受験番号		氏　　名		クラス		出席番号	

試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2014年度　全統マーク高２模試問題

数　　学 ①　〔数学Ⅰ　数学Ⅰ・数学A〕（100点　60分）

2015年２月実施

Ⅰ　注 意 事 項

1　解答用紙は，第１面(表面)及び第２面(裏面)の両面を使用しなさい。

解答用紙に，正しく記入・マークされていない場合は，採点できないことがあります。特に，解答用紙の**解答科目欄にマークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点**となることがあります。

解答科目については，間違いのないよう十分に注意し，マークしなさい。

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出 題 科 目	ペ ー ジ	選　　択　　方　　法
数　　学　　Ⅰ	２～10	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅰ・数学A	11～23	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

4　選択問題については，解答する問題を決めたあと，その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし，**指定された問題数をこえて解答してはいけません。**

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

Ⅱ　解 答 上 の 注 意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

河合塾

数　学　Ⅰ

（全　問　必　答）

第１問 （配点　20）

解説

$a=\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，　$b=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ とおく。

(1)　$a+b=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，　$ab=\boxed{\text{ウ}}$

であり

$a^2+b^2=\boxed{\text{エオ}}$

である。

（数学Ⅰ 第１問 は次ページに続く。）

(2) n を自然数とし，実数 x に関する条件 p，q を次のように定める。

$$p: |x-2ab| \leqq a^2+b^2$$

$$q: x^2-4\sqrt{3}x+12-n^2 \leqq 0$$

p は条件

$$\boxed{\text{カキク}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ケコ}}$$

と同値である。

(i) $n=1$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{サ}}$。

$n=16$ のとき，p は q であるための $\boxed{\text{シ}}$。

$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件でない

② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(ii) q が p であるための必要条件であるような自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{スセ}}$ である。

第２問 （配点　20）

解説

10 人の生徒に対して，テストの得点とテスト前日の睡眠時間の関係を調べると次の表のようになった。ただし，テストの得点と睡眠時間はともに整数値である。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得点(点)	1	2	3	4	5	6	6	6	8	9
睡眠時間(時間)	10	8	9	8	6	7	6	5	5	4

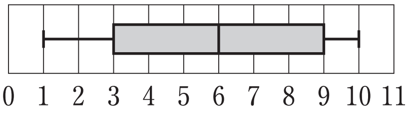
以下，小数の形で解答する場合は，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

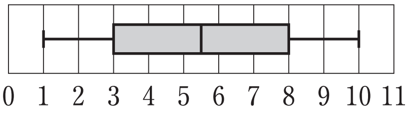
得点のデータの平均値は $\boxed{\text{ア}}$ 点であり，最頻値は $\boxed{\text{イ}}$ 点である。また，分散は $\boxed{\text{ウ}}.\boxed{\text{エ}}$ である。

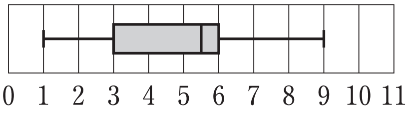
テストの採点を見直したところ，得点が 6 点である 3 人の生徒の採点に間違いがあり，修正後 3 人の得点はそれぞれ増加した。さらに得点が 10 点の生徒は 1 人だけであった。また，得点に関する下の四つの箱ひげ図には修正前のものと修正後のものが含まれる。

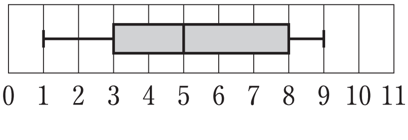
修正前の箱ひげ図は $\boxed{\text{オ}}$，修正後の箱ひげ図は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちからそれぞれ一つずつ選べ。

