受験番号		氏　名		クラス		出席番号	

試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2012年度　第２回　全統マーク模試問題

数　　学①　(100点　60分)

〔数学Ⅰ，数学Ⅰ・数学Ａ〕

2012年８月実施

この問題冊子には，「**数学Ⅰ**」「**数学Ⅰ・数学Ａ**」の２科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

Ⅰ　**注　意　事　項**

1　解答用紙は，第１面(表面)及び第２面(裏面)の両面を使用しなさい。

解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。必要事項欄及びマーク欄に**正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。**

①　**受験番号欄**

受験票が発行されている場合のみ，必ず**受験番号**(数字及び英字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

②　**氏名欄，高校名欄，クラス・出席番号欄**

氏名・フリガナ，高校名・フリガナ及び**クラス・出席番号**を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，マーク欄に**マーク**しなさい。

マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点となることがあります。

解答科目については，間違いのないよう十分に注意し，マークしなさい。

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数　学　Ⅰ	4～11	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅰ・数学Ａ	12～19	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

5　**この注意事項は，問題冊子の裏表紙にも続きます。問題冊子を裏返して必ず読みなさい。**

河合塾

数　　学　　I

（全　問　必　答）

第１問 （配点　20）

解説

〔１〕 長方形ABCDにおいて，$AB = CD = 6$，$BC = DA = 2$ とする。辺BC上に点P，辺CD上に点Qを

$$BP = 2x,\quad CQ = 6x \quad (0 < x < 1)$$

となるようにとる。

このとき，△ABPの面積は $\boxed{\text{ア}}x$，△DAQの面積は $\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}x$ であり，△APQの面積を S とすると

$$S = \boxed{\text{エ}}x^2 - \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}$$

である。

$S = 5$ となるのは

$$x = \frac{\boxed{\text{キ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

$$x = \frac{\boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$ のとき，$m \leqq \dfrac{1}{x} < m + 1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{コ}}$ である。

（数学Ⅰ 第１問 は次ページに続く。）

〔2〕 $a = 2 - \sqrt{3}$，$b = 2 + \sqrt{3}$ とする。このとき

$$a^2 + b^2 = \boxed{\text{サシ}}, \quad a^3 + b^3 = \boxed{\text{スセ}}$$

である。

さらに

$$P = (x + ay - b^2)(x + by - a^2) + 2y^2 + 26y + 47$$

とする。

P を x について整理し，因数分解すると

$$P = x^2 + \left(\boxed{\text{ソ}}\,y - \boxed{\text{タチ}}\right)x + \boxed{\text{ツ}}\,y^2 - \boxed{\text{テト}}\,y + \boxed{\text{ナニ}}$$

$$= \left(x + y - \boxed{\text{ヌ}}\right)\left(x + \boxed{\text{ネ}}\,y - \boxed{\text{ノ}}\right)$$

であるから，$P = 1$ を満たす整数 x，y は

$$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ハ}},\ \boxed{\text{ヒ}}\right),\ \left(\boxed{\text{フ}},\ \boxed{\text{ヘ}}\right)$$

である。ただし，$\boxed{\text{ハ}} < \boxed{\text{フ}}$ とする。

第 2 問 （配点　25）

解説

二つの 2 次関数

$$y = 2x^2 + 4x - 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = -2x^2 + 12x - 10 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。

(1)　G_1 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$$

であり，G_2 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

G_1 を x 軸に関して対称移動し，x 軸方向に $\boxed{\text{キ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると G_2 と一致する。

（数学Ⅰ 第 2 問 は次ページに続く。）

(2)　a を正の定数とし，$-2 \leqq x \leqq a$ における 2 次関数 ① の最小値を m とすると

$$m = \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

さらに，$-2 \leqq x \leqq a$ における 2 次関数 ①，② の最大値をそれぞれ M_1，M_2 とすると

$0 < a < \boxed{\text{サ}}$ のとき　$M_2 = \boxed{\text{シス}}a^2 + \boxed{\text{セソ}}a - \boxed{\text{タチ}}$

$\boxed{\text{サ}} \leqq a$ のとき　$M_2 = \boxed{\text{ツ}}$

であり，$M_1 - M_2 < m + 32$ となるような a の値の範囲は

$$0 < a < \boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}} - \boxed{\text{ナ}}$$

である。

第３問 （配点　30）

解説

$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB} = 3\sqrt{3}$，$\mathrm{AC} = 6$，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ とする。

このとき

$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また

$$\mathrm{BC} = \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\quad \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

（数学Ⅰ 第３問 は次ページに続く。）

辺 AB 上に点 D を $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \cos\angle\mathrm{ABC}$ となるようにとり，△BCD の外接円と直線 AC の交点のうち C と異なる方を E とする。

このとき

$$\angle\mathrm{CDB} = \boxed{\text{ケコ}}^\circ,\quad \mathrm{CE} = \boxed{\text{サ}}$$

であり，直線 BE と直線 CD の交点を F とすると，△BCF の外接円の半径は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$ である。

また，線分 AF，BF を直径とする球の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

第 4 問 （配点　25）

解説

a を正の実数とし，x についての二つの不等式

$$|2x-3|<5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$ax^2-(2a^2+a-2)x+2a^2-4a<0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。

(1) 不等式 ① の解は

$$\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$$

であり，$a=3$ のとき，連立不等式 ① かつ ② の解は

$$\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}<x<\boxed{\text{カ}}$$

である。

（数学 I 第 4 問 は次ページに続く。）

(2) 下の $\boxed{\text{ソ}}$ には次の⓪～②のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪ $>$　　　① $<$　　　② $=$

不等式 ② の左辺を因数分解すると

$$\left(ax - a + \boxed{\text{キ}}\right)\left(x - \boxed{\text{ク}}\,a\right)$$

であり

$$a\left(\boxed{\text{ク}}\,a - \frac{a - \boxed{\text{キ}}}{a}\right) = \boxed{\text{ケ}}\left(a - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^2 + \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

であるから

$$\frac{a - \boxed{\text{キ}}}{a}\ \boxed{\text{ソ}}\ \boxed{\text{ク}}\,a$$

である。

不等式 ② を満たす正の整数が 1 だけとなるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} < a \leqq \boxed{\text{ツ}}$$

である。

(3) 不等式 ② を満たす x がつねに不等式 ① を満たすような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ト}}$$

である。

数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第1問 （配点　20）

解説

〔1〕 長方形ABCDにおいて，AB ＝ CD ＝ 6，BC ＝ DA ＝ 2 とする。辺BC上に点P，辺CD上に点Qを

$$\mathrm{BP} = 2x,\quad \mathrm{CQ} = 6x \quad (0 < x < 1)$$

となるようにとる。

このとき，△ABPの面積は $\boxed{\text{ア}}\,x$，△DAQの面積は $\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\,x$ であり，△APQの面積を S とすると

$$S = \boxed{\text{エ}}\,x^2 - \boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}$$

である。

$S = 5$ となるのは

$$x = \frac{\boxed{\text{キ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

$x = \dfrac{\boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，$m \leqq \dfrac{1}{x} < m + 1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{コ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A 第1問 は次ページに続く。）

〔2〕 k を実数の定数とする。実数 a に関する条件 p，q，r，s を次のように定める。

p ：$a < k$

q ：$a^2 - 6a + 8 > 0$

r ：$a^2 - 2a + 1 > 0$

s ：$|a - 1| > 2$

(1) s は

$a <$ **サシ**， **ス** $< a$

と同値である。

(2) $k = 0$ のとき，p は q であるための **セ** 。

セ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(3) $k = -2$ のとき

命題「 **ソ** ⇒ **タ** 」は真 かつ 命題「 タ ⇒ ソ 」は偽

であり

命題「 タ ⇒ **チ** 」は真 かつ 命題「 チ ⇒ タ 」は偽

である。

ソ ， タ ， チ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。

⓪ p　　① q　　② r　　③ s

(4) 命題「r ⇒『p または q』」が真となるような k の値の範囲は **ツ** である。

ツ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ $k > 1$　　① $k \geqq 1$　　② $k > 2$　　③ $k \geqq 2$
④ $k > 3$　　⑤ $k \geqq 3$　　⑥ $k > 4$　　⑦ $k \geqq 4$

第２問 （配点　25）

解説

二つの２次関数

$$y = 2x^2 + 4x - 4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = -2x^2 + 12x - 10 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。

(1)　G_1 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\right)$$

であり，G_2 の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

G_1 を x 軸に関して対称移動し，x 軸方向に $\boxed{\text{キ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると G_2 と一致する。

（数学Ⅰ・数学A 第２問 は次ページに続く。）

(2)　a を正の定数とし，$-2 \leqq x \leqq a$ における 2 次関数 ① の最小値を m とすると

$$m = \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

さらに，$-2 \leqq x \leqq a$ における 2 次関数 ①, ② の最大値をそれぞれ M_1, M_2 とすると

$0 < a < \boxed{\text{サ}}$ のとき　$M_2 = \boxed{\text{シス}}a^2 + \boxed{\text{セソ}}a - \boxed{\text{タチ}}$

$\boxed{\text{サ}} \leqq a$ のとき　$M_2 = \boxed{\text{ツ}}$

であり，$M_1 - M_2 < m + 32$ となるような a の値の範囲は

$$0 < a < \boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}} - \boxed{\text{ナ}}$$

である。

第3問 （配点 30）

解説

$\triangle$ABC において，$AB=3\sqrt{3}$，$AC=6$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ とする。

このとき

$$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また

$$BC=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\quad \cos\angle ABC=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A 第3問 は次ページに続く。）

辺 AB 上に点 D を $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \cos\angle\mathrm{ABC}$ となるようにとり，△BCD の外接円と直線 AC の交点のうち C と異なる方を E とする。

このとき

$$\angle\mathrm{CDB} = \angle\mathrm{CEB} = \boxed{\text{ケコ}}^\circ$$

である。

さらに，△BCE の内接円 I と辺 EC, BE の接点をそれぞれ $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$ とし，円 I の半径を r とすると

$$\mathrm{CH_1} = \boxed{\text{サ}} - r, \quad \mathrm{BH_2} = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}} - r$$

であり

$$r = \frac{3}{2}\left(\boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} - \sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

である。

直線 BE と直線 CD の交点を F とし，△BCF の外接円の中心を O とする。外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であり，線分 OE と円 O の交点を G とすると

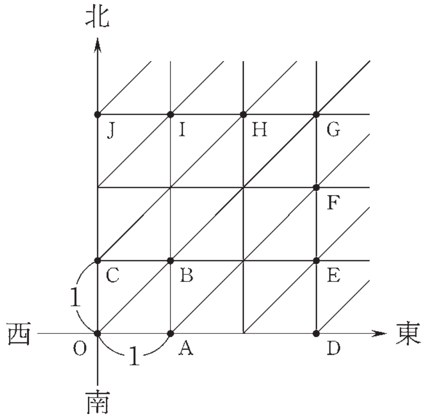
$$\mathrm{EG} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\boxed{\text{トナ}}} - \boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$$

である。

第4問 （配点　25）

解説

図のような一辺の長さが1の正方形の辺と対角線からなる街路がある。甲君が点Oを出発し街路を歩くものとする。ただし，進行方向は，東，北，北東のいずれかであるものとする。



(1)　点Oから点Bまでの経路は，北東に進むことのない「O→A→B」，「O→C→B」の2通りと，北東に進む「O→B」の1通りの合計3通りである。

点Oから点Eまでの経路は

北東に進むことがないものが $\boxed{\text{ア}}$ 通り

北東に進むことがあるものが $\boxed{\text{イ}}$ 通り

である。

点Oから点Gまでの経路のうち点Fと点Hをどちらも通らないものは

北東に進むことが3回であるものが $\boxed{\text{ウ}}$ 通り

北東に進むことが2回であるものが $\boxed{\text{エ}}$ 通り

北東に進むことが1回であるものが $\boxed{\text{オ}}$ 通り

である。

（数学Ⅰ・数学A 第4問 は次ページに続く。）

(2)　袋の中に

「東」と書かれたカードが１枚

「北」と書かれたカードが１枚

「北東」と書かれたカードが１枚

の合計３枚のカードが入っている。甲君は分岐点において袋の中からカードを１枚取り出し，取り出したカードに書かれた方角により進行方向を決める。ただし，進行方向を決めた後はカードを袋に戻すものとする。また，七つの点 D, E, F, G, H, I, J のいずれかに至ったときは進むのを止めるものとする。

甲君が

「O→B」と北東に進む確率が $\frac{1}{3}$

「O→A→B」,「O→C→B」と進む確率がいずれも $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

であるから，点 B を通る確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

さらに，得点を次のように定める。

点 D, J のどちらかに至ったときは０点

点 E, F, H, I のいずれかに至ったときは１点

とし，点 G に至ったときは甲君が点 O から点 G まで歩いた距離を得点とする。

得点が $2\sqrt{2}+2$ 点となる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ であり，得点が１点となる確率は $\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}}$ である。また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{チツ}\sqrt{2}+\boxed{テト}}{81}$ 点である。

II　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(−，±)又は数字(０〜９)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，… で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に　−83　と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5　根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

問題を解く際には，「問題」冊子にも必ず自分の解答を記録し，試験終了後に配付される「学習の手引き」にそって自己採点し，再確認しなさい。