クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度　**全統センター試験プレテスト**

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年11月実施】

●数　学

●理　科

本冊子の解答・採点基準をもとに自己採点を行ってください。「自己採点シート」は学習の手引き｛英語｝編冊子の巻末にありますのでご利用ください。

河合塾

【数 学 ①】

数 学 I

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正 解	配点	自己採点
第1問	ア	6	1	
	$\sqrt{\text{イ}}$	$\sqrt{2}$	1	
	ウ$-\sqrt{\text{エ}}$	$6-\sqrt{2}$	2	
	オ	5	3	
	カキ	10	3	
	$(p+$ク$)(q+p)^{\text{ケ}}$	$(p+1)(q+p)^2$	2	
	コ	2	2	
	サシ	12	2	
	$108($ス$+$セ$\sqrt{3})$	$108(7+4\sqrt{3})$	4	
		第1問 自己採点小計	(20)	
第2問	アイ$a+$ウ	$-6a+6$	3	
	エ$a-$オ	$2a-2$	2	
	a^2-カ$a+$キ	a^2-4a+5	2	
	ク	2	2	
	ケコ	-1	2	
	$\frac{\text{サシ}}{\text{ス}}x^2+x-$セ	$\frac{-1}{4}x^2+x-2$	3	
	ソa^2-タ$a+$チツ	$2a^2-8a+10$	4	
	テ	0	3	
	ト$<a<\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$1<a<\frac{5}{2}$	4	
		第2問 自己採点小計	(25)	

問題番号	解答記号	正 解	配点	自己採点
第3問	アイウ°	120°	3	
	$\frac{\sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3	
	カキク°	180°	3	
	ケ$-$コ$\cos\theta$	$2-2\cos\theta$	3	
	サ$+$シ$\cos\theta$	$5+4\cos\theta$	3	
	スセソ°	120°	3	
	$\sqrt{\text{タ}}$	$\sqrt{7}$	3	
	$\frac{\sqrt{\text{チ}}}{\text{ツ}}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	4	
	$\frac{\sqrt{\text{テト}}}{\text{ナニ}}$	$\frac{\sqrt{30}}{10}$	5	
		第3問 自己採点小計	(30)	
第4問	ア	4	3	
	イウエ$-$オカ$b-b^2$	$100-80b-b^2$	3	
	キ	1	3	
	クケ	41	3	
	コサシス$-$セソタ$b-b^2$	$1900-820b-b^2$	3	
	チ	2	3	
	ツ	2	3	
	テ	8	4	
		第4問 自己採点小計	(25)	
		自己採点合計	(100)	

第1問　方程式・不等式，数と式

〔1〕 2次方程式 $2x^2-12x+17=0$ の二つの解のうち小さい方を α，大きい方を β とする．

(1)
$$\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}},\quad \beta-\alpha=\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

(2) n を正の整数とし，x の不等式

$$\frac{|x-\alpha-\beta|}{\beta-\alpha}<n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える．

$n=1$ のとき，① の解は

$$\boxed{\text{ウ}}-\sqrt{\boxed{\text{エ}}}<x<\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である．

① の解に 0 が含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{オ}}$ である．

① の解に正の整数が 20 個以上含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{カキ}}$ である．

〔2〕 $A=p^3+(2q+1)p^2+q(q+2)p+q^2$ とする．

(1) A を q で整理し，因数分解すると

$$A=\left(p+\boxed{\text{ク}}\right)(q+p)^{\boxed{\text{ケ}}}$$

となる．

(2) $r=1+\sqrt{3}$ のとき

$$r^2-2r=\boxed{\text{コ}},\quad r^4-16r=\boxed{\text{サシ}}$$

であり，$p=-1+\sqrt{3}$，$q=4$ のとき

$$A^2=108\left(\boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}\sqrt{3}\right)$$

である．

【解説】

問題

〔1〕 数学Ⅰ・数学A 第1問〔1〕に同じである．

〔2〕

(1)
$$\begin{aligned}A&=p^3+(2q+1)p^2+q(q+2)p+q^2\\&=(p+1)q^2+(2p^2+2p)q+p^3+p^2\\&=(p+1)q^2+2p(p+1)q+p^2(p+1)\\&=(p+1)(q^2+2pq+p^2)\\&=\left(p+\boxed{1}\right)(q+p)^{\boxed{2}}.\end{aligned}$$

(2)　$r=1+\sqrt{3}$ のとき，

$$\begin{aligned} r^2-2r &= r(r-2) \\ &= (1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) \\ &= (\sqrt{3})^2-1^2 \\ &= \boxed{2} \end{aligned}$$

であり，

$$r^2=2r+2$$

であるから，

$$\begin{aligned} r^4-16r &= (r^2)^2-16r \\ &= (2r+2)^2-16r \\ &= 4r^2-8r+4 \\ &= 4(2r+2)-8r+4 \\ &= \boxed{12} \end{aligned}$$

である．

　$p=-1+\sqrt{3}$，$q=4$ のとき (1) より，

$$\begin{aligned} A &= (p+1)(q+p)^2 \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3}+3)^2 \\ &= 3\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 \\ &= 3\sqrt{3}r^2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} A^2 &= (3\sqrt{3}r^2)^2 \\ &= 27r^4 \end{aligned}$$

である．

　ここで，$r^4-16r=12$ より，

$$r^4=16r+12$$

であるから，

$$\begin{aligned} A^2 &= 27r^4 \\ &= 27(16r+12) \\ &= 27\cdot 4(4r+3) \\ &= 108\{4(1+\sqrt{3})+3\} \\ &= 108\left(\boxed{7}+\boxed{4}\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

である．

☜　$$\begin{aligned} r^2-2r &= (1+\sqrt{3})^2-2(1+\sqrt{3}) \\ &= 1+2\sqrt{3}+3-2-2\sqrt{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$
と直接計算してもよい．

☜　$$4r^2-8r+4=4(r-1)^2$$
としてもよい．

☜　$$r^2=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$$
より，
$$r^4=(4+2\sqrt{3})^2=28+16\sqrt{3}$$
であるから，
$$\begin{aligned} r^4-16r &= (28+16\sqrt{3})-16(1+\sqrt{3}) \\ &= 12 \end{aligned}$$
としてもよい．

☜　$r^4-16r=12$ を利用せず求めると次のようになる．
$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 \\ &= 3\sqrt{3}(1+2\sqrt{3}+3) \\ &= 6\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$
より，
$$\begin{aligned} A^2 &= (6\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^2 \\ &= 108(4+4\sqrt{3}+3) \\ &= 108(7+4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

第 2 問　2 次関数

数学Ⅰ・数学A 第 2 問に同じである．

第 3 問　図形と計量

AB＝1，CD＝$\sqrt{7}$ である四角形 ABCD の内部に点 O があり

$$OA=OB=OC=1,\quad OD=2$$

を満たしている．

$$\angle COD=\boxed{アイウ}^\circ$$

であり，△OCD の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である．

また，$\angle BOC+\angle DOA=\boxed{カキク}^\circ$ であり，$\angle BOC=\theta$ とすると

$$BC^2=\boxed{ケ}-\boxed{コ}\cos\theta,\quad DA^2=\boxed{サ}+\boxed{シ}\cos\theta$$

である．

(1)　△ABC の外接円の半径と △ODA の外接円の半径が等しいとすると

$$\theta=\boxed{スセソ}^\circ,\quad BD=\sqrt{\boxed{タ}}$$

である．

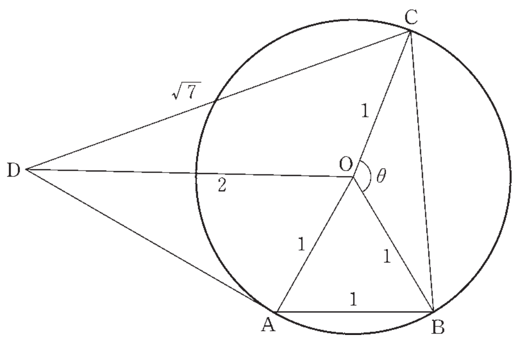
(2)　$\theta=90^\circ$ とし，四角形 ABCD から △OAB を取り除いた図形を T とする．さらに線分 OC と線分 OD を折り目として図形 T を折り曲げて，線分 OA と線分 OB を重ね合わせることによってできる三角錐を考える．

三角錐 OACD の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ であり，点 O から平面 ACD に下ろした垂線と平面 ACD の交点を H とすると

$$OH=\frac{\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナニ}}$$

である．

【解説】　問題



△OCD に余弦定理を用いると，

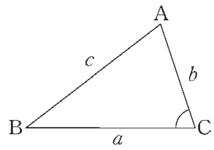
$$\cos\angle\mathrm{COD}=\frac{\mathrm{OC}^2+\mathrm{OD}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}}$$
$$=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{COD}=\boxed{120}^\circ$$

である．

☜ **余弦定理**



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

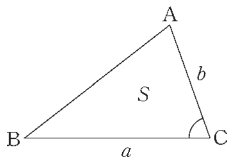
$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

△OCD の面積は，

$$\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\sin120^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$.

OA＝OB＝AB より，△OAB は正三角形であるから，
∠AOB＝60° であり，

$$\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{DOA}$$
$$=360^\circ-(\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{COD})$$
$$=360^\circ-(60^\circ+120^\circ)$$
$$=\boxed{180}^\circ$$

である．

△OBC に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\theta$$
$$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\theta$$
$$=\boxed{2}-\boxed{2}\cos\theta$$

であり，

$$\angle\mathrm{DOA}=180^\circ-\angle\mathrm{BOC}$$
$$=180^\circ-\theta$$

であるから，△ODA に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{DA}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OD}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OD}\cos\angle\mathrm{DOA}$$
$$=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=\boxed{5}+\boxed{4}\cos\theta \qquad \cdots①$$

☜ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$.

である．

(1)　OA＝OB＝OC＝1 より △ABC の外接円の中心は O であり半径は 1 であるから，条件より △ODA の外接円の半径も 1 である．

よって △ODA に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{DA}}{\sin\angle\mathrm{DOA}}=2\cdot 1$$

であり，

$$\mathrm{DA}=2\sin(180^\circ-\theta)$$
$$=2\sin\theta$$

である．

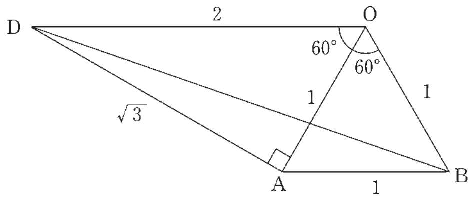
①に代入して，

$$(2\sin\theta)^2=5+4\cos\theta$$
$$4(1-\cos^2\theta)=5+4\cos\theta$$
$$4\cos^2\theta+4\cos\theta+1=0$$
$$(2\cos\theta+1)^2=0$$
$$\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

であるから，

$$\theta=\boxed{120}^\circ$$

である．



このとき，

$$\angle\mathrm{DOA}=180^\circ-\theta$$
$$=180^\circ-120^\circ$$
$$=60^\circ$$

であるから，△OBD に余弦定理を用いると，

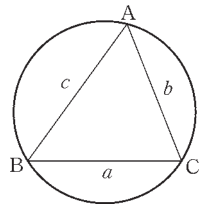
$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OD}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}\cos\angle\mathrm{BOD}$$
$$=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos120^\circ$$
$$=7$$

であり，

$$\mathrm{BD}=\sqrt{\boxed{7}}$$

である．

☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

☜ $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$.

☜ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

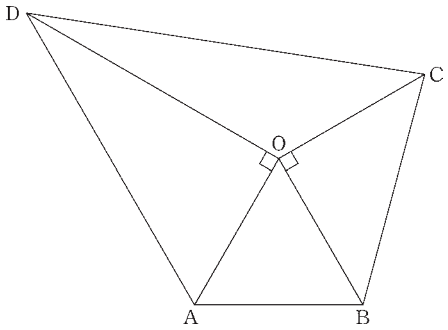
☜ $\angle\mathrm{BOD}=\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{DOA}$
$=60^\circ+60^\circ$
$=120^\circ$.

☜ △OBD≡△OCD となることに注目して，

$$\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=\sqrt{7}$$

としてもよい．

(2)



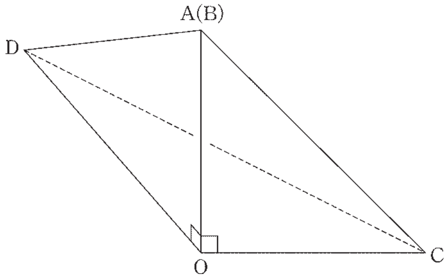
折り曲げる前の図形において，

$$\angle \mathrm{AOD}=180^\circ-\theta \qquad ☜\ \theta=\angle \mathrm{BOC}.$$
$$=180^\circ-90^\circ$$
$$=90^\circ$$

であり，折り曲げて線分 OA と線分 OB を重ね合わせた後の三角錐 OACD において，

$$\angle \mathrm{DOA}=\angle \mathrm{AOC}=90^\circ$$

である．



したがって，

辺 OA⊥平面 OCD

であるから，三角錐 OACD の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle \mathrm{OCD}\ \text{の面積})\cdot \mathrm{OA}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{6}}$$

である．

折り曲げた後の図形において，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$
$$\mathrm{DA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\quad \mathrm{CD}=\sqrt{7}$$

であり，

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{DA}^2-\mathrm{CD}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2$$
$$=0$$

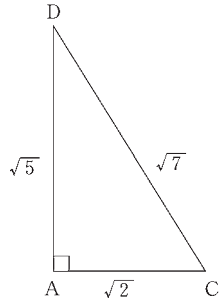
すなわち

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{DA}^2=\mathrm{CD}^2$$

が成り立つから，

$$\angle\mathrm{DAC}=90^\circ$$

である．



よって △ACD の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DA}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$$

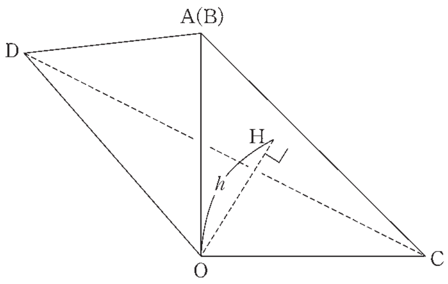
$$=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

である．

OH$=h$ とすると，

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

である．



$V=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$S=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ であるから，

$$\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}h$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}}{10}$$

すなわち

$$\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{\boxed{30}}}{\boxed{10}}$$

である．

【(1) の θ を求める別解】

OA＝OB＝OC＝1 より △ABC の外接円の中心は O であり半径は 1 であるから，条件より △ODA の外接円の半径も 1 である．

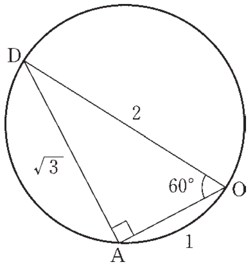
ここで OD＝2 より，OD は △ODA の外接円の直径であるから，

$$\angle \mathrm{OAD}=90^\circ$$

であり，これと OA＝1，OD＝2 より，

$$\angle \mathrm{DOA}=60^\circ$$

である．



$\angle \mathrm{DOA}+\theta=180^\circ$ であるから，

$$\theta=180^\circ-60^\circ$$
$$=120^\circ$$

である．

☜ △ODA に正弦定理を用いると，

$$\frac{2}{\sin\angle \mathrm{OAD}}=2\cdot 1$$

$$\sin\angle \mathrm{OAD}=1.$$

これより，

$$\angle \mathrm{OAD}=90^\circ$$

としてもよい．

第4問　数と式

$m \leqq \sqrt{17} < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ア}}$ である．

$a = \boxed{\text{ア}}$ のとき

$$(10\sqrt{17})^2 - (10a+b)^2 = \boxed{\text{イウエ}} - \boxed{\text{オカ}}\,b - b^2$$

であり，$\boxed{\text{イウエ}} - \boxed{\text{オカ}}\,b - b^2 \geqq 0$ を満たす最大の負でない整数 b は $\boxed{\text{キ}}$ であるから，

$n \leqq 10\sqrt{17} < n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{\text{クケ}}$ である．

$a = \boxed{\text{クケ}}$ のとき

$$(100\sqrt{17})^2 - (10a+b)^2 = \boxed{\text{コサシス}} - \boxed{\text{セソタ}}\,b - b^2$$

であり，$\boxed{\text{コサシス}} - \boxed{\text{セソタ}}\,b - b^2 \geqq 0$ を満たす最大の負でない整数 b は $\boxed{\text{チ}}$ である．

よって，$\sqrt{17}$ を小数で表すと小数第2位の数字は $\boxed{\text{ツ}}$ であり，$\dfrac{4}{\sqrt{17}+1}$ を小数で表すと小数第2位の数字は $\boxed{\text{テ}}$ である．

【解説】　問題

$16 < 17 < 25$ より，$4 < \sqrt{17} < 5$ であるから，$m \leqq \sqrt{17} < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{4}$ である．

$a=4$ のとき，

$$\begin{aligned}(10\sqrt{17})^2 - (10a+b)^2 &= (10\sqrt{17})^2 - (40+b)^2 \\ &= 1700 - (1600 + 80b + b^2) \\ &= \boxed{100} - \boxed{80}\,b - b^2\end{aligned}$$

☜ $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

である．

ここで，

$$100 - 80b - b^2 = 100 - (80+b)b \qquad \cdots①$$

において，$(80+b)b$ は $b=0, 1, 2, \cdots$ に対して単調に増加するから，① は $b=0, 1, 2, \cdots$ に対して単調に減少する．

さらに，

$$100 - (80+1)\cdot 1 = 19 \geqq 0,$$
$$100 - (80+2)\cdot 2 = -64 < 0$$

であるから，$100 - 80b - b^2 \geqq 0$ を満たす最大の負でない整数 b は $\boxed{1}$ である．

これより，

$$(10\sqrt{17})^2 - (40+1)^2 \geqq 0 \text{ かつ } (10\sqrt{17})^2 - (40+2)^2 < 0$$

☜ $(10\sqrt{17})^2 - (40+b)^2$ は，$b=1$ のとき0以上であり，$b=2$ のとき負である．

すなわち

$$41^2 \leqq (10\sqrt{17})^2 < 42^2$$

$$41 \leqq 10\sqrt{17} < 42$$

が成り立つから，$n \leqq 10\sqrt{17} < n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{41}$ である．

$a=41$ のとき，

$$\begin{aligned}(100\sqrt{17})^2-(10a+b)^2&=(100\sqrt{17})^2-(410+b)^2\\&=170000-(168100+820b+b^2)\\&=\boxed{1900}-\boxed{820}b-b^2\end{aligned}$$

である．

ここで，

$$1900-820b-b^2=1900-(820+b)b \qquad \cdots②$$

において，$(820+b)b$ は $b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して単調に増加するから，② は $b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して単調に減少する．

さらに，

$$1900-(820+2)\cdot 2=256 \geqq 0,$$
$$1900-(820+3)\cdot 3=-569<0$$

であるから，$1900-820b-b^2 \geqq 0$ を満たす最大の負でない整数 b は $\boxed{2}$ である．

これより，

$$(100\sqrt{17})^2-(410+2)^2 \geqq 0 \text{ かつ } (100\sqrt{17})^2-(410+3)^2<0$$

☜ $(100\sqrt{17})^2-(410+b)^2$ は，$b=2$ のとき 0 以上であり，$b=3$ のとき負である．

すなわち

$$412^2 \leqq (100\sqrt{17})^2 < 413^2$$
$$412 \leqq 100\sqrt{17} < 413$$
$$4.12 \leqq \sqrt{17} < 4.13. \qquad \cdots③$$

であるから，$\sqrt{17}$ を小数で表すと，小数第 2 位の数字は $\boxed{2}$ である．

また，

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{17}+1}&=\frac{4(\sqrt{17}-1)}{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)}\\&=\frac{4(\sqrt{17}-1)}{17-1}\\&=\frac{\sqrt{17}-1}{4}\end{aligned}$$

☜ 分母の有理化．

であり，③ より，

$$3.12<\sqrt{17}-1<3.13$$
$$0.78<\frac{\sqrt{17}-1}{4}<0.7825$$

☜ $\frac{3.12}{4}=0.78$，$\frac{3.13}{4}=0.7825$．

であるから，$\dfrac{4}{\sqrt{17}+1}$ を小数で表すと，小数第 2 位の数字は $\boxed{8}$ である．

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】
(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	6	1	
	$\sqrt{イ}$	$\sqrt{2}$	1	
	ウ$-\sqrt{エ}$	$6-\sqrt{2}$	2	
	オ	5	3	
	カキ	10	3	
	ク	2	2	
	ケ	1	2	
	コサシス	1081	3	
	セソ	21	3	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	アイ$a+$ウ	$-6a+6$	3	
	エ$a-$オ	$2a-2$	2	
	a^2-カ$a+$キ	a^2-4a+5	2	
	ク	2	2	
	ケコ	-1	2	
	$\dfrac{サシ}{ス}x^2+x-$セ	$\dfrac{-1}{4}x^2+x-2$	3	
	ソa^2-タ$a+$チツ	$2a^2-8a+10$	4	
	テ	0	3	
	ト$<a<\dfrac{ナ}{ニ}$	$1<a<\dfrac{5}{2}$	4	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	ア$\sqrt{イ}$	$2\sqrt{6}$	3	
	$\dfrac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	3	
	カ$\sqrt{キ}$	$5\sqrt{2}$	3	
	ク	1	2	
	$\dfrac{ケ}{コ}\mathrm{AH}$	$\dfrac{1}{4}\mathrm{AH}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{サ}}{シ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{ス}}{セ}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	3	
	$\dfrac{ソ\sqrt{タ}}{チ}$	$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\dfrac{ツ\sqrt{テ}}{ト}$	$\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$	3	
	$\dfrac{3}{8}(ナ\sqrt{ニ}-\sqrt{ヌ})$	$\dfrac{3}{8}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$	4	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	アイウ	120	3	
	エオ	36	3	
	カ	8	2	
	キ	6	3	
	ク	3	2	
	ケコ	16	2	
	$\dfrac{サ}{シス}$	$\dfrac{1}{15}$	3	
	$\dfrac{セ}{ソ}$	$\dfrac{1}{5}$	3	
	$\dfrac{タチツ}{テトナ}$	$\dfrac{373}{120}$	4	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第 1 問　方程式・不等式，集合・論理

〔1〕 2 次方程式 $2x^2-12x+17=0$ の二つの解のうち小さい方を α，大きい方を β とする。

(1) $\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}$，　$\beta-\alpha=\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$

である。

(2) n を正の整数とし，x の不等式

$$\frac{|x-\alpha-\beta|}{\beta-\alpha}<n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える。

$n=1$ のとき，① の解は

$$\boxed{\text{ウ}}-\sqrt{\boxed{\text{エ}}}<x<\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

① の解に 0 が含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

① の解に正の整数が 20 個以上含まれるような n のうち最小のものは $\boxed{\text{カキ}}$ である。

〔2〕 a，n を 2 以上の整数とし，n に関する条件 p，q，r を次のように定める。

p ：n は 108 で割ると 1 余る数である

q ：n は 120 で割ると 1 余る数である

r ：n は a で割ると 1 余る数である

また，条件 p の否定を $\overline{p}$，条件 r の否定を $\overline{r}$ で表す。

(1) 次の $\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$a=12$ とする。

q は r であるための $\boxed{\text{ク}}$。

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための $\boxed{\text{ケ}}$。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 「p かつ q」を満たす最小の n は $\boxed{\text{コサシス}}$ である。

(3) 「p ならば r」が真，または「q ならば r」が真となるような a は全部で $\boxed{\text{セソ}}$ 個ある。

数学Ⅰ・数学A

【解説】

問題

〔1〕

(1) $$2x^2-12x+17=0$$

より，

$$x=\frac{6\pm\sqrt{2}}{2}$$

☜ 2 次方程式

$$ax^2+2b'x+c=0$$

の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

であるから，$\alpha<\beta$ より，

$$\alpha=\frac{6-\sqrt{2}}{2},\quad \beta=\frac{6+\sqrt{2}}{2}$$

である．

よって，

$$\alpha+\beta=\frac{6-\sqrt{2}}{2}+\frac{6+\sqrt{2}}{2}$$

$$=\boxed{6},$$

$$\beta-\alpha=\frac{6+\sqrt{2}}{2}-\frac{6-\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

(2) $$\frac{|x-\alpha-\beta|}{\beta-\alpha}<n. \qquad \cdots①$$

(1) の結果より ① は，

$$\frac{|x-6|}{\sqrt{2}}<n$$

となり，さらに変形すると，

$$|x-6|<\sqrt{2}\,n$$

$$-\sqrt{2}\,n<x-6<\sqrt{2}\,n$$

$$6-\sqrt{2}\,n<x<6+\sqrt{2}\,n \qquad \cdots②$$

☜ $k>0$ のとき，X の不等式 $|X|<k$ の解は，

$$-k<X<k.$$

となる．

$n=1$ のとき，② より，① の解は，

$$\boxed{6}-\sqrt{\boxed{2}}<x<6+\sqrt{2}$$

である．

② より，① の解に 0 が含まれるための条件は，

$$6-\sqrt{2}\,n<0$$

☜ n は正の整数であるから，$6+\sqrt{2}\,n>0$.

すなわち

$$n>\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2} \qquad \cdots③$$

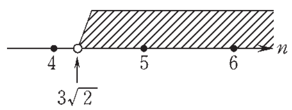
☜ ① の x に 0 を代入して，

$|0-6|<\sqrt{2}\,n$ すなわち $n>3\sqrt{2}$

としてもよい．

である．

$\sqrt{16}<\sqrt{18}<\sqrt{25}$ より，$4<3\sqrt{2}<5$ であるから，③ を満たす，すなわち ① の解に 0 が含まれるような最小の n は $\boxed{5}$ である．☜



また，① の解に正の整数を 20 個以上含むためには，② より，

$$6+\sqrt{2}\,n>20$$

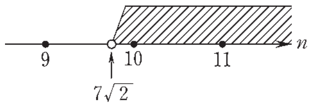
すなわち

$$n>\frac{14}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2} \qquad \cdots ④$$

であることが必要である．

④ のとき，$6-\sqrt{2}\,n<0$ であるから，① の解に正の整数を 20 個以上含む．

$\sqrt{81}<\sqrt{98}<\sqrt{100}$ より，$9<7\sqrt{2}<10$ であるから，④ を満たす，すなわち ① の解に正の整数が 20 個以上含まれるような最小の n は $\boxed{10}$ である．

☜ 

〔2〕

(1)　n が条件 q を満たすとき，整数 k を用いて，

$$n=120k+1=12\cdot 10k+1$$

と表せるから，n は 12 で割ると 1 余る数である．

よって，$a=12$ のとき，

「$q \Rightarrow r$」は真

である．また，

「$r \Rightarrow q$」は偽（反例　$n=13$）

である．

したがって，q は r であるための十分条件であるが，必要条件でない．

☜ 「$s \Rightarrow t$」が真のとき，
s は t であるための十分条件，
t は s であるための必要条件．

ゆえに，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

また，n が条件 p を満たすとき，整数 ℓ を用いて，

$$n=108\ell+1=12\cdot 9\ell+1$$

と表せるから，n は 12 で割ると 1 余る数である．

よって，$a=12$ のとき，

「$p \Rightarrow r$」は真

である．また，

「$r \Rightarrow p$」は偽（反例　$n=13$）

である．それぞれ対偶をとると，

「$\overline{r} \Rightarrow \overline{p}$」は真，

「$\overline{p} \Rightarrow \overline{r}$」は偽

である．

☜ 命題「$s \Rightarrow t$」の真偽とその対偶「$\overline{t} \Rightarrow \overline{s}$」の真偽は一致する．

したがって，$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための必要条件であるが，十分条件でない．

ゆえに，$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(2)　n が「p かつ q」を満たすとき，$n-1$ は 108 でも 120 でも割り切れる数であるから，n は 108 と 120 の最小公倍数である

1080 の倍数に 1 を加えた数である．

n は 2 以上の整数であるから，最小の n は $\boxed{1081}$ である．

(3) 「$p \Rightarrow r$」が真となるための条件は，a が 108 の約数であることであり，「$q \Rightarrow r$」が真となるための条件は，a が 120 の約数であることである．

したがって，「$p \Rightarrow r$」が真，または「$q \Rightarrow r$」が真となるための条件は，a が 108 の約数または 120 の約数であることである．

$$108=2^2\cdot 3^3$$

であるから，108 の正の約数の個数は，

$$(2+1)(3+1)=12 \text{（個）}$$

であり，

$$120=2^3\cdot 3\cdot 5$$

であるから，120 の正の約数の個数は，

$$(3+1)(1+1)(1+1)=16 \text{（個）}$$

である．

さらに，108 と 120 の最大公約数は，

$$2^2\cdot 3=12$$

であり，12 の正の約数の個数は，

$$(2+1)(1+1)=6 \text{（個）}$$

であるから，108 の正の約数または 120 の正の約数である数は全部で，

$$12+16-6=22 \text{（個）}$$

ある．

この中には 1 が含まれており，a が 2 以上の整数であることから，求める個数は，

$$22-1=\boxed{21} \text{（個）}$$

である．

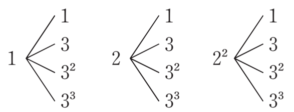
☜ $108=2^2\cdot 3^3$，$120=2^3\cdot 3\cdot 5$ より，108 と 120 の最小公倍数は，

$$2^3\cdot 3^3\cdot 5=1080.$$

☜ 108 の正の約数は，

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)$$

を展開したときに現れる 12 個の数である．



☜ 120 の正の約数は，

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+5)$$

を展開したときに現れる 16 個の数である．

☜ 12 の正の約数は，

$$(1+2+2^2)(1+3)$$

を展開したときに現れる 6 個の数である．

☜ 108 の正の約数の集合を A，
120 の正の約数の集合を B

とすると，

$A\cap B$ は 12 の正の約数の集合

である．

また，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つ．

第 2 問　2 次関数

a, b を定数とし，x の 2 次関数

$$y=\frac{1}{4}x^2-(a-1)x+2a^2+b$$

のグラフ G_1 が点 $(-6,\ 2a^2+9)$ を通るとする.

このとき

$$b=\boxed{\text{アイ}}a+\boxed{\text{ウ}}$$

であり，G_1 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オ}},\ a^2-\boxed{\text{カ}}a+\boxed{\text{キ}}\right)$$

である.

G_1 を x 軸に関して対称移動して得られるグラフを G_2 とする.

(1)　G_2 の頂点の y 座標は，$a=\boxed{\text{ク}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{ケコ}}$ をとる. $a=\boxed{\text{ク}}$ のとき，G_2 を表す 2 次関数は

$$y=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}x^2+x-\boxed{\text{セ}}$$

である.

(2)　G_2 をさらに x 軸方向に $2p$，y 軸方向に p だけ平行移動して得られるグラフを G_3 とし，G_1 と G_3 の頂点の y 座標が等しいものとする. さらに，G_3 を表す 2 次関数の $0\leqq x\leqq 8$ における最小値，最大値を与える x をそれぞれ x_m, x_M とする.

$$p=\boxed{\text{ソ}}a^2-\boxed{\text{タ}}a+\boxed{\text{チツ}}$$

であり，$x_m=\boxed{\text{テ}}$ である.

また，$0<x_M<8$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ト}}<a<\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である.

【解説】　問題

x の 2 次関数

$$y=\frac{1}{4}x^2-(a-1)x+2a^2+b$$

のグラフ G_1 が点 $(-6,\ 2a^2+9)$ を通るとき，

$$2a^2+9=\frac{1}{4}(-6)^2-(a-1)\cdot(-6)+2a^2+b$$

であるから，

$$b=\boxed{-6}a+\boxed{6}$$

である.

このとき，

$$y=\frac{1}{4}x^2-(a-1)x+2a^2-6a+6$$

$$=\frac{1}{4}\{x-2(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a^2-6a+6$$

$$=\frac{1}{4}\{x-(2a-2)\}^2+a^2-4a+5$$

より，G_1 の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}a-\boxed{2},\ a^2-\boxed{4}a+\boxed{5}\right)$$

である．

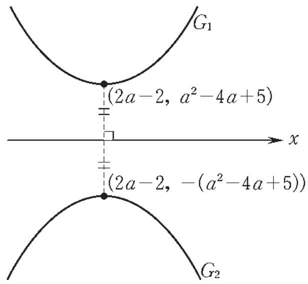
☜ 放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$(q,\ r)$．

G_1 を x 軸に関して対称移動して得られるグラフ G_2 の頂点の座標は，

$$(2a-2,\ -(a^2-4a+5))$$

である．



(1) G_2 の頂点の y 座標は，

$$-(a^2-4a+5)=-(a-2)^2-1$$

より，

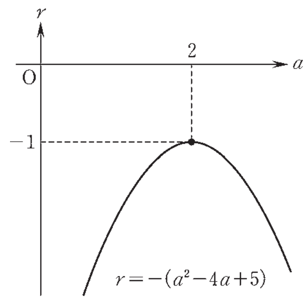
$$a=\boxed{2} \text{ のとき，最大値 } \boxed{-1}$$

をとる．

☜ $r=-(a^2-4a+5)$ とおくと，下図より，

$a=2$ のとき，r は最大値 -1

をとる．



$a=2$ のとき，G_2 の頂点の座標は，

$$(2,\ -1)$$

であり，下に凸の放物線である G_1 は x 軸に関する対称移動により上に凸の放物線になるから，G_2 を表す 2 次関数は，

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2-1$$

$$y=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}x^2+x-\boxed{2}$$

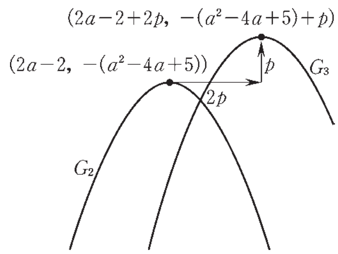
である．

(2) G_2 を x 軸方向に $2p$，y 軸方向に p だけ平行移動して得られるグラフ G_3 の頂点の座標は，

$$(2a-2+2p,\ -(a^2-4a+5)+p)$$

である．

☜ 放物線の平行移動は頂点の移動を考えればよい．



G_1 と G_3 の頂点の y 座標が等しいから，

$$a^2-4a+5=-(a^2-4a+5)+p$$

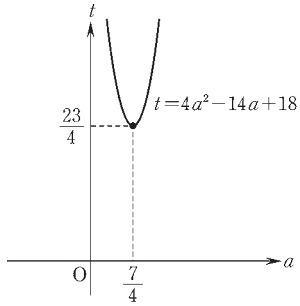
$$p=\boxed{2}a^2-\boxed{8}a+\boxed{10}$$

である．

G_3 の頂点の x 座標を t とおくと，

$$t=2a-2+2p$$
$$=2a-2+2(2a^2-8a+10)$$
$$=4a^2-14a+18$$
$$=4\left(a-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{23}{4}$$
$$\geqq\frac{23}{4}\quad(>4)$$

である．

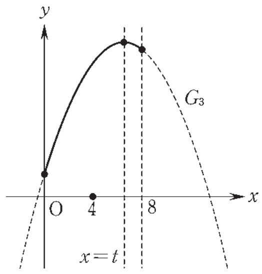


　$t>4$ と G_3 が上に凸の放物線であることに注意すると，

$0\leqq x\leqq 8$ における G_3 を表す 2 次関数の最小値を与える x_m は，

$$x_m=\boxed{0}$$

である．



　また，$0<x_M<8$ となるための条件は，

$$\left(\frac{23}{4}\leqq\right)\ t<8$$

であり，求める a の値の範囲は，

$$4a^2-14a+18<8$$
$$2(a-1)(2a-5)<0$$

より，

$$\boxed{1}<a<\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$$

である．

☜　$t=4a^2-14a+18$.

第 3 問　図形と計量・平面図形

△ABC において

$$AB=3,\quad BC=5,\quad \cos\angle ABC=\frac{1}{3}$$

とする．このとき

$$CA=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である．また

$$\sin\angle ABC=\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である．

点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とし，∠ABC の二等分線と線分 AH の交点を D とする．

$$BH=\boxed{\text{ク}},\quad DH=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}AH$$

であり

$$\sin\angle DBH=\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

さらに，直線 BD と辺 CA の交点を E とし，辺 BC 上に BF＝2BH を満たす点 F をとり，△BFE の外接円の中心を O とする．このとき

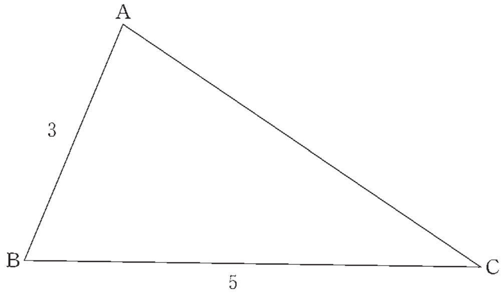
$$\cos\angle ECF=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}},\quad EF=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

△ABC の内接円の中心を I とすると，△OBI の面積は $\dfrac{3}{8}\left(\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$ である．

【解説】

問題



△ABC に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}CA^2&=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC\\&=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\frac{1}{3}\\&=24\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}CA&=\sqrt{24}\\&=\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}\end{aligned}$$

である．

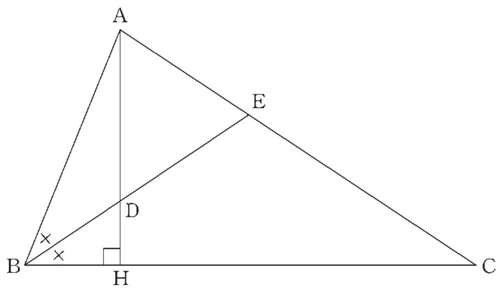
また，

$$\begin{aligned}\sin\angle ABC&=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\\&=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

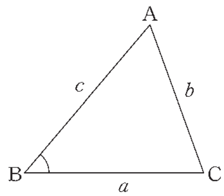
であり，

$$\begin{aligned}(\triangle ABC\text{ の面積})&=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\boxed{5}\sqrt{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．



☜ **余弦定理**

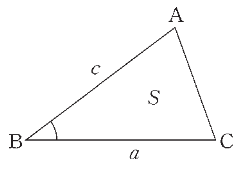


$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$.

☜ $0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

☜ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}ca\sin B$.

$$
\begin{aligned}
BH &= AB\cos\angle ABC \\
&= 3\cdot\frac{1}{3} \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}
$$

であり，△ABH において，角の二等分線の性質より，

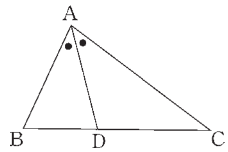
$$
\begin{aligned}
AD : DH &= AB : BH \\
&= 3 : 1
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
DH &= \frac{1}{3+1}AH \\
&= \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}AH
\end{aligned}
$$

である．

☜ **角の二等分線の性質**



BD：CD＝AB：AC.

△ABH に三平方の定理を用いると，

$$
\begin{aligned}
AH &= \sqrt{AB^2-BH^2} \\
&= \sqrt{3^2-1^2} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
DH &= \frac{1}{4}AH \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

となり，さらに △DBH に三平方の定理を用いると，

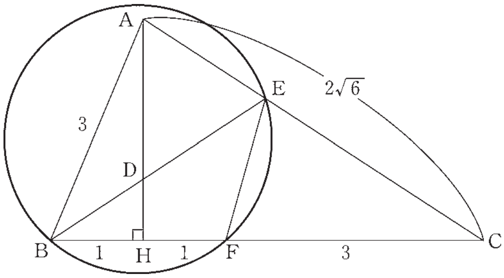
$$
\begin{aligned}
BD &= \sqrt{BH^2+DH^2} \\
&= \sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

である．

よって，

$$
\begin{aligned}
\sin\angle DBH &= \frac{DH}{BD} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}
\end{aligned}
$$

である．



☜　左図の点 A の位置は正しくない．正しい点 A の位置については，最後の（注）参照．

△ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle ECF=\frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2BC\cdot CA}$$

☜　∠ECF＝∠ACB．

$$=\frac{5^2+(2\sqrt{6})^2-3^2}{2\cdot5\cdot2\sqrt{6}}$$

☜　CA＝$2\sqrt{6}$．

$$=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

である．

また，△ABC において，角の二等分線の性質より，

$$AE:EC=AB:BC$$

$$=3:5 \qquad \cdots①$$

であるから，

$$CE=\frac{5}{3+5}CA$$

$$=\frac{5}{8}\cdot2\sqrt{6}$$

$$=\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

である．

△CEF に余弦定理を用いると，

$$EF^2=CE^2+CF^2-2CE\cdot CF\cos\angle ECF$$

$$=\left(\frac{5\sqrt{6}}{4}\right)^2+3^2-2\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$=\frac{27}{8}$$

☜　CF＝BC－BF
＝BC－2BH
＝5－2·1
＝3．

であるから，

$$EF=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．

∠EBF＝∠DBH であるから，

$$\sin\angle EBF=\sin\angle DBH$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

よって，△BFE の外接円の半径を R として，△BFE に正弦定

理を用いると，

$$\frac{\mathrm{EF}}{\sin\angle\mathrm{EBF}}=2R$$

$$\frac{\frac{3\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=2R$$

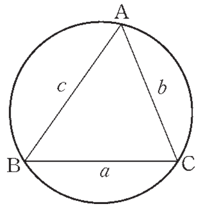
であるから，

$$R=\frac{3\sqrt{6}\cdot3}{4\cdot\sqrt{3}\cdot2}$$

$$=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{8}}$$

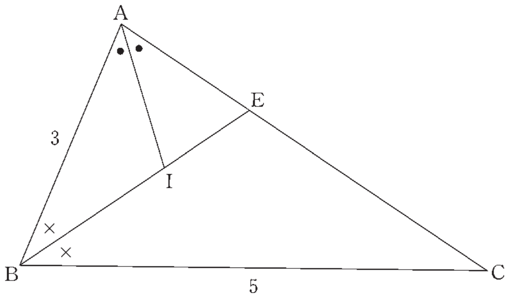
である．

☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



△ABE と △ABC の面積を考えると，

$$(\triangle\mathrm{ABE}\ の面積)=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}(\triangle\mathrm{ABC}\ の面積)$$

$$=\frac{3}{3+5}(\triangle\mathrm{ABC}\ の面積)\ (①\ より)$$

$$=\frac{3}{8}\cdot5\sqrt{2}$$

$$=\frac{15\sqrt{2}}{8}$$

☜ $(\triangle\mathrm{ABC}\ の面積)=5\sqrt{2}$.

である．

さらに，

$$\mathrm{AE}=\frac{3}{3+5}\mathrm{AC}\ (①\ より)$$

$$=\frac{3}{8}\cdot2\sqrt{6}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

である．

また，線分 AI は ∠BAC の二等分線であるから，

$$\mathrm{BI}:\mathrm{IE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AE}$$

$$=3:\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$=4:\sqrt{6}$$

である．

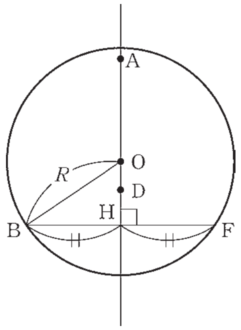
よって，△ABI と △ABE の面積を考えると，

$$(\triangle \mathrm{ABI}\text{ の面積})=\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BE}}(\triangle \mathrm{ABE}\text{ の面積})$$
$$=\frac{4}{4+\sqrt{6}}\cdot\frac{15\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{3}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

☜ $\dfrac{4}{4+\sqrt{6}}=\dfrac{4(4-\sqrt{6})}{(4+\sqrt{6})(4-\sqrt{6})}=\dfrac{2(4-\sqrt{6})}{5}$.

である．

点 O は線分 BF の垂直二等分線上，すなわち直線 AH 上にある．☜



△OHB に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BH}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)^2-1^2}$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{8}\ (>\mathrm{DH})$$

である．

したがって，

$$\mathrm{OD}=\mathrm{OH}-\mathrm{DH}$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

☜ $\mathrm{DH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

であり，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AH}-\mathrm{DH}$$
$$=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

☜ $\mathrm{AH}=2\sqrt{2}$.