⓪


①


②


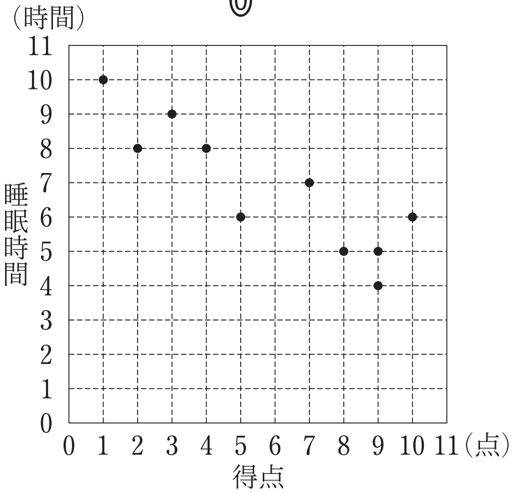
③


（数学Ⅰ 第２問 は次ページに続く。）

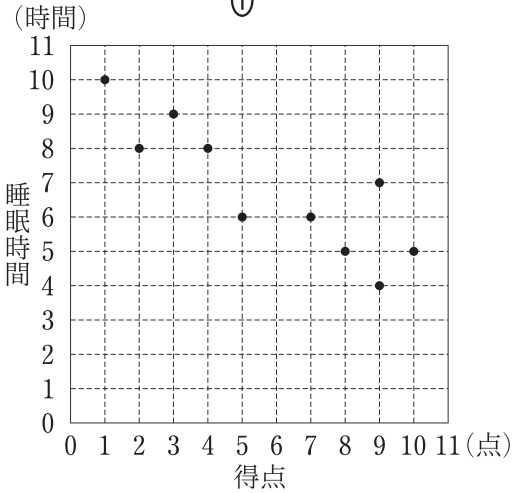
修正後の得点のデータの平均値は修正前のものに比べて $\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{ク}}$ 点増加し，修正後の得点と睡眠時間の散布図としてあり得ないものは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

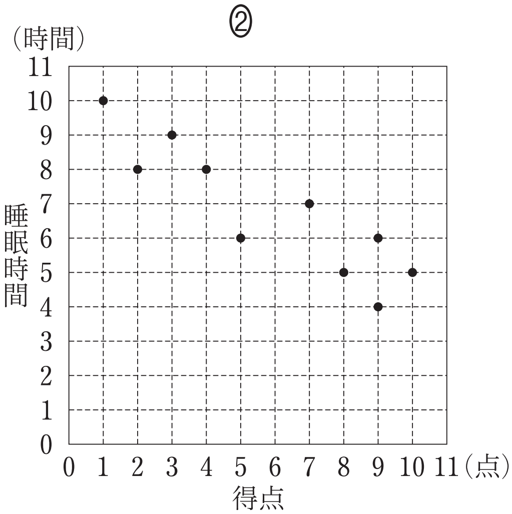
⓪



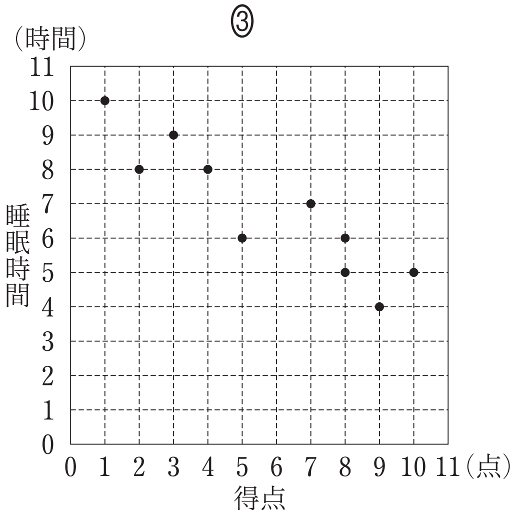
①



②



③



第３問 （配点　30）

解説

a を実数とし，x の２次関数

$$y = x^2 - 4ax + a^2 + 4a - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イウ}}\,a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

G の頂点の y 座標が最大になるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

のときである。

(1) G が点 $(0,\ -1)$ を通るのは

$$a = \boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}}$$

のときである。

また，G が x 軸と接するのは

$$a = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{ス}}$$

のときである。

$a = \boxed{\text{コ}}$ のときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{セ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ソ}}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{\text{ス}}$ のときの G に一致する。

（数学Ⅰ 第３問 は次ページに続く。）

(2) $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ス}}$ とし，$0 \leqq x \leqq 2$ における関数①の最大値を M，最小値を m とする。

$$M = a^2 + \boxed{\text{タ}}\,a - \boxed{\text{チ}}$$

$$m = \boxed{\text{ツテ}}\,a^2 + \boxed{\text{ト}}\,a - \boxed{\text{ナ}}$$

であり，$M + m$ が整数になる a の値は全部で $\boxed{\text{ニ}}$ 個ある。

第 4 問 （配点　30）

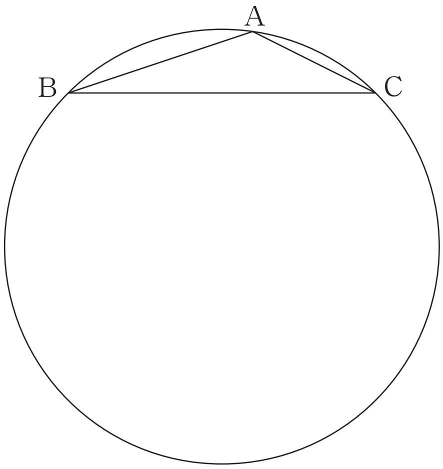
解説

$\triangle$ABC は，AB $=\sqrt{2}$，BC $=\sqrt{5}$，CA $=1$ を満たすとする。このとき

$$\angle \mathrm{BAC}=\boxed{\text{アイウ}}^{\circ},\quad \sin\angle \mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

参考図



円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を AB $=$ BD となるようにとる。このとき

$$\angle \mathrm{BDC}=\boxed{\text{ケコ}}^{\circ},\quad \mathrm{CD}=\boxed{\text{サ}}$$

であり，$\triangle$CBD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

（数学 I 第 4 問 は次ページに続く。）

さらに，円Oの点A，Bを含まない弧CD上に点Eを $\angle BCE = 45^\circ$ となるようにとると

$$\angle CBE = \boxed{セソ}^\circ, \quad CE = \sqrt{\boxed{タチ}}$$

であり，線分BEと線分CDの交点をFとすると，△CBFの面積は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅰ・数学A

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	必　　答
第4問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第5問	
第6問	

(注)　選択問題は，解答する問題を決めたあと，その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし，指定された問題数をこえて解答してはいけません。

第1問 （必答問題）（配点 20）

解説

〔1〕 $a=\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ とおく。

(1)
$$a+b=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\quad ab=\boxed{\text{ウ}}$$

であり

$$a^2+b^2=\boxed{\text{エオ}}$$

である。

(2) n を自然数とし，実数 x に関する条件 p，q を次のように定める。

$$p: |x-2ab| \leqq a^2+b^2$$
$$q: x^2-4\sqrt{3}x+12-n^2 \leqq 0$$

p は条件

$$\boxed{\text{カキク}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ケコ}}$$

と同値である。

q が p であるための必要条件であるような自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{サシ}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A 第1問 は次ページに続く。）

〔2〕 10人の生徒のテストの得点を調べると次の表のようになった。ただし，テストの得点は整数値である。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得点(点)	1	2	3	4	5	6	6	6	8	9

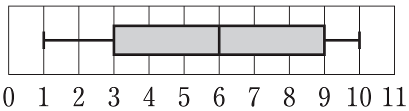
以下，小数の形で解答する場合は，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

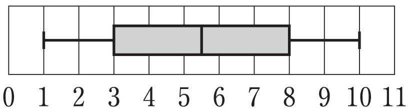
得点のデータの平均値は $\boxed{\text{ス}}$ 点であり，最頻値は $\boxed{\text{セ}}$ 点である。

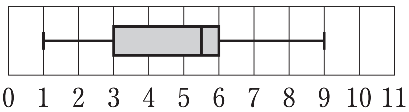
テストの採点を見直したところ，得点が6点である3人の生徒の採点に間違いがあり，修正後3人の得点はそれぞれ増加した。さらに得点が10点の生徒は1人だけであった。また，得点に関する下の四つの箱ひげ図には修正前のものと修正後のものが含まれる。

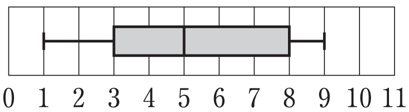
修正前の箱ひげ図は $\boxed{\text{ソ}}$， 修正後の箱ひげ図は $\boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちからそれぞれ一つずつ選べ。

⓪


①


②


③


修正後の得点のデータの平均値は修正前のものに比べて $\boxed{\text{チ}}.\boxed{\text{ツ}}$ 点増加する。

第2問 （必答問題） （配点 20）

解説

a を実数とし，x の2次関数

$$y = x^2 - 4ax + a^2 + 4a - 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イウ}}\,a^2 + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

である。

G の頂点の y 座標が最大になるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

のときである。

(1) G が $(0,\ -1)$ を通るのは

$$a = \boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}}$$

のときである。

また，G が x 軸と接するのは

$$a = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{ス}}$$

のときである。

$a = \boxed{\text{コ}}$ のときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{セ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ソ}}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{\text{ス}}$ のときの G に一致する。

（数学Ⅰ・数学A 第2問 は次ページに続く。）

(2) $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ス}}$ とし，$0 \leqq x \leqq 2$ における関数①の最大値を M，最小値を m とすると，$M + m$ が整数になる a の値は全部で $\boxed{\text{タ}}$ 個ある。

第3問 （必答問題） （配点 20）

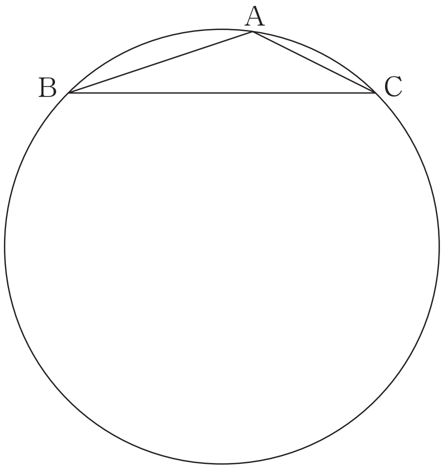
解説

$\triangle$ABC は，AB$=\sqrt{2}$，BC$=\sqrt{5}$，CA$=1$ を満たすとする。このとき

$$\angle \mathrm{BAC} = \boxed{\text{アイウ}}^\circ,\quad \sin\angle \mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

参考図



円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を AB$=$BD となるようにとる。このとき

$$\angle \mathrm{BDC} = \boxed{\text{ケコ}}^\circ,\quad \mathrm{CD} = \boxed{\text{サ}}$$

であり，$\triangle$CBD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A 第3問 は次ページに続く。）

さらに，円Oの点A，Bを含まない弧CD上に点Eを $\angle \mathrm{BCE} = 45^\circ$ となるようにとると

$$\angle \mathrm{CBE} = \boxed{\text{セソ}}^\circ$$

であり，線分BEと線分CDの交点をFとすると，△CBFの面積は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

第4問　（選択問題）（配点　20）

解説

(1)　大小2個のサイコロを振る。目の出方は全部で $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，そのうち2個のサイコロの目が一致するような目の出方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである。

　2個のサイコロの目の数の積を X とする。$X=4$ となる目の出方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りであり，$\sqrt{X}$ が整数となる目の出方は $\boxed{\text{オ}}$ 通りである。

（数学Ⅰ・数学A 第4問 は次ページに続く。）

(2) 大小 2 個の赤色のサイコロと大小 2 個の青色のサイコロがある。この合計 4 個のサイコロを同時に振る。4 個のサイコロのすべての目の出方を全事象とし，2 個の赤色のサイコロの目が一致する事象を R，2 個の青色のサイコロの目が一致する事象を B とする。

このとき，事象 $R \cap B$ が起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，事象 $R \cup B$ が起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

さらに，4 個のサイコロの目の数の積を Y とし，$\sqrt{Y}$ が整数となる事象を S とする。事象 $R \cap S$ が起こるという条件のもとで，$Y = 16$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

第5問 （選択問題） （配点　20）

解説

方程式

$$xy-2x-6y-660=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 x，y について考えよう。

(1)　$xy-2x-6y+12$ を因数分解すると

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)$$

となる。

(2)　① は

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)=\boxed{\text{ウエオ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と変形できる。

$\boxed{\text{ウエオ}}$ を

$$\boxed{\text{ウエオ}}=2^a\cdot 3^b\cdot 7^c$$

と素因数分解すると

$$(a,\ b,\ c)=\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$$

であり，$\boxed{\text{ウエオ}}$ の正の約数は全部で $\boxed{\text{ケコ}}$ 個ある。

（数学Ⅰ・数学A 第5問 は次ページに続く。）

(3) ① すなわち ② を満たす自然数 x, y において，1 桁(けた)の奇数である x は $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の解答の順序は問わない。

また，① を満たす自然数 x, y の組 (x, y) のうち，x, y がいずれも偶数となるものは $\boxed{\text{スセ}}$ 組であり，x と y が互いに素であるものは $\boxed{\text{ソ}}$ 組である。

第6問　（選択問題）（配点　20）

解説

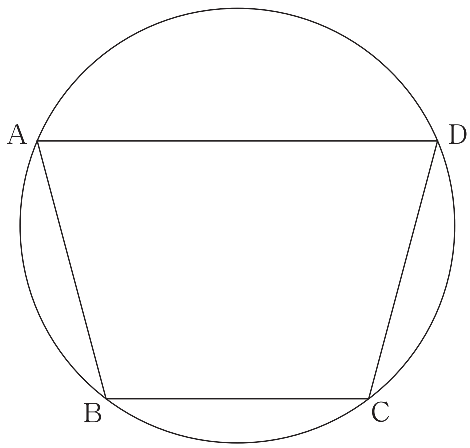
円に内接する台形 ABCD は，AB＝BC＝CD＝4，DA＝6 を満たすとし，点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC の交点を H とする。

$$\mathrm{BH} = \boxed{ア},\quad \mathrm{AH} = \sqrt{\boxed{イウ}}$$

であり，△ABC の面積は $\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}$ である。

台形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を E とする。

参考図



⑴　弧 AB，弧 BC に対する円周角が等しいことに注目すると

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

であり，弧 BC，弧 CD に対する円周角が等しいことに注目すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A 第6問 は次ページに続く。）

(2) 辺 DA の中点を L，線分 AC と線分 BL の交点を M とし，直線 DM と辺 AB の交点を N とする。△ABD にチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

が得られ，△ADE と直線 BL にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{ME}} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

が得られる。四角形 BEMN の面積は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号（−，±）又は数字（0～9）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，… で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に　-83　と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，原則として，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5　根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に

$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のようにに答えてはいけません。

問題を解く際には，「問題」冊子にも必ず自分の解答を記録し，試験終了後に配付される「学習の手引き」にそって自己採点し，再確認しなさい。