クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2012年度　第3回　**全統記述模試**

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年10月実施】

河合塾

【数　　学】

【Ⅰ・ⅠA 型受験者用】

1　小問集合

【Ⅰ・ⅠA 型共通　必須問題】

（配点　60点）

(1)　実数 x, y は $x+y=\sqrt{2}$, $x-y=\sqrt{3}$ を満たしている．次の式の値を求めよ．
　(i)　x^2-y^2　　(ii)　xy　　(iii)　x^3-y^3

(2)　a, b は実数の定数とする．
　x の1次関数 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ の $0\leqq x\leqq 2$ の範囲における最大値を M, 最小値を m とする．
　(i)　$a>0$ のとき，M, m をそれぞれ a, b を用いて表せ．
　(ii)　$M=-3m$ が成り立つとき，b を a を用いて表せ．

(3)　平面上に三角形 ABC があり，
$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{AC}=7,\quad \mathrm{BC}=5\sqrt{3}$$
を満たしている．
　(i)　$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値と $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．
　(ii)　三角形 ABC の面積 S を求めよ．
　(iii)　三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ．
　(iv)　$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，三角形 ABD の外接円の半径 R を求めよ．

【配点】

(1)　20点．
　(i)　6点．(ii)　6点．(iii)　8点．
(2)　20点．
　(i)　8点．(ii)　12点．
(3)　20点．
　(i)　6点．(ii)　4点．(iii)　4点．(iv)　6点．

【出題のねらい】

(1)　有理数・無理数の計算を行うことができるかをみる問題である．
(2)　文字を含む1次関数の最大・最小に関する条件を，正しく場合分けして処理することができるかをみる問題である．
(3)　余弦定理，正弦定理など「図形と計量」で学習した基本公式を正しく用いることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2}, & \cdots① \\ x-y=\sqrt{3}. & \cdots② \end{cases}$$

(i)
$$\begin{aligned} x^2-y^2&=(x+y)(x-y)\\ &=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\\ &=\boldsymbol{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

(ii)　①＋② より，
$$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.$$
①－② より，
$$y=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}.$$
よって，
$$\begin{aligned} xy&=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)\\ &=\frac{2-3}{4}\\ &=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x^3-y^3&=(x-y)(x^2+xy+y^2)\\ &=(x-y)\{(x+y)^2-xy\}\\ &=\sqrt{3}\left\{2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}\\ &=\boldsymbol{\frac{9}{4}\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(2)(i)　$a>0$ のとき $y=ax+b$ のグラフは傾きが正の直線であるから，y は $x=2$ のとき最大になり，$x=0$ のとき最小になる．
　よって，
$$\begin{cases} \boldsymbol{M=2a+b}, \\ \boldsymbol{m=b}. \end{cases}$$

(ii)　$a<0$ のときも (i) と同様に考えて，$y=ax+b$ は $x=0$ のとき最大になり，$x=2$ のとき最小になるから，
$$\begin{cases} M=b, \\ m=2a+b. \end{cases}$$
　したがって，
　(ア)　$a>0$ のとき，$M=-3m$ より，
$$2a+b=-3b.$$
　よって，
$$b=-\frac{1}{2}a.$$
　(イ)　$a<0$ のとき，$M=-3m$ より，

$$b=-3(2a+b).$$

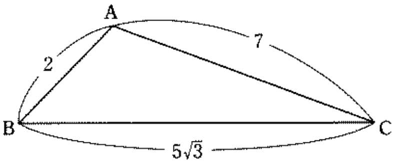
よって，

$$b=-\frac{3}{2}a.$$

以上より，

$$\begin{cases} a>0\text{のとき}\quad b=-\dfrac{1}{2}a, \\ a<0\text{のとき}\quad b=-\dfrac{3}{2}a. \end{cases}$$

(3)



(i)　余弦定理より，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{4+75-49}{2\cdot 2\cdot 5\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これより，

$$\angle ABC=\mathbf{30^\circ}.$$

(ii)
$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\sqrt{3}\sin 30^\circ$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(iii)　$S=\dfrac{r}{2}(AB+BC+CA)$ が成り立つから，(ii)の結果を用いて，

$$r=\frac{2S}{AB+BC+CA}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}+7}$$

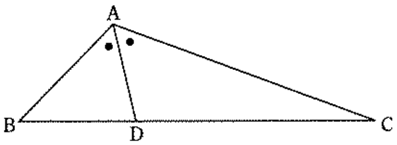
$$=\frac{5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}(9-5\sqrt{3})}{(9+5\sqrt{3})(9-5\sqrt{3})}$$

$$=\frac{45\sqrt{3}-75}{6}$$

$$=\frac{15\sqrt{3}-25}{2}.$$

(iv)



AD は∠BAC の二等分線であるから，

$$BD:DC=AB:AC=2:7.$$

これより，

$$BD=\frac{2}{9}BC$$

$$=\frac{2}{9}\cdot 5\sqrt{3}$$

$$=\frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

三角形 ABD に余弦定理を用いて，

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABD$$

$$=4+\left(\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)^2-2\cdot 2\cdot\frac{10\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{28}{27}.$$

これより，

$$AD=\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}.$$

三角形 ABD に正弦定理を用いて，

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=2R.$$

よって，

$$R=\frac{AD}{2\sin\angle ABD}$$

$$=\frac{\dfrac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}{2\cdot\dfrac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{21}}{9}.$$

【解説】　問題

(1)　(i)，(iii)については，

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

因数分解の公式

を用いると計算量を減らすことができる．

(ii)は与えられた x，y の方程式から x，y を求め，条件式に代入すればよい．

あるいは，

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

を用いてもよい．

また，(iii)については，

$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

より，

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$$

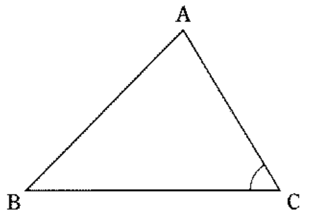
が成り立つから，これを用いてもよい．

(i)，(iii)とも，(ii)と同様に，条件式に x，y を代入して計算してもよい．

(2) x の1次関数 $y=ax+b$ のグラフは傾きが a の直線であるから，この関数が $0 \leqq x \leqq 2$ において最大値，最小値をとる x の値は a の符号に依存する．したがって，a の符号で場合分けして考える必要がある．このことに注意して解答すればよい．

(3)(i) 三角形 ABC に，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos C$$

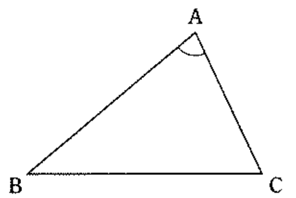


余弦定理

を用いればよい．

(ii) 三角形の面積は，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$$



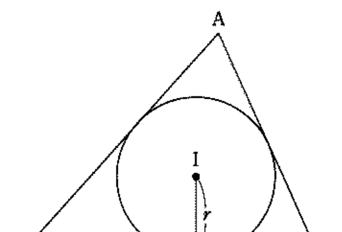
三角形の面積

を用いればよい．

(iii) 一般に，次が成り立つ．

r を三角形 ABC の内接円の半径とすると，三角形 ABC の面積 S は，

$$S=\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}).$$



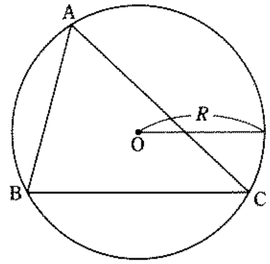
三角形の内接円と面積

三角形 ABC の3辺の長さは与えられており，(ii)の結果から面積もわかっているので，この公式を用いて r を求めればよい．

(iv) 三角形 ABD に，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$$

（R は三角形 ABC の外接円の半径）



正弦定理

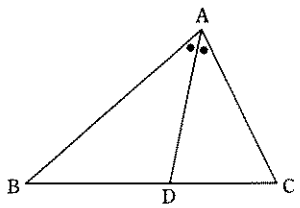
を用いて，外接円の半径を求める．

そのためには，向かい合う一組の，辺の長さと角度がわかればよいが，(i)から∠ABC の大きさがわかっているから，**【解答】**では，角の二等分線の性質を用いて BD の長さを求め，それを用いて AD の長さを余弦定理から求めた．

BD の長さを求めるとき用いたのは次の定理である．

三角形 ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，

BD : DC = AB : AC.



角の二等分線と比

この定理は次のように証明できる．

A から直線 BC に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AH},$$

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AH}$$

より，

$$\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ACD}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}. \qquad \cdots③$$

一方，$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおくと $\angle\mathrm{CAD}=\theta$ であるから，

$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta,$$

$$\triangle \mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\,\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta.$$

よって,

$$\triangle \mathrm{ABD}:\triangle \mathrm{ACD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}. \qquad \cdots④$$

③, ④より,

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}.$$

2　2次関数の応用

【Ⅰ型　必須問題】

(配点　40点)

> aを実数の定数として,
>
> $$f(x)=x^2-2ax+2,$$
> $$g(x)=-x^2+x+2$$
>
> とする.
>
> (1)　$y=f(x)$のグラフの頂点の座標を求めよ.
>
> (2)　不等式$g(x)\geqq 0$を解け.
>
> (3)　方程式$f(x)=0$が, (2)で求めたxの範囲に相異なる2つの実数解をもつようなaの値の範囲を求めよ.

【配点】

(1)　8点.

(2)　12点.

(3)　20点.

【出題のねらい】

2次方程式が相異なる2つの実数解をもつ条件を, グラフを利用して求めることができるかをみる問題である.

【解答】

(1)
$$f(x)=x^2-2ax+2$$
$$=(x-a)^2+2-a^2$$

より, $y=f(x)$のグラフの頂点の座標は,

$$\boldsymbol{(a,\ 2-a^2)}.$$

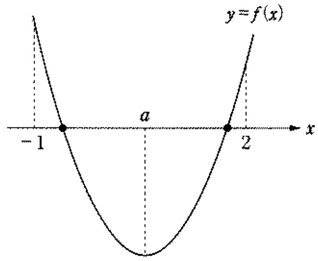
(2)　$g(x)\geqq 0$より,

$$-x^2+x+2\geqq 0.$$
$$x^2-x-2\leqq 0.$$
$$(x+1)(x-2)\leqq 0.$$

よって,

$$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 2}.$$

(3)　「方程式$f(x)=0$が$-1\leqq x\leqq 2$の範囲に相異なる2つの実数解をもつ」のは「放物線$y=f(x)$がx軸の$-1\leqq x\leqq 2$の部分と相異なる2つの共有点をもつ」ときである.



求める条件は,

$$\begin{cases} -1\leqq a\leqq 2, & \cdots① \\ a^2-2>0, & \cdots② \\ f(-1)=2a+3\geqq 0, & \cdots③ \\ f(2)=-4a+6\geqq 0. & \cdots④ \end{cases}$$

②より,

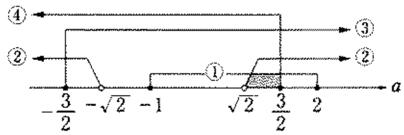
$$a<-\sqrt{2},\ a>\sqrt{2}.$$

③より,

$$a\geqq -\frac{3}{2}.$$

④より,

$$a\leqq \frac{3}{2}.$$



よって, 求めるaの範囲は,

$$\boldsymbol{\sqrt{2}<a\leqq \frac{3}{2}}.$$

【解説】　問題

(1)　2次関数のグラフについては,

> 2次関数$y=a(x-p)^2+q$のグラフは放物線であり, 軸は$x=p$, 頂点の座標は$(p,\ q)$である
>
> **2次関数のグラフ**

が成り立つので, $a\neq 0$のとき,

> $$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$
>
> **2次式の平方完成**

を用いて, $f(x)$を平方完成すればよい.

(2)　「x^2の係数が負の2次不等式を解くには, 両辺に-1を掛けて, x^2の係数が正になるように変形して考える」ことが基本であるから, **【解答】**では,

$$-x^2+x+2\geqq 0$$

の両辺に-1を掛けて,

$$x^2-x-2\leqq 0$$

とし，

$$(x+1)(x-2)\leqq 0 \qquad \cdots(*)$$

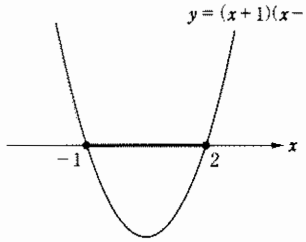
と変形した．

この不等式の解は，

> $\alpha<\beta$ のとき，
> $(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$ の解は $x\leqq\alpha$, $\beta\leqq x$,
> $(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$ の解は $\alpha\leqq x\leqq\beta$
>
> **2 次不等式の解**

を用いて求めればよい．

なお，(*)を満たす x は放物線 $y=(x+1)(x-2)$ が $y\leqq 0$ を満たすような x の範囲であるから，下図より $-1\leqq x\leqq 2$ とわかる．



(3) 2 次方程式の実数解について，

> x の 2 次方程式
> $ax^2+bx+c=0$ （a, b, c は実数，$a\neq 0$）
> に対して，$D=b^2-4ac$ とおく．
> $D>0$ ならば異なる 2 つの実数解をもつ．
> $D=0$ ならばただ 1 つの実数解(重解)をもつ．
> $D<0$ ならば実数解をもたない．
>
> **2 次方程式の実数解**

この D を $ax^2+bx+c=0$ の判別式という．

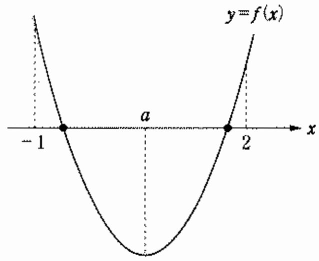
2 次方程式

$ax^2+bx+c=0$ （a, b, c は実数，$a\neq 0$）

の解が与えられた範囲に存在する条件を考えるには，2 次関数のグラフを利用する．そのとき，次の(i)，(ii)，(iii)に注目することが基本である．

> (i) 軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ の位置(頂点の x 座標)，
> (ii) 判別式 $D=b^2-4ac$ の符号(または頂点の y 座標の符号)，
> (iii) 与えられた範囲の端点における関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号．
>
> **放物線の調べ方**

【解答】では，これを利用して放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-1\leqq x\leqq 2$ の部分と異なる 2 つの共有点をもつ条件を求めた．

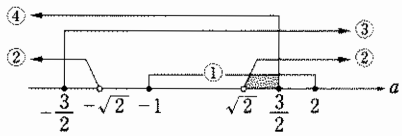


実際，$y=f(x)$ の

$$\begin{cases} 軸の位置は\ x=a, \\ 判別式は\ 4a^2-8=4(a^2-2), \\ 端点の\ y\ 座標は\ f(-1),\ f(2) \end{cases}$$

であるから，これらの符号などを調べて a の満たす不等式①，②，③，④を得た．

この 4 つの不等式を満たす a の範囲は次のとおり．



これらの共通部分を求めればよい．

3 確　率

【IA型　必須問題】

(配点　40点)

> 袋の中に，1 と書かれたカードが 1 枚，2 と書かれたカードが 2 枚，3 と書かれたカードが 1 枚，白紙のカードが 1 枚，合計 5 枚のカードが入っている．また，2 つの空の箱 A と B がある．
>
> 以下の試行を T とする．
>
> 「袋の中から 1 枚のカードを無作為に選ぶ．
> - そのカードの数字が 1 または 3 のときは，箱 A にカードの数字と同じ個数の球を入れる．
> - そのカードの数字が 2 のときは，箱 B に 2 個の球を入れる．
> - そのカードが白紙のときは，何もしない．」
>
> 1 回の試行が終わるたびに選んだカードを袋に戻すものとして，T を何回か行う．
>
> (1) T を 1 回行った後に，箱 A に入っている球の個数が 0 である確率を求めよ．
>
> (2) T を 2 回行った後に，箱 A に入っている球の個数が 1 である確率，2 である確率をそれぞれ求めよ．

(3) T を4回行った後に，箱A，Bに入っている球の個数をそれぞれ a，b とする．

(i) $a=b=4$ である確率を求めよ．

(ii) $a+b=5$ である確率を求めよ．

【配点】

(1) 8点．

(2) 12点．

(3) 20点．

(i) 8点．(ii) 12点．

【出題のねらい】

事象を的確に捉え，確率の計算を正しく行うことができるかをみる問題である．

【解答】

1と書かれたカードを$\boxed{1}$，2と書かれたカードを$\boxed{2}$，3と書かれたカードを$\boxed{3}$，白紙のカードを$\boxed{}$と表すことにする．

(1) T を1回行うとき，カードの取り出し方は5通りあり，これらは同様に確からしい．

T を1回行った後に，箱Aに入っている球の個数が0であるのは，袋の中から$\boxed{2}$または$\boxed{}$のカードを選ぶ場合である．

よって，求める確率は，

$$\mathbf{\frac{3}{5}}.$$

(2) T を2回行うとき，各回ごとの試行は独立であることに注意する．

T を2回行った後に，箱Aに入っている球の個数が1であるのは，袋の中から

・1回目に$\boxed{1}$を選び，2回目に$\boxed{2}$または$\boxed{}$を選ぶ，

または，

・1回目に$\boxed{2}$または$\boxed{}$を選び，2回目に$\boxed{1}$を選ぶ場合である．

よって，Aに入っている球の個数が1である確率は，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{6}{25}}.$$

次に，箱Aに入っている球の個数が2であるのは，袋の中から1回目に$\boxed{1}$を選び，2回目に$\boxed{1}$を選ぶ場合である．

よって，Aに入っている球の個数が2である確率は，

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{1}{25}}.$$

(3)(i) $a=b=4$ となるのは，袋の中から「$\boxed{1}$，$\boxed{3}$をそれぞれ1回ずつ選び，かつ$\boxed{2}$を2回選ぶ」場合である．

このようなカードの選び方は $\frac{4!}{2!}$ 通りあり，この一つ一つの場合が起こる確率はいずれも

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{48}{625}}.$$

(ii) $a+b=5$ となるカードの選び方は次の4つの場合がある．

(ア) $\boxed{1}$を3回，$\boxed{2}$を1回

(イ) $\boxed{1}$を2回，$\boxed{3}$を1回，$\boxed{}$を1回

(ウ) $\boxed{1}$を1回，$\boxed{2}$を2回，$\boxed{}$を1回

(エ) $\boxed{2}$を1回，$\boxed{3}$を1回，$\boxed{}$を2回

(ア)，(イ)，(ウ)，(エ)は互いに排反な事象であるから，求める確率は，

$$\frac{4!}{3!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}+\frac{4!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}$$
$$+\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+\frac{4!}{2!}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2$$
$$=\mathbf{\frac{92}{625}}.$$

【解説】 問題

(1) 確率を考えるときは，たとえ見た目が同じであっても異なるものはすべて区別して考えることが基本である．

本問においては，数字2が書かれたカード$\boxed{2}$は2枚あるので，これらを$\boxed{2}_1$，$\boxed{2}_2$のように区別すれば，T を1回行うときカードの取り出し方は5通りあり，これらはいずれも同じ程度に起こる(このとき，「カードの取り出し方は同様に確からしい」という)と考えられる．

T を1回行うとき，袋の中から選ぶカードとAに入れる球の個数，およびそれが起こる確率の関係は次のようになる．

袋の中から選ぶカード	箱Aに入れる球の個数	確率
$\boxed{1}$	1個	$\frac{1}{5}$
$\boxed{2}$	0個	$\frac{2}{5}$
$\boxed{3}$	3個	$\frac{1}{5}$
$\boxed{}$	0個	$\frac{1}{5}$

この表より，Tを1回行った後に，Aに入っている球の個数が0となるのは，袋の中から$\boxed{2}$または$\boxed{}$のカードを選ぶ場合であることがわかる．

(2)　本問では1回の試行が終わるたびに選んだカードを袋に戻すので，1回目の試行の結果は2回目の試行の結果に影響しない．一般に，次が成り立つ．

> 2つの試行 T_1，T_2 が互いに影響を与えないとき，これらの試行は独立であるという．
> T_1 と T_2 が独立のとき，T_1 において事象 A_1 が起こる確率を $P(A_1)$，T_2 において事象 A_2 が起こる確率を $P(A_2)$ とすれば，A_1 と A_2 がともに起こるという事象 $A_1 \cap A_2$ の起こる確率 $P(A_1 \cap A_2)$ は，
> $$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$
> **独立試行の確率**

【解答】では，これを用いて確率を求めた．

Tを2回行うとき，

・　Aに球が1個入るのは，

$$\begin{cases} \text{1回目に1個，2回目に0個入る場合，} \\ \text{1回目に0個，2回目に1個入る場合} \end{cases}$$

である．

・　Aに球が2個入るのは，

1回目，2回目とも1個ずつ入る場合である．

(1)の表に従って，これらが起こるようなカードの選び方を考え，そのときの確率を求めればよい．

(3)　Tを1回行うとき，袋の中から選ぶカードとA，Bそれぞれに入れる球の個数，およびそれが起こる確率の関係は次のようになる．

袋の中から選ぶカード	箱Aに入れる球の個数	箱Bに入れる球の個数	確率
$\boxed{1}$	1個	0個	$\frac{1}{5}$
$\boxed{2}$	0個	2個	$\frac{2}{5}$
$\boxed{3}$	3個	0個	$\frac{1}{5}$
$\boxed{}$	0個	0個	$\frac{1}{5}$

この表を利用して，(i)，(ii)それぞれで問われている場合に対して，4回の試行で選ぶカードの数字の組合せ，および何回目にどのカードを選ぶかを考え，そのときの確率を求めればよい．4回の試行で同じ数字を選ぶ場合，次を用いてカードの選び方の総数を数えた．

> n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，… であるとき，これら n 個のもの全部を用いて作ることができる順列の総数は，
> $$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots} \text{ 通り．}$$
> ただし，
> $$p+q+r+\cdots=n.$$
> **同じものを含む順列の総数**

例えば(i)では，4回の試行で袋の中から選ぶカードの組合せは$(\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3})$であり，この組合せに対して，何回目にどのカードを選ぶか考えて，カードの選び方は$\frac{4!}{2!}$通りとなる．

【ⅡA・ⅡB 型受験者用】

1 小問集合

【ⅡA・ⅡB 型共通　必須問題】

(配点　50 点)

(1)　$(x-1)(y-2)=3$ を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2)　関数 $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x}$ $(x>0)$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(3)　不等式 $(2\cos\theta-1)(2\sin\theta-1)<0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を解け．

(4)　関数 $y=(\log_2 x)^2-6\log_2 x$ の $1\leqq x\leqq 16$ における最大値と最小値を求めよ．

(5)　平面上に三角形 ABC があり，

$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{AC}=7,\quad \mathrm{BC}=5\sqrt{3}$$

を満たしている．

(i)　$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値と $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ．

(ii)　三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ．

(iii)　三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ．

【配点】

(1)　10 点．
(2)　10 点．
(3)　10 点．
(4)　10 点．
(5)　10 点．
　(i)　4 点．(ii)　3 点．(iii)　3 点．

【出題のねらい】

(1)　約数・倍数の関係を利用して方程式の解を求めることができるかをみる問題である．

(2)　相加平均と相乗平均の関係を利用して関数の最小値を求めることができるかをみる問題である．

(3)　三角関数の不等式を解くことができるかをみる問題である．

(4)　文字の置き換えを利用して対数の 2 次関数の最大値，最小値を求めることができるかをみる問題である．

(5)　余弦定理，正弦定理など「図形と計量」で学習した基本公式を正しく用いることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　x, y が整数のとき $x-1$, $y-2$ も整数であるから，

$$(x-1)(y-2)=3$$

より，$x-1$, $y-2$ は 3 の約数である．

3 の約数は ±1, ±3 だけであるから，整数 $x-1$, $y-2$ の組は次のとおりである．

$x-1$	3	1	-1	-3
$y-2$	1	3	-3	-1
x	4	2	0	-2
y	3	5	-1	1

これより，求める x, y の組 $(x,\ y)$ は，

$$\boldsymbol{(4,\ 3),\ (2,\ 5),\ (0,\ -1),\ (-2,\ 1).}$$

(2)

$$\begin{aligned} y&=\frac{x^2-2x+3}{x}\\ &=x-2+\frac{3}{x}\\ &=x+\frac{3}{x}-2. \qquad \cdots① \end{aligned}$$

ここで，$x>0$ より相加平均と相乗平均の関係から，

$$x+\frac{3}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}.$$

等号が成り立つのは，

$$x=\frac{3}{x}\quad かつ\quad x>0$$

より $x=\sqrt{3}$ のとき．

したがって，① より，

$$y=x+\frac{3}{x}-2\geqq 2\sqrt{3}-2.$$

等号は，$x=\sqrt{3}$ のとき成り立つ．

よって，求める最小値は，

$$\boldsymbol{2\sqrt{3}-2}$$

であり，そのときの x の値は，

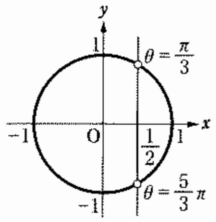
$$\boldsymbol{x=\sqrt{3}.}$$

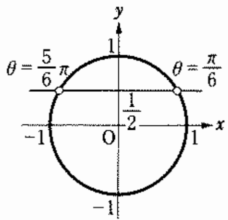
(3)

$$(2\cos\theta-1)(2\sin\theta-1)<0$$

$$\iff \begin{cases} 2\cos\theta-1>0 \\ 2\sin\theta-1<0 \end{cases} \quad または \quad \begin{cases} 2\cos\theta-1<0 \\ 2\sin\theta-1>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta>\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta<\dfrac{1}{2} \end{cases} \cdots② \quad または \quad \begin{cases} \cos\theta<\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta>\dfrac{1}{2}. \end{cases} \cdots③$$





$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，$\cos\theta > \frac{1}{2}$ を満たす θ の範囲は，

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$$

であり，$\sin\theta < \frac{1}{2}$ を満たす θ の範囲は，

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} < \theta < 2\pi.$$

したがって，② を満たす θ の範囲は，

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi.$$

同様に，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，$\cos\theta < \frac{1}{2}$ を満たす θ の範囲は，

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}$$

であり，$\sin\theta > \frac{1}{2}$ を満たす θ の範囲は，

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}.$$

したがって，③ を満たす θ の範囲は，

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{6}.$$

以上より，求める θ の範囲は，

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{6},\ \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi.}$$

(4) $t=\log_2 x$ とおくと，

$$1 \leqq x \leqq 16$$

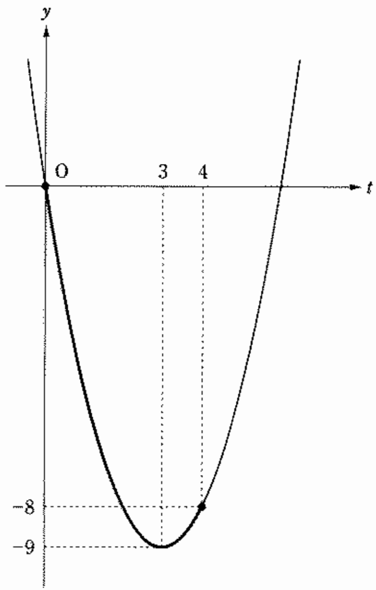
のとき，

$$0 \leqq t \leqq 4 \qquad \cdots④$$

であり，

$$\begin{aligned} y &= (\log_2 x)^2 - 6\log_2 x \\ &= t^2 - 6t \\ &= (t-3)^2 - 9. \qquad \cdots⑤ \end{aligned}$$

④ の範囲において ⑤ のグラフは次のようになる。

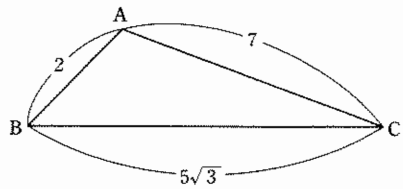


グラフより，求める y の

最大値は 0，最小値は −9

である。

(5)



(i) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos\angle ABC &= \frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC} \\ &= \frac{4+75-49}{2\cdot 2\cdot 5\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

これより，

$$\angle ABC = \mathbf{30°}.$$

(ii) 三角形 ABC に正弦定理を用いると，

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$$

より，

$$\begin{aligned} R &= \frac{AC}{2\sin\angle ABC} \\ &= \frac{7}{2\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{7}. \end{aligned}$$

(iii)　三角形 ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\sqrt{3}\sin30^\circ$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

また，$S=\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ が成り立つから，

$$r=\frac{2S}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}+7}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}(9-5\sqrt{3})}{(9+5\sqrt{3})(9-5\sqrt{3})}$$
$$=\frac{45\sqrt{3}-75}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}-25}{2}}.$$

【解説】　問題

(1)　x, y が整数のとき $x-1$, $y-2$ も整数であるから，関係式 $(x-1)(y-2)=3$ を満たす $x-1$, $y-2$ は 3 の約数である．3 の約数は ±1, ±3 しか存在しないから，この一つ一つの場合について $(x,\ y)$ を求めればよい．

　一般に，整数を求める問題では与えられた条件を満たす整数の存在範囲を何らかの方法で限定して，あとは「シラミつぶし」に調べることが基本である．

(2)　与えられた関数を

$$y=x+\frac{3}{x}-2\quad(x>0)$$

と変形することができれば，x と $\frac{3}{x}$ について積が一定であるから，

> $a>0$, $b>0$ のとき，
> $$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$
> （等号成立は $a=b$ のとき）
> が成り立つ
> **相加平均と相乗平均の関係**

を利用することにより，y の最小値を求めることができる．「相加平均と相乗平均の関係式」のように，一般に成り立つ不等式を用いて x の関数の最大値・最小値を求めるときには，それらを与える x の存在を確認する必要がある．

　「相加平均と相乗平均の関係」を用いずに，次のように解答することもできる．

（(2) の別解）

$$y=\frac{x^2-2x+3}{x}\quad(x>0)$$ が成り立つとき，

y が値 k をとる

$$\iff \begin{cases} k=\dfrac{x^2-2x+3}{x}\quad(x>0) \\ \text{すなわち} \\ x^2-(k+2)x+3=0 \qquad\cdots(*) \\ \text{を満たす実数 } x\,(>0) \text{ が存在する} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (k+2)^2-12\geqq0, \\ \quad k+2>0 \end{cases}$$

$$\iff k^2+4k-8\geqq0 \quad \text{かつ} \quad k+2>0$$

$$\iff \begin{cases} k\leqq-2-2\sqrt{3},\ k\geqq-2+2\sqrt{3} \\ \text{かつ}\quad k+2>0 \end{cases}$$

$$\iff k\geqq-2+2\sqrt{3}.$$

$k=-2+2\sqrt{3}$ のとき $(*)$ より，

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0.$$

これより，

$$(x-\sqrt{3})^2=0.$$

よって，$k=-2+2\sqrt{3}$ のとき $x=\sqrt{3}$.

以上より，

y の最小値は $-2+2\sqrt{3}$

であり，そのときの x の値は，

$$\sqrt{3}.$$

（(2) の別解終り）

(3)　**【解答】**では，

> A, B が実数のとき，
> $$AB<0 \iff \begin{cases} A>0, \\ B<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A<0, \\ B>0 \end{cases}$$
> **不等式の性質**

が成り立つことを利用して，与えられた不等式を変形した．

　$\cos\theta$, $\sin\theta$ が単位円周上の点の座標を表すことを利用すると，次のような解答も考えられる．

（(3) の別解）

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$$

とおくと，

$$x^2+y^2=1 \qquad\cdots⑥$$

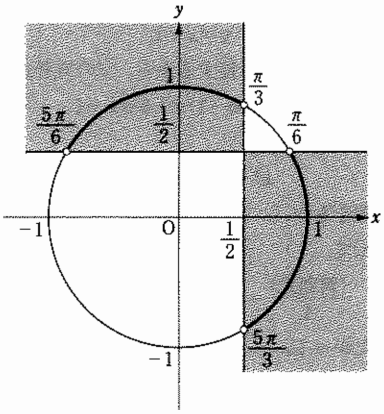
が成り立ち，与えられた不等式から，

$$(2x-1)(2y-1)<0.$$

　これより，

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ y < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ y > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \cdots ⑦$$

xy 平面上において，⑥，⑦ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲は次のようになる．



これより，

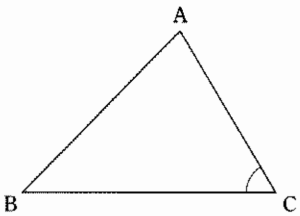
$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \ \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{6},\ \ \frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi.$$

((3) の別解終り)

(4) 与えられた関数は対数関数 $\log_2 x$ の 2 次式であるから，$t = \log_2 x$ とおいて考える．このとき，x が $1 \leqq x \leqq 16$ の範囲を動けば t は $0 \leqq t \leqq 4$ の範囲を動くので，この範囲において，t の 2 次関数の最大値，最小値を求めればよい．

(5)(i) 三角形 ABC に，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{BC} \cdot \mathrm{CA} \cos C$$



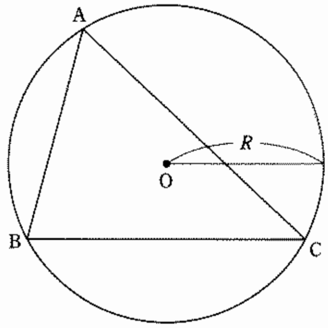
余弦定理

を用いればよい．

(ii) 三角形 ABC に

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R$$

(R は三角形 ABC の外接円の半径)



正弦定理

を用いて，外接円の半径を求めればよい．

このとき，向かい合う一組の，辺の長さと角度がわかればよいが，(i) で ∠ABC を求めているので，**【解答】**では CA の長さを用いて，

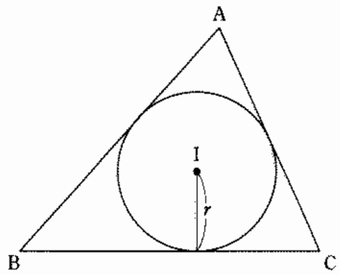
$$\frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2R$$

とした．

(iii) 一般に，次が成り立つ．

r を三角形 ABC の内接円の半径とすると，三角形 ABC の面積 S は，

$$S = \frac{r}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}).$$

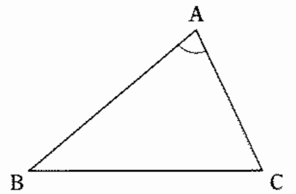


三角形の内接円と面積

三角形 ABC の 3 辺の長さは与えられているから，三角形 ABC の面積がわかれば，この公式を用いて内接円の半径 r を求めることができる．

三角形の面積については，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$$



三角形の面積

が成り立つ．

(i)の結果より，$\angle ABC=30°$ がわかっているから，この公式を用いて三角形の面積を求めることができる．

2 微積分融合

【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】

(配点　50点)

> a，b を実数の定数として，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を，
>
> $$f(x)=x^2+x+1,$$
> $$g(x)=x^2-(4a-1)x+b$$
>
> とする．また，放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．
>
> 点$(0,\ 1)$における C_1 の接線が C_2 に接している．
>
> (1)　b を a を用いて表せ．
>
> (2)　$a>0$ とし，連立不等式
>
> $$0\leqq y\leqq f(x)\quad かつ\quad 0\leqq y\leqq g(x)$$
>
> で表される領域を E とし，不等式 $0\leqq x\leqq 2$ で表される領域を F とする．
>
> E と F の共通部分の面積を $S(a)$ とする．
>
> (i)　$S(a)$ を求めよ．
>
> (ii)　a が $a>0$ を満たして変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

【配点】

(1)　18点．

(2)　32点．

(i)　18点，(ii)　14点．

【出題のねらい】

直線と放物線が接する条件を求められるか，図形を正確に把握し面積を求めることができるか，さらに，その最小値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$f'(x)=2x+1.$$

C_1 上の点$(0,\ 1)$における接線の方程式は，

$$y-1=f'(0)(x-0)$$

すなわち，

$$y=x+1.$$

この直線が C_2 に接するから，x の方程式

$$x^2-(4a-1)x+b=x+1$$

すなわち，

$$x^2-4ax+b-1=0$$

は重解をもつ．

よって，

$$\frac{(判別式)}{4}=(-2a)^2-1\cdot(b-1)=0.$$

したがって，

$$b=\mathbf{4a^2+1}.$$

(2)　(1)より，

$$g(x)=x^2-(4a-1)x+4a^2+1.$$

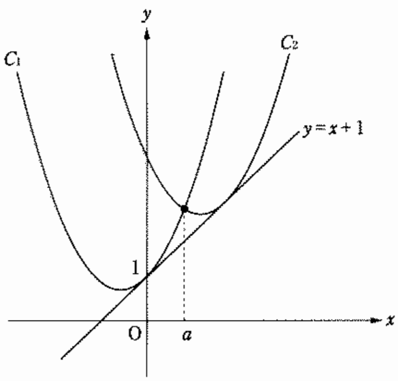
(i)　C_1，C_2 の交点の x 座標を求める．

$$x^2+x+1=x^2-(4a-1)x+4a^2+1.$$
$$4ax=4a^2.$$

$a>0$ であるから，

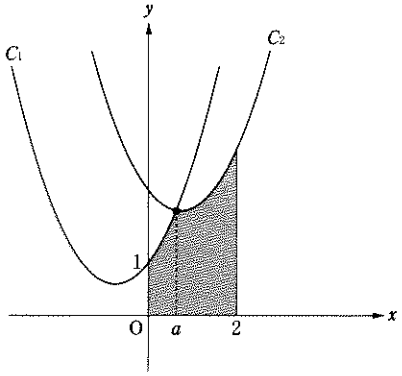
$$x=a.$$

よって，$a>0$ のとき，C_1，C_2 の概形は次図のようになる．



領域 E と F の共通部分の図形は，a と2の大小によって形を変えるから，次のように場合分けして $S(a)$ を求める．

(ア)　$0<a<2$ のとき．



E と F の共通部分は上図の網かけ部分である．

よって，

$$S(a)=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^2 g(x)\,dx$$

$$=\int_0^a (x^2+x+1)\,dx$$

$$+\int_a^2 \{x^2-(4a-1)x+4a^2+1\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a$$

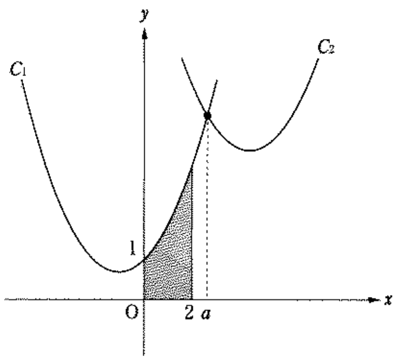
$$+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{4a-1}{2}x^2+(4a^2+1)x\right]_a^2$$

$$=\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2+a+\frac{1}{3}(2^3-a^3)$$

$$-\frac{4a-1}{2}(2^2-a^2)+(4a^2+1)(2-a)$$

$$=-2a^3+8a^2-8a+\frac{20}{3}.$$

(イ)　$2\leqq a$ のとき．



E と F の共通部分は上図の網かけ部分である．

よって，

$$S(a)=\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^2 (x^2+x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2$$

$$=\frac{20}{3}.$$

以上，(ア)，(イ) より，

$$S(a)=\begin{cases} \boldsymbol{-2a^3+8a^2-8a+\dfrac{20}{3}} & \textbf{(}\boldsymbol{0<a<2}\ \textbf{のとき)}, \\ \boldsymbol{\dfrac{20}{3}} & \textbf{(}\boldsymbol{2\leqq a}\ \textbf{のとき)}. \end{cases}$$

(ii)(ア)　$0<a<2$ のとき．

(i) より，

$$S'(a)=-6a^2+16a-8$$

$$=-6\left(a^2-\frac{8}{3}a+\frac{4}{3}\right)$$

$$=-6\left(a-\frac{2}{3}\right)(a-2).$$

よって，$S(a)$ の $0<a<2$ における増減は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\left(\frac{20}{3}\right)$	↘	極小	↗	$\left(\frac{20}{3}\right)$

(イ)　$a\geqq 2$ のとき．

(i) より，$S(a)$ は一定値 $\frac{20}{3}$ をとる．

以上より，$S(a)$ は，$a=\frac{2}{3}$ のとき最小となり，

$$(\text{最小値})=S\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=-2\left(\frac{2}{3}\right)^3+8\left(\frac{2}{3}\right)^2-8\cdot\frac{2}{3}+\frac{20}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{116}{27}}.$$

【解説】　問題

(1)　点 $(0,\ 1)$ における C_1 の接線の方程式を求めるには，

> 点 $(a,\ f(a))$ における曲線 $C：y=f(x)$ の接線の方程式は，
>
> $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
>
> **接線の方程式**

を用いればよい．

さらに，この直線が C_2 に接するとき，$y=g(x)$

と $y=x+1$ から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$x^2-4ax+b-1=0 \quad \cdots ㊍$$

が重解をもつから，(判別式)$=0$ となることを用いて a と b の関係式を得た．

解と係数の関係を用いて，次のように解いてもよい．

((1) 後半の別解)

㊍ の重解を α とすると，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\alpha=4a, \\ \alpha\cdot\alpha=b-1.\end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases}\alpha=2a, \\ \alpha^2=b-1.\end{cases}$$

ここから，α を消去して，

$$\begin{aligned} b&=(2a)^2+1 \\ &=4a^2+1. \end{aligned}$$

((1) 後半の別解終り)

さらに，次のように解答することもできる．

((1) の別解)

C_1 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の方程式は

$$y=f'(0)x+f(0). \quad \cdots ①$$

C_2 上の点 $(t,\ g(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=g'(t)(x-t)+g(t) \\ &=g'(t)x-tg'(t)+g(t). \quad \cdots ② \end{aligned}$$

条件より，① が C_2 に接しているので，① と ② が同じ直線になるような実数 t が存在する．

したがって，

$$\begin{cases}g'(t)=f'(0), & \cdots ③ \\ g(t)-tg'(t)=f(0). & \cdots ④\end{cases}$$

③ より，

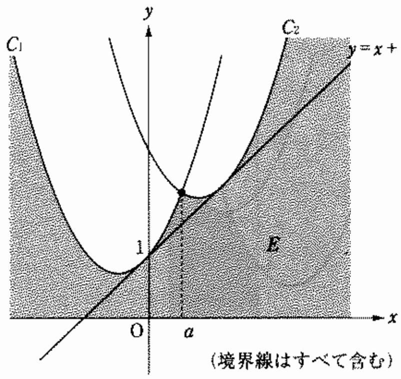
$$2t-(4a-1)=1.$$
$$t=2a.$$

これを ④ に代入して，

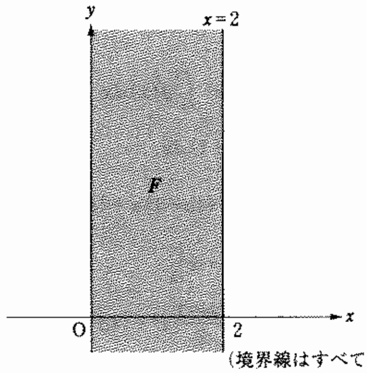
$$\{4a^2-(4a-1)(2a)+b\}-(2a)\{2(2a)-(4a-1)\}=1.$$
$$(2a-4a^2+b)-2a=1.$$
$$b=4a^2+1.$$

((1) の別解終り)

(2)(i) 領域 E と F を確認しておこう．



(境界線はすべて含む)



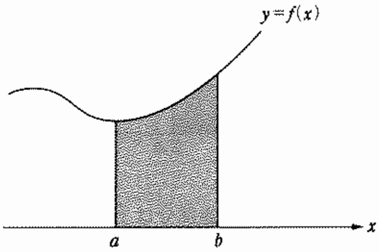
(境界線はすべて含む)

これらの図より，E と F の共通部分は，

$$a<2,\ 2\leqq a$$

によって形を変えることがわかるから，**【解答】**では (ア)，(イ) と場合分けした．

その上で，

> $f(x)\geqq 0$ $(a\leqq x\leqq b)$ のとき，曲線 $y=f(x)$，x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積を S とすると，
>
> $$S=\int_a^b f(x)\,dx$$
>
> 
>
>
> **定積分と面積**

に従って，$S(a)$ を求めている．

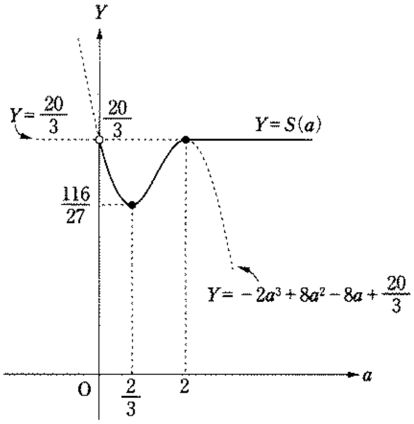
(ii) (i) で $S(a)$ を得たら，導関数の符号を調べて，$S(a)$ の増減表を作り，最小値を求めればよい．

そこで**【解答】**では，

$$S'(a)=\begin{cases}-6\left(a-\dfrac{2}{3}\right)(a-2), & (0<a<2 \text{ のとき})\\ 0 & (2<a \text{ のとき})\end{cases}$$

から，$0<a<2$ の範囲で $S(a)$ の増減表をかいて，最小値を求めている．

　このとき，$Y=S(a)$ のグラフをかくと次のようになる．



　これより，確かに $a=\dfrac{2}{3}$ のとき，$S(a)$ が最小になることがわかる．

　関数の最大，最小をしらべるには，

> 　ある区間で，
> つねに $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で増加する，
> つねに $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で減少する
>
> **導関数の符号と関数の増減**

により，導関数を用いて増減を調べることが基本であることは確認しておきたい．

3　図形と方程式

【ⅡA・ⅡB 型共通　必須問題】

（配点　50 点）

> 　a は実数の定数とする．xy 平面上に，
> 　　円 C_1：$x^2+y^2=9$,
> 　　円 C_2：$x^2+y^2-2ax-\sqrt{2}\,ay+6a-9=0$
> があり，円 C_2 の半径は $\sqrt{3}$ である．
> (1)　a の値を求めよ．
> (2)　C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ．
> (3)　C_1 の周または外部にあり，かつ C_2 の周または内部にある領域を D とする．点 (x, y) が D 上を動くとき，$2x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　12 点．

(2)　12 点．

(3)　26 点．

【出題のねらい】

　座標平面における円の方程式，および 2 円で定義される領域に関する基本事項の理解度，および領域と最大・最小についての理解度をみる問題である．

【解答】

(1)　C_2 の方程式を変形すると，

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{3}{2}a^2-6a+9.$$

　半径が $\sqrt{3}$ より，

$$\frac{3}{2}a^2-6a+9=(\sqrt{3})^2.$$

　これを整理すると，

$$a^2-4a+4=0.$$
$$(a-2)^2=0.$$

　したがって，

$$\boldsymbol{a=2}.$$

(2)　$a=2$ より，C_2 の方程式は

$$x^2+y^2-4x-2\sqrt{2}\,y+3=0.$$

　C_1，C_2 の交点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases}x^2+y^2=9, & \cdots① \\ x^2+y^2-4x-2\sqrt{2}\,y+3=0 & \cdots②\end{cases}$$

の実数解である．

　①−② より，

$$4x+2\sqrt{2}\,y-3=9.$$

　したがって，

$$y=-\sqrt{2}\,(x-3). \qquad \cdots③$$

　③ を ① に代入して，

$$x^2+\{-\sqrt{2}\,(x-3)\}^2=9.$$
$$x^2+2(x^2-6x+9)=9.$$
$$x^2-4x+3=0.$$
$$(x-1)(x-3)=0.$$

　したがって，

$$x=1,\ 3.$$

　③ に代入して，

　$x=1$ のとき $y=2\sqrt{2}$，$x=3$ のとき $y=0$．

　よって，C_1，C_2 の交点の座標は，

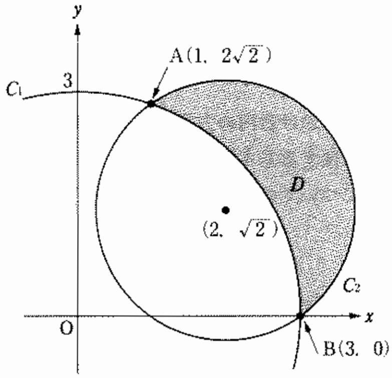
$$\boldsymbol{(1,\ 2\sqrt{2}),\ (3,\ 0)}.$$

