クラス		受験番号	
出席番号		氏名	

2014年度

第2回 全統記述模試問題

数　学

（Ⅰ型　80分
Ⅱ型　100分
Ⅲ型　120分）

2014年8月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記および本冊子裏表紙の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1. 問題冊子は13ページである。
2. 解答用紙は別冊になっている。（解答用紙冊子表紙の注意事項を熟読すること。）
3. 本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4. 下表のような「選択型」が用意されているので，志望する大学・学部・学科の出題範囲・科目に合わせて，選択型と受験科目で指定された問題を選んで解答すること。受験科目に合わない型・問題を選択した場合には，志望校に対する判定が正しく出ないことがあるので注意すること。

選択型	受験科目	問題ページ	解答用紙
Ⅰ	数学Ⅰ	P．2～5	Ⅰ型1枚
	数学Ⅰ，A		
Ⅱ	数学Ⅰ，A，Ⅱ	P．6～9	Ⅱ型2枚
	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B		
Ⅲ	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ	P．10～13	Ⅲ型3枚

5. 解答用紙は，選択する型によって異なる。必ず指定された解答用紙に正しく答えよ。**誤った番号の箇所に解答している場合は得点としないので注意すること。**
6. 試験開始の合図で解答用紙冊子の数学の解答用紙を切り離し，下部の所定欄に **氏名(フリガナ，漢字)**・**在・卒高校名**・**クラス名**・**出席番号**・**受験番号**（**受験票の発行を受けている場合**）を記入すること。また，選択問題がある場合は，上部の所定欄に **選択問題** を記入すること。
7. 解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となる。
8. 試験終了の合図で上記6.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

1461220112110010

I 型の問題は次ページから始まる.

I 型

I 型受験者は次の表に従って解答すること．

受験科目	数学 I	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ を必答．
	数学 I，A	$\boxed{1}$ を必答し，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ より 1 題選択．

$\boxed{1}$ 【I 型共通　必須問題】（配点　60点）

解説

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} 2x+y=-2, \\ x^2-y=3 \end{cases}$$

を解け．

(2) $5\sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき，$a+\dfrac{1}{a}$，$a^2-\dfrac{1}{a^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) a，b，c を実数の定数として，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．

放物線 $y=f(x)$ は 3 点 A$(1,\ -32)$，B$(2,\ -30)$，C$(-1,\ -24)$ を通る．

また，$k>0$ を満たす定数 k に対して $g(x)=(x-k)(x+k)$ とおく．

(i) a，b，c の値をそれぞれ求めよ．

(ii) 不等式 $g(x)\leqq 0$ を解け．

(iii) $g(x)\leqq 0$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)\leqq 0$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ．

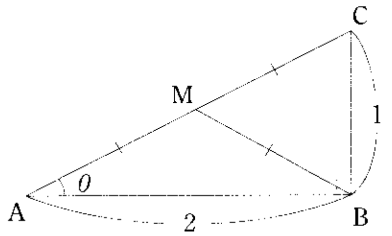
(4) 平面上に直角三角形 ABC があり，

$$AB=2,\quad BC=1,\quad \angle ABC=90^\circ$$

を満たしている．辺 AC 上に点 M を

$$AM=BM=CM$$

を満たすようにとる．



$\angle BAC=\theta$ とするとき，次の値を求めよ．

(i) $\tan\theta$　　(ii) $\sin(90^\circ-\theta)$　　(iii) $\cos 2\theta$

Ⅰ型

2 **【Ⅰ型数学Ⅰ　必須問題】**（配点　40点）　**解説**

平面上に三角形 ABC があり，

$$AB=8,\quad BC=3,\quad CA=7$$

を満たしている．

(1)(i)　$\angle ABC$ の大きさを求めよ．

(ii)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(iii)　三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

(2)　三角形 ABC の外接円の弧 AC（B を含まない方）上に点 D をとり，2 直線 AC, BD の交点を E とするとき，BE：ED＝3：1 が成り立つとする．

(i)　三角形 ACD の面積を求めよ．また，線分の長さの積 AD・CD の値を求めよ．

(ii)　三角形 ACD の周の長さを求めよ．

(iii)　三角形 ACD の内接円の半径を求めよ．

3 【Ⅰ型数学Ⅰ，A　選択問題】（配点　40点）

解説

図のような一辺の長さ1の正方形ABCDがあり，点Pを正方形の辺に沿って頂点から頂点に移動させる次の試行を行う．

- $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$の5枚のカードが入っている袋から同時に2枚のカードを取り出し，取り出した2枚のカードに書かれた数を記録し，カードを袋に戻す．
- 記録した2つの数の積だけ反時計まわりにPを移動させる．

Pは最初，頂点Aにあるとする．

(1)　1回の試行後にPが，頂点Aにいる確率，頂点Bにいる確率，頂点Cにいる確率，頂点Dにいる確率をそれぞれ求めよ．

(2)　2回の試行後にPが頂点Aにいる確率を求めよ．

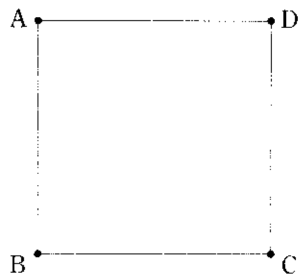
(3)　3回試行を行う．Pが，

1回の試行後にいる頂点をX，

2回の試行後にいる頂点をY，

3回の試行後にいる頂点をZ

とするとき，3点X，Y，Zを頂点とする三角形ができる確率を求めよ．



4 【Ⅰ型数学Ⅰ，A　選択問題】（配点　40点）

解説

nは正の整数とする．

(1)　nを3で割ったときの余りが0，1，2のそれぞれの場合について，n^2+2n+4を3で割った余りを求めよ．

(2)　n^2+2n+4が6で割り切れるとき，nを6で割った余りを求めよ．

(3)　$\sqrt{3(n^2+2n+4)}$が偶数となる50以下の正の整数nの値をすべて求めよ．

Ⅱ型

Ⅱ型受験者は次の表に従って解答すること．

受験科目	数学Ⅰ，A，Ⅱ	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ より1題選択．
	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より1題選択．

$\boxed{1}$ **【Ⅱ型共通　必須問題】**（配点　50点）　**解説**

(1)　$5\sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき，$a+\dfrac{1}{a}$，$a^2-\dfrac{1}{a^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　x の方程式 $\tan^2 x-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\tan x-1=0$　$(0\leqq x<2\pi)$ を解け．

(3)　$f(x)=x^3-3x+\dfrac{1}{4}$ とおく．xy 平面上において，$y=f(x)$ のグラフに原点 $(0,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ．

(4)　$a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ．

(i)　$\log_{10}5$　　　(ii)　$\log_{18}12$

(5)　a，a，a，a，b，b，c の7文字を円形に並べる並べ方は何通りあるか求めよ．

また，このうち，b と b が隣り合わないような並べ方は何通りあるか求めよ．

II型

2 【II型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

m は $m>-1$ を満たす定数とする．xy 平面上に，

$$\text{曲線 } C：y=x^2-x-2,$$

$$\text{直線 } l：y=mx-2$$

がある．

(1)　C と x 軸で囲まれる領域 D_1 の面積 S_1 を求めよ．

(2)　C と l で囲まれる領域 D_2 の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ となるような m の値を求めよ．

(3)　(2)のとき，D_1 と D_2 の和集合 $D_1\cup D_2$ を D_3 とする．

　k を $k>-1$ を満たす実数の定数とし，D_3 の，

$$x\leqq k \text{ を満たす部分の面積を } T_1,$$

$$x\geqq k \text{ を満たす部分の面積を } T_2$$

とする．$T_1：T_2=3：2$ となるような k の値を求めよ．

3 【II型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

a、b は実数の定数とする．

$$f(x)=x^3+(b-2)x^2+(a-b+6)x+3a-b+4$$

とし，$f(x)$ は $x+1$ で割り切れるとする．

(1)　b を a を用いて表せ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの虚数解 α，β をもつとする．

　$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha^2+\beta^2=0$ が成り立つとき，$\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}=-2^{152}$ となるような正の整数 n の値を求めよ．

Ⅱ型

4 【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ　選択問題】(配点　50点)

解説

Oを原点とする xy 平面上に2点A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 0)$がある．Aを通り直線OAに垂直な直線を l とし，l 上に点C$(2,\ k)$をとる．また，Oを中心としAを通る円を S とする．

(1)　l の方程式と k の値を求めよ．

(2)　S の方程式を求めよ．また，Bから S に引いた接線のうち，傾きが負であるものの方程式を求めよ．

(3)　線分BC(端点を含む)上に点Pをとり，S の $y>0$ を満たす部分にPから引いた接線の接点をQとする．Pが線分BC上を動くとき，線分PQ(端点を含む)の通過する領域を K とおく．点$(x,\ y)$が K 上を動くとき，$x+3y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

5 【Ⅱ型共通　選択問題】(配点　50点)

解説

(1)　整数 p，q，r に対して，

$$a=3p,\quad b=3q+1,\quad c=3r+2$$

とおく．

(i)　a^3，b^3，c^3 を9で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(ii)　a^9，b^9，c^9 を9で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(2)　整数 x，y，z に対して，

$$K=(x-y)(y-z)(z-x),\quad L=x^9-8y^9+z^9$$

とおく．K が3で割り切れないならば，L は9で割り切れることを示せ．

Ⅱ型

6 【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ，B　選択問題】（配点　50点）

解説

数列

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11 \mid 22,\ 23,\ \cdots \mid \cdots \qquad \cdots(*)$$

があり，上記のようにグループに分けられている．

n 番目（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）のグループの先頭の数を a_n とするとき，この数列は次の規則に従って定められている．

・$a_1=1$ である．

・n 番目のグループは a_n から始まり，連続する a_n 個の整数が小さい順に並んでいる．

・n 番目のグループの末尾の数の 2 倍を $n+1$ 番目のグループの先頭の数とする．

したがって，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=6$，$a_4=22$ である．

(1)　a_5 を求めよ．

(2)(i)　n 番目のグループの末尾の数を a_n を用いて表せ．

(ii)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，a_n を求めよ．

(3)　(*)において，初項から n 番目のグループの末尾の数までの和を求めよ．

Ⅲ型

Ⅲ型受験者は次の表に従って解答すること．

受験科目	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ	1，2，3，4 を必答し， 5，6，7 より1題選択．

1 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

(1) x の方程式 $\tan^2 x - \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ を解け．

(2) a，a，a，a，b，b，c の7文字を円形に並べる並べ方は何通りあるか求めよ．

また，このうち，b と b が隣り合わないような並べ方は何通りあるか求めよ．

(3) $f(x) = x^3 - 3x + \dfrac{1}{4}$ とおく．xy 平面上において，$y = f(x)$ のグラフに原点$(0,\ 0)$から引いた接線の方程式を求めよ．

(4) 平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，

$$|\vec{a}| = 3,\quad |\vec{b}| = 4,\quad |\vec{a} - \vec{b}| = 2$$

を満たすとき，$|\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ．

(5) r を実数の定数とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2r^{n-1} = 3$ が成り立つとき，r の値を求めよ．

Ⅲ型

2 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

a は $a>1$ を満たす定数とする．

関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-a}$ とおくとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ が成り立つとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 区間 $0<x<\pi$ における $f(x)$ の極値を求めよ．

3 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

k は正の定数とする．

xy 平面上に放物線 P：$y=kx^2+2$ がある．

(1) P が直線 $y=x+1$ と共有点をもたないような k の値の範囲を求めよ．

(2) 円 C_a：$(x-a)^2+(y-a+1)^2=1$ があり，a は $a\geqq 0$ の範囲を動くとする．

(i) C_a の中心の軌跡を求めよ．

(ii) C_a が通過する領域を K とする．k が(1)で求めた範囲にあるとき，点$(0,\ 1)$を通り傾き m の直線が P とも K とも共有点をもたないような実数 m の値の範囲を求めよ．

Ⅲ型

4 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）

解説

数列$\{a_n\}$が,

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_{n+1}=2a_n+n^2+(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

で与えられている．a_nを4で割ったときの余りをb_nとする．

(1)　a_2，a_3，a_4の値をそれぞれ求めよ．

(2)　一般項b_{2m-1}，b_{2m}（$m=1$，2，3，…）をそれぞれ推定し，それらが正しいことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$が4で割り切れるための$n$の条件を求めよ．ただし，$n$は正の整数とする．

5 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

(1)　整数p，q，rに対して，

$$a=3p,\quad b=3q+1,\quad c=3r+2$$

とおく．

(i)　a^3，b^3，c^3を9で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(ii)　a^9，b^9，c^9を9で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(2)　整数x，y，zに対して，

$$K=(x-y)(y-z)(z-x),\quad L=x^9-8y^9+z^9$$

とおく．Kが3で割り切れないならば，Lは9で割り切れることを示せ．

Ⅲ型

6 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

関数 $f(x)=-x\log x\ (x>0)$ に対して $y=f(x)$ のグラフを C とする．

(1) $f(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，C の概形をかけ．必要ならば，$\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてよい．

(2) 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $f(0)=0$ と定め，xy 平面上において不等式 $0\leqq y\leqq f(x)$ で表される領域を D とする．また，$a>0$ とし，2 直線 $y=ax$，$y=2ax$ と C の交点をそれぞれ A，B とする．

・D のうち，A を通り x 軸に垂直な直線と，B を通り x 軸に垂直な直線の間にある部分の面積を $S(a)$，

・D のうち，不等式 $ax\leqq y\leqq 2ax$ を満たす部分の面積を $T(a)$

とする．

(i) $S(a)$ を求めよ．

(ii) a が $a>0$ を満たして変化するときの $T(a)$ の最大値，および，そのときの a の値を求めよ．

7 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

O を原点とする xy 平面上に双曲線

$$C:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3^2}=1\quad（a\text{ は正の定数}）$$

があり，C の焦点の座標は $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ である．C の第 1 象限の部分に点 P をとる．P における C の接線を l とし，C の 2 本の漸近線と l の交点を Q，R とする．ただし，Q の y 座標は R の y 座標より大きいものとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) (1) で求めた a の値に対して P の座標を $(as,\ 3t)\ (s>0,\ t>0)$ とおくとき，Q，R それぞれの座標を s，t を用いて表せ．

(3) A$(8,\ 3)$ とする．P が C 上の第 1 象限の部分を動くとき，四角形 OQAR の面積の最小値を求めよ．

Ⅰ型，Ⅱ型，Ⅲ型 はそれぞれ選択型のいずれかによって解答（選択解答）する問題が指定されている。指示に従い，必ず指定された問題を解答（選択解答）し，下記の記入例に従って解答用紙に必要事項を記入すること。

〈記入例〉　Ⅱ型 選択生の場合

〈数学Ⅱ型 解答用紙（その２）裏　面〉