クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度

全統医進模試問題

数　　学

2012年11月実施

（200点・100分）

試験開始の合図があるまで，この「問題」冊子を開かず，下記の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1.　この「問題」冊子は，5ページである。
2.　解答用紙（4枚）は問題冊子に挟み込まれているので抜き出して解答すること。
3.　本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所および解答用紙の汚れ等があれば試験監督者に申し出ること。
4.　試験開始の合図で解答用紙の下段の所定欄に **氏名**（**漢字及びフリガナ**），**在・卒高校名**，**クラス名**，**出席番号**，**受験番号**（**受験票の発行を受けている場合のみ**）を明確に記入すること。
5.　解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。
6.　試験終了の合図で上記4. の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。

河合塾

数学の問題は次ページから始まる。

1　（配点　50点）　**解説**

(1)　関数 $y=\dfrac{x}{x^2+3}$ の増減，極値を調べ，そのグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよいが，漸近線は調べよ．

(2)　曲線 C_1：$y=\dfrac{x}{x^2+3}$，C_2：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2+3}$ および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(3)　x の方程式

$$\left(\frac{x}{x^2+3}-k\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{x^2+3}-k\right)=0$$

の異なる実数解の個数が 2 となるような実数 k の値の範囲を求めよ．

2　（配点　50点）　**解説**

n を 3 以上の自然数とする．箱の中に 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれたカードが 1 枚ずつ合計 n 枚入っている．次のような試行を箱の中にカードが残っている限り繰り返す．

試行：箱の中から無作為に 1 枚のカードを取り出し，書かれている番号を記録し，取り出したカードを含めその番号以上の番号が書かれたカードすべてを箱の中から取り除く．

この試行を繰り返した結果，記録された番号の中に 3 が含まれる確率を p_n とする．以下の問に答えよ．

(1)　p_3，p_4，p_5 をそれぞれ求めよ．

(2)　p_n を推測し，それを数学的帰納法を用いて証明せよ．

3 （配点　50点）　　**解説**

xyz 空間において次の問に答えよ．

(1)　xz 平面において考える．

媒介変数 t を用いて表された曲線

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ z = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

を C とする．

(i)　C の概形を図示せよ．

(ii)　C は直線 $x = \pi$ に関して対称であることを示せ．

(iii)　直線 $z = k$ $(0 \leqq k \leqq 2)$ と C との共有点の x 座標を $\alpha(k)$，$\beta(k)$（ただし $\alpha(k) \leqq \beta(k)$）とする．このとき，$\alpha(k) + \beta(k)$ の値を答えよ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^2 \{\beta(k) - \alpha(k)\}\,dk$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ を満たす実数 t に対して 2 つの点

$$\mathrm{P}(t - \sin t,\ 0,\ 1 - \cos t),\quad \mathrm{Q}(0,\ t - \sin t,\ 1 - \cos t)$$

を定める．t が $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲を変化するとき，線分 PQ が描く曲面と 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

4　（配点　50点）　解説

⑴　XY 平面上で，点 $(r,\ 0)$ $(r>0)$ を原点Oのまわりに角 θ だけ回転した点をPとし，

$$\vec{u}=(r,\ 0),\quad \vec{v}=(0,\ r)$$

とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{u}$，$\vec{v}$，θ を用いて表せ．

次に，xyz 空間の2点 $\mathrm{M}(4,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{N}(5,\ 3,\ -3)$ とベクトル $\vec{d}=(1,\ 1,\ 2)$ を考える．Mを通り $\vec{d}$ に平行な直線を l とし，Nから l に垂線NHを下ろす．

⑵　点Hの座標を求めよ．

⑶　$\overrightarrow{\mathrm{HN}}=\vec{a}$ とする．次の条件を満たすベクトル $\vec{b}$ の成分を求めよ．

$$\vec{b}\perp\vec{a},\quad \vec{b}\perp\vec{d},\quad |\vec{b}|=|\vec{a}|$$

ただし，$\vec{b}$ の x 成分は正であるとする．

⑷　Hを通り $\vec{d}$ に垂直な平面上で，中心がHであり，頂点の1つがNである正八角形を考える．この正八角形の頂点のうち，原点Oから最も遠い点の座標を求めよ．なお，正八角形の中心とは正八角形に外接する円の中心のことをいう．