クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度

全統高２記述模試問題

数　　学

（100分）

2013年１月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1．問題冊子は５ページである。
2．解答用紙は別冊になっている。（「受験届・解答用紙」冊子表紙の注意事項を熟読すること。）
3．本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4．1 2 3 は必須問題，4 5 は選択問題である。4 5 の２題中，任意の１題を選択して解答すること。
（選択パターン以外で解答した場合は，解答のすべてを無効とする場合がある。）

解答用紙	イ		ロ		
問題番号	1	2	3	4	5
選択パターン	●	●	●	○	
	●	●	●		○

●…必須　○…選択

5．試験開始の合図で「受験届・解答用紙」冊子の数学の解答用紙（２枚）を切り離し，下段の所定欄に**選択問題**・**氏名**・**在学高校名**・**クラス名**・**出席番号**・**受験番号**（**受験票の発行を受けている場合のみ**）を明確に記入すること。なお，**氏名には必ずフリガナも記入**のこと。
6．解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。
7．指定の解答欄外へは記入しないこと。採点されない場合があります。
8．試験終了の合図で上記５.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。
ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

1 **【必須問題】**（配点　50点）　解説

(1)　a は実数の定数であり，x の関数

$$f(x)=x^2-ax+a^2-3$$

がある．

(i)　すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(ii)　ある正の数 x に対して $f(x)\leqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(2)　赤球が 4 個，白球，青球，黄球，緑球がそれぞれ 1 個ずつ，全部で 8 個の球があり，これら 8 個の球を A，B，C，D の 4 人に 2 個ずつ分ける．ただし，以下において 4 個の赤球は区別しないものとする．

(i)　赤球を 2 個もらう人が 1 人もいない分け方は何通りあるか．

(ii)　分け方は全部で何通りあるか．

2 **【必須問題】**（配点　50点）　**解説**

関数

$$f(x)=4\cdot 3^{3x-1}-4\cdot 3^{2x}+3^{x+1}$$

がある．

(1)　$t=3^x$ とするとき，$f(x)$ を t を用いて表せ．

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(3)　x の方程式 $f(x)=a$ が異なる 3 個の実数解をもち，それらの積が正であるような実数 a の値の範囲を求めよ．

3 **【必須問題】**（配点　50点）　解説

Oを原点とする座標平面上に放物線

$$C : y=\frac{1}{4}x^2$$

があり，C 上の点 P$(2p,\ p^2)$ における C の接線を l とし，l と x 軸の交点をQとする．ただし，$p>0$ とする．

(1)　l の方程式とQの x 座標を求めよ．

(2)　3点O，P，Qを通る円を K とする．

(i)　K の中心の座標と半径を求めよ．

(ii)　K と y 軸の交点のうちOでないものをRとし，三角形PQRの面積を S_1 とする．また，K の面積を S_2 とする．p が $p>0$ の範囲で変化するとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値とそのときの p の値を求めよ．

4 **【選択問題】**（配点　50点）　**解説**

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a_2=1, \qquad a_{n+2}=\frac{2^{n-1}}{a_{n+1}}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．

(1)　自然数 n に対して，$b_n=a_na_{n+1}$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．また，b_n を求めよ．

(2)　自然数 m に対して，a_{2m-1}，a_{2m} を求めよ．

(3)　自然数 n に対して，a_n を 3 で割った余りを r_n とする．

$$\sum_{n=1}^{N} r_n > 1000$$

を満たす最小の自然数 N を求めよ．

5 【選択問題】（配点　50点）　**解説**

四面体 OABC があり，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=1,\quad \mathrm{OB}=2,$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{3},\quad \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$$

である．

また，三角形 OAB を含む平面を α とし，点 C を通り α に垂直な直線と α の交点を H とする．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．また，線分 CH の長さを求めよ．

(3) 線分 AC を直径とする球面を S とする．S 上の点 P について，線分 OP の長さを最大にする P を P_1 とし，最小にする P を P_2 とする．四面体 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{AB}$ の体積を求めよ．