新・旧課程

クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2014年度　第2回　**全統マーク模試**

学習の手引き【解答・解説集】

数　学

【2014年8月実施】

英語冊子巻末に「**自己採点シート**」と「**学力アップ・志望校合格のための復習法**」を掲載していますので，志望校合格へむけた効果的な復習のためにご活用ください。

河合塾

1460620119502110

【数 学 ①】

数 学 I

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	アx＋イ－$\sqrt{5}$	$2x+5-\sqrt{5}$	2	
	ウエ	－1	2	
	オ＋$\sqrt{5}$	$5+\sqrt{5}$	2	
	カキx＋ク＋$\sqrt{5}$	$-2x+3+\sqrt{5}$	2	
	ケコ	－2	2	
	サ＋$\sqrt{\text{シ}}$	$1+\sqrt{5}$	2	
	ス	7	4	
	セソ	11	4	
第1問 自己採点小計			(20)	
第2問	ア.イ	6.0	2	
	ウ.エオ	4.40	3	
	カ.キ	2.1	3	
	ク.ケ	5.5	2	
	コ	8	2	
	サ	1	2	
	シ	3	3	
	ス.セ	4.0	3	
第2問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{1}{8}$	3	
	$\dfrac{\text{ウ}\sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}$	$\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$	3	
	$\dfrac{\text{カキ}\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$	3	
	$\dfrac{\text{コ}\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$	$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$	4	
	$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\dfrac{1}{2}$	4	
	ソタ°	90°	3	
	$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{5}{8}$	5	
	$\dfrac{\sqrt{\text{テ}}}{\text{ト}}$	$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$	5	
第3問 自己採点小計			(30)	
第4問	アa	$3a$	2	
	イa^2－ウa－エ	$2a^2-2a-4$	2	
	a＜オカ，キ＜a	$a<-1$，$2<a$	4	
	$\dfrac{\text{ク}-\text{ケ}\sqrt{\text{コ}}}{11}$	$\dfrac{1-3\sqrt{5}}{11}$	3	
	$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{1}{3}$	3	
	スセa^2－ソa－タ	$11a^2-8a-3$	3	
	チa^2－ツa－テ	$2a^2-2a-4$	3	
	$a<-\dfrac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$	$a<-\dfrac{3}{11}$	3	
	ヌ＜a	$2<a$	3	
	$\dfrac{\sqrt{\text{ネノ}}-\text{ハ}}{\text{ヒフ}}$	$\dfrac{\sqrt{37}-2}{11}$	4	
第4問 自己採点小計			(30)	
自己採点合計			(100)	

第1問　数と式

$y=|x+1|+|x-\sqrt{5}|+4$ とする．

(1) $\sqrt{5} \leqq x$ のとき

$$y=\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}-\sqrt{5}$$

$\boxed{\text{ウエ}} \leqq x<\sqrt{5}$ のとき

$$y=\boxed{\text{オ}}+\sqrt{5}$$

$x<\boxed{\text{ウエ}}$ のとき

$$y=\boxed{\text{カキ}}x+\boxed{\text{ク}}+\sqrt{5}$$

である．

(2) $y=7+\sqrt{5}$ とすると

$$x=\boxed{\text{ケコ}},\quad \boxed{\text{サ}}+\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(3) すべての実数 x に対して $y \geqq m$ を満たす最大の整数 m は $\boxed{\text{ス}}$ である．

(4) 等式 $|x+1|+|x-\sqrt{5}|+4=\sqrt{5}x$ を満たす実数 x を α とすると，$n \leqq \alpha<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{セソ}}$ である．

【解説】　問題

$$y=|x+1|+|x-\sqrt{5}|+4. \qquad \cdots ①$$

(1)
$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x \geqq -1 \text{ のとき}), \\ -(x+1) & (x<-1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$|x-\sqrt{5}|=\begin{cases} x-\sqrt{5} & (x \geqq \sqrt{5} \text{ のとき}), \\ -(x-\sqrt{5}) & (x<\sqrt{5} \text{ のとき}). \end{cases}$$

よって，① は次のようになる．

$\sqrt{5} \leqq x$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= (x+1)+(x-\sqrt{5})+4 \\ &= \boxed{2}x+\boxed{5}-\sqrt{5}. \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

$\boxed{-1} \leqq x<\sqrt{5}$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= (x+1)-(x-\sqrt{5})+4 \\ &= \boxed{5}+\sqrt{5}. \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

$x<-1$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= -(x+1)-(x-\sqrt{5})+4 \\ &= \boxed{-2}x+\boxed{3}+\sqrt{5}. \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

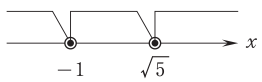
☜　実数 a に対して，

$$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}), \\ -a & (a<0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

☜　これらより，① の絶対値記号をはずすには，

$\sqrt{5} \leqq x$，$-1 \leqq x<\sqrt{5}$，$x<-1$

の各場合に分ければよいとわかる．



(2) $\sqrt{5} \leqq x$ のとき，$y=7+\sqrt{5}$ とすると，② より，

$$7+\sqrt{5}=2x+5-\sqrt{5}$$

であり，

$$x=1+\sqrt{5}.$$

（これは $\sqrt{5} \leqq x$ を満たす.）

$-1 \leqq x<\sqrt{5}$ のとき，③ より $y=5+\sqrt{5}$ であるから，$y=7+\sqrt{5}$ となる x はない.

$x<-1$ のとき，$y=7+\sqrt{5}$ とすると，④ より，

$$7+\sqrt{5}=-2x+3+\sqrt{5}$$

であり，

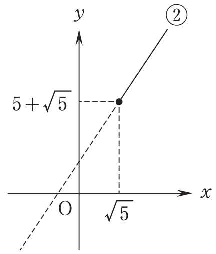
$$x=-2.$$

（これは $x<-1$ を満たす.）

したがって，$y=7+\sqrt{5}$ とすると，

$$x=\boxed{-2},\quad \boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}$$

である.

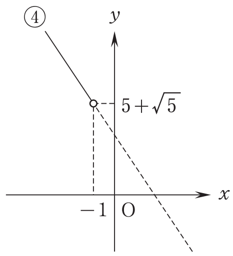


(3) $\sqrt{5} \leqq x$ のとき，② より，

$$\begin{aligned} y&=2x+5-\sqrt{5}\\ &\geqq 2\sqrt{5}+5-\sqrt{5} \qquad ☜\\ &=5+\sqrt{5} \end{aligned}$$

であり，$x<-1$ のとき，④ より，

$$\begin{aligned} y&=-2x+3+\sqrt{5}\\ &>-2\cdot(-1)+3+\sqrt{5} \qquad ☜\\ &=5+\sqrt{5} \end{aligned}$$



であるから，③ と合わせると，① を満たす y のとり得る値の範囲は，

$$y \geqq 5+\sqrt{5} \qquad \cdots ⑤$$

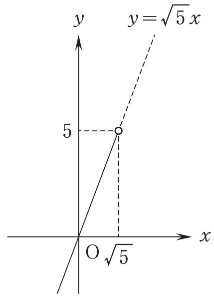
である.

ここで，$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ すなわち $2<\sqrt{5}<3$ より，

$$7<5+\sqrt{5}<8$$

であるから，すべての実数 x に対して，$y \geqq m$ を満たす最大の整数 m は $\boxed{7}$ である.

(4)
$$|x+1|+\left|x-\sqrt{5}\right|+4=\sqrt{5}\,x. \qquad \cdots ⑥$$



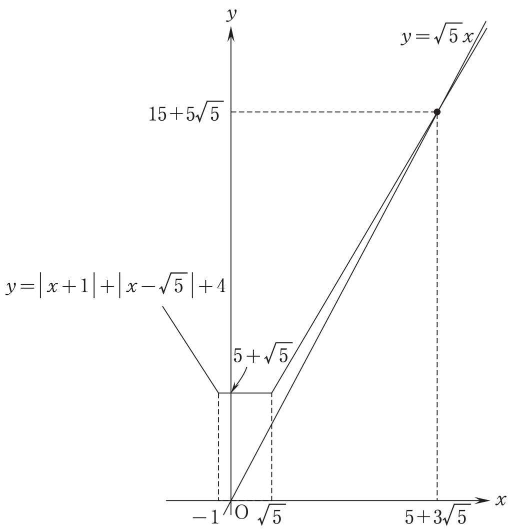
$x<\sqrt{5}$ のとき，
$$\begin{aligned}\sqrt{5}\,x &< \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} \\ &= 5\end{aligned}$$ ☜

より，
$$\sqrt{5}\,x<5+\sqrt{5}$$
であり，⑤ より，
$$|x+1|+\left|x-\sqrt{5}\right|+4 \geqq 5+\sqrt{5}$$
であるから，⑥ を満たす実数 x は存在しない．

$\sqrt{5} \leqq x$ のとき，② より ⑥ は，
$$2x+5-\sqrt{5}=\sqrt{5}\,x$$
となり，
$$\begin{aligned} x &= \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} \\ &= \frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{5-4} \\ &= 5+3\sqrt{5} \quad (\sqrt{5} \leqq x \text{ を満たす}) \end{aligned}$$
であるから，
$$\alpha=5+3\sqrt{5}$$
である．

ここで，$\sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49}$ すなわち $6<3\sqrt{5}<7$ より，
$$11<\alpha<12$$
であるから，$n \leqq \alpha < n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{11}$ である．

(参考) $y=|x+1|+\left|x-\sqrt{5}\right|+4$ と $y=\sqrt{5}\,x$ のグラフ．



第2問　データの分析

次のデータは，A から J までの 10 人の生徒に対して行った二つのゲームの得点の結果である．ゲームの得点は 0 以上の整数値である．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム 1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5
ゲーム 2	6	X	3	3	4	0	3	7	Y	2

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1)　ゲーム 1 の得点のデータの平均値は $\boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イ}}$ 点であり，分散は $\boxed{\text{ウ}}.\boxed{\text{エオ}}$，標準偏差は $\boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}$ 点である．また，データの中央値は $\boxed{\text{ク}}.\boxed{\text{ケ}}$ 点である．ただし，必要ならば $1.04 < \sqrt{1.1} < 1.05$ を用いてもよい．

(2)　X ＞ Y とする．ゲーム 2 の得点のデータの範囲(レンジ)が 8 点であるとすると

X＝$\boxed{\text{コ}}$

であり，さらに平均値が 3.7 点であるとすると

Y＝$\boxed{\text{サ}}$

である．

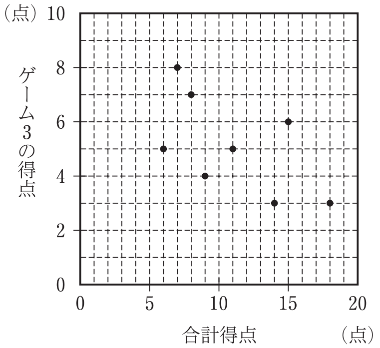
(3)　X＝$\boxed{\text{コ}}$，Y＝$\boxed{\text{サ}}$ とする．

ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点の上位 8 人でゲーム 3 を行った．ただし，ゲーム 3 の得点は整数値である．

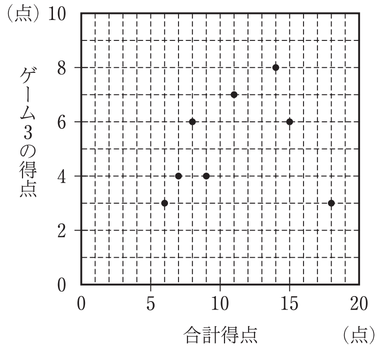
ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点とゲーム 3 の得点の相関係数が -0.86 であるとすると，散布図として適切なものは $\boxed{\text{シ}}$ であり，ゲーム 3 のデータの中央値は $\boxed{\text{ス}}.\boxed{\text{セ}}$ 点である．

$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

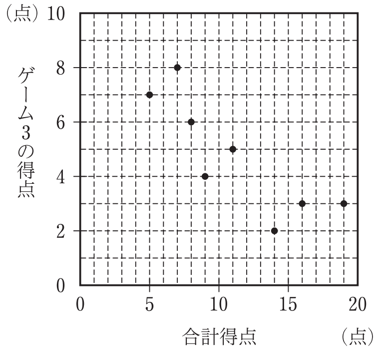
⓪



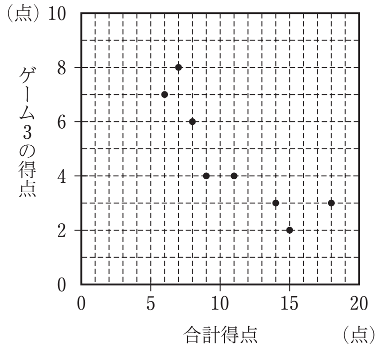
①



②



③



【解説】

(1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5

ゲーム1のデータの平均値は，

$$\frac{8+10+3+6+7+4+5+8+4+5}{10}$$ ☜

$$=\frac{60}{10}$$

$$=\boxed{6}.\boxed{0}\ (\text{点})$$

である．

また，ゲーム1のデータの分散は，

$$\frac{1}{10}\{(8-6)^2+(10-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2$$

$$+(4-6)^2+(5-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2\}$$ ☜

$$=\frac{44}{10}$$

$$=\boxed{4}.\boxed{40}$$

である．

問題

平均値

変量 x についてのデータの値が，n 個の値 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ であるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

偏差・分散・標準偏差

変量 x についてのデータの値を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の偏差といい，(これら)偏差の2乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

また，s を x の標準偏差という．

さらに，ゲーム 1 のデータの標準偏差は，

$$\sqrt{4.4}=2\sqrt{1.1}$$

であり，$1.04<\sqrt{1.1}<1.05$ より，$2.08<2\sqrt{1.1}<2.10$ であるから，小数第 2 位を四捨五入すると，

$$\boxed{2}.\boxed{1}\ (点)$$

である．

ゲーム 1 のデータを得点の小さい方から順に並べると，

3，4，4，5，5，6，7，8，8，10

となり，中央値は，

$$\frac{5+6}{2}=\boxed{5}.\boxed{5}\ (点)$$

である．

☜ **中央値**

データを値の大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．データの大きさが偶数のときは，中央に並ぶ 2 つの値の平均値を中央値とする．

(2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム 2	6	X	3	3	4	0	3	7	Y	2

ゲーム 2 のデータの最小値は 0 であり，範囲(レンジ)が 8 であるから，

ゲーム 2 のデータの最大値は 8

である．

☜ **範囲(レンジ)**

データの最大値と最小値の差を範囲(レンジ)という．すなわち，

(範囲)＝(最大値)−(最小値)．

よって，$\mathsf{X}>\mathsf{Y}$ を考慮すると，

$$\mathsf{X}=\boxed{8}$$

である．

このとき，ゲーム 2 のデータの平均値は，

$$\frac{6+8+3+3+4+0+3+7+\mathsf{Y}+2}{10}=\frac{36+\mathsf{Y}}{10}\ (点)$$

であり，この値が 3.7 であるから，

$$\frac{36+\mathsf{Y}}{10}=3.7$$

すなわち

$$\mathsf{Y}=\boxed{1}$$

である．

(3) $\mathsf{X}=8$，$\mathsf{Y}=1$ のとき，ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点は下の表のようになる．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム 1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5
ゲーム 2	6	8	3	3	4	0	3	7	1	2
合計得点	14	18	6	9	11	4	8	15	5	7

合計得点の上位 8 人のデータを得点の小さい方から順に並べる

と，

6，7，8，9，11，14，15，18

となる．

散布図②は，合計得点の最小値が 5，最大値が 19 であり，不適である．

また，散布図①は，正の相関があり，相関係数 −0.86 に反する．

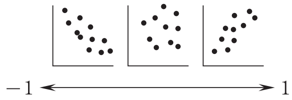
さらに，散布図⓪と③では，③の方が負の相関がかなり強く，相関係数 −0.86 の散布図としては③の方が適切である．よって，$\boxed{シ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜ 散布図⓪の相関係数を実際に計算すると，

−0.59

となる．

散布図と相関係数



散布図③のゲーム 3 の得点は下の表のようになる．

合計得点	6	7	8	9	11	14	15	18
ゲーム 3	7	8	6	4	4	3	2	3

ゲーム 3 のデータを得点の小さい方から順に並べると，

2，3，3，4，4，6，7，8

となり，中央値は，

$$\frac{4+4}{2}=\boxed{4}.\boxed{0}\text{（点）}$$

である．

第 3 問　図形と計量

△ABC において，AB＝4，BC＝5，CA＝6 とする．このとき

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

点 A から辺 BC に垂線を下ろし，垂線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathrm{AD}=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \mathrm{BD}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

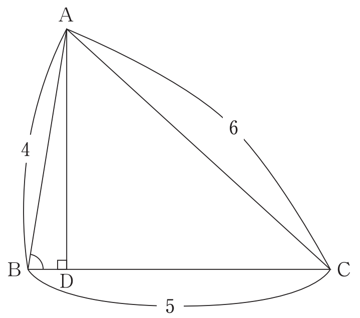
である．

さらに，直線 AD と △ABC の外接円との交点のうち A と異なる方を E とし，辺 AB 上に点 F を ∠BCF＝∠BCE となるようにとる．また，線分 CF と線分 AE の交点を G とする．このとき

$$\angle\mathrm{BFC}=\boxed{\text{ソタ}}^\circ,\quad \mathrm{BF}=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，△DFG の外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

【解説】　問題

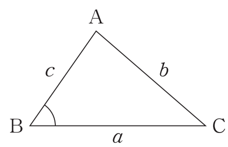


余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

である．

☜ **余弦定理**



$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

$$\sin\angle \mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{8}}$$

である．

☜ $0°<\theta<180°$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

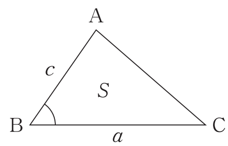
$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle \mathrm{ABC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$=\frac{\boxed{15}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

直角三角形 ABD に着目すると，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle \mathrm{ABC}$$

$$=4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

であり，

☜ $\sin\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$

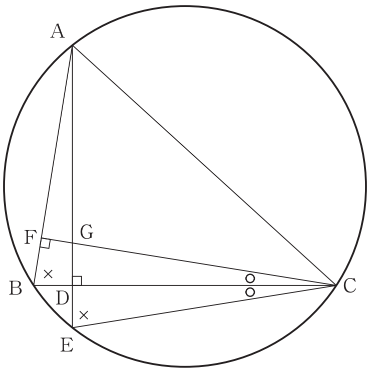
$$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos\angle \mathrm{ABC}$$

$$=4\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ $\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}.$



条件より，

$$\angle \mathrm{BCF}=\angle \mathrm{BCE}$$

である．

☜ 図の ○ 印．

また，円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{AEC}$$

であるから，

☜ 図の × 印．

$$\triangle \mathrm{BCF} \backsim \triangle \mathrm{ECD}$$

であり，

$$\angle \mathrm{BFC} = \angle \mathrm{EDC}$$
$$= \boxed{90}^\circ$$

☜ $\mathrm{AE} \perp \mathrm{BC}$.

