クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2012年度　第2回　全統記述模試

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年9月実施】

河合塾

【数　　学】

【I・IA型受験者用】

1 小問集合

【I・IA型共通　必須問題】

(配点　60点)

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a, 小数部分を b とする. このとき, 次の式の値を求めよ.

(i) a　　(ii) b　　(iii) $\dfrac{1}{b^2+2b}$

(2) a を実数の定数とする.

$$f(x)=ax^2-4ax+6$$

とおく. x の2次方程式 $f(x)=0$ が $x=2-\sqrt{2}$ を解にもつ. このとき, a の値を求めよ. また, 2次不等式 $f(x)<1$ を解け.

(3) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ のとき, 次の式の値を求めよ.

(i) $\sin\theta\cos\theta$　　(ii) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

(iii) $\sin\theta+\cos\theta$

(4) a, b, c を実数の定数として, 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを K とする. K が2点 $(1,\ 3)$, $(-1,\ 1)$ を通る.

(i) b の値を求めよ. また, c を a を用いて表せ.

(ii) K の頂点が直線 $y=\dfrac{13}{2}x$ 上にあるとき, a の値を求めよ.

【配点】

(1) 15点.

(i) 5点. (ii) 5点. (iii) 5点.

(2) 15点.

(3) 15点.

(i) 5点. (ii) 5点. (iii) 5点.

(4) 15点.

(i) 8点. (ii) 7点.

【出題のねらい】

(1) 分母の有理化ができるか, 無理数の整数部分, 小数部分を求めて式の計算ができるかをみる問題である.

(2) 与えられた条件から a の値を求めたうえで, 2次不等式を解くことができるかをみる問題である.

(3) 三角比の相互関係の理解度をみる問題である.

(4) 2次関数のグラフを正しく理解しているかをみる問題である.

【解答】

(1)(i) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の分母を有理化して,

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}.$$

$1<3<4$ より,

$$1<\sqrt{3}<2.$$

よって,

$$3<2+\sqrt{3}<4.$$

したがって, $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分 a の値は,

$$\boldsymbol{a=3.}$$

(ii) $a+b=2+\sqrt{3}$ に a の値を代入して,

$$3+b=2+\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}b&=2+\sqrt{3}-3\\&=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}.\end{aligned}$$

(iii) (ii) より,

$$b+1=\sqrt{3}.$$

いま,

$$\begin{aligned}b^2+2b&=(b+1)^2-1\\&=(\sqrt{3})^2-1\\&=2.\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{1}{b^2+2b}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

(2) $f(x)=0$, すなわち, $ax^2-4ax+6=0$ が $x=2-\sqrt{2}$ を解にもつから,

$$a(2-\sqrt{2})^2-4a(2-\sqrt{2})+6=0$$

が成り立つ.

$$a(4-4\sqrt{2}+2-8+4\sqrt{2})+6=0.$$

$$-2a+6=0.$$

よって,

$$\boldsymbol{a=3.}$$

このとき, $f(x)=3x^2-12x+6$ であるから, $f(x)<1$, すなわち,

$$3x^2-12x+5<0$$

を解いて,

$$\boldsymbol{\frac{6-\sqrt{21}}{3}<x<\frac{6+\sqrt{21}}{3}}.$$

(3)
$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}\quad(0°\leqq\theta\leqq180°).\qquad\cdots①$$

(i) ① の両辺を2乗して,

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{4}.$$

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}.$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ …② であるから，上式は，

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}.$$

よって，

$$\sin\theta\cos\theta=\mathbf{\frac{3}{8}}. \quad \cdots ③$$

(ii) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right) \quad (①,\ ②,\ ③ より)$$

$$=\mathbf{\frac{11}{16}}.$$

(iii) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{3}{8} \quad (②,\ ③ より)$$

$$=\frac{7}{4}.$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ と ③ より，

$\sin\theta>0$ かつ $\cos\theta>0$

であるから，

$$\sin\theta+\cos\theta=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}.$$

(4)(i) $y=ax^2+bx+c$ は2次関数であるから，$a\neq 0$.

K が2点$(1,\ 3)$，$(-1,\ 1)$を通るから，

$$\begin{cases} a+b+c=3, & \cdots ① \\ a-b+c=1. & \cdots ② \end{cases}$$

$\dfrac{①-②}{2}$ より，

$$b=\mathbf{1}.$$

これを ① に代入して，

$$c=\mathbf{-a+2}.$$

(ii) (i)より，$b=1$，$c=-a+2$ を K の方程式に代入して，

$$y=ax^2+x-a+2$$

$$=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}-a+2.$$

よって，K の頂点の座標は，

$$\left(-\frac{1}{2a},\ -\frac{1}{4a}-a+2\right).$$

頂点が直線 $y=\dfrac{13}{2}x$ 上にあるから，

$$-\frac{1}{4a}-a+2=\frac{13}{2}\left(-\frac{1}{2a}\right).$$

これを整理，因数分解して，

$$(a+1)(a-3)=0.$$

よって，

$$a=\mathbf{-1,\ 3}.$$

【解説】 問題

(1)(i) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分は，このままでは求めるのが困難であるから，**【解答】**では，$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$ となることを用いて，分母に根号を含まないようにする，すなわち，有理化することから始めた．

分母と分子に $2+\sqrt{3}$ を掛けて，

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1\times(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}.$$

あとは，$\sqrt{3}$ の整数部分を調べればよい．それには，$\sqrt{3}=1.7320\cdots$ という近似値を用いることも考えられるが，$1^2<3<2^2$ より $1<\sqrt{3}<2$ と考えるのが一般的であり，そこから $a=3$ を得る．

(ii) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=a+b$ であると気づくことがポイントである．(i)より，$a=3$ であるから，

$$b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-3=2+\sqrt{3}-3$$

$$=\sqrt{3}-1$$

として求めればよい．

(iii) (i)，(ii)より，$b=\sqrt{3}-1$ が得られれば，b^2+2b の値を求めるには，次のように解いてもよい．

((1)(iii) b^2+2b の値を求める別解1)

$$b^2+2b=b(b+2)$$

$$=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1+2)$$

$$=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$$

$$=(\sqrt{3})^2-1$$

$$=2.$$

((1)(iii) b^2+2b の値を求める別解1終り)

あるいは，b の値を直接代入して求めてもよい．

((1)(iii) b^2+2b の値を求める別解2)

$$b^2+2b=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)$$

$$=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}-2$$

$$=3-1$$

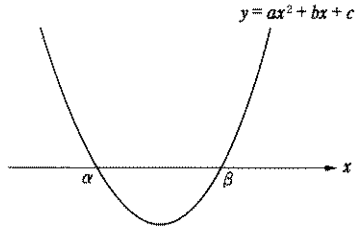
$$=2.$$

((1)(iii) b^2+2b の値を求める別解2終り)

(2) $x=2-\sqrt{2}$ が $f(x)=0$ の解であるとき，$f(2-\sqrt{2})=0$ であるから，これを解いて，a の値を求めればよい．

次に，不等式 $f(x)<1$，すなわち，

$3x^2-12x+5<0$ を解くには，次の



$a>0$ かつ $b^2-4ac>0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる2つの実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると，$ax^2+bx+c<0$ の解は，

$$\alpha<x<\beta$$

2次不等式の解

に従えばよい．なお，2次方程式の解の公式は次のとおりである．

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，
$b^2-4ac\geqq0$ のとき，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2次方程式の解

(3)(i)　$\sin\theta$, $\cos\theta$ の和(差)と積の間には，次の

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

三角比の相互関係

を用いると，

$$\sin\theta\cos\theta=\pm\frac{1}{2}\{(\sin\theta\pm\cos\theta)^2-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\}$$
$$=\pm\frac{(\sin\theta\pm\cos\theta)^2-1}{2}\quad(\text{複号同順})$$

という関係が成り立つ．

よって，本問のように，$\sin\theta-\cos\theta$ の値が与えられているとき，積の値を求めるには，これを用いるとよい．

(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めるには，

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

因数分解の公式

において，$x=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ として，
$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ を

$$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

と因数分解してから，①，②，③ を代入すればよい．

(iii)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$ の右辺に②，③ を代入して，$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値は得られる．しかし，その値から，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めるには注意が必要である．

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqq0\text{ のとき}),\\ -a & (a<0\text{ のとき})\end{cases}$$

絶対値の性質

に従うと，

$$\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$
$$=|\sin\theta+\cos\theta|$$
$$=\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta & (\sin\theta+\cos\theta\geqq0\text{ のとき}),\\ -(\sin\theta+\cos\theta) & (\sin\theta+\cos\theta<0\text{ のとき})\end{cases}$$

となるから，$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値から $\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めるには，$\sin\theta+\cos\theta$ の符号を調べなければならない．

いま，③ から，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は同符号であり，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より $\sin\theta\geqq0$．このとき，$\sin\theta+\cos\theta>0$ であるから，**【解答】**のように，

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

として，$\sin\theta+\cos\theta$ の値を求めることができる．

(4)(i)　K が2点 $(1,\ 3)$，$(-1,\ 1)$ を通ることより，①，② の2式を得る．これを解いて，b, c を求めればよい．

(ii)　K の方程式 $y=ax^2+x-a+2$ を平方完成して，頂点の座標を求め，それが直線 $y=\dfrac{13}{2}x$ 上にあることから得られる方程式を解けばよい．

あるいは，頂点の座標から次のように解いてもよい．

((4)(ii)の別解)

直線 $y=\dfrac{13}{2}x$ 上にある頂点の座標を $(2t,\ 13t)$ とおくと，求める2次関数の方程式は，

$$y=a(x-2t)^2+13t$$
$$=ax^2-4atx+4at^2+13t$$

と表せる．これが K に一致するとき，係数を比較して，

$$\begin{cases}1=-4at, & \cdots③\\ -a+2=4at^2+13t. & \cdots④\end{cases}$$

③，④ より，

$$-a+2=-t+13t=12t.$$

両辺に a を掛けると，③ より，

$$-a^2+2a=12at=-3.$$
$$a^2-2a-3=0.$$
$$(a+1)(a-3)=0.$$

以上より，求める a の値は，

$$a=-1,\ 3.$$

((4)(ii)の別解終り)

2 三角比

【Ⅰ型　必須問題】

（配点　40点）

> 三角形ABCにおいて，
>
> $AB=8,\ CA=5,\ \angle BAC=60^\circ$
>
> とする．
>
> (1) 辺BCの長さを求めよ．
>
> (2) $\cos\angle ABC$, $\sin\angle ACB$ の値をそれぞれ求めよ．
>
> (3) 辺AB上に点Pを，$AP=x\ (0<x<8)$ となるようにとり，Pから辺CA, BCに下ろした垂線の足をそれぞれQ, Rとする．
>
> (i) 線分CQ, CRの長さをそれぞれ x を用いて表せ．
>
> (ii) x が $0<x<8$ の範囲を動くとき，三角形CQRの面積を最大にするような x の値を求めよ．また，そのときの三角形CQRの外接円の半径を求めよ．

【配点】

(1)　8点．

(2)　12点．

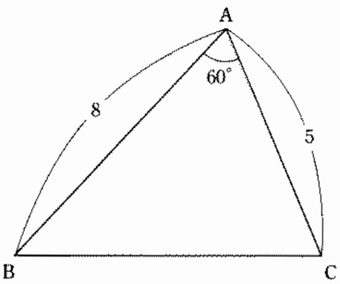
(3)　20点．

(i)　8点．(ii)　12点．

【出題のねらい】

余弦定理や正弦定理などを用いて線分の長さを求めることができるか，また，三角形の面積を線分の長さを用いて表し，その最大値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】



(1)　余弦定理より，

$$BC^2=AB^2+CA^2-2AB\cdot CA\cos\angle BAC$$
$$=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ$$
$$=64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{2}$$
$$=49.$$

よって，

$$BC=7.$$

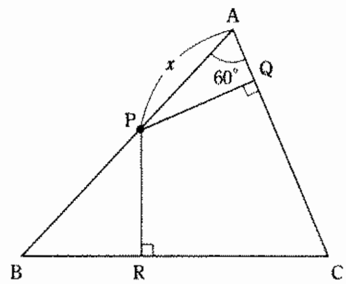
(2)　余弦定理より，

$$CA^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC.$$
$$5^2=8^2+7^2-2\cdot 8\cdot 7\cos\angle ABC.$$
$$\cos\angle ABC=\frac{8^2+7^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 7}$$
$$=\mathbf{\frac{11}{14}}.$$

正弦定理より，

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}.$$
$$\frac{7}{\sin 60^\circ}=\frac{8}{\sin\angle ACB}.$$
$$\sin\angle ACB=\frac{8\sin 60^\circ}{7}$$
$$=\frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$
$$=\mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{7}}.$$

(3)(i)



$$AQ=AP\cos\angle BAC$$
$$=x\cos 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}x$$

より，

$$CQ=CA-AQ$$
$$=5-\frac{1}{2}x$$
$$=\mathbf{\frac{10-x}{2}}.$$

次に，　$BR=BP\cos\angle ABC$

$$=(8-x)\cdot\frac{11}{14}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CR}&=\mathrm{BC}-\mathrm{BR}\\&=7-(8-x)\cdot\frac{11}{14}\\&=\boldsymbol{\frac{11x+10}{14}}.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{CR}\sin\angle\mathrm{ACB}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{10-x}{2}\cdot\frac{11x+10}{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\\&=\frac{\sqrt{3}}{98}(10-x)(11x+10)\\&=\frac{\sqrt{3}}{98}(-11x^2+100x+100)\\&=\frac{\sqrt{3}}{98}\left\{-11\left(x-\frac{50}{11}\right)^2+\frac{3600}{11}\right\}.\end{aligned}$$

$0<x<8$ より，△CQR を最大にする x の値は，

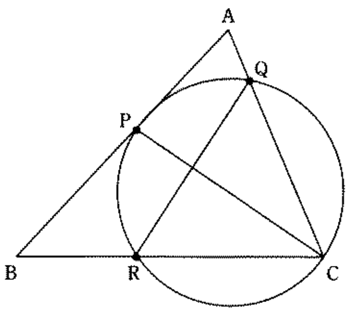
$$x=\boldsymbol{\frac{50}{11}}.$$

次に，三角形 CQR の外接円の半径を r とすると，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2r. \quad \cdots①$$

ここで，(2) より，

$$\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{4\sqrt{3}}{7}. \quad \cdots②$$



三角形 CQR に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{QR}^2=\mathrm{CQ}^2+\mathrm{CR}^2-2\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{CR}\cos\angle\mathrm{ACB}.$$

また，三角形 ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{7^2+5^2-8^2}{2\cdot7\cdot5}=\frac{1}{7}.$$

$x=\frac{50}{11}$ のとき，

$$\mathrm{CQ}=\frac{10-x}{2}=\frac{30}{11},\quad \mathrm{CR}=\frac{11x+10}{14}=\frac{30}{7}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2&=\left(\frac{30}{11}\right)^2+\left(\frac{30}{7}\right)^2-2\cdot\frac{30}{11}\cdot\frac{30}{7}\cdot\frac{1}{7}\\&=\frac{30^2\cdot148}{7^2\cdot11^2}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{QR}=\frac{60\sqrt{37}}{77}. \quad \cdots③$$

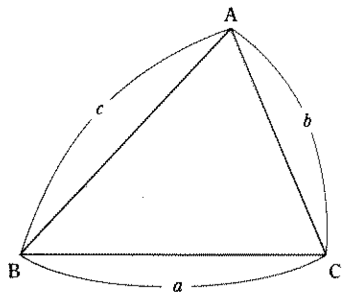
②，③ を ① に代入して，

$$\frac{60\sqrt{37}}{77}=2\cdot r\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

$$r=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{111}}{22}}.$$

【解説】 問題

(1)　三角形 ABC において，2 辺の長さとその間の角が与えられているから，



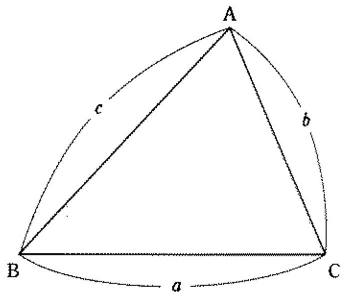
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

余弦定理

を用いて，辺 BC の長さを求めればよい．

(2)　(1) で辺 BC の長さを求めたあと，再び余弦定理を用いて cos∠ABC の値を求めればよい．

また，(1) の結果より ∠BAC の対辺の長さがわかり，∠ABC の対辺 CA の長さは与えられているから，



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(R は三角形 ABC の外接円の半径)

正弦定理

を用いて，sin∠ABC の値を求めたあとで，cos∠ABC の値を求めてもよい．

(cos∠ABC の値を求める別解)

正弦定理より，

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{CA}{\sin\angle ABC}.$$

$$\frac{7}{\sin 60^\circ}=\frac{5}{\sin\angle ABC}.$$

$$\sin\angle ABC=\frac{5\sin 60^\circ}{7}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

CA＜BC より，

$$\angle ABC<\angle BAC=60^\circ.$$

よって，$\cos\angle ABC>0$ であるから，

$$\cos\angle ABC=\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{121}{196}}$$
$$=\frac{11}{14}.$$

（cos∠ABC の値を求める別解終り）

さらに，**【解答】**では，前述の正弦定理を用いて sin∠ACB の値を求めたが，3 辺の長さがすべてわかっているから，cos∠ACB を求めてから，sin∠ACB の値を求めることもできる．

（sin∠ACB の値を求める別解）

余弦定理より，

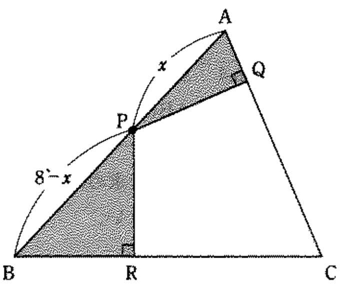
$$\cos\angle ACB=\frac{CA^2+BC^2-AB^2}{2CA\cdot BC}$$
$$=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 7}$$
$$=\frac{1}{7}.$$

$0^\circ<\angle ACB<180^\circ$ より $\sin\angle ACB>0$ であるから，

$$\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

（sin∠ACB の値を求める別解終り）

(3)(i)



直角三角形 APQ に注目すると，

$\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$ から，線分 AQ の長さを x を用いて表せる．

このあと，

$$CQ=CA-AQ$$

として，線分 CQ の長さを求めればよい．

また，直角三角形 BPR に注目すると，

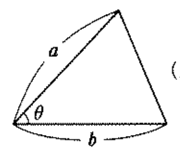
$\cos\angle ABC=\frac{11}{14}$ から，線分 BR の長さを x を用いて表せる．

このあと，

$$CR=BC-BR$$

として，線分 CR の長さを求めればよい．

(ii) (2) および (i) から，



$$(\text{三角形の面積})=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

三角形の面積

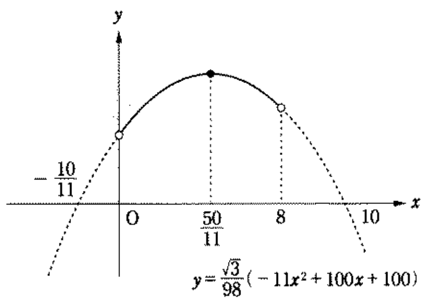
を用いて，三角形 CQR の面積を x を用いて表せる．

このとき，

$$\triangle CQR=\frac{1}{2}\cdot CQ\cdot CR\sin\angle ACB$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10-x}{2}\cdot\frac{11x+10}{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{98}(-11x^2+100x+100)$$

となり，△CQR は x の 2 次関数となる．

あとは右辺を平方完成して，$0<x<8$ の範囲で △CQR が最大となるような x の値を求めればよい．



次に，**【解答】**では，三角形 CQR に注目して，正弦定理から，その外接円の半径を求めた．

あるいは，∠CQP＝∠CRP＝90° に注目すると，4 点 C，Q，P，R は線分 CP を直径とする円周上にあることがわかる．この円は周上に 3 点

C, Q, R があるから，三角形 CQR の外接円である．このことに気づくと，次のように解くこともできる．

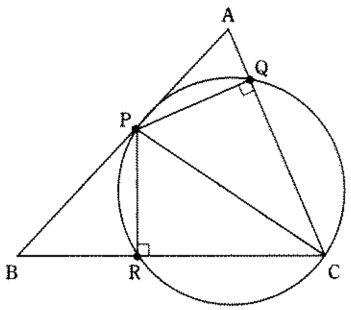
((3)(ii) 三角形 CQR の外接円の半径を求める別解)

$\angle CQP=\angle CRP=90°$ より，四角形 CQPR は円に内接し，この円は三角形 CQR の外接円である．

したがって，三角形 CQR の外接円の直径は CP である．

ここで，$x=\frac{50}{11}$ のとき，

$$PQ=AP\sin\angle BAC$$
$$=x\sin 60°$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$=\frac{25\sqrt{3}}{11},$$
$$CQ=\frac{10-x}{2}$$
$$=\frac{30}{11}.$$



$\angle CQP=90°$ であるから，三平方の定理より，

$$CP^2=PQ^2+CQ^2$$
$$=\left(\frac{25\sqrt{3}}{11}\right)^2+\left(\frac{30}{11}\right)^2$$
$$=\frac{5^2\cdot 111}{11^2}.$$
$$CP=\frac{5\sqrt{111}}{11}.$$

よって，求める半径は，

$$\frac{1}{2}CP=\frac{5\sqrt{111}}{22}.$$

((3)(ii) 三角形 CQR の外接円の半径を求める別解終り)

前述の**(別解)**では，直角三角形 CQP に注目して，三平方の定理から線分 CP の長さを求めた．

三角形 APC に注目して，次のようにして線分 CP の長さを求めることもできる．

(線分 CP の長さを求める別解)

三角形 APC に余弦定理を用いて，

$$CP^2=AP^2+AC^2-2AP\cdot AC\cos\angle BAC$$
$$=x^2+5^2-2\cdot x\cdot 5\cos 60°$$
$$=x^2-5x+25$$
$$=\left(\frac{50}{11}\right)^2-5\cdot\frac{50}{11}+25 \quad \left(x=\frac{50}{11}\ より\right)$$
$$=\frac{5^2}{11^2}(10^2-10\cdot 11+11^2)$$
$$=\frac{5^2}{11^2}\cdot 111.$$

よって，

$$CP=\frac{5\sqrt{111}}{11}.$$

(線分 CP の長さを求める別解終り)

3 確　率

【ＩＡ型　必須問題】

(配点　40点)

> 袋の中に 5 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ がある．この袋から 1 枚のカードを取り出し，取り出したカードに書かれた数を 3 で割った余りの数を記録する操作を最大 3 回まで行って終了する．ただし，取り出したカードは毎回袋に戻す．また，0 を記録したら，その時点で終了する．終了するまでに記録した数の和を X とする．
> (1) 1 回の操作で，0, 1 を記録する確率をそれぞれ求めよ．
> (2) 3 回目の操作を行う確率を求めよ．
> (3) $X=2, 4$ となる確率をそれぞれ求めよ．
> (4) X の期待値を求めよ．

【配点】

(1)　6 点．
(2)　8 点．
(3)　10 点．
(4)　16 点．

【出題のねらい】

事象を的確にとらえ，確率および期待値を正しく求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) 1 回の操作で 0 を記録するのは，3 で割り切れる数が書かれたカード，すなわち，$\boxed{3}$を取り出す事象が起こる場合である．

よって，1 回の操作で 0 を記録する確率は，

$$\frac{1}{5}.$$

1回の操作で1を記録するのは，3で割ったときに1余る数が書かれたカード，すなわち，$\boxed{1}$または$\boxed{4}$を取り出す事象が起こる場合である．

よって，1回の操作で1を記録する確率は，

$$\frac{2}{5}.$$

(2) 3回目の操作を行うのは，1回目と2回目の操作で，ともに0以外の数を記録する事象が起こる場合である．

1回の操作で0以外の数を記録する確率は，

$$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{25}}.$$

(3) 1回の操作で記録される数は，0，1，2のいずれかであり，2を記録する確率は，(1)より，

$$1-\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

k回目($k=1,\ 2,\ 3$)の操作で記録する数をa_kとおく．

$X=2$となるのは，次の事象が起こる場合である．

(ア) $(a_1,\ a_2)=(2,\ 0)$.

(イ) $(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 0)$.

(ア)となる確率は，

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

(イ)となる確率は，

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{125}.$$

(ア)，(イ)は互いに排反な事象であるから，$X=2$となる確率は，

$$\frac{2}{25}+\frac{4}{125}=\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{125}}.$$

$X=4$となるのは，次の事象が起こる場合である．

(ウ) $(a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 2,\ 0)$.

(エ) $(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$.

(ウ)となる確率は，

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{125}.$$

(エ)となる確率は，

$$3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{24}{125}.$$

(ウ)，(エ)は互いに排反な事象であるから，$X=4$となる確率は，

$$\frac{4}{125}+\frac{24}{125}=\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{125}}.$$

(4) Xのとり得る値は，$X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$である．

(3)と同様にa_k($k=1,\ 2,\ 3$)を用いて，$X=i$($i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$)となる確率をp_iとおく．

$X=0$となるのは，$a_1=0$となる事象が起こる場合であるから，

$$p_0=\frac{1}{5}.$$

$X=1$となるのは，$(a_1,\ a_2)=(1,\ 0)$となる事象が起こる場合であるから，

$$p_1=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

$X=3$となるのは，

$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 0),\ (2,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)$

となる事象が起こる場合であるから，

$$p_3=2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{125}.$$

$X=5$となるのは，

$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$

となる事象が起こる場合であるから，

$$p_5=3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{24}{125}.$$

$X=6$となるのは，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 2,\ 2)$となる事象が起こる場合であるから，

$$p_6=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{125}.$$

以上，(3)の結果と合わせて，求める期待値は，

$$\begin{aligned}&0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3+4\cdot p_4+5\cdot p_5+6\cdot p_6\\&=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{2}{25}+2\cdot\frac{14}{125}+3\cdot\frac{16}{125}\\&\quad+4\cdot\frac{28}{125}+5\cdot\frac{24}{125}+6\cdot\frac{8}{125}\\&=\frac{\mathbf{366}}{\mathbf{125}}.\end{aligned}$$

【解説】 問題

(1) カードに書かれた数と，その数を3で割った余りの数は，次表のようになる．

カードに書かれた数	1	2	3	4	5
3で割った余り	1	2	0	1	2

よって，1回の操作で記録する数と，その確率は，次表のようになる．

記録する数	0	1	2
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

(2) 0を記録したら，その時点で終了することに注目すると，

「3回目の操作を行う確率」は，

「2回目までに操作を終了しない確率」，

すなわち，

「1回目，2回目ともに0以外の数を記録する確率」

である．1回の操作で0以外の数を記録する確率は，(1)より，

$$1-(0\text{を記録する確率})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{あるいは，}(1\text{または}2\text{を記録する確率})\\ \qquad\qquad=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\end{array}\right)$$

である．

取り出したカードは毎回袋に戻し，1回ごとの操作は独立であるから，

> 2つの試行 T_1，T_2 が独立であるとき，T_1 で事象 A が起こり，T_2 で事象 B が起こる確率は，
>
> $$P(A)\cdot P(B)$$
>
> **独立な試行の確率**

を用いて，3回目の操作を行う確率を求めればよい．

(3) 0を記録したら，その時点で終了することに注目すると，1または2を最大3回用いてできる和の値が，X のとり得る値である．

和が2となるのは，

$$2,\ 1+1$$

の2つの場合があるから，k 回目($k=1,\ 2,\ 3$)の操作で記録する数を a_k と表すと，$X=2$ となる事象は，

$(a_1,\ a_2)=(2,\ 0)$ または，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 0)$

となる場合である．

あとは，1回の操作で0，1，2を記録する確率をそれぞれ用いて，$X=2$ となる確率を求めればよい．

また，和が4となるのは，順序を気にしなければ，

$$2+2,\ 1+1+2$$

の2つの場合があるから，$X=4$ となる事象は，

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 2,\ 0)$$

または，

$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 1)$，$(2,\ 1,\ 1)$

となる場合である．

あとは，各々の事象の確率を計算し，$X=4$ となる確率を求めればよい．その際，**【解答】**では，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 1)$，$(2,\ 1,\ 1)$ となる確率は，いずれも「1を記録する操作が2回，2を記録する操作が1回」となる確率，すなわち，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}$$

であることを用いた．

(4) 期待値は，

> X のとり得る値を x_1，x_2，…，x_n とし，それぞれの値をとる確率を p_1，p_2，…，p_n とすると，X の期待値 E は，
>
> $$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n,$$
>
> ただし，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$
>
> **期待値の定義**

に従って計算して，求めることができる．

X のとり得る値の最小値は0，最大値は $2+2+2=6$ であるから，(3)と同様に考えて，あとは $X=0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 6$ となる確率をそれぞれ求めればよい．

【ⅡA・ⅡB 型受験者用】

1 小問集合

【ⅡA・ⅡB 型共通　必須問題】

(配点　50 点)

> (1) a, b, c を実数の定数として，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを K とする．K が 2 点 $(1,\ 3)$，$(-1,\ 1)$ を通る．
>
> (i) b の値を求めよ．また，c を a を用いて表せ．
>
> (ii) K の頂点が直線 $y=\frac{13}{2}x$ 上にあるとき，a の値を求めよ．
>
> (2) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ のとき，次の式の値を求めよ．
>
> (i) $\sin\theta\cos\theta$　　(ii) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$
>
> (iii) $\sin\theta+\cos\theta$
>
> (3) 不等式 $9^x-10\cdot3^{x-1}+1<0$ を解け．
>
> (4) 曲線 C：$y=x^3-x^2+1$ 上の点 $(t,\ t^3-t^2+1)$ における接線の方程式を t を用いて表せ．また，点 $(0,\ 1)$ を通る C の接線の方程式をすべて求めよ．

【配点】

(1) 12 点．

(i) 6 点．(ii) 6 点．

(2) 12 点．

(i) 4 点．(ii) 4 点．(iii) 4 点．

(3) 12 点．

(4) 14 点．

【出題のねらい】

(1) 2 次関数のグラフを正しく理解しているかをみる問題である．

(2) 三角比の相互関係の理解度をみる問題である．

(3) 指数関数を含む不等式を解くことができるかをみる問題である．

(4) 曲線の接線の方程式を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) **Ⅰ・ⅠA 型 1 (4)【解答】**参照．

(2) **Ⅰ・ⅠA 型 1 (3)【解答】**参照．

(3)
$$9^x-10\cdot3^{x-1}+1<0$$

を変形して，

$$(3^x)^2-\frac{10}{3}\cdot3^x+1<0.$$

$3^x=t\ (t>0)$ とおくと，

$$t^2-\frac{10}{3}t+1<0.$$

因数分解して，

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-3)<0.$$

これを解いて，

$$\frac{1}{3}<t<3,\ \text{すなわち，}\ 3^{-1}<3^x<3^1.$$

底 3 は 1 より大きいから，

$$\boldsymbol{-1<x<1.}$$

(4)
$$y=x^3-x^2+1,$$
$$y'=3x^2-2x.$$

C 上の点 $(t,\ t^3-t^2+1)$ における C の接線の方程式は，

$$y=(3t^2-2t)(x-t)+t^3-t^2+1$$
$$\boldsymbol{=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2+1.}$$

これが点 $(0,\ 1)$ を通るから，

$$1=(3t^2-2t)\cdot0-2t^3+t^2+1.$$

$$2t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)=0.$$

よって，

$$t=0,\ \frac{1}{2}.$$

$t=0$ のとき，接線の方程式は $y=1$，

$t=\frac{1}{2}$ のとき，接線の方程式は $y=-\frac{1}{4}x+1$.

以上より，求める接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=1,\ y=-\frac{1}{4}x+1.}$$

【解説】 問題

(1) **Ⅰ・ⅠA 型 1 (4)【解説】**参照．

(2) **Ⅰ・ⅠA 型 1 (3)【解説】**参照．

(3) **【解答】**のように，与えられた不等式を変形したあと，$3^x=t$ とおいて，t の 2 次不等式に帰着させて解けばよい．

不等式 $\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-3)<0$ を，$\frac{1}{3}<t<3$ と解いたうえで，x の不等式 $\frac{1}{3}<3^x<3$ を解くのであるが，ここで，

> $a>1$ のとき，$p<q \iff a^p<a^q$，
>
> $0<a<1$ のとき，$p<q \iff a^p>a^q$
>
> **指数関数の性質**

に従って，底と1の大小関係によって，不等号の向きが変わることに注意する必要がある．本問では底3が1より大きいから，

$$3^{-1}<3^x<3^1 \iff -1<x<1.$$

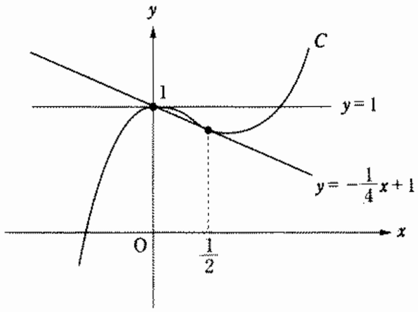
(4)　C 上の点における C の接線の方程式は，

> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
>
> $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
>
> **接線の方程式**

に従って求めればよい．

そのうえで，求めた接線が点 $(0,\ 1)$ を通るとして得られる接点の x 座標 t に関する方程式 $2t^3-t^2=0$ を解けばよい．

ちなみに，C と点 $(0,\ 1)$ を通る C の接線のグラフは次図のようになる．



2　積　分

【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】

(配点　50点)

> a を1より大きい定数とする．
>
> $$f(x)=x^2-ax,\quad g(x)=x-a$$
>
> とし，$y=f(x)$ のグラフを C，$y=g(x)$ のグラフを l とする．
>
> (1)　C と l で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．
>
> (2)　C と x 軸で囲まれた図形のうち，l の上側の部分の面積を S_1，C の $x \geqq a$ の部分と l，および直線 $y=a+1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．
>
> (i)　S_2 を a を用いて表せ．
>
> (ii)　$S_1:S_2=1:2$ となるような a の値を求めよ．

【配点】

(1)　15点．

(2)　35点．

(i)　20点．(ii)　15点．

【出題のねらい】

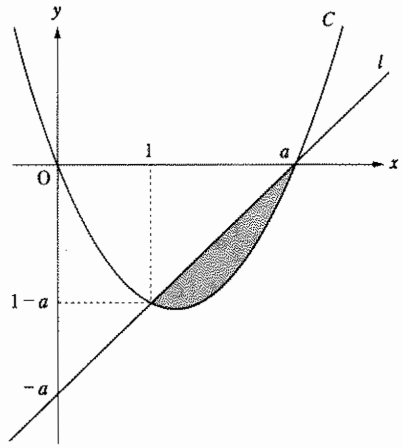
定積分を用いて図形の面積を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　C と l の共有点の x 座標を求める．

$$x^2-ax=x-a.$$
$$x^2-(a+1)x+a=0.$$
$$(x-1)(x-a)=0.$$
$$x=1,\ a.$$

これと $a>1$ より，C と l の概形は次図のようになる．



C と l で囲まれた図形の面積は，

$$\int_1^a \{(x-a)-(x^2-ax)\}dx$$
$$=\int_1^a \{-x^2+(a+1)x-a\}dx$$
$$=-\int_1^a (x-1)(x-a)\,dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a-1)^3}.$$

(2)(i)　直線 $y=a+1$ と l の交点の x 座標は，

$$x-a=a+1$$

より，

$$x=2a+1.$$

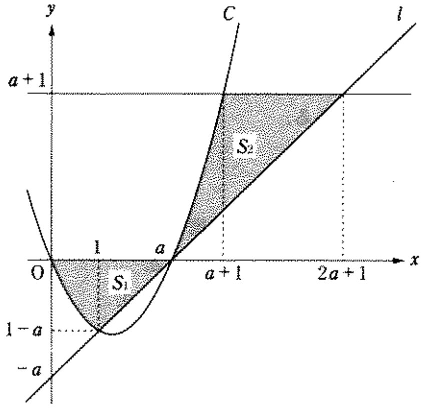
直線 $y=a+1$ と C の交点の x 座標は，

$$x^2-ax=a+1$$

より，

$$x^2-ax-a-1=0.$$
$$(x+1)(x-a-1)=0.$$
$$x=-1,\ a+1.$$

以上より，S_1 と S_2 はそれぞれ次図の網目部分の面積となる．



よって，

$$S_2=\int_a^{a+1}\{x^2-ax-(x-a)\}dx+\int_{a+1}^{2a+1}\{a+1-(x-a)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax\right]_a^{a+1}+\left[(2a+1)x-\frac{1}{2}x^2\right]_{a+1}^{2a+1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}}.$$

(ii) (i)の図より，S_1 は「C と x 軸で囲まれた図形の面積」から「C と l で囲まれた図形の面積」を除いたものであるから，

$$S_1=-\int_0^a(x^2-ax)\,dx-\frac{1}{6}(a-1)^3$$

$$=-\int_0^a x(x-a)\,dx-\frac{1}{6}(a-1)^3$$

$$=\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{6}(a-1)^3$$

$$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}.$$

$S_1:S_2=1:2$ となるには，

$$S_2=2S_1.$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}=2\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}\right).$$

これを整理して，

$$a^2-3a+1=0.$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$a>1$ より，

$$a=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

【解説】 問題

(1) 不定積分の公式を確認しよう．

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n=0,\ 1,\ 2)$$

（C は積分定数）

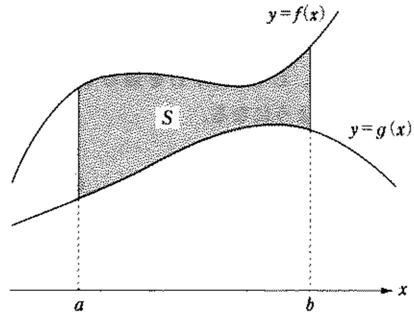
不定積分の公式

さらに，図形の面積を定積分を用いて求める基本を確認しよう．

$a\leqq x\leqq b$ において，つねに

$$f(x)\geqq g(x)$$

が成り立つとする．



このとき，曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx.$$

面積と定積分

C と l は x 座標が，

$$x=1,\ a$$

の2点で交わり，$1\leqq x\leqq a$ において，

$$x-a\geqq x^2-ax$$

が成り立つから，C と l で囲まれた図形の面積は，

$$\int_1^a\{(x-a)-(x^2-ax)\}dx$$

$$=-\int_1^a(x-1)(x-a)\,dx \qquad \cdots①$$

により，求められる．

【解答】では，ここで次の公式を用いた．

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

定積分の公式

①は，$\alpha=1$，$\beta=a$ の場合であるから，

$$①=-\left\{-\frac{1}{6}(a-1)^3\right\}=\frac{1}{6}(a-1)^3$$

となる．

もちろん，この公式を用いないで次のように解くこともできる．

3 複素数と方程式

【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】

(配点　50点)

a, b を実数の定数とする.

$$f(x)=x^2-ax+a-\frac{3}{4},$$

$$g(x)=x^3+bx^2+(2b-4)x+3(a+1)$$

として, $g(x)$ は $x+3$ で割り切れるとする.

(1) b を a を用いて表せ.

(2) 2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

(3) x についての5次方程式 $f(x)g(x)=0$ の5つの解 α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 のうち, α_1, α_2, α_3 は実数であり, β_1, β_2 は虚数である.

(i) a の値の範囲を求めよ.

(ii) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\beta_1+\beta_2$ が成り立つような a の値を求めよ.

【配点】

(1) 12点.

(2) 8点.

(3) 30点.

(i) 18点. (ii) 12点.

【出題のねらい】

整式の除法における基本事項を問うとともに, 方程式の解の組合せを考え, 等式を満たす条件を求めるなどの応用力をみる問題である.

【解答】

(1) $g(x)$ は $x+3$ で割り切れるから, 因数定理より,

$$g(-3)=0.$$

よって,

$$-27+9b-3(2b-4)+3(a+1)=0.$$

$$\boldsymbol{b=-a+4}.$$

(2) 2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D_1 とすると,

$$D_1=(-a)^2-4\cdot1\cdot\left(a-\frac{3}{4}\right)$$

$$=a^2-4a+3.$$

求める条件は, $D_1>0$ であるから,

$$a^2-4a+3>0.$$

$$(a-1)(a-3)>0.$$

$$\boldsymbol{a<1,\ 3<a}.$$

(3)(i) (1)より,

$$g(x)=x^3-(a-4)x^2-2(a-2)x+3(a+1)$$

$$=(x+3)\{x^2-(a-1)x+a+1\}.$$

ここで,

$$h(x)=x^2-(a-1)x+a+1$$

とおき, $h(x)=0$ の判別式を D_2 とすると,

$$D_2=\{-(a-1)\}^2-4\cdot1\cdot(a+1)$$

$$=a^2-6a-3.$$

いま, $f(x)g(x)=(x+3)f(x)h(x)$ であり, $f(x)=0$, $h(x)=0$ は, ともに実数係数の方程式であるから, $f(x)g(x)=0$ が3つの実数解と2つの虚数解をもつには, 次の2通りの場合がある.

(ア) $f(x)=0$ が2つの実数解をもち, $h(x)=0$ が2つの虚数解をもつ.

(イ) $f(x)=0$ が2つの虚数解をもち, $h(x)=0$ が2つの実数解をもつ.

(ア)のとき,

求める条件は,

$$D_1\geqq0,\ かつ,\ D_2<0.$$

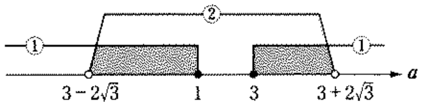
$D_1\geqq0$ の解は, (2)より,

$$a\leqq1,\ 3\leqq a. \quad \cdots①$$

$D_2=a^2-6a-3<0$ を解いて,

$$3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}. \quad \cdots②$$

①, ② の共通範囲を求めて,



$$3-2\sqrt{3}<a\leqq1,\ 3\leqq a<3+2\sqrt{3}.$$

(イ)のとき,

求める条件は,

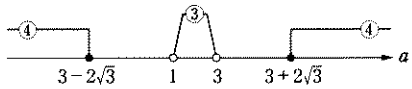
$$D_1<0,\ かつ,\ D_2\geqq0.$$

$D_1<0$ を解いて,

$$1<a<3. \quad \cdots③$$

$D_2\geqq0$ を解いて,

$$a\leqq3-2\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{3}\leqq a. \quad \cdots④$$



③, ④ の共通範囲はないから, (イ)となるような a は存在しない.

以上, (ア), (イ)より, 求める a の値の範囲は,

$$\boldsymbol{3-2\sqrt{3}<a\leqq1,\ 3\leqq a<3+2\sqrt{3}}.$$

(ii) $\alpha_3=-3$ とする.

