クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度　全統マーク高２模試

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2013年２月実施】

本冊子の解答・採点基準をもとに自己採点を行ってください。「自己採点シート」は学習の手引き｛英語｝編冊子の巻末にありますのでご利用ください。

河合塾

【数 学 ①】

数 学 Ⅰ

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\frac{\sqrt{\text{アイ}}-\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$	2	
	オカ	-3	2	
	キク	11	2	
	ケ	0	2	
	コサシ	118	2	
	スセ$<x<$ソタ	$-4<x<-2$	2	
	$x<$チ，$\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}<x$	$x<0$，$\frac{1}{2}<x$	2	
	$\frac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$	$\frac{-1}{2}$	3	
	ヌ	8	3	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	ア$a+$イ	$-a+6$	3	
	$\frac{a-\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{a-4}{4}$	2	
	$-\frac{a^2}{\text{オ}}+$カ	$-\frac{a^2}{8}+4$	2	
	$\frac{a-\text{キ}}{\text{ク}}$	$\frac{a-2}{2}$	2	
	ケ	2	3	
	コ	4	2	
	サ	8	2	
	シス$a+$セソ	$-2a+12$	3	
	タ$-$チ$\sqrt{\text{ツ}}$	$8-4\sqrt{3}$	3	
	テ$\sqrt{\text{ト}}$	$4\sqrt{3}$	3	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{2}{7}$	3	
	ウ	9	3	
	$\frac{\text{エオ}\sqrt{\text{カ}}}{\text{キク}}$	$\frac{21\sqrt{5}}{10}$	3	
	ケコ$\sqrt{\text{サ}}$	$12\sqrt{5}$	3	
	シ$\sqrt{\text{ス}}$	$3\sqrt{5}$	4	
	セ	6	4	
	$\frac{\text{ソ}\sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}$	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$	4	
	$\frac{\text{ツテト}}{\text{ナニ}}\pi$	$\frac{128}{15}\pi$	6	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	$-\frac{\text{アイ}}{2}\leqq x\leqq\frac{\text{ウ}}{2}$	$-\frac{11}{2}\leqq x\leqq\frac{9}{2}$	3	
	$-$(エ$a+$オ)(カ$a-$キ)	$-(5a+1)(3a-2)$	3	
	$\frac{\text{クケ}}{\text{コ}}$	$\frac{-3}{5}$	3	
	$\frac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\frac{4}{3}$	3	
	$\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\frac{1}{8}$	4	
	$\frac{\text{ソタチ}}{\text{ツ}}$	$\frac{-13}{8}$	4	
	テ	2	5	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第１問　方程式・不等式

〔１〕　２次方程式 $x^2+3x-1=0$ の二つの解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=\boxed{\text{オカ}},\quad \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\boxed{\text{キク}}$$

である．

$m\leqq\alpha<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，$n\leqq\dfrac{1}{\alpha^4}<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{コサシ}}$ である．

〔２〕　k を実数とし，x についての二つの不等式

$$|x+3|<1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$|4x-1|>2k+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える．

(1)　① の解は

$$\boxed{\text{スセ}}<x<\boxed{\text{ソタ}}$$

であり，$k=0$ のとき，② の解は

$$x<\boxed{\text{チ}},\quad \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}<x$$

である．

また，すべての実数 x に対して ② が成り立つような k の値の範囲は

$$k<\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である．

(2)　① と ② をともに満たす実数 x が存在しないような k の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$ である．

【解説】　問題

〔１〕　数学Ⅰ・数学A 第１問〔１〕に同じである．

〔２〕

(1)　① より，

$$-1<x+3<1$$

であるから，① の解は，

$$\boxed{-4}<x<\boxed{-2}$$

☜　$a>0$ のとき，不等式 $|X|<a$ の解は，

$$-a<X<a$$

である．

であり，$k=0$ のとき ② は，

$$|4x-1|>1$$

すなわち

$$4x-1<-1,\ 1<4x-1$$

となるから，② の解は，

$$x<\boxed{0},\quad \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}<x$$

である．

☜ 不等式 $|X|>a$ の解は，$a\geqq 0$ のとき，
$$X<-a,\ a<X$$
であり，$a<0$ のとき，
すべての実数
である．

また，すべての実数 x に対して ② が成り立つような k の値の範囲は，

$$2k+1<0$$

すなわち

$$k<\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$$

である．

(2) ① と ② をともに満たす実数 x が存在しないとき，(1) より，

$$k\geqq -\frac{1}{2}$$

でなければならず，このとき ② の解は，

$$4x-1<-(2k+1),\quad 2k+1<4x-1$$

より，

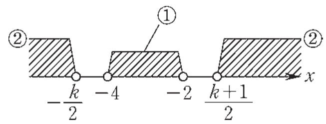
$$x<-\frac{k}{2},\quad \frac{k+1}{2}<x$$

である．

☜ $k<-\frac{1}{2}$ のとき，② はすべての実数 x に対して成立し，① と ② をともに満たす x は，
$$-4<x<-2$$
となる．

① の解は $-4<x<-2$ であるから，① と ② をともに満たす実数 x が存在しないような k の条件は，

$$-\frac{k}{2}\leqq -4 \quad かつ \quad -2\leqq\frac{k+1}{2}$$

☜ 

すなわち

$$k\geqq 8 \quad かつ \quad k\geqq -5$$

より，

$$k\geqq 8$$

であるから，求めるk の最小値は，

$$\boxed{8}$$

である．

第 2 問　2 次関数

問題

数学Ⅰ・数学A 第 2 問に同じである．

第 3 問　図形と計量

△ABC を AB$=8$，CA$=7$，$\sin\angle\text{BAC}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ である鋭角三角形とする．

(1)　$\cos\angle\text{BAC}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，　BC$=\boxed{\text{ウ}}$

である．また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，△ABC の面積は

$\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(2)　△ABC の外接円の点 C を含まない弧 AB 上に，直線 AB と直線 CD が垂直になるように点 D をとり，直線 AB と直線 CD の交点を E とする．このとき

CE$=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$，　BE$=\boxed{\text{セ}}$

であり

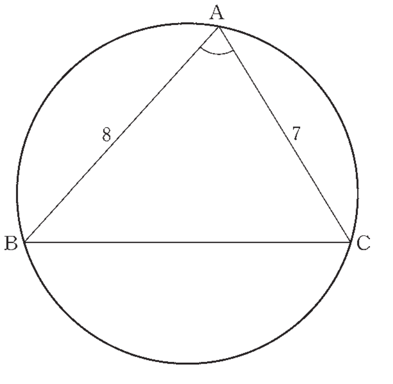
$\tan\angle\text{EDB}=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$

である．

△ADB を直線 AB を軸として 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}\pi$ である．

【解説】　問題

(1)



△ABC は鋭角三角形であるから，$\sin\angle\text{BAC}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，

$$\cos\angle \mathrm{BAC}=\sqrt{1-\sin^2\angle \mathrm{BAC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{7}}$$

である。

☜ $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

　△ABC に余弦定理を用いると，

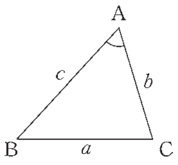
$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle \mathrm{BAC}$$
$$=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\frac{2}{7}$$
$$=81$$

であり，BC>0 であるから，

$$\mathrm{BC}=\boxed{9}$$

である。

☜ **余弦定理**



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

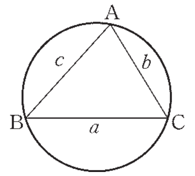
$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle \mathrm{BAC}}$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle \mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{9}{2\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}}$$
$$=\frac{\boxed{21}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{10}}$$

である。

☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

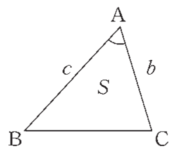
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

　また，

$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle \mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}$$
$$=\boxed{12}\sqrt{\boxed{5}}$$

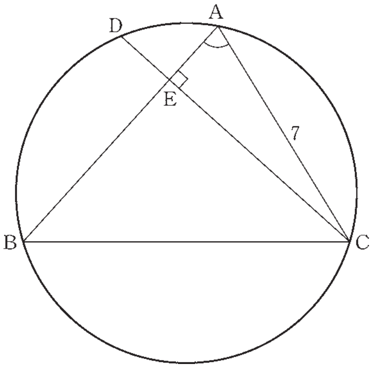
である。

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

(2)



△AEC は直角三角形であるから，

$$\frac{CE}{CA}=\sin\angle BAC$$

☜　$\angle EAC=\angle BAC$.

であり，

$$CE=CA\sin\angle BAC$$
$$=7\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}$$
$$=\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

☜　$(\triangle ABC の面積)=\frac{1}{2}AB\cdot CE$

より，

$$12\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot CE$$
$$CE=3\sqrt{5}$$

としてもよい．

また，

$$\frac{AE}{CA}=\cos\angle BAC$$

であり，

$$AE=CA\cos\angle BAC$$
$$=7\cdot\frac{2}{7}$$
$$=2$$

であるから，

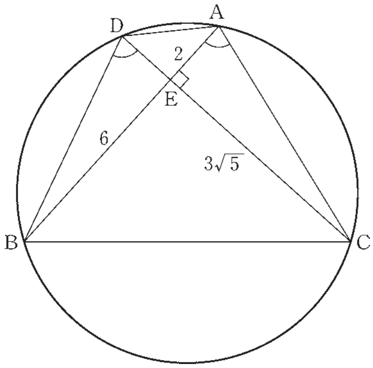
$$BE=AB-AE$$
$$=8-2$$
$$=\boxed{6}$$

である．

☜　直角三角形 EBC において，

$$BE=\sqrt{BC^2-CE^2}$$
$$=\sqrt{9^2-(3\sqrt{5})^2}$$
$$=6$$

としてもよい．



円周角の性質より，

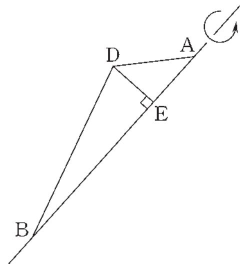
$$\angle \mathrm{EDB}=\angle \mathrm{EAC}$$

☜　弧 BC に対する円周角.

であるから，

$$\begin{aligned}\tan\angle \mathrm{EDB}&=\tan\angle \mathrm{EAC}\\&=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}}\\&=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．



△ADB を直線 AB を軸として 1 回転してできる立体の体積は,「直角三角形 ADE を線分 AE を軸として 1 回転してできる円錐」と「直角三角形 BDE を線分 BE を軸として 1 回転してできる円錐」の体積の和に等しい.

求める立体の体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{3}\mathrm{DE}^2\cdot\mathrm{AE}+\frac{\pi}{3}\mathrm{DE}^2\cdot\mathrm{BE}\\&=\frac{\pi}{3}\mathrm{DE}^2(\mathrm{AE}+\mathrm{BE})\\&=\frac{\pi}{3}\mathrm{DE}^2\cdot\mathrm{AB}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

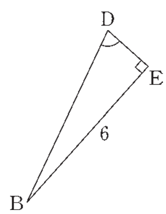
☜　底面が半径 r の円で高さが h の円錐の体積は，

$$\frac{\pi}{3}r^2h.$$

である.

ここで，

$$\tan\angle \mathrm{EDB}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DE}}$$



であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}&=\frac{\mathrm{BE}}{\tan\angle \mathrm{EDB}}\\&=\frac{6}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{4}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

である.

① より，

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot 8\\&=\frac{\boxed{128}}{\boxed{15}}\pi\end{aligned}$$

である.

第４問　方程式・不等式

(1)　x の２次不等式

$$4x^2+4x-99\leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解は

$$-\frac{\boxed{アイ}}{2}\leqq x\leqq \frac{\boxed{ウ}}{2}$$

である。

(2)　a を実数とし，x の２次方程式

$$x^2+(2a+3)x-15a^2+7a+2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。ここで

$$-15a^2+7a+2=-\left(\boxed{エ}a+\boxed{オ}\right)\left(\boxed{カ}a-\boxed{キ}\right)$$

である。

(i)　② が $x=2$ を解にもつのは

$$a=\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}},\ \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

のときである。

(ii)　② が重解をもつのは

$$a=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

のときであり，重解は $\dfrac{\boxed{ソタチ}}{\boxed{ツ}}$ である。

(iii)　$a\neq\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ とすると，② は異なる二つの実数解をもつ。そのうち一方だけが ① を満たすような整数 a の値は全部で $\boxed{テ}$ 個ある。

【解説】

問題

(1)　$$4x^2+4x-99\leqq 0 \qquad \cdots ①$$

の左辺を因数分解すると，

$$(2x+11)(2x-9)\leqq 0$$

であるから，不等式 ① の解は，

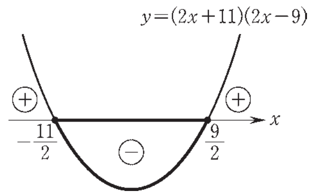
$$-\frac{\boxed{11}}{2}\leqq x\leqq \frac{\boxed{9}}{2}$$

である。

☜

2	11 ⟶	22
2	−9 ⟶	−18
4	−99	4

☜



(2) $-15a^2+7a+2=-(15a^2-7a-2)$

$$=-\left(\boxed{5}\,a+\boxed{1}\right)\left(\boxed{3}\,a-\boxed{2}\right)$$

☜ $\begin{array}{ccccc} 5 & \times & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & & -2 & \longrightarrow & -10 \\ \hline 15 & & -2 & & -7 \end{array}$

であるから，

$$x^2+(2a+3)x-15a^2+7a+2=0 \qquad \cdots②$$

すなわち

$$x^2+(2a+3)x-(5a+1)(3a-2)=0$$

の左辺を因数分解すると，

$$\{x+(5a+1)\}\{x-(3a-2)\}=0$$

☜ $\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 5a+1 & \longrightarrow & 5a+1 \\ 1 & & -(3a-2) & \longrightarrow & -3a+2 \\ \hline 1 & & -(5a+1)(3a-2) & & 2a+3 \end{array}$

であるから，方程式 ② の解は，

$$x=-5a-1,\ 3a-2$$

である．

(i) 方程式 ② が $x=2$ を解にもつのは，

$$-5a-1=2,\quad 3a-2=2$$

より，

$$a=\frac{\boxed{-3}}{\boxed{5}},\ \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$$

のときである．

☜ 次のようにしてもよい．
$x=2$ のとき ② は成り立つから，

$$2^2+(2a+3)\cdot2-15a^2+7a+2=0$$
$$15a^2-11a-12=0$$
$$(5a+3)(3a-4)=0.$$

よって，

$$a=-\frac{3}{5},\ \frac{4}{3}.$$

(ii) 方程式 ② が重解をもつのは，

$$-5a-1=3a-2$$

より，

$$a=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

のときであり，重解は，$x=-5a-1$ より，

$$-5\cdot\frac{1}{8}-1=\frac{\boxed{-13}}{\boxed{8}}$$

である．

☜ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつ条件

$$b^2-4ac=0$$

を用いて，

$$(2a+3)^2-4(-15a^2+7a+2)=0$$
$$64a^2-16a+1=0$$
$$(8a-1)^2=0$$
$$a=\frac{1}{8}$$

としてもよい．

☜ $x=3a-2$ より，

$$3\cdot\frac{1}{8}-2=-\frac{13}{8}$$

としてもよい．

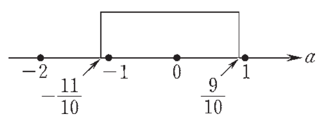
(iii) $x=-5a-1$ が不等式 ① を満たすとき，

$$-\frac{11}{2}\leqq-5a-1\leqq\frac{9}{2}$$
$$-\frac{9}{2}\leqq-5a\leqq\frac{11}{2}$$
$$-\frac{11}{10}\leqq a\leqq\frac{9}{10}$$

が成り立ち，これを満たす整数は，

$$a=-1,\ 0 \qquad \cdots③$$

である．

☜ 

$x=3a-2$ が不等式 ① を満たすとき，

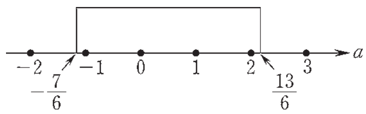
$$-\frac{11}{2}\leqq3a-2\leqq\frac{9}{2}$$

$$-\frac{7}{2} \leqq 3a \leqq \frac{13}{2}$$

$$-\frac{7}{6} \leqq a \leqq \frac{13}{6}$$

が成り立ち，これを満たす整数は，

$$a = -1,\ 0,\ 1,\ 2 \quad \cdots④$$ ☜



である．

③, ④ より，方程式 ② の異なる 2 つの実数解のうち一方だけが不等式 ① を満たすような整数 a は，

$$a = 1,\ 2$$

☜ $a \neq \frac{1}{8}$ を満たす．

の $\boxed{\ 2\ }$ 個である．

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\frac{\sqrt{アイ}-ウ}{エ}$	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$	2	
	オカ	-3	2	
	キク	11	2	
	ケ	0	2	
	コサシ	118	2	
	(スセ, ソタ)	$(-8,\ -4)$	2	
	$\left(チ,\ \frac{ツ}{テ}\right)$	$\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$	2	
	ト	1	2	
	ナ	0	2	
	ニ	2	2	
	第1問 自己採点小計		(20)	
第2問	アa+イ	$-a+6$	3	
	$\frac{a-ウ}{エ}$	$\frac{a-4}{4}$	2	
	$-\frac{a^2}{オ}+カ$	$-\frac{a^2}{8}+4$	2	
	$\frac{a-キ}{ク}$	$\frac{a-2}{2}$	2	
	ケ	2	3	
	コ	4	2	
	サ	8	2	
	シスa+セソ	$-2a+12$	3	
	タ−チ$\sqrt{ツ}$	$8-4\sqrt{3}$	3	
	テ$\sqrt{ト}$	$4\sqrt{3}$	3	
	第2問 自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{2}{7}$	3	
	ウ	9	3	
	$\frac{エオ\sqrt{カ}}{キク}$	$\frac{21\sqrt{5}}{10}$	3	
	ケコ$\sqrt{サ}$	$12\sqrt{5}$	3	
	$\frac{シスセ}{ソタ}$	$\frac{-11}{21}$	3	
	$\sqrt{チツ}$	$\sqrt{21}$	3	
	テ$\sqrt{ト}$	$4\sqrt{5}$	3	
	$\frac{ナニ}{ヌ}$	$\frac{63}{4}$	3	
	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{1}{3}$	3	
	$\frac{\sqrt{ハヒ}}{フ}$	$\frac{\sqrt{21}}{2}$	3	
	第3問 自己採点小計		(30)	
第4問	アイウ	220	3	
	エオ	12	3	
	カ	3	3	
	キクケ	144	3	
	コサ	24	3	
	$\frac{シ}{スセソ}$	$\frac{3}{220}$	3	
	$\frac{タチ}{ツテ}$	$\frac{16}{55}$	3	
	$\frac{トナニ}{ヌネノ}$	$\frac{191}{110}$	4	
	第4問 自己採点小計		(25)	
	自己採点合計		(100)	

第１問　方程式・不等式，集合・論理

〔１〕　２次方程式 $x^2+3x-1=0$ の二つの解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=\boxed{\text{オカ}},\quad \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\boxed{\text{キク}}$$

である．

$m\leqq\alpha<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，$n\leqq\frac{1}{\alpha^4}<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{コサシ}}$ である．

〔２〕

(1)　$$(x+3\sqrt{2})(4-y\sqrt{2})=x+5y\sqrt{2}$$

を満たす有理数 x，y は

$$(x,\ y)=\left(\boxed{\text{スセ}},\ \boxed{\text{ソタ}}\right),\ \left(\boxed{\text{チ}},\ \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

である．

(2)　次の $\boxed{\text{ト}}$ ～ $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

有理数 a，b に関する条件 p，q，r，s を次のように定める．

p ： $ab=0$

q ：$(a+b\sqrt{2})(b+a\sqrt{2})$ は有理数

r ：$(a+b\sqrt{2})^2$ は有理数

s ： $a\sqrt{b^2+1}$，$b\sqrt{a^2+1}$ の少なくとも一方は無理数

また，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す．このとき

p は q であるための $\boxed{\text{ト}}$．

p は r であるための $\boxed{\text{ナ}}$．

s は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{ニ}}$．

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない

③　必要条件でも十分条件でもない

【解説】

問題

〔1〕

2 次方程式 $x^2+3x-1=0$ の解は，

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

☜ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c は実数）の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

である．このうち，大きい方が α であるから，

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{13}}-\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

である．

このとき，

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{13}-3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{13}+3)}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}$$

$$=\frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

であるから，

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}-\frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

$$=\boxed{-3}$$

である．

よって，

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=(-3)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=9$$

☜ $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

より，

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\boxed{11}$$

である．

$3<\sqrt{13}<4$ より，

$$\frac{3-3}{2}<\frac{\sqrt{13}-3}{2}<\frac{4-3}{2}$$

$$0<\alpha<\frac{1}{2}$$

☜ $\alpha=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$.

であるから，$m\leqq\alpha<m+1$ を満たす整数 m は，

$$\boxed{0}$$

である．

また，

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2=11^2$$

$$(\alpha^2)^2+2\alpha^2\cdot\frac{1}{\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2=121$$

☜ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

より，

$$\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}=119$$

である．

　$0<\alpha<1$ より，

$$0<\alpha^4<1$$

であるから，

$$0<119-\frac{1}{\alpha^4}<1$$

すなわち

$$118<\frac{1}{\alpha^4}<119.$$

　よって，$n\leqq\frac{1}{\alpha^4}<n+1$ を満たす整数 n は，

$$\boxed{118}$$

である．

〔2〕

(1)　$$(x+3\sqrt{2})(4-y\sqrt{2})=x+5y\sqrt{2}$$

より，

$$(4x-6y)+(12-xy)\sqrt{2}=x+5y\sqrt{2}$$

であり，$4x-6y$，$12-xy$，x，$5y$ は有理数であるから，

$$\begin{cases}4x-6y=x,\\ 12-xy=5y\end{cases}$$

☜ m，m'，n，n' が有理数のとき，
$m+n\sqrt{2}=m'+n'\sqrt{2}$
$\Longleftrightarrow$「$m=m'$ かつ $n=n'$」.

すなわち

$$\begin{cases}x=2y, & \cdots①\\ xy+5y-12=0 & \cdots②\end{cases}$$

である．

　① を ② に代入すると，

$$(2y)y+5y-12=0$$
$$2y^2+5y-12=0$$
$$(y+4)(2y-3)=0$$

となり，

$$y=-4,\ \frac{3}{2}$$

である．

　これと ① より，

$$(x,\ y)=\left(\boxed{-8},\ \boxed{-4}\right),\ \left(\boxed{3},\ \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\right)$$

である．

(2) 条件 p について，

$$ab=0 \iff 「a=0 \text{ または } b=0」.$$

条件 q について，

$$(a+b\sqrt{2})(b+a\sqrt{2}) \text{ は有理数}$$
$$\iff 3ab+(a^2+b^2)\sqrt{2} \text{ は有理数}$$
$$\iff a^2+b^2=0$$
$$\iff 「a=0 \text{ かつ } b=0」.$$

☜ m，n が有理数のとき，
$m+n\sqrt{2}$ が有理数
$\iff n=0$.

条件 r について，

$$(a+b\sqrt{2})^2 \text{ は有理数}$$
$$\iff a^2+2b^2+2ab\sqrt{2} \text{ は有理数}$$
$$\iff 2ab=0$$
$$\iff 「a=0 \text{ または } b=0」.$$

よって，

「$p \Rightarrow q$」は偽，

「$q \Rightarrow p$」は真

☜ 反例は $a=0$，$b=1$.

である．

したがって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でないから，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

また，

「$p \Rightarrow r$」は真，

「$r \Rightarrow p$」は真

である．

したがって，p は r であるための必要十分条件であるから，

$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

「$s \Rightarrow \overline{r}$」と「$r \Rightarrow \overline{s}$」の真偽は一致し，「$\overline{r} \Rightarrow s$」と「$\overline{s} \Rightarrow r$」の真偽は一致する．

☜ 命題とその対偶の真偽は一致する．

ここで，$\overline{s}$ は，

$$a\sqrt{b^2+1},\ b\sqrt{a^2+1} \text{ がともに有理数}$$

である．

「$a=0$ または $b=0$」のとき，

☜ $r \iff 「a=0 \text{ または } b=0」$.

$$a=0 \text{ ならば } \begin{cases} a\sqrt{b^2+1}=0, \\ b\sqrt{a^2+1}=b, \end{cases}$$

$$b=0 \text{ ならば } \begin{cases} a\sqrt{b^2+1}=a, \\ b\sqrt{a^2+1}=0 \end{cases}$$

であるから，$a\sqrt{b^2+1}$，$b\sqrt{a^2+1}$ はともに有理数となり，

「$r \Rightarrow \overline{s}$」は真

である．

「$a=\dfrac{3}{4}$ かつ $b=\dfrac{3}{4}$」とすると，

$$a\sqrt{b^2+1}=\frac{15}{16} \text{ かつ } b\sqrt{a^2+1}=\frac{15}{16}$$

であり，$a\sqrt{b^2+1}$，$b\sqrt{a^2+1}$ はともに有理数となるので，

「$\overline{s} \Rightarrow r$」は偽　　　☜　反例は「$a=\frac{3}{4}$ かつ $b=\frac{3}{4}$」.

である．

したがって，

「$s \Rightarrow \overline{r}$」は真，

「$\overline{r} \Rightarrow s$」は偽

である．ゆえに，s は $\overline{r}$ であるための十分条件であるが，必要条件でないから，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

第2問　2次関数

a，b を定数とし，$a>0$ とする．2次関数

$$y=2x^2-(a-4)x+b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフ G は点 A$(-1,\ 4)$ を通る．このとき

$$b=\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}$$

であり，G の頂点を P とすると，P の座標は

$$\left(\frac{a-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ -\frac{a^2}{\boxed{\text{オ}}}+\boxed{\text{カ}}\right)$$

である．

(1)　G 上の y 座標が 4 である点の x 座標は -1 と $\dfrac{a-\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，点 $\left(\dfrac{a-\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 4\right)$ を B とすると，AB$=2$ のとき，△PAB の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(2)　関数 ① の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を M，最小値を m とする．

(i)　$M>4$ となるような a の値の範囲は

$$0<a<\boxed{\text{コ}}$$

である．

(ii)　$M=4$ のとき

$\boxed{\text{コ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{サ}}$ ならば $m=-\dfrac{a^2}{\boxed{\text{オ}}}+\boxed{\text{カ}}$

$\boxed{\text{サ}}<a$ ならば　　$m=\boxed{\text{シス}}a+\boxed{\text{セソ}}$

である．

(iii)　$M-m=6$ となるのは

$$a=\boxed{\text{タ}}-\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\ \text{または}\ a=\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$$

のときである．

【解説】　問題

$$y=2x^2-(a-4)x+b. \qquad \cdots ①$$

G が A$(-1,\ 4)$ を通るとき，

$$4=2(-1)^2-(a-4)(-1)+b$$

すなわち

$$b=\boxed{-}a+\boxed{6}$$

である．

このとき，① は，

$$y=2x^2-(a-4)x-a+6 \qquad \cdots②$$
$$=2\left(x-\frac{a-4}{4}\right)^2-2\left(\frac{a-4}{4}\right)^2-a+6$$
$$=2\left(x-\frac{a-4}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+4$$

となるから，G の頂点 P の座標は，

$$\left(\frac{a-\boxed{4}}{\boxed{4}},\ -\frac{a^2}{\boxed{8}}+\boxed{4}\right)$$

である。

☜ 放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は，
$$(p,\ q).$$

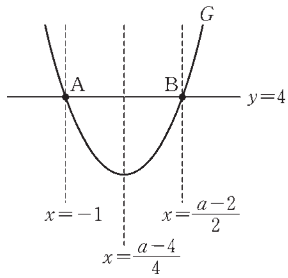
(1) G 上の y 座標が 4 である点の x 座標は，② において $y=4$ とすると，

$$4=2x^2-(a-4)x-a+6$$
$$2x^2-(a-4)x-a+2=0$$
$$(x+1)\{2x-(a-2)\}=0$$

であるから，

$$x=-1,\ \frac{a-\boxed{2}}{\boxed{2}}$$

である。

☜ 

A$(-1,\ 4)$，B$\left(\frac{a-2}{2},\ 4\right)$ であり，$a>0$ より，

$$\frac{a-2}{2}>\frac{-2}{2}=-1$$

であるから，

$$\text{AB}=\frac{a-2}{2}-(-1)=\frac{a}{2}$$

である。

よって，AB$=2$ のとき，

$$\frac{a}{2}=2$$
$$a=4$$

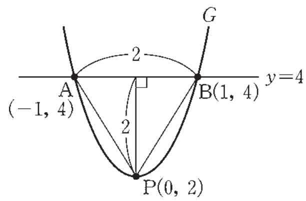
である。

このとき，P$(0,\ 2)$ であるから，

$$(\triangle\text{PAB の面積})=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2$$
$$=\boxed{2}$$

である。

☜ $a=4$ のとき．



(2)
$$f(x)=2x^2-(a-4)x-a+6$$

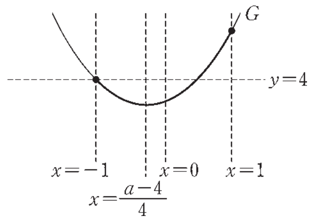
とおく。

(i) $M>4$ となるような a の値の範囲は，

$$\frac{a-4}{4}<0$$

であり，これと $a>0$ より，

☜ $\begin{pmatrix}\text{頂点の}\\ x\text{ 座標}\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}\text{定義域の中央の}\\ x\text{ 座標}\end{pmatrix}.$



$$0 < a < \boxed{4}$$

である．

（注）　G は下に凸であるから M は $f(-1)$ か $f(1)$ であり，

$f(-1)=4$ を考慮し，

$$f(1) > 4$$

としてもよい．

(ii)　$M=4$ となるような a の値の範囲は，

$$\frac{a-4}{4} \geqq 0$$

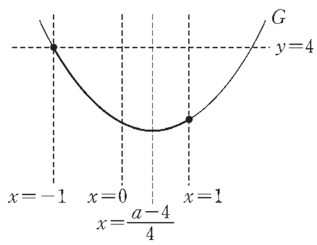
☜　$\begin{pmatrix}\text{頂点の}\\ x\text{ 座標}\end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix}\text{定義域の中央の}\\ x\text{ 座標}\end{pmatrix}$.

$$a \geqq 4$$

である．

$0 \leqq \dfrac{a-4}{4} \leqq 1$　すなわち

☜



$$4 \leqq a \leqq \boxed{8}$$

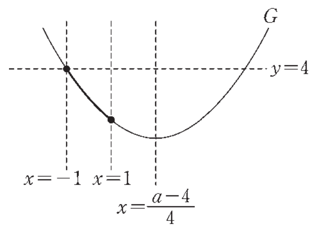
ならば，

$$m=f\left(\frac{a-4}{4}\right)=-\frac{a^2}{8}+4$$

である．

$\dfrac{a-4}{4} > 1$　すなわち

☜



$$8 < a$$

ならば，

$$m=f(1)$$

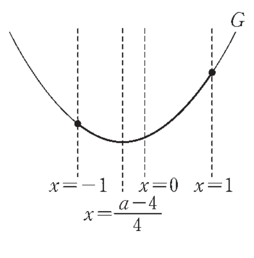
$$=\boxed{-2}\,a+\boxed{12}$$

である．

(iii)　$0 < a < 4$ のとき，

$$-1 < \frac{a-4}{4} < 0$$

☜



であり，

$$M=f(1)=-2a+12,$$

$$m=f\left(\frac{a-4}{4}\right)=-\frac{a^2}{8}+4$$

であるから，$M-m=6$ より，

$$(-2a+12)-\left(-\frac{a^2}{8}+4\right)=6$$

$$a^2-16a+16=0.$$

$0 < a < 4$ より，

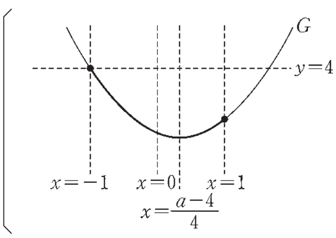
$$a=8-4\sqrt{3}$$

である．

$4 \leqq a \leqq 8$ のとき，

$$0 \leqq \frac{a-4}{4} \leqq 1$$

☜



であり，

$$M=4,$$
$$m=f\left(\frac{a-4}{4}\right)=-\frac{a^2}{8}+4$$

であるから，$M-m=6$ より，

$$4-\left(-\frac{a^2}{8}+4\right)=6$$
$$a^2=48.$$

$4\leqq a\leqq 8$ より，

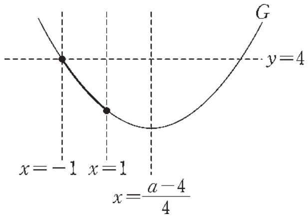
$$a=4\sqrt{3}$$

である．

$8<a$ のとき，

$$1<\frac{a-4}{4}$$

であり，

☜ 

$$M=4,$$
$$m=f(1)=-2a+12$$

であるから，$M-m=6$ より，

$$4-(-2a+12)=6$$
$$a=7.$$

これは $8<a$ を満たさない．

以上より，$M-m=6$ となるのは，

$a=\boxed{8}-\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}$ または $a=\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}$

のときである．

第 3 問　図形と計量・平面図形

$\triangle$ABC を AB$=8$，CA$=7$，$\sin\angle\text{BAC}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ である鋭角三角形とする．

(1)　　$\cos\angle\text{BAC}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，　BC$=\boxed{\text{ウ}}$

である．また，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，$\triangle$ABC の面積は

$\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(2)　$\triangle$ABC の外接円の点 C を含まない弧 AB 上に AD$=$BD となるように点 D をとる．このとき

$\cos\angle\text{ADB}=\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$，　AD$=\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}$

であり，$\triangle$ADB の面積は $\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ である．

直線 AB と直線 CD の交点を E とすると

$\text{DE}\cdot\text{EC}=\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$，　$\dfrac{\text{DE}}{\text{EC}}=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$

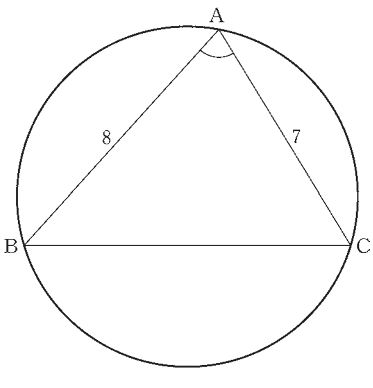
であり，$\triangle$ABC の内接円の中心を I とすると

$\text{EI}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$

である．

【解説】　問題

(1)



$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから，$\sin\angle\text{BAC}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\sin^2\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{7}}$$

である．

☜ $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，
$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

　△ABC に余弦定理を用いると，

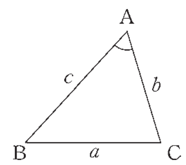
$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\frac{2}{7}$$
$$=81$$

であり，BC＞0 であるから，

$$\mathrm{BC}=\boxed{9}$$

である．

☜ **余弦定理**



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

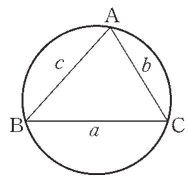
$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{9}{2\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}}$$
$$=\frac{\boxed{21}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{10}}$$

である．

☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

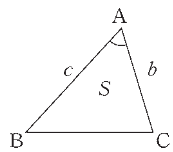
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

　また，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}$$
$$=\boxed{12}\sqrt{\boxed{5}}$$

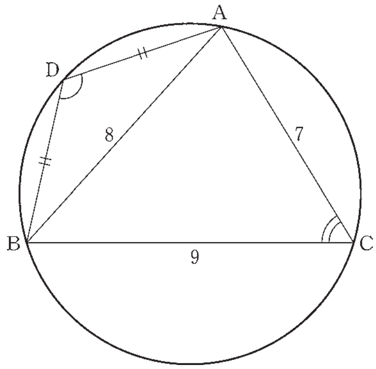
である．

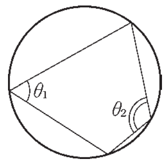
☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

(2)





四角形 ADBC は円に内接し，

$$\angle \mathrm{ADB} + \angle \mathrm{ACB} = 180^\circ$$

☜ 円に内接する四角形の対角の和は 180° である．

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ.$$

であるから，

$$\cos\angle \mathrm{ADB} = \cos(180^\circ - \angle \mathrm{ACB})$$
$$= -\cos\angle \mathrm{ACB} \quad \cdots①$$

☜ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.

である．

△ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle \mathrm{ACB} = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}$$
$$= \frac{9^2 + 7^2 - 8^2}{2\cdot 9\cdot 7}$$
$$= \frac{11}{21}$$

であり，① より，

$$\cos\angle \mathrm{ADB} = \frac{\boxed{-11}}{\boxed{21}}$$

である．

AD＝BD＝x とおき，△ADB に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}\cos\angle \mathrm{ADB}$$
$$8^2 = x^2 + x^2 - 2x\cdot x\left(-\frac{11}{21}\right)$$
$$64 = \frac{64}{21}x^2$$
$$x^2 = 21$$

であり，$x > 0$ より，

$$x = \sqrt{21}$$

すなわち

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\boxed{21}}$$

である．

また，$\cos\angle \mathrm{ADB} = -\dfrac{11}{21}$ より，

$$\sin\angle \mathrm{ADB}=\sqrt{1-\cos^2\angle \mathrm{ADB}}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{21}\right)^2}$$
$$=\frac{8\sqrt{5}}{21}$$

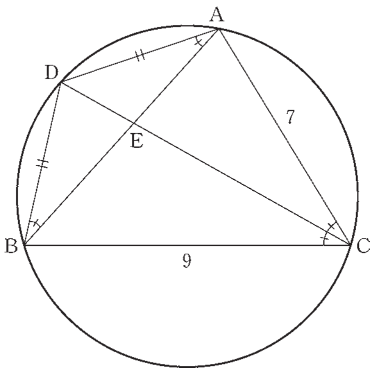
☜ $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき,
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

であるから,

$$(\triangle \mathrm{ADB}\text{の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle \mathrm{ADB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{21}$$
$$=\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}$$

☜ (注1) 参照.

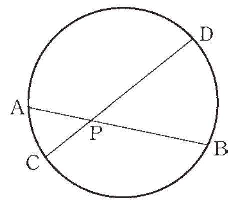
である.



方べきの定理より,

$$\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EC}=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB} \qquad \cdots②$$

☜ **方べきの定理**



$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$.

である.

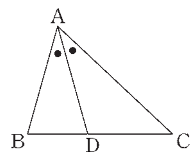
ここで,AD=BD より,

$$\angle \mathrm{ACE}=\angle \mathrm{BCE}$$

であるから,直線 CE は ∠ACB の二等分線であり,

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{AC}:\mathrm{CB}$$
$$=7:9$$

☜ **角の二等分線の性質**



$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$.

(注2) 参照.

である.

よって,

$$\mathrm{AE}=\frac{7}{7+9}\mathrm{AB}=\frac{7}{16}\cdot8=\frac{7}{2},$$
$$\mathrm{EB}=\frac{9}{7+9}\mathrm{AB}=\frac{9}{16}\cdot8=\frac{9}{2}$$

☜ $\mathrm{EB}=\mathrm{AB}-\mathrm{AE}$
$=8-\frac{7}{2}$
$=\frac{9}{2}$
としてもよい.

である.

② より,

$$\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EC}=\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}$$
$$=\frac{\boxed{63}}{\boxed{4}} \qquad \cdots③$$

である．

また，△ADB と △ABC は辺 AB を共有するので，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EC}}=\frac{(\triangle\mathrm{ADB}\text{ の面積})}{(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

☜ (△ADB の面積)$=4\sqrt{5}$，(△ABC の面積)$=12\sqrt{5}$．

である．

このとき，

$$\mathrm{DE}=\frac{1}{3}\mathrm{EC}$$

である．

③ に代入すると，

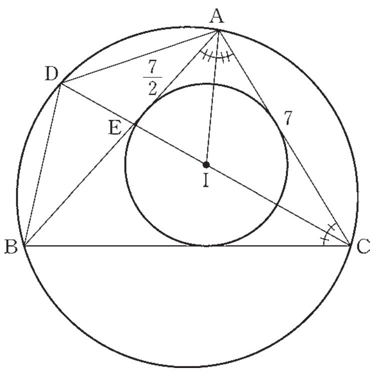
$$\frac{1}{3}\mathrm{EC}\cdot\mathrm{EC}=\frac{63}{4}$$

$$\mathrm{EC}^2=\frac{3^2\cdot 21}{2^2}$$

であるから，EC>0 より，

$$\mathrm{EC}=\frac{3\sqrt{21}}{2}$$

である．



△ABC の内接円の中心 I は ∠ACB の二等分線上，すなわち直線 CE 上にある．また，I は ∠EAC の二等分線上にもある．

☜ 三角形の内接円の中心は，内角の二等分線の交点である．

よって，

$$\mathrm{EI}:\mathrm{IC}=\mathrm{AE}:\mathrm{AC}$$

$$=\frac{7}{2}:7$$

$$=1:2$$

である．

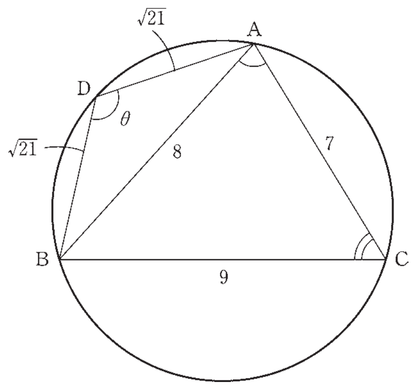
したがって，

$$\mathrm{EI}=\frac{1}{1+2}\mathrm{EC}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{2}}$$

である．

（注１）　△ADB の面積については次のように考えてもよい．

その１）



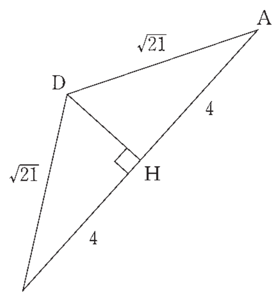
$\angle\mathrm{ADB}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-\theta$ であり，

$$(\triangle\mathrm{ADB}\text{ の面積}):(\triangle\mathrm{ACB}\text{ の面積})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{21})^2\sin\theta:\frac{1}{2}\cdot7\cdot9\sin(180^\circ-\theta)$$
$$=21\sin\theta:7\cdot9\sin\theta$$　☜　$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$．
$$=1:3$$

であるから，

$$(\triangle\mathrm{ADB}\text{ の面積})=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{ACB}\text{ の面積})$$
$$=\frac{1}{3}\cdot12\sqrt{5}$$
$$=4\sqrt{5}.$$

その２）



△ADB は二等辺三角形であるから，D から辺 AB に下ろした

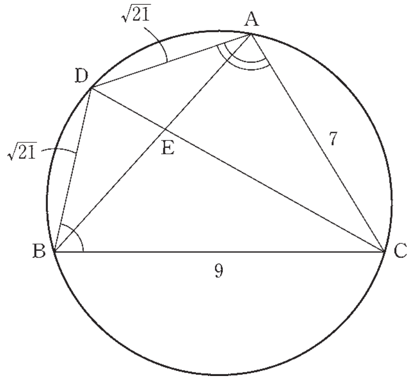
垂線の足を H とすると，H は辺 AB の中点である．

$$\mathrm{DH}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-4^2}=\sqrt{5}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{ADB}\text{ の面積})&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DH}\\&=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{5}\\&=4\sqrt{5}.\end{aligned}$$

（注 2） AE：EB については次のように考えてもよい．



$\angle\mathrm{DAC}=\alpha$ とおくと，$\angle\mathrm{DBC}=180^\circ-\alpha$ である．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}&=\frac{(\triangle\mathrm{ADC}\text{ の面積})}{(\triangle\mathrm{BCD}\text{ の面積})}\\&=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot 7\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot 9\sin(180^\circ-\alpha)}\\&=\frac{7}{9}\end{aligned}$$

すなわち

$$\mathrm{AE}:\mathrm{BE}=7:9.$$

第4問　場合の数・確率

袋の中に赤玉4個，白玉4個，青玉4個の合計12個の玉が入っている．各色の玉には0から3までの番号がつけられている．この袋から同時に3個の玉を取り出す．

3個の玉の取り出し方は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある．

(1) 玉の色が1種類となる取り出し方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りであり，そのうち，玉に書かれた三つの数の和が6になるものは $\boxed{\text{カ}}$ 通りである．

また，玉の色が2種類となる取り出し方は $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りであり，そのうち，2個ある同じ色の玉に書かれた二つの数の積が6となるものは $\boxed{\text{コサ}}$ 通りである．

(2) 得点を次のように定める．

- 取り出した玉の色が3種類のときは1点とする
- 取り出した玉の色が2種類のときは2個ある同じ色の玉に書かれた二つの数の積を得点とする
- 取り出した玉の色が1種類のときは玉に書かれた三つの数の和を得点とする

得点が5点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ であり，得点が1点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{トナニ}}}{\boxed{\text{ヌネノ}}}$ 点である．

【解説】　問題

3個の玉の取り出し方は全部で，

$$
\begin{aligned}
{}_{12}C_3 &= \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \boxed{220}\ (\text{通り})
\end{aligned}
$$

ある．

以下，0が書かれた赤玉を赤0と表し，他の玉についても同様に表すこととする．

(1) 玉の色が1種類となるのは，赤玉を3個，または白玉を3個，または青玉を3個取り出す場合であり，その取り出し方は，

$$
\begin{aligned}
{}_4C_3+{}_4C_3+{}_4C_3 &= 4+4+4\\
&= \boxed{12}\ (\text{通り})
\end{aligned}
$$

である．

そのうち，玉に書かれた3つの数の和が6となる玉の取り出し方の組は次の

$$\boxed{3}\ (通り) \quad \cdots ①$$

である．

{赤1, 赤2, 赤3}

{白1, 白2, 白3}

{青1, 青2, 青3}

玉の色が 2 種類となるのは，取り出した 3 個の玉のうち 2 個が同じ色で残りの 1 個が他の色のときである．

例えば，赤玉を 2 個と他の色の玉を 1 個取り出す場合，その取り出し方は，

$$ {}_4C_2 \cdot {}_8C_1 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot 8 = 48\ (通り)$$

☜ 2 個の赤玉の取り出し方は ${}_4C_2$ 通り．白と青の合計 8 個の玉からの 1 個の玉の取り出し方は ${}_8C_1$ 通り．

である．白玉を 2 個取り出す場合，青玉を 2 個取り出す場合も同様であるから，玉の色が 2 種類となる取り出し方は，

$$48\cdot 3 = \boxed{144}\ (通り)$$

である．

☜ 玉の色が 3 種類となるのは，
$${}_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1 = 64\ (通り)$$
であり，全体から玉の色が 1 種類または 3 種類となる場合を引いて，
$$220-(12+64)=144\ (通り)$$
と求めてもよい．

そのうち，同じ色の玉に書かれた 2 つの数の積が 6 となるのは，同じ色の玉に書かれた数が 2 と 3 のときであり，残りの 1 個の玉の取り出し方も考えると，その取り出し方は，

$$3\cdot{}_8C_1 = 3\cdot 8 = \boxed{24}\ (通り) \quad \cdots ②$$

である．

☜ 2 と 3 が書かれた 2 個の同じ色の玉の組は次の 3 通り．

{赤2, 赤3}

{白2, 白3}

{青2, 青3}

(2) 得点を X とする．

(i) 色が 1 種類のとき．

	玉に書かれた数	X
(ア)	{0, 1, 2}	3
(イ)	{0, 1, 3}	4
(ウ)	{0, 2, 3}	5
(エ)	{1, 2, 3}	6

(ii) 色が 2 種類のとき．

	2 個ある同じ色の玉に書かれた数	X
(ア)	{0, 1}, {0, 2}, {0, 3}	0
(イ)	{1, 2}	2
(ウ)	{1, 3}	3
(エ)	{2, 3}	6

X のとり得る値は $X=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ である．$X=k$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ となる確率を $P(X=k)$ と表す．

$X=5$ となるのは，(i)−(ウ) のときであり，その取り出し方は ① と同様に 3 通りである．

よって，

$$P(X=5)=\frac{\boxed{3}}{\boxed{220}}$$

である．

$X=1$ となるのは，玉の色が 3 種類の場合であり，その取り出し方は，

$$\begin{aligned}{}_4C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_4C_1&=4\cdot4\cdot4\\&=64\ \text{（通り）}\end{aligned}$$

☜ 1 個の赤玉，1 個の白玉，1 個の青玉の取り出し方はいずれも ${}_4C_1$ 通り．

である．

よって，

$$\begin{aligned}P(X=1)&=\frac{64}{220}\\&=\frac{\boxed{16}}{\boxed{55}}\end{aligned}$$

である．

$X=2$ となるのは，(ii)－(イ) のときであり，その取り出し方は ② と同様に 24 通りである．

よって，

$$P(X=2)=\frac{24}{220}$$

である．

$X=3$ となるのは，次の 2 つの場合がある．

- (i)－(ア) のとき．
  その取り出し方は ① と同様に 3 通りである．
- (ii)－(ウ) のとき．
  その取り出し方は ② と同様に 24 通りである．

よって，

$$\begin{aligned}P(X=3)&=\frac{3+24}{220}\\&=\frac{27}{220}\end{aligned}$$

である．

$X=4$ となるのは，(i)－(イ) のときであり，その取り出し方は ① と同様に 3 通りである．

よって，

$$P(X=4)=\frac{3}{220}$$

である．

$X=6$ となるのは，次の 2 つの場合がある．

- (i)－(エ) のとき．
  その取り出し方は ① より 3 通りである．

・(ii)−(エ) のとき．

その取り出し方は ② より 24 通りである．

よって，

$$P(X=6)=\frac{3+24}{220}$$
$$=\frac{27}{220}$$

である．

したがって，得点の期待値は，

$$1\times\frac{64}{220}+2\times\frac{24}{220}+3\times\frac{27}{220}+4\times\frac{3}{220}+5\times\frac{3}{220}+6\times\frac{27}{220}$$
$$=\frac{1}{220}(64+48+81+12+15+162)$$
$$=\frac{\boxed{191}}{\boxed{110}}\ (\text{点})$$

である．

☜ **期待値**

試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$
$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，期待値 E は，

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

（注） $X=0$ となるのは，(ii)−(ア) のときである．

例えば，0 と書かれた玉を含む 2 個の赤玉と他の色の 1 個の玉を取り出す場合，その取り出し方は，

$$3\cdot {}_8C_1=3\cdot 8$$
$$=24\ (\text{通り})$$

である．白玉を 2 個取り出す場合，青玉を 2 個取り出す場合も同様であるから，

$$P(X=0)=\frac{24\cdot 3}{220}$$
$$=\frac{18}{55}$$

である．

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正 解	配点	自己採点
第1問	$t^{ア}-イt$	t^2-8t	2	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	オ	8	2	
	カ	0	2	
	キクケ	-16	2	
	コサ	15	3	
	シ，ス	2，1	3	
	セ	2	1	
	$\frac{ソタチ}{ツ}$	$\frac{-25}{8}$	4	
	$\frac{テト\sqrt{ナ}}{ニ}$	$\frac{-3\sqrt{7}}{8}$	3	
	ヌ，$\frac{ネ}{ノ}$	3，$\frac{5}{3}$	2	
	ハ，ヒ	0，3	4	
	第1問　自己採点小計		(30)	

問題番号	解答記号	正 解	配点	自己採点
第2問	$アx^2-イx-ウ$	$3x^2-2x-1$	2	
	エ	1	3	
	$\frac{オカ}{キク}$	$\frac{59}{27}$	3	
	$ケx+コ$	$-x+2$	2	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{7}{6}$	3	
	ス，セ，ソ，タ，チ	3，2，1，2，2	3	
	ツ，テ	0，1	3	
	ト，ナ，ニ	2，3，2	3	
	$\frac{ヌ}{ネ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ノ}{ハ}$	$\frac{2}{3}$	3	
	$\frac{ヒ}{フ}$	$\frac{1}{4}$	3	
	第2問　自己採点小計		(30)	
第3問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{3}{2}$	1	
	$\frac{ウエ}{オ}$	$\frac{-2}{3}$	2	
	$\frac{カキ}{ク}$	$\frac{13}{3}$	1	
	$\frac{ケコ}{サ}$	$\frac{13}{2}$	1	
	$\frac{シス}{セ}$	$\frac{39}{4}$	2	
	ソ	8	3	
	タチ，ツテ	24，23	2	
	ト，ナニ	8，12	2	
	ヌ	2	2	
	ネ	1	2	
	$\frac{ノ}{ハ}$，$\frac{ヒフ}{ヘ}$	$\frac{2}{3}$，$\frac{17}{6}$	2	
	第3問　自己採点小計		(20)	

問題番号	解答記号	正　　解	配点	自己採点
第4問	アーイa＋b	8－2a＋b	2	
	ウーエa＋オb	7－4a＋2b	2	
	カa＋キ	2a＋1	1	
	ク	0	1	
	ケ	1	2	
	コ，サ，シ	1，2，1	2	
	スーセ$\sqrt{ソ}$	3－2$\sqrt{3}$	2	
	タ	4	1	
	チ	2	2	
	ツ，テ，ト，ナ	4，3，2，3	2	
	ニ	3	3	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第 1 問　指数関数・対数関数，三角関数

問題

数学Ⅱ・数学B 第 1 問 に同じである。

第 2 問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学B 第 2 問 に同じである。

第 3 問　図形と方程式

O を原点とする座標平面上に，円 $C：x^2+y^2=13$ があり，C 上の点 $(2,\ 3)$ を A とする。

直線 OA の傾きは $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であるから，点 A における円 C の接線 ℓ_1 の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}x+\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。また，接線 ℓ_1 と x 軸の交点を B とすると，点 B の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ 0\right)$ である。よって，

三角形 OAB の面積 S は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

次に，点 $(8,\ 12)$ を通り，y 軸に平行でない直線を ℓ_2 とし，その傾きを m とする。ℓ_2 が三角形 OAB の内部を通過するとき，m のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}<m<\boxed{\text{ソ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

である。このとき，ℓ_2 と ℓ_1 の交点を P，ℓ_2 と x 軸の交点を Q とすると

点 P の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}\,m-\boxed{\text{ツテ}}}{3m+2}$

点 Q の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}\,m-\boxed{\text{ナニ}}}{m}$

である。

(1)　三角形 PQB の面積を T とすると，$m=2$ のとき，$T\ \boxed{\text{ヌ}}\ \dfrac{S}{2}$ である。$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

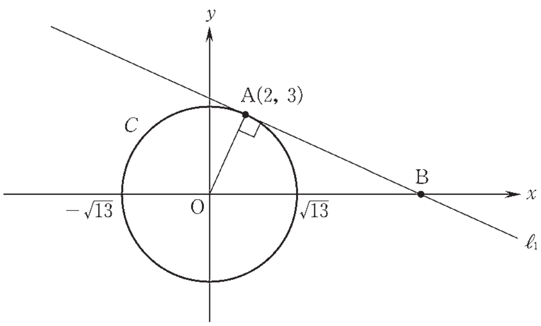
⓪　$<$　　　①　$=$　　　②　$>$

(2)　m が $(*)$ の範囲を変化するとき，三角形 OAQ の重心 G の軌跡は

直線 $y=\boxed{\text{ネ}}$ の $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}<x<\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ を満たす部分

である。

【解説】



直線OAの傾きは $\dfrac{3-0}{2-0}=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$ であるから，点Aにおける円 C の接線 ℓ_1 の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ である．

よって，ℓ_1 の方程式は

$$y-3=-\frac{2}{3}(x-2)$$

より

$$y=\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}x+\frac{\boxed{13}}{\boxed{3}} \quad \cdots ①$$

である．ここで，$y=0$ とすると

$$0=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$$

より

$$x=\frac{13}{2}$$

が得られるので，接線 ℓ_1 と x 軸の交点Bの座標は

$$\left(\frac{\boxed{13}}{\boxed{2}},\ 0\right)$$

である．よって，三角形OABの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot 3=\frac{\boxed{39}}{\boxed{4}} \quad \cdots ②$$

である．

次に，直線 ℓ_2 は点 $(8,\ 12)$ を通り，傾きが m の直線であるから ℓ_2 が点Oを通るとき

$$m=\frac{12-0}{8-0}=\frac{3}{2}$$

であり，また，ℓ_2 が点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{13}{2},\ 0\right)$ を通るとき

☜ **直交条件**

二つの直線

$$y=m_1x+n_1$$
$$y=m_2x+n_2$$

が直交する条件は

$$m_1\cdot m_2=-1.$$

☜ 円：$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における円の接線の方程式が

$$x_1x+y_1y=r^2$$

であることを利用して

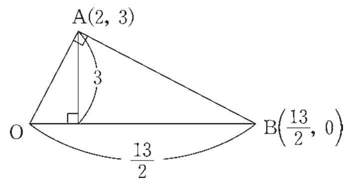
$$2x+3y=13$$

より

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$$

と求めてもよい．

☜



☜ ℓ_2 が点Oを通るとき，ℓ_2 はA(2, 3) も通る．

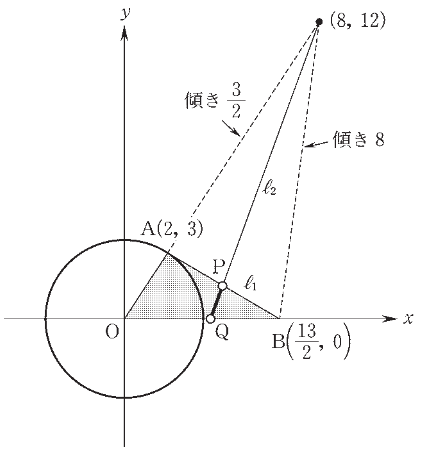
$$m=\frac{12-0}{8-\frac{13}{2}}=8$$

である．

よって図1より，直線 ℓ_2 が三角形OABの内部を通過するとき m のとり得る値の範囲は

$$\frac{3}{2}<m<\boxed{8} \qquad \cdots(*)$$

である．



（図1）

直線 ℓ_2 の方程式は

$$y-12=m(x-8)$$

より

$$y=mx-8m+12 \qquad \cdots③$$

であるから，ℓ_2 と ℓ_1 の交点Pの x 座標は，①と③より

$$mx-8m+12=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$$

☜ ①より直線 ℓ_1 の方程式は $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$ である．

を解くと得られる．これを変形すると

$$(3m+2)x=24m-23$$

より

$$x=\frac{\boxed{24}m-\boxed{23}}{3m+2} \qquad \cdots④$$

☜ (*)より，$3m+2\neq 0$．

である．また，ℓ_2 と x 軸の交点Qの x 座標は，③において $y=0$ を解くと得られるので

$$0=mx-8m+12$$

より

$$x=\frac{\boxed{8}m-\boxed{12}}{m} \qquad \cdots⑤$$

☜ (*)より，$m\neq 0$．

である．

(1)　$m=2$ のとき，点Pの x 座標は④より

$$x=\frac{24\cdot 2-23}{3\cdot 2+2}=\frac{25}{8}$$

である．また，点Pは直線 ℓ_2：$y=2x-4$ 上にあるから点Pの y 座標は

☜　③において，$m=2$ とすると ℓ_2 の方程式は $y=2x-4$ である．

$$y=2\cdot\frac{25}{8}-4=\frac{9}{4}$$

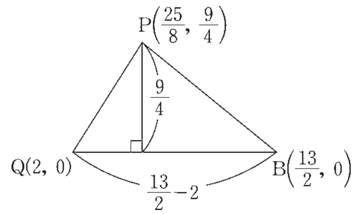
である．さらに，点Qの x 座標は⑤より

$$x=\frac{8\cdot 2-12}{2}=2$$

であるから，三角形PQBの面積 T は

$$T=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{13}{2}-2\right)\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{16}$$

☜



である．②より

$$\frac{S}{2}=\frac{39}{8}$$

であるから，$T>\frac{S}{2}$ が成り立つ．すなわち，$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

☜　$T=\frac{81}{16}>\frac{78}{16}=\frac{39}{8}=\frac{S}{2}$.

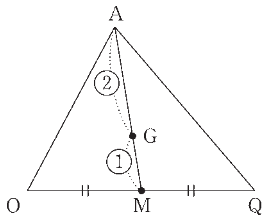
(2)　m が(*)の範囲を変化するとき，点Qは線分OB (両端を除く) 上を動く．よって，線分OQの中点Mは

直線　$y=0$　の　$0<x<\frac{13}{4}$ を満たす部分

☜　直線 $y=0$ は x 軸である．

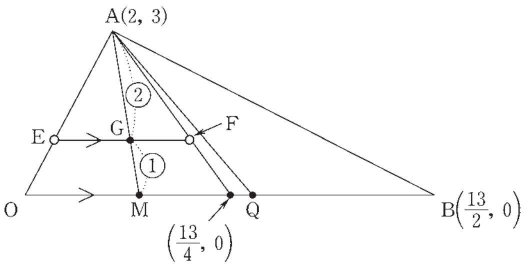
を動く．三角形OAQの重心Gは線分AMを2：1に内分する点であるから，重心Gの軌跡は図2より

☜



直線　$y=\boxed{1}$　の　$\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}<x<\frac{\boxed{17}}{\boxed{6}}$ を満たす部分

である．



(図2)

☜　図2において，EF∥OB であり

点Eの x 座標は $\frac{2}{3}$

点Fの x 座標は

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot\frac{13}{4}}{2+1}=\frac{17}{6}$$

である．

【$\boxed{\text{ネ}}$～$\boxed{\text{ヘ}}$ の別解】

点 Q の x 座標は ⑤ より

$$x=8-\frac{12}{m}$$

であるから，三角形 OAQ の重心 G の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X=\dfrac{0+2+\left(8-\dfrac{12}{m}\right)}{3}=\dfrac{10}{3}-\dfrac{4}{m} & \cdots ⑥ \\ Y=\dfrac{0+3+0}{3}=1 \end{cases}$$

である．よって，重心 G は直線 $y=1$ 上に存在する．また，m が(*)の範囲，すなわち

$$\frac{3}{2}<m<8 \qquad \cdots (*)$$

の範囲を変化するから

$$\begin{aligned}(*) &\iff \frac{1}{8}<\frac{1}{m}<\frac{2}{3} \\ &\iff -\frac{8}{3}<-\frac{4}{m}<-\frac{1}{2} \\ &\iff \frac{2}{3}<\frac{10}{3}-\frac{4}{m}<\frac{17}{6}\end{aligned}$$

である．これと ⑥ より，重心 G の x 座標 X のとり得る値の範囲は

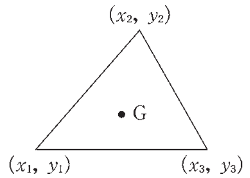
$$\frac{2}{3}<X<\frac{17}{6}$$

である．よって，三角形 OAQ の重心 G の軌跡は

直線 $y=1$ の $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{17}{6}$ を満たす部分

である．

三角形の重心



上の三角形の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

である．

第4問　高次方程式

a, b を実数とし，二つの整式

$$P(x)=x^3-ax^2+ax+b$$

$$Q(x)=2x^2+(a+2b)x-5a+5$$

について考える．

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは $\boxed{ア}-\boxed{イ}a+b$ であり，$Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは $\boxed{ウ}-\boxed{エ}a+\boxed{オ}b$ である．これら二つの余りが一致するとき，b を a を用いて表すと

$$b=\boxed{カ}a+\boxed{キ}$$

である．

以下において，$b=\boxed{カ}a+\boxed{キ}$ とする．

$P(-1)=\boxed{ク}$ であるから，$P(x)$ は

$$P(x)=\left(x+\boxed{ケ}\right)\left\{x^2-\left(a+\boxed{コ}\right)x+\boxed{サ}a+\boxed{シ}\right\}$$

と因数分解できる．よって，方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は

$$\boxed{ス}-\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}<a<\boxed{ス}+\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}$$

である．このとき，方程式 $P(x)=0$ の実数解を α，二つの虚数解を β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma+4=a+\boxed{タ}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=a^2-\boxed{チ}a$$

であるから，$\alpha+\beta+\gamma+4\leqq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ を満たすような a の値の範囲は

$$\boxed{ツ}\leqq a<\boxed{テ}+\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}$$

である．

また，$a=\boxed{ツ}$ のとき

$$2\beta^3-10\beta^2+18\beta+3=\boxed{ニ}$$

である．

【解説】　　問題

$$P(x)=x^3-ax^2+ax+b.$$

$$Q(x)=2x^2+(a+2b)x-5a+5.$$

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは $P(2)$ であり

$$P(2)=8-4a+2a+b$$

$$=\boxed{8}-\boxed{2}a+b$$

である．また，$Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは $Q(1)$ であり

☜ **剰余の定理**

整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは $f(\alpha)$ である．

$$Q(1)=2+(a+2b)-5a+5$$
$$=\boxed{7}-\boxed{4}a+\boxed{2}b$$

である．これら二つの余りが一致するとき

$$8-2a+b=7-4a+2b$$

より

$$b=\boxed{2}a+\boxed{1}$$

が成り立つ．

以下，$b=2a+1$ とする．このとき

$$P(x)=x^3-ax^2+ax+2a+1$$

であるから

$$P(-1)=(-1)-a-a+2a+1$$
$$=\boxed{0}$$

である．よって，$P(x)$ は $x+1$ で割り切れて

$$P(x)=\left(x+\boxed{1}\right)\left\{x^2-\left(a+\boxed{1}\right)x+\boxed{2}a+\boxed{1}\right\}$$

と因数分解できる．

☜
$$\begin{array}{r}
x^2-(a+1)x+2a+1 \\
x+1\,\big)\overline{\,x^3 \quad -ax^2 \quad +ax+2a+1} \\
x^3 \quad +x^2 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
-(a+1)x^2 \quad +ax \qquad \\
-(a+1)x^2-(a+1)x \qquad \\
\hline
(2a+1)x+2a+1 \\
(2a+1)x+2a+1 \\
\hline
0
\end{array}$$

ここで

$$g(x)=x^2-(a+1)x+2a+1$$

とおくと，方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつ条件は，方程式 $g(x)=0$ が虚数解をもつことである．よって，$g(x)=0$ の判別式を D とすると，$D<0$ が成り立つ．

$$D=(a+1)^2-4(2a+1)$$
$$=a^2-6a-3$$

より

$$a^2-6a-3<0$$

を解くと，求める a の値の範囲は

$$\boxed{3}-\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}<a<3+2\sqrt{3} \qquad \cdots ①$$

である．

☜ **2 次方程式の解の判定**

a，b，c を実数とする．

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots(*)$$

の判別式 b^2-4ac を D とすると

(*) が異なる二つの虚数解をもつ条件は

$$D<0$$

である．

① のとき，方程式 $P(x)=0$ の実数解が α，二つの虚数解が β，γ であるから，$\alpha=-1$ であり，β，γ は方程式 $g(x)=0$ の虚数解である．ここで，$g(x)=0$ において，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \beta+\gamma=a+1 \\ \beta\gamma=2a+1 \end{cases}$$

が成り立つ．よって

$$\alpha+\beta+\gamma+4=(-1)+(a+1)+4$$
$$=a+\boxed{4}$$

であり

☜ **解と係数の関係**

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(-1)^2+(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma$$
$$=1+(a+1)^2-2(2a+1)$$
$$=a^2-\boxed{2}\,a$$

である．これらと

$$\alpha+\beta+\gamma+4\leqq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

より

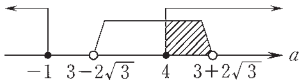
$$a+4\leqq a^2-2a$$
$$(a+1)(a-4)\geqq 0$$

すなわち

$$a\leqq -1,\quad 4\leqq a \qquad \cdots②$$

が得られる．① かつ ② より，求める a の値の範囲は

$$\boxed{4}\leqq a<\boxed{3}+\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$$

☜ 

である．

ここで，$a=4$ のとき，$g(x)=x^2-5x+9$ であり，$g(\beta)=0$ なので，$\beta^2-5\beta+9=0$ が成り立つ．よって，$2\beta^3-10\beta^2+18\beta+3$ の値は

☜ β は方程式 $g(x)=0$ の解であるから，$g(\beta)=0$ を満たす．

$$2\beta^3-10\beta^2+18\beta+3=2\beta(\beta^2-5\beta+9)+3$$
$$=2\beta\cdot 0+3$$
$$=\boxed{3}$$

である．

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$t^{ア}-イt$	t^2-8t	2	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	オ	8	2	
	カ	0	2	
	キクケ	-16	2	
	コサ	15	3	
	シ，ス	2，1	3	
	セ	2	1	
	$\frac{ソタチ}{ツ}$	$\frac{-25}{8}$	4	
	$\frac{テト\sqrt{ナ}}{ニ}$	$\frac{-3\sqrt{7}}{8}$	3	
	ヌ，$\frac{ネ}{ノ}$	3，$\frac{5}{3}$	2	
	ハ，ヒ	0，3	4	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	$ア x^2-イ x-ウ$	$3x^2-2x-1$	2	
	エ	1	3	
	$\frac{オカ}{キク}$	$\frac{59}{27}$	3	
	$ケ x+コ$	$-x+2$	2	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{7}{6}$	3	
	ス，セ，ソ，タ，チ	3，2，1，2，2	3	
	ツ，テ	0，1	3	
	ト，ナ，ニ	2，3，2	3	
	$\frac{ヌ}{ネ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ノ}{ハ}$	$\frac{2}{3}$	3	
	$\frac{ヒ}{フ}$	$\frac{1}{4}$	3	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア	3	2	
	$イ n-ウ$	$3n-1$	2	
	$エ n+オ$	$3n+1$	2	
	カ	3	2	
	$キ n+ク$	$3n+2$	2	
	ケコサシ	-300	3	
	ス	2	2	
	$\frac{セ}{ソ}$，$\frac{タ}{チ}$，ツ	$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$，5	3	
	テ	1	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{3}$	1	
	オ	1	1	
	カ	3	1	
	キ	2	1	
	ク	1	1	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{3}{5}$	2	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{4}{5}$	2	
	ス	6	2	
	セ	0	2	
	$\frac{ソ}{タ}$	$\frac{6}{7}$	3	
	$チ\sqrt{ツ}$	$3\sqrt{3}$	1	
	$\frac{テ\sqrt{ト}}{ナニ}$	$\frac{3\sqrt{3}}{35}$	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
第5問	アイ.ウ	−4.0	2	
	エオ.カ	−2.0	2	
	キク.ケ	40.6	3	
	コ	2	2	
	サ	8	2	
	シ	4	3	
	スセ.ソ	46.0	3	
	タ	3	3	
第5問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第6問	ア	0	2	
	イ	0	2	
	ウエオカ	5150	3	
	キク	13	2	
	ケコ	91	2	
	サ	2	2	
	シ	1	2	
	ス	3	2	
	セソ	26	3	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕 $-1 \leqq x \leqq 3$ において，x の関数

$$f(x)=4^x-2^{x+3}$$

を考える．

$t=2^x$ とおくと，$f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=t^{\boxed{ア}}-\boxed{イ}\,t$$

と表される．

ここで，t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \leqq t \leqq \boxed{オ}$$

であるから，$f(x)$ の

最大値は $\boxed{カ}$，最小値は $\boxed{キクケ}$

である．

また，x の方程式 $f(x)=-\dfrac{15}{4}$ を満たす x は二つあり，それらを α，β とすると

$$\alpha+\beta=\log_2\boxed{コサ}-2$$

である．

〔２〕 a を実数の定数とする．また，$0 \leqq x < 2\pi$ において，x の関数

$$g(x)=\cos 2x+a\cos x-1$$

を考える．

$$\cos 2x=\boxed{シ}\cos^2 x-\boxed{ス}$$

が成り立つから

$$g(x)=\boxed{シ}\cos^2 x+a\cos x-\boxed{セ}$$

である．

$a=3$ のときの $g(x)$ を $h(x)$ とする．

(1) $h(x)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{ソタチ}}{\boxed{ツ}}$ であり，最小値を与える x のうち $0 \leqq x \leqq \pi$ を満たすものを θ

とすると

$$\sin 2\theta=\frac{\boxed{テト}\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}}$$

である．

(2)　x の不等式 $h(x) \leqq 0$ を解くと

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

である．また，(*) を満たすすべての実数 x に対して $g(x) \leqq 0$ が成り立つような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ハ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ヒ}}$$

である．

【解説】

問題

〔1〕

$$f(x) = 4^x - 2^{x+3}$$
$$= (2^x)^2 - 2^x \cdot 2^3$$

☜　$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$.

