クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2014年度

第1回 全統記述模試問題

数　学

（Ⅰ型　80分
Ⅱ型　100分
Ⅲ型　120分）

2014年 5月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記および本冊子裏表紙の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1. 問題冊子は12ページである。
2. 解答用紙は別冊になっている。（解答用紙冊子表紙の注意事項を熟読すること。）
3. 本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4. 下表のような「選択型」が用意されているので，志望する大学・学部・学科の出題範囲・科目に合わせて，選択型と受験科目で指定された問題を選んで解答すること。受験科目に合わない型・問題を選択した場合には，志望校に対する判定が正しく出ないことがあるので注意すること。

選択型	受験科目	問題ページ	解答用紙
Ⅰ	数学Ⅰ	P．2～3	Ⅰ型1枚
	数学Ⅰ，A		
Ⅱ	数学Ⅰ，A，Ⅱ	P．4～7	Ⅱ型2枚
	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B		
Ⅲ	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ	P．8～12	Ⅲ型3枚

5. 解答用紙は，選択する型によって異なる。必ず指定された解答用紙に正しく答えよ。**誤った番号の箇所に解答している場合は得点としないので注意すること。**
6. 試験開始の合図で解答用紙冊子の数学の解答用紙を切り離し，下部の所定欄に **氏名（フリガナ，漢字）**・**在・卒高校名**・**クラス名**・**出席番号**・**受験番号**（**受験票の発行を受けている場合**）を記入すること。また，選択問題がある場合は，上部の所定欄に **選択問題** を記入すること。
7. 解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となる。
8. 試験終了の合図で上記6.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

1461210112110010

I 型の問題は次ページから始まる．

I 型

I 型受験者は次の表に従って解答すること．

受験科目	数学 I	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ を必答．
	数学 I，A	$\boxed{1}$，$\boxed{3}$ を必答．

$\boxed{1}$ **【I 型共通　必須問題】**（配点　60点）　解説

(1)　次の問に答えよ．

(i)　$(x^2+x+2)(x^2-x+2)$ を展開せよ．

(ii)　x^4+5x^2+9 を因数分解せよ．

(2)　実数 x，y が $x+y=3$，$xy=-1$ を満たすとき，次の式の値を求めよ．

(i)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　(ii)　x^2+y^2　　(iii)　x^3+y^3

(3)　a は定数とする．x の方程式

$$a|x-2|-3=0 \qquad \cdots(*)$$

がある．

(i)　$(*)$ が $x=-1$ を解にもつとき，a の値を求めよ．

(ii)　a が (i) で求めた値のとき，$(*)$ を解け．

(4)　$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CA}=4$ である三角形 ABC がある．

(i)　$\cos A$，$\sin A$ の値をそれぞれ求めよ．

(ii)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(iii)　三角形 ABC の外接円の半径と内接円の半径をそれぞれ求めよ．

Ⅰ型

2 【Ⅰ型数学Ⅰ　必須問題】（配点　40点）

解説

a は実数の定数とする．2つの2次関数

$$f(x)=x^2-2x-4,\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax$$

があり，$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を p，最小値を q とする．さらに，$0\leqq x\leqq 3$ における $g(x)$ の最小値を $m(a)$ とする．

(1)　$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　p と q の値を求めよ．

(3)　$m(a)$ を a を用いて表せ．

(4)　$q\leqq m(a)\leqq p$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

3 【Ⅰ型数学Ⅰ，A　必須問題】（配点　40点）

解説

0から9までの数字がひとつずつ書かれた10枚のカード $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，…，$\boxed{9}$ がある．この中から5枚取り出して左から右へ一列に並べる並べ方を考える．

(1)(i)　並べ方は何通りあるか．

(ii)　$\boxed{0}$ が $\boxed{1}$ と隣り合うような並べ方は何通りあるか．

(iii)　$\boxed{0}$ が $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の少なくとも一方と隣り合うような並べ方は何通りあるか．

(2)　$\boxed{0}$ より左に $\boxed{1}$ があり，$\boxed{0}$ より右に $\boxed{2}$ があるような並べ方を考える．

(i)　並べ方は何通りあるか．

(ii)　$\boxed{0}$ より左にあるカードで定まる数を L，$\boxed{0}$ より右にあるカードで定まる数を R とする．例えば，

$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{2}$ のとき，$L=13$，$R=42$，

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ のとき，$L=1$，　$R=234$．

(i)で求めた並べ方のうち，$L<R$ となる並べ方は何通りあるか．

Ⅱ型

Ⅱ型受験者は次の表に従って解答すること.

受験科目	数学Ⅰ，A，Ⅱ	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ より1題選択.
	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ より1題選択.

$\boxed{1}$ **【Ⅱ型共通　必須問題】**（配点　50点）　解説

(1)　三角形ABCにおいて，$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle BAC=30^\circ$ のとき，辺BCの長さと三角形ABCの外接円の半径を求めよ.

(2)　4人で1回だけジャンケンをする.

(i)　1人だけが勝者となる確率を求めよ.

(ii)　1人の勝者も出ない確率を求めよ.

(3)　x の方程式 $4^x-a\cdot 2^x+12=0$ が $x=2$ を解にもつとする.
定数 a の値を求めよ．また，方程式の解をすべて求めよ.

(4)　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{3}|x^2-1|\,dx$ の値を求めよ.

(5)　円 C：$(x-3)^2+y^2=1$ と直線 l：$y=mx-1$ が異なる2点で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ.

$\boxed{2}$ 【Ⅱ型共通　必須問題】(配点　50点)

解説

0から9までの数字がひとつずつ書かれた10枚のカード$\boxed{0}$, $\boxed{1}$, …, $\boxed{9}$がある.この中から5枚取り出して左から右へ一列に並べる並べ方を考える.

(1)(i) 並べ方は何通りあるか.

(ii) $\boxed{0}$が$\boxed{1}$と隣り合うような並べ方は何通りあるか.

(iii) $\boxed{0}$が$\boxed{1}$, $\boxed{2}$の少なくとも一方と隣り合うような並べ方は何通りあるか.

(2) $\boxed{0}$より左に$\boxed{1}$があり, $\boxed{0}$より右に$\boxed{2}$があるような並べ方を考える.

(i) 並べ方は何通りあるか.

(ii) $\boxed{0}$より左にあるカードで定まる数をL, $\boxed{0}$より右にあるカードで定まる数をRとする. 例えば,

$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{2}$のとき, $L=13$, $R=42$,

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$のとき, $L=1$, $R=234$.

(i)で求めた並べ方のうち, $L<R$となる並べ方は何通りあるか.

Ⅱ型

3 【Ⅱ型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

座標平面上に2つの円

$$C_1 : x^2+y^2=4,$$

$$C_2 : x^2+y^2=1$$

と，C_1，C_2 上を動く点P，Qがある．点Pは点A(2，0)を出発し C_1 上を，点Qは点B(1，0)を出発し C_2 上を，

（Pが進んだ道のり）＝（Qが進んだ道のり）

を満たしながら反時計まわりに進む．

Pが C_1 上を一周するとき，次の問に答えよ．

(1)　Pの座標が $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のとき，それまでにQが進んだ道のりと，Qの座標を θ を用いて表せ．

(2)　(1)で求めたQを，y 軸方向に-1だけ平行移動した点をRとする．

(i)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，PR^2 を t を用いて表せ．

(ii)　θ が $0\leqq\theta<2\pi$ を満たして変化するとき，線分PRの長さが最大となるPの座標を求めよ．

4 【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ　選択問題】（配点　50点）

解説

a は正の定数とし，$f(x)=-ax^2+a$ とする．

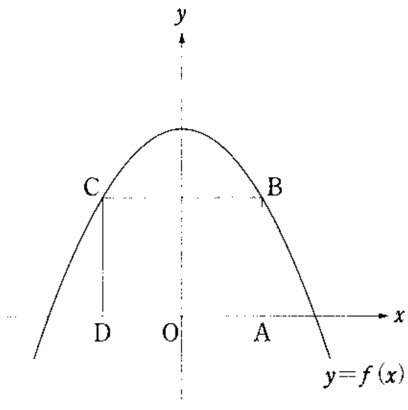
xy 平面上に，4点 $A(t,\ 0)$，$B(t,\ f(t))$，$C(-t,\ f(-t))$，$D(-t,\ 0)$ をとり，長方形ABCDの周の長さを l とする．ただし，$0<t<1$ とする．

(1)　l を a，t を用いて表せ．

(2)(i)　$a=2$ のとき，l のとり得る値の範囲を求めよ．

(ii)　l のとり得る値の範囲を a を用いて表せ．

(3)　$l=12$ を満たす t がちょうど2個存在するような a の値の範囲を求めよ．



Ⅱ型

5 【Ⅱ型共通　選択問題】（配点　50点）

解説

a，b は実数の定数とし，

$$f(x)=x^3-3x^2+(3-3a)x+b$$

とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通るとする．

(1)　b を a を用いて表せ．

(2)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求め，そのときの極値を a を用いて表せ．

(3)　次の（条件）を考える．

（条件）　x の方程式 $|f(x)|=k$ がちょうど5つの実数解をもつ．

（条件）を満たす実数 k が存在するような a の値の範囲を求め，k を a を用いて表せ．

6 【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ，B　選択問題】（配点　50点）

解説

平面上に OA＝2，OB＝3，AB＝$\sqrt{7}$ を満たす三角形 OAB がある．辺 OA を直径とする円が直線 AB と2点 A，M で交わっている．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3)　点 Q が辺 OB 上を動くとき，AQ＋QM が最小となるときの Q を $\mathrm{Q_0}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

Ⅲ型

Ⅲ型受験者は次の表に従って解答すること.

受験科目	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し， $\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ より 1 題選択.

$\boxed{1}$ 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

(1) $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$ の値を求めよ.

(2) $f(x) = 4^x - a \cdot 2^x + 12$ とする.

(i) x の方程式 $f(x) = 0$ が $x = 2$ を解にもつとき，定数 a の値を求めよ.

(ii) a が(i)で求めた値のとき，不等式 $f(x) < 0$ を解け.

(3) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ の正の約数の個数と総和を求めよ.

(4) n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ.

(5) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2^n + 3^{2n+1}}{3^{2n} + 5^{n+1}}$ を求めよ.

$\boxed{2}$ 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

2つの袋X，Yがあり，袋Xには3枚のカード$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$が，袋Yには3枚のカード$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{1}$が入っている．

「Aが袋Xから，Bが袋Yからそれぞれ1枚のカードを引き，書かれた数字を記録して袋に戻す」という試行をTとする．Tを1回行い，A，Bが引いたカードに書かれた数字をそれぞれa，bとしたとき，次の規則に従ってAとBに点を与える．

・$a>b$のとき，Aに$a-b$点を与え，Bには点を与えない．

・$a<b$のとき，Bに$b-a$点を与え，Aには点を与えない．

・$a=b$のとき，A，Bのどちらにも点を与えない．

(1)　Tを1回行ったとき，Aが1点を得る確率，Aが2点を得る確率，およびAとBのどちらも点を得ない確率を求めよ．

(2)　Tを4回行ったあと，A，Bが得た点の合計をそれぞれS_A，S_Bとする．

(i)　$S_A=S_B=0$となる確率を求めよ．

(ii)　$S_A=S_B$となる確率を求めよ．

Ⅲ型

3 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

座標平面上に原点Oを中心とする半径2の円 C_1 と，点$(0,\ -1)$を中心とする半径1の円 C_2 がある．C_1，C_2 上を動く点P，Qがあり，点Pは点A$(2,\ 0)$を出発し C_1 上を，点Qは点B$(1,\ -1)$を出発し C_2 上を，

$$(\text{P が進んだ道のり})=(\text{Q が進んだ道のり})$$

を満たしながら反時計まわりに進む．

Pが C_1 上を一周するとき，次の問に答えよ．

(1)　Pの座標が$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$のとき，それまでにQが進んだ道のりと，Qの座標を θ を用いて表せ．

(2)　線分PQの長さの最大値と，そのときのPの座標を求めよ．

4 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

平面上に三角形OABがあり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=-4\vec{a}+3\vec{b}$$

により点 $\mathrm{A_1}$ を定める．

(1)　三角形 $\mathrm{OAA_1}$ の重心をGとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　直線OBと直線 $\mathrm{AA_1}$ の交点をCとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ．また，$\mathrm{AC}:\mathrm{A_1C}$ を求めよ．

(3)　$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OA_1}=4$ とする．

(i)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求め，$\cos\angle\mathrm{AOB}$ と $\cos\angle\mathrm{A_1OB}$ の値を求めよ．

(ii)　$\triangle\mathrm{OAA_1}\backsim\triangle\mathrm{OBB_1}$ となるように点 $\mathrm{B_1}$ を定める．ただし，$\mathrm{B_1}$ は直線OBに関してAと反対側にあるものとする．

三角形 $\mathrm{OBB_1}$ の重心を $\mathrm{G_1}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

5 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

一辺の長さが4の正三角形ABCがあり，その内部に，

2辺AB，ACに接する円A_1，A_2，A_3，…，

2辺BC，BAに接する円B_1，B_2，B_3，…，

2辺CA，CBに接する円C_1，C_2，C_3，…

があり，A_1，B_1，C_1は半径が等しく，どの2つも互いに外接している．

ただし，自然数nに対し，A_nとA_{n+1}，B_nとB_{n+1}，C_nとC_{n+1}は互いに外接し，

A_{n+1}の半径はA_nの半径より小さく，

B_{n+1}の半径はB_nの半径より小さく，

C_{n+1}の半径はC_nの半径より小さい

ものとする．

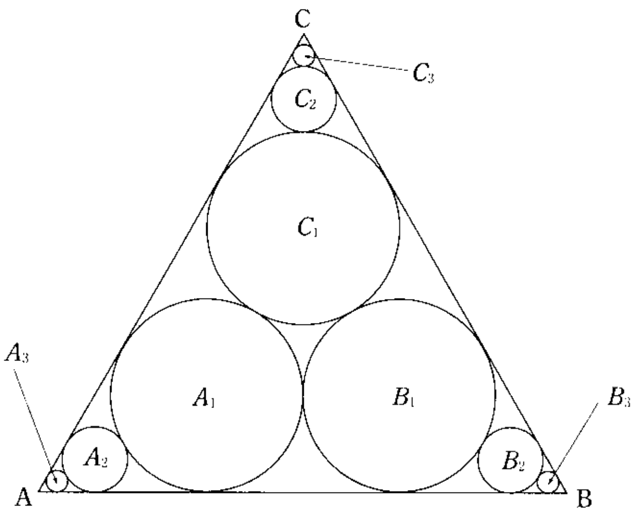
(1)　A_1の半径を求めよ．

(2)　A_2の半径を求めよ．

(3)　3つの円A_n，B_n，C_nの面積の和をS_n（$n=1$，2，3，…）とするとき，無限級数

$$S_1+S_2+S_3+\cdots$$

の和を求めよ．



Ⅲ型

6 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

a は正の定数とし，

$$f(x)=\frac{e^x}{x-a}\quad (x>a)$$

とする．原点 O から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線と $y=f(x)$ の接点を P とし，P の x 座標を t とする．

(1)　a と t の満たす関係式を求めよ．

(2)　a の値が増加するとき，t の値も増加することを示せ．

(3)　a の値が増加するとき，直線 OP の傾きも増加することを示せ．

7 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

α は $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たす実数とし，$w=8(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)$ とおく．

z の 2 つの 3 次方程式

$$z^3=8\quad \cdots①,\qquad z^3=w\quad \cdots②$$

を考える．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　方程式 ① を解け．

(2)　方程式 ② の解を極形式で表せ．

(3)　複素数平面上で ①，② の解が表す点を反時計まわりに順に結んでできる六角形の面積を S とする．

(i)　S を α を用いて表せ．

(ii)　α が $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たして変化するとき，S のとり得る値の範囲を求めよ．

Ⅰ型，Ⅱ型，Ⅲ型 はそれぞれ選択型のいずれかによって解答（選択解答）する問題が指定されている。指示に従い，必ず指定された問題を解答（選択解答）し，下記の記入例に従って解答用紙に必要事項を記入すること。

〈記入例〉　Ⅱ型 選択生の場合

〈数学Ⅱ型 解答用紙（その２）裏　面〉