であるから，

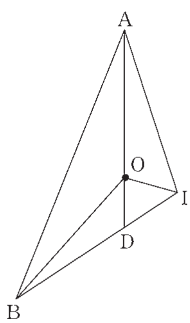
$$\mathrm{OD}:\mathrm{AD}=\frac{3\sqrt{2}}{8}:\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$=1:4$$

である．

よって，△OBI と △ABI の面積を考えると，

$$(\triangle \mathrm{OBI}\text{ の面積})=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}(\triangle \mathrm{ABI}\text{ の面積})$$

☜

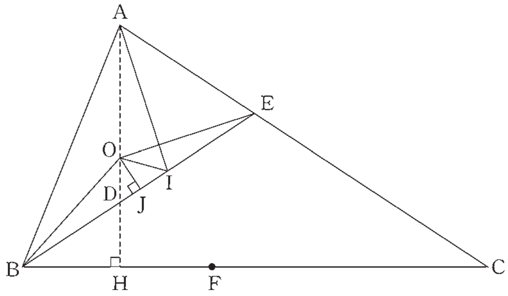


$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$$
$$=\frac{3}{8}\left(\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}-\sqrt{\boxed{3}}\right)$$

である．

【△OBI の面積を求める別解】

(BI：IE$=4$：$\sqrt{6}$ を求めた後)



$$\cos\angle \mathrm{DBH}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\cos\angle \mathrm{ECF}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

より，

$$\cos\angle \mathrm{DBH}=\cos\angle \mathrm{ECF}$$

であるから，

$$\angle \mathrm{DBH}=\angle \mathrm{ECF}$$

である．

よって，△BCE は二等辺三角形であり，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{CE}$$

$$=\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

である．

BI：IE$=4$：$\sqrt{6}$ であるから，

$$\mathrm{BI}=\frac{4}{4+\sqrt{6}}\mathrm{BE}$$

$$=\frac{4}{4+\sqrt{6}}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

$$=2\sqrt{6}-3$$

である．

ここで，点 O は △BFE の外接円の中心であるから，

$$\mathrm{OB}=\mathrm{OE}=R$$

であり，△OBE は二等辺三角形である．

O から線分 BE に下ろした垂線と線分 BE の交点を J とすると，

$$\mathrm{BJ}=\frac{1}{2}\mathrm{BE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}$$
$$=\frac{5\sqrt{6}}{8}$$

である．

したがって，

$$\mathrm{OJ}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BJ}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)^2-\left(\frac{5\sqrt{6}}{8}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

となり，

$$\triangle\mathrm{OBI}=\frac{1}{2}\mathrm{BI}\cdot\mathrm{OJ}$$
$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{6}-3)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{3}{8}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

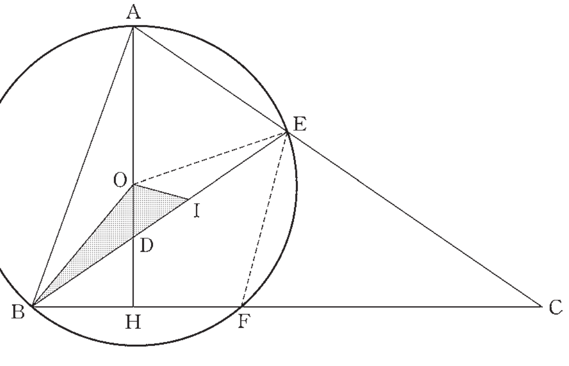
である．

【別解終り】

(注)

$$\mathrm{OA}=\mathrm{AH}-\mathrm{OH}$$
$$=2\sqrt{2}-\frac{7\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{9\sqrt{2}}{8}$$
$$=R$$

であるから，点 A は $\triangle\mathrm{BFE}$ の外接円上にある．したがって，実際には下図のようになる．



第４問　場合の数・確率

袋の中に赤玉３個，白玉３個，青玉４個の合計 10 個の玉が入っている．赤玉と白玉にはそれぞれ１から３までの番号がつけられており，青玉には１から４までの番号がつけられている．この袋から同時に３個の玉を取り出す．

玉の取り出し方は全部で $\boxed{アイウ}$ 通りある．

取り出した３個の玉の色と番号により次のように得点を定める．

玉の色がすべて異なるときは０点とする．
同じ色の玉が２個以上あるときは同じ色の玉の中で最も大きい番号を得点とする．
ただし，同じ番号の玉が２個以上あるときは上で定めた得点を２倍にする．

例えば，取り出した３個の玉が

番号１の赤玉，番号３の赤玉，番号１の青玉

のときは，得点は６点となる．

(1)　得点が０点となる玉の取り出し方は $\boxed{エオ}$ 通りである．

取り出した３個の玉が，番号２の赤玉，番号２の青玉，番号４の青玉のときは得点は $\boxed{カ}$ 点であり，得点が $\boxed{カ}$ 点となる玉の取り出し方は $\boxed{キ}$ 通りである．

また，得点が３点となる玉の取り出し方のうち

取り出した３個の玉の色がすべて同じであるものは $\boxed{ク}$ 通り
取り出した３個の玉のうち２個だけが同じ色であるものは $\boxed{ケコ}$ 通り

である．

(2)　得点が２点となる確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$，得点が６点となる確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である．

また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{タチツ}}{\boxed{テトナ}}$ 点である．

【解説】　問題

玉の取り出し方の総数は，

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\mathrm{C}_3 &= \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} \\
&= \boxed{120}\ (\text{通り})
\end{aligned}
$$

である．

以下，得点を X とする．また，番号１の赤玉を（赤1）と表し，他の玉についても同様に表すこととする．

(1)　$X=0$ となるのは，赤玉を１個，白玉を１個，青玉を１個取り出す場合であり，その取り出し方は，

☜　３個の玉の色がすべて異なる場合である．

$$_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1 = 3 \cdot 3 \cdot 4$$
$$= \boxed{36} \text{（通り）}$$

である．

取り出した3個の玉が 赤2，青2，青4 のとき，

$$X = 4 \times 2$$
$$= \boxed{8} \text{（点）}$$

である．

☜　青玉が2個あり，番号2の玉も2個あるので，青玉の中で最も大きい番号の4を2倍した値が得点となる．

$X=8$ となる玉の取り出し方の組は次のとおりである．

{青4，青1，赤1}，{青4，青1，白1}
{青4，青2，赤2}，{青4，青2，白2}
{青4，青3，赤3}，{青4，青3，白3}

☜　青4 ともう1個の青玉を取り出し，さらにこのもう1個の青玉と同じ番号の赤玉か白玉を取り出す場合である．

よって，その取り出し方は，

$$\boxed{6} \text{（通り）}$$

である．

$X=3$ となる玉の取り出し方のうち，3個の玉の色がすべて同じであるような組は次のとおりである．

{赤1，赤2，赤3}
{白1，白2，白3}
{青1，青2，青3}

よって，その取り出し方は，

$$\boxed{3} \text{（通り）}$$

である．

$X=3$ となる玉の取り出し方のうち，2個の玉だけが同じ色である取り出し方は次の3つの場合がある．

☜　番号3の玉を取り出すことが必要なので，番号3の玉を基準に考える．

- 赤3 を取り出した場合

{赤3，赤1，白2}，{赤3，赤1，青2}，{赤3，赤1，青4}
{赤3，赤2，白1}，{赤3，赤2，青1}，{赤3，赤2，青4}
の6通りである．

☜　赤3 を含む合計2個の赤玉とこれら2個の赤玉とは異なる番号の白玉または青玉を取り出す場合である．

- 白3 を取り出した場合

{白3，白1，赤2}，{白3，白1，青2}，{白3，白1，青4}
{白3，白2，赤1}，{白3，白2，青1}，{白3，白2，青4}
の6通りである．

☜　白3 を含む合計2個の白玉とこれら2個の白玉とは異なる番号の赤玉または青玉を取り出す場合である．

- 青3 を取り出した場合

{青3，青1，赤2}，{青3，青1，白2}
{青3，青2，赤1}，{青3，青2，白1}
の4通りである．

☜　青3 を含む合計2個の青玉（ただし 青4 は除く）とこれら2個の青玉とは異なる番号の赤玉または白玉を取り出す場合である．

以上より，$X=3$ となる玉の取り出し方のうち，2個の玉だけが同じ色である取り出し方は，

$$6+6+4=\boxed{16}\ (\text{通り})$$

である．

(2) $X=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8$ であり，$X=k$ $(k=0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8)$ となる確率を $P(X=k)$ と表す．

☜ 同じ番号の玉がないならば，同じ色の玉が2個以上あることによって得られる X は $X=2,\ 3,\ 4$ であり，同じ番号の玉が2個以上あることにより得られる X はこれらの値を2倍した $X=4,\ 6,\ 8$ である．

$X=2$ となる3個の玉の取り出し方は次の場合がある．

☜ 同じ色の番号1と番号2の玉とこれら2個の玉とは色も番号も異なる玉を取り出す場合である．

- 赤1 と 赤2 を取り出した場合

  残り1個の玉の取り出し方は，

  白3，青3，青4

  の3通りである．
- 白1 と 白2 を取り出した場合

  残り1個の玉の取り出し方は，

  赤3，青3，青4

  の3通りである．
- 青1 と 青2 を取り出した場合

  残り1個の玉の取り出し方は，

  赤3，白3

  の2通りである．

よって，$X=2$ となる確率は，

$$P(X=2)=\frac{3+3+2}{120}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{15}}$$

である．

$X=6$ となる3個の玉の取り出し方は次の場合がある．

☜ 番号3の玉を含む同じ色の玉を合計2個（青3 と 青4 の2個の組は除く）とこれら2個の玉のいずれか一方と同じ番号である玉を取り出す場合である．

- 赤3 を取り出し，かつ赤玉が2個の場合

  {赤3，赤1，白1}，{赤3，赤1，白3}

  {赤3，赤2，白2}，{赤3，赤2，白3}

  {赤3，赤1，青1}，{赤3，赤1，青3}

  {赤3，赤2，青2}，{赤3，赤2，青3}

  の8通りである．
- 白3 を取り出し，かつ白玉が2個の場合

  {白3，白1，赤1}，{白3，白1，赤3}

  {白3，白2，赤2}，{白3，白2，赤3}

  {白3，白1，青1}，{白3，白1，青3}

  {白3，白2，青2}，{白3，白2，青3}

  の8通りである．

• 青3 を取り出し，かつ青玉が 2 個の場合

{青3, 青1, 赤1}，{青3, 青1, 赤3}
{青3, 青2, 赤2}，{青3, 青2, 赤3}
{青3, 青1, 白1}，{青3, 青1, 白3}
{青3, 青2, 白2}，{青3, 青2, 白3}

の 8 通りである．

よって，$X=6$ となる確率は，

$$P(X=6)=\frac{8+8+8}{120}$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$$

である．

$X=0,\ 3,\ 8$ となる確率は (1) よりそれぞれ

$$P(X=0)=\frac{36}{120},$$
$$P(X=3)=\frac{3+16}{120}=\frac{19}{120},$$
$$P(X=8)=\frac{6}{120}$$

である．

$X=4$ となるのは $X=0,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8$ となる事象の余事象であるから，その確率は，

$$P(X=4)=1-\left(\frac{36}{120}+\frac{8}{120}+\frac{19}{120}+\frac{24}{120}+\frac{6}{120}\right)$$
$$=\frac{27}{120}$$

である．

よって，X の期待値 $E(X)$ は，

$$E(X)=0\times\frac{36}{120}+2\times\frac{8}{120}+3\times\frac{19}{120}+4\times\frac{27}{120}+6\times\frac{24}{120}+8\times\frac{6}{120}$$
$$=\frac{1}{120}(16+57+108+144+48)$$
$$=\frac{\boxed{373}}{\boxed{120}}\ (点)$$

である．

☜ **期待値**

$$X=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

となる確率がそれぞれ，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$
$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，X の期待値 $E(X)$ は，

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

である．

（注）

$X=2, 3, 4, 6, 8$ となる場合の数は次のように求めることもできる．

(i) 同じ色の玉を 3 個取り出した場合

	X	場合の数
番号 4 の玉を含まないとき	3	3
番号 4 の玉を含むとき	4	3

☜ 同じ色の番号 1，2，3 の玉を取り出す場合．

☜ 青4 を含み青玉を合計 3 個取り出す場合．

(ii) 同じ色の玉を 2 個とそれ以外の色の玉を 1 個取り出す場合

A 色の玉を 2 個取り出し，B 色の玉を 1 個取り出すとする．ただし，A, B はいずれも赤，白，青のいずれかである．

• 同じ色の玉が 2 個だけであり，同じ番号の玉がない場合

A の番号		B の番号	X	場合の数
1	2	3	2	$3\cdot2=6$
1	2	4	2	2
1	3	2	3	$3\cdot2=6$
1	3	4	3	2
1	4	2 または 3	4	$2\cdot2=4$
2	3	1	3	$3\cdot2=6$
2	3	4	3	2
2	4	1 または 3	4	$2\cdot2=4$
3	4	1 または 2	4	$2\cdot2=4$

☜ A の色の決め方が 3 通り，B の色の決め方が 2 通りである．

☜ B は青であるから，A の色の決め方が 2 通りである．

☜ A は青であり，B の色および番号の決め方がそれぞれ 2 通りである．

• 同じ色の玉が 2 個だけであり，さらに同じ番号の玉がある場合

A の番号		B の番号	X	場合の数
1	2	1 または 2	$2\cdot2=4$	$3\cdot2\cdot2=12$
1	3	1 または 3	$3\cdot2=6$	$3\cdot2\cdot2=12$
1	4	1	$4\cdot2=8$	2
2	3	2 または 3	$3\cdot2=6$	$3\cdot2\cdot2=12$
2	4	2	$4\cdot2=8$	2
3	4	3	$4\cdot2=8$	2

☜ A の色の決め方が 3 通り，B の色の決め方が 2 通り，B の番号の決め方が 2 通りである．

☜ A は青であり，B の色の決め方が 2 通りである．

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{\sin 2\theta}{\text{ア}}$	$\dfrac{\sin 2\theta}{2}$	2	
	$\dfrac{\text{イ}-\cos 2\theta}{\text{ウ}}$	$\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$	2	
	$\text{エ}\theta+\dfrac{\pi}{\text{オ}}$	$2\theta+\dfrac{\pi}{3}$	2	
	カ	2	2	
	キ	4	2	
	$\dfrac{\text{クケ}}{\text{コ}}\pi$	$\dfrac{11}{6}\pi$	2	
	サ	4	2	
	$\dfrac{\text{シス}}{\text{セソ}}\pi$	$\dfrac{25}{18}\pi$	2	
	タ，チ	4，4	2	
	ツ，テ，ト	2，2，8	2	
	ナニ	16	2	
	ヌ	6	2	
	ネ，ノ	2，1	2	
	ハ	8	2	
	$\text{ヒ}\log_3\text{フ}$	$2\log_3 6$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	$\text{ア}(x-\text{イ})(x-\text{ウ}a)$	$3(x-2)(x-2a)$	3	
	エ	1	3	
	オ	3	3	
	カ	6	4	
	キ，ク，ケコ	3，8，12	2	
	サ，シス，セ	2，12，1	2	
	ソ	1	3	
	タ	4	3	
	$\dfrac{\text{チツテ}}{\text{ト}}$	$\dfrac{-27}{8}$	1	
	ナニ	15	1	
	ヌネ	11	1	
	ノハ	18	4	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	$\left(\text{ア},\ \dfrac{\text{イウ}}{\text{エ}}\right)$	$\left(2,\ \dfrac{11}{2}\right)$	2	
	オ	1	2	
	$\text{カ}x+\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$	$-x+\dfrac{15}{2}$	2	
	$\text{コ}a+\dfrac{\text{サシ}}{\text{ス}}$	$-a+\dfrac{15}{2}$	2	
	$\text{セ}a^2-\text{ソ}a+\dfrac{\text{タチ}}{\text{ツ}}$	$2a^2-8a+\dfrac{65}{2}$	3	
	$\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}$，ナ	$\dfrac{5}{2}$，5	2	
	ニ	5	1	
	$\text{ヌ}\sqrt{\text{ネ}}$	$5\sqrt{3}$	3	
	$\text{ノハ}\left(\dfrac{\pi}{\text{ヒ}}-\dfrac{\sqrt{\text{フ}}}{\text{ヘ}}\right)$	$25\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$	3	
第3問　自己採点小計			(20)	

数学Ⅱ

問題番号	解答記号	正　　解	配点	自己採点
第4問	アa＋イb－ウ	$2a+2b-2$	2	
	エ	1	1	
	x^2＋オx－カ	$x^2+\boldsymbol{a}x-\boldsymbol{b}$	2	
	キ^2＋クケ	$\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}$	2	
	コ－サ	$1-\boldsymbol{a}$	2	
	シス	$-\boldsymbol{b}$	2	
	セ，ソタ	1，－1	2	
	チツ	－1	2	
	テト	－1	2	
	ナ	0	3	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第１問 に同じである．

第２問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第２問 に同じである．

第３問　図形と方程式

座標平面上に２点 $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2},\ 2\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{11}{2},\ 9\right)$ がある．

線分 AB の中点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ であり，直線 AB の傾きは $\boxed{\text{オ}}$ であるから，線分 AB の垂直二等分線の方程式は $y=\boxed{\text{カ}}x+\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

次に，２点 A，B を通る円を C とし，C の中心の x 座標を a とする．C の中心の y 座標は a を用いて表すと

$$\boxed{\text{コ}}a+\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

となる．また，C の半径を r とすると

$$r^2=\boxed{\text{セ}}a^2-\boxed{\text{ソ}}a+\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

が成り立つ．

x 軸に接するような C は二つあり，そのうち半径の小さい方を C_1 とすると，C_1 の方程式は

$$\left(x-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ナ}}\right)^2=\boxed{\text{ニ}}^2$$

である．

C_1 が y 軸から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$ であり，連立不等式

$$\begin{cases}\left(x-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ナ}}\right)^2\leqq\boxed{\text{ニ}}^2\\ x\leqq 0\end{cases}$$

で表される領域の面積は $\boxed{\text{ノハ}}\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{ヒ}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\right)$ である．

【解説】

問題

線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{11}{2}}{2},\ \frac{2+9}{2}\right)$$

すなわち

$$\left(\boxed{2},\ \frac{\boxed{11}}{\boxed{2}}\right).$$

直線 AB の傾きは

$$\frac{2-9}{\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{11}{2}}=\boxed{1}.$$

線分 AB の垂直二等分線を ℓ とする．ℓ は線分 AB の中点を通り，AB$\perp\ell$ より ℓ の傾きは -1 であるから，ℓ の方程式は

$$y-\frac{11}{2}=(-1)\cdot(x-2)$$

すなわち

$$y=\boxed{-}x+\frac{\boxed{15}}{\boxed{2}}$$

である．

円 C は 2 点 A, B を通るので，C の中心は ℓ 上にある．したがって，C の中心の x 座標を a とすると，C の中心の y 座標は，a を用いて表すと

$$\boxed{-}a+\frac{\boxed{15}}{\boxed{2}}$$

となる．

また，円 C の半径を r とすると，C の方程式は

$$(x-a)^2+\left(y+a-\frac{15}{2}\right)^2=r^2 \qquad \cdots①$$

である．円 C が点 $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2},\ 2\right)$ を通ることより

$$r^2=\left(-\frac{3}{2}-a\right)^2+\left(2+a-\frac{15}{2}\right)^2$$

$$=\boxed{2}a^2-\boxed{8}a+\frac{\boxed{65}}{\boxed{2}} \qquad \cdots②$$

となる．

☜ $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2},\ 2\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{11}{2},\ 9\right)$．

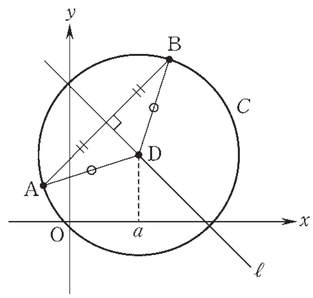
☜ 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ について，線分 PQ の中点の座標は
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

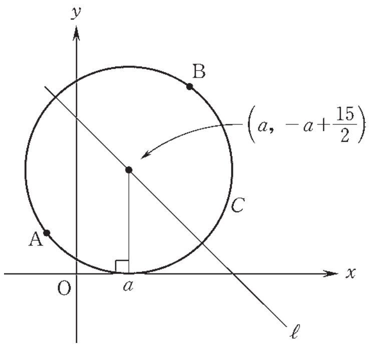
☜ 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ を通る直線の傾きは
$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

☜ 2 直線 $\ell : y=mx+n$，$\ell' : y=m'x+n'$ について
$$\ell\perp\ell' \iff mm'=-1.$$

☜ 点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線の方程式は
$$y-y_0=m(x-x_0).$$

☜ 円 C の中心を D とすると，DA＝DB であるから，D は，線分 AB の垂直二等分線上にある．





円 C が x 軸に接するとき，C の半径は，C の中心の y 座標の絶対値に等しいので

$$r=\left|-a+\frac{15}{2}\right| \quad \cdots③$$

となる．

☜ 円の中心と直線との距離を d，円の半径を r とすると，円と直線が接する条件は

$$d=r.$$

これを ② に代入して

$$\left(-a+\frac{15}{2}\right)^2=2a^2-8a+\frac{65}{2}$$

$$4a^2+28a-95=0$$

$$(2a-5)(2a+19)=0$$

$$a=\frac{5}{2},\ -\frac{19}{2}.$$

それぞれの値を，③ に代入して

$$r=5,\ 17$$

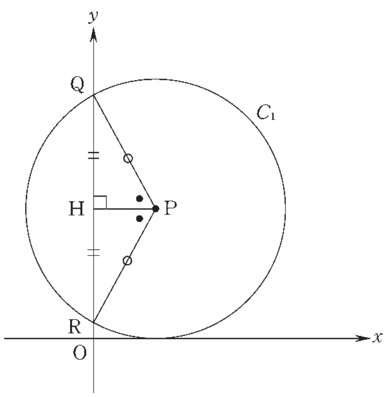
であるから，半径の小さい方である円 C_1 の方程式は，① に $a=\frac{5}{2}$，$r=5$ を代入して

$$\left(x-\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}\right)^2+\left(y-\boxed{5}\right)^2=\boxed{5}^2$$

である．

円 C_1 の中心を P，P から y 軸へ下ろした垂線の足を H，C_1 と y 軸の交点を Q, R とする．

☜ $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 5\right)$.



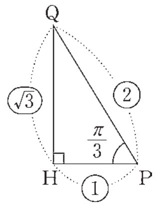
$PH=\dfrac{5}{2}$（$=P$ の x 座標），$PQ=PR=5$（$=C_1$ の半径）であるから，直角三角形 PQH に三平方の定理を用いて

$$QH=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

QH=RH であるから，円 C_1 が y 軸から切り取る線分の長さは

$$QR=2QH=2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}.$$

ここで，直角三角形 PQH において，$PQ:PH=5:\dfrac{5}{2}=2:1$ であるから，$\angle QPH=\dfrac{\pi}{3}$ である．



さらに，$\angle QPH=\angle RPH$ であるから，$\angle QPR=\dfrac{2}{3}\pi$ である．

連立不等式

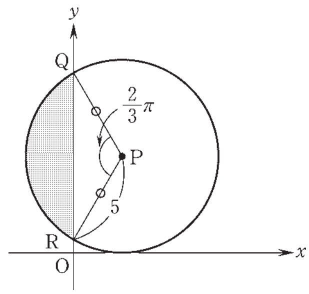
$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+(y-5)^2\leqq 5^2,\\ x\leqq 0\end{cases}$$

で表される領域の面積は，扇形 PQR の面積から三角形 PQR の面積を引いて

$$\frac{1}{2}\cdot5^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot5^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\boxed{25}\left(\frac{\pi}{\boxed{3}}-\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{4}}\right)$$

である．

連立不等式の表す領域は，図の影をつけた部分（境界を含む）である．



半径 r，中心角 θ（ラジアン）の扇形の面積は

$$\frac{1}{2}r^2\theta.$$

第４問　式と証明・高次方程式

a, b を実数とし，x の整式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^3+(a-1)x^2-(a+b)x+b$$

とする．

$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは $\boxed{ア}a+\boxed{イ}b-\boxed{ウ}$ である．

また，$P\left(\boxed{エ}\right)=0$ であるから，$P(x)$ は $x-\boxed{エ}$ で割り切れ

$$P(x)=\left(x-\boxed{エ}\right)\left(x^2+\boxed{オ}x-\boxed{カ}\right)$$

と表される．

方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつ条件は

$$\boxed{キ}^2+\boxed{クケ}<0$$

である．このとき，方程式 $P(x)=0$ の虚数解を α, β とし，$\gamma=\boxed{エ}$ とする．

$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{コ}-\boxed{サ},\quad \alpha\beta\gamma=\boxed{シス}$$

である．

さらに，α^2, β^2, γ^2 も方程式 $P(x)=0$ の三つの解となるとき

$$a=\boxed{セ},\quad b=\boxed{ソタ}$$

である．このとき

$$\alpha^2+\alpha=\boxed{チツ},\quad \beta^2+\beta=\boxed{テト}$$

であり

$$\alpha^{100}+\beta^{100}+\gamma^{100}=\boxed{ナ}$$

となる．

【解説】

問題

$P(x)=x^3+(a-1)x^2-(a+b)x+b$ より

$$P(-1)=-1+(a-1)+(a+b)+b$$
$$=2a+2b-2$$

であるから，$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは

$$\boxed{2}a+\boxed{2}b-\boxed{2}$$

である．また

$$P\left(\boxed{1}\right)=1+a-1-(a+b)+b=0$$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れ

$$P(x)=(x-1)\left(x^2+\boxed{a}x-\boxed{b}\right)$$

と表される．

方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつ条件は，２次方程式

剰余の定理

整式 $P(x)$ を１次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ である．

因数定理

整式 $P(x)$ について

「$P(x)$ が $x-\alpha$ を因数にもつ」

$\Longleftrightarrow$ $P(\alpha)=0$．

$$\begin{array}{r}
x^2 \quad +ax \quad -b \\
x-1 \,\big)\, x^3+(a-1)x^2-(a+b)x+b \\
x^3 \quad -x^2 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
ax^2-(a+b)x \quad \\
ax^2 \quad -ax \quad \\
\hline
-bx+b \\
-bx+b \\
\hline
0
\end{array}$$

$$x^2+ax-b=0 \quad \cdots①$$

が虚数解をもつことであるから，① の判別式を D とすると $D<0$ より

$$\boxed{\ a\ }^2+\boxed{\ 4b\ }<0 \quad \cdots②$$

である．

このとき，方程式 $P(x)=0$ の虚数解を α，β とし，$\gamma=1$ とする．α，β は ① の二つの解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a,\\ \alpha\beta=-b\end{cases} \quad \cdots③$$

である．よって

$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{\ 1\ }-\boxed{\ a\ },\quad \alpha\beta\gamma=\boxed{\ -b\ }$$

である．

$\gamma^2=\gamma$ に注意すると，α^2，β^2，γ^2 も方程式 $P(x)=0$ の三つの解となるのは，α^2，β^2 が ① の二つの解となるときである．よって，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=-a,\\ \alpha^2\beta^2=-b\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-a,\\ (\alpha\beta)^2=-b\end{cases} \quad \cdots④$$

となる．

③，④ より

$$\begin{cases}a^2+2b=-a, & \cdots⑤\\ b^2=-b & \cdots⑥\end{cases}$$

である．② より $b\neq0$ に注意すると，⑥ より $b=-1$ であり，これと ⑤ より

$$a^2-2=-a$$
$$a^2+a-2=0$$
$$(a+2)(a-1)=0$$
$$a=-2,\ 1$$

となるが，② を満たすものは $a=1$ である．したがって，②，③，④ をすべて満たす a，b は

$$a=\boxed{\ 1\ },\quad b=\boxed{\ -1\ }$$

である．

このとき，α，β は 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の二つの解であるから

$$\alpha^2+\alpha+1=0,\quad \beta^2+\beta+1=0$$

より

$$\alpha^2+\alpha=\boxed{\ -1\ },\quad \beta^2+\beta=\boxed{\ -1\ }$$

2 次方程式の解の判別

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots(*)$$

の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0 \iff$ $(*)$ は異なる二つの実数解をもつ，

$D=0 \iff$ $(*)$ は重解をもつ，

$D<0 \iff$ $(*)$ は異なる二つの虚数解をもつ．

解と係数の関係

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の二つの解を α，β とすると

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

$b=0$ と仮定すると，② は

$$a^2<0$$

となり，a が実数であることに矛盾する．よって，$b\neq0$ である．

$b=-1$ より，② は

$$a^2-4<0$$

すなわち

$$-2<a<2$$

である．

である．また，$\alpha^2+\alpha+1=0$ より

$$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

$$\alpha^3-1=0$$

であるから，$\alpha^3=1$ であり，同様に $\beta^3=1$ である．これと $\gamma=1$ より ☜

$$\begin{aligned}\alpha^{100}+\beta^{100}+\gamma^{100}&=(\alpha^3)^{33}\cdot\alpha+(\beta^3)^{33}\cdot\beta+1\\&=\alpha+\beta+1\\&=\boxed{0}\end{aligned}$$

となる．

$\alpha^2+\alpha+1=0$ より $\alpha^2=-\alpha-1$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^3=\alpha\cdot\alpha^2&=\alpha(-\alpha-1)\\&=-\alpha^2-\alpha\\&=-(-\alpha-1)-\alpha\\&=1\end{aligned}$$

と計算してもよい．

☜ ③ より

$$\alpha+\beta=-\alpha=-1.$$

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	$\frac{\sin 2\theta}{\text{ア}}$	$\frac{\sin 2\theta}{2}$	2	
	$\frac{\text{イ}-\cos 2\theta}{\text{ウ}}$	$\frac{1-\cos 2\theta}{2}$	2	
	エ$\theta+\frac{\pi}{\text{オ}}$	$2\theta+\frac{\pi}{3}$	2	
	カ	2	2	
	キ	4	2	
	$\frac{\text{クケ}}{\text{コ}}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2	
	サ	4	2	
	$\frac{\text{シス}}{\text{セソ}}\pi$	$\frac{25}{18}\pi$	2	
	タ，チ	4，4	2	
	ツ，テ，ト	2，2，8	2	
	ナニ	16	2	
	ヌ	6	2	
	ネ，ノ	2，1	2	
	ハ	8	2	
	ヒ$\log_3$フ	$2\log_3 6$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア$(x-$イ$)(x-$ウ$a)$	$3(x-2)(x-2a)$	3	
	エ	1	3	
	オ	3	3	
	カ	6	4	
	キ，ク，ケコ	3，8，12	2	
	サ，シス，セ	2，12，1	2	
	ソ	1	3	
	タ	4	3	
	$\frac{\text{チツテ}}{\text{ト}}$	$\frac{-27}{8}$	1	
	ナニ	15	1	
	ヌネ	11	1	
	ノハ	18	4	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア	5	2	
	イ，ウ	4，2	2	
	エ，オ	4，4	2	
	カ	2	2	
	キ	2	2	
	ク・ケ$^{n-1}$	$3\cdot 2^{n-1}$	2	
	$\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$	$\frac{3}{4}$	2	
	セ，ソ，タ	2，0，1	2	
	チ，ツ，テ，ト	2，1，4，2	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\sqrt{オ}$	$\sqrt{2}$	2	
	$\frac{\sqrt{カ}}{キ}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	2	
	$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{コ}{サ}$	$\frac{3}{4}$	2	
	$\frac{シ}{ス}$，$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{8}{9}$，$\frac{4}{9}$	2	
	$\frac{タ}{チ}$	$\frac{5}{3}$	2	
	$\frac{ツ}{テト}$	$\frac{5}{12}$	2	
	$\frac{ナ}{ニヌ}$	$\frac{1}{24}$	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
第5問	ア	5	2	
	イ.ウエ	0.14	2	
	オカキ.ク	167.5	2	
	ケ.コ	0.4	2	
	サ.シ	3.0	2	
	スセソ.タ	169.5	2	
	チツ	28	1	
	テト	13	1	
	ナ，ニヌ，ネ	8，15，5	2	
	ノ	1	2	
	ハ.ヒフ	0.12	2	
第5問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第6問	ア	2	2	
	イ	2	2	
	ウエ	14	2	
	オ	6	2	
	カキ	24	2	
	ク	2	1	
	ケ	4	1	
	コ	0	2	
	サ	1 ※	1	
	シ	7 ※	1	
	スセ	24	2	
	ソ	8	2	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

※の正解は順序を問わない。

数学Ⅱ・数学B

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

〔１〕 関数

$$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

について考える．

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{\boxed{\text{ア}}},\quad \sin^2\theta=\frac{\boxed{\text{イ}}-\cos 2\theta}{\boxed{\text{ウ}}}$$ であるから

$$f(\theta)=\sin\left(\boxed{\text{エ}}\,\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

である．

(1)　$f(\theta)$ の正の周期のうち最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である．$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ $\frac{\pi}{3}$　　① $\frac{\pi}{2}$　　② π　　③ 2π　　④ 4π

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ において，方程式 $f(\theta)=0$ を満たす θ は $\boxed{\text{キ}}$ 個あり，このうち最大の θ は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である．

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ において，方程式 $f(\theta)=\cos\theta$ を満たす θ は $\boxed{\text{サ}}$ 個あり，このうち最大の θ は

$$\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}\pi$$

である．

〔２〕 実数 x，y は

$$4^x+9^y-2^{x+2}-4\cdot 3^y\leqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする．$2^x=X$，$3^y=Y$ とおくと，不等式 ① は

$$X^2+Y^2-\boxed{\text{タ}}X-\boxed{\text{チ}}Y\leqq 0$$

となり，さらに変形すると

$$\left(X-\boxed{\text{ツ}}\right)^2+\left(Y-\boxed{\text{テ}}\right)^2\leqq\boxed{\text{ト}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる．

(1)　② を満たす正の整数の組 $(X,\ Y)$ は $\boxed{\text{ナニ}}$ 組ある．

(2)　① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\text{ヌ}}$ 組ある．このうち，2^x+3^y を最大にする x，

y の値は $x=\boxed{\text{ネ}}$，$y=\boxed{\text{ノ}}$ である．

(3) 実数 x，y が ① を満たしながら動くとき，2^x+3^y の最大値は $\boxed{\text{ハ}}$ である．このとき，$x+y=\boxed{\text{ヒ}}\log_3\boxed{\text{フ}}$ である．

【解説】

問題

〔1〕

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{\boxed{2}},\quad \sin^2\theta=\frac{\boxed{1}-\cos 2\theta}{\boxed{2}}$$ であるから

☜ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より
$$\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}.$$
また，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta)\end{aligned}$$

であり，三角関数の合成をすると

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\sin\left(\boxed{2}\theta+\frac{\pi}{\boxed{3}}\right)\end{aligned}$$

である．

☜ **三角関数の合成**

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき
$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha).$$
ただし
$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

(1) $f(\theta)=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ より

$$f(\theta)=\sin\left\{2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

であるから，$f(\theta)$ の周期は $\sin 2\theta$ の周期と一致する．$\sin 2\theta$ の正の周期のうち最小のものは $\frac{2\pi}{2}=\pi$ であるから，$f(\theta)$ の正の周期のうち最小のものも π である．したがって，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

☜ $a>0$ のとき，すべての θ に対して
$$\sin a(\theta+p)=\sin a\theta$$
を満たす最小の正の数 p は
$$p=\frac{2\pi}{a}$$
である．

(2) $f(\theta)=0$ より

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3}\leqq 2\theta+\frac{\pi}{3}<4\pi+\frac{\pi}{3}$ であるから，

$f(\theta)=0$ を満たす θ は

$$2\theta+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$$

より

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

である．よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，方程式 $f(\theta)=0$ を満たす θ は $\boxed{4}$ 個あり，このうち最大の θ は $\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{6}}\pi$ である．

(3) $f(\theta)=\cos\theta$ より

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\theta. \qquad \cdots ①$$

一般に，$\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ であるから，① は

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\cos\theta$$

すなわち

$$\cos\left(-2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta \qquad \cdots ②$$

と変形することができる．② を満たす θ は，整数 m，n を用いて

$$-2\theta+\frac{\pi}{6}=\theta+2m\pi \quad \text{または} \quad -2\theta+\frac{\pi}{6}=-\theta+2n\pi$$

と表すことができる．よって

$$\theta=\frac{\pi}{18}-\frac{2m\pi}{3} \quad \text{または} \quad \theta=\frac{\pi}{6}-2n\pi \quad (m,\ n \text{ は整数}).$$

☜ $\cos\theta=\cos\alpha$ であるとき
$\theta=\alpha+2m\pi$ （m は整数）
または
$\theta=-\alpha+2n\pi$ （n は整数）
と表される．

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，$m=0$，-1，-2 または $n=0$ として

$$\theta=\frac{\pi}{18},\ \frac{13}{18}\pi,\ \frac{25}{18}\pi,\ \frac{\pi}{6}$$

である．よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，方程式 $f(\theta)=\cos\theta$ を満たす θ は $\boxed{4}$ 個あり，このうち最大の θ は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{18}}\pi$ である．

〔2〕 実数 x，y は

$$4^x+9^y-2^{x+2}-4\cdot 3^y \leqq 0 \qquad \cdots ①$$

を満たす．① を変形すると

$$(2^x)^2+(3^y)^2-4\cdot 2^x-4\cdot 3^y \leqq 0$$

☜ $4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2$，
$9^y=(3^2)^y=3^{2y}=(3^y)^2$，
$2^{x+2}=2^x2^2=4\cdot 2^x$．

であるから，$2^x=X$，$3^y=Y$ とおくと

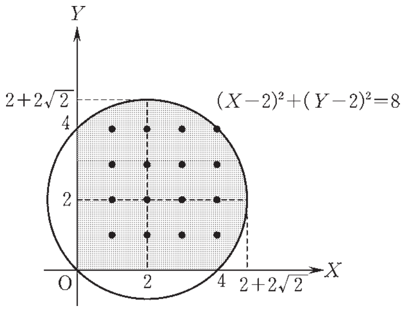
$$X^2+Y^2-\boxed{4}X-\boxed{4}Y \leqq 0$$

となり，さらに変形すると

$$\left(X-\boxed{2}\right)^2+\left(Y-\boxed{2}\right)^2 \leqq \boxed{8} \qquad \cdots ②$$

となる．

(1)　$X=2^x>0$，$Y=3^y>0$ であるから，② を満たす点 $(X,\ Y)$ は下図の影の部分 D にある．ただし，境界は X 軸上，Y 軸上の点を除く．



☜　領域 D を表す不等式は
$$\begin{cases}(X-2)^2+(Y-2)^2\leqq 8,\\ X>0,\\ Y>0\end{cases}$$
である．

円の中心は点 $(2,\ 2)$，半径は $2\sqrt{2}$ であり，$4<2+2\sqrt{2}<5$ であることに注意して，② を満たす正の整数の組 $(X,\ Y)$ の個数を図より求めると $\boxed{16}$ 組ある．

☜　$2=\sqrt{4}$，$2\sqrt{2}=\sqrt{8}$，$3=\sqrt{9}$ より
$$2<2\sqrt{2}<3.$$

(2)　x，y が 0 以上の整数であるとき，X，Y は正の整数であるから，上図より $1\leqq X\leqq 4$，$1\leqq Y\leqq 4$ である．よって

☜　$X=2^x$，$Y=3^y$．

$$1\leqq 2^x\leqq 4 \text{ より } x=0,\ 1,\ 2,$$
$$1\leqq 3^y\leqq 4 \text{ より } y=0,\ 1$$

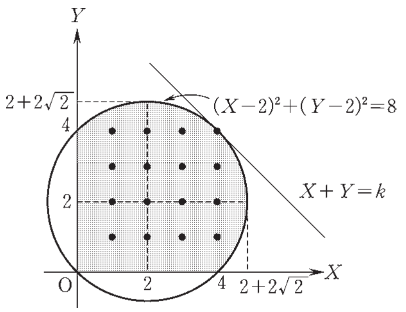
であり，① を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ は

$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$

の $\boxed{6}$ 組ある．このうち 2^x+3^y が最大になるのは

$x=\boxed{2}$，$y=\boxed{1}$ のときである．

(3)　$2^x+3^y=k$（k は実数），つまり $X+Y=k$ とおき，直線 $X+Y=k$ が D と共有点をもつときの k の最大値を求めればよい．



直線 $X+Y-k=0$ と円 $(X-2)^2+(Y-2)^2=8$ が接するとき

$$\frac{|2+2-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$
$$|k-4|=4$$
$$k-4=\pm 4$$

☜　円と直線が接するとき
(円の中心と直線の距離)=(円の半径)．

点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は
$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$k=0,\ 8.$$

k が最大となるのは，直線 $X+Y-k=0$ と円 $(X-2)^2+(Y-2)^2=8$ が第 1 象限で接するときであり，このとき $k=8$ である．よって，$X+Y$ の最大値，すなわち 2^x+3^y の最大値は $\boxed{8}$ である．

このとき，$X+Y=8$ と $(X-2)^2+(Y-2)^2=8$ から，Y を消去して

$$(X-4)^2=0$$

すなわち

$$X=4.$$

よって，接点の座標は $(4,\ 4)$ となるから

☜ $X+Y=8$，$X=4$ より $Y=4$．

$X=2^x=4$　より　$x=2$,

$Y=3^y=4$　より　$y=\log_3 2^2=2\log_3 2$.