(3)　(2) で求めた C_1，C_2 の 2 交点を，

$$\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2}),\quad \mathrm{B}(3,\ 0)$$

とする．

C_2 の中心の座標が $(2,\ \sqrt{2})$ であることにも注意すると，D は次図の網かけ部分(境界を含む)である．



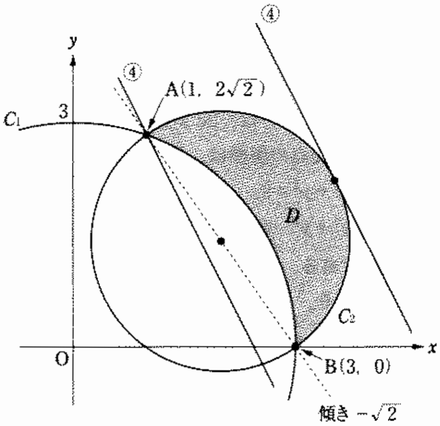
$2x+y=k$ とおくと，

$$y=-2x+k. \qquad \cdots④$$

「直線④が領域 D と共有点をもつ」 $\cdots(*)$

ような k の値の範囲を求めればよい．

④は傾き -2，y 切片 k の直線を表すことに注意する．



直線 AB の傾きが $-\sqrt{2}\ (>-2)$ であることから，k が最小となるのは，④が $\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2})$ を通るときである．

また，k が最大となるのは，④が直線 AB の上側で C_2 と接するときである．

④が A を通るとき，

$$k=2\cdot 1+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}.$$

④と C_2 が接するのは，

(C_2 の中心 $(2,\ \sqrt{2})$ と④の距離) $=$ (C_2 の半径)

が成り立つときであるから，

$$\frac{|2\cdot 2+\sqrt{2}-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{3}.$$

$$|4+\sqrt{2}-k|=\sqrt{15}.$$

$$4+\sqrt{2}-k=\pm\sqrt{15}.$$

したがって，

$$k=4+\sqrt{2}\pm\sqrt{15}.$$

④と C_2 が直線 AB の上側で接するのは前図より，

$$k=4+\sqrt{2}+\sqrt{15}$$

のときである．

よって，

$$(*) \iff 2+2\sqrt{2}\leqq k\leqq 4+\sqrt{2}+\sqrt{15}$$

が成り立つから，$2x+y$ のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{2+2\sqrt{2}\leqq 2x+y\leqq 4+\sqrt{2}+\sqrt{15}.}$$

【解説】 問題

(1)

> 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ \ (r>0)$
> の中心の座標は $(a,\ b)$，半径は r
>
> **円の中心と半径**

であるから，C_2 の方程式を x，y それぞれに対して平方完成をして，

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{3}{2}a^2-6a+9$$

と変形すれば，半径が $\sqrt{3}$ であることから，

$$\frac{3}{2}a^2-6a+9=(\sqrt{3})^2$$

が成り立つ．

あとは，この a の2次方程式を解けばよい．

(2) C_1，C_2 の交点の座標を求めるには次のことを用いればよい．

> 図形 $f(x,y)=0$ と図形 $g(x,y)=0$ の交点の座標は，連立方程式
> $$\begin{cases} f(x,\ y)=0, \\ g(x,\ y)=0 \end{cases}$$
> の実数解の組 $(x,\ y)$ である．
>
> **2つの図形の交点**

これより，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, & \cdots① \\ x^2+y^2-4x-2\sqrt{2}y+3=0 & \cdots② \end{cases}$$

を解けばよい．

その際，①−②を作ると，

$$4x+2\sqrt{2}y-3=9.$$

これを $y=-\sqrt{2}(x-3)$ と変形し，①(あるいは②)に代入することで x，y を求めることができる．

(3) 一般に，次が成り立つ．

点(x, y)が領域D上を動くとき，xとyの関数$f(x, y)$のとり得る値の範囲は，図形$f(x, y)=k$とDが共有点をもつようなkの値の範囲である．

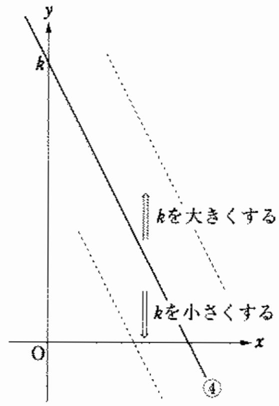
領域と最大・最小

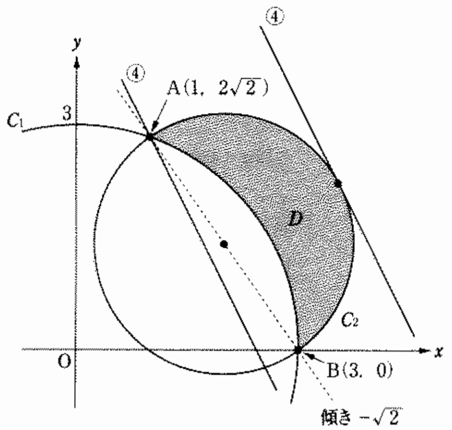
これより，

直線$2x+y=k$　（すなわち$y=-2x+k$）　…④

が領域Dと共有点をもつようなkの値の範囲を求めればよい．

④は傾きが-2，y切片がkであるから，kを動かすと④は次のように上下に動く．





④の傾き-2が直線ABの傾き$-\sqrt{2}$より小さいことに注意すれば，kの値が最小になるのは

「④がAを通るとき」

であることがわかる．

また，kの値が最大となるのは

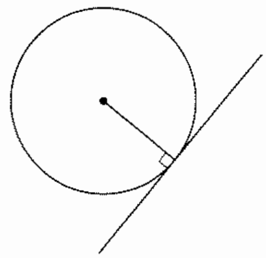
「④とC_2が直線ABの上側で接するとき」

であることがわかる．

なお，④とC_2が接するときのkの値を求めるには，

円と直線が接するための条件は，

（円の中心と直線の距離）＝（半径）



円と直線が接する条件

を用いればよい．

その際，「円の中心と直線の距離」の計算には，

点(x_0, y_0)と直線$ax+by+c=0$の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

点と直線の距離

を用いればよい．

4　確　率

【ⅡA・ⅡB型共通　選択問題】

（配点　50点）

$\boxed{\mathrm{M}}$，$\boxed{\mathrm{M}}$，$\boxed{\mathrm{M}}$，$\boxed{\mathrm{M}}$，$\boxed{\mathrm{F}}$，$\boxed{\mathrm{F}}$，$\boxed{\mathrm{F}}$の7枚のカードを，A，B，C，Dの男子4人，p，q，rの女子3人の計7人の生徒に1枚ずつ配り，次のように得点を与える．

・$\boxed{\mathrm{M}}$が配られた男子および$\boxed{\mathrm{F}}$が配られた女子の得点はそれぞれ$+a$点，

・$\boxed{\mathrm{F}}$が配られた男子および$\boxed{\mathrm{M}}$が配られた女子の得点は$-b$点．

ただし，$a>0$，$b>0$である．

(1)　得点が$+a$点となる生徒が7人である確率を求めよ．

(2)　得点が$+a$点となる生徒が3人である確率を求めよ．

(3)　7人の得点の和をXとおく．

(i)　Xのとり得る値をすべて求めよ．

(ii)　Xの期待値が0となるとき，$\dfrac{b}{a}$の値を求めよ．

【配点】

(1)　8点．

(2)　12点．

(3)　30点．

(i) 8 点． (ii) 22 点．

【出題のねらい】

カードの配り方を題材として，場合の数の数え上げができるか，また，適切な根元事象を選び，確率の計算ができるか，さらに期待値の計算の応用ができるかをみる問題である．

【解答】

(1) 7 枚のカードを $\boxed{M_1}$，$\boxed{M_2}$，$\boxed{M_3}$，$\boxed{M_4}$，$\boxed{F_1}$，$\boxed{F_2}$，$\boxed{F_3}$ と区別すれば，7 人の生徒へのカードの配り方は全部で 7! 通りある．

得点が $+a$ 点となる生徒が 7 人であるのは，男子 4 人に $\boxed{M}$ のカードを配り，女子 3 人に $\boxed{F}$ のカードを配るときである．

男子 4 人に $\boxed{M}$ のカードを配る方法は 4! 通り，女子 3 人に $\boxed{F}$ のカードを配る方法は 3! 通りあるから，7 人へのカードの配り方は 4!×3! 通りある．

よって，求める確率は，

$$\frac{4!\,3!}{7!}=\mathbf{\frac{1}{35}}.$$

(2) 得点が $+a$ 点となる生徒が 3 人であるのは，男子 4 人のうちの 2 人に $\boxed{M}$，2 人に $\boxed{F}$ のカードを配り，女子 3 人のうちの 2 人に $\boxed{M}$，1 人に $\boxed{F}$ のカードを配るときである．

$\boxed{M}$ のカードを配る男子 2 人と女子 2 人の選び方が ${}_4C_2\times{}_3C_2$ (=18) 通りあるので，7 人へのカードの配り方は，

$$18\times4!\times3!\text{ 通り}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{18\cdot4!\,3!}{7!}=\mathbf{\frac{18}{35}}.$$

(3)(i)(ア) 男子 4 人に $\boxed{M}$ のカードを配るとき，女子 3 人に $\boxed{F}$ のカードを配ることになるから，

$$X=7a.$$

(イ) 男子 4 人のうちの 3 人に $\boxed{M}$，1 人に $\boxed{F}$ のカードを配るとき，女子 3 人のうちの 1 人に $\boxed{M}$，2 人に $\boxed{F}$ のカードを配ることになるから，

$$X=5a-2b.$$

(ウ) 男子 4 人のうちの 2 人に $\boxed{M}$，2 人に $\boxed{F}$ のカードを配るとき，女子 3 人のうちの 2 人に $\boxed{M}$，1 人に $\boxed{F}$ のカードを配ることになるから，

$$X=3a-4b.$$

(エ) 男子 4 人のうちの 1 人に $\boxed{M}$，3 人に $\boxed{F}$ のカードを配るとき，女子 3 人に $\boxed{M}$ のカードを配ることになるから，

$$X=a-6b.$$

(ア)～(エ) のいずれかが起こるので，X のとり得る値は，

$$\mathbf{7a,\ 5a-2b,\ 3a-4b,\ a-6b.}$$

(ii) (ア) が起こる確率は，(1) より $\frac{1}{35}$．

(ウ) が起こる確率は，(2) より $\frac{18}{35}$．

(エ) が起こるとき，$\boxed{M}$ のカードを配る男子 1 人の選び方が ${}_4C_1$ (=4) 通りあるので，7 人へのカードの配り方は

$$4\times4!\times3!\text{ 通り}.$$

よって，(エ) が起こる確率は，

$$\frac{4\cdot4!\,3!}{7!}=\frac{4}{35}.$$

(ア)～(エ) のいずれかが起こるので，(イ) が起こる確率は

$$1-\left(\frac{1}{35}+\frac{18}{35}+\frac{4}{35}\right)=\frac{12}{35}.$$

以上より，X のとり得る値とその確率は次表のようになる．

X	$7a$	$5a-2b$	$3a-4b$	$a-6b$
確率	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

よって，X の期待値を $E(X)$ とすれば，

$$E(X)=7a\times\frac{1}{35}+(5a-2b)\times\frac{12}{35}+(3a-4b)\times\frac{18}{35}+(a-6b)\times\frac{4}{35}$$

$$=\frac{1}{35}(125a-120b)$$

$$=\frac{1}{7}(25a-24b).$$

これより，$E(X)=0$ となるとき，

$$25a=24b.$$

よって，

$$\frac{b}{a}=\mathbf{\frac{25}{24}}.$$

【解説】 問題

(1) 「確率」の計算では，「見た目が同じであっても異なるものはすべて区別して考える」ことが基本である．**【解答】**では，$\boxed{M}$ のカード 4 枚，$\boxed{F}$ のカード 3 枚，計 7 枚のカードをすべて区別して，

$$\boxed{M_1},\ \boxed{M_2},\ \boxed{M_3},\ \boxed{M_4},\ \boxed{F_1},\ \boxed{F_2},\ \boxed{F_3}$$

とし，これら 7 枚のカードを 7 人の生徒に 1 枚ずつ

配ると考えた．すると，カードの配り方は

$$7!\text{ 通り}$$

であり，これを全事象として解答した．

このとき，得点が$+a$点となる生徒が7人であるのは，男子全員に$\boxed{\text{M}}$のカードを配り，女子全員に$\boxed{\text{F}}$のカードを配る場合である．男子4人に$\boxed{\text{M}}$のカードを配る方法は$4!$通り，女子3人に$\boxed{\text{F}}$のカードを配る方法は$3!$通りあるので，積の法則により，7人へのカードの配り方は，

$$4!\times 3!\text{ 通り}$$

となる．

> 事象Aの起こり方がm通りあり，そのおのおのの場合について，事象Bの起こり方がn通りあるとすると，AとBがともに起こる場合の数はmn通りある．
>
> **積の法則**

よって，求める確率は，

$$\frac{4!\,3!}{7!}=\frac{3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5}=\frac{1}{35}$$

となる．

(2) 男子4人のうち何人に$\boxed{\text{M}}$のカードを配るかで場合分けして調べれば，得点が$+a$点となる生徒が3人であるのは，

・男子4人のうち2人に$\boxed{\text{M}}$のカードを配り，2人に$\boxed{\text{F}}$のカードを配り，

・女子3人のうち2人に$\boxed{\text{M}}$のカードを配り，1人に$\boxed{\text{F}}$のカードを配る

場合に限られることがわかる（**【解答】**(3)(i)参照）．

あとは，$\boxed{\text{M}}$のカードを配る男子2人と女子2人を決めれば，残り3人に$\boxed{\text{F}}$のカードを配ることになり，したがって，7人へのカードの配り方の総数は

$$({}_4C_2\times{}_3C_2)\times4!\times3!\text{ 通り}$$

となる．

これより，求める確率が得られる．

(3)(i) 男子は4人いて，$\boxed{\text{F}}$のカードは3枚しかないから，少なくとも1人の男子に$\boxed{\text{M}}$のカードを配ることになる．

そこで，$\boxed{\text{M}}$のカードを配る男子の人数をkとして，$k=1, 2, 3, 4$の各場合について，Xの値を計算した．

例えば，$k=3$の場合の配り方として，

A	B	C	D	p	q	r
$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{F}}$
$+a$	$+a$	$+a$	$-b$	$-b$	$+a$	$+a$

を考えると，

$$X=5a-2b$$

となる．

このように考えていけば，Xのとり得る値が

$$7a,\ 5a-2b,\ 3a-4b,\ a-6b$$

であることがわかる．

(ii) まず，「Xの期待値をaとbの式で表す」ことから始める．

(i)で求めたXの値のおのおのについて，それが起こる確率を求めていこう．

$X=7a$となるのは，得点が$+a$点の生徒が7人のときであるから，その確率は，(1)より$\dfrac{1}{35}$である．

$X=3a-4b$となるのは，得点が$+a$点の生徒が3人のときであるから，その確率は，(2)より$\dfrac{18}{35}$である．

あとは，$X=5a-2b$, $X=a-6b$となる確率を求めればよい．**【解答】**では，$X=a-6b$となる確率を先に計算し，$X=5a-2b$となる確率は，余事象の確率を利用して求めたが，次のように直接計算してもよい．

((3)(ii)の部分的別解)

$X=5a-2b$となるのは，**【解答】**の(3)(i)の(イ)の場合であるから，$\boxed{\text{M}}$のカードを配る男子3人と女子1人の選び方が${}_4C_3\times{}_3C_1(=12)$通り，したがって，7人へのカードの配り方は

$$12\times4!\times3!\text{ 通り．}$$

よって，(イ)が起こる確率は，

$$\frac{12\cdot4!\,3!}{7!}=\frac{12}{35}.$$

((3)(ii)の部分的別解終り)

ここで，期待値の定義を確認しよう．

> 変量Xのとり得る値を，
>
> $$X=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$
>
> とし，$X=x_k$となる確率をp_kとする（$k=1, 2, 3, \cdots, n$）．
>
> このとき，Xの期待値$E(X)$は，
>
> $$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$
>
> ただし，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.
>
> **期待値の定義**

この定義に基づいて，Xの期待値$E(X)$を計算すると，

$$E(X)=\frac{1}{7}(25a-24b)$$

となる．したがって，$E(X)=0$ となる a，b の条件は，

$$25a=24b.$$

よって，

$$\frac{b}{a}=\frac{25}{24}$$

であることがわかる．

なお，冒頭で述べたように，確率の計算においては，「すべてのものを区別する」ことが基本であるが，本問においては，同じアルファベットが書かれたカードを区別せずに計算を行うこともできる．

(別解)

(1)　A，B，C，D の男子 4 人，p，q，r の女子 3 人をこの順に一列に並べ，$\boxed{\text{M}}$のカード 4 枚，$\boxed{\text{F}}$のカード 3 枚を 1 枚ずつ配る．

A	B	C	D	p	q	r
□	□	□	□	□	□	□

このとき，同じアルファベットが書かれたカードを区別しないものとすれば，7 枚のカードの順列の総数は

$$\frac{7!}{4!\,3!}=35(\text{通り})$$

であり，これらは同様に確からしい．このとき，得点が $+a$ 点となる生徒が 7 人であるのは，

A	B	C	D	p	q	r
$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{F}}$

となる場合(1 通り)であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{35}.$$

(2)　得点が $+a$ 点となる生徒が 3 人であるのは，

A	B	C	D	p	q	r
□	□	□	□	□	□	□

A～D：$\boxed{\text{M}}$が 2 枚，$\boxed{\text{F}}$が 2 枚　　p～r：$\boxed{\text{M}}$が 2 枚，$\boxed{\text{F}}$が 1 枚

となる場合であるから，

$$\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{3!}{2!}=18(\text{通り}).$$

よって，求める確率は，

$$\frac{18}{35}.$$

(3)(i)　**【解答】**(3)(i)と同じ．

(ii)(ア)　$X=7a$ となるのは，得点が $+a$ 点の生徒が 7 人のときであるから，その確率は，(1)より，

$$\frac{1}{35}.$$

(イ)　$X=5a-2b$ となるのは，得点が $+a$ 点の生徒が 5 人のとき．それは，

A	B	C	D	p	q	r
□	□	□	□	□	□	□

A～D：$\boxed{\text{M}}$が 3 枚，$\boxed{\text{F}}$が 1 枚　　p～r：$\boxed{\text{M}}$が 1 枚，$\boxed{\text{F}}$が 2 枚

となる場合であるから，

$$\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}=12(\text{通り}).$$

よって，$X=5a-2b$ となる確率は，

$$\frac{12}{35}.$$

(ウ)　$X=3a-4b$ となるのは，得点が $+a$ 点の生徒が 3 人のときであるから，その確率は，(2)より，

$$\frac{18}{35}.$$

(エ)　$X=a-6b$ となるのは，得点が $+a$ 点の生徒が 1 人のとき．それは，

A	B	C	D	p	q	r
□	□	□	□	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$	$\boxed{\text{M}}$

A～D：$\boxed{\text{M}}$が 1 枚，$\boxed{\text{F}}$が 3 枚

となる場合であるから，

$$\frac{4!}{3!}=4(\text{通り}).$$

よって，$X=a-6b$ となる確率は，

$$\frac{4}{35}.$$

以上より，X の期待値を $E(X)$ とすれば，

$$E(X)=7a\times\frac{1}{35}+(5a-2b)\times\frac{12}{35}+(3a-4b)\times\frac{18}{35}+(a-6b)\times\frac{4}{35}$$

$$=\frac{1}{7}(25a-24b).$$

これより，$E(X)=0$ となるとき，

$$25a=24b.$$

よって，

$$\frac{b}{a}=\frac{25}{24}.$$

(別解終り)

5　三角関数

【ⅡA・ⅡB 型共通　選択問題】

(配点　50点)

四面体 OABC があり，

$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$，$\angle\mathrm{OAB}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，

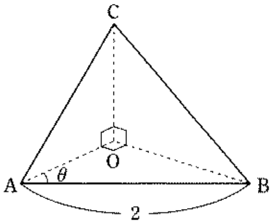
$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{\pi}{2}$$

を満たしている．

(1)　四面体 OABC の体積 V を θ を用いて表せ．また，V の最大値を求めよ．

(2)　三角形 OAB, 三角形 OBC, 三角形 OCA の面積の和を S とする．S のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　V, S の最大値を与える θ の値をそれぞれ θ_V, θ_S とするとき，θ_V と θ_S の大小を調べよ．



【配点】

(1)　15 点．

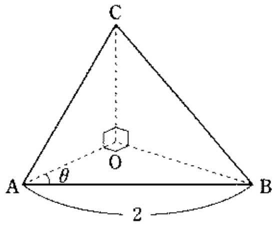
(2)　15 点．

(3)　20 点．

【出題のねらい】

面積，体積を三角関数を用いて表し，適切な置き換えを行って 3 次関数に帰着させたり，三角関数の合成などの手法を利用して最大値を求めることができるか，また，三角関数を利用して角の大小を調べることができるかをみる問題である．

【解答】



(1)　$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，$\angle OAB=\theta$ より，

$$OA=AB\cos\theta=2\cos\theta,$$
$$OB=AB\sin\theta=2\sin\theta.$$

したがって，

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB$$
$$=\frac{1}{2}(2\cos\theta)(2\sin\theta)$$
$$=2\sin\theta\cos\theta.$$

また，

$$OC=OA=2\cos\theta.$$

$\angle BOC=\angle COA=\frac{\pi}{2}$ より，OC⊥(平面 OAB)であるから，

$$V=\frac{1}{3}\triangle OAB\cdot OC$$
$$=\frac{1}{3}\cdot2\sin\theta\cos\theta\cdot2\cos\theta$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta.}$$

$t=\sin\theta$ とおくと，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，

$$0<t<1 \qquad \cdots①$$

であり，

$$V=\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta$$
$$=\frac{4}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$=\frac{4}{3}t(1-t^2)$$
$$=\frac{4}{3}(t-t^3).$$

$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}(1-3t^2)$ より，① における V の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dt}$		+	0	−	
V		↗	最大	↘	

よって，$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき V は最大となり，最大値は，

$$V=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{3}}{27}}.$$

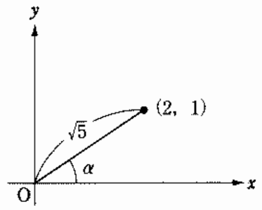
(2)　$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{\pi}{2}$ より，

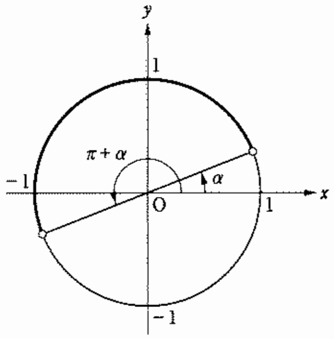
$$S=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$$
$$=\frac{1}{2}OA\cdot OB+\frac{1}{2}OB\cdot OC+\frac{1}{2}OC\cdot OA$$
$$=\frac{1}{2}(2\cos\theta)(2\sin\theta)+\frac{1}{2}(2\sin\theta)(2\cos\theta)+\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2$$
$$=4\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$$
$$=2\sin2\theta+\cos2\theta+1$$
$$=\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)+1.$$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす鋭角である．





$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\alpha<2\theta+\alpha<\pi+\alpha$ であり，α は鋭角であるから，

$$\sin(\pi+\alpha)<\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1.$$

$$-\sin\alpha<\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}<\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1.$$

$$-1<\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)\leqq\sqrt{5}.$$

したがって，

$$\boldsymbol{0<S\leqq\sqrt{5}+1.}$$

(3)　(1) の議論から，

$$\sin\theta_V=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(0<\theta_V<\frac{\pi}{2}\right).\qquad\cdots②$$

(2) の議論から，

$$\sin(2\theta_S+\alpha)=1\quad(\alpha<2\theta_S+\alpha<\pi+\alpha).$$

したがって，

$$2\theta_S+\alpha=\frac{\pi}{2}.\qquad\cdots③$$

ここで，② より，

$$\cos2\theta_V=1-2\sin^2\theta_V=1-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

また，③ より，

$$\cos2\theta_S=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{5}}$ より，

$$\cos2\theta_V<\cos2\theta_S.$$

$0<2\theta_V<\pi$，$0<2\theta_S<\pi$ であるから，

$$2\theta_V>2\theta_S.$$

よって，

$$\boldsymbol{\theta_V>\theta_S.}$$

【解説】　問題

(1)　$\angle BOC=\angle COA=\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$OC\perp(\text{平面 }OAB)$$

が成り立つ．

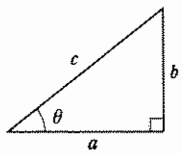
このことから，四面体 OABC において，三角形 OAB を底面とみなすと OC が高さとなることがわかる．

したがって，

$$V=\frac{1}{3}\triangle OAB\cdot OC$$

となる．

OA，OB，OC については，



左図の直角三角形において

$$\cos\theta=\frac{a}{c},\quad \sin\theta=\frac{b}{c}$$

三角比の定義

を用いると，

$$OA=OC=2\cos\theta,\ OB=2\sin\theta$$

となる．

また，$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ より，三角形 OAB は直角三角形であり，

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}(2\cos\theta)(2\sin\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$

となる．

以上より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot2\sin\theta\cos\theta\cdot2\cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta$$

となる．

このあと【解答】では，

$$V=\frac{4}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)$$

と変形し，$t=\sin\theta$ とおくことで V を t の3次関数

$$V=\frac{4}{3}t(1-t^2)$$

で表した．この関数の最大値を求めるには導関数を利用して V の増減を調べればよい．

(2) 3つの三角形 OAB, OBC, OCA はいずれも直角三角形であるから，それぞれの面積は，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB},\ \triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC},$$

$$\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}$$

より求めることができる．

これより，3つの三角形の面積の和 S は，

$$S=4\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$$

となる．

このあと【解答】では，

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1,$$
$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

2倍角の公式

を用いて，

$$S=2\sin2\theta+\cos2\theta+1$$

とし，さらに，

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である

三角関数の合成

を用いて，

$$S=\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)+1$$

と変形した．

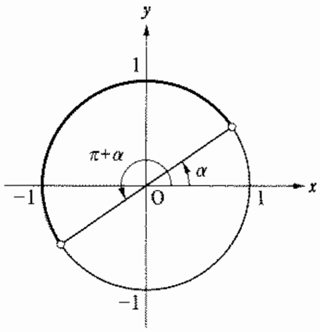
θ のとり得る値の範囲は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$\alpha<2\theta+\alpha<\pi+\alpha$$

であり，α は鋭角であるから，$\sin(2\theta+\alpha)$ のとり得る値の範囲は，

$$\sin(\pi+\alpha)<\sin(2\theta+\alpha)\leqq1$$

となる．



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

に注意すると，

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}<\sin(2\theta+\alpha)\leqq1$$

であり，S のとり得る値の範囲は，

$$0<S\leqq\sqrt{5}+1$$

となる．

(3) (1)の議論から，V は $t=\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大となるので，

$$\sin\theta_V=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(0<\theta_V<\frac{\pi}{2}\right).$$

(2)の議論から，S は $2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき最大となるので，

$$2\theta_S+\alpha=\frac{\pi}{2}\quad\left(0<\theta_S<\frac{\pi}{2}\right).$$

このあと【解答】では，

$$\cos2\theta_V=1-2\sin^2\theta_V=\frac{1}{3},$$

$$\cos2\theta_S=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

を求め，$\cos x\ (0<x<\pi)$ が単調減少関数であることを用いて，

$$\cos2\theta_V<\cos2\theta_S$$

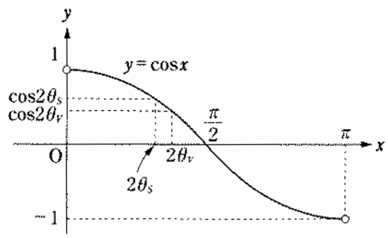
より，

$$2\theta_V>2\theta_S,$$

すなわち，

$$\theta_V>\theta_S$$

を導いた．



次のように解答することもできる．

((3) の別解)

(1) の議論から，

$$\sin\theta_V=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(0<\theta_V<\frac{\pi}{2}\right).$$

これより，

$$\cos\theta_V=\sqrt{1-\sin^2\theta_V}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

であるから，

$$\sin2\theta_V=2\sin\theta_V\cos\theta_V$$
$$=2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

また，(2) の議論から，

$$2\theta_S+\alpha=\frac{\pi}{2}\quad\left(0<\theta_S<\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，

$$\sin2\theta_S=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\alpha$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

したがって，$\dfrac{2}{\sqrt{5}}<\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より，

$$\sin2\theta_S<\sin2\theta_V. \qquad \cdots④$$

さらに，$0<\theta_V<\dfrac{\pi}{2}$ より，

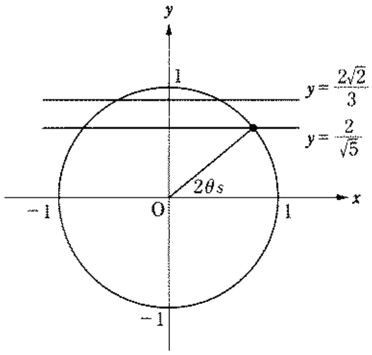
$$0<2\theta_V<\pi. \qquad \cdots⑤$$

$2\theta_S=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$0<2\theta_S<\frac{\pi}{2}. \qquad \cdots⑥$$

④，⑤，⑥ より，

$$2\theta_S<2\theta_V.$$



よって，

$$\theta_S<\theta_V.$$

((3) の別解終り)

⑥ 空間ベクトル

【ⅡB型　選択問題】

(配点　50点)

一辺の長さが1である正四面体 OABC において，

辺 OA を 1：2 に内分する点を P，

辺 AB の中点を Q，

辺 BC を s：$1-s$ に内分する点を R，

辺 OC を t：$1-t$ に内分する点を S

とする．ただし，$0<s<1$，$0<t<1$ である．

(1) $\overrightarrow{PR}$，$\overrightarrow{QS}$ をそれぞれ s，t，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{PR}|^2$，$|\overrightarrow{QS}|^2$ をそれぞれ s，t を用いて表せ．

(2) $$\overrightarrow{PR}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PS}\quad(\alpha,\ \beta \text{は実数})$$
が成り立っている．このとき，α，β，t をそれぞれ s を用いて表せ．

(3) 直線 PR と直線 QS が交わっているとして，その交点を X とする．

(i) $\dfrac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{XR}|}$ を s を用いて表せ．

(ii) 4 点 P，Q，R，S が同一円周上にあるとき，s，t の値をそれぞれ求めよ．

【配点】

(1)　12 点．

(2)　12 点．

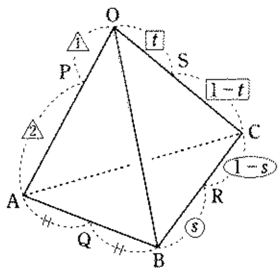
(3)　26 点．

(i)　6 点．(ii)　20 点．

【出題のねらい】

ベクトルの基本性質を問うとともに，空間内の 4 点が同一円周上にあるための条件をベクトルを利用して求めることができるかなど，幅広い応用力をみる問題である．

【解答】



(1)　条件より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{s+(1-s)}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}}.$$

また，四面体 OABC は一辺の長さが 1 の正四面体であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$$=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

同様に，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}.$$

これより，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(1-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$-\frac{2}{3}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2(1-s)s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$-\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{1}{9}+(1-s)^2+s^2-\frac{1}{3}(1-s)+(1-s)s-\frac{s}{3}$$

$$=\boldsymbol{s^2-s+\frac{7}{9}}.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2=\left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+t^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t$$

$$=\boldsymbol{t^2-t+\frac{3}{4}}.$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PS}}$　(α，β は実数).　…①

(1) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

また，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\alpha(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+\beta(\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

$$=\alpha\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$+\beta\left(t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから，これらと ① より，

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta t\overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないので，

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{6}-\dfrac{\beta}{3}=-\dfrac{1}{3}, & \cdots② \\ \dfrac{\alpha}{2}=1-s, & \cdots③ \\ \beta t=s. & \cdots④\end{cases}$$

③ より，

$$\boldsymbol{\alpha=2-2s}.$$

これを ② に代入して，

$$\beta=\frac{\alpha}{2}+1$$

$$=(1-s)+1$$

$$=\boldsymbol{2-s}.$$

④ より，

$$t=\frac{s}{\beta}=\boldsymbol{\frac{s}{2-s}}.$$

(3)(i)　直線 PR と直線 QS が交わるとき，R は平面 PQS 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PS}}\quad(\alpha,\ \beta\text{ は実数})$$

と表すことができる．このとき，(2) より，

$$\alpha=2-2s,\ \beta=2-s.$$

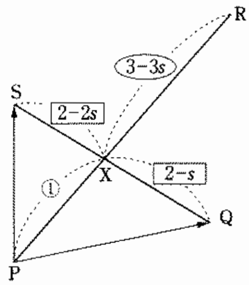
よって，直線 PR と直線 QS が交わるとき，交点 X は QS を内分する点になるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(2-2s)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+(2-s)\overrightarrow{\mathrm{PS}}$$

$$=(4-3s)\cdot\frac{(2-2s)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+(2-s)\overrightarrow{\mathrm{PS}}}{(2-s)+(2-2s)}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\frac{(2-2s)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+(2-s)\overrightarrow{\mathrm{PS}}}{4-3s}.$$



これより，X は線分 QS を $(2-s):(2-2s)$ に内分する点であり，さらに，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(4-3s)\overrightarrow{\mathrm{PX}}$$

より，X は線分 PR を $1:(3-3s)$ に内分する点であることがわかる．

よって，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{XR}}|}=\frac{1}{3-3s}.$$

(ii) 4 点 P, Q, R, S が同一円周上にあるための条件は，方べきの定理の逆より，

$$\mathrm{PX}\cdot\mathrm{RX}=\mathrm{QX}\cdot\mathrm{SX} \quad \cdots⑤$$

が成り立つことである．

ここで，(i) より，

$$\mathrm{PX}=\frac{1}{4-3s}\mathrm{PR},\ \mathrm{RX}=\frac{3-3s}{4-3s}\mathrm{PR},$$

$$\mathrm{QX}=\frac{2-s}{4-3s}\mathrm{QS},\ \mathrm{SX}=\frac{2-2s}{4-3s}\mathrm{QS}$$

であるから，これらを ⑤ に代入して，

$$(3-3s)\mathrm{PR}^2=(2-s)(2-2s)\mathrm{QS}^2.$$

$1-s\neq0$ より，

$$3|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=2(2-s)|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2.$$

(1) より，

$$3\left(s^2-s+\frac{7}{9}\right)=2(2-s)\left(t^2-t+\frac{3}{4}\right).$$

$$3s^2-3s+\frac{7}{3}=2(2-s)\left\{\frac{s^2}{(2-s)^2}-\frac{s}{2-s}+\frac{3}{4}\right\}.$$

$$\left(t=\frac{s}{2-s}\text{ より}\right)$$

$$3s^2-3s+\frac{7}{3}=\frac{2s^2}{2-s}-2s+\frac{3(2-s)}{2}.$$

$$3s^2+\frac{1}{2}s-\frac{2}{3}=\frac{2s^2}{2-s}.$$

$$\left(3s^2+\frac{1}{2}s-\frac{2}{3}\right)(2-s)=2s^2.$$

$$18s^3-21s^2-10s+8=0.$$

$$(2s-1)(3s+2)(3s-4)=0.$$

$0<s<1$ より，

$$s=\frac{1}{2}.$$

これより，

$$t=\frac{s}{2-s}=\frac{1}{3}.$$

これは，$0<t<1$ を満たす．

以上より，

$$s=\frac{1}{2},\ t=\frac{1}{3}.$$

【解説】 問題

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すためにまず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表した．

その際に，次の公式を用いた．

> O と異なる 2 点 A, B に対して，
> 線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると，
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}.$$
> とくに，P が線分 AB の中点のとき，
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}.$$
> **内分点を表すベクトル**

$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2$ を求めるには $|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$ を用いて内積計算にもちこむことが基本である．具体的には，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表して，

> (i) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
> (ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
> (iii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
> (iv) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
> (k は実数)
> **内積の性質**

に従い，計算すればよい．

このとき，**【解答】**では，

> $$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$$
> $$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$$
> **ベクトルの大きさと内積**

を用いている．

(2) 与えられた等式を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表し，

> 4 点 O, A, B, C が同一平面上にないとき，
> (i) 実数 r, s, t に対して，
> $$r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \iff r=s=t=0.$$
> (ii) 実数 r, s, t, r', s', t' に対して，
> $$r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=r'\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
> $$\iff r=r',\ s=s',\ t=t'.$$
> **ベクトルの 1 次独立**

を利用して，α，β，s，t についての連立方程式を立て，s を既知として α，β，t を求めればよい．

(3)(i)　PR $\not\parallel$ QS であるから，空間内の異なる4点 P，Q，R，S について，直線 PR と直線 QS が交わるための条件は，P，Q，R，S が同一平面上にあることである．そこで，

> 同一直線上にない異なる3点 A，B，C に対し，
> 　点 P が平面 ABC 上にある
> $\iff$ $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$　(α，β は実数)
> 　と表される
>
> **共面条件**

を用いると，P，Q，R，S が満たすべき条件は，(2) の結果から，

$$\overrightarrow{PR}=(2-2s)\overrightarrow{PQ}+(2-s)\overrightarrow{PS}\quad(0<s<1)$$

であることがわかる．このあと**【解答】**では，

$$\overrightarrow{PR}=(4-3s)\frac{(2-2s)\overrightarrow{PQ}+(2-s)\overrightarrow{PS}}{(2-s)+(2-2s)}$$

と変形した．ここで，点 Y を

$$\overrightarrow{PY}=\frac{(2-2s)\overrightarrow{PQ}+(2-s)\overrightarrow{PS}}{(2-s)+(2-2s)}\qquad\cdots⑥$$

で定めると，

$$\overrightarrow{PR}=(4-3s)\overrightarrow{PY}\qquad\cdots⑦$$

となる．⑥より，Y は，線分 QS を $(2-s):(2-2s)\ (0<s<1)$ に内分する点であり，⑦より，Y は線分 PR を $1:(3-3s)$ に内分する点であることがわかる．したがって，Y は QS と PR の交点であるから，

$$X=Y$$

である．このことから，ベクトルの大きさの比 $\dfrac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{XR}|}$ を s を用いて表すことができる．

次のように解答することもできる．

((3)(i)の別解)

2直線 PR，QS が交わるとき，

$$\overrightarrow{PR}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PS}\quad(\alpha,\ \beta\ は実数)$$

と表すことができるから，(2) より，

$$\alpha=2-2s,\ \beta=2-s.$$

したがって，

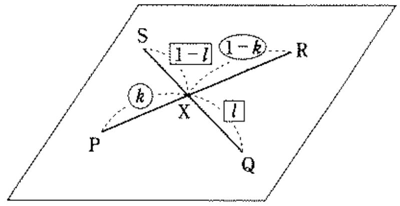
$$\overrightarrow{PR}=(2-2s)\overrightarrow{PQ}+(2-s)\overrightarrow{PS}.$$

PR と QS の交点 X が PR 上にあることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX}&=k\overrightarrow{PR}\ (k は実数)\\&=(2-2s)k\overrightarrow{PQ}+(2-s)k\overrightarrow{PS}.\end{aligned}\qquad\cdots⑧$$

また，X は QS 上にあることから，l を実数として，

$$\overrightarrow{PX}=(1-l)\overrightarrow{PQ}+l\overrightarrow{PS}.\qquad\cdots⑨$$



$$\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{PS}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{PQ}\not\parallel\overrightarrow{PS}$$

であるから，⑧，⑨ より，

$$\begin{cases}(2-2s)k=1-l,\\(2-s)k=l.\end{cases}$$

これより，

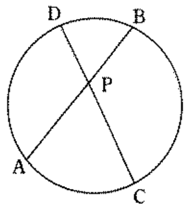
$$k=\frac{1}{4-3s},\quad l=\frac{2-s}{4-3s}.$$

よって，$0<k<1$ に注意して，

$$\begin{aligned}\frac{|\overrightarrow{PX}|}{|\overrightarrow{XR}|}&=\frac{k}{1-k}\\&=\frac{1}{3-3s}.\end{aligned}$$

((3)(i)の別解終り)

(ii)　平面上の異なる4点が同一円周上にあるための条件について，

> 点 P を通る2直線がそれぞれ，円と点 A，B および点 C，D で交わるとき，
> $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ …(*)
> が成り立つ．
>
> 
>
>
> 逆に，2つの線分 AB と CD または線分 AB の延長と CD の延長が点 P で交わるとき (*) が成り立つならば，4点 A，B，C，D は同一円周上にある
>
> **方べきの定理とその逆**

が成り立つので，

$$PX\cdot RX=QX\cdot SX\qquad\cdots⑤$$

を満たす s の値を求めればよい．(i) の結果から，

$$PX=\frac{1}{4-3s}PR,\ RX=\frac{3-3s}{4-3s}PR,$$

$$QX=\frac{2-s}{4-3s}QS,\ SX=\frac{2-2s}{4-3s}QS$$

であるから，これらを ⑤ に代入して，

$$3PR^2=2(2-s)QS^2.$$

ここに (1)，(2) の結果を用いて，s についての方程式

$$18s^3-21s^2-10s+8=0\qquad\cdots(**)$$

を作り，

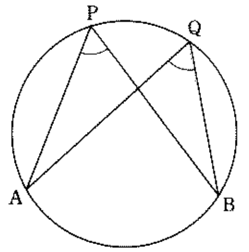
整式 $f(x)$ について，

$f(\alpha)=0 \iff f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる

因数定理

を利用して，(**) の左辺を因数分解すればよい．

なお，P, Q, R, S が同一円周上にあるための条件として，



円周上に異なる4点A，B，P，Qがあり，点Qが直線ABに関してPと同じ側にあるとき，

$$\angle APB=\angle AQB \qquad \cdots(***)$$

が成り立つ．

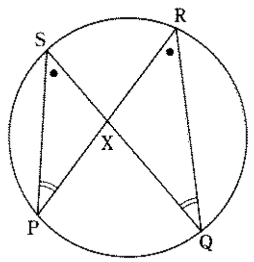
逆に，異なる4点A，B，P，Qについて，QがABに関してPと同じ側にあり，さらに (***) が成り立つとき，4点A，B，P，Qは同一円周上にある

円周角の性質

を用いれば，

$$\triangle PXS \backsim \triangle QXR \qquad \cdots⑩$$

が成り立つ条件を求めてもよい．



⑩ は，

$$\frac{PX}{QX}=\frac{SX}{RX}$$

と同値であり，したがって，

$$PX\cdot RX=QX\cdot SX,$$

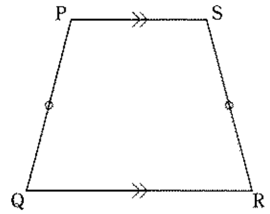
つまり，⑤ を得る．あとは【**解答**】と同じである．

(注) 4点P，Q，R，Sが同一円周上にあるとき，

Rは BC の中点，

Sは OC を 1：2 に内分する点

であるから，四角形PQRSは等脚台形である．



【ⅢB・ⅢC 型受験者用】

$\boxed{1}$ 小問集合

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

（配点　40点）

(1) a, a, a, a, b, b を一列に並べる順列の総数を求めよ．また，a, a, a, a, b, b を円形に並べる円順列の総数を求めよ． (2) $x^2-2xy+2y^2=5$ を満たす正の整数 x, y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ． (3) $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ． (4) 不等式 $(2\cos\theta-1)(2\sin\theta-1)<0$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を解け． (5) $x=\tan\theta$ とおいて，定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ の値を求めよ．

【配点】

(1) 8 点．

(2) 8 点．

(3) 8 点．

(4) 8 点．

(5) 8 点．

【出題のねらい】

(1) 同じものを含む順列の総数を正しく求めることができるか，また対称性に注意して円順列の総数を求めることができるかをみる問題である．

(2) 整数の性質を利用して方程式の解を求めることができるかをみる問題である．

(3) 二項定理を正しく用いることができるかをみる問題である．

(4) 三角関数の不等式を解くことができるかをみる問題である．

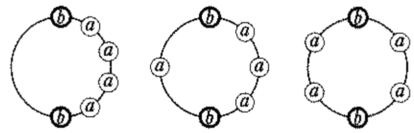
(5) 置換積分を利用して定積分の計算ができるかをみる問題である．

【解答】

(1) 6 個の文字 a, a, a, a, b, b を一列に並べるとき，4 個ある a どうしと，2 個ある b どうしは区別できないことに注意すると，求める順列の総数は，

$$\frac{6!}{4!\,2!}=\mathbf{15}(\text{通り}).$$

次に，b と b の間にある a の個数に注目して，条件を満たす円順列をかき上げると次のようになる．



よって，求める円順列の総数は，

3 通り．

(2) $x^2-2xy+2y^2=5$ より，

$$(x-y)^2+y^2=5. \qquad \cdots①$$

これより，

$$0\leqq y^2\leqq 5.$$

これを満たす正の整数 y は

$$y=1,\ 2$$

しかない．

(ア) $y=1$ のとき，① に代入して，

$$(x-1)^2=4.$$
$$x-1=\pm 2.$$
$$x=-1,\ 3.$$

$x>0$ より，

$$x=3.$$

(イ) $y=2$ のとき，① に代入して，

$$(x-2)^2=1.$$
$$x-2=\pm 1.$$
$$x=1,\ 3.$$

これらは $x>0$ を満たす．

以上まとめて，

$$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)}.$$

(3) 二項定理より，

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(\frac{2}{x}\right)^{6-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k2^{6-k}\cdot x^{3k-6}.$$

定数項が現れるのは $k=2$ のときであり，そのとき定数項は，

$${}_6\mathrm{C}_k\,2^{6-k}={}_6\mathrm{C}_2\,2^4=\mathbf{240}.$$

(4) **ⅡA・ⅡB 型 $\boxed{1}$ (3)【解答】** 参照．

(5)
$$x=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと，

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

これより，

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\, d\theta$$
$$=\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【解説】 問題

(1)　4つある a どうしは互いに区別ができず，2つある b どうしも互いに区別ができない．このようなときにこれらが作る順列の総数を求めるには，

> n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，… であるとき，これら n 個のもの全部を用いて作ることができる順列の総数は，
> $$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}\text{ 通り．}$$
> ただし，
> $$p+q+r+\cdots=n$$
> **同じものを含む順列の総数**

を用いればよい．

また，円順列は回転して一致する順列を同じものと考えるのであるから，まず2つある b を固定し円の回転を止め，4つある a を b と b の間に配置し6文字の順列を考えればよい．

(2)　与えられた関係式を $(x-y)^2+y^2=5$ と変形することができれば，(実数)$^2\geqq0$ により正の整数 y のとり得る値が1, 2しかないことがわかる．

一般に，整数を求める問題では与えられた条件を満たす整数の存在範囲を何らかの方法で限定して，あとは「シラミつぶし」に調べることが有効であることが多い．

本質的には**【解答】**と同じであるが，次のようにして y の範囲を絞り込むこともできる．

((2)の別解)

$x^2-2xy+2y^2=5$ を x について整理して，
$$x^2-2yx+2y^2-5=0.$$
これを x の2次方程式とみて解の公式を用いると，
$$x=y\pm\sqrt{y^2-(2y^2-5)}$$
$$=y\pm\sqrt{5-y^2}. \qquad \cdots②$$

これを満たす整数 x が存在するためには，($\sqrt{}$ 内の実数)$\geqq0$ が成立しなければならないから，
$$5-y^2\geqq0.$$
これを満たす正の整数 y は，
$$y=1,\ 2.$$
このおのおのの y の値を②に代入して x を求めると次の表を得る．

y	1	2
x	1 ± 2	2 ± 1

これより，求める整数の組 $(x,\ y)$ は次のようになる．
$$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2).$$
((2)の別解終り)

(3)　$(a+b)^n$ を展開したときの係数を求めるには，

> $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，
> $$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k} \qquad \cdots(*)$$
> **二項定理**

を用いることが基本である．

本問では，(*)における a，b がそれぞれ x^2，$\frac{2}{x}$ であり，$n=6$ であるから
$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(\frac{2}{x}\right)^{6-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k 2^{6-k}\cdot x^{3k-6}.$$
これより，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ について，
$$x^{3k-6}\text{ の係数が }{}_6\mathrm{C}_k 2^{6-k}$$
であるから，x^{3k-6} が定数になるのは $3k-6=0$ すなわち $k=2$ のときであり，そのときの係数は，
$${}_6\mathrm{C}_2\cdot2^4$$
とわかる．

(4)　**ⅡA・ⅡB型 1 (3)【解説】**参照．

(5)　$\int_a^b \frac{1}{x^2+k^2}dx$ (k は正の定数)の形の定積分を計算するには $x=k\tan\theta$ とおき，

> $x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば，
> $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$
> **置換積分**

を利用すればよい．

本問でも $x=\tan\theta$ とおく方法が有効である．

② 複素数と方程式

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

（配点　40点）

> $f(x)=x^4+x^2+1$ とし，$x^2+x+1=0$ の解の1つを α とする．
>
> (1) α^3 の値を求めよ．また，$f(\alpha)$ の値を求めよ．
>
> (2) $f(x)=0$ のすべての解からなる集合を S とし，
>
> $$M=\{pq \mid p\in S,\ q\in S,\ p\neq q\}$$
>
> とする．M のすべての要素を解にもつ x の方程式のうち，次数が最小であり，かつ最高次の項の係数が1であるものを求めよ．

【配点】

(1)　16 点．

(2)　24 点．

【出題のねらい】

虚数を含む計算を正確に行うことができるか，また高次方程式の解の性質について理解しているかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$x^2+x+1=0 \quad \cdots①$$
とおく．

α は，① の解であるから，
$$\alpha^2+\alpha+1=0 \quad \cdots②$$
を満たす．② の両辺に $\alpha-1$ を掛けると，
$$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0.$$
$$\alpha^3-1=0.$$
よって，
$$\boldsymbol{\alpha^3=1}.$$
これを用いると，
$$\begin{aligned} f(\alpha)&=\alpha^4+\alpha^2+1\\ &=\alpha^3\cdot\alpha+\alpha^2+1\\ &=\alpha+\alpha^2+1\\ &=\boldsymbol{0}. \quad (②\text{より})\end{aligned}$$

(2) ① を解くと，
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$
であるから，
$$z=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$
とおくと，① の解は
$$x=z,\ \overline{z}\ (\overline{z}\text{ は } z \text{ の共役複素数}).$$

(1) の結果は，$\alpha=z$，$\alpha=\overline{z}$ いずれの場合も成り立つから，① の2解はともに $f(x)=0$ の解である．

よって，$f(x)$ は x^2+x+1 で割り切れる．実際に割り算を実行することにより，
$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
と因数分解できる．

したがって，$f(x)=0$ の解は，
$$x^2+x+1=0 \quad \text{および} \quad x^2-x+1=0$$
の解全体である．

$x^2-x+1=0$ を解くと，
$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$
であるから，
$$w=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$$
とおくと，
$$S=\{z,\ \overline{z},\ w,\ \overline{w}\}.$$
ここで，
$$\begin{aligned} z\overline{z}&=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\\ &=\frac{1-3i^2}{4}\\ &=1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} zw&=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\\ &=\frac{-1+3i^2}{4}\\ &=-1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} z\overline{w}&=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\\ &=-\frac{(-1+\sqrt{3}\,i)^2}{4}\\ &=-\frac{1-2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}\\ &=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \overline{z}w&=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\\ &=-\frac{(1+\sqrt{3}\,i)^2}{4}\\ &=-\frac{1+2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}\\ &=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2},\end{aligned}$$

$$\bar{z}\,\bar{w}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$$
$$=\frac{-1+3i^2}{4}$$
$$=-1,$$
$$w\bar{w}=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$$
$$=\frac{1-3i^2}{4}$$
$$=1$$

となるから，

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$$

すなわち，

$$M=\{1,\ -1,\ w,\ \overline{w}\}$$

である．

したがって，M のすべての要素を解にもつ x の方程式のうち，次数が最小であり，かつ最高次の項の係数が 1 であるものは，

$$(x-1)(x+1)(x-w)(x-\overline{w})=0$$

である．

$$(x-1)(x+1)(x-w)(x-\overline{w})$$
$$=(x^2-1)(x^2-x+1)$$
$$=x^4-x^3+x-1$$

より，求める方程式は，

$$\boldsymbol{x^4-x^3+x-1=0.}$$

【解説】 問題

(1)　**【解答】**では，

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

という展開公式を用いて，$\alpha^2+\alpha+1$ と $\alpha-1$ の積を作ることで $\alpha^3=1$ を導いた．

次のように，α^3 の値を求めることもできる．

（α^3 の値を求める別解 1）

α が ① の解であるから，

$$\alpha^2+\alpha+1=0.$$

これより，

$$\alpha^2=-\alpha-1.$$

よって，

$$\alpha^3=\alpha\cdot\alpha^2$$
$$=\alpha(-\alpha-1)$$
$$=-\alpha^2-\alpha$$
$$=(\alpha+1)-\alpha$$
$$=1.$$

（α^3 の値を求める別解 1 終り）

また，このような式変形に気づかなくても直接計算することもできる．

（α^3 の値を求める別解 2）

① を解くと，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

であるから，

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

とするとき，

$$\alpha^3=\frac{(-1+\sqrt{3}\,i)^3}{8}$$
$$=\frac{-1+3\sqrt{3}\,i-3\cdot3i^2+3\sqrt{3}\,i^3}{8}$$
$$=\frac{8}{8}$$
$$=1.$$

また，

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

とすると，

$$\alpha^3=\frac{(-1-\sqrt{3}\,i)^3}{8}$$
$$=\frac{-1-3\sqrt{3}\,i-3\cdot3i^2-3\sqrt{3}\,i^3}{8}$$
$$=\frac{8}{8}$$
$$=1.$$

したがって，① の解 α に対して，

$$\alpha^3=1.$$

（α^3 の値を求める別解 2 終り）

このように直接 α^3 の値を求めるときは ① の 2 つの解それぞれに対して α^3 の値を計算する必要がある．

こうして，$\alpha^3=1$ を得ると，$f(\alpha)$ の値を求めるときに，

$$\alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha=1\cdot\alpha=\alpha$$

のように利用することができる．

(2)　(1) の結果から $f(\alpha)=0$ であるから，α が $f(x)=0$ の解であることがわかる．

① の 2 解のうち，どちらを α としても $f(\alpha)=0$ が成り立つので，① の 2 解はともに $f(x)=0$ の解になっている．

そこで，改めて

$$z=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

とおくと，① の 2 解は z, $\bar{z}$ と表すことができるから，

$$x^2+x+1=(x-z)(x-\overline{z})$$

が成り立つ．

またこのとき，$f(z)=0$, $f(\overline{z})=0$ $(z\neq\overline{z})$ が成り立つから，

> 整式 $P(x)$ が $x-a$ を因数にもつ
> $\Longleftrightarrow$ $P(a)=0$
>
> **因数定理**

を用いると，$f(x)$ は

$$(x-z)(x-\overline{z})$$

すなわち，

$$x^2+x+1$$

を因数にもつことがわかる．

このあと**【解答】**では，実際に $f(x)$ を x^2+x+1 で割ることにより，$f(x)$ を2次式の積に分解した．(1)の結果を利用しなくても，次のように因数分解することもできる．

$$\begin{aligned} f(x)&=x^4+x^2+1\\ &=(x^2+1)^2-x^2\\ &=(x^2+1+x)(x^2+1-x)\\ &=(x^2+x+1)(x^2-x+1). \end{aligned}$$

こうして，

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

が得られれば，2つの2次方程式

$$x^2+x+1=0,\ x^2-x+1=0$$

を解くことにより，方程式 $f(x)=0$ の解がすべて得られる．

①は2つの共役な虚数解をもつが，このことは方程式 $x^2-x+1=0$ についても同様であるから，これら2つの方程式の解を z, $\overline{z}$ および w, $\overline{w}$ とおくことができる．

ここで，4つの複素数 z, $\overline{z}$, w, $\overline{w}$ はすべて異なることを確認して，

$$S=\{z,\ \overline{z},\ w,\ \overline{w}\}$$

とわかる．

この集合から異なる2数を取り出して積を作るとき，取り出し方は，

$${}_4\mathrm{C}_2=6(\text{通り})$$

あるから6つの数が作れる．この6数で作る集合が M となるが，この6つの数の中に同じ数があるかどうか調べる必要がある．**【解答】**ではこれらの積をすべて計算して，

$$M=\{1,\ -1,\ w,\ \overline{w}\}$$

を得ているが，

$$z\overline{z}=1,\ w\overline{w}=1$$

とする部分においては，

> x の2次方程式
> $$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0)$$
> の2つの解が α, β であるとき，
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$
>
> **解と係数の関係**

を用いてもよい．

集合 M の要素がすべてわかれば，条件を満たす方程式を求めることは容易である．

3 数　列

【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】

（配点　40点）

> 数列 $\{a_n\}$ は，
> $$\begin{cases} a_1=1,\\ \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$
> で定められている．
>
> (1)　一般項 a_n を求めよ．
>
> (2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n を求めよ．
>
> (3)　(2)の S_n に対して，不等式
> $$4-S_n\leqq\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}$$
> が6以上のすべての整数 n に対して成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

【配点】

(1)　10点．

(2)　12点．

(3)　18点．

【出題のねらい】

漸化式で定まる数列の一般項を求めること，和の計算，数学的帰納法など，数列の基本事項の理解度をみる問題である．

【解答】

(1)
$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

より，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{1}(=1)$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$\frac{a_n}{n}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

よって，

$$a_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(2)
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

であるから，(1) より，

$$S_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad \cdots①$$

両辺を $\frac{1}{2}$ 倍すると，$n\geqq 2$ のとき，

$$\frac{1}{2}S_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^n. \cdots②$$

①−② より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

よって，

$$S_n=4-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

($n=1$ のときも成り立つ)

(3) (2) より，

$$4-S_n=(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&4-S_n\leqq\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}\\ \iff\ &(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}\\ \iff\ &n+2\leqq(\sqrt{2})^n. \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

したがって，6 以上のすべての整数 n に対して (*) が成り立つことを数学的帰納法で示せばよい．

(Ⅰ) $n=6$ のとき，

((*) の左辺) $=6+2=8$，((*) の右辺) $=(\sqrt{2})^6=8$

より，(*) は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k\ (k\geqq 6)$ のとき，(*) が成り立つと仮定すると，

$$k+2\leqq(\sqrt{2})^k. \quad \cdots③$$

このとき，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^{k+1}-(k+3)&=\sqrt{2}(\sqrt{2})^k-(k+3)\\&\geqq\sqrt{2}(k+2)-(k+3) \quad (③より)\\&=(\sqrt{2}-1)k+2\sqrt{2}-3\\&\geqq(\sqrt{2}-1)\cdot 6+2\sqrt{2}-3\\&\qquad (k\geqq 6 より)\\&=8\sqrt{2}-9\\&=\sqrt{128}-\sqrt{81}\\&\geqq 0\end{aligned}$$

であるから，

$$k+3\leqq(\sqrt{2})^{k+1}.$$

よって，(*) は $n=k+1$ のときも成り立つ．

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)より，6 以上のすべての整数 n に対して (*) は成り立つ．

【解説】 問題

(1) 【解答】では，与えられた漸化式から直接，数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ が，初項 $\frac{a_1}{1}=1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることを読み取り，

> 初項 a，公比 r の等比数列の一般項は，
> $$ar^{n-1}$$
> **等比数列の一般項**

を用いて，一般項 a_n を求めた．

$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ が等比数列になることは，

$$b_n=\frac{a_n}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおいて，与えられた漸化式を，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$$

と書き換えれば直ちにわかる．

(2) (1) より，

$$a_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であり，数列 $\{n\}$ は等差数列，数列 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ は等比数列であるから，

$a_n=$(等差数列の一般項)×(等比数列の一般項)

の形をしている．

このような数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めるには，等比数列の和の公式を導いたときと同様に，S_n-rS_n (r は等比数列の公比，$r\neq 1$) を考えることが基本である．

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\&=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad \cdots①\end{aligned}$$

この両辺に(等比数列の公比である) $\frac{1}{2}$ を掛けて，

$$\frac{1}{2}S_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \cdots②$$

①−② を作ると，

$$S_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$-\Big)\ \frac{1}{2}S_n=\qquad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2}S_n=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\ -n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となり，〰〰の部分は，初項 $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，公比 $\frac{1}{2}$，項数 n の等比数列の和であるから，

> 初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，
>
> $$S_n=\begin{cases} a\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r} & (r\neq1),\\ na & (r=1)\end{cases}$$
>
> **等比数列の和**

を用いると，

$$\frac{1}{2}S_n=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

両辺を 2 倍すると，

$$S_n=4-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となり，S_n を求めることができる．

(3)　(2) より，

$$4-S_n=(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから，示すべき不等式は，

$$(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}$$

となる．

【解答】では，この不等式を，より証明しやすい不等式(*)に変形し，数学的帰納法を用いて解答した．

本問では，6 以上の整数 n に対して(*)が成り立つことを証明するのであるから，数学的帰納法を

> $n\geqq6$ を満たす自然数 n についての命題 $P(n)$ が成り立つことを示すには，次の(Ⅰ)，(Ⅱ)を示せばよい．
>
> (Ⅰ)　$P(6)$ が成り立つ．
>
> (Ⅱ)　$k(\geqq6)$ のとき $P(k)$ が成り立つと仮定すると，$P(k+1)$ も成り立つ．
>
> **数学的帰納法**

の形で用いた．

4　積分法

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

(配点　40点)

> a, b, c を正の定数とする．xy 平面上において，曲線 $C_1: y=ax^2+b$ と曲線 $C_2: y=\log cx$ がともに点 A において直線 $l: y=x$ に接している．
>
> (1)　a, b, c の値をそれぞれ求めよ．
>
> (2)　A を通り x 軸に平行な直線と C_1 で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．
>
> (3)　l, C_1 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とし，l, C_2 および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とする．
>
> V_1 と V_2 の大小を比べよ．ただし，自然対数の底を e とするとき $e=2.718\cdots$ である．

【配点】

(1)　12 点．

(2)　12 点．

(3)　16 点．

【出題のねらい】

2 曲線の共通接線の条件を処理できるか，また，x 軸および y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を定積分を用いて正しく立式し，部分積分法，置換積分法などを用いて計算できるかをみる問題である．

【解答】

(1)　A の x 座標を t とする．

$(ax^2+b)'=2ax$ であるから，C_1 上の点 A$(t,\ at^2+b)$ における接線の方程式は，

$$y=2at(x-t)+at^2+b$$
$$=2atx-at^2+b.$$

これが $l: y=x$ に一致する条件は，

$$\begin{cases}2at=1, & \cdots①\\ -at^2+b=0. & \cdots②\end{cases}$$

また，$(\log cx)'=\frac{1}{x}$ であるから，C_2 上の点 A$(t,\ \log ct)$ における接線の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\log ct$$
$$=\frac{1}{t}x-1+\log ct.$$

これが $l: y=x$ に一致する条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t}=1, & \cdots ③ \\ -1+\log ct=0. & \cdots ④ \end{cases}$$

③より，

$$t=1. \qquad \cdots ⑤$$

①，⑤より，

$$a=\frac{1}{2}. \qquad \cdots ⑥$$

②，⑤，⑥より，

$$b=\frac{1}{2}.$$

④，⑤より，

$$\log c=1.$$

よって，

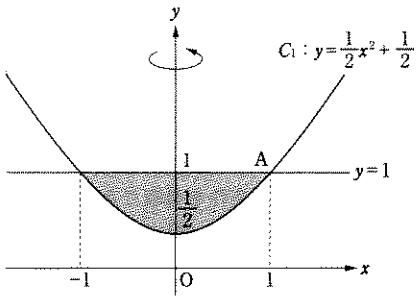
$$c=e.$$

以上より，

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=e.}$$

(2) (1)より，

$$\mathrm{A}(1,\ 1),\quad C_1: y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}.$$



C_1，直線 $y=1$ はともに y 軸に関して対称である．

したがって，上図の網かけ部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めればよい．

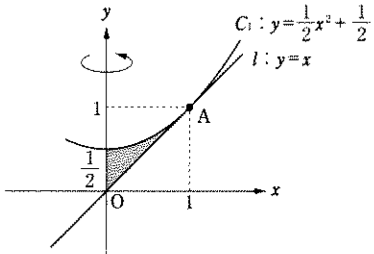
$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ より，

$$x^2=2y-1$$

であるから，

$$\begin{aligned} V&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi x^2 dy \\ &=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(2y-1)\,dy \\ &=\pi\Big[y^2-y\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &=\pi\left\{(1-1)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\} \\ &=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

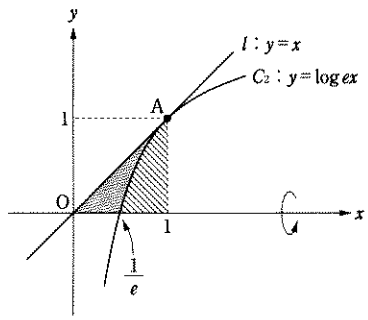
(3)



V_1 は上図の網かけ部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積で，それは，底面の半径が1，高さが1の直円錐から(2)の立体をとり除いた部分の体積であるから，

$$\begin{aligned} V_1&=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot1-V \\ &=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \\ &=\frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

次に，(1)より，$C_2: y=\log ex$ である．



V_2 は上図の網かけ部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積で，それは，底面の半径が1，高さが1の直円錐から，斜線部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体をとり除いた部分の体積であるから，

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot1-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\pi(\log ex)^2dx. \qquad \cdots ⑦$$

ここで，$t=ex$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=e$$

より，

$$dx=\frac{1}{e}dt,$$

x	$\frac{1}{e}$ → 1
t	1 → e

よって，

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}\pi(\log ex)^2dx=\int_1^e\pi(\log t)^2\cdot\frac{1}{e}dt$$
$$=\frac{\pi}{e}\int_1^e(\log t)^2dt$$
$$=\frac{\pi}{e}\int_1^e(t)'(\log t)^2dt$$
$$=\frac{\pi}{e}\left\{\Big[t(\log t)^2\Big]_1^e\right.$$
$$\left.-\int_1^e t\cdot 2(\log t)\cdot\frac{1}{t}dt\right\}$$
$$=\frac{\pi}{e}\left\{e-2\int_1^e\log t\,dt\right\}$$
$$=\frac{\pi}{e}\left\{e-2\Big[t\log t-t\Big]_1^e\right\}$$
$$=\frac{\pi}{e}\Big(e-2\{(e-e)-(0-1)\}\Big)$$
$$=\frac{\pi}{e}(e-2)$$

であるから，⑦ より，

$$V_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{e}(e-2).$$

したがって，

$$V_1-V_2=\frac{\pi}{12}-\left\{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{e}(e-2)\right\}$$
$$=\frac{3e-8}{4e}\pi$$
$$>\frac{3\cdot 2.7-8}{4e}\pi \qquad (e>2.7\text{ より})$$
$$=\frac{0.1}{4e}\pi$$
$$>0$$

となるから，

$$V_1>V_2$$

である．

【解説】 問題

(1) C_1 上の点 A における接線が $l : y=x$ であるから，点 A の x 座標を t として，

> 点$(t,\ f(t))$における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は，
> $$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
> **接線の方程式**

を用いて，A における接線の方程式を求め，それが $l : y=x$ に一致する条件として ①，② を得た．

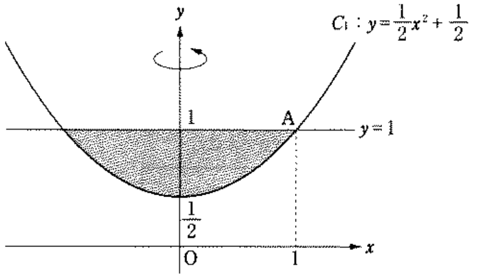
同様に，C_2 上の点 A における接線が $l : y=x$ であることから ③，④ を得た．

あとは ①～④ を連立して解くことで，a，b，c の値を求めればよい．

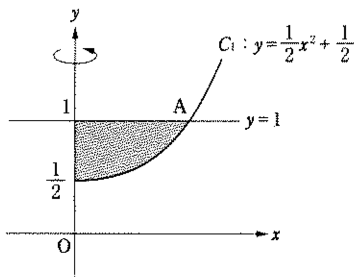
(2) (1) の結果より，

$$\mathrm{A}(1,\ 1),\quad C_1 : y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

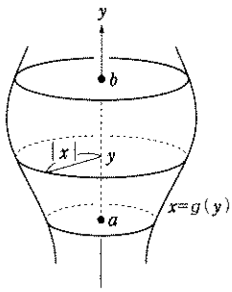
となるから，次図の網かけ部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めればよい．



C_1 および直線 $y=1$ が y 軸に関して対称であることに注意すると，求めるのは，次図の網かけ部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積である．



あとは，

> $a<b$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸，および 2 直線 $y=a$，$y=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，
> $$\int_a^b\pi x^2dy=\int_a^b\pi\{g(y)\}^2dy$$
> 
>
> **y 軸のまわりの回転体の体積**

が成り立つから，

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\iff x^2=2y-1$$

に注意して，**【解答】**のように計算すればよい．

次のように置換積分を用いて計算することもできる．

（V を求める別解）

直線 $y=1$ と C_1 で囲まれた部分は y 軸に関して対称である．

$x\geqq 0$ のとき $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ の両辺を y で微分して，

$$1=x\frac{dx}{dy}$$

より，

$$dy=x\,dx,$$

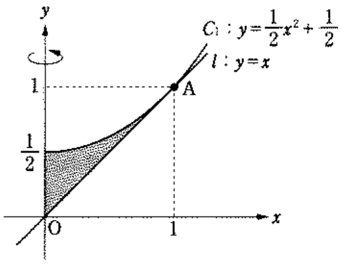
y	$\frac{1}{2}\ \to\ 1$
x	$0\ \to\ 1$

よって，

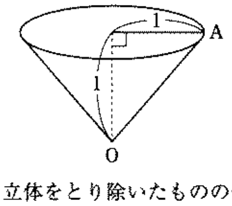
$$\begin{aligned}V&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi x^2dy\\&=\int_0^1\pi x^2\cdot x\,dx\\&=\pi\int_0^1x^3dx\\&=\pi\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1\\&=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（V を求める別解終り）

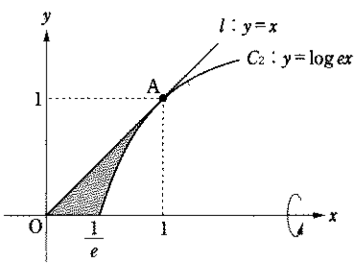
(3)



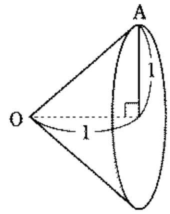
V_1 は上図の網かけ部分を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積であるから，底面の半径が1，高さが1の直円錐



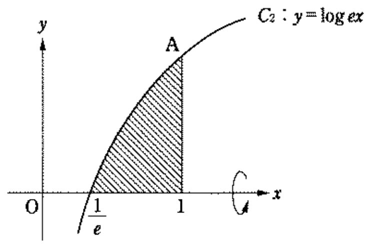
から，(2) の立体をとり除いたものの体積である．



V_2 は前図の網かけ部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積で，それは，底面の半径が1，高さが1の直円錐

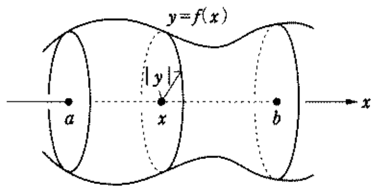


から，下図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体（K とする）をとり除いたものの体積である．



$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は，

$$\int_a^b\pi y^2dx=\int_a^b\pi\{f(x)\}^2dx$$



x 軸のまわりの回転体の体積

が成り立つから，

$$(K\text{ の体積})=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\pi(\log ex)^2dx \qquad \cdots(*)$$

となる．

(*) の計算をするには，

$$\begin{aligned}(\log ex)^2&=(\log e+\log x)^2\\&=(\log x+1)^2\\&=(\log x)^2+2\log x+1\end{aligned}$$

と展開するか，**【解答】**のように，$t=ex$ と置換するなどして，

$$\int\log x\,dx,\ \int(\log x)^2dx \qquad \cdots(**)$$

の計算に帰着させることになる．

(**) の計算には，

$$\int f'(x)g(x)\,dx$$
$$=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx,$$
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$
$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

部分積分法

を用いることが基本である．

$$\log x=1\cdot\log x=(x)'\log x$$

であるから，

$$\int \log x\,dx=\int (x)'\log x\,dx$$
$$=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=x\log x-\int 1\,dx$$
$$=x\log x-x+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

（**【解答】**では，これを公式として用いた）．

同様に，

$$(\log x)^2=(x)'(\log x)^2$$

であることを用いると，

$$\int (\log x)^2dx,\ \int_1^e(\log t)^2dt$$

などを求めることができる．

V_1，V_2 を求めることができれば，V_1 と V_2 の大小を比較するために，V_1-V_2 を計算し，$e>2.7$ に注意して V_1-V_2 の符号を調べればよい．

5　空間ベクトル

【ⅢB・ⅢC 型共通　選択問題】

（配点　40点）

一辺の長さが 1 である正四面体 OABC において，

辺 OA を 1：2 に内分する点を P，
辺 AB の中点を Q，
辺 BC を s：$1-s$ に内分する点を R，
辺 OC を t：$1-t$ に内分する点を S

とする．ただし，$0<s<1$，$0<t<1$ である．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ をそれぞれ s，t，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2$ をそれぞれ s，t を用いて表せ．

(2)　$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PS}}\quad(\alpha,\ \beta\text{ は実数})$$
が成り立っている．このとき，α，β，t をそれぞれ s を用いて表せ．

(3)　直線 PR と直線 QS が交わっているとして，その交点を X とする．

(i)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{XR}}|}$ を s を用いて表せ．

(ii)　4 点 P，Q，R，S が同一円周上にあるとき，s，t の値をそれぞれ求めよ．

【配点】

(1)　10 点．
(2)　10 点．
(3)　20 点．
　(i)　5 点．(ii)　15 点．

【出題のねらい】

ベクトルの基本性質を問うとともに，空間内の 4 点が同一円周上にあるための条件をベクトルを利用して求めることができるかなど，幅広い応用力をみる問題である．

【解答】　ⅡB 型 6 **【解答】**参照．

【解説】　ⅡB 型 6 **【解説】**参照．

問題

6　微積分総合

【ⅢB・ⅢC 型共通　選択問題】

（配点　40点）

n を正の整数として，関数

$$f(x)=\frac{x}{n^2+x^2},$$
$$g(x)=f(x)\sin^2\pi x$$

を考える．

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1\sin^2\pi x\,dx$ の値を求めよ．

(3)　k を $k\geqq n+1$ を満たす整数とする．区間 $k-1\leqq x\leqq k$ において，不等式
$$\frac{k}{2(n^2+k^2)}\leqq\int_{k-1}^k g(x)\,dx\leqq\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}}$$
が成り立つことを示せ．

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n}g(x)\,dx$ を求めよ．

【配点】

(1)　10 点．
(2)　8 点．
(3)　8 点．
(4)　14 点．

【出題のねらい】

関数の増減と極値，定積分の計算など，「微分法·積分法」で学ぶ基本事項が習得できているか，また，定積分の不等式への応用や区分求積法が理解できているかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$f'(x)=\frac{(n^2+x^2)-2x^2}{(n^2+x^2)^2}$$
$$=\frac{-(x+n)(x-n)}{(n^2+x^2)^2}$$

であるから，$f(x)$の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$-n$	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$f(x)$は，$x=\pm n$ のとき極値をとり，

極小値 $f(-n)=-\dfrac{1}{2n}$，極大値 $f(n)=\dfrac{1}{2n}$．

(2)
$$\int_0^1 \sin^2\pi x\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-\cos2\pi x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}.$$

(3) $k\geqq n+1$ のとき，$k-1\geqq n$ であるから，(1) より，区間 $k-1\leqq x\leqq k$ において，$f(x)$は単調に減少する．

よって，
$$f(k)\leqq f(x)\leqq f(k-1).$$

$\sin^2\pi x\geqq 0$ であるから，
$$f(k)\sin^2\pi x\leqq f(x)\sin^2\pi x\leqq f(k-1)\sin^2\pi x,$$

つまり，
$$\frac{k}{n^2+k^2}\sin^2\pi x\leqq g(x)\leqq\frac{k-1}{n^2+(k-1)^2}\sin^2\pi x$$

が成り立つ．

よって，
$$\int_{k-1}^k\frac{k}{n^2+k^2}\sin^2\pi x\,dx\leqq\int_{k-1}^k g(x)\,dx$$
$$\leqq\int_{k-1}^k\frac{k-1}{n^2+(k-1)^2}\sin^2\pi x\,dx.$$
$$\frac{k}{n^2+k^2}\int_{k-1}^k\sin^2\pi x\,dx\leqq\int_{k-1}^k g(x)\,dx$$
$$\leqq\frac{k-1}{n^2+(k-1)^2}\int_{k-1}^k\sin^2\pi x\,dx.\quad\cdots①$$

ここで，$h(x)=\sin^2\pi x$ とおくと，
$$h(x+1)=\sin^2\pi(x+1)=\sin^2\pi x=h(x)$$
であるから，$h(x)$は周期 1 の周期関数．

したがって，
$$\int_{k-1}^k\sin^2\pi x\,dx=\int_0^1\sin^2\pi x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}.\quad((2)より)$$

よって，① より，区間 $k-1\leqq x\leqq k$ において
$$\frac{k}{2(n^2+k^2)}\leqq\int_{k-1}^k g(x)\,dx\leqq\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}}$$
が成り立つ．

(4) $k=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n$ のそれぞれの場合に対する (3) の不等式の辺々の和を考えると，
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{2(n^2+k^2)}\leqq\sum_{k=n+1}^{2n}\int_{k-1}^k g(x)\,dx$$
$$\leqq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}},$$

つまり，
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{2(n^2+k^2)}\leqq\int_n^{2n}g(x)\,dx$$
$$\leqq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}}\quad\cdots②$$

が成り立つ．ここで，$k-n=i$ として，
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{2(n^2+k^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2\{n^2+(n+i)^2\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\dfrac{i}{n}}{2\left\{1+\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2\right\}}$$
$$=\int_0^1\frac{1+x}{2\{1+(1+x)^2\}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}\{1+(1+x)^2\}'}{1+(1+x)^2}dx$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\log|1+(1+x)^2|\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}(\log 5-\log 2)$$
$$=\frac{1}{4}\log\frac{5}{2}.$$

同様に，$k-n-1=i$ として，
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1+\dfrac{i}{n}}{2\left\{1+\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2\right\}}$$
$$=\int_0^1\frac{1+x}{2\{1+(1+x)^2\}}dx$$
$$=\frac{1}{4}\log\frac{5}{2}$$

であるから，不等式 ② の各辺について $n\to\infty$ とすると，
$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n}g(x)\,dx=\frac{1}{4}\log\frac{5}{2}.$$

【解説】 問題

(1) 関数 $f(x)$ の増減および極値を求めるときは，導関数 $f'(x)$ の符号を調べ，増減表を作るとよい．

$f(x)=\dfrac{x}{n^2+x^2}$ の導関数 $f'(x)$ は，

$f(x)$，$g(x)$（ただし，$g(x)\neq 0$）が微分可能であるとき，

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

商の微分法

を用いて計算を行うことで，求めることができる．

(2) $\sin^2\theta$ の不定積分を求めるには，

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ （2倍角の公式）

より，

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

であることを用いればよい．

(3) (1) より，$f(x)$ は区間 $x\geqq n$ において減少関数であるから，区間 $(n\leqq)\,k-1\leqq x\leqq k$ において，

$$f(k)\leqq f(x)\leqq f(k-1)$$

が成り立つ．この不等式と $\sin^2\pi x\geqq 0$ より，$g(x)=f(x)\sin^2\pi x$ に関する不等式

$$\frac{k}{n^2+k^2}\sin^2\pi x\leqq g(x)\leqq\frac{k-1}{n^2+(k-1)^2}\sin^2\pi x \quad \cdots(*)$$

が得られる．あとは，

a，b は $a<b$ を満たす定数，$f(x)$ と $g(x)$ は連続な関数であるとき，

$$f(x)\leqq g(x) \quad (a\leqq x\leqq b)$$

ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx$$

定積分と不等式

を不等式 $(*)$ に用いて，定積分を求めればよい．その際，【解答】では，$\sin^2\pi x$ が周期1の周期関数であることに着目し，

連続関数 $f(x)$ が，周期 p をもつとき，

$$\int_a^{a+p}f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx \quad (a\text{ は実数})$$

周期関数の定積分

を用いて，定積分 $\displaystyle\int_{k-1}^k\sin^2\pi x\,dx$ を求めた．

次のように計算することもできる．

$$\int_{k-1}^k\sin^2\pi x\,dx$$

について，

$$t=x-(k-1)$$

とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=1,$$

x	$k-1\ \to\ k$
t	$0\ \to\ 1$

したがって，

$$\begin{aligned}&\int_{k-1}^k\sin^2\pi x\,dx\\&=\int_0^1\sin^2\{\pi t+(k-1)\pi\}\,dt\\&=\int_0^1\sin^2\pi t\,dt\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4) $$\sum_{k=n+1}^{2n}\int_{k-1}^k g(x)\,dx=\int_n^{n+1}g(x)\,dx+\int_{n+1}^{n+2}g(x)\,dx+\cdots+\int_{2n-1}^{2n}g(x)\,dx=\int_n^{2n}g(x)\,dx$$

であるから，$k=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n$ のそれぞれの場合について (3) の不等式を用いると，定積分 $\displaystyle\int_n^{2n}g(x)\,dx$ に関する不等式

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{2(n^2+k^2)}\leqq\int_n^{2n}g(x)\,dx\leqq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}} \quad \cdots②$$

が得られる．不等式②の最左辺の項について，$k-n=i$ とすると，

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{2(n^2+k^2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2\{n^2+(n+i)^2\}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{2\left\{1+\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\right\}}. \quad \cdots(\#)$$

また，②の最右辺の項について，$k-n-1=i$ とすると，

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-1}{2\{n^2+(k-1)^2\}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n+i}{2\{n^2+(n+i)^2\}}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1+\frac{i}{n}}{2\left\{1+\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\right\}}. \quad \cdots(\#\#)$$

関数 $f(x)$ が区間 $a\leqq x\leqq b$（a，b は $a<b$ を満たす定数）で連続な関数であるとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx \quad \cdots(**)$$

区分求積法と定積分

を $a=0,\ b=1,\ f(x)=\dfrac{1+x}{2\{1+(1+x)^2\}}$ として用い，定積分を求めることで，$n\to\infty$ のときの(#)，(##)の極限値がそれぞれ得られる．

$n\to\infty$ のときの(#)，(##)の極限値は，ともに

$$\frac{1}{4}\log\frac{5}{2}$$

であるから，

> 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ に対して十分大きな自然数 n をとれば，つねに不等式
> $a_n\leqq c_n\leqq b_n$ が成立していて，
> $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha \quad (\alpha \text{ は有限確定値})$$
> であるとき，
> $$\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$$
> **不等式と極限(はさみうちの原理)**

を用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n}g(x)\,dx$ を求めた．

なお，(**) において

$$a=1,\ b=2,\ f(x)=\frac{x}{2(1+x^2)}$$

とおけば，(#)，(##)の極限を次のように求めることができる．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\dfrac{i}{n}}{2\left\{1+\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2\right\}}=\int_1^2\frac{x}{2(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\log(1+x^2)\Big]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}\log\frac{5}{2}.$$

同様に，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1+\dfrac{i}{n}}{2\left\{1+\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^2\right\}}=\int_1^2\frac{x}{2(1+x^2)}dx.$$

7　2次曲線

【ⅢC型　選択問題】

（配点　40点）

> θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている．
>
> xy 平面上において，
>
> $$\text{双曲線 } H：x^2-\frac{y^2}{\tan^2\theta}=1$$
>
> の焦点のうち x 座標が正のものを F，漸近線のうち傾きが正のものを l，F を通り l と垂直な直線と l の交点を P とする．
>
> (1)　F の座標，l の方程式をそれぞれ θ を用いて表せ．
>
> (2)　P の座標を θ を用いて表せ．
>
> (3)　放物線 $C：y=ax^2+b$（$a,\ b$ は実数）が点 P において直線 l と接している．C の焦点を F′ とする．
>
> 　(i)　F′ の座標を θ を用いて表せ．
>
> 　(ii)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，線分 FF′(両端を除く)の通過する範囲を xy 平面上に図示せよ．

【配点】

(1)　8点．

(2)　8点．

(3)　24点．

　(i)　10点．(ii)　14点．

【出題のねらい】

2次曲線の焦点や漸近線，接線などの公式を使いこなせるかを確認するための問題である．

【解答】

(1)　F の座標は，

$$(\sqrt{1+\tan^2\theta},\ 0)=\left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}},\ 0\right)$$

$$=\left(\boldsymbol{\frac{1}{\cos\theta},\ 0}\right).$$

また，H の漸近線は，

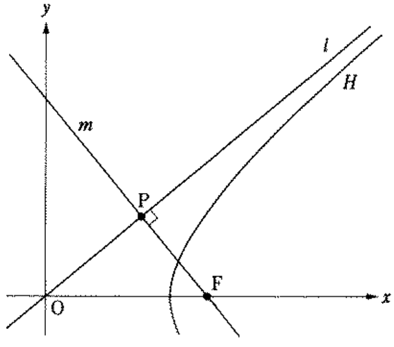
$$y=(\pm\tan\theta)x.$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，l の方程式は，

$$l：\boldsymbol{y=x\tan\theta}.$$

(2)　F を通り l と垂直な直線を m とすると，

$$m：y=-\frac{1}{\tan\theta}\left(x-\frac{1}{\cos\theta}\right).$$



l と m の交点 P の x 座標は，

$$x\tan\theta=-\frac{1}{\tan\theta}\left(x-\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

を解いて，

$$x=\frac{1}{\cos\theta(1+\tan^2\theta)}=\cos\theta.$$

よって，

$$\mathbf{P(\cos\theta,\ \sin\theta).}$$

(3)(i)　C が P において l と接しているので，

$$ax^2+b=x\tan\theta,$$

すなわち，

$$ax^2-x\tan\theta+b=0$$

は $x=\cos\theta$ を重解にもつ．

解と係数の関係より，

$$2\cos\theta=\frac{\tan\theta}{a},\quad \cos^2\theta=\frac{b}{a}.$$

よって，

$$a=\frac{\tan\theta}{2\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta},$$

$$b=a\cos^2\theta=\frac{\sin\theta}{2}.$$

これより，

$$C: y=ax^2+b\quad \text{すなわち}\quad x^2=4\cdot\frac{1}{4a}(y-b)$$

の焦点 F′ の座標 は，

$$\left(0,\ \frac{1}{4a}+b\right)=\left(0,\ \frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\left(0,\ \frac{1}{2\sin\theta}\right)}.$$

(ii)　線分 FF′ の方程式は，

$$\begin{cases} x\cos\theta+2y\sin\theta=1, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$$

θ が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，FF′が通過する範囲を K とすると，$(x,\ y)$ が K に含まれるための条件は，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=1\quad (x>0,\ y>0)\qquad \cdots(*)$$

を満たす $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ が存在することである．

$$\cos\alpha=\frac{2y}{\sqrt{x^2+4y^2}},\quad \sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

を満たす $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在する．

この α を用いると，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=1.$$

$$\sqrt{x^2+4y^2}\sin(\theta+\alpha)=1.$$

$$\sin(\theta+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}.$$

θ が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，

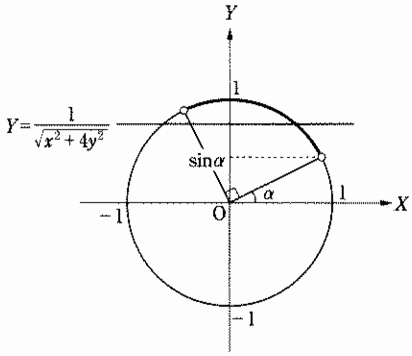
$\sin(\theta+\alpha)$ のとり得る値の範囲は，

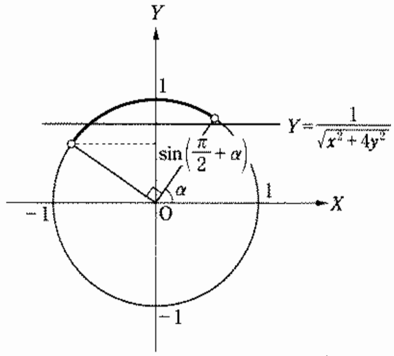
$$\sin\alpha<\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$$

または

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)<\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$$

である．





よって，(*) を満たす $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ が存在する条件は，

「$x>0,\quad y>0$」 かつ 「$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}\leqq 1$」

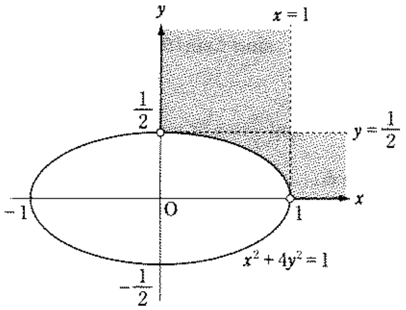
かつ

「$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}>\frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ または $\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}>\frac{2y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$」，

すなわち，

$$\begin{cases} x>0,\quad y>0, \\ x^2+4y^2\geqq 1, \\ x<1\quad \text{または}\quad y<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

以上より，K は次の網かけ部分である．



境界は楕円の第1象限の部分のみを含む．

【解説】 問題

(1) 双曲線の焦点と漸近線について確認しよう．

> 双曲線 $H : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$，$b$ は正の定数）
> について，
> 焦点　$(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，
> 漸近線　$y=\pm\frac{b}{a}x$．
>
> **双曲線の焦点・漸近線**

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であり，F の x 座標は正，l の傾きは正であるから，

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{\cos\theta},\ 0\right),\quad l : y=x\tan\theta$$

となる．

(2) 2直線が垂直となる条件を確認しよう．

> 傾きが p と q である2直線が垂直となるのは，
> $$pq=-1 \quad \text{すなわち} \quad q=-\frac{1}{p}$$
> が成り立つときである．
>
> **2直線の垂直条件**

したがって，傾きが $\tan\theta(\neq 0)$ である直線 l と垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{\tan\theta}$ となるので，F を通り l と垂直な直線 m の方程式は，

$$m : y=-\frac{1}{\tan\theta}\left(x-\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

となる．

P は l と m の交点であるから，l と m の方程式を連立して解けばよい．

(3)(i) C の焦点 F′ の座標を θ を用いて表すために，まず a と b を θ を用いて表そう．

【解答】では，C が P において l と接しているので，

$$ax^2+b=x\tan\theta,$$

すなわち，

$$ax^2-x\tan\theta+b=0$$

が $x=\cos\theta$ を重解にもつことから，a と b を θ を用いて表した．

微分法を用いて P における C の接線の傾きを求め，それが l の傾きと一致することから a と b を θ を用いて表してもよい．

(a, b を θ を用いて表す別解)

$C : y=ax^2+b$ が $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通ることから，

$$\sin\theta=a\cos^2\theta+b. \qquad \cdots①$$

また，

$$(ax^2+b)'=2ax$$

より，P における C の接線の傾きは，

$$2a\cos\theta.$$

これが l の傾きと一致することから，

$$2a\cos\theta=\tan\theta.$$

よって，

$$a=\frac{\tan\theta}{2\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}.$$

これを ① に代入して，

$$b=\sin\theta-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$
$$=\frac{\sin\theta}{2}.$$

(a, b を θ を用いて表す別解終り)

放物線の焦点と準線の公式を確認しよう．

> 放物線 $x^2=4py$　(p は0でない定数)
> について，
> 焦点　$(0,\ p)$，
> 準線　$y=-p$．
>
> **放物線の焦点と準線**

よって，放物線 $C_1 : y=ax^2$ すなわち，

$x^2=4\cdot\frac{1}{4a}y$ の焦点 F_1 は，

$$\mathrm{F}_1\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$$

となるが，C は C_1 を y 軸方向に b だけ平行移動したものであるから，C の焦点 F′ は F_1 を y 軸方向に b だけ平行移動し，

$$\mathrm{F}'\left(0,\ \frac{1}{4a}+b\right)$$

となる．

あとは，

$$a=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta},\quad b=\frac{\sin\theta}{2}$$

を代入すればよい．

(ii) $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$, $\mathrm{F}'\left(0,\ \dfrac{1}{2\sin\theta}\right)$であるから，直線FF′の方程式は，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=1.$$

したがって，線分FF′の方程式は，

$x\cos\theta+2y\sin\theta=1$ かつ $x>0$ かつ $y>0$　…㊛

とわかる．

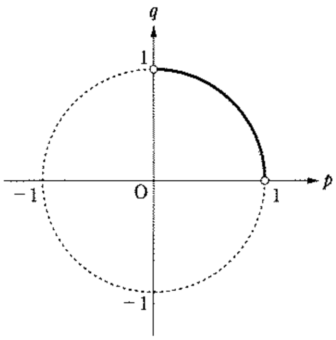
このとき，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ を1つ定めるごとにFF′が定まり，これが求める通過する範囲に含まれる．

したがって，**【解答】**では㊛を θ の方程式とみて，㊛が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をもつような x, y の条件を求めた．

また，

$$p=\cos\theta,\quad q=\sin\theta$$

とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，点 $(p,\ q)$ は pq 平面において次の四分円をえがく．



このことに注意すれば，次のような解答も考えられる．

((3)(ii)の別解1)

(*)を導くまでは**【解答】**と同じ．

ここで，

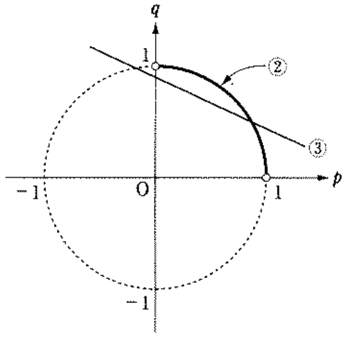
$$p=\cos\theta,\quad q=\sin\theta\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと，

(*)を満たす $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在する

$\iff$ $\begin{cases} p^2+q^2=1 \text{ かつ } p>0 \text{ かつ } q>0, & \cdots② \\ xp+2yq=1 \text{ かつ } x>0 \text{ かつ } y>0 & \cdots③ \\ \text{を同時に満たす実数 } p,\ q \text{ が存在する} \end{cases}$

$\iff$ 「pq 平面上において，四分円②と直線③が共有点をもつ」



$f(p,\ q)=xp+2yq-1$ とおくと，求める条件は，

「$x>0,\quad y>0$」 かつ 「$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}\leqq 1$」

かつ

「$f(1,\ 0)<0$　または　$f(0,\ 1)<0$」

となるので，

$$\begin{cases} x>0,\quad y>0, \\ x^2+4y^2\geqq 1, \\ x<1 \quad \text{または} \quad y<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

となる．

(図示は省略)

((3)(ii)の別解1終り)

さらに，

> 楕円 E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, b は正の定数)上の点は，
>
> $$(x,\ y)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$$
>
> とパラメータ表示できる
>
> **楕円のパラメータ表示**

および，

> 楕円 E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における E の接線の方程式は，
>
> $$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$
>
> である
>
> **楕円の接線**

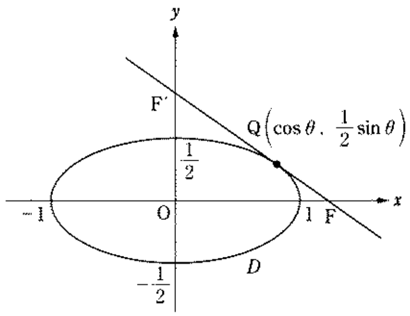
を用いれば，楕円 E : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ における E の接線の方程式は，

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

となるので，直線FF′は楕円 D : $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$,

すなわち $x^2+4y^2=1$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ に

おける D の接線とわかる．



これより，(3)(ii) は次のように解答することもできる．

((3)(ii) の別解 2)

線分 FF′ は

$x\cos\theta+2y\sin\theta=1$ かつ $x>0$ かつ $y>0$

となる．

$$\text{楕円 } D : x^2+4y^2=1$$

上の点 $\mathrm{Q}\left(\cos\theta,\ \dfrac{\sin\theta}{2}\right)$ における D の接線 n の方程式は，

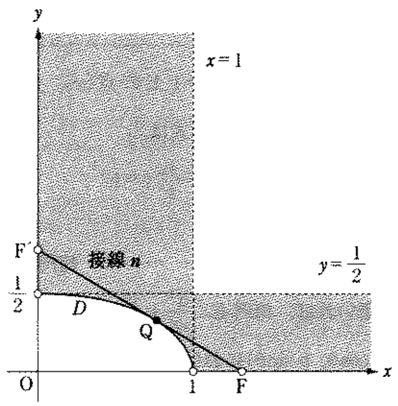
$$x\cos\theta+4\cdot\frac{\sin\theta}{2}y=1,$$

すなわち，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=1$$

となるから，線分 FF′ は，n の「$x>0$ かつ $y>0$」の部分である．

θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，線分 FF′ の通過する範囲は次図の網かけ部分である．ただし，境界は楕円 D の第 1 象限の部分のみを含む．



((3)(ii) の別解 2 終り)

さらに，次のような解法も考えられる．

((3)(ii) の別解 3)

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\sin\theta<1$，$0<\cos\theta<1$ であるから，線分 FF′ の方程式は，

$$y=\frac{1-x\cos\theta}{2\sin\theta}\ \left(0<x<\frac{1}{\cos\theta}\right).$$

この右辺を θ の関数とみて，

$$f(\theta)=\frac{1-x\cos\theta}{2\sin\theta}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{かつ}\ \cos\theta<\frac{1}{x}\right)$$

とおくと，

$$f'(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sin^2\theta-(1-x\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{x-\cos\theta}{2\sin^2\theta}.$$

(ｱ) $0<x<1$ のとき，

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{かつ}\ \cos\theta<\frac{1}{x}$$

を満たす θ の範囲は，

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

このとき，$\cos\alpha=x\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす α がただ 1 つ存在する．この α を用いると $f(\theta)$ の増減は次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

ここで，

$$f(\alpha)=\frac{1-x\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{1-x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

であり，

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=+\infty,\quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}f(\theta)=\frac{1}{2}.$$

よって，$f(\theta)$ の値域は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\leqq f(\theta).$$

(ｲ) $x\geqq1$ のとき，$\cos\beta=\dfrac{1}{x}\left(0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす β がただ 1 つ存在する．この β を用いると，

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \text{かつ}\ \cos\theta<\frac{1}{x}$$

を満たす θ の範囲は，

$$\beta<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

また，このとき，

$$f'(\theta)=\frac{x-\cos\theta}{2\sin^2\theta}>0$$

より，$f(\theta)$は単調に増加する．

したがって，$f(\theta)$の増減は次のようになる．

θ	(β)	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	
$f(\theta)$		↗	

ここで，

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta)=\frac{1}{2}.$$

また，$x=1$のとき$\beta=0$となり，

$$f(\theta)=\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

より，

$$\lim_{\theta\to\beta+0} f(\theta)=0.$$

$x>1$のとき$0<\beta<\frac{\pi}{2}$となり，

$$\lim_{\theta\to\beta+0} f(\theta)=0.$$

よって，$f(\theta)$の値域は，

$$0<f(\theta)<\frac{1}{2}.$$

以上より，線分FF′が通過する範囲は，

$$\begin{cases} 0<x<1 \text{ のとき } & \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\leqq y, \\ x\geqq 1 \text{ のとき } & 0<y<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

（図示は省略）

（(3)(ii)の別解３終り）

【理　　科】

物　　理

1 【共通問題】薄膜による光の干渉

【解答】

問1	(1) $L=2d\tan\theta$	(2) a：ア	b：イ	(3) $L=m\lambda$
問2	$\dfrac{\lambda}{2\tan\theta}$			
問3	(1) $w=\dfrac{\lambda D}{2h}$	(2) $\dfrac{\lambda}{n}$	(3) $w'=\dfrac{w}{n}$	(4) $l=D$
問4	(1) ア	(2) $\dfrac{xz}{h-z}$		

【配点】（33点）

問1　(1)　3点　　(2)　各2点×2　　(3)　2点

問2　4点

問3　(1)　4点　　(2)　2点　　(3)　3点　　(4)　4点

問4　(1)　3点　　(2)　4点

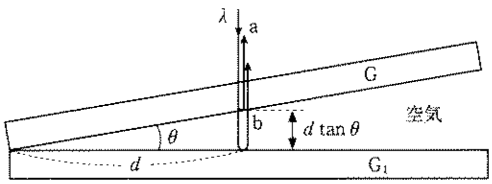
【出題のねらい】

くさび形薄膜による光の干渉について基本および標準的な問題で理解度を試し，さらに干渉縞の移動に関する応用問題で実力をはかる。

【解説】　問題

問1 (1)　次図より，光bがGG_1間を往復することから，光a，bの経路差Lは，

$$L=d\tan\theta\times 2=\underline{2d\tan\theta} \quad \cdots\cdots ①$$



(2)　a：屈折率の大きいガラス板Gから屈折率の小さい媒質(空気)に入射し，その境界で反射されるので自由端反射である。$\underline{(ア)}$

b：光が屈折率の小さい媒質(空気)から屈折率の大きいガラス板G_1に入射し，その境界で反射されるので固定端反射である。$\underline{(イ)}$

(3)　自由端反射では位相がずれないが，固定端反射では位相がπ〔rad〕(半波長分)ずれるので，暗線となる条件は，

$$L=\underline{m\lambda} \quad \cdots\cdots ②$$

【ポイント】

光の反射による位相の変化

自由端反射：光が屈折率の大きい媒質から屈折率の小さい媒質に入射し，その境界で反射されるときの反射で，光の位相はずれない。

固定端反射：光が屈折率の小さい媒質から屈折率の大きい媒質に入射し，その境界で反射されるときの反射で，光の位相はπ〔rad〕(半波長分)ずれる。

問 2　①，② 式より，暗線となる条件は，

$$L=2d\tan\theta=m\lambda \qquad \therefore\ d=\frac{m\lambda}{2\tan\theta}(=d_m)$$

したがって，隣り合う暗線の間隔 w は，

$$w=d_{m+1}-d_m=\underline{\frac{\lambda}{2\tan\theta}} \qquad \cdots\cdots ③$$

問 3 (1)　下図より，AO 間のくさび形の部分に着目すると，$\tan\theta=\dfrac{h}{D}$ となっているので，③ 式より，

$$\text{暗線の間隔}\quad w=\frac{\lambda}{2\tan\theta}=\underline{\frac{\lambda D}{2h}} \qquad \cdots\cdots ④$$

(2)　**屈折率** n の媒質中での光の波長 λ' は，$\lambda'=\underline{\dfrac{\lambda}{n}}$

(3)　④ 式において，波長を $\lambda\to\lambda'$ に置き換えればよい。

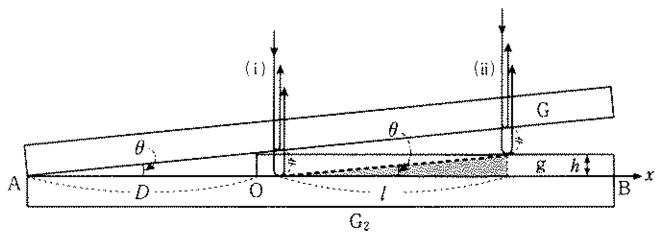
したがって，隣り合う暗線の間隔 w' は，

$$w'=\frac{\lambda' D}{2h}=\frac{\lambda D}{2nh}=\underline{\frac{w}{n}}$$

(4)　暗線の移動は同じ経路差の点の動きである。

反射 (i) による経路差と反射 (ii) による経路差が等しいので，次図のように，G に平行に補助線（太い破線）を描き，灰色の直角三角形に着目すれば，

$$l=\frac{h}{\tan\theta}=\underline{D}$$



問 4　次ページの図のように，ガラス板 G と G_2 のなす角が θ から $\phi(<\theta)$ になったとする。

(1)　暗線の移動は同じ経路差 $2x\tan\theta$ の点の動きであるので，次図のように，補助線を描くと，$+x$ 方向に距離 r だけ移動することが分かる。したがって，(ア) $+x$ 方向に移動する。

(2)　上図および，次ページの図において，

$$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{h}{D}\\[2mm]\tan\phi=\dfrac{h-z}{D}\end{cases}$$

ここで，次ページの灰色の直角三角形に着目して，

$$(x+r)\tan\phi=x\tan\theta$$

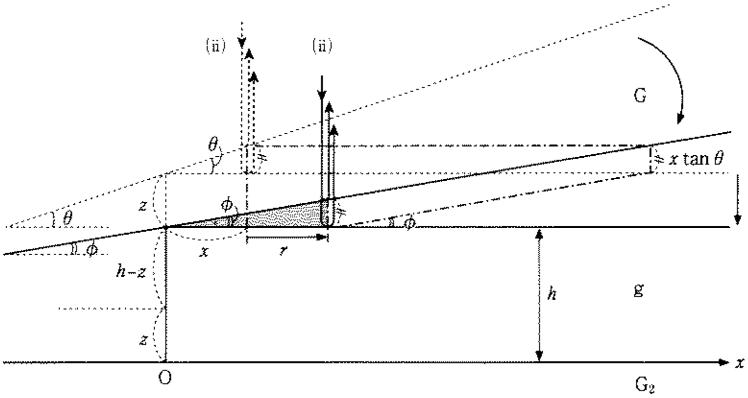
$$\therefore\quad r=\frac{x\tan\theta}{\tan\phi}-x=x\left(\frac{h}{h-z}-1\right)=\underline{\frac{xz}{h-z}}$$

屈折率（絶対屈折率）

真空中での光速を c，波長を λ とすると，（絶対）屈折率 n の媒質中での光速 c' と波長 λ' は，

$$\begin{cases}c'=\dfrac{c}{n}\\[2mm]\lambda'=\dfrac{\lambda}{n}\end{cases}$$

“空気の屈折率を 1 とする” ことは，空気を真空とみなしてよいことを表している。


(ii)
(ii)
G
θ
x tan θ
z
θ
z
φ
φ
φ
x
r
h−z
h
g
z
O
x
G₂

2 【I・II選択者用問題】万有引力

【解答】

問1	(1) $\dfrac{GMm}{r^2}$	(2) $\dfrac{v^2}{r}$	(3) $v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$
	(4) $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$	(5) $E_0=-\dfrac{GMm}{2r}$	
問2	$v_0=\sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$		
問3	(1) $v_B=\dfrac{v_A}{a}$	(2) $v_A=\sqrt{\dfrac{2a}{1+a}\cdot\dfrac{GM}{r}}$	(3) $\dfrac{T_0}{2}\left(\dfrac{1+a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$
問4	(式・説明) 運動量保存則より， $mv_A-m'V=(m+m')u \quad \therefore \quad u=\dfrac{mv_A-m'V}{m+m'}$ 近地点で地球をかすめるとき，u は最小値 u_0 をとる。 これは，問3(2)で，$a=\dfrac{R}{r}$ のときであるから， $u_0=\sqrt{\dfrac{2a}{1+a}\cdot\dfrac{GM}{r}}=\sqrt{\dfrac{2R}{R+r}\cdot\dfrac{GM}{r}}$		
	答 $u=\dfrac{mv_A-m'V}{m+m'}$	答 $u_0=\sqrt{\dfrac{2GMR}{r(R+r)}}$	

【配点】 (34点)

問1 (1) 2点　(2) 2点　(3) 3点　(4) 3点　(5) 3点

問2 4点

問3 (1) 3点　(2) 4点　(3) 3点

問4 7点

【出題のねらい】

万有引力による等速円運動と楕円運動について，基本の理解と応用力の習熟度をはかる。

【解説】

問題

問1 (1) **万有引力**の大きさ F_0 は，

$$F_0=\frac{GMm}{r^2}$$

(2) **向心加速度**の大きさ a_0 は，

$$a_0=\frac{v^2}{r}$$

(3) 人工衛星Sがおこなう等速円運動の半径方向の運動方程式は，

$$ma_0=F_0$$

ここで，(1)，(2)の結果を用いると，

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \cdots\cdots ①$$

【ポイント】

万有引力の法則

2つの物体が互いに及ぼし合う万有引力の大きさ F は，2つの物体の質量 m_1，m_2 の積に比例し，2つの物体間の距離 r の2乗に反比例する。

$F=\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ （G は万有引力定数）

〈別解〉

遠心力を考慮して，力のつり合い(遠心力)＝(万有引力)より，

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2} \qquad \therefore \quad \underline{v=\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

(4)　等速円運動であるから，① 式を用いて，周期 T_0 は，

$$T_0=\frac{2\pi r}{v}=\underline{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

(5)　S の力学的エネルギー E_0 は，

$$E_0=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

ここで，① 式を用いて，

$$E_0=\frac{GMm}{2r}-\frac{GMm}{r}=\underline{-\frac{GMm}{2r}}$$

問 2　人工衛星 S の速さが最小値 v_0 のとき，無限の遠方での S の速さは 0 となる。**力学的エネルギー保存則**より，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+0=0$$

$$\therefore \quad \underline{v_0=\sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

問 3 (1)　**ケプラーの第 2 法則**(面積速度一定の法則)より，

$$\frac{1}{2}r\cdot v_A=\frac{1}{2}ar\cdot v_B$$

$$\therefore \quad v_B=\underline{\frac{v_A}{a}} \qquad \cdots\cdots ②$$

(2)　点 A と点 B に対して，力学的エネルギー保存則を用いる。

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{GMm}{ar} \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③ 式より，v_B を消去して，整理すると，

$$v_A{}^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{2GM}{r}\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

ここで，点 B は遠地点だから，$a\neq 1$ より，

$$v_A{}^2\left(1+\frac{1}{a}\right)=\frac{2GM}{r}$$

$$\therefore \quad v_A=\underline{\sqrt{\frac{2a}{1+a}\cdot\frac{GM}{r}}} \qquad \cdots\cdots ④$$

(3)　楕円軌道の周期を T とすると，**ケプラーの第 3 法則**より，

$$T^2=k\left(\frac{r+ar}{2}\right)^3=k\left(\frac{1+a}{2}r\right)^3$$

ここで，**問 1** (4) より，

$$T_0{}^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=kr^3$$

2 式より，

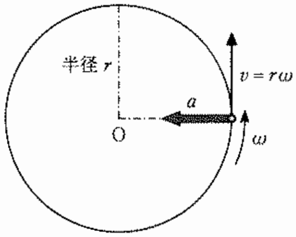
$$T=T_0\left(\frac{1+a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

S が点 A から点 B まで移動するのに要する時間 T_{AB} は半周期であるから，

向心加速度

半径 r の円周上を一定の速さ v (角速度 ω) で物体が等速円運動をしているとき，加速度(向心加速度)は常に円運動の中心方向を向き，その大きさ a は，

$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$



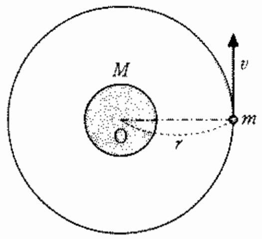
万有引力による円運動

運動方程式　$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}$

周期　$T=\frac{2\pi r}{v}$

力学的エネルギー

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

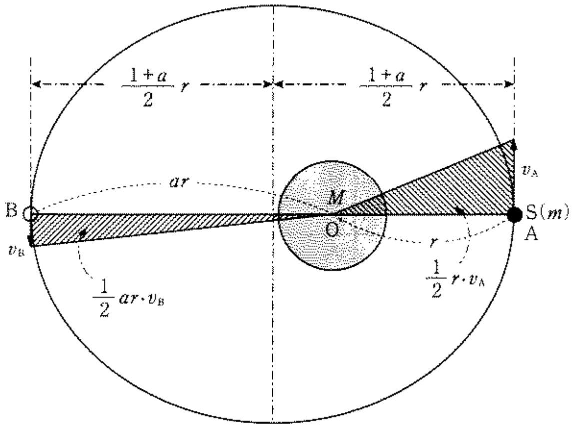


遠心力

物体とともに円運動をしている観測者(回転座標系)にとって現れる半径方向の慣性力を遠心力といい，その向きは常に円の中心から遠ざかる方向に向く。半径 r の円周上を速さ v で質量 m の物体が回っているとき，

遠心力 $=m\frac{v^2}{r}$

$$T_{AB}=\frac{T}{2}=\frac{T_0}{2}\left(\frac{1+a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$



問 4　人工衛星 S と物体 Q の**運動量保存則**より，

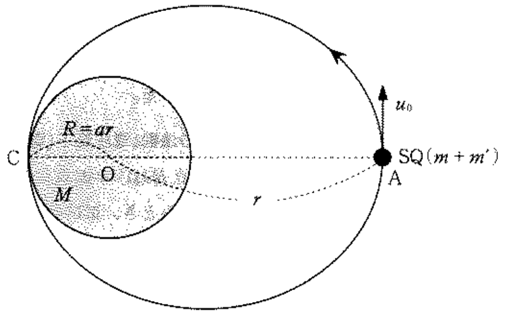
$$mv_A-m'V=(m+m')u$$

$$\therefore\quad u=\frac{mv_A-m'V}{m+m'}$$

u が最小値 u_0 をとるとき，点 A が遠地点で，地球に対し点 A と反対側の地表の点 C が近地点となる楕円軌道になる。これは，④式で，$ar=R$ つまり $a=\frac{R}{r}$ のときに対応するので，

$$u_0=v_A=\sqrt{\frac{2a}{1+a}\cdot\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{2(R/r)}{1+(R/r)}\cdot\frac{GM}{r}}$$

$$=\sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}}$$



力学的エネルギー保存則

物体のもつ運動エネルギーと位置エネルギーの和を力学的エネルギーといい，保存力だけを受けて運動している物体の力学的エネルギーは一定に保たれる。

(運動エネルギー)＋(位置エネルギー)＝一定

保存力以外の力がはたらいていても，それらの力が仕事をしなければ力学的エネルギーは一定に保たれる。

楕円軌道

天体(質量 M)を焦点 F として，その周りを質量 m の物体が楕円軌道を描いて回るとき，次の関係式が成立する。

面積速度一定の法則(ケプラーの第 2 法則)

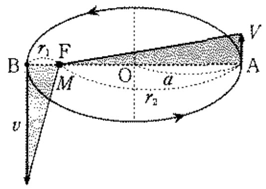
$$\frac{1}{2}r_1v=\frac{1}{2}r_2V$$

力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r_1}=\frac{1}{2}mV^2-\frac{GMm}{r_2}$$

ケプラーの第 3 法則

$$T^2=ka^3\left(\text{半長軸 } a=\frac{r_1+r_2}{2}\right)$$



運動量保存則

物体系において，外力がはたらいていない方向(内力だけがはたらいている方向)での系全体の運動量の和は一定に保たれる。

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v_i}=\text{一定}$$

3 【I・II選択者用問題】過渡現象

【解答】

問1	(1) $\dfrac{E}{R}$〔A〕		(2) CE〔C〕	
	(3) $\mathrm{R_1}$: $\dfrac{E}{R}$〔A〕	$\mathrm{R_2}$: 0〔A〕	(4) $\dfrac{E}{2R}$〔A〕	$\dfrac{1}{2}CE$〔C〕
問2	(1) $\dfrac{E}{2R}$〔A〕	(2) $\mathrm{R_1}$: $\dfrac{E}{R}$〔A〕	$\mathrm{R_2}$: 0〔A〕	(3) E〔V〕
問3	(ア) $\dfrac{E}{R}$〔A〕	(イ) $\dfrac{E}{R}$〔A〕	(ウ) 0〔C〕	(エ) 1
	(オ) 1	(カ) 2	(キ) CLh〔C〕	(ク) 2

【配点】 (33点)

問1 (1) 2点　(2) 2点　(3) 各2点×2　(4) 各2点×2

問2 (1) 2点　(2) 2点×2　(3) 2点

問3 (ア) 2点　(イ) 2点　(ウ) 2点　(エ) 1点　(オ) 1点　(カ) 1点　(キ) 3点
(ク) 1点

【出題のねらい】

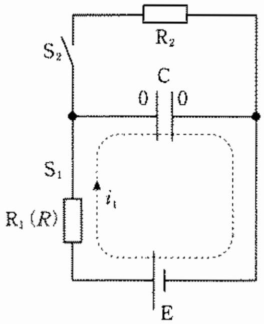
コンデンサーとコイルの入った直流回路における過渡現象について，基本から応用までの幅広い実力をはかる。

【解説】

問題

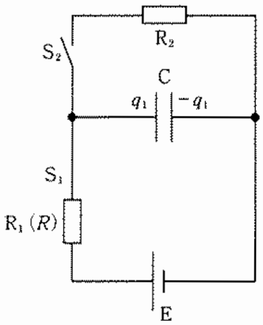
問1 (1) $\mathrm{S_1}$を閉じた直後は，コンデンサーCには電荷が蓄えられていないので，Cにかかる電圧は0である。したがって，抵抗$\mathrm{R_1}$を流れる電流の大きさi_1は，**オームの法則**より，

$$i_1=\underline{\frac{E}{R}}\text{〔A〕}$$



(2) 十分に時間がたって定常状態になると，電流は流れなくなるので，抵抗$\mathrm{R_1}$での電圧降下が0になり，Cには電圧E〔V〕がかかる。したがって，Cに蓄えられる電気量q_1は，

$$q_1=\underline{CE}\text{〔C〕}$$



(3) $\mathrm{S_1}$を閉じた直後は，Cには電荷が蓄えられていないので，抵抗$\mathrm{R_1}$を流れる電流の大きさは，(1)と同じである。

【ポイント】

コンデンサーの過渡現象

○スイッチの開閉の直前と直後のコンデンサーに蓄えられている電気量は等しい。

○直流回路では，定常状態のときコンデンサーに流れる電流は0〔A〕で，遮断状態である。

オームの法則(電圧降下(電位降下))

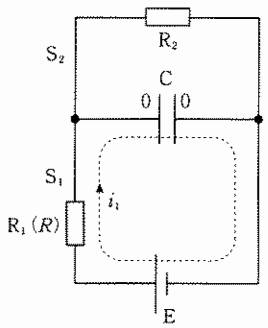
抵抗値R〔Ω〕の抵抗に電流I〔A〕が流れているとき，抵抗の両端に生じる電圧V〔V〕は，

$V=RI$

したがって，R_1 に流れる電流の大きさ i_1 は，

$$i_1=\underline{\frac{E}{R}}\text{〔A〕}$$

C には電荷が蓄えられていないので抵抗 R_2 にかかる電圧も 0 である。したがって，R_2 に流れる電流は，$\underline{0}$〔A〕

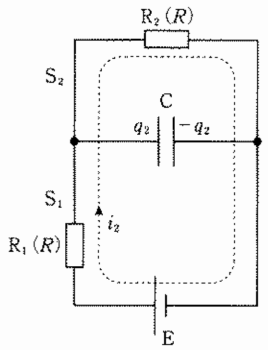


(4) 十分に時間がたって定常状態になると，C には電流は流れなくなるので，抵抗 R_2 を流れる電流の大きさ i_2 は，

$$i_2=\frac{E}{R+R}=\underline{\frac{E}{2R}}\text{〔A〕}$$

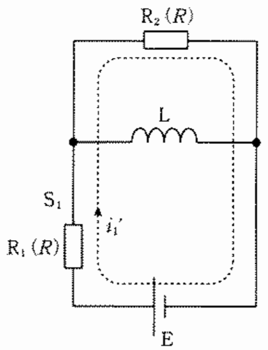
抵抗 R_2 にかかる電圧は，Ri_2〔V〕であり，C の電圧に等しい。したがって，C に蓄えられる電気量 q_2 は，

$$q_2=C\cdot Ri_2=\underline{\frac{1}{2}CE}\text{〔C〕}$$



問 2 (1) S_1 を閉じた直後は，コイル L には電流が流れないので，抵抗 R_1 と R_2 を流れる電流の大きさ i_1' は，

$$i_1'=\frac{E}{R+R}=\underline{\frac{E}{2R}}\text{〔A〕}$$



コイルの過渡現象

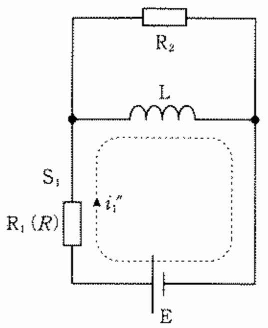
○スイッチの開閉の直前と直後においてコイルを流れる電流は等しい。

○直流回路では，定常状態でコイルにかかる電圧は 0〔V〕で，導線状態である。

(2) 十分に時間がたって定常状態になると，L は導線状態になり，L にかかる電圧は 0 である。したがって，R_1 を流れる電流の大きさ i_1'' は，

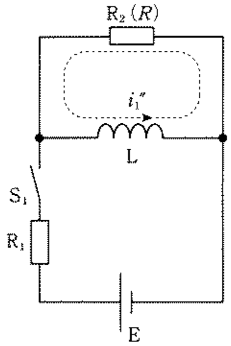
$$i_1''=\underline{\frac{E}{R}}\text{〔A〕}$$

R_2 を流れる電流は，$\underline{0}$〔A〕



(3)　S_1を開いた直後，LにはS_1を開く直前の電流i_1''〔A〕が流れるので，R_2にかかる電圧の大きさV_2は，

$$V_2=Ri_1''=R\cdot\frac{E}{R}=\underline{E}〔\mathrm{V}〕$$



問3 (ア)　S_1を閉じた直後は，コイルLには電流が流れず，コンデンサーCには電荷が蓄えられていないので，Cは導線状態である。したがって，Cに流れる電流の大きさは，

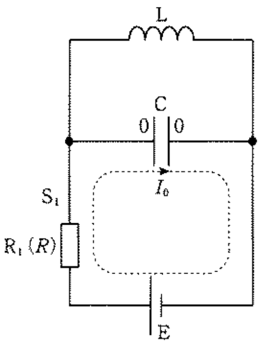
$$I_0=\underline{\frac{E}{R}}〔\mathrm{A}〕$$

(イ)　十分に時間がたって定常状態になると，Lは導線状態で，Cは遮断状態である。したがって，Lに流れる電流の大きさは，

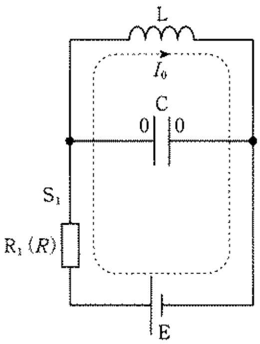
$$\underline{\frac{E}{R}}〔\mathrm{A}〕(=I_0)$$

(ウ)　このとき，Lは導線状態であり，Cにかかる電圧は0であるから，電気量は蓄えられていない。

$\underline{0}$〔C〕



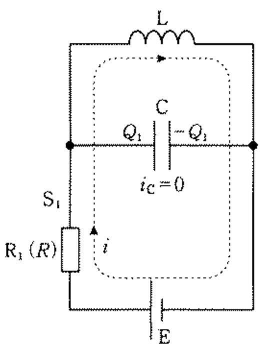
(直後)



(定常状態)

(エ)　$t=t_1$〔s〕以降，$i_C<0$となり，Cに蓄えられている電気量は減少する。したがって，$t=t_1$〔s〕にCに蓄えられている電気量は最大値Q_1〔C〕である。よって，<u>(1)</u> 最大

(オ)　LとCは並列であるから，かかる電圧は等しく，$t=t_1$〔s〕で最大値$V_1=\frac{Q_1}{C}$〔V〕となる。したがって，<u>(1)</u> 最大



$(t=t_1)$

(カ)　$t=t_1$〔s〕のとき，

キルヒホッフの第2法則より，R_1 を流れる電流の大きさ i は，

$$i=\frac{E-V_1}{R}\text{〔A〕}$$

V_1 が最大であるから，i は最小である。

したがって，(2) 最小

(キ)　Lに流れる電流の大きさを i_L〔A〕とすると，**キルヒホッフの第1法則**より，

$$i=i_L+i_C$$

したがって，電流の微小時間 Δt に対する変化は，

$$\frac{\Delta i}{\Delta t}=\frac{\Delta i_L}{\Delta t}+\frac{\Delta i_C}{\Delta t}$$

ここで，$t=t_1$〔s〕のとき，

$$\frac{\Delta i_C}{\Delta t}=-h$$

また，i は最小であるから，$\frac{\Delta i}{\Delta t}=0$

$$\therefore\quad \frac{\Delta i_L}{\Delta t}=h$$

一方，Lにかかる電圧の大きさ V_1 は，

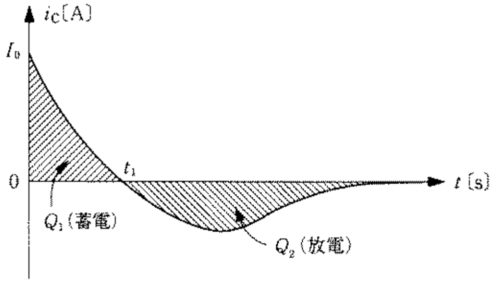
$$V_1=L\frac{\Delta i_L}{\Delta t}$$

$$\therefore\quad Q_1=CV_1=CL\frac{\Delta i_L}{\Delta t}=\underline{CLh}\text{〔C〕}$$

(ク)　i_C-t グラフで囲まれた面積は電気量の大きさを表す。このグラフは，時刻 $t=t_1$ までにCに Q_1〔C〕蓄えられ，時刻 $t=t_1$ 以降，時間が十分にたって定常状態になるまでに Q_2〔C〕放電していることを示す。一方，定常状態ではCに電荷が蓄えられていないので，

$$0=Q_1-Q_2$$

したがって，(2) $Q_1=Q_2$



○**キルヒホッフの第1法則**

回路の分岐点に流れ込む電流の和は，その点から流れ出る電流の和に等しい。

○**キルヒホッフの第2法則**

回路網の中の1つの閉じた回路に沿って1周するとき，各素子による電圧降下の代数和は各電池の起電力の代数和に等しい。

コイルの自己誘導起電力

自己インダクタンス L〔H〕のコイルに流れる電流が微小時間 Δt〔s〕の間に Δi〔A〕だけ変化するとき，コイルに生じる自己誘導起電力 V_S〔V〕は，電流が流れる向きを正として，

$$V_S=-L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

4 【Ⅰ選択者用問題】運動方程式

【解答】

問1	張力：$\frac{1}{2}mg$		外力：$\frac{1}{2}mg$
問2	(1) $a=\frac{V}{T}$	(2) A：$ma=S-\frac{1}{2}mg$	B：$ma=mg-S$
	(3) $a=\frac{1}{4}g$	$S=\frac{3}{4}mg$	(4) $\frac{1}{2}VT$
問3	(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}mg$	(2) $\mu=\frac{1}{\sqrt{3}}$	(3) VT
問4	(1) $-g$	(2) $\frac{7}{4}T$	(3) ア

【配点】（34点）

問1　各2点×2

問2　(1)　2点　(2)　各2点×2　(3)　各2点×2　(4)　3点

問3　(1)　3点　(2)　3点　(3)　3点

問4　(1)　3点　(2)　3点　(3)　2点

【出題のねらい】

運動方程式および等加速度運動の基本および標準的な問題で理解度をはかる。

【解説】

問題

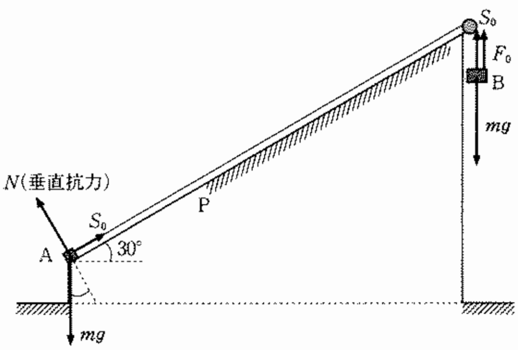
問1　糸の張力の大きさを S_0，外力の大きさを F_0 とおく。

小物体Aの斜面に平行方向の力のつり合いより，

$$S_0=mg\sin 30°=\underline{\frac{1}{2}mg}$$

小物体Bの鉛直方向の力のつり合いより，

$$S_0+F_0=mg \quad \therefore \quad F_0=\underline{\frac{1}{2}mg}$$



問2 (1)　加速度は，**速度－時間グラフ**の傾きに等しいから，

$$a=\underline{\frac{V}{T}}$$

(2)　小物体Aの**運動方程式**は，

【ポイント】

速度 v－時間 t グラフ

- 接線の傾き→加速度　$a=\frac{dv}{dt}$
- 面積→変位　$x=\int v\,dt$

$$\text{A}: ma = S - mg\sin 30° = \underline{S - \frac{1}{2}mg}$$

小物体Bは鉛直下向きに加速度 a で運動するので，Bの運動方程式は，

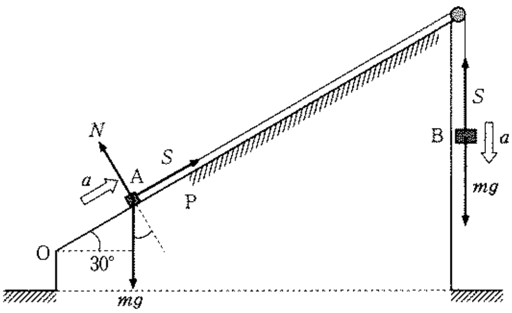
$$\text{B}: ma = \underline{mg - S}$$

(3)　2式より，

$$a = \underline{\frac{1}{4}g},\quad S = \underline{\frac{3}{4}mg}$$

(4)　変位は，速度－時間グラフの面積で表されるから，

$$\text{OP} = \underline{\frac{1}{2}VT}$$



問3 (1)　小物体Aの斜面に垂直方向の力のつり合いより，垂直抗力の大きさ N は，

$$N = mg\cos 30° = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}mg}$$

(2)　Aには斜面に沿って下向きに大きさ μN の**動摩擦力**がはたらく。Aと小物体Bは等速度運動をしているので，糸の張力の大きさを S' として，力のつり合いより，

$$\begin{cases} \text{A}: S' = mg\sin 30° + \mu N = \dfrac{1}{2}mg + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu mg \\ \text{B}: S' = mg \end{cases}$$

2式より，$\mu = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3)　求める高さ h は，

$$h = \text{OP} + V\left(\frac{3}{2}T - T\right) = \underline{VT}$$

h は速度－時間グラフの $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}T$ の台形部分の面積でも求められる。

運動方程式

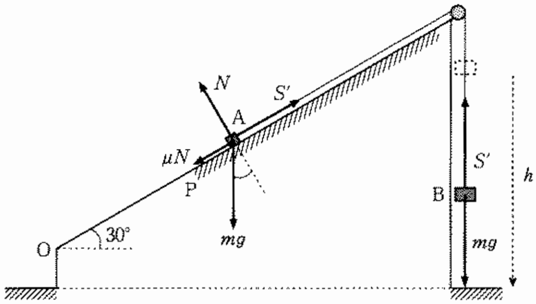
物体の質量を m，加速度を $\vec{a}$，物体にはたらく力を $\vec{F}$ として，

$m\vec{a} = \vec{F}$

動摩擦力

物体があらい面の上を滑りながら運動するとき，この運動を妨げる向きに面から受ける力を**動摩擦力**といい，面から受ける垂直抗力の大きさ N に比例する。

動摩擦力 $F = \mu N$（μ：動摩擦係数）

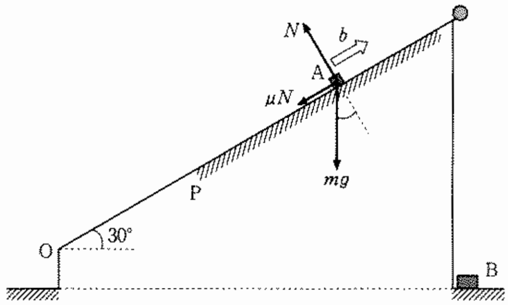


問 4 (1)　小物体 A の加速度を b とすると，運動方程式は，

$$mb = -mg\sin 30° - \mu N$$

$$= -\frac{1}{2}mg - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg = -mg$$

$$\therefore\quad b = \underline{-g}$$



(2)　求める時刻を t_0 とおくと，$t=\dfrac{3}{2}T$ から $t=t_0$ までの**等加速度運動の式**より，

$$0 = V + b\left(t_0 - \frac{3}{2}T\right)$$

$$\therefore\quad t_0 = \frac{3}{2}T - \frac{V}{b} = \frac{3}{2}T + \frac{V}{g}$$

ここで，**問 2** (1)，(3) より，

$$t_0 = \frac{3}{2}T + \frac{T}{4} = \underline{\frac{7}{4}T}$$

(3)　**最大摩擦力**を F とすると，静止摩擦係数 $\mu_0\,(>\mu)$ を用いて，

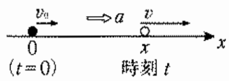
$$F = \mu_0 N = \mu_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg > \mu\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{1}{2}mg$$

このように，F は重力の斜面方向成分 $mg\sin 30°$ より大きいので，A は完全に静止する。<u>(ア)</u> 静止を続ける。

等加速度運動の式

x 軸上を一定の加速度 a で物体が運動するとき，時刻 t における物体の位置を x，その速度を v ($t=0$ のとき，$x=0$，$v=v_0$) とすると，次の 3 式が成立する。

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2 - v_0{}^2 = 2ax \end{cases}$$



静止摩擦力

物体が静止しているとき，接触する面から，面に平行な方向に受ける力で，物体にはたらく力のつり合い，または運動方程式により求める。静止摩擦力の最大値を**最大摩擦力**という。最大摩擦力 F_0 は面から受ける垂直抗力の大きさ N に比例し，その比例定数を静止摩擦係数といい，μ_0 で表すと，これらの力の関係は次のようになる。

静止摩擦力：$F \leqq F_0 = \mu_0 N$：最大摩擦力

5 【I選択者用問題】直流回路

【解答】

問1	(1) A_1：$\dfrac{V}{R}$〔A〕	A_2：$\dfrac{2V}{R}$〔A〕	(2) $\dfrac{V^2}{R}$〔W〕
問2	(1) $\dfrac{5}{6}R$〔Ω〕	(2) A_1：$\dfrac{4V}{5R}$〔A〕	A_2：$\dfrac{6V}{5R}$〔A〕
問3	(1) A_1：$\dfrac{V}{R}$〔A〕	A_2：$\dfrac{V}{R}$〔A〕	(2) $\dfrac{V^2}{R}$〔W〕
問4	(1) $\dfrac{x}{l}R$〔Ω〕	(2) $r=\dfrac{-x^2+x+1}{2-x}R$〔Ω〕	

問4 (3)（式・説明）A_2 を流れる電流 I は，$I=\dfrac{V}{r}$〔A〕

接点 C から電流は抵抗値の大きさ $(1-x)R$〔Ω〕，R〔Ω〕の逆比に分配されてそれぞれの抵抗に流れるから，A_1 を流れる電流 i_1 は，

$$i_1=I\cdot\frac{1}{2-x}=\frac{V}{r}\cdot\frac{1}{2-x}\text{〔A〕}$$

ここで，(2) より，

$$i_1=\frac{1}{-x^2+x+1}\cdot\frac{V}{R}=\frac{1}{-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}}\cdot\frac{V}{R}$$

したがって，$x=\dfrac{1}{2}$〔m〕のとき，電流は最小で，$\dfrac{4V}{5R}$〔A〕

答 電流：$\dfrac{V}{r}\cdot\dfrac{1}{2-x}$〔A〕	答 $x=\dfrac{1}{2}$〔m〕	答 最小値：$\dfrac{4V}{5R}$〔A〕

【配点】（33点）

問1 (1) 各2点×2　(2) 3点

問2 (1) 2点　(2) 各2点×2

問3 (1) 各2点×2　(2) 3点

問4 (1) 2点　(2) 3点　(3) 8点

【出題のねらい】

直流回路の基本事項の理解度を試し，応用問題で実力をはかる。

【解説】 問題

問1 (1) **オームの法則**より，A_1 と抵抗 R を流れる電流の大きさはそれぞれ $\dfrac{V}{R}$〔A〕で，**キルヒホッフの第1法則**（電流の保存則）より，A_2 を流れる電流の大きさは，$\dfrac{2V}{R}$〔A〕となる。

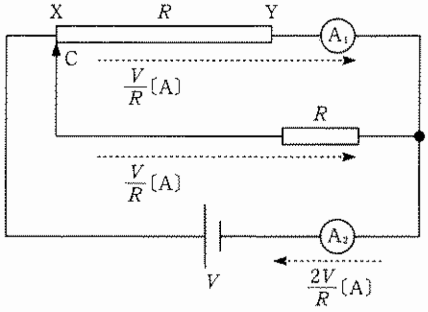
$$A_1:\underline{\frac{V}{R}}\text{〔A〕},\quad A_2:\underline{\frac{2V}{R}}\text{〔A〕}$$

【ポイント】

オームの法則（電圧降下（電位降下））

抵抗値 R〔Ω〕の抵抗に電流 I〔A〕が流れているとき，抵抗の両端に生じる電圧 V〔V〕は，

$V=RI$



(2)　抵抗 R での**消費電力** P_R は，

$$P_R=\frac{V^2}{R}\text{〔W〕}$$

問 2 (1)　R と CY 間の抵抗$\left(\text{抵抗値 }\frac{R}{2}\text{〔Ω〕}\right)$の並列**合成抵抗** R' は，

$$R'=\frac{R\times\frac{R}{2}}{R+\frac{R}{2}}=\frac{1}{3}R\text{〔Ω〕}$$

これに XC 間の抵抗$\left(\text{抵抗値 }\frac{R}{2}\text{〔Ω〕}\right)$が直列に接続されているので，回路の合成抵抗 R_0 は，

$$R_0=\frac{R}{2}+R'=\frac{R}{2}+\frac{R}{3}=\frac{5}{6}R\text{〔Ω〕}$$

(2)　したがって，A_2 を流れる電流の大きさ I_0 は，

$$A_2：I_0=\frac{V}{R_0}=\frac{6V}{5R}\text{〔A〕}$$

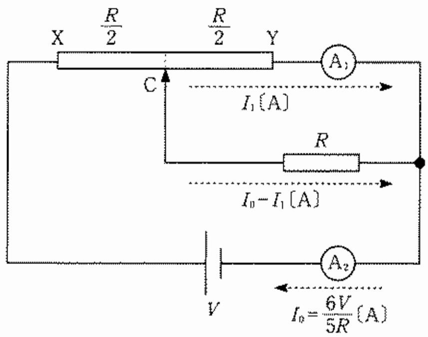
CY 間の抵抗と R は並列であり，接点 C から電流は抵抗値の大きさの逆比に分配されて流れるから（抵抗比が 1 ： 2 であるから，電流比は 2 ： 1），A_1 を流れる電流の大きさ I_1 は，

$$A_1：I_1=I_0\times\frac{2}{3}=\frac{4V}{5R}\text{〔A〕}$$

〈別解〉　CY 間の電圧と R にかかる電圧が等しいから，

$$\frac{R}{2}\cdot I_1=R\,(I_0-I_1)$$

$$\therefore\quad I_1=\frac{2}{3}I_0=\frac{4V}{5R}\text{〔A〕}$$



○キルヒホッフの第 1 法則（電流の保存則）

回路の分岐点に流れ込む電流の和は，その点から流れ出る電流の和に等しい。

○キルヒホッフの第 2 法則

回路網の中の 1 つの閉じた回路に沿って 1 周するとき，各抵抗による電圧降下の代数和は各電池の起電力の代数和に等しい。

消費電力

電圧 V〔V〕をかけた抵抗値 R〔Ω〕の抵抗に電流 I〔A〕が流れているとき，この抵抗で消費される電力 P〔W〕は，

$$P=VI=RI^2=\frac{V^2}{R}$$

合成抵抗

抵抗値 R_1〔Ω〕と R_2〔Ω〕の 2 つの抵抗を直列に接続すると，合成抵抗 R〔Ω〕は，

$$R=R_1+R_2$$

抵抗値 R_1〔Ω〕と R_2〔Ω〕の 2 つの抵抗を並列に接続すると，合成抵抗 R〔Ω〕は，

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

$$\therefore\quad R=\frac{R_1\times R_2}{R_1+R_2}$$

問 3 (1)　抵抗 R にかかる電圧は 0 であるから，R には電流が流れない。したがって，A_1 と A_2 を流れる電流は等しく，$\dfrac{V}{R}$〔A〕である。

$$A_1 : \underline{\frac{V}{R}}〔A〕,\ A_2 : \underline{\frac{V}{R}}〔A〕$$

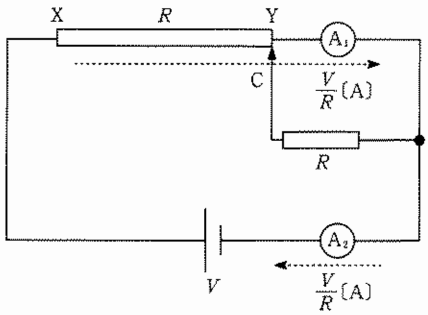
(2)　抵抗 R には電流が流れないので，回路全体の消費電力 P は抵抗線 XY での消費電力である。

$$\therefore\ P = R\times\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \underline{\frac{V^2}{R}}〔W〕$$

〈別解〉　エネルギー保存則より，

回路全体の消費電力 P＝(電池の起電力)×(電池を流れる電流)

$$\therefore\ P = V\times\frac{V}{R} = \underline{\frac{V^2}{R}}〔W〕$$



電池の供給電力

(電池の供給電力 P_E〔W〕)

＝(電池の起電力 V〔V〕)×(電池を通過する電流 I〔A〕)

回路のエネルギー保存則より，

(回路全体の消費電力)＝(電池の供給電力 P_E〔W〕)

問 4 (1)　抵抗線 XY の単位長さ当たりの抵抗値は一定であるから，XC 間の抵抗値は，長さで比例配分すればよい。したがって，

$$\underline{\frac{x}{l}R}〔\Omega〕$$

(2)　$l=1$ であるから，抵抗 R と CY 間の抵抗(抵抗値 $(1-x)R$〔Ω〕)の並列合成抵抗 R'' は，

$$R'' = \frac{R\times(1-x)R}{R+(1-x)R} = \frac{1-x}{2-x}R〔\Omega〕$$

これに XC 間の抵抗(抵抗値 xR〔Ω〕)が直列に接続されているので，合成抵抗 r は，

$$r = xR + R'' = \underline{\frac{-x^2+x+1}{2-x}R}〔\Omega〕 \quad \cdots\cdots ①$$

(3)　A_2 を流れる電流の大きさ I は，$I=\dfrac{V}{r}$〔A〕

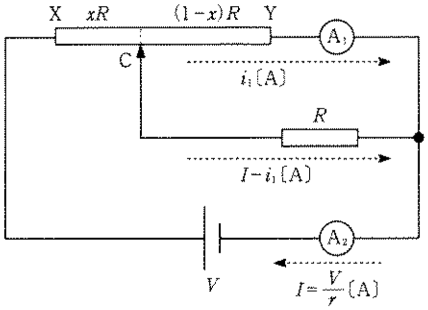
CY 間の抵抗と R は並列で，接点 C から電流は，抵抗値の大きさ $(1-x)R$〔Ω〕，R〔Ω〕の逆比に分配されてそれぞれの抵抗に流れるから，A_1 を流れる電流の大きさ i_1 は，

$$i_1 = I\cdot\frac{R}{R+(1-x)R} = \underline{\frac{V}{r}\cdot\frac{1}{2-x}}〔A〕$$

ここで，① 式より，

$$i_1=\frac{1}{-x^2+x+1}\cdot\frac{V}{R}=\frac{1}{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}\cdot\frac{V}{R}$$

したがって，$x=\underline{\frac{1}{2}}$〔m〕のとき，電流 i_1 は，最小値 $\underline{\frac{4V}{5R}}$〔A〕をとる。



化　学

1 【共通問題】 ダニエル電池

【解答】

問1	あ	(イ)	い	(ア)	う	(イ)	え	(ア)	お	(ウ)
問2	$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$						問3	1.3 g	問4	SO_4^{2-}
問5	(1)	C＞D＞A＞B	(2)	正極	D	電圧	0.3 V	(3)	$e = \dfrac{itM}{2wN}$	

【配点】 (20点)

問1　各1点×5　　**問2**　2点　　**問3**　3点　　**問4**　2点

問5　(1)　2点　　(2)　正極　1点，　電圧　2点　　(3)　3点

【出題のねらい】

電池の原理とダニエル電池に関する知識の確認，および計算問題である。

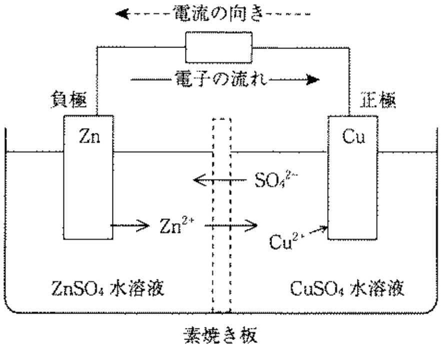
【解説】

問題

問1，2　電池が放電するとき，外部回路に向かって電子が流れ出る電極を負極，外部回路から電子が流れ込む電極を正極という。電子は導線を通って負極から正極に流れるが，電流は正極から負極へ流れると定義されているので，電流の向きは電子の流れる向きとは逆になる。負極では電子を放出する酸化反応が起こり，正極では電子を受け取る還元反応が起こる。

ダニエル電池は Zn 板を浸した $ZnSO_4$ 水溶液と，Cu 板を浸した $CuSO_4$ 水溶液を素焼き板で仕切って，二つの金属板(電極)を導線で接続した構造の電池である。この電池が放電すると，負極ではイオン化傾向の大きい Zn が酸化されて Zn^{2+} となって水溶液中に溶け出し，正極ではイオン化傾向の小さい Cu の2価の陽イオン Cu^{2+} が電子を受け取って還元され Cu が析出する。

$$\begin{cases} 負極；Zn \longrightarrow Zn^{2+} + 2e^- \\ 正極；Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu \end{cases}$$



【ポイント】

電池

負極；放電時に還元剤が電子を放出する。酸化反応が起こる。

正極；放電時に酸化剤が電子を受け取る。還元反応が起こる。

ダニエル電池

亜鉛と硫酸亜鉛水溶液，銅と硫酸銅(II)水溶液を，素焼き板で隔てて接続した電池。イオン化傾向が Zn＞Cu だから，Zn が負極，Cu が正極となる。

問 3　流した電気量が 3860 C だから，電子の物質量は，

$$\frac{3860}{9.65\times10^{4}}=4.0\times10^{-2}\,(\mathrm{mol})$$

電子が 1 mol 流れると，負極では Zn が $\frac{1}{2}$ mol 溶け出すので，Zn 板の質量減少は，

$$65\times4.0\times10^{-2}\times\frac{1}{2}=1.3\,(\mathrm{g})$$

ファラデー定数 F

電子 1 mol のもつ電気量の絶対値

$F=9.65\times10^{4}$ (C/mol)

問 4　素焼き板は，$ZnSO_4$ 水溶液と $CuSO_4$ 水溶液が混合しないようにするとともに，イオンを通過させて電気的に接続するはたらきがある。

放電時に水溶液中の陽イオンは正極側に，陰イオンは負極側に移動する。ダニエル電池では，負極側から正極側に Zn^{2+} が移動し，正極側から負極側に $SO_4{}^{2-}$ が移動する。

素焼き板のはたらき

両極の水溶液の混合を防ぐとともにイオンを通過させることで両極の水溶液を電気的に接続する。

問 5　ダニエル電池の電極の金属とその陽イオンを含む水溶液を別のものに変えると電池の電圧(起電力)が変化する。このときイオン化傾向の大きい方の金属が負極となり，小さい方の金属が正極となる。また，両極の金属のイオン化傾向の差が大きいほど起電力は大きくなる。

ダニエル型電池

ダニエル電池の電極の金属とその陽イオンの組合せを，別の金属とその陽イオンの組合せに変更すると起電力が変化する。

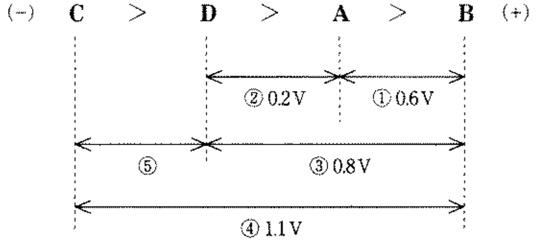
両極に用いる金属のイオン化傾向の差が大きいほど，起電力は大きい。

(1)　電池 ① では **A** が負極，**B** が正極であることから，イオン化傾向の大きさは，**A**>**B** であることがわかる。同様に ② で **D**>**A**，③ で **C**>**B**，④ で **D**>**B** であることがわかる。③ と ④ を比較すると，正極は **B** で同じであるが，③ の方が起電力が大きいことから，**C** の方が **D** よりイオン化傾向が大きいことがわかる。よって，イオン化傾向を大きい順に並べると，**C**>**D**>**A**>**B** となる。

【別解】

電池 ①，③，④ をみると，いずれも **B** が正極であるから，イオン化傾向の大きさは (**A**，**C**，**D**)>**B** であり，この 3 つの電池の起電力を比較すると，イオン化傾向の大きさの順は **C**>**D**>**A**>**B** と決まる。

(2)　イオン化傾向が小さい方の金属が正極となることから，**C** と **D** を用いて電池をつくると **D** が正極となる。また，イオン化傾向と電池の起電力の関係をまとめると下のようになる。



① と ② の起電力の和が ③ の起電力に等しくなっていること

から，③と⑤の起電力の和が④の起電力に等しくなると考えることができる。よって，⑤の起電力は $1.1-0.8=0.3$ (V) となる。

電池⑤の各極で起こる変化は次の式で表される。

$$\begin{cases} \text{正極}(\mathbf{D})\text{；}\mathbf{D}^{2+} + 2e^- \longrightarrow \mathbf{D} \\ \text{負極}(\mathbf{C})\text{；}\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{2+} + 2e^- \end{cases}$$

(3) 電子1個がもつ電気量の絶対値は e〔C〕だから，電子1 mol（電子 N 個）のもつ電気量は eN〔C〕となる。i〔A〕を t 秒間流したので，流れた電気量は it〔C〕であり，これは電子 $\frac{it}{eN}$〔mol〕に相当する。負極では，電子1 mol あたり **C** が $\frac{1}{2}$ mol 溶け出す。**C** のモル質量が M〔g/mol〕，質量変化が w〔g〕であることから，

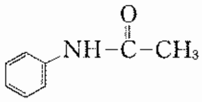
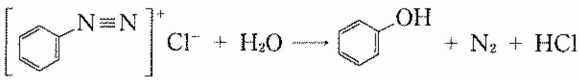
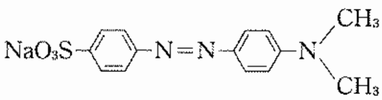
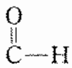
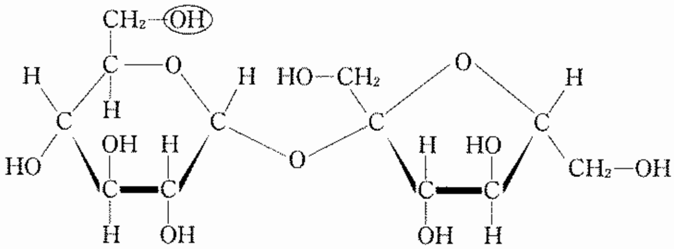
$$\frac{it}{eN}\times\frac{1}{2}\times M = w \qquad \therefore \quad e=\frac{itM}{2wN}\text{〔C〕}$$

電気量

電気量〔C〕＝電流〔A〕×時間〔秒〕

2 【I・II選択者用問題】 芳香族化合物，糖

【解答】

I	問1	A ニトロベンゼン　B アニリン
I	問2	① (ウ)　② (カ)
I	問3	
I	問4	(ジアゾ)カップリング
I	問5	
I	問6	(ウ)
I	問7	
II	問1	(イ)
II	問2	い (ア)　う (オ)　え (ウ)　お (ケ)
II	問3	a OH　b 
II	問4	4
II	問5	

【配点】 (30点)

I　問1　各2点 ×2　　問2　各1点×2　　問3　2点

　問4　2点　　問5　2点　　問6　2点　　問7　3点

II　問1　1点　　問2　各1点×4　　問3　2点　　問4　3点　　問5　3点

【出題のねらい】

芳香族化合物の性質と反応に関する基本的な知識を確認する問題，および，糖の性質と構造に関する基本的な知識と応用力を試す問題である。

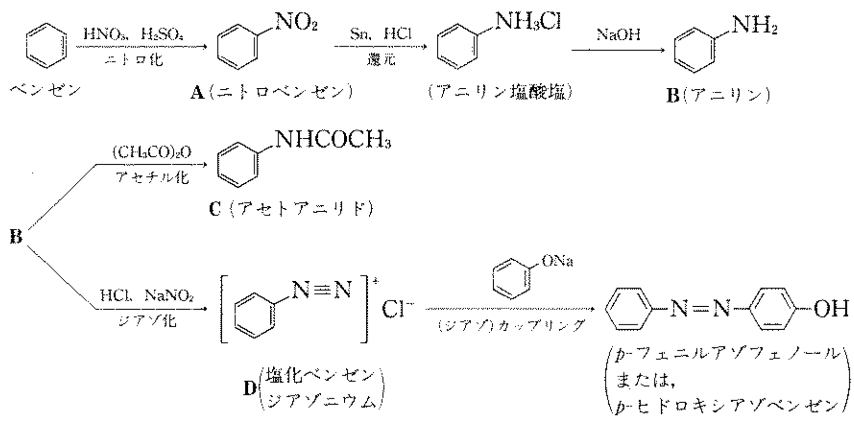
【解説】

問題

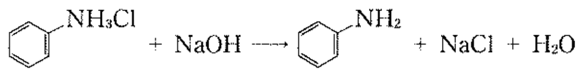
I

以下に，問題の反応経路図を，化合物名，反応名，反応試薬を補って示す。

【ポイント】

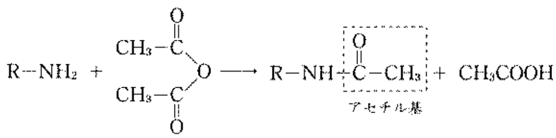


問1，2　ベンゼンを濃硝酸，濃硫酸とともに加熱すると，ニトロベンゼンが生成する(ニトロ化)。ニトロベンゼンにスズと塩酸を反応させるとアニリンが生成する(還元)。しかし，生成したアニリンは反応液中に塩酸塩として溶けているので，これに NaOH を加えると，アニリンが得られる(弱塩基の遊離)。

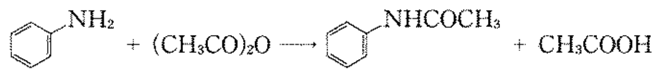


アニリンを塩酸に溶かし，亜硝酸ナトリウムを反応させると塩化ベンゼンジアゾニウムが生成する(ジアゾ化)。

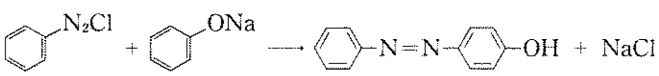
問3　アミノ基は，アルコールやフェノール類のヒドロキシ基と同様に，無水酢酸によりアセチル化を受ける。



アニリンをアセチル化するとアセトアニリドが生成する。

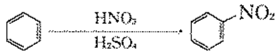


問4　芳香族ジアゾニウム塩が他の芳香族化合物と反応すると，アゾ化合物が生成する。この反応をカップリング(またはジアゾカップリング)といい，アゾ染料の合成に用いられる。塩化ベンゼンジアゾニウムとナトリウムフェノキシドとのカップリングにより，橙赤色の *p*-フェニルアゾフェノール(または *p*-ヒドロキシアゾベンゼン)が得られる。

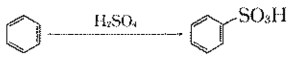


ベンゼンの置換反応

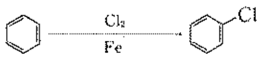
ニトロ化



スルホン化



ハロゲン化(クロロ化)



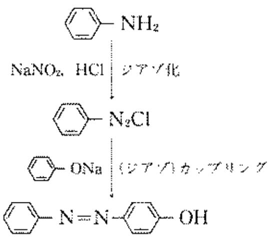
アセチル化

ヒドロキシ基やアミノ基に無水酢酸を作用させるとアセチル化され，ヒドロキシ基の場合はエステル結合が，アミノ基の場合はアミド結合が形成される。

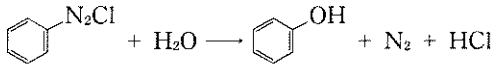
$$\mathrm{ROH} \xrightarrow{(\mathrm{CH_3CO})_2\mathrm{O}} \mathrm{ROCOCH_3}$$

$$\mathrm{RNH_2} \xrightarrow{(\mathrm{CH_3CO})_2\mathrm{O}} \mathrm{RNHCOCH_3}$$

ジアゾ化，(ジアゾ)カップリング



問5　ジアゾニウム塩は熱に対して不安定であり，加温すると，次のように加水分解してフェノールに変化する。このため，ジアゾ化の反応は5℃以下に氷冷して行う。

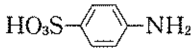


問6　(ア)　正しい。アニリンは特有のにおいをもつ液体の化合物である。

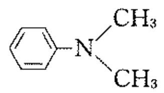
(ウ)　誤り。アニリンは塩基だから$NaHCO_3$とは反応しない。$NaHCO_3$と反応して気体CO_2が発生するのはカルボン酸のように炭酸より強い酸である。

(イ)，(エ)　いずれも正しい。アニリンは酸化されやすく，さらし粉水溶液を加えると赤紫色を呈する。また，硫酸酸性の$K_2Cr_2O_7$水溶液を加えると黒色のアニリンブラックが生成する。

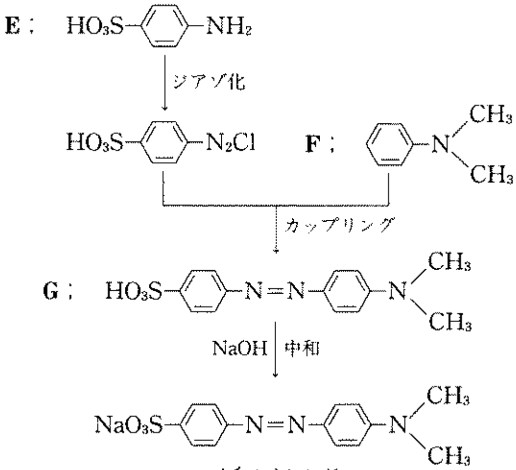
問7　分子式$C_6H_7NO_3S$の**E**はベンゼンのパラ二置換体で，ジアゾ化したのちにカップリングが起こるので，ベンゼン環に直接結合したNH_2をもち，示性式は$X\text{-}C_6H_4\text{-}NH_2$と書ける。もう一つの置換基Xは，分子式から$SO_3H$（スルホ基）と決まり，**E**の構造は次のように決まる。

E；

分子式$C_8H_{11}N$の**F**はベンゼンの一置換体で，メチル基を2個もつことから，その構造は次のように決まる。

F；

したがって，メチルオレンジの合成経路は次のようになると考えられる。なお，カップリングが**F**のパラ位で起こることは，塩化ベンゼンジアゾニウムとナトリウムフェノキシドとのカップリングから類推できる。



メチルオレンジ

ジアゾニウム塩の加水分解

II

問1，2　グルコース，フルクトース，ガラクトースなどの単糖分子どうしは，それぞれのOHどうしが脱水縮合して結びつくことができ，このとき形成されるエーテル結合を特にグリコシド結合という。

代表的な多糖であるデンプンは，多数のα-グルコースが連なってできており，酵素アミラーゼで加水分解されると，デキストリンを経て二糖であるマルトースになる。マルトースは酵素マルターゼで加水分解されてグルコースになる。

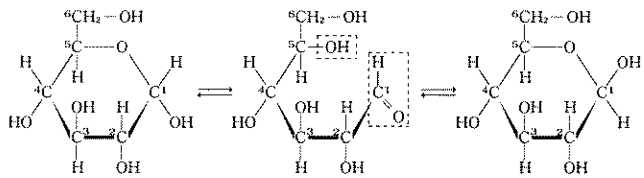
$$\text{デンプン} \xrightarrow{\text{アミラーゼ}} \text{デキストリン} \xrightarrow{\text{アミラーゼ}}$$

$$\text{マルトース} \xrightarrow{\text{マルターゼ}} \text{グルコース}$$

砂糖の主成分であるスクロースはα-グルコースとβ-フルクトースからなる二糖であり，酵素インベルターゼによって加水分解され，構成単糖の混合物となる。このとき生成するグルコースとフルクトースの等モル混合物を転化糖という。

$$\text{スクロース} \xrightarrow{\text{インベルターゼ}} \underbrace{\text{グルコース} + \text{フルクトース}}_{\text{転化糖}}$$

問3　グルコースなどの単糖は還元性を示し，フェーリング液を還元し，銀鏡反応も示す。これは，水溶液中で，末端にアルデヒド基(-CHO)をもつ鎖状構造が存在するためである。



α-グルコース　　鎖状構造　　β-グルコース

問4　グルコース $C_6H_{12}O_6$（分子量180）分子 n 個が鎖状に連なってできた糖の構造は，次のように表すことができる。

$$\underbrace{C_6H_{12}O_6 + C_6H_{12}O_6}_{-H_2O} + \cdots\cdots + \underbrace{C_6H_{12}O_6 + C_6H_{12}O_6}_{-H_2O}$$

$$\downarrow$$

$$H-(C_6H_{10}O_5)-(C_6H_{10}O_5)-\cdots\cdots-(C_6H_{10}O_5)-(C_6H_{10}O_5)-OH$$

$$\|$$

$$H-(C_6H_{10}O_5)_n-OH \quad (\text{分子量；}162n+18)$$

したがって，この糖の加水分解は次のように表すことができる。

$$H-(C_6H_{10}O_5)_n-OH + (n-1)H_2O \longrightarrow nC_6H_{12}O_6$$

この糖1 molからグルコース n〔mol〕が生じるから，

$$\frac{10.00}{162n+18} \times n = \frac{10.81}{180} \qquad \therefore \quad n = 3.9 \fallingdotseq 4$$

【別解】　この糖1 molと H_2O $(n-1)$ molが反応するとグルコース n〔mol〕が生じる。

おもな単糖(六炭糖) $C_6H_{12}O_6$

・グルコース
・フルクトース
・ガラクトース
｝いずれも還元性あり

おもな二糖 $C_{12}H_{22}O_{11}$

二糖	加水分解生成物
マルトース	グルコース
セロビオース	グルコース
スクロース	グルコース フルクトース
ラクトース	ガラクトース グルコース

※スクロース以外は還元性あり

おもな多糖 $(C_6H_{10}O_5)_n$

・デンプン…α-グルコースが重合
・セルロース…β-グルコースが重合
・グリコーゲン…α-グルコースが重合

糖と加水分解酵素

・デンプン
↓ アミラーゼ
デキストリン
↓ アミラーゼ
マルトース
↓ マルターゼ
グルコース

・セルロース
↓ セルラーゼ
セロビオース
↓ セロビアーゼ
グルコース

・スクロース
↓ インベルターゼ
グルコース＋フルクトース

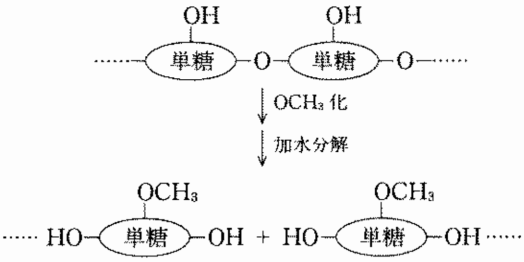
・ラクトース
↓ ラクターゼ
ガラクトース＋グルコース

いま反応したH_2Oの質量は，$10.81-10.00=0.81\,(g)$だから，

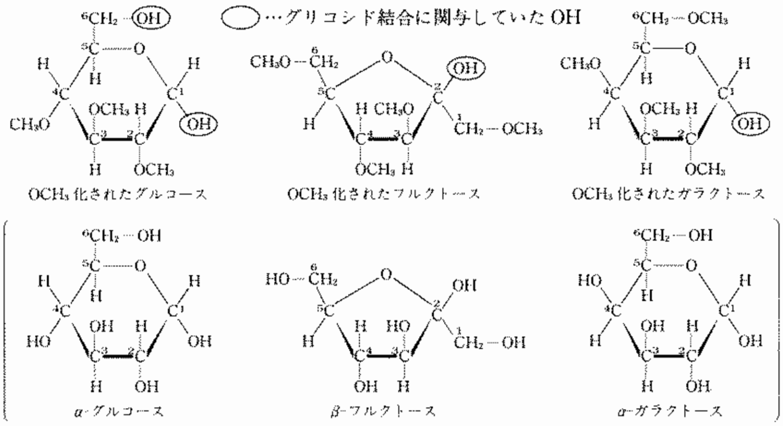
$$\frac{0.81}{18}\times n=\frac{10.81}{180}\times(n-1) \qquad \therefore\quad n=3.9\fallingdotseq 4$$

問 5　ラフィノースはα-ガラクトースとスクロースからなる三糖だから，ラフィノースの構造を推定するためには，α-ガラクトースのOHのうちどれが，スクロース分子中のどのOHと脱水縮合したものであるかを知る必要がある。

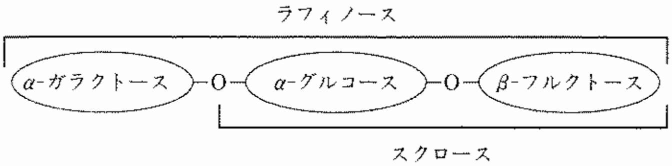
多糖分子中のOHをOCH_3に変化(メトキシ化)させたのち加水分解して得られる生成物の分子中で，OCH_3化されずに残っているOHは，もとの多糖分子中でグリコシド結合を形成していたことを示し，OCH_3化されたOHは，もとの多糖分子中でグリコシド結合に関与していなかったことを示す。



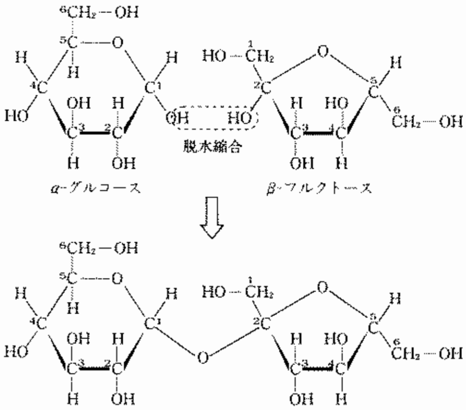
ラフィノースをOCH_3化したのち加水分解して得られた3種類の生成物は，α-グルコース，β-フルクトース，α-ガラクトースのOHの一部がOCH_3化されたものである。これらが問題文中に与えられた構造式のどれに対応するかは，α-ガラクトースの構造を知らなくても，α-グルコースの構造，および，β-フルクトースが五員環構造をとることから判断できる。



これら3種類のOCH_3化された化合物中に，OCH_3化されずに残っているOHは，α-グルコースでは2個，他では1個だから，ラフィノース分子は次のような構造をもつと考えられる。



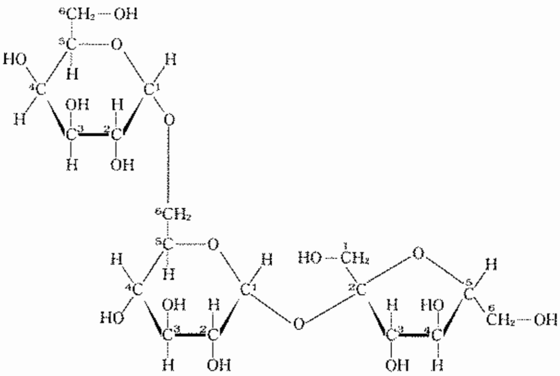
スクロースはα-グルコースの1位のOHとβ-フルクトースの2位のOHが脱水縮合した二糖であり，次の構造をもつ。



スクロース

なお，スクロースの構造は，問題文から次のようにして推定することができる。OCH_3化されたα-グルコースとβ-フルクトースの構造式から，β-フルクトースの2位のOHとα-グルコースの1位または6位のOHが縮合したものであることがわかる。また，スクロースが還元性を示さないことから，α-グルコースの6位ではなく1位のOHが結合に関与していると推測できる。

以上より，ラフィノースは，α-ガラクトースの1位のOHとスクロース分子中のα-グルコースの6位のOHとが脱水縮合した構造をもつと推定できる。



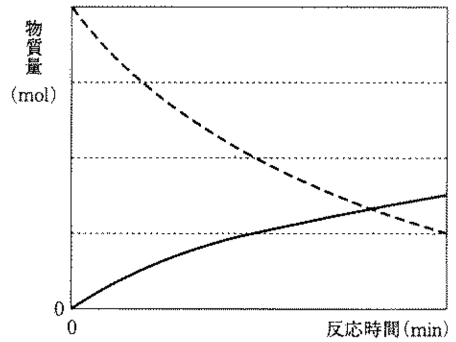
ラフィノース

③ 【I・II選択者用問題】 熱化学，反応速度

【解答】

I	問1	286 kJ/mol	問2	H_2O(液) ＝ H_2O(気) − 44 kJ
I	問3	435 kJ/mol	問4	102
II	問5	(b)		
II	問7	あ 0.387	い	0.033
II	問8	値 8.6×10^{-2}	単位	min^{-1}
II	問9	2.1×10^{-1} mol/L		

問6



【配点】 (25点)

I　問1　2点　　問2　3点　　問3　3点　　問4　3点

II　問5　2点　　問6　2点　　問7　2点×2　　問8　値：2点，単位：1点　　問9　3点

【出題のねらい】

I　熱化学に関する基本的な知識と計算の問題である。

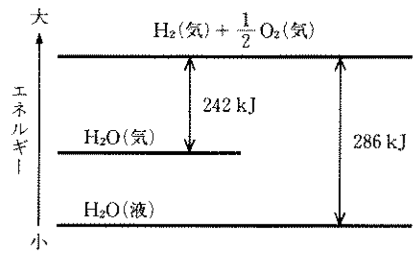
II　反応速度式に関する問題である。

【解説】

問題

I

次のエネルギー図は H_2(気)，O_2(気)，H_2O(液)，H_2O(気)のエネルギーの大小関係を表したものである。



問1　ある化合物 1 mol がその成分元素の単体から生成するときの反応熱を生成熱という。エネルギー図より，液体の H_2O の生成熱は 286 kJ/mol であり，液体の H_2O の生成熱を表す熱化学方程式は，次式で表される。

$$H_2(気) + \frac{1}{2}O_2(気) = H_2O(液) + 286\ kJ$$

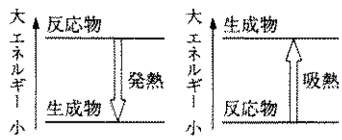
問2　水の蒸発熱はエネルギー図より，

$$286 - 242 = 44\ (kJ/mol)$$

よって，水の蒸発を表す熱化学方程式は次式で表される。

【ポイント】

発熱反応と吸熱反応



生成熱

物質 1 mol が成分元素の最も安定な単体から生成するときの反応熱

熱化学方程式の書き方の注意点

(i)　反応式の左辺と右辺を＝で結ぶ。

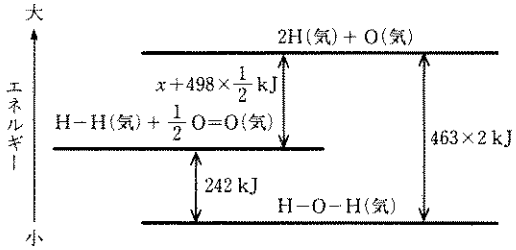
(ii)　物質の状態を付記する。

(iii)　右辺の末尾に反応熱を，発熱反応では＋，吸熱反応では－の符号を付けて記す。

H_2O(液) $=$ H_2O(気) -44 kJ

問 3　H_2O(気)の生成熱を表す熱化学方程式は，次式で表される。

$$H_2(\text{気}) + \frac{1}{2}O_2(\text{気}) = H_2O(\text{気}) + 242\ \text{kJ}$$



O−H，O=O 結合の結合エネルギーが，それぞれ 463，498 kJ/mol であるから，H−H 結合の結合エネルギーを x kJ/mol とすると，エネルギー図より，

$$\left(x+498\times\frac{1}{2}\right)+242 = 463\times2 \qquad \therefore\ \ x = 435\ (\text{kJ/mol})$$

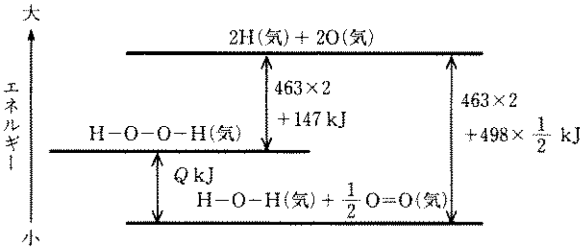
【別解】

(反応熱)＝(生成物質の結合エネルギーの総和)

－(反応物質の結合エネルギーの総和)　より，

$$242 = (463\times2)-\left(x+498\times\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore\ \ x = 435\ (\text{kJ/mol})$$

問 4　H_2O_2(気) $= H_2O$(気) $+ \frac{1}{2}O_2$(気) $+Q$ kJ について，H_2O_2 の構造式は，H−O−O−H であるから，エネルギー図を次のように表すことができる。



O−O 結合の結合エネルギーは 147 kJ/mol であるから，エネルギー図より，

$$(463\times2+147)+Q = 463\times2+498\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \ Q = 498\times\frac{1}{2}-147 = 102\ (\text{kJ})$$

【別解】

反応熱と結合エネルギーの関係より，

$$Q = (463\times2+498\times\frac{1}{2})-(463\times2+147) = 102\ (\text{kJ})$$

結合エネルギー

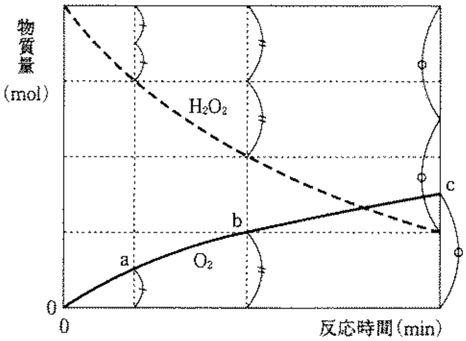
結合 1mol を切断して気体状態の原子にするのに必要なエネルギー

II

問5　H_2O_2 水溶液は，そのままでは H_2O_2 の分解反応が起こりにくいが，少量の MnO_2(触媒)を加えるとすみやかに分解反応が進行する。触媒を用いると反応の仕組みが変わり，活性化エネルギーがより小さい経路で反応が進むので，反応速度は大きくなる。なお，反応熱は反応物と生成物のもっているエネルギーの差で決まるので，触媒を用いても反応熱の値は変化しない。

問6　$2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + O_2$ より，減少する H_2O_2 と発生する O_2 の物質量比は $H_2O_2 : O_2 = 2:1$ である。

したがって，発生した O_2 の物質量の時間変化を示すグラフは下図の実線のようになる。なお，グラフを描くときには，a，b，c の3点に留意すること。



問7　**あ**：反応時間が2～4分の間の H_2O_2 の平均の濃度は，

$$\frac{0.420+0.354}{2} = 0.387\,(\text{mol/L})$$

い：2～4分の間の平均の反応速度は，

$$-\frac{0.354-0.420}{4-2} = 0.033\,[\text{mol/(L}\cdot\text{min)}]$$

問8　①式の反応の反応速度式は，次の②式で示されるので，

$$v = k[H_2O_2] \qquad \cdots\cdots②$$

この式を変形し，表2の4～6分の間の値を代入すると，

$$k = \frac{v}{[H_2O_2]} = \frac{\overline{v}}{\overline{[H_2O_2]}} = \frac{0.028}{0.326} \fallingdotseq 8.6\times10^{-2}\,(\text{min}^{-1})$$

問9　反応速度式が②式で表される反応(一次反応)では，$[H_2O_2]$ が $\frac{1}{n}$ になるのに必要な時間は，初期濃度に関係なく常に一定である(注)。

10分後の $[H_2O_2]$ を x [mol/L] とすると，表1の2分後と6分後の $[H_2O_2]$ が 0.420，0.298 mol/L だから，

$$\frac{0.298}{0.420} = \frac{x}{0.298} \qquad \therefore\ x = 2.11\times10^{-1} \fallingdotseq 2.1\times10^{-1}\,(\text{mol/L})$$

(注)　反応速度式が $v = k[H_2O_2]$ で表されるとき，$t=0$ における H_2O_2 の濃度(初濃度)を $[H_2O_2]_0$ とすると，t と $[H_2O_2]$ の関係は次のようになる。

反応速度を変化させる因子

・濃度…濃度を大きくすると，粒子どうしの衝突回数が増え，反応速度は大きくなる。

・温度…温度を高くすると，活性化エネルギー以上のエネルギーをもつ粒子の割合が増え，反応速度は大きくなる。

・触媒…触媒を加えると，活性化エネルギーが小さくなり，反応速度は大きくなる。

$$\log_{10}[H_2O_2] = -\frac{kt}{2.30} + \log_{10}[H_2O_2]_0$$

この式より，$[H_2O_2]$ が初濃度の $\frac{1}{n}$ になるのに要する時間 $t_{\frac{1}{n}}$ は次式で表される。

$$t_{\frac{1}{n}} = \frac{2.30 \log_{10} n}{k}$$

4 【I・II選択者用問題】 電離平衡

【解答】

問1	(1)	(イ)	(2)	(イ)	問2	1	$c(1-\alpha)$	2	$\dfrac{c\alpha^2}{1-\alpha}$	3	$c\alpha^2$	
問3	(1)	1.4×10^{-2}	(2)	1.4×10^{-3} mol/L	問4	(1)	(ア)	(2)	0.20 mol	(3)	9.3	
問5	(1)	7.3	(2)	5.4×10^{-2} mol								

【配点】 (25点)

問1 (1) 1点 (2) 1点　問2 1 1点 2 2点 3 2点　問3 (1) 2点 (2) 2点
問4 (1) 2点 (2) 3点 (3) 3点　問5 (1) 3点 (2) 3点

【出題のねらい】

弱塩基の電離平衡や緩衝液の標準的な計算問題と，やや難度の高い溶解度積の計算問題である。

【解説】

問題

問1 (1)，(2) 水に HCl を加えると H^+ の濃度が増加し，NaOH を加えると OH^- の濃度が増加するため，ルシャトリエの原理より，いずれの場合も ① 式の平衡は左に移動する。よって，いずれの場合も水の電離度は小さくなる。

問2 NH_3，NH_4^+，OH^- のモル濃度は次のようになる。

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^- \quad \cdots\cdots ②$$

平衡時 $c(1-\alpha)$ 　　$c\alpha$ 　　$c\alpha$ 　(単位：mol/L)

これらを K_b に代入すると，

$$K_b = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]} = \frac{c\alpha\times c\alpha}{c(1-\alpha)} = \frac{c\alpha^2}{1-\alpha} \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，α が 1 に比べて十分小さいとき，$1-\alpha \fallingdotseq 1$ と近似できるので，④ 式は次のように表すことができる。

$$K_b = c\alpha^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

問3 (1) ⑤ 式より，

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_b}{c}} = \sqrt{\frac{2.0\times10^{-5}}{0.10}} = 1.41\times10^{-2} \fallingdotseq 1.4\times10^{-2}$$

(2) $[OH^-] = c\alpha$ より，

$$[OH^-] = 0.10\times1.41\times10^{-2} = 1.41\times10^{-3}$$
$$\fallingdotseq 1.4\times10^{-3}\ (\text{mol/L})$$

問4 (1) CH_3COONa に HCl を加えると次の反応が起こる。

$$\underset{\text{弱酸の塩}}{CH_3COONa} + \underset{\text{強酸}}{HCl} \longrightarrow \underset{\text{弱酸}}{CH_3COOH} + \underset{\text{強酸の塩}}{NaCl}$$

CH_3COONa の物質量は，0.10 mol であり，これと過不足なく反応する HCl の物質量は 0.10 mol である。

【ポイント】

ルシャトリエの原理(平衡移動の原理)

平衡状態にある系に対して外部から変化を与えたとき，その変化の影響を緩和するように平衡が移動する。

弱酸の遊離反応

弱酸の塩＋強酸 ⟶ 弱酸＋強酸の塩

(ア) 加えた HCl が 0.05 mol だから，

	CH_3COONa	+ HCl $\longrightarrow$	CH_3COOH	+ $NaCl$
反応前	0.10	0.05	0	0
反応後	0.05	0	0.05	0.05

（単位：mol）

よって，反応後は CH_3COONa と CH_3COOH の混合溶液となるので，緩衝液になる。

(イ) 加えた HCl が 0.10 mol だから，

	CH_3COONa	+ HCl $\longrightarrow$	CH_3COOH	+ $NaCl$
反応前	0.10	0.10	0	0
反応後	0	0	0.10	0.10

（単位：mol）

よって，反応後は CH_3COOH と $NaCl$ の混合溶液となり，これは緩衝液にはならない。

(ウ), (エ) CH_3COONa に NaOH を加えても反応は起こらず，CH_3COONa と NaOH の混合溶液だから緩衝液にはならない。

(2) pH 9.0 すなわち，$[H^+] = 1.0\times10^{-9}$ mol/L だから，

$$[OH^-] = \frac{K_w}{[H^+]} = \frac{1.0\times10^{-14}}{1.0\times10^{-9}} = 1.0\times10^{-5}\ (\text{mol/L})$$

加えた NH_4Cl の物質量を x [mol] とすると，NH_4Cl は完全に電離し ($NH_4Cl \longrightarrow NH_4^+ + Cl^-$)，$NH_3$ の電離度は非常に小さく，また，溶液の体積変化は無視できるので，

$[NH_4^+] \fallingdotseq x\ (\text{mol/L})$

$[NH_3] \fallingdotseq 0.10\ (\text{mol/L})$

これらの値を，⑥式に代入すると，

$$1.0\times10^{-5} = \frac{0.10}{x}\times2.0\times10^{-5} \qquad \therefore\ x = 0.20\ (\text{mol})$$

(3) (2) の水溶液は緩衝液であり，これに NaOH を 0.050 mol 加えると，次の反応が起こる。

	NH_4Cl	+ $NaOH$ $\longrightarrow$	NH_3	+ $NaCl$	+ H_2O
反応前	0.20	0.05	0.10	0	
反応後	0.15	0	0.15	0.05	（単位：mol）

反応後の溶液も緩衝液であり，また，溶液の体積は 1.0 L のままで変化しないと考えてよいので，

$[NH_3] \fallingdotseq 0.15\ (\text{mol/L})$

$[NH_4^+] \fallingdotseq 0.15\ (\text{mol/L})$

これらの値を，⑥ 式に代入すると，

$$[OH^-] = \frac{0.15}{0.15}\times2.0\times10^{-5} = 2.0\times10^{-5}\ (\text{mol/L})$$

$$[H^+] = \frac{K_w}{[OH^-]} = \frac{1.0\times10^{-14}}{2.0\times10^{-5}} = \frac{1}{2}\times10^{-9}\ (\text{mol/L})$$

$$\therefore\ \text{pH} = -\log_{10}(2^{-1}\times10^{-9}) = 9+\log_{10}2 = 9.30 \fallingdotseq 9.3$$

問 5　(1)　1.0×10^{-3} mol/L の Zn^{2+} を含む水溶液に NH_3 を加えていくと，$Zn(OH)_2$ の沈殿が生じる。

$$Zn^{2+} + 2OH^- \rightleftarrows Zn(OH)_2$$

沈殿が生じ始めるとき，$[Zn^{2+}] = 1.0\times10^{-3}$ mol/L であり，

$K_{sp} = [Zn^{2+}][OH^-]^2 = 4.0\times10^{-17}$ (mol/L) だから，

$$[OH^-] = \sqrt{\frac{K_{sp}}{[Zn^{2+}]}} = \sqrt{\frac{4.0\times10^{-17}}{1.0\times10^{-3}}} = 2.0\times10^{-7}\ (\text{mol/L})$$

$$[H^+] = \frac{1.0\times10^{-14}}{2.0\times10^{-7}} = \frac{1}{2}\times10^{-7}\ (\text{mol/L})$$

$$\therefore\ \ pH = -\log_{10}(2^{-1}\times10^{-7}) = 7+\log_{10}2 = 7.3$$

(2)　さらに NH_3 を加えていくと，$Zn(OH)_2$ は錯イオンを形成して溶解する。

$$Zn(OH)_2 + 4NH_3 \longrightarrow [Zn(NH_3)_4]^{2+} + 2OH^-$$

このとき，次の ⑨ 式および ② 式の平衡が成り立っている。

$$Zn^{2+} + 4NH_3 \rightleftarrows [Zn(NH_3)_4]^{2+} \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^- \qquad \cdots\cdots ②$$

ここでは，Zn^{2+} と NH_4Cl を含む水溶液に NH_3 を加えて pH が 9.0 になったので，この溶液は緩衝液である。（**問 4** (2) 参照）

加えた NH_3 は，NH_3 分子または $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ の配位子として溶液中に存在していると考えてよい。したがって，溶液中の各々の物質量を求めて合計すれば，加えた NH_3 の物質量が求まる。

(i)　まず，溶液中の $[NH_3]$ を求める。

$[NH_4^+] = 0.10$ mol/L，$[OH^-] = 1.0\times10^{-5}$ mol/L だから，③ 式より，

$$[NH_3] = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{K_b} = \frac{0.10\times1.0\times10^{-5}}{2.0\times10^{-5}} = 5.0\times10^{-2}\ (\text{mol/L})$$

(ii)　次に，$[[Zn(NH_3)_4]^{2+}]$ を求めて，配位子としての NH_3 の物質量を求める。

Zn^{2+} の総量は 1.0×10^{-3} mol だから，

$$[Zn^{2+}] + [[Zn(NH_3)_4]^{2+}] = 1.0\times10^{-3}$$

であるが，次の ⑩ 式を変形すると，

$$K = \frac{[[Zn(NH_3)_4]^{2+}]}{[Zn^{2+}][NH_3]^4} = 1.0\times10^9 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$$\frac{[[Zn(NH_3)_4]^{2+}]}{[Zn^{2+}]} = K[NH_3]^4 = 1.0\times10^9\times(5.0\times10^{-2})^4 = 6.25\times10^3$$

よって，$[[Zn(NH_3)_4]^{2+}] \gg [Zn^{2+}]$ であり，Zn^{2+} はそのほとんどすべてが $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ として存在すると考えてよいので，

$$[[Zn(NH_3)_4]^{2+}] \fallingdotseq 1.0\times10^{-3}\ (\text{mol/L})$$

したがって，$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ に配位子として含まれる NH_3 の物質量は，

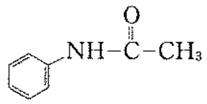
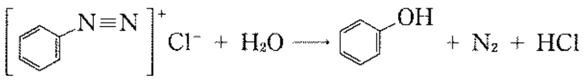
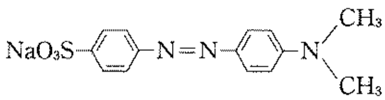
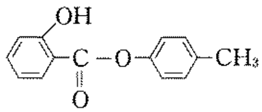
$$1.0\times10^{-3}\times4\times1.0 = 4.0\times10^{-3}\ (\text{mol})$$

(i) と (ii) より，加えた NH_3 の物質量は，

$$5.0\times10^{-2}\times1.0+4.0\times10^{-3} = 5.4\times10^{-2}\ (\text{mol})$$

5 【I選択者用問題】 芳香族化合物

【解答】

<table>
<tr><td rowspan="7">I</td><td rowspan="2">問1</td><td>A</td><td colspan="3">ニトロベンゼン</td><td rowspan="3">問3</td><td rowspan="3" colspan="3"></td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="3">アニリン</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>①</td><td>(ウ)</td><td>②</td><td>(カ)</td></tr>
<tr><td>問4</td><td colspan="4">(ジアゾ)カップリング</td></tr>
<tr><td>問5</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>問6</td><td colspan="2">(ウ)</td><td>問7</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>問1</td><td>Y</td><td>(ウ)</td><td>Z</td><td>(イ)</td><td>問2</td><td>5種類</td><td>問3</td><td>(1) サリチル酸 (2) (イ)</td></tr>
<tr><td>問4</td><td colspan="8"></td></tr>
</table>

【配点】 (30点)

I　問1　各2点 ×2　　問2　各1点×2　　問3　2点

　問4　2点　　問5　2点　　問6　2点　　問7　3点

II　問1　各2点×2　　問2　2点　　問3　各2点×2　　問4　3点

【出題のねらい】

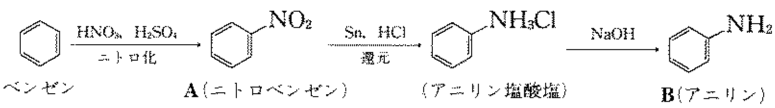
芳香族化合物の性質と反応に関する基本的な知識を確認する問題，および，芳香族化合物の構造決定の問題である。

【解説】

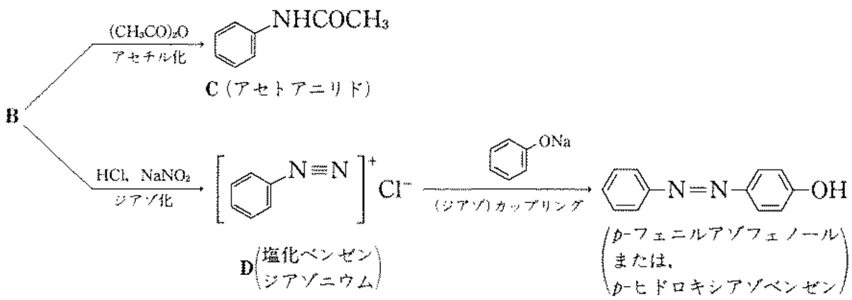
問題

I

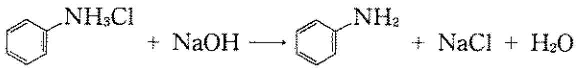
以下に，問題の反応経路図を，化合物名，反応名，反応試薬を補って示す。



【ポイント】

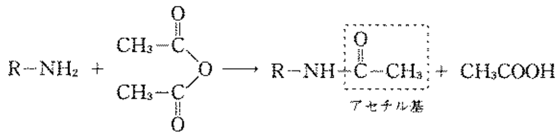


問 1，2　ベンゼンを濃硝酸，濃硫酸とともに加熱すると，ニトロベンゼンが生成する（ニトロ化）。ニトロベンゼンにスズと塩酸を反応させるとアニリンが生成する（還元）。しかし，生成したアニリンは反応液中に塩酸塩として溶けているので，これに NaOH を加えると，アニリンが得られる（弱塩基の遊離）。

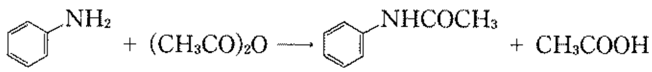


アニリンを塩酸に溶かし，亜硝酸ナトリウムを反応させると塩化ベンゼンジアゾニウムが生成する（ジアゾ化）。

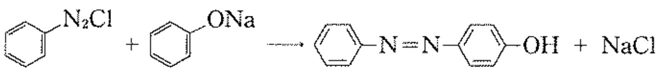
問 3　アミノ基は，アルコールやフェノール類のヒドロキシ基と同様に，無水酢酸によりアセチル化を受ける。



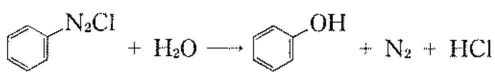
アニリンをアセチル化するとアセトアニリドが生成する。



問 4　芳香族ジアゾニウム塩が他の芳香族化合物と反応すると，アゾ化合物が生成する。この反応をカップリング（またはジアゾカップリング）といい，アゾ染料の合成に用いられる。塩化ベンゼンジアゾニウムとナトリウムフェノキシドとのカップリングにより，橙赤色の *p*-フェニルアゾフェノール（または *p*-ヒドロキシアゾベンゼン）が得られる。

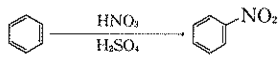


問 5　ジアゾニウム塩は熱に対して不安定であり，加温すると，次のように加水分解してフェノールに変化する。このため，ジアゾ化の反応は 5 °C 以下に氷冷して行う。

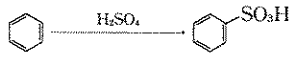


ベンゼンの置換反応

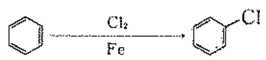
ニトロ化



スルホン化



ハロゲン化（クロロ化）



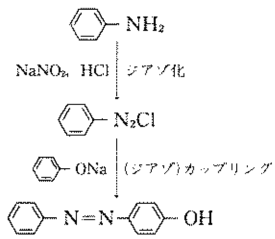
アセチル化

ヒドロキシ基やアミノ基に無水酢酸を作用させるとアセチル化され，ヒドロキシ基の場合はエステル結合が，アミノ基の場合はアミド結合が形成される。

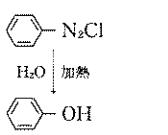
$$\mathrm{ROH} \xrightarrow{(\mathrm{CH_3CO})_2\mathrm{O}} \mathrm{ROCOCH_3}$$

$$\mathrm{RNH_2} \xrightarrow{(\mathrm{CH_3CO})_2\mathrm{O}} \mathrm{RNHCOCH_3}$$

ジアゾ化，（ジアゾ）カップリング



ジアゾニウム塩の加水分解

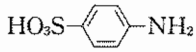


問6 (ア) 正しい。アニリンは特有のにおいをもつ液体の化合物である。

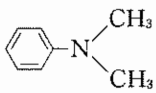
(ウ) 誤り。 アニリンは塩基だから$NaHCO_3$とは反応しない。$NaHCO_3$と反応して気体CO_2が発生するのはカルボン酸のように炭酸より強い酸である。

(イ), (エ) いずれも正しい。アニリンは酸化されやすく，さらし粉水溶液を加えると赤紫色を呈する。また，硫酸酸性の$K_2Cr_2O_7$水溶液を加えると黒色のアニリンブラックが生成する。

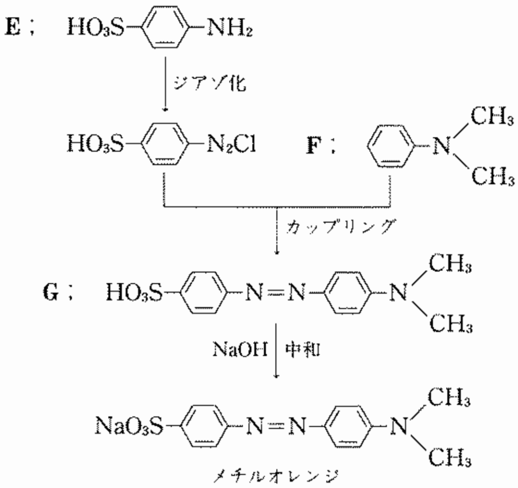
問7 分子式$C_6H_7NO_3S$の**E**はベンゼンのパラ二置換体で，ジアゾ化したのちにカップリングが起こるので，ベンゼン環に直接結合したNH_2をもち，示性式は$X\text{-}C_6H_4\text{-}NH_2$と書ける。もう一つの置換基Xは，分子式から$SO_3H$（スルホ基）と決まり，**E**の構造は次のように決まる。

E； 

分子式$C_8H_{11}N$の**F**はベンゼンの一置換体で，メチル基を2個もつことから，その構造は次のように決まる。

F； 

したがって，メチルオレンジの合成経路は次のようになると考えられる。なお，カップリングが**F**のパラ位で起こることは，塩化ベンゼンジアゾニウムとナトリウムフェノキシドとのカップリングから類推できる。



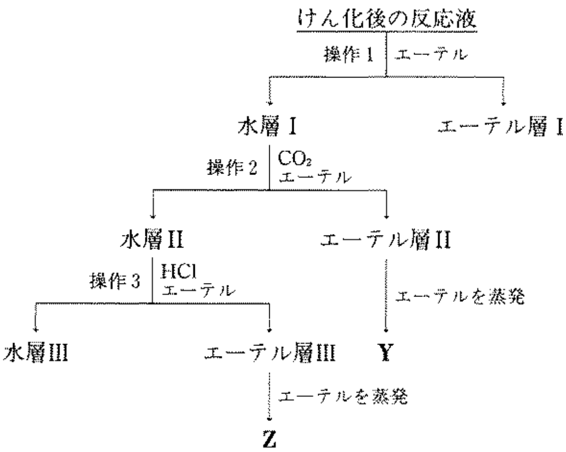
II

問1　芳香族化合物**X**を加水分解すると芳香族化合物**Y**と**Z**が得られるから，**X**はエステルと考えられる。エステルをNaOH水溶液で加水分解(けん化)すると，カルボン酸のNa塩とアルコール(フェノール類の場合はNa塩)が生じる。

$$\mathrm{RCOOR'} + \mathrm{NaOH} \longrightarrow \underset{\text{カルボン酸のNa塩}}{\mathrm{RCOONa}} + \underset{\text{アルコール}}{\mathrm{R'OH}}$$

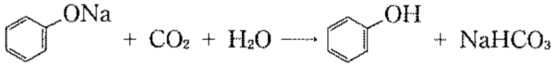
$$\mathrm{RCOOR'} + 2\,\mathrm{NaOH} \longrightarrow \underset{\text{カルボン酸のNa塩}}{\mathrm{RCOONa}} + \underset{\text{フェノール類のNa塩}}{\mathrm{R'ONa}} + \mathrm{H_2O}$$

(操作1)～(操作3)の分離操作を図示すると，次のように整理できる。

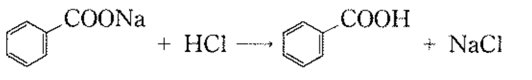


操作1で，**Y**も**Z**もエーテル層Iに抽出されずに水層Iに残ったことから，**Y**も**Z**も酸性物質で，水層I中でNa塩として存在していることがわかる。

操作2で，CO_2を吹き込んだ後，**Y**がエーテル層IIに抽出されたことから，**Y**は炭酸より弱い酸(フェノール類)であり，エーテル層IIに抽出されなかった**Z**は炭酸より強い酸であることがわかる。 CO_2を吹き込んだときに起こる反応を，フェノールを例にして記すと，次のようになる。



さらに，操作3で，HClを加えた後，**Z**がエーテル層IIIに抽出されたことから，**Z**はカルボン酸であることがわかる。HClを加えたときに起こる反応を，安息香酸を例にして記すと，次のようになる。



エステルの加水分解

エステルを酸または塩基を用いて加水分解するとカルボン酸(またはその塩)とアルコールまたはフェノール類(またはその塩)が得られる。

【例】酢酸メチルの加水分解

(酸を用いた場合)

$$\mathrm{CH_3COOCH_3} + \mathrm{H_2O} \longrightarrow \mathrm{CH_3COOH} + \mathrm{CH_3OH}$$

(塩基を用いた場合)…けん化という

$$\mathrm{CH_3COOCH_3} + \mathrm{NaOH} \longrightarrow \mathrm{CH_3COONa} + \mathrm{CH_3OH}$$

有機化合物の分離

①一般に有機化合物(特に芳香族化合物)は水に溶けにくい。

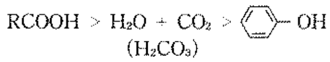
②酸性物質(カルボン酸，フェノール類)は塩基性の水溶液に，塩となって溶ける。

塩基性物質(アミン)は酸性の水溶液に，塩となって溶ける。

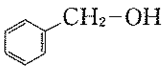
③弱酸の塩の水溶液により強い酸を加えると，弱酸が遊離し，水に溶けなくなる。

弱塩基の塩の水溶液により強い塩基を加えると，弱塩基が遊離し，水に溶けなくなる。

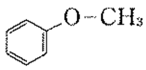
酸の強さ



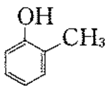
問 2　分子式 C_7H_8O の芳香族化合物には次の 5 種類がある。



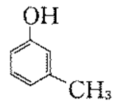
ベンジルアルコール



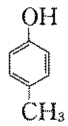
メチルフェニルエーテル



o-クレゾール

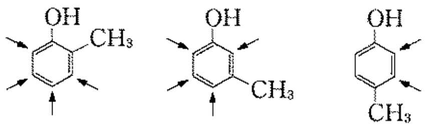


m-クレゾール



p-クレゾール

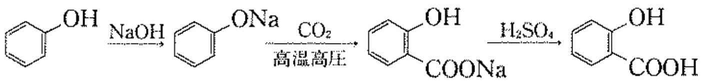
分離操作から **Y** はフェノール類だから，3 種類のクレゾールのうちのどれかである。これらのベンゼン環の H 原子を Br 原子で置換するとき，Br が置換する位置を矢印で表すと，以下のようになる。



4 種類　　4 種類　　2 種類

Y のベンゼン環の H 原子 1 個を Br 原子で置換して得られる化合物が 2 種類であることから，**Y** は *p*-クレゾールであるとわかる。

問 3　(1)　フェノールから次のようにして合成される **Z** はサリチル酸である。



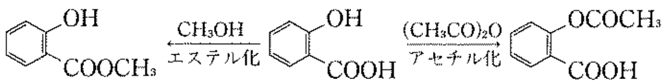
フェノール　　ナトリウムフェノキシド　　サリチル酸ナトリウム　　**Z**（サリチル酸）

(2)　(ア)　サリチル酸は常温常圧で固体の化合物である。

(イ)　フェノール類に $FeCl_3$ 水溶液を加えると特有の呈色反応（赤紫～青紫色）を示す。サリチル酸もフェノール性ヒドロキシ基をもっている。

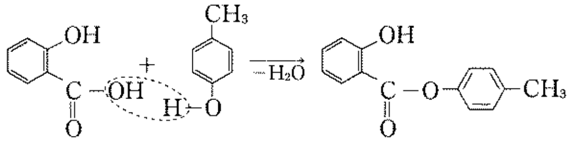
(ウ)　サリチル酸と無水酢酸を反応させる（アセチル化）と，解熱鎮痛剤に用いられるアセチルサリチル酸が得られる。アセチルサリチル酸は常温常圧で固体である。

(エ)　サリチル酸にメタノールと硫酸を作用させる（エステル化）と，消炎塗布薬に用いられるサリチル酸メチルが得られる。サリチル酸メチルは常温常圧で液体である。



サリチル酸メチル　　サリチル酸　　アセチルサリチル酸

問 4　**X** は **Y**（p-クレゾール）と **Z**（サリチル酸）からなるエステルだから，次に示す構造である。



Z　　**Y**　　**X**

6 【Ⅰ選択者用問題】 窒素の単体と化合物

【解答】

問1	あ	(オ)	い	(ウ)	う	(ケ)	え	(コ)	問2	構造式	H−N−H │ H	形	(ウ)	問3	(エ)
問4	$NH_3 < NO < NO_2 < HNO_3$								問5	(エ)					
問6	$NH_4NO_2 \longrightarrow N_2 + 2H_2O$														
問7	$4HNO_3 \longrightarrow 4NO_2 + O_2 + 2H_2O$														
問8	$3Ag + 4HNO_3 \longrightarrow 3AgNO_3 + NO + 2H_2O$											問9	7.1×10^{-1} L		

【配点】 (25点)

問1 各1点×4 **問2** 構造式 2点, 形 2点

問3 2点 **問4** 2点 **問5** 2点 **問6** 2点

問7 3点 **問8** 3点 **問9** 3点

【出題のねらい】

窒素の単体と化合物の反応や性質に関する基本的な知識を問う問題である。

【解説】 問題

問1 窒素は周期表の第2周期の15族の元素であり，N原子の価電子の数は5個である。N_2は大気中に体積パーセントで約78%含まれており，工業的には液体空気の分留によって得られる。

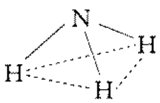
NH_3の工業的製法はハーバー・ボッシュ法とよばれ，N_2とH_2を触媒を用いて高温・高圧下で反応させてつくられる。

$$N_2 + 3H_2 \rightleftarrows 2NH_3$$

問2 NH_3の構造式は次のように表され，分子の形は三角錐形である。

H−N−H
　│
　H

構造式



分子の形(三角錐形)

問3 NH_3は無色，刺激臭の空気よりも軽い気体(分子量17)であり，水によく溶け，水溶液は弱塩基性を示す。また，HClに触れるとNH_4Clの白煙を生じる。

$$NH_3 + HCl \longrightarrow NH_4Cl$$

問4 各化合物中における窒素原子の酸化数は次のとおりである。

$\underset{-3}{\underline{N}H_3}$ $\underset{+2}{\underline{N}O}$ $\underset{+4}{\underline{N}O_2}$ $\underset{+5}{H\underline{N}O_3}$

【ポイント】

アンモニアの性質

①無色・刺激臭の空気よりも軽い気体である。

②水によく溶け，水溶液は弱塩基性を示す。

③塩化水素に触れると，塩化アンモニウムの白煙を生じる。

問5　NO は無色の気体，NO_2 は赤褐色・刺激臭の気体である。

問6　N_2 は，実験室では NH_4NO_2 の水溶液を加熱してつくることができる。

$$NH_4NO_2 \longrightarrow N_2 + 2H_2O$$

問7　HNO_3 は光や熱によって次式のように分解するので，褐色の瓶に入れて冷暗所で保存する必要がある。

$$4HNO_3 \longrightarrow 4NO_2 + O_2 + 2H_2O$$

問8　水素よりイオン化傾向の小さい金属である銀は，希硫酸とは反応しないが，酸化作用がある希硝酸とは次のように反応する。

$$Ag \longrightarrow Ag^+ + e^- \quad \cdots\cdots(\mathrm{i})$$

$$HNO_3 + 3H^+ + 3e^- \longrightarrow NO + 2H_2O \quad \cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

(i)×3+(ii) より，

$$3Ag + HNO_3 + 3H^+ \longrightarrow 3Ag^+ + NO + 2H_2O$$

両辺に $3NO_3^-$ を加えると，次の化学反応式が得られる。

$$3Ag + 4HNO_3 \longrightarrow 3AgNO_3 + NO + 2H_2O$$

問9　オストワルト法では次の3段階の反応によって HNO_3 を製造する。

$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O \quad \cdots\cdots(1)$$

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$3NO_2 + H_2O \longrightarrow 2HNO_3 + NO \quad \cdots\cdots(3)$$

$\{(1)+(2)\times3+(3)\times2\}\times\dfrac{1}{4}$ より，反応式を一つにまとめると，次の (4) 式のようになる。

$$NH_3 + 2O_2 \longrightarrow HNO_3 + H_2O \quad \cdots\cdots(4)$$

(4) 式より，NH_3 1 mol から HNO_3（分子量 63）1 mol が生じることがわかる。よって，得られる濃硝酸の体積を V〔L〕とすると，

$$\frac{224}{22.4} = \frac{1.4\times V\times10^3\times\dfrac{63}{100}}{63} \qquad \therefore \quad V = 0.714 \fallingdotseq 0.71\,(\mathrm{L})$$

一酸化窒素の性質

①水に溶けにくい無色の気体である。
②空気に触れると，二酸化窒素に変化する。

二酸化窒素の性質

①赤褐色・刺激臭の気体で，水に溶けやすい。
②水と反応して，硝酸を生じる。

硝酸の性質

①揮発性の酸である。
②水に溶けて，強酸性を示す。
③光や熱によって分解する。
④酸化作用を示す。

7 【I選択者用問題】 小問集合

【解答】

I	問1	1.11×10^3 kJ	問2	3C(黒鉛) + $4H_2$(気) = C_3H_8(気) + Q kJ	問3	106			
II	問4	ア	塩化カルシウム	イ	ソーダ石灰	記号	イ		
	問5	炭素	1.92 g	酸素	0.32 g	問6	$C_8H_{10}O$		
III	問7	青	問8	31 g	問9	化学式	CuO	質量	5.5 g

【配点】 (25点)

I　**問1**　2点　**問2**　2点　**問3**　3点

II　**問4**　各1点×3　**問5**　各2点×2　**問6**　2点

III　**問7**　2点　**問8**　3点　**問9**　化学式　1点，　質量　3点

【出題のねらい】

熱化学方程式，元素分析，水和水をもつ結晶に関する基本的知識や計算について確認する問題である。

【解説】

問題

I

問1　③式より，C_3H_8(気)の燃焼熱は 2220 kJ/mol だから，

$$2220\times\frac{11.2}{22.4}=1110=1.11\times10^3\ (\mathrm{kJ})$$

問2，3　生成熱は化合物 1 mol がその成分元素の単体から生成するときの反応熱である。C_3H_8(気)の生成熱を Q〔kJ/mol〕とすると，

$$3\mathrm{C}(黒鉛)+4H_2(気)=C_3H_8(気)+Q\ \mathrm{kJ} \quad \cdots\cdots ④$$

④＝①×3＋②×4－③より，

$$Q=394\times3+286\times4-2220=106\ (\mathrm{kJ/mol})$$

【別解】

(反応熱)＝(生成物の生成熱の総和)－(反応物の生成熱の総和)より，

$$2220=394\times3+286\times4-Q \qquad \therefore\quad Q=106\ (\mathrm{kJ/mol})$$

II

問4　C，H，O からなる有機化合物を完全燃焼させると，CO_2 と H_2O が生成する。与えられた物質群のうち，CO_2 を吸収するのはソーダ石灰(CaO と $NaOH$ の混合物)のみであり，H_2O を吸収するのはソーダ石灰，濃硫酸，塩化カルシウムであるが，濃硫酸は液体だから図にあるようなU字管では用いることができない。

CO_2 と H_2O の質量をそれぞれ別々に測定するために，図の**ア**には塩化カルシウムを，**イ**にはソーダ石灰を入れる。これに燃焼後の混合気体を通すと，**ア**では H_2O が吸収され，**イ**では CO_2 が吸収される。順序を逆にすると先に通るソーダ石灰の方に H_2O

【ポイント】

主な反応熱

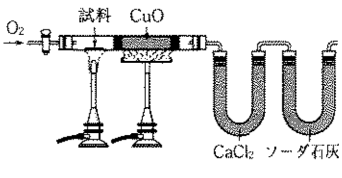
燃焼熱：物質 1 mol が完全燃焼するときに発生する熱

生成熱：物質 1 mol が成分元素の最も安定な単体から生成するときの反応熱

ヘスの法則

反応熱は反応の経路によらず，反応の最初と最後の物質の種類と状態によって決まる。

元素の定量分析



C，H，O からなる有機化合物(組成式：$C_xH_yO_z$) W〔g〕中の C，H の質量をそれぞれ w_C，w_H〔g〕とすると，

$$\mathrm{C}:\mathrm{H}:\mathrm{O}=\frac{w_C}{12}:\frac{w_H}{1.0}:\frac{W-(w_C+w_H)}{16}$$

と CO_2 の両方が吸収されてしまうため，不適である。

問 5　有機化合物 **A** 中の C がすべて CO_2(分子量 44)に変化するので，

$$\text{C の質量}: 7.04\times\frac{12}{44} = 1.92\,(\text{g})$$

同様に，有機化合物 **A** 中の H がすべて H_2O(分子量 18)に変化するので，

$$\text{H の質量}: 1.80\times\frac{2\times1.0}{18} = 0.20\,(\text{g})$$

また，有機化合物 **A** 中の C と H を除いた分の質量が O の質量であるから，

$$\text{O の質量}: 2.44-(1.92+0.20) = 0.32\,(\text{g})$$

問 6　有機化合物 **A** 中の各原子数の比は，

$$\text{C}:\text{H}:\text{O} = \frac{1.92}{12}:\frac{0.20}{1.0}:\frac{0.32}{16} = 8:10:1$$

分子量が 150 以下であることから，分子式は $C_8H_{10}O$ (分子量 122) と決まる。

III

問 7　$CuSO_4\cdot5H_2O$ の結晶は青色であり，$CuSO_4$ の無水物は白色の粉末である。

問 8　質量パーセント濃度が 20.0％の $CuSO_4$ 水溶液 100 g 中に含まれる $CuSO_4$ は，

$$100\times\frac{20.0}{100} = 20.0\,(\text{g})$$

$CuSO_4$，$CuSO_4\cdot5H_2O$ の式量は，それぞれ 160，250 であるから，$CuSO_4\cdot5H_2O$ の結晶が x〔g〕得られるとすると，

$$x\times\frac{160}{250} = 20.0 \qquad \therefore\ x = 31.2 \fallingdotseq 31\,(\text{g})$$

質量パーセント濃度(%)

$$\frac{\text{溶質の質量〔g〕}}{\text{溶液の質量〔g〕}}\times100(\%)$$

問 9　$CuSO_4\cdot5H_2O$ を加熱していくと，まず水和水が失われて $CuSO_4$ に変化する。さらに加熱し続けると $CuSO_4$ が分解し，黒色の酸化銅(II) CuO になる。

$$\underset{(\text{式量 }250)}{CuSO_4\cdot5H_2O} \xrightarrow{\text{約 }250^\circ\text{C}} \underset{(\text{式量 }160)}{CuSO_4} \xrightarrow{\text{約 }600^\circ\text{C}} \underset{(\text{式量 }80)}{CuO}$$

$CuSO_4\cdot5H_2O$ 25.0 g を加熱して得られる $CuSO_4$ の質量は，

$$25.0\times\frac{160}{250} = 16.0\,(\text{g})$$

であり，これが $CuSO_4$ と CuO の混合物 10.5 g に変化したから，混合物中に含まれる CuO の質量を y〔g〕とすると，

$$CuSO_4\quad 16.0\,\text{g} \longrightarrow \begin{cases} CuSO_4 & 10.5-y\,\text{〔g〕} \\ CuO & y\,\text{〔g〕} \end{cases}$$

Cu の物質量は変化しないので，これに着目して，

$$\frac{16.0}{160} = \frac{10.5-y}{160}+\frac{y}{80} \qquad \therefore\ y = 5.5\,(\text{g})$$

【別解】

一連の変化は，次のように考えることができる。

$$CuSO_4 \cdot 5H_2O \xrightarrow[250°C]{\nearrow 5H_2O} CuSO_4 \xrightarrow[600°C]{\nearrow SO_3} CuO$$

すなわち，$CuSO_4$ を加熱すると，SO_3(式量 80)に相当する分が失われ，CuO(式量 80)に変化すると考えることができる。$CuSO_4$ 16.0 g をさらに加熱して，10.5 g の固体が得られたので，この質量の差が失われた SO_3 の質量である。式量が等しい CuO と SO_3 が 1：1 の物質量比で得られるから，混合物中に含まれる CuO の質量は，失われた SO_3 の質量に等しい。

$16.0 - 10.5 = 5.5\,(g)$

生　物

1 【共通問題】植物の反応

【解答】

問1	1	傾性	2	極性	3	頂芽優勢	4	インドール酢酸

問2	エ　カ　キ
問3 (1)	イ
問3 (2)	ジベレリンが糊粉層に作用してアミラーゼの合成を誘導し，アミラーゼは胚乳のデンプンを分解して糖にする。(50字)
問4 (1)	オ
問4 (2)	(i) ア　(ii) ウ　(iii) イ
問4 (3)	ジベレリンと結合したタンパク質Xによって，タンパク質Yによる伸長成長の抑制が解除されて，茎の伸長成長が促進される。(57字)

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　各1点×3(順不同)，　問3　(1)　2点　(2)　4点

問4　(1)　2点　(2)　各1点×3　(3)　3点

【出題のねらい】

植物ホルモンに関する知識問題と，ジベレリンによる茎の伸長促進に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　植物の刺激に対する屈曲反応として，刺激源に近づく，あるいは遠ざかるような，刺激の方向に対して一定の方向に屈曲する屈性と，刺激の方向とは無関係に一定の方向に屈曲する傾性が知られている。茎の光屈性にはオーキシンが関与しており，植物の芽ばえに片側から光が当たると，茎の先端部で合成されたオーキシンが光の当たらない側に横移動した後，先端部から基部方向に移動すると考えられている。この結果，光の当たらない側の伸長成長が促進され，茎が光の方向に屈曲する。このときのオーキシンの先端部から基部方向への移動は重力によるものではなく，方向性の決まった移動で，極性移動と呼ばれている。また，頂芽による側芽の成長の制御にもオーキシンは関与しており，頂芽で合成されたオーキシンが側芽に移動して，側芽の成長を抑制する。この現象を頂芽優勢という。なお，植物体に含まれている天然オーキシンはインドール酢酸(IAA)と呼ばれる物質であり，これと同じ作用をもつ人工オーキシンとしてナフタレン酢酸(NAA)や2, 4−Dがある。

問2　植物ホルモンにはオーキシン，ジベレリン，サイトカイニン，アブシシン酸，エチレンなどがあり，各植物ホルモンはさまざまな作用をもっている。ジベレリンの代表的な作用は，茎の伸

【ポイント】

屈性
刺激に対し方向性をもつ屈曲反応

傾性
刺激に対し方向性をもたない反応

オーキシン
茎の伸長促進
頂芽優勢
天然オーキシンは**インドール酢酸**

ジベレリン
茎の伸長促進
種子の発芽促進

長促進，種子の発芽促進などで，気孔を開かせる作用や花芽形成を促進する作用はもたないので，アとイはともに誤りである。なお，茎頂の未分化な芽に作用して花芽形成を促進するのはフロリゲンである。サイトカイニンは気孔を開かせる作用や細胞分裂を促進する作用をもつので，ウは誤りで，エは正しい。なお，気孔を閉じさせる作用をもつのはアブシシン酸である。アブシシン酸は花芽形成を抑制する作用はもたず，種子の発芽を抑制する作用をもつので，オは誤りで，カは正しい。なお，葉で合成されて花芽形成を抑制する植物ホルモンは見つかっていない。エチレンは気体状の植物ホルモンで，果実の成熟を促進するので，キは正しい。葉柄の基部に離層と呼ばれる特殊な細胞層ができると落葉が起こる。落葉を促進する作用をもつエチレンは，離層の形成を抑制するのではなく促進するので，クは誤りである。

サイトカイニン
細胞分裂の促進
気孔を開かせる

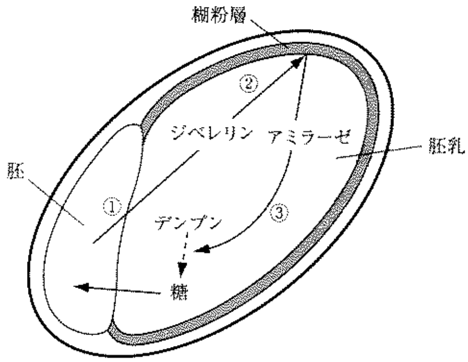
アブシシン酸
気孔を閉じさせる
種子の休眠維持

エチレン
離層形成の促進
果実の成熟促進
気体である

問 3 (1)　植物の種子の発芽には，酸素，水，適当な温度が必要であるが，二酸化炭素は必要ない。よって，イが誤りである。なお，これらの3つの条件に加え，発芽に光を必要とする種子があり，このような種子を光発芽種子と呼ぶ。

種子の発芽に必要な条件
水分，温度，酸素

(2)　ジベレリンは種子の発芽を促進する。イネやムギの種子では，下図に示すように，①胚でジベレリンが合成されると，②ジベレリンは胚乳の外側にある糊粉層に作用してアミラーゼの合成を誘導する。③アミラーゼは胚乳のデンプンを分解して糖にする。そして，生じた糖は胚に吸収され，発芽の際のエネルギー源として利用される。

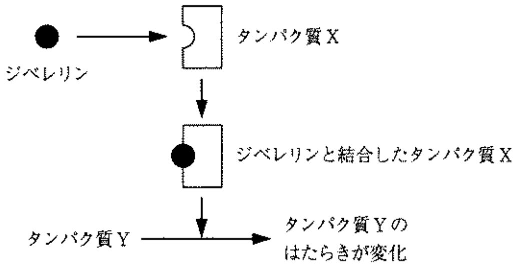


問 4 (1)　正常株を通常の条件で栽培したとき（**実験 1**）に比べ，ジベレリン合成阻害剤を加えたとき（**実験 3**）の方が草丈が低い。これは正常株にはもともとジベレリンが存在しており，**実験 3** では，このジベレリンの合成が阻害されたため，草丈が低くなったと考えられる。**実験 2** では，正常株にジベレリンを加えることで植物体内のジベレリン濃度が高くなり，正常株より伸長成長が促進されたと解釈することができる。

問題文に「ジベレリンは細胞内に存在するジベレリン受容体で

生物

あるタンパク質Xと結合する。すると，タンパク質Xは同じ細胞内の別のタンパク質Yに作用できるようになり，タンパク質Yのはたらきを変化させ，伸長成長が促進される。」とある。この内容を図示すると次のようになる。



ア・イについて，タンパク質Yはジベレリンと結合したタンパク質Xからの作用を受けるとはたらきが変化するのであるから，タンパク質Xからの作用があるときとないときでは反応の結果が異なるはずである。したがって，ア・イは誤りである。ウについて，正常株の**実験3**の結果から，ジベレリンがないときには茎の伸長成長が促進されないことがわかる。また，上述したように，タンパク質Xはジベレリンと結合したときのみタンパク質Yに作用するので，ジベレリンがないときにはタンパク質Xからタンパク質Yへの作用はない。このとき茎の伸長成長は促進されないので，ウは誤りである。エについて，タンパク質Xからの作用があるときとは，ジベレリンと結合したタンパク質Xからの作用なので，ジベレリンのはたらきである茎の伸長成長が促進されるはずである。よって，エは誤りである。したがって，オが正しいと仮定すると，タンパク質Xからの作用がないとき，つまりジベレリンがないときには，タンパク質Yは茎の伸長成長を抑制しており，ジベレリンがあるときには，それと結合したタンパク質Xからの作用によりタンパク質Yのはたらきが変化し，茎の伸長成長を促進するようになると解釈することができる。これは正常株の**実験1～3**の結果と矛盾しない。

(2) 変異株1～3はそれぞれ，「ジベレリンを合成できない変異株」，「タンパク質Xを欠く変異株」，「タンパク質Yを欠く変異株」のいずれかである。上図に示したように，タンパク質Yはジベレリンと結合したタンパク質Xからの作用により，はたらきが変化する。3種類の変異株について，タンパク質Yの状態について注目すると，次のようになる。

「ジベレリンを合成できない変異株」では，ジベレリンと結合したタンパク質Xができないので，タンパク質Yはもとの状態のまま存在する。しかし，ジベレリンを加えれば，タンパク質Yははたらきが変化した状態になる。

「タンパク質Xを欠く変異株」では，ジベレリンを加えても，ジベレリンと結合したタンパク質Xができないので，タンパク質Yはもとの状態のまま存在する。

「タンパク質Yを欠く変異株」では，ジベレリンと結合したタンパク質Xはできるが，タンパク質Yはもとの状態のものも，はたらきが変化した状態のものもいずれも存在しない。ジベレリンを加えても同じである。

実験1～3で，各変異株に存在するタンパク質Yの状態を表にまとめると，次のようになる。

	実験1	**実験2**	**実験3**
ジベレリンを合成できない変異株	もとのタンパク質Y	変化したタンパク質Y	もとのタンパク質Y
タンパク質Xを欠く変異株	もとのタンパク質Y	もとのタンパク質Y	もとのタンパク質Y
タンパク質Yを欠く変異株	存在しない	存在しない	存在しない

3種類の変異株のうち，ジベレリンを合成できない変異株の場合だけ，タンパク質Yの状態は**実験1**と**実験3**が同じで，**実験2**が異なっている。これにより，草丈も**実験1**と**実験3**が同じで，**実験2**は異なる結果になるので，表1から変異株1がジベレリンを合成できない変異株とわかる。また，この結果から，もとのタンパク質Yのままであると，草丈が低くなり，変化したタンパク質Yになると，草丈が高くなることがわかる。このことから，タンパク質Xを欠く変異株はいずれの実験でももとのタンパク質Yのままで存在するので，いずれも草丈が低くなるはずである。よって，タンパク質Xを欠く変異株は表1から変異株3であるとわかる。タンパク質Yを欠く変異株は，草丈を低くする作用をもつタンパク質Yが存在しないので，いずれの実験でも草丈が高くなるので，表1から変異株2であることがわかる。

(3)　(1)・(2)をまとめると，正常株におけるジベレリンの作用は次のように説明できる。ジベレリンが存在しない条件下では，タンパク質Xはタンパク質Yに作用しないので，タンパク質Yのはたらきにより伸長成長が抑制されているが，ジベレリンが存在する条件下では，ジベレリンと結合したタンパク質Xがタンパク質Yに作用し，タンパク質Yによる伸長成長の抑制を解除する。これにより茎の伸長成長が促進される。

② 【共通問題】血糖量調節

【解答】

問1	1	自律	2	標的	3	グリコーゲン	
	4	ランゲルハンス島B細胞					
問2	ア	バソプレシン	イ	すい液	ウ	副腎皮質	
問3	エ						
問4	インスリンは肝臓や筋肉でのグルコースからグリコーゲンへの合成反応と，組織の細胞へのグルコースの取り込みと消費を促進する。(60字)						
問5	(1)	Y	内分泌腺の異常でインスリンの分泌量が少ない。(22字)				
		Z	組織のインスリンに対する感受性が低下している。(23字)				
	(2)	エ					

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　各1点×3，　問3　2点，　問4　4点

問5　(1)　各3点(完答)×2　(2)　2点

【出題のねらい】

ホルモン一般についての知識問題と，血糖量調節と糖尿病に関する知識問題および考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　ヒトのからだの内部環境はほぼ一定に維持されている。この恒常性を維持するために，内分泌系と自律神経系が協調してはたらいており，さまざまな調節が行われている。血糖量調節はその代表的な例である。

ホルモンは血流によって内分泌腺から全身に運ばれるが，そのホルモンの受容体をもつ特定の細胞や器官にのみ作用する。このような器官を標的器官と呼ぶ。

血糖とは血液中のグルコースのことであり，血糖濃度は健康なヒトではおよそ0.1％に保たれている。各組織は必要に応じて血糖を細胞内に取り込み，呼吸によって分解してエネルギーを生産している。空腹時に血糖量が減少すると，副腎髄質からアドレナリンが分泌される。アドレナリンは肝臓などに作用し，グリコーゲンをグルコースに分解する反応を促進して，血糖量を増加させる。また，食後に血糖量が増加したときには，すい臓のランゲルハンス島のB細胞からインスリンが分泌され，血糖量を減少させる。

問2　表の空欄をうめると次ページのようになる。

【ポイント】

標的器官

ホルモンが作用する特定の器官で，その細胞には特定のホルモンと結合する**受容体**が存在する。

すい臓のランゲルハンス島
A細胞…**グルカゴン**を分泌
B細胞…**インスリン**を分泌

ホルモンの名称	内分泌腺	はたらき
(バソプレシン)	脳下垂体後葉	腎臓における水の再吸収を促進する。
セクレチン	十二指腸	(すい液)の分泌を促進する。
鉱質コルチコイド	(副腎皮質)	腎臓における Na^+ の再吸収を促進する。

バソプレシンは間脳視床下部の神経分泌細胞で合成され，軸索を通って脳下垂体後葉から分泌されるホルモンで，腎臓の集合管での水の再吸収を促進し，体液の浸透圧を低下させる。セクレチンは最初に発見されたホルモンで，胃からの食物とともに塩酸(胃液)が十二指腸に送られると，この刺激により十二指腸から分泌され，すい臓に作用してすい液の分泌を促進する。鉱質コルチコイドは体液の浸透圧が低下したときに副腎皮質から分泌されるホルモンで，腎臓の細尿管(腎細管)での Na^+ の再吸収を促進し，体液の浸透圧を上昇させる。

問 3　すい臓は，ランゲルハンス島のA細胞からグルカゴン，B細胞からインスリンを血液中に分泌する内分泌腺であると同時に，消化液であるすい液を十二指腸に分泌する。後述のように，消化液を分泌する消化腺は外分泌腺であるので，アは正しい。間脳視床下部はホルモン分泌の調節中枢である。ここでは脳下垂体前葉のホルモンの分泌を促進する放出ホルモンを合成・分泌しているので，イは正しい。外分泌腺は排出管(導管)を通して体外に物質を分泌する。外分泌腺には汗腺や消化腺があり，消化腺は消化液を消化管に分泌するが，消化管内は体外であるので，ウは正しい。内分泌腺は排出管をもたず，直接血管に物質(ホルモン)を分泌するので，エは誤りである。

問 4　インスリンの作用で特に重要なものは次の2つである。

① 肝臓や筋肉に作用し，グルコースからグリコーゲンを合成する反応を促進する。

② 全身の組織(脂肪組織など)の細胞に作用し，グルコースの取り込みと消費を促進する。

これらの作用によって血糖量は減少する。

問 5　健康なヒトでは，血糖濃度はおよそ0.1％に維持されている。そして，腎臓で尿生成が行われる際にグルコースは細尿管ですべて再吸収されるので，尿中にグルコースが排出されることはない。しかし，糖尿病患者では一般に尿中にグルコースが排出される症状がみられる。これは，細尿管で再吸収されるグルコースの量には限度があるため，何らかの原因で血糖量が高い状態が続くと，グルコースが再吸収しきれずに尿中に排出されるようになるためである。

バソプレシン(脳下垂体後葉)
腎臓における水の再吸収を促進する。

セクレチン(十二指腸)
すい液の分泌を促進する。

鉱質コルチコイド(副腎皮質)
腎臓における Na^+ の再吸収を促進する。

内分泌腺
排出管がなく，直接血管に分泌する。

外分泌腺
排出管があり，体外に分泌する。

インスリンの作用：血糖量の減少
グリコーゲンの合成を促進する。
組織の細胞へのグルコースの取り込みと消費を促進する。

健康なヒトの血糖濃度はおよそ0.1％に維持されている。

(1) 健康なヒトでは，食後やグルコース摂取後には急速に血糖量が増加するが，インスリンの分泌量が増大してその作用により血糖量は減少していき，グルコースを摂取した2時間後には血糖量はほぼもとのレベルに戻る。

図1は時間経過を描いたグラフではなくグルコースを摂取した2時間後の結果であり，横軸が血糖濃度(%)，縦軸が血液中のインスリン濃度であることに注意しよう。3人のヒトX，Y，Zのうち，健康なヒトは血糖濃度が0.1%のXであることがわかり，Xの値が基準となる。YとZはともにグルコースを摂取した2時間後でも血糖濃度が高いままであるので，糖尿病患者である。Yは，血糖濃度はXの約4倍であるがインスリン濃度が著しく低い。これは，内分泌腺に異常があり，インスリンの分泌量が不足しているために血糖量を減少させることができないことが原因であると考えられる。Zは，Xと比べてインスリン濃度は4倍以上であるのに，血糖濃度は約3倍の0.3%で高いままである。これは，インスリンの標的細胞である組織の細胞のインスリンに対する感受性が低下していることが原因であると考えられる。すなわち，標的細胞の受容体にインスリンが結合できない，あるいは結合してもその後の細胞内での反応が起こらないことなどが考えられる。

糖尿病の原因
インスリンの分泌量不足
標的細胞の感受性低下

(2) すい臓のランゲルハンス島からは血糖量を増加させる作用のあるグルカゴンも分泌される。グルカゴンは肝臓などに作用し，グリコーゲンをグルコースに分解する反応を促進する。健康なヒトでは，インスリンとグルカゴンの分泌は拮抗的である。グルコースの摂取により血糖量が増加すると，グルカゴンの分泌量は減少するが，インスリンの分泌量は増加する。インスリンの作用により血糖量がしだいにもとに戻ると，グルカゴンの分泌量もしだいに増加してもとに戻る。したがって，グルカゴン濃度の変化はエのようになると考えられる。

グルカゴンの作用：血糖量の増加
インスリンと拮抗的に分泌される。

3 【I・II選択者用問題】遺伝子

【解答】

問1	1	二重らせん	2	半保存	3	リボソーム	4	アンチコドン
問2	糖の種類が，RNA ではリボースであるが，DNA ではデオキシリボースである。(37字)							
問3	短い一本鎖 DNA 断片が多くなる。(16字)							
問4	(1)	GTGCAC	(2)(i)	イ	(ii)	エ		
問5	(1)	リシン						
	(2)	6番目のアミノ酸が，正常遺伝子ではグルタミン酸であるが，鎌状赤血球貧血症遺伝子ではバリンである。(48字)						

【配点】(25点)

問1 各2点×4， 問2 3点， 問3 2点

問4 (1) 2点 (2)(i) 2点 (ii) 3点， 問5 (1) 2点 (2) 3点

【出題のねらい】

DNA の構造と遺伝情報の発現に関する知識問題と，DNA の塩基配列を決定する方法に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1 DNA は，塩基，糖，リン酸からなるヌクレオチドを構成単位とし，2本のヌクレオチド鎖が相補的な塩基間(A と T，G と C)で水素結合し，これがらせん状にねじれた二重らせん構造を形成している。DNA が複製される際，まず二重らせんがほどけて部分的に一本鎖となる。この2本の一本鎖のそれぞれが鋳型となり，鋳型の塩基と相補的な塩基をもつヌクレオチドが塩基どうしで水素結合し，さらに隣り合うヌクレオチドが DNA ポリメラーゼにより結合して，新しいヌクレオチド鎖がつくられる。このように，もとの鎖と新しく合成された鎖からなる二本鎖 DNA がつくられる複製法を，半保存的複製と呼ぶ。

DNA の遺伝情報が発現する際には，まず発現する部分の DNA の二本鎖がほどけて一本鎖となり，そのうち一方の鎖を鋳型として，鋳型の塩基配列と相補的な塩基配列をもつ RNA が RNA ポリメラーゼにより合成される。この過程を転写と呼ぶ。真核生物では，この RNA がスプライシングされて伝令 RNA となり，核外に出てリボソームに付着すると，伝令 RNA の三つ組塩基であるコドンに対応するアンチコドンをもつ運搬 RNA が特定のアミノ酸を結合してリボソームに運ぶ。そして，リボソーム上でアミノ酸どうしがペプチド結合でつながることにより，タンパク質が合成される。この過程を翻訳と呼ぶ。

問2 RNA も DNA と同様に，塩基，糖，リン酸からなるヌクレオチドを構成単位としている。しかし，DNA を構成するヌクレオチドでは，塩基はアデニン(A)，グアニン(G)，シトシン(C)，

【ポイント】

半保存的複製

もとの二本鎖それぞれが鋳型となり，もとの鎖と新しく合成された鎖からなる二本鎖 DNA が2組つくられる。

リボソーム

タンパク質合成の場で，伝令 RNA の塩基配列がアミノ酸配列に翻訳される。

三つ組塩基

伝令 RNA…**コドン**

運搬 RNA…**アンチコドン**

塩基のちがい

DNA…チミン(T)

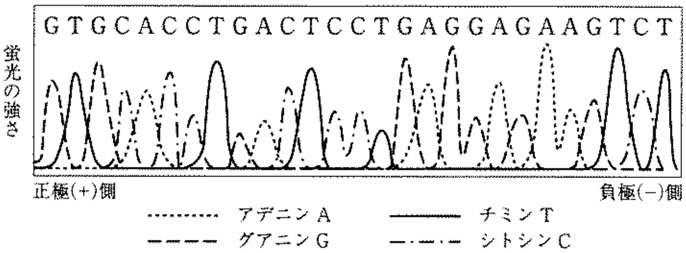
RNA…ウラシル(U)

チミン(T)の4種類であり，糖はデオキシリボースであるが，RNAを構成するヌクレオチドでは，塩基はチミン(T)のかわりにウラシル(U)であり，糖はリボースである。

糖のちがい
DNA…**デオキシリボース**
RNA…**リボース**

問3 問題文に，「この特殊なヌクレオチドは伸長中のDNA鎖に取り込まれると，その時点でDNAの合成反応が停止する。たとえば，反応液中に加えられたA'は多量にあるAと伸長中のDNA鎖に競争的に取り込まれることになるが，A'が取り込まれるとDNAの合成反応が停止する」とある。つまり反応液中のA'の濃度を増加させると，合成中のDNAにA'が取り込まれやすくなるので，合成反応は停止しやすくなり，短い一本鎖DNA断片がより多く合成されるようになる。なお，A'以外のG'，C'，T'の濃度を増加させても同様のことが起こる。

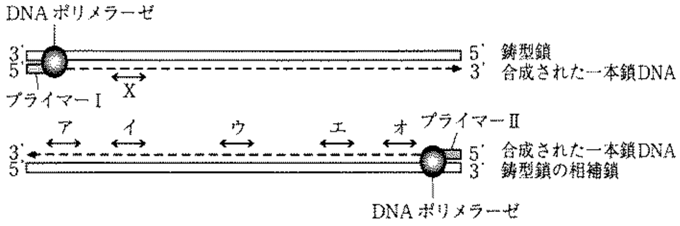
問4(1) ゲル電気泳動では，短い断片ほど移動速度が大きいので，図2では，短い一本鎖DNA断片ほど移動距離が長くなる。したがって，Xの部分では，合成した一本鎖DNA断片の5'側から3'側の塩基配列がそのまま正極(+)側から負極(−)側方向に並んでいるので，図3において左側の正極(+)側から右側の負極(−)側に蛍光を示した塩基の種類を読めば，これがXの部分の5'側から3'側の塩基配列となる。この塩基配列を表示すると次のようになる。



この初めの6つの塩基配列を答えればよいので，GTGCACとなる。

(2)(i) 図2では，正極(+)側には短いDNA断片が，負極(−)側には長いDNA断片が位置している。プライマーⅠを用いた場合には，次ページ図の上段の図の破線の矢印で示したような方向に一本鎖DNA断片が合成される。図2のレーン1のXの部分は正極(+)側にあるので，Xに相当するのは短い一本鎖DNA断片群である。一方，プライマーⅡを用いた場合，次ページ図の下段の図の破線の矢印で示したような方向に一本鎖DNA断片が合成される。レーン2の一本鎖DNA断片では，アの群が長い断片で，オの群が短い断片である。よって，レーン2のア～オの部分をプライマーⅡを用いて合成した一本鎖DNA断片にあてはめると，次のようになる。したがって，Xの部分と相補的な塩基配

列はイの部分である。



(ii) Xの部分とイの部分の塩基配列は相補的であり，Xの部分の塩基配列は図3からわかるので，両者の塩基配列は次のようになる。

Xの部分　5'—GTGCACCTGACTCCTGAGGAGAAGTCT—3'

イの部分　3'—CACGTGGACTGAGGACTCCTCTTCAGA—5'

問題文では「正極(＋)側から負極(－)側へ向かうDNAの塩基配列を答えよ」とあるので，ヌクレオチド数の少ない方から多い方，つまり5'側から3'側にイの部分の塩基配列を読めばよい。したがって，

AGACTTCTCCTCAGGAGTCAGGTGCAC

となり，エが正解である。

問5 (1) 問題文に「ヒトPの産物1の鋳型となった一本鎖DNAは伝令RNAに転写される側の鎖」とあるので，プライマーⅠで合成された塩基配列は鋳型鎖と相補的であるから，この塩基配列のチミン(T)をウラシル(U)に読み替えれば，これがそのまま伝令RNAの塩基配列となる。なお，以下の解説ではそのままチミン(T)を用いることにする。このとき合成されたアミノ酸との対応は，塩基を3つずつ区切ると以下のようになる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
GTG	CAC	CTG	ACT	CCT	GAG	GAG	AAG	TCT
バリン	ヒスチジン	ロイシン	トレオニン	プロリン	グルタミン酸	グルタミン酸	リシン	セリン

よって，AAGが指定するアミノ酸はリシンとなる。

(2) ヒトQのDNAから転写される伝令RNAの配列は，**問5**の図中の矢印の部分がヒトPと異なるので，下の塩基配列で□で囲んだ部分がAからTに変異していることになる。

GTG CAC CTG ACT CCT G$\boxed{T}$G GAG AAG TCT

つまり，6番目のグルタミン酸を指定するGAGがGTGになっている。GTGは1番目のコドンと同じであるので，これが指定するのはバリンであることがわかる。したがって，ヒトQは6番目のアミノ酸がバリンに変異していることになる。

4 【I・II選択者用問題】免疫

【解答】

問1	1	骨髄	2	ひ臓	3	胸腺	4	免疫グロブリン
問2	ウ							
問3	8.1×10^7 通り							
問4	(1)	0%	(2)	75%				
問5	ア							
問6	B細胞が抗体産生細胞に分化するには，T細胞による活性化が必要であるから。(36字)							
問7	仮説1が正しければウイルスpは増殖し，仮説2が正しければウイルスpは増殖しない。(40字) (別解)融合細胞は，仮説1が正しければ許容性に，仮説2が正しければ非許容性になる。(37字)							

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　2点，　問3　3点，　問4　(1)　2点　(2)　2点

問5　2点，　問6　3点，　問7　3点

【出題のねらい】

免疫の基本的な知識と抗体の多様性に関する計算問題，および，エイズの原因となるHIV(ヒト免疫不全ウイルス)に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　免疫で重要なはたらきをしているリンパ球はB細胞とT細胞に大別され，どちらももとになる細胞は骨髄でつくられる。B細胞は骨髄でつくられて成熟し，リンパ節やひ臓に多く分布する。T細胞は骨髄でつくられた後，胸腺に移動して分化・成熟する。

体内に侵入した異物は，マクロファージや樹状細胞に取り込まれて抗原提示される。提示された抗原をT細胞が認識して活性化されると，特定のB細胞に刺激を与える。刺激を受けて活性化されたB細胞は増殖して抗体産生細胞に分化し，抗体を分泌する。抗体は免疫グロブリンと呼ばれるタンパク質で，抗原と特異的に結合して無毒化する。

問2　病原体に感染すると，対応するリンパ球の一部が記憶細胞として残るので，アは正しい。その後，再び同じ病原体に感染した際には，記憶細胞によって二次応答が起こるので，発病を防ぐことができる。このしくみを用いて，病原性を弱めた病原体や毒性をなくした毒素であるワクチンをあらかじめ接種して記憶細胞をつくらせることで，感染症を予防することができるので，イは正しい。血清療法は，あらかじめウマなどの動物につくらせた多量の抗体を含む血清を患者に注射して病原体や毒素を不活性化する治療法であり，毒性を弱めた病原体を入れているのではないので，ウは誤りである。抗原に対する過敏な免疫反応によって，じんましんやぜんそく，目のかゆみなどの症状があらわれることが

【ポイント】

リンパ球
T細胞とB細胞があり，どちらも**骨髄**でつくられ，**リンパ節**や**ひ臓**に多く分布する。

T細胞
骨髄でつくられた後，**胸腺**で分化・成熟する。

免疫グロブリン
抗体としてはたらくタンパク質

ワクチン
病原性を弱めた病原体や毒性をなくした毒素

予防接種
あらかじめワクチンを注射して**免疫記憶**を形成し，発病を防ぐ。

あり，このような症状をアレルギーというので，エは正しい。

問3　ヒトの遺伝子の数には限りがあるが，抗原の種類は無数に存在する。B細胞が分化する過程で遺伝子の再構成が起こるので，多様な抗体を産生することが可能になる。これにより，無数に存在する抗原に対応できる。

L鎖のVおよびJの領域に含まれる遺伝子の断片はそれぞれ300個および5個である。各領域から1つずつ遺伝子の断片が選ばれて遺伝子の再構成が起こるので，L鎖の可変部をつくる遺伝子断片の組合せは $300 \times 5 = 1500$ 通りである。また，H鎖のV，D，およびJの領域に含まれる遺伝子の断片はそれぞれ300個，30個，および6個であるので，同様に，遺伝子の再構成によってH鎖の可変部をつくる遺伝子断片の組合せは $300 \times 30 \times 6 = 54000$ 通りである。したがって，可変部の立体構造を支配する遺伝子は全部で $1500 \times 54000 = 8.1 \times 10^7$ 通りとなる。すなわち，遺伝子の再構成が起こったB細胞は1種類の抗体しか産生しないが，数千万種類のB細胞が存在することになるので，多様な抗体をつくり出すことが可能である。

問4 (1)　X系統とY系統のマウスは，遺伝子型が異なるホモ接合体であるので，それぞれの遺伝子型をAAとBBとおくことにする。X系統とY系統の交配によって得られたF_1マウスの遺伝子型はABとなる。F_1マウスにX系統の皮膚片を移植した場合，移植した皮膚片に含まれる遺伝子AをF_1マウスはもっているため，移植した皮膚片はF_1マウスに自己であると認識されるので，拒絶反応は起こらず100％生着する。一方，遺伝子型がAAであるX系統に遺伝子型がABであるF_1マウスの皮膚片を移植した場合，移植した皮膚片に含まれる遺伝子BをX系統はもっていないため，移植した皮膚片はX系統に非自己であると認識されるので拒絶反応は必ず起こる。したがって，皮膚片が生着すると期待されるF_1マウスの割合は0％である。

(2)　F_1マウスどうしの交配によって得られるF_2マウスの遺伝子型の分離比は，AA：AB：BB＝1：2：1である。遺伝子型がBBであるY系統の皮膚片を遺伝子型がAAであるF_2マウスに移植した場合，遺伝子BをこのF_2マウスはもっていないため，移植した皮膚片はこのF_2マウスに非自己であると認識されるので拒絶反応が起こる。一方，Y系統の皮膚片を遺伝子型がABやBBであるF_2マウスに移植した場合，移植した皮膚片に含まれる遺伝子BをこれらのF_2マウスはもっているため，移植した皮膚片はこれらのF_2マウスに自己であると認識されるので拒絶反応は起こらない。したがって，皮膚片が生着すると期待されるのは遺伝子型がABとBBのF_2マウスであり，その割合は $\frac{3}{4}$

アレルギー
過度の免疫反応によって引き起こされる症状

各領域から1つずつ遺伝子の断片が選ばれて，遺伝子の再構成が起こる。

抗体分子を構成する2本のL鎖どうし，2本のH鎖どうしはどちらも同一のポリペプチド鎖である。

移植された皮膚片の遺伝子が自身のもつ遺伝子と同じであれば，拒絶しない。

移植された皮膚片に自身がもたない遺伝子が含まれる場合，非自己と認識して拒絶する。

×100＝75％である。

問5　体液中の抗体には関係なく，T細胞が直接抗原を排除する免疫機構は細胞性免疫と呼ばれる。細胞性免疫によって起こる反応には，臓器移植や皮膚移植の際にみられる拒絶反応の他に，結核菌に対する免疫反応がある。ツベルクリン反応は，結核菌に対して免疫記憶が成立しているかどうかを調べる検査方法である。

細胞性免疫
移植の際の拒絶反応
ツベルクリン反応　など

問6　HIVは抗原を認識するT細胞であるヘルパーT細胞に感染し，これを破壊する。**問1**の解説でも述べたように，抗原を認識したヘルパーT細胞はインターロイキンという物質を分泌して，その抗原に特異的な抗体をつくる能力をもつB細胞を刺激する。刺激されたB細胞は活性化されて増殖し，抗体産生細胞へと分化する。したがって，B細胞が抗体産生細胞に分化するには，ヘルパーT細胞から刺激を受けて活性化される必要があるので，HIVによってヘルパーT細胞が破壊されると，B細胞が抗体産生細胞へと分化できなくなり，抗体が関与する体液性免疫の機能が低下する。また，細胞性免疫で直接感染細胞などを攻撃するT細胞(キラーT細胞)は，ヘルパーT細胞から活性化されることではたらくので，ヘルパーT細胞が破壊されると，細胞性免疫の機能も低下する。

HIV(ヒト免疫不全ウイルス)
ヘルパーT細胞に感染し，これを破壊する。

B細胞が抗体産生細胞に分化するには，ヘルパーT細胞による活性化が必要である。

問7　**仮説1**が正しいと仮定すると，許容性細胞の細胞内にはタンパク質Pと同じはたらきをするタンパク質があり，非許容性細胞の細胞内にはそのようなタンパク質が存在しない。したがって，許容性細胞と非許容性細胞を融合させた融合細胞は，許容性細胞由来のタンパク質Pと同じはたらきをするタンパク質をもつため，許容性細胞と同じ表現型を示し，タンパク質Pを欠損したウイルスpでも増殖できるはずである。

一方，**仮説2**が正しいと仮定すると，非許容性細胞の細胞内にはHIVの増殖を抑えるタンパク質があり，許容性細胞の細胞内にはそのようなタンパク質が存在しない。したがって，許容性細胞と非許容性細胞を融合させた融合細胞は，非許容性細胞由来のHIVの増殖を抑えるタンパク質をもつため，非許容性細胞と同じ表現型を示し，タンパク質Pを欠損したウイルスpの増殖が抑えられるはずである。

実際には，融合細胞においてウイルスpは増殖できなかったという実験結果が得られており，**仮説2**が正しいと考えられる。さらに，このようなHIVの増殖を抑えるタンパク質を用いてHIVの増殖を抑えるための研究が行われている。

5 【Ⅰ選択者用問題】遺伝

【解答】

問1	イ	問2	(1) イ	(2) ウ	(3) エ		
問3	7種類						
問4	(1)	Aabb	(2)	AAbb	Aabb		
問5	3：5						
問6	(1)	(i)	オ	キ	(ii) サ	(2)	9：7

【配点】 (25点)

問1　2点，　問2　各2点×3，　問3　2点

問4　(1)　2点　(2)　各1点×2(順不同)，　問5　3点

問6　(1)(i)　完答3点　(ii)　2点　(2)　3点

【出題のねらい】

カイコガのまゆの色に関する遺伝を題材にして，遺伝子の相互作用および3組の遺伝子を扱った問題を出題した。

【解説】

問題

問1　問題文に「遺伝子Aはクワの葉の色素を消化管に吸収するはたらきをもつが，遺伝子aは吸収するはたらきをもたない」と記されていることから，着色まゆをつくるためには遺伝子Aをもつことが必要であることがわかる。また，「遺伝子Bは吸収された色素を体液へ移行させない」ことから，着色まゆをつくるためには遺伝子Bをもたないことが必要であることがわかる。したがって，着色まゆをつくるためには，遺伝子Aをもち，かつ遺伝子Bをもたないことが必要な条件であると判断できる。遺伝子Aをもち，遺伝子bしかもたない場合は着色まゆをつくるので，アは誤りである。遺伝子Bをもてば色素が体液へ移行せず，遺伝子A(a)に関係なく白まゆをつくるので，イは正しい。遺伝子Aと遺伝子Bを同時にもつと白まゆをつくるので，ウは誤りである。遺伝子Aか遺伝子Bのいずれか一方をもっていても，遺伝子Aをもたず遺伝子Bをもつ場合は白まゆをつくるので，エは誤りである。遺伝子Bのように，他の遺伝子のはたらきを抑制する遺伝子を抑制遺伝子という。

問2　ア～エの遺伝子型のうち，着色まゆをつくるのはイのAAbbのみなので，系統Pの遺伝子型はイであるとわかる。ア，ウ，エはそれぞれ白まゆをつくるが，このうちエのaabbは，系統Pと交配するとF_1の遺伝子型がAabbとなり，すべて着色まゆをつくる個体となるので，エは系統Qではない。また，アのAABBは，系統Pと交配するとF_1の遺伝子型がAABbとなり，F_1のつくる配偶子はAB：Ab＝1：1となるので，F_1どうしを交配したF_2では次ページの交配表に示すように，着色まゆをつくる個体：白まゆをつくる個体＝1：3となる。したがって，

【ポイント】

抑制遺伝子

他の遺伝子のはたらきを抑制する遺伝子

アは系統 Q ではない。

	AB	Ab
AB	AABB 白	AABb 白
Ab	AABb 白	AAbb 着色

ウの aaBB は，系統 P と交配すると F_1 の遺伝子型が AaBb となり，遺伝子 A (a) と遺伝子 B (b) は異なる相同染色体に存在し独立に遺伝するので，F_1 のつくる配偶子は AB：Ab：aB：ab ＝ 1：1：1：1 となる。F_1 どうしを交配した F_2 では，下の交配表 1 に示すように，着色まゆをつくる個体：白まゆをつくる個体 ＝ 3：13 となる。したがって，系統 Q はウであるとわかる。

独立の場合，AaBb のつくる配偶子は AB：Ab：aB：ab ＝ 1：1：1：1 となる。

交配表 1

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB 白	AABb 白	AaBB 白	AaBb 白
Ab	AABb 白	AAbb 着色	AaBb 白	Aabb 着色
aB	AaBB 白	AaBb 白	aaBB 白	aaBb 白
ab	AaBb 白	Aabb 着色	aaBb 白	aabb 白

上述したように，エの aabb は系統 P と交配した場合，F_1 の遺伝子型は Aabb となり，すべて着色まゆをつくる個体となる。また，F_1 のつくる配偶子は Ab：ab ＝ 1：1 となるので，F_1 どうしを交配した F_2 では，下の交配表 2 に示すように，着色まゆをつくる個体：白まゆをつくる個体 ＝ 3：1 となり，**交配 2** の結果と合致する。したがって，系統 R はエであるとわかる。

交配表 2

	Ab	ab
Ab	AAbb 着色	Aabb 着色
ab	Aabb 着色	aabb 白

問 3　上の交配表 1 から**交配 1** で生じた F_2 のうち，白まゆをつくる遺伝子型を取り出してみると，AABB，AABb，AaBB，AaBb，aaBB，aaBb，aabb の 7 種類あることがわかる。

問 4　**問 2** の解説で述べたように，系統 R の遺伝子型は aabb であり，系統 P との交配で生じた F_1 の遺伝子型は Aabb である。この F_1 どうしを交配して生じた F_2 のうち，着色まゆをつくる個体の遺伝子型は，上の交配表 2 から AAbb と Aabb の 2 種類で

ある。

問5　**交配1**で生じたF_1(AaBb)のつくる配偶子はAB：Ab：aB：ab ＝ 1：1：1：1，**交配2**で生じたF_1(Aabb)のつくる配偶子はAb：ab ＝ 1：1なので，**交配3**の結果は，下の交配表に示すように着色まゆをつくる個体：白まゆをつくる個体 ＝ 3：5となる。

	AB	Ab	aB	ab
Ab	AABb 白	AAbb 着色	AaBb 白	Aabb 着色
ab	AaBb 白	Aabb 着色	aaBb 白	aabb 白

問6(1)　問題文に「遺伝子Dをもたない場合，体液に移行した色素は絹糸をつくる器官に取り込まれず，白まゆをつくる」と記されていることから，着色まゆをつくるには遺伝子Aをもち，かつ遺伝子Bをもたず，さらに遺伝子Dをもつことが必要であることがわかる。ある白まゆをつくる系統の個体と別の白まゆをつくる系統の個体との交配によって生じたF_1が着色まゆをつくることから，その遺伝子型はA__bbD__(下線を引いた部分の遺伝子は優劣いずれでもよい)とわかる。したがって，遺伝子B(b)については，F_1が劣性ホモ(bb)になるためには，その両親はともに劣性ホモ(bb)でなければならない。次に遺伝子A(a)と遺伝子D(d)について考える。F_1は遺伝子Aと遺伝子Dをともにもつが，両親(系統)の一方が遺伝子Aと遺伝子Dをともにもつ場合，AAbbDDは着色まゆをつくる個体となるので，両親ともに「白まゆをつくる系統」であることに矛盾する。したがって，F_1の両親である白まゆをつくる2種類の系統は，一方が遺伝子Aをもつが遺伝子DをもたないAAbbdd，もう一方が遺伝子Aをもたないが遺伝子DをもつaabbDDであることがわかる。AAbbddとaabbDDの交配ではF_1の遺伝子型はAabbDdとなり，すべて着色まゆをつくることになる。また，F_1(AabbDd)と親のAAbbddを交配すると，〔AbD〕：〔Abd〕 ＝ 1：1となり，F_1(AabbDd)と親のaabbDDを交配すると，〔AbD〕：〔abD〕 ＝ 1：1となって，いずれの場合も着色まゆをつくる個体：白まゆをつくる個体 ＝ 1：1となるので，交配結果と合致する。

(2)　F_1(AabbDd)のつくる配偶子はAbD：Abd：abD：abd ＝ 1：1：1：1となるので，F_1どうしを交配すると次代は次ページの交配表に示すように，着色まゆをつくる個体：白まゆをつくる個体 ＝ 9：7となる。

子がすべて劣性ホモになる場合，両親はともに劣性ホモである。

	AbD	Abd	abD	abd
AbD	AAbbDD 着色	AAbbDd 着色	AabbDD 着色	AabbDd 着色
Abd	AAbbDd 着色	AAbbdd 白	AabbDd 着色	Aabbdd 白
abD	AabbDD 着色	AabbDd 着色	aabbDD 白	aabbDd 白
abd	AabbDd 着色	Aabbdd 白	aabbDd 白	aabbdd 白

6 【Ⅰ選択者用問題】動物の行動

【解答】

問1	1	受容器(感覚器)	2	効果器(作動体)	3	生得	4	フェロモン
問2	(1)	かぎ刺激(信号刺激)	(2)	○	(3)	正の流れ走性		
問3	ウ	カ						
問4	対照実験							
問5	(1)	初期記憶は，日齢に関わらず成立する。(18字)						
	(2)	後期記憶は8日齢や15日齢の個体では成立しないが，30日齢以降の個体では成立する。(39字)						

【配点】 (25点)

問1　各2点×4，　問2　各2点×3，　問3　各2点×2(順不同)，　問4　1点

問5　各3点×2

【出題のねらい】

動物の行動に関する知識問題と，イカの学習による行動に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　外部環境からの刺激を受容する器官を受容器(感覚器)という。受容器で刺激が受け取られると，刺激に応じて興奮が発生し，その興奮は中枢に伝えられる。中枢ではさまざまな情報処理が行われ，最終的に筋肉などの効果器(作動体)に興奮が伝えられ，反応があらわれる。

動物の行動には，走性や本能行動など生まれながらに備わっている生得的行動と，学習による行動など生まれた後の経験などによって獲得される習得的行動がある。

動物の体内で生産され，体外に分泌されて，同種の他個体に特定の行動を引き起こす物質はフェロモンと呼ばれる。アリは巣とえさ場の間に道しるべフェロモンを分泌し，他の個体はそれを手がかりにしてえさ場にたどりつく。また，カイコガのオスはメスが分泌した性フェロモンを触角で受容し，性フェロモンの濃度が高い方へ移動することでメスを見つけることができる。その他に，ゴキブリの集合フェロモンやアブラムシの警報フェロモンなどが知られている。

【ポイント】

フェロモン
動物の体内で生産され，体外に分泌されて，同種の他個体に特定の行動を引き起こす物質

問 2 (1)　本能行動など特定の生得的行動を引き起こす特定の刺激をかぎ刺激（信号刺激）と呼ぶ。なお，適刺激とは，眼は光刺激を受容できるが，音刺激や嗅刺激を受容できないように，それぞれの受容器が受容できる特定の刺激をいう。

(2)　繁殖期のイトヨのオスは，自分の巣に近づく同種のオスに対し，攻撃して追い払う本能行動を示す。このとき，本物のオスだけではなく腹部が赤い色の模型に対しても攻撃行動を示す。これは，イトヨのオスが示す攻撃行動は「腹部が赤い」ことがかぎ刺激となっているからである。

(3)　刺激に対して動物が一定の方向に移動する性質を走性といい，刺激源に近づく場合を正の走性，刺激源から遠ざかる場合を負の走性という。川の水流の発生源は上流であり，メダカが川の上流の方向に向かって泳ぐ性質は刺激源に近づくことになるので，これを正の流れ走性という。

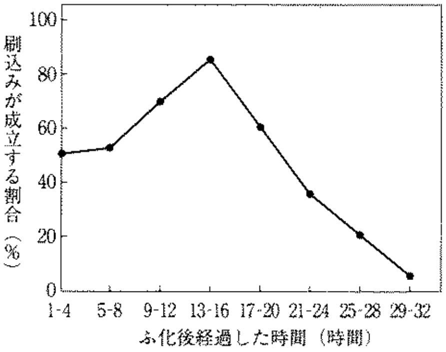
かぎ刺激（信号刺激）

本能行動など特定の生得的行動を引き起こす刺激

問 3　ガンやカモのひなは，ふ化後に最初に見た動くものの後をついて歩く。このついて歩く対象を記憶するような学習が刷込みである。ひながふ化後に最初に見る動くものはふつうは母親なので，通常は母親の後をついて歩く。しかし，ふ化後すぐに動く風船を見せれば，その風船に刷込まれてその後をついて歩くようになる。したがって，親鳥とはまったく異なる形のものに対しても，親鳥のにおいがしないものに対しても刷込みが起こるので，ア・イは誤りである。この刷込みは下図に示すように，生後初期の特定の時期に限って成立するものなので，ウは正しく，エは誤りである。また，刷込みは，いったん成立すると変更されにくい特徴をもっているので，オは誤りであり，カが正しい。

刷込み

生後初期の限られた時期に起こる。いったん成立すると変更されにくい。



問 4　実験を行う際には，調べたい条件以外の要因が実験結果に影響を及ぼさないことを確かめる必要がある。そのために，その条件を除外した（もしくは変化させた）実験を行う。このような実験のことを，対照実験という。**実験 1** においては，アミを含まず海水だけを含むガラス管が，イカの攻撃反応を引き起こさないことをあらかじめ確認しておく必要がある。

問 5　まず，**実験 1** について考える。図 2 の A より，ガラス管を引き上げてから再び入れるまでの時間が短い場合は，攻撃反応の回数が非常に少ないことがわかる。これは，「ガラス管に触手がぶつかる(のでアミを捕れない)」という学習が成立しているからであり，問題文より，これが早い時期に形成される初期記憶にあたる。ただし，ガラス管を引き上げてから再び入れるまでの時間を 30 分にした場合は攻撃反応の回数が多くなっていることから，30 分の時点では，初期記憶はすでに失われていることが推測される。一方，図 2 の B より，ガラス管を引き上げてから再び入れるまでの時間が 60 分であった場合，攻撃反応の回数が非常に少なくなっていることがわかる。これは，学習がこの時点で再び成立しているからであり，問題文より，これが成立に 60 分程度かかる後期記憶にあたる。

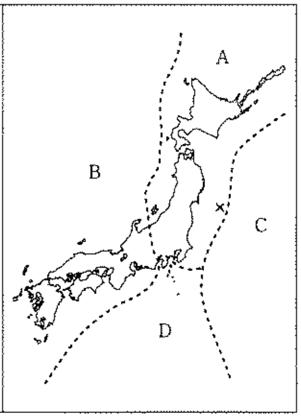
次に，**実験 2** について考える。**実験 2** ではガラス管を引き上げてから再び入れるまでの時間を 5 分または 60 分にして実験を行っている。5 分は初期記憶，60 分は後期記憶が形成できるかどうかを確かめたもので，ともに，ガラス管を最初に入れたときに比べて，再び入れたときの方が攻撃反応の回数が減っていれば，その個体では「ガラス管に触手がぶつかる(のでアミを捕れない)」という学習が成立していると考えられる。したがって，図 3 より，初期記憶は日齢に関わらず成立することがわかる。また，図 4 より，後期記憶は 8 日齢や 15 日齢の個体では成立していないが，30 日齢以降の個体では成立していることがわかる。

学習が成立している場合は，攻撃反応の回数が減少する。

地　学

1 【共通問題】 地震

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>記号</td><td>D</td><td>名称</td><td colspan="3">フィリピン海プレート</td><td>問2</td><td colspan="3">伊豆・小笠原海溝</td><td rowspan="6">問3</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>問4</td><td>1</td><td colspan="2">ウ</td><td>2</td><td colspan="2">エ</td><td>3</td><td>シ</td><td>4</td><td>キ</td></tr>
<tr><td>問5</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5弱</td><td>5強</td><td>6弱</td><td>6強</td><td>7</td></tr>
<tr><td>問6</td><td>M</td><td colspan="4">エ</td><td>Mw</td><td colspan="4">ア</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問7</td><td>装置Ⅰ</td><td colspan="9">鉄球もピンポン球も動かない。</td></tr>
<tr><td>装置Ⅱ</td><td colspan="9">鉄球は沈み，ピンポン球は浮き上がる。</td></tr>
</table>

【配点】 (20点)

問1　記号：1点　名称：1点，　問2　2点，　問3　2点，　問4　各1点×4，
問5　2点(完答)，　問6　各2点×2，　問7　各2点×2

【出題のねらい】

地球は十数枚のプレートに覆われている。そのうち4枚が日本列島付近で接しており，その境界では造山運動，地震・火山などの地殻変動が盛んに起こっている。今回は日本列島付近で発生する地震について，プレートと関連する問題を含めて出題した。

【解説】

問題

問1・問2　日本列島付近に分布するプレートとその境界を示したものを図1－1に示す。

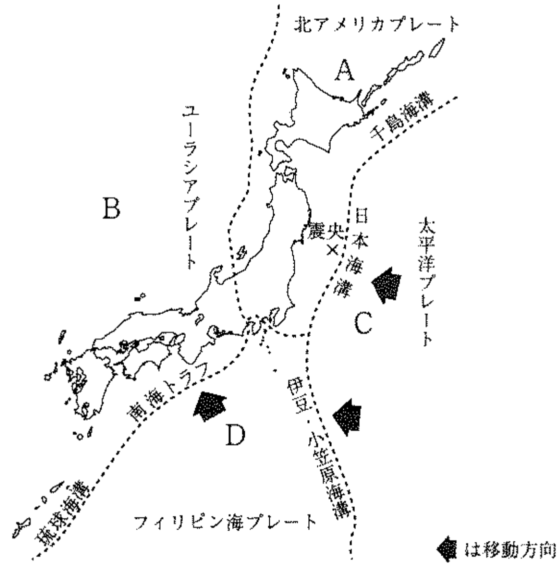


図1－1　日本列島付近のプレートとプレート境界

【ポイント】

日本列島付近の大陸プレート
北アメリカプレート
ユーラシアプレート

日本列島付近の海洋プレート
太平洋プレート
フィリピン海プレート

4枚のプレートのうち，北アメリカプレートとユーラシアプレートは大陸プレートで，太平洋プレートとフィリピン海プレートが海洋プレートである。日本列島の太平洋側には，海洋プレートが大陸プレートの下に沈み込む海溝やトラフがあり，典型的な島弧－海溝系となっている。

図1－1に示されるように，太平洋プレートは日本海溝より北アメリカプレートの下に沈み込み，フィリピン海プレートは南海トラフよりユーラシアプレートの下に沈み込んでいる。また，海洋プレートである太平洋プレートは，海洋プレートであるフィリピン海プレートの下にも沈み込んでいることがわかる。したがって，**問1** のあるプレート境界では他のプレートの下に沈み込み，別のプレート境界では接する他のプレートがその下に沈み込んでいるプレートは，Dのフィリピン海プレートである。また，**問2** の海洋プレート(太平洋プレート)が他の海洋プレート(フィリピン海プレート)の下に沈み込んでいる境界は，伊豆・小笠原海溝である。日本列島付近のプレートは，その移動方向と境界が重要である。その位置関係をよく確認しておこう。

日本列島付近のプレート境界
千島海溝・日本海溝：
太平洋プレートが北アメリカプレートの下に沈み込む境界
南海トラフ・琉球海溝：
フィリピン海プレートがユーラシアプレートの下に沈み込む境界
伊豆・小笠原海溝：
太平洋プレートがフィリピン海プレートの下に沈み込む境界

問3　2011年3月11日14時46分に発生した東北地方太平洋沖地震は，命名のとおり，東北地方の太平洋沖を震源とする逆断層型の巨大地震で，震源の深さは約24 kmであった。この地震は，日本海溝で，海洋プレートである太平洋プレートが，大陸プレートである北アメリカプレートの下に沈み込むことで，陸側プレートの縁部に蓄積された歪(ひず)みのエネルギーが解放されたことによって発生した。したがって，その震央は，図1－1中の×で示されるように，日本海溝のやや陸側(北緯38度6分，東経142度51分)に位置する。図1－2に，島弧－海溝系の地震発生場所を模式的に表した図を示す。

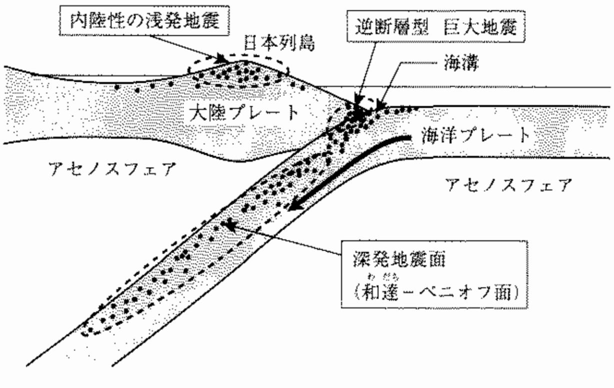


図1－2　島弧－海溝系の地震発生場所

問4　深発地震は，震源が約100 kmよりも深いところにある地震であり，プレートが沈み込んでいる境界でのみ発生する。また，

その発生場所は，沈み込む海洋プレートの上部，および内部である(図１－２)。そのため震源は，海洋プレートが海溝から沈み込む方向に向かって深くなっており，この震源の分布する面を深発地震面(和達－ベニオフ面)と呼んでいる(図１－３)。プレートの沈み込みは，震源の分布から深さ約 700 km まで続いていると考えられており，この深さが，上部マントルと下部マントルの境界と考えられている。

マグニチュードは地震のエネルギーの規模を示す値で，マグニチュードが２大きくなるとエネルギーは 1000 倍となり，１大きくなると $\sqrt{1000}$(＝約 32)倍になる。また，マグニチュードが 0.2 大きくなるとエネルギーは約 2 (＝$\sqrt[5]{32}$) 倍になる。

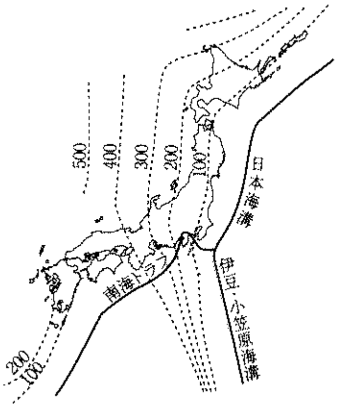


図１－３　震源の深さの分布
図中の数値の単位は km

問５　震度はその地点のゆれの大きさを示す値で，震度０から７までの 10 段階である。震度５と６だけに弱と強があるので，気をつけよう。

問６　現在，日本の気象庁で用いられるマグニチュードＭは，震央から一定の距離に置かれた標準地震計が記録する地震動の最大振幅をもとに決められている。しかし，マグニチュードが 8.0 を超える地震になると，最大振幅があまり変化しなくなるためマグニチュードも大きくならなくなり，正確なエネルギーの大きさを示すことができなくなる。そのため，震源断層の面積とずれの大きさと岩石のかたさから定義されたモーメントマグニチュード Mw が使われるようになってきた。東北地方太平洋沖地震が発生したとき，気象庁は，速報でマグニチュードをＭ7.9 と発表したが，その後，マグニチュードは Mw 9.0 と修正された。よって，マグニチュードＭはエ，モーメントマグニチュード Mw はアが正解となる。

問７　まだ固結が進んでいない沖積層や埋め立て地などは水を含んだ砂泥層からなっており，地震によって振動すると，水を含んだ砂泥が液体のような振る舞いをする。それにより，砂泥水が地表に噴き出したり，建造物が沈降したり，中が空洞になっているため全体の密度が小さいマンホールが浮き上がったりする。このような現象を液状化現象という。東北地方太平洋沖地震では，千葉県の湾岸地域の埋め立て地などで大量の砂泥が吹き出し，広い範囲が砂泥に覆われた。

実験では，装置Ⅰは，水を含んで動きやすくはなっているが，振動が加わらないので，置かれた物体の位置はほとんど変化しない。装置Ⅱは，砂粒に振動が加わるため，砂の粒子が液状化現象と同様に，液体のように運動をし，密度の大きい鉄球は沈み，密度の小さいピンポン球は浮き上がってくる。

震度
各地点におけるゆれの大きさ。

マグニチュード
地震のエネルギーの規模。
地震計の最大振幅から求められる。

液状化現象
水を含んだ砂泥が地震の振動によって液体のような性質を示し，地表に砂泥水が吹き出したり，建造物が沈降したり，軽いものが浮き上がる現象。

② 【共通問題】 岩石の変成と造岩鉱物

【解答】

問1	1	結晶片岩	2	片麻岩	3	ホルンフェルス	問2	エ
問3	(1)	3.3×10^{7} Pa	(2)	32 km				
問4	(1)	550 ℃	(2)	多	形	(3)	ダイヤモンド	
問5	(1)	ア	(2)	適しているもの	深さ	理由	石英からコース石に変わるときの圧力の変化が，温度の変化に比べて小さいから。	

【配点】 (20点)

問1　各1点×3，　問2　2点，　問3　(1)　2点　(2)　2点，

問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点，　問5　(1)　2点　(2)　適しているもの：1点　理由：2点

【出題のねらい】

風化や変成作用および変成岩をテーマに，造岩鉱物の化学反応や多形鉱物を相図から読み取ることと，圧力と温度の関係についての基本的な計算を含めた理論を，実際の現象に関連づけて考察することを目的に出題した。

【解説】 問題

問1　既存の岩石が，高温・高圧の条件下で，固体のまま組織や造岩鉱物の種類および組合せが変わり，性質を変化させる作用を変成作用という。変成作用によって生じた岩石を変成岩といい，広域変成岩と接触変成岩に大別される。広域変成岩は，プレート運動によって地下深部で形成され，低温高圧型の結晶片岩(1)と，高温低圧型の片麻岩(2)がある。結晶片岩は高圧により鉱物が同じ方向に再配列し，岩石が一定方向に割れやすい片理を呈する。片麻岩は高温のため結晶が大きく成長し，層状に再配列するため縞(しま)状に見えることがある。

接触変成岩は，マグマの貫入によって，地表付近の岩石(おもに地層)が熱による変成作用を受け，鉱物が再結晶したものである。元の岩石が砂岩や泥岩の場合は，かたくて緻密(ちみつ)な性質をもつホルンフェルス(3)に，また，石灰岩の場合は結晶質石灰岩(大理石)になる。

問2　風化は物理的(機械的)風化と化学的風化に大別される。物理的風化は，造岩鉱物の熱膨張率の違いで鉱物間に隙間(すきま)が生じたり，間隙(かんげき)に侵入した水が凍結する際の膨張によって鉱物の結合がゆるみ，岩石が次第に砕かれていく作用である。化学的風化は，雨水や地下水による酸化や溶解によって岩石や鉱物が分解されていく作用である。化学的風化では，次式のようにカリ長石が二酸化炭素を含む水と反応し，粘土鉱物カオリンとなる。花こう岩の物理的風化では，石英以外の鉱物は細粒化して流出するため，石英が残りやすい。よって，エが正解である。

【ポイント】

広域変成岩
地下深部の高温・高圧で変成された岩石。プレート運動に起因し，広範囲に形成される。

結晶片岩
低温・高圧の条件下の変成作用によって形成される広域変成岩。片理をもつ。

片麻岩
高温・低圧の条件下の変成作用によって形成される広域変成岩。鉱物が層状に配列するため縞状に見える。

接触変成岩
マグマの貫入による熱によって生じた変成岩。

ホルンフェルス
泥岩や砂岩が元となった接触変成岩。かたくて緻密な性質をもつ。

物理的(機械的)風化
鉱物の熱膨張率の違い等から，鉱物間の結合がゆるみ，岩石が細粒化していく作用。

化学的風化
酸化や溶解といった化学反応によって岩石や鉱物が分解されていく作用。

$$2KAlSi_3O_8 + 2H_2O + CO_2 \rightarrow Al_2Si_2O_5(OH)_4 + K_2CO_3 + 4SiO_2$$
カリ長石　　　　　　　　　　　カオリン　炭酸カリウム

花こう岩が風化すると，石英とカオリンが混ざり合った砂層が形成される。この砂層は「まさ(真砂)」と呼ばれ，おもに西日本の花こう岩地域で見られる。「まさ」は一部の教科書にも載っているので覚えておきたい。

問 3 (1)　1 Paは，1 m^2 に 1 N (ニュートン)の力を加えたときの圧力である。ここでいう力は重力に等しく，重力は質量と重力加速度の積なので，重力は質量に比例する。よって，高さ 1 km の岩石柱は，1 m^3 の立方体の岩石を 1000 個積み上げたものと考えれば，重力も 1000 倍になり，圧力も 1000 倍になるので，

$3.3 \times 10^4\ \mathrm{Pa} \times 1000 = 3.3 \times 10^7\ \mathrm{Pa}$

となる。これを用いて問題図 1 の右軸に，深さに換算した目盛りを加えたものが図 2 − 1 である。

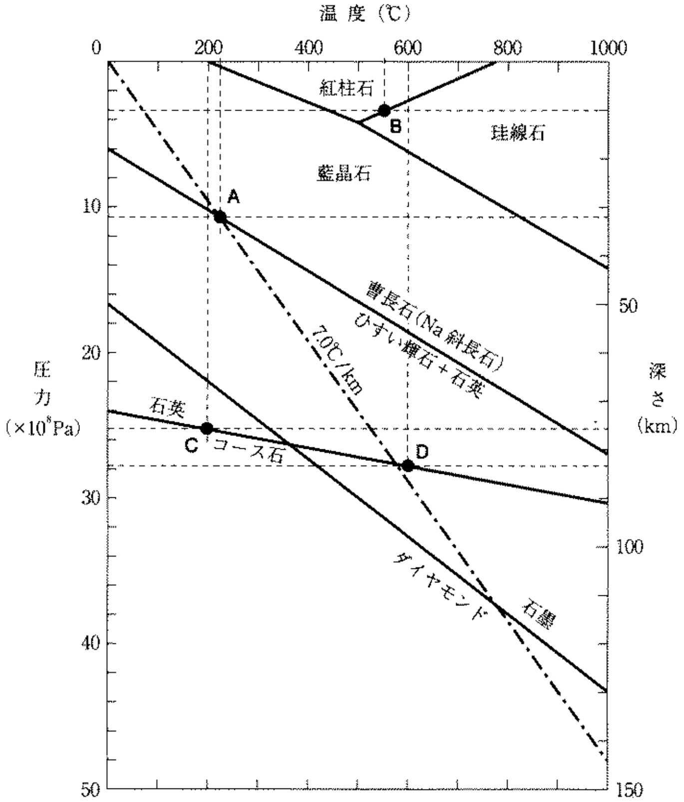


図 2 − 1　鉱物の安定条件

このように鉱物の安定条件を実験によって割り出した図を相図といい，産出した岩石に含まれる鉱物をあてはめることで，その岩石が形成された温度−圧力条件を推定することができる。

(2)　図 2 − 1 より，地下増温率 7.0 ℃/km のグラフ(一点鎖線)と曹(そう)長石⇄ひすい輝石＋石英の反応境界線の交点 **A** の圧力は約 10.5

カオリン
カリ長石が化学的風化を受けて形成された粘土鉱物。

Pa(パスカル)
圧力の単位。
1 m^2 に 1 N(ニュートン)の力を加えたときの圧力が 1 Pa。

$\times 10^8$ Pa である。

よって，(1) より，深さは

$$\frac{10.5\times10^8}{3.3\times10^7}\fallingdotseq 32\ \text{km}$$

となる。

問 4 (1) 紅柱石(こうちゅう)の一部が珪線石(けいせん)に変化しているので，両者の境界線上にあたる条件下にあったと考えられる。**問 3** (1) より，深さ 10 km の圧力は $3.3\times10^7\times10=3.3\times10^8$ Pa である。3.3×10^8 Pa の紅柱石と珪線石の境界線は図 2 − 1 の**B**点であり，**B**点の温度は図から約 550 ℃ と推定できる。

(2)・(3) 藍晶(らんしょう)石と珪線石および紅柱石の化学組成は同じ Al_2SiO_5 であるが，結晶構造が異なるため性質も異なる。こうした関係にある鉱物を互いに「多形」または「同質異像」という。また，藍晶石から珪線石，紅柱石から藍晶石と互いに多形の関係にある鉱物に変化することを相転移という。Al_2SiO_5 鉱物は，白雲(うん)母(も)や曹長石，石英等が反応して形成される鉱物で，接触変成岩や広域変成岩中に見られる。多形の関係にある鉱物は他に，石英とコース石 (SiO_2)，石墨(せきぼく)とダイヤモンド (C) 等がある。

問 5 (1) 図 2 − 1 より，石英とコース石の相転移の境界は，200 ℃ のときが約 25.3×10^8 Pa (**C**点)，600 ℃ のときが約 27.8×10^8 Pa (**D**点) である。その圧力差 2.5×10^8 Pa を**問 3** (1) で求めた 1 km あたりの圧力で割ると，深度差は

$$\frac{2.5\times10^8}{3.3\times10^7}\fallingdotseq 8\ \text{km}$$

となる。よって，アが正解である。

(2) 鉱物が相転移する境界線は，紅柱石と珪線石との境界のような一部例外を除けば，圧力が大きくなるほど温度も高くなる。このため，傾きが地下増温率に近いと，グラフ上の交点の位置を特定しにくく，相転移が起こる温度と圧力を読み取りにくい。しかし，石英⇄コース石の場合，(1) より 400 ℃ の差でも深さは 8 km 程度の差なので，相転移の起こる圧力が温度によってあまり変化しない。つまり，境界線の傾きが小さいほど，実際の温度と多少の誤差があっても，生成時の圧力 (＝深さ) を比較的狭い範囲に絞り込むことができる。逆に，傾きが大きいほど温度を調べることに適していることになる。なお，実際には地下深部の温度と圧力は推定値なので誤差が生じる。このため，複数の異なる多形鉱物の組合せから変成岩の生成条件を絞り込むことが多い。

多形（同質異像）
化学組成が同じで，結晶構造が異なる鉱物どうしの関係。

Al_2SiO_5 鉱物
代表的な多形鉱物。藍晶石・珪線石・紅柱石の 3 鉱物が互いに多形の関係にある。

③ 【共通問題】 地球の歴史と生物の進化

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>1</td><td>真核</td><td>2</td><td>エディアカラ</td><td>3</td><td>ペルム</td><td>問2</td><td>第四紀</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="5">微惑星の衝突による脱ガス作用</td><td>問4</td><td colspan="2">縞状鉄鉱層</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問5</td><td>(1)</td><td colspan="7">蒸発した海水が氷床として陸に固定され，全海水の体積が減少するから。</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>ウ</td><td>(3)</td><td>イ</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>問6</td><td colspan="3">エ</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

【配点】 (20点)

問1　各2点×3，　問2　2点，　問3　2点，　問4　2点

問5　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点，　問6　2点

【出題のねらい】

地史の分野は地質時代の年代と代表的な示準化石を記憶することが中心になるが，プレート運動や大気の組成など，他の地学の分野とも関連性がある。今回は，地球史の全体的な流れと生物の変遷の理解，大気の分野や岩石・鉱物の分野の知識を活用するような問題を出題した。

【解説】 問題

問1 $\boxed{1}$：生物は原核生物と真核生物に大きく分けられ，細菌類は原核生物に分類される。細菌類の細胞は核をもたず，DNAが細胞内で裸の状態で存在する。このような細胞を原核細胞という。この原核細胞からなる生物が原核生物である。一方，細胞内にあるもう一つの膜(核膜という)によってDNAが保護されている細胞を真核細胞といい，真核細胞からなる生物を真核生物という。現在，地球最古の化石は約35億年前の細菌類(原核生物)の化石である。その後，原核生物が進化して，真核生物が出現したのである。

$\boxed{2}$：原生代後期(約6億年前)のオーストラリアの地層から産出した，かたい組織をもたない大形の多細胞生物の化石群をエディアカラ動物群(またはエディアカラ化石群)という。エディアカラ動物群は，地球表層のほぼ全体が氷に覆われたといわれている約6億年前の氷河期の終了を契機に出現したと考えられている。

$\boxed{3}$：古生代以降において，5回の大量絶滅があったことがわかっている。5回の大量絶滅は，古生代オルドビス紀末，古生代デボン紀後期，古生代ペルム紀(二畳紀)末，中生代トリアス紀(三畳紀)末，中生代白亜紀末に起こっている。このうち，地球上で最も大規模な大量絶滅が起こったのはペルム紀末の大量絶滅で，海生無脊椎(せきつい)動物の90％以上もの種が絶滅したといわれている。このときの大量絶滅の原因については，大気や海水中の酸素

【ポイント】

原核生物
核をもたない細胞(原核細胞)からなる生物。

真核生物
DNAが核膜で保護された核の中にある真核細胞からなる生物。

最古の化石
約35億年前の細菌類の化石。

エディアカラ動物群(化石群)
約6億年前の，かたい組織をもたない大形の多細胞生物の化石群。

大量絶滅
多くの種類の生物がほぼ同時期に絶滅する現象。

地球史上最大規模の大量絶滅
古生代ペルム紀(二畳紀)末の大量絶滅。

が欠乏したことなどの環境の変化が起きたという説があるが，詳しくはわかっていない。

問 2　古生代は六つの紀，中生代は三つの紀，新生代は三つの紀に分けられる(表3－1)。これらの紀のうち，期間が最も短いのは新生代第四紀である。第四紀は約260万年前～現在までの期間である。第四紀以外の紀は桁(けた)が一つ上で，だいたい数千万年間の期間があるということは覚えておいた方がよいだろう。ちなみに最も長い期間の紀は，約1億4500万年前～6600万年前までの約7900万年間ある白亜紀である。

問 3　原始地球は，約46億年前の微惑星の衝突・合体によって誕生した。このとき，微惑星の衝突によって，微惑星内部の揮発性成分が蒸発し放出される。これを脱ガスという。脱ガスして放出された大気はおもに水蒸気と二酸化炭素であり，これらのガスが原始大気を形成した。原始大気中の水蒸気と二酸化炭素の温室効果によって，原始地球の表面が高温になり，表面の岩石は融解しマグマオーシャン(マグマの海)が形成された。その後，微惑星の衝突がおさまってきて，マグマオーシャンが冷却していく過程で，マグマオーシャンからの揮発性成分が脱ガスし，これらも原始大気に加わっていったと考えられている。

問 4　酸素は生物の光合成によって放出される。地球環境の酸素濃度の上昇に伴って，海洋でこの酸素が鉄イオンと結びついて酸化鉄となって海底に堆積(たいせき)した。これを縞(しま)状鉄鉱層(縞状鉄鉱床)という。縞状鉄鉱層は約27億～19億年前に形成され，約19億年前には海洋中の鉄イオンはほとんど酸化されてしまったと考えられる。

問 5 (1)　最終氷期のうち，約2万年前は，日本付近の平均気温は現在よりも7～8℃ほど低かったといわれている。この時期には，蒸発した海水は氷として陸上で氷床を形成した。それがほとんど融解せずに固定され，氷床は拡大していった。このため，氷期には，海水は減少して海水面が低下した。最終氷期の最も寒冷な時期には，現在よりも100 m以上も海水面が低下した。

(2)　ア・ウ：問題図1から，約7万年前から約5千年前までの間に，現在よりも海水面が50 m以上低かった時期が何度もあることがわかる。問題図2の海域では水深50 mより深いところは南側(問題図2の下方)の一部だけであり，ほとんどが水深50 mより浅い領域になる。問題図1から，約5万年前～約4万年前，約3万年前～約1万年前は水深50 mより浅いほとんどの領域が陸化していた時期であったと判断できる。特に，最終氷期の最も寒冷だった時期である約2万年前には，この海域はほとんど陸化していたと考えられる。よって，アは誤りで，ウが正解となる。

イ：問題図1から，約5千年前～現在は，現在の海水面の高さと

表3－1　地質時代区分

		新生代	第四紀
0.026億(260万)			新第三紀
			古第三紀
0.66億(6600万)		中生代	白亜紀
			ジュラ紀
			トリアス紀(三畳紀)
2.5億		古生代	ペルム紀(二畳紀)
			石炭紀
			デボン紀
			シルル紀
			オルドビス紀
			カンブリア紀
5.4億	先カンブリア時代	原生代	
25億		始生代(太古(たいこ)代)	
40億		冥王(めいおう)代	

第四紀

約260万年前～現在までの期間。紀の中で最も短い。

原始地球

約46億年前，微惑星の衝突・合体によって形成された。

原始大気

微惑星の衝突によって放出されたガスやマグマオーシャン(マグマの海)から放出されたガスによって形成された。主成分は，水蒸気と二酸化炭素。

縞状鉄鉱層(縞状鉄鉱床)

光合成によって放出された酸素と海水中の鉄イオンが結合して形成された酸化鉄とケイ質の部分が縞模様をなしている層。約27億～19億年前に形成された。

氷期の海水面低下

氷期に海水の量が減少することによって，海水面が低下する。

最終氷期の海水面

約2万年前は，現在よりも100 m以上低かった。

ほとんど変わっておらず，ほとんど陸化していなかったと判断できる。よって，イは誤り。

エ：第四紀完新世は約 1 万年前～現在までの期間である。先に述べたように，約 5 万年前～約 4 万年前と約 3 万年前～約 1 万年前はほとんどの領域が陸化していたので，エも誤りである。

(3) 第四紀の代表的な示準化石としてはマンモスがあるが，このほかに，ナウマンゾウ・オオツノシカ(オオツノジカ)がある。日本でもこれらの化石が発見されており，数万年前にはこれらの哺乳(ほにゅう)類が日本列島で生息していた。なお，選択肢中のイクチオステガは古生代デボン紀の初期の両生類であり，デスモスチルスは新生代新第三紀の哺乳類である。

第四紀の代表的な示準化石
マンモス，ナウマンゾウ，オオツノシカ(オオツノジカ)

問 6 ア：**問 1** の $\boxed{2}$ でも述べたように，先カンブリア時代末(原生代後期)は地球表層のほぼ全体が凍ってしまうほど寒冷な時期であった。このように，氷河が発達していた時期が新生代第四紀以外にも存在するので，誤り。なお，氷河期は古生代後期にもあったことが確認されている。

氷河期
地球上に大規模な氷床(氷河)が存在した時代。先カンブリア時代，古生代，新生代には氷河期が存在する。

イ：古生代オルドビス紀までは生物は海洋中にしか生息できなかったが，成層圏に紫外線を吸収するオゾン層が形成されると，生物の陸上進出が始まった。デボン紀には最初の陸上脊椎動物である両生類が出現し，石炭紀には爬虫(はちゅう)類が出現した。しかし，哺乳類の出現は中生代に入ってからである。よって，誤り。

脊椎動物の陸上進出
オゾン層が形成され，古生代デボン紀以降に脊椎動物の陸上進出が可能になった。

ウ：中生代は全般を通じて温暖な気候で，裸子植物全盛の時代であったが，中生代白亜紀には被子植物が出現し，発展した。シダ植物が繁栄したのは古生代後期である。よって，誤り。

エ：中生代から続く造山運動によって，内陸には草原が出現し，拡大していった。中生代白亜紀末に爬虫類に属する恐竜が絶滅した後，草原は哺乳類が繁栄できる場となった。もともとは樹上生活をしていた人類の祖先も，木から下りて草原で生活するようになり，その過程で二足歩行(直立歩行)を行うようになったといわれている。現在，最古の人類化石は，新生代新第三紀の約 700 万年前の猿人(サヘラントロプス・チャデンシス)である。よって，これが正解である。

人類の出現
新生代新第三紀。

最古の人類化石
約 700 万年前の猿人(サヘラントロプス・チャデンシス)。

4 【Ⅰ・Ⅱ選択者用問題】 恒星の性質と惑星状星雲

【解答】

問1	1	収縮	2	ヘリウム	3	中性子星			
問2	連星の軌道長半径の3乗を公転周期の2乗で割った値は，連星の質量の和に比例する。								
問3	(1)	A星	75億年	B星	137億年	(2)	存在しない		
問4	(1)	−4.4等	(2)	1.0×10^9 倍	(3)	等級	18.1等/平方秒	観測	可能

【配点】 (20点)

問1　各1点×3，　問2　3点，　問3　(1)　各2点×2　(2)　2点，

問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　等級：3点　観測：1点

【出題のねらい】

恒星の進化や，進化に関連した星雲を題材にした応用問題である。地学Ⅱの内容は，地学Ⅰに数式を付加した形のものが多い。そのため，地学Ⅱの問題は計算が多くなりがちで，本問も計算が中心になっている。等級や質量，寿命の計算などは入試で出題されることが多いので，しっかり学習しておいてほしい。

【解説】

問題

問1　恒星進化の基本事項が中心の空欄補充問題である。

1 ：恒星は，低温な星間雲である分子雲(暗黒星雲)の中で生まれる。分子雲の，特に密度が高くなった部分が自分自身の重力で収縮し，周囲から切り離されて球形になっていくことから恒星の進化が始まる。重力で収縮していくと，重力の位置エネルギーが解放されるので，温度が上昇して熱的な放射を行うようになり，輝き始める。この状態の恒星は原始星と呼ばれている。HR図上では巨星(赤色巨星)と同じ領域に分布し，時間経過とともに左下に移動して主系列に近づいていく。

2 ：原始星段階が続くと，恒星の中心部は徐々に温度が上昇していく。そして，ほぼ1000万Kに達すると，4個の水素原子核が融合してヘリウム原子核に変化する核融合反応が開始される。このような，中心部で水素がヘリウムに変化する核融合反応が起きている恒星を主系列星という。恒星の進化過程では，主系列星段階が最も長い。

3 ：主系列星段階が続くと，中心部では徐々にヘリウムが増加してくる。最終的には，中心部がすべてヘリウムになり，ヘリウムからなる中心核ができてしまう。水素の核融合は中心核の周囲の球殻上の領域で起きており，中心核では起きていない。中心核は自己重力で収縮していくが，外層部では逆に膨張する。その結果，表面温度が低い巨大な恒星である巨星へと進化する。質量が太陽質量の数倍以上の恒星は，巨星段階の最後に超新星爆発を起こし，後に中性子星やブラックホールを残す。

問2　ケプラーの第三法則は，元々太陽を公転する惑星の運動から

【ポイント】

原始星
恒星が誕生した直後の状態。収縮することで解放される重力の位置エネルギーで輝いている。

巨星
半径が大きく，表面温度が低い恒星。恒星進化では主系列星段階の次の段階。赤色巨星ともいう。

核融合反応
軽い原子核が集まって融合し，重い原子核に変化する核反応。融合前より融合後の方が質量が小さく，失った質量の分だけエネルギーが発生する。

主系列星
恒星の中心部で水素がヘリウムに変わる核融合反応が起きている恒星。HR図上では，左上から右下にのびる主系列の上に位置している。

超新星爆発
恒星の大爆発で，通常の恒星の百億倍以上の明るさで輝く。大質量の恒星の巨星段階の最後に起きる。

発見された法則である。しかし，その応用範囲は惑星だけにとどまらず，重力によって互いの周囲を公転している２天体であれば，何にでも成立している。

天体の一つから見た他の天体の公転軌道は楕円（だえん）軌道になる。その軌道長半径を a とし，２天体の質量をそれぞれ M_1，M_2，公転周期を T，万有引力定数を G とすると，次の式が成り立つ。

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{G}{4\pi^2}(M_1+M_2)$$

これがケプラーの第三法則の一般的な形である。解答はこの式を用いて説明してもよい。

連星の質量を求める場合，軌道運動の観測から a と T を求め，ケプラーの第三法則を使って，連星を形づくる２星の質量和を求める。続いて，やはり軌道運動の観測から２星の重心の位置を求め，重心からの距離の比を使って２星の質量比を定める。この二つの値からそれぞれの質量を求めるわけである。

問３(1)　主系列星が巨星段階に移行するのは，最初にもっていた水素のおよそ１割を消費した頃である。つまり，主系列星段階での核融合反応の燃料の量は恒星の質量に比例している。一方，光度とは恒星が単位時間に放射する全エネルギーであるが，このエネルギーはすべて核融合反応で発生しているので，光度は単位時間に起きている核融合反応の量，つまり核融合反応の燃料を消費する速度に比例している。したがって，核融合反応の燃料を使いつくすまでの時間 H は，次式のように核融合反応の燃料の量を消費速度で割ることで得られる。

$$H=\frac{\text{燃料の量}}{\text{消費速度}}\propto\frac{\text{質量}}{\text{光度}}\propto\frac{\text{質量}}{\text{質量}^4}\propto\text{質量}^{-3}$$

よって，主系列星としての寿命は質量の３乗に反比例することがわかる。したがって，質量が太陽の1.1倍であるＡ星の寿命は，太陽の寿命100億年を1.1の３乗で割れば求まる。

$$\text{A 星の寿命}=\frac{100}{1.1^3}\fallingdotseq 75.1(\text{億年})$$

同様にＢ星の寿命を求めるには，100億年を0.9の３乗で割ればよい。

$$\text{B 星の寿命}=\frac{100}{0.9^3}\fallingdotseq 137.1\ (\text{億年})$$

(2)　Ａ星とＢ星は同時に生まれ，原始星段階の長さは同じなので，(1)で求めた主系列星としての寿命の差を計算すれば，Ａ星が巨星化してからＢ星が巨星化するまでの時間が求まる。結果は，$137-75=62$ で，Ａ星が巨星化してからおよそ62億年後にＢ星が巨星化することになる。しかし，Ａ星の巨星としての寿命は10億年以下なので，Ｂ星が巨星化する頃にはすでに白色矮星になっている。したがって，Ａ・Ｂ両星が同時に巨星化してい

中性子星

おもに中性子からなる半径10 km程度の恒星。半径は小さいが，質量は太陽質量程度である。

ケプラーの第三法則

質量が M_1，M_2 の二つの天体が重力の作用の下で，軌道長半径が a，公転周期 T で運動している。そのとき，万有引力定数を G として成り立つ次の式がケプラーの第三法則である。

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{G}{4\pi^2}(M_1+M_2)$$

る時期は存在しないことがわかる。

問4(1) 問題表1を見ると，A星もB星も距離指数は4.4等であることがわかる。したがって，星雲Pの見かけの等級は，絶対等級である0.0から距離指数を引いた値，すなわち，0.0－4.4＝－4.4等となる。

(2) (1)で求めた見かけの等級は，星雲P全体から放射されている光を一つにまとめた場合の明るさである。問題文にもあるように，星雲Pは大きく広がっているので，各部分は明確に分離している。よって，(1)の等級が見かけの明るさを直接示しているわけではない。この場合，注目しなければいけないのは星雲の単位面積あたりの明るさである。

星雲P全体の天球上での面積は1.0×10^9平方秒(1平方秒は天球上で一辺が角度の1秒である正方形がつくる面積)なので，当然1平方秒の正方形の面積の1.0×10^9倍であり，明るさも同じ倍率となる。

(3) 明るさl_1の天体がm_1等級，明るさl_2の天体がm_2等級とすると，1等級小さくなると明るさが$\sqrt[5]{100}$倍になることより，次の式が成り立つ。

$$\frac{l_1}{l_2}=(\sqrt[5]{100})^{m_2-m_1}=10^{\frac{2}{5}(m_2-m_1)}$$

$$\therefore\quad m_2-m_1=2.5\log_{10}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)$$

これに，天体2として星雲Pの1平方秒分，天体1として星雲P全体の値をあてはめると，(2)より$\frac{l_1}{l_2}=1.0\times10^9$なので，次の式が得られる。

$$m-(-4.4)=2.5\log_{10}(1.0\times10^9)=2.5\times9=22.5$$

これから，$m=18.1$となる。

この18.1等/平方秒という値は，問題文で与えられている肉眼で観測可能な値(22等)より約4等明るいので，星雲Pも肉眼で観測可能であることがわかる。

問題文に示した22等/平方秒という明るさは，対日照(たいじつしょう)と呼ばれる現象の明るさである。惑星間空間には微細な塵(ちり)が浮遊している。それらの塵が太陽光を散乱するため，地球から見ると黄道に沿って淡く光る現象が観測される。太陽に近い部分は明るく，肉眼でもよく見えるが，太陽から離れるにつれ暗くなる。しかし，太陽から180°の方向では再び明るくなっており，空気が澄んで夜空が暗い場所では肉眼で見ることができる。これが対日照である。

距離指数

絶対等級から見かけの等級を減じた値。その大きさは恒星までの距離によって定まる。

明るさと等級の関係

天体1，2の明るさをそれぞれl_1，l_2，等級をm_1，m_2とすると，次の関係が成り立っている。

$$m_2-m_1=2.5\log_{10}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)$$

5 【I・II選択者用問題】 海洋の循環

【解答】

問1	1	カリフォルニア海流	2	北赤道海流	3	西岸強化
問2	(1)		(2)	エ		
問3	(1)	海水が結氷して周囲の海水の塩分が高くなり，密度が大きくなる。				
問3	(2)	19 ‰				
問4	(1)	周囲と物質のやり取りがない。	(2)	^{14}C		
問5	6×10^{-4} 倍					

【配点】 (20点)

問1　各1点×3，　問2　(1)　2点　(2)　2点，　問3　(1)　3点　(2)　2点，

問4　(1)　3点　(2)　2点，　問5　3点

【出題のねらい】

大気や海洋の循環は，相互に作用し合って地球表層の環境に影響を及ぼしていることが明らかになってきた。そのため，今後もこの内容に関連する出題の可能性は高いと思われる。今回は，海洋の循環の問題を出題した。

【解説】

問題

問1　$\boxed{1}$・$\boxed{2}$：亜熱帯循環(環流)に代表される表層付近の海洋循環は，比較的観測しやすいこともあり，古くから観測が行われてきた。図5－1に環流の一例として北太平洋の循環を示す。このような亜熱帯循環は，北太平洋に限らず各大洋に見られ，北半球では時計回り，南半球では反時計回りの環流になっている。

$\boxed{3}$：亜熱帯循環が見られるどの大洋でも，地球の自転によるコリオリの力(転向力)の影響で，大洋の西岸(大陸の東岸)で高緯度に向かう流れが強くなっている。この流れが強くなる現象を西岸強化と呼ぶ。

問2　海面付近を風が吹くと，風により海水は動き始める。このとき，海水にはコリオリの力がはたらき，北半球では風の吹く方向とおおむね45°右にずれた向きに流れることになる。そして，少し下層の海水は表層の海水に引きずられて動くが，やはりコリオリの力の影響を受け，表層の海水よりやや右にずれて動く。これが繰り返され，海水は全体として風の吹く方向に対し直角右向きに輸送される(図5－2)。

【ポイント】

亜熱帯循環(環流)

大洋の緯度20°～30°付近を中心として，海洋表層を循環する海流。

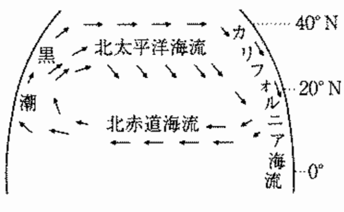


図5－1　北太平洋の環流

西岸強化

大洋の西部で海流が強くなる現象。

この海水の流れにより，亜熱帯循環は時計回りの流れとなって，その中央部では海面が盛り上がり，周縁の低水位側に向け圧力傾度力がはたらく。最終的に，この圧力傾度力とコリオリの力がつり合った地衡流(図５－３)として亜熱帯循環は成立している。亜熱帯循環の一部である黒潮は，ときおり蛇行し流路が変わることが知られている。

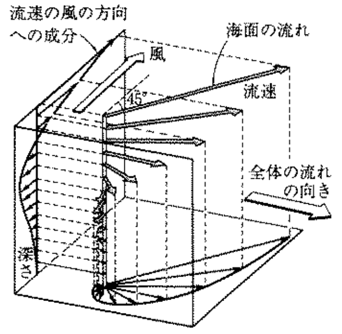


図５－２　風と海流の関係(北半球)

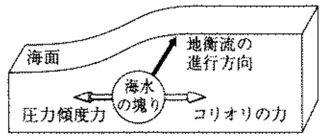


図５－３　地衡流(北半球の場合)

(1)　流路が蛇行しているときも地衡流としての性質は失わない。このため，流路の進行方向右側は水位が高く，左側は水位が低くなる。また，暖水塊は水温が高い海水が膨張するため水位が高く，冷水塊は逆に水温が低い海水が収縮して水位が低いので，蛇行している流路の進行方向左側に冷水塊を，右側に暖水塊を描くとよい。

(2)　流路の変化を推定する手法の一つが水位の変化を測定するものである。本問のＸ点には，(1)より蛇行発生時に冷水塊が存在するため，通常時に比べて水位が低いことになる。このことをふまえて，各選択肢について考えると，アは地衡流が流れている付近を境に水位が変化すると考えることができる。問題図１のＢの流路をとるときは，Ａの流路に比べて，Ｘ点から離れているため，圧力傾度力は小さくなるので誤り。イは黒潮が蛇行していると地衡流の力のつり合いに遠心力も加わる。しかし，Ｘ点は蛇行した黒潮の流路から外れているため遠心力がほとんどはたらかないので誤り。ウはコリオリの力も地衡流の力のつり合いを構成する要素であるが，流路から外れたＸ点では圧力傾度力が小さいため，それとつり合うコリオリの力も小さいので誤り。エはＸ点付近では，(1)より冷水塊が存在して水位が低くなっており，低圧部が生じることになる。そのため，Ｘ点を中心とした反時計回りの渦が形成されることになる。これは，北半球の時計回りの環流と逆方向の回転であるので，この選択肢が正解となる。

問３　深層循環は，熱塩循環とも呼ばれることからもわかるが，熱(温度)と塩(塩分)によって駆動されている。

深層循環
表層から沈み込んだ深層水の流れ。

海水が沈み込む条件
低温，高塩分

(1)　海水は低温であるほど，また塩分が大きいほど密度が大きい。低温であることは問題文に記載されているので，密度が大きくなる塩分，つまり高塩分となる過程について述べればよい。高緯度の寒冷な気候で表層水が冷却されると，海水が結氷する。海氷には塩類がほとんど含まれないため，結氷した周辺の海水に塩類が残され，その海水の塩分が増加する。こうして，低温・高塩分となって密度が大きくなった海水は深層に沈み込んでいく。現在海水の沈み込みが確認されている場所は，北大西洋グリーンランド周辺と南極海の二か所である。それ以外の海水が結氷する海域では沈み込みが確認されていない。この二か所で沈み込みが起こるのは，気温が特に低いことや海底の地形が原因と推測されて

海水の沈み込みの発生する場所
・北大西洋グリーンランド沖
・南極海

いる。

(2) 淡水を表面から冷却していくと，表面の水は 4 ℃で密度が最大になるまでは下層に沈み，下層の水が上昇して対流を起こす。しかし，表層の水が 4 ℃を下回ると，下層の 4 ℃の水の方が密度が大きいため，対流が発生しなくなる。このため，淡水の湖では海水のような 0 ℃の深層水は生成されにくい。密度が最大になる温度が 0 ℃を下回れば，0 ℃まで対流が続くはずであり，その塩分を問題図 2 のグラフから読み取ればよい。

問 4 熱塩循環は海洋深層の流れであるため，大気循環や風成循環と違い，観測が困難である。このため，放射性同位体をトレーサー(目印)として，さまざまな地点の深層水中の元素の壊変の割合(元の元素量に対する減少量)から，表層より沈み込んで何年経過したかを求め，深層の流れの方向を求める作業が行われた。その結果，大西洋で沈み込んだ海水が 1000 ~ 2000 年かけて深層をめぐることがわかった(図 5 − 4)。

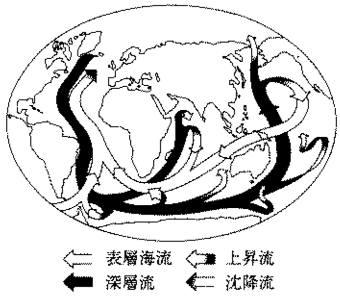


図 5 − 4　熱塩循環

(1) 熱塩循環のトレーサーとして放射性同位体の ^{14}C などが使用されている。^{14}C は海洋深層では新たな供給を受けないため，減る一方である。^{14}C がトレーサーとして用いられるためには，周囲との交換が起こってはならない。例えば，2000 年以上の年齢の縄文杉は生きており，新陳代謝として周囲と元素の交換を行っているため年代測定は行えない。このため，生体の絶対年代は，その生体が死んでからの年代を示す。これと同様に海水中の ^{14}C を使う場合，深層では大気から新たに二酸化炭素が溶け込まないため，周囲との交換は行われていないと考えてよい。

(2) 熱塩循環を追跡するのに使われる放射性同位体は，1000 ~ 2000 年という年数を求めるため，半減期が約 5700 年と比較的短く，海水に二酸化炭素の形で溶け込み，比較的多く存在する ^{14}C である。

問 5 単位に注意して流速を求めればよい。地球一周に相当する距離は約 40000 km であり，この距離を熱塩循環は 1500 年で移動するとあるので，1 年あたりの移動距離は $\frac{40000}{1500}$ km となる。また，表層の海流は，5 日間で約 650 km を移動するとあるので，5 日の 73 倍の 365 日 = 1 年では，$650 \times 73 = 47450$ km 移動する。よって，

$$\frac{40000}{1500} \div 47450 \fallingdotseq 0.00056$$

となり，答は，6×10^{-4} 倍となる。なお，熱塩循環の流速は約 1 mm/s であるのに対し，表層海流は黒潮のような速い海流の場合，流速は約 1~2 m/s に達する。

6 【Ⅰ・Ⅱ選択者用問題】 日本列島の地質構造とテクトニクス

【解答】

問1	1	深海底	2	中央構造線	3	西	4	伊豆
問2	日本海の拡大前にアジア大陸の縁辺に位置していたプレート沈み込み帯							
問3	(1)	エ	(2)	ウ				
	(3)	種類	ブーゲー異常	値	負	(4)	ウ	

【配点】 (20点)

問1　各1点×4,　問2　3点,　問3　(1)　3点　(2)　3点　(3)　種類：2点　値：2点　(4)　3点

【出題のねらい】

日本列島の地質構造については，プレート運動や日本列島の地史およびその形成過程とセットで出題されることが多い。本問では，日本列島の基盤がプレートの沈み込み帯で形成された付加体であること，ならびに日本列島のテクトニクス(地質構造や地形をつくるプレートのはたらき)についての理解を問う問題を出題した。

【解説】

問題

問1 $\boxed{1}$：プレートの沈み込み帯では，深海底堆積物のような密度の小さいものや海山などの地形的な凸部の多くは，海洋プレートと一緒に沈み込まずに大陸プレート縁辺部に寄せ集められて付け加わっていく。この付け加えられた堆積物・岩体を付加体という(図6－1)。同時代の付加体は海溝に沿って形成されていくので，平面的には帯状に分布することになる。付加体はおもに生物起源の石灰質や珪酸質の軟泥などの深海底堆積物や，海溝・トラフに堆積した陸源性の砕屑物からなる。

$\boxed{2}$：日本列島はフォッサマグナと呼ばれる地溝帯を境に東北日本と西南日本に分かれるが，このフォッサマグナの西縁に沿って続く断層が糸魚川－静岡構造線である(図6－2)。西南日本はさらに中央構造線によって大陸側の内帯と海溝側の外帯とに分けられる。中央構造線，糸魚川－静岡構造線はともに活断層である。

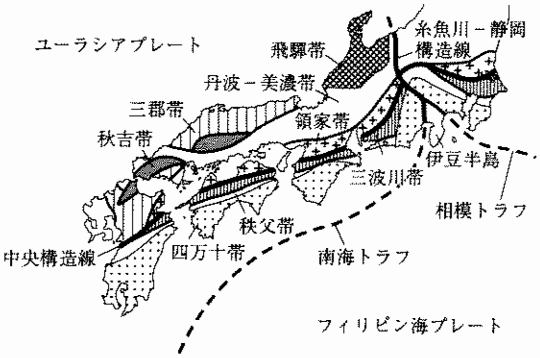


図6－2　日本列島(関東～九州)の地質構造

【ポイント】

付加体

海洋プレート表層にのって運ばれてきた深海底堆積物，海底の岩石や岩塊，海溝に運ばれた堆積物が，次々と大陸プレートの縁辺部に付加したもの。大陸から離れるほど年代が新しくなる。

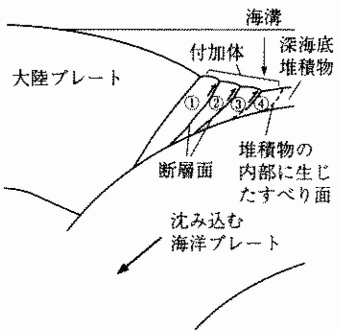


図6－1　付加体の構造
①から④へと新しくなる

糸魚川-静岡構造線

フォッサマグナ(大地溝帯)の西縁にある南北にのびる大断層。活動度の高い活断層が多く分布し，東北日本と西南日本を分ける大きな境界の一つ。

中央構造線

西南日本を大陸側の内帯と海溝側の外帯に分ける大断層。領家帯と三波川帯の境界である。

中央構造線をはさんで北側には高温低圧型の片麻岩や花こう岩が分布する領家帯が，南側には低温高圧型の結晶片岩が分布する三波川帯が東西方向にのびている(図6－2)。領家帯，三波川帯は変成岩が広く分布することから変成帯とも呼ばれる。いずれも白亜紀にそれぞれ異なる変成作用を受けて形成された。

$\boxed{3}$：糸魚川－静岡構造線がフォッサマグナの西縁であるという知識があれば，構造線の東側には地形的に低い地溝帯が続き，構造線の西側には隆起した日本アルプスの山塊が位置することを類推できるであろう。

$\boxed{4}$：**問2**でも取り上げられている日本海の拡大が終了すると，日本列島の海溝側でフィリピン海プレートの沈み込みが始まった。フィリピン海プレートにのって運ばれてきた丹沢山地のもとになる地塊が約800万～500万年前にかけて，伊豆半島の地塊が約200万～50万年前にかけて次々と日本列島に衝突したと考えられている。図6－2に示されるように，西南日本から東西方向に続く地質帯が関東～中部地方で八の字状に北に湾曲しているのは，これらの地塊の衝突のためである。

問2　日本列島は，約2200万～1500万年前に起きた日本海の拡大とともに大陸から分離・移動して現在の位置に到達したと考えられている。それ以前には，日本列島はアジア大陸の一部として存在しており，当時はアジア大陸の縁辺部でプレートの沈み込みが起きていたと推定されている。つまり，現在の日本列島に分布する付加体は，このアジア大陸の縁辺部にあったとされる沈み込み帯で形成されたものである。本問ではそのことを述べればよい。

日本海の拡大と形成

新第三紀の約2200万～1500万年前にアジア大陸から東北日本と西南日本の原型となる地塊がそれぞれ分離し，日本列島と大陸の間にできた地溝帯が日本海となった。

問3(1)　本問は，糸魚川－静岡構造線が通る長野県の諏訪盆地をモデルにしている。選択肢の図で影をつけた部分が諏訪盆地にあたる。実際の断層群の走向とは異なるが，問題用に簡略化している。

周囲より盛り上がったりくぼんだりした土地は地層の褶曲によってもつくられるが，本問ではそれ以外の要因を考えることになる。褶曲によらずに土地がくぼむのは，その領域から物質が失われる場合である。そのようなことが起こるのは，図6－3のように引っ張りの力がはたらいて，図の影をつけた領域から岩盤が互いに離れていく場合である。こうした条件を満たすのはエである。

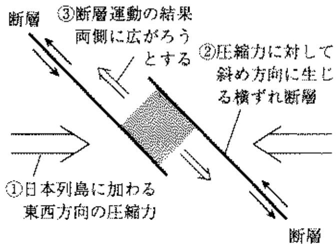


図6－3　諏訪盆地の形成に関わる断層運動の模式図

アは盛り上がった土地がつくられる場合を示したもので，誤りである。また，岩盤に一定の力が加わる場において，イ・ウのように並走する横ずれ断層が反対向きに動くことはない。仮にそのような断層があったとしても，選択肢の図中の影をつけた領域に対し，一方では地盤が離れていき，もう一方では地盤が近づくような動きをしているので，速度がほぼ等しければ影をつけた領域

の物質収支は0に近いと見なせる。よって，エが正解である。

(2) (1)の選択肢図エは2本の断層とも同じずれ方をしており，断層をはさんだ相手側(向こう側)の岩盤が相対的に左に動いている。どちらも左横ずれ断層であるからbが選べる。また，縦ずれ断層では，引っ張りの力がはたらくときには上盤がずり下がる正断層が形成されるので，dが選べる(図6－4参照)。よって，b・dのウが正解である。

(3) 重力異常は，重力の観測値に種々の補正を加えた値から標準重力を差し引いた値であり，地下の質量の過不足を表す指標になっている。周囲よりも質量が過剰に存在すれば重力異常は正の値を取ることが多く，質量が不足していれば負になることが多い。

重力異常には，測定点の高度の影響を取り除いたフリーエア異常と，高度の影響だけでなく地形の影響や地表面とジオイド面の間の物質の引力の影響も合わせて取り除いたブーゲー異常がある。標高の基準であるジオイド面の上に物質が存在する陸域ではその影響を取り除く必要があるため，陸上の重力異常を調べる場合，通常はブーゲー異常を用いる。

図6－4は諏訪盆地の模式断面図である。沖積平野や盆地では，地下の基盤にあたる地層が沈降して盆状にくぼんでおり，そこに周囲または上流域から運ばれてきた土砂が堆積している。新しい時代の未固結の砕屑物は粒子間の隙間(すきま)が大きく，山地を構成する古い時代の岩体や固い地層に比べて密度が小さくなっているため，ブーゲー異常は負の値を示す。このため沖積平野や盆地の重力異常は負の値をとることが多い。

(4) 三つのプレート境界のうち，プレートどうしがすれ違う境界にあたるのがトランスフォーム断層である。教科書ではトランスフォーム断層の事例として海嶺(かいれい)と海嶺を結ぶものが取り上げられているが，実際には海溝と海嶺を結ぶものも存在する。

このトランスフォーム断層が陸上に現れたものの事例としてアメリカ西部のサンアンドレアス断層がある。サンアンドレアス断層は北アメリカプレートと太平洋プレートの境界であるとともに糸魚川－静岡構造線と同様に活動度の高い断層系であり，アメリカ西部で発生する大地震の原因の一つになっている。よって，ア，イ，エは正しい記述である。

陸上を通るプレート境界は海洋に比べて少ないが，サンアンドレアス断層以外にも存在する。例えば，ヒマラヤ～トルコにかけては大陸プレートどうしの境界がのびており，また，アイスランドは中央海嶺が陸上に現れた島として知られる。よって，ウが誤りである。

縦ずれ断層

正断層：相対的に上盤がずり下がる。
逆断層：相対的に上盤がずり上がる。

重力異常

重力の観測値に種々の補正を加えた値から標準重力を差し引いた値。フリーエア異常とブーゲー異常がある。

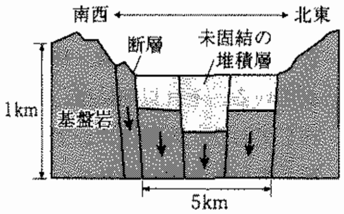


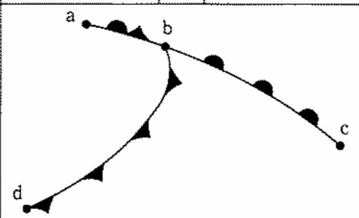
図6－4　諏訪盆地の地下断面の模式図

トランスフォーム断層

プレート境界のうち，すれ違う境界にあたる断層。アメリカ西部を通るサンアンドレアス断層はその代表例である。

7 【I選択者用問題】 地上天気図

【解答】

問1	1	春一番	2	南	問2	上空を吹く偏西風に流されるため。				
問3	(1)	くもり	(2)	ウ	(3)	ア	(4)	東	(5)	C
問4	積乱雲						(2)	閉塞前線	(3)	a
問5	(1)									

【配点】 (20点)

問1　1：2点　2：1点，　問2　2点，　問3　(1)　1点　(2)　1点　(3)　1点
(4)　2点　(5)　2点，　問4　2点，　問5　(1)　3点　(2)　1点　(3)　2点

【出題のねらい】

地上天気図に関する出題である。等圧線から風が吹く方向の読み取りや低気圧や前線に関する知識を問う基本的な問題である。教科書や参考書を使って勉強するだけでなく，テレビの天気予報などで天気図の解説を聞いて，知識をより深いものにしておこう。

【解説】

問題

問1 $\boxed{1}$・$\boxed{2}$：春一番とは，2～3月頃に初めて吹く暖かい南寄りの強い風である。気象庁では期間を立春から春分までとしている。日本海に低気圧が進んできたときに，低気圧に向かって吹く南風が春一番になりやすい。春一番が吹くと，強い南風によって気温が急上昇し，春～初夏のような陽気になる。一方で，強風や雪崩による災害が起こる危険もある。春一番が吹いたあとは，寒冷前線がやってきて強い雨が降り，寒冷前線が通り過ぎると，冷たい北西風が吹いて冬に逆戻りしたような天気になることが多い。

なお，2012年の関東地方などのように立春から春分までに強い南寄りの風が吹かなかった場合，その年の春一番は無かったことになる。

問2 日本付近などの中緯度地方では一年を通して上空に偏西風が吹いており，移動性高気圧や低気圧は偏西風に流されて西から東へ移動する。台風なども日本付近に近づくと東へ向きを変えることが多いが，これも偏西風に流されるためである。

問3 (1)～(3)　天気図記号も読めるようにしておこう。おもな天気図記号は図7－1に示すとおりである。風向は吹いてくる方向を示し，その方向に長い線で表す。南風の場合は，南から北に向かう風なので風向は南であり，南向きに長い線で表す。風の強さは風力階級を用い，矢羽の数で表す。風力階級は0～12まであり，風力4は風速5.5 m/s以上8.0 m/s未満というように風力と風速

【ポイント】

春一番
立春を過ぎて初めて吹く強い南風。日本海に低気圧が進んできたときに吹きやすい。

偏西風
中緯度で一年を通して吹いている西風。移動性高気圧や低気圧は偏西風に流されて西から東へ進む。

の対応は決まっている。

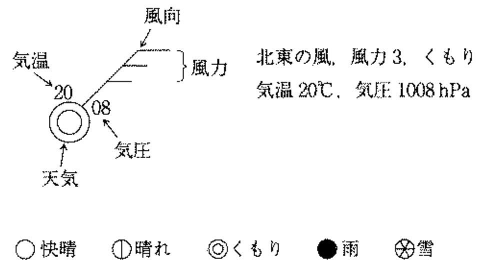


図7－1　おもな天気図記号とその例

(4)　図7－2は，北半球での等圧線と風にはたらく力および風の吹く方向の関係を表したものである。北半球では，コリオリの力(転向力)は，風が吹いていく方向に対して直角右向きにはたらく。本問では，北へ向かって風が吹いているので，その直角右向きである東が正解となる。

コリオリの力(転向力)
北半球では風の吹いていく方向に対して直角右向きにはたらく。

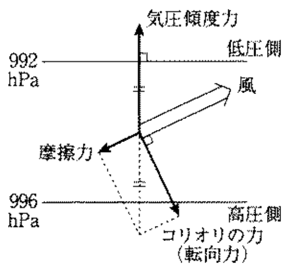


図7－2　等圧線と風(北半球)

(5)　図7－2のように，風の吹いていく方向は，圧力が高い方から低い方にはたらく気圧傾度力の方向から，右に45度以上ずれた方向となる。問題図1のA～D地点で，風の吹いていくおよその方向は，A地点では北から南，B地点では南東から北西，C地点では南から北，D地点では北西から南東である。風向は，風が吹いてくる方向で表すので，本問では南風であるC地点が正解となる。

問4　図7－3は，寒冷前線と温暖前線とその断面図である。寒冷前線は前線面の傾きが急なため，強い上昇気流によって背の高い積乱雲が発達し，激しい雨が降り，強い風が吹く。雷や突風，ときには竜巻が起こることもある。一方の温暖前線は，前線面の傾きがゆるやかなため，穏やかな上昇気流によって乱層雲ができて，弱い雨を降らせる。

寒冷前線
寒気が暖気に潜り込んでできる。前線面の傾きは急で，強い上昇気流によって積乱雲が発達する。激しい雨が降る。

温暖前線
暖気が寒気に乗り上げてできる。前線面の傾きはゆるやかで，乱層雲による弱い雨が降る。

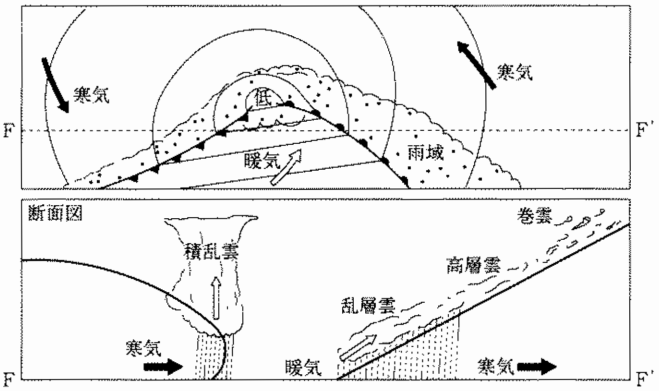


図７－３　寒冷前線と温暖前線とその断面図

問５(1)～(3)　閉塞(へいそく)前線は，寒冷前線が温暖前線に追いついてできる。図７－４は低気圧が発達する過程を表しており，閉塞前線ができる過程がわかる。閉塞前線ができる頃が温帯低気圧の最盛期である。本問で問われている閉塞前線ができたときの温帯低気圧の中心の位置や前線は，図７－４の④を見ればわかるだろう。

なお，前線には本問で扱った寒冷前線，温暖前線，閉塞前線の他に，停滞前線がある。それぞれの特徴や記号を覚えておこう。

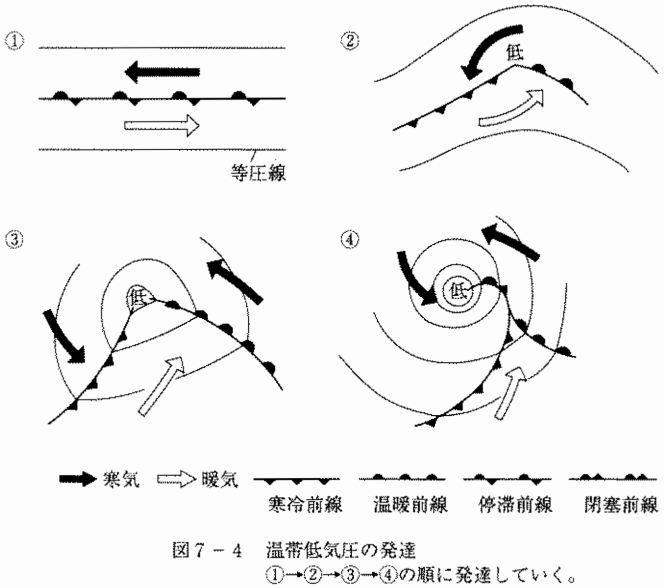


図７－４　温帯低気圧の発達
①→②→③→④の順に発達していく。

閉塞前線
寒冷前線が温暖前線に追いつくときにできる。

停滞前線
暖気と寒気の勢力が均衡しているときにできる。

8 【Ⅰ選択者用問題】 銀河系と宇宙

【解答】

問1	1	年周視差	2	ドップラー効果	3	ビッグバン				
問2	A	X	B	X	C	X	D	Y	問3	5.0×10^{-3} 秒
問4	(1)	$\dfrac{1}{H}$	(2)	1.4×10^{10} 年	(3)	短くなる	問5	3K 宇宙背景放射		

【配点】 (20点)

問1　各2点×3，　問2　各1点×4，　問3　2点，

問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点，　問5　2点

【出題のねらい】

天体までの距離と，宇宙の膨張に関する問題である。近くの天体までの距離と遠くの天体までの距離の測定方法の違い，銀河系に見られる星団の特徴，銀河系の構造，ハッブルの法則から導かれる宇宙の姿など，入試に頻出の問題である。重要事項をまとめるだけでなく，具体的な数値を用いた計算にも慣れておく必要がある。

【解説】 問題

問1 $\boxed{1}$：太陽－恒星－地球のなす角を年周視差という。地球が公転しているため，地球から見た近くの恒星の方向が変化するように見える現象で，1年間の変化の最大角の半分の角度をいう。年周視差が1秒になるときの距離が1パーセクであり，年周視差は恒星までの距離に反比例する。年周視差は非常に小さな角度なので，およそ1000パーセクまでの近くの恒星しか測定することができない(図8－1)。

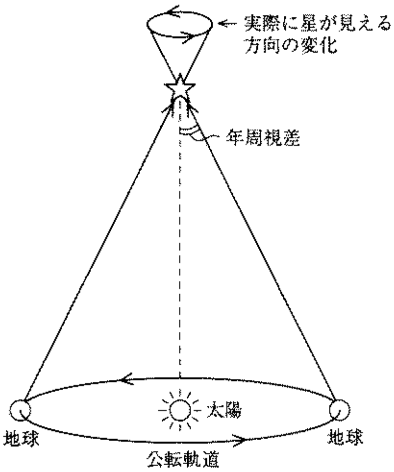


図8－1　年周視差

$\boxed{2}$：光のような波は，波源が近づいていると波長が短くなり，遠ざかっていると波長が長くなる。この現象をドップラー効果という。アメリカの天文学者のハッブルは，多くの銀河を観測

【ポイント】

年周視差
太陽－恒星－地球のなす角。

し，銀河のスペクトル中の吸収線が波長の長い(赤色の)方へずれており，そのずれが銀河の距離に比例していることを発見した。このずれを赤方偏移という。赤方偏移は光のドップラー効果により生じ，観測した銀河が遠ざかっていることを示している。

$\boxed{3}$：宇宙が膨張しているならば，時間をさかのぼると宇宙は一点から始まったとアメリカのガモフが提唱した。この一点から宇宙の膨張が始まる大爆発をビッグバンという。

問2　散開星団は，銀河系円盤部に集中し，比較的新しく，ヘリウムより重い元素(重元素)が多く含まれる種族Ⅰの恒星が数十～数千個集まった星団である。

球状星団は，ハローと呼ばれる部分に散在し，銀河系の誕生とほぼ同時期に誕生した，古くて重元素の少ない種族Ⅱの恒星が数万～数百万個，球状に密集した星団である(表8－1)。

表8－1　散開星団と球状星団

	散開星団	球状星団
形状	不定形	球状
恒星数	少ない(数十～数千個)	多い(10^4 ～ 10^6 個)
種族	種族Ⅰ(第Ⅰ種族)	種族Ⅱ(第Ⅱ種族)
年齢	若い(～50億年)	老齢(100～130億年)
重元素量	多い	少ない
分布	円盤部	ハロー
例	プレヤデス星団(すばる)	M13

銀河系は渦巻構造をもち，棒渦巻銀河に分類される。直径約10万光年の円盤部，恒星が非常に密集し膨らんでいる中心部のバルジ，それらを取り巻く直径約15万光年のハローから構成される。太陽系は銀河系の中心から約2.8万光年離れており，約2.4億年かけて銀河系の中心のまわりを公転している(図8－2)。

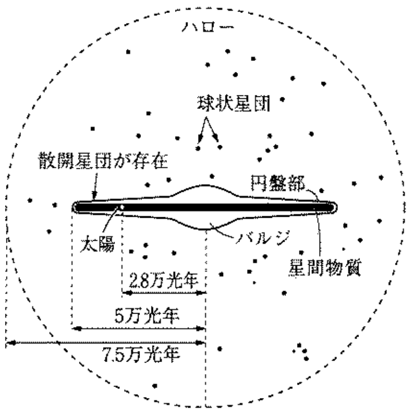


図8－2　銀河系の構造

赤方偏移
観測者から遠ざかる天体から出た光の波長が長くなる現象。赤方偏移の量は後退速度に比例する。

ビッグバン
宇宙の膨張が始まるときの大爆発。

星団
同時期に形成された恒星の集団。散開星団と球状星団に分類される。

銀河の形
渦巻銀河，棒渦巻銀河，楕円(だえん)銀河，不規則銀河に大別される。

問3　年周視差が1秒の恒星までの距離が1パーセクである。恒星の距離 r パーセクは年周視差 p 秒に反比例する。

$r=\frac{1}{p}$ より，

$$p=\frac{1}{r}=\frac{1}{200}=5.0\times10^{-3}\,[\text{秒}]$$

問4 (1)　銀河系からの後退速度と銀河系からの距離は比例関係にあるので，遠くにある銀河ほど，遠ざかっていく速度が大きい。銀河の後退速度を v，銀河系からの距離を r とすると，$v=Hr$ と表せる。これをハッブルの法則といい，宇宙が膨張していることを示している。なお，H はハッブル定数と呼ばれる。宇宙誕生から膨張が開始され，膨張速度が変化していないとすると，この法則から，宇宙の誕生は $\frac{r}{v}$ 年前になる。よって，宇宙の年齢は，$\frac{r}{v}=\frac{1}{H}$ とハッブル定数の逆数となる。

(2)　$H=22\,[\text{km/s/100万光年}]$ は，100万光年離れている銀河は $22\,[\text{km/s}]$ の速さで遠ざかっていることを意味する。

100万光年 $=10^6\times9.5\times10^{12}\,[\text{km}]$ であるから，

$$\frac{r}{v}=\frac{10^6\times9.5\times10^{12}}{22}\,[\text{s}]$$

1年 $=365\times24\times60\times60\,[\text{s}]$ より，年の単位に直すと，

$$\frac{r}{v}=\frac{10^6\times9.5\times10^{12}}{22}\times\frac{1}{365\times24\times60\times60}\,[\text{年}]$$

1光年 $=9.5\times10^{12}\,[\text{km}]=3.0\times10^5\,[\text{km/s}]\times365\times24\times60\times60\,[\text{s}]$

なので，宇宙の年齢 $\frac{r}{v}$ は，

$$\frac{r}{v}=\frac{1}{H}=\frac{10^6}{22}\times3.0\times10^5\fallingdotseq1.4\times10^{10}\,[\text{年}]$$

となる。現在ではより正確な測定に基づいて，宇宙の年齢は約137億年とされている。

(3)　宇宙はかつて，現在より膨張速度が速い，つまり後退速度の速い時期があり，徐々に膨張速度が遅くなり現在の速度になっているとするので，現在の速度で一定に膨張し続けてきたと考える場合よりも膨張するのにかかる時間が短くなることになり，(2)の結果より短くなる。

問5　宇宙の誕生から温度が3000K程度に低下したとき，電子がイオンと結合し原子となったため，光を散乱していた自由電子が宇宙からなくなり，それまで直進することができなかった可視光線が直進できるようになった。これを宇宙の晴れ上がりという。この頃に宇宙全体を満たしていたと考えられる可視光線が，赤方偏移により波長が長く引きのばされ，絶対温度3Kに相当する波長域の電磁波として現在観測されている。この電磁波は宇宙のどの方向からも一様にやってくるもので，3K宇宙背景放射と呼ばれる。

年周視差と距離

天体までの距離 r パーセクは年周視差 p 秒に反比例する。

$r=\frac{1}{p}$

ハッブルの法則

銀河系からの後退速度 v と銀河系からの距離 r は比例する。

$v=Hr$（H はハッブル定数）

3K宇宙背景放射

3Kの温度に相当する物体が放射する電磁波で，宇宙の全方向から観測される。