クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2014年度

第3回 全統記述模試問題

数　　学

（Ⅰ型　80分　Ⅱ型　100分　Ⅲ型　120分）

2014年10月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記および本冊子裏表紙の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1. 問題冊子は12ページである。
2. 解答用紙は別冊になっている。（解答用紙冊子表紙の注意事項を熟読すること。）
3. 本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4. 下表のような「選択型」が用意されているので，志望する大学・学部・学科の出題範囲・科目に合わせて，選択型と受験科目で指定された問題を選んで解答すること。受験科目に合わない型・問題を選択した場合には，志望校に対する判定が正しく出ないことがあるので注意すること。

選択型	受験科目	問題ページ	解答用紙
Ⅰ	数学Ⅰ	P．2～3	Ⅰ型1枚
	数学Ⅰ，A		
Ⅱ	数学Ⅰ，A，Ⅱ	P．4～7	Ⅱ型2枚
	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B		
Ⅲ	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ	P．8～12	Ⅲ型3枚

5. 解答用紙は，選択する型によって異なる。必ず指定された解答用紙に正しく答えよ。**誤った番号の箇所に解答している場合は得点としないので注意すること。**
6. 試験開始の合図で解答用紙冊子の数学の解答用紙を切り離し，下部の所定欄に 氏名（フリガナ，漢字）・在・卒高校名・クラス名・出席番号・受験番号（受験票の発行を受けている場合）を記入すること。また，選択問題がある場合は，上部の所定欄に 選択問題 を記入すること。
7. 解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となる。
8. 試験終了の合図で上記6.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

1461230112110010

I 型の問題は次ページから始まる．

Ⅰ型

Ⅰ型受験者は次の表に従って解答すること.

受験科目	数学Ⅰ	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ を必答.
	数学Ⅰ，A	$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ を必答.

$\boxed{1}$ **【Ⅰ型共通　必須問題】**（配点　60点）　解説

(1)　次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x+2y+z=3, \\ 3x-2y+z=7, \\ 2x-4y+z=3. \end{cases}$$

(2)　xy 平面上に放物線 C：$y=x^2-6x+8$ がある.

(i)　C の頂点の座標を求めよ.

(ii)　C を x 軸方向に1，y 軸方向に2だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ.

(iii)　C を原点に関して対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ.

(3)　a は実数の定数とする．x の2次方程式

$$x^2+2ax+5a^2-4=0 \qquad \cdots(*)$$

が異なる2つの実数解をもつとする.

(i)　a の値の範囲を求めよ.

(ii)　(*)が正の解と負の解を1つずつもつような a の値の範囲を求めよ.

(4)　四面体 OABC があり,

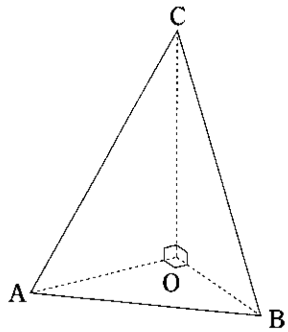
OA＝2，OB＝2，OC＝3，∠AOB＝∠BOC＝∠COA＝90°

を満たす.

(i)　四面体 OABC の体積を求めよ.

(ii)　三角形 ABC の面積を求めよ.

(iii)　頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さを求めよ.



2 【I型数学I　必須問題】(配点　40点)

解説

a は実数，k は0でない実数とする．

$$f(x)=kx^2+kx+a^2-4a+5$$

に対して，x の2次方程式 $f(x)=0$ が重解をもつとする．

(1) k を a を用いて表せ．

(2) a が $0\leqq a\leqq 4$ の範囲を動くとき，k の最大値を求めよ．

(3) c は実数とし，k を(2)で求めた値とする．不等式 $f(x)<c$ を満たす整数 x の個数が4となるような c の値の範囲を求めよ．

3 【I型数学I，A　必須問題】(配点　40点)

解説

袋の中に1から20までの整数が1つずつ書かれたカードがそれぞれ1枚ずつ，合計20枚入っている．この袋から，同時に2枚のカードを取り出し，取り出した2枚のカードに書かれた数の積を X，取り出した2枚のカードに書かれた数の和を Y とする．

(1) X が奇数となる確率を求めよ．

(2) X が4の倍数となる確率を求めよ．

(3) X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を求めよ．

Ⅱ型

Ⅱ型受験者は次の表に従って解答すること.

受験科目	数学Ⅰ，Ａ，Ⅱ	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ より１題選択.
	数学Ⅰ，Ａ，Ⅱ，Ｂ	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ より１題選択.

$\boxed{1}$ 【Ⅱ型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

(1) すべての実数 x に対して $x^2-2ax+2-a>0$ が成り立つとき，実数 a の値の範囲を求めよ.

(2) $x>0$ のとき，$2x+\dfrac{1}{3x}$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ.

(3) $(2x-1)(y-2)=6$ を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(4) a は正の定数とする．直線 $y=x$ が放物線 $y=ax^2$ によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{10}$ のとき，a の値を求めよ.

(5) x が $1\leqq x\leqq 8$ の範囲を動くとき，$f(x)=(\log_2 x)^2-4\log_2 x^2+1$ の最小値を求めよ.

Ⅱ型

2 【Ⅱ型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

a, b $(a \neq 0)$ を実数として，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を，

$$f(x) = x^2 - 2x + 1,$$
$$g(x) = ax^2 + bx$$

とする．また，放物線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．

実数 t $(0 < t < 1)$ に対して，点 $(t,\ f(t))$ における C_1 の接線を l_1，点 $(t,\ g(t))$ における C_2 の接線を l_2 とする．

(1) l_1，l_2 の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) l_1 と l_2 が一致するとき，次の問に答えよ．

(i) a，b をそれぞれ t を用いて表せ．

(ii) C_2 と x 軸で囲まれる領域のうち，$0 \leqq x \leqq t$ の部分の面積を S とする．S を t を用いて表せ．また，t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，S を最大にする t の値を求めよ．

3 【Ⅱ型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

xy 平面上に，点 A$(4,\ 0)$ と，A とは異なる点 P$(s,\ t)$ があり，線分 AP を $a : (1-a)$ $(0 < a < 1)$ に内分する点を Q$(X,\ Y)$ とする．

(1) s，t をそれぞれ a，X，Y を用いて表せ．

(2) P が円 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ 上を動くときの Q の軌跡を C_2 とする．

(i) C_2 の方程式を求めよ．

(ii) C_1 と C_2 の共通接線の本数がちょうど 2 本となる a の値の範囲を求めよ．また，その 2 本の共通接線の方程式を求めよ．

Ⅱ型

4 【Ⅱ型共通　選択問題】（配点　50点）

解説

袋の中に1から20までの整数が1つずつ書かれたカードがそれぞれ1枚ずつ，合計20枚入っている．この袋から，同時に3枚のカードを取り出し，取り出した3枚のカードに書かれた数の積を X，取り出した3枚のカードに書かれた数の和を Y とする．

(1)　X が奇数となる確率を求めよ．

(2)　X が4の倍数となる確率を求めよ．

(3)　X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を求めよ．

5 【Ⅱ型共通　選択問題】（配点　50点）

解説

a は $a>\sqrt{3}$ を満たす定数とし，x の関数

$$f(x)=\sin^2 x+a\sin 2x+a^2\cos^2 x-4\sin x-4a\cos x+5$$

を考える．

$t=\sin x+a\cos x$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ を t を用いて表せ．

(2)　x が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲を a を用いて表せ．

(3)　x が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値が2となるような a の値を求めよ．

6 **【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ，B　選択問題】**（配点　50点）　解説

四面体OABCにおいて，三角形ABCの重心をGとする．また，実数tに対して，空間内の点Pを，

$$(3-t)\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

で定める．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$として，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$t$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) Pが平面OAC上にあるときのtの値を求めよ．また，Pが平面ABC上にあるときのtの値を求めよ．

(3) Pが四面体OABCの面上または内部にあるようにtを変化させるとき，線分GPが通過する領域の面積をSとする．三角形OBCの面積をTとするとき，$\dfrac{S}{T}$の値を求めよ．

Ⅲ型

Ⅲ型受験者は次の表に従って解答すること.

受験科目	数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲ	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し， $\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ より 1 題選択.

$\boxed{1}$ **【Ⅲ型　必須問題】**（配点　40点）　解説

(1)　$(2x-1)(y-2)=6$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする.

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+3)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

のとき，一般項 a_n を求めよ.

(3)　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ の極値を求めよ.

(4)　関数 $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ.

(5)　n は正の整数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}$ を求めよ.

2 【Ⅲ型　必須問題】（配点　40点）　解説

X，Yの2人は，それぞれが，A，B，C，Dの文字が1つずつ書かれた4枚のカード$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$と袋を1つもっている．2人は次の手順に従って，テーブルの上にカードを置く操作を繰り返す．

(ア)　X，Yはともにカード$\boxed{\mathrm{A}}$をテーブルの上に置き，残る3枚のカードを自分の袋に入れる．

(イ)　「1回目のカード」として，2人は自分の袋の中にある3枚のカードから無作為に1枚のカードを取り出してテーブルの上に置き，(ア)でテーブルの上に置いた自分のカード$\boxed{\mathrm{A}}$を自分の袋に入れる．

(ウ)　2以上の整数kに対して，「k回目のカード」として，2人は自分の袋の中にある3枚のカードから無作為に1枚のカードを取り出してテーブルの上に置き，$(k-1)$回目でテーブルの上に置いた自分のカードを自分の袋に入れる．

nを正の整数とするとき，2人がテーブルの上に置いた「n回目のカード」に書かれた文字が一致する確率をp_nとする．

(1)　p_1，p_2をそれぞれ求めよ．

(2)　p_{n+1}をp_nを用いて表せ．

(3)　p_nを求めよ．

Ⅲ型

3 【Ⅲ型　必須問題】(配点　40点)

解説

四面体OABCにおいて，三角形ABCの重心をGとする．また，実数 t に対して，空間内の点Pを，

$$(3-t)\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

で定める．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問に答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　Pが平面OAC上にあるときの t の値を求めよ．また，Pが平面ABC上にあるときの t の値を求めよ．

(3)　Pが四面体OABCの面上または内部にあるように t を変化させるとき，線分GPが通過する領域の面積を S とする．三角形OBCの面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の値を求めよ．

4 【Ⅲ型　必須問題】(配点　40点)

解説

xy 平面上の3点$(0,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ (a，b，c は実数)がある．

連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1, \\ y \geqq ax^2+bx+c \end{cases}$$

で表される領域を D とするとき，次の問に答えよ．

(1)　a，b，c の値を求めよ．

(2)　D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ．

(3)　D を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

Ⅲ型

5 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

i は虚数単位とし，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とする．

(1)　$\omega+1$ を極形式で表せ．

(2)　複素数 α に対して，複素数平面上で，$\alpha-1$，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2+\omega$ がそれぞれ異なる 3 点 A，B，C を表すものとする．

(i)　三角形 ABC は正三角形であることを示せ．

(ii)　α が $|\alpha|=2$ を満たしながら変化するとき，三角形 ABC の面積が最大となる α の値を求めよ．

6 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

関数

$$f(x)=\frac{e^x+2}{e^x+e^{-x}+4}$$

に対して，数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\int_{-1}^{a_n} f(x)\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．

(1)　$t=e^{2x}+4e^x+1$ と置換することにより，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1$ が成り立つことを示せ．

(2)(i)　$\displaystyle\int_{a_n}^{1} f(x)\,dx=1-a_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(ii)　すべての正の整数 n に対して

$$0\leqq a_n\leqq 1$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

(3)　すべての正の整数 n に対して

$$1-a_{n+1}\leqq f(1)(1-a_n)$$

が成り立つことを示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

Ⅲ型

7 【Ⅲ型　選択問題】（配点　40点）

解説

実数 p，q に対して，

$$A=\begin{pmatrix} p & -1 \\ q & p-1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) $A^2-(2p-1)A$ を p，q を用いて表せ．

(2) $A^3=-E$ が成り立つとき，次の問に答えよ．ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(i) p，q の値を求めよ．

(ii) n は正の整数とし，点 P を円 C：$x^2+y^2=1$ 上の点とする．xy 平面上で，A^n が表す 1 次変換による P の像を点 P_n とする．任意の正の整数 n に対して P_n が C 上または内部にあるような P の存在範囲を図示せよ．

Ⅰ型，Ⅱ型，Ⅲ型 はそれぞれ選択型のいずれかによって解答（選択解答）する問題が指定されている。指示に従い，必ず指定された問題を解答（選択解答）し，下記の記入例に従って解答用紙に必要事項を記入すること。

〈記入例〉　Ⅱ型 選択生の場合

〈数学Ⅱ型 解答用紙（その２）裏　面〉