したがって

$$\begin{aligned} x+y&=2+2\log_3 2\\ &=2(1+\log_3 2)\\ &=2(\log_3 3+\log_3 2)\\ &=\boxed{2}\log_3\boxed{6} \end{aligned}$$

☜ $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$．

である．

第 2 問　微分法・積分法

a を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3-3(a+1)x^2+12ax+1$$

とする．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}a\right)$$

と変形できるから，$f(x)$ が極値をもつ条件は $a \neq \boxed{\text{エ}}$ である．

$a>\boxed{\text{エ}}$ のとき，$f(x)$ の極小値が $f(0)$ となるような a の値は $\boxed{\text{オ}}$ である．

以下 $a=\boxed{\text{オ}}$ とし，このときの曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1)　$1 \leqq x \leqq b$（$b>1$）における $f(x)$ の最小値が $f(0)$ となるような b の値の範囲は $b \geqq \boxed{\text{カ}}$ である．

(2)　曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{キ}}\left(t^2-\boxed{\text{ク}}t+\boxed{\text{ケコ}}\right)x-\boxed{\text{サ}}t^3+\boxed{\text{シス}}t^2+\boxed{\text{セ}}$$

である．直線 ℓ が点 $(2,\ 41)$ を通るとき

$$t=\boxed{\text{ソ}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{タ}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ソ}}<\boxed{\text{タ}}$ とする．

$t=\boxed{\text{ソ}}$ のときの直線 ℓ を ℓ_1 とし，ℓ_1 の方程式を $y=g(x)$ とする．また，$t=\boxed{\text{タ}}$ のときの直線 ℓ を ℓ_2 とし，ℓ_2 の方程式を $y=h(x)$ とする．

放物線 $y=px^2+qx+r$ を D とする．放物線 D が点 $(0,\ g(0))$ において直線 ℓ_1 と接し，かつ点 $(4,\ h(4))$ において直線 ℓ_2 と接するとき

$$p=\frac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{ト}}},\quad q=\boxed{\text{ナニ}},\quad r=\boxed{\text{ヌネ}}$$

である．このとき，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および放物線 D で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ノハ}}$ である．

【解説】

問題

$$f(x)=x^3-3(a+1)x^2+12ax+1.$$

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=3x^2-6(a+1)x+12a$$
$$=\boxed{3}\left(x-\boxed{2}\right)\left(x-\boxed{2}a\right)$$

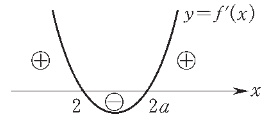
と変形できる．$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)$ の符号が変化することであるから，$2a \neq 2$，つまり $a \neq \boxed{1}$ である．

> **導関数**
> $(x^n)'=nx^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3)$，
> $(c)'=0$　（c は定数）．

$a>1$ のとき，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

☜ $a>1$ のとき，$f'(x)$ の符号は下図のように変化する．



よって，$f(x)$ の極小値は

$$f(2a)=(2a)^3-3(a+1)(2a)^2+12a(2a)+1$$
$$=-4a^3+12a^2+1$$

であるから，$f(x)$ の極小値が $f(0)$ と一致するとき

$$-4a^3+12a^2+1=1$$
$$-4a^2(a-3)=0$$

が成り立つ．$a>1$ であるから，求める a の値は $\boxed{3}$ である．

$a=3$ とすると

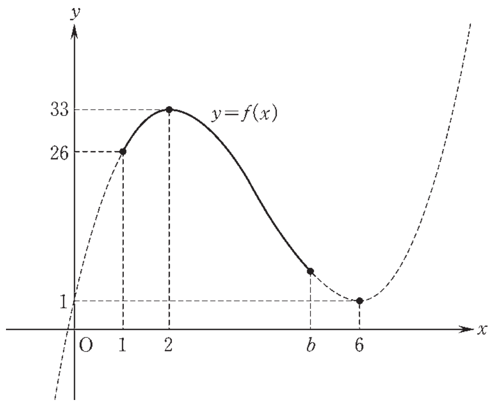
☜ このとき，極小値 $f(6)$ は $f(0)$ と一致している．

$$f(x)=x^3-12x^2+36x+1,$$
$$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$$

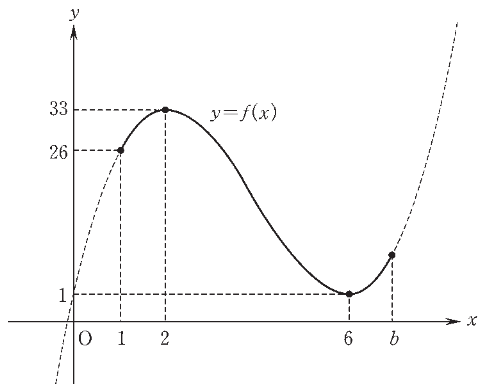
であり，$f(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	33	↘	1	↗

(1) $1<b<6$ のとき，$1\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最小値は $f(1)$ または $f(b)$ のいずれかであり，いずれも 1 ではない．



$b\geqq 6$ のとき，$1\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最小値は 1 である．



以上より，$1 \leqq x \leqq b$ $(b>1)$ における $f(x)$ の最小値が $f(0)$ となるような b の値の範囲は $b \geqq \boxed{6}$ である．

(2) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-(t^3-12t^2+36t+1)=(3t^2-24t+36)(x-t)$$

すなわち

$$y=\boxed{3}\left(t^2-\boxed{8}t+\boxed{12}\right)x$$
$$-\boxed{2}t^3+\boxed{12}t^2+\boxed{1} \quad \cdots ①$$

である．直線 ℓ が点 $(2,\ 41)$ を通るとき

$$41=3(t^2-8t+12)\cdot 2-2t^3+12t^2+1$$
$$t^3-9t^2+24t-16=0$$
$$(t-1)(t-4)^2=0$$

が成り立ち，これより

$$t=\boxed{1} \quad \text{または} \quad \boxed{4}$$

である．

$t=1$ を ① に代入すると，ℓ_1 の方程式

$$y=15x+11$$

が得られ，$t=4$ を ① に代入すると，ℓ_2 の方程式

$$y=-12x+65$$

が得られる．

ℓ_1 の方程式を $y=g(x)$，ℓ_2 の方程式を $y=h(x)$ とするので

$$g(x)=15x+11, \quad h(x)=-12x+65$$

である．

放物線 $y=px^2+qx+r$ を D とし，$F(x)=px^2+qx+r$ とする．

$$F'(x)=2px+q,$$
$$g'(x)=15, \quad h'(x)=-12$$

である．

放物線 D が点 $(0,\ g(0))$ において直線 ℓ_1 と接するとき

☜ **接線の方程式**

曲線 C：$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

$$\begin{cases} F(0)=g(0), \\ F'(0)=g'(0) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} r=11, \\ q=15 \end{cases} \quad \cdots②$$

である。

☜ 曲線 $y=F(x)$ が点 $(a,\ g(a))$ において直線 $y=g(x)$ と接する条件は

$$\begin{cases} F(a)=g(a), \\ F'(a)=g'(a) \end{cases}$$

である。

放物線 D が点 $(4,\ h(4))$ において直線 ℓ_2 と接するとき

$$\begin{cases} F(4)=h(4), \\ F'(4)=h'(4) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 16p+4q+r=17, \\ 8p+q=-12 \end{cases} \quad \cdots③$$

である。

② かつ ③ より

$$p=\frac{\boxed{-27}}{\boxed{8}},\quad q=\boxed{15},\quad r=\boxed{11}$$

である。

また，ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標は

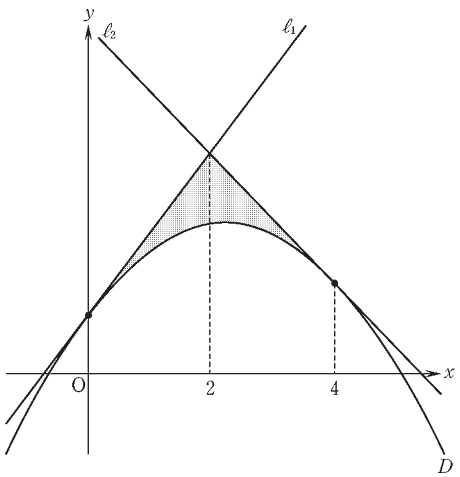
$$15x+11=-12x+65$$

$$27x=54$$

より

$$x=2$$

である。



このとき，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および放物線 D で囲まれた図形の面積は

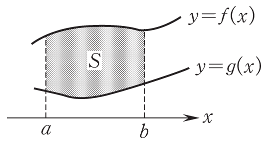
$$\int_0^2 \left\{(15x+11)-\left(-\frac{27}{8}x^2+15x+11\right)\right\}dx$$
$$+\int_2^4 \left\{(-12x+65)-\left(-\frac{27}{8}x^2+15x+11\right)\right\}dx$$
$$=\frac{27}{8}\int_0^2 x^2\,dx+\frac{27}{8}\int_2^4 (x-4)^2\,dx$$
$$=\frac{27}{8}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4\right\}$$
$$=\frac{27}{8}\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right)$$
$$=\boxed{18}$$

である.

面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ においてつねに $g(x) \leqq f(x)$ ならば，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



不定積分

$$\int (x-\alpha)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C.$$

（C は積分定数，$n=0$，1，2）

【$\dfrac{\boxed{チツテ}}{\boxed{ト}}$，$\boxed{ナニ}$，$\boxed{ヌネ}$ の別解】

放物線 $y=px^2+qx+r$ が点 $(0,\ g(0))$ において直線 ℓ_1 と接するとき

$$px^2+qx+r-g(x)=px^2$$

すなわち

$$px^2+(q-15)x+r-11=px^2$$

とかけ，上式はすべての実数 x に対して成り立つから

$$q-15=0 \quad かつ \quad r-11=0 \qquad \cdots④$$

である.

放物線 $y=F(x)$ が点 $(\alpha,\ g(\alpha))$ において直線 $y=g(x)$ と接する条件は

$$F(x)-g(x)=0$$

が $x=\alpha$ を重解にもつこと，すなわち

$$F(x)-g(x)=p(x-\alpha)^2$$

とかけることである．ここで，p は $F(x)$ の最高次（2 次）の項の係数である.

$g(x)=15x+11.$

放物線 $y=px^2+qx+r$ が点 $(4,\ h(4))$ において直線 ℓ_2 と接するとき

$$px^2+qx+r-h(x)=p(x-4)^2$$

$h(x)=-12x+65.$

すなわち

$$px^2+(q+12)x+r-65=px^2-8px+16p$$

とかけ，上式はすべての実数 x に対して成り立つから

$$q+12=-8p \quad かつ \quad r-65=16p \qquad \cdots⑤$$

である.

④ かつ ⑤ より

$$p=\frac{-27}{8}, \quad q=15, \quad r=11$$

である.

第3問　数　列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$ を満たし，自然数 n に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．さらに

$$S_{n+1}=4a_n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする．

まず，① において $n=1$ とすれば，$S_2=4a_1+2$ となるから，$a_2=\boxed{\text{ア}}$ である．次に，① から

$$S_n=\boxed{\text{イ}}a_{n-1}+\boxed{\text{ウ}} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．さらに，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，①, ② より

$$a_{n+1}=\boxed{\text{エ}}a_n-\boxed{\text{オ}}a_{n-1} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

③ は

$$a_{n+1}-\boxed{\text{カ}}a_n=\boxed{\text{キ}}\left(a_n-\boxed{\text{カ}}a_{n-1}\right) \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

と変形できる．ここで

$$a_{n+1}-\boxed{\text{カ}}a_n=b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

とおくと

$$b_n=\boxed{\text{ク}}\cdot\boxed{\text{ケ}}^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．次に，$\dfrac{a_n}{\boxed{\text{ケ}}^{n}}=c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，④ より数列 $\{c_n\}$ は $c_1=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，公差が

$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の等差数列であるから

$$a_n=\boxed{\text{セ}}^{\boxed{\text{ソ}}}\left(3n-\boxed{\text{タ}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，さらに

$$S_n=\boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ツ}}}\left(3n-\boxed{\text{テ}}\right)+\boxed{\text{ト}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．ただし，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ $n-2$　　① $n-1$　　② n　　③ $n+1$　　④ $n+2$

【解説】

問題

以下，n は自然数とする．

$$S_{n+1}=4a_n+2 \quad (n\geqq 1) \qquad \cdots ①$$

において，$n=1$ とすれば

$$S_2=4a_1+2$$

より

$$a_1+a_2=4a_1+2.$$

☜ $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ より
$S_2=a_1+a_2.$

これと $a_1=1$ より

$$1+a_2=4\cdot1+2$$

すなわち

$$a_2=\boxed{5}$$

である．次に，① から

$$S_n=\boxed{4}a_{n-1}+\boxed{2}\quad(n\geqq2)\qquad\cdots②$$

☜ ① の n を $n-1$ に置き換えた．

が成り立つから，①－② より

$$S_{n+1}-S_n=4(a_n-a_{n-1})\quad(n\geqq2)$$

である．

さらに，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ $(n\geqq1)$ であるから

$$a_{n+1}=\boxed{4}a_n-\boxed{4}a_{n-1}\quad(n\geqq2)\qquad\cdots③$$

が成り立つ．③ は

$$a_{n+1}-2a_n=2a_n-4a_{n-1}\quad(n\geqq2)$$

☜ ③ の両辺から $2a_n$ を引いた．

すなわち

$$a_{n+1}-\boxed{2}a_n=\boxed{2}(a_n-2a_{n-1})\quad(n\geqq2)$$

と変形できる．ここで

$$a_{n+1}-2a_n=b_n\quad(n\geqq1)\qquad\cdots④$$

とおくと

$$b_n=2b_{n-1}\quad(n\geqq2)$$

☜ $a_n-2a_{n-1}=b_{n-1}$ $(n\geqq2)$.

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-2a_1=5-2\cdot1=3$，公比 2 の等比数列である．よって

☜ $a_1=1,\quad a_2=5.$

$$b_n=\boxed{3}\cdot\boxed{2}^{n-1}\quad(n\geqq1)$$

☜ **等比数列の一般項**

等比数列 $\{b_n\}$ の初項が b_1，公比が r のとき

$$b_n=b_1\cdot r^{n-1}.$$

である．これと ④ より

$$a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}\quad(n\geqq1)$$

であるから，この両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}\quad(n\geqq1)$$

である．よって，$\frac{a_n}{2^n}=c_n$ $(n\geqq1)$ とおくと

$$c_{n+1}-c_n=\frac{3}{4}$$

となり，数列 $\{c_n\}$ は初項が $c_1=\frac{a_1}{2^1}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，公差が $\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$

の等差数列であることがわかる．よって

$$c_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{4}$$
$$=\frac{3n-1}{4}\quad(n\geqq1)$$

である．これと $\frac{a_n}{2^n}=c_n$ （$n\geqq1$）より

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{3n-1}{4}$$

であるから

$$a_n=\boxed{2}^{n-2}\left(3n-\boxed{1}\right)\quad(n\geqq1)\qquad\cdots⑤$$

である．すなわち，$\boxed{\text{ソ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

さらに，⑤ より

$$a_{n-1}=2^{n-3}\{3(n-1)-1\}$$
$$=2^{n-3}(3n-4)\quad(n\geqq2)$$

であるから，これと ② より，$n\geqq2$ のとき

$$S_n=4a_{n-1}+2$$
$$=4\cdot2^{n-3}(3n-4)+2$$
$$=2^{n-1}(3n-4)+2\qquad\cdots⑥$$

である．ここで，$S_1=a_1=1$ であるが，⑥ で $n=1$ とすると $S_1=2^0(3\cdot1-4)+2=1$ となるので，⑥ は $n=1$ のときも成り立つ．

よって

$$S_n=\boxed{2}^{n-1}\left(3n-\boxed{4}\right)+\boxed{2}\quad(n\geqq1)$$

である．すなわち，$\boxed{\text{ツ}}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

☜ **等差数列の一般項**

等差数列 $\{c_n\}$ の初項が c_1，公差が d のとき

$$c_n=c_1+(n-1)d.$$

☜ ⑤ の n を $n-1$ に置き換えた．

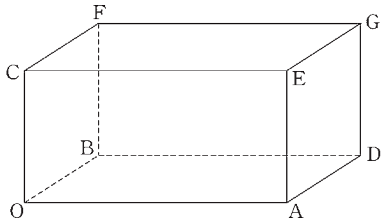
☜ $a_n=2^{n-2}(3n-1)$ より

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-2}\cdot(3k-1)$$

として計算すると大変なので，② の $S_n=4a_{n-1}+2$ （$n\geqq2$）を利用するとよい．

第4問　ベクトル

直方体 OADB-CEGF において，OA=2，OB=OC=1 である．



辺 CE の中点を P，辺 BF の中点を Q とする．

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$$

であり

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OC}$$

である．

(1)　$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$|\overrightarrow{OQ}|=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．また，三角形 OPQ の面積は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(2)　平面 OPQ 上に点 H をとる．$\overrightarrow{OH}$ は，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}$$

と表される．

直線 DH が平面 OPQ に垂直とする．このとき

$$x=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\quad y=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり

$$|\overrightarrow{DH}|=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である．よって，四面体 OPQD の体積を V_1 とすると

$$V_1=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$

である．

さらに，直線 DH と平面 CEF の交点を N とする．このとき，四面体 OPQN の体積を V_2 とすると

$$V_2=\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}$$

である．

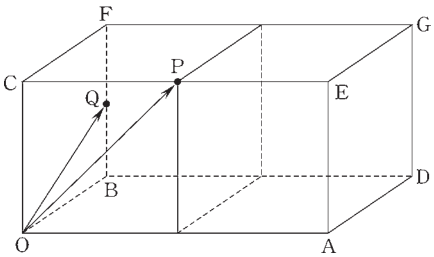
【解説】 問題

直方体 OADB-CEGF において，OA=2，OB=OC=1 であるから

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OA}|=2,\ |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1, \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{cases}\quad\cdots①$$

☜ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\frac{\pi}{2}=0$．
同様に
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$．

である．



辺 CE の中点が P であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}\\ &=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\quad\cdots②\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$．

である．また，辺 BF の中点が Q であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}\\ &=\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OC}\quad\cdots③\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$．

である．

(1) $|\overrightarrow{OC}|=1$，$|\overrightarrow{CP}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\angle OCP=\frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|&=\sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2}\\ &=\sqrt{1^2+1^2}\\ &=\sqrt{\boxed{2}}\quad\cdots④\end{aligned}$$

である．

$|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{BQ}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}$，$\angle OBQ=\frac{\pi}{2}$ より

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{BQ}|^2}$$

$$=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}} \qquad \cdots⑤$$

である．

①，②，③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \qquad \cdots⑥$$

である．

また，三角形 OPQ の面積を S とすると，④，⑤，⑥ より

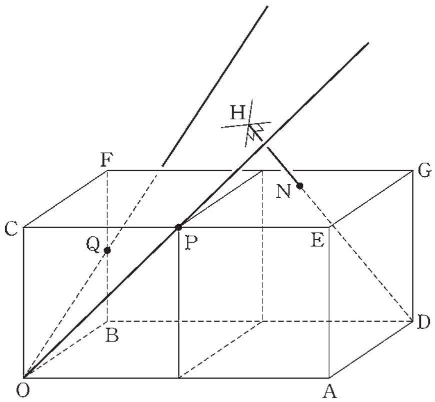
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である．

(2)



平面 OPQ 上に点 H をとると，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

と表される．②，③ を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)+y\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=\frac{x}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であり

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}$$

$$=\left(\frac{x}{2}-1\right)\overrightarrow{OA}+(y-1)\overrightarrow{OB}+\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{OC} \quad \cdots ⑦$$

☜ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

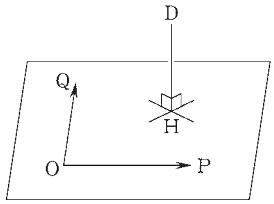
である．

直線 DH が平面 OPQ に垂直となる条件は

$$\begin{cases}\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OP}=0,\\ \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\end{cases}$$

☜ DH⊥(平面 OPQ)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OP}=0,\\ \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0.\end{cases}$$



すなわち

$$\begin{cases}\left\{\left(\frac{x}{2}-1\right)\overrightarrow{OA}+(y-1)\overrightarrow{OB}+\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{OC}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=0,\\ \left\{\left(\frac{x}{2}-1\right)\overrightarrow{OA}+(y-1)\overrightarrow{OB}+\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{OC}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)=0.\end{cases}$$

① より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ であるから

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)|\overrightarrow{OA}|^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)|\overrightarrow{OC}|^2=0,\\ (y-1)|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{y}{2}\right)|\overrightarrow{OC}|^2=0.\end{cases}$$

① より $|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ であるから

$$\begin{cases}2\left(\frac{x}{2}-1\right)+\left(x+\frac{y}{2}\right)=0,\\ (y-1)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{y}{2}\right)=0\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2x+\frac{y}{2}-2=0,\\ \frac{x}{2}+\frac{5y}{4}-1=0.\end{cases}$$

これを解いて $x=\frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}$, $y=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ となる．

この値を ⑦ に代入して

$$\overrightarrow{DH}=-\frac{5}{9}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{10}{9}\overrightarrow{OC}$$

$$=-\frac{5}{9}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})$$

であるから，① を用いて計算すると

$$|\overrightarrow{DH}|^2=\left(\frac{5}{9}\right)^2|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}|^2$$

$$=\left(\frac{5}{9}\right)^2(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+4|\overrightarrow{OC}|^2)$$

$$=\left(\frac{5}{9}\right)^2(2^2+1^2+4\cdot1^2)$$

$$=\frac{25}{9}.$$

☜ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ であるから

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+4|\overrightarrow{OC}|^2$$
$$+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+4|\overrightarrow{OC}|^2.$$

よって，$|\overrightarrow{DH}|=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$ である．

四面体 OPQD の体積 V_1 は

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|$$

☜ S は三角形 OPQ の面積.

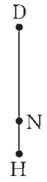
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3}$$

$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{12}}$$

である.

直線 DH と平面 CEF の交点が N である．点 N は直線 DH 上にあることより，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=k\overrightarrow{\mathrm{DH}}$$

☜ 

$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=k\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ と表される.

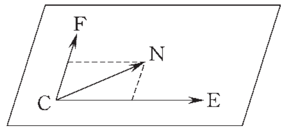
と表される．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DN}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+k\overrightarrow{\mathrm{DH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{5}{9}k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\left(1-\frac{5}{9}k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{5}{9}k\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{10}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\qquad\cdots⑧\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\frac{5}{9}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}})$.

である．また，点 N が平面 CEF 上にあることより，実数 s，t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CE}}+t\overrightarrow{\mathrm{CF}}\\&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\qquad\cdots⑨\end{aligned}$$

☜ 

$\overrightarrow{\mathrm{CN}}=s\overrightarrow{\mathrm{CE}}+t\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ と表され，このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ON}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CE}}+t\overrightarrow{\mathrm{CF}}.\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

と表される.

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないので，⑧，⑨ より

$$1-\frac{5}{9}k=s,\quad 1-\frac{5}{9}k=t,\quad \frac{10}{9}k=1$$

☜ 4 点 O，A，B，C が同一平面上にないとき

「 $\ell\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\ell'\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m'\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$」

$\iff \ell=\ell',\ m=m',\ n=n'$.

であるから $k=\frac{9}{10}$ である.

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ であるから

$$\mathrm{DN}:\mathrm{DH}=9:10$$

であり

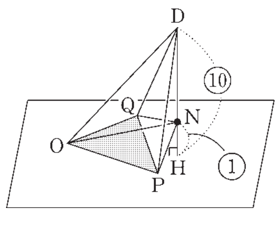
$$\mathrm{NH}:\mathrm{DH}=1:10$$

である.

したがって，四面体 OPQN の体積を V_2 とすると

$$V_2:V_1=\mathrm{NH}:\mathrm{DH}=1:10$$

☜ V_1 と V_2 は，底面 OPQ が共通と考えると，体積比は高さの比に等しい.



であるから

$$V_2=\frac{1}{10}V_1=\frac{\boxed{1}}{\boxed{24}}$$

☜ $V_1=\frac{5}{12}$.

である.

第5問　統　計

ある高等学校の男子生徒 50 人の身長の測定結果から次の度数分布表が得られた．

階級(cm) 以上　未満	度数(人)
150 〜 155	3
155 〜 160	4
160 〜 165	7
165 〜 170	12
170 〜 175	13
175 〜 180	4
180 〜 185	5
185 〜 190	2
計	50

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

各階級の幅は $\boxed{\text{ア}}$ cm であり，160 cm 以上 165 cm 未満の階級の相対度数は $\boxed{\text{イ}}.\boxed{\text{ウエ}}$ である．

(1)　50 人の身長を変量 x とし，度数分布表の各階級に属する資料はすべてその階級の階級値をとるものとする．

変量 x の中央値は $\boxed{\text{オカキ}}.\boxed{\text{ク}}$ cm である．

変量 x に対して変量 y を

$$y=\frac{x-\boxed{\text{オカキ}}.\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ア}}}$$

で定めると，変量 y の平均値は $\boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コ}}$，分散は $\boxed{\text{サ}}.\boxed{\text{シ}}$ である．

変量 x の平均値は $\boxed{\text{スセソ}}.\boxed{\text{タ}}$ cm である．

(2)　同じ 50 人の体重の測定結果から次の度数分布表が得られた．度数分布表の各階級に属する資料はすべてその階級の階級値をとるものとする．

階級(kg) 以上　未満	度数(人)
47.5 〜 52.5	A
52.5 〜 57.5	10
57.5 〜 62.5	B
62.5 〜 67.5	10
67.5 〜 72.5	C
72.5 〜 77.5	2
計	50

上の度数分布表の階級値から計算すると，50 人の体重の平均値は 60.0 kg，分散は 45.0 であった．このとき，連立方程式

A＋B＋C＝ $\boxed{\text{チツ}}$

5A＋6B＋7C＝165

A＋C＝ $\boxed{\text{テト}}$

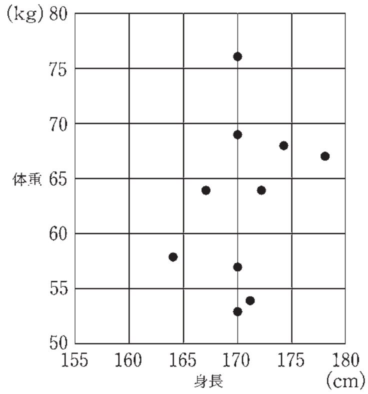
を解くことによって，A，B，C の値はそれぞれ $\boxed{\text{ナ}}$ ， $\boxed{\text{ニヌ}}$ ， $\boxed{\text{ネ}}$ であることがわかる．

(3) 50 人の中から特定の 10 人を選び，身長と体重の測定結果を表にすると次のようになった．

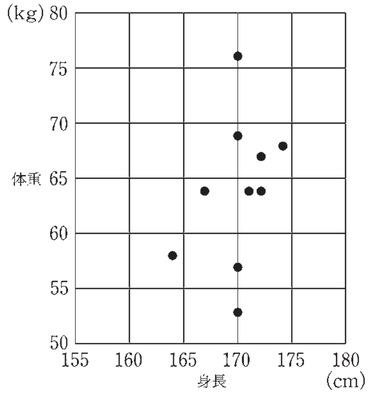
番号	身長(cm)	体重(kg)
1	164	58
2	167	64
3	170	69
4	170	76
5	170	53
6	170	57
7	171	64
8	172	67
9	172	64
10	174	68
平均	170	64
分散	7	40

この 10 人の身長と体重の相関図として適切なものは $\boxed{\text{ノ}}$ であり，この 10 人の身長と体重の相関係数を r とすると，r^2 の値は $\boxed{\text{ハ}}$. $\boxed{\text{ヒフ}}$ である． $\boxed{\text{ノ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

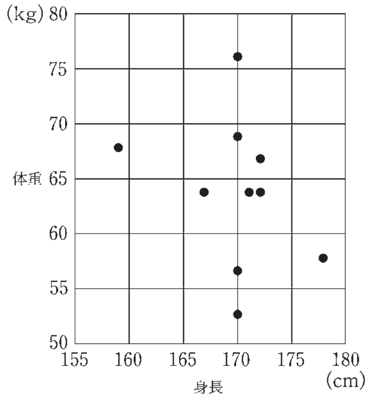
⓪



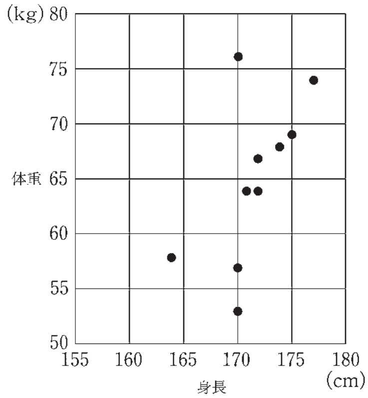
①



②



③



【解説】 **問題**

身長の度数分布表から，各階級の幅は $\boxed{5}$ cm である．資料全体の度数は 50 (人) であり，160 cm 以上 165 cm 未満の階級の度数は 7 (人) であるから，その階級の相対度数は

☜ 例えば，155－150＝5.

$$\frac{7}{50}=\boxed{0}.\boxed{14}$$

である．

(1) 度数分布表の各階級に属する資料はすべてその階級の階級値をとるものとする．

☜ 各階級の中央の値をその階級の階級値という．

変量 x (階級値) の各値を値の小さいものから順に並べたとき，中央の 25 番目と 26 番目にくる値はともに 165 cm 以上 170 cm 未満の階級の階級値 167.5 cm である．よって，変量 x の中央値は

☜ 165 cm 以上 170 cm 未満の階級の階級値が，(3+4+7)+1=15 番目から 3+4+7+12=26 番目まで並ぶ．

☜ **中央値**
資料を大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値という．資料の個数が偶数のときは，中央に並ぶ二つの資料の相加平均を中央値とする．

$$\frac{167.5+167.5}{2}=\boxed{167}.\boxed{5}\ \text{(cm)}$$

である．

変量 x に対して変量 y を

$$y=\frac{x-167.5}{5}$$

で定めると，次の表が得られる．

階級値 x (cm)	度　数 f (人)	y	yf	y^2f
152.5	3	-3	-9	27
157.5	4	-2	-8	16
162.5	7	-1	-7	7
167.5	12	0	0	0
172.5	13	1	13	13
177.5	4	2	8	16
182.5	5	3	15	45
187.5	2	4	8	32
計	50		20	156

上の表より，変量 y の平均値 $\overline{y}$ は

$$\overline{y}=\frac{(yf\ の総和)}{(f\ の総和)}=\frac{20}{50}=\boxed{0}.\boxed{4}.$$

また，変量 y^2 の平均値 $\overline{y^2}$ は

$$\overline{y^2}=\frac{(y^2f\ の総和)}{(f\ の総和)}=\frac{156}{50}=3.12$$

であるから，y の分散 $s_y{}^2$ は

$$s_y{}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2=3.12-(0.4)^2$$
$$=2.96\fallingdotseq\boxed{3}.\boxed{0}.$$

$x=5y+167.5$ であるから，x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=5\overline{y}+167.5$$
$$=5\cdot 0.4+167.5$$
$$=\boxed{169}.\boxed{5}\ \text{(cm)}$$

である．

(2) 50人の体重を変量 z (階級値)とし，z の平均値，分散をそれぞれ $\overline{z}$, $s_z{}^2$ とする．条件から

$$\overline{z}=60,\quad s_z{}^2=45$$

である．体重の度数分布表から，次の表が得られる．

階級値 z (kg)	度　数 f (人)	zf	$z-\overline{z}$	$(z-\overline{z})^2f$
50	A	50A	-10	100A
55	10	550	-5	250
60	B	60B	0	0
65	10	650	5	250
70	C	70C	10	100C
75	2	150	15	450
計	50	$50\overline{z}$		$50s_z{}^2$

平均値

変量 x のとる値を

x_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

とすると，x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k.$$

分散

変量 x のとる値を

x_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

とし，x の平均値を $\overline{x}$ とするとき，変量 x の分散 $s_x{}^2$ は

$$s_x{}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k{}^2-(\overline{x})^2.$$

$\overline{y}=0.4$.

分散

変量 x のとる値を

x_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

とし，x の平均値を $\overline{x}$ とするとき，変量 x の分散 $s_x{}^2$ は

$$s_x{}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2.$$

前出の表より

$$\begin{cases} \mathsf{A}+10+\mathsf{B}+10+\mathsf{C}+2=50, \\ 50\mathsf{A}+550+60\mathsf{B}+650+70\mathsf{C}+150=50\overline{z}, \\ 100\mathsf{A}+250+0+250+100\mathsf{C}+450=50{s_z}^2 \end{cases}$$

が得られ，整理すると

$$\begin{cases} \mathsf{A}+\mathsf{B}+\mathsf{C}=\boxed{28}, & \cdots① \\ 5\mathsf{A}+6\mathsf{B}+7\mathsf{C}=165, & \cdots② \\ \mathsf{A}+\mathsf{C}=\boxed{13} & \cdots③ \end{cases}$$

☜ $\overline{z}=60$.

☜ ${s_z}^2=45$.

となる．

①，②，③ を解いて

$$\mathsf{A}=\boxed{8},\quad \mathsf{B}=\boxed{15},\quad \mathsf{C}=\boxed{5}$$

となる．

☜ ①−③ より B＝15.
② に代入して
$5\mathsf{A}+6\cdot15+7\mathsf{C}=165$
$5\mathsf{A}+7\mathsf{C}=75.$ …④
④−③×5 より
$2\mathsf{C}=10$
$\mathsf{C}=5.$
③ に代入して
$\mathsf{A}+5=13$
$\mathsf{A}=8.$

(3) 特定の 10 人の身長と体重のデータの中に身長が 175 cm を超えているものは含まれていないが，図⓪，②，③にはいずれも身長が 175 cm を超えているデータがプロットされているので，これらの図は不適．また，図①は 10 人のデータが正しくプロットされている．よって，$\boxed{ノ}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

10 人の身長を変量 a とし，a の平均値，分散をそれぞれ $\overline{a}$，${s_a}^2$ とする．また，10 人の体重を変量 b とし，b の平均値，分散をそれぞれ $\overline{b}$，${s_b}^2$ とする．問題の表から

$$\overline{a}=170,\quad {s_a}^2=7,$$
$$\overline{b}=64,\quad {s_b}^2=40$$

である．

a	b	$a-\overline{a}$	$b-\overline{b}$	$(a-\overline{a})(b-\overline{b})$
164	58	−6	−6	36
167	64	−3	0	0
170	69	0	5	0
170	76	0	12	0
170	53	0	−11	0
170	57	0	−7	0
171	64	1	0	0
172	67	2	3	6
172	64	2	0	0
174	68	4	4	16
			計	58

上の表より，変量 a と b の共分散 s_{ab} は

$$s_{ab}=\frac{((a-\overline{a})(b-\overline{b})\text{ の総和})}{10}$$
$$=\frac{58}{10}=5.8.$$

☜ **共分散と相関係数**

二つの変量 x，y に関する N 組のデータ

$(x_k,\ y_k)\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

に対し，x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とするとき

$$s_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$

を x と y の共分散といい

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

を x と y の相関係数という．ただし，s_x，s_y はそれぞれ x，y の分散の正の平方根である．

よって，変量 a と b の相関係数を r とすると，r^2 の値は

$$r^2 = \frac{{s_{ab}}^2}{{s_a}^2 \cdot {s_b}^2} = \frac{5.8^2}{7 \cdot 40}$$

$$= \frac{2.9^2}{70} = 0.120\cdots$$

$$\fallingdotseq \boxed{0}.\boxed{12}$$

である．

第６問　コンピュータ

１から n までの自然数の中で，正の約数の個数が m であるものが存在するとき，そのような自然数のうち最小のものを出力する次の〔プログラム１〕を作成した．

〔プログラム１〕

```
100 INPUT PROMPT "n=": N
110 INPUT PROMPT "m=": M
120 FOR J=1 TO N
130     LET C=0
140     FOR A=1 TO J
150         IF [ ア ]=0 THEN LET C=C+1
160     NEXT A
170     IF C=M THEN
180         PRINT "正の約数を";M;"個もつ最小の自然数は"; [ イ ]
190         GOTO 230
200     END IF
210 NEXT J
220 PRINT "正の約数を";M;"個もつ自然数はない"
230 END
```

(1)　150 行では，A が J の約数であるかどうかを調べている．$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．ただし，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である．

⓪　A-INT(A/J)*J　　①　A-INT(J/A)*A　　②　J-INT(J/A)*A　　③　J-INT(A/J)*J

(2)　$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　N　　①　M　　②　J　　③　C　　④　A

(3)　〔プログラム１〕を実行し，変数 N に 8，変数 M に 4 を入力すると，150 行の LET C=C+1 は $\boxed{\text{ウエ}}$ 回実行され

正の約数を 4 個もつ最小の自然数は $\boxed{\text{オ}}$

が出力される．

また，変数 N に 25，変数 M に 8 を入力すると

正の約数を 8 個もつ最小の自然数は $\boxed{\text{カキ}}$

が出力される．

(4)　k を負でない整数とするとき，2^k の正の約数は $\boxed{\text{ク}}$ 個ある．$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ $k-1$　　① k　　② $k+1$　　③ 2^{k-1}　　④ 2^{k}　　⑤ 2^{k+1}

このことを利用して，nを入力せずに，正の約数をm個もつ最小の自然数を出力するため，〔プログラム１〕の 100 行と 220 行を削除し，112 行を加えた次の〔プログラム２〕を作成した．

〔プログラム２〕

```
110 INPUT PROMPT "m=": M
112 LET N= [ ケ ]
120 FOR J=1 TO N
130     LET C=0
140     FOR A=1 TO J
150         IF [ ア ] =0 THEN LET C=C+1
160     NEXT A
170     IF C=M THEN
180         PRINT "正の約数を";M;"個もつ最小の自然数は"; [ イ ]
190         GOTO 230
200     END IF
210 NEXT J
230 END
```

[ケ] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ 2*M-1　　① 2*M　　② 2*M+1　　③ 2^(M-1)-1　　④ 2^(M-1)

(5) 〔プログラム１〕を変更し，入力されたnに対し，n以下の自然数のうち，正の約数を最も多くもつものを一つ出力する〔プログラム３〕を作成した．

〔プログラム３〕

```
100 INPUT PROMPT "n=": N
102 LET K=0
104 LET L=0
120 FOR J=1 TO N
130     LET C=0
140     FOR A=1 TO J
150         IF [ ア ] =0 THEN LET C=C+1
160     NEXT A
162     IF [ コ ] THEN
164         LET [ サ ]
166         LET [ シ ]
```

```
168    END IF
210 NEXT J
212 PRINT N;"以下の自然数のうち，正の約数を最も多くもつものの一つは";L
214 PRINT "その正の約数の個数は";K;"個"
230 END
```

コ，サ，シ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ．ただし，サ と シ は解答の順序を問わない．

⓪ K<C　① K=C　② K>C　③ J<C　④ J=C
⑤ J>C　⑥ L<J　⑦ L=J　⑧ L>J

(6) 〔プログラム 3〕を実行し，変数 N に 32 を入力すると

32 以下の自然数のうち，正の約数を最も多くもつものの一つは スセ

その正の約数の個数は ソ 個

が出力される．

【解説】

問題

(1) A, J を自然数として，J を A で割ったときの商を Q，余りを R とすると

$$J=AQ+R \quad (0\leqq R<A)$$

が成り立つ．J を A で割ったときの商 Q は $\frac{J}{A}$ の整数部分として求めることができるので

$$R=J-\left(\frac{J}{A}\text{の整数部分}\right)\times A$$

☜ R=J-QA.

と表される．150 行では，A が J の約数であるかどうか，すなわち，R＝0 であるかどうかを調べているので，ア には「J-INT(J/A)*A」すなわち ② が当てはまる．

(2) 150 行では，A が J の約数であるときに C の値を 1 増やす．よって，C の値は J の正の約数の個数である．J を 1 から N まで変化させて，C の値が M となったときの J を出力すればよいから，イ に当てはまるものは ② の「J」である．

(3) 変数 N に 8，変数 M に 4 を入力すると，次のように変数の値が変化する．

Jの値	Aの値	AはJの約数か？	Cの値
1	1	はい	1
2	1	はい	1
	2	はい	2
3	1	はい	1
	2	いいえ	1
	3	はい	2
4	1	はい	1
	2	はい	2
	3	いいえ	2
	4	はい	3
5	1	はい	1
	2	いいえ	1
	3	いいえ	1
	4	いいえ	1
	5	はい	2
6	1	はい	1
	2	はい	2
	3	はい	3
	4	いいえ	3
	5	いいえ	3
	6	はい	4

150行のLET C=C+1は，AがJの約数のときに実行されるので，
150行のLET C=C+1が実行される回数は $\boxed{14}$ 回であり，J=6のとき170行でC=Mが(初めて)成り立つので

正の約数を4個もつ最小の自然数は $\boxed{6}$

が出力される．

☜ この回数は，1から6までの自然数の，正の約数の個数の和である．

1の正の約数は1個，
2の正の約数は2個，
3の正の約数は2個，
4の正の約数は3個，
5の正の約数は2個，
6の正の約数は4個

より，$1+2+2+3+2+4=14$．

また，1から25までの自然数の正の約数の個数は以下のようになる。

自然数	約数	約数の個数
1	1	1個
2	1，2	2個
3	1，3	2個
4	1，2，4	3個
5	1，5	2個
6	1，2，3，6	4個
7	1，7	2個
8	1，2，4，8	4個
9	1，3，9	3個
10	1，2，5，10	4個
11	1，11	2個
12	1，2，3，4，6，12	6個
13	1，13	2個
14	1，2，7，14	4個
15	1，3，5，15	4個
16	1，2，4，8，16	5個
17	1，17	2個
18	1，2，3，6，9，18	6個
19	1，19	2個
20	1，2，4，5，10，20	6個
21	1，3，7，21	4個
22	1，2，11，22	4個
23	1，23	2個
24	1，2，3，4，6，8，12，24	8個
25	1，5，25	3個

したがって，変数Nに25，変数Mに8を入力すると

正の約数を8個もつ最小の自然数は $\boxed{24}$

が出力される。

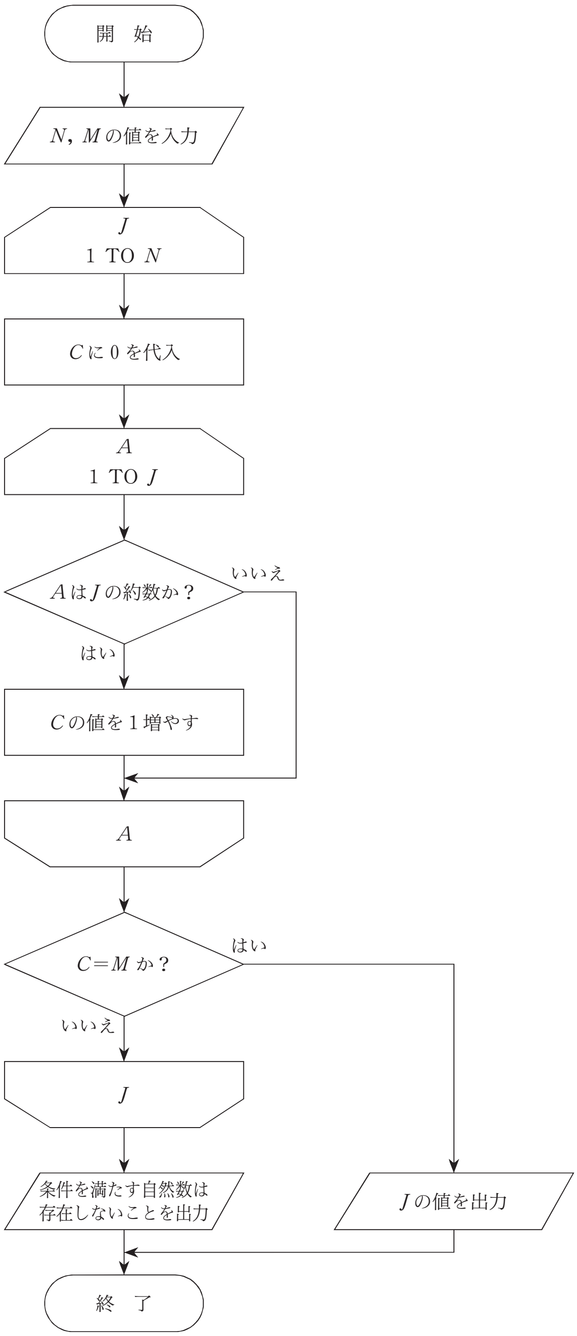
完成した〔プログラム1〕とその流れ図は次のようになる。

〔プログラム1〕

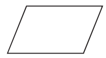
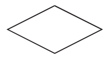
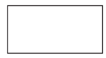
```
100 INPUT PROMPT "n=": N
110 INPUT PROMPT "m=": M
120 FOR J=1 TO N
130     LET C=0
140     FOR A=1 TO J
150         IF J-INT(J/A)*A=0 THEN LET C=C+1
160     NEXT A
170     IF C=M THEN
```

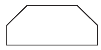
```
180         PRINT "正の約数を";M;"個もつ最小の自然数は";J
190         GOTO 230
200     END IF
210 NEXT J
220 PRINT "正の約数を";M;"個もつ自然数はない"
230 END
```

〔流れ図〕



☜ この流れ図での記号の意味

記号	意味
	入出力
	条件判断
	処　理

記号  と  で囲まれた部分はループを表す。

(4)　k を負でない整数とするとき，2^k の正の約数は

$$2^p \quad (\text{ただし，} p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

の形で表され，その個数は $k+1$ 個である．したがって，クに当てはまるものは ② である．

このことを利用して，n を入力せずに，正の約数を m 個もつ最小の自然数を出力するプログラムを作成した．2^{m-1} は m 個の正の約数をもつから，正の約数を m 個もつ自然数のうち最小のものは，1 以上 2^{m-1} 以下の範囲に必ず存在する．したがって，〔プログラム 1〕における n を 2^{m-1} に変更すればよいから，ケに当てはまるものは，④ の「2^(M-1)」である．

☜　他の選択肢では，例えば M=5 のとき，いずれも不適当である．

(5)　入力された n に対し，n 以下の自然数のうち，正の約数を最も多くもつものを一つ出力する〔プログラム 3〕を作成した．

212 行により，L の値は，正の約数を最も多くもつ自然数を表し，214 行により，K の値は，その正の約数の個数を表すとわかる．C の値は J の正の約数の個数であるから，162 ～ 168 行では，C が K を超えたときに，その C の値を K に代入し，J の値を L に代入すればよい．したがって，コに当てはまるものは ⓪ の「K<C」であり，サとシに当てはまるものは，① の「K=C」と ⑦ の「L=J」である．（サとシは順不同．）

(6)　26 から 32 までの自然数の正の約数の個数は以下のようになる．

自然数	約数	約数の個数
26	1，2，13，26	4 個
27	1，3，9，27	4 個
28	1，2，4，7，14，28	6 個
29	1，29	2 個
30	1，2，3，5，6，10，15，30	8 個
31	1，31	2 個
32	1，2，4，8，16，32	6 個

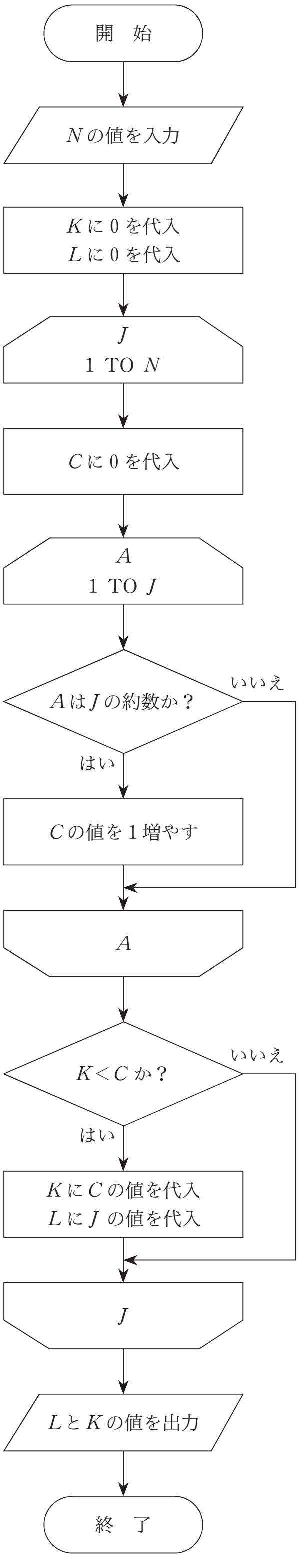
(3) の表とあわせて，32 以下の自然数のうち，正の約数を最も多くもつものは 24 と 30 であり，その正の約数の個数は 8 個である．〔プログラム 3〕の 162 ～ 168 行では，C が K を超えたときのみ K と L の値を書き換えるので，出力される L の値は，正の約数を最も多くもつものがいくつかある場合は，そのうちの最小のものである．したがって，スセは 24 である．また，ソは 8 である．

完成した〔プログラム 3〕とその流れ図は次のようになる．

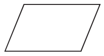
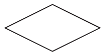
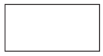
〔プログラム３〕

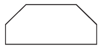
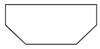
```
100 INPUT PROMPT "n=": N
102 LET K=0
104 LET L=0
120 FOR J=1 TO N
130     LET C=0
140     FOR A=1 TO J
150         IF J-INT(J/A)*A=0 THEN LET C=C+1
160     NEXT A
162     IF K<C THEN
164         LET K=C
166         LET L=J
168     END IF
210 NEXT J
212 PRINT N;"以下の自然数のうち，正の約数を最も多くもつものの一つは";L
214 PRINT "その正の約数の個数は";K;"個"
230 END
```

〔流れ図〕



☜ この流れ図での記号の意味

記号	意味
	入出力
	条件判断
	処　理

記号  と  で

囲まれた部分はループを表す.

