・ⅠA型　80分
ⅡA・ⅡB型　100分
ⅢB・ⅢC型　120分）

2012年 10月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記および本冊子裏表紙の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1. 問題冊子は14ページである。
2. 解答用紙は別冊になっている。（解答用紙冊子表紙の注意事項を熟読すること。）
3. 本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4. 下表のような「問題選択型」が用意されているので，志望する大学・学部・学科の出題範囲・科目に合わせて，選択型を選んで解答すること。出題範囲に合わない型を選択した場合には，志望校に対する判定が正しく出ないことがあるので注意すること。

型	出題範囲	問題ページ	解答用紙
Ⅰ	数学Ⅰ	P．1～3	Ⅰ・ⅠA型1枚
ⅠA	数学Ⅰ，A		
ⅡA	数学Ⅰ，Ⅱ，A	P．5～8	ⅡA・ⅡB型2枚
ⅡB	数学Ⅰ，Ⅱ，A，B		
ⅢB	数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B	P．9～14	ⅢB・ⅢC型3枚
ⅢC	数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，C		

5. 解答用紙は，選択する型によって異なる。必ず指定された解答用紙に正しく答えよ。**誤った番号の箇所に解答している場合は得点としないので注意すること。**
6. 試験開始の合図で解答用紙冊子の数学の解答用紙を切り離し，下部の所定欄に 氏名（フリガナ，漢字）・在・卒高校名・クラス名・出席番号・受験番号（受験票の発行を受けている場合）を記入すること。また，選択問題がある場合は，上部の所定欄に 選択問題 を記入すること。
7. 解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となる。
8. 試験終了の合図で上記6.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

I・I A型

I型，I A型受験者は次の表に従って解答すること．

I　型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ を必答．
I A 型	$\boxed{1}$，$\boxed{3}$ を必答．

$\boxed{1}$ 【I・I A型共通　必須問題】（配点　60点）

解説

(1) 実数 x，y は $x+y=\sqrt{2}$，$x-y=\sqrt{3}$ を満たしている．次の式の値を求めよ．

(i) x^2-y^2　　　(ii) xy　　　(iii) x^3-y^3

(2) a，b は実数の定数とする．

x の1次関数 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ の $0\leqq x\leqq 2$ の範囲における最大値を M，最小値を m とする．

(i) $a>0$ のとき，M，m をそれぞれ a，b を用いて表せ．

(ii) $M=-3m$ が成り立つとき，b を a を用いて表せ．

(3) 平面上に三角形ABCがあり，

$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{AC}=7,\quad \mathrm{BC}=5\sqrt{3}$$

を満たしている．

(i) $\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値と $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．

(ii) 三角形ABCの面積 S を求めよ．

(iii) 三角形ABCの内接円の半径 r を求めよ．

(iv) $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺BCの交点をDとするとき，三角形ABDの外接円の半径 R を求めよ．

2 **【Ⅰ型　必須問題】**（配点　40点）　解説

a を実数の定数として，

$$f(x)=x^2-2ax+2,$$
$$g(x)=-x^2+x+2$$

とする．

(1)　$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　不等式 $g(x)\geqq 0$ を解け．

(3)　方程式 $f(x)=0$ が，(2)で求めた x の範囲に相異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

Ⅰ・ⅠA型

3 【ⅠA型　必須問題】（配点　40点）

解説

袋の中に，1と書かれたカードが1枚，2と書かれたカードが2枚，3と書かれたカードが1枚，白紙のカードが1枚，合計5枚のカードが入っている．また，2つの空の箱AとBがある．

以下の試行を T とする．

「袋の中から1枚のカードを無作為に選ぶ．

・そのカードの数字が1または3のときは，箱Aにカードの数字と同じ個数の球を入れる．

・そのカードの数字が2のときは，箱Bに2個の球を入れる．

・そのカードが白紙のときは，何もしない．」

1回の試行が終わるたびに選んだカードを袋に戻すものとして，T を何回か行う．

(1) T を1回行った後に，箱Aに入っている球の個数が0である確率を求めよ．

(2) T を2回行った後に，箱Aに入っている球の個数が1である確率，2である確率をそれぞれ求めよ．

(3) T を4回行った後に，箱A，Bに入っている球の個数をそれぞれ a，b とする．

(i) $a=b=4$ である確率を求めよ．

(ii) $a+b=5$ である確率を求めよ．

ⅡA・ⅡB 型の問題は次ページから始まる．

ⅡA・ⅡB型

ⅡA型，ⅡB型受験者は次の表に従って解答すること．

ⅡA型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ より1題選択．
ⅡB型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より1題選択．

$\boxed{1}$ **【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】**（配点　50点）

解説

(1)　$(x-1)(y-2)=3$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2)　関数 $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x}$ $(x>0)$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(3)　不等式 $(2\cos\theta-1)(2\sin\theta-1)<0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を解け．

(4)　関数 $y=(\log_2 x)^2-6\log_2 x$ の $1\leqq x\leqq 16$ における最大値と最小値を求めよ．

(5)　平面上に三角形ABCがあり，

$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{AC}=7,\quad \mathrm{BC}=5\sqrt{3}$$

を満たしている．

(i)　$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値と $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．

(ii)　三角形ABCの外接円の半径 R を求めよ．

(iii)　三角形ABCの内接円の半径 r を求めよ．

2 **【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】**（配点　50点）　解説

a，b を実数の定数として，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を，

$$f(x)=x^2+x+1,$$
$$g(x)=x^2-(4a-1)x+b$$

とする．また，放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．

点 $(0,\ 1)$ における C_1 の接線が C_2 に接している．

(1)　b を a を用いて表せ．

(2)　$a>0$ とし，連立不等式

$$0\leqq y\leqq f(x)\quad かつ\quad 0\leqq y\leqq g(x)$$

で表される領域を E とし，不等式 $0\leqq x\leqq 2$ で表される領域を F とする．

E と F の共通部分の面積を $S(a)$ とする．

(i)　$S(a)$ を求めよ．

(ii)　a が $a>0$ を満たして変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

3 **【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】**（配点　50点）　解説

a は実数の定数とする．xy 平面上に，

$$円\ C_1：x^2+y^2=9,$$
$$円\ C_2：x^2+y^2-2ax-\sqrt{2}\,ay+6a-9=0$$

があり，円 C_2 の半径は $\sqrt{3}$ である．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ．

(3)　C_1 の周または外部にあり，かつ C_2 の周または内部にある領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が D 上を動くとき，$2x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

ⅡA・ⅡB型

$\boxed{4}$ 【ⅡA・ⅡB型共通　選択問題】（配点　50点）

解説

$\boxed{\mathrm{M}}$, $\boxed{\mathrm{M}}$, $\boxed{\mathrm{M}}$, $\boxed{\mathrm{M}}$, $\boxed{\mathrm{F}}$, $\boxed{\mathrm{F}}$, $\boxed{\mathrm{F}}$ の７枚のカードを，A, B, C, D の男子４人，p, q, r の女子３人の計７人の生徒に１枚ずつ配り，次のように得点を与える．

・$\boxed{\mathrm{M}}$ が配られた男子および $\boxed{\mathrm{F}}$ が配られた女子の得点はそれぞれ $+a$ 点，

・$\boxed{\mathrm{F}}$ が配られた男子および $\boxed{\mathrm{M}}$ が配られた女子の得点は $-b$ 点．

ただし，$a>0$, $b>0$ である．

(1)　得点が $+a$ 点となる生徒が７人である確率を求めよ．

(2)　得点が $+a$ 点となる生徒が３人である確率を求めよ．

(3)　７人の得点の和を X とおく．

(i)　X のとり得る値をすべて求めよ．

(ii)　X の期待値が 0 となるとき，$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ．

$\boxed{5}$ 【ⅡA・ⅡB型共通　選択問題】（配点　50点）

解説

四面体 OABC があり，

$$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{OA}=\mathrm{OC},\ \angle\mathrm{OAB}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

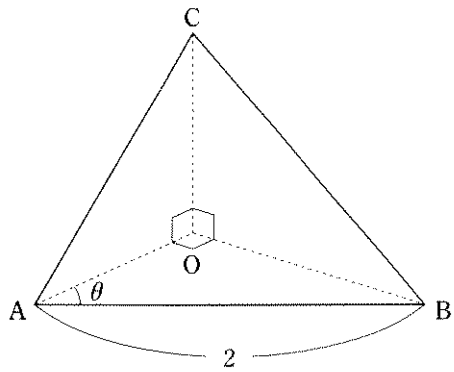
$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{2}$$

を満たしている．

(1)　四面体 OABC の体積 V を θ を用いて表せ．
また，V の最大値を求めよ．

(2)　三角形 OAB, 三角形 OBC, 三角形 OCA の面積の和を S とする．S のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　V, S の最大値を与える θ の値をそれぞれ θ_V, θ_S とするとき，θ_V と θ_S の大小を調べよ．



6 **【ⅡB型　選択問題】**（配点　50点）　解説

一辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，

辺OAを1：2に内分する点をP，

辺ABの中点をQ，

辺BCをs：$1-s$に内分する点をR，

辺OCをt：$1-t$に内分する点をS

とする．ただし，$0<s<1$，$0<t<1$である．

(1)　$\overrightarrow{PR}$，$\overrightarrow{QS}$をそれぞれs，t，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{PR}|^2$，$|\overrightarrow{QS}|^2$をそれぞれs，tを用いて表せ．

(2)
$$\overrightarrow{PR}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PS}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$
が成り立っている．このとき，α，β，tをそれぞれsを用いて表せ．

(3)　直線PRと直線QSが交わっているとして，その交点をXとする．

(i)　$\dfrac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{XR}|}$を$s$を用いて表せ．

(ii)　4点P，Q，R，Sが同一円周上にあるとき，s，tの値をそれぞれ求めよ．

ⅢB・ⅢC型

ⅢB型，ⅢC型受験者は次の表に従って解答すること.

ⅢB型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より1題選択.
ⅢC型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ より1題選択.

$\boxed{1}$ **【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】**（配点　40点）　解説

(1)　a，a，a，a，b，b を一列に並べる順列の総数を求めよ．また，a，a，a，a，b，b を円形に並べる円順列の総数を求めよ．

(2)　$x^2-2xy+2y^2=5$ を満たす正の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(3)　$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ．

(4)　不等式 $(2\cos\theta-1)(2\sin\theta-1)<0$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ を解け．

(5)　$x=\tan\theta$ とおいて，定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ の値を求めよ．

ⅢB・ⅢC型

2 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）　解説

$f(x)=x^4+x^2+1$ とし，$x^2+x+1=0$ の解の1つを α とする．

(1)　α^3 の値を求めよ．また，$f(\alpha)$ の値を求めよ．

(2)　$f(x)=0$ のすべての解からなる集合を S とし，

$$M=\{pq \mid p\in S,\ q\in S,\ p\neq q\}$$

とする．M のすべての要素を解にもつ x の方程式のうち，次数が最小であり，かつ最高次の項の係数が1であるものを求めよ．

3 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）　解説

数列 $\{a_n\}$ は，

$$\begin{cases} a_1=1, \\ \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

で定められている．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n を求めよ．

(3)　(2)の S_n に対して，不等式

$$4-S_n \leqq \frac{1}{(\sqrt{2}\,)^{n-2}}$$

が6以上のすべての整数 n に対して成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

ⅢB・ⅢC型

4 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

a, b, c を正の定数とする．xy 平面上において，曲線 $C_1 : y=ax^2+b$ と曲線 $C_2 : y=\log cx$ がともに点 A において直線 $l : y=x$ に接している．

(1)　a, b, c の値をそれぞれ求めよ．

(2)　A を通り x 軸に平行な直線と C_1 で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(3)　l, C_1 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とし，l, C_2 および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とする．

V_1 と V_2 の大小を比べよ．ただし，自然対数の底を e とするとき $e=2.718\cdots$ である．

5 【Ⅲ B・Ⅲ C型共通　選択問題】（配点　40点）　解説

一辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，

辺OAを1：2に内分する点をP，

辺ABの中点をQ，

辺BCをs：$1-s$に内分する点をR，

辺OCをt：$1-t$に内分する点をS

とする．ただし，$0<s<1$，$0<t<1$である．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QS}}$をそれぞれ$s$，$t$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2$をそれぞれ$s$，$t$を用いて表せ．

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PS}}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$
が成り立っている．このとき，α，β，tをそれぞれsを用いて表せ．

(3)　直線PRと直線QSが交わっているとして，その交点をXとする．

(i)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{XR}}|}$を$s$を用いて表せ．

(ii)　4点P，Q，R，Sが同一円周上にあるとき，s，tの値をそれぞれ求めよ．

Ⅲ B・Ⅲ C 型

6 【Ⅲ B・Ⅲ C 型共通　選択問題】（配点　40点）

解説

n を正の整数として，関数

$$f(x)=\frac{x}{n^2+x^2},$$

$$g(x)=f(x)\sin^2\pi x$$

を考える．

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx$ の値を求めよ．

(3)　k を $k \geqq n+1$ を満たす整数とする．区間 $k-1 \leqq x \leqq k$ において，不等式

$$\frac{k}{2(n^2+k^2)} \leqq \int_{k-1}^{k} g(x)\,dx \leqq \frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}}$$

が成り立つことを示せ．

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n} g(x)\,dx$ を求めよ．

7 【**Ⅲ C型　選択問題**】（配点　40点）　解説

θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている．

xy 平面上において，

$$双曲線 H : x^2-\frac{y^2}{\tan^2\theta}=1$$

の焦点のうち x 座標が正のものをF，漸近線のうち傾きが正のものを l，Fを通り l と垂直な直線と l の交点をPとする．

(1)　Fの座標，l の方程式をそれぞれ θ を用いて表せ．

(2)　Pの座標を θ を用いて表せ．

(3)　放物線 $C : y=ax^2+b$ （a，b は実数）が点Pにおいて直線 l と接している．C の焦点をF′とする．

(i)　F′の座標を θ を用いて表せ．

(ii)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，線分FF′（両端を除く）の通過する範囲を xy 平面上に図示せよ．

Ⅰ・ⅠA型，ⅡA・ⅡB型，ⅢB・ⅢC型 はそれぞれ問題選択型のいずれかによって解答（選択解答）する問題が指定されている。指示に従い，必ず指定された問題を解答（選択解答）し，下記の記入例に従って解答用紙に必要事項を記入すること。

〈記入例〉　ⅡB型 選択生の場合

〈数学ⅡA・ⅡB型 解答用紙（その2）裏　面〉