(i)より,

α_1, α_2 は $f(x)=0$ の2つの実数解,

β_1, β_2 は $h(x)=0$ の2つの虚数解

である．

解と係数の関係より，

$$\alpha_1\alpha_2=a-\frac{3}{4}.$$

$$\beta_1+\beta_2=a-1.$$

よって，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\beta_1+\beta_2$ が成り立つとき，

$$\left(a-\frac{3}{4}\right)(-3)=a-1.$$

$$-3a+\frac{9}{4}=a-1.$$

$$a=\frac{13}{16}.$$

これは，$3-2\sqrt{3}<a\leqq 1$ を満たす．

以上より，求める a の値は，

$$a=\boldsymbol{\frac{13}{16}}.$$

【解説】 問題

(1)　a と b の関係式を導くのに，$g(x)$ が $x+3$ で割り切れるという条件に注目した．また，割り切れるための条件は，

> 整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる
> $\iff$　$P(\alpha)=0$
>
> **因数定理**

を用いた．因数定理を用いずに，次のように実際に割り算を実行してもよい．

（(1) の別解）

$g(x)$ を $x+3$ で割ると次のようになる．

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+(b-3)x+(-b+5) \\
\hline
x+3 & x^3+bx^2+(2b-4)x+3(a+1) \\
 & x^3+3x^2 \\
\hline
 & (b-3)x^2+(2b-4)x \\
 & (b-3)x^2+(3b-9)x \\
\hline
 & (-b+5)x+3a+3 \\
 & (-b+5)x-3b+15 \\
\hline
 & 3a+3b-12
\end{array}$$

よって，$g(x)$ が $x+3$ で割り切れる条件は，

$$3a+3b-12=0$$

より，

$$b=-a+4.$$

（(1) の別解終り）

(2)　$f(x)$ の係数はすべて実数であるから，2 次方程式 $f(x)=0$ の解の種類は，判別式の符号によって分類することができる．

> $a,\ b,\ c$ を実数とする．2 次方程式
>
> $$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)\qquad\cdots(*)$$
>
> に対して，b^2-4ac を $(*)$ の判別式といい，$D=b^2-4ac$ とおくと，$(*)$ は，
>
> $D>0$ のとき，異なる 2 つの実数解をもつ．
> $D=0$ のとき，実数の重解をもつ．
> $D<0$ のとき，異なる 2 つの虚数解をもつ．
>
> **2 次方程式の解の種類の判別**

これに従って，$D_1>0$ を解けばよい．

(3)(i)　(1) より，b を $-a+4$ で置き換え，**【解答】**のように，$g(x)$ を因数分解すると，5 次方程式 $f(x)g(x)=0$ の 5 解は，

-3，$f(x)=0$ の 2 解，$h(x)=0$ の 2 解

からなることがわかる．$f(x)=0$，$h(x)=0$ はともに，実数係数の 2 次方程式であるから，題意を満たす解の組合せは，

(ｱ)　$f(x)=0$ が 2 つの実数解をもち，
$h(x)=0$ が 2 つの虚数解をもつ，

(ｲ)　$f(x)=0$ が 2 つの虚数解をもち，
$h(x)=0$ が 2 つの実数解をもつ

のいずれかである．あとは，**【解答】**にあるように，判別式 D_1，D_2 の符号の組合せを考えればよい．

(ii)　$\alpha_3=-3$ とすれば，(i) より，

α_1，α_2 は $f(x)=0$ の 2 解，
β_1，β_2 は $h(x)=0$ の 2 解

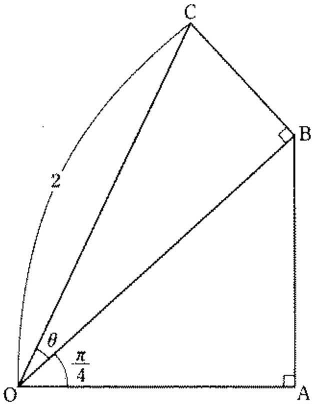
であるから，$\alpha_1\alpha_2$，$\beta_1+\beta_2$ は，それぞれ $f(x)=0$，$h(x)=0$ における解と係数の関係から求めることができる．

> 2 次方程式
>
> $$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$
>
> の 2 解が $\alpha,\ \beta$ のとき，
>
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},$$
>
> $$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$
>
> が成り立つ．
>
> **解と係数の関係**

4　三角関数

【ⅡA型　選択問題】

（配点　50点）



図のような2つの直角三角形OAB，OBCにおいて，

$OC=2,\ \angle BOC=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right),\ \angle AOB=\frac{\pi}{4}$

とする．

(1)　辺BC，OAの長さをそれぞれθを用いて表せ．

(2)　四角形OABCの面積をSとする．

　(i)　Sを$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$を用いて表せ．

　(ii)　θが$0<\theta<\frac{\pi}{4}$の範囲を動くとき，Sのとり得る値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　14点．

(2)　36点．

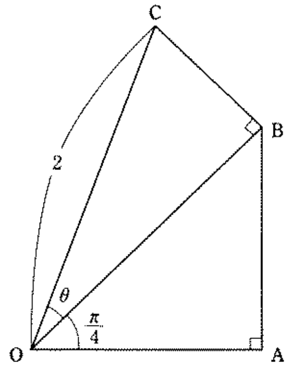
　(i)　18点．(ii)　18点．

【出題のねらい】

四角形の面積を角θの関数として表し，半角の公式，三角関数の合成などを利用することで，そのとり得る値の範囲を正しく求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)



直角三角形OBCにおいて，

$$BC=OC\sin\theta$$
$$=\mathbf{2\sin\theta.}$$
$$OB=OC\cos\theta$$
$$=2\cos\theta.$$

次に，直角三角形OABにおいて，

$$OA=OB\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=2\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\cos\theta.}$$

(2)(i)

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot AB$$
$$=\frac{1}{2}OA^2\quad(OA=AB\text{ より})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos\theta)^2$$
$$=\cos^2\theta.\qquad\cdots①$$
$$\triangle OBC=\frac{1}{2}OB\cdot BC$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta.\qquad\cdots②$$

①，②より，

$$S=\triangle OAB+\triangle OBC$$
$$=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta$$
$$=\boldsymbol{\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}.}$$

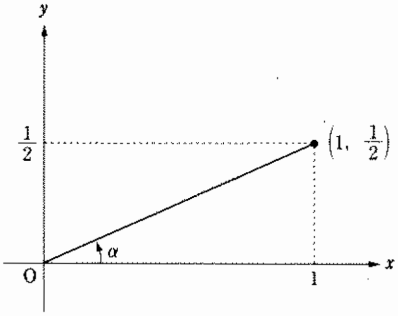
(ii)

$$S=\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{1}{2}.$$

ただし，αは，

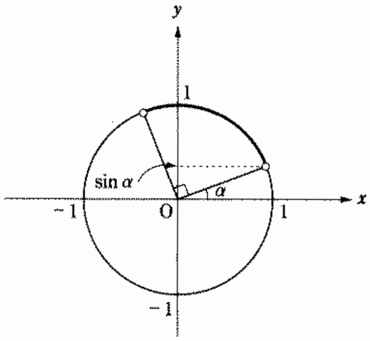
$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

を満たす角である．



$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\alpha<2\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha.$$



このとき，単位円周上の点 $(\cos(2\theta+\alpha),\ \sin(2\theta+\alpha))$ は上図の太線部分を動くから，

$$\sin\alpha<\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1,$$

すなわち，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}<\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1.$$

したがって，

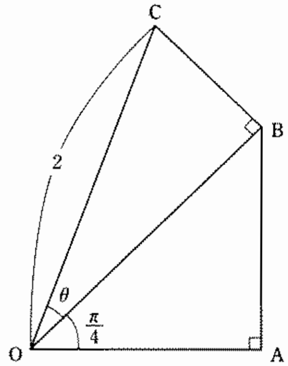
$$1<\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{1}{2}\leqq\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

よって，S のとり得る値の範囲は，

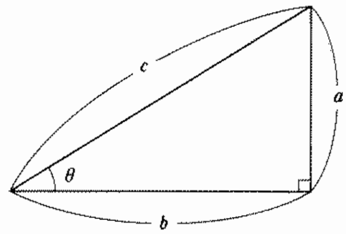
$$1<S\leqq\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

【解説】 問題

(1)



BC，OA の長さを求めるには，



$$\sin\theta=\frac{a}{c},\quad \cos\theta=\frac{b}{c}$$

より，

$$a=c\sin\theta,\ b=c\cos\theta$$

三角比

を用いればよい．

まず，直角三角形 OBC に注目して，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{OC}\sin\theta=2\sin\theta,$$
$$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}\cos\theta=2\cos\theta.$$

次に，直角二等辺三角形 OAB に注目すると，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cos\theta$$

が得られる．

(2)(i) 四角形 OABC の面積 S は，三角形 OAB の面積と三角形 OBC の面積の和であり，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2=\cos^2\theta.$$

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BC}=2\sin\theta\cos\theta.$$

したがって，

$$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}$$
$$=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta.$$

これを $\sin2\theta$，$\cos2\theta$ で表すには，次の

$$2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$$
$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

を用いればよい．

2 つめの式は，余弦の 2 倍角の公式

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

より，

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

とすることで導くことができる．

これらを用いて，

$$S = \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sin 2\theta$$

$$= \sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

となる．

(ii) 一般に，

$a\sin\theta + b\cos\theta \quad ((a,\ b) \neq (0,\ 0))$ …(*)

の最大値･最小値，または，とり得る値の範囲を求めるには，次の「三角関数の合成」を利用して，(*)を

$r\sin(\theta+\alpha) \quad (r,\ \alpha$ は定数$)$

の形に変形すればよい．

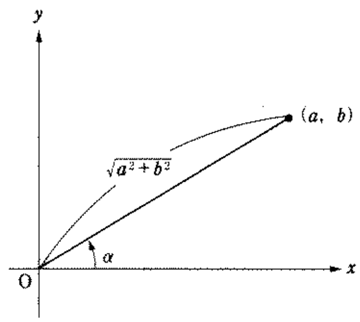
$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ のとき，

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，α は，

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である．



三角関数の合成

本問では，

$$S = \sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

であるから，$\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ の部分に注目し，前述の合成公式を $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ として用いて，

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ より，

$$\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)$$

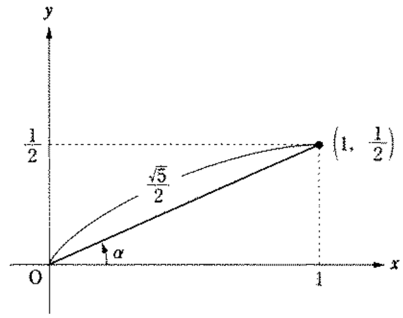
と変形している．

ただし，α は，

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす角であり，$0 < \sin\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たす．

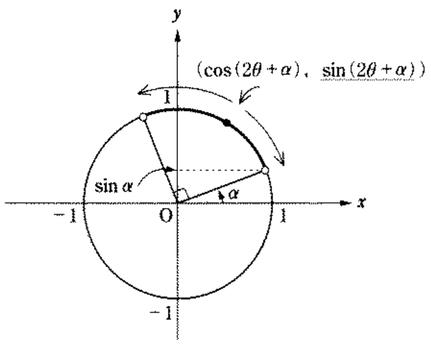


そのうえで，θ が変化したときの $\sin(2\theta+\alpha)$ のとり得る値の範囲を求めればよい．

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき，

$$\alpha < 2\theta + \alpha < \frac{\pi}{2} + \alpha$$

であるから，θ が変化するとき，$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ より，点 $(\cos(2\theta+\alpha),\ \sin(2\theta+\alpha))$ は次図の太線部分を動く．



y 座標に注目することにより，

$$\sin\alpha < \sin(2\theta+\alpha) \leqq 1.$$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \sin(2\theta+\alpha) \leqq 1.$$

したがって，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha) + \frac{1}{2} \leqq \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2},$$

すなわち，

$$1<S\leqq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

となり，S のとり得る値の範囲を求めることができる．

5 整　数

【ⅡA・ⅡB型共通　選択問題】

（配点　50点）

> 3つの自然数 a, b, c が，
>
> $$a^2+ab+b^2=c^2$$
>
> を満たすとする．ただし，c は3の倍数でないとする．
>
> (1) n を整数とするとき，n^2 を3で割った余りを求めよ．
>
> (2) a, b のうち少なくとも一方は3の倍数でないことを示せ．
>
> (3) $b=9$ のとき，a, c の値をそれぞれ求めよ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 15点．

(3) 25点．

【出題のねらい】

整数の除法における余りの基本性質とその扱いを問うとともに，方程式の整数解を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) 整数 n は，整数 k を用いて，

$$3k-1,\ 3k,\ 3k+1$$

のいずれかの形で表される．

$(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$，

$(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$　（複号同順）

であるから，n^2 を3で割った余りは，

$$\begin{cases}\mathbf{0}\,(n \text{ が3の倍数のとき}),\\ \mathbf{1}\,(n \text{ が3の倍数でないとき}).\end{cases}$$

(2) a, b はともに3の倍数であると仮定すると，

$$a=3l,\ b=3m\quad(l,\ m \text{ は整数})$$

と表せ，条件より，

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+ab+b^2\\&=9l^2+9lm+9m^2\\&=3(3l^2+3lm+3m^2).\end{aligned}$$

よって，c^2 は3の倍数となり，(1)から c も3の倍数となる．これは，c が3の倍数でないことに反する．

以上より，

a, b のうち少なくとも一方は3の倍数でない．

(3) $b=9$ のとき，

$$a^2+9a+81=c^2.$$

$$\left(a+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+81=c^2.$$

$$c^2-\left(a+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\cdot3.$$

$$\left(c-a-\frac{9}{2}\right)\left(c+a+\frac{9}{2}\right)=\frac{3^5}{4}.$$

$$(2c-2a-9)(2c+2a+9)=3^5.$$

a, c は自然数で，$2c-2a-9<2c+2a+9$，$2c+2a+9>0$ であるから，

$$\begin{cases}2c-2a-9=3^n, & \cdots①\\ 2c+2a+9=3^{5-n}. & \cdots②\end{cases}$$

ただし，$0\leqq n<5-n$ より，$n=0,\ 1,\ 2$ である．

ここで，①+②より，

$$4c=3^n+3^{5-n}.$$

$$c=\frac{1}{4}(3^n+3^{5-n}).\qquad\cdots③$$

③の右辺に，$n=0,\ 1,\ 2$ を代入して，

$$c=61,\ 21,\ 9.$$

c は3の倍数でないから，

$$c=61.$$

このとき，①より，

$$2\cdot61-2a-9=1.$$

$$a=56$$

となり，a, c はいずれも条件を満たす．

以上より，

$$\boldsymbol{a=56,\ c=61}.$$

【解説】　問題

(1) 任意の整数は，正の整数で割った余りで分類することができる．3で割ると余りは，0, 1, 2のいずれかであるから，すべての整数は，整数 k を商として，

$$3k,\ 3k+1,\ 3k+2\qquad\cdots(*)$$

のいずれかの形で表される．k は整数であるから，(*)の代わりに，

$$3k,\ 3k+1,\ 3k-1\qquad\cdots(*)'$$

と分類しても同じである．**【解答】**では計算の簡明さを重視して(*)′の表現を用いた．

(2) 本問のように，a, b の組合せとして起こり得る場合が多いとき，背理法による証明が有効である．

> ある命題を証明するのに，その命題が成り立たないと仮定して矛盾を導き，それによってその命題が成り立つことを示す証明法を背理法という．
>
> **背理法**

本問では，

「a，bのうち少なくとも一方は3の倍数でない」

の否定である，

「a，bは，ともに3の倍数である」

を仮定し，cが3の倍数であるという矛盾を導いた．

ここで，

> $$\overline{p\text{ かつ }q} \iff \overline{p}\text{ または }\overline{q}$$
> $$\overline{p\text{ または }q} \iff \overline{p}\text{ かつ }\overline{q}$$
>
> **「かつ」の否定，「または」の否定**

を確認しておきたい．

pを「aは3の倍数でない」とすると，$\overline{p}$は「aは3の倍数である」であり，qを「bは3の倍数でない」とすると，$\overline{q}$は「bは3の倍数である」である．

「a，bのうち少なくとも一方は3の倍数でない」という条件は，

「pまたはq」と表せるから，その否定は，

「$\overline{p\text{ または }q} \iff \overline{p}\text{ かつ }\overline{q}$」

より，「aは3の倍数である，かつ，bは3の倍数である」すなわち，「a，bは，ともに3の倍数である」となるのである．

この際，命題の「逆」，「裏」，「対偶」なども確認しておきたい．

(3) 方程式の整数解を求める際には，整数の約数についての関係式を立てることがしばしば有効となる．

> x，y，nは0でない整数とする．
> $$xy=n \qquad \cdots(**)$$
> のとき，x，yはともにnの約数である．
>
> **整数の約数**

この性質を用いるために，a，cの2文字に関する因数分解を考えた．**【解答】**のように，左辺を因数分解し，右辺は定数となるようにするには，

a^2+9aを平方完成し，$\left(a+\frac{9}{2}\right)^2$をひとかたまりにみることがポイントである．また，因数分解したあとに，(**)の形の等式とみなせるように両辺を4倍した．あとは，

$$(2c-2a-9)(2c+2a+9)=3^5$$

より，$2c-2a-9$，$2c+2a+9(>0)$がともに3^5の約数であることから，**【解答】**にあるような①，②の組合せを考えることができる．約数の組合せをすべて書き出すと，

$2c-2a-9$	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
$2c+2a+9$	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0

であるが，$2c-2a-9<2c+2a+9$より，組合せは限定され，cが3の倍数でないことより，その組合せは一意的に決定される．

あるいは，$a^2+9a+81=c^2$をaの2次方程式とみなし，次のように解くこともできる．

((3)の別解)

$a^2+9a+81=c^2$をaの2次方程式とみなす．

$$a^2+9a-c^2+81=0. \qquad \cdots④$$

④の判別式をDとすると，

$$D=9^2-4\cdot1\cdot(-c^2+81)$$
$$=4c^2-3^5.$$

④が整数解をもつには，$D=d^2$を満たす0以上の整数dが存在することが必要である．

$$4c^2-3^5=d^2.$$
$$(2c-d)(2c+d)=3^5.$$

$0<2c-d\leqq 2c+d$に注意すると，上式を満たす整数の組$(2c-d,\ 2c+d)$は次表のようになる．

$2c-d$	3^0	3^1	3^2
$2c+d$	3^5	3^4	3^3

これより，

$$(c,\ d)=(61,\ 121),\ (21,\ 39),\ (9,\ 9).$$

cは3の倍数でないから，$(c,\ d)=(61,\ 121)$．

このとき，④は，

$$a^2+9a-3640=0.$$
$$(a+65)(a-56)=0.$$
$$a=-65,\ 56.$$

$a>0$より，　$a=56$.

以上より，

$$a=56,\ c=61.$$

((3)の別解終り)

6 数 列

【ⅡB型 選択問題】

(配点 50点)

> 数列 $\{a_n\}$ は,
> $$\begin{cases} a_1=5, \\ a_{n+1}=-3a_n+4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$
> を満たすとする. また, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする.
>
> (1) 一般項 a_n を求めよ.
>
> (2) S_n を求めよ.
>
> (3) 数列 $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$, …の項のうち3の倍数になるものを小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ とする. このとき, $\sum_{k=1}^{2m} b_k\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ.

【配点】

(1) 10点.

(2) 15点.

(3) 25点.

【出題のねらい】

漸化式で定められた数列の一般項を求めることができるか, さらに, 複雑な数列から規則を発見して論述できるかをみる問題である.

【解答】

(1)
$$a_{n+1}=-3a_n+4.$$

これを変形して,

$$a_{n+1}-1=-3(a_n-1).$$

よって, 数列$\{a_n-1\}$は初項が a_1-1, 公比が-3の等比数列である.

$a_1=5$ より, $a_1-1=4$ であるから,

$$a_n-1=4\cdot(-3)^{n-1}.$$
$$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}+1.$$

(2)
$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n} 4\cdot(-3)^{k-1}+\sum_{k=1}^{n} 1.$$

ここで, 数列 $\{4\cdot(-3)^{k-1}\}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$は初項が4, 公比が$-3$, 項数 n の等比数列であるから, その和は,

$$\sum_{k=1}^{n} 4\cdot(-3)^{k-1}=\frac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}$$
$$=\frac{4\{1-(-3)^n\}}{4}$$
$$=1-(-3)^n.$$

一方,

$$\sum_{k=1}^{n} 1=n.$$

以上より,

$$S_n=1-(-3)^n+n$$
$$=n+1-(-3)^n.$$

(3)(ア) まず, $|S_n|$が3の倍数になるような n について調べる.

$|S_n|$が3の倍数になるのは, S_n が3の倍数になるときである. いま,

$$S_n=(n+1)-(-3)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

において, $(-3)^n$は3の倍数であるから, S_nが3の倍数になるには, $n+1$ が3の倍数であればよい.

これと $n+1\geqq 2$ から, 正の整数 k を用いて,

$$n+1=3k,$$

すなわち,

$$n=3k-1$$

と表せる.

(イ) 次に, S_n の符号を調べる.

$$S_n=n+1-(-3)^n$$
$$=n+1+(-1)^{n+1}\cdot 3^n$$

と表せることに注意する.

(i) n が奇数のとき,

$$(-1)^{n+1}=1$$

である. ゆえに,

$$S_n=n+1+3^n$$

となり, これは正である.

(ii) n が偶数のとき,

$$(-1)^{n+1}=-1$$

である. ゆえに,

$$S_n=n+1-3^n.$$

ここで, k が正の整数であるとき,

$$S_{2k}<0 \qquad \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法で証明する.

(Ⅰ) $k=1$ のとき,

$$S_2=2+1-9=-6<0$$

であるから, $(*)$ は成立する.

(Ⅱ) $k=i\,(i\geqq 1)$ のとき,

$S_{2i}<0$ と仮定する.

このとき,

$$S_{2i}=2i+1-3^{2i},$$
$$S_{2(i+1)}=2(i+1)+1-3^{2(i+1)}.$$

ゆえに,

$$S_{2(i+1)}-S_{2i}$$
$$=(2i+3-9\cdot 3^{2i})-(2i+1-3^{2i})$$
$$=2-8\cdot 3^{2i}<0$$

から,

$$S_{2(l+1)}<S_{2l}.$$

これと仮定から,

$$S_{2(l+1)}<0$$

も成り立つ.

以上,(Ⅰ),(Ⅱ)より, $k=1, 2, 3, \cdots$ に対して,(*)が成り立つ.

ゆえに,数列 $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$, …のうち,3の倍数であるものを並べると,

$|S_2|$, $|S_5|$, $|S_8|$, $|S_{11}|$, $|S_{14}|$, $|S_{17}|$, …

であり,絶対値記号をはずすと,

$-S_2$, S_5, $-S_8$, S_{11}, $-S_{14}$, S_{17}, …

となる.

(ウ) さらに,これらの項の大小を比較する.

(2)より,

$$\begin{aligned}S_n&=n+1-(-3)^n\\&=n+1+(-1)^{n+1}\cdot 3^n\\&=(-1)^{n+1}\{3^n+(-1)^{n+1}(n+1)\}.\end{aligned}$$

n が奇数のとき,

(イ)より, $S_n>0$ であり, $(-1)^{n+1}=1$ であるから,

$$|S_n|=S_n=3^n+(-1)^{n+1}(n+1).$$

n が偶数のとき,

(イ)より, $S_n<0$ であり, $(-1)^{n+1}=-1$ であるから,

$$|S_n|=-S_n=3^n+(-1)^{n+1}(n+1).$$

よって, n の偶奇によらず,

$$|S_n|=3^n+(-1)^{n+1}(n+1)$$

と表せる.

したがって,

$$\begin{aligned}&|S_{n+3}|-|S_n|\\&=3^{n+3}+(-1)^{n+4}(n+4)-\{3^n+(-1)^{n+1}(n+1)\}\\&=(3^3-1)3^n+(-1)^n(n+4)+(-1)^n(n+1)\\&=26\cdot 3^n+(-1)^n(2n+5)\\&>26\cdot 2^n+(-1)^n(2n+5)\\&=26\cdot(1+1)^n+(-1)^n(2n+5)\\&=26({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)+(-1)^n(2n+5)\\&\geqq 26(1+n)+(-1)^n(2n+5)\\&>0.\end{aligned}$$

よって,

$$|S_{n+3}|>|S_n|$$

が成り立つ.

以上,(ア),(イ),(ウ)より,数列 $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$, … の項のうち,3の倍数になるものを小さい順に並べると,

$-S_2$, S_5, $-S_8$, S_{11}, …, $-S_{6l-4}$, S_{6l-1}, …

となることがわかる.

以上より,

$$\begin{cases}b_{2l-1}=-S_{6l-4}=3^{6l-4}-6l+3,\\ b_{2l}\ =\ S_{6l-1}=27\cdot 3^{6l-4}+6l\end{cases}$$

$(l=1, 2, 3, \cdots)$

と定まる.

したがって,求める和は,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2m}b_k&=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots\\&\qquad\cdots+(b_{2m-1}+b_{2m})\\&=\sum_{l=1}^{m}(b_{2l-1}+b_{2l})\\&=\sum_{l=1}^{m}(28\cdot 3^{6l-4}+3)\\&=28\cdot\frac{9\{(3^6)^m-1\}}{3^6-1}+3m\\&=\boldsymbol{\frac{9}{26}(3^{6m}-1)+3m.}\end{aligned}$$

【解説】 問題

(1) 2項間漸化式を解く問題である.

$$a_{n+1}=pa_n+q$$

(p, q は定数で, $p\neq 1$, $q\neq 0$)

の形の漸化式を解くには,次のように変形することが基本である.

$$a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p\left(a_n+\frac{q}{p-1}\right)$$

漸化式の変形

この変形から,数列 $\left\{a_n+\dfrac{q}{p-1}\right\}$ は公比 p の等比数列であることがわかり,一般項を求めることができる.

(2) S_nを求めるには, a_n を $4\cdot(-3)^{n-1}$ と1に分けて,それぞれの和を求めて加えればよい. $\sum_{k=1}^{n}4\cdot(-3)^{k-1}$ は公比が-3の等比数列の和, $\sum_{k=1}^{n}1$ は公比が1の等比数列の和であるから,

初項 a, 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると,

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1\text{ のとき}),\\ na & (r=1\text{ のとき})\end{cases}$$

等比数列の和

を用いた.

(3) 次の3つの作業に分かれる長い論証が必要である.

(ア) 3の倍数がどれであるかを調べる,

(イ) $|S_n|$の絶対値記号をはずす,

(S_n の符号を調べる.)

(ウ) 大小関係を調べる，

そのあとに，和を計算することになる．

【解答】では，(ア)，(イ)，(ウ)の順に議論を進めた．以下，その詳細を述べる．

(ア)について．

$|S_n|$が3の倍数であるのは，S_nが3の倍数のときである．ここで，

$$S_n=(n+1)-(-3)^n$$

において，$(-3)^n$は3の倍数である．したがって，S_nが3の倍数になるのは，$n+1$が3の倍数のときである．すなわち，

$$n+1=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$$

から，

$$n=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$$

と求めることができる．より一般的な書き方をすれば，

$$n+1=3k$$

すなわち，

$$n=3k-1 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を得る．

(イ)について．

【解答】では，(ア)での議論とは切り離して，単にS_nの符号だけを考察した．

$$S_n=n+1-(-3)^n$$
$$=n+1+(-1)^{n+1}\cdot 3^n$$

という式のままでは，符号を調べるのは難しい．

まず，初めの6項を書き出して，様子を調べてみよう．

$$S_1=2+3>0, \quad S_2=3-3^2<0,$$
$$S_3=4+3^3>0, \quad S_4=5-3^4<0,$$
$$S_5=6+3^5>0, \quad S_6=7-3^6<0.$$

ここから，

nが奇数のとき，$S_n>0$，

nが偶数のとき，$S_n<0$

と推定される．

nが奇数のときは$(-1)^{n+1}=1$であるから，

$$S_n=n+1+3^n>0$$

となることがわかる．

一方，nが偶数のときは$(-1)^{n+1}=-1$であるから，

$$S_n=n+1-3^n$$

となり，すぐにはS_nの符号はわからない．そこで，**【解答】**では数学的帰納法を用いて$S_{2k}<0$であることを証明した．

> 自然数kに関する命題$P(k)$が，すべての自然数kについて成り立つことを示すには，次の(Ⅰ)，(Ⅱ)を証明すればよい．
>
> (Ⅰ) $P(1)$が成り立つ．
>
> (Ⅱ) $P(i)$が成り立つならば，
>
> $P(i+1)$が成り立つ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$．
>
> **数学的帰納法**

あるいは，次のように調べることもできる．

((3)(イ)(ii)の別解)

nを2以上の偶数とする．

$$\begin{aligned}S_n&=n+1-3^n\\&<n+1-2^n\\&=n+1-(1+1)^n\\&=n+1-({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)\\&<n+1-({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1)\\&=n+1-(1+n)\\&=0.\end{aligned}$$

((3)(イ)(ii)の別解終り)

(ウ)について．

(ア)，(イ)での議論を踏まえて数列$\{b_n\}$に現れる項を，$\{|S_n|\}$において番号nの小さいものから書き並べると，

$$-S_2,\ S_5,\ -S_8,\ S_{11},\ -S_{14},\ S_{17},\ \cdots$$

となることがわかる．これらを，値が小さい順に並べ替えたものが数列$\{b_n\}$である．しかし，ここまでの議論だけでは，どのように並び替わるのか不明である．やはり，初めの6項を書き出して様子を調べてみよう．

$$-S_2=3^2-3, \quad S_5=3^5+6,$$
$$-S_8=3^8-9, \quad S_{11}=3^{11}+12,$$
$$-S_{14}=3^{14}-15, \quad S_{17}=3^{17}+18.$$

これより，

$$-S_2<S_5<-S_8<S_{11}<\cdots$$

すなわち，

$$b_1=-S_2, \quad b_2=S_5,$$
$$b_3=-S_8, \quad b_4=S_{11},$$
$$b_5=-S_{14}, \quad b_6=S_{17}$$

と推定される．

そこで，**【解答】**では，

$$|S_{n+3}|>|S_n|$$

が成り立つことを確認することによって，一般的に，

$$\begin{cases}b_{2l-1}=-S_{6l-4},\\ b_{2l}=S_{6l-1}\end{cases} \quad (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となることを調べた．

あるいは，次のように大小順を調べてもよい．

((3)(ウ)の別解)

(ア)，(イ)より，数列 $\{|S_n|\}$ のうち，3の倍数のものは，n の小さいものから書き並べると，

$-S_2$，S_5，$-S_8$，S_{11}，$\cdots$，$-S_{6i-4}$，S_{6i-1}，$\cdots$

となる．

これらの項の大小を比較する．

$$\begin{aligned} -S_{6i-4} &= -(6i-4)-1+(-3)^{6i-4} \\ &= 3^{6i-4}-6i+3, \\ S_{6i-1} &= (6i-1)+1-(-3)^{6i-1} \\ &= 3^{6i-1}+6i \\ &= 27\cdot 3^{6i-4}+6i, \\ -S_{6(i+1)-4} &= -(6i+2)-1+(-3)^{6i+2} \\ &= 3^{6i+2}-6i-3 \\ &= 27\cdot 3^{6i-1}-6i-3. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} &S_{6i-1}-(-S_{6i-4}) \\ &= 26\cdot 3^{6i-4}+12i-3>0 \end{aligned}$$

であるから，

$$-S_{6i-4}<S_{6i-1}.$$

一方，

$$\begin{aligned} &\{-S_{6(i+1)-4}\}-S_{6i-1} \\ &= 26\cdot 3^{6i-1}-12i-3 \\ &= \frac{26}{3}\cdot 3^{6i}-12i-3. \end{aligned}$$

ここで，$S_{2m}=2m+1-3^{2m}$ から，

$$3^{2m}=2m+1-S_{2m}. \qquad \cdots ①$$

① に $m=3i$ を代入して，

$$3^{6i}=6i+1-S_{6i}.$$

また，$S_{6i}<0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} &\{-S_{6(i+1)-4}\}-S_{6i-1} \\ &= \frac{26}{3}\cdot 3^{6i}-12i-3 \\ &= \frac{26}{3}(6i+1-S_{6i})-12i-3 \\ &= 40i+\frac{17}{3}-\frac{26}{3}S_{6i} \\ &>0. \end{aligned}$$

したがって，

$$S_{6i-1}<-S_{6(i+1)-4}$$

が成り立つ．

((3)(ウ)の別解終り)

ここまでの議論を踏まえて，

$$\sum_{k=1}^{2m} b_k = -S_2+S_5-S_8+S_{11}-\cdots \cdots -S_{6m-4}+S_{6m-1}$$

を計算することができる．

【解答】では，

$$\sum_{k=1}^{2m} b_k=\sum_{l=1}^{m}(b_{2l-1}+b_{2l})$$

と書き直すひと工夫によって，計算量を抑えている．

【ⅢB・ⅢC 型受験者用】

[1] 小問集合

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

(配点　40点)

> (1) 次の方程式，不等式を解け．
>
> (i) $2\log_2(x-1)-\log_2(7-x)=0$
>
> (ii) $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1<0$
>
> (2) 定積分 $\int_{-1}^{1}|x^2-2x|dx$ の値を求めよ．
>
> (3) 3つのサイコロ A，B，C を同時に振り，出た目をそれぞれ a，b，c とする．
>
> (i) $a<b<c$ となる確率を求めよ．
>
> (ii) $a\leqq b\leqq c$ となる確率を求めよ．
>
> (4) a，b を実数の定数とする．
>
> $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin x+b}{x-\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$ が成り立つとき，a，b の値をそれぞれ求めよ．

【配点】

(1) 12点．

(i) 6点．(ii) 6点．

(2) 6点．

(3) 12点．

(i) 6点．(ii) 6点．

(4) 10点．

【出題のねらい】

(1) 指数関数・対数関数を含む方程式，不等式を解くことができるかをみる問題である．

(2) 絶対値記号のついた関数の積分ができるかをみる問題である．

(3) 場合の数を適切に数え上げることができるかをみる問題である．

(4) 関数の極限の理解度をみる問題である．

【解答】

(1)(i)

$$2\log_2(x-1)-\log_2(7-x)=0. \qquad \cdots①$$

真数は正であるから，

$$x-1>0 \quad かつ \quad 7-x>0.$$

よって，

$$1<x<7.$$

① より，

$$\log_2(x-1)^2=\log_2(7-x).$$

よって，

$$(x-1)^2=7-x.$$
$$x^2-x-6=0.$$
$$(x+2)(x-3)=0.$$
$$x=-2,\ 3.$$

$1<x<7$ であるから，求める解は，

$$x=3.$$

(ii) ⅡA・ⅡB型 [1](3)【解答】参照．

(2) $-1\leqq x\leqq 1$ において，

$$|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (-1\leqq x\leqq 0 のとき), \\ -(x^2-2x) & (0\leqq x\leqq 1 のとき) \end{cases}$$

であるから，

$$\int_{-1}^{1}|x^2-2x|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\mathbf{2}.$$

(3) 3つのサイコロの目の出方は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい．

(i) $a<b<c$ となるサイコロの目の出方は，6種類の目のうちから異なる3種類をとる組合せの総数に等しく，

$$_6C_3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20(通り).$$

よって，求める確率は，

$$\frac{20}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{54}}.$$

(ii) $a\leqq b\leqq c$ となるサイコロの目の出方は，6種類の目のうちから重複を許して3種類をとる組合せの総数に等しく，

$$_{6+3-1}C_3={}_8C_3$$
$$=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}$$
$$=56(通り).$$

よって，求める確率は，

$$\frac{56}{6^3}=\mathbf{\frac{7}{27}}.$$

(4)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin x+b}{x-\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}. \qquad \cdots①$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0. \qquad \cdots②$$

①，② より，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(a\sin x+b)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin x+b}{x-\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sqrt{3}\cdot 0$$
$$=0.$$

一方，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(a\sin x+b)=a\sin\frac{\pi}{6}+b$$

$$=\frac{1}{2}a+b$$

であるから，

$$\frac{1}{2}a+b=0.$$

よって，

$$a=-2b. \qquad \cdots③$$

このとき，$\theta=x-\frac{\pi}{6}$ とおくと，② より，

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\theta=0$ であるから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin x+b}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{b\left\{1-2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}}{\theta}$$

$$=b\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{\theta}$$

$$=b\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$

$$=b\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\sin\theta-\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$

$$=b\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot0-\sqrt{3}\cdot1\right)$$

$$=-\sqrt{3}\,b.$$

これが $\sqrt{3}$ に一致するから，

$$b=-1.$$

このとき，③ より，

$$a=2.$$

以上より，

$$\boldsymbol{a=2,\ b=-1.}$$

【解説】 問題

(1)(i) 対数関数を含む方程式を解く際には，まず始めに，真数は正の数であることに注意したい．

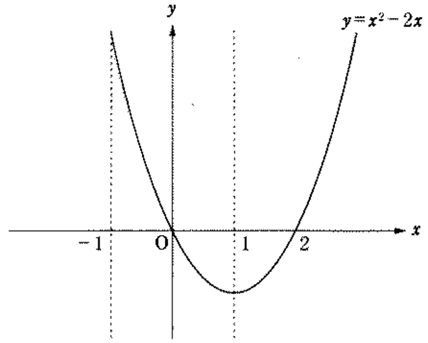
そのあとは，

> $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，k が実数のとき，
> $$\log_a M^k=k\log_a M$$
> **対数の性質**

に従って，$2\log_2(x-1)=\log_2(x-1)^2$ と変形し，x の方程式 $(x-1)^2=7-x$ を解けばよい．

(ii) **ⅡA・ⅡB 型** $\boxed{1}$ **(3)【解説】**参照．

(2) $\int_{-1}^{1}|x^2-2x|\,dx$ を計算するには，被積分関数の絶対値記号をはずさなければならない．



$y=x^2-2x$ の符号は，

$$\begin{cases}x^2-2x\geqq0 & (x\leqq0,\ 2\leqq x \text{ のとき}),\\ x^2-2x\leqq0 & (0\leqq x\leqq2 \text{ のとき})\end{cases}$$

であるから，絶対値記号は，次のようにはずすことができる．

$$|x^2-2x|=\begin{cases}x^2-2x & (-1\leqq x\leqq0 \text{ のとき}),\\ -(x^2-2x) & (0\leqq x\leqq1 \text{ のとき})\end{cases}$$

あとは，**【解答】**のように計算すればよい．

(3)(i) 3つのサイコロの目の出方は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい．

確率 $P(E)$ は，

> $$P(E)=\frac{\text{事象 } E \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$
> **確率**

と定義されるから，

$$(a<b<c \text{ となる確率})$$
$$=\frac{(a<b<c \text{ となる場合の数})}{6^3}$$

を計算すればよい．

$a<b<c$ となる場合の数は，6種類の目から異なる3種類をとる組合せの総数に等しく，

> $${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$
> **組合せ**

に従って，

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20(\text{通り})$$

として求めることができる．

(ii) $a\leqq b\leqq c$ となる場合の数は，**【解答】**では，6種類の目から重複を許して3種類をとる「重複組合せ」と考えて求めている．

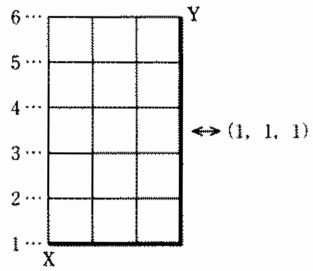
> 異なる n 種類のものから重複を許して r 個取り出す重複組合せの総数を ${}_n\mathrm{H}_r$ と表すと，
> $${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r.$$
> **重複組合せ**

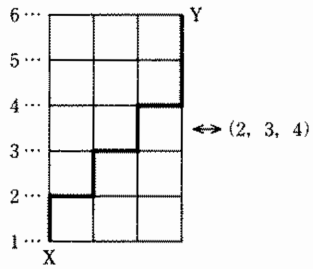
これは次のように説明できる．

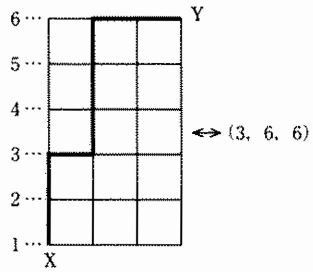
1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 個の数字から重複を許して 3 つとる組合せの総数は，${}_6\mathrm{H}_3$ 通り．そのおのおのの組合せ，例えば(1, 1, 1)，(2, 3, 4)，(3, 6, 6)に対して，次図のように X から Y へ進む最短経路のうち，太線のような経路にそれぞれ 1 対 1 に対応させることができるから，

$${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3\quad \text{すなわち，}\ {}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

が得られる．







あるいは，次のように場合分けをして求めてもよい．

((3)(ii) の別解)

$a\leqq b\leqq c$ となる目の出方は，

(ア) $a<b<c$ (イ) $a=b=c$

(ウ) $a=b<c$ (エ) $a<b=c$

の 4 つの場合がある．

(ア) のとき，(i) より，20 通り．

(イ) のとき，${}_6\mathrm{C}_1=6$(通り)．

(ウ) のとき，

$a=b=k$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$) のとき，c のとり得る値は，

$$k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 6 \text{ の } 6-k \text{ 通り．}$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{5}(6-k)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5+1)=15(\text{通り}).$$

(エ) のとき，(ウ) と同様にして，

15 通り．

以上より，$a\leqq b\leqq c$ となる場合の数は，

$$20+6+15+15=56(\text{通り}).$$

よって，求める確率は，

$$\frac{56}{6^3}=\frac{7}{27}.$$

((3)(ii) の別解終り)

(4) ①，② から，③ が得られることを確認しておこう．

> $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a}g(x)=\beta$ とすると，
> $$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$$
> **関数の極限値の性質**

より，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(a\sin x+b)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin x+b}{x-\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sqrt{3}\cdot 0$$
$$=0$$

となる．一方，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(a\sin x+b)=a\sin\frac{\pi}{6}+b$$
$$=\frac{1}{2}a+b$$

であるから，③ を得る．

この a, b の関係式 ③ を得たあと，**【解答】**では，$\theta=x-\dfrac{\pi}{6}$ とおいて，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{b(1-2\sin x)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{b\left\{1-2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}}{\theta}$$

と変形し，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ を

> $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
> **加法定理**

を用いて展開した．そのうえで，

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\dfrac{\sin x}{x}$ **の極限**

が適用できるように，

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} \cdot \sin\theta$$

と変形し，上記の極限値の性質により，

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{1+\cos\theta} \cdot \sin\theta = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

を得ている．

2 微　分

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

（配点　40点）

> a を正の定数として，
>
> $$f(x) = xe^{-x},\ g(x) = (x+1)e^{-x} + ax$$
>
> とする．
>
> (1)　$f(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．
>
> (2)　$g(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　20 点．

(2)　20 点．

【出題のねらい】

関数の増減，極値を調べて，そのグラフをかくことができるか．また，関数が極値をもつための条件を理解しているかをみる問題である．

【解答】

(1)　$f(x) = xe^{-x}$ より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'e^{-x} + x(e^{-x})' \\ &= 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-x)' \\ &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= e^{-x}(1-x). \end{aligned}$$

$e^{-x} \neq 0$ より，$f'(x) = 0$ の解は，

$$x = 1.$$

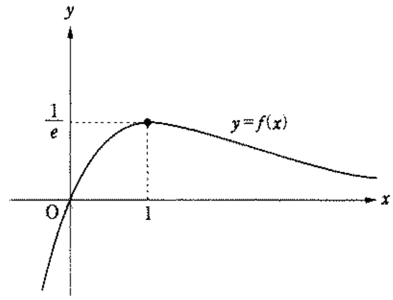
よって，$f(x)$ の増減は次表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

したがって，$f(x)$ は $x=1$ において極大となり，極大値は，

$$f(1) = \frac{1}{e}.$$

また，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ であるから，$y=f(x)$ のグラフの概形は次図のようになる．



(2)　$g(x) = (x+1)e^{-x} + ax$ より，

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' + a \\ &= 1 \cdot e^{-x} + (x+1)e^{-x} \cdot (-x)' + a \\ &= e^{-x} - (x+1)e^{-x} + a \\ &= a - xe^{-x} \\ &= a - f(x). \end{aligned}$$

$g(x)$ が極値をもつ条件は，$g'(x) = 0$ を満たす x が存在し，かつその x の値の前後で $g'(x)$ の符号が変化することである．

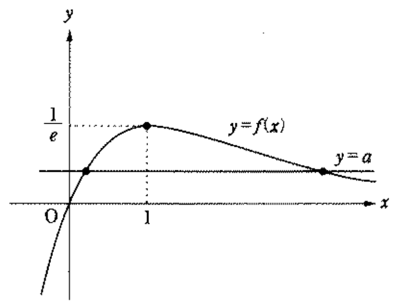
$a > f(x)$ のとき，$g'(x) > 0$，

$a < f(x)$ のとき，$g'(x) < 0$

が成り立つから，

「$y=a$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフが共有点をもち，かつ，その共有点の前後で2つのグラフの上下が入れ替わる」

ような a の値の範囲を求めればよい．



よって，求める a の値の範囲は，

$$0 < a < \frac{1}{e}.$$

【解説】　問題

(1)　$f(x)$ を微分するには，次の積の微分法と合成関

数の微分法を用いる.

> 微分可能な2つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の積として表される関数 $p(x)q(x)$ の導関数は次のようになる.
>
> $\{p(x)q(x)\}'=p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$.
>
> **積の微分法**

> 関数 $y=p(u)$ と関数 $u=q(x)$ がともに微分可能ならば, 合成関数 $p(q(x))$ の導関数は次のようになる.
>
> $\{p(q(x))\}'=p'(q(x))q'(x)$.
>
> **合成関数の微分法**

これより,

$$f'(x)=e^{-x}(1-x)$$

となる.

