クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度　第3回　全統マーク模試

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年10月実施】

本冊子の解答・採点基準をもとに自己採点を行ってください。「自己採点シート」は学習の手引き｛英語｝編冊子の巻末にありますのでご利用ください。

河合塾

【数 学 ①】

数 学 I

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{ア\pm\sqrt{イ}}{ウ}$	$\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$	2	
	$\sqrt{エ}$	$\sqrt{5}$	1	
	オ	1	1	
	カ	3	2	
	キク	18	2	
	ケコ	17	2	
	サ	2	1	
	シ	3	1	
	$ス\sqrt{セ}$	$2\sqrt{2}$	2	
	$(ソ+\sqrt{タ})(ソ+\sqrt{チ})$	$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$	2	
	$\dfrac{ツ-\sqrt{テ}-\sqrt{ト}+\sqrt{ナ}}{ニ}$	$\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$	2	
	$\dfrac{ヌ+\sqrt{ネ}-\sqrt{ノ}}{ハ}$	$\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	2	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	$ア a-イ$	$2a-1$	3	
	$ウエ a^2+オ a+b-カ$	$-4a^2+4a+b-1$	3	
	$キ a^2-ク a-ケコ$	$4a^2-4a-24$	3	
	$サシ<a<ス$	$-2<a<3$	3	
	セソ	40	4	
	$\dfrac{タ-\sqrt{チ}}{ツ}$	$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\dfrac{テ+\sqrt{ト}}{ナ}$	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\dfrac{ニ}{ヌ}$	$\dfrac{5}{4}$	3	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{\sqrt{ア}}{イ}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{ウエ}}{オ}$	$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$	3	
	$\dfrac{カ\sqrt{キク}}{ケ}$	$\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\dfrac{コ\sqrt{サシ}}{ス}$	$\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$	3	
	セ	2	4	
	$ソ\sqrt{タ}$	$2\sqrt{6}$	3	
	チ	2	3	
	$\sqrt{ツテ}$	$\sqrt{15}$	4	
	ト	1	4	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	ア	1	1	
	イ	9	1	
	ウ	3	1	
	エ	1	1	
	オ	7	1	
	$カ\sqrt{キ}\pm ク$	$2\sqrt{3}\pm 2$	3	
	$ケコ+サ\sqrt{シ}$	$16+6\sqrt{7}$	2	
	$スセ+ソ\sqrt{タ}$	$16+8\sqrt{3}$	2	
	チ	0	3	
	$ツ\leqq x\leqq テ$	$1\leqq x\leqq 3$	3	
	ト	1	3	
	ナ	3	4	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第１問　方程式・不等式

〔１〕　２次方程式 $x^2-5x+5=0$ の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{ア}}\pm\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．

このうち，小さい方を x_1，大きい方を x_2 とし，$\alpha=|x_1-2|$，$\beta=|x_2-2|$ とすると

$$\alpha+\beta=\sqrt{\boxed{\text{エ}}},\quad \alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$$

である．

また

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{カ}},\quad \alpha^6+\beta^6=\boxed{\text{キク}}$$

であり，$m\leqq\beta^6<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ケコ}}$ である．

〔２〕

(1)　$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ を計算すると

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})&=\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\\&=(1+\sqrt{2})^{\boxed{\text{サ}}}-\boxed{\text{シ}}\\&=\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}\end{aligned}$$

である．

また，$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ を変形すると

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\left(\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)\left(\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

である．ただし，$\boxed{\text{タ}}<\boxed{\text{チ}}$ とする．

(2)　連立不等式

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x<1\\(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})x>1\end{cases}$$

の解は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}-\sqrt{\boxed{\text{テ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ト}}}+\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}<x<\frac{\boxed{\text{ヌ}}+\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{テ}}<\boxed{\text{ト}}$ とする．

【解説】

問題

〔１〕　数学Ⅰ・数学A 第１問〔１〕に同じである．

〔2〕

(1)
$$
\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\\
&=\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\\
&=(1+\sqrt{2})^{\boxed{2}}-\boxed{3}\\
&=(1+2\sqrt{2}+2)-3\\
&=\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}
\end{aligned}
$$

☜ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ において，$A=1+\sqrt{2}$，$B=\sqrt{3}$ とした．

である．

また，

$$
\begin{aligned}
1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}&=(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})\\
&=\left(\boxed{1}+\sqrt{\boxed{2}}\right)\left(1+\sqrt{\boxed{3}}\right)
\end{aligned}
$$

である．

(2)
$$
\begin{cases}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x<1, & \cdots①\\ (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})x>1. & \cdots②\end{cases}
$$

① より，

$$x<\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

☜ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$ より ① の両辺を $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ で割っても不等号の向きは変わらない．

② より，

$$x>\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$$

☜ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}>0$ より ② の両辺を $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ で割っても不等号の向きは変わらない．

ここで，

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

より，

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}>\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

であるから，連立不等式 ① かつ ② の解は，

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}<x<\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}. \qquad \cdots③$$

(1) の $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=2\sqrt{2}$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}\\
&=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\
&=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}
$$

☜ 分母と分子に $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ を掛けた．

☜ 分母と分子に $\sqrt{2}$ を掛けた．

であり，(1) の $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}&=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}\\
&=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}{(2-1)(3-1)}\\
&=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

☜ 分母と分子に $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)$ を掛けた．

であるから，連立不等式 ① かつ ② の解 ③ は，

$$\frac{\boxed{1}-\sqrt{\boxed{2}}-\sqrt{\boxed{3}}+\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}<x$$

$$<\frac{\boxed{2}+\sqrt{\boxed{2}}-\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．

第２問　２次関数

数学Ｉ・数学Ａ 第２問に同じである． **問題**

第 3 問　図形と計量

△ABC において，AB＝5，BC＝$\sqrt{6}$，CA＝4 であるとき

$$\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}},\quad \sin\angle ABC=\frac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$$

であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キク}}}{\boxed{ケ}}$，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サシ}}}{\boxed{ス}}$ である．

辺 AB 上に点 D を BD＝1 となるようにとる．このとき

$$CD=\boxed{セ}$$

であり，さらに，△ABC の外接円と直線 CD との交点のうち C と異なる方を E とする．このとき

$$AE=\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}},\quad DE=\boxed{チ}$$

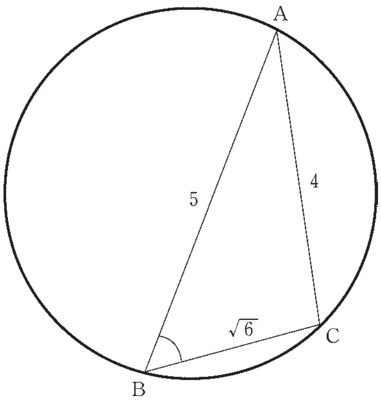
である．

したがって，△AED の面積は $\sqrt{\boxed{ツテ}}$ であり，△ABC の面積を S_1，△AEB の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_2}{S_1}=\boxed{ト}$$

である．

【解説】　問題



余弦定理より，

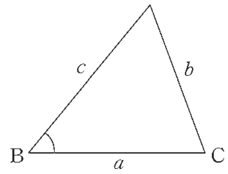
$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{5^2+(\sqrt{6})^2-4^2}{2\cdot 5\cdot\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

☜

余弦定理



$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

である．

また，

$$\sin\angle \mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle \mathrm{ABC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{4}}$$

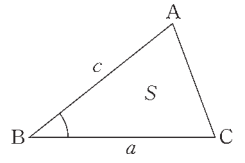
☜ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$．

である．

これを用いると，

$$(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle \mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}$$
$$=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$$

☜ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ca\sin B$．

である．

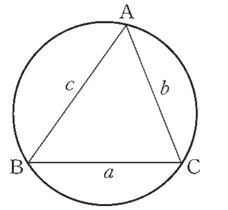
さらに，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle \mathrm{ABC}}$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{CA}}{2\sin\angle \mathrm{ABC}}$$
$$=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}}$$
$$=\frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{5}}$$

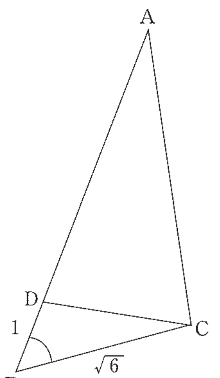
☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$．

である．



△BCD に余弦定理を用いることにより，

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos \angle DBC$$

$$= 1^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$$

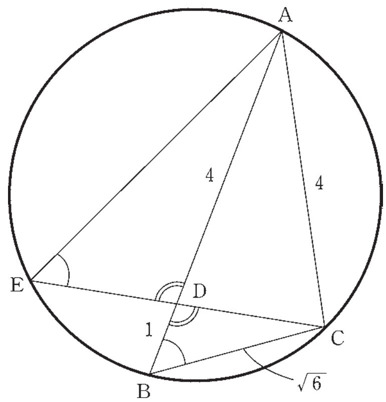
☜ $\cos \angle DBC = \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

$$= 4$$

であるから,

$$CD = \boxed{2}$$

である.



$\angle AED = \angle CBD$(弧 AC に対する円周角),

$\angle EDA = \angle BDC$(対頂角)

より, $\triangle AED \backsim \triangle CBD$ であるから,

$$AE : CB = AD : CD$$

すなわち

$$AE \cdot CD = CB \cdot AD$$

が成り立ち, これより,

$$AE = \frac{CB \cdot AD}{CD}$$

$$= \frac{\sqrt{6} \cdot 4}{2}$$

☜ $AD = AB - BD = 5 - 1 = 4$.

$$= \boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}$$

である.

また, $\triangle AED \backsim \triangle CBD$ より,

$$DE : DB = AD : CD$$

すなわち

$$DE \cdot CD = DB \cdot AD$$

が成り立ち, これより,

$$DE = \frac{DB \cdot AD}{CD}$$

$$= \frac{1 \cdot 4}{2}$$

$$= \boxed{2}$$

である．

したがって，

$$(\triangle \mathrm{AED}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{DE}\sin\angle\mathrm{AED}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{AE}\cdot\mathrm{DE}\sin\angle\mathrm{ABC}$$

☜ $\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{AEC}$
$=\angle\mathrm{ABC}$（円周角の定理）．

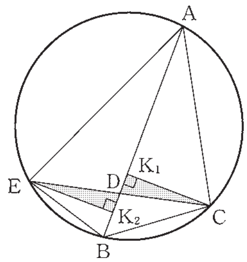
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}$$
$$=\sqrt{\boxed{15}}$$

である．

さらに，

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{CD}}$$
$$=\frac{2}{2}$$
$$=\boxed{1}$$

☜



C，E から直線 AB に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{K_1}$，$\mathrm{K_2}$ とすると，

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{EK_2}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CK_1}}=\frac{\mathrm{EK_2}}{\mathrm{CK_1}}.$$

ここで，$\triangle\mathrm{CDK_1}\backsim\triangle\mathrm{EDK_2}$ より，

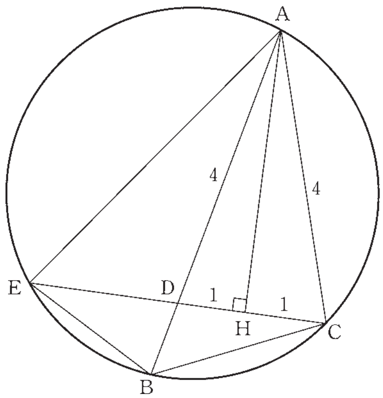
$$\frac{\mathrm{EK_2}}{\mathrm{CK_1}}=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{CD}}$$

であるから，

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{CD}}.$$

である．

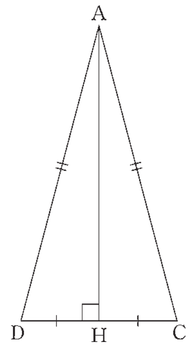
（線分 AE，DE の長さを求める別解）



A から直線 CE に引いた垂線と直線 CE の交点を H とする．

AD＝AC（＝4）であるから，H は線分 CD の中点である．

☜



よって，

$$\sin\angle\mathrm{ACH}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{\sqrt{4^2-1^2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

である．

$\triangle\mathrm{AEC}$ に正弦定理を用いることにより，

$$2R=\frac{\mathrm{AE}}{\sin\angle\mathrm{ACE}}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AE}&=2R\sin\angle\mathrm{ACE}\\
&=2R\sin\angle\mathrm{ACH}\\
&=2\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\\
&=2\sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

△AEH に三平方の定理を用いることにより，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EH}&=\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{AH}^2}\\
&=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{15})^2}\\
&=3
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DE}&=\mathrm{EH}-\mathrm{DH}\\
&=3-1\\
&=2.
\end{aligned}
$$

第 4 問　方程式・不等式

(1)　正の実数 α は

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^2}=8 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たしている.

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^2}+\boxed{\text{ア}}$$

であるから, ① より

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\boxed{\text{イ}} \quad \text{すなわち}$$

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}=\boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる. また

$$\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^2}-\boxed{\text{エ}}$$

であるから, ① より

$$\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\boxed{\text{オ}} \quad \text{すなわち}$$

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}=\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる.

②, ③ より

$$\alpha=\boxed{\text{ウ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である. この二つの値のうち, 大きい方を α_1, 小さい方を α_2 とする.

正の実数 β が

$$\frac{\beta^2}{4}+\frac{16}{\beta^2}=8$$

を満たしているとき

$$\beta=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\pm\boxed{\text{ク}}$$

である. この二つの値のうち, 大きい方を β_1, 小さい方を β_2 とする.

このとき

$$\alpha_1{}^2=\boxed{\text{ケコ}}+\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

$$\beta_1{}^2=\boxed{\text{スセ}}+\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから, α_1 と β_1 の大小関係は $\boxed{\text{チ}}$ である. $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを, 次の⓪～②のうちから一つ選べ.

⓪　$\alpha_1>\beta_1$　　　①　$\alpha_1=\beta_1$　　　②　$\alpha_1<\beta_1$

(2)　n を整数として, x の不等式

$$|x-n|\leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を考える．

(i)　$n=2$ のとき，④の解は

$$\boxed{\text{ツ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{テ}}$$

であるから，(1) の四つの値 α_1，α_2，β_1，β_2 のうち，$\boxed{\text{ト}}$ 個の値が④の解に含まれる．

(ii)　(1) の四つの値 α_1，α_2，β_1，β_2 のうち，ちょうど2個の値が④の解に含まれる n の値は $\boxed{\text{ナ}}$ 個ある．

【解説】

問題

(1)

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^2}=8 \qquad \cdots①$$

であり，

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^2}+\boxed{1}$$

☜ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

であるから，

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)^2=8+1$$

$$=\boxed{9}$$

である．

ここで，$\alpha>0$ より，$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}>0$ であるから，

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}=\boxed{3} \qquad \cdots②$$

となる．

また，

$$\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{1}{\alpha^2}-\boxed{1}$$

☜ $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$.

であるから，①より，

$$\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)^2=8-1$$

$$=\boxed{7}$$

であり，これより，

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}=\pm\sqrt{7} \qquad \cdots③$$

となる．

②，③の辺々を加えると，

$$\alpha=3\pm\sqrt{7}$$

であり，

$$\alpha_1=3+\sqrt{7}, \quad \alpha_2=3-\sqrt{7}$$

である．

$$\frac{\beta^2}{4}+\frac{16}{\beta^2}=8$$

より，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{4}{\beta}\right)^2&=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+2\cdot\frac{\beta}{2}\cdot\frac{4}{\beta}+\left(\frac{4}{\beta}\right)^2\\&=\frac{\beta^2}{4}+\frac{16}{\beta^2}+4\\&=8+4\\&=12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{4}{\beta}\right)^2&=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\beta}{2}\cdot\frac{4}{\beta}+\left(\frac{4}{\beta}\right)^2\\&=\frac{\beta^2}{4}+\frac{16}{\beta^2}-4\\&=8-4\\&=4\end{aligned}$$

である．

ここで，$\beta>0$ より，$\frac{\beta}{2}+\frac{4}{\beta}>0$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2}+\frac{4}{\beta}&=\sqrt{12}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となり，また，

$$\frac{\beta}{2}-\frac{4}{\beta}=\pm2$$

となるから，

$$\beta=\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}\pm\boxed{2}$$

☜ $\frac{\beta}{2}+\frac{4}{\beta}=2\sqrt{3}$ と $\frac{\beta}{2}-\frac{4}{\beta}=\pm2$ の辺々を加えた．

である．

したがって，

$$\beta_1=2\sqrt{3}+2,\quad \beta_2=2\sqrt{3}-2$$

である．

$$\begin{aligned}\alpha_1{}^2&=(3+\sqrt{7})^2\\&=\boxed{16}+\boxed{6}\sqrt{\boxed{7}},\\\beta_1{}^2&=(2\sqrt{3}+2)^2\\&=\boxed{16}+\boxed{8}\sqrt{\boxed{3}}\end{aligned}$$

であり，

$$6\sqrt{7}=2\sqrt{63},\quad 8\sqrt{3}=2\sqrt{48}$$

より，$6\sqrt{7}>8\sqrt{3}$ であるから，$\alpha_1{}^2>\beta_1{}^2$ である．

α_1，β_1 はともに正の実数であるから，

$$\alpha_1>\beta_1$$

であり，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

(2)
$$|x-n|\leqq 1. \qquad \cdots ④$$

(i)　$n=2$ であるから，④ は，
$$|x-2|\leqq 1$$
となり，
$$-1\leqq x-2\leqq 1$$

☜ $a>0$ のとき，$|X|\leqq a$ を満たす X の値の範囲は，
$$-a\leqq X\leqq a.$$

より，④ の解は，
$$\boxed{1}\leqq x\leqq\boxed{3}$$
である．

$2<\sqrt{7}<3$ より，

☜ $2^2<7<3^2$.

$$5<\alpha_1<6,\quad 0<\alpha_2<1$$

☜ $\alpha_1=3+\sqrt{7}$，$\alpha_2=3-\sqrt{7}$.

であり，$3<\sqrt{12}<4$ すなわち $3<2\sqrt{3}<4$ より，

☜ $3^2<12<4^2$.

$$5<\beta_1<6,\quad 1<\beta_2<2$$

☜ $\beta_1=2\sqrt{3}+2$，$\beta_2=2\sqrt{3}-2$.

である．

したがって，四つの値 α_1，α_2，β_1，β_2 のうち，④ の解に含まれるものは β_2 の $\boxed{1}$ 個である．

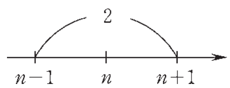
(ii)　④ は，
$$-1\leqq x-n\leqq 1$$
となるから，④ の解は，
$$n-1\leqq x\leqq n+1 \qquad \cdots ⑤$$
である．

また，(1) と (i) より，α_1，α_2，β_1，β_2 の数直線上での位置は次のようになる．

☜ (1) より，$\alpha_1>\beta_1$.

よって，⑤ の区間の幅が 2 であることを考慮すると，④ の解に含まれる 2 個の値は，

☜



$$\alpha_2 \ \text{と}\ \beta_2$$
である場合と，
$$\beta_1 \ \text{と}\ \alpha_1$$
である場合に限る．

α_2 と β_2 が ④ の解に含まれるのは，
$$n=1$$

☜ $n=1$ のとき，④ の解は，
$$0\leqq x\leqq 2.$$

のときであり，β_1 と α_1 が ④ の解に含まれるのは，
$$n=5,\ 6$$

☜ $n=5$ のとき，④ の解は，
$$4\leqq x\leqq 6$$
であり，$n=6$ のとき，④ の解は，
$$5\leqq x\leqq 7$$
である．

のときである．

ゆえに，四つの値 α_1，α_2，β_1，β_2 のうち，ちょうど 2 個の値が ④ の解に含まれる n の値は $\boxed{3}$ 個ある．

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\frac{ア\pm\sqrt{イ}}{ウ}$	$\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$	2	
	$\sqrt{エ}$	$\sqrt{5}$	1	
	オ	1	1	
	カ	3	2	
	キク	18	2	
	ケコ	17	2	
	サ	2	2	
	シ	1	2	
	ス	0	2	
	セ	7	2	
	ソ	3	2	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	アa−イ	$2a-1$	3	
	ウエa^2+オ$a+b$−カ	$-4a^2+4a+b-1$	3	
	キa^2−クa−ケコ	$4a^2-4a-24$	3	
	サシ$<a<$ス	$-2<a<3$	3	
	セソ	40	4	
	$\frac{タ-\sqrt{チ}}{ツ}$	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\frac{テ+\sqrt{ト}}{ナ}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{5}{4}$	3	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\frac{\sqrt{ア}}{イ}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\frac{\sqrt{ウエ}}{オ}$	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	3	
	$\frac{カ\sqrt{キク}}{ケ}$	$\frac{5\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\frac{コ\sqrt{サシ}}{ス}$	$\frac{4\sqrt{10}}{5}$	3	
	$\frac{セソ}{タ}$	$\frac{-1}{4}$	3	
	チ	1	3	
	$\sqrt{ツ}$	$\sqrt{6}$	3	
	$-\frac{\sqrt{テ}}{ト}$	$-\frac{\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\frac{ナ\sqrt{ニ}}{ヌ}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	3	
	$\frac{ネ\sqrt{ノハ}}{ヒフ}$	$\frac{9\sqrt{15}}{16}$	3	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	アイウエ	5040	3	
	オカキク	1440	3	
	ケコサ	240	3	
	$\frac{シ}{ス}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$\frac{セ}{ソタ}$	$\frac{1}{15}$	4	
	$\frac{チ}{ツ}$	$\frac{1}{6}$	4	
	$\frac{テト}{ナニ}$	$\frac{27}{10}$	6	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第１問　方程式・不等式，集合・論理

〔１〕　２次方程式 $x^2-5x+5=0$ の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{ア}}\pm\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．

このうち，小さい方を x_1，大きい方を x_2 とし，$\alpha=|x_1-2|$，$\beta=|x_2-2|$ とすると

$$\alpha+\beta=\sqrt{\boxed{\text{エ}}},\quad \alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$$

である．

また

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{カ}},\quad \alpha^6+\beta^6=\boxed{\text{キク}}$$

であり，$m\leqq\beta^6<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ケコ}}$ である．

〔２〕　有理数 a，b に関する条件 p，q，r を次のように定める．

p ：$ab=0$

q ：$a^2+b^2=0$

r ：$a+b\sqrt{2}=0$

(1)　次の $\boxed{\text{サ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

$b=0$ であることは p であるための $\boxed{\text{サ}}$．

p は q であるための $\boxed{\text{シ}}$．

q は r であるための $\boxed{\text{ス}}$．

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない

③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　条件 q の否定を $\overline{q}$ で表す．

(i)　次の $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，下の④～⑧のうちから一つ選べ．

$\overline{q}$ と同値である条件は $\boxed{\text{セ}}$ である．

(ii)　二つの条件 $\overline{q}$，s について，$\overline{q}$ は s であるための必要条件であるが，十分条件でないとする．下の④～⑧のうち s に該当するものは $\boxed{\text{ソ}}$ 個ある．

④　$|ab|>ab$　　⑤　$a^2-b^2=0$　　⑥　$(a-1)(b-1)=0$

⑦　$a^2+b^2>0$　　⑧　$ab\neq0$

【解説】

問題

〔1〕

2 次方程式 $x^2-5x+5=0$ の解は，

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{\boxed{5}\pm\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

このうち，小さい方が x_1，大きい方が x_2 であるから，

$$x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

であり，$\alpha=|x_1-2|$，$\beta=|x_2-2|$ より，

$$\alpha=\left|\frac{5-\sqrt{5}}{2}-2\right|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\beta=\left|\frac{5+\sqrt{5}}{2}-2\right|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

である．

よって，

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{\boxed{5}},$$

$$\alpha\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\boxed{1}$$

である．

このとき，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(\sqrt{5})^2-2\cdot1$$
$$=\boxed{3}$$

である．

また，

$$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2)^3+(\beta^2)^3$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)^3-3\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)^3-3(\alpha\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=3^3-3\cdot1^2\cdot3$$
$$=\boxed{18}$$

である．

$2<\sqrt{5}<3$ より，

$$\frac{2-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{3-1}{2}$$

$$\frac{1}{2}<\alpha<1$$

☜ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c は実数）の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

☜ a が実数のとき，

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq0\text{ のとき}),\\ -a & (a<0\text{ のとき}).\end{cases}$$

また，$4<5<9$ より，

$$2<\sqrt{5}<3$$

であるから，

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0.$$

☜ $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

より，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta.$$

☜ $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

より，

$$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$$

であり，$A=\alpha^2$，$B=\beta^2$ とすると，

$$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2+\beta^2)^3-3\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)$$

である．

☜ $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$

であるから，

$$0<\alpha<1$$

であり，

$$0<\alpha^6<1$$

である．

これに $\alpha^6=18-\beta^6$ を代入すると，

$$0<18-\beta^6<1$$

となり，

$$17<\beta^6<18$$

が得られる．

したがって，$m\leqq\beta^6<m+1$ を満たす整数 m は，

$$\boxed{17}$$

である．

〔2〕

(1)

$$p：ab=0.$$

$b=0$ のとき $ab=0$ は成り立つから，

「$b=0\Longrightarrow p$」は真

である．

また，

「$p\Longrightarrow b=0$」は偽

☜ 反例は $a=0$，$b=1$．

である．

したがって，$b=0$ であることは p であるための十分条件であるが，必要条件でないから，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

条件 p について，

$$ab=0\Longleftrightarrow「a=0 \text{ または } b=0」.$$

条件 q について，

$$a^2+b^2=0\Longleftrightarrow「a=0 \text{ かつ } b=0」.$$

よって，

「$p\Longrightarrow q$」は偽，

☜ 反例は $a=0$，$b=1$．

「$q\Longrightarrow p$」は真

である．

したがって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でないから，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

a，b は有理数であるから，条件 r について，

$$a+b\sqrt{2}=0\Longleftrightarrow「a=0 \text{ かつ } b=0」.$$

☜ 「$a=0$ かつ $b=0$」ならば $a+b\sqrt{2}=0$ は成り立つ．

一方，$a+b\sqrt{2}=0$ のとき，$b\neq0$ と仮定すると，

$$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$$

となり，$\sqrt{2}$ は無理数，$-\frac{a}{b}$ は有理数であるから矛盾．よって，

$$b=0$$

であり，このとき，$a=0$ となる．

よって，

$$q\Longleftrightarrow r$$

であり，q は r であるための必要十分条件であるから，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

(2) 条件 q について，

$$a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow \text{「}a=0 \text{ かつ } b=0\text{」}$$

であるから，条件 $\overline{q}$ は，「$a \neq 0$ または $b \neq 0$」．

$$|ab|>ab \Longleftrightarrow ab<0$$

☜ $ab \geqq 0$ のときは，$|ab|=ab$．

であるから，④を条件 s とすると，

「$\overline{q} \Longrightarrow s$」は偽，　☜ 反例は $a=0$，$b=1$．

「$s \Longrightarrow \overline{q}$」は真　☜ $ab<0$ のとき，$ab \neq 0$ であり，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ であるから，「$s \Longrightarrow \overline{q}$」は真である．

であり，$\overline{q}$ は s であるための必要条件であるが，十分条件でない．

$$a^2-b^2=0 \Longleftrightarrow (a+b)(a-b)=0$$
$$\Longleftrightarrow \text{「}b=-a \text{ または } b=a\text{」}$$

であるから，⑤を条件 s とすると，

「$\overline{q} \Longrightarrow s$」は偽，　☜ 反例は $a=0$，$b=1$．

「$s \Longrightarrow \overline{q}$」は偽　☜ 反例は $a=0$，$b=0$．

であり，$\overline{q}$ は s であるための必要条件でも十分条件でもない．

$$(a-1)(b-1)=0 \Longleftrightarrow \text{「}a=1 \text{ または } b=1\text{」}$$

であるから，⑥を条件 s とすると，

「$\overline{q} \Longrightarrow s$」は偽，　☜ 反例は $a=0$，$b=2$．

「$s \Longrightarrow \overline{q}$」は真

であり，$\overline{q}$ は s であるための必要条件であるが，十分条件でない．

$$a^2+b^2>0 \Longleftrightarrow \text{「}a \neq 0 \text{ または } b \neq 0\text{」}$$

であるから，⑦を条件 s とすると，

$$\overline{q} \Longleftrightarrow s$$

であり，$\overline{q}$ は s であるための必要十分条件である．

$$ab \neq 0 \Longleftrightarrow \text{「}a \neq 0 \text{ かつ } b \neq 0\text{」}$$

であるから，⑧を条件 s とすると，

「$\overline{q} \Longrightarrow s$」は偽，　☜ 反例は $a=0$，$b=1$．

「$s \Longrightarrow \overline{q}$」は真

であり，$\overline{q}$ は s であるための必要条件であるが，十分条件でない．

(i) $\overline{q}$ が s と同値であるのは，s が「⑦ $a^2+b^2>0$」のときであるから，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑦}$ である．

(ii) $\overline{q}$ が s であるための必要条件であるが，十分条件でないのは，選択肢において，s が「④ $|ab|>ab$」，「⑥ $(a-1)(b-1)=0$」，「⑧ $ab \neq 0$」のときであり $\boxed{3}$ 個ある．

第 2 問　2 次関数

a，b を定数として 2 次関数

$$y=x^2-(4a-2)x+b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える．関数 ① のグラフ G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{ア}a-\boxed{イ},\ \boxed{ウエ}a^2+\boxed{オ}a+b-\boxed{カ}\right)$$

である．

(1)　関数 ① の最小値が -25 であるとする．

$$b=\boxed{キ}a^2-\boxed{ク}a-\boxed{ケコ}$$

である．さらに，G と y 軸の $y<0$ の部分が交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{サシ}<a<\boxed{ス}$$

である．

$\boxed{サシ}<a<\boxed{ス}$ を満たす a のうち，最小の整数を a_1，最大の整数を a_2 とする．

$a=a_1$ のときの $0\leqq x\leqq 4$ における関数 ① の最大値を M_1，$a=a_2$ のときの $0\leqq x\leqq 4$ における関数 ① の最大値を M_2 とするとき

$$M_1-M_2=\boxed{セソ}$$

である．

(2)　$b=2$ とする．

G と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$a<\frac{\boxed{タ}-\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}},\quad \frac{\boxed{タ}+\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}<a$$

である．さらに，G と x 軸の $0<x<2$ の部分が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{テ}+\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}<a<\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$$

である．

【解説】　問題

① より，

$$\begin{aligned}y&=x^2-(4a-2)x+b\\&=\{x-(2a-1)\}^2-(2a-1)^2+b\\&=\{x-(2a-1)\}^2-4a^2+4a+b-1\end{aligned}$$

であるから，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}a-\boxed{1},\ \boxed{-4}a^2+\boxed{4}a+b-\boxed{1}\right)$$

である．

☜　放物線 $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は，

$$(p,\ q).$$

$$f(x)=x^2-(4a-2)x+b$$

とおく．

(1) 関数①の最小値は $-4a^2+4a+b-1$ であるから，これが -25 であるとき，

$$-4a^2+4a+b-1=-25$$

すなわち

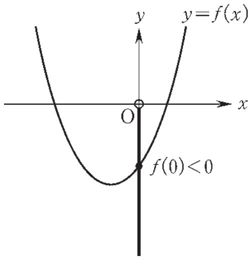
$$b=\boxed{4}\,a^2-\boxed{4}\,a-\boxed{24} \quad \cdots②$$

である．

G が y 軸の $y<0$ の部分と交わるのは，

$$f(0)<0$$

☜



すなわち

$$b<0$$

のときであり，これは，②を用いると，

$$4(a^2-a-6)<0$$

すなわち

$$4(a+2)(a-3)<0$$

となる．よって，求める a の値の範囲は，

$$\boxed{-2}<a<\boxed{3}$$

である．

$-2<a<3$ を満たす a のうち，最小の整数は -1 であるから，

$$a_1=-1$$

であり，$-2<a<3$ を満たす a のうち，最大の整数は 2 であるから，

$$a_2=2$$

である．

また，①の最小値が -25 のとき，

$$f(x)=\{x-(2a-1)\}^2-25 \quad \cdots③$$

である．

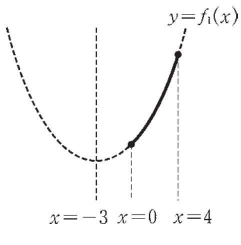
$a=a_1$ $(=-1)$ のときの $f(x)$ を $f_1(x)$ とすると，③より，

$$f_1(x)=(x+3)^2-25$$

であるから，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f_1(x)$ の最大値 M_1 は，

$$M_1=f_1(4)$$
$$=24$$

☜



である．

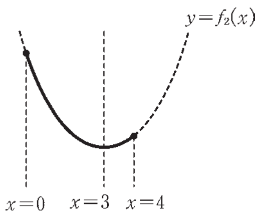
$a=a_2$ $(=2)$ のときの $f(x)$ を $f_2(x)$ とすると，③より，

$$f_2(x)=(x-3)^2-25$$

であるから，$0 \leqq x \leqq 4$ における $f_2(x)$ の最大値 M_2 は，

$$M_2=f_2(0)$$
$$=-16$$

☜



である．

よって，

$$M_1 - M_2 = 24 - (-16)$$
$$= \boxed{40}$$

である。

(2) $b=2$ のとき，

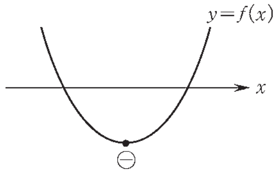
$$f(x) = \{x - (2a-1)\}^2 - 4a^2 + 4a + 1$$

☜ $b=2$ のとき，G の頂点の座標は，$(2a-1,\ -4a^2+4a+1)$.

であるから，放物線 $G : y=f(x)$ と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は，

$$-4a^2 + 4a + 1 < 0$$

☜ (頂点の y 座標)<0.



すなわち

$$4a^2 - 4a - 1 > 0$$

より，

$$a < \frac{\boxed{1} - \sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{2} < a \qquad \cdots ④$$

である。

④のもとで G と x 軸の $0<x<2$ の部分が異なる 2 点で交わる条件は，

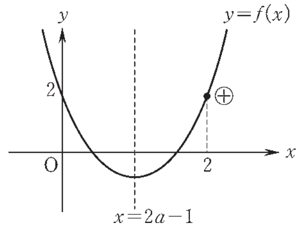
$$f(0) = 2 > 0$$

☜ $f(x) = x^2 - (4a-2)x + 2$.

に注意すると，

$$\begin{cases} f(2) > 0, & \cdots ⑤ \\ 0 < 2a-1 < 2 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

☜



である。

⑤より，

$$2^2 - (4a-2)\cdot 2 + 2 > 0$$
$$-8a + 10 > 0$$
$$a < \frac{5}{4} \qquad \cdots ⑤'$$

である。

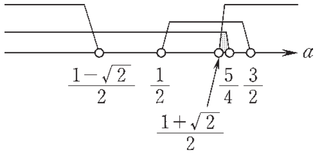
⑥より，

$$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} \qquad \cdots ⑥'$$

である。

④，⑤′，⑥′ より，求める a の値の範囲は，

☜



$$\frac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}} < a < \frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}$$

である。

$$\frac{5}{4} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{8}}{4} > 0$$

より，

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{4}.$$

第3問　図形と計量・平面図形

△ABC において，AB=5，BC=$\sqrt{6}$，CA=4 であるとき

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

直線 CA に関して点 B と反対側に点 D を CD=3，AD=2 であるようにとる。このとき

$$\cos\angle\mathrm{CDA}=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であり，点 D について，次の⓪，①のうち正しいものは $\boxed{\text{チ}}$ である。

⓪　点 D は △ABC の外接円の周上にある

①　点 D は △ABC の外接円の周上にない

線分 CD 上に点 E を DE=1 であるようにとる。このとき

$$\mathrm{AE}=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり

$$\cos\angle\mathrm{CEA}=-\frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

さらに，線分 AD 上に点 F を ∠CFA=∠CEA であるようにとる。このとき

$$\mathrm{CF}=\frac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

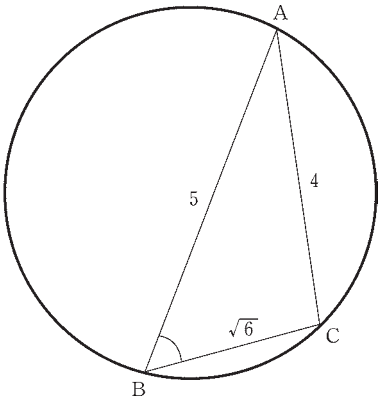
であり，四角形 ACEF の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノハ}}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$$

である。

【解説】

問題



余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{5^2+(\sqrt{6})^2-4^2}{2\cdot5\cdot\sqrt{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．

また，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{4}}$$

である．

これを用いると，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}$$
$$=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$$

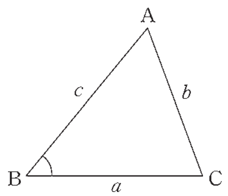
である．

さらに，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$$

であるから，

☜ **余弦定理**



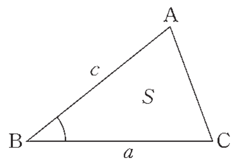
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$

☜ $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，

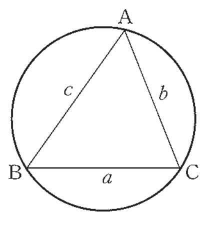
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$

☜ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$

☜ **正弦定理**

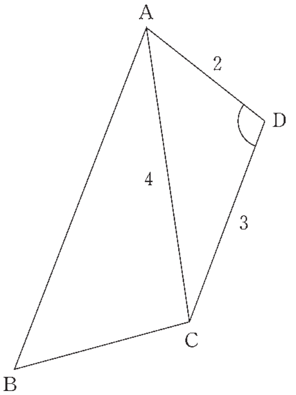


外接円の半径を R とすると，

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$

$$R=\frac{\mathrm{CA}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}}$$
$$=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}}$$
$$=\frac{\boxed{4}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{5}}$$

である．



$\triangle$ACD に余弦定理を用いることにより，

$$\cos\angle\mathrm{CDA}=\frac{\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}}$$
$$=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}$$
$$=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$$

である．

一方，

$$\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})=-\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

より，

$$\cos\angle\mathrm{CDA}>\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$$

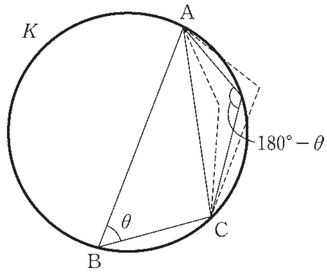
であるから，

$$\angle\mathrm{CDA}<180^\circ-\angle\mathrm{ABC}$$

となり，点 D は $\triangle$ABC の外接円の外部の点である．よって，点 D は $\triangle$ABC の外接円の周上にない．

したがって，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$.



