受験番号		氏　　名		クラス		出席番号	

試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2012年度　全統センター試験プレテスト問題

数　　学 ①（100点　60分）

〔数学Ⅰ，数学Ⅰ・数学A〕

2012年11月実施

この問題冊子には，「**数学Ⅰ**」「**数学Ⅰ・数学A**」の２科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

Ⅰ　**注　意　事　項**

1　解答用紙は，第１面(表面)及び第２面(裏面)の両面を使用しなさい。

解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。必要事項欄及びマーク欄に**正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。**

①　**受験番号欄**

受験票が発行されている場合のみ，必ず**受験番号**(数字及び英字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

②　**氏名欄，高校名欄，クラス・出席番号欄**

氏名・フリガナ，高校名・フリガナ及び**クラス・出席番号**を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，マーク欄に**マーク**しなさい。

マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点となることがあります。

解答科目については，間違いのないよう十分に注意し，マークしなさい。

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数　学　Ⅰ	4～11	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅰ・数学A	12～19	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

5　**この注意事項は，問題冊子の裏表紙にも続きます。問題冊子を裏返して必ず読みなさい。**

河合塾

数　学　Ⅰ

(全　問　必　答)

第１問　(配点　20)

解説

〔１〕　２次方程式 $2x^2 - 12x + 17 = 0$ の二つの解のうち小さい方を α，大きい方を β とする。

(1)
$$\alpha + \beta = \boxed{\text{ア}},\quad \beta - \alpha = \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$
である。

(2)　n を正の整数とし，x の不等式
$$\frac{|x - \alpha - \beta|}{\beta - \alpha} < n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
について考える。

$n = 1$ のとき，① の解は
$$\boxed{\text{ウ}} - \sqrt{\boxed{\text{エ}}} < x < \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$
である。

① の解に 0 が含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

① の解に正の整数が 20 個以上含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(数学Ⅰ 第１問 は次ページに続く。)

〔2〕 $A = p^3 + (2q + 1)p^2 + q(q + 2)p + q^2$ とする。

(1) A を q で整理し，因数分解すると

$$A = \left(p + \boxed{\text{ク}}\right)(q + p)^{\boxed{\text{ケ}}}$$

となる。

(2) $r = 1 + \sqrt{3}$ のとき

$$r^2 - 2r = \boxed{\text{コ}}, \quad r^4 - 16r = \boxed{\text{サシ}}$$

であり，$p = -1 + \sqrt{3}$，$q = 4$ のとき

$$A^2 = 108\left(\boxed{\text{ス}} + \boxed{\text{セ}}\sqrt{3}\right)$$

である。

第2問 （配点　25）

解説

a，b を定数とし，x の 2 次関数

$$y = \frac{1}{4}x^2 - (a-1)x + 2a^2 + b$$

のグラフ G_1 が点 $(-6,\ 2a^2 + 9)$ を通るとする。

このとき

$$b = \boxed{\text{アイ}}\,a + \boxed{\text{ウ}}$$

であり，G_1 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(\boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}},\ a^2 - \boxed{\text{カ}}\,a + \boxed{\text{キ}}\right)$$

である。

G_1 を x 軸に関して対称移動して得られるグラフを G_2 とする。

(1)　G_2 の頂点の y 座標は，$a = \boxed{\text{ク}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{ケコ}}$ をとる。$a = \boxed{\text{ク}}$ のとき，G_2 を 表す 2 次関数は

$$y = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}x^2 + x - \boxed{\text{セ}}$$

である。

（数学Ⅰ 第2問 は次ページに続く。）

(2) G_2 をさらに x 軸方向に $2p$，y 軸方向に p だけ平行移動して得られるグラフを G_3 とし，G_1 と G_3 の頂点の y 座標が等しいものとする。さらに，G_3 を表す 2 次関数の $0 \leqq x \leqq 8$ における最小値，最大値を与える x をそれぞれ x_m，x_M とする。

$$p = \boxed{\text{ソ}}\,a^2 - \boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チツ}}$$

であり，$x_m = \boxed{\text{テ}}$ である。

また，$0 < x_M < 8$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ト}} < a < \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

第3問 （配点　30）

解説

$AB = 1$，$CD = \sqrt{7}$ である四角形 ABCD の内部に点 O があり

$$OA = OB = OC = 1,\quad OD = 2$$

を満たしている。

$$\angle COD = \boxed{\text{アイウ}}^\circ$$

であり，△OCD の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

また，$\angle BOC + \angle DOA = \boxed{\text{カキク}}^\circ$ であり，$\angle BOC = \theta$ とすると

$$BC^2 = \boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}}\cos\theta,\quad DA^2 = \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}\cos\theta$$

である。

(1)　△ABC の外接円の半径と △ODA の外接円の半径が等しいとすると

$$\theta = \boxed{\text{スセソ}}^\circ,\quad BD = \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

（数学Ⅰ 第3問 は次ページに続く。）

(2)　$\theta = 90^\circ$ とし，四角形 ABCD から △OAB を取り除いた図形を T とする。さらに線分 OC と線分 OD を折り目として図形 T を折り曲げて，線分 OA と線分 OB を重ね合わせることによってできる三角錐を考える。

三角錐 OACD の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，点 O から平面 ACD に下ろした垂線と平面 ACD の交点を H とすると

$$\mathrm{OH} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第４問 （配点　25）

解説

$m \leqq \sqrt{17} < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ア}}$ である。

$a = \boxed{\text{ア}}$ のとき

$$(10\sqrt{17})^2 - (10a+b)^2 = \boxed{\text{イウエ}} - \boxed{\text{オカ}}\,b - b^2$$

であり，$\boxed{\text{イウエ}} - \boxed{\text{オカ}}\,b - b^2 \geqq 0$ を満たす最大の負でない整数 b は $\boxed{\text{キ}}$ であるから，$n \leqq 10\sqrt{17} < n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

（数学Ⅰ 第４問 は次ページに続く。）

$a = \boxed{\text{クケ}}$ のとき

$$(100\sqrt{17})^2 - (10a + b)^2 = \boxed{\text{コサシス}} - \boxed{\text{セソタ}}\,b - b^2$$

であり，$\boxed{\text{コサシス}} - \boxed{\text{セソタ}}\,b - b^2 \geqq 0$ を満たす最大の負でない整数 b は $\boxed{\text{チ}}$ である。

よって，$\sqrt{17}$ を小数で表すと小数第 2 位の数字は $\boxed{\text{ツ}}$ であり，$\dfrac{4}{\sqrt{17}+1}$ を小数で表すと小数第 2 位の数字は $\boxed{\text{テ}}$ である。

数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第1問 （配点　20）

解説

〔1〕　2次方程式 $2x^2 - 12x + 17 = 0$ の二つの解のうち小さい方を α，大きい方を β とする。

(1)
$$\alpha + \beta = \boxed{\text{ア}},\quad \beta - \alpha = \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$
である。

(2)　n を正の整数とし，x の不等式
$$\frac{|x - \alpha - \beta|}{\beta - \alpha} < n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$
について考える。

$n = 1$ のとき，① の解は
$$\boxed{\text{ウ}} - \sqrt{\boxed{\text{エ}}} < x < \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$
である。

① の解に 0 が含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

① の解に正の整数が20個以上含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{カキ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A 第1問 は次ページに続く。）

〔2〕 a，n を2以上の整数とし，n に関する条件 p，q，r を次のように定める。

p ：n は108で割ると1余る数である

q ：n は120で割ると1余る数である

r ：n は a で割ると1余る数である

また，条件 p の否定を $\overline{p}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。

(1) 次の $\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$a = 12$ とする。

q は r であるための $\boxed{\text{ク}}$。

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{ケ}}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 「p かつ q」を満たす最小の n は $\boxed{\text{コサシス}}$ である。

(3) 「p ならば r」が真，または「q ならば r」が真となるような a は全部で $\boxed{\text{セソ}}$ 個ある。

第2問 （配点　25）

解説

a，b を定数とし，x の2次関数

$$y = \frac{1}{4}x^2 - (a-1)x + 2a^2 + b$$

のグラフ G_1 が点 $(-6,\ 2a^2+9)$ を通るとする。

このとき

$$b = \boxed{アイ}\,a + \boxed{ウ}$$

であり，G_1 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(\boxed{エ}\,a - \boxed{オ},\ a^2 - \boxed{カ}\,a + \boxed{キ}\right)$$

である。

G_1 を x 軸に関して対称移動して得られるグラフを G_2 とする。

(1)　G_2 の頂点の y 座標は，$a = \boxed{ク}$ のとき，最大値 $\boxed{ケコ}$ をとる。$a = \boxed{ク}$ のとき，G_2 を表す2次関数は

$$y = \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}x^2 + x - \boxed{セ}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A 第2問 は次ページに続く。）

(2) G_2 をさらに x 軸方向に $2p$，y 軸方向に p だけ平行移動して得られるグラフを G_3 とし，G_1 と G_3 の頂点の y 座標が等しいものとする。さらに，G_3 を表す 2 次関数の $0 \leqq x \leqq 8$ における最小値，最大値を与える x をそれぞれ x_m，x_M とする。

$$p = \boxed{\text{ソ}}\,a^2 - \boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チツ}}$$

であり，$x_m = \boxed{\text{テ}}$ である。

また，$0 < x_M < 8$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ト}} < a < \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

第3問 （配点　30）

解説

△ABC において

$$AB = 3,\quad BC = 5,\quad \cos\angle ABC = \frac{1}{3}$$

とする。このとき

$$CA = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である。また

$$\sin\angle ABC = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とし，∠ABC の二等分線と線分 AH の交点を D とする。

$$BH = \boxed{\text{ク}},\quad DH = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}AH$$

であり

$$\sin\angle DBH = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A 第3問 は次ページに続く。）

さらに，直線 BD と辺 CA の交点を E とし，辺 BC 上に $\mathrm{BF} = 2\mathrm{BH}$ を満たす点 F をとり，△BFE の外接円の中心を O とする。このとき

$$\cos \angle \mathrm{ECF} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}, \quad \mathrm{EF} = \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

△ABC の内接円の中心を I とすると，△OBI の面積は

$$\frac{3}{8}\left(\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$$

である。

第4問 （配点　25）

解説

袋の中に赤玉3個，白玉3個，青玉4個の合計10個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ1から3までの番号がつけられており，青玉には1から4までの番号がつけられている。この袋から同時に3個の玉を取り出す。

玉の取り出し方は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

取り出した3個の玉の色と番号により次のように得点を定める。

> 玉の色がすべて異なるときは0点とする。
> 同じ色の玉が2個以上あるときは同じ色の玉の中で最も大きい番号を得点とする。
> ただし，同じ番号の玉が2個以上あるときは上で定めた得点を2倍にする。

例えば，取り出した3個の玉が

番号1の赤玉，番号3の赤玉，番号1の青玉

のときは，得点は6点となる。

（数学Ⅰ・数学A 第4問 は次ページに続く。）

(1) 得点が 0 点となる玉の取り出し方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りである。

取り出した 3 個の玉が，番号 2 の赤玉，番号 2 の青玉，番号 4 の青玉のときは得点は $\boxed{\text{カ}}$ 点であり，得点が $\boxed{\text{カ}}$ 点となる玉の取り出し方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りである。

また，得点が 3 点となる玉の取り出し方のうち

取り出した 3 個の玉の色がすべて同じであるものは $\boxed{\text{ク}}$ 通り

取り出した 3 個の玉のうち 2 個だけが同じ色であるものは $\boxed{\text{ケコ}}$ 通り

である。

(2) 得点が 2 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$，得点が 6 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{タチツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ 点である。

II　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－，±)又は数字(０～９)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，… で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に －83 と答えたいとき

ア	● ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊖ ± ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨
ウ	⊖ ± ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5　根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に

$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

問題を解く際には，「問題」冊子にも必ず自分の解答を記録し，試験終了後に配付される「学習の手引き」にそって自己採点し，再確認しなさい。