である．

直角三角形 BCF に着目して，

$$\mathrm{BF} = \mathrm{BC}\cos\angle \mathrm{FBC}$$

☜ $\cos\angle \mathrm{FBC} = \dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BC}}$.

$$= 5 \cdot \frac{1}{8}$$

☜ $\cos\angle \mathrm{FBC} = \cos\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{8}$.

$$= \frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}$$

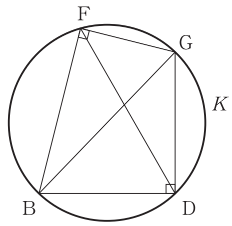
である．

$\triangle$DFG の外接円を K とする．

$$\angle \mathrm{BDG} = \angle \mathrm{BFG} = 90^\circ$$

であるから，四角形 BDGF は円 K に内接する．

☜



$\triangle$BDF に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{DF}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{BF}^2 - 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BF}\cos\angle \mathrm{FBD}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}$$
$$= \frac{9}{16}$$

であるから，

$$\mathrm{DF} = \frac{3}{4}$$

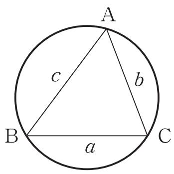
である．

$\triangle$BDF の外接円も K であるから，その半径を R とし，$\triangle$BDF に正弦定理を用いると，

$$2R = \frac{\mathrm{DF}}{\sin\angle \mathrm{FBD}}$$

☜

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

（R は外接円の半径）

$$R = \frac{\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

☜ $\sin\angle \mathrm{FBD} = \sin\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

$$= \frac{\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{7}}$$

である．

第4問　2次関数

a を定数として x の2次関数

$$y = x^2 - 6ax + 11a^2 - 2a - 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える．関数①のグラフ G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1)　G が x 軸と共有点を持たないような a の値の範囲は

$$a < \boxed{\text{オカ}},\quad \boxed{\text{キ}} < a$$

であり，G が y 軸の負の部分と共有点を持つような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11} < a < \frac{\boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11}$$

である．

(2)　関数①の $x \geqq 1$ における最小値を m とする．

$$a < \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ のとき }\quad m = \boxed{\text{スセ}}\,a^2 - \boxed{\text{ソ}}\,a - \boxed{\text{タ}}$$

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \leqq a \text{ のとき }\quad m = \boxed{\text{チ}}\,a^2 - \boxed{\text{ツ}}\,a - \boxed{\text{テ}}$$

であり，$m > 0$ となるような a の値の範囲は

$$a < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}},\quad \boxed{\text{ヌ}} < a$$

である．

(3)　$0 < a < \dfrac{\boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11}$ とし，G を原点に関して対称移動して得られるグラフを H とする．G，H が x 軸より切り取る線分をそれぞれ L_G，L_H とする．L_G と L_H の共通部分が長さ2の線分になるのは

$$a = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}} - \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$$

のときである．

【解説】

問題

$$f(x) = x^2 - 6ax + 11a^2 - 2a - 4$$

とおく．

$$f(x) = (x - 3a)^2 + 2a^2 - 2a - 4$$

であるから，G の頂点の座標は，

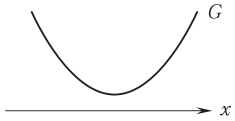
$$\left(\boxed{3}\,a,\ \boxed{2}\,a^2 - \boxed{2}\,a - \boxed{4}\right)$$

である．

☜　放物線 $y = p(x - q)^2 + r$ の頂点の座標は，

$$(q,\ r).$$

(1) 下に凸である放物線 G が x 軸と共有点を持たないのは，頂点のy 座標が正のときであるから，



（頂点が x 軸より上側にある）

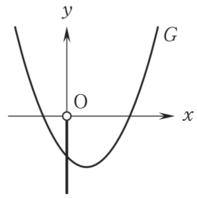
$$2a^2-2a-4>0$$
$$2(a+1)(a-2)>0$$

より，

$$a<\boxed{-1},\quad \boxed{2}<a$$

である．

また，G が y 軸の負の部分と共有点を持つような a の値の範囲は，



$$f(0)<0$$
$$11a^2-2a-4<0$$

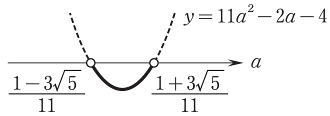
より，

$$\frac{\boxed{1}-\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{11}<a<\frac{1+3\sqrt{5}}{11}$$

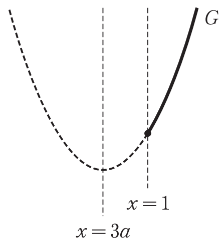
である．

$11a^2-2a-4=0$ を解くと，

$$a=\frac{1\pm3\sqrt{5}}{11}.$$



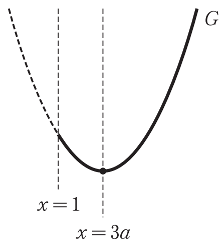
(2) $3a<1$ すなわち $a<\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ のとき，



$$m=f(1)$$
$$=\boxed{11}a^2-\boxed{8}a-\boxed{3}.$$

$3a\geqq1$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq a$ のとき，

$$m=f(3a)$$
$$=\boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}.$$



$a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$m>0$ とすると，

$$11a^2-8a-3>0$$
$$(11a+3)(a-1)>0$$
$$a<-\frac{3}{11},\quad 1<a$$

であり，$a<\dfrac{1}{3}$ より，

$$a<-\frac{3}{11} \qquad \cdots②$$

である．

$\dfrac{1}{3}\leqq a$ のとき，$m>0$ とすると，

$$2a^2-2a-4>0$$
$$2(a+1)(a-2)>0$$
$$a<-1,\quad 2<a$$

であり，$\dfrac{1}{3}\leqq a$ より，

$$2 < a \qquad \cdots ③$$

である．

②，③ より，$m > 0$ となるような a の値の範囲は，

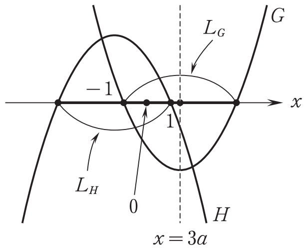
$$a < -\frac{\boxed{3}}{\boxed{11}}, \quad \boxed{2} < a$$

である．

⑶　G と H は原点に関して対称であるから，L_G と L_H も原点に関して対称である．

また，$0 < a < \dfrac{1+3\sqrt{5}}{11}$ のとき，⑴ より G は y 軸の負の部分と共有点を持つから，L_G は原点を含み，L_H も原点を含む．

さらに L_G と L_H の共通部分が長さ 2 の線分であることと，$3a > 0$ より L_G の中点が x 軸の正の部分にあることから，L_G の ☜ 左端は $(-1, 0)$ である．すなわち G は $(-1, 0)$ を通る．よって，



$$f(-1) = 0$$
$$11a^2 + 4a - 3 = 0$$
$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{37}}{11}$$

であり，$0 < a < \dfrac{1+3\sqrt{5}}{11}$ より，

$$a = \frac{\sqrt{\boxed{37}} - \boxed{2}}{\boxed{11}}$$

である．

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{ア}{イ}$	$\dfrac{1}{8}$	3	
	$\dfrac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$	$\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$	3	
	$\dfrac{カキ\sqrt{ク}}{ケ}$	$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$	3	
	$\dfrac{コ\sqrt{サ}}{シ}$	$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$	3	
	$\dfrac{ス}{セ}$	$\dfrac{1}{2}$	3	
	ソタ°	90°	2	
	$\dfrac{\sqrt{チ}}{ツ}$	$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$	3	
	テ.ト	6.0	3	
	ナ.ニヌ	4.40	3	
	ネ	8	2	
	ノ	1	2	
	ハ	3	3	
	ヒ.フ	4.0	2	
	第1問　自己採点小計		(35)	
第2問	アa	$3a$	2	
	イa^2－ウa－エ	$2a^2-2a-4$	2	
	a＜オカ，キ＜a	$a<-1$，$2<a$	3	
	$\dfrac{ク-ケ\sqrt{コ}}{11}$	$\dfrac{1-3\sqrt{5}}{11}$	3	
	$\dfrac{サ}{シ}$	$\dfrac{1}{3}$	3	
	スセa^2－ソa－タ	$11a^2-8a-3$	3	
	チa^2－ツa－テ	$2a^2-2a-4$	3	
	$a<-\dfrac{ト}{ナニ}$	$a<-\dfrac{3}{11}$	3	
	ヌ＜a	$2<a$	3	
	第2問　自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	アイ	24	2	
	ウエ	12	2	
	オ	4	2	
	カ	4	2	
	キクケ	144	3	
	コ	3	2	
	$\dfrac{サ}{シス}$	$\dfrac{1}{12}$	3	
	$\dfrac{セ}{ソタ}$	$\dfrac{2}{11}$	4	
	第3問　自己採点小計		(20)	
第4問	(ア，イウ)	(4，41)	2	
	(エ，オ)	(3，1)	2	
	カ	1 ※	2	
	キ	2	2	
	クケ	－1	2	
	(コ，サシ)	(3，13)	3	
	(スセソ，タチツ)	(127，550)	3	
	テト	16	2	
	ナニ	17	2	
	第4問　自己採点小計		(20)	

※の正解は順序を問わない.

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第5問	$r+$ア	$r+2$	2	
	$r-$イ	$r-2$	2	
	ウr	$8r$	2	
	エ	3	2	
	オ	1	2	
	$\dfrac{\sqrt{\text{カキ}}}{\text{ク}}$	$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	2	
	$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}$	$\dfrac{3}{2}$	2	
	$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{1}{3}$	3	
	$\dfrac{\text{ス}\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソタ}}$	$\dfrac{3\sqrt{6}}{16}$	3	
第5問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第1問　図形と計量，データの分析

［1］ △ABC において，AB＝4，BC＝5，CA＝6 とする．このとき

$$\cos\angle ABC = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \sin\angle ABC = \frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{カキ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

点 A から辺 BC に垂線を下ろし，垂線と辺 BC との交点を D とすると

$$AD = \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}},\quad BD = \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である．

さらに，直線 AD と △ABC の外接円との交点のうち A と異なる方を E とし，辺 AB 上に点 F を ∠BCF＝∠BCE となるようにとる．また，線分 CF と線分 AE の交点を G とする．このとき

$$\angle BFC = \boxed{ソタ}^\circ$$

であり，△DFG の外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ である．

［2］ 次のデータは，A から J までの 10 人の生徒に対して行った二つのゲームの得点の結果である．ゲームの得点は 0 以上の整数値である．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5
ゲーム2	6	X	3	3	4	0	3	7	Y	2

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1) ゲーム 1 の得点のデータの平均値は $\boxed{テ}.\boxed{ト}$ 点であり，分散は $\boxed{ナ}.\boxed{ニヌ}$ である．

(2) X＞Y とする．ゲーム 2 の得点のデータの範囲(レンジ)が 8 点であるとすると

X＝$\boxed{ネ}$

であり，さらに平均値が 3.7 点であるとすると

Y＝$\boxed{ノ}$

である．

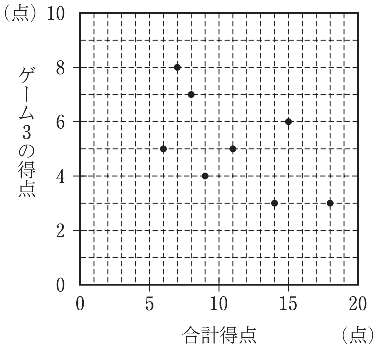
(3) X＝$\boxed{ネ}$，Y＝$\boxed{ノ}$ とする．

ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点の上位 8 人でゲーム 3 を行った．ただし，ゲーム 3 の得点は整数値である．

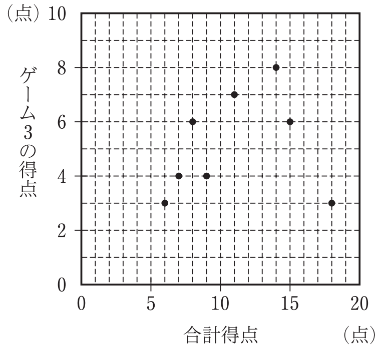
ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点とゲーム 3 の得点の相関係数が －0.86 であるとすると，散布図として適切なものは $\boxed{ハ}$ であり，ゲーム 3 のデータの中央値は $\boxed{ヒ}.\boxed{フ}$ 点である．

$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ．

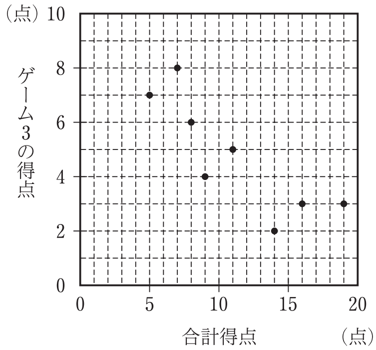
⓪



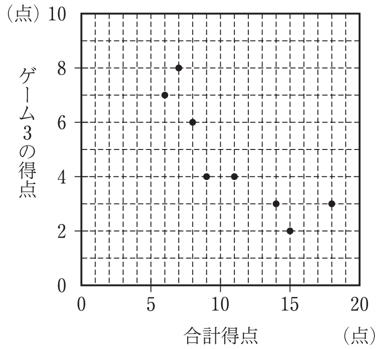
①



②



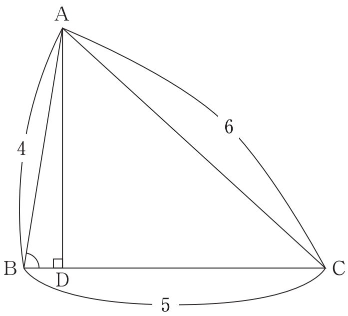
③



【解説】

問題

〔1〕



余弦定理より，

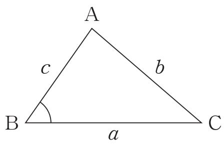
$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

$$=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

☜

余弦定理



$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

である．

$$\sin\angle \mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{8}}$$

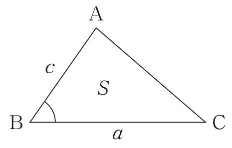
☞ $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

である．

$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle \mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$
$$=\frac{\boxed{15}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

☞ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

である．

直角三角形 ABD に着目すると，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle \mathrm{ABC}$$
$$=4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$
$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

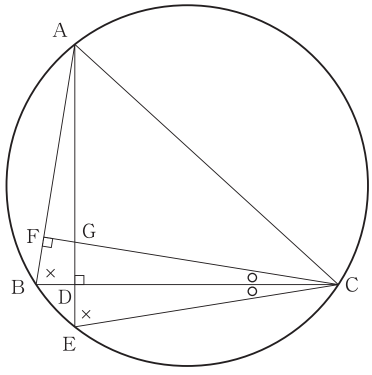
☞ $\sin\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$

であり，

$$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos\angle \mathrm{ABC}$$
$$=4\cdot\frac{1}{8}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

☞ $\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}.$

である．



条件より，

$$\angle \mathrm{BCF}=\angle \mathrm{BCE}$$

☞ 図の○印．

である．

また，円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{AEC}$$

☞ 図の×印．

であるから，

$$\triangle \mathrm{BCF} \backsim \triangle \mathrm{ECD}$$

であり，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BFC} &= \angle \mathrm{EDC}\\ &= \boxed{90}^\circ\end{aligned}$$

☜ $\mathrm{AE} \perp \mathrm{BC}$.

である．

直角三角形 BCF に着目して，

$$\begin{aligned}\mathrm{BF} &= \mathrm{BC}\cos\angle \mathrm{FBC}\\ &= 5\cdot\frac{1}{8}\\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

☜ $\cos\angle \mathrm{FBC} = \dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BC}}$.

☜ $\cos\angle \mathrm{FBC} = \cos\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{8}$.

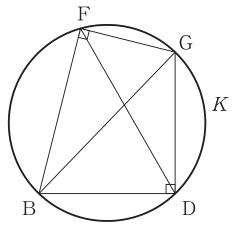
である．

△DFG の外接円を K とする．

$$\angle \mathrm{BDG} = \angle \mathrm{BFG} = 90^\circ$$

であるから，四角形 BDGF は円 K に内接する．

☜



△BDF に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{DF}^2 &= \mathrm{BD}^2 + \mathrm{BF}^2 - 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BF}\cos\angle \mathrm{FBD}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}\\ &= \frac{9}{16}\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{DF} = \frac{3}{4}$$

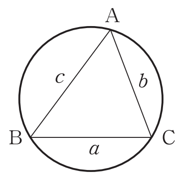
である．

△BDF の外接円も K であるから，その半径を R とし，△BDF に正弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}2R &= \frac{\mathrm{DF}}{\sin\angle \mathrm{FBD}}\\ R &= \frac{\frac{3}{4}}{2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}}\\ &= \frac{\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{7}}\end{aligned}$$

☜

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

（R は外接円の半径）

☜ $\sin\angle \mathrm{FBD} = \sin\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

である．

［2］

(1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5

ゲーム1のデータの平均値は，

$$\frac{8+10+3+6+7+4+5+8+4+5}{10}$$

$$=\frac{60}{10}$$

$$=\boxed{6}.\boxed{0}\ (点)$$

である．

また，ゲーム1のデータの分散は，

$$\frac{1}{10}\{(8-6)^2+(10-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2$$
$$+(4-6)^2+(5-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2\}$$

$$=\frac{44}{10}$$

$$=\boxed{4}.\boxed{40}$$

である．

平均値

変量 x についてのデータの値が，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n であるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

偏差・分散

変量 x についてのデータの値を x_1，x_2，…，x_n とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，(これら)偏差の2乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

(2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム2	6	X	3	3	4	0	3	7	Y	2

ゲーム2のデータの最小値は0であり，範囲(レンジ)が8であるから，

ゲーム2のデータの最大値は8

である．

よって，X＞Y を考慮すると，

$$\mathsf{X}=\boxed{8}$$

である．

このとき，ゲーム2のデータの平均値は，

$$\frac{6+8+3+3+4+0+3+7+\mathsf{Y}+2}{10}=\frac{36+\mathsf{Y}}{10}\ (点)$$

であり，この値が3.7であるから，

$$\frac{36+\mathsf{Y}}{10}=3.7$$

すなわち

$$\mathsf{Y}=\boxed{1}$$

である．

範囲(レンジ)

データの最大値と最小値の差を範囲(レンジ)という．すなわち，

(範囲)＝(最大値)－(最小値).

⑶　X＝8，Y＝1 のとき，ゲーム 1 とゲーム 2 の合計得点は下の表のようになる．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ゲーム 1	8	10	3	6	7	4	5	8	4	5
ゲーム 2	6	8	3	3	4	0	3	7	1	2
合計得点	14	18	6	9	11	4	8	15	5	7

合計得点の上位 8 人のデータを得点の小さい方から順に並べると，

6，7，8，9，11，14，15，18

となる．

散布図②は，合計得点の最小値が 5，最大値が 19 であり，不適である．

また，散布図①は，正の相関があり，相関係数 -0.86 に反する．

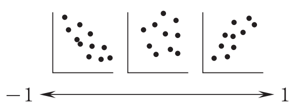
さらに，散布図⓪と③では，③の方が負の相関がかなり強く，相関係数 -0.86 の散布図としては③の方が適切である．よって，$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜　散布図⓪の相関係数を実際に計算すると，

-0.59

となる．

散布図と相関係数



散布図③のゲーム 3 の得点は下の表のようになる．

合計得点	6	7	8	9	11	14	15	18
ゲーム 3	7	8	6	4	4	3	2	3

ゲーム 3 のデータを得点の小さい方から順に並べると，

2，3，3，4，4，6，7，8

となり，中央値は，

$$\frac{4+4}{2}=\boxed{4}.\boxed{0}\ （点）$$

である．

☜ **中央値**

データを値の大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．データの大きさが偶数のときは，中央に並ぶ 2 つの値の平均値を中央値とする．

第 2 問　2 次関数

a を定数として x の 2 次関数

$$y=x^2-6ax+11a^2-2a-4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える．関数 ① のグラフ G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2-\boxed{\text{ウ}}\,a-\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1)　G が x 軸と共有点を持たないような a の値の範囲は

$$a<\boxed{\text{オカ}},\quad \boxed{\text{キ}}<a$$

であり，G が y 軸の負の部分と共有点を持つような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11}<a<\frac{\boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{11}$$

である．

(2)　関数 ① の $x\geqq 1$ における最小値を m とする．

$$a<\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\ \text{のとき}\quad m=\boxed{\text{スセ}}\,a^2-\boxed{\text{ソ}}\,a-\boxed{\text{タ}}$$

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\leqq a\ \text{のとき}\quad m=\boxed{\text{チ}}\,a^2-\boxed{\text{ツ}}\,a-\boxed{\text{テ}}$$

であり，$m>0$ となるような a の値の範囲は

$$a<-\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}},\quad \boxed{\text{ヌ}}<a$$

である．

【解説】

問題

$$f(x)=x^2-6ax+11a^2-2a-4$$

とおく．

$$f(x)=(x-3a)^2+2a^2-2a-4$$

であるから，G の頂点の座標は，

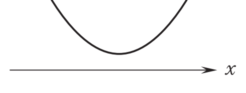
$$\left(\boxed{3}\,a,\ \boxed{2}\,a^2-\boxed{2}\,a-\boxed{4}\right)$$

である．

放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$(q,\ r)$.

(1)　下に凸である放物線 G が x 軸と共有点を持たないのは，頂点の y 座標が正のときであるから，



（頂点が x 軸より上側にある）

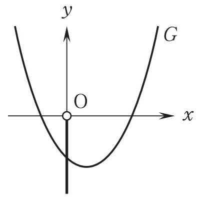
$$2a^2-2a-4>0$$
$$2(a+1)(a-2)>0$$

より，

$$a<\boxed{-1},\quad \boxed{2}<a$$

である．

また，G が y 軸の負の部分と共有点を持つような a の値の範囲は，



$$f(0)<0$$
$$11a^2-2a-4<0$$

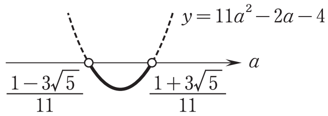
より，

$$\frac{\boxed{1}-\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{11}<a<\frac{1+3\sqrt{5}}{11}$$

である．

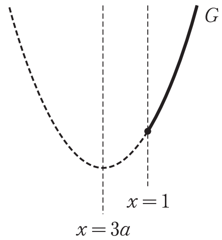
$11a^2-2a-4=0$ を解くと，

$$a=\frac{1\pm3\sqrt{5}}{11}.$$



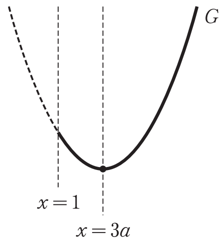
(2)　$3a<1$ すなわち $a<\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ のとき，

$$m=f(1)$$
$$=\boxed{11}a^2-\boxed{8}a-\boxed{3}.$$



$3a\geqq1$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq a$ のとき，

$$m=f(3a)$$
$$=\boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}.$$



$a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$m>0$ とすると，

$$11a^2-8a-3>0$$
$$(11a+3)(a-1)>0$$
$$a<-\frac{3}{11},\ 1<a$$

であり，$a<\dfrac{1}{3}$ より，

$$a<-\frac{3}{11} \qquad \cdots ②$$

である．

$\dfrac{1}{3}\leqq a$ のとき，$m>0$ とすると，

$$2a^2-2a-4>0$$
$$2(a+1)(a-2)>0$$
$$a<-1,\quad 2<a$$

であり，$\dfrac{1}{3}\leqq a$ より，

$$2<a \qquad \cdots ③$$

である．

②，③ より，$m>0$ となるような a の値の範囲は，

$$a<-\frac{\boxed{3}}{\boxed{11}},\quad \boxed{2}<a$$

である．

第３問　場合の数・確率

(1)　白色と黒色のカードが１枚ずつと赤色のカードが２枚あり，赤色のカードの一方には１，他方には２と番号がつけられている．この４枚のカードを横一列に並べる．

並べ方は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，そのうち白色と黒色のカードが隣り合っているものは $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りである．また，白色と黒色のカードの間に，番号１の赤色のカードだけがはさまっているものは $\boxed{\text{オ}}$ 通りであり，番号１と番号２の赤色のカードがともにはさまっているものは $\boxed{\text{カ}}$ 通りである．

(2)　箱の中に１から４までの番号がつけられた４枚の赤色のカードが入っている．この箱の中から２枚のカードを取り出し，白色と黒色のカードを１枚ずつ加えた合計４枚のカードを横一列に並べる．カードの並べ方は全部で $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

カードの並びにより，次のように得点を定める．

・白色と黒色のカードが隣り合っているときは，得点を０点とする．
・白色と黒色のカードの間に赤色のカードがはさまっているときは
　　はさまっているカードの枚数を x
　とし，さらに
　　$x=1$ ならば，$y=$（はさまっているカードの番号）
　　$x=2$ ならば，$y=$（はさまっている２枚のカードの大きい方の番号）
　とし，得点を $y-x$ 点とする．

このとき，最高得点は $\boxed{\text{コ}}$ 点であり，得点が $\boxed{\text{コ}}$ 点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．

また，得点が０点であるという条件の下で，白色と黒色のカードが隣り合っていない条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である．

【解説】　**問題**

(1)　白色のカードを $\boxed{\text{W}}$，黒色のカードを $\boxed{\text{B}}$，番号１の赤色のカードを $\boxed{\text{R1}}$，番号２の赤色のカードを $\boxed{\text{R2}}$ と表す．

４枚のカードの並べ方は全部で，

$$4!=\boxed{24}\ （通り）$$

ある．

白色と黒色のカードが隣り合うようなカードの並べ方は，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の組を１枚と考えて $\boxed{\ \ \ \ }$ と表すと，$\boxed{\ \ \ \ }$，$\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ の３枚の並べ方が，

$$3!\ 通り$$

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の並べ方が，

$$2!\ \text{通り}$$

☜ $\boxed{W\ \vdots\ B}$ と $\boxed{B\ \vdots\ W}$.

