クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度　第1回　**全統マーク模試**

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年4月実施】

本冊子の解答・採点基準をもとに自己採点を行ってください。「自己採点シート」は学習の手引き｛英語｝編冊子の巻末にありますのでご利用ください。

河合塾

【数 学 ①】

数 学 I

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	1	3	
	$\dfrac{\text{イ}+\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$	$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	3	
	オカ，キ	-1，3	2	
	$\dfrac{\text{クケ}+\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}<x<\dfrac{\text{シ}+\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}}$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$	2	
	ソ	3	2	
	タ	6	2	
	チ	9	2	
	ツ^3	3^3	1	
	テ	1	1	
	トナ	47	2	
	第1問　自己採点小計		(20)	
第2問	アa	$2a$	2	
	イa^2－ウa－エオ	$4a^2-8a-12$	2	
	a＝カ	$a=1$	2	
	キクケ	-16	2	
	コ	8	3	
	サシ＜a＜ス	$-1<a<3$	4	
	セ	0	2	
	ソ(a^2－タa＋チ)	$8(a^2-4a+3)$	2	
	ツ(a^2＋テa＋ト)	$8(a^2+2a+3)$	2	
	ナ－$\sqrt{\text{ニヌ}}$	$3-\sqrt{11}$	2	
	ネノ＋$\sqrt{\text{ハヒ}}$	$-3+\sqrt{11}$	2	
	第2問　自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	ア	3	3	
	$\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$	$\dfrac{3}{5}$	3	
	エ	3	3	
	$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{5}{2}$	3	
	$\dfrac{\text{キ}\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$	4	
	x^2－コx＋15＝0	$x^2-8x+15=0$	3	
	サ	5	3	
	$\dfrac{\sqrt{\text{シ}}}{\text{ス}}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	4	
	$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\dfrac{3}{4}$	4	
	第3問　自己採点小計		(30)	
第4問	ア	2	2	
	イ	6	2	
	(x－ウy＋エ)^2	$(x-2y+3)^2$	2	
	(x－オy＋カ)^2	$(x-2y+3)^2$	2	
	キa(y＋ク)^2	$4a(y+1)^2$	2	
	x＝ケコ	$x=-5$	2	
	y＝サシ	$y=-1$	2	
	ス	0	2	
	(x＋セ)(x－ソy＋タ)	$(x+5)(x-4y+1)$	3	
	y＝チツ	$y=-1$	3	
	テ	4	3	
	第4問　自己採点小計		(25)	
	自己採点合計		(100)	

第１問　方程式・不等式

〔１〕 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とすると

$$ab=\boxed{\text{ア}}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．このとき，方程式

$$|x-ab|=2$$

を満たす x の値は

$$x=\boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キ}}$$

であり，不等式

$$\left|x-\frac{b}{a}\right|<2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}<x<\frac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

〔２〕 連立方程式

$$\begin{cases} x^3+y^3=18 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=7xy & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を考える．

x^3+y^3 を因数分解すると，$x^3+y^3=(x+y)\left(\boxed{\text{ソ}}\right)$ である．

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ x^2+y^2　　① x^2-y^2　　② x^2+xy+y^2　　③ x^2-xy+y^2

これと ② より

$$x^3+y^3=\boxed{\text{タ}}xy(x+y)$$

であるから，① は

$$\boxed{\text{タ}}xy(x+y)=18 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる．

一方，② は

$$(x+y)^2=\boxed{\text{チ}}xy \quad すなわち \quad xy=\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}(x+y)^2$$

と変形されるから，これと ③ より

$$(x+y)^3=\boxed{\text{ツ}}^3$$

が成り立つ．

x，y は実数であるから，$x+y=\boxed{\text{ツ}}$ であり，$xy=\boxed{\text{テ}}$ である．

よって，$x^4+y^4=\boxed{\text{トナ}}$ である．

【解説】

問題

〔1〕 数学Ⅰ・数学A 第1問〔1〕に同じである．

〔2〕

$$\begin{cases} x^3+y^3=18, & \cdots① \\ x^2+y^2=7xy. & \cdots② \end{cases}$$

x^3+y^3 を因数分解すると，

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

であるから，$\boxed{\text{ソ}}$ は ③ である．

$$\begin{aligned} &x^2-xy+y^2 \\ &=(x^2+y^2)-xy \\ &=7xy-xy \ (② より) \\ &=6xy \end{aligned}$$

☜ $x^2+y^2=7xy$.

であるから，

$$\begin{aligned} x^3+y^3&=(x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &=(x+y)\cdot 6xy \\ &=\boxed{6}\,xy(x+y) \end{aligned}$$

☜ $x^2-xy+y^2=6xy$.

である．

よって，① は，

$$6xy(x+y)=18 \qquad \cdots③$$

となる．

一方，② より，

$$(x+y)^2-2xy=7xy$$
$$(x+y)^2=\boxed{9}\,xy$$

☜ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ より，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.

すなわち

$$xy=\frac{1}{9}(x+y)^2$$

である．

これを ③ に代入すると，

$$6\cdot\frac{1}{9}(x+y)^2(x+y)=18$$
$$(x+y)^3=27$$
$$(x+y)^3=\boxed{3}^3$$

が成り立つ．

x，y は実数であるから，

$$x+y=3$$

であり，

$$xy=\frac{1}{9}(x+y)^2$$

$$=\frac{1}{9}\cdot 3^2$$

$$=\boxed{1}$$

である．

これと ② より，

$$x^2+y^2=7xy$$

$$=7$$

であり，

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$$

$$=7^2-2\cdot 1^2$$

$$=\boxed{47}$$

である．

☜ $x+y=t$ とすると，

$$t^3=3^3$$

$$t^3-3^3=0$$

$$(t-3)(t^2+3t+9)=0$$

$$(t-3)\left\{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right\}=0$$

であり，$x+y$ すなわち t は実数であるから，

$t=3$　すなわち　$x+y=3$．

☜ $x+y=3$ より，$y=3-x$ であるから，これを $xy=1$ に代入して，

$$x(3-x)=1$$

$$x^2-3x+1=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

これと $y=3-x$ より，

$$(x,\ y)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

となり，x，y は確かに実数である．

☜ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ において，$\alpha=x^2$，$\beta=y^2$ とした．

☜ $x^2+y^2=7$，$xy=1$．

第２問　２次関数

数学Ⅰ・数学Ａ 第２問に同じである．

問題

第 3 問　図形と計量

△ABC において，AB$=\sqrt{5}$，BC$=2\sqrt{5}$，$\cos\angle$ABC$=\dfrac{4}{5}$ とする．
このとき

$$\mathrm{AC}=\boxed{\text{ア}}$$

であり

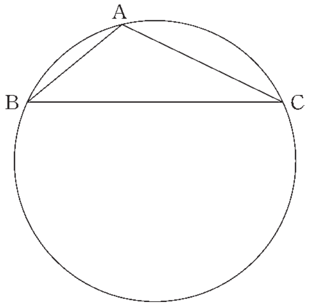
$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．

また，△ABC の面積は $\boxed{\text{エ}}$ であり，円 O を △ABC の外接円とすると円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

である．

参考図



円 O 上の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を BD$=\sqrt{5}$ であるようにとる．このとき

$$\cos\angle\mathrm{BCD}=\frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

であるから，CD$=x$ とすると x は 2 次方程式

$$x^2-\boxed{\text{コ}}x+15=0$$

を満たす．$x>$AC であるから CD$=\boxed{\text{サ}}$ となる．

線分 AD と線分 BC の交点を E とすると

$$\mathrm{BE}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

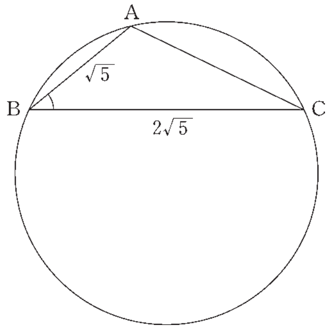
四角形 ABDC を線分 AD で折って，面 ACD と面 ABD が垂直となるようにすると，三角錐（すい）BACE の体積は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

【解説】

問題



余弦定理より，

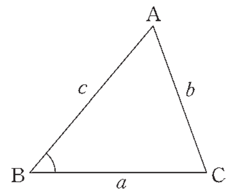
$$\begin{aligned}AC^2&=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC\\&=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5}\\&=9\end{aligned}$$

であるから，

$$AC=\boxed{3}$$

である．

☜ **余弦定理**



$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$.

また，

$$\begin{aligned}\sin\angle ABC&=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\\&=\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}\end{aligned}$$

である．

☜ $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，

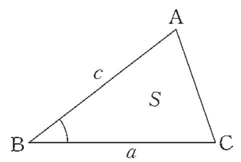
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

これを用いると，

$$\begin{aligned}(\triangle ABC\text{ の面積})&=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{3}{5}\\&=\boxed{3}\end{aligned}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ca\sin B$.

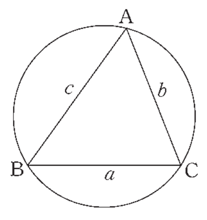
さらに，円Oの半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

であるから，

$$\begin{aligned}R&=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}\\&=\frac{3}{2\cdot\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

☜ **正弦定理**

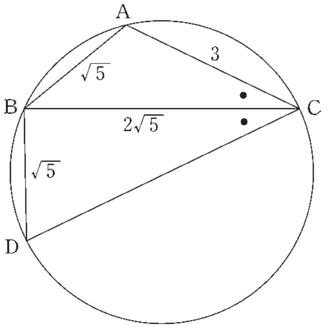


外接円の半径を R とすると，

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$$

である．



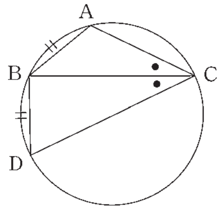
条件より，

$$BD=AB$$

であるから，円周角の定理より，

$$\angle BCD=\angle ACB.$$

☜



よって，

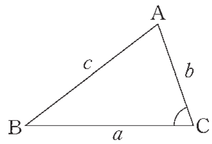
$$\cos\angle BCD=\cos\angle ACB$$

である．

ここで，△ABC に余弦定理を用いると，

☜

余弦定理



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$$\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}$$

$$=\frac{(2\sqrt{5})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 3}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

であるから，

$$\cos\angle BCD=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$$

である．

CD$=x$ とすると，△BDC に余弦定理を用いることにより，

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$$

$$(\sqrt{5})^2=(2\sqrt{5})^2+x^2-2\cdot 2\sqrt{5}\cdot x\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$x^2-\boxed{8}x+15=0$$

$$(x-5)(x-3)=0$$

が成り立ち，$x>$AC すなわち $x>3$ であるから，$x=5$ すなわち

$$CD=\boxed{5}$$

となる．

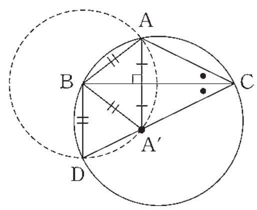
☜

$$(2\sqrt{5})^2>3^2+(\sqrt{5})^2$$

すなわち

$$BC^2>CA^2+AB^2$$

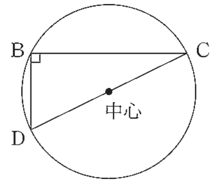
が成り立つから ∠BAC は鈍角であり，∠BDC は鋭角である．このことと ∠ACB$=$∠DCB により，直線 BC に関して A と対称な点を A′ とすると，A′ は線分 CD 上（C, D を除く）にあり，AC$=$A′C である．よって，CD$>$AC が成り立つ．



CD$=2R$ より，線分 CD は円 O の直径である(とわかる)から， ☜

$$\angle \mathrm{CBD}=90^\circ$$

である．



半円である弧に対する円周角は直角．

よって，$\angle \mathrm{BCD}=\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である．

ここで，円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{BCA}$$

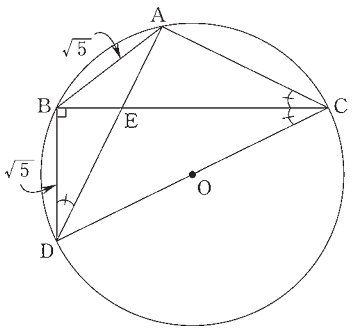
であり，$\angle \mathrm{BCA}=\angle \mathrm{BCD}$ であるから，

$$\angle \mathrm{BDA}=\angle \mathrm{BCD}\ (=\theta).$$

よって，

$$\begin{aligned}\tan\angle \mathrm{BDE}&=\tan\theta\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}\qquad \cdots①$$

である．



一方，直角三角形 BDE に着目すると，

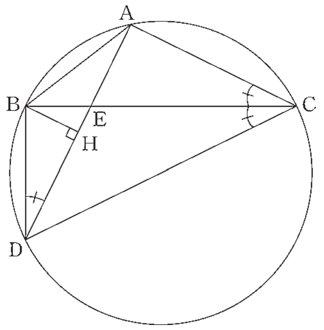
$$\tan\angle \mathrm{BDE}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}\qquad \cdots②$$

である．

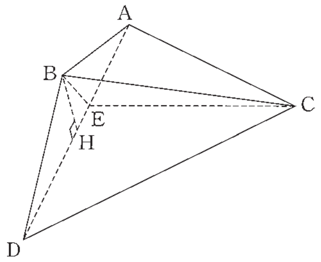
①, ② より，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}&=\frac{1}{2}\\\mathrm{BE}&=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．



（折る前の図）



（折った後の図）

B から直線 AD に引いた垂線と直線 AD の交点を H とする．また，△AEC の面積を S，三角錐 BACE の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{BH} \qquad \cdots③$$

である．

ここで，折る前において，

$$\mathrm{EC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BE}=2\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

より，

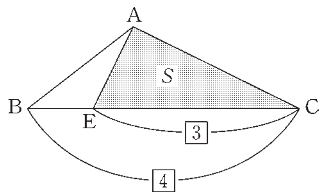
$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{BC}}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{4}$$

であるから，

$$S=\frac{3}{4}\cdot(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})$$
$$=\frac{3}{4}\cdot 3$$
$$=\frac{9}{4}$$

である．

☜

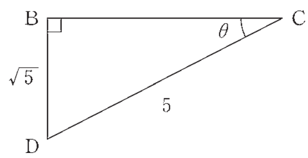


また，

$$\sin\angle\mathrm{BDH}=\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

☜ （折る前の図）において，

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$



であるから，直角三角形 DBH に着目すると，

$$\mathrm{BH}=\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{BDH}$$
$$=\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$=1$$

である．

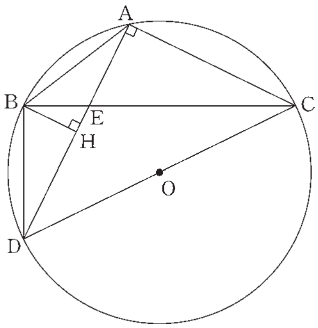
よって，③ より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot 1$$
$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$
である．

（注　線分 BE の長さを求める別解）

CD$=2R$ より，線分 CD は円 O の直径であるから，
$$\angle \mathrm{CAD}=90^\circ$$
である．

B から直線 AD に引いた垂線と直線 AD の交点を H とする．



$\triangle$BEH$\backsim\triangle$CEA であるから，
$$\mathrm{BH}:\mathrm{CA}=\mathrm{BE}:\mathrm{CE}. \qquad \cdots④$$
$\triangle$ABD，$\triangle$ACD の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，
$$S_1:S_2=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BH}:\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CA}$$
$$=\mathrm{BH}:\mathrm{CA}$$
$$=\mathrm{BE}:\mathrm{CE}. \qquad \cdots⑤$$
☜　④ を用いた．

一方，
$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{ABD},$$
$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{ACD}$$
である．ここで，四角形 ABDC は円に内接する四角形であるから，
$$\angle\mathrm{ABD}=180^\circ-\angle\mathrm{ACD}$$
であり，
$$\sin\angle\mathrm{ABD}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{ACD})$$
$$=\sin\angle\mathrm{ACD}$$
☜　$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$．

であるから，
$$S_1:S_2=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{ABD}:\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{ACD}$$
$$=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}:\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}$$

$$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}:3\cdot 5$$
$$=1:3. \qquad \cdots ⑥$$

⑤, ⑥ より,

$$\mathrm{BE}:\mathrm{CE}=1:3.$$

よって,

$$\mathrm{BE}=\frac{1}{1+3}\mathrm{BC}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

第 4 問　方程式・不等式

(1)　式 $x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$ は次のように変形される.

$$
\begin{aligned}
&x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9\\
&=\left(x-\boxed{\text{ア}}y\right)^2+\boxed{\text{イ}}\left(x-\boxed{\text{ア}}y\right)+9\\
&=\left(x-\boxed{\text{ウ}}y+\boxed{\text{エ}}\right)^2
\end{aligned}
$$

(2)　a, x, y を実数とし

$$P=x^2-4xy+4(a+1)y^2+6x+4(2a-3)y+4a+9$$

とする.

$$P=\left(x-\boxed{\text{オ}}y+\boxed{\text{カ}}\right)^2+\boxed{\text{キ}}a\left(y+\boxed{\text{ク}}\right)^2$$

であり, $a>0$ ならば, P は

$$x=\boxed{\text{ケコ}},\quad y=\boxed{\text{サシ}}$$

のとき, 最小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる.

$a=-1$ とすると

$$P=\left(x+\boxed{\text{セ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ソ}}y+\boxed{\text{タ}}\right)$$

であり, $P<0$ を満たす実数 x が存在しないのは

$$y=\boxed{\text{チツ}}$$

のときである.

$a=-1$ のとき, $P=-3$ を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ は全部で $\boxed{\text{テ}}$ 個ある.

【解説】

問題

(1)

$$
\begin{aligned}
&x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9\\
&=(x^2-4xy+4y^2)+6(x-2y)+9\\
&=\left(x-\boxed{2}y\right)^2+\boxed{6}(x-2y)+9\\
&=\left(x-\boxed{2}y+\boxed{3}\right)^2.
\end{aligned}
$$

☜　$t=x-2y$ とおくと,

$$t^2+6t+9$$

であり, これを因数分解すると,

$$(t+3)^2$$

となるから,

$$(x-2y+3)^2.$$

(2)　P を a について整理すると,

$$P=(x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9)+4a(y^2+2y+1).$$

ここで, (1) より,

$$x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9=(x-2y+3)^2$$

であり, また,

$$y^2+2y+1=(y+1)^2$$

であるから,

$$P=\left(x-\boxed{2}y+\boxed{3}\right)^2+\boxed{4}a\left(y+\boxed{1}\right)^2$$

である.

$a>0$ ならば, P は,

$$x-2y+3=0 \quad \text{かつ} \quad y+1=0$$

すなわち

$$x=\boxed{-5} \quad \text{かつ} \quad y=\boxed{-1}$$

のとき，最小値 $\boxed{0}$ をとる．

$a=-1$ とすると，

$$\begin{aligned} P&=(x-2y+3)^2-4(y+1)^2 \\ &=\{(x-2y+3)+2(y+1)\}\{(x-2y+3)-2(y+1)\} \\ &=\left(x+\boxed{5}\right)\left(x-\boxed{4}y+\boxed{1}\right) \\ &=\{x-(-5)\}\{x-(4y-1)\} \end{aligned}$$

であり，$P<0$ を満たす実数 x が存在しないのは，

$$-5=4y-1$$

すなわち

$$y=\boxed{-1}$$

のときである．

$a=-1$，$P=-3$ とすると，

$$(x+5)(x-4y+1)=-3$$

となり，x，y が整数のとき，$x+5$，$x-4y+1$ も整数であるから，

$$(x+5,\ x-4y+1)=(-3,\ 1),\ (-1,\ 3),\ (1,\ -3),\ (3,\ -1).$$

したがって，

$$(x,\ y)=(-8,\ -2),\ (-6,\ -2),\ (-4,\ 0),\ (-2,\ 0)$$

であるから，整数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で $\boxed{4}$ 個ある．

☜ A が実数のとき，

$$A^2 \geqq 0$$

であり，等号は $A=0$ のとき成り立つ．

☜ $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$.

☜ x の不等式

$$(x-p)(x-q)<0$$

の解について．

$p<q$ のとき $p<x<q$，

$q<p$ のとき $q<x<p$

であり，解は存在する．

$p=q$ のとき，

$$(x-p)(x-q)=(x-p)^2 \ (\geqq 0)$$

より，解は存在しない．

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	1	3	
	$\frac{イ+\sqrt{ウ}}{エ}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	3	
	オカ	-1	1	
	キ	3	1	
	$\frac{クケ+\sqrt{コ}}{サ}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	1	
	$\frac{シ+\sqrt{ス}}{セ}$	$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$	1	
	ソ	8	2	
	タ	5	2	
	チ	2	2	
	ツ	1	2	
	テ	2	2	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	アa	$2a$	2	
	イa^2−ウa−エオ	$4a^2-8a-12$	2	
	a=カ	$a=1$	2	
	キクケ	-16	2	
	コ	8	3	
	サシ＜a＜ス	$-1<a<3$	4	
	セ	0	2	
	ソ(a^2−タa+チ)	$8(a^2-4a+3)$	2	
	ツ(a^2+テa+ト)	$8(a^2+2a+3)$	2	
	ナ−$\sqrt{ニヌ}$	$3-\sqrt{11}$	2	
	ネノ+$\sqrt{ハヒ}$	$-3+\sqrt{11}$	2	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\sqrt{ア}$	$\sqrt{6}$	4	
	$\frac{\sqrt{イ}}{ウ}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	3	
	$\frac{\sqrt{エ}}{オ}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	4	
	$\frac{カ\sqrt{キク}}{ケコ}$	$\frac{3\sqrt{30}}{10}$	4	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{3}{4}$	4	
	ス	2	3	
	$\frac{セ\sqrt{ソ}}{タ}$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$	4	
	$\frac{チ\sqrt{ツ}}{テト}$	$\frac{3\sqrt{5}}{16}$	4	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	ア	0	1	
	イ	3	1	
	ウ	6	3	
	エ	5	3	
	オ	2	3	
	カキ	14	3	
	$\frac{ク}{ケコ}$	$\frac{1}{18}$	4	
	$\frac{サシ}{スセソ}$	$\frac{35}{162}$	3	
	$\frac{タチ}{ツ}$	$\frac{13}{9}$	4	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第１問　方程式・不等式，集合・論理

〔１〕 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とすると

$$ab=\boxed{\text{ア}}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．このとき，方程式

$$|x-ab|=2$$

を満たす x の値は

$$x=\boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キ}}$$

であり，不等式

$$\left|x-\frac{b}{a}\right|<2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}<x<\frac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

〔２〕 100 以下の自然数の集合を全体集合 U とし，U の部分集合 A，B，C を

$A=\{x\,|\,x$ は 6 の正の約数$\}$

$B=\{x\,|\,x$ は 12 の正の約数$\}$

$C=\{x\,|\,x$ は 18 の正の約数$\}$

とする．さらに，U を全体集合とする A，B，C の補集合をそれぞれ $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ とする．

(1) $B\cup C$ の要素の個数は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，$\overline{B}\cap\overline{C}$ に属する最小の自然数は $\boxed{\text{タ}}$ である．

(2) 次の $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

自然数 n が A に属することは，自然数 n が B に属するための $\boxed{\text{チ}}$．

自然数 n が U に属する 9 の倍数であることは，自然数 n が $\overline{A}\cap C$ に属するための $\boxed{\text{ツ}}$．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(3) a を 100 以下の自然数とする．また，U の部分集合 D を

$D=\{x\,|\,x$ は a の正の約数$\}$

とする．このとき

命題「自然数 n が $B\cup C$ に属するならば自然数 n は D に属する」

が真である命題となるような a は全部で $\boxed{テ}$ 個ある．

【解説】 問題

〔1〕 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ であるから，

$$ab=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$=\frac{5-1}{4}$$

$$=\boxed{1},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

☜ 分母を有理化するために，分母，分子に $\sqrt{5}+1$ を掛ける．

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{\boxed{3}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

このとき，方程式 $|x-ab|=2$ を解くと，

$$|x-1|=2$$

$$x-1=\pm 2$$

$$x=\boxed{-1},\ \boxed{3}$$

☜ $k>0$ のとき，X の方程式 $|X|=k$ の解は，

$$X=\pm k.$$

である．

また，不等式 $\left|x-\dfrac{b}{a}\right|<2$ を解くと，

$$\left|x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right|<2$$

$$-2<x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}<2$$

☜ $k>0$ のとき，X の不等式 $|X|<k$ の解は，

$$-k<X<k.$$

$$-2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\boxed{-1}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}<x<\frac{\boxed{7}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

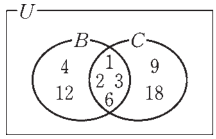
である．

〔2〕 U の部分集合 A, B, C の要素を具体的に書くと,

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\},$$
$$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\},$$
$$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$$

である.

(1) $$B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18\}$$

☜ 

であるから, $B\cup C$ の要素の個数は $\boxed{8}$ である.

また,

$$\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}$$

☜ ド・モルガンの法則 $\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}$.

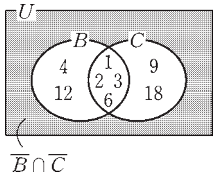
であり,

「$B\cup C$ に, 1, 2, 3, 4 は属し, 5 は属していない」

すなわち

「$\overline{B\cup C}$ に, 1, 2, 3, 4 は属さず, 5 は属している」

ことから, $\overline{B}\cap\overline{C}$ に属する最小の自然数は $\boxed{5}$ である.



(2) $A\subset B$ かつ $A\neq B$ であるから,

「自然数 n が A に属するならば自然数 n は B に属する」

は真であり,

「自然数 n が B に属するならば自然数 n は A に属する」

は偽である.

☜ 反例は, $n=4$.

よって, 自然数 n が A に属することは, 自然数 n が B に属するための十分条件であるが, 必要条件でない. すなわち, $\boxed{\text{チ}}$ は ② である.

☜ 2つの条件 p, q について, 「$p\Rightarrow q$」が真のとき,
p は q であるための十分条件,
q は p であるための必要条件.

$\overline{A}\cap C$ は, C の要素のうち, A に属さない要素の集合であるから,

$$\overline{A}\cap C=\{9,\ 18\}$$

である.

一方, U には, 27 以上の 9 の倍数も含まれるから,

「自然数 n が U に属する 9 の倍数ならば自然数 n は $\overline{A}\cap C$ に属する」は偽であり,

☜ 反例は, $n=27$.

「自然数 n が $\overline{A}\cap C$ に属するならば自然数 n は U に属する 9 の倍数」は真である.

よって, 自然数 n が U に属する 9 の倍数であることは, 自然数 n が $\overline{A}\cap C$ に属するための必要条件であるが, 十分条件でない. すなわち, $\boxed{\text{ツ}}$ は ① である.

(3) 命題「自然数 n が $B \cup C$ に属するならば自然数 n は D に属する」

すなわち $B \cup C \subset D$ とは，

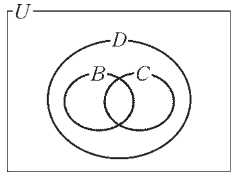
「100 以下の 12 の正の約数と 18 の正の約数がすべて D に属する」

ということであるから，これが真となる条件は，a が 12 と 18 の公倍数すなわち 36 の倍数であることである．

よって，命題が真となるような a は，

$$a = 36,\ 72$$

の $\boxed{\ 2\ }$ 個ある．



$B \cup C$ は，12 の正の約数と 18 の正の約数すべての集合．

自然数 m の正の約数をすべて約数にもつ自然数は，m の正の倍数

$$m \cdot 1,\ m \cdot 2,\ m \cdot 3,\ \cdots$$

だけである．

12 の正の約数をすべて約数にもつ自然数は，

$$12 \cdot 1,\ 12 \cdot 2,\ 12 \cdot 3,\ \cdots$$

であり，18 の正の約数をすべて約数にもつ自然数は，

$$18 \cdot 1,\ 18 \cdot 2,\ 18 \cdot 3,\ \cdots$$

であるから，$B \cup C \subset D$ であるための a の条件は，a が 12 $(=2^2 \cdot 3)$ と 18 $(=2 \cdot 3^2)$ の最小公倍数 36 $(=2^2 \cdot 3^2)$ の倍数 $(36 \cdot 1,\ 36 \cdot 2,\ 36 \cdot 3,\ \cdots)$ であること．

第 2 問　2 次関数

a を実数とし，x の 2 次関数

$$y=x^2-4ax+8a^2-8a-12 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2-\boxed{\text{ウ}}\,a-\boxed{\text{エオ}}\right)$$

である．

(1)　G の頂点の y 座標は，$a=\boxed{\text{カ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{キクケ}}$ をとる．

　$a=\boxed{\text{カ}}$ のとき，G が x 軸から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{コ}}$ である．

(2)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{サシ}}<a<\boxed{\text{ス}}$$

である．

　以下，$\boxed{\text{サシ}}<a<\boxed{\text{ス}}$ とする．

　関数 ① の $-6\leqq x\leqq 6$ における最大値を M とすると

$$\boxed{\text{サシ}}<a\leqq\boxed{\text{セ}} \text{ のとき } M=\boxed{\text{ソ}}\left(a^2-\boxed{\text{タ}}\,a+\boxed{\text{チ}}\right)$$

$$\boxed{\text{セ}}<a<\boxed{\text{ス}} \text{ のとき } M=\boxed{\text{ツ}}\left(a^2+\boxed{\text{テ}}\,a+\boxed{\text{ト}}\right)$$

である．

　さらに，関数 ① の $-6\leqq x\leqq 6$ における最小値を m とすると，$M-m=44$ となるのは

$$a=\boxed{\text{ナ}}-\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}},\quad \boxed{\text{ネノ}}+\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

のときである．

【解説】　問題

$$y=x^2-4ax+8a^2-8a-12 \qquad \cdots①$$
$$=(x-2a)^2-(2a)^2+8a^2-8a-12$$
$$=(x-2a)^2+4a^2-8a-12$$

より，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}\,a,\ \boxed{4}\,a^2-\boxed{8}\,a-\boxed{12}\right)$$

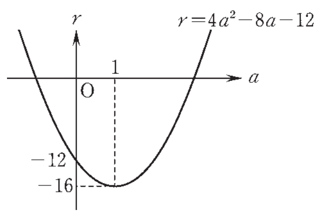
である．

☜　放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，
$$(q,\ r).$$

(1)　G の頂点の y 座標を r とおくと，

$$r=4a^2-8a-12$$
$$=4(a^2-2a)-12$$
$$=4\{(a-1)^2-1^2\}-12$$
$$=4(a-1)^2-16$$

☜



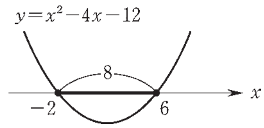
となるから，G の頂点の y 座標 r は，

$$a=\boxed{1}\text{ のとき，最小値 }\boxed{-16}$$

をとる．

$a=1$ のとき，① より，

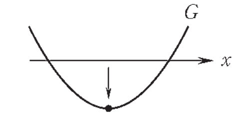
$$y=x^2-4x-12$$
$$=(x+2)(x-6)$$



であるから，G が x 軸から切り取る線分の長さは，

$$6-(-2)=\boxed{8}$$

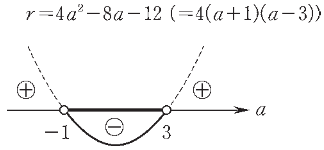
である．



（頂点が x 軸より下側にある）

(2)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるのは，G の頂点の y 座標が負のときであるから，求める a の値の範囲は，

$$4a^2-8a-12<0$$
$$a^2-2a-3<0$$
$$(a+1)(a-3)<0$$



より，

$$\boxed{-1}<a<\boxed{3}$$

である．

以下，$-1<a<3$ とする．

このとき，G の軸 $x=2a$ について，

$$-2<2a<6$$

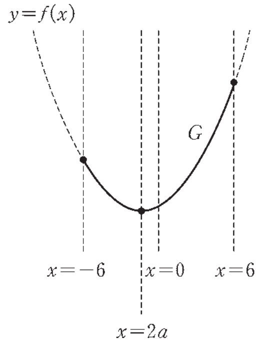
が成り立つ．

$$f(x)=x^2-4ax+8a^2-8a-12$$

とおく．

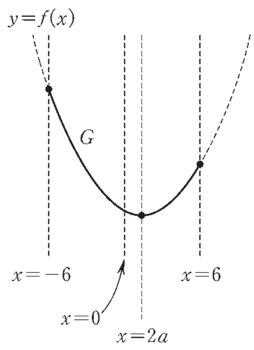
関数 ① の $-6\leqq x\leqq 6$ における最大値 M を考える．

$-2<2a\leqq 0$ すなわち $-1<a\leqq\boxed{0}$ のとき，



$$M=f(6)$$
$$=36-24a+8a^2-8a-12$$
$$=\boxed{8}\left(a^2-\boxed{4}a+\boxed{3}\right)$$

であり，$0<2a<6$ すなわち $0<a<3$ のとき，



$$M=f(-6)$$
$$=36+24a+8a^2-8a-12$$
$$=\boxed{8}\left(a^2+\boxed{2}a+\boxed{3}\right)$$

である．

また，関数 ① の $-6\leqq x\leqq 6$ における最小値 m を考えると，軸について，$-2<2a<6$ より，

$$m=f(2a)=4a^2-8a-12$$

☜ 頂点において y は最小となる．

である．

$M-m=44$ となる a の値を考える．

$-1<a\leqq 0$ のとき，

$$8(a^2-4a+3)-(4a^2-8a-12)=44$$
$$4a^2-24a+36=44$$
$$a^2-6a+9=11$$
$$a^2-6a-2=0$$

であり，$-1<a\leqq 0$ により，

$$a=3-\sqrt{11}.$$

☜ $a^2-6a-2=0$ を解の公式により解くと，

$$a=3\pm\sqrt{11}$$

であり，$3<\sqrt{11}<4$ より，

$$-1<3-\sqrt{11}<0\ (適),$$
$$6<3+\sqrt{11}<7\ (不適).$$

$0<a<3$ のとき，

$$8(a^2+2a+3)-(4a^2-8a-12)=44$$
$$4a^2+24a+36=44$$
$$a^2+6a+9=11$$
$$a^2+6a-2=0$$

であり，$0<a<3$ により，

$$a=-3+\sqrt{11}.$$

☜ $a^2+6a-2=0$ を解の公式により解くと，

$$a=-3\pm\sqrt{11}$$

であり，$3<\sqrt{11}<4$ より，

$$0<-3+\sqrt{11}<1\ (適),$$
$$-7<-3-\sqrt{11}<-6\ (不適).$$

よって，$M-m=44$ となるのは，

$$a=\boxed{3}-\sqrt{\boxed{11}},\ \boxed{-3}+\sqrt{\boxed{11}}$$

のときである．

第 3 問　図形と計量・平面図形

△ABC において，AB=1，AC=3，$\cos \angle BAC=\frac{2}{3}$ とする．また，△ABC の外接円の中心を O とする．このとき

$$BC=\sqrt{\boxed{ア}}$$

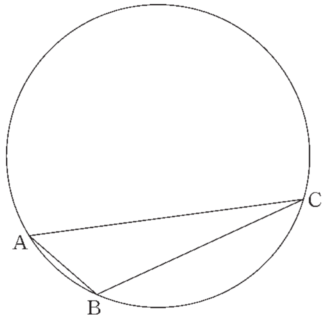
であり

$$\sin \angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

である．

また，△ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ であり，円 O の半径は $\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キク}}}{\boxed{ケコ}}$ である．

参考図



辺 AC 上に点 D を AD=BD であるようにとると

$$AD=BD=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である．

点 B における円 O の接線と点 C における円 O の接線の交点を E とし，辺 BC と線分 DE の交点を F とする．

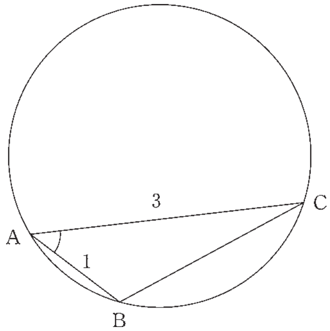
次の⓪～③のうち，∠BAC と大きさが等しい角は $\boxed{ス}$ である．

⓪　∠ACB　　①　∠BDC　　②　∠BCE　　③　∠BEC

また，$BE=\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ であり，△BEF の面積は $\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テト}}$ である．

【解説】

問題



余弦定理より，

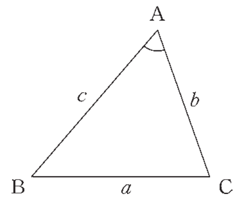
$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{2}{3}$$
$$=6$$

であるから，

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\boxed{6}}$$

である。

☜ **余弦定理**



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

また，

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{3}}$$

である。

☜ $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，

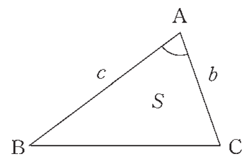
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

これを用いると，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である。

☜ **三角形の面積**



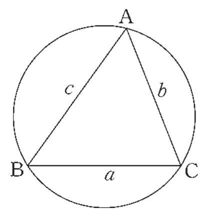
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

さらに，円 O の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$$

であるから，

☜ **正弦定理**

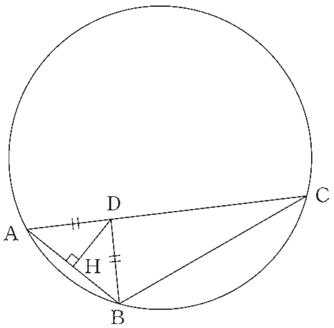


外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}$$
$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{10}}$$

である．



Dから線分ABに下ろした垂線と線分ABの交点をHとすると，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AD}}$$

であるから，

$$\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AH}}{\cos\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である．

☜　△DABは DA＝DB の二等辺三角形であるから，

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}.$$

☜

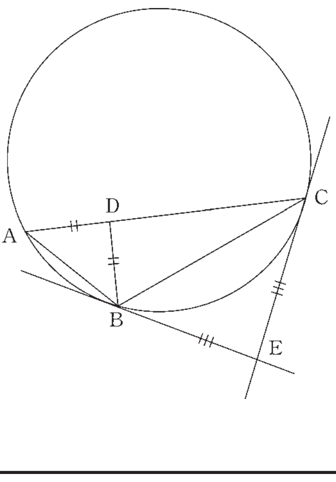
次のようにしてもよい．

AD＝BD＝x とし，三角形ABDに余弦定理を用いると，

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAD}$$
$$x^2=x^2+1^2-2x\cdot1\cdot\frac{2}{3}$$
$$x=\frac{3}{4}.$$

よって，

$$\mathrm{AD}=\frac{3}{4}.$$



接弦定理より，

$$\angle BAC = \angle BCE$$

である．よって，$\boxed{\text{ス}}$ は ② である．

このことと，

$$DA = DB,\ EB = EC$$

であることから，

$$\triangle DAB \backsim \triangle ECB$$

である．

これより，

$$AB : BD = CB : BE$$

すなわち

$$AB \cdot BE = CB \cdot BD$$

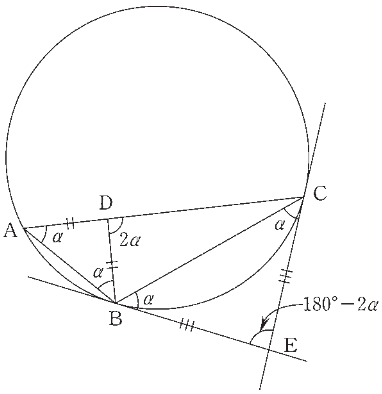
であり，BD＝AD であるから，

$$BE = \frac{BC \cdot AD}{AB}$$

$$= \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{3}{4}}{1}$$

$$= \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．



$$\angle EBC = \angle ECB$$

であり，これらの角の大きさを α とすると，

$$\angle BEC = 180° - 2\alpha$$

である．

さらに，

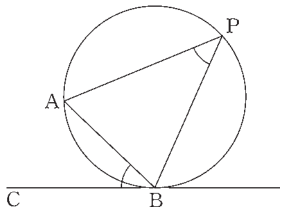
$$\angle DAB = \angle DBA = \alpha$$

であるから，

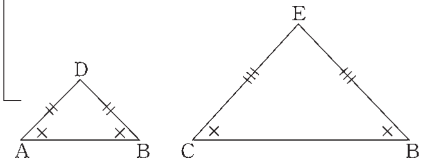
$$\angle BDC = 2\alpha$$

である．

☜ 接弦定理



☜ 上図で直線 BC が円の接線のとき，
$\angle ABC = \angle APB$.



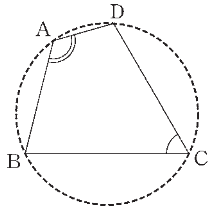
☜ EB＝EC より．

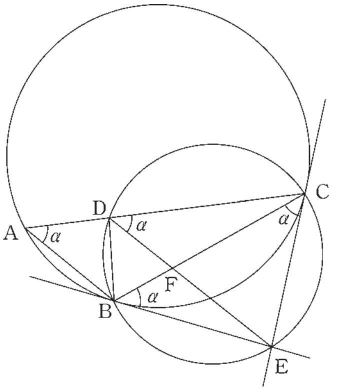
よって，

$$\angle \mathrm{BEC}+\angle \mathrm{BDC}=180^\circ$$

であるから，4点B，E，C，Dは同一円周上に存在する．

☜ $\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=180^\circ$ のとき，四角形ABCDは円に内接する．





円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{CBE}=\angle \mathrm{CDE}$$

であり，接弦定理より，

$$\angle \mathrm{CBE}=\angle \mathrm{BAC}$$

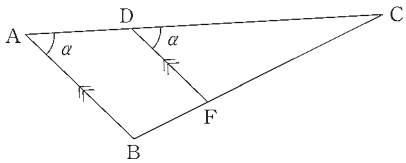
であるから，

$$\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{BAC}$$

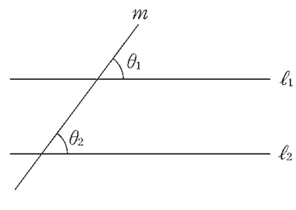
すなわち

$$\angle \mathrm{CDF}=\angle \mathrm{CAB}$$

であり，直線ABと直線DFは平行である．



☜



3直線 ℓ_1，ℓ_2，m について，

$$\theta_1=\theta_2 \text{ ならば } \ell_1 /\!/ \ell_2.$$

これより，

$$\mathrm{BF}:\mathrm{BC}=\mathrm{AD}:\mathrm{AC}$$

であるから，

$$\mathrm{BF}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}$$

すなわち

$$\mathrm{BF}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}\cdot\frac{3}{4}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

である．

☜ 線分BFの長さは次のように求めてもよい．

$\angle \mathrm{BDE}=\angle \mathrm{BCE}=\alpha$ であるから，直線DFは $\angle \mathrm{BDC}$ の二等分線である．

よって，

$$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=\mathrm{DB}:\mathrm{DC}$$

$$=\frac{3}{4}:\left(3-\frac{3}{4}\right)$$

$$=1:3.$$

これより，

$$\mathrm{BF}=\frac{1}{1+3}\mathrm{BC}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

よって，

$$(\triangle \mathrm{BEF} \text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BF}\sin\angle \mathrm{EBF}$$

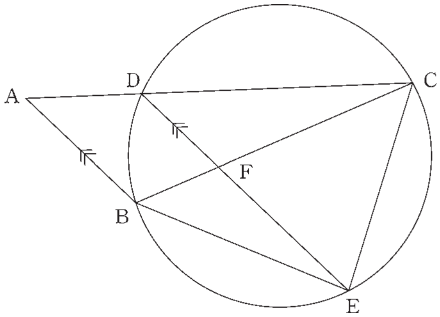
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{16}}$$

である．

☜ $\sin\angle\mathrm{EBF}=\sin\alpha$
$=\sin\angle\mathrm{BAC}$
$=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

（注１　△BEF の面積を求める別解）



△ABC の面積を $S\left(=\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$，△BEF の面積を S_1，△CDF の面積を S_2 とする．

△BEF∽△DCF であるから，

$$S_1=\left(\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DC}}\right)^2 S_2$$

であり，△DCF∽△ACB であるから，

$$S_2=\left(\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}\right)^2 S$$

である．

よって，

$$S_1=\left(\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DC}}\right)^2\cdot\left(\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}\right)^2 S$$

$$=\left(\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AC}}\right)^2 S$$

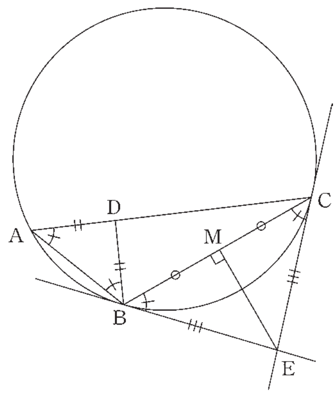
$$=\left(\frac{\frac{3\sqrt{6}}{4}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{16}.$$

（注２） BE の長さを求める部分は次のようにしてもよい．

EB＝EC であるから，△EBC は二等辺三角形であり，線分 BC の中点を M とすると，∠BME＝90° である．

☜



直角三角形 BEM に着目すると，

$$\cos\angle\mathrm{EBM}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BE}}$$

であるから，

$$BE=\frac{BM}{\cos\angle EBM}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}BC}{\cos\angle BAC}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{6}}{\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

☜　接弦定理より，
$\angle EBM=\angle BAC$.

である．

（注 3）　$\boxed{ス}$　において ② 以外の選択肢が不適切である理由は以下の通り．

・$\angle ACB$ について．

BA≠BC であるから，$\angle BAC \neq \angle ACB$.

・$\angle BDC$ について．

$\triangle DAB$ の $\angle ADB$ の外角を考えると，
$$\angle BDC=\angle BAD+\angle ABD$$
すなわち
$$\angle BDC=\angle BAC+\angle ABD$$
が成り立つから，$\angle BAC \neq \angle BDC$.

・$\angle BEC$ について．

接弦定理により，$\angle EBC=\angle ECB=\angle BAD$ であり，また，$\angle DAB=\angle DBA$ であるから，$\triangle ECB \backsim \triangle DAB$. よって，
$$\angle BEC=\angle BDA.$$
一方，$\triangle DAB$ は正三角形でないことから，
$$\angle BAD \neq \angle BDA$$
すなわち
$$\angle BAC \neq \angle BDA.$$
したがって，
$$\angle BAC \neq \angle BEC.$$

第4問　確　率

A, B 2個のさいころを同時に1回投げ，出た目の数について，(*) のように得点を定める．

(*)
- 出た目の数が同じであるとき，得点を0点とする
- 出た目の数が異なり，しかもともに偶数またはともに奇数であるとき，得点を小さい方の目の数とする
- 出た目の数が偶数と奇数であるとき，得点を大きい方の目の数から小さい方の目の数を引いた値とする

Aの出た目の数が2，Bの出た目の数が2であるとき，得点は $\boxed{\text{ア}}$ 点であり，Aの出た目の数が5，Bの出た目の数が3であるとき，得点は $\boxed{\text{イ}}$ 点である．

得点が0点となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである．得点の最大点は $\boxed{\text{エ}}$ 点であり，得点が $\boxed{\text{エ}}$ 点となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{オ}}$ 通りである．また，得点が1点となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである．

A, B 2個のさいころを同時に投げることを2回行い，(*) により，1回目，2回目で得られた得点をそれぞれ X_1 点，X_2 点とする．さらに，X_1, X_2 の値によって次のように最終得点を定める．

- $X_1 \leqq X_2$ であるとき，最終得点を X_2 点とする
- $X_1 > X_2$ であるとき，最終得点を0点とする

最終得点が5点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ であり，最終得点が1点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である．

また，最終得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 点である．

【解説】

問題

さいころA, Bの出た目の数がともに2であるとき，得点は，

$$\boxed{0}\ \text{点}$$

である．

☜　A, Bの出た目の数が同じであるから，得点は0点である．

さいころAの出た目の数が5，Bの出た目の数が3であるとき，得点は，

$$\boxed{3}\ \text{点}$$

である．

☜　A, Bの出た目の数が異なり，ともに奇数であるから，小さい方の目の数3を得点とする．

さいころA, Bの出た目の数と得点を表にまとめると次のようになる．

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	3	1	5
2	1	0	1	2	3	2
3	1	1	0	1	3	3
4	3	2	1	0	1	4
5	1	3	3	1	0	1
6	5	2	3	4	1	0

☜　例えば，Aの出た目の数が6，Bの出た目の数が1のとき，一方が偶数で，他方が奇数であるから，得点は $6-1=5$（点）である．

上の表より，得点が0点となるさいころの目の出方は，

$$\boxed{6}\ \text{通り}$$

である．

また，得点の最大点は，

$$\boxed{5}\ \text{点}$$

であり，得点が5点となるさいころの目の出方は，

$$\boxed{2}\ \text{通り}$$

である．

さらに，得点が1点となるさいころの目の出方は，

$$\boxed{14}\ \text{通り}$$

である．

上の表より，さいころA，Bを同時に1回投げたとき，得点とさいころの目の出方の対応を表にすると次のようになる．

得点	0	1	2	3	4	5	計
目の出方(通り)	6	14	4	8	2	2	36

さいころA，Bを同時に1回投げたときの目の出方は全部で，

$$6^2=36\ （通り）$$

である．

さらに，さいころA，Bを同時に投げることを2回行ったときの目の出方は全部で，

$$36\cdot36\ （通り）$$

であり，これらはすべて同様に確からしい．

(i)　最終得点が5点となるのは，

$$X_2=5\quad かつ\quad X_1\leqq5$$

すなわち

$$X_2=5\quad かつ\quad 「X_1 は何でもよい」$$

のときであるから，このようなさいころの目の出方は，

$$2\cdot36\ （通り）$$

であり，この確率は，

$$\frac{2\cdot 36}{36\cdot 36}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{18}}$$

である。

☜　$X_2=5$ となる確率が $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ で，$X_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ となる確率が 1 であるから，最終得点が 5 点となる確率は，

$$\frac{1}{18}\cdot 1=\frac{1}{18}$$

としてもよい。

(ii)　最終得点が 1 点となるのは，

$$X_2=1 \quad \text{かつ} \quad X_1\leqq 1$$

すなわち

$$X_2=1 \quad \text{かつ} \quad X_1=0,\ 1$$

のときであるから，このようなさいころの目の出方は，

$$14\cdot(6+14)=14\cdot 20 \text{（通り）}$$

であり，この確率は，

$$\frac{14\cdot 20}{36\cdot 36}=\frac{\boxed{35}}{\boxed{162}}$$

である。

☜　$X_2=1$ となる確率が $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$ で，$X_1=0,\ 1$ となる確率が $\frac{6+14}{36}=\frac{5}{9}$ であるから，最終得点が 1 点となる確率は，

$$\frac{7}{18}\cdot\frac{5}{9}=\frac{35}{162}$$

としてもよい。

(iii)　最終得点が 2 点となるのは，

$$X_2=2 \quad \text{かつ} \quad X_1\leqq 2$$

すなわち

$$X_2=2 \quad \text{かつ} \quad X_1=0,\ 1,\ 2$$

のときであるから，このようなさいころの目の出方は，

$$4\cdot(6+14+4)=4\cdot 24 \text{（通り）}$$

であり，この確率は，

$$\frac{4\cdot 24}{36\cdot 36}=\frac{2}{27}$$

である。

☜　$X_2=2$ となる確率が $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ で，$X_1=0,\ 1,\ 2$ となる確率が $\frac{6+14+4}{36}=\frac{2}{3}$ であるから，最終得点が 2 点となる確率は，

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

としてもよい。

(iv)　最終得点が 3 点となるのは，

$$X_2=3 \quad \text{かつ} \quad X_1\leqq 3$$

すなわち

$$X_2=3 \quad \text{かつ} \quad X_1=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

のときであるから，このようなさいころの目の出方は，

$$8\cdot(6+14+4+8)=8\cdot 32 \text{（通り）}$$

であり，この確率は，

$$\frac{8\cdot 32}{36\cdot 36}=\frac{16}{81}$$

である。

☜　$X_2=3$ となる確率が $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ で，$X_1=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる確率が $\frac{6+14+4+8}{36}=\frac{8}{9}$ であるから，最終得点が 3 点となる確率は，

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{81}$$

としてもよい。

(v)　最終得点が 4 点となるのは，

$$X_2=4 \quad \text{かつ} \quad X_1\leqq 4$$

すなわち

$$X_2=4 \quad \text{かつ} \quad X_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

のときであるから，このようなさいころの目の出方は，

$$2\cdot(6+14+4+8+2)=2\cdot 34 \text{（通り）}$$

であり，この確率は，

$$\frac{2\cdot 34}{36\cdot 36}=\frac{17}{324}$$

である．

(i)〜(v)より，最終得点の期待値は，

$$1\times\frac{35}{162}+2\times\frac{2}{27}+3\times\frac{16}{81}+4\times\frac{17}{324}+5\times\frac{1}{18}$$

$$=\frac{35+24+96+34+45}{162}$$

$$=\frac{234}{162}$$

$$=\frac{\boxed{13}}{\boxed{9}}\ (点)$$

である．

(注１)　さいころ A，B を同時に投げることを 2 回行って，１回目の得点を X_1，２回目の得点を X_2 としたとき，最終得点は次の表のようになる．

X_2 \ X_1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	3	0	0
4	4	4	4	4	4	0
5	5	5	5	5	5	5

(注２)　最終得点が 0 点となる確率を求めるならば，余事象の確率を用いて，

$$1-\left(\frac{35}{162}+\frac{2}{27}+\frac{16}{81}+\frac{17}{324}+\frac{1}{18}\right)=\frac{131}{324}$$

となる．

したがって，最終得点とその確率は次の表のようになる．

最終得点	0	1	2	3	4	5	計
確率	$\frac{131}{324}$	$\frac{35}{162}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{17}{324}$	$\frac{1}{18}$	1

☜ $X_2=4$ となる確率が $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ で，$X_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ となる確率が $\frac{6+14+4+8+2}{36}=\frac{17}{18}$ であるから，最終得点が 4 点となる確率は，

$$\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{18}=\frac{17}{324}$$

としてもよい．

☜ 期待値を求めるとき，最終得点が 0 点となる確率は求めなくてよい．

期待値

試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，期待値 E は，

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

☜ この表において，$X_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の各場合の確率は等しいとは限らない（X_2 も同様）から，この表を用いて，確率を求める際には注意が必要である．

例えば，最終得点が 1 点となる確率は，

$$\left(\frac{6}{36}+\frac{14}{36}\right)\cdot\frac{14}{36}=\frac{35}{162}.$$

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	2	1	
	イ	2	1	
	ウ	3	1	
	エ	4	1	
	オ，カ，キ	c，b，a	3	
	ク，ケ	0，3	2	
	コ，サ	4，3	3	
	$\sqrt{シ}-ス$	$\sqrt{7}-2$	2	
	セ	1	2	
	ソ	2	2	
	タ	2	1	
	チ	3	2	
	ツ	2	2	
	$\frac{テ}{ト}$	$\frac{7}{6}$	2	
	ナ，ニ，ヌ	4，2，3	2	
	$\frac{ネノハ}{ヒ}$，フヘ	$\frac{-13}{4}$，-1	3	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	アイ	-2	1	
	ウ	1	1	
	エオ	-2	2	
	カ	2	2	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{1}{3}$	3	
	ケコ，サ	-2，1	2	
	シ	2	2	
	ス	1	2	
	セ	2	2	
	ソ，タ	2，1	2	
	チ，ツ	−，1	3	
	テト	-2	2	
	$\left(\frac{ナ}{ニ},\ ヌ\right)$	$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$	2	
	$\frac{ネノ}{ハ}$	$\frac{11}{6}$	4	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア	1	2	
	(イ，ウ)	(1，0)	1	
	エ，オ	2，1	2	
	$\frac{カ}{キ}$	$\frac{3}{4}$	3	
	$\frac{クケ}{コ}$	$\frac{-4}{3}$	3	
	$\left(\frac{サシ}{ス},\ \frac{セ}{ソ}\right)$	$\left(\frac{-3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$	2	
	$\frac{タ\sqrt{チ}}{ツ}$	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	2	
	$\left(\frac{テト}{ナ},\ \frac{ニヌ}{ネ}\right)$	$\left(\frac{-4}{5},\ \frac{-3}{5}\right)$	3	
	(ノ，ハヒ)	(0，-1)	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	アイ＋ウi	$-3+4i$	2	
	エ，オ	3，2	2	
	カ，キ	2，5	2	
	ク，ケ	2，**a**	2	
	コサ	-4	2	
	シ	2	1	
	ス，セ	**a**，5（※）	1	
	ソ，タ，チ	5，1，4	3	
	ツテ，ト	-1，1	3	
	$\frac{ナ}{ニ}$，$\frac{ヌ}{ネ}$	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

（※）　ス，セは5，**a** でもよい。

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

問題

数学II・数学B 第１問 に同じである．

第２問　微分法・積分法

問題

数学II・数学B 第２問 に同じである．

第３問　図形と方程式

Oを原点とする座標平面上で，点 (1, 2) を通る直線と円 $C：x^2+y^2=1$ が接している．このような直線は２本存在し，そのうち

y 軸に平行な直線を ℓ_1

y 軸に平行でない直線を ℓ_2

とする．

直線 ℓ_1 の方程式は $x=\boxed{\text{ア}}$ であり，C と ℓ_1 の接点をAとすると，Aの座標は

$\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である．

次に，点 (1, 2) を通り傾きが m である直線 L の方程式は

$$y=m(x-1)+2$$

とおける．L と原点Oとの距離を d とすると，d は

$$d=\frac{\left|-m+\boxed{\text{エ}}\right|}{\sqrt{m^2+\boxed{\text{オ}}}}$$

と表される．C と L が接するとき，m の値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，このときの直線 L が直線 ℓ_2 である．

ここで，C と ℓ_2 の接点をBとする．点Bを通り，直線 ℓ_2 に垂直な直線の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x$ であるから，点Bの座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$ である．このとき，線分ABの長さは

$\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

さらに，円 C 上に点Pをとる．ただし，点PはA, B以外の点である．

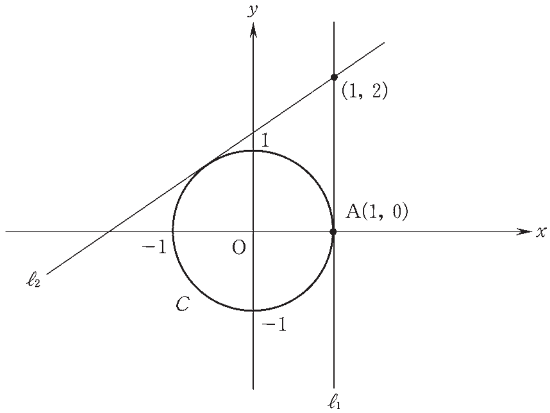
三角形ABPの面積が $\dfrac{6}{5}$ であるとき，点Pの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\right)\quad \text{または}\quad \left(\boxed{\text{ノ}},\ \boxed{\text{ハヒ}}\right)$$

である．

【解説】

問題



（図１）

（図１）より，直線 ℓ_1 の方程式は $x=\boxed{1}$ であり，C と ℓ_1 の接点 A の座標は $\left(\boxed{1},\ \boxed{0}\right)$ である．

次に，点 (1, 2) を通り傾きが m である直線 L の方程式は

$$y=m(x-1)+2$$

すなわち

$$mx-y-m+2=0$$

とおける．ここで，L と原点 O との距離 d は

$$d=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-m+\boxed{2}\right|}{\sqrt{m^2+\boxed{1}}}$$

と表され，さらに円 C と直線 L が接する条件は

$$d=(\text{円 } C \text{ の半径})\quad\text{すなわち}\quad d=1$$

であることより

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

が成り立つ．これを変形すると

$$(-m+2)^2=m^2+1$$

$$m^2-4m+4=m^2+1$$

より

$$m=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

が得られる．このときの直線 L が直線 ℓ_2 だから，ℓ_2 の方程式は

$$y=\frac{3}{4}(x-1)+2$$

すなわち

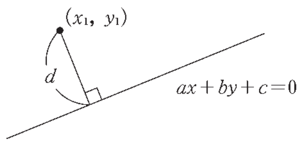
$$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$$

直線の方程式

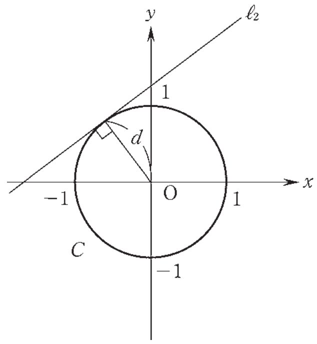
点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y=m(x-x_0)+y_0.$$

点と直線の距離



$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



である．

ここで，C と ℓ_2 の接点 B を通り ℓ_2 に垂直な直線は，原点 O を通り傾きが $-\dfrac{4}{3}$ である直線だから，その方程式は

$$y=\frac{\boxed{-4}}{\boxed{3}}x$$

である．よって，次の連立方程式

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4} & \cdots ① \\ y=-\dfrac{4}{3}x & \cdots ② \end{cases}$$

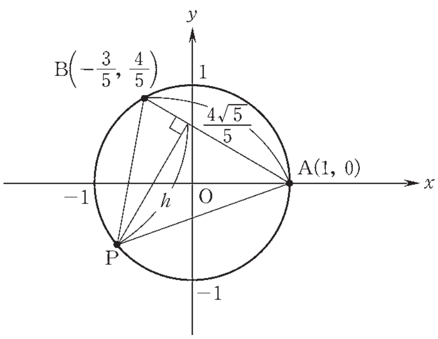
を解くと，点 B の座標

$$\left(\frac{\boxed{-3}}{\boxed{5}},\ \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}\right)$$

が得られる．このとき，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}-1\right)^2+\left(\frac{4}{5}-0\right)^2}=\frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$$

である．



（図 2 ）

三角形 ABP の底辺を AB とする．このとき，高さを h とすると面積が $\dfrac{6}{5}$ であることより

$$\frac{6}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot h$$

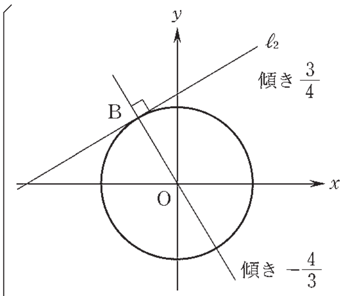
が成り立ち，これより

$$h=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

が得られる．すなわち，点 P と直線 AB の距離は $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ である．直線 AB の方程式は

$$x+2y-1=0$$

であるから，点 P の座標を（p, q）とすると



垂直条件

二つの直線の傾きがそれぞれ m, m' のとき，この二つの直線が垂直となる条件は

$$mm'=-1.$$

①, ② より y を消去すると

$$\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}=-\frac{4}{3}x$$

$$9x+15=-16x$$

$$25x=-15$$

$$x=-\frac{3}{5}.$$

これを ② に代入して

$$y=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

2 点 A(1, 0), B$\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ を通る直線 AB の方程式は

$$y=\frac{\dfrac{4}{5}-0}{-\dfrac{3}{5}-1}(x-1)$$

より

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)$$

すなわち

$$x+2y-1=0.$$

$$\frac{|p+2q-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cdots③$$

が成り立つ．

ここで

$$h=\frac{3}{\sqrt{5}}>1 \quad (=円の半径)$$

の大小関係より，点 $P(p,\ q)$ は

$$y<-\frac{1}{2}(x-1) \quad すなわち \quad x+2y-1<0$$

で表される領域に存在するから

$$p+2q-1<0$$

が成り立つ．これと ③ より

$$-(p+2q-1)=3$$

すなわち

$$p+2q+2=0 \qquad \cdots④$$

が得られる．これと，$p^2+q^2=1$ …⑤ の連立方程式を解くと

$$(p,\ q)=\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right) \quad または \quad (0,\ -1)$$

となるから，求める点 P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{-4}}{\boxed{5}},\ \frac{\boxed{-3}}{\boxed{5}}\right) \quad または \quad \left(\boxed{0},\ \boxed{-1}\right)$$

である．

☜ $h=\frac{3}{\sqrt{5}}>1$ の大小関係を考えると，（図 2）のように，点 P は

直線 AB より下側

すなわち

$$y<-\frac{1}{2}(x-1)$$

で表される領域内にある．

☜ 実数 a に対して

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 のとき) \\ -a & (a<0 のとき). \end{cases}$$

☜ ④ より

$$p=-2q-2. \qquad \cdots⑥$$

これを ⑤ に代入して

$$(-2q-2)^2+q^2=1$$

$$5q^2+8q+3=0$$

$$(5q+3)(q+1)=0$$

より

$$q=-\frac{3}{5},\ -1.$$

これと ⑥ より

$$(p,\ q)=\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right),\ (0,\ -1)$$

が得られる．

第4問　高次方程式

i は虚数単位とする．また，p，q を実数として，$P(x)=x^2-px+q$ とする．

$\alpha=1+2i$ のとき，$\alpha^2=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}i$ であるから

$$P(\alpha)=-p+q-\boxed{\text{エ}}-2\left(p-\boxed{\text{オ}}\right)i$$

である．ここで，α が方程式 $P(x)=0$ の解であるとき，$P(\alpha)=0$ より

$$p=\boxed{\text{カ}},\quad q=\boxed{\text{キ}}$$

である．以下，$p=\boxed{\text{カ}}$，$q=\boxed{\text{キ}}$ とする．

a は実数とする．また，x の整式 $Q(x)$ は，$P(x)$ で割ると商が $x-2$，余りが $ax-2a$ である整式である．このとき，$Q(x)$ は

$$Q(x)=\left(x-\boxed{\text{ク}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{カ}}x+\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ケ}}\right)$$

と表される．方程式 $Q(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は

$$a>\boxed{\text{コサ}}$$

であり，このときの虚数解を β，γ とすると

$$\begin{cases}\beta+\gamma=\boxed{\text{シ}}\\ \beta\gamma=\boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}\end{cases}$$

である．ここで，$b=\dfrac{1}{\boxed{\text{ク}}}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とすると，a，b には

$$\left(a+\boxed{\text{ソ}}\right)\left(2b-\boxed{\text{タ}}\right)=\boxed{\text{チ}}$$

の関係が成り立つ．さらに，a，b が整数であるとすると

$$a=\boxed{\text{ツテ}},\quad b=\boxed{\text{ト}}$$

である．このとき，$\dfrac{1}{\beta}$，$\dfrac{1}{\gamma}$ を解にもつ2次方程式の一つは

$$x^2-\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}x+\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}=0$$

である．

【解説】

問題

$\alpha=1+2i$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha^2&=(1+2i)^2\\&=1+4i+4i^2\\&=1+4i+4\cdot(-1)\\&=\boxed{-3}+\boxed{4}i\end{aligned}$$

☜　$i^2=-1$.

であるから

$$
\begin{aligned}
P(\alpha)&=\alpha^2-p\alpha+q\\
&=(-3+4i)-p(1+2i)+q\\
&=-p+q-\boxed{3}-2\left(p-\boxed{2}\right)i
\end{aligned}
$$

である．ここで，$P(\alpha)=0$ より

$$-p+q-3-2(p-2)i=0$$

であり，p, q は実数であるから

$$\begin{cases}-p+q-3=0\\ -2(p-2)=0\end{cases}$$

が成り立つ．

☜ a, b が実数であるとき
$a+bi=0 \iff a=b=0$.

これを解くと

$$p=\boxed{2},\quad q=\boxed{5}$$

が得られる．すなわち，$P(x)=x^2-2x+5$ である．

$Q(x)$ は，$P(x)$ で割ると商が $x-2$，余りが $ax-2a$ である整式であるから

$$
\begin{aligned}
Q(x)&=P(x)(x-2)+a(x-2)\\
&=(x-2)\{P(x)+a\}\\
&=\left(x-\boxed{2}\right)\left(x^2-2x+5+\boxed{a}\right)
\end{aligned}
$$

☜ $P(x)=x^2-2x+5$.

と表される．よって，$Q(x)=0$，すなわち $(x-2)(x^2-2x+a+5)=0$ の解は $x=2$ と $x^2-2x+a+5=0$ の解であるから，$Q(x)=0$ が虚数解をもつ条件は $x^2-2x+a+5=0$ が虚数解をもつことである．この 2 次方程式の判別式を D とすると

☜ **2 次方程式の解の判別**

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots(*)$$

の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$D>0 \iff$ $(*)$ が異なる二つの実数解をもつ

$D=0 \iff$ $(*)$ が（実数の）重解をもつ

$D<0 \iff$ $(*)$ が異なる二つの虚数解をもつ

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(a+5)$$

であるから，$D<0$ より

$$a>-4$$

である．

よって，$Q(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は

$$a>\boxed{-4}$$

である．このとき，虚数解 β, γ は $x^2-2x+a+5=0$ の二つの解であるから，解と係数の関係より

☜ **2 次方程式の解と係数の関係**

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二つの解を β, γ とすると

$$\begin{cases}\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \beta\gamma=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta+\gamma=\boxed{2}\\ \beta\gamma=\boxed{a}+\boxed{5}\end{cases} \qquad \cdots①$$

である．

ここで，$b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とすると

$$b-\frac{1}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}$$

であり，これと ① より

$$\frac{2b-1}{2}=\frac{2}{a+5}$$

が成り立つから，a，b には

$$\left(a+\boxed{\ 5\ }\right)\left(2b-\boxed{\ 1\ }\right)=\boxed{\ 4\ } \qquad \cdots②$$

の関係が成り立つ．a，b が整数であるとき $a+5$，$2b-1$ も整数であり，さらに $2b-1$ は奇数であるから，② を満たす組 $(a+5,\ 2b-1)$ は

$$(a+5,\ 2b-1)=(4,\ 1),\ (-4,\ -1).$$

☜ m，n，k が整数であるとき，$mn=k$ ならば，m，n は k の約数．

ここで，$a>-4$ であるから $a+5>1$ なので

$$(a+5,\ 2b-1)=(4,\ 1).$$

よって

$$a=\boxed{-1},\quad b=\boxed{\ 1\ }$$

である．

このとき，$\dfrac{1}{\beta}$，$\dfrac{1}{\gamma}$ を解にもつ 2 次方程式の一つは

$$\left(x-\frac{1}{\beta}\right)\left(x-\frac{1}{\gamma}\right)=0$$

$$x^2-\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x+\frac{1}{\beta\gamma}=0$$

$$x^2-\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}x+\frac{1}{\beta\gamma}=0$$

であり，さらに ① と $a=-1$ より $\beta+\gamma=2$，$\beta\gamma=4$ であるから

$$x^2-\frac{\boxed{\ 1\ }}{\boxed{\ 2\ }}x+\frac{\boxed{\ 1\ }}{\boxed{\ 4\ }}=0$$

である．

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	2	1	
	イ	2	1	
	ウ	3	1	
	エ	4	1	
	オ，カ，キ	**c，b，a**	3	
	ク，ケ	0，3	2	
	コ，サ	4，3	3	
	$\sqrt{シ}-ス$	$\sqrt{7}-2$	2	
	セ	1	2	
	ソ	2	2	
	タ	2	1	
	チ	3	2	
	ツ	2	2	
	$\frac{テ}{ト}$	$\frac{7}{6}$	2	
	ナ，ニ，ヌ	4，2，3	2	
	$\frac{ネノハ}{ヒ}$，フヘ	$\frac{-13}{4}$，-1	3	
	第1問　自己採点小計		(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	アイ	-2	1	
	ウ	1	1	
	エオ	-2	2	
	カ	2	2	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{1}{3}$	3	
	ケコ，サ	-2，1	2	
	シ	2	2	
	ス	1	2	
	セ	2	2	
	ソ，タ	2，1	2	
	チ，ツ	－，1	3	
	テト	-2	2	
	$\left(\frac{ナ}{ニ}, ヌ\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	2	
	$\frac{ネノ}{ハ}$	$\frac{11}{6}$	4	
	第2問　自己採点小計		(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	ア	2	1	
	イ	1	1	
	ウ	2	1	
	エ	2	2	
	$\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{n}{キn+ク}$	$\frac{n}{2n+1}$	3	
	ケ	2	1	
	コ	2	1	
	サ	3	2	
	シ，ス	3，1	3	
	$\frac{セ}{ソ}$，$\frac{タ}{チ}$，ツ	$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$，2	3	
第3問　自己採点小計			(20)	
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{3}$	1	
	$\frac{オ}{カ}$，$\frac{キ}{ク}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{6}{5}$	2	
	$\frac{サ}{シ}$，$\frac{ス}{セ}$	$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$	2	
	ソ	2	1	
	$\sqrt{タチ}$	$\sqrt{11}$	2	
	ツ，テ	1，2	2	
	$\frac{ト}{ナ}$，$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$	3	
	ネ	2	1	
	$\frac{\sqrt{ノハヒ}}{フ}$	$\frac{\sqrt{109}}{5}$	3	
第4問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第5問	アイ.ウ	58.0	2	
	エオ	42	2	
	カキク	290	2	
	ケコ.サ	61.0	2	
	シス	10	2	
	セソタ	−20	2	
	チ	3	2	
	ツ	3	2	
	テ	1	2	
	ト	0	2	
第5問　自己採点小計			(20)	
第6問	ア	2	2	
	イ	3	2	
	ウ	3	2	
	エ	3	2	
	オ	4	2	
	カ	5	2	
	キ	1	2	
	ク	7	2	
	ケ	3	2	
	コサ	42	2	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　指数関数・対数関数，三角関数

〔１〕

(1)　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{\boxed{ア}}}$ である．

三つの数 a，b，c を

$$a=4^{\frac{1}{4}},\qquad b=(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}},\qquad c=8^{\frac{1}{12}}$$

とする．

$$a=2^{\frac{1}{\boxed{イ}}},\qquad b=2^{\frac{1}{\boxed{ウ}}},\qquad c=2^{\frac{1}{\boxed{エ}}}$$

であるから，a，b，c の大小関係は

$$\boxed{オ}<\boxed{カ}<\boxed{キ}$$

である．

(2)　x の方程式

$$\log_2(3-x)=\log_2(x+3)+\log_2 x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

について考える．

真数は正であるから

$$\boxed{ク}<x<\boxed{ケ}$$

が成り立ち，この条件のもとで $(*)$ を変形すると

$$x^2+\boxed{コ}x-\boxed{サ}=0$$

が得られる．よって，$(*)$ の解は

$$x=\sqrt{\boxed{シ}}-\boxed{ス}$$

である．

〔２〕

次の二つの関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ を考える．

$$f(\theta)=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$
$$g(\theta)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$

(1)　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\boxed{セ}$，$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{ソ}$ である．

(2)　$f(\theta)$ は $f(\theta)=\boxed{タ}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{\boxed{チ}}\right)$ と変形できるから，θ の方程式 $f(\theta)=1$ の解は

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲において

$$\frac{\pi}{\boxed{ツ}},\quad \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\pi$$

である．

(3)　$h(\theta)=f(\theta)+g(\theta)+f(\theta)g(\theta)$ とすると

$$h(\theta)=\boxed{\text{ナ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{ニ}}\sin\theta-\boxed{\text{ヌ}}$$

である．

また，θ の方程式 $h(\theta)=k$ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲において異なる四つの実数解をもつような実数 k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ネノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}<k<\boxed{\text{フヘ}}$$

である．

【解説】 問題

〔1〕

(1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{\boxed{2}}}$ である． ☜ $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ $(a>0)$．

また，

$$a=4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{2\cdot\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{\boxed{2}}},$$

☜ $(a^m)^n=a^{mn}$ $(a>0)$．

$$b=(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{\boxed{3}}},$$

$$c=8^{\frac{1}{12}}=(2^3)^{\frac{1}{12}}=2^{3\cdot\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{\boxed{4}}}$$

である．ここで

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$$

より

$$2^{\frac{1}{4}}<2^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}$$

☜ $a>1$ のとき $p<q \iff a^p<a^q$．

が成り立つから，a，b，c の大小関係は

$$\boxed{c}<\boxed{b}<\boxed{a}$$

である．

(2) x の方程式

$$\log_2(3-x)=\log_2(x+3)+\log_2 x \qquad \cdots(*)$$

について考える．まず，真数が正であることより

$$3-x>0 \quad \text{かつ} \quad x+3>0 \quad \text{かつ} \quad x>0$$

すなわち

$$\boxed{0}<x<\boxed{3}. \qquad \cdots①$$

この条件のもとで (*) を変形すると

$$\log_2(3-x)=\log_2(x+3)x$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$p>0$，$q>0$ のとき $\log_a p+\log_a q=\log_a pq$．

より

$$3-x=(x+3)x$$

$$x^2+\boxed{4}x-\boxed{3}=0$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$p>0$，$q>0$ のとき $\log_a p=\log_a q \iff p=q$．

$$x=-2\pm\sqrt{7}.$$

① より (*) の解は

$$x=\sqrt{\boxed{7}}-\boxed{2}$$

である。

☜ $2^2<7<3^2$ より $2<\sqrt{7}<3$.
よって，$0<\sqrt{7}-2<1$.

〔2〕

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}=\boxed{1}$,

☜ $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{2}.$

☜ $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=\boxed{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{\boxed{3}}\right)$$

☜ **三角関数の合成**

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

と変形できるので，θ の方程式 $f(\theta)=1$ は

$$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

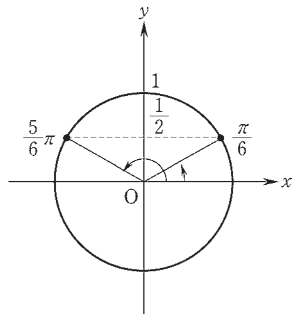
すなわち

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

となる。

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$ であるから，$f(\theta)=1$ の解は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲において，$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$ より

☜



$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{2}},\ \frac{\boxed{7}}{\boxed{6}}\pi$$

である。

(3) $h(\theta)=f(\theta)+g(\theta)+f(\theta)g(\theta)$

$$=(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)+(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$
$$+(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$$
$$=2\sin\theta+\sin^2\theta-3\cos^2\theta$$
$$=2\sin\theta+\sin^2\theta-3(1-\sin^2\theta)$$
$$=\boxed{4}\sin^2\theta+\boxed{2}\sin\theta-\boxed{3}$$

☜ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$.

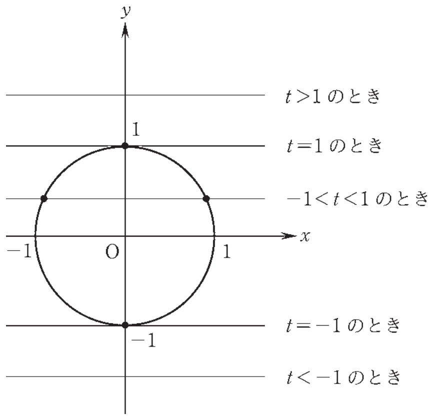
である。$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり，$h(\theta)$ は

$$h(\theta)=4t^2+2t-3$$

と表せる。

ここで，$t=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ において，t と θ の対応関係は次のとおりである。

t の範囲	θ
$-1<t<1$	2 個
$t=-1,\ 1$	1 個
$t<-1,\ 1<t$	0 個



よって

「θ の方程式 $h(\theta)=k$ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲において異なる四つの実数解をもつ」

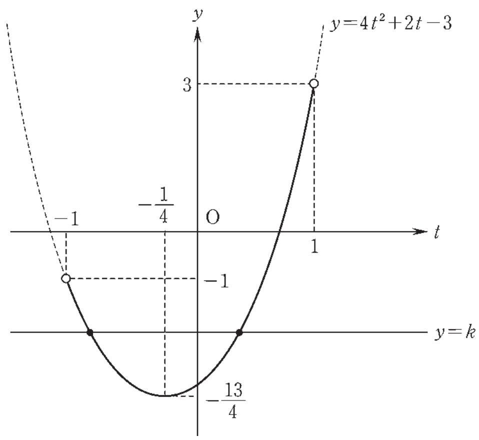
ための条件は

「t の 2 次方程式 $4t^2+2t-3=k$ が $-1<t<1$ の範囲において異なる二つの実数解をもつこと」

すなわち

「$y=4t^2+2t-3$ と $y=k$ の二つのグラフが，$-1<t<1$ の範囲において二つの共有点をもつこと」

である．



☜ $y=4t^2+2t-3$
$=4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{13}{4}$.

よって上図より，求める実数 k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{-13}}{\boxed{4}}<k<\boxed{-1}$$

である．

第２問　微分法・積分法

関数 $f(x)=1-x^2$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{アイ}}x$$

である．また，座標平面上で，放物線 $y=f(x)$ を C とする．

(1)　曲線 C と x 軸の交点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ウ}},\ 0\right) \text{ と } \left(-\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$$

である．曲線 C 上の点 $\left(\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$ における C の接線を ℓ とする．ℓ の傾きは $\boxed{\text{エオ}}$ であるから，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{エオ}}x+\boxed{\text{カ}}$$

である．

曲線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

(2)　曲線 C 上に２点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ をとり，点 A，点 B における C の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする．また，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を P とする．

ℓ_1，ℓ_2 の方程式は

$$\ell_1：y=\boxed{\text{ケコ}}ax+a^2+\boxed{\text{サ}}$$

$$\ell_2：y=\boxed{\text{ケコ}}bx+b^2+\boxed{\text{サ}}$$

であるから，点 P の座標は

$$\left(\frac{a+b}{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{ス}}-ab\right)$$

である．

ここで，点 P が直線 $x+y=2$ 上の $0\leqq x\leqq 1$ を満たす部分にあるときを考える．点 P の座標は $\left(t,\ \boxed{\text{セ}}-t\right)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と表されるから

$$\begin{cases} a+b=\boxed{\text{ソ}}t \\ ab=t-\boxed{\text{タ}} \end{cases}$$

が成り立つ．さらに，直線 AB の方程式を a，b を用いて表すと

$$y=\boxed{\text{チ}}(a+b)x+ab+\boxed{\text{ツ}}$$

となるから，これを t を用いて表すと

$$y=\boxed{\text{テト}}tx+t$$

となる．

よって，直線 AB は t の値にかかわらず，点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}},\ \boxed{\text{ヌ}}\right)$ を通る．

また，t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 AB が通過する領域の面積は $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}$ である。

【解説】

問題

$f(x)=1-x^2$ より，$f'(x)=\boxed{-2}\,x$.

曲線 $C : y=f(x)$.

☜ **導関数**

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3)$

$(c)'=0$ （c は定数）.

(1) $f(x)=(1+x)(1-x)$ より，方程式 $f(x)=0$ を解くと $x=\pm 1$.

よって，曲線 C と x 軸の交点の座標は $\left(\boxed{1},\ 0\right)$ と $(-1,\ 0)$ である。

曲線 C 上の点 $(1,\ 0)$ における C の接線 ℓ の傾きは $f'(1)=\boxed{-2}$ であるから，ℓ の方程式は

$$y=-2(x-1)$$

より

$$y=-2x+\boxed{2}$$

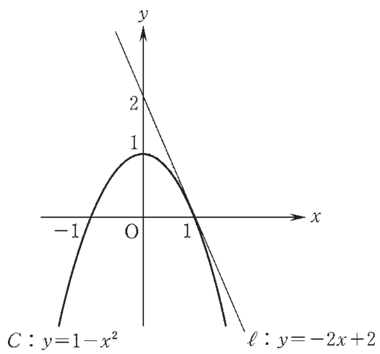
である。

☜ **接線の方程式**

点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

である。



曲線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形は上図の影の部分であり，その面積は

$$\int_0^1 \{(-2x+2)-(1-x^2)\}\,dx$$

$$=\int_0^1 (x-1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1$$

$$=0-\frac{1}{3}(-1)^3$$

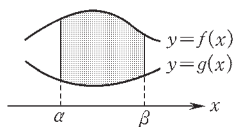
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である。

面積

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $g(x) \leqq f(x)$ ならば，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



☜ $\displaystyle\int (x-a)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-a)^3+C.$

（a は定数，C は積分定数）

(2)　曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(a,\ 1-a^2)$ における C の接線 ℓ_1 の方程式は

$$y=-2a(x-a)+1-a^2$$

☜ $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

より

$$y=\boxed{-2}\,ax+a^2+\boxed{1} \quad \cdots①$$

である．同様に，ℓ_2 の方程式は

$$y=-2bx+b^2+1 \quad \cdots②$$

☜ ① における a を b に置き換えればよい．

であるから，ℓ_1 と ℓ_2 の交点 P の x 座標は，①, ② から y を消去して

$$-2ax+a^2+1=-2bx+b^2+1$$
$$2(b-a)x=b^2-a^2$$

より

$$x=\frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

☜ $b-a\neq 0$.

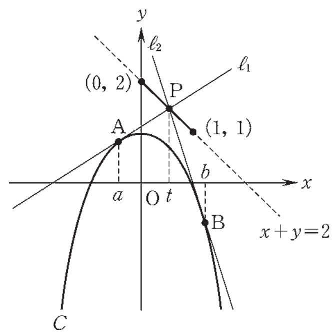
これを ① に代入して，点 P の y 座標は

$$y=-2a\cdot\frac{a+b}{2}+a^2+1=-ab+1.$$

よって，点 P の座標は

$$\left(\frac{a+b}{\boxed{2}},\ \boxed{1}-ab\right) \quad \cdots③$$

である．



点 P が直線 $x+y=2$ 上の $0\leqq x\leqq 1$ を満たす部分にあるとき，$y=2-x$ より

☜

$$\mathrm{P}\left(t,\ \boxed{2}-t\right) \quad (0\leqq t\leqq 1) \quad \cdots④$$

と表せるから，③, ④ より

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=t \\ 1-ab=2-t \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} a+b=\boxed{2}\,t \\ ab=t-\boxed{1} \end{cases} \quad \cdots⑤$$

が成り立つ．ここで，直線 AB の傾きは

$$\frac{(1-a^2)-(1-b^2)}{a-b}=\frac{-(a+b)(a-b)}{a-b}$$
$$=-(a+b)$$

☜ $\mathrm{A}(a,\ 1-a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ 1-b^2)$ $(a<b)$.

であるから，直線 AB の方程式を a, b を用いて表すと

$$y=-(a+b)\cdot(x-a)+1-a^2$$

☜ **直線の方程式**

点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y=m(x-x_0)+y_0.$$

すなわち

$$y=\boxed{-}\,(a+b)x+ab+\boxed{1}$$

となる．これは ⑤ より，t を用いて表すと

$$y = \boxed{-2}\,tx + t \qquad \cdots⑥$$

となる．さらに，⑥ は

$$y = -2t\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

と変形できるから，直線 AB は t の値にかかわらず

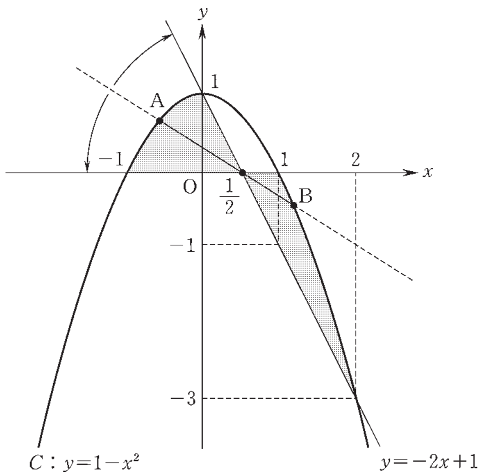
$$点 \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}},\ \boxed{0}\right)$$

を通る．

t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，直線 AB の傾き $-2t$ は

$$-2 \leqq -2t \leqq 0$$

の範囲を動くから，線分 AB が通過する領域は次図の影の部分となる．ただし，境界を含む．



☜ 直線 AB の方程式は，⑥ より
$t=0$ のとき $y=0$（x 軸）
$t=1$ のとき $y=-2x+1$．

よって，求める面積は

$$\int_{-1}^{0}(1-x^2)\,dx + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right)\cdot 2 + \int_{1}^{2}\{(1-x^2)-(-2x+1)\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(1-x^2)\,dx + \frac{1}{2} + \int_{1}^{2}(2x-x^2)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2}$$

$$= 0 - \left\{(-1) - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right\} + \frac{1}{2} + \left(2^2 - \frac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(1^2 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right)$$

$$= \frac{\boxed{11}}{\boxed{6}}$$

である．

☜ $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$．
（$n=0$，1，2．C は積分定数）

第3問　数　列

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ が $a_3=5$ を満たすとする。

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 を a，公差を d とすると

$$a+\boxed{\text{ア}}d=5$$

が成り立つ。さらに，数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2+a_4+a_6=21$$

を満たすとする。このとき，

$$a=\boxed{\text{イ}},\quad d=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\boxed{\text{エ}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$2n-1$　　①　$3n-2$　　②　n^2　　③　$2n^2-1$　　④　$\frac{1}{2}n(n+1)$

また，

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できるので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{n}{\boxed{\text{キ}}n+\boxed{\text{ク}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(2)　等比数列 $\{b_n\}$ が $b_3=18$ を満たすとする。

数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 を b，公比を r $(r>0)$ とすると

$$br^{\boxed{\text{ケ}}}=18$$

が成り立つ。さらに，数列 $\{b_n\}$ が

$$b_3+b_4+b_5=234$$

を満たすとする。このとき

$$b=\boxed{\text{コ}},\quad r=\boxed{\text{サ}}$$

である。

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とすると

$$T_n=\boxed{\text{シ}}^{\,n}-\boxed{\text{ス}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(3)　数列 $\{c_n\}$ を(1)の a_n，(2)の b_n を用いて

$$c_n=\frac{1}{2}a_nb_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する．

c_n を 2 で割った余りを p_n，c_n を 3 で割った余りを q_n とすると

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(2^{p_k}+3^{q_k})=n^3+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^2+\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}n+\boxed{\text{ツ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

【解説】

問題

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 を a，公差を d とすると，一般項 a_n は

$$a_n=a+(n-1)d$$

である．$a_3=5$ より

$$a+\boxed{2}d=5 \qquad \cdots①$$

が成り立つ．さらに $a_2+a_4+a_6=21$ より

$$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)=21$$

すなわち

$$a+3d=7 \qquad \cdots②$$

が成り立つ．

① と ② から a と d を求めると

$$a=\boxed{1},\quad d=\boxed{2}$$

である．よって，一般項 a_n は

$$\begin{aligned}a_n&=1+(n-1)\cdot 2\\&=2n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots③\end{aligned}$$

である．

また，S_n は等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n}{2}\{1+(2n-1)\}\\&=n^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

☜ **等差数列の和**

等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n は

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

③ より，$a_n=2n-1$，$a_{n+1}=2(n+1)-1=2n+1$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_na_{n+1}}&=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

☜ $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right).$

と変形できる．よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{\boxed{2}n+\boxed{1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2) 等比数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 を b，公比を r $(r>0)$ とすると，

一般項 b_n は

$$b_n=br^{n-1}$$

である．$b_3=18$ より

$$br^{\boxed{2}}=18 \qquad \cdots④$$

が成り立つ．さらに $b_3+b_4+b_5=234$ より

$$br^2+br^3+br^4=234$$

すなわち

$$br^2(1+r+r^2)=234 \qquad \cdots⑤$$

が成り立つ．④ を ⑤ に代入すると

$$18(1+r+r^2)=234$$
$$1+r+r^2=13$$
$$r^2+r-12=0$$
$$(r+4)(r-3)=0$$

と変形でき，さらに $r>0$ より，$r=3$ である．

これと ④ より $b=2$ となるから

$$b=\boxed{2},\quad r=\boxed{3}$$

である．よって，一般項 b_n は

$$b_n=2\cdot 3^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots⑥$$

である．

また，T_n は等比数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和であるから

$$T_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}$$
$$=\boxed{3}^n-\boxed{1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

☜ **等比数列の和**

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r\neq 1$ のとき

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

(3)　③と⑥より

$$c_n=\frac{1}{2}a_nb_n$$
$$=\frac{1}{2}(2n-1)\cdot(2\cdot3^{n-1})$$
$$=(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

であるから

c_n を 2 で割った余り p_n は，$p_n=1$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

であり，

c_n を 3 で割った余り q_n は，$q_1=1$，$q_n=0$（$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$）

である．

☜ $2n-1$，3^{n-1} はともに奇数だから c_n は奇数である．よって $p_n=1$　($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)．

☜ $c_1=1$ より，$q_1=1$．$n\geqq2$ のとき，c_n は 3 の倍数だから，$q_n=0$．

したがって，$n\geqq2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(2^{p_k}+3^{q_k})$$
$$=1^2\cdot(2^{p_1}+3^{q_1})+\sum_{k=2}^{n}k^2(2^{p_k}+3^{q_k})$$
$$=1\cdot(2+3)+\sum_{k=2}^{n}k^2(2^1+3^0)$$
$$=5+3\sum_{k=2}^{n}k^2$$
$$=5+3\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-1^2\right)$$
$$=5+3\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-1^2\right\}$$
$$=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+2.$$

☜ $k=1$ のときと $k\geqq2$ のときに分ける．

☜ **和の公式**

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

これに $n=1$ を代入すると 5 となるので，すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(2^{p_k}+3^{q_k})=n^3+\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}n+\boxed{2}$$

である．

第 4 問　ベクトル

三角形 OAB があり，辺 OB の中点を C とし，三角形 ABC の重心を G とする．

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{OB}$$

である．

直線 OG 上に点 P があるとき，実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OG}$ と表される．さらに，点 P が直線 AB 上にもあるとき $s=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．このときの点 P を D とする．

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{OB}$$

である．

三角形 OAB において $|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$ とする．

(1)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-\boxed{ソ}\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$ であるから，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{タチ}}$ である．

(2)　直線 AC 上に点 H がある．このとき，実数 t を用いて $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC}$ と表されるので

$$\overrightarrow{OH}=\left(\boxed{ツ}-t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{\boxed{テ}}\overrightarrow{OB}$$

と表される．さらに，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ とする．このとき，

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\overrightarrow{OB}$$

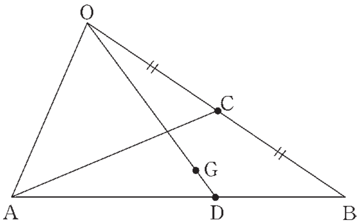
である．

また，直線 AC に関して O と対称な点を E とすると $\overrightarrow{OE}=\boxed{ネ}\,\overrightarrow{OH}$ である．

点 Q が直線 AC 上を動くとき DQ+EQ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ノハヒ}}}{\boxed{フ}}$ である．

【解説】

問題



三角形 OAB において，辺 OB の中点が C であるから

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OB}$$

である．また，三角形 ABC の重心が G であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

☜ $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OB}$$

である．

直線 OG 上に点 P があるとき，実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OG}$ と表されるから

$$\overrightarrow{OP}=s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{s}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{s}{2}\overrightarrow{OB} \qquad \cdots①$$

である．さらに，点 P が直線 AB 上にもあるとき，実数 k を用いて $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ と表されるから

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

より

$$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB} \qquad \cdots②$$

と表される．$\overrightarrow{OA}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，①，② より

$$\frac{s}{3}=1-k \quad かつ \quad \frac{s}{2}=k$$

☜ α，β，α'，β' が実数であり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$ $\iff$ $\alpha=\alpha'$ かつ $\beta=\beta'$.

が成り立ち，これより $s=\frac{\boxed{6}}{\boxed{5}}$ である．このときの点 P が D であるから，$s=\frac{6}{5}$ を ① に代入し，P を D で置き換えると

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}\overrightarrow{OB}$$

である．

(1)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-\boxed{\ 2\ }\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$ と $|\overrightarrow{OA}|=2$，

☜ $|\overrightarrow{AB}|^2$
$=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$
$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$
$=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$.

$|\overrightarrow{OB}|=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$ より

$$|\overrightarrow{AB}|^2=2^2-2\cdot1+3^2=11$$

であるから

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{\ 11\ }}$$

である．

(2)　直線 AC 上に点 H があるとき，実数 t を用いて $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AC}$ と表されるので

$$\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$$
$$=\left(\boxed{\ 1\ }-t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{\boxed{\ 2\ }}\overrightarrow{OB}\qquad\cdots③$$

☜ $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

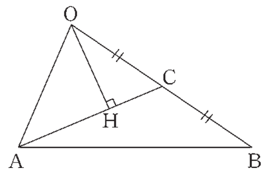
と表される．ここで

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$
$$=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

である．よって，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ であるとき

☜ **垂直条件**
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$



であるから

$$\left\{(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=0$$
$$(t-1)|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1-2t}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{t}{4}|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

となる．さらに $|\overrightarrow{OA}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$，$|\overrightarrow{OB}|=3$ を用いて

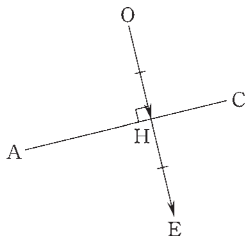
$$4(t-1)+\frac{1-2t}{2}+\frac{9t}{4}=0$$

より $t=\frac{2}{3}$ を得る．これを ③ に代入して

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\ 1\ }}{\boxed{\ 3\ }}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\ 1\ }}{\boxed{\ 3\ }}\overrightarrow{OB}$$

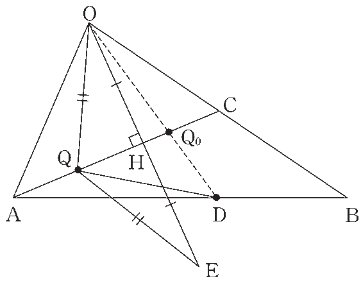
である．

また，直線 AC に関して O と対称な点を E とすると ☜



$$\overrightarrow{OE}=\boxed{\ 2\ }\overrightarrow{OH}$$

である．



OE⊥AC と OH＝EH より，直線 AC は線分 OE の垂直二等分線である．

よって，点 Q が直線 AC 上を動くとき

$$\mathrm{EQ}=\mathrm{OQ}$$

であるから，二つの直線 AC と OD の交点を $\mathrm{Q_0}$ とすると

$$\mathrm{DQ}+\mathrm{EQ}=\mathrm{DQ}+\mathrm{OQ}\geqq \mathrm{DQ_0}+\mathrm{OQ_0}=\mathrm{OD}$$

が成り立つ．

ここで

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2&=\left|\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\\&=\frac{1}{5^2}|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=\frac{1}{5^2}(4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)\\&=\frac{1}{5^2}(4\cdot 2^2+12\cdot 1+9\cdot 3^2)\\&=\frac{109}{5^2}\end{aligned}$$

☜ $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$．

であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\dfrac{\sqrt{109}}{5}$ である．したがって，DQ＋EQ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{109}}}{\boxed{5}}$ である．

第5問　統計

あるクラスの生徒5人が英語と数学の試験を受けた．いずれの試験も得点は負でない整数とし，満点は100点である．英語の試験の得点を変量 x，数学の試験の得点を変量 y とする．また，それぞれの平均値を $\overline{x}$, $\overline{y}$ とする．次の表はこれらのデータをまとめたものである．ただし，一部のデータが失われており，空欄となっている．

番号	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$
1	85			30
2	72	67		C
3	A			−20
4	30			D
5	61		3	0
合計	B			0

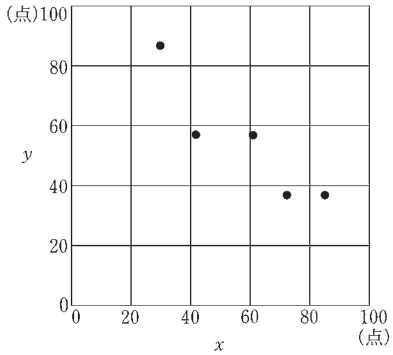
以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1)　変量 x の平均値 $\overline{x}$ は $\boxed{\text{アイ}}.\boxed{\text{ウ}}$ 点である．また，表中のA，Bの値はそれぞれ $\boxed{\text{エオ}}$ 点，$\boxed{\text{カキク}}$ 点であり，変量 x の中央値は $\boxed{\text{ケコ}}.\boxed{\text{サ}}$ 点である．

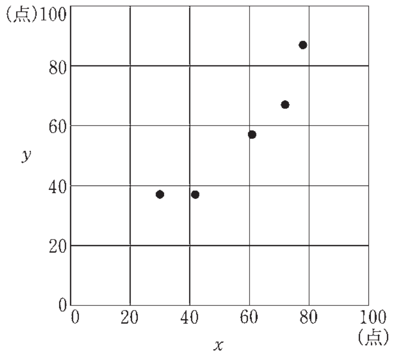
(2)　変量 y の分散は360である．表中のC，Dの値はそれぞれ $\boxed{\text{シス}}$ 点，$\boxed{\text{セソタ}}$ 点である．

(3)　変量 x と変量 y の相関図(散布図)は $\boxed{\text{チ}}$ である。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

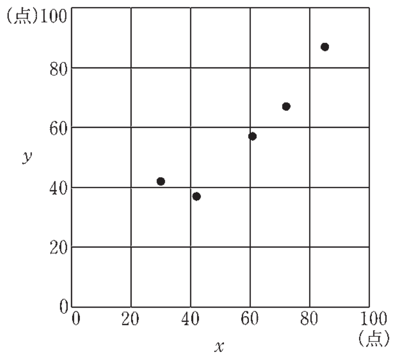
⓪



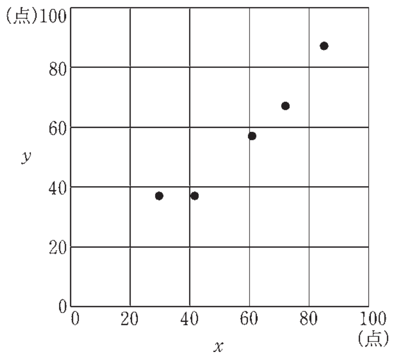
①



②



③



(4)　変量 x と変量 y の相関係数は $\boxed{\text{ツ}}$ である。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　−0.97　　①　−0.04　　②　0.04　　③　0.97

(5)　番号 1，3，4 の生徒が英語の追試験を受けた。番号 1 の生徒は得点が 6 点上がり，残り 2 人の生徒はそれぞれ得点が 3 点ずつ下がった。この 3 人の生徒については追試験の得点を変量 z とし，これ以外の番号 2，5 の 2 人の生徒については，最初に受けた英語の試験の得点を変量 z とする。

変量 z の平均値 は 変量 x の平均値と比べて $\boxed{\text{テ}}$。

また，変量 z の分散 は 変量 x の分散と比べて $\boxed{\text{ト}}$。

$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　増加する　　①　変化しない　　②　減少する

【解説】

問題

(1)　番号5の生徒の x の値が61，$x-\overline{x}$ の値が3であることから，変量 x の平均値 $\overline{x}$ は

$$61-3=\boxed{58}.\boxed{0}\ 点$$

である．これと生徒の人数が5であることから，表中のBの値は

$$58\cdot5=290\ 点$$

である．これより，表中のAの値を a とすると

$$85+72+a+30+61=290$$

が成り立つから

$$a=42$$

である．よって，表中のAの値は $\boxed{42}$ 点，Bの値は $\boxed{290}$ 点である．

また，変量 x の小さい方から数えて3番目の値は61点であるから，中央値は $\boxed{61}.\boxed{0}$ 点である．

> **平均値**
> 変量 x がとる N 個の値を
> $$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$$
> とすると平均値 $\overline{x}$ は
> $$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}.$$

> **中央値**
> 資料を大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．資料の個数が偶数のときは，中央に並ぶ二つの資料の平均値を中央値とする．

(2)　$y-\overline{y}$ の合計は0であるから，表中のC，Dの値をそれぞれ c，d とすると

$$30+c+(-20)+d+0=0$$

すなわち

$$c+d=-10 \qquad \cdots①$$

が成り立つ．また，変量 y の分散は360であるから

$$\frac{30^2+c^2+(-20)^2+d^2+0^2}{5}=360$$

すなわち

$$c^2+d^2=500$$

が成り立つ．これを変形すると

$$(c+d)^2-2cd=500$$

となり，これに①を代入すると

$$(-10)^2-2cd=500$$

より

$$cd=-200 \qquad \cdots②$$

を得る．①，②より，c と d は2次方程式

$$t^2+10t-200=0$$

の二つの解であるから

$$(t+20)(t-10)=0$$

より

$$(c,\ d)=(-20,\ 10),\ (10,\ -20)$$

である．ここで，番号2の生徒の y の値が67であることから $c=-20$ のときの変量 y の平均値は

$$67-(-20)=87\ 点$$

> **分散**
> 変量 x がとる N 個の値を
> $$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$$
> とすると，分散 s^2 は，平均値を $\overline{x}$ として
> $$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2 \qquad \cdots(ア)$$
> または
> $$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k{}^2-\overline{x}^2. \qquad \cdots(イ)$$
> ここでは(ア)を用いた．

となるが，このとき番号 1 の生徒の y の値は

$$87+30=117 \text{ 点}$$

となり，満点が 100 点であることに反する．

$c=10$ のときの変量 y の平均値は

$$67-10=57 \text{ 点}$$

であり，このとき，y の値は番号の順に

$$87,\ 67,\ 37,\ 37,\ 57$$

☜ $\overline{y}=57$，$c=10$，$d=-20$.

であるから適する．よって，表中のＣ，Ｄの値はそれぞれ

$\boxed{10}$ 点，$\boxed{-20}$ 点である．

以上の結果から，失われていたデータを復元したものが次の表である．

番号	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$
1	85	87	27	30
2	72	67	14	10
3	42	37	−16	−20
4	30	37	−28	−20
5	61	57	3	0
合計	290	285	0	0

(3) 番号 1 の生徒の $(x,\ y)=(85,\ 87)$ と番号 4 の生徒の $(x,\ y)=(30,\ 37)$ がプロットされているのは，③のみである．また，③は生徒 5 人のデータに対応する点が正しくプロットされている．よって，変量 x と変量 y の相関図(散布図)は $\boxed{③}$ である．

(4) 相関図から，変量 x と変量 y の間には強い正の相関関係があることが読み取れるから，$\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

(5) 番号 1 の生徒は得点が 6 点上がり，番号 3，4 の 2 人の生徒はそれぞれ得点が 3 点ずつ下がったので，5 人の変量 x から変量 z への変化量は

$$6-3-3=0$$

となり，変量 z の平均値 $\overline{z}$ は変量 x の平均値 $\overline{x}$ と同じである．よって，$\boxed{テ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

☜

番号	x	z
1	85	91
2	72	72
3	42	39
4	30	27
5	61	61
合計	290	290

また，平均値が変化しないことと，追試験を受けた 3 人の $|z-\overline{z}|$ の値が $|x-\overline{x}|$ の値よりも増加したことから，5 人の $(z-\overline{z})^2$ の値の合計は $(x-\overline{x})^2$ の値の合計よりも増加するので，変量 z の分散は変量 x の分散と比べて増加する．よって，

$\boxed{ト}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

第６問　コンピュータ

(1)　次の〔プログラム１〕を作成した．ただし，A には自然数を入力する．

〔プログラム１〕

```
100 INPUT PROMPT "A=": A
110 LET L=1
120 FOR M=1 TO A
130     LET H=(M+1)*(M+1)
140     IF L<=A AND A<H THEN GOTO 170
150     LET L=H
160 NEXT M
170 PRINT M
180 END
```

〔プログラム１〕を実行して，A に 8 を入力すると，170 行で出力される M の値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，A に 9 を入力すると，170 行で出力される M の値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

〔プログラム１〕は入力された自然数 A の $\boxed{\text{ウ}}$ を出力するプログラムである．$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　２乗の値　　　①　正の平方根
②　３乗の値　　　③　正の平方根の整数部分

(2)　〔プログラム１〕を部分的に変更して，自然数 A を入力したとき，A の正の平方根の小数第１位を四捨五入して得られる自然数を出力するようにしたい．そのためには〔プログラム１〕の 130 行を

```
130    LET H=[エ]
```

と変更すればよい．$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　M-0.5　　　①　M+0.5
②　(M-0.5)*(M-0.5)　　　③　(M+0.5)*(M+0.5)

変更後の〔プログラム１〕を実行して，A に 30 を入力すると，150 行は $\boxed{\text{オ}}$ 回実行され，170 行で出力される M の値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3)　変更後の〔プログラム１〕を参考にして，自然数 A と２以上の整数 N を入力したとき，A の正の N 乗根の小数第１位を四捨五入して得られる自然数を出力する〔プログラム２〕を作成した．

〔プログラム２〕

```
100 INPUT PROMPT "A=": A
102 INPUT PROMPT "N=": N
110 LET L=1
```

```
120 FOR M=1 TO A
130     LET H=1
132     FOR J=1 TO [キ]
134         LET H=[ク]
136     NEXT J
140     IF L<=A AND A<H THEN GOTO 170
150     LET L=H
160 NEXT M
170 PRINT M
180 END
```

キ ，ク に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ．

⓪ N-1	① N
② A-1	③ A
④ (M+0.5)*(M+0.5)	⑤ (M+0.5)*N
⑥ H*(M-0.5)	⑦ H*(M+0.5)

〔プログラム２〕を実行して，A に 16，N に 3 を入力すると，170 行で出力される M の値は ケ である．

また，N に 3 を入力すると， ケ が出力される A の値のうち最大のものは コサ である．

【解説】

問題

(1) 〔プログラム１〕を実行して，A に 8 を入力すると，120 行から 160 行の繰り返しの中で変数の値などは次のように変化する．

行＼M	1	2
130	H=4	H=9
140	1≦8<4（偽）	4≦8<9（真）
150	L=4	↓
170		2 を出力

☜ $H=(M+1)^2$．
L は一つ前の繰り返しのときの H の値．

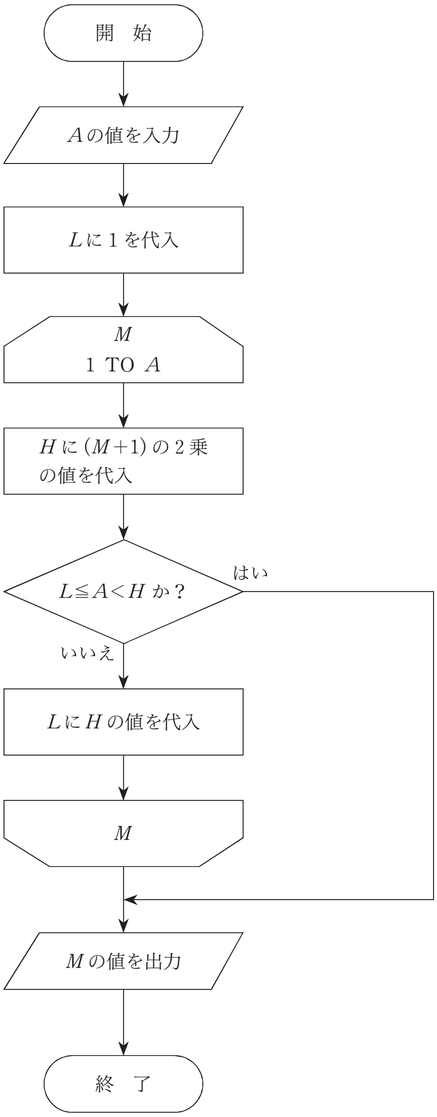
よって，〔プログラム１〕を実行して，A に 8 を入力したとき 170 行で出力される M の値は 2 である．同様にして，A に 9 を入力すると， 3 が出力される．

140 行において変数 L は M^2，H は $(M+1)^2$ であるから，IF 文の条件が真となるのは，$M^2 \leqq A<(M+1)^2$ すなわち $M \leqq \sqrt{A} <M+1$ のときであり，このときの M の値が 170 行で出力される．この M の値は $\sqrt{A}$ の整

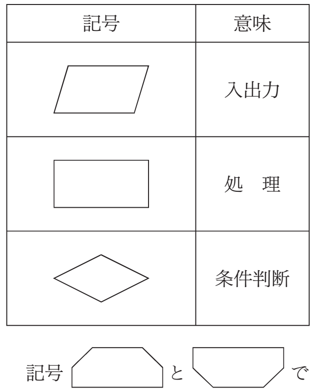
数部分，すなわち，A の「正の平方根の整数部分」であるから，

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

〔プログラム 1〕の流れ図は次のようになる．



☜ この流れ図での記号の意味



囲まれた部分はループを表す．

(2)　自然数 a の正の平方根の小数第1位を四捨五入して得られる自然数を x とすると

$$x-0.5 \leqq \sqrt{a} < x+0.5$$

すなわち

$$(x-0.5)^2 \leqq a < (x+0.5)^2$$

☜　$x \geqq 1$ なので，$x-0.5>0$ である．

が成り立つ．

したがって，〔プログラム1〕の140行においてHが(M+0.5)^2，Lが(M-0.5)^{2}であればよい．また，1回目の繰り返し(M=1)のときLの値は1であるが，自然数の正の平方根は1以上であるから110行は変更せずそのままでよい．

よって，130行を「LET H=(M+0.5)*(M+0.5)」とすればよく，

$\boxed{エ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

変更後の〔プログラム1〕を実行して，Aに30を入力すると，120行から160行の繰り返しの中で変数の値などは次のように変化する．

行＼M	1	2	3	4	5
130	H=2.25	H=6.25	H=12.25	H=20.25	H=30.25
140	(偽)	(偽)	(偽)	(偽)	(真)
150	L=2.25	L=6.25	L=12.25	L=20.25	↓
170					5を出力

よって，変更後の〔プログラム1〕を実行して，Aに30を入力すると，150行は $\boxed{4}$ 回実行され，170行で出力されるMの値は $\boxed{5}$ である．

(3)　n を2以上の整数とする．自然数 a の正の n 乗根の小数第1位を四捨五入して得られる自然数を y とすると

$$y-0.5 \leqq \sqrt[n]{a} < y+0.5$$

すなわち

$$(y-0.5)^n \leqq a < (y+0.5)^n$$

が成り立つ．

したがって，〔プログラム2〕の140行においてHが(M+0.5)^{N}，Lが(M-0.5)^{N}であればよい．

130行から136行はHの値を求める処理であり，130行でH=1としていることから，HにM+0.5の値をN回掛ければよい．すなわち，「LET H=H*(M+0.5)」の処理がN回実行されればよい．

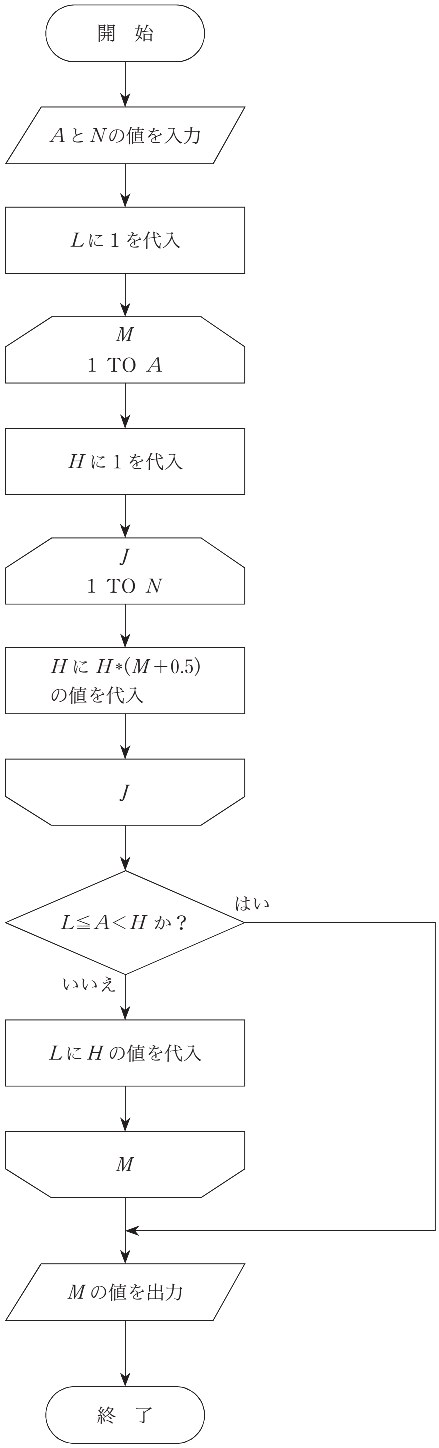
よって，132行は「FOR J=1 TO N」，134行は「LET H=H*(M+0.5)」とすればよく，$\boxed{キ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ であり，

$\boxed{ク}$ に当てはまるものは $\boxed{⑦}$ である．

完成した〔プログラム２〕とその流れ図は次のようになる．

〔プログラム２〕

```
100 INPUT PROMPT "A=": A
102 INPUT PROMPT "N=": N
110 LET L=1
120 FOR M=1 TO A
130     LET H=1
132     FOR J=1 TO N
134         LET H=H*(M+0.5)
136     NEXT J
140     IF L<=A AND A<H THEN GOTO 170
150     LET L=H
160 NEXT M
170 PRINT M
180 END
```



$2.5^3 = 15.625$，$3.5^3 = 42.875$ より，$2.5^3 \leqq 16 < 3.5^3$ であるから〔プログラム 2〕を実行して，A に 16，N に 3 を入力すると，170 行で出力される M の値は $\boxed{3}$ である．

また，N に 3 を入力すると，3 が出力される A の値は

$$15.625 \leqq A < 42.875$$

を満たす．このうち最大の自然数は $\boxed{42}$ である．

【理　科】

物　理　Ⅰ

【解答・採点基準】

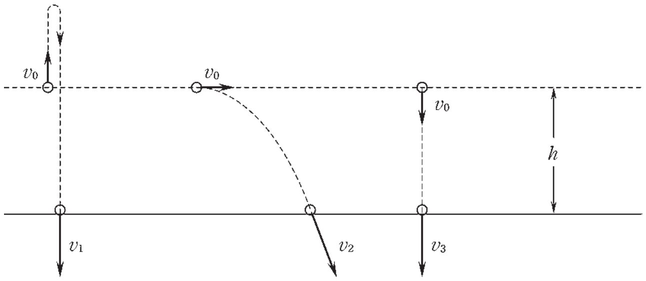
(100点満点)

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	6	5	
		問2	2	5	5	
		問3	3	3	5	
		問4	4	5	5	
		問5	5	1	5	
		問6	6	2	5	
第1問　自己採点小計					(30)	
第2問	A	問1	7	6	4	
		問2	8	5	4	
		問3	9	1	4	
	B	問4	10	5	4	
		問5	11	4	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	12	3	4	
		問2	13	4	4	
		問3	14	5	4	
	B	問4	15	3	4	
		問5	16	3	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	17	3	3	
		問2	18	4	3	
		問3	19	1	4	
	B	問4	20	4	3	
		問5	21	2	3	
		問6	22	5	4	
	C	問7	23	5	3	
		問8	24	4	3	
		問9	25	6	4	
第4問　自己採点小計					(30)	
自己採点合計					(100)	

【解説】

第１問　小問集合　問題

問１　空気抵抗が無視できるので，小物体についての**力学的エネルギー**は保存される。



小物体の質量を m，重力加速度の大きさを g，小物体を打ち出したときの床面からの高さを h，初速度の大きさを v_0 とする。はじめの**運動エネルギー**は打ち出す方向によらず $\frac{1}{2}mv_0{}^2$ である。床面を重力による**位置エネルギー**の基準面にとると，**力学的エネルギー保存則**は，次のように表される。

・鉛直上方に打ち出すとき，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgh=\frac{1}{2}mv_1{}^2$$

・水平方向に打ち出すとき，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgh=\frac{1}{2}mv_2{}^2$$

・鉛直下方に打ち出すとき，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgh=\frac{1}{2}mv_3{}^2$$

以上より，$\underline{v_1=v_2=v_3}$

最初の運動エネルギーと位置エネルギーが共通なので，床面に達したときの運動エネルギーは同じになり，速さは等しくなる。

$\boxed{1}$ の答　⑥

問２　やじろべえがつりあって静止しているときのやじろべえの重心Ｇの位置は，次図のように，うでの両端のおもりを結ぶ線分の中点にある。このＧの位置は，支点Ｏ<u>より下側の</u>$_{ア}$位置にある。

【ポイント】

力学的エネルギー

運動エネルギーと位置エネルギーの和を力学的エネルギーという。

運動エネルギー

質量 m，速さ v をもつ物体の運動エネルギー K は

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

位置エネルギー

基準面から高さ h にある質量 m の物体についての重力による位置エネルギー U は，重力加速度 g を用いて，

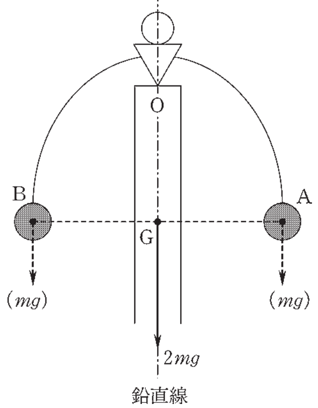
$$U=mgh$$

力学的エネルギー保存則

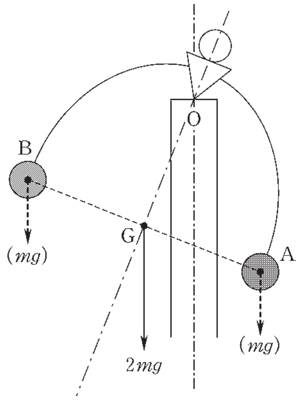
摩擦力や抵抗力などの保存力以外の力（非保存力）が仕事をしないとき，力学的エネルギーは保存される。

物理Ⅰ

・つりあって静止しているとき



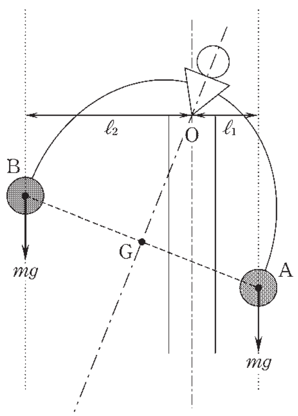
・正面から見て時計回りに傾けたとき



やじろべえに外力を加え，支点 O を中心としてやじろべえを正面から見て時計回りに傾けたときを考える。おもりの質量を m，重力加速度の大きさを g とする。正面から見て右のおもりを A，左のおもりを B とする。 A, B にはたらく重力の作用は重心 G にはたらく合力 ($2mg$) の作用と等しい。この合力 ($2mg$) による支点 O のまわりの**力のモーメント**は正面から見て反時計$_{イ}$回りとなる。したがって，やじろべえが時計回りに傾いたとき，重力によるモーメントは反時計回りに作用し，元のつりあいの位置に戻ろうとする。

〈別解〉 おもり A と B にはたらく重力によるモーメントをそれぞれ計算してみる。

次図のように，A と B の重力の作用線と支点 O との距離(うでの長さ)を，それぞれ ℓ_1, ℓ_2 とする。



A の重力による力のモーメントは時計回りで大きさは $mg\times\ell_1$,
B の重力による力のモーメントは反時計回りで大きさは $mg\times\ell_2$,
$\ell_1<\ell_2$ なので，おもりにはたらく重力による支点 O のまわりのモーメントの和は正面から見て反時計$_{イ}$回りとなり，その大きさは $mg(\ell_2-\ell_1)$ である。

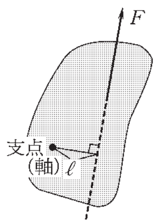
力のモーメント

(力のモーメント)$=F\times\ell$

F：力の大きさ

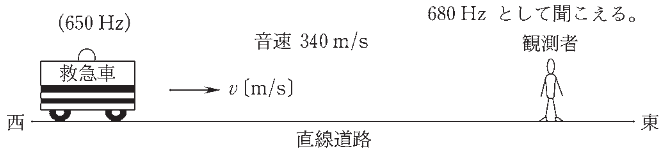
ℓ：うでの長さ

うでの長さとは，支点から力の作用線に下ろした垂線の足の長さである。



$\boxed{2}$ の答　⑤

問 3　**ドップラー効果の公式**によると，音源が観測者に近づくとき，振動数がより大きく聞こえ，音源が遠ざかるとき，振動数がより小さく聞こえる。この場合，観測者が聞いた振動数はサイレンの振動数よりも大きいから，救急車はサイレンを鳴らしながら観測者に近づいていることが分かる。



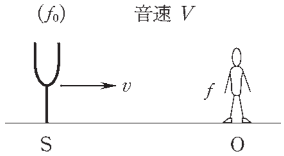
救急車の観測者へ向かう速度を v〔m/s〕とする。
ドップラー効果の公式より，

$$680=\frac{340}{340-v}\times 650$$

$$\therefore\quad v=\underline{15}\text{〔m/s〕}$$

$\boxed{3}$ の答　③

ドップラー効果の公式



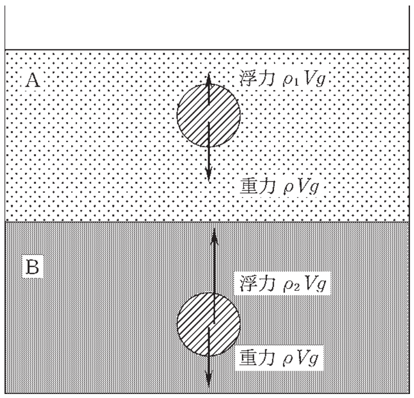
$$f=\frac{V}{V-v}f_0$$

V：音速
f_0：音源の振動数
f：観測者の受けとる音の振動数
v：音源の速度
（S → O の向きを正）

問 4　液体が 2 層に分かれているとき，下層の液体 B の方が上層の液体 A より**密度**が大きいから，

$$\rho_1<\rho_2 \qquad \cdots①$$

物体の体積を V，重力加速度の大きさを g とすると，液体 A，B 中に物体があるとき，はたらく重力と**浮力**の関係は次図のようになる。



物体は液体 A に対して沈むことから，

$$\rho_1 Vg<\rho Vg$$

$$\therefore\quad \rho_1<\rho \qquad \cdots②$$

また，液体 B に対しては浮くことから，

$$\rho Vg<\rho_2 Vg$$

$$\therefore\quad \rho<\rho_2 \qquad \cdots③$$

①，②，③ 式より，

$$\underline{\rho_1<\rho<\rho_2}$$

密度

単位体積あたりの質量

$$\text{密度}=\frac{\text{質量}}{\text{体積}}$$

浮力

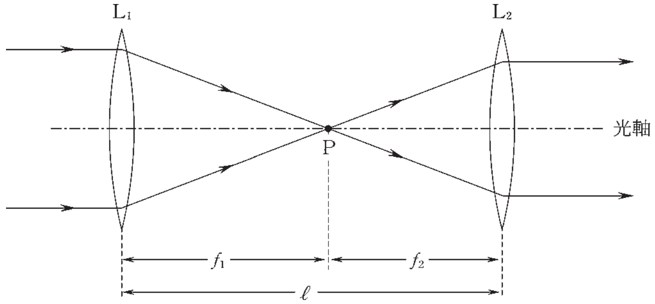
浮力の大きさは，物体が排除した液体の重さに等しい。

$$F=\rho_0 Vg$$

F：浮力の大きさ
ρ_0：液体の密度
V：液体中にある物体の体積
g：重力加速度の大きさ

$\boxed{4}$ の答　⑤

問5　次図のように，光線の交点をPとする。凸レンズL_1の光軸に平行に入射した光は焦点に向かうことから，PはL_1の焦点である。また，Pを通って凸レンズL_2に入射した光がL_2を通過後，光軸に平行に進んでいることから，PはL_2の焦点でもある。



したがって，

$$\ell = \underline{f_1 + f_2}_{\text{ウ}}$$

次に，L_1の焦点に集まってL_2に入射する光は，Pの位置に置かれた点光源から出て，L_2に入射する光と同じである。ここで，L_2をL_1に近づけると，L_2の焦点F_2の内側に点光源Pがあることになる。

ここで，次図のように，PとL_2との距離をa，PのL_2による像P′とL_2との距離を$|b|$とすると，**レンズの公式**より，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{a}$$

$a<f_2$なので，$b<0$である。

これより，Pの像P′は虚像であり，P′はL_2に対してPと同じ側に生じることになる。レンズの公式を書き換えて，

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{|b|}=\frac{1}{f_2}$$

ここで，$f_2>0$より，$|b|>a$

よって，Pの虚像P′はレンズL_2に対してPと同じ側で距離がaより遠い位置に生じる。

レンズの公式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

a　：物体とレンズ間の距離

$|b|$：像とレンズ間の距離

f　：焦点距離

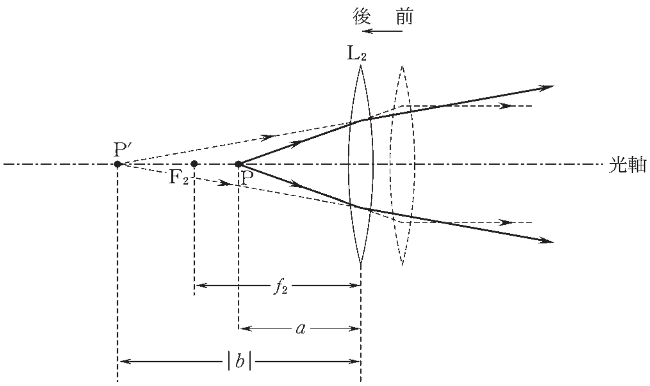
倍率$\dfrac{|b|}{a}$

$b>0$　実像がレンズに対して物体と反対側に生じる

$b<0$　虚像がレンズに対して物体と同じ側に生じる

$f>0$　凸レンズ

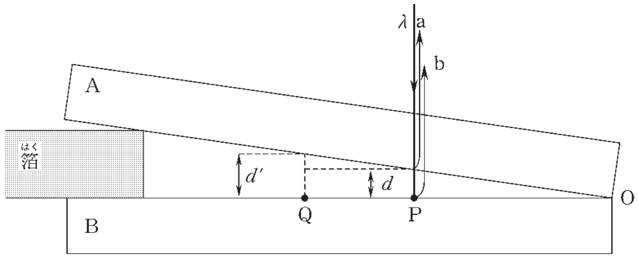
$f<0$　凹レンズ



このことより，点光源Pから出てL_2を通過する光は，点P'から出たように進む。したがって，図$\underline{\mathbf{a}}$エのように進む。

$\boxed{5}$ の答　①

問6　単色光の波長をλとし，次図のように，ガラス板B上の位置PでのA, Bではさまれたすきまの距離をdとする。



位置Pが明線となる条件を考える。Aの下面で反射した光aとBの上面で反射した光bの干渉において，**光の反射による位相の変化**を考慮する。ガラスの屈折率は空気の屈折率より大きいので，Aの下面の反射は自由端反射で位相の変化はなく，Bの上面での反射は固定端反射となり，位相がπずれる。光a，bの経路差は光bがすきまを往復する距離$2d$に等しい。したがって，位置Pで明線が生じる条件は，整数mを用いて，次式で表される。

$$2d=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots①$$

また，位置Pの明線のとなりの明線が位置Qに生じるとする。位置Qでのすきまの距離をd'とすると，Qで明線が生じる条件は①式のmを$(m+1)$におきかえて，

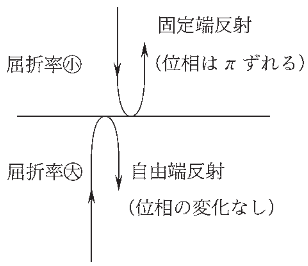
$$2d'=\left(m+\frac{3}{2}\right)\lambda \quad \cdots②$$

①, ②式より，

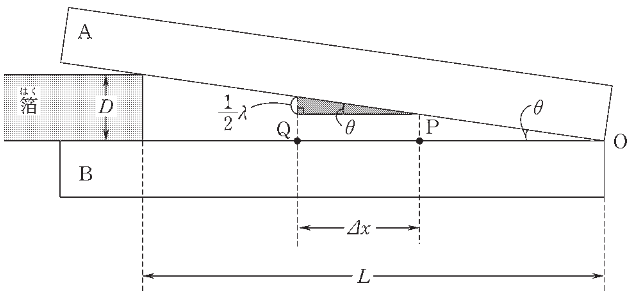
$$2(d'-d)=\lambda$$

$$d'-d=\frac{1}{2}\lambda \quad \cdots③$$

光の反射における位相の変化



次図のように，ガラス板 A, B のなす角を θ，明線の間隔を Δx，O 端から箔までの距離を L，箔の厚さを D とする。



$$\Delta x \tan\theta = \frac{1}{2}\lambda \qquad \cdots ④$$

$$L \tan\theta = D \qquad \cdots ⑤$$

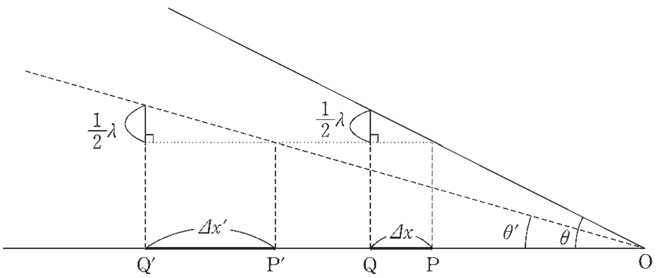
④, ⑤ 式より，

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\tan\theta} = \frac{L\lambda}{2D} \qquad \cdots ⑥$$

⑥ 式から，明線の間隔 Δx は，L と λ に比例し，D に反比例することが分かる。よって，明線の間隔を広げるためには，O から箔までの距離を長くする。② 以外の選択肢は，いずれも明線の間隔を狭くすることになる。

〈別解〉 ③ 式より，となりあう明線が生じる位置のすきまの距離の差が $\frac{1}{2}\lambda$ (＝一定) であることを利用して，次図で考えてもよい。

ガラスのなす角が θ のときの明線の間隔を PQ (＝Δx)，θ より小さい角 θ' にしたときの明線の間隔を P′Q′ (＝$\Delta x'$) とする。



$\theta' < \theta$　のとき　$\Delta x' > \Delta x$

これより，O から箔までの距離を長く (θ を小さく) すると，明線の間隔は広くなる。

$\boxed{6}$ の答　②

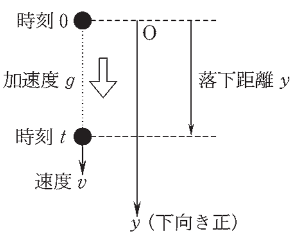
第 2 問　落体の運動・力のつりあい　問題

A

問 1　小球は重力のみを受けて**自由落下**をする。

自由落下における時間と落下距離の関係式より，

自由落下



$v = gt$

$y = \frac{1}{2}gt^2$

$v^2 = 2gy$

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2$$

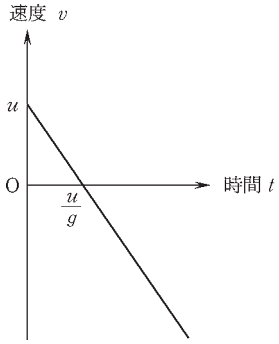
$$\therefore \quad t_1=\underline{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$\boxed{7}$ の答　⑥

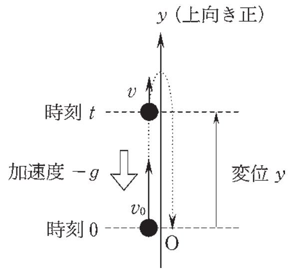
問 2　地面にいる人から見た小球は，気球と同じ速度 u を初速度とする**鉛直投げ上げ**運動をする。小球の地面に対する速度を v，手を放してからの時間を t とする。鉛直投げ上げにおける時間と速度の式より，

$$v=u-gt \quad \cdots ①$$

①式は，〈$v-t$ グラフ〉において，傾き（加速度）$-g$，縦軸の切片（初速度）u の直線を表す。



鉛直投げ上げ



$v=v_0-gt$

$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$

$v^2-v_0^2=-2gy$

v_0：初速度

v：時刻 t での速度

y：変位（時刻 t での位置）

$\boxed{8}$ の答　⑤

問 3　気球から見た小球の**相対速度** v' は，

$$v'=v-u \quad \cdots ②$$

①，② 式より，

$$v'=(u-gt)-u=0-gt$$

これより，気球から見ると，小球は，初速度$\underline{0}$ア で加速度$\underline{-g}$イ の自由落下運動をする。

相対速度

動く物体 A から観測した他の物体 B の速度のことを，A に対する B の（A から見た B の）相対速度という。

$v_{AB}=v_B-v_A$

v_{AB}：A に対する B の相対速度

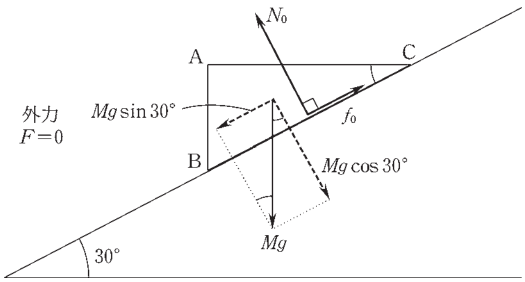
v_A：A の速度

v_B：B の速度

$\boxed{9}$ の答　①

B

問 4　外力の大きさ F が 0 のとき，三角柱にはたらく力は次図のようになる。



力のつりあいの式は，

・斜面に垂直な方向：　$N_0 = Mg\cos 30°$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{ウ}} Mg$$

・斜面に平行な方向：　$f_0 = Mg\sin 30°$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{エ}} Mg$$

$\boxed{10}$ の答　⑤

問5　三角柱が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N とする。

$F = \sqrt{3}\,Mg$ で三角柱がまさに上向きに滑り出す直前のつりあいを考える。このとき，**静止摩擦力**は斜面に沿って下向きに最大摩擦力 μN となる。

静止摩擦力

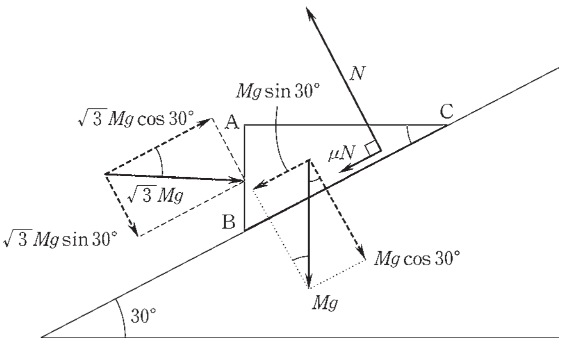
静止摩擦力は物体を面に沿って動かそうとする外力に応じて，その向きも大きさも変化していく。

$f \leqq \mu N$（最大摩擦力）

f：静止摩擦力の大きさ

μ：静止摩擦係数

N：垂直抗力の大きさ



力のつりあいの式は，

・斜面に垂直な方向：$N = \sqrt{3}\,Mg\sin 30° + Mg\cos 30°$　　…①

・斜面に平行な方向：$\sqrt{3}\,Mg\cos 30° = Mg\sin 30° + \mu N$　　…②

①，② 式より，N を消去して，

$$\mu(\sqrt{3}\,Mg) = Mg$$

$$\therefore \quad \mu = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$\boxed{11}$ の答　④

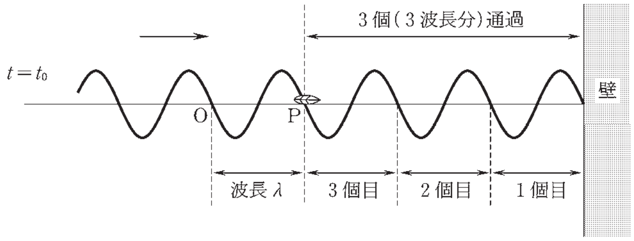
第3問　定常波・弦の振動　問題

A

問1　1**波長**分を波1個と数えると，木の葉を波が1個通過するとき木の葉は1回振動する。次ページの図のように，時刻 t_0 までに木の葉を通過した波の数は3個である。

波長

1周期の間に波が進む距離である。つまり同じ振動状態であるとなりあう2点間の距離（例えば，となりあう山の間隔）。

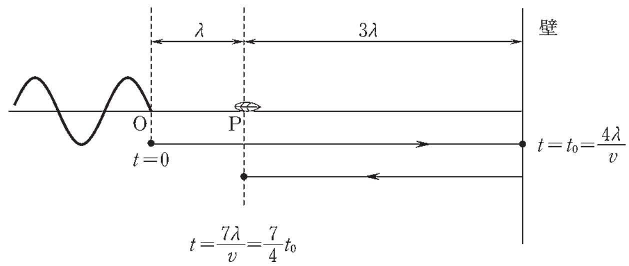


よって，波の先端が壁に到達する時刻 $t=t_0$ までに，木の葉は 3 回振動する。

12 の答　③

問2　問題の図1より，OからPまでに波が1個あるので，OP間の距離は波の波長 λ である。波の先端は次図のように，時刻とともに移動していく。

•印は表示してある時刻での波の先端を表す。



波の速さを v，波長を λ，周期を T とすると，
波の速さを表す式より，

$$v=\frac{\lambda}{T}$$

波の先端が点Oから壁までの距離 4λ を速さ v で進むから，

$$t_0=\frac{4\lambda}{v}=4T$$

$$\therefore\quad T=\frac{1}{4}t_0\quad \cdots①$$

また，点O→壁→点Pまでの距離は 7λ より，
求める時刻は，

$$t=\frac{7\lambda}{v}=7T=\underbrace{\frac{7}{4}t_0}_{ア}$$

OとPを含む直線上において，壁に入射する右向きに進む波と壁で反射して左向きに進む波が重なりあうと，**定常波**が生じる。壁は自由端なので，壁は定常波の腹 イ の位置となる。

13 の答　④

問3　①式より，周期 $T=\frac{1}{4}t_0$ であり，定常波の周期は進行波の周期に等しい。次図(定常波のモデル図)より，木の葉が浮いている点Pは腹の位置となり，木の葉は周期 $T=\frac{1}{4}t_0$ で大きく振動する。

波の速さを表す式

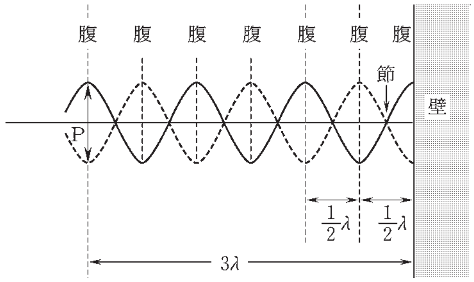
$v=f\lambda=\frac{\lambda}{T}$

v：波の速さ
f：振動数
λ：波長
T：周期

定常波

一般に，波が反射すると，入射波と反射波が重なり，定常波が生じる。反射が自由端反射の場合，反射壁には定常波の腹ができる。固定端反射の場合，反射壁には定常波の節ができる。

自由端　…腹
固定端　…節



振動数を f (単位時間に振動する回数) とすると,

$$f=\frac{1}{T}=\frac{4}{t_0}$$

よって，木の葉は時間 t_0 の間に $ft_0=\underline{4}$ 回振動する。

$\boxed{14}$ の答　⑤

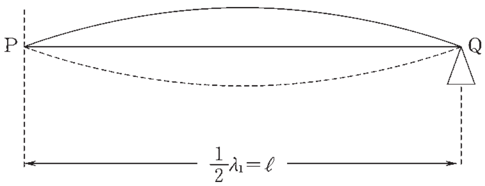
B

問 4　弦の**基本振動**は，弦に腹を 1 個もつ定常波が生じるときであるから，PQ の中点は腹となる。問題の図 3 より，振動周期が T であるから，弦を伝わる波の周期も等しく T になる。また，両端 P, Q は節となるので，波長 λ_1 は,

$$\lambda_1=2\ell$$

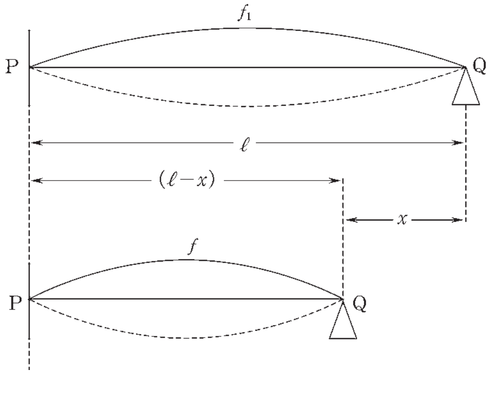
よって，弦を伝わる波の速さ v は,

$$v=\frac{\lambda_1}{T}=\underline{\frac{2\ell}{T}}$$



$\boxed{15}$ の答　③

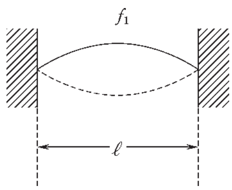
問 5　弦の長さが ℓ, $(\ell-x)$ のときの基本振動の振動数を，それぞれ，f_1, f とする。弦の長さが $(\ell-x)$ のときの基本振動の波長は，$2(\ell-x)$ である。



基本振動

弦に腹を 1 個もつ定常波が生じるときの振動を基本振動という。基本振動の振動数は

$$f_1=\frac{v}{2\ell}$$



f_1 ：基本振動数
v ：弦を伝わる波の速さ
ℓ ：弦の長さ

問題文にあるように，PQ 間の弦の長さが変わっても弦を伝わる波の速さは変化しない。

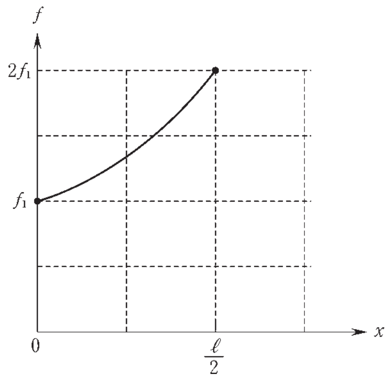
$$f_1=\frac{v}{2\ell}$$

$$f=\frac{v}{2(\ell-x)}\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{\ell}{2}\right)$$

2 式より，

$$f=\frac{\ell}{\ell-x}f_1$$

これより，x が増加するほど，つまり，弦が短いほど振動数は大きくなる。求めるグラフは次図のようになる。

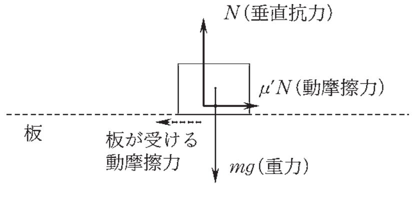


$\boxed{16}$ の答　③

第 4 問　運動方程式・仕事とエネルギー・熱と温度　問題

A

問 1　小物体が板上を滑っているとき，小物体には重力 mg と板から受ける垂直抗力(大きさ N)，**動摩擦力**(大きさ $\mu'N$)の 3 力がはたらいている。動摩擦力の向きについては，板を右向きに引っ張ったことから，板が右に動こうとするのを妨げる向き，すなわち板には小物体から左向きの動摩擦力がはたらく。**作用反作用の法則**より，小物体には板から右向きの動摩擦力がはたらく。または，小物体は板に対して左向きに滑るので，動摩擦力は右向きにはたらくと判断してもよい。これより，小物体にはたらく力を図示すると，次図(実線の矢印)のように表せる。



$\boxed{17}$ の答　③

問 2　小物体の鉛直方向での力のつりあいの式より，

動摩擦力

動摩擦係数を μ'，垂直抗力の大きさを N とすると，動摩擦力の大きさ f は次式で表せる。

$$f=\mu'N$$

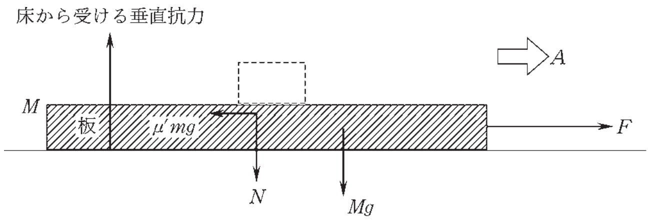
作用反作用の法則

物体 A から物体 B に力をはたらかせると，物体 B から物体 A に同じ作用線上で，大きさが等しく，向きが反対の力がはたらく。

$$N = mg$$

したがって，動摩擦力の大きさは，$\mu' N = \mu' mg$ である。

小物体が板上を滑っているとき，板にはたらく力を図示する。



板の**運動方程式**は，次式で表せる。

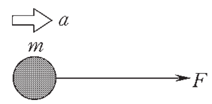
$$\underline{MA = F - \mu' mg}$$

$\boxed{18}$ の答　④

運動方程式

質量 m〔kg〕の物体に F〔N〕の力がはたらくとき，物体の加速度を a〔m/s²〕とすると，次式が成り立つ。

$$ma = F$$

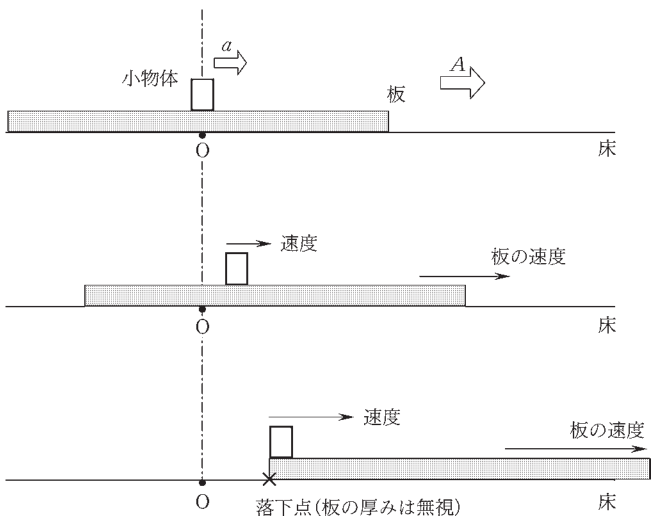


加速度の向きは，力の向きと一致する。いくつかの力が物体にはたらくときは，F は合力である。

問 3　小物体は右向きの動摩擦力を受けるので，床に対する小物体の加速度を a とすると，運動方程式は次式で表せる。

$$ma = \mu' mg$$

これより，$a = \mu' g$（>0）となり，小物体は床上の点 O から初速度 0，加速度 a の等加速度直線運動をする。また，板は初速度 0，加速度 A の等加速度直線運動を行うが，小物体が板上を滑り出したことから，加速度の大小関係は $a < A$ である。時間が経過すると小物体と板は次図のような運動をする。



このことより，<u>小物体は板上の左端から飛び出し，床上の点 O より右の位置に落下する。</u>

$\boxed{19}$ の答　①

B

問 4　外力がばねに対してした仕事はばねの**弾性力による位置エネルギー（弾性エネルギー）**の変化（増加）に等しい。

よって，

弾性力による位置エネルギー（弾性エネルギー）

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

U：弾性エネルギー

k：ばね定数

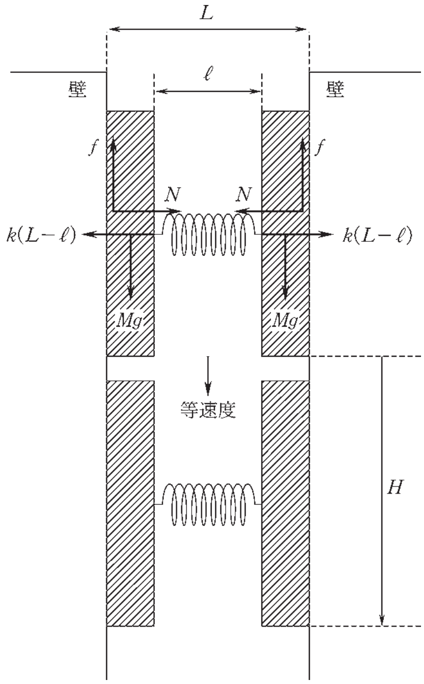
x：自然長からの伸び量や縮み量

$$\underline{\frac{1}{2}k(L-\ell)^2}$$

$\boxed{20}$ の答　④

問 5　2 枚の円板とばねで構成された物体にはたらく力を図示する。

1 枚の円板には重力 Mg，ばねの弾性力 $k(L-\ell)$，壁から受ける垂直抗力 N と動摩擦力 f の 4 力がはたらいている。



物体が壁に沿って等速度で落下していることから，物体にはたらく力はつりあっている。

円板について，鉛直方向の力のつりあいの式より，

$$f=Mg \quad \cdots①$$

1 枚の円板にはたらく動摩擦力がした**仕事**は，動摩擦力の向きが運動方向に逆向きであることから，$-fH$ である。

よって，2 枚の円板にはたらく動摩擦力がした仕事の和 W は，

$$W=-fH\times2=-2fH \quad \cdots②$$

①，② 式より，

$$W=\underline{-2MgH}$$

〈別解〉　物体が等速度で距離 H だけ落下する間において物体にはたらくそれぞれの力のした仕事を求めてみる。

・重力がした仕事 $W_G=MgH\times2=2MgH$

・ばねの弾性力がした仕事 $W_K=0$

・垂直抗力がした仕事 $W_N=0$

（弾性力も垂直抗力も運動方向に直角なので，仕事は 0 である。）

2 枚の円板にはたらく動摩擦力がした仕事の和を W とすると，**仕事と運動エネルギーとの関係**より，

$$W_G+W_K+W_N+W=0$$

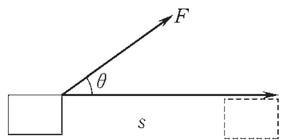
仕事

$W=Fs\cos\theta$

F：力の大きさ

s：変位の大きさ

θ：力と変位のなす角度



仕事と運動エネルギーとの関係

（仕事の総和）

＝（運動エネルギーの変化）

これより，

$$2MgH+0+0+W=0$$

$$\therefore\quad W=\underline{-2MgH}$$

$\boxed{21}$ の答　②

問 6　円板が壁から受ける垂直抗力の大きさを N とすると，

円板について，水平方向の力のつりあいの式より，

$$N=k(L-\ell)$$

また，円板と壁の間の動摩擦係数を μ' とすると，１枚の円板が壁から受ける動摩擦力の大きさ f は $f=\mu'N$ である。

これと，① 式の鉛直方向のつりあいの式より，

$$\mu'N=Mg$$

$$\therefore\quad \mu'=\frac{Mg}{N}=\underline{\frac{Mg}{k(L-\ell)}}$$

$\boxed{22}$ の答　⑤

C

問 7　**熱容量**は物体全体の温度を 1K だけ上げるのに必要な熱量〔J〕のことであるから，熱容量の単位は<u>〔J/K〕</u>となる。

$\boxed{23}$ の答　⑤

問 8　２個のおもりにはたらく重力がする仕事は，重力による位置エネルギーの減少分 $2Mgh$ に等しい。その仕事がすべて熱に変換されるから，発生した熱量 Q は，

$$Q=\underline{2Mgh}$$

$\boxed{24}$ の答　④

問 9　水と熱量計全体が受けとる熱量は，

$$(m_0c_0+C)\varDelta T$$

熱量の保存より，この熱量が Q に等しいから，

$$Q=(m_0c_0+C)\varDelta T$$

$$\therefore\quad \varDelta T=\underline{\frac{Q}{m_0c_0+C}}$$

$\boxed{25}$ の答　⑥

熱容量

物体全体の温度を 1K だけ上昇させるのに必要な熱量を熱容量 C という。比熱 c は，単位質量の物体の温度を 1K だけ上昇させるのに必要な熱量である。物体の質量を m とすると，

$C=mc$

熱量の保存

（高温物体が放出した熱量）

＝（低温物体が吸収した熱量）

化　学　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問	解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	問1	1	3	3	
		2	1	3	
		3	5	3	
	問2	4	6	4	
	問3	5	2	4	
	問4	6	3	4	
	問5	7	4	4	
第1問　自己採点小計				(25)	
第2問	問1	8	5	4	
	問2	9	4	4	
	問3	10	2	4	
	問4	11	1	3	
		12	4	3	
	問5	13	2	3	
	問6	14	5	4	
第2問　自己採点小計				(25)	
第3問	問1	15	5	4	
	問2	16	2	3	
	問3	17	3	4	
	問4	18	4	4	
	問5	19	6	3	
		20	3	3	
	問6	21	6	4	
第3問　自己採点小計				(25)	
第4問	問1	22	2	4	
	問2	23	3	4	
	問3	24	3	3	
	問4	25	4	4	
	問5	26	1	3	
		27	2	3	
	問6	28	3	4	
第4問　自己採点小計				(25)	
自己採点合計				(100)	

【解説】

第１問　物質の構成　問題

問１　単体と化合物，混合物，イオン化エネルギー

a　各物質の化学式は，①O_3，②H_2SO_4，③CuS，④H_2O_2，⑤KNO_3 である。したがって，酸素原子を含まないものは③である。

$\boxed{1}$…③

b　２種類以上の純物質からなる物質を混合物という。①塩酸は，塩化水素 HCl の水溶液なので，HCl と H_2O の混合物である。②CO_2，③NH_3，④$NaCl$，⑤H_2O は純物質である。

$\boxed{2}$…①

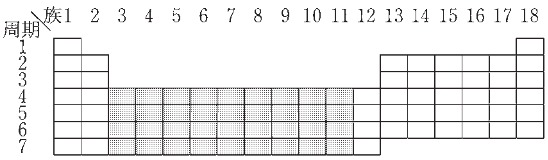
c　原子から電子１個を取り去って１価の陽イオンにするときに必要なエネルギーを，(第一)イオン化エネルギーといい，周期表において同一周期では１族が最小値，18 族が最大値をとる。また，同族では原子番号が大きいほど小さい。したがって，イオン化エネルギーが最も小さいのは⑤K である。

$\boxed{3}$…⑤

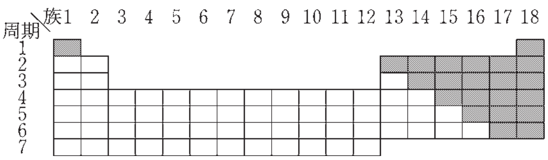
問２　周期表

現在用いられている周期表では，元素は原子番号の順に並べられている。原子量の順に並べると，例えば原子番号 18 の Ar(原子量 39.95)と，原子番号 19 の K(原子量 39.10)のように順番が逆になるところがある。

下図の　で示されている周期表の３族から 11 族の元素が遷移元素である。また，1，2 族と 12 族から 18 族の元素が典型元素である。



一方，下図の　で示されている元素は非金属元素で，他は金属元素である。したがって，遷移元素はすべて金属元素である。



$\boxed{4}$…⑥

問３　原子，イオン

①　正しい。電子殻に収容できる電子の最大数は，K 殻２個，

【ポイント】

純物質と混合物

純物質…１種類の単体，または１種類の化合物だけからなる物質。

混合物…２種類以上の純物質が混ざり合っている物質。

イオン化エネルギー(第一イオン化エネルギー)

原子から電子１個を取り去って１価の陽イオンにするときに必要なエネルギー。

イオン化エネルギーが小さい原子ほど，陽イオンになりやすい。

L殻8個，M殻18個である。内側からn番目の電子殻には最大$2n^2$個の電子を収容できる。

② 誤り。18族元素の原子の最外殻電子の数は，Heが2，他は8である。なお，Heを除く典型元素では，族番号の1の位の数が最外殻電子の数と一致する。

③ 正しい。(中性子の数)＝(質量数)−(陽子の数)なので，${}^{12}_{6}C$原子の原子核は，陽子6個，中性子12−6＝6個から構成されている。

④ 正しい。価電子の数は，18族は0であるが，18族以外の典型元素においては最外殻電子の数に等しいので，14族元素であるCとSiの価電子の数はともに4である。

⑤ 正しい。典型元素の原子が単原子イオンになるとき，周期表で最も近い18族の原子と同じ電子配置になる傾向がある。アルミニウムイオンAl^{3+}と酸化物イオンO^{2-}はともにネオンNe(K殻2個，L殻8個)と同じ電子配置である。

$\boxed{5}$ …②

問4　同位体

原子量は，同位体の存在比による相対質量の平均値になるので，${}^{25}Mg$の存在比をx〔%〕とすると，

$$24\times\frac{80}{100}+25\times\frac{x}{100}+26\times\frac{100-80-x}{100}=24.3$$

$$x=10〔\%〕$$

$\boxed{6}$ …③

問5　結晶

① 正しい。塩化カルシウム$CaCl_2$は，カルシウムイオンCa^{2+}と塩化物イオンCl^-がクーロン力(静電気力)で結びついてできたイオン結晶である。

② 正しい。二酸化ケイ素SiO_2の結晶では，ケイ素原子と酸素原子が共有結合によって規則正しく配列し，ケイ素：酸素＝1：2の原子数比で結晶を構成している。なお，SiO_2は分子式ではなく組成式である。

③ 正しい。黒鉛Cの結晶では，1個の炭素原子が3個の炭素原子と共有結合で結びつき，平面構造をとっている。平面と平面は弱い結合で結びつけられているためやわらかい。また，炭素原子の4個の価電子のうち1個は，平面内を自由に動くことができるので電気をよく導き，電極に用いられる。

④ 誤り。二酸化炭素CO_2分子中の炭素原子と酸素原子は共有結合で結びついている。ドライアイス(二酸化炭素の結晶)は，CO_2分子どうしが弱い結合で結晶を形成しているためやわらかく，もろい。

⑤ 正しい。ナトリウムNaなどの金属の結晶では，各原子の価電子が結晶全体を移動することができるので，熱や電気をよく

原子番号，質量数

$$\overset{\text{質量数}}{\underset{\text{原子番号}}{{}^{56}_{26}\mathrm{Fe}}}$$

(原子番号)＝(陽子の数)

(質量数)＝(陽子の数)＋(中性子の数)

価電子

原子の最外殻に存在する電子。価電子は，原子がイオンになったり，結合したりするときに重要なはたらきをする。希ガスの原子は，イオンになったり，結合したりしにくいので，価電子の数は0とする。

同位体

陽子の数は等しいが，中性子の数が異なるので，質量数が異なる原子どうしを互いに同位体という。

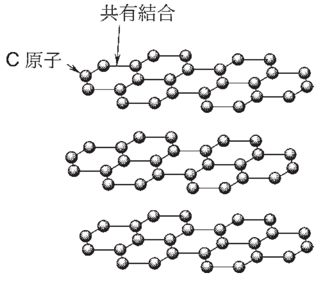
イオン結合

陽イオンと陰イオンの間にはたらく結合。

共有結合

原子間で出し合った価電子を共有してできる結合。

黒鉛(グラファイト)



導く。このような電子を自由電子という。

$\boxed{7}$ … ④

第 2 問　溶液の濃度，反応熱と熱化学方程式，反応の量的関係，酸化と還元

問題

問 1　溶液の調製

0.200 mol/L のグルコース水溶液 200 mL に含まれるグルコース $C_6H_{12}O_6$ (180 g/mol) の質量は，

$$180\times0.200\times\frac{200}{1000}=7.20\,〔g〕$$

よって，0.200 mol/L のグルコース水溶液 200 mL を調製するには，7.20 g のグルコースを少量の水に溶かしたのち 200 mL のメスフラスコに移しとり，標線まで水を加えて 200 mL とする。

なお，メスシリンダーはメスフラスコに比べて精度が低いので，正確な濃度の溶液を調製するための実験器具としては不適当である。

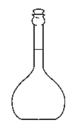
$\boxed{8}$ … ⑤

モル濃度〔mol/L〕

$$=\frac{溶質の物質量〔mol〕}{溶液の体積〔L〕}$$

メスフラスコ

正確な体積の溶液を調製するのに用いる。



問 2　化学変化とその量的関係

単体のアルミニウム Al は，希塩酸と反応して水素 H_2 を発生する。

$$2\,Al\;+\;6\,HCl\;\longrightarrow\;2\,AlCl_3\;+\;3\,H_2 \qquad \cdots(1)$$

酸化アルミニウム Al_2O_3 は両性酸化物なので，希塩酸に溶解するが，H_2 は発生しない。

$$Al_2O_3\;+\;6\,HCl\;\longrightarrow\;2\,AlCl_3\;+\;3\,H_2O$$

H_2 が標準状態で 672 mL 発生したことから，(1) 式より，反応した Al の物質量は，

$$\frac{672}{22.4\times10^3}\times\frac{2}{3}=0.020\,〔mol〕$$

よって，Al (27 g/mol) の質量は，

$$27\times0.020=0.54\,〔g〕$$

したがって，Al_2O_3 の質量の割合は，

$$\frac{3.60-0.54}{3.60}\times100=85\,〔\%〕$$

$\boxed{9}$ … ④

反応式の係数と物質量

(反応式中の係数の比)

=(反応により変化する物質の物質量の比)

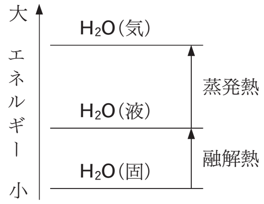
問 3　状態変化に伴う熱の出入り

H_2O(気) がもつエネルギーは，H_2O(液) がもつエネルギーより$_ア$<u>大きい</u>。状態変化は化学変化ではないが，一定の熱の出入りを伴う。水の蒸発熱は 44 kJ/mol なので，1 mol の水を蒸発させて水蒸気にするとき，44 kJ の熱量が$_イ$<u>吸収される</u>。

$$H_2O(液)\;=\;H_2O(気)\;-\;44\,kJ$$

$\boxed{10}$ … ②

水の状態変化とエネルギー



問4　反応熱と熱化学方程式

a　与えられた熱化学方程式を (1) 式～(4) 式とする。

$C(黒鉛)\ +\ O_2(気)\ =\ CO_2(気)\ +\ 394\ kJ$ …(1)

$H_2(気)\ +\ \frac{1}{2}O_2(気)\ =\ H_2O(液)\ +\ 286\ kJ$ …(2)

$CH_4(気)\ +\ 2\,O_2(気)$
$=\ CO_2(気)\ +\ 2\,H_2O(液)\ +\ 891\ kJ$ …(3)

$C_3H_8(気)\ +\ 5\,O_2(気)$
$=\ 3\,CO_2(気)\ +\ 4\,H_2O(液)\ +\ 2220\ kJ$ …(4)

メタンの生成熱を Q〔kJ/mol〕とすると，その熱化学方程式は，

$C(黒鉛)\ +\ 2\,H_2(気)\ =\ CH_4(気)\ +\ Q$〔kJ〕 …(5)

(5) 式は (1) 式＋(2) 式×2－(3) 式により得られるので，

$$Q=394+286\times2-891$$
$$=75〔kJ/mol〕$$

〔別解〕

(反応熱)＝(生成物の生成熱の和)－(反応物の生成熱の和) の関係を (3) 式に適用すると，

$$891=(394+286\times2)-Q$$
$$Q=75〔kJ/mol〕$$

$\boxed{11}$ …①

b　(3) 式より，メタンの完全燃焼により CO_2 が 1 mol 生成するとき，891 kJ の熱が発生することがわかる。また，(4) 式より，プロパンの完全燃焼により CO_2 が 1 mol 生成するときに発生する熱量は，

$$2220\times\frac{1}{3}=740〔kJ〕$$

よって，発生する熱量の比は，

$$\frac{891}{740}=1.20\fallingdotseq1.2〔倍〕$$

$\boxed{12}$ …④

生成熱

物質 1 mol がその成分元素の単体から生成するときの反応熱。

問5　酸化数

①～⑤のそれぞれにおいて，下線部の原子の酸化数を x とおく。

① $H_2\underline{O}_2$　$(+1)\times2+2x=0$ より，$x=-1$

② $\underline{N}H_3$　$x+(+1)\times3=0$ より，$x=-3$

③ $K_2\underline{Cr}_2O_7$　$(+1)\times2+2x+(-2)\times7=0$ より，$x=+6$

④ $Ca\underline{S}O_4$　$(+2)+x+(-2)\times4=0$ より，$x=+6$

⑤ $\underline{Ba}O$　Ba は 2 族の原子なので，$x=+2$

$\boxed{13}$ …②

酸化数の決め方

1．単体中の原子：0
2．化合物中の H 原子やアルカリ金属原子：+1
3．化合物中の 2 族原子：+2
4．化合物中の O 原子：−2
（H_2O_2 のような過酸化物では −1 とする。）
5．化合物では，構成原子の酸化数の総和は 0 である。
6．単原子イオンの酸化数は，イオンの価数に等しい。
7．多原子イオンでは，構成原子の酸化数の総和はそのイオンの価数に等しい。

問6　酸化還元反応

与えられた反応式をそれぞれ (1), (2) 式とおく。

$MnO_4^-\ +\ 8\,H^+\ +\ 5\,e^-\ \longrightarrow\ Mn^{2+}\ +\ 4\,H_2O$ …(1)

$Fe^{2+}\ \longrightarrow\ Fe^{3+}\ +\ e^-$ …(2)

(1)式+(2)式×5により，e^- を消去する。

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5Fe^{2+} \longrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O + 5Fe^{3+}$$

これより，MnO_4^- と Fe^{2+} は1：5の物質量比で反応することがわかるので，硫酸鉄(II)水溶液のモル濃度を x〔mol/L〕とすると，

$$1:5 = 0.10\times\frac{20}{1000} : x\times\frac{20}{1000}$$

$$x = 0.50\,〔\mathrm{mol/L}〕$$

〔別解〕

過不足なく反応したとき，Fe^{2+} が放出した e^- の物質量と MnO_4^- が受け取った e^- の物質量は等しいので，硫酸鉄(II)水溶液のモル濃度を x〔mol/L〕とすると，

$$x\times\frac{20}{1000}\times 1 = 0.10\times\frac{20}{1000}\times 5$$

$$x = 0.50\,〔\mathrm{mol/L}〕$$

$\boxed{14}$ …⑤

第3問　酸・塩基・塩，電池，電気分解　問題

問1　pH

0.020 mol/L の1価の弱酸の電離度を α とすると，水溶液の水素イオン濃度 $[H^+]$ は，

$$[H^+] = 0.020\alpha\,〔\mathrm{mol/L}〕$$

pH＝3 の水溶液の水素イオン濃度は 1.0×10^{-3}〔mol/L〕なので，

$$0.020\alpha = 1.0\times10^{-3}$$

$$\alpha = 0.050$$

$\boxed{15}$ …⑤

問2　塩の水溶液

① 硝酸カリウム KNO_3 は，硝酸 HNO_3 (強酸)と水酸化カリウム KOH (強塩基)の中和で得られる塩であり，その水溶液は中性を示す。

② 硫酸水素ナトリウム $NaHSO_4$ は，次のように電離する。

$$NaHSO_4 \longrightarrow Na^+ + HSO_4^-$$

$$HSO_4^- \rightleftarrows H^+ + SO_4^{2-}$$

よって，水溶液は酸性を示す。

③ 炭酸カリウム K_2CO_3 は，炭酸 H_2CO_3 (弱酸)と水酸化カリウム KOH (強塩基)の中和で得られる塩であり，その水溶液は塩基性を示す。

④ 酢酸ナトリウム CH_3COONa は，酢酸 CH_3COOH (弱酸)と水酸化ナトリウム NaOH (強塩基)の中和で得られる塩であり，その水溶液は塩基性を示す。

⑤ 炭酸水素ナトリウム $NaHCO_3$ は，炭酸 H_2CO_3 (弱酸)と

pHと水素イオン濃度

水素イオン濃度が 1.0×10^{-a} mol/L のとき，pH は a である。

pH<7 のとき，酸性

pH＝7 のとき，中性

pH>7 のとき，塩基性

電離度

$$\frac{\text{電離している電解質の物質量}}{\text{溶けている電解質全体の物質量}}$$

塩の水溶液の性質

強酸と強塩基から得られる塩…中性
(ただし，$NaHSO_4$ は酸性)

弱酸と強塩基から得られる塩…塩基性

強酸と弱塩基から得られる塩…酸性

水酸化ナトリウム NaOH (強塩基)から得られる塩であり，その水溶液は塩基性を示す。

以上より，水溶液が酸性を示す塩は，② $NaHSO_4$ である。

$\boxed{16}$ …②

問 3　中和の量的関係

水酸化ナトリウム NaOH は 1 価の塩基である。

酢酸 CH_3COOH は 1 価の酸なので，0.10 mol/L の酢酸水溶液 10 mL を中和するために必要な 0.10 mol/L の水酸化ナトリウム水溶液の体積 a〔mL〕は，

$$1\times0.10\times\frac{10}{1000}=1\times0.10\times\frac{a}{1000}$$

$$a=10\,〔\mathrm{mL}〕$$

塩化水素 HCl は 1 価の酸なので，0.10 mol/L の塩酸 10 mL を中和するために必要な 0.10 mol/L の水酸化ナトリウム水溶液の体積 b〔mL〕は，

$$1\times0.10\times\frac{10}{1000}=1\times0.10\times\frac{b}{1000}$$

$$b=10\,〔\mathrm{mL}〕$$

硫酸 H_2SO_4 は 2 価の酸なので，0.10 mol/L の希硫酸 10 mL を中和するために必要な 0.10 mol/L の水酸化ナトリウム水溶液の体積 c〔mL〕は，

$$2\times0.10\times\frac{10}{1000}=1\times0.10\times\frac{c}{1000}$$

$$c=20\,〔\mathrm{mL}〕$$

以上より，$a=b<c$ となる。

なお，酢酸などの弱酸では電離している H^+ は少ないが，塩基を加えてその H^+ が中和されると酢酸の電離が進み，新たに H^+ が生じる。これが繰り返されることにより，最終的にはすべての酢酸が中和されるので，酸の強弱は中和反応の量的関係には影響しない。

$\boxed{17}$ …③

中和反応の量的関係

(酸の価数)×(酸の物質量)
＝(塩基の価数)×(塩基の物質量)

問 4　イオン化傾向，電池

イオン化傾向が大きい金属は水と反応する。金属 B のみが水と反応したので，イオン化傾向が最も大きい金属は B である。

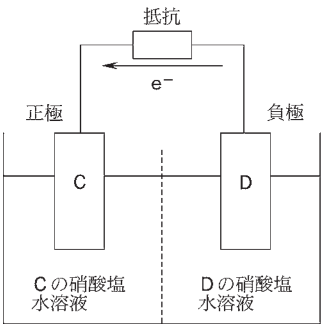
一般に，水素よりイオン化傾向が大きい金属は希塩酸に溶けて水素 H_2 を発生する。金属 A，B は希塩酸に溶けたので，水素よりイオン化傾向が大きく，金属 C，D は希塩酸に溶けなかったので，水素よりイオン化傾向が小さい。

金属 C を浸した C の硝酸塩水溶液と，金属 D を浸した D の硝酸塩水溶液を素焼き板で仕切って電池をつくったところ，金属 C が正極，金属 D が負極となった。

イオン化傾向

金属の単体が，水(溶液)中で電子を放出し，陽イオンになろうとする性質。

K＞Ca＞Na＞Mg＞Al＞Zn＞Fe＞Ni＞Sn＞Pb＞(H_2)＞Cu＞Hg＞Ag＞Pt＞Au



電池の負極では酸化反応が，正極では還元反応が起こるので，CよりDの方が酸化されやすい。よって，イオン化傾向はD＞Cとなる。

以上より，イオン化傾向の大きい順に並べると，B＞A＞D＞Cとなる。

$\boxed{18}$ …④

電池の放電

負極…酸化反応が起こる。

正極…還元反応が起こる。

外部回路を電子 e^- は負極から正極へ移動し，電流は正極から負極に流れる。

問5　電気分解

銀 Ag を電極として硝酸銀 $AgNO_3$ 水溶液を電気分解すると，陰極で Ag が析出し，陽極で Ag が溶解する。

陰極　$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$　…(1)

陽極　$Ag \longrightarrow Ag^+ + e^-$　…(2)

a　0.50 A の電流を 1930 秒間流したときに流れた電気量は，

$$0.50 \times 1930\,〔\mathrm{C}〕$$

すなわち，流れた e^- の物質量は，

$$\frac{0.50 \times 1930}{9.65 \times 10^4} = 0.010\,〔\mathrm{mol}〕$$

よって，陰極で析出した Ag (108 g/mol) の質量は，(1)式より，

$$108 \times 0.010 = 1.08\,〔\mathrm{g}〕$$

したがって，陰極の質量は 1.08 g 増加する。

$\boxed{19}$ …⑥

b　**操作**2で流れた e^- の物質量は，**操作**1で流れた e^- の物質量の2倍である。よって，**操作**2において陽極で溶解した Ag の物質量は，**操作**1のときの2倍となり，質量の変化量も2倍となる。

(1)式，(2)式より，陰極側で減少する Ag^+ の物質量と，陽極側で増加する Ag^+ の物質量は等しいので，この電気分解では水溶液中の Ag^+ の物質量は変化しない。よって，電解液中の $AgNO_3$ のモル濃度は変化しない。すなわち，**操作**2終了後の $AgNO_3$ 水溶液のモル濃度は，**操作**1のときと変わらない。

$\boxed{20}$ …③

電気分解

陰極…外部電源の負極とつないだ電極。

還元反応が起こる。

主に次の反応が起こる。

1　電解液中の Ag^+ や Cu^{2+} が還元され Ag や Cu が析出する。

2　H_2O（電解液が中性，塩基性のとき）や H^+（電解液が酸性のとき）が還元され H_2 が発生する。

陽極…外部電源の正極とつないだ電極。

酸化反応が起こる。

主に次の反応が起こる。

電極が Cu や Ag のとき

1　電極が溶解する。

電極が Pt や C のとき

2　ハロゲン化物イオンが酸化され，ハロゲンの単体が生成する。

3　H_2O（電解液が酸性，中性のとき）や OH^-（電解液が塩基性のとき）が酸化され O_2 が発生する。

電気量と電流

電気量〔C〕＝電流〔A〕×時間〔秒〕

ファラデー定数〔C/mol〕

電子 1 mol の電気量の絶対値。

ファラデー定数 F＝96500 C/mol

問6　燃料電池

水素-酸素燃料電池を放電すると，次の反応が起こる。

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

このとき，水素 H_2 が酸化され，酸素 O_2 が還元されているので，H_2 が負極，O_2 が正極で反応していることがわかる。

各電極では，次の反応が起こる。

負極　$H_2 \longrightarrow 2H^+ + 2e^-$　…(1)

正極　$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O$

負極で H_2 が 0.20 mol 消費されたときに流れた電子 e^- の物質量は，(1) 式より，

$$0.20 \times 2 = 0.40\ [\text{mol}]$$

$\boxed{21}$ …⑥

第 4 問　無機物質　問題

問 1　ハロゲン

① 正しい。17 族元素であるハロゲンの原子は価電子を 7 個もち，電子 1 個を取り入れて，1 価の陰イオンになりやすい。

② 誤り。臭素の単体 Br_2 は，赤褐色の液体である。なお，ハロゲンの単体は，原子番号が大きいものほど融点や沸点が高い。

③ 正しい。フッ化水素 HF の水溶液であるフッ化水素酸は，ガラスの主成分である二酸化ケイ素 SiO_2 と反応し，ガラスを溶かす。

$$SiO_2 + 6HF \longrightarrow H_2SiF_6 + 2H_2O$$

④ 正しい。塩化水素 HCl を含め，ハロゲン化水素はいずれも無色・刺激臭の気体である。

⑤ 正しい。塩素 Cl_2 はヨウ素 I_2 よりも酸化力が強く，Cl_2 はヨウ化カリウム KI と反応して I_2 を生じる。

$$Cl_2 + 2KI \longrightarrow 2KCl + I_2$$

このとき生じた I_2 と水溶液中に存在する未反応の I^- が反応して I_3^- を生じるので，水溶液は褐色になる。

$$I_2 + I^- \rightleftarrows I_3^-$$

$\boxed{22}$ …②

ハロゲンの単体

	常温での状態	酸化力
F_2	気体（淡黄色）	強い
Cl_2	気体（黄緑色）	↑
Br_2	液体（赤褐色）	↓
I_2	固体（黒紫色）	弱い

問 2　リンの同素体

リンには黄リンや赤リンなどの同素体がある。ア黄リンは水に溶けず，空気中で自然発火するので，イ水中に保存する。リンを酸素中で燃焼させると，十酸化四リン P_4O_{10} の白色固体が得られる。

$$4P + 5O_2 \longrightarrow P_4O_{10}$$

P_4O_{10} はウ水をよく吸収するので，乾燥剤に用いられる。

$\boxed{23}$ …③

問 3　硫化水素

① 正しい。硫化水素 H_2S は無色で腐卵臭をもつ有毒な気体である。

② 正しい。硫化水素は水に少し溶け，その水溶液（硫化水素水）は弱い酸性を示す。

③ 誤り。硫黄を空気中で燃焼させると，二酸化硫黄 SO_2 が生じる。

$$S + O_2 \longrightarrow SO_2$$

④ 正しい。硫化水素には強い還元作用があり，自身は酸化されて硫黄 S を生じる。

⑤ 正しい。硫化水素は，実験室では硫化鉄（II）FeS に希硫酸や希塩酸を加えて発生させ，下方置換で捕集する。

$$FeS + H_2SO_4 \longrightarrow FeSO_4 + H_2S$$

$$FeS + 2\,HCl \longrightarrow FeCl_2 + H_2S$$

$\boxed{24}$ …③

問4　窒素の単体と化合物

① 正しい。窒素 N_2 は乾燥空気中に最も多く含まれている気体である（約 78 %）。なお，他には酸素 O_2 が約 21 %，アルゴン Ar が約 1 %，微量の二酸化炭素 CO_2 などが含まれる。

② 正しい。アンモニア NH_3 と濃塩酸に含まれる塩化水素 HCl は，反応して塩化アンモニウム NH_4Cl の固体を生じ白煙となるので，互いの検出に用いられる。

$$NH_3 + HCl \longrightarrow NH_4Cl$$

③ 正しい。一酸化窒素 NO は，空気中で速やかに酸素と反応して二酸化窒素 NO_2 を生じる。

$$2\,NO + O_2 \longrightarrow 2\,NO_2$$

④ 誤り。NO_2 は赤褐色の気体である。なお，NO は無色の気体である。

⑤ 正しい。希硝酸は酸化力の強い酸であり，イオン化傾向の小さい銅 Cu とも反応し，NO を生じる。

$$3\,Cu + 8\,HNO_3 \longrightarrow 3\,Cu(NO_3)_2 + 4\,H_2O + 2\,NO$$

なお，濃硝酸の場合は，NO_2 を生じる。

$$Cu + 4\,HNO_3 \longrightarrow Cu(NO_3)_2 + 2\,H_2O + 2\,NO_2$$

$\boxed{25}$ …④

問5　水溶液中のイオンの性質および反応

a　赤色リトマス紙を青変させるので，化合物 A の水溶液は塩基性である。また，炎色反応が赤紫色であることから K^+ を含む。よって，化合物 A は KOH である。

$\boxed{26}$ …①

b　水溶液が黄褐色であることから Fe^{3+} を含むことがわかる。なお，$CuSO_4$ 水溶液は青色であり，他はすべて無色である。$FeCl_3$ 水溶液に水酸化ナトリウム水溶液を加えると，$Fe(OH)_3$ の赤褐色沈殿を生じる。

$\boxed{27}$ …②

炎色反応

物質を高温の炎の中で熱したとき炎が呈色する現象。その色から元素の種類を判別することができる。

Li：赤色，Na：黄色，K：赤紫色，
Ca：橙赤色，Sr：紅（深赤）色，
Ba：黄緑色，Cu：青緑色

問6　銀の単体と化合物

①　正しい。銀 Ag の単体は熱や電気の伝導性が金属の中で最も大きく，展性や延性も金 Au に次いで大きい。

②　正しい。ハロゲン化銀は，フッ化銀 AgF を除いて水に溶けにくい。塩化銀 AgCl は水に溶けにくい白色固体である。

③　誤り。硫化銀 Ag_2S は水に溶けにくい。硝酸銀水溶液に硫化水素水を加えると，黒色の Ag_2S が沈殿する。

$$2Ag^+ + S^{2-} \longrightarrow Ag_2S$$

④　正しい。クロム酸銀 Ag_2CrO_4 は水に溶けにくい暗赤色の固体である。硝酸銀水溶液にクロム酸カリウム水溶液を加えると，Ag_2CrO_4 が沈殿する。

$$2Ag^+ + CrO_4^{2-} \longrightarrow Ag_2CrO_4$$

⑤　正しい。硝酸銀水溶液に水酸化ナトリウム水溶液を加えると，暗褐色の酸化銀 Ag_2O が沈殿する。

$$2Ag^+ + 2OH^- \longrightarrow Ag_2O + H_2O$$

$\boxed{28}$ …③

生 物 I

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	③	3	
		問2	2	③	3	
	B	問3	3	①	3	
		問4	4	⑤	3	
		問5	5	② ※	4	
			6	⑧ ※	4	
第1問 自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	④	3	
		問2	8	⑤	3	
		問3	9	②	3	
		問4	10	③	3	
	B	問5	11	③	4	
		問6	12	④	4	
第2問 自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	③	2	
		問2	14	③	2	
		問3	15	④	3	
		問4	16	④	4	
	B	問5	17	④	3	
		問6	18	③	3	
			19	⑥	3	
第3問 自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	20	②	3	
		問2	21	③	3	
	B	問3	22	③	3	
		問4	23	②	3	
		問5	24	②	4	
		問6	25	④	4	
第4問 自己採点小計					(20)	

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第5問	A	問1	26	①	3	
		問2	27	②	3	
		問3	28	③	3	
	B	問4	29	④	3	
		問5	30	③ ※	4	
			31	⑧ ※	4	
第5問 自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

※の正解は順序を問わない。

【解説】

第１問　顕微鏡観察　問題

Aでは光学顕微鏡に関する知識問題を，**B**では細胞の観察に関する知識問題と細胞の成長に関する考察問題を出題した。

問１　異なる２点を二つの点として識別できる最小の２点間の距離を分解能とよぶ。光学顕微鏡の分解能は約 0.2 μm であり，分解能より小さいものは観察することができない。①ヒトの赤血球の大きさは約７～８ μm，②大腸菌の大きさは約３ μm，④アメーバの大きさは約500 μm であり，いずれも光学顕微鏡で観察できる。一方，③エイズウイルスの大きさは約 0.1 μm であり，光学顕微鏡では観察できない。　$\boxed{1}$ …③

問２　図１のうち，ａは調節ねじ(粗動ねじ)，ｂはレボルバー，ｃは絞り，ｄは反射鏡である。①調節ねじ(ａ)を動かして，ピントを調節するので，正しい。②レボルバー(ｂ)には倍率の異なる複数の対物レンズがセットされており，これを動かして対物レンズの倍率を変えるので，正しい。③絞り(ｃ)を動かすことで視野の明るさを変え，像がはっきり見えるようにする。一般に低倍率で観察するときは，視野が明るいので絞りをしぼって光量を減らし，高倍率で観察するときは，視野が暗いので絞りを開いて光量を増やす。絞りは視野の大きさを変えるものではないので，誤りである。④反射鏡(ｄ)を動かして光路を確保し，視野の明るさが均一になるように調節するので，正しい。　$\boxed{2}$ …③

問３　光学顕微鏡を用いて試料の大きさを測る場合は，接眼ミクロメーターと対物ミクロメーターを用いて，あらかじめ観察する倍率における接眼ミクロメーターの１目盛りが示す長さを求めておく。①接眼ミクロメーターは円盤状のガラス板に目盛りがついたものであるので，正しい。②接眼ミクロメーターは接眼レンズ内にセットするが，対物ミクロメーターはステージにセットするので，誤りである。③接眼レンズは変えずに対物レンズを高倍率のものに変えると，観察物が拡大されて大きく見えるようになるが，接眼レンズ内にセットした接眼ミクロメーターの見え方は変わらない。そのため，接眼ミクロメーターの１目盛りが示す長さは短くなることになる。したがって，誤りである。④一般的な対物ミクロメーターには１目盛りが 10 μm の目盛りがついている。接眼レンズは変えずに，対物レンズを高倍率のものに変えても，ステージにセットした対物ミクロメーターの１目盛りが示す長さは常に一定(10 μm)で変わらないので，誤りである。　$\boxed{3}$ …①

問４　核は，酢酸オルセイン溶液または酢酸カーミン溶液で赤色に染色される。なお，サフラニン液は細胞壁を赤色に染色する染色液であり，ヨウ化カリウム溶液はデンプンの有無を調べる指示薬で，デンプンが存在すると青紫色に呈色する。　$\boxed{4}$ …⑤

【ポイント】

光学顕微鏡の分解能
　約 0.2 μm

調節ねじ
　ピントを調節する。
レボルバー
　対物レンズの倍率を変える。
絞り
　視野の明るさを変える。
反射鏡
　視野の明るさが均一になるように調節する。

接眼ミクロメーター
　接眼レンズ内にセットする。
対物ミクロメーター
　ステージにセットする。

酢酸オルセイン溶液
　核や染色体を赤色に染色する。

生物Ⅰ

問5　タマネギの鱗茎は，複数の鱗片葉からなり，内側のものが若い鱗片葉，外側のものが成長した鱗片葉である。したがって，鱗片葉e～hの表皮細胞の大きさの違いは，鱗片葉の成長にともなう細胞の変化を反映している。図4，5から読み取れる鱗片葉e～hの表皮細胞の核の直径，短径，長径をまとめると下表のようになる。なお，長径は図中には直接示されていないが，図4の「短径」と図5の「短径に対する長径の比」の積$\left(短径\times\dfrac{長径}{短径}\right)$で求めることができる。

鱗片葉	e	f	g	h
核の直径(μm)	26	26	26	27
短径(μm)	60	64	67	70
$\dfrac{長径}{短径}$	4.7	5.2	5.4	5.9
長径(μm)	282	332.8	361.8	413

①・②細胞が成長する過程では，短径の増加率は70÷60≒1.17倍，長径の増加率は413÷282≒1.46倍であるので，①は誤りであり，②が正しい。③細胞が成長する過程では，短径，短径に対する長径の比はどちらも増加しており，両者の積で求められる長径も増加するので，誤りである。④ｆの細胞の長径は332.8 μm，ｇの細胞の長径は361.8 μmであり，前者は後者の約0.9倍であるので，誤りである。⑤ｈの細胞の長径は413 μm，ｅの細胞の長径は282 μmであり，前者は後者の約1.5倍であるので，誤りである。⑥・⑦・⑧ｅ～ｈの細胞を比較すると，核の直径はほぼ同じであるが，細胞の短径および長径はｅ～ｈの順で大きくなっている。これは細胞の成長にともない，細胞の体積は大きくなるが，核の体積はほとんど変化しないことを示している。したがって，細胞の体積に対する核の体積の割合は，細胞の成長にともなって小さくなるので，⑥・⑦は誤りであり，⑧が正しい。

$\boxed{5}$・$\boxed{6}$…②・⑧

第2問　植物の生殖　問題

Aでは生殖に関する知識問題を，**B**では花粉管の胚のうへの誘引に関する実験考察問題を出題した。

問1　一般に，有性生殖では親の染色体を様々な組合せでもつ配偶子が生じ，さらに，それぞれの配偶子の合体によって次世代が生じるので集団の遺伝的多様性が増すと考えられている。したがって，選択肢①～④のうち，有性生殖であるものを選べばよい。①出芽，②栄養生殖，③分裂はいずれも無性生殖であり，子の遺伝子型は親の遺伝子型と同じになる。④接合は配偶子が合体することであり，接合による生殖は有性生殖である。接合にはクラミドモナスなどにみられる同形同大の配偶子どうしによる同形配偶子接合と，アオサなどにみられる形や大きさが異なる配偶子どうし

無性生殖
親と同じ遺伝子型をもつ子が生じる。分裂，出芽，栄養生殖など。

有性生殖
互いに遺伝子型が異なる配偶子どうしの接合により，子の遺伝子型は多様になる。

による異形配偶子接合，さらに大きさと運動性の大きく異なる配偶子である卵と精子の合体である受精がある。 $\boxed{7}$ …④

問2　胚のう母細胞はまず減数分裂を行う。減数分裂は第一分裂に引き続いて第二分裂が行われるので，ここで2回の核分裂が起こる。減数分裂によって形成された胚のう細胞はさらに3回の核分裂を行って8個の核が生じ，これが胚のう内の卵細胞の核，助細胞の核，中央細胞の2個の極核，反足細胞の核になる。したがって，胚のう母細胞から卵細胞の核が形成されるまでに，合計5回の核分裂を経過したことになる。 $\boxed{8}$ …⑤

胚のう形成における核分裂
　減数分裂で2回＋3回の核分裂

問3　被子植物の種子では種皮(**ウ**の部分)は母親のからだの一部分である珠皮から形成されるので，その核相は $2n$ である。胚(**エ**の部分)と胚乳(**オ**の部分)は重複受精によって形成される。胚は1個の卵細胞と1個の精細胞の合体によってできた受精卵から形成されるので核相は $2n$ であるが，胚乳は2個の極核ともう1個の精細胞の合体により生じた胚乳核から形成されるので核相は $3n$ となる。したがって，②が正しい。 $\boxed{9}$ …②

被子植物の種子の各部の核相
　種皮：$2n$
　胚　：$2n$
　胚乳：$3n$

問4　**オ**の部分は胚乳である。有胚乳種子では胚乳が発達し，発芽のための栄養分が貯えられるが，無胚乳種子では胚乳は発達せず，発芽のための栄養分は子葉に貯えられる。有胚乳種子の例としてはカキ・トウモロコシ・イネ科の植物などが，無胚乳種子の例としてはナズナ・マメ科の植物(エンドウ)・クリなどが知られている。 $\boxed{10}$ …③

有胚乳種子
　カキ・トウモロコシ・イネ
無胚乳種子
　ナズナ・エンドウ・クリ

問5　花粉管は柱頭から花柱を経て胚珠に到達し，精細胞を放出して受精が起こる。胚のう内の助細胞を二つとも破壊すると，花粉管が胚のうに誘引されなくなることから，花粉管の誘引は助細胞によって起こることがわかっていたが，最近になって花粉管を誘引する物質が明らかになりつつある。

図3のⅠの状態は，花粉管が胚のうやビーズに誘引されなかったことを，図3のⅡの状態は，花粉管が胚のうやビーズに誘引されたことをそれぞれ示している。①花柱の切片を通過した植物**X**の花粉管は物質Ｐ，および物質Ｑに誘引されるが，花柱の切片を通過した植物**Y**の花粉管は植物**Y**の胚のうには誘引されるが物質Ｐにも物質Ｑにも誘引されないことから，誘引物質はこの2種類の植物で共通ではないことがわかる。したがって，誤りである。②・③植物**X**，および植物**Y**ともに，花粉管が花柱の切片を通過しない場合には，いずれの実験でも花粉管は胚のうに誘引されていない。一方，花柱の切片を通過した場合には，花粉管はそれぞれの種の胚のうに対して誘引されている。このことから，花柱を通過すると植物**X**の花粉管は植物**X**の胚のうに，植物**Y**の花粉管は植物**Y**の胚のうにそれぞれ誘引されるようになることがわかる。したがって，②は誤りであり，③が正しい。④植物**X**の花粉管は，花柱を通過してもしなくても植物**Y**の胚のうに誘引される

ことはないので，花柱を通過することで誘引される能力を失うのではないことがわかる。したがって，誤りである。 $\boxed{11}$ …③

問6　**実験1**の結果から，植物**X**の花粉管を誘引するのは物質Pと物質Qであり，物質Rには花粉管を誘引する能力がないことがわかる。このことから，物質Pと物質Qの両方が合成されなくなると，花粉管は胚のうに誘引されなくなると考えられる。したがって，④が正しい。物質Pのみが合成されなくなった場合には物質Qが，また，物質Qのみが合成されなくなった場合には物質Pがそれぞれ花粉管を誘引すると考えられるので，物質Pまたは物質Qのどちらか一方を合成できない個体でも他方が合成されていれば花粉管は誘引されると考えられる。 $\boxed{12}$ …④

第3問　遺伝　問題

Aではメンデルの法則と花の色の不完全優性に関する問題を，**B**ではキイロショウジョウバエの伴性遺伝に関する問題を出題した。

問1　受精により対立遺伝子の一方を父親から，他方を母親から受け継ぐので，①は正しい。対立遺伝子は1対の相同染色体の対応する同じ位置(これを遺伝子座という)に存在する。したがって，②は正しい。遺伝子型がAaである場合，対立遺伝子A，およびaは減数分裂の過程で分離してAをもつ配偶子とaをもつ配偶子を生じるが，体細胞分裂で生じたすべての娘細胞はAとaをもつ。したがって，③が誤りであり，④は正しい。 $\boxed{13}$ …③

問2　メンデルは，減数分裂の過程がまだ詳しくわかっていなかった時代に，対になった二つの因子が配偶子に分かれて入ることをいいあてた。これを分離の法則といい，**問1**で解説した“Aおよびaは分離してAをもつ配偶子とaをもつ配偶子を生じる”という内容がこれにあたる。

多くの遺伝では，遺伝子型がAaの個体は遺伝子型がAAの個体と同じ表現型を示すことが多く，その形質を遺伝子型がaaの個体の形質に対して優性という。この植物の花の色の場合，紫色の花の系統をAA，白色の花の系統をaaとすると，F_1で生じたAaの表現型は紫色と白色の中間の薄青色となっている。このように対立遺伝子の優劣関係が不完全な遺伝を不完全優性，中間の形質を示す個体を中間雑種とよび，メンデルの優性の法則が成り立たない例である。

遺伝子A(a)とは別の遺伝子B(b)がこの花の色の遺伝子と異なる相同染色体にある場合，遺伝子型がAaBbの個体の減数分裂においてAとaの配偶子への分配とBとbの配偶子への分配は独立に起こる。これがメンデルの独立の法則である。この場合，AaBbの個体からつくられる配偶子の分離比は，理論上AB：Ab：aB：ab=1：1：1：1となる。一方，問題文にあるように遺伝子B(b)がこの花の色の遺伝子と同じ相同染色体に存在

対立遺伝子
　1対の相同染色体の対応する同じ位置に一つずつ存在する。

メンデルの法則
　優性の法則
　分離の法則
　独立の法則

不完全優性
　メンデルの優性の法則が成り立たない。

する場合には，同じ相同染色体にある遺伝子は行動をともにする。これを連鎖という。この場合，遺伝子型が AaBb の個体からできる配偶子の分離比は，理論上 AB：Ab：aB：ab＝m：n：n：m となり，A と B（a と b）が同一染色体に存在する場合には m＞n，A と b（a と B）が同一染色体に存在する場合には m＜n となって，独立の法則は成り立たない。 $\boxed{14}$ …③

連鎖
メンデルの独立の法則が成り立たない。

問3　①の交配は AA×AA なので，次世代はすべて AA となり，すべて紫色の花になる。②の交配は Aa×Aa なので，次世代は F_2 と同様に AA（紫色）：Aa（薄青色）：aa（白色）＝1：2：1 となる。③の交配は AA×aa なので，次世代はすべて Aa となり，すべて薄青色の花になる。④の交配は Aa×aa なので，次世代は Aa（薄青色）：aa（白色）＝1：1 となる。したがって，次世代に 2 種類の花の色の個体がほぼ等しい割合で生じるのは，④である。

$\boxed{15}$ …④

問4　F_2 で生じた AA（紫色）：Aa（薄青色）：aa（白色）＝1：2：1 の個体を自家受精する際には，それぞれ同じ遺伝子型の個体どうしを交配してそれらを合計する。このとき，各個体ごとに次世代の数を揃え（この場合は Aa から生じる次世代の 4 に揃える），その後合計する際に親個体（F_2）の個体数比（1：2：1）に合わせ，Aa×Aa の交配により生じる子の数を AA×AA の交配により生じる子や aa×aa の交配により生じる子の 2 倍にする必要がある。計算式は下のように表せる。

自家受精
各個体ごとに交配して，後から合計する。
ポイント①：個体ごとの次世代の数を揃える。
ポイント②：親世代の個体数比を反映させる。

		AA		Aa		aa	
AA×AA	→	4	：	0	：	0	
Aa×Aa	→（	1	：	2	：	1	）×2
aa×aa	→	0	：	0	：	4	
		6	：	4	：	6	

したがって，紫色の花：薄青色の花：白色の花＝6：4：6＝3：2：3となる。 $\boxed{16}$ …④

問5　問題文に示された交配では，小翅の雌と正常翅の雄の交配によって生じた次世代が，雌はすべて正常翅，雄はすべて小翅となり，生じた雄と雌とで表現型が異なっている。これは，これらの翅の形質を支配する遺伝子が，性染色体（性決定の様式が XY 型であるキイロショウジョウバエでは X 染色体）に存在することを示している。このような遺伝を伴性遺伝という。F_1 の雌は X 染色体を 2 本もち，両親からそれぞれ正常翅の遺伝子と小翅の遺伝子を受け継いでいるので，F_1 の雌が示す正常翅の形質が優性形質である。 $\boxed{17}$ …④

性染色体の遺伝子による遺伝
伴性遺伝とよばれる。
子の雌雄で表現型が異なる場合がある。
両親のもつ形質を逆にして交配すると結果が異なる。

ヘテロ接合体の示す形質が優性。

問6　正常翅の遺伝子を M，小翅の遺伝子を m とすると，親世代の小翅の雌は X^mX^m，正常翅の雄は X^MY と表すことができる。これを交配させた F_1 は次のようになる。

P　(小翅)X^mX^m　×　X^MY(正常翅)

↓

F_1　　$X^MX^m：X^mY＝1：1$

F_1の雌の遺伝子型はX^MX^m，F_1の雄の遺伝子型はX^mYとなるので，これを交配させたF_2は下のようになる。

F_1　　X^MX^m　×　X^mY

↓

F_2　$X^MX^m：X^mX^m：X^MY：X^mY＝1：1：1：1$

したがって，F_2では雌雄ともに正常翅：小翅＝1：1となる。

18 …③

F_2の雌には遺伝子型がX^MX^mの個体とX^mX^mの個体が1：1の割合で含まれている。したがって，F_2のすべての雌と正常翅の雄を交配して次世代をつくる場合，X^MX^mとX^MYの交配とX^mX^mとX^MYの交配の2種類の交配が同じ頻度で起こることになる。それぞれの交配で生じた雌雄の個体数が同じになるよう調整すると，結果は次のようになる。

$X^MX^m \times X^MY$　→　X^MX^M，X^MX^m，X^MY，X^mY

$X^mX^m \times X^MY$　→　2 X^MX^m，2 X^mY

交配の結果，次世代に生じる雌は$X^MX^m×X^MY$の交配によって生じるX^MX^M，X^MX^m，および$X^mX^m×X^MY$の交配によって生じる2 X^MX^mのすべてが正常翅となる。次世代の雄は$X^MX^m×X^MY$の交配によって生じるX^MYが正常翅，X^mYが小翅，および$X^mX^m×X^MY$の交配によって生じる2 X^mYが小翅となるので，合計すると正常翅：小翅＝1：3となる。　19 …⑥

第4問　恒常性

問題

Aでは自律神経系に関する知識問題を，**B**では内分泌系に関する知識問題と考察問題を出題した。

問1　脊椎動物は，からだをとりまく外部環境が大きく変化しても体内の状態(内部環境)を一定に保つ性質をもつ。このような性質を恒常性(ホメオスタシス)とよぶ。脊椎動物では，自律神経系と内分泌系が恒常性の維持にはたらいている。自律神経系は，大脳の支配を受けずに内臓などのはたらきを調節しており，交感神経と副交感神経からなる。一般に，交感神経と副交感神経は同一の器官に分布し，一方がその器官のはたらきを促進すると，他方はそのはたらきを抑制する。また，からだが活発に活動しているときには，交感神経の活動が高まり，休息しているときには，副交感神経の活動が高まる。したがって，交感神経が興奮すると，心臓の拍動は促進され，瞳孔は拡大するが，副交感神経が興奮すると，心臓の拍動は抑制され，瞳孔は縮小する。　20 …②

恒常性(ホメオスタシス)
外部環境が大きく変化しても体内の状態を一定に保つ性質。

自律神経系
からだが活発に活動しているときには交感神経の活動が高まり，休息しているときには副交感神経の活動が高まる。

問2　①セクレチンはすい液の分泌を促進するホルモンであり，十二指腸から分泌される。②フィブリンは血液中につくられる血液の凝固に関係する繊維状のタンパク質である。③アセチルコリンは運動神経や副交感神経の末端から分泌される神経伝達物質である。④ノルアドレナリンは交感神経の末端から分泌される神経伝達物質である。　$\boxed{21}$…③

問3　③甲状腺から分泌されるのはチロキシンである。①バソプレシンは脳下垂体後葉から分泌される。②グルカゴンはすい臓のランゲルハンス島A細胞から分泌される。④パラトルモンは副甲状腺から分泌される。　$\boxed{22}$…③

問4　ヨウ素はチロキシンの成分であるので，ヨウ素が欠乏しているヒトでは，チロキシンの合成・分泌が低下している。このため，血液中のチロキシンの濃度が低下し，それを感知した間脳の視床下部からの甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンの分泌や脳下垂体前葉からの甲状腺刺激ホルモンの分泌がともに上昇している。このように，ある作用の結果，最終的につくられるホルモンの血液中濃度が，その分泌の原因である間脳の視床下部や脳下垂体前葉に影響をおよぼすことをフィードバックとよぶ。ヨウ素の欠乏により甲状腺が肥大するのは，フィードバックにより甲状腺刺激ホルモンの分泌の上昇が続いた結果，甲状腺が過剰に刺激され続けたからである。逆に，甲状腺刺激ホルモンの分泌の低下が続くと，甲状腺は刺激を受けないので萎縮する。　$\boxed{23}$…②

問5　甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンは，間脳の視床下部にある神経分泌細胞の細胞体で合成され，軸索内を移動して，軸索の末端から血液中に分泌される。このようなホルモンの分泌様式を神経分泌とよぶ。血液によって脳下垂体前葉に運ばれた甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンは，脳下垂体前葉を刺激して甲状腺刺激ホルモンの分泌を促進する。また，甲状腺刺激ホルモン放出ホルモンと同様に神経分泌されるバソプレシンは，間脳の視床下部の神経分泌細胞の細胞体で合成された後，軸索内を移動し，軸索の末端がある脳下垂体後葉から血液中に分泌される。　$\boxed{24}$…②

問6　甲状腺ホルモン(チロキシン)は，生体内で行われる様々な物質の合成や分解などの化学反応を促進する。このため，寒冷刺激が受容されると，チロキシン，アドレナリン，糖質コルチコイドなどの分泌が促進され，肝臓や筋肉などで行われる化学反応が活発になり，熱の発生が促進される。したがって，④が正しい。①体液浸透圧が低下したときには脳下垂体後葉からのバソプレシンの分泌が抑制され，腎臓の集合管における水の再吸収が抑制されて，体液浸透圧がもとにもどされる。②血糖量が増加したときには，すい臓ランゲルハンス島B細胞からのインスリンの分泌が促進され，細胞でのグルコースの取込みや肝臓や筋肉におけるグリコーゲンの合成が促進されて血糖量を減少させる。③血液中のナ

神経伝達物質
交感神経：ノルアドレナリン
副交感神経：アセチルコリン

フィードバック
ある作用の結果が，その原因に影響をおよぼすこと。

神経分泌されるホルモン
脳下垂体前葉のホルモンの分泌を促進(抑制)するホルモン
バソプレシン

チロキシンのはたらき
物質の合成や分解を促進する。

トリウム濃度が低下したときには，副腎皮質からの鉱質コルチコイドの分泌が促進され，腎臓の細尿管（腎細管）におけるナトリウムの再吸収が促進される。 $\boxed{25}$ …④

第５問　動物の行動　問題

Aでは効果器に関する知識問題と生得的行動に関する知識問題および考察問題を，**B**ではショウジョウバエの学習に関する考察問題を出題した。

問１　多細胞動物では，光や音などの様々な刺激を受け取る受容器，刺激に応じて反応を起こす効果器（作動体），受容器からの情報を処理し効果器に指令を伝える神経系が発達している。

動物は，受容した刺激に対して応答するが，刺激に対する反応や行動は効果器のはたらきによって引き起こされる。刺激に対する反応の代表は運動であり，動物の運動は②筋肉や④べん毛・繊毛などの効果器によって引き起こされる。また，刺激を受け取って，物質を分泌する内分泌腺・外分泌腺，光を発生するホタルの③発光器，電気を発生するシビレエイの発電器なども効果器である。

①うずまき管は内耳に存在し，音波を受容する受容器としてはたらく。外耳道を通ってきた音波は鼓膜を振動させる。鼓膜の振動は耳小骨で増幅され，うずまき管内のリンパ液へと伝えられる。リンパ液の振動は基底膜を振動させ，その結果，基底膜の上にあるコルチ器の聴細胞に興奮が生じる。聴細胞の興奮は聴神経によって大脳に伝えられ，聴覚を生じる。 $\boxed{26}$ …①

問２　①アメフラシは，水管を刺激するとえらを引っ込めるが，同じ刺激を繰り返し与えると，やがてえらを引っ込めなくなる。このように，動物に同じ刺激を繰り返し与えると，やがてその刺激に対して反応を示さなくなったり，反応が弱くなったりする現象を慣れとよぶ。慣れは経験によって得られる習得的行動の一種である。②繁殖期になると，イトヨの雄は縄張りの中に巣をつくり，縄張りの中に侵入してくる同種の他の雄を攻撃する。この行動は，縄張りに侵入してきた他の雄の赤い腹部がかぎ刺激となって引き起こされる生得的行動である。③カモやアヒルなどのひなは，ふ化後にはじめて見た一定の大きさの動くもののあとをついていく。ローレンツはこの行動を刷込みと名づけた。刷込みは，生後の経験によって行動が変化する学習の一種である。刷込みには，「生後の特定の時期のみに成立する」，「一度成立すると，その後の別の経験によって変更されにくい」などの特徴がみられる。④迷路に入れられたネズミは，はじめはなかなか出口に到達できないが，何度も繰り返すうちに短時間で出口に到達できるようになる。このように，誤りを繰り返しながらやがて正しい方法を習得していく行動を試行錯誤とよぶ。試行錯誤は，生後の経験によ

受容器
　刺激を受容する。
　眼（網膜）
　耳（うずまき管，前庭，半規管）
　鼻（嗅上皮）
　舌（味覚芽）
　皮膚（触点，痛点，温点，冷点）

効果器
　刺激に応じて，反応を起こす。
　筋肉，腺，繊毛，べん毛，発光器，発電器など

生得的行動
　生まれつき備わっている行動。
習得的行動
　生後の経験によって獲得する行動。

かぎ刺激（信号刺激）
　本能行動を引き起こす刺激。

刷込み
　生後間もない短期間に行われる学習であり，一度学習されると変更されにくい。

って行動が変化する学習の一種である。 $\boxed{27}$ …②

問3　**実験**1と**実験**2の結果をまとめると下表のようになる。なお，表中の○は雄が雌にたどり着いたことを，×は雄が雌にたどり着かなかったことを示している。

	実験1 （送風なし）	**実験**2 （送風あり）
無処理雄（触角と翅あり）	○	○
触角切除雄（翅あり）	×	×
翅切除雄（触角あり）	×	○

①・②**実験**2で，両方の翅を切除された翅切除雄が雌にたどり着いていることから，「カイコガの雄は，雌が分泌するフェロモンを翅以外の部分で受容していること」，「カイコガの雄は，フェロモンによって雌の位置がわかれば，翅がなくても雌にたどり着くことができること」がわかるので，いずれも誤りである。③両方の触角を切除された触角切除雄は，**実験**1でも**実験**2でも雌にたどり着くことができないことから，「カイコガの雄は，雌から分泌されるフェロモンを触角で受容すること」がわかる。また，両方の翅を切除された翅切除雄は，送風のない**実験**1では雌にたどり着かなかったが，送風のある**実験**2では雌にたどり着いていることから，「カイコガの雄は，はばたきによって空気の流れをつくり，雌から分泌されるフェロモンを触角に集めることで，フェロモンを受容しやすくしている」と考えられるので，正しい。④**実験**2で，両方の翅を切除された翅切除雄が雌にたどりついていることから，「雄のはばたきがなくても，雌はフェロモンを分泌すること」がわかるので，誤りである。 $\boxed{28}$ …③

問4　①40個体のショウジョウバエを用いているので，試験管**Y**に移動した個体数が試験管**X**に移動した個体数の3倍になるのは，30個体が試験管**Y**に移動し，10個体が試験管**X**に移動した場合である。この場合の学習指数は，$(30-10)\div40=0.5$であるので，誤りである。②問題文中の学習指数を求める式の両辺を40倍すると，「学習指数×40＝試験管**Y**に移動した個体数－試験管**X**に移動した個体数」の式が得られる。この式の学習指数に0.4を代入すると，試験管**Y**に移動した個体数－試験管**X**に移動した個体数＝16となる。試験管**Y**に移動した個体数と試験管**X**に移動した個体数の差が16になるのは，試験管**Y**に移動した個体数が28，試験管**X**に移動した個体数が12の場合であるので，誤りである。③試験管**X**に移動した個体数と試験管**Y**に移動した個体数が等しい場合，すなわち，試験管**X**と試験管**Y**に20個体ずつ移動した場合の学習指数は，$(20-20)\div40=0$であるので，誤りである。④②の解説で述べた「学習指数×40＝試験管**Y**に移動した個体数－試験管**X**に移動した個体数」の式の学習指数に0.6を代入すると，試験管**Y**に移動した個体数－試験管**X**に移動

フェロモン
　体外に分泌され，同種の他個体に特有の反応を起こさせる物質。

した個体数＝24となるので，正しい。 $\boxed{29}$ …④

問5 ①生まれつき気体**Y**よりも気体**X**に誘引されるのであれば，**実験**3のⅠ群で，試験管**Y**よりも試験管**X**の方に多く移動し，学習指数が0よりも小さくなるので，誤りである。②生まれつき気体**Y**よりも気体**X**を忌避するのであれば，**実験**3のⅠ群で，試験管**X**よりも試験管**Y**の方に多く移動し，学習指数が0よりも大きくなるので，誤りである。③・④**実験**3で，移動サイクルを2回経験させた直後の学習指数は，Ⅱ群が0.32，Ⅲ群が0.37である。学習指数が0よりも大きいことから，Ⅱ群では気体**Y**と報酬を関連づけて記憶したために，試験管**X**よりも試験管**Y**に多く移動したと考えられ，Ⅲ群では気体**X**と罰を関連づけて記憶したために，気体**X**を忌避して試験管**Y**に多く移動したと考えられる。しかし，移動サイクルを2回経験させてから6時間後の学習指数は，Ⅱ群が0.21であるのに対し，Ⅲ群は0である。これより，ショウジョウバエは，匂いと報酬，および匂いと罰を関連づけて記憶することができるが，匂いと罰を関連づけた記憶よりも匂いと報酬を関連づけた記憶の方が保持されやすいことがわかるので，③が正しく，④は誤りである。⑤・⑥「気体**X**と罰を同時に与えた後，気体**Y**と報酬を同時に与えた」のはⅣ群である。⑤のように，気体**Y**と報酬との関連のみが記憶され，気体**X**と罰との関連の記憶は消去されるのであれば，Ⅱ群とほぼ同じ結果が得られるはずである。また，⑥のように，気体**X**と罰との関連のみが記憶され，気体**Y**と報酬との関連が記憶されないのであれば，Ⅲ群とほぼ同じ結果が得られるはずである。移動サイクルを2回経験させた直後のⅡ群，Ⅲ群，Ⅳ群の学習指数は，Ⅱ群が0.32，Ⅲ群が0.37であるのに対し，Ⅳ群は0.62であるので，⑤・⑥は誤りである。⑦移動サイクルを2回経験させた直後の学習指数は，Ⅲ群が0.37であるのに対し，Ⅳ群は0.62であり，気体**X**を忌避してⅢ群よりも多く試験管**Y**に移動するようになるので，誤りである。⑧移動サイクルを2回経験させた直後の学習指数は，気体**Y**と報酬を同時に与えたⅡ群が0.32であるのに対し，Ⅳ群は0.62であり，気体**X**と罰を同時に与えなかったⅡ群よりも多く試験管**Y**に移動するようになるので，正しい。

$\boxed{30}$・$\boxed{31}$ …③・⑧

地　学　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	③	3	
		問2	2	①	4	
		問3	3	③	3	
	B	問4	4	③	3	
		問5	5	①	3	
		問6	6	④	4	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	⑥	3	
		問2	8	④	4	
		問3	9	①	3	
	B	問4	10	③	4	
		問5	11	③	3	
		問6	12	②	3	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	問1		13	④	3	
	問2		14	③	4	
	問3		15	②	3	
	問4		16	④	3	
	問5		17	③	4	
	問6		18	④	3	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	19	④	3	
		問2	20	④	4	
	B	問3	21	④	3	
		問4	22	③	3	
	C	問5	23	④	3	
		問6	24	④	4	
第4問　自己採点小計					(20)	
第5問	A	問1	25	②	3	
		問2	26	③	3	
		問3	27	①	4	
	B	問4	28	③	3	
		問5	29	②	3	
		問6	30	②	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

地学I

【解説】

第１問　固体地球

問題

A　地球の形状と重力

我々が日常生活をしていると地球が丸いということを実感する機会はほとんどないが，2000 年以上前から一部には地球が丸いことは知られていた。観測技術が発達した現在では，地球は球ではなく回転楕(だえん)円体に近い形状をしていることがわかっている。エラトステネスが地球の大きさを測定した手法や，地球が回転楕円体に近い形状といえる証拠が何であるかなど確認しておいてほしい。

問１　我々が普段地平線まで見通しても地表面が弧を描いていることを認識することは困難であるが，地球が丸くないと説明がつかない事象も存在する。そのいくつかを考えてもらった。実際に紀元前のギリシャの学者は，月食時に映る地球の影などから地球が丸いと考えていた。各選択肢について考えると，

①　地球が平坦(へいたん)であれば，どこから見ても北極星の高度は等しいはずである。実際は，地表が弧を描いているので北極星の高度は観測点の緯度に等しく，北極点で 90°，赤道で 0° となる(図１－１)。よって，正しい。

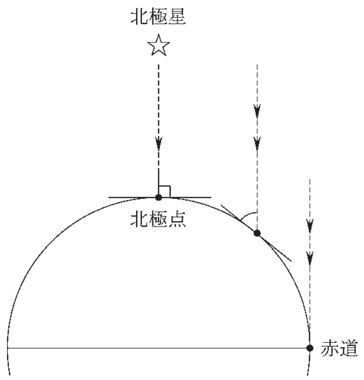


図１－１　北極星の高度

②　地球が平坦であれば，陸地は一度に見えるはずである。船から陸地を見たとき，陸地の高所から見えてくるならば，地表面が弧を描いていると判断できる(図１－２)。よって，正しい。

図１－２　船から陸地の見え方

図中の破線は船から見る水平線の方向

③　日食は，太陽－月－地球の順に一直線に並ぶことで発生地域が月の影に入り，太陽が欠けて見える現象であり(図１－３)，太陽が欠ける弧は月の形状にあたるため，地表面が平坦であって

【ポイント】

北極星の高度

観測点の緯度に等しい。

も発生する。よって，誤り。この選択肢が正解となる。

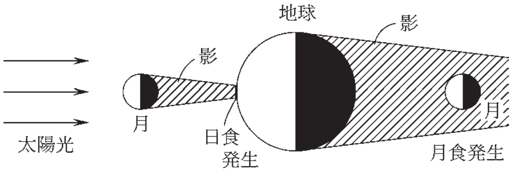


図１－３　日食と月食のしくみ

④　月食は太陽－地球－月の順に一直線に並ぶことで月が地球の影に入り，月が欠けて見える現象である(図１－３)。月が欠ける弧は地球の形状にあたるため，地表面が弧を描いていると判断できる。よって，正しい。 $\boxed{1}$ …③

問２　17世紀に，ある地域で調整した振り子時計が地球上の他の地域では正確に時を刻めないことから，地球上で場所により重力の値が異なることがわかった。その結果，地球は球ではなく赤道方向に膨らんだ回転楕円体であると，ニュートンが提唱した。この説の正誤を判断するために，高緯度と低緯度の同一緯度差あたりの子午線(経線)弧の長さを測定・比較する試みがなされた。18世紀に入ってフランスの調査により，高緯度の経線の方が長い測定結果が出され，地球は赤道方向に膨らんだ回転楕円体であるとの考えが裏付けされた(図１－４左)。この調査が実施されるまでは，地球は極半径が長いのか，赤道半径が長いのかで議論が行われていた。フランスの学会は極半径が長い説を支持しており，それを証明するために調査を行ったのであるが，イギリスの学会が支持する赤道半径が長いことを証明する皮肉な結果が出た。本問では，極半径が長いと仮定すればどのような観測結果が出るかの問いなので，赤道半径が長い実際の測定結果と逆の①の選択肢を選べばよい(図１－４右)。

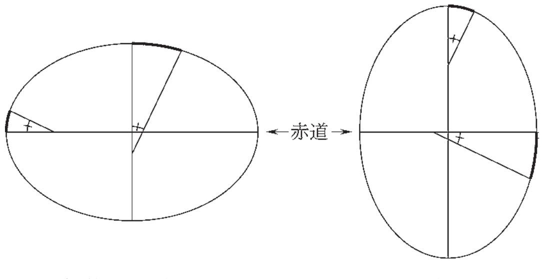


図１－４　赤道半径が長い回転楕円体と極半径が長い回転楕円体

なお，③と④の同一緯線上の経度1°あたりの長さであるが，緯線方向の地球の断面は円であり，高緯度ほど半径の短い円となるが，これは地球が球であっても観測される事象である。

$\boxed{2}$ …①

問３　既に触れているように，重力の値は緯度によって異なる。地球の重力は引力と遠心力との合力である。引力の大きさは地球の

回転楕円体と見なした地球の半径

赤道半径＞極半径

地球の回転楕円体の証拠

緯度差1°あたりの経線の長さが低緯度より高緯度の方が長い。

地球の断面の形状

経線方向の断面：楕円

緯線方向の断面：円

重　力

引力と遠心力の合力。

引　力

中心に向かう方向にはたらき，中心から遠ざかると小さくなる。

中心からの距離の２乗に反比例する。つまり，地球の中心から遠い赤道では引力が小さく，近い極では引力が大きくなる。遠心力は回転軸(自転軸)からの距離に比例する。つまり，回転軸からの距離がゼロである極では遠心力がゼロに，回転軸からの距離が最大になる赤道では遠心力が最大になる(図１－５)。重力の値は，引力＝重力となる極で最大，赤道で最小となる。

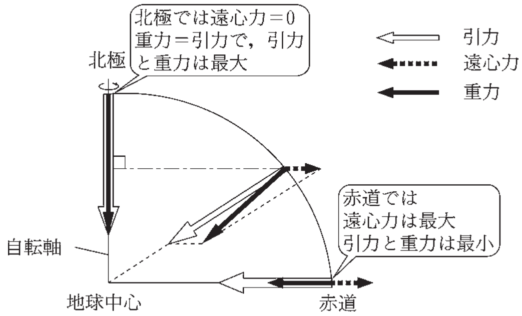


図１－５　地球上の引力・遠心力・重力

これらのことを踏まえて本問について考えると，上層階では１階に比べて地球の中心からの距離が大きくなるので引力が小さくなり，重力は小さくなるので③が正解となる。もちろんわずかな変化であるが，諸君が建物を上るたびに受ける重力の値は減っているのである。なお，上層階で遠心力は大きくなり重力の値はわずかながらさらに小さくなる。　$\boxed{3}$ …③

B　地　震

日本付近には４枚のプレートが存在しており，これらのプレートの相互運動のため，地下の岩盤にはさまざまな方向から圧縮力や張力などの力がはたらいている。力を受けて岩盤にはひずみがたまり，ひずみが岩盤の耐えうる限界を超えると，岩盤内部で破壊が生じ，断層が形成されることによって，地震が発生する。日本は世界でも有数の地震国であるため，センター試験でも扱われやすい分野である。地震に関する用語や地震災害についての理解を深めておいてほしい。

問４　破壊が最初に起こって，地震波が発生した地点が震源となり，その直上の地表の点を震央と呼ぶ。地震の発生に伴って，震源では２種の波が発生する。伝播(でんぱ)方向と平行に振動するＰ波(縦波)，伝播方向と垂直に振動するＳ波(横波)である(表１－１)。

Ｐ波は，Ｓ波より伝播速度が速いため観測点に先に到達して，初期微動と呼ばれる小さな揺れを引き起こす。Ｓ波が到達してからは，主要動と呼ばれる大きな揺れが起こる。初期微動が始まってから主要動が始まるまでの時間を初期微動継続時間と呼び，震源までの距離に比例する。この関係から，初期微動継続時間を測定すると震源距離が推定できる。そして，問題図１のように最低

遠心力
回転軸に垂直外向きにはたらき，回転軸から遠ざかると大きくなる。

引力・遠心力・重力の大きさ
引力　極：最大　赤道：最小
遠心力　極：最小(ゼロ)　赤道：最大
重力　極：最大　赤道：最小

震　源
断層が形成され，地震波が最初に発生した点。

Ｐ　波
最初に到達する地震波。初期微動を引き起こす。縦波。

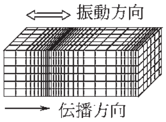
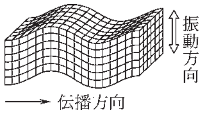
Ｓ　波
Ｐ波に次いで到達する地震波。主要動を引き起こす。横波。

初期微動継続時間
Ｐ波が到達してからＳ波が到達するまでの時間。震源までの距離に比例する。

3か所で震源距離を推定し，震源距離を半径とする円を描くと，各円の交点どうしを結ぶ弦(共通弦)の交点が震央となる。本問では，どの線分が2円の共通弦かに注意すれば，正解は③となる。

$\boxed{4}$ …③

表1－1　地震波の性質

種　類	P　波	S　波
性　質	Primary wave	Secondary wave
	縦波(疎密波)	横波(ねじれ波)
地表付近での速さ	5.0～7.0(km/s)	3.0～4.0(km/s)
波の進む方向	波が伝わる方向と平行に振動	波が伝わる方向と垂直に振動
伝わる物質	気体，液体，固体	固体のみ
伝播方向と振動方向		

問5　初期微動継続時間から震源までの距離を次の式で求めることができる。

大森公式… $d = kt$

d ：震源距離　k ：大森定数　t ：初期微動継続時間

大森定数は地下の状態によるが，だいたい6～8の値の範囲であり，この定数は，P波速度とS波速度の積を両者の差で割ると求めることができる。

$$\text{大森定数}\quad k = \frac{V_p \times V_s}{V_p - V_s}$$

V_p ：P波速度　V_s ：S波速度

今回の問題は，初期微動継続時間が8秒，P波速度が5 km/s，S波速度が3 km/sとあるので大森定数は7.5，震源距離が60 kmとなる。震央距離が48 kmなので震源の深さは36 kmとなる(図1－6)。60：48＝5：4より，他の値との比は5：4：3として求めてもよいし，3平方の定理から求めてもよい。

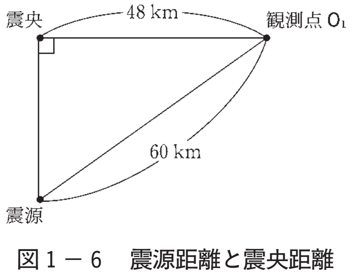


図1－6　震源距離と震央距離

図1－6からもわかるように，震央距離と震源距離は別の値になることに注意しよう。

$\boxed{5}$ …①

問6　地震で放出されたエネルギーを表すものをマグニチュードと呼び，記号Mで表される。この数値が大きくなると地震の規模が

マグニチュード
地震で放出されるエネルギーの目安。地震の規模を表す。

大きいといえる。

① Mが2大きくなると地震のエネルギーは1000倍になる。よって，誤り。

② 日本において0～7の10段階に分類されるのは，揺れの強さを表す震度である。よって，誤り。

③ Mは地震の規模を表すので，1回の地震でMの値は一つだけ決まる。よって，誤り。

④ Mは，震央から100 km離れた地点での標準地震計の最大振幅(μm単位)の対数値である。しかし，最大振幅が大きくなるとエネルギーとマグニチュードの関係がそぐわなくなるので，断層の面積と変位の量などから求めたモーメントマグニチュードと呼ばれる指標も広く使われている。よって，正しい。この選択肢が正解となる。

モーメントマグニチュードの定義を覚える必要はないが，断層の面積もMとともに大きくなることは覚えておこう。 $\boxed{6}$…④

マグニチュードとエネルギー

Mが2大きいとエネルギーは1000倍。

震　度

観測地で観測される地震動による揺れの強さ。

第2問　鉱物と地形　問題

岩石分野では，鉱物の特徴，火成岩・堆積(たいせき)岩・変成岩の生成過程や分類，特徴，また，岩石一般として総合的に出題されることもあるので，相互の関係を整理して理解しておこう。今回は火成岩の主要造岩鉱物であるケイ酸塩鉱物と地形について出題した。

A　鉱　物

火成岩の主要造岩鉱物は，有色鉱物4種(かんらん石，輝石，角閃(かくせん)石，黒雲母(うんも))と無色鉱物3種(斜長石，カリ長石，石英)である。これらの鉱物はケイ素1個と酸素4個からなる SiO_4 四面体を基本構造とするケイ酸塩鉱物である。それぞれの鉱物の四面体の配列，へき開，固溶体であるかどうかなどの特徴をしっかり把握しておこう。

問1　結晶構造は変わらず，化学組成が連続的に変化する鉱物を固溶体という。固溶体の例としてよく扱われるのがかんらん石で，問題図2中の SiO_4 四面体の間の◎の位置に，鉄(Fe)イオンやマグネシウム(Mg)イオンが任意の割合で入るため，全体の化学組成が変化する。したがって，$\boxed{ア}$ はFeやMg，$\boxed{イ}$ は固溶体が入る。一方，固溶体ではない鉱物として押さえておきたいのが石英($\boxed{ウ}$)である。石英は SiO_4 四面体が立体構造で配列し，すべての酸素を共有した形で結合しており，SiとO以外の他の元素を含まないので固溶体ではない。 $\boxed{7}$…⑥

問2　問題図2で示される主要造岩鉱物は有色鉱物で，独立構造を示すaはかんらん石，単鎖構造のbは輝石，複鎖構造のcは角閃石，平面網目状構造のdが黒雲母である。鉱物中のSi：Oの原子数の比は，問題図2で確認することができる。

下の図2－1では，b輝石とc角閃石の最小単位の枠内の酸素

ケイ酸塩鉱物

SiO_4 四面体を基本構造とするケイ酸塩鉱物。

固溶体

結晶構造が変化せず，化学組成が連続的に変化する鉱物。

例　かんらん石(FeとMg)
　　斜長石(Caに富む・Naに富む)

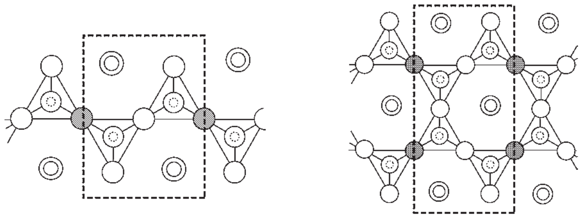
石英は固溶体ではない。

火成岩の主要造岩鉱物と結晶構造

かんらん石	独立構造
輝石	単鎖構造
角閃石	複鎖構造
黒雲母	平面網目状構造
斜長石 カリ長石 石英	立体構造

のうち，隣の単位と共有している酸素を●で表している。最小単位の枠内のケイ素と酸素の数を数えていくが，その際，●は隣接する最小単位と共有しているので$\frac{1}{2}$個として計算する。輝石の枠内のケイ素は2個で，枠内の酸素○は5個，●が2個であるので，

$$ケイ素：酸素 = 2：\left(5+2\times\frac{1}{2}\right) = 1：3$$



b　輝石　　　c　角閃石

図2－1　結晶の最小単位

同様に，cの角閃石では枠内のケイ素は4個で，枠内の酸素○は9個，●が4個であるため，

$$ケイ素：酸素 = 4：\left(9+4\times\frac{1}{2}\right) = 4：11$$

したがって，④が正解である。　$\boxed{8}$…④

問3　①　鉱物dは黒雲母である。問題図2にもあるように黒雲母は三つの酸素を共有して平面内で強く結びついているが，面と面との結びつきは弱いので，その間ははがれやすくなっている。このような性質をへき開という。したがって，①が正解である。

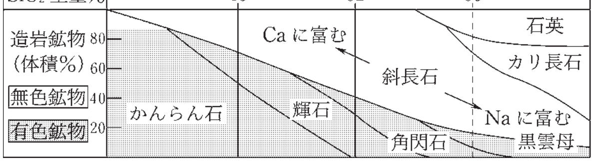
②　へき開は鉱物内にできる割れやすい方向であり，岩石内での割れやすい方向ではない。よって，誤りである。

へき開
結晶内の結合の弱い方向にできる鉱物の割れ方。

③　黒雲母は酸性岩に多く含まれるので，玄武岩よりも花こう岩に多く含まれる(表2－1)。よって，誤りである。

表2－1　火成岩と鉱物

火山岩		玄武岩	安山岩	流紋岩
深成岩	かんらん岩	斑(はん)れい岩	閃緑岩(せんりょくがん)	花こう岩
分類	(超塩基性岩)	(塩基性岩)	(中性岩)	(酸性岩)
SiO_2 重量%	45	52	66	



④　黒雲母は，4種の有色鉱物の中でマグマから最後に晶出する鉱物である。よって，誤りである。　$\boxed{9}$…①

B　地形

表2－2に河川地形，氷河地形，波や混濁流(乱泥流)による海

岸・海底地形を侵食地形，堆積地形に分けてまとめておく。

表2－2　侵食地形と堆積地形

	侵食地形	堆積地形
河　川	Ｖ字谷・蛇行・三日月湖	扇状地・三角州
氷　河	Ｕ字谷・カール	モレーン
波	海食崖(がい)・海食台	砂嘴(し)・砂州
混濁流	海底谷	深海扇状地

問4　①　河川は，山地から平野へ出ることによって急に傾斜が変化し，流速が小さくなるため，そこで運搬しきれなくなった砂礫(れき)が堆積する。それらの砂礫は崖(がけ)崩れなどによって山肌から削り取られた砕屑(さいせつ)物で，それらの堆積層は谷の出口に扇状に堆積していくため扇状地と呼ばれる。よって，正しい。

②　河川は，斜面の傾斜角が大きいほど，また水量が多いほど流速は大きくなる。洪水のときは普段の 10 ～ 100 倍の水量となり流速も増すので，普段の 100 ～ 1000 倍以上もの土砂を運搬し，氾濫(はんらん)原が形成されるので，正しい。

③　河川の上流域では，特に下方侵食がはたらいてＶ字谷が形成される。Ｕ字谷は下方侵食と側方侵食がともに強くはたらく氷河によって形成される侵食地形なので，この記述が誤りである。

④　河川の傾斜が緩やかになると，側方侵食が盛んとなり，河川が蛇行する。図2－2のように近道ができて河道がつながってしまうと，取り残された河道は湖となり，三日月湖と呼ばれている。よって，正しい。　$\boxed{10}$ …③

扇状地
山地から平野へ出たところに扇状に形成された堆積地形。砂礫層からなる。

Ｖ字谷
上流域の河川の下方侵食によって形成された峡谷。

Ｕ字谷
氷河の下方・側方侵食による侵食地形。

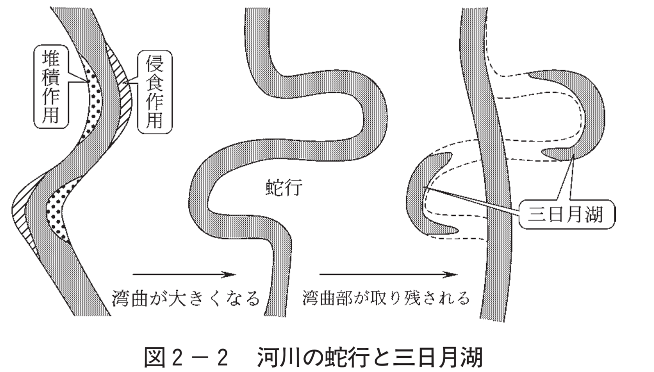


図2－2　河川の蛇行と三日月湖

問5　図2－3に河岸段丘が形成される過程を示す。洪水によって運ばれた堆積物によって氾濫原が形成される(a)。地盤の隆起や海水面の低下によって侵食され，残された氾濫原が段丘面Ｉとなり(b)，下位に新しい氾濫原が形成される(c)。さらに地盤の隆起か海水面低下が起こると，下位の氾濫原が段丘面IIになる(d)。したがって，下位の段丘面ほど新しい。

河岸段丘
海水面の低下または地盤の隆起により形成される河川に沿った階段状の地形。下位の段丘面ほど新しい。

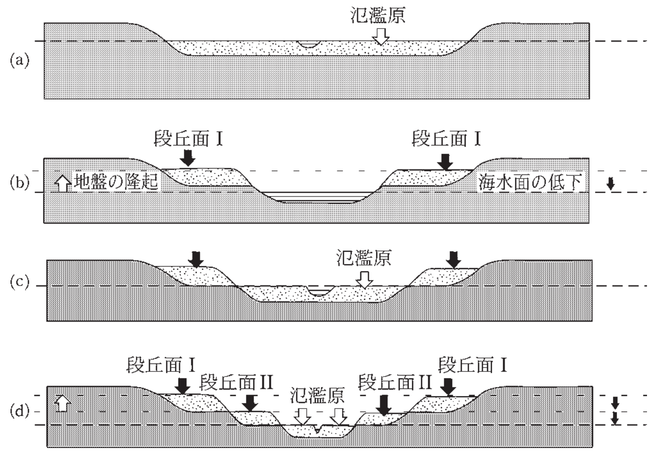


図２－３　河岸段丘の形成

一方，海岸段丘は，波の侵食作用によって形成された海食台が地盤の隆起または海水面の低下によって地表に現れ，段丘面となる。そして，より低い位置に新たに海食台・海食崖が形成され，さらに隆起または海水面の低下によって，下位の海食台が段丘面となるので，下位の段丘面ほど新しい(図２－４)。したがって，正しい文は**イ**と**ウ**で，正解は③である。　$\boxed{11}$…③

海岸段丘
海水面の低下または地盤の隆起により海食台が段丘面となって形成される階段状の地形。下位の段丘面ほど新しい。

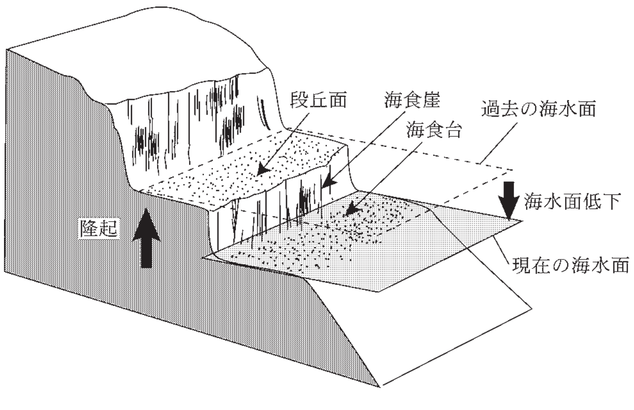


図２－４　海岸段丘の形成

問６　①　大陸棚は水深約 130 ～ 150 m までの傾斜が緩やかな海底である。ここは，かつて大陸の平野であったことがわかっており，海水面が今より約 130～150 m 低かったことを示している。海水面が低下したのは，気候が寒冷な氷期に，海水が蒸発して大陸上に大陸氷河として固定されたためと考えられるので，気候が暖かい間氷期とした点が誤りである。

②　海嶺(かいれい)を構成する岩石は，海嶺の地下深くから上昇した高温のマントル物質がマグマとなり，地表に噴出して固結した玄武岩である。よって，正しい。

③　海溝は，海洋プレートが他のプレートの下に沈み込んでい

大陸棚
海岸線から海洋に向かって水深約 130 ～ 150 m までの傾斜の緩やかな平坦(へいたん)面。最終氷期の頃は大陸の平野。

る場所であり，侵食地形ではないので，誤りである。

④　深海底までは陸起源の砕屑物は届かないので，砕屑岩に覆われることはないが，海洋中に生息する石灰質の殻をもつ有孔虫や，ケイ質の殻をもつ放散虫，珪藻(けいそう)などのプランクトンの遺骸(いがい)が降り積もって深海堆積物となり，やがて石灰岩やチャートなどの堆積岩が形成される。よって，誤りである。　$\boxed{12}$…②

深海底堆積物と岩石

有孔虫→石灰岩

放散虫･珪藻→チャート

第３問　柱状図　問題

センター試験の地質分野では，地質断面図，柱状図，ルートマップ，地質平面図などが使用されており，それに堆積(たいせき)・地質構造，岩石の種類，古生物と地質年代，地史の知識を組合せて出題される。このことから上記の四つの出題パターンに慣れておくことが必要である。今回は柱状図と走向・傾斜から各地層の分布の様子を読み解いていく出題とした。走向・傾斜と地形図上での地層の現れ方を結び付けて理解できるように心がけてほしい。

問１　相対年代を決定するのに役立つ化石を示準化石という。示準化石は以下の条件が満たされる化石をいう。

・種の生存期間が短い(進化の速度が速い)

・広い地域から産出する

・個体数が多い

Ｂ層から産出するデスモスチルス(図３－１)は，新生代新第三紀の示準化石である。同時代の示準化石としてはビカリアがある。選択肢①は古生代の三葉虫，②は古生代の石炭紀とペルム紀に繁栄した紡錘虫(ぼうすい)(フズリナ)，③は中生代のアンモナイトである。表３－１におもな示準化石をまとめておく。　$\boxed{13}$…④

示準化石

相対年代決定に役立つ化石

・種の生存期間が短い

・広い地域から産出する

・個体数が多い

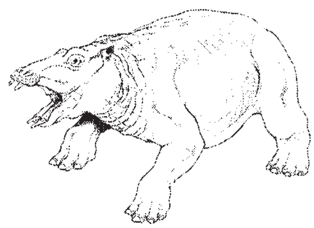


図３－１　デスモスチルス

表３－１　おもな示準化石

<table>
<tr><td rowspan="3">新生代</td><td>第四紀</td><td colspan="2">オオツノジカ，ナウマンゾウ，マンモス</td></tr>
<tr><td>新第三紀</td><td>デスモスチルス</td><td rowspan="2">ビカリア</td></tr>
<tr><td>古第三紀</td><td>カヘイ石</td></tr>
<tr><td rowspan="3">中生代</td><td>白亜紀</td><td rowspan="2">イノセラムス</td><td rowspan="3">アンモナイト
トリゴニア
恐竜</td></tr>
<tr><td>ジュラ紀</td></tr>
<tr><td>三畳紀</td><td>モノチス</td></tr>
<tr><td rowspan="6">古生代</td><td>ペルム紀</td><td rowspan="2">紡錘虫</td><td rowspan="6">三葉虫
筆石</td></tr>
<tr><td>石炭紀</td></tr>
<tr><td>デボン紀</td><td></td></tr>
<tr><td>シルル紀</td><td>クサリサンゴ，ハチノスサンゴ</td></tr>
<tr><td>オルドビス紀</td><td></td></tr>
<tr><td>カンブリア紀</td><td>バージェス動物群
(アノマロカリスなど)</td></tr>
</table>

地質年代と放射年代の関係

第四紀と第三紀の境界：260万年

新生代と中生代の境界：6500万年

中生代と古生代の境界：2.5億年

古生代と先カンブリア時代の境界：5.4億年

問2　鍵(かぎ)層になる地層の条件には次の三つがある。

・広く分布する地層であること
・短期間に堆積した地層であること
・他の地層と区別しやすいこと

よって，③が誤りである。

凝灰岩(火山灰)層は，火山の噴火によって短期間に広範囲に火山灰が堆積してできる。鉱物の組合せが他の地層と異なる場合が多く，色などが特徴的であるため鍵層として有効である。

地層の対比とは，離れた2地点の地層が同じ年代のものであることを調べる作業をいい，鍵層を用いて行うことが多い。鍵層の他に地層の対比に利用されるものとして，示準化石を含む地層がある。　$\boxed{14}$…③

問3　大陸棚と深海底の間には大陸斜面があり，そこで地震などの発生によって，土砂と水が混じり合った状態の混濁流(乱泥流)が発生し，海底谷に沿って流れ下り深海扇状地を形成するため，海洋のはるか沖まで，陸源の堆積物を運搬することになる。混濁流による堆積物はタービダイトと呼ばれ，砂層と泥層の繰り返しで，砂層には級化層理(図3－2)や斜交葉理(図3－3)などのような，特徴的な堆積構造が認められる。

級化層理(級化成層)は，下方ほど砕屑(さいせつ)物の粒子が大きく，上方ほど粒子が細かくなる堆積構造である。砂や泥などのさまざまな大きさの粒子が水流によって一緒に運ばれ，静かな水底に一気に堆積するとき，大きい粒子から順に堆積することによってできる。

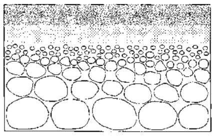


図3－2　級化層理

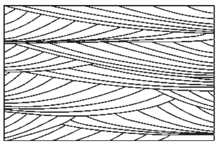


図3－3　斜交葉理

葉理とは1枚の地層内の粒子の並び方によってできる縞(しま)模様をいう。斜交葉理(クロスラミナ)は，砕屑物の粒子が並んでつくる葉理が水流などによって削られたあと，その上に新しい葉理が重なってできる。水や風の流れのある場所で形成される。切られている葉理はそれを切っている葉理より古いため，地層の新旧判定に役立つ。　$\boxed{15}$…②

問4　A層は水平な地層であり，問題図2の柱状図からその基底部の標高が500 mであることがわかる。よって，下位の地層との境界は，標高500 mの等高線に沿って現れ，図3－4のように標高500 m以上の場所にA層が地表に露出することになる。よって，④が正解となる。

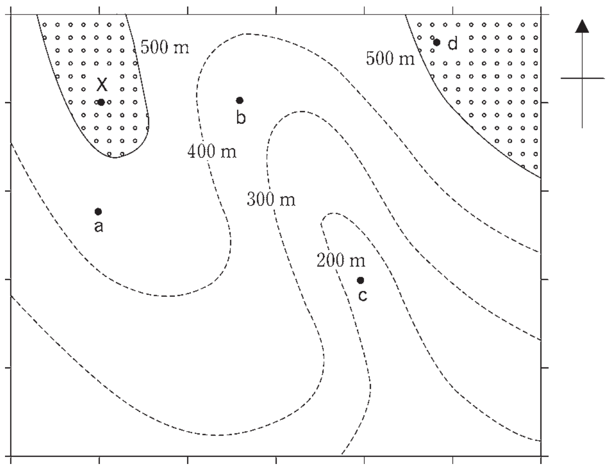


図３－４　Ａ層の分布

地層が堆積した後に堆積作用が中断して侵食が起こり，その後再び堆積が起きて地層が重なった場合の地層の重なり方を不整合という。不整合には下位の地層と上位の地層の走向・傾斜が同じ場合の平行不整合，異なる場合の傾斜不整合(斜交不整合)がある(図３－５)。Ａ層と下位の地層の関係は，下位の地層に由来する礫が存在し，境界が凸凹していることから下位の地層を侵食したことを示唆しており，不整合であると考えることができる。また不整合面で走向・傾斜が変化していることから，傾斜不整合である。一般に露頭における不整合の判定としては，次のものがある。ただしすべての要素が満たされるわけではない。

・基底礫岩の存在：不整合面の直上に存在する下位の地層に由来する礫岩
・侵食面の存在：下位の地層や岩体を侵食した凹凸面上に上位の地層が堆積
・堆積状態の変化：上下の地層の走向や傾斜が変化
・時間的間隙：上下の地層に含まれる化石群の地質年代が異なる

$\boxed{16}$ …④

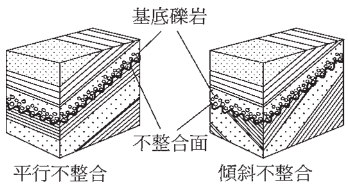


図３－５　不整合

不整合の判定

・基底礫岩の存在
・上下の地層の走向傾斜が異なる
・上下の地層に時間的な隔たりがある
・侵食面の存在

問５　走向は水平面と層理面の交線の方位を表し，傾斜は水平面に対する層理面の傾きの方位とその角度を表す。

Ｘ地点の柱状図からＴ層は標高 400 m に存在し，走向が EW であることから，Ｘ地点から東西方向の標高 400 m の線分上に必ずＴ層が存在することになる。したがって，Ｘ地点の直下に標高 400 m の走向線(図３－７)を引くことができる。各高度の走向線は，その高度に必ずＴ層が存在することを表している。したがって，400 m の走向線が 400 m の等高線と交わる点(t_1，t_1')で，Ｔ層が地表に露出していることになる。次に標高 300 m の走向線は，傾斜が 45°S であることから 400 m の走向線の南側に水平距離 100 m の位置に存在することになる(図３－６参照)。した

走　向

層理面と水平面の交線方向

傾　斜

層理面と水平面のなす角度

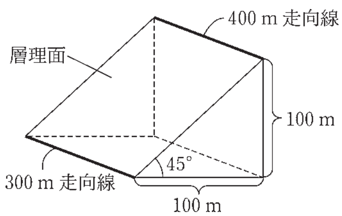


図３－６　地層の傾斜

がって，300 m の走向線が 300 m の等高線と交わる点(t_2，t_2')で，T 層が地表に露出していることになる。同様の方法によって標高 200 m の走向線が標高 200 m の等高線と交わる点を(t_3，t_3')，標高 500 m の走向線が標高 500 m の等高線と交わる点を(t_4，t_4'，t_4'')とする。これらの点を滑らかに結んだ線が，T 層が地表に現れている分布を示す地質図となる。なお，標高 100 m の走向線は 100 m の等高線と交わる地点がないため，図中では地表に現れる場所はない。 17 …③

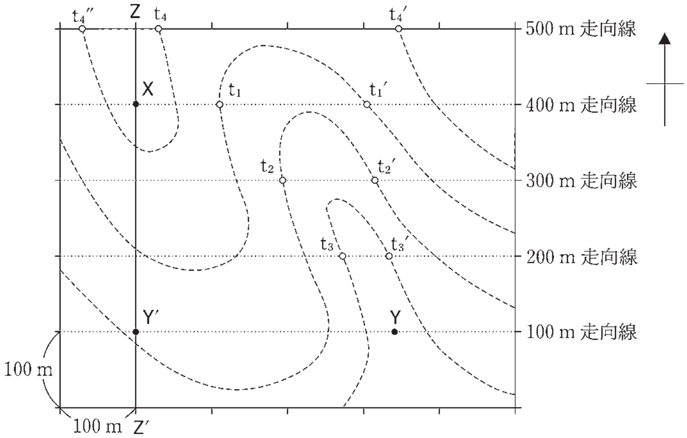


図 3 － 7　T 層の地質図の描き方

問 6　標高 150 m の Y 地点は，図 3 － 7 より T 層の標高 100 m の走向線上にあることがわかる。したがって，Y 地点の直下 50 m (標高 100 m)に T 層が存在することから，④が正解となる。次に図 3 － 7 の線分 Z－Z′ に沿った地質断面図を図 3 － 8 に示す。図中の Y′ 地点は，Y 地点の真西約 330 m の場所にあり，T 層の標高 100 m の走向線上にあることから，標高 150 m より下では，Y 地点と同じ柱状図となる。 18 …④

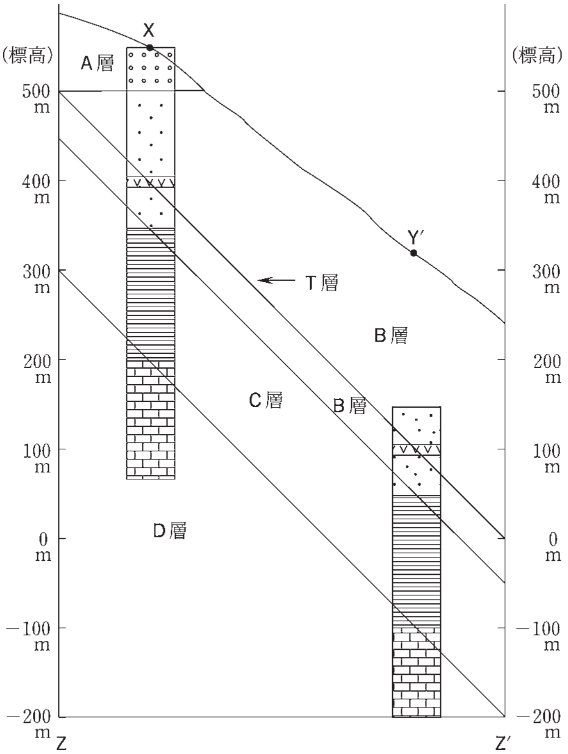


図３－８　地質断面図

第４問　大気と海洋　問題

A　地球のエネルギー収支

問題文にも書いてあるように，地球には絶えることなく太陽放射が降り注ぎ地球を暖めているが，日に日に地球の大気の温度が上昇し続けることはない。地球も太陽から受け取ったエネルギー量と等量のエネルギーを放射して，エネルギー収支のバランスが保たれているからである。今回は，太陽放射と地球放射および地球のエネルギー収支について出題した。

問１　①　太陽放射は，紫外線・可視光線・赤外線などからなるが，紫外線は地球大気中のオゾン(O_3)が吸収し，赤外線のほとんどは地球大気中の水蒸気(H_2O)や二酸化炭素(CO_2)などが吸収してしまう。それゆえ，地表に到達する太陽放射 a は大部分が可視光線になる。よって，誤りである。

②・③　地表からは赤外線という形で大気に向かって放射される。地球大気中の水蒸気や二酸化炭素などは，この地表からの赤外線を吸収し，それをまた赤外線という形で地表と宇宙空間に向かって放射している。それゆえ，地表へ到達する放射 b と地表からの放射 c は大部分が赤外線になる。よって，②と③はどちらも誤りである。

太陽放射

太陽から電磁波の形で放射されている放射エネルギー。おもに紫外線・可視光線・赤外線からなり，太陽放射が最強となるのは可視光線の波長域にある。

地球放射

大気を含めた地球が宇宙空間に放射している放射エネルギー。おもに赤外線からなり，地球放射が最強となるのは赤外線の波長域にある。

オゾン(O_3)

紫外線を吸収する。成層圏内に多く存在し，オゾン層を形成している。

④　物質の状態変化に伴って発生する熱を総称して潜熱という。地表から水が蒸発して水蒸気になる際に，周囲から熱(蒸発熱)を奪う。したがって，水の蒸発の際には熱が地表から大気へと輸送されることになる。よって，④が正解である。

なお，今回は出題しなかったが，問題図 1 において，太陽から地球に到達する平均太陽放射エネルギー量を 100 としたとき，大気や雲，地表などによる反射・散乱の値は約 30，大気や雲による吸収量は約 20 であり，地表に到達する太陽放射エネルギー量は約 50 (つまり約半分)にしか過ぎない，ということは記憶しておいた方がよいであろう。　$\boxed{19}$ … ④

問 2　地球の半径を R とすれば，地球の断面積は πR^2 であり，地球の表面積は $4\pi R^2$ である。問題文から，地球全体が単位時間に受け取る太陽放射エネルギー量は地球の断面積に太陽定数 I を掛けた $\pi R^2 I$ になる。しかし，入射する太陽放射エネルギー量 100 に対して，大気や雲，地表などによる反射・散乱の量 A だけ宇宙空間に戻されてしまう。入射量 100 に対する A の割合をアルベド(反射能)という。アルベドを考慮すれば，地球全体が太陽から正味に受け取る太陽放射エネルギー量は，

$$\left(1-\frac{A}{100}\right)\pi R^2 I$$

になる。一方，地球の大気上端で，地球が単位面積・単位時間あたりに放射する地球放射エネルギー量は S であるから，地球から単位時間に放出される地球放射エネルギー量は，地球の表面積 $4\pi R^2$ に S を掛けた，

$$4\pi R^2 S$$

になる。これらがつり合っているので，＝で結んで式を立てればよい。よって，④が正解である。これらの放射エネルギー量がつり合った状態を放射平衡という。なお，本問では半径 r の球の表面積の式を示しているが，実際のセンター試験では示されないと思われるので，知っておく必要があるだろう。　$\boxed{20}$ … ④

B　地球上の水の循環

地球表層の水は，水・水蒸気・氷と形を変えながら，循環している。今回は，地球の水収支について出題した。

問 3　地球上の水の総量は 14 億 km^3 程度であると見積もられているが，そのうち 96 %以上は海水であり，残りは陸水である。陸水のうち，最も大きな割合を占めているのが雪氷(氷河，降雪など)であり，次いで地下水(土壌水を含む)が多い。よって，④が正解である。なお，陸水の中で河川水の占める割合は小さいが，その輸送量は大きく，河川流出として地球上の水の循環においては重要な役割を果たしていることに注意しておいてほしい(**問 4** 参照)。　$\boxed{21}$ … ④

潜　熱

物質の状態変化に伴って発生する熱。

水が蒸発して水蒸気になる際には周囲から蒸発熱を奪い，逆に，水蒸気が凝結(凝縮)する際には水蒸気が潜在的にもっているエネルギーを凝結熱として放出する(図 4 － 1)。蒸発熱や凝結熱などを総称して潜熱と呼ぶ。

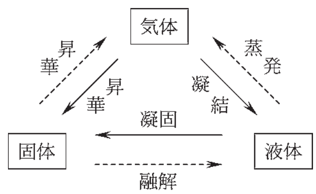


図 4 － 1　物質の状態変化

地表に到達する太陽放射エネルギー

地球の大気上端で受け取る太陽放射エネルギー量の約半分。

地球の表面積

地球の半径を R として $4\pi R^2$。

太陽定数

地球の大気上端で，太陽光線に垂直な単位面積の面が単位時間に受け取る太陽放射エネルギー量。1370W/m^2。

地球全体が単位時間に受け取る太陽放射エネルギー量

地球の断面積に太陽定数を掛けたものに等しい。

地球上の水における海水の占める割合

96 %以上

陸　水

雪氷が最も多く，次いで地下水。

問4　次の図4－2において，河川流出・地下水流出などによる水の移動量をZとすると，陸域での降水量X，陸域からの蒸発(蒸発散)量Y，海域での降水量x，海域からの蒸発量y，そしてZについて，

$$X = Y + Z$$
$$x = y - Z$$

が成り立つ。したがって，①のX＝Y，②のx＝y，④のx＞yは，Zを考慮していないので，いずれも誤りである。③だけが条件を満たしているので，これが正解になる。 $\boxed{22}$…③

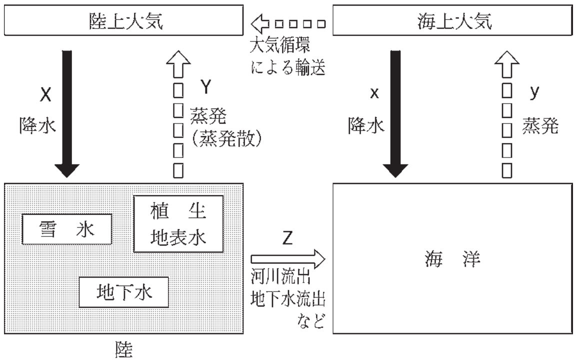


図4－2

C　海水の塩分

問題文にあるように，海水にはさまざまな塩類が溶け込み，イオンとして存在している。主要な成分のうち，Na^+(ナトリウムイオン)などの陽イオンは，岩石の風化などによってもたらされたものである。一方，Cl^-(塩化物イオン)などの陰イオンは，地球内部から噴出したガスによって供給されたものである。海水を蒸発させると塩化ナトリウム(NaCl)を主成分とする塩類が析出するが，塩化ナトリウム自体が溶け込んだわけではなく，NaとClは別々の経路で海水に供給されたのである。今回は海水の塩分，海水中に溶け込んでいるイオンの存在比について出題した。

問5　海水中に存在するイオンのうち，最も多いのは，Cl^-であり，次いでNa^+，SO_4^{2-}(硫酸イオン)，Mg^{2+}(マグネシウムイオン)の順になる。よって，④が正解である。2007年のセンター試験では，3番目と4番目に多いイオンをたずねている。どのイオンが何%を占めているかという数値は覚える必要はないが，上位四つのイオンを多い順に覚えておく必要はあるだろう。

$\boxed{23}$…④

海水中のイオンの存在比

多い順に，$Cl^- > Na^+ > SO_4^{2-} > Mg^{2+}$

イオンの存在比は海洋のどこでもほぼ一定。

問6　海水中の主要なイオン存在比は，問5の選択肢④のグラフで示される比率を保ち，海洋のどこでもほぼ一定である。このことは，海水全体がよく混合していることを意味している。イオンの存在比は海洋のどこでもほぼ一定であるが，外洋における塩分は

33〜38‰(パーミル)の範囲にあり，ある程度の幅をもっている。高緯度域の海水を除き，低緯度〜中緯度域の海面塩分は，一般に，蒸発量＞降水量になっている地域では塩分が高くなり，降水量＞蒸発量になっている地域は降水によって塩分が薄まり，塩分が低くなる。海面水温の高い赤道域(緯度 0° 付近)では蒸発がさかんであるが，それ以上に降水量も多く，降水量＞蒸発量になっている。一方，亜熱帯域(緯度 20°〜30°)は亜熱帯高圧帯の領域で降水量が少なく，蒸発量＞降水量になっている(図 4 − 3)。この影響で，赤道域における海面塩分は亜熱帯域における海面塩分より低くなっている(図 4 − 4)。よって，④が正解になる。

海水の塩分
約 33〜38‰(パーミル)の範囲にある。平均塩分は約 35‰

緯度別の海洋表面の塩分
蒸発量＞降水量 の亜熱帯高圧帯の領域で高い。

$\boxed{24}$ …④

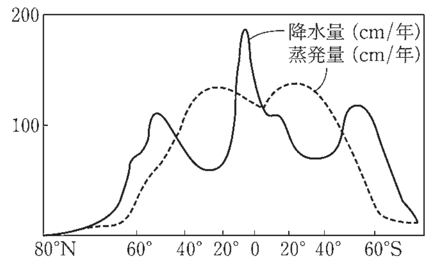


図 4 − 3　海域での降水量と蒸発量

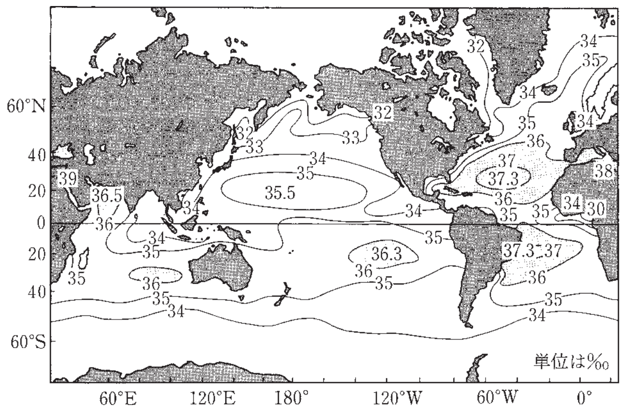


図 4 − 4　海洋表面の塩分分布

第 5 問　太陽系

問題

A　太陽系の天体

太陽や惑星だけでなく，小天体や星間物質が分布する広がりを含めて太陽系という。また太陽系の広がりは，太陽から 40 天文単位以遠の太陽系外縁天体まで広がっている。

本問では太陽系を構成するおもな天体に関する問題を出題した。

問 1　$\boxed{ア}$：小惑星の公転軌道は，大多数が火星と木星の間にある。この領域に多数の小惑星が存在することは記憶しておこう。

$\boxed{イ}$：太陽系最外の惑星である海王星の公転軌道の外側には，太陽系外縁天体が存在する。その中にはエリスや冥王星などがあ

小惑星
おもに火星と木星の公転軌道の間に分布する。

太陽系外縁天体
海王星の公転軌道以遠に分布。エリスや冥(めい)王星など。

る。一方，ガニメデとは木星の衛星で，太陽系の衛星の中では最大である。

よって，正解は②である。 $\boxed{25}$ …②

問2　太陽系の惑星のうち，水星，金星，地球，火星を地球型惑星と呼び，木星，土星，天王星，海王星を木星型惑星と呼ぶ。これらの違いを表5－1に示す。

表5－1　地球型惑星と木星型惑星

	地球型惑星	木星型惑星
惑星名	水星，金星 地球，火星	木星，土星 天王星，海王星
質量	小	大
半径	小	大
平均密度	大(5 g/cm³ 前後)	小(1 g/cm³ 前後)
偏平率	小	大
自転周期	長(1日以上)	短(1日未満)
惑星全体の組成	鉄，酸素，珪(けい)素	水素，ヘリウム
大気組成	二酸化炭素……金星，火星 窒素・酸素……地球	水素，ヘリウム
衛星	地球1，火星2 金星・水星0	多い
環（リング）	なし	あり

①　惑星の公転運動に伴う惑星現象を図5－1に示す。

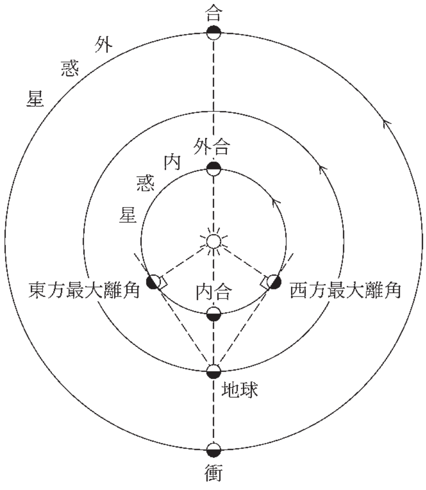


図5－1　惑星現象

地球の公転軌道よりも内側にある水星と金星を内惑星という。内惑星の位置が，太陽と地球の間で一直線上にあるときを内合という。一方，地球の公転軌道よりも外側を公転する火星から海王星までを外惑星という。外惑星の位置が地球から見たときに，太陽とは正反対の位置にあるときを衝という。つまり，内合や衝は内惑星または外惑星によって起こる惑星現象であって，地球型惑

地球型惑星

表面が岩石でできた，半径や質量は小さいが密度の大きな惑星。水星，金星，地球，火星。

木星型惑星

水素やヘリウムの厚い大気で覆われた，半径や質量は大きいが密度の小さな惑星。木星，土星，天王星，海王星。

内惑星

地球の公転軌道の内側を公転する惑星。水星と金星。

外惑星

地球の公転軌道の外側を公転する惑星。火星～海王星。

星および木星型惑星の特徴ではない。よって，誤りである。

②　地球型惑星の大気の特徴はさまざまである。水星には，大気がほとんど存在しない。金星には，地球型惑星の中では最も厚い大気があり，主成分は二酸化炭素である。地球の大気の主成分は，窒素と酸素である。火星の大気は希薄ではあるが，二酸化炭素の大気が存在する。それに対して，木星型惑星の大気の主成分は水素とヘリウムである。

これら地球型惑星と木星型惑星の大気をはじめとする成分の違いは，惑星が形成されるとき，地球型惑星は水素とヘリウムの大半が原始太陽により吹き飛ばされるなどしたが，木星型惑星は原始太陽から遠いために惑星自身の大きな重力で水素やヘリウムを保持できたためと考えられている。よって，誤りである。

③　惑星の自転周期は，地球型惑星では約 1 日以上であるが，木星型惑星は 1 日未満である。つまり，自転周期を比較すると地球型惑星は長く，木星型惑星は短い。よって，正しい。

④　地球型惑星と木星型惑星を比べると，岩石質である地球型惑星の方が密度は大きいが，惑星の半径や質量は木星型惑星の方が大きい。木星型惑星が軽い水素やヘリウムがおもな成分であっても，その量が莫大であるため質量は大きくなる。よって，誤りである。

各惑星の特徴や物理量などが交錯しないようにしっかり整理しておこう。　$\boxed{26}$ …③

惑星の大気のおもな成分

水星：なし
金星：二酸化炭素
地球：窒素，酸素
火星：二酸化炭素
木星型惑星：水素，ヘリウム

問 3　①　太陽は太陽系の中で最大の天体である。その質量は，全太陽系の質量の 99 %以上を占める。太陽の質量は地球の質量の約 33 万倍にもなる。よって，誤りであり，①が正解となる。

②　太陽系の惑星は，太陽系を天の北極（地球の北極を見下ろす方向）から見ると，すべて反時計回り（左回り）に公転している。よって，正しい。

なお，惑星の公転方向はすべて同一方向であるが，惑星の自転方向には違いがある。大半の惑星の自転方向は公転方向と同じで反時計回りであるが，金星は時計回り（右回り）に自転しており，天王星は自転軸が横倒しの状態で自転している。

③　地球の半径は約 6400 km であり，地球の衛星である月の半径は約 1740 km である。よって，正しい。

④　多くの彗（すい）星の起源は，太陽系外縁天体と考えられている。よって，正しい。　$\boxed{27}$ …①

太陽の質量

太陽系全質量の 99 %以上。
地球の質量の約 33 万倍。

B　年周視差と年周光行差

地球の公転によって起こる天球上の恒星の運動に，年周視差と年周光行差がある。これら二つの現象は，年周視差が近傍の恒星までの距離の測定に用いられる以外には，あまり意識する機会がない。今回はこれらの現象に関する問題を出題した。

問4　年周視差に関する問題である。図５－２に示すように，地球が太陽の周囲を公転することで，地球から観察される恒星の天球上での位置が変化するように見える。図５－２で示した，太陽－恒星－地球のなす角度が年周視差に相当するが，これは，地球の公転により変化した天球上の恒星の変化の最大値の $\frac{1}{2}$ 倍の値に相当する。よって，正解は③である。　$\boxed{28}$ …③

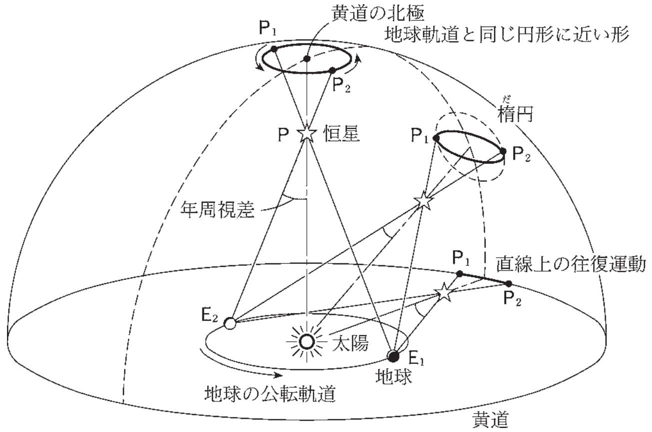


図５－２　年周視差

問5　年周視差と年周光行差の特徴の違いをしっかり理解しておこう。

年周視差は**問4**でも述べたように，太陽－恒星－地球のなす角度であるから，恒星が太陽(または地球)に近いほど大きな値となり，逆に遠いほど小さな値となる。つまり，太陽から恒星までの距離と年周視差は反比例の関係にある。このことから，(太陽系から近傍の恒星に限定されるが，)年周視差を利用して恒星までの距離を求めることが可能となる。太陽を除いて地球に最も近い恒星はケンタウルス座 α 星であり，この恒星の年周視差は 0.742″(秒)であるが，それでも 1″ にも満たない。

一方，年周光行差は，問題図１に示したように，恒星からの光が地球の公転運動により，地球の移動方向の前方からくるように見える現象である。光行差の角度の概念は，降雨と歩行者の関係に例えられる。歩行者が立ち止まっているときは真上から降る雨も，歩行者が歩き始めると，雨が少し前方から降るようになる。これと同様の現象が光行差である。歩行者の歩く速度が速くなれば，前方から降る雨の角度も大きくなるように，地球の公転速度が速くなれば，光行差の角度も大きくなることになる。年周光行差の角度の最大値は，地球の公転速度に依存し，恒星までの距離とは無関係である。

以上のことから選択肢を吟味していく。

①　年周視差ではなく，年周光行差についての記述である。よって，誤りである。

年周視差

地球の公転に伴い１年周期で変化する天球上の恒星の最大変化角度の $\frac{1}{2}$ 倍の値。

近傍の恒星ほど値は大きく，恒星までの距離に反比例する。

年周光行差

地球の公転運動により，恒星からの光が地球の公転する方向にずれて見える現象。

②　正しい。

③　年周光行差ではなく，年周視差についての記述である。よって，誤りである。

④　年周光行差ではなく，年周視差についての記述である。よって，誤りである。

よって，正解は②である。　$\boxed{29}$ …②

ちなみに年周視差は値が小さいため，なかなか測定することはできなかった。一方，年周光行差は最大で20.5″と，年周視差に比べて値が大きい。このことから，人類が最初に測定したのは年周光行差(1727年)であり，その後の1838年に年周視差が測定された。

問６　年周光行差による恒星の天球上の変化の仕方は，図５－３のようになる。これは図５－２に示した年周視差と同様の変化をする。すなわち，天球上の黄道の極付近に位置する恒星では，年周視差，年周光行差とも真円を描くように天球上を動く。もちろん，ともに１年周期である。そこから黄道，つまり地球の公転軌道面の延長面上に近づくにつれて地球の公転方向にのびた横長の楕円となり，黄道上では地球の公転方向の直線の往復運動となる。したがって，正解は②となる。　$\boxed{30}$ …②

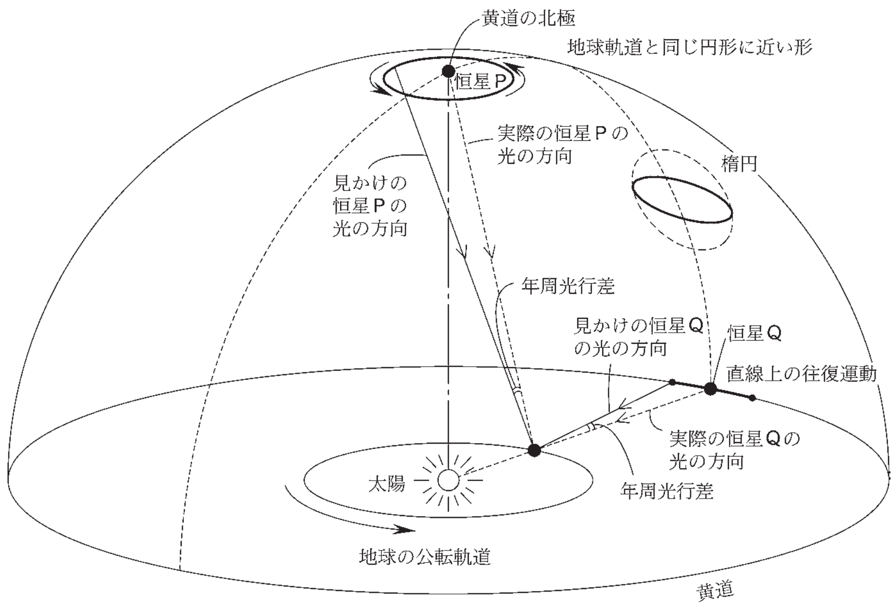


図５－３　年周光行差の天球上での変化

MEMO