$f(x)$ の増減を調べるには $f'(x)$ の符号を調べればよい.

$e^{-x}>0$ であるから, $f'(x)$ の符号は $1-x$ の符号に一致する.

$$\begin{cases} x<1 \text{ のとき, } f'(x)>0, \\ x=1 \text{ のとき, } f'(x)=0, \\ x>1 \text{ のとき, } f'(x)<0 \end{cases}$$

であるから, $x<1$ において $f(x)$ は増加し, $x>1$ において $f(x)$ は減少することがわかる.

これを増減表にまとめてから,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

に注意して, $y=f(x)$ のグラフをかけばよい.

(2) $g(x)$ を微分すると,

$$g'(x)=a-f(x)$$

となる.

$g(x)$ が極値をもつための条件は,

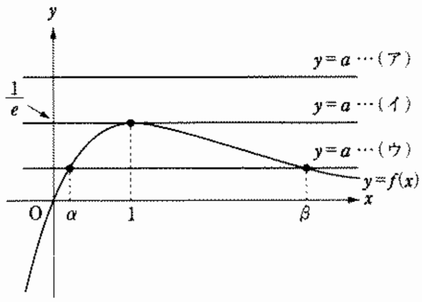
「$g'(x)=0$ を満たす x が存在し, かつ

その x の値の前後で $g'(x)$ の符号が変化する」

ことである.

そこで, **【解答】**では, 「$g'(x)=0$ を満たす x が存在する」ということは, $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフが共有点をもつことであるととらえ, 「$g'(x)$ の符号が変化する」ということは, $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの上下が入れ替わることであるととらえた.

$a(>0)$ の値で場合分けをすると, 次のことがわかる.



(ア) $a>\dfrac{1}{e}$ のとき.

$y=a$ のグラフは, つねに $y=f(x)$ のグラフの上側にある.

したがって, つねに

$$a>f(x)$$

すなわち,

$$g'(x)>0$$

が成り立つことになり, $g(x)$ は単調に増加し, 極値をもたない.

(イ) $a=\dfrac{1}{e}$ のとき.

$y=a$ のグラフは, $y=f(x)$ のグラフと点 $\left(1,\ \dfrac{1}{e}\right)$ で接する.

このとき, その接点の前後で2つのグラフの上下は入れ替わらず,

$$\begin{cases} x<1 \text{ のとき, } a>f(x), \text{ すなわち } g'(x)>0, \\ x>1 \text{ のとき, } a>f(x), \text{ すなわち } g'(x)>0 \end{cases}$$

であるから, つねに

$$g'(x)\geqq 0$$

が成り立つことになり, $g(x)$ は単調に増加し, 極値をもたない.

(ウ) $0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき.

$y=a$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフは2点で交わる.

共有点の x 座標を α, $\beta(\alpha<\beta)$ とすれば, 2つの共有点 $(\alpha,\ a)$, $(\beta,\ a)$ の前後で, それぞれ $y=a$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフの上下が入れ替わっていることがわかり,

$$\begin{cases} x<\alpha \text{ のとき, } a>f(x), \text{ すなわち } g'(x)>0, \\ \alpha<x<\beta \text{ のとき, } a<f(x), \text{ すなわち } g'(x)<0, \\ x>\beta \text{ のとき, } a>f(x), \text{ すなわち } g'(x)>0 \end{cases}$$

が成り立つ.

よって, $g(x)$ の増減は次表のようになり,

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$g(x)$は$x=\alpha$で極大，$x=\beta$で極小になることがわかる.

以上から，$g(x)$が極値をもつようなaの値の範囲は，

$$0<a<\frac{1}{e}$$

となる.

3 平面ベクトル

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

(配点　40点)

中心O，半径1の円周を，8つの点A_1，A_2，A_3，…，A_8がこの順に反時計まわりに8等分している．5つの点P_1，P_2，P_3，P_4，P_5を，

$$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}=\overrightarrow{OA_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

を満たすようにとり，線分P_1P_3を直径とする円をCとする.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$として，次の問に答えよ.

(1) $\overrightarrow{P_3P_4}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ.

(2) Cの半径を求めよ.

(3) 点QがC上を一周するとき，三角形P_2P_5Qの面積の最大値を求めよ.

【配点】

(1) 15点.

(2) 10点.

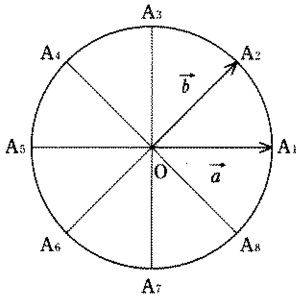
(3) 15点.

【出題のねらい】

平行移動としてのベクトルの扱い方の確認から始めて，図形を調べるための基本的なベクトルの手法の定着度をみる問題である.

【解答】

(1)



$$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}=\overrightarrow{OA_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)\qquad \cdots(*)$$

より，

$$\overrightarrow{P_3P_4}=\overrightarrow{OA_3}.\qquad \cdots①$$

8つの点A_1，A_2，…，A_8をこの順に結んで得られる八角形は，Oを中心とし半径1の円に内接する正八角形であるから，

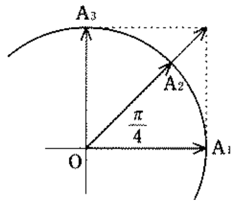
$$|\overrightarrow{OA_k}|=1\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)\qquad \cdots②$$

であり，

$$\begin{cases}\angle A_kOA_{k+1}=\dfrac{\pi}{4}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7),\\ \angle A_8OA_1=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}\qquad \cdots③$$

これより，

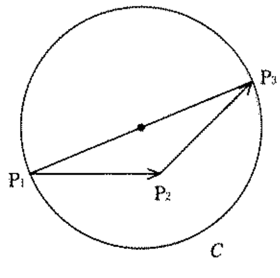
$$\sqrt{2}\ \overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}.$$



これを①に代入して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_3P_4}&=-\overrightarrow{OA_1}+\sqrt{2}\ \overrightarrow{OA_2}\\&=-\vec{a}+\sqrt{2}\ \vec{b}.\end{aligned}$$

(2)



(*)より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_3}&=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}\\&=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\\&=\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

であるから，

$$|\overrightarrow{P_1P_3}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=1+1+2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{4}\quad(②,\ ③\ より)$$
$$=2+\sqrt{2}.$$

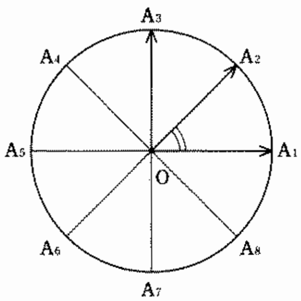
これより，

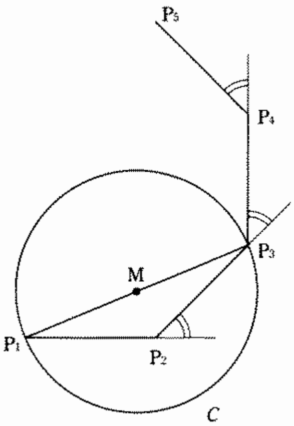
$$P_1P_3=\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

よって，求める C の半径を r とすると，

$$r=\frac{1}{2}P_1P_3$$
$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

(3) 平面上に点 P_1 を任意に1つとり固定し，(*)に従って P_2，P_3，P_4，P_5 を順に定めていくと，次の折れ線 $P_1P_2P_3P_4P_5$ が得られる．





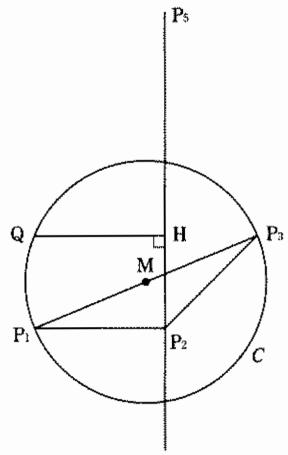
C の中心を M とおく．

$$r=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}<\frac{\sqrt{2+2}}{2}=1$$

より，

$$P_1M<P_1P_2.$$

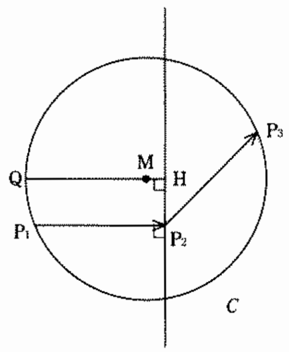
よって，M は直線 P_2P_5 に関して，P_3 の反対側にある．いま，三角形 P_2P_5Q の面積の最大値を求めるのであるから，Q は直線 P_2P_5 に関して M と同じ側にある場合を考えればよい．



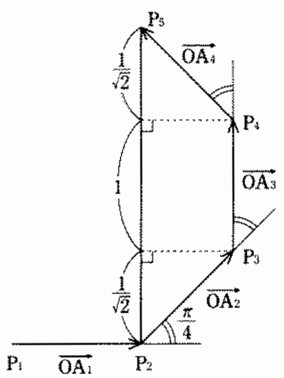
Q から直線 P_2P_5 に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\triangle P_2P_5Q=\frac{1}{2}P_2P_5\cdot QH.\qquad\cdots④$$

P_2P_5 は一定であるから，三角形 P_2P_5Q の面積が最大になるのは，線分 QH が最大，すなわち線分 QH 上に M があるときであり，このときの面積を求めればよい．



まず，P_2P_5 の長さを求める．



上図より，

$$P_2P_5=\frac{1}{\sqrt{2}}\times2+1=1+\sqrt{2}.\qquad\cdots⑤$$

次に，MH の長さを求める．

$$\mathrm{MH} \parallel \mathrm{P_1P_2}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MH}} = k\vec{a} \quad (k \text{ は実数})$$

とおけるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P_2H}} &= \overrightarrow{\mathrm{P_1H}} - \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{P_1M}} + \overrightarrow{\mathrm{MH}} - \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + k\vec{a} - \vec{a}\\ &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.\end{aligned}$$

図より，$\mathrm{P_1P_2} \perp \mathrm{P_2H}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_2H}} = 0$$

が成り立つ．

したがって，

$$\vec{a} \cdot \left\{\left(k-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right\} = 0.$$

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

$$\left(k-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.$$

よって，

$$k = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}| = |k\vec{a}| = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

これより，

$$\begin{aligned}\mathrm{QH} &= \mathrm{QM} + \mathrm{MH}\\ &= r + \mathrm{MH}\\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}. \qquad \cdots ⑥\end{aligned}$$

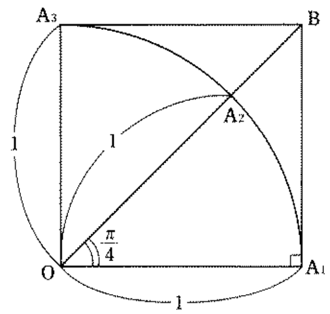
⑤，⑥ を ④ に代入して，求める面積の最大値は，

$$\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}}.$$

【解説】 問題

(1) $\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ はともに大きさが1の，垂直なベクトルであるから，$\mathrm{OA_1}$ と $\mathrm{OA_3}$を隣り合う2辺とする平行四辺形は，一辺の長さ1の正方形である．



図のように，頂点Bを定めて正方形 $\mathrm{OA_1BA_3}$ をつくると，三角形 $\mathrm{OA_1B}$ は直角二等辺三角形となるから，

$$\mathrm{OB} = \sqrt{2}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_3}})\end{aligned}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

を得る．

【解答】では，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ が大きさが等しく垂直なベクトルであるから，これらを1次独立なベクトルに選んで解答した．

あるいは，問題文から素直に，1次独立なベクトルとして $\vec{a}$，$\vec{b}$ を選んで解答することもできる．そのときはベクトルの大きさ，なす角の条件をとらえるために内積が必要になる．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$$

内積の性質

に注意すると，次のようになる．

〈(1) の別解〉

$$\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$$

であるから，実数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

とおく．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ の位置関係より，$x<0$，$y>0$ である．

このとき，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}| = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = 0 \qquad \cdots ⑦$$

が成り立つ．

$$\begin{cases}|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1,\\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

であるから，

$$|\overrightarrow{OA_3}|^2=|x\vec{a}+y\vec{b}|^2$$
$$=x^2|\vec{a}|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2|\vec{b}|^2$$
$$=x^2+\sqrt{2}xy+y^2,$$
$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})$$
$$=x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=x+\frac{1}{\sqrt{2}}y.$$

これを ⑦ に代入して,

$$\begin{cases} x^2+\sqrt{2}xy+y^2=1, \\ \sqrt{2}x+y=0. \end{cases}$$

これより,

$$x=\pm 1,\ y=\mp\sqrt{2}\quad (\text{複号同順})$$

を得る.

$x<0$, $y>0$ より,

$$x=-1,\ y=\sqrt{2}.$$

よって,

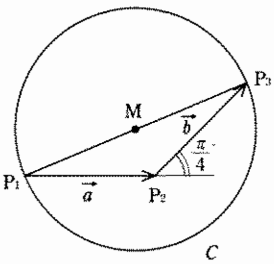
$$\overrightarrow{P_3P_4}=-\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}.$$

((1) の別解終り)

(2) C の半径は $\frac{1}{2}P_1P_3$ であるから, **【解答】**では, $\overrightarrow{P_1P_3}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し, 内積計算から $|\overrightarrow{P_1P_3}|$ を求めた. しかし,

> 有向線分の位置を問題にしないで, その向きと大きさだけで定まる量がベクトルである
>
> **ベクトル**

から, 点 P_1 を任意に固定して (*) に従い P_2, P_3 を定めると, 三角形 $P_1P_2P_3$ と円 C の位置関係は次図のようになる.



三角形 $P_1P_2P_3$ に着目して解答することもできる.

((2) の別解)

三角形 $P_1P_2P_3$ に余弦定理を用いて,

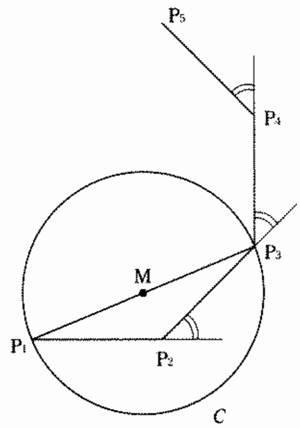
$$P_1P_3{}^2=P_1P_2{}^2+P_2P_3{}^2-2P_1P_2\cdot P_2P_3\cos\angle P_1P_2P_3$$
$$=1+1-2\cdot 1\cdot 1\cos\frac{3}{4}\pi$$
$$=2+\sqrt{2}.$$

これより, 求める C の半径は,

$$\frac{1}{2}P_1P_3=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

((2) の別解終り)

(3) まず, P_1, P_2, …, P_5 の位置関係を把握する必要があるから, (2) の**【解説】**で述べたように, 「ベクトルを平行移動ととらえ」(*) を用いて折れ線 $P_1P_2P_3P_4P_5$ を得た.

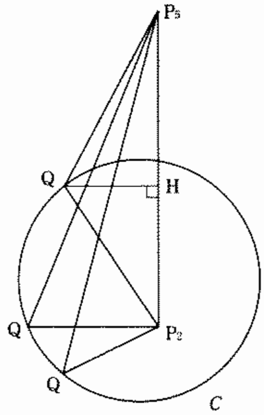


三角形の面積は, $\frac{1}{2}$(底辺)・(高さ)で計算できるから, 2つの要素「底辺」,「高さ」について調べる.

三角形 P_2P_5Q では頂点 Q だけが C 上を動くから, **【解答】**では, Q から直線 P_2P_5 に下ろした垂線の足を H とし, P_2P_5 を底辺, QH を高さとみなした.

$$\triangle P_2P_5Q=\frac{1}{2}\underbrace{P_2P_5}_{\text{一定}}\cdot QH$$

が成り立つことから, $\triangle P_2P_5Q$ が最大になる条件を QH が最大になる条件に帰着させて解答した.



あとは, (1), (2) の結果を用いて, 面積が最大となるときの QH, P_2P_5 の長さを求めればよい.

P_2P_5 の長さを求めるとき，【解答】では折れ線の形状に着目したが，計算だけで求めることもできる．

（P_2P_5 の長さを求める別解）

$$\overrightarrow{P_2P_5}=\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\overrightarrow{P_4P_5}$$
$$=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}.$$

よって，

$$|\overrightarrow{P_2P_5}|^2=|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}|^2$$
$$=|\overrightarrow{OA_2}|^2+|\overrightarrow{OA_3}|^2+|\overrightarrow{OA_4}|^2$$
$$+2\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}+2\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_4}+2\overrightarrow{OA_4}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$
$$=1+1+1+2\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot1\cdot1\cdot0$$
$$=3+2\sqrt{2}$$
$$=(1+\sqrt{2})^2.$$

したがって，

$$|\overrightarrow{P_2P_5}|=1+\sqrt{2}.$$

（P_2P_5 の長さを求める別解終り）

4 三角関数

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

（配点　40点）

a，b を実数の定数として，

$$f(\theta)=\cos2\theta+a\cos\theta+b\cos^2\frac{\theta}{2}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とする．

(1)　$t=\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ．

(2)　$a=\frac{1}{2}$，$b=2$ のとき，方程式 $f(\theta)=0$ の解の個数を求めよ．また，解の総和を求めよ．

(3)　方程式 $f(\theta)=0$ の解がちょうど3つ存在し，それらを α，β，γ（ただし，$\alpha<\beta<\gamma$）とおくとき，$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ が成り立つような a，b の条件を求め，それらを満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ．

【配点】

(1)　10点．

(2)　15点．

(3)　15点．

【出題のねらい】

三角関数を含む方程式 $f(\theta)=0$ の解と，$t=\cos\theta$ とおいて得た t の2次方程式 $g(t)=0$ の解を対応させてとらえることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　2倍角，半角の公式を用いて，

$$f(\theta)=2\cos^2\theta-1+a\cos\theta+b\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$=2t^2-1+at+b\cdot\frac{1+t}{2}\quad(t=\cos\theta)$$
$$=\boldsymbol{2t^2+\left(a+\frac{b}{2}\right)t+\frac{b}{2}-1.}$$

(2)　(1)の結果より，$f(\theta)$ を $g(t)$ とおく．

$a=\frac{1}{2}$，$b=2$ のとき，

$$g(t)=2t^2+\frac{3}{2}t$$
$$=2t\left(t+\frac{3}{4}\right)$$

であるから，$g(t)=0$ を満たす t の値は，

$$t=0,\ -\frac{3}{4}.$$

したがって，

$$f(\theta)=0\iff g(t)=0$$
$$\iff t=0,\ -\frac{3}{4}$$
$$\iff \cos\theta=0,\ -\frac{3}{4}$$

である．

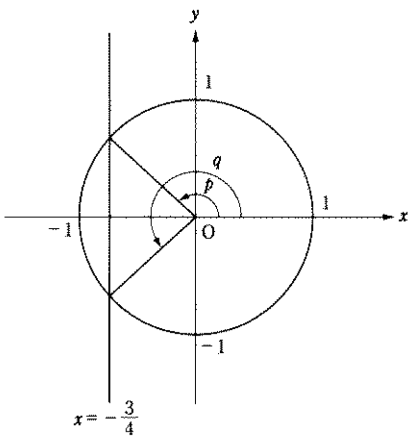
$\cos\theta=0$ を満たす θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ より，

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi.$$

一方，$\cos\theta=-\frac{3}{4}$ を満たす θ の値は2つあり，これらを p，q とおくと，次図より，

$$\frac{p+q}{2}=\pi\quad すなわち\quad p+q=2\pi$$

が成り立つ．



以上より，方程式 $f(\theta)=0$ の解は，

4個

あり，それらの総和は，

$$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+p+q=2\pi+2\pi=4\pi.$$

(3) t の方程式 $g(t)=0$ は高々 2 個の実数解をもち，t の値 1 つに対応する $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ の個数は，

$$\begin{cases} |t|=1 \text{ のとき } 1, \\ |t|<1 \text{ のとき } 2, \\ |t|>1 \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

であるから，$f(\theta)=0$ の解が 3 個存在するのは，$g(t)=0$ の解のうちの 1 つが $t=-1$ または $t=1$ で，もう 1 つの解が $-1<t<1$ の範囲に存在するときである．

(i) $g(-1)=0$ のとき，$a=1$ であるから，

$$g(t)=2t^2+\left(\frac{b}{2}+1\right)t+\frac{b}{2}-1$$
$$=(t+1)\left(2t+\frac{b}{2}-1\right).$$

したがって，$g(t)=0$ の解は，

$$t=-1,\ \frac{1}{2}-\frac{b}{4}$$

である．

ここで，

$$\cos\theta=-1 \iff \theta=\pi$$

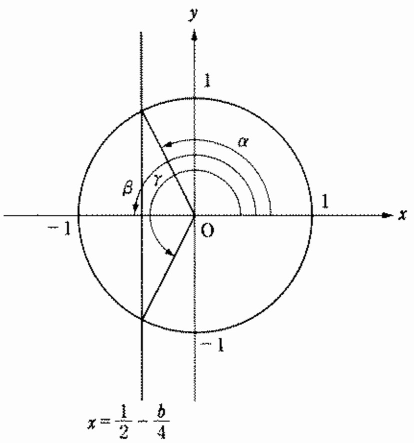
であり，

$$-1<\frac{1}{2}-\frac{b}{4}<1 \quad \text{すなわち，} \quad -2<b<6$$

のとき，次図のように，$\cos\theta=\frac{1}{2}-\frac{b}{4}$ を満たす θ が，$0<\theta<\pi$ および $\pi<\theta<2\pi$ の範囲に 1 つずつ存在するから，これらを α,γ とし，$\beta=\pi$ とすれば，$f(\theta)=0$ は 3 解 α,β,γ をもち，

$$\alpha<\beta<\gamma \quad \text{かつ} \quad \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

が成り立つ．



よって，求める条件は，

$$a=1 \quad \text{かつ} \quad -2<b<6.$$

(ii) $g(1)=0$ のとき，$b=-a-1$ であるから，b を消去することにより，

$$g(t)=2t^2+\frac{a-1}{2}t-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}$$
$$=(t-1)\left(2t+\frac{a}{2}+\frac{3}{2}\right).$$

したがって，$g(t)=0$ の解は，

$$t=1,\ -\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

である．

$$\cos\theta=1 \iff \theta=0$$

であるから，$\alpha=0$ であることが必要である．

したがって，

$$-1<-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}<1,$$

すなわち，

$$-7<a<1 \qquad \cdots(*)$$

のとき，

$$\cos\theta=-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

を満たす θ が 2 個存在し，それらを β,γ とおくと，(i) と同様にして，$\beta+\gamma=2\pi$ が成り立つ．

これと $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ において $\alpha=0$ として得られる $\gamma=2\beta$ を連立して解くと，

$$\beta=\frac{2}{3}\pi,\ \gamma=\frac{4}{3}\pi.$$

したがって，

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

より，$a=-1$ と定まり（これは (*) を満たす），$a+b+1=0$ より，

$$b=0.$$

よって，求める条件は，

$$a=-1,\ b=0.$$

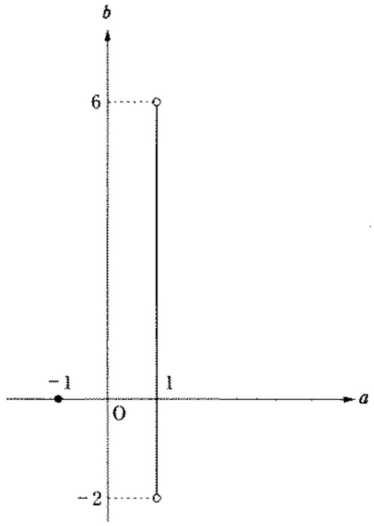
以上，(i)，(ii) より，a，b の条件は，

「$a=1$ かつ $-2<b<6$」

または

「$a=-1$ かつ $b=0$」

であり，これを満たす点 (a,b) の存在範囲は次図の 1 点および線分（端点を除く）である．



【解説】 問題

(1) 三角関数の加法定理から，次のことが得られる．

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1 \quad \cdots ①$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta \quad \cdots ②$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

2倍角の公式

また，①，②から次が得られる．

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

半角の公式

与えられた $f(\theta)$ には 2θ や $\frac{\theta}{2}$ が含まれているが，上記の公式を用いて角を θ に統一すればよい．

(2) (1)の結果を $g(t)$ とすると，与えられた a，b の値を代入することにより，$f(\theta)=0$ から，

$$2t^2 + \frac{3}{2}t = 0$$

という t の2次方程式が得られる．これは容易に解くことができ，2解

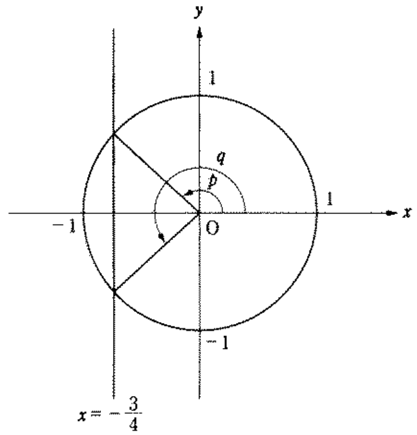
$$t = 0,\ -\frac{3}{4}$$

が求まる．

ここで $t=0$，すなわち $\cos\theta=0$ を満たす θ の値は具体的に，

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

とわかるが，$t=-\frac{3}{4}$，すなわち $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ を満たす θ の具体的な数値を求めることはできない．しかし，単位円を用いると，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に，$\cos\theta = -\frac{3}{4}$ を満たす θ が2つ存在することはわかり，これらを図示したものが次図である．

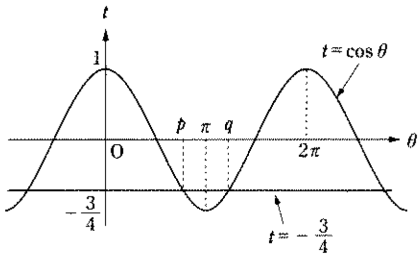


$\cos\theta = -\frac{3}{4}$ の2解を p，q としたとき，p，q の具体的な値はわからないが，

$$\frac{p+q}{2} = \pi \quad すなわち \quad p+q = 2\pi$$

より，これらの和を求めることはできる．

この部分については，$t=\cos\theta$ のグラフを用いて理解することもできる．



$t=\cos\theta$ のグラフは直線 $\theta=\pi$ に関して対称であるから，p と q の相加平均が π であることが読み取れる．

(3) (2)を参考にして，$g(t)=0$ の解である t と $f(\theta)=0$ の解である θ の対応関係を理解することが重要である．

1つの t の値に対応する $\theta(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の個数は，

$$\begin{cases} |t| = 1 \text{ のとき } 1, \\ |t| < 1 \text{ のとき } 2, \\ |t| > 1 \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

である．

また，$g(t)=0$ は2次方程式であるから，これを満たす実数 t は最大で2つある．

これらより，ちょうど3つのθを得るためには，2つの実数tが必要であり，これらのうちの一方が2つのθに対応し，もう一方が1つのθに対応しなければならない．

【解答】では，このうちの後者，すなわち1個のθに対応するtの値として，$t=1$, $t=-1$のいずれかが$g(t)=0$の解となることに注目して，以後の場合分けを行っている．

(i)では，$t=-1$が$g(t)=0$の解となる場合を考えた．このとき，$g(-1)=0$が成り立ち，これより$a=1$が確定する．

よって，

$$g(t)=2t^2+\left(\frac{b}{2}+1\right)t+\frac{b}{2}-1$$

となる．

ここで$g(t)=0$を解く際には，$t=-1$が1つの解であることより，$g(t)$が$t+1$を因数にもつことに注意したい．

あとは，得られたもう1つの解$t=\frac{1}{2}-\frac{b}{4}$が，

$$-1<\frac{1}{2}-\frac{b}{4}<1$$

を満たすことが必要であるから，これを解いて

$$-2<b<6$$

を得る．

この部分で，$g(t)=0$の$t=-1$以外の解が$-1<t<1$に存在するための条件を，グラフを用いて考えることもできる．

((3)の部分的別解1)

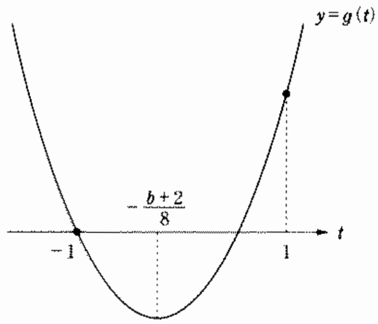
$g(t)=0$が$t=-1$のほかに$-1<t<1$を満たす解をもつための条件は，点$(-1,\ 0)$を通る$y=g(t)$のグラフが，さらにt軸の$-1<t<1$の部分と共有点をもつことであるから，

放物線の軸の位置について，

$$t=-\frac{b+2}{8}>-1.$$

端点のy座標について，

$$g(1)>0.$$



これらから，$-2<b<6$が得られる．

((3)の部分的別解1終り)

こうして得られた

$$a=1,\ -2<b<6$$

という条件は，$f(\theta)=0$がちょうど3つの解α, β, γをもつことと同値であるが，いまだ$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$の成立について考察していないから，必要条件にすぎない．

ところが，$t=-1$は$\theta=\pi$に対応し，残る2つの解に対応する2点は単位円周上においてx軸に関して対称な位置にある．したがって，これらの動径がx軸となす角をα, γとし，$\beta=\pi$とすれば，$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$が成立する．

したがって，「$a=1$かつ$-2<b<6$」は，(i)の場合において十分条件にもなっている．

次に，(ii)では，$t=1$が$g(t)=0$の解となる場合を考えた．今度は$g(1)=0$から，

$$a+b+1=0$$

というa, bの関係式が得られるから，これを用いてbを消去することにより，

$$g(t)=2t^2+\frac{a-1}{2}t-\frac{a}{2}-\frac{3}{2}$$

となる．

これを解くと，

$$t=1,\ -\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

となるから，(i)と同様に，$t=1$以外の解が$-1<t<1$に含まれることが必要となり，これより，

$$-7<a<1 \qquad \cdots(*)$$

を得る．このとき，$f(\theta)=0$がちょうど3つの解をもつことまでは保証される．

そこで次に，条件$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$を考える．

$t=1$のとき$\theta=0$であるから，3つの解のうちの最小のもの，つまりαが0であることが確定する．したがって，残る2解がβ, γとなるが，これらに対応する2点もやはり単位円周上でx軸に関して対称な位置にあるから，

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi$$

が成り立つ．これと$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$において$\alpha=0$として得られる$\gamma=2\beta$を連立することによって，

$$\beta=\frac{2}{3}\pi,\ \gamma=\frac{4}{3}\pi$$

が得られる．

こうして β, γ が求まれば，

$$\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

を解くことで，順次 a, b の値が決まる．

ここで β, γ の値を決定する部分において，

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi$$

を利用せず，次のように考えることもできる．

((3) の部分的別解 2)

$g(t)=0$ の 2 解が，

$$t=1,\ -\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

と求まると，$t=1$ に $\theta=0$ が対応するから，$\alpha=0$ と決まる．

よって，

$$\cos\theta=-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

の 2 つの解を β, $\gamma\ (0<\beta<\gamma<2\pi)$ とおくと，条件 $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ において $\alpha=0$ として得られる $\gamma=2\beta$ より，

$$\cos\beta=\cos 2\beta\quad\left(=-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}\right)$$

とすると，

$$2\cos^2\beta-\cos\beta-1=0$$

となる．これを解くと，

$$\cos\beta=1,\ -\frac{1}{2}.$$

$\cos\beta=1$ のとき，$\alpha=\beta=\gamma=0$ となって $\alpha<\beta<\gamma$ に反する．

$\cos\beta=-\frac{1}{2}$ のときは，

$$\beta=\frac{2}{3}\pi,\ \gamma=\frac{4}{3}\pi$$

であるから，確かに

$$\alpha<\beta<\gamma\quad かつ\quad \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

を満たしている．

このとき，

$$-\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}-\frac{3}{4}$$

すなわち，

$$a=-1$$

であり，$a+b+1=0$ と合わせて，

$$a=-1,\ b=0.$$

((3) の部分的別解 2 終り)

5 数　列

【ⅢB・ⅢC 型共通　選択問題】

(配点　40点)

数列 $\{a_n\}$ は，

$$\begin{cases} a_1=5, \\ a_{n+1}=-3a_n+4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする．また，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とする．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) S_n を求めよ．

(3) 数列 $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$, …の項のうち 3 の倍数になるものを小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ とする．このとき，$\sum_{k=1}^{2m}b_k$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

【配点】

(1)　8 点．

(2)　12 点．

(3)　20 点．

【出題のねらい】

漸化式で定められた数列の一般項を求めることができるか，さらに，複雑な数列から規則を発見して論述できるかをみる問題である．

【解答】　ⅡB 型 6【解答】参照．

【解説】　ⅡB 型 6【解説】参照．

問題

6 積　分

【ⅢB・ⅢC 型共通　選択問題】

(配点　40点)

> 関数
>
> $$f(x)=x\log x+1,\ g(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}$$
>
> に対して，$y=f(x)$のグラフを C_1，$y=g(x)$のグラフを C_2 とする．また，点(1, 1)における C_1 の接線の方程式を $y=h(x)$とする．
>
> (1)　$h(x)$を求めよ．また，$x\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ において $\{h(x)\}^2\geqq\{g(x)\}^2$ が成り立つことを示せ．
>
> (2)　定積分 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}g(x)\,dx$ を，$x=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$ と置換して求めよ．
>
> (3)　C_1，C_2，および直線 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

【配点】

(1)　12点．

(2)　15点．

(3)　13点．

【出題のねらい】

2つのグラフの上下関係を正しく把握したうえで，図形の面積を置換積分や部分積分を用いて計算できるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}f'(x)&=x'\log x+x(\log x)'\\&=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}\\&=\log x+1\end{aligned}$$

より，点(1, 1)における C_1 の傾きは $f'(1)=\log 1+1=1$ であるから，接線の方程式は，

$$y-1=1\cdot(x-1)$$

すなわち，

$$y=x.$$

よって，

$$h(x)=x.$$

また，$x\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ において，

$$\{h(x)\}^2=x^2,\ \{g(x)\}^2=2-\frac{1}{x^2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\{h(x)\}^2-\{g(x)\}^2&=x^2-\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2+\frac{1}{x^2}-2\\&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\\&\geqq 0.\end{aligned}$$

よって，

$$\{h(x)\}^2\geqq\{g(x)\}^2.$$

(証明終り)

(2)
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}g(x)\,dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\,dx.$$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$ と置換すると，

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

であり，x と θ の対応は次表のようになる．

x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ → 1
θ	0 → $\frac{\pi}{4}$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta\\&=\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\mathbf{1-\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

(3)
$$L(x)=f(x)-h(x)$$
$$(=x\log x+1-x)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}L'(x)&=f'(x)-h'(x)\\&=(\log x+1)-1\\&=\log x.\end{aligned}$$

これより，$x>0$ における $L(x)$の増減は次表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$L'(x)$		$-$	0	$+$
$L(x)$		↘	0	↗

よって，$x>0$ において，$L(x)\geqq 0$.

$$f(x) \geqq h(x). \quad \cdots ①$$

（等号成立は $x=1$ のとき）

また，(1) より，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，

$$\{h(x)\}^2 \geqq \{g(x)\}^2$$

であり，

$$h(x)=x>0,\ g(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x^2}} \geqq 0$$

であるから，

$$h(x) \geqq g(x). \quad \cdots ②$$

（等号成立は $x=1$ のとき）

①，② より，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，

$$f(x) \geqq g(x)$$

（等号成立は $x=1$ のとき）

となるから，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \{f(x)-g(x)\}\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} g(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (x\log x+1)\,dx - \left(1-\frac{\pi}{4}\right) \quad ((2)\text{ より}) \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x\log x\,dx + \Big[x\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} - 1 + \frac{\pi}{4} \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x\log x\,dx - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\int x\log x\,dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned}$$

（C は積分定数）

であるから，

$$\begin{aligned}
S &= \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \\
&= -\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\log 2 \\
&= \underline{\boldsymbol{\frac{2\pi-4\sqrt{2}-1+\log 2}{8}}}.
\end{aligned}$$

【解説】 問題

(1)　点 $(1,\ 1)$ における C_1 の接線の方程式は，

> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，
>
> $$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
>
> **接線の方程式**

を用いて求めることができる．これより $h(x)=x$ であることがわかるから，

$$\begin{aligned}
\{h(x)\}^2-\{g(x)\}^2 &= x^2-\left(2-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

となり，

$$\{h(x)\}^2 \geqq \{g(x)\}^2 \quad \cdots (*)$$

であることが証明される．

なお，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，

$$h(x)>0,\ g(x) \geqq 0$$

であるから，(*) より，

$$h(x) \geqq g(x)$$

となり，このことを (3) で用いることになる．

(2)
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} g(x)\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\,dx$$

であるが，$\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}$ の原始関数を直接求めることは困難であるから，この定積分の計算には置換積分を用いる．

> $\alpha<\beta$ のとき，区間 $[\alpha,\ \beta]$ において微分可能な関数 $x=g(t)$ に対して，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば，
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$
>
> **定積分の置換積分法**

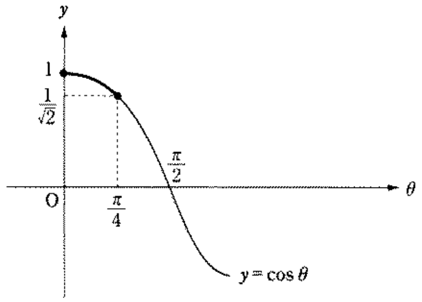
本問では，誘導に従って $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$ $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，x と $\cos\theta$ の対応は，

x	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\rightarrow$	1
$\cos\theta$	1	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

となり，さらに，$y=\cos\theta$ のグラフ，あるいは単位円を用いて考えれば，

$\cos\theta$	$1 \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$

であることがわかる．



(3)　C_1，C_2，および直線 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で囲まれた図形の面積を求めるには，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ における C_1 と C_2 の上下関係を調べる必要があるが，直接調べることは難しい．そこで，(1)で求めた $h(x)$ を利用する．

【解答】では，まず，

$$L(x)=f(x)-h(x) \quad (x>0)$$

とおいて，$L(x) \geqq 0$ を示すことにより，$x>0$ において，

$$f(x) \geqq h(x) \quad \cdots ①$$

（等号成立は $x=1$ のとき）

であることを確かめた．

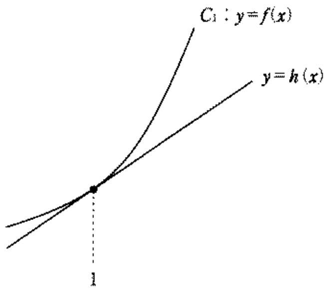
①は，次のように示すこともできる．

((3)の部分的別解)

$x>0$ において $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ より C_1 は下に凸であり，$y=h(x)$ は点$(1,\ 1)$における C_1 の接線であるから，

$$f(x) \geqq h(x).$$

（等号成立は $x=1$ のとき）



((3)の部分的別解終り)

また，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，

$$h(x)>0,\ g(x) \geqq 0$$

であることと，(1)の結果から，

$$h(x) \geqq g(x) \quad \cdots ②$$

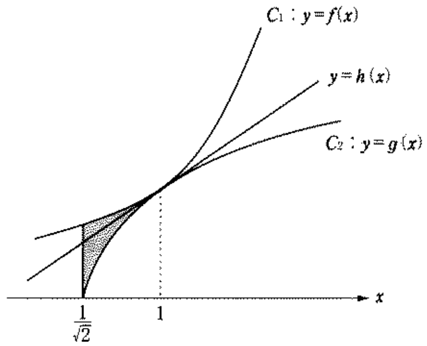
（等号成立は $x=1$ のとき）

となり，結局，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ においては，

$$f(x) \geqq h(x) \geqq g(x)$$

（等号成立は $x=1$ のとき）

となる．



よって，求める面積は上図の網目の図形であるから，

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \{f(x)-g(x)\}dx$$

を計算すればよい．

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} g(x)\,dx$ の値は(2)で求めてあるから，あとは，

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (x\log x+1)\,dx$$

を計算すればよい．その際，不定積分

$$\int x\log x\,dx$$

を求めておくとよいが，これは次の部分積分の公式を用いて求めることができる．

$$\int f'(x)g(x)\,dx$$
$$=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

不定積分の部分積分法

7 行　列

【ⅢC型　選択問題】

（配点　40点）

> Oを原点とする座標平面上において，2次の正方行列 M が表す1次変換を f とする．f により，点$(1,\ 0)$ は 点$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$に，点$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$は点$(-1,\ 0)$にうつる．また，$N=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とする．
>
> (1)　M を求めよ．また，$M=TN$ を満たす行列 T を求めよ．
>
> (2)　N が表す1次変換により点$\mathrm{P}(p+1,\ 1)$がうつる点をQとする．p が実数全体を動くとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角のとり得る値の範囲を求めよ．
>
> (3)　点Rの f による像をSとする．Rが平面上（ただし，Oを除く）を動くとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角のとり得る値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　14点．

(2)　12点．

(3)　14点．

【出題のねらい】

1次変換の基本を問うとともに，点の移動から得られる2つのベクトルのなす角のとり得る値の範囲を求めるなどの応用力をみる問題である．

【解答】

(1)　条件より，

$$M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

したがって，

$$M\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}.$$

これより，

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

このとき，$M=TN$ より，

$$T=MN^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

(2)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$とおくと，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p+1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}p-1\\1\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(p+1)(p-1)+1^2$$
$$=p^2,$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{(p+1)^2+1^2}$$
$$=\sqrt{p^2+2p+2},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{(p-1)^2+1^2}$$
$$=\sqrt{p^2-2p+2}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\alpha\,(0\leqq\alpha\leqq\pi)$とすると，

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$$
$$=\frac{p^2}{\sqrt{p^2+2p+2}\sqrt{p^2-2p+2}}$$
$$=\frac{p^2}{\sqrt{(p^2+2)^2-(2p)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{p^4}{p^4+4}}$$
$$=\sqrt{1-\frac{4}{p^4+4}}.$$

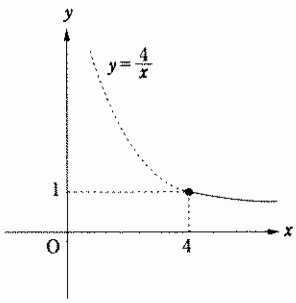
$x=p^4+4$ とおくと，p が実数全体を動くとき，x のとり得る値の範囲は

$$x\geqq 4$$

であり，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{x}}.$$

$y=\frac{4}{x}$ $(x\geqq 4)$ のグラフは，



となるから，x が 4 以上の実数全体を動くとき，$\frac{4}{x}$ のとり得る値の範囲は，

$$0<\frac{4}{x}\leqq 1.$$

これより，$1-\frac{4}{x}$ のとり得る値の範囲は，

$$0\leqq 1-\frac{4}{x}<1.$$

したがって，p が実数全体を動くとき，$\cos\alpha$ のとり得る値の範囲は，

$$0\leqq\cos\alpha<1.$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 α $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ のとり得る値の範囲は，

$$\mathbf{0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}}.$$

(3) $\mathrm{S}(x,\ y)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角を β $(0\leqq\beta\leqq\pi)$ とする．

(ア) R が x 軸上(ただし，O を除く)にあるとき，$\mathrm{R}(r,\ 0)$ (r は 0 でない実数) とおけ，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}r\\ \frac{\sqrt{2}}{2}r\end{pmatrix}.$$

したがって，R が x 軸上(ただし，O を除く)を動くとき，r は 0 以外の実数を動くから，β は，2 つのベクトル

$$(r,\ 0) \text{ と } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r,\ \frac{\sqrt{2}}{2}r\right) \text{ のなす角，}$$

すなわち，

$$(1,\ 0) \text{ と } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ のなす角}$$

であるから，

$$\beta=\frac{\pi}{4}.$$

(イ) R が x 軸上にないとき，実数 p と 0 でない実数 k が存在して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad \cdots①$$

(ただし，$\mathrm{P}(p+1,\ 1)$) と表せる．

実際，$\mathrm{R}(s,\ t)$ $(t\neq 0)$ とすると，

$$k=t,\ p=\frac{s}{t}-1 \qquad \cdots②$$

とすれば，① が成り立つ．

このとき，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M\cdot k\begin{pmatrix}p+1\\1\end{pmatrix}$$
$$=kTN\begin{pmatrix}p+1\\1\end{pmatrix}. \quad (M=TN \text{ より})$$