あるから，

$$3!\times 2!=\boxed{12}\ (\text{通り})\qquad\cdots ①$$

である．

白色と黒色のカードの間に，番号 1 の赤色のカードだけがはさまっているようなカードの並べ方は，$\boxed{W}$ と $\boxed{B}$ と $\boxed{R1}$ の組を 1 枚と考えて $\boxed{\ \vdots\ R1\ \vdots\ }$ と表すと，$\boxed{\ \vdots\ R1\ \vdots\ }$，$\boxed{R2}$ の 2 枚の並べ方が，

$$2!\ \text{通り}$$

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{W}$ と $\boxed{B}$ の並べ方が，

$$2!\ \text{通り}$$

☜ $\boxed{W\ \vdots\ R1\ \vdots\ B}$ と $\boxed{B\ \vdots\ R1\ \vdots\ W}$.

あるから，

$$2!\times 2!=\boxed{4}\ (\text{通り})\qquad\cdots ②$$

である．

白色と黒色のカードの間に，番号 1 と番号 2 の赤色のカードがともにはさまっているような並べ方は，まず，両端に $\boxed{W}$ と $\boxed{B}$ を並べる方法が，

$$2!\ \text{通り}$$

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{R1}$ と $\boxed{R2}$ の並べ方が，

$$2!\ \text{通り}$$

あるから，

$$2!\times 2!=\boxed{4}\ (\text{通り})\qquad\cdots ③$$

である．

(2) 白色のカードを $\boxed{W}$，黒色のカードを $\boxed{B}$，番号 1，2，3，4 の赤色のカードをそれぞれ $\boxed{R1}$，$\boxed{R2}$，$\boxed{R3}$，$\boxed{R4}$ と表す．

箱の中から 2 枚のカードを取り出す方法は，

$${}_4C_2\ \text{通り}$$

あり，その 2 枚と白色と黒色のカードを 1 枚ずつ加えた合計 4 枚のカードを横一列に並べる方法は，

☜ たとえば，箱の中から取り出した 2 枚の赤色のカードを $\boxed{R1}$，$\boxed{R3}$ とすると，4 枚のカード $\boxed{R1}$，$\boxed{R3}$，$\boxed{W}$，$\boxed{B}$ を横一列に並べる．

$$4!\ \text{通り}$$

ある．

よって，カードの並べ方は全部で，

$$\begin{aligned}{}_4C_2\times 4! &= \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\ &= \boxed{144}\ (\text{通り})\end{aligned}$$

あり，これらの並べ方は同様に確からしい．

与えられた条件から得点に関して次の表を得る．

（ただし，白色と黒色のカードが隣り合っているときは $x=y=0$ とする.）

x	0	1	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	3	4	2	3	4
得点 $(y-x)$	0	0	1	2	3	0	1	2

表より，最高得点は $\boxed{3}$ 点である.

得点が 3 点になるのは，

「箱の中から $\boxed{\text{R4}}$ が取り出され，さらに，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R4}}$ だけがはさまっているとき」

である.

箱の中から $\boxed{\text{R4}}$ を含んだ 2 枚を取り出す方法は，

$${}_3\mathrm{C}_1 \text{ 通り}$$

☜ $\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$，$\boxed{\text{R3}}$ から 1 枚.

あり，さらに白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R4}}$ だけをはさんで並べる並べ方は，② のときと同様に考えて，

$$2!\times 2!=4 \text{（通り）}$$

ある.

☜ たとえば，箱の中から取り出した 2 枚の赤色のカードを $\boxed{\text{R4}}$，$\boxed{\text{R1}}$ とすると，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ と $\boxed{\text{R4}}$ の組を 1 枚と考えて，$\boxed{\quad \text{R4} \quad}$ と表す. $\boxed{\quad \text{R4} \quad}$ と $\boxed{\text{R1}}$ を並べる方法は 2! 通りあり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の並べ方が 2! 通りある.

よって，得点が 3 点になる並べ方は，

$${}_3\mathrm{C}_1\times 4=12 \text{（通り）}$$

であるから，その確率は，

$$\frac{12}{144}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{12}}$$

である.

ここで，2 つの事象 E，F を，

E：「得点が 0 点である」

F：「白色と黒色のカードが隣り合っていない」

とする.

得点が 0 点になるのは，表より，次の 3 つの場合がある.

(i) $x=0$，$y=0$，つまり，白色と黒色のカードが隣り合っているとき.

(ii) $x=1$，$y=1$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R1}}$ だけをはさんで並べるとき.

(iii) $x=2$，$y=2$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ をはさんで並べるとき.

(i) のとき.

箱の中から 2 枚を取り出す方法は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあり，そのそれぞれに対して白色と黒色のカードが隣り合っている並べ方は，① のときと同様に考えて，$3!\times 2!=12$（通り）あるから，

(i) の並べ方は，

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \times 12 = 72 \text{（通り）} $$

である．

(ii) のとき．

得点が 3 点になる場合のときと同様に考えて，(ii) の並べ方は，

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times 4 = 12 \text{（通り）} $$

である．

(iii) のとき．

箱の中から $\boxed{\mathrm{R1}}$，$\boxed{\mathrm{R2}}$ を取り出す方法は 1 通りあり，その 1 通りに対して白色と黒色のカードの間に $\boxed{\mathrm{R1}}$，$\boxed{\mathrm{R2}}$ をはさんで並べる方法は，③ より 4 通りあるから，(iii) の並べ方は，

$$ 1 \times 4 = 4 \text{（通り）} $$

である．

したがって，得点が 0 点となる確率は，(i)，(ii)，(iii) より，

$$ P(E) = \frac{72+12+4}{144} $$

$$ = \frac{88}{144} $$

である．

また，$E \cap F$ は，

「得点が 0 点であり，かつ白色と黒色のカードが隣り合っていない」

という事象であり，(ii) または (iii) のときであるから，その確率は，

$$ P(E \cap F) = \frac{12+4}{144} $$

$$ = \frac{16}{144} $$

である．

ゆえに，得点が 0 点であるという条件の下で，白色と黒色のカードが隣り合っていない条件付き確率は，

$$ P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} $$

$$ = \frac{\frac{16}{144}}{\frac{88}{144}} $$

$$ = \frac{\boxed{2}}{\boxed{11}} $$

である．

☜ **条件付き確率**

事象 A が起こったという条件の下で事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率といい，$P_A(B)$ と表す．

$$ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. $$

第4問　整数の性質

(1)　$a=537$，$b=124$ とする．a を b で割ったときの商と余りをそれぞれ q_1，r_1 とし，b を r_1 で割ったときの商と余りをそれぞれ q_2，r_2 とすると

$$(q_1,\ r_1)=(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}),\quad (q_2,\ r_2)=(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$$

であり，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，$\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ の解答の順序は問わない．

⓪　a は b の倍数である　　　①　a と b は互いに素である

②　$aq_2-b(q_1q_2+1)=-r_2$ が成り立つ　　　③　$aq_2r_2=bq_1r_1$ が成り立つ

(2)　537 で割ると 2 余り，124 で割ると 1 余る自然数 n について考えよう．

n を 537，124 で割ったときの商をそれぞれ x，y とすると

$$537x-124y=\boxed{\text{クケ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ち，① を満たす商 x，y の組を x の値が小さい方から順に二つ書くと

$$(x,\ y)=(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サシ}}),\ (\boxed{\text{スセソ}},\ \boxed{\text{タチツ}})$$

である．

n のとり得る値を小さい方から順に n_1，n_2，n_3，… とする．$2^k<n_2<2^{k+1}$ を満たす整数 k は $\boxed{\text{テト}}$ であるから，n_2 を 2 進法で表すと $\boxed{\text{ナニ}}$ 桁（けた）となる．

【解説】　問題

(1)

$$537=124\cdot4+41$$

より，537 を 124 で割ったときの商と余りはそれぞれ 4，41 であるから，

$$(q_1,\ r_1)=(\boxed{4},\ \boxed{41})$$

であり，

$$124=41\cdot3+1$$

より，124 を 41 で割ったときの商と余りはそれぞれ 3，1 であるから，

$$(q_2,\ r_2)=(\boxed{3},\ \boxed{1})$$

である．

よって，

$$\begin{aligned}&(a\text{ と }b\text{ の最大公約数})\\&=(b\text{ と }r_1\text{ の最大公約数})\\&=(r_1\text{ と }r_2\text{ の最大公約数})\\&=(41\text{ と }1\text{ の最大公約数})\\&=1\end{aligned}$$

より，a と b は互いに素である．

☜　整数 m と正の整数 n に対して，

$$\begin{cases}m=nq+r,\\0\leqq r<n\end{cases}$$

を満たす整数 q と整数 r はただ1通りに定まる．

q は m を n で割ったときの商，

r は m を n で割ったときの余り

という．

☜　2つの自然数 m，n について，m を n で割ったときの余りを r とすると，

$$\begin{pmatrix}m\text{ と }n\text{ の}\\\text{最大公約数}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\text{ と }r\text{ の}\\\text{最大公約数}\end{pmatrix}.$$

このことを利用して，左のように最大公約数を求める方法を互除法という．

ゆえに，⓪は誤り，①は正しい．

また，

$$a=bq_1+r_1,\quad b=r_1q_2+r_2$$

より，r_1 を消去すると，

$$b=(a-bq_1)q_2+r_2$$

すなわち

$$aq_2-b(q_1q_2+1)=-r_2$$

となるから，②は正しい．

さらに，

$$aq_2r_2=537\cdot3\cdot1<124\cdot4\cdot41=bq_1r_1$$

であるから，③は誤り．

したがって，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ と $\boxed{②}$ である．

(2) $$n=537x+2,\quad n=124y+1$$

が成り立つから，n を消去すると，

$$537x+2=124y+1$$

すなわち

$$537x-124y=\boxed{-1} \quad \cdots ①$$

が成り立つ．

また，(1) より，

$$aq_2-b(q_1q_2+1)=-r_2$$

であるから，

$$537\cdot3-124(4\cdot3+1)=-1$$

すなわち

$$537\cdot3-124\cdot13=-1 \quad \cdots ②$$

☜ $(x,\ y)=(3,\ 13)$ は ① の整数解の一つである．

が成り立つ．

①−② より，

$$537(x-3)-124(y-13)=0$$

すなわち

$$537(x-3)=124(y-13) \quad \cdots ③$$

である．

537 と 124 は互いに素であるから，$x-3$ は 124 の倍数であり，ℓ を整数として，

$$x-3=124\ell$$

と表される．

これを ③ に代入すると，

$$537\cdot124\ell=124(y-13)$$
$$y-13=537\ell$$

となるから，① の整数解は，

$$(x,\ y)=(124\ell+3,\ 537\ell+13)\ (\ell \text{ は整数})$$

である．

n が自然数のとき，x，y は 0 以上の整数であるから ℓ は 0 以上の整数であり，x の値が小さい方から順に二つ書くと，$\ell=0$，1 として，

$$(x,\ y)=(\boxed{3},\ \boxed{13}),\ (\boxed{127},\ \boxed{550})$$

である．

n_2 は $x=127$ のときの n であるから，

$$\begin{aligned} n_2 &= 537\cdot 127+2 \\ &= 68201 \end{aligned}$$

である．

ここで，

$$2^{16}=65536,\quad 2^{17}=131072$$

であるから，$2^k<n_2<2^{k+1}$ を満たす整数 k は $\boxed{16}$ であり，n_2 を 2 進法で表すと $\boxed{17}$ 桁となる．

☜　下の(注)参照．

(注)　正の整数 N を 2 進法で表したときの桁数が m のとき，

$$1\cdot 2^{m-1}+0\cdot 2^{m-2}+0\cdot 2^{m-3}+\cdots+0\cdot 1 \leqq N < 1\cdot 2^m+0\cdot 2^{m-1}+0\cdot 2^{m-2}+\cdots+0\cdot 1$$

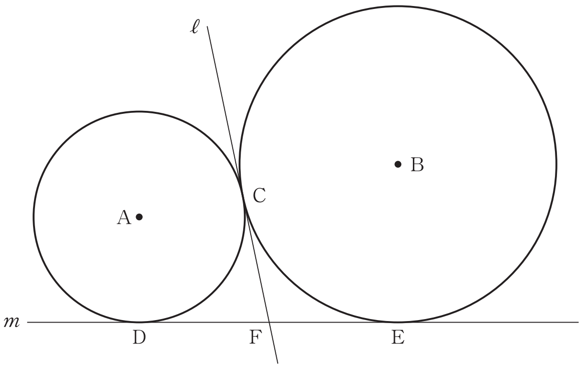
すなわち

$$2^{m-1}\leqq N<2^m$$

が成り立つ．

第５問　図形の性質

中心が A で半径が 2 の円と中心が B で半径が r の円が図のように点 C で外接している．ただし，$r>2$ である．点 C における円 A，円 B の共通接線を ℓ とし，ℓ とは異なる共通接線の一つを m とする．さらに，m と円 A，円 B の接点をそれぞれ D，E とし，ℓ と m の交点を F とする．



(1)　　$\mathrm{AB}=r+\boxed{\text{ア}}$

であり

$$\mathrm{BE}-\mathrm{AD}=r-\boxed{\text{イ}}$$

である．

　よって

$$\mathrm{DE}^2=\boxed{\text{ウ}}\,r$$

であり，$\mathrm{CF}=\sqrt{6}$ ならば

$$r=\boxed{\text{エ}}$$

である．

(2)　$r=\boxed{\text{エ}}$ とし，△ADC の外接円の中心を G とする．

　このとき，点 F は $\boxed{\text{オ}}$．また，外接円 G の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

　$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　円 G の内部にある　　①　円 G の周上にある　　②　円 G の外部にある

　さらに，線分 BG と線分 CF の交点を H とし，直線 AH と線分 BF の交点を I とする．

　△AFB にチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IF}}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり，△BGF と直線 AI にメネラウスの定理を用いると

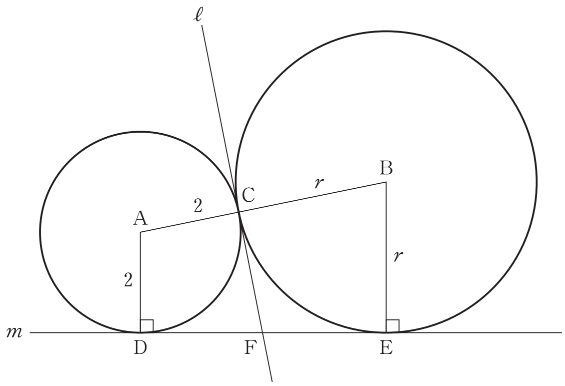
$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HB}}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であるから，△HGI の面積は $\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソタ}}$ である．

【解説】

問題

(1)



円 A と円 B が点 C において外接するから，

$$AB = BC + AC$$
$$= r + \boxed{2}$$

☜ BC＝(円 B の半径)，
AC＝(円 A の半径)．

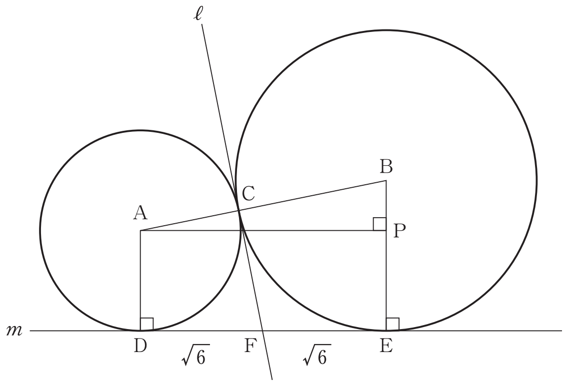
である．

また，

$$BE - AD = r - \boxed{2}$$

☜ BE＝(円 B の半径)，
AD＝(円 A の半径)．

である．



A から線分 BE に下ろした垂線と線分 BE の交点を P とすると，△ABP に三平方の定理を用いて，

$$AB^2 = AP^2 + BP^2.$$

$AB = r + 2$，$AP = DE$，$BP = r - 2$ であるから，

$$(r+2)^2 = DE^2 + (r-2)^2$$

☜ $BP = BE - PE$
$= BE - AD$
$= r - 2.$

すなわち

$$DE^2 = \boxed{8}\,r \qquad \cdots ①$$

である．

2 直線 CF と DF はともに円 A に接し，2 直線 CF と EF はともに円 B に接しているから，

$$\mathrm{CF}=\mathrm{DF}=\mathrm{EF}$$

であり，$\mathrm{CF}=\sqrt{6}$ のとき，

$$\mathrm{DE}=\mathrm{DF}+\mathrm{EF}=2\sqrt{6}$$

である．

これと ① より，

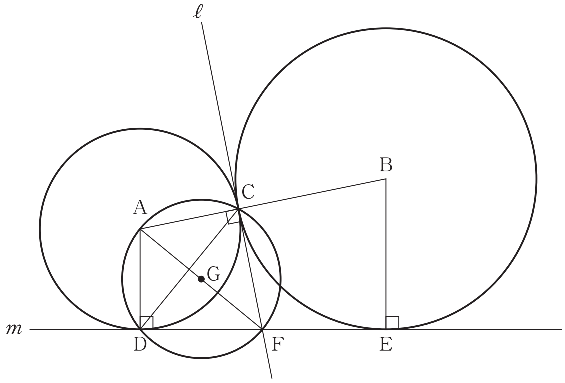
$$(2\sqrt{6})^2=8r$$

すなわち

$$r=\boxed{3}$$

である．

(2)



直線 m は点 D で，直線 ℓ は点 C でそれぞれ円 A と接しているから，

$$\angle \mathrm{ADF}=\angle \mathrm{ACF}=90^\circ$$

であり，円周角の性質より，2 点 C，D は線分 AF を直径とする円の周上にある．

この円は △ADC の外接円 G と一致するから，点 F は円 G の周上にある．すなわち $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

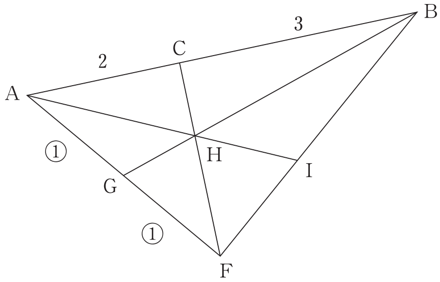
また，円 G の半径は，

$$\frac{1}{2}\mathrm{AF}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DF}^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{2}}$$

である．



△AFB にチェバの定理を用いて，

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IF}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}=1$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IF}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IF}}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

である．

また，△BGF と直線 AI にメネラウスの定理を用いて，

$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IF}}\cdot\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AG}}=1$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HB}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HB}}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．

このとき，

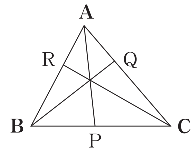
$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{HGI}\text{ の面積})&=\frac{\mathrm{HG}}{\mathrm{BG}}(\triangle\mathrm{BGI}\text{ の面積})\\&=\frac{\mathrm{HG}}{\mathrm{BG}}\cdot\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BF}}(\triangle\mathrm{BGF}\text{ の面積})\\&=\frac{\mathrm{HG}}{\mathrm{BG}}\cdot\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BF}}\cdot\frac{\mathrm{GF}}{\mathrm{AF}}(\triangle\mathrm{BAF}\text{ の面積})\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}(\triangle\mathrm{BAF}\text{ の面積}).\end{aligned}\qquad\cdots②$$

$\angle\mathrm{ACF}=90^\circ$ より，

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{BAF}\text{ の面積})&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CF}\\&=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{6}\\&=\frac{5\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

これと ② より，

チェバの定理



$$\frac{\mathbf{B}\mathrm{P}}{\mathrm{P}\mathbf{C}}\cdot\frac{\mathbf{C}\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}\mathbf{A}}\cdot\frac{\mathbf{A}\mathrm{R}}{\mathrm{R}\mathbf{B}}=1.$$

G は線分 AF の中点であるから，

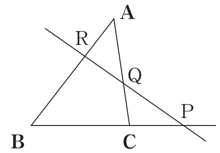
$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GA}}=\frac{1}{1}.$$

また，

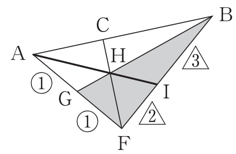
AC＝2，　CB＝r＝3

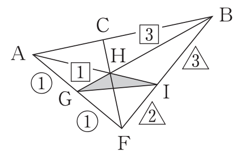
である．

メネラウスの定理



$$\frac{\mathbf{B}\mathrm{P}}{\mathrm{P}\mathbf{C}}\cdot\frac{\mathbf{C}\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}\mathbf{A}}\cdot\frac{\mathbf{A}\mathrm{R}}{\mathrm{R}\mathbf{B}}=1.$$





$$(\triangle \mathrm{HGI}\text{ の面積}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{16}}$$

である.

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	0	2	
	イ	5	3	
	ウ，エ	2，1	3	
	オ，カ，キ	4，1，2	2	
	ク	1	2	
	ケ	6	2	
	コ$\sqrt{サ}$，シ	$2\sqrt{3}$，3	2	
	スセ，ソ	−2，3	2	
	タt^2＋チt＋ツ	$-t^2+2t+3$	2	
	テ	2	1	
	ト	3	1	
	ナニ	−5	2	
	ヌ	4	2	
	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{5}{3}$	2	
	$\frac{ハヒ}{フ}$	$\frac{13}{6}$	2	
第1問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ，ウ，エ	3，6，6，3	3	
	オ	2	3	
	カ	1	3	
	キ	6	3	
	ク	3	3	
	(ケ，コサ)	(1，−1)	3	
	(シ，ス)	(2，0)	3	
	$\frac{セソ}{タ}x+\frac{チ}{ツ}$	$\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}$	3	
	テ	1	3	
	$\frac{ト}{ナ}$	$\frac{4}{3}$	3	
第2問 自己採点小計			(30)	
第3問	(ア，イ)	(4，3)	2	
	ウエ	−2	2	
	$\frac{オ}{カ}x+キ$	$\frac{1}{2}x+1$	2	
	ク	5	2	
	$\frac{\lvert ケk-コ \rvert}{\sqrt{サ}}$	$\frac{\lvert 2k-7 \rvert}{\sqrt{5}}$	2	
	$\frac{シ}{ス}$	$\frac{8}{3}$	2	
	$\frac{セソ}{タ}$	$\frac{13}{3}$	2	
	$\frac{チツ\sqrt{テ}}{ト}$	$\frac{20\sqrt{2}}{9}$	3	
	ナ	6	3	
第3問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　　解	配点	自己採点
第４問	ア	0	1	
	イ	2	1	
	ウ，エ，オ	2，3，4	2	
	カ	−	2	
	キa＋ク	6a＋8	2	
	$\dfrac{\text{ケコサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{-12}{5}$	2	
	ス±セ$\sqrt{\text{ソ}}$	$4\pm2\sqrt{7}$	2	
	タ−チ$\sqrt{\text{ツ}}$	$4-2\sqrt{7}$	2	
	テト	−1	2	
	ナ	3	2	
	ニヌ	10	2	
第４問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第１問 に同じである．

問題

第２問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第２問 に同じである．

第３問　図形と方程式

座標平面上に２点 A(3, 5)，$\mathrm{B}\left(\dfrac{9}{2},\ 2\right)$ があり，線分 AB を 2:1 に内分する点を H とする．

点 H の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，直線 AB の傾きは $\boxed{\text{ウエ}}$ であるから，点 H を通り直線 AB に垂直な直線を ℓ とすると，ℓ の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x+\boxed{\text{キ}}$$

である．また，中心が点 A であり，点 H で直線 ℓ に接する円を C とすると，C の方程式は

$$(x-3)^2+(y-5)^2=\boxed{\text{ク}}$$

である．

直線 ℓ に平行な直線 $y=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x+k$（$k$ は実数）と点 A の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\boxed{\text{ケ}}k-\boxed{\text{コ}}\right|}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}$$

である．特に，$d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

直線 $y=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ を m とし，円 C と直線 m の交点を P，Q とすると，三角形 HPQ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．円 C 上の点 R が，不等式 $y<\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の表す領域内にあるとき，三角形 PQR の面積が整数となるような R はちょうど $\boxed{\text{ナ}}$ 個ある．

【解説】

問題

線分 AB を 2:1 に内分する点が H であるから，その座標は

$$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot\frac{9}{2}}{2+1},\ \frac{1\cdot 5+2\cdot 2}{2+1}\right)$$

すなわち

$$\left(\boxed{4},\ \boxed{3}\right)$$

である．

☜ **内分点**

２点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right).$$

直線 AB の傾きは

$$\frac{2-5}{\frac{9}{2}-3}=\boxed{-2}$$

であるから，点 H を通り直線 AB に垂直な直線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{2}(x-4)+3$$

より

$$y=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}x+\boxed{1}$$

である．

ここで，

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(4-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$$

であるから，中心が点 A であり，点 H で直線 ℓ に接する円 C の方程式は

$$(x-3)^2+(y-5)^2=\boxed{5}$$

である．

直線 ℓ に平行な直線は

$$y=\frac{1}{2}x+k$$

より

$$x-2y+2k=0$$

と表される．点 A とこの直線の距離を d とすると

$$d=\frac{|3-2\cdot5+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|\boxed{2}k-\boxed{7}|}{\sqrt{\boxed{5}}}$$

である．特に，$d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき

$$\frac{|2k-7|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|2k-7|=\frac{5}{3}$$

$$2k-7=\pm\frac{5}{3}$$

であるから，$k=\dfrac{\boxed{8}}{\boxed{3}}$ または $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{3}}$ である．

直線 m の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{8}{3}$ であるから，円 C と 2 直線 ℓ，m の位置関係は次の図のようになる．

☜ 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

☜ 2 直線 $\ell : y=ax+b$，$\ell' : y=a'x+b'$ について

$$\ell\perp\ell' \iff aa'=-1.$$

また，点 $(x_0,\ y_0)$ を通り傾き a の直線の方程式は

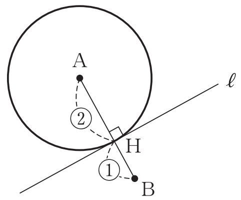
$$y=a(x-x_0)+y_0.$$

☜ **2 点間の距離**

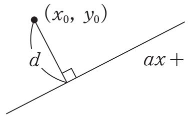
2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

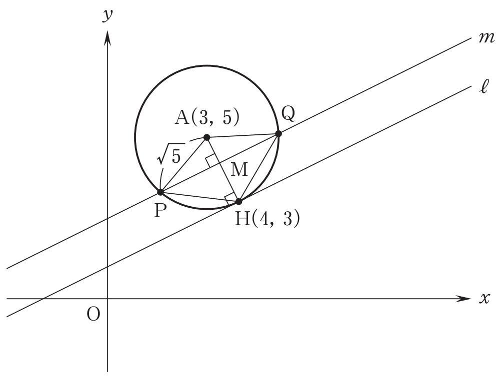
☜



☜ **点と直線の距離**



$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



円 C と直線 m の交点P，Q に対して，線分 PQ の中点を M とすると

☜ $\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ より $\angle\mathrm{AMP}=90^\circ$ である．

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PM}=2\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AM}^2}$$
$$=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{4\sqrt{10}}{3}$$

☜ $\mathrm{AP}=(\text{円}\,C\,\text{の半径})=\sqrt{5}$，
$\mathrm{AM}=d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$．

である．よって，三角形 HPQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{HM}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot(\mathrm{AH}-\mathrm{AM})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}$$
$$=\frac{\boxed{20}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{9}}$$

である．

円 C 上の点 R が，不等式 $y<\dfrac{1}{2}x+\dfrac{8}{3}$ の表す領域内にあるとする．ここで

$$3<\frac{20\sqrt{2}}{9}<4$$

☜ $\left(\dfrac{20\sqrt{2}}{9}\right)^2-3^2=\dfrac{800}{81}-9>0$，
$4^2-\left(\dfrac{20\sqrt{2}}{9}\right)^2=16-\dfrac{800}{81}>0$．

であることに注意する．

点 R と直線 m の距離を h とすると

$$h\leqq\mathrm{MH}$$

であるから，三角形 PQR の面積 T は

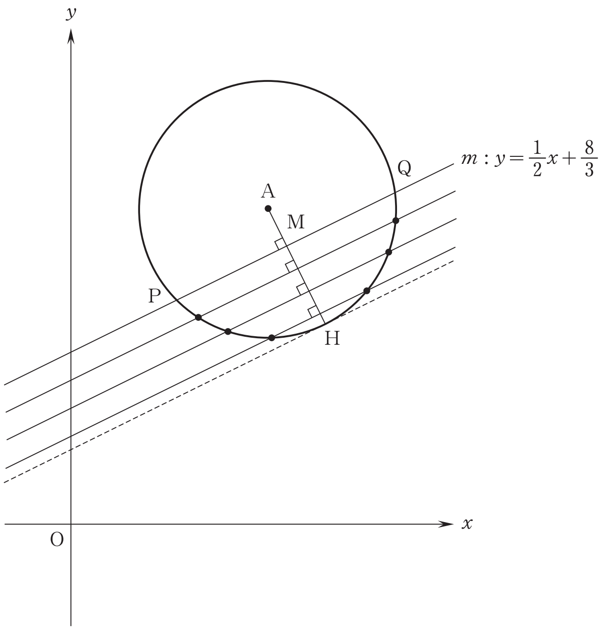
$$T\leqq S=\frac{20\sqrt{2}}{9}<4$$

☜ S は三角形 HPQ の面積である．

の関係を満たす．よって，T が整数のとき

$$T=1,\ 2,\ 3$$

であり，T の整数値 1 個に対して点 R は 2 個の点が対応する．



よって，三角形 PQR の面積が整数となるような R はちょうど

$\boxed{\ 6\ }$ 個ある．

第4問　高次方程式

a を実数として，x の整式 $f(x)=x^3+ax^2+ax-6a-8$ を考える．$f(2)=\boxed{\text{ア}}$ であり，$f(x)$ は

$$f(x)=\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)\left\{x^2+\left(a+\boxed{\text{ウ}}\right)x+\boxed{\text{エ}}a+\boxed{\text{オ}}\right\}$$

と因数分解できる．

x の方程式 $f(x)=0$ の三つの解を α，β，γ とする．

(1)
$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{\text{カ}}a,\quad \alpha\beta\gamma=\boxed{\text{キ}}a+\boxed{\text{ク}}$$

である．

(2) x の方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数が 2 個となるような a の値は

$$a=\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \boxed{\text{ス}}\pm\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

(3) x の方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{タ}}-\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}<a<\boxed{\text{タ}}+\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

$(*)$ が成り立つとき，方程式 $f(x)=0$ の虚数解の実部が $-\dfrac{1}{2}$ となるような a の値は $\boxed{\text{テト}}$ であり，このとき

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{\text{ナ}}$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\boxed{\text{ニヌ}}$$

である．

【解説】

問題

$$f(x)=x^3+ax^2+ax-6a-8.$$

$$f(2)=2^3+a\cdot 2^2+a\cdot 2-6a-8$$

$$=\boxed{0}$$

である．これより，$f(x)$ は $x-2$ で割り切れ，

$$f(x)=\left(x-\boxed{2}\right)\left\{x^2+\left(a+\boxed{2}\right)x+\boxed{3}a+\boxed{4}\right\}$$

と因数分解できる．

因数定理

整式 $P(x)$ について

「$P(x)$ が $x-\alpha$ を因数にもつ」

$\iff P(\alpha)=0.$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+(a+2)x\;+\;3a+4 \\ \hline
x-2\,\big) & x^3\quad +ax^2\quad\quad +ax\;-6a-8 \\
 & x^3\quad -2x^2 \\ \hline
 & (a+2)x^2\quad +ax \\
 & (a+2)x^2-2(a+2)x \\ \hline
 & (3a+4)x-6a-8 \\
 & (3a+4)x-6a-8 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

x の方程式 $f(x)=0$ の三つの解を α, β, γ とする．解の一つが 2 であり，$\gamma=2$ としてよい．すると，α と β は 2 次方程式 $x^2+(a+2)x+3a+4=0$ の二つの解であり，解と係数の関係により

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-(a+2), & \cdots ① \\ \alpha\beta=3a+4 & \cdots ②\end{cases}$$

が成り立つ．

解と係数の関係

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二つの解を α, β とすると

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=\alpha+\beta+2\\&=-(a+2)+2 \quad (① より)\\&=\boxed{-}\,a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma&=\alpha\beta\cdot 2\\&=(3a+4)\cdot 2 \quad (② より)\\&=\boxed{6}\,a+\boxed{8}\end{aligned}$$

である．

3 次方程式の解と係数の関係を用いて

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a, \\ \alpha\beta\gamma=6a+8\end{cases}$$

としてもよい．

(2) x の方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数が 2 個となるのは，方程式 $f(x)=0$ の三つの解が α, β, 2 より

(i) α, β のうち，一方が 2，他方が 2 以外の実数

(ii) $\alpha=\beta$（実数）かつ $\alpha\neq 2$

の二つの場合が考えられる．

(i) のとき，2 が方程式 $x^2+(a+2)x+3a+4=0$ の解より

$$2^2+(a+2)\cdot 2+3a+4=0$$

α, β のうち，一方が 2.

すなわち

$$a=-\frac{12}{5}$$

が必要である．このとき

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)\left(x^2-\frac{2}{5}x-\frac{16}{5}\right)\\&=(x-2)^2\left(x+\frac{8}{5}\right)\end{aligned}$$

となるので，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は 2 個である．

$a=-\dfrac{12}{5}$ のときの相異なる実数解の個数を調べた．

(ii) のとき，方程式 $x^2+(a+2)x+3a+4=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=(a+2)^2-4(3a+4)\\&=a^2-8a-12\end{aligned}$$

2 次方程式の解の判別

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots (*)$$

の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0 \iff$ (*) は異なる二つの実数解をもつ．

$D=0 \iff$ (*) は重解をもつ．

$D<0 \iff$ (*) は異なる二つの虚数解をもつ．

より

$$a^2-8a-12=0 \quad かつ \quad a\neq-\frac{12}{5}$$

が条件である．よって

(ii) は，2 次方程式

$$x^2+(a+2)x+3a+4=0$$

が 2 を解にもたなければよいので，

$$a\neq-\frac{12}{5}.$$

$$a=4\pm 2\sqrt{7}.$$

　したがって，(i)，(ii) より，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数が 2 個となるような a の値は

$$a=\frac{\boxed{-12}}{\boxed{5}},\quad \boxed{4}\pm\boxed{2}\sqrt{\boxed{7}}.$$

(3)　x の方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつ条件は，2 次方程式 $x^2+(a+2)x+3a+4=0$ が虚数解をもつこと．それは $D<0$，すなわち $a^2-8a-12<0$ より

$$\boxed{4}-\boxed{2}\sqrt{\boxed{7}}<a<4+2\sqrt{7}\qquad\cdots(*)$$

である．

　(*) が成り立つとき，方程式 $f(x)=0$ の虚数解は $x=-\dfrac{a+2}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-D}}{2}i$ (i は虚数単位) であり，この解の実部が ☜ $-\dfrac{1}{2}$ となるような a の値は

複素数

$z=a+bi$　(a，b は実数)

において

a を実部，b を虚部

という．

$$-\frac{a+2}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$a=\boxed{-1}.$$

　これは確かに (*) を満たす．☜

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}<7$$

より

$$\frac{5}{2}<\sqrt{7}$$

であるから

$$4-2\sqrt{7}<4-2\cdot\frac{5}{2}=-1.$$

よって，$a=-1$ は (*) を満たす．

　このとき，方程式 $x^2+(a+2)x+3a+4=0$ は

$$x^2+x+1=0$$

より

$$\begin{cases}\alpha^2+\alpha+1=0,\\ \beta^2+\beta+1=0\end{cases}$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{cases}\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0,\\ \beta^3-1=(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0\end{cases}$$

も成り立つので

$$\alpha^2=-(\alpha+1),\quad \beta^2=-(\beta+1),$$

$$\alpha^3=1,\quad \beta^3=1$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=-(\alpha+1)-(\beta+1)+2^2\\&=-(\alpha+\beta)+2\\&=\boxed{3},\end{aligned}$$

☜ $\alpha+\beta=-(a+2)$　(① より)

$=-(-1+2)$

$=-1.$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=1+1+2^3\\&=\boxed{10}\end{aligned}$$

である．

【$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニヌ}}$ の別解】

$a=-1$ のとき，①，② より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-1, \\ \alpha\beta=1\end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2^2\\&=(-1)^2-2\cdot1+4\\&=3,\\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+2^3\\&=(-1)^3-3\cdot1\cdot(-1)+8\\&=10\end{aligned}$$

である．

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	0	2	
	イ	5	3	
	ウ，エ	2，1	3	
	オ，カ，キ	4，1，2	2	
	ク	1	2	
	ケ	6	2	
	コ$\sqrt{サ}$，シ	$2\sqrt{3}$，3	2	
	スセ，ソ	−2，3	2	
	タt^2＋チt＋ツ	$-t^2+2t+3$	2	
	テ	2	1	
	ト	3	1	
	ナニ	−5	2	
	ヌ	4	2	
	$\dfrac{ネ}{ノ}$	$\dfrac{5}{3}$	2	
	$\dfrac{ハヒ}{フ}$	$\dfrac{13}{6}$	2	
第1問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ，ウ，エ	3，6，6，3	3	
	オ	2	3	
	カ	1	3	
	キ	6	3	
	ク	3	3	
	(ケ，コサ)	(1，−1)	3	
	(シ，ス)	(2，0)	3	
	$\dfrac{セソ}{タ}x+\dfrac{チ}{ツ}$	$\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{2}{3}$	3	
	テ	1	3	
	$\dfrac{ト}{ナ}$	$\dfrac{4}{3}$	3	
第2問 自己採点小計			(30)	
第3問	アn＋イ	$2n+1$	2	
	$n^{ウ}$＋エn	n^2+2n	2	
	$\dfrac{1}{オ}$	$\dfrac{1}{2}$	2	
	$\dfrac{1}{カk+キ}-\dfrac{1}{クk+ケ}$	$\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}$	2	
	$\dfrac{n}{コ(サn+シ)}$	$\dfrac{n}{3(2n+3)}$	2	
	スセ	32	2	
	ソタ	32	2	
	チツ	39	2	
	テn^2−トn＋ナ	$2n^2-2n+3$	2	
	ニヌネ	333	2	
第3問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$, $\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{キ}{ク}$, $\frac{ケ}{コ}$, $\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$	2	
	ス	3	2	
	セ	2	2	
	ソ	6	2	
	タ	3	2	
	$\frac{チツ}{テト}$	$\frac{33}{13}$	3	
	$\frac{ナニ}{ヌネ}$	$\frac{40}{13}$	3	
		第4問　自己採点小計	(20)	
第5問	$\frac{ア}{イウ}$	$\frac{1}{21}$	1	
	$\frac{エ}{オカ}$	$\frac{5}{14}$	1	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{5}{3}$	2	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{5}{9}$	2	
	サS＋シ	$2S+5$	1	
	$\frac{スセ}{ソ}$	$\frac{25}{3}$	2	
	$\frac{タチ}{ツ}$	$\frac{20}{9}$	2	
	テトナ	150	2	
	ニヌ	10	2	
	ネ	0	1	
	ノ	1	1	
	ハ.ヒフ	0.82	3	
		第5問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

第1問　指数関数・対数関数，三角関数

〔1〕 a を正の実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=2^{x-2}-a$$

とする．

(1) $a=1$ のとき，$f(2)=\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $a=8$ のとき，$f(x)\leqq 0$ を満たす自然数 x は全部で $\boxed{\text{イ}}$ 個ある．

(3) x の方程式 $f(x)=1$ の解は

$$\boxed{\text{ウ}}+\log_2\left(a+\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

正の実数 u に対して，$a=u$ のときの $f(x)=1$ の解を x_1，$a=\dfrac{1}{u}$ のときの $f(x)=1$ の解を x_2 とおく．

$$x_1+x_2=\boxed{\text{オ}}+\log_2\left(u+\frac{\boxed{\text{カ}}}{u}+\boxed{\text{キ}}\right)$$

であり，u が $u>0$ の範囲を変化するとき，x_1+x_2 は $u=\boxed{\text{ク}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる．

〔2〕 x の関数 $g(x)$ を

$$g(x)=2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x$$

とする．

(1) $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと

$$t^2=\sin^2 x+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin x\cos x+\boxed{\text{シ}}\cos^2 x$$

$$=\boxed{\text{スセ}}\sin^2 x+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin x\cos x+\boxed{\text{ソ}}$$

であるから，$g(x)$ を t を用いて表すと

$$g(x)=\boxed{\text{タ}}t^2+\boxed{\text{チ}}t+\boxed{\text{ツ}}$$

である．

また，t は

$$t=\boxed{\text{テ}}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

と表すことができる．

(2) x が $0\leqq x<2\pi$ の範囲を変化するとき，$g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ナニ}}\leqq g(x)\leqq\boxed{\text{ヌ}}$$

である．

(3) b は正の実数とする．x の方程式 $g(x)=3$ が，$0\leqq x<b$ の範囲において，ちょうど三つの実数解をもつような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\pi < b \leqq \frac{\boxed{ハヒ}}{\boxed{フ}}\pi$$

である．

【解説】

問題

［1］

$$f(x)=2^{x-2}-a.$$

⑴ $a=1$ のとき，$f(x)=2^{x-2}-1$ である．したがって

$$f(2)=2^0-1=\boxed{0}.$$

☜ $2^0=1$.

⑵ $a=8$ のとき，$f(x)=2^{x-2}-8$ である．$f(x)\leqq 0$ より

$$2^{x-2}\leqq 2^3$$

☜ $8=2^3$.

であり，底の 2 は 1 より大きいので

$$x-2\leqq 3$$

$$x\leqq 5.$$

☜ $b>1$ のとき $b^p\leqq b^q \iff p\leqq q$.

これを満たす自然数 x は全部で $\boxed{5}$ 個ある．

☜ $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

⑶ $f(x)=1$ より

$$2^{x-2}-a=1$$

$$2^{x-2}=a+1.$$

両辺で底を 2 とする対数をとると

$$x-2=\log_2(a+1)$$

$$x=\boxed{2}+\log_2\left(a+\boxed{1}\right).$$

☜ $b>0$，$b\neq 1$，$y>0$ のとき $y=b^x \iff x=\log_b y$.

$a=u$ とすると $x_1=2+\log_2(u+1)$，$a=\dfrac{1}{u}$ とすると

$x_2=2+\log_2\left(\dfrac{1}{u}+1\right)$ であるから

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=4+\log_2(u+1)+\log_2\left(\frac{1}{u}+1\right)\\&=4+\log_2(u+1)\left(\frac{1}{u}+1\right)\\&=\boxed{4}+\log_2\left(u+\frac{\boxed{1}}{u}+\boxed{2}\right)\end{aligned}$$

☜ $b>0$，$b\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_b M+\log_b N=\log_b MN$.

となる．

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

等号は $a=b$ のとき成り立つ．

ここで，$u>0$，$\dfrac{1}{u}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$u+\frac{1}{u}\geqq 2\sqrt{u\cdot\frac{1}{u}}=2$$

☜ 左では $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ として相加平均と相乗平均の大小関係を用いた．

（等号は，$u=\dfrac{1}{u}$ かつ $u>0$ より $u=1$ のとき成立）

が成り立つ．したがって

$$u+\frac{1}{u}+2\geqq 4$$

$$\log_2\left(u+\frac{1}{u}+2\right)\geqq \log_2 4$$

☜ $b>1$，$M>0$，$N>0$ のとき $M\leqq N \iff \log_b M\leqq \log_b N$.

$$4+\log_2\left(u+\frac{1}{u}+2\right)\geqq 4+2=6$$

☜ $\log_2 4=\log_2 2^2=2$.

