クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2014年度　第3回　全統記述模試

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2014年10月実施】

※英語冊子巻末に「**自己採点シート**」と「**学力アップ・志望校合格のための復習法**」を掲載していますので、志望校合格へむけた効果的な復習のためにご活用ください。

河合塾

1461230119501040

【数　　学】

【Ⅰ型受験者用】

1　小問集合

【Ⅰ型共通　必須問題】

（配点　60点）

(1)　次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x+2y+z=3, \\ 3x-2y+z=7, \\ 2x-4y+z=3. \end{cases}$$

(2)　xy 平面上に放物線 $C: y=x^2-6x+8$ がある．

(i)　C の頂点の座標を求めよ．

(ii)　C を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

(iii)　C を原点に関して対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

(3)　a は実数の定数とする．x の 2 次方程式

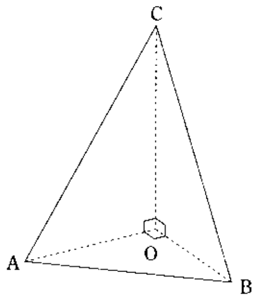
$$x^2+2ax+5a^2-4=0 \qquad \cdots(*)$$

が異なる 2 つの実数解をもつとする．

(i)　a の値の範囲を求めよ．

(ii)　(*) が正の解と負の解を 1 つずつもつような a の値の範囲を求めよ．

(4)



四面体 OABC があり，

$$\mathrm{OA}=2,\ \mathrm{OB}=2,\ \mathrm{OC}=3,$$
$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$$

を満たす．

(i)　四面体 OABC の体積を求めよ．

(ii)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(iii)　頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さを求めよ．

【配点】

(1)　7 点．

(2)　19 点．

(i)　5 点．(ii)　7 点．(iii)　7 点．

(3)　13 点．

(i)　6 点．(ii)　7 点．

(4)　21 点．

(i)　7 点．(ii)　7 点．(iii)　7 点．

【出題のねらい】

(1)　連立方程式の解を正しく求めることができるかをみる問題である．

(2)　2 次関数のグラフを正しく捉えることができるか，また，平行移動した放物線，対称移動した放物線の方程式を求めることができるかをみる問題である．

(3)　2 次方程式の解についての条件を，グラフを利用して考えることができるかをみる問題である．

(4)　四面体の体積を利用して，垂線の長さを求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)

$$\begin{cases} x+2y+z=3, & \cdots① \\ 3x-2y+z=7, & \cdots② \\ 2x-4y+z=3. & \cdots③ \end{cases}$$

②−① より，

$$2x-4y=4.$$
$$x-2y=2. \qquad \cdots④$$

③−① より，

$$x-6y=0. \qquad \cdots⑤$$

④−⑤ より，

$$4y=2.$$
$$y=\frac{1}{2}.$$

⑤ より，

$$x=6y$$
$$=6\cdot\frac{1}{2}$$
$$=3.$$

① より，

$$z=-x-2y+3$$
$$=-3-2\cdot\frac{1}{2}+3$$
$$=-1.$$

よって，

$$(x,\ y,\ z)=\left(3,\ \frac{1}{2},\ -1\right).$$

(2)(i)

$$y=x^2-6x+8$$
$$=(x-3)^2-1$$

より，C の頂点の座標は，

$$(3,\ -1).$$

(ii) x^2 の係数が 1，頂点の座標が $(3,\ -1)$ である放物線 C を，x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線は，x^2 の係数が 1，頂点の座標が $(4,\ 1)$ である放物線となるから，その方程式は，

$$y=(x-4)^2+1,$$

すなわち，

$$\boldsymbol{y=x^2-8x+17.}$$

(iii) x^2 の係数が 1，頂点の座標が $(3,\ -1)$ である放物線 C を，原点に関して対称移動して得られる放物線は，x^2 の係数が -1，頂点の座標が $(-3,\ 1)$ である放物線となるから，その方程式は，

$$y=-(x+3)^2+1,$$

すなわち，

$$\boldsymbol{y=-x^2-6x-8.}$$

(3)(i) (＊)が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，(＊)の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}>0.$$

これより，

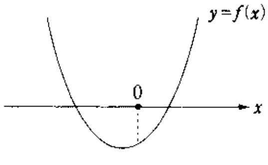
$$a^2-(5a^2-4)>0.$$
$$-4a^2+4>0.$$
$$a^2-1<0.$$
$$(a+1)(a-1)<0.$$

よって，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-1<a<1.}$$

(ii) $f(x)=x^2+2ax+5a^2-4$ とおく．

(＊)が正の解と負の解を 1 つずつもつ条件は，



$$f(0)<0.$$

これより，

$$5a^2-4<0.$$
$$a^2<\frac{4}{5}.$$

よって，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{5}}{5}<a<\frac{2\sqrt{5}}{5}.}$$

(4)(i) 四面体 OABC の体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\right)\cdot\mathrm{OC}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)\cdot3\\&=\boldsymbol{2.}\end{aligned}$$

(ii) 直角三角形 OAC に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2\\&=2^2+3^2\\&=13\end{aligned}$$

より，

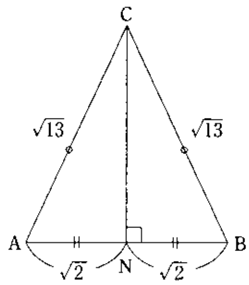
$$\mathrm{AC}=\sqrt{13}.$$

$\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{OBC}$ より，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$$

となるから，三角形 ABC は AC＝BC の二等辺三角形である．

OA＝OB＝2，$\angle\mathrm{AOB}=90°$ より，$\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ である．



C から辺 AB に下ろした垂線の足を N とすると，CA＝CB より，N は辺 AB の中点である．

直角三角形 ANC に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{CN}^2&=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AN}^2\\&=(\sqrt{13})^2-(\sqrt{2})^2\\&=11\end{aligned}$$

より，

$$\mathrm{CN}=\sqrt{11}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CN}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}\\&=\boldsymbol{\sqrt{22}.}\end{aligned}$$

(iii)
$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}$$

であり，(i)，(ii) より，

$$V=2,\ \triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{22}$$

であるから，

$$2=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{22}\cdot\mathrm{OH}.$$

よって,

$$\mathrm{OH}=\frac{6}{\sqrt{22}}$$
$$=\frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

【解説】 **問題**

(1) 連立方程式を解くには, 文字を1つずつ消去していけばよい. **【解答】**では, z を消去するために②−①, ③−① を作った. あとは, x と y の連立方程式④, ⑤を解き, 得られた x, y の値から z の値を求めればよい.

(2)(i)

> 放物線
> $$y=a(x-p)^2+q \quad (a\neq0)$$
> の頂点の座標は,
> $$(p,\ q)$$
> **放物線の頂点の座標**

が成り立つから, C の方程式を平方完成すればよい.

(ii), (iii) 一般に, 次のことが成り立つ.

> x^2 の係数が a, 頂点の座標が $(p,\ q)$ である放物線を,
> ・x 軸方向に α, y 軸方向に β だけ平行移動して得られる放物線は, x^2 の係数が a, 頂点の座標が $(p+\alpha,\ q+\beta)$ である放物線である.
> ・原点に関して対称移動して得られる放物線は, x^2 の係数が $-a$, 頂点の座標が $(-p,\ -q)$ である放物線である.
> **放物線の平行移動, 原点に関する対称移動**

これより, x^2 の係数, 頂点の座標に着目すればよい.

(3)(i)

> x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数, $a\neq0$) が異なる2つの実数解をもつ条件は, $D=b^2-4ac$ とおくと,
> $$D>0$$
> **2次方程式が異なる2つの実数解をもつ条件**

を用いて, a の値の範囲を求めればよい.

2次方程式が $ax^2+2b'x+c=0$ (a, b', c は実数, $a\neq0$) の形のときには, D の代わりに,

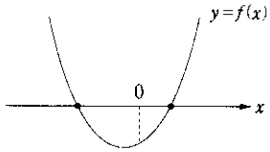
$\frac{D}{4}=(b')^2-ac$ を用いることもできる. **【解答】**ではこちらを用いた.

(ii) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数, $a\neq0$) の実数解が, 与えられた範囲に存在する条件を考えるには, $ax^2+bx+c=0$ の実数解を, $y=ax^2+bx+c$ のグラフと $y=0$ のグラフ (x 軸) の共有点の x 座標と捉えるとよい.

そのとき, 次の(ア), (イ), (ウ)に着目することが基本である.

> (ア) 頂点の y 座標の符号 (判別式の符号)
> (イ) 軸の位置 (頂点の x 座標の位置)
> (ウ) 区間の端点における y 座標の符号
> **放物線の調べ方**

$f(x)=x^2+2ax+5a^2-4$ とおくと, (*) が正の解と負の解を1つずつもつのは, $y=f(x)$ のグラフが次のようになることである.



したがって, 求める条件は, $x=0$ における y 座標 $f(0)$ の符号が負となることである.

(4)(i) 四面体は三角錐であるから, その体積を求めるには,

> 底面積が S, 高さが h である錐の体積を V とすると,
> $$V=\frac{1}{3}Sh$$
> **錐の体積**

を用いればよい.

(ii) $\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{OBC}$ より, $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ であるから, 三角形ABCは, AC=BC の二等辺三角形である. **【解答】**では, このことに着目し, Cから辺ABに垂線CNを下ろすことで, 三角形ABCの高さCNを求め, 三角形ABCの面積を求めた.

$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{13}$, $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ を求めたあと, 次のように三角形ABCの面積を求めてもよい.

((ii) の部分的別解)

三角形 ABC に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$
$$=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{13}}.$$

ここで，$0°<\angle BAC<180°$ より，$\sin\angle BAC>0$ であるから，

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}$$
$$=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{13}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{11}{13}}.$$

よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{11}{13}}$$
$$=\sqrt{22}.$$

((ii) の部分的別解終り)

(iii) 四面体 OABC において，三角形 ABC を底面とみると，高さは OH となるから，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH$$

が成り立つ．

これに (i)，(ii) で求めた値

$$V=2,\ \triangle ABC=\sqrt{22}$$

を代入すれば，OH の長さを求めることができる．

2 2 次関数

【I 型数学 I　必須問題】

(配点　40点)

a は実数，k は 0 でない実数とする．

$$f(x)=kx^2+kx+a^2-4a+5$$

に対して，x の 2 次方程式 $f(x)=0$ が重解をもつとする．

(1) k を a を用いて表せ．

(2) a が $0\leqq a\leqq 4$ の範囲を動くとき，k の最大値を求めよ．

(3) c は実数とし，k を (2) で求めた値とする．不等式 $f(x)<c$ を満たす整数 x の個数が 4 となるような c の値の範囲を求めよ．

【配点】

(1) 12 点.

(2) 12 点.

(3) 16 点.

【出題のねらい】

2 次方程式が重解をもつ条件を求められるか，また，2 次関数の最大値を求められるか，さらに，グラフを利用して 2 次不等式を満たす整数の個数について考察できるかをみる問題である．

【解答】

$$f(x)=kx^2+kx+a^2-4a+5.\ (k\neq 0)$$

(1) x の 2 次方程式 $f(x)=0$ が重解をもつための条件は，判別式を D とすると，

$$D=0.$$
$$k^2-4k(a^2-4a+5)=0.$$

$k\neq 0$ より，

$$k-4(a^2-4a+5)=0.$$

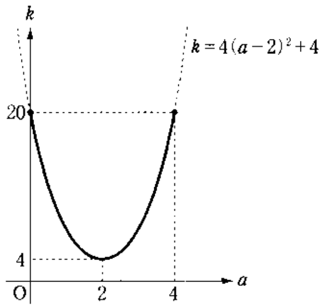
よって，

$$\boldsymbol{k=4(a^2-4a+5)}. \qquad \cdots①$$

(2) ① より，

$$k=4(a-2)^2+4. \qquad \cdots①'$$

$0\leqq a\leqq 4$ のとき，①′ のグラフは次の実線部分になる．



これより，$a=0$，4 のとき k は最大となり，求める最大値は，

20.

(3) (2) より $k=20$ であり，このとき ① より，

$$20=4(a^2-4a+5),$$

すなわち，

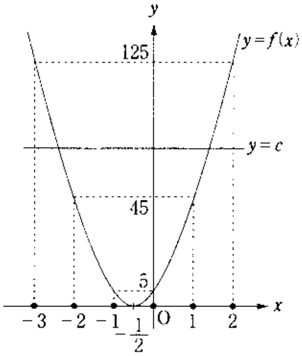
$$a^2-4a+5=5$$

であるから，

$$f(x)=20x^2+20x+5$$
$$=20\left(x+\frac{1}{2}\right)^2.$$

不等式 $f(x)<c$ の解は $y=f(x)$ のグラフが直線

$y=c$ の下側にあるような x の範囲である.



グラフより，求める c の値の範囲は,

$$45<c\leqq 125.$$

【解説】 問題

(1) 2次方程式の実数解の個数については,

> x の2次方程式
>
> $$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots(*)$$
>
> (a, b, c は実数, $a\neq 0$)
>
> の判別式を $D=b^2-4ac$ とするとき,
>
> $D>0 \iff (*)$ は異なる2つの実数解をもつ
>
> $D=0 \iff (*)$ はただ1つの実数解(重解)をもつ
>
> $D<0 \iff (*)$ は実数解をもたない
>
> **2次方程式の実数解の個数**

が成り立つ. これを用いて, $D=0$ から a と k の関係式を求め, k を a を用いて表せばよい.

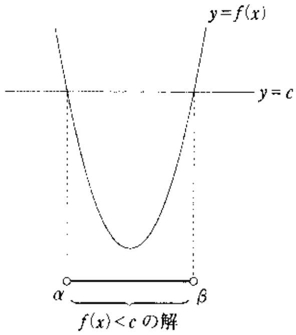
(2) (1)より, k は a の2次関数となるから, k の最大値を求めるには,

> $$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \end{aligned}$$
>
> **2次式の平方完成**

を用いて, $k=4(a-2)^2+4$ と変形し, この放物線の頂点の座標を求め, 与えられた a の範囲において放物線の概形を描けばよい.

(3) x の2次不等式 $f(x)<c$ の解は放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=c$ の下側にあるような x の値の範囲である.

本問では, 放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから, 2次方程式 $f(x)=c$ が異なる2つの実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつとき, $f(x)<c$ の解は $\alpha<x<\beta$ となる.



(2)の結果より,

$$f(x)=20x^2+20x+5=20\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

となるから, 放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は,

$$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right).$$

したがって, $f(x)<c$ を満たす整数 x の個数がちょうど4となるとき, それらは,

$$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1$$

である.

よって, 求める c の条件は,

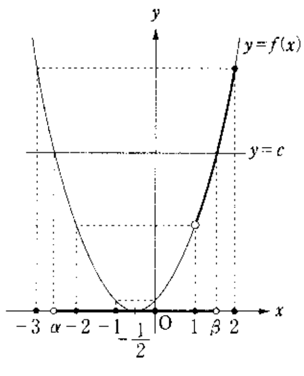
$$f(1)<c\leqq f(2) \qquad \cdots②$$

となる.

$y=f(x)$ は直線 $x=-\frac{1}{2}$ に関して対称であるから, ② を満たせば,

$$f(-2)<c\leqq f(-3) \qquad \cdots③$$

は満たされる.



$f(x)<c$ の解は $\alpha<x<\beta$ つまり区間の端点に等号が入らないことに注意することが大切である.

なお, グラフを用いず, 直接不等式を解いてもよい.

((3)の別解)

$f(x)<c$ より,

$$20\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<c.$$

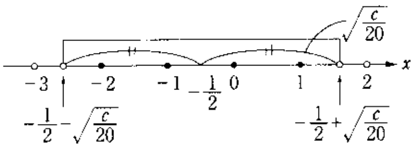
これを満たす整数 x が存在するためには, $c>0$

が必要であり，このとき，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{c}{20}.$$

$$-\sqrt{\frac{c}{20}}<x+\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{c}{20}}.$$

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{c}{20}}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{c}{20}}.$$



これを満たす整数 x の個数が4となる条件は，

$$1<-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{c}{20}}\leqq 2.$$

$$\frac{3}{2}<\sqrt{\frac{c}{20}}\leqq\frac{5}{2}.$$

$$\frac{9}{4}<\frac{c}{20}\leqq\frac{25}{4}.$$

これより，

$$45<c\leqq 125.$$

（(3)の別解終り）

3 確　率

【Ⅰ型数学Ⅰ，A　必須問題】

（配点　40点）

> 袋の中に1から20までの整数が1つずつ書かれたカードがそれぞれ1枚ずつ，合計20枚入っている．この袋から，同時に2枚のカードを取り出し，取り出した2枚のカードに書かれた数の積を X，取り出した2枚のカードに書かれた数の和を Y とする．
>
> (1)　X が奇数となる確率を求めよ．
>
> (2)　X が4の倍数となる確率を求めよ．
>
> (3)　X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を求めよ．

【配点】

(1)　10点．

(2)　12点．

(3)　18点．

【出題のねらい】

事象を的確に捉え，その確率を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)　2枚のカードの取り出し方は，全部で，

$${}_{20}\mathrm{C}_2=190\text{(通り)}$$

あり，これらは同様に確からしい．このうち，X が奇数となるのは，取り出した2枚のカードに書かれた数がともに奇数のときである．奇数が書かれたカードは10枚あるから，そのような取り出し方は，

$${}_{10}\mathrm{C}_2=45\text{(通り)}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{45}{190}=\boldsymbol{\frac{9}{38}}.$$

(2)　X が4の倍数とならないのは，取り出した2枚のカードに書かれた数が，

(ア)　2つとも奇数，

(イ)　1つが2，6，10，14，18のいずれかで，残り1つが奇数

のいずれかの場合である．

(ア)が起こる確率は，(1)より，

$$\frac{9}{38}.$$

(イ)が起こる確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_{10}\mathrm{C}_1}{190}=\frac{5\cdot 10}{190}=\frac{5}{19}.$$

(ア)，(イ)は互いに排反であるから，X が4の倍数とならない確率は，

$$\frac{9}{38}+\frac{5}{19}=\frac{1}{2}.$$

よって，X が4の倍数となる確率は，余事象の確率を用いて，

$$1-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}.$$

(3)　「X が4の倍数または Y が4の倍数となる」の余事象は，「X も Y も4の倍数とならない」である．

X が4の倍数とならないのは，(2)の(ア)，(イ)の2つの場合がある．それぞれの場合について，Y も4の倍数とならない条件を考える．

(ア)の場合．

奇数が書かれた10枚のカードを，次のように2つのグループA，Bに分ける．

A：4で割ると1余るカード

$\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{9}$，$\boxed{13}$，$\boxed{17}$

B：4で割ると3余るカード

$\boxed{3}$，$\boxed{7}$，$\boxed{11}$，$\boxed{15}$，$\boxed{19}$

Y が4の倍数とならないのは，Aから2枚のカードを取り出す，または，Bから2枚のカードを取り出す場合であるから，このような2枚のカードの取り出し方は，

$$_5C_2+{}_5C_2=20(\text{通り}).$$

(イ)の場合．

取り出した2枚のカードに書かれた数は，偶数と奇数であるから，Yは奇数である．よって，この場合はつねにYが4の倍数とならない．

このときの2枚のカードの取り出し方は，

$$_5C_1\cdot{}_{10}C_1=50(\text{通り}).$$

以上より，XもYも4の倍数とならない確率は，

$$\frac{20+50}{190}=\frac{70}{190}=\frac{7}{19}.$$

したがって，求める確率は，余事象の確率を用いて，

$$1-\frac{7}{19}=\mathbf{\frac{12}{19}}.$$

【解説】 問題

(1) 20枚のカードの中から同時に2枚のカードを取り出す方法の総数は，次を用いて求めることができる．

> 異なるn個のものからr個のものを取る組合せの総数は，
>
> $$_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
> $$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}.$$
>
> **組合せの総数**

これにより，2枚のカードの取り出し方は，全部で，

$$_{20}C_2=\frac{20\cdot19}{2\cdot1}=190(\text{通り})$$

となり，これらは同様に確からしい．

このうち，取り出した2枚のカードに書かれた数の積Xが奇数となるのは，2枚のカードに書かれた数がともに奇数のときである．

20枚のカードのうち，奇数が書かれているものは，

$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$，$\boxed{9}$，$\boxed{11}$，$\boxed{13}$，$\boxed{15}$，$\boxed{17}$，$\boxed{19}$

の10枚である．この中から2枚のカードを取り出せばよいから，取り出し方は，

$$_{10}C_2=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45(\text{通り})$$

となる．

あとは，次に従って，Xが奇数となる確率を求めればよい．

> 全事象がm通りあり，すべて同様に確からしいとする．このとき，事象Aの起こる場合がn通りであれば，Aの起こる確率$P(A)$は，
>
> $$P(A)=\frac{n}{m}.$$
>
> **確率の定義**

(2) **【解答】**では，余事象「Xが4の倍数とならない」が起こる確率を先に求めた．これは，取り出した2枚のカードに書かれた数が，

(ア) 2つとも奇数，

(イ) 1つが2，6，10，14，18(4の倍数ではない偶数)のいずれかで，残り1つが奇数

のどちらかの場合である．(ア)，(イ)は互いに排反であるから，それぞれの確率を加えることで，「Xが4の倍数とならない」確率を求めることができる．さらに，次を利用すれば，「Xが4の倍数となる」確率を求めることができる．

> 事象Aに対して，Aが起こらない事象をAの余事象といい，$\overline{A}$で表す．このとき，次が成り立つ．
>
> $$P(\overline{A})=1-P(A).$$
>
> **余事象の確率**

また，次のように考えてもよい．

((2)の別解)

「Xが4の倍数となる」のは，

(ウ) 4の倍数が書かれたカードを少なくとも1枚取り出す，

(エ) 4の倍数でない偶数が書かれたカードを2枚取り出す

のいずれかの場合である．

(ウ)の余事象は，「4の倍数以外の数が書かれたカードを2枚取り出す」であり，このような2枚のカードの取り出し方は，

$$_{15}C_2=105(\text{通り})$$

であるから，(ウ)が起こる確率は，

$$1-\frac{105}{190}=\frac{17}{38}.$$

(エ)が起こる確率は，

$$\frac{_5C_2}{190}=\frac{1}{19}.$$

(ウ)，(エ)は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{17}{38}+\frac{1}{19}=\frac{1}{2}.$$

((2)の別解終り)

(3) **【解答】**では，(2)と同様に余事象の確率を先に求め

ることで，X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を求めたが，

> 2つの事象 A, B に対して，A または B が起こる確率 $P(A\cup B)$ について，
> $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
> **和事象の確率**

を用いて，X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を次のように求めることもできる．

((3)の別解)

事象 E, F を次のように定める．

E：X が4の倍数となる，

F：Y が4の倍数となる．

E または F が起こる確率，すなわち，$P(E\cup F)$ を求めればよい．

(2)より，

$$P(E)=\frac{1}{2}.$$

次に，20枚のカードを，以下のように4つのグループA，B，C，Dに分ける．

A：4で割ると1余るカード

$\boxed{1}$, $\boxed{5}$, $\boxed{9}$, $\boxed{13}$, $\boxed{17}$

B：4で割ると3余るカード

$\boxed{3}$, $\boxed{7}$, $\boxed{11}$, $\boxed{15}$, $\boxed{19}$

C：4で割ると2余るカード

$\boxed{2}$, $\boxed{6}$, $\boxed{10}$, $\boxed{14}$, $\boxed{18}$

D：4で割り切れるカード

$\boxed{4}$, $\boxed{8}$, $\boxed{12}$, $\boxed{16}$, $\boxed{20}$

事象 F が起こるのは，次のいずれかの場合である．

(i) Dから2枚取り出す，

(ii) Cから2枚取り出す，

(iii) A，Bから1枚ずつ取り出す．

これらは互いに排反であるから，

$$P(F)=\frac{{}_5C_2+{}_5C_2+{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{190}=\frac{9}{38}.$$

また，X も Y も4の倍数となる，すなわち，事象 $E\cap F$ が起こるのは，上記の(i)，(ii)のいずれかの場合であるから，

$$P(E\cap F)=\frac{{}_5C_2+{}_5C_2}{190}=\frac{2}{19}.$$

よって，求める確率は，

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{9}{38}-\frac{2}{19}$$
$$=\frac{12}{19}.$$

((3)の別解終り)

【Ⅱ型受験者用】

$\boxed{1}$ 小問集合

【Ⅱ型共通　必須問題】

(配点　50点)

> (1) すべての実数 x に対して $x^2-2ax+2-a>0$ が成り立つとき，実数 a の値の範囲を求めよ．
>
> (2) $x>0$ のとき，$2x+\frac{1}{3x}$ の最小値を求めよ．
> また，そのときの x の値を求めよ．
>
> (3) $(2x-1)(y-2)=6$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ．
>
> (4) a は正の定数とする．直線 $y=x$ が放物線 $y=ax^2$ によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{10}$ のとき，a の値を求めよ．
>
> (5) x が $1\leqq x\leqq 8$ の範囲を動くとき，
> $f(x)=(\log_2 x)^2-4\log_2 x^2+1$ の最小値を求めよ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 10点．

(3) 10点．

(4) 10点．

(5) 10点．

【出題のねらい】

(1) 2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ がつねに成り立つ条件を，グラフを利用して求めることができるかをみる問題である．

(2) 相加平均と相乗平均の大小関係を用いて，最小値を求めることができるかをみる問題である．

(3) 約数，倍数の関係を用いて，方程式の整数解を求めることができるかをみる問題である．

(4) 直線が放物線によって切り取られる線分の長さの条件から，放物線を決定することができるかをみる問題である．

(5) 対数を含む関数の最小値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$x^2-2ax+2-a=(x-a)^2-a^2-a+2$$
であるから，すべての実数 x に対して $x^2-2ax+2-a>0$ が成り立つ条件は，

$$-a^2-a+2>0.$$
$$a^2+a-2<0.$$
$$(a+2)(a-1)<0.$$

よって，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-2<a<1.}$$

(2)　$x>0$ のとき，$2x>0$，$\dfrac{1}{3x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$2x+\frac{1}{3x}\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{3x}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

等号は，$2x=\dfrac{1}{3x}$ かつ $x>0$ より，

$$x=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

のときに成り立つ．

したがって，求める最小値は，

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}.$$

また，そのときの x の値は，

$$\boldsymbol{x=\frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

(3)　$$(2x-1)(y-2)=6. \quad \cdots①$$

x，y は整数であるから，$2x-1$，$y-2$ はともに整数である．よって，① より，$2x-1$，$y-2$ は6の約数である．

$2x-1$ が奇数であることに注意すると，① より，

$$(2x-1,\ y-2)=(-3,\ -2),\ (-1,\ -6),$$
$$(1,\ 6),\ (3,\ 2).$$

よって，求める x，y の組は，

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (0,\ -4),\ (1,\ 8),\ (2,\ 4).}$$

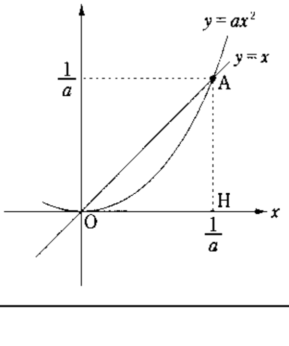
(4)　$y=x$ と $y=ax^2$ から y を消去すると，

$$ax^2=x.$$
$$(ax-1)x=0.$$

$a>0$ より，

$$x=0,\ \frac{1}{a}.$$

よって，次図を得る．



$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ とすると，

$$\mathrm{OH}=\mathrm{AH},\quad \angle\mathrm{OHA}=90^\circ$$

であるから，

$$\sqrt{2}\,\mathrm{OH}=\mathrm{OA}. \quad \cdots②$$

直線 $y=x$ が放物線 $y=ax^2$ によって切り取られる線分は OA であるから，$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{a}$ と ② より，

$$\sqrt{2}\cdot\frac{1}{a}=\sqrt{10}.$$

よって，

$$a=\frac{1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}.$$

(5)　$t=\log_2 x$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ より，

$$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 8.$$
$$0\leqq t\leqq 3. \quad \cdots③$$

このとき，

$$f(x)=(\log_2 x)^2-4\log_2 x^2+1$$
$$=(\log_2 x)^2-8\log_2 x+1$$
$$=t^2-8t+1$$
$$=(t-4)^2-15.$$

③ より，これは $t=3$ のとき最小となるから，求める最小値は，

$$3^2-8\cdot 3+1=\boldsymbol{-14}.$$

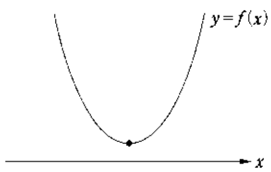
【解説】　問題

(1)　すべての実数 x に対して $x^2-2ax+2-a>0$ が成り立つ条件を求めるには，$y=x^2-2ax+2-a$ のグラフを利用するとよい．

$f(x)=x^2-2ax+2-a$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める条件は，

$$(y=f(x)\ \text{の頂点の}\ y\ \text{座標})>0$$

である．



【解答】ではこれを用いたが，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもたない条件として，

$$(f(x)=0\ \text{の判別式})<0$$

を用いてもよい．

((1) の別解)

$x^2-2ax+2-a=0$ の判別式を D とすると，求める条件は，

$$\frac{D}{4}<0.$$

$$(-a)^2-(2-a)<0.$$
$$a^2+a-2<0.$$
$$(a+2)(a-1)<0.$$

よって，求める a の値の範囲は，

$$-2<a<1.$$

（(1)の別解終り）

(2) 本問のような分数式の最小値を求めるには，

> $a>0$，$b>0$ のとき，
> $$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$
> （等号が成り立つのは，$a=b$ のとき）
>
> **相加平均と相乗平均の大小関係**

が有効となることが多い．

この不等式は，

$$a+b\geqq2\sqrt{ab}$$

の形で用いられることが多く，**【解答】**ではこの形で用いた．

(3) 一般に，未知数が整数である方程式で，

（整数）×（整数）=（整数）

の形をしているものを解く場合，**【解答】**のように約数・倍数の関係を用いることは有効な手法の1つである．

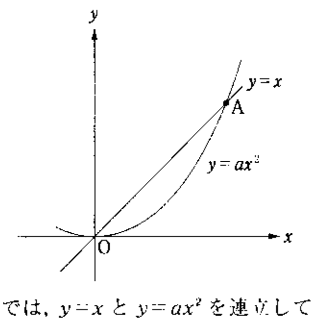
一般に，整数 a に対して，整数 x，y が，

$$xy=a$$

を満たすとき，x，y はそれぞれ a の約数となる．

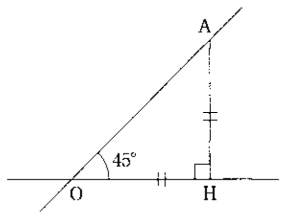
a の約数は有限個であるから，1つ1つの場合について，与えられた条件を満たすかどうか調べればよい．

(4) 直線 $y=x$ が放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{10}$ であるとは，次図の線分 OA の長さが $\sqrt{10}$ となることである．



【解答】では，$y=x$ と $y=ax^2$ を連立して，A の座標を求めたあと，OH=AH，∠OHA=90° より，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{2}\,\mathrm{OH}$$



が成り立つことを用いて a の値を求めたが，直角三角形 OHA に三平方の定理を用いて，次のように求めてもよい．

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{AH}^2$$

より，

$$(\sqrt{10})^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2.$$

$$10=\frac{2}{a^2}.$$

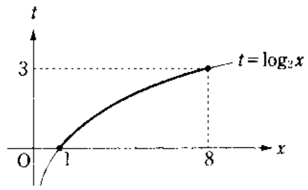
$$a^2=\frac{1}{5}.$$

$$a=\frac{\sqrt{5}}{5}.\qquad(a>0\text{ より})$$

(5) $t=\log_2x$ とおくと，$f(x)$ は t の2次関数となる．あとは，$1\leqq x\leqq8$ であるから，

> (i) $a>1$ のとき，
> $$\log_a p<\log_a q \iff 0<p<q,$$
> (ii) $0<a<1$ のとき，
> $$\log_a p<\log_a q \iff 0<q<p$$
>
> **対数の不等式**

を用いて，t の値の範囲を求めることを忘れないようにしよう．



2 微積分融合

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50点）

> a，b $(a\neq0)$ を実数として，x の2次関数 $f(x)$，$g(x)$ を，
> $$f(x)=x^2-2x+1,$$
> $$g(x)=ax^2+bx$$
> とする．また，放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．
>
> 実数 t $(0<t<1)$ に対して，点 $(t,\ f(t))$ におけ

る C_1 の接線を l_1，点$(t,\ g(t))$における C_2 の接線を l_2 とする．
(1) l_1，l_2 の方程式をそれぞれ求めよ．
(2) l_1 と l_2 が一致するとき，次の問に答えよ．
(i) a，b をそれぞれ t を用いて表せ．
(ii) C_2 と x 軸で囲まれる領域のうち，$0 \leqq x \leqq t$ の部分の面積を S とする．S を t を用いて表せ．また，t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，S を最大にする t の値を求めよ．

【配点】

(1) 16 点．
(2) 34 点．
(i) 16 点．(ii) 18 点．

【出題のねらい】

与えられた条件から複数の変数を1つの変数で表し，放物線と直線で囲まれる図形の面積の最大値を微分法を用いて求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) $f(x)=x^2-2x+1$ より，

$$f'(x)=2x-2.$$

したがって，l_1 の方程式は，

$$y=f'(t)(x-t)+f(t).$$
$$y=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+1.$$

よって，

$$l_1:\boldsymbol{y=2(t-1)x-t^2+1}.$$

また，$g(x)=ax^2+bx$ より，

$$g'(x)=2ax+b.$$

したがって，l_2 の方程式は，

$$y=g'(t)(x-t)+g(t).$$
$$y=(2at+b)(x-t)+at^2+bt.$$

よって，

$$l_2:\boldsymbol{y=(2at+b)x-at^2}.$$

(2)(i) l_1 と l_2 が一致することから，l_1 と l_2 の傾きと y 切片をそれぞれ比較して，

$$\begin{cases} 2(t-1)=2at+b, & \cdots① \\ -t^2+1=-at^2. & \cdots② \end{cases}$$

② より，$at^2=t^2-1$ であるから，

$$a=1-\frac{1}{t^2}.$$

これを ① に代入して，

$$b=2(t-1)-2t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$
$$=\frac{2}{t}-2.$$

よって，a，b をそれぞれ t を用いて表すと，

$$\boldsymbol{a=1-\frac{1}{t^2},\quad b=\frac{2}{t}-2.}$$

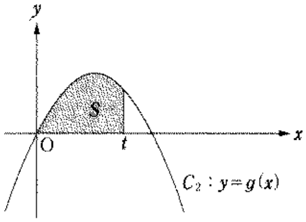
(ii) (i)の結果から，

$$g(x)=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x^2+\left(\frac{2}{t}-2\right)x.$$

$0<t<1$ より，

$$1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}<0,$$
$$g(t)=t^2-2t+1=(t-1)^2>0$$

であることから，C_2 と x 軸で囲まれる領域のうち，$0 \leqq x \leqq t$ の部分は次図の網掛け部分となる．



したがって，

$$S=\int_0^t g(x)\,dx$$
$$=\int_0^t\left\{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x^2+\left(\frac{2}{t}-2\right)x\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}-2\right)x^2\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)t^3+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}-2\right)t^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{2}{3}t}.$$

これを $S(t)$ とおくと，

$$S'(t)=t^2-2t+\frac{2}{3}.$$

$S'(t)=0$ を解くと，

$$t=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}.$$

したがって，$0<t<1$ における $S(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	

よって，$S(t)(=S)$ を最大にする t の値は，

$$t=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}.$$

【解説】 問題

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは，$x=t$ における微分係数 $f'(t)$ に等しい．したがって，接線の方程式を求めるには，次を用いればよい．

> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は，
> $$y=f'(t)(x-t)+f(t).$$
>
> **接線の方程式**

これにより，曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における C_1 の接線 l_1 の方程式は，

$$y=f'(t)(x-t)+f(t),$$

曲線 C_2 上の点 $(t,\ g(t))$ における C_2 の接線 l_2 の方程式は，

$$y=g'(t)(x-t)+g(t)$$

となる．

(2)(i)　l_1 と l_2 が一致する条件は，l_1 と l_2 の傾きと y 切片がそれぞれ一致することである．

傾きが一致するから，

$$2(t-1)=2at+b, \qquad \cdots①$$

y 切片が一致するから，

$$-t^2+1=-at^2 \qquad \cdots②$$

が得られるから，② より a を t を用いて表し，それを ① に代入して，b を t の式で表すことができる．

(ii)　(i) の結果より，

$$g(x)=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x^2+\left(\frac{2}{t}-2\right)x$$

となる．

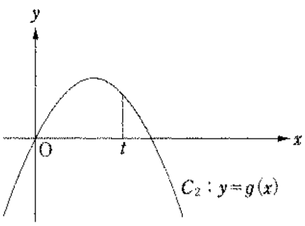
面積を求めるために，曲線 $C_2:y=g(x)$ の概形を考える．**【解答】**では，

$0<t<1$,

x^2 の係数 $1-\dfrac{1}{t^2}$ の符号，

$g(t)=t^2-2t+1$ の符号

に注目し，さらに C_2 は原点を通ることにも注意して C_2 の概形を考えた．

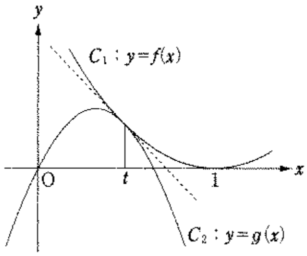


また，本問では，l_1 と l_2 が一致しているが，このことは，

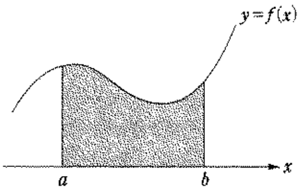
「C_1 と C_2 が x 座標が t である点を共有し，その点において共通の接線をもつ」

と読み替えることができる．

よって，C_1 と C_2 の概形とそれらの位置関係は，次図のようになる．



C_2 の概形が把握できたあとは，

> 区間 $a\leqq x\leqq b$ において，$f(x)\geqq 0$ であるとする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる図形の面積は，
> $$\int_a^b f(x)\,dx$$
>
> 
>
>
> **定積分と面積**

を用いて，

$$\int_0^t g(x)\,dx$$

を計算することで，

$$S=\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{2}{3}t$$

となり，S を t の 3 次関数として表すことができる．

S が最大となるときの t の値を求めるには，微分法を用いて S の増減を調べるとよい．

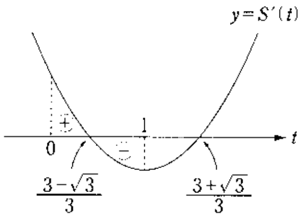
【解答】では，

$$S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{2}{3}t$$

とおき，

$$S'(t)=t^2-2t+\frac{2}{3}$$

を得た．方程式 $S'(t)=0$ の解が $t=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ であるから，$0<t<1$ の範囲では，$t=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ を境にして，$S'(t)$ の符号が正から負へと変化することがわかる．



$S(t)$の増減を表にまとめると，

t	(0)	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	最大	↘	

となり，Sは$t=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$のとき最大となることがわかる．

3　図形と方程式

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50点）

> xy平面上に，点A$(4,\ 0)$と，Aとは異なる点P$(s,\ t)$があり，線分APを$a:(1-a)$ $(0<a<1)$に内分する点をQ$(X,\ Y)$とする．
>
> (1)　s，tをそれぞれa，X，Yを用いて表せ．
>
> (2)　Pが円$C_1:x^2+y^2=4$上を動くときのQの軌跡をC_2とする．
>
> (i)　C_2の方程式を求めよ．
>
> (ii)　C_1とC_2の共通接線の本数がちょうど2本となるaの値の範囲を求めよ．また，その2本の共通接線の方程式を求めよ．

【配点】

(1)　14点．

(2)　36点．

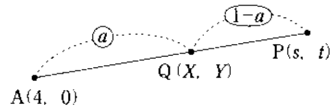
(i)　12点．(ii)　24点．

【出題のねらい】

内分点の公式を正しく用いることができるか，座標が媒介変数を用いて表されている点の軌跡を求めることができるか，また，共通接線の本数が2本となるときの2円の位置関係を把握し，その共通接線の方程式を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)



Qは線分APを$a:(1-a)$に内分する点であるから，

$$X=\frac{(1-a)\cdot 4+a\cdot s}{a+(1-a)},\quad Y=\frac{(1-a)\cdot 0+a\cdot t}{a+(1-a)}.$$

$$X=4(1-a)+as,\quad Y=at.$$

$a\neq 0$より，

$$\boldsymbol{s=\frac{X-4(1-a)}{a}},\quad \boldsymbol{t=\frac{Y}{a}}.\qquad\cdots①$$

(2)(i)　P$(s,\ t)$は$C_1:x^2+y^2=4$上を動くから，

$$s^2+t^2=4.$$

これに，①を代入すると，

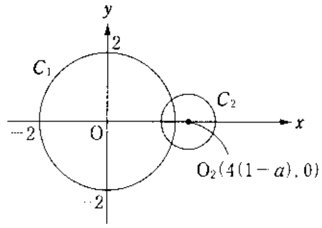
$$\left\{\frac{X-4(1-a)}{a}\right\}^2+\left(\frac{Y}{a}\right)^2=4.$$

$$\{X-4(1-a)\}^2+Y^2=4a^2.$$

よって，求めるC_2の方程式は，

$$\boldsymbol{\{x-4(1-a)\}^2+y^2=4a^2}.$$

(ii)



$C_1:x^2+y^2=4$より，C_1は中心O$(0,\ 0)$，半径$r_1=2$の円である．

また，$C_2:\{x-4(1-a)\}^2+y^2=4a^2$より，$a>0$に注意すると，$C_2$は中心$O_2(4(1-a),\ 0)$，半径$r_2=2a$の円であり，さらに，$0<a<1$より，$4(1-a)>0$かつ$r_2<r_1$である．

C_1とC_2の共通接線の本数がちょうど2本となるのは，C_1とC_2が異なる2点で交わるときであるから，求める条件は，

$$r_1-r_2<OO_2<r_1+r_2.$$

$$2-2a<4(1-a)<2+2a.$$

これと$0<a<1$より，

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}<a<1}.$$

共通接線lはy軸に平行ではないから，実数p，qを用いて，

$$l:y=px+q$$

とおける．

直線$l:px-y+q=0$は円C_1に接するから，

$$\frac{|q|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=2.$$

$$|q|=2\sqrt{p^2+1}. \quad \cdots ②$$

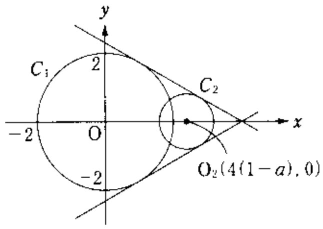
直線 l：$px-y+q=0$ は円 C_2 に接するから，

$$\frac{|p\cdot4(1-a)+q|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=2a.$$

$$|4p(1-a)+q|=2a\sqrt{p^2+1}. \quad \cdots ③$$

②，③より，

$$|4p(1-a)+q|=a|q|. \quad \cdots ④$$



さらに，図より，点 $O(0,0)$ と点 $O_2(4(1-a),0)$ は直線 $y=px+q$ に関して同じ側にある．

(イ)　O と O_2 がともに不等式 $y<px+q$ で表される領域にあるとき，

$$\begin{cases}0<q,\\ 0<p\cdot4(1-a)+q.\end{cases} \iff \begin{cases}q>0,\\ 4p(1-a)+q>0.\end{cases}$$

よって，④は，

$$4p(1-a)+q=aq$$

となる．

(ロ)　O と O_2 がともに不等式 $y>px+q$ で表される領域にあるとき，

$$\begin{cases}0>q,\\ 0>p\cdot4(1-a)+q.\end{cases} \iff \begin{cases}q<0,\\ 4p(1-a)+q<0.\end{cases}$$

よって，④は，

$$-\{4p(1-a)+q\}=-aq.$$

$$4p(1-a)+q=aq$$

となる．

したがって，(イ)，(ロ)いずれの場合も④より，

$$4p(1-a)+q=aq.$$

$$(1-a)q=-4p(1-a).$$

$1-a\neq0$ より，

$$q=-4p.$$

これを②に代入して，

$$|-4p|=2\sqrt{p^2+1}.$$

両辺ともに0以上であるから，2乗しても同値で，

$$16p^2=4(p^2+1).$$

$$p^2=\frac{1}{3}.$$

$$p=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

これと，$q=-4p$ より，

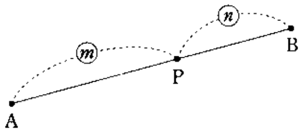
$$(p,\ q)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mp\frac{4}{\sqrt{3}}\right).\ (複号同順)$$

したがって，求める2本の共通接線の方程式は，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}，および\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

【解説】 **問題**

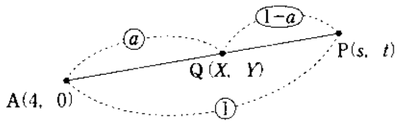
(1)　$Q(X,\ Y)$ は線分AP を $a:(1-a)$ に内分する点であるから，

> 異なる2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ に対して，線分AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P とすると，
>
> $$P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$
>
> 
>
>
> **内分点の座標**

を用いて，X，Y を s，t を用いて表したあと，s，t について解けばよい．

また，外分点の公式を用いて，s，t を a，X，Y を用いて表すこともできる．

((1)の別解)



P は線分AQ を $1:(1-a)$ に外分する点であるから，

$$s=\frac{-(1-a)\cdot4+1\cdot X}{1-(1-a)},\quad t=\frac{-(1-a)\cdot0+1\cdot Y}{1-(1-a)}.$$

これより，

$$s=\frac{X-4(1-a)}{a},\quad t=\frac{Y}{a}.$$

((1)の別解終り)

(2)(i)　$P(s,\ t)$ が円 C_1：$x^2+y^2=4$ 上にあることから，

$$s^2+t^2=4$$

が成り立つ．あとは $s=\dfrac{X-4(1-a)}{a}$，$t=\dfrac{Y}{a}$ を代入して，X と Y の関係式を導き，X，Y をそれぞれ x，y に置き換えることにより，C_2 の方程式を得る．

(ii)　まず，

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ の
中心の座標は $(a,\ b)$，半径は r

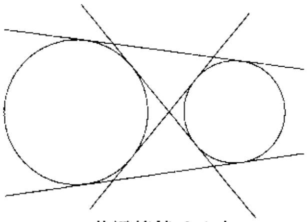
円の中心と半径

を用いて，C_1 と C_2 の中心と半径を求めた．

次に，

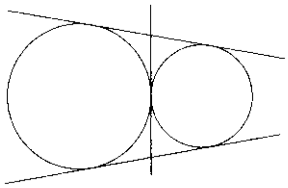
2円の共通接線の本数は，2円の位置関係によって，次のように分類される．

(i) 「互いに他方の外部にある」



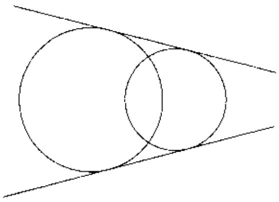
共通接線は 4 本

(ii) 「外接する」



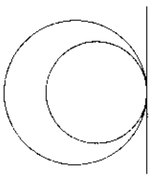
共通接線は 3 本

(iii) 「異なる 2 点で交わる」



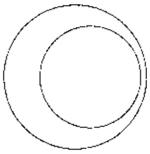
共通接線は 2 本

(iv) 「内接する」



共通接線は 1 本

(v) 「一方が他方の内部にある」



共通接線は 0 本

2円の位置関係と共通接線の本数

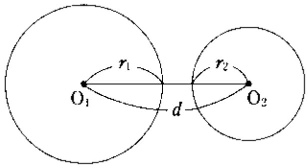
により，共通接線が 2 本となる場合は，2円が異なる 2 点で交わる場合であることがわかる．

これより，

O_1 を中心とする半径 r_1 の円と，O_2 を中心とする半径 r_2 の円について，O_1 と O_2 の距離を d とすると，$r_1 \geqq r_2$ のとき，次が成り立つ．

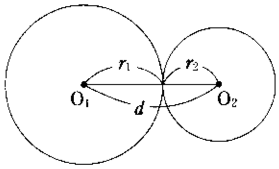
(i) 「互いに他方の外部にある」

$\Longleftrightarrow d>r_1+r_2$



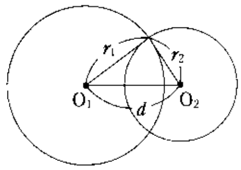
(ii) 「外接する」

$\Longleftrightarrow d=r_1+r_2$



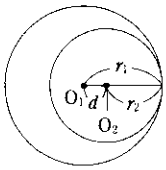
(iii) 「異なる 2 点で交わる」

$\Longleftrightarrow r_1-r_2<d<r_1+r_2$



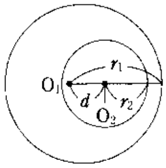
(iv) 「内接する（一致する場合も含む）」

$\Longleftrightarrow d=r_1-r_2$



(v) 「一方が他方の内部にある」

$\Longleftrightarrow d<r_1-r_2$ （ただし，$r_1 \neq r_2$）



2円の位置関係

を用いると，2円が異なる 2 点で交わる条件は，

$$2-2a<4(1-a)<2+2a$$

が成り立つことであり，これを a について解け

ばよい．

また，図より，共通接線はy軸に平行でないことがわかるから，共通接線の方程式は実数p，qを用いて，

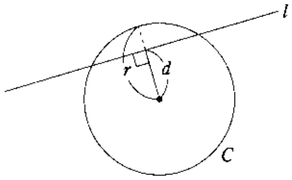
$$y=px+q$$

とおくことができる．

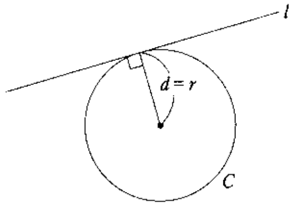
C_1と直線$y=px+q$が接することから，

円Cと直線lについて，Cの半径をr，Cの中心とlの距離をdとすると，

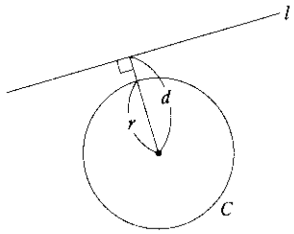
- $d<r$のとき，Cとlは異なる2点で交わる．



- $d=r$のとき，Cとlは接する．



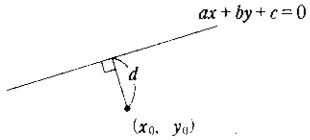
- $d>r$のとき，Cとlは共有点をもたない．



円と直線の位置関係

より，C_1の中心$(0,\ 0)$と直線$y=px+q$の距離はC_1の半径に等しい．

よって，C_1の半径が2であることと，



点$(x_0,\ y_0)$と直線$ax+by+c=0$の距離dは，

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

点と直線の距離

から，

$$\frac{|q|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=2,$$

すなわち，

$$|q|=2\sqrt{p^2+1} \qquad \cdots②$$

となる．直線$y=px+q$はC_2にも接するから，同様にして，

$$\frac{|p\cdot4(1-a)+q|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=2a,$$

すなわち，

$$|4p(1-a)+q|=2a\sqrt{p^2+1}. \qquad \cdots③$$

②，③より，

$$|4p(1-a)+q|=a|q|. \qquad \cdots④$$

さらに，図より，点O$(0, 0)$と点$O_2(4(1-a), 0)$は直線$y=px+q$に関して同じ側にあるから，

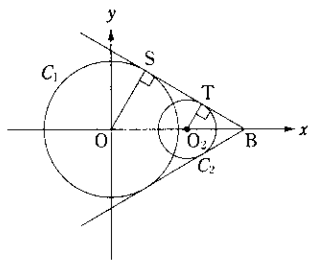
(イ) 2点とも$y<px+q$で表される領域にある

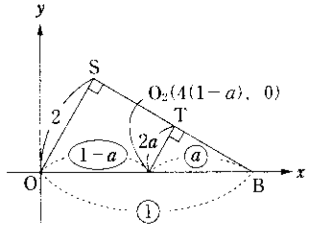
(ロ) 2点とも$y>px+q$で表される領域にある

の2通りの場合が考えられ，これらの場合について，$4p(1-a)+q$とqの符号を考えて，④の絶対値記号をはずせばよい．

また，次のようにして，図形的に共通接線を求めることができる．

((2)(ii)の部分的別解)





上図のように各点を設定する．

$\triangle$OSB$\backsim\triangle O_2$TBより，

$$\begin{aligned}BO:BO_2&=OS:O_2T\\&=2:2a\\&=1:a.\end{aligned}$$

よって，Bは線分OO_2を$1:a$に外分する点であるから，

$$B\left(\frac{-a\cdot0+1\cdot4(1-a)}{1+(-a)},\ 0\right),$$

すなわち，

$$B(4,\ 0)$$

となる．これより，OB：OS＝2：1 となるから，

$$\angle OBS=30°.$$

よって，共通接線 ST の傾きは，

$$\tan 150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

また，C_1，C_2 の中心がともに x 軸上にあるので，2 本の共通接線は x 軸に関して対称となるから，もう 1 本の共通接線の傾きは，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

よって，2 本の共通接線は，傾きが $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，B(4，0)を通る直線より，

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4),$$

すなわち，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

((2)(ii)の部分的別解終り)

4 確　率

【II型共通　選択問題】

(配点　50点)

> 袋の中に 1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 20 枚入っている．この袋から，同時に 3 枚のカードを取り出し，取り出した 3 枚のカードに書かれた数の積を X，取り出した 3 枚のカードに書かれた数の和を Y とする．
> (1)　X が奇数となる確率を求めよ．
> (2)　X が 4 の倍数となる確率を求めよ．
> (3)　X が 4 の倍数または Y が 4 の倍数となる確率を求めよ．

【配点】

(1)　12 点．

(2)　18 点．

(3)　20 点．

【出題のねらい】

事象を的確に捉え，その確率を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)　3 枚のカードの取り出し方は，全部で，

$${}_{20}C_3=1140(\text{通り})$$

あり，これらは同様に確からしい．このうち，X が奇数となるのは，取り出した 3 枚のカードに書かれた数がすべて奇数のときである．奇数が書かれたカードは 10 枚あるから，そのような取り出し方は，

$${}_{10}C_3=120(\text{通り}).$$

よって，求める確率は，

$$\frac{120}{1140}=\mathbf{\frac{2}{19}}.$$

(2)　X が 4 の倍数とならないのは，取り出した 3 枚のカードに書かれた数が，

(ア)　3 つとも奇数，

(イ)　1 つが 2，6，10，14，18 のいずれかで，残り 2 つが奇数

のどちらかの場合である．

(ア)が起こる確率は，(1)より，

$$\frac{2}{19}.$$

(イ)が起こる確率は，

$$\frac{{}_5C_1\cdot{}_{10}C_2}{1140}=\frac{5\cdot45}{1140}=\frac{15}{76}.$$

(ア)，(イ)は互いに排反であるから，X が 4 の倍数とならない確率は，

$$\frac{2}{19}+\frac{15}{76}=\frac{23}{76}.$$

よって，X が 4 の倍数となる確率は，余事象の確率を用いて，

$$1-\frac{23}{76}=\mathbf{\frac{53}{76}}.$$

(3)　「X が 4 の倍数または Y が 4 の倍数となる」の余事象は，「X も Y も 4 の倍数とならない」である．

X が 4 の倍数とならないのは，(2)の(ア)，(イ)の 2 つの場合がある．それぞれの場合について，Y も 4 の倍数とならない条件を考える．

(ア)の場合，取り出した 3 枚のカードに書かれた数がすべて奇数であるから，Yは奇数である．よって，この場合，(1)の 120 通りの取り出し方すべてに対して Y が 4 の倍数となることはない．

(イ)の場合，取り出した 3 枚のカードに書かれた 3 つの数のうち，偶数であるものは 1 つであり，それは2，6，10，14，18 のいずれかであるから，4 で割ると 2 余る数である．したがって，Y が 4 の倍数とならないための条件は，残り 2 つの奇数の和を 4 で割ったときの余りが 2 ではないことである．

そこで，奇数が書かれた 10 枚のカードを，次の

ように2つのグループA，Bに分ける．

A：4で割ると1余るカード

$\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{9}$，$\boxed{13}$，$\boxed{17}$

B：4で割ると3余るカード

$\boxed{3}$，$\boxed{7}$，$\boxed{11}$，$\boxed{15}$，$\boxed{19}$

2つの奇数の和を4で割ったときの余りが2とならないのは，AとBからそれぞれカードを1枚ずつ取り出した場合であるから，3枚のカードの取り出し方は，

$${}_5C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 = 125(\text{通り}).$$

(ア)，(イ)は互いに排反であるから，XもYも4の倍数とならない確率は，

$$\frac{120+125}{1140} = \frac{49}{228}.$$

したがって，求める確率は，

$$1 - \frac{49}{228} = \mathbf{\frac{179}{228}}.$$

【解説】 問題

(1) 20枚のカードの中から同時に3枚のカードを取り出す方法の総数は，次を用いて求めることができる．

> 異なるn個のものからr個のものを取る組合せの総数は，
>
> $${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
> $$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}.$$
>
> **組合せの総数**

これにより，3枚のカードの取り出し方は，全部で，

$${}_{20}C_3 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} = 1140(\text{通り})$$

となり，これらは同様に確からしい．

このうち，取り出した3枚のカードに書かれた数の積Xが奇数となるのは，3枚のカードに書かれた数がすべて奇数のときに限られる．

20枚のカードのうち，奇数が書かれているものは，

$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$，$\boxed{9}$，$\boxed{11}$，$\boxed{13}$，$\boxed{15}$，$\boxed{17}$，$\boxed{19}$

の10枚である．この中から3枚のカードを取り出せばよいから，取り出し方は，

$${}_{10}C_3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120(\text{通り})$$

となる．

あとは，次に従って，Xが奇数となる確率を求めればよい．

> 全事象がm通りあり，すべて同様に確からしいとする．このとき，事象Aの起こる場合がn通りであれば，Aの起こる確率$P(A)$は，
>
> $$P(A) = \frac{n}{m}.$$
>
> **確率の定義**

(2) 「Xが4の倍数となる」のは，取り出した3枚のカードの中に，「4の倍数の書かれたカードが少なくとも1枚ある」場合と，「偶数の書かれたカードが少なくとも2枚ある」場合があるが，この2つの事象は排反ではないので，Xが4の倍数となる場合の数を直接数え上げるのは面倒である．

そこで，**【解答】**では，その余事象「Xが4の倍数とならない」が起こる確率を先に求めた．これは，取り出した3枚のカードに書かれた数が，

(ア) 3つとも奇数，

(イ) 1つが2，6，10，14，18(4の倍数ではない偶数)のいずれかで，残り2つが奇数

のどちらかの場合である．(ア)，(イ)は互いに排反であるから，それぞれの確率を加えることで，「Xが4の倍数とならない」確率を求めることができる．さらに，次を利用すれば，「Xが4の倍数となる」確率を求めることができる．

> 事象Aに対して，Aが起こらない事象をAの余事象といい，$\overline{A}$で表す．
>
> このとき，次が成り立つ．
>
> $$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$
>
> **余事象の確率**

また，次のように求めることもできる．

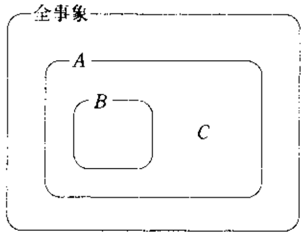
((2)の別解)

事象A，B，Cを次のように定める．

A：Xが偶数となる，

B：Xが4の倍数となる，

C：Xが4の倍数ではない偶数となる．



(1)より，Xが奇数となる確率は$\frac{2}{19}$であるから，

$$P(A) = 1 - \frac{2}{19} = \frac{17}{19}.$$

事象 C が起こるのは，取り出した3枚のカードに書かれた数のうち，1つが2，6，10，14，18のいずれかで，残り2つが奇数のときであるから，

$$P(C)=\frac{{}_5C_1\cdot{}_{10}C_2}{1140}=\frac{5\cdot45}{1140}=\frac{15}{76}.$$

事象 B，C は排反であり，$A=B\cup C$ であるから，

$$P(A)=P(B)+P(C).$$

よって，求める確率は，

$$P(B)=P(A)-P(C)=\frac{17}{19}-\frac{15}{76}=\frac{53}{76}.$$

((2)の別解終り)

(3)【解答】では，(2)と同様に余事象の確率を先に求めることで，X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を求めた．

また，

> 2つの事象 A，B に対して，A または B が起こる確率 $P(A\cup B)$ について，
>
> $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
>
> **和事象の確率**

を用いて，X が4の倍数または Y が4の倍数となる確率を次のように求めることもできる．

((3)の別解)

事象 E，F を次のように定める．

E：X が4の倍数となる，

F：Y が4の倍数となる．

E または F が起こる確率，すなわち，$P(E\cup F)$ を求めればよい．

(2)より，

$$P(E)=\frac{53}{76}.$$

次に，20枚のカードを，以下のように4つのグループA，B，C，Dに分ける．

A：4で割ると1余るカード

$\boxed{1}$，$\boxed{5}$，$\boxed{9}$，$\boxed{13}$，$\boxed{17}$

B：4で割ると3余るカード

$\boxed{3}$，$\boxed{7}$，$\boxed{11}$，$\boxed{15}$，$\boxed{19}$

C：4で割ると2余るカード

$\boxed{2}$，$\boxed{6}$，$\boxed{10}$，$\boxed{14}$，$\boxed{18}$

D：4で割り切れるカード

$\boxed{4}$，$\boxed{8}$，$\boxed{12}$，$\boxed{16}$，$\boxed{20}$

事象 F が起こるのは，次のいずれかの場合である．

(i) Dから3枚取り出す，

(ii) A，B，Dから1枚ずつ取り出す，

(iii) Aから2枚，Cから1枚取り出す，

(iv) Bから2枚，Cから1枚取り出す，

(v) Cから2枚，Dから1枚取り出す．

これらは互いに排反であるから，

$$P(F)=\frac{{}_5C_3+({}_5C_1)^3+{}_5C_2\cdot{}_5C_1\cdot3}{1140}=\frac{1}{4}.$$

また，X も Y も4の倍数となる，すなわち，事象 $E\cap F$ が起こるのは，上記の(i)，(ii)，(v)のいずれかの場合であるから，

$$P(E\cap F)=\frac{{}_5C_3+({}_5C_1)^3+{}_5C_2\cdot{}_5C_1}{1140}=\frac{37}{228}.$$

よって，求める確率は，

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)=\frac{53}{76}+\frac{1}{4}-\frac{37}{228}=\frac{179}{228}.$$

((3)の別解終り)

5 三角関数

【II型共通　選択問題】

(配点　50点)

> a は $a>\sqrt{3}$ を満たす定数とし，x の関数
>
> $$f(x)=\sin^2x+a\sin2x+a^2\cos^2x-4\sin x-4a\cos x+5$$
>
> を考える．
>
> $t=\sin x+a\cos x$ とおくとき，次の問に答えよ．
>
> (1) $f(x)$ を t を用いて表せ．
>
> (2) x が $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲を a を用いて表せ．
>
> (3) x が $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値が2となるような a の値を求めよ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 16点．

(3) 24点．

【出題のねらい】

三角関数の倍角公式，合成公式などを適切に用いることで，三角関数の最大値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) $$t^2=(\sin x+a\cos x)^2$$
$$=\sin^2 x+2a\sin x\cos x+a^2\cos^2 x$$
$$=\sin^2 x+a\sin 2x+a^2\cos^2 x$$

であるから，

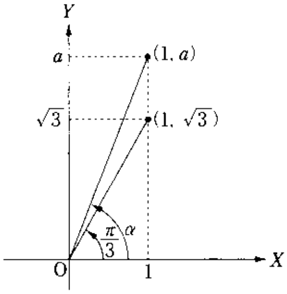
$$f(x)=(\sin^2 x+a\sin 2x+a^2\cos^2 x)$$
$$-4(\sin x+a\cos x)+5$$
$$=\boldsymbol{t^2-4t+5}.$$

(2) $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\quad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

を満たす鋭角 α を用いて，

$$t=\sin x+a\cos x$$
$$=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)$$

と表される．



$a>\sqrt{3}$ であるから，

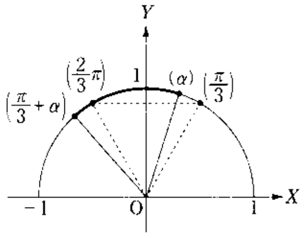
$$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\frac{\pi}{3}+\alpha$$

であるから，$\sin(x+\alpha)$ のとり得る値の範囲は，

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1. \qquad \cdots①$$



ここで，

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+a}{2\sqrt{a^2+1}}$$

であるから，① に代入すると，

$$\frac{\sqrt{3}+a}{2\sqrt{a^2+1}}\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1.$$
$$\frac{\sqrt{3}+a}{2}\leqq\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)\leqq\sqrt{a^2+1}.$$

よって，t のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+a}{2}\leqq t\leqq\sqrt{a^2+1}}. \qquad \cdots②$$

(3) $g(t)=t^2-4t+5$ とする．$y=g(t)$ のグラフは，下に凸の放物線であるから，② において $g(t)$ が最大となるのは，

$$t=\frac{\sqrt{3}+a}{2}\quad \text{または}\quad t=\sqrt{a^2+1}$$

のときである．

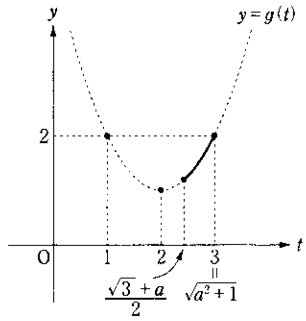
$g(t)=2$ を満たす t は，

$$t^2-4t+5=2.$$
$$t^2-4t+3=0.$$
$$(t-1)(t-3)=0.$$
$$t=1,\ 3.$$

$a>\sqrt{3}$ より，$1<\sqrt{3}<\dfrac{\sqrt{3}+a}{2}$ であることに注意すれば，$\dfrac{\sqrt{3}+a}{2}\leqq t\leqq\sqrt{a^2+1}$ において $g(t)$ の最大値が 2 となるのは，

$$\sqrt{a^2+1}=3 \qquad \cdots③$$

のときである．



③ は，両辺ともに 0 以上であるから 2 乗しても同値で，

$$a^2+1=9.$$
$$a^2=8.$$

$a>\sqrt{3}$ より，求める a の値は，

$$a=\boldsymbol{2\sqrt{2}}.$$

【解説】 問題

(1) $f(x)=\sin^2 x+a\sin 2x+a^2\cos^2 x-4\sin x-4a\cos x+5$ を $t=\sin x+a\cos x$ を用いて表すには，まず，

$$t^2=(\sin x+a\cos x)^2$$
$$=\sin^2 x+2a\sin x\cos x+a^2\cos^2 x$$

と計算し，右辺の第2項に，

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

2倍角の公式

を用いて，

$$t^2 = \sin^2 x + a\sin 2x + a^2\cos^2 x$$

となることを利用する．

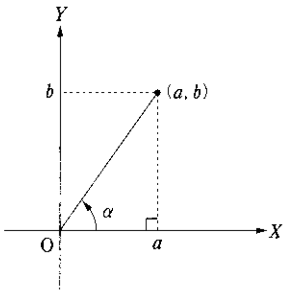
$$f(x) = \sin^2 x + a\sin 2x + a^2\cos^2 x - 4(\sin x + a\cos x) + 5$$

であるから，

$$f(x) = t^2 - 4t + 5$$

となる．

(2)　まず，$t = \sin x + a\cos x$ に対して，



$a^2 + b^2 \neq 0$ のとき，

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

三角関数の合成

を用いると，

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

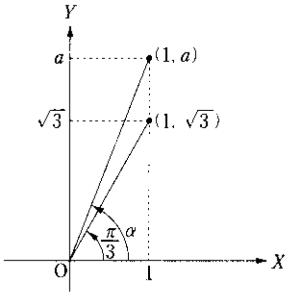
を満たす鋭角 α を用いて，

$$t = \sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)$$

となる．

$a > \sqrt{3}$ であるから，図より，

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$



あとは，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ より，

$$\alpha \leqq x + \alpha \leqq \frac{\pi}{3} + \alpha$$

であることに注意して，$\sin(x+\alpha)$ のとり得る値の範囲を求め，t のとり得る値の範囲を求めればよい．

(3)　(1)より，

$$f(x) = t^2 - 4t + 5.$$

この右辺を $g(t)$ とおく．

$y = g(t)$ のグラフは，下に凸の放物線であるから，区間 $\frac{\sqrt{3}+a}{2} \leqq t \leqq \sqrt{a^2+1}$ において $g(t)$ が最大となるのは，

$$t = \frac{\sqrt{3}+a}{2}\quad または\quad t = \sqrt{a^2+1}$$

のときである．

一方，$g(t) = 2$ となるのは，

$$t^2 - 4t + 5 = 2$$

を解いて，

$$t = 1,\ 3$$

のときである．

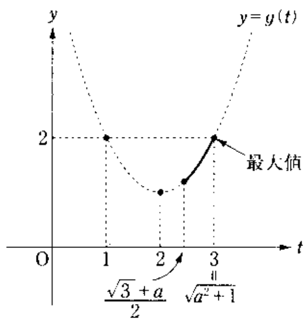
$a > \sqrt{3}$ に注意すれば，

$$1 < \sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}+a}{2}$$

であるから，$f(x)$，すなわち $g(t)$ の最大値が2となる条件は，

$$\sqrt{a^2+1} = 3$$

であることがわかる．



あとは，これを解いて $a(>\sqrt{3})$ の値を求めればよい．

6　空間ベクトル

【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ，B　選択問題】

（配点　50点）

四面体OABCにおいて，三角形ABCの重心をGとする．また，実数 t に対して，空間内の点Pを，

$$(3-t)\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

で定める．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{OP}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) P が平面 OAC 上にあるときの t の値を求めよ．また，P が平面 ABC 上にあるときの t の値を求めよ．

(3) P が四面体 OABC の面上または内部にあるように t を変化させるとき，線分 GP が通過する領域の面積を S とする．三角形 OBC の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の値を求めよ．

【配点】

(1) 14 点．

(2) 16 点．

(3) 20 点．

【出題のねらい】

(1)，(2) は空間ベクトルの基本的な扱いができるか，(3) は直線のベクトル方程式を利用して線分が通過する領域を把握し，その領域の面積と三角形の面積の比を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1) G は三角形 ABC の重心であるから，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}.$$

また，

$$(3-t)\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

より，

$$(t-3)\overrightarrow{OP}+2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}.$$

$$6\overrightarrow{OP}=2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}.$$

よって，

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{t}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}. \quad \cdots①$$

(2) 4点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，P が平面 OAC 上にあるとき，① より，

$$\frac{t}{6}=0.$$

よって，P が平面 OAC 上にあるときの t の値は，

$$t=\boldsymbol{0}.$$

また，4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，P が平面 ABC 上にあるとき，① より，

$$\frac{1}{3}+\frac{t}{6}+\frac{1}{6}=1.$$

よって，P が平面 ABC 上にあるときの t の値は，

$$t=\boldsymbol{3}.$$

(3)
$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

とおくと，① より，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\frac{t}{6}\vec{b}.$$

これより，

「P は，点 D を通り $\vec{b}$ に平行な直線上を動く」．…②

ここで，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}$$

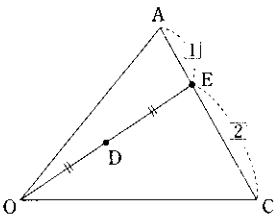
であり，辺 AC を 1：2 に内分する点を E とすると，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}$$

より，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$

となり，D は三角形 OAC の内部に存在する．

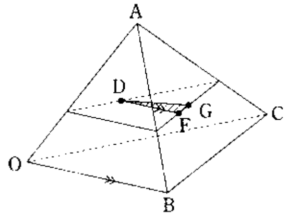


また，$t=3$ のときの P を F とすると，① より，

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

であり，(2) より，F は平面 ABC 上の点であり，さらに ② より，三角形 ABC の内部にある．

よって，P が四面体 OABC の面上または内部にあるように t を変化させるとき，P は線分 DF(両端を含む) 上を動くから，線分 GP が通過する領域は三角形 GDF の周および内部である．



そこで，

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{b}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

より,

$$\overrightarrow{DF}\,/\!/\,\overrightarrow{OB} \text{ かつ } DF:OB=1:2. \quad \cdots③$$

さらに,

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{6}(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$$

より,

$$\overrightarrow{FG}\,/\!/\,\overrightarrow{BC} \text{ かつ } FG:BC=1:6. \quad \cdots④$$

したがって, ③, ④ より,

$$\frac{S}{T}=\frac{\triangle GDF}{\triangle OBC}$$
$$=\frac{DF}{OB}\cdot\frac{FG}{BC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{12}.$$

【解説】 問題

(1) $\overrightarrow{OG}$ を求めるには, 次の公式を用いればよい.

> O は定点とする. 異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC の重心を G とすると,
> $$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$
> **三角形の重心の位置ベクトル**

また, $\overrightarrow{OP}$ を求めるには, 与えられた等式

$$(3-t)\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

に含まれている $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ を $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表し, 等式を整理すればよい.

(2) P が平面 OAC 上にあるときは,

> 同じ直線上にない 3 点 O, A, C の定める平面 OAC 上に点 P があるための条件は,
> $$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$
> と表せることである
> **共面条件 (1)**

を用いると,

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC} \quad (k,\ l \text{ は実数})$$
$$=k\vec{a}+l\vec{c} \quad \cdots(*)$$

と表される. あとは,

> 空間で, 同じ平面上にない 4 点 O, A, B, C に対して, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると, 任意のベクトル $\vec{p}$ は,
> $$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c} \quad (s,\ t,\ u \text{ は実数})$$
> の形にただ 1 通りに表される.
> これより,
> $$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}$$
> $$\Longleftrightarrow s=s' \text{ かつ } t=t' \text{ かつ } u=u'$$
> **空間のベクトルの分解**

に従って, ① と (*) の係数を比較することで,

$\frac{t}{6}=0$ が得られる.

次に, P が平面 ABC 上にあるときは,

> 空間で, 同じ平面上にない 4 点 O, A, B, C に対して, 点 P が平面 ABC 上にあるための条件は,
> $$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$$
> $$(s,\ t,\ u \text{ は実数で, } s+t+u=1)$$
> と表せることである
> **共面条件 (2)**

を用いることにより, ① の係数の和に対して,

$$\frac{1}{3}+\frac{t}{6}+\frac{1}{6}=1$$

を得る.

また, P が平面 ABC 上にあるときの t の値を, 次のように求めてもよい.

((2) の部分的別解)

P が平面 ABC 上にあるための条件は, 実数 α, β を用いて, 次のように表されることである.

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}.$$
$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\alpha(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\beta(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}).$$
$$\overrightarrow{OP}=(1-\alpha-\beta)\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}. \quad \cdots(**)$$

4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないから, ① と (**) より,

$$\frac{1}{3}=1-\alpha-\beta \quad \text{かつ} \quad \frac{t}{6}=\alpha \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{6}=\beta$$

であり, これらより,

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{6},\ t=3.$$

((2) の部分的別解終り)

(3)
$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

とおくと, ① より,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\frac{t}{6}\vec{b}$$

であるから，

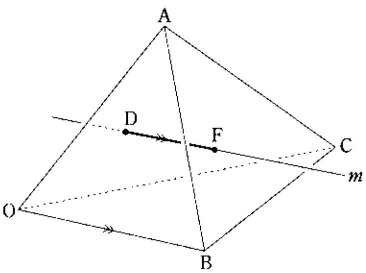
> 点A($\vec{a}$)を通り，ベクトル $\vec{d}(\neq\vec{0})$ に平行な直線を l とすると，l 上の任意の点P($\vec{p}$)に対して，
>
> $$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d} \qquad \cdots(***)$$
>
> となる実数 t がただ1つ定まる．
>
> 逆に(***)で表される点P($\vec{p}$)は l 上の点である
>
> **直線のベクトル方程式**

を用いると，

「Pは，点Dを通り $\vec{b}$ に平行な直線上を動く」…②

ことがわかる．この直線を m とすると，Pが四面体OABCの面上または内部にあるとき，Pは m と四面体OABCの面上および内部の共通部分を動くことになる．

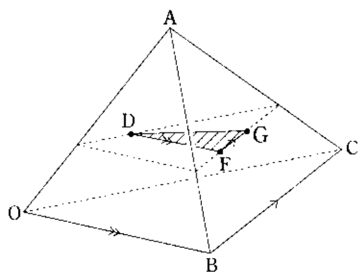
そこで，**【解答】**のようにDが三角形OACの内部にあることを確認し，m と平面ABCの交点，すなわち(2)で求めた $t=3$ のときのPをFとすると，②より，Fも三角形ABCの内部にあるから，Pは線分DF(両端を含む)上を動くことがわかる．



これより，線分GPの通過する領域は三角形GDFの周および内部となり，

$$S=\triangle GDF$$

であるから，$\dfrac{S}{T}$ は三角形GDFと三角形OBCの面積の比となる．



さらに，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

を用いると，**【解答】**のように，

$$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$$

となり，これらより，

$$DF /\!/ OB \quad かつ \quad FG /\!/ BC$$

であるから，

$$\angle DFG=\angle OBC.$$

そこで，$\angle DFG=\angle OBC=\theta$ とすると，

$$S=\triangle GDF=\frac{1}{2}DF\cdot FG\sin\theta,$$

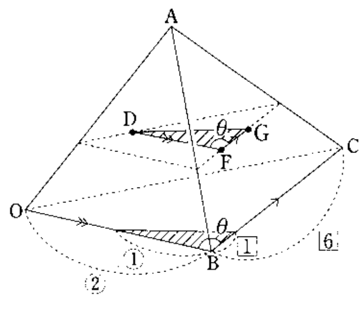
$$T=\triangle OBC=\frac{1}{2}OB\cdot BC\sin\theta$$

と表せる．

よって，

$$\frac{S}{T}=\frac{\frac{1}{2}DF\cdot FG\sin\theta}{\frac{1}{2}OB\cdot BC\sin\theta}=\frac{DF}{OB}\cdot\frac{FG}{BC}$$

となるから，あとは**【解答】**の③，④の比を用いればよい．



また，三角形OBCと三角形GDFの面積比を，

> $$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
>
> **ベクトルと三角形の面積**

を用いて求めることもできる．

((3)の部分的別解)

$$T=\triangle OBC$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BO}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC})^2}.$$

また，

$$\overrightarrow{FD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BO},\ \overrightarrow{FG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$$

より，

$S=\triangle\mathrm{GDF}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2^2}|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2\frac{1}{6^2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{6^2}(\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}$

$=\frac{1}{12}T.$

よって，

$$\frac{S}{T}=\frac{1}{12}.$$

((3)の部分的別解終り)

【Ⅲ型受験者用】

1　小問集合

【Ⅲ型共通　必須問題】

(配点　40点)

(1)　$(2x-1)(y-2)=6$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+3)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

のとき，一般項 a_n を求めよ．

(3)　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ の極値を求めよ．

(4)　関数 $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(5)　n は正の整数とする．

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}$ を求めよ．

【配点】

(1)　8点．

(2)　8点．

(3)　8点．

(4)　8点．

(5)　8点．

【出題のねらい】

(1)　約数・倍数の関係を用いて，方程式の整数解を求めることができるかをみる問題である．

(2)　数列の和から，一般項を求めることができるかをみる問題である．

(3)　微分法を用いて，関数の極値を求めることができるかをみる問題である．

(4)　関数の逆関数を求めることができるかをみる問題である．

(5)　区分求積法を用いて，極限値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　**Ⅱ型** 1 (3)**【解答】**参照．

(2)　$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(n^2+3n)-(n^2+n-2)\}$$
$$=n+1. \quad \cdots①$$

また，

$$a_1=S_1$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4$$
$$=2$$

であるから，①は $n=1$ のときも成り立つ．

よって，

$$a_n=\boldsymbol{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

(3) $f(x)$ の定義域は $x>0$ である．

$$f'(x)=\frac{(\log x)'\cdot x^2-(\log x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で極大となり，

$$極大値 \quad \boldsymbol{\frac{1}{2e}}.$$

(4) $y=f(x)$ とおくと，

$$y=\frac{-2x+3}{x+1}. \quad \cdots①$$

①で x と y を入れかえると，

$$x=\frac{-2y+3}{y+1}.$$
$$x(y+1)=-2y+3.$$
$$(x+2)y=-x+3.$$

$x=-2$ はこの式を満たさないから，$x\neq-2$ であり，

$$y=\frac{-x+3}{x+2}.$$

よって，

$$f^{-1}(x)=\boldsymbol{\frac{-x+3}{x+2}}.$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}=\int_0^1 x\cos\pi x\,dx$$
$$=\int_0^1 x\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)'dx$$
$$=\left[x\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right)\right]_0^1-\int_0^1(x)'\cdot\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,dx$$
$$=-\int_0^1\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi^2}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=\boldsymbol{-\frac{2}{\pi^2}}.$$

【解説】 問題

(1) **Ⅱ型** $\boxed{1}$(3)**【解説】**参照．

(2) 数列の和 S_n から一般項 a_n を求めるには，

> 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和
> $$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
> を S_n とするとき，
> $$\begin{cases} a_1=S_1, \\ a_n=S_n-S_{n-1} \quad (n\geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$
> **和と一般項の関係**

を用いればよい．

(3) $\dfrac{\log x}{x^2}$ を微分するには，

> $f(x)$，$g(x)$ (ただし，$g(x)\neq 0$) が微分可能であるとき，
> $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
> **商の微分法**

> $$(\log x)'=\frac{1}{x}$$
> **対数関数の導関数**

に従って計算すればよい．

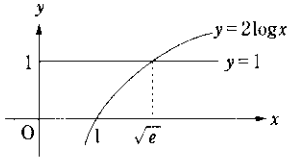
また，$f(x)$ の定義域は $x>0$ であるから，

$$f'(x)=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

の符号は，

$$1-2\log x$$

の符号と一致する．この符号を調べるには，$y=1$ のグラフと $y=2\log x$ のグラフの上下関係に着目するとよい．



図より，

$$0<x<\sqrt{e}\text{ において，}2\log x<1,$$
$$\sqrt{e}<x\text{ において，}\quad 2\log x>1$$

となる．

(4) 関数$f(x)$の逆関数を求めるには，次の手順(i)，(ii)に従えばよい．

(i) $y=f(x)$において，xとyを入れかえた式$x=f(y)$を作る．

(ii) (i)で作った式$x=f(y)$から，yをxの式$g(x)$で表す．

このとき，$y=g(x)$が，$y=f(x)$の逆関数，すなわち，

$$f^{-1}(x)=g(x)$$

となる．

(5) 一般に，次のことが成り立つ．

> $f(x)$が$0\leqq x\leqq 1$で連続であるとき，
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$
> **区分求積法**

本問では，

$$f(x)=x\cos\pi x$$

とおくと，

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\&=\int_0^1 f(x)\,dx\\&=\int_0^1 x\cos\pi x\,dx\end{aligned}$$

となる．

$$\int_a^b x\cos px\,dx\quad(p\text{ は }p\neq 0\text{ を満たす定数})$$

を計算するには，

$$\cos px=\left(\frac{1}{p}\sin px\right)'$$

となることを利用して，次の部分積分法を用いて計算すればよい．

> $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$
> $$=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$
> **部分積分法**

2 確　率

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

X，Yの2人は，それぞれが，A，B，C，Dの文字が1つずつ書かれた4枚のカード$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$と袋を1つもっている．2人は次の手順に従って，テーブルの上にカードを置く操作を繰り返す．

(ア) X，Yはともにカード$\boxed{\text{A}}$をテーブルの上に置き，残る3枚のカードを自分の袋に入れる．

(イ) 「1回目のカード」として，2人は自分の袋の中にある3枚のカードから無作為に1枚のカードを取り出してテーブルの上に置き，(ア)でテーブルの上に置いた自分のカード$\boxed{\text{A}}$を自分の袋に入れる．

(ウ) 2以上の整数kに対して，「k回目のカード」として，2人は自分の袋の中にある3枚のカードから無作為に1枚のカードを取り出してテーブルの上に置き，$(k-1)$回目でテーブルの上に置いた自分のカードを自分の袋に入れる．

nを正の整数とするとき，2人がテーブルの上に置いた「n回目のカード」に書かれた文字が一致する確率をp_nとする．

(1) p_1，p_2をそれぞれ求めよ．

(2) p_{n+1}をp_nを用いて表せ．

(3) p_nを求めよ．

【配点】

(1) 14点．

(2) 16点．

(3) 10点．

【出題のねらい】

漸化式を利用して確率を求められるかをみる問題である．

【解答】

(1) 「1回目のカード」に書かれた文字が一致するのは，次の(i)，(ii)，(iii)の場合である．

(i) $\boxed{B}$で一致する場合.
(ii) $\boxed{C}$で一致する場合.
(iii) $\boxed{D}$で一致する場合.

(i), (ii), (iii)の確率はいずれも,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

よって,

$$p_1=3\cdot\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

「2回目のカード」に書かれた文字が一致するのは, 次の(iv), (v)の場合である.

(iv) 「1回目のカード」に書かれた文字が一致して, 「2回目のカード」に書かれた文字が一致する場合.

(v) 「1回目のカード」に書かれた文字が一致せず, 「2回目のカード」に書かれた文字が一致する場合.

(iv)のとき, 2回目の操作において, Xの袋に入っているカードに書かれた文字とYの袋に入っているカードに書かれた文字はすべて共通である.

したがって, (iv)の確率は,

$$p_1\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

(v)のとき, 2回目の操作において, Xの袋に入っているカードに書かれた文字とYの袋に入っているカードに書かれた文字で, 共通の文字がちょうど2個ある.

したがって, (v)の確率は,

$$(1-p_1)\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{27}.$$

(iv), (v)は互いに排反であるから,

$$p_2=\frac{1}{9}+\frac{4}{27}=\mathbf{\frac{7}{27}}.$$

(2) (1)の p_2 を求めたときと同様に考えて,

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{1}{3}+(1-p_n)\cdot\frac{2}{9}.$$

よって,

$$\boldsymbol{p_{n+1}=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}}.$$

(3) (2)より,

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(p_n-\frac{1}{4}\right).$$

これより, 数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ は, 初項 $p_1-\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列である.

(1)より,

$$p_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

であるから,

$$p_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}.$$

よって,

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}}.$$

【解説】 問題

(1) 「1回目のカード」を取り出す直前の状態は次のようになっている.

	袋の中	テーブルの上
X :	$\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$	$\boxed{A}$
Y :	$\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$	$\boxed{A}$

したがって, 「1回目のカード」に書かれた文字が一致するのは,
(i) $\boxed{B}$で一致する場合,
(ii) $\boxed{C}$で一致する場合,
(iii) $\boxed{D}$で一致する場合
のいずれかである.

【解答】では,

Xがカードを取り出す試行とYがカードを取り出す試行は独立であり,

$$\text{X が}\boxed{B}\text{を取り出す確率が}\ \frac{1}{3},$$

$$\text{Y が}\boxed{B}\text{を取り出す確率が}\ \frac{1}{3}$$

であることから,

> 2つの試行 T_1, T_2 が独立であるとき, T_1 で事象 E_1 が起こり, T_2 で事象 E_2 が起こる確率は,
>
> $$P(E_1)\cdot P(E_2)$$
>
> **独立な試行の確率**

を用いて, (i)の確率を,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

とした.

(ii), (iii)の確率についても同様である.

次に, 「2回目のカード」を取り出す直前の状態について考える.

たとえば, 「1回目のカード」が$\boxed{B}$で一致した場合, 「2回目のカード」を取り出す直前の状態は次のようになっている.

	袋の中	テーブルの上
X :	$\boxed{A}\boxed{C}\boxed{D}$	$\boxed{B}$
Y :	$\boxed{A}\boxed{C}\boxed{D}$	$\boxed{B}$

このとき, Xの袋に入っているカードに書かれた文字と, Yの袋に入っているカードに書かれた文

字で，共通の文字はA，C，Dの3個である．

したがって，このあと「2回目のカード」に書かれた文字が一致する確率は，

$$3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

となる．

「1回目のカード」が$\boxed{C}$で一致する場合も$\boxed{D}$で一致する場合も同様である．

このことから，**【解答】**では，「1回目のカード」に書かれた文字が一致するとき，「2回目のカード」に書かれた文字が一致する確率は，

$$\frac{1}{3}$$

であることに注目した．

また，Xの「1回目のカード」が$\boxed{B}$，Yの「1回目のカード」が$\boxed{C}$の場合，「2回目のカード」を取り出す直前の状態は次のようになっている．

	袋の中	テーブルの上
X：	$\boxed{A}\boxed{C}\boxed{D}$	$\boxed{B}$
Y：	$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{D}$	$\boxed{C}$

このとき，Xの袋に入っているカードに書かれた文字とYの袋に入っているカードに書かれた文字で，共通の文字はA，Dの2個である．

したがって，このあと「2回目のカード」に書かれた文字が一致する確率は，

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

となる．

「1回目のカード」に書かれた文字が一致しない他の場合も同様である．

このことから，**【解答】**では，「1回目のカード」に書かれた文字が一致しないとき，「2回目のカード」に書かれた文字が一致する確率は，

$$\frac{2}{9}$$

であることに注目した．

よって，

$$\begin{aligned}p_2&=p_1\cdot\frac{1}{3}+(1-p_1)\cdot\frac{2}{9}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{9}\\&=\frac{7}{27}\end{aligned}$$

となる．

また，2回目の操作までのカードの取り出し方をすべて考えて，p_1，p_2を求めることもできる．

((1)の別解)

1回目の操作において，Xのカードの取り出し方は，

$$\boxed{B},\ \boxed{C},\ \boxed{D}$$

の3通りであり，Yについても同様である．

したがって，1回目の操作において，X，Yのカードの取り出し方の総数は，

$$3\cdot3\text{ 通り}$$

であり，これらは同様に確からしい．

このうち，「1回目のカード」に書かれた文字が一致するのは，

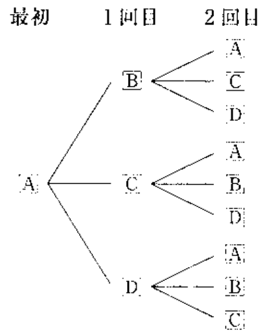
$\boxed{B}$で一致するのが　$1\cdot1=1$(通り)，
$\boxed{C}$で一致するのが　$1\cdot1=1$(通り)，
$\boxed{D}$で一致するのが　$1\cdot1=1$(通り)

であるから，全部で3通りある．

よって，

$$p_1=\frac{3}{3\cdot3}=\frac{1}{3}.$$

2回目までの操作において，Xのカードの取り出し方は次のように9通りある．



Yについても同様であるから，2回目までの操作において，X，Yのカードの取り出し方の総数は，

$$9\cdot9\text{ 通り}$$

であり，これらは同様に確からしい．

このうち，「2回目のカード」に書かれた文字が一致するのは，

$\boxed{A}$で一致するのが　$3\cdot3=9$(通り)，
$\boxed{B}$で一致するのが　$2\cdot2=4$(通り)，
$\boxed{C}$で一致するのが　$2\cdot2=4$(通り)，
$\boxed{D}$で一致するのが　$2\cdot2=4$(通り)

であるから，全部で，

$$9+4+4+4=21\text{(通り)}$$

ある．

よって，

$$p_2=\frac{21}{9\cdot9}=\frac{7}{27}.$$

((1)の別解終り)

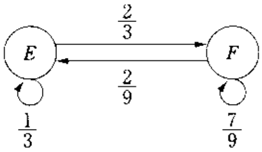
(2)　X，Y が取り出したカードに書かれた文字が一致した状態を E，一致しない状態を F とすると，(1) の議論から，1 回の操作で，

$$E\to E\text{ となる確率は }\frac{1}{3},$$

$$F\to E\text{ となる確率は }\frac{2}{9}$$

となることがわかる．

このことを次のように図示することができる．



「$(n+1)$ 回目のカード」に書かれた文字が一致するのは次の (ア)，(イ) の場合である．

(ア)「n 回目のカード」に書かれた文字が一致し，$(n+1)$ 回目の操作で $E\to E$ となる場合．

この確率は，$p_n\cdot\frac{1}{3}$．

(イ)「n 回目のカード」の書かれた文字が一致せず，$(n+1)$ 回目の操作で $F\to E$ となる場合．

この確率は，$(1-p_n)\cdot\frac{2}{9}$．

(ア)，(イ) は互いに排反であるから，

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=p_n\cdot\frac{1}{3}+(1-p_n)\cdot\frac{2}{9}\\&=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}\end{aligned}$$

となる．

また，「n 回目のカード」が $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ となる確率をそれぞれ設定して，次のように解くこともできる．

((2) の別解)

X が「n 回目のカード」として $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ を取り出す確率をそれぞれ $X_n(\text{A})$，$X_n(\text{B})$，$X_n(\text{C})$，$X_n(\text{D})$ とする．

X が「$(n+1)$ 回目のカード」として $\boxed{\text{A}}$ を取り出すのは，n 回目の操作において $\boxed{\text{A}}$ を取り出さず，かつ $(n+1)$ 回目の操作において $\boxed{\text{A}}$ を取り出すときであるから，

$$X_{n+1}(\text{A})=(1-X_n(\text{A}))\cdot\frac{1}{3}.$$

$X_n(\text{B})$，$X_n(\text{C})$，$X_n(\text{D})$ についても同様である．

Y が「n 回目のカード」として $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ を取り出す確率をそれぞれ $Y_n(\text{A})$，$Y_n(\text{B})$，$Y_n(\text{C})$，$Y_n(\text{D})$ とすると，

$$X_n(\text{A})=Y_n(\text{A}),\ X_n(\text{B})=Y_n(\text{B}),$$
$$X_n(\text{C})=Y_n(\text{C}),\ X_n(\text{D})=Y_n(\text{D})$$

が成り立つ．

そこで

$$X_n(\text{A})=Y_n(\text{A})=a_n,\ X_n(\text{B})=Y_n(\text{B})=b_n,$$
$$X_n(\text{C})=Y_n(\text{C})=c_n,\ X_n(\text{D})=Y_n(\text{D})=d_n$$

とおくと，

$$a_{n+1}=(1-a_n)\cdot\frac{1}{3},\ \ b_{n+1}=(1-b_n)\cdot\frac{1}{3},$$

$$c_{n+1}=(1-c_n)\cdot\frac{1}{3},\ \ d_{n+1}=(1-d_n)\cdot\frac{1}{3}.$$

よって，

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=X_{n+1}(\text{A})Y_{n+1}(\text{A})+X_{n+1}(\text{B})Y_{n+1}(\text{B})\\&\quad+X_{n+1}(\text{C})Y_{n+1}(\text{C})+X_{n+1}(\text{D})Y_{n+1}(\text{D})\\&=a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2+c_{n+1}{}^2+d_{n+1}{}^2\\&=\frac{1}{9}(1-a_n)^2+\frac{1}{9}(1-b_n)^2\\&\qquad+\frac{1}{9}(1-c_n)^2+\frac{1}{9}(1-d_n)^2\\&=\frac{1}{9}(a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2+d_n{}^2)\\&\qquad-\frac{2}{9}(a_n+b_n+c_n+d_n)+\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

ここで，

$$a_n+b_n+c_n+d_n=1,$$

$$\begin{aligned}p_n&=X_n(\text{A})Y_n(\text{A})+X_n(\text{B})Y_n(\text{B})\\&\quad+X_n(\text{C})Y_n(\text{C})+X_n(\text{D})Y_n(\text{D})\\&=a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2+d_n{}^2\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=\frac{1}{9}p_n-\frac{2}{9}\cdot1+\frac{4}{9}\\&=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

((2) の別解終り)

(3)　2 項間漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q\quad(p,\ q\text{ は定数で，}p\neq1)$$

は，

$$\alpha=p\alpha+q$$

を満たす定数 $\alpha\left(=\frac{q}{1-p}\right)$ を用いることにより，

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

の形に変形することができる．

これより，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は，初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であるから，

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

を得る．

本問では，(2) より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}\qquad\cdots①$$

であるから，

$$\alpha=\frac{1}{9}\alpha+\frac{2}{9}$$

を満たす $\alpha\left(=\frac{1}{4}\right)$ を用いて，①を，

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

と変形すれば，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ が，初項 $p_1-\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列となることがわかり，これより，p_n を求めることができる．

3　空間ベクトル

【Ⅲ型　必須問題】

（配点　40点）

> 四面体OABCにおいて，三角形ABCの重心をGとする．また，実数 t に対して，空間内の点Pを，
>
> $$(3-t)\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$
>
> で定める．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問に答えよ．
>
> (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．
>
> (2)　Pが平面OAC上にあるときの t の値を求めよ．また，Pが平面ABC上にあるときの t の値を求めよ．
>
> (3)　Pが四面体OABCの面上または内部にあるように t を変化させるとき，線分GPが通過する領域の面積を S とする．三角形OBCの面積を T とするとき，$\frac{S}{T}$ の値を求めよ．

【配点】

(1)　10点．

(2)　12点．

(3)　18点．

【出題のねらい】

(1)，(2)は空間ベクトルの基本的な扱いができるか，(3)は直線のベクトル方程式を利用して線分が通過する領域を把握し，その領域の面積と三角形の面積の比を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】　Ⅱ型 6【解答】参照．

【解説】　Ⅱ型 6【解説】参照．

問題

4　積分法

【Ⅲ型　必須問題】

（配点　40点）

> xy 平面上の3点(0，0)，(−1，0)，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c は実数）がある．
>
> 連立不等式
>
> $$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 1, \\ y\geqq ax^2+bx+c \end{cases}$$
>
> で表される領域を D とするとき，次の問に答えよ．
>
> (1)　a，b，c の値を求めよ．
>
> (2)　D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ．
>
> (3)　D を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

【配点】

(1)　9点．

(2)　12点．

(3)　19点．

【出題のねらい】

不等式で表された領域を x 軸あるいは y 軸のまわりに1回転してできる回転体について，体積を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ が3点(0，0)，(−1，0)，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通ることより，

$$\begin{cases} 0=c, \\ 0=a-b+c, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c. \end{cases}$$

よって，

$$a=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}},\quad b=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}},\quad c=\mathbf{0}.$$

(2)　$x^2+y^2=1$ に $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ を代入すると，

$$x^2+\frac{4}{3}(x^2+x)^2=1.$$

$$4x^4+8x^3+7x^2-3=0.$$

$$(x+1)(2x-1)(2x^2+3x+3)=0.$$

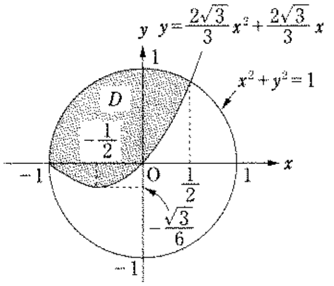
ここで，x が実数のとき，

$$2x^2+3x+3=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$$

であることに注意すると，

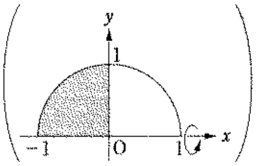
$$x=-1,\ \frac{1}{2}.$$

よって，領域 D は次図の網掛け部分となる．ただし，境界はすべて含む．

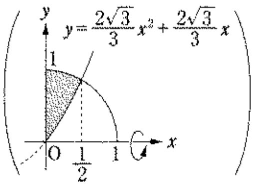


したがって，

$V_1=$



$+$



$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot1^3+\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left\{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2\right\}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{7}{3}x^2-\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{3}x^4\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\pi\left[x-\frac{7}{9}x^3-\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{15}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\pi\cdot\frac{127}{360}$$

$$=\boldsymbol{\frac{367}{360}}\pi.$$

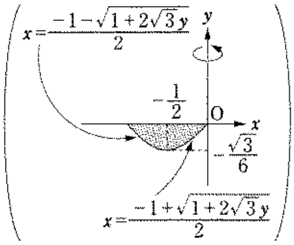
(3) $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ を x について解くと，

$$x^2+x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0.$$

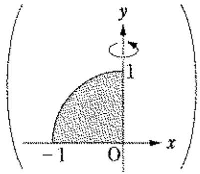
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+2\sqrt{3}\,y}}{2}.$$

よって，

$V_2=$



$+$



$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^0\pi\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{1+2\sqrt{3}\,y}}{2}\right)^2-\left(\frac{-1+\sqrt{1+2\sqrt{3}\,y}}{2}\right)^2\right\}dy+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot1^3$$

$$=\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^0\sqrt{1+2\sqrt{3}\,y}\,dy+\frac{2}{3}\pi$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}(1+2\sqrt{3}\,y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^0+\frac{2}{3}\pi$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\pi$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}\pi.$$

【解説】 問題

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が3点 $(0,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通ることを用いて連立方程式を作り，それを解くことで a，b，c の値を求めることができる．

(2) まず，領域 D を把握するために，円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ の共有点を求める．

$x^2+y^2=1$ に $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ を代入して，x に関する方程式を解くことで，共有点の x 座標を求めることができる．その際，放物線が通る点のうちの2点 $(-1,\ 0)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の点でもあることに着目しておくと，方程式を解くときに見通しがよくなる．

あとは，

不等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq r^2 \quad (r>0)$$

で表される領域は，中心$(a,\ b)$，半径rの円の周および内部．

不等式

$$y \geqq f(x)$$

で表される領域は，曲線$y=f(x)$の曲線上および曲線より上の部分

不等式と領域

を用いて，Dを図示した．

領域Dのx軸のまわりの回転体については，$-1 \leqq x \leqq 0$の部分と$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$の部分に分けて考える．

Dの$-1 \leqq x \leqq 0$の部分のx軸のまわりの回転体は，原点を中心とする半径1の球の半分となるから，

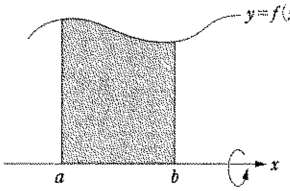
半径$r\,(r>0)$の球の体積は，

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

球の体積

を用いることで，その体積を求めることができる．

Dの$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$の部分の$x$軸のまわりの回転体の体積については，



曲線$y=f(x)$とx軸および2直線$x=a$，$x=b$ $(a<b)$で囲まれる領域をx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は，

$$\int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

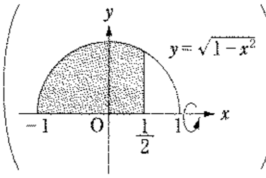
x軸のまわりの回転体の体積

に基づいて定積分で表し，定積分の値を求めればよい．

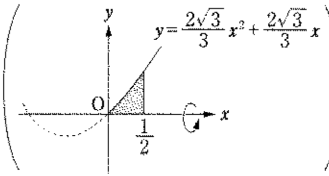
領域Dを把握したあとは，次のようにして体積を求めることもできる．

（V_1を求める部分的別解）

$V_1=$



$-$



$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(\sqrt{1-x^2})^2dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\,dx-\frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(x^4+2x^3+x^2)\,dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}\pi\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pi\cdot\frac{9}{8}-\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{19}{240}$$

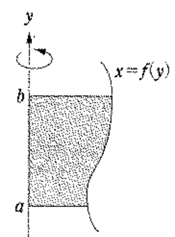
$$=\frac{367}{360}\pi.$$

（V_1を求める部分的別解終り）

(3)　領域Dのy軸のまわりの回転体については，$-\frac{\sqrt{3}}{6} \leqq y \leqq 0$の部分と$0 \leqq y \leqq 1$の部分に分けて考える．

Dの$0 \leqq y \leqq 1$の部分のy軸のまわりの回転体は，原点を中心とする半径1の球の半分となるから，(2)と同様に，その体積を求めることができる．

Dの$-\frac{\sqrt{3}}{6} \leqq y \leqq 0$の部分の$y$軸のまわりの回転体の体積については，



曲線$x=f(y)$とy軸および2直線$y=a$，$y=b\,(a<b)$で囲まれる領域をy軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は，

$$\int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

y軸のまわりの回転体の体積

に基づいて定積分で表し，定積分の値を求めればよ

い．

また，次のようにして体積を求めることもできる．

((3) の別解)

$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$ の $-1\leqq x\leqq -\dfrac{1}{2}$ の部分にある点を $(x_1,\ y)$，$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ の部分にある点を $(x_2,\ y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
V_2&=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^{0}\pi x_1{}^2dy-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{6}}^{0}\pi x_2{}^2dy+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx+\frac{2}{3}\pi\\
&=-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx+\frac{2}{3}\pi\\
&=-\int_{-1}^{0}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx+\frac{2}{3}\pi \qquad \cdots(*)\\
&=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\int_{-1}^{0}(2x^3+x^2)\,dx+\frac{2}{3}\pi\\
&\qquad\left(\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(2x+1)\text{ より}\right)\\
&=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\frac{2}{3}\pi\\
&=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{3}\pi\\
&=\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi.
\end{aligned}
$$

((3) の別解終り)

$(*)$ のあとは，部分積分法を用いて，次のように計算することもできる．

(V_2 を求める部分的別解)

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
V_2&=-\int_{-1}^{0}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx+\frac{2}{3}\pi \qquad \cdots(*)\\
&=-\pi\int_{-1}^{0}x^2f'(x)\,dx+\frac{2}{3}\pi\\
&=-\pi\left\{\Big[x^2f(x)\Big]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2xf(x)\,dx\right\}+\frac{2}{3}\pi\\
&=\pi f(-1)+2\pi\int_{-1}^{0}\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^3+x^2)\,dx+\frac{2}{3}\pi\\
&=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\frac{2}{3}\pi\\
&\qquad (f(-1)=0\text{ より})\\
&=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi\cdot\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\pi\\
&=\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi.
\end{aligned}
$$

(V_2 を求める部分的別解終り)

5 複素数平面

【Ⅲ型　選択問題】

(配点　40点)

> i は虚数単位とし，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする．
>
> (1) $\omega+1$ を極形式で表せ．
>
> (2) 複素数 α に対して，複素数平面上で，$\alpha-1$，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2+\omega$ がそれぞれ異なる 3 点 A，B，C を表すものとする．
>
> (i) 三角形 ABC は正三角形であることを示せ．
>
> (ii) α が $|\alpha|=2$ を満たしながら変化するとき，三角形 ABC の面積が最大となる α の値を求めよ．

【配点】

(1)　8 点．

(2)　32 点．

(i)　14 点．(ii)　18 点．

【出題のねらい】

複素数を極形式で表すことができるか，また，複素数平面上の三角形の面積の最大値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$
\begin{aligned}
\omega+1&=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1\\
&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
&=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

(2)(i)　$\alpha-1$，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2+\omega$ はすべて異なる複素数であり，

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\alpha\omega^2+\omega)-(\alpha-1)}{\alpha\omega-(\alpha-1)}\\
&=\frac{(\omega+1)(\omega-1)\alpha+\omega+1}{(\omega-1)\alpha+1}\\
&=\frac{(\omega+1)\{(\omega-1)\alpha+1\}}{(\omega-1)\alpha+1}\\
&=\omega+1\\
&=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}. \qquad ((1)\text{ より})
\end{aligned}
$$

よって，複素数平面上で B($\alpha\omega$) を A($\alpha-1$) を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転すると C($\alpha\omega^2+\omega$) に重なる．

したがって，三角形 ABC は正三角形である．

(ii)　(i) より，3 点 A，B，C が異なるとき，α の値

によらず三角形ABCは正三角形であるから，三角形ABCの面積が最大となるのは，

$$\begin{aligned} AB &= |\alpha\omega-(\alpha-1)| \\ &= |\alpha\omega-\alpha+1| \end{aligned}$$

が最大となるときである．

$$z=\alpha\omega-\alpha+1$$

とおくと，

$$\alpha=\frac{z-1}{\omega-1} \qquad \cdots①$$

であるから，$|\alpha|=2$ より，

$$\left|\frac{z-1}{\omega-1}\right|=2.$$

よって，

$$|z-1|=2|\omega-1|$$

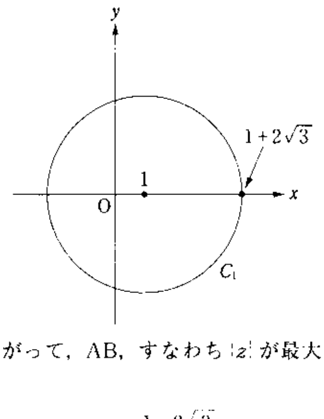
であり，

$$\begin{aligned} |\omega-1| &= \left|\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-1\right| \\ &= \left|-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから，

$$|z-1|=2\sqrt{3}.$$

これより，複素数平面上の点 z は，点1を中心とする半径 $2\sqrt{3}$ の円 C_1 上を動く．



したがって，AB，すなわち $|z|$ が最大となるのは，

$$z=1+2\sqrt{3}$$

のときであるから，求める α の値は，①より，

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1+2\sqrt{3}-1}{\omega-1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}-1} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{-3+\sqrt{3}i} \\ &= \frac{4\sqrt{3}(-3-\sqrt{3}i)}{(-3)^2-(\sqrt{3}i)^2} \\ &= -\sqrt{3}-i. \end{aligned}$$

（このとき，$z\neq 0$ より，$AB\neq 0$ であるから，(i)の結果と合わせると，3点A，B，Cは異なる3点である．）

【解説】 **問題**

(1) 複素数 $\omega+1$ を極形式で表すには，

> 複素数平面の原点をOとし，0でない複素数 z が表す点をPとする．
>
> $OP=r$ とし，実軸の正の部分から半直線OPまでの回転角を θ とすると，
>
> $$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
>
> と表せる．
>
> これを z の極形式といい，r を z の絶対値，θ を z の偏角という
>
> **複素数の極形式**

を用いることになる．

$$\begin{aligned} \omega+1 &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

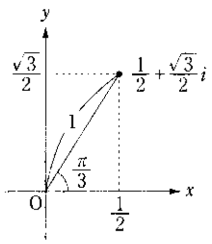
であるから，上記において，

$$r=1,\ \theta=\frac{\pi}{3}$$

であり，$\omega+1$ の極形式は，

$$\omega+1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

となる．



(2)(i) 三角形ABCが正三角形であることを示すには，

> 複素数平面上で，点 β が点 α を中心として角 θ だけ回転して点 γ に移るとき，
> $$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$
> が成り立つ
>
> **複素数平面上の回転**

を用いて，点 $\alpha\omega$ を点 $\alpha-1$ を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した位置に点 $\alpha\omega^2+\omega$ があること，すなわち，

$$(\alpha\omega^2+\omega)-(\alpha-1)$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{\alpha\omega-(\alpha-1)\},$$

または，

$$(\alpha\omega^2+\omega)-(\alpha-1)$$
$$=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{\alpha\omega-(\alpha-1)\}$$

のいずれかが成り立つことを示せばよい．

そこで**【解答】**では，これらの等式の両辺を $\alpha\omega-(\alpha-1)$ で割り，

$$\frac{(\alpha\omega^2+\omega)-(\alpha-1)}{\alpha\omega-(\alpha-1)}$$

の値が $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ に等しいことを確認した．

なお，2点A，Bは異なるから，分母の $\alpha\omega-(\alpha-1)$ は0でない．

三角形ABCが正三角形であることを，辺の長さに注目して証明することもできる．

((2)(i)の別解)

$$|\omega|=|\omega+1|=1$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}AB&=|\alpha\omega-(\alpha-1)|\\&=|(\omega-1)\alpha+1|,\\BC&=|(\alpha\omega^2+\omega)-\alpha\omega|\\&=|(\omega^2-\omega)\alpha+\omega|\\&=|\omega\{(\omega-1)\alpha+1\}|\\&=|\omega||(\omega-1)\alpha+1|\\&=|(\omega-1)\alpha+1|,\\CA&=|(\alpha\omega^2+\omega)-(\alpha-1)|\\&=|(\omega^2-1)\alpha+(\omega+1)|\\&=|(\omega+1)\{(\omega-1)\alpha+1\}|\\&=|\omega+1||(\omega-1)\alpha+1|\\&=|(\omega-1)\alpha+1|\end{aligned}$$

であるから，

$$AB=BC=CA=|(\omega-1)\alpha+1|.$$

よって，

三角形ABCは正三角形である．

((2)(i)の別解終り)

(ii) (i)により，三角形ABCが存在するとき，これはつねに正三角形である．これより，三角形ABCの面積が最大となるのは，一辺の長さが最大となるときであるから，ABの長さが最大となるときの α の値を求めればよい．

$$AB=|(\omega-1)\alpha+1|$$

であるから，

$$z=(\omega-1)\alpha+1 \text{ かつ } |\alpha|=2$$

のもとで，$|z|$ が最大となるときを考えればよい．

$\omega\neq1$ であるから，$z=(\omega-1)\alpha+1$ より，

$$\alpha=\frac{z-1}{\omega-1}$$

と表すことができ，これを $|\alpha|=2$ に代入して，

$$\left|\frac{z-1}{\omega-1}\right|=2$$

とすることによって，z の満たすべき条件を数式化した．

これはさらに，

$$|z-1|=2|\omega-1|$$

と変形できるが，右辺の $|\omega-1|$ は定数であるから，

> 複素数 $\beta=p+qi$ （p，q は実数）の絶対値 $|\beta|$ は，
> $$|\beta|=\sqrt{p^2+q^2}$$
>
> **複素数の絶対値**

を用いて具体的に計算することができる．実際に計算すると，

$$\begin{aligned}|\omega-1|&=\left|\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-1\right|\\&=\left|-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|\\&=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる．

こうして，

$$|z-1|=2\sqrt{3}$$

を得たあとは，この等式を満たす点 z が描く図形を，

> 複素数平面上において，β を中心とし，半径が r の円周上の点 z の満たす方程式は，
> $$|z-\beta|=r$$
>
> **複素数平面上の円**

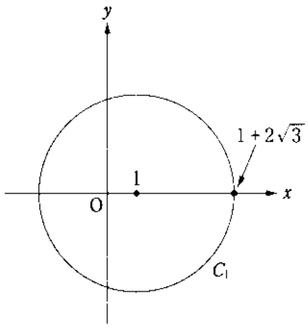
を用いて考えた．

上記において，$\beta=1$，$r=2\sqrt{3}$ とすることによ

り，本間の点 z は，実軸上の点 1 を中心とする半径 $2\sqrt{3}$ の円 C_1 を描くことがわかる．

$|z|$ が最大となるとは，複素数平面上での点 z と原点 O の距離が最大となることを意味する．

よって，z が，O を通る C_1 の直径上にあって，O から遠い方の点に一致するときに，$|z|$ は最大となる．このとき，次図より，$z=1+2\sqrt{3}$ とわかる．



あとは，これを $\alpha=\dfrac{z-1}{\omega-1}$ に代入すればよい．

6 微積分融合

【Ⅲ型　選択問題】

（配点　40点）

> 関数
> $$f(x)=\frac{e^x+2}{e^x+e^{-x}+4}$$
> に対して，数列 $\{a_n\}$ を，
> $$a_1=0,\ a_{n+1}=\int_{-1}^{a_n}f(x)\,dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
> で定める．
>
> (1) $t=e^{2x}+4e^x+1$ と置換することにより，
> $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=1$ が成り立つことを示せ．
>
> (2)(i) $\displaystyle\int_{a_n}^{1}f(x)\,dx=1-a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
> が成り立つことを示せ．
>
> (ii) すべての正の整数 n に対して
> $$0\leqq a_n\leqq 1$$
> が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．
>
> (3) すべての正の整数 n に対して
> $$1-a_{n+1}\leqq f(1)(1-a_n)$$
> が成り立つことを示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

【配点】

(1) 10 点．

(2) 14 点．

(i) 4 点．(ii) 10 点．

(3) 16 点．

【出題のねらい】

定積分の性質を利用して，定積分で定まる数列の極限を求められるかをみる問題である．

【解答】

(1) $t=e^{2x}+4e^x+1$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=2e^{2x}+4e^x$$
$$=2(e^{2x}+2e^x)$$

より，

$$(e^{2x}+2e^x)\,dx=\frac{1}{2}dt.$$

また，x と t の対応は次のようになる．

x	-1 → 1
t	$e^{-2}+4e^{-1}+1$ → e^2+4e+1

したがって，

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+2}{e^x+e^{-x}+4}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+4e^x+1}dx$$
$$=\int_{e^{-2}+4e^{-1}+1}^{e^2+4e+1}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{e^{-2}+4e^{-1}+1}^{e^2+4e+1}\frac{1}{t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_{e^{-2}+4e^{-1}+1}^{e^2+4e+1}$$
$$=\frac{1}{2}\{\log(e^2+4e+1)-\log(e^{-2}+4e^{-1}+1)\}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{e^2+4e+1}{e^{-2}+4e^{-1}+1}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{e^2(e^2+4e+1)}{e^2+4e+1}$$
$$=\frac{1}{2}\log e^2$$
$$=1.$$

よって，

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=1$$

が成り立つ．

(2)(i)
$$\int_{a_n}^{1}f(x)\,dx=\int_{a_n}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{a_n}f(x)\,dx+1\quad\text{((1) より)}$$
$$=-a_{n+1}+1.$$

したがって，

$$\int_{a_n}^{1} f(x)\,dx = 1 - a_{n+1}$$

が成り立つ．

(ii) すべての正の整数 n に対して

$$0 \leqq a_n \leqq 1 \qquad \cdots(*)$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示す．

[Ⅰ] $n=1$ のとき，$a_1=0$ であるから，(*) は成り立つ．

[Ⅱ] $n=k$ のとき，(*) が成り立つと仮定すると，

$$0 \leqq a_k \leqq 1. \qquad \cdots①$$

ここで，$f(x)>0$ であり，① のとき，$-1<a_k$ となるから，

$$a_{k+1} = \int_{-1}^{a_k} f(x)\,dx \geqq 0.$$

また，(i) より，

$$1 - a_{k+1} = \int_{a_k}^{1} f(x)\,dx \qquad \cdots②$$

であり，① と $f(x)>0$ より，

$$\int_{a_k}^{1} f(x)\,dx \geqq 0 \qquad \cdots③$$

であるから，②，③ より，

$$a_{k+1} \leqq 1.$$

したがって，

$$0 \leqq a_{k+1} \leqq 1$$

となり，(*) は $n=k+1$ のときも成り立つ．

以上[Ⅰ]，[Ⅱ]より，すべての正の整数 n に対して

$$0 \leqq a_n \leqq 1$$

が成り立つ．

(3) $f(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x+e^{-x}+4}$ より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x+e^{-x}+4)-(e^x+2)(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x}+4)^2} \\ &= \frac{2(e^x+e^{-x}+1)}{(e^x+e^{-x}+4)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ は増加関数である．

よって，$a_n \leqq x \leqq 1$ において，

$$f(x) \leqq f(1).$$

これより，

$$\int_{a_n}^{1} f(x)\,dx \leqq \int_{a_n}^{1} f(1)\,dx$$

が成り立つから，(2)(i) より，

$$\begin{aligned} 1-a_{n+1} &= \int_{a_n}^{1} f(x)\,dx \\ &\leqq \int_{a_n}^{1} f(1)\,dx \\ &= f(1)\int_{a_n}^{1} dx \\ &= f(1)\Big[\,x\,\Big]_{a_n}^{1} \\ &= f(1)(1-a_n). \end{aligned}$$

したがって，すべての正の整数 n に対して

$$1-a_{n+1} \leqq f(1)(1-a_n)$$

が成り立つ．

$f(1) = \dfrac{e+2}{e+e^{-1}+4}\ (>0)$ より，

$$1-a_{n+1} \leqq \frac{e+2}{e+e^{-1}+4}(1-a_n). \qquad \cdots④$$

$1-a_n \geqq 0$ ($n=1$, 2, 3, …) に注意して，④ を繰り返し用いると，

$$1-a_n \leqq \left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1}(1-a_1).$$

$a_1=0$ と $0 \leqq a_n \leqq 1$ より，

$$0 \leqq 1-a_n \leqq \left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1}.$$

$$1-\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1} \leqq a_n \leqq 1. \qquad \cdots⑤$$

$0 < \dfrac{e+2}{e+e^{-1}+4} < 1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1} = 0$$

であるから，⑤ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{1}.$$

【解説】 問題

(1) 次の置換積分法を用いる．

$t=g(x)$ について，x と t の対応が，

x	$a \to b$
t	$\alpha \to \beta$

のとき，

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

定積分の置換積分法

$t=g(x)$ のとき，

$$\frac{dt}{dx} = g'(x)$$

であるが，これを形式的に

$$dt = g'(x)\,dx$$

と表すことがある．このとき $g(x)$ を t，$g'(x)\,dx$ を dt と置き換えることにより，置換積分法の公式が得られる．

本問では，$t=e^{2x}+4e^x+1$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=2e^{2x}+4e^{x}$$
$$=2(e^{2x}+2e^{x})$$

であるが，これを形式的に

$$\frac{1}{2}dt=(e^{2x}+2e^{x})\,dx$$

と表し，上の公式を用いた．

(2)(i)　次の定積分の性質を用いればよい．

> a，b，c を定数とするとき，
> $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$
> $$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$
> **定積分の性質**

(ii)　数学的帰納法とは，次のような証明法である．

> 正の整数 n についての命題 $P(n)$ が，すべての正の整数 n について成り立つことを示すには，次の［Ⅰ］，［Ⅱ］を示せばよい．
> ［Ⅰ］　$P(1)$ が成り立つ．
> ［Ⅱ］　$P(k)$ が成り立つと仮定すると，
> 　　　$P(k+1)$ も成り立つ．
> **数学的帰納法**

【解答】では，$a_{k+1}\geqq 0$ を示すところで，

> $a\leqq x\leqq b\,(a\leqq b)$ において，$f(x)>0$ ならば，
> $$\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$$
> **定積分と不等式(1)**

を用いた．

また，$a_{k+1}\leqq 1$ を示すところでは，さらに，(i)の結果を利用した．

(3)　(2)(i)の結果より，

$$1-a_{n+1}=\int_{a_n}^1 f(x)\,dx$$

であるから，示すべき不等式は，

$$\int_{a_n}^1 f(x)\,dx\leqq f(1)(1-a_n) \qquad \cdots(**)$$

となる．

$$((**)\text{の右辺})=f(1)(1-a_n)$$

に着目すると，$a_n\leqq x\leqq 1$ において，もし，

$$f(x)\leqq f(1) \qquad \cdots(***)$$

が成り立てば，

> $a\leqq x\leqq b\;(a\leqq b)$ において，$f(x)\leqq g(x)$ ならば，
> $$\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx$$
> **定積分と不等式(2)**

を用いることで，

$$\int_{a_n}^1 f(x)\,dx\leqq\int_{a_n}^1 f(1)\,dx$$

が得られ，

$$\int_{a_n}^1 f(1)\,dx=f(1)\int_{a_n}^1 dx$$
$$=f(1)\Big[x\Big]_{a_n}^1$$
$$=f(1)(1-a_n)$$

より，(**)が成り立つこととなる．

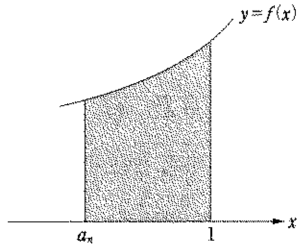
そこで，**【解答】**では，$f(x)$ が増加関数であることを導き，(***)が成り立つことを示した．

また，定積分を面積として捉えることにより，(**)が成り立つことを次のように考えることもできる．

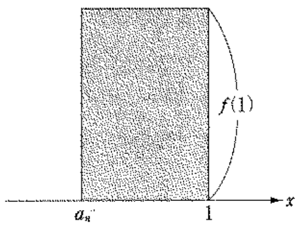
$f(x)>0$ であり，$f(x)$ は増加関数であるから，$a_n\neq 1$ のとき，

$$\int_{a_n}^1 f(x)\,dx$$

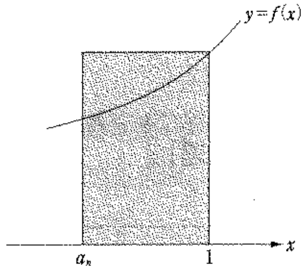
は，次図の網掛け部分の面積を表す．



一方，$f(1)(1-a_n)$ は，次図の網掛け部分の面積を表す．



したがって，



図で面積を比べることにより，

$$\int_{a_n}^1 f(x)\,dx\leqq f(1)(1-a_n)$$

が成り立つことがわかる．

(これは $a_n=1$ のときも成り立つ.)

また,

$$1-a_{n+1}\leqq f(1)(1-a_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を示したあとは, $f(1)=\dfrac{e+2}{e+e^{-1}+4}(>0)$ であるから,

$$1-a_{n+1}\leqq\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}(1-a_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり, $1-a_n\geqq0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に注意して, これを繰り返し用いることで,

$$\begin{aligned}1-a_n&\leqq\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}(1-a_{n-1})\\&\leqq\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^2(1-a_{n-2})\\&\leqq\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^3(1-a_{n-3})\\&\quad\vdots\\&\leqq\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1}(1-a_1)\end{aligned}$$

となる.

あとは, $a_1=0$ と $0\leqq a_n\leqq1$ より,

$$1-\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1}\leqq a_n\leqq1$$

を導き, $0<\dfrac{e+2}{e+e^{-1}+4}<1$ より,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e+2}{e+e^{-1}+4}\right)^{n-1}=0$$

であることと,

> N を正の整数とする. $n\geqq N$ を満たすすべての整数 n に対して
>
> $$p_n\leqq a_n\leqq q_n$$
>
> が成り立ち,
>
> $$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}q_n=\alpha\quad(\alpha\text{ は定数})$$
>
> ならば,
>
> $$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$
>
> **不等式と極限(はさみうちの原理)**

を用いて, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めればよい.

7 行 列

【Ⅲ型 選択問題】

(配点 40点)

> 実数 p, q に対して,
>
> $$A=\begin{pmatrix}p&-1\\q&p-1\end{pmatrix}$$
>
> とする.
>
> (1) $A^2-(2p-1)A$ を p, q を用いて表せ.
>
> (2) $A^3=-E$ が成り立つとき, 次の問に答えよ.
>
> ただし, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ とする.
>
> (i) p, q の値を求めよ.
>
> (ii) n は正の整数とし, 点Pを円 $C:x^2+y^2=1$ 上の点とする. xy 平面上で, A^n が表す1次変換によるPの像を点 P_n とする. 任意の正の整数 n に対して P_n が C 上または内部にあるようなPの存在範囲を図示せよ.

【配点】

(1) 8点.

(2) 32点.

(i) 14点, (ii) 18点.

【出題のねらい】

行列の計算を正しく実行することができるか, また, 行列の性質に着目し, 点の移動により順次得られる点を正しく把握することができるかをみる問題である.

【解答】

(1) $A=\begin{pmatrix}p&-1\\q&p-1\end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{aligned}A^2&=\begin{pmatrix}p&-1\\q&p-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&-1\\q&p-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}p^2-q&-2p+1\\2pq-q&-q+(p-1)^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}A^2-(2p-1)A&=\begin{pmatrix}p^2-q&-2p+1\\2pq-q&-q+(p-1)^2\end{pmatrix}\\&\quad-\begin{pmatrix}p(2p-1)&-2p+1\\2pq-q&(2p-1)(p-1)\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\begin{pmatrix}-p^2+p-q&0\\0&-p^2+p-q\end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

(2)(i) (1)の結果より,

$$A^2=(2p-1)A-(p^2-p+q)E.$$

これより,

$$\begin{aligned}A^3&=AA^2\\&=A\{(2p-1)A-(p^2-p+q)E\}\\&=(2p-1)A^2-(p^2-p+q)A\\&=(2p-1)\{(2p-1)A-(p^2-p+q)E\}\\&\qquad-(p^2-p+q)A\\&=(3p^2-3p-q+1)A-(2p-1)(p^2-p+q)E.\end{aligned}$$

$A^3=-E$ であるから,

$$(3p^2-3p-q+1)A=\{(2p-1)(p^2-p+q)-1\}E.$$

A は E の実数倍ではないから，

$$\begin{cases} 3p^2-3p-q+1=0, & \cdots ① \\ (2p-1)(p^2-p+q)-1=0. & \cdots ② \end{cases}$$

① より，

$$q=3p^2-3p+1. \qquad \cdots ③$$

② に代入して，

$$(2p-1)(4p^2-4p+1)-1=0.$$

$$(2p-1)^3=1.$$

p は実数であるから，

$$2p-1=1.$$

$$\boldsymbol{p=1}.$$

③ に代入して，

$$\boldsymbol{q=1}.$$

(ii) (i)の結果より，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また，点 P_{n+3} は，A^3 が表す1次変換による点 P_n の像である．

$A^3=-E$ であるから，P_{n+3} は P_n を原点に関して対称に移した点であり，P_n が C 上または内部にあれば，P_{n+3} も C 上または内部にある．

これより，任意の正の整数 n に対して P_n が C 上または内部にある条件は，P_1，P_2，P_3 がいずれも C 上または内部にあることである．

$P(X,\ Y)$ とおくと，

$$X^2+Y^2=1. \qquad \cdots ④$$

また，$P_1(x_1,\ y_1)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X-Y \\ X \end{pmatrix}$$

より，

$$P_1(X-Y,\ X)$$

であるから，P_1 が C 上または内部にある条件は，

$$(X-Y)^2+X^2 \leqq 1.$$

$$X^2-2XY+Y^2+X^2 \leqq 1.$$

$$X^2-2XY \leqq 0. \qquad (④ より)$$

$$X(X-2Y) \leqq 0. \qquad \cdots ⑤$$

次に，$P_2(x_2,\ y_2)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} X-Y \\ X \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -Y \\ X-Y \end{pmatrix}$$

より，

$$P_2(-Y,\ X-Y)$$

であるから，P_2 が C 上または内部にある条件は，

$$(-Y)^2+(X-Y)^2 \leqq 1.$$

$$Y^2+X^2-2XY+Y^2 \leqq 1.$$

$$Y^2-2XY \leqq 0. \qquad (④ より)$$

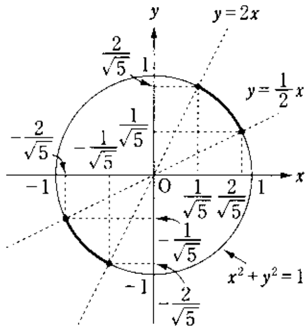
$$Y(Y-2X) \leqq 0. \qquad \cdots ⑥$$

さらに，P_3 は，P を原点に関して対称に移した点であるから，C 上にある．

よって，⑤，⑥ より，求める P の存在範囲は C 上で不等式

$$\begin{cases} x(x-2y) \leqq 0, \\ y(y-2x) \leqq 0 \end{cases}$$

を満たす部分であり，次図の太線部(端点を含む)である．



【解説】 問題

(1) **【解答】**では，$A^2-(2p-1)A$ を成分で計算したが，

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つ．

ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする

ケーリー・ハミルトンの定理

を用いて，次のように求めることもできる．

((1) の別解)

$A=\begin{pmatrix} p & -1 \\ q & p-1 \end{pmatrix}$ であるから，ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$A^2-(2p-1)A+\{p(p-1)+q\}E=O.$$

よって，

$$A^2-(2p-1)A=-\{p(p-1)+q\}E$$

$$=\begin{pmatrix} -p^2+p-q & 0 \\ 0 & -p^2+p-q \end{pmatrix}.$$

((1) の別解終り)

(2)(i) $A^3=-E$ を満たす p，q の値を求めるには，A^3 の成分を求め，それが$-E$と一致する条件を求めればよいが，A^3 を直接計算するのは面倒である．

そこで，【解答】では，(1)の結果から，
$A^2=(2p-1)A-(p^2-p+q)E$ であることを利用し，「次数下げ」を行うことで，A^3 を A と E で表した．

これを用いると，$A^3=-E$ より，

$$(3p^2-3p-q+1)A=\{(2p-1)(p^2-p+q)-1\}E \quad \cdots(*)$$

が得られる．

ここで，$3p^2-3p-q+1\neq 0$ と仮定すると，$(*)$ より，

$$A=kE.\ \left(k=\frac{(2p-1)(p^2-p+q)-1}{3p^2-3p-q+1}\right)$$

これは，A が E の実数倍でないことに反する．

よって，

$$3p^2-3p-q+1=0.$$

なお，本問の場合は単に$(*)$の両辺の(1，2)成分を比較しても同じ結論が得られる．

$(*)$ と $3p^2-3p-q+1=0$ …① から
$(2p-1)(p^2-p+q)-1=0$ …② が得られるから，あとは，①，② を連立して解けばよい．

q を消去すると，$(2p-1)^3=1$ となり，3 乗して 1 になる実数は 1 に限られるから，$2p-1=1$ となって，

$$p=1,\ q=1$$

が得られる．

(ii) A^n が表す 1 次変換による P の像が P_n であるから，

$P(X,\ Y)$，$P_n(x_n,\ y_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

とおくと，

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

と表せ，これより，

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=AA^n\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

となるから，A が表す 1 次変換による P_n の像は P_{n+1} である．これより，A^3 が表す 1 次変換による P_n の像は P_{n+3} であることがわかる．さらに，条件より $A^3=-E$ であるから，

$$\begin{pmatrix}x_{n+3}\\y_{n+3}\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=-E\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

となり，P_{n+3} と P_n は原点に関して対称である．

このことと，C が原点に関して対称であることから，P_1 が C 上または内部にあるとき，

$$P_4,\ P_7,\ P_{10},\ \cdots$$

はすべて C 上または内部にあり，P_2 が C 上または内部にあるとき，

$$P_5,\ P_8,\ P_{11},\ \cdots$$

はすべて C 上または内部にあり，P_3 が C 上または内部にあるとき，

$$P_6,\ P_9,\ P_{12},\ \cdots$$

はすべて C 上または内部にある．

このことから，任意の正の整数 n に対して P_n が C 上または内部にある条件は，P_1，P_2，P_3 がいずれも C 上または内部にあることである．

なお，P_3 は，原点に関して P と対称な点であるから，必ず C 上にある．

あとは，P の座標を$(X,\ Y)$などとおき，P_1，P_2 の座標を求め，それらが C 上または内部にある条件を不等式で表し，その不等式が表す領域と C の共通部分が P の存在範囲である．

【理　科】

物　理

1 単振動

【解答】

問1	(1) $\frac{mg}{k}$	(2) $(M-m)g$	
問2	(1) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	(2) $A\sqrt{\frac{k}{m}}$	(3) $-\frac{kA}{m}$
	(4) $A \leqq \frac{mg}{k}$	(5) $(M-m)g+kx$	
問3	$a=\frac{kA}{m}$		
問4	(1) $A \leqq \frac{mg}{2k}$	(2) $(M-m)g-kA\left(1+\frac{M}{2m}\right)$	

【配点】 (33点)

問1　(1)　3点　(2)　3点

問2　(1)　3点　(2)　3点　(3)　3点　(4)　4点　(5)　4点

問3　4点

問4　(1)　3点　(2)　3点

【出題のねらい】

正確な力の図示をおこなった後に，力のつり合いの式，運動方程式を立式できるかどうかを見る。鉛直ばねによる単振動の設問では，振動の中心，振幅，最高(下)点の位置等を正確に図示する必要がある。後半は慣性力の使い方の正確さが高得点につながる。また，糸がたるむかどうかを問う問題にも慣れておこう。

【解説】　問題

問1 (1)　ばねの伸びを d，糸の張力の大きさを S_0 とすると，フックの法則より，

$$S_0=kd$$

原点Oにおける小物体Pにはたらく力のつり合いより，

$$S_0=mg$$

$$\therefore\quad d=\underline{\frac{mg}{k}}$$

(2)　垂直抗力の大きさを N_0 とすると，小物体Qにはたらく力のつり合いより，

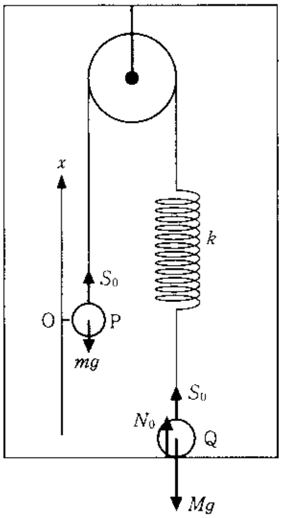
$$N_0-Mg-S_0=\underline{(M-m)g}$$

【ポイント】

フックの法則

ばねが自然長より長さ x〔m〕だけ伸び縮みしているとき，その長さに比例した力(弾性力) F〔N〕が自然長に戻る向きにはたらく。

$F=kx$ (k〔N/m〕: ばね定数)



問 2 (1)　ばねが自然長のときの小物体 P の位置は，$x=d$ である。後述の問(4)から分かるように，$A \leqq d$ であるから，位置 x $(-A \leqq x \leqq A)$ におけるばねの伸びは $d-x$ で，P を引く糸の張力の大きさ S は，

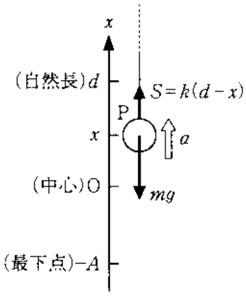
$$S=k(d-x)$$

したがって，このときの P の加速度を a とすると，運動方程式は，

$$ma=S-mg=k(d-x)-mg=-kx \quad \cdots ①$$

$$\therefore \quad a=-\frac{k}{m}x=-\omega^2 x$$

ゆえに，単振動の周期は，　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\underline{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$



(2)　振動中心 O で速さは最大となり，振幅が A なので，その速さ $v_{\max}$ は，

$$v_{\max}=A\omega=\underline{A\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(3)　最高点における P の加速度の大きさ $a_{\max}$ は最大で，

$$a_{\max}=A\omega^2=A\frac{k}{m}$$

したがって，最高点における P の加速度は，

運動方程式

物体の質量を m，加速度を $\vec{a}$，物体にはたらく力を $\vec{F}$ として，

$$m\vec{a}=\vec{F}$$

単振動

原点 O を振動中心として，x 軸上で，振幅 A，角振動数 ω，初期位相 θ_0 で単振動をおこなう物体の位置 x，速度 v および加速度 a の時刻 t における式は，

$$\begin{cases} x=A\sin(\omega t+\theta_0) \\ v=A\omega\cos(\omega t+\theta_0) \\ a=-A\omega^2\sin(\omega t+\theta_0)=-\omega^2 x \end{cases}$$

したがって，速さの最大値および，加速度の大きさの最大値は，それぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} v_{\max}=A\omega \\ a_{\max}=A\omega^2 \end{cases}$$

単振動の周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$-a_{\max}=-\frac{kA}{m}$$

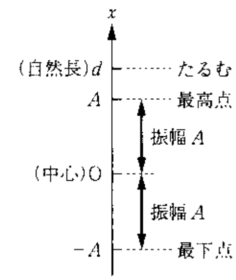
（別解）①式において，$x=A$ とおいて，

最高点における P の加速度 $=-\dfrac{kA}{m}$

(4) ばねが自然長のときの小物体 P の位置は，$x=d$ であるから，糸がたるまない条件は，次図より，

$$A\leqq d$$

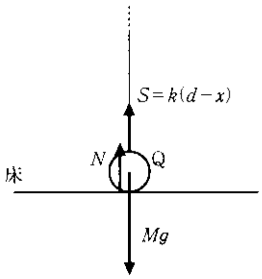
$$\therefore\ A\leqq\frac{mg}{k} \quad\cdots②$$



(5) 垂直抗力の大きさを N とする。

ばねの伸びが $d-x$ であるから，小物体 Q にはたらく力のつり合いより，

$$N=Mg-k(d-x)=(M-m)g+kx \quad\cdots③$$



（参考）③式において，$x=-A$ とおくと，垂直抗力の大きさ N の最小値は次式で与えられる。

$$N_{\min}=(M-m)g-kA$$

②式の糸がたるまない条件より，

$$N_{\min}\geqq(M-m)g-mg=(M-2m)g$$

ゆえに，問題文に与えられた条件 $M\geqq2m$ より，$N_{\min}\geqq0$ となり，Q は床から離れないことが分かる。

問 3 実験室内の観測者から見ると，小物体 P には $-x$ 方向に大きさ ma の慣性力がはたらく。このときの糸の張力の大きさは，$k(d+A)$ であるから，P にはたらく力のつり合いより，

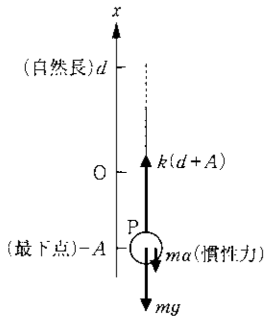
$$k(d+A)=mg+ma$$

慣性力

加速度 $\vec{a}$ で運動する人が質量 m の物体を観測するとき，この物体が受ける見かけの力。

慣性力 $=-m\vec{a}$

$$\therefore \quad a = \frac{kA}{m}$$



問 4 (1)　$t_1 \leqq t \leqq t_2$ のとき，実験室内の観測者から見ると，小物体Pには，$+x$ 方向に大きさ $m\frac{a}{2}$ の慣性力がはたらく。このときのPの運動方程式は，① 式より，

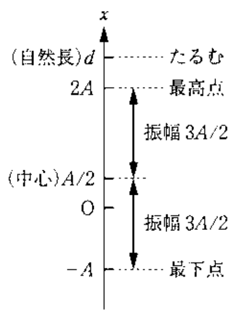
$$ma = -kx + m\frac{a}{2} = -k\left(x - \frac{A}{2}\right)$$

上式より，振動中心の位置は $x = \frac{A}{2}$ であるから，次図より，Pの最高点の位置は，$x = 2A$

したがって，糸がたるまない条件は，

$$2A \leqq d$$

$$\therefore \quad A \leqq \frac{mg}{2k} \qquad \cdots ④$$

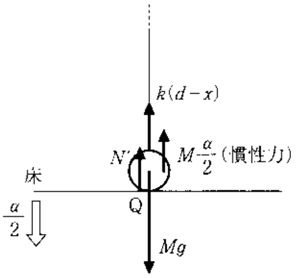


(2)　実験室内の観測者から見ると，小物体Qには $+x$ 方向に大きさ $M\frac{a}{2}$ の慣性力がはたらく。したがって，Pの位置が x のとき，③ 式より，垂直抗力の大きさ N' は，

$$N' = (M-m)g + kx - M\frac{a}{2} = (M-m)g + k\left(x - \frac{M}{2m}A\right) \qquad \cdots ⑤$$

$-A \leqq x \leqq 2A$ であるから，⑤ 式において，$x = -A$ とおいて，N' の最小値 $N'_{\min}$ は，

$$N'_{\min} = (M-m)g - kA\left(1 + \frac{M}{2m}\right)$$



（参考） ④式の糸がたるまない条件より，

$$N'_{\min} \geqq (M-m)g - \frac{mg}{2}\left(1+\frac{M}{2m}\right) = \frac{3}{4}(M-2m)g$$

ゆえに，問題文に与えられた条件 $M \geqq 2m$ より，$N'_{\min} \geqq 0$ となり，このときもQは床から離れないことが分かる。

[2] 電磁誘導

【解答】

問1	(1) $V=luB$	(2) 向き：B→C	大きさ：$\dfrac{V}{R}$
	(3) $F=\dfrac{(lB)^2}{R}u$	(4) Fu	
問2	(1) $lvB\cos\theta$	(2) $g\sin\theta-\dfrac{(lB)^2}{mR}v\cos^2\theta$	
	(3) $v_0=\dfrac{mgR\sin\theta}{(lB\cos\theta)^2}$	(4) $i_0=\dfrac{mg\tan\theta}{lB}$	(5) (イ)
	(6) (ア)	(7) $g(\tan\theta-\sin\theta)$	
問3	(1) i_0	(2) $\dfrac{v_0}{2}$	

【配点】 (34点)

問1 (1) 2点　(2) 向き 1点，大きさ 2点　(3) 3点　(4) 3点

問2 (1) 3点　(2) 3点　(3) 3点　(4) 3点　(5) 2点　(6) 2点　(7) 3点

問3 (1) 2点　(2) 2点

【出題のねらい】

典型的な電磁誘導の問題が，この時期にどの程度解けるかどうかを見る。前半の基本設問は解けても，斜面になったり，2本の導体棒の運動になると，演習不足の受験生にはやや難しく思えるであろう。また，電磁誘導の問題では，前半で間違えると全滅になることが多いので，基本事項の重要さを認識してほしい。

【解説】 問題

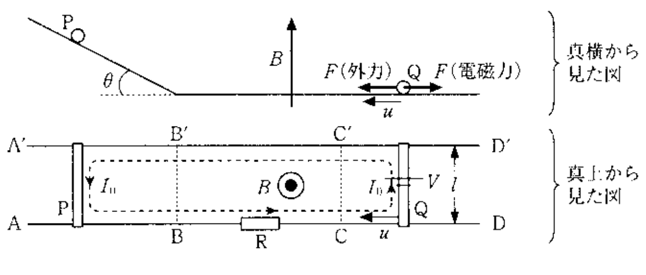
問1 (1) 誘導起電力の大きさ V は，ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$V=\underline{luB}$$

(2) 次図の誘導起電力の向きより，電流の向きは，$\underline{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}$

電流の大きさ I_0 は，オームの法則より，

$$I_0=\underline{\frac{V}{R}}=\frac{luB}{R} \quad \cdots ①$$



(3) フレミングの左手の法則より，導体棒Qの電流が磁場から受ける力(電磁力)は，水平方向右向きで，その大きさは，

【ポイント】

ファラデーの電磁誘導の法則

巻き数 N のコイルを貫く磁束が時間 Δt [s]の間に $\Delta\Phi$ [Wb]変化するとき，コイルに生じる誘導起電力 V [V]は，

$$V=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

レンツの法則

コイルを貫く磁束の変化を妨げる向きに誘導電流が流れる。

特に，磁束密度の大きさ B [T]の一様な磁場中で，長さ l [m]の導線が速さ v [m/s]で磁場に垂直に運動するとき，この導線に生じる誘導起電力の大きさ V [V]は，

$V=lvB$

誘導起電力の向きはレンツの法則より決まる。

$$lI_0B=\frac{(lB)^2}{R}u$$

Qの速度が一定であるから，Qにはたらく力のつり合いより，外力の水平成分の大きさ F は電磁力の大きさに等しい。したがって，

$$F=\underline{\frac{(lB)^2}{R}u}$$

(4) 抵抗Rでの消費電力 P は，

$$P=RI_0^2=\frac{(luB)^2}{R}=\underline{Fu}$$

この式は，エネルギー保存則

(抵抗での消費電力)＝(外力の仕事率)

を表す。

問2 (1) 磁束密度 B に垂直な導体棒Qの速度成分は $v\cos\theta$ であるから，誘導起電力の大きさ V' は，ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$\underline{V'=lvB\cos\theta}$$

(2) 回路を流れる電流の大きさ i は，オームの法則より，

$$i=\frac{V'}{R}=\frac{lvB}{R}\cos\theta \qquad \cdots ②$$

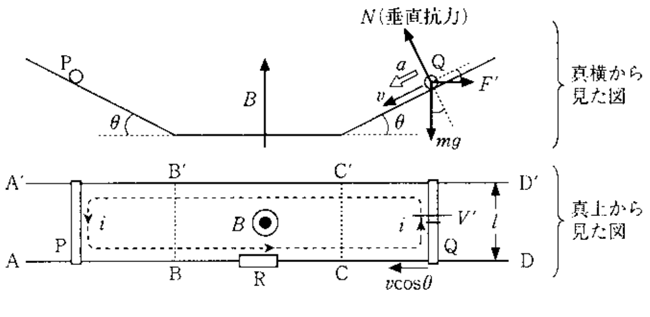
フレミングの左手の法則より，Qの電流が磁場から受ける力は，水平方向右向きで，その大きさ F' は，

$$F'=liB=\frac{(lB)^2}{R}v\cos\theta$$

加速度の大きさを a とおくと，Qの運動方程式は，

$$\begin{aligned} ma&=mg\sin\theta-F'\cos\theta \\ &=mg\sin\theta-liB\cos\theta \qquad \cdots ③ \\ &=mg\sin\theta-\frac{(lB)^2}{R}v\cos^2\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underline{a=g\sin\theta-\frac{(lB)^2}{mR}v\cos^2\theta} \qquad \cdots ④$$



(3) ④式で，$a=0$ とおいて，

$$終端速度 \quad v_0=\underline{\frac{mgR\sin\theta}{(lB\cos\theta)^2}}$$

(4) ②式より，

オームの法則

抵抗値 R〔Ω〕の抵抗に電流 I〔A〕が流れているとき，抵抗の両端に生じる電圧 V〔V〕は，

$V=RI$

電流が磁場から受ける力

(フレミングの左手の法則)

左手の中指を電流(大きさ I〔A〕)の向き，人さし指を磁場(磁束密度の大きさ B〔T〕)の向きに合わせたとき，電流が磁場から受ける力(大きさ F〔N〕)は親指の指す向きになる。

長さ l〔m〕の電流が受ける力の大きさは，

$F=IlB$

消費電力

電圧 V〔V〕をかけた抵抗値 R〔Ω〕の抵抗に電流 I〔A〕が流れているとき，この抵抗で消費される電力 P〔W〕は，

$P=VI=RI^2=\frac{V^2}{R}$

終端速度

質量 m の物体の加速度を a，速度を v として，物体の運動方程式が次式で与えられるとき，

$ma=F-kv$ (k は正の比例定数)

終端速度 v_0 は，$a=0$ とおいて，

$v_0=\frac{F}{k}$

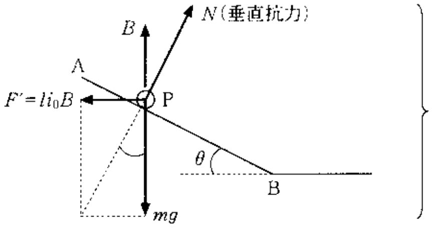
$$i_0=\frac{lv_0B}{R}\cos\theta=\underline{\frac{mg\tan\theta}{lB}} \quad \cdots ⑤$$

（別解） ③式で，$a=0$とおいて（または，CDに平行な方向のQにはたらく力のつり合いより），

$$i_0=\underline{\frac{mg\tan\theta}{lB}}$$

(5) 導体棒Pにはたらく力は，次図のようになる。⑤式より，Pにはたらく ABに平行な方向の力はつり合っているので，Pは静止し続ける。

したがって，$\underline{(イ)}$



(6) Qが水平面上で運動を始めると，Qに生じる誘導起電力が大きくなり，Pを流れる電流も大きくなる。したがって，Pの電流が磁場から受ける力も大きくなり，Pは静止していた状態からレールに沿って上昇し始める。$\underline{(ア)}$

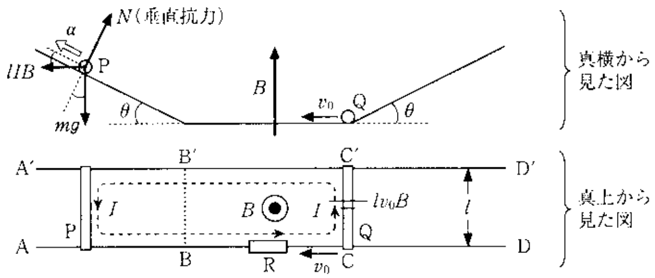
(7) Pに流れる電流の大きさIは，①式で，$u=v_0$とおいて，

$$I=\frac{lv_0B}{R}=\frac{mg\sin\theta}{lB\cos^2\theta}$$

B→Aの向きの加速度をaとおいて，Pの運動方程式は，

$$ma=IlB\cos\theta-mg\sin\theta$$
$$=mg\tan\theta-mg\sin\theta$$
$$\therefore\quad a=\underline{g(\tan\theta-\sin\theta)}=\underline{g\tan\theta(1-\cos\theta)}>0$$

上式より，Pがレールに沿って上昇することが確かめられる。



問3 (1) 導体棒P，Qの速さは一定であるから，**問2** (4)の（別解）と同様に力のつり合いを考えて，電流の大きさは，$\underline{i_0}\left(=\frac{mg\tan\theta}{lB}\right)$

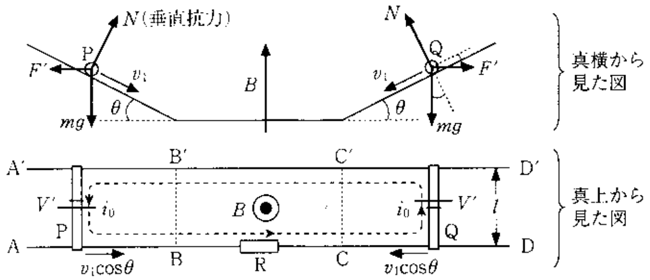
(2) 求めるP，Qの速さをv_1とする。次図の誘導起電力$V'=lv_1B\cos\theta$の向きから分かるように，電流の大きさは，②式にお

いて v を $2v_1$ に置き換えて得られる。したがって，(1) を考慮すると，次式が求まる。

$$i_0=\frac{2V'}{R}=\frac{2lv_1B}{R}\cos\theta \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥ 式より，

$$v_1=\underline{\frac{v_0}{2}}$$



3　光波の干渉

【解答】

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(ア)
(3)</td><td>(イ)
$d\sin\theta$</td><td>(ウ)
(4)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(エ)
$\dfrac{mh\lambda}{d}$</td><td>(オ)
$\dfrac{h\lambda}{d}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)
下</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">(2)（式・説明）
青色の1次の明線の位置と点Oとの距離を x，回折角を θ とすると，
$d\sin\theta \fallingdotseq d\tan\theta = d\dfrac{x}{h} = 1\cdot\lambda_1$
Gの移動距離を y とおく。移動後の赤色の1次の明線の回折角を θ' とすると，$d\sin\theta' \fallingdotseq d\tan\theta' = d\dfrac{x}{h-y} = 1\cdot\lambda_2$
2式より，dx を消去すると，
$y = h\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$
答　$h\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>(1)
$\dfrac{\lambda}{n}$</td><td colspan="2">(2)
$\dfrac{1}{n}$ 〔倍〕</td></tr>
<tr><td>問4</td><td>(1)
$d\lvert n\sin\theta-\sin\phi\rvert$</td><td colspan="2">(2)
$\dfrac{h\lambda}{nd}$</td></tr>
</table>

【配点】（33点）

問1　(ア)　1点　　(イ)　2点　　(ウ)　1点　　(エ)　3点　　(オ)　3点

問2　(1)　3点　　(2)　7点

問3　(1)　2点　　(2)　3点

問4　(1)　4点　　(2)　4点

【出題のねらい】

問1の回折格子の基本から始まり，**問2**以降は典型的な回折格子の設問になっている。光波の干渉の問題は，典型的で概して計算量も多くないが，少なくとも1回は演習しておかないと，短時間で解答するのは大変であることを認識してほしい。

【解説】

問題

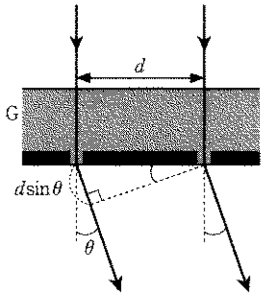
問1　(ア)　光はスリットで回折する。(3)

(イ)　次図のGの拡大図より，隣り合う回折光の光路差（＝光学距離の差）は，$d\sin\theta$

【ポイント】

回折

波が伝わるとき，障害物の背後にも回りこんで伝わる現象。



(ウ) 点 P で干渉して，明暗のしま模様が生じる。$\underline{(4)}$

(エ) 明線となる条件は，

$$d\sin\theta \fallingdotseq d\tan\theta = d\frac{x_m}{h} = m\lambda$$

$$\therefore \quad x_m = \underline{\frac{mh\lambda}{d}}$$

(オ) 明線の間隔　$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \underline{\frac{h\lambda}{d}}$

問 2 (1) 次図のように，容器底面上の青色(波長 λ_1)の 1 次の明線の位置と点 O との距離を x，回折角を θ とする。

このとき，次式が成立する。

$$d\sin\theta = 1\cdot\lambda_1 \quad \cdots ①$$

この位置に向かって進む赤色(波長 λ_2)の 1 次の明線の回折角を θ' とする。

このとき，次式が成立する。

$$d\sin\theta' = 1\cdot\lambda_2 \quad \cdots ②$$

$\lambda_2 > \lambda_1$ であるから，①，② 式より，$\theta' > \theta$ となる。

したがって，G は$\underline{下}$向きに移動させた。

(2) G の移動距離を y とおくと，①，② 式より，それぞれ，

$$d\sin\theta \fallingdotseq d\tan\theta = d\frac{x}{h} = 1\cdot\lambda_1 \quad \cdots ①'$$

$$d\sin\theta' \fallingdotseq d\tan\theta' = d\frac{x}{h-y} = 1\cdot\lambda_2 \quad \cdots ②'$$

①′，②′ 式より，

$$h\lambda_1 = (h-y)\lambda_2$$

$$\therefore \quad y = \underline{h\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}$$

光学距離と光路差

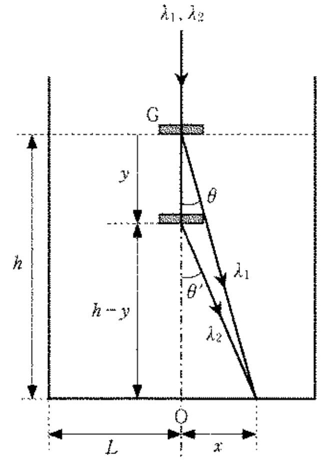
光が絶対屈折率 n の媒質中を距離 l [m] だけ通過したとき，距離 nl [m] を光学距離(光路長)という。光学距離は光が媒質中を通過したときの距離を真空中を通過したときの距離に換算したものと考えてよい。

なお，2 つの経路の光学距離の差を光路差という。

干渉

波源 A，B から出る波長 λ の波が点 P で重ね合わさり，強め合ったり，弱め合ったりすること。波源が同位相のときは，

$$\begin{cases} 強め合う：|PA-PB| = m\lambda \\ 弱め合う：|PA-PB| = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda \\ (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$



問 3 (1)　屈折率 n の液体中での光の波長 λ' は，$\underline{\lambda'=\frac{\lambda}{n}}$

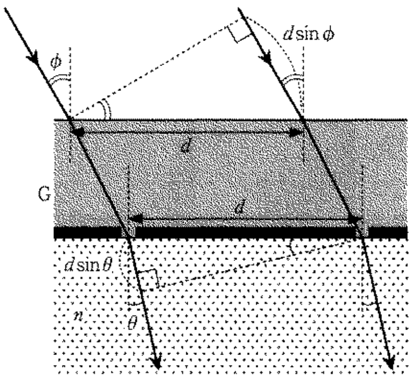
(2)　**問 1** (ｵ)の式において，波長を $\lambda\to\lambda'$ に置き換えればよい。したがって，隣り合う明線の間隔 $\Delta x'$ は，

$$\Delta x'=\frac{h\lambda'}{d}=\frac{h\lambda}{nd}=\frac{1}{n}\Delta x$$

ゆえに，$\underline{\frac{1}{n}}$〔倍〕

問 4 (1)　次図の G の拡大図より，隣り合う回折光の光路差は，

$$|nd\sin\theta-d\sin\phi|=\underline{d|n\sin\theta-\sin\phi|}$$



(2)　$OP_0=X_0$，$OP_1=X_1$ とおくと，

$$\begin{cases}0\text{次}：\sin\theta\fallingdotseq\tan\theta=\dfrac{X_0}{h}\\ 1\text{次}：\sin\theta\fallingdotseq\tan\theta=\dfrac{X_1}{h}\end{cases}$$

$X_0<X_1$ であるから，(1)より，次の 2 式が成り立つ。

$$\begin{cases}0\text{次}：d\left(n\dfrac{X_0}{h}-\sin\phi\right)=0\cdot\lambda\\ 1\text{次}：d\left(n\dfrac{X_1}{h}-\sin\phi\right)=1\cdot\lambda\end{cases}$$

ゆえに，

屈折率(絶対屈折率)

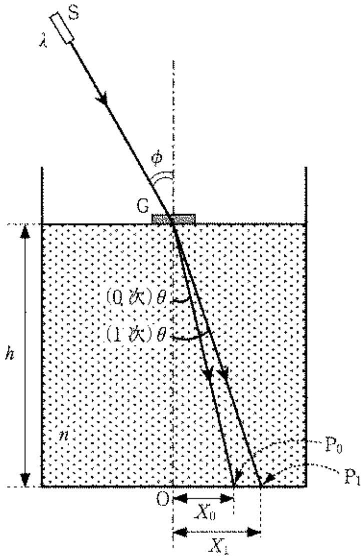
真空中での光速を c，波長を λ とすると，(絶対)屈折率 n の媒質中での光速 c' と波長 λ' は，

$$\begin{cases}c'=\dfrac{c}{n}\\ \lambda'=\dfrac{\lambda}{n}\end{cases}$$

なお，"空気の屈折率を 1 として" と書いてあるときは，空気を真空とみなしてよい。

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{h}{n}\sin\phi \\ X_1 = \dfrac{h}{n}\sin\phi + \dfrac{h\lambda}{nd} \end{cases}$$

$$\therefore\quad P_0P_1 = X_1 - X_0 = \underline{\frac{h\lambda}{nd}}$$



化　学

1　酸化還元

【解答】

問1	(1)	あ	CO_2	い	2	(2)	$+7 \rightarrow +2$
問2	う	MnO_4^-	え	赤紫	お	消えなくなった	
問3	①	(ア)	②	(ア)	問4	$5Fe^{2+} + MnO_4^- + 8H^+ \longrightarrow 5Fe^{3+} + Mn^{2+} + 4H_2O$	
問5	2.55×10^{-1} mol/L	問6	96.9 %				

【配点】（20点）

問1　(1)　2点　(2)　2点　　**問2**　4点　　**問3**　3点

問4　3点　　**問5**　3点　　**問6**　3点

【出題のねらい】

酸化還元反応および酸化還元滴定に関する知識および思考力を問う問題である。

【解説】

問題

問1　$(COOH)_2$ は還元剤として次のように反応する。

$$(COOH)_2 \longrightarrow 2CO_2 + 2H^+ + 2e^- \quad \cdots ①$$

酸性の水溶液中で，MnO_4^- は酸化剤として次のように反応する。

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \longrightarrow Mn^{2+} + 4H_2O \quad \cdots ②$$

MnO_4^- の Mn 原子の酸化数を x とおくと，

$$x + (-2) \times 4 = -1 \qquad \therefore \quad x = +7$$

Mn^{2+} の酸化数は +2 だから，反応による Mn 原子の酸化数の変化は $+7 \rightarrow +2$ となる。

問2　$KMnO_4$ 水溶液（MnO_4^-）は赤紫色であり，反応により生じる Mn^{2+} はほぼ無色である。よって，コニカルビーカー内の溶液に還元剤が残っている間は，赤紫色の $KMnO_4$ 水溶液を滴下しても，溶液は無色になる。しかし，最後の1滴で還元剤がすべて消費される（終点に達する）と，微量の MnO_4^- が反応せずに残るため，コニカルビーカー内の溶液はうすい赤紫色（または淡赤色）を示す。

問3　Cl^- は MnO_4^- によって酸化されて，次のように反応する。このとき Cl^- は還元剤としてはたらく。

$$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^- \quad \cdots ③$$

よって，塩酸を加えた場合，Cl^- との反応で消費された分，終点までに必要な $KMnO_4$ 水溶液の滴下量が増加してしまい，正しい結果が得られなくなる。なお，硫酸を用いた場合，硫酸イオン

【ポイント】

酸化剤と還元剤

酸化剤；電子を受け取って相手の物質を酸化する物質。自らは還元される。

還元剤；電子を与えて相手の物質を還元する物質。自らは酸化される。

酸化数の決め方

①単体を構成する原子…0

②化合物や多原子イオンを構成する原子

アルカリ金属原子，H原子…+1

2族，12族の原子…+2

Al原子…+3

O原子…−2

（ただし，過酸化物中のO原子は−1）

他の原子は，

化合物の場合；酸化数の総和＝0

多原子イオンの場合；

酸化数の総和＝符号を付けた価数より算出する。

は酸化作用も還元作用も示さないため，滴定に影響を及ぼさない。（希硫酸は熱濃硫酸のような酸化力をもたない。）

問 4　Fe^{2+} は MnO_4^- によって酸化され，次のように反応する。

$$Fe^{2+} \longrightarrow Fe^{3+} + e^- \quad \cdots ④$$

②＋④×5 より，e^- を消去すると，次のイオン反応式が得られる。

$$5Fe^{2+} + MnO_4^- + 8H^+ \longrightarrow 5Fe^{3+} + Mn^{2+} + 4H_2O \quad \cdots ⑤$$

問 5　ビュレットやホールピペットからの 1 滴の体積は，器具の先端の形状や液滴の大きさによって異なるが，0.03 ～ 0.04 mL 程度になることが多い。滴定実験では，この 1 滴分程度の誤差は避けられない。そこで，誤差を最小にとどめるために，3 回あるいは 5 回の測定を行い，その平均値を用いる。

操作 3 の結果のうち，1 回目 10.82 mL と 2 回目 10.18 mL を比較すると，1 滴分をはるかに越える違いがあるので，どちらか一方の滴定操作に何らかの誤りがあったとわかる。3 回目の 10.20 mL は 2 回目に近い値なので，この段階で，誤りを含む操作は 1 回目だろうと推定できる。そこで，予定外の 4 回目の測定を行ったところ 10.22 mL となり，2 回目，3 回目と近い結果が得られた。すなわち，1 回目の結果を除外して，2，3，4 回目の 3 つの結果を平均すればよい。よって，平均滴下量は，

$$\frac{(10.18+10.20+10.22)\,\text{mL}}{3} = 10.20\,\text{mL}$$

溶液 S 中の Fe^{2+} のモル濃度を y〔mol/L〕とすると，⑤式より，Fe^{2+} と MnO_4^- は 5 ： 1 の物質量比で反応するので，

$$y\,[\text{mol/L}] \times \frac{10.0}{1000}\,\text{L} : 5.00\times10^{-2}\,\text{mol/L} \times \frac{10.20}{1000}\,\text{L} = 5 : 1$$

$$\therefore \quad y = 2.55\times10^{-1}\,\text{mol/L}$$

【別解】滴定の終点までに授受した e^- の物質量について，

MnO_4^- が受け取った e^- の物質量 ＝ Fe^{2+} が与えた e^- の物質量

が成り立つから，

$$5\times5.00\times10^{-2}\,\text{mol/L}\times\frac{10.20}{1000}\,\text{L} = 1\times y\,[\text{mol/L}]\times\frac{10.0}{1000}\,\text{L}$$

$$\therefore \quad y = 2.55\times10^{-1}\,\text{mol/L}$$

問 6　溶液 S 100 mL に含まれる Fe^{2+} の物質量は，

$$2.55\times10^{-1}\,\text{mol/L}\times\frac{100}{1000}\,\text{L} = 2.55\times10^{-2}\,\text{mol}$$

これと同じ物質量の $FeSO_4$（式量 152.0）が試料 4.00 g 中に含まれていたので，試料中の $FeSO_4$ の純度は，

$$\frac{152.0\,\text{g/mol}\times2.55\times10^{-2}\,\text{mol}}{4.00\,\text{g}}\times100 = 96.9\,\%$$

電子を含むイオン反応式（半電池反応式）の作り方

①酸化剤，還元剤の反応前（左辺），反応後（右辺）の化学式を書く。
この時，酸化数が変化した原子の数を両辺で等しくすること。
②両辺の酸素原子の数を H_2O を加えることにより等しくする。
③両辺の水素原子の数を H^+ を加えることにより等しくする。
④両辺の電荷を e^- を加えることにより等しくする。

酸化還元の反応式の作り方

酸化剤と還元剤のそれぞれの半電池反応式を加えて，e^- を消去する。

酸化還元反応の終点における量的関係

酸化剤が受け取る e^- の物質量
＝還元剤が与える e^- の物質量

化学

2 小問集合

【解答】

I	問1	AgCl	問2	黒	問3	名称	テトラアンミン亜鉛(II)イオン	形	正四面体
	問4	$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$	問5	(イ)	問6	$FeS + H_2SO_4 \longrightarrow FeSO_4 + H_2S$			
II	問7	1.0×10^{-5} mol/L	問8	(1)	1.2 g	(2)	2.0×10^{-8} mol/L		
III	問9	あ	グルコース	い	アミラーゼ	う	グリコーゲン		
	問10	(1)	OH	(2)	O ‖ C−H				

【配点】 (33点)

I　問1　2点　　問2　2点　　問3　名称；2点　形；1点　　問4　3点

　問5　3点　　問6　3点

II　問7　3点　　問8　(1)　3点　(2)　3点

III　問9　各2点×3　　問10　2点

【出題のねらい】

I　金属イオンの反応と性質に関する知識を確認する問題である。

II　難溶性の塩に関する溶解度の計算問題である。

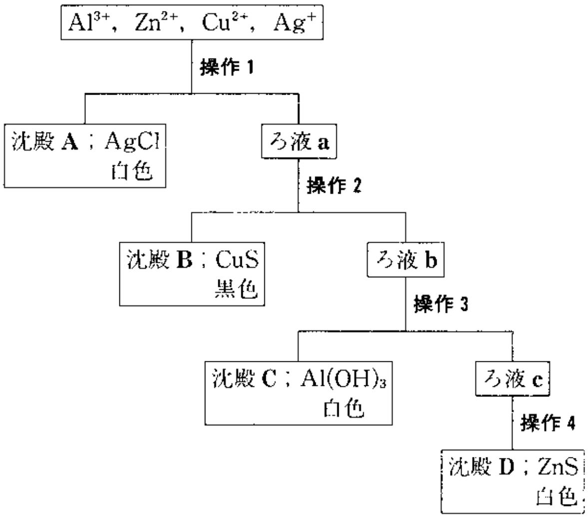
III　糖に関する知識を確認する問題である。

【解説】

問題

I

4種の金属イオンは次のように分離される。



問1　**操作1**で塩酸を加えると，白色のAgCl(沈殿**A**)が沈殿する。

$$Ag^+ + Cl^- \longrightarrow AgCl$$

【ポイント】

おもな陽イオンの性質

$Ag^+ \xrightarrow{Cl^-} \underset{白色}{AgCl} \xrightarrow{NH_3} [Ag(NH_3)_2]^+$

$Pb^{2+} \xrightarrow{Cl^-} \underset{白色}{PbCl_2} \xrightarrow{熱湯} Pb^{2+}$

$Ag^+ \xrightarrow{S^{2-}} \underset{黒色}{Ag_2S}$

$Cu^{2+} \xrightarrow{S^{2-}} \underset{黒色}{CuS}$

$Pb^{2+} \xrightarrow{S^{2-}} \underset{黒色}{PbS}$

$Cd^{2+} \xrightarrow{S^{2-}} \underset{黄色}{CdS}$

$Zn^{2+} \xrightarrow{S^{2-}} \underset{白色}{ZnS}$ ┐ 酸性溶液中では

$Fe^{2+} \xrightarrow{S^{2-}} \underset{黒色}{FeS}$ ┘ 沈殿しない

$Ag^+ \xrightarrow{OH^-} \underset{褐色}{Ag_2O} \xrightarrow{NH_3} [Ag(NH_3)_2]^+$

$Cu^{2+} \xrightarrow{OH^-} \underset{青白色}{Cu(OH)_2} \xrightarrow{NH_3} \underset{深青色}{[Cu(NH_3)_4]^{2+}}$

$Fe^{3+} \xrightarrow{OH^-} \underset{赤褐色}{Fe(OH)_3}$

$Zn^{2+} \xrightarrow{OH^-} \underset{白色}{Zn(OH)_2} \xrightarrow{NH_3} [Zn(NH_3)_4]^{2+}$

$\quad \xrightarrow{NaOH} [Zn(OH)_4]^{2-}$

$Al^{3+} \xrightarrow{OH^-} \underset{白色}{Al(OH)_3} \xrightarrow{NaOH} [Al(OH)_4]^-$

問2　**操作2**でH_2Sを通じると，黒色のCuS(沈殿**B**)が沈殿する。

$$Cu^{2+} + H_2S \longrightarrow CuS + 2H^+$$

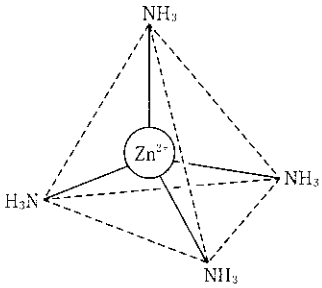
問3　ろ液**b**にはH_2Sが含まれるので，**操作3**で煮沸することにより，H_2Sを除く。その後NH_3水を十分に加えると，白色の$Al(OH)_3$(沈殿**C**)が沈殿する。

$$Al^{3+} + 3OH^- \longrightarrow Al(OH)_3$$

このときZn^{2+}は，NH_3を配位子とする無色の錯イオン$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$(テトラアンミン亜鉛(II)イオン)を形成して，ろ液**c**内に存在する。

$$Zn^{2+} + 4NH_3 \longrightarrow [Zn(NH_3)_4]^{2+}$$

$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$は，Zn^{2+}を中心とした正四面体の各頂点にNH_3分子が位置している。



問4　$Al(OH)_3$(沈殿**C**)は両性水酸化物だから，これに$NaOH$水溶液を十分に加えると，OH^-を配位子とする無色の錯イオン$[Al(OH)_4]^-$を形成して溶解する。

$$Al(OH)_3 + OH^- \longrightarrow [Al(OH)_4]^-$$

問5　(ア)　正しい。$AgCl$(沈殿**A**)に濃NH_3水を加えると，無色の錯イオン$[Ag(NH_3)_2]^+$を形成して溶解する。

$$AgCl + 2NH_3 \longrightarrow [Ag(NH_3)_2]^+ + Cl^-$$

(イ)　誤り。CuS(沈殿**B**)はHClで酸性にした溶液にH_2Sを通じることにより生じた沈殿だから，CuSにHClやH_2SO_4を加えても溶解せず，青色(Cu^{2+})の溶液にはならない。

(ウ)　正しい。$Al(OH)_3$(沈殿**C**)にH_2SO_4を加えると，中和反応により，$Al(OH)_3$は溶解して無色の溶液になる。

$$Al(OH)_3 + 3H^+ \longrightarrow Al^{3+} + 3H_2O$$

(エ)　正しい。ZnS(沈殿**D**)はHClで酸性にした溶液にH_2Sを通じても沈殿しないので，ZnSにHClやH_2SO_4を加えて酸性にすると溶解して無色の溶液になる。

$$ZnS + 2H^+ \longrightarrow Zn^{2+} + H_2S$$

問6　FeSにH_2SO_4を加えると，次式の反応によりH_2Sが発生する。

$$FeS + H_2SO_4 \longrightarrow FeSO_4 + H_2S$$

おもな錯イオンの名称

$[Ag(NH_3)_2]^+$
　ジアンミン銀(I)イオン
$[Al(OH)_4]^-$
　テトラヒドロキシドアルミン酸イオン
　(テトラヒドロキソアルミン酸イオン)
$[Cu(NH_3)_4]^{2+}$
　テトラアンミン銅(II)イオン
$[Fe(CN)_6]^{4-}$
　ヘキサシアニド鉄(II)酸イオン
　(ヘキサシアノ鉄(II)酸イオン)
$[Fe(CN)_6]^{3-}$
　ヘキサシアニド鉄(III)酸イオン
　(ヘキサシアノ鉄(III)酸イオン)

おもなアンミン錯イオンの色と形

$[Ag(NH_3)_2]^+$……無色，直線形
$[Cu(NH_3)_4]^{2+}$……深青色，正方形
$[Zn(NH_3)_4]^{2+}$……無色，正四面体

II

問 7　$BaSO_4$ 飽和水溶液中の Ba^{2+} のモル濃度を x〔mol/L〕とすると，$[Ba^{2+}] = [SO_4^{2-}] = x$〔mol/L〕である。

$$BaSO_4(固) \rightleftarrows Ba^{2+} + SO_4^{2-}$$

飽和水溶液中では，$K_{sp} = [Ba^{2+}][SO_4^{2-}] = 1.0\times10^{-10}(\mathrm{mol/L})^2$ が成立するので，

$$x\,[\mathrm{mol/L}]\times x\,[\mathrm{mol/L}] = 1.0\times10^{-10}(\mathrm{mol/L})^2$$

$$\therefore\quad x = 1.0\times10^{-5}\,\mathrm{mol/L}$$

問 8　1.0×10^{-2} mol/L の $BaCl_2$ 水溶液 500 mL に含まれる $BaCl_2$ の物質量は，

$$1.0\times10^{-2}\,\mathrm{mol/L}\times\frac{500}{1000}\,\mathrm{L} = 5.0\times10^{-3}\,\mathrm{mol}$$

また，2.0×10^{-2} mol/L の Na_2SO_4 水溶液 500 mL に含まれる Na_2SO_4 の物質量は，

$$2.0\times10^{-2}\,\mathrm{mol/L}\times\frac{500}{1000}\,\mathrm{L} = 1.0\times10^{-2}\,\mathrm{mol}$$

(1)　$BaCl_2$ 水溶液と Na_2SO_4 水溶液を混合したとき，各物質の物質量の反応前後の変化は次のとおりである。

	$BaCl_2$	+ Na_2SO_4	$\longrightarrow$ $BaSO_4$	+ $2NaCl$
反応前	5.0×10^{-3}	1.0×10^{-2}	0	0
変化量	-5.0×10^{-3}	-5.0×10^{-3}	$+5.0\times10^{-3}$	$+1.0\times10^{-2}$
反応後	0	5.0×10^{-3}	5.0×10^{-3}	1.0×10^{-2}

〔単位；mol〕

したがって，沈殿した $BaSO_4$(式量 233)の質量は，

$$233\,\mathrm{g/mol}\times5.0\times10^{-3}\,\mathrm{mol} = 1.16\,\mathrm{g} \fallingdotseq 1.2\,\mathrm{g}$$

実際には，$BaSO_4$ がわずかに溶解するため，沈殿する $BaSO_4$ の物質量は 5.0×10^{-3} mol よりも少しだけ小さくなるが，以下の(2)の解説に記すように，有効数字 2 桁の範囲では，数値上，影響がない。

(2)　上澄み液に含まれる SO_4^{2-} には，Na_2SO_4 から生じる SO_4^{2-} と $BaSO_4$ から生じる SO_4^{2-} があるが，$BaSO_4$ から生じる SO_4^{2-} はほんのわずかであり無視できるので，上澄み液中の SO_4^{2-} のモル濃度は，

$$[SO_4^{2-}] \fallingdotseq \frac{5.0\times10^{-3}\,\mathrm{mol}}{1.0\,\mathrm{L}} = 5.0\times10^{-3}\,\mathrm{mol/L}$$

よって，上澄み液中の Ba^{2+} のモル濃度は，$K_{sp} = [Ba^{2+}][SO_4^{2-}]$ より，

$$[Ba^{2+}] = \frac{K_{sp}}{[SO_4^{2-}]} = \frac{1.0\times10^{-10}(\mathrm{mol/L})^2}{5.0\times10^{-3}\,\mathrm{mol/L}} = 2.0\times10^{-8}\,\mathrm{mol/L}$$

このように，$BaSO_4$ が $(2.0\times10^{-8}\,\mathrm{mol/L}\times1.0\,\mathrm{L} =)\,2.0\times10^{-8}$ mol だけ溶解するため，厳密には $BaSO_4$ の沈殿は 5.0×10^{-3} mol よりも少ないが，2.0×10^{-8} mol は 5.0×10^{-3} mol に比べて非常に小さいので，(1)の結果には影響しない。

溶解度積

難溶性の塩 A_mB_n が沈殿して溶解平衡の状態にあるとき，水溶液中の A^{n+} のモル濃度 $[A^{n+}]$〔mol/L〕と，B^{m-} のモル濃度 $[B^{m-}]$〔mol/L〕には，次の関係が成立する。

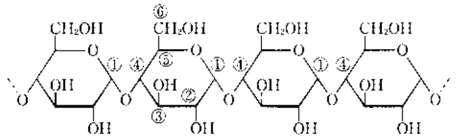
$$A_mB_n(固) \rightleftarrows mA^{n+} + nB^{m-}$$

$$K_{sp} = [A^{n+}]^m[B^{m-}]^n$$

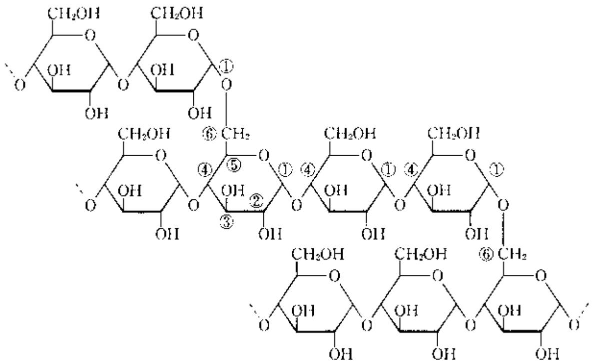
ここで，K_{sp} を溶解度積とよぶ。

III

問9　デンプンはα-グルコースの縮合重合体であり，直鎖状のアミロースと枝分かれをもつアミロペクチンの混合物である。アミロースはα-グルコースの1位と4位の位置(下図の①と④)で繰り返し脱水縮合した構造である。アミロペクチンは，アミロースが6位の位置(下図の⑥)で枝分かれした構造である。(なお，下図では六員環のC原子とそれに結合したH原子は省略して表してある。)



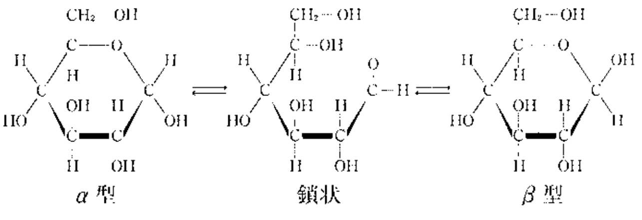
アミロース



アミロペクチン

ヒトがデンプンを摂取すると，デンプンはまず唾液などに含まれるアミラーゼによって加水分解されてマルトースになり，マルトースはさらに腸液などに含まれるマルターゼによって加水分解されてグルコースとなり，体内に吸収される。吸収されたグルコースの一部は，グリコーゲン(動物性デンプン)につくりかえられ，肝臓や筋肉中に貯蔵される。

問10　グルコースは，次に示すように，水溶液中ではα型，鎖状，β型の3種の構造の平衡混合物として存在している。



α型　　鎖状　　β型

おもな多糖 $(C_6H_{10}O_5)_n$

・デンプン…α-グルコースが重合
・セルロース…β-グルコースが重合
・グリコーゲン…α-グルコースが重合

糖と加水分解酵素

・デンプン
↓ アミラーゼ
デキストリン
↓ アミラーゼ
マルトース
↓ マルターゼ
グルコース

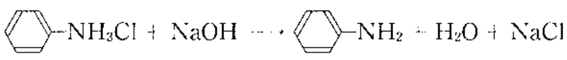
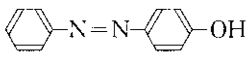
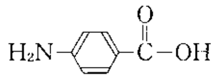
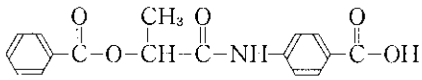
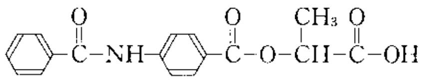
・セルロース
↓ セルラーゼ
セロビオース
↓ セロビアーゼ
グルコース

・スクロース
↓ インベルターゼ
グルコース＋フルクトース

・ラクトース
↓ ラクターゼ
ガラクトース＋グルコース

3 有機化学

【解答】

I	問1	(エ)	問2	
I	問3	フェノール	問4	
II	問5	$C_3H_6O_3$	問6	
II	問7	 または 		
III	問8	1.0×10^3 個	問9	4.8×10^4

【配点】 (26点)

I　問1　2点　　問2　3点　　問3　2点　　問4　3点

II　問5　3点　　問6　3点　　問7　4点

III　問8　3点　　問9　3点

【出題のねらい】

I　アニリンとその誘導体の合成経路に関する知識の確認の問題である。

II　芳香族化合物の構造決定の問題である。

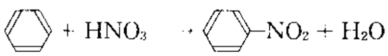
III　ポリエチレンテレフタラートを題材とした，合成高分子に関する計算問題である。

【解説】

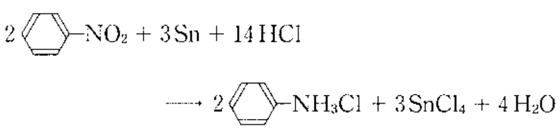
問題

I

問1　ベンゼンに濃硝酸と濃硫酸を加えて約60℃で反応させると，ベンゼンがニトロ化されてニトロベンゼンが生成する(反応①)。この反応で硫酸は触媒としてはたらく。



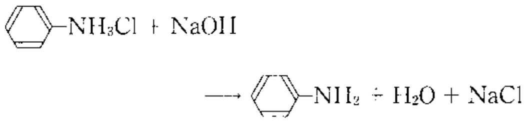
ニトロベンゼンにSnと濃塩酸を加えて加熱すると，ニトロベンゼンがSnによって還元されて，アニリン塩酸塩の水溶液が得られる。



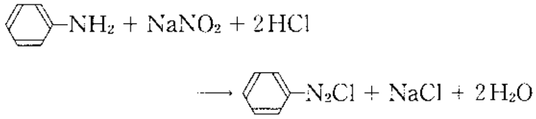
問2　アニリン塩酸塩の水溶液に強塩基であるNaOH水溶液を加えると，弱塩基であるアニリンが遊離する(反応②)。

【ポイント】

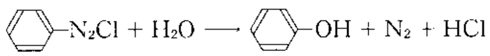
アニリンの製法



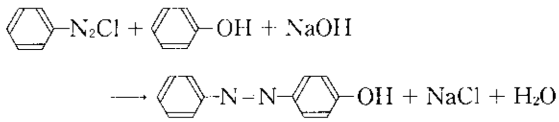
問 3 アニリンを塩酸に溶かし，氷冷下でこれに亜硝酸ナトリウム $NaNO_2$ 水溶液を加えると，アニリンがジアゾ化されて，塩化ベンゼンジアゾニウムが生成する(反応③)。



一般に，ジアゾニウム塩は不安定な物質であり，塩化ベンゼンジアゾニウムの水溶液を温めると，加水分解して窒素が発生するとともにフェノールが生成する。



問 4 塩化ベンゼンジアゾニウムの水溶液にフェノールの NaOH 水溶液を加えると，カップリング(ジアゾカップリング)により，橙赤色の p-フェニルアゾフェノール(p-ヒドロキシアゾベンゼン)が生成する。



p-フェニルアゾフェノールはアゾ基($-N=N-$)をもつアゾ化合物の一種で，染料に用いられる。

II

問 5 化合物 **C** 1.80 g 中に含まれる各元素の質量は，

$$C\,;\,2.64\ \mathrm{g}\times\frac{12}{44}=0.72\ \mathrm{g}$$

$$H\,;\,1.08\ \mathrm{g}\times\frac{2.0}{18}=0.12\ \mathrm{g}$$

$$O\,;\,1.80\ \mathrm{g}-0.72\ \mathrm{g}-0.12\ \mathrm{g}=0.96\ \mathrm{g}$$

よって，各元素の物質量の比(原子数の比)は，

$$C:H:O=\frac{0.72\ \mathrm{g}}{12\ \mathrm{g/mol}}:\frac{0.12\ \mathrm{g}}{1.0\ \mathrm{g/mol}}:\frac{0.96\ \mathrm{g}}{16\ \mathrm{g/mol}}$$

$$=0.060:0.12:0.060=1:2:1$$

よって，**C** の組成式は CH_2O(式量 30)となる。

さらに，**C** の分子量が 90 であることから，**C** の分子式は $C_3H_6O_3$ となる。

【別解】化合物 **C** の分子式を $C_xH_yO_z$ とすると，1 mol の **C** を完全燃焼させたとき，CO_2(分子量 44)は x〔mol〕，H_2O(分子量 18)は $\frac{y}{2}$〔mol〕生じるので，

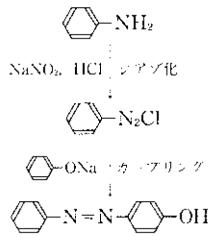
$$\frac{1.80\ \mathrm{g}}{90\ \mathrm{g/mol}}:\frac{2.64\ \mathrm{g}}{44\ \mathrm{g/mol}}=1:x\qquad\therefore\ x=3$$

弱酸，弱塩基の遊離

弱酸と強塩基からなる塩＋強酸
→強酸と強塩基からなる塩＋弱酸

強酸と弱塩基からなる塩＋強塩基
→強酸と強塩基からなる塩＋弱塩基

ジアゾ化，カップリング



ジアゾニウム塩の加水分解

$$\frac{1.80\ \mathrm{g}}{90\ \mathrm{g/mol}} : \frac{1.08\ \mathrm{g}}{18\ \mathrm{g/mol}} = 1 : \frac{y}{2} \qquad \therefore \quad y = 6$$

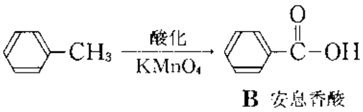
$$\therefore \quad z = \frac{90\ \mathrm{g} - 12\ \mathrm{g/mol} \times 3\ \mathrm{mol} - 1.0\ \mathrm{g/mol} \times 6\ \mathrm{mol}}{16\ \mathrm{g/mol}} = 3$$

よって，**C** の分子式は $C_3H_6O_3$ となる。

問 6　化合物 **A** ～ **C** は $NaHCO_3$ 水溶液と反応して気体を発生するので，**A** ～ **C** はいずれもカルボキシ基をもっている。

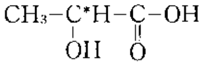
$$\underset{\text{炭酸より強い酸}}{RCOOH} + \underset{\text{炭酸の塩}}{NaHCO_3} \longrightarrow \underset{\text{炭酸より強い酸の塩}}{RCOONa} + CO_2 + \underset{\text{炭酸}}{H_2O}$$

化合物 **B** は，トルエンを過マンガン酸カリウムで酸化することにより生成するので，安息香酸と決まる。



B 安息香酸

化合物 **C** は，分子式が $C_3H_6O_3$ であることと，カルボキシ基と不斉炭素原子をもつことから，乳酸と決まる。



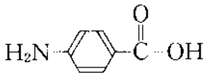
(C*は不斉炭素原子を表す)

C 乳酸

A は，**B** と **C** と **D** がエステル結合またはアミド結合してできた物質だから，化合物 **D** の分子式は次のようになる。

$$\underset{\mathbf{A}}{C_{17}H_{15}NO_5} + 2H_2O - \underset{\mathbf{B}}{C_7H_6O_2} - \underset{\mathbf{C}}{C_3H_6O_3} = \underset{\mathbf{D}}{C_7H_7NO_2}$$

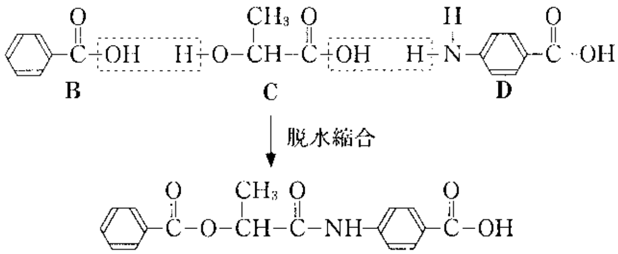
D は，塩酸に溶けることから，塩基性の官能基であるアミノ基をもち，NaOH 水溶液に溶けることから，酸性の官能基であるカルボキシ基あるいはフェノール性ヒドロキシ基をもつことがわかる。しかし，**D** は，$FeCl_3$ 水溶液を加えても呈色しないことから，フェノール性ヒドロキシ基をもたないので，結局，アミノ基とカルボキシ基をもつ。よって，ベンゼンのパラ二置換体 **D**(分子式 $C_7H_7NO_2$)の構造は次のように決まる。



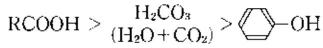
D (*p*-アミノ安息香酸)

問 7　化合物 **A** には次の ①，② の二つの場合が考えられる。

① **B** のカルボキシ基と **C** のヒドロキシ基でエステル結合している場合

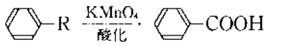


酸の強さ

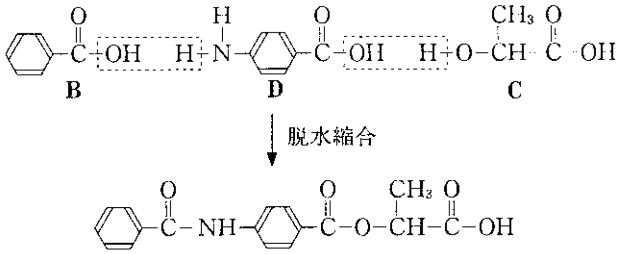


ベンゼン環の側鎖の酸化

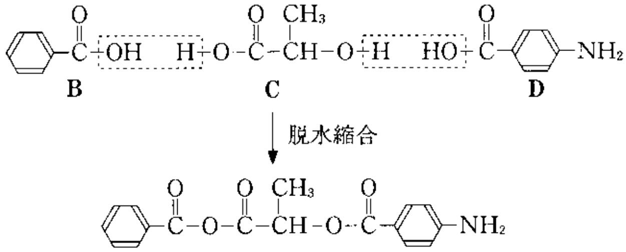
ベンゼン環に結合している炭化水素基 R は，過マンガン酸カリウムで酸化するとカルボキシ基になる。

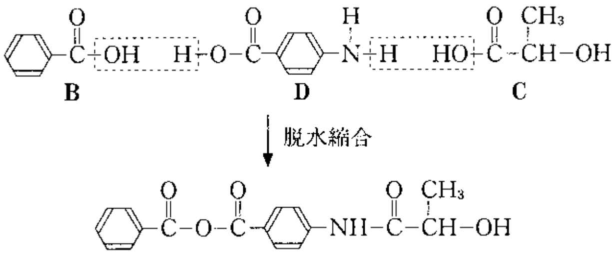


② **B**のカルボキシ基と**D**のアミノ基でアミド結合している場合



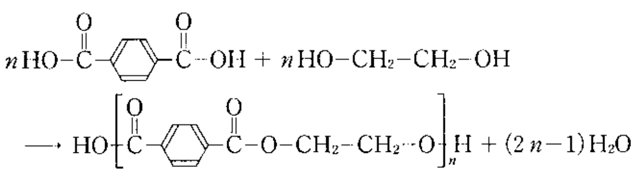
なお，**A**が酸無水物の場合，次に示すように，**A**は酸性の化合物にならないので不適である。





III

問 8　テレフタル酸とエチレングリコールを物質量比 1 ： 1 で重合させたときの反応は，平均重合度を n とすると，次式で表される。（実際には，分子の両端が －OH のものや，両端が －COOH のものも生成するが，テレフタル酸とエチレングリコールを物質量比 1 ： 1 で反応させているので，それらをすべて平均して考えると，一端が －OH で他端が －COOH の分子のみが生成すると考えてよい。）



ポリエチレンテレフタラート（PET）

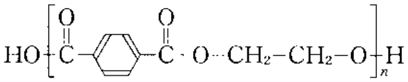
PET の繰り返し単位の式量は，$(166+62-18\times2=)192$ だから，平均分子量は $192n+18$ と表される。よって，平均分子量 9.6×10^4 の PET の平均重合度 n は，

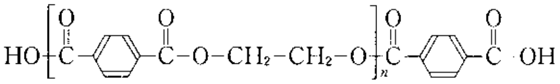
$$n = \frac{(9.6\times10^4-18)\,\mathrm{g/mol}}{192\,\mathrm{g/mol}} \fallingdotseq \frac{9.6\times10^4}{192} = 5.0\times10^2$$

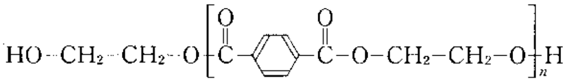
PET の繰り返し単位 1 個あたり 2 個のエステル結合が含まれるので，分子の末端を考慮すると，この PET 1 分子中のエステル結合の平均の数は $2n-1$ と表される。n が十分大きい場合，$2n-1 \fallingdotseq 2n$ だから，この PET 1 分子中のエステル結合の平均の数は，

$$2\times5.0\times10^2 = 1.0\times10^3\text{(個)}$$

問 9　分子の末端を考慮すると，得られた PET には，次の(A)～(C)の 3 種類の分子が存在する。

(A) 

(B) 

(C) 

得られた PET 96.0 g 中に(A)が a〔mol〕，(B)が b〔mol〕，(C)が c〔mol〕含まれるとすると，カルボキシ基の数より，

$$\frac{9.0\times10^{20}}{6.0\times10^{23}/\mathrm{mol}} = 1.5\times10^{-3}\,\mathrm{mol} = (a+2b)\,\text{〔mol〕} \quad \cdots ①$$

ヒドロキシ基の数より，

$$\frac{1.5\times10^{21}}{6.0\times10^{23}/\mathrm{mol}} = 2.5\times10^{-3}\,\mathrm{mol} = (a+2c)\,\text{〔mol〕} \quad \cdots ②$$

$(①+②)\times\frac{1}{2}$ より，

$$a+b+c = 2.0\times10^{-3}$$

この PET の平均分子量を M とすると，

$$M\,\text{〔g/mol〕}\times(a+b+c)\,\text{〔mol〕} = 96.0\,\mathrm{g}$$

$$M\times2.0\times10^{-3} = 96.0 \qquad \therefore\ M = 4.8\times10^4$$

【別解】PET 1 分子には 2 個の末端の基(カルボキシ基またはヒドロキシ基)があるので，この PET 96.0 g 中の PET の分子の数は，

$$\frac{9.0\times10^{20}+1.5\times10^{21}}{2} = 1.2\times10^{21}\text{(個)}$$

このPET 96.0 g の PET の物質量は，

$$\frac{1.2\times10^{21}}{6.0\times10^{23}/\mathrm{mol}} = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{mol}$$

したがって，

$$M\times2.0\times10^{-3} = 96.0 \qquad \therefore\ M = 4.8\times10^4$$

4 気相平衡

【解答】

問1	あ	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}P$	い	$\frac{2\alpha}{1+\alpha}P$	う	$\frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}P$
問2	(1)	1.0 mol	(2)	1.7×10^5 Pa		
問3		6.8×10^5 Pa	問4	4.2×10^5 Pa	問5	(ウ)

【配点】 (21点)

問1 各2点×3 **問2** (1) 3点 (2) 3点 **問3** 3点 **問4** 3点 **問5** 3点

【出題のねらい】

化学平衡と平衡移動に関する知識および思考力を問う問題である。

【解説】 問題

問1 ① 式の反応により，n〔mol〕の N_2O_4 が解離度 α で分解して NO_2 になるとき，各物質の物質量の反応前後の変化は次のとおりである。

	N_2O_4 $\rightleftarrows$	$2NO_2$	合計	
反応前	n	0	n	
平衡時	$n(1-\alpha)$	$2n\alpha$	$n(1+\alpha)$	〔単位；mol〕

平衡時の N_2O_4 と NO_2 の分圧は，分圧 ＝ 全圧×モル分率より，

$$P_{N_2O_4} = P\times\frac{n(1-\alpha)}{n(1+\alpha)} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}P$$

$$P_{NO_2} = P\times\frac{2n\alpha}{n(1+\alpha)} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}P$$

よって，① 式の圧平衡定数 K_p〔Pa〕は，

$$K_p = \frac{(P_{NO_2})^2}{P_{N_2O_4}} = \frac{\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}P\right)^2}{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}P} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}P$$

問2 (1) $n = 1.0$ mol のとき，状態1における気体の全物質量は，$1.0(1+\alpha)$〔mol〕だから，理想気体の状態方程式より，

$$5.1\times10^5\ \mathrm{Pa}\times8.3\ \mathrm{L}$$
$$= 1.0(1+\alpha)\ [\mathrm{mol}]\times8.3\times10^3\ \mathrm{Pa\cdot L/(K\cdot mol)}\times340\ \mathrm{K}$$
$$\therefore\ \alpha = 0.50$$

よって，状態1における N_2O_4，NO_2 の物質量は，

N_2O_4；$1.0\ \mathrm{mol}\times(1-0.50) = 0.50$ mol

NO_2；$2\times1.0\ \mathrm{mol}\times0.50 = 1.0$ mol

【別解】状態1における NO_2 を $2x$〔mol〕とすると，

	N_2O_4 $\rightleftarrows$	$2NO_2$	合計	
反応前	1.0	0	1.0	
平衡時	$1.0-x$	$2x$	$1.0+x$	〔単位；mol〕

理想気体の状態方程式より，

【ポイント】

混合気体について

全圧＝分圧の総和

分圧＝全圧×モル分率

モル分率＝$\frac{\text{ある成分気体の物質量}}{\text{混合気体の全物質量}}$

物質量比＝分圧比

化学平衡(質量作用)の法則

$aA + bB \rightleftarrows cC + dD$ について，平衡時の各物質のモル濃度[A]，[B]，[C]，[D]には次の関係が成立する。

$$K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

K は平衡定数とよばれ，温度が変わらない限り一定の値となる。圧平衡定数と区別する場合，K を K_c と書いて，濃度平衡定数とよぶ。

理想気体の状態方程式

$PV = nRT$

P：圧力 V：体積 n：物質量

T：絶対温度 R：気体定数

$5.1\times10^5\ \mathrm{Pa}\times8.3\ \mathrm{L}$

$= (1.0+x)\ [\mathrm{mol}]\times8.3\times10^3\ \mathrm{Pa\cdot L/(K\cdot mol)}\times340\ \mathrm{K}$

$\therefore\ x = 0.50\ \mathrm{mol}$

よって，状態1におけるN_2O_4，NO_2の物質量は，

N_2O_4；$1.0\ \mathrm{mol}-0.50\ \mathrm{mol} = 0.50\ \mathrm{mol}$

NO_2；$2\times0.50\ \mathrm{mol} = 1.0\ \mathrm{mol}$

(2) 状態1における気体の全物質量は1.50 molだから，平衡時のN_2O_4とNO_2の分圧は，

$$P_{N_2O_4} = 5.1\times10^5\ \mathrm{Pa}\times\frac{0.50\ \mathrm{mol}}{1.50\ \mathrm{mol}} = 1.7\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

$$P_{NO_2} = 5.1\times10^5\ \mathrm{Pa}\times\frac{1.0\ \mathrm{mol}}{1.50\ \mathrm{mol}} = 3.4\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

問3 **問1** $\boxed{う}$ の結果に，$\alpha = 0.50$，$P = 5.1\times10^5\ \mathrm{Pa}$を代入して，

$$K_p = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}P = \frac{4\times0.50^2}{1-0.50^2}\times5.1\times10^5\ \mathrm{Pa} = 6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

【別解】 **問2** (2)より，$P_{N_2O_4} = 1.7\times10^5\ \mathrm{Pa}$，$P_{NO_2} = 3.4\times10^5\ \mathrm{Pa}$だから，

$$K_p = \frac{(P_{NO_2})^2}{P_{N_2O_4}} = \frac{(3.4\times10^5\ \mathrm{Pa})^2}{1.7\times10^5\ \mathrm{Pa}} = 6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

問4 **問1** $\boxed{う}$ の式を変形すると，

$(1-\alpha^2)K_p = 4\alpha^2P$

$(K_p+4P)\alpha^2 = K_p$

$$\therefore\ \alpha = \sqrt{\frac{K_p}{K_p+4P}}$$

一定温度の下では，K_pは一定だから，上式に，$K_p = 6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}$，$P = 6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}$を代入して，

$$\alpha = \sqrt{\frac{6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}}{6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}+4\times6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2.24}{5} = 0.448$$

（有理化せずに計算すると，$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2.24} = 0.446$）

よって，状態2におけるNO_2の分圧は，

$$P_{NO_2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}P = \frac{2\times0.448}{1+0.448}\times6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

$$= 4.20\times10^5 \fallingdotseq 4.2\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

【別解】 状態2におけるNO_2の分圧をp [Pa]とすると，N_2O_4の分圧は$(6.8\times10^5-p)$ [Pa]になるから，

$$K_p = \frac{(P_{NO_2})^2}{P_{N_2O_4}} = \frac{p^2}{6.8\times10^5-p} = 6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

$p^2+6.8\times10^5p-(6.8\times10^5)^2 = 0$

$p>0$より，

$$p = \frac{-6.8\times10^5\ \mathrm{Pa}+\sqrt{(6.8\times10^5\ \mathrm{Pa})^2+4\times(6.8\times10^5\ \mathrm{Pa})^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\times6.8\times10^5 = \frac{2.24-1}{2}\times6.8\times10^5$$

$$= 4.21\times10^5 \fallingdotseq 4.2\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

問 5　c_1 と c_2 の比較；状態方程式 $PV = nRT$ より，$P = \frac{n}{V}RT$ であり，この式中の $\frac{n}{V}$ は気体のモル濃度を表す。すなわち，温度が一定のとき，気体の圧力はモル濃度に比例する。よって，**問 2** (2)，**問 4** の結果より，状態 1 における NO_2 の分圧は 3.4×10^5 Pa，状態 2 における NO_2 の分圧は 4.2×10^5 Pa だから，$c_1 < c_2$ である。

状態 2 は状態 1 から温度一定で容積を小さく(圧縮)しているから，$[NO_2]$ と $[N_2O_4]$ はともに大きくなる。ここで，圧縮して圧力を大きくしたから，平衡移動の原理より，① 式の平衡が左(気体の総物質量が減少する方向)に移動して，$[NO_2]$ が小さくなると誤解しないこと。平衡が左へ移動することにより NO_2 の物質量は減少するが，容積が小さくなっているので，$[NO_2]$ は増加するのである。

c_1 と c_3 の比較；状態 3 は，結局，状態 1 から温度，全圧一定で He を加えたのと同じである。このとき，状態 1 よりも状態 3 の方が容積が大きくなるから，状態 1 → 状態 2 のときとは逆に，$[NO_2]$ と $[N_2O_4]$ はともに小さくなる。したがって，$c_1 > c_3$ である。

以上より，$c_2 > c_1 > c_3$ である。

(補足) 状態 3 における He の分圧を P_{He}〔Pa〕とすると，N_2O_4 と NO_2 の分圧の合計は $(5.1\times10^5 - P_{He})$〔Pa〕になる。これは，状態 1 の N_2O_4 と NO_2 の分圧の合計 5.1×10^5 Pa よりも小さいので，平衡移動の原理より，① 式の平衡は右(気体の総物質量が増加する方向)に移動する。全圧一定で He を加えることで容積は大きくなり，さらに ① 式の平衡が右に移動することから，状態 1 の N_2O_4 のモル濃度を $[N_2O_4]_1$，状態 3 の N_2O_4 のモル濃度を $[N_2O_4]_3$ とすると，これらの大小は，

$$[N_2O_4]_1 > [N_2O_4]_3 \qquad \cdots \text{i}$$

温度が一定であれば，K_c は一定だから，状態 1 の NO_2 のモル濃度を $[NO_2]_1$，状態 3 の NO_2 のモル濃度を $[NO_2]_3$ とすると，

$$K_c = \frac{[NO_2]_1^2}{[N_2O_4]_1} = \frac{[NO_2]_3^2}{[N_2O_4]_3} \qquad \cdots \text{ii}$$

i，ii より，$[NO_2]_1^2 > [NO_2]_3^2$，すなわち，$c_1 > c_3$ である。

平衡移動の原理(ルシャトリエの原理)

一般に，平衡が成立しているときの条件を変えると，その条件変化による影響を緩和する方向に平衡が移動する。また，触媒の有無は平衡移動に無関係である。

- 温度を上げると，吸熱側に平衡は移動する。
- 物質の濃度を増大させると，その物質が反応して減少する側に平衡は移動する。
- 体積を小さくして，圧力を大きくすると，気体の総物質量が減少する側に平衡は移動する。

なお，逆の条件変化に対しては，それぞれ逆の側に平衡は移動する。

生　物

1 生殖

【解答】

問1	1	配偶子	2	二価	3	始原生殖	4	卵原
問2	第一分裂前期							
問3	受精に先立って染色体数を半減させ，受精により親と子の染色体数を同じにする。(37字)							
問7	雄化雌から精子を得て，通常の雌が形成した二次卵母細胞と受精させ，処理Qを行う。(39字)							

問4	(1)	2	(2)	4	問5	イ	問6	(1)	イ	(2)	ア，ウ

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　2点，　問3　3点，　問4　(1)　1点　(2)　1点

問5　2点，　問6　(1)　2点(完答)　(2)　2点(完答，順不同)，　問7　4点

【出題のねらい】

配偶子の形成過程や減数分裂に関する知識問題と，人為的な染色体操作に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　生物が自己と同じ種類の新しい個体をつくることを生殖という。生殖には，配偶子によらない生殖である無性生殖と，配偶子の合体による生殖である有性生殖がある。動物では，配偶子は減数分裂によって生じる。減数分裂では，第一分裂前期に相同染色体が対合して二価染色体を形成する。第一分裂中期になると二価染色体は紡錘体の赤道面に並び，後期に二価染色体が対合面で分離して，対をなす相同染色体が2つの細胞に分配される。このため，第一分裂で生じた細胞は，母細胞のもつ相同染色体のうちの一方のみをもつ。第二分裂後期には，染色体が縦裂面で分離し，娘細胞に染色体が分配される。この結果，減数分裂では母細胞の半数の染色体数をもつ4つの娘細胞が生じる。卵や精子のもとになる細胞は始原生殖細胞と呼ばれ，発生の早い時期に分化する。始原生殖細胞は，雌では未分化な卵巣に移動して卵原細胞になり，体細胞分裂によって数を増やす。卵原細胞の一部は一次卵母細胞となり，減数分裂を開始する。一次卵母細胞は第一分裂で不均等な細胞質分裂により大きな二次卵母細胞と小さな第一極体を生じ，さらに第二分裂でも不均等な細胞質分裂によって二次卵母細胞から大きな卵と小さな第二極体を生じる。

問2　減数分裂では第一分裂前期に相同染色体どうしが対合し，二価染色体を形成する。このとき，対合した染色体間では乗換えにより染色体の部分的な交換が起こる。

【ポイント】

無性生殖
配偶子によらない生殖

有性生殖
配偶子の合体による生殖

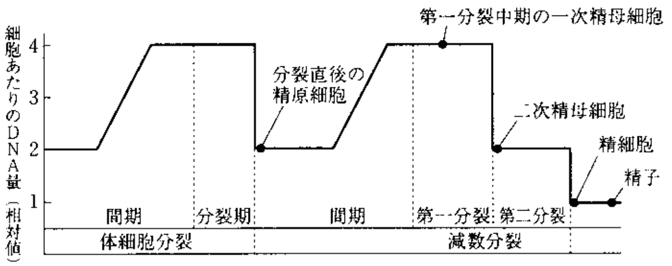
減数分裂
DNAの複製後に2回の連続した分裂が起こり，母細胞の半数の染色体数をもつ4つの娘細胞が生じる。

第一分裂前期に相同染色体間で染色体の乗換えが起こる。

問 3　減数分裂により生じた配偶子は，母細胞のもつ一対の相同染色体のうちの一方だけをもち，そのどちらをもつかは偶然に決まるので，さまざまな染色体構成の配偶子が生じる。さらに，対合時の相同染色体の乗換えにより，さらに多様な遺伝子構成の配偶子が生じるため，配偶子の遺伝的多様性が大きくなる。また，減数分裂により染色体数を半減させることで，受精により子の染色体数が親と同じになる。

減数分裂第一分裂で染色体数が半減し，$2n \to n$ となる。

問 4　精原細胞は体細胞分裂によって数を増やし，それらの一部は一次精母細胞になる。一次精母細胞は減数分裂を開始し，第一分裂を終えると二次精母細胞になり，引き続き第二分裂を行って，4 個の精細胞になる。精細胞はその後，変形して精子となる。下図は精子のもつ細胞あたりの DNA 量を 1（相対値）としたときの精子の形成過程における DNA 量の変化を示している。したがって，分裂直後の精原細胞の細胞あたりの DNA 量は 2 であり，減数分裂第一分裂中期にある一次精母細胞の細胞あたりの DNA 量は 4 となる。

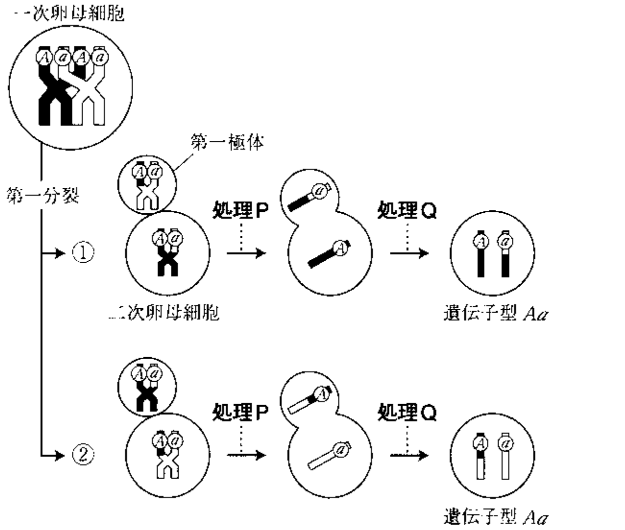


問 5　一次卵母細胞は減数分裂の第一分裂を開始するが，すぐに分裂を停止し，この時期に卵黄やリボソーム，mRNA など初期発生に必要な物質や構造体が蓄積されて，著しく大きくなる。一方，DNA の合成は間期の S 期に行われているため，この時期に合成されることはない。よって，イが誤りである。

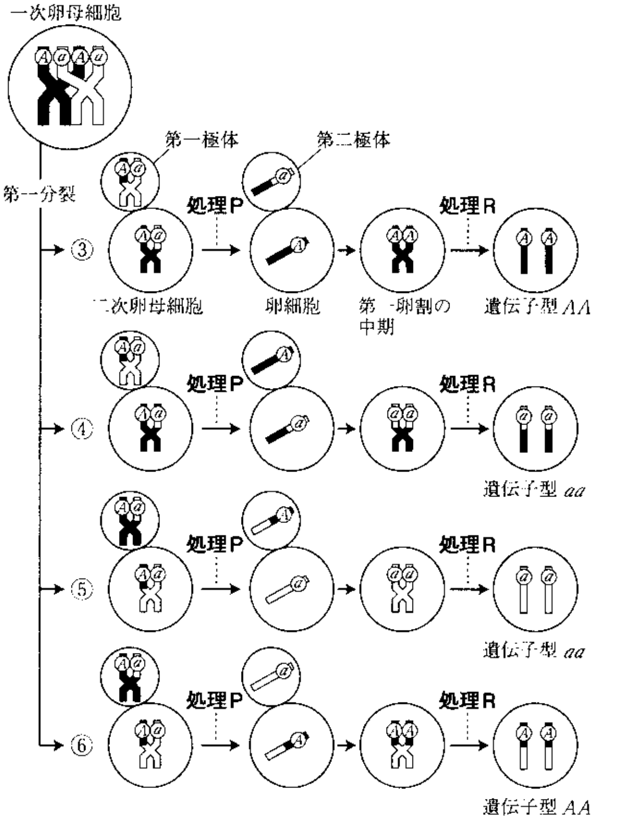
問 6　次ページの図は**操作 1** または**操作 2** を行った場合に，図 2 の染色体と遺伝子 A，a がどのように分配されるかを模式的に表したものである。

生物

操作 1 を行って得た個体の体細胞の染色体構成と遺伝子型



操作 2 を行って得た個体の体細胞の染色体構成と遺伝子型



減数分裂第一分裂において対をなす相同染色体は分裂で生じる2つの娘細胞(二次卵母細胞と第一極体)にそれぞれ分配される。このため，**操作 1** の図①や**操作 2** の図③・④のように二次卵母細胞に遺伝子 A をもつ染色体の一部が乗換えにより遺伝子 a を

もつ染色体の一部に置き換わったものが分配される場合と，**操作1**の図②や**操作2**の図⑤・⑥のように二次卵母細胞に遺伝子 a をもつ染色体の一部が乗換えにより遺伝子 A をもつ染色体の一部に置き換わったものが分配される場合がある。そして第二分裂では分配された染色体が縦裂面で分離し，さらに2つの娘細胞(卵細胞と第二極体)にそれぞれ分配される。

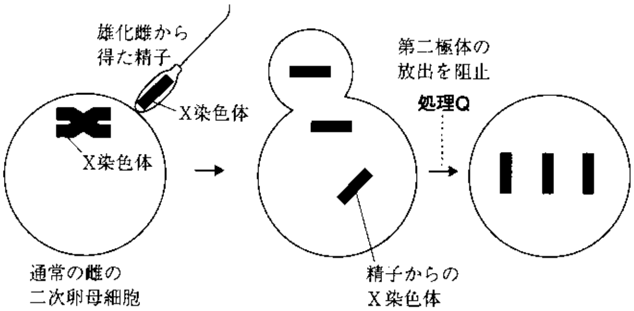
①の場合，不活性化した精子で受精を行う(**処理P**)と減数分裂第二分裂の中期で停止していた二次卵母細胞は分裂を再開し，染色体が縦裂面で分かれることで遺伝子 A をもつ染色体と遺伝子 a をもつ染色体に分かれ，一方が第二極体に含まれて放出される(図では遺伝子 a をもつ染色体が放出される様子が描かれているが，遺伝子 A をもつ染色体が放出されることもある)。しかし，ここで**処理Q**を行うことで放出されるはずの染色体は二次卵母細胞側に戻るので，この処理により生じた細胞には遺伝子 A と a が含まれ，生じる個体の遺伝子型は Aa となる。②の場合も①の場合と同様であり，遺伝子 A をもつ染色体，または，遺伝子 a をもつ染色体が**処理Q**により二次卵母細胞側に戻るので，この処理により生じた細胞には遺伝子 A と a が含まれ，生じる個体の遺伝子型は Aa となる。

③の場合，形成された卵細胞には遺伝子 A を含む染色体が残っている。この後卵割が始まり，まず間期にDNAの複製が行われて，遺伝子 A も複製される。そして，核分裂の前期に染色体が縦裂し，中期には図のように染色体が遺伝子 A を2つもつ状態になる。本来であれば後期に縦裂面で分かれた染色体が2つの娘細胞(割球)に分配されるが，**処理R**により細胞が2つに分かれないため，2本の染色体(それぞれ A をもつ)は1つの細胞にとどまることになる。よって，③で生じた細胞の遺伝子型は AA となる。すなわち，**処理R**を行うことで卵細胞に残った染色体と全く同じ染色体を2本もつ細胞が生じることになるので，卵細胞に遺伝子 a を含む染色体が残っている④，⑤では，生じる細胞の遺伝子型は aa となり，卵細胞に遺伝子 A を含む染色体が残っている⑥では，生じる細胞の遺伝子型は AA となる。したがって，可能性のある遺伝子型は AA および aa である。

よって，すべての遺伝子がホモ接合であるニジマスを得るには，**操作2**の方法を用いればよいことになる。

問7　3倍体の雌では，相同な染色体を3本ずつもつので，性染色体構成はXXXとなる。ニジマスではY染色体をもつ個体は雄になるので，X染色体をもつ卵がX染色体をもつ精子と受精すれば雌が生じ，Y染色体をもつ精子と受精すれば雄が生じる。よって，X染色体をもつ精子だけが得られれば，受精により生じる子はすべて雌になる。このような精子は性染色体構成がXX

の雌に性ホルモンを投与して雄化した個体(雄化雌)から得られる。次の図に示すように精子からは1本のX染色体を受け継ぐので，受精後の第二極体の放出を阻止する(**処理Q**)ことで合計3本のX染色体をもつようになる。



② 遺伝子

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>1</td><td>胚のう</td><td>2</td><td>重複受精</td><td>3</td><td colspan="3">子葉</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>(1)</td><td>オーキシン</td><td colspan="2">サイトカイニン</td><td>(2)</td><td>カルス</td><td>問3</td><td>ア</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問4</td><td>(1)</td><td colspan="4">メチオニン－バリン－セリン</td><td>(2)</td><td colspan="2">DNAリガーゼ</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="7">PCR法では高温で反応が行われるので，ヒトのDNAポリメラーゼは熱変性する。(38字)</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>(i) イ</td><td colspan="2">(ii) Sal I</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>問5</td><td>(1)</td><td>胚乳</td><td>(2)</td><td>エ</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

【配点】(25点)

問1　各2点×3，　問2　(1)　各1点×2(順不同)　(2)　1点，　問3　2点

問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点　(4)　3点(完答)，　問5　(1)　1点　(2)　3点

【出題のねらい】

植物の生殖や組織培養に関する知識問題，および*GFP*(緑色蛍光タンパク質)遺伝子を用いた遺伝子組換え実験と遺伝子発現に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　被子植物の生殖では，花粉管内に2つの精細胞が形成される。このうち一方が胚のうの卵細胞と受精して受精卵となり，もう一方の精細胞は中央細胞と受精して胚乳核をもつ細胞(胚乳細胞)となる。このように2つの受精がほぼ同時に行われる受精様式を重複受精といい，被子植物のみでみられる。受精卵は体細胞分裂をくり返して胚球と胚柄となり，胚球は子葉，幼芽，胚軸，幼根からなる胚となるが，胚柄は退化する。また，胚乳細胞は胚乳を形成し，その後，発芽のための栄養分となる。

問2　植物の組織片を適当な濃度のオーキシンとサイトカイニンを含む培地で培養すると，細胞が脱分化して未分化な細胞塊である

【ポイント】

重複受精

精細胞(n) ＋ 卵細胞(n)
→ 受精卵($2n$)
精細胞(n) ＋ 中央細胞($n+n$)
→ 胚乳核をもつ細胞($3n$)

カルスが生じる。このカルスをオーキシンとサイトカイニンを適当な濃度にして培養すると，茎・葉・根が再分化し，完全なクローン植物を得ることができる。このような技術を組織培養という。植物の組織片から完全な植物体が得られることは，分化した細胞でも，受精卵と同様に発生に必要なすべての遺伝子をもっている(全能性が失われていない)ことを示している。