ここで，(1) より，

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}.$$

(2) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=N\begin{pmatrix}p+1\\1\end{pmatrix}$$

であるから，Q を O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転した点を

Q′とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$

が成り立つ．

したがって，R が x 軸上を除いた平面上を動くとき，s は実数全体，t は 0 以外の実数を動き，② より，p は実数全体，k は 0 以外の実数を動くから，β は 2 つのベクトル

$k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $k\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ のなす角，

すなわち，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ のなす角

である．

したがって，$\beta = \alpha + \frac{\pi}{4}$ に注意すると，(2) の結果より，β のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4} < \beta \leqq \frac{3\pi}{4}.$$

以上，(ア)，(イ) より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角 β のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq \beta \leqq \frac{3\pi}{4}}.$$

【解説】 問題

(1) 行列の積の定義から次のことが成り立つ．

> 2 次の正方行列 A に対して，
>
> $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix}$$
>
> ならば，
>
> $$A\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & z' \\ y' & w' \end{pmatrix}.$$
>
> **行列の計算**

条件より，

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ M\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，上記のことを用いて，

$$M\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

あとは，両辺に $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の逆行列を右から掛けることにより，M を求めることができる．

> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$ad - bc \neq 0$
>
> ならば A^{-1} が存在し，
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
>
> **逆行列**

T を求めるには，$TN = M$ の両辺に N の逆行列を右から掛ければよい．

M を求めるには次のようにしてもよい．

（M を求める別解）

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，条件より，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち，

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a+b}{\sqrt{2}} = -1, \\ \frac{c+d}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

これらを解いて，

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = -\frac{3}{\sqrt{2}},\ c = \frac{1}{\sqrt{2}},\ d = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって，

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

（M を求める別解終り）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ とすると，

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$$

が成り立つから，**【解答】**では，

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} \\ &= \frac{p^2}{\sqrt{(p^2+2p+2)(p^2-2p+2)}} \\ &= \frac{p^2}{\sqrt{p^4+4}} \quad \cdots ③ \\ &= \sqrt{1 - \frac{4}{p^4+4}} \end{aligned}$$

と変形することで，$\cos\alpha$ のとり得る値の範囲を求めたが，次のように求めることもできる．

(cosα のとり得る値の範囲を求める別解)

③の右辺を $g(p)$ とおくと，$g(-p)=g(p)$ が成り立つから，$g(p)$ は偶関数である．したがって，$p\geqq 0$ で考えればよい．

$$g'(p)=\frac{2p\sqrt{p^4+4}-p^2\cdot\dfrac{4p^3}{2\sqrt{p^4+4}}}{p^4+4}$$

$$=\frac{8p}{(p^4+4)\sqrt{p^4+4}}\geqq 0 \quad (p\geqq 0 \text{ より})$$

であるから，$g(p)$ は $p\geqq 0$ で連続な増加関数であり，

$$g(0)=0.$$

および，

$$\lim_{p\to\infty} g(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{\sqrt{p^4+4}}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{p^4}}}$$

$$=1$$

と合わせると，$g(p)$ のとり得る値の範囲は，

$$0\leqq g(p)<1.$$

よって，$\cos\alpha$ のとり得る値の範囲は，

$$0\leqq \cos\alpha<1.$$

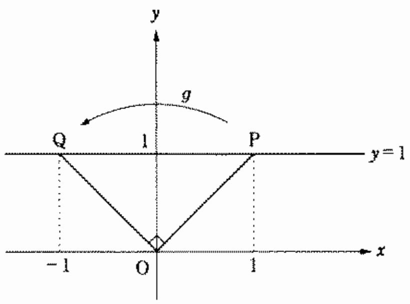
(cosα のとり得る値の範囲を求める別解終り)

また，2点P，Qが同一直線 $y=1$ 上にあることに気づくと，次のように解くこともできる．

((2)の別解)

N が表す1次変換を g とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\alpha\,(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とする．

(ア)　$p=0$ のとき，

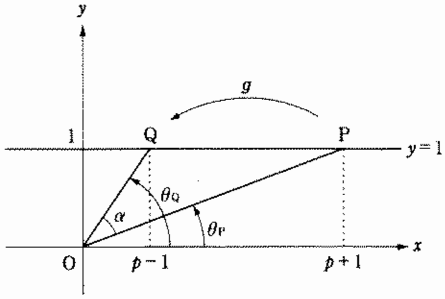


P(1, 1)，Q(−1, 1)より，$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 $\alpha\,(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ は，

$$\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

(イ)　$p\neq 0$ のとき，



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の x 軸正方向からの回転角をそれぞれ θ_{P}，θ_{Q} とすると，

$$\alpha=\theta_{\mathrm{Q}}-\theta_{\mathrm{P}}.$$

ここで，$p\neq\pm 1$ のとき，

$$\tan\theta_{\mathrm{P}}=\frac{1}{p+1},\quad \tan\theta_{\mathrm{Q}}=\frac{1}{p-1}$$

より，

$$\tan\alpha=\tan(\theta_{\mathrm{Q}}-\theta_{\mathrm{P}})$$

$$=\frac{\tan\theta_{\mathrm{Q}}-\tan\theta_{\mathrm{P}}}{1+\tan\theta_{\mathrm{Q}}\tan\theta_{\mathrm{P}}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p+1}}{1+\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p+1}}$$

$$=\frac{p+1-(p-1)}{(p-1)(p+1)+1}$$

$$=\frac{2}{p^2}.$$

これは，$p=\pm 1$ のときも成り立つ．

p が $p\neq 0$ を満たしながら動くとき，$\tan\alpha$ は任意の正の値をとり得るから，

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

以上，(ア)，(イ)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 $\alpha\,(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ のとり得る値の範囲は，

$$0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}.$$

((2)の別解終り)

(3)　まず，次の事実を確認しておこう．

> 原点を中心とする角 θ の回転移動を表す行列は，
>
> $$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$
>
> **回転移動**

これを用いると，(1)の結果より，

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

であるから，T が表す1次変換は，原点を中心とする $\frac{\pi}{4}$ の回転移動であることがわかる．

したがって，$M=TN$ が表す1次変換による像を求めるには，N が表す1次変換による像を求め，次にそれを原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転すればよい．

そこで，**【解答】**では，(2) を利用するために，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\quad (k\neq 0)\qquad \cdots(*)$$

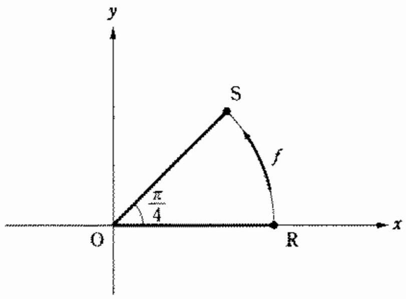
と表せるとき(R が x 軸上にないとき)と，表せないとき(R が x 軸上にあるとき)で場合分けを行った．

これは，次のように考えるとよい．

直線 OR と直線 $y=1$ が交点をもつとき(すなわち，R が x 軸上にないとき)，その交点を P とすれば $(*)$ と表すことができ，そうでなければ(すなわち R が x 軸上にあるとき)，$(*)$ と表すことができない．

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角を $\beta(0\leqq\beta\leqq\pi)$ とする．

(ア) R が x 軸上(ただし，O を除く)にあるときは，**【解答】**のように直接計算すればよい．



(イ) R が x 軸上にないときは，上で述べたように，$(*)$ と表すことができる．実際 R$(s,\ t)\ (t\neq 0)$ とすると，

$$(*)\iff (s,\ t)=k(p+1,\ 1)\qquad \cdots(**)$$

であるから，$s,\ t(\neq 0)$ に対して $(**)$ を満たす $p,\ k(\neq 0)$ の存在を示すには，

$$\begin{cases}s=k(p+1),\\ t=k\end{cases}$$

を $p,\ k$ の連立方程式とみなして解けばよく，

$$\begin{cases}k=t(\neq 0),\\ p=\frac{s}{t}-1\end{cases}\qquad \cdots②$$

となる．

したがって，$(*)$ とおけ，このとき，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=M\cdot k\begin{pmatrix}p+1\\ 1\end{pmatrix}$$
$$=TN\cdot k\begin{pmatrix}p+1\\ 1\end{pmatrix}\quad (M=TN\text{ より})$$
$$=kTN\begin{pmatrix}p+1\\ 1\end{pmatrix}.$$

(2) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=N\begin{pmatrix}p+1\\ 1\end{pmatrix}$$

であり，T が表す1次変換による Q の像を Q′ とすると，Q′ は，Q を O のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転した点であり，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$

となる．

これより，β は2つのベクトル

$k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $k\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ のなす角

すなわち，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ のなす角

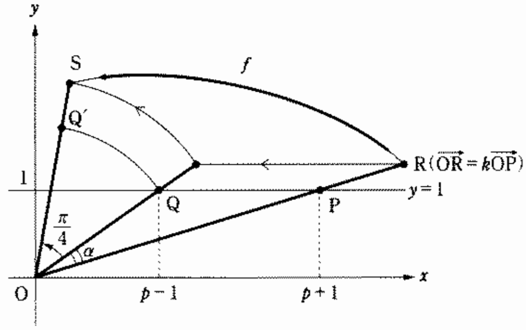
である．

R が x 軸を除いた平面上を動くとき，s は実数全体，t は 0 以外の実数を動くから，② より p は実数全体を変化することに注意すると，(2) の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 α のとり得る値の範囲は，$0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ であり，したがって，

$\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4}<\beta\leqq\frac{3\pi}{4}$$

と求められる．



(ア), (イ) より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角 β のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4} \leqq \beta \leqq \frac{3\pi}{4}.$$

(3) は以下のように直接解くこともできる．そのためには，次の事実に着目する．

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots④$$

また，条件より，

$$M\vec{a}=\vec{b},\ M\vec{b}=-\vec{a}. \qquad \cdots⑤$$

((3) の別解)

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b},\ (x,\ y)\neq(0,\ 0)$$

とおけ，このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=M\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=M(x\vec{a}+y\vec{b})\\&=xM\vec{a}+yM\vec{b}\\&=x\vec{b}-y\vec{a}\quad (⑤\text{ より})\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(x\vec{b}-y\vec{a})\\&=(x^2-y^2)\vec{a}\cdot\vec{b}-xy|\vec{a}|^2+xy|\vec{b}|^2\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-y^2),\quad (④\text{ より})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2&=|x\vec{a}+y\vec{b}|^2\\&=x^2|\vec{a}|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2|\vec{b}|^2\\&=x^2+y^2+\sqrt{2}\,xy,\quad (④\text{ より})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|^2&=|x\vec{b}-y\vec{a}|^2\\&=x^2|\vec{b}|^2-2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2|\vec{a}|^2\\&=x^2+y^2-\sqrt{2}\,xy.\quad (④\text{ より})\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{2}\,xy}\ \sqrt{x^2+y^2-\sqrt{2}\,xy}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^2-(\sqrt{2}\,xy)^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}.\end{aligned} \qquad \cdots⑥$$

(i) $y=0$ のとき，$x\neq0$ に注意すると，⑥ より，

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$0\leqq\beta\leqq\pi$ より，

$$\beta=\frac{\pi}{4}.$$

(ii) $y\neq0$ のとき，⑥ より，

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4+1}}.$$

$t=\left(\frac{x}{y}\right)^2$ とおくと，t のとり得る値の範囲は，

$$t\geqq0$$

であり，

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

$h(t)=\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}h'(t)&=\frac{\sqrt{t^2+1}-(t-1)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\\&=\frac{t+1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}>0\quad (t\geqq0\text{ より})\end{aligned}$$

であるから，$h(t)$ は $t\geqq0$ で連続な増加関数であり，

$$h(0)=-1,$$

および，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}h(t)&=\lim_{t\to\infty}\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\\&=1\end{aligned}$$

と合わせて，$h(t)$ のとり得る値の範囲は，

$$-1\leqq h(t)<1.$$

これより，$\cos\beta$ のとり得る値の範囲は，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\cos\beta<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって，β のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4}<\beta\leqq\frac{3\pi}{4}.$$

以上，(i), (ii) より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角 β のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\beta\leqq\frac{3\pi}{4}.$$

((3) の別解終り)

#【理　　科】

物　　理

1 【共通問題】気柱の共鳴

【解答】

問1	(a) 節	(b) 腹	(c) 2	(d) $2(l_2-l_1)$	(e) $\frac{1}{2}(l_2-3l_1)$	(f) $2f(l_2-l_1)$
問2	$2l_2-l_1$	問3	(a) $\frac{5}{3}f$	(b) 4		
問4	$\frac{3V}{4L}$	問5	3	問6	2.9　倍	

【配点】 (33点)

問1　(a)　2点　(b)　2点　(c)　2点　(d)　2点　(e)　2点　(f)　2点

問2　4点

問3　(a)　3点　(b)　3点

問4　4点

問5　3点

問6　4点

【出題のねらい】

気柱の共鳴現象について，基本的事項の理解度をはかり，その応用力を試す。

【解説】 問題

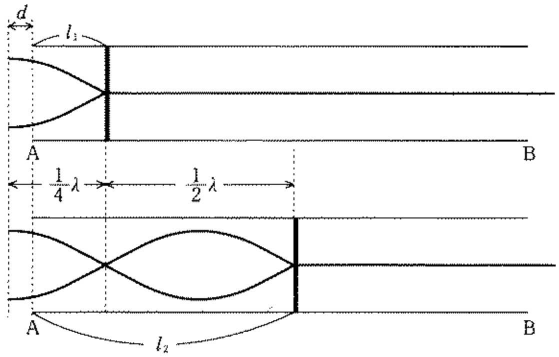
問1　ガラス管内の気柱が共鳴しているとき，ガラス管内に定常波ができている。このとき，音波はピストンの位置で固定端反射するため，この位置は定常波の(a)節となっている。開口部では自由端反射が起こり，定常波の(b)腹となる。この腹の位置は管口よりわずかに外側となり，このずれを開口端補正という。

スピーカーから一定の振動数 f の音を出した状態で，ピストンをA端からB端に向かって移動させていったとき，1回目および2回目に共鳴したときの定常波の様子は次図のようになっている。

【ポイント】

固定端反射では反射位置は定常波の節，自由端反射では反射位置は定常波の腹になる。

波長を求めるときにはこの開口端補正も考慮して求める。



2回目に共鳴したときのガラス管内の節の数は$_{(c)}$<u>2</u>個である。

音波の波長をλとすると，節と節の間隔は$\frac{1}{2}\lambda$であるので，

$$l_2 - l_1 = \frac{1}{2}\lambda$$

より，

$$\lambda = {}_{(d)}\underline{2(l_2 - l_1)}$$

また，開口端補正の値をdとすると，

$$d = \frac{1}{4}\lambda - l_1 = {}_{(e)}\underline{\frac{1}{2}(l_2 - 3l_1)}$$

空気中の音速Vは，

$$V = f\lambda = {}_{(f)}\underline{2f(l_2 - l_1)}$$

となる。

定常波の節と節の間隔，腹と腹の間隔はともに$\frac{1}{2}$波長。

腹と節の間隔は$\frac{1}{4}$波長。

波の基本式

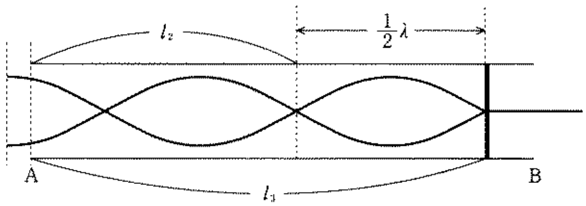
$v = f\lambda$

v：波の速さ

f：振動数

λ：波長

問2　ピストンをさらに移動させていったとき，次に共鳴したときの定常波の様子は次図のようになる。



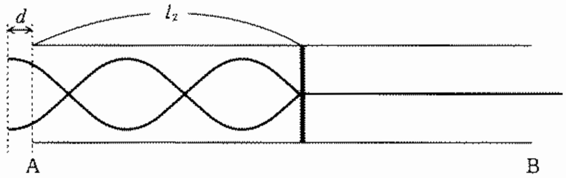
A端とピストンとの距離をl_3とすると，

$$l_3 = l_2 + \frac{1}{2}\lambda = \underline{2l_2 - l_1}$$

問3　音速が一定なので，振動数を大きくしていくと波長が短くなる。

(a)　ピストンの位置をA端からの距離がl_2の位置に固定し，音の振動数をfから少しずつ大きくしていったとき，次に共鳴したときの定常波の様子は次図のようになる。

波の基本式から，波の速さが一定のとき，振動数と波長は反比例する。



このときの波長を λ_1，振動数を f_1 とすると，

$$(l_2+d=)\frac{1}{4}\lambda\times3=\frac{1}{4}\lambda_1\times5$$

より，

$$\lambda_1=\frac{3}{5}\lambda$$

したがって，

$$(V=)f\lambda=f_1\lambda_1$$

より，

$$f_1=\frac{\lambda}{\lambda_1}f=\underline{\frac{5}{3}f}$$

(b) さらに振動数を大きくしていき，共鳴したときの波長，振動数をそれぞれ λ_2，f_2 とすると，

$$\frac{1}{4}\lambda\times3=\frac{1}{4}\lambda_2\times7$$

より，

$$\lambda_2=\frac{3}{7}\lambda$$

よって，

$$f_2=\frac{\lambda}{\lambda_2}f=\frac{7}{3}f$$

以下，同様にして，

$$\lambda_3=\frac{3}{9}\lambda \text{ より，} f_3=\frac{9}{3}f$$

$$\lambda_4=\frac{3}{11}\lambda \text{ より，} f_4=\frac{11}{3}f$$

となる。これ以後は $4f$ を超えるので，共鳴する振動数は $\underline{4}$ 個である。

【別解】

閉管の場合，基本振動数の奇数倍の振動数で共鳴する。

ピストンの位置がA端から l_2 のとき，振動数 f で3倍振動の形なので，このガラス管内の気柱の基本振動数は $\frac{1}{3}f$ である。

したがって，この気柱が共鳴する振動数は，n を正の整数として，$(2n-1)\times\frac{1}{3}f$ となる。f から $4f$（f は除く）では，

$$\frac{5}{3}f,\ \frac{7}{3}f,\ \frac{9}{3}f,\ \frac{11}{3}f$$

の $\underline{4}$ 個である。

閉管の共鳴

気柱の長さを L（開口端補正は無視する），音速を V，波長を λ，振動数を f とし，n を自然数として，

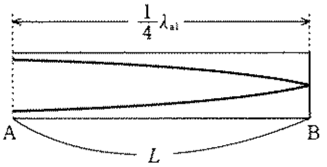
$$\lambda=\frac{4L}{2n-1}$$

$$f=\frac{(2n-1)V}{4L}$$

問 4　ガラス管ABのピストンの位置をB端にしたとき，この気柱の基本振動の波長 λ_{a1} は $\frac{1}{4}\lambda_{a1}=L$ より $\lambda_{a1}=4L$ であるので，基本振動数は，

$$f_{a1}=\frac{V}{\lambda_{a1}}=\frac{V}{4L}$$

である。



閉管ABの気柱が共鳴する振動数 f_a は f_{a1} の奇数倍の振動数で，m を正の整数とすると，

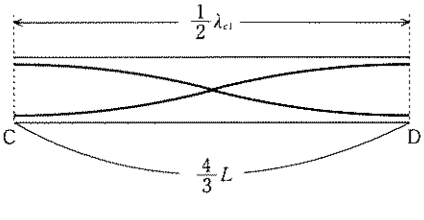
$$f_a=(2m-1)\cdot\frac{V}{4L}$$

と表せる。

ガラス管CDの気柱の基本振動の波長 λ_{c1} は $\frac{1}{2}\lambda_{c1}=\frac{4}{3}L$ より $\lambda_{c1}=\frac{8}{3}L$ であるので，基本振動数は，

$$f_{c1}=\frac{V}{\lambda_{c1}}=\frac{3V}{8L}$$

である。



閉管CDの気柱が共鳴する振動数 f_c は f_{c1} の整数倍で，n を正の整数とすると，

$$f_c=n\cdot\frac{3V}{8L}$$

と表せる。

同時に共鳴するのは，$f_a=f_c$ のときで，

$$(2m-1)\cdot\frac{V}{4L}=n\cdot\frac{3V}{8L}\text{ より，}2(2m-1)=3n\cdots(*)$$

m（または n）が最小になるのは，$(m,\ n)=(2,\ 2)$ のときで，このときの振動数は，

$$f_1=(2\times2-1)\frac{V}{4L}=\underline{\underline{\frac{3V}{4L}}}$$

問 5　$(*)$ を満たす $(m,\ n)$ およびそのときの振動数 f_r は，

開管の共鳴

気柱の長さを L（開口端補正は無視する），音速を V，波長を λ，振動数を f とし，n を自然数として，

$$\lambda=\frac{2L}{n}$$

$$f=\frac{nV}{2L}$$

$(m,\ n)=(2,\ 2)$ で $f_r=\dfrac{3V}{4L}=\dfrac{3\times340}{4\times0.75}=340$〔Hz〕

$(m,\ n)=(5,\ 6)$ で $f_r=\dfrac{9V}{4L}=1020$〔Hz〕

$(m,\ n)=(8,\ 10)$ で $f_r=\dfrac{15V}{4L}=1700$〔Hz〕

2000 Hz より小さいものは，この $\underline{3}$ 個である。

問 6　振動数を 0 からしだいに大きくしていって，ガラス管 CD の気柱がはじめて共鳴した振動数を F とする。これはこの気柱の基本振動数であるので，容器II内の音波の波長 λ_{II} は，

$$\lambda_{\mathrm{II}}=2\times\frac{4}{3}L=\frac{8}{3}\times0.75=2.00\ \text{〔m〕}$$

である。

一方，この振動数 F での容器 I 内の音波の波長 λ_{I} は，

$$\lambda_{\mathrm{I}}=2\times(0.51-0.17)=0.68\ \text{〔m〕}$$

である。

したがって，容器II内のヘリウムガス中の音速を V' とすると，

$$(F=)\frac{V'}{\lambda_{\mathrm{II}}}=\frac{V}{\lambda_{\mathrm{I}}}$$

より，

$$\frac{V'}{V}=\frac{\lambda_{\mathrm{II}}}{\lambda_{\mathrm{I}}}=\frac{2.00}{0.68}\fallingdotseq\underline{2.9}\ \text{倍}$$

② 【Ⅰ・Ⅱ選択者用問題】単振動

【解答】

問1	Mg	問2	$2F\sin\theta$	問3	$\dfrac{\mu m}{2M}$
問4	$ma=-\dfrac{2Mg}{L}x$			問5	$2\pi\sqrt{\dfrac{mL}{2Mg}}$
問6	$\dfrac{1}{3}$ 倍	問7	(a) $\sqrt{3}$ 倍	(b)	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍

【配点】 (34点)

問1　5点

問2　5点

問3　5点

問4　5点

問5　4点

問6　4点

問7　(a)　3点　　(b)　3点

【出題のねらい】

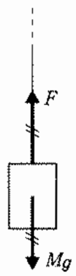
物体にはたらく力，および単振動について，基本的事項の理解度をはかり，その応用力を試す。

【解説】

問題

問1　おもりにはたらく力のつり合いより，

$$F=\underline{Mg}$$

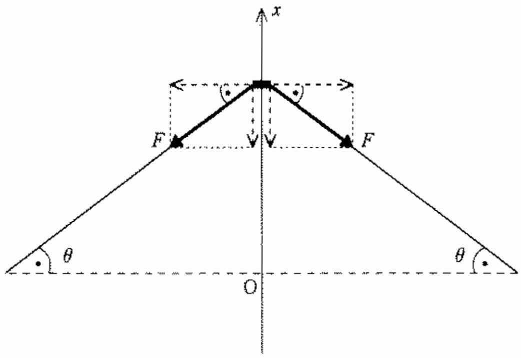


【ポイント】

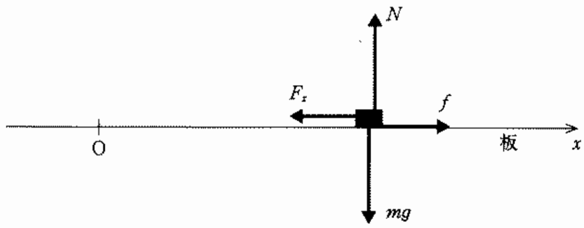
物体が静止しているとき，物体にはたらいている力はつり合っている。(互いに反対向きの力の大きさは等しい。)

問2　求める力の大きさを F_x とすると，下図より，

$$F_x=F\sin\theta\times2=\underline{2F\sin\theta}$$



問 3　小物体 P が板から受ける静止摩擦力の大きさを f，垂直抗力の大きさを N とする。



x 方向の力のつり合いより，

$$f = F_x$$
$$= 2F\sin\theta = 2Mg\sin\theta$$

鉛直方向の力のつり合いより，

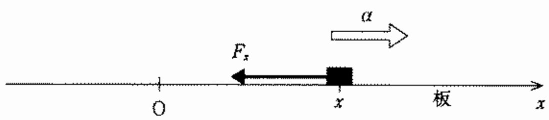
$$N = mg$$

小物体 P が静止しているとき $f \leqq \mu N$ が成り立っているので，

$$2Mg\sin\theta \leqq \mu mg \text{ より，}\ \sin\theta \leqq \frac{\mu m}{2M}$$

したがって，小物体 P が静止できるための $\sin\theta$ の最大値は $\underline{\dfrac{\mu m}{2M}}$

問 4　位置 $x(x>0)$ で小物体 P にはたらく力は，x 軸の負の向きに大きさ F_x である。



$$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta = \frac{x}{L}$$

であるので，

$$F_x = 2Mg\sin\theta \fallingdotseq \frac{2Mg}{L}x$$

したがって，運動方程式は，

$$\underline{ma = -\frac{2Mg}{L}x}$$

問 5　**問 4** の運動方程式において，$\dfrac{2Mg}{L} = K$ とおくと，

$$ma = -Kx$$

となる。

これは，ばね定数 K のばねにつながれた質量 m の物体の運動方程式と同じになり，この物体と同じ単振動をする。

したがって，単振動の周期 T は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{mL}{2Mg}}}$$

静止摩擦力

接触面がすべっていないときに受ける摩擦力。力のつり合いから大きさが求まる。

水平な板上で x 軸に垂直な方向は，糸の張力の成分だけでつり合いが成立しているので，この方向の摩擦力はない。

最大摩擦力

$f_{max} = \mu N$

μ：静止摩擦係数

N：垂直抗力の大きさ

物体が静止摩擦力を受けて静止しているとき，静止摩擦力の大きさは最大摩擦力以下である。

運動方程式

物体の質量 m，物体にはたらく力 $\vec{F}$，物体の加速度 $\vec{a}$ の関係式

$m\vec{a} = \vec{F}$

ばね振り子の周期

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

m：物体の質量

k：ばね定数

【別解】

問4 より，

$$a=-\frac{2Mg}{mL}x$$

角振動数 ω の単振動の加速度 $-\omega^2x$ と比べて，

$$\omega=\sqrt{\frac{2Mg}{mL}}$$

よって，周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\underline{2\pi\sqrt{\frac{mL}{2Mg}}}$$

問6 衝突の直前と直後で運動量が保存する。

衝突直前の小物体 P の速さを v_0，衝突直後の PQ の速さを v とすると，運動量保存の法則を表す式は，

$$mv_0=(m+2m)v$$

これより，

$$\frac{v}{v_0}=\underline{\frac{1}{3}}\text{ 倍}$$

問7 (a) 一体となった PQ の位置 x での運動方程式は，加速度を a' として，

$$3ma'=-F_x=-\frac{2Mg}{L}x$$
$$=-Kx$$

したがって，周期 T' は，

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{3mL}{2Mg}}$$

よって，

$$\frac{T'}{T}=\underline{\sqrt{3}}\text{ 倍}$$

(b) **問5** の単振動の振幅は A である。この単振動について，エネルギー保存の法則を表す式は，振動中心(P と Q が衝突する直前)の速さを v_0 とすると，

$$\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

一体となった PQ の単振動の振幅を A' とする。この単振動について，エネルギー保存の法則を表す式は，振動中心(衝突直後)の速さを v とすると，

$$\frac{1}{2}(3m)v^2=\frac{1}{2}KA'^2$$

これらより，

$$\frac{A'}{A}=\sqrt{\frac{3v^2}{v_0^2}}$$
$$=\sqrt{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}\text{ 倍}$$

単振動の加速度

$a=-\omega^2x$

ω：角振動数

x：中心からの変位

単振動の周期 T と角振動数 ω

$T=\frac{2\pi}{\omega}$

運動量

$p=mv$

m：質量

v：速度

運動量保存の法則

物体系にはたらく外力(外力の力積)が0のとき，物体系の運動量が保存する。

単振動のエネルギー保存

復元力 $F=-Kx$ を受けて単振動している質量 m の物体について，中心からの変位 x の位置での速さを v とすると，

$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Kx^2=$(一定)

【別解】

一体となったPQの単振動の角振動数 ω' は，運動方程式より，

$$\omega'=\sqrt{\frac{2Mg}{3mL}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\omega$$

である。

(a)

$$\frac{T'}{T}=\frac{\omega}{\omega'}=\underline{\sqrt{3}}\text{ 倍}$$

(b) $v_0=A\omega$, $v=A'\omega'$ より，

$$\frac{A'}{A}=\frac{v}{v_0}\cdot\frac{\omega}{\omega'}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}\text{ 倍}$$

単振動の速さの最大値 v_0 と振幅 A

$v_0=A\omega$

ω：角振動数

3 【I・II選択者用問題】電場・電位

【解答】

問1	Er				
問2	導出過程 求める速さを v とすると，エネルギー保存の法則より， $\frac{1}{2}mv^2=qEr$ $v=\sqrt{\frac{2qEr}{m}}$ 答 $\sqrt{\frac{2qEr}{m}}$				
問3	$-\frac{Er^2}{k}$	問4	0	問5	$\frac{1}{\sqrt{2}}Er$
問6	$\frac{1}{a}$	問7	(a) 2		(b) $-\frac{1}{2}r$

【配点】 (33点)

問1 4点

問2 6点

問3 4点

問4 4点

問5 4点

問6 5点

問7 (a) 3点 (b) 3点

【出題のねらい】

一様な電場およびこれによる電位，点電荷による電場，電位について，基本的事項の理解度をはかり，その応用力を試す。

【解説】

問題

問1 OA 間は一様な電場があり，電場に沿った距離が r であるので，電位差 V_{OA} は，

$$V_{OA}=\underline{Er}$$

問2 点Aに対する点Oの電位は $V=Er$ である。点Aを通過するときの速さを v とすると，エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}mv^2=qV$$

$$=qEr$$

したがって，

$$v=\underline{\sqrt{\frac{2qEr}{m}}}$$

【別解】

荷電粒子Pが受ける力は y 軸の正の向きに大きさ qE である。y 軸の正の向きの加速度を a とすると，運動方程式は，

$$ma=qE$$

より，

【ポイント】

一様電場中の2点間の電位差

$V=Ed$

E：電場の強さ

d：2点間の電場に沿った方向の距離

電場の向きに向かって電位は下がる。

点Oは点Aより V_{OA} だけ電位が高い。

静電気力による位置エネルギー

$U=qV$

q：電気量(符号含む)

V：電位

静電気力の大きさ

$F=qE$

q：電気量の大きさ

E：電場の強さ

$$a=\frac{qE}{m}$$

となり，粒子Pは等加速度直線運動をする。

等加速度直線運動の公式より，

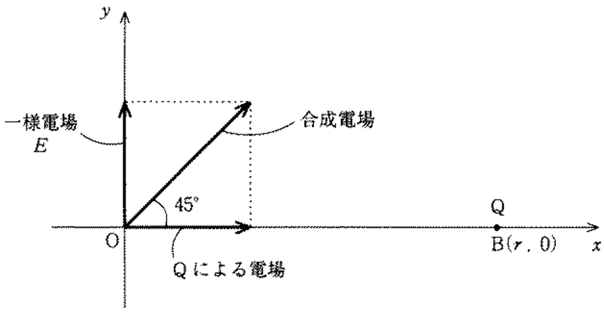
$$v^2-0^2=2ar$$

$$=\frac{2qEr}{m}$$

よって，

$$v=\underline{\sqrt{\frac{2qEr}{m}}}$$

問3 原点Oにおいて，一様電場と点電荷Qによる電場を合成したものがx軸の正の向きとなす角が45°であるので，点電荷Qが原点Oにつくる電場の強さはEであり，向きはO→Bの向きである。



したがって，点電荷Qの電気量は負で，その大きさQは，

$$E=\frac{kQ}{r^2}\text{ より，}\quad Q=\frac{Er^2}{k}$$

よって，点電荷Qの電気量は，

$$-Q=\underline{-\frac{Er^2}{k}}$$

問4 点Cの位置に点電荷Qがつくる電場はC→B(y軸の負の向き)に強さ

$$E'=\frac{kQ}{r^2}=E$$

である。

一様電場と合成して，点Cでの電場の強さE_Cは，

$$E_C=\underline{0}$$

問5 点Aを電位の基準とする。

一様電場による点Oの電位ϕ_1は，

$$\phi_1=Er$$

点電荷Qによる点Oの電位ϕ_2は，

等加速度直線運動

初速度v_0，加速度a(一定)で運動する物体の，時間t後の速度v，変位xについて，

$v=v_0+at$

$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

$v^2-v_0^2=2ax$

電場の合成

それぞれの電場のベクトル和。

点電荷による電場の強さ

$E=\frac{kQ}{r^2}$

Q：点電荷の電気量の大きさ

r：点電荷からの距離

k：クーロンの法則の比例定数

電場の向きは，

正電荷から遠ざかる向き

負電荷に向かう向き

点電荷による電位

無限遠を基準として，

$V=\frac{kQ}{r}$

Q：電気量(符号含む)

r：点電荷からの距離

k：クーロンの法則の比例定数

$$\phi_2=\frac{k(-Q)}{r}-\frac{k(-Q)}{\sqrt{2}r}$$
$$=-\frac{(\sqrt{2}-1)kQ}{\sqrt{2}r}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}Er$$

点Aに対する点Oの電位ϕは，これらの和であるので，

$$\phi=\phi_1+\phi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}Er$$

よって，点Aと点Oの電位差Vは，

$$V=|\phi|=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}Er}$$

問6　無限遠以外の点で電位が0となる位置があり，点電荷Qの電気量が負であることから，点電荷Rの電気量は正である。BX$=l_1$，DX$=l_2$とすると，

$$\frac{k(-Q)}{l_1}+\frac{k\cdot aQ}{l_2}=0$$

より，

$$\frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{DX}}=\frac{l_1}{l_2}=\underline{\frac{1}{a}}$$

問7　x軸上で$x=\frac{1}{2}r$，$\frac{5}{2}r$が電位0の点である。求める座標をx_1とする。

$x=\frac{1}{2}r$の点について，

$$l_1=r-\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}r$$
$$l_2=\left|x_1-\frac{1}{2}r\right|$$

であるので，

$$\frac{\frac{1}{2}r}{\left|x_1-\frac{1}{2}r\right|}=\frac{1}{a}\ より，\ \frac{1}{2}ar=\left|x_1-\frac{1}{2}r\right|$$

$x=\frac{5}{2}r$の点について，

$$l_1=\frac{5}{2}r-r=\frac{3}{2}r$$
$$l_2=\left|x_1-\frac{5}{2}r\right|$$

であるので，

$$\frac{\frac{3}{2}r}{\left|x_1-\frac{5}{2}r\right|}=\frac{1}{a}\ より，\ \frac{3}{2}ar=\left|x_1-\frac{5}{2}r\right|$$

これらより，

$$(a,\ x_1)=(1,\ r),\ \left(2,\ -\frac{1}{2}r\right)$$

電位の基準を変える

点Aの電位がV_A，点Bの電位がV_Bであるとき，点Aを基準とした点Bの電位V_{AB}は，

$V_{AB}=V_B-V_A$

電位の合成

それぞれの電場による電位の代数和。

$x_1=r$ は不適(点Bに一致)である。

(a) $a=\underline{2}$

(b) $x_1=\underline{-\frac{1}{2}r}$

〈参考〉

一般に，2つの定点A，Bからの距離の比が $m:n\,(m\neq n)$ である点Pの軌跡は，ABを $m:n$ に内分，および外分する点を直径の両端とする円になる(アポロニウスの円)。

点Dに aQ，点Bに $-Q$ の電気量を置いた場合，電位が0になる点XはDX：BX$=a:1$ を満たすので，点Xの軌跡は円になる。点$\left(\frac{1}{2}r,\ 0\right)$はDBを $a:1$ に内分する点，点$\left(\frac{5}{2}r,\ 0\right)$はDBを $a:1$ に外分する点である。

4 【I選択者用問題】剛体のつり合い

【解答】

問1	(ア) Mg	(イ) kd	(ウ) $Mg-kd$	問2	(ア) Mgl	(イ) $-kdL$	(ウ) 0

問3	導出過程 図1で点Qのまわりの力のモーメントのつり合いは $Mgl=kdL$ 図2で点Pのまわりの力のモーメントのつり合いは $k\cdot 2dL=Mg(L-l)$ これらより $l=\frac{1}{3}L$ 答 $\frac{1}{3}$ 倍

問4	$\frac{Mg}{3k}$	問5	(a) $\frac{2}{3}Mg$	(b) d

問6	(a) $Mg-kx$	(b) $\frac{MgL}{3(Mg-kx)}$

【配点】 (34点)

問1 (ア) 2点 (イ) 2点 (ウ) 2点

問2 (ア) 3点 (イ) 3点 (ウ) 3点

問3 5点

問4 2点

問5 (a) 3点 (b) 3点

問6 (a) 3点 (b) 3点

【出題のねらい】

力のつり合い，力のモーメントのつり合いについて，基本的事項の理解度をはかり，その応用力を試す。

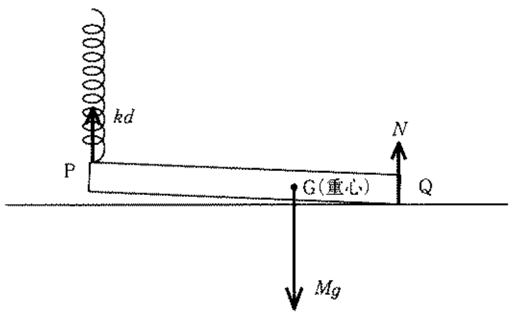
【解説】

問題

問1 (ア) 重力の大きさは Mg

(イ) ばねの伸びが d であるので，弾性力の大きさは kd

(ウ) 棒PQが水平面から受ける力は垂直抗力である。この大きさを N とすると，



力のつり合い

$N+kd=Mg$ より，$N=Mg-kd$

【ポイント】

重力の大きさ

(質量)×(重力加速度)

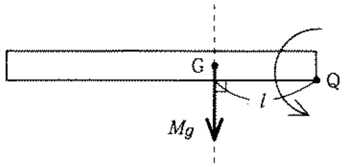
弾性力の大きさ

(ばね定数)×(ばねの伸び縮み)

静止している物体にはたらく力はつり合っている。

互いに反対向きの力の大きさが等しい。

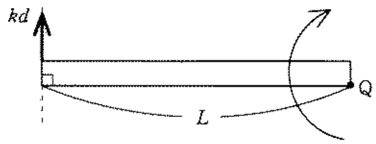
問 2 (ア)　うでの長さが l であり，反時計回りである。



点Qのまわりの重力のモーメント M_G は，

$$M_G=\underline{Mgl}$$

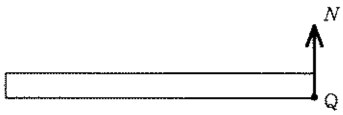
(イ)　うでの長さが L であり，時計回りである。



点Qのまわりの弾性力のモーメント M_k は，

$$M_k=\underline{-kdL}$$

(ウ)　うでの長さは 0 である。



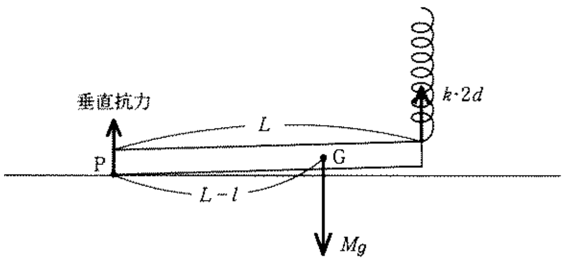
点Qのまわりの垂直抗力のモーメント M_N は，

$$M_N=\underline{0}$$

問 3　図 1 の状態における点Qのまわりの力のモーメントのつり合いは，

$$Mgl=kdL \quad \cdots\cdots ①$$

図 2 の状態で棒PQにはたらいている力は次図のようになる。



点Pのまわりの力のモーメントのつり合いは，

$$k\cdot 2d\cdot L=Mg(L-l) \quad \cdots\cdots ②$$

①，② 式より，

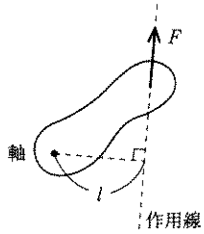
$$\frac{l}{L-l}=\frac{1}{2} \text{ よって，} \frac{l}{L}=\underline{\frac{1}{3}}\text{ 倍}$$

問 4　① 式より，

力のモーメント

力の大きさを F，うでの長さ(力の作用線と軸との距離)を l とすると，力のモーメントの大きさ M は，

$$M=Fl$$



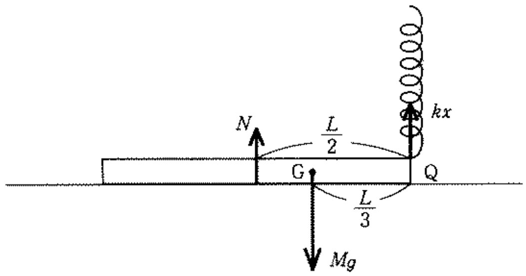
力のモーメントのつり合い

物体が回転していないとき，力のモーメントがつり合っている。

反対まわりの力のモーメントの大きさが等しい。

$$d=\frac{Mgl}{kL}=\underline{\frac{Mg}{3k}}$$

問 5 (a) 棒PQにはたらいている力は次図のようになる。



点Qのまわりの力のモーメントのつり合いより，

$$Mg\cdot\frac{L}{3}=N\cdot\frac{L}{2}$$

したがって，

$$N=\underline{\frac{2}{3}Mg}$$

(b) 棒PQにはたらく力のつり合いより，

$$N+kx=Mg$$

したがって，

$$x=\frac{Mg-N}{k}=\frac{Mg}{3k}=\underline{d}$$

問 6 (a) 棒PQにはたらく力のつり合いより，

$N+kx=Mg$ よって，$N=\underline{Mg-kx}$

(b) 垂直抗力の作用点とQ端との距離を y とする。点Qのまわりの力のモーメントのつり合いより，

$$Mg\cdot\frac{L}{3}=Ny$$

よって，

$$y=\frac{MgL}{3N}=\underline{\frac{MgL}{3(Mg-kx)}}$$

5 【Ⅰ選択者用問題】熱量の保存

【解答】

問1	(a) 熱容量	(b) 小さ	(c) 比熱		
問2	1.5×10^3 〔J〕	問3	23.6 〔°C〕	問4	7.4×10^2 〔J〕
問5	0.29 〔J〕	問6	大きい・小さい	問7	Ⅲa ①　Ⅲb ③

【配点】（33点）

問1　(a)　2点　(b)　2点　(c)　2点

問2　4点

問3　4点

問4　4点

問5　5点

問6　4点

問7　Ⅲa　3点　Ⅲb　3点

【出題のねらい】

比熱，熱容量，熱量の保存などの基本的事項の理解度と，その応用力を試す。

【解説】

問題

問1　ある物体が1K温度上昇するときに必要な熱量を，この物体の(a)熱容量という。この値が(b)小さい物体ほど温まりやすく冷めやすい。また，ある物質1gが1K温度上昇するときに必要な熱量を，この物質の(c)比熱という。

問2　求める熱量を Q とすると，

$$Q=150\times4.2\times(40.0-37.6)=1512$$
$$\fallingdotseq 1.5\times10^3\,〔\mathrm{J}〕$$

問3　求める温度を t とすると，熱量計(水を除く)が得た熱量が水が失った熱量に等しいとして(熱量の保存)，

$$108\times(37.6-t)=Q$$
$$=1512$$

より，

$$t=23.6\,〔°\mathrm{C}〕$$

問4　求める熱量 C は，全体の熱容量に等しく，

$$C=108+(150\times4.2)=738$$
$$\fallingdotseq 7.4\times10^2\,〔\mathrm{J}〕$$

問5　求める熱量 c_1 はこの金属の比熱である。全体が同じ温度になったとき，その温度は $37.6+2.0=39.6$〔°C〕となる。熱量の保存から，

$$100\times c_1\times(90.0-39.6)=738\times2.0$$

これより，

【ポイント】

熱容量が大きい物体ほど，温度上昇に多くの熱量が必要であるので，温まりにくいといえる。

比熱 c〔J/(g·K)〕，質量 m〔g〕の物質の温度が Δt〔K〕上昇したとき，吸収した熱量 Q〔J〕は，

$Q=mc\Delta t$

Δt〔K〕が下がった温度のとき，放出した熱量になる。

熱容量 C〔J/K〕の物体の温度が Δt〔K〕上昇したとき，吸収した熱量 Q〔J〕は，

$Q=C\Delta t$

熱量の保存

$\left(\begin{array}{c}\text{高温物体が}\\\text{失った熱量}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{低温物体が}\\\text{得た熱量}\end{array}\right)$

全体の熱容量は，それぞれの熱容量の和。

熱量計(水を含む)の熱容量は，

$C=7.4\times10^2$〔J/K〕

$$c_1=\frac{1476}{5040}=0.2928\cdots\fallingdotseq\underline{0.29}\,[\mathrm{J}]$$

この金属の比熱は，
$c_1=0.29$[J/(g·K)]

問6　金属球が失った熱量が，熱量計の温度上昇に使われる分と，外部に逃げる分になる。外部に逃げる分を q とすると，

$$100\times c_0\times(90.0-39.6)=738\times2.0+q$$

問5の式と比べて，c_0 の方が c_1 より大きい。

金属球は**問5**の場合より，多くの熱量を失っている。
冷めにくくなっている。

問7

IIIaの場合

全体が同じ温度になったときの温度は操作IIよりも高いので，金属球が失う熱量は操作IIよりも小さい。したがって，熱量計(水を含む)の得る熱量も操作IIよりも小さい。したがって，水温の上昇は2.0Kより小さい。①

温度上昇を Δt として，熱量の保存より，

$$738\times\Delta t=100\times0.29\times\{90.0-(39.6+\Delta t)\}$$
$$\therefore\ \Delta t=1.90\cdots[\mathrm{K}]$$

となる。

IIIbの場合

熱量計(水を含む)の熱容量は半分よりやや大きい値になり，熱量計が吸収する熱量(金属球が失う熱量)は，操作IIより小さい。したがって，水温の上昇は2.0Kより大きく4.0Kより小さい。
③

熱容量が半分になると，吸収する熱量が同じ場合，温度上昇は2倍になる。

温度上昇を Δt として，熱量の保存より，

$$\{108+(75\times4.2)\}\times\Delta t=100\times0.29\times\{90.0-(39.6+\Delta t)\}$$
$$\therefore\ \Delta t=3.23\cdots[\mathrm{K}]$$

となる。

化　学

1 【共通問題】 酸化還元

【解答】

<table>
<tr><td rowspan="5">I</td><td>問1</td><td>(イ), (ウ)</td><td>問2</td><td>(1)</td><td>+7 → +2</td><td>(2)</td><td>−1 → 0</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="6">$H_2O_2 + 2KI + H_2SO_4 \longrightarrow 2H_2O + I_2 + K_2SO_4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問4</td><td>(1)</td><td colspan="5">$2MnO_4^- + 5H_2O_2 + 6H^+ \longrightarrow 2Mn^{2+} + 5O_2 + 8H_2O$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>(イ)</td><td>(3)</td><td colspan="3">7.5×10^{-2} mol/L</td></tr>
<tr><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>問5</td><td>(1)</td><td>$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O$</td><td>(2)</td><td>1.25 mol</td><td>問6</td><td>1.7×10 mg/L</td></tr>
<tr><td>問7</td><td>あ</td><td>過マンガン酸カリウム</td><td>い</td><td>還元</td><td>う</td><td>大きくなる</td></tr>
</table>

【配点】 (25点)

I　問1　2点　　問2　(1)　2点　　(2)　2点　　問3　2点

　問4　(1)　2点　　(2)　2点　　(3)　3点

II　問5　(1)　2点　　(2)　2点　　問6　3点　　問7　3点

【出題のねらい】

酸化・還元に関して，基本的な考え方から酸化還元滴定を題材とした計算問題まで，幅広い知識と応用力を問う問題である。

【解説】

問題

I

問1　ある物質が電子を得たとき，その物質は還元されたといい，電子を失ったとき酸化されたという。①式で，MnO_4^- は Mn^{2+} に変化するとき電子 e^- を得ているので還元されており，このとき相手の物質を酸化しているので酸化剤としてはたらいている。

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O \quad \cdots\cdots ①$$

②式で，H_2O_2 は H_2O に変化するとき e^- を得ているので還元されており，酸化剤としてはたらいている。一方，③式で，H_2O_2 は e^- を失っているので酸化されており，還元剤としてはたらいている。

$$H_2O_2 + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow 2H_2O \quad \cdots\cdots ②$$

$$H_2O_2 \longrightarrow O_2 + 2H^+ + 2e^- \quad \cdots\cdots ③$$

問2 (1)　MnO_4^- 中の Mn の酸化数を x とすると，化合物中の O の酸化数は −2 だから，酸化数の総和について，

$$x + (-2) \times 4 = -1 \quad \therefore \quad x = +7$$

したがって，Mn の酸化数の変化は，$\underset{+7}{\underline{MnO_4^-}} \longrightarrow \underset{+2}{\underline{Mn^{2+}}}$

【ポイント】

酸化・還元の定義

	電子を	酸化数が
酸化される	失う	増加する
還元される	得る	減少する

酸化剤・還元剤

	相手を	自分自身は
酸化剤	酸化する	還元される
還元剤	還元する	酸化される

(2) 単体を構成する原子の酸化数は0である。化合物中のOの酸化数は通常は −2であるが，H_2O_2 中のOの酸化数は −1である。

したがって，Oの酸化数の変化は，$H_2\underline{O}_2 \longrightarrow \underline{O}_2$

$$\underset{-1}{H_2\underline{O}_2} \longrightarrow \underset{0}{\underline{O}_2}$$

問3 H_2O_2 と KI との反応では，H_2O_2 は②式のように酸化剤としてはたらき，I^- は④式のように還元剤としてはたらく。

$$2I^- \longrightarrow I_2 + 2e^- \quad \cdots\cdots ④$$

②＋④より，e^- を消去すると，

$$H_2O_2 + 2I^- + 2H^+ \longrightarrow 2H_2O + I_2$$

この式の両辺に $2K^+$ と SO_4^{2-} を加えて整理すると，化学反応式が完成する。

$$H_2O_2 + 2KI + H_2SO_4 \longrightarrow 2H_2O + I_2 + K_2SO_4$$

問4 (1) 酸性水溶液中で MnO_4^- は①式のように酸化剤としてはたらく。H_2O_2 は MnO_4^- との反応では③式のように還元剤としてはたらく。

①×2＋③×5より，e^- を消去すると，

$$2MnO_4^- + 5H_2O_2 + 6H^+ \longrightarrow 2Mn^{2+} + 5O_2 + 8H_2O \quad \cdots\cdots ⑤$$

なお，⑤式の両辺に $2K^+$，$3SO_4^{2-}$ を加えて整理すると次の化学反応式が得られる。

$$2KMnO_4 + 5H_2O_2 + 3H_2SO_4 \longrightarrow 2MnSO_4 + 5O_2 + 8H_2O + K_2SO_4 \quad \cdots\cdots ⑤'$$

(2) 水溶液中で MnO_4^- は赤紫色，Mn^{2+} はほとんど無色である。三角フラスコ内の H_2O_2 水は無色であり，これに $KMnO_4$ 水溶液を滴下していくとき，はじめのうちは MnO_4^- は H_2O_2 と反応して Mn^{2+} に変化するので，三角フラスコ内の溶液は無色のままである。$KMnO_4$ 水溶液をさらに滴下して H_2O_2 がすべて反応して失われると，それ以降は，滴下した MnO_4^- は反応せずに溶液中にそのまま残る。したがって，この滴定では「滴下した $KMnO_4$ 水溶液の赤紫色が消えなくなって，三角フラスコ内の溶液が淡赤色(淡紅色)になった点」を終点とする。すなわち，滴定の終点前後の三角フラスコ内の溶液の色の変化は「無色 → 淡赤色」となる。

(3) ⑤式または⑤′式より，$KMnO_4$ と H_2O_2 が過不足なく反応するとき，次の関係が成り立つ。

$KMnO_4$ の物質量：H_2O_2 の物質量 ＝ 2：5

∴ $KMnO_4$ の物質量×5 ＝ H_2O_2 の物質量×2

したがって，H_2O_2 水の濃度を x [mol/L] とすると，

$$2.0\times10^{-2}\times\frac{15.0}{1000}\times5 = x\times\frac{10.0}{1000}\times2$$

$$\therefore\ x = 7.5\times10^{-2}\ (\text{mol/L})$$

酸化数の決め方

① 単体を構成する原子…0

② 化合物や多原子イオンを構成する原子

アルカリ金属原子，H原子…＋1

O原子…−2

他の原子の酸化数は，以下に基づいて算出する。

化合物では，

酸化数の総和＝0

多原子イオンでは，

酸化数の総和＝符号を付けた価数

電子 e^- を含むイオン反応式のつくり方

① 酸化剤，還元剤の反応前(左辺)，反応後(右辺)の化学式を書く。

② H_2O を加えて，両辺のO原子の数を等しくする。

③ H^+ を加えて，両辺のH原子の数を等しくする。

④ e^- を加えて，両辺の電荷の総和を等しくする。

酸化還元の反応式のつくり方

酸化剤，還元剤それぞれの e^- を含むイオン反応式を，e^- を消去するように加える。

II

問 5 (1)　O_2は酸性水溶液中で⑥式のように酸化剤としてはたらく。

$$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O \quad \cdots\cdots ⑥$$

(2)「$KMnO_4$の量に相当するO_2の量」というときの「相当する」とは，酸化剤としてはたらくときに受け取るe^-の物質量が等しいことを意味する。①式より，1 molの$KMnO_4$は5 molのe^-を受け取る。⑥式より，1 molのO_2は4 molのe^-を受け取るから，5 molのe^-を受け取るO_2の物質量は$\frac{5}{4}$molである。すなわち，$KMnO_4$ 1 molに相当するO_2の物質量は，

$$\frac{5}{4} = 1.25\,(\text{mol})$$

問 6　まず，(操作1)～(操作3)の結果から，試料水中の有機物を酸化するのに必要な酸化剤$KMnO_4$の物質量を求め(手順1)，次に，それをO_2の質量に換算し，CODを計算する(手順2)。

(手順1)　有機物の酸化に必要な$KMnO_4$の物質量を求める

CODを測定するための操作1～3の流れは，次のように整理できる。

(操作1)　試料水中の有機物を一定量の$KMnO_4$と反応させる。

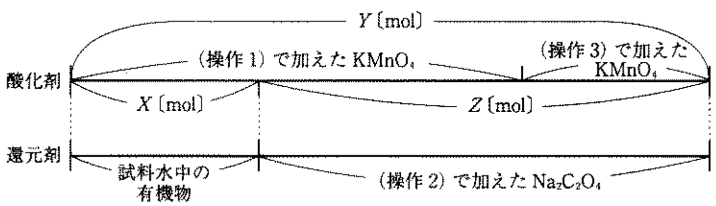
⇩

(操作2)　反応せずに残った$KMnO_4$の物質量を測定するために，一定量の過剰の$Na_2C_2O_4$を加えて$KMnO_4$をすべて反応させる。

⇩

(操作3)　反応せずに残った$Na_2C_2O_4$を$KMnO_4$水溶液で滴定する。

以上の操作で，試料水中の有機物と反応した$KMnO_4$の物質量をX〔mol〕，(操作1，3)で加えた$KMnO_4$の全物質量をY〔mol〕，(操作2)で加えた$Na_2C_2O_4$と反応する$KMnO_4$の物質量をZ〔mol〕として，酸化剤と還元剤の量的関係を図示すると，次のようになる。



これより，次の関係が成り立つことがわかる。

$$X = Y - Z \quad \cdots\cdots (\text{i})$$

ここで，(操作1，3)で加えた$KMnO_4$の全物質量Y〔mol〕は，

$$Y = 5.00\times10^{-3}\times\frac{10.0+4.3}{1000}$$
$$= 7.15\times10^{-5}\,(\mathrm{mol}) \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

次に，（操作２）で加えた $Na_2C_2O_4$ と反応する $KMnO_4$ の物質量 Z〔mol〕を求めるために，まず，$Na_2C_2O_4$ と $KMnO_4$ との反応の量的関係を調べる。

酸性水溶液中で MnO_4^- は酸化剤として ① 式のように反応し，一方，$Na_2C_2O_4$ は，酸性水溶液中で $H_2C_2O_4$ に変化し，還元剤として ⑦ 式のように反応する。

$$H_2C_2O_4 \longrightarrow 2CO_2 + 2H^+ + 2e^- \quad \cdots\cdots ⑦$$

①× 2 +⑦× 5 より，e^- を消去すると，

$$2MnO_4^- + 5H_2C_2O_4 + 6H^+ \longrightarrow 2Mn^{2+} + 10CO_2 + 8H_2O \quad \cdots\cdots ⑧$$

これより，$KMnO_4$ と $Na_2C_2O_4$ ($H_2C_2O_4$) が過不足なく反応するとき，次の関係が成り立つ。

$KMnO_4$ の物質量：$Na_2C_2O_4$ ($H_2C_2O_4$) の物質量＝２：５

∴　$KMnO_4$ の物質量×５＝ $Na_2C_2O_4$ ($H_2C_2O_4$) の物質量×２

（操作２）で加えた $Na_2C_2O_4$ の物質量は，$1.25\times10^{-2}\times\frac{10.0}{1000}$ mol だから，これと過不足なく反応する $KMnO_4$ の物質量 Z〔mol〕は，

$$Z\times5 = 1.25\times10^{-2}\times\frac{10.0}{1000}\times2$$
$$\therefore\quad Z = 1.25\times10^{-2}\times\frac{10.0}{1000}\times\frac{2}{5}$$
$$= 5.00\times10^{-5}\,(\mathrm{mol}) \quad \cdots\cdots \text{(iii)}$$

以上 (i)～(iii) より，試料水中の有機物と反応した $KMnO_4$ の物質量 X〔mol〕は，

$$X = Y - Z$$
$$= 7.15\times10^{-5} - 5.00\times10^{-5}$$
$$= 2.15\times10^{-5}\,(\mathrm{mol})$$

【別解】（手順１）で，試料水中の有機物と反応した $KMnO_4$ の物質量 X〔mol〕は，次のように考えると，簡単に求めることができる。

（操作１）で加えた $KMnO_4$ の物質量と（操作２）で加えた $Na_2C_2O_4$ の物質量の比は，

$$5.00\times10^{-3}\times\frac{10.0}{1000} : 1.25\times10^{-2}\times\frac{10.0}{1000} = 2 : 5$$

よって，（操作１）で加えた $KMnO_4$ と（操作２）で加えた $Na_2C_2O_4$ は過不足なく反応する。

したがって，（操作１）で試料水中の有機物と反応した $KMnO_4$ の物質量 X〔mol〕は，（操作３）の滴定に要した $KMnO_4$ の物質量に等しいから，

$$X = 5.00 \times 10^{-3} \times \frac{4.3}{1000}$$

$$= 2.15 \times 10^{-5}\ (\mathrm{mol})$$

（手順２） $\boxed{\text{COD を計算する}}$

COD〔mg/L〕は，試料水中の有機物の酸化に要した $KMnO_4$ の量をそれに相当する O_2 の質量〔mg〕に換算し，試料水１Ｌあたりの値〔mg/L〕で表す。**問５**より，$KMnO_4$ 1 mol は O_2 $\frac{5}{4}$ mol に相当するから，（手順１）の結果より，求める COD は，

$$32.0 \times 2.15 \times 10^{-5} \times \frac{5}{4} \times 10^{3} \times \frac{1000}{50.0} = 17.2 \fallingdotseq 1.7 \times 10\ (\mathrm{mg/L})$$

問７　$KMnO_4$ は強い酸化剤であり，Cl^- は $KMnO_4$ によって酸化されるため，下線部(b)の操作によって試料水中の Cl^- を AgCl として沈殿させて除く必要がある。

$$Ag^+ + Cl^- \longrightarrow AgCl$$

Cl^- を除かずに，COD を求める操作を行った場合，$KMnO_4$ が Cl^- によって還元されて消費されるので，Cl^- を除いた場合にくらべて，$KMnO_4$ の消費量は大きくなり，その結果，算出される COD は大きい値になる。

2 【共通問題】 脂肪族化合物

【解答】

問1	あ	ヒドロキシ	い	H_2	問2	ジエチルエーテル	問3	B	(ア)	(エ)	C	(イ)	(ウ)

問4	$(CH_3COO)_2Ca \longrightarrow CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3 + CaCO_3$ または，$(CH_3COO)_2Ca \longrightarrow CH_3COCH_3 + CaCO_3$	問5	8種類	問6	CHI_3

問7	F	$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$	G	$CH_3-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-O-CH_3$

問8	X	$H-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-CH_3$	Y	$CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-CH_3$

【配点】 (25点)

問1 各2点×2　**問2** 2点　**問3** 各1点×4

問4 2点　**問5** 3点　**問6** 2点　**問7** 各2点×2

問8 X 2点 Y 2点

【出題のねらい】

脂肪族化合物全般に関する基本事項の確認と，アルコール，エステルの構造決定の問題である。

【解説】

問題

問1 エタノール CH_3CH_2OH はヒドロキシ基 OH をもつため，Na と反応し，H_2 が発生する。

$$2CH_3CH_2OH + 2Na \longrightarrow 2CH_3CH_2ONa + H_2$$

問2 CH_3CH_2OH を濃硫酸とともに 130～140 ℃に加熱すると，分子間で脱水してジエチルエーテル $CH_3CH_2OCH_2CH_3$ (**A**) が生成する。なお，160～170 ℃に加熱すると，分子内で脱水してエチレン $CH_2{=}CH_2$ が生成する。

$$2CH_3CH_2OH \xrightarrow[130\sim140\ ^\circ C]{\text{濃硫酸}} \underset{\mathbf{A}}{CH_3CH_2OCH_2CH_3} + H_2O$$

$$CH_3CH_2OH \xrightarrow[160\sim170\ ^\circ C]{\text{濃硫酸}} CH_2{=}CH_2 + H_2O$$

問3 CH_3CH_2OH をおだやかに酸化するとアセトアルデヒド CH_3CHO (**B**) が生成し，CH_3CHO をさらに酸化すると酢酸 CH_3COOH (**C**) が生成する。

$$CH_3CH_2OH \xrightarrow{\text{酸化}} \underset{\mathbf{B}}{CH_3CHO} \xrightarrow{\text{酸化}} \underset{\mathbf{C}}{CH_3COOH}$$

(ア) アルデヒド基 CHO には還元性があるので，**B** は銀鏡反応を示すが，**C** は示さない。

(イ) カルボン酸は炭酸より強い酸なので，**C** を $NaHCO_3$ 水溶液に

【ポイント】

エタノールの性質

- 沸点 78 ℃の液体。
- 水と任意の割合で混ざり合う。
- 金属 Na と反応して H_2 が発生する。
- 濃硫酸とともに加熱すると，130～140 ℃ではジエチルエーテルが，160～170 ℃ではエチレンが生じる。
- ヨードホルム反応を示す。

アルコールの酸化

(第一級アルコール)

$$R-CH_2OH \xrightarrow{-2H} R-CHO \xrightarrow{+O} R-COOH$$

(第二級アルコール)

$$R-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R' \xrightarrow{-2H} R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R'$$

(第三級アルコール)

$$R-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{R'}{|}}{C}}-R'' \not\rightarrow \text{(酸化されにくい)}$$

加えると CO_2 が発生する。

$$CH_3COOH + NaHCO_3 \longrightarrow CH_3COONa + H_2O + CO_2$$

(ウ) カルボン酸とアルコールを濃硫酸とともに加熱するとエステルが生成する。**C** とエタノールからは酢酸エチル $CH_3COOCH_2CH_3$ が得られる。

$$CH_3COOH + CH_3CH_2OH \longrightarrow CH_3COOCH_2CH_3 + H_2O$$

(エ) **B**, **C** はいずれも水に溶けるが，**B** の水溶液は中性，**C** の水溶液は酸性を示す。

問 4 **C** の Ca 塩である酢酸カルシウム $(CH_3COO)_2Ca$ を空気を断って加熱すると，アセトン CH_3COCH_3 と $CaCO_3$ に分解する。

$$(CH_3COO)_2Ca \longrightarrow CH_3COCH_3 + CaCO_3$$

問 5 分子式 $C_5H_{12}O$ で表される化合物にはアルコールとエーテルがある。Na と反応して H_2 が発生するのはアルコールであり，次の ① ～ ⑧ の 8 種類の構造異性体がある。

① $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-OH$

② $CH_3-CH_2-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{*}{C}H}-CH_3$

③ $CH_3-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_2-CH_3$

④ $CH_3-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\overset{*}{C}H}-CH_2-OH$

⑤ $CH_3-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{OH}{|}}{C}}-CH_3$　⑥ $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{*}{C}H}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$

⑦ $\underset{\underset{OH}{|}}{CH_2}-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$　⑧ $CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}-CH_2-OH$

($\overset{*}{C}$；不斉炭素原子)

問 6 CH_3CO-R または $CH_3CH(OH)$-R の構造をもつ化合物に I_2 と NaOH 水溶液を加えて加熱すると，特有のにおいをもつヨードホルム CHI_3 の黄色沈殿が生じる（ヨードホルム反応）。このとき同時にカルボン酸のナトリウム塩 R-COONa も生成する。

$$\left.\begin{array}{l} CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-R \\ CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R \end{array}\right\} \xrightarrow{I_2,\ NaOH} CHI_3 + R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-ONa$$

(R；H 原子または炭化水素基)

問 7 **F** は不斉炭素原子をもつアルコールで，ヨードホルム反応を

アルデヒドの検出反応

$-CHO$ は酸化されやすいため，他の物質を還元する性質がある。これを利用した検出反応には次の二つがある。

① 銀鏡反応

アンモニア性硝酸銀水溶液と加熱すると，銀が析出する。

② フェーリング液の還元

フェーリング液と加熱すると，Cu_2O の赤色沈殿が生成する。

エステル

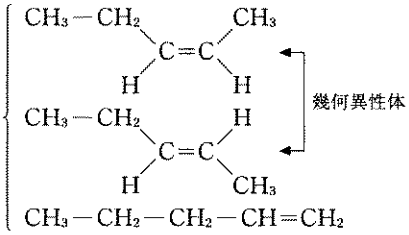
カルボン酸 (RCOOH) とアルコール (R′OH) が脱水縮合するとエステル (RCOOR′) が生成する。

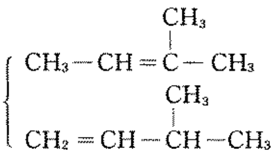
$$R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-OH + R'-OH \rightleftharpoons R-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O-R' + H_2O$$

ヨードホルム反応

分子内に $CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-$，または，$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-$ の構造をもつ化合物に I_2 と NaOH 水溶液を加えて加熱すると，特有のにおいをもつ CHI_3 の黄色沈殿が生じる。

示すから，**問5** で示した②，⑥のいずれかである。これらを濃硫酸とともに加熱すると分子内で脱水し，アルケンが生成する。

② $\xrightarrow{\text{脱水}}$


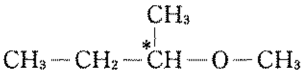
⑥ $\xrightarrow{\text{脱水}}$


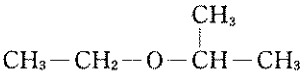
F から生成したアルケンにはいずれも幾何異性体が存在しないから，**F** は⑥と決まる。

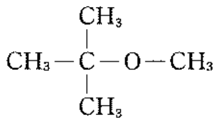
Na と反応しない **G** はエーテルである。$C_5H_{12}O$ のエーテルには次の⑨～⑭の6種類の構造異性体があるが，**G** は不斉炭素原子をもつので，**G** は⑪と決まる。

⑨ $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-O-CH_3$

⑩ $CH_3-CH_2-CH_2-O-CH_2-CH_3$

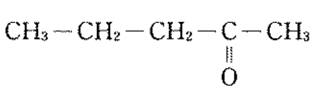
⑪ 

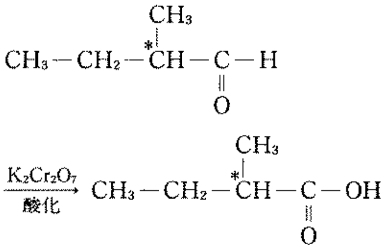
⑫ 

⑬ 　⑭ 

（$\overset{*}{C}$；不斉炭素原子）

問8　**E** はアルコールで，不斉炭素原子をもつから，**問5** で示した②，④のいずれかである（⑥は **F** と決まっている）。これらを酸化したときの生成物は次のとおりである。

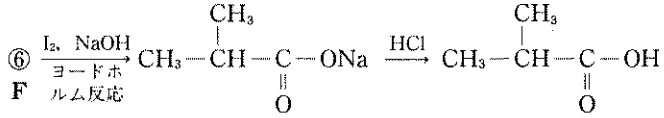
② $\xrightarrow[\text{酸化}]{K_2Cr_2O_7}$ 

④ $\xrightarrow[\text{酸化}]{K_2Cr_2O_7}$ 

（$\overset{*}{C}$；不斉炭素原子）

Eから生成した化合物は不斉炭素原子をもつから，Eは④と決まる。

また，Fを I_2，NaOH と反応させて，生じた CHI_3 をろ別したのち，ろ液に HCl を加えるとHが得られるから，Hの構造は次のように決まる。



H

エステルX $(C_6H_{12}O_2)$，Y $(C_9H_{18}O_2)$ の混合物の加水分解によりアルコールE $(C_5H_{12}O)$，カルボン酸H $(C_4H_8O_2)$，および，還元性を示す化合物Zが得られるから，

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{X}\ (C_6H_{12}O_2)\\ \mathbf{Y}\ (C_9H_{18}O_2)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{加水分解}}\left\{\begin{array}{l}\mathbf{E}\ (C_5H_{12}O)\\ \mathbf{H}\ (C_4H_8O_2)\\ \mathbf{Z}\end{array}\right.$$

エステルX，Yは以下の(i)～(iii)のいずれかである。

(i) EとHからなる炭素数9のエステル

(ii) EとZからなるエステル(この場合Zはカルボン酸)

(iii) HとZからなるエステル(この場合Zはアルコール)

分子式より，Xは(ii)または(iii)である。

X $(C_6H_{12}O_2)$ が(ii)の場合；

Eの分子式は $C_5H_{12}O$ だから，Zは分子式 CH_2O_2 のカルボン酸，すなわちギ酸 HCOOH となり，Zは還元性を示すという条件を満たしている。

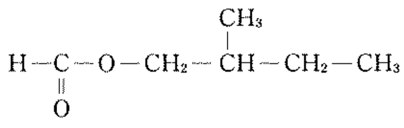
$$\underset{\mathbf{X}}{C_6H_{12}O_2} + H_2O - \underset{\mathbf{E}}{C_5H_{12}O} = \underset{\mathbf{Z}}{CH_2O_2}$$

X $(C_6H_{12}O_2)$ が(iii)の場合；

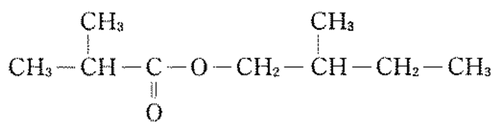
Hの分子式は $C_4H_8O_2$ だから，Zは分子式 C_2H_6O のアルコール，すなわちエタノール C_2H_5OH となり，Zは還元性を示すという条件と矛盾し，不適当である。

$$\underset{\mathbf{X}}{C_6H_{12}O_2} + H_2O - \underset{\mathbf{H}}{C_4H_8O_2} = \underset{\mathbf{Z}}{C_2H_6O}$$

以上より，Xの構造が次のように決まる。

X；

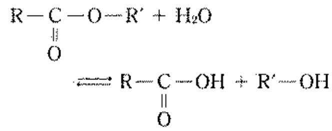
Yの分子式は $C_9H_{18}O_2$ であり，Zが HCOOH だから，Yは(i)と決まる。

Y；

エステルの加水分解

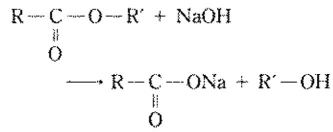
・酸による加水分解

エステルを希硫酸とともに加熱すると，カルボン酸とアルコールが生じる。



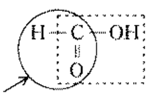
・アルカリによる加水分解(けん化)

エステルを NaOH 水溶液とともに加熱すると，カルボン酸の塩とアルコールが生じる。



ギ酸

ギ酸は分子内にアルデヒド基と同じ構造をもつため，還元性を示す。



アルデヒド基　カルボキシル基

3 【Ⅰ・Ⅱ選択者用問題】 金属イオンの性質，結晶格子

【解答】

Ⅰ	問1	A	CuS	C	$BaSO_4$	問2	(1)	(エ)	(2)	$[Ag(NH_3)_2]^+$
	問3	$Cu(OH)_2 \longrightarrow CuO + H_2O$				問4	$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$			
	問5	黄色	問6	ZnS						
Ⅱ	問7	4個	問8	$n : m = 2 : 1$	問9	8個				
	問10	$l = \frac{\sqrt{3}}{4}a$	問11	$N_A = \frac{4(x+2y)}{a^3 d} \times 10^{21}$						

【配点】 (30点)

Ⅰ　問1　各2点×2　　問2　(1)　2点　(2)　2点　　問3　3点　　問4　3点

　問5　2点　　問6　2点

Ⅱ　問7　2点　　問8　2点　　問9　2点　　問10　3点　　問11　3点

【出題のねらい】

金属イオンの性質に関する基本的な知識の確認，結晶格子の知識の確認とその応用力を試す問題である。

【解説】

問題

Ⅰ

操作1～4により，金属イオンは次のように分離される。

（操作1）　塩酸を加えると $AgCl$ が沈殿する。

$$Ag^+ + Cl^- \longrightarrow AgCl$$

（操作2）　硫化水素を通じると CuS が沈殿する。

$$Cu^{2+} + H_2S \longrightarrow CuS + 2H^+$$

（操作3）　煮沸して H_2S を除いたのち，アンモニア水を加えて塩基性にすると $Al(OH)_3$ と $Zn(OH)_2$ が沈殿する。

$$Al^{3+} + 3OH^- \longrightarrow Al(OH)_3$$

$$Zn^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Zn(OH)_2$$

その後，アンモニア水を十分に加えると，$Zn(OH)_2$ は $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ になって溶ける。

$$Zn(OH)_2 + 4NH_3 \longrightarrow [Zn(NH_3)_4]^{2+} + 2OH^-$$

（操作4）　希硫酸を加えると $BaSO_4$ が沈殿する。

$$Ba^{2+} + SO_4^{2-} \longrightarrow BaSO_4$$

【ポイント】

おもな金属イオンの性質

$Ag^+ \xrightarrow{Cl^-} \underset{\text{白色}}{AgCl} \xrightarrow{NH_3} [Ag(NH_3)_2]^+$

$Pb^{2+} \xrightarrow{Cl^-} \underset{\text{白色}}{PbCl_2} \xrightarrow{\text{熱湯}} Pb^{2+}$

$Ag^+ \xrightarrow{H_2S} \underset{\text{黒色}}{Ag_2S}$

$Cu^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{\text{黒色}}{CuS}$

$Pb^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{\text{黒色}}{PbS}$

$Cd^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{\text{黄色}}{CdS}$

$Zn^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{\text{白色}}{ZnS}$
$Fe^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{\text{黒色}}{FeS}$
} 酸性溶液からは沈殿しない

$Ag^+ \xrightarrow{OH^-} \underset{\text{褐色}}{Ag_2O} \xrightarrow{NH_3} [Ag(NH_3)_2]^+$

$Cu^{2+} \xrightarrow{OH^-} \underset{\text{青白色}}{Cu(OH)_2} \xrightarrow{NH_3} \underset{\text{深青色}}{[Cu(NH_3)_4]^{2+}}$

$Fe^{3+} \xrightarrow{OH^-} \underset{\text{赤褐色}}{Fe(OH)_3}$

$Zn^{2+} \xrightarrow{OH^-} \underset{\text{白色}}{Zn(OH)_2} \xrightarrow{NH_3} [Zn(NH_3)_4]^{2+}$
$\qquad\qquad \xrightarrow{NaOH} [Zn(OH)_4]^{2-}$

$Al^{3+} \xrightarrow{OH^-} \underset{\text{白色}}{Al(OH)_3} \xrightarrow{NaOH} [Al(OH)_4]^-$

$Ca^{2+} \xrightarrow{SO_4^{2-}} \underset{\text{白色}}{CaSO_4}$

$Ba^{2+} \xrightarrow{SO_4^{2-}} \underset{\text{白色}}{BaSO_4}$

Ag^+, Al^{3+}, Ba^{2+}, Cu^{2+}, Na^+, Zn^{2+}

↓ 塩酸を加える

- 白色沈殿 AgCl
- ろ液 Al^{3+}, Ba^{2+}, Cu^{2+}, Na^+, Zn^{2+}

↓ H_2S を通じる

- 黒色沈殿 **A** CuS
- ろ液 Al^{3+}, Ba^{2+}, Na^+, Zn^{2+}

↓ 煮沸 NH_3 水を十分加える

- 白色沈殿 **B** $Al(OH)_3$
- ろ液 Ba^{2+}, Na^+, $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$

↓ 希硫酸を加える

- 白色沈殿 **C** $BaSO_4$
- ろ液 **D** Na^+, Zn^{2+}

問 1　沈殿 **A**, **C** の化学式は上記のとおり。

問 2 (1)　(ア)　誤り。AgCl は熱湯にもほとんど溶けない。

(イ)　誤り。Ag は両性元素ではないので，AgCl に NaOH 水溶液を加えても溶けない。

(ウ)　誤り。AgCl に希硫酸を加えても溶けない。

(エ)　正しい。AgCl には感光性があり，光が当たると分解して Ag が生じ，灰～黒色になる。

$$2AgCl \longrightarrow 2Ag + Cl_2$$

(2)　AgCl に NH_3 水を加えると，無色の $[Ag(NH_3)_2]^+$ になって溶ける。

$$AgCl + 2NH_3 \longrightarrow [Ag(NH_3)_2]^+ + Cl^-$$

問 3　CuS（沈殿 **A**）を硝酸に溶かしたのち，NaOH 水溶液を加えると，$Cu(OH)_2$ の青白色沈殿が生じる。

$$Cu^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Cu(OH)_2$$

これを加熱すると，黒色の CuO に変化する。

$$Cu(OH)_2 \longrightarrow CuO + H_2O$$

問 4　Al は両性元素であり，$Al(OH)_3$（沈殿 **B**）に NaOH 水溶液を加えると $[Al(OH)_4]^-$ になって溶ける。

$$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$$

問 5　ろ液 **D** には Na^+ と Zn^{2+} が含まれている。Na は黄色の炎色反応を示すが，Zn は炎色反応を示さない。

問 6　（操作 3）で，煮沸せずに硫化水素が残ったまま NH_3 水を加えて塩基性にすると，$Al(OH)_3$ だけでなく，ZnS（白色）も沈殿してしまう。

感光性

ハロゲン化銀に光を当てると分解して，単体の Ag が生じ，灰～黒色になる。これは写真に利用されている。

主なアンミン錯イオンの色と形

$[Ag(NH_3)_2]^+$ ……無色，直線形

$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ ……無色，正四面体

$[Cu(NH_3)_4]^{2+}$ ……深青色，正方形

炎色反応

Li	赤色
Na	黄色
K	赤紫色
Ca	橙赤色
Sr	深赤色
Ba	黄緑色
Cu	青緑色

II

問7，8　X^{n+} は面心立方格子を形成しており，立方体の頂点に位置するイオンは単位格子中に正味 $\frac{1}{8}$ 個含まれ，立方体の面の中心に位置するイオンは単位格子中に正味 $\frac{1}{2}$ 個含まれるので，この単位格子1個あたりに含まれる X^{n+} の正味の数は，

$$\frac{1}{8}\times 8+\frac{1}{2}\times 6=4\ (\text{個})$$

一方，Y^{m-} は8個の小立方体の中心に1個ずつあるので，単位格子1個あたりに含まれる Y^{m-} の正味の数は8個である。

よって，このイオン結晶の組成式は XY_2 で表され，陽イオンの価数の総和は陰イオンの価数の総和に等しいから，

$$n\times 1=m\times 2 \qquad \therefore\ n:m=2:1$$

問9　図1より，1個の X^{n+}（図中の⊗）に対して最も近い位置に存在する Y^{m-} は8個(図中の **1** ～ **8**)であり，図2より，1個の Y^{m-}（図中の●)に対して最も近い位置に存在する X^{n+} は4個(図中の①～④)である。

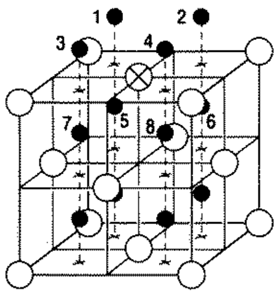


図1

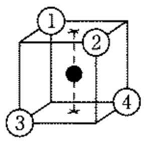


図2

問10　図3のように，X^{n+} と Y^{m-} の最短距離を l〔nm〕とすると，その4倍が単位格子(一辺が a〔nm〕の立方体)の対角線の長さ $\sqrt{3}a$〔nm〕に等しいので，

$$4l=\sqrt{3}a \qquad \therefore\ l=\frac{\sqrt{3}}{4}a\ \text{〔nm〕}$$

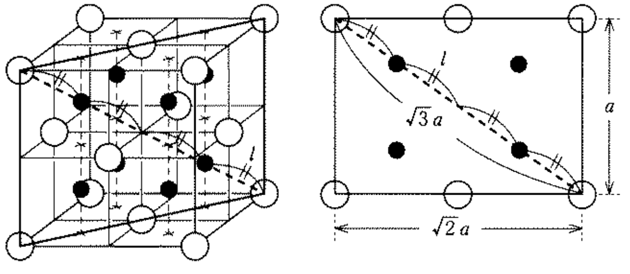
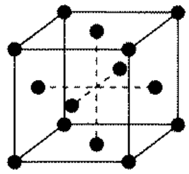
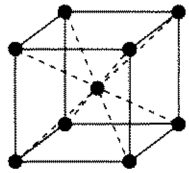


図3

主な単位格子



面心立方格子



体心立方格子

問11 X^{n+}, Y^{m-} のモル質量は，それぞれ x〔g/mol〕, y〔g/mol〕であり，アボガドロ定数は N_A〔mol^{-1}〕だから，

X^{n+} 1個の質量 …… $\dfrac{x}{N_A}$〔g〕

Y^{m-} 1個の質量 …… $\dfrac{y}{N_A}$〔g〕

単位格子1個あたりに含まれる X^{n+} は4個，Y^{m-} は8個だから，

単位格子1個あたりの質量 …… $\dfrac{4x}{N_A}+\dfrac{8y}{N_A}$〔g〕

単位格子は一辺の長さが $a\times10^{-7}$〔cm〕の立方体であり，その体積は $(a\times10^{-7})^3$〔cm^3〕だから，この結晶の密度 d〔g/cm^3〕は，

$$d=\frac{\dfrac{4x}{N_A}+\dfrac{8y}{N_A}}{(a\times10^{-7})^3}$$

$$\therefore\quad N_A=\frac{4(x+2y)}{a^3d}\times10^{21}\ [\mathrm{mol^{-1}}]$$

4 【I・II選択者用問題】 気体

【解答】

I	問1	ボイル	問2	(イ)	問3	(イ)	
II	問4	9.8×10^4 Pa	問5	(1)	0.16 mol	(2)	8.4×10^4 Pa
	問6	4.2×10^4 Pa	問7	(1)	5.0 L	(2)	6.4×10 %

【配点】 (20点)

I　**問1**　2点　　**問2**　2点　　**問3**　2点

II　**問4**　2点　　**問5**　(1)　2点　(2)　2点

　問6　3点　　**問7**　(1)　2点　(2)　3点

【出題のねらい】

理想気体と実在気体のちがい，理想気体の状態方程式を用いた計算，飽和蒸気圧についての理解を試す問題である。

【解説】

問題

I

問1　イギリスのボイルは気体の体積と圧力の関係を調べ，「温度が一定のとき，一定量の気体の体積は圧力に反比例する」ことを見いだした(1662年)。これをボイルの法則という。

問2　理想気体とは，分子間に引力がはたらかず，分子自身に体積(大きさ)がないと考えた仮想的な気体である。理想気体では，①式の状態方程式が厳密に成立する。

$$PV = nRT \quad (R\,;\,\text{気体定数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

これに対し，実在気体では，分子間に引力がはたらき，分子自身に体積(大きさ)があるため，常に①式が適用できるわけではない。圧力が常圧付近で比較的低く，分子間の距離が大きい場合，分子間の引力により分子どうしが引き合うため，実在気体の体積は，同温同圧の理想気体にくらべて小さくなる。

一方，圧力が高くなって分子間の距離が小さくなると，分子自身に体積(大きさ)があるため分子どうしが接近しにくいので，実在気体の体積は，同温同圧の理想気体にくらべて大きくなる。

NH_3 分子は極性が大きく，分子間に強い引力がはたらくため，常温常圧では，圧力が比較的低く，分子自身の体積(大きさ)の効果が無視できるので，同温同圧の理想気体にくらべて体積が小さくなる。

なお，同じような構造の分子どうしでは，分子量が大きいほど分子間の引力が強くなる傾向があり，分子量が同程度の分子どうしでは，極性が大きい分子の方が極性が小さい分子より分子間の引力が強い。

問3　実在気体においても，温度が高くなると分子の不規則な運動

【ポイント】

ボイルの法則

温度が一定のとき，一定量の気体の体積 V は圧力 P に反比例する。

$PV=$一定

理想気体の状態方程式

$PV=nRT$

P；圧力，V；体積，n；物質量

T；絶対温度，R；気体定数

理想気体

状態方程式 $PV=nRT$ が厳密に成り立つ気体。分子間に引力がはたらかず，分子自身に体積(大きさ)がないと考えた仮想的な気体。

(熱運動)が激しくなって，分子の運動エネルギーが大きくなるので，分子間にはたらく引力の効果が無視できるようになる。また，気体の圧力が小さくなると分子間の距離が大きくなるので，分子間の引力の効果が小さくなり，分子自身の体積も無視できるようになる。したがって，高温・低圧の条件下では，実在気体は理想気体に近づき，① 式を適用することができるようになる。

II

問 4 容器 A 内に封入した気体の物質量の合計は，

$$0.080 + 0.20 = 0.28\,(\mathrm{mol})$$

操作 1 終了後の A 内の圧力を P_1[Pa] とすると，理想気体の状態方程式より，

$$P_1 \times 8.3 = 0.28 \times 8.3 \times 10^3 \times 350$$

$$\therefore \quad P_1 = 9.8 \times 10^4\,(\mathrm{Pa})$$

問 5 (1) 操作 2 での燃焼反応による各物質の物質量の変化は，次のようになる。

	$2H_2$ +	O_2 ⟶	$2H_2O$	合計
はじめ	0.080	0.20	0	0.28
変化量	−0.080	−0.040	+0.080	−0.040
反応後	0	0.16	0.080	0.24

(単位；mol)

したがって，操作 3 終了後，A 内に存在する O_2 の物質量は 0.16 mol である。

(2) 操作 3 終了後，A 内には液体の水は存在しなかったから，A 内の気体の物質量の合計は 0.24 mol である。操作 3 終了後の A 内の圧力を P_2[Pa] とすると，理想気体の状態方程式より，

$$P_2 \times 8.3 = 0.24 \times 8.3 \times 10^3 \times 350$$

$$\therefore \quad P_2 = 8.4 \times 10^4\,(\mathrm{Pa})$$

【別解】 混合気体中の成分気体の分圧と物質量は比例するから，物質量の代わりに，350 K，8.3 L における分圧を使って考えてもよい。

燃焼前の H_2，O_2 の分圧は，**問 4** の結果より，

$$H_2\,;\ 9.8 \times 10^4 \times \frac{0.080}{0.28} = 2.8 \times 10^4\,(\mathrm{Pa})$$

$$O_2\,;\ 9.8 \times 10^4 - 2.8 \times 10^4 = 7.0 \times 10^4\,(\mathrm{Pa})$$

操作 2 での燃焼反応による各気体の分圧の変化は，次のようになる。

	$2H_2$ +	O_2 ⟶	$2H_2O$	合計
はじめ	2.8	7.0	0	9.8
変化量	−2.8	−1.4	+2.8	−1.4
反応後	0	5.6	2.8	8.4

(単位；$\times 10^4$ Pa)

したがって，操作 3 終了時の A 内の圧力は 8.4×10^4 Pa である。

混合気体について

全圧＝分圧の総和

分圧＝全圧×モル分率

$$\text{モル分率} = \frac{\text{ある成分気体の物質量}}{\text{混合気体の全物質量}}$$

物質量比＝分圧比

問 6　操作 4 での燃焼反応による各物質の物質量の変化は，次のようになる。

	$2H_2$	+ O_2	$\longrightarrow$ $2H_2O$	合計
はじめ	0.20	0.20	0	0.40
変化量	-0.20	-0.10	$+0.20$	-0.10
反応後	0	0.10	0.20	0.30

（単位；mol）

燃焼終了後，350 K，8.3 L にしたとき，圧力が 7.7×10^4 Pa になったから，A 内に存在する気体の物質量を n_4〔mol〕とすると，理想気体の状態方程式より，

$$7.7\times10^4\times8.3 = n_4\times8.3\times10^3\times350$$

$$\therefore\quad n_4 = 0.22\ (\text{mol})$$

このとき，O_2 はすべて気体であり，その物質量は 0.10 mol だから，A 内に存在する H_2O(気体)の物質量は，

$$0.22 - 0.10 = 0.12\ (\text{mol})$$

この値は，燃焼により生成した H_2O の物質量 0.20 mol より小さいから，生成した H_2O の一部 $(0.20-0.12 = 0.08\ (\text{mol}))$ は液体として存在し，気液平衡の状態にある。したがって，このときの H_2O(気体)の分圧は 350 K における飽和蒸気圧に等しく，その値は，

$$7.7\times10^4\times\frac{0.12}{0.22} = 4.2\times10^4\ (\text{Pa})$$

【別解】 350 K，8.3 L における分圧を使って考える。

	$2H_2$	+ O_2	$\longrightarrow$ $2H_2O$	H_2O 以外の合計
はじめ	7.0	7.0	0	14.0
変化量	-7.0	-3.5	$(+7.0)$	-10.5
反応後	0	3.5	(7.0)	3.5

（単位；$\times10^4$ Pa）

（H_2O の値は，すべて気体であると仮定したときの値）

燃焼終了後，350 K，8.3 L にしたとき，O_2 の分圧は 3.5×10^4 Pa で，全圧が 7.7×10^4 Pa だから，実際に H_2O(気体)が示す分圧は，

$$7.7\times10^4 - 3.5\times10^4 = 4.2\times10^4\ (\text{Pa})$$

この値は，H_2O がすべて気体であると仮定したときの値 7.0×10^4 Pa より小さいから，生成した H_2O の一部は液体として存在し，気液平衡の状態にある。したがって，このときの H_2O(気体)の分圧 4.2×10^4 Pa が 350 K における飽和蒸気圧に等しい。

【補足】 揮発性物質がすべて気体として存在するかどうかを判定するには，通常，次のようにする。

> すべて気体かどうかの判定法
>
> すべて気体であると仮定し，そのときの圧力(分圧) p を求め，飽和蒸気圧 $p_{\text{飽和}}$ とくらべる。

飽和蒸気圧

ある物質の液体と気体が共存して気液平衡の状態にあるときの圧力。

飽和蒸気圧は，温度だけで決まり，共存する液体や気体の量によらない。

(i)　$p > p_{飽和}$ の場合

「すべて気体」の仮定は誤りであり，実際には液体が存在する。気液平衡が成り立つとき，実際の圧力は飽和蒸気圧 $p_{飽和}$ に等しい。

(ii)　$p \leqq p_{飽和}$ の場合

すべて気体として存在し，実際の圧力は p に等しい。

ただし，本問題では，水の飽和蒸気圧の値を求めることが要求されているので，この判定法を使わずに，上記の解法をとった。

問 7 (1)　操作 5 終了後の圧力 1.00×10^5 Pa は，操作 4 終了後の圧力 7.7×10^4 Pa より大きいから，操作 5 では，操作 4 終了後の状態からピストンが押し下げられて，H_2O(液体)の量が増加していることがわかる。したがって，水は気液平衡の状態にあり，H_2O(気体)の分圧は飽和蒸気圧 4.2×10^4 Pa に等しいから，操作 5 終了後の O_2 の分圧は，

$$1.00\times10^5 - 4.2\times10^4 = 5.8\times10^4\ (\mathrm{Pa})$$

したがって，このときの A 内の気体の体積を V〔L〕とすると，理想気体の状態方程式より，

$$5.8\times10^4\times V = 0.10\times8.3\times10^3\times350$$

$$\therefore\quad V = 5.00 \fallingdotseq 5.0\ (\mathrm{L})$$

(または，ボイルの法則より，

$$3.5\times10^4\times8.3 = 5.8\times10^4\times V$$

$$\therefore\quad V = 5.00 \fallingdotseq 5.0\ (\mathrm{L})\ )$$

(2)　A 内に存在する H_2O(気体)の物質量を n_{H_2O}〔mol〕とすると，成分気体の分圧と物質量は比例するから，

$$\frac{4.2\times10^4}{n_{H_2O}} = \frac{5.8\times10^4}{0.10} \qquad \therefore\quad n_{H_2O} = 0.0724\ (\mathrm{mol})$$

したがって，凝縮している水の割合は，

$$\frac{0.20-0.0724}{0.20}\times100 = 63.8 \fallingdotseq 6.4\times10\ (\%)$$

【別解】　操作 5 終了後の A 内の気体の体積を V〔L〕，A 内に存在する H_2O(気体)の物質量を n_{H_2O}〔mol〕とすると，O_2，H_2O(気体)のそれぞれについて，理想気体の状態方程式より，

$$O_2：\ 5.8\times10^4\times V = 0.10\times8.3\times10^3\times350$$

$$H_2O(気体)：\ 4.2\times10^4\times V = n_{H_2O}\times8.3\times10^3\times350$$

これらより，$V = 5.00 \fallingdotseq 5.0$ (L)

$$n_{H_2O} = 0.0724\ (\mathrm{mol})$$

5 【I選択者用問題】 金属イオンの性質，中和滴定

【解答】

I	問1	A	CuS	C	$BaSO_4$	問2	(1) (エ)	(2)	$[Ag(NH_3)_2]^+$
	問3	$Cu(OH)_2 \longrightarrow CuO + H_2O$				問4	$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$		
	問5	黄色		問6	ZnS				
II	問7	(1)	$H_2SO_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$		(2)	4.0 mL			
	問8	(1)	$a = 0.070 - 2b$	(2)	$a : b = 3 : 2$	問9	7.0 mL		

【配点】 (30点)

I 問1 各2点×2 問2 (1) 2点 (2) 2点 問3 3点 問4 3点
問5 2点 問6 2点

II 問7 (1) 2点 (2) 3点 問8 (1) 2点 (2) 2点 問9 3点

【出題のねらい】

金属イオンの性質に関する基本的な知識の確認，中和滴定の確認とその応用力を試す問題である。

【解説】

問題

I

操作1～4により，金属イオンは次のように分離される。

(操作1) 塩酸を加えると AgCl が沈殿する。

$$Ag^+ + Cl^- \longrightarrow AgCl$$

(操作2) 硫化水素を通じると CuS が沈殿する。

$$Cu^{2+} + H_2S \longrightarrow CuS + 2H^+$$

(操作3) 煮沸して H_2S を除いたのち，アンモニア水を加えて塩基性にすると $Al(OH)_3$ と $Zn(OH)_2$ が沈殿する。

$$Al^{3+} + 3OH^- \longrightarrow Al(OH)_3$$

$$Zn^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Zn(OH)_2$$

その後，アンモニア水を十分に加えると，$Zn(OH)_2$ は $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ になって溶ける。

$$Zn(OH)_2 + 4NH_3 \longrightarrow [Zn(NH_3)_4]^{2+} + 2OH^-$$

(操作4) 希硫酸を加えると$BaSO_4$が沈殿する。

$$Ba^{2+} + SO_4^{2-} \longrightarrow BaSO_4$$

【ポイント】

おもな金属イオンの性質

$Ag^+ \xrightarrow{Cl^-} \underset{白色}{AgCl} \xrightarrow{NH_3} [Ag(NH_3)_2]^+$

$Pb^{2+} \xrightarrow{Cl^-} \underset{白色}{PbCl_2} \xrightarrow{熱湯} Pb^{2+}$

$Ag^+ \xrightarrow{H_2S} \underset{黒色}{Ag_2S}$

$Cu^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{黒色}{CuS}$

$Pb^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{黒色}{PbS}$

$Cd^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{黄色}{CdS}$

$Zn^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{白色}{ZnS}$ ｝酸性溶液からは沈殿しない

$Fe^{2+} \xrightarrow{H_2S} \underset{黒色}{FeS}$

$Ag^+ \xrightarrow{OH^-} \underset{褐色}{Ag_2O} \xrightarrow{NH_3} [Ag(NH_3)_2]^+$

$Cu^{2+} \xrightarrow{OH^-} \underset{青白色}{Cu(OH)_2} \xrightarrow{NH_3} \underset{深青色}{[Cu(NH_3)_4]^{2+}}$

$Fe^{3+} \xrightarrow{OH^-} \underset{赤褐色}{Fe(OH)_3}$

$Zn^{2+} \xrightarrow{OH^-} \underset{白色}{Zn(OH)_2} \xrightarrow{NH_3} [Zn(NH_3)_4]^{2+}$

$\quad Zn(OH)_2 \xrightarrow{NaOH} [Zn(OH)_4]^{2-}$

$Al^{3+} \xrightarrow{OH^-} \underset{白色}{Al(OH)_3} \xrightarrow{NaOH} [Al(OH)_4]^-$

$Ca^{2+} \xrightarrow{SO_4^{2-}} \underset{白色}{CaSO_4}$

$Ba^{2+} \xrightarrow{SO_4^{2-}} \underset{白色}{BaSO_4}$

Ag^+, Al^{3+}, Ba^{2+}, Cu^{2+}, Na^+, Zn^{2+}

↓ 塩酸を加える

白色沈殿 $AgCl$ ／ ろ液 Al^{3+}, Ba^{2+}, Cu^{2+}, Na^+, Zn^{2+}

↓ H_2S を通じる

黒色沈殿 **A** CuS ／ ろ液 Al^{3+}, Ba^{2+}, Na^+, Zn^{2+}

↓ 煮沸 NH_3 水を十分加える

白色沈殿 **B** $Al(OH)_3$ ／ ろ液 Ba^{2+}, Na^+, $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$

↓ 希硫酸を加える

白色沈殿 **C** $BaSO_4$ ／ ろ液 **D** Na^+, Zn^{2+}

問1 沈殿 **A**, **C** の化学式は上記のとおり。

問2 (1) (ア) 誤り。AgCl は熱湯にもほとんど溶けない。

(イ) 誤り。Ag は両性元素ではないので，AgCl に NaOH 水溶液を加えても溶けない。

(ウ) 誤り。AgCl に希硫酸を加えても溶けない。

(エ) 正しい。AgCl には感光性があり，光が当たると分解して Ag が生じ，灰～黒色になる。

$$2AgCl \longrightarrow 2Ag + Cl_2$$

(2) AgCl に NH_3 水を加えると，無色の $[Ag(NH_3)_2]^+$ になって溶ける。

$$AgCl + 2NH_3 \longrightarrow [Ag(NH_3)_2]^+ + Cl^-$$

問3 CuS（沈殿 **A**）を硝酸に溶かしたのち，NaOH 水溶液を加えると，$Cu(OH)_2$ の青白色沈殿が生じる。

$$Cu^{2+} + 2OH^- \longrightarrow Cu(OH)_2$$

これを加熱すると，黒色の CuO に変化する。

$$Cu(OH)_2 \longrightarrow CuO + H_2O$$

問4 Al は両性元素であり，$Al(OH)_3$（沈殿 **B**）に NaOH 水溶液を加えると $[Al(OH)_4]^-$ になって溶ける。

$$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$$

問5 ろ液 **D** には Na^+ と Zn^{2+} が含まれている。Na は黄色の炎色反応を示すが，Zn は炎色反応を示さない。

問6 (操作3)で，煮沸せずに硫化水素が残ったまま NH_3 水を加えて塩基性にすると，$Al(OH)_3$ だけでなく，ZnS（白色）も沈殿してしまう。

感光性

ハロゲン化銀に光を当てると分解して，単体の Ag が生じ，灰～黒色になる。これは写真に利用されている。

主なアンミン錯イオンの色と形

$[Ag(NH_3)_2]^+$ ……無色，直線形

$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$ ……無色，正四面体

$[Cu(NH_3)_4]^{2+}$ ……深青色，正方形

炎色反応

Li	赤色
Na	黄色
K	赤紫色
Ca	橙赤色
Sr	深赤色
Ba	黄緑色
Cu	青緑色

II

問 7 (1)　H_2SO_4 は 2 価の酸，NaOH は 1 価の塩基であり，これらの中和反応は次のように表される。

$$H_2SO_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$$

(2)　(1) の反応式より，H_2SO_4 と NaOH が過不足なく反応するとき，次の関係式が成り立つ。

H_2SO_4 の物質量：NaOH の物質量 = 1：2

∴　H_2SO_4 の物質量 × 2 = NaOH の物質量

したがって，中和に要した NaOH 水溶液 **X** の体積を v〔mL〕とすると，

$$0.020\times\frac{10.0}{1000}\times2 = 0.10\times\frac{v}{1000} \qquad \therefore \quad v = 4.0\,(\mathrm{mL})$$

【別解】　H_2SO_4 は 2 価の酸，NaOH は 1 価の塩基だから，中和反応の量的関係より，

$$2\times0.020\times\frac{10.0}{1000} = 1\times0.10\times\frac{v}{1000} \qquad \therefore \quad v = 4.0\,(\mathrm{mL})$$

中和反応における量的関係

酸と塩基が過不足なく反応するとき，

酸が放出した H^+ の物質量

= 塩基が放出した OH^- の物質量

(= 塩基が受け取った H^+ の物質量)

酸の価数×酸の物質量

= 塩基の価数×塩基の物質量

問 8 (1)　HCl は 1 価の酸，H_2SO_4 は 2 価の酸だから，水溶液 **Y** 10.0 mL 中に含まれる H^+ の物質量は，

$$a\times\frac{10.0}{1000}\times1 + b\times\frac{10.0}{1000}\times2\,(\mathrm{mol})$$

この H^+ の中和に要した 0.10 mol/L の NaOH 水溶液 **X** の体積が 7.0 mL だから，次の関係式が成り立つ。

$$a\times\frac{10.0}{1000}\times1 + b\times\frac{10.0}{1000}\times2 = 0.10\times\frac{7.0}{1000}$$

$$\therefore \quad a = 0.070 - 2b \qquad \cdots\cdots ①$$

(2)　水溶液 **Y** に $BaCl_2$ を十分に加えると，水溶液 **Y** 中の H_2SO_4 と等しい物質量の白色沈殿 $BaSO_4$ が生じる。

$$H_2SO_4 + BaCl_2 \longrightarrow BaSO_4 + 2HCl$$

水溶液 **Y** 10.0 mL 中には $b\times\frac{10.0}{1000}$ (mol) の H_2SO_4 が含まれているので，

$$b\times\frac{10.0}{1000} = 2.0\times10^{-4} \qquad \therefore \quad b = 0.020\,(\mathrm{mol/L})$$

よって，① 式より，$a = 0.030$ (mol/L)

∴　$a : b = 0.030 : 0.020 = 3 : 2$

問 9　水溶液 **Y** に $BaCl_2$ を加えて $BaSO_4$ が沈殿するときの反応をイオン反応式で表すと，次のようになる。

$$SO_4^{2-} + Ba^{2+} \longrightarrow BaSO_4$$

つまり，このとき水溶液 **Y** に含まれていた H^+ は反応しない。

したがって，ろ液 **Z** に含まれる H^+ の物質量は，水溶液 **Y** 10.0 mL 中に含まれる H^+ の物質量と等しいから，これを中和するのに要する NaOH 水溶液 **X** の体積は，操作 2 の場合と同じく 7.0 mL である。

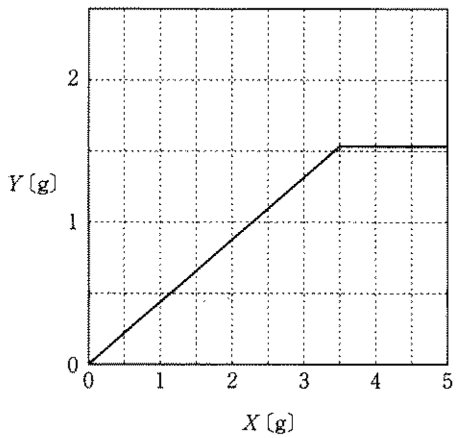
6 【Ⅰ選択者用問題】 化学反応と量的関係

【解答】

問1	a	$CaCl_2$	b	H_2O	問2	0.22 L	問3	①	1.32	②	1.54	問4	(ウ)

問6	3.50 mol/L	問7	1.16 g

問5



【配点】 (20点)

問1 2点(順不同) **問2** 3点 **問3** 各2点×2 **問4** 2点

問5 3点 **問6** 3点 **問7** 3点

【出題のねらい】

塩酸と炭酸カルシウムとの反応に関する実験を題材として，化学反応とその量的関係についての理解度を試す問題である。

【解説】

問題

問1 炭酸カルシウム $CaCO_3$ は弱酸である炭酸 H_2CO_3 と水酸化カルシウム $Ca(OH)_2$ との中和反応によって生成した塩である。$CaCO_3$ に強酸である塩酸 HCl を加えると，強酸の塩が生成し，弱酸である H_2CO_3 が遊離する。

$$CaCO_3 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + H_2CO_3$$

弱酸の塩　強酸　強酸の塩　弱酸

生成した H_2CO_3 はすぐに CO_2 と H_2O に分解し，CO_2 は大気中に逃げていく。

$$H_2CO_3 \longrightarrow H_2O + CO_2$$

これらの式を一つにまとめると，(i)式が得られる。

$$CaCO_3 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2 \quad \cdots\cdots(i)$$

問2 表より，生成した CO_2 (分子量44.0)は 0.44 g である。この CO_2 の標準状態における体積は，

$$\frac{0.44}{44.0} \times 22.4 = 0.224 \fallingdotseq 0.22\,(L)$$

問3，4 この実験での操作を図に表してみると，

【ポイント】

塩の反応

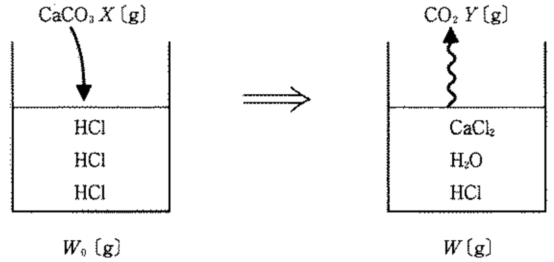
・弱酸の塩＋強酸 ⟶ 強酸の塩＋弱酸

$CaCO_3 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$

$FeS + H_2SO_4 \longrightarrow FeSO_4 + H_2S$

・弱塩基の塩＋強塩基 ⟶ 強塩基の塩＋弱塩基

$2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow CaCl_2 + 2H_2O + 2NH_3$



質量保存の法則「反応前の物質の質量の総和＝反応後の物質の質量の総和」より，次の関係が成り立つ。

はじめの塩酸が入ったコニカルビーカー全体の質量 W_0〔g〕
＋ 加えた $CaCO_3$ の質量 X〔g〕
＝ 反応終了後のコニカルビーカー全体の質量 W〔g〕
＋ 発生した CO_2 の質量 Y〔g〕

すなわち，$W_0 + X = W + Y$

$\therefore\ Y = W_0 + X - W$

① $X = 3.00$ (g) のとき，CO_2 の質量 Y〔g〕は，
$Y = 91.76 + 3.00 - 93.44 = 1.32$ (g)

② $X = 4.00$ (g) のとき，CO_2 の質量 Y〔g〕は，
$Y = 91.76 + 4.00 - 94.22 = 1.54$ (g)

（注） 表の①，②の数値は，以下の**問 5** の解説に記したように考えて求めることもできる。

問 5 HCl の量が十分にある場合，加えた $CaCO_3$ はすべて反応するので，発生する CO_2 の質量 Y〔g〕は加えた $CaCO_3$ の質量 X〔g〕に比例して変化する。表より，$X = 0 \sim 2.00$ の範囲で Y は X に比例していることがわかる。$X = 3.00,\ 4.00,\ 5.00$ のときも，加えた $CaCO_3$ がすべて反応したと仮定すれば，そのときの Y の値は次のようになる。

X〔g〕	0	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
Y〔g〕	0	0.44	0.44×2 $= 0.88$	0.44×3 $= 1.32$	0.44×4 $= 1.76$	0.44×5 $= 2.20$

しかし，この $X = 4.00,\ 5.00$ のときの Y の値 1.76，2.20 は，いずれも表の $X = 5.00$ のときの Y の値 1.54 より大きい。これは，このとき $CaCO_3$ が HCl に対して過剰であり，$CaCO_3$ の一部が未反応のまま残るからである。したがって，X〔g〕と Y〔g〕の関係を表すグラフは次ページの図の折れ線になる。

化学の基礎法則

質量保存の法則（ラボアジエ）

化学反応の前後において，物質全体の質量は変化しない。

定比例の法則（プルースト）

化合物をつくる元素の質量の比は常に一定である。

倍数比例の法則（ドルトン）

2種の元素が化合して2種類以上の化合物をつくるとき，一方の元素の一定量と化合する他方の元素の質量の比は簡単な整数の比になる。

気体反応の法則（ゲーリュサック）

気体を含む化学反応では，反応または生成する気体の体積比（同温同圧）は簡単な整数比になる。

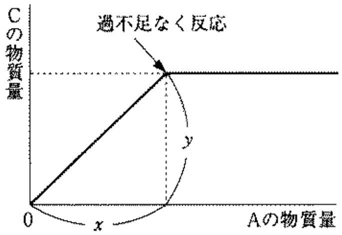
アボガドロの法則（アボガドロ）

同温，同圧の気体は同体積中に同数の分子を含む。

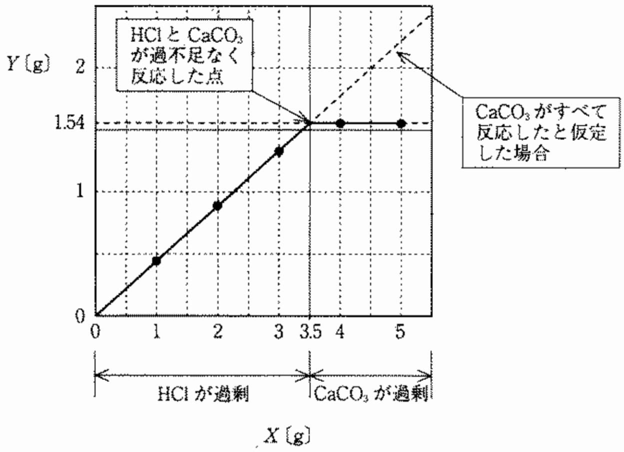
反応物の量と生成物の量の関係

グラフの折れ曲がり点
⟺ 過不足なく反応するときに対応

・aA + bB ⟶ cC について，
A の物質量を変化させて，
一定量の B と反応させる場合



$x : y = a : c$



(注) HClと過不足なく反応する$CaCO_3$の質量X_0〔g〕の値は，グラフの折れ曲がり点の座標から読み取ることができるが，HClと$CaCO_3$が過不足なく反応するとき，$CaCO_3$（式量100.0）の物質量が1.54 g（発生量の最大値）のCO_2の物質量に等しいことから，計算で求めることもできる。

$$\frac{X_0}{100.0}=\frac{1.54}{44.0} \qquad \therefore \quad X_0 = 3.50\,(\mathrm{g})$$

問 6 (i)式より，HCl 2 molが反応するとCO_2 1 molが発生するから，

HClの物質量 : CO_2の物質量 = 2 : 1

∴ HClの物質量 = CO_2の物質量 ×2

塩酸20.0 mL中のHClがすべて反応したときに発生したCO_2が1.54 gだから，塩酸の濃度をx〔mol/L〕とすると，

$$x\times\frac{20.0}{1000}=\frac{1.54}{44.0}\times 2 \qquad \therefore \quad x = 3.50\,(\mathrm{mol/L})$$

問 7 水で2倍に希釈した塩酸の体積が元と同じ20.0 mLであるならば，モル濃度が$\frac{1}{2}$倍になっているので，塩酸中のHClの物質量は元の$\frac{1}{2}$倍になる。しかし，希釈した塩酸の体積を30.0 mLにしたので，この塩酸中のHClの物質量は元の$\left(\frac{1}{2}\times\frac{30.0}{20.0}=\right)\frac{3}{4}$倍になる。したがって，HClがすべて反応したときに発生するCO_2の物質量も元の$\frac{3}{4}$倍になるので，その質量も元の$\frac{3}{4}$倍になるから，その質量は，$\left(1.54\times\frac{3}{4}=\right)$1.155 (g)になる。

一方，$CaCO_3$ 3.00 gがすべて反応したときに発生するCO_2の質量は，**問 3**で求めた表中の①と同じ1.32 gである。この値は1.155 gより大きいから，HClに対して$CaCO_3$が過剰で，$CaCO_3$がすべて反応する前にHClがすべて反応することがわか

る。

したがって，実際に発生する CO_2 の質量は，

$1.155 \fallingdotseq 1.16\,(g)$

【別解】 HCl がすべて反応したときに発生する CO_2 の質量は，次のようにして求めてもよい。

2 倍に希釈した塩酸のモル濃度は $\frac{3.50}{2}$ mol/L だから，反応前の HCl，$CaCO_3$ の物質量は，

$$HCl\ ;\ \frac{3.50}{2}\times\frac{30.0}{1000}=5.25\times10^{-2}\,(mol)$$

$$CaCO_3\ ;\ \frac{3.00}{100.0}=3.00\times10^{-2}\,(mol)$$

(i)式の反応による物質量の変化は，次のようになる。

	$CaCO_3$	+ $2HCl$	⟶ $CaCl_2$	+ H_2O	+ CO_2
はじめ	3.00	5.25			0
変化量	−2.625	−5.25			+2.625
反応後	0.375	0			2.625

(単位；$\times10^{-2}$ mol)

したがって，発生する CO_2 の質量は，

$$44.0\times2.625\times10^{-2}=1.155\fallingdotseq1.16\,(g)$$

生　　物

1 【共通問題】植物の生殖

【解答】

問1	1	配偶子	2	中央	3	重複	4	栄養				
問2	イ	エ										
問3	(1)	51本										
	(2)	(i)	黄褐色									
		(ii)	果皮は雌しべの子房壁に由来する組織なので，長十郎と同じ黄褐色になる。(34字)									
問4	親と同じ遺伝子構成の個体が生じるので，親のもつ優良な形質を維持できる。(35字)											
問5	(1)	S_4	(2)	S_2S_3，S_3S_4	(3)	①	イ	②	イ	③	ウ	

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　各1点×2(順不同)，　問3　(1)　2点　(2)(i)　1点　(ii)　3点

問4　3点，　問5　(1)　1点　(2)　2点(完答)　(3)　各1点×3

【出題のねらい】

被子植物の生殖に関する知識問題と，ニホンナシの交配実験に関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　多くの生物では，雌と雄はともに特別に分化した配偶子と呼ばれる生殖細胞をつくる。雌雄の配偶子の合体(接合，受精)によって新個体が生じる生殖を，有性生殖という。

被子植物では，花粉管の内部に雄性配偶子である精細胞が2個生じ，胚のうの内部に雌性配偶子である卵細胞が1個生じる。2個の精細胞のうち，一方の精細胞は卵細胞と受精して受精卵となり，他方の精細胞は胚のう内の中央細胞と受精して，将来，胚乳をつくる細胞となる。このような受精の様式を，重複受精という。

被子植物でも，ジャガイモ(塊茎)，サツマイモ(塊根)，オニユリ(むかご)などのように，植物体(栄養器官)の一部が成長・独立して新個体をつくるものがある。このような生殖の方法を，栄養生殖(栄養繁殖)という。アメーバやゾウリムシなどの単細胞生物では，細胞分裂によって新個体をつくるものが多い。多細胞生物でも，イソギンチャク，プラナリアなどの中には，親のからだがほぼ同じ大きさに分かれて増殖するものがある。このような生殖方法を，分裂という。また，酵母菌やヒドラなどでは，親のからだに小さな膨らみが生じ，これが成長して新個体となる。このような生殖方法を，出芽という。栄養生殖や分裂，出芽などのように，配偶子によらずに個体の一部が新たに独立して新個体が生じる生殖を，無性生殖という。

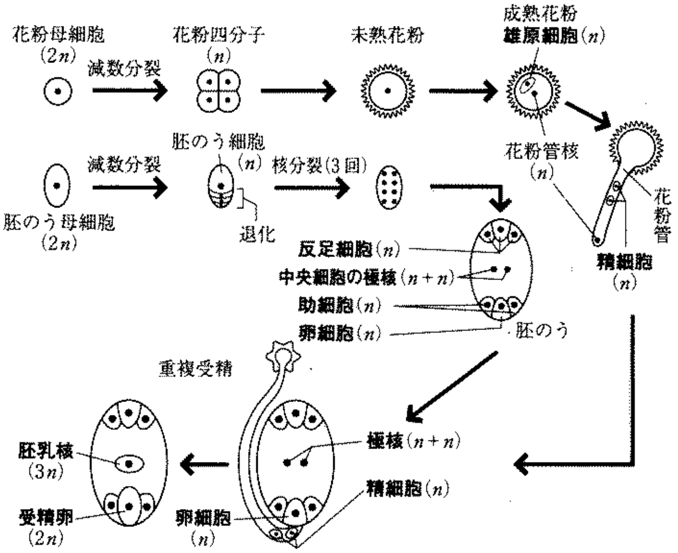
【ポイント】

有性生殖
配偶子による生殖
接合，受精

重複受精
被子植物でみられる。
精細胞(n)＋卵細胞(n)
→ 受精卵$(2n)$ → 胚$(2n)$
精細胞(n)＋中央細胞$(n+n)$
→ 胚乳をつくる細胞$(3n)$

無性生殖
配偶子によらない生殖
栄養生殖…ジャガイモ(塊茎)，サツマイモ(塊根)，オニユリ(むかご)など
分裂…アメーバ，ゾウリムシ
イソギンチャクなど
出芽…酵母菌，ヒドラなど

問 2　被子植物における精細胞と卵細胞の形成過程および重複受精の概要を，下図に示す。



減数分裂は花粉母細胞から花粉四分子が生じる過程で行われるので，アは正しい。花粉管内では，精原細胞ではなく雄原細胞が分裂して2個の精細胞が生じるので，イは誤りである。一方，1個の胚のう母細胞からは減数分裂によって4個の細胞が生じるが，3個の細胞は退化し，1個が胚のう細胞となる。胚のう母細胞の核相は $2n$ であり，減数分裂によって生じた胚のう細胞の核相は n であるので，ウは正しい。胚のう細胞の核は3回連続して分裂し，$2^3 = 8$ 個の核をもつ胚のうが生じるので，エは誤りである。胚のう内の8個の核は，胚のう細胞の核の核分裂によって生じたものであり，8個の核の遺伝子構成はすべて同じであるので，オは正しい。胚のう内では，卵細胞の両側に2個の助細胞が存在し，これらの反対側に3個の反足細胞が存在するので，カは正しい。

胚のう細胞の核は3回分裂して8個の核をもつ胚のうとなる。

問 3 (1)　胚乳を構成する細胞は，2個の極核(n)を含む中央細胞($n + n$)と精細胞(n)の合体によって生じるので，その核相は $3n$ となる。染色体数が $2n = 34$ の長十郎のつくる中央細胞の2個の極核の染色体数は $n + n = 34$，染色体数が $2n = 34$ の二十世紀のつくる精細胞の核の染色体数は $n = 17$ なので，これらが融合してできる胚乳を構成する細胞の染色体数は，$34 + 17 = 51$ (本)となる。

(2)　交配によって生じる果実の果皮は，雌しべの子房壁に由来する組織である。したがって，長十郎の雌しべにいずれの品種の花粉を受粉させても，生じる果実の果皮は必ず長十郎由来の黄褐色となる。

果皮・果肉は，雌しべの子房壁に由来する。

問 4　ニホンナシでは交配によって種子が生じるが，種子は受精の結果生じたものであり，配偶子を介して両親から遺伝子を受け継ぐので，それらの組合せによって子孫にさまざまな形質をもつ個体が生じる。果樹栽培で行われる接ぎ木は無性生殖を利用した繁殖方法で，接ぎ木で繁殖させた場合には，遺伝子構成が親とまったく同じで親と同じ優良な形質をもつ個体(クローン個体)を得ることができる。

問 5 (1)　問題文から，長十郎の遺伝子型は S_2S_3，二十世紀の遺伝子型は S_2S_4 である。二十世紀の花粉には，遺伝子型が S_2 のものと S_4 のものが半数ずつ存在する。長十郎の雌しべの細胞の遺伝子型は S_2S_3 であるので，二十世紀の花粉のうち，遺伝子型が S_4 の花粉は受精が成立するが，遺伝子型が S_2 の花粉は花粉管の伸長が停止し，受精が成立しない。

(2)　長十郎の花粉には，遺伝子型が S_2 のものと S_3 のものが半数ずつ存在する。二十世紀の雌しべの細胞の遺伝子型は S_2S_4 であるので，長十郎の花粉のうち，遺伝子型が S_3 の花粉は受精が成立するが，遺伝子型が S_2 の花粉は花粉管の伸長が停止し，受精が成立しない。したがって，交配によって生じる次代の個体の遺伝子型は S_2S_3 と S_3S_4 である。

(3)　表 1 において，品種 X の花粉を二十世紀の雌しべに受粉させた場合，発芽した花粉のすべてで花粉管の伸長が停止していることから，品種 X の遺伝子型は二十世紀と同じ S_2S_4 であることがわかる。また，秋麗 (S_3S_4) の花粉を品種 X (S_2S_4) の雌しべに受粉させた場合，発芽した花粉のすべてで花粉管が伸長したことから，品種 X では雌しべにおける S_4 遺伝子のはたらきが失われているものと推測される。

そこで「品種 X (S_2S_4) では，雌しべで S_4 遺伝子がはたらかない」と仮定し，もう一度表 1 の交配結果と照らし合わせてみると，以下のようになる。品種 X (S_2S_4) の雌しべに長十郎 (S_2S_3) の花粉を受粉させた場合，遺伝子型が S_3 の花粉は受精が成立するが，遺伝子型が S_2 の花粉は受精が成立しないので，表 1 の結果(△)と一致する。品種 X (S_2S_4) の雌しべに秋麗 (S_3S_4) の花粉を受粉させた場合，遺伝子型が S_3 の花粉も S_4 の花粉も受精が成立するので，表 1 の結果(○)と一致する。品種 X (S_2S_4) の雌しべに二十世紀 (S_2S_4) または品種 X (S_2S_4) の花粉を受粉させた場合，遺伝子型が S_2 の花粉は受精が成立しないが，遺伝子型が S_4 の花粉は受精が成立するので，表 1 の結果(△)と一致する。したがって，いずれも表 1 の結果と一致するので，この仮定が正しいといえる。

有性生殖：配偶子の合体によって多様な遺伝子の組合せをもつ新個体が生じる。
無性生殖：遺伝子構成と形質が親と同じ新個体が生じる。

2 【共通問題】神経

【解答】

問1	1	細胞体	2	効果	3	神経伝達物質	4	受容体
問2	イ							
問3	細胞膜にあるナトリウムポンプにより，エネルギーを用いて，Na^+ を細胞外に排出し，K^+ を細胞内に取り込んでいる。(52字)							
問4	(1)	閾値	(2)	エ				
問5	(1)	絶縁体としてはたらく。(11字)	(2)	髄鞘				
問6	**実験2**のほうが**実験1**より時間が短くなる。(20字)							

【配点】 (25点)

問1　各2点×4，　問2　2点，　問3　4点，　問4　(1)　2点　(2)　2点

問5　(1)　2点　(2)　2点，　問6　3点

【出題のねらい】

神経系に関する知識問題と，有髄神経繊維における跳躍伝導のしくみに関する考察問題を出題した。

【解説】 問題

問1　神経系を構成するニューロンは，核を含む細胞体と，多数の突起である樹状突起，および1本の長い突起である軸索からなる。

外界の刺激は目や耳などの受容器(感覚器)で受け取られ，そこで生じた興奮は，求心性神経である感覚神経を介して中枢に伝えられる。中枢からは，遠心性神経である運動神経や交感神経，副交感神経などを介して筋肉や分泌腺などの効果器に興奮が伝えられ，効果器での反応が起こる。

ニューロンとニューロン，あるいはニューロンと効果器の連接部はシナプスと呼ばれる。シナプスでは，軸索末端に神経伝達物質を含むシナプス小胞が存在し，樹状突起や細胞体には神経伝達物質の受容体が存在する。興奮が軸索の末端に達すると神経伝達物質が放出され，これが次のニューロンや効果器の受容体に結合することで，興奮が伝達される。

問2　代表的な神経伝達物質には，アセチルコリンとノルアドレナリンがある。運動神経や副交感神経の末端からはアセチルコリンが，交感神経の末端からは主としてノルアドレナリンが放出される。また，感覚神経には脳内に達するものなどが含まれるので，各感覚神経ごとにさまざまな神経伝達物質が用いられている。したがって，正解はイである。

問3　細胞膜には，ナトリウムポンプと呼ばれる能動輸送のしくみが存在する。ナトリウムポンプは，エネルギーを用いて，濃度勾配に逆らって，Na^+ を細胞内から細胞外へ，K^+ を細胞外から細胞内へ輸送する。このため，Na^+ は細胞内より細胞外の濃度が

【ポイント】

ニューロン
細胞体，**樹状突起**，**軸索**からなる。

興奮は，**受容器**→求心性神経→中枢→遠心性神経→**効果器**の順に伝わる。

シナプス
ニューロンとニューロン，あるいはニューロンと効果器の連接部
軸索末端に**シナプス小胞**があり，樹状突起や細胞体に**受容体**が存在する。

神経伝達物質
アセチルコリン：運動神経・副交感神経
ノルアドレナリン：交感神経

ナトリウムポンプ
エネルギーを用いて，Na^+ を細胞外に排出し，K^+ を細胞内に取り込む。

高く，K^+ は細胞外より細胞内の濃度が高くなっている。

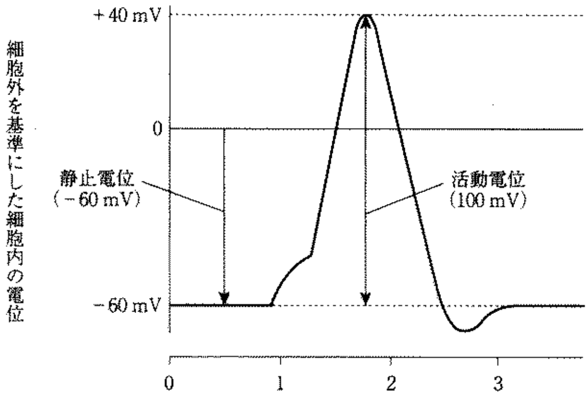
興奮が起こっていない状態(静止状態)では，細胞膜を介した Na^+ と K^+ の透過性にちがいがあり，Na^+ の透過性は低いが，K^+ の透過性はやや高い。この透過性のちがいは，次のようなしくみで生じる。ニューロンなどの細胞膜には，Na^+ や K^+ を選択的に透過させる Na^+ チャネルや K^+ チャネルと呼ばれる膜タンパク質が存在する。静止状態では Na^+ チャネルは開いておらず，Na^+ は透過しないが，K^+ チャネルには開いているものがあり，K^+ が濃度差にしたがって細胞外へ流出しやすい。その結果，細胞内が細胞外に対して負の電位をもつことになる。この電位を静止電位と呼ぶ。

問4(1) 電気的な刺激を加えることにより細胞内の電位(膜電位)が図2のように上昇して，ある電位(図中のP，このときの刺激の強さを閾値と呼ぶ)を超えると，Na^+ チャネルが開いて細胞外から細胞内へ Na^+ が流入し，膜電位が正になる。そして，これにやや遅れて，細胞内の K^+ が細胞外に流出し，膜電位はもとの負の状態にもどる。このときの電位変化を活動電位と呼び，活動電位を生じることを興奮の発生と呼ぶ。

閾値

活動電位が生じる最も小さい刺激の強さ

(2) ニューロンでは，下図のように静止電位は −60 mV 程度，活動電位は約 100 mV となるので，図の縦軸の単位は mV である。また，この膜電位の上昇と低下は1ミリ秒程度の短時間で起こるので，横軸の単位はミリ秒である。したがって，エが正解となる。



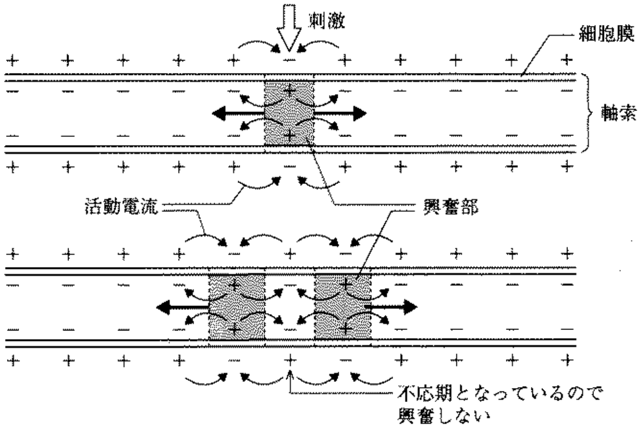
問5・6 脊椎動物のほとんどの軸索は，髄鞘でおおわれた有髄神経繊維からなり，髄鞘と髄鞘の切れ目をランビエ絞輪と呼ぶ。髄鞘は絶縁体としてはたらくため，興奮がランビエ絞輪ごとに飛び飛びに伝わる跳躍伝導が起こる。**実験1〜3**は有髄神経繊維における跳躍伝導のしくみを実験的に示したものである。

有髄神経繊維

軸索に絶縁体としてはたらく**髄鞘**をもち，**跳躍伝導**を行う。

ここで，興奮が軸索をどのように伝導するかを確認しておこ

う。下図に示すように，興奮が発生すると，興奮の発生部位で膜電位が逆転して細胞外が負，細胞内が正になる。そのため，細胞内では興奮部位から隣接部位に向かって活動電流が流れ，細胞外では隣接部位から興奮部位に向かって活動電流が流れる。この活動電流が隣接部位を刺激して，新たな活動電位を発生させる。



隣接する部位での活動電位の発生を，図2を用いて説明すると，次のようになる。ニューロンの細胞膜には，Na^+ チャネルが存在する。興奮が発生した部位から流れてきた活動電流は細胞内の電位を上昇させ，この電位が図2のPを超えると，Na^+ チャネルが開いて，Na^+ を透過させるようになる。この結果，隣接部位で活動電位が発生する(図2のa)。流れてくる活動電流が弱い場合には閾値を超えず，Na^+ チャネルが開かない。そのため，Na^+ は流入せず，活動電位は発生しない(図2のcやd)。

ある部位で発生した活動電位によって生じた活動電流の一部は，軸索外に漏れ出すので，興奮が発生した部位から遠くにいくほど活動電流は弱くなる。そのため，ある部位で発生した活動電位による活動電流によって，次に活動電位が発生するのはある距離までで，それより離れた地点では発生しない。有髄神経繊維に存在する髄鞘は絶縁体としてはたらくが，この絶縁体は活動電流が軸索外に漏れ出すのを防ぐはたらきをもつ。そのため，有髄神経繊維では活動電流が漏れ出す量が少なくなり，より遠くまで強い活動電流が流れる。その結果，無髄神経繊維に比べて，より距離の遠い地点まで活動電位を発生させることができる。したがって，ある一定の距離を興奮が伝わるとき，その距離間で発生する活動電位の回数は無髄神経繊維の方が有髄神経繊維より多くなる。前ページの図でもわかるように，ある部位での活動電位は，刺激を受けてから約1ミリ秒かかって発生する。一定の距離間で発生する活動電位の回数を少なくすると，この刺激がやってきて

から活動電位が発生するまでの合計時間を減らすことができる。このため，有髄神経繊維のほうがある一定の距離を伝わる時間が短い(伝導速度が大きい)ことになる。これが，跳躍伝導の詳しい原理である。

実験2で軸索の表面に塗ったワセリンは，このような髄鞘と同じはたらきをもち，活動電流が軸索外に漏れるのを防いでいる。そのため，**実験2**ではほとんど活動電流が弱くならず，図1の③の部位でも閾値を上回って活動電位が発生している。しかし，②の部位では，問題文にもあるようにBの部屋にスクロース溶液を入れているので，流入するNa^+そのものが存在せず，活動電位は発生しない。**実験3**でも，Bの部屋にスクロース溶液を入れているので，細胞外液にNa^+が存在せず，②の部位で活動電位は発生しない。また，ワセリンを塗っていないので，活動電流はだんだん弱くなる。その結果，③の部位では閾値に達しないので，活動電位は発生しない。**実験1**では，Bの部屋に人工海水(Na^+が含まれている)を入れているので，②の部位でも活動電位が発生する。そして，②の部位で発生した活動電位で生じた活動電流が③の部位に流れ，③の部位でも活動電位が発生することになる。これは無髄神経繊維における通常の伝導を示している。したがって，伝導にかかる時間は，跳躍伝導と同様の現象が起こる**実験2**のほうが**実験1**よりも短くなる。

3 【Ⅰ・Ⅱ選択者用問題】遺伝子

【解答】

問1	1	リン酸	2	ヌクレオチド	3	水素	4	転写
問2	ア	問3	19%	問4	1.1%			
問5	4種類ある塩基の2つ組では，20種類あるアミノ酸のうち16種類しか指定することができない。(45字)							
問6	(1)	AUA：イソロイシン	UAU：チロシン					
	(2)	AAUまたはUAAのどちらかが終止コドンとなっている。(27字)						

【配点】 (25点)

問1　各2点×4，　問2　2点，　問3　2点，　問4　2点

問5　4点，　問6　(1)　各2点(完答)×2(順不同)　(2)　3点

【出題のねらい】

DNAに関する知識および計算問題と，遺伝暗号に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　DNAは，塩基・糖(デオキシリボース)・リン酸からなるヌクレオチドを構成単位とし，これらが連続的につながって鎖状の構造をなしている。塩基には，アデニン(A)・グアニン(G)・シトシン(C)・チミン(T)の4種類があり，AとTの間，およびGとC

【ポイント】

ヌクレオチド

塩基・糖・リン酸からなる。

の間で相補的に水素結合を形成している。DNA をもとにして伝令 RNA を合成する過程を転写といい，伝令 RNA の情報をもとにしてタンパク質を合成する過程を翻訳という。

問2 グリフィスおよびアベリー(エイブリー)は，肺炎双球菌を用いた研究によって遺伝子の本体を明らかにすることに寄与したが，バクテリオファージを用いた研究を行ったのはハーシーとチェイスである。したがって，アは誤りである。ワトソンとクリックは，DNA 中には A と T，G と C が各々同じ割合で含まれるというシャルガフの規則やX線回折の結果をふまえ，二重らせんモデルを提唱した。したがって，イは正しい。メセルソンとスタールは，窒素の同位体を用いて大腸菌の培養実験を行い，密度勾配遠心法を利用して半保存的複製を証明した。したがって，ウは正しい。ビードルとテータムは，突然変異によってアルギニンを培地に加えなければ生育できなくなったアカパンカビを用いて，１つの遺伝子が１種類の酵素の合成に関与するという，一遺伝子一酵素説を提唱した。したがって，エは正しい。

グリフィス
肺炎双球菌の**形質転換**の研究

アベリー(エイブリー)
形質転換を利用した遺伝子の本体の研究

ハーシーとチェイス
バクテリオファージの増殖を利用した遺伝子の本体の研究

ワトソンとクリック
DNA の**二重らせんモデル**の提唱

メセルソンとスタール
半保存的複製の証明

ビードルとテータム
一遺伝子一酵素説の提唱

問3 二本鎖 DNA では，**問1**で述べたように A は T と，T は A と，また，C は G と，G は C と水素結合しているので，DNA 分子全体では，A と T，G と C が各々同じ割合で含まれる。したがって，A が 31％のときには T は 31％，また，塩基の合計は 100％なので，G と C はそれぞれ 19％となる。

DNA の塩基対の相補性
A ＝ T，G ＝ C

問4 問題文より，１つの遺伝子からは１種類のタンパク質が合成されるものとすると，この生殖細胞には 2.2×10^4 種類のタンパク質を合成する情報があることになる。また，１つのタンパク質を構成するアミノ酸数は 5.0×10^2 であり，１つのアミノ酸は伝令 RNA の３つ組の塩基により指定されるので，全タンパク質を指定するための遺伝子領域となる塩基対数は $2.2 \times 10^4 \times 5.0 \times 10^2 \times 3$ である。したがって，この生殖細胞がもつ DNA の全塩基対に占める遺伝子領域の割合は，

$$\frac{2.2 \times 10^4 \times 5.0 \times 10^2 \times 3}{3.0 \times 10^9} \times 100 = 1.1\,(\%)$$ となる。

問5 アミノ酸が２つ組の塩基配列で指定されていると仮定すると，４種類の塩基では $4^2 = 16$ 通りの組合せしかなく，タンパク質を構成する 20 種類のアミノ酸のすべてを指定することができない。コドンが３つ組からなるとすると，$4^3 = 64$ 通りの組合せとなり，20 種類のアミノ酸をすべて指定することができる。実際に，コドンは３つ組であり，20 種類のアミノ酸に対してコドンの種類のほうが多いので，複数のコドンが同一のアミノ酸を指定する場合が多くみられる。

コドンの種類：$4^3 = 64$ 通り
アミノ酸の種類数：20 種類

問6(1) 人工的に合成した伝令 RNA では読みはじめの位置はランダムなので，**実験1**で使用した伝令 RNA を３つずつに区切ると

AUA | UAU | AUA | U…となる。したがって，この伝令RNAに含まれるコドンは2種類(AUA，UAU)である。**実験2**で使用した伝令RNAに含まれるコドンは，読みはじめの位置をずらすと3種類(AUU，UUA，UAU)，および**実験3**で使用した伝令RNAに含まれるコドンは，読みはじめの位置をずらすと3種類(AAU，AUA，UAA)となる。**実験1**と**実験2**に共通するコドンはUAUであるが，共通するアミノ酸はチロシンとイソロイシンであるので，これだけではUAUがどちらを指定するのか不明である。一方，**実験1**と**実験3**に共通するコドンはAUA，アミノ酸はイソロイシンであるので，AUAはイソロイシンを指定することがわかる。**実験1**のもう1つのコドンはUAUであり，こちらがチロシンを指定することになる。UAUは**実験2**にも共通するコドンであり，こちらもチロシンを指定することがわかる。したがって，**実験1～3**から決定できるコドンとアミノ酸の組合せは，AUA：イソロイシン，およびUAU：チロシンの2つである。

(2) **実験3**では，合成されたポリペプチドは2種類しかなく，また同量であったので，3種類のコドンのうちの1つはポリペプチドを合成できなかったと考えられる。コドンの中にはアミノ酸を指定せず，ポリペプチド合成がそのコドンで終結するものが3つ存在し，これらを終止コドンという。**実験3**のコドンのうち，AAUまたはUAAのどちらかが終止コドンであると考えられる。なお，実際には，AAUはアスパラギンを指定するコドンであり，UAAが終止コドンである。

終止コドン
アミノ酸を指定せず，ポリペプチド合成がそこで停止する。

4 【I・II選択者用問題】呼吸

【解答】

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>1</td><td>ピルビン酸</td><td>2</td><td>オキサロ酢酸</td><td>3</td><td>酸素</td><td>4</td><td>水</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="7">グリセリン</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>(1)</td><td>2分子</td><td>(2)</td><td>2分子</td><td>(3)</td><td colspan="3">34分子</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>(1)</td><td>オ</td><td>(2)</td><td>ア</td><td>エ</td><td colspan="3">カ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問4</td><td>(1)</td><td colspan="7">クレアチンリン酸</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="7">1gを分解したときに得られるエネルギー量は脂肪が最も大きいので，体内に貯蔵するのに最も軽量ですむ。(49字)</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="7">酸素吸収量あたりに得られるエネルギー量は，炭水化物のほうが脂肪より大きい。(37字)</td></tr>
<tr><td>問5</td><td>(1)</td><td>0.82</td><td>(2)(i)</td><td>0.1 g</td><td>(ii)</td><td>0.06 g</td><td>(3)</td><td>1394 kcal</td></tr>
</table>

【配点】(25点)

問1　各1点×5，問2　(1)　1点　(2)　1点　(3)　1点

問3　(1)　1点　(2)　各1点×3(順不同)，問4　(1)　1点　(2)　3点　(3)　3点

問5　(1)　2点　(2)　各1点×2　(3)　2点

【出題のねらい】

好気呼吸の反応過程に関する知識問題と，呼吸商および基礎代謝量に関する考察問題と計算問題を出題した。

【解説】　問題

問1　グルコースを基質とする好気呼吸の反応は，解糖系，クエン酸回路，および電子伝達系の3つの過程からなる。解糖系は，グルコース(C_6)をピルビン酸(C_3)に分解する反応であり，細胞質基質において行われる。この過程で水素([H])とATPが生成される。クエン酸回路は，解糖系でつくられたピルビン酸(C_3)を二酸化炭素に分解していく反応であり，ミトコンドリアのマトリックスで行われる。この過程では，ピルビン酸(C_3)は活性酢酸(C_2)になり，オキサロ酢酸(C_4)と反応してクエン酸(C_6)になる。クエン酸(C_6)は脱炭酸反応や脱水素反応を経て，再びオキサロ酢酸(C_4)となる。これらの過程で，[H]とATPが生成される。電子伝達系は，解糖系やクエン酸回路で生じた[H]が酸素と反応し，水を生じるとともに大量のATPを生成する反応で，ミトコンドリアの内膜で行われる。

脂肪やタンパク質も，好気呼吸の呼吸基質として利用される。脂肪はグリセリンと脂肪酸に分解された後，グリセリンは解糖系の途中に入り，脂肪酸はβ酸化と呼ばれる過程を経て活性酢酸に分解されてクエン酸回路に入る。タンパク質はアミノ酸に分解された後，脱アミノ反応と呼ばれる反応でさまざまな有機酸となり，クエン酸回路に入る。

問2　1分子のグルコースをもとにして得られるATPは，解糖系

【ポイント】

解糖系

グルコースをピルビン酸に分解する反応。細胞質基質で行われる。グルコース1分子につき2分子のATPが得られる。

クエン酸回路

ピルビン酸を二酸化炭素に分解する反応。ミトコンドリアのマトリックスで行われる。グルコース1分子につき2分子のATPが得られる。

電子伝達系

[H]と酸素から水を生成する反応。ミトコンドリアの内膜で行われる。グルコース1分子につき34分子のATPが得られる。

で2分子，クエン酸回路で2分子，電子伝達系で34分子であり，電子伝達系で最も多量のATPが得られる。

問3　食物中に含まれるデンプン，脂肪，タンパク質といった高分子化合物は，消化酵素によって加水分解されてから吸収される。ヒトの主な消化酵素とそれらが進める反応は，以下のようにまとめられる。

消化酵素	基質 → 生成物
アミラーゼ	デンプン → マルトース
マルターゼ	マルトース → グルコース
ペプシン	タンパク質 → ポリペプチド
トリプシン	タンパク質 → ポリペプチド
ペプチダーゼ	ポリペプチド → アミノ酸
リパーゼ	脂肪 → 脂肪酸＋グリセリン

なお，イのカタラーゼは過酸化水素を水と酸素に分解する酵素，クのデヒドロゲナーゼ(脱水素酵素)は基質から水素([H])を奪う酵素であり，各々細胞中に存在する。

問4(1)　筋肉中には，クレアチンリン酸と呼ばれる高エネルギーリン酸化合物が蓄積されている。筋肉中に少量存在するATPはすぐに消費されるが，下式のようにクレアチンリン酸からリン酸基がADPに転移し，すばやくATPが再生される。

ADP ＋ クレアチンリン酸 → ATP ＋ クレアチン

(2)　動物は，余剰のエネルギーを主に脂肪として貯える。表1より，1gを分解したときに得られるエネルギー量は，脂肪が9.3 kcalであり，炭水化物やタンパク質の4.1 kcalに対して2倍以上大きい。これは，同じ重量で比較した場合に脂肪が最も大きなエネルギーを含むことを意味するので，エネルギーを貯えるという観点からは，同じ量のエネルギーを貯える場合に最も軽量ですむといえる。

(3)　好気呼吸では，どの呼吸基質を分解するのにも酸素を必要とする。(2)で述べたように，同じ重量あたりに貯えることのできるエネルギー量は脂肪のほうが大きいが，好気呼吸の反応は組織に供給される酸素の量によって制限を受けるので，好気呼吸においては，同じ酸素吸収量あたりに得られるエネルギー量が大きい呼吸基質のほうが有利であると考えられる。酸素吸収量1Lあたりに得られるエネルギー量を算出すると，炭水化物の場合は $4.1 \div 0.75 \fallingdotseq 5.47$ (kcal/L)，脂肪の場合は $9.3 \div 2.0 = 4.65$ (kcal/L)，タンパク質の場合は $4.1 \div 0.95 \fallingdotseq 4.32$ (kcal/L)となり，炭水化物が最も大きいことがわかる。

問5(1)　呼吸商とは，生物が呼吸を行う際に放出された二酸化炭素と吸収された酸素の体積比$\left(\dfrac{\text{放出された二酸化炭素の体積}}{\text{吸収された酸素の体積}}\right)$であ

クレアチンリン酸
筋肉中に存在し，ADPからATPを再生する物質

呼吸商(RQ)
$=\dfrac{\text{放出された二酸化炭素の体積}}{\text{吸収された酸素の体積}}$

る。被験者の二酸化炭素放出量は0.159 L，酸素吸収量は0.195 Lであるので，呼吸商は$\frac{0.159}{0.195} \fallingdotseq 0.82$となる。問題文には，「安静時に呼吸基質として利用されるタンパク質の量は無視できる」とある。炭水化物のみを呼吸基質として利用した場合の呼吸商は 1.0であり，脂肪のみを呼吸基質として利用した場合の呼吸商は約0.7 である。したがって，被験者は炭水化物と脂肪の両方を呼吸基質として利用しているため，呼吸商がそのほぼ中間の値である0.82 となったと考えられる。

(2) 被験者が 1 分間に消費した炭水化物の量を X (g)，脂肪の量を Y (g) とする。表 1 の「1 g を分解したときに吸収される酸素量」の値を用いると，1 分間の酸素吸収量 (L) は 0.75 X + 2.0 Y と表される。同様に「1 g を分解したときに放出される二酸化炭素量」の値を用いると，1 分間の二酸化炭素放出量 (L) は 0.75X + 1.4Yと表される。被験者の 1 分間の酸素吸収量は 0.195 L，二酸化炭素放出量は 0.159 L であるので，以下の式が成立する。

$$0.75\,X + 2.0\,Y = 0.195$$
$$0.75\,X + 1.4\,Y = 0.159$$

これらを解くと，X = 0.1 (g)，Y = 0.06 (g) となる。

(3) (2) より，被験者は 1 分間に炭水化物を 0.1 g，脂肪を0.06 g 分解している。表 1 の「1 g を分解したときに得られるエネルギー量」の値を用いると，被験者は 1 分間に 0.1 × 4.1 + 0.06 × 9.3 = 0.968 (kcal) を生成しており，これと同量のエネルギーを消費することがわかる。したがって，1 日あたりの基礎代謝量は，0.968 (kcal) × 60 (分) × 24 (時間) ≒ 1394 (kcal) となる。

5 【Ｉ選択者用問題】排出

【解答】

問 1	1	糸球体	2	腎小体(マルピーギ小体)	3	腎単位(ネフロン)	4	アンモニア
問 2	ウ	オ						
問 3	(1)	バソプレシン	(2)	水の再吸収を促進する。(11字)				
問 4	7200 mL	問 5	(1)	イ	(2)	ア	ウ	

【配点】 (25点)

問 1　各 2 点× 4，　問 2　各 2 点× 2 (順不同)，　問 3　(1)　2 点　(2)　2 点，　問 4　3 点
問 5　(1)　2 点　(2)　各 2 点× 2 (順不同)

【出題のねらい】

腎臓の構造や浸透圧調節に関する知識問題と，尿生成に関する計算問題および考察問題を出題した。

【解説】

問題

問 1　腎臓は脊椎動物の排出器官であり，尿を生成することで老廃物を排出するとともに体液の浸透圧調節を行う。尿を生成する構

【ポイント】

造上の単位は腎単位(ネフロン)と呼ばれ，ヒトでは左右の腎臓にそれぞれ約100万個が存在する。腎単位は，毛細血管が球状にからみあった糸球体とこれを包むボーマンのうからなる腎小体(マルピーギ小体)，およびボーマンのうに続く細尿管(腎細管)からなる。細尿管は集まって集合管になり，さらに集合管は腎うにつながっている。腎うに集められた尿は，輸尿管を経てぼうこうへ送られる。腎動脈から腎臓に入った血液のうち血しょうの一部は，糸球体からボーマンのうにろ過されて原尿となるが，タンパク質や血球は糸球体の壁を通過できないためろ過されず，原尿中には含まれない。細尿管や集合管では生体にとって必要な物質が再吸収され，残りが尿となる。主にタンパク質の分解によって生じるアンモニアは，毒性が高い物質なので，肝臓において毒性の低い尿素に変換され，腎臓を経て体外へ排出される。

腎単位(ネフロン)
腎小体と**細尿管**からなる。

腎小体(マルピーギ小体)
糸球体と**ボーマンのう**からなる。

アンモニアは**肝臓**で**尿素**に変えられる。

問 2　海産硬骨魚類(タイ・マグロ・イワシなど)では，体液の浸透圧が海水よりも低い(低張となる)ので，水が体外へ流出する。このため，失われた水を補うために多量の海水を飲んで腸から吸収し，余分な塩類はえらから能動輸送により排出するとともに，腎臓から少量の等張尿を排出している。よって，ア・イはともに誤りである。海産軟骨魚類(エイ・サメなど)では，体液中に塩類以外に尿素を高濃度で含むことで，体液の浸透圧を外液(海水)とほぼ同じに保っている。よって，ウは正しく，エは誤りである。淡水産硬骨魚類(フナ・コイ・メダカなど)では，体液の浸透圧が淡水よりも高い(高張となる)ので，水が体内に流入する。このため，多量の低張尿を排出し，不足する塩類をえらから能動輸送により吸収している。よって，オは正しく，カは誤りである。

えらでは能動輸送により塩類の吸収(淡水産硬骨魚)や排出(海産硬骨魚)を行う。

海産軟骨魚類は体液中の尿素により浸透圧を海水と同じにする。

問 3　尿量や浸透圧の調節には，バソプレシンと鉱質コルチコイドがかかわっている。体液の浸透圧が上昇すると，脳下垂体後葉からのバソプレシンの分泌量が増加し，主として集合管に作用して水の再吸収を促進する。これにより尿量が減少し，体液の浸透圧は低下する。逆に，体液の浸透圧が低下した場合は，バソプレシンの分泌量が減少し，集合管における水の再吸収量が減少するので，尿量が増加する。体液と等張なスポーツドリンクを飲んだときに比べ，同量の水を飲んだときのほうが尿量が増加するのは，水を飲むと体液の浸透圧が低下してバソプレシンの分泌量が減少するため，水の再吸収量が減少するからである。一方，鉱質コルチコイドは副腎皮質から分泌され，主に細尿管に作用してナトリウムイオンの再吸収を促進することで，体液の浸透圧を上昇させる。

バソプレシン
脳下垂体後葉から分泌され，**集合管**での**水の再吸収**を促進する。

問 4　イヌリンの原尿中の濃度は 0.1 mg/mL，尿中の濃度は 12.0 mg/mL，1時間あたりに生成された尿量は 60 mL なので，示された $P \times C = U \times V$ の式に代入すると，$0.1 \times C = 12.0 \times 60$

イヌリンはろ過された後再吸収されない物質なので，
「原尿中(血しょう中)濃度×原尿量＝尿中濃度×尿量」が成り立つ。

となり，1時間あたりに生成された原尿量は$C = 7200$ mLとなる。なお，問題文中に示された式を変形すると，$C = \frac{U}{P} \times V$ となる。$\frac{U}{P}$はイヌリンの濃縮率を表しているので，「原尿量＝イヌリンの濃縮率×尿量」という関係が成り立つことも理解しておこう。

問5(1)　物質XはAの区間で減少し，残留量が0になっている。よって，ろ過後すべて再吸収される物質である。グルコースは，糸球体からろ過され，通常は細尿管ですべて再吸収される物質であるので，イが正しい。なお，タンパク質は，通常は糸球体からろ過されず，原尿中には存在しないので，アは適当ではない。尿素やK^+は，細尿管や集合管においてすべてが再吸収されることはなく尿中に含まれるので，ウやエは適当ではない。

グルコースは，通常，細尿管においてすべて再吸収されるので，尿中に出ることはない。

(2)　グラフは原尿中の物質の量を1.0としたときの残留量を相対値で示しており，濃度ではないことに注意する。たとえば，ある区間で水とNa^+が再吸収によってともに半分量になった場合には，Na^+濃度は変化しないし，もし水が再吸収される割合のほうがNa^+が再吸収される割合よりも高ければ，Na^+濃度は高くなる。Aの区間では水とNa^+はほぼ同じ割合で減少している(再吸収されている)ので，Na^+濃度はほとんど変化しない。よって，アは正しい。イヌリンはまったく再吸収されないので，イヌリン濃度は高くなる。よって，イは誤りである。Bの区間では，Na^+の量は増加するが水は減少するので，Na^+が濃縮されて，Na^+濃度は高くなる。しかし，Cの区間では，水が再吸収される割合に比べてNa^+が再吸収される割合のほうが大きいので，Na^+濃度は低くなる。よって，ウは正しく，エは誤りである。Dの区間では水があまり減少していないので，水は再吸収されにくい。水が最も多量に再吸収されるのはAの区間である。よって，オは誤りである。Eの区間ではNa^+があまり減少していないので，Na^+の再吸収量は少ない。Na^+の再吸収量が最も多いのはAの区間である。よって，カは誤りである。

6 【I選択者用問題】光合成

【解答】

問1	1	さく状	2	葉緑体	3	気孔
問2	(1)	ウ				
	(2)	陰生植物は陽生植物に比べて補償点や光飽和点が低く，より光の弱い環境で生育する。(39字)				
問3	(1)	光の強さ	(2)	温度	(3)	6時間
問4	(1)	カ	(2)	エ	(3)	イ

【配点】(25点)

問1　各2点×3，　問2　(1)　2点　(2)　3点，　問3　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点

問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点

【出題のねらい】

植物の光合成に関する知識問題と，光合成のグラフの読み取りに関する問題を出題した。

【解説】　問題

問1　陸上植物の葉の表側には，形のそろった細胞が密にならんださく状組織があり，裏側には，気体の出入りに適したすき間を多くもつ海綿状組織がある。これらの組織の細胞内には，光合成を行う細胞小器官である葉緑体が多数存在する。葉緑体の内部にはクロロフィルなどの光合成色素が含まれ，光合成色素が吸収した光エネルギーを用いて，葉の気孔から取り込んだ二酸化炭素と根から吸収した水から有機物を合成する。

問2(1)　一般に，日なたの直射日光があたるところで生育する植物を陽生植物，森林の林床などの光の弱いところで生育する植物を陰生植物という。陽生植物にはススキ，イネ，トマト，タンポポ，アカマツなど，陰生植物にはアオキ，イヌワラビ，ミヤマカタバミなどがある。したがって，ウが正解である。

(2)　温度と二酸化炭素濃度を一定に保ち，植物(葉)に照射する光の強さを変化させて単位時間あたりの二酸化炭素吸収量(あるいは放出量)を測定して作成した図1のようなグラフを，光－光合成曲線という。次ページの図は，一般的な陽生植物と陰生植物の光－光合成曲線である。補償点とは，光合成速度と呼吸速度が等しくなる光の強さであり，光飽和点とは，それ以上光の強さを強くしても光合成速度が変化しなくなる光の強さである。図中に示したように，陰生植物は陽生植物に比べて補償点や光飽和点が低いので，陽生植物より光の弱い環境で生育するのに適している。

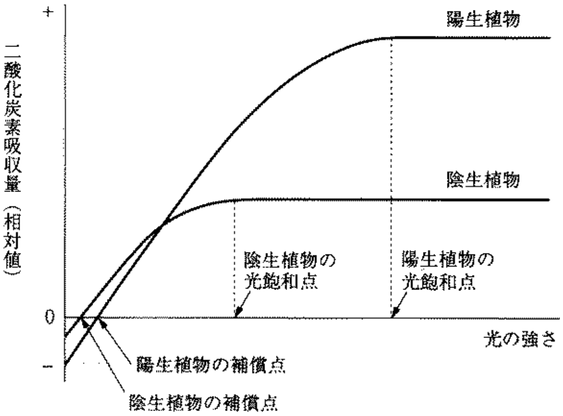
【ポイント】

葉の同化組織
　さく状組織
　海綿状組織

二酸化炭素
　気孔から取り込む。

陽生植物
　補償点，**光飽和点**が高く，呼吸速度および最大の光合成速度が大きい。

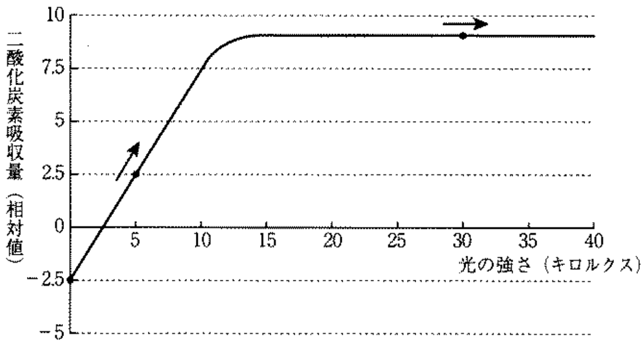
陰生植物
　補償点，**光飽和点**が低く，呼吸速度および最大の光合成速度が小さい。



問3　光合成速度は，光の強さ，二酸化炭素濃度，および温度の3つの環境条件の影響を受ける。この中で最も不足して光合成速度を限定している条件が，限定要因である。

(1)　下図に示すように，光の強さが5キロルクス前後では，光の強さを大きくしていくと光合成速度が増加していく。したがって，この条件が光合成速度を支配していることになるので，限定要因は光の強さであることがわかる。

(2)　同様に，下図において光の強さが30キロルクス前後では，光を強くしても光合成速度は増加せず，一定である。これは，光合成速度の限定要因が光の強さではないことを示している。問題文中に，「二酸化炭素濃度が十分な条件で…」とあるので，二酸化炭素濃度もこの実験においては限定要因とはならない。この実験を行った温度である10 °Cは光合成の各反応を進めるには低い温度であり，温度を上昇させれば最適な温度までは光合成速度が大きくなると考えられる。したがって，限定要因は温度である。



(3)　図1より，10キロルクスの強さの光を照射したときの二酸化炭素吸収量（＝見かけの光合成速度）は7.5（相対値），0キロルクスのときの二酸化炭素放出量（＝呼吸速度）は2.5であることが読み取れる。1日24時間のうちx時間，10キロルクスの強さの光を照射したときの見かけの光合成量が，$(24-x)$時間での呼

光合成の限定要因
光の強さ，二酸化炭素濃度，温度

吸による消費量を上回ればよいので，次の式が成り立つ。

$$7.5\,x > 2.5\,(24 - x)$$

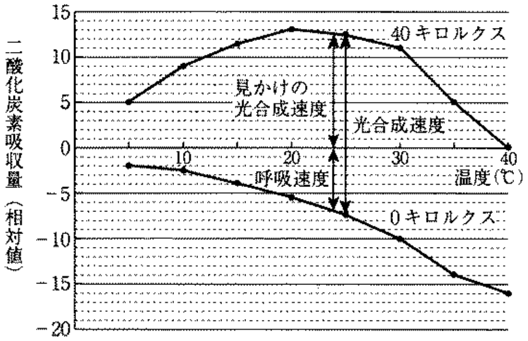
これを解くと，$x > 6$ となるので，光を照射する時間を6時間より多くすればよいことがわかる。この値は，1日の光合成量が1日の呼吸量を上回るとして，

$$(7.5 + 2.5)\,x > 2.5 \times 24$$

の式をたてても，求めることができる。

問4　図2において，下図に示すように，光の強さが40キロルクスのときの値は，各温度における見かけの光合成速度を示しており，この値に0キロルクス(暗黒)のときのグラフの値(呼吸速度)を加えた値が，各温度における光合成速度となる。

光合成速度
＝見かけの光合成速度＋呼吸速度



(1)　各温度における光合成速度を図2から求めると，5℃では7(相対値)，10℃では11.5，15℃では15.5，20℃では18.5，25℃では20，30℃では21，35℃では19，40℃では16となり，30℃のときに最も大きくなることがわかる。したがって，カが正解である。

(2)「単位時間あたりに最も乾燥重量が増加する」温度とは，見かけの光合成速度が最大となる温度であるので，図2から20℃のときであることがわかる。したがって，エが正解である。

(3)　図2より，40キロルクスの光の強さで25℃のときの見かけの光合成速度は12.5であり，0キロルクス(暗黒)のときの呼吸速度は7.5である。この2つの値を用いて光－光合成曲線を選ぶと，イが正解となる。

地　学

1 【共通問題】 地球内部の構造と組成

【解答】

問1	1	地震波トモグラフィー	2	670	3	和達－ベニオフ面(帯)	4	ホットプルーム				
問2	5	Fe	6	O	問3	5％						
問4	震央角距離 103° 以遠に，横波の性質をもつＳ波が届かない。											
問5	図a	A　ウ	B　ケ	図b	A　エ	B　コ	図c	A　ア	B　キ	図d	A　イ	B　キ

【配点】 (20点)

問1　各1点×4，　問2　各1点×2，　問3　3点，　問4　3点，　問5　各2点×4

【出題のねらい】

地球のマントルと核に関する問題である。地球内部の構造や状態は地震波の観測結果である走時曲線を利用し，地球内部の組成は隕石を利用して推定する。そのため，地球内部の構造や状態に関しては，地震波の性質や走時曲線などを題材とした問題が出題されやすい。また，地球内部のＰ波速度，Ｓ波速度，密度，圧力，温度の分布も，グラフを選択する問題として出題されることが多い。

【解説】

問題

問1　地球内部を伝わる地震波速度の平均値からのずれ(これを地震波速度異常という)を調べ，地球内部の断面図を作成する手法を地震波トモグラフィー($\boxed{1}$)と呼ぶ。地震波速度の平均値からのずれは，最大で2％程度であるが，この手法によって，マントル内部の物質の運動を推定できるようになった。この結果，現在の地球内部には，二つのホットプルームと一つのコールドプルームの存在が想定されている(図1－1)。

マントル内に沈み込んだ海洋プレート(スラブという)は，深さ670 km($\boxed{2}$)付近でいったん滞留する。沈み込んだスラブ内では深発地震が発生しており，この震源帯を和達－ベニオフ面(帯)($\boxed{3}$)という。この670 km付近を境に，マントルは上部マントルと下部マントルに区分される。深さ670 km付近に滞留していたスラブの残骸はやがて崩落し，コールドプルームとして高温の外核の上に集積する。コールドプルームは下降流であり，この下降流によって地球表層では大陸が吸い寄せられて一つの超大陸を形成する原動力となる。現在は，ユーラシア大陸の地下にコールドプルームが存在していると考えられている。

冷たい物質(スラブの残骸)がマントル－核境界に達すると，冷やされた液体の外核の対流の様式に変化が生じ，マントル物質が上昇するホットプルーム($\boxed{4}$)が発生する。

ホットプルームは，周囲よりも高温の上昇流であり，大量の熱

【ポイント】

地震波トモグラフィー
地球内部を断面的に調べる手法。

和達－ベニオフ面(帯)
沈み込んだ海洋プレートに沿って分布する深発地震の震源帯。

コールドプルーム
下部マントルに崩落した物質による低温の下降流。

ホットプルーム
マントル－核境界から上昇する高温のマントル物質の上昇流。

を地球表層部に輸送している。太平洋の地下に存在するホットプルームは，ハワイ島付近ではホットスポットとなって火山活動を起こしている。また，アフリカ大陸の地下に存在するホットプルームは，古生代後半～中生代に存在した超大陸パンゲアの分裂に関連したものである。

以上のようなマントル内部の運動を考える学説をプルームテクトニクスという。

問 2　今から約46億年前に，微惑星が衝突・合体して地球は誕生した。微惑星の集積のほとんどは地球創成期に終わったが，現在でも地球に落下してきている小さな天体は存在する。これが地球大気圏中で燃えつきずに地表に落下したものが隕石である。したがって，隕石を調べることによって地球の組成を調べることができる。地球全体，核，マントル，地殻の組成(質量%)の一例を図1－2と図1－3に示すので，右のポイント欄の地球内部のおもな構成元素の項目とあわせて確認しておいてもらいたい。

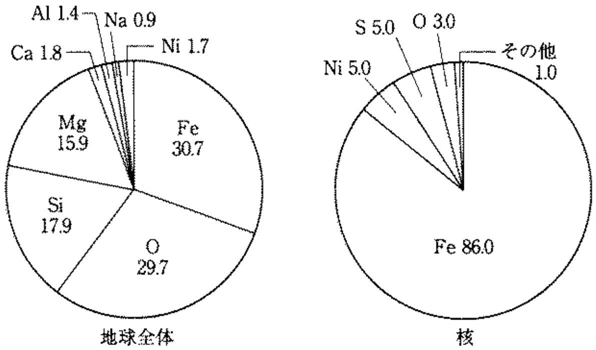


図1－2　地球全体と核の元素組成の一例

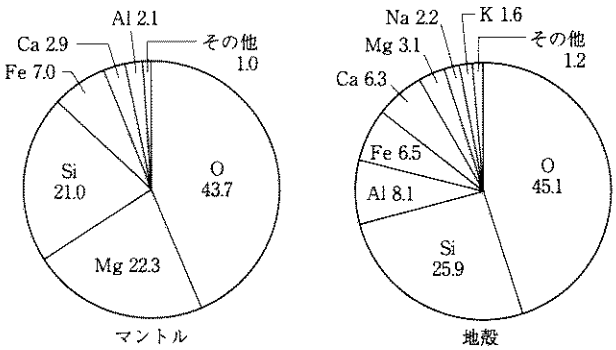


図1－3　マントルと地殻の元素組成の一例

問 3　問題に与えられた数値と地球の半径が6400 kmであることから，核の半径は，6400－2900＝3500 kmであり，内核の半径は，6400－5100＝1300 kmである。したがって，地球の核に占める内核の割合(体積%)は，

プルームテクトニクス
プルームによってマントル全体の動きを考えようとする学説。

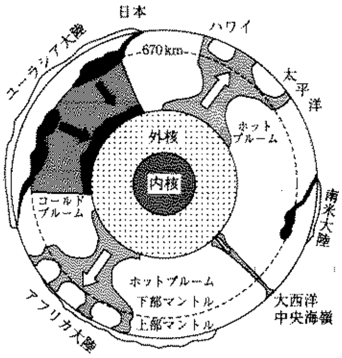


図1－1　プルームテクトニクスの模式図

地球内部の組成の調べ方
隕石の組成から推定。

地球全体のおもな構成元素
Fe，O

核のおもな構成元素
Fe，Ni

マントルのおもな構成元素
O，Mg，Si，Fe

地殻のおもな構成元素
O，Si，Al，Fe，Ca，Mg，Na，K

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\times1300^3}{\frac{4}{3}\pi\times3500^3}\times100=\frac{13^3}{35^3}\times100\fallingdotseq5.1(\%)$$

となるので，答は整数値で5％である。

同様に，地球全体に占める内核の割合(体積％)を計算すると，約0.8％となる。断面図で見ると内核の占める割合は大きく見えるが，体積ではきわめて小さい割合である。ちなみに，地殻の体積は地球全体の1％にも満たないので無視でき，地球の体積のほとんどはマントルと核によって占められている。核とマントルの体積比はおよそ16：84であり，マントルの体積が地球全体の大部分を占めている。

地球創成時，核はすべて液体であったが，地球内部の温度が低下するにつれて固体に変化した鉄などが内核を形成した。液体の外核が流動することによって地球の磁場は維持されているが，遠い将来，固体の内核の割合が高くなり，液体の外核の割合が少なくなると，地球磁場に変化が生じると考えられる。また，マントル内のプルームにも変化が生じ，地球表層にもその影響が及ぶと考えられる。

問4　外核が液体である証拠を示す問題である。S波は横波であり，ねじれの状態が伝播(でんぱ)する。そのため，ねじることのできない液体中や気体中を伝わらない。図1－4のように，S波の走時曲線は，震央角距離103°以遠には現れないので，図1－5のように，地球内部には液体の核が存在すると考えられる。

この問題の場合，「P波の影が震央角距離103°～143°に現れる」という答は誤りである。核のP波速度が小さくなることはわかっても，核が液体であるかどうかの判断ができないからである。

なお，内核の存在は，P波の影にあたる震央角距離110°付近に微弱なP波が現れることからわかった。

問5　図a：地球中心部に向かって不連続に増加する量であることから，密度分布であると考えられる。マントル最下部付近が，地球の平均密度5.5 g/cm^{3}に近い値である。

図b：地球内部に向かって連続的に増加する量であるから，圧力である。地球内部の圧力はかなり高いので，地上天気図で用いる10^2Pa＝hPa単位では小さすぎることから，10^{11}Pa単位であると考えればよい。

図c：マントル内でほぼ増加傾向，外核で急減し，内核で急増するということから，P波速度と判断できる。その速度はkm/sで表される数値である。

図d：マントル内を伝わっているが，核を伝わっていないので，S波速度と判断できる。P波同様，その速度はkm/sで表される数値である。

球の体積

球の半径をrとすると，

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

と表せる。

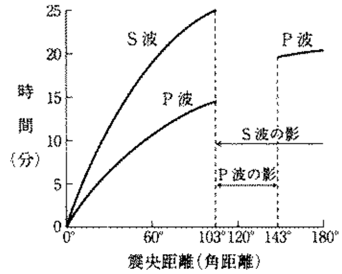


図1－4　走時曲線

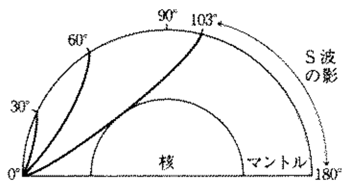
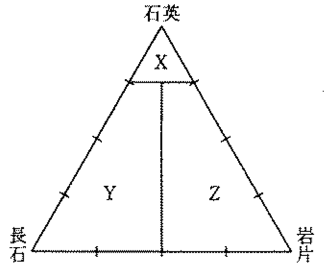


図1－5　S波の影

② 【共通問題】 地殻を構成する岩石

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>1</td><td colspan="2">風化</td><td>2</td><td colspan="2">安山</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>ウ</td><td>(2)</td><td colspan="2">石質砂岩</td><td rowspan="4">(3) </td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="4">岩片の供給地の地質</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td colspan="4">42 °C/km</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="4">結晶片岩に比べて片麻岩の方が地温勾配の大きいところで生成する。</td></tr>
</table>

【配点】 (20点)

問1　各2点×2，　問2　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点　(4)　3点，

問3　(1)　3点　(2)　3点

【出題のねらい】

地殻を構成する岩石・鉱物について，珪酸塩(けいさんえん)鉱物を中心に堆積(たいせき)岩・変成岩に関わる問題を扱った。現時点における岩石鉱物分野の理解度を見るべく，やや易～標準レベルの問題を出題した。

【解説】 問題

問1 $\boxed{1}$：岩石が温度変化や大気・水などの作用によって破砕・分解されていく過程を風化という。風化は，温度変化に伴う膨張・収縮の繰り返しにより鉱物間の結合が弱まったり，隙間(すきま)に入り込んだ水の凍結・膨張によって破砕されていく機械的(物理的)風化と，化学変化の進行に伴い岩石が次第に溶解・分解されていく化学的風化とに大きく分けられる。前者は，温度変化の大きい乾燥気候や水が凍結する寒冷気候下で起こりやすく，後者は温暖湿潤な熱帯・亜熱帯気候下で起こりやすい。

珪酸塩鉱物は SiO_4 四面体を基本単位とする構造をもつ。このうち石英や斜長石などの無色鉱物は SiO_4 四面体が立体網目状に結びついているが，かんらん石は SiO_4 四面体が独立した構造をもち，四面体どうしの結びつきが弱く風化を受けやすい。**問2**にも関連するが，岩石が風化・侵食されて他の構成鉱物が細粒化しても，石英の結晶は風化に強いために砂粒程度の大きさで残るものが多い。砂岩に石英が含まれることが多いのはこのためである。

$\boxed{2}$：岩石の化学組成は酸化物の形で表すことができる。例えば，かんらん石 $(Mg, Fe)_2SiO_4$ は，酸化物を用いると $2(MgO, FeO) \cdot SiO_2$ と表すことができる。火成岩には SiO_2 成分が多く含まれ，なおかつその量が火成岩の種類によって大きく変動することから，火成岩は SiO_2 成分の含有量(質量%)によって分類されることが多い。問題文の SiO_2 含有量から，大陸地殻の平均化学

【ポイント】

風化

岩石が温度変化や大気・水などの作用によって破砕・分解されていく過程。機械的(物理的)風化と化学的風化の二つの過程がある。

珪酸塩鉱物

SiO_4 四面体を基本単位とする構造をもつ鉱物。その多くは火成岩の造岩鉱物になっている。

火成岩の分類

SiO_2 量　約 50 %：塩基性岩
約 60 %：中性岩
約 70 %：酸性岩

組成は安山岩質(安山岩や閃緑岩)に相当すると判断できる。大陸地殻上部が花こう岩質，大陸地殻下部・海洋地殻が玄武岩質であることを知っていれば，その中間的な組成の安山岩質になると類推した人もいるであろうが，それでもよい。

なお，大陸地殻の化学組成とされる値は表層の砕屑物から求められたものであり，あくまでも大陸地殻表層部の平均値にすぎない。

問 2　三角ダイヤグラムを題材にした問いである。高校地学ではあまりなじみのない図であるが，岩石学では砕屑岩のみならず，火成岩や変成岩などの分類にも用いられているものである。

(1)　砕屑物は粒子の大きさによって分類されており，粒径の大きいものから順に，礫，砂，泥に区分されている。泥はさらに大きい方からシルト，粘土に分けられる。砂のサイズである $2\sim\frac{1}{16}$ mm に該当するのはウである。本問の他の選択肢は，ア・粘土，イ・シルト，エ・礫に対応している。