【理　　科】

物　理　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

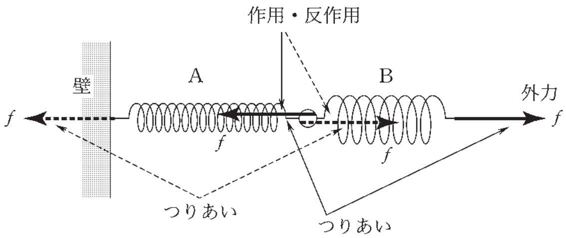
問題番号	設　問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問		問1	1	③	5	
		問2	2	①	5	
		問3	3	③	5	
		問4	4	④	5	
		問5	5	⑥	5	
		問6	6	④	5	
第1問　自己採点小計					（30）	
第2問	A	問1	7	⑤	5	
		問2	8	②	5	
		問3	9	②	4	
	B	問4	10	③	5	
		問5	11	④	3	
第2問　自己採点小計					（22）	
第3問	A	問1	12	②	4	
		問2	13	②	4	
		問3	14	②	4	
	B	問4	15	⑤	5	
		問5	16	⑤	3	
第3問　自己採点小計					（20）	
第4問	A	問1	17	②	4	
		問2	18	①	4	
	B	問3	19	③	5	
		問4	20	④	3	
		問5	21	③	4	
	C	問6	22	③	5	
		問7	23	①	3	
第4問　自己採点小計					（28）	
自己採点合計					（100）	

【解説】　　問題

第1問　小問集合

問1　ばねに力を加えると，伸びたり縮んだりする。また，ばねは一つの物体なので，伸びたり縮んだりしている状態であっても，全体が静止していれば，はたらく力はつりあっている。

外力の大きさを f とし，ばねBにはたらく力を太い実線の矢印，ばねAにはたらく力を太い点線の矢印で描く。ばねA，Bそれぞれにはたらく力のつりあい，および作用・反作用の法則より，これらの力の大きさはすべて f である。



Aのばね定数を k，Bのばね定数を $2k$ とおく。

フックの法則より，

$$\mathrm{A}\cdots\cdots f = kd_{\mathrm{A}}$$

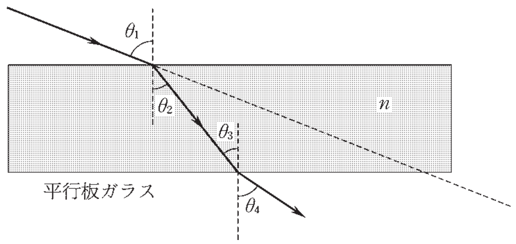
$$\mathrm{B}\cdots\cdots f = 2kd_{\mathrm{B}}$$

以上の2式より，

$$d_{\mathrm{A}} : d_{\mathrm{B}} = \underline{2 : 1}$$

$\boxed{1}$ の答　③

問2　下図のように，平行板ガラスの両面における入射角と屈折角を θ_1，θ_2，θ_3，および θ_4 とする。ガラスの(絶対)屈折率を n とする。空気の(絶対)屈折率はほぼ1とみなすことができる。



(水平に置いた図)

まず，空気から平行板ガラスへの光の屈折について考える。**屈折の法則**より，

$$1 \times \sin\theta_1 = n \times \sin\theta_2 \qquad \cdots①$$

$n > 1$ なので，

$$\theta_1 > \theta_2$$

次に，平行板ガラスから空気への屈折について，屈折の法則より，

【ポイント】

フックの法則

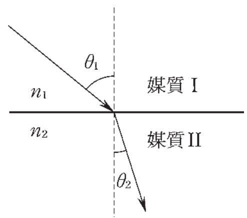
ばねに加えた力の大きさ f と，ばねの伸びあるいは縮み x は比例する。これをフックの法則という。比例定数を k とおくと，

$$f = kx$$

比例定数 k をばね定数という。

屈折の法則

光が媒質Iと媒質IIの境界で屈折するとき，次の関係式が成立する。



$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

ここで，

n_1…媒質Iの絶対屈折率

n_2…媒質IIの絶対屈折率

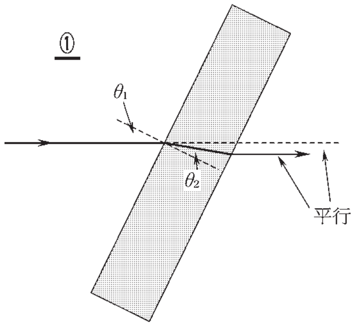
$$n \times \sin\theta_3 = 1 \times \sin\theta_4 \qquad \cdots②$$

なお，平行板ガラスなので，$\theta_2 = \theta_3$ であり，①式と②式より，

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_4$$

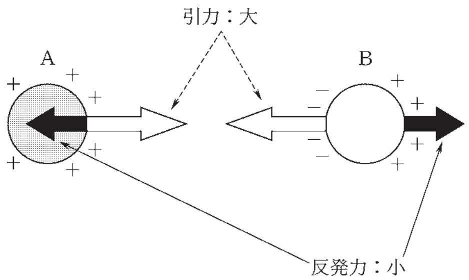
$$\therefore \quad \theta_1 = \theta_4$$

すなわち，入射光線の道すじを延長したものと，平行板ガラスから空気へ屈折していく光の道すじは平行である。このことと，$\theta_1 > \theta_2$ の条件をあわせると，光が進む道すじは次のようになる。



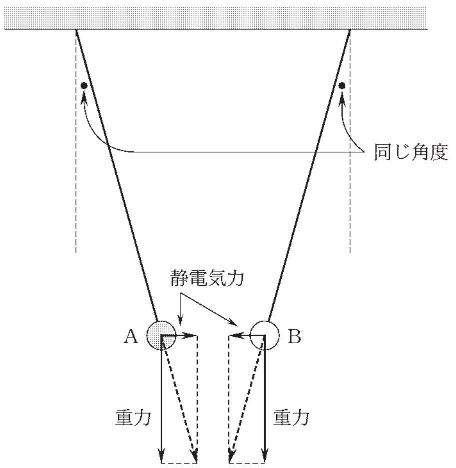
$\boxed{2}$ の答　①

問 3　B の電気量は 0 であるが，静電誘導によって，A に近い側が負に帯電し，遠い側が正に帯電する。



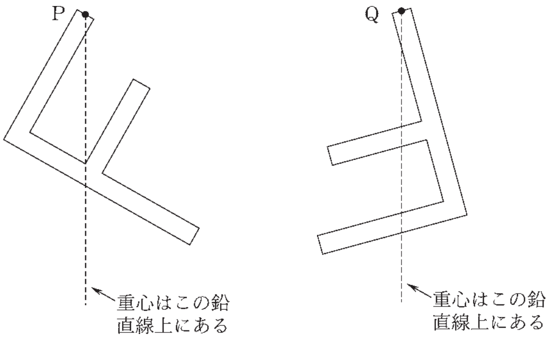
静電気力の大きさは帯電体間の距離の小さい方が大きいため，全体として A と B は互いに引きあうことになる。また，作用・反作用の法則より，A と B が互いに引きあう力(静電気力の合力)は大きさが等しい。さらに，A と B の質量(重力)も等しいので，力のつりあいを考えると，次図のように，糸が鉛直線となす角度も同じになる。

③

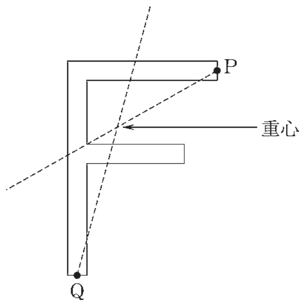


$\boxed{3}$ の答　③

問 4　点 P または点 Q を支点にしてつるし，つりあわせる場合，支点まわりの力のモーメントのつりあいより，重心は支点を含む鉛直線上に存在することがわかる。



したがって，これらの鉛直線の交点が重心の位置である。

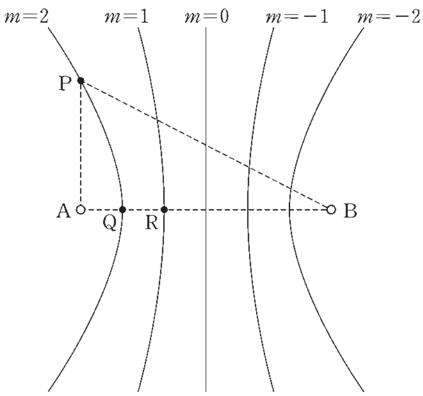


$\boxed{4}$ の答　④

問 5　整数を m とすると，強めあう点は点 A，B からの距離の差が波長 λ の m 倍の位置である。

$$BP-AP=m\lambda$$

強めあう点を結んだ線は，中央(AB の垂直 2 等分線)が $m=0$ に対応し，それから離れるにつれて m の値が 1 ずつ増減する。



この図より，点Pは $m=2$ に対応することがわかる。

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=\underline{2}_{(ア)}\times\lambda$$

また，線分 AB 上における合成波は定常波である。定常波において強めあう点は定常波の腹であり，その間隔は半波長である。

$$\mathrm{QR}=\underline{0.5}_{(イ)}\times\lambda$$

5 の答　⑥

問6　物体 A，B，C の熱容量を，それぞれ C_A，C_B，C_C とする。**比熱と熱容量の関係**より，

$$C_A=200\times0.04=8\ \mathrm{J/K}$$
$$C_B=300\times0.03=9\ \mathrm{J/K}$$
$$C_C=400\times0.02=8\ \mathrm{J/K}$$

物体に加える熱量を Q とする。**温度変化と熱量，熱容量の関係**より，

$$t_A=\frac{Q}{C_A}=0.125Q$$
$$t_B=\frac{Q}{C_B}\fallingdotseq0.111Q$$
$$t_C=\frac{Q}{C_C}=0.125Q$$

以上の結果より，その大小関係は，

$$\underline{t_A=t_C>t_B}$$

6 の答　④

比熱と熱容量の関係

熱容量 C は，物体全体を 1 ℃だけ上昇させるのに必要な熱量である。比熱 c は，物体の単位質量を 1 ℃だけ上昇させるのに必要な熱量である。物体の質量を m とすると，次の関係がある。

$$C=mc$$

温度変化と熱量，熱容量の関係

物体の熱容量を C，加える熱量を Q，温度変化を t とすると，次の関係がある。

$$Q=Ct \qquad t=\frac{Q}{C}$$

第2問　生活と電気

問題

A

問1　はじめの 2 分間は，2 Ω の抵抗 X に 10 A の電流が流れている。**単位時間あたりのジュール熱**を P とすると，

$$P=2\times10^2$$
$$=200\ \mathrm{W}=200\ \mathrm{J/s}$$

2 分＝120秒なので，ジュール熱の合計 E は，

$$E=200\ \mathrm{J/s}\times120\ \mathrm{s}$$
$$=\underline{24000}\ \mathrm{J}$$

単位時間あたりのジュール熱

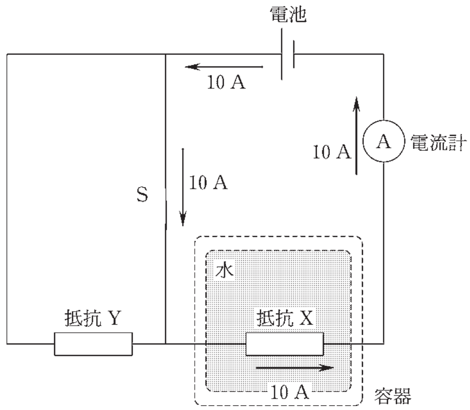
いわゆる抵抗での消費電力のことである。

$$P=IV=RI^2=\frac{V^2}{R}$$

P：消費電力　　R：抵抗
V：電圧　　I：電流

$\boxed{7}$ の答　⑤

問 2　S が閉じているとき(はじめの 2 分間)，抵抗 Y には電流が流れず，抵抗 X だけに 10 A の電流が流れる。

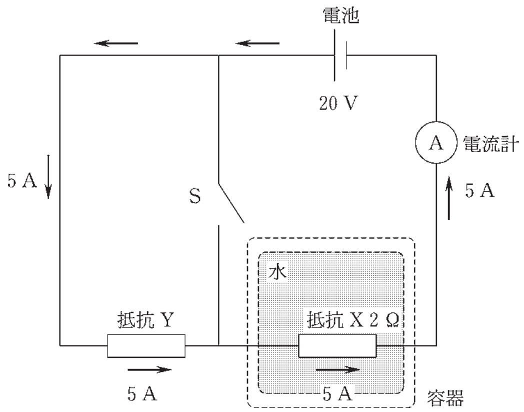


S が閉じているとき

電池の電圧を V とすると，**オームの法則**より，

$$V=2\times 10$$
$$=20\ \mathrm{V}$$

S が開いているとき(あとの 2 分間)，抵抗 X と抵抗 Y は直列接続になる。



S が開いているとき

抵抗 Y の抵抗値を R とすると，合成抵抗は $2+R$〔Ω〕なので，オームの法則より，

$$20=(2+R)\times 5$$
$$\therefore\quad R=\underline{2}\ \Omega$$

$\boxed{8}$ の答　②

問 3　抵抗 X に流れる電流は，はじめの 2 分間が 10 A で，あとの 2 分間が 5 A である。単位時間に発生するジュール熱は電流の 2 乗に比例するので，あとの 2 分間で発生するジュール熱は，は

オームの法則

抵抗にかかる電圧 V と抵抗を流れる電流 I は比例する。これをオームの法則という。抵抗値を R とすると，

$$V=RI$$

じめの 2 分間で発生するジュール熱の $\left(\dfrac{5\text{ A}}{10\text{ A}}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ 倍である。

したがって，その時間での温度上昇も $\dfrac{1}{4}$ 倍になる。

$$t_0-28=(28-20)\times\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad t_0=\underline{30}\ ^\circ\text{C}$$

〈別解〉 水の熱容量を C〔J/K〕とする。はじめの 2 分間について，温度変化と熱量，熱容量の関係より，

$$24000=C(28-20)$$

$$\therefore\quad C=3000$$

あとの 2 分間について，抵抗 X での単位時間あたりのジュール熱を P' とすると，

$$P'=2\times5^2$$
$$=50\text{ J/s}$$

抵抗 X で発生するジュール熱を E'〔J〕とすると，

$$E'=50\text{ J/s}\times120\text{s}$$
$$=6000\text{ J}$$

したがって，温度変化と熱量，熱容量の関係より，

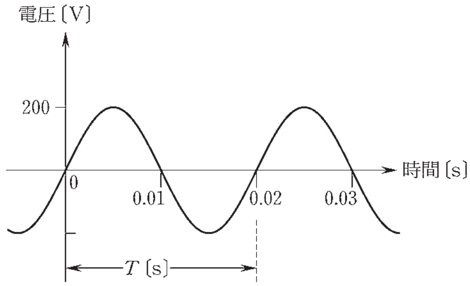
$$6000=3000(t_0-28)$$

$$\therefore\quad t_0=\underline{30}\ ^\circ\text{C}$$

$\boxed{9}$ の答　②

B

問 4　次図の時間間隔 T〔s〕が交流の周期である。



$$\therefore\quad T=0.02\text{s}$$

周波数 f〔Hz〕は，

$$f=\frac{1}{T}$$
$$=\frac{1}{0.02}=\underline{50}\text{〔Hz〕}$$

$\boxed{10}$ の答　③

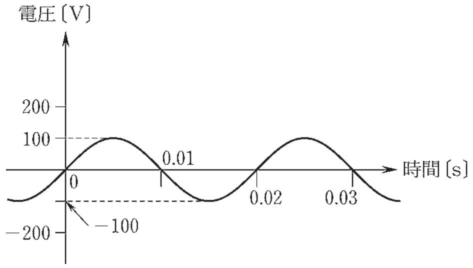
問 5　変圧器(トランス)で電圧は変わるが，周期や周波数は変わらない。1 次コイルと 2 次コイルの電圧の比はコイルの巻数の比になる。2 次コイルの電圧の最大値を v とすると，

$$200:v=200:100$$

$$\therefore\quad v=100\text{〔V〕}$$

すなわち，2次コイルの電圧の最大値は100 Vになる。周期は0.02 sのままなので，2次コイルに現れる電圧のグラフは次のようになる。

④



$\boxed{11}$ の答　④

第3問　波動　問題

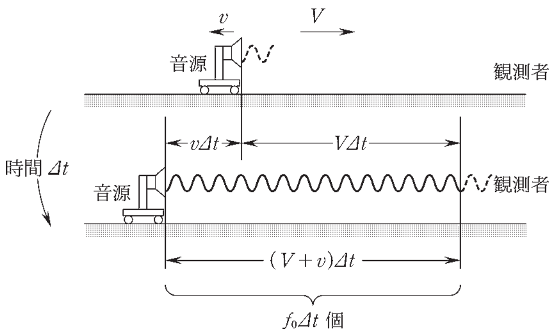
A

問1　空気が音波を伝える速さ(音速)は，空気の状態(主に気温)でその値が定まる。音源の速度とは無関係である。したがって，音源から観測者に向かう音波の速さは，音源が静止しているときと比べて変わらない(ア)。

音源の振動数を f_0，音速を V とすると，音源が静止しているときの音波の波長 λ_0 は，**波の関係式**より，

$$\lambda_0=\frac{V}{f_0}$$

時間 Δt のあいだにおける音源の移動と音波が伝わる様子を考える。次図のように，音源が観測者から遠ざかる速さを v とすると，音源が移動する距離は $v\Delta t$ であり，音波が伝わる距離は $V\Delta t$ である。また，この時間 Δt のあいだに音源から出た音波の個数(振動1回，あるいは1波長分を1個と数える)は $f_0\Delta t$ 個である。



観測者に向かう音波の波長を λ とすると，上図より，

$$\lambda=\frac{(V+v)\Delta t}{f_0\Delta t}=\frac{V+v}{f_0}$$

したがって，

波の関係式

$$V=f\lambda=\frac{\lambda}{T}$$

V：波の速さ　f：振動数
λ：波長　T：周期

$$\lambda=\frac{V+v}{f_0}>\frac{V}{f_0}=\lambda_0$$

$$\therefore\quad \lambda>\lambda_0$$

すなわち，音源から観測者に向かう音波の波長 λ は，音源が静止しているときの波長 λ_0 と比べて大きくなる(イ)。また，観測者が聞く音の振動数 f は，

$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{V}{V+v}f_0$$

$$\therefore\quad f_0>f$$

したがって，観測者が聞く音の振動数は，音源が出している音の振動数よりも低(ウ)くなる。これは，音源が運動する場合の**ドップラー効果**である。

$\boxed{12}$ の答　②

問 2　音源が速さ $u\,(u<V)$ で近づく場合の振動数は，**問 1** における振動数 f の式において，$v=-u$ とすればよい。空気中では，

$$f_1=\frac{V}{V-u}f_0$$

水中での音速を V' とすると，

$$f_2=\frac{V'}{V'-u}f_0$$

これらの大小を比較するため，差をとる。

$$f_1-f_2=\frac{u(V'-V)}{(V-u)(V'-u)}f_0$$

$u<V<V'$ より，$f_1-f_2>0$

$$\therefore\quad f_2<f_1$$

f_0 との大小関係を合わせると，

$$\underline{f_0<f_2<f_1}$$

$\boxed{13}$ の答　②

問 3　**問 1** で考えた音波の個数(振動 1 回，あるいは 1 波長分を 1 個と数える)を考える。音源が出す**音波の総個数**と観測者が聞く音波の総個数は等しくなる。音源が出す音波の総個数は f_0T である。音源の速度を，音源から観測者に向かう向きを正として，w とすると，観測者が聞く音波の総個数は $\dfrac{V}{V-w}f_0\times\dfrac{4}{3}T$ である。これらを等しいとおいて，

$$f_0T=\frac{V}{V-w}f_0\times\frac{4}{3}T$$

$$\therefore\quad w=\underline{-\frac{1}{3}V}$$

$\boxed{14}$ の答　②

B

問 4　スクリーン B 上に明暗のしま模様ができるのは，スリット S_1，S_2 で回折(ア)した光がスクリーン B 上で重なりあい，干渉(イ)するためである。しま模様の間隔は以下のように求めることがで

ドップラー効果

音源や観測者が運動するとき，観測者が聞く音の振動数が音源の振動数と異なる現象。音だけでなく，光や水面波においても起こる。

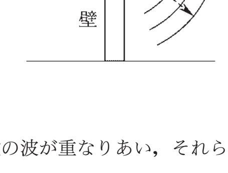
音波の総個数

振動数は単位時間あたりの音波の個数なので，振動数と音の継続時間の積が音波の総個数になる。

音波の総個数
＝振動数×音の継続時間

回折

波が壁などの障害物を回り込み，広がって伝わる現象。



干渉

複数の波が重なりあい，それらが強めあったり，弱めあったりする現象。

きる。

S_1S_2 の間隔を d，薄い板 A とスクリーン B の距離を ℓ とする。B 上にできるしま模様の明るい場所の位置座標を x，整数を m，光の波長を λ とする。S_1，S_2 から B 上の位置 x までの距離の差は $\dfrac{dx}{\ell}$ なので，

$$\frac{dx}{\ell}=m\lambda$$

$$\therefore \quad x=\frac{m\lambda\ell}{d}$$

しま模様の間隔を Δx とすると，

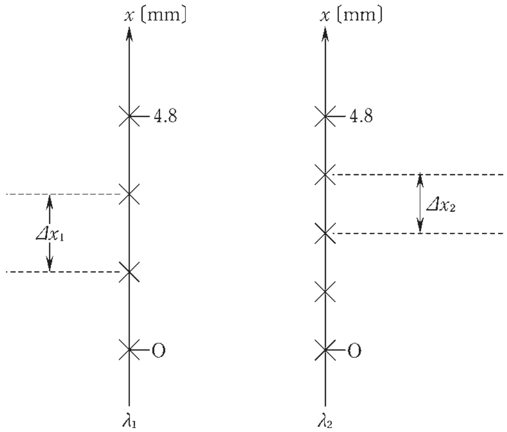
$$\Delta x=\frac{(m+1)\lambda\ell}{d}-\frac{m\lambda\ell}{d}$$

$$=\frac{\lambda\ell}{d}$$

以上の結果より，しま模様の間隔 Δx は光の波長 λ に比例することがわかる。AB 間を水で満たすと，光の波長が短くなるので，しま模様の間隔も狭くなる(ウ)。

$\boxed{15}$ の答　⑤

問 5　波長 λ_1 のときのしま模様の間隔を Δx_1 とし，波長 λ_2 のときのしま模様の間隔を Δx_2 とする。



問題の図 2

これより，

$$\Delta x_1=\frac{4.8}{3}=1.6\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta x_2=\frac{4.8}{4}=1.2\ \mathrm{mm}$$

しま模様の間隔 Δx が光の波長 λ に比例するので，

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

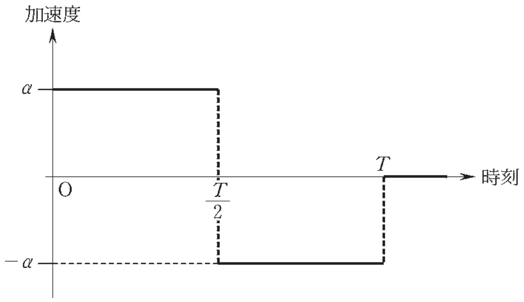
$$=\frac{1.6}{1.2}\fallingdotseq\underline{1.33}$$

$\boxed{16}$ の答　⑤

第4問　力と運動　問題

A

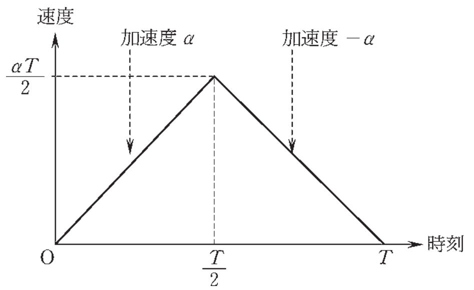
問1　問題の図2より，時刻 $0 \sim \frac{T}{2}$ における電車の加速度は α であり，時刻 $\frac{T}{2} \sim T$ における電車の加速度は $-\alpha$ である。



問題の図2

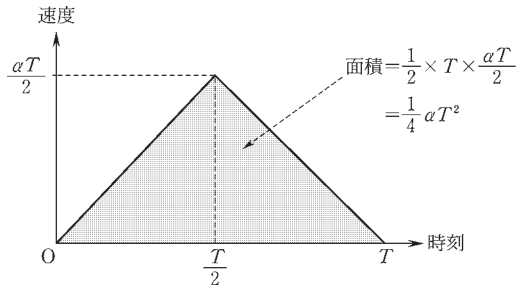
速度−時刻グラフの傾きは加速度に等しいので，次図のようになる。

②



$\boxed{17}$ の答　②

問2　A駅とB駅の距離を D とする。D は**問1**の速度−時刻グラフにおいて，グラフと時刻の軸が囲む部分の面積に等しい。



$$D=\frac{1}{4}\alpha T^2$$

自動車の速度を v とする。電車がB駅に停車すると同時に自動車がB駅の横を通過するには，

速度−時刻グラフ

運動する物体の速度−時刻グラフには，次の特徴がある。

＊グラフの傾き
　…物体の加速度

＊グラフと時刻軸が囲む面積
　…物体の変位

$$vT = D = \frac{1}{4}aT^2$$

$$\therefore \quad v = \underline{\frac{1}{4}aT}$$

$\boxed{18}$ の答　①

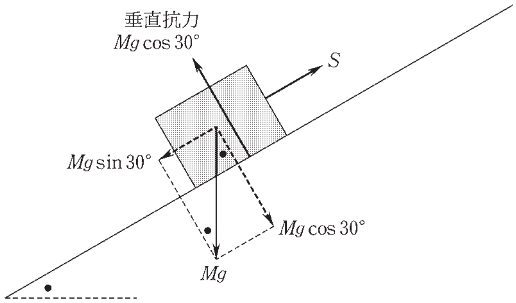
B

問 3　糸の張力の大きさを S，重力加速度の大きさを g とする。

小球にはたらく力のつりあいより，

$$S = mg \qquad \cdots①$$

小物体にはたらく力を作図し，分解すると次図のようになる。



• 印の角度は 30°

斜面に沿った方向の力のつりあいより，

$$S = Mg\sin 30°$$

$$= \frac{1}{2}Mg \qquad \cdots②$$

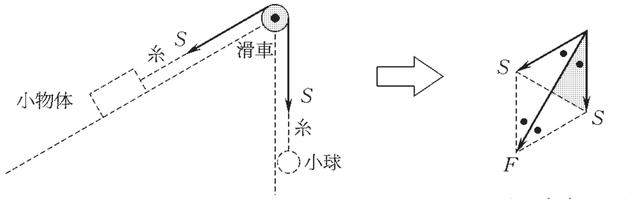
①式と②式より，

$$S = mg = \frac{1}{2}Mg$$

$$\therefore \quad \underline{\frac{1}{2}M = m}$$

$\boxed{19}$ の答　③

問 4　滑車が糸から受ける力は，次図の糸の張力(大きさ S)の合力に等しい。その合力の大きさを F とし，次図のように作図によって F を求める。

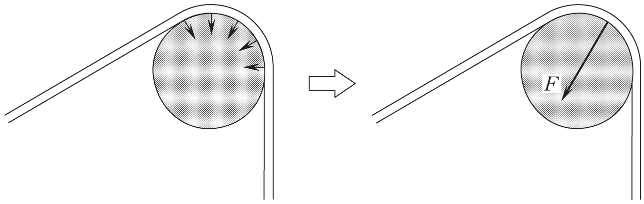


• 印の角度は 30°

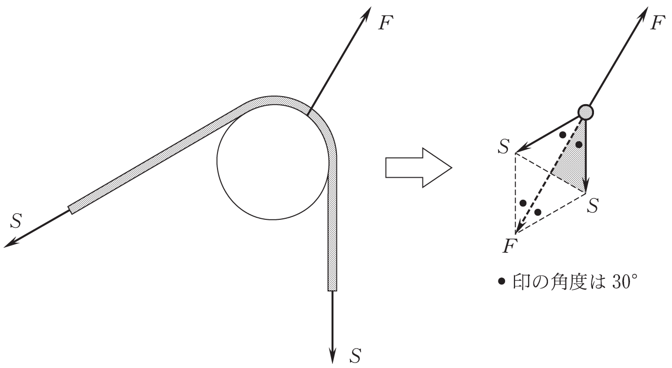
$$F = S\cos 30° \times 2$$

$$= \underline{\sqrt{3}\,S}$$

〈**参考**〉　次図のように，滑車が糸から受ける力は，糸と滑車の接触部分に分布する力である。この分布する力の合力(大きさ F)が問われている力である。



　この力の大きさを求めるために，その反作用を受ける糸に着目する。糸が受ける力は次図左のようになる。糸に着目し，わかりやすく小さな物体に置き換え(次図右)，その図から F を求める。



$$\therefore\quad F = S\cos 30^\circ \times 2 = \underline{\sqrt{3}\,S}$$

$\boxed{20}$ の答　④

問 5　小球がはじめの位置から距離 h だけ下降したとき，小球が失う位置エネルギーは $2Mgh$ である。一方，小物体の高さは $\frac{1}{2}h$ だけ大きくなるので，小物体が得る位置エネルギーは $\frac{1}{2}Mgh$ である。小球と小物体からなる系において，力学的エネルギーが保存されているので，この間に得る運動エネルギーの和はこの間に失う位置エネルギーの和に等しい。小球の速さを v とすると，

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 2Mv^2 = 2Mgh - \frac{1}{2}Mgh$$

$$= \underline{\frac{3}{2}Mgh}$$

$\boxed{21}$ の答　③

C

問 6　状態 A から状態 B の変化において，シリンダー内の気体の圧力は，浴槽の底における水の圧力に常に等しい。浴槽の底における水の圧力は，温度が上がっても変化しないので，シリンダー内の気体の圧力は変化しない。状態 B での気体の体積を V_B とすると，**シャルルの法則**より，

シャルルの法則

　圧力が一定に保たれる場合，理想気体の体積と絶対温度が比例することをシャルルの法則という。

$$\frac{\text{体積}}{\text{絶対温度}} = \text{一定}$$

$$\frac{V_0}{T_A}=\frac{V_B}{T_B}$$

$$\therefore\quad V_B=\frac{T_B}{T_A}V_0$$

$\boxed{22}$ の答　③

問 7　浴槽の底から水面まで装置を移動させると，気体の圧力は減少し，気体は膨張する。気体が膨張するとき，気体は外部に対して仕事をする。また，気体の温度が一定に保たれているので，気体の内部エネルギーは変化しない。**熱力学第 1 法則**より，状態 B から状態 C までの変化において，気体は熱を吸収し，吸収した熱量に等しい量の仕事をしたことになる。

$\boxed{23}$ の答　①

熱力学第 1 法則

気体が吸収した熱量を Q，気体が外部にした仕事を W とする。内部エネルギーの変化を $\varDelta U$ とすると，

$$Q=W+\varDelta U$$

この法則は，熱と仕事を含めたエネルギー保存則である。

なお，等温変化では $\varDelta U=0$ であり，

$$Q=W$$

化　学　Ｉ

【解答・採点基準】　（100点満点）

問題番号	設　問	解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	問1	1	②	3	
		2	④	3	
	問2	3	②	4	
	問3	4	⑤	4	
	問4	5	⑤	3	
		6	⑤	4	
	問5	7	③	4	
第1問　自己採点小計				(25)	
第2問	問1	8	②	4	
	問2	9	①	3	
	問3	10	⑤	3	
		11	③	4	
	問4	12	③	3	
	問5	13	⑦	4	
	問6	14	④	4	
第2問　自己採点小計				(25)	
第3問	問1	15	①	3	
	問2	16	②	4	
	問3	17	②	3	
		18	④	4	
	問4	19	②	4	
	問5	20	⑤	3	
		21	④	4	
第3問　自己採点小計				(25)	
第4問	問1	22	④	3	
	問2	23	④	3	
	問3	24	②	3	
	問4	25	⑤	4	
	問5	26	②	4	
	問6	27	⑤	4	
	問7	28	②	4	
第4問　自己採点小計				(25)	
自己採点合計				(100)	

【解説】 問題

第１問　物質の構成，溶液の濃度，身のまわりの物質

問１　物質の構成，同位体

a　①銑鉄は，炭素 C やケイ素 Si を含む鉄なので，混合物である。②白金 Pt は純物質である。③ホルマリンはホルムアルデヒドを水に溶かしたものなので混合物である。④セッケン水はセッケンを水に溶かしたものなので混合物である。⑤空気は窒素や酸素などを含む混合物である。

$\boxed{1}$ …②

b　原子番号(陽子の数)は等しいが，質量数が異なる原子どうしを互いに同位体という。④ ^{1}H と ^{2}H は原子番号(陽子の数)がともに１であり，質量数は ^{1}H は１，^{2}H は２なので，互いに同位体である。なお，③ $^{14}_{6}C$ と $^{14}_{7}N$ は，陽子の数が異なるので同位体ではない。また，① O_2 と O_3 は同素体，② H_2O と H_2O_2 は同じ元素からなる化合物，⑤ CH_3OCH_3 と CH_3CH_2OH は構造異性体の関係にある。

$\boxed{2}$ …④

問２　原子，イオン

①　正しい。陽子と中性子の質量はほぼ等しく，電子の質量は陽子や中性子の質量の約 $\frac{1}{1840}$ である。よって，原子の質量のほとんどが原子核に集中している。

②　誤り。２価の陰イオンの電子の数が 10 である原子の電子の数は (10－2＝)8 である。よって，陽子の数が 8，質量数は 16 なので，中性子の数は (16－8＝)8 である。

③　正しい。ナトリウムイオン Na^{+} はネオン Ne と同じ電子配置(K殻に２個，L殻に８個)である。

④　正しい。ヘリウム He などの希ガス原子は，化学結合を形成しにくいので，その価電子の数は０とする。

⑤　正しい。ネオン Ne は第２周期の元素の原子の中でイオン化エネルギーが最も大きい。

$\boxed{3}$ …②

問３　結晶

①　正しい。氷は，水分子が集まってできた結晶である。

②　正しい。塩化ナトリウム NaCl の結晶は，ナトリウムイオン Na^{+} と塩化物イオン Cl^{-} が静電気力(クーロン力)で結びついてできたイオン結晶である。

③　正しい。アルミニウムなどの金属は，叩くと薄く広がり(展性)，引っ張ると細長く伸びる(延性)。

④　正しい。大気圧のもとでは氷の融点は 0 ℃，塩化ナトリウムの融点は約 800 ℃ である。一般に，融点は分子からなる結晶よりイオンからなる結晶の方が高い。

【ポイント】

純物質と混合物

純物質…１種類の単体，または１種類の化合物だけからなる物質。

混合物…２種類以上の純物質が混ざり合った物質。

同位体

原子番号が同じで質量数が異なる原子を互いに同位体といい，化学的性質がほぼ同じであるため，同じ元素の原子としてまとめられる。

同素体

同じ元素からなる単体で，性質が異なるものどうしを互いに同素体という。

構造異性体

同じ分子式で原子の結合順序が異なる異性体。炭素骨格，官能基の位置，官能基の種類などが異なる。

原子の構造

構成粒子		電荷	質量比
原子核	陽子	＋1	1836
	中性子	0	1839
電子		－1	1

価電子

原子がイオンになったり，化学結合するときに重要な役割を果たす電子を価電子という。一般に最外殻電子が価電子としてはたらく。

イオン化エネルギー(第一イオン化エネルギー)

原子から電子１個を取り去って１価の陽イオンにするときに必要なエネルギー。この値が小さい原子ほど１価の陽イオンになりやすい。

⑤　誤り。アルミニウムなどの金属の結晶では，各原子の価電子が自由電子として結晶全体を移動することができるので，電気をよく導く。一方，塩化ナトリウムの結晶中では，イオンが特定の位置に固定されており移動できないので，電気を導かない。

$\boxed{4}$ …⑤

問 4　溶液の濃度

a　質量パーセント濃度が 20 % のグルコース水溶液 200 g 中のグルコースの質量は，

$$200\times\frac{20}{100}=40\,〔\mathrm{g}〕$$

したがって，グルコース $C_6H_{12}O_6$ (180 g/mol) の物質量は，

$$\frac{40}{180}=0.222\fallingdotseq 0.22\,〔\mathrm{mol}〕$$

$\boxed{5}$ …⑤

質量パーセント濃度〔%〕

$$=\frac{溶質の質量〔\mathrm{g}〕}{溶液の質量〔\mathrm{g}〕}\times 100$$

b　水で希釈した後の水溶液にも 40 g のグルコースが含まれている。希釈に必要な水の質量を x〔g〕とすると，

$$\frac{40}{200+x}\times 100=16$$

$$x=50\,〔\mathrm{g}〕$$

$\boxed{6}$ …⑤

問 5　身のまわりの物質

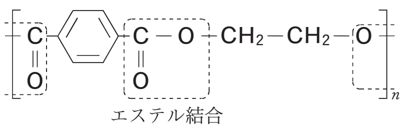
①　正しい。ふくらし粉(ベーキングパウダー)や胃薬(制酸剤)などに利用されている炭酸水素ナトリウム $NaHCO_3$ は，加熱したり ((1)式)，強酸の水溶液を加える ((2)式) と二酸化炭素を発生する。

$$2NaHCO_3 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2 \quad \cdots(1)$$

$$NaHCO_3 + HCl \longrightarrow NaCl + H_2O + CO_2 \quad \cdots(2)$$

②　正しい。シリカゲルは，微細な空間が多数あり(多孔質)，表面積が極めて大きく，吸着剤や乾燥剤として用いられている。

③　誤り。衣料や容器に用いられているポリエチレンテレフタラートは，分子中に多数のエステル結合をもつ。



エステル結合

なお，多数のアミド結合をもつ高分子化合物にナイロンがある。

④　正しい。漂白剤や殺菌剤に用いられているさらし粉 $CaCl(ClO)\cdot H_2O$ は，酸化作用のある次亜塩素酸イオン ClO^- を含んでいる。

⑤　正しい。鉄 Fe にクロム Cr やニッケル Ni を加えた合金をステンレス鋼といい，さびにくいので台所の流し台，浴槽，食器などに利用されている。

$\boxed{7}$ …③

第２問　物質の変化　問題

問１　溶解熱と中和熱

0.10 mol/L の水酸化ナトリウム水溶液 1.0 L に含まれる水酸化ナトリウムの物質量は 0.10 mol である。よって，0.10 mol/L の水酸化ナトリウム水溶液 1.0 L に 0.10 mol の塩化水素を溶解させるときの発熱量は，次の(1)と(2)の合計である。

(1)　0.10 mol の塩化水素を水に溶解させるときの発熱量

0.10 mol の塩化水素を水に溶解させると，

$75 \times 0.10 = 7.5$〔kJ〕の熱が発生する。

(2)　水溶液中で 0.10 mol の塩化水素と 0.10 mol の水酸化ナトリウムの中和により水 0.10 mol が生じるときの発熱量

熱化学方程式より，塩酸と水酸化ナトリウム水溶液を混合したときの中和熱は 56 kJ/mol なので，

$56 \times 0.10 = 5.6$〔kJ〕の熱が発生する。

(1)と(2)の合計は，

$7.5 + 5.6 = 13.1$〔kJ〕

水溶液の温度が t〔°C〕上昇するとすれば，

$13.1 \times 10^3 = 4.2 \times 1.0 \times 1000 \times t$

$t = 3.11 \fallingdotseq 3.1$〔°C〕

$\boxed{8}$ …②

溶解熱

物質 1 mol を多量の溶媒に溶かしたときに発生または吸収する熱量。

中和熱

酸と塩基が中和して水 1 mol が生成するときに発生する熱量。

比熱を用いた計算

物質 1 g の温度を 1 °C 上昇させるのに必要な熱量を比熱〔J/(g·°C)〕という。

熱量 Q〔J〕は，比熱〔J/(g·°C)〕，物質の質量〔g〕，物質の温度変化〔°C〕から，

Q〔J〕＝比熱〔J/(g·°C)〕×質量〔g〕×温度変化〔°C〕

で表される。

問２　酸・塩基・塩

①　誤り。pH＝2 の水溶液の水素イオン濃度は，

$[H^+] = 1.0 \times 10^{-2}$〔mol/L〕

硫酸は次のように電離する。

$$H_2SO_4 \longrightarrow H^+ + HSO_4^-$$

$$HSO_4^- \rightleftarrows H^+ + SO_4^{2-}$$

したがって，0.010 mol/L の希硫酸の水素イオン濃度は，1.0×10^{-2} mol/L より大きくなる。水素イオン濃度が 1.0×10^{-2} mol/L より大きい水溶液の pH は 2 より小さい。

②　正しい。pH＝3 の水溶液の水素イオン濃度は，

$[H^+] = 1.0 \times 10^{-3}$〔mol/L〕

酢酸は 1 価の弱酸であるから，電離度を α とすると，

$[H^+] = 1.0 \times 10^{-3} = 0.10 \times \alpha$

$\alpha = 0.010$

よって，0.10 mol/L の酢酸水溶液の pH が 3 のとき，酢酸の電離度は 0.010 である。

③　正しい。塩酸は 1 価の強酸，水酸化カルシウムは 2 価の強塩基であるから，同じ濃度の水溶液を同体積ずつ混合した場合は水酸化物イオンが過剰になり，水溶液は塩基性を示す。

④　正しい。硫酸アンモニウム $(NH_4)_2SO_4$ と塩化アンモニウム NH_4Cl はいずれも強酸と弱塩基の中和によって生じる塩であり，その水溶液は酸性を示す。