であるから，$t = 2^x$ とおくと，$f(x)$ は t を用いて

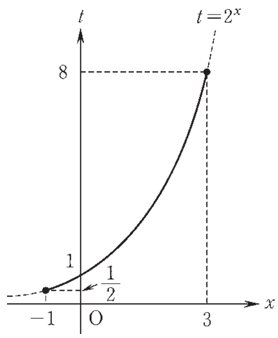
$$f(x) = t^{\boxed{2}} - \boxed{8}\,t$$

と表される．

$-1 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$2^{-1} \leqq 2^x \leqq 2^3$$

☜



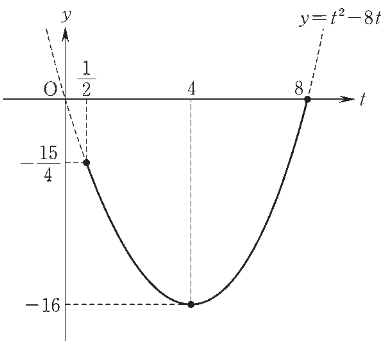
であるから，t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \leqq t \leqq \boxed{8} \qquad \cdots①$$

である．① の範囲において

$$y = t^2 - 8t = (t-4)^2 - 16$$

のグラフをかくと，次図の実線部分となる．



よって，$f(x)$ の

☜　$f(x) = t^2 - 8t$ である．

最大値は $\boxed{0}$，最小値は $\boxed{-16}$

である．

また，x の方程式 $f(x)=-\frac{15}{4}$ は $f(x)=t^2-8t$ より，t を用いて表すと

$$t^2-8t=-\frac{15}{4}$$

となり，さらに変形すると

$$4t^2-32t+15=0$$

$$(2t-1)(2t-15)=0$$

$$t=\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad t=\frac{15}{2}$$

☜ ① を満たす.

が得られる．ここで，$t=2^x$ であるから

$$2^x=\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad 2^x=\frac{15}{2}$$

より

$$x=\log_2\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad x=\log_2\frac{15}{2}$$

☜ **対数**
$a>0$，$a\neq1$，$M>0$ のとき
$a^x=M \iff x=\log_a M$.

である．

さらに

$$\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$$

$$\log_2\frac{15}{2}=\log_2 15-\log_2 2=\log_2 15-1$$

☜ **対数の性質**
$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$，p は実数のとき
$\log_a a=1$
$\log_a M^p=p\log_a M$
$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

であるから

$$x=-1 \quad \text{または} \quad x=\log_2 15-1$$

である．これらの値が α，β であるから

$$\alpha+\beta=-1+(\log_2 15-1)$$

$$=\log_2\boxed{15}-2$$

である．

【$\boxed{\text{コサ}}$ の別解】

x の方程式 $f(x)=-\frac{15}{4}$ の二つの解が α，β であるから，$t=2^x$ より

$$t^2-8t=-\frac{15}{4}$$

$$4t^2-32t+15=0 \quad \cdots②$$

の二つの解を t_1，t_2 とすると

$$t_1=2^\alpha,\quad t_2=2^\beta$$

とおける．ここで，② における解と係数の関係より

$$t_1t_2=\frac{15}{4}$$

☜ **解と係数の関係**
2 次方程式
$ax^2+bx+c=0$
の二つの解を α，β とすると
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

であるから

$$2^\alpha\cdot2^\beta=\frac{15}{4}$$

すなわち

$$2^{\alpha+\beta}=\frac{15}{4}$$

より

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\log_2\frac{15}{4}\\&=\log_2 15-\log_2 4\\&=\log_2 15-2\end{aligned}$$

である．

〔2〕

$$g(x)=\cos 2x+a\cos x-1 \quad (0\leqq x<2\pi).$$

2倍角の公式より

$$\cos 2x=\boxed{2}\cos^2 x-\boxed{1}$$

が成り立つから

$$g(x)=2\cos^2 x+a\cos x-\boxed{2}$$

となり，$u=\cos x$ とおくと

$$g(x)=2u^2+au-2$$

と表される．

☜ 2倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 2x&=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=2\cos^2 x-1\\&=1-2\sin^2 x.\end{aligned}$$

(1) $h(x)$ は

$$\begin{aligned}h(x)&=2u^2+3u-2\\&=2\left(u+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}\end{aligned}$$

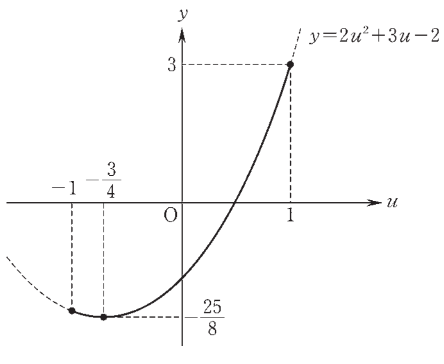
☜ $a=3$ のときの $g(x)$ が $h(x)$ である．

と表され，$0\leqq x<2\pi$ のとき，u のとり得る値の範囲は $-1\leqq u\leqq 1$ だから，この範囲において

☜ $u=\cos x$ である．

$$y=2u^2+3u-2$$

のグラフをかくと，次図の実線部分となる．



よって，$h(x)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{-25}}{\boxed{8}}$ である．

☜ $h(x)=2u^2+3u-2$ である．

また，最小値をとるのは $u=-\dfrac{3}{4}$ のとき，すなわち

$$\cos x=-\frac{3}{4}$$

のときであり，これを満たす x のうち，さらに $0\leqq x\leqq\pi$ を満たすものが θ であるから

$$\cos\theta=-\frac{3}{4}$$

である．このとき，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\sin\theta\geqq0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

☜ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

である．よって

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

☜ **2倍角の公式**

$\sin2x=2\sin x\cos x$.

$$=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{\boxed{-3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{8}}$$

である．

(2) $h(x)=2u^2+3u-2$ より，x の不等式 $h(x)\leqq0$ は，u を用いて

$$2u^2+3u-2\leqq0$$

と表される．さらに変形すると

$$(u+2)(2u-1)\leqq0$$

$$-2\leqq u\leqq\frac{1}{2}$$

となり，$u=\cos x$ であるから

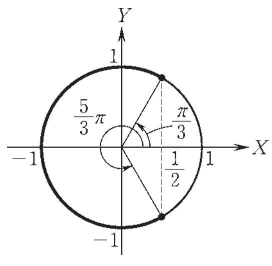
$$\cos x\leqq\frac{1}{2}.$$

☜ $-2\leqq\cos x$ はつねに成り立つ．

$0\leqq x<2\pi$ においてこれを解くと

$$\frac{\pi}{\boxed{3}}\leqq x\leqq\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi \quad\cdots(*)$$

☜



である．

また，x の不等式 $g(x)\leqq0$ は，u を用いて

$$2u^2+au-2\leqq0$$

☜ $g(x)=2u^2+au-2$.

と表される．ここで，$p(u)=2u^2+au-2$ とおく．$(*)$のとき，u のとり得る値の範囲は $-1\leqq u\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから

「(*)を満たすすべての実数 x に対して

$g(x) \leqq 0$ が成り立つ」

ための条件は

「$-1 \leqq u \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たすすべての実数

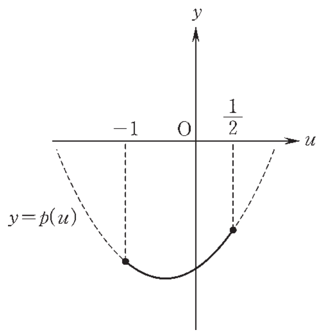
u に対して $p(u) \leqq 0$ が成り立つ」

ことである．

関数 $y=p(u)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，この条件は

$$p(-1) \leqq 0 \text{ かつ } p\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 0$$

☜



すなわち

$$-a \leqq 0 \text{ かつ } \frac{1}{2}a-\frac{3}{2} \leqq 0$$

である．よって，求める a の値の範囲は

$$\boxed{0} \leqq a \leqq \boxed{3}$$

である．

第 2 問　微分法・積分法

関数 $f(x)=x^3-x^2-x+2$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{ア}x^2-\boxed{イ}x-\boxed{ウ}$$

であるから，$f(x)$ は

極小値 $\boxed{エ}$

極大値 $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$

をとる．ここで，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 $(0,\ 2)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{ケ}x+\boxed{コ}$$

である．また，曲線 $y=x^2$ と直線 ℓ で囲まれた部分のうち，$x\geqq 0$ を満たす部分の面積は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$

である．

(2) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{ス}t^2-\boxed{セ}t-\boxed{ソ}\right)x-\boxed{タ}t^3+t^2+\boxed{チ}$$

である．これが点 $(1,\ 1)$ を通るとき，t の値は

$\boxed{ツ}$ または $\boxed{テ}$ 　　$\left(\boxed{ツ}<\boxed{テ}\right)$

である．ここで，2 点 A, B をそれぞれ $\mathrm{A}\left(\boxed{ツ},\ f\left(\boxed{ツ}\right)\right)$，$\mathrm{B}\left(\boxed{テ},\ f\left(\boxed{テ}\right)\right)$ とし，

また，点 P を $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ $\left(\boxed{ツ}<p<\boxed{テ}\right)$ とする．

点 P と直線 AB の距離は $\dfrac{p^{\boxed{ト}}-p^{\boxed{ナ}}}{\sqrt{\boxed{ニ}}}$ であるから，三角形 ABP の面積 $S(p)$ は

$$S(p)=\frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}\left(p^{\boxed{ト}}-p^{\boxed{ナ}}\right)$$

である．

よって，p が $\boxed{ツ}<p<\boxed{テ}$ の範囲を変化するとき，$S(p)$ は $p=\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}$ において最大となる．このときの点 P を $\mathrm{P_0}$ とし，直線 $\mathrm{BP_0}$ と曲線 C の交点のうち，B と $\mathrm{P_0}$ 以外の点を Q とすると

$$\frac{\mathrm{P_0B}}{\mathrm{QP_0}}=\frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$$

である．

【解説】

問題

$$f(x)=x^3-x^2-x+2.$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{2}x-\boxed{1}$$
$$=(3x+1)(x-1)$$

であるから，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{59}{27}$	↘	1	↗

増減表より，$f(x)$ は

$x=1$ のとき，極小値 $\boxed{1}$

$x=-\frac{1}{3}$ のとき，極大値 $\dfrac{\boxed{59}}{\boxed{27}}$

をとる．

ここで，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 $(0,\ 2)$ における C の接線 ℓ の傾きは $f'(0)=-1$ であり，その方程式は

$$\ell : y=\boxed{-}x+\boxed{2}$$

である．

曲線 $y=x^2$ と直線 ℓ の交点の x 座標は

$$x^2=-x+2$$
$$(x+2)(x-1)=0$$

より

$$x=-2,\ 1$$

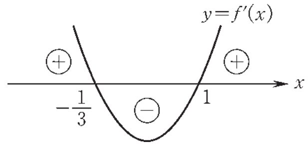
であるから，曲線 $y=x^2$ と直線 ℓ で囲まれた部分のうち，$x\geqq 0$ を満たす部分は，次図の影の部分である．

導関数

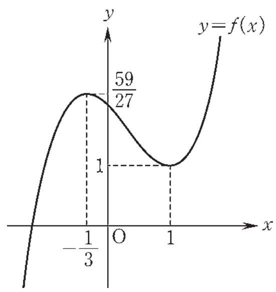
$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3)$

$(c)'=0$ （c は定数）．

$f'(x)$ の符号の変化は，$y=f'(x)$ のグラフをかくとわかりやすい．

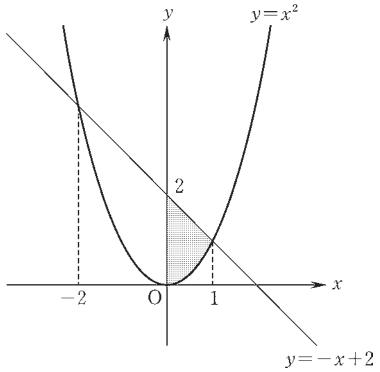


$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



接線の傾き

曲線 $C : y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の傾きは $f'(t)$ である．



よって，その面積は

$$\int_0^1 \{(-x+2)-x^2\}\,dx=\int_0^1 (-x^2-x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2$$

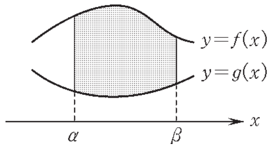
$$=\frac{\boxed{7}}{\boxed{6}}$$

である．

面積

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $g(x) \leqq f(x)$ ならば，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

(ただし $n=0,\ 1,\ 2$，C は積分定数)

であり，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta$$

$$=F(\beta)-F(\alpha).$$

(2)　曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式は

$$y-(t^3-t^2-t+2)=(3t^2-2t-1)(x-t)$$

すなわち

$$y=\left(\boxed{3}\,t^2-\boxed{2}\,t-\boxed{1}\right)x-\boxed{2}\,t^3+t^2+\boxed{2} \quad \cdots①$$

である．これが点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1=(3t^2-2t-1)\cdot 1-2t^3+t^2+2$$

より，t の方程式

$$2t^3-4t^2+2t=0$$

$$2t(t-1)^2=0$$

を得る．これを解くと

$$t=0,\ 1.$$

よって，① が点 $(1,\ 1)$ を通るときの t の値は

$\boxed{0}$　または　$\boxed{1}$

である．

ここで，$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ とし，$\mathrm{P}(p,\ p^3-p^2-p+2)$ $(0<p<1)$ とする．

接線の方程式

曲線 $C : y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

直線 AB の方程式は

$$x+y-2=0$$

であるから，点 P と直線 AB の距離を d とすると

$$d=\frac{|p+(p^3-p^2-p+2)-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|p^3-p^2|}{\sqrt{2}}$$

である．ここで，$0<p<1$ より

$$p^3-p^2=p^2(p-1)<0$$

が成り立つから

$$|p^3-p^2|=-(p^3-p^2)=p^2-p^3$$

である．よって

$$d=\frac{|p^3-p^2|}{\sqrt{2}}=\frac{p^{\boxed{2}}-p^{\boxed{3}}}{\sqrt{\boxed{2}}}$$

である．

また，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$$

であるから，三角形 ABP の面積 $S(p)$ は

$$\begin{aligned}S(p)&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{p^2-p^3}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}(p^2-p^3)\end{aligned}$$

である．

$0<p<1$ における $S(p)$ の増減は

$$S'(p)=\frac{1}{2}(2p-3p^2)=-\frac{p}{2}(3p-2)$$

より，次の表のようになる．

p	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		↗	極大	↘	

この増減表より，p が $0<p<1$ の範囲を変化するとき，$S(p)$ は $p=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ において最大となる．

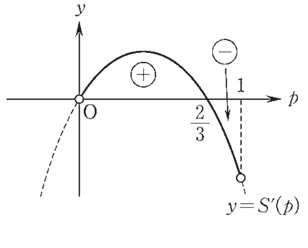
$p=\frac{2}{3}$ のときの点 P が $\mathrm{P_0}$ なので，その座標は $\mathrm{P_0}\left(\frac{2}{3},\ \frac{32}{27}\right)$ であるから，直線 $\mathrm{BP_0}$ の方程式は

☜ **点と直線の距離**

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

☜ $S'(p)$ の符号の変化は次図よりわかる．



$$y-1=\frac{1-\frac{32}{27}}{1-\frac{2}{3}}(x-1)$$

すなわち

$$y=-\frac{5}{9}x+\frac{14}{9}$$

である．

さらに，直線 BP_0 と曲線 C の交点の x 座標は

$$x^3-x^2-x+2=-\frac{5}{9}x+\frac{14}{9}$$

すなわち

$$x^3-x^2-\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}=0$$

$$(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$$

☜ 点 B の x 座標である 1，点 P_0 の x 座標である $\frac{2}{3}$ を解にもつ方程式である．

の実数解であるから

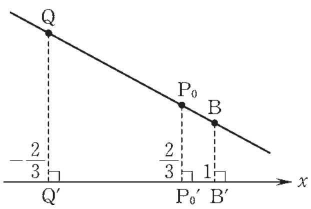
$$x=1,\ \pm\frac{2}{3}$$

である．点 Q は B と P_0 以外の交点であるから，点 Q の x 座標は $-\frac{2}{3}$ であり

$$\frac{P_0B}{QP_0}=\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

である．

☜ 3 点 B，P_0，Q は次図の位置関係にある．



よって

$$\frac{P_0B}{QP_0}=\frac{P_0'B'}{Q'P_0'}$$

である．

第3問　数　列

初項が2，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ において，$a_6=17$ が成り立っている。

このとき，$d=\boxed{\text{ア}}$ であるから，一般項は

$$a_n=\boxed{\text{イ}}\,n-\boxed{\text{ウ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。また

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n}{2}\left(\boxed{\text{エ}}\,n+\boxed{\text{オ}}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(1)
$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{n}{2\left(\boxed{\text{キ}}\,n+\boxed{\text{ク}}\right)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=S_n$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=T_n$ とおくと

$$S_{100}-T_{100}=\boxed{\text{ケコサシ}}$$

である。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を $b_1=4$，$b_{n+1}-b_n=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義する。

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\boxed{\text{ス}}$$

と表される。$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$　　① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$　　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^2-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}n+\boxed{\text{ツ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

また，b_n が5の倍数であるための必要十分条件は，自然数 n が $\boxed{\text{テ}}$ の倍数であることである。$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ 2　　① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20

【解説】

問題

数列 $\{a_n\}$ は初項が 2，公差が d の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=2+(n-1)d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

ここで，$a_6=17$ より

$$2+5d=17$$

であるから

$$d=\boxed{3}$$

である．

よって

$$\begin{aligned}a_n&=2+(n-1)\cdot 3\\&=\boxed{3}\,n-\boxed{1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

である．

また

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k&=\frac{n}{2}\{2+(3n-1)\}\\&=\frac{n}{2}\left(\boxed{3}\,n+\boxed{1}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

である．

☜ **等差数列**
初項が a，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n=a+(n-1)d$．

☜ **等差数列の和**
等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は
$\frac{n}{2}(a_1+a_n)$．

(1)
$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{3}{a_na_{n+1}}$$

より

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{\boxed{3}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{a_n}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3n+2)-2}{2(3n+2)}\\&=\frac{n}{2\left(\boxed{3}\,n+\boxed{2}\right)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

である．

☜ 数列 $\{a_n\}$ は公差 3 の等差数列であるから，$a_{n+1}-a_n=3$．

☜ $a_n=3n-1$
より
$$\begin{aligned}a_{n+1}&=3(n+1)-1\\&=3n+2.\end{aligned}$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=S_n \text{ より } S_{100}=\sum_{k=1}^{100} a_{2k-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=T_n \text{ より } T_{100}=\sum_{k=1}^{100} a_{2k}$$

であるから

$$\begin{aligned}S_{100}-T_{100}&=\sum_{k=1}^{100} a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{100} a_{2k}\\&=\sum_{k=1}^{100}(a_{2k-1}-a_{2k})\\&=\sum_{k=1}^{100}(-3)\\&=-3\cdot 100\\&=\boxed{-300}\end{aligned}$$

である．

数列 $\{a_n\}$ は公差 3 の等差数列であるから

$$a_{2k}-a_{2k-1}=3$$

より

$$a_{2k-1}-a_{2k}=-3.$$

$$S_{100}=a_1+a_3+\cdots+a_{199}.$$

これは初項 a_1，末項 a_{199}，項数 100 の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned}S_{100}&=\frac{100}{2}(a_1+a_{199})\\&=\frac{100}{2}(2+596)\\&=29900.\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}T_{100}&=\frac{100}{2}(a_2+a_{200})\\&=30200.\end{aligned}$$

よって

$$S_{100}-T_{100}=-300$$

のように求めてもよい．

(3)
$$\begin{cases}b_1=4,\\ b_{n+1}-b_n=a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).\end{cases} \qquad \cdots①$$

① より，数列 $\{a_n\}$ は，数列 $\{b_n\}$ の階差数列であるから $n \geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

と表される．よって，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\cancel{b_2}-b_1&=a_1\\ \cancel{b_3}-\cancel{b_2}&=a_2\\ \cancel{b_4}-\cancel{b_3}&=a_3\\ &\vdots\\ +)\ \ b_n-\cancel{b_{n-1}}&=a_{n-1}\\ \hline b_n-b_1&=\sum_{k=1}^{n-1}a_k.\end{aligned}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k\\&=4+\frac{n-1}{2}\{3(n-1)+1\}\\&=4+\frac{1}{2}(n-1)(3n-2)\\&=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+5 \qquad \cdots②\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n}{2}(3n+1)$ において，n を $n-1$ とした．

である．$b_1=4$ であるから，② は $n=1$ のときも成り立つ．

② において $n=1$ とすると

$$b_1=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+5=4$$

である．

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2-\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}n+\boxed{5} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

これより

$$b_n-5=\frac{n(3n-5)}{2} \qquad \cdots③$$

が成り立つ．さらに

n が偶数のとき，$n(3n-5)$ は偶数

n が奇数のとき，$3n-5$ が偶数であるから，$n(3n-5)$ は偶数である．

よって，すべての自然数 n について，$n(3n-5)$ は偶数であるから，$\dfrac{n(3n-5)}{2}$ は整数である．

☜ $a_n=3n-1$ より，a_n はすべての自然数 n について整数である．さらに $b_1=4$ であることと，b_k が整数であると仮定すると，① の

$$b_{k+1}=b_k+a_k$$

より b_{k+1} も整数であるから，帰納的にすべての自然数 n について b_n は整数である．

このことと，③ より

$\dfrac{n(3n-5)}{2}$ は整数である

としてもよい．

これらのことより

「b_n が 5 の倍数」

であるための必要十分条件は

「b_n-5 が 5 の倍数」

すなわち

「$\dfrac{n(3n-5)}{2}$ が 5 の倍数」

である．2 と 5 は互いに素であるから

「$3n^2-5n$ が 5 の倍数」

より

「$3n^2$ が 5 の倍数」

☜ $5n$ は 5 の倍数である．

である．さらに，3 と 5 は互いに素であるから

「n^2 が 5 の倍数」

すなわち

「n が 5 の倍数」

である．よって，「b_n が 5 の倍数」であるための必要十分条件は「自然数 n が 5 の倍数」であることである．すなわち，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

第4問　平面ベクトル

三角形OABにおいて，辺OAの中点をM，辺OBを 1：2 に内分する点をNとする．このとき

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OB}$$

である．

また，直線ANと直線BMの交点をPとする．まず，点Pが直線AN上にあるから，実数sを用いて$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AN}$とおける．よって，$\overrightarrow{OP}$は

$$\overrightarrow{OP}=\left(\boxed{オ}-s\right)\overrightarrow{OA}+\frac{s}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OB}$$

と表される．次に，点Pは直線BM上にあるから，実数tを用いて$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BM}$とおける．よって，$\overrightarrow{OP}$は

$$\overrightarrow{OP}=\frac{t}{\boxed{キ}}\overrightarrow{OA}+\left(\boxed{ク}-t\right)\overrightarrow{OB}$$

と表される．したがって

$$s=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}},\quad t=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である．

以下において，$|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=3$，$\angle AOB=60°$ とする．このとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{ス}$$

である．また，直線BM上に点Qを$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{BM}$となるようにとると$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{BM}=\boxed{セ}$である．さらに，実数$u$を用いて$\overrightarrow{BQ}=u\overrightarrow{BM}$とおくと，$u=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$である．

また，三角形OABの面積は$\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$であるから，三角形OPQの面積は

$$\frac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナニ}}$$

である．

【解説】

問題

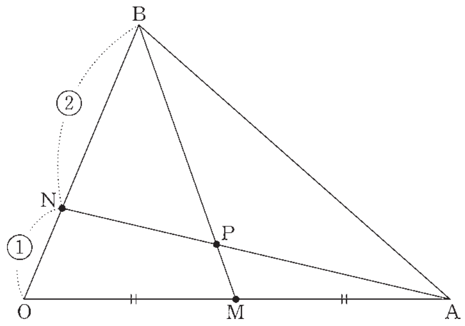
辺OAの中点がMであるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}\qquad\cdots①$$

であり，辺OBを1：2に内分する点がNであるから

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{OB}\qquad\cdots②$$

である．



点 P は直線 AN と直線 BM の交点である．

まず，点 P は直線 AN 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AN}$ とおける．これを変形すると

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA})$$

☜ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}$．

より

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}$$

となる．これに ② を代入すると

$$\overrightarrow{OP}=\left(\boxed{1}-s\right)\overrightarrow{OA}+\frac{s}{\boxed{3}}\overrightarrow{OB} \quad \cdots③$$

と表される．次に，点 P は直線 BM 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BM}$ とおける．これを変形すると

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})$$

より

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OM}$$

となる．これに ① を代入すると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{t}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}+\left(\boxed{1}-t\right)\overrightarrow{OB} \quad \cdots④$$

と表される．$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，③ かつ ④ より

$$\begin{cases} 1-s=\dfrac{t}{2} \\ \dfrac{s}{3}=1-t \end{cases}$$

が成り立つ．これらより

$$s=\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}},\quad t=\frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$$

である．

☜ p，q，p'，q' は実数，
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき
$$p\vec{a}+q\vec{b}=p'\vec{a}+q'\vec{b}$$
が成り立つための条件は
$$\begin{cases} p=p' \\ q=q' \end{cases}$$
である．

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ\\&=4\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\\&=\boxed{6}\end{aligned}$$

である．

☜ **ベクトルの内積**

$\overrightarrow{0}$ でない二つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta.$$

また，直線 BM 上に点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ となるようにとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\boxed{0}\quad\cdots⑤$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{BM}}|\cos 90^\circ=0$.

である．点 Q は直線 BM 上にあるから，実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ とおける．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{u}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

☜ ④ の t を u に置き換えた．

と表される．これを ⑤ に代入して変形すると

$$\left\{\frac{u}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

より

$$\frac{u}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\left(\frac{1}{2}-u\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(1-u)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos 0^\circ=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$.
同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$.

が成り立つ．これに，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$ を代入すると

$$\frac{u}{4}\cdot 4^2+\left(\frac{1}{2}-u\right)\cdot 6-(1-u)\cdot 3^2=0$$

すなわち

$$7u-6=0$$

より

$$u=\frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$$

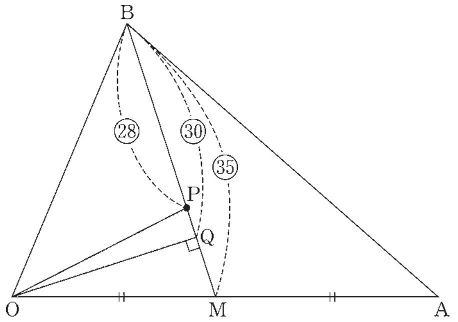
である．

また，三角形 OAB の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\sin 60^\circ\\&=\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}\end{aligned}$$

☜ $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$.