問3　DNA断片を電気泳動すると，分子量の大きいDNA断片は寒天ゲル内で移動速度が小さいが，分子量の小さいDNA断片は移動速度が大きい。そのため，分子量の小さいDNA断片ほど移動距離が長くなる。よって，アは誤りである。真核生物の遺伝子には，アミノ酸配列を指定するエキソンだけでなくアミノ酸配列を指定しないイントロンが含まれるため，真核生物の遺伝子をそのまま原核生物に導入すると，イントロンも翻訳されるので，目的のタンパク質を得ることができない。そのため，まず導入する遺伝子から転写・スプライシングの過程を経て生じたmRNAを単離し，これに逆転写酵素を作用させ，イントロンを含まないDNAを合成し，これを原核生物に導入する。よって，イは正しい。アグロバクテリウムがもつプラスミドは，植物細胞に入るとプラスミド内の遺伝子を宿主である植物細胞の染色体DNAに組込ませるはたらきがある。これを利用して，植物細胞に外来遺伝子を導入することができる。よって，ウは正しい。その生物が本来もたない外来遺伝子を導入した生物を，トランスジェニック生物と呼ぶので，エは正しい。

トランスジェニック生物
その生物が本来もたない遺伝子を導入した生物

問4(1)　図2のDNAはセンス鎖(転写される鋳型鎖と相補的な鎖)なので，TをUにすることで，mRNAと同じ塩基配列となる。次の図は，合成されるmRNAの塩基配列を示す。

$$5'\cdots \mathrm{GUCGACUCUAGAGGAUCC}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{開始コドン}}}{\boxed{\mathrm{AUG}}}|\mathrm{GUG}|\mathrm{AGC}|\mathrm{AAG}\cdots 3'$$

このmRNAには開始コドンに対応する部分が含まれるので，ここでは開始コドンであるAUGを見つけて，塩基を3つずつ区切ってコドン表から指定されるアミノ酸を探せばよい。したがって，開始コドンに対応する部分から3つ目までのアミノ酸の配列は，コドン表よりAUGがメチオニン，GUGがバリン，AGCがセリンとなる。

(2)　遺伝子組換えで用いられる，DNA断片を連結する酵素はDNAリガーゼである。

(3)　PCR法では，2本鎖DNAにおける塩基間の水素結合を切断し1本鎖DNAにする反応を95℃程度の高温で行う必要がある。ヒトのDNAポリメラーゼはこのような高温では熱変性して失活してしまう。そのため，高温環境に生息する好熱性細菌から得た耐熱性のDNAポリメラーゼを利用する。

PCR法
耐熱性のDNAポリメラーゼを用いる。

(4)　2つのDNA分子を制限酵素で切断し，両者を連結する場合，切断に用いる制限酵素は同じものを利用することが多い。これは，同じ制限酵素で切断したときに生じる1本鎖の部分の塩基配列が互いに相補的になるため，両者を簡単に連結できるからである。例えば，*Sal* I で切断したDNA断片どうしを連結する場合は次のようになる。

制限酵素
特定の塩基配列を認識し，DNAを切断する。

```
5′…—G TCGA C—…3′          5′…G TCGA C—…3′
3′…—C AGCT G—…5′          3′…C AGCT G—…5′
        ↓       Sal I で切断         ↓
5′…—G                           TCGAC—…3′
3′…—CAGCT                           G—…5′
         DNA リガーゼで連結
          5′…—GTCGAC—…3′
          3′…—CAGCTG—…5′
```

図2に示された *GFP* 遺伝子は，次に示すように *Sal* I，*Xba* I，*Nco* I の認識部位をもっている。

```
                                    開始コドンに対応する位置
                                           ↓
5′…GTC|GAC|TCT|AGA|GGA|TCC|ATG|GTG|AGC|AAG…3′
     Sal I     Xba I        Nco I
```

よって，*GFP* 遺伝子を含むプラスミドと *F* 遺伝子を切断する際はこれら3種の制限酵素のいずれかを用いることになる。

次に，*F*-*GFP* 遺伝子のコドンの読み枠を考える。*F*-*GFP* 遺伝子を転写した mRNA は，*F* 遺伝子の開始コドンから *GFP* 遺伝子の終止コドンまでが翻訳されて融合タンパク質が合成される。そのため，*F* 遺伝子のコドンの読み枠と *GFP* 遺伝子のコドンの読み枠が変化しないように連結しなければ，正常なGFPが合成されず，*F*-*GFP* 遺伝子から合成されるタンパク質は蛍光を発しない。コドンの読み枠は，開始コドンが決まればそこから順に決定することができる。開始コドンはAUGであるので，DNAのセンス鎖の対応する位置の塩基配列はATGになる。このATGから3塩基ごとに読み枠を決定すると上図で縦線で区切ったようになる。

選択肢ア～カに示された塩基配列のうち，アとイは *Sal* I の認識配列のGTCGACを，ウとエは *Xba* I の認識配列のTCTAGAを，オとカは *Nco* I の認識配列のCCATGGをそれぞれ含んでいる。これらについて，囲みのある「*F* 遺伝子のアミノ酸を指定する領域」の右端の塩基がコドンの3番目の塩基に対応することを考慮して，コドンの読み枠を示すと，次図のようになる。

ア　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊GTCGAC…3′

イ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|GTCGAC…3′

ウ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊＊TCTAGA…3′

エ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊TCTAGA…3′

オ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊＊＊|CCATGG…3′

カ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊＊CCATGG…3′

ア・イを *Sal* I で，ウとエを *Xba* I で，オとカを *Nco* I で切断した後のコドンの読み枠と 3′ 側の末端は次の図のようになる。

ア　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊G…3′

イ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|G…3′

ウ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊＊T…3′

エ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊T…3′

オ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊＊＊|C…3′

カ　5′…F遺伝子のアミノ酸を指定する領域 ＊＊＊|＊＊＊|＊＊C…3′

Sal I の認識部位があるアとイには，*Sal* I で切断した *GFP* 遺伝子を連結することになる。*Sal* I で切断した *GFP* 遺伝子を，コドンの読み枠とともに示すと次のようになる。

5′…G|TC|GAC|TCT|AGA|GGA|TCC|ATG|GTG|AGC|AAG…3′

↑

Sal I で切断

↓

5′…TC GAC TCT AGA GGA TCC ATG GTG AGC AAG…3′

Sal I で切断した *GFP* 遺伝子はコドンの 2 番目からはじまるので，*GFP* 遺伝子のコドンの読み枠を変えないようにするには *Sal* I で切断した *F* 遺伝子の最後の G はコドンの 1 番目に対応していなければならない。そうでない場合には *GFP* 遺伝子のコドンの読み枠がずれてしまい，アミノ酸配列が大きく異なるものになる。

アに *Sal* I で切断した *GFP* 遺伝子を連結すると，次の図のようになる。ここでは，*F* 遺伝子のアミノ酸を指定する領域は *F* 遺伝子と表記した。

Sal I で切断した遺伝子ア　　　*Sal* I で切断した *GFP* 遺伝子

5′…F遺伝子 ＊＊＊|＊＊＊|＊G　　TCGACTCTAGAGGATCCATGGTGAGCAAG…3′

↘　↙

5′…F遺伝子 ＊＊＊|＊＊＊|＊GT|CGA|CTC|TAG|AGG|ATC|C[AT|G]GT|GAG|CAA G…3′

この場合，*GFP* 遺伝子のコドンの読み枠がずれてしまい，以降のアミノ酸配列が大きく変化する。

一方，イに *Sal* I で切断した *GFP* 遺伝子を連結すると，次の図のようになる。

Sal I で切断した遺伝子イ　　　　　　*Sal* I で切断した *GFP* 遺伝子

5'…$\boxed{F\text{遺伝子}}$ ＊＊＊ ＊＊＊|G　　TCGACTCTAGAGGATCCATGGTGAGCAAG…3'

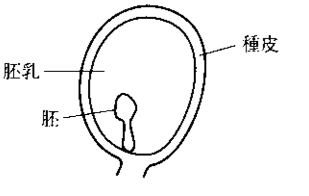
5'…$\boxed{F\text{遺伝子}}$ ＊＊＊ ＊＊＊|GTC GAC TCT|AGA|GGA TCC $\boxed{\text{ATG}}$|GTG|AGC|AAG…3'

この場合，コドンの読み枠を変化させることなく *F* 遺伝子の後ろに *GFP* 遺伝子を連結できる。

同様に考えると，*Xba* I の認識部位があるウとエには，*Xba* I で切断した *GFP* 遺伝子を連結することになる。*GFP* 遺伝子の *Xba* I の認識配列の左端の T(切断したときの末端に位置する)はコドンの読み枠の 1 番目に対応しているので，ウまたはエについて *Xba* I の認識配列の左端の T(切断したときの末端に位置する)は，コドンの 1 番目に対応していなければならない。しかし，前ページの図からウはコドンの 3 番目，エは 2 番目にそれぞれ対応しているのでウ，エともに不適切である。

また，*Nco* I の認識部位があるオとカには，*Nco* I で切断した *GFP* 遺伝子を連結することになる。*GFP* 遺伝子の *Nco* I の認識配列の左端の C(切断したときの末端に位置する)は，コドンの 2 番目に対応しているので，オまたはカについて *Nco* I の認識配列の左端の C(切断したときの末端に位置する)はコドンの 2 番目に対応していなければならない。しかし，前ページの図からオはコドンの 1 番目，カは 3 番目にそれぞれ対応しているのでオ，カともに不適切である。以上のことから，(i) *F* 遺伝子の下流側の塩基配列はイが，(ii) 用いた制限酵素は *Sal* I が正解となる。

問 5 (1)　種子は種皮に包まれており，有胚乳種子では種子内には胚と胚乳が存在する。図 4 から，**実験 2，3，4** で GFP の蛍光がみられるのは胚乳の部位であることがわかる。



(2)　**実験 1，2** で得られた種子の胚乳は，両親の片方から必ず *F-GFP* 遺伝子を受け継ぐが，**実験 1** で得られた種子の胚乳では *F-GFP* 遺伝子は発現しておらず，**実験 2** で得られた種子の胚乳では *F-GFP* 遺伝子が発現している。**実験 1** と **2** では，*F-GFP* 遺伝子が雄親と雌親のどちらに由来するかが異なる。したがって，雄親に由来する *F-GFP* 遺伝子は胚乳では発現せず(**実験 1**)，雌親に由来する *F-GFP* 遺伝子は胚乳で発現する(**実験 2**)ことが推測できる。

次に *M* 遺伝子について考える。**実験 3** で得られた種子の胚乳

は，雄親である *M* 変異体（*M* 遺伝子が機能しない）に由来する *F-GFP* 遺伝子をもつ。雄親に由来するこの遺伝子は本来，発現しないはずであるが，**実験 3** の結果を見ると，胚乳で発現している。したがって，雄の *M* 遺伝子は雄親に由来する *F* 遺伝子の発現を抑制するはたらきがあることが推測できる。**実験 4** で得られた種子の胚乳は，雌親である *M* 変異体に由来する *F-GFP* 遺伝子をもつ。雌親に由来する *F-GFP* 遺伝子は正常な種子の胚乳で発現するが，**実験 4** の結果から，*M* 遺伝子が機能しなくても発現することがわかる。すなわち，*M* 遺伝子の有無に関係なく，雌親由来の *F* 遺伝子は胚乳で発現する。以上のことから，*M* 遺伝子は雌親から遺伝する *F* 遺伝子の発現には関与せず，雄親から遺伝する *F* 遺伝子の発現を抑制すると考えられる。

3 神経

【解答】

<table>
<tr><td>問 1</td><td>X</td><td>ア</td><td>Y</td><td>イ</td><td>Z</td><td>エ</td></tr>
<tr><td>問 2</td><td>1</td><td>静止</td><td>2</td><td>全か無か</td><td>問 3</td><td>ウ　エ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問 4</td><td>(1)</td><td colspan="5">興奮性の N1 と N3 による膜電位の上昇と抑制性の N2 による膜電位の低下が加算されて，シナプス後電位が活動電位の発生する閾値に達しなかった。(65字)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="5">イ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問 5</td><td>(1)</td><td>筋紡錘</td><td>(2) (i)</td><td>50 m/秒</td><td>(ii)</td><td>2 ミリ秒</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="5">伸筋を支配する運動神経の興奮が促進されて伸筋が収縮するとともに，屈筋を支配する運動神経の興奮が抑制されて屈筋の収縮が抑えられる。(64字)</td></tr>
</table>

【配点】（25点）

問 1　各 1 点 × 3，　問 2　各 2 点 × 2，　問 3　各 2 点 × 2（順不同），　問 4　(1)　3 点　(2)　1 点
問 5　(1)　2 点　(2)　(i)　2 点　(ii)　2 点　(3)　4 点

【出題のねらい】

神経系について，興奮の発生やシナプスにおける伝達に関する知識問題と，シナプス後電位，および脊髄反射に関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問 1・2　多くの細胞では，細胞膜上に存在する Na^+-K^+ ATP アーゼと呼ばれる酵素のはたらき（ナトリウムポンプ）によって，Na^+ が細胞外にくみ出されるとともに，K^+ が細胞内に取り込まれる能動輸送が行われている。一方，ニューロンの細胞膜には電位依存性ナトリウムチャネル，電位依存性カリウムチャネル，電位非依存性カリウムチャネルなどのタンパク質が存在している。興奮を発生していない静止時には，電位依存性ナトリウムチャネルや電位依存性カリウムチャネルは閉じているが，電位非依存性カリウムチャネルは開いているので，一部の K^+ が濃度勾配にしたがって細胞内から流出し，細胞内が細胞外に対して 60 ～ 70 mV

【ポイント】

程度負(マイナス)の膜電位が生じる。この電位を静止電位という。ニューロンの軸索に閾値以上の刺激を与えると，電位依存性ナトリウムチャネルが開き，Na^+ が細胞内に流入することによって細胞内が細胞外に対して 30 ～ 40 mV 程度正(プラス)に転じる。この膜電位の変化を活動電位と呼ぶ。このとき，流入する Na^+ の量は，Na^+ の膜をはさんだ濃度勾配に依存してほぼ一定となるので，活動電位の大きさも 100 mV 程度で一定となる。このように，ニューロンにおいては刺激の大きさが閾値を超えなければ活動電位は発生せず，閾値を超えると一定の大きさの活動電位が発生し，それ以上の強い刺激を与えても活動電位の大きさは変化しない。これを全か無かの法則と呼ぶ。

ニューロンの軸索末端は狭いすき間を隔てて他のニューロンや筋繊維などと接しており，この部分をシナプスという。シナプスでは軸索末端から神経伝達物質が放出され，これが接続するニューロンや筋繊維の受容体に結合する。興奮性のシナプスでは，神経伝達物質が伝達物質依存性イオンチャネルに結合すると Na^+ が細胞内に流入して細胞内の電位が正の方向に変化するシナプス後電位を生じる。一方，抑制性のシナプスでは神経伝達物質が伝達物質依存性イオンチャネルに結合すると Cl^- が細胞内に流入したり K^+ が細胞内から流出したりして，細胞内の電位が負の方向に変化するシナプス後電位を生じる。

問 3　シナプスを形成する軸索末端には多数のシナプス小胞が存在し，この中に貯えられた神経伝達物質がシナプス間隙に放出される。したがって，アおよびイは正しい。シナプスにおいては，軸索末端に神経伝達物質が蓄積され，接続する次のニューロンにその受容体があるので，興奮は軸索末端から接続する次のニューロンの樹状突起や細胞体に一方向に伝達される。したがって，ウは誤りである。神経伝達物質は，運動神経や副交感神経ではアセチルコリンであり，交感神経の節後ニューロン(標的器官に直接接続するニューロン)ではノルアドレナリンである。したがって，エも誤りである。一方，脳内においては，グリシンやグルタミン酸などのアミノ酸のほか，γ-アミノ酪酸(GABA)，ドーパミンなどの物質も神経伝達物質として作用する。したがって，オは正しい。神経伝達物質は，受容体に結合するとすみやかに分解されたり，軸索末端に回収されたりするので，その作用は一過性となる。例えば，アセチルコリンは，受容体に結合した後，コリンエステラーゼと呼ばれる酵素により分解され，分解産物は軸索末端に回収されて再利用される。したがって，カは正しい。

問 4　図 1 の N1 を刺激したときのシナプス後電位は興奮性で，図 2 A に示すように静止電位よりも正(プラス)側に変化するが，このときには，図 2 に示された閾値を超えないため，電位依存性ナ

静止電位
細胞内が 60 ～ 70 mV 程度負となる。

活動電位
Na^+ が細胞内に流入して細胞内が正になる。

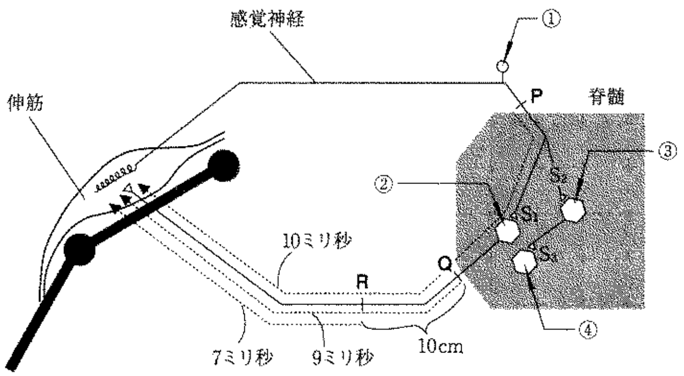
神経伝達物質
運動神経・副交感神経　**アセチルコリン**
交感神経　**ノルアドレナリン**

トリウムチャネルは開かず，活動電位は発生しない。また，図1のN2を刺激したときのシナプス後電位は抑制性で，図2Bに示すように静止電位よりも負(マイナス)側に変化して，こちらも閾値を超えないため，活動電位は発生しない。一方，図1のN1とN3を同時に刺激したときは，興奮性のN1による電位変化に興奮性のN3による電位変化が加算された結果，シナプス後電位が閾値を超え，電位依存性ナトリウムチャネルが開いて活動電位が発生したと考えられる。したがって，(1)においてN1とN2とN3を同時に刺激したときに活動電位が発生しなかったのは，興奮性のN1とN3による膜電位の上昇に抑制性のN2による膜電位の低下が加算されて，結果的にシナプス後電位が閾値を超えなかったからであると推測できる。(1)では，興奮性のN1とN3による膜電位の上昇に抑制性のN2による膜電位の低下が加算されても閾値を超えなかったので，(2)において興奮性のN3と抑制性のN2それぞれによる膜電位の変化を加算した場合は閾値を超えず，活動電位は発生しないと予測される。よって，イが正解である。

筋紡錘
骨格筋にかかる張力を受容する。

問5(1) 脚などの伸筋が引き伸ばされると，張力の変化を伸筋中の筋紡錘と呼ばれる受容器が感知して，これによって生じた興奮が感覚神経を介して脊髄に伝えられ，さらに運動神経を介して引き伸ばされた伸筋に興奮が伝わることで伸筋の収縮が促される。このような反射は，例えば，ヒトの膝蓋腱反射においては，不意の外力によって引き伸ばされた伸筋(大腿四頭筋)の収縮を促すことになるので，外力に対抗して姿勢を一定に保つ意味をもつ。

(2) 図3にP，Q，Rの各点を刺激してから伸筋に反応が現れるまでの時間などを記入したものを，次に示す。



(i) QおよびRを刺激してから伸筋に反応が現れるまでの時間には，運動神経の伝導にかかる時間のほかに，伸筋とのシナプスにおける伝達時間，および伸筋において筋収縮が開始されるまでの時間が含まれるので，伝導速度を求めるときには伝導のみが起

こるＱとＲの間を用いて計算すればよい。すなわち，ＱとＲの距離である10 cmを(9 − 7)ミリ秒で伝導したことになるので，伝導速度は，

$$\frac{10\,\mathrm{cm}}{(9-7)\,\text{ミリ秒}} = \frac{10\times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2\times 10^{-3}\,\text{秒}} = 50\,\mathrm{m}/\text{秒となる。}$$

(ii) 問題文に「脊髄内のニューロンにおける興奮の伝導に要する時間は無視できるものとする」とあるので，Ｐを刺激したときの10ミリ秒とＱを刺激したときの9ミリ秒の差である1ミリ秒は，図中のS_1のシナプスでの伝達に要する時間と考えることができる。ここでさらに問題文に「脊髄内に存在するすべてのシナプスで伝達にかかる時間は等しいものとし」とあり，Ｐを刺激してから図中④の屈筋を支配する運動神経の細胞体に情報が伝達されるまでの時間は，S_2およびS_3の2ヵ所のシナプスの伝達に要する時間と考えられるので，求める時間は1ミリ秒×2＝2ミリ秒となる。

(3) この動物においてＰをある強さで刺激すると，①および②では，図2Ｃのような活動電位を記録したので，これにより伸筋の収縮が促進されたと考えられる。一方，このとき，③の介在ニューロンの細胞体では活動電位を記録したが，④の屈筋を支配する運動神経の細胞体では，図2Ｂのような抑制性のシナプス後電位を記録した。このことは，伸筋が収縮する反射が起こるときには屈筋の運動神経の興奮が抑制されて，屈筋の収縮が抑えられることを意味する。このように，ヒトを含めた脊椎動物では，1組の屈筋および伸筋において，片方の筋肉が収縮する際にはもう片方の筋肉の収縮が抑制されるように調節されている。

屈筋と伸筋
片方が収縮する際にはもう片方の収縮が抑制される。

4 植物の反応

【解答】

問1	1	遠赤色	2	フィトクロム	3	アブシシン酸
問2	ウ	問3	(1)	ジベレリン	(2)	イ
問4	(1)	エ	(2)	カ		
	(3)	(i)	イ			
		(ii)	変異体では蒸散を抑制できないため，蒸発熱による葉温の低下が大きくなる。(35字)			
問5	(1)	①	ア	②	イ	
	(2)	H^+の排出で孔辺細胞の膜電位が低下すると，電位依存性カリウムチャネルが開き，K^+が細胞内に流入することでK^+濃度が上昇する。(59字)				

【配点】(25点)

問1 各2点×3， 問2 2点， 問3 (1) 2点 (2) 2点

問4 (1) 1点 (2) 2点 (3) (i) 1点 (ii) 3点

問5 (1) 2点(完答) (2) 4点

【出題のねらい】

植物の光に対する反応，および植物ホルモンに関する知識問題と，青色光により気孔が開くしくみに関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問 1　植物にとって光はさまざまな反応を引き起こすシグナルになっている。光を感知するのに用いられる光受容体にはフィトクロム，フォトトロピン，およびクリプトクロムの 3 種類の色素タンパク質が知られており，フィトクロムはおもに赤色光と遠赤色光を，フォトトロピンとクリプトクロムはおもに青色光を受容する。フィトクロムには Pr 型(赤色光吸収型)と Pfr 型(遠赤色光吸収型)の 2 つの型があり，次に示すようにそれぞれの光を吸収すると別の型に相互に変換する。このうち一般に Pfr 型が活性型であるので，赤色光を吸収すると植物体に特定の反応が誘導されるが，その直後に遠赤色光を吸収するとフィトクロムが不活性型となり，赤色光の効果は打ち消される。

$$\begin{array}{c} \text{Pr 型} \\ \text{(赤色光吸収型)} \end{array} \underset{\text{遠赤色光}}{\overset{\text{赤色光}}{\rightleftarrows}} \begin{array}{c} \text{Pfr 型} \\ \text{(遠赤色光吸収型)} \\ \downarrow \\ \text{さまざまな生理反応} \end{array}$$

気孔の開閉は孔辺細胞の膨圧が変化することによって起こる膨圧運動である。植物体内の水分が不足すると，植物ホルモンのアブシシン酸の濃度が上昇し，これによって孔辺細胞の膨圧が下がり，気孔が閉じる。

問 2　暗所では，子葉を展開せずに茎を伸長させる「もやし」状の伸長が起こるが，光があたると茎の伸長が抑制されて葉を展開するようになる。これはクリプトクロムが青色光を受容することによって誘導される反応である。したがって，アは正しい。芽ばえが光の方向に屈曲する光屈性は，フォトトロピンが青色光を受容することによって起こる反応である。このため，赤色光を照射してもこの反応は起こらない。したがって，イは正しい。葉に含まれる光合成色素のクロロフィルは，赤色光をよく吸収するが，遠赤色光はほとんど吸収しない。このため，森林の林冠の葉を透過して林床に届く光には，赤色光はあまり含まれておらず，遠赤色光の割合が大きい。光発芽種子の発芽は上述した Pfr 型フィトクロムによって起こるので，遠赤色光の割合が大きいと発芽が抑制される。したがって，ウは誤りである。緑色植物の主要な光合成色素であるクロロフィルは，緑色光はあまり吸収せず，赤色光や青色光をよく吸収して光合成に利用する。したがって，エは正しい。以上から，ウが正解である。

【ポイント】

光受容体

フィトクロム

赤色光と遠赤色光を受容

フォトトロピン，クリプトクロム

青色光を受容

アブシシン酸

気孔を閉じさせる。

光発芽種子の発芽

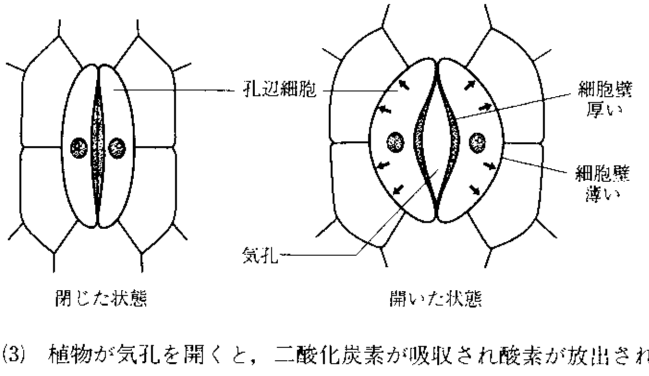
赤色光で促進，遠赤色光で抑制

問 3 (1)　赤色光によりフィトクロムがPfr型に変化すると，植物細胞内ではジベレリン合成にかかわる遺伝子の発現が誘導され，ジベレリンが合成される。ジベレリンはアブシシン酸のはたらきを抑制し，また，発芽に必要な遺伝子の発現を促進して，発芽を促す。

(2)　ジベレリンは子房の成長を促進し，受粉しなくても果実を成長させる単為結実を誘導するので，種なしブドウをつくる際に用いられる。したがって，イが正しい。なお，アおよびエはエチレンが関与する反応である。ウの現象は頂芽優勢と呼ばれ，この現象にはオーキシンとサイトカイニンが関与している。

問 4 (1)　チューリップの花は，花弁の外側より内側の成長量が大きいと開き，内側より外側の成長量が大きいと閉じる。キュウリの巻きひげは，支柱に接触していない側より接触している側の成長量が小さいため，支柱に巻きつく。これらの反応は，植物体の部位によって成長量の差が生じることで起こる成長運動である。したがって，アとイは誤りである。幼葉鞘が光の方向に屈曲する反応は，オーキシンが光と反対側の細胞の伸長成長を促進することによる成長運動であり，膨圧運動ではない。したがって，ウは誤りである。オジギソウの葉は，昼間は開いているが，夜になると折りたたまれる。これを就眠運動という。この反応は葉枕（ようちん）(葉柄のつけねの部分)の細胞の膨圧変化によって起こる膨圧運動であるので，エが正しい。

(2)　孔辺細胞のK^+濃度が上昇すると，細胞の浸透圧が上昇することで周囲から吸水が起こり，細胞壁を押し広げようとする圧力である膨圧が上昇する。孔辺細胞の細胞壁は内側(気孔側)が厚く，外側が薄いので，膨圧により外側がより伸長して孔辺細胞が湾曲し，気孔が開く(次図)。



(3)　植物が気孔を開くと，二酸化炭素が吸収され酸素が放出されるとともに，蒸散によって水が水蒸気として失われる。このとき蒸発熱が奪われるので，蒸散は葉温を低下させるはたらきがある。正常個体は体内の水分が不足すると，気孔を閉じて蒸散量を減少させるが，気孔を閉じることができない変異体では蒸散が起

ジベレリン
種子の発芽促進，単為結実の誘導

エチレン
離層形成の促進，果実の成熟促進

頂芽優勢
オーキシンとサイトカイニンが関与

成長運動
植物体の部位によって成長量に差が生じて起こる植物の形態変化

膨圧運動
膨圧の変化によって起こる植物の形態変化

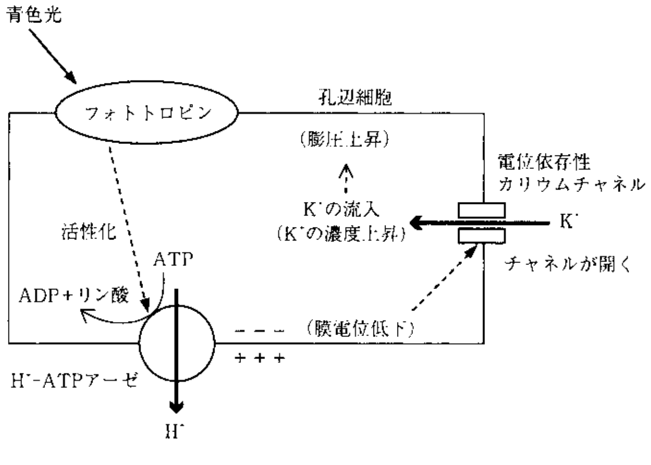
孔辺細胞
内側(気孔側)の細胞壁の厚さは外側より厚い。

こり続けるため，蒸発熱によって，変異体の葉温は正常個体の葉温よりも低くなると考えられる。したがって，イが正解である。

問 5　気孔はフォトトロピンが青色光を受容することで開く。このしくみを**実験 1 ～ 3** の結果から考察する。

実験 1 から，孔辺細胞から作成したプロトプラストに青色光を照射すると，細胞外液の pH が低下する（H^+ 濃度が上昇する）ことがわかる。また，**実験 2** で，H^+-ATP アーゼの阻害剤を加えると細胞外液の pH の変化がみられなくなることから，青色光照射により，H^+-ATP アーゼが活性化され，H^+ が細胞内から細胞外へ輸送されたため，外液の H^+ 濃度が増加，すなわち pH が低下したと考えられる。**実験 3** の文章中に，孔辺細胞の細胞膜には電位依存性カリウムチャネルが存在することが記されており，図 2 から孔辺細胞内の膜電位が低下すると，K^+ の細胞内への流入がみられることがわかる。

以上のことから，気孔が開くしくみは次のように説明できる。フォトトロピンが青色光を受容すると H^+-ATP アーゼが活性化され，これにより正電荷をもつ H^+ が細胞外へ輸送されると，細胞外に対する細胞内の電位（膜電位）が低下する。この結果，細胞膜に存在する電位依存性カリウムチャネルが開き，K^+ が細胞内に流入して細胞内の K^+ が増加する（次図）。そして，**問 4** で述べた，孔辺細胞の膨圧上昇により，孔辺細胞が湾曲して気孔が開く。



地　学

1　プレートテクトニクス

【解答】

問1	プレート	リソスフェア	プレートより下	アセノスフェア	問2	小さくなる。		
問3	エ	問4	(1)	和達－ベニオフ帯(面)	(2)	イ		
問5	(1)	ア	(2)	X－X′	太平洋プレート	Y－Y′	フィリピン海プレート	
	(3)	マントルに水が供給され，かんらん岩の融点が低下してマグマが発生する。						
問6	(1)	エ	(2)	沈み込んだプレートの自重により，プレートを下方に引き込む力がはたらいているから。				

【配点】 (20点)

問1　各1点×2，　問2　1点，　問3　2点，　問4　(1)　2点　(2)　2点，

問5　(1)　2点　(2)　各1点×2　(3)　2点，　問6　(1)　2点　(2)　3点

【出題のねらい】

日本付近のプレート運動をもとに，海洋プレートの沈み込みと深発地震や火山活動との関係についての基本事項の確認，およびプレート運動とアイソスタシーを関連づけることをねらいにした。さらに，重力異常の意味もあわせて理解しておいてほしい。

【解説】　問題

問1　プレートは，地殻とマントルの上部をあわせたかたい部分である。プレートより下の岩石は，プレートに比べるとやわらかい。この物理的性質の違いから，プレートに相当するかたい層をリソスフェア，プレートより下の部分をアセノスフェアという。

問2　物質がやわらかいほど地震波速度は小さくなる。深さ100～200 km付近では地震波速度が小さくなるため，この部分の岩石はやわらかくなっていると推定されている。この部分は(地震波の)低速度層ともいわれ，アセノスフェアと同義に扱っている教科書もある。このやわらかい性質が上部のプレートをすべりやすくし，プレートの移動を容易にしている。

問3　海溝は，海洋プレートの沈み込みによって海底が溝状に長く連なっている部分であり，その周辺には歪(ひず)みが蓄積しやすい。この歪みは，大陸プレートの跳ね上がりに伴う逆断層型の地震の発生によって解放される。これを海溝型地震という。

ア：大陸プレート内陸部の日本列島の地下浅部を震源とする地震は，直下型地震と呼ばれる。直下型地震は震源が浅いため，マグニチュード(M)がそれほど大きくなくても被害をもたらすことがある。よって，海溝型地震には該当せず，誤りである。

【ポイント】

低速度層
リソスフェア直下の，地震波速度が小さい層。この上をプレートが移動している。

海溝型地震
海溝付近において，大陸プレートの跳ね上がりによって発生する逆断層型の地震。

直下型地震
大陸プレート内陸部で発生する震源が浅い地震。震源が浅いためMがそれほど大きくなくても，震度が大きくなり，大きな被害をもたらすことがある。

イ：一般に，海洋プレートの移動速度は大陸プレートに比べて大きく，数十年単位で見ると移動速度は一定である。よって，海溝型地震が起こって海洋プレートの沈み込みに伴う歪みのエネルギーが解放されても，再び歪みのエネルギーの蓄積が始まる。このため，海溝型地震は，同じようなところで比較的短い周期(数十年～数百年)で発生する傾向がある。よって，誤りである。

ウ：震源の深さが100 kmよりも深い地震は，深発地震である(**問 4** (1)に関連)。海溝型地震は震源が比較的浅いので，誤りである。

エ：M 8.0を超える巨大地震の多くは海溝型地震によるものである。発生が危惧されている東海・東南海・南海地震も海溝型地震である。よって，これが正しい。

問 4　(1)　深発地震は，震源の深さが100 kmを超え，海溝から離れるほど震源が深くなる。この震源が分布する面を和達(わだち)－ベニオフ帯(面)という。世界の多くの深発地震の震源は，斜めに沈み込む海洋プレート内部に分布している。

(2)　深さ700 km付近にマントル物質の密度の不連続面がある。この深さが上部マントルと下部マントルの境で，造岩鉱物の結晶構造が変化していると考えられている。下部マントルは密度が大きいため，この深さがプレートとして沈み込む限界であり，深発地震はほぼこの深さまで観測されている。よって，イが正しい。

問 5　(1)　日本列島のような(島)弧－海溝系に分布する活火山の多くは，海溝から100 km以上離れたところに形成される。活火山が存在する領域の海溝側の限界線を火山前線(火山フロント)という。よって，アが正解である。

(2)　火山前線は沈み込むプレートの等深度線にほぼ並行している。日本列島付近で沈み込んでいる海洋プレートは「太平洋プレート」と「フィリピン海プレート」である(図1－1)。海洋プレートは，海溝やトラフから沈み込むので，各プレートが沈み込む海溝やトラフに沿った火山前線は，各海洋プレートの沈み込みの影響を受けたものである。

火山前線 **X－X′** は太平洋プレートが沈み込む日本海溝と伊豆・小笠原海溝に沿っているので，太平洋プレートが正解である。**Y－Y′** はフィリピン海プレートが沈み込む南海トラフに沿っているので，フィリピン海プレートが正解である。なお，問題図1ではフィリピン海プレートの沈み込みによる深発地震の震源の等深度線を省略しているが，九州以南ではかなり判明している。しかし，本州と四国ではまだ判明していない部分も多い。

(3)　弧－海溝系の火山帯の地下は，かんらん岩が部分溶融してマグマが形成される温度－圧力条件にはない。このため，この地域のマグマの発生は，マントルに水が供給されることによるかんら

和達－ベニオフ帯(面)
海溝から離れるほど震源が深くなる深発地震の震源分布。

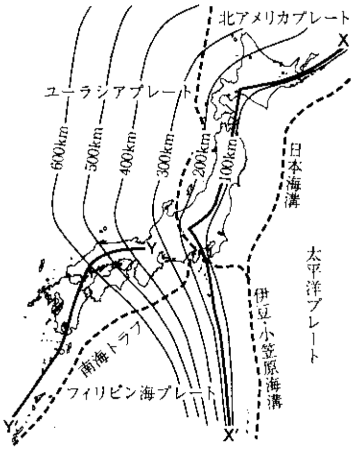


図1－1

火山前線(火山フロント)
おもに弧－海溝系において，活火山が分布する海溝側の限界線。火山前線より海溝側に活火山はない。

地
学

ん岩の融点の低下がおもな原因であると考えられている。マントル内への水の供給源としては，海洋プレートを構成する含水鉱物が，温度と圧力の上昇によって結晶構造を変化させるときに放出する水が考えられている。

問6　地球上の重力は標高によって異なるため，測定した重力の値を海抜0mで測定した値に補正する。このとき測定地点から海抜0mまでの間には物質がないものとして補正することをフリーエア補正(高度補正)という。フリーエア補正をした重力から地球楕円体の表面上の重力(標準重力)を引いた値をフリーエア異常という。フリーエア異常は，地球の中心から地表までの質量が地球楕円体と等しければ理論的には0になる。

一般に，アイソスタシーは，均衡面から地球の中心までの質量はどこも等しいと仮定し，均衡面より上にある物質の質量のみを考えている。よって，図1－2のように，地殻A，B，Cでアイソスタシーが成立している場合，均衡面にかかる重力a″，b″，c″は等しいので，マントルより密度の小さい地殻が厚いほど地表面(標高)が高く，モホ面は深くなる。このとき，地表から均衡面の間にある物質の質量は三つとも等しく，理論的にはどの場所でもフリーエア異常が0になる。

図1－3では地殻Aでアイソスタシーが成り立っているが，地殻Bのように地殻がアイソスタシーが成立する位置よりも深くにあれば，その分だけ均衡面より上にあるマントルが減るので，均衡面上にかかる重力b″が小さくなり，アイソスタシーが成立しない。このとき，地表の重力bも小さくなるのでb′も小さくなり，フリーエア異常が負になる。つまり，地殻が沈み過ぎているとフリーエア異常は負になるのである。

(1)　スカンジナビア半島周辺は，かつて地表を覆っていた氷床が融けて流出したため，図1－3の地殻Bのように地殻が深くにあり，アイソスタシーが成立していない。現在は，アイソスタシーが成立するように地殻が上昇していると考えられている。これはフリーエア異常が負を示していることからも推測できる。一方，日本海溝でも地殻が沈み込んでいるため，均衡面上の質量は小さくなり，フリーエア異常は負になる。よって，正解はエである。

(2)　日本海溝付近も，他に力が加わらなければスカンジナビア半島同様に地殻は上昇するはずである。この上昇を妨げているのが，沈み込む海洋プレートの自重による下向きの力である。海洋プレートの自重による沈み込みは，プレート移動の原動力の一つであると考えられている。

沈み込み帯でのマグマの発生

水の供給によりかんらん岩の融点が下がることがおもな原因。無水時より低い温度でかんらん岩が部分溶融する。

フリーエア補正(高度補正)

観測点と標高0mの間の物質(岩石)の質量を考慮せずに，実測した重力の値を標高0mで観測したときの値に補正すること。

フリーエア異常

フリーエア補正をした重力から地球楕円体の表面上の重力を引いた値。

アイソスタシー

マントル内に仮定した均衡面上の質量は等しいという考え方。

A, B, Cともアイソスタシーが成立しているとき

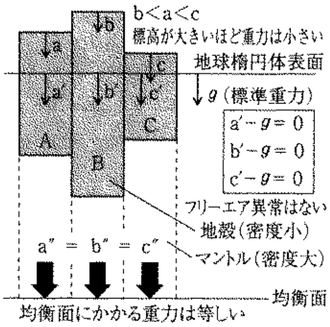


図1－2

BとCでアイソスタシーが成立していないとき

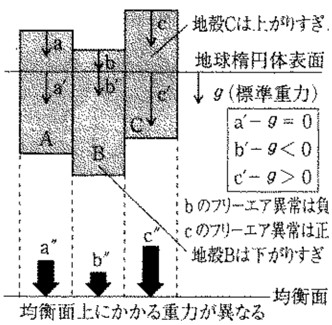


図1－3

アイソスタシーとフリーエア異常

理論的にはアイソスタシーが成立していれば，フリーエア異常は0になる。

2 岩石・鉱物

【解答】

問1	1	火山	2	水				
問2	中央海嶺での玄武岩質の火山活動で形成された玄武岩が，プレート運動によって運ばれたため。							
問3	名称	石英	化学式	SiO_2	問4	ア，イ，ウ	問5	ウ，エ
問6	(1)	多形(同質異像)	(2)	Al_2SiO_5	(3)	A→C→D→B		

【配点】 (20点)

問1　各2点×2，　問2　3点，　問3　各1点×2，　問4　2点(完答・順不同)，

問5　2点(完答・順不同)，　問6　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点(完答)

【出題のねらい】

火成岩，堆積岩，変成岩の分類や構成鉱物などに関する総合問題である。頻出問題である多形鉱物を利用した変成岩の形成過程に関する問題も出題した。

【解説】

問題

問1 $\boxed{1}$：マグマが冷えてできた岩石が火成岩である。火成岩は，地表近くで急激に冷えて固まった火山岩と，地下深くでゆっくり冷えて固まった深成岩に分類される。これらは，さらにSiO_2の割合や構成鉱物によって細かく分類されている。

$\boxed{2}$：堆積物から堆積岩が形成される作用を続成作用という。続成作用は，堆積物が圧縮されて水が絞り出されるなどしてかたくなる圧密と，粒子の間にSiO_2や$CaCO_3$などが入り込み，粒子間を結合させる膠結によって起こる。

問2　地球の表面の7割を占める海では，堆積物などを取り除いた海洋底の大部分は玄武岩でできている。これは，中央海嶺での玄武岩質マグマによる火山活動でできた玄武岩が，プレートの移動に伴って中央海嶺の両側に移動していき，海洋底の大部分を形成するようになったためである。

問3　花こう岩に含まれるおもな鉱物は，石英，カリ長石，Naに富む斜長石，黒雲母である。このうち，石英は，図2－1のように結晶構造の基本であるSiO_4四面体の酸素がすべて共有されて結合した立体構造をしているため，非常にかたい鉱物である。よって，石英は風化に強く，海岸などに堆積した砂の中にも多く含まれる。石英は無色透明で，大きな結晶は水晶と呼ばれることもある。

石英を構成するSiO_4四面体の4個の酸素は，すべて隣の四面体と共有されている。単位格子では，共有されている酸素は$\frac{1}{2}$個として数えるので，酸素は合計で$\frac{1}{2}\times4=2$個となり，石英の化学式はSiO_2となる。

【ポイント】

火成岩

マグマが冷えてできる岩石。急激に冷え固まると火山岩，ゆっくり冷え固まると深成岩になる。

続成作用

堆積物から堆積岩が形成される作用。

石英

無色透明の鉱物で，化学式はSiO_2である。SiO_4四面体の酸素がすべて隣の四面体と共有されて結合した立体構造をしているため，非常にかたく，風化に強い。

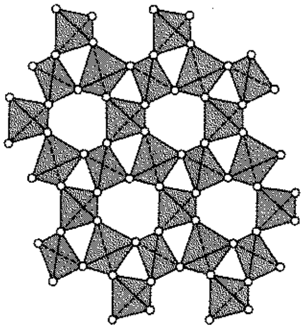


図2－1　石英の結晶構造
○は酸素。四面体の中央にある珪素は省略している。

問4　火山の周辺や風下側に降り積もった火山灰が続成作用を受けると凝灰岩になる。火山灰は広い範囲に短期間のうちに堆積するので，火山灰層や凝灰岩層は地層の対比に役立つ鍵層として使われることが多い。鍵層の条件は次の三つである。

・短期間に堆積した地層である…選択肢ア
・他の地層と区別しやすい…選択肢イ
・広範囲に堆積した地層である…選択肢ウ

火山灰層や凝灰岩層は，この三つの条件のすべてにあてはまる場合が多く，鍵層として非常に重要である。選択肢エについては，火山灰は空中ですぐに冷やされるので，噴火した火山の近くを除いて高温の状態のまま堆積することはない。また，高温で堆積したかどうかは鍵層とは関係がないので，誤りである。

問5　チャートの主成分は SiO_2，石灰岩の主成分は $CaCO_3$ であり，いずれも生物起源の場合は生物岩，化学的に沈殿するなどしてできた場合は化学岩に分類される。放散虫は SiO_2 で殻がつくられているのでチャートになる。また，珪藻も細胞壁が SiO_2 でできているのでチャートになる。したがって，ウとエが正解である。他のものは $CaCO_3$ で骨格や殻がつくられているので，石灰岩になる。

問6　変成岩の変成時の温度・圧力は，変成岩に含まれる多形鉱物を利用して推定できる。

(1)・(2)　化学組成が同じで結晶構造が異なる鉱物どうしの関係を多形(同質異像)という。本問の Al_2SiO_5 は紅柱石・珪線石・藍晶石の多形鉱物である。他に，C(炭素)からなる石墨とダイヤモンドも多形の関係である。

(3)　変成岩A～Dの形成領域を問題の図1にあてはめて考えればよい。Aは温度が約700℃で紅柱石を含むので，圧力の値を特定できないが，図2－2のAのどこかである。Bは温度が約600℃で藍晶石を含むので，これも圧力の値を特定できないが，図2－2のBのどこかである。Cは紅柱石と藍晶石の両方を含

凝灰岩
火山灰が続成作用を受けてできる堆積岩。

鍵層の条件
・短期間で堆積する。
・他の地層と区別しやすい。
・広範囲に堆積する。

チャート
おもに SiO_2 の成分からなる堆積岩。放散虫や珪藻が集まって続成作用を受けるとチャートができる。

石灰岩
おもに $CaCO_3$ の成分からなる堆積岩。有孔虫，サンゴ，貝殻が集まって続成作用を受けると石灰岩ができる。

多形(同質異像)
化学組成が同じで結晶構造が異なる鉱物どうしの関係。
Al_2SiO_5：紅柱石・珪線石・藍晶石
C：石墨・ダイヤモンド

むので，図２－２の紅柱石と藍晶石の境界線上のどこかであり，温度が約400℃なので，図２－２のＣ点になる。Ｄは紅柱石と珪線石と藍晶石のすべてを含むので，図２－２のＤ点になる。したがって，圧力が低い順に並べると，Ａ→Ｃ→Ｄ→Ｂとなる。

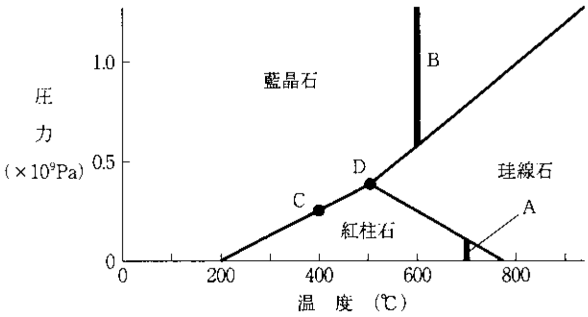


図２－２　変成時の温度と圧力

3 地球の歴史と生物の進化

【解答】

問1	1 カンブリア	2 シルル	3 石炭	4 白亜			
問2	(1) マグマオーシャン	(2) 微惑星の衝突によるエネルギー	原始大気の温室効果				
問3	(1) ストロマトライト	(2) 縞状鉄鉱層	問4	かたい殻をもつようになった。			
問5	ア	オ	問6	寒冷な気候で，海水面が低下したため，大陸と陸続きになっていた。			

【配点】 (20点)

問1　各1点×4，　問2　(1)　1点　(2)　各2点×2(順不同)，　問3　(1)　2点　(2)　2点，
問4　2点，　問5　2点(完答・順不同)，　問6　3点

【出題のねらい】

地球の誕生から現在まで，地球の環境は大きく変化してきた。それには，地球内部の活動と生物の変遷とが大きく関わっている。今回は，環境の変化と生物の変遷・進化について，また，日本列島の地史について出題した。

【解説】

問題

問1　地質時代は，地球が誕生した約46億年前から約5.4億年前までの先カンブリア時代，約2.5億年前までの古生代，約6600万年前までの中生代，それ以降の新生代に分けることができる。図3－1に地球の歴史をまとめた。代，紀の名前，代の境界の放射年代は必ず覚えておこう。

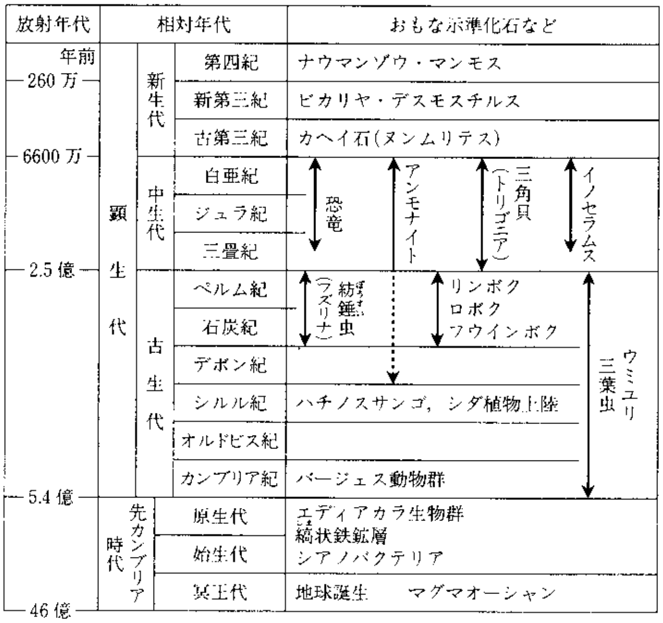


図3－1　地球の歴史

【ポイント】

地質時代は，生物の変遷を基準に分類されている。生物の変遷と環境との関係を，年代を追って確認していこう。

生物が突然大量に出現した約5.4億年前からが古生代である。このときの生物の大量出現をカンブリア(1)紀の爆発(生物爆発)と呼ぶことがある。約4.4億～4.2億年前のシルル(2)紀には，成層圏に形成されたオゾン層が，生物に有害な紫外線を吸収することによって地表に届く紫外線が減少し，最初の大型陸上植物であるシダ植物が出現した。この後，石炭紀～ペルム紀にはシダ植物の大森林(リンボク・ロボク・フウインボク)が形成され，これが地層中に埋没して炭化し，現在の石炭(3)の起源となった。

中生代の白亜(4)紀末には，巨大隕石(いんせき)がメキシコのユカタン半島に落下したため，地球の環境が変化し，恐竜やアンモナイトなど中生代に繁栄した生物が大量絶滅したと考えられている。

問2 (1) 約46億年前，地球が誕生した当時の表層は岩石が融(と)けた状態であった。このような状態をマグマオーシャンという。

(2) 地球が誕生したときに，高温であったおもな要因は二つある。一つは，地球の起源となった微惑星の衝突のエネルギーである。その頃は太陽系内に多くの微惑星が存在し，激しく衝突していたと考えられている。もう一つの要因は，原始大気中の大量の水蒸気や二酸化炭素などの温室効果ガスである。温室効果ガスは，太陽光線のうち可視光線は通すが，地球から放射される赤外線を吸収して地表に再放射する。そのため，地表が高温となる。しばらくして微惑星の衝突がおさまると，地球は冷えて地表は固結し始め，大気中の水蒸気は雨となって原始海洋を形成した。そして，二酸化炭素は海洋中のカルシウムイオンと結合して石灰岩になるなどして固定され，大気中の二酸化炭素も減少していった。

問3 (1) 光合成を行い酸素を放出する生物が出現したのは約27億年前である。シアノバクテリアもその一つで，シアノバクテリアが海水中の炭酸カルシウムや泥を吸着して，層状に積み重ねてつくったドーム状の構造物をストロマトライトという。当時，ストロマトライトは世界中に分布していたが，現在では，オーストラリア西部のハメリンプールなど限られた地域にのみ分布している。

(2) 光合成によって海水中に放出された酸素は，海水中の鉄イオンと結合して海底に沈殿し，おもに25億～20億年前に縞(しま)状鉄鉱層が形成された。現在の鉄資源の多くはこの時期につくられた縞状鉄鉱層から取り出されている。

問4 約7.5億～6億年前の全球凍結の後に出現したエディアカラ生物群は大型の多細胞生物であった。古生代カンブリア紀に爆発

カンブリア紀の爆発(生物爆発)
カンブリア紀に突然かたい骨格や殻をもった動物が多数出現した現象。

石炭の起源
世界の石炭は，石炭紀～ペルム紀のシダ植物の大森林を起源とするものが多い(日本の石炭はおもに古第三紀)。

中生代末の大絶滅
巨大隕石の衝突によって地球環境が大きく変化したため，多くの生物が絶滅した。

マグマオーシャン
地球誕生時，地球の表層は高温のため岩石が融けた状態であった。

ストロマトライト
光合成生物のシアノバクテリアが海水中に形成したドーム状の構造物。

縞状鉄鉱層
海水中に放出された酸素と海水中の鉄イオンが結合して形成された先カンブリア時代の地層。現在は鉄資源として利用されている。

的に出現した多くの生物は，エディアカラ生物群には見られなかったかたい殻(から)をもつようになった。その代表が三葉虫である。バージェス動物群にも，かたい殻や歯をもつものが存在した。このころ，動物には捕食－被食の関係が生まれ，身を守るためのかたい殻やそれを砕くための歯が発達したと考えられている。

問5　日本列島の形成の歴史は，大きく三つの時代に分けられている。最初の時代は，先カンブリア時代原生代末の約7億年前，超大陸ロディニアが分裂して太平洋ができ始めたころで，分裂した大陸のうち，現在の中国南部にあたる南中国地塊の太平洋側で日本列島を構成する最初の岩石が形成されたと考えられている。

2番目の時代は，約5億～1500万年前の成長の時代で，大陸塊の南側に海溝ができ，海洋プレートが沈み込むことによって付加体が次々と大陸に付け加わって大陸が成長した時代である。

3番目の時代は，約1500万年前からの島弧形成の時代で，アジア大陸東縁の大陸地殻が裂けて広がり，日本列島の主体となる地塊が大陸から離れて南に移動したため日本海(縁海)が形成された。

ア・オ：日本海が形成されたときには，海底で激しい火山活動が起こり，海底火山によって，銅・鉛・亜鉛に富む海底熱水鉱床の黒鉱鉱床が形成されたので，アは正しい文である。さらに日本海は，引っ張りの力を受けて拡大するとともに深くなり，海底には新第三紀の厚い地層が形成された。このとき，日本海に生息していたプランクトンが分解されにくい環境で埋没し，これが石油や天然ガスの起源となった。したがって，オも正しい文である。

イ：日本海が形成された約1500万年前は新第三紀である。ハチノスサンゴは古生代の示準化石なので，誤りである。

ウ：日本海は，大陸が裂けた隙間に，複数のリフト(地溝状の裂谷)ができ，中央部には小さな海嶺ができて玄武岩質の海洋地殻が形成されたので，海溝は誤りである。

エ：パンゲアは古生代末に形成された超大陸であり，中生代にはローラシア大陸とゴンドワナ大陸とに分裂しているので，誤りである。

日本海の形成

約1500万年前，アジア大陸東縁から日本列島が離れてその間に日本海が形成された。

海底で激しい火山活動が起こり，黒鉱鉱床が形成された。

日本の石油・天然ガス

新第三紀，日本海の拡大とともに，水深が深くなって厚い堆積層が形成され，有機物が分解されずに埋没して石油や天然ガスの起源となった。

問6　海水面高度は気温によって変動する。気温が高いときは，海水が膨張する上，大陸氷河が融(と)けて海洋へ流れ込むため海水量が増加して海水面が上昇する。逆に気温が低くなると，海洋から蒸発した水が雪となって陸上に降り，それが融けることなく積み重なって大陸氷河として固定されるため，海水の絶対量が減少し，海水面が低下する。

約2万年前は，最終氷期のうち最も低温となった時期で，海水面が現在よりも100 m以上低下し，日本列島が大陸と陸続きになっていた。そのため，大陸に生息していた動物が日本列島に渡ってくることができたと考えられている。

海水面変動

寒冷期には，大陸氷河が成長し，海水面が低下する。

温暖期には，大陸氷河が融け，海水面が上昇する。

4 海洋

【解答】

問1	1	反時計	2	貿易	3	偏西	4	熱塩	5	Na^+	6	Cl^-

問2	イ	問3	(1)	氷床	(2)	5.7×10 倍

問4		
	(1)	亜熱帯域は蒸発量が降水量より多いから。
	(2)	北大西洋グリーンランド沖の方が表層海水の密度が大きいので，北太平洋よりも沈み込みが起こりやすくなっている。
	(3)	ウ

【配点】 (20点)

問1 1 ～ 3 ， 5 ・ 6 ：各1点×5　 4 ：2点，　問2　2点，

問3　(1)　2点　(2)　3点，　問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点

【出題のねらい】

地球は，太陽系で唯一，表層に液体の水が多量に存在している惑星であり，地球表層の水のほとんどは海水として存在している。海洋は気候の急激な変化を緩和したり，大気中の二酸化炭素濃度を調節するなど，地球表層の環境で重要な役割をもつと考えられている。今回は，海洋の分野で頻出事項である，海水の塩分，環流(亜熱帯環流)，深層循環(熱塩循環)などについて出題した。

【解説】

問題

問1 1 ～ 3 ：太平洋や大西洋などの大洋の低緯度～中緯度にかけては，北半球では時計回りの環流(亜熱帯環流)が，南半球では反時計回りの環流が形成されている(図4－1)。これは，低緯度域を吹く貿易風と中緯度域を吹く偏西風が原動力になり，さらに地球自転に伴う転向力(コリオリの力)の効果が加わり，環流が形成される。

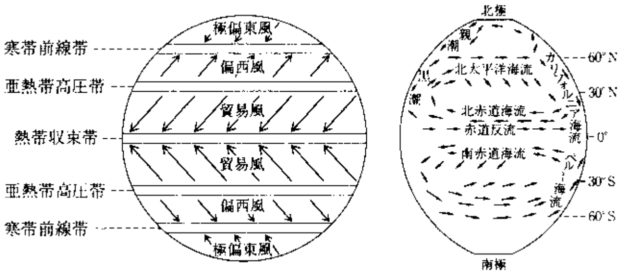


図4－1　太平洋の海流と地上の風系

4 ：海水の密度はおもに水温と塩分によって決まり，水温が低いほど，また塩分が高いほど，海水の密度は大きい。海水の鉛直方向の運動は海水の密度差が原因で起こり，海洋表層で形成された低温・高塩分である高密度の海水がゆっくりと深層へと沈み込んでいく。沈み込んだ海水は深層を循環し，再び海洋表層へと

【ポイント】

環流(亜熱帯環流)
低緯度～中緯度の海流の循環。
北半球：時計回り
南半球：反時計回り

戻る。このような海洋の深層循環は，海水の密度差，つまり水温や塩分の違いで生じるので熱塩(ねつえん)循環と呼ばれる。

$\boxed{\ 5\ }$・$\boxed{\ 6\ }$：海水中に溶け込んでいる塩類は，海水中で電離して，イオンの形で存在している。陽イオンで最も存在比が大きいのはナトリウムイオン Na^+ であり，次いで大きいのはマグネシウムイオン Mg^{2+} である。陰イオンで最も存在比が大きいのは塩化物(塩素)イオン Cl^- であり，次いで大きいのは硫酸イオン SO_4^{2-} である。イオン式で問われているので，元素記号だけでなく右肩の ＋，－ も忘れずに記さなければならない。

熱塩循環
海水の密度差によって形成される海洋の深層循環。

海水中のイオン
陽イオン：$Na^+ > Mg^{2+}$
陰イオン：$Cl^- > SO_4^{2-}$

問 2　北太平洋の環流の西側の流れである黒潮や，北大西洋の環流の西側の流れである湾流(メキシコ湾流)は，世界でも有数の強い流れとなっている。黒潮や湾流のように，環流の西側の流れが強くなる現象を西岸強化という。これは，地球の自転の影響によって生じる転向力が高緯度ほど大きくなることに起因する。よって，イが正解となる。

西岸強化
環流の西側の流れが強くなる現象。黒潮や湾流が西岸強化の代表例。

転向力(コリオリの力)の大きさの緯度による違い
物体の速度が一定であれば，高緯度ほど大きい。

問 3　(1)　地球表層に存在する水の約 97 % は海水であり，海水以外の水は大気中に含まれる水蒸気と陸上にある水(陸水)である。陸水のうち，体積で最も多いのは氷床(氷河)である。

(2)　海水の体積がどの程度かを確認する問いである。海水の体積は，平均水深を km 単位に直して，

$$0.7\times5.1\times10^8\times3.8=13.566\times10^8\fallingdotseq13.6\times10^8(\mathrm{km}^3)$$

である。これを氷河の体積で割れば，

$$\frac{13.6\times10^8}{2.4\times10^7}=5.66\cdots\times10\fallingdotseq5.7\times10(\text{倍})$$

となる。

海水が地球表層の水に占める割合
約 97 %

陸水
陸上にある水。陸水のうち氷床(氷河)の体積が最も多い。

問 4　海洋の熱塩循環において，表層の海水が沈み込む場所は限定されており，そのうちの一つが北大西洋グリーンランド沖である。本問は，北太平洋では沈み込みが起きず，北大西洋で沈み込みが起こる理由を考察する問いである。

深層への沈み込みが起きている場所
北大西洋グリーンランド沖
南極大陸周辺(ウェッデル海)

(1)　亜熱帯高圧帯にある海域では海面水温が高く，また，降水量に比べて蒸発量が大きいため，海面塩分が高い。したがって，亜熱帯高圧帯にある海域から北上してくる海流(北大西洋であれば湾流，北太平洋であれば黒潮)は高温で高塩分になる。北太平洋の場合，黒潮は高緯度から流れてくる親潮とぶつかり，東にそれて北太平洋海流へと続いていくため，北上しない。一方，北大西洋の場合，湾流から北大西洋海流へと続き，これがグリーンランド沖を流れていくため，北大西洋グリーンランド沖は北太平洋の同じ緯度帯の海域より高温で高塩分になるのである。

海洋表層の海水の塩分
降水量が蒸発量より多いと塩分は低くなり，蒸発量が降水量より多いと塩分は高くなる。

(2)　問題文に北大西洋グリーンランド沖および同じ緯度帯の北太平洋の表層海水の塩分と水温が与えられているので，それを問題図 2 にあてはめると，図 4 － 2 中の太線の部分のようになる。北

大西洋グリーンランド沖の表層海水の密度は 1.027 ～ 1.028 g/cm^3 であるのに対し，同じ緯度帯の北太平洋の表層海水の密度は 1.026 g/cm^3 で，北大西洋グリーンランド沖の表層海水の方が密度が大きい。したがって，北大西洋グリーンランド沖の方が同じ緯度帯の北太平洋より沈み込みが起こりやすい状況であるといえる。ただし，最近では，地球温暖化の影響で氷が融(と)け，低塩分の海水が海洋表層に広がり，グリーンランド沖では表層の海水の密度が減少して，少し南の海域で表層海水の沈み込みが起こっているという説がある。

海水の密度
水温と塩分によって決まる。水温が低いほど，塩分が高いほど，密度は大きい。

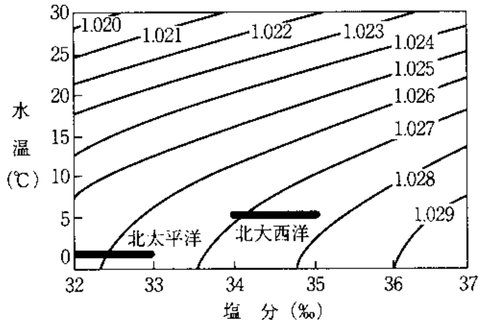


図 4 － 2　北大西洋グリーンランド沖と北太平洋の表層海水の密度(g/cm^3)

(3)　表層で沈み込んだ低温で高塩分の海水は，インド洋や太平洋北部などで湧(わ)き上がり，表層に戻ってくる。深層に沈み込んでから表層に戻るまでにかかる時間は 1000 ～ 2000 年と見積もられている。

深層循環の周期
1000 ～ 2000 年

5 銀河とクェーサー

【解答】

問1	1	楕円	2	ダークマター	3	セイファート	4	ハッブル
問2	部分	円盤部	種族	I	問3	イ	問4	8倍
問5	6.7×10^{8} パーセク		問6	太陽の方が 9.7 等級明るい。				
問7	(1)	短波長側						
	(2)	水素の雲はクェーサーより近距離にあるので，赤方偏移が小さく，スペクトル線の波長の伸びが小さいため。						

【配点】 (20点)

問1　各1点×4，　問2　部分：1点　種族：1点，　問3　3点，　問4　2点，

問5　3点，　問6　太陽：2点　等級差：1点，　問7　(1)　1点　(2)　2点

【出題のねらい】

銀河や，クェーサーをはじめとする活動銀河などは，天文分野の中でも履修が後回しにされがちである。今回はそのような不慣れな題材に慣れてもらう意味も含め，銀河系・銀河とクェーサーを題材にして出題した。

【解説】

問題

銀河は数百億から数千億個の恒星がつくる集団で，さまざまな形や大きさのものがある。形態からは楕円銀河，渦巻き銀河，棒渦巻き銀河，不規則銀河の4種類に大きく分類される。楕円銀河はほとんど星間物質を含んでおらず，球に近い形からかなり偏平なものまで存在する。渦巻き銀河は中央部が膨らんだ円盤状の銀河で，円盤部には渦巻き構造が見られる。棒渦巻き銀河は渦巻き銀河と同じ性質だが，バルジが棒状になっているものである。不規則銀河は文字通り不規則な形をした小型の銀河である。

太陽が属している銀河が銀河系で，次の図5－1に示すように，円盤部・バルジ・ハローからなる渦巻き銀河，または棒渦巻き銀河である。円盤部は直径約10万光年で，中心から約2.8万光年離れたところに太陽が位置している。円盤部には星間物質が集中しており，恒星の生成活動が起きている。銀河系の中心には，質量が太陽の数百万倍におよぶブラックホールがあると考えられている。

他の銀河でも中心にはブラックホールが存在することが多いが，何らかの原因で中心のブラックホールに大量のガスが落下すると，膨大な重力の位置エネルギーが解放され，さまざまな活動を引き起こす。それらが活動銀河で，活動が強い電波放射の形を取る電波銀河，強い光を放射するセイファート銀河やクェーサーなどに分類されている。クェーサーは電波銀河やセイファート銀河のエネルギーが大きくなったものだと考えてよい。

【ポイント】

銀河の分類

銀河はその形態から，楕円銀河，渦巻き銀河，棒渦巻き銀河，不規則銀河に分類される。

銀河系

太陽が属している銀河。直径約10万光年の円盤部をもつ渦巻き銀河，または棒渦巻き銀河である。

銀河系の中心

銀河系の中心には，太陽の数百万倍の質量をもつブラックホールが存在している。

活動銀河

中心で高エネルギーの活動が起きている銀河。電波銀河，セイファート銀河，クェーサーなどがある。

問1 $\boxed{1}$：さまざまな偏平率のものが存在するのは楕円銀河である。

$\boxed{2}$：渦巻き銀河の回転速度が速すぎることなどから，銀河には恒星と星間物質以外の重力源が存在していることがわかる。これをダークマター(暗黒物質，ミッシングマス)と呼んでいるが，直接観測ができていないため，その正体はいまだによくわかっていない。

$\boxed{3}$：活動銀河の中で，中心核が通常の銀河全体に匹敵するほど明るく輝くものをセイファート銀河と呼ぶ。セイファート銀河は渦巻き銀河に多いが，その理由はわかっていない。

$\boxed{4}$：宇宙が膨張しているため，銀河間の距離は時間とともに大きくなっていく。その距離が増加する速さが後退速度 v であり，v は銀河間の距離 r に次のように比例する。

$$v=Hr$$

この関係を発見者にちなんでハッブルの法則と呼び，比例定数 H をハッブル定数という。

問2 恒星は，水素とヘリウム以外の元素(天文分野では重元素と呼ぶ)を太陽と同程度含む種族Ⅰと，太陽の $\frac{1}{10}$ ～ $\frac{1}{100}$ 程度しか含んでいない種族Ⅱの2種類に分類される。これは宇宙初期には重元素が乏しかったことに由来しており，宇宙初期につくられた古い恒星が種族Ⅱ，その後に増加した重元素を含んだ星間物質からつくられた比較的新しい恒星が種族Ⅰである。銀河系では，種族Ⅰの恒星は円盤部のみに含まれており，ハロー・バルジ・球状星団には含まれていない。このことから，銀河系では円盤部が最後につくられたことがわかる。

問3 渦巻き銀河や棒渦巻き銀河の円盤部には，密度波と呼ばれる恒星分布の粗密が渦巻き型の波として回転している。その波の重力によって星間物質がゆり動かされ，やはり渦巻き型の細い腕状に集中する。星間物質が集中したところでは恒星の生成活動がさかんになる結果，新しい恒星が渦巻き状に分布する。新しい恒星の中でも質量が大きく，表面温度の高い主系列星が目立つため，渦巻き銀河を外から見ると，はっきりとした渦巻きの腕が観察されることになる。

以上のことから，選択肢のア・エは渦巻き構造に直接関連する事実である。また，選択肢ウは図5－2のような状況を述べていて，渦巻き構造のうち，3本の腕の一部分を表していると考えられる。一方，選択肢イの銀河系の中心にあるブラックホールは，確かに近辺のガスや恒星を吸い込んでいるはずであるが，円盤部全体に影響をおよぼすほど強い重力を発生しているわけではない。よって，イが不適当な説明であり，正解である。

問4 スペクトル線の本来の波長が λ で，宇宙膨張の結果 $\lambda+\Delta\lambda$ に

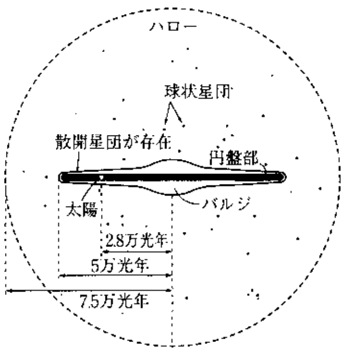


図5－1　銀河系の構造(断面図)

ダークマター

銀河に付随する，いまだに直接観測されていない重力源。恒星や星間物質の質量を大きく上回っている。

セイファート銀河

中心が通常の銀河と同程度の明るさで光っている活動銀河。

ハッブルの法則

銀河の後退速度は距離に比例するという法則。比例定数はハッブル定数と呼ばれる。

恒星の種族

重元素量で恒星を分類したもの。太陽と同程度のものが種族Ⅰ，$\frac{1}{10}$ ～ $\frac{1}{100}$ 程度しか含んでいないものが種族Ⅱ。

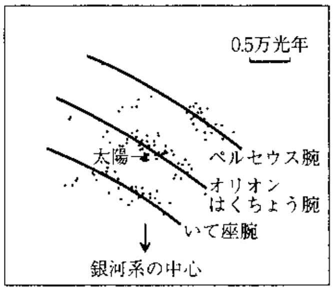


図5－2　近距離の高温度星などの分布

太陽に近い表面温度の高い恒星や散光星雲などが，平行かつ帯状に集中している。

伸びたとすると，赤方偏移 z の定義 $z=\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}$ から，

$$\frac{\lambda+\Delta\lambda}{\lambda}=1+z$$

となる。よって，$z=7$ のクェーサーのスペクトル線の波長は $1+z=8$ 倍に伸びていることがわかる。

問 5　後退速度 v は $v=cz$ で求められ，距離 r とは $v=Hr$ の関係がある。これらから r は次のように計算される。

$$r=\frac{v}{H}=\frac{cz}{H}=\frac{3.0\times10^5\times0.158}{71}=6.67\cdots\times10^2$$

H が 10^6 パーセクあたりの値なので，上の r の値を 10^6 倍したものが正解となる。よって，距離は 6.7×10^8 パーセクとなる。

問 6　銀河系の中心に，3C273 の 100 倍の明るさのクェーサーがあると考えて，見かけの等級を計算すればよい。明るさが 100 倍だと等級は 5 等級減少するので，単純に 5 を引くだけでよい。よって，$-12.1-5=-17.1$ 等級となる。この値と太陽の見かけの等級の差は，$(-26.8)-(-17.1)=-9.7$ 等級であるから，太陽の方が 9.7 等級明るいことがわかる。

問 7　(1)・(2)　銀河間の宇宙空間にも水素を中心としたガスが分布しており，銀河間物質と呼ばれている。これらの物質を直接観測することは，近距離のものを除いて困難であるが，クェーサーの光を吸収しているために，間接的に観測することが可能となっている。クェーサーのスペクトル中で最も強いのは，ほとんどの場合水素がつくるライマン α と呼ばれるスペクトル線(波長 0.1216 μm)であるが，銀河間物質がつくるものもやはりライマン α の吸収線が強い。吸収線をつくる銀河間物質は，われわれとクェーサーの間に存在しているので，後退速度はクェーサーより小さい(図 5 － 3)。この結果，波長の伸びもクェーサーより小さく，同じライマン α 線であってもクェーサーのものより短い波長で観測される。このため，クェーサーのスペクトルを測定すると，ライマン α の輝線の短波長側には，距離の異なる銀河間物質によるライマン α の吸収線が並ぶことになる。このような吸収線の並びをライマン α の森と呼ぶことがある。

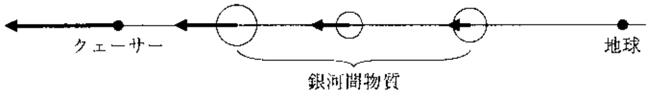


図 5 － 3　クェーサーと銀河間物質の後退速度(矢印)

赤方偏移

スペクトル線の波長が長い方へずれること。スペクトル線が波長 λ から $\Delta\lambda$ だけずれた場合，その大きさを $z=\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}$ で表す。