水素イオン濃度と pH

$[H^+] = 1.0 \times 10^{-a}$〔mol/L〕

のとき pH＝a

$[H^+]$ が大きいほど pH は小さくなる。

電離度

$$= \frac{\text{電離した電解質の物質量}}{\text{溶解した電解質の物質量}}$$

塩の水溶液の性質

強酸と強塩基の中和により生じる塩…中性（ただし $NaHSO_4$ は酸性）

強酸と弱塩基の中和により生じる塩…酸性

弱酸と強塩基の中和により生じる塩…塩基性

⑤　正しい。炭酸水素ナトリウム $NaHCO_3$ と硫酸水素ナトリウム $NaHSO_4$ はいずれも酸性塩に分類される。

$\boxed{9}$ …①

酸性塩

酸の電離できる H^+ を一部残した塩。

問3　中和滴定

a　水酸化バリウムと二酸化炭素の反応は，次の化学反応式で表される。

$$Ba(OH)_2 + CO_2 \longrightarrow BaCO_3 + H_2O \quad \cdots(1)$$

このとき生じる炭酸バリウムの沈殿は$_ア$白色である。

$_イ$ホールピペットを用いて上澄み液を 20 mL 正確にはかり取り，コニカルビーカーに入れて$_ウ$ビュレットから 0.10 mol/L の塩酸を滴下する。

$\boxed{10}$ …⑤

b　塩酸と水酸化バリウムの反応は次のように表される。

$$2HCl + Ba(OH)_2 \longrightarrow BaCl_2 + 2H_2O$$

0.10 mol/L の水酸化バリウム水溶液 200 mL 中に含まれる水酸化バリウムの物質量は，

$$0.10\times\frac{200}{1000}=2.0\times10^{-2}\,[\mathrm{mol}]$$

また，0.10 mol/L の塩酸 10.0 mL と反応した水酸化バリウムの物質量を x〔mol〕とすると，

$$1\times0.10\times\frac{10.0}{1000}=2\times x$$

$$x=5.0\times10^{-4}\,[\mathrm{mol}]$$

中和反応の量的関係

(酸の価数)×(酸の物質量)
＝(塩基の価数)×(塩基の物質量)

よって，二酸化炭素を通じた後の溶液 200 mL 中に残っていた水酸化バリウムの物質量は，

$$5.0\times10^{-4}\times\frac{200}{20}=5.0\times10^{-3}\,[\mathrm{mol}]$$

したがって，二酸化炭素と反応した水酸化バリウムの物質量は，

$$2.0\times10^{-2}-5.0\times10^{-3}=1.5\times10^{-2}\,[\mathrm{mol}]$$

(1)式より，二酸化炭素と水酸化バリウムは 1：1 の物質量比で反応するので，通じた二酸化炭素の物質量は 1.5×10^{-2} mol である。

$\boxed{11}$ …③

問4　金属の反応

①　正しい。ナトリウムはイオン化傾向が非常に大きいので，水に溶けて水素を発生する。

$$2Na + 2H_2O \longrightarrow 2NaOH + H_2$$

②　正しい。亜鉛はイオン化傾向が水素より大きいので，希硫酸に溶けて水素を発生する。

$$Zn + H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4 + H_2$$

③　誤り。銅はイオン化傾向が水素より小さいので，塩酸や希硫酸には溶けないが，酸化力のある希硝酸に溶けて一酸化窒素を

金属のイオン化傾向

金属の単体が，水溶液中で電子を放出し，陽イオンになろうとする性質。

$Li > K > Ca > Na > Mg > Al > Zn > Fe > Ni > Sn > Pb > (H_2) > Cu > Hg > Ag > Pt > Au$

発生する。

$3Cu + 8HNO_3 \longrightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$

④　正しい。銅はイオン化傾向が銀より大きいので，硝酸銀水溶液に銅板を浸すと，銅がイオンとなって溶け出し，銅板上に銀が析出する。

$2Ag^+ + Cu \longrightarrow 2Ag + Cu^{2+}$

⑤　正しい。一般に，電解質水溶液に2種類の金属板を浸して電池をつくったとき，イオン化傾向の大きい金属が負極になる。亜鉛はイオン化傾向が銅より大きいので，希硫酸に銅板と亜鉛板を浸してつくった電池では，亜鉛板が負極となる。

$\boxed{12}$ …③

問5　酸化還元

硫酸を加えた過酸化水素水に過マンガン酸カリウム水溶液を加えたとき，過マンガン酸イオン MnO_4^- および過酸化水素 H_2O_2 はそれぞれ次のように変化する。

$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$

$H_2O_2 \longrightarrow O_2 + 2H^+ + 2e^-$ …(1)

よって，ア酸素が発生する。(1)式より，この反応において過酸化水素は電子を失って酸化されているので，イ還元剤としてはたらいている。

硫酸を加えたヨウ化カリウム水溶液と過酸化水素水が反応して水溶液の色が無色から褐色に変化するとき，ヨウ化物イオン I^- および過酸化水素 H_2O_2 は，それぞれ次のように変化する。

$2I^- \longrightarrow I_2 + 2e^-$

$H_2O_2 + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow 2H_2O$ …(2)

(2)式より，この反応において過酸化水素は電子を得て還元されているので，ウ酸化剤としてはたらいている。

$\boxed{13}$ …⑦

問6　鉛蓄電池，水溶液の電気分解

鉛蓄電池の各極における反応は次のイオン反応式で表される。

負極(Pb)：$Pb + SO_4^{2-} \longrightarrow PbSO_4 + 2e^-$

正極(PbO_2)：$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e^-$

$\longrightarrow PbSO_4 + 2H_2O$

また，電解槽の各極における反応は次のイオン反応式で表される。

陰極(Pt)：$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

陽極(Pt)：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$

電子が4 mol流れたとき，正極では2 molの PbO_2(239 g/mol)が2 molの $PbSO_4$(303 g/mol)に変化する。よって，正極の質量変化は次のようになる。

$(303-239)\times 2=128$〔g〕

また，電子が4 mol流れたとき，陽極では1 molの酸素 O_2 が

酸化剤

相手を酸化する物質。自身は還元され，電子を得る。

還元剤

相手を還元する物質。自身は酸化され，電子を失う。

電気分解

陰極…外部電源の負極につないだ電極。

還元反応が起こる。

主に次の反応が起こる。

1　電解液中の Ag^+ や Cu^{2+} が還元され，Ag や Cu が析出する。

2　H_2O（電解液が中性，塩基性のとき）や H^+（電解液が酸性のとき）が還元され H_2 が発生する。

陽極…外部電源の正極につないだ電極。

酸化反応が起こる。

主に次の反応が起こる。

電極が Ag や Cu のとき

1　電極が溶解する。

電極が Pt や C のとき

2　ハロゲン化物イオンが酸化され，ハロゲンの単体が生成する。

3　H_2O（電解液が酸性，中性のとき）や OH^-（電解液が塩基性のとき）が酸化され O_2 が発生する。

発生する。

W〔g〕と n〔mol〕は比例するので，$n=0.10$〔mol〕のとき，$W=12.8$〔g〕を通る直線となる。よって，最も適当なグラフは④である。

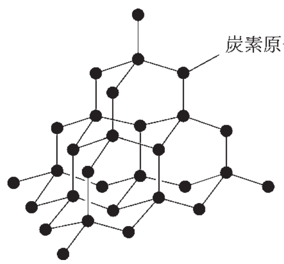
$\boxed{14}$ …④

第3問　無機物質

問題

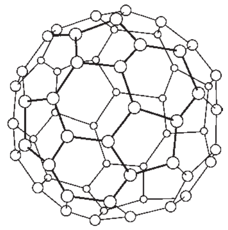
問1　14族元素の単体

①　誤り。ダイヤモンドは，無色透明な共有結合の結晶で，電気を通さない。



ダイヤモンドの構造

②　正しい。C_{60}（フラーレン）は，球状の分子である。



C_{60} 分子の構造

③　正しい。ケイ素の単体は，ダイヤモンドと似た構造の共有結合を形成する。その結晶は，多数のケイ素原子が共有結合で結びついてできている。

④　正しい。スズは両性元素であり，単体は酸の水溶液とも強塩基の水溶液とも反応して溶ける。

⑤　正しい。鉛は，希塩酸や希硫酸に対しては，表面に水に難溶な塩化鉛(II) $PbCl_2$ や硫酸鉛(II) $PbSO_4$ の被膜をつくるため，溶けにくい。

$\boxed{15}$ …①

問2　無機物質の反応と性質

①　正しい。ヨウ素は黒紫色の固体であり，水には溶けにくいが，ヨウ化カリウム水溶液には三ヨウ化物イオン I_3^- を生じて溶け，褐色の溶液となる。この溶液をヨウ素溶液という。

$$I_2 + I^- \rightleftarrows I_3^-$$

②　誤り。フッ化カルシウムに濃硫酸を加えて加熱すると，フッ化水素が発生する。フッ化水素は無色の気体である。

共有結合の結晶

多数の原子が共有結合で結びついた結晶。ダイヤモンド，ケイ素(Si)，石英・水晶(SiO_2)など。

両性元素

Al，Zn，Sn，Pb など。

酸とも強塩基とも反応する。

ハロゲン化水素の性質

- いずれも無色・刺激臭の有毒な気体。
- 水溶液中で HF は弱酸，HCl，HBr，HI は強酸としてはたらく。
- フッ化水素酸（HF の水溶液）はガラスを溶かすので，ポリエチレン容器に保存される。

$CaF_2 + H_2SO_4 \longrightarrow CaSO_4 + 2HF$

③ 正しい。オゾン O_3 は強い酸化作用を示す気体であり，湿ったヨウ化カリウムデンプン紙に触れさせると，ヨウ化物イオン I^- が酸化されてヨウ素 I_2 が生じるため，ヨウ素デンプン反応によって青紫色になる。

④ 正しい。鉛(II)イオン Pb^{2+} を含む水溶液に硫化水素 H_2S を通じると，硫化鉛(II)PbS の黒色沈殿が生じる。

⑤ 正しい。硫化水素の水溶液に二酸化硫黄を通じると，水に不溶な硫黄が析出するため，溶液が白濁する。なお，この反応では硫化水素が還元剤，二酸化硫黄が酸化剤としてはたらいている。

$$\underset{(-2)}{2H_2\underline{S}} + \underset{(+4)}{\underline{S}O_2} \longrightarrow \underset{(0)}{3\underline{S}} + 2H_2O$$
(酸化数)

16 …②

問3 無機化合物の同定

a 化合物 17 の水溶液に二酸化炭素を十分に通じた水溶液が橙赤色の炎色反応を示したことから，構成元素としてカルシウムを含む。さらに，水溶液が塩基性を示したことから，②の水酸化カルシウム $Ca(OH)_2$ と決まる。

水酸化カルシウム水溶液に二酸化炭素を通じると，炭酸カルシウムの白色沈殿が生じる。

$$Ca(OH)_2 + CO_2 \longrightarrow CaCO_3 + H_2O$$

さらに二酸化炭素を通じ続けると，沈殿は炭酸水素カルシウムとなって溶ける。

$$CaCO_3 + H_2O + CO_2 \longrightarrow Ca(HCO_3)_2$$

17 …②

b 化合物 18 の水溶液は黄色であり，その水溶液に塩化バリウム水溶液を加えると，黄色の沈殿が生じたことから④のクロム酸カリウム K_2CrO_4 と決まる。生じた黄色沈殿はクロム酸バリウムである。

$$Ba^{2+} + CrO_4^{2-} \longrightarrow BaCrO_4$$

クロム酸イオンを含む黄色の水溶液に酸を加えると，二クロム酸イオンが生成し，水溶液は赤橙色になる。

$$2CrO_4^{2-} + 2H^+ \longrightarrow Cr_2O_7^{2-} + H_2O$$

18 …④

問4 銅の電解精錬

純銅を得るための銅の電解精錬では，電解液に硫酸銅(II)の硫酸酸性水溶液を用い，粗銅板を$_ア$陽極，薄い純銅板を$_イ$陰極として電気分解し，陰極に純銅を析出させる。陽極と陰極で起こる主な変化は，

陽極(粗銅)：$Cu \longrightarrow Cu^{2+} + 2e^-$

陰極(純銅)：$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

このとき，粗銅中に含まれる Zn や$_ウ$Ni などの Cu よりイオン

ヨウ化カリウムデンプン紙

ろ紙をヨウ化カリウムとデンプンの水溶液に浸した後，乾燥させたもの。

湿らせた後，オゾンや塩素などの酸化力のある気体を接触させると青紫色に変化する。

硫化水素の性質

- 無色，腐卵臭で有毒な気体。
- 水に溶けて弱酸性を示す。
- 還元剤としてはたらく。
- 多くの重金属イオンと反応して硫化物の沈殿をつくる。

炎色反応

物質を高温の炎の中で熱したとき炎が呈色する現象。その色から含まれる元素の種類を判別することができる。

Li：赤色，Na：黄色，K：赤紫色，
Ca：橙赤色，Sr：紅(深赤)色，
Ba：黄緑色，Cu：青緑色

水に難溶性のクロム酸塩

$BaCrO_4$ (黄色)，$PbCrO_4$ (黄色)，
Ag_2CrO_4 (暗赤色)

化傾向が大きい金属は陽イオンとなって溶け出し，溶液中に残る。また，$_{\text{エ}}$Ag，Au など，Cu よりイオン化傾向が小さい金属は，陽イオンとならず，そのまま陽極の下に沈殿する。

$\boxed{19}$ …②

問 5　窒素の単体と化合物

a　①　正しい。液体窒素 N_2(沸点 -196 ℃)は冷却剤として，食品の瞬間冷凍や血液，細胞の保存など様々な用途に用いられている。

②　正しい。アンモニア NH_3 は無色，刺激臭の水によく溶ける気体であり，水溶液(アンモニア水)は弱塩基性を示す。

③　正しい。工業的にアンモニアは，窒素と水素の混合気体を，高温・高圧で鉄を主成分とする触媒を用いて反応させることで合成されている。この製法をハーバー・ボッシュ法という。

$$N_2 + 3H_2 \longrightarrow 2NH_3$$

④　正しい。二酸化窒素 NO_2 は，水に溶けやすい赤褐色の有毒な気体である。

⑤　誤り。鉄を濃硝酸に浸すと，表面に緻(ち)密な酸化被膜が生じ，これにより内部が保護されるので(不動態)，鉄は濃硝酸に溶けない。

$\boxed{20}$ …⑤

b　硝酸の工業的な製法であるオストワルト法では，次の化学反応式で示される 3 つの反応によって，アンモニアから硝酸がつくられる。

$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O \quad \cdots(1)$$

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2 \quad \cdots(2)$$

$$3NO_2 + H_2O \longrightarrow 2HNO_3 + NO \quad \cdots(3)$$

(3)式で生成する一酸化窒素は回収され，再び(2)式の反応に使われるので，アンモニアに含まれていた窒素原子は，最終的にすべて硝酸に含まれることになる。したがって，アンモニア 1 mol から硝酸 1 mol が生じる。

質量パーセント濃度 69 %の濃硝酸(密度 1.4 g/cm³) 30 L，すなわち 3.0×10^4 cm³ に含まれる HNO_3 (63 g/mol)の物質量は，

$$\frac{1.4\times3.0\times10^4\times\frac{69}{100}}{63}=4.6\times10^2\,[\text{mol}]$$

したがって，必要な NH_3 (17 g/mol)の質量〔kg〕は，

$$17\times10^{-3}\times4.6\times10^2=7.82\fallingdotseq7.8\,[\text{kg}]$$

なお，オストワルト法全体の化学反応式は，NO，NO_2 が消去されるように(1)〜(3)式を組み合わせると得られる。

$\left((1)式+(2)式\times3+(3)式\times2\right)\times\frac{1}{4}$ より，

$$NH_3 + 2O_2 \longrightarrow HNO_3 + H_2O$$

$\boxed{21}$ …④

窒素の化合物

アンモニア NH_3
- 水に非常によく溶ける気体
- 水溶液は弱塩基性

一酸化窒素 NO
　水に溶けにくい無色の気体

二酸化窒素 NO_2
　水によく溶ける赤褐色の気体

不動態

Al，Fe，Ni などは，濃硝酸に対して，金属表面に酸化被膜が生じ，内部を保護するため溶けない。このように，金属が腐食する条件にありながら腐食を起こさない状態を不動態という。

オストワルト法

硝酸の工業的製法

NH_3
↓ O_2 (触媒 Pt)
NO
↓ O_2
NO_2　回収
↓ H_2O
HNO_3 + NO

溶液の密度〔g/cm³〕

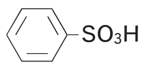
$$=\frac{溶液の質量\,[\text{g}]}{溶液の体積\,[\text{cm}^3]}$$

第 4 問　有機化合物　問題

問 1　カルボン酸とスルホン酸

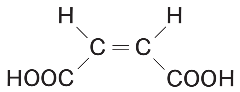
①～⑤は，いずれも酸性物質であるが，このうち④はスルホ基をもつスルホン酸である。これ以外は，すべてカルボキシル基をもつカルボン酸である。

スルホン酸

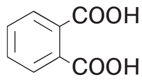


ベンゼンスルホン酸

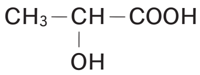
カルボン酸



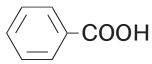
マレイン酸



フタル酸



乳酸



安息香酸

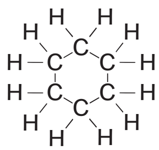
$\boxed{22}$ … ④

問 2　環式炭化水素

① 正しい。炭素原子が環状につながっている部分を含む炭化水素を環式炭化水素という。

ベンゼンとシクロヘキサンは，いずれも環式炭化水素で，ベンゼンは芳香族炭化水素，シクロヘキサンは脂環式炭化水素に分類される。

ベンゼン



シクロヘキサン

炭化水素の分類

鎖式炭化水素

炭素原子が鎖状に結合しているアルカン，アルケン，アルキンなど。

環式炭化水素

炭素原子が環状に結合している部分を含む。

脂環式炭化水素

シクロアルカン，シクロアルケンなど。

芳香族炭化水素

ベンゼンなど。

② 正しい。いずれも水にはほとんど溶けない。炭化水素は鎖式，環式を問わず，水に溶けにくい。

③ 正しい。ベンゼンは付加反応を受けにくいが，白金またはニッケルを触媒として高圧下で水素を作用させるとシクロヘキサンが生成する。

④ 誤り。ベンゼンの炭素原子間の距離は単結合より短く，二重結合より長い。したがって，炭素原子間の距離はベンゼンの方がシクロヘキサンより短い。

炭素原子間の距離

単結合＞二重結合＞三重結合

⑤ 正しい。いずれも炭素数は 6 なので，1 mol が完全燃焼すると 6 mol の二酸化炭素が生成する。

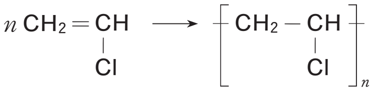
$\boxed{23}$ … ④

問 3　有機化合物の反応

① 正しい。石油を分留するとナフサ，灯油，軽油などが得られる。ナフサは主に低沸点の炭化水素の混合物で，エチレンやプ

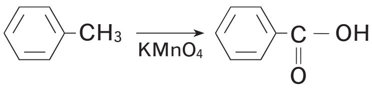
ロペン(プロピレン)などは，工業的にはナフサの熱分解によって得られる。

② 誤り。塩化ビニルは，付加重合により高分子化合物であるポリ塩化ビニルになる。



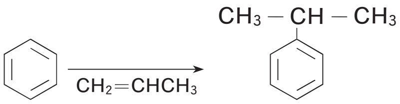
塩化ビニル　　　　ポリ塩化ビニル

③ 正しい。トルエンを過マンガン酸カリウムで酸化すると，安息香酸が生成する。

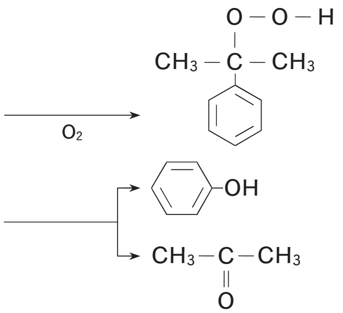


トルエン　　　　安息香酸

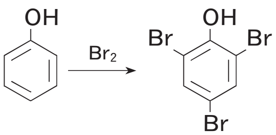
④ 正しい。フェノールは工業的にはクメン法によって合成される。クメンを空気中の酸素によって酸化し，これを分解するとフェノールとともにアセトンが得られる。



クメン



⑤ 正しい。フェノールの水溶液に臭素水を加えると，2,4,6-トリブロモフェノールの白色沈殿が生成する。



2,4,6-トリブロモフェノール

24 …②

問4 アセチレンと関連物質

炭化カルシウム(カーバイド)$_{ア}$<u>CaC₂</u>に水を加えるとアセチレンが発生する。

$$CaC_2 + 2H_2O \longrightarrow CH{\equiv}CH + Ca(OH)_2$$

アセチレンに水銀(II)イオンを触媒として水$_{イ}$<u>H_2O</u>を付加させると，不安定なビニルアルコールを経てアセトアルデヒドが生成する。

重合

小さい分子量の化合物が繰り返し結合して大きな分子量の物質になる反応。

付加反応

二重結合や三重結合に，他の原子や原子団が結合する反応。付加反応によって二重結合は単結合になる。

縮合反応

二つの官能基から水のような簡単な分子がとれて結合する反応。

$$CH\equiv CH + H_2O \longrightarrow \left[\begin{array}{l} CH_2=CH \\ \qquad\ | \\ \qquad OH \end{array}\right] \longrightarrow CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-H$$

ビニルアルコール　　　アセトアルデヒド

アセチレンに触媒を用いて酢酸を付加させると酢酸ビニルが生成する。

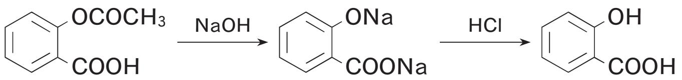
$$CH\equiv CH + CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-OH \longrightarrow \begin{array}{l} CH_2=CH \\ \qquad\ | \\ \qquad O-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3 \end{array}$$

ウ 酢酸ビニル

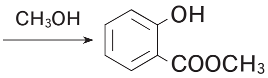
$\boxed{25}$ …⑤

問５　サリチル酸と関連物質

この実験では次の反応が進んでいる。



アセチルサリチル酸　　　サリチル酸



サリチル酸メチル

① 正しい。**ア**ではエステルであるアセチルサリチル酸の加水分解(けん化)が起こり，サリチル酸二ナトリウムが生成している。

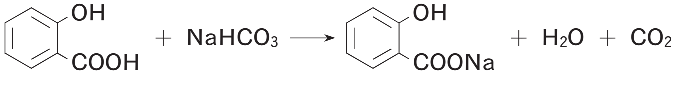
② 誤り。**イ**の白色結晶はサリチル酸である。サリチル酸はベンゼン環に結合したヒドロキシ基をもつので，塩化鉄(III)水溶液を加えると赤紫色を呈する。

フェノール類の検出反応

フェノール類の水溶液に塩化鉄(III)水溶液を加えると，青紫色から赤紫色を呈する。

③ 正しい。液体を加熱すると沸点に達しても沸騰せず，そのまま加熱を続けると，突然激しく沸騰することがある。これを突沸という。沸騰石には小さな孔が多数あり，ここから気泡が発生することにより突沸を防ぐことができる。

④ 正しい。反応液には，目的物質のサリチル酸メチルの他に，未反応のサリチル酸やメタノール，硫酸が含まれている。サリチル酸や硫酸は炭酸水素ナトリウムと反応して二酸化炭素を発生する。このときサリチル酸は塩として，メタノールとともに水層に移行するのでサリチル酸メチルと分離することができる。



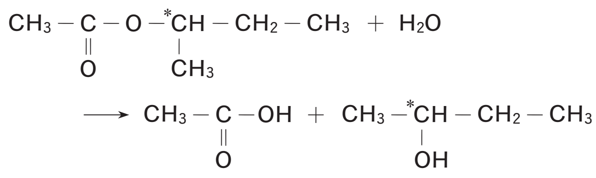
⑤ 正しい。得られた油状物質はサリチル酸メチルであり，特有の芳香をもつ。

$\boxed{26}$ …②

問６　脂肪族化合物の性質

Aはエステルであり，希硫酸を用いてAを加水分解すると酢酸

(B)と 2-ブタノール(C)になる。



酢酸　　　　　　2-ブタノール

(*C：不斉炭素原子)

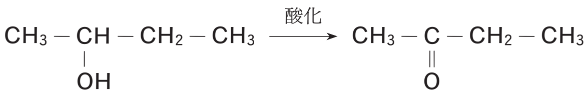
① 正しい。A，Cには不斉炭素原子があり，光学異性体が存在する。

② 正しい。Aの分子式は $C_6H_{12}O_2$ で，異性体として $C_5H_{11}COOH$ の示性式で表されるカルボン酸が存在する。

③ 正しい。エステルは水に溶けにくいが，酢酸は水によく溶ける。

④ 正しい。2-ブタノールは $CH_3CH(OH)-$ の構造をもち，ヨウ素と水酸化ナトリウム水溶液を加えて加温すると，ヨードホルム CHI_3 の黄色沈殿を生じる。

⑤ 誤り。2-ブタノールは第二級アルコールであり，酸化するとケトンになり，これ以上は酸化されないので，カルボン酸にはならない。



エチルメチルケトン

$\boxed{27}$ …⑤

問7　芳香族化合物の構造決定

AにはC=Cが一つあるので，A 1分子に臭素1分子が付加する。臭素の付加によって分子量が2.21倍になることから，Aの分子量を M とすると，

$$\frac{M+80\times2}{M}=2.21$$

$$M=132$$

炭素の質量パーセントが81.8％であることから，1分子のAに含まれる炭素原子の数は，

$$\frac{132\times\frac{81.8}{100}}{12}=8.9\fallingdotseq9$$

炭素数9の化合物は，①～③である。このうち，幾何異性体が存在するのは①と②である。①はアルコールであり，②はアルデヒド基をもつので，フェーリング液を還元するのは②である。

なお，②はシナモンの香りの成分の一つで，シンナムアルデヒドとよばれる。

$\boxed{28}$ …②

ヨードホルム反応

$CH_3-CO-\mathbf{R}$ や $CH_3-CH(OH)-\mathbf{R}$ の構造をもつ化合物にヨウ素と水酸化ナトリウム水溶液を加えて加温すると，ヨードホルム CHI_3 の黄色の沈殿が生成する。($\mathbf{R}$ はHまたは炭化水素基)

生　物　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	①	3	
		問2	2	④	3	
		問3	3	③ ※	3	
			4	⑦ ※	3	
	B	問4	5	③	4	
		問5	6	④	4	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	①	3	
		問2	8	③	3	
		問3	9	④	3	
	B	問4	10	②	3	
		問5	11	① ※	4	
			12	⑤ ※	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	③	3	
		問2	14	④	3	
	B	問3	15	⑥	3	
		問4	16	④	3	
		問5	17	③	4	
		問6	18	②	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	19	⑤	3	
		問2	20	④	3	
		問3	21	④	3	
	B	問4	22	⑦	3	
		問5	23	②	4	
		問6	24	①	4	
第4問　自己採点小計					(20)	

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第5問	A	問1	25	⑥	2	
		問2	26	②	3	
	B	問3	27	①	3	
		問4	28	④	4	
		問5	29	⑤	4	
		問6	30	②	4	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

※の正解は順序を問わない。

【解説】

第１問　細胞分裂

問題

Aでは体細胞分裂の観察手順，および各時期の特徴などに関する知識問題を，**B**では細胞分裂にともなう細胞１個あたりの DNA 量の変化に関する問題を出題した。

問１　被子植物の体細胞分裂を観察するには，盛んに体細胞分裂を行っている根端分裂組織などを用いる。ユキノシタの葉の裏面表皮は，原形質分離の観察材料として用いられるが，体細胞分裂は行われないので，体細胞分裂の観察材料としては適していない。

体細胞分裂を観察するためのプレパラートを作成する手順として，まず，タマネギの根の先端から約１cm 程度を残して他の部分は取り除き，残した根を酢酸アルコール（エタノール：酢酸＝３：１の混合液）に浸す。これにより，細胞を固定し，細胞内の構造を生きていたときの状態と近い状態のまま保持することができる。次に，60 ℃の希塩酸に浸して，細胞どうしの接着をゆるめ，個々の細胞がばらばらになりやすい状態にする。この操作を解離とよぶ。この根を水洗してスライドガラスにのせ，分裂組織が含まれる先端部の約２～３mm を残して他は取り除き，酢酸オルセイン溶液を滴下して染色する。その後，上からカバーガラスをかけ，プレパラートをろ紙の間にはさんで，上から試料を押しつぶす。これにより，個々の細胞がばらばらに広がって一層になるので，観察しやすくなる。　$\boxed{1}$…①

問２　体細胞１個あたりの染色体数は，コイでは 100，ヒトでは 46 である。このように，動物のからだの大きさと体細胞に含まれる染色体数は無関係であるので，①は誤りである。体細胞１個あたりの染色体の形，数，大きさなどの特徴は核型とよばれる。核型は生物の種によって一定であるので，②は誤りである。キイロショウジョウバエの性染色体構成は雌が XX，雄が XY であり，性染色体として雌は X 染色体１種類だけを，雄は X 染色体と Y 染色体の２種類をもつので，③は誤りである。配偶子に含まれる全染色体に存在する，その生物の生存に必要な最小限の遺伝子の１組をゲノムとよぶ。したがって，④が正しい。　$\boxed{2}$…④

問３　体細胞分裂の各期の染色体の状態を次に示す。

前期：細い糸状の染色体が凝縮して，太いひも状になる。
中期：染色体が赤道面に並ぶ。
後期：染色体が縦裂面で分離し，両極に移動する。
終期：染色体が細い糸状に戻る。

したがって，図１の a は後期，b は前期の細胞を示しているので，①・②はともに誤りである。次図に示すように，前期には，染色体のくびれている部分である動原体に，伸びてきた紡錘糸が結合する。後期になると，染色体は縦裂面で分離し，紡錘糸に引

【ポイント】

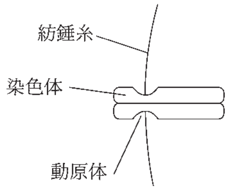
細胞分裂の観察手順
(1)　固定（酢酸アルコール）
(2)　解離（60 ℃の希塩酸）
(3)　染色（酢酸オルセイン溶液）
(4)　押しつぶし

核型
染色体の形，数，大きさなどの特徴で，種によって一定である。

ゲノム
その生物の生存に必要な最小限の遺伝子の１組

体細胞分裂各期の染色体の状態
前期：染色体が凝縮して，太いひも状になる。
中期：染色体が赤道面に並ぶ。
後期：染色体が縦裂面で分離し，両極に移動する。
終期：染色体が細い糸状に戻る。

かれるように両極に移動する。したがって，後期でも染色体の動原体に紡錘糸が結合しているので，③は正しい。

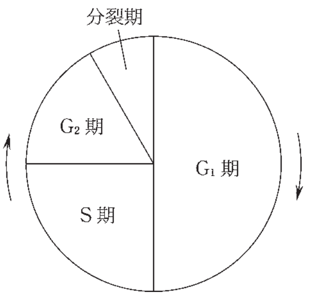


染色体の複製(DNA の合成)は分裂前の間期に行われるので，④は誤りである。後期を過ぎて終期になると，細胞質分裂が起こるが，紡錘体の赤道面にくびれが生じるのは動物細胞であり，植物細胞では赤道面に細胞板が形成されることで細胞質分裂が起こるので，⑤は誤りである。相同染色体が対合して二価染色体が形成されるのは，減数分裂第一分裂の前期であり，体細胞分裂の過程では二価染色体は形成されないので，⑥は誤りである。前期を過ぎて中期になると，染色体は紡錘体の赤道面に並ぶので，⑦は正しい。紡錘体は前期に形成されるが，中心体を起点として紡錘体が形成されるのは動物細胞であり，被子植物の細胞には中心体がなく，両極付近から紡錘糸が伸びて紡錘体が形成されるので，⑧は誤りである。 $\boxed{3}$・$\boxed{4}$…③・⑦

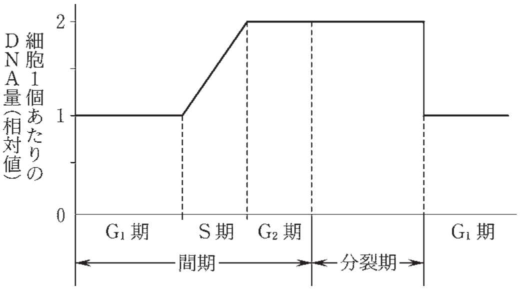
細胞質分裂
動物細胞では，赤道面にくびれが生じる。
植物細胞では，赤道面に細胞板が形成される。

中心体は動物細胞にはあるが，被子植物の細胞にはない。

問4 盛んに体細胞分裂を行っている組織の細胞では，分裂後に間期に入り，その途中で次の分裂のために必要な DNA の合成を行う。次図に示すように，間期は，分裂期のあと DNA 合成開始までの時期(G_1 期)，DNA 合成の時期(S 期)，DNA 合成のあと分裂開始までの時期(G_2 期)の三つの時期に分けられる。そして，分裂期とこれらの時期は周期的に繰り返されている。



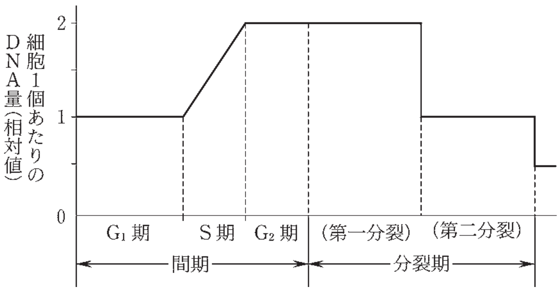
細胞 1 個あたりの DNA 量(相対値)について，G_1 期を 1 とすると，DNA が合成される S 期には 1 から 2 まで増加し，その後の G_2 期と分裂期は 2 となる。細胞は体細胞分裂により 2 個に分かれるので，分裂後は再び 1 に戻る。したがって，体細胞分裂における細胞 1 個あたりのDNA量の変化は次図のようになる。



上図を図2に照らし合わせると，図2のA群の細胞はDNA量が1であるので，G_1期の細胞であり，B群の細胞はDNA量が2であるので，G_2期と分裂期の細胞である。また，C群の細胞はDNA量が1と2の間であるので，DNAを合成中のS期の細胞である。　$\boxed{5}$…③

問5　減数分裂では2回の連続した分裂が起こり，第一分裂，第二分裂の終了時にそれぞれ細胞1個あたりのDNA量が半減する。また，体細胞分裂と同様に，分裂前の間期にDNAの合成が行われるが，第一分裂と第二分裂の間にはDNAの合成は行われない。したがって，減数分裂における細胞1個あたりのDNA量の変化は次図のようになり，減数分裂終了直後の細胞のDNA量は0.5となる。

減数分裂の第一分裂と第二分裂の間にはDNAの合成は行われない。



上図を選択肢の図と照らし合わせると，DNA量が1の細胞群，2の細胞群，1と2の間にある細胞群に加え，0.5の細胞群が存在する④が正しい。なお，DNA量が0.5と1の間にある細胞群は存在しないことに注意する。　$\boxed{6}$…④

第2問　発　生　問題

Aでは両生類の発生に関する知識問題を，**B**では鳥類の体節の分化に関する考察問題を出題した。

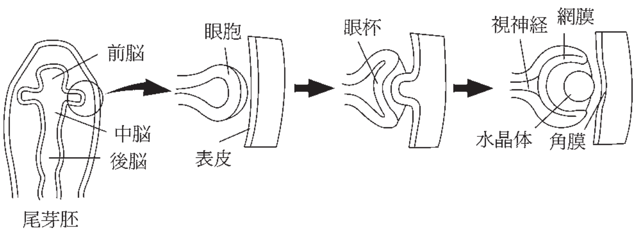
問1　カエルやイモリの受精卵では，精子進入点の反対側の卵表面に灰色三日月環とよばれる胚の他の部分とは色調の異なる部分が現れる。発生が進むと，灰色三日月環の現れた場所よりも植物極寄りの位置に原口が形成される。

灰色三日月環
カエルやイモリの受精卵において，精子進入点と反対側の卵表面に現れる。

ウニやイモリなどでは，卵割期のある時期までは，一部の割球が除去されても，残った割球の予定運命が調節されて，完全な胚ができる。このように，割球の一部が除去されても，残った割球によってそれが補われる性質をもつ卵を調節卵という。一方，クシクラゲやホヤなどでは，卵割期の早い時期であっても一部の割球が除去されると，不完全な胚ができる。このように，割球の一部が除去されると，残った割球ではそれを補うことができない性質をもつ卵をモザイク卵という。 $\boxed{7}$ …①

問2 胚のある部分が，接する未分化な細胞群にはたらきかけて，特定の組織や器官への分化を促すはたらきを誘導といい，このようなはたらきをもつ領域を形成体(オーガナイザー)という。シュペーマンは，イモリの初期原腸胚から原口背唇部を切り取り，同じ発生時期の他の胚の胞胚腔内に移植すると，移植された原口背唇部自身は脊索，体節の一部に分化するとともに，接する外胚葉にはたらきかけて神経管を誘導することを明らかにした。したがって，二次胚では，表皮，神経管などは宿主胚の細胞に由来し，脊索，体節の一部は移植した原口背唇部に由来するので，③が正しい。 $\boxed{8}$ …③

問3 イモリの眼の形成過程を次図に示す。



原口背唇部により誘導された神経管は，前方が広がって脳に分化し，後方は脊髄に分化する。脳の両側が膨らんで眼胞ができ，眼胞はさらに先端部がくぼんで眼杯になる。眼杯は接する表皮にはたらきかけて水晶体を誘導し，眼杯自身は網膜に分化する。水晶体は，さらに表皮にはたらきかけて角膜を誘導する。このように，誘導によって分化した細胞や組織が形成体としてはたらき，さらに誘導が連続的に起こることを誘導の連鎖といい，誘導の連鎖によって複雑な構造の器官が形成される。 $\boxed{9}$ …④

問4 両生類の尾芽胚の断面図と，各部域から分化する組織や器官を次図に示す。選択肢中の組織・器官のうち，脊髄は外胚葉に，心臓，腎臓，血球，血管は中胚葉に，消化管上皮，肝臓，肺，すい臓は内胚葉にそれぞれ由来する。したがって，中胚葉に由来する組織・器官の組合せとして正しいのは，②心臓，腎臓である。

調節卵
割球の一部が除去されても，完全な胚を生じる卵

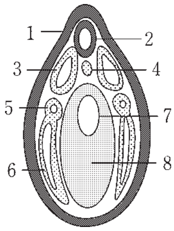
モザイク卵
割球の一部が除去されると，不完全な胚を生じる卵

原口背唇部の移植実験
移植された原口背唇部自身は脊索，体節の一部に分化するとともに，接する外胚葉を神経管へと誘導し，二次胚が形成される。

外胚葉→ 1 表皮…表皮，水晶体，角膜
2 神経管…脳，**脊髄**，神経，網膜

中胚葉→ 3 体節…真皮，脊椎骨，骨格，骨格筋
4 脊索→退化・消失
5 腎節…**腎臓**，生殖腺
6 側板…**心臓**，**血管**，**血球**，内臓筋

内胚葉→ 7 腸管…**消化管の内壁（上皮）**
8 内胚葉…気管，**肺**，**肝臓**，**すい臓**，甲状腺，ぼうこう



$\boxed{10}$ …②

問5　**実験2**では，第22体節が分節化して形成された直後に，第20体節～第22体節を切り取り，同じ発生時期の他の胚の同じ体節番号の体節を取り除いた部位に，前後の位置関係は変えずに背側と腹側を反転させて移植している。体節のどの部位が真皮性筋節と硬節に分化するのかがその周辺の組織とは無関係に決定されたり，その体節が分節化する前にすでに決定されているのであれば，背側と腹側を反転させて移植した場合，移植後の背側（移植前の腹側）は硬節に，移植後の腹側（移植前の背側）は真皮性筋節に分化するはずである。しかし，**実験2**では，第21体節と第22体節は予定運命を変更して，正常胚と同様に移植後の背側が真皮性筋節に，移植後の腹側が硬節に分化したことから，真皮性筋節と硬節の分化は，周辺の組織からの影響を受けたと考えられる。したがって，①が正しく，②・③は誤りである。次に，真皮性筋節と硬節の予定運命がいつ決定されるかを考えてみよう。**実験2**では，第21体節と第22体節は予定運命を変更したのに対し，第20体節では移植後の背側が硬節に，移植後の腹側が真皮性筋節に分化している。つまり，背側と腹側を反転させて移植したとき，第21体節と第22体節はまだ予定運命が決定されておらず，予定運命を変更したのに対し，第20体節はすでに予定運命が決定されていたと考えられる。問題文に，「分節化は頭側から尾側に向かって進行し，1.5時間ごとに左右1対の体節が形成される」とある。第22体節が形成された直後は，第21体節が形成されてから1.5時間，第20体節が形成されてから3時間が経過している。以上のことから，真皮性筋節と硬節の予定運命は，その体節が分節化により形成された後，1.5時間経過した段階では，まだ予定運命は決定されていないが，3時間経過した段階では，すでに予定運命が決定されていると考えられる。したがって，⑤が正しく，④・⑥・⑦は誤りである。　$\boxed{11}$・$\boxed{12}$ …①・⑤

第3問　遺　伝　　問題

Aではメンデルの行った交配実験についての知識問題と独立遺伝に関する問題を，**B**では三点交雑に関する問題を出題した。

問1　オーストリアの修道院の司祭だったメンデルは，修道院の中

庭で様々な形質のエンドウを栽培して交配実験を行った。エンドウは栽培が容易で，自然状態で自家受精を行い，純系が得やすいことから，遺伝の研究に適した材料である。したがって，①は正しい。メンデルは明確に区別できる対立形質に着目して交配実験を行ったので，実験結果をより明瞭に示すことができた。したがって，②は正しい。メンデルが着目した7対の対立形質のうちそれぞれ2対の対立形質を支配する要素(遺伝子)は，互いに影響しあうことなく別々の配偶子に入ったので，メンデルは「各組の対立要素(遺伝子)は互いに影響しあうことなく，独立に配偶子に入る」という「独立の法則」を唱えた。メンデルは同一染色体上で連鎖している遺伝子のみに着目した実験は行っていないので，③は誤りである。なお，実際には，メンデルが着目した7対の対立形質のなかには，連鎖しているものも含まれていた。メンデルは交配実験で得られたデータを統計的に処理し，遺伝する要素(遺伝子)を想定して記号で表したり，数式化したりして実験結果を考察したので，④は正しい。 $\boxed{13}$ …③

問2　2対の遺伝子 A，a と遺伝子 B，b について，両遺伝子ともに優性のホモ接合体の遺伝子型は $AABB$ であり，この個体がつくる配偶子の遺伝子型はすべて AB である。また，両遺伝子ともに劣性のホモ接合体の遺伝子型は $aabb$ であり，この個体がつくる配偶子の遺伝子型はすべて ab である。したがって，配偶子どうしが合体してできた F_1 の遺伝子型は $AaBb$ となる。問題文に「独立の法則が成立している2対の遺伝子 A，a と遺伝子 B，b」とあるので，F_1 が配偶子をつくるとき，A，a と B，b は互いに影響しあうことなく，別々の配偶子に入る。したがって，F_1 のつくる配偶子の遺伝子型とその分離比は，$AB:Ab:aB:ab=1:1:1:1$ となるので，F_1 どうしを交配して得られた F_2 の遺伝子型は次表に示すようになる。

	$1AB$	$1Ab$	$1aB$	$1ab$
$1AB$	$AABB$	$AABb$	$AaBB$	$AaBb$
$1Ab$	$AABb$	$AAbb$	$AaBb$	$Aabb$
$1aB$	$AaBB$	$AaBb$	$aaBB$	$aaBb$
$1ab$	$AaBb$	$Aabb$	$aaBb$	$aabb$

交配表より，F_2 の表現型の分離比は，$[AB]:[Ab]:[aB]:[ab]=9:3:3:1$ となり，両方の優性形質をともにもつ $[AB]$ の個体は F_2 全体の $\frac{9}{16}\times100 \fallingdotseq 56$ ％ になる。 $\boxed{14}$ …④

独立遺伝のとき，$F_1(AaBb)$ がつくる配偶子の遺伝子型と分離比

$AB:Ab:aB:ab$
$=1:1:1:1$

独立遺伝のとき，F_2 の表現型と分離比

$[AB]:[Ab]:[aB]:[ab]$
$=9:3:3:1$

問3　検定交雑とは劣性のホモ接合体と交配することであり，検定交雑を行うと，次世代の表現型の分離比が検定した個体がつくる配偶子の遺伝子型の分離比と一致するので，組換えの起こった配偶子数などを知ることができる。すべてが劣性形質であるものは，黒檀(こくたん)体色，桃色眼，そり翅の**ク**であるので，⑥が正しい。

検定交雑
劣性のホモ接合体と交配すること。

$\boxed{15}$ …⑥

問4 黒檀体色(e)と桃色眼(p)の遺伝子についての組換え価を求めるには，検定交雑の結果について，体の色と眼の色についての表現型の分離比を整理する。表1より，正常体色で正常眼〔EP〕のものは**ウ**と**エ**であり，その個体数は 112＋8＝120 である。同様に，正常体色で桃色眼〔Ep〕のものは**オ**であり，その個体数は 394，黒檀体色で正常眼〔eP〕のものは**カ**であり，その個体数は 376，黒檀体色で桃色眼〔ep〕のものは**キ**と**ク**であり，その個体数は 12＋98＝110 である。これらを整理すると〔EP〕：〔Ep〕：〔eP〕：〔ep〕＝120：394：376：110 となる。F_1 の相同染色体上で連鎖している遺伝子の組合せをもつ配偶子の数は多くなり，組換えの起こった遺伝子の組合せをもつ配偶子の数はそれより少なくなる。表1で，〔Ep〕と〔eP〕の個体数が多く，〔EP〕と〔ep〕の個体数が少ないことから，F_1 の相同染色体上では，遺伝子 E と遺伝子 p，遺伝子 e と遺伝子 P が連鎖しており，組換えによって遺伝子 E と遺伝子 P，遺伝子 e と遺伝子 p の組合せをもつ配偶子が生じたと考えられる。組換え価(%)は，

$\dfrac{\text{組換えの起こった配偶子数}}{\text{全配偶子数}}\times 100$ で表される。したがって，

$e-p$ 間の組換え価は，$\dfrac{120+110}{1000}\times 100=23$ % となる。$\boxed{16}$ …④

組換え価(%)＝

$\dfrac{\text{組換えの起こった配偶子数}}{\text{全配偶子数}}\times 100$

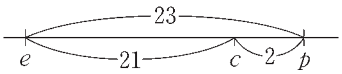
問5 染色体の乗換えが染色体のどこでも同じように起こるとすれば，組換えは2遺伝子間の距離が大きいほど起こりやすくなるので，2遺伝子間の距離は組換え価に比例する。したがって，連鎖する3遺伝子について，2遺伝子ずつの組換え価を求めれば，これらの遺伝子の染色体上での相対的な位置関係を知ることができる。ここで，**問4**で求めたように，$e-p$ 間の組換え価は 23 % である。同様の方法で，桃色眼(p)とそり翅(c)の遺伝子についての組換え価を求める。表1より，正常眼で正常翅〔PC〕のものは**ウ**と**カ**であり，その個体数は 112＋376＝488，正常眼でそり翅〔Pc〕のものは**エ**であり，その個体数は 8，桃色眼で正常翅〔pC〕のものは**キ**であり，その個体数は12，桃色眼でそり翅〔pc〕のものは**オ**と**ク**であり，その個体数は 394＋98＝492 である。これを整理すると，〔PC〕：〔Pc〕：〔pC〕：〔pc〕＝488：8：12：492 となり，$p-c$ 間の組換え価は，$\dfrac{8+12}{1000}\times 100=2$ % となる。

2遺伝子間の距離は，組換え価に比例する。

さらに，黒檀体色(e)とそり翅(c)の遺伝子についての組換え価を求める。表1より，正常体色で正常翅〔EC〕のものは**ウ**であり，その個体数は 112，正常体色でそり翅〔Ec〕のものは**エ**と**オ**であり，その個体数は 8＋394＝402，黒檀体色で正常翅〔eC〕のものは**カ**と**キ**であり，その個体数は 376＋12＝388，黒檀体色でそり翅〔ec〕のものは**ク**であり，その個体数は 98 である。これら

を整理すると，〔EC〕：〔Ec〕：〔eC〕：〔ec〕＝112：402：388：98 となり，$e-c$ 間の組換え価は，$\dfrac{112+98}{1000}\times100=21$ ％ となる。

$e-p$ 間の組換え価が 23 ％，$p-c$ 間の組換え価が 2 ％，$e-c$ 間の組換え価が 21 ％であるので，これら 3 遺伝子の相対的な位置関係は次のように表される。



したがって，3 遺伝子は $e-c-p$ の順に染色体上に並んでおり，$e-c$ 間は $c-p$ 間より長いことがわかるので，③が正しい。

このように，連鎖する 3 遺伝子について検定交雑を行い，3 遺伝子間の相対的な位置関係を求める方法を三点交雑という。モーガンはキイロショウジョウバエの多くの遺伝子に関して三点交雑を繰り返し，キイロショウジョウバエの連鎖地図を作成した。

$\boxed{17}$ …③

三点交雑
連鎖する 3 遺伝子について検定交雑を行い，3 遺伝子間の相対的な位置関係を求める方法

問 6　設問文に「キイロショウジョウバエの雄では組換えが起こらない」とあるので，F_1 の雄は相同染色体上で連鎖している遺伝子が組換えを起こしていない配偶子のみをつくる。組換えが起こる F_1 の雌では，組換えを起こしていない配偶子が，最も多くつくられるので，表 1 で，個体数が最も多い正常体色，桃色眼，そり翅〔Epc〕と，黒檀体色，正常眼，正常翅〔ePC〕が，組換えを起こしていない配偶子の受精によって生じたものである。したがって，組換えが起こらない場合，つくられる配偶子の遺伝子型とその分離比は，Epc：ePC＝1：1 となり，検定交雑の結果は〔Epc〕：〔ePC〕＝1：1 となる。正常体色，桃色眼，そり翅〔Epc〕のものは**オ**，黒檀体色，正常眼，正常翅〔ePC〕のものは**カ**であるので，②が正しい。　$\boxed{18}$ …②

第 4 問　体液の恒常性　問題

A では体液の浸透圧調節に関する知識問題を，**B** では淡水産硬骨魚類の海水順応に関する実験考察問題を出題した。

問 1　多細胞動物は，外部環境が変化しても内部環境を一定に保つ性質をもっており，これを恒常性（ホメオスタシス）という。恒常性は，自律神経系と内分泌系のはたらきによって維持されている。このうち，体液の浸透圧調節に関係するホルモンとして，バソプレシンと鉱質コルチコイドがある。鉱質コルチコイドは副腎皮質から分泌され，腎臓の細尿管（腎細管）などにおけるナトリウムの再吸収を促進する。　$\boxed{19}$ …⑤

問 2　①バソプレシンは，体液の浸透圧が上昇すると，分泌が促進されるので，誤りである。②バソプレシンは間脳の視床下部に存在する神経分泌細胞の細胞体において合成されるので，誤りであ

神経分泌細胞
神経細胞としての構造と機能をもち，ホルモンを分泌する細胞

る。③バソプレシンを合成する神経分泌細胞の軸索は脳下垂体後葉へと伸びており，合成されたバソプレシンは軸索内を輸送されて，脳下垂体後葉に存在する軸索末端から血液中に分泌されるので，誤りである。④バソプレシンは腎臓の集合管などにおける水の再吸収を促進するので，正しい。⑤バソプレシンの分泌が促進されると，水の再吸収量が増加して尿量が減少するので，誤りである。 $\boxed{20}$ …④

問3　①外洋に生息するエビやカニなどの無脊椎動物は，体液の浸透圧を調節するしくみをもたず，体液の浸透圧と周囲の海水の浸透圧はほぼ等しいので，正しい。②サメやエイなどの海産軟骨魚類は，尿素を体液中に含むことで体液の浸透圧を周囲の海水の浸透圧とほぼ等しく保っており，これにより体液と海水の浸透圧差による水分の喪失を防いでいるので，正しい。③カモメなどの海鳥やウミガメなどの海産は虫類は，海水を飲み，余分な塩分を塩類腺から排出することで体液の浸透圧の上昇を防いでいるので，正しい。④淡水に生息する単細胞生物のゾウリムシでは，周囲の淡水の浸透圧よりも細胞内の浸透圧の方が高いので，細胞内に水が浸透する。このため，余分な水を収縮胞から細胞外へと排出して，細胞の浸透圧を一定に保っているので，誤りである。

$\boxed{21}$ …④

問4　淡水産硬骨魚類の体液の浸透圧は周囲の淡水よりも高いため，水が体内に流入する。このため，腎臓から体液よりも低張な尿を多量に排出し，不足する塩分をえらの塩類細胞から能動輸送によって吸収して体液の浸透圧を一定に保っている。なお，海産硬骨魚類の体液は周囲の海水よりも低張であり，水が体外に流出する。このため，海水を多量に飲んで水分を補給し，水分とともに吸収した余分な塩分はえらの塩類細胞から能動輸送によって排出し，腎臓から体液と等張な尿を少量排出して体液の浸透圧を一定に保っている。 $\boxed{22}$ …⑦

問5　**実験1**の結果をみると，順応処理前には，頭側から尾側までボーマンのうで囲まれた部分の断面積に対する糸球体の断面積の割合は，90 ～ 100 ％であり，頭側と尾側でほとんど差がみられない。しかし，順応処理後に海水で飼育を続けると，頭側で時間経過にともなって，ボーマンのうで囲まれた部分の断面積に対する糸球体の断面積の割合が小さくなっている。設問文に，「ボーマンのうで囲まれた部分の断面積は，すべての腎小体で等しく，実験期間中変化しない」とあるので，頭側の糸球体が小さくなっていることがわかる。したがって，①は誤りであり，②が正しい。**実験2**で，淡水中で飼育した個体の腎小体の総数に対する，海水中で飼育した個体の腎小体の総数の比は，雄では $17 \div 31 \fallingdotseq 0.55$，雌では $26 \div 46 \fallingdotseq 0.57$ であり，雌雄いずれでも腎小体の総数は海水中で飼育した個体の方が少なくなってはいるが，淡水中で

塩類腺
海鳥やウミガメでは眼の近くにあり，塩分を排出する。

収縮胞
淡水に生息するゾウリムシやアメーバなどにみられ，水を排出することで，細胞の浸透圧を調節する。

淡水産硬骨魚類
体液が淡水より高張なので，体内に水が流入する。えらから塩類を能動輸送で吸収し，多量の低張尿を排出する。

海産硬骨魚類
体液が海水より低張なので，体外に水が流出する。海水を飲み，えらから塩類を能動輸送で排出し，少量の等張尿を排出する。

飼育した個体の半数以下にはなっていない。また，この比の値は，雌の方が雄よりも大きくなっているので，③・④は誤りである。

$\boxed{23}$ …②

問6　淡水産硬骨魚類が海水中で生存するためには，体液の浸透圧調節のしくみを海産硬骨魚類と同様のしくみに変化させなくてはならない。そのしくみの一つとして，淡水中では体内に流入した水を排出するために多量の尿を排出していたが，海水中では体内から水が流出するので，尿量を減らさなくてはならない。**実験1**と**実験2**でみられる変化は，この過程で生じる変化と考えることができる。淡水産硬骨魚類であるグッピーに順応処理を行ってから海水中で飼育すると，短期的には**実験1**のように糸球体が縮小し，長期的には**実験2**のように腎小体の総数が減少する。糸球体は毛細血管からなるので，糸球体が縮小すると糸球体を流れる血液量が減少し，ろ過量が減少すると考えられる。また，腎小体の総数が減少すると，やはりろ過量が減少すると考えられる。これにより原尿量が減少し，尿量が減少して海水への順応が進む。

$\boxed{24}$ …①

第5問　植物の反応　問題

Aでは気孔の開閉と膨圧運動に関する知識問題を，**B**では光発芽種子に関する知識問題と発芽と植物ホルモンに関する実験考察問題を出題した。

問1　植物は環境の変化に応じて気孔を開閉し，蒸散量を調節している。気孔が開いて蒸散が活発になると，葉の吸水力が上昇する。葉の吸水力は道管内の水の移動に重要な力である。また，道管内の水は水の凝集力によって途切れることなく引き上げられ，根の根圧によって押し上げられている。水は蒸発するときに熱を奪うため，蒸散が活発になると葉温の上昇を防ぐことができる。さらに，気孔は蒸散だけではなく，ガス交換の通路となっている。植物は昼間に光合成を行うために，気孔を開き，光合成に必要な二酸化炭素を吸収する。

$\boxed{25}$ …⑥

蒸散
葉から水が蒸発すること。主に気孔を介して行われる。

問2　植物の運動には，成長運動と膨圧運動がある。成長運動は，植物体の部分的な成長速度の違いによって起こる運動であり，①チューリップの花の開閉は温度傾性とよばれる成長運動である。また，③キュウリの巻きひげの接触屈性や④マカラスムギの芽生えの光屈性も成長運動である。膨圧運動は細胞の膨圧の変化によって起こる運動であり，②オジギソウの葉は，触れると閉じ，葉柄が垂れ下がる。これは接触傾性とよばれる膨圧運動である。⑤カエデの葉の落葉は，葉の老化にともなって，葉柄の基部に離層が形成されて起こる現象であり，成長運動でも膨圧運動でもない。次表は植物の運動をまとめたものである。

成長運動
成長速度の違いによって起こる運動。茎の正の光屈性や，根の正の重力屈性など。

膨圧運動
細胞の膨圧の変化によって起こる運動。気孔の開閉やオジギソウの葉の接触傾性など。

<table>
<tr><th colspan="3">運動の種類</th><th>例</th></tr>
<tr><td rowspan="5">成長運動</td><td rowspan="3">屈性</td><td>光屈性</td><td>正：茎　負：根</td></tr>
<tr><td>重力屈性</td><td>正：根　負：茎</td></tr>
<tr><td>接触屈性</td><td>正：巻きひげ</td></tr>
<tr><td rowspan="4">傾性</td><td>光傾性</td><td>タンポポの花の開閉</td></tr>
<tr><td>温度傾性</td><td>チューリップの花の開閉</td></tr>
<tr><td rowspan="2">膨圧運動</td><td>接触傾性</td><td>オジギソウの葉</td></tr>
<tr><td>就眠運動</td><td>オジギソウの葉</td></tr>
</table>

$\boxed{26}$…②

屈性
刺激の方向に向かって(正)，もしくは遠ざかるように(負)屈曲する性質

傾性
刺激の方向とは無関係に一定の方向に屈曲する性質

問3　光によって発芽が促進されるレタスやタバコ，マツヨイグサなどの種子は，光発芽種子とよばれる。光発芽種子のもつこの性質は，光が十分に当たらず光合成ができない場所で発芽し，枯死することを防いでいる。光発芽種子の発芽を促進するために最も有効な光Pは赤色光(波長 660 nm)である。逆に赤色光の作用を打ち消す光Qは遠赤色光(波長 730 nm)である。これは，ある色素タンパク質によって説明できる。この色素タンパク質にはR型(赤色光吸収型)とFR型(遠赤色光吸収型)の2種類があり，R型は赤色光を吸収してFR型に，FR型は遠赤色光を吸収してR型に変化する。FR型は発芽を促進する作用をもつため，赤色光を照射すると発芽が起こる。　$\boxed{27}$…①

光発芽種子
発芽が光により促進される種子。レタス，タバコ，マツヨイグサなど。赤色光によって発芽が促進され，その効果は遠赤色光によって打ち消される。

問4　**実験1**より，種子は(1)植物ホルモンを与えない場合には発芽しなかったが，(2)植物ホルモンXを与えた場合には発芽したので，植物ホルモンXは単独で発芽を促進する作用をもつことがわかる。また，(3)サイトカイニンを与えた場合には発芽しなかったので，サイトカイニンは単独で発芽を促進しないことがわかる。**実験2**では，植物ホルモンYの存在下で，(2)植物ホルモンXを与えた場合には発芽しなかったので，植物ホルモンXのもつ「発芽を促進する」という作用を，植物ホルモンYが抑制することがわかる。しかし，植物ホルモンYの存在下で，(4)植物ホルモンXとサイトカイニンを与えた場合には種子は発芽したので，サイトカイニンは単独で発芽を促進する作用をもたないが，植物ホルモンYがもつ「植物ホルモンXの作用を抑制する」という作用を抑制することによって，種子を発芽させたと考えられる。したがって，④が正しい。　$\boxed{28}$…④

問5　種子の発芽は，発芽を促進する植物ホルモンであるジベレリンと，発芽を抑制する植物ホルモンであるアブシシン酸によって調節されている。植物ホルモンXは単独で発芽を促進する植物ホルモンなので，ジベレリンである。また，植物ホルモンYは発芽を抑制する植物ホルモンなので，アブシシン酸であると考えられる。　$\boxed{29}$…⑤

問6　35 °C で行われた**実験3**の結果を，25 °C で行われた**実験1**の

結果と比較すると，(2)植物ホルモンXを与えた場合，種子は25℃では発芽したが，35℃では発芽しなかった。また，35℃で行われた**実験3**の結果は，25℃で植物ホルモンYの存在下で行われた**実験2**の結果とすべて一致している。このため，35℃では25℃のときと比べて，植物ホルモンXの作用を抑制する植物ホルモンYの作用が強くなっていると考えられる。したがって，②が正しい。上述のように，植物ホルモンXは発芽を促進する植物ホルモンであり，サイトカイニンは植物ホルモンYの作用を抑制する植物ホルモンであると考えられるので，①・③・④では発芽が促進されるはずであり，35℃では(2)植物ホルモンXを与えた場合でも発芽しなかったという結果を説明できない。

$\boxed{30}$ …②

地　学　I

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	3	3	
		問2	2	3	4	
		問3	3	2	3	
	B	問4	4	1	3	
		問5	5	3	4	
		問6	6	6	3	
第1問　自己採点小計					(20)	
第2問	A	問1	7	6	4	
		問2	8	4	3	
		問3	9	1	3	
	B	問4	10	3	3	
		問5	11	1	3	
		問6	12	4	4	
第2問　自己採点小計					(20)	
第3問	A	問1	13	2	3	
		問2	14	1	3	
		問3	15	3	3	
		問4	16	2	4	
	B	問5	17	3	3	
		問6	18	1	4	
第3問　自己採点小計					(20)	
第4問	A	問1	19	4	4	
		問2	20	1	3	
		問3	21	4	3	
	B	問4	22	6	4	
		問5	23	2	3	
		問6	24	3	3	
第4問　自己採点小計					(20)	

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第5問	A	問1	25	4	3	
		問2	26	1	4	
	B	問3	27	5	3	
		問4	28	2	3	
	C	問5	29	3	4	
		問6	30	2	3	
第5問　自己採点小計					(20)	
自己採点合計					(100)	

地学I

【解説】

第1問　固体地球

問題

A　地球の内部構造

地球深部および地球全体の構成物質やその化学組成は，隕石(いんせき)の組成分析や高温高圧下における実験などによって推定されている。地球の内部構造は，地震波の走時曲線の解析によって推定できる。走時曲線から地球の内部構造の変化を読み取れるように，この問題を通してしっかり理解してほしい。

問１　地殻の化学組成は，地殻を構成する岩石を直接手にすることができるため，それらの化学組成から推定されている。また，核，マントルおよび地球全体の化学組成は，地球の原材料と考えられている始原的な隕石から推定されている。地球の元素組成は，以下の表１－１の通りである。

表１－１　地球の元素組成

地球全体	Fe＞O＞Si＞Mg
地　殻	O＞Si＞Al＞Fe
マントル	O＞Mg＞Si＞Fe
核	Fe＞Ni

地殻，マントルはO，Siが多く，岩石質の物質からできており，核はFeを主とする金属からできている。地球全体では，核やマントルにFeが多く含まれていることから，Feが最も多い。

$\boxed{1}$ …③

問２　図１－１において地球の中心をC点とする。∠OCA＝60°であるから，△OCAは正三角形である。したがって，地球半径をR(km)とすると，辺OA (震央距離60°までの距離)の長さはR (km)である。また，∠OCB＝90°であることから，△OCBは直角二等辺三角形である。したがって，辺OB (震央距離90°までの距離)の長さは，$\sqrt{2}R$ (km)である。

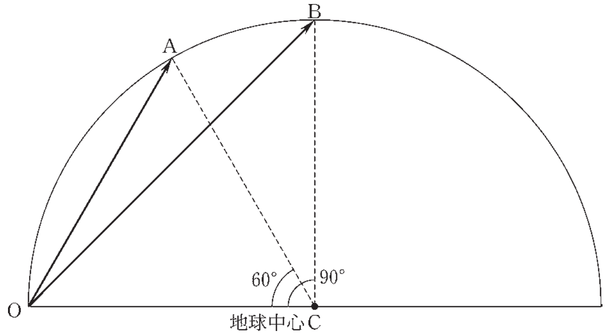


図１－１　地震波が直進すると仮定した場合の経路

【ポイント】

走時曲線

縦軸：地震波が観測点に到達するまでの時間

横軸：震央距離

地球の内部構造

表層から深部に向かって，

地殻，マントル，外核，内核

問題図1より，震央距離 60° の地点のＰ波の走時はおよそ 10.5 分，震央距離 90° の地点のＰ波の走時はおよそ 13 分であることから，OA 間を伝わるＰ波の平均速度 V_A，OB 間を伝わるＰ波の平均速度 V_B は，それぞれ以下のようになる。

$$V_A = \frac{R}{10.5}\,(\text{km/分})$$

$$V_B = \frac{\sqrt{2}\,R}{13}\,(\text{km/分})$$

したがって，

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{10.5 \times \sqrt{2}\,R}{13 \times R} \fallingdotseq 1.1\,(\text{倍})$$

となる。

図1－2に示すように，マントル，外核，内核の中では，それぞれ地震波速度は地下深部ほど大きくなっている。地震波が OA および OB の経路を通った場合，いずれの経路もマントルのみを通過している。また，OB の方が，OA の経路よりも地下深部(速度の大きい領域)を通過していることから，OB の経路の方が平均の地震波速度が大きくなる。実際には，地震波は問題図2のように直進せず，図1－3のように，各領域内では地球の中心方向に凸の経路をとる。 $\boxed{2}$ …③

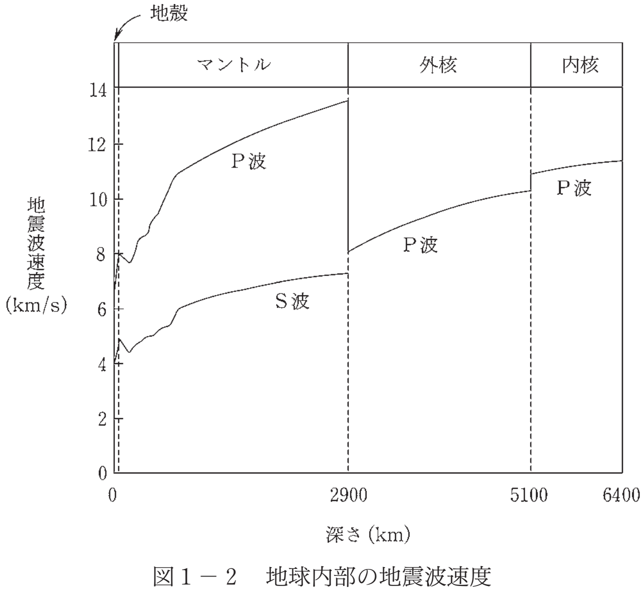


図1－2　地球内部の地震波速度

速度の求め方

速度＝$\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$

地震波の速度

同一層内では地下深部ほど，地震波速度は大きくなる。

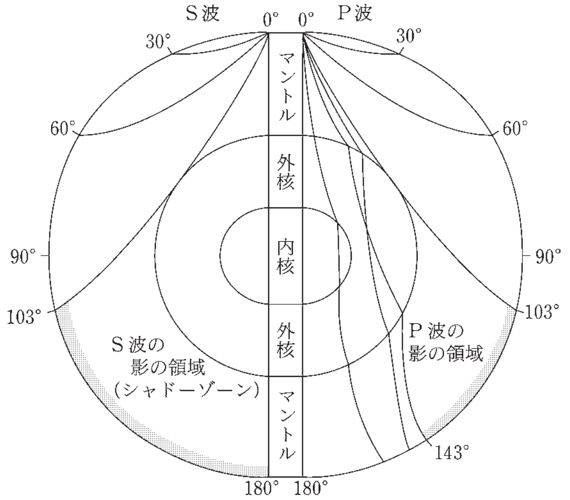


図1－3　地震波の伝わり方と内部構造

問3　走時曲線は，縦軸に走時(地震波が観測点に到達するまでの時間)，横軸に震央距離をとったグラフである。問題図1のように震央距離103°までのP波やS波の走時曲線のように途切れることなく続いている走時曲線では，速度が大きくなるほど傾きは小さくなる。

震央距離103°までの地表にはマントルを通過したP波とS波が現れ，143°以遠の地表には，マントルと核を通過したP波が現れる(図1－3)。震央距離143°以遠に現れるP波の走時曲線の傾きは，震央距離103°までのP波の走時曲線の傾きよりも小さいが，図1－2のように，核を伝わるP波の速度は，マントル深部を伝わるP波の速度よりも小さい。

①　問題図1では，震央距離103°までの地表にはS波が途切れることなく続き，速度が徐々に大きくなっていることがわかる。S波は横波の性質をもち，液体の外核を伝わることができない。したがって，図1－3のように，S波はマントルのみを通過し，外核は通過していない。よって，この選択肢は正しい。

②　震央距離103°までのP波の走時曲線は途切れることなく続いている。したがって，マントル内のみを伝わり，速度が低下する外核は，通過していないことが推定できる。よって，この選択肢は誤りであり，正解である。

③　震央距離103°～143°は，P波の影の領域になっている。図1－4のように，地震波の伝播(でんぱ)速度の大きい層から小さい層に地震波が入射するときは下向きに屈折し，伝播速度の小さい層から大きい層に入射するときは上向きに屈折する。したがって，図1－3のようにマントルから外核にP波が入射した場合は，地球の中心方向に屈折し，震央距離103°～143°にP波の影ができる。さらに震央距離143°以遠では，外核を通過したP波が観測され

地震波の性質

S波：横波，固体中のみ伝わる。
P波：縦波，固体・液体・気体中を伝わる。

地球内部の状態

固体：地殻，マントル，内核
液体：外核

る。よって，この選択肢は正しい。

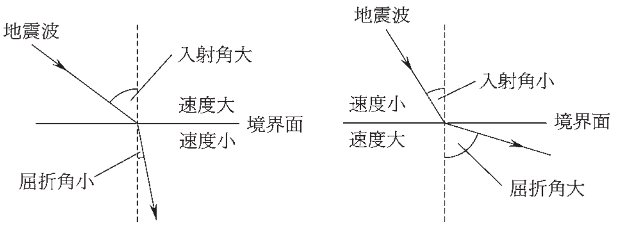


図１－４　地震波の屈折

④　震央距離 180° の地表に到達するＰ波は，地球中心を通って直進し，マントル，外核，内核を通過したと推定できる。よって，この選択肢は正しい。

$\boxed{3}$ …②

B　日本列島とプレート

プレートの近づく境界(収束境界)付近にある日本列島は，地球上で最も活発な地学現象が起きている場所の一つである。今回は，日本の地下構造に関連した震源の分布と火山の分布を出題した。これに合わせて，地殻熱流量や付加体，広域変成岩の生成などについても関連づけて学習しておく必要がある。

問４　大陸地殻には密度の小さい花こう岩質岩石が存在するのに対して，海洋地殻は，密度の大きな玄武岩質岩石から構成されている。したがって，平均密度は大陸プレートの方が海洋プレートよりも小さい。このように密度が大きく異なる２つのプレートが衝突すると，密度の大きい海洋プレートが大陸プレートの下に沈み込み，海溝やトラフが形成される。

日本列島は，図１－５のようにユーラシアプレート，北アメリカプレート，太平洋プレート，フィリピン海プレートの４つのプレート境界に位置し，太平洋プレートが北アメリカプレートとフィリピン海プレートの下に沈み込んでおり，千島海溝－日本海溝－伊豆・小笠原海溝が形成されている。また，フィリピン海プレートがユーラシアプレートの下に沈み込んでおり，駿河(するが)トラフ－南海トラフ－琉球(りゅうきゅう)海溝が形成されている。

中央海嶺(かいれい)で生産された海洋プレートは，時間とともに中央海嶺から離れる。このとき，プレートは次第に冷えていき，厚さを増していく。よって，形成年代が古いプレートほど密度が大きくなっている。同じ海洋プレートであっても，太平洋プレートの方がフィリピン海プレートよりも年代が古いため，伊豆・小笠原海溝付近で太平洋プレートがフィリピン海プレートの下に沈み込むのである。

$\boxed{4}$ …①

平均密度
大陸地殻 ＜ 海洋地殻
大陸プレート ＜ 海洋プレート

日本列島付近のプレート
大陸プレート：北アメリカプレート
　　　　　　　ユーラシアプレート
海洋プレート：太平洋プレート
　　　　　　　フィリピン海プレート

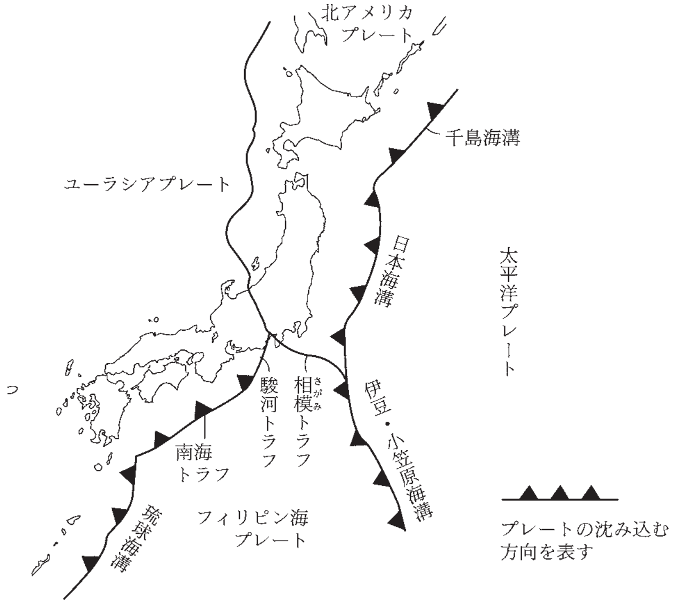


図１－５　日本列島付近のプレート分布

問５　図１－６のように，深発地震は沈み込むプレートの上面およびその内部で発生する。したがって，問題図３の等深度線は，沈み込むプレートの上面と考えることができる。

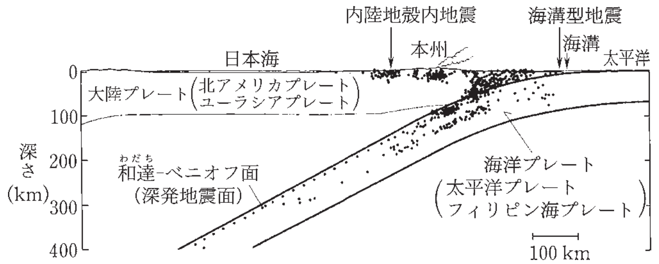


図１－６　日本列島付近の地震分布

①　問題図３より，千島海溝と日本海溝から沈み込んだ太平洋プレートの等深度線の間隔（水平距離）は，伊豆・小笠原海溝から沈み込んだ太平洋プレートの等深度線の間隔よりも広い。これは沈み込みの角度が小さいことを表している。よって，この選択肢は誤りである。

②　火山分布の海溝側の限界線を火山前線と呼び，火山前線と海溝の間に火山は存在しない。問題図４より，火山前線は海溝にほぼ平行に分布し，それぞれの海溝からの距離は日本海溝ではおよそ 300 km，伊豆・小笠原海溝ではおよそ 200 km と読み取ることができる。したがって，400 km 以内に火山は分布するので，この選択肢は誤りである。

③　問題図３と図４より，火山前線は，北アメリカプレートとフィリピン海プレートでは，深発地震の等深度線 100 ～ 200 km

深発地震

震源の深さが 100 km 以上の地震。

沈み込むプレートの上面およびその内部で発生する。

火山前線

火山分布の海溝側の限界線。

プレートの沈み込む深さ 110 km 付近の直上の地表に対応する。

の間にある。よって，この選択肢が正解である。

④　深発地震の等深度線は，沈み込むプレートの上面を表す。よって，この選択肢は誤りである。　5 …③

問６　日本列島付近で発生する地震は，大きく３つのタイプに分けることができる。

Ｐ：内陸地殻内地震。大陸プレート内部に分布する震源の浅い地震であり，沈み込む海洋プレートによって，大陸プレートが圧縮されて生じる岩盤の破壊が原因である。マグニチュードは比較的小さいが，都市の直下で発生すると，1995 年兵庫県南部地震のような大きな被害をもたらす。形成される断層は，横ずれ断層，逆断層が多い。

Ｑ：海溝型地震。大陸プレートと海洋プレートの境界で発生する地震である。海洋プレートに引きずり込まれた大陸プレートに歪(ひず)みが蓄積し，やがて両者の境界部の岩石が破壊されることによって，大陸プレートがはね上がり，マグニチュードの大きな地震が周期的に発生する。

Ｒ：深発地震。沈み込む海洋プレート内部の震源が 100 km よりも深い地震で，沈み込むプレート内部の破壊が原因である。太平洋側から日本海側に向かって震源が深くなっていくのが特徴である。震源は面状に分布し，これを和達－ベニオフ面(和達－ベニオフ帯)という。　6 …⑥

和達－ベニオフ面
深発地震面

第２問　岩石・鉱物　問題

Ａ　火成岩

マグマの結晶分化作用によってマグマの組成が変化し，いろいろな火成岩が形成される。今回は，マグマの結晶分化作用によってどのようにマグマの組成が変化し，どのような火成岩が形成されるかを問う問題とした。また，火成岩についての基本的な問題も出題した。

問１　ア ：マグマ溜(だま)りの中などで，マグマがゆっくり冷えていくときに，晶出しやすい鉱物から順番に晶出し，残液であるマグマの組成が変化していく。これを，マグマの結晶分化作用という。図２－１は，マグマの結晶分化作用を模式的に表した図である。

本問では，岩石Ａは石英やカリ長石が多く含まれることから，マグマの結晶分化作用の晩期に形成され，岩石Ｂはかんらん石や輝石が多く含まれることから，マグマの結晶分化作用の初期に形成されたことがわかる。

マグマの結晶分化作用
マグマが冷えていくとき，晶出しやすい鉱物から晶出し，残液であるマグマの組成が変化していく作用。

イ ：色指数とは，岩石中に占める有色鉱物の割合のことであり，有色鉱物の体積％で表す。問題表１より，岩石Ａ中の有色鉱物は，角閃石(かくせん)，黒雲母(うんも)，その他の有色鉱物であるから，

$$3+7+5=15$$

が色指数になる。なお，岩石Ｂでは，斜長石以外はすべて有色鉱

色指数
有色鉱物の体積％で表す。

物であるから，色指数は 66 である。　　　　　　　　　　　　$\boxed{7}$ …⑥

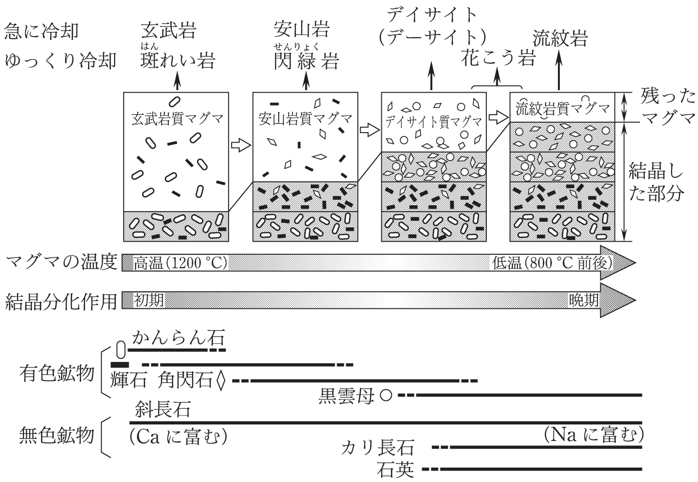


図２－１　マグマの結晶分化作用

問２　図２－２は火成岩の特徴をまとめたものである。火成岩は，地表近くでマグマが急冷されてできる火山岩と，地下深くでマグマがゆっくり冷却されてできる深成岩に分けられる。本問では，本文中に「ゆっくり冷えてできた」とあるので，岩石Ａも岩石Ｂも深成岩である。よって，火山岩である①の安山岩と②の流紋岩は，誤りである。

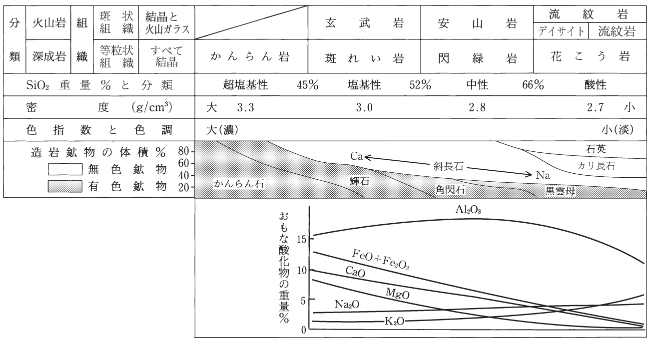


図２－２　火成岩の特徴

問題表１から，岩石Ａは石英，カリ長石，斜長石が多く，他に黒雲母などを含むので，花こう岩であると判断できる。また，岩石Ｂはかんらん石，輝石，斜長石を含むので，斑れい岩であると判断できる。よって，④が正解となる。岩石Ｂの斑れい岩は，有色鉱物の割合が大きく，全体として黒っぽい色をしている。また，有色鉱物には Mg や Fe などの重い元素が多く含まれるため，有色鉱物の割合が大きい斑れい岩の密度は大きい。　　$\boxed{8}$ …④

問３　マグマの結晶分化作用が進むと，残液であるマグマ中の SiO_2 の重量％は高くなっていき，玄武岩質マグマから安山岩質マグマ，デイサイト質マグマ，流紋岩質マグマへと変化していく。

火山岩

地表近くでマグマが急冷されてできる岩石。玄武岩，安山岩，流紋岩に分類される。斑晶と石基からなる斑状組織を示す。

深成岩

地下深くでマグマがゆっくり冷やされてできる岩石。かんらん岩，斑れい岩，閃緑岩，花こう岩に分類される。粗粒の結晶が集まった等粒状組織を示す。

結晶分化作用による SiO_2 重量%の変化

結晶分化作用の進行に伴って増加する。

初期 ―― 52% ―― 66% ――→ 晩期

塩基性　　中性　　酸性

晶出する鉱物と固結してできる火成岩は，図２－２の左から右へと変化していく。よって，選択肢の横軸である SiO_2 の重量％も大きくなる方向に変化していく。

他の成分は，図２－２中のおもな酸化物の重量％の図に示されている。$FeO+Fe_2O_3$，MgO は有色鉱物に多く含まれるので，マグマの結晶分化作用に伴って次第にその重量％は小さくなっていく。CaO，Na_2O は斜長石中に多く含まれ，図２－２では，斜長石は左ほど Ca が多く，右ほど Na が多いことから，マグマの結晶分化作用によって，マグマ中の CaO は少なくなっていき，Na_2O は多くなっていくことがわかる。Al_2O_3 については，マグマの結晶分化作用に伴う変化から判断するのは困難であるが，その量が SiO_2 に次いで多いことから判断がつく。地殻を構成する元素は多い順に O，Si，Al，Fe，Ca，Mg，Na，K であり，火成岩では基本的に Al_2O_3 の重量％は比較的高く，15％程度を占めている。

よって，本問では，MgO よりも Al_2O_3 の方が多いことと，MgO は少なくなっていくことから，①が正解であると判断できる。 $\boxed{9}$ …①

B　堆積岩(たいせき)

岩石は風化・侵食によって砕屑物(さいせつ)になり，流水によって侵食・運搬される。河口や海底に堆積した堆積物は，続成作用を受けて堆積岩に変化していく。堆積岩が形成される過程を理解しておこう。

問４　風化には，物理的(機械的)風化と化学的風化がある。物理的風化には，温度変化による鉱物の熱膨張率の違いによって鉱物どうしの結びつきが弱められてばらばらになっていく作用や，岩石の隙間に入り込んだ水が凍結して体積が膨張し，隙間を広げる作用などがある。他に，植物の根が岩石の隙間を広げる作用もある。

化学的風化は，二酸化炭素が溶けて弱い酸性になった雨水が岩石を溶かしていく作用などがある。石灰岩地域でカルスト地形がつくられるのが化学的風化の典型例である。

本問では，③が物理的風化ではなく化学的風化についての文である。よって，③が正解である。 $\boxed{10}$ …③

問５　①　上位に堆積した堆積物の荷重によって圧縮され，堆積物から水が抜け出て，粒子間の隙間が小さくなる作用を圧密という。また，堆積物の粒子と粒子の隙間に粘土などの細かい粒子が入り込み，これが接着剤の役割を果たして粒子どうしをくっつける作用を膠結(こうけつ)という。圧密と膠結によって，堆積物が堆積岩に変化していく。これを続成作用という。よって，この選択肢が正解である。

②　水を含んだ土が凍ると凍土になるが，とけると元のやわらかい土に戻るので，岩石になったとはいえない。よって，この選択肢は誤りである。

物理的(機械的)風化
温度変化や水の凍結など。

化学的風化
二酸化炭素を含む水による溶解など。

続成作用
圧密や膠結によって，堆積物が堆積岩に変化する作用。

③　砕屑物や岩石が高温になって融(と)けるとマグマになる。マグマがゆっくり冷えてかたまると深成岩になる。よって，この選択肢は誤りである。

④　放射性同位体の崩壊に伴う熱は，地殻熱流量の重要な熱源であるが，地表近くの狭い領域で発生する熱はわずかであり，続成作用とは関係がない。よって，この選択肢は誤りである。

$\boxed{11}$ …①

問 6　泥，砂，礫(れき)は，粒径によって分類され，泥は $\frac{1}{16}$ mm 以下，砂は $\frac{1}{16}$ ～ 2 mm，礫は 2 mm 以上の粒径である。問題の図 a ～ c では，$\frac{1}{16}=2^{-4}$ mm が泥と砂の境界，$2=2^{1}$ mm が砂と礫の境界である。

問題の図 a ～ c の粒径分布の堆積物が続成作用を受けてできる岩石は，図 a は砂が多いので砂岩，図 b は礫が多いので礫岩，図 c はいろいろな粒径の砕屑物が混ざっているので分類しにくいが，粒径の大きい礫の割合が大きいので，礫岩と分類できる。

川などの流水によって砕屑物が運ばれて堆積すると，流速によって堆積する砕屑物の粒径が決まっているので，堆積物の粒径がそろうのが特徴である。砕屑物が堆積している典型的な場所は，泥は河口や海底，図 a の砂は三角州や海岸，図 b の礫は河川の上流や中流の扇状地である。図 c のように大きさがそろっていないものは，山崩れや土石流あるいは氷河によっていろいろな粒径の砕屑物が同時に運ばれてきたものと考えられる。氷河の末端にあるモレーンは，いろいろな粒径の砕屑物が混在しているのが特徴である。よって，④が正解である。

$\boxed{12}$ …④

砕屑物の粒径

泥
$\frac{1}{16}$ mm
砂
2 mm
礫

モレーン

氷河による堆積物。粒径が不ぞろいで角張っている。

第 3 問　地質・地史　問題

A　地質図

地質図では，地層境界線と同一高度の等高線の交点 2 つを結んで走向線を引くという手順を取ることが多い。今回は平坦(へいたん)な地形における地質図であり，走向方向の直線が最初から図中に現れている場合を問題にした。

問 1　走向・傾斜の記号から，D 層よりも北側は南傾斜，南側は北傾斜であることから，向斜構造である。また，褶曲(しゅうきょく)構造はその軸方向である東西方向に対して垂直な圧縮力により形成されるので，南北方向の圧縮力によって形成された。よって，②が正しい。

走向・傾斜の記号は，長い線分で走向を表し，短い線分で傾斜の向きを表す。水平層および垂直層も含めて，記号の意味を確認しておこう (図 3 ― 1)。

$\boxed{13}$ …②

褶曲構造

軸方向に垂直な方向の圧縮力によって形成される。

走向・傾斜の記号

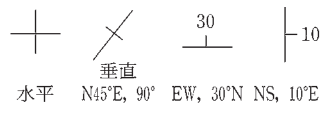


図 3 － 1　走向・傾斜の記号

問 2　褶曲構造では同じ地層が繰り返し現れる。向斜構造では軸付近の中央部に最上層が分布し，軸から離れるほど地層は古くなる (図 3 ― 2)。一方，E 岩体は断層 f－f′ を切り，断層 f－f′ は A ～ D 層を切っているので，E 岩体は最も新しい。つまり，地質現

象の進行は，A層，B層，C層，D層，断層f－f′，E岩体の順である。したがって，最も古いのはA層である。E岩体の年代が約3億年前なので，貫入を受けた地層の相対年代はそれよりもさかのぼる。したがって，A～D層が形成された相対年代は古生代(石炭紀)以前と考えられるので，①のデボン紀が適切である。