である．



☜ $t=\dfrac{4}{5}$ より

$$\mathrm{BM}:\mathrm{BP}=5:4=35:28$$

であり，$u=\dfrac{6}{7}$ より

$$\mathrm{BM}:\mathrm{BQ}=7:6=35:30$$

である．

ここで，$t=\dfrac{4}{5}$，$u=\dfrac{6}{7}$ より

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BM}}=\frac{2}{35}$$

であるから，三角形 OPQ の面積を T とすると

$$\begin{aligned}T&=\frac{2}{35}\cdot(\text{三角形 OBM の面積})\\&=\frac{2}{35}\cdot\left(\frac{1}{2}S\right)\\&=\frac{2}{35}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{3}\\&=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{35}}\end{aligned}$$

☜ 点 M は辺 OA の中点．

☜ $S=3\sqrt{3}$．

である．

第5問　統　計

生徒番号1から10までの生徒10人が立位体前屈の測定を行い，以下の表の結果になった．単位はcmであり，この測定結果を変量xとする．

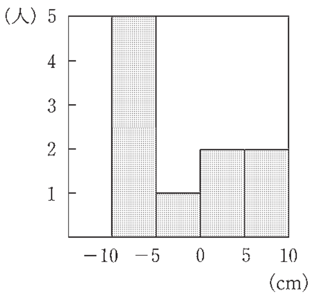
生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
変量 x	3	-6	-5	-8	-9	5	-10	-3	9	4

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

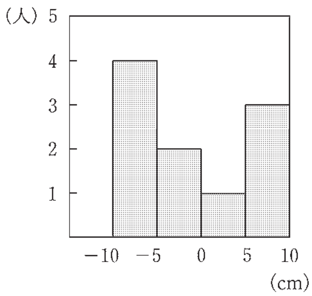
(1) 変量xの中央値は $\boxed{\text{アイ}}.\boxed{\text{ウ}}$ cmであり，平均値は $\boxed{\text{エオ}}.\boxed{\text{カ}}$ cmである．また，変量xの分散は $\boxed{\text{キク}}.\boxed{\text{ケ}}$ である．

(2) 各階級を $-10 \leqq x < -5$，$-5 \leqq x < 0$，$0 \leqq x < 5$，$5 \leqq x < 10$（cm）として，変量xをヒストグラムで表すと $\boxed{\text{コ}}$ である．$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

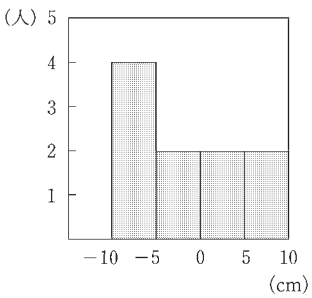
⓪



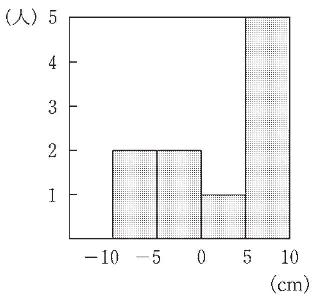
①



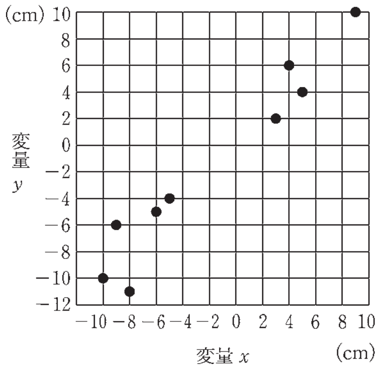
②



③



(3) 10 人の生徒が 1 か月後に二度目の測定を行った．測定値はすべて整数であり，この測定結果を変量 y とする．10 人の生徒のうち，9 人の生徒の変量 x と変量 y の相関図が次の図である．



上の相関図に，測定結果が記録されていない生徒番号は $\boxed{サ}$ である．また，変量 y の平均値は -1.0 cm であった．生徒番号が $\boxed{サ}$ の生徒の変量 y の値は $\boxed{シ}$ cm である．このとき，変量 y の分散は $\boxed{スセ}.\boxed{ソ}$ であり，変量 x と変量 y の相関係数の値は $\boxed{タ}$ に最も近い．

$\boxed{タ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ -0.93　① -0.13　② 0.13　③ 0.93　④ 1.3

【解説】

問題

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
変量 x	3	-6	-5	-8	-9	5	-10	-3	9	4

（表 1）

(1) 表 1 より，変量 x の小さい方から数えて 5 番目と 6 番目の値はそれぞれ -5 cm と -3 cm であるから，変量 x の中央値は

$$\frac{-5+(-3)}{2}=\boxed{-4}.\boxed{0}\ \text{cm}$$

である．

また，変量 x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{3+(-6)+(-5)+(-8)+(-9)+5+(-10)+(-3)+9+4}{10}$$

$$=\boxed{-2}.\boxed{0}\ \text{cm}$$

である．よって，生徒 10 人の $x-\overline{x}$ の値を表にすると次の表 2 となる．

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x-\overline{x}$	5	-4	-3	-6	-7	7	-8	-1	11	6

（表 2）

☜ **中央値**

資料を大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．資料の個数が偶数のときは，中央に並ぶ二つの値の相加平均を中央値とする．

☜ **平均値**

変量 x がとる N 個の値を

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$

とすると，平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}.$$

表2より，変量 x の分散 $s_x{}^2$ は

$$s_x{}^2=\frac{5^2+(-4)^2+(-3)^2+(-6)^2+(-7)^2+7^2+(-8)^2+(-1)^2+11^2+6^2}{10}$$

$$=\boxed{40}.\boxed{6}$$

である。

☜ **分散**

変量 x がとる N 個の値を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$$

とすると，分散 s^2 は，平均値 $\overline{x}$ として

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2 \qquad \cdots(ア)$$

または

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k{}^2-\overline{x}^2. \qquad \cdots(イ)$$

ここでは(ア)を用いた。

(2) 表1より，変量 x に対して度数分布表を作ると次の表3となる。

階級(cm) 以上　未満	度数(人)
−10 ～ −5	4
−5 ～ 0	2
0 ～ 5	2
5 ～ 10	2
計	10

(表3)

よって，変量 x のヒストグラムは②であるから，$\boxed{コ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である。

(3) 表1の変量 x のうち，相関図に記入されていないものは生徒番号8の −3 cm だけであることがわかるから，求める生徒番号は $\boxed{8}$ である。この生徒番号8の変量 y の値を t とおくと，変量 y の平均値 $\overline{y}$ が −1.0 cm であることから

$$\frac{-11+(-10)+(-6)+(-5)+(-4)+2+4+6+10+t}{10}=-1.0$$

☜ 相関図において，変量 y の t 以外の値を小さい方から順に読み取っていった。

が成り立つ。これより

$$t=4$$

が得られるから，生徒番号8の変量 y の値は $\boxed{4}$ cm である。

このことと，表1さらに相関図を考えあわせて，変量 x，変量 y，$y-\overline{y}$ の値をまとめると次の表4となる。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
変量 x	3	−6	−5	−8	−9	5	−10	−3	9	4
変量 y	2	−5	−4	−11	−6	4	−10	4	10	6
$y-\overline{y}$	3	−4	−3	−10	−5	5	−9	5	11	7

(表4)

よって，変量 y の分散 $s_y{}^2$ は

$$s_y{}^2=\frac{3^2+(-4)^2+(-3)^2+(-10)^2+(-5)^2+5^2+(-9)^2+5^2+11^2+7^2}{10}$$

$$=\boxed{46}.\boxed{0}$$

である．また，相関図より変量 x と変量 y には強い正の相関関係があることがわかるから，変量 x と変量 y の相関係数の値は③に最も近い．よって，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜ 実際に，変量 x と変量 y の相関係数 r の値を計算してみると

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

$$=\frac{40}{\sqrt{40.6}\sqrt{46}}$$

$$\fallingdotseq 0.9256$$

である．

第６問　コンピュータ

１から自然数 n までの和

$$1+2+3+\cdots+n$$

で表される数を三角数という．

例えば６や10は

$$6=1+2+3,\quad 10=1+2+3+4$$

と表されるので三角数である．

また，7，8，9は三角数ではない．

そこで，入力された自然数 N について，N 以下の最大の三角数 $f(N)$ を出力する〔プログラム１〕を作成した．

〔プログラム１〕

```
100 INPUT N
110 LET S=0
120 FOR J=1 TO 100
130     IF [ ア ] THEN GOTO 160
140     LET S=S+J
150 NEXT J
160 PRINT "f(";N;")=";[ イ ]
170 END
```

(1) $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ S+J>N　　① S+J>=N　　② S+J<N　　③ S+J<=N

$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ S　　① J　　② S+J　　③ S-J

(2) $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ と計算することができる．これと120行のＪの値の範囲より，〔プログラム１〕が正しい値を出力するような自然数Ｎのうち，最大のものは $\boxed{\text{ウエオカ}}$ である．

(3) 〔プログラム１〕を実行し，変数Ｎに100を入力したとき，140行は $\boxed{\text{キク}}$ 回実行され

$$\text{f(100)}=\boxed{\text{ケコ}}$$

と出力される．

次に，$\boxed{\text{ウエオカ}}$ 以下の自然数 N を，三角数の和で表すプログラムを作成してみよう．まず，N 以下の最大の三角数 $f(N)$ を求め，次に $N-f(N)$ の値が正であれば，$N-f(N)$ 以下の最大の三角数を求める．この操作を順次繰り返していくと，自然数 N が三角数の和で表される．

この考え方と〔プログラム１〕を利用して，次の〔プログラム２〕を作成した．

〔プログラム２〕

```
100 INPUT N
110 PRINT N;"=";
120 LET S=0
130 FOR J=1 TO 100
140     IF [ ア ] THEN GOTO 170
150     LET S=S+J
160 NEXT J
170 PRINT [ イ ];
180 LET [ サ ]
190 IF [ シ ] THEN GOTO 220
200 PRINT "+";
210 GOTO 120
220 END
```

(4) **サ** に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ N=N-1　① N=N+1　② N=N-S　③ N=N+S

シ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ N<0　① N=0　② N>1　③ N<S　④ N=S　⑤ N>S

(5) 〔プログラム２〕を実行し，変数 N に 204 を入力したとき，200 行は **ス** 回，150 行は **セソ** 回実行される．

【解説】 問題

(1) 〔プログラム１〕の 120 行から 150 行のループでは，J を１から 100 まで変化させ，S の値を

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2+3,\quad \cdots$$

と変化させている．このループは S+J が N を超えた場合に抜けるので 130 行は

```
130    IF S+J>N THEN GOTO 160
```

とすればよい．よって， **ア** に当てはまるものは **⓪** である．

このループを抜けたときの S の値が N 以下の最大の三角数であるから 160 行は

```
160 PRINT "f(";N;")="; S
```

とすればよい．よって， **イ** に当てはまるものは **⓪** で

ある．

(2)
$$1+2+3+\cdots+100=\frac{1}{2}\cdot100\cdot101=5050$$
$$1+2+3+\cdots+101=\frac{1}{2}\cdot101\cdot102=5151$$

であることと，〔プログラム1〕の 120 行から 150 行のループでは，J が 1 から 100 まで変化することから，入力された N の値が 5150 以下であれば N 以下の最大の三角数を出力するが，N の値が 5151 以上の場合には最大でない三角数 5050 を出力する．

☜ N が 5151 以上の場合，N 以下の最大の三角数は 5151 以上の三角数である．

したがって，〔プログラム1〕が正しい値を出力するような自然数 N のうち，最大のものは $\boxed{5150}$ である．

(3)
$$1+2+3+\cdots+13=\frac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$$
$$1+2+3+\cdots+14=\frac{1}{2}\cdot14\cdot15=105$$

であるから，〔プログラム1〕を実行し，変数 N に 100 を入力したときは，J が 1 から 13 まで変化し S の値を 91 とし，J が 14 のときに 140 行を実行せずにループを抜ける．したがって，140 行は

$\boxed{13}$ 回実行され

$$f(100)=\boxed{91}$$

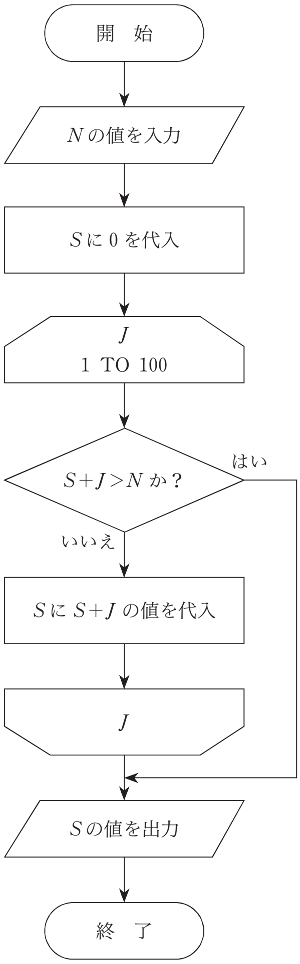
と出力される．

正しく作成された〔プログラム1〕とその流れ図は次のようになる．

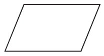
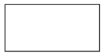
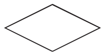
〔プログラム1〕

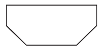
```
100 INPUT N
110 LET S=0
120 FOR J=1 TO 100
130     IF S+J>N THEN GOTO 160
140     LET S=S+J
150 NEXT J
160 PRINT "f(";N;")="; S
170 END
```

〔流れ図〕



☜ 流れ図における記号の意味

記号	意味
	入出力
	処　理
	条件判断

記号  と  で

囲まれた部分はループを表す．

(4) 〔プログラム２〕の 130 行から 170 行では，N 以下の最大の三角数を求め，それを S として，S の値を出力させている．180 行では N-S を改めて N とし，190 行で N=0 ならば 220 行に飛び終了，それ以外ならば 200 行以下の処理をすればよい．

よって，180 行と 190 行は

```
180 LET N=N-S
190 IF N=0 THEN GOTO 220
```

とすればよいから，$\boxed{サ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ であり，$\boxed{シ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(5) 〔プログラム２〕を実行し，変数 N に 204 を入力したときを考える．

$1+2+3+\cdots+19=\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20=190$ …①

$1+2+3+4=10$ …②

$1+2=3$ …③

1 …④

この計算から，出力は

204=190+10+3+1

であり，200 行の実行回数は上式の「＋」の個数に等しく $\boxed{3}$ 回である．また，150 行の「LET S=S+J」の実行回数は

$19+4+2+1=26$

より $\boxed{26}$ 回である．

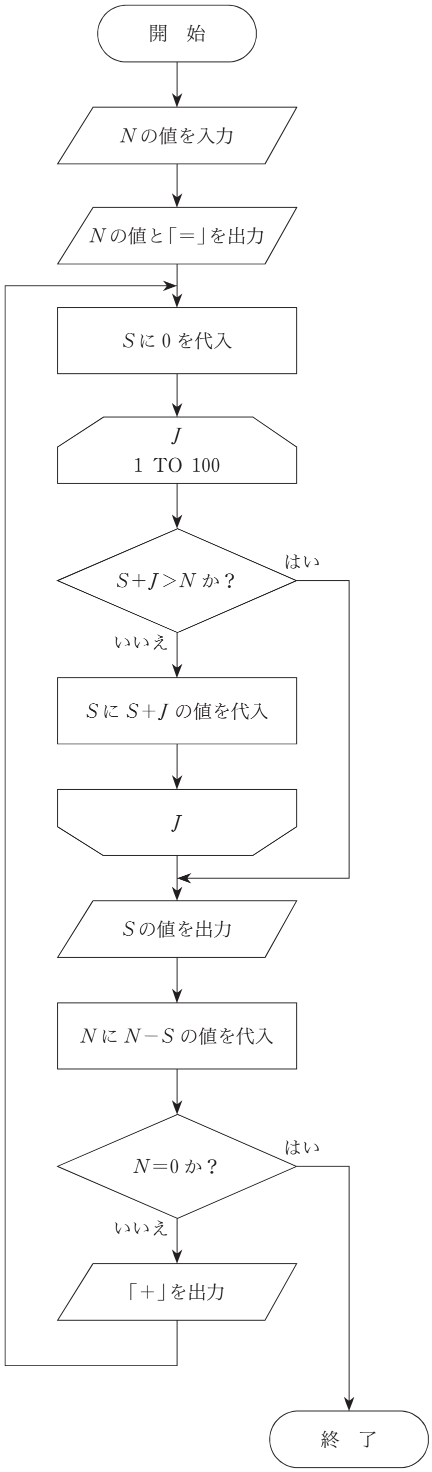
☜ 150 行の実行回数はそれぞれ
① において 19 回
② において 4 回
③ において 2 回
④ において 1 回
である．

正しく作成された〔プログラム２〕とその流れ図は次のようになる．

〔プログラム２〕

```
100 INPUT N
110 PRINT N;"=";
120 LET S=0
130 FOR J=1 TO 100
140     IF S+J>N THEN GOTO 170
150     LET S=S+J
160 NEXT J
170 PRINT S;
180 LET N=N-S
190 IF N=0 THEN GOTO 220
200 PRINT "+";
210 GOTO 120
220 END
```

〔流れ図〕


開　始
Nの値を入力
Nの値と「＝」を出力
Sに 0 を代入
J
1 TO 100
S+J>N か？
はい
いいえ
Sに S+J の値を代入
J
Sの値を出力
Nに N−S の値を代入
N=0 か？
はい
いいえ
「+」を出力
終　了

【理　　科】

物　理　Ⅰ

【解答・採点基準】　(100点満点)

問題番号	設　問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	2	5	
		問2	2	6	5	
		問3	3	3	5	
		問4	4	2	5	
		問5	5	4	5	
第1問　自己採点小計					(25)	
第2問	A	問1	6	2	5	
		問2	7	3	5	
		問3	8	3	5	
	B	問4	9	4	5	
		問5	10	4	4	
第2問　自己採点小計					(24)	
第3問	A	問1	11	3	5	
		問2	12	3	4	
		問3	13	4	4	
		問4	14	2	4	
	B	問5	15	4	4	
		問6	16	1	4	
第3問　自己採点小計					(25)	
第4問	A	問1	17	4	5	
		問2	18	2	5	
		問3	19	2	4	
	B	問4	20	5	4	
		問5	21	5	4	
		問6	22	2	4	
第4問　自己採点小計					(26)	
自己採点合計					(100)	

物理Ⅰ

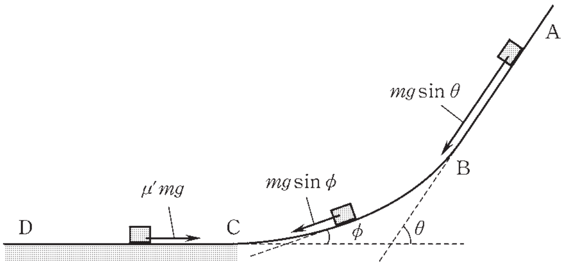
【解説】

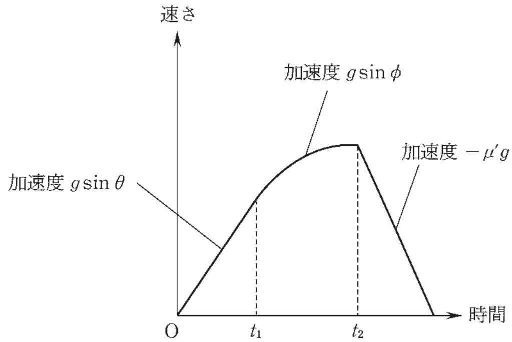
第1問　小問集合　問題

問1　次図のように，小物体の質量を m，重力加速度の大きさを g とし，斜面 AB の傾斜角を θ とすると，AB 間の運動は等加速度($g\sin\theta$)運動になる。一定の割合で速さが大きくなるので，AB 間の v-t 図は傾きが一定の右上がりのグラフになる。

次に，曲面 BC 間の途中の傾斜角を ϕ とすると，曲面に沿った方向の加速度は $g\sin\phi$ になる。C に近づくと，傾斜角 ϕ は減少していくので，曲面に沿った方向の加速度の大きさは時間とともに減少していく。BC 間の v-t 図は上に凸のグラフになる。

C から後の運動は，動摩擦係数を μ' とすると，等加速度($-\mu' g$)運動になり，速さは一定の割合で減少し，やがて静止する。C から後の v-t 図は傾きが一定の右下がりのグラフになる。





$\boxed{1}$ の答　②

問2　球1，2の体積を V，水の密度を ρ，重力加速度の大きさを g とする。球1と2にはたらく浮力の大きさは，**アルキメデスの原理**より，ρVg であるから，どちらも等しい(ア)。また，球1の質量を M_1，球2の質量を M_2 とすると，力のつりあいより，

図2の場合：$40 = M_1 g - \rho Vg$　…①

図3の場合：$30 = M_2 g - \rho Vg$　…②

①−②より，

$$10 = M_1 g - M_2 g$$

したがって，重力の大きさは，球1の方が球2より 10 N 大きい(イ)。

$\boxed{2}$ の答　⑥

【ポイント】

アルキメデスの原理

物体は押しのけた液体(気体)の重さに等しい大きさの浮力を受ける。液体(気体)中に沈んだ体積を V〔m^3〕，液体(気体)の密度を ρ〔kg/m^3〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，浮力の大きさは ρVg〔N〕になる。

問 3　それぞれの位置における**水中の圧力**は，水面からの深さと水の密度で決まる。順次①～④を考察する。ただし，水の密度を ρ，重力加速度の大きさを g とする。

① ｂの位置はａの位置より d だけ深いので，ｂの位置の圧力はａの位置の圧力より ρgd だけ大きい。したがって，適当である。

② ｂとｃの位置は同じ深さだから圧力は等しい。したがって，適当である。

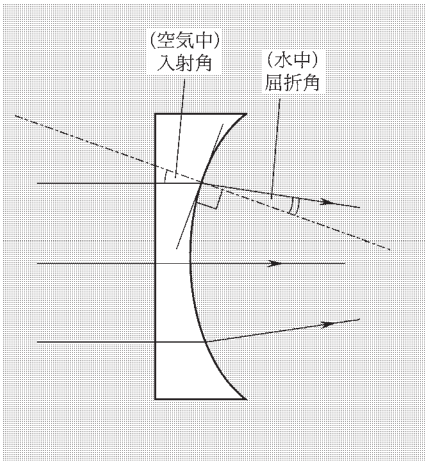
③ 圧力は容器の幅や真上の水の量には関係しない。深さが同じであれば圧力は等しい。ｄの位置とｅの位置の圧力は等しい。したがって，適当でない。

④ ａの位置とｂの位置の圧力差は ρgd である。また，ｂの位置とｅの位置の圧力差は ρgd である。したがって，適当である。

以上のことから，①，②，④は正しい。③は適当でない。

$\boxed{3}$ の答　③

問 4　アクリルは薄いので，アクリル樹脂による屈折は考えなくてよい。次図のように，水中から空気中へアクリル面に垂直に入射した光線はそのまま直進する。空気中から水中へアクリル面(曲面)を通って屈折するときは，空気の屈折率は水の屈折率より小さいから，**屈折の法則**より，入射角より屈折角が小さくなる。したがって，屈折光線は互いに近づき収束するような屈折の仕方になる。これは，空気中でのガラス製凹レンズへ入射した光線と逆の屈折の仕方になる。

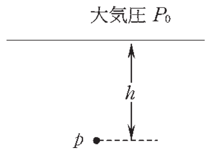


$\boxed{4}$ の答　②

問 5　一つの波の山Ｐが，船尾から船首への距離 50〔m〕を 2.5〔s〕の時間で進むから，波の速さは $v=\dfrac{50}{2.5}=\underline{20}_{(ウ)}$〔m/s〕となる。また，船尾を一波長の波が通過する時間が周期 $T=0.4$〔s〕だから，

水中の圧力

大気圧を P_0〔Pa〕，水の密度を ρ〔kg/m^3〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，深さ h〔m〕での圧力の大きさは $p=P_0+\rho gh$〔Pa〕と表される。



屈折の法則

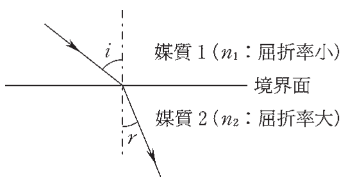
媒質 1 中の波の速さを v_1，波長を λ_1，入射角を i とし，媒質 2 中の波の速さを v_2，波長を λ_2，屈折角を r とすると，屈折の法則は，

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

と表される。さらに，媒質 1，2 の屈折率をそれぞれ n_1，n_2 とすると，

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}$$

と表される。$n_1<n_2$ の場合，屈折角 r の方が入射角 i より小さくなる。



振動数は，$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0.4}=\underline{2.5}_{(エ)}$〔Hz〕となる。

$\boxed{5}$ の答　④

第２問　落体の運動・剛体のつりあい　問題

A

問１　等加速度直線運動の公式より，

$$0^2-v_0{}^2=2(-g)h$$

したがって，$v_0=\underline{\sqrt{2gh}}$

$\boxed{6}$ の答　②

問２　等加速度直線運動の公式より，

$$0=v_0-gt_0$$

したがって，$t_0=\underline{\dfrac{v_0}{g}}$

$\boxed{7}$ の答　③

問３　地面から点Oまでの高さを H とすると，等加速度直線運動の公式より，

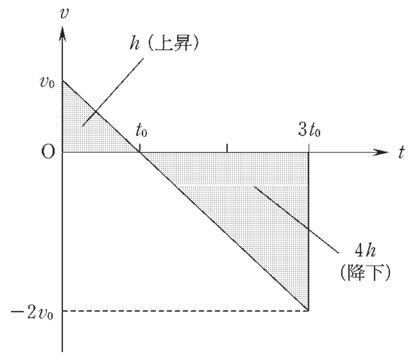
$$-H=v_0(3t_0)-\frac{1}{2}g(3t_0)^2$$

したがって，$H=\dfrac{9}{2}gt_0{}^2-3v_0t_0=9h-6h=\underline{3h}$

$\boxed{8}$ の答　③

（別解）　次図の v-t 図の面積より，小球は h 上昇した後，$4h$ 降下することがわかるから，

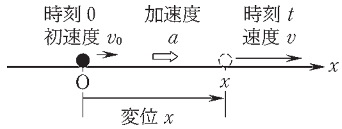
$$H=4h-h=3h$$



B

問４　次図のように，支柱Aから受ける垂直抗力の大きさを N_A，支柱Bから受ける垂直抗力の大きさを N_B とする。板の質量を M，重力加速度の大きさを g とする。板の重心は中心Oである。

等加速度直線運動の公式

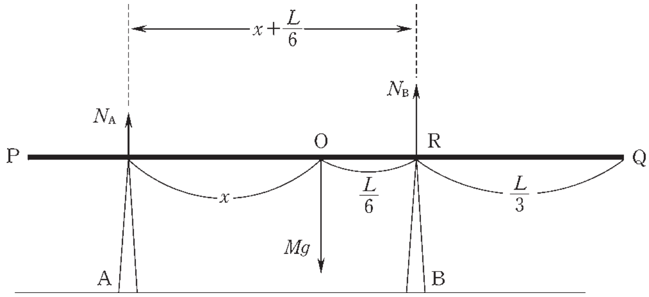


$$v=v_0+at$$

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2-v_0{}^2=2ax$$

鉛直投げ上げでは，上向きを正とした場合，加速度は $a=-g$ とすればよい。

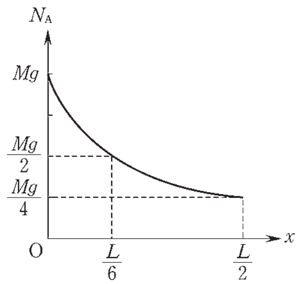


位置 R のまわりの**力のモーメント**のつりあいより，

$$Mg\times\frac{L}{6}=N_A\times\left(x+\frac{L}{6}\right)$$

したがって，$N_A=\dfrac{MgL}{6x+L}$

N_A は直角双曲線のグラフ④になる。



$\boxed{9}$ の答　④

次のように，具体的な x の値を代入して判断してもよい。

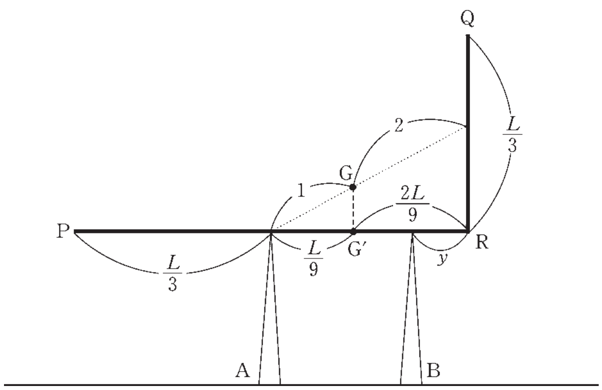
$$x=0 \quad \Rightarrow \quad N_A=Mg$$

$$x=\frac{L}{6} \quad \Rightarrow \quad N_A=\frac{Mg}{2}$$

$$x=\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad N_A=\frac{Mg}{4}$$

問5　PR の質量と QR の質量の比は 2：1 なので，次図のように，L 型になった板の**重心**G は，PR の中心と QR の中心を結ぶ線分を 1：2 に内分する位置になる。よって，重心 G の R からの水平距離 G′R は $\dfrac{2L}{9}$ である。支柱 B が G′ を過ぎれば板を安定に支えられなくなる。したがって，B が R から $y=\dfrac{2L}{9}$ の距離の G′ を過ぎれば板は傾き始める。

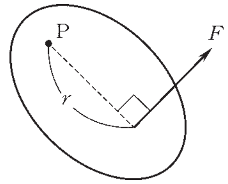
$\boxed{10}$ の答　④



力のモーメント

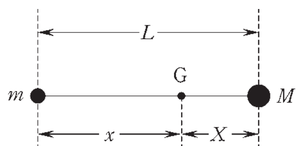
物体を回転させる作用を示す量で，力の大きさとうでの長さで決まる。次図のような場合，点 P のまわりの力のモーメントの大きさを N とすると，

$$N=F\times r$$



重心

質量 m と M の 2 物体間の距離が L のとき，重心 G の位置は，L を質量の逆比に内分する点である。



$$x:X=\frac{1}{m}:\frac{1}{M}=M:m$$

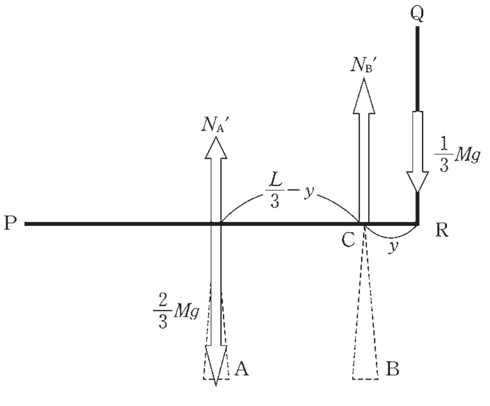
2 物体の質量が等しければ，重心は 2 物体間の中心になる。また，重心で支えれば，物体系は回転することなく静止する。

（別解）　PR の質量は $\frac{2}{3}M$，QR の質量は $\frac{1}{3}M$ である。支柱 A から受ける垂直抗力の大きさを N_A'，支柱 B から受ける垂直抗力の大きさを N_B' とすれば，板にはたらく力は次図のようになる。支柱 B と板の接点 C のまわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\left(\frac{2}{3}Mg-N_A'\right)\times\left(\frac{L}{3}-y\right)=\frac{1}{3}Mg\times y$$

したがって，$N_A'=\dfrac{2L-9y}{3L-9y}Mg$

$N_A'=0$ で板が傾き始めるので，B が $y=\dfrac{2L}{9}$ の位置を過ぎれば，板は傾き始める。



第 3 問　運動方程式・力学的エネルギー　問題

A

問 1　台 M と小物体 m は質量 $M+m$ の一つの物体とみなすことができる。**運動方程式**より，

$$(M+m)a=f$$

したがって，$a=\underline{\dfrac{f}{m+M}}$

$\boxed{11}$ の答　③

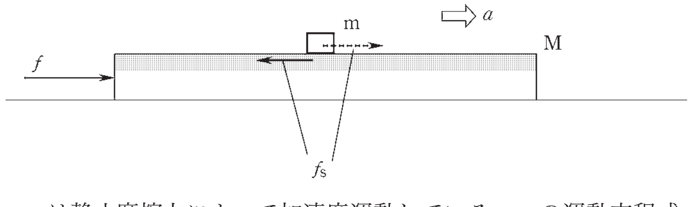
運動方程式

物体の加速度は力に比例し，物体の質量に反比例する。物体が加速度 a〔m/s²〕で運動するとき，物体の質量を m〔kg〕，物体にはたらく力を f〔N〕とすると，運動方程式は $ma=f$ と表される。

問 2　台 M と小物体 m の個々の運動方程式を考える。互いにすべることはないので，m と M の間には静止摩擦力がはたらく。静止摩擦力の大きさを f_S とすると，m と M にはたらく水平方向の力は次図のようになる。m にはたらく力は破線で，M にはたらく力は実線で描かれている。m と M にはたらく静止摩擦力は**作用と反作用**の関係になる。

作用と反作用

2 物体が力を及ぼしあうとき，同一作用線上で等しい大きさの力が，互いに逆向きにはたらく。



m は静止摩擦力によって加速度運動している。m の運動方程式

より，

$$f_s = \underline{ma} \quad \cdots①$$

$\boxed{12}$ の答　③

（参考）

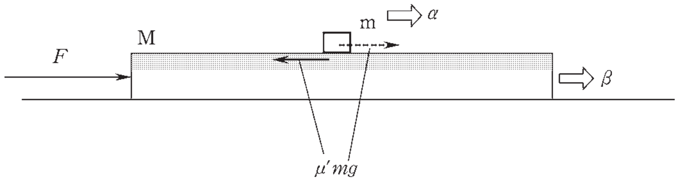
Mの運動方程式は，

$$Ma = f - f_s \quad \cdots②$$

となる。①，②を a，f_s について解けば，$a = \dfrac{f}{m+M}$，

$f_s = \dfrac{mf}{m+M}$ が得られる。加速度 a は**問1**で求めた値である。

問3　mとMの間にはたらく動摩擦力の大きさは $\mu' mg$ である。mとMにはたらく水平方向の力は次図のようになる。mにはたらく力は破線で，Mにはたらく力は実線で描かれている。mとMにはたらく動摩擦力は作用と反作用の関係になる。



mの運動方程式：$\underline{m\alpha = \mu' mg}$

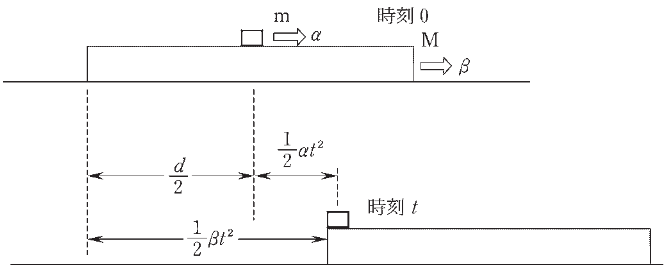
Mの運動方程式：$\underline{M\beta = F - \mu' mg}$

$\boxed{13}$ の答　④

問4　床面に対して，mは初速0，加速度 α の等加速度直線運動，Mは初速0，加速度 β の等加速度直線運動になる。mがMから飛び出すときの様子は，次図のようになるので，

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\beta t^2 - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

したがって，$\underline{\dfrac{d}{2} = -\dfrac{1}{2}\alpha t^2 + \dfrac{1}{2}\beta t^2}$



$\boxed{14}$ の答　②

（別解）　mに対するMの**相対加速度**を a_{mM} とすると，

$$a_{mM} = \beta - \alpha$$

$a_{mM} > 0$ だから，Mはmに対して前方へ移動するので，

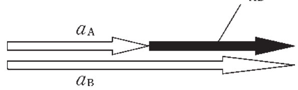
$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}a_{mM}t^2 = \frac{1}{2}\beta t^2 - \frac{1}{2}\alpha t^2 = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{2}\beta t^2$$

相対加速度

床面に対するAの加速度を a_A，床面に対するBの加速度を a_B とする。Aに対するBの相対加速度（Aから見たBの加速度）a_{AB} は，

$$a_{AB} = a_B - a_A$$

となる。次図のように，A，Bの加速度の始点をそろえて，Aの加速度の終点からBの加速度の終点へ向かう矢印が相対加速度になる。



B

問5　Qにはたらく力は，大きさ Mg の重力と大きさ T の糸の張力である。重力のした仕事が W_G，張力のした仕事が W_T だから，**仕事とエネルギーの関係**より，

$$\frac{1}{2}Mv^2=\underline{W_G+W_T}$$

$\boxed{15}$ の答　④

（**参考**）　Qが水平面に落下するまでの距離を h とすると，

$$W_G=Mgh>0,\quad W_T=-Th<0$$

である。一方，Pにはたらく重力のした仕事を W_G'，Pにはたらく糸の張力のした仕事を W_T' とすると，Pに関して仕事とエネルギーの関係は，

$$\frac{1}{2}mv^2=W_G'+W_T'$$

となる。具体的には，

$$W_G'=-mgh\sin\theta<0,\quad W_T'=Th>0$$

である。したがって，PとQの運動エネルギーの和は，

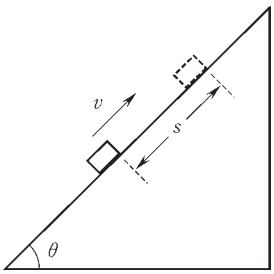
$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2=W_G'+W_T'+W_G+W_T=Mgh-mgh\sin\theta$$

となる。左辺はPとQを合わせた系の運動エネルギーの増加を，右辺はPとQの系の重力による位置エネルギーの減少を示している。上式はPとQの系の**力学的エネルギー保存の法則**を表している。

問6　Qが水平面に落下した後，Pが斜面上を上昇する距離を s とすると，Pの重力による位置エネルギーの増加は $mgs\sin\theta$ である。Pに関して力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=mgs\sin\theta$$

したがって，$s=\underline{\dfrac{v^2}{2g\sin\theta}}$



$\boxed{16}$ の答　①

第4問　波の干渉・気柱共鳴　問題

A

問1　**干渉の条件式**より，**腹線**は，次図のように，９本の直線および双曲線になる。

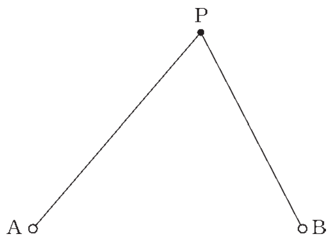
仕事とエネルギーの関係

物体にはたらくすべての力がした仕事の和(合力のした仕事)は，物体の運動エネルギーの変化に等しい。

力学的エネルギー保存の法則

保存力以外の力がはたらかない場合，あるいは，保存力以外の力がした仕事が０の場合は，力学的エネルギーは保存される。

干渉の条件式



A，Bを同位相の波源，波長を λ とする。点Pが強めあう条件は，

$$|PA-PB|=2m\times\frac{\lambda}{2}=m\lambda$$

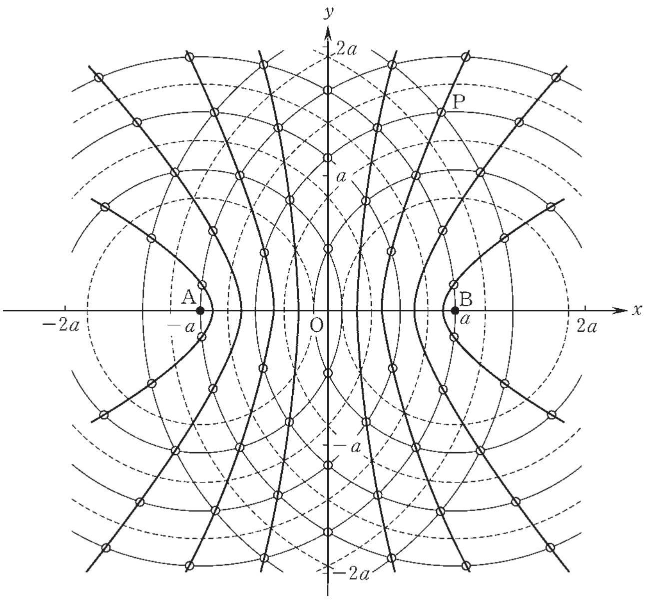
点Pが弱めあう条件は，

$$|PA-PB|=(2m+1)\times\frac{\lambda}{2}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

ただし，$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

腹線

強めあう点を結ぶことによって得られる直線あるいは曲線を腹線という。２つの波源からの波の干渉によってできる腹線は，２つの波源を焦点とする双曲線になる。



線分 AB の垂直二等分線(y 軸)は経路差が 0 の腹線になる。y 軸のとなりの腹線は，経路差が波長 λ に等しい強めあう点の集合になる。y 軸から離れるにつれて，経路差が波長 λ ずつ増加する腹線になる。点 P を通る腹線は y 軸から 2 番目なので，経路差は 2λ である。したがって，

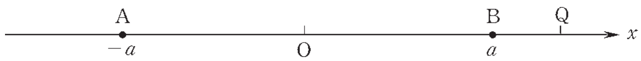
$$\mathrm{PA}-\mathrm{PB}=\underline{2\lambda}$$

$\boxed{17}$ の答　④

問 2　題意より，x 軸で B の右側の領域の点を Q とすると，点 Q は干渉して弱めあっている。干渉の条件式より，m を整数とすれば，

$$\mathrm{QA}-\mathrm{QB}=\mathrm{AB}=2a=(2m+1)\times\frac{\lambda}{2}$$

をみたす。



一方，問題の図 1 において，となりあう実線の円と破線の円の間隔は半波長 $\frac{\lambda}{2}$ だから，線分 OB の長さは次の不等式をみたしていることがわかる。

$$4\times\frac{\lambda}{2}<\mathrm{OB}=a<5\times\frac{\lambda}{2}$$

よって，線分 AB の長さは次の不等式をみたす。

$$8\times\frac{\lambda}{2}<\mathrm{AB}=2a<10\times\frac{\lambda}{2}$$

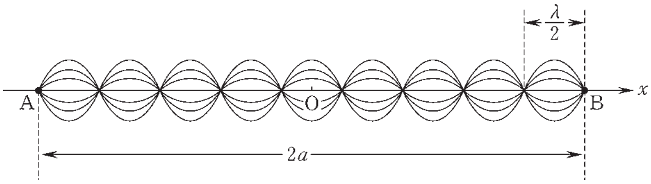
この不等式と干渉の条件式を比較すれば，

$$2a=9\times\frac{\lambda}{2}$$

したがって，$\underline{\lambda=\frac{4}{9}a}$

$\boxed{18}$ の答　②

次のように考えてもよい。x 軸上の AB 間(距離 $2a$)の**定常波**に着目すれば，図1より，線分 AB を横切る腹線は9本あるので，AB 間の腹の数は9個ある。また，題意より，A および B の位置は定常波の節になるから x 軸上の定常波は次図のようになる。

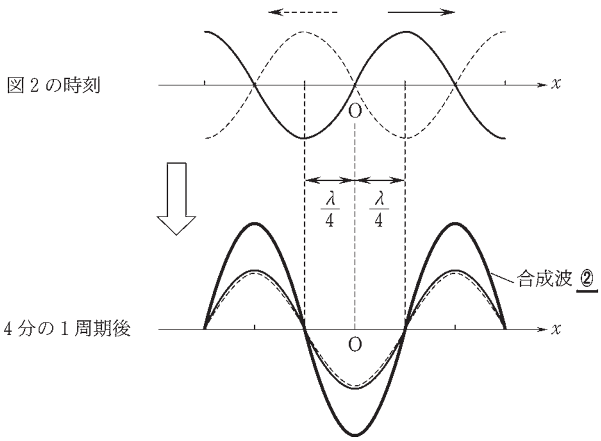


となりあう節の間隔は $\frac{\lambda}{2}$ だから，

$$9\times\frac{\lambda}{2}=2a$$

したがって，$\lambda=\frac{4}{9}a$

問3　波源 A，B からの波をそれぞれ4分の1周期の時間だけ x 軸上を進ませればよい。4分の1周期の時間に進む波の距離は4分の1波長だから，4分の1波長だけ x 軸上を移動させればよい。したがって，合成波は次図のようになる。



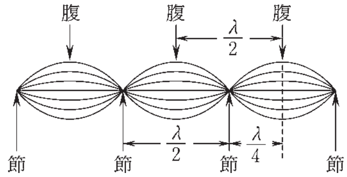
$\boxed{19}$ の答　②

B

問4　2回目に共鳴したときの気柱の長さは ℓ である。**閉管の共鳴**なので，管口 A と C の位置は定常波の腹，B と D の位置は定常波の節になっている。気柱の定常波を**縦波の横波表示**で描けば，次図のようになる。

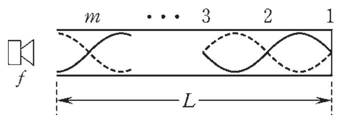
定常波

互いに逆向きに進む，速さ，波長，振幅が等しい2つの波が干渉してできる合成波。



閉管の共鳴

閉管内の定常波の節の数を m 個($m\geqq1$)，波長を λ とする。



気柱の長さは，

$$L=\frac{\lambda}{4}(2m-1)$$

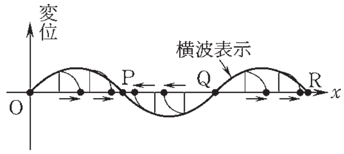
音速を V とすると，振動数 f は，

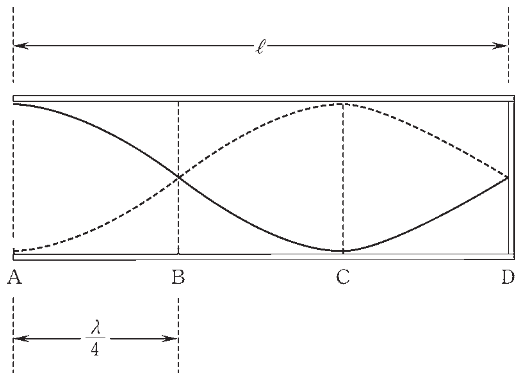
$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{(2m-1)V}{4L}$$

と表され，$2m-1$ 倍振動が生じている。

縦波の横波表示

次図で縦波の媒質が●で示されている。x 軸方向の正の変位(OP 間，QR 間)を反時計回りに90°回転させて縦波の正の変位(横波の正の変位に対応)として描く。一方，x 軸方向の負の変位(PQ 間)を反時計回りに90°回転させて縦波の負の変位(横波の負の変位に対応)として描く。





AB 間の距離 $\frac{\ell}{3}$ が 4 分の 1 波長に等しいから，波長を λ とすると，

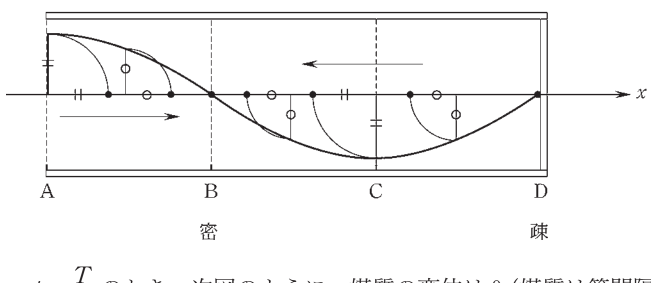
$$\frac{\ell}{3}=\frac{\lambda}{4}$$

したがって，$\lambda=\underline{\frac{4}{3}\ell}$

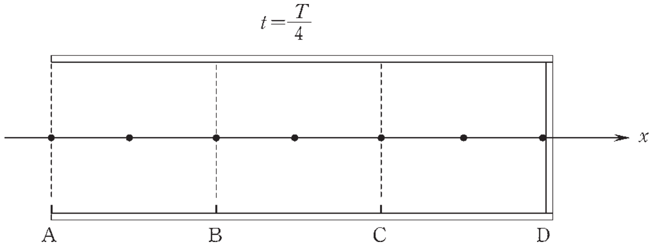
$\boxed{20}$ の答　⑤

問5　周期を T として，時刻 $t=0$ から $t=\frac{T}{2}$ までの間における，閉管内の媒質（空気）の変位を考えてみる。

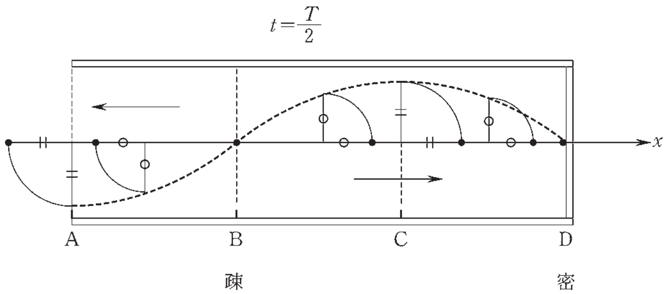
$t=0$ のとき，次図のように，横波表示された定常波を実線とする。ただし，x 軸の正の向きの変位は上向きに，x 軸の負の向きの変位は下向きに描かれている。AB 間の媒質（空気）の変位は x 軸の正の向き，BD 間の媒質の変位は x 軸の負の向きである。B 付近の媒質の間隔は狭まり，D 付近の媒質の間隔は広がっている。したがって，B の位置が最も密，D の位置が最も疎になる。



$t=\frac{T}{4}$ のとき，次図のように，媒質の変位は 0（媒質は等間隔）になり，気柱内の媒質の密度は一様で疎密は生じない。



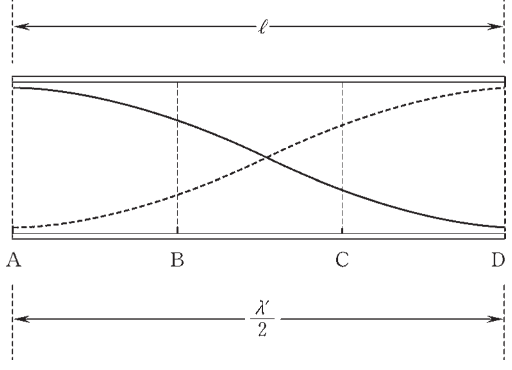
$t=\frac{T}{2}$ のとき，次図のように，横波表示された定常波を破線とする。AB 間の媒質の変位は x 軸の負の向き，BD 間の媒質の変位は x 軸の正の向きである。$t=0$ のときとは逆に，B の位置が最も疎，D の位置が最も密になる。



このように，縦波の定常波は，節の位置の密度が $\frac{1}{2}$ 周期ごとに密⇔疎と交互に変化する。したがって，気柱で密度変化が最も大きい位置は，定常波の節となる B と D である。

$\boxed{21}$ の答　⑤

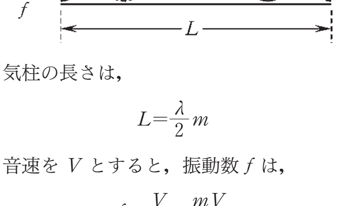
問 6　ピストンを抜くと，ガラス管は長さ ℓ の開管になる。また，振動数を小さくすると，波長は長くなるから，この開管で共鳴することのできる波長は**問 4** で求めた波長 $\lambda=\frac{4}{3}\ell$ より長くなる。このことと，**開管の共鳴**では，ガラス管の両端 A と D の位置は腹になることより，振動数 f' で共鳴したときの様子を横波表示すれば，次図のようになる。



このときの波長を λ' とすれば，

開管の共鳴

開管内の定常波の節の数を m 個 ($m\geqq1$)，波長を λ とする。



気柱の長さは，

$$L=\frac{\lambda}{2}m$$

音速を V とすると，振動数 f は，

$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{mV}{2L}$$

と表され，m 倍振動が生じている。

$$\ell=\frac{1}{2}\lambda'=\frac{3}{4}\lambda$$

となる。よって，λ' は波長 λ の $\frac{3}{2}$ 倍になる。したがって，振動数 f' は，

$$f'=\underline{\frac{2}{3}}f$$

$\boxed{22}$ の答　②

化　学　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設　問	解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	問1	1	①	3	
		2	②	3	
	問2	3	④	3	
	問3	4	⑤	4	
	問4	5	①	4	
	問5	6	①	4	
		7	③	4	
第1問　自己採点小計				(25)	
第2問	問1	8	③	3	
		9	①	4	
	問2	10	⑤	4	
	問3	11	②	3	
	問4	12	④	4	
	問5	13	①	3	
		14	③	4	
第2問　自己採点小計				(25)	
第3問	問1	15	⑤	3	
	問2	16	③	3	
	問3	17	③	4	
	問4	18	④	4	
		19	④	4	
	問5	20	①	3	
		21	④	4	
第3問　自己採点小計				(25)	
第4問	問1	22	②	3	
	問2	23	⑤	3	
	問3	24	④	4	
	問4	25	⑥	3	
	問5	26	③	4	
	問6	27	③	4	
		28	③	4	
第4問　自己採点小計				(25)	
自己採点合計				(100)	

【解説】

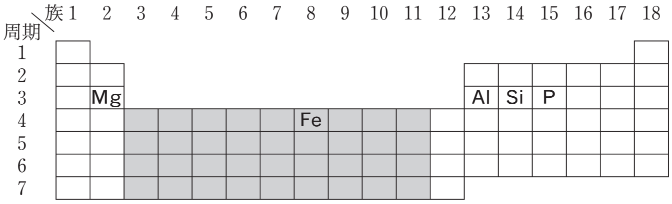
第１問　物質の構成，化学量　問題

問１　純物質と混合物，元素

a　２種類以上の純物質が混じり合ったものを混合物といい，１種類の単体，または１種類の化合物だけからなるものを純物質という。①空気は窒素，酸素のほか，アルゴン，二酸化炭素などからなる混合物である。②ドライアイス（二酸化炭素の固体），③ダイヤモンド，④ヨウ素，⑤水は，いずれも純物質である。

$\boxed{1}$ …①

b　周期表の３～11族の元素を遷移元素（下図の　で示した元素）といい，それ以外の１，２族および12～18族の元素を典型元素という。



選択肢のうち遷移元素であるものは，８族の②鉄である。これ以外の①アルミニウムは13族，③ケイ素は14族，④マグネシウムは２族，⑤リンは15族の元素で，いずれも典型元素である。また，遷移元素は原子番号21以降に現れるので，鉄以外はすべて原子番号が20以下であることからも，正解を導くことができる。

$\boxed{2}$ …②

問２　原子とイオン

①　正しい。原子を構成する陽子と中性子の質量はほぼ等しく，電子の質量は陽子の質量の約 $\frac{1}{1840}$ ときわめて小さい。

②　正しい。陽子は正の電荷，電子は負の電荷をもち，中性子は電荷をもたない。なお，陽子１個と電子１個のもつ電荷の大きさは等しく，符号が逆である。

③　正しい。質量数が１の ^{1}H と質量数が２の ^{2}H のように，原子番号が等しく，質量数の異なる原子を互いに同位体という。なお，同位体では中性子の数は異なるが陽子の数は同じで，その化学的性質はほとんど同じである。

④　誤り。電子は電子殻とよばれるいくつかの層に分かれて存在しており，電子殻は原子核に近いものから順に，K殻，L殻，M殻，…とよばれる。それぞれの電子殻に入ることのできる電子の数には限度があり，最大でK殻には２個，L殻には８個，M殻には18個の電子が入ることができる。

⑤　正しい。原子に含まれる陽子の数と電子の数は等しいの

【ポイント】

純物質と混合物

純物質…１種類の単体，または１種類の化合物だけからなるもの。
　例：窒素，酸素，二酸化炭素，水，塩化ナトリウム

混合物…２種類以上の純物質が混じり合ったもの。
　例：空気，海水

典型元素

周期表１族，２族，12～18族の元素。非金属元素と金属元素が約半数ずつある。

遷移元素

周期表３～11族の元素。すべて金属元素である。Cr，Mn，Fe，Cu，Ag，Auなど。

原子の構造

構成粒子		電荷	質量比
原子核	陽子	＋1	1836
	中性子	0	1839
電子		−1	1

陽子１個や電子１個がもつ電気量の絶対値 1.60×10^{-19} C を単位電荷とすると，陽子の電荷は ＋1，電子の電荷は −1 となる。

各電子殻に収容できる電子の最大数

原子核に近い順から数えて n 番目の電子殻には，最大で $2n^2$ 個の電子が入ることができる。

K殻　$n=1$　最大数２
L殻　$n=2$　最大数８
M殻　$n=3$　最大数18
N殻　$n=4$　最大数32

で，原子は電気的に中性であるが，電子を放出したり受け取ったりすると，陽子の数と電子の数が異なるようになり電荷を帯びる。このような粒子をイオンという。原子番号(すなわち陽子の数)より電子の数が少ない場合は，正の電荷を帯びて陽イオンになる。

$\boxed{3}$ …④

問3　化学反応式と量的関係

化学反応を反応物と生成物の化学式を用いて表したものを化学反応式という。化学変化では反応の前後で原子の種類と数は変わらないので，各元素の原子の数が等しくなるように，化学式の前に係数を付ける。

以上から，①～⑤の化学反応は，それぞれ次の化学反応式で表される。

① $H_2 + Cl_2 \longrightarrow 2HCl$

② $N_2 + 3H_2 \longrightarrow 2NH_3$

③ $2CO + O_2 \longrightarrow 2CO_2$

④ $2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$

⑤ $2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + O_2$

化学反応式の係数の比は反応物と生成物の物質量の比を表しており，左辺の係数の和より右辺の係数の和が大きければ，反応によって分子全体の物質量が増加する，すなわち分子の総数が増加する。

左辺の係数の和より右辺の係数の和が大きい反応は⑤であり，これが正解である。⑤では，2 mol の過酸化水素 H_2O_2 が分解すると，2 mol の水 H_2O と 1 mol の酸素 O_2 が生成するので，反応によって分子の総数が増加する。なお，①では分子の総数は変化しない。②～④ではいずれも分子の総数が減少する。

$\boxed{4}$ …⑤

問4　周期表と元素

①　誤り。水素 H を除く 1 族元素をアルカリ金属元素といい，リチウム Li，ナトリウム Na，カリウム K などが該当する。アルカリ金属元素の価電子は 1 個で，1 価の陽イオンになりやすい。

②　正しい。第 2 周期の元素のうち，常温・常圧(通常は 25 ℃，1.013×10^5 Pa)で単体が気体である元素は，窒素 N (単体は N_2)，酸素 O (単体は O_2，O_3)，フッ素 F (単体は F_2)，ネオン Ne (単原子分子として存在)の 4 種類である。

③　正しい。同じ周期に属する元素を比べると，アルカリ金属の原子のイオン化エネルギー(第一イオン化エネルギー)が最も小さく，陽イオンになりやすい。第 2 周期ではアルカリ金属のリチウムのイオン化エネルギーが最も小さい。

④　正しい。同じ周期に属する元素を比べると，ハロゲンの原

同族元素

アルカリ金属…H を除く 1 族元素。
Li，Na，K など

アルカリ土類金属…Be，Mg を除く 2 族元素。Ca，Sr，Ba など

ハロゲン…17 族元素。
F，Cl，Br，I など

希ガス…18 族元素。
He，Ne，Ar など

イオン化エネルギー(第一イオン化エネルギー)

原子から電子 1 個を取り去るのに必要なエネルギー。イオン化エネルギーの小さい原子は陽イオンになりやすい。

子の電子親和力が最も大きく，陰イオンになりやすい。第3周期ではハロゲンの塩素 Cl の電子親和力が最も大きい。

⑤　正しい。価電子とは原子がイオンになったり，他の原子と化学結合をつくるときに重要なはたらきをする電子のことであり，典型元素では，希ガスを除いて最外殻電子がこれにあたる。同族元素では最外殻電子の数が等しいので，価電子の数も等しい。16族の酸素 O と硫黄 S の価電子の数は等しく6である。

$\boxed{5}$ …①

問5　組成式と原子量

a　金属元素 M の単体と酸素 O_2 が反応して酸化物 M_2O_3 が生成している。反応の前後で物質の総質量は変化しないので，1.8 g の M と反応した O_2 の質量は，

$$3.4-1.8=1.6\,[\mathrm{g}]$$

O_2 のモル質量は 32 g/mol なので，1.6 g の O_2 の物質量は，

$$\frac{1.6}{32}=0.050\,[\mathrm{mol}]$$

気体 1 mol の標準状態での体積は 22.4 L であることから，0.050 mol の O_2 の体積は，

$$22.4\times0.050=1.12\fallingdotseq1.1\,[\mathrm{L}]$$

なお，この反応は，次の化学反応式で表される。

$$4M + 3O_2 \longrightarrow 2M_2O_3$$

$\boxed{6}$ …①

b　金属の酸化物のようにイオンからなる物質の化学式は組成式で表される。組成式 M_2O_3 から M 原子と O 原子が 2：3 の数の比でこの酸化物に含まれていることがわかる。したがって，3.4 g の M_2O_3 に含まれる M と O の物質量の比も 2：3 である。M の原子量を x とすると M 原子のモル質量は x [g/mol]，O 原子のモル質量は 16 g/mol なので，

$$\frac{1.8}{x}:\frac{1.6}{16}=2:3$$

$$x=27$$

$\boxed{7}$ …③

電子親和力

原子が電子1個を受け取るときに放出されるエネルギー。電子親和力の大きい原子は陰イオンになりやすい。

モル質量

物質 1 mol あたりの質量。原子・分子・イオンのモル質量は，原子量・分子量・式量に単位 g/mol を付けたものになる。

気体 1 mol の体積

気体 1 mol の体積は，標準状態（0 ℃，1.013×10^5 Pa）で 22.4 L である。物質 1 mol が占める体積をモル体積といい，気体のモル体積は標準状態で 22.4 L/mol である。

組成式

物質を構成する各元素の原子数の比を最も簡単な整数比で表した化学式。イオン結合でできた物質のほか，金属，共有結合の結晶も組成式で表す。

第2問　溶液の濃度，化学反応と反応熱　問題

問1　溶液の濃度

a　水溶液 A 400 mL 中の塩化水素 HCl (36.5 g/mol) の物質量は，

$$0.15\times\frac{400}{1000}=6.0\times10^{-2}\,[\mathrm{mol}]$$

よって，その質量は，

$$36.5\times6.0\times10^{-2}=2.19\fallingdotseq2.2\,[\mathrm{g}]$$

$\boxed{8}$ …③

b　**a** より水溶液 A 中の HCl の物質量は 6.0×10^{-2} mol であ

モル濃度

溶液 1 L に溶解している溶質の物質量 [mol] で表した濃度。

$$\text{モル濃度}\,[\mathrm{mol/L}]=\frac{\text{溶質の物質量}\,[\mathrm{mol}]}{\text{溶液の体積}\,[\mathrm{L}]}$$

る。一方，水溶液B中の HCl の物質量は，

$$0.20\times\frac{200}{1000}=4.0\times10^{-2}\,〔\mathrm{mol}〕$$

よって，混合後の水溶液中の HCl の物質量は，

$$6.0\times10^{-2}+4.0\times10^{-2}=1.0\times10^{-1}\,〔\mathrm{mol}〕$$

したがって，水溶液Cのモル濃度は，

$$\frac{1.0\times10^{-1}}{2.0}=0.050\,〔\mathrm{mol/L}〕$$

$\boxed{9}$ …①

問2　溶液の濃度

水溶液A 1 L中の溶質(モル質量 M〔g/mol〕)の物質量は c〔mol〕なので，その質量は cM〔g〕である。

よって，質量パーセント濃度は，

$$\frac{cM}{w}\times100=\frac{100cM}{w}\,〔\%〕$$

$\boxed{10}$ …⑤

質量パーセント濃度

溶液 100 g に溶解している溶質の質量〔g〕で表した濃度。

質量パーセント濃度〔%〕

$$=\frac{溶質の質量〔g〕}{溶液の質量〔g〕}\times100$$

問3　反応熱

問題文中の熱化学方程式を(1)～(3)式とする。

$$\frac{1}{2}N_2(気)\ +\ \frac{1}{2}O_2(気)\ =\ NO(気)\ -\ 90\,\mathrm{kJ}\qquad\cdots\cdots(1)$$

$$NO(気)\ +\ \frac{1}{2}O_2(気)\ =\ NO_2(気)\ +\ 57\,\mathrm{kJ}\qquad\cdots\cdots(2)$$

$$2NO_2(気)\ =\ N_2O_4(気)\ +\ 57\,\mathrm{kJ}\qquad\cdots\cdots(3)$$

①　正しい。(1)式より，一酸化窒素 NO(気) 1 mol がその成分元素の単体から生成するとき 90 kJ の熱を吸収するので，NO(気) の生成熱は −90 kJ/mol である。

②　誤り。(1)式+(2)式より，

$$\frac{1}{2}N_2(気)\ +\ O_2(気)\ =\ NO_2(気)\ -\ 33\,\mathrm{kJ}$$

よって，二酸化窒素 NO_2(気) の生成熱は −33 kJ/mol である。

③　正しい。(2)式より，1 mol の NO(気) と $\frac{1}{2}$ mol の O_2(気) が反応して 1 mol の NO_2(気) が生成するときに 57 kJ の熱が発生するので，2 mol の NO_2(気) が生成するときは，(57×2＝)114 kJ の熱が発生する。

④　正しい。(3)式より，NO_2(気) 2 mol のもつエネルギーは，四酸化二窒素 N_2O_4(気) 1 mol のもつエネルギーよりも 57 kJ 大きい。よって，N_2O_4(気) が NO_2(気) になる反応は吸熱反応である。

生成熱

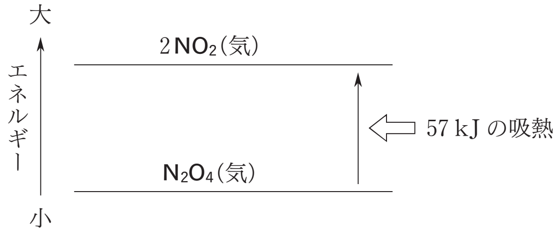
物質 1 mol がその成分元素の単体から生成するときに発生または吸収する熱量。

発熱反応

反応物のもつエネルギーが生成物のもつエネルギーよりも大きいとき，その差が熱エネルギーとして放出される。このように，熱を発生する反応を発熱反応という。

吸熱反応

反応物のもつエネルギーが生成物のもつエネルギーより小さいとき，その差のエネルギーを熱としてまわりから吸収する。このように，熱を吸収する反応を吸熱反応という。



なお，(3) 式より，

$$N_2O_4(\text{気}) = 2NO_2(\text{気}) - 57\,\text{kJ}$$

これより，N_2O_4(気) が NO_2(気) になる反応は吸熱反応であるとわかる。

$\boxed{11}$ … ②

問 4　溶解熱

水酸化ナトリウム NaOH (40 g/mol) 2.0 g の物質量は，

$$\frac{2.0}{40} = 5.0\times10^{-2}\,〔\text{mol}〕$$

これを水に溶かしたとき発生する熱量は，NaOH の溶解熱が 45 kJ/mol であることから，

$$45\times5.0\times10^{-2} = 2.25\,〔\text{kJ}〕$$

水溶液の質量は，

$$98 + 2.0 = 100\,〔\text{g}〕$$

水溶液の温度変化を $\varDelta t$〔℃〕とすると，

$$2.25\times10^3 = 4.2\times100\times\varDelta t$$

$$\varDelta t = 5.35 \fallingdotseq 5.4\,〔℃〕$$

$\boxed{12}$ … ④

熱量の計算

水溶液 1 g の温度を 1 ℃ 上昇させるのに必要な熱量を 4.2 J，水溶液の質量を w〔g〕，水溶液の温度上昇を $\varDelta t$〔℃〕，水溶液の温度上昇に使われた熱量を q〔J〕とすると，次の関係が成り立つ。

$$q = 4.2\times w\times\varDelta t$$

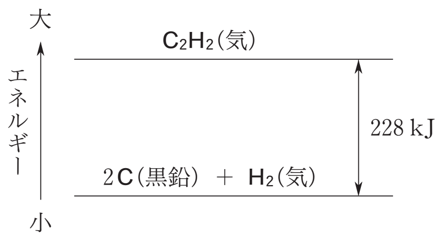
問 5　反応熱とエネルギー

a　アセチレン C_2H_2 とエタン C_2H_6 の生成熱を表す熱化学方程式を (1) 式，(2) 式とする。

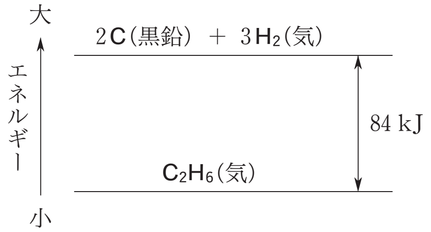
$$2C(\text{黒鉛}) + H_2(\text{気}) = C_2H_2(\text{気}) - 228\,\text{kJ} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$2C(\text{黒鉛}) + 3H_2(\text{気}) = C_2H_6(\text{気}) + 84\,\text{kJ} \quad \cdots\cdots(2)$$

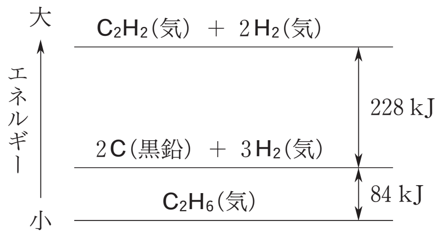
(1)式より，C(黒鉛) 2 mol と H_2(気) 1 mol のもつエネルギーは，C_2H_2(気) 1 mol がもつエネルギーより 228 kJ 小さい。



(2) 式より，C(黒鉛) 2 mol と H_2(気) 3 mol のもつエネルギーは，C_2H_6(気) 1 mol がもつエネルギーより 84 kJ 大きい。



よって，(1)式の両辺に H_2(気) 2 mol を加えたものと，(2)式のエネルギーの関係を表す図は次のようになる。



$\boxed{13}$ … ①

b C_2H_6(気)の燃焼熱を表す熱化学方程式は，

$$C_2H_6(気) + \frac{7}{2}O_2(気)$$
$$= 2CO_2(気) + 3H_2O(液) + 1562\,\mathrm{kJ} \qquad \cdots\cdots(3)$$

H_2O(液) の生成熱を表す熱化学方程式は，

$$H_2(気) + \frac{1}{2}O_2(気) = H_2O(液) + 286\,\mathrm{kJ} \qquad \cdots\cdots(4)$$

C_2H_2(気)の燃焼熱を Q〔kJ/mol〕とすると，その熱化学方程式は，

$$C_2H_2(気) + \frac{5}{2}O_2(気)$$
$$= 2CO_2(気) + H_2O(液) + Q\,〔\mathrm{kJ}〕 \qquad \cdots\cdots(5)$$

(5)式は，(2)式＋(3)式－(1)式－(4)式×2 より得られるので，

$$Q = 84 + 1562 - (-228) - 286 \times 2$$
$$= 1302\,〔\mathrm{kJ/mol}〕$$

〈別解〉 CO_2 の生成熱を Q'〔kJ/mol〕とし，

(反応熱)＝(生成物の生成熱の和)－(反応物の生成熱の和)

の関係を(3)，(5)式にそれぞれ適用すると，

$$1562 = 2Q' + 286 \times 3 - 84 \qquad \cdots\cdots(6)$$
$$Q = 2Q' + 286 - (-228) \qquad \cdots\cdots(7)$$

(6)，(7)式より，$Q = 1302$〔kJ/mol〕となる。

$\boxed{14}$ … ③

燃焼熱

物質 1 mol が完全燃焼するときに発生する熱量。

第3問　酸と塩基　問題

問1　酸と塩基

① 正しい。反応式**ア**のように，二酸化炭素が水と反応すると炭酸が生成する。炭酸 H_2CO_3 は水溶液中でおもに次のように電離し，水素イオンを生じるため，水溶液は酸性を示す。

$$H_2CO_3 \rightleftarrows H^+ + HCO_3^-$$

② 正しい。塩基性の水溶液を赤色リトマス紙につけると，青く変色する。反応式**イ**のように水酸化カリウム KOH は水溶液中で電離し，水酸化物イオンを生じるため，水溶液は塩基性を示す。よって，赤色リトマス紙に水酸化カリウム水溶液をつけると青色に変化する。

③ 正しい。水酸化カリウム KOH は1価の強塩基である。

④ 正しい。ブレンステッドとローリーは，「酸は H^+ を与える分子やイオン，塩基は H^+ を受け取る分子やイオンである」と定義した。反応式**ウ**では H_2O が NH_3 に H^+ を与えているので，H_2O は酸としてはたらいている。

$$\underbrace{NH_3 + H_2O}_{H^+} \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$$

⑤ 誤り。水酸化カリウムは1価の強塩基であり完全に電離するので，1 mol/L の水酸化カリウム水溶液中のカリウムイオンのモル濃度は1 mol/L である。

$$KOH \longrightarrow K^+ + OH^-$$

一方，アンモニアは1価の弱塩基であり一部しか電離しないので，1 mol/L のアンモニア水中のアンモニウムイオンのモル濃度は1 mol/L よりも小さい。

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$$

$\boxed{15}$ …⑤

問2　塩の水溶液

① 誤り。塩化カリウム KCl は HCl (強酸) と KOH (強塩基) の中和で得られる塩であり，その水溶液は中性を示す。

② 誤り。酢酸ナトリウム CH_3COONa は CH_3COOH (弱酸) と NaOH (強塩基) の中和で得られる塩であり，その水溶液は塩基性を示す。

③ 正しい。炭酸水素ナトリウム $NaHCO_3$ は H_2CO_3 (弱酸) と NaOH (強塩基) の中和で得られる塩であり，その水溶液は塩基性を示す。

④ 誤り。硫酸アンモニウム $(NH_4)_2SO_4$ は H_2SO_4 (強酸) と NH_3 (弱塩基) の中和で得られる塩であり，その水溶液は酸性を示す。

⑤ 誤り。硫酸水素ナトリウム $NaHSO_4$ は H_2SO_4 (強酸) と NaOH (強塩基) の中和で得られる塩であるが，2価の強酸であ

酸・塩基の定義

アレニウスの定義

酸　…水中で H^+ を生じる物質

塩基…水中で OH^- を生じる物質

ブレンステッド・ローリーの定義

酸　…H^+ を与える分子やイオン

塩基…H^+ を受け取る分子やイオン

リトマス紙の色の変化

酸性の水溶液：青色リトマス紙を赤色に変化させる。

塩基性の水溶液：赤色リトマス紙を青色に変化させる。

酸・塩基の例

	強酸	弱酸
1価	HCl，HNO_3	CH_3COOH
2価	H_2SO_4	$H_2C_2O_4$，H_2S，H_2CO_3 ($H_2O + CO_2$)
3価		H_3PO_4

	強塩基	弱塩基
1価	NaOH，KOH	NH_3
2価	$Ca(OH)_2$，$Ba(OH)_2$	$Mg(OH)_2$，$Cu(OH)_2$
3価		$Al(OH)_3$

（酸の化学式で，電離して H^+ になることのできる水素原子の数を酸の価数という。塩基の化学式に含まれる OH^- の数，または受け取ることのできる H^+ の数を塩基の価数という。）

塩の水溶液の液性

- 強酸と弱塩基の中和で生成する塩…酸性
  例：NH_4Cl，$(NH_4)_2SO_4$
- 弱酸と強塩基の中和で生成する塩…塩基性
  例：Na_2CO_3，$NaHCO_3$
- 強酸と強塩基の中和で生成する塩…中性
  例：NaCl，Na_2SO_4
  ただし，$NaHSO_4$ の水溶液は酸性である。

る H_2SO_4 の水素原子が残っており，これが水素イオンとして電離するため，酸性を示す。

$$HSO_4^- \rightleftarrows H^+ + SO_4^{2-}$$

なお，Na_2SO_4 の水溶液は中性を示す。

$\boxed{16}$ … ③

問 3　水溶液の pH

pH が 3 であることから，1 価の弱酸 A の水溶液の水素イオン濃度 $[H^+]$ は 1×10^{-3} mol/L である。A の水溶液中の電離度を α とすると，A の電離により生じる水素イオンのモル濃度は $0.1\times\alpha$〔mol/L〕と表されるので，

$$[H^+]=0.1\times\alpha=1\times10^{-3}$$

$$\alpha=1\times10^{-2}$$

$\boxed{17}$ … ③

問 4　中和反応における量的関係

a　0.20 mol/L の塩酸 10 mL に含まれる HCl は，

$$0.20\times\frac{10}{1000}=0.0020\,〔\mathrm{mol}〕$$

であり，この水溶液に含まれるイオンの物質量は，

$$\begin{cases} H^+ \cdots\cdots 0.0020\,〔\mathrm{mol}〕 \\ Cl^- \cdots\cdots 0.0020\,〔\mathrm{mol}〕 \end{cases}$$

塩酸に水酸化ナトリウム水溶液を加えたときに起こる変化は，次の化学反応式で表される。

$$HCl + NaOH \longrightarrow NaCl + H_2O \qquad \cdots\cdots(1)$$

強酸である HCl と強塩基である NaOH，および水に可溶な塩である NaCl は完全に電離しているので，(1) 式に電離状態を反映させると，次のように表される。

$$(H^+ + Cl^-) + (Na^+ + OH^-) \longrightarrow (Na^+ + Cl^-) + H_2O$$

すなわち，イオン反応式は次のようになり，Na^+ と Cl^- は実質的には反応していないことになる。

$$H^+ + OH^- \longrightarrow H_2O$$

したがって，水溶液中の Cl^- の物質量は，水酸化ナトリウム水溶液を滴下してもはじめの 0.0020 mol から変化しない。また，Na^+ の物質量は滴下した NaOH の物質量に等しく，滴下した水酸化ナトリウム水溶液の体積に比例するので，Na^+ のグラフは①，④が該当する。

また，0.20 mol/L の塩酸 10 mL を中和するのに要する水酸化ナトリウム水溶液の体積を v〔mL〕とすると，

$$1\times0.20\times\frac{10}{1000}=1\times0.40\times\frac{v}{1000}$$

$$v=5.0\,〔\mathrm{mL}〕$$

i ）水酸化ナトリウム水溶液の滴下量が 5.0 mL に達するまで（中和点まで）

水素イオン濃度と pH

$[H^+]=1\times10^{-n}$〔mol/L〕のとき，

pH$=n$

電離度

電離度 α

$$=\frac{\text{電離した酸または塩基の物質量}}{\text{溶かした酸または塩基の物質量}}$$

モル濃度が c〔mol/L〕の 1 価の酸の場合，$[H^+]=c\alpha$〔mol/L〕

中和の量的関係

(酸の価数)×(酸の物質量)

＝(塩基の価数)×(塩基の物質量)

H^+ の物質量の減少量は滴下した水酸化ナトリウム水溶液の体積に比例し，水酸化ナトリウム水溶液の滴下量が 5.0 mL になったところで，H^+ の物質量はほぼ 0 となる。このとき Na^+ の物質量は，

$$0.40\times\frac{5.0}{1000}=0.0020\,\text{〔mol〕}$$

なお，滴下した NaOH が放出する OH^- は，H^+ との中和によって消費されるため，水溶液中に残る OH^- の物質量はほぼ 0 のままである。

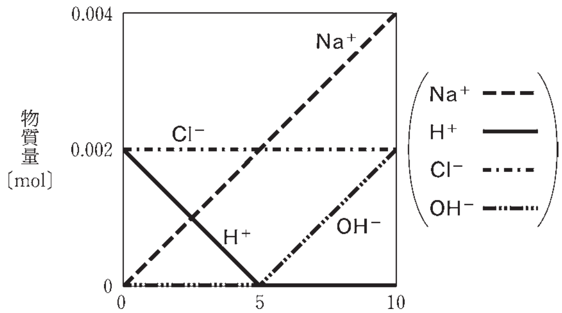
ii ）水酸化ナトリウム水溶液の滴下量が 5.0 mL を超えた後(中和点の後)

HCl の中和が完了した後なので，水溶液に含まれる H^+ の物質量はほぼ 0 のままである。滴下量が 10 mL のとき，Na^+ の物質量は，

$$0.40\times\frac{10}{1000}=0.0040\,\text{〔mol〕}$$

なお，滴下した NaOH は反応しないので，OH^- の物質量は 5.0 mL を超えた分の水酸化ナトリウム水溶液の滴下量に比例して増加する。

以上の結果をまとめると，次図のようになる。



以上より正解は④である。

$\boxed{18}$ …④

b　水酸化ナトリウム水溶液を 10 mL 加えたときの水酸化物イオン OH^- の物質量は，

$$0.40\times\frac{10-5.0}{1000}=2.0\times10^{-3}\,\text{〔mol〕}$$

混合後の水溶液の体積は (10＋10＝)20 mL なので，水酸化物イオン濃度 $[OH^-]$ は，

$$[OH^-]=2.0\times10^{-3}\times\frac{1000}{20}=1.0\times10^{-1}\,\text{〔mol/L〕}$$

$\boxed{19}$ …④

問 5　中和滴定

a　10 倍に希釈して，モル濃度を $\frac{1}{10}$ 倍にするためには，水を加えて体積を 10 倍にすればよい。よって，まず酢酸水溶液 10

中和滴定に使用する器具

ホールピペット…一定体積の液体を正確にはかりとる器具。

メスフラスコ…一定体積の液体を正確にはかる器具。正確な濃度の溶液の調製や正確に溶液を希釈するときに用いる。

ビュレット…滴下した液体の体積をはかる器具。

コニカルビーカー…上部を細くしたビーカーで，振り混ぜても中の液体がこぼれにくい。

mL をホールピペットを用いて正確にはかりとり，100 mL のメスフラスコに移す。標線まで蒸留水を加えよく混合すると，正確に 10 倍に希釈した酢酸水溶液 100 mL が得られる。

$\boxed{20}$ …①

b　希釈前の酢酸水溶液の濃度を x〔mol/L〕とすると，10 倍に希釈した後の酢酸水溶液の濃度は $\frac{x}{10}$〔mol/L〕である。

CH_3COOH は 1 価の酸，NaOH は 1 価の塩基なので次の式が成立する。

$$1\times\frac{x}{10}\times\frac{10}{1000}=1\times0.010\times\frac{8.0}{1000}$$

$$x=8.0\times10^{-2}\text{〔mol/L〕}$$

$\boxed{21}$ …④

第 4 問　酸化還元，電池，電気分解　問題

問 1　酸化還元の定義

①　正しい。ある物質が電子を失ったとき，その物質は酸化されたという。このとき酸化数の増加する原子が含まれる。

②　誤り。酸化剤としてはたらいた物質は還元されるため，酸化数の減少した原子が含まれる。

③　正しい。物質が還元されたときには電子を得ているので，酸化数の減少した原子が含まれる。

④　正しい。反応において相手に電子を与えることで相手を還元する物質が還元剤である。

$\boxed{22}$ …②

問 2　酸化数

塩素原子の酸化数をそれぞれ x とおく。

①　塩化銅(II) $CuCl_2$ は Cu^{2+} と Cl^- からなる化合物であるので，　$x=-1$

②　塩素 Cl_2 は単体であるので，　$x=0$

③　過塩素酸 $HClO_4$ について，

$$(+1)+x+(-2)\times4=0\qquad x=+7$$

④　塩素酸カリウム $KClO_3$ は，K^+ と ClO_3^- からなる化合物であり，ClO_3^- について，

$$x+(-2)\times3=-1\qquad x=+5$$

⑤　次亜塩素酸ナトリウム NaClO は，Na^+ と ClO^- からなる化合物であり，ClO^- について，

$$x+(-2)=-1\qquad x=+1$$

$\boxed{23}$ …⑤

問 3　酸化還元反応

ア　それぞれの原子の酸化数は，Na は +1，Cl は −1，H は +1，O は −2，N は −3，C は +4 で変化しておらず，酸化還

酸化・還元

酸化される　電子を失い，酸化数が増加すること。

還元される　電子を得て，酸化数が減少すること。

酸化剤・還元剤

酸化剤　相手を酸化する物質。自身は還元され，酸化数の減少する原子が含まれる。

還元剤　相手を還元する物質。自身は酸化され，酸化数の増加する原子が含まれる。

酸化数の決め方

1.　単体中の原子：0
2.　化合物中の
　H 原子：+1
　O 原子：−2
　(ただし，H_2O_2 では −1)
3.　化合物では，構成原子の酸化数の総和は 0 である。
4.　単原子イオンの酸化数は，イオンの価数に等しい。
5.　多原子イオンでは，構成原子の酸化数の総和はそのイオンの価数に等しい。

元反応ではない。

イ　Al 原子の酸化数が 0 から +3，H_2O 中の H 原子の酸化数が +1 から 0 に変化しているので，酸化還元反応である。

$$2\underset{0}{\underline{Al}} + 2NaOH + 6\underset{+1}{\underline{H}_2}O \longrightarrow 2Na[\underset{+3}{\underline{Al}}(OH)_4] + 3\underset{0}{\underline{H_2}}$$

酸化　還元

ウ　Mn 原子の酸化数が +7 から +2，H_2O_2 中の O 原子の酸化数が −1 から 0 に変化しているので，酸化還元反応である。

$$2K\underset{+7}{\underline{Mn}}O_4 + 3H_2SO_4 + 5H_2\underset{-1}{\underline{O_2}} \longrightarrow 2\underset{+2}{\underline{Mn}}SO_4 + K_2SO_4 + 8H_2O + 5\underset{0}{\underline{O_2}}$$

還元　酸化

エ　それぞれの原子の酸化数は，Ag は +1，N は +5，O は −2，H は +1，Cl は −1 で変化しておらず，酸化還元反応ではない。

よって，酸化還元反応であるものは**イ・ウ**である。

$\boxed{24}$ …④

問 4　金属のイオン化傾向

イオン化傾向の大きい金属の単体とイオン化傾向の小さい金属のイオンは反応し，イオン化傾向の小さい金属のイオンは単体として析出する。たとえば，銅と銀では銀の方がイオン化傾向が小さいので，硝酸銀 $AgNO_3$ 水溶液に銅の単体を入れると，銅は溶け出し，銀の単体が析出する。

$$Cu + 2Ag^+ \longrightarrow Cu^{2+} + 2Ag$$

実験（**ア**〜**ウ**）の結果から，次のことがわかる。

ア　Y の表面に X の単体が析出したことから，Y よりも X の方がイオン化傾向が小さいことがわかる。

イ　Z の表面に X の単体が析出したことから，Z よりも X の方がイオン化傾向が小さいことがわかる。

ウ　変化がなかったことから，Z よりも Y の方がイオン化傾向が小さいことがわかる。

よって，イオン化傾向の大小は Z ＞ Y ＞ X となる。

$\boxed{25}$ …⑥

金属のイオン化傾向

金属の単体が水溶液中で電子を放出し，陽イオンになろうとする性質を金属のイオン化傾向という。

イオン化傾向の大きい金属の単体ほど水中で電子を放出してイオンになりやすく，イオン化傾向の小さい金属のイオンほど電子を受け取り単体になりやすい。

問 5　ダニエル電池，鉛蓄電池

ダニエル電池の放電時には，各極で次のような反応が起こる。

正極　$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

負極　$Zn \longrightarrow Zn^{2+} + 2e^-$

①　正しい。電池において還元反応が起こるのが正極である。上式よりダニエル電池の正極では，硫酸銅（II）水溶液中の Cu^{2+} が外部回路を流れてきた電子を受け取り還元される。

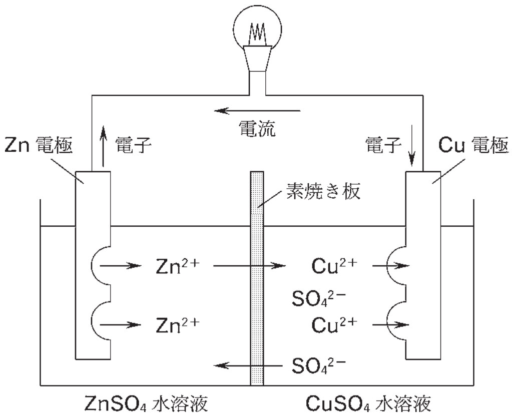
②　正しい。次図のように，ダニエル電池を放電させると，硫酸銅（II）水溶液中の Cu^{2+} が減少し，硫酸亜鉛水溶液中の Zn^{2+}

電池の正極，負極

正極　外部回路から電子が流れ込む電極。還元反応が起こる。

負極　外部回路へ電子が流れ出す電極。酸化反応が起こる。

が増加する。このとき，電気的中性を保つために硫酸銅(II)水溶液側から硫酸亜鉛水溶液側に移動するのは，硫酸イオンである。



鉛蓄電池の放電時には，各極で次のような反応が起こる。

正極　$\underset{+4}{\underline{Pb}}O_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e^-$
$\longrightarrow \underset{+2}{\underline{Pb}}SO_4 + 2H_2O$

負極　$\underset{0}{\underline{Pb}} + SO_4^{2-} \longrightarrow \underset{+2}{\underline{Pb}}SO_4 + 2e^-$

③　誤り。上式より，PbO_2 中の Pb 原子の酸化数は減少しており還元されている。よって，PbO_2 電極は正極である。

④　正しい。上式より，Pb 電極では Pb が $PbSO_4$ に変化しており，生成した $PbSO_4$ は電極に付着するため，電極の質量は増加する。

⑤　正しい。鉛蓄電池全体の反応は次のとおりである。

$PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 \longrightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O$

Pb 電極を外部電源の負極に，PbO_2 電極を外部電源の正極に接続することで放電時と逆向きの反応が起こり，充電が可能である。鉛蓄電池は二次電池に分類される。

$\boxed{26}$ …③

問6　水溶液の電気分解

各電極で起こる反応を，電子を含むイオン反応式で表すと次のようになる。

電極**ア**(陽極)：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$
電極**イ**(陰極)：$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$
電極**ウ**(陽極)：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$
電極**エ**(陰極)：$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

a　①　正しい。電気分解において，直流電源の正極に接続された電極が陽極であり，酸化反応が起こる。

②　正しい。電気分解において，直流電源の負極に接続された電極が陰極である。電極**エ**では水が還元されることで水素が発生する。

一次電池と二次電池

一次電池…充電による再利用ができない電池。

二次電池…充電により繰り返し使える電池。

水溶液の電気分解

陽極…外部電源の正極とつないだ電極。酸化反応が起こる。

・電極が Cu や Ag のとき
1. Cu や Ag が酸化され，イオンになり溶解する。

・電極が C や Pt のとき
2. ハロゲン化物イオンが酸化され，ハロゲンの単体が生成する。
3. 電解液が酸性，中性のときには H_2O が，電解液が塩基性のときには OH^- が酸化され，O_2 が発生する。

陰極…外部電源の負極とつないだ電極。還元反応が起こる。
1. 電解液中の Ag^+ や Cu^{2+} が還元され，Ag や Cu が析出する。
2. 電解液が中性，塩基性のときには H_2O が，電解液が酸性のときには H^+ が還元され，H_2 が発生する。

③　誤り。電極**ア**，**イ**の反応式を電子の係数をそろえて足し合わせ，さらに反応に関与していない硫酸イオンを両辺に加えることで，電解槽A全体の反応は次のように表される。

$$2CuSO_4 + 2H_2O \longrightarrow 2Cu + O_2 + 2H_2SO_4$$

水溶液中の硫酸銅(II)が消費され硫酸が生成するので，硫酸銅(II)の物質量は減少する。

④　正しい。電極**ウ**，**エ**の反応式を足し合わせることで，電解槽B全体の反応は次のように表される。

$$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$$

消費されるのは水分子のみであり，硫酸ナトリウムの物質量は変化しない。

⑤　正しい。回路を流れた電気量が 7720 C，ファラデー定数が 96500 C/mol であることから，流れた電子の物質量は，

$$\frac{7720}{96500} = 0.080\,[\mathrm{mol}]$$

ファラデー定数
電子 1 mol がもつ電気量の絶対値。
その値は，96500 C/mol

27 …③

b　電極**イ**の反応式より，0.080 mol の電子が流れたとき，0.040 mol の銅 Cu (64 g/mol) が析出する。析出する銅の質量は，

$$64 \times 0.040 = 2.56\,[\mathrm{g}]$$

電極**ウ**の反応式より，0.080 mol の電子が流れたとき，0.020 mol の酸素が発生する。発生する酸素の標準状態における体積は，

$$22.4 \times 0.020 = 0.448\,[\mathrm{L}]$$

析出する銅の質量と発生する酸素の標準状態における体積は比例するので，最も適当なグラフは③である。

28 …③

生　物　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	③	4	
		問2	2	④	3	
		問3	3	③	3	
		問4	4	②	3	
		問5	5	③	3	
		問6	6	④	4	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	③	3	
		問2	8	③	3	
		問3	9	③	3	
	B	問4	10	④	3	
		問5	11	①	4	
		問6	12	②	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	①	3	
		問2	14	④	4	
		問3	15	①	4	
	B	問4	16	②	3	
		問5	17	②※	3	
			18	⑥※	3	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問		問1	19	②	3	
		問2	20	④	3	
		問3	21	①	3	
			22	④	3	
		問4	23	③※	4	
			24	⑥※	4	
第4問　自己採点小計					(20)	
第5問	A	問1	25	①	3	
		問2	26	②	3	
		問3	27	①	3	
	B	問4	28	②	3	
		問5	29	①※	4	
			30	④※	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

※の正解は順序を問わない。

【解説】

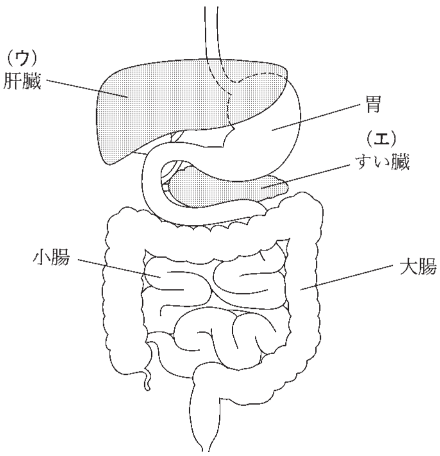
問題

第１問　組織・器官

ヒトの組織と器官に関する知識問題を出題した。

問１　動物の組織は上皮組織，結合組織，筋組織，神経組織の四つに分けられる。①からだの外表面や消化管・血管などの内表面を覆う組織を上皮組織とよぶ。ヒトの皮膚の表皮は上皮組織に属するが，真皮は結合組織に属する。したがって，誤りである。②組織や器官の間を埋めて互いに結合したり，支持したりする組織を結合組織とよぶ。硬骨，軟骨，腱，血液，皮下脂肪などが結合組織に属する。結合組織では，細胞どうしは離れており，その間には多量の細胞間物質が存在する。したがって，誤りである。③筋組織は収縮性をもつ筋繊維とよばれる細胞が集まってできており，筋繊維には収縮性のある筋原繊維とよばれる構造が多数含まれている。したがって，正しい。④神経組織は，刺激によって興奮し，その興奮を伝えるはたらきをもつニューロン(神経細胞)と，ニューロンに栄養を与えたり，支持したりする役割をもつ神経膠(こう)細胞からなる。ニューロンは核を含む細胞体と多数の突起からなる１個の細胞で，長く伸びた突起を軸索，短い枝状の突起を樹状突起とよぶ。したがって，誤りである。　$\boxed{1}$…③

問２　図１の**ウ**は肝臓である。肝臓は脂肪の分解に関与する胆汁を生成する。図１の**エ**はすい臓である。すい臓は様々な消化酵素を含むすい液を分泌する。消化系に属するおもな器官を次図に示す。



$\boxed{2}$…④

問３　消化に関与する酵素を消化酵素とよぶ。①デンプンをマルトースに分解する酵素であるアミラーゼはだ液とすい液に含まれ，胃液には含まれないので，誤りである。②カタラーゼは，生体内で生じる有害な過酸化水素を水と酸素に分解する酵素であり，消化酵素ではないので，誤りである。なお，カタラーゼは生体内の

【ポイント】

動物の組織
　上皮組織，結合組織，筋組織，神経組織

上皮組織
　からだの外表面や消化管・血管などの内表面を覆う。
　皮膚の表皮，小腸の内壁など。

結合組織
　組織や器官の間を埋めて互いに結合したり，支持したりする。
　皮膚の真皮，硬骨，軟骨，腱，血液，皮下脂肪など。

筋組織
　収縮性をもつ筋繊維からなる。
　横紋筋…骨格筋，心筋
　平滑筋…内臓筋

神経組織
　ニューロンと神経膠細胞(ニューロンに栄養を与えたり，支持したりする細胞)からなる。

消化酵素
　アミラーゼ(だ液，すい液)
　　デンプンをマルトースに分解する。
　ペプシン(胃液)
　　タンパク質をペプトンに分解する。
　リパーゼ(すい液)
　　脂肪を脂肪酸とグリセリンに分解する。

カタラーゼ
　過酸化水素を水と酸素に分解する。

生物Ⅰ

様々な組織や器官の細胞に広く分布している。③タンパク質を分解する酵素であるペプシンは胃液に含まれるので，正しい。④脂肪を脂肪酸とグリセリンに分解する酵素であるリパーゼはすい液に含まれ，胃液には含まれないので，誤りである。 3 …③

問4　細胞内で合成された物質の細胞外への分泌にはゴルジ体が関係しており，すい臓などの分泌腺の腺細胞ではゴルジ体が発達している。ゴルジ体は腺細胞のほか，神経伝達物質を分泌する神経細胞でも発達している。 4 …②

問5　筋組織のうち，骨格筋と心臓の筋肉(心筋)は筋繊維に横じまのみられる横紋筋であり，心臓以外の内臓の筋肉(内臓筋)は筋繊維に横じまのみられない平滑筋である。また，骨格筋の筋繊維は，細胞どうしの融合によって多核の細胞になっているが，心筋と平滑筋の筋繊維は単核の細胞である。 5 …③

骨格筋
　多核で，筋繊維に横じまがみられる。
平滑筋
　単核で，筋繊維に横じまがみられない。

問6　カリウム濃度とナトリウム濃度を赤血球内と血しょう中で比較すると，カリウム濃度は血しょう中に比べて赤血球内の方が高く，ナトリウム濃度は血しょう中に比べて赤血球内の方が低い。これは，赤血球の細胞膜がエネルギーを用いて，ナトリウムを濃度勾配に逆らって細胞外に排出し，カリウムを濃度勾配に逆らって細胞内に取り込んでいるからである。このように，エネルギーを用いて，特定の物質を濃度勾配に逆らって輸送するはたらきを能動輸送とよぶ。 6 …④

赤血球内外のカリウム濃度
　赤血球内＞血しょう中
赤血球内外のナトリウム濃度
　赤血球内＜血しょう中

第2問　生殖　問題

生殖法と被子植物の生殖に関する知識問題を出題した。

問1　配偶子は接合(受精)して接合子(受精卵)を形成し，接合子が増殖・分化して新個体を形成する。接合する2個の配偶子が同形同大の場合，それらを同形配偶子とよび，同形配偶子どうしの接合を同形配偶子接合とよぶ。したがって，③は正しい。接合する2個の配偶子に形や大きさの違いがある場合，それらを異形配偶子とよび，大形の配偶子を雌性配偶子，小形の配偶子を雄性配偶子とよぶ。雌性配偶子を形成する個体が雌，雄性配偶子を形成する個体が雄である。なお，一般に異種の生物の配偶子の間では接合は起こらない。したがって，①と④は誤りである。異形配偶子のうち，雄性配偶子と雌性配偶子の大きさが極端に異なる場合，大形で運動性のない雌性配偶子を卵，小形で運動性のある雄性配偶子を精子とよぶ。また，雄性配偶子のうち，べん毛や繊毛をもたずに運動性のないものを精細胞とよぶ。したがって，②は誤りである。 7 …③

配偶子
　接合して新個体を形成する生殖細胞

同形配偶子
　形や大きさが同じ配偶子
異形配偶子
　形や大きさが異なる配偶子

異形配偶子の場合，大形の配偶子を雌性配偶子，小形の配偶子を雄性配偶子とよぶ。

問2　①・②配偶子の接合によって新個体をつくる生殖法を有性生殖，配偶子によらずに新個体をつくる生殖法を無性生殖とよぶ。無性生殖には，細胞やからだが複数に分かれてそれぞれが新個体になる分裂，からだの一部に生じた突起から新個体が形成される

出芽，茎や根などから新個体が形成される栄養生殖などがある。いずれの場合にも1個体から子孫を残すことができる。したがって，①と②は正しい。③有性生殖では，一般に，遺伝子型の異なる2個の配偶子が接合するために，親とは異なる遺伝子型の個体が生じる。一方，無性生殖では，親個体の分裂，または親個体の体細胞分裂で生じた細胞から新個体が形成されるので，子の遺伝子型は親と同じになる。したがって，誤りである。④果樹などの栽培で行われる挿し木や挿し芽は，栄養生殖を利用した栽培方法である。したがって，正しい。 $\boxed{8}$ …③

有性生殖
配偶子による生殖。
遺伝子型は，親と子で異なる。

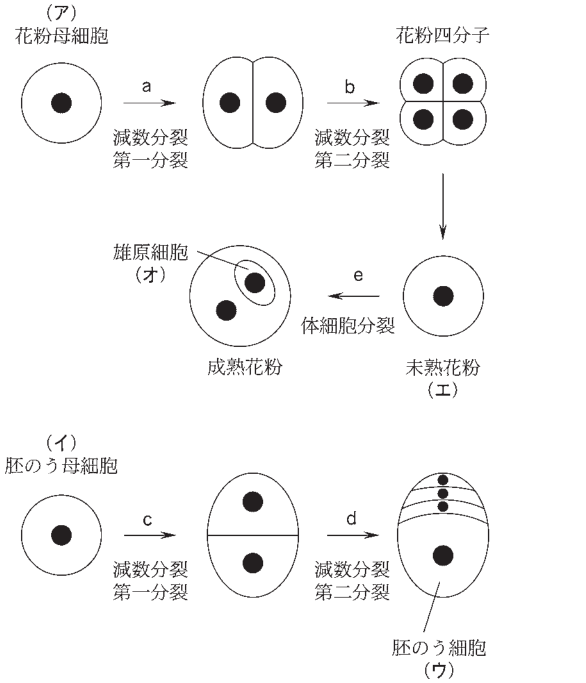
無性生殖
配偶子によらない生殖。
分裂・出芽・栄養生殖など。
遺伝子型は，親と子で同じになる。

問3 ①オニユリはムカゴなどによる栄養生殖(無性生殖)を行う。したがって，誤りである。なお，酵母菌は無性生殖である出芽や分裂と有性生殖の両方を行う。②ニワトリとヒツジは，ともに有性生殖のみを行う。したがって，誤りである。③マウスは有性生殖のみを行い，オランダイチゴは有性生殖と走出枝(走出茎，ほふく茎)による栄養生殖の両方を行う。したがって，正しい。④ゾウリムシは無性生殖である分裂と有性生殖の両方を行い，カイコガは有性生殖のみを行う。したがって，誤りである。

$\boxed{9}$ …③

問4 問題文に，「**ア**と**イ**の細胞は減数分裂を行う」とある。被子植物で減数分裂を行う細胞は，葯に生じる花粉母細胞と胚珠に生じる胚のう母細胞である。花粉母細胞の減数分裂で生じた4個の娘細胞は，減数分裂の直後には互いに接着して花粉四分子を形成する。一方，胚のう母細胞の減数分裂では，4個の娘細胞のうち3個が退化して1個の大きな胚のう細胞が残る。したがって，**ア**が花粉母細胞，**イ**が胚のう母細胞であり，**イ**から生じた**ウ**が胚のう細胞である。**エ**から生じた**オ**は大きな細胞の中に存在している。被子植物でこのような状態が観察されるのは，雄原細胞を内部に含む成熟花粉である。したがって，**エ**が未熟花粉，**オ**が雄原細胞である。

被子植物の減数分裂
胚のう母細胞から胚のう細胞が形成される過程
花粉母細胞から花粉四分子が形成される過程



$\boxed{10}$ …④

問5　① a の過程と c の過程は減数分裂の第一分裂である。減数分裂の第一分裂前期には，相同染色体が対合して二価染色体が形成される。したがって，正しい。② e の過程は体細胞分裂であり，分裂前に染色体が複製される。したがって，誤りである。なお，減数分裂では，第一分裂の前に染色体は複製されるが，第一分裂と第二分裂の間では染色体は複製されない。③**エ**の未熟花粉は葯内で観察されるが，**ウ**の胚のう細胞は胚珠内で観察される。したがって，誤りである。④減数分裂の第一分裂によって核相は $2n$ から n に変化し，受精によって核相は n から $2n$ に変化する。図1では，減数分裂第一分裂を行う**ア**と**イ**の細胞の核相が $2n$ であり，受精後の細胞は含まれていないので，**ア**と**イ**以外の細胞の核相はすべて n である。したがって，**エ**の細胞の核相も**オ**の細胞の核相もともに n であるので，誤りである。 $\boxed{11}$ …①

減数分裂の第一分裂前期には相同染色体が対合して二価染色体が形成される。

減数分裂では，第一分裂の前に染色体は複製されるが，第一分裂と第二分裂の間では染色体は複製されない。

核相の変化
　減数分裂の第一分裂で $2n$ から n に変化する。

問6　①被子植物では，花粉管によって胚のうへ達した2個の精細胞のうち，一方が卵細胞と受精して受精卵となり，もう一方の精細胞の核は中央細胞の2個の極核と融合して胚乳核を形成する。この受精様式を重複受精とよぶ。受精卵から胚が形成され，胚乳核をもつ細胞から胚乳が形成される。助細胞と反足細胞は退化して消失し，いずれも胚の一部を形成することはない。したがって，誤りである。②種子の種皮は，胚珠の珠皮から形成される。したがって，正しい。③胚乳のデンプンは，胚の光合成によって合成されるのではなく，親植物が光合成で合成した有機物が種子に供給され，それを用いて合成される。したがって，誤りであ

重複受精
　精細胞＋卵細胞→受精卵→胚
　精細胞＋中央細胞
　　→(胚乳核)→胚乳

種皮は珠皮から生じる。

る。④胚乳が発達し，発芽に必要な養分を胚乳に蓄える種子を有胚乳種子とよび，胚乳が発達せずに退化して，発芽に必要な養分を子葉に蓄える種子を無胚乳種子とよぶ。イネの種子は有胚乳種子，エンドウの種子は無胚乳種子である。したがって，誤りである。

$\boxed{12}$ …②

有胚乳種子
胚乳が発達し，胚乳に養分を蓄える。
イネ，トウモロコシ，カキなど。
無胚乳種子
胚乳は退化し，子葉に養分を蓄える。
エンドウ，クリ，ナズナなど。

第3問　動物の発生　問題

Aでは発生のしくみに関する知識問題を，**B**では誘導に関する知識問題とヒドラの再生に関する考察問題を出題した。

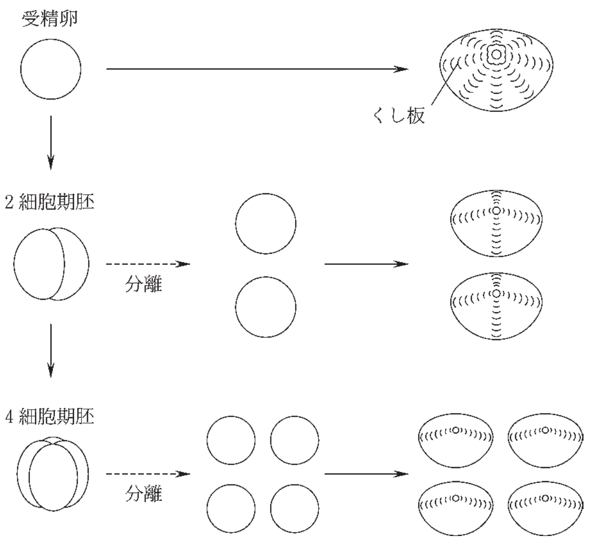
問1　ウニの2細胞期胚や4細胞期胚の割球を1個ずつに分離して培養すると，それぞれの割球からは小形ではあるが完全な幼生が生じる。また，カエルの2細胞期胚でも割球を1個ずつに分離すると，それぞれの割球からは正常な幼生が生じる。このように，一部の割球が失われても残りの割球から完全な個体が生じるような卵を調節卵とよぶ。一方，ホヤの2細胞期胚の割球を1個ずつに分離すると，それぞれの割球からは正常胚の右半分または左半分しか生じない。また，クシクラゲの2細胞期胚や4細胞期胚でも割球を1個ずつに分離すると，それぞれの割球からは不完全な幼生が生じる。このように，一部の割球が失われると不完全な個体が生じるような卵をモザイク卵とよぶ。しかし，ウニの胚でも割球を分離する時期を遅くすると，不完全な個体を生じ，調節卵としての性質を示さなくなる。すなわち，調節卵とモザイク卵の違いは，割球の発生運命の決定時期が早いか遅いかの違いによるものであり，調節卵よりもモザイク卵の方が，発生運命の決定時期が早いと考えられる。

$\boxed{13}$ …①

調節卵
一部の割球が失われても完全な個体が生じる卵。
ウニ，イモリ，カエルなど。
モザイク卵
一部の割球が失われると不完全な個体が生じる卵。
ホヤ，クシクラゲなど。

調節卵よりモザイク卵の方が発生運命の決定時期が早い。

問2　設問文に「正常なクシクラゲでは8列のくし板が生じ，くし板の数は胚に存在する特定の物質の量によって決まる」とある。これより，2細胞期胚でも4細胞期胚でも，分離した割球のくし板を合計すると8列になると考えられる。すなわち，次図に示すように，2細胞期胚を2個の割球に分けると，それぞれの割球からは $8\div2=4$ 列のくし板が生じ，4細胞期胚を4個の割球に分けると，それぞれの割球からは $8\div4=2$ 列のくし板が生じることになる。



14 …④

問3　シュペーマンはイモリの胚を用いて予定表皮域の一部と予定神経域の一部の交換移植実験を行った。その結果，初期原腸胚を用いた場合には，いずれの移植片も移植された場所の発生運命にしたがって分化し，初期神経胚を用いた場合には，いずれの移植片も自身の発生運命にしたがって分化した。すなわち，初期原腸胚で予定神経域に移植した予定表皮域の細胞群は神経に分化し，初期神経胚で表皮域に移植した神経板域の細胞群は神経に分化した。したがって，③は誤りであり，①は正しい，なお，この実験から，表皮と神経の発生運命は，初期原腸胚期と初期神経胚期の間に決定されることが明らかになった。

イモリの胚において，表皮と神経の発生運命は，初期原腸胚期と初期神経胚期の間に決定される。

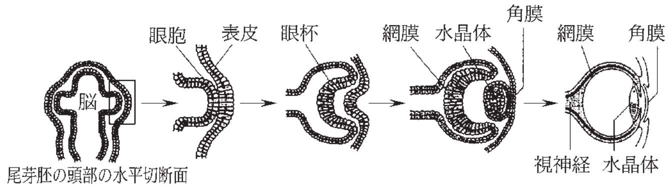
　さらに，シュペーマンはイモリの初期原腸胚の予定脊索域の一部を，同じ時期の他の胚に移植する実験も行った。その結果，移植片は自身の発生運命にしたがって脊索に分化した。また，移植片が周囲の細胞にはたらきかけて発生運命を変更させ，本来の胚とは別の胚(二次胚)を形成した。このように，周囲の細胞に作用して一定の分化を起こさせる領域を形成体とよび，そのはたらきを誘導という。これより，予定脊索域の発生運命は初期原腸胚期ですでに決定されているので，初期神経胚の脊索域の一部を初期神経胚の神経板域に移植した場合も，移植片は脊索に分化すると考えられる。したがって，②と④は誤りである。 **15** …①

形成体
　周囲の細胞に作用して一定の分化を起こさせる領域

問4　胚の発生では，発生段階に応じて胚の各部分が形成体としてはたらき，連鎖的に誘導が起こることで，からだの各器官が形成される。眼の形成においては，次図のように神経管の前方が脳となり，脳の一部が眼胞となって，表皮に接するようになる。眼胞は先端部がくぼんで眼杯となり，これが形成体としてはたらいて，接する表皮を誘導して水晶体を分化させる。なお，誘導を受

眼杯が表皮を水晶体へ誘導する。
水晶体が表皮を角膜へ誘導する。

けて分化した水晶体は，次に自身が形成体としてはたらき，接する表皮から角膜を分化させる。



$\boxed{16}$…②

問5　問題文に「物質Xは細胞外に分泌され，周囲の細胞にはたらきかけて頭部の形成を誘導する作用をもつ」とある。**実験1**と**実験2**では，同じ領域IIへの移植が行われているが，領域Iの移植片は移植した部位に頭部を誘導する作用をもち，領域IIの移植片はその作用をもたないことがわかる。仮に，物質Xの分泌量が領域Iと領域IIで同じであれば，結果は同じになるはずである。また，領域Iより領域IIの方が物質Xの分泌量が多いのであれば，領域Iを移植した場合にのみ頭部が形成されることはない。したがって，物質Xの分泌量は領域Iの方が領域IIより多いと考えられるので，①と③は誤りであり，②は正しい。また，**実験1**と**実験3**では，同じ領域Iの移植片が移植されているが，移植を受けた部位が領域Iである場合には頭部が形成されず，領域IIである場合には頭部が形成されている。仮に，物質Xに反応する能力が領域Iと領域IIで同じであれば，実験結果は同じになるはずである。また，物質Xに反応する能力が領域Iの方が領域IIより高いのであれば，領域IIへ移植した場合にのみ頭部が形成されることはない。したがって，物質Xに反応する能力は領域IIの方が領域Iより高いと考えられるので，④と⑤は誤りであり，⑥は正しい。

$\boxed{17}$・$\boxed{18}$…②・⑥

第4問　遺伝　問題

キイロショウジョウバエの遺伝に関する知識問題と計算問題を出題した。

問1　体細胞にみられる染色体のうち，雌雄で組合せが共通なものを常染色体，雌雄で組合せの異なるものを性染色体とよぶ。性染色体は性の決定に関与する。キイロショウジョウバエ($2n=8$)の体細胞は4対の染色体をもつが，そのうち3対は常染色体であり，残りの1対は性染色体である。性染色体として，雌は2本のX染色体をもち，雄は1本のX染色体と1本のY染色体をもつ。

キイロショウジョウバエの卵と精子は減数分裂によって生じる。この結果，卵には3本の常染色体と1本のX染色体をもつものだけが生じ，精子には3本の常染色体と1本のX染色体をもつものと，3本の常染色体と1本のY染色体をもつものが同じ割合

常染色体
　雌雄に共通してみられる。

性染色体
　性の決定に関係する染色体。
　ヒトやキイロショウジョウバエではX染色体とY染色体がある。

で生じる。 $\boxed{19}$ …②

問2　体色の遺伝子は常染色体上に存在し，黒体色は黄褐体色に対して劣性であるので，黒体色の遺伝子をａ，黄褐体色の遺伝子をＡとして**実験**１の内容を整理すると，次のようになる。なお，純系では注目する遺伝子がホモ接合になっている。

> 純系
> 注目する遺伝子がホモ接合となっている。

雌　　　　　　　雄
黒体色(純系)　黄褐体色(純系)
aa ―――― AA
配偶子　a　|　A　配偶子

F_1 雌　　　　F_1 雄
黄褐体色　　　黄褐体色
Aa ―――― Aa
配偶子　A：a　1：1　|　A：a　1：1　配偶子

F_2

	A	a
A	AA 黄褐体色	Aa 黄褐体色
a	Aa 黄褐体色	aa 黒体色

これより，F_2 の表現型の分離比は，黄褐体色：黒体色＝3：1となる。 $\boxed{20}$ …④

問3　眼色の遺伝子はＸ染色体上に存在し，朱眼は赤眼に対して劣性であるので，朱眼の遺伝子をｂ，赤眼の遺伝子をＢとして**実験２**の内容を整理すると，次のようになる。

雌　　　　　　　雄
赤眼(純系)　　朱眼(純系)
X^BX^B ―――― X^bY
配偶子　X^B　|　X^b：Y　1：1　配偶子

F_1 雌　　　　F_1 雄
赤眼　　　　　赤眼
X^BX^b ―――― X^BY
配偶子　X^B：X^b　1：1　|　X^B：Y　1：1　配偶子

F_2

	X^B	Y
X^B	X^BX^B 赤眼　雌	X^BY 赤眼　雄
X^b	X^BX^b 赤眼　雌	X^bY 朱眼　雄

これより，F_2 の雌の表現型はすべて赤眼，F_2 の雄の表現型の分離比は赤眼：朱眼＝1：1 となる。したがって，F_2 における朱眼の個体の割合は，雌では 0 ％，雄では50％となる。

$\boxed{21}$…① $\boxed{22}$…④

問 4　**問 2** と**問 3** の解説の内容をふまえて，問題文の内容を整理すると次のようになる。

雌　　　　　　　　　　雄
黄褐体色・朱眼(純系)　黒体色・赤眼(純系)
AAX^bX^b ―――― aaX^BY
配偶子　AX^b　　aX^B ： aY 　配偶子
　　　　　　　　　1 ： 1

F_1 雌　　　　　　　F_1 雄
黄褐体色・赤眼　　　黄褐体色・朱眼
AaX^BX^b ―――― AaX^bY
配偶子　AX^B ： AX^b ： aX^B ： aX^b　|　AX^b ： aX^b ： AY ： aY　配偶子
　　　　1 ： 1 ： 1 ： 1　|　1 ： 1 ： 1 ： 1

F_2

	AX^b	aX^b	AY	aY
AX^B	AAX^BX^b 〔AB〕雌	AaX^BX^b 〔AB〕雌	AAX^BY 〔AB〕雄	AaX^BY 〔AB〕雄
AX^b	AAX^bX^b 〔Ab〕雌	AaX^bX^b 〔Ab〕雌	AAX^bY 〔Ab〕雄	AaX^bY 〔Ab〕雄
aX^B	AaX^BX^b 〔AB〕雌	aaX^BX^b 〔aB〕雌	AaX^BY 〔AB〕雄	aaX^BY 〔aB〕雄
aX^b	AaX^bX^b 〔Ab〕雌	aaX^bX^b 〔ab〕雌	AaX^bY 〔Ab〕雄	aaX^bY 〔ab〕雄

表中の〔AB〕,〔Ab〕,〔aB〕,〔ab〕はそれぞれ，
黄褐体色・赤眼，黄褐体色・朱眼，黒体色・赤眼，
黒体色・朱眼の表現型を表している。

①・② F_1 の表現型は，雌では黄褐体色・赤眼であり，雄では黄褐体色・朱眼である。したがって，①と②は誤りである。③～⑥上の交配表より，F_2 の表現型の分離比は，雌雄ともに，黄褐体色・赤眼：黄褐体色・朱眼：黒体色・赤眼：黒体色・朱眼＝

3：3：1：1となる。したがって，④と⑤は誤りであり，③と⑥は正しい。 $\boxed{23}$・$\boxed{24}$…③・⑥

第5問　ホルモン　問題

ホルモンに関する知識問題と，チロキシンの分泌に関する考察問題を出題した。

問1　内部環境をほぼ一定の状態に保つ性質を恒常性(ホメオスタシス)とよび，これには自律神経やホルモンが関与している。なお，極性はウニの卵の動物極側と植物極側で発生における性質が異なるように，ある軸に沿って物質の濃度などに差がある性質のことであり，自動性は心臓が自律的に拍動するように，ほかのしくみによらずに継続して活動できる性質のことである。また，相補性はDNAの構成要素AとT，GとCが結合するように，常に決まった相手と結合したり反応したりする性質のことである。 $\boxed{25}$…①

恒常性(ホメオスタシス)
　内部環境をほぼ一定の状態に保つ性質

問2　①・③ホルモンを血液中に分泌する器官を内分泌腺とよび，内分泌腺から分泌されたホルモンは，血液によって標的器官に運ばれる。したがって，①と③は正しい。②消化腺や汗腺などの外分泌腺は，排出管(導管)を通して分泌物を消化管内や体外に分泌するが，内分泌腺は排出管をもたず，ホルモンを直接血液中に分泌する。したがって，誤りである。④標的細胞はホルモンと特異的に結合する受容体をもち，ホルモンが受容体に結合することによって特定の反応を示す。したがって，正しい。 $\boxed{26}$…②

内分泌腺は排出管をもたない。

問3　①インスリンは，肝臓におけるグルコースからのグリコーゲン合成と，組織におけるグルコースの取り込みと消費を促進することによって血糖量を減少させる。したがって，正しい。②グルカゴンは，肝臓におけるグリコーゲンの分解を促進することによって血糖量を増加させる。したがって，誤りである。③バソプレシンは，腎臓の集合管に作用して水の再吸収を促進する。したがって，誤りである。④鉱質コルチコイドは，腎臓の細尿管(腎細管)に作用してナトリウムの再吸収を促進する。したがって，誤りである。 $\boxed{27}$…①

インスリン
　血糖量を減少させる。
グルカゴン
　血糖量を増加させる。
バソプレシン
　腎臓での水の再吸収を促進する。
鉱質コルチコイド
　腎臓でのナトリウムの再吸収を促進する。

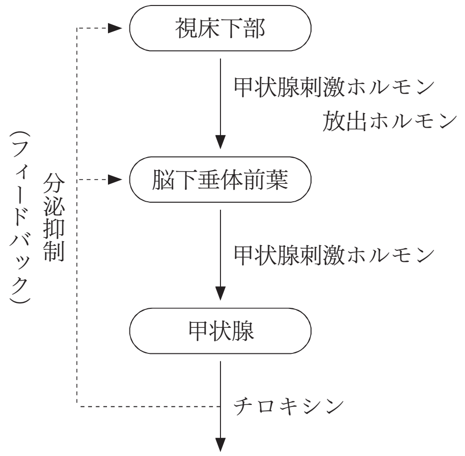
問4　間脳は視床と視床下部に分けられる。視床は感覚神経の中継点となり，視床下部は自律神経系と内分泌系の中枢としてはたらく。 $\boxed{28}$…②

間脳は視床と視床下部に分けられる。

問5　①・②問題文に「チロキシンが盛んに合成されている個体ほど甲状腺に取り込まれるヨウ素が多くなるので，投与したヨウ素の血しょう中濃度が速やかに低下する」とある。これをもとに，図1の結果から各個体のチロキシンの合成量を判断する。個体Pでは，標識したヨウ素の血しょう中濃度の低下速度が正常個体より大きいことから，正常個体よりもチロキシンの合成量が多いと考えられる。一方，個体Qでは，標識したヨウ素の血しょう中濃

度の低下速度が正常個体より小さいことから，正常個体よりもチロキシンの合成量が少ないと考えられる。したがって，②は誤りであり，①は正しい。

問題文にもあるように，チロキシンは視床下部と脳下垂体前葉に作用して，甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンと甲状腺刺激ホルモンの分泌を抑制する。したがって，血液中のチロキシン濃度が高いほど，甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンと甲状腺刺激ホルモンの分泌量は少なくなる。



③・④個体Ｐは正常個体に比べてチロキシンの合成量が多いため，血液中のチロキシン濃度も高くなっていると考えられる。これより，視床下部からの甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンの分泌量も，脳下垂体前葉からの甲状腺刺激ホルモンの分泌量も，正常個体に比べて少なくなっていると考えられる。したがって，③は誤りであり，④は正しい。⑤・⑥個体Ｑは正常個体に比べてチロキシンの合成量が少ないため，血液中のチロキシン濃度も低くなっていると考えられる。これより，視床下部からの甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンの分泌量も，脳下垂体前葉からの甲状腺刺激ホルモンの分泌量も，正常個体に比べて多くなっていると考えられる。したがって，⑤と⑥は誤りである。 29・30 …①・④

フィードバック
　結果が原因に作用するしくみ

地　学　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

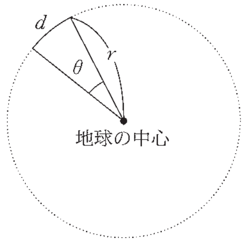
問題番号	設　問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	①	3	
		問2	2	①	3	
		問3	3	③	4	
		問4	4	③	4	
		問5	5	③	3	
		問6	6	②	3	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	①	4	
		問2	8	④	3	
		問3	9	②	3	
	B	問4	10	④	4	
		問5	11	①	3	
		問6	12	①	3	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	④	3	
		問2	14	②	3	
		問3	15	②	4	
		問4	16	①	3	
	B	問5	17	④	3	
		問6	18	④	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問		問1	19	②	3	
		問2	20	③	3	
		問3	21	④	4	
		問4	22	④	3	
		問5	23	③	4	
		問6	24	③	3	
第4問　自己採点小計					(20)	
第5問		問1	25	⑤	3	
		問2	26	①	4	
		問3	27	②	3	
		問4	28	②	3	
		問5	29	④	3	
		問6	30	③	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

【解説】 問題

第１問　地球の大きさと形，重力

固体地球分野は，暗記するというよりも図の理解が重要である。本問は問題文には図を用いていないが，図の理解がなされているかどうかを問う問題とした。

問１　地球の大きさ，例えば地球の全周を求めるには，ある中心角に対する弧長を求めればよい(図１―１)。ただし，弧長は地表で測定することができるが，中心角は簡単には測定できない。地球を球と仮定すると，同一経線(子午線)上の２地点で，同時刻に南中する同一天体(太陽)の高度差を測定すれば，それが２地点の緯度差(図１―２)であり，図１―１の中心角となる。



d：弧長　　θ：中心角　　r：地球半径

図１―１　地球の中心角と弧長

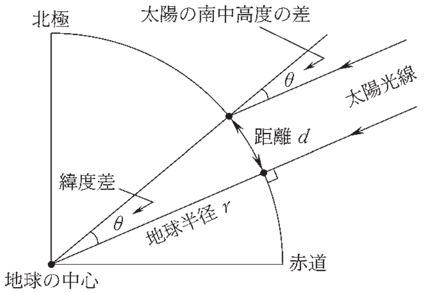


図１―２　エラトステネスの測定

また，離れた２地点の地表から地球の中心に向かう２本の直線(鉛直線)のなす角度は，赤道上の２地点で同一天体の南中時刻の差を測定して求めることもできるが，エラトステネスの時代においては，離れた２地点の時間差を測定する方法はなかった。

$\boxed{1}$ …①

問２　地球は球ではなく，厳密には回転楕円(だえん)体である。完全な球であれば，**問１**のような観測をした場合，どのような緯度帯で測定しても，同一緯度差の２地点間距離は同一のはずであるが，実際の測定では高緯度と低緯度では異なる値となる。問題文には「赤道半径が極半径より大きい」とあるので，両極を通る地球の断面を考えたとき，図１―３に示すように，その形は赤道方向に膨ら

【ポイント】

エラトステネスによる測定

同一経線上の２地点間距離と，２地点の太陽の南中高度の差から求められた。

経線(子午線)と緯線

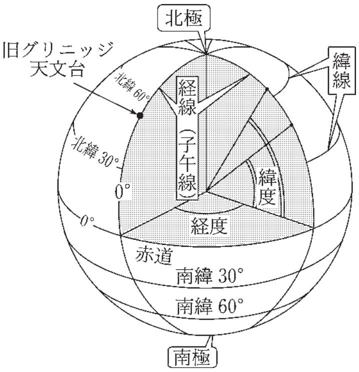
経線(子午線)：北極と南極を結んだ線。

経度は，イギリスの旧グリニッジ天文台を通る経度0°の経線を基準に決められた。

緯線：赤道に平行な線。

緯度は赤道面からの角度。

地球を球と仮定したとき，同一経線上の２地点間の緯度の差は２地点間の中心角と等しくなる。

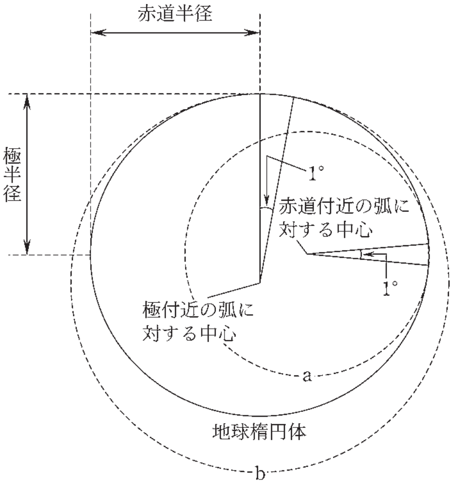


経線と緯線

回転楕円体

同一緯度差の２地点間距離は，高緯度の方が大きい。

んだ楕円形となり，高緯度付近で緩やかにわん曲した部分に沿う円の半径は大きく，低緯度付近のわん曲に沿う円の半径は小さい。したがって，緯度差 1° の 2 地点間距離は，高緯度付近の方が低緯度付近よりも大きい。



a　赤道付近で緯度差 1° に相当する弧長を考えるときの円
b　極付近で緯度差 1° に相当する弧長を考えるときの円

図 1 ― 3　回転楕円体

地球楕円体では，**問 1** のような球の場合と違って，２地点の鉛直線は地球の中心で交差せず，高緯度では地球の中心より深いところで，低緯度では地球の中心より浅いところで交差する(図 1 ― 3)。なお，地球が赤道半径の方が極半径よりも大きい回転楕円体であるのは，自転による遠心力の影響であるということも確認しておきたい。

$\boxed{2}$ …①

問 3　地球の全周は 4 万 km，極から赤道までは 1 万 km ということは知識としてもっておきたい概数である。したがって，

$$1\text{万 km} = 1 \times 10^7\ \text{m}$$

計算で求めると，赤道と極との間の距離は，

$$2\pi \times 6400 \times 10^3 \div 4 \fallingdotseq 1 \times 10^7\ (\text{m})$$

$\boxed{3}$ …③

地球の大きさ

全周： 4 万 km

平均半径：約 6400 km

問 4　本問では地球の偏平率を与えたが，この概数 $\dfrac{1}{300}$ も知っておくべき数値である。

偏平率は $\dfrac{\text{赤道半径} - \text{極半径}}{\text{赤道半径}}$ で求められる値で，地球の偏平率は約 $\dfrac{1}{300}$ である。地球の半径は約 6400 km であるから，偏平率の式を利用して，地球の赤道半径と極半径の差を求めると，

$$\text{赤道半径} - \text{極半径} \fallingdotseq 6400 \times \frac{1}{300} \fallingdotseq 21\ \text{km}$$

となる。一方，地表で最も高い山は約 9 km，最も深い海溝は約 11 km である。したがって，その差は約 20 km であり，二つの値はほぼ等しい。

$\boxed{4}$ …③

偏平率

偏平率 $= \dfrac{\text{赤道半径} - \text{極半径}}{\text{赤道半径}}$

地球の偏平率は約 $\dfrac{1}{300}$

問５　①　鉛直線は重力方向であるので正しい。これと垂直な面が水平面である。

②　図１－４に各地点における引力と遠心力，および重力を示す。重力が地球の中心方向に向くのは，赤道と極に限られるので正しい。

③　引力が自転軸と直交するのは赤道だけなので，この選択肢が誤りである。

④　自転による遠心力は自転軸に対して直交する方向にはたらき，その大きさは自転軸からの距離に比例するので，低緯度ほど大きく，赤道で最大で極で０である。したがって，正しい記述である。

［５］…③

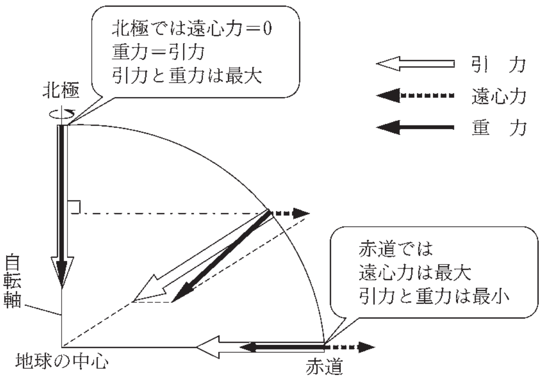


図１－４　重　力

問６　重力は，引力と地球自転による遠心力との合力である。図１－４のように，引力は地球の中心までの距離が小さいほど大きいので，極で最大，赤道で最小となる。遠心力は地球の自転軸に直交して外向きにはたらき，その大きさは自転軸からの距離に比例するので，赤道で最大で，極で０である。したがって，合力である重力は，赤道で最小，極で最大を示すので，②が正解である。

［６］…②

地球の重力
引力と遠心力の合力。
極で最大，赤道で最小。

第２問　地球の内部　問題

地球の内部は，地震波速度の不連続面によって区分されている。このため，地球の内部構造を知るには，地震波の性質を理解している必要がある。また，地球内部の圧力，温度などの諸量に関しても，その分布の概略を表したグラフを確認してほしい。さらに，地球表層の岩石は火成岩が主体であるので，火成岩の名称や鉱物組成・化学組成に関しても，この分野では出題される。

A　地球の内部構造と組成

問１　①　Ｐ波もＳ波も震源で同時に発生する。Ｐ波の方がＳ波より速度が大きいため，観測地にはＳ波よりも先にＰ波が到達する。したがって，この選択肢が誤りである。

②　P波は進行方向とその振動方向が平行な縦波，S波は進行方向とその振動方向が直角な横波である。

③　P波は固体，液体，気体中を伝わるが，S波は固体中のみを伝わる。問題図1で，深さが約2900 km以深にS波が伝わっていないのは，外核が液体であるからである。

④　問題図1で確認できるように，同じ深さでは，P波はS波よりも速度が大きい。　$\boxed{7}$ …①

地震波の性質

P波(縦波)　固体・液体・気体中を伝わる。

S波(横波)　固体中のみ伝わる。

問2　①　地球内部の密度は，次の図2－1のように，地球内部に向かって不連続に増加する。したがって，外核の密度は，マントルの密度よりも大きいので，この選択肢は誤りである。

地球内部の密度

地球内部に向かって不連続に増加する。

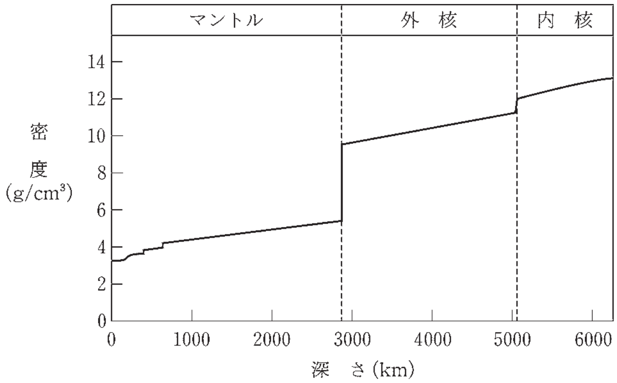


図2－1　地球内部の密度分布

②　地球内部の圧力は，次の図2－2のように，地球内部に向かって連続的に増加する。したがって，外核中の圧力は，マントル中の圧力よりも大きいので，この選択肢は誤りである。

地球内部の圧力

地球内部に向かって連続的に増加する。

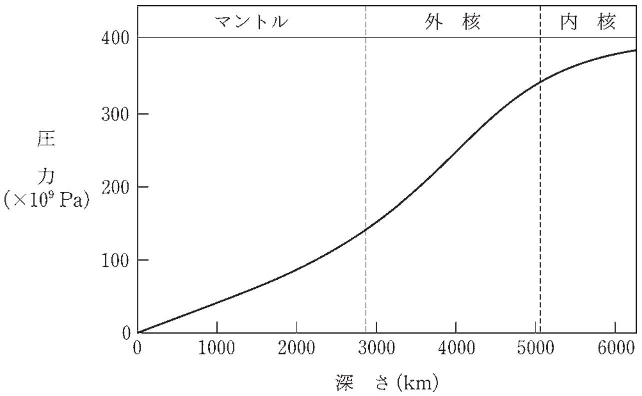


図2－2　地球内部の圧力

③　地球内部の温度と構成物質の融点は，次の図2－3のように推定されており，地球深部ほど温度は高い。したがって，内核の温度は，マントルの温度よりも高いので，この選択肢は誤りである。

地球内部の温度と構成物質の融点

マントル　温度 < 融点

外　　核　融点 < 温度

内　　核　温度 < 融点

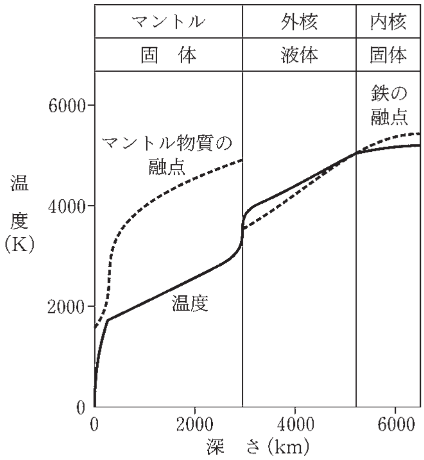


図 2 — 3　地球内部の温度分布と融点の一例

④　図 2 — 4 のように，地球内部のおよその断面を描いて考えてみよう。

核の体積は，

$$\frac{4}{3}\pi(6400-2900)^3=\frac{4}{3}\pi\,3500^3$$

であり，マントルの体積は，

$$\frac{4}{3}\pi\,6400^3-\frac{4}{3}\pi\,3500^3$$

である。したがって，核とマントルの体積比は，

$$核：マントル＝3500^3：(6400^3-3500^3)≒1：5$$

であり，核の方がマントルよりも体積が小さい。したがって，この選択肢が正しく，正解である。　$\boxed{8}$ …④

マントルと核の体積
核 < マントル

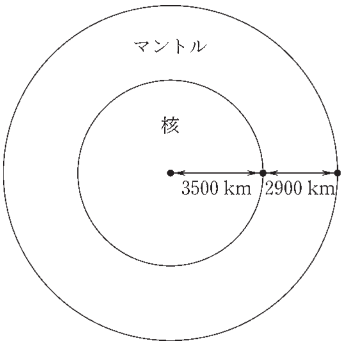


図 2 — 4　核とマントル

問 3　①　約 46 億年前，微惑星が衝突・合体して地球は形成された。そのような地球の起源物質は，いまだに地球に落下しており，燃えつきずに地表にまで落下したものが隕石（いん）である。したがって，隕石の化学組成を調べれば，地球全体の化学組成も推定できる。

地球全体の化学組成
隕石から推定する。
Fe が最も多い。

②　図 2 — 5 のように，地球の核は，その 80 重量%以上が Fe

から構成されていると考えられている。そのため，地球全体でも，最も多い元素はFeである。元素組成がO，Si，Alの順であるのは地殻なので，この選択肢が誤りであり，正解である。

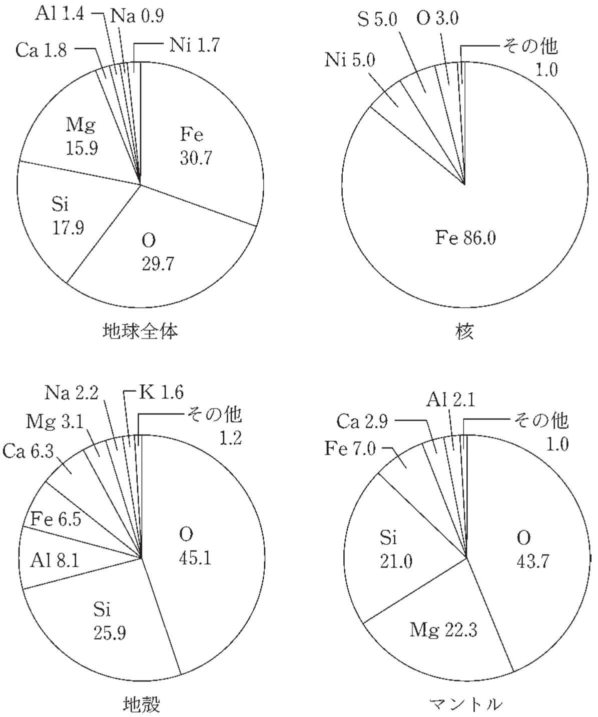


図２－５　地球の元素組成（重量％）

③　液体の外核も，固体の内核もその主成分はFeである。

④　地球表層部を構成する岩石は，大陸地殻上層が花こう岩質岩石，大陸地殻下層が玄武岩質岩石，海洋地殻が玄武岩質岩石，上部マントルがかんらん岩質岩石である（図２－６）。　$\boxed{9}$ …②

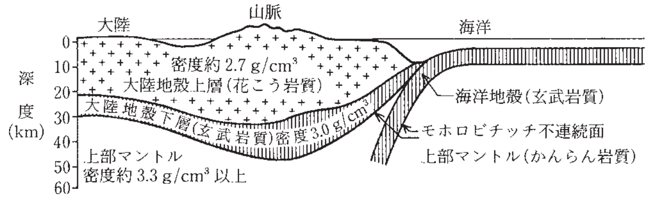


図２－６　地球表層部の構造と組成

B　プレートテクトニクス

火山活動，地震活動，造山運動など，さまざまな地学現象を説明する学説がプレートテクトニクスである。そのため，プレートテクトニクスに関連した問題は，総合的なものになりやすい。図２－７のように，プレートとは，問題文に示した地震波の低速度層よりも表層の部分で，地震波の不連続面による区分では，最上部は地殻，その下はマントルである。

地殻の元素組成
O，Si，Al，Fe，Ca，Mg，Na，K
マントルの元素組成
O，Mg，Si，Fe
核の元素組成
Fe，Ni

地球表層部の構成岩石

大陸地殻上層	花こう岩質岩石
大陸地殻下層	玄武岩質岩石
海洋地殻	玄武岩質岩石
上部マントル	かんらん岩質岩石

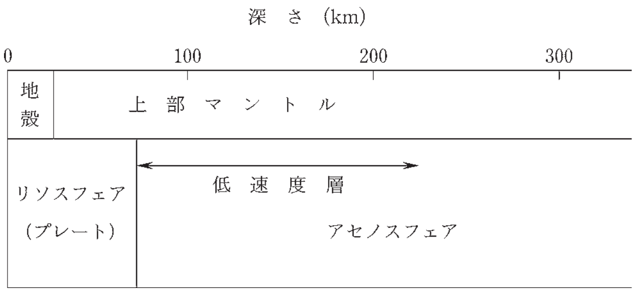


図２－７　地球表層の区分

問４　中央海嶺（かいれい）で誕生した当初のプレートは薄いが，海嶺から離れるにつれて海水によって全体が冷やされ，アセノスフェアの物質が固化してプレートの一部になる。そのため，プレートは海嶺から離れるにつれて厚く（ ア ）なる。プレートが厚くなると，アイソスタシーを保つように，プレートは沈み，海嶺から離れるにつれて水深は深く（ イ ）なっていく。　10 …④

プレートの厚さの変化
海嶺から離れるにつれて厚くなる。

問５　①　地震波の速度は，地震波が伝わる物質のかたさによって変化する。物質がかたいと地震波速度は大きく，物質が柔らかいと速度は小さい。上部マントル中のアセノスフェアは，温度が構成物質の融点（融（と）け始める温度）に近いため，柔らかい状態となっている。そのために，地震波速度が小さい。したがって，この選択肢が正解である。

地震波の速度
柔らかい物質中では速度が小さい。

②　問題図２はＳ波の速度分布である。Ｓ波が伝わっていることから，この領域は液体ではなく，固体であるので，この選択肢は誤りである。

③　モホ不連続面（モホロビチッチ不連続面）は地殻とマントルの境界である。海洋では，５～７km 程度の深さに存在する。地震波の低速度層よりも上に存在する（図２－７参照）ので，この選択肢は誤りである。

モホ不連続面（モホロビチッチ不連続面）
地殻とマントルの境界。

④　海溝から大陸に向かって深くなる深発地震面を和達（わだち）―ベニオフ面という。深発地震は，沈み込んだ海洋プレートの上面や内部で発生している。この面はかたいプレートに沿って分布しており，地震波の低速度層ではないので，誤りである。　11 …①

和達－ベニオフ面
沈み込む海洋プレートに沿う深発地震面。

問６　①　一般に，地殻熱流量は中央海嶺で高く，海溝で低いので，この選択肢が正解である。

地殻熱流量
海溝 < 中央海嶺
日本海溝 < 日本列島・日本海

②　海溝では火山活動は生じていない。火山活動は，火山前線（火山フロント）よりも大陸側で生じているので，この選択肢は誤りである。

火山前線
火山分布の海溝側の限界線。
海溝と平行に分布する。

③　地震はかたい岩盤で生じる破壊現象である。アセノスフェアは柔らかいため，地震は発生しない。したがって，この選択肢は誤りである。

④　日本海溝は，東北地方の太平洋側に分布している。したが

って，この選択肢は誤りである(図２—８)。 $\boxed{12}$ …①

図２—８　日本付近のプレート境界

第３問　マグマとその活動　問題

マグマは火成活動の主役なので，マグマの性質や，マグマの結晶分化作用による性質の変化を理解しておくことが重要である。本問ではマグマと結晶分化作用，およびマグマと火山活動について，基本事項を確認する内容を出題した。

A　マグマと結晶分化作用

問１　マグマが発生する場所は，ホットスポット，中央海嶺，プレートの沈み込み帯にほぼ限られている。

①　マントル深部から高温の物質がホットプルームとなって上昇してくると，その物質にはたらく圧力が低下するため，部分溶融が起きてマグマが発生する。また，高温の物質に触れて周囲のマントル物質も加熱され，それによっても部分溶融が起きる。このようにして発生したマグマが上昇し，プレートを貫通して地表に噴き出して形成されたものがホットスポットにおける火山である。したがって，この選択肢はホットスポットにおけるマグマ発生の正しい説明である。

②　プレートが二つに割れて離れていく境界では，空隙を埋めるようにマントル物質が上昇してくる。上昇することだけで圧力低下が起きているが，マントル物質の上にのっているはずのプレートが存在しないことで，より一層の圧力低下が起き，マグマが

マグマの結晶分化作用

マグマの冷却に伴って，高温で結晶する鉱物から順に晶出し，マグマの組成が変化する作用。

ホットスポット

プレートより深い場所にあるマグマの供給源。

ホットプルーム

マントル深部から，周囲より高温の物質がマントル中を上昇しているところ。

発生する。この選択肢は，中央海嶺におけるマグマの発生の正しい説明である。

③　海洋プレートは中央海嶺で生成されるが，そこで水と反応してつくられる含水鉱物を含んでいる。その含水鉱物は，海洋プレートが沈み込んで高圧状態になると分解し，水を放出する。その水はプレート周囲のアセノスフェアに供給されてマントル物質の融点を下げるため，マグマが発生する。この選択肢は，沈み込み帯におけるマグマの発生の正しい説明である。

④　中央海嶺や沈み込み帯には断層が多数分布している。中央海嶺では，断層にしみ込んだ海水が，火成活動によって加熱され，高温の熱水として再び海中に噴出する(熱水噴出孔)。また，海溝で沈み込むプレートから供給され，マグマの成因となる水は，③に示したように含水鉱物から放出されたもので，断層から直接しみ込んだものではない。よって，この選択肢が誤りであり，正解である。 13 …④

熱水噴出孔

地下で加熱された水が深海底に噴出しているところ。熱水の温度が300℃以上に達するものもある。

問2　マグマがマグマ溜りなどに滞留すると，周囲の岩石に熱を奪われて徐々に冷却していく。冷却が進むと，マグマの成分のうち高い温度で結晶する鉱物から順に晶出し，マグマ溜り中で下方に沈んでいく。さらに冷却が進むと，より低い温度で結晶する鉱物も晶出していき，残りのマグマの組成が変化していく(図３－１)。これが結晶分化作用である。よって， ア には「高」が当てはまる。

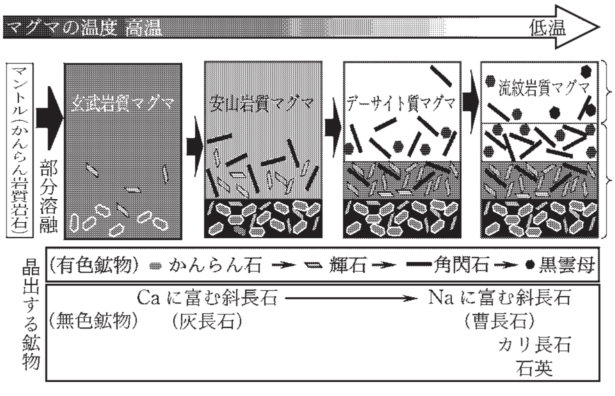


図３－１　結晶分化作用

マグマの結晶分化作用では，晶出する鉱物が固溶体の場合，晶出する温度の違いにより，異なった成分比の結晶が晶出する。例えば，斜長石は，カルシウムを含む灰長石($CaAl_2Si_2O_8$)とナトリウムを含む曹長石($NaAlSi_3O_8$)の固溶体であるが，純粋な灰長石が最も高温で結晶し，純粋な曹長石が最も低い温度で結晶する。したがって，マグマが冷却していくと，まず灰長石が晶出し，徐々に結晶中のCa成分が減少し，Na成分の割合が増えていく。よって， イ は「灰」が当てはまる。したがって，正解は②とな

固溶体

いくつかの異なった化学組成をもつ成分が任意の割合で混じり合ってできている結晶。結晶構造は同一。

る。 $\boxed{14}$ …②

問3　図３－１のように，主な有色鉱物を晶出する温度が高い方から順に並べると，かんらん石・輝石・角閃(かくせん)石・黒雲母(うんも)となる。よって，②が正解である。 $\boxed{15}$ …②

問4　問2の斜長石は固溶体であったが，かんらん石も苦土かんらん石(Mg_2SiO_4)と鉄かんらん石(Fe_2SiO_4)の固溶体である。また，輝石は鉄やマグネシウム，カルシウムなどの割合が連続的に変化する固溶体である。黒雲母も，鉄・マグネシウムに加えてカリウムやアルミニウムの割合が連続的に変化する固溶体である。一方，石英は二酸化ケイ素のみからなる結晶で，固溶体ではない。よって，正解は①である。なお，火成岩の主要造岩鉱物のうち固溶体でないのは石英のみである。 $\boxed{16}$ …①

B　マグマと火山活動

マントル物質が部分溶融してできる本源マグマ(玄武岩質マグマ)は，有色鉱物をつくる成分を多く含み，二酸化ケイ素が比較的少ない。結晶分化作用が進むと，マグマ中の有色鉱物をつくる成分は減少していき，同時に二酸化ケイ素の割合が増加していく。マグマの成分が変化すると，物理的性質も変化していく。その中で最も重要なのはマグマの粘性で，これによってマグマが引き起こす火山活動に大きな変化が生じる。

問5　玄武岩質マグマは結晶分化作用が進んでいない本源マグマである。玄武岩質マグマは二酸化ケイ素の割合が低いため，粘性も小さい。そのため，地表に噴出した場合，爆発的な噴火は起こさず，比較的静かに溶岩が流れていく。

①　玄武岩質マグマが海水中に噴出すると，表面は急冷されて固結するが，内部は融けたままで流れやすい状態になる。すると，固結した溶岩のパイプ中を通って新たにマグマが海水中に噴出し，再びパイプ状に固まることを繰り返していく。その結果，円～楕円(だえん)状の断面をもった塊が積み重なったような溶岩が形成される。これが枕(まくら)状溶岩であり，流動性の高い玄武岩質の溶岩が海水中に噴出している海嶺やホットスポット上の海底火山で多く見られる。

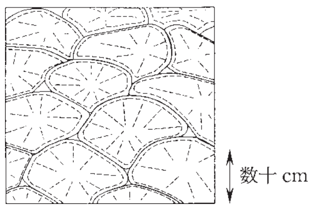
②　大量の玄武岩質マグマが地表に繰り返し噴出すると，一つの火山をはるかに超えるような広範囲に広がった台地がつくられる。これが溶岩台地で，特に大規模なものとしてはインドのデカン高原があげられる。

③　流動性が高い玄武岩質マグマによる火山は，溶岩が広範囲に広がるため，なだらかで直径の大きな山体となり，その形状から盾状火山と呼ばれる。典型的な例としては，ホットスポット上の火山であるハワイ島のマウナロアなどがある。

④　大陸の特に古い部分は，長期間にわたって侵食が進んだため，なだらかな盾を伏せたような地形になっている。これを盾状

枕状溶岩

海底に溶岩が噴出した結果，枕を積み重ねたような形状となった溶岩。



枕状溶岩

溶岩台地

大量の玄武岩質溶岩が地表の広い範囲を覆ってできた台地。

地と呼んでいる。盾状地は花こう岩や広域変成岩の集合体であり，玄武岩質マグマによってつくられたわけではない。よって，この選択肢が正解である。 $\boxed{17}$ …④

問6　マグマの結晶分化作用の初期に晶出するのはかんらん石や輝石といった有色鉱物で，無色鉱物としては斜長石程度であり，石英は最後まで晶出しない。このため，結晶分化作用が進むと，マグマの残液中の二酸化ケイ素の割合が増えていくことになる。一方，晶出した有色鉱物は下方に沈み込むため，有色鉱物をつくる成分はマグマ中から減少していく。したがって，十分に結晶分化作用が進んだマグマからつくられる火成岩は無色鉱物が多く，白っぽい色となる。

マグマからつくられる火成岩には，地下にマグマが留まったまま徐冷されて形成される深成岩と，噴火によりマグマが地上に噴出し，急冷されて形成される火山岩とがある。深成岩では徐冷された結果，さまざまな結晶が十分に成長する時間があるため，比較的大きな結晶の集まりである等粒状組織を示す岩石となる。一方，火山岩では急冷された結果，マグマ溜り中で固結していなかったマグマは，微細な結晶や結晶化していないガラス質の集合体である石基(せっき)となる。それらがマグマ溜り中で結晶化していた斑晶(はんしょう)を取り囲む形で固結するので，斑状組織を示す岩石となる。

以上から，結晶分化作用が十分に進んだマグマの噴火でつくられる火山岩は，白っぽい色で斑状組織を示すので，④が正解である。 $\boxed{18}$ …④

等粒状組織
同程度の大きさの結晶からなる火成岩の組織。深成岩に見られる。

斑状組織
斑晶と呼ばれる比較的大きな結晶が，石基と呼ばれる微細な結晶やガラス質の物質に取り巻かれている火成岩の組織。火山岩に見られる。

第4問　地表の変化と堆積岩(たいせきがん)　問題

堆積岩の形成に関わる風化，流水の三作用(侵食・運搬・堆積)，および続成作用と，各種堆積岩，河川による地形に関する基本的な出題をした。各作用のメカニズムと各種堆積岩についてよく理解しておきたい。

問1　岩石が長い年月の間に脆(もろ)くなる現象を風化と呼ぶ。風化には物理的風化と化学的風化がある。物理的風化とは，岩石が機械的に破砕されることである。そのメカニズムは選択肢の①③④が該当する。すなわち，岩石の構成鉱物が気温の変化により膨張収縮を繰り返すことで岩石が破砕されること(①)，岩石のすきまに入った水が凍結して膨張することにより岩石が破砕されること(③)，植物の根が岩石のすきまに入り込むことにより岩石が破砕されること(④)の三つが主な要因である。一方，化学的風化とは，水を媒介とした化学反応による風化現象である。一般に，雨水が弱酸性であるために岩石の構成鉱物が別の鉱物(粘土鉱物など)になったり，溶解することが主な要因である。したがって，②は化学的風化を示しているので，誤りである。日本のような温暖湿潤な環境下では，物理的風化と化学的風化が同時に進行す

風　化
物理的風化(機械的破砕)と化学的風化(溶解・酸化など)がある。温暖湿潤地帯では両者が同時に進行するが，乾燥地や寒冷地では物理的風化が，熱帯では化学的風化が卓越する。

る。しかし，雨の少ない乾燥地や寒冷地などでは物理的風化が卓越し，逆に雨の多い熱帯では化学的風化が卓越する。 $\boxed{19}$ …②

問2　砕屑岩の名称は，構成粒子(砕屑物)の粒径によって決められている。2 mm 以上の砕屑物が礫で，2 mm ～ $\frac{1}{16}$ mm が砂，$\frac{1}{16}$ mm 以下が泥である。選択肢の粒径分布グラフを読み取ると，①の大部分が礫，③の大部分が砂，④の大部分が泥であるので，それらが固結した砕屑岩がそれぞれ礫岩，砂岩，泥岩である。したがって，③が正解である。なお，例えば礫岩の場合，すべての構成粒子が 2 mm 以上というわけではなく，それより細かいものも混じっているのが普通である。表 4 — 1 に堆積岩の分類を示す。このように砕屑岩の名称は基本的に砕屑物の粒径のみで決まるが，実際には 2 mm 以上では岩片が多く，2 mm ～ $\frac{1}{16}$ mm では鉱物の結晶が多く，$\frac{1}{16}$ mm 以下では粘土鉱物が多くなる。一方，②のグラフは，さまざまな粒径の砕屑物が混在しており，粒径が不揃いであることを示している。一般に，砕屑物の分級(粒径に従って分別されること)は水の流速の違いで起こるので，このような不揃いの砕屑物は，氷河による堆積物であるモレーン(氷堆石)などにみられる。 $\boxed{20}$ …③

砕屑岩の構成粒子の粒径

礫岩…粒径 2 mm 以上
砂岩…粒径 2 ～ $\frac{1}{16}$ mm
泥岩…粒径 $\frac{1}{16}$ mm 以下

表 4 — 1　堆積岩の分類

分類名	構成物		岩石の名称
砕屑岩	岩石がくだかれた破片(砕屑物)	泥	→ 泥岩
		—— $\frac{1}{16}$ mm ——	
		砂	→ 砂岩
		—— 2 mm ——	
		礫	→ 礫岩
火山砕屑岩	火山砕屑物	火山灰	→ 凝灰岩
		火山礫など	→ 凝灰角礫岩など
生物岩	生物の遺骸	石灰質(紡錘虫・サンゴ)	→ 石灰岩
		ケイ酸質(放散虫・ケイ藻)	→ チャート
		植物遺体	→ 石炭
化学岩〔沈殿岩 蒸発岩〕	化学成分	$NaCl$	→ 岩塩
		SiO_2	→ チャート
		$CaCO_3$	→ 石灰岩
		$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	→ 石膏

問3　問題図 2 は流水の三作用を説明する図である。横軸に砕屑物の粒径・種類を，縦軸に流速をとってある。流速が増加して「侵食・運搬される領域」に入ると，その粒径の砕屑物が侵食・運搬される。次にすべての粒径の砕屑物が侵食・運搬される程度の流

流水の三作用

砂が最も侵食・運搬されやすい。また，礫が最も堆積しやすく，泥が最も堆積しにくい。

速から徐々に流速が減少していくと，「運搬されているものは引き続き運搬される領域」の流速では引き続き砕屑物は運搬されるが，さらに流速が減少して「堆積する領域」に入ると，その粒径の砕屑物は堆積を始める。

① 流速 0.5 cm/s では，運搬されている泥は引き続き運搬されるので誤りである。

② 流速 1 cm/s では，堆積している泥は引き続き堆積し続けるので誤りである。

③ 流速 10 cm/s では，運搬されている砂と泥は引き続き運搬されるので誤りである。

④ 流速 20 cm/s では，堆積している砂は侵食・運搬される。したがって，この選択肢が正しい。 $\boxed{21}$ …④

問4 ① 鍾乳洞は，カルスト地形において，石灰岩が二酸化炭素を含む地下水と化合して，水に溶けて形成された地形である。モレーンは，氷堆石ともいい，氷河末端にできる堆積物であり，両者とも誤りである。

② 海食崖（がい）は，波の作用による海岸の侵食地形で，海食台や海食洞を伴う。三角州は，河川が海に注ぐ際に流速が小さくなってできる堆積地形であり，前者が誤りである。

③ U字谷は，氷河による侵食地形で，断面がU字形をしている。扇状地は，河川が山地から平野に出る際に流速が小さくなってできる堆積地形であり，前者が誤りである。

④ V字谷は，河川による山間部の侵食地形で，断面がV字形をしている。自然堤防は，河川が氾濫（はんらん）した際に河道の両側に土砂を堆積させてできた高まりで，この選択肢が正しい。 $\boxed{22}$ …④

問5 堆積物が堆積岩になる過程を続成作用と呼ぶ。続成作用は堆積物の自重による圧密作用と，堆積物の粒子どうしを固着させる膠結（こうけつ）作用からなる。膠結物質としては，SiO_2，$CaCO_3$，粘土鉱物を覚えておきたい。これらの膠結物質の成分は，水に溶けていた成分や，圧密によって堆積物の粒子どうしが圧力溶解することによって供給される。また，SiO_2 は石英，$CaCO_3$ は方解石の化学組成である。なお，Al_2SiO_5 はらん晶石・珪線（けいせん）石・紅柱石の組成であって，粘土鉱物の組成ではない。 $\boxed{23}$ …③

問6 ①・② 石灰岩は，有孔虫やサンゴなど $CaCO_3$ の骨格や殻（から）をもつ生物の遺骸が堆積して，続成作用を経て形成されたもので，チャートは，放散虫やケイ藻など SiO_2 の骨格や殻をもつ生物の遺骸が堆積して，続成作用を経て形成されたものである。したがって，①，②は誤りである。また，石灰岩やチャートは化学岩としても形成される。

③ 石炭は，世界的には主に古生代石炭紀に，日本の場合は主に新生代古第三紀に，湿原のような場所で，植物が地中に埋没し炭化してできたものである。したがって，この選択肢が正しい。

カルスト地形
石灰岩が雨水や地下水によって溶食された地形。

U字谷
氷河による侵食地形。

V字谷
河川による侵食地形。

続成作用
堆積物が堆積岩になる過程。圧密作用と膠結作用からなる。膠結物質としては SiO_2，$CaCO_3$，粘土鉱物がある。

石灰岩
有孔虫やサンゴなど $CaCO_3$ の殻や骨格をもつ生物の遺骸から生成。

チャート
放散虫やケイ藻など SiO_2 の骨格や殻をもつ生物の遺骸から生成。

石　炭
植物が地下に埋没し，炭化して生成。

④　石膏は，大規模に分布するものは，かつての湖などが蒸発した際に，水に溶けていた成分が沈殿して形成される化学岩である。生物岩ではないので誤りである。　$\boxed{24}$ …③

石　膏
水溶成分が沈殿して生成。

第５問　地質断面図　問題

地質調査を行い，岩石や化石の種類，断層の分布などを地質柱状図・断面図・平面図に表すことによって，地史を解明することができる。今回は地質断面図を題材に，問題を出題した。

問１　斜交葉理（斜交層理・クロスラミナ）は，砕屑物の粒子が並んでつくる葉理が，地層の層理面に対して斜交する構造で，水流や風によって砕屑物が移動して形成される。特に，図５－１のような斜交葉理は，水流や風の向きや速さが変化する場所でつくられる。三角州の堆積物などに斜交葉理が見られる場合が多い。

斜交葉理（斜交層理・クロスラミナ）
葉理が地層の層理面に斜交する構造。
水流や風による砕屑物の移動によって形成される。

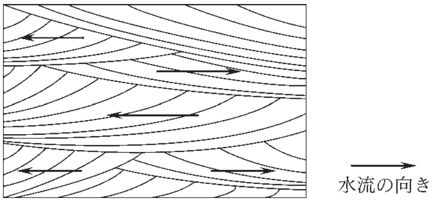


図５－１　斜交葉理

このほかの重要な堆積構造として，級化層理（級化成層・級化構造）がある。これは，下方ほど砕屑物の粒子が大きく，上方ほど粒子が細かくなる堆積構造である（図５－２）。洪水などによって砂や泥などのさまざまな大きさの粒子が一緒に運ばれ，静かな水底に一気に堆積するとき，大きい粒子から順に堆積することによってできる。洪水の堆積物のほかに，砂や泥の混ざった混濁流（乱泥流）が大陸斜面を流れ下ってできた深海扇状地の堆積物にも級化層理が見られる。

級化層理（級化成層・級化構造）
下部ほど粗粒で上部ほど細粒になる堆積構造。

また，砂質の堆積岩中に波形の層理面が見られる場合がある。これは，波などによってつくられる堆積構造で，漣痕（リップルマーク）と呼ばれる（図５－３）。　$\boxed{25}$ …⑤

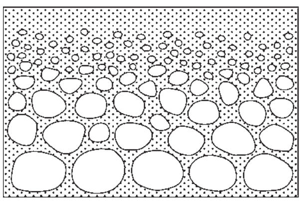


図５－２　級化層理（級化成層）

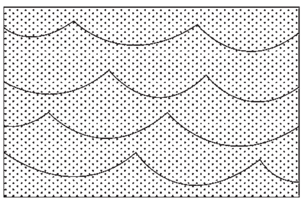


図５－３　漣痕

問２　①　マグマが地下から上昇し，地層や岩体中に貫入して火成岩ができるとき，貫入したマグマの熱によって周囲の地層や岩体が接触変成作用（熱変成作用）を受けることがある。泥岩などが接触変成作用を受けると，黒くて緻密でかたいホルンフェルスと呼

貫　入
マグマが地下から上昇して，地層や岩体中に入り込むこと。

ばれる接触変成岩に変化する。したがって，①が正解である。

② 大理石は結晶質石灰岩とも呼ばれ，石灰岩が接触変成作用を受けて方解石が再結晶し，粒径が大きくなった岩石である。

③ 片麻(へんま)岩は，プレートの沈み込み帯などで高温低圧型の広域変成作用によって形成される広域変成岩である。

④ 結晶片岩は，低温高圧型の広域変成作用によって形成される広域変成岩である。 $\boxed{26}$ …①

問3 地層が堆積した相対年代を決定するのに役立つ化石を，示準化石と呼ぶ。

B層から産出したビカリア(ビカリヤ)は新生代の新第三紀に繁栄した巻貝である。一方，D層から産出したアンモナイトは，古生代に出現し中生代に繁栄した中生代の重要な示準化石である。また，イノセラムスも中生代の示準化石の二枚貝である。したがって，②が正解である。 $\boxed{27}$ …②

問4 断層面の上側の地盤を上盤(うわばん)といい，下側の地盤を下盤(したばん)という。上盤が下方へ下がっている断層を正断層といい(図5－4)，上盤がずり上がっている断層を逆断層という(図5－5)。正断層は，断層面の走向に対して直交する方向へ引っ張られてできる。一方，逆断層は断層面の走向に対して直交する方向から圧縮されてできる。

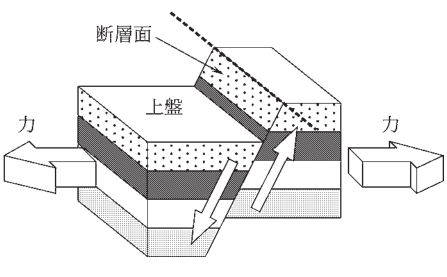


図5－4 正断層

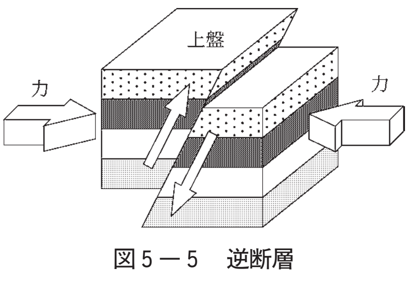


図5－5 逆断層

断層Fは，問題文にあるように，地盤の南北方向の水平移動がなく，問題図1を見ると，断層面よりも上の西側の地盤が下がっている。したがって，断層Fは正断層であり，東西方向へ引っ張られて形成されたとわかる。 $\boxed{28}$ …②

問5 地層の逆転がないとき，上位の地層は下位の地層よりも新し

接触変成作用(熱変成作用)

貫入したマグマの熱によって周囲の岩石が受ける変成作用。

接触変成岩

・ホルンフェルス 原岩は泥岩など
・大理石(結晶質石灰岩) 原岩は石灰岩

示準化石

相対年代の決定に役立つ化石。
地層の対比に利用される。
(例)
・古生代 三葉虫・フズリナ
・中生代 アンモナイト・イノセラムス
・古第三紀 カヘイ石(ヌンムリテス)
・新第三紀 ビカリア・デスモスチルス
・第四紀 ナウマン象・マンモス

断 層

・正断層 上盤が下がる。
引張力によってできる。
・逆断層 上盤が上がる。
圧縮力によってできる。
・横ずれ断層 水平方向にずれる。
右横ずれ断層 断層面を挟んで向こう側が右にずれる。
左横ずれ断層 断層面を挟んで向こう側が左にずれる。

い。これを地層累重(るいじゅう)の法則という。問題の地域では地層の逆転がないので，Ａ層はＢ層よりも新しく，Ｂ層はＣ層よりも新しい。

さらに，断層と地層・岩体には，切っている方が切られているものよりも新しいという関係がある。断層ＦはＢ層・Ｃ層・Ｄ層・Ｅ岩体を切っているので，これらよりも新しい。一方，断層ＦはＡ層によって切られているので，Ａ層の方が断層Ｆよりも新しい。また，Ｄ層とＥ岩体を不整合に覆うＣ層はＤ層・Ｅ岩体よりも新しく，Ｄ層に貫入しているＥ岩体は，Ｄ層よりも新しい。

したがって，問題図１の地層・岩体・断層Ｆの形成順序は，古いものから順にＤ層→Ｅ岩体→Ｃ層→Ｂ層→断層Ｆ→Ａ層となる。よって，④が正解である。 $\boxed{29}$ …④

問６　地層の対比とは，離れた地域の地層を比較して，同じ時代の地層であると決定することである。地層の対比に役立つ鍵(かぎ)層の条件は，(1)短期間に堆積した，(2)広い範囲に形成された，(3)ほかの地層と区別がつきやすい，ということである。火山の噴火によって広い範囲に同時に火山灰が堆積してできる火山灰層や凝灰岩層は，鍵層として有効である。

地質柱状図は，ある地域での地層や岩体の厚さ，重なる順序を表したもので，傾いている地層の境界面も柱状図では水平に描かれる。問題図２のＬ～Ｎ地域の柱状図は，Ｂ層(ビカリアの化石が産出する泥岩)とＣ層(陸生の貝の化石が産出する砂岩)の境界面を揃えて並べてある。

この問題図２を見ると，Ｌ～Ｎ地域のすべての柱状図で，陸生の貝が産出する砂岩の上にビカリアが産出する泥岩が重なっている。ビカリアは，浅い海や干潟の汽水域(海水と淡水が混ざった水域)に生息していた巻貝であり，代表的な示相化石である。したがって，これらの地域では陸上から浅海の環境へ変化した，すなわち海面の上昇(海進)が起きたことがわかる。

さらに，北のＬ地域では，凝灰岩**g**層よりも下位に砂岩と泥岩の境界面があることから，**g**層の堆積前に陸から浅海の環境に変わったことがわかる。一方，Ｍ地域では，**g**層は砂岩と泥岩の間に挟まれており，**g**層が堆積したとき陸と浅海の境界である海岸線がＭ地域付近にあったと考えられる。最も南のＮ地域では，**g**層は陸の環境を示す砂岩中に挟まれ，**g**層の上位に砂岩と泥岩の境界面がある。このことから，**g**層が堆積した当時，Ｎ地域はまだ陸上の環境にあり，**g**層の堆積後に海面が上昇して浅海の環境に変化したことがわかる。

以上のことから，海面の上昇により，北のＬ地域が最も早く浅海の環境に変わり，最も南のＮ地域では，最後に海岸線が進入して浅海に変わったと判断できる。したがって，海進は北から南に向かって起きたので，③が正解である。 $\boxed{30}$ …③

地層累重の法則

地層の逆転がないとき，上位の地層は下位の地層よりも新しい。

不整合

地層や岩体が形成された後に侵食を受け，その上に不連続に地層が再び堆積したときの地層の重なり方。

地層の対比

離れた地域の地層が同じ時代のものであるかどうかを決めること。

鍵　層

地層の対比に役立つ地層。

示相化石

地層が堆積した当時の環境を推定できる化石。

(例)

・造礁サンゴ：暖かい浅海

・シジミ：汽水域～淡水域

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO