受験番号		氏　　名		クラス		出席番号	

試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2012年度　第１回　全統マーク模試問題

数　　学 ①（100点　60分）

〔数学Ⅰ，数学Ⅰ・数学A〕

2012年４月実施

この問題冊子には，「**数学Ⅰ**」「**数学Ⅰ・数学A**」の２科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

Ⅰ　**注　意　事　項**

1　解答用紙は，第１面(表面)及び第２面(裏面)の両面を使用しなさい。

解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。必要事項欄及びマーク欄に**正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。**

①　**受験番号欄**

受験票が発行されている場合のみ，必ず**受験番号**(数字及び英字)を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。

②　**氏名欄，高校名欄，クラス・出席番号欄**

氏名・フリガナ，高校名・フリガナ及び**クラス・出席番号**を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，マーク欄に**マーク**しなさい。

マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点となることがあります。

解答科目については，間違いのないよう十分に注意し，マークしなさい。

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数　　学　　Ⅰ	4～11	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅰ・数学A	12～19	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

5　**この注意事項は，問題冊子の裏表紙にも続きます。問題冊子を裏返して必ず読みなさい。**

河合塾

数　学　I

（全　問　必　答）

第1問 （配点　20）

解説

〔1〕 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とすると

$$ab=\boxed{\text{ア}}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。このとき，方程式

$$|x-ab|=2$$

を満たす x の値は

$$x=\boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キ}}$$

であり，不等式

$$\left|x-\frac{b}{a}\right|<2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}<x<\frac{\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

（数学Ⅰ 第1問 は次ページに続く。）

〔2〕 連立方程式

$$\begin{cases} x^3+y^3=18 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=7xy & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を考える。

x^3+y^3 を因数分解すると，$x^3+y^3=(x+y)\left(\boxed{\text{ソ}}\right)$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ x^2+y^2　　① x^2-y^2　　② x^2+xy+y^2　　③ x^2-xy+y^2

これと ② より

$$x^3+y^3=\boxed{\text{タ}}\,xy(x+y)$$

であるから，① は

$$\boxed{\text{タ}}\,xy(x+y)=18 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。

一方，② は

$$(x+y)^2=\boxed{\text{チ}}\,xy \quad すなわち \quad xy=\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}(x+y)^2$$

と変形されるから，これと ③ より

$$(x+y)^3=\boxed{\text{ツ}}^3$$

が成り立つ。

x，y は実数であるから，$x+y=\boxed{\text{ツ}}$ であり，$xy=\boxed{\text{テ}}$ である。

よって，$x^4+y^4=\boxed{\text{トナ}}$ である。

第2問 （配点　25）

解説

a を実数とし，x の 2 次関数

$$y = x^2 - 4ax + 8a^2 - 8a - 12 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エオ}}\right)$$

である。

(1) G の頂点の y 座標は，$a = \boxed{\text{カ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{キクケ}}$ をとる。

$a = \boxed{\text{カ}}$ のとき，G が x 軸から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{コ}}$ である。

（数学Ⅰ 第2問 は次ページに続く。）

(2)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{サシ}} < a < \boxed{\text{ス}}$$

である。

以下，$\boxed{\text{サシ}} < a < \boxed{\text{ス}}$ とする。

関数 ① の $-6 \leqq x \leqq 6$ における最大値を M とすると

$\boxed{\text{サシ}} < a \leqq \boxed{\text{セ}}$ のとき　$M = \boxed{\text{ソ}}\left(a^2 - \boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}\right)$

$\boxed{\text{セ}} < a < \boxed{\text{ス}}$ のとき　$M = \boxed{\text{ツ}}\left(a^2 + \boxed{\text{テ}}\,a + \boxed{\text{ト}}\right)$

である。

さらに，関数 ① の $-6 \leqq x \leqq 6$ における最小値を m とすると，$M - m = 44$ となるのは

$$a = \boxed{\text{ナ}} - \sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}},\quad \boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

のときである。

第3問 （配点　30）

解説

$\triangle$ABC において，AB $= \sqrt{5}$，BC $= 2\sqrt{5}$，$\cos \angle$ABC $= \dfrac{4}{5}$ とする。

このとき

$$\mathrm{AC} = \boxed{\text{ア}}$$

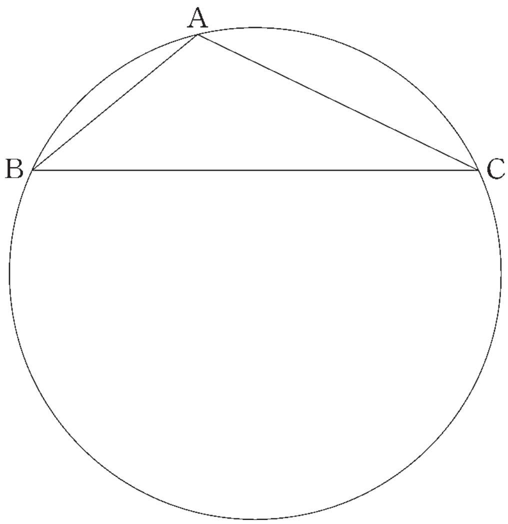
であり

$$\sin \angle \mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

また，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{エ}}$ であり，円 O を $\triangle$ABC の外接円とすると円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

参考図



（数学Ⅰ 第3問 は次ページに続く。）

円 O 上の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を $BD = \sqrt{5}$ であるようにとる。このとき

$$\cos\angle BCD = \frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$$

であるから，$CD = x$ とすると x は 2 次方程式

$$x^2 - \boxed{コ}\,x + 15 = 0$$

を満たす。$x > AC$ であるから $CD = \boxed{サ}$ となる。

線分 AD と線分 BC の交点を E とすると

$$BE = \frac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$

である。

四角形 ABDC を線分 AD で折って，面 ACD と面 ABD が垂直となるようにすると，三角錐(すい) BACE の体積は

$$\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

である。

第4問 （配点　25）

解説

(1)　式 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9$ は次のように変形される。

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9$$

$$= \left(x - \boxed{\text{ア}}\,y\right)^2 + \boxed{\text{イ}}\left(x - \boxed{\text{ア}}\,y\right) + 9$$

$$= \left(x - \boxed{\text{ウ}}\,y + \boxed{\text{エ}}\right)^2$$

（数学 I 第4問 は次ページに続く。）

(2)　a，x，y を実数とし

$$P = x^2 - 4xy + 4(a+1)y^2 + 6x + 4(2a-3)y + 4a + 9$$

とする。

$$P = \left(x - \boxed{\text{オ}}\,y + \boxed{\text{カ}}\right)^2 + \boxed{\text{キ}}\,a\left(y + \boxed{\text{ク}}\right)^2$$

であり，$a > 0$ ならば，P は

$$x = \boxed{\text{ケコ}}, \quad y = \boxed{\text{サシ}}$$

のとき，最小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$a = -1$ とすると

$$P = \left(x + \boxed{\text{セ}}\right)\left(x - \boxed{\text{ソ}}\,y + \boxed{\text{タ}}\right)$$

であり，$P < 0$ を満たす実数 x が存在しないのは

$$y = \boxed{\text{チツ}}$$

のときである。

$a = -1$ のとき，$P = -3$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で $\boxed{\text{テ}}$ 個ある。

数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問 （配点　20）

解説

〔1〕 $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$b = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とすると

$$ab = \boxed{\text{ア}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\boxed{\text{イ}} + \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。このとき，方程式

$$|x - ab| = 2$$

を満たす x の値は

$$x = \boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キ}}$$

であり，不等式

$$\left|x - \frac{b}{a}\right| < 2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} < x < \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A 第１問 は次ページに続く。）

〔2〕 100 以下の自然数の集合を全体集合 U とし，U の部分集合 A，B，C を

$$A = \{x \mid x \text{ は 6 の正の約数}\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ は 12 の正の約数}\}$$
$$C = \{x \mid x \text{ は 18 の正の約数}\}$$

とする。さらに，U を全体集合とする A，B，C の補集合をそれぞれ $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ とする。

(1) $B \cup C$ の要素の個数は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，$\overline{B} \cap \overline{C}$ に属する最小の自然数は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(2) 次の $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 n が A に属することは，自然数 n が B に属するための $\boxed{\text{チ}}$。

自然数 n が U に属する 9 の倍数であることは，自然数 n が $\overline{A} \cap C$ に属するための $\boxed{\text{ツ}}$。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(3) a を 100 以下の自然数とする。また，U の部分集合 D を

$$D = \{x \mid x \text{ は } a \text{ の正の約数}\}$$

とする。このとき

命題「自然数 n が $B \cup C$ に属するならば自然数 n は D に属する」

が真である命題となるような a は全部で $\boxed{\text{テ}}$ 個ある。

第2問 （配点　25）

解説

a を実数とし，x の 2 次関数

$$y = x^2 - 4ax + 8a^2 - 8a - 12 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

のグラフを G とする。

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エオ}}\right)$$

である。

(1) G の頂点の y 座標は，$a = \boxed{\text{カ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{キクケ}}$ をとる。

$a = \boxed{\text{カ}}$ のとき，G が x 軸から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{コ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A 第2問 は次ページに続く。）

(2) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{サシ}} < a < \boxed{\text{ス}}$$

である。

以下, $\boxed{\text{サシ}} < a < \boxed{\text{ス}}$ とする。

関数 ① の $-6 \leqq x \leqq 6$ における最大値を M とすると

$\boxed{\text{サシ}} < a \leqq \boxed{\text{セ}}$ のとき $M = \boxed{\text{ソ}}\left(a^2 - \boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}\right)$

$\boxed{\text{セ}} < a < \boxed{\text{ス}}$ のとき $M = \boxed{\text{ツ}}\left(a^2 + \boxed{\text{テ}}\,a + \boxed{\text{ト}}\right)$

である。

さらに, 関数 ① の $-6 \leqq x \leqq 6$ における最小値を m とすると, $M - m = 44$ となるのは

$$a = \boxed{\text{ナ}} - \sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}},\quad \boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

のときである。

第3問 （配点　30）

解説

$\triangle$ABC において，AB $=1$，AC $=3$，$\cos\angle$BAC $=\dfrac{2}{3}$ とする。また，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。このとき

$$\mathrm{BC} = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$$

であり

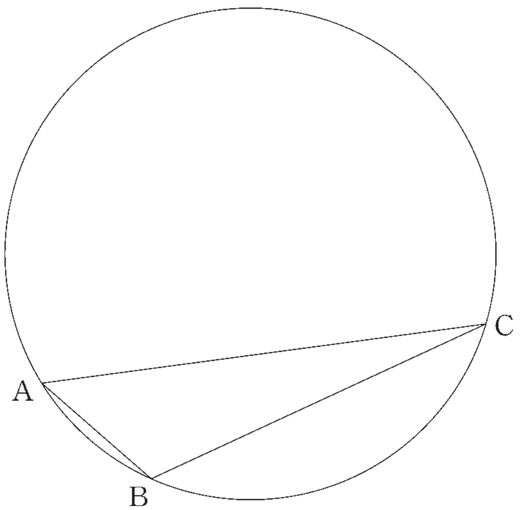
$$\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

また，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$

である。

参考図



（数学Ⅰ・数学A 第3問 は次ページに続く。）

辺 AC 上に点 D を $AD = BD$ であるようにとると

$$AD = BD = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

点 B における円 O の接線と点 C における円 O の接線の交点を E とし，辺 BC と線分 DE の交点を F とする。

次の⓪〜③のうち，∠BAC と大きさが等しい角は $\boxed{\text{ス}}$ である。

⓪ ∠ACB　　① ∠BDC　　② ∠BCE　　③ ∠BEC

また，$BE = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，△BEF の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

第4問 （配点　25）

解説

A，B 2個のさいころを同時に1回投げ，出た目の数について，(＊) のように得点を定める。

(＊)
- 出た目の数が同じであるとき，得点を0点とする
- 出た目の数が異なり，しかもともに偶数またはともに奇数であるとき，得点を小さい方の目の数とする
- 出た目の数が偶数と奇数であるとき，得点を大きい方の目の数から小さい方の目の数を引いた値とする

Aの出た目の数が2，Bの出た目の数が2であるとき，得点は $\boxed{\text{ア}}$ 点であり，Aの出た目の数が5，Bの出た目の数が3であるとき，得点は $\boxed{\text{イ}}$ 点である。

得点が0点となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである。得点の最大点は $\boxed{\text{エ}}$ 点であり，得点が $\boxed{\text{エ}}$ 点となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{オ}}$ 通りである。また，得点が1点となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである。

（数学Ⅰ・数学A 第4問 は次ページに続く。）

A，B 2個のさいころを同時に投げることを2回行い，(*) により，1回目，2回目で得られた得点をそれぞれ X_1 点，X_2 点とする。さらに，X_1，X_2 の値によって次のように最終得点を定める。

- $X_1 \leqq X_2$ であるとき，最終得点を X_2 点とする
- $X_1 > X_2$ であるとき，最終得点を0点とする

最終得点が5点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ であり，最終得点が1点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である。

また，最終得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 点である。

II　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号（－，±）又は数字（0～9）が入ります。**ア，イ，ウ，**… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア，イ，ウ，**… で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 $\boxed{\text{アイウ}}$ に －83 と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	⊖	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	⊖	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5　根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

問題を解く際には，「問題」冊子にも必ず自分の解答を記録し，試験終了後に配付される「学習の手引き」にそって自己採点し，再確認しなさい。