$\boxed{14}$ …①

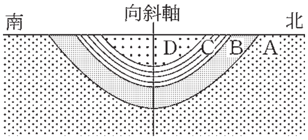


図3－2　向斜構造

問3　①　一般に，堆積岩(たいせき)の放射年代測定は，その試料が堆積時に生成された物質であることが確定できないと使えない。砕屑岩(さいせつ)中の鉱物は，その鉱物を供給した母岩の形成年代を示すことが多いため，試料として不向きである。よって，この選択肢は正しい。

②　Arは気体であり，長い年月を経て地球大気中で第3位の含有率を占めるようになったが，そのほとんどは^{40}Kの放射崩壊によって生成された^{40}Arである。よって，この選択肢は正しい。

③　第四紀完新世は今から約1万年前までの時代であり，放射年代測定には半減期の短い炭素14(^{14}C)を用いる。半減期が約13億年の^{40}Kはほとんど崩壊していないので，この時代の放射年代測定に用いることはできない。よって，この選択肢が誤りであり，正解である。なお，第四紀を細分した名称である更新世と完新世も覚えておこう。

④　放射年代測定には，その測定法に用いる放射性元素が含まれていることが必要である。Kを多く含む代表的な鉱物は黒雲母(うんも)である。そのため，K－Ar法では，黒雲母を用いることが多い。よって，この選択肢は正しい。　$\boxed{15}$ …③

問4　問題図1の断層は直線状に分布している。この地域は平坦なので，一般に地層境界線や断層は直線状に現れ，そののびの方向が走向である。したがって，問題図1中の断層は，垂直な場合を含めて，傾斜は0°以外のすべての角度の可能性がある。

図3－3に示すように，断層線を挟んで西側の地盤が相対的に下がっている。断層の西側には，東側の地層に比べて，より上位の地層が位置するからである。したがって，垂直断層ならば，東側の地盤が上がったことになり，断層面が東傾斜ならば，東側が上盤なので，上盤が上昇した逆断層，断層面が西傾斜ならば，西側が上盤なので，上盤が下がった正断層である。

なお，問題図1中の褶曲の軸は，断層を挟んで東側と西側でずれが認められないので，断層による南北方向のずれはない。つまり，断層の動きには横ずれ成分はないと判断できる。　$\boxed{16}$ …②

相対年代の始まりの放射年代
新生代　約6550万年前
中生代　約2.5億年前
古生代　約5.4億年前

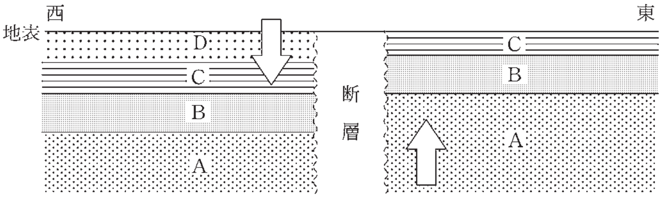
向斜構造
中央部が最も新しい。

第四紀完新世
約1万年前～現代

平坦な水平面上の直線
走向方向を表す。

正断層
上盤側が下がる。

逆断層
上盤側が上がる。



断層の傾斜方向は不明なので，波破線で表現している。

図３－３　南側から見た断面図

B　柱状図

柱状図を使った問題にはさまざまな形式があるが，今回は示準化石を用いた地層の対比をテーマとした。

示準化石
相対年代の推定や地層の対比に役立つ化石。

問５　ｄは中生代の古生物なので，選択肢中の古生物では，トリゴニア(三角貝)，イノセラムス，モノチスがその候補である。また，ｇは古生代全般に分布しているのでサンヨウチュウ(三葉虫)である。なお，本問中に提示した古生物は，覚えておくべき示準化石の代表例である(表３－１)。　$\boxed{17}$ …③

表３－１

新生代	第四紀	ナウマンゾウ，マンモス，オオツノジカ		260万
	新第三紀	デスモスチルス	ビカリア	
	古第三紀	カヘイセキ(ヌンムリテス)		6550万
中生代	白亜紀	イノセラムス	恐竜 アンモナイト トリゴニア (三角貝)	
	ジュラ紀	始祖鳥		
	三畳紀	モノチス		2.5億
古生代	ペルム紀	紡錘虫(ぼうすい) (フズリナ)，リンボク	ウミユリ サンヨウチュウ (三葉虫) 筆　石	
	石炭紀			
	デボン紀			
	シルル紀	クサリサンゴ ハチノスサンゴ		
	オルドビス紀			
	カンブリア紀	バージェス動物群 (アノマロカリスなど)		5.4億
先カンブリア時代		エディアカラ動物群 ストロマトライト		46億年

問６　①　Ｘ地域には第三紀前半のカヘイセキを含む地層が存在するので，当時は海域であったと考えられる。よって，この選択肢は正しい。

②　問題図３では，Ｘ地域では古生代，古生代～古第三紀，古第三紀以降に不整合が存在し，Ｙ地域では古生代以降～中生代，中生代～第四紀に不整合が存在する。したがって，Ｙ地域では中

不整合面
「隆起 → 侵食 → 沈降」の変動があったことを示す。

生代以降に地殻変動があったので，この選択肢は誤りである。

③　一般に，示準化石と呼ばれるものは，示相化石ではないものが多いが，両方の役割を果たす化石もある。例えば，カヘイセキ，フズリナ，ビカリアなどは温暖な環境を示す。しかし，Xおよび Y地域の柱状図では古生代末には同じフズリナが産出しており，フズリナが示す環境が温暖であるという条件を知らなくても，同一の化石が見つかっているのだから両地域の気候に大きな違いがあるとは判断できない。よって，この選択肢は誤りである。

④　深海の堆積物であることを示す放散虫チャートなどは，X地域にもY地域にも存在しない。よって，この選択肢は誤りである。

$\boxed{18}$ …①

示相化石
環境の推定に役立つ化石。
（例）造礁（しょう）サンゴ　温暖な浅海
シジミ　汽水
ビカリア　温暖な汽水
カヘイセキ　温暖な浅海
フズリナ　温暖な浅海

放散虫チャート
深海で堆積したことを示す。

第４問　海洋と大気　問題

A　大気の運動と天気図

風にはたらく力には，気圧傾度力，転向力（コリオリの力），摩擦力の３つがあり，摩擦力は地上風の吹き方に影響を与える。摩擦力の大小によって風の吹き方がどのように変わるのかを理解してほしい。また，天気図に関しては，前線付近の大気断面を出題した。日本の季節ごとの天気図の特徴も確認してほしい。

問１　地表との摩擦の影響が及ばないような上空では，高圧側から低圧側へ向かう気圧傾度力によって風が吹いていく向きに対して，北半球では直角右向きに転向力がはたらき，気圧傾度力と転向力がつり合った状態で風は等圧線に平行に吹く（図４－１）。このような風を地衡風という。

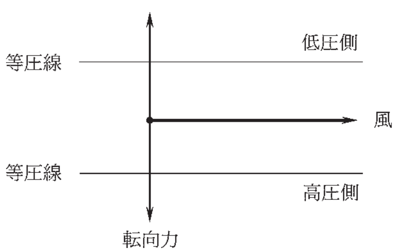


図４－１　地衡風（北半球）

一方，地表付近の風（地上風）は，地表との間で生じる摩擦の影響が加わるため，等圧線に対して斜めに吹く（図４－２）。気圧傾度力が変わらない場合，図４－３のように摩擦力が大きくなるほど風速は小さくなるため，転向力が小さく（$\boxed{ア}$）なって，風と等圧線とのなす角度は大きく（$\boxed{イ}$）なる。

$\boxed{19}$ …④

気圧傾度力
高圧側から低圧側へ大気を動かそうとする力。等圧線の間隔が狭いほど大きい。

転向力（コリオリの力）
自転する地球上で作用する見かけの力。北半球では，運動の向きに対して直角右向きに，南半球では直角左向きにはたらく。

地衡風
気圧傾度力と転向力がつり合って，等圧線と平行に吹く上空の風。

地上風
摩擦力と転向力の合力が気圧傾度力とつり合って，地表付近を吹く風。摩擦力が大きいほど，等圧線と斜交する角度は大きい。

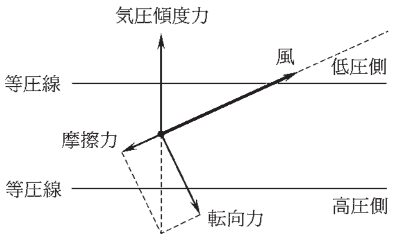


図４－２　地上風(北半球)

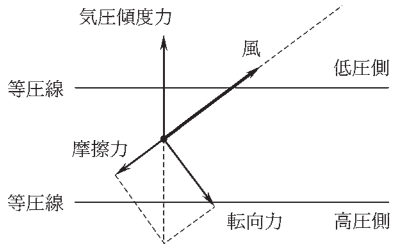


図４－３　図４－２よりも摩擦力が大きいときの地上風

問２　問題図１の地上天気図には，ユーラシア大陸内部で発達した寒冷で乾燥したシベリア(ウ)高気圧とオホーツク海に温帯低気圧が存在する。これによって日本付近は，西高東低型の気圧配置という典型的な冬の気圧配置となっている。北日本付近ではほぼ南北に等圧線が並んでおり，大陸から海洋へ向かう北西(エ)の季節風が吹いている(図４－４)。　20 …①

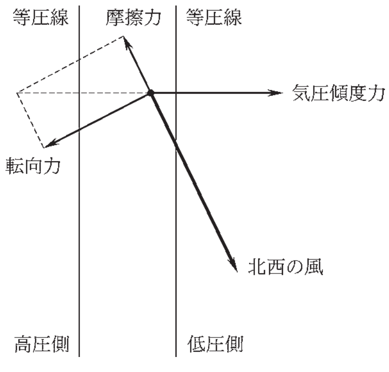


図４－４　北西の季節風

問３　北半球の温帯低気圧は，上から見ると反時計まわりに大気が回転している。上空では，水平方向の気圧差によって外側から中心に向かう気圧傾度力と中心から外向きにはたらく転向力がつり合って，安定した渦を形成する。しかし，地表付近では，地面との摩擦の影響によって風速が小さくなり，外向きにはたらく転向力が弱まるため，外側から中心に向かって空気が流れ込む。その結果，温帯低気圧の中心では上昇気流が発生する。図４－５に北半球における温帯低気圧の一生を示した。

日本の天気

４種類の高気圧の勢力の違いによって決まる。

春・秋	移動性高気圧
梅雨	オホーツク海高気圧と北太平洋高気圧
夏	北太平洋高気圧
冬	シベリア高気圧

季節風

季節によって向きが異なる風。

日本列島では，夏は北太平洋高気圧から南寄りの風，冬はシベリア高気圧から北西の風が吹く。

温帯低気圧

北半球では反時計まわりに大気が回転し，低気圧の中心では上昇気流が発生する。

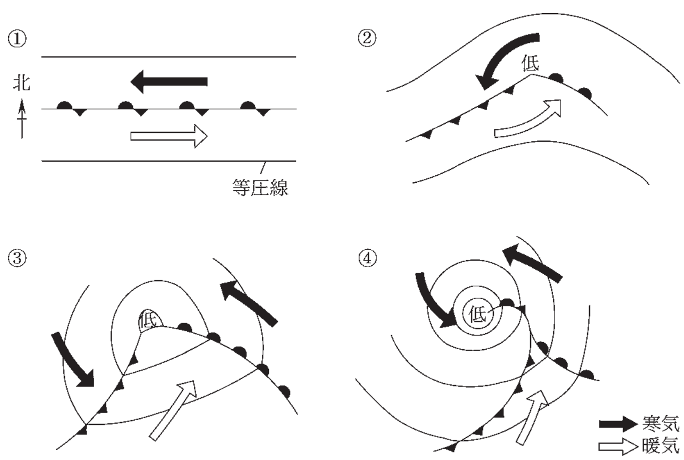


図４－５　温帯低気圧の一生(北半球)

①温帯低気圧発生前：北側の寒気と南側の暖気が接している状態で，停滞前線がのびている。

②発達期～③最盛期：低気圧の中心に向かって反時計まわりに風が吹き込む。寒気が暖気の下にもぐり込んで寒気と暖気の接触面ができる。その面と地表面との交線が寒冷前線である。また，暖気が寒気の上にはい上がるところにも暖気と寒気の接触面ができる。その面と地表面との交線が温暖前線である。

④閉塞期：寒冷前線の動きの方が温暖前線より速いため，寒冷前線が温暖前線に追いついて暖気を押し上げ，寒気で閉じた状態がつくられる。この後，低気圧は衰弱する。

問題図１の低気圧Ａは温帯低気圧の閉塞期にあたる。後方の寒気(追いつく側)が前方の寒気(追いつかれる側)よりも冷たい場合は，前方の寒気の下に後方の寒気がもぐり込む。そのため，前線の後方(西側)に降雨域ができることが多い。この状態を寒冷型の閉塞前線という(図４－６左図)。閉塞前線が寒冷前線につながっているのが特徴である。よって，Ｐ－Ｑ断面はｂが正解である。

一方，後方の寒気(追いつく側)が前方の寒気(追いつかれる側)よりも暖かい場合は，後方の寒気が前方の寒気の上にはい上がる。そのため，温暖前線と同様に，主として降雨域は前線の前面(東側)にできることが多い。この状態を温暖型の閉塞前線という(図４－６右図)。閉塞前線が温暖前線につながっているのが特徴である。

図４－５の②～③でも述べたように，寒気が暖気の下にもぐり込んだところには寒冷前線がつくられ，暖気が寒気の上にはい上がったところには温暖前線がつくられるため，Ｒ－Ｓ断面は，ｇが正解である。

$\boxed{21}$ …④

閉塞期

すべての暖気が上空へ押し上げられ，温帯低気圧が衰え始める。

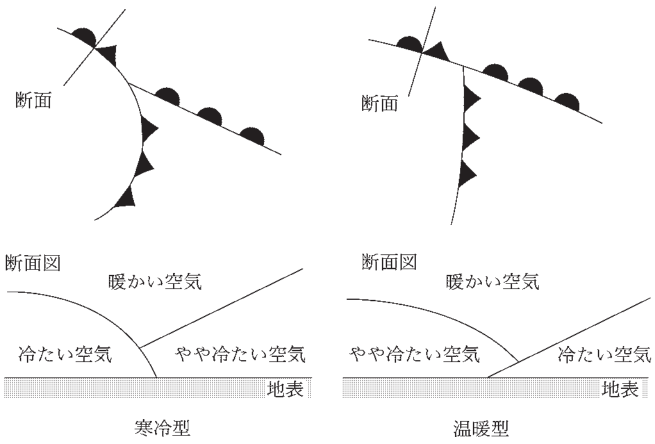


図４－６　２種類の閉塞前線

B　海　流

海洋の表層と深層における海流の成因について確認する問題とした。大気の運動と同様に，海水の運動についても転向力を考えることが重要な点である。

問４　表層の海水は，洋上を吹く風に引きずられて動き出す。この流れを吹送流という。動き出した海水には，その向きに対して北半球では直角右向きに転向力がはたらく。そのため，表層の海流は風が吹いていく方向に対してやや右向きに流れる。北太平洋の低緯度海域では南西向きの貿易風(オ)が吹いているため，その風に引きずられた表層の海水は西(カ)へ動く。また，中緯度海域では北東向きの偏西風(キ)が吹いているため，その風に引きずられた表層の海水は東(ク)へ動く。　22 …⑥

海流の成因
地球規模の風に引きずられて生じる。

問５　①　北半球と同様に，南半球でも貿易風と偏西風によって海水が引きずられ，海流が生じている。北半球では，運動の向きに対して直角右向きに転向力がはたらくため，亜熱帯環流(亜熱帯循環)は時計まわり(右まわり)になるが，南半球では運動の向きに対して直角左向きに転向力がはたらくため，反時計まわり(左まわり)の環流となる。よって，この選択肢は正しい。

亜熱帯環流のまわり方
北半球　時計まわり
南半球　反時計まわり

②　北半球では，亜熱帯環流のうち，高緯度に向かう西岸の流れが強い。この現象を西岸強化と呼ぶ。これは南半球の亜熱帯環流でも同様である。よって，この選択肢が誤りであり，正解である。

西岸強化
亜熱帯環流の西側部分の流速は大きい。
(例)　黒潮，湾流(メキシコ湾流)

地球は自転していて，なおかつ平面ではなく球体であるので，緯度によって運動のようすが異なる。例えば，ある水塊が北極にあるとすると，この水塊はコマのように地軸と一緒に反時計まわりに回転しており，低緯度(赤道)へ南下してもこの回転運動は保たれる。逆に，水塊が赤道にあるとすると，赤道では静止しているが，高緯度(北極)へ北上すると，地球が反時計まわりに自転しているために，水塊は相対的に時計まわりに回転するようになる。

つまり，南下する水塊は反時計まわりの渦をつくり，北上する水塊は時計まわりの渦をつくることになる。この渦が北太平洋における時計まわりの環流と重なるため，西側では強め合って流れが強くなり，東側では弱め合って流れが弱くなる。これが西岸強化の原因についての考え方である。南半球(南太平洋)では，南下する反時計まわりの渦と北上する時計まわりの渦が反時計まわりの環流と重なるため，北半球と同様に西岸では強め合い，東岸では弱め合う。

③　インド洋でも亜熱帯環流は存在している。よって，この選択肢は正しい。

④　風系と海流を対応させた太平洋における海水の水平循環を示す(図4－7)。黒潮は，日本の太平洋岸の沖合を流れ，北太平洋の亜熱帯環流の一部をなす。よって，この選択肢は正しい。

$\boxed{23}$…②

北太平洋における亜熱帯環流

北赤道海流→黒潮→北太平洋海流→カリフォルニア海流→北赤道海流

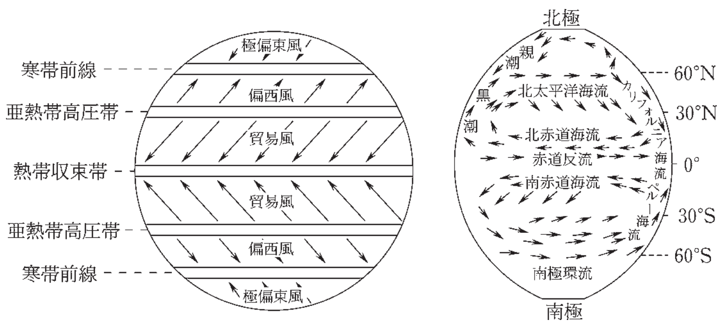


図4－7　太平洋における海水の水平循環

問6　①　海水の密度は水温と塩分に依存し，水温が低く塩分が高いほど海水の密度は大きくなる。海水が凍結するとき，氷の中に塩類は含まれないので，周囲の海水は高塩分となり，密度が大きくなる。よって，この選択肢は正しい。

海水の密度

低温・高塩分…密度大
高温・低塩分…密度小

②　北大西洋北部のグリーンランド沖と南極大陸近くのウェッデル海において，密度の大きい海水がつくられ，それが沈み込んで深層循環をつくりだしている。よって，この選択肢は正しい。

深層循環

水温と塩分による海水の密度差から生じる。グリーンランド沖とウェッデル海が沈み込みの始まる海域。

③　北大西洋北部で沈み込んだ海水は赤道を越えて南下し，ウェッデル海で沈み込んだ水と合流する。その後，南極を周回する東向きの流れをつくり，一部はインド洋で上昇し，ほかに太平洋に入って北上し，赤道を越えて北半球で上昇する流れもある。上昇して表層流になると西向きに流れる(図4－8)。よって，この選択肢が誤りであり，正解である。

④　深層の海水の年齢を測る方法の一つとして，炭素14法(^{14}C法)がある。海面の海水は大気に触れているため，大気との間で二酸化炭素(CO_2)の交換が行われるが，海水が深層に沈み込んで大気に触れなくなると，二酸化炭素に含まれる ^{14}C は壊変して減少する。このことを利用して，深層の海水の年齢を測定する。よ

って，この選択肢は正しい。 $\boxed{24}$ …③

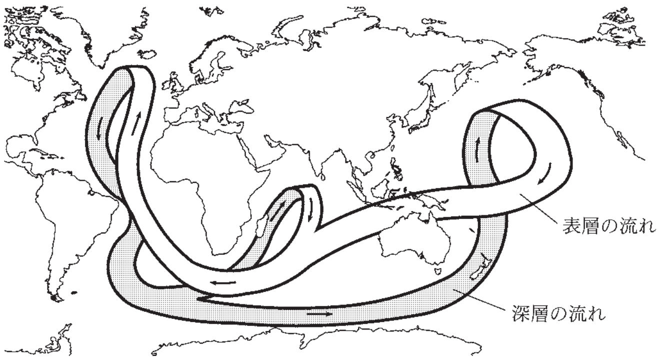


図4－8　地球をめぐる海水の鉛直循環モデル

第5問　宇　宙　問題

A　惑星の運動

地球上で観測した惑星の位置関係を表す惑星現象と，ケプラーの第三法則について出題した。惑星の運動に関する基本事項をしっかりと理解しておきたい。

問1　問題文中に，「衝になるときの日付」とあることから，惑星A，惑星Bはともに外惑星であるとわかる。問題表1より，ある年の衝から，次の衝までの期間，すなわち会合周期を調べると，惑星Aは約766日であるのに対し，惑星Bは約378日である。会合周期(S)は，外惑星の公転周期(P)と地球の公転周期(E)を用いて，

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{E}-\frac{1}{P} \quad \cdots①$$

という式で求められる。

地球の公転軌道に近い惑星ほど公転周期が地球の公転周期に近いため，太陽を中心として公転するときに生じる1日あたりの角度差が小さい。そのため，会合周期は長くなる。地球から遠い外惑星では，1年後に地球が軌道上の元の位置に戻ったときに，軌道上を少ししか公転していないので，会合周期は，地球の公転周期である365日(1年)に近い値となる(表5－1，図5－1)。したがって，会合周期が長い惑星Aは，地球の公転軌道に近い火星が該当し，会合周期が365日に近い惑星Bは土星が該当する。

$\boxed{25}$ …④

衝

外惑星が，太陽と反対方向の位置にある現象。

会合周期

地球から見た惑星と太陽との位置関係が，再び同じ位置関係になるまでの期間。

表5－1　惑星の諸量

公転周期(年)と平均会合周期(日)，太陽からの平均距離(天文単位)

	水　星	金　星	火　星	木　星	土　星	天王星	海王星
公転周期	0.24	0.61	1.88	11.9	29.5	84.3	165
会合周期	116	584	780	399	378	370	367
平均距離	0.39	0.72	1.52	5.20	9.55	19.2	30.1

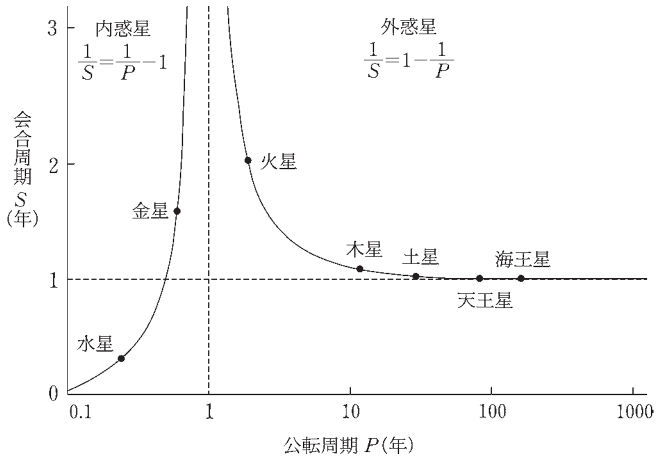


図5－1　地球から観測した会合周期

問2　木星の会合周期が約1.09年であることから，**問1**で示した式①を用いて，木星の公転周期J(年)を求めると，

$$\frac{1}{1.09}=\frac{1}{1}-\frac{1}{J}$$

$$\frac{1}{J}=\frac{0.09}{1.09}$$

$$\therefore\ J \fallingdotseq 12\,(\text{年})$$

木星の太陽からの平均距離をa(天文単位)とし，ケプラーの第三法則を用いると，

$$\frac{a^3}{J^2}=1$$

$$a^3=12^2=144$$

となる。この値に最も近いものは，選択肢のうち，$5^3=125$であり，正解は①となる。

なお，公転周期を「年」の単位で求めるので，計算過程において，木星の会合周期は「日」の単位で示された400日の方ではなく，「年」の単位で示された1.09年の方を用いて計算した方がよい。

ケプラーの法則については，第三法則以外の第一法則，第二法則の内容も確認しておこう。　$\boxed{26}$ …①

B　星間物質

星間物質について，基本的な知識を問う問題を出題した。星間物

ケプラーの第三法則

惑星の太陽からの距離をa(天文単位)，公転周期をP(年)とすると，

$$\frac{a^3}{P^2}=1$$

ケプラーの第一法則

惑星は，太陽を一つの焦点とする楕円軌道を公転する。

ケプラーの第二法則

惑星と太陽を結ぶ線分が，一定期間に通過する面積は一定となる。

質は，恒星のように肉眼でもわかるような天体として観測されるものではないが，恒星の誕生の起源となる重要な物質である。散光星雲や暗黒星雲のようすを，教科書・資料集の写真などで確認しておこう。

星間物質
おもに水素の星間ガスと，固体微粒子の星間塵(じん)から成る。

問3 ア：恒星と恒星のあいだに広がる星間物質は，非常に希薄であり，その分布にはむらがある。分布密度が高い部分は星間雲と呼ばれ，星間雲の中で，さらに分布密度が高い部分には，一酸化炭素(CO)や水素(H_2)などの分子が存在している。星間雲の濃い部分は，自らの重力によって収縮を始め，その中心部の温度が上昇して原始星が誕生する。原始星はまわりのガスを集め，さらに収縮して中心部の温度が上昇し，約1000万Kを超えるほどになると，中心部で水素の核融合反応が始まる。こうして，安定した主系列星へと進化する。

星間雲
星間物質の分布密度が高い部分。

原始星
星間雲が重力で収縮することによって誕生する。赤外線によって観測される。

イ：原始星は，濃い星間物質にまわりを取り囲まれており，可視光線では観測することができないが，赤外線を放射している。波長の長い赤外線は，星間物質に吸収されにくいため，原始星は赤外線によって観測される。 27 …⑤

問4 ①　星間ガスの主成分は，水素とヘリウムである。星間塵(じん)は，珪(けい)酸塩や氷など，0.1 μm 程度の固体微粒子である。よって，この選択肢は誤りである。

②　問3の解説でも述べたように，星間雲の濃い部分では，一酸化炭素(CO)や水素(H_2)などの分子が生成されている。このような分子が特に濃い部分は分子雲と呼ばれる。よって，この選択肢は正しい。

分子雲
星間雲の濃い部分で，分子(一酸化炭素や水素など)が生成されている。

③　暗黒星雲は，濃い星間物質によって，背後にある恒星の光が吸収されたり散乱されたりして，観測者に光が到達せず，真っ暗に見える部分を指す。よって，この選択肢は誤りである。

暗黒星雲
星間雲によって，背後にある恒星の光が遮(さえぎ)られたもの。

④　散光星雲は，星間雲が近くの恒星の光を受けて照らされ，明るく輝いて見える部分を指す。恒星のように水素の核融合反応によって明るく輝いているわけではない。よって，この選択肢は誤りである。 28 …②

散光星雲
星間雲が，明るい恒星の光を受けて照らされたもの。

C　銀河と宇宙

宇宙が膨張しているという説は，当初，反対意見も多く，なかなか認められなかったが，20世紀後半になって，さまざまな観測や研究が進み，認知されるようになった。ここでは，宇宙の膨張に関する観測や銀河についての基本的事項を出題した。

問5　遠方の銀河の光をスペクトルに分光して観測すると，光の波長が本来の波長よりも長い方(赤い方)にずれていることがわかる。これを赤方偏移という。赤方偏移は，銀河がわれわれから遠ざかっていることを示している。波長のずれの大きさが後退速度に比例することから，銀河の後退速度を求めることができる。ハッブルは，銀河の後退速度と銀河までの距離を測定し，両者が比例関

赤方偏移
光の波長が，長い方(赤い方)にずれる現象。銀河が遠ざかっていることを示す。

係にあることを示した。これをハッブルの法則という。

ハッブルの法則は，遠く離れた銀河ほど後退速度が大きいという内容を表している。問題図1の吸収線の波長を比較すると，銀河Xの吸収線の波長は，銀河系の吸収線よりも 0.10 μm 長い方にずれている。銀河Yの吸収線の波長は，銀河系の吸収線よりも 0.04 μm 長い方にずれている。したがって，銀河Xのずれの大きさは，銀河Yのずれの大きさの 2.5 倍(0.10÷0.04＝2.5)であり，ずれの大きさは銀河の後退速度に比例することから，銀河Xの後退速度は銀河Yの後退速度の 2.5 倍であるとわかる。ハッブルの法則より，後退速度と銀河までの距離は比例関係にあることから，銀河Xまでの距離は銀河Yまでの距離の 2.5 倍となる。 $\boxed{29}$ …③

ハッブルの法則
遠方の銀河までの距離を r，銀河の後退速度を v とすると，
$v=Hr$ (H はハッブル定数)

問6 ① 銀河は，宇宙空間に一様に分布しているのではなく，密集した部分が見られる。数十個の銀河が密集している集団を銀河群，さらに，数百〜数千個の銀河が密集している集団を銀河団という。よって，この選択肢は正しい。われわれの銀河系は，40個以上の銀河が密集している銀河群の中に含まれており，これを局部銀河群と呼んでいる。

銀河の集団
銀河群，銀河団

② 「46億年前」は，地球や太陽系が誕生した年代である。銀河系の誕生は，それよりも古い。よって，この選択肢は誤りである。

太陽系(地球)の年齢
約 46 億年前

銀河系の誕生は，銀河系に含まれる最も古い恒星の年齢から，約 130 億年と見積もられているが，まだ確かなことはわかっていない。

宇宙の過去をさかのぼると，ビッグバンと呼ばれる膨張の始まりがあったと考えられている。ビッグバンは，今から約 137 億年前に起こったと考えられており，これが宇宙の年齢とみなされる。よって，この選択肢が誤りであり，正解となる。

ビッグバン
宇宙の始まり

宇宙の年齢
約 137 億年

③ 膨張している宇宙をさかのぼると，その始まりとなる一点は，超高温・高密度の状態であったことがわかる。この宇宙の最初の状態から開始された膨張をビッグバンと呼んでおり，ビッグバン以降，宇宙は膨張し続けている。よって，この選択肢は正しい。

④ ビッグバンの直後，宇宙の温度が低下すると，水素やヘリウムの原子核と電子が結合し，水素原子やヘリウム原子が形成された。よって，この選択肢は正しい。 $\boxed{30}$ …②

最初に形成された原子
水素，ヘリウム

理科総合A

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	④	4	
		問2	2	③	4	
		問3	3	①	4	
	B	問4	4	⑤	4	
		問5	5	②	4	
		問6	6	⑤	3	
			7	①	3	
第1問　自己採点小計					(26)	
第2問	A	問1	8	④	4	
		問2	9	①	4	
	B	問3	10	①	4	
		問4	11	②	3	
			12	④	3	
	C	問5	13	③	4	
		問6	14	③	4	
第2問　自己採点小計					(26)	
第3問	A	問1	15	③	4	
		問2	16	⑦	4	
		問3	17	②	4	
	B	問4	18	②	4	
		問5	19	④	4	
		問6	20	②	2	
			21	③	2	
第3問　自己採点小計					(24)	
第4問	問1		22	②	3	
	問2		23	⑤	3	
	問3		24	①	3	
			25	②	3	
	問4		26	④	3	
	問5		27	①	3	
			28	④	3	
	問6		29	④	3	
第4問　自己採点小計					(24)	
自己採点合計					(100)	

【解説】

第1問　物質と人間生活

問題

問1　炎色反応が橙赤色を示すのは Ca^{2+} である。また，石灰水を白濁させる気体は二酸化炭素だから，殻の成分に CO_3^{2-} が含まれていたと考えられる。したがって，$CaCO_3$ が適する。

$\boxed{1}$ …④

問2　炭酸カルシウムは，塩酸 HCl や酢酸 CH_3COOH などの酸と反応して，二酸化炭素を発生する。

$$CaCO_3 + 2H^+ \longrightarrow Ca^{2+} + H_2O + CO_2$$

酢の主成分は酢酸である。砂糖水と食塩水とみりんは中性である。したがって，ある調味料は酢である。

$\boxed{2}$ …③

問3　酢(CH_3COOH)と卵の殻($CaCO_3$)の反応は，次の化学反応式で表される。

$$2CH_3COOH + CaCO_3 \longrightarrow (CH_3COO)_2Ca + H_2O + CO_2$$

$\boxed{3}$ …①

問4　卵には殻があり，その内側に薄い皮がある。ゆで卵の殻がむきにくくなるのは，皮が殻にくっついてしまっているからである。皮の内部には卵黄とそれをとりまく白身(卵白)のほかに気室とよばれる空間があり，卵を加熱すると気室の水蒸気の量がア増加して，圧力がイ高くなるため，皮が殻にくっついてしまう。場合によっては，殻が破れ，白身があふれ出すこともある。電子レンジで爆発卵が生じるのもこのためである。したがって，ゆで卵をつくる前にあらかじめ卵に針で小さな穴をあけておくのは，水蒸気の逃げ口をつくって，皮の中の圧力のウ上昇を抑えるためである。

$\boxed{4}$ …⑤

問5　生卵からゆで卵への変化は，生卵の成分であるタンパク質が加熱によって凝固するためであり，これはタンパク質の変性とよばれる化学変化の一つである。①の芋は主成分がデンプンであり，③の窯業(ようぎょう)の対象物はセラミックスで，いずれもタンパク質ではない。また，④は，鉄を加熱したあと急冷する「焼き入れ」とよばれる熱処理の操作のことである。②で，生魚が焼き魚に変わるときは，魚のタンパク質が化学変化する。したがって，②が適する。

$\boxed{5}$ …②

問6　**a**　1個60 g の卵500個の質量は，60×500＝30,000 g である。

卵100 g から得られるエネルギーは約600 kJ だから，30,000 g

【ポイント】

物質の検出

Ca^{2+} … 炎色反応が橙赤色

CO_2 … 石灰水を白濁させる

酸の強弱

塩酸＞酢酸＞炭酸

タンパク質の性質

加熱すると凝固する。

から得られるエネルギーは，およそ $600\times\frac{30,000}{100}=180,000$ kJ である。

一方，1日に必要なエネルギーは約10,000 kJだから1年間に必要なエネルギーは，およそ $10,000\times365=3,650,000$ kJ である。したがって，$\frac{180,000}{3,650,000}\times100 \fallingdotseq 5$ %が最も適当である。

$\boxed{6}$ …⑤

b　3日間に x 個の卵を食べるとすると，1個60 gだから，x 個では $60x$ g である。

また，摂取するコレステロールの量は，卵100 gで約420 mgだから，$60x$ g中では，およそ $420\times\frac{60x}{100}$ mg である。

一方，3日間で基準値（1日平均300 mg）の30 %以下に抑えるためには，3日間で摂取するコレステロールの量は，

$300\times\frac{30}{100}\times3=270$ mg 以下でないといけない。

つまり，$420\times\frac{60x}{100}\leqq270$ である。

したがって，これを解いて，$x\leqq1.07\cdots$

$\boxed{7}$ …①

第2問　エネルギー・資源と人間生活　問題

問1　**速さ**が一定の割合で増加しているので，石を手放してから石が地面に衝突するまでの0.57秒間の石の平均の速さは，石を手放してから0.285（＝0.57÷2）秒のときの速さに等しい。言い換えれば，求める速さ v は平均の速さ2.8 m/sの2倍，つまり5.6 m/sである。

$\boxed{8}$ …④

問2　問題文の**問1**中の図1に示されている通り，石の速さは時間がたつにつれて増加する。したがって，同じ時間間隔で考えると，時間がたつほどその間の落下距離は増加する。それを正しく表しているのは①である。

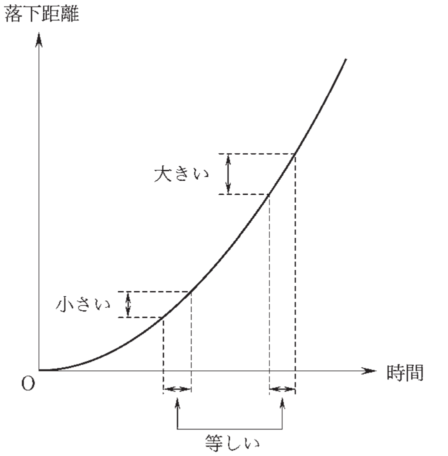
速さ

$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

v〔m/s〕：速さ

Δt〔s〕　：時間

Δx〔m〕：Δt の間の移動距離



$\boxed{9}$ …①

（参考）　自由落下の式

物体を初速 0 で自由落下させたとき，手放してから時間 t がたったときの速さ v は，重力加速度の大きさ g を用いて，

$$v=gt$$

と表される。時間 t の間の平均の速さ $\overline{v}$ は $\overline{v}=\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}gt$ なので，その間の落下距離 y は，

$$y=\overline{v}t=\frac{1}{2}gt^2$$

となる。このことからも，正解の図が①であることがわかる。

ちなみに，地球上での重力加速度の大きさは約 9.8 m/s² であり，**A** の文中の数値はそれに基づいて設定されている。後の**問 4** では，計算を容易にするために，10 m/s² としている。

問 3　点 P の地面からの高さを h，物体の質量を m，点 P で投げ出したときの物体の速さを v_0，地面に達したときの物体の速さを v とする。このとき，**力学的エネルギー保存則**より，次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots①$$

これより，地面に達したときの物体の**運動エネルギー** $\frac{1}{2}mv^2$ は，点 P で投げ出したときの物体の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_0{}^2$ に比べて大きく，点 P での物体の**重力による位置エネルギー** mgh に比べて大きいことがわかる。

$\boxed{10}$ …①

問 4　自由落下の場合に力学的エネルギー保存則の式は，**問 3** の解説中の式①で $v_0=0$ として，

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

となる。これより，地面に達したときの物体の速さとして，

力学的エネルギー保存則

(運動エネルギー)+(位置エネルギー)

=一定

運動エネルギー

$K=\frac{1}{2}mv^2$

K〔J〕　：運動エネルギー

m〔kg〕：質量

v〔m/s〕：速さ

重力による位置エネルギー

$U=mgh$

U〔J〕　：位置エネルギー

m〔kg〕：質量

g〔m/s²〕：重力加速度の大きさ

h〔m〕　：基準面からの高さ

$$v = \sqrt{2gh}$$

が得られるので，ここに数値を代入すると次のようになる。

$$v = \sqrt{2 \times 10 \times 1} \fallingdotseq \underline{4.5}\ \mathrm{m/s}$$

火星での重力加速度の大きさを g' とすると，題意より，

$g' = \dfrac{g}{2.7}$ である。火星上で物体を自由落下させたときに地面に達したときの速さが v になる場合の高さを h' とすると，上と同様に，

$$mg'h' = \frac{1}{2}mv^2$$

が成り立っている。すなわち，

$$mg'h' = mgh$$

だから，h' は，

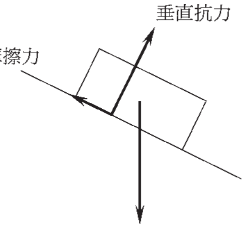
$$h' = \frac{g}{g'}h = 2.7h = 2.7 \times 1 = \underline{2.7}\ \mathrm{m}$$

と求められる。

11 …②

12 …④

問 5　まず物体には鉛直下向きに重力がはたらくことは自明であろう。重力の他に接触している斜面からの力が物体にはたらくが，それは 2 方向に分けて考えることができる。面と垂直な方向の垂直抗力と面に平行な方向の摩擦力である。物体を面に押しつける向きに重力がはたらいているので，それとつりあう垂直抗力が面と垂直方向で上向きにはたらく。また，いま物体は斜面を滑り降りているので，**動摩擦力**は運動の向きと逆で斜面方向上向きにはたらく。以上のことから，正解は③とわかる。



13 …③

問 6　物体の質量を m，物体と面との間の動摩擦係数を μ，地球上での重力加速度の大きさを g，火星上での重力加速度の大きさを g' とする。

地球の水平面上で初速 v_0 で物体を滑らせたときに物体は距離 x だけ滑って静止した。この間に動摩擦**力がする仕事**は動摩擦力が変位と逆向きであることから，$-\mu mgx$ となる。**仕事と力学的エネルギーの変化の関係**より，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 + (-\mu mgx) = 0$$

動摩擦力

$F = \mu N$

F〔N〕：動摩擦力の大きさ

μ　　：動摩擦係数

N〔N〕：面からの垂直抗力

物体が水平面上を滑る場合には，鉛直方向について，重力と垂直抗力がつりあうので，垂直抗力 N の代わりに重力 mg を用いる。

力がする仕事

$W = Fx$

W〔J〕：仕事

F〔N〕：力

x〔m〕：力の向きへの物体の変位

仕事と力学的エネルギーの変化の関係

(前の力学的エネルギー)＋(加えられた仕事)

＝(後の力学的エネルギー)

となる。同様に，火星の水平面上で同じ初速 v_0 で物体を滑らせたときに静止するまでに滑る距離を x' とすると，

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+(-\mu mg'x')=0$$

となる。これら 2 式より，

$$x'=\frac{g}{g'}x$$

が得られるが，$g'<g$ だから，$x'>x$ となる。つまり，x' は x に比べて大きくなり，物体は(動摩擦係数が等しい，つまり接触面の状態が同じならば)火星上の方がより滑りやすくなる。

また，物体は静止するまでに最初にもっていた運動エネルギーを全て失う。最初の運動エネルギーは，初速 v_0 が等しいので，地球上・火星上いずれの場合も $\frac{1}{2}mv_0{}^2$ である。したがって，この運動エネルギーの分が熱エネルギーになるので，火星上で滑らせた場合に発生する熱エネルギーは，地球上で滑らせた場合に発生する熱エネルギーに等しくなる。

$\boxed{14}$ …③

第 3 問　物質と人間生活　問題

問 1　①　正しい。緑色植物は二酸化炭素と水からグルコースと酸素を生成するが，このとき太陽エネルギーを利用するため，この反応は**光合成**とよばれる。生成したグルコースからデンプンや他の有機物が合成されている。

②　正しい。緑色植物は光合成によって有機物をつくるが，動物は植物や他の動物を食物として利用している。動物は光合成によって有機物を合成できないので，私たちの食物はもともとは植物の光合成によってつくられたものといえる。

③　誤り。光合成を行って有機物をつくる生物を生産者，生産者のつくった有機物を直接または間接的に利用する生物を消費者という。6 つのうち，光合成を行う生産者は，草木，藻類，植物性プランクトンの 3 つである。動物性プランクトンは植物性プランクトンを，小魚はプランクトンを，大魚は小魚をいずれも食物として利用しているので消費者である。

④　正しい。動物は，植物が生産した有機物を食物として摂り入れ，生命活動を行っている。植物が有機物を合成する過程は光合成であり，太陽エネルギーを化学エネルギーに変換する過程といえる。したがって，動物や植物が行う生命活動は，すべて，太陽エネルギーから変換された化学エネルギーを利用しているといえる。

$\boxed{15}$ …③

問 2　生物体内では，おだやかな条件のもとで数多くの化学反応が効率よく行われている。それらの反応で触媒としてはたらいてい

光合成

- 緑色植物が行う。
- 二酸化炭素と水からグルコースと酸素を生成する。
- 太陽エネルギーが化学エネルギーに変換される。

る物質が**酵素**である。酵素は特定の物質に対してしかはたらかず，例えば，アミラーゼはデンプンにのみはたらき，ア<u>ペプシン</u>はタンパク質にのみはたらく。これを酵素の基質特異性という。また，酵素はイ<u>タンパク質</u>からなる物質であり，それぞれの酵素には最もよくはたらく温度(最適温度)や，最もよくはたらく水素イオン濃度(最適 pH)がある。体内ではたらく酵素の最適温度は通常ウ<u>体温付近</u>である。

酵素
- 生体内で触媒としてはたらく。
- 基質特異性
  - アミラーゼ(デンプンを分解)
  - ペプシン(タンパク質を分解)
- 最適温度
- 最適 pH

$\boxed{16}$ …⑦

問 3　水に溶けた DDT は，プランクトンの体内で 800 倍に濃縮され，そのプランクトンを食べたハマグリの体内でさらに 10 倍に濃縮される。したがって，ハマグリの体内での DDT 濃度は初めの水における DDT 濃度の $800\times10=8000$ 倍になっている。したがって，ハマグリの体内での DDT 濃度が 4.0×10^{-7} g/L であるとすると，初めの水における DDT 濃度は $4.0\times10^{-7}\times\frac{1}{8000}=5.0\times10^{-11}$ g/L である。

$\boxed{17}$ …②

問 4　①　誤り。**植物繊維**である木綿の成分はセルロースであり，デンプンではない。

②　正しい。植物繊維である麻の成分はセルロースである。

③　誤り。**動物繊維**である絹の成分はフィブロインというタンパク質であり，ヒトの髪の毛の成分はケラチンというタンパク質である。

④　誤り。動物繊維である羊毛の成分はケラチンというタンパク質である。羊毛を燃やすとちぢれながら徐々に燃える。燃やすとくさい臭いがする。

繊維
- 植物繊維(木綿，麻)…セルロース
- 動物繊維(絹，羊毛)…タンパク質

$\boxed{18}$ …②

問 5　**ナイロン**は，細く，しなやかで，美しい絹に似た繊維を人工的につくろうとして合成された繊維である。1935年にカロザースによって，化学繊維として最初に発明された。

ナイロン
世界で最初に発明された化学繊維

$\boxed{19}$ …④

問 6　**a**　ポリエチレンの成分元素は炭素と水素であり，ポリ塩化ビニルの成分元素は炭素と水素と塩素であり，フェノール樹脂の成分元素は炭素と水素と酸素である。したがって，燃焼させると，ポリエチレンとフェノール樹脂からは二酸化炭素と水が生じるが，ポリ塩化ビニルからは二酸化炭素と水とともに塩化水素や塩素なども生じる。

$\boxed{20}$ …②

b　多くのプラスチックは熱に弱く(熱可塑性)，ナイロンや PET は熱可塑性樹脂である。それに対して，加熱しても軟らかくならないプラスチック(熱硬化性)があり，メラミン樹脂は熱硬化性樹脂の一つである。

プラスチックの熱的性質
- 一般的に熱可塑性
- 熱硬化性樹脂(メラミン樹脂など)

$\boxed{21}$ …③

第 4 問　エネルギー・資源と人間生活　問題

問 1　携帯電話に限らず，電気回路の導線中を動いているのは電子である。

$\boxed{22}$ …②

問 2　端子 AB 間にかけた電圧を V，一つの抵抗の抵抗値を R とする。

回路 a を流れる電流 I_a は，**オームの法則**より，

$$I_a=\frac{V}{R}$$

である。

回路 b の合成抵抗 R_b は，$\frac{1}{R_b}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}$ より，$R_b=\frac{R}{2}$ だから，流れる電流 I_b は，

$$I_b=\frac{V}{R_b}=\frac{2V}{R}$$

となる。

回路 c の合成抵抗 R_c は，$R_c=R+R=2R$ だから，流れる電流 I_c は，

$$I_c=\frac{V}{R_c}=\frac{V}{2R}$$

となる。

これらより，流れる電流が最大なのは回路 b であることがわかる。

また，回路 a， b， c にかかる電圧は等しいので，**ジュールの法則**より，回路全体での消費**電力**は流れる電流が大きいほど大きくなる。したがって，回路全体での消費電力が最大なのも回路 b ということになる。

$\boxed{23}$ …⑤

問 3　消費電力が $P=600$ W であり，電圧が $V=100$ V なので，ジュールの法則より，流れる電流の大きさは，

$$I=\frac{P}{V}=\frac{600}{100}=6\text{A}$$

となる。消費された**電力量**（電気エネルギー）は他の形態のエネルギーに変換されるが，電熱線の場合には，ほとんどが熱エネルギーになる。抵抗線で発生する熱のことをジュール熱という。

$\boxed{24}$ …①
$\boxed{25}$ …②

問 4　時刻 $t=\frac{1}{4}T$ と $\frac{3}{4}T$ には，流れる電流の大きさがともに I_0 で最大になっている。したがって，オームの法則（$V=RI$）より，かかっている電圧も最大になっているので，**a** は正しい。

消費電力 P は，抵抗値 R と流れる電流 I を用いて，$P=RI^2$

オームの法則

$V=RI$
V〔V〕：電圧
R〔Ω〕：抵抗値
I〔A〕：電流

ジュールの法則

$P=VI=RI^2=\frac{V^2}{R}$
P〔W〕：消費電力
V〔V〕：電圧
I〔A〕：電流
R〔Ω〕：抵抗値

電力量と電力

電流が流れて仕事や熱が生じたとき，消費された電気エネルギーの総量を電力量という。1 秒間に消費する電力量を電力（あるいは消費電力）という。

$W=Pt$
W〔J〕：電力量
P〔W〕：電力
t〔s〕：時間

と表され，I が負になっても消費電力は正である。つまり，電流がどちら向きに流れようとも電力は消費されるということである。したがって，一周期にわたる消費電力の平均値も正であり，0にはなれないので，**b** は誤り。

時刻 $t=0$ から $\frac{1}{8}T$ までと，時刻 $\frac{1}{8}T$ から $\frac{1}{4}T$ までは時間間隔が等しい。しかし，$t=0$ から $\frac{1}{8}T$ までに流れる電流は，$\frac{1}{8}T$ から $\frac{1}{4}T$ までに流れる電流よりも小さいので消費電力は小さい。したがって，$t=0$ から $\frac{1}{8}T$ までの消費電力量は，$\frac{1}{8}T$ から $\frac{1}{4}T$ までの消費電力量よりも小さいことになるので，**c** は誤り。

$\boxed{26}$ …④

問5　風力発電，水力発電，太陽光発電に共通する特徴は，①の「非蓄積型エネルギーを用いている」ことと，③の「発電の際に二酸化炭素を排出しない」ことである。しかし，原子力発電も③の特徴をもつが，原子力発電は **a** の枠から外れている。したがって，**a** の特徴としては，①の「非蓄積型エネルギーを用いている」を選ばなければならない。

風力発電，水力発電，火力発電，原子力発電が共通にもち，太陽光発電がもたない **b** の特徴とは，④の「気体や液体が羽根車(タービン)を回すことによって発電する」である。風力発電や水力発電では空気や水が羽根車(タービン)を回しているのは説明するまでもないことだろう。火力発電や原子力発電でも，石炭や石油などの燃料の燃焼やウラン燃料の原子核分裂によって生じた熱が水蒸気を発生させ，その水蒸気が羽根車(タービン)を回して発電しているのである。太陽光発電では光のエネルギーを直接電気エネルギーに変換している。

②の「化石燃料を用いている」にあてはまるのは，火力発電であり，⑤の「天候の影響を受けない」にあてはまるのは，火力発電と原子力発電である。

$\boxed{27}$ …①

$\boxed{28}$ …④

問6　燃料電池とは，水素と酸素が反応して水になるときに化学エネルギーが電気エネルギーに変換されることを用いて発電する電池である(④が正解)。「燃料」電池という名称がついているが，石油などを燃やして発電するわけではない(①は誤り)。また，酸素と反応させる水素をつくる過程で様々な操作や反応を必要とし，エネルギーも消費するし二酸化炭素も発生するが，燃料電池自体での発電では水素と酸素が反応して生成物としては水しか生

じないので，クリーンな発電方法といわれている(②は誤り)。さらに，据え置き用だけではなく，車載用の小型燃料電池の開発が進められている(③は誤り)。

$\boxed{29}$ …④

理科総合B

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	設問		解答番号	正解	配点	自己採点
第1問	A	問1	1	5	3	
		問2	2	3	3	
		問3	3	4	3	
			4	2	4	
	B	問4	5	3	4	
		問5	6	5	4	
		問6	7	4	4	
第1問　自己採点小計					(25)	
第2問	A	問1	8	3	3	
		問2	9	1	3	
		問3	10	2	3	
		問4	11	2	4	
	B	問5	12	5	4	
		問6	13	3	4	
		問7	14	3	4	
第2問　自己採点小計					(25)	
第3問	A	問1	15	5	3	
		問2	16	3	3	
		問3	17	7	3	
			18	1	3	
	B	問4	19	3	3	
		問5	20	1	3	
		問6	21	6	4	
		問7	22	1	3	
第3問　自己採点小計					(25)	
第4問	A	問1	23	3	4	
		問2	24	2	4	
		問3	25	7	4	
	B	問4	26	5	3	
		問5	27	4	3	
		問6	28	2	3	
		問7	29	1	4	
第4問　自己採点小計					(25)	
自己採点合計					(100)	

【解説】

第1問　自然の観察　問題

A　野外観察

野外調査に関する問題である。今回は，周囲 10 km ほどの特徴的な島をとりあげ，地図の見方，地質や断層，化石について出題した。

問1　国土地理院から発行されている地図で，よく利用されるものは2万5千分の1と，5万分の1の地形図である。今回は，2万5千分の1の地形図を使用した。

2万5千分の1の地形図上で 16 cm であるから，実際はその2万5千倍である。

$16\ \text{cm} \times 25000 = 400000\ \text{cm} = 4\ \text{km}$

したがって，⑤が正解である。　1 …⑤

問2　この日は秋分の日なので，太陽は6：00頃に真東から昇って，12：00頃に南中し，18：00頃に真西に沈んでいく。太陽光の方向を問題図1の地図に記入したものを図1－1に示す。

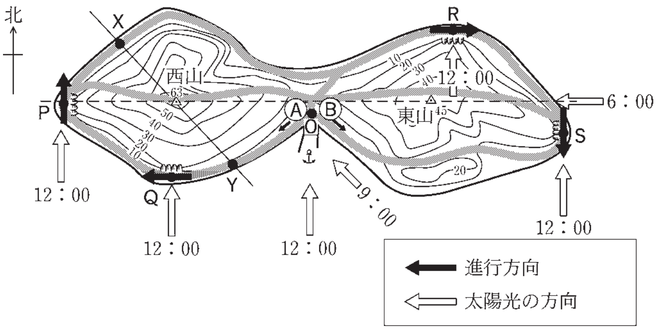


図1－1　　進行方向と太陽の方向の変化

O点から出発したときは9：00なので，太陽の光は南東の方向から差し込んでいる(図1－1)。その方向を左に見ながら歩き始めたのだから，観測者はⒶのルートをとったと考えられる。Ⓑならば，太陽に向かって歩くことになる。

続いて，12：00になると，太陽は南中するので，太陽の光は真南から差し込んでいる(図1－1)。観測者は島の周りを右回りに回っているので，Q点では左上方に見え，P点では真後ろに見え，R点では右上方に見え，S点では進行方向の真正面上方に見えている。したがって，このときの位置はR点であり，③が正解である。　2 …③

問3　a　地層に含まれている化石は，その地層の堆積(たいせき)当時の情報を示している。このうち，地質時代の推定に役立つのは「示準化石」であり，堆積当時の環境を推定するのに役立つ化石を「示相化石」という。地質時代は，動物の変遷を基準に分類されている。したがって，特定の時代に限られて生息した生物の化石は地

【ポイント】

春分・秋分の日の太陽の方向

6：00頃　真東から昇る
12：00頃　南中
18：00頃　真西へ沈む

示準化石

地層の地質時代を推定するのに役立つ化石。

示相化石

堆積当時の環境を推定するのに役立つ化石。

層の時代を示す。示準化石として有効な条件は，短期間に広い地域に多数生息した生物で，離れた地域の地層の時代を同定するのに役立つ。ビカリアは新生代第三紀，アンモナイトは中生代の示準化石である。

図１－２　　示準化石

地層が連続的に堆積している重なりを整合，下位層と上位層の間に堆積の中断があり，上下の地層の時代が不連続であったり，その傾斜の方向が異なる重なりを不整合という。問題の上位層と下位層は堆積の時代も異なり，傾斜も異なることから，不整合と考えられる。

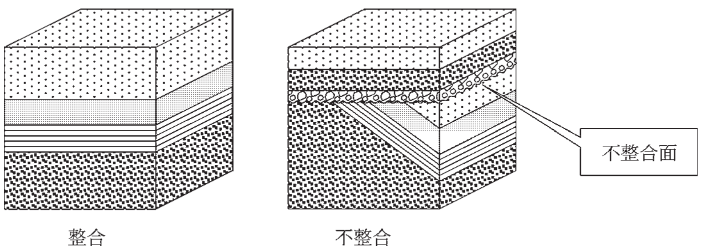


図１－３　　整合と不整合

3 …④

b　東西方向の断面を推定する。まず断層の方向を考える。図１－４は，単純な地形で，断層が垂直なときと傾斜しているときに地表に現れる断層を示した図である。

整合と不整合

下位層の堆積と上位層の堆積が連続している重なりを整合，その間が不連続である重なりを不整合という。

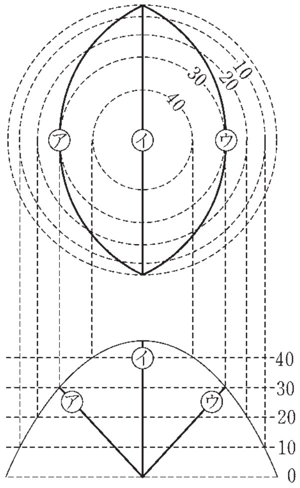


図１－４　　断層の断面図と平面図

図１－４から明らかなように，断層が㋐や㋒のように傾斜しているときは凹凸のある地表では曲線で現れ，㋑のように垂直な断層は地表に直線で現れる。

問題図１では，断層は海岸沿いの道路のＸ点，Ｙ点と西山頂上の直線上に見られることから，断層面が図１－５のように，垂直面であることがわかる。もし，断層面が傾斜していたとすると，標高の高い西山頂上では海岸沿いのＸとＹを結ぶ直線よりも，位置がずれて現れるはずである。

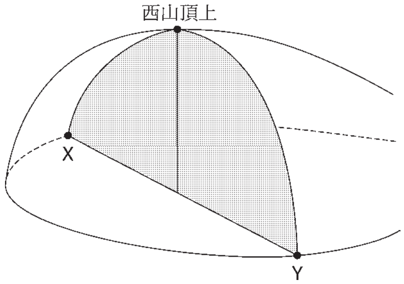


図１－５　　断層面

次に，下位層の傾斜方向を考える。下位層の層理面は問題図２からわかるように，東西方向の断面では，下位層の層理面が水平に現れ，南北方向の断面では，北方向へ傾斜しているので，東西方向の断面では水平方向に現れることが推定される。したがって，正解は②である。　$\boxed{4}$ …②

B　生物の分布調査

外来生物の分布調査に関する問題を出題した。

問４　日本に定着した外来生物により，様々な問題が発生している。例えば，在来生物に近縁な外来生物が侵入した場合，在来生物との間に雑種が生じ，在来生物の遺伝的な固有性が失われる遺伝子汚染が起こることがある。また，外来生物による在来生物の

外来生物の問題点

捕食による在来生物の減少・絶滅
競争による在来生物の減少・絶滅
遺伝子汚染

捕食や，在来生物と類似した生活環境や食物を必要とする外来生物と在来生物との間に競争が起こり，在来生物が競争で負けるなどして，在来生物が絶滅することがある。 5 …③

問５　1998年ではアライグマが見られず，2008年ではアライグマが見られる区画がアライグマが新たに進出した区画となる。このような区画は全部で20区画ある。このうち森林は11区画，市街地・農耕地は９区画である。したがって，キ には45％が入る。また，この市街地・農耕地のうち1998年の時点で市街地・農耕地であった区画はない。したがって，ク は０が入る。1998年にアライグマが見られたが，2008年ではアライグマが見られない区画は３区画ある。よって，ケ には３が入る。 6 …⑤

問６　選択肢の生物のうち外来生物はオオクチバス，ウシガエル，カミツキガメの３種である。

オオクチバスは，通称ブラックバスとも呼ばれ，1925年(大正14年)に北米から移入された。1980年代からレジャーとしての釣りの広がりとともに，急速に生息域を広げていった。

ウシガエルは北米から中米原産の大型のカエルである。食用として輸入された後，日本各地で定着している。在来のカエルのオタマジャクシを捕食したり，直接捕食しなくても活発な食欲により競争に勝ち，在来のカエルが減少する要因になっていると考えられている。

カミツキガメは甲羅の長さが50 cmにもなる大型のカメで，湖沼に生息する。日本には北米からペット用として輸入され，自然生態系に逃げ出したものと考えられている。

なお，シマヘビとタガメは在来生物であり，外来生物ではない。 7 …④

代表的な外来生物

アライグマ，マングース，オオクチバス，ホテイアオイ，オオブタクサなど

第２問　地球と生命の移り変わり　問題

A　プレートと大地形

地形がテーマとなる場合は２種類ある。一つは風化・侵食・堆積(たいせき)などに関連した地形，もう一つはプレート運動に関連した大地形である。今回は後者から出題した。

問１　海嶺(かいれい)，海溝はプレートとは密接なかかわりがある。特に海嶺は，その発見が20世紀地球科学上の最大の発見といわれるほど，その後の地学に大きな影響を与えた。陸上での規模を上回るほどの山脈が海底に分布していたのである。その長さは地球をぐるりと一周するほどであり，山脈の幅のスケールは大きい所で1000 kmにも達する。とはいえ，ほとんどが海面下であり，海底からの高さは3 km程度である。したがって，幅100 kmの図ならば高さはその1/30程度である。その頂上部は割れ目があり，マントル物質の上昇口となっている。同様に考えれば，海溝は深さ10 km前後であり，やはり100 kmの1/10程度である。ここは

海嶺

離れるプレート境界

海底山脈の頂上部

マントル物質の上昇口

海溝

近づくプレート境界

沈み込み帯

プレートの沈み込みの場である。 $\boxed{8}$…③

プレートとアセノスフェア
硬さ軟らかさの違い

問2　プレート(リソスフェア)とその下のアセノスフェアとの違いは物質の違いではなく，硬さの違いにあることをしっかり押さえておこう。プレートは硬く，アセノスフェアは軟らかいのである。プレートは硬さゆえに変形しにくく，アセノスフェアが軟らかいのは高温のせいである。 $\boxed{9}$…①

トランスフォーム断層
すれ違うプレート境界

問3　トランスフォーム断層は，横ずれ断層である。ただ，一般の横ずれ断層と異なるのは，その両端に海嶺(ごくまれには海溝)という地形があることである。もともとずれて存在していた海嶺でマントル物質が上昇し，両側に広がっていく部分である。これはプレートがすれ違う境界でもある。このトランスフォーム断層の延長した直線を断裂帯と称しているが，この部分を境に明らかに地形の段差が見られる。興味のある人は海底世界地図で，この直線を確認するとよい。海嶺に直交するように走っていることがわかる。ただし，この断裂帯の両側が互いに逆に移動しているのではなく，逆に移動しているのはトランスフォーム断層部分に限られる。したがって，地震は断裂帯上すべてで起こるのではなく，トランスフォーム断層上だけに限られる(図２－１)。 $\boxed{10}$…②

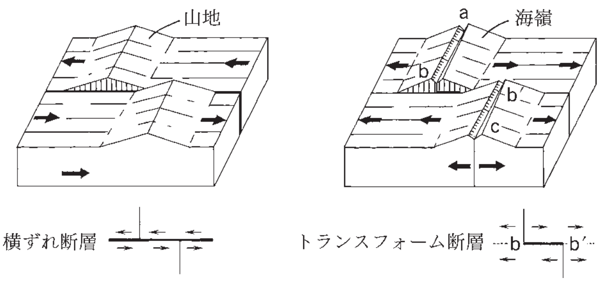


図２－１　横ずれ断層とトランスフォーム断層
b－b′ がトランスフォーム断層で b－b′ を含む直線が断裂帯。地震は動きが逆方向となる b－b′ 上でしか発生しない。

地震
すべてのプレート境界で起きる。
火山活動
近づく境界，離れる境界，ホットスポットで起きる。
大山脈
近づく境界で起きる。海溝付近と衝突帯。

問4　地震活動が起こるのは，プレート境界すべてである。プレート境界ではプレートが互いに異なる方向に移動するからである。一方，火山活動が活発なのはプレート境界のうち，近づく境界と離れる境界に限られる。もう一つは，いわゆるホットスポットである。また，造山帯の大山脈の形成は近づく境界に限られる。ただし，２種類ある。一つは海溝付近で，大陸プレートの下に海洋プレートが沈み込む場所，もう一つは大陸プレート同士が衝突する場所である。 $\boxed{11}$…②

B　生物の陸上進出

生物の陸上進出に関する知識問題とグラフの読解問題を出題した。

問5　生物は約40億年前に海で誕生したと考えられている。この時

期の海中には有機物が多く存在していたので，これを栄養分として利用する生物が生息していたが，その後，光合成により二酸化炭素と水から有機物を合成するラン藻(シアノバクテリア)類が出現した。この時期にラン藻類が出現したことは，ラン藻類が分泌する粘液によって泥などの微粒子が沈着してできるストロマトライトが化石として地層から産出することからわかっている。なお，縞(しま)状鉄鉱層とは，ラン藻類の光合成により放出された酸素が海水中の鉄と反応して酸化鉄となり，これが海底に沈殿して生じたものである。光合成によってつくられた酸素は大気中に蓄積していき，酸素濃度が増加するとオゾン層が形成されるようになった。オゾン層は，太陽光のうち生物にとって有害な紫外線を吸収するので，オゾン層が発達することで地表面に到達する紫外線量が減少し，生物の陸上進出が可能となった。 $\boxed{12}$ …⑤

問6　陸上は水中と比べて環境が大きく異なるので，動物や植物が陸上に進出する過程で，様々な適応が起こった。

Ⅰ　陸上で生活する植物は，土壌(どじょう)中の水を吸収し，地上部へ輸送する必要がある。このための組織として，シダ植物と種子植物は維管束をもつ。よって，正しい。

Ⅱ　受精を行う場合，精子は水中を泳いで卵に到達し受精する。そのため体外で受精を行うには，水が多く必要となり，陸上生活に不利となる。しかし，種子植物では胚珠(将来種子になる部分)の内部で受精を行うので，より陸上生活に適応している。よって，誤りである。

Ⅲ　陸上に卵を産む動物では，胚を乾燥から守る必要がある。そのため硬い殻(から)をもつ卵を産むので，正しい。 $\boxed{13}$ …③

問7　原始地球の大気に酸素は含まれていなかったが，先カンブリア時代に出現した光合成を行う生物により酸素が大気中に放出され，大気中の酸素濃度は増加していった。古生代になると，大気中の酸素濃度が高くなり，これに伴ってオゾン層が発達した。オゾン層は生物にとって有害な紫外線を吸収するので，オゾン層の発達に伴い，陸上への紫外線の照射量が減少し，生物の陸上への進出が可能となった。植物は古生代のシルル紀に陸上進出し，脊(せき)椎(つい)動物は古生代のデボン紀に陸上進出した。

大気中の酸素濃度の増加率に関しては，問題図１のグラフから考える。問題図１の縦軸は１目盛りが10倍を示す対数目盛であり，グラフの傾きが増加率を示している。よって，グラフの傾きが最も大きくなる時期を読み取ればよい。問題図１でグラフの傾きが最も大きいのはデボン紀から石炭紀にかけてであり，この時期に大気中の酸素濃度は10倍以上に増加している。 $\boxed{14}$ …③

光合成
光エネルギーを用いて，二酸化炭素と水から有機物を合成

ストロマトライト
ラン藻類が分泌する粘液によって泥などの微粒子が沈着してできるドーム型の岩塊

体内受精
水を必要としない。

体外受精
水を必要とする。

オゾン層
太陽光のうち，生物にとって有害な紫外線を吸収する。

第3問　多様な生物と自然のつり合い

問題

A　温帯低気圧

日本列島の天気に大きく影響を及ぼす低気圧には，熱帯低気圧と温帯低気圧がある。熱帯低気圧は低緯度の熱帯で発生する低気圧で，そのうち最大風速が 17.2 m/秒 以上のものを台風という。夏の終わりから秋にかけて，日本列島に大きく影響を及ぼすことが多い。

温帯低気圧は，日本列島がある中緯度の温帯で発生し，おもに春や秋には移動性高気圧と交互に日本列島付近を通過し，周期的に天気を変化させていく。今回は，この温帯低気圧について出題した。

問1　偏西風が吹く中緯度地域で，高緯度側の冷たい大気と低緯度側の暖かい大気の温度差が大きくなると，偏西風が大きく蛇行し，温度差を解消しようとする。このとき，低緯度側の暖気が高緯度側へ，高緯度側の寒気が低緯度側へ吹き込んで，やがて温帯低気圧になる。

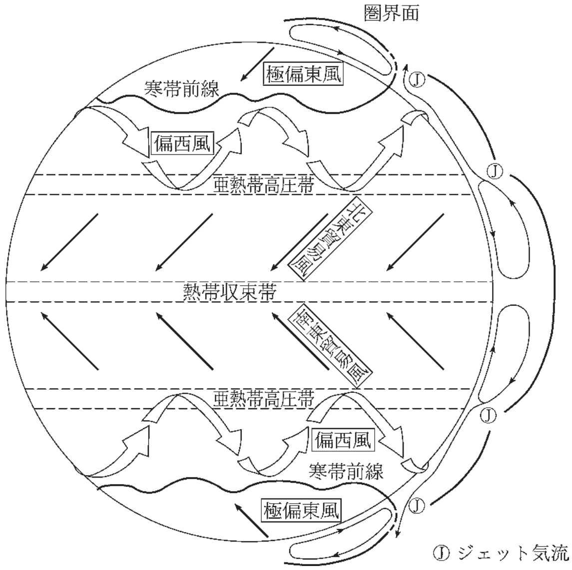


図３－１　　大気の循環

図３－１に示すように，地球を取り囲む大気は，いくつかに分かれて大きく循環している。赤道付近から緯度30度付近までは，貿易風による循環で，赤道付近で上昇した大気は緯度30度付近で下降して高圧帯を形成する。その下降した大気が再び赤道付近へと戻る流れが貿易風である。一方，極付近でも下降気流から極偏東風になる循環が見られる。この間にある中緯度地域では，偏西風が大きく波打ちながら地球を取り巻くように吹いている。このような循環で，低緯度側の熱を高緯度へと輸送するのに役立っている。

15 …⑤

熱帯低気圧

熱帯海上で発生

ほぼ円形の等圧線

前線は伴わない

最大風速 17.2 m/秒 以上は台風

温帯低気圧

中緯度で発生

前線を伴うことが多い

問2　南北両半球ともに，低気圧は上昇気流，高気圧は下降気流となる。よって，選択肢は③か④となる。また，地表を吹く風は，南北半球によって違いが生じる。北半球では，低気圧は左回り(反時計回り)に吹き込み，高気圧は右回り(時計回り)に風が吹き出す(図３－２)。一方，南半球では，低気圧は右回りに，高気圧は左回りに風が吹く。これらの違いは，風が吹くときにはたらく転向力によるものである。

したがって，正解は③である。　$\boxed{16}$ …③

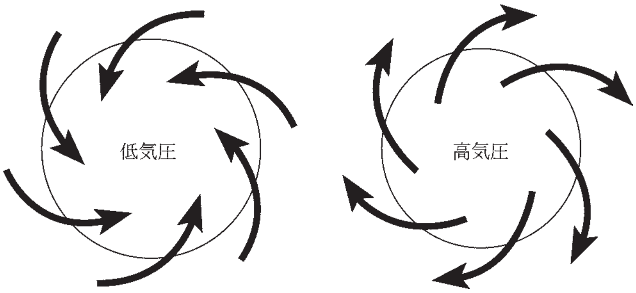


図３－２　　北半球の低気圧・高気圧の風

問3　図３－３に北半球での温帯低気圧の特徴を示す。

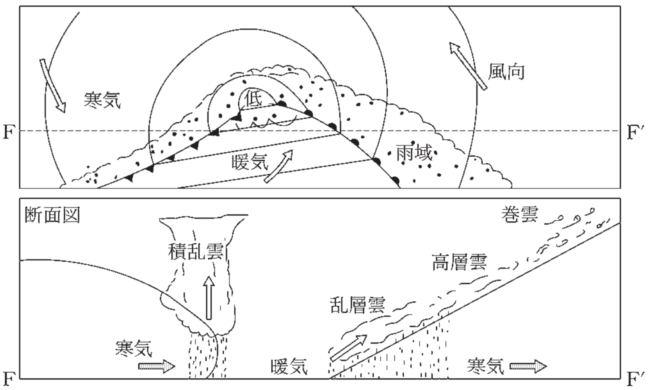


図３－３　　温帯低気圧の構造

温帯低気圧は前線を伴うことが多く，北半球では，中心から南西方向に寒冷前線，南東方向に温暖前線がのびている。問題図１において，前線Aは寒冷前線であり，前線Bは温暖前線である。

a　温帯低気圧は，偏西風の影響で西から東へと移動する。よって，問題のX地点で通過した前線は寒冷前線である。寒冷前線は寒気が暖気の下にもぐり込むように進んでくる地表での境界線である。

Ⅰ　寒冷前線が通過すると，気温は低下する。したがって，正しい記述である。

Ⅱ　寒冷前線付近には積乱雲が発生しやすい(図３－３)。積乱雲が発生する地域では短時間に激しい雨を降らせる。したがって，正しい記述である。

低気圧
上昇気流
北半球…左回り
南半球…右回り

高気圧
下降気流
北半球…右回り
南半球…左回り

寒冷前線の通過
気温が低下
短時間の激しい雨
北寄りの風に変わる。

温暖前線の通過
気温上昇
しとしと続く雨
南寄りの風に変わる。

Ⅲ　図３－３で示したように，寒冷前線が通過する直前では，風は南西方向から吹く。さらに寒冷前線が通過後では，風向は北西方向に変わる。したがって，正しい記述である。

よって，正解は⑦である。　17 …⑦

b　図３－３に示したように，寒冷前線上には積乱雲ができやすいが，暖気が緩やかに寒気の上をはいあがっていく温暖前線上にはいくつかの雲が発生する。これらは下部から乱層雲，高層雲，巻雲である。

低気圧の移動に伴って，地上での雲の見え方は，温暖前線が接近してくると，まず雲が見える最も高いところに巻雲が見え，徐々に低い位置の高層雲に移り変わり，やがて上空を乱層雲が覆うと，しとしととした雨が降ってくる。　18 …①

寒冷前線に伴う雲
積乱雲

温暖前線に伴う雲
乱層雲・高層雲・巻雲

B　生物の環境への適応

生物の環境への適応に関して，ダーウィンフィンチを題材に出題した。

問４　①　五界説では，生物は大きく五つの界に分けられている。原核生物界(モネラ界)はネンジュモなどのラン藻(シアノバクテリア)類と大腸菌などの細菌類を含む。原生生物界はゾウリムシなどの原生動物と，アオサ・コンブ・ワカメといった藻類などを含む。菌界はマツタケなどのキノコの仲間やアオカビなどのカビの仲間を含む。植物界はコケ植物，シダ植物，種子植物を含む。動物界には脊椎(せきつい)動物や節足動物などが含まれる。よって，正しい。

五界説
生物を原核生物界，原生生物界，菌界，植物界，動物界の五つに分ける。

②　共通した形態をもつなど他の生物とは明らかに区別される生物群を種とする。一般的に同種の個体間では，交配により生殖能力をもつ次世代をつくることができる。特徴の類似した種は属としてまとめられ，類似した属は科としてまとめられる。さらに高次な分類階級として，目・綱・門・界が置かれている。よって，正しい。

種
生物の基本単位。交配により生殖能力をもつ次世代をつくることができる。

③　陸上植物には，イヌワラビなどのシダ植物，およびマツ・イチョウなどの裸子植物とサクラ・アサガオなどの被子植物からなる種子植物以外に，スギゴケなどのコケ植物が含まれるので，誤りである。

陸上植物
コケ植物，シダ植物，種子植物

④　背骨(脊椎骨)をもたない動物が無脊椎動物，背骨をもつ動物が脊椎動物であり，脊椎動物には魚類・両生類・は虫類・鳥類・ほ乳類などが含まれるので，正しい。　19 …③

脊椎動物
魚類，両生類，は虫類，鳥類，ほ乳類など

問５　生物は，種により形態や生活様式が異なっているが，どの生物も細胞を基本単位として構成されており，生物が行う生命活動はそれぞれの細胞により営まれている。また，遺伝子の本体としてDNAをもっており，生物の形質はその生物が保持する遺伝子により決定する。さらに，生物は呼吸によって有機物を分解しエネルギーを得ている。　20 …①

問6　問題図４から，1976年の成鳥の個体数(▒で示されたグラフの高さ)に対する，干ばつ後も生存していた個体数(■で示されたグラフの高さ)の割合を計算する。問題図４から1976年の成鳥の個体数と，干ばつ後も生存していた個体数を読み取り，生存率を計算すると下の表３－１のようになる。

表３－１

くちばしの厚さ（mm）	1976年の成鳥の個体数（個体）	干ばつ後も生存していた個体数（個体）	生存率（%）
7.0～ 7.5	2	0	0
7.5～ 8.0	13	2	15
8.0～ 8.5	30	3	10
8.5～ 9.0	46	3	7
9.0～ 9.5	43	7	16
9.5～10.0	40	9	23
10.0～10.5	26	10	38
10.5～11.0	3	2	67

よって，くちばしの厚さが10.5～11.0 mmの成鳥の生存率が最も高く，その値は67％である。　$\boxed{21}$…⑥

問7　Ⅰ　問題図４より，1976年に存在していた成鳥のうち，干ばつの翌年である1978年での生存率は，くちばしの厚い個体の方が高い傾向にある。問題文にあるように，干ばつ時には大きな硬い殻(から)に入ったハマビシの果実が食料となっており，くちばしの厚い個体ほど捕食に有利であり，多くの個体が生き残ったと考えられる。よって，正しい。

Ⅱ　問題図４の1976年に存在していた成鳥のくちばしの厚さと，問題図５の1976年に生まれた個体のくちばしの厚さを比較すると，グラフの形状に大きな相違は見られない。よって，平均値に大きな相違は見られないと考えられ，正しい。なお，参考までに1976年の成鳥と1976年に生まれた個体のくちばしの厚さの平均値を求めると，以下のようになる。問題図４や図５では，くちばしの厚さが7.0～7.5 mmのように階級になっている。このような場合には，各階級の中央値を使って平均値を求める。例えば，くちばしの厚さ7.0～7.5 mmの階級の中央値は$(7.0+7.5)\div2=7.25$(mm)である。問題図４から1976年の成鳥のくちばしの厚さの平均値を求めると，$(7.25\times2+7.75\times13+8.25\times30+8.75\times46+9.25\times43+9.75\times40+10.25\times26+10.75\times3)\div203\fallingdotseq9.12$ (mm)となり，問題図５から1976年に生まれた個体のくちばしの厚さの平均値を求めると，$(7.25\times3+7.75\times8+8.25\times14+8.75\times26+9.25\times16+9.75\times10+10.25\times3+10.75\times3+11.25\times2)\div85\fallingdotseq8.91$ (mm)となり，両者に大きな相違が見られないことが分かる。

Ⅲ　問題図５の1976年に生まれた個体のくちばしの厚さと，1978年に生まれた個体のくちばしの厚さを比較すると，1978年に生まれた個体のくちばしの方が厚い。よって，正しい。

$\boxed{22}$ …①

第４問　自然環境と人間の活動

問題

A　森林破壊

この分野では，土壌（どじょう），大気，水質，森林などの環境と生物の関係が出題されている。今回は森林の破壊を題材とし，グラフを読む問題を交えて出題した。

問１　グラフの元となったデータを表４－１に示した。

Ⅰ　問題図１の縦軸は森林面積であるから，グラフをそのまま読めばよい。南米の方がアフリカよりも若干減少面積が大きいので，この文は誤りである。減少面積は，表４－１の場合では，アフリカが 0.75×10^6 km²，南米が 0.82×10^6 km² である。

Ⅱ　減少率であるから，全体に対しての割合を判断しなければならない。南米と比較して，アフリカの森林面積は狭い。そのアフリカの森林面積の減少量は，南米よりも若干小さい程度であるから，アフリカの方が減少率は大きいと判断できる。したがって，この文は誤りである。表４－１では，アフリカが 10.0 ％，南米が 8.7 ％の減少率である。

Ⅲ　森林面積が増加しているのは，アジアとヨーロッパである。両地域の増加した森林面積はほぼ同じであるから，1990年の森林面積が狭いアジアの方が増加率は大きい。したがって，この文は正しい。表４－１では，アジアの増加率は 3.0 ％，ヨーロッパの増加率は 1.6 ％である。

$\boxed{23}$ …③

表４－１　森林面積の変遷

	1990年	2010年	面積増減	増減率(％)
アフリカ	7.49	6.74	－0.75	－10.0
南米	9.46	8.64	－0.82	－8.7
ヨーロッパ	9.89	10.05	＋0.16	＋1.6
北米・中米	7.08	7.05	－0.03	－0.4
アジア	5.76	5.93	＋0.17	＋3.0
オセアニア	1.99	1.91	－0.08	－4.0

(面積の単位は 10^6 km²)

問２　森林面積が減少する要因には，自然的要因と人為的要因とがある。自然的要因としては，干ばつに伴う森林火災が代表的なものである。もちろん，森林火災も人為的要因で発生するものがある。その他の人為的要因は，農地用に森林を転換したり，燃料用材を過度に採取したり，商業用材として伐採したりすることである。

②のフロンガスは，オゾン層を破壊するとともに，温室効果を

森林面積減少の要因

自然的要因

　干ばつに伴う森林火災

人為的要因

　農地用に森林を転換

　燃料用材を過度に採取

　商業用材として伐採

もたらすガスでもある。したがって，気温低下の要因にはならないので，誤りである。また，オゾン層の破壊による紫外線量の増加によって，生物の遺伝子やタンパク質が損傷を受けるが，これが原因になって大規模な森林面積の減少が生じていることもない。 24 …②

問3 植物の集団を植物群落と呼び，群落内の主要な植物でつくられる特徴的な概観を相観という。相観の違いによって植物群落を分類したものを群系(植物群系)という。図4－1のような群系の分布を決める要因は，おもに気温と降水量である。熱帯多雨林は，東南アジア，中南米，熱帯アフリカに分布する。これらの地域は，年平均気温が高く，年降水量も多い。フタバガキのような巨大な高木のほか，つる植物や着生植物など，多くの植物が繁茂している。

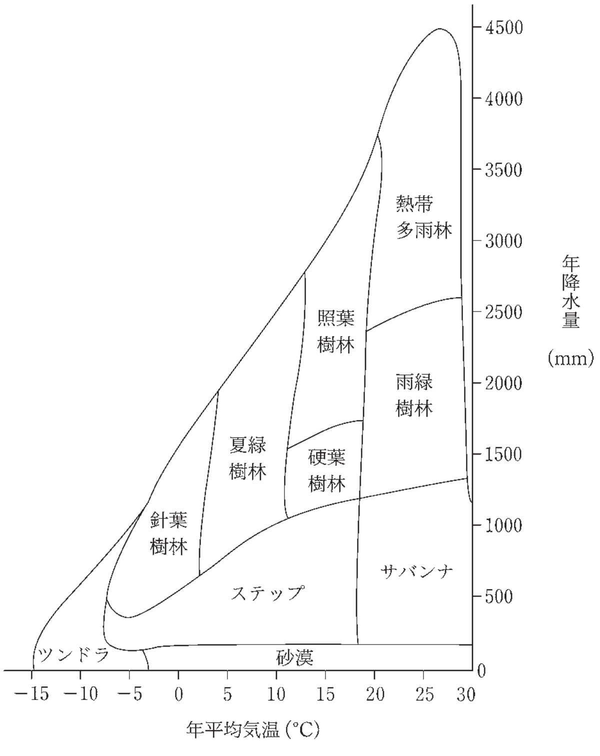


図4－1　世界の群系と気候要因

熱帯の土壌では分解者(ア)のはたらきによって落葉などの有機物はすぐに分解され，生産者(イ)すなわち植物に吸収される。また，高温のため化学的風化が速く進行し，雨水とともに流されてしまう元素も多い。そのため，熱帯の土壌は薄く，植物の生育に必要な元素が少ない。いったん土壌が流出すると，植物がほとんど生えない裸地となり，なかなか森林は回復しない。

森林は大気の浄化，気候の変化を緩和するなどの役割のほか，炭素の貯蔵庫ともなっている。伐採などによる熱帯多雨林の消失

フロンガスの特徴
オゾン層の破壊
温室効果気体

相観
群落内の主要な植物でつくられる特徴的な概観

植物群系
相観の違いによって分類した植物群落

熱帯の土壌の特徴
有機物の分解速度が大きい
化学的風化の進行が速い

熱帯多雨林の消失に伴う現象
大気中の二酸化炭素の増加
遺伝子の宝庫の損失

は，大気中の二酸化炭素(ウ)の量を増加させ，地球温暖化の一要因にもなっている。また，熱帯多雨林の消失に伴って，多様な生物が絶滅するので，その損失は非常に大きい。 25 …⑦

B　酸性雨

酸性雨に関する知識問題と考察問題を出題した。

問4　生態系は，生産者・消費者・分解者からなる生物群集と，生物群集をとりまく非生物的環境から構成されている。生態系では生物群集と非生物的環境は互いに影響を及ぼしあっており，非生物的環境が生物群集へ影響を与えることを作用，生物群集が非生物的環境に影響を与えることを反作用という。 26 …⑤

問5　①　生物濃縮とは，環境に放出された化学物質のうち，生体外へ排出されにくく生体内で分解されにくい物質が生物に取り込まれ，これが食物連鎖を通して高次の栄養段階の生物に蓄積していくことをいう。酸性雨の原因物質(窒素酸化物や硫黄酸化物)はそのような性質をもたないので，誤りである。

②　富栄養化は，湖沼に流入した窒素やリンのような栄養塩類が原因で起こるが，酸性雨の原因物質が流入して湖沼が酸性化しても富栄養化は起こらない。よって，誤りである。

③　内分泌かく乱は，環境に放出された化学物質が動物に取り込まれ，ホルモンのようにふるまうことによって引き起こされる。酸性雨の原因物質はそのような性質をもたないので，誤りである。

④　土壌に酸が加わると，土壌中の金属がイオンとして溶け出すことで酸が中和されるが，酸性雨が降り続けることで，土壌中の金属が全て失われると，土壌は酸を中和できなくなる。したがって，正しい。 27 …④

問6　中性である pH 7.0 の水を噴霧した実験が対照実験となるので，これと pH 2.5 ～ 5.5 の希塩酸を噴霧した場合を比較して考える。

植物Ｐでは，pH 7.0 の水を噴霧したときと比較して，pH 4.5 ～ 5.5 の希塩酸を噴霧した場合でも生重量にほとんど差は見られない。しかし，pH 2.5 ～ 3.5 の希塩酸を噴霧した場合は生重量が小さくなっている。よって，噴霧した液体の酸性度が強くなるほど生重量が小さくなるといえる。一方，植物Ｑでは，pH 7.0 の水を噴霧したときと比較して，pH 3.5 ～ 5.5 の希塩酸を噴霧した場合でも生重量にほとんど差は見られないが，pH 2.5 の希塩酸を噴霧した場合は生重量が大きくなっている。よって，噴霧した液体の酸性度が強くなるほど生重量が小さくなるとはいえない。

植物Ｐでは，pH 2.5 の希塩酸を噴霧した場合の生重量は 1.3 g であり，これは pH 7.0 の水を噴霧した場合の生重量 2.4 g の $(1.3 \div 2.4) \times 100 \fallingdotseq 54$ (%)にあたる。 28 …②

問7　Ⅰ　実験では酸性雨のかわりとして希塩酸を用いたが，実際

生態系

生物群集とそれをとりまく非生物的環境からなる。

作用

環境から生物へのはたらきかけ

反作用

生物から環境へのはたらきかけ

の酸性雨には塩酸は含まれていない。酸性雨は，大気中の窒素酸化物や硫黄酸化物が雨水に溶けて，硝酸や硫酸となることで生じる。したがって，希塩酸ではなく硝酸水溶液を用いる方がよい。よって，正しい。

Ⅱ　酸性雨は植物体の地上部に影響を与えるだけでなく，土壌中に浸み込んで根にも影響を及ぼす。したがって，硝酸水溶液などを土壌にも噴霧した方がより現実を反映しているといえる。よって，正しい。

Ⅲ　酸性雨は短期的な現象ではなく，長期的に見られるものである。そのため，長期間にわたり実験を継続する方が望ましい。よって，正しい。　$\boxed{29}$…①

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO