クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度　第2回　全統マーク模試

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年8月実施】

本冊子の解答・採点基準をもとに自己採点を行ってください。「自己採点シート」は学習の手引き｛英語｝編冊子の巻末にありますのでご利用ください。

河合塾

【数 学 ①】

数 学 I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	アx	$6x$	1	
	イ－ウx	$6-6x$	1	
	エx^2－オx＋カ	$6x^2-6x+6$	2	
	$\dfrac{\text{キ}\pm\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$	2	
	コ	4	3	
	サシ	14	2	
	スセ	52	2	
	x^2＋(ソy－タチ)x ＋ツy^2－テトy＋ナニ	$x^2+(4y-14)x+3y^2-26y+48$	1	
	(x＋y－ヌ)(x＋ネy－ノ)	$(x+y-6)(x+3y-8)$	2	
	(ハ，ヒ)	(4，1)	2	
	(フ，ヘ)	(6，1)	2	
	第1問　自己採点小計		(20)	
第2問	(アイ，ウエ)	(－1，－6)	3	
	(オ，カ)	(3，8)	3	
	キ	4	3	
	ク	2	3	
	ケコ	－6	3	
	サ	3	3	
	シスa^2＋セソa－タチ	$-2a^2+12a-10$	2	
	ツ	8	2	
	テ$\sqrt{\text{ト}}$－ナ	$2\sqrt{5}-1$	3	
	第2問　自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	4	
	ウ$\sqrt{\text{エ}}$	$9\sqrt{2}$	4	
	オ$\sqrt{\text{カ}}$	$3\sqrt{3}$	4	
	$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{1}{3}$	4	
	ケコ°	90°	3	
	サ	3	3	
	$\dfrac{\text{シ}\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}}$	$\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$	4	
	$\dfrac{\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$	4	
	第3問　自己採点小計		(30)	
第4問	アイ＜x＜ウ	$-1<x<4$	4	
	$\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}$＜$x$＜カ	$\dfrac{1}{3}<x<4$	3	
	(ax－a＋キ)(x－クa)	$(ax-a+2)(x-2a)$	3	
	ケ$\left(a-\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}\right)^2+\dfrac{\text{シス}}{\text{セ}}$	$2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$	3	
	ソ	1	3	
	$\dfrac{\text{タ}}{\text{チ}}$＜$a$≦ツ	$\dfrac{1}{2}<a\leqq 1$	4	
	テ≦a≦ト	$1\leqq a\leqq 2$	5	
	第4問　自己採点小計		(25)	
	自己採点合計		(100)	

第１問　方程式・不等式，数と式

〔1〕 長方形 ABCD において，AB＝CD＝6，BC＝DA＝2 とする．辺 BC 上に点 P，辺 CD 上に点 Q を

$$BP=2x,\quad CQ=6x\quad (0<x<1)$$

となるようにとる．

このとき，△ABP の面積は $\boxed{\text{ア}}x$，△DAQ の面積は $\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}x$ であり，△APQ の面積を S とすると

$$S=\boxed{\text{エ}}x^2-\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$$

である．

$S=5$ となるのは

$$x=\frac{\boxed{\text{キ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである．

$$x=\frac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$ のとき，$m\leqq\dfrac{1}{x}<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{コ}}$ である．

〔2〕 $a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$ とする．このとき

$$a^2+b^2=\boxed{\text{サシ}},\quad a^3+b^3=\boxed{\text{スセ}}$$

である．

さらに

$$P=(x+ay-b^2)(x+by-a^2)+2y^2+26y+47$$

とする．

P を x について整理し，因数分解すると

$$P=x^2+\left(\boxed{\text{ソ}}y-\boxed{\text{タチ}}\right)x+\boxed{\text{ツ}}y^2-\boxed{\text{テト}}y+\boxed{\text{ナニ}}$$
$$=\left(x+y-\boxed{\text{ヌ}}\right)\left(x+\boxed{\text{ネ}}y-\boxed{\text{ノ}}\right)$$

であるから，$P=1$ を満たす整数 x，y は

$$(x,\ y)=\left(\boxed{\text{ハ}},\ \boxed{\text{ヒ}}\right),\ \left(\boxed{\text{フ}},\ \boxed{\text{ヘ}}\right)$$

である．ただし，$\boxed{\text{ハ}}<\boxed{\text{フ}}$ とする．

【解説】

問題

〔1〕 数学Ⅰ・数学Ａ 第１問〔1〕に同じである．

〔2〕

$a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$ であるから，

$$\begin{aligned} a+b&=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\\ &=4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab&=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\\ &=4-3\\ &=1 \end{aligned}$$

である．

これより，

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\ &=4^2-2\cdot1\\ &=\boxed{14}, \end{aligned}$$

☜ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ より，
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

$$\begin{aligned} a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\ &=4^3-3\cdot1\cdot4\\ &=\boxed{52} \end{aligned}$$

☜ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ より，
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.
また，
$$\begin{aligned} a^3+b^3&=(a+b)(a^2-ab+b^2)\\ &=4(14-1)\\ &=52 \end{aligned}$$
としてもよい．

である．

よって，

$$\begin{aligned} P&=\{x+(ay-b^2)\}\{x+(by-a^2)\}+2y^2+26y+47\\ &=x^2+(ay-b^2+by-a^2)x+(ay-b^2)(by-a^2)\\ &\qquad +2y^2+26y+47\\ &=x^2+\{(a+b)y-(a^2+b^2)\}x+(2+ab)y^2\\ &\qquad +\{26-(a^3+b^3)\}y+47+(ab)^2\\ &=x^2+\left(\boxed{4}\,y-\boxed{14}\right)x\\ &\qquad +\boxed{3}\,y^2-\boxed{26}\,y+\boxed{48}\\ &=x^2+(4y-14)x+(y-6)(3y-8)\\ &=\{x+(y-6)\}\{x+(3y-8)\}\\ &=\left(x+y-\boxed{6}\right)\left(x+\boxed{3}\,y-\boxed{8}\right) \end{aligned}$$

であるから，$P=1$ のとき，

$$(x+y-6)(x+3y-8)=1$$

である．

x，y はともに整数であるから，$x+y-6$，$x+3y-8$ はともに整数であり，

$$(x+y-6,\ x+3y-8)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

☜ m，n を整数とする．
$$mn=1$$
のとき，
$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$.

である．

$$\begin{cases} x+y-6=1,\\ x+3y-8=1 \end{cases}$$

の辺々を引くと，

$$-2y+2=0$$

すなわち

$$y=1$$

であり，このとき $x=6$ である． ☜ $x=-y+7$.

また，

$$\begin{cases} x+y-6=-1, \\ x+3y-8=-1 \end{cases}$$

の辺々を引くと，

$$-2y+2=0$$

すなわち

$$y=1$$

であり，このとき $x=4$ である． ☜ $x=-y+5$.

これより，$P=1$ を満たす整数 x，y は，

$$(x,\ y)=\left(\boxed{4},\ \boxed{1}\right),\ \left(\boxed{6},\ \boxed{1}\right)$$

である．

第２問　２次関数

問題

数学Ⅰ・数学A 第２問に同じである．

第 3 問　図形と計量

$\triangle$ABC において，AB$=3\sqrt{3}$，AC$=6$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ とする．
このとき

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である．

また

$$\mathrm{BC}=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\quad \cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

辺 AB 上に点 D を $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\cos\angle\mathrm{ABC}$ となるようにとり，$\triangle$BCD の外接円と直線 AC の交点のうち C と異なる方を E とする．
このとき

$$\angle\mathrm{CDB}=\boxed{\text{ケコ}}^\circ,\quad \mathrm{CE}=\boxed{\text{サ}}$$

であり，直線 BE と直線 CD の交点を F とすると，$\triangle$BCF の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

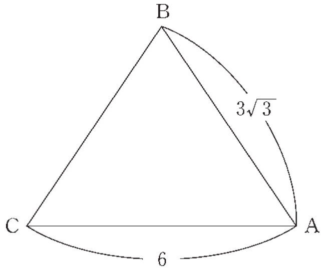
また，線分 AF, BF を直径とする球の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である．

【解説】

問題



$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

☜　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$．

$$=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

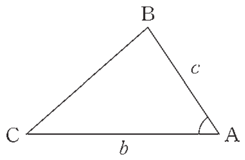
である．

　このとき，

$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$=\boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

三角形の面積



$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

　△ABC に余弦定理を用いると，

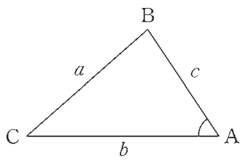
$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=6^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$=27$$

であり，BC>0 であるから，

$$\mathrm{BC}=\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

余弦定理



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

　さらに，△ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．

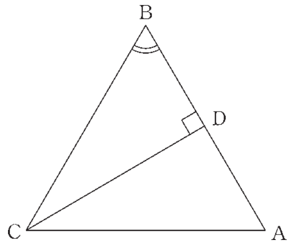
　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DBC}$，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\cos\angle\mathrm{ABC}$ より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\cos\angle\mathrm{DBC}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{CDB}=\boxed{90}^\circ$$

である．



　△ABC は，

BA=BC（$=3\sqrt{3}$）の二等辺三角形

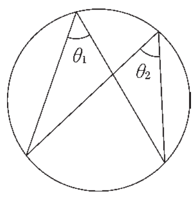
であり，また，△BCD の外接円における円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{CEB}=\angle\mathrm{CDB}=90^\circ$$

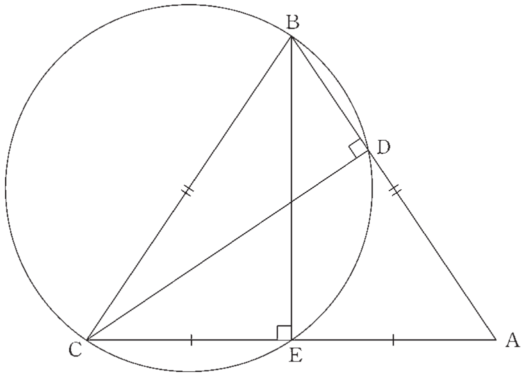
であるから，

点 E は辺 AC の中点

である．



$\theta_1=\theta_2$.



よって,

$$\begin{aligned} CE &= \frac{1}{2}AC \\ &= \frac{1}{2}\cdot 6 \\ &= \boxed{\quad 3 \quad} \end{aligned}$$

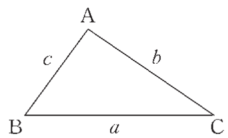
である.

△BCF の外接円の半径を R とすると，正弦定理より,

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BFC}$$

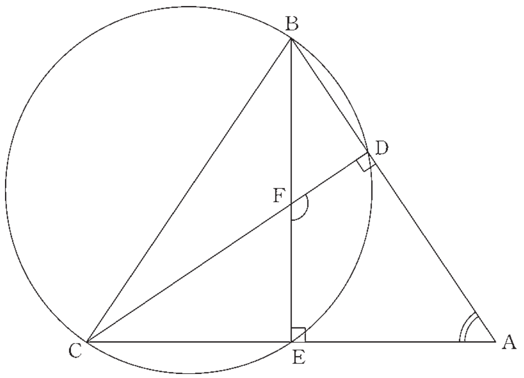
$$R = \frac{3\sqrt{3}}{2\sin \angle BFC}. \qquad \cdots ①$$

☜ **正弦定理**



△ABC の外接円の半径を R とすると,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



ここで,

$$\angle CEB = \angle CDB = 90°$$

であるから,

$$\angle AEF = \angle ADF = 90°.$$

四角形 ADFE の内角の和を考えて,

$$\angle DAE + \angle DFE = 180°.$$

☜ 四角形の内角の和は 360°.

したがって,

$$\angle BFC = \angle DFE = 180° - \angle DAE.$$

よって，

$$\sin\angle \mathrm{BFC}=\sin(180^\circ-\angle \mathrm{DAE})$$
$$=\sin\angle \mathrm{DAE}$$

☜ $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$.

$$=\sin\angle \mathrm{BAC}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

① に代入して，

$$R=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}}$$
$$=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}.$$

V_1，V_2 はそれぞれ $\frac{1}{2}\mathrm{AF}$，$\frac{1}{2}\mathrm{BF}$ を半径とする球の体積であるから，

$$V_1=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{AF}\right)^3,\quad V_2=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{BF}\right)^3.$$

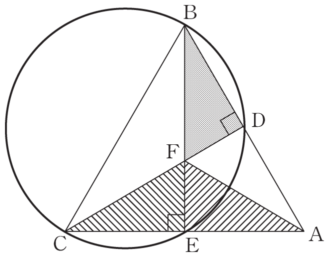
☜ 半径 r の球の体積は，$\frac{4\pi}{3}r^3$.

よって，

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}\right)^3. \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$\triangle \mathrm{AFE}\equiv\triangle \mathrm{CFE}\ \text{かつ}\ \triangle \mathrm{CFE}\backsim\triangle \mathrm{BFD}$$

☜ 

より，

$$\triangle \mathrm{AFE}\backsim\triangle \mathrm{BFD}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AE}}$$
$$=\frac{\mathrm{BC}\cos\angle \mathrm{ABC}}{\frac{1}{2}\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot 6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

したがって，② より，

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

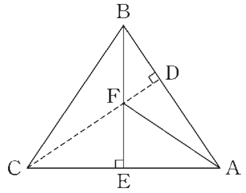
である．

【$\dfrac{V_2}{V_1}$ を求める別解 1 (② の後)】

△ABC は BA＝BC の二等辺三角形で，直線 BE に関して対称であり，F は直線 BE 上にあるから，

$$\mathrm{AF}=\mathrm{CF}.$$

☜



AF＝CF.

△BCF に正弦定理を用いて，

$$\frac{\mathrm{BF}}{\sin\angle\mathrm{BCF}}=\frac{\mathrm{CF}}{\sin\angle\mathrm{CBF}}$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\sin\angle\mathrm{BCF}}=\frac{\mathrm{AF}}{\sin\angle\mathrm{CBF}}$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}=\frac{\sin\angle\mathrm{BCF}}{\sin\angle\mathrm{CBF}}. \qquad \cdots③$$

また，直角三角形 BCD において，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BCF}&=\sin(90^\circ-\angle\mathrm{DBC})\\&=\cos\angle\mathrm{DBC}\\&=\cos\angle\mathrm{ABC}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

☜ $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$.

であり，直角三角形 BCE において，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{CBF}&=\sin\angle\mathrm{CBE}\\&=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}\\&=\frac{3}{3\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

☜ $\mathrm{BC}=3\sqrt{3}$，$\mathrm{CE}=3$.

である.

③ より，

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

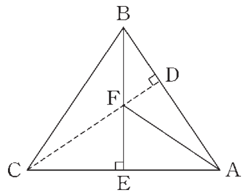
② より，

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

【$\dfrac{V_2}{V_1}$ を求める別解 2 (② の後)】

△BFD と △BAE は相似であるから，

☜



AF＝CF.

$$\mathrm{BF}:\mathrm{BD}=\mathrm{BA}:\mathrm{BE}$$

$$\mathrm{BF}=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}. \qquad \cdots④$$

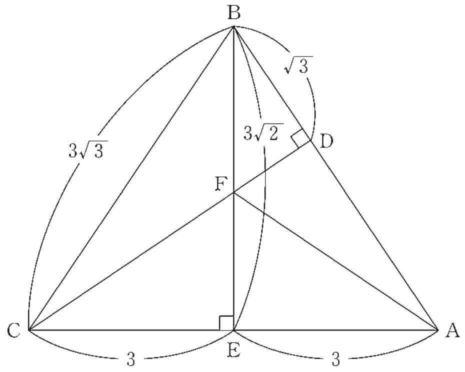
ここで，

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{3},\ \mathrm{BA}=3\sqrt{3},$$

$$\mathrm{BE}=\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{CE}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$$

であるから，④ より，

$$\mathrm{BF}=\frac{\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



また，

$$\mathrm{FE}=\mathrm{BE}-\mathrm{BF}=3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

であるから，直角三角形 FAE において，

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AE}^2+\mathrm{FE}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

② より，

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

第 4 問　方程式・不等式

a を正の実数とし，x についての二つの不等式

$$|2x-3|<5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$ax^2-(2a^2+a-2)x+2a^2-4a<0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える．

(1)　不等式 ① の解は

$$\boxed{アイ}<x<\boxed{ウ}$$

であり，$a=3$ のとき，連立不等式 ① かつ ② の解は

$$\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}<x<\boxed{カ}$$

である．

(2)　下の $\boxed{ソ}$ には次の⓪～②のうちから当てはまるものを一つ選べ．

⓪　$>$　　　①　$<$　　　②　$=$

不等式 ② の左辺を因数分解すると

$$\left(ax-a+\boxed{キ}\right)\left(x-\boxed{ク}a\right)$$

であり

$$a\left(\boxed{ク}a-\frac{a-\boxed{キ}}{a}\right)=\boxed{ケ}\left(a-\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)^2+\frac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$$

であるから

$$\frac{a-\boxed{キ}}{a}\boxed{ソ}\boxed{ク}a$$

である．

不等式 ② を満たす正の整数が 1 だけとなるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}<a\leqq\boxed{ツ}$$

である．

(3)　不等式 ② を満たす x がつねに不等式 ① を満たすような a の値の範囲は

$$\boxed{テ}\leqq a\leqq\boxed{ト}$$

である．

【解説】

問題

(1)

$$|2x-3|<5$$

より，

$$-5<2x-3<5$$

☜ k が $k>0$ である定数のとき，X の不等式 $|X|<k$ の解は，
$$-k<X<k.$$

$$-2<2x<8$$

であるから，不等式 ① の解は，

$$\boxed{-1}<x<\boxed{4}$$

である．

$a=3$ のとき，② は，

$$3x^2-19x+6<0$$

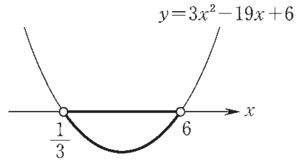
であり，これより，

$$(3x-1)(x-6)<0$$

であるから，不等式 ② の解は，

$$\frac{1}{3}<x<6$$

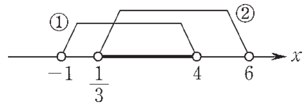
である．

☜ 

よって，連立不等式 ① かつ ② の解は，

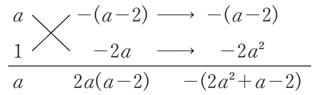
$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}<x<\boxed{4}$$

である．

☜ 

(2)　不等式 ② の左辺を因数分解すると，

$$\begin{aligned}&ax^2-(2a^2+a-2)x+2a^2-4a\\&=ax^2-(2a^2+a-2)x+2a(a-2)\\&=\{ax-(a-2)\}(x-2a)\\&=\left(ax-a+\boxed{2}\right)\left(x-\boxed{2}a\right)\quad\cdots③\end{aligned}$$

☜ 

である．

ここで，

$$a\left(2a-\frac{a-2}{a}\right)=2a^2-a+2$$

$$=\boxed{2}\left(a-\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\right)^2+\frac{\boxed{15}}{\boxed{8}}$$

$$>0$$

☜ $a-\dfrac{1}{4}$ は実数であるから，$\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2\geqq 0$ である．

であり，$a>0$ であるから，

$$2a-\frac{a-2}{a}>0$$

$$\frac{a-2}{a}<2a\quad\cdots④$$

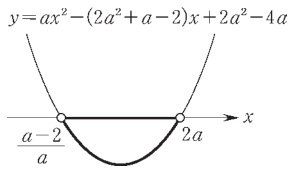
☜ $a\left(2a-\dfrac{a-2}{a}\right)>0$ において，$a>0$ であるから，

$$2a-\frac{a-2}{a}>0.$$

である．$\boxed{ソ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

③，④ と $a>0$ より，不等式 ② の解は，

$$\frac{a-2}{a}<x<2a\quad\cdots⑤$$

☜ 

である．

ここで，$a>0$ より，

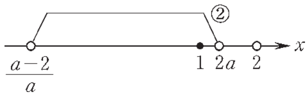
$$\frac{a-2}{a}=1-\frac{2}{a}<1$$

☜ $a>0$ より，$\frac{2}{a}>0$.

であることに注意すると，不等式 ②，すなわち ⑤ を満たす正の整数が 1 だけとなるような a の値の範囲は，

$$1<2a\leqq 2$$

☜



$2a=1$ のとき，不等式 ② の解は，

$$-3<x<1$$

となり，$x=1$ を含まないから不適.

$2a=2$ のとき，不等式 ② の解は，

$$-1<x<2$$

となり，$x=1$ を含み，$x=2$ を含まないから適する.

より，

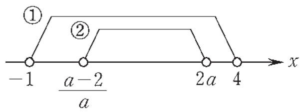
$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}<a\leqq\boxed{1}$$

である.

(3) 不等式 ②，すなわち ⑤ を満たす x がつねに不等式 ① を満たすための条件は，

$$-1\leqq\frac{a-2}{a} \qquad \cdots ⑥$$

☜



かつ

$$2a\leqq 4 \qquad \cdots ⑦$$

が成り立つことである.

$a>0$ であるから，⑥ より，

$$-a\leqq a-2$$

$$1\leqq a \quad (a>0 \text{ を満たす})$$

であり，⑦ より，

$$a\leqq 2$$

である.

よって，不等式 ② を満たす x がつねに不等式 ① を満たすような a の値の範囲は，

$$\boxed{1}\leqq a\leqq\boxed{2}$$

である.

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	アx	$6x$	1	
	イ$-$ウx	$6-6x$	1	
	エx^2-オ$x+$カ	$6x^2-6x+6$	2	
	$\dfrac{\text{キ}\pm\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$	2	
	コ	4	3	
	$a<$サシ，ス$<a$	$a<-1$，$3<a$	2	
	セ	2	3	
	ソ	0	1	
	タ	3	1	
	チ	2	1	
	ツ	6	3	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	（アイ，ウエ）	$(-1,\ -6)$	3	
	（オ，カ）	$(3,\ 8)$	3	
	キ	4	3	
	ク	2	3	
	ケコ	-6	3	
	サ	3	3	
	シスa^2+セソ$a-$タチ	$-2a^2+12a-10$	2	
	ツ	8	2	
	テ$\sqrt{\text{ト}}-$ナ	$2\sqrt{5}-1$	3	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	3	
	ウ$\sqrt{\text{エ}}$	$9\sqrt{2}$	3	
	オ$\sqrt{\text{カ}}$	$3\sqrt{3}$	3	
	$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{1}{3}$	3	
	ケコ$^\circ$	90°	3	
	サ$-r$	$3-r$	2	
	シ$\sqrt{\text{ス}}-r$	$3\sqrt{2}-r$	2	
	$\dfrac{3}{2}(\text{セ}+\sqrt{\text{ソ}}-\sqrt{\text{タ}})$	$\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$	3	
	$\dfrac{\text{チ}\sqrt{\text{ツ}}}{\text{テ}}$	$\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$	4	
	$\dfrac{3}{4}(\sqrt{\text{トナ}}-\text{ニ}\sqrt{\text{ヌ}})$	$\dfrac{3}{4}(\sqrt{34}-3\sqrt{2})$	4	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	ア	4	2	
	イ	3	2	
	ウ	1	2	
	エ	6	2	
	オ	6	2	
	$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\dfrac{1}{9}$	2	
	$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{5}{9}$	3	
	$\dfrac{\text{コ}}{\text{サシ}}$	$\dfrac{2}{27}$	3	
	$\dfrac{\text{スセ}}{\text{ソタ}}$	$\dfrac{64}{81}$	3	
	$\dfrac{\text{チツ}\sqrt{2}+\text{テト}}{81}$	$\dfrac{23\sqrt{2}+84}{81}$	4	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第１問　方程式・不等式，集合・論理

〔１〕 長方形 ABCD において，AB＝CD＝6，BC＝DA＝2 とする．辺 BC 上に点 P，辺 CD 上に点 Q を

$$\mathrm{BP}=2x,\quad \mathrm{CQ}=6x\quad (0<x<1)$$

となるようにとる．

このとき，△ABP の面積は $\boxed{\text{ア}}\,x$，△DAQ の面積は $\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\,x$ であり，△APQ の面積を S とすると

$$S=\boxed{\text{エ}}\,x^2-\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}$$

である．

$S=5$ となるのは

$$x=\frac{\boxed{\text{キ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである．

$x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，$m\leqq\dfrac{1}{x}<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{コ}}$ である．

〔２〕 k を実数の定数とする．実数 a に関する条件 p，q，r，s を次のように定める．

p ：$a<k$

q ：$a^2-6a+8>0$

r ：$a^2-2a+1>0$

s ：$|a-1|>2$

(1) s は

$$a<\boxed{\text{サシ}},\quad \boxed{\text{ス}}<a$$

と同値である．

(2) $k=0$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{セ}}$．

$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(3) $k=-2$ のとき

命題「$\boxed{\text{ソ}}\Rightarrow\boxed{\text{タ}}$」は真　かつ　命題「$\boxed{\text{タ}}\Rightarrow\boxed{\text{ソ}}$」は偽

であり

命題「$\boxed{\text{タ}}\Rightarrow\boxed{\text{チ}}$」は真　かつ　命題「$\boxed{\text{チ}}\Rightarrow\boxed{\text{タ}}$」は偽

である．

ソ ，タ ，チ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ．

⓪ p　　① q　　② r　　③ s

(4) 命題「$r \Rightarrow$『p または q』」が真となるような k の値の範囲は $\boxed{\text{ツ}}$ である．

ツ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ．

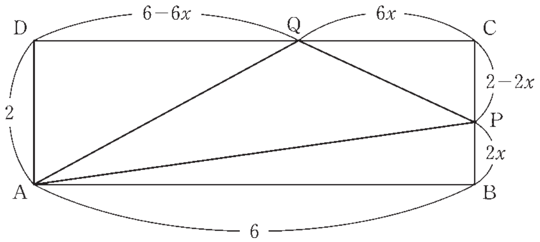
⓪ $k>1$　　① $k \geqq 1$　　② $k>2$　　③ $k \geqq 2$

④ $k>3$　　⑤ $k \geqq 3$　　⑥ $k>4$　　⑦ $k \geqq 4$

【解説】

問題

〔1〕



$$(\triangle \mathrm{ABP}\ の面積)=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2x$$

$$=\boxed{6}\,x,$$

$$(\triangle \mathrm{DAQ}\ の面積)=\frac{1}{2}\mathrm{QD}\cdot\mathrm{DA}$$

$$=\frac{1}{2}(6-6x)\cdot 2$$

$$=\boxed{6}-\boxed{6}\,x$$

である．

また，

$$(\triangle \mathrm{CQP}\ の面積)=\frac{1}{2}\mathrm{QC}\cdot\mathrm{CP}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 6x(2-2x)$$

$$=6x-6x^2$$

であるから，

$$S=6\cdot 2-6x-(6-6x)-(6x-6x^2)$$

$$=\boxed{6}\,x^2-\boxed{6}\,x+\boxed{6}$$

☜ 長方形 ABCD の面積から △ABP，△DAQ，△CQP の面積を引く．

である．

$S=5$ となるのは，

$$6x^2-6x+6=5$$

$$6x^2-6x+1=0$$

より，

$$x=\frac{\boxed{3}\pm\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{6}}$$

☜ $0<x<1$ を満たす．

のときである．

$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ のとき，

$$\frac{1}{x}=\frac{6}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{6(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{6(3+\sqrt{3})}{9-3}$$

☜ 分母の有理化をした．

$$=3+\sqrt{3}$$

である．

ここで，

$$1<\sqrt{3}<2$$

であるから，

$$4<3+\sqrt{3}<5$$

☜ 各辺に 3 を加えた．

である．

よって，$m \leqq \dfrac{1}{x}<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{4}$ である．

〔2〕

条件 q について，

$$a^2-6a+8>0$$

$$(a-2)(a-4)>0$$

$$a<2,\ 4<a$$

であるから，

$$q：a<2,\ 4<a$$

である．

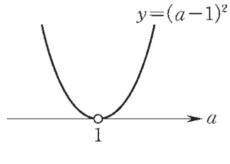
条件 r について，

$$a^2-2a+1>0$$

$$(a-1)^2>0$$

$$a<1,\ 1<a$$

☜



であるから，

$$r：a<1,\ 1<a$$

である．

(1) 条件 s は，

$$a-1<-2,\ 2<a-1$$

☜ $|X|>b \iff X<-b,\ b<X$．

すなわち

$$a<\boxed{-1},\quad \boxed{3}<a$$

と同値である．

（注）　次のように場合分けをしてもよい．

不等式 $|a-1|>2$ は，

(i)　$a \geqq 1$ のとき，

$$a-1>2$$
$$a>3$$

となる（$a \geqq 1$ を満たす）．

(ii)　$a<1$ のとき，

$$-(a-1)>2$$
$$a<-1$$

となる（$a<1$ を満たす）．

よって，(i), (ii) より条件 s は，

$$a<-1,\quad 3<a$$

と同値である．

☜　$b \geqq 0$ のとき，

$$|X|>b$$

は，

$$\begin{cases} X \geqq 0 \text{ のとき } X>b \\ X<0 \text{ のとき } -X>b \end{cases}$$

となる．

(2)　$k=0$ のとき，

$$p\ :\ a<0$$
$$q\ :\ a<2,\ 4<a$$

であるから，

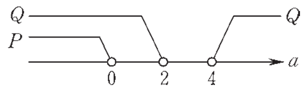
$$p \Rightarrow q \quad \text{は真，}$$
$$q \Rightarrow p \quad \text{は偽　（反例}\ a=5\text{）}$$

である．

よって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件でない．

ゆえに，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

☜　条件 p, q を満たす実数 a 全体の集合をそれぞれ P, Q とする．



(3)　$k=-2$ のとき，

$$p\ :\ a<-2$$
$$q\ :\ a<2,\ 4<a$$
$$r\ :\ a<1,\ 1<a$$
$$s\ :\ a<-1,\ 3<a$$

であるから，

$$p \Rightarrow s \quad \text{は真，}$$
$$s \Rightarrow p \quad \text{は偽　（反例}\ a=4\text{）}$$

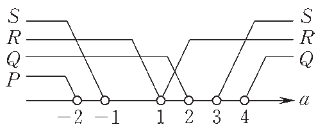
であり，

$$s \Rightarrow r \quad \text{は真，}$$
$$r \Rightarrow s \quad \text{は偽　（反例}\ a=2\text{）}$$

である．

したがって，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

☜　条件 p, q, r, s を満たす実数 a 全体の集合をそれぞれ P, Q, R, S とする．



上図より，

$$P \subset S \subset R.$$

☜　$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ だけを考えると

$$p \Rightarrow q \quad \text{は真，}$$
$$q \Rightarrow p \quad \text{は偽}$$

などもあり得るが，

「$\boxed{\text{タ}} \Rightarrow \boxed{\text{チ}}$」 は真，

「$\boxed{\text{チ}} \Rightarrow \boxed{\text{タ}}$」 は偽

より，左記の組み合わせだけになる．

(4) p ：$a<k$

q ：$a<2$，$4<a$

であるから，条件「p または q」は

$k \leqq 2$ のとき $a<2$，$4<a$，

$2<k \leqq 4$ のとき $a<k$，$4<a$，

$k>4$ のとき a は実数全体

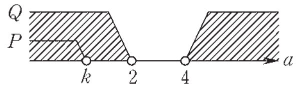
であり，命題「$r \Rightarrow$『p または q』」が真となるような k の値の範囲は，

$$k>4$$

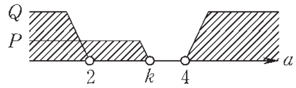
である．

よって，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑥}$ である．

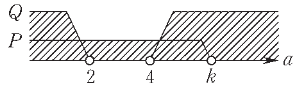
☜ $k \leqq 2$ のとき



$2<k \leqq 4$ のとき



$k>4$ のとき



第 2 問　2 次関数

二つの 2 次関数

$y=2x^2+4x-4$ ………… ①

$y=-2x^2+12x-10$ ………… ②

のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とする.

(1)　G_1 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$$

であり, G_2 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である.

G_1 を x 軸に関して対称移動し, x 軸方向に $\boxed{\text{キ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると G_2 と一致する.

(2)　a を正の定数とし, $-2 \leqq x \leqq a$ における 2 次関数 ① の最小値を m とすると

$$m=\boxed{\text{ケコ}}$$

である.

さらに, $-2 \leqq x \leqq a$ における 2 次関数 ①, ② の最大値をそれぞれ M_1, M_2 とすると

$0<a<\boxed{\text{サ}}$ のとき　$M_2=\boxed{\text{シス}}a^2+\boxed{\text{セソ}}a-\boxed{\text{タチ}}$

$\boxed{\text{サ}} \leqq a$ のとき　$M_2=\boxed{\text{ツ}}$

であり, $M_1-M_2<m+32$ となるような a の値の範囲は

$$0<a<\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}-\boxed{\text{ナ}}$$

である.

【解説】

問題

(1)　① を変形して,

$$\begin{aligned} y&=2x^2+4x-4 \\ &=2(x+1)^2-6. \end{aligned}$$

よって, G_1 の頂点の座標は,

$$\left(\boxed{-1},\ \boxed{-6}\right).$$

放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は,

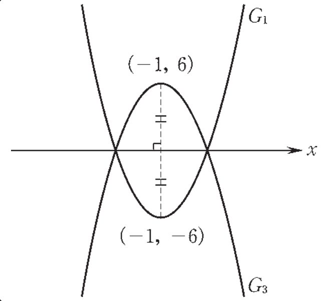
$(q,\ r)$.

② を変形して,

$$\begin{aligned} y&=-2x^2+12x-10 \\ &=-2(x-3)^2+8. \end{aligned}$$

よって, G_2 の頂点の座標は,

$$\left(\boxed{3},\ \boxed{8}\right).$$



G_1 を x 軸に関して対称移動したグラフ G_3 の頂点の座標は,

$$(-1,\ 6).$$

G_2, G_3 の頂点を考えて，G_3 を，

x 軸方向に

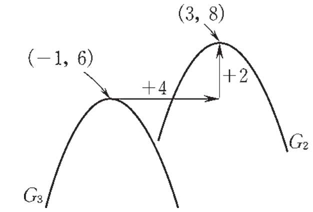
$$3-(-1)=\boxed{4},$$

y 軸方向に

$$8-6=\boxed{2}$$

だけ平行移動すると G_2 と一致する．

☜ 放物線の平行移動は頂点の移動を考えればよい．



(2)　$f(x)=2x^2+4x-4$，$g(x)=-2x^2+12x-10$ とおくと，

$$f(x)=2(x+1)^2-6,$$

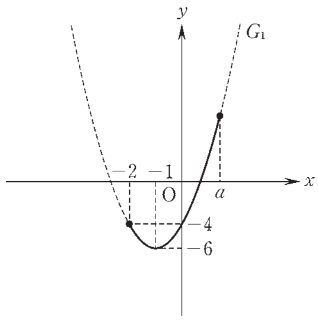
$$g(x)=-2(x-3)^2+8.$$

$-2\leqq x\leqq a$ $(a>0)$ における 2 次関数 ① の最小値 m は，

$$m=f(-1)=\boxed{-6}$$

である．

☜



また，$-2\leqq x\leqq a$ における 2 次関数 ① の最大値 M_1 は，

$$M_1=f(a)=2a^2+4a-4$$

である．

さらに，$-2\leqq x\leqq a$ における 2 次関数 ② の最大値 M_2 は，

$0<a<\boxed{3}$ のとき，

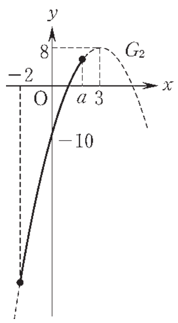
$$M_2=g(a)=\boxed{-2}a^2+\boxed{12}a-\boxed{10},$$

$3\leqq a$ のとき，

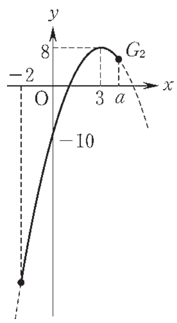
$$M_2=g(3)=\boxed{8}$$

である．

$0<a<3$ のとき．



$3\leqq a$ のとき．



(ア)　$0<a<3$ のとき，$M_1-M_2<m+32$ より，

$$(2a^2+4a-4)-(-2a^2+12a-10)<-6+32$$

$$4a^2-8a-20<0$$

$$a^2-2a-5<0$$

$$1-\sqrt{6}<a<1+\sqrt{6}.$$

$0<a<3$ より，

$$0<a<3.$$

☜ $a>0$，$b^2-ac>0$ のとき，

2 次不等式

$$ax^2+2bx+c<0$$

の解は，

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

(イ)　$3 \leqq a$ のとき，$M_1 - M_2 < m + 32$ より，

$$(2a^2 + 4a - 4) - 8 < -6 + 32$$
$$2a^2 + 4a - 38 < 0$$
$$a^2 + 2a - 19 < 0$$
$$-1 - 2\sqrt{5} < a < -1 + 2\sqrt{5}.$$

$3 \leqq a$ より，

$$3 \leqq a < 2\sqrt{5} - 1.$$

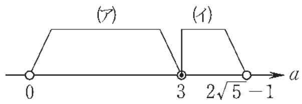
☜ $(2\sqrt{5} - 1) - 3 = 2\sqrt{5} - 4$
$= \sqrt{20} - \sqrt{16}$
> 0
より，
$3 < 2\sqrt{5} - 1.$

(ア), (イ) より，$M_1 - M_2 < m + 32$ となるような a の値の範囲は，

$$0 < a < \boxed{2}\sqrt{\boxed{5}} - \boxed{1}$$

である．

☜



第 3 問　図形と計量・平面図形

△ABC において，$AB=3\sqrt{3}$，$AC=6$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ とする．

このとき

$$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である．

また

$$BC=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\quad \cos\angle ABC=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

辺 AB 上に点 D を $\dfrac{BD}{BC}=\cos\angle ABC$ となるようにとり，△BCD の外接円と直線 AC の交点のうち C と異なる方を E とする．

このとき

$$\angle CDB=\angle CEB=\boxed{\text{ケコ}}^\circ$$

である．

さらに，△BCE の内接円 I と辺 EC，BE の接点をそれぞれ H_1，H_2 とし，円 I の半径を r とすると

$$CH_1=\boxed{\text{サ}}-r,\quad BH_2=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}-r$$

であり

$$r=\frac{3}{2}\left(\boxed{\text{セ}}+\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}-\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

である．

直線 BE と直線 CD の交点を F とし，△BCF の外接円の中心を O とする．外接円 O の半径は

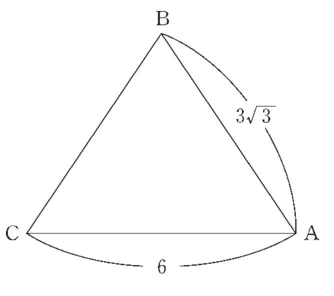
$\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であり，線分 OE と円 O の交点を G とすると

$$EG=\frac{3}{4}\left(\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}-\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$$

である．

【解説】

問題



$\cos\angle BAC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，

$$\sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC}$$
$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

である．

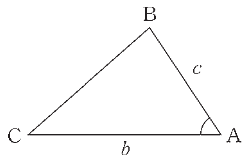
☜ $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，
$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$.

このとき，

$$(\triangle ABC\text{ の面積}) = \frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\angle BAC$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$= \boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$(\triangle ABC\text{ の面積}) = \dfrac{1}{2}bc\sin A$.

△ABC に余弦定理を用いると，

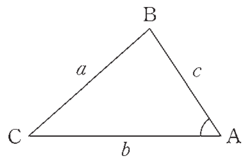
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cos\angle BAC$$
$$= 6^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2\cdot 6\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$= 27$$

であり，BC>0 であるから，

$$BC = \boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

☜ **余弦定理**



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

さらに，△ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$
$$= \frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．

$\angle ABC = \angle DBC$，$\dfrac{BD}{BC} = \cos\angle ABC$ より，

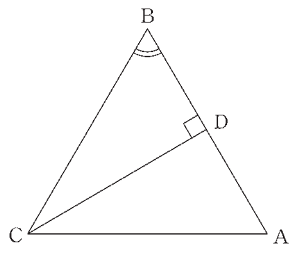
$$\frac{BD}{BC} = \cos\angle DBC$$

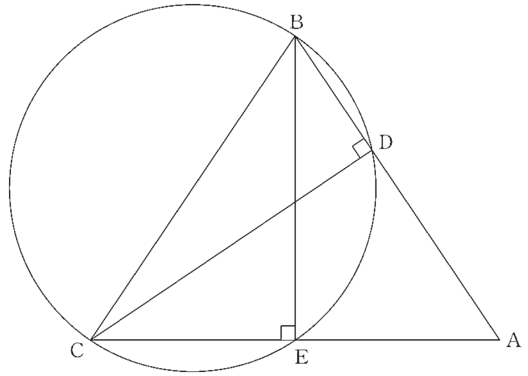
であるから，

$$\angle CDB = 90°$$

である．

☜



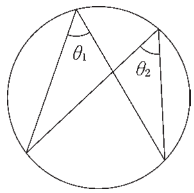


また，△BCD の外接円における円周角の定理より，

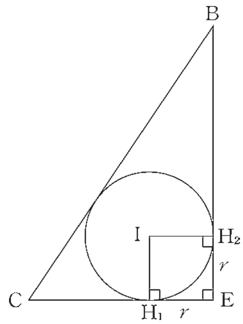
$$\angle \mathrm{CDB} = \angle \mathrm{CEB} = \boxed{90}^\circ$$

である．

☜



$\theta_1 = \theta_2$.



四角形 EH_2IH_1 において，

$$\angle IH_1E = \angle IH_2E = 90^\circ,$$

$$IH_1 = IH_2 \ (=r)$$

であり，$\angle H_1EH_2 = \angle CEB = 90^\circ$ より，

四角形 EH_2IH_1 は正方形

であるから，

$$EH_1 = EH_2 = r.$$

よって，

$$CH_1 = CE - EH_1 = CE - r, \qquad \cdots ①$$

$$BH_2 = BE - EH_2 = BE - r. \qquad \cdots ②$$

△ABC は，$BA = BC \ (=3\sqrt{3})$ の二等辺三角形であり，$\angle CEB = 90^\circ$ であるから，

E は辺 AC の中点

であり，

$$CE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3.$$

☜

方べきの定理より，

$$AD \cdot AB = AE \cdot AC.$$

ここで，

$$AB = 3\sqrt{3},\ AC = 6$$

であり，$BD = BC\cos\angle ABC = \sqrt{3}$ より，

$$AD = AB - BD = 2\sqrt{3}$$

であるから，

$$2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} = AE \cdot 6$$

$$AE = 3.$$

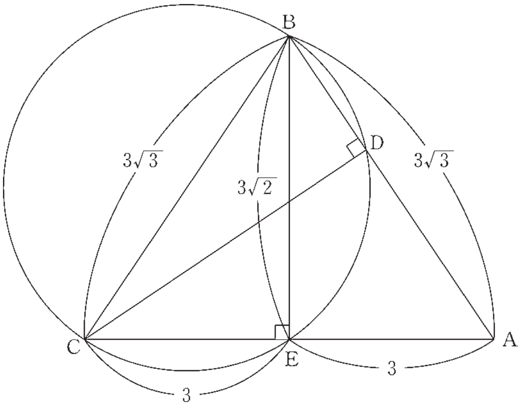
よって，

$$CE = 6 - AE = 3$$

としてもよい．

また，直角三角形 BCE において，

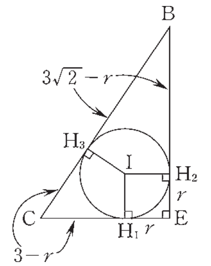
$$BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}.$$



①と②より，

$$\mathrm{CH_1}=\boxed{3}-r,$$

$$\mathrm{BH_2}=\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}-r.$$



また，△EBC の内接円 I と辺 BC の接点を $\mathrm{H_3}$ とすると，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BH_3}+\mathrm{CH_3}.$$

$\mathrm{BH_3}=\mathrm{BH_2}$，$\mathrm{CH_3}=\mathrm{CH_1}$ であるから，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BH_2}+\mathrm{CH_1}$$

$$3\sqrt{3}=(3\sqrt{2}-r)+(3-r)$$

$$r=\frac{3}{2}\left(\boxed{1}+\sqrt{\boxed{2}}-\sqrt{\boxed{3}}\right).$$

△EBC の面積を考えて，

$$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+3+3\sqrt{3})r=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{2}$$

より，

$$r=\frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

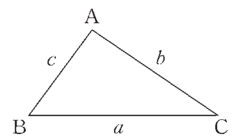
とすることもできる．

△BCF の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BFC}}$$

$$R=\frac{3\sqrt{3}}{2\sin\angle\mathrm{BFC}}. \quad \cdots③$$

正弦定理



△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

ここで，

$$\angle\mathrm{CEB}=\angle\mathrm{CDB}=90°$$

であるから，

$$\angle\mathrm{AEF}=\angle\mathrm{ADF}=90°.$$

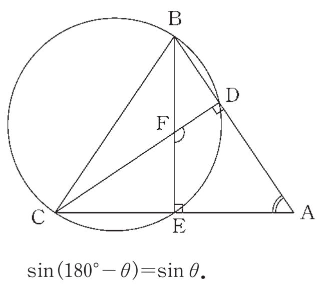
四角形 ADFE の内角の和を考えて，

$$\angle\mathrm{DAE}+\angle\mathrm{DFE}=180°.$$

四角形の内角の和は 360°．

したがって，

$$\angle\mathrm{BFC}=\angle\mathrm{DFE}=180°-\angle\mathrm{DAE}.$$



よって，

$$\sin\angle\mathrm{BFC}=\sin(180°-\angle\mathrm{DAE})$$

$$=\sin\angle\mathrm{DAE}$$

$$=\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$.

③に代入して，

$$R=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}.$$

△BCD および △BCE の外接円における円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{ECD}=\angle \mathrm{EBD}$$

すなわち

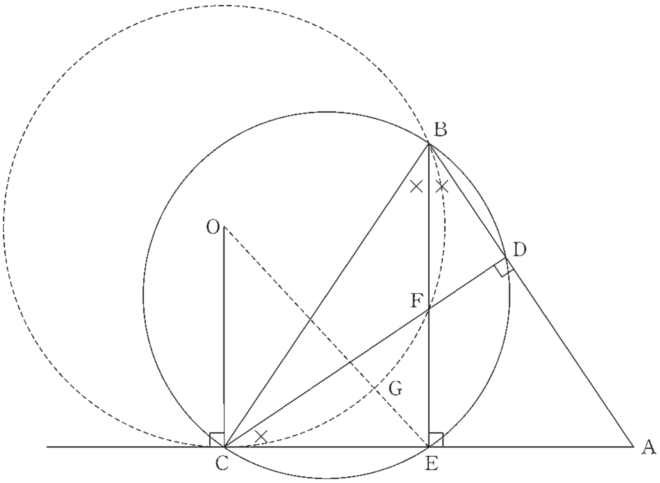
$$\angle \mathrm{ECF}=\angle \mathrm{EBD}. \qquad \cdots④$$

また，△ABC は BA＝BC の二等辺三角形で，直線 BE に関して対称であるから，

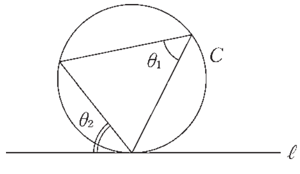
$$\angle \mathrm{EBD}=\angle \mathrm{FBC}. \qquad \cdots⑤$$

④ と ⑤ より，

$$\angle \mathrm{ECF}=\angle \mathrm{FBC}.$$



接弦定理の逆より，直線 CE は △BCF の外接円 O に接する． ☜ 接弦定理の逆.



$\theta_1=\theta_2$ ならば，直線 ℓ は円 C の接線.

したがって，△OCE は直角三角形であり，

$$\mathrm{OE}=\sqrt{\mathrm{OC}^2+\mathrm{CE}^2}$$

$$=\sqrt{R^2+3^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2+3^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{34}}{4}.$$

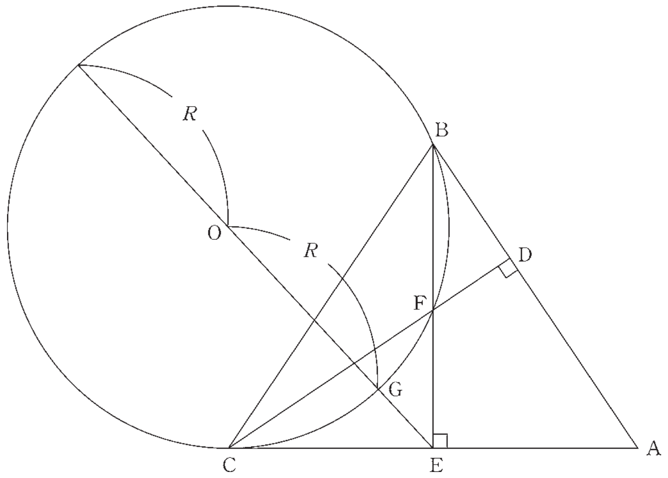
よって，

$$\mathrm{EG}=\mathrm{OE}-\mathrm{OG}$$

$$=\frac{3\sqrt{34}}{4}-R$$

$$=\frac{3}{4}\left(\sqrt{\boxed{34}}-\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}\right).$$

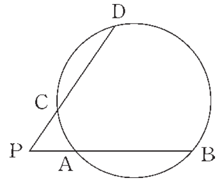
【EG を求める別解】



方べきの定理より，

$$\mathrm{EG}\cdot(\mathrm{EG}+2R)=\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EB}. \qquad \cdots⑥$$

☜ 方べきの定理



$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}.$

$\triangle$BFD と $\triangle$BAE は相似であるから，

$$\mathrm{BF}:\mathrm{BD}=\mathrm{BA}:\mathrm{BE}$$

$$\mathrm{BF}=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}.$$

ここで，$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BA}=3\sqrt{3}$，$\mathrm{BE}=3\sqrt{2}$ であるから，

$$\mathrm{BF}=\frac{\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

また，

$$\mathrm{EF}=\mathrm{BE}-\mathrm{BF}=3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

⑥ より，

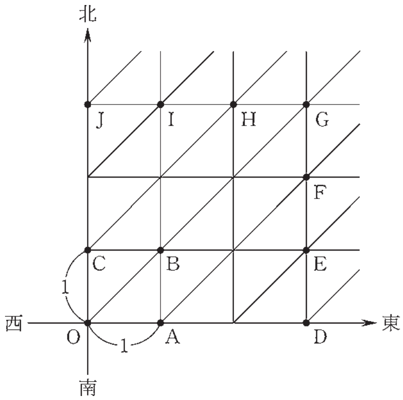
$$\mathrm{EG}\cdot(\mathrm{EG}+2R)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot3\sqrt{2}$$

$$\mathrm{EG}^2+2R\cdot\mathrm{EG}-9=0.$$

$\mathrm{EG}>0$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{EG}&=-R+\sqrt{R^2+9}\\&=-\frac{9\sqrt{2}}{4}+\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2+9}\\&=\frac{3}{4}(\sqrt{34}-3\sqrt{2}).\end{aligned}$$

第４問　場合の数・確率



図のような一辺の長さが１の正方形の辺と対角線からなる街路がある．甲君が点Ｏを出発し街路を歩くものとする．ただし，進行方向は，東，北，北東のいずれかであるものとする．

(1)　点Ｏから点Ｂまでの経路は，北東に進むことのない「Ｏ→Ａ→Ｂ」,「Ｏ→Ｃ→Ｂ」の２通りと，北東に進む「Ｏ→Ｂ」の１通りの合計３通りである．

点Ｏから点Ｅまでの経路は

北東に進むことがないものが $\boxed{\text{ア}}$ 通り

北東に進むことがあるものが $\boxed{\text{イ}}$ 通り

である．

点Ｏから点Ｇまでの経路のうち点Ｆと点Ｈをどちらも通らないものは

北東に進むことが３回であるものが $\boxed{\text{ウ}}$ 通り

北東に進むことが２回であるものが $\boxed{\text{エ}}$ 通り

北東に進むことが１回であるものが $\boxed{\text{オ}}$ 通り

である．

(2)　袋の中に

「東」と書かれたカードが１枚

「北」と書かれたカードが１枚

「北東」と書かれたカードが１枚

の合計３枚のカードが入っている．甲君は分岐点において袋の中からカードを１枚取り出し，取り出したカードに書かれた方角により進行方向を決める．ただし，進行方向を決めた後はカードを袋に戻すものとする．また，七つの点Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｉ，Ｊのいずれかに至ったときは進むのを止めるものとする．

甲君が

「Ｏ→Ｂ」と北東に進む確率が $\dfrac{1}{3}$

「Ｏ→Ａ→Ｂ」,「Ｏ→Ｃ→Ｂ」と進む確率がいずれも $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$

であるから，点Ｂを通る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

さらに，得点を次のように定める．

点Ｄ，Ｊのどちらかに至ったときは０点

点Ｅ，Ｆ，Ｈ，Ｉのいずれかに至ったときは１点

とし，点 G に至ったときは甲君が点 O から点 G まで歩いた距離を得点とする．

得点が $2\sqrt{2}+2$ 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ であり，得点が 1 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である．

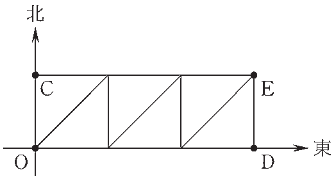
また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}\sqrt{2}+\boxed{\text{テト}}}{81}$ 点である．

【解説】

問題

東，北，北東に 1 区画進むことを，それぞれ ⇒，⇑，⇗ と表す．

(1)



点 O から点 E までの経路の数は次のようになる．

<u>北東に進むことがない場合</u>

東に 3 区画，北に 1 区画

進むので，点 O から点 E までの経路の数は，

3 個の ⇒ と 1 個の ⇑ の順列の数

と一致するから，

$$\frac{4!}{3!1!}=\boxed{4}\ \text{(通り)}$$

である．

<u>北東に進むことがある場合</u>

東に 2 区画，北東に 1 区画

進むので，点 O から点 E までの経路の数は，

2 個の ⇒ と 1 個の ⇗ の順列の数

と一致するから，

$$\frac{3!}{2!1!}=\boxed{3}\ \text{(通り)}$$

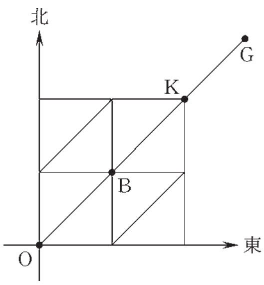
である．

☜ **同じものを含む順列**

n 個のもののうち，m_1 個，m_2 個，…，m_k 個 がそれぞれ同じものであるとき，この n 個のものを並べてできる順列の総数は，

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}$$

$(n=m_1+m_2+\cdots+m_k)$．



線分 BG の中点を K とする．点 F と 点 H をどちらも通らないで点 O から点 G に至るとき，最後は必ず「K → G」と北東に進むことになる．

よって，点Oから点Gまでの経路の数は次のようになる．

北東に進むことが3回である場合 …①

$$「O\to B\to K\to G」の \boxed{1} （通り）$$

である．

北東に進むことが2回である場合 …②

点Oから点Kまでの経路の数は，

1個の ⇒ と1個の ⇑ と1個の ⇗ の順列の数

と一致するから，

$$3!\cdot 1=\boxed{6} （通り）$$

である．

☜ 点Oから点Kまでの経路が $3!=6$（通り）．そのそれぞれに対して，点Kから点Gまでの経路は1通りある．

北東に進むことが1回である場合 …③

点Oから点Kまでの経路の数は，

2個の ⇒ と2個の ⇑ の順列の数

と一致するから，

$$\frac{4!}{2!2!}\cdot 1=\boxed{6} （通り）$$

である．

☜ 点Oから点Kまでの経路が $\frac{4!}{2!2!}=6$（通り）．そのそれぞれに対して，点Kから点Gまでの経路は1通りある．

(2) 分岐点において進行方向を東，北，北東に決める確率は，いずれも $\frac{1}{3}$ である．

よって，

「O→B」と北東に進む確率が $\frac{1}{3}$ であり，

「O→A→B」,「O→C→B」と進む確率がいずれも，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}}$$

☜ 「O→A」,「A→B」,「O→C」,「C→B」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ である．

であるから，甲君が点Bを通る確率は，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}$$

☜ 「O→B」,「O→A→B」,「O→C→B」と進むそれぞれの確率の和．

である．

甲君が点Gに至るのは(1)の①,②,③の場合である．

①の場合，得点は $3\sqrt{2}$ 点であり，確率は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

☜ 「O→B」,「B→K」,「K→G」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ である．

である．

②の場合，6通りの経路はいずれも，

東に1区画，北に1区画，北東に2区画

進むので，得点は $2\sqrt{2}+2$ 点であり，確率は，

$$6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{\boxed{2}}{\boxed{27}}$$

☜ 6 通りの経路はいずれも確率が $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$ で等しい.

である.

③ の場合，6 通りの経路はいずれも，

東に 2 区画，北に 2 区画，北東に 1 区画

進むので，得点は $\sqrt{2}+4$ 点であり，確率は，

$$6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$$

☜ 6 通りの経路はいずれも確率が $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$ で等しい.

である.

甲君が点 D または点 J に至るのは，東に 3 回または北に 3 回進む場合であるから，得点が 0 点となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$$

☜ 点 D, J に至る確率はいずれも $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ である.

である.

以上より，得点が 1 点となる，すなわち甲君が点 E, F, H, I のいずれかに至る確率は，

$$1-\left(\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\frac{2}{27}\right)=\frac{\boxed{64}}{\boxed{81}}$$

☜ 余事象を利用した.

である.

したがって，得点の期待値は，

$$0\cdot\frac{2}{27}+1\cdot\frac{64}{81}+3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{27}+(2\sqrt{2}+2)\cdot\frac{2}{27}+(\sqrt{2}+4)\cdot\frac{2}{81}$$
$$=\frac{\boxed{23}\sqrt{2}+\boxed{84}}{81}\ (点)$$

☜ **期待値**

試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$

であり，それぞれの起こる確率が，

$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$

$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$

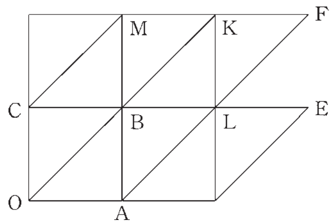
であるとき，期待値 E は，

$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

である.

（注） 得点が 1 点となる確率は，余事象を用いずに次のように求めることもできる.

（解法 1 ）



図のように分岐点 L, M を定める.

甲君が点 E に至るのは，

東に 2 区画，北東に 1 区画

進む経路が 3 通りあり，

東に 3 区画，北に 1 区画

進む経路が 3 通りあるから，甲君が E に至る確率は，

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

である．

甲君が点Ｆに至る確率は，次のように場合分けをして求める．

(i) 東に３区画，北に２区画進む場合

点Ｏから点Ｋに移動し，「Ｋ→Ｆ」と進むから，経路は，

$$\frac{4!}{2!2!}\cdot 1=6 \text{（通り）}$$

ある．この場合の確率は，

$$6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{81}.$$

(ii) 東に２区画，北に１区画，北東に１区画進む場合

北東に進む区画が，

「Ｃ→Ｍ」または「Ａ→Ｌ」のとき，経路はいずれも１通り，

「Ｏ→Ｂ」または「Ｂ→Ｋ」のとき，経路はいずれも２通り，

「Ｌ→Ｆ」のとき，経路は $\dfrac{3!}{2!1!}=3$（通り）

あるから，この場合の確率は，

$$(1\cdot 2+2\cdot 2+3)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

(iii) 東に１区画，北東に２区画進む場合

東に進む区画は「Ｏ→Ａ」,「Ｂ→Ｌ」,「Ｋ→Ｆ」のいずれかであり，そのそれぞれに対して経路は１通りずつあるから，この場合の確率は，

$$3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

(i), (ii), (iii) より，甲君が点Ｆに至る確率は，

$$\frac{2}{81}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{20}{81}$$

である．

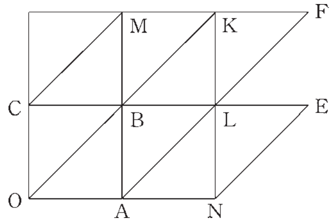
対称性より，甲君が点Ｉに至る確率は点Ｅに至る確率と等しく，点Ｈに至る確率は点Ｆに至る確率と等しい．

したがって，得点が１点となる，すなわち甲君が点Ｅ，Ｆ，Ｈ，Ｉのいずれかに至る確率は，

$$\frac{4}{27}\cdot 2+\frac{20}{81}\cdot 2=\frac{64}{81}$$

である．

（解法２）



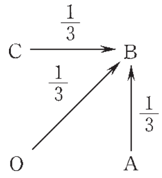
図のように分岐点 L, M, N を定める.

甲君が点 X（X＝A, B, C, K, L, M, N）を通る，または点 X（X＝E, F）に至る確率を $P(\mathrm{X})$ と表す.

「O→A」,「O→C」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であるから,

$$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{C})=\frac{1}{3}.$$

「O→B」,「A→B」,「C→B」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であ ☜



るから,

$$P(\mathrm{B})=\frac{1}{3}+P(\mathrm{A})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{C})\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}.$$

「A→N」と進む確率は $\frac{1}{3}$ であるから,

$$P(\mathrm{N})=P(\mathrm{A})\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

「A→L」,「N→L」,「B→L」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であるから,

$$P(\mathrm{L})=P(\mathrm{A})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{N})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{B})\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

「N→E」,「L→E」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であるから,

$$P(\mathrm{E})=P(\mathrm{N})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{L})\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}.$$

対称性より,

$$P(\mathrm{M})=P(\mathrm{L})=\frac{1}{3}.$$

「B→K」,「L→K」,「M→K」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であるから,

$$P(\mathrm{K})=P(\mathrm{B})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{L})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{M})\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{27}.$$

「L→F」,「K→F」と進む確率はいずれも $\frac{1}{3}$ であるから,

$$P(\mathrm{F})=P(\mathrm{L})\cdot\frac{1}{3}+P(\mathrm{K})\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{81}.$$

対称性より，甲君が点 I に至る確率は $P(\mathrm{E})$ と等しく，点 H に至る確率は $P(\mathrm{F})$ と等しい.

したがって，得点が 1 点となる，すなわち甲君が点 E, F, H, I のいずれかに至る確率は,

$$P(\mathrm{E})\cdot 2+P(\mathrm{F})\cdot 2=\frac{64}{81}$$

である.

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	5	1	
	イ	2	2	
	ウ－エ$\sin^2 x$	$1-2\sin^2 x$	2	
	オカ，キ	－4，5	2	
	ク	9	2	
	$\dfrac{ケ-\sqrt{コ}}{サ}$	$\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$	2	
	シ	0	2	
	ス	6	2	
	セ$<x<$ソ	$1<x<7$	3	
	タ	1	2	
	チ	4	2	
	ツ	2	2	
	テ	5	1	
	ト	6	1	
	ナ	1	2	
	$\dfrac{ニ+\sqrt{ヌ}}{ネ}$	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	2	
	第1問　自己採点小計		(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	アx^2－イx＋ウ	$3x^2-8x+5$	2	
	エ	1	2	
	オ	1	1	
	カx^2－キクx＋ケ	$3x^2-2\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}$	2	
	コ	1	2	
	サ	3	2	
	シ	2	2	
	ス	2	2	
	$\dfrac{セ}{ソ}$	$\dfrac{1}{6}$	3	
	タ	0	2	
	チ$k^2+\dfrac{ツ}{k}$	$2k^2+\dfrac{1}{k}$	2	
	$k^3-\dfrac{テ}{ト}k+\dfrac{ナ}{ニ}$	$k^3-\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{2}$	3	
	$\dfrac{ヌ}{ネ}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	$\dfrac{ノハ}{ヒフ}$	$\dfrac{23}{54}$	3	
	第2問　自己採点小計		(30)	
第3問	ア	8	2	
	(イウ，エ)	(－2，1)	2	
	オ	0	2	
	$\dfrac{カ}{キ}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
	$\dfrac{ク}{ケ}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
	コ	0	2	
	サシ	25	2	
	スセ	－3	2	
	$\dfrac{ソ-\sqrt{タ}}{チ}$	$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$	2	
	$\sqrt{ツテ}$	$\sqrt{10}$	2	
	第3問　自己採点小計		(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア	2	2	
	イウa^2＋エa	$-2a^2+5a$	2	
	オ，カ，キ，ク	0，0，1，4	3	
	ケコ	-2	2	
	サ±シ$\sqrt{ス}$	$4\pm3\sqrt{2}$	3	
	$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{5}{2}$	2	
	$\frac{タチ\pm ツ i}{テ}$	$\frac{-1\pm3i}{2}$	3	
	$\frac{トナ}{ニ}(ヌ-i)$	$\frac{81}{4}(1-i)$	3	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

数学Ⅱ・数学Ｂ 第１問 に同じである．

問題

第２問　微分法・積分法

数学Ⅱ・数学Ｂ 第２問 に同じである．

問題

第３問　図形と方程式

座標平面上で，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-4x+5 \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

で表される領域を D とする．また，a を実数として，直線 $ax-y+2a+1=0$ を ℓ とする．

(1) 領域 D 内の点 $(x,\ y)$ のうち，x 座標と y 座標がともに整数である点は $\boxed{\text{ア}}$ 個ある．

(2) 直線 ℓ は a の値によらず点 $\left(\boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ を通り，ℓ が領域 D と共有点をもつような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} \leqq a \leqq \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$\dfrac{y-1}{x+2}$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である．

また，点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2-4x+y^2 の最大値は $\boxed{\text{サシ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{スセ}}$ である．

(3) 領域 D 内に中心をもち，x 軸と y 軸のいずれにも接する円のうち，その半径が最小である円を C_1，最大である円を C_2 とする．円 C_1 の中心と半径をそれぞれ K_1，r_1，円 C_2 の中心と半径をそれぞれ K_2，r_2 とすると

$$r_1=\frac{\boxed{\text{ソ}}-\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad r_2=\frac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

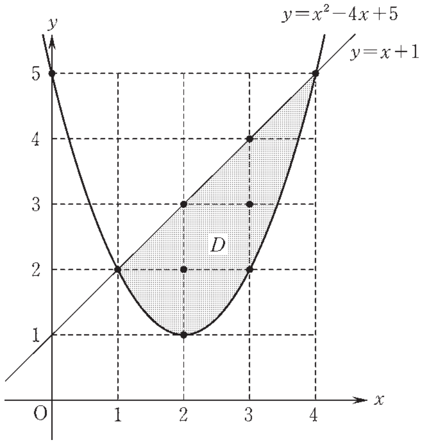
であり，中心間の距離 $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$ は $\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

【解説】

問題

$$D:\begin{cases} y \geqq x^2-4x+5, \\ y \leqq x+1. \end{cases}$$

領域 D を図示すると，次の図の影の部分(境界も含む)となる．



☜　放物線 $y=x^2-4x+5$ と直線 $y=x+1$ の交点の x 座標は

$$x^2-4x+5=x+1$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$

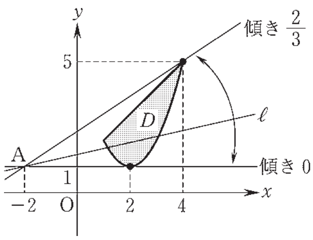
より，$x=1$，4．

(1)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ のうち，x 座標と y 座標がともに整数である点は，上図より $\boxed{8}$ 個ある．

(2)　直線 ℓ の方程式は

$$y=a(x+2)+1$$

であるから，ℓ は a の値によらず点 $\left(\boxed{-2},\ \boxed{1}\right)$ を通る．この点を A とする．また，ℓ の傾きは a である．



直線 ℓ が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，ℓ の傾き a は 0 である．また，直線 ℓ が点 $(4,\ 5)$ を通るとき，ℓ の傾き a は $\frac{2}{3}$ である．このことと上図より，直線 ℓ が領域 D と共有点をもつ条件は

$$\boxed{0}\leqq a\leqq\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\qquad\cdots(*)$$

である．

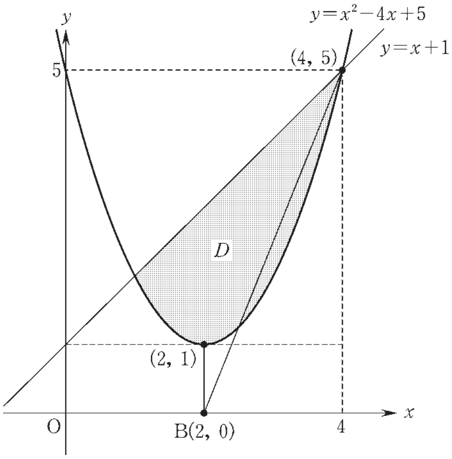
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$\dfrac{y-1}{x+2}$ は直線 AP の傾きを表す．

よって，$(*)$ より，$\dfrac{y-1}{x+2}$ の最大値は $\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ であり，$\dfrac{y-1}{x+2}$ の最小値は $\boxed{0}$ である．

点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，点 $(2,\ 0)$ を B とすると

$$x^2-4x+y^2=(x-2)^2+y^2-4$$
$$=\mathrm{BQ}^2-4$$

となる．



上図より，BQ は Q が点 (4, 5) のとき最大で，このとき BQ^2-4 も最大となる．また，BQ は Q が点 (2, 1) のとき最小で，このとき BQ^2-4 も最小となる．

よって，x^2-4x+y^2 の最大値は

$$(4-2)^2+(5-0)^2-4=\boxed{25}$$

☜ $4^2-4\cdot4+5^2=25$ と計算してもよい．

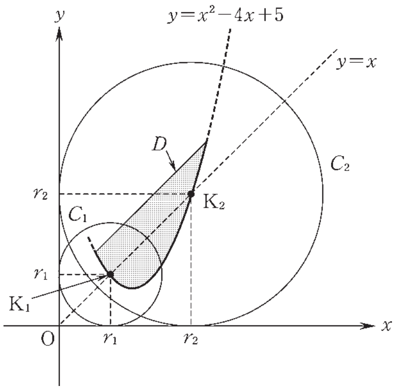
であり，x^2-4x+y^2 の最小値は

$$(2-2)^2+(1-0)^2-4=\boxed{-3}$$

☜ $2^2-4\cdot2+1^2=-3$ と計算してもよい．

である．

(3)



領域 D 内に中心をもち，x 軸と y 軸のいずれにも接する円の中心は直線 $y=x$ 上にある．その中心の座標を $(r,\ r)$ $(r>0)$ とすると，この円の半径は r である．

上図のように，K_1, K_2 は放物線 $y=x^2-4x+5$ と直線 $y=x$ の 2 交点である．交点の x 座標は

$$x^2-4x+5=x$$
$$x^2-5x+5=0$$

より

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

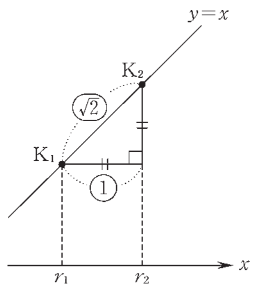
よって，K_1 の x 座標は $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$，K_2 の x 座標は $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ であり

$$r_1=\frac{\boxed{5}-\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}},\quad r_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

である．直線 $y=x$ の傾きが 1 であるから，$r_2-r_1=\sqrt{5}$ を用いて

$$K_1K_2=\sqrt{2}(r_2-r_1)=\sqrt{\boxed{10}}$$

☜



である．

第 4 問　式と証明・高次方程式

a, b, c を実数とする．x の整式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^3+(a-4)x^2+cx-a^2$$

とし，$P(x)$ は $x-a$ で割り切れ，その商は $x^2+2bx+a$ であるとする．このとき，b と c は a を用いて

$$b=a-\boxed{\text{ア}},\quad c=\boxed{\text{イウ}}a^2+\boxed{\text{エ}}a$$

と表される．

(1)　3 次方程式 $P(x)=0$ が異なる三つの実数解をもつような a の値の範囲は

$$a<\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}<a<\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}<a$$

である．

(2)　3 次方程式 $P(x)=0$ の三つの解を α, β, γ とする．α, β, γ が

$$25\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)+7\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=6$$

を満たすとき，a の値と方程式 $P(x)=0$ の三つの解を求めると

$$a=\boxed{\text{ケコ}}\ \text{のとき}\quad x=\boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}}\pm\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

$$a=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\ \text{のとき}\ x=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タチ}}\pm\boxed{\text{ツ}}i}{\boxed{\text{テ}}}$$

であり，$a=\boxed{\text{ケコ}}$ のとき

$$P\left(\frac{\boxed{\text{タチ}}+\boxed{\text{ツ}}i}{\boxed{\text{テ}}}\right)=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\left(\boxed{\text{ヌ}}-i\right)$$

である．

【解説】　**問題**

$$P(x)=x^3+(a-4)x^2+cx-a^2. \qquad \cdots①$$

$P(x)$ は $x-a$ で割り切れ，その商が $x^2+2bx+a$ であるから

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-a)(x^2+2bx+a)\\&=x^3+(-a+2b)x^2+(a-2ab)x-a^2 \qquad \cdots②\end{aligned}$$

である．

① の右辺と ② の右辺はすべての x に対して等しいので

$$a-4=-a+2b,\quad c=a-2ab$$

すなわち

$$b=a-\boxed{2},$$

$$c=a-2a(a-2)=\boxed{-2}a^2+\boxed{5}a$$

が成り立つ．

(1)　$f(x)=x^2+2bx+a$ とおく．$b=a-2$ より

> **恒等式**
>
> a, b, c, d, a', b', c', d' を定数とする．
>
> 「すべての x に対して
> ax^3+bx^2+cx+d
> $=a'x^3+b'x^2+c'x+d'$
> が成り立つ」
>
> $\Longleftrightarrow$ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$.

$$f(x)=x^2+2(a-2)x+a$$

である．

3 次方程式 $P(x)=0$ が異なる三つの実数解をもつ条件は

☜ $P(x)=(x-a)f(x)$ より
$P(x)=0$
$\iff$「$x=a$ または $f(x)=0$」．

$$\begin{cases} f(a)\neq 0 & \cdots③ \\ \text{かつ} & \\ f(x)=0 \text{ が異なる二つの実数解をもつ} & \cdots④ \end{cases}$$

である．

$f(a)=3a^2-3a$ であるから，③ は

$$a\neq 0,\ 1 \qquad \cdots⑤$$

となる．

次に，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-a$$
$$=a^2-5a+4$$
$$=(a-1)(a-4)$$

☜ **2 次方程式の解の判別**

a，b，c を実数とする．

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots(*)$$

の判別式 b^2-4ac を D とすると
(*) が異なる二つの実数解をもつ条件は

$$D>0$$

である．

であるから，④ が成り立つ条件は

$$D>0$$

すなわち

$$a<1,\quad 4<a \qquad \cdots⑥$$

となる．

よって，3 次方程式 $P(x)=0$ が異なる三つの実数解をもつような a の値の範囲は，⑤ かつ ⑥ より

$$a<\boxed{0},\ \boxed{0}<a<\boxed{1},\ \boxed{4}<a$$

である．

(2) 3 次方程式 $P(x)=0$ の三つの解を α，β，γ とする．$\alpha=a$ とし，β，γ は 2 次方程式 $f(x)=0$ の二つの解としてよい．このとき，解と係数の関係から

$$\beta+\gamma=-2(a-2),\quad \beta\gamma=a \qquad \cdots⑦$$

☜ **解と係数の関係**

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

である．

$25\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)+7\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=6$ より

$$25(\alpha+\beta+\gamma)+7(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6\alpha\beta\gamma$$
$$25\{\alpha+(\beta+\gamma)\}+7\{\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma\}=6\alpha\beta\gamma$$

であるが，$\alpha=a$ と ⑦ より

$$25\{a-2(a-2)\}+7\{-2a(a-2)+a\}=6a^2$$
$$2a^2-a-10=0$$
$$(a+2)(2a-5)=0$$
$$a=-2,\ \frac{5}{2}$$

となる．

$a=-2$ のとき

$$f(x)=x^2-8x-2.$$

☜ $f(x)=x^2+2(a-2)x+a$.

$a=\dfrac{5}{2}$ のとき

$$f(x)=x^2+x+\frac{5}{2}.$$

したがって，3 次方程式 $P(x)=0$ の三つの解は

$a=\boxed{-2}$ のとき　$x=-2,\ \boxed{4}\pm\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}$,

$a=\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$ のとき $x=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{\boxed{-1}\pm\boxed{3}i}{\boxed{2}}$

である．

$a=-2$ のとき

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+2)(x^2-8x-2)\\&=x^3-6x^2-18x-4\end{aligned}$$

☜ $P(x)=(x-a)f(x)$.

であるが，$P(x)$ を $x^2+x+\dfrac{5}{2}$ で割ると商が $x-7$，余りが $-\dfrac{27}{2}(x-1)$ であるから

☜
$$\begin{array}{r|l} & x-7 \\ x^2+x+\frac{5}{2} & x^3-6x^2-18x-4 \\ & x^3+x^2+\frac{5}{2}x \\ \hline & -7x^2-\frac{41}{2}x-4 \\ & -7x^2-7x-\frac{35}{2} \\ \hline & -\frac{27}{2}x+\frac{27}{2}\end{array}$$

$$P(x)=(x-7)\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{27}{2}(x-1)$$

である．よって

$$\begin{aligned}P\left(\frac{-1+3i}{2}\right)&=-\frac{27}{2}\left(\frac{-1+3i}{2}-1\right)\\&=-\frac{27}{2}\cdot\frac{-3+3i}{2}\\&=\frac{\boxed{81}}{\boxed{4}}\left(\boxed{1}-i\right)\end{aligned}$$

である．

☜ $\dfrac{-1+3i}{2}$ は 2 次方程式 $x^2+x+\dfrac{5}{2}=0$ の解である．

☜ $x=\dfrac{-1+3i}{2}$ のとき，$x^2=-x-\dfrac{5}{2}$ を用いて

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+2)(x^2-8x-2)\\&=(x+2)\left(-9x-\frac{9}{2}\right)\\&=-9(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\\&=-9\cdot\frac{3+3i}{2}\cdot\frac{3i}{2}\\&=-\frac{81}{4}(1+i)i\\&=\frac{81}{4}(1-i)\end{aligned}$$

と計算することもできる．

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	5	1	
	イ	2	2	
	ウ－エ$\sin^2 x$	$1-2\sin^2 x$	2	
	オカ，キ	－4，5	2	
	ク	9	2	
	$\dfrac{\text{ケ}-\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$	$\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$	2	
	シ	0	2	
	ス	6	2	
	セ$<x<$ソ	$1<x<7$	3	
	タ	1	2	
	チ	4	2	
	ツ	2	2	
	テ	5	1	
	ト	6	1	
	ナ	1	2	
	$\dfrac{\text{ニ}+\sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	アx^2－イx＋ウ	$3x^2-8x+5$	2	
	エ	1	2	
	オ	1	1	
	カx^2－キクx＋ケ	$3x^2-2\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}$	2	
	コ	1	2	
	サ	3	2	
	シ	2	2	
	ス	2	2	
	$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\dfrac{1}{6}$	3	
	タ	0	2	
	チ$k^2+\dfrac{\text{ツ}}{k}$	$2k^2+\dfrac{1}{k}$	2	
	$k^3-\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}k+\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$k^3-\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{2}$	3	
	$\dfrac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	$\dfrac{\text{ノハ}}{\text{ヒフ}}$	$\dfrac{23}{54}$	3	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	アn－イ	$3n-2$	2	
	$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}n$(オ$n$－カ)	$\dfrac{1}{2}n(3n-1)$	3	
	キク	25	2	
	ケ	2	2	
	コ，サ	2，1	2	
	シ，ス，セ，ソ，タ	3，2，1，2，1	3	
	チ,ツ,テト,ナニ,ヌネ	1，7，10，13，19	2	
	ノハ	24	2	
	ヒフヘ	996	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア	2	2	
	イ	3	2	
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{\text{オ}-k}{\text{カ}}$	$\frac{1-k}{2}$	2	
	キk^2+ク	$8k^2+1$	2	
	$\frac{\text{ケ}}{\text{コサ}}$	$\frac{7}{16}$	2	
	$\frac{\text{シス}}{\text{セソ}}$	$\frac{14}{23}$	3	
	$\frac{\text{タ}\sqrt{\text{チ}}}{\text{ツ}}$	$\frac{9\sqrt{2}}{8}$	2	
	$\frac{\text{テ}\sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}}$	$\frac{9\sqrt{2}}{4}$	3	
第4問　自己採点小計			(20)	
第5問	アイ.ウ	65.0	2	
	エオ.カ	63.5	2	
	キクケ	119	2	
	コサ	61	2	
	シス.セ	36.0	3	
	ソ	3	2	
	タ	1	2	
	チツ.テ	64.0	2	
	トナ.ニ	38.0	3	
第5問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第6問	ア	3	2	
	イ	3	2	
	ウ	1	2	
	エ	9	2	
	オカ	89	2	
	キ	1	2	
	ク	3	2	
	ケ	0	2	
	コサ	18	2	
	シスセ，ソタ，チ	144，55，1	2	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

〔１〕 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin x+2\cos 2x+3$$

とする．

(1) $f(0)=\boxed{\text{ア}}$，　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\text{イ}}$

である．

(2) $\cos 2x=\boxed{\text{ウ}}-\boxed{\text{エ}}\sin^2 x$ ………… (*)

を用いて $f(x)$ は

$$f(x)=\boxed{\text{オカ}}\sin^2 x+\sin x+\boxed{\text{キ}}$$

と変形できる．

(3) $0\leqq x<6\pi$ において，x の方程式 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす x の値は全部で $\boxed{\text{ク}}$ 個ある．

(4) $0<x<\pi$ において，x の方程式 $f(x)=f(0)$ を満たす x の値は 2 個ある．そのうちの小さい方を α，大きい方を β とする．

(*) より $\sin^2\frac{\pi}{12}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であるから，$\alpha\ \boxed{\text{シ}}\ \frac{\pi}{12}$ である．$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

また，$n\beta>5\pi$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{ス}}$ である．

〔２〕 二つの不等式

$\log_2(x-1)\leqq 3\log_8(7-x)$ ………… ①

$4^x+4^{-x}-5\cdot 2^x-5\cdot 2^{-x}+8\leqq 0$ ………… ②

を考える．

(1) ① において真数は正であるから，$\boxed{\text{セ}}<x<\boxed{\text{ソ}}$ が成り立つ．

よって，① を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{タ}}<x\leqq\boxed{\text{チ}}$ である．

(2) $t=2^x+2^{-x}$ とおくと t の最小値は $\boxed{\text{ツ}}$ であり，t は $\boxed{\text{ツ}}$ 以上のすべての実数値をとり得る．

② を t を用いて表すと

$$t^2-\boxed{\text{テ}}\,t+\boxed{\text{ト}}\leqq 0$$

となる．

(3) ① かつ ② を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{ナ} < x \leqq \log_2 \frac{\boxed{ニ}+\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$$

である。

【解説】

問題

〔1〕

$$f(x)=\sin x+2\cos 2x+3.$$

(1) $f(0)=\sin 0+2\cos 0+3=0+2\cdot 1+3=\boxed{5}$,　☜ $\sin 0=0$, $\cos 0=1$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\pi+3=1+2\cdot(-1)+3=\boxed{2}$.　☜ $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\pi=-1$.

(2) 2倍角の公式より

$$\cos 2x=\boxed{1}-\boxed{2}\sin^2 x \quad \cdots(*)$$

☜ **2倍角の公式**

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x.$$

であるから，(*) を用いて $f(x)$ は

$$f(x)=\sin x+2(1-2\sin^2 x)+3$$
$$=\boxed{-4}\sin^2 x+\sin x+\boxed{5}$$

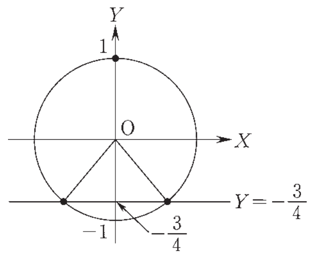
と変形できる。

(3) $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ より

$$-4\sin^2 x+\sin x+5=2$$
$$(\sin x-1)(4\sin x+3)=0$$
$$\sin x=1,\ -\frac{3}{4}.$$

$0\leqq x<6\pi$ において，$\sin x=1$ を満たす x の値は3個あり，$\sin x=-\frac{3}{4}$ を満たす x の値は6個ある。

☜ $0\leqq x<2\pi$ において，$\sin x=1$ を満たす x の値は1個，$\sin x=-\frac{3}{4}$ を満たす x の値は2個ある。



よって，$0\leqq x<6\pi$ において，x の方程式 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす x の値は全部で $\boxed{9}$ 個ある。

(4) $f(x)=f(0)$ より

$$-4\sin^2 x+\sin x+5=5$$
$$\sin x(4\sin x-1)=0$$
$$\sin x=0,\ \frac{1}{4}.$$

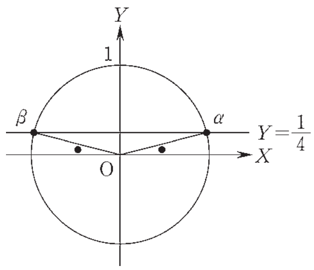
$0<x<\pi$ のとき，$0<\sin x\leqq 1$ であるから

$$\sin x=\frac{1}{4}.$$

$0<x<\pi$ において，x の方程式 $f(x)=f(0)$ を満たす x の値は2個あり，そのうちの小さい方を α，大きい方を β とすると，α, β は

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad \beta=\pi-\alpha,\quad \sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{4}$$

☜



を満たす.

(*) において $x=\dfrac{\pi}{12}$ とすると

$$\cos\frac{\pi}{6}=1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$$

となるので

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

☜ $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$=\frac{\boxed{2}-\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}$$

☜ $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

よって

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

と求めることもできる.

であることがわかる.

ここで

$$\sin^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\alpha=\frac{2-\sqrt{3}}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{16}>0$$

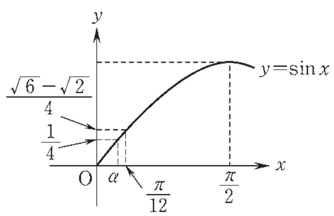
より

$$\sin^2\alpha<\sin^2\frac{\pi}{12}$$

である. さらに, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\alpha>0$, $\sin\dfrac{\pi}{12}>0$ であるから

$$\sin\alpha<\sin\frac{\pi}{12}$$

である. また, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x$ は増加関数であるから, $\alpha<\dfrac{\pi}{12}$ である. したがって, $\boxed{シ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である. ☜



$\beta=\pi-\alpha$ と $0<\alpha<\dfrac{\pi}{12}$ より, $\dfrac{11}{12}\pi<\beta<\pi$ である. よって

$$\frac{55}{12}\pi<5\beta<5\pi,\quad \frac{11}{2}\pi<6\beta<6\pi$$

より

$$5\beta<5\pi<6\beta$$

となり, $n\beta>5\pi$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{6}$ である.

〔2〕

$$\log_2(x-1)\leqq 3\log_8(7-x), \qquad \cdots①$$

$$4^x+4^{-x}-5\cdot 2^x-5\cdot 2^{-x}+8\leqq 0. \qquad \cdots②$$

(1)　① において真数は正であるから

$$x-1>0 \quad \text{かつ} \quad 7-x>0$$

すなわち

$$\boxed{1}<x<\boxed{7} \qquad \cdots③$$

が成り立つ．

また，① を変形すると

$$\log_2(x-1) \leqq 3\cdot\frac{\log_2(7-x)}{\log_2 8}$$

☜ **底の変換公式**

$a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$c>0$，$c\neq1$ のとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_2(x-1) \leqq 3\cdot\frac{\log_2(7-x)}{3}$$

☜ $\log_2 8=\log_2 2^3=3$.

$$\log_2(x-1) \leqq \log_2(7-x)$$

となる．ここで，底 2 は 1 より大であるから

$$x-1 \leqq 7-x$$

☜ $a>1$，$M>0$，$N>0$，$\log_a M \leqq \log_a N$ のとき

$$M \leqq N.$$

$$x \leqq 4 \qquad \cdots④$$

を得る．

よって，① を満たす x の値の範囲は，③ かつ ④ より

$$\boxed{1}<x\leqq\boxed{4} \qquad \cdots⑤$$

である．

(2)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2} \geqq \sqrt{2^x\cdot2^{-x}}$$

☜ **相加平均と相乗平均の大小関係**

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}.$$

等号成立条件は $a=b$ である．

$$2^x+2^{-x} \geqq 2$$

☜ $2^x\cdot2^{-x}=2^0=1$.

となる．等号は $x=0$ のとき成り立つので，$t=2^x+2^{-x}$ とおくと $t \geqq 2$ であり，t の最小値は $\boxed{2}$ である．また，t は 2 以上のすべての実数値をとり得る．

また

$$\begin{aligned} t^2&=(2^x+2^{-x})^2 \\ &=(2^x)^2+2\cdot2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2 \\ &=4^x+2+4^{-x} \end{aligned}$$

☜ $(2^x)^2=2^{2x}=(2^2)^x=4^x$.

同様にして，$(2^{-x})^2=4^{-x}$.

より

$$4^x+4^{-x}=t^2-2$$

であるから，② を t を用いて表すと

$$t^2-2-5t+8 \leqq 0$$

☜ $4^x+4^{-x}-5(2^x+2^{-x})+8 \leqq 0$.

$$t^2-\boxed{5}\,t+\boxed{6} \leqq 0 \qquad \cdots②'$$

となる．

(3)　②′ より

$$(t-2)(t-3) \leqq 0$$

$$2 \leqq t \leqq 3.$$

$t \geqq 2$ はすべての実数 x で成立する．

$t \leqq 3$ より

$$2^x + 2^{-x} \leqq 3.$$

$u = 2^x$ とおくと

$$u + \frac{1}{u} \leqq 3.$$

☜ $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{u}$.

両辺に u（>0）を掛けて整理して

☜ $u = 2^x > 0$.

$$u^2 - 3u + 1 \leqq 0.$$

これを u について解くと

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq u \leqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

であり，これは $u > 0$ を満たす．

u を 2^x に戻して

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq 2^x \leqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

さらに，各辺の底が 2（>1）の対数をとって

$$\log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \quad \cdots ⑥$$

① かつ ② を満たす x の値の範囲は，⑤ かつ ⑥ を満たす x の値の範囲である．

ここで，$\log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 4$ であるから，求める x の値の範囲は

☜ $2 < \sqrt{5} < 3$ より

$$0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$$

であるから

$$\begin{cases} \log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \log_2 \frac{1}{2} < 1, \\ 1 < \log_2 \frac{5}{2} < \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2} < \log_2 3 < 4. \end{cases}$$

$$\boxed{1} < x \leqq \log_2 \frac{\boxed{3} + \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

第２問　微分法・積分法

a，b を実数とし，x の関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=x^3-4x^2+5x-1$$
$$g(x)=x^3-ax^2+bx+1$$

とする．

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウ}}$$

であるから，関数 $f(x)$ は

$$x=\boxed{\text{エ}}\text{ のとき，極大値 }\boxed{\text{オ}}$$

をとる．

また，関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ は

$$g'(x)=\boxed{\text{カ}}x^2-\boxed{\text{キク}}x+\boxed{\text{ケ}}$$

である．

曲線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．曲線 C_2 が点 $\mathrm{A}\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通るとき

$$b=a-\boxed{\text{コ}}$$

である．さらに，点 A における曲線 C_2 の接線の傾きが -1 であるとき

$$a=\boxed{\text{サ}},\quad b=\boxed{\text{シ}}$$

である．

以下，$a=\boxed{\text{サ}}$，$b=\boxed{\text{シ}}$ とし，このときの点 A における曲線 C_2 の接線を ℓ とする．

(1) 曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ であり，曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(2) k を正の実数とし，放物線 $y=-kx^2+2k^3x+2$ を D とする．

放物線 D と直線 ℓ の交点の x 座標は

$$\boxed{\text{タ}}\text{ と }\boxed{\text{チ}}k^2+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{k}$$

であり，$\boxed{\text{チ}}k^2+\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{k}>1$ が成り立つ．

放物線 D，直線 ℓ と直線 $x=1$ の三つで囲まれた二つの部分のうち，$x\leqq 1$ の部分の面積を $S(k)$ とすると

$$S(k)=k^3-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}k+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

であり，k が $k>0$ の範囲を動くとき，$S(k)$ は $k=\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ において最小値 $\dfrac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒフ}}$ をとる．

【解説】

問題

$f(x)=x^3-4x^2+5x-1$ より

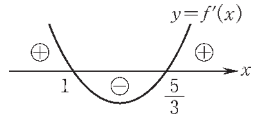
$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{8}x+\boxed{5}$$
$$=(x-1)(3x-5)$$

> 導関数
> $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1, 2, 3)$，
> $(c)'=0$ （c は定数）．

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{23}{27}$	↗

> $f'(x)$ の符号の変化は $y=f'(x)$ のグラフを描くとわかりやすい．



関数 $f(x)$ は $x=\boxed{1}$ のとき，極大値 $\boxed{1}$ をとる．

また，$g(x)=x^3-ax^2+bx+1$ より

$$g'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{2a}x+\boxed{b}$$

である．

曲線 C_2 が点 A(1, 1) を通るとき

$$1^3-a\cdot 1^2+b\cdot 1+1=1$$

> $g(x)=x^3-ax^2+bx+1$．

すなわち

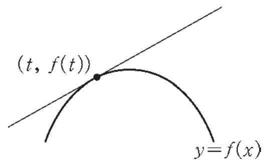
$$b=a-\boxed{1} \qquad \cdots①$$

である．

さらに，点 A における曲線 C_2 の接線の傾きが -1 であるとき，$g'(1)=-1$ より

$$3\cdot 1^2-2a\cdot 1+b=-1$$

> 接線の傾き
> 点 $(t, f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ である．



すなわち

$$b=2a-4 \qquad \cdots②$$

である．よって，①, ② より

$$a=\boxed{3},\quad b=\boxed{2}$$

である．

以下，$a=3$，$b=2$ のときを考える．

ℓ は点 A(1, 1) を通り，傾きが -1 の直線であるから，ℓ の方程式は

$$y=-(x-1)+1$$

すなわち

$$y=-x+2$$

である．

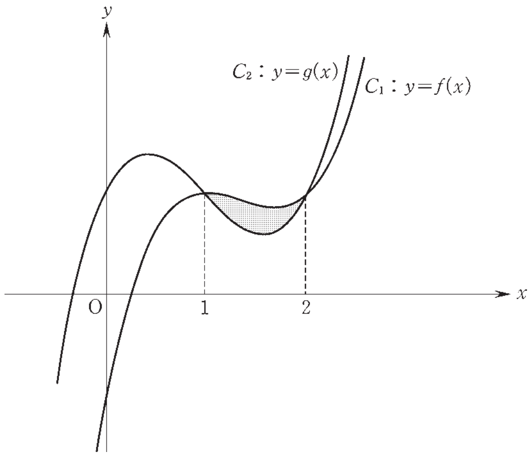
(1) $f(x)=g(x)$ より

$$x^3-4x^2+5x-1=x^3-3x^2+2x+1$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$

であるから，曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は 1 と $\boxed{2}$ である．また，$1 \leqq x \leqq 2$ において

$$f(x)-g(x)=-(x-1)(x-2) \geqq 0$$

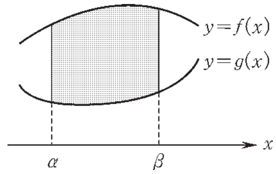
である．



曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を T とすると

$$T=\int_1^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=\int_1^2 (-x^2+3x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=-\frac{8}{3}+6-4-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}.$$

面積



☜ 上図の影の部分の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

である．

☜ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

の公式を用いて

$$T=\int_1^2 \{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=-\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(2-1)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{6}$$

と求めてもよい．

(2) D : $y=-kx^2+2k^3x+2 \quad (k>0)$,

ℓ : $y=-x+2$.

放物線 D と直線 ℓ の交点の x 座標は，x の方程式

$$-kx^2+2k^3x+2=-x+2$$

の実数解であるから

$$kx\left\{x-\left(2k^2+\frac{1}{k}\right)\right\}=0$$

☜ $k>0$ より $k \neq 0$．

より

$$\boxed{0} \text{ と } \boxed{2}k^2+\frac{\boxed{1}}{k}$$

である．

ここで

$$\left(2k^2+\frac{1}{k}\right)-1=\frac{2k^3-k+1}{k}$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2-2k+1)}{k}$$
$$=\frac{1}{k}(k+1)\left\{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}$$
$$>0$$

より，$2k^2+\dfrac{1}{k}>1$ が成り立つ．

☜ 次のように示すこともできる．

$0<k<1$ のとき，$2k^2>0$，$\dfrac{1}{k}>1$ より

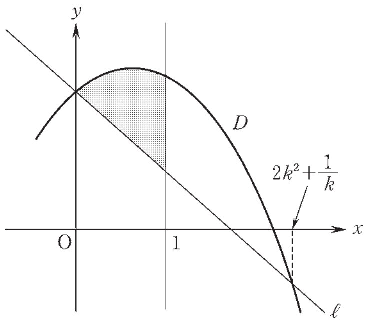
$$2k^2+\frac{1}{k}>1.$$

$k\geqq 1$ のとき，$2k^2\geqq 2$，$\dfrac{1}{k}>0$ より

$$2k^2+\frac{1}{k}\geqq 2>1.$$

放物線 D，直線 ℓ と直線 $x=1$ の三つで囲まれた二つの部分のうち，$x\leqq 1$ の部分の面積を $S(k)$ とすると，$S(k)$ は次の図の影をつけた部分の面積である．

☜ $2k^2+\dfrac{1}{k}>1$ より，放物線 D と直線 ℓ で囲まれた部分は，直線 $x=1$ によって二つの部分に分けられる．



$$S(k)=\int_0^1\{(-kx^2+2k^3x+2)-(-x+2)\}\,dx$$
$$=\int_0^1\{-kx^2+(2k^3+1)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}kx^3+\frac{1}{2}(2k^3+1)x^2\right]_0^1$$
$$=k^3-\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}k+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．よって

$$S'(k)=3k^2-\frac{1}{3}$$
$$=3\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right).$$

したがって，$k>0$ における $S(k)$ の増減は次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$S'(k)$		$-$	0	$+$
$S(k)$		↘	$\frac{23}{54}$	↗

以上より，$S(k)$ は $k=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ において最小値 $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{54}}$ をとる．

第3問　数　列

(1)　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1$$
$$a_{n+1}-a_n=3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ア}}\,n-\boxed{\text{イ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．また

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\,n\left(\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqq 1000$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{キク}}$ である．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき

$$S_n=2^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるとする．$b_1=\boxed{\text{ケ}}$ であり，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n=\boxed{\text{コ}}^{\boxed{\text{サ}}}$$

である．また

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}-\left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)^{\boxed{\text{タ}}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．ただし，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はそれぞれ(1)，(2)で定めたものとする．

数列 $\{a_n\}$ から，数列 $\{b_n\}$ に現れる項を除き，小さいものから順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする．

$$c_1=\boxed{\text{チ}},\ c_2=\boxed{\text{ツ}},\ c_3=\boxed{\text{テト}},\ c_4=\boxed{\text{ナニ}},\ c_5=\boxed{\text{ヌネ}}$$

である．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \leqq 1000$ を満たす最大の自然数 n を m とすると $m=\boxed{\text{ノハ}}$ であり

$$\sum_{k=1}^{m} c_k=\boxed{\text{ヒフヘ}}$$

である．

【解説】

問題

(1)　$a_1=1$，

$$a_{n+1}-a_n=3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

より，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=1+(n-1)\cdot 3$$
$$=\boxed{3}\,n-\boxed{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．また

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{2}\{1+(3n-2)\}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}n\left(\boxed{3}\,n-\boxed{1}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．ここで，n が増加すると $\sum_{k=1}^{n}a_k$ も増加し

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot 25\cdot(3\cdot 25-1)=925, \\ \dfrac{1}{2}\cdot 26\cdot(3\cdot 26-1)=1001\end{cases}$$

であるから，$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq 1000$ すなわち $\frac{1}{2}n(3n-1)\leqq 1000$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{25}$ である．

等差数列の一般項

初項を a，公差を d とする等差数列の一般項は

$$a+(n-1)d.$$

等差数列の和

等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n は

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

$a_n>0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$

(2)　数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=2^n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$b_1=S_1=2^1=\boxed{2}$$

であり，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2^n-2^{n-1}$$
$$=(2-1)\cdot 2^{n-1}$$
$$=\boxed{2}^{\,n-1}$$

である．よって，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

和と一般項の関係

数列 $\{b_n\}$の初項 b_1 から第 n 項 b_n までの和を S_n とすると

$$S_1=b_1,$$
$$S_n-S_{n-1}=b_n\quad(n\geqq 2).$$

また，$n\geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{1}{b_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{b_k}$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\qquad\cdots①$$

である．ここで，$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$ は，初項 $\frac{1}{2^{2-1}}=\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$，項数 $n-1$ の等比数列の和であるから

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

である．これを ① に代入すると

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和は，$r\neq 1$ のとき

$$a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

であり，これは $n=1$ でも成り立つ．よって

☜ $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{b_k}=\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$ である．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}-\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，$\boxed{タ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(3) 数列 $\{b_n\}$ を順に書き出すと

$\{b_n\}$：2，2，4，8，16，32，64，128，256，512，…

☜ $\begin{cases} b_1=2, \\ b_n=2^{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \cdots). \end{cases}$

である．このうち，数列 $\{a_n\}$ に現れるもの，すなわち 3 で割ると 1 余るものは

4，16，64，256，… …(*)

であり，$a_2=4$，$a_6=16$，$a_{22}=64$，$a_{86}=256$ である．

☜ $3n-2=4$ とすると $n=2$.
$3n-2=16$ とすると $n=6$.
$3n-2=64$ とすると $n=22$.
$3n-2=256$ とすると $n=86$.

数列 $\{a_n\}$ から上の (*) に現れる項を除き，改めて小さい順に並べた数列を $\{c_n\}$ とすると

☜ $\{a_n\}$：1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, …
これを除く．

$c_1=\boxed{1}$，$c_2=\boxed{7}$，$c_3=\boxed{10}$，$c_4=\boxed{13}$，$c_5=\boxed{19}$

である．

(1) より，$\sum_{k=1}^{25}a_k=925$ であることと，数列 $\{a_n\}$ から (*) に現れる項を除いた数列が $\{c_n\}$ であることより

$$\sum_{k=1}^{22}c_k=\sum_{k=1}^{25}a_k-(4+16+64)=841,$$

☜ $a_2=4$，$a_6=16$，$a_{22}=64$.

$$\sum_{k=1}^{23}c_k=841+a_{26}=841+76=917,$$
$$\sum_{k=1}^{24}c_k=917+a_{27}=917+79=996,$$
$$\sum_{k=1}^{25}c_k=996+a_{28}=996+82=1078.$$

また，n が増加すると $\sum_{k=1}^{n}c_k$ も増加する．よって，$\sum_{k=1}^{n}c_k\leqq1000$ を満たす最大の自然数 n を m とすると $m=\boxed{24}$ であり

$$\sum_{k=1}^{m}c_k=\boxed{996}$$

である．

第4問　ベクトル

平面上に三角形 OAB があり

$$|\overrightarrow{OA}|=2,\quad |\overrightarrow{OB}|=3,\quad \cos\angle AOB=\frac{1}{3}$$

であるとする．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\text{ア}},\quad |\overrightarrow{AB}|=\boxed{\text{イ}}$$

である．

辺 OA の中点を M とすると $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OA}$ である．

k を実数とし，直線 MB 上に点 P を $\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MB}$ となるようにとる．

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{オ}}-k}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$$

であり

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\boxed{\text{キ}}k^2+\boxed{\text{ク}}$$

となる．

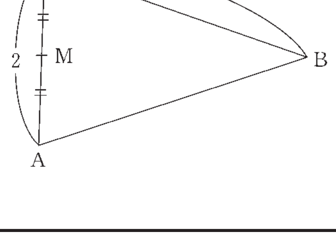
また，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$ のとき $k=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

以下，$k=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ とする．

(1)　直線 AP と直線 OB の交点を C とすると $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}\overrightarrow{OB}$ となる．

(2)　三角形 OAB の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，この外接円の周上を点 Q が動くとき，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}$ は最大値 $\dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとる．

【解説】　問題



$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=3$，$\cos\angle AOB=\dfrac{1}{3}$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cdot3\cdot\frac{1}{3}=\boxed{2}.$$

また

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2&=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2\\&=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2\\&=3^2-2\cdot2+2^2=9\end{aligned}$$

であるから

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9}=\boxed{3}.$$

M は辺 OA の中点であるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}. \qquad \cdots①$$

$\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MB}$ のとき

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

より

$$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OM}+k\overrightarrow{OB}.$$

これに ① を代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{1}-k}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots②$$

よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2&=\left|\frac{1-k}{2}\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=\frac{(1-k)^2}{4}|\overrightarrow{OA}|^2+2\cdot\frac{1-k}{2}\cdot k(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})+k^2|\overrightarrow{OB}|^2\\&=(1-k)^2+2(1-k)k+9k^2\\&=\boxed{8}k^2+\boxed{1} \qquad \cdots③\end{aligned}$$

となる．

また，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$ のとき

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2$$

すなわち

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$$

であるから

$$2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

となる．上式と ② より

$$\begin{aligned}\{(1-k)\overrightarrow{OA}+2k\overrightarrow{OB}\}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OB}|^2&=0\\(1-k)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(2k-1)|\overrightarrow{OB}|^2&=0\\2(1-k)+9(2k-1)&=0\end{aligned}$$

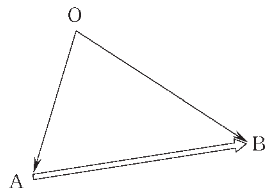
ベクトルの内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

である．

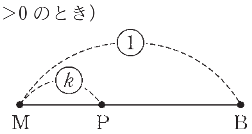
ベクトルの差



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$.

($k>0$ のとき)



$\begin{cases}\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM},\\\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}.\end{cases}$

$|\overrightarrow{OA}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$|\overrightarrow{OB}|=3$.

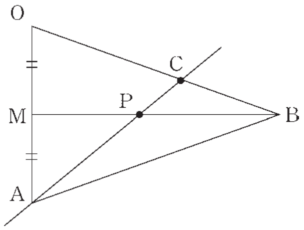
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$|\overrightarrow{OB}|=3$.

$$k=\frac{\boxed{7}}{\boxed{16}}. \qquad \cdots④$$

☜ OB＝AB より，OA⊥BM であるから，$MB=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ であり
$$|\overrightarrow{BP}|=|(k-1)\overrightarrow{MB}|=2\sqrt{2}\,|k-1|$$
となる．これと $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{BP}|$ より
$$8k^2+1=8(k-1)^2$$
つまり
$$k=\frac{7}{16}$$
としてもよい．

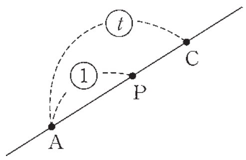
これを ② に代入して
$$\overrightarrow{OP}=\frac{9}{32}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{16}\overrightarrow{OB}$$
である．以下，このときを考える．

(1)



点 C は直線 AP 上にあるから，実数 t を用いて
$$\overrightarrow{AC}=t\,\overrightarrow{AP}$$
と表される．これより

☜



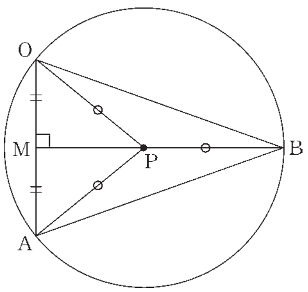
$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$$
であるから
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OP}\\&=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\left(\frac{9}{32}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{16}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\left(1-\frac{23}{32}t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{7}{16}t\,\overrightarrow{OB}.\end{aligned} \qquad \cdots⑤$$

さらに，点 C は直線 OB 上にもあるから，$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ により

☜ 点 C が直線 OB 上にあるとき
$$\overrightarrow{OC}=s\,\overrightarrow{OB}\quad(s \text{ は実数})$$
と表される．

$$1-\frac{23}{32}t=0$$
すなわち
$$t=\frac{32}{23}.$$
これを ⑤ に代入して
$$\overrightarrow{OC}=\frac{7}{16}\cdot\frac{32}{23}\overrightarrow{OB}=\frac{\boxed{14}}{\boxed{23}}\overrightarrow{OB}.$$

(2)



OB＝AB (＝3) より，直線 BM は辺 OA の垂直二等分線であ

るから OP＝AP である．これと OP＝BP より

$$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$$

となるので，点 P は三角形 OAB の外接円の中心である．

③，④ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=8\left(\frac{7}{16}\right)^2+1=\frac{81}{32}$$

となるから，三角形 OAB の外接円の半径は

$$\sqrt{\frac{81}{32}}=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{8}}$$

☜ 外接円の半径は $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ である．

である．

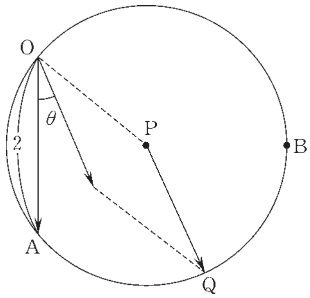
点 Q が三角形 OAB の外接円の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の ☜ なす角を θ（$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$）とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2\cdot\frac{9\sqrt{2}}{8}\cdot\cos\theta=\frac{9\sqrt{2}}{4}\cos\theta$$

となる．これが最大となるのは $\cos\theta=1$ すなわち $\theta=0^\circ$ のときで，このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は最大値

$$\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$$

をとる．



$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=(\text{半径})=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$.

第5問　統　計

次の表は，K高校のあるクラスの 10 人について，テスト X，Y，Z，W の得点をまとめたものである．X と Y のテストは全員が受け，Z と W のテストはどちらか一方を選択して受けた．X，Y，Z，W の得点をそれぞれ変量 x，y，z，w で表す．ただし，得点は整数値をとるものとする．

番号	x	y	z	w
1	70	71	63	
2	50	69	75	
3	62	66	56	
4	72	53	62	
5	65	60		64
6	80	B		81
7	55	74		61
8	75	C		72
9	59	64		57
10	62	64		49
平均値	A	64.0	64.0	64.0
分散	77.8	D	47.5	106.0

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1)　変量 x の平均値Aは $\boxed{\text{アイ}}.\boxed{\text{ウ}}$ 点であり，変量 x の中央値は $\boxed{\text{エオ}}.\boxed{\text{カ}}$ 点である．

(2)　表中のBとCの値について

$$\text{B}+\text{C}=\boxed{\text{キクケ}}$$

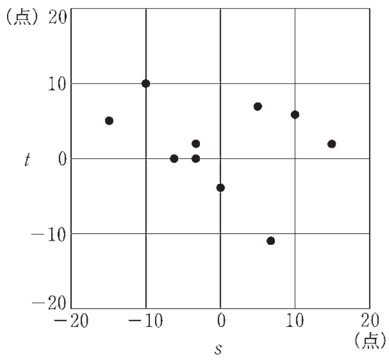
である．さらに，$\text{B}-\text{C}=3$ となるとき，Bの値は $\boxed{\text{コサ}}$ 点であり，このときの変量 y の分散Dの値は $\boxed{\text{シス}}.\boxed{\text{セ}}$ である．

以下では，B＝ $\boxed{\text{コサ}}$ とする．

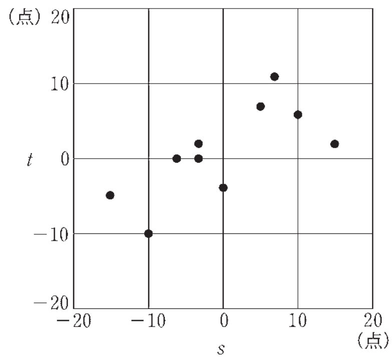
(3)　変量 x，変量 y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ で表し，$s=x-\overline{x}$，$t=y-\overline{y}$ とおく．変量 s と変量 t の相関図(散布図)として適切なものは $\boxed{\text{ソ}}$ であり，変量 s と変量 t の相関係数の値はおよそ $\boxed{\text{タ}}$ である．

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

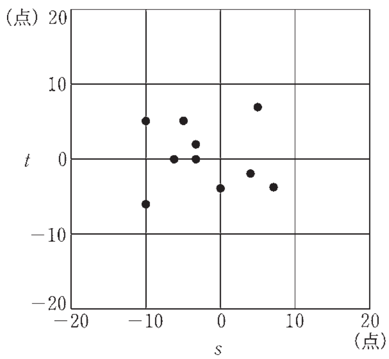
⓪



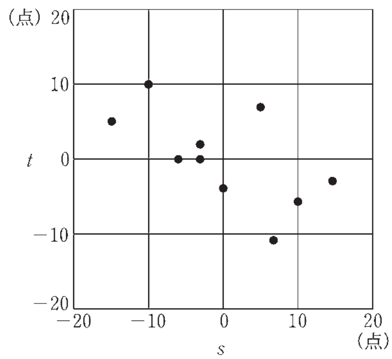
①



②



③



$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ．

⓪ −1.2　① −0.62　② −0.12　③ 0.12　④ 0.62　⑤ 1.2

(4) 後日，番号 5 の生徒が選択して受けていたテストは W ではなく Z であることが判明し，得点表の修正を行った．修正後の変量 z の平均値は $\boxed{\text{チツ}}.\boxed{\text{テ}}$ 点であり，分散は $\boxed{\text{トナ}}.\boxed{\text{ニ}}$ である．

【解説】

問題

(1) 表中の A の値は変量 x の平均値であるから

$$\frac{70+50+62+72+65+80+55+75+59+62}{10}$$

$$=\boxed{65}.\boxed{0}\ (\text{点})$$

である．また，変量 x の値を小さい方から順に書き並べると

50，55，59，62，62，65，70，72，75，80

であるから，変量 x の中央値は

$$\frac{62+65}{2}=\boxed{63}.\boxed{5}\ (\text{点})$$

である．

☜ **平均値**

変量 x のとる値を

x_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

とすると，変量 x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k.$$

☜ **中央値**

変量の値を大きさの順に並べたとき，その中央に位置する値をその変量の中央値という．資料の個数が偶数のときは，中央に近い二つの値の相加平均を中央値という．

(2) 変量 y の平均値は 64.0 点であるから

$$\frac{71+69+66+53+60+\mathrm{B}+74+\mathrm{C}+64+64}{10}=64.0$$

が成り立つ．これより

$$\mathrm{B}+\mathrm{C}=\boxed{119}$$

である．さらに，$\mathrm{B}-\mathrm{C}=3$ となるとき

$$\mathrm{B}=\boxed{61} \quad かつ \quad \mathrm{C}=58$$

である．このとき，変量 y の平均値を $\overline{y}$ $(=64.0)$ として，y と $y-\overline{y}$ についての表を作ると次のようになる．

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	71	69	66	53	60	61	74	58	64	64
$y-\overline{y}$	7	5	2	-11	-4	-3	10	-6	0	0

この表より，変量 y の分散であるDの値は

$$\frac{7^2+5^2+2^2+(-11)^2+(-4)^2+(-3)^2+10^2+(-6)^2+0^2+0^2}{10}$$

$$=\boxed{36}.\boxed{0}$$

である．

☜ **分散**

変量 x のとる値を

x_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，変量 x の分散 ${s_x}^2$ は

$${s_x}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2.$$

(3) $s=x-\overline{x}$，$t=y-\overline{y}$ としたとき，s，t，st についての表を作ると次のようになる．

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	5	-15	-3	7	0	15	-10	10	-6	-3
t	7	5	2	-11	-4	-3	10	-6	0	0
st	35	-75	-6	-77	0	-45	-100	-60	0	0

☜ $\overline{x}=65.0$.

☜ $\overline{y}=64.0$.

まず，番号 2 の生徒の $(s,\ t)=(-15,\ 5)$ を表す点が相関図中に存在するのは⓪と③であり，このうち，番号 6 の生徒の $(s,\ t)=(15,\ -3)$ を表す点が存在するのは③である．③は他の番号についても正しい表示となっているので，変量 s と変量 t の相関図(散布図)として適切なものは $\boxed{③}$ である．この③の相関図より，変量 s と変量 t の間には負の相関関係があることがわかるので，相関係数の値はおよそ -0.62 の $\boxed{①}$ である．

☜ 上の表より，st の平均値は -32.8 であるから，変量 s と変量 t の相関係数を具体的に計算してみると

$$\frac{-32.8}{\sqrt{77.8}\sqrt{36.0}}$$

$$=-0.61977\cdots$$

である．

(4) 修正後の変量 z の値は次のようになる．

番号	1	2	3	4	5
z	63	75	56	62	64

問題文で与えられた表より，番号 1，2，3，4 の生徒の変量 z の平均値は 64.0 点であり，新たに追加された番号 5 の生徒の変量 z の値も 64 点であるので，修正後の変量 z の平均値は修正前

の平均値と変わらず，$\boxed{64}.\boxed{0}$ 点である．

☜ $\dfrac{64\cdot 4+64}{5}=64.0$.

また，問題文で与えられた表より，番号 1，2，3，4 の生徒の変量 z の分散は 47.5 であるから，新たに追加された番号 5 の生徒の変量 z の値が 64 点であることを考えあわせると，修正後の変量 z の分散は

$$\frac{47.5\cdot 4+(64-64)^2}{5}$$

$$=\boxed{38}.\boxed{0}$$

である．

☜ 修正前後の平均値が一致していることに注意.

第６問　コンピュータ

次の規則で定まる数の列を考える.

$$a(1)=1,\ a(2)=2,\ a(n+2)=a(n)+a(n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

はじめのいくつかを書き並べると次のようになる.

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots$$

(1)　自然数 N を与えたときに，この数の列に現れる N を超えない最大の整数を求めるために，次のような〔プログラム〕を作成した.

〔プログラム〕

```
100 INPUT PROMPT "N=": N
110 LET A=1
120 LET B=2
130 IF N=1 THEN
140     PRINT N
150     GOTO  ア
160 END IF
170 LET C=A+B
180 IF  イ  THEN
190     PRINT  ウ
200     GOTO 250
210 END IF
220 LET A=B
230 LET B=C
240 GOTO 170
250 END
```

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ.

⓪　170　　①　180　　②　220　　③　250

$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ.

⓪　C<N　　①　C<=N　　②　C=N　　③　C>N　　④　C>=N

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ.

⓪　A　　①　B　　②　C-1　　③　C

〔プログラム〕を実行し，変数 N に 100 を入力したとき，170 行は $\boxed{\text{エ}}$ 回実行され，190 行で出力される値は $\boxed{\text{オカ}}$ である.

(2) 自然数 N に対して，この数の列に現れる N を超えない最大の整数を L とする．

以下の(ア)～(ウ)の作業を行う．

(ア) N に対して，L を求める．

(イ) $N>L$ ならば，L を出力し，$N-L$ を改めて N とし，(ア)に戻る．

(ウ) $N=L$ ならば，L を出力して作業を終了する．

上の作業により出力された数の和は，最初に与えられた N と等しくなる．

自然数 N を入力し，上の作業を実現するプログラムを作成するためには，〔プログラム〕の 190 行と 200 行の間に，次の 191 行～195 行を追加すればよい．

```
191    LET R= [キ]
192    IF R [ク] 0 THEN
193       LET N=R
194       GOTO [ケ]
195    END IF
```

[キ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ N-A　　① N-B　　② N-C　　③ N-1

[ク] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ <　　① <=　　② =　　③ >　　④ >=

[ケ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 110　　① 130　　② 170　　③ 180

変更後の〔プログラム〕を実行し，変数 N に 200 を入力したとき，170 行は [コサ] 回実行され，出力は順に

[シスセ]

[ソタ]

[チ]

となる．

【解説】

問題

(1) 数の列 $a(1)$，$a(2)$，$a(3)$，… は次の規則で定められる．

$$a(1)=1,\ a(2)=2,$$
$$a(n+2)=a(n)+a(n+1) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots(*)$$

具体的には，次のように定められる．

$a(1)=1$，$a(2)=2$ であるから，$(*)$ で $n=1$ とすると

$$a(3)=a(1)+a(2)=1+2=3.$$

(*) で $n=2$ とすると

$$a(4)=a(2)+a(3)=2+3=5.$$

(*) で $n=3$ とすると

$$a(5)=a(3)+a(4)=3+5=8.$$

$$\vdots$$

〔プログラム〕は，自然数 N を与えたときに，この数の列に現れる N を超えない最大の整数を求め出力するものである．ここで，そのような最大の整数を L とする．

例えば，$N=1, 2, 3, 4, 5, 6$ の場合は次のようになる．

$N=1$ と入力すると，$a(1)=1$，$a(2)=2$ であるから

$$L=1.$$

☜ $a(1)=1$，$a(2)=2$ であるから $a(1) \leqq N < a(2)$ より $L=a(1)$

$N=2$ と入力すると，$a(2)=2$，$a(3)=3$ であるから

$$L=2.$$

☜ $a(2)=2$，$a(3)=3$ であるから $a(2) \leqq N < a(3)$ より $L=a(2)$

$N=3$ と入力すると，$a(3)=3$，$a(4)=5$ であるから

$$L=3.$$

☜ $a(3)=3$，$a(4)=5$ であるから $a(3) \leqq N < a(4)$ より $L=a(3)$

$N=4$ と入力すると，$a(3)=3$，$a(4)=5$ であるから

$$L=3.$$

☜ $a(3)=3$，$a(4)=5$ であるから $a(3) \leqq N < a(4)$ より $L=a(3)$

$N=5$ と入力すると，$a(4)=5$，$a(5)=8$ であるから

$$L=5.$$

☜ $a(4)=5$，$a(5)=8$ であるから $a(4) \leqq N < a(5)$ より $L=a(4)$

$N=6$ と入力すると，$a(4)=5$，$a(5)=8$ であるから

$$L=5.$$

☜ $a(4)=5$，$a(5)=8$ であるから $a(4) \leqq N < a(5)$ より $L=a(4)$

〔プログラム〕の 130 行～160 行は，$N=1$ が入力されたとき，$L=1$ $(=N)$ を出力するだけの処理をするので，150 行では 250 行の END 文にジャンプすればよい．よって，$\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{③}$ が当てはまる．

自然数 N を入力して，170 行が n 回目に実行されるとき，$A=a(n)$，$B=a(n+1)$ であり，$C=a(n+2)$ となっている．180 行，190 行では，170 行が n 回目に実行されたとき初めて $N<a(n+2)$ となったとすれば $L=a(n+1)$ を出力する処理をすればよい．したがって，180 行で $C>N$ となれば，190 行では PRINT B とすればよいので，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ にはそれぞれ $\boxed{③}$，$\boxed{①}$ が当てはまる．

☜ $a(n+2)=a(n)+a(n+1)$ であるから $C=A+B$ より $C=a(n+2)$．

$N=100$ を入力したとき，170 行～240 行の処理の結果は次のようになる．

		170 行の結果		180 行目の真偽
1 回目	$A=1,\quad B=2$	$C=3$	$C \leqq N$	偽
2 回目	$A=2,\quad B=3$	$C=5$	$C \leqq N$	偽
3 回目	$A=3,\quad B=5$	$C=8$	$C \leqq N$	偽
4 回目	$A=5,\quad B=8$	$C=13$	$C \leqq N$	偽
5 回目	$A=8,\quad B=13$	$C=21$	$C \leqq N$	偽
6 回目	$A=13,\ B=21$	$C=34$	$C \leqq N$	偽
7 回目	$A=21,\ B=34$	$C=55$	$C \leqq N$	偽
8 回目	$A=34,\ B=55$	$C=89$	$C \leqq N$	偽
9 回目	$A=55,\ B=89$	$C=144$	$C>N$	真

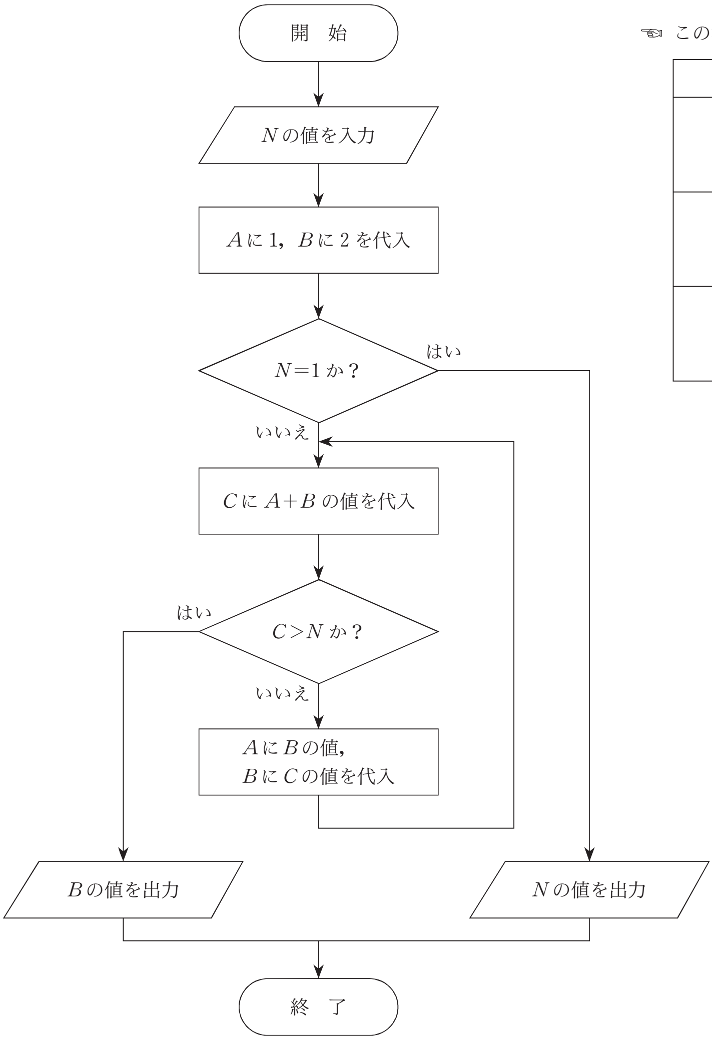
したがって，〔プログラム〕を実行し，変数 N に 100 を入力したとき，170 行は $\boxed{9}$ 回実行され，190 行で出力される値は $\boxed{89}$ である．

〔プログラム〕とその流れ図は次のようになる．

〔プログラム〕

```
100 INPUT PROMPT "N=": N
110 LET A=1
120 LET B=2
130 IF N=1 THEN
140     PRINT N
150     GOTO 250
160 END IF
170 LET C=A+B
180 IF C>N THEN
190     PRINT B
200     GOTO 250
210 END IF
220 LET A=B
230 LET B=C
240 GOTO 170
250 END
```

〔流れ図〕



☜ この流れ図での記号の意味

記号	意味
	入出力
	処　理
	条件判断

(2)　作業(ア)～(ウ)の流れを，いくつかの N で考察してみる．

最初，$N=7$ が与えられたとき，

まず，作業(ア)を行うと，$L=5$ が求まる．

$N>L$ であるから，作業(イ)を行う．

5を出力し，$N-L=2$ を改めて N の値として作業(ア)に戻ると，$L=2$ が求まる．

$N=L$ であるから，作業(ウ)を行う．

2を出力して作業を終了する．

上の作業の流れを表にすると次のようになる．

	N	L		出力値	$N-L$
作業(ア)	7	5	作業(イ)へ		
作業(イ)				5	2
			$N=2$ として作業(ア)へ		
作業(ア)	2	2	作業(ウ)へ		
作業(ウ)				2	

このとき

$$7=5+2 \quad \text{つまり} \quad N=a(4)+a(2)$$

となる．

最初，$N=8$ が与えられたときは，次のようになる．

	N	L		出力値
作業(ア)	8	8	作業(ウ)へ	
作業(ウ)				8

このとき

$$N=a(5)$$

となる．

したがって，変更された〔プログラム〕で追加された191行～195行では，次の処理が行われる．

191行で R に $N-L$ の値を代入する．この時点で L の値は B の値に等しいので，$\boxed{\text{キ}}$ には N-B，すなわち $\boxed{①}$ が当てはまる．

192行で $R>0$ ならば $N>L$ なので，作業(イ)を行う．したがって，$\boxed{\text{ク}}$ には $\boxed{③}$ が当てはまる．L は，既に190行で B の値として出力されているので，$R=N-L$ の値を改めて N として(193行)，作業(ア)に戻ればよい．よって，194行では GOTO 110 とすればよく，$\boxed{\text{ケ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

変更後の〔プログラム〕を実行し，N に200を入力したとき，変数の値は次のように変化する．

	N	L		出力値	$N-L$
作業(ア)	200	144	作業(イ)へ		
作業(イ)				144	56
			$N=56$ として作業(ア)へ		
作業(ア)	56	55	作業(イ)へ		
作業(イ)				55	1
			$N=1$ として作業(ア)へ		
作業(ア)	1	1	作業(ウ)へ		
作業(ウ)				1	

1回目の作業(ア)では，170 行は 10 回実行され，10 回目に初めて $C>N$ となる．

1　2　3　5　8　13　21　34　55　89　144　233

1回　2回　3回　4回　5回　6回　7回　8回　9回　10回

2回目の作業(ア)では，170 行は 8 回実行され，8 回目に初めて $C>N$ となる．

1　2　3　5　8　13　21　34　55　89

1回　2回　3回　4回　5回　6回　7回　8回

3回目の作業(ア)では，150 行が実行されて，170 行は実行されない．

よって，変更後の〔プログラム〕を実行し，変数 N に 200 を入力すると，170 行は全部で $10+8=\boxed{18}$ 回実行され，出力は順に

$\boxed{144}$

$\boxed{55}$

$\boxed{1}$

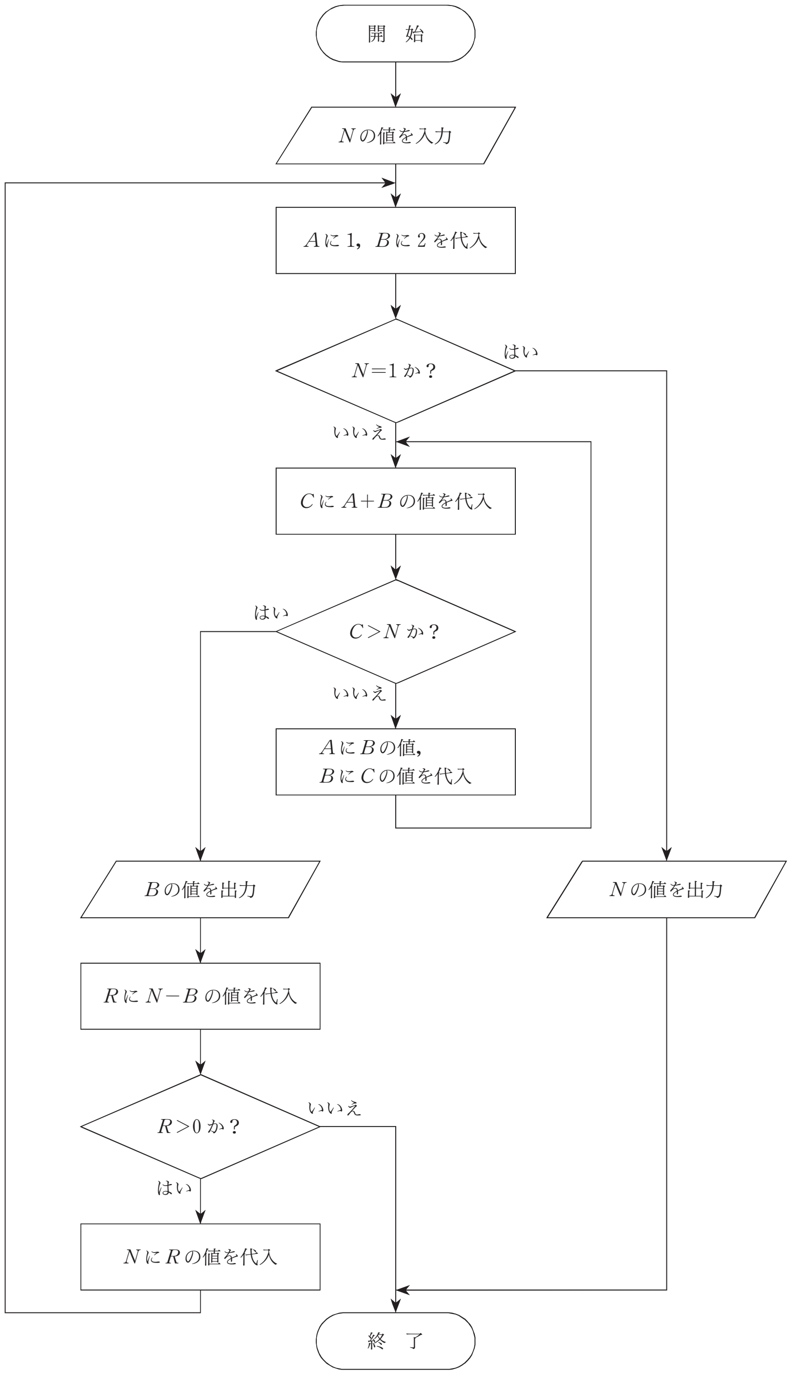
となる．

変更後の〔プログラム〕とその流れ図は次のようになる．

〔プログラム〕

```
100 INPUT PROMPT "N=": N
110 LET A=1
120 LET B=2
130 IF N=1 THEN
140     PRINT N
150     GOTO 250
160 END IF
170 LET C=A+B
180 IF C>N THEN
190     PRINT B
191     LET R=N-B
192     IF R>0 THEN
193         LET N=R
194         GOTO 110
195     END IF
200     GOTO 250
210 END IF
220 LET A=B
230 LET B=C
240 GOTO 170
250 END
```

〔流れ図〕



開　始
Nの値を入力
Aに 1，Bに 2 を代入
$N=1$ か？
はい
いいえ
Cに $A+B$ の値を代入
$C>N$ か？
はい
いいえ
AにBの値，
BにCの値を代入
Bの値を出力
Nの値を出力
Rに $N-B$ の値を代入
$R>0$ か？
いいえ
はい
NにRの値を代入
終　了

【理　科】

物　理　Ⅰ

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	2	5	
		問2	2	2	5	
		問3	3	2	5	
		問4	4	1	5	
		問5	5	3	5	
		問6	6	1	5	
第1問　自己採点小計					(30)	
第2問	A	問1	7	3	5	
		問2	8	3	5	
	B	問3	9	2	4	
		問4	10	4	5	
		問5	11	3	3	
第2問　自己採点小計					(22)	
第3問	A	問1	12	4	5	
		問2	13	6	5	
	B	問3	14	3	5	
		問4	15	5	5	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	16	3	4	
		問2	17	1	5	
	B	問3	18	6	3	
		問4	19	1	3	
		問5	20	1	5	
	C	問6	21	1	4	
		問7	22	6	4	
第4問　自己採点小計					(28)	
自己採点合計					(100)	

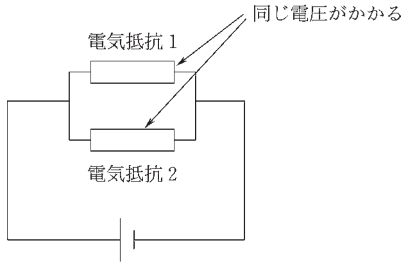
【解説】

第1問　小問集合

問題

問1　電気抵抗での単位時間あたりの発熱量は**消費電力**に等しい。

まず，接続(a)を考える。電池の電圧を V とすると，接続(a)は並列接続なので，電気抵抗1，2ともに同じ電圧 V がかかる。



接続(a)

電気抵抗1の単位時間あたりの発熱量 P_1 は，

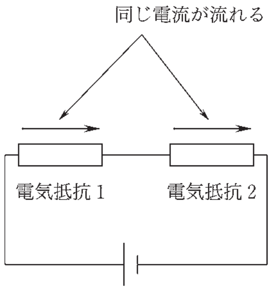
$$P_1=\frac{V^2}{100}\,〔\mathrm{J/s}〕$$

電気抵抗2の単位時間あたりの発熱量 P_2 は，

$$P_2=\frac{V^2}{150}\,〔\mathrm{J/s}〕$$

これらの式より，$P_2<P_1$ である。単位時間あたりの発熱量は，電気抵抗1のほうが大きい。

次に，接続(b)を考える。接続(b)は直列接続なので，電気抵抗1，2ともに同じ電流 I が流れる。



接続(b)

電気抵抗1の単位時間あたりの発熱量 P_1 は，

$$P_1=100I^2\,〔\mathrm{J/s}〕$$

電気抵抗2の単位時間あたりの発熱量 P_2 は，

$$P_2=150I^2\,〔\mathrm{J/s}〕$$

これらの式より，$P_1<P_2$ である。単位時間あたりの発熱量は，電気抵抗2のほうが大きい。

$\boxed{1}$ の答　②

【ポイント】

消費電力

単位時間あたりに消費される電気エネルギーを消費電力という。電気抵抗ではその電気エネルギーがジュール熱に変換され，白熱電灯では光のエネルギーやジュール熱に変換される。

電気抵抗における消費電力 P は，抵抗値を R，電圧を V，電流を I とすると，

$$P=IV=\frac{V^2}{R}=RI^2$$

問 2　物体 A と B の**比熱**を c〔J/(g·K)〕とし，物体 B のはじめの温度を t〔℃〕とする。物体 A が吸収した熱量 Q_A は，

$$Q_A = 100c(60-20) = 4000c \text{〔J〕}$$

物体 B が放出した熱量 Q_B は，

$$Q_B = 200c(t-60) = 200ct - 12000c \text{〔J〕}$$

熱量の保存より，

$$Q_A = Q_B$$

$$4000c = 200ct - 12000c$$

$$t = \frac{16000}{200} = \underline{80} \text{〔℃〕}$$

$\boxed{2}$ の答　②

比熱

物質 1 g の温度を 1 K だけ上昇(下降)させるとき，物質が吸収(放出)する熱量を比熱という。

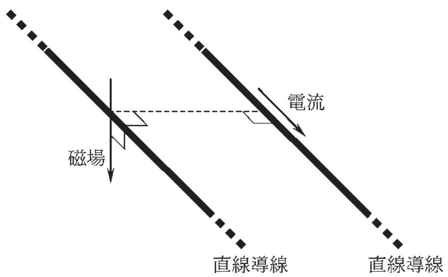
物体の質量を m，比熱を c，温度変化を Δt とすると，物体に出入りした熱量 Q は，

$$Q = mc\Delta t$$

熱量の保存

(低温物体が吸収した熱量)
＝(高温物体が放出した熱量)

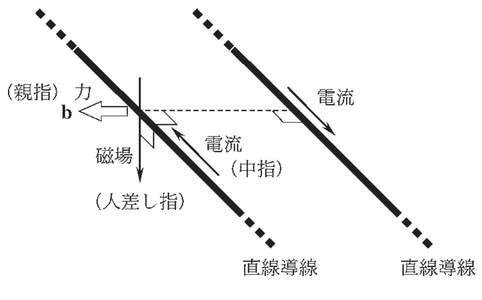
問 3　はじめに，右側の直線導線にだけ電流が流れているとし，その電流が左側の導線の位置につくる磁場(磁界)を考える。**右ねじの法則**より，その磁場は次図のようになる。



右ねじの法則

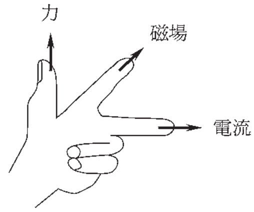
電流の向きに右ねじが進む向きをあわせるとき，右ねじを回転させる向きに磁場が生じる。

その状態で，左側の直線導線にも電流を流すと考える。このとき，左側の電流が磁場から受ける力の向きは，**フレミングの左手の法則**より，$\underline{\mathbf{b}}$ である。

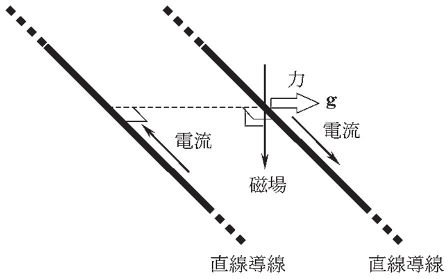


フレミングの左手の法則

左手の中指を電流の向きにあわせ，人差し指を磁場の向きにあわせる。このとき親指の向きが力の向きである。



次に，左側の直線導線にだけ電流が流れているとし，その電流がつくる磁場の向きを求める。さらに，その状態で，右側の直線導線にも電流を流すと考え，その電流が磁場から受ける力の向きを求める。力の向きは，次図のように，$\underline{\mathbf{g}}$ である。



$\boxed{3}$ の答　②

問 4　熱機関が 1 秒あたりにする仕事を W，1 秒あたりに吸収する熱量を Q，1 秒あたりに放出する熱量を Q' とする。エネルギー保存則より，

$$
\begin{aligned}
Q &= Q' + W \\
&= 8.0\times10^6 + 2.0\times10^6 \\
&= 10.0\times10^6 \,[\mathrm{J}]
\end{aligned}
$$

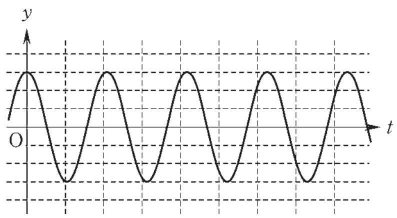
熱効率を e〔%〕とすると，

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{W}{Q}\times100 \\
&= \frac{2.0\times10^6}{10.0\times10^6}\times100 \\
&= \underline{20}\,[\%]
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ の答　①

問 5　音量(音の大きさ)が最も大きい音は，$y-t$ グラフにおいて，振幅が最も大きい。また，音程(音の高さ)が最も高い音は振動数が最も大きい。**振動数**の逆数が**周期**なので，音程が最も高い音は，$y-t$ グラフにおいて，周期が最も短い。したがって，音量が最も大きく，なおかつ音程が最も高い音を表す $y-t$ グラフは次図である。

③



$\boxed{5}$ の答　③

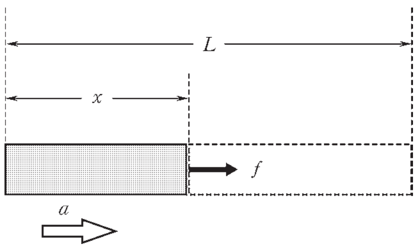
問 6　一様な棒なので，棒の長さと質量が比例している。左端から距離 x までの部分の質量を m_x とすると，

$$
m_x = \frac{x}{L}m
$$

振動数と周期

波の振動数 f は単位時間あたりの振動回数で，周期 T は 1 回の振動時間である。したがって，

$$
f = \frac{1}{T}
$$



この部分の運動方程式より，

$$m_x a = f$$

$$f = \frac{x}{L} ma$$

6 の答　①

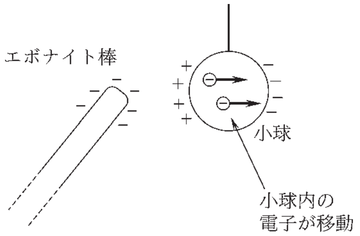
第 2 問　静電気・電気抵抗　問題

A

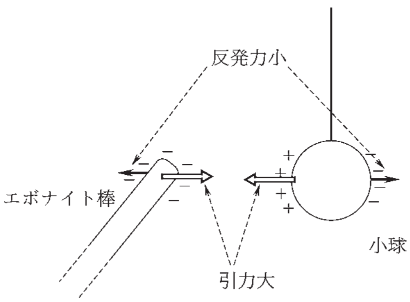
問 1　エボナイト棒が負に**帯電**したということは，毛皮(ア)からエボナイト棒(イ)へ電子が移動したからである。毛皮は電子が不足し，正に帯電する(ウ)。

7 の答　③

問 2　小球内の電子が負に帯電したエボナイト棒から反発され，エボナイト棒から遠ざかる向きに電子が移動する。その結果，エボナイト棒に近い小球の面は電子が不足し，正に帯電する。エボナイト棒から遠い小球の面は電子が過剰になり，負に帯電する。



静電気力の大きさは帯電体間の距離が近いほうが大きいため，小球はエボナイト棒に引き寄せられる。



帯電

物質を構成する原子は原子核とその周りに分布する電子からなっている。原子核は正の電気をもち，電子は負の電気をもつ。電子が物体間や物体内を移動することによって帯電状態が起こる。

正に帯電：電子が不足

負に帯電：電子が過剰

$\boxed{8}$ の答　③

B

問 3　**電気抵抗**は鉛筆の芯の長さに比例する。鉛筆A，B，Cの長さを ℓ_A，ℓ_B，ℓ_C とし，電気抵抗を R_A，R_B，R_C とすると，

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\ell_A}{\ell_B} \qquad \therefore \quad \ell_B=\frac{R_B}{R_A}\ell_A$$

$$\ell_B=\frac{4.0}{5.0}\times 15.0=\underline{12.0}\,\text{〔cm〕}$$

同様に，

$$\frac{R_A}{R_C}=\frac{\ell_A}{\ell_C} \qquad \therefore \quad \ell_C=\frac{R_C}{R_A}\ell_A$$

$$\ell_C=\frac{2.0}{5.0}\times 15.0=\underline{6.0}\,\text{〔cm〕}$$

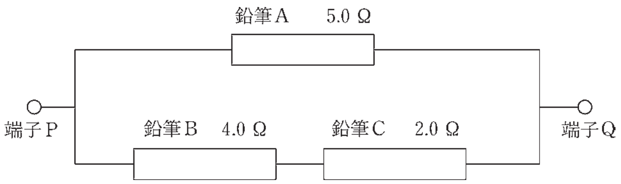
$\boxed{9}$ の答　②

電気抵抗

一様な材質でできた棒状物体の電気抵抗 R は，長さ ℓ に比例し，断面積 S に反比例する。比例定数を ρ（抵抗率という）とすると，

$$R=\rho\frac{\ell}{S}$$

問 4　鉛筆の芯を抵抗に置き換えると，次図のような回路になる。



端子PQ間の**合成抵抗**を R とすると，

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{5.0}+\frac{1}{4.0+2.0}$$

$$R=\frac{30}{11}\,\text{〔Ω〕}$$

端子PQ間につなぐ電池の電圧を V とすると，電池から流れる電流の強さ I は，

$$I=\frac{V}{R}$$

$$=\frac{11\times 12}{30}=\underline{4.4}\,\text{〔A〕}$$

$\boxed{10}$ の答　④

合成抵抗

各抵抗値を R_1，R_2，… とし，合成抵抗の値を r とすると，

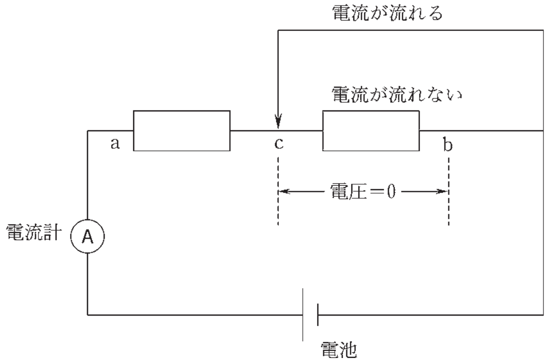
直列接続

$$r=R_1+R_2+\cdots$$

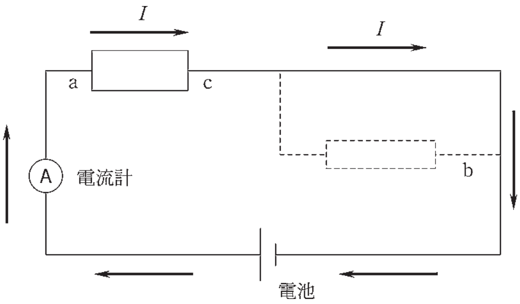
並列接続

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots$$

問 5　ac間とcb間をそれぞれ抵抗と見なすと，次図のような電気回路になる。cb間の抵抗には電圧がかからないため，電流が流れない。



したがって，電気回路は次図のようになる。



鉛筆Aの芯の電気抵抗が 5.0 Ω なので，ac 間の電気抵抗 R_{ac} は，

$$R_{ac}=\frac{x}{15.0}\times 5.0$$

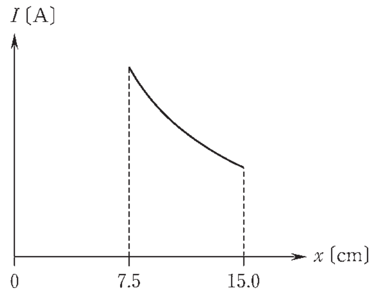
$$=\frac{x}{3.0}\,[\Omega]$$

電池の電圧を V とすると，**オームの法則**より，

$$I=\frac{V}{R_{ac}}=\frac{3.0\,V}{x}\,[\mathrm{A}]$$

I と x の関係を表すグラフは下に凸で右下がりの曲線である。

③



$\boxed{11}$ の答　③

第 3 問　気柱の共鳴，光の屈折　問題

A

問 1　管の左端からピストンの右面までの距離 x が $\frac{1}{6}L$ のときと $\frac{1}{2}L$ のときに**共鳴**している。音波の波長を λ とすると，節と節の間隔は $\frac{1}{2}\lambda$ なので，$x=\frac{1}{6}L$ のときに生じている定常波の波形（横波表示）は次図のようになる。

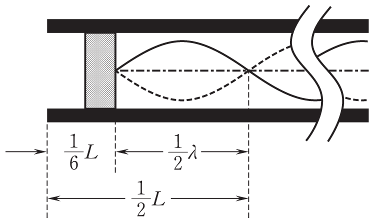
オームの法則

抵抗にかかる電圧を V，抵抗を流れる電流を I，抵抗値を R とすると，

$$V=RI \qquad I=\frac{V}{R}$$

共鳴（閉管）

閉管が共鳴しているとき，管内には音波の定常波が生じている。閉管の閉端には定常波の節ができ，開端には定常波の腹ができている。



この図より，

$$\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}L-\frac{1}{6}L$$

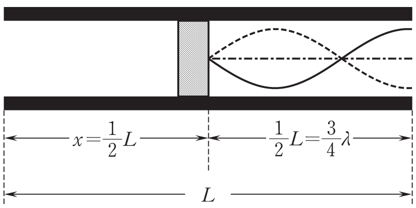
$$\lambda=\underline{\frac{2}{3}L}$$

なお，音速 V は，**波の速さの式**(**波の基本式**)より，

$$V=f\lambda=\frac{2}{3}Lf$$

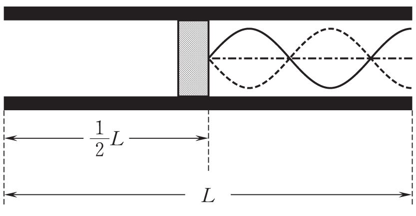
$\boxed{12}$ の答　④

問 2　$\lambda=\frac{2}{3}L$ を考慮し，$x=\frac{1}{2}L$ の場合の定常波の波形を作図する。$\lambda=\frac{2}{3}L$ なので，$\frac{1}{2}L=\frac{3}{4}\lambda$ となり，図(a)のようになる。



図(a)

この状態でピストンを固定し，振動数を大きくしていく。振動数を大きくすると，波長が短くなるので，次に共鳴するときの定常波の波形は図(b)のようになる。



図(b)

波長を λ_1 とすると，

$$\frac{1}{4}\lambda_1\times 5=L-\frac{1}{2}L$$

$$\lambda_1=\frac{2}{5}L$$

振動数 f_1 は，

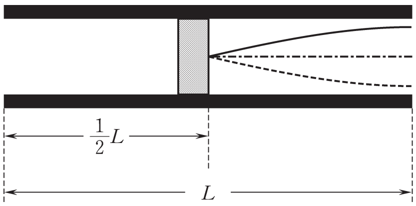
$$f_1=\frac{V}{\lambda_1}=\frac{5V}{2L}$$

波の速さの式(波の基本式)

$$V=f\lambda=\frac{\lambda}{T}$$

V：波の速さ　　f：振動数
λ：波長　　　T：周期

逆に，振動数を小さくすると，波長が長くなるので，次に共鳴するときの定常波の波形は図(c)のようになる。



図(c)

波長を λ_2 とすると，

$$\frac{1}{4}\lambda_2 = L - \frac{1}{2}L$$

$$\lambda_2 = 2L$$

振動数 f_2 は，

$$f_2 = \frac{V}{\lambda_2} = \frac{V}{2L}$$

以上の結果より，

$$\frac{f_1}{f_2} = \underline{5}$$

〈別解〉　図(a)から，振動数が f のときは 3 倍振動であることがわかる。すると，振動数 f_1 は 5 倍振動であり，振動数 f_2 は基本振動であることがわかる。したがって，

$$\frac{f_1}{f_2} = \underline{5}$$

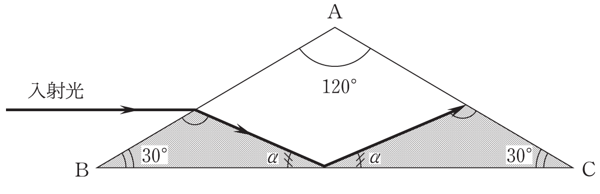
$\boxed{13}$ の答　⑥

B

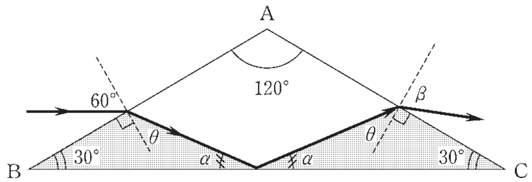
問 3　幾何学的な関係より，

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB} = 30^\circ$$

また，反射の法則より，面 BC に対する入射光と反射光のなす角度(α)は等しい。したがって，次図に示される灰色部分の三角形は相似(左右は逆)である。



この図より，面 AB での光の屈折角と面 AC での光の入射角は等しくなる。これを θ とおき，面 AC での屈折角を β とする。



プリズムの絶対屈折率を n とする。空気の絶対屈折率を 1 と見なすと，**屈折の法則**より，

面 AB　　$n=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin\theta}$

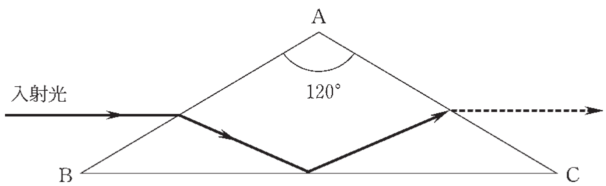
面 AC　　$\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\beta}$

2 式より，

$$\sin 60^\circ=\sin\beta$$

$$\beta=60^\circ$$

したがって，屈折後の光の進路は面 BC と平行になる。



$\boxed{14}$ の答　③

問 4　白色光に含まれる光のうち，赤，黄，青では，赤色光の波長が一番長く，青色光の波長が一番短い。ここでは赤色光と青色光に着目する。絶対屈折率は，わずかであるが，波長が長いほど小さくなる。赤色光に対する絶対屈折率を $n_{赤}$ とし，青色光に対する絶対屈折率を $n_{青}$ とすると，

$$n_{赤}<n_{青}$$

面 AB での屈折角を，赤色光の場合を $\theta_{赤}$ とし，青色光の場合を $\theta_{青}$ とする。屈折の法則より，

$$n_{赤}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin\theta_{赤}}$$

$$n_{青}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin\theta_{青}}$$

したがって，

$$\sin\theta_{青}<\sin\theta_{赤}$$

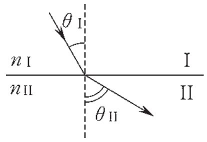
$$\theta_{青}<\theta_{赤}$$

以上の結果より，光の進路は次図のようになる。

屈折の法則

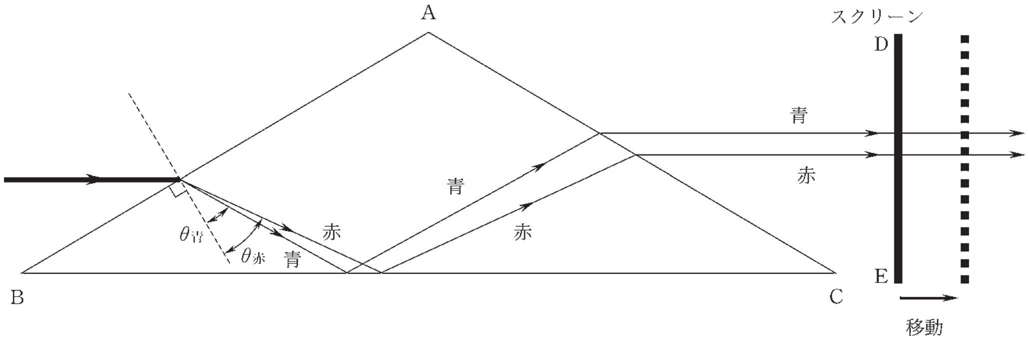
媒質 I から媒質 II へ光が屈折するとき，

$$\frac{n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{I}}}=\frac{\sin\theta_{\mathrm{I}}}{\sin\theta_{\mathrm{II}}}$$



ここで，

n_{I} …媒質 I の絶対屈折率
n_{II} …媒質 II の絶対屈折率
θ_{I} …入射角
θ_{II} …屈折角



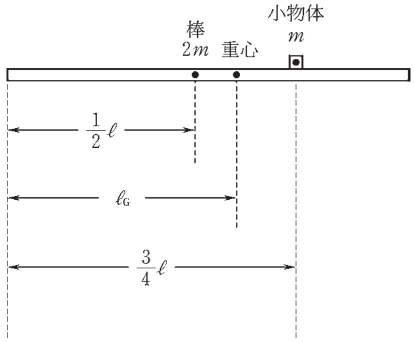
なお，**問 3** で示したように，面 AC での屈折後の光の進路は，赤色光も青色光も，底面 BC と平行になる。また，黄色光の波長は赤色光と青色光の間なので，光の進路もこれらの光の間になる。すなわち，スクリーンに当たる光はスクリーンの D 側から順に青→黄→赤$_{(ア)}$の順で，スクリーンを移動してもその幅は変わらない$_{(イ)}$。

15 の答　⑤

第 4 問　運動と力，エネルギー　問題

A

問 1　棒の重心はその中心で，棒の左端からの距離は $\frac{1}{2}\ell$ である。棒の左端から**全体の重心**までの距離 ℓ_G は，



$$\left(\ell_G-\frac{1}{2}\ell\right):\left(\frac{3}{4}\ell-\ell_G\right)=m:2m$$

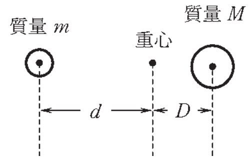
$$\ell_G=\underline{\frac{7}{12}\ell}$$

16 の答　③

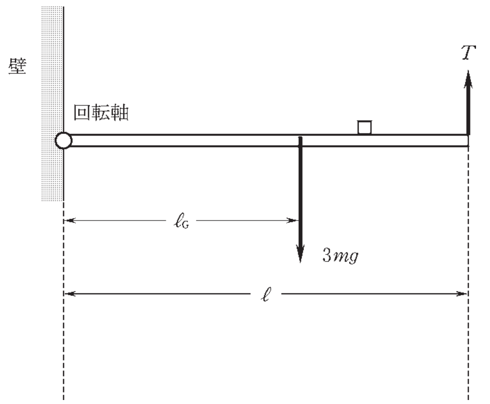
問 2　糸の張力の大きさを T とする。棒と小物体をひとつの物体と見るとき，その重力は $3mg$ である。回転軸以外にはたらく力は次のようになる。

全体の重心

2 個の物体をひとつの物体と見なしたものの重心は，それぞれの物体の重心間を質量の逆比に内分した点である。



$d:D=M:m$



回転軸のまわりの，**力のモーメント**のつりあいより，

$$T\times\ell=3mg\times\ell_G$$

$$\underline{T=\frac{3\ell_G}{\ell}mg}$$

$\boxed{17}$ の答　①

B

問 3　小物体が $\frac{2}{3}\ell$ だけ自由落下したときの速さを v_0 とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$mg\times\frac{2}{3}\ell=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$\underline{v_0=\sqrt{\frac{4}{3}g\ell}}$$

$\boxed{18}$ の答　⑥

問 4　小物体を放してから時間 t 後の速さを v とすると，

$$v=gt$$

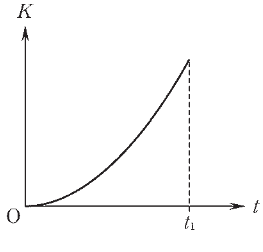
このときの運動エネルギー K は，

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

この関係式をグラフで表すと，次図のようになる。

①

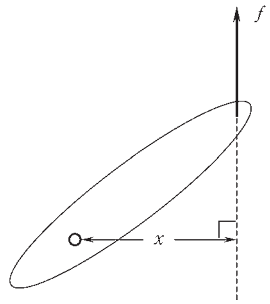


$\boxed{19}$ の答　①

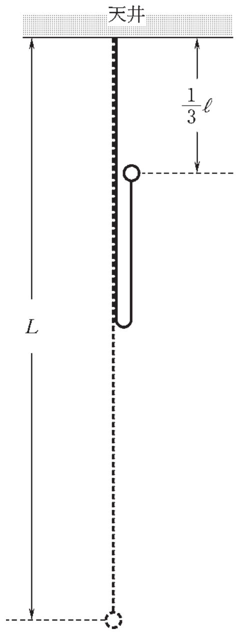
問 5　小物体を放した直後(速さ 0)とゴムひもが最も伸びる瞬間(速さ 0)の力学的エネルギーに着目する。

力のモーメント

力が，ある軸のまわりに物体を回転させようとする作用の強さを表す量を力のモーメントという。



力のモーメント$=f\times x$



小物体を放した直後(運動エネルギーは 0)の**弾性エネルギー**は 0 である。ゴムひもが最も伸びる瞬間(運動エネルギーは 0)の弾性エネルギーを U_1 とする。この間の力学的エネルギーは保存されるが，運動エネルギーの変化が 0 なので，弾性エネルギーの増加と重力による位置エネルギーの減少が等しくなる。

$$U_1-0=mg\left(L-\frac{1}{3}\ell\right)$$

$$U_1=\underline{mg\left(L-\frac{1}{3}\ell\right)}$$

$\boxed{20}$ の答　①

C

問 6　室Bの気体が膨張するため，室Aの気体は断熱圧縮される。このとき室Aの気体は，ピストンを介して，室Bの気体から仕事をされたことになる。したがって，された仕事の分だけ**気体の内部エネルギー**が増加し，温度が<u>高くなる</u>。室Aの気体の圧力，体積，絶対温度を，変化前は P，V，T とし，変化後は P'，V'，T' とする。ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{PV}{T}=\frac{P'V'}{T'}$$

$$P'=\frac{T'}{T}\times\frac{V}{V'}\times P$$

$\frac{T'}{T}>1$，$\frac{V}{V'}>1$ なので，$P'>P$ である。すなわち，室Aの圧力は<u>高くなる</u>。

$\boxed{21}$ の答　①

弾性エネルギー

ばねと同様に，ゴムひもにも弾性エネルギーが蓄えられる。ゴムひもの伸びを x とし，比例定数(ばねの場合のばね定数に相当)を k とすると，ゴムひもに蓄えられる弾性エネルギー U は，

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

気体の内部エネルギー

気体を構成している分子の熱運動のエネルギーの総和を気体の内部エネルギーという。気体の内部エネルギーは温度が高いほど大きい。

問7　室Bの気体が室Aの気体にした仕事を W，室Aの気体の内部エネルギーの変化を ΔU_A とする。**熱力学第1法則**より，

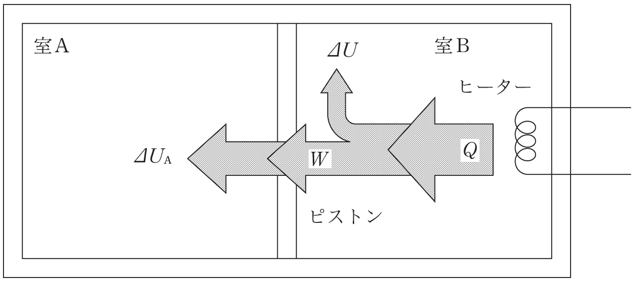
室B　　$Q=\Delta U+W$

室A　　$0=\Delta U_A-W$

2式より，

$$\Delta U_A=\underline{Q-\Delta U}$$

エネルギーの流れを図で表すと，次のようになる。



$\boxed{22}$ の答　⑥

熱力学第1法則

気体が吸収した熱量を Q，気体が外部にした仕事を W とする。内部エネルギーの変化を ΔU とすると，

$$Q=\Delta U+W$$

また，気体が外部からされた仕事を W とする場合は，

$$\Delta U=Q+W$$

この法則は，熱と仕事を含めたエネルギー保存則である。

化　学　Ⅰ

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	設　問	解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	問1	1	6	3	
		2	5	3	
	問2	3	2	4	
	問3	4	3	3	
	問4	5	6	4	
	問5	6	5	4	
	問6	7	4	4	
	第1問	自己採点小計		(25)	
第2問	問1	8	2	3	
		9	4	4	
	問2	10	4	3	
	問3	11	3	4	
		12	3	4	
	問4	13	4	3	
		14	1	4	
	第2問	自己採点小計		(25)	
第3問	問1	15	2	4	
		16	4	4	
	問2	17	1	3	
		18	2	3	
	問3	19	4	4	
	問4	20	5	3	
	問5	21	6	4	
	第3問	自己採点小計		(25)	
第4問	問1	22	1	3	
	問2	23	2	4	
	問3	24	5	4	
	問4	25	2	3	
		26	3	3	
	問5	27	1	4	
		28	5	4	
	第4問	自己採点小計		(25)	
		自己採点合計		(100)	

【解説】

第 1 問　物質の構成，化学量，化学反応と熱　問題

問 1　イオン，物質の状態

a　原子が陽イオンや陰イオンになる場合，原子番号が最も近い希ガスの原子と同じ電子配置のイオンになる傾向がある。① $_{13}Al$ は，電子 3 個を放出して Al^{3+} になる。② $_{9}F$ は，電子 1 個を受け取って F^{-} になる。④ $_{12}Mg$ は，電子 2 個を放出して Mg^{2+} になる。Al^{3+}，F^{-}，Mg^{2+} は，いずれも $_{10}Ne$ と同じ電子配置(K 殻に 2 個，L 殻に 8 個)である。③ $_{19}K$ は，電子 1 個を放出して K^{+} になる。⑥ $_{16}S$ は，電子 2 個を受け取って硫化物イオン S^{2-} になる。K^{+} と S^{2-} は，いずれも $_{18}Ar$ と同じ電子配置(K 殻に 2 個，L 殻に 8 個，M 殻に 8 個)である。希ガスである⑤ $_{10}Ne$ は安定な電子配置をもち，イオンになりにくい。

$\boxed{1}$ …⑥

b　①アルゴン Ar，②アンモニア NH_3，③塩化水素 HCl は常温で気体である。⑤水銀 Hg は常温で液体の金属である。④塩化ナトリウム NaCl，⑥ヨウ素 I_2 はともに常温で固体である。

$\boxed{2}$ …⑤

問 2　原子の構造

①　正しい。陽子 1 個と電子 1 個のもつ電気量の絶対値は等しく，この値を電気素量という。ファラデー定数 F (9.65×10^{4} C/mol) は電子 1 mol のもつ電気量の絶対値であり，アボガドロ定数 N_A (6.02×10^{23}/mol) は 1 mol の粒子数であるから，これらを用いて，電気素量 e は次のように表される。

$$e=\frac{F}{N_A}$$

なお，電気素量の値は，

$$e=\frac{9.65\times10^{4}}{6.02\times10^{23}}\fallingdotseq1.60\times10^{-19}\,〔\mathrm{C}〕$$

②　誤り。陽子 1 個の質量と中性子 1 個の質量はほぼ等しく，電子 1 個の質量の約 1840 倍である。

③　正しい。同位体どうしでは陽子の数は等しいが，中性子の数が異なるので，質量は異なる。

④　正しい。原子核に近い内側から n 番目の電子殻に収容することができる電子の最大数は $2n^2$ で表され，K 殻が 2 個，L 殻が 8 個，M 殻が 18 個，N 殻が 32 個である。

⑤　正しい。一般に，各元素の原子がもつ電子殻の数は周期番号の数と一致する。第 3 周期の Na ～ Ar の原子は，いずれも K，L，M 殻に電子が配置され，最外電子殻は M 殻である。

$\boxed{3}$ …②

【ポイント】

イオン

電荷をもった原子や原子団をイオンという。原子 1 個から生じるイオンを単原子イオンといい，原子が電子を放出すると陽イオンになり，原子が電子を受け取ると陰イオンになる。

原子番号，質量数

質量数

$^{56}_{26}Fe$

原子番号

(原子番号)＝(陽子の数)＝(電子の数)

(質量数)＝(陽子の数)＋(中性子の数)

原子の構造

構成粒子		電荷	質量比
原子核	陽子	＋1	1836
	中性子	0	1839
電子		−1	1

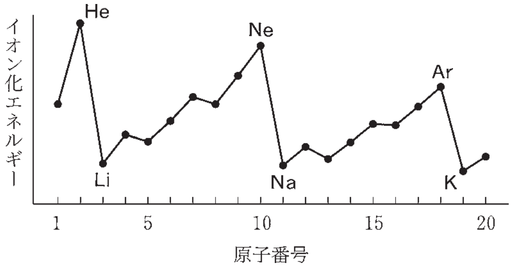
陽子 1 個や電子 1 個がもつ電気量の絶対値 1.60×10^{-19} C を単位電荷とすると，陽子の電荷は ＋1，電子の電荷は −1 となる。

同位体

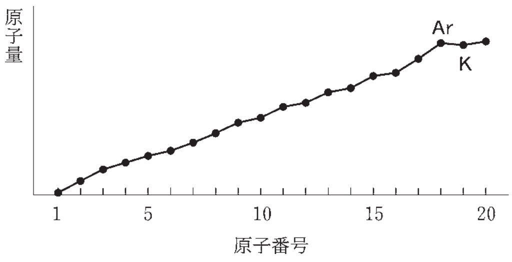
原子番号が同じで質量数が異なる原子を互いに同位体といい，化学的性質がほぼ同じであるため，同じ元素の原子としてまとめられる。

問 3　元素の周期律

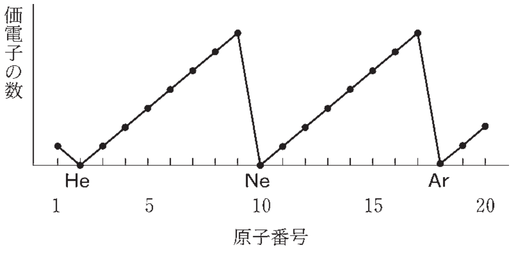
③が原子のイオン化エネルギー(第一イオン化エネルギー)のグラフである。イオン化エネルギーの値は，同一周期では 1 族が最小であり，18 族が最大である。また，同一族では原子番号が大きくなると小さくなる。



なお，①は原子量のグラフである。一般に，原子番号が大きくなると原子量も大きくなるが，一部で逆転がある。例えば，Ar の原子量 39.95 より K の原子量 39.10 の方が小さい。これは，存在比の大きい同位体の質量数の大小に逆転があるためであり，Ar の同位体のうち 99.6 ％が ^{40}Ar であるのに対して，K の同位体のうち 93.3 ％が ^{39}K である。



②は原子の価電子の数のグラフである。18 族を除く典型元素では，価電子(最外殻電子)の数は族番号の 1 の位の数と一致する。一方，18 族の希ガスの原子の最外殻電子の数は He が 2，その他は 8 であるが，希ガスの原子の価電子の数は 0 とする。



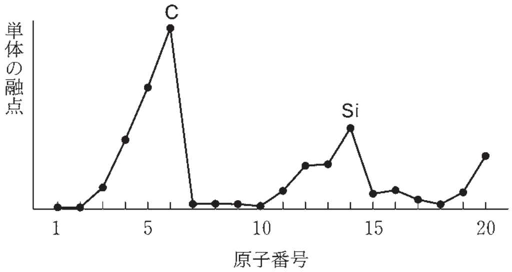
④は単体の融点のグラフである。C の単体であるダイヤモンドは共有結合の結晶であり，融点が非常に高い。また，C と同じ 14 族の Si の単体も共有結合の結晶であり，融点が比較的高い。

イオン化エネルギー(第一イオン化エネルギー)

原子から電子 1 個を取り去って 1 価の陽イオンにするときに必要なエネルギー。この値が小さい原子ほど 1 価の陽イオンになりやすい。

価電子

原子がイオンになったり，化学結合するときに重要な役割を果たす電子を価電子という。希ガス以外の典型元素の原子では，最外殻電子が価電子である。希ガスの原子はイオンになったり，他の原子と結合することはほとんどなく，価電子の数は 0 とする。



$\boxed{4}$ …③

問4　物質の密度と質量および体積の関係

物質の体積＝$\dfrac{質量}{密度}$ と表され，メタノールの密度は 0.80 g/cm^3 であるから，0.75 mol のメタノール CH_3OH（32 g/mol）の体積は，

$$\frac{32\times0.75}{0.80}=30\ [\mathrm{cm^3}]$$

なお，1 cm^3＝1 mL であり，30 cm^3 は 30 mL である。

$\boxed{5}$ …⑥

密度
単位体積あたりの質量。
密度〔g/cm^3〕＝$\dfrac{質量〔g〕}{体積〔cm^3〕}$

問5　組成式

化合物の組成式を決めるためには，構成元素の原子数の比，すなわち物質量の比を求めればよい。質量パーセントが N：26〔%〕，O：100−26＝74〔%〕である化合物の組成式を N_xO_y とすると，

$$x:y=\frac{26}{14}:\frac{74}{16}=1:2.49\fallingdotseq2:5$$

よって，組成式は N_2O_5 である。

$\boxed{6}$ …⑤

組成式
物質を構成する原子（原子団）の数を最も簡単な整数比で示した化学式。

問6　化学反応と熱

一酸化炭素の生成熱，二酸化炭素の生成熱は，それぞれ次の(1)，(2)の熱化学方程式で表される。

$$\mathrm{C(黒鉛)}\ +\ \frac{1}{2}\mathrm{O_2(気)}\ =\ \mathrm{CO(気)}\ +\ 111\ \mathrm{kJ}\qquad\cdots(1)$$

$$\mathrm{C(黒鉛)}\ +\ \mathrm{O_2(気)}\ =\ \mathrm{CO_2(気)}\ +\ 394\ \mathrm{kJ}\qquad\cdots(2)$$

黒鉛の燃焼で生成した CO と CO_2 の物質量の比が 1：2 であることより，生成した CO を x〔mol〕とすると，生成した CO_2 は $2x$〔mol〕となる。発生した熱量が 539.4 kJ であることから，

$$111\times x+394\times2x=539.4$$
$$x=0.600\ [\mathrm{mol}]$$

CO が 0.600 mol，CO_2 が 0.600×2 mol 生成している。

(1)式と(2)式より，黒鉛と反応した酸素 O_2 の物質量は，

$$0.600\times\frac{1}{2}+0.600\times2=1.50\ [\mathrm{mol}]$$

生成熱
化合物 1 mol が成分元素の単体から生成するときの反応熱。

$\boxed{7}$ …④

第２問　酸と塩基，酸化還元反応，電池　問題

問１　中和滴定

a　滴定開始時は，弱酸である酢酸の水溶液なので弱い酸性を示す。水酸化ナトリウム水溶液を滴下していくと，次の中和反応が進行する。

$$CH_3COOH + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + H_2O$$

弱酸と強塩基の中和であり，中和点は塩基性になるので，②が該当する。

$\boxed{8}$ …②

滴定曲線

中和滴定において，加えた酸あるいは塩基の体積と混合水溶液中の pH の変化の関係を示した曲線。中和点の前後では pH が大きく変化する。

b　酢酸水溶液のモル濃度を x〔mol/L〕とすると，酢酸は 1 価の酸，水酸化ナトリウムは 1 価の塩基であり，中和点では次式が成り立つ。

$$1 \times x \times \frac{20.0}{1000} = 1 \times 0.10 \times \frac{10.0}{1000}$$

$$x = 0.050\text{〔mol/L〕}$$

酢酸水溶液 1000 mL には CH_3COOH（60 g/mol）が 0.050 mol 含まれる。また，溶液の密度が 1.0 g/cm^3 なので，その質量は 1.0×1000〔g〕である。したがって，質量パーセント濃度は，

$$\frac{60 \times 0.050}{1.0 \times 1000} \times 100 = 0.30\text{〔\%〕}$$

$\boxed{9}$ …④

中和反応の量的関係

（酸の価数）×（酸の物質量）
　＝（塩基の価数）×（塩基の物質量）

問２　酸と塩基

①　誤り。H_2SO_4 の電離反応では，H_2SO_4 から H_2O に H^+ が移動しているので，水は塩基としてはたらいている。

$$H_2SO_4 + H_2O \longrightarrow HSO_4^- + H_3O^+$$

H^+

②　誤り。シュウ酸 $H_2C_2O_4$ は弱酸，塩酸 HCl は強酸なので，同じ濃度では，塩酸の方が水素イオン濃度が大きく，pH は小さい。

③　誤り。水酸化ナトリウム NaOH は 1 価の強塩基，水酸化バリウム $Ba(OH)_2$ は 2 価の強塩基なので，同じ濃度では，水酸化バリウム水溶液の水酸化物イオン濃度は，水酸化ナトリウム水溶液の水酸化物イオン濃度の 2 倍である。

$$NaOH \longrightarrow Na^+ + OH^-$$
$$Ba(OH)_2 \longrightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$$

④　正しい。塩基性酸化物である酸化ナトリウム Na_2O を水に溶かすと水酸化ナトリウムが生じ，水溶液は塩基性を示す。

$$Na_2O + H_2O \longrightarrow 2NaOH$$

⑤　誤り。硝酸 HNO_3 は 1 価の酸，水酸化マグネシウム

酸・塩基の定義

アレニウスの定義
- 酸　　水に溶けて H^+ を生じる物質
- 塩基　水に溶けて OH^- を生じる物質

ブレンステッド・ローリーの定義
- 酸　　H^+ を与える分子やイオン
- 塩基　H^+ を受け取る分子やイオン

水素イオン濃度と pH

$[H^+] = 10^{-n}$〔mol/L〕のとき，
　　$pH = n$

酸化物

酸性酸化物　水に溶かすと酸性を示す，あるいは塩基と反応して塩をつくる酸化物。非金属元素の酸化物に多い。

塩基性酸化物　水に溶かすと塩基性を示す，あるいは酸と反応して塩をつくる酸化物。金属元素の酸化物に多い。

$Mg(OH)_2$ は2価の塩基なので，2：1の物質量比で過不足なく中和し，硝酸マグネシウム $Mg(NO_3)_2$ が生成する。

$$2HNO_3 + Mg(OH)_2 \longrightarrow Mg(NO_3)_2 + 2H_2O$$

$\boxed{10}$ …④

問3　酸化還元反応

a　酸化剤は相手を酸化する物質であり，酸化剤自身は還元されており，酸化数の減少した原子を含んでいる。したがって，問題文中の下線部の物質が酸化剤であるものは**イ**(F_2)と**エ**(Fe_2O_3)である。

イ　$\underset{0}{\underline{F}_2} \longrightarrow H\underset{-1}{\underline{F}}$

エ　$\underset{+3}{\underline{Fe}_2}O_3 \longrightarrow \underset{0}{\underline{Fe}}$

なお，**ア**(H_2S)，**オ**(H_2)は還元剤としてはたらいている。

ア　$H_2\underset{-2}{\underline{S}} \longrightarrow \underset{0}{\underline{S}}$

オ　$\underset{0}{\underline{H}_2} \longrightarrow \underset{+1}{\underline{H}_2}O$

ウでは，下線部の物質に酸化数の変化した原子は存在していない。

ウ　$FeS + \underset{+1}{\underline{H}_2}\underset{+6}{\underline{S}}\underset{-2}{\underline{O}_4} \longrightarrow \underset{+1}{\underline{H}_2}S + Fe\underset{+6}{\underline{S}}\underset{-2}{\underline{O}_4}$

ウは弱酸の塩に強酸を加えて弱酸が遊離する反応で，酸化還元反応ではない。

$\boxed{11}$ …③

b　反応式から，$KMnO_4$ と $H_2C_2O_4$ は2：5の物質量比で反応する。過マンガン酸カリウム水溶液のモル濃度を x〔mol/L〕とすると，

$$\left(x\times\frac{b}{1000}\right):\left(C\times\frac{a}{1000}\right)=2:5$$

$$x=\frac{2aC}{5b}\text{〔mol/L〕}$$

$\boxed{12}$ …③

問4　鉛蓄電池

a　鉛蓄電池の正極は酸化鉛(IV)，負極は鉛である。正極では電子を受け取る還元反応が起こり，酸化鉛(IV)が硫酸鉛(II)に変化する。一方，負極では電子を放出する酸化反応が起こり，鉛が硫酸鉛(II)に変化する。

正極：$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e^- \longrightarrow PbSO_4 + 2H_2O$

負極：$Pb + SO_4^{2-} \longrightarrow PbSO_4 + 2e^-$

アは正，**イ**は負，**ウ**は還元，**エ**は酸化である。

$\boxed{13}$ …④

b　電子2molが移動すると，正極では，1molの PbO_2 が1

酸化数の決め方

1．単体中の原子：0
2．化合物中の原子の酸化数の総和：0
3．化合物中のH原子やアルカリ金属原子：+1
4．化合物中の2族原子：+2
5．化合物中のO原子：−2
(H_2O_2 など過酸化物では −1)
6．単原子イオンの酸化数：イオンの価数
7．多原子イオン中の原子の酸化数の総和：イオンの価数

酸化剤と還元剤

酸化剤　相手を酸化する物質。自身は還元されて，酸化数が減少する。
還元剤　相手を還元する物質。自身は酸化されて，酸化数が増加する。

電池の電極反応

正極　電子が外部回路から流れ込む電極。電子を受け取る還元反応が起こる。
負極　電子が外部回路に流れ出す電極。電子を放出する酸化反応が起こる。

mol の $PbSO_4$ に変化し，電極の質量は S 1 mol (32 g) と O 2 mol (16×2 g) の質量の和である 64 g 増加する。負極では，1 mol の Pb が 1 mol の $PbSO_4$ に変化し，電極の質量は S 1 mol (32 g) と O 4 mol (16×4 g) の質量の和である 96 g 増加する。正極の質量が 3.2 g 増加したときの負極の質量の増加量を x〔g〕とすると，両電極の増加した質量の比が等しいことから，

$$64 : 96 = 3.2 : x$$

$$x = 3.2 \times \frac{96}{64} = 4.8 \text{〔g〕}$$

$\boxed{14}$ …①

第 3 問　無機物質　問題

問 1　硫酸

a　硫酸は沸点が比較的高く (300 ℃以上)，100 ℃程度ではほとんど蒸発しない。硝酸カリウム KNO_3 に濃硫酸を加えておだやかに加熱すると，硫酸は蒸発せず，揮発性の酸である硝酸 HNO_3 が発生する。このように揮発性の酸の塩に不揮発性の酸である濃硫酸を加えて加熱すると，揮発性の酸が発生する。したがって，②が正解である。

$$KNO_3 + H_2SO_4 \longrightarrow KHSO_4 + HNO_3$$

なお，②以外では，次の反応が起こっている。

① $C_{12}H_{22}O_{11} \longrightarrow 12C + 11H_2O$（濃硫酸の脱水作用）

③ $H_2SO_4 + BaCl_2 \longrightarrow BaSO_4 + 2HCl$

④ $Na_2CO_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Na_2SO_4 + H_2O + CO_2$
（硫酸が強酸としてはたらく）

⑤ $Cu + 2H_2SO_4 \longrightarrow CuSO_4 + 2H_2O + SO_2$
（濃硫酸の酸化作用）

$\boxed{15}$ …②

b　次の(1)〜(3)式から，1 mol の S から 1 mol の SO_2 が生成し，1 mol の SO_2 は 1 mol の SO_3 になり，さらに 1 mol の H_2SO_4 が生成することがわかる。このとき，O_2 は，(1)式で 1 mol，(2)式で $\frac{1}{2}$ mol，合計 $\frac{3}{2}$ mol 反応している。

$$S + O_2 \longrightarrow SO_2 \qquad (1)$$

$$2SO_2 + O_2 \longrightarrow 2SO_3 \qquad (2)$$

$$SO_3 + H_2O \longrightarrow H_2SO_4 \qquad (3)$$

また，上の 3 式をまとめて，(1)式×2＋(2)式＋(3)式×2 から，

$$2S + 3O_2 + 2H_2O \longrightarrow 2H_2SO_4 \qquad (4)$$

(4)式からも，1 mol の H_2SO_4 を得るために必要な O_2 の物質量は $\frac{3}{2}$ mol であることがわかる。

質量パーセント濃度 98 ％の濃硫酸 200 g に含まれる H_2SO_4 (98 g/mol) の物質量は，

硫酸の性質

濃硫酸

- 酸化作用がある
- 不揮発性である
- 脱水作用がある
- 吸湿作用がある
- 溶解熱が大きい
- 密度が大きい（約 1.8g/cm^3）

希硫酸

- 強い酸性を示す
- Ba^{2+}，Ca^{2+}，Pb^{2+} と $BaSO_4$，$CaSO_4$，$PbSO_4$ の白色沈殿を生じる

接触法

硫酸の工業的製法

SO_2
↓ O_2（触媒 V_2O_5）
SO_3
↓ H_2O
H_2SO_4

$$\frac{200\times\frac{98}{100}}{98}=2.0\,[\mathrm{mol}]$$

したがって，必要な O_2 の物質量は，

$$2.0\times\frac{3}{2}=3.0\,[\mathrm{mol}]$$

$\boxed{16}$ …④

問2　気体の発生法，性質

A～**E**に示された操作で発生する気体および気体が生成する化学反応式は，次のとおりである。

A　NH_3　$2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow CaCl_2 + 2H_2O + 2NH_3$

B　Cl_2　$4HCl + MnO_2 \longrightarrow MnCl_2 + 2H_2O + Cl_2$

C　O_2　$2KClO_3 \longrightarrow 2KCl + 3O_2$　（MnO_2 は触媒）

D　H_2　$Zn + H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4 + H_2$

E　CO_2　$CaCO_3 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$

a　水に溶けやすく，空気よりも軽い気体は上方置換によって捕集する。ここでは**A**で発生するアンモニアが該当する。

$\boxed{17}$ …①

b　**A**～**E**の操作で発生する気体のうち，その水溶液が漂白作用を示すのは**B**で発生する塩素のみである。塩素は水に少し溶け，その一部が水と反応して次亜塩素酸 HClO を生成する。

$Cl_2 + H_2O \rightleftarrows HCl + HClO$

次亜塩素酸は強い酸化力をもつので，塩素の水溶液は漂白作用を示す。

$\boxed{18}$ …②

問3　カルシウムとその化合物

①　正しい。Ca を含む物質は，橙赤色の炎色反応を示す。したがって，Ca の検出と確認には炎色反応が利用される。

②　正しい。単体のカルシウムは常温で水と反応して水素 H_2 を発生する。

$Ca + 2H_2O \longrightarrow Ca(OH)_2 + H_2$

③　正しい。酸化カルシウム CaO は塩基性酸化物であり，酸と反応して塩をつくる。塩酸との反応では塩化カルシウム $CaCl_2$ が生成する。

$CaO + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + H_2O$

④　誤り。炭酸カルシウム $CaCO_3$ は石灰石や大理石などの主成分で，水には溶けにくい。

⑤　正しい。塩化カルシウム $CaCl_2$ の無水物は吸湿性が強く，乾燥剤に用いられる。

$\boxed{19}$ …④

問4　鉄イオン

Fe^{2+} を含む水溶液に ア<u>ヘキサシアノ鉄(Ⅲ)酸カリウム</u>

気体の捕集法

水に難溶性の気体　H_2，O_2，NO など
…水上置換

水に溶ける気体

空気より軽い　NH_3
…上方置換

空気より重い　Cl_2, CO_2, NO_2 など
…下方置換

アルカリ土類金属

- Be，Mg を除く 2 族元素
- 特有の炎色反応を示す
- 単体は常温で水と反応
- 酸化物は水に溶けて水酸化物になり，強い塩基性を示す
- 炭酸塩，硫酸塩は水に難溶
- Ca は，セッコウ（$CaSO_4\cdot2H_2O$），石灰石（$CaCO_3$）などとして産出される

鉄イオンの反応

$Fe^{2+} + K_3[Fe(CN)_6] \rightarrow$ 濃青色沈殿

$Fe^{3+} + K_4[Fe(CN)_6] \rightarrow$ 濃青色沈殿

$Fe^{3+} + KSCN \rightarrow$ 赤(血赤)色水溶液

$K_3[Fe(CN)_6]$ 水溶液を加えると，濃青色の沈殿が生じる。

Fe^{2+} を含む水溶液に過酸化水素 H_2O_2 を加えると，Fe^{2+} は酸化されて Fe^{3+} になる。Fe^{3+} を含む水溶液にチオシアン酸カリウム KSCN 水溶液を加えると，溶液は$_{イ}$赤色になる。

$\boxed{20}$ …⑤

問 5　銅の化合物の変化と量的関係

硫酸銅(II)五水和物 $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ を加熱すると，まず，水和水が失われ白色の硫酸銅(II)無水物 $CuSO_4$ に変化する。さらに強熱すると黒色の酸化銅(II) CuO に変化する。

$$CuSO_4 \cdot 5H_2O \longrightarrow CuSO_4 + 5H_2O$$

$$CuSO_4 \longrightarrow CuO + SO_3$$

$CuSO_4 \cdot 5H_2O$ (250 g/mol) 1 mol から CuO (80 g/mol) 1 mol が生成するので，$CuSO_4 \cdot 5H_2O$ の結晶 5.0 g を強く熱したとき生成する CuO の質量を x〔g〕とすると，

$$\frac{5.0}{250}=\frac{x}{80}$$

$$x=80\times\frac{5.0}{250}=1.6\text{〔g〕}$$

$\boxed{21}$ …⑥

銅の酸化物

酸化銅(II) CuO　黒色

酸化銅(I) Cu_2O　赤色

第 4 問　有機化合物(脂肪族化合物)　問題

問 1　アルキン

分子中に炭素原子間の三重結合を 1 つ含む鎖式不飽和炭化水素をアルキン(アセチレン系炭化水素)という。アルキンの分子式は，一般式 C_nH_{2n-2} ($n \geqq 2$) で表される。したがって，アルキンは① C_2H_2 (アセチレン)である。②はアルケン(エチレン)，③，⑤はアルカン(③はエタン，⑤はプロパン)，④はアルケン(プロペン)もしくはシクロアルカン(シクロプロパン)に属する。

$\boxed{22}$ …①

脂肪族炭化水素の一般式

アルカン　C_nH_{2n+2}

アルケン　C_nH_{2n}

アルキン　C_nH_{2n-2}

シクロアルカン　C_nH_{2n}

問 2　異性体

①　正しい。ペンタンと 2-メチルブタンの分子式はともに C_5H_{12} で，構造式が異なるので，構造異性体の関係にある。

```
CH3－CH2－CH2－CH2－CH3        CH3－CH2－CH－CH3
                                          |
                                          CH3
        ペンタン                     2-メチルブタン
```

②　誤り。ジクロロメタン CH_2Cl_2 とトリクロロメタン $CHCl_3$ は分子式が異なり構造異性体の関係にはない。

③　正しい。2-ブタノールには不斉炭素原子が 1 つあるので，光学異性体が存在する。

```
CH3－CH2－*CH－CH3
           |
           OH
```

2-ブタノール　(*C：不斉炭素原子)

構造異性体

分子式は同じで原子の結合のしかたが異なる異性体。

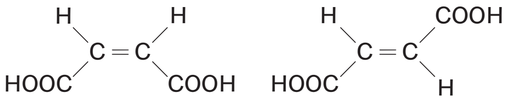
不斉炭素原子

炭素原子に結合する 4 つの原子または原子団がすべて異なるとき，その炭素原子を不斉炭素原子という。

光学異性体

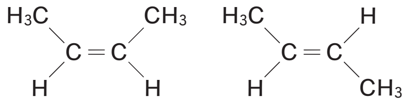
不斉炭素原子が 1 つあると，実像と鏡像の関係にあって重ね合わせることができない 1 対の異性体が存在する。このような異性体を光学異性体という。

④　正しい。マレイン酸とフマル酸は，いずれも構造式は HOOC−CH＝CH−COOH で表され，互いに幾何異性体(シス-トランス異性体)の関係にある。



マレイン酸(シス形)　　　フマル酸(トランス形)

⑤　正しい。シス-2-ブテンとトランス-2-ブテンは，互いに幾何異性体(シス-トランス異性体)の関係にあり，その沸点はわずかであるが異なる。一般に，幾何異性体の関係にある化合物の沸点や融点は異なる。



シス-2-ブテン（沸点　4 ℃）　　　トランス-2-ブテン（沸点　1 ℃）

$\boxed{23}$ …②

問3　アルコールとエーテル

①　正しい。メタノールは，工業的には一酸化炭素 CO と水素 H_2 から触媒を用いて合成される。

$$CO + 2H_2 \longrightarrow CH_3OH$$

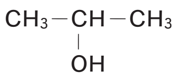
②　正しい。エタノールは，工業的にはリン酸を触媒としてエチレンに水を付加して合成される。

$$CH_2{=}CH_2 + H_2O \longrightarrow CH_3CH_2OH$$

③　正しい。エタノールを濃硫酸とともに約 130 ℃ に加熱すると 2 分子間の脱水反応が起こり，ジエチルエーテルが生成する。

$$2C_2H_5OH \longrightarrow C_2H_5OC_2H_5 + H_2O$$

④　正しい。2-プロパノールにヨウ素と水酸化ナトリウム水溶液を加えて加温すると，ヨードホルム CHI_3 の黄色沈殿が生じる。



2-プロパノール

⑤　誤り。ジエチルエーテルなどのエーテルにナトリウム Na を加えても反応せず，水素は発生しない。

$\boxed{24}$ …⑤

問4　エステル

a　エステル **A** 4.4 mg 中の C，H，O の質量は，

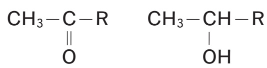
C　$8.8\times\frac{12}{44}=2.4$〔mg〕

幾何異性体(シス-トランス異性体)

炭素原子間の二重結合についた置換基の配置が異なる異性体。

ヨードホルム反応

次の構造をもつ化合物にヨウ素と水酸化ナトリウム水溶液を加えて加温するとヨードホルム CHI_3 の黄色沈殿が生じる。



(R：H または炭化水素基)

Na との反応

アルコール…水素を発生する

$$2R{-}OH + 2Na \longrightarrow 2R{-}ONa + H_2$$

エーテル…反応しない

H　$3.6\times\dfrac{2}{18}=0.40$〔mg〕

O　$4.4-(2.4+0.40)=1.6$〔mg〕

C，H，O の物質量比(C：H：O)は，

$$\frac{2.4}{12}:\frac{0.40}{1}:\frac{1.6}{16}=0.2:0.4:0.1=2:4:1$$

したがって，**A** の組成式は C_2H_4O である。**A** の示性式は R_1COOR_2 であり，R_1 は炭化水素基または水素原子，R_2 は炭化水素基であることから，**A** 1分子中に酸素原子は2個ある。これらから，**A** の分子式は $C_4H_8O_2$ と決まる。

$\boxed{25}$ …②

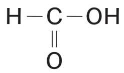
b　エステル**A**をけん化すると，カルボン酸のナトリウム塩とアルコールになる。

$$R_1COOR_2 + NaOH \longrightarrow R_1COONa + R_2OH$$

これに希硫酸を加えると，カルボン酸のナトリウム塩はカルボン酸になる。

$$R_1COO^- + H^+ \longrightarrow R_1COOH$$

C は酸化されて **D** になり，**D** は銀鏡反応を示すことから，**C** は第一級アルコール，**D** はアルデヒドである。**B** はカルボン酸 R_1COOH であり，銀鏡反応を示すことからギ酸 HCOOH である。



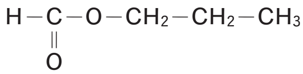
B：ギ酸

したがって，R_1＝H なので，**C** は炭素数3の第一級アルコールである1-プロパノールである。

$$CH_3-CH_2-CH_2-OH$$

C：1-プロパノール

なお，**A** は，次の構造式のエステルである。



A：ギ酸プロピル

$\boxed{26}$ …③

問5　油脂，セッケン

a　①　誤り。構成脂肪酸として高級飽和脂肪酸の割合が多い油脂は室温で固体のものが多く，高級不飽和脂肪酸の割合が多い油脂は室温で液体のものが多い。なお，動物性の油脂は固体のものが多く，植物性の油脂は液体のものが多い。室温で固体の油脂を脂肪，液体の油脂を脂肪油という。

②　正しい。マーガリンの原料には，主に植物性油脂の硬化油が用いられる。

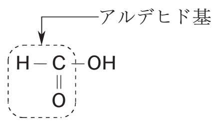
③　正しい。セッケン水に少量の油脂を入れて振ると，微細な

けん化

エステルに水酸化ナトリウム水溶液を加えて加熱すると，カルボン酸のナトリウム塩とアルコールが得られる。エステルの塩基による加水分解をけん化という。

銀鏡反応

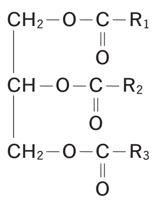
アルデヒド基をもつ物質の検出反応。ギ酸はアルデヒド基をもつので，銀鏡反応を示す。



ギ酸

油脂

グリセリンと高級脂肪酸のエステル



(R_1，R_2，R_3：炭化水素基)

硬化油

脂肪油に水素を付加すると硬化して固体になる。このようにして生じた油脂を硬化油という。

小滴となって分散する。これは，セッケンが疎水性部分を油に向けて油滴を取り囲むためである。この現象を乳化という。

④　正しい。セッケンは，弱酸である高級脂肪酸と強塩基である水酸化ナトリウムの塩なので，その水溶液は弱塩基性を示す。

⑤　正しい。セッケンの脂肪酸イオンが，水溶液中で疎水性部分を内側に，親水性部分を外側にして集まった粒子をミセルという。

$\boxed{27}$ …①

b　油脂 1 分子中にはエステル結合が 3 つあるので，油脂 1 mol を完全にけん化するのに必要な水酸化ナトリウム NaOH の物質量は 3 mol である。

$$C_3H_5(OCOR)_3 + 3NaOH \longrightarrow C_3H_5(OH)_3 + 3RCOONa$$

油脂**A**の分子量を M とすると，

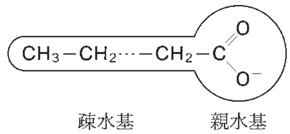
$$\frac{4.42}{M} : 0.015 = 1 : 3$$

$$M = \frac{4.42 \times 3}{0.015} = 884$$

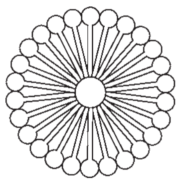
$\boxed{28}$ …⑤

ミセル

セッケンの脂肪酸イオン



ミセル



生　物　I

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	②	3	
		問2	2	①	3	
		問3	3	②	4	
		問4	4	③	4	
		問5	5	④	3	
		問6	6	④	3	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	④	3	
		問2	8	③	3	
		問3	9	② ※	3	
			10	⑤ ※	3	
	B	問4	11	④	4	
		問5	12	②	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	②	4	
		問2	14	③	4	
	B	問3	15	②	4	
		問4	16	⑤	4	
		問5	17	⑥	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	18	③	3	
		問2	19	④	4	
		問3	20	②	4	
		問4	21	②	3	
	B	問5	22	② ※	3	
			23	⑦ ※	3	
第4問　自己採点小計					(20)	

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第5問	A	問1	24	①	3	
		問2	25	③	3	
		問3	26	④	4	
	B	問4	27	③ ※	3	
			28	⑥ ※	3	
		問5	29	④	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

※の正解は順序を問わない。

生物I

【解説】

第１問　動物の組織　問題

ヒトの皮膚を構成する組織に関して，その特徴とはたらきについて出題した。

問１　生物の構造と機能の基本単位は細胞である。多細胞生物では同じ形やはたらきをもつ細胞が集まって組織を，複数の組織が集まって器官を，複数の器官が集まって個体をつくっている。動物の組織は，上皮組織，結合組織，神経組織，筋肉組織(筋組織)の四つに大別される。図１はヒトの皮膚の断面図であり，ａは皮膚の表面を覆う組織であるので表皮である。また，ｂは表皮よりも内側にある組織であり真皮である。表皮は上皮組織に属し，真皮は結合組織に属する。　$\boxed{1}$…②

問２　ｅは汗腺である。汗腺のように物質を分泌する組織は，上皮組織に属する。図１のａ～ｄのうちで，上皮組織に属するのはａの表皮だけである。なお，ｃの立毛筋は筋肉組織，ｄの神経は神経組織にそれぞれ属する。　$\boxed{2}$…①

問３　ｂは上述のように皮膚の真皮であり，結合組織に属する。真皮以外に，硬骨や軟骨，血液なども結合組織に属する。結合組織は，細胞どうしが離れて存在し，その間には細胞間物質(真皮ではコラーゲンのような膠原繊維)が豊富に存在しているので，②が正しい。①の「細胞どうしが密着し，隣接する細胞の細胞膜どうしが接着している」のは上皮組織の特徴である。③の「樹状突起や軸索をもつ」のは神経細胞の特徴である。神経細胞と神経膠細胞からなる組織が神経組織である。筋肉には骨格筋，心筋，内臓筋の３種類がある。④の「円柱形で多数の核をもつ」は骨格筋の筋細胞の特徴である。　$\boxed{3}$…②

問４　神経系は中枢神経系と末梢神経系に分けられる。脊椎動物の中枢神経系は大脳，間脳，中脳，小脳，延髄，脊髄からなり，末梢神経系は運動神経と感覚神経からなる体性神経系と，交感神経と副交感神経からなる自律神経系に分けられる。このうち，自律神経は意思とは無関係にはたらく筋肉の収縮や分泌腺の活動を支配している。これらの筋肉や分泌腺は一般に交感神経と副交感神経によって拮抗的に調節されているが，立毛筋には副交感神経は分布しておらず，交感神経だけが分布している。そのため，交感神経が興奮すると立毛筋が収縮して毛が立ち，交感神経の興奮が抑制されると毛は立たなくなる。　$\boxed{4}$…③

問５　筋肉の収縮に用いるエネルギーはおもに細胞内のミトコンドリアで，酸素を用いた呼吸によって生産されている。　$\boxed{5}$…④

問６　複数の器官が互いに機能を分担して効率よくはたらいている場合，これらの器官の集まりを器官系とよぶ。たとえば，消化にかかわる器官の集まりが消化系である。①の胃，②の小腸，③の

【ポイント】

多細胞生物
　細胞→組織→器官→個体

動物の組織
　上皮組織，結合組織，神経組織，筋肉組織(筋組織)

結合組織
　細胞どうしが離れて存在し，その間には多量の細胞間物質が存在する。

上皮組織
　細胞どうしが密着し，からだの外表面や内表面を覆う。

立毛筋には副交感神経は分布せず交感神経のみが分布する。

筋肉の収縮に用いるエネルギー
　おもにミトコンドリアで生産される。

すい臓はいずれも消化に関係しているので，消化系に含まれるが，④の腎臓はぼうこうなどとともに排出に関係しているので排出系に含まれる。ヒトの器官系には，消化系や排出系のほかに，肺や気管などを含む呼吸系，心臓や血管などを含む循環系などがある。 $\boxed{6}$ …④

器官系には消化系，排出系，呼吸系，循環系などがある。

第2問　発生

問題

Aではカエルとウニの初期発生に関する知識問題を，**B**ではカエルの卵割に関する考察問題を出題した。

問1　動物の受精卵は体細胞分裂を繰り返して細胞数を増やしていく。このときに行われる分裂は卵割とよばれ，分裂後に割球が成長しない，細胞周期が短い，分裂が同調しているという三つの特徴をもつ。カエルの卵は端黄卵とよばれ，卵黄が多く植物極側に片寄って分布している。一方，ウニの卵は等黄卵とよばれ，卵黄が比較的少なく均一に分布している。この卵黄の量と分布の違いが，卵割およびその後の胚発生に影響を与える。カエルの発生過程において，第一・第二卵割では均等に経割(動物極と植物極を通る面で起こる分裂)が起こり，続く第三卵割では動物極に近い部分で不均等に緯割(赤道面に平行な面で起こる分裂)が起こる。これは，植物極側に片寄って分布する卵黄が，卵割を妨げるためである。これに対してウニの発生過程では，第一・第二卵割で均等に経割が起こり，第三卵割で均等に緯割が起こる。第四卵割において，動物半球では均等に経割が起こるのに対し，植物半球では不均等に緯割が起こる。したがって，カエルではじめて不等割が起こるのは第三卵割，ウニではじめて不等割が起こるのは第四卵割である。 $\boxed{7}$ …④

卵割の特徴
　分裂後に割球が成長しない。
　細胞周期が短い。
　同調して分裂する。

等割
　同じ大きさの割球が生じる。

不等割
　異なる大きさの割球が生じる。

問2　カエルとウニでは，受精卵が卵割を繰り返すことによって細胞数を増やし，やがて内部に卵割腔をもつ桑実胚になり，内部に胞胚腔が発達した胞胚となる。胞胚を過ぎると陥入が起こり，原腸胚となる。カエルでは原腸胚を過ぎると神経胚となり，神経管が形成される。神経胚から尾芽胚を経て幼生(オタマジャクシ)へと発生が進行する。ウニでは原腸胚を過ぎると，プリズム期を経てプルテウス幼生へと発生が進行していく。 $\boxed{8}$ …③

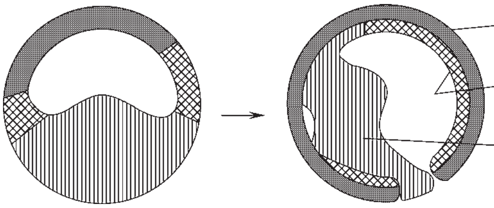
カエルの発生過程
　受精卵→桑実胚→胞胚
　→原腸胚→神経胚→尾芽胚
　→幼生(オタマジャクシ)
ウニの発生過程
　受精卵→桑実胚→胞胚
　→原腸胚→プリズム期
　→プルテウス幼生

問3　カエルの未受精卵では，植物極側の表層は白色であるのに対して，動物極側の表層は黒い色素を多く含んでいる。精子が動物極側に進入して受精が起こると，受精卵の表層部分が回転し，精子進入点の反対側に他の部分とは色が異なる灰色三日月環が現れる。灰色三日月環は未受精卵には観察されないので，①は誤りである。カエルの原腸胚では，赤道面より少し植物極寄りの部分から陥入が起こる。胚内部へ移動した細胞は，中胚葉や内胚葉へと分化するため(次図)，②は正しい。カエルではふ化が起こるのは尾芽胚の時期であるので，③は誤りである。ウニの胞胚では，胚

受精すると，精子進入点の反対側に灰色三日月環が生じる。

ふ化の時期
　カエルでは尾芽胚期。
　ウニでは胞胚期。

の中央部分に胞胚腔がみられるので，④は誤りである。胞胚腔が動物極側に片寄って存在するのはカエルの胞胚である。ウニは胞胚期になると，胚表面の細胞に繊毛が生じ，受精膜を破ってふ化する。したがって，⑤は正しい。ウニやカエルでは，原口の位置に将来肛門が生じるので，⑥は誤りである。



$\boxed{9}$・$\boxed{10}$…②・⑤

胞胚腔
　カエルでは動物極側に片寄る。
　ウニでは胚の中央部にみられる。

カエルでもウニでも，原口の位置に将来肛門が生じる。

問4　**実験1**では，1回目の卵割が起こってから330分後までは卵割が同調している。30分おきに卵割が起こるので，330分間には$330 \div 30 = 11$回の卵割が起こっており，1回目の卵割を加えると，受精卵が12回の卵割を行う間は分裂が同調していたことになる。次に**実験2**の結果を同様に考えると，受精卵を均等に二分割して生じた核を含む卵片では$300 \div 30 + 1 = 11$回，受精卵を均等に四分割して生じた核を含む卵片では$270 \div 30 + 1 = 10$回，それぞれ分裂が同調していたことがわかる。分裂が同調しなくなる時期は，卵割開始からの時間や卵割の回数とは一致していないので，①と②は誤りである。また，**実験1**および**実験2**において，受精卵では12回，受精卵の$\dfrac{1}{2}$の体積である核を含む卵片では受精卵よりも1回少ない11回，受精卵の$\dfrac{1}{4}$の体積である核を含む卵片では受精卵よりも2回少ない10回の卵割を経ると分裂が同調しなくなるので，同調しなくなるときの割球1個の体積は，いずれの場合でも同じである。しかし，**実験3**において，受精卵と同じ体積をもつ未受精卵では$360 \div 30 + 1 = 13$回の卵割を経ると分裂が同調しなくなっている。すなわち，未受精卵では受精卵よりも1回多く卵割をしてから分裂が同調しなくなるので，分裂が同調しなくなるときの割球1個の体積は，未受精卵の場合には受精卵の場合の$\dfrac{1}{2}$になっている。これより，③は誤りである。未受精卵で分裂が同調しなくなったときの動物極側の割球の体積をVとすると，受精卵で分裂が同調しなくなったときの動物極側の割球の体積は$2V$である。また，**実験2**の核を含む卵片で卵割が同調しなくなったときの動物極側の割球の体積も$2V$である。受精卵のDNA量を$2C$とすると，受精卵から生じた割球，**実験2**の核を含む卵片やそれから生じた割球のDNA量はいずれも$2C$である。一方，未受精卵では精子のDNAが卵に入っていないので，未受精卵のDNA量はCであり，未受精卵から生じた割球のDNA量もCである。分裂が同調しなくなる直前の動物極側の割球1個の体積に対するDNA量の比は，**実験1**～**実験3**

のいずれの場合も $\frac{C}{V}$ であるので，割球の体積に対するDNA量の比が，卵割が進行して割球の体積が減少するのにともなって大きくなり，$\frac{C}{V}$ になると分裂が同調しなくなると考えると，**実験**1～**実験**3の結果を説明できる。したがって，④が正しい。

$\boxed{11}$…④

問5　**実験**1～**実験**3の結果より，同調して分裂する回数は，割球の体積に対するDNA量の比で決まることがわかる。ⅠとⅡに分割した時点で，Ⅰの方が割球が小さいので，Ⅰの方が早く割球の体積に対するDNA量の比が $\frac{C}{V}$ に達して卵割が同調しなくなると考えられる。

$\boxed{12}$…②

第3問　遺伝　問題

エンドウに関する二遺伝子雑種の問題と，草丈について遺伝子の相互作用に関する問題を出題した。

問1　エンドウは，メンデルが遺伝の法則を導き出した実験に用いたマメ科の植物である。このような交配実験では，まず，個体の表現型から遺伝子型を推定することから始めるとよい。交配に用いた丸形で子葉が黄色の種子の表現型は，形も子葉の色もどちらも優性であるので，遺伝子型はR__Y__(__は優性遺伝子と劣性遺伝子のどちらでもよいことを示す)とおける。しわ形で子葉が緑色の種子の表現型は，形も子葉の色もどちらも劣性であるので，遺伝子型はｒｒｙｙと決定される。両者の交配で生じた F_1 がすべて丸形で子葉が黄色であるので，親の丸形で子葉が黄色の遺伝子型はRRYYである。したがって，F_1 の遺伝子型はRｒYｙである。問題文には，Rとｒ，Yとｙが異なる相同染色体上に存在し，独立の関係にあることが与えられているので，F_1(RｒYｙ)がつくる配偶子は，RY：Rｙ：ｒY：ｒｙ＝1：1：1：1である。したがって，F_1 の自家受精によって得られる F_2 は次の表のようになる。

F_1　RｒYｙ×RｒYｙ …… 自家受精
↓

	RY	Rｙ	ｒY	ｒｙ
RY	RRYY 丸・黄	RRYｙ 丸・黄	RｒYY 丸・黄	RｒYｙ 丸・黄
Rｙ	RRYｙ 丸・黄	RRｙｙ 丸・緑	RｒYｙ 丸・黄	Rｒｙｙ 丸・緑
ｒY	RｒYY 丸・黄	RｒYｙ 丸・黄	ｒｒYY しわ・黄	ｒｒYｙ しわ・黄
ｒｙ	RｒYｙ 丸・黄	Rｒｙｙ 丸・緑	ｒｒYｙ しわ・黄	ｒｒｙｙ しわ・緑

これをまとめると，丸・黄：丸・緑：しわ・黄：しわ・緑＝9：3：3：1となる。丸・黄はしわ・緑の9倍出現するので，①は誤りである。丸・緑はしわ・緑の3倍出現するので，②は正し

表現型から遺伝子型を推定する。
表現型　　遺伝子型
〔A〕→　AAまたはAａ
〔ａ〕→　ａａ

独立遺伝
AａBbがつくる配偶子は
AB：Ab：aB：ａb＝
1：1：1：1

い。しわ・黄は丸・緑と同じ比率で出現するので，③は誤りである。しわ・黄はしわ・緑の3倍出現するので，④は誤りである。

$\boxed{13}$…②

問2　F_2には，9種類の遺伝子型の個体が含まれる。交配に用いた両親の表現型が与えられていないので，両親の遺伝子型を結果の分離比から推定する。次世代の表現型の分離比は，丸・黄：丸・緑：しわ・黄：しわ・緑＝3：3：1：1である。この結果を，種子の形と子葉の色に分けて考えると，丸：しわ＝3+3：1+1＝3：1，黄：緑＝3+1：3+1＝1：1である。丸：しわ＝3：1となるのは両親の遺伝子型の組合せがRr×Rr の場合である。また，黄：緑＝1：1となるのは，両親の遺伝子型の組合せがYy×yy の場合である。これらを組み合わせると，両親の遺伝子型はRrYy とRryy であることがわかる。　$\boxed{14}$…③

交配結果		両親の遺伝子型
〔A〕のみ	→	AA×AA
		AA×Aa
		AA×aa
〔A〕:〔a〕＝ 3 ： 1	→	Aa×Aa
〔A〕:〔a〕＝ 1 ： 1	→	Aa×aa
〔a〕のみ	→	aa×aa

問3　問題文より，遺伝子Aと遺伝子Bは同じはたらきをもち，遺伝子Aまたは遺伝子B 1個につき草丈が約20 cm高くなることがわかる。草丈には約140 cm，約120 cm，約100 cm，約80 cm，約60 cmの5群がある。これらのうち，草丈が最も低い約60 cmの個体の遺伝子型は草丈を高くする遺伝子Aと遺伝子Bをもたないaabbであることがわかる。これよりも草丈が20 cm高い約80 cmの個体は草丈を高くする遺伝子を1個もつAabbとaaBb，さらに草丈が20 cm高い約100 cmの個体は草丈を高くする遺伝子を2個もつAAbbとAaBbとaaBB，さらに草丈が20 cm高い約120 cmの個体は草丈を高くする遺伝子を3個もつAABbとAaBB，最も草丈が高い約140 cmの個体は草丈を高くする遺伝子を4個もつAABBであることがわかる。

品種Ⅰと品種Ⅱはどちらも同じ約100 cmの草丈であるので，草丈を高くする遺伝子を2個もつ。草丈を高くする遺伝子を2個もつ個体どうしの交配は②しかない。なお，草丈を高くする遺伝子を2個もつ個体の遺伝子型にはAAbb，aaBB，AaBbの3種類があるが，交配に用いた個体は純系であるので，AaBbはあてはまらないこと，および，F_1個体どうしの交配で生じたF_2の草丈が5群に分離していることから，品種Ⅰと品種Ⅱの遺伝子型は異なることがわかるので，品種Ⅰと品種ⅡがAAbbとaaBBと推定することもできる。（もし，品種Ⅰと品種ⅡがともにAAbbとすると，F_1の遺伝子型もF_1の自家受精で生じるF_2の遺伝子型もすべてAAbbとなり，草丈が約100 cmの個体しか生じない。）

$\boxed{15}$…②

純系

自家受精を繰り返しても形質が変わらない系統。着目した遺伝子についてホモ接合体(AAやaa)である。

問4　遺伝子Aとa，遺伝子Bとbは異なる相同染色体上に存在し，独立の関係にあることが問題文に与えられている。品種ⅠをAAbb，品種ⅡをaaBBとして実験の交配結果をまとめると次のようになる。

（品種Ⅰ）AAbb　×　aaBB（品種Ⅱ）
（約 100 cm）　↓　（約 100 cm）
F_1　AaBb×AaBb …… 自家受精
（約 100 cm）↓

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB 約 140 cm	AABb 約 120 cm	AaBB 約 120 cm	AaBb 約 100 cm
Ab	AABb 約 120 cm	AAbb 約 100 cm	AaBb 約 100 cm	Aabb 約 80 cm
aB	AaBB 約 120 cm	AaBb 約 100 cm	aaBB 約 100 cm	aaBb 約 80 cm
ab	AaBb 約 100 cm	Aabb 約 80 cm	aaBb 約 80 cm	aabb 約 60 cm

F_2の遺伝子型と草丈の出現比をまとめると次のようになる。

草丈	遺伝子型と出現比	合計
約 140 cm	1 AABB	1
約 120 cm	2 AABb・2 AaBB	4
約 100 cm	1 AAbb・4 AaBb・1 aaBB	6
約 80 cm	2 Aabb・2 aaBb	4
約 60 cm	1 aabb	1

約 140 cm の個体の遺伝子型は 1 種類であるので，①は誤りである。約 120 cm の個体の遺伝子型は AABb と AaBB であり，遺伝子 A と a，遺伝子 B と b のいずれか一方がヘテロ接合体になっているので，②は誤りである。約 100 cm の個体には，3 種類の遺伝子型のものが含まれるので，③は誤りである。約 80 cm の個体の遺伝子型は Aabb と aaBb であり，遺伝子 A と遺伝子 B の両方をもつ個体はいないので，④は誤りである。約 60 cm の個体の遺伝子型は aabb のみであり，すべて劣性のホモ接合体であるので，⑤は正しい。　$\boxed{16}$ …⑤

ホモ接合体
同じ遺伝子を対でもつ。
例　AA，aa
ヘテロ接合体
対立遺伝子を対でもつ。
例　Aa

問 5　**問 4** で示したように，**実験 1** の F_2 の約 100 cm の個体には，AAbb，AaBb，aaBB の 3 種類の遺伝子型の個体が 1：4：1 の割合で含まれている。これらの個体で自家受精を行うと，AAbb からは AAbb（約 100 cm）のみが生じ，aaBB からは aaBB（約 100 cm）のみが生じるが，AaBb からは**問 4** で示したように，約 140 cm：約 120 cm：約 100 cm：約 80 cm：約 60 cm の草丈の個体が，1：4：6：4：1 の比で生じる。親世代では，AAbb と aaBB の個体数はともに AaBb の個体数の $\frac{1}{4}$ であるので，AaBb で自家受精して生じた次世代が 16（比の合計）のとき，AAbb と aaBB で自家受精して生じた次世代はそれぞれ 4 である。したがって，次世代の合計の分離比は，約 140 cm：約 120 cm：約 100 cm：約 80 cm：約 60 cm＝1：4：6＋4＋4：4：1＝1：4：14：4：1 となる。　$\boxed{17}$ …⑥

第4問　体液・免疫　問題

体液と循環系に関する知識問題と体液性免疫に関する考察問題を出題した。

問1　脊椎動物では，からだの内部にある細胞は直接外界と接することはなく，体液(血液・リンパ液・組織液)に囲まれている。血液は有形成分である赤血球と白血球と血小板，液体成分である血しょうからなる。組織液は組織の細胞と直接接している体液で，血液の血しょうが毛細血管から組織へしみ出たものである。組織液の大部分は再び毛細血管へ戻り血液の成分となるが，一部はリンパ管へ流れ込みリンパ液となる。なお，細胞液は植物細胞内に存在する液胞の内部を満たしている液体のことであり，リンガー液は体液と同様の塩類組成で浸透圧が等しい生理的塩類溶液の一種である。　18 …③

問2　ヒトの赤血球は中央がくぼんだ直径7～8 μm の円盤形の細胞であり，核をもたないので，①は正しい。白血球の大きさは5～20 μm 程度で，血小板の大きさは2～4 μm 程度であるので，②は正しい。健康な成人の血液1 mm^3 あたり，赤血球は450万～500万個含まれ，血小板は20万～40万個含まれるので，③は正しい。ヒトの血しょうの浸透圧は0.9％の食塩水(生理食塩水)の浸透圧とほぼ等しいので，④が誤りである。なお，健康なヒトの血しょうには，約0.1％のグルコースが含まれている。　19 …④

問3　ヒトのような脊椎動物の血管系は，動脈と静脈が毛細血管でつながった閉鎖血管系である。開放血管系は，毛細血管がなく動脈と静脈の末端が開いている血管系をさす。開放血管系は，節足動物(昆虫類，甲殻類)や軟体動物(貝類)などにみられる。したがって，①は正しい。心臓の拍動のリズムをつくっているのは右心房の上側にある洞房(とうぼう)結節(ペースメーカー)とよばれる部分である。洞房結節はほぼ一定の周期で興奮する性質をもつ。洞房結節の興奮はまず心房全体に伝わり収縮運動を引き起こす。心房の収縮によって左右の心房からそれぞれ左右の心室に血液が送り込まれる。心房の収縮から少し遅れて心室が収縮し，右心室から肺動脈へ，左心室から大動脈へと血液を送り出す。したがって，②は誤りであり，③は正しい。動脈は心臓から直接送り出される血流が高い圧力をもつので，血液の逆流を防ぐ弁をもたないが，静脈は血圧が低いので，血液の逆流を防ぐ弁をもつ。したがって，④は正しい。　20 …②

問4　全身の組織に酸素を供給して心臓に戻ってきた，酸素をあまり含まない血液(静脈血)は右心房に入る。そして右心房から右心室に送られた血液は，肺動脈を経て左右の肺に送られる。肺で二酸化炭素を放出し，酸素を受け取った血液(動脈血)は肺静脈を経て左心房に入る。このように心臓から肺を経て，再び心臓に戻る

脊椎動物の体液
　血液，リンパ液，組織液

ほ乳類の赤血球には核がない。

血球の大きさ
　白血球＞赤血球＞血小板
血液1 mm^3 あたりの血球数
　赤血球＞血小板＞白血球

ヒトの生理食塩水の濃度　0.9％

閉鎖血管系
　動脈と静脈が毛細血管でつながっている。脊椎動物，ミミズ
開放血管系
　毛細血管をもたない。
　昆虫類，甲殻類，貝類

洞房結節(ペースメーカー)
　右心房の上側にあり，心臓の拍動のリズムをつくる。

静脈には血液の逆流を防ぐ弁がある。

動脈血　酸素を多く含む。
静脈血　酸素をあまり含まない。
肺循環　右心室→肺動脈→肺→肺静脈→左心房
体循環　左心室→大動脈→全身の組織→大静脈→右心房

経路を肺循環という。したがって，②が正しい。なお，体循環では，左心室から全身に送られた血液が右心房に戻ってくる。

$\boxed{21}$ …②

問５　抗原Ｐのみを含む試料１を注射したマウスから得られた血清ａには，抗原Ｐとのみ反応する抗体(抗体ｐとする)が含まれる。同様に，抗原Ｑのみを含む試料２を注射したマウスから得られた血清ｂには，抗原Ｑとのみ反応する抗体(抗体ｑとする)が含まれている。したがって，血清ａと反応する試料には抗原Ｐが含まれ，血清ｂと反応する試料には抗原Ｑが含まれることになる。これより，試料３と試料４と試料６には抗原Ｐが，試料３と試料６には抗原Ｑが含まれることがわかるので，⑤，⑥，⑧は誤りである。試料５は血清ａとも血清ｂとも反応していないので，抗原Ｐと抗原Ｑを含まない。しかし，試料５を注射したマウスから得られた血清ｅは試料５と反応するので，試料５には抗原Ｐとも抗原Ｑとも異なる抗原Ｒが含まれていることがわかる。したがって，血清ｅには抗原Ｒとのみ反応する抗体(抗体ｒとする)が含まれるが，抗体ｐと抗体ｑは含まれていない。血清ｅは試料４と試料６とも反応しており，試料４と試料６にも試料５と共通の抗原Ｒが含まれることがわかるので，⑦は正しい。各試料に含まれる抗原をまとめると次のようになる。〇は含まれることを，×は含まれないことを示す。

試　料	1	2	3	4	5	6
抗原Ｐ	〇	×	〇	〇	×	〇
抗原Ｑ	×	〇	〇	×	×	〇
抗原Ｒ	×	×	×	〇	〇	〇
	a	b	c	d	e	f
	対応する血清					

各血清には，それぞれの血清を得るために注射した試料に含まれる抗原に対する抗体が含まれているので，血清ｃには試料３に含まれる抗原Ｐと抗原Ｑに対する抗体ｐと抗体ｑ，血清ｄには試料４に含まれる抗原Ｐと抗原Ｒに対する抗体ｐと抗体ｒ，血清ｅには試料５に含まれる抗原Ｒに対する抗体ｒ，血清ｆには試料６に含まれる抗原Ｐと抗原Ｑと抗原Ｒに対する抗体ｐと抗体ｑと抗体ｒがそれぞれ含まれる。したがって，①，③，④は誤りであり，②が正しい。　$\boxed{22}$・$\boxed{23}$ …②・⑦

第５問　花芽形成　問題

Aでは光周性と花芽形成に関する知識問題を，**B**では花芽形成に関する実験考察問題を出題した。

問１　日長(明期の長さ)または夜長(暗期の長さ)の変化に対して生物が反応する性質を光周性とよぶ。日長条件は季節によって変化

体液性免疫
抗原抗体反応により，抗原を不活性化する。
抗体はリンパ球が分泌する。

抗原抗体反応
ある抗原に対してつくられた抗体が，その抗原と特異的に結合する。

光周性
日長または夜長の変化に対して生物が反応する性質。

し，特定の日長条件になったときに生物が光周性による反応を示すので，光周性が関与する現象は特定の季節にのみ起こる場合が多い。光周性の例としては，植物では，特定の季節に花芽形成が起こる現象や特定の季節になると落葉が起こる現象などがある。動物では，特定の季節になると生殖腺が発達したり休眠したりする現象が知られている。したがって，①が正しい。②は1日を周期とする生物の活動のパターンであり，日周性とよばれる。③は光傾性，④は光屈性による反応の例である。屈性は刺激の方向と一定の関係をもって屈曲する性質，傾性は刺激の方向とは無関係に屈曲する性質である。

24 …①

問2　日長が一定の長さ以上になると花芽を形成する植物を長日植物，日長が一定の長さ以下になると花芽を形成する植物を短日植物とよぶ。長日植物は日長が長くなる春から初夏にかけて花芽を形成し開花するものが多く，コムギ，ホウレンソウ，アブラナ，アヤメ，カーネーションなどが例としてあげられる。短日植物は日長が短くなる夏から秋にかけて花芽を形成し開花するものが多く，アサガオ，オナモミ，コスモス，キクなどが例としてあげられる。また，日長に関係なく花芽を形成する植物を中性植物とよび，トマト，エンドウ，タンポポなどが例としてあげられる。

25 …③

問3　光周性による花芽形成において，実際に植物が感受しているのは，日長(明期の長さ)ではなく，夜長(連続した暗期の長さ)である。植物Mは10時間の暗期では花芽を形成するが，より長い13時間の暗期では花芽を形成しないので，長日植物である。一方，植物Nは10時間の暗期では花芽を形成しないが，より長い13時間の暗期では花芽を形成するので，短日植物である。①明期の中央で短時間光を遮って，連続した明期の長さを短くしても影響はないので，この実験からは連続した明期の長さが感受されないことはわかるが，1日の明期の合計時間，1日の暗期の合計時間，連続暗期の時間のどれが重要なのかはわからない。②暗期の途中で短時間光を照射することを光中断とよぶ。短日植物である植物Nは暗期が短い14明・10暗の条件では花芽を形成しない。その短い連続した暗期の長さを光中断によってさらに短くしても，花芽は形成されない。この実験では，連続した暗期の長さを変化させても結果が変わらないので，植物が連続した暗期の長さを感受している証拠にはならない。③長日植物である植物Mが花芽形成をしない11明・13暗の条件では，暗期の長さが短くならない限り，明期の連続時間を変えても花芽形成は起こらない。したがって，この選択肢は実験結果が誤っている。④植物Nが花芽を形成するのに十分な暗期の中央で光中断を行って連続した暗期の長さを短くすると，植物Nは花芽を形成しなくなる。この実験では，光中断をしない場合と比べて，明期の長さが同じであ

長日植物
　連続暗期の長さが限界暗期以下になると花芽を形成する植物。
　コムギ，アヤメ，アブラナ，ホウレンソウなど。

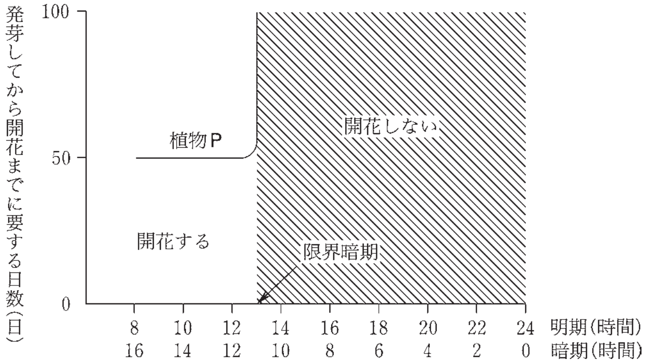
短日植物
　連続暗期の長さが限界暗期以上になると花芽を形成する植物。
　アサガオ，オナモミ，コスモス，キクなど。

中性植物
　明暗周期に関係なく花芽を形成する植物。
　トマト，エンドウ，タンポポなど。

光中断
　暗期の途中で光を短時間照射して連続した暗期を分断する処理。

り，光中断の時間は短い時間なので１日の暗期の合計時間もほぼ同じと考えてよく，連続した暗期の長さだけが光中断で変化している。連続した暗期の長さが変わると結果が変わるので，連続した暗期の長さが感受されることの証拠となる。 $\boxed{26}$ …④

問４　図１の実験は一定温度で行われているので，温度の影響はなく，問題文に「これらの植物は花芽を形成すると必ず開花するものとする」とあるので，開花した場合には花芽が形成され，開花しなかった場合には花芽が形成されなかったことになる。植物Ｐは明期が 13 時間以下の日長条件では発芽してから 50 日で開花しているが，明期が 13 時間よりも長い日長条件では開花しないことが図１から読み取れる(次図)。



これより，植物Ｐは明期が一定時間より短くなる，すなわち連続した暗期の長さが一定時間以上になると花芽を形成するので短日植物であることがわかる。また，花芽形成が起こるか起こらないかの境界となる連続した暗期の長さは限界暗期とよばれ，植物Ｐの限界暗期は，24－13＝11 時間であることがわかる。植物Ｑは明期が 14 時間以上，すなわち暗期が 24－14＝10 時間以下になると花芽を形成するので，限界暗期が 10 時間の長日植物である。同様に考えると，植物Ｒは限界暗期が 9 時間の短日植物であり，植物Ｓは限界暗期が 8 時間の長日植物であることがわかる。したがって，①と②はともに誤りである。また，植物Ｐの限界暗期は植物Ｑの限界暗期よりも長いので，④は誤りであり，植物Ｒの限界暗期は植物Ｓの限界暗期よりも長いので，⑤も誤りである。明期が 14 時間で暗期が 10 時間の日長条件では植物Ｐと植物Ｓはともに開花しないので，③は正しい。植物Ｐが開花する日長条件は明期が 13 時間以下，植物Ｒが開花する日長条件は明期が 15 時間以下であり，植物Ｐが開花する日長条件では植物Ｒは常に開花するので，⑥は正しい。 $\boxed{27}$・$\boxed{28}$ …③・⑥

限界暗期
花芽形成が起こるか起こらないかの境界となる連続した暗期の長さ。

問５　問題文に「これらの植物はいずれも，種子をまいてから５日で発芽し，発芽してから 10 日後に日長条件を感受できるようになる」,「花芽形成に適した日長条件をはじめて感受してから開花までに要する日数は，花芽形成に適した日長条件をはじめて感受

したときの植物の発育状態に影響されない」とある。植物Ｐ，植物Ｑ，植物Ｒの種子を５月20日にまくと，５日後の５月25日に発芽して10日後の６月上旬には日長条件を感受できるようになる。このときの日長(明期の長さ)は，図２より15時間を超えている。図１からわかるように，植物Ｐは明期が13時間以下の日長条件では発芽してから50日後に開花している。この場合，発芽から10日後に花芽形成に適した日長条件を感受しているので，植物Ｐは花芽形成に適した日長条件を感受してから50－10＝40日後に開花することがわかる。これより，植物Ｐは日長が13時間になる８月下旬から40日後の10月上旬に開花すると考えられる。同様に，植物Ｑは明期が14時間以上の日長条件では40－10＝30日後に開花するので，日長条件を感受できるようになり，日長が14時間以上である６月上旬から30日後の７月上旬に開花すると考えられる。植物Ｒは明期が15時間以下の日長条件では30－10＝20日後に開花するので，日長が15時間よりも短くなる７月中旬から20日後の８月上旬に開花すると考えられる。したがって，開花が早いものから順に並べると，植物Ｑ(７月上旬)→植物Ｒ(８月上旬)→植物Ｐ(10月上旬)となる。 $\boxed{29}$ …④

地　学　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	②	3	
		問2	2	①	3	
		問3	3	③	3	
		問4	4	①	4	
	B	問5	5	④	3	
		問6	6	①	4	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	①	3	
		問2	8	⑤	3	
		問3	9	③	4	
		問4	10	②	3	
	B	問5	11	⑥	3	
		問6	12	②	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	問1		13	①	2	
			14	④	2	
	問2		15	③	3	
	問3		16	①	4	
	問4		17	③	3	
	問5		18	⑤	3	
	問6		19	④	3	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	20	①	3	
		問2	21	②	3	
		問3	22	②	4	
	B	問4	23	③	3	
		問5	24	③	3	
		問6	25	①	4	
第4問　自己採点小計					(20)	

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第5問	A	問1	26	④	3	
		問2	27	④	4	
		問3	28	②	3	
	B	問4	29	⑤	4	
		問5	30	③	3	
		問6	31	①	3	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

【解説】

第１問　地　球　問題

A　走時曲線

地震波が震源から観測点に到達するまでに要した時間(走時)を縦軸に，震央距離を横軸にとったグラフを走時曲線という。震源の浅い地震の場合，走時曲線が震央距離 100 ～ 300 km のところで折れ曲がることが多い。今回は，Ｐ波の性質，Ｐ波の走時曲線について出題した。

問１　Ｐ波は，波の進行方向と波の振動を伝える物質(媒質)の振動方向が平行な縦波であり，媒質の疎密の状態を伝える。一方，Ｓ波は，波の進行方向と媒質の振動方向が直交する横波であり，媒質のねじれの状態を伝える。また，Ｐ波は固体・液体・気体中を伝播(でんぱ)するが，Ｓ波は固体中のみを伝播する。各観測点に最初に到達する地震波は速度が大きいＰ波であり，説明文ａとｄがＰ波を説明した文である。よって，②が正解である。　$\boxed{1}$ …②

問２　$\boxed{ア}$：20世紀初頭に，モホロビチッチは，比較的近くで起こった震源の浅い地震の走時曲線が震央距離約 200 km のところで折れ曲がることに気づいた。この折れ曲がりから，地下に地震波速度が急に大きくなる地震波速度の不連続面が存在することを見出した。この不連続面を，発見者の名をとって，モホロビチッチ不連続面(モホ不連続面)という。モホロビチッチ不連続面より上の層を地殻といい，下の層をマントルという。すなわち，モホロビチッチ不連続面は地震波速度の不連続面であると同時に，地殻とマントルの境界面でもある。深発地震面である和達(わだち)－ベニオフ面と混同しないように気をつけよう。

$\boxed{イ}$：問題図１の走時曲線の折れ曲がりは，地下に地震波速度の大きな層(マントル)があり，地震波が地殻中よりも速く伝播するために，ある地点よりも震央距離が大きいところでは，屈折してマントルを伝わってきたＰ波(屈折波)の方が，地殻中を直進してきたＰ波(直接波)よりも早く観測点に到達することが原因である。折れ曲がり点は，直接波と屈折波が同時に到達する点である。

図１－１は，問題図１での折れ曲がり点までの直接波と屈折波の経路と，地殻が問題図１よりも厚い場合の直接波と屈折波の経路を比較したものである。地殻が問題図１の厚さのとき，直接波(実線の矢印Ｑ→Ｃ)と屈折波(破線の矢印Ｑ→Ａ→Ｂ→Ｃ)はＣ点(問題図１の折れ曲がり点の震央距離に相当する)に同時に到達したとする。しかし，問題図１よりも地殻が厚い場合は，マントルまでの経路(Ｑ－Ａ′)が長くなるため，図１－１に示すように，直接波(実線の矢印Ｑ→Ｄ)と屈折波(実線の矢印Ｑ→Ａ′→Ｂ′→Ｄ)が同時に到達する地点は，Ｃ点よりも遠いＤ点となる。

【ポイント】

走時曲線
走時を縦軸に，震央距離を横軸にとったグラフ。

Ｐ波
振動方向が波の進行方向に平行な縦波。固体・液体・気体中を伝播する。

Ｓ波
振動方向が波の進行方向に垂直な横波。固体中のみを伝播する。

モホロビチッチ不連続面(モホ不連続面)
地震波速度の不連続面であり，地殻とマントルの境界面でもある。

和達－ベニオフ面
深発地震面

走時曲線の折れ曲がり
地震波速度が不連続に大きくなる層が地下に存在することを示唆する。

つまり，地殻が厚いため，地殻中を伝播する屈折波の経路が AA′＋B′B″ の分だけ増えるので，屈折波が直接波に追いつくには，地殻が薄いときに比べて時間がかかる。そのため走時曲線の折れ曲がり点までの震央距離が大きくなるのである。よって，① が正解である。 **2** …①

地殻の厚さと走時曲線の折れ曲がり点
地殻が厚いほど，走時曲線の折れ曲がり点までの震央距離は大きくなる。

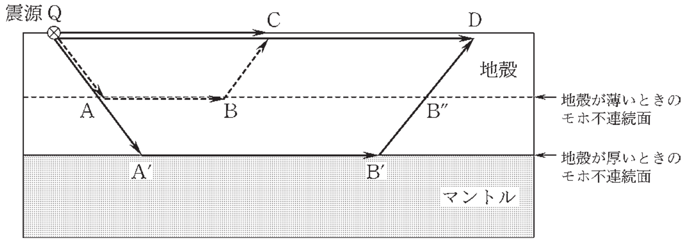


図１－１　直接波と屈折波の経路

問３　問題図１の走時曲線の折れ曲がり点までは，地殻中を直進したＰ波が地表の観測点に先に到達するので，地殻を伝わるＰ波の速度は，折れ曲がり点の震央距離が 150 km で，走時は 25 秒であることから，

$$\frac{150}{25}=6.0\ (\text{km/秒})$$

である。

地殻を伝わる地震波の速度
走時曲線の折れ曲がり点までの直線の傾きの逆数。

一方，問題図１の折れ曲がり点以遠は，屈折波の方が先に地表に到達する。いずれの観測点に到達する屈折波をみても，その経路において，地殻を伝わる距離は等しい(図１－１中の QA＋BC に等しい)。したがって，問題図１の折れ曲がり点以遠の直線上の２点の距離差と時間差との比は，マントルを伝わるＰ波の速度を表す。これより，マントルを伝わるＰ波の速度は，震央距離が 150 km で走時は 25 秒，震央距離が 250 km で走時は 37.5 秒であるから，

マントルを伝わる地震波の速度
走時曲線の折れ曲がり点以遠における直線の傾きの逆数。

$$\frac{250-150}{37.5-25}=\frac{100}{12.5}=8.0\ (\text{km/秒})$$

である。したがって，マントルを伝わるＰ波の速度は，地殻を伝わるＰ波の速度の

$$\frac{8.0}{6.0}=\frac{4}{3}\ (\text{倍})$$

である。よって，③が正解である。 **3** …③

問４　本問の地域において地殻中を伝わるＰ波の速度を V_{P} (km/秒) とすれば，Ｐ波が震源(O 点)を発して直進し，震源の真上の震央に到達するのに要する時間は $\dfrac{h}{V_{\mathrm{P}}}$ (秒) になる。この値は 0 ではないので，走時曲線は原点を通らない。したがって，②と④は正解ではないことがわかる。③は地表の各観測点の走時が等しいので，地震が発生すると，地表の各観測点に同時にＰ波が到達することを示している。これは，現実には起こりえないことであ

り，誤りである。以上のことから，消去法で正解は①である。

図１－２に示すように，震央距離を x (km)，震源の深さを h (km) とし，Ｐ波の走時を t (秒) とすれば，三平方の定理より，

$$x^2+h^2=(V_P\times t)^2$$

である。震央距離 x が震源の深さ h に比べて非常に大きくなれば，上の式で h は無視することができ，

$$x\fallingdotseq V_P\times t \qquad \therefore\ \frac{t}{x}\fallingdotseq\frac{1}{V_P}$$

となる。このことは，震央距離 x が大きくなると，傾きが $\frac{1}{V_P}$ の直線に近づいていくことを表している。震源が地表付近(深さ0 km)ではなく，ある深さに震源がある自然地震の場合(本問では深さ h km)，走時曲線は直線にはならない，ということに注意しよう。 $\boxed{4}$ …①

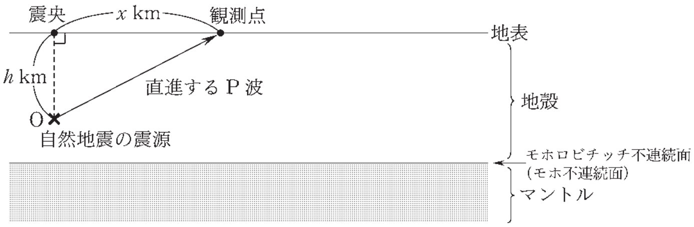


図１－２　深さ *h* km の震源から地殻中を直進するＰ波

一般的な自然地震の走時曲線の概形

震央付近では下に凸の曲線になり，震央から遠くなると直線に近づく。

B　地球磁場(地磁気)

地球磁場の問題は平易であることが多い。今回は偏角の変化を題材にして，地球磁場，地磁気の要素に関する問題を出題した。

問５　問題文にもあるように，地球磁場は，地球の中心に棒磁石を置いたと仮定してできる磁場によく似ている。この棒磁石の軸(Ｎ極とＳ極を結んだ直線)は自転軸と一致しておらず，現在は自転軸に対して約10° 傾いている(図１－３)。また，棒磁石のＮ極は南半球側，Ｓ極は北半球側にあるので，棒磁石のＮ極とＳ極を結んだ直線をＮ極側から延長した直線と地表が交わる点は，南極点から緯度約10° 離れたところにあることになる。①は北極点から緯度20° 離れたところであり，③は南極点から緯度20° 離れたところにあるので，誤りである。②は棒磁石のＮ極とＳ極を結んだ直線をＳ極側から延長して地表と交わる点である。以上のことから，④が正解となる。なお，②を地磁気の北極，④を地磁気の南極というが，覚える必要はない。 $\boxed{5}$ …④

地球磁場(地磁気)

地球の中心に，自転軸から約10° 傾けて置いた棒磁石がつくる磁場によく似ている。棒磁石のＮ極は南半球側にある。

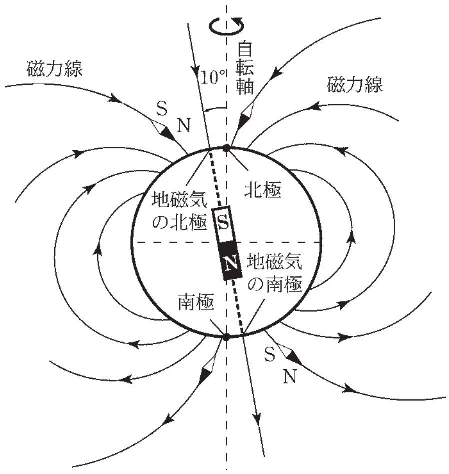


図１－３　地球磁場の様子

問６　地表における地磁気の方向や大きさは一定ではなく，地球の歴史の中で変化してきており，現在もなお変化し続けている。問題図４に示すように，地磁気の要素の一つである偏角も変化し続けている。

方位磁針のＮ極が指す方向（磁北）と真北の方向は一致しないことが多い。この磁北の方向と真北の方向とのずれの角度を偏角という。また，方位磁針のＮ極の指す方向と水平面とのなす角度を伏角という。地磁気の要素は，偏角と伏角の他に，全磁力・水平分力・鉛直分力がある（図１－４）。偏角は他のどの要素からも独立しており，地磁気の大きさと方向を決めるのに必要な「地磁気の三要素」の中に必ず含めなければならないことも覚えておこう。

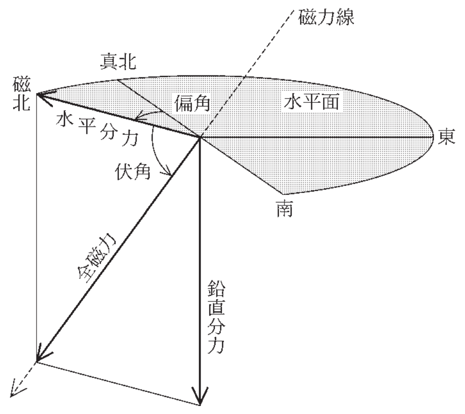


図１－４　地磁気の要素

①　問題図４を見ると，19 世紀初頭に偏角が 0° のときがあったことがわかる。偏角は，磁北と真北の方向とのずれの角度であり，これが 0° であるならば，この地点から見た磁北の方向と真北の方向は一致していたことになる。よって，正解である。

②　西暦 1600 年から現在までの間で，偏角が東偏で最も大き

偏　角

方位磁針のＮ極が指す方向（磁北）と真北とのずれの角度。

伏　角

方位磁針のＮ極の指す方向と水平面とのなす角度。

地磁気の三要素

ある地点の地磁気の大きさと方向を決めるのに必要な三要素。三要素の中に偏角が必ず入る。地磁気の三要素の例としては，偏角・伏角・全磁力の組合せがある。

かったのは1650年頃で8°ほどであり，西偏で最も大きいのは現在あたりで，やはり8°ほどである。したがって，西暦1600年から現在までの約400年間において，この地点から見た磁北の方向は最大で16°ほど変化している。よって，誤りである。

③　偏角が西偏のときは，方位磁針のN極が指す方向(磁北)が真北の方向から西にずれているのだから，逆に方位磁針のN極が指す方向からみると，真北は東の方にずれていることになる。よって，誤りである。

④　偏角は独立した値であり，偏角が東偏か西偏かによって伏角が上向きになったり，下向きになったりするわけではない。よって，誤りである。なお，現在の日本付近の偏角は西偏で，伏角は下向きである。このことからも④が誤りであると判断できる。

現在の日本の偏角・伏角
偏角：西偏
伏角：下向き

6 …①

第2問　岩石・鉱物　問題

A　火成岩

火成岩の分類と特徴についての問題である。単に一つ一つの用語を覚えるのではなく，用語と用語を関連づけて理解するように努めよう。

問1　火成岩の分類の一つは，塩基性岩か中性岩か酸性岩かで，これは図2－1に示すように SiO_2 の重量%が，52%，66%を基準としている。したがって，**X**は中性岩，**Y**は酸性岩，**Z**は塩基性岩である。また，もう一つの分類は，深成岩か火山岩かである。これは**問3**に関連するが，問題文で**X**は深成岩，**Y**，**Z**は火山岩と述べているので，**X**は閃緑(せんりょく)岩，**Y**は流紋岩，**Z**は玄武岩である(図2－1)。

7 …①

火山岩
玄武岩，安山岩，流紋岩

深成岩
斑(はん)れい岩，閃緑岩，花こう岩

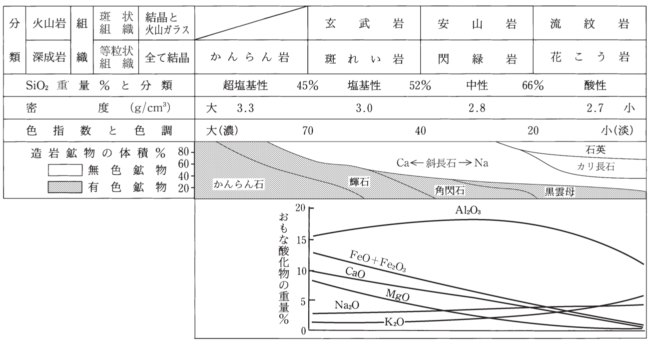


図2－1　火成岩の特徴

問2　火成岩を構成する酸化物として重要なものは何かをしっかり把握しておきたい。最も多いものは SiO_2 だが，第2位を占めるのは Al_2O_3 である。よって，**ア**は Al_2O_3 である。地殻を構成する主要元素は，多いものから順に，O，Si，Al，Feであることからも判断できる。**イ**と**ウ**の量については，火成岩の種類によっ

地殻の主要元素
O，Si，Al，Fe

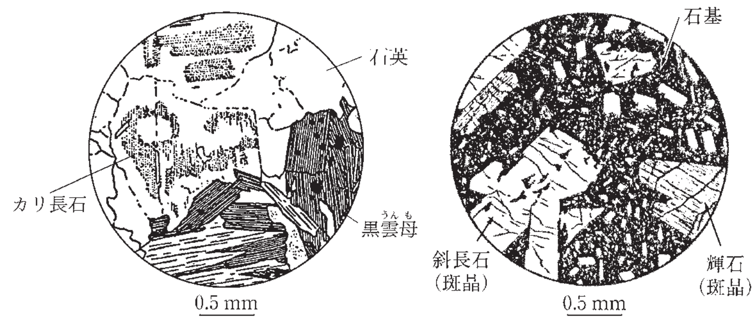
て異なる。イはYの酸性岩で最も少なく，X，Zの順に増加する。これは$FeO+Fe_2O_3$やMgOの示す傾向と同じである。したがって，イはCaOである。一方，ウはZ，X，Yの順に増加する。これは，SiO_2の示す傾向と同じなので，ウはK_2Oである。酸化物の増減の傾向は覚えておく必要があるので，図2－1で確認しておこう。 $\boxed{8}$…⑤

酸化物の増減
SiO_2の増加とともに，
$FeO+Fe_2O_3$，MgO，CaOは減少，
K_2O，Na_2Oは増加。

問3　問1で述べた深成岩，火山岩は組織による分類で，マグマが深いところで徐冷すれば等粒状組織，浅いところで急冷すれば斑状組織となる(図2－2)。

等粒状組織
徐冷の深成岩

斑状組織
急冷の火山岩，斑晶と石基



等粒状組織（花こう岩）　　斑状組織（玄武岩）

図2－2　等粒状組織と斑状組織

①　Xは深成岩なので，地下でマグマがゆっくり冷やされてできた。

②　自形とは，結晶本来の形という意味で，マグマの冷却・固結の初期に形成され，他の結晶に形成を邪魔されていないことを示している。他形とは，固有の結晶の形を示さないという意味で，マグマの冷却・固結の末期に形成され，隙間を埋めるように晶出した鉱物である。

自形と他形
自形　初期に晶出
他形　末期に晶出

③・④　斑状組織は急冷によって形成されるが，組織を構成する鉱物がすべて急冷の条件で生成されたとは限らない。斑晶と呼ばれる大きな結晶は，徐冷の条件下で生成されたため，大きく成長することができた。一方，石基と呼ばれる小さな結晶またはガラスは，急冷の条件下で生成されたので，大きな結晶になれなかったのである。 $\boxed{9}$…③

問4　①　火成岩の密度は，重い元素であるFeやMgが多く含まれるほど大きい。したがって，Zの密度が最大である。

火成岩の密度
塩基性岩ほど大きい。

②　色指数は岩石の黒っぽさを表す指標であり，有色鉱物の体積%である。FeやMgの酸化物が多いほど色指数は大きいので，Zが最大である。

色指数
塩基性岩ほど大きい。

③　生成温度は塩基性岩ほど高く，酸性岩ほど低い。したがって，Yが最も低く，Zが最も高い。

生成温度
塩基性岩ほど高い。

④　溶岩の粘性の大小は，塩基性ほど小さく酸性ほど大きい。したがって，粘性の大きい方はYである。 $\boxed{10}$…②

溶岩の粘性
塩基性ほど小さい。

B　変成岩

変成岩には広域変成岩と接触変成岩がある。今回は接触変成岩をテーマに取り上げた。

問5　接触変成岩として覚えておけばよいのは，ホルンフェルスと大理石(結晶質石灰岩)の二つである。接触変成岩は，源岩としっかり結びつけて覚えておく必要がある。前者は砕屑(さいせつ)岩である泥岩，後者は生物岩または化学岩である石灰岩で，方解石からなる。 $\boxed{11}$ …⑥

問6　①　ホルンフェルスは角(つの)のように緻密(ちみつ)で硬いが，大理石はそれほど硬くはない。

②　鉱物が一定方向に並ぶ性質を片理という。鉱物は，圧力が大きく加わったときに一定方向に並ぶ。片理は結晶片岩のような広域変成岩には発達するが，圧力の影響がほとんどない条件下で形成された接触変成岩には見られない。

③　接触変成作用は熱変成作用とも呼ばれ，マグマの熱が原因で鉱物が再結晶する。鉱物が再結晶するため，化石が残ることはほとんどない。

④　ホルンフェルスは源岩が泥岩であり，固体のまま化学反応によって新しい鉱物が生じることが多い。これに対し，大理石は石灰岩と同じ方解石がおもな構成鉱物である。大理石の場合は，方解石が大きく成長している。接触変成岩中の鉱物は方向性をもたず，これをモザイク状組織と呼ぶ。 $\boxed{12}$ …②

接触変成岩

泥　岩 ⟶ ホルンフェルス

石灰岩 ⟶ 大理石
(結晶質石灰岩)

第3問　地質断面図　問題

地層は，基本的に下から上へと堆積(たいせき)物が積み重なって形成され，後から生じる断層や褶曲(しゅうきょく)などの運動や火成岩の貫入などによって変形・変成されることがある。地質断面図では，地層や断層などの形成の順序が比較的読み取りやすい。問題文に示された特徴をよく読み，図もよく見て，問題の地域の地質構造を把握しよう。

問1　クリノメーターは，地層や断層の走向と傾斜を測定する器具である。走向とは，層理面(断層面)と水平面の交線の方向を示したものである。走向を測定する際は，①のようにクリノメーターを水平に保ち，長辺を断層面にあてる。

このとき，断層面と接した長辺の方向が走向である。クリノメーターの盤面のＥとＷを逆に表記することで，走向に関しては，磁針が指した盤面の表記(方角と角度)をそのまま読めばよいようになっている(図３－１)。問題の断層Ｆの走向はＮ30°Ｅであるため，クリノメーターの盤面では，④のように示される。

$\boxed{13}$ …①
$\boxed{14}$ …④

走　向

層理面(断層面)と水平面の交線の方向。真北を基準とする。

傾斜の向き

層理面(断層面)が下がっていく方位。

傾斜の角度

層理面(断層面)と水平面とがなす角度。

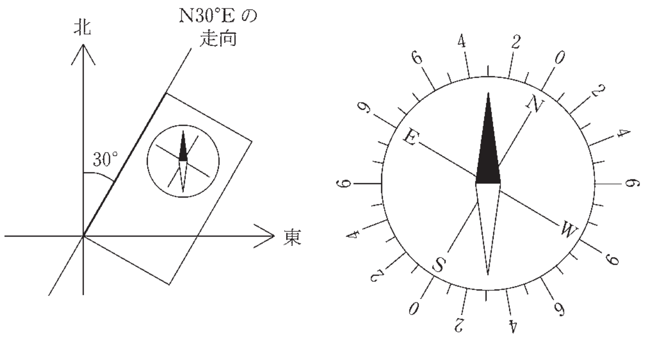


図３－１　クリノメーターと走向

問２　走向と傾斜の記号は，走向の方向を長い線で，傾斜の方向を短い線で表す(図３－２)。水平層は＋の記号で表し，垂直層は走向を示す長い線とそれに直交する短い線で表す。Ａ層は水平層であるため，選択肢ｂが該当する。Ｂ層の走向はNS，傾斜は30°Eであるため，選択肢ｃが該当する。なお，選択肢ａは走向EWの垂直層，選択肢ｄは走向N30°E，傾斜30°SEの記号である。

$\boxed{15}$ …③

問３　地点Ｑは地点Ｐと同じ標高にあり，露頭の面積もほぼ同じである。Ａ層は水平層であるため，地点Ｐと同じ標高に現れる。したがって，Ａ層の分布は①か④になる。Ｂ層は南北方向の走向であるため，南北方向に広がる露頭では水平に現れる(図３－３)。また，傾斜の向きは東向きであるため，Ｂ層中で鍵(かぎ)層となる凝灰岩層を基準に考えると，地点Ｐより東側にある地点Ｑでは，Ｂ層が地点Ｐよりも低い所に現れる(図３－３)。したがって，①が正解となる。なお，Ｂ層の傾斜角が30°，ＰＱ間の水平距離が50ｍであるため，凝灰岩層は，地点Ｑでは地点Ｐより約30ｍ下がった，高さ20ｍ付近に現れる。

$\boxed{16}$ …①

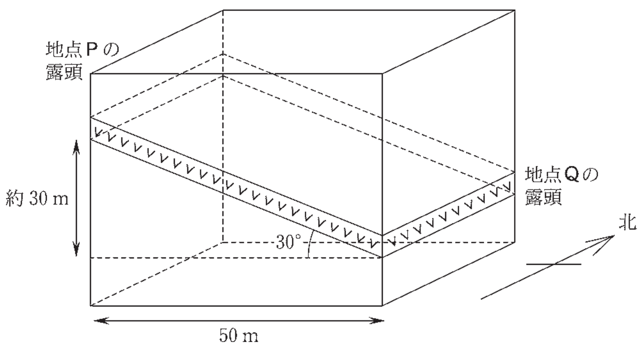


図３－３　凝灰岩層（Ｂ層）の分布

問４　Ｂ層に含まれるカヘイ石(ヌンムリテス)は，新生代古第三紀の示準化石，Ｄ層に含まれるイノセラムスは，中生代ジュラ紀～白亜紀の示準化石である。おもな示準化石の地質時代は必ず確

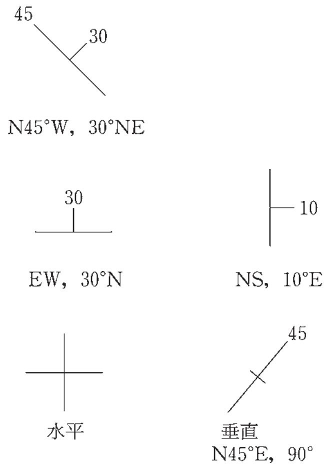


図３－２　走向・傾斜の記号
（紙面の上方を北とする。）

鍵　層
離れた地域に分布する地層の対比の手がかりとなる地層。
例　火山灰層，凝灰岩層など

示準化石
地層が形成した時代を推定するのに役立つ化石。

認しておこう(表３－１)。 **17** …③

表３－１　おもな示準化石と絶対年代

<table>
<tr><td rowspan="3">新生代</td><td>第四紀</td><td colspan="2">ナウマンゾウ，マンモス，
オオツノジカ</td><td></td></tr>
<tr><td>新第三紀</td><td>デスモスチルス</td><td rowspan="2">ビカリア</td><td>260 万</td></tr>
<tr><td>古第三紀</td><td>カヘイ石
(ヌンムリテス)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">中生代</td><td>白亜紀</td><td rowspan="2">イノセラムス</td><td rowspan="3">恐竜
アンモナイト
トリゴニア
(三角貝)</td><td>6550 万</td></tr>
<tr><td>ジュラ紀</td><td></td></tr>
<tr><td>三畳紀</td><td>モノチス</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">古生代</td><td>ペルム紀</td><td rowspan="2">紡錘虫(フズリナ)</td><td rowspan="6">三葉虫
筆　石</td><td>2.5 億</td></tr>
<tr><td>石炭紀</td><td></td></tr>
<tr><td>デボン紀</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>シルル紀</td><td>クサリサンゴ
ハチノスサンゴ</td><td></td></tr>
<tr><td>オルドビス紀</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>カンブリア紀</td><td>バージェス動物群
(アノマロカリスなど)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">先カンブリア時代</td><td colspan="2">エディアカラ動物群</td><td>5.4 億</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td>46 億年</td></tr>
</table>

問５　各層は，下位より，Ｄ層→Ｃ層→Ｂ層→Ａ層の順に堆積している。断層Ｆは，Ｃ層とＤ層をずらしているため，Ｃ層・Ｄ層より後に生じているが，Ｂ層によって覆われているため，Ｂ層より前に生じたことがわかる。

Ｇ岩体は，Ｃ層・Ｄ層に接触変成作用を及ぼしているため，Ｃ層・Ｄ層より後に貫入しており，断層Ｆを切っているため，断層Ｆの後に貫入したことがわかる。また，Ｇ岩体の放射年代(絶対年代)は約 7500 万年であることから，中生代に形成されたことがわかる(表３－１)。したがって，Ｇ岩体は，新生代の示準化石であるカヘイ石(ヌンムリテス)を含むＢ層の形成以前に固結したと考えられる。以上のことから，Ｄ層→Ｃ層→断層Ｆ→Ｇ岩体→Ｂ層(→Ａ層)の順序となる。 **18** …⑤

問６　①・②　問題図２では，Ａ層とＢ層は見かけ上，平行不整合に見えているが，問題文中に走向・傾斜が異なっていることが記載されているため，傾斜不整合の関係である。Ａ層の底面である不整合面の上には基底礫岩が分布している。Ｇ岩体はＡ層の形成以前に固結していることから，何らかの理由で地表に露出した際，侵食されて礫となり，運搬されてＡ層の最下部に基底礫岩として含まれる可能性がある。よって，いずれも正しい。基底礫岩は，不整合面の直上に分布し，基底礫岩を含む地層より以前に形成された地層・岩体に由来する礫からなる。

③　下位のＤ層は中生代に形成されており，Ｃ層・Ｄ層ともに，中生代に形成されたＧ岩体による接触変成作用を受けてい

不整合

下位の地層の堆積と上位の地層の堆積の間に時間的な隔たりがある場合の地層の関係。

傾斜不整合

上位と下位の走向・傾斜が異なる地層の関係。

基底礫岩

不整合面の直上に分布する礫。下位の地層や岩体に由来する。

る。したがって，D層の後に堆積した上位のC層も中生代に形成され，D層と同じ地質時代である中生代の化石を含む可能性がある。よって，正しい。

④　C層とD層の地層境界線のずれ方から，断層Fは，上盤である北側の地盤が相対的に上昇(あるいは，下盤である南側の地盤が相対的に下降)した逆断層である。よって，誤りである。図3－4で，断層の種類と上盤・下盤の動き，および力のはたらく向きを確認しておこう。 $\boxed{19}$ …④

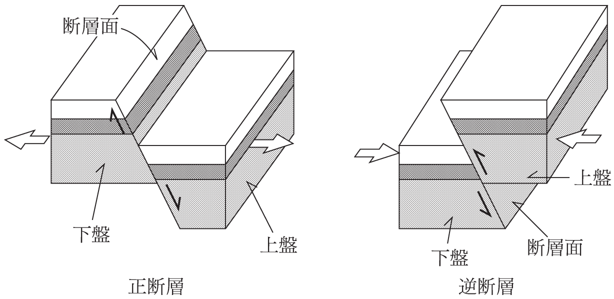


図3－4　断層の種類
白矢印は力の向きを示す。

第4問　大気と海洋　問題

A　大気圏

地球大気圏の構造と大気の組成に関する問題である。地球大気圏は気温変化によって区分されている。問題表1に示した気温を手がかりにしてグラフを描いて考えよう。また，この気温変化は，太陽放射の吸収とも関係があり，それぞれの気圏における太陽放射の吸収の特徴と関連づけておいてほしい。

大気圏の区分
気温変化によって区分される。

問1　①　問題表1に示した高度100 kmが地球大気の上限ではない。地球大気はこれよりも高くまで広がり，国際宇宙ステーション(ISS)の軌道278～460 km付近も大気圏内である。ISSの軌道の高度は，大気との摩擦や重力によって絶えず低下しているので，毎年数回，より高い高度に上昇させていることからも，この高度に大気が存在することがわかる。地球重力によって大気が引きつけられているのは高度約500 kmまで，それより上空では，大気は電離状態にあり，地磁気によって地球に引きつけられている。

問題表1中の成層圏界面の高度47 kmが，表1中の最も高い高度100 kmの47％に相当するので，大気の質量も47％を占めるという考え方は誤りである。大気の密度は，上空に向かうにつれて指数関数的に小さくなっている。つまり，上空に向かって空気は急激に薄くなっているのである。したがって，高度だけでは大気の質量比は判断できない。

問題表1中の気圧に注目する。気圧というのは，一定面積に加

わる空気の重さであり，重さは空気の質量に比例する。

成層圏界面の気圧は 1.1 hPa，地表の気圧は 1000 hPa であるから，対流圏と成層圏に存在する空気によって，約 999 hPa の気圧が生じており，これは地表の気圧 1000 hPa の 99.9 ％に相当する。つまり，質量比で地球大気全体の 99.9 ％が対流圏と成層圏に存在するのである。したがって，この選択肢は誤りである。

なお，対流圏について同様の計算をすると，対流圏には約 78 質量％の大気が存在することになる。

② 大気圏の気温分布を表すと図 4 － 1 のようになる。気温の上昇・低下の傾向が変化するところが各圏界面であるから，大気圏中で最も気温が低いのは，中間圏界面付近である。よって，この選択肢は正しい。

③ 対流圏～中間圏の大気の組成は，窒素(N_2)，酸素(O_2)，アルゴン(Ar)の 3 種類で 99 ％以上を占める。対流圏～中間圏の範囲の大気の組成比はほぼ一定であるので，よく混ざり合っている。よって，この選択肢は正しい。

なお，熱圏では軽い原子や分子の割合が高くなり，170 km よりも上空では酸素原子，1000 km よりも上空ではヘリウム原子が多くなる。

④ 地表付近の気圧は水平方向に変化しているが，高気圧や低気圧，台風の気圧の値から考えれば，大きく見積もっても 200 hPa 程度の変化である。それに比べれば，問題表 1 の鉛直方向の気圧変化は著しく大きい。よって，この選択肢は正しい。なお，地表付近の水平方向の気圧変化は，約 870 hPa ～約 1084 hPa の間である。

$\boxed{20}$ …①

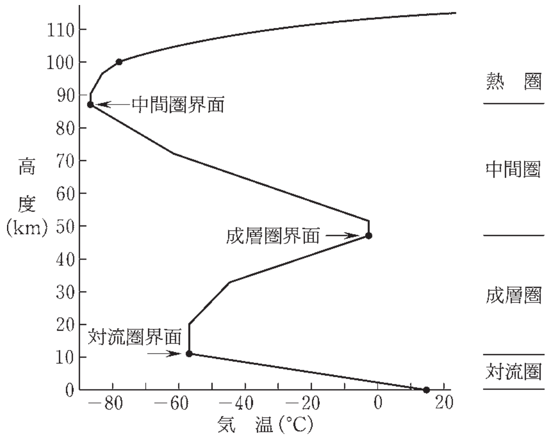


図 4 － 1　大気圏の気温分布

問 2 上空ほど気温が低下している領域は，図 4 － 1 からわかるように，対流圏と中間圏である。 $\boxed{21}$ …②

問 3 ① 地上付近の風が吹いていく向きと逆向きに摩擦力がはた

大気の組成

対流圏～中間圏は，ほぼ同じ組成比。
窒素＞酸素＞アルゴン＞二酸化炭素
(N_2 ＞ O_2 ＞ Ar ＞ CO_2)

気温減率

高度が上がるとともに気温が低下する割合。対流圏では，約 6.5 °C/km。

らく点は正しい記述であるが，それによって気温を上昇させるような熱は発生しない。

② 地球のエネルギー収支の内訳は，次の図４－２のようになっている。図中の太陽放射 100 の内訳を見ると，大気・雲の吸収が 20，地表の吸収が 49 である。つまり，太陽の光が当たると，大気よりも地表の方が顕著に暖められるのである。この暖められた地表から大気へとエネルギーが輸送されるので，その影響を最も強く受ける地表付近の大気の気温が高くなるのである。

太陽放射の吸収量
地表が約 50 %，大気が約 20 %。

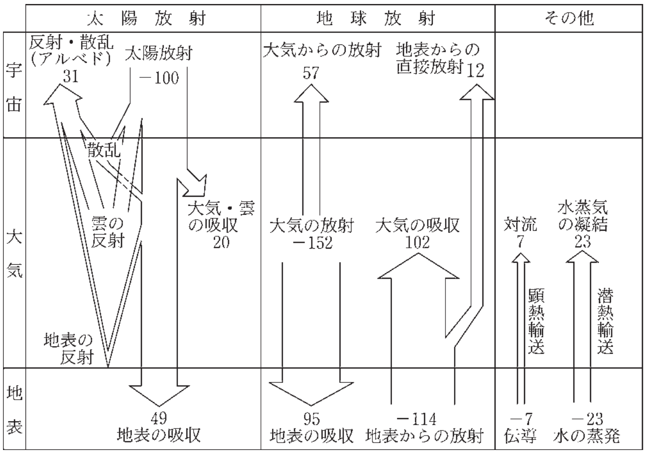


図４－２ 地球のエネルギー収支

③ 太陽放射の紫外線を吸収したオゾン層は成層圏の空気を暖める。そのため，成層圏では高度とともに気温が高くなっているが，その熱が地表付近にまで影響を与えているわけではない。

④ 太陽放射のＸ線や紫外線を吸収した電離層は，熱圏の空気を暖める。そのため，熱圏では高度とともに気温が高くなっているが，その熱が地表付近にまで影響を与えているわけではない。

$\boxed{22}$ …②

成層圏の気温上昇
オゾン層が太陽放射中の紫外線を吸収して気温が上昇している。

熱圏の気温上昇
電離層が太陽放射中のＸ線や紫外線を吸収して気温が上昇している。

B 大気と海洋の相互作用

大気と海洋は密接に結びついている。貿易風や偏西風は，海水を引きずることによって海流を生じさせる。また，海洋は蒸発によって大気中へ熱を供給する。海洋からの蒸発量は，おもに冬季に乾燥した季節風が吹く日本付近や北アメリカ大陸の東縁部で特に多い。さらに，海洋は大気中の気体を吸収したり，放出したりする。例えば，化石燃料の燃焼によって放出された二酸化炭素の半分程度は海洋によって吸収されている。

問４ ハドレー循環とは，熱帯収束帯から上昇した空気が上空で高緯度へ向かい，亜熱帯高圧帯で下降して貿易風となって熱帯収束帯へ戻ってくる大気の循環である（図４－３）。貿易風は北半球では北東貿易風，南半球では南東貿易風となっている。 $\boxed{23}$ …③

ハドレー循環
低緯度から高緯度へ向かって輸送される鉛直方向の循環。

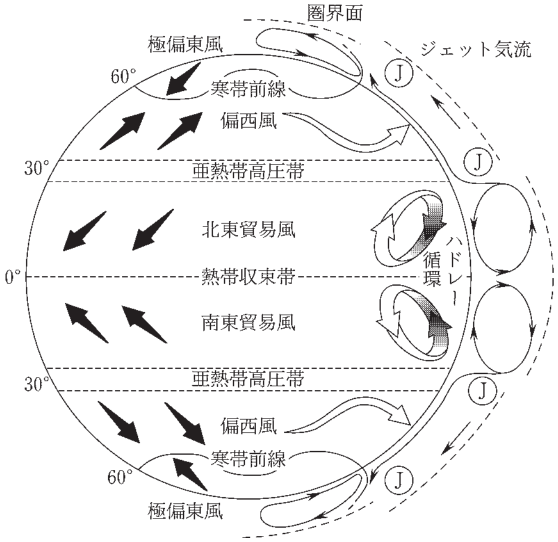


図４－３　大気大循環の模式図

問５　南半球では南東貿易風によって南赤道海流が生じ，表層の海水は西方向に流れるとともに，海流全体では南方向にも海水が移動する。同じことは，北半球の北東貿易風によっても生じている。北半球では北東貿易風によって北赤道海流が生じるが，表層の海水は西方向へ流れるとともに，海流全体では北方向にも海水が移動している。つまり，北半球と南半球の貿易風によって，海流は表層では西(ア)へ流れるが，深部まで含めると高緯度(イ)へも海水が移動している。

問題図１は海面水温の分布を表しており，低緯度ほど水温は高く，高緯度ほど水温は低くなっている。南米ペルー沿岸から南太平洋赤道域中部にかけて水温分布を表す等温線が西に凸となっている海域は，周囲よりも水温が低い(ウ)。

南米のペルー沿岸では，南東貿易風によって海水が沖方向に持ち去られ，深層から栄養塩に富んだ冷水が湧(わ)き上がっている。これを沿岸湧昇(ゆうしょう)という(図４－４)。このため，沿岸湧昇が生じているペルー沿岸のみならず，それより西方にも海面水温が低い海域が広がっている。

24 …③

海水の移動

風が吹いていく向きに対して，北半球では右向き，南半球では左向きに，表層では45°，海流全体では90°の向きに移動する。

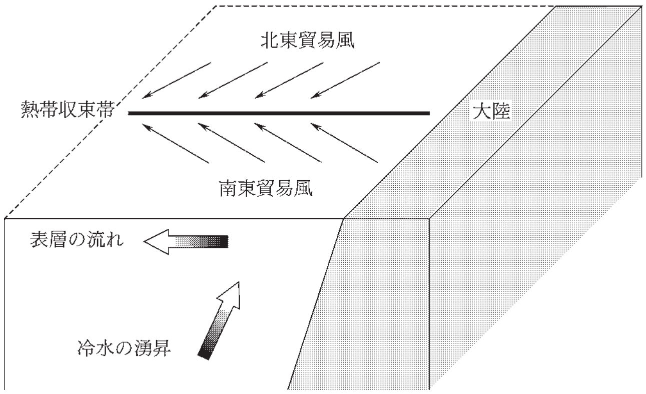


図４－４　沿岸湧昇

問６　高温の海域では，大気が暖められて上昇気流が生じやすい。つまり，周囲から風が吹き込みやすい状況になり，気圧は低くなっている。逆に，低温の海域では，気圧は高くなっている。問題図１は 25 ℃の数値しか与えていないが，これより低緯度では高温，高緯度では低温である。そして南太平洋赤道域では，低温の海域は東部に広がり，高温の海域は西部に広がっているので，東部の気圧が高く，西部の気圧が低い。海面水温の差が大きくなると，大気の気温差も大きくなり，それによって気圧差も大きくなる。

毎年，クリスマスの頃になると貿易風が弱まり，栄養塩に富んだ冷水の湧き上がりが止まる。このため，プランクトンが少なくなり，それをエサとするカタクチイワシなどの数も少なくなって，漁民は休漁の期間に入る。これを現地ではエルニーニョと呼んでいる。貿易風はやがて強まるのが通常であるが，貿易風の弱まりが長期間続くと，南太平洋赤道域東部から中部にかけて冷水の湧き上がりが止まり，海水温が例年に比べて高い状況が続くようになる。これをエルニーニョ現象という。

エルニーニョ現象は大気にも影響を及ぼし，世界的に気候に変化が生じる。ペルーでは降水量が増加し，インドネシアでは干ばつになりやすい。また，日本では暖冬や冷夏になりやすい。

$\boxed{25}$ …①

海面水温と海面気圧の関係

海面水温	海面気圧
高い	低い
低い	高い

エルニーニョ現象

貿易風の弱まりが原因。

ペルー沖でカタクチイワシなどの漁獲量が激減する。

日本では暖冬や冷夏になりやすい。

第５問　太陽と恒星　問題

A　太陽

太陽表面の諸現象とその影響および恒星としての太陽の性質について出題した。この分野では，太陽各部の構造と表面現象について整理することと，スペクトル型や表面温度などを他の恒星と関連づけて理解しておくことが必要である。

問１　図５－１に示したように，中心部で発生したエネルギーは，Ｘ線・γ（ガンマ）線として表層部に向かう。この層を放射層という。エ

恒星としての太陽

スペクトル型：Ｇ型

表面温度：約 6000 K

半径：約 70 万 km

（地球の約 109 倍）

絶対等級：約５等級

ネルギーが表層に近づくと，上部との温度差によって対流が生じ，エネルギーはここから対流によって表面に伝わる。この層を対流層という。対流によってエネルギーが湧(わ)き上がるところは，上部のガスの温度が上がるために明るく，沈み込むところは熱を奪われるために暗く見える。この温度差によって生じた明暗が粒状斑(はん)(**ア**)であり，粒状斑に埋めつくされて見えるガスの層が光球である。

光球は，厚さが約 300 km のガス体で，表面温度は約 6000 K である。太陽をはじめ，一般に恒星の表面温度は，この光球の表面温度を指す。白斑は，周囲より 500 ～ 600 K ほど温度が高いために白く見える光球表面の領域である。強い磁力線によって対流が妨げられると黒点が生じるが，そこで上昇できなかったエネルギーが白斑から放出されて高温となっていると考えられている。

光球を覆う厚さ数千 km の大気を彩層という。彩層の温度は 5000 ～ 1 万 K である。通常は観察できないが，皆既日食の際に紅色に輝く姿を観察できることがある。なお，2012 年 5 月 21 日に日本で金環日食が起きたが，金環日食の輪は彩層ではなく，月が隠しきれなかった光球の一部である。

紅炎(プロミネンス)は，彩層から吹き出すガスの塊が炎のように見える現象である。フレア(**イ**)は彩層の一部が突然明るくなる現象(問題図 2)で，黒点の近くで発生することが多い。一種の爆発現象であると考えられ，発生時には強いX線や紫外線と大量の荷電粒子を放出する。

26 …④

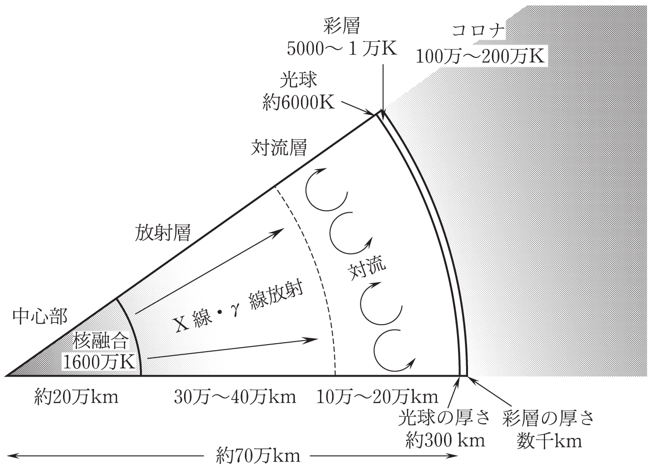


図５－１　太陽の構造

問２　①・②　太陽の見かけの等級は −26.7 等級である。問題文に示した10 パーセクは絶対等級の基準となる距離なので，10 パーセクの距離から観察した見かけの等級は，絶対等級に等しい。太陽の絶対等級は約 5 等級なので，10 パーセクの距離から見ると，見かけの等級は，5−(−26.7)≒32 等級大きくなる。もちろ

粒状斑
光球を埋めつくす粒状の模様。対流で生じた温度差が原因。

光　球
可視光で観察できる太陽の表面。温度は約 6000 K。

彩　層
光球を覆う厚さ数千 km の希薄な大気層。

フレア
彩層の一部が急激に光度を増す現象。黒点の近くで発生しやすい。

絶対等級
恒星を 10 パーセクの距離においたときの明るさ。

ん太陽の絶対等級を知らなくても，遠く離れれば等級が大きく(＝暗く)なることは理解できるはずである。よって，①・②は誤りである。

③　スペクトル型は，恒星の連続スペクトル中に見られる吸収線(暗線)の出現型を基準に分類したものである。図５－２のようにＯ～Ｍの７型に大別され，太陽はＧ型に分類される恒星である。また，各型は０～９の10段階に分類されており，問題表１に記したA0やA2はこうした分類によるものである。吸収線は，恒星の大気を構成する分子や原子，イオンなどが特定の波長の電磁波を吸収するために見られるもので，恒星の大気の温度を反映している。よって，スペクトル型は恒星の表面温度を表していることになる。また，特定の波長を吸収する性質から，距離が変化して見かけの明るさが変わっても，連続スペクトル上での吸収線の位置は変化しないので，スペクトル型も変わらない。よって，③も誤りである。

④　表面温度が高いほど放射される電磁波の最大強度の波長が短くなるため，表面温度が高い恒星は青白く，温度が低い恒星は赤く見える(図５－２)。太陽はＧ型であり，黄色く見えるので，④が正解である。　$\boxed{27}$ …④

表面温度(K)	29000	9600	7200	6000	5300	3900	
スペクトル型	O	B	A	F	G	K	M
恒星の色	青	青白	白	淡黄	黄	橙(だいだい)	赤

図５－２　恒星の表面温度とスペクトル型，および一般的な恒星の色

連続スペクトル
　太陽や恒星から放射される可視光線を波長によって分光したもの。

吸収線
　恒星のスペクトル中に現れる暗線。

スペクトル型
　吸収線の出現型から恒星を分類したもの。

問３　太陽の黒点は，光球面において周囲の温度より1000～1500 Kほど低いために暗く見える部分である。光球面を貫く強い磁力線によって対流が妨げられ，内部からのエネルギーが伝わりにくくなるためだと考えられている。問題図３を見るとわかるように，黒点数は約11年周期で増減を繰り返している。特に黒点数が多い時期を太陽活動極大期，黒点数が少ない時期を太陽活動極小期といい，極大期には波長の短い電磁波の放射が強くなり，フレアや紅炎が多く発生するなど，太陽活動と連動している。

①　黒点で抑えられたエネルギーは白斑などの別の領域から放出されるので，太陽が放射する全エネルギーが減るわけではない。逆に黒点の多い時期の方が太陽活動は活発で，地球が受けるエネルギーもわずかに大きい。よって，誤りである。

②　極大期にはフレアの発生頻度が大きくなる。フレアが発生すると太陽風が強くなり，地球の磁場を乱す磁気嵐(あらし)や荷電粒子(太陽風)が地球大気と反応して発光するオーロラの発生頻度が増す。またＸ線の放射が強くなるため，地球大気の電離密度が変化し，通信障害を引き起こすデリンジャー現象も発生する。よっ

太陽の黒点
　光球面より温度が低いため暗く見える領域。

太陽活動極大期
　太陽の黒点数が極大となる時期。フレアや紅炎の発生が増え，太陽風も強くなる。逆は，太陽活動極小期。

フレアによる地球への影響
　強い太陽風によるもの
　　磁気嵐・オーロラ
　Ｘ線によるもの
　　デリンジャー現象

て，これが正解である。

③　①で述べたように，黒点が増えても放射される全エネルギー量はほとんど変化しないので，表面温度の平均は変わらず，スペクトル型にも変化はない。よって，誤りである。

④　問題図３から，太陽の黒点は約 11 年周期で増減を繰り返していることが判断できる。また，核融合で発生したエネルギーが対流層に達するまで数十万年かかるといわれており，黒点数の変化が，現在中心部で起きている核融合の状態を直接反映しているわけではない。よって，誤りである。　$\boxed{28}$ …②

核融合

複数の原子核が融合し，新たな原子をつくる反応。太陽の場合，４個の水素原子核が融合して１個のヘリウム原子核がつくられる際に大きなエネルギーが放出される。

B　恒　星

年周視差，恒星の等級と光度および距離との関係，HR 図について出題した。計算問題が出題されることも多いので，問題演習を繰り返すことが大切である。

問４　比較的近距離の恒星は，地球の公転によって見える方向が変わるため，１年周期で天球上の位置が移動する。この最大移動量の半分が年周視差で，地球と太陽が恒星を挟む角度である（図５－３）。年周視差が 1″ のときの距離を１パーセクといい，年周視差と恒星までの距離は反比例する。１パーセクは約 3.3 光年なので，ベガの年周視差 0.13″ より，

$$\frac{3.3}{0.13} \fallingdotseq 25.4 \fallingdotseq 25 \text{（光年）}$$

となる。　$\boxed{29}$ …⑤

年周視差

地球の公転がもたらす天球上の恒星の位置のずれ。恒星までの距離に反比例する。

１パーセク

年周視差 1″ のときの距離。

１パーセク≒3.3 光年

太陽から恒星までの距離

$$= \frac{1}{\text{年周視差}(″)} \text{パーセク}$$

$$\fallingdotseq \frac{3.3}{\text{年周視差}(″)} \text{光年}$$

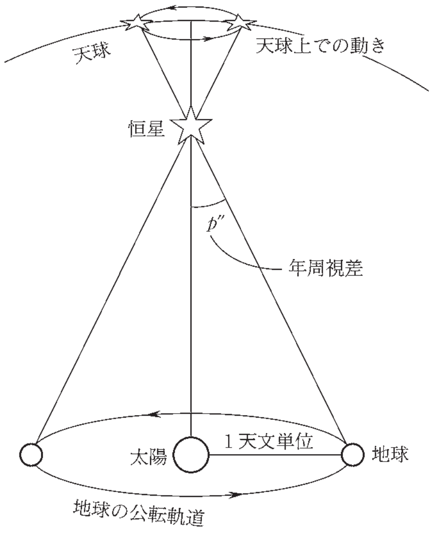


図５－３　地球の公転によって観測される年周視差

問５　恒星の明るさは恒星から放射される全エネルギーに比例する。スペクトル型が同じであっても，表面積が大きい恒星ほど放射する全エネルギーも大きくなるため明るく見える。巨星の絶対等級が小さく（＝明るく），白色矮（わい）星の絶対等級が大きい（＝暗い）

のはこのためである(図5－4)。

① デネブは白色矮星ではない。白色矮星は，表面温度は高いが半径が小さいため，絶対等級は大きく(＝暗く)なるので誤りである。

② デネブもベガも同じスペクトル型のA型なので，表面温度の差はほとんどない。よって，デネブの明るさを説明する理由にはならないので誤りである。

③ 半径が大きければ表面積も大きくなるので，これが正解である。なお，表面積は半径の2乗に比例するので，恒星から放射される全エネルギーも半径の2乗に比例する。

④ 絶対等級は，恒星を10パーセクの距離においたときの明るさなので，距離の違いで絶対等級が変わることはない。よって，誤りである。しかもデネブは，見かけの等級の方が絶対等級より大きい。よって，他の二つの恒星とは異なり，10パーセクよりも遠い位置にあることがわかる。このことからも誤りである。

$\boxed{30}$ …③

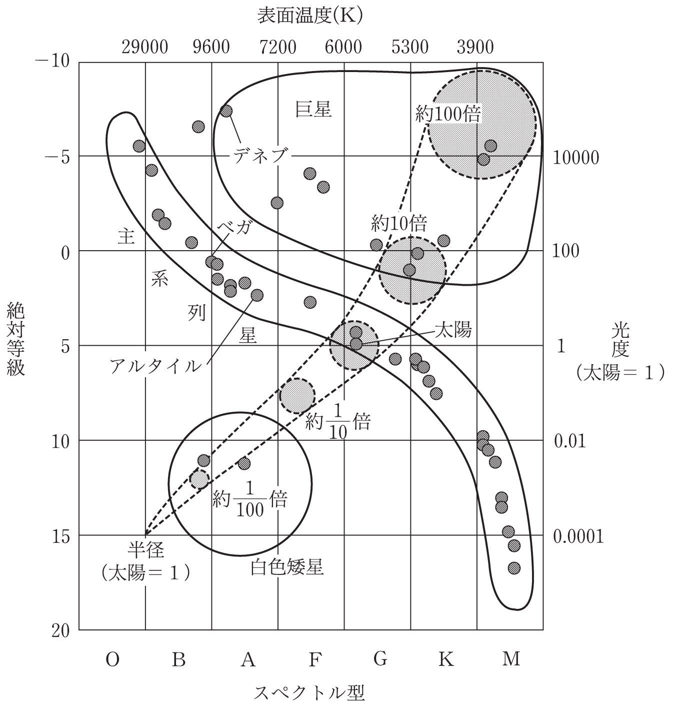


図5－4 HR図

恒星の半径を示す円は，大きさの違いを模式的に示したもので，正確な大きさの比で描いてはいない。

問6 問題図5に示したHR図には絶対等級の数値とスペクトル型の一部が記されていない。HR図の横軸はスペクトル型を表しており，左からO－B－A－F－G－K－Mであり，表面温度が高い方から低い方へ順に並ぶ。縦軸は絶対等級で，上位ほど小

HR図

横軸にスペクトル型，縦軸に絶対等級をとったグラフに恒星をプロットしたもの。

さく(＝明るく)なる。また，HR 図上にプロットされる恒星は，その位置から大きく三つのグループに分けられる(図５－４)。問題図５では，②と⑤が主系列星，①と③が巨星，④が白色矮星に該当する。太陽はG型の主系列星なので，A型の三つの恒星は太陽より左側に位置する。よって，右側に位置する③と⑤は誤りである。また**問5**より，デネブは白色矮星ではないので④も誤りである。ベガと同じA型で絶対等級が約８等級も小さい(＝明るい)デネブは，主系列星であるベガよりかなり上に位置するはずであり，②が除外される。よって，①が正解である。

なお，図５－４の HR 図には，光度(太陽＝１)，表面温度と恒星の半径(太陽＝１)の目安も加えておいたので参考にしてほしい。

$\boxed{31}$ …①

© Kawaijuku 2012 Printed in Japan

無断転載複写禁止・譲渡禁止