となる．

よって，u が $u>0$ の範囲を変化するとき，x_1+x_2 は

$u=\boxed{1}$ のとき最小値 $\boxed{6}$ をとる．

［2］ **問題**

$$g(x)=2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x.$$

(1) $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと

$$\begin{aligned} t^2&=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2\\ &=\sin^2 x+\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}\sin x\cos x+\boxed{3}\cos^2 x\\ &=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3(1-\sin^2 x)\\ &=\boxed{-2}\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\boxed{3} \end{aligned}$$

☜ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

であるから

$$2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=3-t^2$$

である．したがって，$g(x)$ を t を用いて表すと

$$\begin{aligned} g(x)&=(2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x)+2(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\\ &=(3-t^2)+2t\\ &=\boxed{-}t^2+\boxed{2}t+\boxed{3} \end{aligned}$$

である．

また，$t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の右辺を合成すると

$$t=\boxed{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{3}}\right)$$

と表すことができる．

☜

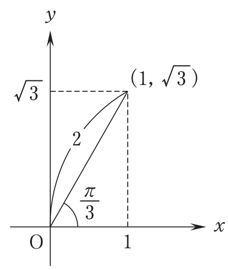
三角関数の合成

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$.

ただし，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり

$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，　$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$.



(2) $0\leqq x<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから，

$t=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとり得る値の範囲は

$$-2\leqq t\leqq 2 \quad \cdots ①$$

☜ $-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$ より $-2\leqq 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 2$.

である．

また，$g(x)=-t^2+2t+3$ の右辺を $h(t)$ とおくと

$$h(t)=-(t-1)^2+4$$

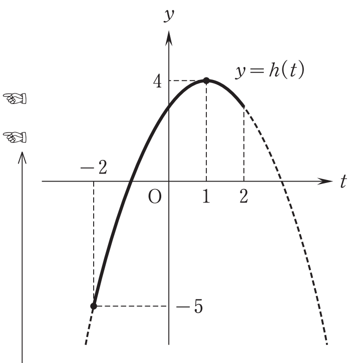
より，① における $h(t)$ のとり得る値の範囲は

$$-5 \leqq h(t) \leqq 4.$$

よって，$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{-5} \leqq g(x) \leqq \boxed{4}$$

である．



$g(x)=h(t)$，$t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

(3)　$g(x)=3$ より，$-t^2+2t+3=3$ を満たす t の値は

$$t(t-2)=0$$

$$t=0,\ 2$$

である．$t=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ なので

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\ 2$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\ 1. \qquad \cdots ②$$

まず，$x \geqq 0$ において ② を満たす x の値を調べる．

$x+\dfrac{\pi}{3} \geqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ より

$$x+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$

☜　$\theta \geqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin\theta=0$ より

$\theta=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$.

すなわち

$$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \cdots$$

である．

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ より

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ \cdots$$

☜　$\theta \geqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin\theta=1$ より

$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \cdots$.

すなわち

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi,\ \cdots$$

である．したがって，② を満たす x（$\geqq 0$）の値は，小さい方から

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \cdots$$

である．

よって，x の方程式 $g(x)=3$ が，$0 \leqq x < b$ の範囲において，ちょうど三つの実数解をもつような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}\pi < b \leqq \frac{\boxed{13}}{\boxed{6}}\pi$$

である．

☜　$0 \leqq x < b$ には，小さい方から 3 番目の $\dfrac{5}{3}\pi$ を含み，4 番目の $\dfrac{13}{6}\pi$ は含まない．

第2問　微分法・積分法

k を実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3-3kx^2+(6k^2-3)x-2k$$

とする．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2-\boxed{\text{イ}}kx+\boxed{\text{ウ}}k^2-\boxed{\text{エ}}$$

である．曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における C の接線 ℓ の傾きは $f'\left(\boxed{\text{オ}}\right)$ であり，ℓ の傾きが3であるときの k の値は $\boxed{\text{カ}}$ である．このとき，ℓ の方程式は，$y=3x-\boxed{\text{キ}}$ である．以下，$k=\boxed{\text{カ}}$ とする．

(1)　関数 $f(x)$ は $\boxed{\text{ク}}$．$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　極大値と極小値をもつ
①　極大値をもち，極小値をもたない
②　極小値をもち，極大値をもたない
③　極値をもたない

(2)　x の関数 $g(x)$ を $g(x)=2x^2-5x+2$ とし，曲線 $y=g(x)$ を D とする．C と D の共有点は二つあり，それらの座標は $\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$ である．点 $\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$ を A とし，点 A を通り ℓ に垂直な直線を m とする．m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．m と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq\boxed{\text{ケ}}$ の表す領域に含まれる部分の面積は $\boxed{\text{テ}}$ である．

t を実数とし，2点 P，Q を P$(t,\ f(t))$，Q$(t,\ g(t))$ で定める．t が $\boxed{\text{ケ}}\leqq t\leqq\boxed{\text{シ}}$ の範囲を変化するとき，線分 PQ の長さは $t=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大となる．

【解説】　問題

$$f(x)=x^3-3kx^2+(6k^2-3)x-2k.$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{6}kx+\boxed{6}k^2-\boxed{3}$$

である．曲線 $y=f(x)$ を C とする．C 上の点 $(2,\ f(2))$ における C の接線 ℓ の傾きは $f'\left(\boxed{2}\right)$ であり，ℓ の傾きが3であるとき

> **導関数**
> $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3)$，
> $(c)'=0$（c は定数）．

$$f'(2)=3$$

である．よって

$$3\cdot2^2-6k\cdot2+6k^2-3=3$$
$$6k^2-12k+6=0$$
$$6(k-1)^2=0$$

が成り立つ．これを満たす k の値は $\boxed{\ 1\ }$ である．このとき

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-2$$

であり

$$f(2)=2^3-3\cdot2^2+3\cdot2-2=0$$

であるから，ℓ の方程式は

$$y=3(x-2)$$

すなわち

$$y=3x-\boxed{\ 6\ }$$

である．以下，$k=1$ とする．

接線
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは
$$f'(t)$$
であり，接線の方程式は
$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

(1)
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$=3(x-1)^2\geqq0$$

より，$f(x)$ は極値をもたない．したがって，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

(2) x の関数 $g(x)$ を $g(x)=2x^2-5x+2$ とし，曲線 $y=g(x)$ を D とする．C と D の共有点の x 座標は方程式

$$f(x)=g(x)$$
$$f(x)-g(x)=0$$

の実数解である．

$$f(x)-g(x)=(x^3-3x^2+3x-2)-(2x^2-5x+2)$$
$$=x^3-5x^2+8x-4 \qquad \cdots ①$$
$$=(x-1)(x-2)^2 \qquad \cdots ②$$

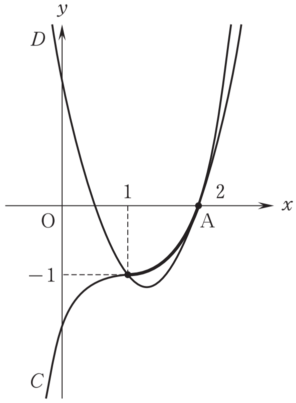
であるから，$f(x)-g(x)=0$ の実数解は

$$x=1,\ 2.$$

このとき，C と D の共有点の y 座標はそれぞれ

$$y=-1,\ 0.$$

よって，C と D の共有点の座標は $\left(\boxed{\ 1\ },\ \boxed{-1}\right)$，$\left(\boxed{\ 2\ },\ \boxed{\ 0\ }\right)$ である．点 $(2,\ 0)$ を A とし，点 A を通り ℓ に垂直な直線を m とする．ℓ の傾きは 3 であるから，m の方程式は



$$y=-\frac{1}{3}(x-2)$$

$$y=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}}x+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．m と D の共有点の x 座標を求めると

$$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=2x^2-5x+2$$

$$3x^2-7x+2=0$$

$$(3x-1)(x-2)=0$$

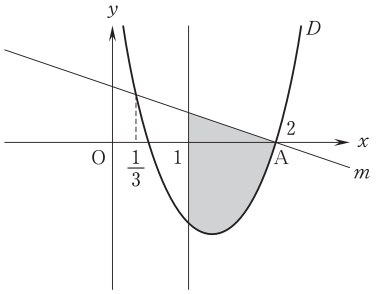
$$x=\frac{1}{3},\ 2$$

である．

垂直条件

傾き m の直線と，傾き m' の直線が垂直となる条件は

$$mm'=-1.$$



よって，m と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq 1$ の表す領域に含まれる部分は図の影の部分であり，その面積は

$$\int_1^2\left\{\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)-(2x^2-5x+2)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_1^2(6x^2-14x+4)\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}\Big[2x^3-7x^2+4x\Big]_1^2$$

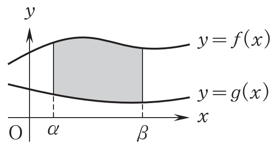
$$=\boxed{1}$$

である．

面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

（$n=0,\ 1,\ 2$，C は積分定数．）

t を実数とし，2 点 P，Q を P$(t,\ f(t))$，Q$(t,\ g(t))$ で定める．t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を変化するとき

$$f(t)-g(t)=(t-1)(t-2)^2\geqq 0$$

であることに注意すると，① より，線分 PQ の長さは

$$|f(t)-g(t)|=f(t)-g(t)$$

$$=t^3-5t^2+8t-4$$

となる．これを $h(t)$ とおくと

$$h'(t)=3t^2-10t+8$$

$$=(3t-4)(t-2)$$

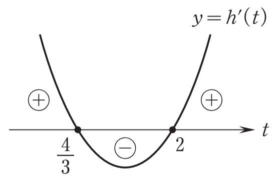
であるから，$h(t)$ の $1\leqq t\leqq 2$ における増減は次の表のようになる．

② より

$$f(t)-g(t)=(t-1)(t-2)^2.$$

① より

$$f(t)-g(t)=t^3-5t^2+8t-4.$$



$h'(t)$ の符号はグラフを用いると調べやすい．

t	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0
$h(t)$		↗	最大	↘	

よって，t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を変化するとき，線分 PQ の長さは $t=\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$ で最大となる．

第3問　数　列

数列 $\{a_n\}$ を $a_1+a_2=8$，$a_4=9$ である等差数列とする．

数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\boxed{\text{ア}}n+\boxed{\text{イ}}$ であり

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^{\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エ}}n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

さらに

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{\boxed{\text{オ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}k+\boxed{\text{キ}}}-\frac{1}{\boxed{\text{ク}}k+\boxed{\text{ケ}}}\right) \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを利用すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{n}{\boxed{\text{コ}}\left(\boxed{\text{サ}}n+\boxed{\text{シ}}\right)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける．

$$a_1 \ \Big|\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ \Big|\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9 \ \Big|\ \cdots$$

第1群　　第2群　　　　　第3群

ここで，一般に第 n 群は $(2n-1)$ 個の項からなるものとする．

(1)　a_1 から第 n 群の末項までの項数を T_n とする．$T_n \geqq 1000$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{スセ}}$ であるから，a_{1000} は第 $\boxed{\text{ソタ}}$ 群の小さい方から $\boxed{\text{チツ}}$ 番目の項である．

(2)　自然数 n に対し，第 n 群の小さい方から n 番目の項を b_n とすると

$$b_n=\boxed{\text{テ}}n^2-\boxed{\text{ト}}n+\boxed{\text{ナ}}$$

である．

自然数 n に対し，b_n を3で割ったときの余りを r_n とすると

$$\sum_{k=1}^{1000} r_k=\boxed{\text{ニヌネ}}$$

である．

【解説】　　問題

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると一般項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

である．

$a_1+a_2=8$，$a_4=9$ より

$$\begin{cases} a+(a+d)=8, \\ a+3d=9 \end{cases}$$

であるから

$$a=3,\ d=2.$$

よって

$$a_n=3+(n-1)\cdot 2$$
$$=\boxed{2}n+\boxed{1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

また

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{2}\{3+(2n+1)\}$$
$$=n^{\boxed{2}}+\boxed{2}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

☜ **等差数列の和**

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

さらに

$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}$$
$$=\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{2}{a_ka_{k+1}}$$

☜ $a_k=2k+1.$
$a_{k+1}=2(k+1)+1=2k+3.$

より

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{\boxed{2}}\left(\frac{1}{\boxed{2}k+\boxed{1}}-\frac{1}{\boxed{2}k+\boxed{3}}\right)$$

☜ $\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}=\dfrac{2}{a_ka_{k+1}}$ の両辺を 2 で割った．

が成り立つことを利用すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+3)-3}{3(2n+3)}$$
$$=\frac{n}{\boxed{3}(\boxed{2}n+\boxed{3})}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分ける．

$$\underbrace{a_{T_1}}_{}^{1個}\ \Big|\ \overbrace{a_2,\ a_3,\ a_{T_2}}^{3個}\ \Big|\ \cdots\ \Big|\ \overbrace{\cdots,\ a_{T_{n-1}}}^{(2n-3)個}\ \Big|\ \overbrace{\cdots,\ a_{T_n}}^{(2n-1)個}\ \Big|\ \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 $n-1$ 群　第 n 群

ここでは，a_1 から第 n 群の末項までの項数が T_n であるから，第 n 群の末項は a_{T_n} である．

(1)
$$T_n=1+3+\cdots+(2n-1)$$
$$=\frac{n}{2}\{1+(2n-1)\}$$
$$=n^2$$

であるから，$T_n\geqq 1000$ すなわち $n^2\geqq 1000$ を満たす最小の自然

数 n は $\boxed{32}$ である．

☞ $31^2=961<1000$，$32^2=1024>1000$.

a_1 | a_2，a_3，a_4 | $\cdots$ | $\cdots$，a_{961} | $\cdots$，a_{1000}，$\cdots$，a_{1024} | $\cdots$

第 1 群　第 2 群　第 31 群　第 32 群

第 31 群の末項は a_{961}，第 32 群の末項は a_{1024} であるから，a_{1000} は第 32 群に含まれ，$1000-961=39$ より，この群の中で小さい方から 39 番目である．したがって a_{1000} は第 $\boxed{32}$ 群の小さい方から $\boxed{39}$ 番目の項である．

☞ 第 n 群の末項は a_{T_n}，すなわち，a_{n^2}.

(2) 第 n 群の小さい方から n 番目の項 b_n は，第 $n-1$ 群の末項から n 項だけ後の項であるから

$$\begin{aligned} b_n &= a_{T_{n-1}+n} = a_{(n-1)^2+n} = a_{n^2-n+1} \\ &= 2(n^2-n+1)+1 \\ &= \boxed{2}n^2-\boxed{2}n+\boxed{3} \end{aligned}$$

である．

☞ b_n は数列 $\{a_n\}$ の第 $(T_{n-1}+n)$ 項である．

☞ $a_n=2n+1$.

b_n を 3 で割ったときの余り r_n について

$$\begin{cases} \text{(i)} & n=3\ell-2 \\ \text{(ii)} & n=3\ell-1 \quad (\ell=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ \text{(iii)} & n=3\ell \end{cases}$$

に分けて考える．

☞ $\begin{cases} \text{(i)} & n=1,\ 4,\ 7,\ \cdots \\ \text{(ii)} & n=2,\ 5,\ 8,\ \cdots \\ \text{(iii)} & n=3,\ 6,\ 9,\ \cdots \end{cases}$ に分けている．

$b_n=2n(n-1)+3$　$\cdots$ ① と表せる．

(i) のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2(3\ell-2)\{(3\ell-2)-1\}+3 \\ &= 2(3\ell-2)\cdot 3(\ell-1)+3 \\ &= 3\{2(3\ell-2)(\ell-1)+1\} \end{aligned}$$

であるから $r_n=0$.

☞ ① に $n=3\ell-2$ を代入した．

(ii) のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2(3\ell-1)\{(3\ell-1)-1\}+3 \\ &= 2(3\ell-1)(3\ell-2)+3 \\ &= 2(3\cdot 3\ell^2-3\cdot 3\ell+2)+3 \\ &= 3(6\ell^2-6\ell+2)+1 \end{aligned}$$

であるから $r_n=1$.

☞ ① に $n=3\ell-1$ を代入した．

(iii) のとき

$$\begin{aligned} b_n &= 2\cdot 3\ell(3\ell-1)+3 \\ &= 3\{2\ell(3\ell-1)+1\} \end{aligned}$$

であるから $r_n=0$.

☞ ① に $n=3\ell$ を代入した．

(i)〜(iii) より

$$r_n=\begin{cases} 0 & (n=3\ell-2\ \text{のとき}) \\ 1 & (n=3\ell-1\ \text{のとき}) \quad (\ell=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ 0 & (n=3\ell\ \text{のとき}) \end{cases}$$

☞ $\{r_n\}$：$\underset{r_1}{0}$，$\underset{r_2}{1}$，$\underset{r_3}{0}$，$\underset{r_4}{0}$，$\underset{r_5}{1}$，$\underset{r_6}{0}$，$\cdots$

である．

$1000=3\times 333+1$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1000} r_k &= (r_1+r_2+r_3)+\cdots+(r_{997}+r_{998}+r_{999})+r_{1000} \\ &= \sum_{k=1}^{333}(0+1+0)+0 \\ &= \boxed{333}\end{aligned}$$

である．

第4問　ベクトル

三角形OABにおいて，辺OAの中点をM，辺ABを2:1に内分する点をNとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．

点Pを直線MN上にとると，実数sを用いて $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と表され

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}-\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．さらに，点Pが直線OB上にあるものとする．このとき

$$s=\boxed{ス}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{セ}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．

以下，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{セ}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．

OA$=3$，OB$=4$，AB$=\sqrt{13}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{ソ}$$

である．

点Pを中心とし，点Bを通る円をCとする．直線OBと円Cの交点のうちBでない方をQとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{タ}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

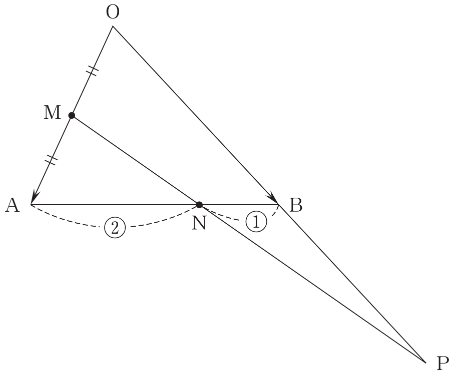
である．また，直線ABと円Cの交点のうちBでない方をRとする．実数tを用いて $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すと

$$t=\frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$$

である．三角形BQRと三角形OABの面積比は $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}:1$ である．

【解説】

問題



$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}.$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\overrightarrow{OB}.$$

☜ **内分点**

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

点 P を直線 MN 上にとると，実数 s を用いて $\overrightarrow{MP}=s\overrightarrow{MN}$ と表され

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=s(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$$

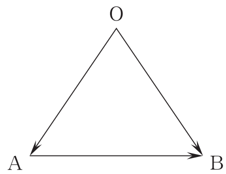
より

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OM}+s\overrightarrow{ON}$$

$$=(1-s)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}-\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}s\right)\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}s\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots①$$

☜ **ベクトルの差**



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

さらに，点 P が直線 OB 上にあるから，$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ により

☜ $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OB}$（$k$ は実数）と表される.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}s=0$$

$$s=\boxed{3}.$$

① に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\boxed{2}\overrightarrow{OB}.$$

$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{AB}=\sqrt{13}$ より

$$(\sqrt{13})^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$=4^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+3^2.$$

よって

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2}$$

$$=\boxed{6}.$$

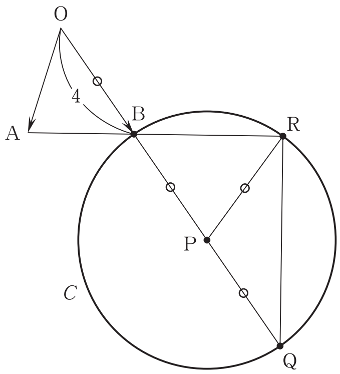
☜ $\cos\angle AOB=\dfrac{3^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot 3\cdot 4}$

$=\dfrac{1}{2}$

であるから

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times 4\times\dfrac{1}{2}=6$

としてもよい．



☜ $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OB}$ より，円 C の半径は

$PB=OB=4$.

図より，$\overrightarrow{OQ}=\boxed{3}\overrightarrow{OB}$.

点 R は直線 AB 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}$ と表され

$$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

より

$$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR}&=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\\&=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OB}\\&=-(t-1)\overrightarrow{OA}+(t-2)\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

点 R は円 C 上にもあるから，$|\overrightarrow{PR}|=4$ より

$$\left|-(t-1)\overrightarrow{OA}+(t-2)\overrightarrow{OB}\right|^2=4^2$$

$$(t-1)^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2(t-1)(t-2)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(t-2)^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=16$$

$$9(t-1)^2-12(t-1)(t-2)+16(t-2)^2=16$$

☜ $|\overrightarrow{OA}|=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6$，$|\overrightarrow{OB}|=4$.

$$13t^2-46t+33=0$$

$$(t-1)(13t-33)=0.$$

図より，$t>1$ であるから

☜ $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}$.

$$t=\frac{\boxed{33}}{\boxed{13}}.$$

以上より

$$\frac{\triangle BQR}{\triangle OAB}=\frac{\frac{1}{2}BQ\cdot BR\sin\angle QBR}{\frac{1}{2}OB\cdot AB\sin\angle OBA}$$

$$=\frac{BQ}{OB}\cdot\frac{BR}{AB}$$

☜ $\angle QBR=\angle OBA$.

$$= 2 \cdot \frac{20}{13}$$

$$= \frac{40}{13}$$

☜ $\mathrm{BQ} = 2\mathrm{OB}$,

$\mathrm{BR} = (t-1)\mathrm{AB} = \frac{20}{13}\mathrm{AB}$.

すなわち

$$\triangle\mathrm{BQR} : \triangle\mathrm{OAB} = \frac{\boxed{40}}{\boxed{13}} : 1$$

である.

第5問　確率分布と統計的な推測

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁（けた）数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

赤球が3個，白球が6個入った袋がある．

(1)　袋から5個の球を同時に無作為に取り出したとき，取り出された5個の球のうち，赤球の個数を S とする．このとき

$$S=0 \text{ である確率は } \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

$$S=1 \text{ である確率は } \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

である．

確率変数 S の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

次に，取り出された5個の球のうち，赤球1個につき3点，白球1個につき1点を与え，5個の球に対する合計得点を T とする．T は S を用いて $T=\boxed{\text{サ}}S+\boxed{\text{シ}}$ と表されるから，確率変数 T の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$，分散は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

(2)　袋から球を無作為に復元抽出する試行を450回行い，赤球が取り出された回数を X とする．

確率変数 X の平均を m，標準偏差を σ とすると

$$m=\boxed{\text{テトナ}},\quad \sigma=\boxed{\text{ニヌ}}$$

である．ここで，試行回数450は十分大きいと考えられるので，$Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Y は近似的に平均 $\boxed{\text{ネ}}$，標準偏差 $\boxed{\text{ノ}}$ の正規分布に従う．よって，X が130以上160以下の値をとる確率はおよそ $\boxed{\text{ハ}}.\boxed{\text{ヒフ}}$ である．

ただし，Z を標準正規分布に従う確率変数とするとき

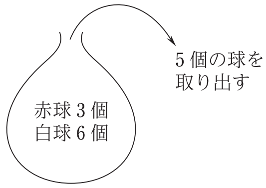
$$P(0\leqq Z\leqq 1)=0.341,\quad P(0\leqq Z\leqq 2)=0.477$$

である．

【解説】

問題

(1)　赤球3個，白球6個の合計9個の中から，5個の球を同時に取り出す取り出し方は，全部で ${}_9C_5$ 通りあり，これらの根元事象は同様に確からしい．ここで，取り出された5個の球のうち，赤球の個数が S であるから，$S=k$（$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$）となる確率 $P(S=k)$ は



$$P(S=k)=\frac{{}_3C_k\cdot{}_6C_{5-k}}{{}_9C_5}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

である．よって

$$P(S=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_6C_5}{{}_9C_5}=\frac{1\cdot 6}{126}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{21}},$$

☞ ${}_9C_5=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126.$

$$P(S=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_6C_4}{{}_9C_5}=\frac{3\cdot 15}{126}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{14}}$$

☞ ${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15.$

である．同様にして，$P(S=2)$，$P(S=3)$ を計算すると確率変数 S の確率分布は以下の表のようになる．

S	0	1	2	3	計
$P(S=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

☞ $P(S=2)=\frac{3\cdot 20}{126}=\frac{10}{21},$

$P(S=3)=\frac{1\cdot 15}{126}=\frac{5}{42}.$

よって，確率変数 S の期待値 $E(S)$ は

$$E(S)=0\cdot\frac{1}{21}+1\cdot\frac{5}{14}+2\cdot\frac{10}{21}+3\cdot\frac{5}{42}$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$$

であり，S の分散 $V(S)$ は

$$V(S)=E(S^2)-\{E(S)\}^2$$
$$=\left(0^2\cdot\frac{1}{21}+1^2\cdot\frac{5}{14}+2^2\cdot\frac{10}{21}+3^2\cdot\frac{5}{42}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}$$

である．

☞ **期待値(平均)，分散**

確率変数 X のとり得る値を

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$

とすると，X の期待値(平均) $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k.$$

また，X の分散 $V(X)$ は $E(X)=m$ として

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2 p_k \quad \cdots(*)$$

または

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2. \quad \cdots(**)$$

ここでは (**) を用いた．

次に，取り出された 5 個の球のうち

赤球 1 個につき 3 点

白球 1 個につき 1 点

が与えられるから，5 個の球に対する合計得点 T は S を用いて

$$T=3\cdot S+1\cdot(5-S)$$
$$=\boxed{2}S+\boxed{5}$$

と表される．よって，確率変数 T の期待値 $E(T)$ は

$$E(T)=E(2S+5)$$
$$=2E(S)+5$$
$$=2\cdot\frac{5}{3}+5$$
$$=\frac{\boxed{25}}{\boxed{3}}$$

☞ **期待値の性質**

確率変数 X と定数 a，b に対して

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

が成り立つ．

☞ $E(S)=\frac{5}{3}.$

であり，T の分散 $V(T)$ は

$$V(T)=V(2S+5)$$
$$=2^2V(S)$$
$$=4\cdot\frac{5}{9}$$

☞ **分散の性質**

確率変数 X と定数 a，b に対して

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

が成り立つ．

☞ $V(S)=\frac{5}{9}.$

$$=\frac{\boxed{20}}{\boxed{9}}$$

である．

(2) 袋から球を無作為に復元抽出する試行を 450 回行い，赤球が取り出された回数を X としたとき，$X=r$ となる確率 $P(X=r)$ は

$$P(X=r)={}_{450}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{450-r}\quad(r=0,\ 1,\ \cdots,\ 450)$$

である．すなわち確率変数 X は

$$\text{二項分布 } B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$$

に従う．

よって，確率変数 X の平均 m は

$$m=450\cdot\frac{1}{3}=\boxed{150}$$

であり，X の標準偏差 σ は

$$\sigma=\sqrt{450\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\boxed{10}$$

である．

また，試行回数 450 は十分大きいと考えられるので，二項分布 $B\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う確率変数 X は，近似的に正規分布 $N(150,\ 10^2)$ に従う．

さらに，$Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$ により確率変数 Y を定めると，確率変数 Y は近似的に平均 $\boxed{0}$，標準偏差 $\boxed{1}$ の正規分布に従う．

ここで，$m=150$，$\sigma=10$ より

$$Y=\frac{X-150}{10}$$

であるから

$$130\leqq X\leqq 160$$

のとき

$$-2\leqq Y\leqq 1$$

である．よって，X が 130 以上 160 以下の値をとる確率 $P\ (130\leqq X\leqq 160)$ は

$$\begin{aligned}P(130\leqq X\leqq 160)&=P(-2\leqq Y\leqq 1)\\&=P(-2\leqq Y\leqq 0)+P(0\leqq Y\leqq 1)\\&=P(0\leqq Y\leqq 2)+P(0\leqq Y\leqq 1)\\&=0.477+0.341\\&=0.818\end{aligned}$$

より，およそ $\boxed{0}.\boxed{82}$ である．

1 回の試行において

赤球が取り出される確率は，$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

であり

白球が取り出される確率は，$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

である．

二項分布の平均，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると，平均 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ は

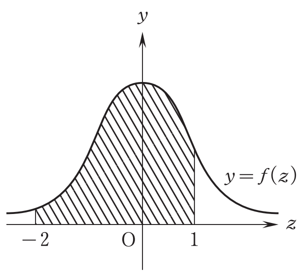
$$E(X)=np$$
$$V(X)=npq$$
$$\sigma(X)=\sqrt{npq}$$

である．

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N(np,\ npq)$ に従う．ただし，$q=1-p$ である．

平均 0，標準偏差 1 の正規分布 $N(0,\ 1)$ を標準正規分布という．



標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

で，曲線 $y=f(z)$ は y 軸に関して対称であるから

$$P(-2\leqq Z\leqq 0)=P(0\leqq Z\leqq 2)$$

が成り立つ．

【数 学 ①】

旧 数 学 I

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア$\sqrt{イ}$	$2\sqrt{3}$	2	
	ウ$\sqrt{エ}$	$2\sqrt{2}$	2	
	オカ	10	2	
	$\frac{\sqrt{キ}}{ク}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	
	ケコ	98	2	
	サ	0	2	
	シスセソ	3135	2	
	タx−チツ，テ	$3x-19$，6	2	
	ト＋$\sqrt{ナ}$	$3+\sqrt{6}$	3	
	ニ＜x＜$\frac{ヌネ}{ノ}$	$3<x<\frac{19}{3}$	3	
	ハ	6	3	
第1問 自己採点小計			(25)	
第2問	アa	$3a$	2	
	イa^2−ウa−エ	$2a^2-2a-4$	2	
	a＜オカ，キ＜a	$a<-1$，$2<a$	2	
	$\frac{ク-ケ\sqrt{コ}}{11}$	$\frac{1-3\sqrt{5}}{11}$	3	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{3}$	2	
	スセa^2−ソa−タ	$11a^2-8a-3$	3	
	チa^2−ツa−テ	$2a^2-2a-4$	3	
	$a<-\frac{ト}{ナニ}$	$a<-\frac{3}{11}$	2	
	ヌ＜a	$2<a$	2	
	$\frac{\sqrt{ネノ}-ハ}{ヒフ}$	$\frac{\sqrt{37}-2}{11}$	4	
第2問 自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{8}$	3	
	$\frac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{8}$	3	
	$\frac{カキ\sqrt{ク}}{ケ}$	$\frac{15\sqrt{7}}{4}$	3	
	$\frac{コ\sqrt{サ}}{シ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{2}$	4	
	$\frac{ス}{セ}$	$\frac{1}{2}$	4	
	ソタ°	90°	3	
	$\frac{チ}{ツ}$	$\frac{5}{8}$	5	
	$\frac{\sqrt{テ}}{ト}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	5	
第3問 自己採点小計			(30)	
第4問	アx＋イ−$\sqrt{5}$	$2x+5-\sqrt{5}$	2	
	ウエ	−1	2	
	オ＋$\sqrt{5}$	$5+\sqrt{5}$	2	
	カキx＋ク＋$\sqrt{5}$	$-2x+3+\sqrt{5}$	2	
	ケコ	−2	3	
	サ＋$\sqrt{シ}$	$1+\sqrt{5}$	3	
	ス	0 ※	3	
	セ	4 ※	3	
第4問 自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

※の正解は順序を問わない．

第1問　数と式，方程式・不等式

〔1〕 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$ とする．

$$x+\sqrt{2}\,y=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\quad x-\sqrt{2}\,y=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$x^2+2y^2=\boxed{\text{オカ}},\quad xy=\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

これらより

$$x^4+4y^4=\boxed{\text{ケコ}}$$

であり，また $m\leqq 128y^4<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{サ}}$ であるから，$n\leqq 32x^4<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{シスセソ}}$ である．

〔2〕 整式 $P=3x^2-19y^2+3xy^2-18xy-19x+114y$ を考える．

(1) $P=\left(\boxed{\text{タ}}x-\boxed{\text{チツ}}\right)y^2-\boxed{\text{テ}}\left(\boxed{\text{タ}}x-\boxed{\text{チツ}}\right)y+\left(\boxed{\text{タ}}x-\boxed{\text{チツ}}\right)x$

$=\left(\boxed{\text{タ}}x-\boxed{\text{チツ}}\right)\left(x+y^2-\boxed{\text{テ}}y\right)$

である．

(2) $y=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ とすると

$$y=\boxed{\text{ト}}+\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$$

であり，このとき，$P<0$ を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ニ}}<x<\frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

である．

(3) $P<0$ を満たす1桁(けた)の自然数 x がちょうど6個であるような自然数 y のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ハ}}$ である．

【解説】 問題

〔1〕 旧数学Ⅰ・旧数学A 第1問〔1〕に同じである．

〔2〕 問題

$P=3x^2-19y^2+3xy^2-18xy-19x+114y.$

(1) $P=(3x-19)y^2-(18x-114)y+(3x^2-19x)$

$=\left(\boxed{3}x-\boxed{19}\right)y^2-\boxed{6}(3x-19)y+(3x-19)x$

$=(3x-19)(x+y^2-6y)$

である．

☜ $A=3x-19$ とおくと，

$P=Ay^2-6Ay+Ax$

$=A(x+y^2-6y)$

$=(3x-19)(x+y^2-6y).$

旧数学Ⅰ

(2)
$$y=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{15+5\sqrt{6}}{8-3}$$
$$=\boxed{3}+\sqrt{\boxed{6}}$$

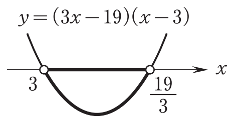
であり,
$$y^2-6y=y(y-6)$$
$$=(3+\sqrt{6})\{(3+\sqrt{6})-6\}$$
$$=(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}-3)$$
$$=6-9$$
$$=-3$$

である.

　よって,
$$P=(3x-19)(x-3)$$

であり, $P<0$ を満たす x の値の範囲は,
$$\boxed{3}<x<\frac{\boxed{19}}{\boxed{3}}$$

☜



である.

(3)
$$P=3\left(x-\frac{19}{3}\right)\{x-(-y^2+6y)\}.$$

(i) $\frac{19}{3}<-y^2+6y$ のとき.

$P<0$ を満たす x の範囲は,
$$\frac{19}{3}<x<-y^2+6y.$$

$\frac{19}{3}=6+\frac{1}{3}>6$ であるから, $P<0$ を満たす1桁の自然数 x が6個になることはない.

(ii) $-y^2+6y=\frac{19}{3}$ のとき.

$P<0$ は, $3\left(x-\frac{19}{3}\right)^2<0$ となるが, これを満たす実数 x は存在しない.

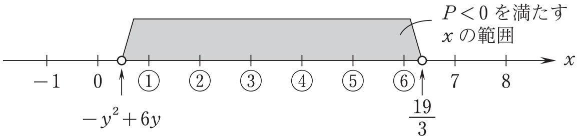
(iii) $-y^2+6y<\frac{19}{3}$ のとき.

$P<0$ を満たす x の範囲は,
$$-y^2+6y<x<\frac{19}{3}.$$

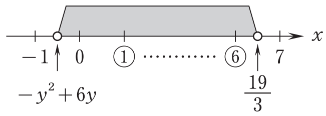
これを満たす1桁の自然数 x がちょうど6個ある条件は,

$$-y^2+6y<1 \qquad \cdots ①$$

である．



（○ は $P<0$ を満たす 1 桁の自然数 x）



$-y^2+6y$ が負であっても $P<0$ を満たす 1 桁の自然数 x は，

1，2，3，4，5，6

の 6 個である．

① を解くと，

$$y^2-6y+1>0$$

$$y<3-2\sqrt{2},\quad 3+2\sqrt{2}<y$$

となり，$2<2\sqrt{2}\,(=\sqrt{8})<3$ より，

$$0<3-2\sqrt{2}<1,\quad 5<3+2\sqrt{2}<6$$

であることに注意すると，$P<0$ を満たす 1 桁の自然数 x がちょうど 6 個であるような最小の自然数 y は，

$$\boxed{6}$$

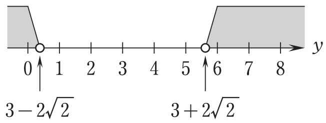
である．

$-3<-2\sqrt{2}<-2$ より，

$$0<3-2\sqrt{2}<1.$$

$2<2\sqrt{2}<3$ より，

$$5<3+2\sqrt{2}<6.$$



第 2 問　2 次関数　問題

数学 I　第 4 問に同じである．

第 3 問　図形と計量　問題

数学 I　第 3 問に同じである．

第 4 問　方程式・不等式

$y=|x+1|+|x-\sqrt{5}|+4$ とする．

(1) $\sqrt{5}\leqq x$ のとき

$$y=\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}-\sqrt{5}$$

$\boxed{\text{ウエ}}\leqq x<\sqrt{5}$ のとき

$$y=\boxed{\text{オ}}+\sqrt{5}$$

$x<\boxed{\text{ウエ}}$ のとき

$$y=\boxed{\text{カキ}}x+\boxed{\text{ク}}+\sqrt{5}$$

である．

(2) $y=7+\sqrt{5}$ とすると

$$x=\boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}}+\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(3) $-2<a<0$ ならば，x の方程式

$$|x+1|+|x-\sqrt{5}|+4=ax+\boxed{\text{オ}}+\sqrt{5}$$

の解は，$\boxed{\text{ス}}$ と $\boxed{\text{セ}}$ である．

$\boxed{\text{ス}}$ と $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，⓪～④のうちから一つずつ選べ．ただし，$\boxed{\text{ス}}$ と $\boxed{\text{セ}}$ の解答の順序は問わない．

⓪ 0　　① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{a-2}$　　② $\dfrac{\sqrt{5}}{a+3}$

③ $\dfrac{a-3}{2}$　　④ $-\dfrac{2}{a+2}$

【解説】

問題

$$y=|x+1|+|x-\sqrt{5}|+4. \qquad \cdots①$$

(1) $|x+1|=\begin{cases} x+1 & (x\geqq -1 \text{ のとき}), \\ -(x+1) & (x<-1 \text{ のとき}), \end{cases}$

$|x-\sqrt{5}|=\begin{cases} x-\sqrt{5} & (x\geqq \sqrt{5} \text{ のとき}), \\ -(x-\sqrt{5}) & (x<\sqrt{5} \text{ のとき}). \end{cases}$

よって，① は次のようになる．

$\sqrt{5}\leqq x$ のとき，

$$\begin{aligned} y&=(x+1)+(x-\sqrt{5})+4 \\ &=\boxed{2}x+\boxed{5}-\sqrt{5}. \end{aligned} \qquad \cdots②$$

$\boxed{-1}\leqq x<\sqrt{5}$ のとき，

$$\begin{aligned} y&=(x+1)-(x-\sqrt{5})+4 \\ &=\boxed{5}+\sqrt{5}. \end{aligned} \qquad \cdots③$$

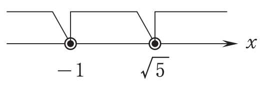
☜　実数 a に対して，

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}), \\ -a & (a<0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

☜　これらより，① の絶対値記号をはずすには，

$\sqrt{5}\leqq x$，$-1\leqq x<\sqrt{5}$，$x<-1$

の各場合に分ければよいとわかる．



$x<-1$ のとき，

$$y=-(x+1)-(x-\sqrt{5})+4$$
$$=\boxed{-2}x+\boxed{3}+\sqrt{5}. \qquad \cdots ④$$

(2) $\sqrt{5}\leqq x$ のとき，$y=7+\sqrt{5}$ とすると，② より，

$$7+\sqrt{5}=2x+5-\sqrt{5}$$

であり，

$$x=1+\sqrt{5}.$$

（これは $\sqrt{5}\leqq x$ を満たす．）

$-1\leqq x<\sqrt{5}$ のとき，③ より $y=5+\sqrt{5}$ であるから，

$y=7+\sqrt{5}$ となる x はない．

$x<-1$ のとき，$y=7+\sqrt{5}$ とすると，④ より，

$$7+\sqrt{5}=-2x+3+\sqrt{5}$$

であり，

$$x=-2.$$

（これは $x<-1$ を満たす．）

したがって，$y=7+\sqrt{5}$ とすると，

$$x=\boxed{-2},\quad \boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

(3)
$$|x+1|+\left|x-\sqrt{5}\right|+4=ax+5+\sqrt{5}. \qquad \cdots ⑤$$

$\sqrt{5}\leqq x$ のとき，⑤ は ② より，

$$2x+5-\sqrt{5}=ax+5+\sqrt{5}$$

であり，

$$(2-a)x=2\sqrt{5}$$

すなわち

$$x=\frac{2\sqrt{5}}{2-a}$$

☞ $-2<a<0$ より，$2-a\neq 0$.

である．

ここで，$-2<a<0$ すなわち $2<2-a<4$ より，

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2-a}<\frac{1}{2}$$
$$\frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{2\sqrt{5}}{2-a}<\sqrt{5}$$

であるから，$\dfrac{2\sqrt{5}}{2-a}$ は $\sqrt{5}\leqq x$ を満たさず，$\sqrt{5}\leqq x$ のとき，⑤ の解はない．

☞ $\sqrt{5}\leqq x$ のとき，

(⑤ の左辺) $=2x+5-\sqrt{5}$
$\geqq 2\sqrt{5}+5-\sqrt{5}$
$=5+\sqrt{5}$

であり，$a<0$ より，

(⑤ の右辺) $<5+\sqrt{5}$

であるから，$\sqrt{5}\leqq x$ のとき，⑤ を満たす x はないとしてもよい．

$-1\leqq x<\sqrt{5}$ のとき，⑤ は ③ より，

$$5+\sqrt{5}=ax+5+\sqrt{5}$$

$$ax = 0$$

であり，$a \fallingdotseq 0$ より，

$$x = 0.$$

（これは $-1 \leqq x < \sqrt{5}$ を満たす.）

$x < -1$ のとき，⑤ は ④ より，

$$-2x + 3 + \sqrt{5} = ax + 5 + \sqrt{5}$$

$$(a+2)x = -2$$

であり，$a + 2 \fallingdotseq 0$ より，

$$x = -\frac{2}{a+2}$$

である.

ここで，$-2 < a < 0$ すなわち $0 < a+2 < 2$ より，

$$\frac{2}{a+2} > 1$$

$$-\frac{2}{a+2} < -1$$

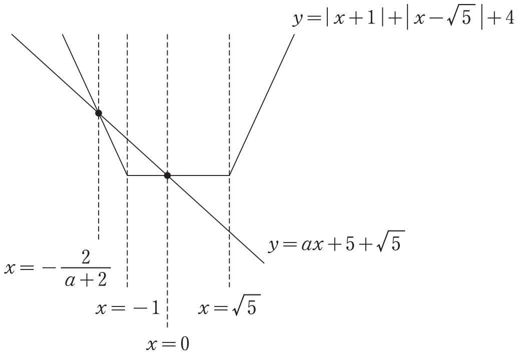
であるから，$x = -\dfrac{2}{a+2}$ は $x < -1$ を満たす.

以上より，方程式 ⑤ の解は，

$$x = 0,\ -\frac{2}{a+2}$$

であり，$\boxed{ス}$ と $\boxed{セ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ と $\boxed{④}$ である.

(注) 解は次の 2 つのグラフの交点の x 座標である.



旧数学Ⅰ・旧数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$ア\sqrt{イ}$	$2\sqrt{3}$	1	
	$ウ\sqrt{エ}$	$2\sqrt{2}$	1	
	オカ	10	2	
	$\frac{\sqrt{キ}}{ク}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
	ケコ	98	2	
	サ	0	2	
	シスセソ	3135	2	
	$タ<x<チ$	$0<x<1$	2	
	ツ	0	2	
	$\frac{テ}{ト}$	$\frac{1}{4}$	2	
	ナ	0	3	
		第1問 自己採点小計	(20)	
第2問	$アa$	$3a$	2	
	$イa^2-ウa-エ$	$2a^2-2a-4$	2	
	$a<オカ$, $キ<a$	$a<-1$, $2<a$	2	
	$\frac{ク-ケ\sqrt{コ}}{11}$	$\frac{1-3\sqrt{5}}{11}$	3	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$スセa^2-ソa-タ$	$11a^2-8a-3$	3	
	$チa^2-ツa-テ$	$2a^2-2a-4$	3	
	$a<-\frac{ト}{ナニ}$	$a<-\frac{3}{11}$	2	
	$ヌ<a$	$2<a$	2	
	$\frac{\sqrt{ネノ}-ハ}{ヒフ}$	$\frac{\sqrt{37}-2}{11}$	4	
		第2問 自己採点小計	(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{8}$	4	
	$\frac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{8}$	4	
	$\frac{カキ\sqrt{ク}}{ケ}$	$\frac{15\sqrt{7}}{4}$	4	
	$\frac{コ\sqrt{サ}}{シ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{2}$	4	
	$\frac{ス}{セ}$	$\frac{1}{2}$	4	
	$\frac{ソ\sqrt{タ}}{チツ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{14}$	5	
	$\frac{テ}{トナ}$	$\frac{9}{14}$	5	
		第3問 自己採点小計	(30)	
第4問	アイ	24	2	
	ウエ	12	2	
	オ	4	2	
	カ	4	2	
	キクケ	144	3	
	コ	3	2	
	$\frac{サ}{シス}$	$\frac{1}{12}$	3	
	$\frac{セソ}{タチ}$	$\frac{11}{18}$	3	
	$\frac{ツ}{テ}$	$\frac{1}{6}$	3	
	$\frac{トナ}{ニヌ}$	$\frac{13}{18}$	3	
		第4問 自己採点小計	(25)	
		自己採点合計	(100)	

第１問　数と式，集合・論理

〔１〕 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$ とする．

$$x+\sqrt{2}y=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\quad x-\sqrt{2}y=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$x^2+2y^2=\boxed{\text{オカ}},\quad xy=\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

これらより

$$x^4+4y^4=\boxed{\text{ケコ}}$$

であり，$m\leqq 128y^4<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{サ}}$ であるから，$n\leqq 32x^4<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{シスセソ}}$ である．

〔２〕 k を定数とする．実数 x に関する条件 p，q，r を次のように定める．

$p:|2x-1|<1$

$q:x^2-x+k\leqq 0$

$r:\big|2|2x-1|-1\big|<1$

条件 q の否定を $\overline{q}$ で表す．

⑴ 不等式 $|2x-1|<1$ の解は

$$\boxed{\text{タ}}<x<\boxed{\text{チ}}$$

である．

⑵ 下の $\boxed{\text{ツ}}$ には，次の⓪～④のうちから当てはまるものを一つ選べ．

⓪ $>$　① $<$　② $\geqq$　③ $\leqq$　④ $=$

「すべての実数 x に対して $\overline{q}$ が成り立つ」が真となるような k の値の範囲は

$$k\ \boxed{\text{ツ}}\ \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．

⑶ $k=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ とする．r は（p かつ $\overline{q}$）であるための $\boxed{\text{ナ}}$．

$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

【解説】

問題

〔1〕

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{6}+2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-2}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-2}{6-4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

である．

よって，

$$x+\sqrt{2}y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$
$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}},$$
$$x-\sqrt{2}y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$$

であり，

$$x^2+2y^2=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{2}y)^2+(x-\sqrt{2}y)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 20$$
$$=\boxed{10},$$
$$xy=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{(x+\sqrt{2}y)^2-(x-\sqrt{2}y)^2\}$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2\}$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot 4$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

である．

$$(x+\sqrt{2}y)^2+(x-\sqrt{2}y)^2$$
$$=(x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2)+(x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2)$$
$$=2(x^2+2y^2)$$

より，

☜ $x^2+2y^2=\frac{1}{2}\{(x+\sqrt{2}y)^2+(x-\sqrt{2}y)^2\}$．

$$(x+\sqrt{2}y)^2-(x-\sqrt{2}y)^2$$
$$=(x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2)-(x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2)$$
$$=4\sqrt{2}xy$$

より，

$xy=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{(x+\sqrt{2}y)^2-(x-\sqrt{2}y)^2\}$．

☜
$$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

☜
$$x^2+2y^2=(x+\sqrt{2}y)^2-2\sqrt{2}xy$$
$$=(2\sqrt{3})^2-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=10$$

と求めてもよい．

さらに，

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= (x^2+2y^2)^2-4(xy)^2 \\ &= 10^2-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= 100-4\cdot\frac{1}{2} \\ &= \boxed{98} \end{aligned} \qquad \cdots ①$$

☜ $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ において $A=x^2$，$B=2y^2$ とすると，

$$x^4+4y^4=(x^2+2y^2)^2-4(xy)^2$$

となる．

である．

ここで，

$$4y=4\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2}=2(\sqrt{6}-2)=\sqrt{24}-4$$

より，

$$0<4y<1$$

☜ $4=\sqrt{16}<\sqrt{24}<\sqrt{25}=5$ より，

$$0<\sqrt{24}-4<1.$$

であるから，

$$0<(4y)^4<1^4$$

$$0<256y^4<1$$

すなわち

$$0<128y^4<\frac{1}{2}$$

である．

よって，

$$0<128y^4<1 \qquad \cdots ②$$

が成り立ち，$m \leqq 128y^4<m+1$ を満たす整数 m は，

$$\boxed{0}$$

である．

また，① より，

$$x^4+4y^4=98$$

$$32(x^4+4y^4)=32\cdot 98$$

$$32x^4+128y^4=3136$$

すなわち

$$128y^4=3136-32x^4$$

である．

これを ② に代入すると，

$$0<3136-32x^4<1$$

すなわち

$$3135<32x^4<3136$$

である．

したがって，$n \leqq 32x^4<n+1$ を満たす整数 n は，

$$\boxed{3135}$$

である．

［2］ **問題**

(1) 不等式 $|2x-1|<1$ の解は

$$-1<2x-1<1$$

より，

$$\boxed{0}<x<\boxed{1}$$

である．

☜ $a>0$ のとき，$|X|<a$ を満たす実数 X の値の範囲は，
$$-a<X<a.$$

(2) 条件 $\overline{q}$ は，

$$x^2-x+k>0$$

すなわち

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}>0 \qquad \cdots ①$$

であるから，「すべての実数 x に対して $\overline{q}$ が成り立つ」が真となるような k の値の範囲は，

$$k-\frac{1}{4}>0$$

より，

$$k>\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

である．

したがって，$\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

☜ 放物線 $y=x^2-x+k$ において，
（頂点の y 座標）>0.

☜ 2 次方程式 $x^2-x+k=0$ において，
（判別式）$=(-1)^2-4k<0$
より，
$$k>\frac{1}{4}$$
と求めてもよい．

(3)
$$\bigl|2|2x-1|-1\bigr|<1$$

は，(1) より，

$$0<|2x-1|<1$$

すなわち

$$|2x-1|\neq 0 \quad かつ \quad |2x-1|<1$$

となる．

したがって，条件 r は，

$$x\neq\frac{1}{2} \quad かつ \quad 0<x<1$$

すなわち

$$0<x<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<x<1 \qquad \cdots ②$$

である．

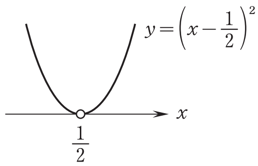
一方，条件 p は (1) より $0<x<1$ であり，また $k=\frac{1}{4}$ のときの条件 $\overline{q}$ は ① より，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>0$$

すなわち

☜ $$\bigl|2|2x-1|-1\bigr|<1$$
において，$t=|2x-1|$ とおくと，
$$|2t-1|<1$$
となり，(1) より，
$$0<t<1$$
であるから，
$$0<|2x-1|<1.$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$



である.

よって，条件 p かつ $\overline{q}$ は，

$$0<x<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<x<1 \qquad \cdots ③$$

である.

②，③ より，r は(p かつ $\overline{q}$)であるための必要十分条件であるから，$\boxed{ナ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である.

第2問　2次関数

問題

数学Ⅰ 第4問に同じである.

第 3 問　図形と計量，平面図形

△ABC において，AB＝4，BC＝5，CA＝6 とする．このとき

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

点 A から辺 BC に垂線を下ろし，垂線と辺 BC との交点を D とすると

$$\mathrm{AD}=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \mathrm{BD}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

さらに，直線 AD と △ABC の外接円との交点のうち A と異なる方を E とし，辺 AB 上に点 F を ∠BCF＝∠BCE となるようにとる．また，線分 CF と線分 AE の交点を G とする．このとき

$$\mathrm{DG}=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

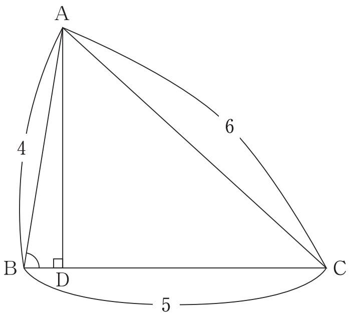
であり，△BDF の外接円と直線 EF の交点のうち F と異なる方を H とすると

$$\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EF}=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である．

【解説】

問題



余弦定理より，

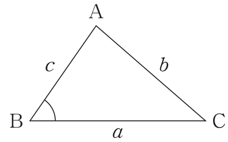
$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

$$=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

である．

☜ **余弦定理**



$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

$$= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{8}}$$

☜ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

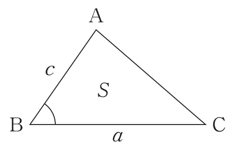
である．

$$(\triangle ABC\text{ の面積}) = \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$= \frac{\boxed{15}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}$$

☜ **三角形の面積**



$$S = \frac{1}{2}ca\sin B.$$

である．

直角三角形 ABD に着目すると，

$$AD = AB\sin\angle ABC$$

$$= 4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

☜ $\sin\angle ABC = \dfrac{AD}{AB}.$

であり，

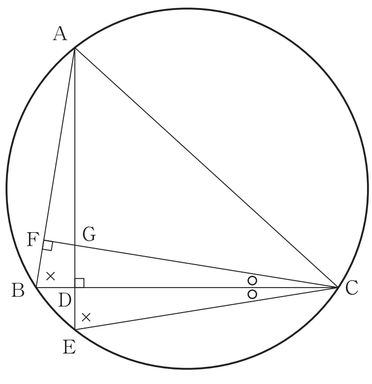
$$BD = AB\cos\angle ABC$$

$$= 4\cdot\frac{1}{8}$$

$$= \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

☜ $\cos\angle ABC = \dfrac{BD}{AB}.$

である．



条件より，

$$\angle BCF = \angle BCE$$

☜ 図の○印.

である．

また，円周角の定理より，

$$\angle ABC = \angle AEC$$

☜ 図の×印.

であるから，

$$\triangle \mathrm{BCF} \backsim \triangle \mathrm{ECD}$$

であり，△BCF は直角三角形である．

☜ $\angle \mathrm{BFC} = \angle \mathrm{EDC} = 90^\circ$.

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{BF} &= \mathrm{BC}\cos\angle \mathrm{FBC}\\ &= 5\cdot\frac{1}{8}\\ &= \frac{5}{8},\end{aligned}$$

☜ $\cos\angle \mathrm{FBC} = \dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BC}}$.

☜ $\cos\angle \mathrm{FBC} = \cos\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{8}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{CF} &= \mathrm{BC}\sin\angle \mathrm{FBC}\\ &= 5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}\\ &= \frac{15\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

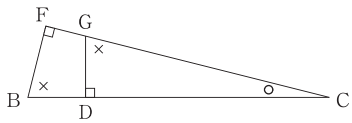
☜ $\sin\angle \mathrm{FBC} = \dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{BC}}$.

☜ $\sin\angle \mathrm{FBC} = \sin\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

である．

また，

$$\triangle \mathrm{BCF} \backsim \triangle \mathrm{GCD}$$

☜ 

であるから，

$$\mathrm{BF} : \mathrm{GD} = \mathrm{CF} : \mathrm{CD}$$

$$\frac{5}{8} : \mathrm{DG} = \frac{15\sqrt{7}}{8} : \frac{9}{2}$$

☜ $\mathrm{CD} = \mathrm{BC} - \mathrm{BD} = 5 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}$.

$$\mathrm{DG} = \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{14}}$$

☜ DG＝DE と方べきの定理より得られる

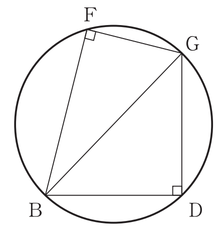
$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DE} = \mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$$

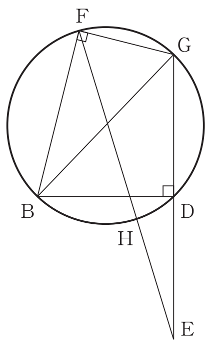
を用いて考えてもよい．

である．

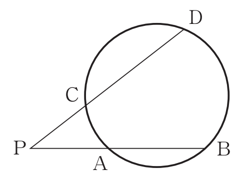
$$\angle \mathrm{BFG} = \angle \mathrm{BDG} = 90^\circ$$

であるから，四角形 BDGF は円に内接する．

☜ 



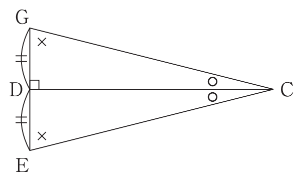
方べきの定理



☜ $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$.

方べきの定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EF} &= \mathrm{ED}\cdot\mathrm{EG}\\ &= \mathrm{ED}\cdot 2\mathrm{ED}\\ &= \frac{3\sqrt{7}}{14}\cdot\left(2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{14}\right)\\ &= \frac{\boxed{9}}{\boxed{14}}\end{aligned}$$

☜ 

△CED≡△CGD より，ED＝GD.

である．

第4問　場合の数・確率

(1) 白色と黒色のカードが1枚ずつと赤色のカードが2枚あり，赤色のカードの一方には1，他方には2と番号がつけられている．この4枚のカードを横一列に並べる．

並べ方は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，そのうち白色と黒色のカードが隣り合っているものは $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りである．また，白色と黒色のカードの間に，番号1の赤色のカードだけがはさまっているものは $\boxed{\text{オ}}$ 通りであり，番号1と番号2の赤色のカードがともにはさまっているものは $\boxed{\text{カ}}$ 通りである．

(2) 箱の中に1から4までの番号がつけられた4枚の赤色のカードが入っている．この箱の中から2枚のカードを取り出し，白色と黒色のカードを1枚ずつ加えた合計4枚のカードを横一列に並べる．カードの並べ方は全部で $\boxed{\text{キクケ}}$ 通りある．

カードの並びにより，次のように得点を定める．

・白色と黒色のカードが隣り合っているときは，得点を0点とする．

・白色と黒色のカードの間に赤色のカードがはさまっているときは

はさまっているカードの枚数を x

とし，さらに

$x=1$ ならば，$y=$（はさまっているカードの番号）

$x=2$ ならば，$y=$（はさまっている2枚のカードの大きい方の番号）

とし，得点を $y-x$ 点とする．

このとき，最高得点は $\boxed{\text{コ}}$ 点であり，得点が $\boxed{\text{コ}}$ 点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．

得点が0点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ であり，2点になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ 点である．

【解説】

問題

(1) 白色のカードを $\boxed{\text{W}}$，黒色のカードを $\boxed{\text{B}}$，番号1の赤色のカードを $\boxed{\text{R1}}$，番号2の赤色のカードを $\boxed{\text{R2}}$ と表す．

4枚のカードの並べ方は全部で，

$$4!=\boxed{24}\ (\text{通り})$$

ある．

白色と黒色のカードが隣り合うようなカードの並べ方は，$\boxed{\text{W}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の組を1枚と考えて $\boxed{}$ と表すと，$\boxed{}$，$\boxed{\text{R1}}$，$\boxed{\text{R2}}$ の3枚の並べ方が，

$$3!\text{ 通り}$$

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，W と B の並べ方が，

2! 通り

☜ W B と B W.

あるから，

$$3!\times 2!=\boxed{12}\ （通り）\quad\cdots①$$

である．

白色と黒色のカードの間に，番号 1 の赤色のカードだけがはさまっているようなカードの並べ方は，W と B と R1 の組を 1 枚と考えて □R1□ と表すと，□R1□，R2 の 2 枚の並べ方が，

2! 通り

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，W と B の並べ方が，

2! 通り

☜ W R1 B と B R1 W.

あるから，

$$2!\times 2!=\boxed{4}\ （通り）\quad\cdots②$$

である．

白色と黒色のカードの間に，番号 1 と番号 2 の赤色のカードがともにはさまっているような並べ方は，まず，両端に W と B を並べる方法が，

2! 通り

あり，そのそれぞれの並べ方に対して，R1 と R2 の並べ方が，

2! 通り

あるから，

$$2!\times 2!=\boxed{4}\ （通り）\quad\cdots③$$

である．

(2)　白色のカードを W，黒色のカードを B，番号 1，2，3，4 の赤色のカードをそれぞれ R1，R2，R3，R4 と表す．

箱の中から 2 枚のカードを取り出す方法は，

${}_4\mathrm{C}_2$ 通り

あり，その 2 枚と白色と黒色のカードを 1 枚ずつ加えた合計 4 枚のカードを横一列に並べる方法は，

☜ たとえば，箱の中から取り出した 2 枚の赤色のカードを R1，R3 とすると，4 枚のカード R1，R3，W，B を横一列に並べる．

4! 通り

ある．

よって，カードの並べ方は全部で，

$${}_4\mathrm{C}_2\times 4!=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$=\boxed{144}\ （通り）$$

あり，これらの並べ方は同様に確からしい．

与えられた条件から得点に関して次の表を得る．

（ただし，白色と黒色のカードが隣り合っているときは $x=y=0$ とする．）

x	0	1	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	3	4	2	3	4
得点 $(y-x)$	0	0	1	2	3	0	1	2

表より，最高得点は $\boxed{3}$ 点である．

得点が 3 点になるのは，

「箱の中から $\boxed{\mathrm{R4}}$ が取り出され，さらに，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\mathrm{R4}}$ だけがはさまっているとき」

である．

箱の中から $\boxed{\mathrm{R4}}$ を含んだ 2 枚を取り出す方法は，

$${}_3\mathrm{C}_1 \text{ 通り}$$

☜ $\boxed{\mathrm{R1}}$，$\boxed{\mathrm{R2}}$，$\boxed{\mathrm{R3}}$ から 1 枚．

あり，さらに白色と黒色のカードの間に $\boxed{\mathrm{R4}}$ だけをはさんで並べる並べ方は，② のときと同様に考えて，

$$2!\times 2!=4 \text{（通り）}$$

ある．

☜ たとえば，箱の中から取り出した 2 枚の赤色のカードを $\boxed{\mathrm{R4}}$，$\boxed{\mathrm{R1}}$ とすると，$\boxed{\mathrm{W}}$ と $\boxed{\mathrm{B}}$ と $\boxed{\mathrm{R4}}$ の組を 1 枚と考えて，$\boxed{\quad \mathrm{R4} \quad}$ と表す．$\boxed{\quad \mathrm{R4} \quad}$ と $\boxed{\mathrm{R1}}$ を並べる方法は 2! 通りあり，そのそれぞれの並べ方に対して，$\boxed{\mathrm{W}}$ と $\boxed{\mathrm{B}}$ の並べ方が 2! 通りある．

よって，得点が 3 点になる並べ方は，

$${}_3\mathrm{C}_1\times 4=12 \text{（通り）}$$

であるから，その確率は，

$$\frac{12}{144}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{12}} \qquad \cdots ④$$

である．

得点が 0 点になるのは，表より，次の 3 つの場合がある．

(i) $x=0$，$y=0$，つまり，白色と黒色のカードが隣り合っているとき．

(ii) $x=1$，$y=1$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\mathrm{R1}}$ だけをはさんで並べるとき．

(iii) $x=2$，$y=2$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{\mathrm{R1}}$，$\boxed{\mathrm{R2}}$ をはさんで並べるとき．

(i)のとき．

箱の中から 2 枚を取り出す方法は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあり，そのそれぞれに対して白色と黒色のカードが隣り合っている並べ方は，① のときと同様に考えて，$3!\times 2!=12$（通り）あるから，(i)の並べ方は，

$${}_4\mathrm{C}_2\times 12=72 \text{（通り）}$$

である．

(ii) のとき．

得点が 3 点になる場合のときと同様に考えて，(ii) の並べ方は，

$${}_3C_1\times(2!\times2!)=12 \text{（通り）}$$

である．

(iii) のとき．

箱の中から $\boxed{R1}$，$\boxed{R2}$ を取り出す方法は 1 通りであり，その 1 通りに対して白色と黒色のカードの間に $\boxed{R1}$，$\boxed{R2}$ をはさんで並べる方法は，③ より 4 通りあるから，(iii) の並べ方は，

$$1\times4=4 \text{（通り）}$$

である．

したがって，得点が 0 点となる並べ方は，(i)，(ii)，(iii) より，

$$72+12+4=88 \text{（通り）}$$

あるから，その確率は，

$$\frac{88}{144}=\frac{\boxed{11}}{\boxed{18}} \qquad \cdots⑤$$

である．

次に，得点が 2 点になるのは，表より，次の 2 つの場合がある．

(iv) $x=1$，$y=3$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{R3}$ だけをはさんで並べるとき．

(v) $x=2$，$y=4$，つまり，白色と黒色のカードの間に $\boxed{R4}$ ともう 1 枚赤色のカードをはさんで並べるとき．

(iv) のとき．

(ii) のときと同様であるから，(iv) の並べ方は，

12 通り

である．

(v) のとき．

箱の中から $\boxed{R4}$ を含んだ 2 枚のカードの取り出し方は ${}_3C_1$ 通りあり，そのそれぞれに対して白色と黒色のカードの間に赤色のカードを 2 枚はさんで並べる方法は，③ のときと同様に 4 通りであるから，(v) の並べ方は，

$${}_3C_1\times4=12 \text{（通り）}$$

である．

したがって，得点が 2 点となる並べ方は，(iv)，(v) より，

$$12+12=24 \text{（通り）}$$

あるから，その確率は，

$$\frac{24}{144}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} \qquad \cdots ⑥$$

である．

　また，表より，得点は 0 点，1 点，2 点，3 点のいずれかであるから，④，⑤，⑥ より，得点が 1 点となる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{12}+\frac{11}{18}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}$$

である．

得点	0	1	2	3	計
確率	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	1

　ゆえに，得点の期待値は，

$$0\times\frac{11}{18}+1\times\frac{5}{36}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{12}$$

$$=\frac{26}{36}$$

$$=\frac{\boxed{13}}{\boxed{18}} \text{（点）}$$

である．

☜ **余事象の確率**

　ある試行において，事象 A の起こる確率を $P(A)$ とすると，A の余事象 $\overline{A}$ の起こる確率 $P(\overline{A})$ は，

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

☜ **期待値**

　試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$$

$$(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，X の期待値 E は，

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

旧数学Ⅱ・旧数学B

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	0	2	
	イ	5	3	
	ウ，エ	2，1	3	
	オ，カ，キ	4，1，2	2	
	ク	1	2	
	ケ	6	2	
	コ$\sqrt{サ}$，シ	$2\sqrt{3}$，3	2	
	スセ，ソ	-2，3	2	
	タt^2＋チt＋ツ	$-t^2+2t+3$	2	
	テ	2	1	
	ト	3	1	
	ナニ	-5	2	
	ヌ	4	2	
	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{5}{3}$	2	
	$\frac{ハヒ}{フ}$	$\frac{13}{6}$	2	
		第1問　自己採点小計	(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ，ウ，エ	3，6，6，3	3	
	オ	2	3	
	カ	1	3	
	キ	6	3	
	ク	3	3	
	（ケ，コサ）	$(1,\ -1)$	3	
	（シ，ス）	$(2,\ 0)$	3	
	$\frac{セソ}{タ}x+\frac{チ}{ツ}$	$\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}$	3	
	テ	1	3	
	$\frac{ト}{ナ}$	$\frac{4}{3}$	3	
		第2問　自己採点小計	(30)	
第3問	アn＋イ	$2n+1$	2	
	$n^{ウ}$＋エn	n^2+2n	2	
	$\frac{1}{オ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{1}{カk+キ}-\frac{1}{クk+ケ}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}$	2	
	$\frac{n}{コ(サn+シ)}$	$\frac{n}{3(2n+3)}$	2	
	スセ	32	2	
	ソタ	32	2	
	チツ	39	2	
	テn^2－トn＋ナ	$2n^2-2n+3$	2	
	ニヌネ	333	2	
		第3問　自己採点小計	(20)	

旧数学Ⅱ・旧数学B

問題番号	解答記号	正　　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$, $\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{キ}{ク}$, $\frac{ケ}{コ}$, $\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$	2	
	ス	3	2	
	セ	2	2	
	ソ	6	2	
	タ	3	2	
	$\frac{チツ}{テト}$	$\frac{33}{13}$	3	
	$\frac{ナニ}{ヌネ}$	$\frac{40}{13}$	3	
		第4問　自己採点小計	(20)	
第5問	ア.イ	3.5	2	
	ウ.エオ	1.45	2	
	カ.キ	0.1	2	
	$a=$ク	$a=3$	2	
	$b=$ケ	$b=5$	2	
	コ	0	2	
	サ.シ	0.3	3	
	ス.セソ	0.03	3	
	タ	2	2	
		第5問　自己採点小計	(20)	

問題番号	解答記号	正　　解	配点	自己採点
第6問	ア	2	2	
	イ	$\boldsymbol{a}$	2	
	ウ	0	2	
	エ	1	3	
	オ	4	3	
	50＝カキ＋クケ	50＝19＋31	4	
	コサ	12	4	
		第6問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

第 1 問　指数関数・対数関数，三角関数

問題

問題

数学Ⅱ・数学B 第 1 問 に同じである。

第 2 問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学B 第 2 問 に同じである。

第 3 問　数列

問題

数学Ⅱ・数学B 第 3 問 に同じである。

第 4 問　ベクトル

問題

数学Ⅱ・数学B 第 4 問 に同じである。

第 5 問　統　計

次の資料は，あるサッカーチーム 10 チームについての守備力，攻撃力について，守備力を変量 x（点），攻撃力を変量 y（点）として，それぞれを 1，2，3，4，5 の 5 段階評価で，5 点を最高点，1 点を最低点としてまとめたものである。

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁（けた）数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

チーム名	守備力（x）	攻撃力（y）
A	4	3
B	5	3
C	2	1
D	1	a
E	3	b
F	4	5
G	4	2
H	3	3
I	5	4
J	4	1

(1)　変量 x の平均値は $\boxed{ア}.\boxed{イ}$ 点，分散は $\boxed{ウ}.\boxed{エオ}$ である。また，変量 x において，全体に対する $x=2$ の相対度数は $\boxed{カ}.\boxed{キ}$ である。

(2)　変量 y の平均値は 3 点，分散は 1.8 であり，表中の a，b は $a \leqq b$ を満たすとすると

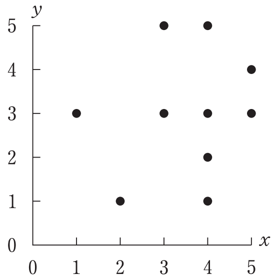
$$a=\boxed{ク},\quad b=\boxed{ケ}$$

である。

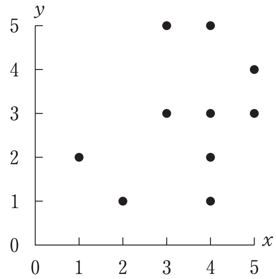
このとき，二つの変量 x，y の相関図（散布図）として適切なものは $\boxed{コ}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

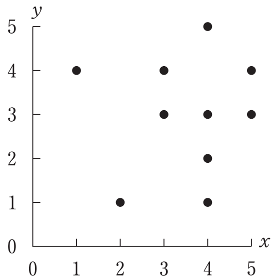
⓪



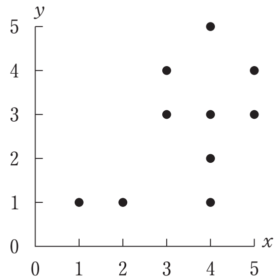
①



②



③



また，二つの変量 x と y の共分散は $\boxed{\text{サ}}.\boxed{\text{シ}}$ であり，相関係数の値を r とすると

$$r^2 = \boxed{\text{ス}}.\boxed{\text{セソ}}$$

であるから，二つの変量 x と y には $\boxed{\text{タ}}$．$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　強い正の相関関係がある

①　強い負の相関関係がある

②　ほとんど相関関係がない

【解説】

問題

チーム名	守備力 (x)	攻撃力 (y)
A	4	3
B	5	3
C	2	1
D	1	a
E	3	b
F	4	5
G	4	2
H	3	3
I	5	4
J	4	1

(表 1)

(1) (表 1)より，変量 x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{10}(4+5+2+1+3+4+4+3+5+4)$$

$$=\boxed{3}.\boxed{5}\ (点)$$

であり，変量 x の分散 ${s_x}^2$ は

$${s_x}^2=\frac{1}{10}(4^2+5^2+2^2+1^2+3^2+4^2+4^2+3^2+5^2+4^2)-3.5^2$$

$$=\frac{1}{10}(1^2+2^2+3^2\times2+4^2\times4+5^2\times2)-12.25$$

$$=13.70-12.25$$

$$=\boxed{1}.\boxed{45}$$

である．

また，全体に対する $x=2$ の相対度数は

$$\frac{1}{10}=\boxed{0}.\boxed{1}$$

である．

(2) (表 1)より，変量 y の平均値 $\overline{y}$ は

$$\overline{y}=\frac{1}{10}(3+3+1+a+b+5+2+3+4+1)$$

$$=\frac{1}{10}(a+b+22)$$

である．ここで，$\overline{y}=3$ より

$$\frac{1}{10}(a+b+22)=3$$

すなわち

$$a+b=8. \qquad \cdots①$$

平均値

変量 x のとる値を

$x_k \quad (k=1, 2, \cdots, N)$

とすると，x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k.$$

分散

変量 x のとる値を

$x_k \quad (k=1, 2, \cdots, N)$

とすると，分散 s^2 は，平均値を $\overline{x}$ として

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2 \qquad \cdots(\mathrm{i})$$

または

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{x_k}^2-\overline{x}^2. \qquad \cdots(\mathrm{ii})$$

ここでは(ii)を用いた．

相対度数

ある階級の度数を資料全体の個数で割った値をその階級の相対度数という．

(表 1)においては，$x=2$ であるチームは C だけである．

また，(表 1)より，変量 y の分散 ${s_y}^2$ は

$${s_y}^2=\frac{1}{10}(3^2+3^2+1^2+a^2+b^2+5^2+2^2+3^2+4^2+1^2)-3^2$$
$$=\frac{1}{10}(a^2+b^2+74)-9$$

☜ 前ページの分散の計算式である(i)を用いて計算してもよい．

である．ここで，${s_y}^2=1.8$ より

$$\frac{1}{10}(a^2+b^2+74)-9=1.8$$
$$\frac{1}{10}(a^2+b^2+74)=\frac{108}{10}$$

すなわち

$$a^2+b^2=34.$$

さらに変形すると

$$(a+b)^2-2ab=34.$$

これに ① を代入して，ab の値を求めると

$$ab=15. \qquad \cdots ②$$

① かつ ② を満たす自然数 a，b の組で，さらに

$$\begin{cases} 1 \leqq a \leqq 5, \\ 1 \leqq b \leqq 5, \\ a \leqq b \end{cases}$$

☜ ① かつ ② より，a，b を 2 解にもつ 2 次方程式の一つは
$$t^2-8t+15=0$$
であり
$$(t-3)(t-5)=0$$
$$t=3,\ 5$$
より
$(a,\ b)=(3,\ 5)$ または $(a,\ b)=(5,\ 3)$
であることがわかる．

を満たすものは

$$(a,\ b)=(3,\ 5)$$

のみである．よって

$$a=\boxed{3},\quad b=\boxed{5}$$

である．

以上のことより，二つの変量 x，y の相関図(散布図)をかくと選択肢⓪の図となる．すなわち，$\boxed{\text{コ}}$ は $\boxed{⓪}$ である．

☜ $a=3$ がわかったので，D チームについて，$(x,\ y)=(1,\ 3)$ の情報が得られる．これより，選択肢においては，①，②，③が誤りであることがすぐわかる．

次に，二つの変量 x，y についての偏差などを(表 2)にまとめてみる．

☜ **偏差**

変量 x のとる値を
$$x_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$
とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき
$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_N-\overline{x}$$
をそれぞれ x_1，x_2，$\cdots$，x_N の偏差という．

チーム名	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
A	4	3	0.5	0	0
B	5	3	1.5	0	0
C	2	1	−1.5	−2	3
D	1	3	−2.5	0	0
E	3	5	−0.5	2	−1
F	4	5	0.5	2	1
G	4	2	0.5	−1	−0.5
H	3	3	−0.5	0	0
I	5	4	1.5	1	1.5
J	4	1	0.5	−2	−1

(表 2)

☜ $\overline{x}=3.5$，$\overline{y}=3$ であった．

(表 2)より，二つの変量 x，y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy}=\frac{1}{10}(0+0+3+0-1+1-0.5+0+1.5-1)$$

$$=\boxed{0}.\boxed{3}$$

である．また，相関係数の値を r とすると

$$r^2=\frac{{s_{xy}}^2}{{s_x}^2{s_y}^2}=\frac{0.3^2}{1.45\times1.8}$$

$$\fallingdotseq\boxed{0}.\boxed{03}$$

である．

よって，r の値は 0.2 より小であるから，二つの変量 x と y には，ほとんど相関関係がないことがわかる．すなわち，$\boxed{タ}$ は $\boxed{②}$ である．

共分散

二つの変量 x，y の値の組を

$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_N,\ y_N)$

とするとき

$$s_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$

を共分散という．ただし，$\overline{x}$，$\overline{y}$ はそれぞれ，変量 x，y の平均値である．

相関係数

変量 x の標準偏差 s_x，変量 y の標準偏差 s_y，そして変量 x，y の共分散 s_{xy} について

$$\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

を二つの変量 x，y の相関係数という．

第６問　コンピュータ

例えば $18=7+11$ のように，２桁の任意の偶数を二つの素数の和で表すプログラムを考える．

ここで，偶数の素数は２に限られるので，条件を満たす素数は明らかに奇数である．

(1)　まず，与えられた３以上の自然数 P が素数であるかを判定する部分について，次のような［プログラム１］を考えた．

［プログラム１］

```
100 INPUT P
110 FOR K=2 TO P-1
120    IF [ ア ] THEN LET P=0
130 NEXT K
140 PRINT P
150 END
```

$\boxed{\text{ア}}$ には，「P は K で割り切れる」を意味する条件式が入るが，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つ選べ．

ここで，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である．

⓪　INT(P/K)=0　　　①　INT(K/P)=0

②　INT(P/K)=P/K　　③　INT(K/P)=K/P

正しく作成された［プログラム１］を実行し，変数 P に対して３以上の整数 a を入力すると，出力される P の値は，a が素数ならば $\boxed{\text{イ}}$，素数でないならば $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　(1)のプログラムを使って，最初に意図したプログラムを次の［プログラム２］のように作成した．

ここで(1)の作業を繰り返し書き込む代わりに，サブルーチンと呼ばれる手法を用いている．この手法によれば，［プログラム２］の中の命令 GOSUB 300 が実行されると，いったん 300 行以下を実行し，RETURN が実行されると，元の GOSUB 文があった次の行へ戻る．

［プログラム２］

```
100 INPUT N
110 FOR J=3 TO N/2
120    IF J=INT(J/2)*2 THEN GOTO 210
130    LET P=J
140    GOSUB 300
150    LET Q=P
160    LET P=N-J
170    GOSUB 300
180    IF [ エ ] THEN
190      PRINT N;"=";Q;"+";P
200    END IF
210 NEXT J
```

```
220 GOTO 340
300 FOR K=2 TO P-1
310   IF [ ア ] THEN LET P=0
320 NEXT K
330 RETURN
340 END
```

エ には,「J と $N-J$ のいずれも素数である」を意味する条件式が入るが,このプログラムとして **エ** に入れて**正しく動作しない式**を,次の⓪～③のうちから一つ選べ.

⓪ P*Q>0　　① P+Q>0

② 2*P*Q-Q*Q>0　　③ (P>0 AND Q>0)

正しく作成した[プログラム 2]を実行し,変数 N に対して 50 を入力すると, **オ** 行にわたって出力が得られ,最後の出力は

50= **カキ** + **クケ**

である.また,プログラム終了までに 160 行は **コサ** 回実行される.

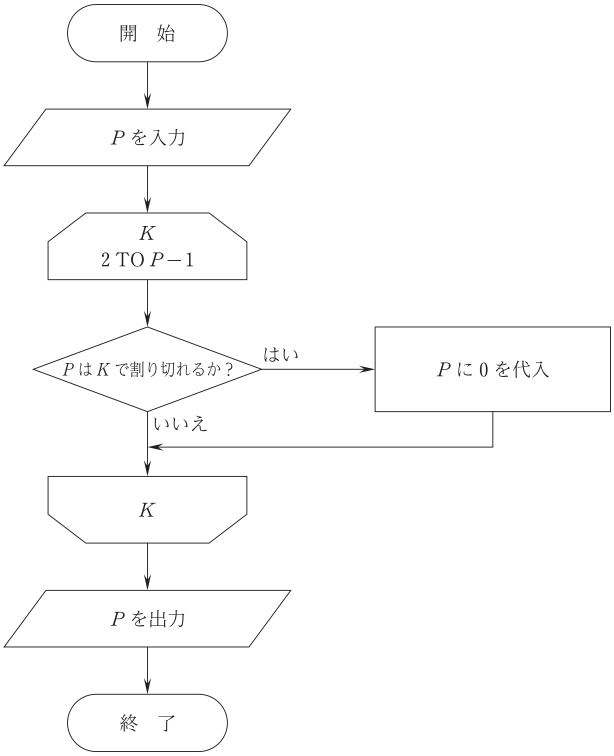
【解説】

問題

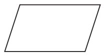
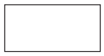
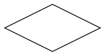
(1) P が K で割り切れることと $\dfrac{P}{K}$ の整数部分が $\dfrac{P}{K}$ と一致することは同値なので $\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{②}$ が当てはまる．

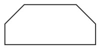
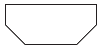
☜ INT(P/K) は $\dfrac{P}{K}$ の整数部分を与える．

このとき，〔プログラム 1〕の流れ図は次のようになる．



☜ この流れ図での記号の意味

記号	意味
	入出力
	処　理
	条件判断

記号  と  で囲まれた部分はループを表す．

〔プログラム 1〕を実行し，変数 P に対して 3 以上の整数 a を入力すると，a が素数ならば 110 行から 130 行までのループにおいて $\boxed{\text{ア}}$ の条件式は一度も真とならないので，P の値は $\boxed{a}$ のまま出力される．また，a が素数でないならば 110 行から 130 行までのループにおいて $\boxed{\text{ア}}$ の条件式が真となることがあるので，そのとき $P=0$ となり，140 行によって $\boxed{0}$ が出力される．

☜ 素数とは 1 と自分自身以外に正の約数をもたない 2 以上の整数である．

(2) 〔プログラム 2〕の動作を考えてみる．

まず，〔プログラム 1〕を参考にすることにより，300 行から 330行までのサブルーチンは P が素数ならば P の値を変化させず，P が素数でないならば P の値を 0 にするものとわかる．

よって，110 行から 210 行のループにおいて J の値は

$$J=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$$

と変化し，それぞれの J に対して

☜ 120 行により，J が偶数ならば 210 行に飛ぶ．

J が素数ならば $Q=J$

☜ 130～150 行に対応する.

とし

J が素数でないならば $Q=0$

とする. さらに

$N-J$ が素数ならば $P=N-J$

☜ 160, 170 行に対応する.

とし

$N-J$ が素数でないならば $P=0$

とする.

したがって, 180 行の $\boxed{\text{エ}}$ に入る

「J と $N-J$ のいずれも素数である」

という条件は

「$P \neq 0$　かつ　$Q \neq 0$」

と同じことである.

選択肢①の $P+Q>0$ は, たとえば

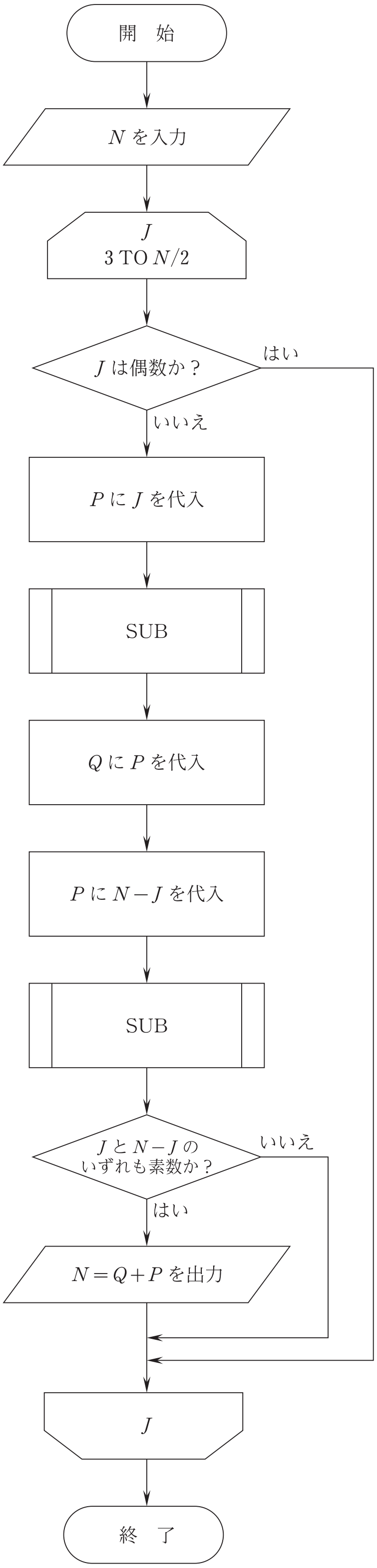
$P=0$,　$Q=5$

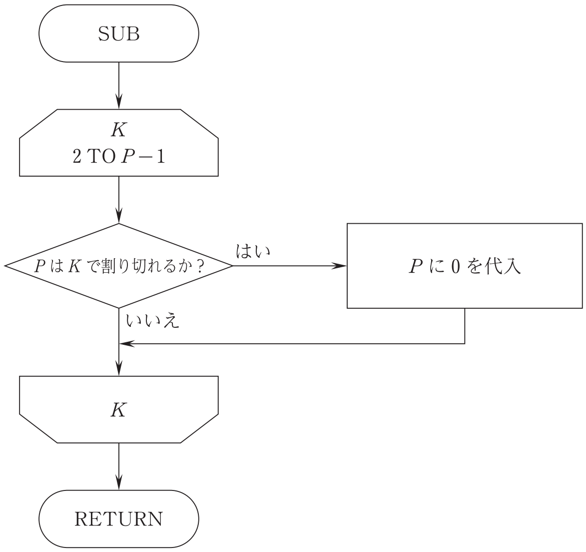
のときも成り立つので誤りである.

よって, $\boxed{\text{エ}}$ には $\boxed{①}$ が入る.

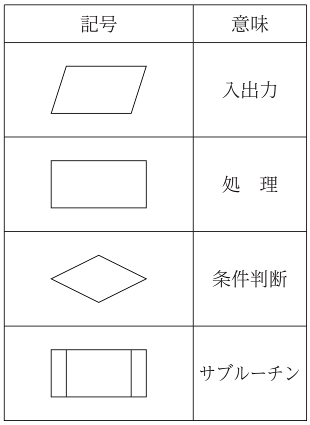
☜ 110 行により J は高々 $\frac{N}{2}$ までしか値をとらないので, 選択肢②は正しく動作する.

このことから〔プログラム 2〕の流れ図は次のようになる.





☜　この流れ図での記号の意味



記号　と　で

囲まれた部分はループを表す.

正しく作成した〔プログラム 2〕を実行し，変数 N に対して 50 を入力すると各行での動作は次のようになる．

110～120 行　$J=3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 25$ とする．

130～200 行　J も $N-J$ も素数ならば J の値を Q

$N-J$ の値を P として

$$50=Q+P$$

を出力する．

210 行　　次の J を調べる．

$J=3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 25$ の中で素数であるのは

$$J=3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23$$

であり，それぞれの J に対して

$$N-J=47,\ 45,\ 43,\ 39,\ 37,\ 33,\ 31,\ 27$$

☜　○で囲んだ数が素数である．

である．

よって，出力は

```
50=3+47
50=7+43
50=13+37
50=19+31
```

の $\boxed{4}$ 行であり，最後の出力は

50= $\boxed{19}$ + $\boxed{31}$

である．また，プログラム終了までに 160 行は $J=3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 25$ のそれぞれで 1 回ずつ実行されるので，合計 $\boxed{12}$ 回実行される．