(2)　三角ダイヤグラムの各頂点について，それぞれの対辺からの距離の比が各頂点の成分の含有率(%)を表す。問題図 1 は，A (石英)が 25 %，B (長石)が 20 %，C (岩片)が 55 % であることを示している。(2)の問題文の条件によれば，問題図 1 は石英が 75 % 未満の場合で，なおかつ長石＜岩片の場合に該当するので，「石質砂岩」に分類されることになる。

(3)　2 本の境界線のうち，最初に引かれるべきは「石英＝75 %」を示す境界であろう(図 2 − 1)。三角ダイヤグラムの頂点 A が石英を表すので，辺 BC からの距離が，A から BC に下ろした垂線の長さの $\frac{3}{4}$ になるような位置に辺 BC に平行な境界を引けばよい。次に，B (長石)と C (岩片)の各成分が等しくなる境界，すなわち辺 AC，辺 AB から等距離になるような境界を引くことになる(図 2 − 1)。これは辺 BC の垂直二等分線に他ならないので，結局，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線が境界になる。分けられた領域が X，Y，Z のどれに該当するのかも忘れずに記すこと。

(4)　砕屑岩は，河川によって上流から運搬されてきた砕屑物が海底や湖底に堆積してできたものである。したがって，砕屑岩に含まれる鉱物や岩片の種類には，砕屑物のもとになった岩石の鉱物組成が反映される。本問の解答ではそのことに触れればよい。**【解答】**では「供給地の地質」としたが，「上流の地質分布」や「上流の岩石の種類」のような表現でもよい。

問 3　化学組成が同一であっても，結晶構造(または原子の配列)が異なる鉱物どうしの関係を多形(同質異像)という。本問に登場する鉱物 P，Q，R は問題文中に名称が記されていないが，P は藍

砕屑物の分類

粒径によって分類される。

礫：＞ 2 mm

砂：$2\sim\frac{1}{16}$ mm

泥：＜ $\frac{1}{16}$ mm

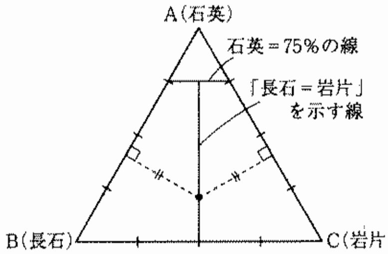


図 2 − 1

多形(同質異像)

化学組成は同じだが，結晶構造が異なる鉱物どうしの関係。

例：Al_2SiO_5 →藍晶石，珪線石，紅柱石

　　C →ダイヤモンド，セキボク

晶石，Qは珪線石，Rは紅柱石で，いずれも Al_2SiO_5 の組成をもつ。これらはセンター試験でも頻出の多形鉱物であるので，問題図2の温度・圧力図とあわせて必ず覚えておこう。

(1) 地温勾配(地下増温率)を表す直線の傾きが，問題図2の原点と黒丸を結ぶ直線の傾きよりも小さい場合に鉱物Rを含む条件が満たされる(図2－2)。図2－2では直線の傾きが小さいほど地温勾配が大きいことを表すので，鉱物Rを含む場合の最小の地温勾配は，原点と黒丸を結ぶ直線の傾きから計算できる。黒丸の温度・圧力は 500 ℃，0.4 GPa であり，1.0 GPa＝深さ 30 km の関係より 0.4 GPa＝0.4×30＝12 km であるから，地温勾配は 500 ℃/12 km＝41.66 …≒42 ℃/km となる。

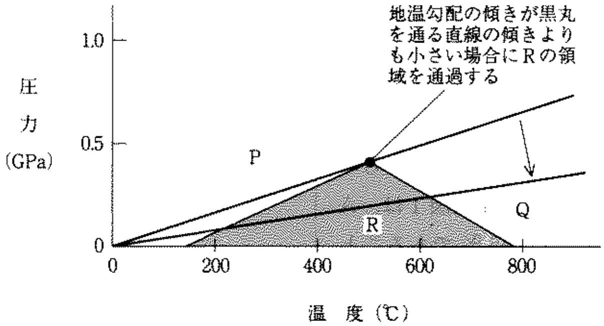


図2－2　鉱物Rの生成領域を通過する場合の地温勾配

(2) 広域変成岩は，造山運動などで岩石が地下の高い温度・圧力のもとに置かれたときにつくられる岩石である。高い圧力のもとでは柱状・板状の鉱物が生成し，それらが一定の方向に並ぶ組織となる。この構造は片状構造または片理と呼ばれ，高圧型の結晶片岩に見られる。一方，高温型の片麻岩には片状構造があまり発達していない。片麻岩には，石英などの無色鉱物と黒雲母などの有色鉱物が縞状に重なりあうような構造が見られる。このような組織は縞状組織または片麻状組織と呼ばれる。

本問では結晶片岩が高圧低温型，片麻岩が高温低圧型の変成岩であるという知識を前提としている。地温勾配は地表から深部に向かったときの温度の上がり方を表したものであるから，大きい地温勾配ほど問題図2では傾きの小さいグラフで表される。結晶片岩が生成する高圧低温の条件を満たすのは，問題図2ではおもに左上の領域(Pなど)であり，また，片麻岩が生成する高温低圧の条件を満たすのは，問題図2ではおもに右下の領域(QやRなど)である。よって，片麻岩の方が結晶片岩に比べて$\frac{\text{圧力}}{\text{温度}}$の傾きが小さい，すなわち，地温勾配の大きい場合に生成することを述べればよい。

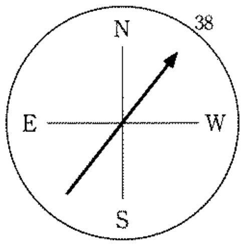
地温勾配(地下増温率)
深さに対して地温が上昇する割合を表したもの。
地殻内では平均 20～30 ℃/km であるが，火山地帯ではこれよりも大きくなる。岩石が同じ場合，地殻熱流量に比例する値でもある。

結晶片岩
高圧低温型の広域変成岩の一つ。細長い構成鉱物が一定方向に並ぶ組織である片状構造(片理)が顕著である。

片麻岩
高温低圧型の広域変成岩の一つ。構成鉱物が縞模様を呈する縞状組織が顕著である。

3 【共通問題】 地質図

【解答】

<table>
<tr><td rowspan="4">問1</td><td rowspan="4"></td><td>問2</td><td>区間</td><td>PとSの間</td><td>層厚</td><td>2.6×10 m</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問3</td><td colspan="4">・種としての生存期間が短い。</td></tr>
<tr><td colspan="4">・分布域が広い。</td></tr>
<tr><td colspan="4">・個体数が多い。</td></tr>
</table>

問4	(1)	ウ	(2)	ウ	問5	(1)	イ	(2)	エ

【配点】 (20点)

問1　4点，　問2　区間　2点　層厚　2点，　問3　3点，

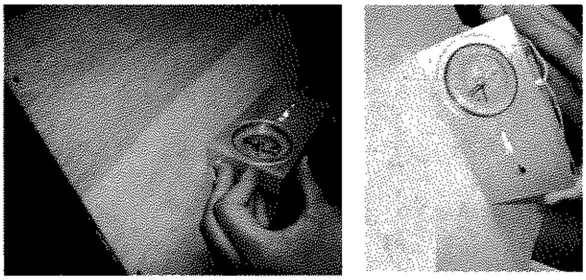
問4　(1)　2点　(2)　2点，　問5　(1)　2点　(2)　3点

【出題のねらい】

地質分野では，地質断面図や地質平面図から走向・傾斜を求めさせ，層厚や層序など地質構造を問う問題が出されることが多い。本問では，苦手とする受験生が多いと思われる地質平面図に関する問題を出題した。

【解説】 問題

問1　地層の走向・傾斜を測定する器具がクリノメーターである。層理面など測定したい面に長辺を水平に当てて走向を測り，それと直交する方向で傾斜角を測定する(図3－1)。



(a)　走向　　(b)　傾斜角

図3－1　クリノメーターの使い方

図3－1(a)のようにクリノメーターを当てたとき，クリノメーターの長辺の方向，および盤面のN-Sを結ぶ線の方向はともに走向を示す。そのため，クリノメーターは，磁針の指す方向から走向を読み取れるように盤面の東西(E, W)の表記が実際の方向とは逆になっている。また，走向を読み取る際には，測定地点における偏角を考慮する必要がある。まず，補正後の走向がN45°Wであるので，図3－2のように真北が盤面のNとWの間で45°の位置にくるように描く。次に，偏角が西に7°である

【ポイント】

クリノメーター

地層の走向と傾斜を測定する器具。

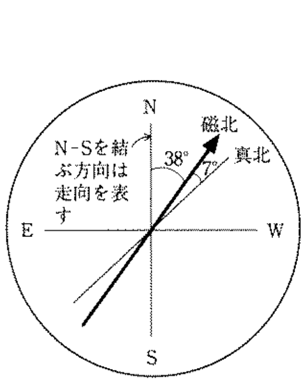


図3－2　クリノメーターの盤面を用いた偏角補正

ことから，盤面の真北の位置から西に7°（反時計回りに7°）の位置に磁針（磁北）を描く。その結果，磁針は盤面のNからWへ向かって38°（＝45°−7°）の位置を指すことになる（図3−2）。

問2　地層の厚さを求めるためには，対象の地層の上面と下面を表す地層境界における同じ高度の走向線を引き，その水平距離を求める必要がある（図3−3）。問題図1では，A層とB層の地層境界線上の**P**点，B層とC層の地層境界線上の**S**点はともに110mの高度にあり，N45°Wの走向に直交する北東-南西方向に位置しているので，この2点を用いる。なお，本問では走向が与えられているが，地層境界線と同一高度の等高線の交点を結んだ直線が走向を示す走向線となる。

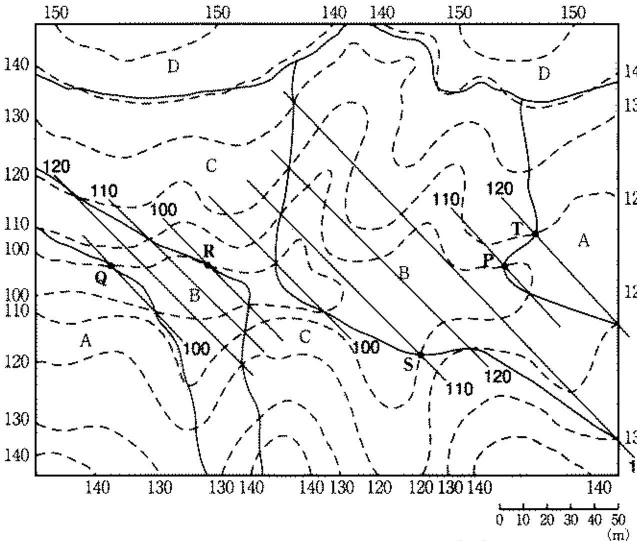


図3−3　A−B，B−C地層境界の走向線
太字の数値は走向線の高度（m）を表す。

層厚は，図中の**P**，**S**点を通る簡単な断面図を描いて考えるとよい（図3−4）。層厚は層理面に対して垂直な方向の厚さである。本問では傾斜角が30°であるので，層厚は**P**-**S**間の距離52mにsin30°を掛けた26mとなる。

問3　相対年代の決定に使用できる化石を示準化石と呼ぶ。示準化石に適した条件は，個体数が多い，分布域が広い，種としての生存期間が短い（進化速度が速い）などである。個体数が多いと産出する化石数も多く，統計処理がしやすい。また，分布域が広いと離れた地点間で地層の対比が行いやすい。そして，生存期間が短い（進化速度が速い）と短期間に別の種が出現するため，時代を細かく絞り込むことができる。例えば，放散虫や有孔虫などの微生物は，海流によって分散しやすく，また，一世代の期間が短く，他の生物に比べて同じ時間内で世代交代が多く起こる。これらの条件を満たしているので，放散虫や有孔虫などの化石は示準化石

走向
層理面と水平面の交線の延びの方向。この方向をたどると同じ標高で同じ地層が観察できる。

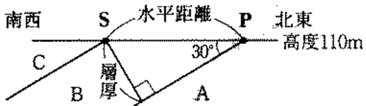


図3−4　地層の厚さ

示準化石
相対年代の決定に使用できる化石。

としての使用に非常に適している。

示準化石と合わせて，地層が堆積した当時の環境が推定できる示相化石についても確認しておこう。

問4　地層や岩体の関係にはさまざまなものがある。境界面の様子や産出する化石の年代などから推定できるようにしよう。

(1)　A層から産出したカヘイ石(ヌンムリテス)は，新生代古第三紀，D層の紡錘虫(ぼうすいちゅう)(フズリナ)は古生代石炭紀・ペルム紀の示準化石である。この二つの時代の間にあたる時代は，ウのジュラ紀である。おもな示準化石の示す年代は覚えておきたい(表3－1)。

(2)　A～C層は整合の関係にあり，同じ時代に連続的に形成されたと考えてよい。しかし，D層はA～C層とは異なる時代に形成されている。本問の場合は，A～C層とD層の両方の地層に由来する礫(れき)が挟(はさ)まっていることから，両者は断層で接していると考えられる。断層運動によって境界部の岩石が破砕されて礫が生じることがあり，断層角礫と呼ばれる。不整合の場合，古い地層の岩石は侵食作用を受けて礫になることはあっても，新しい地層の岩石が礫になることはない。また，貫入は地層と火成岩体の関係である。

古い時代に形成されているD層が，D層よりも新しい地層の地層境界線を切っていることに疑問をもった受験生がいるかもしれない。D層は新しいA～C層を切っているので地層の逆転ではなく，傾斜が小さな角度の逆断層である。逆断層では上盤が大規模に移動すると，このような形に見られることがあり，このような断層は衝上(しょうじょう)断層とも呼ばれる。

問5　地質構造を把握するためには断面図を描くことが多い。

(1)　断面図は走向に直交する方向に描くことが多い。これは，走向と直交する方向の断面には傾斜した地層が現れるため，地質構造が把握しやすいからである。一方，走向方向に断面を描いた場合には，傾斜している地層であっても水平に現れてしまう可能性があり，地質構造がとらえにくくなるからである。

(2)　まず，地質平面図から傾斜を求める。異なる高度の走向線を引き，走向線と直交し，高度の低くなる方向が傾斜の方向である。図3－3より傾斜の方向は，C層の**P**点付近では南西方向，**Q**・**R**点付近では北東方向であり，北東側と南西側で傾斜の方向が逆になっている。このことからA～C層は褶曲(しゅうきょく)していると考えられる。図3－5のように褶曲には背斜と向斜があるが，A～C層は向斜に該当する。

図3－3の**R**点より南西側は，**P**点付近の北東側に比べて走向線の間隔が狭く，地層の傾斜が大きいので，エが正解となる。

示相化石
古環境の推定に使用できる化石。

表3－1　おもな示準化石

新生代	第四紀：マンモス ナウマン象 第三紀：ビカリア・カヘイ石 デスモスチルス
中生代	アンモナイト・イノセラムス トリゴニア・モノチス 恐竜
古生代	石炭紀・ペルム紀 ：紡錘虫(フズリナ) 古生代全般：三葉虫

傾斜
走向線に直交する方向に地層が下がっていく方向，および地層が水平面となす角度。

褶曲
圧縮の力を受けて変形した地層。山の部分を背斜，谷の部分を向斜と呼ぶ。

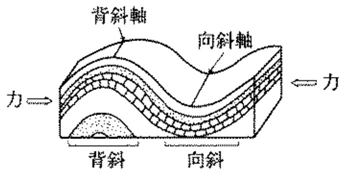
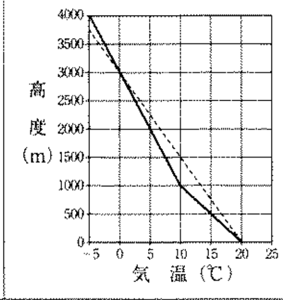


図3－5　褶曲

4 【共通問題】 大気中の水蒸気

【解答】

問1	1	ク	2	ウ	3	オ	4	イ
問3	5	3000	6	3000	問4	0.67 ℃/100 m		
問5	条件つき不安定	問6	53 %	問7	(1)	ア		
問7	(2)	過冷却水滴から蒸発した水蒸気が氷晶に昇華し，氷晶が成長する。						
問2								

【配点】 (20点)

問1 各1点×4， 問2 2点， 問3 各2点×2， 問4 2点，
問5 2点， 問6 2点， 問7 (1) 2点 (2) 2点

【出題のねらい】

大気中の水蒸気と湿度の関係，気温減率と大気の安定・不安定，断熱膨張によって上昇する空気塊の温度変化，そして，氷晶雨の生成について出題した。

【解説】 問題

問1 大気中の水蒸気量の上限値は気温によって決まっており，このときの水蒸気圧を飽和水蒸気圧($\boxed{1}$)という。空気塊が上昇するとき，上空ほどまわりの気圧が低いので，上昇する空気塊は膨張し，まわりと熱の出入りがないまま温度が下がる。これを断熱膨張($\boxed{2}$)という。問題中の空気塊は高度 1000 m で雲が発生したとあるので，この高度で空気塊が水蒸気で飽和したと考えられる。飽和して水蒸気が凝結する温度を露点という。上昇した空気塊は，高度 1000 m までは湿度が 100 % 未満なので，乾燥断熱減率($\boxed{3}$)に従って温度が下がり，1000 m で雲が発生していることから，この高度より上空では水蒸気で飽和し，湿潤断熱減率($\boxed{4}$)に従って温度が下がる。

「温室効果」は，大気中の水蒸気や二酸化炭素が地表からの赤外線を吸収して再放射することによって大気をあたためる現象である。「断熱圧縮」は，空気塊が下降する際にまわりの気圧が上昇することによって圧縮され温度が上昇する現象である。「潜熱」は，水の状態変化に伴う熱で，水蒸気が凝結するときには放出され，水が蒸発するときには吸収される。「放射冷却」は，移動性高気圧に覆われた日など，空気が乾燥しているとき，大気中の温室効果が弱まって地表から宇宙に直接放射される赤外線が増加し，地表付近の気温が下がる現象である。

問2 問題文に沿って，空気塊の温度分布をグラフに記入していく(図4－1)。まず，地表のO点では空気塊の温度は地表の気温と等しいので高度 0 m では 20 ℃，また，高度 1000 m までは雲が発生していないので乾燥断熱減率に従って温度が下がる。100

【ポイント】

飽和水蒸気圧
大気が水蒸気で飽和しているときの水蒸気圧。

断熱膨張
空気塊がまわりからの熱の出入りがないまま上昇に伴って膨張すること。断熱膨脹によって空気塊の温度が下がる。

乾燥断熱減率
湿度が 100 % 未満の空気塊が上昇に伴って温度が下がる割合。

湿潤断熱減率
湿度が 100 % の(飽和した)空気塊が上昇に伴って温度が下がる割合。

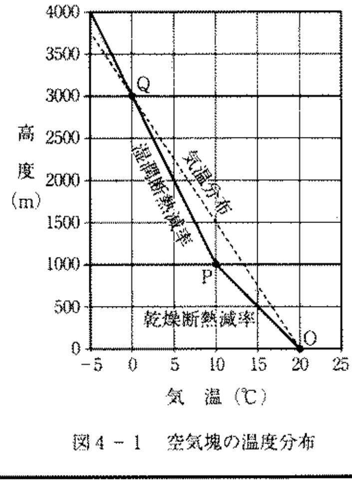


図4－1 空気塊の温度分布

m あたり 1 °C ずつ下がるので，P 点での空気塊の温度は 10 °C となり，雲が発生する。そこから上空は湿潤断熱減率に従って 100 m につき 0.5 °C 温度が下がるので，空気塊の温度は高度 2000 m で 5 °C，高度 3000 m で 0 °C，高度 4000 m で −5 °C となる。この点を結んでいくと，図 4 − 1 のような空気塊の温度分布のグラフが描ける。

問 3　**問 2** のグラフ（図 4 − 1）で，空気塊の温度とまわりの気温とを比較すればよい。大気の密度は温度が高いほど小さいので，空気塊の温度がまわりの気温よりも低いときは下降しようとし，まわりの気温よりも高ければ力を受けなくても自ら上昇する。グラフから，空気塊の温度がまわりの気温よりも高くなっているのは，高度 3000 m の Q 点より上空なので，$\boxed{\ 5\ }$ は 3000 m である。

過冷却水滴は，氷点下（気温 0 °C 以下）にもかかわらず，凍らずに水のまま雲の中に存在している水滴である。氷晶が存在するのは氷点下なので，気温分布が氷点下となる 3000（$\boxed{\ 6\ }$）m 以上の高度で過冷却水滴と氷晶が共存する可能性がある。

問 4　問題図 2 より，高度 0 m から 3000 m の間に 20 °C 下がっていることが読み取れるので，100 m あたりの気温低下量 x °C は，

$$\frac{20\ ^\circ\mathrm{C}}{3000\ \mathrm{m}} = \frac{x}{100\ \mathrm{m}} \qquad x = 0.666\cdots$$

したがって，気温減率は 0.67 °C/100 m と求められる。

問 5　上昇する空気塊の温度変化（図 4 − 2）は，その空気塊が水蒸気で飽和しているかどうかで決まる。これを気温減率と比較して，大気の安定・不安定を判断する。

図 4 − 3 において，気温減率が乾燥断熱減率の 1.0 °C/100 m よりも大きいとき (a) は，ある高度 H で比較すると，上昇してきた乾燥空気塊（不飽和のもの）も湿潤空気塊（飽和しているもの）もまわりの気温より温度が高いので「絶対不安定」である。気温減率が湿潤断熱減率の 0.5 °C/100 m よりも小さいとき (c) は，乾燥空気塊も湿潤空気塊もまわりの気温よりも温度が低く，「絶対安定」である。気温減率がその間 (b) のときは，乾燥空気塊であれば安定，湿潤空気塊のときには不安定となるので，「条件つき不安定」である。**問 4** より，この日の気温減率は 0.67 °C/100 m であるので，「条件つき不安定」となる。

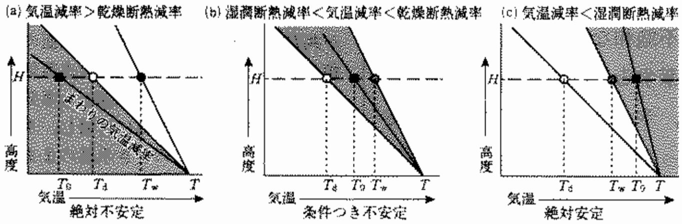
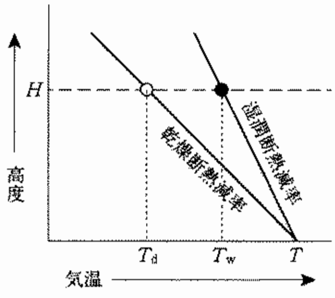


図 4 − 3　大気の安定・不安定

上昇する空気塊の温度分布

湿度 100 % 未満の空気塊は乾燥断熱減率（1.0 °C/100 m），湿度 100 % の空気塊は湿潤断熱減率（0.5 °C/100 m）にそれぞれ従って温度が下がる。



高度 H における空気塊の温度

T_d　：乾燥空気塊

T_w　：湿潤空気塊

図 4 − 2　上昇する空気塊の温度分布

問 6　相対湿度は，次の式で求められる。

$$相対湿度(\%)=\frac{水蒸気圧}{飽和水蒸気圧}\times 100$$

この空気塊は，高度 1000 m で露点に達したので，**問 2** で考えたように，露点は 10 ℃である。よって，空気塊の水蒸気圧は 10 ℃の飽和水蒸気圧に等しくなり，その値は問題図 1 より 12.5 hPa と読み取ることができる（図 4 − 4 参照）。また，地表における空気塊の温度は 20 ℃なので，そのときの飽和水蒸気圧は問題図 1 より 23.5 hPa と読み取れる（図 4 − 4 参照）。これを上の式に代入すると，

$$相対湿度(\%)=\frac{12.5}{23.5}\times 100=53.1$$

整数値で答えるので 53 % が正解となる。

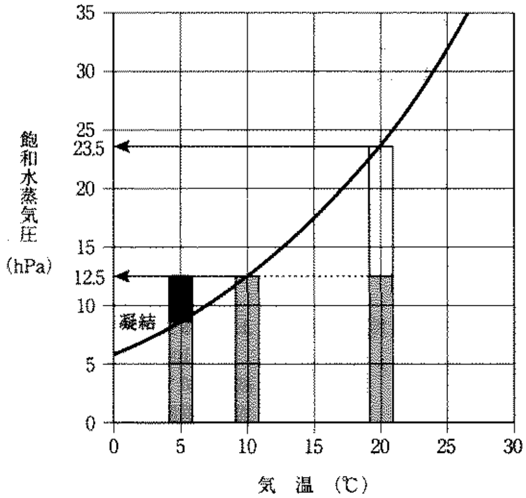


図 4 − 4　飽和水蒸気圧と湿度

問 7 (1)　氷点下の雲の中では，氷晶と，氷にならずに水のまま存在する過冷却水滴が共存していることがある。問題図 1 のように，飽和水蒸気圧は気温によって決まっているが，氷点下になると水面と氷面とでその値が異なり，水滴の表面の飽和水蒸気圧の方が氷の表面の飽和水蒸気圧よりも大きい。この差が原因で氷晶が成長して氷晶雨となっていくので，アが正解である。

(2)　例えば，雲の中の水蒸気圧が両者の飽和水蒸気圧の間であったとすると，過冷却水滴にとっては不飽和なので蒸発し，氷晶にとっては過飽和なので，水蒸気は昇華する。その結果，水滴から蒸発した水蒸気が氷晶に付け加わり，氷晶は成長していく。成長して重くなった氷晶は上昇気流によって支えきれなくなって落下する。そのまま氷晶が地表まで達すると雪となり，途中で融(と)けると雨になる。このようなしくみで降る雨を氷晶雨（冷たい雨）という。

相対湿度

$$相対湿度(\%)=\frac{水蒸気圧}{飽和水蒸気圧}\times 100$$

氷晶雨

中・高緯度でおもに降る雨。

氷点下の雲の中で，過冷却水滴と氷晶が共存するとき，過冷却水滴の水面の飽和水蒸気圧の方が氷晶の氷面の水蒸気圧よりも高いため，過冷却水滴から蒸発した水蒸気が昇華して氷晶に付着し，氷晶が成長していく。このとき氷晶のまま地表に落下すると雪，融けると雨になる。

5 【Ⅰ・Ⅱ選択者用問題】 宇宙の構造

【解答】

問1	1	局部銀河群	2	泡	3	赤方偏移
問2	記号	y	名称	円盤部(ディスク)		
問3	(1)	3.3×10^6 光年	(2)	2×10 倍		
問4	(1)	1.3×10^{10} 光年				
	(2)	クェーサーQの光が地球に届くまでの時間が，宇宙の年齢に近いため。				

【配点】 (20点)

問1　各2点×3，　問2　記号　1点　名称　1点，

問3　(1)　3点　(2)　3点，　問4　(1)　3点　(2)　3点

【出題のねらい】

今回は，銀河系および宇宙の階層構造，銀河までの距離測定について出題した。天文分野では，公式を覚えて正確に計算できるようにすることに力点が置かれがちだが，この問題を通して，その公式から導き出された数値が何を意味するかを，しっかりと理解できるようにしよう。

【解説】 問題

問1 $\boxed{1}$：宇宙空間で銀河は，銀河群・銀河団のような集団をなして存在している。銀河系も例外ではなく，アンドロメダ銀河や大・小マゼラン銀河など30個ほどの銀河とともに半径約300万光年程度の一つの銀河群を構成しており，局部銀河群と呼ばれている。銀河群の中の銀河どうしには引力がはたらき，銀河系とアンドロメダ銀河は約300 km/sで近づいている。

銀河はその形状によって分類されており，アンドロメダ銀河は渦巻銀河に，銀河系は棒渦巻銀河に分類されている(図5－1)。

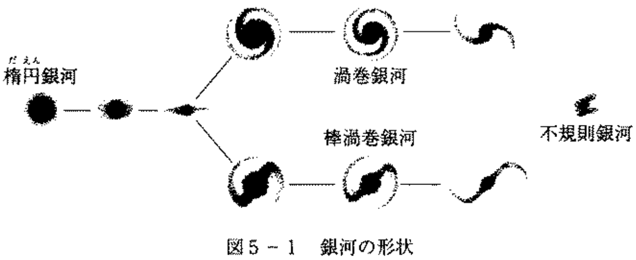


図5－1　銀河の形状

$\boxed{2}$：宇宙空間では，複数個の銀河群や銀河団が1億光年以上の大きな超銀河団をつくり，同様のスケールで広がる銀河がほとんどない空洞の領域(ボイドまたは超空洞と呼ばれる)とともに大規模な構造(泡構造)を形成している(図5－2)。銀河がほとんど存在しない直径 1 億光年程度の大きさの領域(泡)が多数あり，この丸い泡と泡が接するところに銀河が集中する。

【ポイント】

銀河の形状
銀河系：棒渦巻銀河
アンドロメダ銀河：渦巻銀河

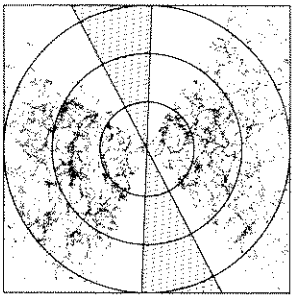


図5 − 2　銀河の分布

銀河系は図の中心に位置し，円の半径はそれぞれ約7億，13億，19億光年を表す。図の上下にある空白の領域は，観測できない領域である。

$\boxed{3}$：ドップラー効果により，遠方の天体から届く光の波長λは，光の本来の波長λ_0に比べて長く伸びている。このとき，光の本来の波長λ_0に対する波長の伸び$\Delta\lambda(=\lambda-\lambda_0)$の比$\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$を赤方偏移という。赤方偏移からは天体の後退速度が求められる。ハッブルは複数の銀河について距離を求め，その距離が銀河の後退速度に比例することを明らかにした。この関係をハッブルの法則という（**問4**参照）。

問2　太陽系が属している銀河系は，恒星が約2000億個集まっている棒渦巻銀河の一種である。銀河系は図5 − 3のような形状と大きさを有している。中心部のふくらみはバルジと呼ばれ，年齢の古い天体（種族II）が分布している。

円盤部（ディスク）は，おもに重元素（Heより重い元素）の多い種族Iの恒星や星間物質が分布する領域であり，直径約10万光年の広がりをもっている。太陽系は，円盤部に存在し，中心から約2.8万光年離れた場所にある。

銀河系円盤部を丸く取り囲む領域をハローと呼ぶ。その広がりは球状星団の分布から推測でき，直径は約15万光年と考えられている。

問3(1)　問題図2より変光周期が21日のときの絶対等級は−5等と読み取ることができる。見かけの等級が20等であることから，等級差は25等である。等級は5等級小さいと100倍明るくなることから，見かけの等級の絶対等級に対する光度比は，

$$100^{-\frac{25}{5}}=100^{-5}=10^{-10}\text{倍}$$

となる。

二つの天体の光度比はその距離の2乗に反比例することから，見かけの等級までの距離は絶対等級に対して，

$$\sqrt{\frac{1}{10^{-10}}}=10^5\text{倍}$$

遠いことになる。

絶対等級は，天体を10パーセク（約32.6光年）の距離に置いた

赤方偏移
遠ざかる天体から届く光の波長が全体的に長い方へずれる現象。ごく近い銀河を除いて，銀河の光の波長は長い方にずれている。

銀河系の構造
バルジ，円盤部，ハローよりなる。

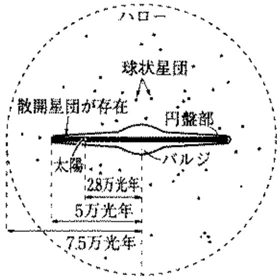


図5 − 3　銀河系の構造

絶対等級
天体を10パーセク（約32.6光年）に置いたと仮定したときの明るさを等級で表したもの。

と仮定したときの明るさを等級で表しているので，銀河Pまでの距離は，

$10\times10^5=10^6$ パーセク

となる。したがって，3.26×10^6 光年である。

また，天体の絶対等級 M，見かけの等級 m，天体までの距離 d（パーセク）の関係は，次式で表すことができる。

$M-m=5-5\log_{10}d$

この式に数値を代入して求めることもできる。

(2) 銀河系のハローの領域は，直径約15万光年の広がりをもつので（図5－3），銀河Pまでの距離は銀河系の直径の，

$\dfrac{3.26\times10^6}{1.5\times10^5}\fallingdotseq 2\times10$ 倍

である。

なお，円盤部の直径（約10万光年）で計算した場合は，

$\dfrac{3.26\times10^6}{1.0\times10^5}\fallingdotseq 3\times10$ 倍

となり，本問ではこれも正解とする。

問4 (1) 遠方の銀河ほど大きな赤方偏移を示すことから後退速度が大きくなり，図5－4のように銀河までの距離と後退速度は比例関係にあることがわかった。クェーサーQについても，この関係が成り立つと仮定して，銀河の後退速度を v (km/s)，距離を r（パーセク）とすると次式で表すことができる。

$v=H\cdot r$　　（H：ハッブル定数）

この式に v，H の数値を代入すれば距離が求められる。

$2.8\times10^5=\dfrac{7.1\times10}{10^6}\times r$

$r=3.9\times10^9$（パーセク）$\fallingdotseq 1.3\times10^{10}$（光年）

(2) (1)より，クェーサーQの光が地球に届くのに130億年という時間がかかることから，クェーサーQは少なくとも今から130億年前には存在していたことになる。ビッグバンが約137億年前（宇宙の年齢）と考えられているので，クェーサーQは宇宙誕生からそれほど時間が経過していない段階で形成された天体であり，非常に古く，宇宙初期の状態を推定するのに重要な鍵をもつ天体であると考えられている。

本問で取り上げたクェーサー（準恒星状天体）は，太陽質量の数十億倍の質量をもっており，銀河の数十倍以上のエネルギーを放出し，後退速度がきわめて大きい天体である。活動的な銀河の一種で，その中心には巨大なブラックホールが存在し，周囲の物質がブラックホールに引きつけられる際に電波からX線までの広範囲の電磁波を放射していると考えられている。

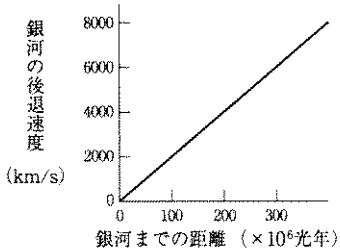


図5－4　銀河の後退速度と距離

ハッブルの法則

天体の後退速度を v，距離を r，ハッブル定数を H とすると，

$v=H\cdot r$

が成立する。

クェーサー

非常に遠方にあり，活動的な中心核をもつ銀河。

6 【I選択者用問題】 恒星の進化

【解答】

問1	1	原始星	2	1000万	3	超新星	問2	水素分子
問3	核エネルギーによる内部からのガスの圧力						問4	エ
問5	惑星状星雲		問6	−5等	問7	ア		オ

【配点】 (20点)

問1　各2点×3，　問2　2点，　問3　2点，　問4　2点，　問5　2点，
問6　2点，　問7　各2点×2(順不同)

【出題のねらい】

質量光度関係のグラフやHR図に関連させて，恒星の基本的性質や恒星の進化過程の理解を深めるがねらいである。

【解説】

問題

問1 $\boxed{1}$・$\boxed{2}$：星間雲が重力収縮をすることにより原始星が誕生する。原始星の中心部の温度は数十万Kほどで，水素の核融合反応が起こる温度には達していない。原始星は重力エネルギーを解放することによって温度が上昇し，赤外線を放射する。原始星がさらに重力収縮し，それによって解放されたエネルギーは中心部の温度を次第に上昇させ，やがて中心部の温度が1000万Kを超えると，水素の核融合反応(水素燃焼反応)が始まり，主系列星へと進化する。

$\boxed{3}$：太陽質量の数倍以上の質量をもつ大質量星は，進化が進むと，中心に鉄の核が形成される。鉄は核融合反応を起こさない。それゆえ，核融合反応によって生じる内部からの圧力が弱まり，鉄の核は収縮する。こうして中心の温度が数十億K以上になると，鉄はヘリウムと中性子に分解する。この反応はこれまでの核融合反応とは逆の吸熱反応(周囲から熱を吸収する反応)であり，中心の温度が急激に低下し圧力も低下するため，恒星は中心部に向かって重力収縮する。その反動で恒星の外層部は星間空間へ吹き飛ばされる。これが超新星爆発である。超新星爆発の際に，鉄よりも重い元素が一気に合成され，星間空間にまき散らされる。この大爆発によって，もとの天体の1億倍以上も明るくなり，絶対等級が −14〜−19等にもなる天体(超新星)として観測される。

問2 特に密度が高く温度の低い星間雲の領域には，原子が結合して分子の形で存在している。この領域を分子雲という。分子雲の中で最も多い成分は水素分子(H_2)である。この他に一酸化炭素(CO)や，より複雑な分子も存在していることがわかっている。

問3 原始星の中心部の温度が1000万Kを超えると，水素の核融合

【ポイント】

原始星

星間雲が重力収縮することによって生する。重力収縮による重力エネルギーがエネルギー源。

主系列星のエネルギー源

水素原子核4個がヘリウム原子核に変わる水素の核融合反応(水素燃焼反応)で生じたエネルギーで輝く。

太陽質量の数倍以上の質量をもつ大質量星の進化

最後には恒星全体が吹き飛ぶ超新星爆発を起こし，中性子星またはブラックホールになることがある。

分子雲

星間雲の分子が密に存在しているところ。水素分子が最も多い。

合反応が始まり，主系列星の段階へと移行する。主系列星では，中心方向へ向かう重力によって収縮しようとする力と，中心から外側へ向かう内部のガスの圧力(ガスが外側に膨張しようとする力と思ってもよい)がつり合い，安定した状態になっている。内部のガスの圧力は中心部で起こる水素の核融合反応によって生じたエネルギーによるものである。

主系列星の力のつり合い
重力によって収縮しようとする力と，内部のガスの圧力がつり合っている。

問 4　主系列星が巨星(赤色巨星)に進化すると，その中心部でヘリウムの核融合反応が始まる。この反応では，3個のヘリウムが1個の炭素に変わる反応や，さらに炭素にヘリウムが融合して酸素が合成される反応が起こる。よって，エが正解である。**問 1** の $\boxed{3}$ で説明したように，太陽質量の数倍以上の質量をもつ大質量星では，巨星(赤色巨星)に進化した後，その最終段階において中心部で鉄が合成される。しかし，鉄はヘリウム原子核3個から合成されるわけではないので，イは誤りである。また，金やウランのような鉄より重い元素は，超新星爆発の際に合成される。よって，アとウはいずれも誤りである。

ヘリウムの核融合反応によって合成される元素
炭素，酸素など

問 5　巨星(赤色巨星)の外層部は，恒星の中心からの距離が大きいため，重力の影響が弱い。それゆえ，外層部のガスは重力でとどめておけず，星間空間へとゆっくりと放出されて広がっていく。外層部がはぎ取られると，超高密度の中心部がむき出しになる。これが白色矮星(わいせい)である。放出された外層部のガスは，中心にある白色矮星に照らされて輝く惑星状星雲として観測される。

惑星状星雲
巨星の外層部が放出されていく過程で，それらのガスが中心にある白色矮星に照らされて輝いている段階の天体。

問 6　問題図1の関係を主系列星の質量光度関係といい，主系列星だけにあてはまる関係で，主系列星の光度(全放射エネルギー)はその質量の3～4乗に比例する，というものである。問題図1から，太陽の10倍の質量をもつ恒星は，太陽の光度の $10000=100^2$ 倍になっている。等級が5小さいと，明るさは100倍明るくなることから，光度が $10000=100^2$ 倍ということは，$5\times2=10$ 等級小さい(明るい)ことを示す。太陽の絶対等級を5等としているから，求める恒星の等級は，$5-10=-5$ 等になる。質量光度関係において注意しなければならないのは，恒星の質量が10倍であるからといって，単純に光度が10倍になるわけではないということである。質量が大きい恒星ほど中心部の温度が高く，核融合反応が非常に活発に行われるので，光度が質量の3～4乗に比例して急激に明るくなるのである。

質量光度関係
主系列星の光度は，その質量の3～4乗に比例する。

等級と明るさの関係の定義
5等級小さいと，100倍明るい。

太陽の絶対等級
5等

問 7　ア：HR図において，主系列星は左上から右下にかけて帯状に分布する恒星である。問題図1から，太陽よりも質量の大きい主系列星は光度が大きく，質量が小さい主系列星は光度が小さいことがわかる。したがって，問題図2では太陽の左上に位置している主系列星は太陽よりも質量が大きく，太陽の右下に位置している主系列星は太陽よりも質量が小さいことになる。図6－1か

HR図
横軸にスペクトル型(あるいは表面温度)をとり，縦軸に絶対等級(あるいは光度)をとったグラフ。

主系列星
HR図の左上から右下にかけて帯状に分布する。左上に位置するものほど質量が大きい。

ら，10 パーセク以内にある恒星(● や ✦)のうち，太陽の左上に位置している(つまり太陽より質量が大きい)主系列星は，太陽の右下に位置している(つまり太陽より質量が小さい)主系列星よりも数が少ないことは一目瞭然(りょうぜん)である。よって，正解である。

イ：10 パーセクの距離にある恒星の年周視差は 0.1 秒(″)である。年周視差は恒星の距離と反比例の関係にあり，距離が近いほど年周視差は大きくなる。したがって，10 パーセク以内にある恒星の年周視差は 0.1 秒以上になる。よって，誤りである。

ウ：見かけの等級が 1.5 等より小さい(明るい)恒星(＋ や ✦)は，いずれも HR 図において太陽より上方に位置している。恒星の光度が大きいほど絶対等級の数値は小さい値をとる。したがって，見かけの等級が 1.5 等より小さい恒星はいずれも太陽より絶対等級は小さい。よって，誤りである。

エ：スペクトル型は表面温度が高い順に，O・B・A・F・G・K・M と並ぶ。したがって，問題図 2 の HR 図の左側ほど表面温度が高く，右側ほど表面温度が低いことになる。問題図 2 において，最も左側に位置し，表面温度が最も高いのは B 型の主系列星であり，巨星(赤色巨星)ではない。よって，誤りである。

オ：問題図 2 の白色矮星はいずれも 10 パーセク以内にあるため，絶対等級の定義である 10 パーセクの位置に置けば，絶対等級は見かけの等級よりも大きく(暗く)なる(10 パーセクの位置にあれば，見かけの等級＝絶対等級)。したがって，見かけの等級から絶対等級を引いた値は 0 よりも小さくなり，オも正解である。

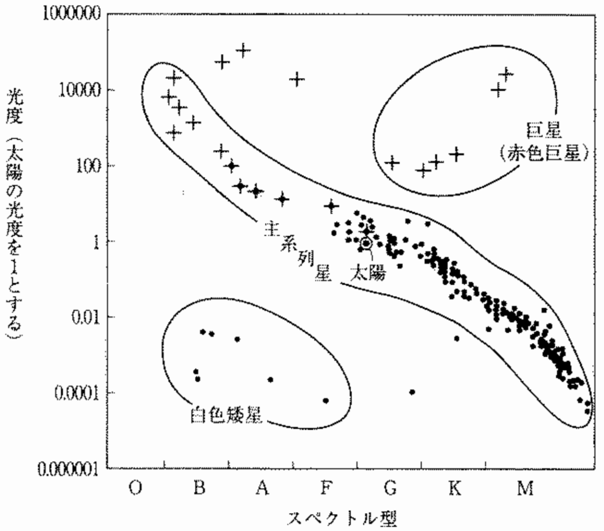


図6－1　HR 図と主系列星・巨星・白色矮星

年周視差と距離の関係

年周視差は恒星までの距離に反比例する。10 パーセクの距離にある恒星の年周視差は0.1 秒(″)。

スペクトル型

表面温度が高い順に O・B・A・F・G・K・M。

巨星(赤色巨星)

HR 図の右上に位置し，表面温度が低く，光度の大きな恒星。

白色矮星

HR 図の左下に位置し，表面温度が高く，光度の小さな恒星。

見かけの等級と絶対等級と距離の関係

見かけの等級＜絶対等級：10 パーセクより近い
見かけの等級＝絶対等級：10 パーセク
見かけの等級＞絶対等級：10 パーセクより遠い