$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とし，$\triangle$ABC の外接円を K とする．

B と D が直線 AC に関して反対側にあることに注意する．

点 D が K の周上にあるとき，

$$\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-\theta$$

であるから，

$$\cos\angle\mathrm{CDA}=\cos(180^\circ-\theta)$$

が成り立つ．

点 D が K の外部にあるとき，

$$\angle\mathrm{CDA}<180^\circ-\theta$$

であるから，

$$\cos\angle\mathrm{CDA}>\cos(180^\circ-\theta)$$

が成り立つ．

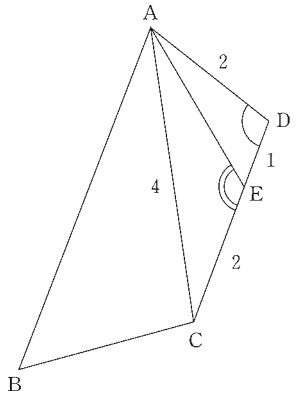
点 D が K の内部にあるとき，

$$\angle\mathrm{CDA}>180^\circ-\theta$$

であるから，

$$\cos\angle\mathrm{CDA}<\cos(180^\circ-\theta)$$

が成り立つ．



△AED に余弦定理を用いることにより，

$$\begin{aligned} AE^2 &= ED^2+DA^2-2ED\cdot DA\cos\angle EDA \\ &= ED^2+DA^2-2ED\cdot DA\cos\angle CDA \\ &= 1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

であるから，

$$AE=\sqrt{\boxed{6}}$$

である．

また，△ACE に余弦定理を用いることにより，

$$\begin{aligned} \cos\angle CEA &= \frac{CE^2+EA^2-CA^2}{2CE\cdot EA} \\ &= \frac{2^2+(\sqrt{6})^2-4^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{6}} \\ &= -\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}} \end{aligned}$$

である．

よって，

$$\cos\angle CEA=\cos(180^\circ-\angle ABC)$$

が成り立つから，

$$\angle CEA=180^\circ-\angle ABC$$

すなわち

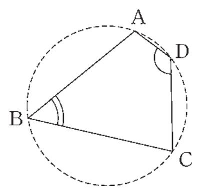
$$\angle CEA+\angle ABC=180^\circ$$

である．

したがって，△ABC の外接円を K とすると，点 E は K の周上 ☜ にある．

さらに，∠CFA＝∠CEA であるから，円周角の定理より，点 F も K の周上にある．

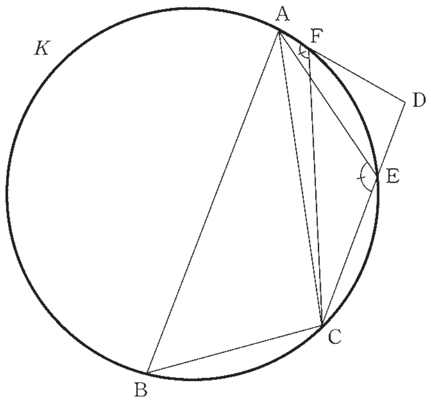
四角形が円に内接する条件



四角形 ABCD について，

$$\angle ABC+\angle CDA=180^\circ$$

が成り立つならば，四角形 ABCD は円に内接する．



弧 EF の円周角を考えて $\angle \mathrm{ECF}=\angle \mathrm{EAF}$ すなわち
$\angle \mathrm{DCF}=\angle \mathrm{DAE}$ であり，$\angle \mathrm{CDF}=\angle \mathrm{ADE}$（共通）より，
$\triangle \mathrm{CFD} \backsim \triangle \mathrm{AED}$ であるから，

$$\mathrm{CF} : \mathrm{AE}=\mathrm{DC} : \mathrm{DA}$$

すなわち

$$\mathrm{CF}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{DC}$$

が成り立ち，これより，

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}&=\frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{DC}}{\mathrm{DA}}\\&=\frac{\sqrt{6}\cdot 3}{2}\\&=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．

四角形 ACEF の面積を S_1，$\triangle \mathrm{DAC}$ の面積を S_2 とすると，

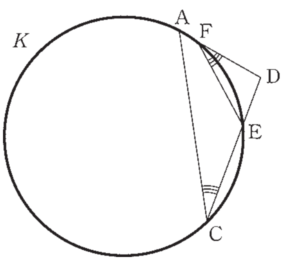
$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\mathrm{DC}\cdot\mathrm{DA}\sin\angle \mathrm{CDA}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{DC}\cdot\mathrm{DA}\sqrt{1-\cos^2\angle \mathrm{CDA}}\\&=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}\\&=\frac{3\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

である．

四角形 ACEF は K に内接しているから，

$$\angle \mathrm{EFD}=\angle \mathrm{ACE} \text{ すなわち } \angle \mathrm{EFD}=\angle \mathrm{ACD}.$$

☜



さらに，$\angle \mathrm{EDF}=\angle \mathrm{ADC}$（共通）が成り立つから，$\triangle \mathrm{DEF}$ と $\triangle \mathrm{DAC}$ は相似であり，相似比が，

$$\mathrm{DE} : \mathrm{DA}=1 : 2$$

であるから，面積の比は，

$$1^2 : 2^2=1 : 4$$

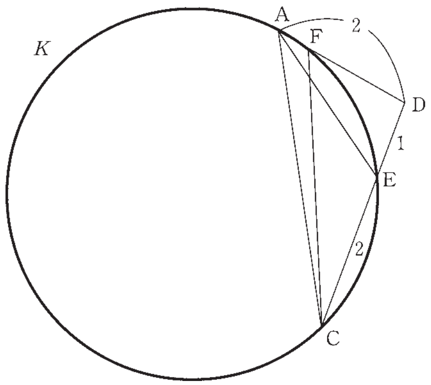
である．

よって，

$$S_1=\frac{4-1}{4}S_2$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}$$
$$=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$$

である．

（△ABC と四角形 ACEF の面積の比から面積を求める別解）



点 D と円 K において，方べきの定理により，

$$\mathrm{DF}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{DE}\cdot\mathrm{DC}$$

すなわち

$$\mathrm{DF}\cdot 2=1\cdot 3$$

が成り立つから，

$$\mathrm{DF}=\frac{3}{2}$$

である．

これより，

$$\mathrm{AF}=\mathrm{AD}-\mathrm{DF}$$
$$=2-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

である．

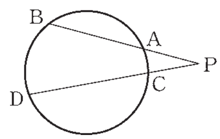
また，

$$\mathrm{AC}:\mathrm{AD}=\mathrm{CE}:\mathrm{ED}\ (=2:1)$$

が成り立つから，線分 AE は ∠CAD を 2 等分する．

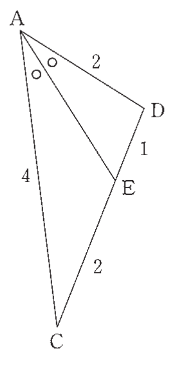
よって，線分 AE と線分 CF の交点を G とすると，

☜ 方べきの定理



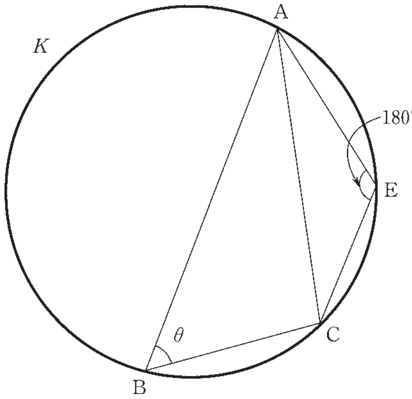
$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$.

☜



$$CG : GF = AC : AF$$
$$= 4 : \frac{1}{2}$$
$$= 8 : 1$$

であるから，四角形 ACEF の面積は △AEC の面積の $\frac{9}{8}$ 倍である．☜



したがって，$\angle ABC = \theta$ とおくと，

(△ABC の面積)：(四角形 ACEF の面積)

$$= (\triangle ABC \text{ の面積}) : \frac{9}{8}(\triangle AEC \text{ の面積})$$

$$= \left(\frac{1}{2}BC\cdot BA\sin\theta\right) : \frac{9}{8}\left\{\frac{1}{2}EC\cdot EA\sin(180^\circ-\theta)\right\}$$

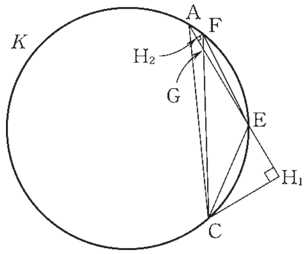
$$= BC\cdot BA : \frac{9}{8}EC\cdot EA \quad (\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta \text{ より})$$

$$= \sqrt{6}\cdot 5 : \frac{9}{8}\cdot 2\cdot\sqrt{6}$$

$$= 20 : 9$$

であるから，

$$(\text{四角形 ACEF の面積}) = \frac{9}{20}(\triangle ABC \text{ の面積})$$
$$= \frac{9}{20}\cdot\frac{5\sqrt{15}}{4}$$
$$= \frac{9\sqrt{15}}{16}.$$



C, F から直線 AE に下ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とすると，

(△AEC の面積)：(△AFE の面積)

$$= \frac{1}{2}AE\cdot CH_1 : \frac{1}{2}AE\cdot FH_2$$

$$= CH_1 : FH_2.$$

ここで，$\triangle CGH_1 \backsim \triangle FGH_2$ より，

$$CH_1 : FH_2 = CG : FG$$

であるから，

(△AEC の面積)：(△AFE の面積)

$$= CG : FG$$

$$= 8 : 1.$$

よって，△AEC と四角形 ACEF の面積の比は，8：9.

第４問　場合の数・確率

１から７までの数字が一つずつ書かれた７枚のカードがあり，これをすべて横一列に並べる．このようなカードの並べ方は $\boxed{\text{アイウエ}}$ 通りある．

(1)　１と書かれたカードと７と書かれたカードが隣り合うようなカードの並べ方は $\boxed{\text{オカキク}}$ 通りであり，１と書かれたカードと７と書かれたカードの間にあるカードが５と書かれたカードだけであるようなカードの並べ方は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 通りである．

(2)　カードを並べる前の持ち点を０点として，並べたカードの並び方によって次のように得点を加える．

１と書かれたカードと７と書かれたカードの間に，偶数が書かれたカードが１枚以上あるときは２点を加え，３の倍数が書かれたカードが１枚以上あるときは３点を加える．

例えば，並べたカードが，$\boxed{2}$，$\boxed{7}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$ であるとき，カードを並べた後の得点は５点である．

カードを並べた後の得点が０点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．カードを並べた後の得点が，３点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ であり，２点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

また，カードを並べた後の得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ 点である．

【解説】　　問題

７枚のカードを $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ と表す．

並べ方の総数は，

$$7!=\boxed{5040}\ (\text{通り})$$

☜ ${}_nP_n=n!$.

ある．

(1)　１と書かれたカードと７と書かれたカードが隣り合うようなカードの並べ方は，$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ を１組と考えて，$\boxed{\ \ \vdots\ \ }$ と表すと，

$\boxed{\ \ \vdots\ \ }$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の６つの並べ方が，

$$6!\ \text{通り}$$

あり，そのそれぞれの $\boxed{\ \ \vdots\ \ }$ に対して１と７を入れるとすると，その入れ方は，

$$2!\ \text{通り}$$

☜ $\boxed{1\vdots 7}$ と $\boxed{7\vdots 1}$ の２通り．

あるから，

$$6!\times 2!=\boxed{1440}\ (\text{通り}) \qquad \cdots①$$

である．

1と書かれたカードと7と書かれたカードの間にあるカードが5と書かれたカードだけであるようなカードの並べ方は，$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ と $\boxed{5}$ を1組と考えて，$\boxed{\ \vdots\,5\,\vdots\ }$ と表すと，$\boxed{\ \vdots\,5\,\vdots\ }$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$ の5つの並べ方が，

$$5!\ 通り$$

あり，そのそれぞれの $\boxed{\ \vdots\,5\,\vdots\ }$ の両端に1と7を入れるとすると，その入れ方は，

$$2!\ 通り$$

☜ $\boxed{1\vdots 5\vdots 7}$ と $\boxed{7\vdots 5\vdots 1}$ の2通り．

あるから，

$$5!\times2!=\boxed{240}\ (通り) \qquad \cdots②$$

である．

(2) カードを並べた後の得点を X とする．

$X=0$ となるのは，「$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ が隣り合っているとき」または「$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードが $\boxed{5}$ だけのとき」であるから，①，② より，$X=0$ となる確率は，

$$\frac{1440+240}{5040}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．

☜ $\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ のうち，
偶数は，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$，
3の倍数は，$\boxed{3}$，$\boxed{6}$
であり，$X=0$ のとき，$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にこれらのカードがあってはいけない．

$X=3$ となるのは，

(ア) $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードが $\boxed{3}$ だけのとき，

(イ) $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードが $\boxed{3}$ と $\boxed{5}$ の2枚だけのとき

である．

☜ $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間に，$\boxed{3}$ があり，さらに $\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$ のカードがあると $X=5$ となる．
$\boxed{5}$ はあっても加点されない．

(ア) の場合の数は，② と同様に考えて，

$$5!\times2!\ (通り)$$

である．

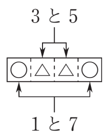
☜ $\boxed{\ \vdots\,3\,\vdots\ }$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の並べ方が，
5! 通り．
$\boxed{\ \vdots\,3\,\vdots\ }$ の両端への1と7の入れ方が，
2! 通り．

(イ) の場合の数は，$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ と $\boxed{3}$ と $\boxed{5}$ を1組と考えて，$\boxed{○\vdots△\vdots△\vdots○}$ と表すと，$\boxed{○\vdots△\vdots△\vdots○}$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$ の4つの並べ方が，

$$4!\ 通り$$

あり，そのそれぞれの $\boxed{○\vdots△\vdots△\vdots○}$ に対して，2ヵ所の○への1と7の入れ方，2ヵ所の△への3と5の入れ方は，

$$2!\times2!\ (通り)$$

☜ 

あるから，

$$4!\times2!\times2!\ (通り)$$

である．

よって，$X=3$ となる確率は，

$$\frac{5!\times2!+4!\times2!\times2!}{7!}=\frac{4!\times2!\times(5+2)}{7!}$$

$$=\frac{4!\times2!\times7}{7\times6\times5\times4!}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{15}}$$

である．

$X=2$ となるのは，

(ウ) $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードが $\boxed{2}$ だけまたは $\boxed{4}$ だけのとき，

(エ) $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードが「$\boxed{2}$ と $\boxed{5}$ の 2 枚だけ」または「$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の 2 枚だけ」または「$\boxed{2}$ と $\boxed{4}$ の 2 枚だけ」のとき，

(オ) $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードが $\boxed{2}$ と $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の 3 枚だけのとき

である．

(ウ) の場合の数は，② と同様に考えて，

$$(5!\times2!)\times2 \text{（通り）}$$

である．

(エ) の場合の数は，(イ) と同様に考えて，

$$(4!\times2!\times2!)\times3 \text{（通り）}$$

である．

(オ) の場合の数は，$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ と $\boxed{2}$ と $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ を 1 組と考えて，$\boxed{○\,△\,△\,△\,○}$ と表すと，$\boxed{○\,△\,△\,△\,○}$，$\boxed{3}$，$\boxed{6}$ の 3 つの並べ方が，

$$3! \text{ 通り}$$

あり，そのそれぞれの $\boxed{○\,△\,△\,△\,○}$ に対して，2 ヵ所の○への 1 と 7 の入れ方，3 ヵ所の△への 2 と 4 と 5 の入れ方は，

$$2!\times3! \text{（通り）}$$

あるから，

$$3!\times2!\times3! \text{（通り）}$$

である．

よって，$X=2$ となる確率は，

$$\frac{(5!\times2!)\times2+(4!\times2!\times2!)\times3+3!\times2!\times3!}{7!}$$

$$=\frac{3!\times2^2\times(5\times4+4\times3+3)}{7\times6\times5\times4\times3!}$$

$$=\frac{35}{7\times6\times5}$$

☜ $5!=5\times4\times3\times2\times1=5\times4!$.

（また，

$5!\times2!=240,\ 4!\times2!\times2!=96$

より，

$$\frac{240+96}{5040}=\frac{336}{5040}=\frac{1}{15}$$

としてもよい．）

☜ $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間に，$\boxed{2}$ または $\boxed{4}$ のカードがあり，さらに $\boxed{3}$ または $\boxed{6}$ のカードがあると $X=5$ となる．

$\boxed{5}$ はあっても加点されない．

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$$

である．

X のとり得る値は，0, 2, 3, 5 であるから，$X=5$ となる確率は，

$$1-\{(X=0\text{ となる確率})+(X=2\text{ となる確率})$$
$$+(X=3\text{ となる確率})\}$$
$$=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)$$
$$=\frac{13}{30}$$

である．

☜ **余事象の確率**

ある試行において，事象 A の起こる確率を $P(A)$ とすると，A の余事象 $\overline{A}$ の起こる確率 $P(\overline{A})$ は，

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

X	0	2	3	5	計
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{30}$	1

したがって，カードを並べた後の得点 X の期待値は，

$$0\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{15}+5\times\frac{13}{30}$$
$$=\frac{81}{30}$$
$$=\frac{\boxed{27}}{\boxed{10}}\ (\text{点})$$

である．

☜ **期待値**

試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$
$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，期待値 E は，

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

（参考　$X=5$ となる確率を直接求める）

$X=5$ となるのは，$\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ の間にあるカードに書かれた数が次のようなときである．

{6}，{6, 2}，{6, 3}，{6, 4}，{6, 5}，{6, 2, 3}，
{6, 2, 4}，{6, 2, 5}，{6, 3, 4}，{6, 3, 5}，{6, 4, 5}，
{6, 2, 3, 4}，{6, 2, 3, 5}，{6, 2, 4, 5}，{6, 3, 4, 5}，
{6, 2, 3, 4, 5}，{3, 2}，{3, 4}，{3, 2, 4}，{3, 2, 5}，
{3, 4, 5}，{3, 2, 4, 5}．

{6} のとき，② と同様に考えて，5!×2! (通り)．

　　のとき，いずれも (2)(イ) と同様に考えて，それぞれ 4!×2!×2! (通り)．

　　のとき，いずれも (2)(オ) と同様に考えて，それぞれ 3!×2!×3! (通り)．

　　のとき，例えば {6, 2, 4, 5} のときの場合の数は，

$\boxed{1}$，$\boxed{7}$，$\boxed{6}$，$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ を 1 組と考えて，

$\boxed{○△△△△○}$ と表すと，$\boxed{○△△△△○}$

と $\boxed{3}$ の並べ方 … $2!$ (通り),

そのそれぞれの ○△△△△○ に対して，2ヵ所の○への 1 と 7 の入れ方，4ヵ所の△への 6 と 2 と 4 と 5 の入れ方 … $2!\times4!$ (通り)

より，$2!\times2!\times4!$ (通り)であり，他の の場合も同様である．

$\{6,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ のとき，並べた 7 枚のカードの両端が $\boxed{1}$ と $\boxed{7}$ のときであるから，$2!\times5!$ (通り)．

よって，$X=5$ となる確率は，

$$\frac{5!\times2!+(4!\times2!\times2!)\times6+(3!\times2!\times3!)\times9+(2!\times2!\times4!)\times5+2!\times5!}{7!}$$

$$=\frac{(5\times2+2\times2\times6+3\times9+2\times2\times5+2\times5)\times4!}{7\times6\times5\times4!}$$

$$=\frac{91}{7\times6\times5}$$

$$=\frac{13}{30}$$

である．

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	0	1	
	イ	5	2	
	ウ	1	2	
	エ	4	1	
	オ	2	1	
	$\frac{カ}{キ}$	$\frac{3}{2}$	2	
	ク，ケ	2，2	1	
	コ	2	2	
	サ，シ	2，1	1	
	ス	1	2	
	セ	2	2	
	ソ	2	1	
	タ	3	2	
	チ，ツ	1，2	2	
	テ，ト	3，2	2	
	ナ	1	1	
	ニ	2	1	
	ヌ，ネ	2，6	2	
	ノ	2	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア	2	3	
	イ，$\frac{ウ}{エ}$	－，$\frac{3}{4}$	3	
	$\frac{オ}{カキ}$	$\frac{1}{24}$	4	
	クケ，コ	－1，2	3	
	サ，シ，ス，セ	2，6，7，2	2	
	ソ，タチ，ツ	6，12，7	2	
	テ	2	3	
	ト	1	3	
	ナ	2	2	
	ニ	1	2	
	ヌ＋$\sqrt{ネ}$	$1+\sqrt{2}$	3	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア，イ	2，1	2	
	ウ，エ	2，a	2	
	オ，カ	2，5	2	
	キ，ク	1，2	2	
	ケ	2	2	
	コ，サ，シ	4，3，5	2	
	ス，セ	2，4	2	
	ソタ，チツ，テト，ナ	20，41，16，4	3	
	$\frac{ニ}{ヌネ}$	$\frac{8}{41}$	2	
	$\frac{\sqrt{ノハヒ}}{フヘ}$	$\frac{\sqrt{205}}{41}$	1	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア	1	2	
	イ	0	2	
	ウ，エ	2，1	1	
	オ，カ	1，2	2	
	キ，ク，ケ	3，2，2	3	
	$\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$，シ	$\frac{3}{2}$，2	2	
	ス	2	2	
	セ，ソ	4，2	3	
	タチ	−1	2	
	ツ	1	1	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

数学Ⅱ

第 1 問　対数関数，三角関数

問題

数学II・数学B 第 1 問 に同じである。

第 2 問　微分法・積分法

問題

数学II・数学B 第 2 問 に同じである。

第 3 問　図形と方程式

a を $0<a<\frac{1}{2}$ を満たす実数とし，座標平面上に 2 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ 2a)$ をとる。直線 AB に平行で点 $(0,\ 1)$ を通る直線を ℓ，点 A を通り ℓ に垂直な直線を m とする。

ℓ の方程式は　$y=-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$

m の方程式は　$y=\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}x-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

である。

直線 ℓ と直線 m の交点を M とすると，M の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{オ}}+a}{\boxed{\text{カ}}},\ \frac{\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}a}{\boxed{\text{カ}}}\right)$$

である。一方，直線 ℓ に関して A と対称な点を A$'(p,\ q)$ とすると，M の座標は

$\left(\dfrac{p+a}{\boxed{\text{ケ}}},\ \dfrac{q}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$ とも表されるので，A$'$ の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}a}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}a}{\boxed{\text{シ}}}\right)$$

である。

ここで， 3 点 A，A$'$，B を通る円の半径を R とすると

$$R^2=\frac{1}{\boxed{\text{ソタ}}}\left(\boxed{\text{チツ}}a^2-\boxed{\text{テト}}a+\boxed{\text{ナ}}\right)$$

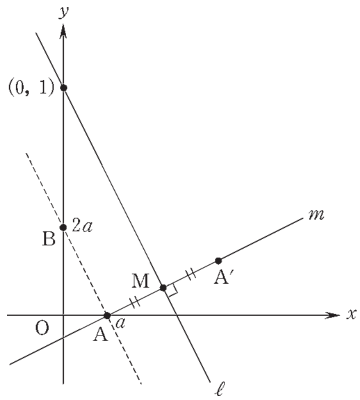
であるから，$0<a<\frac{1}{2}$ の範囲で a が変化するとき，R は

$$a=\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}\ \text{において，最小値}\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノハヒ}}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

をとる。

【解説】

問題



直線 AB の傾きは $\dfrac{2a-0}{0-a}=-2$ であるから，直線 AB に平行な直線 ℓ の傾きも -2 である．ℓ は点 $(0,\ 1)$ を通るので，ℓ の方程式は

$$y=-\boxed{2}\,x+\boxed{1} \qquad \cdots①$$

である．

また，直線 m は直線 ℓ に垂直なので，m の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であり，さらに m は点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通るので，m の方程式は

$$y=\frac{1}{2}(x-a)$$

すなわち

$$y=\frac{1}{\boxed{2}}x-\frac{\boxed{a}}{2} \qquad \cdots②$$

である．

ℓ と m の交点 M の座標は，①, ② を連立することにより求められる．①, ② より y を消去して

$$-2x+1=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$$

より

$$x=\frac{2+a}{5}.$$

これと ① より

$$y=\frac{1-2a}{5}.$$

よって，M の座標は

$$\left(\frac{\boxed{2}+a}{\boxed{5}},\ \frac{\boxed{1}-\boxed{2}a}{5}\right)$$

である．

直線の傾き

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ のとき，直線 AB の傾きは

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

ℓ は傾き -2，y 切片 1 の直線．

垂直条件

傾きが m_1，m_2 である 2 直線が垂直である条件は $m_1 \cdot m_2=-1$．

直線の方程式

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが p である直線の方程式は

$$y=p(x-x_1)+y_1.$$

直線 ℓ に関して A と A′ が対称であるから，M は線分 AA′ の中点である．$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(p,\ q)$ より M の座標は

$$\left(\frac{p+a}{\boxed{2}},\ \frac{q}{2}\right)$$

と表される．したがって

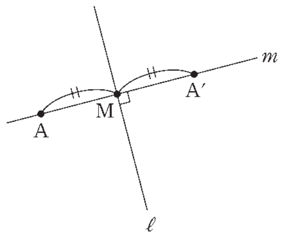
$$\frac{2+a}{5}=\frac{p+a}{2} \quad \text{より} \quad p=\frac{4-3a}{5}$$

$$\frac{1-2a}{5}=\frac{q}{2} \quad \text{より} \quad q=\frac{2-4a}{5}$$

であるから，A′ の座標を a を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{4}-\boxed{3}a}{\boxed{5}},\ \frac{\boxed{2}-\boxed{4}a}{5}\right)$$

である．

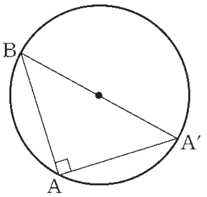


中点

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

$\angle \mathrm{A}'\mathrm{AB}=90^\circ$ であるから，線分 A′B は，3 点 A, A′, B を通る円の直径であり，$R=\frac{1}{2}\mathrm{A}'\mathrm{B}$ である．



$\angle \mathrm{A}'\mathrm{AB}=90^\circ$ のとき，線分 A′B は三角形 A′AB の外接円の直径である．

$$\begin{aligned}
R^2&=\frac{1}{4}\mathrm{A}'\mathrm{B}^2\\
&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{4-3a}{5}-0\right)^2+\left(\frac{2-4a}{5}-2a\right)^2\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{4-3a}{5}\right)^2+\left(\frac{2-14a}{5}\right)^2\right\}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^2}\{(4-3a)^2+(2-14a)^2\}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^2}(205a^2-80a+20)\\
&=\frac{1}{\boxed{20}}\left(\boxed{41}a^2-\boxed{16}a+\boxed{4}\right)\\
&=\frac{41}{20}\left(a-\frac{8}{41}\right)^2+\frac{5}{41}
\end{aligned}$$

2 点間の距離

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

であるから，$0<a<\frac{1}{2}$ の範囲で a が変化するとき，R は

$$a=\frac{\boxed{8}}{\boxed{41}} \quad \text{において，最小値} \quad \frac{\sqrt{\boxed{205}}}{\boxed{41}}$$

をとる．

☜ $a=\frac{8}{41}$ は $0<a<\frac{1}{2}$ を満たす．

第 4 問　高次方程式

a，b を実数とする．x の整式

$$P(x)=2x^3+(2a+b)x^2+(3a-b)x-2a$$

は $x+2$ で割ると -10 余るものとする．このとき，$b=\boxed{\text{ア}}$ である．

さらに，$P\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\text{イ}}$ であるから，$P(x)$ は

$$P(x)=\left(\boxed{\text{ウ}}x-\boxed{\text{エ}}\right)\left\{x^2+\left(a+\boxed{\text{オ}}\right)x+\boxed{\text{カ}}a\right\}$$

と因数分解できる．

以下においては，x の方程式 $P(x)=0$ は虚数解をもつものとする．

(1)　a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}<a<\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

である．

(2)　x の方程式 $P(x)=0$ の三つの解を α，β，γ とすると

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}-\frac{1}{\boxed{\text{シ}}a}$$

であるから，$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{\boxed{\text{ス}}}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(3)　x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解の一つを $p+qi$（p，q は実数で $q>0$，i は虚数単位）とすると，p と q について

$$p^2+q^2+\boxed{\text{セ}}p+\boxed{\text{ソ}}=0$$

が成り立つ．a が (*) の範囲を動くとき，$\frac{q}{p}$ の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ であり，このとき，$a=\boxed{\text{ツ}}$ である．

【解説】　　問題

$$P(x)=2x^3+(2a+b)x^2+(3a-b)x-2a$$

は，$x+2$ で割ると -10 余るから，$P(-2)=-10$ が成り立つ．

よって

$$2\cdot(-2)^3+(2a+b)\cdot(-2)^2+(3a-b)\cdot(-2)-2a=-10$$

より

$$b=\boxed{1}$$

である．このとき，$P(x)$ は

$$P(x)=2x^3+(2a+1)x^2+(3a-1)x-2a$$

となり

☜ 剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$ である．

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+(2a+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+(3a-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-2a$$

$$=\boxed{0}$$

より，$P(x)$ は $2x-1$ で割り切れる．

☜ **因数定理**

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる

$\Longleftrightarrow$ $P(\alpha)=0$．

ここで，$P(x)$ を $2x-1$ で割ると以下のようになる．

$$\begin{array}{r}
x^2+\ (a+1)x \qquad +2a \\
2x-1\,\big)\ 2x^3+(2a+1)x^2+(3a-1)x-2a \\
2x^3 \qquad\quad -x^2 \qquad\qquad\qquad\quad \\
\hline
(2a+2)x^2+(3a-1)x \qquad \\
(2a+2)x^2-\ (a+1)x \qquad \\
\hline
4ax-2a \\
4ax-2a \\
\hline
0
\end{array}$$

すなわち，$P(x)$ は

$$P(x)=\left(\boxed{2}x-\boxed{1}\right)\left\{x^2+\left(a+\boxed{1}\right)x+\boxed{2}a\right\} \quad \cdots①$$

と因数分解できる．

(1)　x の方程式 $P(x)=0$ は虚数解をもつから

$$x^2+(a+1)x+2a=0$$

の判別式を D とすると，$D<0$ が成り立つ．よって

$$(a+1)^2-4\cdot2a<0$$

すなわち

$$a^2-6a+1<0$$

より，a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{3}-\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}<a<3+2\sqrt{2} \qquad \cdots(*)$$

である．

☜ **2 次方程式の解の判別**

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots(☆)$$

の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$D>0 \Longleftrightarrow$ (☆) が異なる二つの実数解をもつ

$D=0 \Longleftrightarrow$ (☆) が(実数の)重解をもつ

$D<0 \Longleftrightarrow$ (☆) が異なる二つの虚数解をもつ．

(2)　① より，$P(x)=0$ は

$$2x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2+(a+1)x+2a=0$$

と同値である．$P(x)=0$ の三つの解が α，β，γ であるから，

$\alpha=\frac{1}{2}$ とし，

$$x^2+(a+1)x+2a=0 \qquad \cdots②$$

の二つの解を β，γ としてもよい．このとき，② における解と係数の関係より

$$\begin{cases}\beta+\gamma=-(a+1)\\ \beta\gamma=2a\end{cases}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}&=2+\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\\ &=2-\frac{a+1}{2a}\\ &=2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\right)\end{aligned}$$

☜ **解と係数の関係**

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二つの解を β，γ とすると

$$\begin{cases}\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \beta\gamma=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}-\frac{1}{\boxed{2}a}$$

である．ここで，$0<3-2\sqrt{2}<3+2\sqrt{2}$ と (*) より

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}<\frac{1}{a}<\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$$

☜ $0<p<q<r$ のとき $\frac{1}{r}<\frac{1}{q}<\frac{1}{p}$ である．また，$1<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ より $0<3-2\sqrt{2}<1$ である．

すなわち

$$3-2\sqrt{2}<\frac{1}{a}<3+2\sqrt{2}$$

であるから

$$-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}<-\frac{1}{2a}<-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}.$$

よって

$$-\sqrt{2}<\frac{3}{2}-\frac{1}{2a}<\sqrt{2}$$

であるから，$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{\boxed{2}}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<\sqrt{2}$$

である．

(3) x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解 $p+qi$（p，q は実数，$q>0$）は 2 次方程式 ② の解であるから

$$(p+qi)^2+(a+1)(p+qi)+2a=0$$
$$(p^2+2pqi+q^2i^2)+(a+1)p+(a+1)qi+2a=0$$

☜ $x=p+qi$ を $x^2+(a+1)x+2a=0$ …② に代入した．

すなわち

$$p^2-q^2+(a+1)p+2a+q(2p+a+1)i=0$$

☜ $i^2=-1$．

が成り立つ．p，q，a は実数であるから

$$\begin{cases} p^2-q^2+(a+1)p+2a=0 & \cdots③ \\ q(2p+a+1)=0 & \cdots④ \end{cases}$$

であり，$q>0$ と ④ より

$$a=-2p-1.$$

これを ③ に代入して

$$p^2-q^2+(-2p)p+2(-2p-1)=0$$

より

$$p^2+q^2+\boxed{4}p+\boxed{2}=0 \qquad \cdots⑤$$

が成り立つ．この式は

$$(p+2)^2+q^2=2$$

と変形できるから，pq 平面上で考えると，⑤ かつ $q>0$ で表される図形は，中心が $(-2,\ 0)$，半径が $\sqrt{2}$ の円の $q>0$ の部分である半円である．この半円を C とする．ここで，$\frac{q}{p}=k$ とおくと $q=kp$ となり，pq 平面上で考えると，この式で表される図形は原点を通り傾き k の直線である．この直線を ℓ とする．

ここで，C と ℓ が接するときの k の値を求める．C の中心 $(-2,\ 0)$ と直線 ℓ：$kp-q=0$ の距離が C の半径の $\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|k\cdot(-2)-0|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

より

$$|-2k|=\sqrt{2(k^2+1)}.$$

両辺ともに 0 以上の値だから，両辺を平方すると

$$4k^2=2(k^2+1)$$

より

$$k^2=1.$$

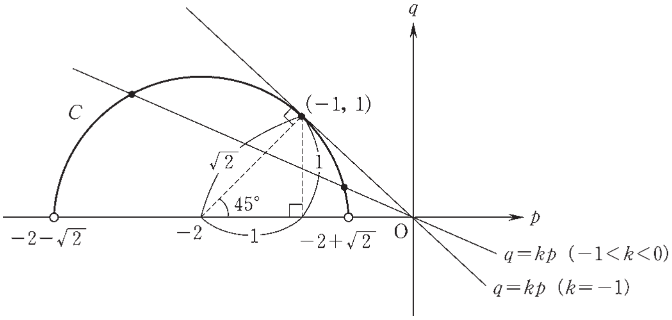
C と ℓ が接するとき $k<0$ であるから

$$k=-1.$$

これと下図より，C と ℓ が共有点をもつような傾き k のとり得る値の範囲は

$$-1\leqq k<0$$

である．



よって，$\dfrac{q}{p}$ のとり得る値の範囲は

$$-1\leqq\frac{q}{p}<0$$

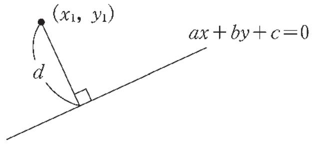
であるから，$\dfrac{q}{p}$ の最小値は $\boxed{-1}$ である．

このとき，上の図より $(p,\ q)=(-1,\ 1)$ であるから，a の値は

$$\begin{aligned}a&=-2p-1\\&=-2\cdot(-1)-1\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

である．

☜ 点と直線の距離



$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

☜ (*) の $3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}$ を満たす．

【$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の別解】

$$x^2+(a+1)x+2a=0 \qquad \cdots②$$

は実数係数の 2 次方程式だから，② の虚数解の一つが $p+qi$ (p, q は実数，$q>0$) のとき，他方の虚数解は $p-qi$ である．

$p+qi=\beta$，$p-qi=\gamma$ とすると

$$\begin{cases} \beta+\gamma=2p \\ \beta\gamma=(p+qi)(p-qi)=p^2-q^2i^2=p^2+q^2 \end{cases}$$

☜ $i^2=-1$.

であり，さらに解と係数の関係より

$$\begin{cases} \beta+\gamma=-(a+1) \\ \beta\gamma=2a \end{cases}$$

が成り立つから

$$\begin{cases} 2p=-(a+1) \\ p^2+q^2=2a. \end{cases}$$

これらから，a を消去すると

$$p^2+q^2=2(-2p-1)$$

すなわち

$$p^2+q^2+4p+2=0$$

である.

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア	0	1	
	イ	5	2	
	ウ	1	2	
	エ	4	1	
	オ	2	1	
	$\frac{カ}{キ}$	$\frac{3}{2}$	2	
	ク，ケ	2，2	1	
	コ	2	2	
	サ，シ	2，1	1	
	ス	1	2	
	セ	2	2	
	ソ	2	1	
	タ	3	2	
	チ，ツ	1，2	2	
	テ，ト	3，2	2	
	ナ	1	1	
	ニ	2	1	
	ヌ，ネ	2，6	2	
	ノ	2	2	
		第1問　自己採点小計	(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア	2	3	
	イ，$\frac{ウ}{エ}$	−，$\frac{3}{4}$	3	
	$\frac{オ}{カキ}$	$\frac{1}{24}$	4	
	クケ，コ	−1，2	3	
	サ，シ，ス，セ	2，6，7，2	2	
	ソ，タチ，ツ	6，12，7	2	
	テ	2	3	
	ト	1	3	
	ナ	2	2	
	ニ	1	2	
	ヌ＋$\sqrt{ネ}$	$1+\sqrt{2}$	3	
		第2問　自己採点小計	(30)	
第3問	ア	6	1	
	イ	2	2	
	ウエ，オ，カ	24，4，1	3	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{3}{2}$	2	
	$\frac{サ}{シ}$，ス	$\frac{3}{2}$，1	2	
	セ，ソ	3，2	2	
	タ	2	1	
	チ，ツ	4，4	2	
	テ	4	2	
	ト，ナ	3，0	2	
		第3問　自己採点小計	(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア，イ	1，3	2	
	ウ，エ	2，4	2	
	オ，カ，キ	1，2，8	2	
	ク，ケコ，サシ	5，−2，−8	1	
	スセ，ソタ，チツ	−1，16，−8	1	
	テ	1	2	
	ト	3	1	
	ナ	1	1	
	$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{7}{2}$	2	
	ネ	0	2	
	$\frac{ノハ}{ヒフ}$	$\frac{39}{14}$	2	
	ヘ	0	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
第5問	ア.イ	8.0	2	
	ウ.エ	8.0	2	
	オ.カ	9.0	3	
	キ.ク	3.0	1	
	ケコ	−1	2	
	サシス	181	2	
	セ	6	1	
	ソタ	25	1	
	チ	1	2	
	ツ	5	1	
	テ	3	1	
	ト	2	2	
第5問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第6問	アイ／ウ	24／5	2	
	エオ	21	2	
	カキ／ク	22／7	2	
	ケ	2	2	
	コ	6	2	
	サ	4	2	
	シ	1	2	
	ス	4	2	
	セソ／タチ	49／98	2	
	ツ	0	2	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　対数関数，三角関数

〔１〕 a は１でない正の数とし，$f(x)=\log_a(x-1)$ とする．

(1) $a=2$ とする．このとき，$f(2)=\boxed{ア}$，$f\left(\boxed{イ}\right)=2$ である．

次に，x の方程式

$$f(x)+2=f(2x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．真数は正であるから，$x>\boxed{ウ}$ である．

この条件のもとで ① を変形すると

$$\log_2\boxed{エ}(x-1)=\log_2\left(\boxed{オ}x-1\right)$$

となるから，① の解は $x=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である．

(2) $0<a<1$ のとき，x の不等式

$$f(x)+2>f(2x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える．

$x>\boxed{ウ}$ の条件のもとで ② を変形すると

$$\left(a^{\boxed{ク}}-\boxed{ケ}\right)x\ \boxed{コ}\ a^{\boxed{サ}}-\boxed{シ}$$

となるから，x の不等式 ② を満たす x の範囲は $x>\boxed{ス}$ である．ただし，$\boxed{コ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ $>$　　① $\geqq$　　② $<$　　③ $\leqq$

〔２〕 $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において

$$g(x)=|\sin x|+\sqrt{3}\cos x$$

を考える．

(1) $g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{セ}$ である．

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$g(x)=\boxed{ソ}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{\boxed{タ}}\right)$ であるから，このときの $g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{チ}\leqq g(x)\leqq\boxed{ツ}$$

である．また，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq 0$ のとき，$g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\sqrt{\boxed{テ}}\leqq g(x)\leqq\boxed{ト}$$

である．よって，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲における $g(x)$ の

最小値は $\boxed{ナ}$，最大値は $\boxed{ニ}$

である．

(3) k を実数の定数とする．x の方程式

$$g(x)=k$$

が $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，異なる 4 個の実数解をもつような k の値の範囲は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{2}\leqq k<\boxed{\text{ノ}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ヌ}}<\boxed{\text{ネ}}$ とする．

【解説】

問題

〔1〕

$$f(x)=\log_a(x-1).$$

(1) $a=2$ のとき，$f(x)=\log_2(x-1)$.

よって

$$f(2)=\log_2 1=\boxed{0}.$$

☜ $a>0$，$a\neq1$ のとき，$\log_a 1=0$.

また，x の方程式 $f(x)=2$ を考える．

$$\log_2(x-1)=2$$

より

$$x-1=2^2$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$M>0$ のとき
$a^p=M \iff p=\log_a M$.

すなわち

$$x=5$$

であるから，$f\left(\boxed{5}\right)=2$ である．

次に，x の方程式

$$f(x)+2=f(2x) \quad \cdots①$$

すなわち

$$\log_2(x-1)+2=\log_2(2x-1) \quad \cdots①'$$

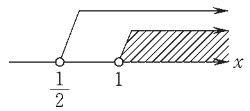
を考える．真数は正であるから

$$x-1>0 \quad かつ \quad 2x-1>0$$

より

$$x>\boxed{1}. \quad \cdots(*)$$

☜



(*) のもとで ①′ を変形すると

$$\log_2(x-1)+\log_2 4=\log_2(2x-1)$$

$$\log_2\boxed{4}(x-1)=\log_2\left(\boxed{2}x-1\right)$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ のとき
$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$.

より

$$4(x-1)=2x-1$$

☜ $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ のとき
$\log_a M=\log_a N \iff M=N$.

$$x=\frac{3}{2}.$$

これは (*) を満たすので，① の解は $x=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$ である．

(2) $0<a<1$ のとき，x の不等式

$$f(x)+2>f(2x) \quad \cdots②$$

すなわち

$$\log_a(x-1)+2>\log_a(2x-1) \quad \cdots②'$$

を考える．真数が正となる条件は (*) であり，(*) のもとで ②′ を変形すると

$$\log_a(x-1)+\log_a a^2>\log_a(2x-1)$$

☜ $a>0$，$a\neq1$ のとき，$2=\log_a a^2$．

$$\log_a a^2(x-1)>\log_a(2x-1)$$

となる．$0<a<1$ より

$$a^2(x-1)<2x-1$$

☜ $0<a<1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_a M>\log_a N \iff M<N$．

$$\left(a^{\boxed{2}}-\boxed{2}\right)x<a^{\boxed{2}}-\boxed{1} \quad \cdots③$$

であり，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

ここで，$0<a<1$ において，$a^2-2<0$ より，③ を満たす x の範囲は

☜ $0<a<1$ のとき，$0<a^2<1$．

$$x>\frac{a^2-1}{a^2-2} \quad \cdots④$$

である．

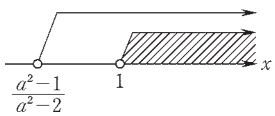
ここで，$0<a<1$ より，$0<1-a^2<2-a^2$ であるから

$$\frac{a^2-1}{a^2-2}=\frac{1-a^2}{2-a^2}<1$$

が成り立つ．よって，④ かつ (*) より，x の不等式 ② を満たす x の範囲は

$$x>\boxed{1}$$

である．

☜ 

〔2〕

$-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲において

$$g(x)=|\sin x|+\sqrt{3}\cos x$$

を考える．

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

(1) $g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|+\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\left|-\frac{1}{2}\right|+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$$

$$=\boxed{2}.$$

(2) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x\geqq0$ より

$$g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$$

$$=\boxed{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{3}}\right)$$

☜ **三角関数の合成**

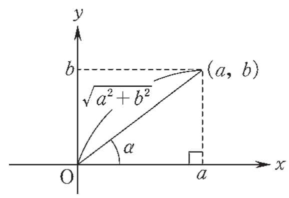
a，b は実数で，$a^2+b^2\neq0$ とする．

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$．

ただし，α は $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

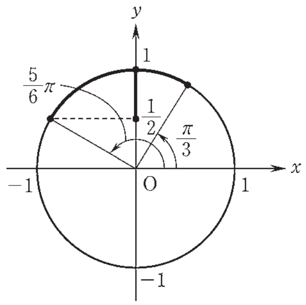
$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角である．



である．

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$$



すなわち

$$1 \leqq 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leqq 2.$$

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{1} \leqq g(x) \leqq \boxed{2} \qquad \cdots ⑤$$

である．

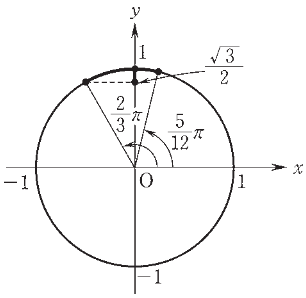
また，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0$ のとき，$\sin x \leqq 0$ より

$$\begin{aligned} g(x) &= -\sin x+\sqrt{3}\cos x \\ &= 2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

である．

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0$ のとき，$\dfrac{5}{12}\pi \leqq x+\dfrac{2}{3}\pi \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right) \leqq 1$$



すなわち

$$\sqrt{3} \leqq 2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right) \leqq 2.$$

よって，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0$ のとき，$g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\sqrt{\boxed{3}} \leqq g(x) \leqq \boxed{2} \qquad \cdots ⑥$$

である．

⑤ と ⑥ より，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲における $g(x)$ の

最小値は $\boxed{1}$，最大値は $\boxed{2}$

☜ $\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき，} 1 \leqq g(x) \leqq 2, \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0 \text{ のとき，} \sqrt{3} \leqq g(x) \leqq 2 \end{cases}$

より，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$1 \leqq g(x) \leqq 2.$

である．

(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$g(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$．

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0$ のとき，$g(x)=2\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$．

ここで

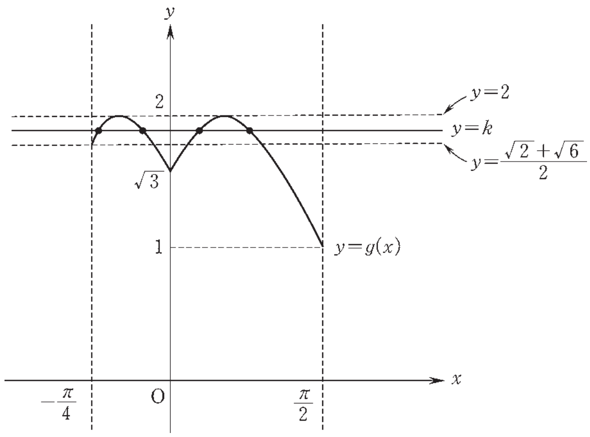
$$\begin{aligned} \sin\frac{5}{12}\pi &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

☜ **加法定理**
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

より

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

であることに注意して $y=g(x)$ のグラフをかくと，次のようになる．



☜ $0<\frac{\pi}{3}<\frac{5}{12}\pi<\frac{\pi}{2}$ より

$$\sin\frac{\pi}{3}<\sin\frac{5}{12}\pi<\sin\frac{\pi}{2}$$

すなわち

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}<1$$

であるから

$$\sqrt{3}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}<2.$$

よって，x の方程式 $g(x)=k$ が $-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において，異なる 4 個の実数解をもつような実数の定数 k の値の範囲は

$$\frac{\sqrt{\boxed{2}}+\sqrt{\boxed{6}}}{2}\leqq k<\boxed{2}$$

である．

☜ x の方程式 $g(x)=k$ が異なる 4 個の実数解をもつ条件は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる 4 個の共有点をもつことである．

第2問　微分法・積分法

$f(x)=(x-1)^2$ とし，座標平面上で曲線 $y=f(x)$ を C とする．

また，a を $0<a<1$ を満たす実数とし，C 上の点Pの x 座標を a とする．さらに，この点Pにおける C の接線を ℓ とする．

(1)　$a=\frac{1}{2}$ とする．$f'(x)=\boxed{\text{ア}}(x-1)$ であるから，接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{イ}}x+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．また，接線 ℓ と曲線 C，および y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である．

(2)　点Pを通り接線 ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}(a-1)}(x-a)+(a-1)^2$$

である．

直線 m と x 軸の交点の x 座標を $g(a)$ とすると

$$g(a)=\boxed{\text{サ}}a^3-\boxed{\text{シ}}a^2+\boxed{\text{ス}}a-\boxed{\text{セ}}$$

であり

$$g'(a)=\boxed{\text{ソ}}a^2-\boxed{\text{タチ}}a+\boxed{\text{ツ}}$$

であるから，$0<a<1$ のとき，a の値が増加すると，$g(a)$ は $\boxed{\text{テ}}$ することがわかる．$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　減少　　①　減少してから増加

②　増加　　③　増加してから減少

また，$g(a)=0$ を満たす a の値は $\boxed{\text{ト}}$．$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　$0<a<\frac{1}{3}$ の範囲に一つだけ存在する

①　$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ の範囲に一つだけ存在する

②　$\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ の範囲に二つ存在する

③　$\frac{1}{2}<a<1$ の範囲に一つだけ存在する

④　$\frac{1}{2}\leqq a<1$ の範囲に二つ存在する

(3)　(2)の直線 m と曲線 C の共有点のうち，点Pでない方の点の x 座標を b とする．$u=1-a$ とおくと

$$b=u+\frac{1}{\boxed{\text{ナ}}\,u}+\boxed{\text{ニ}}$$

と表される。

$0<a<1$ の範囲で a が変化するとき，b の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}+\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

【解説】

問題

(1)　$f(x)=(x-1)^2$ より

$$f(x)=x^2-2x+1$$

であるから

$$f'(x)=2x-2$$

$$=\boxed{2}(x-1)$$

である。

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ であり，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$ であるから，点 P における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

すなわち

$$y=\boxed{-}x+\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である。

導関数

$(x^n)'=nx^{n-1}$.　$(n=1,\ 2,\ 3)$

$(c)'=0$.　　（c は定数）

$f(x)=(x-1)^2$ より

$$f'(x)=2(x-1)$$

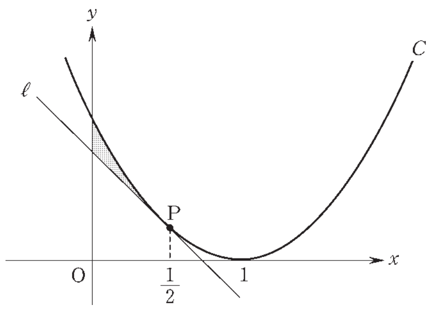
としてもよい。

接線の方程式

点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

である。



よって，接線 ℓ と曲線 C，および y 軸で囲まれた図形は上図の影の部分であるから，その面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{(x-1)^2-\left(-x+\frac{3}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=0-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{24}}$$

$$\int(x-a)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-a)^3+C.$$

（a は定数，C は積分定数）

である．

(2)　点 $\mathrm{P}(a, (a-1)^2)$ を通り，接線 ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}(a-1)}(x-a)+(a-1)^2$$

である．上式で $y=0$ として変形すると

$$\frac{1}{2(a-1)}(x-a)=(a-1)^2$$

☜ 接線 ℓ の傾きは

$$f'(a)=2(a-1)\quad(0<a<1)$$

より，直線 m の傾きは

$$-\frac{1}{2(a-1)}$$

である．

すなわち

$$\begin{aligned}x&=2(a-1)^3+a\\&=2a^3-6a^2+7a-2\end{aligned}$$

であるから，直線 m と x 軸の交点の x 座標 $g(a)$ は

$$g(a)=\boxed{2}a^3-\boxed{6}a^2+\boxed{7}a-\boxed{2}$$

である．このとき

$$g'(a)=\boxed{6}a^2-\boxed{12}a+\boxed{7}$$

である．ここで

$$g'(a)=6(a-1)^2+1>0$$

であるから，$0<a<1$ のとき，a の値が増加すると，$g(a)$ は増加することがわかる．よって，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものは

$\boxed{②}$ である．

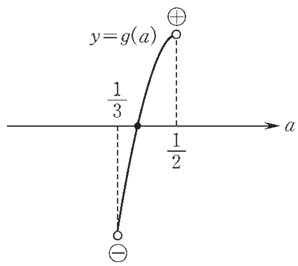
また，$g(a)=2(a-1)^3+a$ に注意して

$$g\left(\frac{1}{3}\right)=2\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{3}=-\frac{7}{27}<0,$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>0$$

であるから，$g(a)=0$ を満たす a の値は $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ の範囲に一つだけ存在する．よって，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$

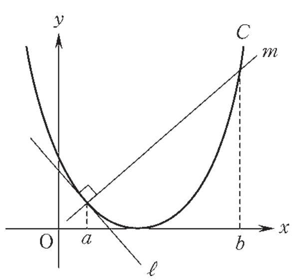
☜



である．

(3)　$\begin{cases} C：y=(x-1)^2, \\ m：y=-\dfrac{1}{2(a-1)}(x-a)+(a-1)^2. \end{cases}$

☜



C と m の式から y を消去すると

$$(x-1)^2=-\frac{1}{2(a-1)}(x-a)+(a-1)^2$$

すなわち

$$x^2-\left\{2+\frac{1}{2(1-a)}\right\}x+1+\frac{a}{2(1-a)}-(a-1)^2=0 \qquad \cdots①$$

となる．C と m の共有点の x 座標が a と b であるから，a と b が x の 2 次方程式 ① の 2 解である．よって，解と係数の関係より

$$a+b=2+\frac{1}{2(1-a)}$$

が成り立つ．よって

$$b=2-a+\frac{1}{2(1-a)}$$

$$=1-a+\frac{1}{2(1-a)}+1$$

である．$u=1-a$ とおくと

$$b=u+\frac{1}{\boxed{\ 2\ }u}+\boxed{\ 1\ } \qquad \cdots②$$

と表される．

$0<a<1$ のとき，$u=1-a>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{u+\frac{1}{2u}}{2} \geqq \sqrt{u \cdot \frac{1}{2u}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

☜ 相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}.$$

（等号成立は $a=b$ のとき）

すなわち

$$u+\frac{1}{2u} \geqq \sqrt{2} \qquad \cdots③$$

が成り立つ．

よって，②，③ より

$$b \geqq 1+\sqrt{2}$$

であり，等号は $u=\frac{1}{2u}$ かつ $0<u<1$，すなわち $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つ．

以上より，$0<a<1$ の範囲で a が変化するとき，b の最小値は

$\boxed{\ 1\ }+\sqrt{\boxed{\ 2\ }}$ である．

第３問　数　列

公比が正の実数である等比数列 $\{a_n\}$ が $a_2=12$，$a_4=48$ を満たすとする．このとき

$$a_1=\boxed{\text{ア}},\quad \text{公比は}\ \boxed{\text{イ}}$$

である．また

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}=\boxed{\text{ウエ}}\left(\boxed{\text{オ}}^{\,n}-\boxed{\text{カ}}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

次に，数列 $\{b_n\}$ を $b_1=1$ と

$$b_{n+1}=2b_n+a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

で定められる数列とする．

(1)　$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$c_1=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$(*)$ より

$$c_{n+1}=c_n+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．よって

$$c_n=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}n-\boxed{\text{ス}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$b_n=\left(\boxed{\text{セ}}n-\boxed{\text{ソ}}\right)\cdot 2^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2)　$(*)$ より，$b_{n+2}=2b_{n+1}+a_{n+1}$ であり，また，$a_{n+1}=\boxed{\text{タ}}a_n$ が成り立つから

$$b_{n+2}=\boxed{\text{チ}}b_{n+1}-\boxed{\text{ツ}}b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k+2}}{b_k b_{k+1}}=\boxed{\text{テ}}-\frac{1}{\left(\boxed{\text{ト}}n+1\right)\cdot 2^{\boxed{\text{ナ}}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．ただし，$\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

【解説】

問題

等比数列 $\{a_n\}$ の公比を r (>0) とする．

$a_2=12$，$a_4=48$ より

$$r^2=\frac{a_4}{a_2}=\frac{48}{12}=4.$$

$r>0$ だから，$r=2$.

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}.$$

$a_2=a_1r$，$a_4=a_1r^3$ より

$$\frac{a_4}{a_2}=r^2.$$

これを $a_1r=12$ に代入して，$2a_1=12$ より

$$a_1=6.$$

☜ $a_2=a_1r=12.$

よって，数列 $\{a_n\}$ の

$$a_1=\boxed{6}, \text{公比は } \boxed{2}$$

である．

このとき，一般項 a_n は，$a_n=a_1r^{n-1}=6\cdot2^{n-1}$ であり

$$\begin{aligned}a_ka_{k+1}&=(6\cdot2^{k-1})\cdot(6\cdot2^k)\\&=(6\cdot2^{k-1})\cdot(6\cdot2\cdot2^{k-1})\\&=72\cdot4^{k-1}\end{aligned}$$

☜ $(2^{k-1})^2=(2^2)^{k-1}=4^{k-1}.$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}&=\sum_{k=1}^{n}72\cdot4^{k-1}\\&=\frac{72(4^n-1)}{4-1}\\&=\boxed{24}\left(\boxed{4}^n-\boxed{1}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

☜ 初項 72，公比 4 の等比数列の初項から第 n 項までの和．

☜ **等比数列の和**

初項 a，公比 r $(\neq1)$ の等比数列の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

である．

次に，数列 $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases}b_1=1,\\ b_{n+1}=2b_n+a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

で定められる数列である．

(1) $c_n=\dfrac{b_n}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと

$$c_1=\frac{b_1}{2^1}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．また，(*) の両辺を 2^{n+1} で割ることにより

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{a_n}{2^{n+1}}$$

が成り立ち，さらに，$a_n=3\cdot2^n$ であるから

☜ $a_n=6\cdot2^{n-1}=3\cdot2\cdot2^{n-1}=3\cdot2^n.$

$$c_{n+1}=c_n+\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ $\dfrac{b_n}{2^n}=c_n$ より $\dfrac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=c_{n+1}$ であり，
また

$$\frac{a_n}{2^{n+1}}=\frac{3\cdot2^n}{2\cdot2^n}=\frac{3}{2}$$

である．

となる．よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列であるから

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{2}\\&=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n-\boxed{1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

☜ **等差数列の一般項**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d.$$

である．したがって

$$b_n = c_n \cdot 2^n$$
$$= \left(\frac{3}{2}n - 1\right) \cdot 2^n$$
$$= \left(\boxed{\ 3\ }n - \boxed{\ 2\ }\right) \cdot 2^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ $c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$.

である.

(2) (*) より

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + a_{n+1}. \quad \cdots①$$

☜ (*) で n を $n+1$ に置き換えた.

また

$$a_{n+1} = \boxed{\ 2\ }a_n$$
$$= 2(b_{n+1} - 2b_n)$$

☜ 数列 $\{a_n\}$ は公比 2 の等比数列である.

☜ (*) より, $a_n = b_{n+1} - 2b_n$.

が成り立つから, これを ① に代入して

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2(b_{n+1} - 2b_n)$$
$$= \boxed{\ 4\ }b_{n+1} - \boxed{\ 4\ }b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる. よって

$$\frac{b_{k+2}}{b_k b_{k+1}} = \frac{4(b_{k+1} - b_k)}{b_k b_{k+1}}$$
$$= 4\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{k+2}}{b_k b_{k+1}} = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right)$$
$$= 4\left\{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) + \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) + \left(\frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b_n}\right) + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= 4\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$$
$$= 4\left\{1 - \frac{1}{(3n+1)\cdot 2^n}\right\}$$
$$= \boxed{\ 4\ } - \frac{1}{\left(\boxed{\ 3\ }n+1\right)\cdot 2^{n-2}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ $b_n = (3n-2)\cdot 2^{n-1}$ より
$b_{n+1} = \{3(n+1)-2\}\cdot 2^n$
$= (3n+1)\cdot 2^n$
である.

である. よって, $\boxed{\text{ナ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる.

第４問　ベクトル

Ｏを原点とする座標空間内に，３点 A(2, 0, 0)，B(0, 6, 0)，C(0, 0, 6) がある．線分 AC の中点 D の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ 0,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，線分 BC を２：１に内分する点 E の座標は $\left(0,\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ である．さらに，点 F(0, 0, 1) をとり，三角形 DEF の重心を G とすると，G の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{3},\ \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{3},\ \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{3}\right)$ である．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\left(\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{3},\ \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{3},\ \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\left(\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{3},\ \dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{3},\ \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{3}\right)$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}\ \boxed{\text{テ}}\ 0$ である．したがって，$\angle$AGB は $\boxed{\text{ト}}$ である．$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．

⓪　＝　　　　①　＞　　　　②　＜
③　鋭角　　　④　直角　　　⑤　鈍角

(2)　z 軸上に点 $\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ \dfrac{11}{3}\right)$ をとり，直線 PG と平面 ABC との交点を Q とする．点 Q は直線 PG 上にあるから，q を実数として $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ と表される．また，点 Q は平面 ABC 上にあるから，s，t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表される．これを変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\boxed{\text{ナ}}-s-t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

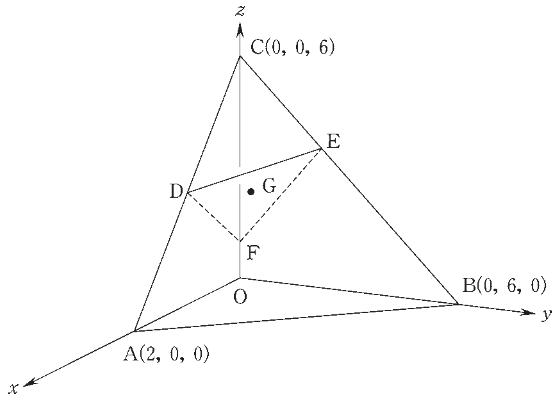
である．よって，$q=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である．

さらに，直線 PG 上に点 H を，AH$\perp$PG を満たすようにとる．k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ と表されるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\boxed{\text{ネ}}$ であることを用いると，$k=\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である．よって，点 H は四面体 OABC の $\boxed{\text{ヘ}}$ にある．$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　内部　　　①　面上　　　②　外部

【解説】

問題



A(2, 0, 0), C(0, 0, 6) であるから，線分 AC の中点 D の座標は

$$\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{0+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)$$

すなわち

$$D\left(\boxed{1},\ 0,\ \boxed{3}\right)$$

である．また，B(0, 6, 0), C(0, 0, 6) であるから，線分 BC を 2：1 に内分する点 E の座標は

$$\left(\frac{1\cdot0+2\cdot0}{2+1},\ \frac{1\cdot6+2\cdot0}{2+1},\ \frac{1\cdot0+2\cdot6}{2+1}\right)$$

すなわち

$$E\left(0,\ \boxed{2},\ \boxed{4}\right)$$

である．さらに，F(0, 0, 1) であるから，三角形 DEF の重心 G の座標は

$$\left(\frac{1+0+0}{3},\ \frac{0+2+0}{3},\ \frac{3+4+1}{3}\right)$$

すなわち

$$G\left(\frac{\boxed{1}}{3},\ \frac{\boxed{2}}{3},\ \frac{\boxed{8}}{3}\right)$$

である．

(1)
$$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}$$
$$=(2,\ 0,\ 0)-\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{\boxed{5}}{3},\ \frac{\boxed{-2}}{3},\ \frac{\boxed{-8}}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}$$
$$=(0,\ 6,\ 0)-\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{\boxed{-1}}{3},\ \frac{\boxed{16}}{3},\ \frac{\boxed{-8}}{3}\right)$$

☜ **中点**

$A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるとき，線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2},\ \frac{a_3+b_3}{2}\right).$$

☜ **内分点**

$A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ であるとき，線分 AB を $m：n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right).$$

☜ **三角形の重心**

3 点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を頂点とする三角形 ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3},\ \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right).$$

であるから

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{16}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$$
$$=\frac{27}{9}$$
$$>0$$

より，∠AGB は鋭角である．したがって，$\boxed{テ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ であり，$\boxed{ト}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

ベクトルの内積

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

$\vec{a}\ (\neq\vec{0})$ と $\vec{b}\ (\neq\vec{0})$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

であるから

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \iff \theta$ は鋭角，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \theta$ は直角，

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \iff \theta$ は鈍角．

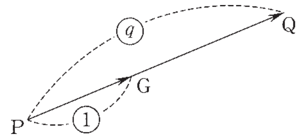
(2)　点 Q は直線 PG 上にあるから，実数 q を用いて

$$\overrightarrow{PQ}=q\overrightarrow{PG}$$

と表される．これを変形すると

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=q\overrightarrow{PG}.$$

$q>0$ のとき



よって

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+q\overrightarrow{PG}$$
$$=\left(0,\ 0,\ \frac{11}{3}\right)+q\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -1\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}q,\ \frac{2}{3}q,\ -q+\frac{11}{3}\right). \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}$

$=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right)-\left(0,\ 0,\ \frac{11}{3}\right)$

$=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -1\right).$

また，点 Q は平面 ABC 上にもあるので，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

と表される．これを変形すると

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

すなわち

$$\overrightarrow{OQ}=\left(\boxed{1}-s-t\right)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

であるから

$$\overrightarrow{OQ}=(1-s-t)(2,\ 0,\ 0)+s(0,\ 6,\ 0)+t(0,\ 0,\ 6)$$
$$=(2-2s-2t,\ 6s,\ 6t). \quad \cdots②$$

①，② において各々の成分を比較すると

$$\begin{cases} \frac{1}{3}q=2-2s-2t & \cdots③ \\ \frac{2}{3}q=6s & \cdots④ \\ -q+\frac{11}{3}=6t. & \cdots⑤ \end{cases}$$

これを解いて

$$q=\frac{\boxed{7}}{\boxed{2}},\quad s=\frac{7}{18},\quad t=\frac{1}{36}.$$

④ より，$s=\frac{1}{9}q$.

⑤ より，$t=-\frac{1}{6}q+\frac{11}{18}$.

これらを ③ に代入して

$$\frac{1}{3}q=2-\frac{2}{9}q+\frac{1}{3}q-\frac{11}{9}$$

より

$$\frac{2}{9}q=\frac{7}{9}.$$

よって，$q=\frac{7}{2}$.

また，点 H は直線 PG 上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{PH}=k\overrightarrow{PG}$ と表される．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PG}}\\&=\left(-2,\ 0,\ \frac{11}{3}\right)+k\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -1\right)\\&=\left(\frac{1}{3}k-2,\ \frac{2}{3}k,\ -k+\frac{11}{3}\right)\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(0,\ 0,\ \frac{11}{3}\right)-(2,\ 0,\ 0)=\left(-2,\ 0,\ \frac{11}{3}\right).$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PG}}&=\left(\frac{1}{3}k-2\right)\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k\cdot\frac{2}{3}+\left(-k+\frac{11}{3}\right)\cdot(-1)\\&=\frac{14}{9}k-\frac{13}{3}\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -1\right).$

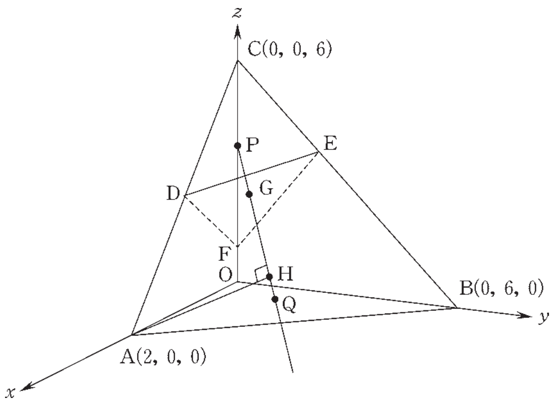
である．ここで，AH⊥PG より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\boxed{0}$ であるから

$$\frac{14}{9}k-\frac{13}{3}=0$$

すなわち

$$k=\frac{\boxed{39}}{\boxed{14}}$$

である．

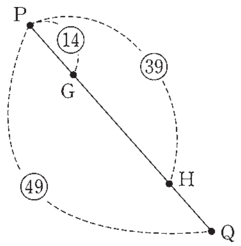


$q=\frac{7}{2}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{PG}}$.

$k=\frac{39}{14}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\frac{39}{14}\overrightarrow{\mathrm{PG}}$.

さらに，$\frac{39}{14}<\frac{7}{2}$ であるから，点 H は線分 PQ (端点を除く) 上にある．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{7}{18}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{36}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\frac{7}{18}+\frac{1}{36}=\frac{5}{12}<1$ より点 Q は三角形 ABC の内部にあるから，点 H は四面体 OABC の内部にある．したがって，$\boxed{へ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

☜ $\frac{39}{14}<\frac{49}{14}=\frac{7}{2}.$



☜ 点 Q が三角形 ABC の内部にある条件は

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1.\end{cases}$$

第5問　統　計

次の表は，大学の研究チームXが，ある川の特定の地点において，1年間を通して毎月水を100 mℓ採取し，その中に含まれる2種類の微生物P，Qの個体数を調べた結果をまとめたものである．ただし，微生物Pの個体数を変量 p，Qの個体数を変量 q とする．また，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていない．

月	p	q
1	5	2
2	2	6
3	6	C
4	7	14
5	11	D
6	13	29
7	12	32
8	9	26
9	9	25
10	7	15
11	9	8
12	6	4
平均値	A	16.0
分散	B	108.0

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1)　変量 p の中央値は $\boxed{ア}.\boxed{イ}$ 個，平均値Aは $\boxed{ウ}.\boxed{エ}$ 個，分散Bの値は $\boxed{オ}.\boxed{カ}$ であり，標準偏差の値は $\boxed{キ}.\boxed{ク}$ である．

(2)　表中のC，Dについては，C＜Dが成り立っている．

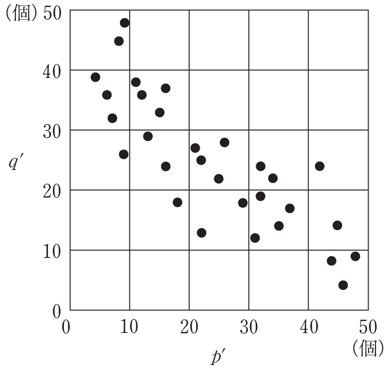
C，Dの値から平均値16.0を引いた値をそれぞれ u，v とおくと，変量 q の平均値が16.0，分散の値が108.0であることから，次の式が成り立つ．

$u+v=\boxed{ケコ}$

$u^2+v^2=\boxed{サシス}$

これらを連立して解くと u，v が求められ，C，Dの値がそれぞれ $\boxed{セ}$，$\boxed{ソタ}$ であることがわかる．

(3)　研究チームXは，同様の調査を同じ川の30の地点で行っている．この30の地点におけるある月の調査結果に対して，相関図(散布図)を作ったところ次のようになった．ただし，微生物Pの個体数を変量 p'，Qの個体数を変量 q' とし，相関図(散布図)中の点は，度数1を表す．

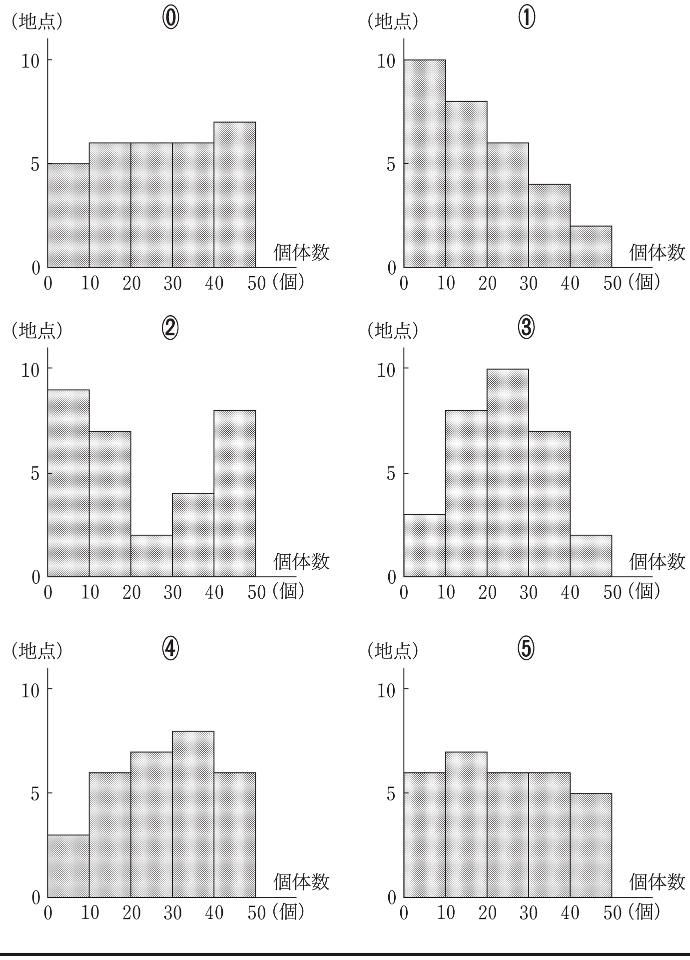


二つの変量 p'，q' の相関係数に最も近い値は $\boxed{\text{チ}}$ である．$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ．

⓪　-1.5　　①　-0.8　　②　-0.2　　③　0.0

④　0.2　　⑤　0.8　　⑥　1.5

変量 p' のヒストグラムは $\boxed{\text{ツ}}$ であり，変量 q' のヒストグラムは $\boxed{\text{テ}}$ である．$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤ のうちから一つずつ選べ．



変量 p', q' の標準偏差をそれぞれ $s_{p'}$, $s_{q'}$ とすると, $s_{p'}$ と $s_{q'}$ の大小関係は $\boxed{\text{ト}}$ である.

$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを, 次の⓪～②のうちから一つ選べ.

⓪ $s_{p'} < s_{q'}$　　① $s_{p'} = s_{q'}$　　② $s_{p'} > s_{q'}$

【解説】

問題

(1) 変量 p の値を小さい順に並べると次のようになる.

2, 5, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 9, 11, 12, 13

中央値は 6 番目と 7 番目の平均値であるから

$$\frac{7+9}{2}=\boxed{8}.\boxed{0} \text{ 個}$$

である. また, 平均値 A は

$$\frac{2+5+6+6+7+7+9+9+9+11+12+13}{12}$$

$$=\boxed{8}.\boxed{0} \text{ 個}$$

である.

この平均値を $\overline{p}$ とし, 変量 p の偏差 $p-\overline{p}$ をまとめると, 次の表になる.

