クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2012年度

第2回 全統記述模試問題

数　学

（Ⅰ・ⅠA型　80分
ⅡA・ⅡB型　100分
ⅢB・ⅢC型　120分）

2012年 9月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記および本冊子裏表紙の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1. 問題冊子は11ページである。
2. 解答用紙は別冊になっている。(解答用紙冊子表紙の注意事項を熟読すること。)
3. 本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。
4. 下表のような「問題選択型」が用意されているので，志望する大学・学部・学科の出題範囲・科目に合わせて，選択型を選んで解答すること。出題範囲に合わない型を選択した場合には，志望校に対する判定が正しく出ないことがあるので注意すること。

型	出　題　範　囲	問題ページ	解　答　用　紙
Ⅰ	数学Ⅰ	P．2～3	Ⅰ・ⅠA型1枚
ⅠA	数学Ⅰ，A		
ⅡA	数学Ⅰ，Ⅱ，A	P．4～7	ⅡA・ⅡB型2枚
ⅡB	数学Ⅰ，Ⅱ，A，B		
ⅢB	数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B	P．8～11	ⅢB・ⅢC型3枚
ⅢC	数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，C		

5. 解答用紙は，選択する型によって異なる。必ず指定された解答用紙に正しく答えよ。**誤った番号の箇所に解答している場合は得点としないので注意すること。**
6. 試験開始の合図で解答用紙冊子の数学の解答用紙を切り離し，下部の所定欄に **氏名(フリガナ，漢字)**・**在・卒高校名**・**クラス名**・**出席番号**・**受験番号**（**受験票の発行を受けている場合**）を記入すること。また，選択問題がある場合は，上部の所定欄に **選択問題** を記入すること。
7. 解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となる。
8. 試験終了の合図で上記6.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

I・IA 型の問題は次ページから始まる．

Ⅰ・ⅠA型

Ⅰ型，ⅠA型受験者は次の表に従って解答すること．

Ⅰ　型	1，2 を必答．
ⅠA 型	1，3 を必答．

1 【Ⅰ・ⅠA型共通　必須問題】（配点　60点）

解説

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．このとき，次の式の値を求めよ．

(i) a　　(ii) b　　(iii) $\dfrac{1}{b^2+2b}$

(2) a を実数の定数とする．

$$f(x)=ax^2-4ax+6$$

とおく．x の2次方程式 $f(x)=0$ が $x=2-\sqrt{2}$ を解にもつ．このとき，a の値を求めよ．また，2次不等式 $f(x)<1$ を解け．

(3) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(i) $\sin\theta\cos\theta$　　(ii) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$　　(iii) $\sin\theta+\cos\theta$

(4) a，b，c を実数の定数として，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを K とする．K が2点 $(1,\ 3)$，$(-1,\ 1)$ を通る．

(i) b の値を求めよ．また，c を a を用いて表せ．

(ii) K の頂点が直線 $y=\dfrac{13}{2}x$ 上にあるとき，a の値を求めよ．

2 【Ⅰ型　必須問題】（配点　40点）

解説

三角形ABCにおいて，

$$AB=8,\ CA=5,\ \angle BAC=60^\circ$$

とする．

(1) 辺BCの長さを求めよ．

(2) $\cos\angle ABC$，$\sin\angle ACB$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 辺AB上に点Pを，$AP=x\,(0<x<8)$ となるようにとり，Pから辺CA，BCに下ろした垂線の足をそれぞれQ，Rとする．

(i) 線分CQ，CRの長さをそれぞれ x を用いて表せ．

(ii) x が $0<x<8$ の範囲を動くとき，三角形CQRの面積を最大にするような x の値を求めよ．また，そのときの三角形CQRの外接円の半径を求めよ．

3 【ⅠA型　必須問題】（配点　40点）

解説

袋の中に5枚のカード $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ がある．この袋から1枚のカードを取り出し，取り出したカードに書かれた数を3で割った余りの数を記録する操作を最大3回まで行って終了する．ただし，取り出したカードは毎回袋に戻す．また，0を記録したら，その時点で終了する．終了するまでに記録した数の和を X とする．

(1) 1回の操作で，0，1を記録する確率をそれぞれ求めよ．

(2) 3回目の操作を行う確率を求めよ．

(3) $X=2,\ 4$ となる確率をそれぞれ求めよ．

(4) X の期待値を求めよ．

ⅡA・ⅡB型

ⅡA型，ⅡB型受験者は次の表に従って解答すること．

ⅡA型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ より1題選択．
ⅡB型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より1題選択．

$\boxed{1}$ **【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】**（配点　50点）

解説

(1)　a，b，c を実数の定数として，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを K とする．K が2点 $(1,\ 3)$，$(-1,\ 1)$ を通る．

(i)　b の値を求めよ．また，c を a を用いて表せ．

(ii)　K の頂点が直線 $y=\dfrac{13}{2}x$ 上にあるとき，a の値を求めよ．

(2)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$　　(iii)　$\sin\theta+\cos\theta$

(3)　不等式 $9^x-10\cdot3^{x-1}+1<0$ を解け．

(4)　曲線 C：$y=x^3-x^2+1$ 上の点 $(t,\ t^3-t^2+1)$ における接線の方程式を t を用いて表せ．また，点 $(0,\ 1)$ を通る C の接線の方程式をすべて求めよ．

2 【Ⅱ A・Ⅱ B型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

a を1より大きい定数とする．

$$f(x)=x^2-ax,\quad g(x)=x-a$$

とし，$y=f(x)$ のグラフを C，$y=g(x)$ のグラフを l とする．

(1)　C と l で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

(2)　C と x 軸で囲まれた図形のうち，l の上側の部分の面積を S_1，C の $x \geqq a$ の部分と l，および直線 $y=a+1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

(i)　S_2 を a を用いて表せ．

(ii)　$S_1:S_2=1:2$ となるような a の値を求めよ．

3 【Ⅱ A・Ⅱ B型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

a，b を実数の定数とする．

$$f(x)=x^2-ax+a-\frac{3}{4},\quad g(x)=x^3+bx^2+(2b-4)x+3(a+1)$$

として，$g(x)$ は $x+3$ で割り切れるとする．

(1)　b を a を用いて表せ．

(2)　2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(3)　x についての5次方程式 $f(x)g(x)=0$ の5つの解 α_1，α_2，α_3，β_1，β_2 のうち，α_1，α_2，α_3 は実数であり，β_1，β_2 は虚数である．

(i)　a の値の範囲を求めよ．

(ii)　$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\beta_1+\beta_2$ が成り立つような a の値を求めよ．

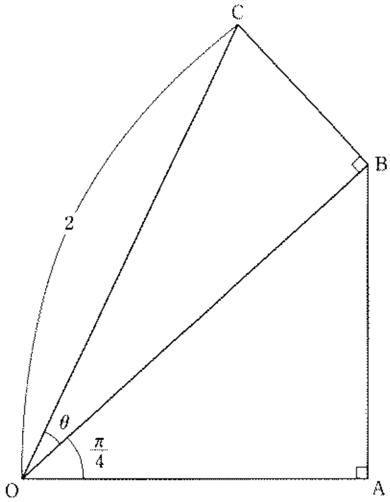
ⅡA・ⅡB型

4 【ⅡA型　選択問題】（配点　50点）　解説

図のような2つの直角三角形OAB，OBCにおいて，

$$\mathrm{OC}=2,\ \angle\mathrm{BOC}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right),\ \angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4}$$

とする．



(1)　辺BC，OAの長さをそれぞれθを用いて表せ．

(2)　四角形OABCの面積をSとする．

　(i)　Sを$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$を用いて表せ．

　(ii)　θが$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$の範囲を動くとき，Sのとり得る値の範囲を求めよ．

5 【ⅡA・ⅡB型共通　選択問題】（配点　50点）　解説

3つの自然数a，b，cが，

$$a^2+ab+b^2=c^2$$

を満たすとする．ただし，cは3の倍数でないとする．

(1)　nを整数とするとき，n^2を3で割った余りを求めよ．

(2)　a，bのうち少なくとも一方は3の倍数でないことを示せ．

(3)　$b=9$のとき，a，cの値をそれぞれ求めよ．

6 **【Ⅱ B型　選択問題】**（配点　50点）　解説

数列 $\{a_n\}$ は，

$$\begin{cases} a_1=5, \\ a_{n+1}=-3a_n+4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする．また，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　S_n を求めよ．

(3)　数列 $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$, $\cdots$ の項のうち 3 の倍数になるものを小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ とする．このとき，$\sum_{k=1}^{2m} b_k$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

ⅢB・ⅢC型

ⅢB型，ⅢC型受験者は次の表に従って解答すること．

ⅢB型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より１題選択．
ⅢC型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ より１題選択．

$\boxed{1}$ 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

(1) 次の方程式，不等式を解け．

(i) $2\log_2(x-1)-\log_2(7-x)=0$

(ii) $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1<0$

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x^2-2x|\,dx$ の値を求めよ．

(3) ３つのサイコロＡ，Ｂ，Ｃを同時に振り，出た目をそれぞれ a，b，c とする．

(i) $a<b<c$ となる確率を求めよ．

(ii) $a\leqq b\leqq c$ となる確率を求めよ．

(4) a，b を実数の定数とする．

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin x+b}{x-\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$ が成り立つとき，a，b の値をそれぞれ求めよ．

ⅢB・ⅢC型

2 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

a を正の定数として，

$$f(x)=xe^{-x},\quad g(x)=(x+1)e^{-x}+ax$$

とする．

(1) $f(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ を用いてよい．

(2) $g(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ．

3 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

中心 O，半径 1 の円周を，8 つの点 A_1，A_2，A_3，…，A_8 がこの順に反時計まわりに 8 等分している．5 つの点 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 を，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

を満たすようにとり，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$ を直径とする円を C とする．

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$ として，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) C の半径を求めよ．

(3) 点 Q が C 上を一周するとき，三角形 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5\mathrm{Q}$ の面積の最大値を求めよ．

Ⅲ B・Ⅲ C型

4 【Ⅲ B・Ⅲ C型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

a，b を実数の定数として，

$$f(\theta)=\cos 2\theta+a\cos\theta+b\cos^2\frac{\theta}{2}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とする．

(1)　$t=\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ．

(2)　$a=\frac{1}{2}$，$b=2$ のとき，方程式 $f(\theta)=0$ の解の個数を求めよ．また，解の総和を求めよ．

(3)　方程式 $f(\theta)=0$ の解がちょうど3つ存在し，それらを α，β，γ（ただし，$\alpha<\beta<\gamma$）とおくとき，$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ が成り立つような a，b の条件を求め，それらを満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ．

5 【Ⅲ B・Ⅲ C型共通　選択問題】（配点　40点）

解説

数列 $\{a_n\}$ は，

$$\begin{cases} a_1=5, \\ a_{n+1}=-3a_n+4 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする．また，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とする．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　S_n を求めよ．

(3)　数列 $|S_1|$，$|S_2|$，$|S_3|$，…の項のうち3の倍数になるものを小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ とする．このとき，$\sum_{k=1}^{2m}b_k$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

Ⅲ B・Ⅲ C型

6 【Ⅲ B・Ⅲ C型共通　選択問題】（配点　40点）

解説

関数

$$f(x)=x\log x+1,\ g(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}$$

に対して，$y=f(x)$のグラフをC_1，$y=g(x)$のグラフをC_2とする．また，点(1, 1)におけるC_1の接線の方程式を$y=h(x)$とする．

(1)　$h(x)$を求めよ．また，$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$において$\{h(x)\}^2 \geqq \{g(x)\}^2$が成り立つことを示せ．

(2)　定積分$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} g(x)\,dx$を，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$と置換して求めよ．

(3)　C_1，C_2，および直線$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$で囲まれた図形の面積を求めよ．

7 【Ⅲ C型　選択問題】（配点　40点）

解説

Oを原点とする座標平面上において，2次の正方行列Mが表す1次変換をfとする．fにより，点(1, 0)は点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$に，点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$は点$(-1,\ 0)$にうつる．

また，$N=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とする．

(1)　Mを求めよ．また，$M=TN$を満たす行列Tを求めよ．

(2)　Nが表す1次変換により点P$(p+1,\ 1)$がうつる点をQとする．pが実数全体を動くとき，2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$のなす角のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　点Rのfによる像をSとする．Rが平面上(ただし，Oを除く)を動くとき，2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$のなす角のとり得る値の範囲を求めよ．

Ⅰ・ⅠA型，ⅡA・ⅡB型，ⅢB・ⅢC型 はそれぞれ問題選択型のいずれかによって解答（選択解答）する問題が指定されている。指示に従い，必ず指定された問題を解答（選択解答）し，下記の記入例に従って解答用紙に必要事項を記入すること。

〈記入例〉　ⅡB型 選択生の場合

〈数学ⅡA・ⅡB型 解答用紙（その2）裏　面〉