月	p	$p-\overline{p}$
1	5	-3
2	2	-6
3	6	-2
4	7	-1
5	11	3
6	13	5
7	12	4
8	9	1
9	9	1
10	7	-1
11	9	1
12	6	-2

この表により, 変量 p の分散 B の値は

$$\frac{1}{12}\{(-3)^2+(-6)^2+(-2)^2+(-1)^2+3^2+5^2$$
$$+4^2+1^2+1^2+(-1)^2+1^2+(-2)^2\}$$

$$=\boxed{9}.\boxed{0}$$

であり, 標準偏差の値は

$$\sqrt{9.0}=\boxed{3}.\boxed{0}$$

である.

中央値

資料を大きさの順に並べたとき, その中央の値を中央値という. 資料の個数が偶数のときは, 中央に並ぶ二つの資料の平均値を中央値とする.

平均値

変量 x がとる N 個の値を

$x_1, x_2, \cdots, x_N$

とすると平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i.$$

$p-\overline{p}$ を p の偏差という.

分散

変量 x がとる N 個の値を

$x_1, x_2, \cdots, x_N$

とすると, 分散 s^2 は, 平均値を $\overline{x}$ として

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2 \quad \cdots(ア)$$

または

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i{}^2-(\overline{x})^2. \quad \cdots(イ)$$

ここでは(ア)を用いた.

標準偏差

分散 s^2 の正の平方根 s を標準偏差という.

(2) 変量 q の平均値を $\overline{q}$ とし，変量 q の偏差 $q-\overline{q}$ と $(q-\overline{q})^2$ を
まとめると，次の表になる．

☜ 表から $\overline{q}=16.0$ である．

月	q	$q-\overline{q}$	$(q-\overline{q})^2$
1	2	-14	196
2	6	-10	100
3	C	u	u^2
4	14	-2	4
5	D	v	v^2
6	29	13	169
7	32	16	256
8	26	10	100
9	25	9	81
10	15	-1	1
11	8	-8	64
12	4	-12	144

$q-\overline{q}$ の値の和は 0 であるから

$$(-14)+(-10)+u+(-2)+v+13+16+10+9+(-1)+(-8)+(-12)=0$$

より

$$u+v=\boxed{-1}. \quad \cdots①$$

$(q-\overline{q})^2$ の値の和は 108.0×12 であるから

$$196+100+u^2+4+v^2+169+256+100+81+1+64+144=108.0\times12$$

より

$$u^2+v^2=\boxed{181}. \quad \cdots②$$

☜ $(q-\overline{q})^2$ の平均値が変量 q の分散である．

$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$ であるから，①, ② より

$$181=(-1)^2-2uv$$

$$uv=-90. \quad \cdots③$$

①, ③ より，u, v は x の 2 次方程式

$$x^2-(-1)x+(-90)=0$$

の 2 解である．これを変形すると

$$(x+10)(x-9)=0$$

より

$$x=-10,\ 9$$

を得る．C < D より $u<v$ であるから

$$u=-10,\ v=9$$

である．

☜ **二つの数を解とする 2 次方程式**
二つの数 α, β に対して，
$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$ のとき，α, β を 2 解とする 2 次方程式の一つは
$$x^2-px+q=0.$$

よって，表中の

Cの値は $u+16=\boxed{6}$,

Dの値は $v+16=\boxed{25}$

である.

(3)　相関図(散布図)から二つの変量 p', q' には強い負の相関があると考えられる. したがって, 変量 p' と q' の相関係数は -0.8 に最も近い. すなわち, $\boxed{チ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である.

☜ 実際のデータから相関係数を計算すると $-0.829\cdots$ である.

相関図(散布図)から二つの変量 p', q' の度数分布表を作ると, 次のようになる.

階級	p' 度数	q' 度数
以上　未満 0 ～ 10	6	3
10 ～ 20	7	8
20 ～ 30	6	10
30 ～ 40	6	7
40 ～ 50	5	2
計	30	30

この表より, 変量 p' のヒストグラムは⑤, すなわち $\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$ であり, 変量 q' のヒストグラムは③, すなわち $\boxed{テ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である.

これらのヒストグラムから, 変量 p' の方が変量 q' より, 値の散らばりの度合いが大きい（変量 q' の方が変量 p' より平均値に近いところに集まっている）ことが読み取れる. したがって, 標準偏差をそれぞれ $s_{p'}$, $s_{q'}$ とするとき, $s_{p'}>s_{q'}$ が成り立つ. よって, $\boxed{ト}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である.

☜ 分散や標準偏差は変量の値の散らばりの度合いを表している.
散らばりの度合いが大きいほど標準偏差も大きい.

【参考】

上の度数分布表から, 変量 p', 変量 q' が各々の階級値をとるものとして, 平均値, 分散, 標準偏差を求めると, 次の表になる.
(小数第 2 位を四捨五入した)

☜ 各階級の階級値は小さい方から順に
5, 15, 25, 35, 45
である.

変量	p'	q'
平均値	24.0	24.0
分散	189.0	115.7
標準偏差	13.7	10.8

第6問　コンピュータ

次の〔プログラム１〕について考える．ただし，変数Xには正の実数を，変数Nには正の整数を入力するものとする．

〔プログラム１〕

```
100 INPUT PROMPT "X=": X
110 INPUT PROMPT "N=": N
120 LET M=1
130 IF M/N>X THEN GOTO 160
140     LET M=M+1
150     GOTO 130
160 PRINT M;"／"; N
170 END
```

(1) 〔プログラム１〕を実行して，変数Xに4.6，変数Nに5を入力すると

$\boxed{\text{アイ}}$ ／ $\boxed{\text{ウ}}$

が出力される．また，変数Xに3.141，変数Nに7を入力すると，140行は $\boxed{\text{エオ}}$ 回実行されて

$\boxed{\text{カキ}}$ ／ $\boxed{\text{ク}}$

が出力される．このように〔プログラム１〕は，変数Xに正の実数を，変数Nに正の整数を入力すると $\boxed{\text{ケ}}$ を出力するプログラムである．$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　Nを分母とする有理数のうち，Xを超えない最大のもの
①　Nを分母とする有理数のうち，X未満で最大のもの
②　Nを分母とする有理数のうち，Xを超える最小のもの
③　Nを分母とする有理数のうち，X以上の最小のもの

(2) 〔プログラム１〕の120行から150行を $\boxed{\text{コ}}$ と書き換えても同じ出力が得られる．また，Nを分母とする有理数のうち，Xに最も近いものを出力させるためには，〔プログラム１〕の120行から150行を $\boxed{\text{サ}}$ と書き換えればよい．ただし，Lを負でない整数として，Xが

$$\left|X-\frac{L}{N}\right|=\left|X-\frac{L+1}{N}\right|$$

を満たすときは，$\frac{L+1}{N}$ をXに最も近いものとする．$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ．INT(X)はXを超えない最大の整数を表す関数である．

⓪　LET M=INT(X*N)	①　LET M=INT(X/N)
②　LET M=INT(X*N-1)	③　LET M=INT(X/N-1)
④　LET M=INT(X*N+0.5)	⑤　LET M=INT(X/N+0.5)
⑥　LET M=INT(X*N+1)	⑦　LET M=INT(X/N+1)

〔プログラム１〕を参考にして，正の実数 X に対し，分母が 1 以上 99 以下の有理数で X に最も近いものを出力する〔プログラム２〕を次のように作成した．ただし，ABS(X) は X の絶対値を与える関数である．

〔プログラム２〕

```
100 INPUT PROMPT "X=": X
110 LET D=1
120 FOR N=1 TO 99
130    サ
140    LET E=ABS(X-M/N)
150    IF D<E THEN GOTO シ
160    LET U=N
170    LET V=M
180    LET ス
190 NEXT N
200 PRINT V;"／"; U
210 END
```

(3) 〔プログラム２〕の $\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．

⓪ 180　　① 190　　② 210　　③ D=E-1
④ D=E　　⑤ D=E+1

(4) 〔プログラム２〕を実行して，変数 X に 0.5 を入力すると

$\boxed{\text{セソ}}$ ／ $\boxed{\text{タチ}}$

が出力される．変数 X に正の実数を入力したとき，既約分数を出力するには，150 行の D<E を $\boxed{\text{ツ}}$ と書き換えればよい．$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

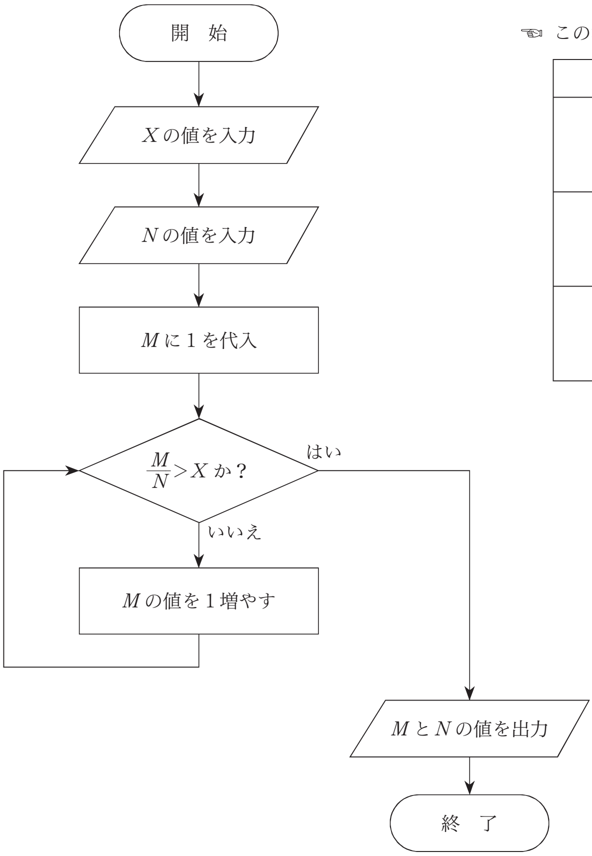
⓪ D<=E　　① D=E　　② D>E　　③ D>=E

【解説】

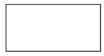
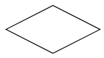
問題

〔プログラム１〕の流れ図は次のようになる．

〔流れ図〕



☜ この流れ図での記号の意味

記号	意味
	入出力
	処　理
	条件判断

(1) 〔プログラム１〕を実行して，変数 X に 4.6，変数 N に 5 を入力すると，次の表のように動作する．

130 行	140 行	160 行
$\frac{1}{5}>4.6$（偽）	M＝2	
$\frac{2}{5}>4.6$（偽）	M＝3	
⋮	⋮	⋮
$\frac{23}{5}>4.6$（偽）	M＝24	
$\frac{24}{5}>4.6$（真）	→	$\frac{24}{5}$ を出力

☜ $\frac{24}{5}=4.8$ である．

よって

$\boxed{24}$ ／ $\boxed{5}$

が出力される．また，変数 X に 3.141，変数 N に 7 を入力すると，次の表のように動作する．

130 行	140 行	160 行
$\frac{1}{7}>3.141$（偽）	M＝2（１回目）	
$\frac{2}{7}>3.141$（偽）	M＝3（２回目）	
⋮	⋮	⋮
$\frac{21}{7}>3.141$（偽）	M＝22（21 回目）	
$\frac{22}{7}>3.141$（真）	→	$\frac{22}{7}$ を出力

☜ $\frac{22}{7}=3.142\cdots$ である．

よって，140 行は $\boxed{21}$ 回実行されて

$\boxed{22}$ ／ $\boxed{7}$

が出力される．このように〔プログラム１〕は，変数 X に正の実数を，変数 N に正の整数を入力すると，N を分母とする有理数のうち，X を超える最小のものを出力するプログラムである．よって，$\boxed{ケ}$ には $\boxed{②}$ が当てはまる．

(2) 〔プログラム１〕の 120 行から 150 行では，N を分母とする有理数のうち，X を超える最小のものを求めている．すなわち

$$\frac{M-1}{N} \leqq X < \frac{M}{N}$$

$$M-1 \leqq XN < M$$

$$M \leqq XN+1 < M+1$$

を満たす整数 M を求めている．よって，120 行から 150 行を

```
LET M=INT(X*N+1)
```

と書き換えても同じ出力が得られる．よって，$\boxed{\text{コ}}$ には

$\boxed{⑥}$ が当てはまる．また，N を分母とする有理数のうち，X に最も近いものを求めるには

$$\frac{M}{N} \leqq X < \frac{M+0.5}{N}$$

☜ 例えば X=3.65 のとき

$$\frac{18}{5} \leqq X < \frac{18.5}{5} < \frac{19}{5}$$

が成り立つから，5 を分母とする有理数のうち，X に最も近いものは $\frac{18}{5}$．

のとき

$$M \leqq XN < M+0.5$$

$$M+0.5 \leqq XN+0.5 < M+1$$

を満たす整数 M を求め

$$\frac{M-0.5}{N} \leqq X < \frac{M}{N}$$

のとき

$$M-0.5 \leqq XN < M$$

$$M \leqq XN+0.5 < M+0.5$$

を満たす整数 M を求めればよい．よって，$\boxed{\text{サ}}$ には $\boxed{④}$ が当てはまる．

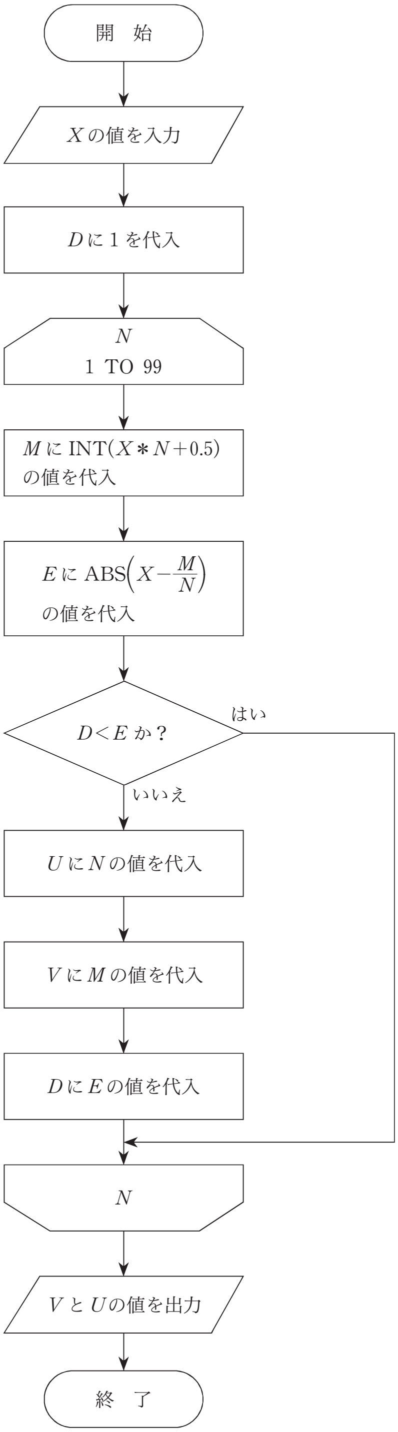
(3) 〔プログラム 2〕について考える．140 行では $\left|X-\frac{M}{N}\right|$ の値を E に代入する．150 行で D≧E であれば，160 行から 180 行において，U に N の値を，V に M の値を，D に E の値を代入する．150 行で D<E であれば，190 行にジャンプする．よって，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ にはそれぞれ $\boxed{①}$，$\boxed{④}$ が当てはまる．

完成した〔プログラム 2〕と流れ図は次のようになる．

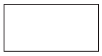
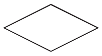
〔プログラム 2〕

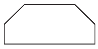
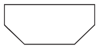
```
100 INPUT PROMPT "X=": X
110 LET D=1
120 FOR N=1 TO 99
130     LET M=INT(X*N+0.5)
140     LET E=ABS(X-M/N)
150     IF D<E THEN GOTO 190
160     LET U=N
170     LET V=M
180     LET D=E
190 NEXT N
200 PRINT V;"／"; U
210 END
```

〔流れ図〕



☜ この流れ図での記号の意味

記号	意味
	入出力
	処　理
	条件判断

記号  と  で

囲まれた部分はループを表す.

(4) 〔プログラム２〕を実行して，変数 X に 0.5 を入力すると，次の表のように動作する．

N	130 行	140 行	150 行	160 行〜180 行
1	M＝1	E＝0.5	1＜0.5（偽）	$\frac{V}{U}=\frac{1}{1}$，D＝0.5
2	M＝1	E＝0	0.5＜0（偽）	$\frac{V}{U}=\frac{1}{2}$，D＝0
3	M＝2	E＝0.16…	0＜0.16…（真）	
4	M＝2	E＝0	0＜0（偽）	$\frac{V}{U}=\frac{2}{4}$，D＝0
⋮	⋮	⋮	⋮	
97	M＝49	E＝0.005…	0＜0.005…（真）	
98	M＝49	E＝0	0＜0（偽）	$\frac{V}{U}=\frac{49}{98}$，D＝0
99	M＝50	E＝0.005…	0＜0.005…（真）	

よって

$\boxed{49}$／$\boxed{98}$

が出力される．変数 X に正の実数を入力したとき，既約分数を出力するには，150 行の D<E を D<=E に書き換えればよい．よって，$\boxed{ツ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．このとき，書き換えられた〔プログラム２〕を実行して，変数 X に 0.5 を入力すると，次の表のように動作する．

N	130 行	140 行	150 行	160 行〜180 行
1	M＝1	E＝0.5	1≦0.5（偽）	$\frac{V}{U}=\frac{1}{1}$，D＝0.5
2	M＝1	E＝0	0.5≦0（偽）	$\frac{V}{U}=\frac{1}{2}$，D＝0
3	M＝2	E＝0.16…	0≦0.16…（真）	
4	M＝2	E＝0	0≦0（真）	
⋮	⋮	⋮	⋮	
97	M＝49	E＝0.005…	0≦0.005…（真）	
98	M＝49	E＝0	0≦0（真）	
99	M＝50	E＝0.005…	0≦0.005…（真）	

よって

1／2

が出力される．

【理　　科】

物　理　Ｉ

【解答・採点基準】　　(100点満点)

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	問1		1	1	4	
	問2		2	3	4	
	問3		3	1	5	
	問4		4	5	3	
	問5		5	4	4	
	問6		6	2	4	
第1問　自己採点小計					(24)	
第2問	A	問1	7	4	3	
			8	1	3	
		問2	9	4	4	
		問3	10	2	4	
	B	問4	11	1	4	
		問5	12	3	4	
第2問　自己採点小計					(22)	
第3問	A	問1	13	4	4	
		問2	14	3	5	
		問3	15	5	5	
	B	問4	16	4	4	
		問5	17	4	4	
第3問　自己採点小計					(22)	
第4問	A	問1	18	3	4	
		問2	19	1	4	
		問3	20	2	4	
	B	問4	21	4	4	
		問5	22	2	4	
		問6	23	3	4	
	C	問7	24	3	4	
		問8	25	5	4	
第4問　自己採点小計					(32)	
自己採点合計					(100)	

【解説】　**問題**

第1問　小問集合

問1　小物体の質量を m，重力加速度の大きさを g とする。斜面上をすべっているとき，小物体には重力 mg と斜面から垂直抗力 N_1 がはたらく。斜面に沿って下向きの加速度を a_1 とする。**運動方程式**は，

$$ma_1 = mg\sin 30^\circ \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{1}{2}g$$

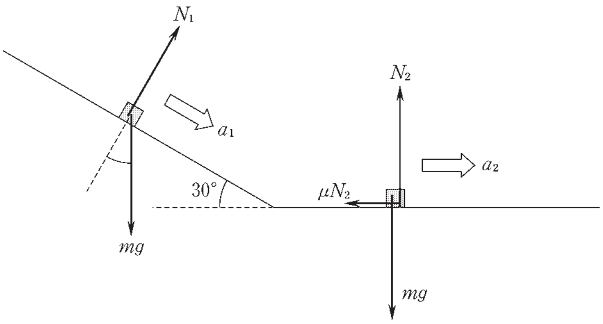
求める動摩擦係数を μ とする。床の上をすべっているとき，小物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N_2，床に沿って右向きの加速度を a_2 とする。鉛直方向の力のつり合いより，$N_2 = mg$ なので，床に沿って左向きに**動摩擦力** $\mu N_2 = \mu mg$ がはたらく。運動方程式は，

$$ma_2 = -\mu N_2 = -\mu mg \qquad \therefore \quad a_2 = -\mu g$$

床をすべるときの加速度の大きさは斜面をすべるときの加速度の大きさと等しいので，

$$|a_2| = a_1 \qquad \therefore \quad \mu g = \frac{1}{2}g$$

これより，$\mu = \underline{0.5}$



$\boxed{1}$ の答　①

問2　机の質量を M，高さを b，足A，Bの間隔を a とする。また，重心の位置は足A，Bの中心線上にあるとし，重力加速度の大きさを g とする。机にはたらく力を図示すると次図のようになる。足Aと床の交線のまわりの**力のモーメント**のつり合いより，

$$F\cdot b + Mg\cdot\frac{1}{2}a = N\cdot a$$

$$\therefore \quad N = \frac{1}{2}Mg + \frac{b}{a}F$$

【ポイント】

運動方程式

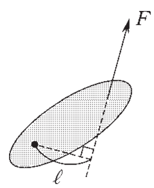
(質量)×(加速度)=(合力)

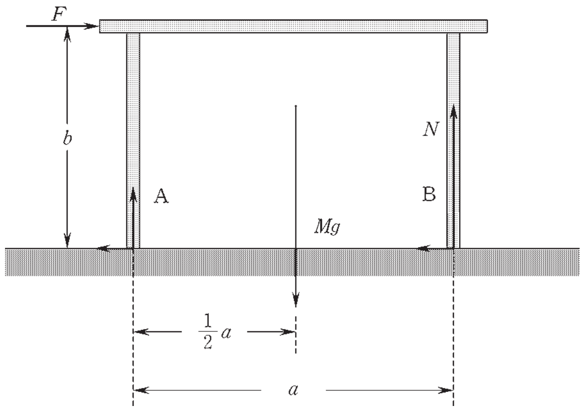
動摩擦力

(動摩擦力)=(動摩擦係数)×(垂直抗力)

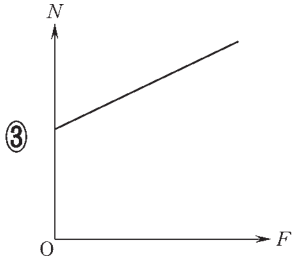
力のモーメント

(力のモーメント)$=F\times\ell$



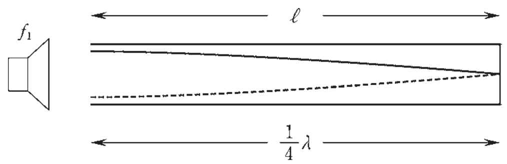


したがって，グラフは下図のようになる。



$\boxed{2}$ の答　③

問 3　音源の振動数を 0 から徐々に大きくしていくと，**閉管**内には管口を腹，管底を節とする波長最大の**基本振動**の定常波が最初に生じる。



音の波長を λ とすると，$\frac{1}{4}\lambda=\ell$ より，$\lambda=4\ell$

したがって，**波の関係式**より，

$$f_1=\frac{V}{\lambda}=\underline{\frac{V}{4\ell}}_{\text{ア}}$$

一方，長さ $\frac{1}{2}\ell$ の**開管**内に生じる基本振動の波長を λ' とすると，$\frac{1}{2}\lambda'=\frac{1}{2}\ell$ より，$\lambda'=\ell$

$\lambda'<\lambda$ なので，振動数を f_1 から徐々に大きくしていくと波長はしだいに小さくなり，開管には両端を腹とする基本振動の定常波が生じる。

閉管の共鳴
開端(管口)を腹，閉端を節とする定常波ができる。

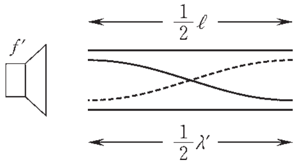
基本振動
振動数が最小(波長が最大)の定常波が生じた状態を基本振動という。

波の関係式

$$v=f\lambda=\frac{\lambda}{T}$$

v；速さ
f；振動数
T；周期
λ；波長

開管の共鳴
管の両端(開端)を腹とする定常波ができる。



このときの振動数を f' とすると，

$$f'=\frac{V}{\lambda'}=\frac{V}{\ell}=\underline{4}_{\text{イ}}f_1$$

$\boxed{3}$ の答　①

問 4　音源の振動数を f とする。音源から出て西向き(音源の進行方向と逆向き)に伝わる音の波長は，**ドップラー効果における波の波長**の公式より，$\lambda=\dfrac{V+v}{f}$ である。一方，音源から出て東向き(音源の進行方向)に伝わる音の波長は，$\lambda'=\dfrac{V-v}{f}$ である。この音が静止した反射板で反射されて西向きに伝わる音になっても波長は変わらず λ' のままである。したがって，

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\underline{\frac{V+v}{V-v}}$$

$\boxed{4}$ の答　⑤

ドップラー効果における波の波長

波源の運動の前方に伝わる場合

$\lambda_1=\dfrac{V-v}{f}$

波源の運動の後方に伝わる場合

$\lambda_2=\dfrac{V+v}{f}$

V；波の速さ

v；波源の速さ

f；波源の振動数

問 5　容器の**熱容量**を C〔J/K〕，お湯(水)の比熱を c_W〔J/(g･K)〕とする。初めの操作において，**熱量の保存**より，容器が得た熱量はお湯が失った熱量に等しいので，

$$C(45-15)=100c_W(75-45)$$

$$\therefore\quad C=100c_W \qquad \cdots①$$

後の操作で入れたお湯の質量を m〔g〕とする。容器とすでに入っているお湯が得た熱量は後から入れたお湯が失った熱量に等しいので，

$$(C+100c_W)(60-45)=mc_W(75-60) \qquad \cdots②$$

①，②より，

$$200c_W\times15=mc_W\times15 \qquad \therefore\quad m=\underline{200}\text{〔g〕}$$

$\boxed{5}$ の答　④

熱容量

(熱容量)＝(質量)×(比熱)

(物体に出入りした熱量)

＝(熱容量)×(温度変化)

熱量の保存

(高温物体が失った熱量)

＝(低温物体が得た熱量)

問 6　容器A内の気体の内部エネルギーの増加量を $\varDelta U$ とする。ピストンが固定されているので容器A内の気体は仕事をしない。したがって，**熱力学第 1 法則**より，

$$Q_A=\varDelta U$$

容器A内の気体と容器B内の気体は初めの温度および温度上昇が等しいので，2 つの気体の内部エネルギーの増加量 $\varDelta U$ は等しい。求める仕事を W とすると，容器B内の気体について熱力学第 1 法則より，

$$Q_B=\varDelta U+W$$

これら 2 式より，

$$Q_B=Q_A+W \qquad \therefore\quad W=\underline{Q_B-Q_A}$$

熱力学第 1 法則

$Q=\varDelta U+W_{out}$

Q　；気体が吸収した熱量

$\varDelta U$；内部エネルギーの増加量

W_{out}；気体がした仕事

気体がされた仕事 W_{in} を用いると，

$W_{in}=-W_{out}$ より，

$\varDelta U=Q+W_{in}$

$\boxed{6}$ の答　②

第 2 問　非直線抵抗・電磁誘導　問題

A

問 1　白熱電球にかかる電圧が 60 V のとき，図 2 のグラフより，0.50 A の電流が流れる。

$\boxed{7}$ の答　④

電球にかかる電圧と抵抗にかかる電圧の和は 120 V に等しいので，このとき，可変抵抗にも 60 V の電圧がかかっている。したがって，**オームの法則**より，可変抵抗の抵抗値は，

$$\frac{(\text{電圧})}{(\text{電流})}=\frac{60}{0.5}=\underline{120}\ \Omega$$

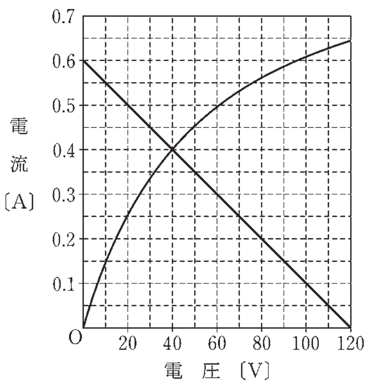
$\boxed{8}$ の答　①

問 2　200 Ω の抵抗には $200I$ の電圧がかかっている。電球にかかる電圧 V と抵抗にかかる電圧の和は PQ 間の電圧 120 V に等しいので，

$$\underline{120=V+200I}$$

$\boxed{9}$ の答　④

問 3　**問 2** で得られた I と V の関係式は，グラフ上では直線を表す方程式である。この式が表す直線と与えられているグラフを連立する。すなわち，直線とグラフの交点を求める。



これより，$I=0.4$ A，$V=40$ V

したがって，白熱電球の**消費電力**は，

$$IV=0.4\times40=\underline{16}\ \text{W}$$

$\boxed{10}$ の答　②

B

問 4　次図のように紙面に垂直で裏から表の向きに z 軸をとる。コイルの速さを図の点線の矢印で表す。

(i)　コイルBが磁界に入り始めて単位時間が経過すると，コイルを $+z$ 方向に貫く磁力線の数は，図の濃い影をつけた部分だけ増加する。したがって，**ファラデーの電磁誘導の法則**により，

オームの法則

抵抗 R に電流 I が流れているときの電圧 V

$V=RI$

消費電力

(消費電力)$=IV$

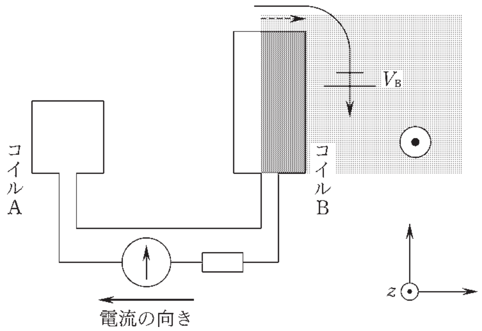
I；電流

V；電圧

ファラデーの電磁誘導の法則

コイルを貫く磁力線の数が変化するとコイルには誘導起電力が生じる。誘導起電力の大きさは磁力線の数の変化が激しいほど大きい。誘導起電力の向きは，それによって流れる電流のつくる磁力線が，外から加えられた磁力線の数の変化を打ち消す向きである。

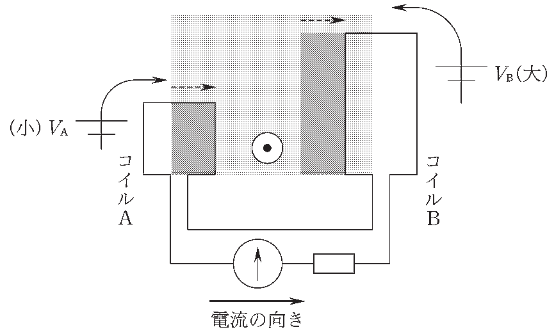
$-z$ 方向に磁界をつくるように，すなわち時計回りに電流を流すように誘導起電力 V_{B} が発生する。これより，検流計には正の向きの電流が流れる。



(ii) コイルB全体が磁界に入っている状態ではコイルを貫く磁力線の数は変わらないので電流は流れない。

(iii) コイルAが磁界に入り始めると同時にコイルBの右端は磁界から出始める。それから単位時間が経過すると，コイルを $+z$ 方向に貫く磁力線の数は，図の濃い影をつけた部分だけコイルAについては増加し，コイルBについては減少する。ファラデーの電磁誘導の法則より，コイルAには時計回りに電流を流すように，コイルBには $+z$ 方向に磁界をつくるように，すなわち，反時計回りに電流を流すように，それぞれ，誘導起電力 V_{A} および V_{B} が発生する。コイルBを貫く磁力線の数の変化の速さの方がコイルAのそれより大きいので V_{B} の方が V_{A} より大きい。したがって，検流計には負の向きの電流が流れる。

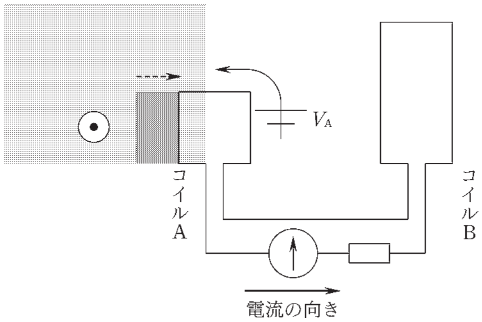
また，これは以下のように考えてもよい。コイルA，B全体としては，$+z$ 方向の磁力線の数が減少するので $+z$ 方向に磁界をつくるように誘導起電力が発生し，電流は負の向きになる。



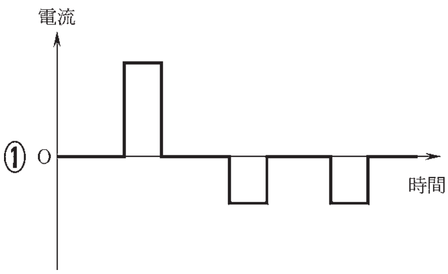
(iv) コイルA全体が磁界に入っている状態ではコイルを貫く磁力線の数は変わらないので電流は流れない。

(v) コイルAが磁界から出始めて単位時間が経過すると，コイルを $+z$ 方向に貫く磁力線の数は図の濃い影をつけた部分だけ

減少している。したがって，ファラデーの電磁誘導の法則により，反時計回りに電流を流すように誘導起電力 V_A が発生する。これより，検流計には負の向きの電流が流れる。なお，ここでの磁力線の数が減少する速さは，(i)のときの磁力線の数が増加する速さより小さいので，電流の強さは(i)の場合より小さい。



以上より，グラフは下図のようになる。



$\boxed{11}$ の答　①

問5　磁界の強さを大きくすると，コイルには大きな誘導起電力が発生して電流の強さが増加する。エネルギー保存の法則より，外力がする仕事は抵抗で発生する**ジュール熱**に等しい。したがって，外力がする仕事は大きくなる。

$\boxed{12}$ の答　③

第3問　水面波の干渉・レンズ　問題

A

問1　図2より，波の周期は，$T=0.05$ s。また，波長は $\lambda=4$ cm なので，波の関係式より波の速さは，

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{4}{0.05}=\underline{80}\,\text{cm/s}$$

$\boxed{13}$ の答　④

問2　波源A，Bから点Cまでの距離の差は，

$$\sqrt{18^2+24^2}-24=6\sqrt{3^2+4^2}-24=6\text{ cm}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot4=\left(1+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

ジュール熱

抵抗で単位時間あたり発生するジュール熱

$$P=IV=RI^2=\frac{V^2}{R}$$

I；電流

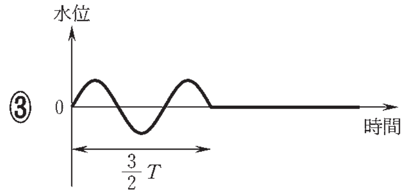
V；電圧

R；抵抗

したがって，波源Bからの波が点Cに達してから，波源Aからの波が点Cに達するまでに，

$$\frac{3}{2}\lambda \div v = \frac{3}{2}vT \div v = \frac{3}{2}T$$

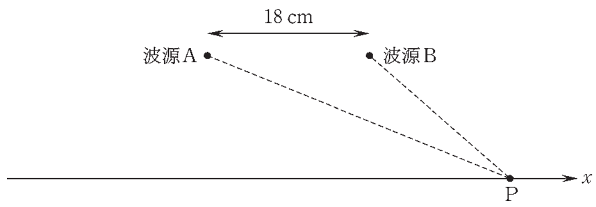
の時間を要する。また，**波の干渉条件**より，点Cは波源A，Bからの波が両方とも達すると，波が弱め合って水位が変化しない点となる。これより，点Cの水位の時間変化を表したグラフは次図のようになる。



$\boxed{14}$ の答　③

問3　x 軸上の任意の点を点Pとする。波の干渉条件より，波源A，Bからの波が点Pで強め合い，水面が大きく振動する条件は，整数を m とすると，

$$AP-BP=m\lambda=4m \quad \cdots①$$



点Pが x 軸の正方向の無限遠にあるとき

$$AP-BP \fallingdotseq AB=18 \quad \cdots②$$

また，点Pが x 軸の負方向の無限遠にあるとき

$$AP-BP \fallingdotseq -AB=-18 \quad \cdots③$$

①～③より，

$$-18<4m<18 \qquad \therefore -4 \leqq m \leqq 4$$

これより，$m=-4$，-3，-2，-1，0，1，2，3，4 の $\underline{9}$ か所

(別解)　波源AとBを結ぶ線分上では，互いに逆向きに伝わる波が干渉して**定常波**が生じている。その腹の個数を求めればよい。隣り合う腹(節)の距離は $\frac{1}{2}\lambda=2$ cm である。

波源AとBの中点は同位相の波が届くので波は強め合い，腹となる。$9 \div \frac{1}{2}\lambda = 9 \div 2 = 4.5$ に注意して，腹の位置を○で表し，波が強め合い，水面が大きく振動する位置を連ねた線を描くと次図のようになる。ただし，波源A，Bより下の領域のみが描かれている。これより，x 軸上で水面が大きく振動する位置は，波源A，

波の干渉条件

2つの波源が同位相のとき

強め合う条件；

(経路差)$=m\lambda$

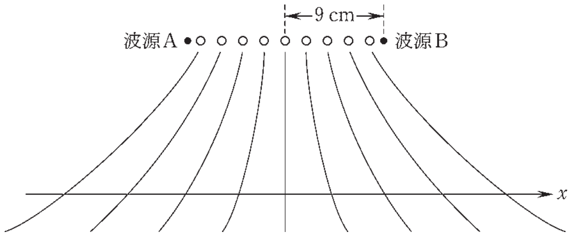
弱め合う条件；

(経路差)$=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$　(m は整数)

定常波

互いに逆向きに進む，振動数，波長，振幅が等しい波が干渉すると，進まない波ができる。そのような波を定常波という。最も大きく振動するところを腹といい，振動しないところを節という。

B間の腹の数と等しく9か所ある。



15 の答　⑤

B

問4　物体と凸レンズの間の距離を a，凸レンズとスクリーンの間の距離を b とする。凸**レンズの公式**より，

$$\frac{b}{a}=1.5 \qquad a+b=100$$

$$\therefore \quad a=40\ \text{cm},\ b=60\ \text{cm}$$

求める焦点距離を f とすると，

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{40}+\frac{1}{60}=\frac{1}{24} \qquad \cdots①$$

$$\therefore \quad f=\underline{24}\ \text{cm}$$

16 の答　④

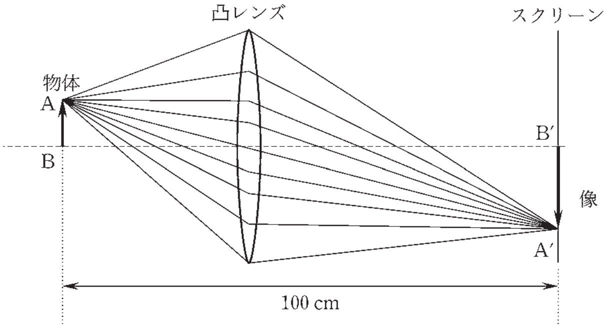
問5　①～④を順次検討する。

①　スクリーン上に鮮明な像が写ると仮定すると，凸レンズの公式より，

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{f}$$

これは**問4**の①式と矛盾する。したがって，スクリーン上に鮮明な像は写らない。よって，①は適当でない。

②　次図のように，物体ABの点Aから出て凸レンズの任意の位置に入射した光は全てスクリーン上の点A′に集まる。点Bから出た光も同様にB′に集まる。したがって，焦点距離を変えずにレンズの直径をいくら小さくしていっても，像は暗くなるが欠けることはない。よって，②は適当でない。



③　**問4**の①式で，a と b を入れ替えた式 $\frac{1}{60}+\frac{1}{40}=\frac{1}{24}$ もレン

レンズの公式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

a ；物体とレンズ間の距離

$|b|$；像とレンズ間の距離

倍率 $\frac{|b|}{a}$

$b>0$　倒立実像がレンズに対して物体と反対側に生じる

$b<0$　正立虚像がレンズに対して物体と同じ側に生じる

$f>0$　凸レンズ

$f<0$　凹レンズ

ズの公式を満たす。したがって，レンズを右に移動していくと，物体とレンズの距離が 60 cm になるとき，倍率 $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$ の鮮明な倒立実像がスクリーン上に写る。よって，③は適当でない。

④　物体と凸レンズの距離を a'，凸レンズと像の距離を $|b'|$ とする。凸レンズの公式より，

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{24}$$

$a'<24$ cm のとき，$b'<0$ となり，凸レンズの右側から観察すると，レンズの左側に虚像が見える。虚像はその位置に光が集まることによって見えるのではなく，あたかもその位置から光が出ているかのように光が進むことによって見える。したがって，スクリーンをどのような位置に置いてもスクリーン上に物体の像は写らない。よって，④は適当である。

$\boxed{17}$ の答　④

第 4 問　力学総合　問題

A

問 1　求める圧力を P とすると，**水中での圧力**の公式より，

$$P=\underline{P_0+\rho gh}$$

$\boxed{18}$ の答　③

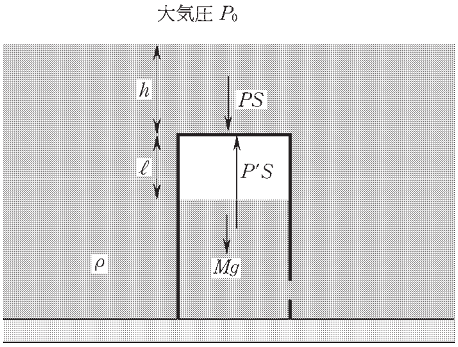
問 2　円筒が浮き上がり始めるとき，円筒内の気柱が排除した水の体積は $S\ell$ なので，**アルキメデスの原理**より，円筒にはたらく浮力の大きさは，$\rho S\ell g$ である。円筒にはたらく重力と浮力のつり合いより，

$$Mg=\rho S\ell g \qquad \therefore\quad M=\underline{\rho S\ell}$$

(別解)　円筒内の気柱の圧力は円筒内の水面での圧力すなわち，外部の水面から深さ $h+\ell$ の位置の水中での圧力

$$P'=P_0+\rho g(h+\ell)$$

と等しい。



円筒にはたらく力のつり合いより，

$$PS+Mg=P'S$$

$$\therefore\quad Mg=(P'-P)S=\rho S\ell g$$

水中での圧力

水面から深さ h の位置の圧力は大気圧より ρgh 高い。

$P=P_0+\rho gh$

P_0；大気圧

ρ；液体の密度

アルキメデスの原理

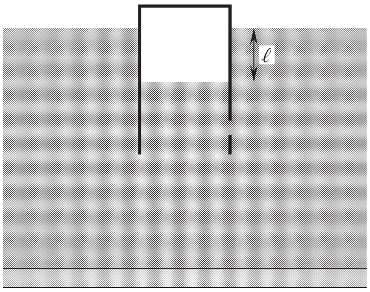
流体(液体，気体)中の物体は，それが排除している流体の重さに等しい大きさの浮力を受ける。

よって，$M=\underline{\rho S\ell}$

$\boxed{19}$ の答　①

問 3　円筒が水面に浮いて静止しているとき，円筒にはたらく重力 $Mg\,(=\rho S\ell g)$ と浮力のつり合いより，円筒内の気柱が排除している水の体積は $S\ell$ である。したがって，円筒内部の気柱の水面は，外部の水面から深さ ℓ の位置にある。また，円筒が上昇すると，円筒内の水面の圧力が減少するので，気柱の圧力は減少する。気柱は等温変化したので**ボイルの法則**より，気柱の体積は増加している。これより，円筒が浮かんでいる様子は次図のようになる。

②



$\boxed{20}$ の答　②

B

問 4　ばねは自然長から d だけ伸びているので，ばねに蓄えられているエネルギー(**弾性エネルギー**)は，

$$\underline{\frac{1}{2}kd^2}$$

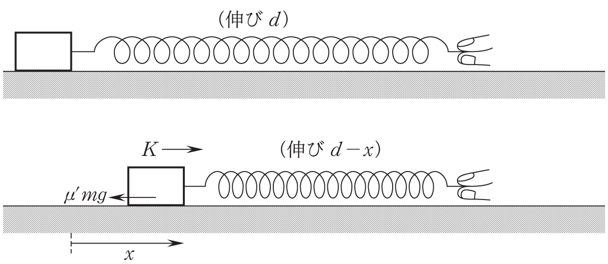
$\boxed{21}$ の答　④

問 5　物体が右向きに動きだす直前では，床から物体に左向きにはたらく**最大摩擦力** μmg と，ばねから右向きにはたらく弾性力 kd とがつり合っている。したがって，

$$\mu mg=kd \qquad \therefore \quad \mu=\underline{\frac{kd}{mg}}$$

$\boxed{22}$ の答　②

問 6　物体が距離 x だけ移動したとき，ばねは自然長から $d-x$ だけ伸びている(または，$x-d$ だけ縮んでいる)。また，床から物体に左向きに $\mu' mg$ の動摩擦力がはたらき，物体は右向きに距離 x だけ移動したので，動摩擦力は物体に $-\mu' mgx$ の**仕事**をしている。



ボイルの法則

気体が等温変化するとき

$PV=$一定

P；圧力

V；体積

弾性エネルギー(**弾性力による位置エネルギー**)

$U=\dfrac{1}{2}kx^2$

k；ばね定数

x；ばねの伸びまたは縮み

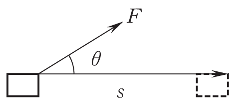
最大摩擦力

(最大摩擦力)

$=$(静止摩擦係数)$\times$(垂直抗力)

仕事

$W=Fs\cos\theta$



求める運動エネルギーを K とする。**エネルギー保存の法則**より，**力学的エネルギー**の変化量は動摩擦力がした仕事に等しい。したがって，

$$\left\{K+\frac{1}{2}k(d-x)^2\right\}-\left(0+\frac{1}{2}kd^2\right)=-\mu' mgx$$

$$\therefore\quad K=\underline{\frac{1}{2}kd^2-\frac{1}{2}k(d-x)^2-\mu' mgx}$$

23 の答　③

C

問7　エネルギー保存の法則より，エネルギーが形態を変えてもその総量は変わらない$_{ア}$。摩擦によって物体の運動の速さが減少していくとき，力学的エネルギーは主に熱$_{イ}$エネルギーに変換される。

24 の答　③

問8　求める時間を t〔分〕とする。0.5 kW＝0.5×10^3 J/s なので，

$$300=0.5\times10^3\times0.01\times60t\times\frac{1}{10}$$

$$\therefore\quad t=\underline{10}\text{ 分}$$

25 の答　⑤

エネルギー保存の法則

摩擦力などの保存力以外の力(非保存力)が仕事をすると力学的エネルギーが変化する。

(力学的エネルギーの変化量)

＝(非保存力がした仕事)

力学的エネルギー

(力学的エネルギー)

＝(運動エネルギー)＋(位置エネルギー)

化　学　Ⅰ

【解答・採点基準】　(100点満点)

問題番号	設問	解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	問1	1	5	3	
		2	3	3	
	問2	3	3	4	
	問3	4	4	4	
	問4	5	2	3	
	問5	6	3	4	
	問6	7	5	4	
	第1問	自己採点小計		(25)	
第2問	問1	8	2	4	
	問2	9	6	4	
	問3	10	7	4	
	問4	11	3	3	
		12	4	3	
	問5	13	5	4	
		14	4	3	
	第2問	自己採点小計		(25)	
第3問	問1	15	3	4	
	問2	16	5	3	
	問3	17	2	3	
	問4	18	1	4	
	問5	19	5	3	
		20	3	4	
	問6	21	4	4	
	第3問	自己採点小計		(25)	
第4問	問1	22	3	3	
	問2	23	3	3	
	問3	24	5	4	
	問4	25	4	3	
	問5	26	1	4	
	問6	27	2	4	
	問7	28	5	4	
	第4問	自己採点小計		(25)	
		自己採点合計		(100)	

【解説】

第１問　物質の構成，物質量　問題

問１　化学結合，分子

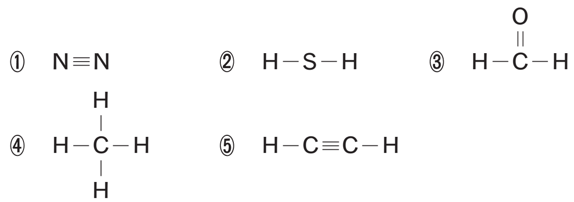
a　①塩化水素 HCl，④エチレン C_2H_4 は，原子が共有結合により結びついた分子からなる物質である。③二酸化ケイ素 SiO_2 は，結晶を構成するすべての原子が共有結合により結びついた物質である。②水銀 Hg は，原子どうしが金属結合により結びついた物質である。⑤塩化アンモニウム NH_4Cl は，アンモニウムイオン NH_4^+ と塩化物イオン Cl^- がイオン結合により結びついた物質である。

よって，イオンからなる物質は⑤塩化アンモニウム NH_4Cl である。

なお，一般に，非金属元素の原子どうしは共有結合，金属元素の原子と非金属元素の原子はイオン結合，金属元素の原子どうしは金属結合で結びつく。ただし，塩化アンモニウム NH_4Cl，硫酸アンモニウム $(NH_4)_2SO_4$ などは，物質を構成する原子はすべて非金属元素であるが，アンモニウムイオンと陰イオンがイオン結合により結びついたイオン結晶であることに注意する。

$\boxed{1}$ …⑤

b　原子価は H：1，C：4，N：3，O：2，S：2 であり，各分子の構造式は次のようになる。



よって，二重結合をもつ分子は③ホルムアルデヒドである。

$\boxed{2}$ …③

問２　混合物の分離

ア　混合物を加熱し，蒸発しやすい成分を蒸発しにくい成分から分離する方法を蒸留という。また，沸点の異なる液体の混合物を蒸留し，２種類以上の成分に分離する方法を特に分留という。液体空気には，窒素や酸素などが含まれており，分留により，窒素や酸素を分離することができる。

イ　物質をつくる粒子の大きさの違いにより，ろ紙などの目を通過できる物質と通過できない物質に分離する方法をろ過という。硝酸銀水溶液に塩化水素を吹き込むと，塩化銀の白色沈殿が得られる。沈殿はろ紙を通過できないので，ろ過により分離することができる。

ウ　特定の物質をよく溶かす溶媒を用いて，混合物からその物

【ポイント】

イオンからなる物質（イオン結晶）

陽イオンと陰イオンがクーロン力で結びついた物質。イオン結晶は電気を通さないが，融解したり，水に溶かすと，電気を通す。

分子からなる物質

H_2，I_2，H_2O，HCl，CO_2 などは，複数の原子が共有結合で結びついた分子として存在している。一般に分子からなる物質は融点や沸点が低く，ヨウ素やドライアイス（CO_2 の結晶）のように昇華性を示すものもある。

共有結合の結晶

多数の原子が共有結合で結びついた結晶。ダイヤモンド（C），ケイ素（Si），石英・水晶（SiO_2）など。

金属の結晶

金属元素の原子が金属結合で結びついた結晶。電気・熱の良導体であり，展性，延性がある。

混合物の分離

混合物からその成分である純物質を取り出す操作を分離という。

分離の方法としては，ろ過，蒸留，再結晶，昇華，抽出，クロマトグラフィーなどがある。

質を分離する方法を抽出という。ヨウ素 I_2 はヨウ化カリウム KI 水溶液によく溶けるが，ヨウ素 I_2 のヨウ化カリウム水溶液にヘキサンを加えると，ヨウ素 I_2 はヘキサンに移動し分離することができる。すなわち，ヨウ素はヘキサンに抽出される。

$\boxed{3}$ …③

問3　元素の周期律，化学結合

元素**ア**～**カ**は次のとおりである。

ア：C　**イ**：Na　**ウ**：Mg
エ：P　**オ**：Cl　**カ**：Ar

①　正しい。イオン化エネルギーは，一般に周期表の左下に位置する元素の原子ほど小さい。イオン化エネルギーが小さいほど陽イオンになりやすいので，**イ**(Na)が最も陽イオンになりやすい。

②　正しい。すべての元素のうち，ハロゲンである**オ**(Cl) の電子親和力が最も大きく，陰イオンになりやすい。

③　正しい。**イ**(Na)，**ウ**(Mg)は金属元素であり，**ア**(C)，**エ**(P)，**オ**(Cl)，**カ**(Ar)は非金属元素である。

④　誤り。**ウ**(Mg)は金属元素，**オ**(Cl)は非金属元素なので，**ウ**と**オ**からなる化合物はイオン結合により結びつく。**ウ**は価電子を２個もつ原子であり，２価の陽イオン Mg^{2+} になりやすい。また，**オ**は価電子を７個もつ原子であり，１価の陰イオン Cl^- になりやすい。よって，化合物の組成式は $MgCl_2$ となり，化合物を構成する**ウ**と**オ**の物質量比は１：２である。

⑤　正しい。**エ**(P)の単体には，黄リン，赤リンなどの同素体が存在する。

$\boxed{4}$ …④

問4　化学変化

水素の燃焼のように，ある物質が別の物質になる変化を化学変化といい，蒸発や凝固などのように，物質そのものは変化せずに状態だけが変わるような変化を物理変化という。

①　金 Au は金属結晶であり，叩くと薄い箔になる(展性)。このとき，金は別の物質には変化しておらず，化学変化ではない。

②　窒素酸化物や硫黄酸化物が空気中に放出されると，空気中の酸素や水と反応して硝酸や硫酸などが生じ，雨の酸性が強くなる。このとき，窒素酸化物や硫黄酸化物は別の物質に変化しており，化学変化が起こっている。

③　コップに冷たい水を入れておくと，コップのまわりの温度が低くなり，空気中の水蒸気が凝縮し，コップの外側に水滴がつく。このとき，水は別の物質には変化しておらず，化学変化ではない。

④　氷を室温で放置すると融解し，水に変化する。このとき水は別の物質に変化しておらず，化学変化ではない。

イオン化エネルギー

原子から電子１個を取り去って１価の陽イオンにするときに必要なエネルギー。この値が小さいほど原子は１価の陽イオンになりやすい。

電子親和力

原子が電子１個を受け取って１価の陰イオンになるときに放出されるエネルギー。この値が大きい原子ほど１価の陰イオンになりやすい。

非金属元素と金属元素

周期＼族	1	2	13	14	15	16	17	18
1	H							He
2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar

（灰色）金属元素　（白）非金属元素

同素体

同じ元素からなる単体で，性質の異なるものを互いに同素体という。

⑤　ナフタレンは昇華性をもつ物質であり，放置すると気体になり，固体のナフタレンはしだいに小さくなる。このとき，ナフタレンは別の物質には変化しておらず，化学変化ではない。

よって，化学変化である記述は②である。

$\boxed{5}$ …②

問5　物質量

ア　1 mol の二酸化炭素 CO_2 (44 g/mol) 中には 2 mol の酸素 O 原子が含まれるので，1.1 g の二酸化炭素に含まれる酸素原子の物質量は，

$$\frac{1.1}{44}\times 2 = 5.0\times 10^{-2}\,[\mathrm{mol}]$$

イ　1 mol の塩化カルシウム $CaCl_2$ を水に溶かすと，1 mol のカルシウムイオン Ca^{2+} と 2 mol の塩化物イオン Cl^- の合計 3 mol のイオンが生じる。

$$CaCl_2 \longrightarrow Ca^{2+} + 2\,Cl^-$$

よって，0.10 mol/L の塩化カルシウム水溶液 200 mL 中に含まれるイオンの総物質量は，

$$0.10\times\frac{200}{1000}\times 3 = 6.0\times 10^{-2}\,[\mathrm{mol}]$$

モル濃度〔mol/L〕

$$=\frac{\text{溶質の物質量〔mol〕}}{\text{溶液の体積〔L〕}}$$

ウ　1 mol のメタノール CH_3OH (32 g/mol) を完全燃焼させるために必要な酸素 O_2 は $\frac{3}{2}$ mol である。

$$2\,CH_3OH + 3\,O_2 \longrightarrow 2\,CO_2 + 4\,H_2O$$

よって，0.64 g のメタノールを完全燃焼させるために必要な酸素の物質量は，

$$\frac{0.64}{32}\times\frac{3}{2} = 3.0\times 10^{-2}\,[\mathrm{mol}]$$

以上より，物質量が大きい順に並べると，③ **イ** > **ア** > **ウ** となる。

$\boxed{6}$ …③

問6　化学反応と量的関係

気体 A と気体 B から気体 C が生じる反応を次のように表す。

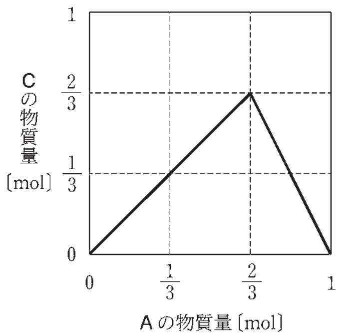
$$a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} \longrightarrow c\,\mathrm{C}$$

A と B が過不足なく反応するときに比べて A の量が少ないときには，A がすべて反応し，B が一部残る。このときに生じる C の量は，反応前の A の量で決まる。逆に，B の量が少ないときには，B がすべて反応し，A が一部残る。このときに生じる C の量は，反応前の B の量で決まる。

化学反応式の係数と物質量

（化学反応式中の係数の比）

＝（反応により変化する物質量の比）



図より，反応前のAが $\frac{2}{3}$ mol より少ないとき，Aがすべて反応し，生じたCの物質量は，反応前のAの物質量と比例関係にある。また，反応前のAが $\frac{2}{3}$ mol より多いとき，Bがすべて反応し，生じたCの物質量は，反応前のBの物質量と比例関係にある。

よって，反応前のAが $\frac{2}{3}$ mol，Bが $\left(1-\frac{2}{3}=\right)\frac{1}{3}$ mol のときに，AとBが過不足なく反応し，Cが $\frac{2}{3}$ mol 生じたことがわかる。したがって，$a:b:c=2:1:2$ となる。

$$2\,A + B \longrightarrow 2\,C$$

$\boxed{7}$ …⑤

第2問　化学反応と熱，中和反応，酸化・還元，電気分解

問1　化学反応と熱　問題

$C_6H_{12}O_6$(固) ＝ 2 C_2H_5OH(液) ＋ 2 CO_2(気) ＋ Q〔kJ〕…(1)

グルコース(ブドウ糖)および，エタノールの燃焼熱を表す熱化学方程式はそれぞれ，

$C_6H_{12}O_6$(固) ＋ 6 O_2(気)
＝ 6 CO_2(気) ＋ 6 H_2O(液) ＋ 2807 kJ　…(2)

C_2H_5OH(液) ＋ 3 O_2(気)
＝ 2 CO_2(気) ＋ 3 H_2O(液) ＋ 1370 kJ　…(3)

(1)式は，(2)式－(3)式×2 で得られるので，

$$Q = 2807 - 1370 \times 2$$
$$= 67\text{〔kJ〕}$$

$\boxed{8}$ …②

燃焼熱
物質 1 mol が完全燃焼するときに発生する熱量。

問2　溶解熱と溶液の温度変化

硝酸アンモニウムの水への溶解は吸熱反応なので，硝酸アンモニウム水溶液の温度は低下する。

硝酸アンモニウム NH_4NO_3 (80 g/mol) 4.0 g の物質量は，

$$\frac{4.0}{80} = 0.050\text{〔mol〕}$$

溶解熱
物質 1 mol が多量の溶媒に溶解するときに吸収または放出する熱量。

水 96 g に硝酸アンモニウム 4.0 g を溶かしたので，断熱容器中の硝酸アンモニウム水溶液の質量は，96＋4.0＝100〔g〕である。溶解により，水溶液の温度が t〔℃〕下がるとすると，

$$4.2\times100\times t=26\times10^3\times0.050$$

$$t=3.09〔℃〕$$

したがって，硝酸アンモニウム水溶液の温度は，

$$20-3.09=16.91\fallingdotseq17〔℃〕$$

9 …⑥

問 3　中和滴定，中和反応の量的関係

滴定曲線において，アンモニアと塩酸の中和点は，pH 7 より小さい酸性側にあるので，指示薬は酸性側に変色域をもつメチルオレンジを用いる。塩酸を滴下していくと，中和点前後で pH は急激に小さくなり，反応液の色は，黄色から赤色に変化する。

アンモニア水のモル濃度を x〔mol/L〕とすると，塩酸は 1 価の酸，アンモニアは 1 価の塩基で，滴定曲線より，中和点までの塩酸の滴下量が 12.5 mL であるので，

$$1\times0.200\times\frac{12.5}{1000}=1\times x\times\frac{10.0}{1000}$$

$$x=0.250〔mol/L〕$$

以上より，正しい組合せは⑦である。

10 …⑦

問 4　酸化還元反応

a　二クロム酸カリウム $K_2Cr_2O_7$ は，酸性溶液中で酸化剤としてはたらく。一方，二酸化硫黄 SO_2 は還元剤としてはたらく。

$$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \longrightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O \quad \cdots(1)$$

$$SO_2 + 2H_2O \longrightarrow SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e^- \quad \cdots(2)$$

(1)式＋(2)式×3 より e^- を消去すると，

$$Cr_2O_7^{2-} + 3SO_2 + 2H^+ \longrightarrow 2Cr^{3+} + 3SO_4^{2-} + H_2O$$

これより，$K_2Cr_2O_7$ と SO_2 は 1：3 の物質量比で反応することがわかるので，1.0 mol の $K_2Cr_2O_7$ は 3.0 mol の SO_2 と過不足なく反応する。

11 …③

b　酸化還元反応では，還元剤は酸化されるので，酸化数の増加する原子を含む。一方，酸化剤は還元されるので，酸化数の減少する原子を含む。

ア　$2\underset{(0)}{\underline{Na}} + 2\underset{(+1)}{\underline{H}}_2O \longrightarrow \underset{(0)}{\underline{H_2}} + 2\underset{(+1)}{\underline{Na}}OH$

イ　$2\underset{(0)}{\underline{Al}} + \underset{(+3)}{\underline{Fe}}_2\underset{(-2)}{\underline{O}}_3 \longrightarrow \underset{(+3)}{\underline{Al}}_2\underset{(-2)}{\underline{O}}_3 + 2\underset{(0)}{\underline{Fe}}$

ウ　$\underset{(0)}{\underline{Ag}} + 2H\underset{(+5)}{\underline{N}}O_3 \longrightarrow \underset{(+1)}{\underline{Ag}}NO_3 + \underset{(+4)}{\underline{N}}O_2 + H_2O$

(　) 内の数字は酸化数を表す。

①　正しい。アの反応において，Na 原子の酸化数は 0 から

指示薬

フェノールフタレイン

変色域：(赤色) 9.8＞pH＞8.0 (無色)

メチルオレンジ

変色域：(黄色) 4.4＞pH＞3.1 (赤色)

中和反応の量的関係

(酸の価数)×(酸の物質量)

＝(塩基の価数)×(塩基の物質量)

酸化数の計算

単体中の原子の酸化数は 0 である。

化合物を構成している原子の酸化数の総和は 0 とし，次の原子の酸化数を基準にして計算する。

H やアルカリ金属原子：＋1

O：通常 −2

(H_2O_2 のような過酸化物では −1 とする。)

+1 に増加しており，還元剤としてはたらいている。

② 正しい。アの反応において，H_2O から H_2 の変化で H 原子の酸化数は +1 から 0 に減少しており，還元されている。

③ 正しい。イの反応において，Al 原子の酸化数は 0 から +3 に増加しており，還元剤としてはたらいている。

④ 誤り。イの反応において，O 原子の酸化数は反応前後とも −2 で変化していない。なお，Fe_2O_3 中の Fe 原子の酸化数は +3 から 0 に減少しており，還元されている。

⑤ 正しい。ウの反応において，Ag 原子の酸化数は 0 から +1 に増加しており，酸化されている。

⑥ 正しい。ウの反応において，HNO_3 から NO_2 に変化するとき N 原子の酸化数は +5 から +4 に減少しており，HNO_3 は酸化剤としてはたらいている。

$\boxed{12}$ …④

問 5 水溶液の電気分解

a ア～エの電極ではそれぞれ次の反応が起こる。

ア：陰極 $Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

イ：陽極 $2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$

ウ：陰極 $2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

エ：陽極 $4OH^- \longrightarrow O_2 + 2H_2O + 4e^-$

① 正しい。電極アでは Cu の単体が析出するので質量が増加する。

② 正しい。電極イとエが陽極である。

③ 正しい。電極ウでは，水素が発生するので，電極の質量は変化しない。

④ 正しい。電極アで銅(II)イオンは還元され銅が析出するので，電解槽 I の水溶液中の銅(II)イオンの物質量は減少する。

⑤ 誤り。電極ウで生成する水酸化物イオンと同じ物質量の水酸化物イオンが電極エで消費されるので，電解槽IIの水溶液中の水酸化物イオンの物質量は変化しない。

なお，電極ウ，エの式より e^- を消去すると，

$$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$$

電解槽IIでは，水の電気分解が起こっている。

$\boxed{13}$ …⑤

b 電極エで発生する酸素と，電子の物質量の比は 1：4 であるので，流れた電子の物質量は，

$$\frac{56\times10^{-3}}{22.4}\times4=0.010\,[\mathrm{mol}]$$

流れた電流を x〔A〕とすると，

$$9.65\times10^4\times0.010=x\times(32\times60+10)$$

$$x=0.50\,[\mathrm{A}]$$

$\boxed{14}$ …④

電気分解

陰極…外部電源の負極と接続した電極。

主に次の反応が起こる。

1．電解液中の Ag^+ や Cu^{2+} が還元され，Ag や Cu が析出する。

2．H_2O(中性，塩基性)や H^+(酸性)が還元され，H_2 が発生する。

陽極…外部電源の正極と接続した電極。

主に次の反応が起こる。

電極が炭素や白金以外の金属のとき

1．電極が溶解する。

電極が炭素や白金のとき

2．ハロゲン化物イオンが酸化され，ハロゲンの単体が生成する。

3．H_2O(酸性，中性)や OH^-(塩基性)が酸化され，O_2 が発生する。

ファラデー定数

電子 1 mol のもつ電気量の絶対値。

ファラデー定数 $F=9.65\times10^4$ C/mol

第3問　無機物質

問題

問1　ケイ素の化合物

ケイ素 Si は$_{ア}$14族の元素である。

ケイ素の化合物のうち$_{イ}$二酸化ケイ素 SiO_2 は，天然に石英や水晶として存在する。二酸化ケイ素を水酸化ナトリウムとともに融解すると，ケイ酸ナトリウムを生じる。

$$SiO_2 + 2NaOH \longrightarrow Na_2SiO_3 + H_2O$$

ケイ酸ナトリウムに水を加えて加熱すると，粘性の大きい水ガラスという液体になり，これに塩酸を加えると白色ゲル状のケイ酸 $SiO_2 \cdot nH_2O$ が得られる。

これを加熱して脱水・乾燥すると$_{ウ}$シリカゲルになる。シリカゲルは多孔質の固体であり，吸着剤，乾燥剤として用いられる。

$\boxed{15}$ …③

問2　ハロゲン

① 正しい。フッ素は水と激しく反応し，酸素を発生する。

$$2F_2 + 2H_2O \longrightarrow 4HF + O_2$$

② 正しい。塩素と水素は光により爆発的に反応する。

$$H_2 + Cl_2 \longrightarrow 2HCl$$

③ 正しい。臭化銀は淡黄色の固体で水に溶けにくく，光により分解する。

$$2AgBr \longrightarrow 2Ag + Br_2$$

④ 正しい。ヨウ素は黒紫色の固体であり，昇華性がある。

⑤ 誤り。水溶液中で HCl，HBr，HI は強酸であるが，HF は弱酸である。

$\boxed{16}$ …⑤

ハロゲンの単体

	色	状態	酸化力
F_2	淡黄	気体	強
Cl_2	黄緑	気体	↑
Br_2	赤褐	液体	↓
I_2	黒紫	固体	弱

ハロゲン化水素の性質

- すべて無色，刺激臭で有毒な気体である。
- フッ化水素酸は弱酸であり，塩酸，臭化水素酸，ヨウ化水素酸は強酸である。
- フッ化水素酸はガラスを溶かすので，ポリエチレン容器に保存される。

問3　気体の製法と性質

① 正しい。発生する気体は二酸化硫黄である。

$$Na_2SO_3 + H_2SO_4 \longrightarrow Na_2SO_4 + H_2O + SO_2$$

硫黄を空気中で燃焼しても二酸化硫黄が生じる。

$$S + O_2 \longrightarrow SO_2$$

② 誤り。発生する気体は硫化水素である。

$$FeS + H_2SO_4 \longrightarrow FeSO_4 + H_2S$$

硫化水素は無色・腐卵臭の気体である。

③ 正しい。発生する気体はアンモニアである。

$$2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow CaCl_2 + 2H_2O + 2NH_3$$

アンモニアは塩化水素と反応し，塩化アンモニウムの白煙を生じる。

$$NH_3 + HCl \longrightarrow NH_4Cl$$

④ 正しい。発生する気体は酸素である。

$$2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + O_2 \text{（}MnO_2\text{ は触媒）}$$

酸素は無色・無臭の気体である。

$\boxed{17}$ …②

問4　金属の単体

①　誤り。アルミニウムはイオン化傾向が比較的大きいが，常温の水とは反応しない。

②　正しい。溶鉱炉で赤鉄鉱 Fe_2O_3 や磁鉄鉱などの鉄鉱石をコークスや一酸化炭素で還元すると銑鉄が得られる。

$$Fe_2O_3 + 3CO \longrightarrow 2Fe + 3CO_2$$

銑鉄を転炉に移し，酸素を吹き込み炭素の割合を減らしたものが鋼である。

③　正しい。鉛は，X線の遮蔽（しゃへい）材や鉛蓄電池の負極に用いられている。

④　正しい。アルミニウムの単体は，原料となるボーキサイトから精製した純度の高い酸化アルミニウムを，氷晶石に加えて融解塩電解することで製造される。

⑤　正しい。銀は，湿った空気中で硫化水素と反応し，黒色の硫化銀 Ag_2S を生じる。

$\boxed{18}$…①

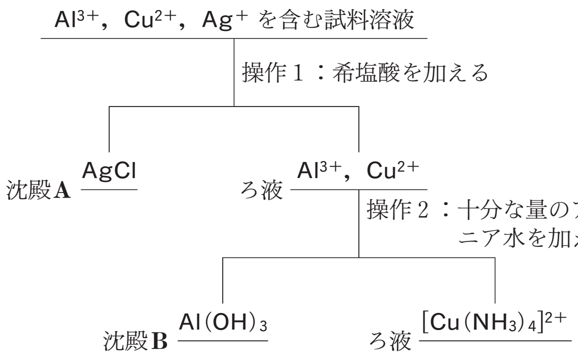
問5　金属イオンの分離

a　操作1では AgCl が沈殿する。よって，沈殿**A**に含まれるのは Ag^+ である。

操作2では，少量のアンモニア水を加えると，$Al(OH)_3$，$Cu(OH)_2$ が沈殿する。しかし，十分な量のアンモニア水を加えると，$Cu(OH)_2$ は溶解する。

$$Cu(OH)_2 + 4NH_3 \longrightarrow [Cu(NH_3)_4]^{2+} + 2OH^-$$

よって，沈殿**B**に含まれるのは Al^{3+} である。



$\boxed{19}$…⑤

b　①　正しい。Cu^{2+} を含むので水溶液は青色である。

②　正しい。Cu^{2+} は青緑色の炎色反応を示す。

③　誤り。少量の水酸化ナトリウム水溶液を加えると，$Al(OH)_3$，$Cu(OH)_2$，Ag_2O となってすべての金属イオンが沈殿するが，十分な量の水酸化ナトリウム水溶液を加えると，$Al(OH)_3$ は溶解する。

$$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$$

金属イオンの反応

Cl^- で沈殿するイオン
　Ag^+，Pb^{2+}
$SO_4{}^{2-}$ で沈殿するイオン
　Ba^{2+}，Ca^{2+}，Pb^{2+}
S^{2-} で沈殿するイオン
・pHに関係なく沈殿
　Sn^{2+}，Pb^{2+}，Cu^{2+}，Ag^+
・中性～塩基性で沈殿
　Zn^{2+}，Fe^{2+}，Ni^{2+}

炎色反応

ある種の元素を含む物質を炎の中に入れるとその元素に特有の色が現れる。これを炎色反応という。おもな元素の炎色反応は次のとおり。

Li：赤，Na：黄，K：赤紫
Ba：黄緑，Ca：橙赤
Cu：青緑，Sr：紅（深赤）

よって，Al^{3+} は沈殿には含まれない。

④　正しい。Ag^{+} はクロム酸イオンと暗赤色の Ag_2CrO_4 の沈殿を生じる。

⑤　正しい。酸性条件下では，Cu^{2+}，Ag^{+} が硫化物イオンと CuS，Ag_2S の沈殿を生じる。

水に難溶のクロム酸塩

$BaCrO_4$（黄），$PbCrO_4$（黄），

Ag_2CrO_4（暗赤）

$\boxed{20}$ …③

問 6　化学反応の量的関係

1 mol の焼きセッコウが水と反応すると，1 mol のセッコウが生じる。

$$CaSO_4\cdot\frac{1}{2}H_2O \ + \ \frac{3}{2}H_2O \longrightarrow CaSO_4\cdot 2\,H_2O$$

焼きセッコウ（145 g/mol）29 g の物質量は，

$$\frac{29}{145}=0.20\,[\mathrm{mol}]$$

生じたセッコウ（172 g/mol）は 0.20 mol であり，密度 2.3 g/cm³ より，その体積は，

$$\frac{172\times0.20}{2.3}=14.9\fallingdotseq15\,[\mathrm{cm^3}]$$

密度

単位体積あたりの質量。

$$密度\,[\mathrm{g/cm^3}]=\frac{質量\,[\mathrm{g}]}{体積\,[\mathrm{cm^3}]}$$

$\boxed{21}$ …④

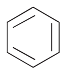
第 4 問　有機化合物　問題

問 1　芳香族炭化水素

①　正しい。芳香族炭化水素は石炭や石油から得られる。

②　正しい。芳香族炭化水素は特異臭をもち，有毒なものが多い。ベンゼンは発癌性が指摘されている。

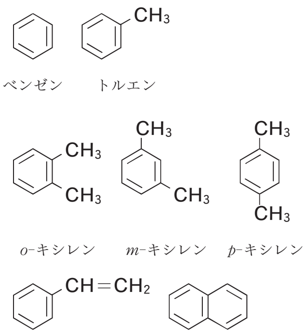
③　誤り。エチレン C_2H_4 ではなく，アセチレン C_2H_2 を 3 分子重合させるとベンゼンが得られる。

$3\,C_2H_2 \longrightarrow$ 

④　正しい。ベンゼン環を構成する 6 個の炭素原子とそれに結合する原子は常に同一平面上にある。トルエンではベンゼン環にメチル基の炭素原子が結合しており，すべての炭素原子が同一平面上に存在する。

⑤　正しい。ナフタレンは分子式 $C_{10}H_8$ で表される芳香族炭化水素である。

主な芳香族炭化水素の構造式

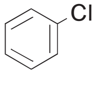


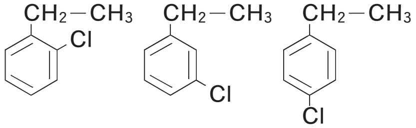
ベンゼン　トルエン　o-キシレン　m-キシレン　p-キシレン　スチレン　ナフタレン

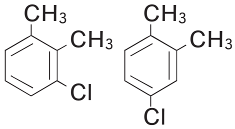
$\boxed{22}$ …③

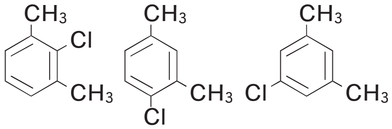
問 2　異性体

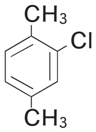
ベンゼン環に結合する水素原子の 1 つを塩素原子で置換したときにできる化合物は，それぞれ以下のとおりである。

①　

② 

③ 

④ 

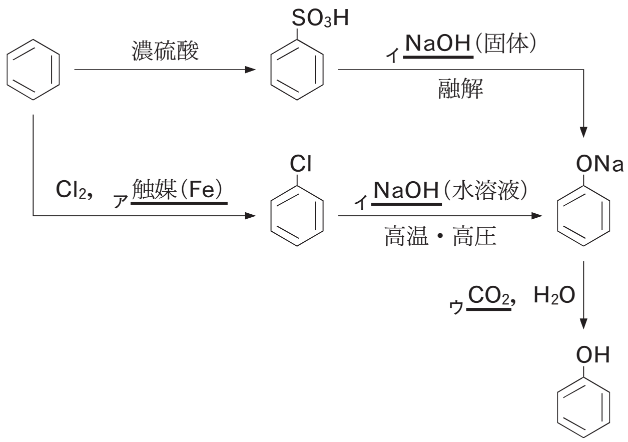
⑤ 

2種類の構造異性体が考えられる化合物は③である。

$\boxed{23}$ …③

問3　フェノールの合成

ベンゼンを濃硫酸でスルホン化してベンゼンスルホン酸を得た後，固体の水酸化ナトリウムを加え融解してナトリウムフェノキシドとする。これに酸を加えることによってフェノールが得られる。また，Fe を触媒としてベンゼンに塩素を作用させると，クロロベンゼンが得られ，これに高温・高圧で水酸化ナトリウム水溶液を作用させることでもナトリウムフェノキシドは得られ，同様にフェノールを得ることができる。



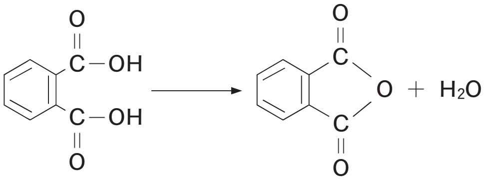
$\boxed{24}$ …⑤

問4　酸無水物

芳香族化合物であるものは，テレフタル酸，フタル酸，サリチル酸である。

酸無水物は2つのカルボキシル基の間の脱水反応により生じる。2つのカルボキシル基が近い位置にあるフタル酸は，加熱す

ると分子内で脱水して酸無水物を生成する。



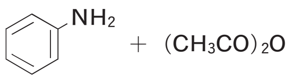
フタル酸　　　　無水フタル酸

カルボキシル基がパラ位にあるテレフタル酸からは酸無水物を生じない。

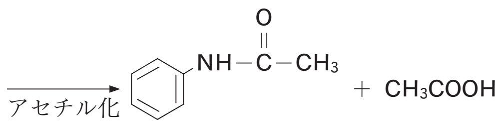
$\boxed{25}$ …④

問 5　窒素を含む芳香族化合物

a 　ア アニリンに無水酢酸を作用させると，イ アセトアニリドが得られる。

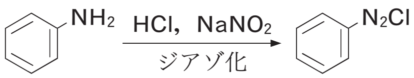


アニリン



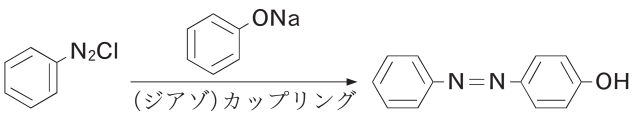
アセトアニリド

b 　ア アニリンを塩酸に加え，冷却しながら亜硝酸ナトリウムと反応させると，ウ 塩化ベンゼンジアゾニウムが得られる。



アニリン　　　　塩化ベンゼンジアゾニウム

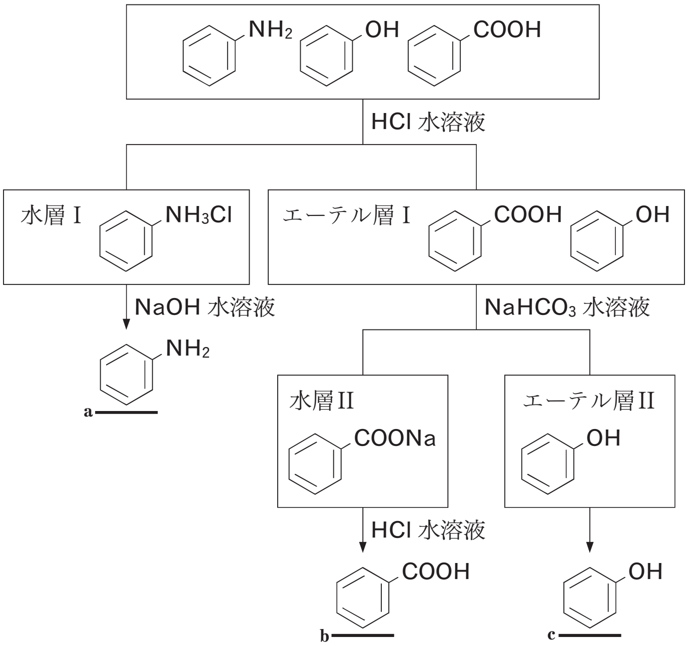
c 　ナトリウムフェノキシドの水溶液にウ 塩化ベンゼンジアゾニウム水溶液を加えると，橙赤色の *p*-ヒドロキシアゾベンゼン（*p*-フェニルアゾフェノール）が得られる。



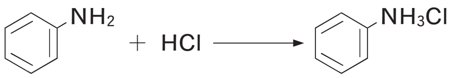
p-ヒドロキシアゾベンゼン

$\boxed{26}$ …①

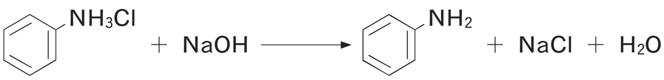
問 6　芳香族化合物の分離



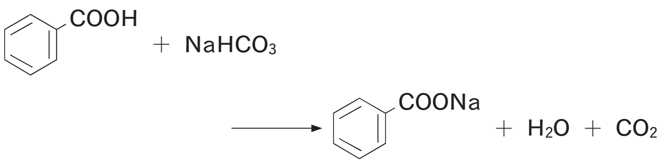
アニリン，フェノール，安息香酸のエーテル溶液に，塩酸を加えて振り混ぜると，塩基であるアニリンは，アニリン塩酸塩になって水層 I に移動する。



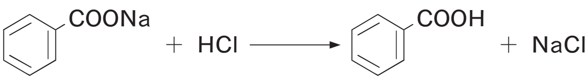
取り出した水層 I に水酸化ナトリウム水溶液を加えると，アニリンが遊離する。



一方，安息香酸，フェノールが溶解したエーテル層 I に炭酸水素ナトリウム水溶液を加えると，安息香酸だけが反応し，塩になって水層 II に移動する。これは，安息香酸は炭酸より強い酸であるために起こる反応である。



取り出した水層 II に塩酸を加えると，安息香酸が遊離する。



なお，フェノールは炭酸より弱い酸であるため炭酸水素ナトリウムと反応せず，エーテル層 II に残る。

$\boxed{27}$ …②

有機化合物の分離

芳香族化合物は水に溶けにくいものが多いが，塩にすると水に溶けるので分離することができる。

弱酸の遊離

弱酸の塩により強い酸を加えると，弱酸が遊離する。

酸の強弱

塩酸，硫酸＞スルホン酸
＞カルボン酸＞炭酸＞フェノール

問7　芳香族エステルの構造決定

Aがエステル結合を分子中に1つ有する①，②，④，⑤のいずれかとすると，次のように反応するため**A** 0.050 mol から，**B**，**C**がともに 0.050 mol 生成する。

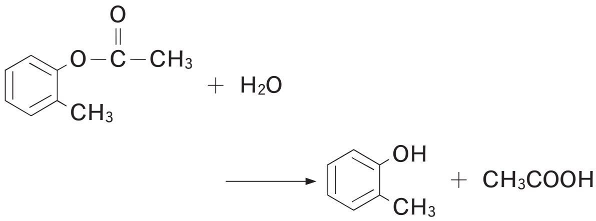
$$R-COO-R' + H_2O \longrightarrow R-COOH + R'-OH$$

B，**C**の分子量を M_B，M_C とすると，その生成した質量から，

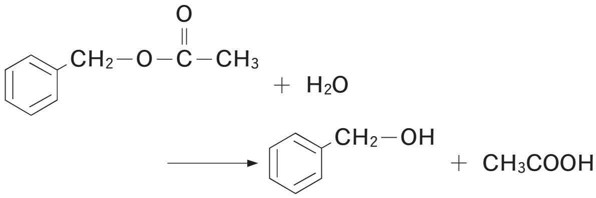
$M_B \times 0.050 = 5.4$　　より　$M_B = 108$

$M_C \times 0.050 = 3.0$　　より　$M_C = 60$

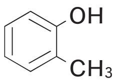
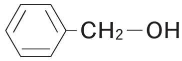
加水分解後の化合物の分子量がこの2つの組合せとなるものは，②と⑤である。

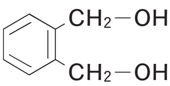
②


分子量 108　　分子量 60

⑤


分子量 108　　分子量 60

Cの分子量は60なので**C**は CH_3COOH である。また，**B**は水酸化ナトリウム水溶液に溶けないことから，フェノール類である  は不適当であり，**B**は  である。よって**A**の構造としては，⑤が適当である。

なお，エステル結合を分子中に2つ有する③ 0.050 mol を加水分解すると， が 0.050 mol (6.9 g)，CH_3COOH が 0.10 mol (6.0 g) 生成するので，**A**の構造として③は不適当である。

分子量 138　　分子量 60

$\boxed{28}$ …⑤

エステルの加水分解

エステルを酸を触媒として加水分解すると，アルコール(またはフェノール類)とカルボン酸が得られる。

生　物　Ⅰ

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	3	3	
		問2	2	3	3	
		問3	3	2	3	
	B	問4	4	1	3	
		問5	5	6 ※	4	
			6	8 ※	4	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	2	3	
		問2	8	4	3	
		問3	9	2	3	
	B	問4	10	2	3	
		問5	11	3	4	
		問6	12	4	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	2	3	
		問2	14	2	3	
	B	問3	15	5	3	
			16	7	3	
		問4	17	4	4	
		問5	18	2	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	19	2	3	
		問2	20	4	3	
		問3	21	1	3	
	B	問4	22	4	3	
		問5	23	3	4	
		問6	24	4	4	
第4問　自己採点小計					(20)	
第5問	A	問1	25	1	3	
		問2	26	3	3	
	B	問3	27	1	3	
		問4	28	4	3	
		問5	29	5 ※	4	
			30	7 ※	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

※の正解は順序を問わない。

【解説】 問題

第１問　細胞と浸透圧

細胞の構造と機能に関する知識問題と，植物細胞の浸透圧に関する考察問題を出題した。

問１　細胞膜は特定の物質を選択的に透過させる性質(選択的透過性)をもち，濃度勾配にしたがって物質を透過させる場合と濃度勾配に逆らって物質を透過させる場合がある。濃度勾配に逆らって特定の物質を透過させる細胞膜のはたらきを能動輸送とよび，能動輸送はエネルギーを用いるので，①・②は正しい。ヒトの赤血球では，能動輸送により，細胞外から細胞内へカリウムが取り込まれ，細胞内から細胞外へナトリウムが排出されるので，③は誤りである。植物の根毛では，能動輸送により，土壌中から細胞内へ養分(無機塩類)が吸収されるので，④は正しい。 $\boxed{1}$ …③

問２　動物や植物の細胞の細胞質には，特定のはたらきをもつ様々な細胞小器官が存在する。動物細胞の細胞質には，呼吸を行うミトコンドリア，物質の分泌に関与するゴルジ体，細胞分裂やべん毛の形成に関与する中心体などの細胞小器官がみられる。植物細胞の細胞質には，ミトコンドリアやゴルジ体の他に，光合成を行う葉緑体，物質の貯蔵や浸透圧の調節に関与する液胞がみられる。液胞，ゴルジ体，ミトコンドリア，葉緑体のうち，２枚の膜で囲まれた構造をもつ細胞小器官は，ミトコンドリアと葉緑体である。液胞は１枚の液胞膜で囲まれており，内部は細胞液で満たされている。また，ゴルジ体は１枚の膜で囲まれた扁平な袋が層状に重なった構造をしている。 $\boxed{2}$ …③

問３　①核膜には，核内と細胞質との間の物質の出入りに関係する核膜孔とよばれる多数の小孔がみられる。②核の内部には染色体と１個～数個の核小体が存在し，その周囲を核液が満たしている。中心体は細胞質に存在するので，誤りである。③一般に，動物や植物の体細胞には核が１個存在するが，ヒトの骨格筋を構成する筋繊維(筋細胞)は細胞の融合によって生じるため，多核である。なお，消化管などにみられる平滑筋を構成する筋繊維や心筋を構成する筋繊維は単核である。④大腸菌は原核生物であるので，核膜で囲まれた核，およびミトコンドリアや葉緑体などの細胞小器官をもたない。 $\boxed{3}$ …②

問４　植物細胞では，細胞膜の外側にセルロースやペクチンを主成分とする細胞壁が存在する。細胞壁は細胞の構造を保持するはたらきや細胞どうしを結合するはたらきをもつ。物質の透過性に関して，細胞膜は半透性に近い性質を示し，溶媒である水は透過させるが，溶質であるスクロースは透過させない。一方，細胞壁は全透性を示し，水とスクロースの両方を透過させる。 $\boxed{4}$ …①

問５　植物細胞を高張液に浸すと，外液の浸透圧の方が大きいの

【ポイント】

選択的透過性
　特定の物質を選択的に透過させる細胞膜の性質

受動輸送
　濃度勾配にしたがう物質の輸送
　エネルギーを用いない。
能動輸送
　濃度勾配に逆らう物質の輸送
　エネルギーを用いる。

２枚の膜で囲まれた細胞小器官
　核，ミトコンドリア，葉緑体
１枚の膜で囲まれた細胞小器官
　液胞，ゴルジ体

多核
　骨格筋の筋繊維
単核
　平滑筋の筋繊維
　心筋の筋繊維

細胞膜　半透性に近い性質
細胞壁　全透性

で，水が細胞外へ流出する。その結果，細胞膜で囲まれた部分の体積は減少するが，細胞壁は収縮しないので，細胞膜が細胞壁から離れる原形質分離が起こる。溶液IIに浸された細胞では，細胞壁で囲まれた部分の体積に比べて細胞膜で囲まれた部分の体積が小さいので，原形質分離が起こっていることがわかる。したがって，溶液IIは高張液である。植物細胞を高張液に浸しても，細胞壁は収縮しないので，この植物細胞の膨圧がない状態での細胞壁で囲まれた部分の体積は 83 である。溶液IVに浸された細胞では，細胞壁で囲まれた部分の体積と細胞膜で囲まれた部分の体積がともに 83 であり，細胞膜が細胞壁から離れるか離れないかの限界原形質分離の状態にあることがわかる。したがって，溶液IVは等張液である。

植物細胞を低張液に浸すと，細胞の浸透圧の方が大きいので，水が細胞内へ流入する。その結果，細胞の体積は増加し，流入した水によって細胞壁を押し広げようとする膨圧が生じる。溶液 I と溶液IIIに浸された細胞では，細胞壁で囲まれた部分の体積が等張液である溶液IVに浸された細胞の 83 よりも大きいので，溶液 I と溶液IIIは溶液IVよりも浸透圧が低く，細胞が吸水していることがわかる。したがって，溶液 I と溶液IIIは低張液である。

溶液IIに浸された細胞では原形質分離が起こっているので，膨圧は 0 である。また，溶液IVに浸された細胞は限界原形質分離の状態にあるので，膨圧は 0 である。したがって，①・②は誤りである。溶液IVに浸された細胞は限界原形質分離の状態にあるが，溶液IIに浸された細胞では原形質分離が起こっており，細胞外へ水が流出して限界原形質分離の状態のときよりも細胞の浸透圧が高くなっている。したがって，溶液IVに浸された細胞よりも溶液IIに浸された細胞の方が浸透圧が高いので，③・④は誤りである。溶液 I に浸された細胞と溶液IIIに浸された細胞では吸水が起こっており，膨圧が生じて緊張状態になっているが，溶液IIに浸された細胞では原形質分離が起こっているので，⑤は誤りである。溶液 I に浸された細胞の体積が最も大きくなっているのは，溶液 I ～IVのうち溶液 I が最も低張で，細胞が最も多く吸水したためである。細胞の吸水にともなって液胞全体の体積も大きくなるので，⑥は正しい。溶液 I ～IVのうち最も高張であるのは溶液IIであり，最も低張であるのは溶液 I であるので，⑦は誤りである。溶液IVに浸された細胞は限界原形質分離の状態にあることから，溶液IVは限界原形質分離の状態の細胞の浸透圧と等張であるので，⑧は正しい。

$\boxed{5}$・$\boxed{6}$…⑥・⑧

第 2 問　生殖　**問題**

生物の生殖に関する知識問題と，マウスの受精に関する考察問題を出題した。

植物細胞を高張液に浸すと，細胞外へ水が流出し，細胞膜が細胞壁から離れる原形質分離が起こる。

限界原形質分離
細胞膜が細胞壁から離れるか離れないかの状態

植物細胞を低張液に浸すと，細胞内に水が流入し，細胞壁を押し広げようとする膨圧が生じる。

緊張状態
植物細胞に膨圧が生じている状態

問1　生物が自己と同じ種類の新個体をつくることを生殖とよぶ。生殖は，配偶子の合体によって新個体が生じる有性生殖と，配偶子によらずに新個体が生じる無性生殖に大別される。

有性生殖では，生殖のために特別に分化した細胞である配偶子がつくられる。配偶子の合体を接合とよび，雌雄の配偶子の大きさが異なる場合，大型で運動性のない雌性配偶子を卵，小型で運動性のある雄性配偶子を精子(運動性をもたないものは精細胞)とよび，卵と精子(または精細胞)の合体を受精とよぶ。

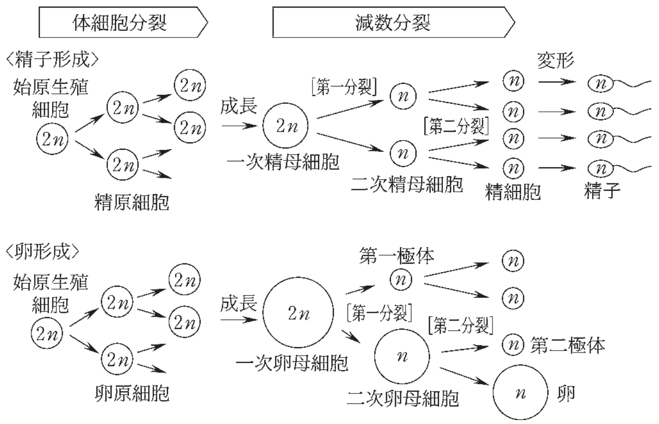
有性生殖
　配偶子の合体による生殖
　接合，受精

無性生殖には，分裂，出芽，栄養生殖などがある。アメーバやゾウリムシなどの単細胞生物では細胞分裂によって個体が増える。また，多細胞動物でも，イソギンチャクやプラナリアなどは親のからだがほぼ同じ大きさに分かれて個体が増える。このような生殖方法を分裂とよぶ。ヒドラや酵母菌などでは，親のからだに小さなふくらみが生じ，これが成長して新個体となる。このような生殖方法を出芽とよぶ。サツマイモやジャガイモなどでは，根や茎などの栄養器官の一部から新個体が生じる。このような生殖方法を栄養生殖とよぶ。

無性生殖
　配偶子によらない生殖
　分裂，出芽，栄養生殖など

①カイコガは有性生殖である受精によって新個体をつくり，分裂は行わないので，誤りである。②ヒドラは出芽によって新個体をつくるので，正しい。③イモリは有性生殖である受精によって新個体をつくり，栄養生殖は行わないので，誤りである。④ゾウリムシは主に分裂によって新個体をつくり，有性生殖として接合は行うが，受精は行わないので，誤りである。　$\boxed{7}$…②

問2　動物における精子形成と卵形成の過程を下図に示す。



精子形成では，始原生殖細胞が精巣に入って精原細胞となり，精原細胞が体細胞分裂を繰り返して増殖し，やがて成長して一次精母細胞となる。減数分裂の第一分裂で，1個の一次精母細胞($2n$)から同じ大きさの2個の二次精母細胞(n)が生じ，減数分裂の第二分裂では，1個の二次精母細胞から同じ大きさの2個の精細胞が生じるので，1個の一次精母細胞から同じ大きさの4個の

精細胞が生じることになる。さらに精細胞は変形してべん毛をもつ精子となる。

卵形成では，始原生殖細胞が卵巣に入って卵原細胞となり，卵原細胞が体細胞分裂を繰り返して増殖し，やがて成長して一次卵母細胞となる。減数分裂の第一分裂で，１個の一次卵母細胞($2n$)から大きな二次卵母細胞(n)と小さな第一極体(n)が生じ，減数分裂の第二分裂では，１個の二次卵母細胞から大きな卵(n)と小さな第二極体(n)が生じるので，１個の一次卵母細胞から１個の卵が生じることになる。

①一次精母細胞は均等に分裂し，同じ大きさの２個の二次精母細胞が生じるので，誤りである。②精細胞は減数分裂によって生じた細胞であり，減数分裂を行わないので，誤りである。③二価染色体は減数分裂の第一分裂で観察される。卵原細胞は体細胞分裂を行って増殖するが，減数分裂は行わないので，誤りである。④二次精母細胞と第二極体の核相はともに n であるので，正しい。

$\boxed{8}$ …④

問３　水中で産卵する動物では体外受精が行われることが多く，陸上で産卵する動物やほ乳類のような胎生の動物では体内受精が行われることが多い。一般的に水中で産卵する②カエルは体外受精を行い，陸上で産卵する①ハエと③カメ，およびほ乳類である④イルカは，体内受精を行う。

$\boxed{9}$ …②

水中で産卵する動物では体外受精が行われることが多い。
陸上で産卵する動物やほ乳類のような胎生の動物では体内受精が行われることが多い。

問４　①ヒトの精子の全長は50〜70 μm であるので，正しい。②ヒトやウニの精子は，頭部，中片，尾部からなる。べん毛の運動に必要なエネルギーを供給するミトコンドリアは，中片に含まれているので，誤りである。③ヒトやウニの精子形成では，減数分裂によって生じた精細胞が変形して運動性をもつ精子となる。このとき，精細胞の中心体(中心粒)からべん毛が形成されるので，正しい。④ウニの精子が未受精卵のゼリー層に達すると，精子の頭部の先体が突起状に変化する先体反応が起こるので，正しい。

$\boxed{10}$ …②

ウニの精子の先体反応
　ウニの精子が卵のゼリー層に達すると，精子の先端に先体突起とよばれる突起が形成される。

問５　問題文に「マウスでは，精子の透明帯への結合は，精子の先端が透明帯に含まれる物質に結合することによって起こる」とある。図２を見ると，培養液に物質Ｘや物質Ｙを添加した場合には，精子が結合した未受精卵の割合はほとんど変化しないが，培養液に物質Ｚを添加した場合には，添加した物質Ｚの濃度が高くなるにつれて，精子が結合した未受精卵の割合が低下している。これは，培養液中に存在する物質Ｚの濃度が高くなるほど，精子の先端が培養液中に存在する物質Ｚと結合してしまい，透明帯に存在する物質Ｚと結合する確率が低下することが原因であると考えられる。したがって，マウスの精子の透明帯への結合は，精子の先端が透明帯に含まれる物質Ｚに結合することによって起こると考えられる。

$\boxed{11}$ …③

問6　①・②マウスでは卵形成過程における減数分裂が第二分裂中期で停止し，二次卵母細胞の状態で排卵されるため，排卵時には第一極体はすでに放出されている。また，第二分裂中期の二次卵母細胞に精子が進入すると，減数分裂が再開され，第二極体が放出される。したがって，１個の精子が進入したことにより，第二極体の放出が起こる。物質Ｚの性質が変化することと極体の放出との間には関係がないので，ともに誤りである。③先体反応は精子が透明帯に結合した後に起こる。物質Ｚの性質が変化することによって，他の精子は透明帯と結合できなくなり，他の精子の先体反応は起こらないので，誤りである。④１個の精子が進入すると，透明帯全体に存在するすべての物質Ｚの性質が変化することによって，他の精子は透明帯と結合できなくなり，卵内への進入が抑制されるので，正しい。このしくみは，複数の精子が卵内に進入して核相の異常な受精卵ができることを防ぐためのものである。

$\boxed{12}$…④

第３問　DNA・胚乳と種皮の遺伝　問題

DNA に関する知識問題と，被子植物の胚乳と種皮の遺伝に関する問題を出題した。

問１　肺炎双球菌には，病原性のＳ型菌と非病原性のＲ型菌が存在する。グリフィスは，加熱したＳ型菌と生きたＲ型菌を混ぜてネズミに注射すると，ネズミは肺炎で死亡し，死んだネズミの体内から生きたＳ型菌が検出されることを明らかにした。これは，Ｒ型菌が加熱したＳ型菌に由来する何らかの物質を取り込んだ結果，その形質が変化したことを意味する。このような現象を形質転換とよぶ。エイブリー(アベリー)らは，Ｓ型菌の抽出物にタンパク質分解酵素を作用させた後，生きたＲ型菌と混ぜて培養すると形質転換が起こるが，Ｓ型菌の抽出物に DNA 分解酵素を作用させた後，生きたＲ型菌と混ぜて培養しても形質転換が起こらないことを示した。これらの実験より，肺炎双球菌の形質転換は DNA によって引き起こされることが明らかとなり，遺伝子の本体が，タンパク質ではなく，DNA であることが強く示唆された。

①サットンは，「遺伝子は染色体に存在する」という染色体説を唱えた。③シュペーマンは，両生類の発生における誘導現象を明らかにした。④モーガンは，三点交雑によってショウジョウバエの染色体地図(連鎖地図)を作製した。　$\boxed{13}$…②

問２　シャルガフは，様々な生物の組織から DNA を抽出し，４種類の構成単位の数を比較した。その結果，生物の種によって DNA 中の構成単位の数の割合は異なるが，すべての生物の DNA で，ＡとＴ，ＧとＣの数の割合がそれぞれほぼ等しいことが明らかとなった。ワトソンとクリックは，シャルガフの分析

形質転換
　ある細胞に別の細胞の遺伝子が入ることによって，その細胞の形質が変化する現象

シャルガフの規則
　生物によって DNA を構成する４種類の構成単位の数の割合は異なるが，いずれの生物の DNA でも，ＡとＴ，ＧとＣの数の割合がそれぞれほぼ等しい。

結果とウィルキンスらによって得られたDNAの構造に関するデータを基に研究を進め，「DNAは，A，T，G，Cで表される4種類の構成単位からなり，これらの構成単位が多数連なってできた長い鎖が2本平行に並んでいる。2本の鎖は，AとT，GとCが互いに対になって結合しており，全体がらせん状にねじれた二重らせん構造をしている」というDNAの立体構造に関するモデルを提唱した。

DNAは，4種類の構成単位が多数連なった長い鎖が2本並び，らせん状にねじれた二重らせん構造をしている。

①DNAの一方の鎖の中では，A，T，G，Cの数の間に規則性はなく，この鎖におけるTの数の割合は不明であるので，誤りである。②DNAを構成する2本の鎖のうち，一方の鎖におけるAの数の割合が30％であれば，他方の鎖においてAと相補的に結合するTの数の割合も30％であるので，正しい。③・④DNAの2本鎖全体に含まれるAの数の割合とTの数の割合は等しい。同様に，DNAの2本鎖全体に含まれるGの数の割合とCの数の割合も等しい。したがって，DNA中のAとCの数の割合の和をGとTの数の割合の和で割った値は，生物の種によらず1となる。しかし，DNA中にAとTやGとCがそれぞれ何％ずつ含まれているかは生物の種によって異なるので，DNA中のAとTの数の割合の和をGとCの数の割合の和で割った値は生物の種によって異なる。したがって，ともに誤りである。

$\boxed{14}$…②

問3　遺伝子型がSSwwである個体がつくる精細胞の遺伝子型はSwであり，遺伝子型がssWWである個体がつくる卵細胞の遺伝子型はsWである。したがって，受精卵の遺伝子型はSsWwであり，受精卵の体細胞分裂によって生じた胚の遺伝子型もSsWwである。また，問題文にもあるように，種皮は交配に用いた個体のめしべの珠皮に由来するので，種皮の遺伝子型は，交配に用いた個体のめしべの体細胞の遺伝子型と同じssWWである。

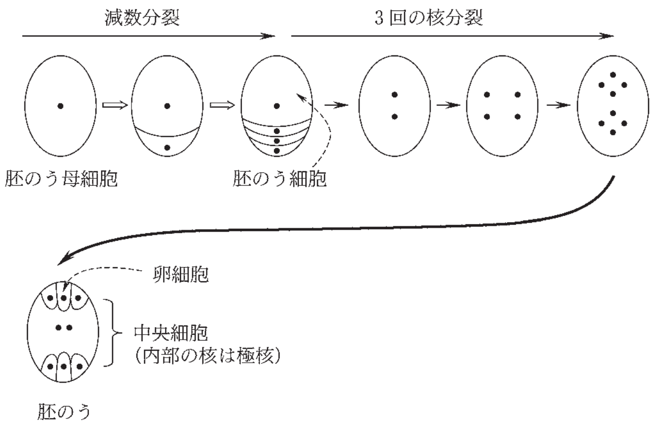
種皮はめしべの珠皮に由来する。

$\boxed{15}$…⑤　$\boxed{16}$…⑦

問4　**交配**2の「**交配**1で得られた種子を播(ま)き，生育した植物体」とは，**交配**1で得られた種子の胚が成長したものであるので，その遺伝子型はSsWwである。**交配**2の自家受精で得られた種子の種皮の遺伝子型は，交配に用いた個体のめしべの遺伝子型と同じSsWwであるので，種皮の色はすべて赤色になる。

被子植物の胚乳は，精細胞と中央細胞の融合によって生じる。胚のうの形成過程を模式的に示した下図からもわかるように，卵細胞の核と胚のう内の中央細胞に含まれる二つの極核は，胚のう細胞の核の核分裂によって生じたものであるので，同じ遺伝子型となる。したがって，卵細胞の遺伝子型がWである場合，二つの極核の遺伝子型はいずれもWであり，卵細胞の遺伝子型がwである場合，二つの極核の遺伝子型はいずれもwである。

被子植物の重複受精
　精細胞(n)＋卵細胞(n)
　　→ 胚$(2n)$
　精細胞(n)＋中央細胞$(n+n)$
　　→ 胚乳$(3n)$



交配2は，遺伝子型がSsWwである個体における自家受精である。ここで，胚乳の形質に関する遺伝子W(w)についてのみ考える。遺伝子型がWwである個体がつくる精細胞の遺伝子型とその分離比はW：w＝1：1である。また，遺伝子型がWwである個体がつくる卵細胞の遺伝子型とその分離比はW：w＝1：1であり，中央細胞(極核)の遺伝子型とその分離比はW＋W：w＋w＝1：1である。したがって，胚乳の遺伝子W(w)に関する遺伝子型は，下表からわかるように，WWW，WWw，Www，wwwの4種類がある。

		精細胞	
		W	w
極核	W＋W	WWW	WWw
	w＋w	Www	www

$\boxed{17}$ …④

問5　**交配3**に用いた遺伝子型がssWWである個体がつくる精細胞の遺伝子型はsWであり，遺伝子型がSSwwである個体がつくる卵細胞の遺伝子型はSwである。したがって，**交配3**で生じる受精卵の遺伝子型はSsWwであり，受精卵の体細胞分裂によって生じた胚の遺伝子型もSsWwである。

交配3で得られた種子(胚の遺伝子型SsWw)を播き，生育した植物体(遺伝子型SsWw)のめしべに，遺伝子型がsswwである個体から採取した花粉を受粉させると，この交配で得られる種子の種皮はめしべの珠皮に由来するので，その遺伝子型はSsWwであり，すべての種子の種皮は赤色となる。

次に，胚乳の形質に関する遺伝子W(w)について考えると，遺伝子型がWwである個体がつくる卵細胞の遺伝子型とその分離比はW：w＝1：1であり，中央細胞(極核)の遺伝子型とその分離比はW＋W：w＋w＝1：1である。遺伝子型がsswwである個体がつくる精細胞の胚乳の形質に関する遺伝子の遺伝子型は

wであるので，これらの交配によって生じる種子の胚乳の遺伝子型の分離比は WWw：www＝1：1 となり，胚乳の表現型の分離比はウルチ性：モチ性＝1：1 となる。したがって，種子の種皮と胚乳の形質に関する分離比は，赤色・ウルチ性：赤色・モチ性：白色・ウルチ性：白色・モチ性＝1：1：0：0 となる。

$\boxed{18}$ …②

第 4 問　神経・感覚　問題

神経系に関する知識問題と，温度感覚に関する考察問題を出題した。

問 1　ヒトの手が針先に触れたときに起こる脊髄反射では，皮膚の受容器→感覚神経→脊髄→運動神経→効果器(骨格筋)の順に，大脳を経由せずに，興奮が伝わって瞬時に手を引っ込める反応が起こる。このような興奮の伝達経路を反射弓とよぶ。また，感覚神経の興奮は脊髄で別のニューロンに伝達され，このニューロン(実際にはシナプスで連絡した複数のニューロン)によって興奮が大脳の感覚中枢へ伝えられる。その結果，痛みの感覚が生じる。図 1 の**ア**は皮膚の受容器から感覚神経によって興奮が脊髄に伝えられる経路，**イ**は感覚神経から脊髄を経由して大脳へ興奮が伝えられる経路，**ウ**は運動神経によって興奮が筋肉に伝えられる経路をそれぞれ示している。

脊髄反射の反射弓
　受容器→感覚神経→脊髄→運動神経→効果器

1 本のニューロンに生じる活動電位の大きさは全か無かの法則にしたがう。したがって，閾値よりも弱い刺激を与えた場合には活動電位は発生せず，閾値よりも強い刺激を与えた場合にのみ活動電位が発生するが，そのときに生じる活動電位の大きさは刺激の強弱によって変化しない。刺激を強くすると，**ア**の過程での伝導に関わる感覚ニューロンでは，活動電位の発生頻度が増加する。すなわち，与えられた刺激が強いほど活動電位の発生頻度が増加する。

$\boxed{19}$ …②

1 本のニューロンの活動電位の大きさは全か無かの法則にしたがう。

1 本のニューロンは刺激の強弱を活動電位の発生頻度の違いとして伝える。

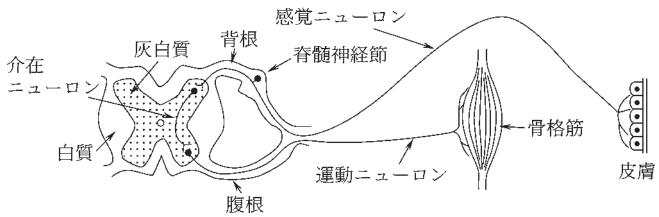
問 2　次図は脊髄反射に関わるニューロンと脊髄の構造を模式的に示したものである。脊髄の中心部(髄質)は灰白質，周辺部(皮質)は白質とよばれ，灰白質にはニューロンの細胞体が集まっており，白質には多くの神経繊維が通っている。脊髄からは末梢神経(脊髄神経)の束が腹根と背根を通って出ており，背根には脊髄神経節とよばれるふくらみがみられる。感覚ニューロンの軸索は背根を通り，感覚ニューロンの細胞体は脊髄神経節にあるので，①は正しい。運動ニューロンの軸索は腹根を通るので，④は誤りである。感覚神経からの興奮を大脳に伝える**イ**の経路では，ニューロンの軸索は脊髄の白質を通るので，③は正しい。間脳は視床と視床下部に区分され，視床は多くの感覚に関係する神経の中継点となっているので，②は正しい。

脊髄の灰白質
　細胞体が集まっている。
脊髄の白質
　多くの神経繊維が通る。

感覚ニューロンの細胞体は脊髄神経節にある。

背根　感覚神経の神経繊維が通る。
腹根　運動神経の神経繊維が通る。

間脳の視床
　感覚に関する神経の中継点



$\boxed{20}$ …④

問 3　だ液分泌の反射では，延髄が中枢としてはたらき，効果器であるだ液腺に自律神経である副交感神経を介して興奮が伝えられる。したがって，①が正しく，③は誤りである。なお，中脳には眼に強い光を照射したときに瞳孔が縮小する反射の中枢がある。中脳，延髄，脊髄には反射の中枢があるが，反射は大脳とは無関係に起こる反応であり，大脳が反射の中枢となることはないので，②は誤りである。ヒトの手が針先や熱いものに触れたときに起こる屈筋反射の反射弓では，**問 2** の解説の図に示したように，感覚ニューロンと運動ニューロンの間に介在ニューロンが存在するが，ひざの下をたたくと足が跳ね上がる膝蓋腱（しつがい）反射の反射弓には介在ニューロンが存在せず，感覚ニューロンと運動ニューロンが直接シナプスを形成しているので，④は誤りである。

だ液分泌の反射の中枢は延髄にある。

反射は大脳と無関係に起こる。

膝蓋腱反射の反射弓では，感覚ニューロンと運動ニューロンが直接シナプスを形成する。

$\boxed{21}$ …①

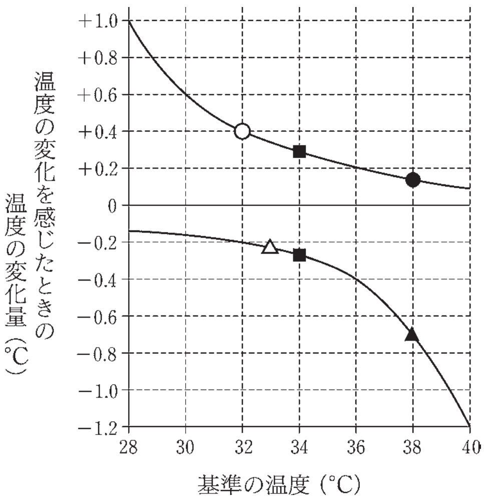
問 4　眼に対する光や耳に対する音のように，それぞれの受容器が受容することのできる刺激の種類を適刺激とよぶ。かぎ刺激は本能行動を誘発する刺激である。ヒトの温度を受容する受容器は温点や冷点であり，これらの受容器は皮膚の真皮に存在する。

適刺激
　受容器が受容できる刺激

$\boxed{22}$ …④

問 5　①図 2 で，基準の温度が 38 ℃のところを見ると，温度を約 0.15 ℃上昇させると温度が上昇したと感じ(次図●)，温度を約 0.7 ℃低下させると温度が低下したと感じる(次図▲)ことが読み取れる。したがって，温度を 0.5 ℃上昇させると温度が上昇したと感じるが，温度を 0.5 ℃低下させても温度が低下したと感じないので，誤りである。②図 2 で，基準の温度が 34 ℃のところを見ると，温度の上昇と低下を感じるのに必要な温度の変化量はともに約 0.3 ℃である(次図■)ことが読み取れる。したがって，0.2 ℃の変化では温度変化を感じないので，誤りである。③図 2 で，基準の温度が 32 ℃のところを見ると，温度を約 0.4 ℃上昇させると温度が上昇したと感じ(次図○)，基準の温度が 33 ℃のところを見ると，温度を約 0.25 ℃低下させると温度が低下したと感じる(次図△)ことがわかる。したがって，32 ℃から温度を 0.5 ℃上昇させて 32.5 ℃にした場合には温度が上昇したと感じ，33 ℃から温度を 0.5 ℃低下させて 32.5 ℃にした場合には温度が低下したと感じるので，正しい。④ヒトの平均体温は 36.5 ℃であるので，図 2 で，基準の温度が体温より低い 30 ℃のところを

見ると，温度を約 0.6 ℃上昇させないと温度の上昇を感じないのに対し，温度を約 0.15 ℃低下させると温度の低下を感じることがわかる。また，基準の温度が体温より高い 40 ℃のところを見ると，温度を約 0.1 ℃上昇させると温度の上昇を感じるのに対し，温度を約 1.2 ℃低下させないと温度の低下を感じないことがわかる。したがって，ヒトは，体温よりも温度が低い状態に置かれると温度の低下に敏感になり，体温よりも温度が高い状態に置かれると温度の上昇に敏感になるので，誤りである。



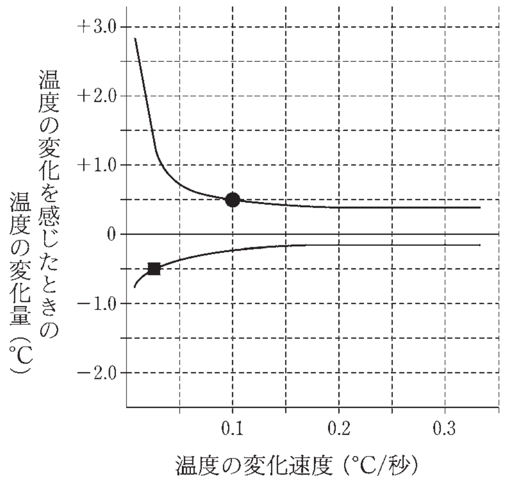
$\boxed{23}$ …③

問６　①温度を上昇させる場合について，温度の変化速度と温度の変化を感じるまでに要する時間を計算すると次のようになる。

温度の変化速度	温度の変化を感じるまでに要する時間
0.025 ℃/秒	1.5 ℃÷0.025 ℃/秒＝60 秒
0.05 ℃/秒	0.75 ℃÷0.05 ℃/秒＝15 秒
0.1 ℃/秒	0.5 ℃÷0.1 ℃/秒＝ 5 秒
0.2 ℃/秒	0.4 ℃÷0.2 ℃/秒＝ 2 秒
0.3 ℃/秒	0.4 ℃÷0.3 ℃/秒≒1.3 秒

温度を低下させる場合についても，グラフの傾向が同じであるので，同様の結果が得られることがわかる。したがって，温度の変化を感じるまでに要する時間は，温度の変化速度が小さいほど長いので，正しい。②温度の変化速度が 0.1 ℃/秒より小さいときには，温度を上昇させる場合も低下させる場合も，温度の変化速度が小さい（横軸の値が小さい）ほど，温度の変化を感じるのに必要な温度の変化量が大きくなっているので，正しい。③温度の変化速度が 0.2 ℃/秒より大きいときには，温度変化を感じたときの温度の変化量が一定であり，温度を上昇させる場合には温度が約 0.4 ℃上昇すれば温度の変化を感じ，温度を低下させる場合には，温度が約 0.2 ℃低下すれば温度の変化を感じる。したがっ

て，温度の変化速度は温度の変化を感じるのに必要な温度の変化量には影響しないので，正しい。④0.1℃/秒の速度で温度を上昇させた場合には，温度の上昇を感じるのに必要な温度の変化量は0.5℃(下図●)であり，温度の変化を感じるまでに要する時間は，0.5℃÷0.1℃/秒＝5秒である。一方，0.025℃/秒の速度で温度を低下させた場合には，温度の低下を感じるのに必要な温度の変化量は約0.5℃(下図■)であり，温度の変化を感じるまでに要する時間は，0.5℃÷0.025℃/秒＝20秒である。したがって，誤りである。

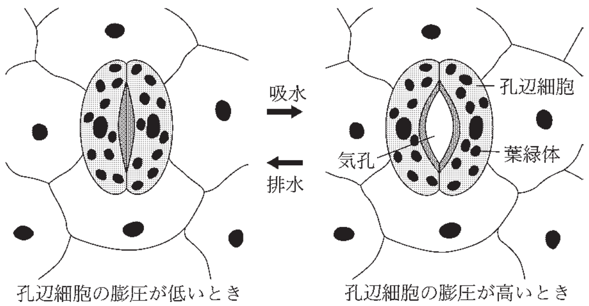


24 …④

第5問　光合成　問題

光合成に関する知識問題と考察問題を出題した。

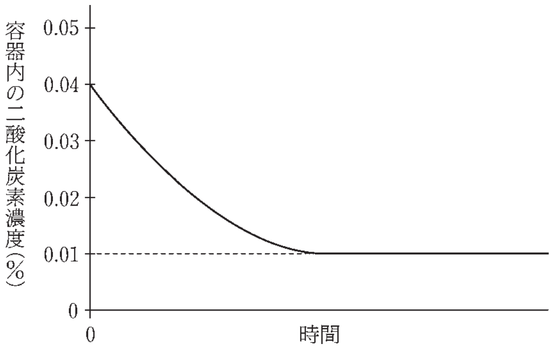
問1　一般に，表皮系の組織を構成する細胞は葉緑体をもたないが，表皮細胞が変化した孔辺細胞には葉緑体がみられる。また，孔辺細胞では，気孔側の細胞壁が厚く，気孔の反対側の細胞壁が薄くなっている。このため，孔辺細胞の浸透圧が上昇して周囲から孔辺細胞内に水が入り孔辺細胞の膨圧が上昇すると，気孔側の細胞壁よりも気孔の反対側の細胞壁がよく伸びて孔辺細胞が湾曲し，気孔が開く。



孔辺細胞は葉緑体をもつ。
孔辺細胞では，気孔側の細胞壁が厚く，気孔の反対側の細胞壁は薄くなっている。

$\boxed{25}$ …①

問2　図1から，二酸化炭素濃度が0.04％を含めて0.01％よりも高い場合には，呼吸速度よりも光合成速度の方が大きいので，呼吸によって放出される二酸化炭素量よりも光合成によって吸収される二酸化炭素量の方が多くなり，容器内の二酸化炭素濃度は次第に低下していく。やがて，容器内の二酸化炭素濃度が0.01％になると，呼吸速度と光合成速度が等しくなり，呼吸によって放出される二酸化炭素量と光合成によって吸収される二酸化炭素量が等しくなるため，容器内の二酸化炭素濃度は変化しなくなる。時間経過にともなう容器内の二酸化炭素濃度の変化は，下図のようになると考えられる。



$\boxed{26}$ …③

問3　陽葉と陰葉を比較した場合，陽葉の方が葉が厚く，クチクラとさく状組織が発達している。このため，陽葉は陽生植物と，陰葉は陰生植物と，それぞれ同様の光－光合成曲線を示し，陰葉よりも陽葉の方が呼吸速度，補償点，光飽和点，最大光合成速度のいずれについても大きくなる。 $\boxed{27}$ …①

問4　反応に関係するいくつかの要因のうち，最も不足していて全体の速度を制限している要因を限定要因という。光の強さが光合成速度の限定要因となっている状況では，光を強くすると光合成速度が上昇し，光の強さ以外が限定要因となっている状況では，光を強くしても光合成速度は上昇しない。図2で，10時から12時にかけて光強度は上昇するが，植物Q，植物Rともに見かけの光合成速度は変化しない。また，12時30分頃に光強度が一時的に低下しているが，植物Q，植物Rともに見かけの光合成速度は変化していない。これより，12時の時点では，植物Q，植物Rともに光飽和の状態にあり，光合成速度は光の強さ以外の要因(温度，または二酸化炭素濃度)によって制限されていると考えられる。

$\boxed{28}$ …④

問5　①夜間は光がないため，光合成は行われない。したがって，図2で，夜間の見かけの光合成速度は呼吸による二酸化炭素放出速度であり，呼吸速度は植物Qよりも植物Rの方が小さいことが

密閉容器内の二酸化炭素濃度
呼吸速度＜光合成速度
↓
二酸化炭素濃度は低下する。

呼吸速度＝光合成速度
↓
二酸化炭素濃度は変化しない。

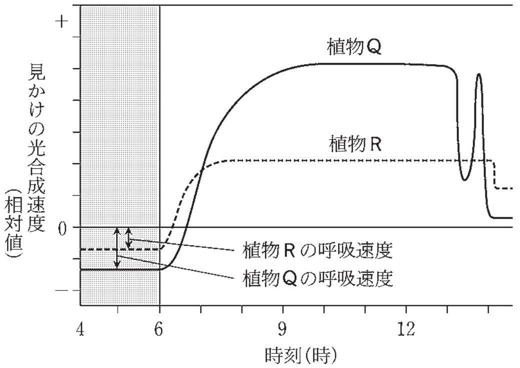
呼吸速度＞光合成速度
↓
二酸化炭素濃度は上昇する。

陽葉の特徴
葉が厚い。
クチクラが発達している。
さく状組織が発達している。

限定要因
反応に関係するいくつかの要因のうち，最も不足していて全体の速度を制限している要因

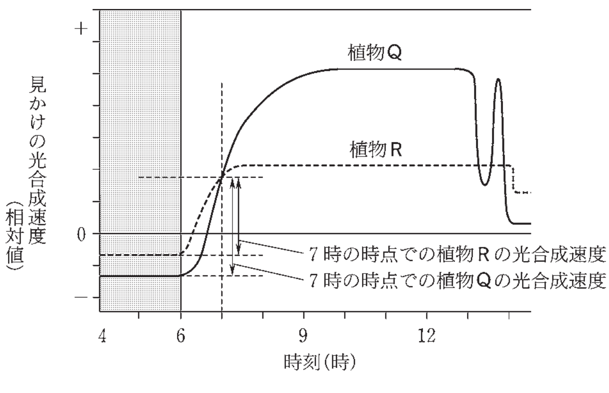
光合成速度の限定要因になり得る要因
光の強さ
温度
二酸化炭素濃度

わかる。したがって，誤りである。



②６時30分の時点では，植物Q，植物Rともに，夜間に比べて見かけの光合成速度が大きくなっている。これは，光が照射されることで植物が光合成を行うようになったことを示している。したがって，誤りである。③７時の時点では，植物Qと植物Rの見かけの光合成速度が等しくなっているが，前述のように，植物Qの方が植物Rよりも呼吸速度が大きいので，見かけの光合成速度と呼吸速度の和である光合成速度は，次図に示すように植物Qの方が大きい。したがって，誤りである。

光合成速度＝
　見かけの光合成速度＋呼吸速度



④14時30分の時点では，見かけの光合成速度で比較すると，植物Qの見かけの光合成速度は植物Rの見かけの光合成速度の半分以下になっているが，見かけの光合成速度と呼吸速度の和である光合成速度で比較すると，植物Qの光合成速度は植物Rの光合成速度の半分以下にはならない。したがって，誤りである。⑤呼吸速度が光合成速度を上回っていると，見かけの光合成速度は負の値となる。14時から17時までの間，植物Qも植物Rも見かけの光合成速度は負の値になっていない。これより，植物Q，植物Rともに，14時から17時までの間は光合成速度が呼吸速度を上回っていることがわかる。したがって，正しい。⑥二酸化炭素吸収量は見かけの光合成量で表される。６時から７時までの間と午後には一時的に植物Rの見かけの光合成速度が植物Qの見かけの光合成速度を上回るが，それ以外のほとんどの時間は，植物Qの見かけ

の光合成速度が植物Ｒの見かけの光合成速度を大きく上回っているので，６時から18時までの二酸化炭素吸収量(見かけの光合成量)の合計は植物Ｒよりも植物Ｑの方が多いと考えられる。したがって，誤りである。⑦**問３**の解説で述べたように，一般に，陰生植物と比べて陽生植物の方が，呼吸速度，補償点，光飽和点，最大光合成速度のいずれについても大きい。植物Ｑと植物Ｒでは，植物Ｑの方が呼吸速度と光合成速度の最大値が大きい。これより，植物Ｑの方が陽生植物としての性質をより強く示すと考えられる，したがって，正しい。 $\boxed{29}$・$\boxed{30}$…⑤・⑦

地　学　Ⅰ

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設　問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	2	3	
		問2	2	1	4	
		問3	3	4	3	
	B	問4	4	3	3	
		問5	5	4	3	
	C	問6	6	1	4	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	3	3	
		問2	8	3	3	
		問3	9	2	4	
	B	問4	10	2	3	
		問5	11	5	4	
		問6	12	1	3	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	3	3	
		問2	14	3	3	
		問3	15	4	3	
		問4	16	2	4	
	B	問5	17	1	3	
		問6	18	4	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	19	3	3	
		問2	20	1	3	
		問3	21	2	3	
		問4	22	2	4	
	B	問5	23	4	3	
		問6	24	1	4	
第4問　自己採点小計					(20)	

問題番号	設　問		解答番号	正解	配点	自己採点
第5問	A	問1	25	4	3	
		問2	26	4	3	
		問3	27	2	4	
	B	問4	28	1	3	
		問5	29	2	3	
		問6	30	4	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

【解説】

第１問　固体地球　問題

A　プレート

プレートと，その運動によって地学現象をとらえるプレートテクトニクスは，固体地球分野において重要なテーマの一つである。基礎的な用語の意味をきちんと確認し，プレート運動と地学現象との関連を確実に理解しておこう。

問１　ア：マントル上部において，軟らかく流れやすい部分をアセノスフェアという。アセノスフェアより上にあるマントルと地殻は硬い岩板となっており，リソスフェアと呼ばれる。プレートとは，このリソスフェアの部分を指し，その下のアセノスフェアの流動によってプレートが移動する。

イ・ウ：プレート境界は，近づく境界，離れる境界，すれ違う境界の三種類に分類することができる(図１―１)。近づく境界のうち，海洋プレートが他のプレートの下に沈み込む部分では，海溝が形成される。また，大陸プレートどうしが衝突する部分では，ヒマラヤ山脈などの大山脈が形成される。離れる境界では，プレートが新しく生成され，両側に離れていく。海底では，中央海嶺と呼ばれる海底山脈を形成しており，火山活動がみられる。すれ違う境界では，横ずれ断層の一種であるトランスフォーム断層が形成される。北アメリカ大陸の太平洋岸にみられるサンアンドレアス断層はトランスフォーム断層の代表例である。

1 …②

問２　プレート境界とは関係なく，深部から高温のマントル物質が上昇することによってマグマが供給される部分をホットスポットという。ホットスポットの位置は変化せず，地表のプレートの動きには影響されない。ホットスポットによっていったん形成された火山は，プレートの移動に伴いホットスポットから離れ，ホットスポット上には，また新たな火山が形成される。そのため，ホットスポットから遠く離れた火山ほど形成時期が古く，プレート移動の向きに沿った火山列が形成される。本問では，プレートの移動方向が西から東であるため，火山Ａから東に連なる火山列となる。よって，①が正解である。　2 …①

問３　地震は，硬い岩板であるプレートどうしが接し，互いに移動するプレート境界付近に集中して発生する。問題図１に示された地震を，世界のプレート分布(図１―２)と比べると，プレート境界のうち，近づく境界である海溝や造山帯に沿っておもに分布していることがわかる。海溝では，海洋プレートと他のプレートが近づき，他のプレートの下に海洋プレートが斜めに沈み込む。その際，沈み込んだプレートの上面および内部で，震源の深さが 100 km 以深の深発地震が発生し，プレート上面に沿う深発地震

【ポイント】

アセノスフェア

マントル上部において，軟らかく流動性に富む部分。

リソスフェア(プレート)

アセノスフェアより上部の硬い岩板。地殻とマントル最上部からなる。

プレート境界

近づく境界(収束境界，せばまる境界)
離れる境界(拡大境界，広がる境界)
すれ違う境界(ずれる境界)

海溝

プレートの近づく境界の一つ。海洋プレートが他のプレートの下に沈み込むところにできる深い溝。

中央海嶺

プレートの離れる境界にあたる海底大山脈。

トランスフォーム断層

プレート境界をつなぐ横ずれ断層。

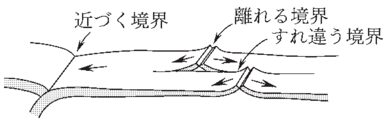


図１―１　プレート境界

ホットスポット

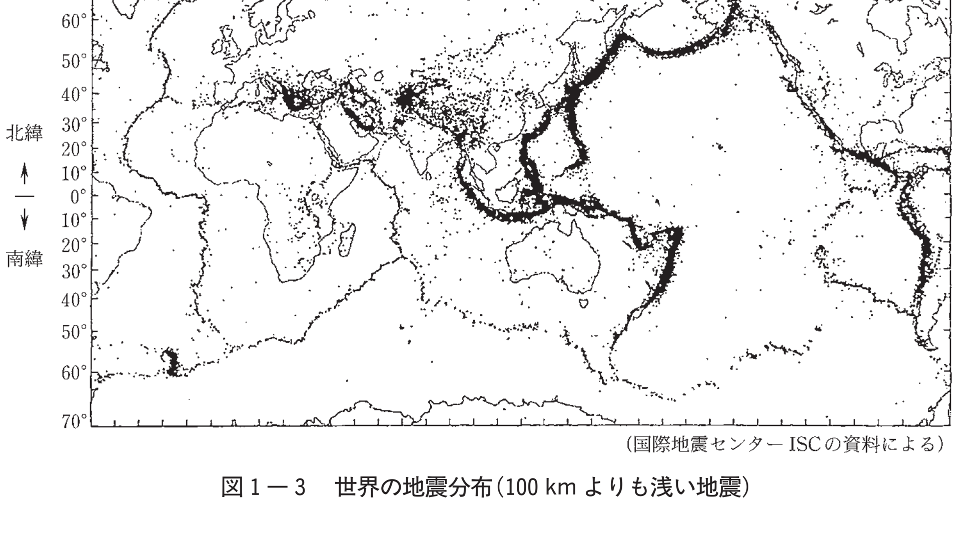
プレート境界とは関係なく，マントル深部からマグマが供給される部分。

面を形成する。深発地震面は，和達（わだち）－ベニオフ面とも呼ばれる。また，大陸プレートどうしが衝突し，一方のプレートが沈み込む造山帯でも深発地震は生じる。このように，深発地震は，プレートが近づく境界付近で生じる特有の現象であるといえる。よって，④が正解である。図１－３は，震源の深さが100 kmよりも浅い地震の分布を示したものである。世界のプレート分布(図１－２)と比べると，地震が帯状に集中する部分は，プレートの離れる境界やすれ違う境界にも分布することがわかる。 $\boxed{3}$ …④

深発地震面(和達－ベニオフ面)

海溝から沈み込むプレート上面に沿う。海溝から離れるにしたがって深くなる。

図１－２　世界のプレート分布



(国際地震センターISCの資料による)

図１－３　世界の地震分布(100 kmよりも浅い地震)

B　地球内部の熱

地球内部の熱は，地殻熱流量として地表へと伝わり，外部へと放出される。今回は，地球内部の熱と地殻熱流量に関する基本的事項について出題した。

問4　地球内部の熱源の一つに，放射性同位体が崩壊するときに発生する熱がある。特に，岩石に含まれるウラン(U)，トリウム(Th)，カリウム(K)による崩壊熱が大きい。問題文中にも「カリウムなどの放射性同位体」とあることから，カリウムを多く含む岩石は発熱量が大きいと考えられる。カリウムは，造岩鉱物のうち，カリ長石や黒雲母(うんも)に多く含まれる。カリ長石や黒雲母は，花こう岩や流紋岩などの酸性岩の構成鉱物であるため，③花こう岩が正解となる。放射性同位体の含有量の大小は，花こう岩＞玄武岩＞かんらん岩となる。花こう岩は，おもに大陸地殻上部を構成する岩石である。海洋地殻は玄武岩質岩石からなり，上部マントルはかんらん岩質岩石からなる。そのため，放射性同位体の含有量の大小は，大陸地殻上部＞海洋地殻＞上部マントルである。海洋地殻は，放射性同位体の含有量は少ないが，マントルから伝わる熱が熱源となっている。なお，①の石灰岩の構成鉱物は方解石で，$CaCO_3$ が主成分である。　$\boxed{4}$ …③

放射性同位体
崩壊するときに熱を発生する。
例　ウラン，トリウム，カリウム

問5　大陸地域の平均と海洋地域の平均とで地殻熱流量を比較すると，それほど大きな差はない。しかし，高温のマントル物質の上昇やマグマの発生などにより，場所によって地殻熱流量が高い部分がみられる。

①　弧状列島などの火山地域では，高温のマグマが発生・上昇しているため，地下増温率が高く，地殻熱流量が大きい。それに対し，形成時期が古い大陸地域では，火山活動などがみられず，地殻熱流量が小さい。よって，①は正しい。

②　日本列島は，プレートの近づく境界である海溝が太平洋側に分布し，海洋プレートが沈み込んでいる。海溝から100 ～300 kmほど大陸側にいくと，沈み込んだプレートによって発生したマグマの火山活動により，火山前線が形成されている(図1－4)。火山前線を境に，大陸側には火山が分布し，海溝側には火山が分布しない。日本の東北地方では，太平洋側に日本海溝が分布し，太平洋プレートが北アメリカプレートの下に沈み込んでいる。海溝に近い太平洋沿岸の地下では，マグマが発生しておらず地殻熱流量は小さい。それに対し，日本海沿岸は，火山前線よりも大陸側となり，火山が多く分布し，地殻熱流量が大きい(図1－4)。よって，②は正しい。

地殻熱流量
大陸地域　弧状列島＞古い大陸
海洋地域　中央海嶺＞海　溝

火山前線
海溝で沈み込んだプレートによって，深所でマグマが発生し，それが上昇することによって生じた火山が現れる海溝側の境界線。火山前線より海溝側には火山が分布しない。

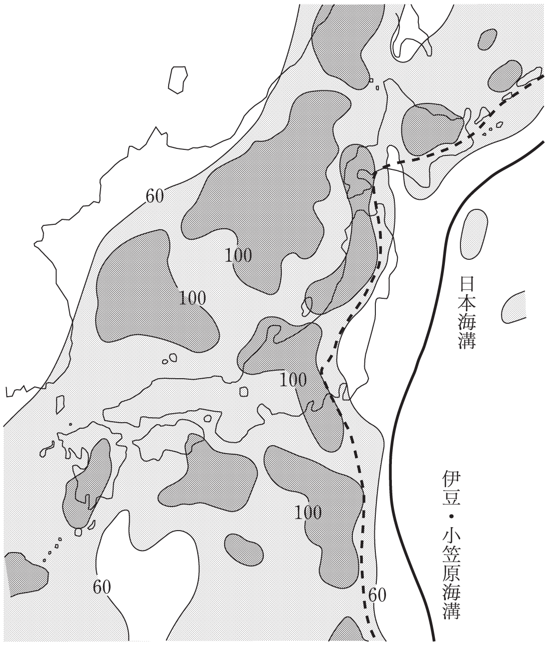


図１－４　日本付近の地殻熱流量

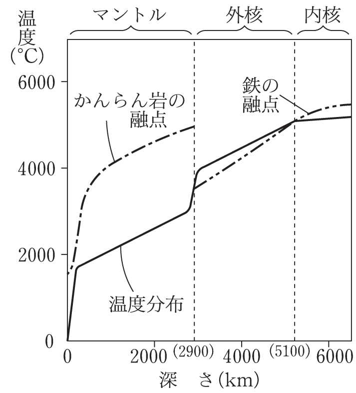


図１－５　地球内部の温度と物質の融点

③　地球内部の温度は，内部にいくほど高くなっている(図１－５)。内核は，温度が最も高い部分であるが，圧力も高いため物質が溶融しにくく，構成物質である鉄の融点の方が温度を上回っている。そのため，内核は溶融しておらず，固体の状態である。よって，③は正しい。

④　外核の温度は，構成物質である鉄の融点を上回っているため溶融し，液体の状態となっている(図１－５)。温度は，地球深部ほど高く，外核よりも内核の方が高温である。よって，④が誤りである。 $\boxed{5}$ …④

地球内部の温度と融点

マントル	地温＜かんらん岩の融点
外　核	地温＞鉄の融点
内　核	地温＜鉄の融点

C　アイソスタシー

地殻は，密度の大きいマントルに浮かんだ状態にあり，均衡を保っている。これをアイソスタシーという。アイソスタシーにもとづいて，計算式を立てられるようにしておこう。

問６　アイソスタシーが成立している場合，ある深さにおける圧力はどこも等しい。圧力の等しい面を均衡面という。均衡面は，地殻とマントルの境界面であるモホ面(モホロビチッチ不連続面)の深さを比べ，深い方のモホ面に合わせるとよい(図１－６)。ＸとＹにおいて，均衡面にかかる圧力は等しい。すなわち，均衡面より上の部分の重さが等しい。したがって，「Ｘにおける重さ(氷床＋地殻)＝Ｙにおける重さ(地殻＋均衡面より上のマントル)」という式が成り立つ。ここでは，各部分の重さは，密度×厚さで考えてよい。地殻上面の隆起量は，地殻下面の上昇量と等しい。ま

アイソスタシー

地殻がマントルに浮かんでつり合いを保っている状態。

た，X・Yともに同じ厚さの地殻であることから，式の両辺の地殻の重さは相殺されるため，「Xにおける氷床の重さ＝Yにおける均衡面より上のマントルの重さ」となる。したがって，

$$0.93 \times 2200 = 3.3 \times h$$

となり，これを解いて，$h = 620\,(\mathrm{m})$となる。よって，①が正解である。

なお，今回の計算では関係なかったが，問題図2では，地殻の厚さを「km」の単位で示してある。求める厚さは「m」の単位であるため，計算に用いる際は，単位が混同しないように，どちらかの単位にそろえることに注意しよう。 $\boxed{6}$ …①

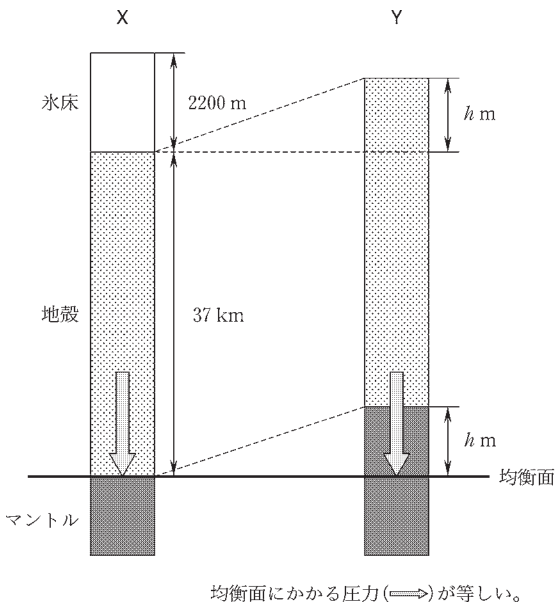


図１－６　アイソスタシー

第２問　火山活動と変成作用　問題

A　マグマと火山

日本列島のような沈み込み帯で，マグマが発生するときの条件と，マグマ中の成分およびマグマの性質の違いによる火山地形についての問題を出題した。

問１　上部マントルのアセノスフェアにおいて，地下の温度がかんらん岩の融点を超えるとき，かんらん岩が部分溶融することでマグマが発生する。図２－１に示すように，温度上昇や圧力低下が起こったとき，あるいは上部マントルに水が供給され，かんらん岩の融点そのものが下がったときにマグマが発生する。

日本列島付近のように海洋プレートが沈み込む場所では，海洋プレート内の含水鉱物から水が分離し，大陸プレート下のアセノスフェアのかんらん岩に水を供給することによってかんらん岩の融点が下がり，マグマが発生する。よって，正解は③である。

マグマが発生する条件
- 温度上昇
- 圧力低下
- 水の供給による融点の低下

$\boxed{7}$ …③

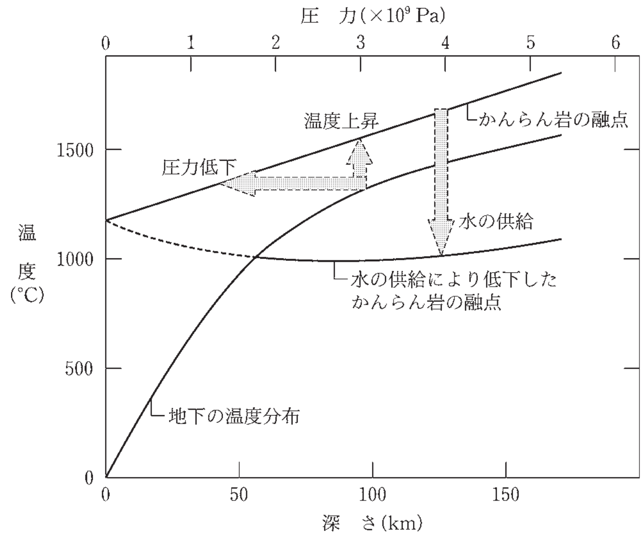


図２－１　マグマが発生する条件

問２　$\boxed{ア}$：マグマに含まれる揮発性成分のうち，最も多いのは H_2O (水蒸気)である。他に CO_2 (二酸化炭素)，SO_2 (二酸化硫黄)，H_2S (硫化水素)などがある。なお，選択肢にある H_2 (水素)は揮発性成分にはほとんど含まれていない。

$\boxed{イ}$：アセノスフェアで生成したマグマは，地表へ向かって上昇するが，いったんマグマ溜(だま)りにとどまる。そこでは地下深部に比べてマグマにかかる圧力が低いので，マグマに含まれていた揮発性成分が分離する。マグマ溜り内で気体となった揮発性成分の圧力が高まると，その圧力でマグマ溜りの上部の岩石が破壊されて，マグマが地表に噴出し火山噴火となる。よって，正解は③である。

$\boxed{8}$ …③

問３　表２－１に示すように，火山地形は，マグマの粘性と密接な関係がある。玄武岩質マグマのように粘性が低いマグマの場合は，大量の溶岩流によって，なだらかな傾斜の斜面と広いすそ野をもつ盾状火山になりやすい。安山岩質マグマの場合は，溶岩と火山砕屑(さいせつ)物とが積み重なった成層火山になりやすい。流紋岩質マグマのように粘性が高いマグマの場合は，噴出したマグマが火口から流れにくく，溶岩円頂丘(溶岩ドーム)のような火山になりやすい(図２－２)。

下線部(b)のハワイのキラウエア火山は，粘性が低い玄武岩質マグマによって形成された盾状火山である。一方，下線部(c)の昭和新山や雲仙岳の平成新山は，粘性が高い流紋岩質マグマによって火口付近に形成された溶岩円頂丘である。よって，正解は②である。

$\boxed{9}$ …②

マグマ中の揮発性成分

最も多いのは H_2O である。他に CO_2，SO_2，H_2S などが含まれる。

盾状火山

粘性の低い溶岩が大量に噴出し形成される，すそ野が広く傾斜がなだらかな火山。

成層火山

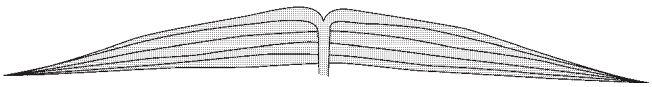
溶岩と火山砕屑物が積み重なって形成される円錐形の火山。

溶岩円頂丘(溶岩ドーム)

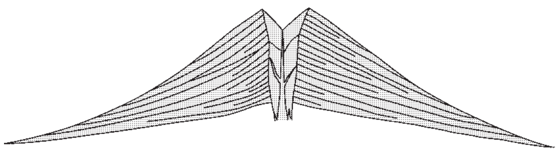
粘性の高いマグマによって形成されるドーム状の火山。

表２－１　マグマと火山地形

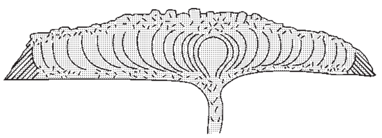
マグマ	玄武岩質マグマ	安山岩質マグマ	流紋岩質マグマ
温　度	1200 °C ⟷	1000 °C ⟷	800 °C
粘　性	低 ⟷		高
揮発性成分	少 ⟷		多
火山活動	大量の溶岩流 穏やかな活動	溶岩流出 火山灰降下 爆発的	溶岩がもり上がる 火山灰降下 爆発的
火山地形	盾状火山 溶岩台地	成層火山	溶岩円頂丘
火　山	ハワイ島の火山	桜島 浅間山	昭和新山 平成新山



盾状火山（ハワイ島のキラウエア火山，マウナロア火山）



成層火山（桜島，浅間山）



溶岩円頂丘（昭和新山，平成新山，有珠山）

図２－２　火山地形

B　変成岩

変成作用と変成岩について出題した。また，多形の関係にある紅柱石，珪線石，らん晶石が形成される領域を読み取る問題を出題した。

問４　$\boxed{ウ}$・$\boxed{エ}$：変成作用とは，火成岩や堆積岩あるいは変成岩などが，高温・高圧の条件下に置かれたとき，固体の状態のままで，鉱物の結晶構造や化学組成，岩石の組織などが変化する作用である。

変成作用には，造山運動に伴って地下の岩石が広範囲にわたって高温あるいは高圧の状態になり変成岩が生成される広域変成作用と，高温の貫入岩体の周辺で熱によって変成岩が生成される接触変成作用がある。代表的な変成岩として，広域変成岩では結晶片岩や片麻岩，接触変成岩ではホルンフェルスや大理石（結晶質

広域変成岩

結晶片岩・片麻岩

接触変成岩

ホルンフェルス・大理石（結晶質石灰岩）

石灰岩)が挙げられる。よって，正解は②である。 $\boxed{10}$ …②

問5　結晶片岩は，低温高圧型の広域変成作用により生成される。柱状や板状の鉱物などが一定方向に配列する片理という構造が特徴的であり，岩石が一定方向に割れやすくなる。一方，片麻岩は，高温低圧型の広域変成作用により生成される。片麻岩は縞(しま)状構造が特徴的で，黒雲母(うんも)など有色鉱物が濃集した黒い部分と石英など無色鉱物が濃集した白い部分とで縞模様が構成されている。

したがって，問題文のa～dの中で，結晶片岩の特徴はbおよびdである。なお，aは片麻岩の特徴であり，cは火山岩の斑状組織の特徴である。よって，正解は⑤である。 $\boxed{11}$ …⑤

問6　化学式 Al_2SiO_5 で表される鉱物の紅柱石，珪線石，らん晶石のように，化学組成は同じであるが，それぞれ結晶構造など物理的性質が異なる鉱物どうしの関係を多形(同質異像)という。多形の関係にある鉱物には，各々が安定に存在する温度・圧力の領域があり，このことを利用して変成岩の生成条件を推定することができる。

紅柱石，珪線石，らん晶石が同時に存在する温度・圧力は，図2－3のT点である。このT点の条件下で変成作用を受けた変成岩が，温度・圧力がX点へと変化したため，再び変成作用を受けたということである。T点からX点への変化は，温度・圧力ともに上昇している。よって，正解は①である。 $\boxed{12}$ …①

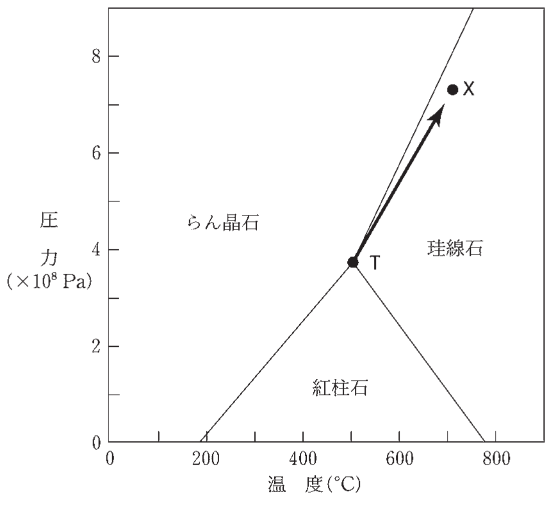


図2－3　変成岩が受けた温度・圧力

結晶片岩

低温高圧型の広域変成作用によって生成。鉱物が一定方向に並ぶ片理が発達。

片麻岩

高温低圧型の広域変成作用によって生成。縞状構造を示す。

多形(同質異像)

化学組成は同じであるが，結晶構造などが異なる鉱物どうしの関係。

紅柱石・珪線石・らん晶石(Al_2SiO_5)や石墨(せきぼく)・ダイヤモンド(C)など。

第3問　地球の歴史　問題

A　地質図

地質図には，柱状図，断面図，ルートマップ，立体図などさまざまなものがあるが，今回は地質平面図を読み取る問題を出題した。等高線と地層境界線，断層との関係を読み取って，おおよその断面図をイメージできるようにしておきたい。

問１　岩体Ｇと断層ｆが断面でどのように現れるかを問う問題である。それぞれの走向・傾斜を確認して，平面図から断面を描き出していこう。

まず，岩体Ｇは，凹凸のある地表面においても，その境界が直線で現れていることから，垂直な岩脈であることがわかる。したがって，図３－１のように地層Ｂの下にも直線的にのび，断面ＸＹにおいては，垂直に現れる。よって，正解は③か④のどちらかになる。

次に，断層ｆの走向線を引いてみよう（図３－１）。断層ｆと標高 260 m の等高線との交点 a，a′ を通る直線 a－a′ が 260 m の走向線であり，断層の走向は南北であることがわかる。次に，標高 240 m の等高線との交点を結ぶ b－b′ が 240 m の走向線であり，これが 260 m の走向線よりも東にあることから，この断層面は東に傾斜していることがわかる。よって，正解は③である。

$\boxed{13}$ …③

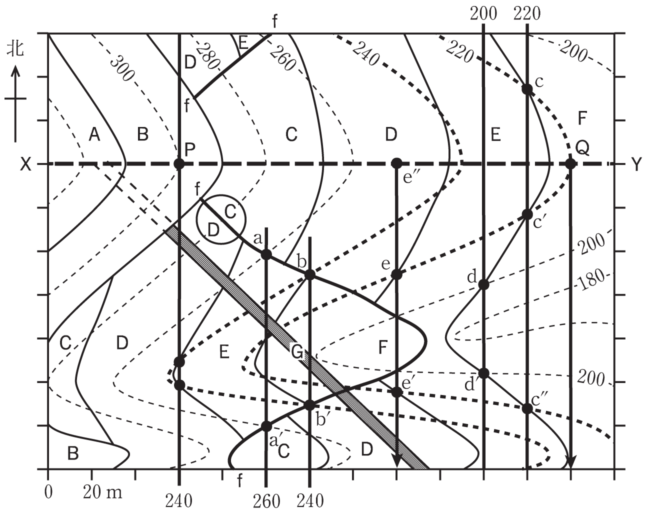


図３－１　地質平面図と走向線

問２　ＸＹの断面図に断層の東側の地層Ｃ～Ｆを記入してみよう。図３－１の東側にある地層Ｅと地層Ｆの地層境界線と等高線との交点を結ぶ c－c′－c″ が 220 m の走向線，同じく d－d′ が 200 m の走向線である。この２本の走向線の高低から，これらの地層は西に傾斜した地層であることがわかる。地層Ｃ～Ｆは整合の関係にあり，他の境界面も同じ傾斜であるので，これを断面図に書き加えてみると，図３－２のようになる。

走向

層理面と水平面の交線の方向。

走向線の求め方

地層境界線と同一高度の等高線との交点を結ぶ。

傾斜の方向の求め方

高さの異なる２本の走向線を引く。走向線の高度の低くなる方へ傾斜していると判断できる。

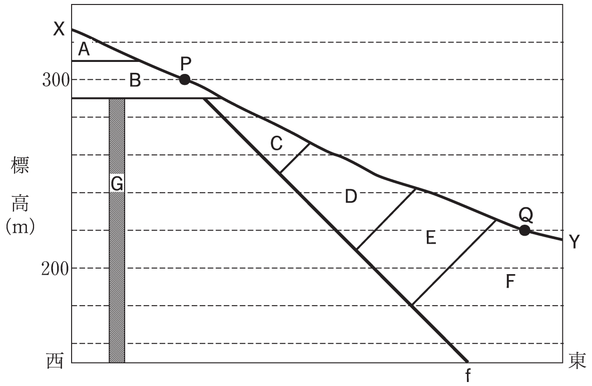


図３－２　断面図

問題文より地層の逆転がないので，地層累重（るいじゅう）の法則が成立し，下位ほど古く，上位にいくほど新しいことから，地層は，Ｆ→Ｅ→Ｄ→Ｃと堆積（たいせき）したことがわかる。したがって，最も新しい地層は地層Ｃである。

地層の逆転がないことを確認するためには，地層の上下方向がわかればよい。地層の上下の判定に用いられる堆積構造には，斜交葉理（クロスラミナ），級化層理（級化成層），漣痕（れんこん）（リップルマーク）などがある（図３－３）。

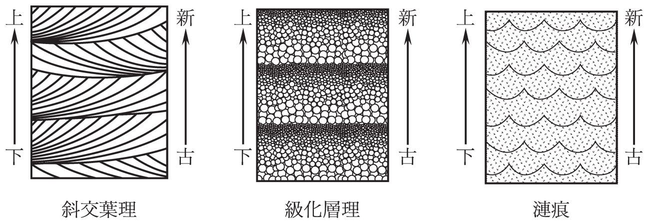


図３－３　上下判定に用いられる堆積構造

級化層理は，混濁流（乱泥流）のように砂泥を含む水流が一気に流れ込んでそのまま堆積するときに形成される。このとき，粒径の大きいものが先に沈んでいくため，単層内の粒径は下位ほど大きく上位ほど小さくなっている。したがって，問題図１の地層Ｄ内の単層では，地層Ｄよりも下位の地層Ｅに近い方の粒径が大きくなっているはずである。よって，正解は③である。　$\boxed{14}$ …③

問３　問題文より，断層ｆには走向方向のずれ，すなわち水平方向のずれが認められないので，上下方向へのずれによる逆断層か正断層ということになる。図３－４に示されるように，断層面の上側に乗っている上盤が，相対的に下がると正断層，上がると逆断層である。

地層累重の法則

地層の逆転がない限り，上位の地層ほど新しい。

上下の判定に用いられる堆積構造

斜交葉理（クロスラミナ）
級化層理（級化成層）
漣痕（リップルマーク）

断層

正断層：上盤が相対的に下がった断層
逆断層：上盤が相対的に上がった断層

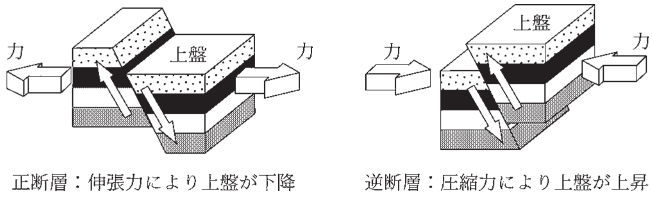


図３－４　断層

図３－２からわかるように，断層ｆの東側が上盤である。上盤が上がったか下がったかは，断層の両側の地層の新旧から判断することができる。図３－１の〇の部分に注目すると，断層ｆの東側は相対的に新しい地層Ｃ，西側は相対的に古い地層Ｄとなっている。新旧の地層が断層で接している場合，新しい地層は本来上位に位置していたはずなので，新しい方の地層が相対的に下がったと判断できる。したがって，断層ｆは，東側の地盤が下がった，つまり，相対的に西側の地盤が上がった正断層であることがわかる。　15 …④

問４　Ｐ点からのボーリングの場合，Ｐ点の真下に，地層Ｄと地層Ｅの境界面の走向線のうち，何ｍの走向線が走っているかがわかればよい。図３－１より，Ｐ点(標高300ｍ)の真下には，地層Ｄと地層Ｅの境界面の240ｍの走向線があることから，300ｍ－240ｍ＝60ｍと求められる。

一方，トンネルは掘削点の標高が重要になる。標高220ｍのＱ点から水平に真西に進むとき，地層Ｄと地層Ｅの境界面の220ｍの走向線と交わるところで境界面にぶつかるはずである。図３－１より，地層Ｄと地層Ｅの地層境界線と，220ｍの等高線との交点を結ぶｅ－ｅ′が220ｍの走向線である。Ｑ点から真西に進むとｅ″点でこの走向線と交わるので，ｅ″点がトンネルと境界面とがぶつかる位置とわかる。Ｑ点とｅ″点との距離は，枠外のスケールで測ると，80ｍと求められる。　16 …②

B　先カンブリア時代の地球環境と生物の変遷

地球が誕生してから，生物種が爆発的に増加する古生代カンブリア紀に入る前までの時期を先カンブリア時代という。地球が誕生してから現在までの約46億年のうち９割近くを占めている。この時代の地球環境と，生物の変遷を関連づけて整理しておこう。

問５　地球の誕生は約46億年前である。137億年前は宇宙の誕生である。混同しないようにしよう。

原始大気の主成分は，水蒸気，二酸化炭素，そして窒素である。水蒸気，二酸化炭素はその後激減したが，窒素はほとんど変化せず，現在の大気の８割を占めている。

原始大気のうち，二酸化炭素は海洋中に溶けていたカルシウムイオンと結合して石灰岩($CaCO_3$)となって固定され，大気中か

地球の誕生

約46億年前，微惑星の衝突・合体により誕生した。

原始大気

水蒸気，二酸化炭素，窒素が主成分。

ら減少した。よって，①が正解である。なお，縞状鉄鉱層は，生物の光合成により海洋中に放出された酸素が，海水に溶け込んでいた鉄イオンと結合して酸化鉄となり，沈殿して形成された鉱床である。 $\boxed{17}$ …①

問6　①　原始大気中に酸素はほとんど含まれておらず，海洋中にも酸素は含まれていなかった。したがって，最初に出現した生物は，酸素呼吸を行わない原核生物であったと考えられる。

②　ストロマトライトはシアノバクテリア(藍藻類)の遺骸と泥などの堆積物が何層にも積み重なって形成されるコロニーである。シアノバクテリアは砂や泥の表面に定着して，昼の間に光合成を行い，夜間の休止期には，泥などの堆積物を粘液で固定する。翌日には再び表面に分裂して移動し，光合成を始める。これを繰り返すことで，ストロマトライトは徐々にドーム型に成長していく。その成長速度は非常に遅く，1年に数 mm 程度である。なお，ストロマトライトの断面にある縞模様から，形成当時の1日の長さが推測できる。

③　酸素は核膜をもたない原核生物にとって有毒であったため，光合成によって酸素が増加すると，核膜をもった真核生物が出現した。

④　先カンブリア時代末期には，大型の多細胞生物も出現した。その代表として挙げられるのはエディアカラ動物群である。エディアカラ動物群は，まだ硬い殻をもっていない動物群であった。アノマロカリスなどのバージェス動物群は，カンブリア紀に入って爆発的に増加する硬い殻をもった無脊椎動物なので，この選択肢が誤りである。 $\boxed{18}$ …④

酸素
生物の光合成により放出された。

ストロマトライト
シアノバクテリア(藍藻類)の遺骸と堆積物が層状に重なって形成されるドーム状のコロニー。

エディアカラ動物群
先カンブリア時代末期に出現した大型多細胞生物。

バージェス動物群
カンブリア紀に出現した硬い殻をもった無脊椎動物。

第4問　大気と海洋　問題

A　大気の動き

天気の変化は，天気予報などから情報を得ることができる最も身近な地学現象の一つである。刻々と変化する天気や気温を，天気図の気圧配置の移り変わりと照らし合わせながら，興味をもって学習に取り組んでほしい。今回は天気をイメージしながら，気温の鉛直分布に着目し，グラフを作成することによって，気象状況との関係を読み取る出題とした。

問1　問題文中の「落雷や突風を伴う激しい雨が短時間に降った」，「積乱雲が発生した」などの記載から，地表と上空の温度差が大きくなり，大気の状態が不安定になったことが考えられる。よって，上空では寒気が流入し，気温が低下したと考えられる。また，「日本海に低気圧があり」の記載から，太平洋側では低気圧の中心に向かって南から暖かく湿った風が吹き込み，地表付近の気温が上昇したと考えられる。 $\boxed{19}$ …③

大気が不安定な状態
地表と上空の温度差が大きくなり，上昇気流が起きやすくなる気象状況。

問2　積乱雲は強い上昇気流によって垂直方向に発達する対流雲の

一種で，圏界面(対流圏界面)まで発達する。積乱雲の下では強雨や雹，突風，雷などの激しい気象現象が発生する。短時間で大量の雨を降らせるのが特徴的で，集中豪雨のほとんどが積乱雲によるものである。また，熱帯低気圧や台風を形成している雲もおもに積乱雲である。

① 積乱雲の高さは圏界面まで達する。その高さまで達すると，雲は水平に広がっていく。圏界面の高さは 8 ～ 16 km であり，平均で 11 km である。よって，この選択肢が誤りである。

② 暖気と寒気が接するとき，その境界面の両側で気温・風向・風速などが異なる。この境界面と地表の交線を前線という。温暖前線は，暖気が寒気の上へすべり上がるところにできる前線で，発生する雲は水平方向に広がる乱層雲，高層雲，巻雲などである。寒冷前線は，寒気が暖気の下へ潜り込むところにできる前線で，発生する雲は垂直方向に発達する積乱雲，積雲などである。

温暖前線

暖気が寒気の上にすべり上がるときにできる。

寒冷前線

寒気が暖気の下に潜り込むときにできる。

③ 台風は北太平洋の西部で発生する熱帯低気圧のうち，最大風速が 17.2 m/s 以上になったものをいう。強い上昇気流によって，中心部に向かってらせん状に積乱雲の列ができる。

④ 積乱雲は，日本列島では夏季の強い日射によって地表付近の温度が上昇するときに発生しやすく，夕立を起こす。また，冬季の西高東低の気圧配置のとき，季節風の吹き出しに伴う筋状の雲が日本海で発達して積乱雲となり，日本海側に大雪をもたらすことがある。 $\boxed{20}$ …①

問 3 大気の状態には図 4 － 1 のように，三つの状態が存在する。Aの絶対不安定は，空気塊が鉛直方向にわずかにもち上げられたとき，乾燥断熱減率より気温減率が大きいため，周囲の気温より空気塊の温度が高くなり，上昇し続ける状態をいう。Bの絶対安定は，空気塊が鉛直方向にわずかにもち上げられたとき，湿潤断熱減率より気温減率が小さいため，周囲の気温より空気塊の温度が低くなり，元の位置に戻る状態をいう。Cの条件付き不安定は，乾燥断熱減率＞気温減率＞湿潤断熱減率の場合で，湿潤空気塊は不安定なのに対し，乾燥空気塊は安定である状態をいう。

絶対不安定

気温減率＞乾燥断熱減率

絶対安定

湿潤断熱減率＞気温減率

条件付き不安定

乾燥断熱減率＞気温減率＞湿潤断熱減率

本問では地表の気温が 20 ℃，高さ 1500 m での気温が 10 ℃であることから，気温減率は，

$$\frac{20-10}{1500}\times 100 \fallingdotseq 0.67\ (℃/100\,\mathrm{m})$$

となり，乾燥断熱減率＞気温減率＞湿潤断熱減率であるため条件付き不安定である。したがって，乾燥空気に対しては安定，湿潤空気に対しては不安定となる。 $\boxed{21}$ …②

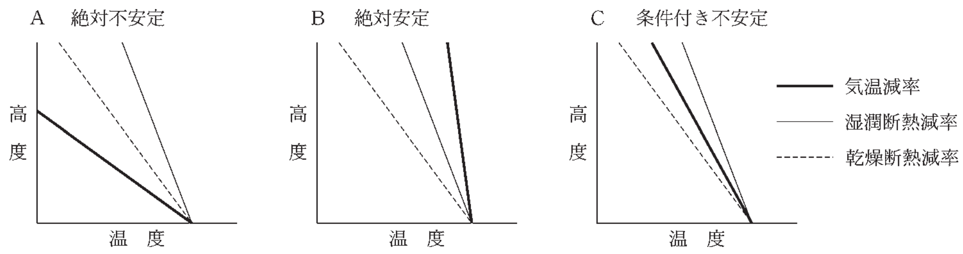


図４－１　大気の安定・不安定

問４　①　露点は 15 ℃であることから，地表にある 20 ℃の空気塊は水蒸気で飽和していない。よって，空気塊を断熱的に上昇させると，乾燥断熱減率 (1 ℃/100 m) にしたがって温度が低下する。露点に達する高さを h (m) とすると $20-15=\frac{1\times h}{100}$ から，$h=500$ (m) となり，この高度で凝結が起こって雲が発生する。よって，誤りである。

②　問題図１に空気塊の温度変化を加えたものを，図４－２に示す。地表の気温 20 ℃の空気塊を断熱的に上昇させると，破線ＰＱ(乾燥断熱減率 1 ℃/100 m)に沿って凝結高度Ｑ点(温度 15 ℃，高さ 500 m)まで移動し，ここで雲が発生する。この点から空気塊は破線ＱＲ(湿潤断熱減率 0.5 ℃/100 m)に沿って移動する。破線ＱＲは，Ｓ点(温度 10 ℃，高さ 1500 m)で気温減率の実線と交わる。Ｓ点より低い高度では，空気塊はまわりの気温より温度が低いため，外力を受けないと上昇することができないが，Ｓ点より高い高度では，空気塊はまわりの気温より温度が高くなるため，外力を受けなくても上昇することができる。よって，正解は②である。

③　図４－２中のＳ点より高い高度では，湿潤断熱減率にしたがって上昇する空気塊の温度変化の破線が，気温分布の実線に交わることはなく，常に空気塊はまわりの空気より温度が高くなるため，外力を受けなくてもグラフの上限の高さ 7000 m 以上までは上昇し続けることになり，雲の上端の高さは 7000 m 以上に達すると考えられる。よって，誤りである。

④　暖かい雨(暖雨)は，低緯度や夏の中緯度において，上昇気流の影響で，雲をつくる水滴が合体・衝突を繰り返しながら大きく成長して雨粒となり，降る雨のことをいう。雲の上部でも気温が 0 ℃よりも高いことが特徴であるが，図４－２より雲の中の温度は 0 ℃を大きく下まわっているので，誤りである。

本問の雨は，雲の上部の温度が －20 ℃以下となり，氷晶を含むと考えられることから，冷たい雨である。0 ℃以下の過冷却の水滴と氷晶が混在している雲の中では，過冷却の水滴が蒸発し，水蒸気が昇華して氷晶のまわりに付着し，大きく成長した氷晶が落下して雨となる。　$\boxed{22}$ …②

露点
空気塊の温度が低下し，水蒸気で飽和したときの温度。この温度で雲が発生する。

断熱変化
周囲の大気と熱の出入りがない状態の空気塊の変化。

暖かい雨
低緯度から中緯度の氷晶を含まない雨で，上昇気流による水滴の成長によって降る雨。

冷たい雨
過冷却水滴と氷晶が混在している雲の中で，氷晶の成長によって降る雨。

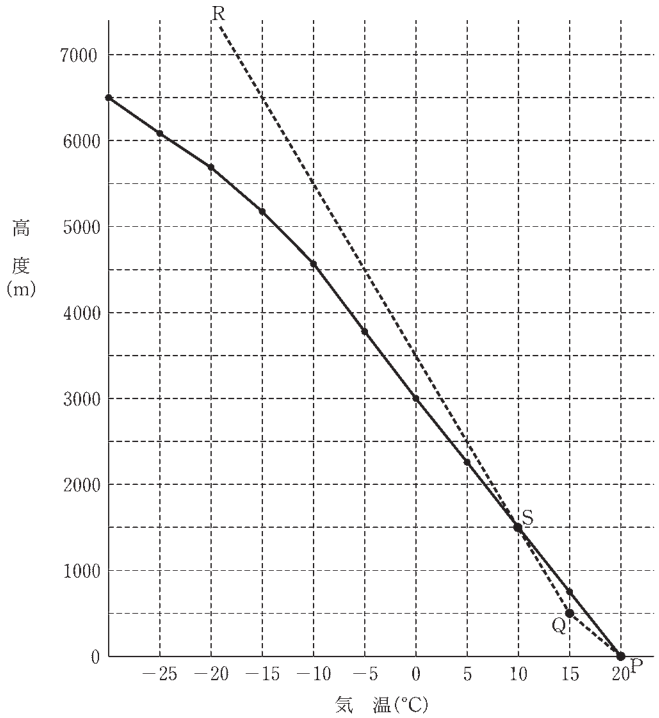


図４－２　上昇する空気塊の温度変化

B　海洋の鉛直構造

深さ数百ｍまでの海水の性質は，おもに大気の運動や日射の影響を大きく受けるが，それより深い深層の海水の性質は，水温と塩分の違いによる密度差によって決まる。深層の海水は，目で見ることができず，馴染(なじ)みがうすいテーマなので，この問題を通じて理解を深めてほしい。

問５　図４－３に海洋の鉛直構造を示す。表層混合層は，風や波の影響でよく混合されてできる水温がほぼ一定の領域であり，低緯度から緯度60°付近に分布する。海水の密度は水温が低いほど大きくなるため，同一地点では，表面の海水が冷却される冬季ほど，表面の海水の密度が大きくなる。このため，冬季は対流が盛んになり，表層混合層の厚さは厚くなる。

深層については**問６**でも解説するが，高緯度海域の低温で高塩分の密度の大きな海水が沈降して広がったものであり，低緯度でも低温に保たれている。

主水温躍層は，表層混合層と深層の間にある水温が急変する領域である。主水温躍層は，表層と深層の海水が混合していないことを表している。

$\boxed{23}$ …④

表層混合層

海面付近の水温が一定の層。風や波，対流によってよく混合されている。

主水温躍層

表層混合層と深層の間にある水温が急変する領域。

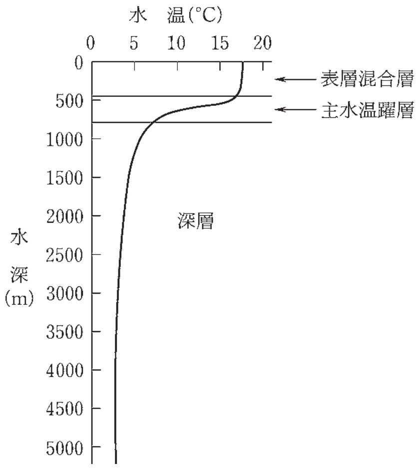


図 4 － 3　海洋の鉛直構造

問 6　①　問題図 3 より，同じ塩分の場合，水温が低いほど密度が大きくなり，水温が同じ場合，塩分が高いほど密度が大きくなることがわかる。X の海水(水温 15 ℃，塩分 32.5 ‰)を矢印の方向に移動させると，水温が 0 ℃付近まで低下することから，海水が高緯度に移動して冷却されることを意味する。また，塩分が 35 ‰以上まで増加している。高緯度海域では，海氷が生成される際に塩類は氷の中に入りにくいため，海水に塩類が取り残されて増加する。したがって，水温が低下し，密度が増加することになるので，①が正解となる。特に密度の大きい海水は，冬季に海氷が生成される高緯度の北大西洋グリーンランド沖および南極海において形成され，深層に沈み込む。この海域の海水が海洋の鉛直循環の原因となり，深層の海水は1000～2000年程度で循環していると考えられている。

②　河川水は真水なので，塩分は低下する。よって，誤りである。

③　亜熱帯高圧帯の海域では，晴天率が高いため，降水量より蒸発量の方が大きい。塩類は蒸発しないことから，海水の塩分は増加する。しかし，低緯度では気温が高いため，水温は上昇する。よって，誤りである。

④　低緯度では水温が上昇する。また，降水は真水なので，塩分は低下する。よって，誤りである。　$\boxed{24}$ … ①

海水の密度が大きくなる要因
塩分が大きく，水温が低い。

海水の平均塩分
海水 1 kg あたり塩類 35 g
千分率で表すと 35 ‰

降水量・蒸発量・塩分の関係
降水量＞蒸発量：塩分 小
降水量＜蒸発量：塩分 大

第 5 問　恒星と宇宙　問題

A　恒星

HR 図による恒星の分類と恒星の進化についての理解を問う問題である。受験生には馴染(なじ)みのない特定の波長による星の明るさの等級差 $B-V$ を題材としたが，問題文からその内容を読み取れるようになっている。

問1　$\boxed{\text{ア}}$：星のスペクトルには，ところどころに吸収線(暗線)が見られる。スペクトル型は，この吸収線の現れ方を分類したものである。吸収線は，星の表層に存在するイオンや原子・分子などの粒子が特定の波長の光を吸収して現れたものである。これらの粒子は温度が高いほどイオンの状態になりやすく，また，温度が低いほど粒子が結びついて原子や分子の状態になりやすい。よって，星の表層の温度，すなわち表面温度によって表層の粒子の状態が異なり，それに応じて吸収線の現れ方も異なってくる。一般に，高温の星では現れる吸収線の数が少なく，低温の星では多くなる傾向がある。

$\boxed{\text{イ}}$：星の明るさを表す等級は，数値が小さいほど明るい。BとVの値を比べたとき，Bの方が明るいときは$B<V$，すなわち$B-V<0$であり，Vの方が明るいときには$B>V$，すなわち$B-V>0$となる。問題文に「高温の星ほどBバンドフィルターを通した方が明るく，低温の星ほどVバンドフィルターを通した方が明るく観測される」とあるので，高温の星ほど$B-V$が小さくなり，低温の星ほど$B-V$が大きくなる。よって，$B-V$が大きくなるのは低温の星の場合である。　$\boxed{25}$…④

問2　①　一般に，赤色巨星の表面温度は太陽よりも低い。このため，太陽よりも高温の主系列星が赤色巨星になるときには表面温度を低下させることになる。よって，誤りである。

②「太陽よりも質量が大きく，大量の水素を有する」という部分は正しい。しかし，主系列星では質量光度関係が成り立ち，重い星ほど単位時間に放射するエネルギーは大きくなる。その結果，重い星ほど核融合反応で消費される水素の量は多くなり，軽い星に比べて早期に主系列星の段階を終えてしまう。したがって，主系列星として輝き続ける期間は太陽よりも短くなる。よって，誤りである。

③　星の寿命とは主系列星として輝き続ける期間のことであるから，②で述べた通り，文の前半は正しい。また，星の中心部で水素を消費する割合が星の重さに関係なく一定であれば文の後半も正しくなるが，実際には②で述べたように重い星ほど単位時間に消費される水素の量は多くなるため，中心部では短い時間で水素を使い果たして，ヘリウムの核ができ，次の赤色巨星の段階へと移行する。したがって，中心部に水素が大量に残存しているという部分が誤りである。

④　太陽よりも高温の主系列星のうち，表面温度が太陽に近い星は質量も太陽に近いため，「主系列星→赤色巨星→白色矮星(わいせい)」という太陽に近い進化の道筋をたどると予想される(図5－1)。一方，太陽よりも高温の主系列星のうち，表面温度が太陽に比べてはるかに高い星は，赤色巨星段階の後に超新星爆発を起こすと考えられている(図5－1)。よって，正解は④である。　$\boxed{26}$…④

星のスペクトル型

星のスペクトルに見られる吸収線(暗線)の現れ方によってスペクトルを分類したもの。星の表面温度を反映したものであり，高温から低温に向かって，O，B，A，F，G，K，Mに分類される。

質量光度関係

主系列星では重い星ほど明るくなるという関係。光度は質量の3～4乗に比例する。

星の寿命

星が主系列星として輝き続ける期間。重い星ほど寿命は短くなる。太陽の寿命は約100億年である。

星の進化過程

星の質量によって進化の過程は異なってくる。

・太陽程度の質量の星
　主系列星→赤色巨星→白色矮星
・太陽よりはるかに質量の大きい星
　主系列星→赤色巨星→超新星爆発
　→中性子星またはブラックホール

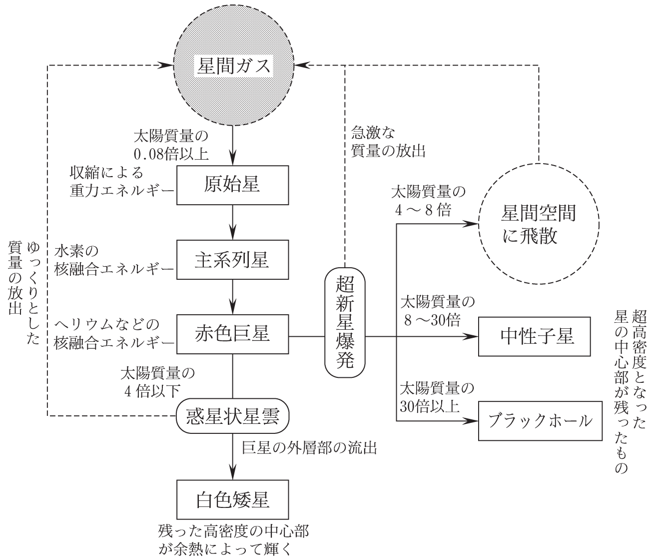


図5－1　恒星の進化

問3　問題文に書かれているように，$B-V$ の値はHR図のスペクトル型の代わりに用いられるものであるから，選択肢の文中の $B-V$ をスペクトル型に読み替えて考えればよい。

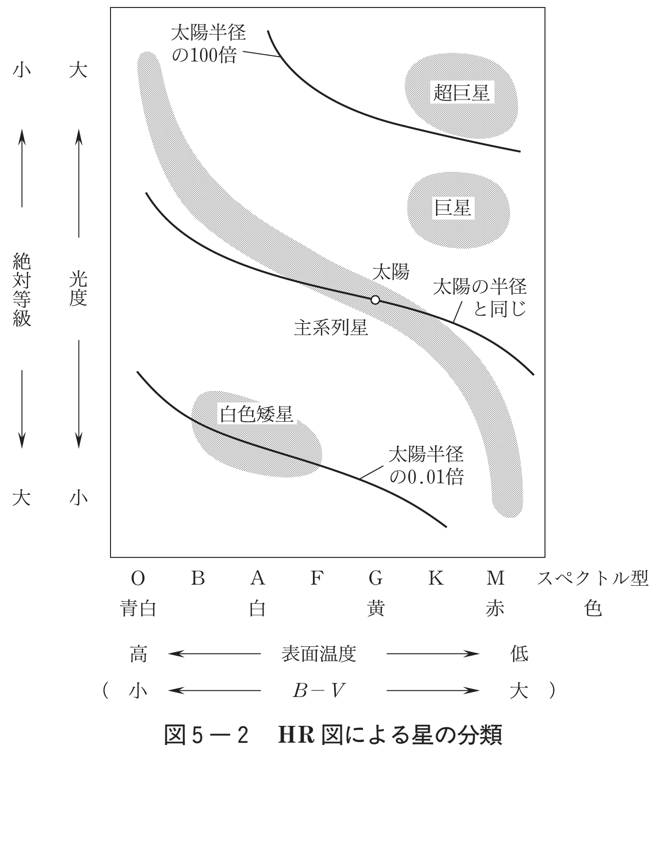


図5－2　HR図による星の分類

主系列星

水素の核融合反応によって輝く星。

赤色巨星（巨星）

主系列星の段階を終えて外層部が膨張して大きくなった星。

白色矮星

太陽程度の質量の星が赤色巨星の段階を終えた後，外層部を放出して中心部だけが残った星。核融合反応は起こさず，余熱で輝いている。

HR図（ヘルツシュプルング・ラッセル図）

恒星について，光度とスペクトル型の関係を表した図。

①　赤色巨星のスペクトル型はおおむねK，M型，光度の大きい主系列星のスペクトル型はおおむねO，B，A型である(図5—2)。両者の横軸方向の位置は大きく離れているので，$B-V$が近い値を取るというのは誤りである。

②　白色矮星のスペクトル型はおおむねB，A，F型，光度の大きい主系列星のスペクトル型はO，B，A型である(図5—2)。両者の横軸方向の位置は比較的近いといえるので，$B-V$は近い値を取り，正しい。

③・④　主系列星のスペクトル型はO型からM型まで一通り揃っており，横軸方向の範囲はたいへん広い(図5—2)。一方，赤色巨星のスペクトル型はおおむねK，M型，白色矮星のスペクトル型はおおむねB，A，F型にそれぞれ限られるので横軸方向の範囲は狭い(図5—2)。よって，主系列星の方が$B-V$の値の範囲が広くなるので，③・④のいずれも誤りである。　27 …②

B　銀河系

銀河系の構造についての知識と，銀河系円盤部の回転運動に伴う天体の視運動についての思考力を問う問題である。前者は銀河系を構成する天体についての基本事項である。後者は惑星の視運動と同様の考え方で正解にたどりつけるはずである。

問4　ウ：20世紀初頭のシャプレーの研究に先立ち，18世紀後半にハーシェルは銀河系の恒星が凸レンズ状に分布していることを推定していた。ハーシェルの時代には太陽系が銀河系の中心付近にあると考えられていたが，シャプレーは銀河系内に多数分布する球状星団に着目し，それらが太陽系から離れたいて座の方向のある点を中心とする球状に分布することを確かめ，太陽系が銀河系の中心から離れて位置すると考えた(図5—3)。

エ：現在では，銀河系円盤部の半径は約5万光年であり，また，太陽系は銀河系の中心から約2.8万光年の位置にあることが明らかにされている(図5—3)。　28 …①

銀河系

太陽系が属する銀河。約2000億個の星からなり，バルジ，円盤部(ディスク)，ハローの領域に区分される。

球状星団

数十万～数百万の星が球状に密集して分布する星の集団。おもに種族IIの年齢の古い星からなる星団。

銀河系円盤部

半径約5万光年。太陽系は銀河系の中心から約2.8万光年の位置にある。

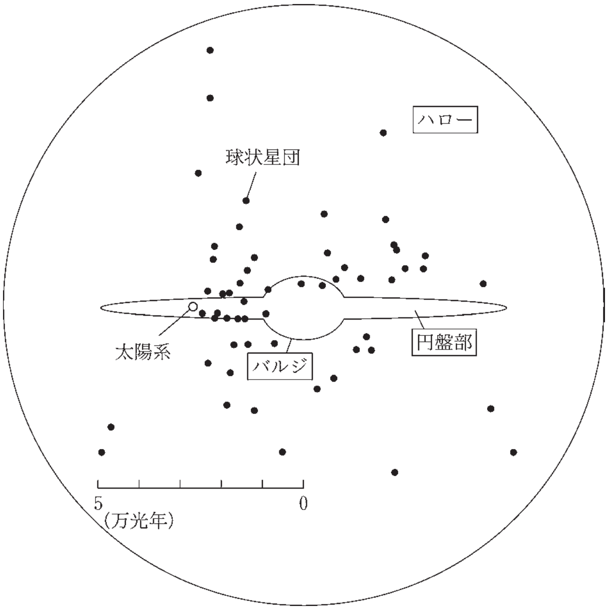


図５－３　銀河系の構造の模式図

問５　①　銀河系は，バルジ，円盤部(ディスク)，ハローの三つの領域に大きく分けられる(図５－３)。このうち円盤部にはバルジやハローに比べて星間物質が多く存在するため，新しい星が誕生しやすくなっている。また，核融合反応の進行に伴い星の内部につくられる重元素(水素・ヘリウムよりも重い元素)は超新星爆発などによって拡散し，その量は時間の経過とともに宇宙空間に蓄積・増加していく。したがって，年齢の若い星ほど重元素を多く含む星間物質から生まれることになるため，星に占める重元素の割合は古い星に比べて大きい。このような重元素を多く含む星を種族Ⅰの星という。円盤部にはこうした種族Ⅰの星がバルジやハローに比べて多く分布するので，①は正しい。なお，種族Ⅰに対して，星に占める重元素の割合が小さい星を種族Ⅱの星という。

②　天の川は夜空に横たわる白い雲の帯のように観察されるが，その正体は銀河系円盤部を構成する星の集まりを内側から見た姿である。この白い帯をよく見ると，帯の中央部に黒く(暗く)見える部分がある。これは星間物質が集まっているところであり，物質がまったく存在しないというわけではない。よって，②が誤りである。なお，星間物質が濃く集まっている部分を星間雲という。そのうち特に密度が大きく低温の領域は分子雲と呼ばれ，星が誕生する場となっている。

③　ほぼ主系列星だけからなる星団とは散開星団を指す。主系列星のうち大質量の星は寿命が短く，比較的短い期間で次の段階(赤色巨星)に進化して主系列星から外れてしまう。しかし，寿命の短い大質量の星が主系列にとどまっているということは，この

種族Ⅰ
星に占める重元素の割合が大きい星。年齢が若く，散開星団を構成する。

種族Ⅱ
星に占める重元素の割合が小さい星。年齢が古く，球状星団を構成する。

散開星団
数十～数百の星が不規則な形に集まっている星の集団。年齢の若い種族Ⅰの星からなる。

星団が年齢の若い星の集まりであることを意味する。このような新しい星が誕生するのは，銀河系の中では星間物質の多い円盤部である。よって，③は正しい。

④ 可視光線は星間物質に吸収されやすいため，星間物質が多く分布しているところでは遠くを見通すことが困難になっている。このため銀河系円盤部のように星間物質が集まっているところでは，星間物質に吸収されにくい赤外線や電波による観測が行われている。よって，④は正しい。 $\boxed{29}$ …②

問6 互いに運動する物体A，Bがあるとき，物体Aから見た物体Bの速度を，BのAに対する相対速度といい，$V_B - V_A$ と表す。

問題図1において，太陽系および恒星Xの視線方向の速度はそれぞれ V_a，V_c であるので，太陽系から見た恒星Xの視線方向の相対速度は $V_c - V_a$ となる。問題図1より速度(矢印の長さ)を比べると $V_c > V_a$ であるから，相対速度 $V_c - V_a$ は正となり，V_a，V_c の向きはいずれも太陽系から遠ざかる方向を正とするので，恒星Xは太陽系から遠ざかるように見えることになる。

同様に，視線方向に垂直な速度成分 V_b，V_d について，恒星Xの太陽系に対する相対速度は $V_d - V_b$ となる。速度(矢印の長さ)を比べると $V_b > V_d$ であるから，相対速度 $V_d - V_b$ は負となる。V_b，V_d の向きは図の左側，すなわち東の向きを正とするので，恒星Xは太陽系に対して西に向かって動くように見える。よって，恒星Xは視線方向には太陽系から遠ざかり，東西方向では西へ向かって動くように見えるので，④が正解である。

恒星Xの東西方向の動きについて，次のようにも説明できる。問題図1より太陽系と恒星Xのどちらも東向き(図の左側)の成分をもっているが，太陽系の方が恒星Xよりも速度が大きいので恒星Xは太陽系について行けず次第に遅れていく。このため，太陽系から恒星Xを見ると，太陽系の運動方向とは反対の方向である西へ向かって移動するように見えることになる。

どちらの説明にしても，2天体の相対運動については各自の頭の中で思考実験をして考えてみてほしい。 $\boxed{30}$ …④

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO