クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2012年度　第1回　全統記述模試

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2012年5月実施】

河合塾

【数　　学】

【Ⅰ・ⅠA 型受験者用】

1　小問集合

【Ⅰ・ⅠA 型共通　必須問題】

（配点　60点）

> (1)　$a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とするとき，次の式の値を求めよ．
>
> (i)　ab　　(ii)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$　　(iii)　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$
>
> (2)　a を正の定数とし，2つの x の不等式
>
> $$|x|<a, \quad \cdots①$$
> $$x+1\leqq 2x\leqq 6-x \quad \cdots②$$
>
> がある．
>
> (i)　① を解け．
>
> (ii)　② を解け．
>
> (iii)　①，② をともに満たす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ．
>
> (3)　x の方程式 $x^2-(a+1)x+a+4=0$ が重解をもつような実数 a の値と，そのときの重解を求めよ．
>
> (4)　AB＝4，AC＝6，∠BAC＝60° を満たす三角形 ABC がある．
>
> (i)　辺 BC の長さを求めよ．
>
> (ii)　三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ．

【配点】

(1)　15点．

(i)　5点．(ii)　5点．(iii)　5点．

(2)　15点．

(i)　5点．(ii)　5点．(iii)　5点．

(3)　15点．

(4)　15点．

(i)　7点．(ii)　8点．

【出題のねらい】

(1)　基本対称式などを活用して，無理数を含む計算を正しく実行できるかをみる問題である．

(2)　絶対値を含む不等式と連立不等式を正しく解くことができるかをみる問題である．

(3)　2次方程式が重解をもつ条件を正しく理解しているかをみる問題である．

(4)　余弦定理や正弦定理を正しく理解しているかをみる問題である．

【解答】

(1)(i)

$$ab=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$$
$$=\mathbf{1}.$$

(ii)

$$a+b=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=2\sqrt{3}.$$

よって，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{1}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{3}}.$$

(iii)

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$
$$=\frac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}$$
$$=\frac{(2\sqrt{3})^2-2\cdot 1}{1^2}$$
$$=\mathbf{10}.$$

(2)(i)

$$|x|<a$$

より，

$$\boldsymbol{-a<x<a}.$$

(ii)

$$x+1\leqq 2x\leqq 6-x$$

より，

$$\begin{cases} x+1\leqq 2x, & \cdots③ \\ 2x\leqq 6-x. & \cdots④ \end{cases}$$

③ より，

$$x\geqq 1.$$

④ より，

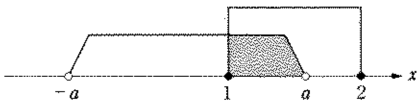
$$3x\leqq 6.$$
$$x\leqq 2.$$

よって，

$$\mathbf{1\leqq x\leqq 2}.$$

(iii)　(i)，(ii) より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a>1}.$$



(3)

$$x^2-(a+1)x+a+4=0 \quad \cdots(*)$$

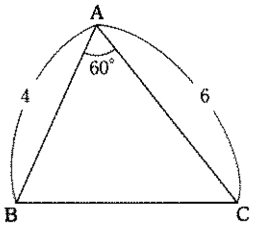
とおく．

$(*)$ が重解をもつ条件は，

$$(a+1)^2-4(a+4)=0.$$
$$a^2-2a-15=0.$$
$$(a-5)(a+3)=0.$$
$$a=5,\ -3.$$

$a=5$ のとき，(*) は，
$$x^2-6x+9=0.$$
これを解くと，
$$(x-3)^2=0.$$
$$x=3.$$
$a=-3$ のとき，(*) は，
$$x^2+2x+1=0.$$
これを解くと，
$$(x+1)^2=0.$$
$$x=-1.$$
よって，求める a の値とそのときの重解は，
$$\begin{cases} \boldsymbol{a=5,\ 重解は\ x=3,} \\ \boldsymbol{a=-3,\ 重解は\ x=-1.} \end{cases}$$

(4)



(i) 余弦定理から，
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC \\ &= 4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos60^\circ \\ &= 16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2} \\ &= 28. \end{aligned}$$
よって，
$$BC=\boldsymbol{2\sqrt{7}}.$$
(ii) 正弦定理から，
$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin\angle BAC} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{\sin60^\circ} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{21}}{3}. \end{aligned}$$
よって，
$$R=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{21}}{3}}.$$

【解説】 問題

(1)(i)

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$
展開の公式

を用いると，
$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2 \\ &= 3-2 \\ &= 1 \end{aligned}$$
となる．

(ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ は対称式であるから，$a+b$ と ab を用いて表すことができる．

そこで，**【解答】**では，はじめに $a+b$ と ab の値を求めて
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$
と変形して，この式の値を求めた．

(iii) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ も対称式であるから，$a+b$ と ab を用いて表すことができる．

そこで，**【解答】**では，

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

を用いて
$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} &= \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2} \end{aligned}$$
と変形して，この式の値を求めた．

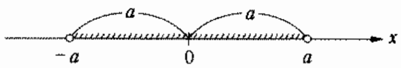
また，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ に直接 $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ を代入して計算すると，次のようになる．

((1)(iii) の別解)
$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} &= \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}} \\ &= \frac{(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} \\ &= \frac{10}{5^2-(2\sqrt{6})^2} \\ &= 10. \end{aligned}$$
((1)(iii) の別解終り)

(2)(i) $|x|$ は数直線上で，点 x と点 0 の距離と考えることができる．

したがって，$|x|<a$ は，点 x と点 0 の距離が

a より小さいことを表すと考えることができる．



よって，① を満たす x は，

$$-a<x<a$$

となる．

また，

$$|X|=\begin{cases}X & (X\geqq 0 \text{ のとき}),\\ -X & (X<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

絶対値の性質

にしたがって絶対値記号をはずして，次のように解くこともできる．

((2)(i) の別解)

(ア)　$x\geqq 0$ のとき，

① は，　$x<a$.

これと $x\geqq 0$ の共通範囲は，

$$0\leqq x<a.$$

(イ)　$x<0$ のとき，

① は，　$-x<a$.

$$x>-a.$$

これと $x<0$ の共通範囲は，

$$-a<x<0.$$

(ア)，(イ) を合わせて，① の解は，

$$-a<x<a.$$

((2)(i) の別解終り)

(ii)

不等式 $A\leqq B\leqq C$ は，

連立不等式 $\begin{cases}A\leqq B,\\ B\leqq C\end{cases}$ と同じである

不等式と連立不等式

を用いて，

連立不等式 $\begin{cases}x+1\leqq 2x,\\ 2x\leqq 6-x\end{cases}$

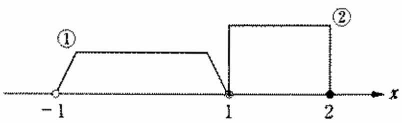
を解けばよい．

(iii)　①，② の解をそれぞれ数直線上に表して，共通部分ができるような a の値の範囲を求めればよい．

なお，特に $a=1$ とすると，

① の解は　$-1<x<1$,

② の解は　$1\leqq x\leqq 2$



であり，これらには共通部分はない．

(3)

x の 2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

が重解をもつ条件は，

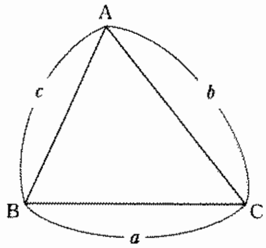
$$b^2-4ac=0$$

2 次方程式が重解をもつ条件

を用いて，a の値を求めればよい．

このあと，得られた 2 つの a の値に対して，それぞれの場合について，与えられた方程式を解けばよい．

(4)(i)　三角形 ABC において，2 辺の長さとその間の角が与えられているから，

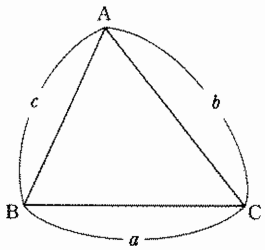


$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

余弦定理

を用いて，辺 BC の長さを求めればよい．

(ii)　(i) で，∠BAC に向かい合う辺 BC の長さが求められれば，



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(R は三角形 ABC の外接円の半径)

正弦定理

を用いて，R を求めればよい．

2　2次関数

【Ⅰ型　必須問題】

（配点　40点）

> a を 0 以上の定数とする．O を原点とする座標平面上に，点 A(12, 0) と直線 l：$y=x+2a$ がある．
>
> 点 P は O を，点 Q は A を同時に出発し，
>
> P は x 軸上を正の向きに毎秒 1 の速さで，
>
> Q は x 軸上を負の向きに毎秒 2 の速さで
>
> 動くものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と l の交点を R とする．
>
> Q が O に達するまで動くとき，次の問に答えよ．
>
> (1)　2 点 P，Q が出発してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 6)$ の P，Q，R の座標をそれぞれ求めよ．
>
> (2)　$a=0$ のときの三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．また，そのときの Q の座標を求めよ．
>
> (3)　三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．

【配点】

(1)　12 点．

(2)　10 点．

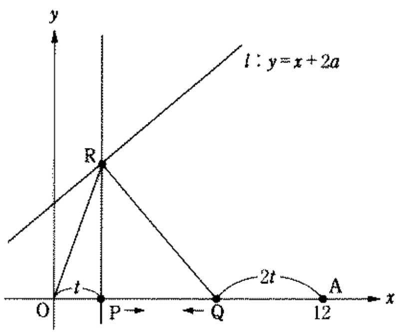
(3)　18 点．

【出題のねらい】

三角形の面積を 2 次関数として表し，適切な場合分けをすることにより，その最大値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　t 秒間で P は x 軸上を正の向きに t，Q は x 軸上を負の向きに $2t$ 移動する．



したがって，2 点 P，Q が出発してから t 秒後の P の座標は，

$$\mathbf{P}(t,\ 0),$$

Q の座標は，

$$\mathbf{Q}(12-2t,\ 0).$$

また，R と P の x 座標は等しく，R は直線 l 上にあるから，R の座標は，

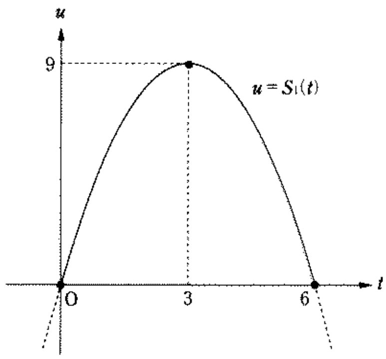
$$\mathbf{R}(t,\ t+2a).$$

(2)　$a=0$ のとき，(1) より，t 秒後の P，Q，R の座標はそれぞれ，

$$\mathrm{P}(t,\ 0),\ \mathrm{Q}(12-2t,\ 0),\ \mathrm{R}(t,\ t).$$

このとき，三角形 OQR の面積を $S_1(t)$ とすると，

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PR} \\ &= \frac{1}{2}(12-2t)\cdot t \\ &= -t^2+6t \\ &= -(t-3)^2+9. \end{aligned}$$



t のとり得る値の範囲は $0\leqq t\leqq 6$ であるから，$t=3$ のとき $S_1(t)$ は最大となり，最大値は，

$$S_1(3)=\mathbf{9}.$$

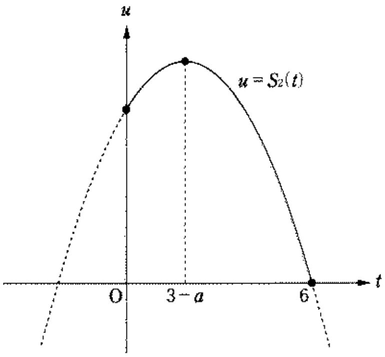
このとき，Q の座標は，

$$\mathbf{Q}(6,\ 0).$$

(3)　t 秒後 $(0\leqq t\leqq 6)$ の三角形 OQR の面積を $S_2(t)$ とすると，(1)より，

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PR} \\ &= \frac{1}{2}(12-2t)(t+2a) \\ &= -t^2+2(3-a)t+12a \\ &= -\{t-(3-a)\}^2+(a+3)^2. \end{aligned}$$

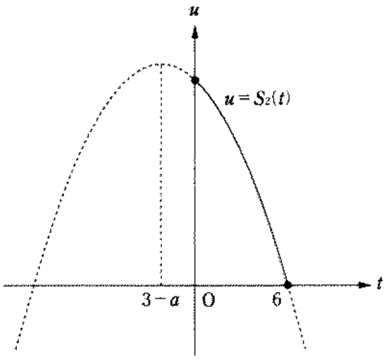
(i)　$0 \leqq a \leqq 3$ のとき．



$0 \leqq 3-a \leqq 3$ であるから，$t=3-a$ のとき $S_2(t)$ は最大となり，最大値は，

$$S_2(3-a)=(a+3)^2.$$

(ii)　$a>3$ のとき．



$3-a<0$ であるから，$t=0$ のとき $S_2(t)$ は最大となり，最大値は，

$$S_2(0)=12a.$$

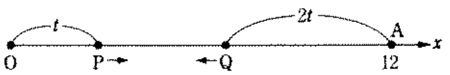
(i)，(ii)より，$S_2(t)$ の最大値は，

$$\begin{cases} (a+3)^2 & (0 \leqq a \leqq 3 \text{ のとき}), \\ 12a & (a>3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

【解説】　問題

(1)　P は x 軸上を正の向きに毎秒 1 の速さで移動するから，t 秒間で P は O から右に t だけ移動する．

Q は x 軸上を負の向きに毎秒 2 の速さで移動するから，t 秒間で Q は A から左に $2t$ だけ移動する．



したがって，出発してから t 秒後の P の座標は P$(t,\ 0)$ であり，線分 OQ の長さが $12-2t$ であることから，Q の座標は Q$(12-2t,\ 0)$ となる．

また，R と P は x 座標が等しく，R は直線 $l: y=x+2a$ 上にあることから，R の座標は R$(t,\ t+2a)$ となる．

(2)　三角形 OQR の面積は $\frac{1}{2}$OQ・PR であり，(1)の結果を用いれば，三角形 OQR の面積を t で表すことができる．したがって，三角形 OQR の面積は時刻 t $(0 \leqq t \leqq 6)$ の関数であると考えることができる．この関数の最大値を求めればよい．

$a=0$ のとき，R の座標は R$(t,\ t)$ であるから，このときの三角形 OQR の面積を $S_1(t)$ とすると，

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PR} \\ &= \frac{1}{2}(12-2t)\cdot t \\ &= -t^2+6t \end{aligned}$$

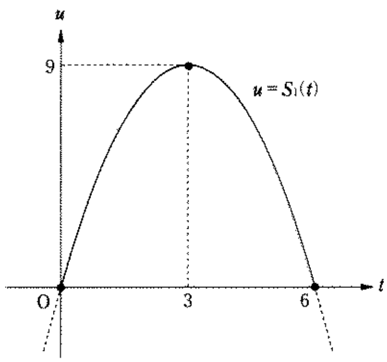
となり，t の 2 次関数として表すことができる．

あとは $u=S_1(t)$ のグラフをかくことで，$0 \leqq t \leqq 6$ における $S_1(t)$ の最大値を求めることができる．

一般に，$y=A(x-p)^2+q$ $(A \neq 0)$ のグラフは頂点の座標が $(p,\ q)$ の放物線であるから，$S_1(t)$ を

$$S_1(t)=-(t-3)^2+9$$

と平方完成することにより，$u=S_1(t)$ のグラフは点 $(3,\ 9)$ を頂点とする上に凸な放物線となることがわかる．よって，$u=S_1(t)$ のグラフは図のようになり，$S_1(t)$ の最大値は $S_1(3)=9$ とわかる．

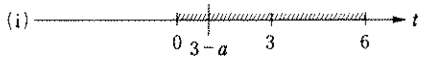


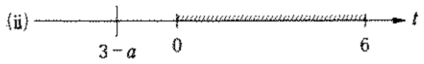
(3)　(2)と同様にして，三角形 OQR の面積 $S_2(t)$ を求めると，

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PR} \\ &= \frac{1}{2}(12-2t)(t+2a) \\ &= -t^2+2(3-a)t+12a \\ &= -\{t-(3-a)\}^2+(a+3)^2. \end{aligned}$$

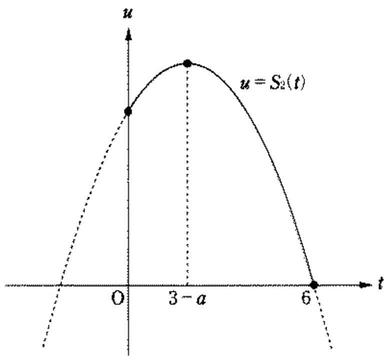
$u=S_2(t)$ のグラフは上に凸な放物線であるから，その軸 $t=3-a$ が $0 \leqq t \leqq 6$ の範囲に含まれるかどうかで場合分けをして，$S_2(t)$ の最大値を考えることになる．

$a \geqq 0$ より，$3-a \leqq 3$ であることに注意すれば，次の(i)，(ii)の場合を考えればよい．





(i)　$0 \leqq 3-a \leqq 3$，すなわち，$0 \leqq a \leqq 3$ のとき．

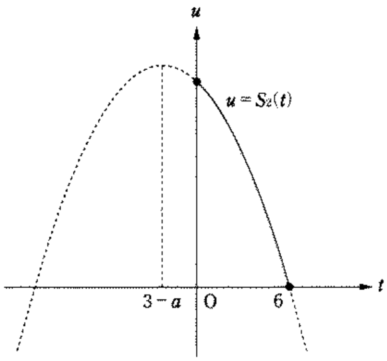


上のグラフから，$S_2(t)$ の最大値は

$$S_2(3-a)=(a+3)^2$$

とわかる．

(ii)　$3-a<0$，すなわち，$a>3$ のとき．



上のグラフから，$S_2(t)$ の最大値は

$$S_2(0)=12a$$

とわかる．

3　場合の数

【ＩＡ型　必須問題】

(配点　40点)

1，2，3と書かれた赤色のカードがそれぞれ1枚ずつ，4，5，6と書かれた黄色のカードがそれぞれ1枚ずつ，7，8，9と書かれた青色のカードがそれぞれ1枚ずつ，合計9枚のカードがある．

(1)　この9枚のカードから4枚を取り出して一列に並べる順列を考える．

(i)　順列は全部で何通りあるか．

(ii)　両端が同じ色，または両端が偶数になる順列は何通りあるか．

(2)　この9枚のカードから4枚を取り出して円形に並べる円順列を考える．

(i)　円順列は全部で何通りあるか．

(ii)　同じ色が隣り合わない円順列は何通りあるか．

【配点】

(1)　20点．

(i)　8点．(ii)　12点．

(2)　20点．

(i)　8点．(ii)　12点．

【出題のねらい】

条件を満たす順列の個数を正確に数え上げる力をみる問題である．

【解答】

(1)(i)　9枚のカードから4枚を取り出し，これらを一列に並べる方法は，

$${}_9P_4=9\cdot8\cdot7\cdot6=\mathbf{3024}(\textbf{通り}).$$

(ii)　両端が赤色のカードである順列は，

・両端の赤色のカードを並べる方法が ${}_3P_2$ 通り，

・残りの7枚のカードから2枚を取り出し，間に並べる方法が ${}_7P_2$ 通り

あるから，

$${}_3P_2\times{}_7P_2(\text{通り}).$$

両端が黄色のカード，両端が青色のカードである順列もそれぞれ同数あるから，両端が同じ色である順列の数は，

$${}_3P_2\times{}_7P_2\times3=756(\text{通り}).$$

一方，両端が偶数のカードである順列は，

・両端に偶数のカードを並べる方法が ${}_4P_2$ 通

り，

・残りの7枚のカードから2枚を取り出し，間に並べる方法が ${}_7P_2$ 通り

あるから，

$${}_4P_2 \times {}_7P_2 = 504\text{(通り)}.$$

さらに，両端が同じ色，かつ両端が偶数のカードである順列は，

・両端に4と6の黄色のカードを並べる方法が2通り，

・残りの7枚のカードから2枚を取り出し，間に並べる方法が ${}_7P_2$ 通り

あるから，

$$2 \times {}_7P_2 = 84\text{(通り)}.$$

よって，求める順列の総数は，

$$756 + 504 - 84 = \mathbf{1176}\text{(通り)}.$$

(2)(i) 9枚のカードから4枚を取り出す方法が

$${}_9C_4 \text{ 通り}$$

あり，取り出した4枚のカードを円形に並べる方法が

$$3! \text{ 通り}$$

あるから，求める円順列の総数は，

$${}_9C_4 \times 3! = \mathbf{756}\text{(通り)}.$$

(ii) 取り出した4枚のカードに含まれる色の種類によって場合分けをして考える．

同色のカードは3枚しかないことに注意すると，次の(ア)，(イ)の場合を考えればよい．

(ア) 2種類のとき．

同じ色のカードが3枚含まれると，それらのいずれかは必ず隣り合うから，1つの色のカードが2枚ずつ含まれる場合を考えればよい．

9枚のカードから条件を満たす4枚を取り出すとき，取り出し方は，

・どの2色を選ぶかが ${}_3C_2$ 通り，

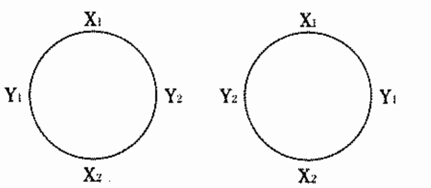
・各色のカードから2枚ずつを選ぶ方法が $({}_3C_2)^2$ 通り

あるから，

$${}_3C_2 \times ({}_3C_2)^2 = 27\text{(通り)}.$$

取り出した4枚のカードを，同じ色が隣り合わないように円形に並べる並べ方は，

2通り．



(X_1 と X_2 は同色，Y_1 と Y_2 は同色)

したがって，(ア)の場合の円順列は，

$$27 \times 2 = 54\text{(通り)}.$$

(イ) 3種類のとき．

ある色のカードだけが2枚で，残りの色のカードは1枚ずつ含まれる場合を考えればよい．

9枚のカードから条件を満たす4枚を取り出すとき，取り出し方は，

・2枚のカードを取り出す色の選び方が ${}_3C_1$ 通り，

・同色の2枚のカードの選び方が ${}_3C_2$ 通り，

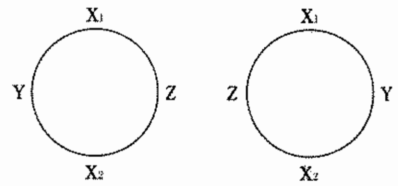
・残りの色のカードを1枚ずつ選ぶ方法が $({}_3C_1)^2$ 通り

あるから，

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times ({}_3C_1)^2 = 81\text{(通り)}.$$

取り出した4枚のカードを，同じ色が隣り合わないように円形に並べる並べ方は，

2通り．



(X_1 と X_2 は同色)

したがって，(イ)の場合の円順列は，

$$81 \times 2 = 162\text{(通り)}.$$

(ア)，(イ)より，求める円順列の総数は，

$$54 + 162 = \mathbf{216}\text{(通り)}.$$

【解説】 問題

(1)(i) 順列の総数を求めるには次の公式を用いればよい．

> 異なる n 個のものから，異なる r 個を取って並べる方法の総数は，
>
> $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
>
> **順列の総数**

(ii) 「両端が同じ色の順列」，「両端が偶数である順列」がそれぞれ何通りあるかを調べた後，これらを直接加えると，「両端が同じ色であり，かつ両端が偶数である順列」を2度重複して数えてしまうことになる．したがって，これを除いておかなければならない．

集合の要素の個数を数える際には次のことは基本である．

> 集合 A, B に対し，A または B に含まれるものの集合を A と B の和集合といい，記号 $A\cup B$ で表す．また，A と B の両方に含まれるものの集合を A と B の共通部分といい，記号 $A\cap B$ で表す．
>
> このとき，要素の個数について，
>
> $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
>
> が成り立つ．
>
> **和集合･共通部分と要素の個数**

(2)(i)　いくつかのものを円形に並べたものを円順列という．このとき，回転して同じ配置になるものは同一の並べ方とみなす．

円順列を数えるには，ある特定の1個の位置を固定しておき，それを起点として，残ったものを順に並べると考えればよい．したがって，異なる n 個のものの円順列は，固定した1個を除く $(n-1)$ 個の順列とみることができるから，その総数は $(n-1)!$ 通りとなる．

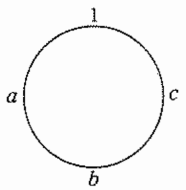
(ii)　**【解答】**では，4枚のカードに含まれる色の種類によって場合分けをした．

このように，複雑な数え上げにおいては，思いついたものを順不同に挙げていくのではなく，何らかの基準にしたがって系統的に列挙していかないと，見落としをする危険があるから注意が必要である．

また，次のように解くこともできる．

((2)(ii)の別解)

1のカードを用いるものについて考える．



(ア)　図の b の位置に赤色のカードが配置される場合．

- b の位置のカードは2または3の2通り，
- a, c の位置には，赤色以外の任意のカードを2枚取り出して並べると考えて，並べ方は ${}_6P_2$ 通り

あるから，全部で

$$2\times{}_6P_2=60(\text{通り}).$$

(イ)　図の b の位置に赤色以外のカードが配置される場合．

- b の位置のカードは赤色以外の6通り，
- a, c の位置には，赤と b で用いた色以外に残った色のカードから2枚取り出して並べると考えて，並べ方は ${}_3P_2$ 通り

あるから，全部で

$$6\times{}_3P_2=36(\text{通り}).$$

(ア)，(イ)より，1のカードを用いるものについては，

$$60+36=96(\text{通り}).$$

他のカードに注目した場合にも同様であるから，これを9倍すると，

$$96\times9(\text{通り}).$$

このとき，同じ円順列を4回ずつ重複して数えていることになるから，求める円順列の総数は，

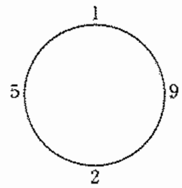
$$\frac{96\times9}{4}=216(\text{通り}).$$

((2)(ii)の別解終り)

この(別解)では，1枚のカードを基準に他の3枚のカードを決定していく方針で数えている．ここでは「1のカードが含まれる円順列」を数えて「96通り」を得ているが，まったく同様に，「2のカードが含まれる円順列」，「3のカードが含まれる円順列」，…も同じくそれぞれ96通りある．

ところが，この96通りを単純に9倍すると，1つの円順列を4度重複して数えることになる．

例えば，



という円順列は，「1を含む96通り」でも「2を含む96通り」でも「5を含む96通り」でも「9を含む96通り」でも数えられている．

よって，求める円順列の総数を得るには，この96通りを単純に9倍したものを4で割らなければならない．

【ⅡA・ⅡB型受験者用】

1 小問集合

【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】

（配点　50点）

> (1) x の方程式 $x^2-(a+1)x+a+4=0$ が重解をもつような実数 a の値と，そのときの重解を求めよ．
>
> (2) $3\cos^2\theta-8\sin\theta=0$ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ のとき，次の値を求めよ．
>
> (i) $\sin\theta$　　(ii) $\sin2\theta$
>
> (3) $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$ とする．次の値を a，b を用いて表せ．
>
> (i) $\log_{10}12$　　(ii) $\log_{10}15$
>
> (4) $\int_1^2(x^2+ax-2)\,dx=0$ を満たす実数 a の値を求めよ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 15点．

(i) 8点．(ii) 7点．

(3) 15点．

(i) 7点．(ii) 8点．

(4) 10点．

【出題のねらい】

(1) 2次方程式が重解をもつ条件を正しく理解しているかをみる問題である．

(2) 三角関数の相互関係を用いて三角方程式が正しく解けるかをみる問題である．

(3) 対数の計算法則を正しく理解しているかをみる問題である．

(4) 定積分の計算を正しく実行できるかをみる問題である．

【解答】

(1) **Ⅰ・ⅠA型 1 (3)【解答】**参照．

(2)(i)

$$3\cos^2\theta-8\sin\theta=0$$

より，

$$3(1-\sin^2\theta)-8\sin\theta=0.$$

$$3\sin^2\theta+8\sin\theta-3=0.$$

$$(3\sin\theta-1)(\sin\theta+3)=0.$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから，

$$\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

(ii) (i)より，

$$\begin{aligned}\cos^2\theta&=1-\sin^2\theta\\&=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\\&=\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\sin2\theta&=2\sin\theta\cos\theta\\&=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{9}}.\end{aligned}$$

(3)(i)

$$\begin{aligned}\log_{10}12&=\log_{10}2^2\cdot3\\&=\log_{10}2^2+\log_{10}3\\&=2\log_{10}2+\log_{10}3\\&=\boldsymbol{2a+b}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\log_{10}15&=\log_{10}3\cdot5\\&=\log_{10}3+\log_{10}5\\&=\log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}\\&=\log_{10}3+\log_{10}10-\log_{10}2\\&=b+1-a\\&=\boldsymbol{-a+b+1}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_1^2(x^2+ax-2)\,dx&=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-2x\right]_1^2\\&=\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

したがって，$\int_1^2(x^2+ax-2)\,dx=0$ のとき，

$$\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}=0.$$

$$a=\boldsymbol{-\frac{2}{9}}.$$

【解説】　問題

(1) **Ⅰ・ⅠA型 1 (3)【解説】**参照．

(2)(i)

> $$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$
> **三角関数の相互関係**

を用いて，与方程式を変形すると，

$$3(1-\sin^2\theta)-8\sin\theta=0,$$

$$3\sin^2\theta+8\sin\theta-3=0,$$
$$(3\sin\theta-1)(\sin\theta+3)=0$$
となる．

あとは，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であることに注意して，$\sin\theta$ の値を求めればよい．

(ii) (i)で $\sin\theta$ の値が求められれば，三角関数の相互関係を用いて $\cos\theta$ の値を求めることができる．

【解答】では，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値と

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
2倍角の公式

を用いて $\sin 2\theta$ の値を求めた．

(3)(i)

$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$，$N>0$ で k を実数とするとき，
$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N,$$
$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,$$
$$\log_a M^k=k\log_a M$$
対数の性質

を用いればよい．

(ii) (i)と同様にして対数の性質を用いると，
$$\log_{10}15=\log_{10}3\cdot 5$$
$$=\log_{10}3+\log_{10}5$$
となる．

ここで，$\log_{10}5$ については，
$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=\log_{10}10-\log_{10}2$$
と変形し，

$a>0$，$a \neq 1$ とするとき，
$$\log_a 1=0,\quad \log_a a=1$$
対数の値

を用いて，
$$\log_{10}5=1-\log_{10}2$$
と変形すればよい．

(4)

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n=0,\ 1,\ 2)$$
（ただし，C は積分定数である）
x^n の不定積分

を用いると，x^2+ax-2 の原始関数を求めることができる．

さらに，

$F'(x)=f(x)$ のとき，
$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$
定積分

を用いると，$\int_1^2 (x^2+ax-2)\,dx$ を計算することができる．

2 図形と方程式

【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】

（配点　50点）

(1) $2x^2+3xy-2y^2-5x-10y$ を因数分解せよ．

(2) xy 平面上において不等式
$$2x^2+3xy-2y^2-5x-10y \leqq 0$$
で表される領域を D とする．

(i) D を図示せよ．

(ii) y 軸上の点 A$(0,\ a)$（a は正の定数）を中心とする半径 r の円を C とする．C が D に含まれるような r の最大値を a を用いて表せ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 40点．

(i) 15点．(ii) 25点．

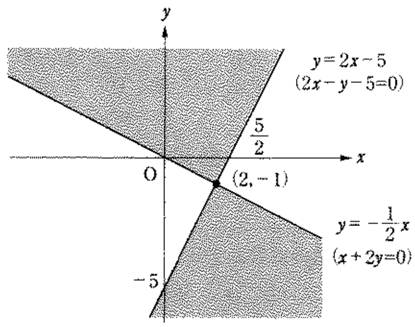
【出題のねらい】

不等式で表される領域を図示できるか，また，点と直線の距離の公式を用いて，領域における距離の最小値を求めることができるかを問う問題である．

【解答】

(1)
$$2x^2+3xy-2y^2-5x-10y$$
$$=2x^2+(3y-5)x-2y^2-10y$$
$$=2x^2+(3y-5)x-2y(y+5)$$
$$=(x+2y)(2x-y-5).$$

(2)(i) (1)より，
$$2x^2+3xy-2y^2-5x-10y \leqq 0.$$
$$(x+2y)(2x-y-5) \leqq 0.$$
$$\begin{cases} x+2y \geqq 0, \\ 2x-y-5 \leqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+2y \leqq 0, \\ 2x-y-5 \geqq 0. \end{cases}$$
したがって，
$$\begin{cases} y \geqq -\frac{1}{2}x, \\ y \geqq 2x-5 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq -\frac{1}{2}x, \\ y \leqq 2x-5. \end{cases}$$
よって，D を図示すると，次図の影の部分（境界を含む）となる．



(ii) 点Aと直線 $y=-\frac{1}{2}x$ の距離を d_1，点Aと直線 $y=2x-5$ の距離を d_2 とする．

Aを中心とする半径 r の円 C が D に含まれるような r の最大値は，d_1 と d_2 の大きくない方である．

$$d_1=\frac{|0+2a|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$
$$=\frac{2a}{\sqrt{5}}\quad (a>0 \text{ より}),$$
$$d_2=\frac{|2\cdot 0-a-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{a+5}{\sqrt{5}}\quad (a>0 \text{ より})$$

より，

$$d_1-d_2=\frac{2a}{\sqrt{5}}-\frac{a+5}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{a-5}{\sqrt{5}}.$$

したがって，

$$\begin{cases} 0<a\leqq 5 \text{ のとき}, & d_1\leqq d_2, \\ 5\leqq a \text{ のとき}, & d_2\leqq d_1. \end{cases}$$

よって，C が D に含まれるような r の最大値は，

$$\begin{cases} d_1=\boldsymbol{\frac{2a}{\sqrt{5}}} & \textbf{(}0<a\leqq 5\textbf{ のとき)}, \\ d_2=\boldsymbol{\frac{a+5}{\sqrt{5}}} & \textbf{(}5\leqq a\textbf{ のとき)}. \end{cases}$$

【解説】 問題

(1) **【解答】**では，与えられた2次式を文字 x について整理して因数分解を行った．

また，2次の項 $2x^2+3xy-2y^2$ について，

$$2x^2+3xy-2y^2=(x+2y)(2x-y)$$

となることに着目して，

$$2x^2+3xy-2y^2-5x-10y$$
$$=(x+2y)(2x-y)-5(x+2y)$$
$$=(x+2y)(2x-y-5)$$

とすることもできる．

(2)(i) (1)の結果を用いると，与えられた不等式は，

$$(x+2y)(2x-y-5)\leqq 0 \qquad \cdots①$$

と変形できる．

あとは，

> A，B が実数のとき，
>
> $AB\leqq 0 \iff \begin{cases} A\geqq 0, \\ B\leqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A\leqq 0, \\ B\geqq 0 \end{cases}$
>
> **不等式の性質**

を利用して，①を

$$\begin{cases} y\geqq -\frac{1}{2}x, \\ y\geqq 2x-5 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y\leqq -\frac{1}{2}x, \\ y\leqq 2x-5 \end{cases}$$

と変形し，

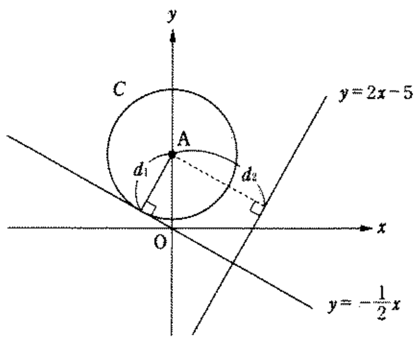
> xy 平面上の曲線 $C：y=f(x)$ に対し，
> $y\geqq f(x)$ の表す領域は，C および C の上側，
> $y\leqq f(x)$ の表す領域は，C および C の下側
>
> **不等式と領域**

を用いればよい．

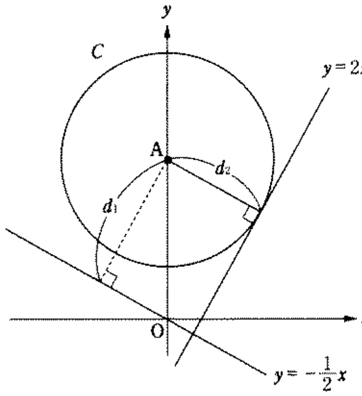
(ii) Aを中心とする半径 r の円 C が，D に含まれるような r の最大値を M，Aと直線 $y=-\frac{1}{2}x$ の距離を d_1，Aと直線 $y=2x-5$ の距離を d_2 とする．

このとき，次図の(ア)，(イ)のように d_1 と d_2 の大小関係に応じて，$M=d_1$ または $M=d_2$ となる．

(ア) $d_1\leqq d_2$ のとき，$M=d_1$．



(イ)　$d_2 \leqq d_1$ のとき，$M=d_2$.



d_1，d_2を a の式で表すには，

> 点$(x_0,\ y_0)$と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると
> $$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
> **点と直線の距離**

を用いて次のようにすればよい.

直線 $y=-\frac{1}{2}x$，$y=2x-5$ はそれぞれ，$x+2y=0$，$2x-y-5=0$ と表せるから，$a>0$ であることに注意すると，

$$d_1=\frac{|0+2a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}},$$

$$d_2=\frac{|2\cdot 0-a-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-(a+5)|}{\sqrt{5}}=\frac{a+5}{\sqrt{5}}.$$

d_1 と d_2 の大小を調べるには，d_1-d_2 の符号を調べればよく，

$$d_1-d_2=\frac{2a}{\sqrt{5}}-\frac{a+5}{\sqrt{5}}=\frac{a-5}{\sqrt{5}}$$

より，

(ア)　$0<a\leqq 5$ のとき，$d_1-d_2\leqq 0$ となるから，

$$d_1\leqq d_2,\quad M=d_1=\frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

(イ)　$5\leqq a$ のとき，$d_1-d_2\geqq 0$ となるから，

$$d_2\leqq d_1,\quad M=d_2=\frac{a+5}{\sqrt{5}}.$$

3　微分法

【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】

（配点　50点）

> a，b を実数の定数とする．関数
> $$f(x)=2x^3-3ax^2+6bx$$
> は $x=1$ で極大になるとする．
> (1)　b を a を用いて表せ．また，a のとり得る値の範囲を求めよ．
> (2)　$f(x)$の極小値 m を a を用いて表せ．
> (3)　a の値をいろいろ変えて m を調べてみたところ，異なる2つの実数 a_1，a_2 $(a_1<a_2)$の値を a に代入した場合に m が同じ値になった．このような a_1，a_2 のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ．

【配点】

(1)　20点.
(2)　10点.
(3)　20点.

【出題のねらい】

微分法の基本的な知識から，グラフを利用した定義域と値域の対応関係を考える発展的なものまで，幅広い力を問う問題である．

【解答】

(1)
$$f(x)=2x^3-3ax^2+6bx$$
より，
$$f'(x)=6x^2-6ax+6b.$$
$f(x)$は $x=1$ で極大になることから，
$$f'(1)=6-6a+6b=0,$$
すなわち，
$$b=a-1$$
であることが必要である．

このとき，
$$f'(x)=6x^2-6ax+6(a-1)=6(x^2-ax+a-1)=6(x-1)(x-a+1).$$

(i)　$a-1>1$，すなわち，$a>2$ のとき．
$f(x)$の増減は次表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

このとき，確かに$f(x)$は$x=1$で極大となる．

(ii) $a-1=1$，すなわち，$a=2$のとき．

$$f'(x)=6(x-1)^2\geqq 0$$

より，$f(x)$は単調増加であるから，$x=1$で極大とならず不適．

(iii) $a-1<1$，すなわち，$a<2$のとき．

$f(x)$の増減は次表のようになる．

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

このとき，$f(x)$は$x=1$で極大とならず不適．

以上により，

$$\boldsymbol{b=a-1}.$$

また，aのとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{a>2}.$$

(2) (1)の(i)より，

$$\begin{aligned} m&=f(a-1)\\ &=2(a-1)^3-3a(a-1)^2+6b(a-1)\\ &=2(a-1)^3-3a(a-1)^2+6(a-1)^2 \quad ((1)より)\\ &=(a-1)^2\{2(a-1)-3a+6\}\\ &=\boldsymbol{-(a-1)^2(a-4)}. \end{aligned}$$

(3) (2)より，

$$\begin{aligned} m&=-(a-1)^2(a-4)\\ &=-a^3+6a^2-9a+4. \end{aligned}$$

ここで，

$$g(a)=-a^3+6a^2-9a+4 \quad (a>2)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} g'(a)&=-3a^2+12a-9\\ &=-3(a^2-4a+3)\\ &=-3(a-1)(a-3). \end{aligned}$$

したがって，$g(a)$の増減は次表のようになる．

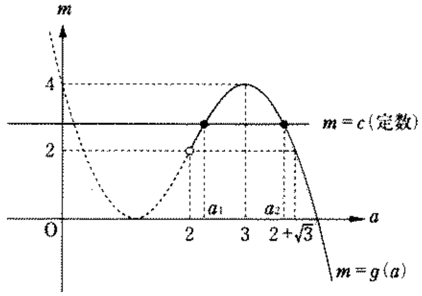
a	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$	(2)	↗	4	↘

また，$g(a)=2$を解くと，

$$-a^3+6a^2-9a+4=2.$$
$$a^3-6a^2+9a-2=0.$$
$$(a-2)(a^2-4a+1)=0.$$
$$a=2,\ 2\pm\sqrt{3}.$$

$a>2$より，$a=2+\sqrt{3}$．

よって，$m=g(a)$のグラフは次のようになる．



グラフより，a_1，a_2のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{2<a_1<3,\ 3<a_2<2+\sqrt{3}}.$$

【解説】 問題

(1) $f(x)$が$x=1$で極大になることから，まず，

$$f'(1)=6-6a+6b=0$$

であることが必要である．

> $f(x)$を整式とする．
> 関数$f(x)$が$x=\alpha$で極値をとるならば，
> $f'(\alpha)=0$
> ―― **極値をとるための必要条件**

さらに，$f'(1)=0$であっても$f(x)$は$x=1$で極大になるとは限らないから，このあと$x=1$の前後における$f'(x)$の符号を調べなければならない．

> $f'(x)$の符号が$x=\alpha$の前後で
> 正から負に変わるとき，$f(\alpha)$は極大値
> ―― **関数の極大**

【解答】では，$f'(1)=0$を用いて$f(x)$からbを消去して

$$f'(x)=6(x-1)(x-a+1)$$

とし，$f'(x)$の符号を調べた．

このとき，$f'(x)=0$となるxの値である1と$a-1$の大小による場合分けを行った．

(2) $f(x)$が$x=1$で極大になるのは，**【解答】**の(1)(i)の場合であるから，増減表より，

$$m=f(a-1)$$

であることがわかる．

(3) aの値とmの値の関係は，(2)より，

$$\begin{aligned} m&=f(a-1)\\ &=-a^3+6a^2-9a+4 \end{aligned}$$

である．

また，aのとり得る値の範囲は，(1)より，

$$a>2$$

である．

a の値と m の値の関係をさらに詳しく調べるために，【解答】では，

$$g(a)=-a^3+6a^2-9a+4 \quad (a>2)$$

とおいて，am 平面上で $m=g(a)$ のグラフをかいて考察した．

異なる a_1，a_2 に対して $g(a_1)=g(a_2)$ となるとき，

$$g(a_1)=g(a_2)=c$$

とおくと，a_1，a_2 は $m=g(a)$ と $m=c$ のグラフの共有点の a 座標である．

ここで，$m=g(a)$ と $m=c$ のグラフの共有点が少なくとも 2 個存在するような c のとり得る値の範囲は，グラフより，

$$2<c<4$$

であることがわかる．

また，このとき，共有点はちょうど 2 個存在し，

左側の共有点の a 座標が a_1，

右側の共有点の a 座標が a_2

となる．

よって，c を $2<c<4$ の範囲で動かすことにより，a_1，a_2 のとり得る値の範囲をグラフから読み取ることができる．

4　2 次関数

【ⅡA 型　選択問題】

(配点　50点)

> a を 0 以上の定数とする．O を原点とする座標平面上に，点 A(12，0) と直線 l：$y=x+2a$ がある．
>
> 点 P は O を，点 Q は A を同時に出発し，
>
> 　P は x 軸上を正の向きに毎秒 1 の速さで，
>
> 　Q は x 軸上を負の向きに毎秒 2 の速さで
>
> 動くものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と l の交点を R とする．
>
> Q が O に達するまで動くとき，次の問に答えよ．
>
> (1)　2 点 P，Q が出発してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 6)$ の P，Q，R の座標をそれぞれ求めよ．
>
> (2)　$a=0$ のときの三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．また，そのときの Q の座標を求めよ．
>
> (3)　三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．

【配点】

(1)　15 点．

(2)　15 点．

(3)　20 点．

【出題のねらい】

三角形の面積を 2 次関数として表し，適切な場合分けをすることにより，その最大値を求めることができるかをみる問題である．

【解答】　Ⅰ型 2【解答】参照．

【解説】　Ⅰ型 2【解説】参照．

問題

5　場合の数

【ⅡA･ⅡB 型共通　選択問題】

(配点　50点)

> separate の 8 文字を横一列に並べて文字列を作る．
>
> (1)　aa，ee を両方とも含むものは何通りあるか．
>
> (2)　aa，ee の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．
>
> (3)　aa，ee，ae，ea の少なくとも一つを含むものは何通りあるか．
>
> (4)　ae，ea の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．

【配点】

(1)　8 点．

(2)　12 点．

(3)　15 点．

(4)　15 点．

【出題のねらい】

和の法則･積の法則，和集合や補集合などの考え方を用いて，条件を満たす順列の個数を正しく求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　aa，ee をそれぞれひとかたまりとみなし，

aa，ee，s，p，r，t

の順列の個数を求めればよい．

よって，求める場合の数は，

$$6!=720\text{(通り)}.$$

(2)　aa を含むものは，aa をひとかたまりとみなし，

aa，e，e，s，p，r，t

の順列を考えればよく，

$$\frac{7!}{2!}=2520(\text{通り}).$$

ee を含むものも同様にして，

2520 通り．

これと(1)より，求める場合の数は，

2520＋2520－720＝**4320(通り)**．

(3) s, e, p, a, r, a, t, e の 8 文字の順列の総数は，

$$\frac{8!}{2!\,2!}=10080(\text{通り}).$$

このうち，aa, ee, ae, ea のいずれも含まないものを考える．

aa, ee, ae, ea のいずれも含まないのは a, a, e, e の 4 文字がいずれも隣り合わないときである．

この場合の数は，まず s, p, r, t を一列に並べ，次に文字の間または両端の 5 ヶ所のうちの 4 ヶ所に a, a, e, e を 1 つずつ入れると考えて，

$$4!\times{}_5C_2\cdot{}_3C_2=720(\text{通り}).$$

よって，求める場合の数は，

10080－720＝**9360(通り)**．

(4) (3)の順列のうち，ae も ea も含まないものは次の(i)，(ii)，(iii)に分類できる．

(i) aa と ee を含み，この 2 つが隣り合わないもの．

この場合の数は，まず s, p, r, t を一列に並べ，次に文字の間または両端の 5 ヶ所のうちの 2 ヶ所に aa, ee を 1 つずつ入れると考えて，

$$4!\times5\cdot4=480(\text{通り}).$$

(ii) aa を含み，aa, e, e は隣り合わないもの．

この場合の数は，まず s, p, r, t を一列に並べ，次に文字の間または両端の 5 ヶ所のうちの 3 ヶ所に aa, e, e を 1 つずつ入れると考えて，

$$4!\times{}_5C_1\cdot{}_4C_2=720(\text{通り}).$$

(iii) ee を含み，ee, a, a は隣り合わないもの．

この場合の数は，(ii)と同様にして，

720 通り．

(i)，(ii)，(iii)より，(3)の順列のうち，ae も ea も含まないものは，

480＋720＋720＝1920(通り)．

これと(3)より，求める場合の数は，

9360－1920＝**7440(通り)**．

【解説】 問題

(1) 2 つの a は隣り合うから，aa をひとかたまりとみなして考えることができる．

e についても同様であるから，求める場合の数は，異なる 6 つのもの aa, ee, s, p, r, t の順列の総数に帰着できる．

> 異なる n 個のものから r 個取って一列に並べた順列の総数は，
>
> $${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
>
> 特に，異なる n 個のものすべてを一列に並べる順列の総数は，
>
> $$n!=n(n-1)(n-2)\cdots1$$
>
> **順列**

(2) **【解答】**では，

> 2 つの集合 A, B に対して，
>
> $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
>
> 特に，$A\cap B=\phi$ のとき，
>
> $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$
>
> **和集合の要素の個数**

を用いて，

(aa または ee を含む文字列の総数)

＝(aa を含む文字列の総数)

＋(ee を含む文字列の総数)

－(aa も ee も含む文字列の総数)

とした．ここで，aa も ee も含む文字列の総数は(1)で求めたものである．このあと，aa を含む文字列の総数，ee を含む文字列の総数をそれぞれ求めることになる．

aa, e, e, s, p, r, t の並べ方を考えるときは，e が 2 個含まれていることに注意して，

> n 個のもののうち，
>
> m_1 個，m_2 個，…，m_k 個
>
> がそれぞれ同じものであるとき，この n 個のものを並べてできる順列の総数は，
>
> $$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}$$
>
> **同じものを含む順列**

を用いるとよい．

また，a と e は 2 個ずつあるから，aa を含む文字列の総数と ee を含む文字列の総数は一致する．

このことに注目すれば，作業量を減らすことができる．

(3) aa, ee, ae, ea の少なくとも一つを含むということは，4 個の a, a, e, e のうち，少なくとも 2 個が隣り合うということである．

(2)に加えて ae や ea を含む文字列も考察する必要があり，直接条件を満たす場合の数を数え上げるのは複雑になる．

そこで，**【解答】**では，a, a, e, e のうち，どの 2 つも隣り合わない文字列の個数に注目し，

有限集合 U の部分集合 A に対し，

$$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$$

補集合の要素の個数

を利用した．

a, a, e, e のうち，どの２つも隣り合わない文字列の個数を求めるには，まず s, p, r, t を一列に並べ，次にその間や両端に a, a, e, e を１個ずつ挿入するとよい．例えば s, p, r, t の並びが prst であったときに，a, a, e, e が入り得るのは

∧p∧r∧s∧t∧

と表したときの∧印の５ヶ所である．a を入れる２ヶ所を決定する際には，この２ヶ所の順序は区別しないことに注意しなければならない．したがって，

n 個の異なるものから（順序は問題にしないで）r 個取り出して１組としたものを「n 個のものから r 個取る組合せ」といい，その総数は，

$$_{n}C_{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots2\cdot1}$$

組合せ

を用いることになる．

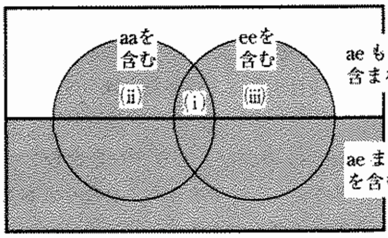
また，s, p, r, t の４個の順列 24 通りのそれぞれに対して，２個の a を挿入し，さらに２個の e を挿入するとき，この全体の場合の数を求めるには，次の積の法則を用いる．

２つの事柄 P, Q があって，P の起こり方が m 通りあり，そのそれぞれに対して Q の起こり方が n 通りあるとき，P, Q がともに起こる場合の数は，

mn 通り

積の法則

(4)　**【解答】**では，(3) の文字列のうち，ae も ea も含まない文字列に注目した．



(3) で求めたものは図の影の部分に対応する．

したがって，ae も ea も含まない文字列のうち，

(i)　aa も ee も含むもの

(ii)　ee を含まず aa を含むもの

(iii)　aa を含まず ee を含むもの

の個数をそれぞれ求めて，これらを (3) で求めたものから除けばよい．

このように (i), (ii), (iii) と分ければ，これらに重複はなく，

２つの事柄 P, Q は同時には起こらないとする．

P の起こり方が m 通りあり，Q の起こり方が n 通りあるとすると，P または Q のどちらかが起こる場合の数は，

$m+n$ 通り

和の法則

を用いれば，ae も ea も含まない文字列のうち，aa や ee を含む文字列の個数を求めることができる．

また，(ii) ee を含まず aa を含む文字列の個数と (iii) aa を含まず ee を含む文字列の個数が等しいことに注目すれば，作業量を減らすことができる．

なお，**【解答】**の (i) の個数を，(1) を利用して次のように求めることもできる．

((4)(i) の個数を求める別解)

aa も ee も含む文字列の個数は，(1) で求めた

720 通り．

このうち，ae または ea を含む文字列は，aa と ee が隣り合うものである．この場合の数は，aaee, s, p, r, t の順列と aa, ee の順序を考えて，

$5!\times2!=240$（通り）．

よって，aa も ee も含み，ae も ea も含まない文字列の個数は，

$720-240=480$（通り）．

((4)(i)の個数を求める別解終り)

また，次のようにして解くこともできる．

((4) の別解)

s, e, p, a, r, a, t, e の８文字の順列のうち，ae も ea も含まないものを求める．

まず a, a, s, p, r, t を一列に並べ，次に文字の間または両端に，a と隣り合わないように e, e を入れると考える．

(ア)　a, a が隣り合わないとき．

a, a, s, p, r, t の並べ方は，まず s, p, r, t を一列に並べ，次に文字の間または両端に a, a を１つずつ入れると考えて，

$4!\times{}_{5}C_{2}=240$（通り）．

この６文字の間または両端の７ヶ所のうち，２つの a の両側を除く３ヶ所に e, e を入れることができる．

e, e の入れ方は，入れることができる3ヶ所に，

・1つずつ入れる入れ方が ${}_3C_2$ 通り，

・ee をひとかたまりとして入れる入れ方が3通り

であるから，

$${}_3C_2+3=6(\text{通り}).$$

したがって，(ア)の場合の数は，

$$240\times 6=1440(\text{通り}).$$

(イ) a, a が隣り合うとき．

aa, s, p, r, t の並べ方は，

$$5!=120(\text{通り}).$$

これらの間または両端の6ヶ所のうち，aa の両側を除く4ヶ所に e, e を入れることができる．

e, e の入れ方は，入れることができる4ヶ所に，

・1つずつ入れる入れ方が ${}_4C_2$ 通り，

・ee をひとかたまりとして入れる入れ方が4通り

であるから，

$${}_4C_2+4=10(\text{通り}).$$

したがって，(イ)の場合の数は，

$$120\times 10=1200(\text{通り}).$$

(ア)，(イ)より，ae も ea も含まないものは，

$$1440+1200=2640(\text{通り}).$$

これと題意の8文字の順列の総数が10080通りであることから，求める場合の数は，

$$10080-2640=7440(\text{通り}).$$

((4)の別解終り)

6 平面ベクトル

【ⅡB型 選択問題】

(配点 50点)

平面上に三角形 OAB があり，

OA＝2, OB＝3, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$ （k は実数）

を満たしている．

辺 OB を 2：1 に内分する点を C，辺 AB を 1：3 に内分する点を D とし，線分 AC，OD の交点を E，E から直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．

(1) $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，k を用いて表せ．

(2) 点 E の直線 OA に関する対称点を E′ とする．三角形 OEE′ が正三角形になるような k の値を求めよ．また，そのときの四角形 OE′AB の面積を求めよ．

【配点】

(1) 20点．

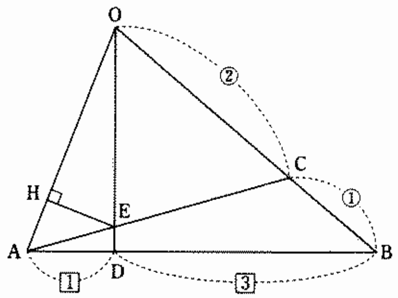
(2) 30点．

【出題のねらい】

2直線の交点，垂線，面積など，ベクトルについての基本的な理解力をみる問題である．

【解答】

(1)



C は辺 OB を 2：1 に内分するから，

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$$

D は辺 AB を 1：3 に内分するから，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{4}.$$

E は線分 OD 上の点であるから，実数 r $(0<r<1)$ を用いて，

$$\overrightarrow{OE}=r\overrightarrow{OD}=\frac{3r}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{r}{4}\overrightarrow{OB} \quad \cdots①$$

と表せる．

また，E は線分 AC 上の点でもあるから，実数 s $(0<s<1)$ を用いて，

$$\overrightarrow{OE}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{2s}{3}\overrightarrow{OB} \quad \cdots②$$

と表せる．

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，①，②より，

$$\begin{cases}\dfrac{3r}{4}=1-s,\\[2mm] \dfrac{r}{4}=\dfrac{2s}{3}.\end{cases}$$

これを解いて，

$$r=\frac{8}{9},\quad s=\frac{1}{3}.$$

（これらは $0<r<1$, $0<s<1$ を満たす）

よって，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}.}$$

次に，E は直線 OA 上の点ではないから，$\overrightarrow{EH}\neq\vec{0}$ であり，$\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{OA}$ のとき，

$$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{OA}=0. \qquad \cdots③$$

H は直線 OA 上の点であるから，実数 t を用いて，$\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OA}$ と表せ，このとき，

$$\overrightarrow{EH}=\left(t-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OA}-\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{OA}&=\left\{\left(t-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OA}-\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\left(t-\frac{2}{3}\right)\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=4\left(t-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{9}k\\&=4\left(t-\frac{1}{18}k-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

したがって，③より，

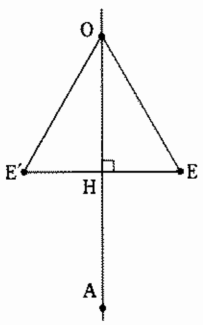
$$t-\frac{1}{18}k-\frac{2}{3}=0.$$

$$t=\frac{1}{18}k+\frac{2}{3}.$$

よって，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{18}k+\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OA}.}$$

(2)



2 点 E, E′は直線 OA に関して対称であるから，

EE′ ⊥ OA　かつ　EH = E′H　かつ　OE = OE′.

したがって，三角形 OEE′が正三角形であるとき，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{EH}:\mathrm{OH}=2:1:\sqrt{3}. \qquad \cdots④$$

よって，

$$\sqrt{3}\left|\overrightarrow{OE}\right|=2\left|\overrightarrow{OH}\right|.$$

$$\sqrt{3}\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\left(\frac{1}{18}k+\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OA}\right|.$$

$$2\sqrt{3}\left|3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|(k+12)\overrightarrow{OA}\right|.$$

$$12\left|3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=(k+12)^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2.$$

$$12\left(9\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+6\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\right)=4(k+12)^2.$$

$$3(6k+45)=(k+12)^2.$$

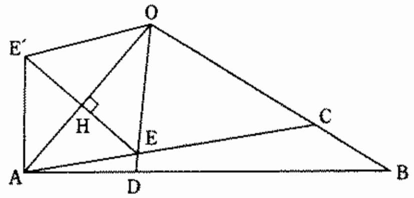
$$k^2+6k+9=0.$$

$$(k+3)^2=0.$$

$$\boldsymbol{k=-3.}$$

次に，四角形 OE′AB の面積を S とすると，

$$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OE'A}.$$



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot3^2-(-3)^2}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{OH}=\left\{\frac{1}{18}(-3)+\frac{2}{3}\right\}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

より，H は辺 OA の中点であるから，

$$\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}=1.$$

このとき，④より，

$$\mathrm{EH}=\mathrm{E'H}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから，

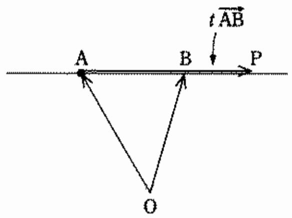
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OE'A}&=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{E'H}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}S&=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{11\sqrt{3}}{6}}.\end{aligned}$$

【解説】　問題

(1)　直線 AC と OD の交点 E に対して，$\overrightarrow{OE}$ を求めるには，次の基本事項



O, A, B を一直線上にない3点とするとき，

「点 P が直線 AB 上にある」

$\Longleftrightarrow$「$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）と表せる」

$\Longleftrightarrow$「$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(s+t=1)$

と表せる」

直線上の点の表し方

を用いて，$\overrightarrow{OE}$ を①，②のように2通りに表し，

平面上において，

$$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$$

であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$は1次独立であるといい，s, s', t, t' が実数のとき，

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow\quad s=s' \quad かつ \quad t=t'$$

平面ベクトルの1次独立

にしたがって，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ の係数を比較するとよい．

あるいは，係数を比較する代わりに，次のように解いてもよい．

($\overrightarrow{OE}$を求める別解1)

E は線分 OD 上の点であるから，実数 r $(0<r<1)$ を用いて，

$$\overrightarrow{OE}=r\overrightarrow{OD}$$

$$=\frac{3r}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{r}{4}\overrightarrow{OB} \qquad \cdots①$$

と表せる．

$\overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$ であるから，①は，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{3r}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3r}{8}\overrightarrow{OC}.$$

E は線分 AC 上の点でもあるから，

$$\frac{3r}{4}+\frac{3r}{8}=1.$$

これを解いて，

$$r=\frac{8}{9}.$$

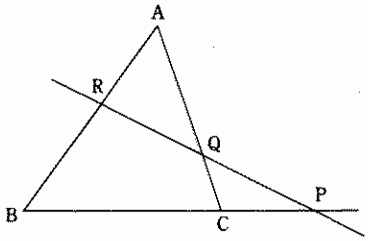
（これは $0<r<1$ を満たす）

よって，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}.$$

（$\overrightarrow{OE}$ を求める別解1終り）

また，次のメネラウスの定理



直線が三角形 ABC の3辺 BC, CA, AB またはその延長と，それぞれ，点 P, Q, R で交わるとき，

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

が成り立つ

メネラウスの定理

を用いて，次のように解くこともできる．

($\overrightarrow{OE}$を求める別解2)

メネラウスの定理より，

$$\frac{OC}{CB}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{DE}{EO}=1.$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{DE}{EO}=1.$$

$$\frac{DE}{EO}=\frac{1}{8}.$$

したがって，E は線分 OD を $8:1$ に内分する．

よって，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{8}{9}\overrightarrow{OD}$$

$$=\frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}.$$

（$\overrightarrow{OE}$を求める別解2終り）

次に，$\overrightarrow{OH}$ を求めるには，**【解答】**のように $\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OA}$と表した後，

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$のとき，

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

ベクトルの垂直条件

より，$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ が成り立つことを用いればよい．

(2) k を求めるのに，**【解答】**では，三角形 OEE′ が正三角形であるとき④が成り立つこと，つまり，線分の長さの比を用いて解いている．

直線 OA が∠EOE′を二等分することから，

$$\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{AOE'}=\frac{\pi}{6}$$

が成り立つことに注目して，次のように解くこともできる．

（k を求める別解）

$$\angle\mathrm{AOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{EOE'}=\frac{\pi}{6}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OE}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\frac{\pi}{6}. \quad \cdots⑤$$

ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{2}{3}\cdot2^2+\frac{2}{9}k\\&=\frac{2}{9}(k+12),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|&=\frac{2}{9}|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\\&=\frac{2}{9}\sqrt{9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+6\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\\&=\frac{2}{9}\sqrt{6k+45}\end{aligned}$$

であるから，⑤ より，

$$\frac{2}{9}(k+12)=\frac{2}{9}\sqrt{6k+45}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$k+12=\sqrt{3}\sqrt{6k+45}. \quad \cdots⑤'$$

両辺を 2 乗して，

$$(k+12)^2=3(6k+45).$$

$$k^2+6k+9=0.$$

$$(k+3)^2=0.$$

$$k=-3.$$

（これは ⑤′ を満たす）

（k を求める別解終り）

四角形 OE′AB の面積については，**【解答】**では，

$$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OE'A}$$

ととらえ，2 つの三角形の面積の和として求めた．

三角形 OE′A は底辺の長さが OA，高さが E′H であるから，

$$\triangle\mathrm{OE'A}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{E'H}$$

として，その面積を求めることができる．

三角形 OAB については，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

三角形の面積

を用いて，その面積を求めることができる．

また，次のように解くこともできる．

（△OAB を求める別解）

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{k}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=-\frac{1}{2}.$$

$0<\angle\mathrm{AOB}<\pi$ より，

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{3}\pi.$$

よって，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\frac{2}{3}\pi\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

（△OAB を求める別解終り）

面積の比を線分の長さの比で表すことにより，S を △OAB の定数倍としてとらえることもできる．

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OE'A}&=\triangle\mathrm{OAE}\\&=\triangle\mathrm{OAD}\cdot\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OD}}\\&=\triangle\mathrm{OAB}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OD}}\\&=\triangle\mathrm{OAB}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}\\&=\frac{2}{9}\triangle\mathrm{OAB}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OE'A}\\&=\triangle\mathrm{OAB}+\frac{2}{9}\triangle\mathrm{OAB}\\&=\frac{11}{9}\triangle\mathrm{OAB}.\end{aligned}$$

これを用いて S を求めてもよい．

【ⅢB・ⅢC 型受験者用】

1　小問集合

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

（配点　40点）

> (1)　a，b を実数の定数とする．x の方程式
> $$2x^2+ax+b=0$$
> が $2+\sqrt{5}\,i$ を解にもつとき，a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．
>
> (2)　16^{100} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．
>
> (3)　$3\cos^2\theta-8\sin\theta=0$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，次の値を求めよ．
>
> (i)　$\sin\theta$　　　(ii)　$\sin 2\theta$
>
> (4)　n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ を求めよ．
>
> (5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}}$ を求めよ．

【配点】

(1)　8 点．

(2)　8 点．

(3)　8 点．

(i)　4 点．(ii)　4 点．

(4)　8 点．

(5)　8 点．

【出題のねらい】

(1)　実数係数の 2 次方程式が虚数解をもつときの解と係数の関係が正しく求められるかをみる問題である．

(2)　対数を用いて自然数の桁数を正しく求められるかをみる問題である．

(3)　三角関数の相互関係を用いて三角方程式が正しく解けるかをみる問題である．

(4)　数列の和の公式を正しく用いることができるかをみる問題である．

(5)　分母の有理化を用いて数列の極限が正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)　与方程式は実数係数の 2 次方程式であるから，$2+\sqrt{5}\,i$ が解ならば $2-\sqrt{5}\,i$ も解である．

よって，解と係数の関係から，

$$\begin{cases}(2+\sqrt{5}\,i)+(2-\sqrt{5}\,i)=-\dfrac{a}{2},\\[2mm] (2+\sqrt{5}\,i)(2-\sqrt{5}\,i)=\dfrac{b}{2}.\end{cases}$$

これより，

$$\boldsymbol{a=-8,\ b=18.}$$

(2)　16^{100} が m 桁の整数とすると，

$$10^{m-1}\leqq16^{100}<10^m.$$
$$m-1\leqq100\log_{10}16<m.$$
$$m-1\leqq400\log_{10}2<m. \quad \cdots(*)$$

ここで，$\log_{10}2=0.3010$ より，

$$400\log_{10}2=400\times0.3010$$
$$=120.4.$$

したがって，$(*)$ は，

$$m-1\leqq120.4<m.$$

これを満たす自然数 m の値は，

$$m=121.$$

よって，**16^{100} は 121 桁の整数である．**

(3)　**ⅡA・ⅡB 型**1(2)**【解答】**参照．

(4)
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).}$$

(5)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{n(n+1)-n(n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}{2}$$
$$=\boldsymbol{1.}$$

【解説】　問題

(1)　与方程式は実数係数の 2 次方程式であるから，

> 実数を係数とする n 次方程式の解の 1 つが虚数 $a+bi$ ならば，それと共役な複素数 $a-bi$ も解である
>
> **実数係数の方程式の性質**

を用いると，$2+\sqrt{5}\,i$ が解ならば $2-\sqrt{5}\,i$ も解である．

そこで，**【解答】**では，

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

解と係数の関係

を用いて

$$\begin{cases}(2+\sqrt{5}i)+(2-\sqrt{5}i)=-\dfrac{a}{2},\\ (2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=\dfrac{b}{2}\end{cases}$$

とし,ここから a と b の値を求めた.

また,

a, b を実数とするとき,

$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

複素数の相等

を用いて次のように解くこともできる.

((1)の別解)

$2x^2+ax+b=0$ が $2+\sqrt{5}i$ を解にもつとき,

$$2(2+\sqrt{5}i)^2+a(2+\sqrt{5}i)+b=0.$$
$$2(-1+4\sqrt{5}i)+a(2+\sqrt{5}i)+b=0.$$
$$(2a+b-2)+(a+8)\sqrt{5}i=0.$$

a, b は実数であるから,

$$2a+b-2=0 \quad かつ \quad a+8=0.$$

よって,

$$a=-8,\ b=18.$$

((1)の別解終り)

(2)

N, k を自然数とするとき,

N が k 桁の数 $\iff 10^{k-1}\leqq N<10^k$

$\iff k-1\leqq\log_{10}N<k$

自然数の桁数

を用いればよい.

(3) **ⅡA・ⅡB型[1](2)【解説】**参照.

(4)
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

と変形した後,

n を自然数とするとき,

$$\sum_{k=1}^{n}1=n,$$
$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

数列の和の公式

を用いればよい.

(5)

$a>0$, $b>0$, $a\neq b$ のとき,

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

分母の有理化

を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{n(n+1)-n(n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{2n}$$

と変形した後,

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束して, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (ただし\ \beta\neq 0)$$

極限値の性質

を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{2}$$
$$=\frac{1+1}{2}$$
$$=1$$

とすればよい.

[2] 数列の極限

【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】

(配点　40点)

a, x を実数の定数とする.

初項 a, 公比 $x+1$ の等比数列 $\{a_n\}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$$

が成り立つとする.

(1) x のとり得る値の範囲を求め, a を x を用いて表せ.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ を x を用いて表せ. また, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<1$ となるような x の値の範囲を求めよ.

【配点】

(1)　20 点.

(2)　20 点.

【出題のねらい】

無限等比級数の基本事項を正しく理解しているかをみる問題である.

【解答】

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1. \quad \cdots①$$

$a=0$ とすると，$a_n=0$ であるから，
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$
となり，これは ① に反する.

したがって，$a \neq 0$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するのは
$$-1 < x+1 < 1 \quad \cdots②$$
のときである.

よって，
$$-2 < x < 0. \quad \cdots②'$$

このとき，① より，
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-(x+1)} = 1.$$
$$-\frac{a}{x} = 1.$$

よって，
$$a = -x. \quad \cdots③$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は，
$$a_n = a(x+1)^{n-1}$$
$$= -x(x+1)^{n-1}. \quad (③より)$$

したがって，
$$a_n{}^2 = x^2(x+1)^{2(n-1)}.$$

よって，数列 $\{a_n{}^2\}$ は，初項 x^2，公比 $(x+1)^2$ の等比数列である.

② より，
$$0 \leqq (x+1)^2 < 1$$
であるから，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ は収束して，
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = \frac{x^2}{1-(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2}{-x^2-2x}$$
$$= -\frac{x}{x+2}.$$

よって，
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 < 1$$
となる条件は，
$$-\frac{x}{x+2} < 1.$$

②′ より，$x+2>0$ であるから，
$$-x < x+2.$$
$$x > -1.$$

これと ②′ より，求める x の値の範囲は，
$$-1 < x < 0.$$

【解説】　問題

(1)　一般に，$a \neq 0$ のとき，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束するのは
$$-1 < r < 1$$
のときであり，このとき，
$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

また，$a=0$ のとき，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は r の値によらず収束し，
$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = 0.$$

したがって，無限等比級数が収束する条件は次のようになる.

> 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ が収束する条件は
>
> $-1 < r < 1$　または　$a=0$
>
> **無限等比級数の収束条件**

本問の場合，
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \cdots①$$
は，

「無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し」　…(ア)

かつ

「その和は 1 である」　…(イ)

ことを意味する.

まず，(ア) の条件は，
$$-1 < x+1 < 1 \quad または \quad a=0$$
である.

ここで，**【解答】**にあるように，$a=0$ とすると (イ) が成立しないから $a \neq 0$ である．したがって，(イ) を考慮すると，(ア) の条件は，
$$-1 < x+1 < 1 \quad \cdots②$$
となる.

次に，② のもとでは，
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-(x+1)} = -\frac{a}{x}$$
であるから，(イ) の条件は，
$$-\frac{a}{x} = 1$$
となる.

② より，$x \neq 0$ であるから，この条件は，

$$a=-x \qquad \cdots ③$$

となる．

よって，(ア)かつ(イ)の条件は②かつ③となる．

(2) $a=-x$ から，

$$a_n=a(x+1)^{n-1}=-x(x+1)^{n-1}$$

であり，これより，

$$a_n{}^2=\{-x(x+1)^{n-1}\}^2=x^2\{(x+1)^2\}^{n-1}$$

となる．

したがって，数列 $\{a_n{}^2\}$ は，初項 x^2, 公比 $(x+1)^2$ の等比数列である．

よって，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ は無限等比級数であり，これが収束する条件は，(1)で考察したように，

$$-1<(x+1)^2<1 \quad \text{または} \quad x^2=0$$

である．

②のもとでは，$-1<(x+1)^2<1$ が成り立つから $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ は収束する．

また，②のもとでは，$x\neq 0$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\frac{x^2}{1-(x+1)^2}=-\frac{x}{x+2}$$

となる．

あとは，②のもとで，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2<1 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{x}{x+2}<1$$

を解けばよい．

3 場合の数

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

(配点　40点)

> separate の 8 文字を横一列に並べて文字列を作る．
>
> (1) aa, ee を両方とも含むものは何通りあるか．
>
> (2) aa, ee の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．
>
> (3) aa, ee, ae, ea の少なくとも一つを含むものは何通りあるか．
>
> (4) ae, ea の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．

【配点】

(1) 6 点．

(2) 10 点．

(3) 12 点．

(4) 12 点．

【出題のねらい】

和の法則・積の法則，和集合や補集合などの考え方を用いて，条件を満たす順列の個数を正しく求めることができるかをみる問題である．

【解答】 ⅡA・ⅡB 型 5 【解答】参照．

【解説】 ⅡA・ⅡB 型 5 【解説】参照．

問題

4 図形と方程式

【ⅢB・ⅢC 型共通　必須問題】

(配点　40点)

> (1) 放物線 $y=x^2$ 上に動点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとる．P と定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ (a は正の定数)の距離 AP の最小値を a を用いて表せ．また，そのときの P の座標を a を用いて表せ．
>
> (2) xy 平面上において，不等式
>
> $$(y-x^2)(2\sqrt{2}\,x-2y+1)\geqq 0$$
>
> で表される領域を D とする．
>
> (i) D を図示せよ．
>
> (ii) $x^2+(y-b)^2\leqq r^2$ (b は正の定数，r は 0 以上の定数)で表される図形を K とする．K と D が共有点をもつような r の最小値を b を用いて表せ．

【配点】

(1) 15 点．

(2) 25 点．

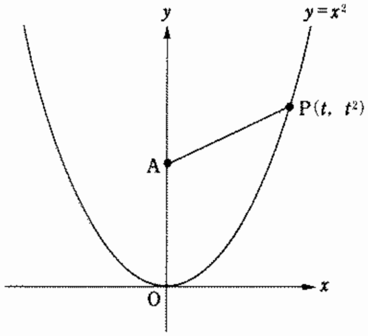
(i) 10 点．(ii) 15 点．

【出題のねらい】

円，直線，放物線など「図形と方程式」で学ぶ基本的な図形を題材にして，文字を含む関数の最小値を場合分けして求めることができるか，また，不等式で表される 2 つの領域の位置関係を把握することができるかをみる問題である．

【解答】

(1)



$$AP^2=t^2+(t^2-a)^2$$
$$=t^4+(1-2a)t^2+a^2$$
$$=\left(t^2-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}.$$

ここで，$x=t^2$とおくと，

$$x\geqq 0 \qquad \cdots ①$$

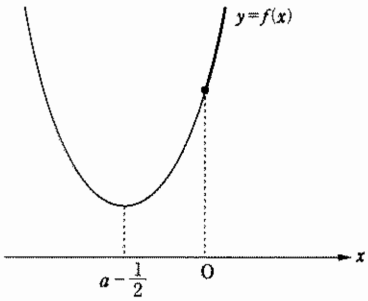
であり，

$$AP^2=\left\{x-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+a-\frac{1}{4}.$$

$$f(x)=\left\{x-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+a-\frac{1}{4}$$

とおいて，xが①を満たして変化するときの$f(x)$の最小値をしらべる．

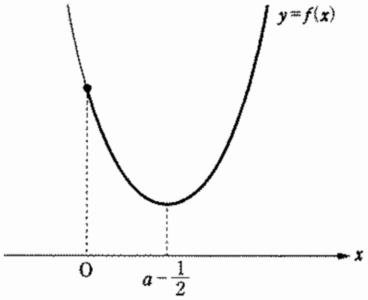
(ア) $a-\frac{1}{2}\leqq 0$，すなわち，$0<a\leqq\frac{1}{2}$のとき．



$f(x)$は$x=0$のとき最小になるから，AP^2は$t=0$のとき最小になり，このとき，

$$AP=a,\quad P(0,\ 0).$$

(イ) $a-\frac{1}{2}\geqq 0$，すなわち，$a\geqq\frac{1}{2}$のとき．



$f(x)$は$x=a-\frac{1}{2}$のとき最小になるから，AP^2は$t=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$のとき最小になり，このとき，

$$AP=\sqrt{a-\frac{1}{4}},\quad P\left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}},\ a-\frac{1}{2}\right).$$

(ア)，(イ)より，

$0<a\leqq\frac{1}{2}$のとき，

AP の最小値は a，
P の座標は P$(0,\ 0)$，

$a\geqq\frac{1}{2}$のとき，

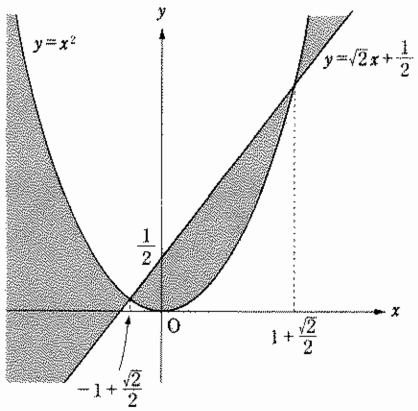
AP の最小値は $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$，
P の座標は P$\left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}},\ a-\frac{1}{2}\right)$.

(2)(i) $$(y-x^2)(2\sqrt{2}x-2y+1)\geqq 0$$

$$\iff \begin{cases} y-x^2\geqq 0, \\ 2\sqrt{2}x-2y+1\geqq 0 \end{cases} \quad\text{または}\quad \begin{cases} y-x^2\leqq 0, \\ 2\sqrt{2}x-2y+1\leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff x^2\leqq y\leqq\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\quad\text{または}\quad\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\leqq y\leqq x^2.$$

よって，Dを図示すると，次図の影の部分(境界を含む)となる．



(ii) 図形 K は，

$r=0$ のとき，1点 $(0,\ b)$ であり，

$r>0$ のとき，中心 $(0,\ b)$，半径 r の円の周および内部である．

・$0<b\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき．

r の値によらず K と D は共有点をもつから，r の最小値は，

$$r=0.$$

・$b>\dfrac{1}{2}$ のとき．

点 $(0,\ b)$ と放物線 $y=x^2$ 上の点の距離の最小値を d_1，点 $(0,\ b)$ と直線 $y=\sqrt{2}x+\dfrac{1}{2}$ の距離を d_2 とすると，(1)の結果より，

$$d_1=\sqrt{b-\frac{1}{4}}$$

であり，点と直線の距離の公式より，

$$\begin{aligned} d_2&=\frac{|2\sqrt{2}\cdot 0-2b+1|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-2)^2}}\\ &=\frac{|1-2b|}{2\sqrt{3}}\\ &=\frac{2b-1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

ここで，

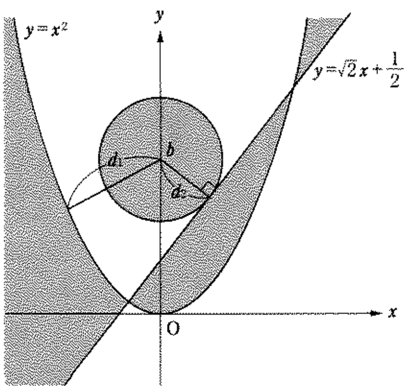
$$\begin{aligned} d_2{}^2-d_1{}^2&=\frac{(2b-1)^2}{12}-\left(b-\frac{1}{4}\right)\\ &=\frac{1}{3}b^2-\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}\\ &=\frac{1}{3}(b-2-\sqrt{3})(b-2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}<b\leqq 2+\sqrt{3} \text{ のとき} & d_1\geqq d_2,\\ b>2+\sqrt{3} \text{ のとき} & d_1<d_2. \end{cases}$$

したがって，

(ア) $\dfrac{1}{2}<b\leqq 2+\sqrt{3}$ のとき．



K と D が共有点をもつための条件は，

$$r\geqq d_2,$$

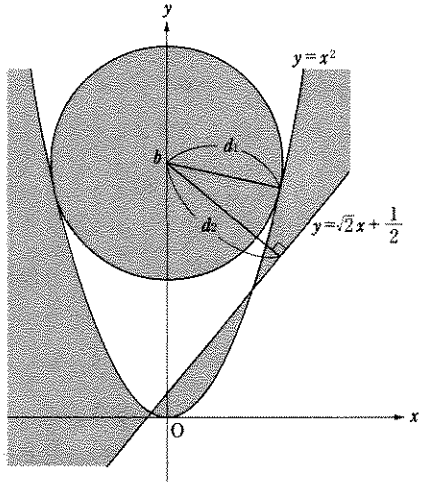
すなわち，

$$r\geqq\frac{2b-1}{2\sqrt{3}}.$$

よって，求める r の最小値は，

$$r=\frac{2b-1}{2\sqrt{3}}.$$

(イ) $b>2+\sqrt{3}$ のとき．



K と D が共有点をもつための条件は，

$$r\geqq d_1,$$

すなわち，

$$r\geqq\sqrt{b-\frac{1}{4}}.$$

よって，求める r の最小値は，

$$r=\sqrt{b-\frac{1}{4}}.$$

以上より，求める r の最小値は，

$$r=\begin{cases} 0 & \left(0<b\leqq\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right),\\ \dfrac{2b-1}{2\sqrt{3}} & \left(\dfrac{1}{2}<b\leqq 2+\sqrt{3} \text{ のとき}\right),\\ \sqrt{b-\dfrac{1}{4}} & (b>2+\sqrt{3} \text{ のとき}). \end{cases}$$

【解説】 問題

(1) AP^2 を a と t で表し，AP^2 を t の関数とみなして，その最小値を考察すればよい．

【解答】では，$x=t^2$ とおくと AP^2 が x の2次関数（これを $f(x)$ とおいた）になることに着目し，$y=f(x)$ のグラフを利用して，$f(x)$ の最小値を考察した．

その際，x のとり得る値の範囲が $x\geqq 0$ であるか

ら，放物線 $y=f(x)$ の軸が $x\geqq 0$ の範囲に含まれるか否かに注意して，場合分けをする必要が生じる．

また，AP^2 を t の4次関数と考えて解答することもできる．

((1)の別解)

$$\mathrm{AP}^2=t^2+(t^2-a)^2$$
$$=t^4+(1-2a)t^2+a^2.$$
$$g(t)=t^4+(1-2a)t^2+a^2$$

とおくと，

$$g'(t)=4t^3+2(1-2a)t$$
$$=2t\{2t^2-(2a-1)\}.$$

(ア) $2a-1\leqq 0$，すなわち，$0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき．

$g(t)$ の増減は次表のようになる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	a^2	↗

これより，$g(t)$ は $t=0$ のとき最小値 a^2 をとるから，

AP の最小値は a，　P$(0,\ 0)$．

(イ) $2a-1>0$，すなわち，$a>\frac{1}{2}$ のとき．

$g(t)$ の増減は次表のようになる．

t	$\cdots$	$-\sqrt{a-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{a-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	$a-\frac{1}{4}$	↗	a^2	↘	$a-\frac{1}{4}$	↗

これより，$g(t)$ は $t=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$ のとき最小値 $a-\frac{1}{4}$ をとるから，

AP の最小値は $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$，P$\left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}},\ a-\frac{1}{2}\right)$．

(ア)，(イ)より，

$0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき，

AP の最小値は a，
P の座標は P$(0,\ 0)$，

$a>\frac{1}{2}$ のとき，

AP の最小値は $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$，

P の座標は P$\left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}},\ a-\frac{1}{2}\right)$．

((1)の別解終り)

(2)(i) 一般に，

> A，B が実数のとき，
>
> $AB\geqq 0 \iff \begin{cases} A\geqq 0, \\ B\geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A\leqq 0, \\ B\leqq 0 \end{cases}$
>
> 不等式の性質

が成り立つから，これに従って D を表す不等式を

$$\begin{cases} y\geqq x^2, \\ y\leqq\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y\leqq x^2, \\ y\geqq\sqrt{2}\,x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

と変形して，

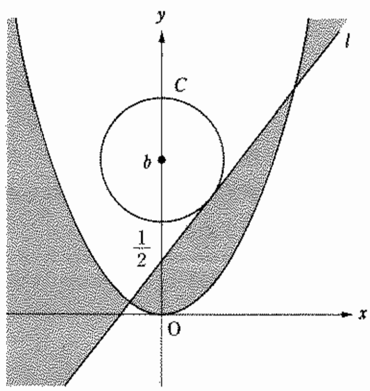
> xy 平面上の曲線 C：$y=f(x)$ に対し，
> $y\geqq f(x)$ の表す領域は，C および C の上側，
> $y\leqq f(x)$ の表す領域は，C および C の下側
>
> 不等式と領域

を利用して，D を図示すればよい．

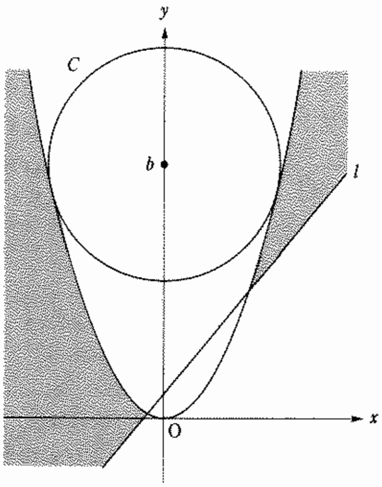
(ii) 一般に，

> 円 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ に対し，
> 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqq r^2$ の表す領域は C の周および内部，
> 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域は C の周および外部
>
> 不等式と円の内部・外部

が成り立つから，本問の図形 K は，$r>0$ のときは中心が点 $(0,\ b)$，半径 r の円 C の周および内部である．



(図1)



(図 2)

$0<b\leqq\frac{1}{2}$ のとき，r の値によらず K と D が共有点をもつことは図よりわかる．

$b>\frac{1}{2}$ のとき，b を固定し，r を少しずつ大きくしていくと，K と D が最初に共有点をもつのは，円 C が，直線 l：$y=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$ と共有点をもつ場合(図 1)と放物線 $y=x^2$ と共有点をもつ場合(図 2)の 2 つの場合があることがわかる．

そこで，**【解答】**では，C の中心から $y=x^2$ 上の点までの距離の最小値を d_1，C の中心から l までの距離を d_2 とおいて，K と D が共有点をもつための r の条件を

$$r\geqq d_1 \quad \text{または} \quad r\geqq d_2 \qquad \cdots(*)$$

ととらえた．

あとは，d_1 と d_2 の大小で場合分けをして，(*)を満たす r の最小値を求めればよい．

なお，d_1 を求めるには，(1)の結果を直接用いればよく，d_2 を求めるには，

> 点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると
>
> $$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
>
> **点と直線の距離**

を用いればよい．

5 平面ベクトル

【ⅢB・ⅢC 型共通　選択問題】

(配点　40点)

> 平面上に三角形 OAB があり，
>
> $OA=2$，$OB=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k$　(k は実数)
>
> を満たしている．
>
> 辺 OB を 2：1 に内分する点を C，辺 AB を 1：3 に内分する点を D とし，線分 AC，OD の交点を E，E から直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．
>
> (1)　$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，k を用いて表せ．
>
> (2)　点 E の直線 OA に関する対称点を E′ とする．三角形 OEE′ が正三角形になるような k の値を求めよ．また，そのときの四角形 OE′AB の面積を求めよ．

【配点】

(1)　16 点.

(2)　24 点.

【出題のねらい】

2 直線の交点，垂線，面積など，ベクトルについての基本的な理解力をみる問題である．

【解答】　ⅡB 型 6 【解答】参照.

【解説】　ⅡB 型 6 【解説】参照.

問題

6 関数の極限

【ⅢB・ⅢC 型共通　選択問題】

(配点　40点)

> O を原点とする座標平面上に点 A(0, 2) をとる．線分 OA を直径にもつ円の $x\geqq0$ の部分を C_1，放物線 $y=ax^2$ を C_2 とし，C_1 と C_2 は第 1 象限にある点 P で交わっている．
>
> $\angle AOP=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくとき，次の問に答えよ．
>
> (1)　a を θ を用いて表せ．
>
> (2)　C_1，線分 OP および y 軸で囲まれる図形の面積を S_1，C_2 と線分 OP で囲まれる図形の面積を S_2 とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ．

【配点】

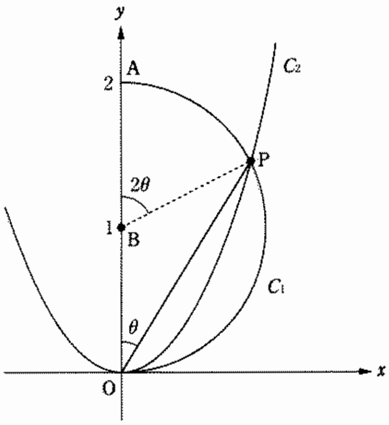
(1)　16 点.

(2)　24 点.

【出題のねらい】

与えられた図形の面積を適切な変数で表すことができるか，また，関数の極限の基本を理解しているかをみる問題である.

【解答】



B(0, 1)とおくと，C_1 はBを中心とする半径1の円の $x \geqq 0$ の部分である.

(1)
$$\angle \mathrm{ABP}=2\angle \mathrm{AOP}=2\theta$$
であるから，
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right)$$
$$=(\sin 2\theta,\ \cos 2\theta).$$
したがって，
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$
$$=(0,\ 1)+(\sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$$
$$=(\sin 2\theta,\ 1+\cos 2\theta)$$
$$=(2\sin\theta\cos\theta,\ 2\cos^2\theta).$$
Pは $y=ax^2$ 上にあるから，
$$2\cos^2\theta=a(2\sin\theta\cos\theta)^2.$$
よって，
$$a=\frac{1}{2\sin^2\theta}.$$

(2)　扇形ABPの面積は，
$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta=\theta.$$
$\angle \mathrm{OBP}=\pi-2\theta$ であるから，三角形OBPの面積は，
$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$=\sin\theta\cos\theta.$$
したがって，
$$S_1=(\text{扇型ABPの面積})+(\text{三角形OBPの面積})$$
$$=\theta+\sin\theta\cos\theta.$$
次に，$\mathrm{P}(2\sin\theta\cos\theta,\ 2\cos^2\theta)$ であるから，直線OPの方程式は，
$$y=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x.$$
したがって，
$$S_2=\int_0^{2\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x-\frac{1}{2\sin^2\theta}x^2\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2\sin^2\theta}\int_0^{2\sin\theta\cos\theta}x(x-2\sin\theta\cos\theta)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2\sin^2\theta}\left\{-\frac{1}{6}(2\sin\theta\cos\theta-0)^3\right\}$$
$$=\frac{2}{3}\sin\theta\cos^3\theta.$$
ここで，(1)より $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2a}$ であるから，
$$a\to\infty\quad のとき\quad \sin\theta\to 0$$
となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，
$$\theta\to+0.$$
よって，
$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{\frac{2}{3}\sin\theta\cos^3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\cos^3\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$
$$=\frac{3}{2}(1+1)$$
$$=\mathbf{3}.$$

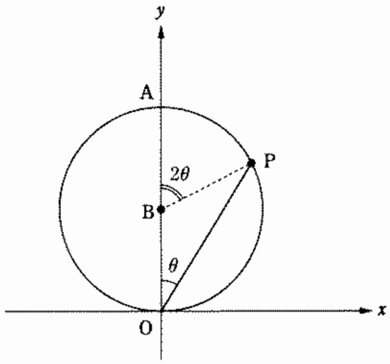
【解説】　問題

(1)　Pは次の(ア)，(イ)の条件をともに満たす.

(ア)　Pは $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ を満たす C_1 上の点である.

(イ)　Pは C_2 上の点である.

【解答】では，はじめに条件(ア)からPの座標を θ を用いて表し，そのあとで条件(イ)を用いた.

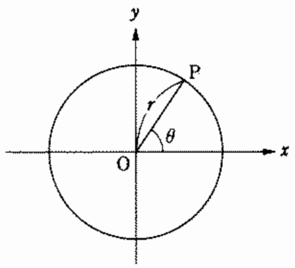


B(0, 1) とおくと，(中心角)＝2(円周角) より，

$$\angle ABP=2\theta.$$

したがって，x 軸の正方向と $\overrightarrow{BP}$ のなす角は

$\frac{\pi}{2}-2\theta$ であり，また，$\left|\overrightarrow{BP}\right|=1$ であるから，



上図において

$$\overrightarrow{OP}=r(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

ベクトルの成分

を用いて，

$$\overrightarrow{BP}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right)$$

となる．

さらに，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

三角関数の性質

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$=1-2\sin^2\theta$$

$$=2\cos^2\theta-1$$

2倍角の公式

を用いると，

$$\overrightarrow{BP}=(\sin2\theta,\ \cos2\theta)$$

$$=(2\sin\theta\cos\theta,\ 2\cos^2\theta-1)$$

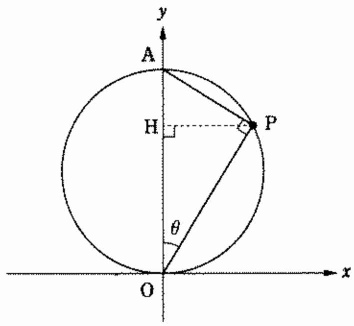
となり，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$$

から，P の座標を θ を用いて表すことができる．

また，次のようにして P の座標を求めることもできる．

((1) の部分的別解)



$\angle OPA=\frac{\pi}{2}$ に注目すると，

$$OP=OA\cos\theta=2\cos\theta.$$

P から y 軸に下ろした垂線の足を H とすると，

$$PH=OP\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta,$$

$$OH=OP\cos\theta=2\cos^2\theta.$$

したがって，P の座標は，

$$P(2\sin\theta\cos\theta,\ 2\cos^2\theta).$$

((1) の部分的別解終り)

はじめに条件(イ)を用いて解くと次のようになる．

((1) の別解)

P は C_2 上の点であるから，

$$P(t,\ at^2)$$

と表せる．

C_1 の方程式は，

$$x^2+(y-1)^2=1 \quad (x\geqq0)$$

であり，P は C_1 上にあるから，

$$t^2+(at^2-1)^2=1.$$

$$a^2t^4-(2a-1)t^2=0.$$

$$t^2\{a^2t^2-(2a-1)\}=0.$$

$$t^2=0,\ \frac{2a-1}{a^2}.$$

P は第 1 象限にあるから，

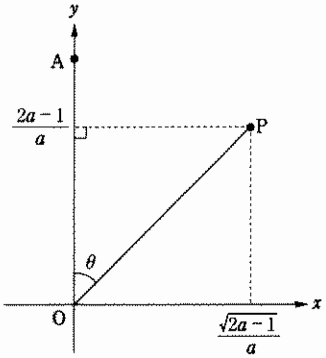
$$\frac{2a-1}{a^2}>0 \quad すなわち \quad a>\frac{1}{2}$$

であり，このとき，

$$t=\frac{\sqrt{2a-1}}{a}.$$

したがって，P の座標は，

$$P\left(\frac{\sqrt{2a-1}}{a},\ \frac{2a-1}{a}\right).$$



$\angle AOP=\theta$ であるから，

$$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{2a-1}}{a}}{\frac{2a-1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{2a-1}}.$$

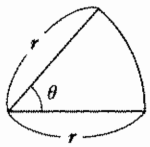
$$\tan^2\theta=\frac{1}{2a-1}.$$

$$2a-1=\frac{1}{\tan^2\theta}.$$

$$a=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sin^2\theta}.$$

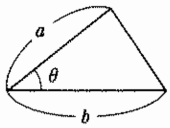
((1) の別解終り)

(2) $S_1=$(扇形 ABP の面積)$+$(三角形 OBP の面積)
であり，扇形および三角形の面積は，



$(\text{扇形の面積})=\frac{1}{2}r^2\theta$

扇形の面積



$(\text{三角形の面積})=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

三角形の面積

を用いて求めることができる．

S_2 は放物線と直線で囲まれる図形の面積であるから，定積分を計算することで求めることができる．その際，**【解答】**では，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いて，S_2 を求めた．

S_1，S_2 をそれぞれ求めることで，$\frac{S_1}{S_2}$ は θ を用いて表すことができる．

(1) の結果より，

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2a}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，$a\to\infty$ のとき，

$$\sin\theta\to 0\quad すなわち\quad \theta\to+0$$

となる．このことと三角関数の極限公式

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

三角関数の極限

を用いると，$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$ を求めることができる．

7 行 列

【ⅢC型 選択問題】

(配点 40点)

整数を成分とする2つの2次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

がある．

A，B が

$$(A+B)^2=(A-B)^2$$

を満たしているとき，次の問に答えよ．

(1) A を x，y を用いて表せ．

(2) $(A+B)^3=(A-B)^3$ が成り立つような A を求めよ．

【配点】

(1) 16点．

(2) 24点．

【出題のねらい】

行列の基本的な計算ができるか，また，行列の成分が整数である条件を正しく用いられるかをみる問題である．

【解答】

(1) $(A+B)^2=(A-B)^2$ より，

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2-AB-BA+B^2$$

であるから，

$$AB=-BA.$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -x+3y & x+y \\ -z+3w & z+w \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -x+z & -y+w \\ 3x+z & 3y+w \end{pmatrix}.$$

両辺の成分を比較して,

$-x+3y=x-z,$　…①　　$x+y=y-w,$　…②

$-z+3w=-3x-z,$　…③　　$z+w=-3y-w.$　…④

①より, $z=2x-3y.$

②より, $w=-x.$

このとき, ③, ④も成り立つ.

よって,

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 2x-3y & -x \end{pmatrix}.$$

(2)　$AB=-BA$ より,

$$(A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$$

となることに注意すると,

$$(A+B)^3=(A+B)(A+B)^2=(A+B)(A^2+B^2),$$
$$(A-B)^3=(A-B)(A-B)^2=(A-B)(A^2+B^2).$$

したがって, $(A+B)^3=(A-B)^3$ は,

$$(A+B)(A^2+B^2)=(A-B)(A^2+B^2).$$
$$2B(A^2+B^2)=O.$$
$$B(A^2+B^2)=O. \quad \cdots⑤$$

$\left(\text{ただし, } O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{とする.}\right)$

さらに, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について,

$$\Delta=(-1)\cdot 1-1\cdot 3=-4\neq 0$$

より, B^{-1} が存在するから, これを⑤の両辺に左からかけて,

$$A^2+B^2=O.$$
$$A^2=-B^2. \quad \cdots⑥$$

$$A^2=\begin{pmatrix} x & y \\ 2x-3y & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2x-3y & -x \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x^2+2xy-3y^2 & 0 \\ 0 & x^2+2xy-3y^2 \end{pmatrix},$$

$$B^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

より, ⑥が成り立つための条件は,

$$x^2+2xy-3y^2=-4.$$
$$(x+3y)(x-y)=-4. \quad \cdots⑦$$

x, y は整数であるから, $x+3y$, $x-y$ も整数であり,

$$(x+3y)-(x-y)=4y \text{ (偶数)}$$

より, $x+3y$ と $x-y$ は偶奇が一致する.

よって, ⑦のとき,

$$\begin{cases} x+3y=-2, \\ x-y=2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+3y=2, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

これを解くと,

$$(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

であるから, 求める行列 A は,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

【解説】　　**問題**

(1)

> 2次正方行列 X, Y, Z について,
> $$(X+Y)Z=XZ+YZ,$$
> $$X(Y+Z)=XY+XZ$$
> **行列の積の分配法則**

を用いて, $(A+B)^2$, $(A-B)^2$ をそれぞれ展開すると,

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2,$$
$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A(A-B)-B(A-B)$$
$$=A^2-AB-BA+B^2$$

となる.

これらと問題の条件 $(A+B)^2=(A-B)^2$ から,

$$AB=-BA \quad \cdots(*)$$

となり, 両辺の成分を計算して比較すれば,

$$z=2x-3y,\ w=-x$$

が得られ, A を x, y を用いて表すことができる.

$$A+B=\begin{pmatrix} x-1 & y+1 \\ z+3 & w+1 \end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix} x+1 & y-1 \\ z-3 & w-1 \end{pmatrix}$$

より, $(A+B)^2$, $(A-B)^2$ のそれぞれを直接成分計算しても同じ結果を得ることができるが, (*)を用いた方が計算量を軽減することができる.

(2)　$(A+B)^3$, $(A-B)^3$ を成分計算するのは計算量が多いから, ここでも(*)を用いる方がよい.

(*)を用いると,

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$
$$=A^2-BA+BA+B^2$$
$$=A^2+B^2,$$
$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$$
$$=A^2-AB+AB+B^2$$
$$=A^2+B^2$$

となる.

これらを用いて題意の等式 $(A+B)^3=(A-B)^3$ を整理すると,

$$B(A^2+B^2)=O \quad \cdots⑤$$

が得られる.

行列 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$XY=YX=E \text{（単位行列）}$$

となる行列 Y が存在するとき，Y を X の逆行列といい，X^{-1} で表す．

X^{-1} の存在条件は $\varDelta=ad-bc\neq0$ であり，そのとき，

$$X^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

逆行列の定義と存在条件

に注意すると，$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，

$$\varDelta=(-1)\cdot1-1\cdot3=-4\neq0$$

であるから，B^{-1} が存在することがわかる．

このB^{-1} を ⑤ の両辺に左からかけることにより，⑤ は，

$$A^2+B^2=O,$$

すなわち，

$$A^2=-B^2 \qquad \cdots⑥$$

となる．

このあと，A^2，B^2 の成分を計算して比較すると，⑥ が成り立つための x，y の条件が

$$x^2+2xy-3y^2=-4 \qquad \cdots(\#)$$

であることがわかる．

A^2，B^2 の成分は，【解答】のように直接計算してもよいし，次のケーリー・ハミルトンの定理を用いて求めてもよい．

行列 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$X^2-(a+d)X+(ad-bc)E=O$$

ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする

ケーリー・ハミルトンの定理

((2) の部分的別解)

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 2x-3y & -x \end{pmatrix}$ にケーリー・ハミルトンの定理を用いると，

$$A^2-(x-x)A+\{x(-x)-y(2x-3y)\}E=O.$$

$$\begin{aligned} A^2&=(x^2+2xy-3y^2)E \\ &=\begin{pmatrix} x^2+2xy-3y^2 & 0 \\ 0 & x^2+2xy-3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ にケーリー・ハミルトンの定理を用いると，

$$B^2-(-1+1)B+\{(-1)\cdot1-1\cdot3\}E=O.$$

$$B^2=4E=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

((2) の部分的別解終り)

$(\#)$ を満たす整数 x，y を求めるためには，$(\#)$ の左辺を因数分解して

$$(x+3y)(x-y)=-4 \qquad \cdots⑦$$

とするとよい．

x，y は整数であるから，$x+3y$，$x-y$ も整数であり，⑦ より，$x+3y$，$x-y$ は -4 の約数である．

-4 の約数は，

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm4$$

の6個であるから，

$$\begin{aligned}(x+3y,\ x-y)=&(-1,\ 4),\ (-2,\ 2),\ (-4,\ 1), \\ &(1,\ -4),\ (2,\ -2),\ (4,\ -1)\end{aligned}$$

のいずれかとなる．

それぞれの場合について，x，y を求めてもよいが，【解答】では，

$$(x+3y)-(x-y)=4y$$

において，右辺が偶数であることから，$x+3y$ と $x-y$ の偶奇が一致することに着目して，

$$(x+3y,\ x-y)=(-2,\ 2),\ (2,\ -2)$$

の2つの場合に絞り込んで x，y を求めた．

【理　　科】

物　　理

1　等加速度直線運動

【解答】

問1	(1) $\sqrt{\dfrac{2L}{a}}$	(2) $\sqrt{2aL}$	問2	$\mathrm{BT}=L\tan\theta$	問3	$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\tan\theta}$	
問4	$\cos\phi=\dfrac{3}{5}$	問5	$\dfrac{b'}{a'}=1$	問6	$\dfrac{1}{4}$	問7	$\dfrac{2}{5}L$

【配点】（33点）

問1　(1)　4点　　(2)　4点

問2　4点

問3　4点

問4　3点

問5　4点

問6　5点

問7　5点

【出題のねらい】

力学分野からの出題である。等加速度直線運動の扱い方が身についているか，運動方程式が立式できるかを確認した。

【解説】　問題

問1 (1)　小球が斜面AB上を運動するときの加速度の向きはA→Bである。小球が点Aから点Bまで進むのにかかる時間を t とすると，

$$L=\frac{1}{2}at^2$$

$$\therefore\quad t=\underline{\sqrt{\frac{2L}{a}}}$$

(2)　点Bを通過するときの小球の速さを v とすると，

$$v^2-0^2=2aL$$

$$\therefore\quad v=\underline{\sqrt{2aL}}$$

（別解）(1)の結果を用いて，

$$v=at=\underline{\sqrt{2aL}}$$

問2　次図より，点Tの床からの高さは $\mathrm{BT}\cos\theta$，点Aの高さは $L\sin\theta$ であることがわかる。これらが同じなので，

$$\mathrm{BT}\cos\theta=L\sin\theta$$

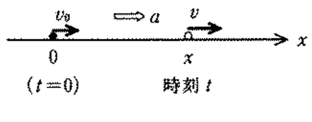
$$\therefore\quad \mathrm{BT}=\frac{L\sin\theta}{\cos\theta}=\underline{L\tan\theta}$$

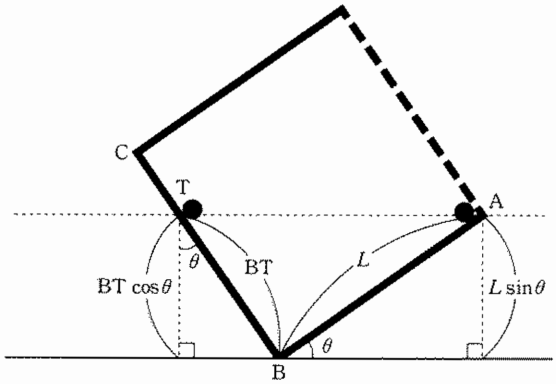
【ポイント】

等加速度直線運動の式

x 軸上を一定の加速度 a で物体が運動するとき，時刻 t における物体の位置を x，その速度を v（$t=0$ のとき，$x=0$，$v=v_0$）とすると，次の3式が成立する。

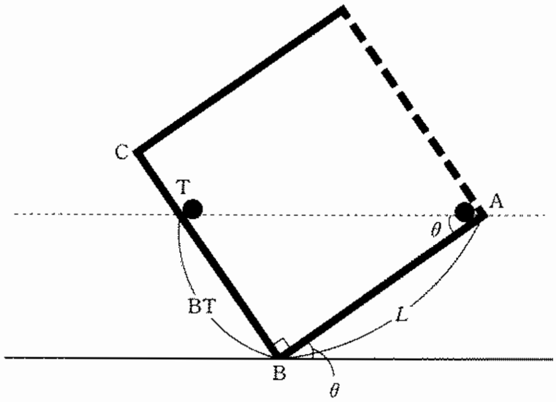
$$\begin{cases} v=v_0+at \\ x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2-v_0^2=2ax \end{cases}$$





（別解）　直角三角形 ABT に着目すると，$\angle \mathrm{TAB}=\theta$ なので，

$$\mathrm{BT}=\underline{L\tan\theta}$$



（参考）　点 T の床からの高さが，点 A の高さと同じになることは，力学的エネルギー保存の法則より容易にわかる。

問 3　小球が斜面 BC 上を運動するときの加速度の向きは C → B である。点 T で小球の速さが 0 になったので，

$$0^2-v^2=2(-b)\cdot\mathrm{BT}$$

上式に，**問 1** (2)，**問 2** の結果を代入して，

$$0^2-(\sqrt{2aL})^2=2(-b)L\tan\theta$$

$$\therefore\quad \underline{\frac{b}{a}=\frac{1}{\tan\theta}}$$

（別解）　小球が斜面 AB 上を運動するときの運動方程式は，A → B の向きを正とし，小球の質量を m，重力加速度の大きさを g として，

$$ma=mg\sin\theta$$

$$\therefore\quad a=g\sin\theta$$

小球が斜面 BC 上を運動するときの運動方程式は，B → C の向きを正として，

$$m(-b)=-mg\cos\theta$$

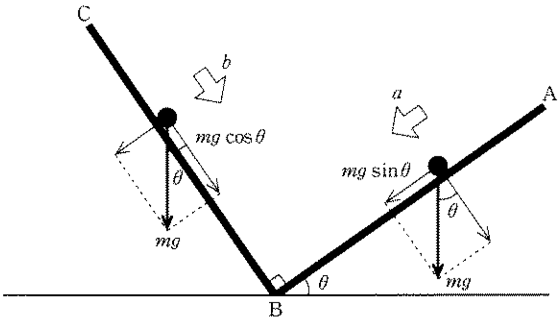
$$\therefore\quad b=g\cos\theta$$

運動方程式
物体の質量を m，加速度を a，物体にはたらく力を F として，
$ma=F$

物理

よって，

$$\frac{b}{a}=\frac{g\cos\theta}{g\sin\theta}=\underline{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\underline{\frac{1}{\tan\theta}}$$

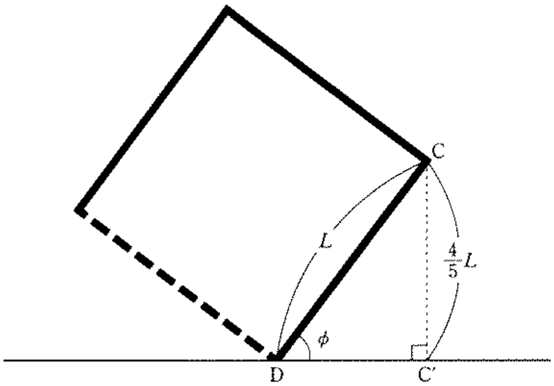


問 4　点 C から床に下した垂線と床との交点を C′ とし，直角三角形 CC′D に着目すると，

$$\sin\phi=\frac{\frac{4}{5}L}{L}=\frac{4}{5}$$

よって，

$$\cos\phi=\sqrt{1-\sin^2\phi}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\underline{\frac{3}{5}}$$



問 5　斜面 CD 上を下向きに運動するときに着目して，点 D を通過するときの小球の速さを v' とすると，

$$v'^2-0^2=2a'L$$

$$\therefore\quad a'=\frac{v'^2}{2L}$$

また，斜面 DA 上を上向きに運動するときに着目して，

$$0^2-v'^2=2(-b')L$$

$$\therefore\quad b'=\frac{v'^2}{2L}$$

よって，

$$\frac{b'}{a'}=\underline{1}$$

問 6　小球が斜面 CD 上を下向きに運動するときの運動方程式は，C → D の向きを正として，

$$ma' = mg\sin\phi$$

$$\therefore \quad a' = g\sin\phi = \frac{4}{5}g$$

小球が斜面 DA 上を上向きに運動するときの運動方程式は，D → A の向きを正とし，斜面 DA と小球との間の動摩擦係数を μ，小球に斜面 DA からはたらく垂直抗力の大きさを N として，

$$m(-b') = -mg\cos\phi - \mu N$$

斜面 DA に垂直な方向の力のつり合いより，$N = mg\sin\phi$ なので，

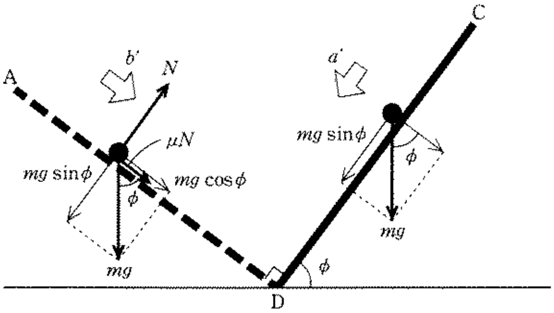
$$m(-b') = -mg\cos\phi - \mu mg\sin\phi$$

$$\therefore \quad b' = g(\cos\phi + \mu\sin\phi) = \frac{1}{5}g(3+4\mu)$$

よって，**問 5** の結果より，

$$\frac{\frac{1}{5}g(3+4\mu)}{\frac{4}{5}g} = 1$$

$$\therefore \quad \mu = \underline{\frac{1}{4}}$$



問 7　小球が斜面 DA 上を下向きに運動するときの運動方程式は，A → D の向きを正とし，加速度の大きさを b'' として，

$$mb'' = mg\cos\phi - \mu N$$

$N = mg\sin\phi$ なので，

$$mb'' = mg\cos\phi - \mu mg\sin\phi$$

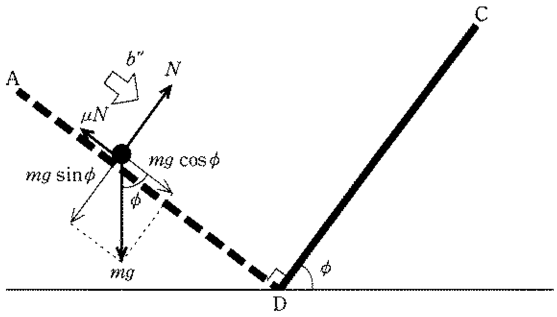
$$\therefore \quad b'' = g(\cos\phi - \mu\sin\phi) = g\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}g$$

よって，点 D を 2 回目に通過するときの小球の速さを v'' とすると，

$$v''^2 - 0^2 = 2b''L$$

$$\therefore \quad v'' = \sqrt{2b''L} = 2\sqrt{\frac{1}{5}gL}$$

動摩擦力
すべりが生じているときの摩擦力のことで，動摩擦力の大きさ f は，動摩擦係数を μ，垂直抗力の大きさを N とすると，
$f = \mu N$



斜面 CD 上を上向きに運動するときの加速度の大きさは，

$a'=\frac{4}{5}g$ に等しいので，

$$0^2-v''^2=2(-a')\cdot \mathrm{DT'}$$

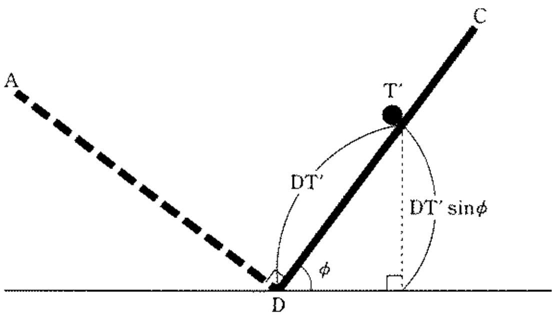
すなわち，

$$0^2-\left(2\sqrt{\frac{1}{5}gL}\right)^2=2\left(-\frac{4}{5}g\right)\cdot \mathrm{DT'}$$

$$\therefore\quad \mathrm{DT'}=\frac{1}{2}L$$

よって，点 T′ の床からの高さは，

$$\mathrm{DT'}\sin\phi=\frac{1}{2}L\cdot\frac{4}{5}=\underline{\frac{2}{5}L}$$



（別解） 点 C → 点 D → 点 A → 点 D → 点 T′ と運動する間に，動摩擦力が小球にした仕事は，

$$-\mu N\cdot 2L=-\mu mg\sin\phi\cdot 2L$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot mg\cdot\frac{4}{5}\cdot 2L$$

$$=-\frac{2}{5}mgL$$

よって，点 T′ の床からの高さを H とすると，力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$(0+mgH)-\left(0+mg\cdot\frac{4}{5}L\right)=-\frac{2}{5}mgL$$

$$\therefore\quad H=\underline{\frac{2}{5}L}$$

あるいは，摩擦熱が $\mu N \cdot 2L = \frac{2}{5} mgL$ だけ発生すると考え，エネルギー保存の法則より，

$$mg \cdot \frac{4}{5} L = mgH + \frac{2}{5} mgL$$

この式から，H を求めてもよい。

2 仕事と力学的エネルギー

問題

【解答】

問1	(1) kL	(2) $\frac{1}{2}kL^2$	問2	$L\sqrt{\frac{k}{m}}$	問3	$-2\mu mgL$		
問4	$\frac{1}{2}kL^2-2\mu mgL$		問5	$\mu=\frac{kL}{7mg}$				
問6	$a>\frac{3mg}{2k}$		問7	$\frac{1}{2}ka^2-mg(L+a)$				

問8

式・説明

ゴムひもの伸びが y のときの小球の運動エネルギーを K' とする。力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$\left\{K'+mg\cdot(a-y)\sin 30^\circ+\frac{1}{2}ky^2\right\}-\frac{1}{2}ka^2=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg\cdot(a-y)$$

$$\therefore\quad K'=-\frac{1}{2}k\left(y-\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{1}{2}k\left(a-\frac{mg}{k}\right)^2$$

よって，運動エネルギー K' は，ゴムひもの伸びが $y=\frac{mg}{k}$ のとき，最大値 $K'=\frac{1}{2}k\left(a-\frac{mg}{k}\right)^2$ をとることがわかる。

答 ゴムひもの伸び	運動エネルギーの最大値
$\frac{mg}{k}$	$\frac{1}{2}k\left(a-\frac{mg}{k}\right)^2$

【配点】 (34点)

問1 (1) 3点 (2) 3点
問2 3点
問3 3点
問4 3点
問5 4点
問6 4点
問7 4点
問8 7点

【出題のねらい】

力学分野からの出題である。ゴムひもに取りつけられた小球の運動を題材に，力学的エネルギー保存の法則および力学的エネルギーと仕事の関係の基本知識の確認と応用力をはかった。

【解説】

問1 (1) ゴムひもが自然の長さから L だけ伸びているとき，小球がゴムひもから受ける弾性力の大きさは，

$$\underline{kL}$$

(2) ゴムひもに蓄えられている弾性エネルギー(ゴムひもの弾性力による位置エネルギー)は，

$$\underline{\frac{1}{2}kL^2}$$

【ポイント】

フックの法則

ばねが自然長より長さ x だけ伸び縮みしているとき，その長さに比例した力(弾性力)が自然長に戻る向きにはたらく。この力の大きさ F は，

$F=kx$ (k：ばね定数)

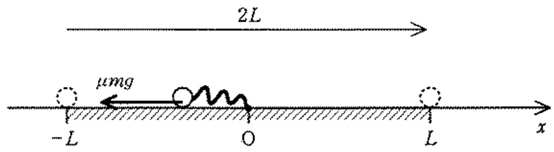
問 2　小球がはじめて $x=-L$ の位置を通過するときの，小球の速さを v とする。このとき，ゴムひもは自然の長さなので，力学的エネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore\quad v=\underline{L\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

問 3　小球が $-L\leqq x\leqq L$ の区間を通過する間に，動摩擦力が小球にした仕事は，動摩擦力の大きさが μmg で，力の向きと変位の向きが逆なので，

$$-\mu mg\cdot 2L=\underline{-2\mu mgL}$$



問 4　このときのゴムひもに蓄えられている弾性エネルギーを U とする。$x=-2L$ の位置からある位置で速さが 0 になるまでの運動について，力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$(0+U)-\left(0+\frac{1}{2}kL^2\right)=-2\mu mgL$$

$$\therefore\quad U=\underline{\frac{1}{2}kL^2-2\mu mgL}$$

（別解）　摩擦熱を考えたエネルギー保存の法則より，

$$\frac{1}{2}kL^2=U+\mu mg\cdot 2L$$

$$\therefore\quad U=\underline{\frac{1}{2}kL^2-2\mu mgL}$$

なお，以下の問においても，エネルギー保存の法則を用いて解くことができるが，省略する。

問 5　小球が再び $x=L$ の位置を通過してから，$x=-\frac{1}{2}L$ の位置で静止するまでの間に，動摩擦力が小球にした仕事は，

$$-\mu mg\cdot\frac{3}{2}L=-\frac{3}{2}\mu mgL$$

ある位置で速さが 0 になってから $x=-\frac{1}{2}L$ の位置で静止するまでの運動について，力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$(0+0)-(0+U)=-\frac{3}{2}\mu mgL$$

ここで，$x=-\frac{1}{2}L$ の位置で静止したとき，ゴムひもはたるんでいるので，弾性エネルギーは 0 である。**問 4** の結果を代入して，

弾性エネルギー

ばねの弾性力による位置エネルギーを弾性エネルギーといい，自然長からの変位が x のとき，弾性エネルギー U は，

$U=\frac{1}{2}kx^2$（k：ばね定数）

ゴムひもの伸びによる弾性力に対しても同様である。

力学的エネルギー保存の法則

保存力（重力とばねの弾性力）以外の力が仕事をしないとき，物体の力学的エネルギーは一定に保たれる。

（運動エネルギー）＋（位置エネルギー）＝一定

力学的エネルギー

物体のもつ運動エネルギーと位置エネルギーの和を力学的エネルギーという。

速さが v の物体の運動エネルギー K は，

$K=\frac{1}{2}mv^2$（m：質量）

基準面からの高さが h の物体の重力による位置エネルギー U は，

$U=mgh$

（m：質量，g：重力加速度の大きさ）

仕事

物体に大きさ F の力がはたらいて，物体が距離 s だけ変位した場合，その力がした仕事 W は，力と変位のなす角を θ として，

$W=Fs\cos\theta$

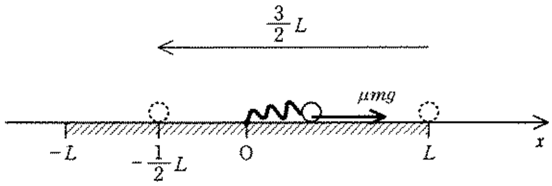
力学的エネルギーと仕事の関係

保存力でない力（非保存力）がはたらいているとき，

（力学的エネルギーの変化）＝（非保存力がする仕事）

$$0-\left(\frac{1}{2}kL^2-2\mu mgL\right)=-\frac{3}{2}\mu mgL$$

$$\therefore\quad \mu=\underline{\frac{kL}{7mg}}$$



（別解）　はじめに小球が $x=-2L$ の位置に静止していたときと，最後に $x=-\frac{1}{2}L$ の位置で静止したときとを比較して，力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$(0+0)-\left(0+\frac{1}{2}kL^2\right)=-2\mu mgL-\frac{3}{2}\mu mgL$$

$$\therefore\quad \mu=\underline{\frac{kL}{7mg}}$$

問 6　はじめ，ゴムひもを自然の長さから a だけ伸ばし，小球を静かに放したとき，小球は静止していたとする。小球にはたらく静止摩擦力を F（斜面下向きを正とする），垂直抗力の大きさを N とすると，斜面に平行な方向の力のつり合いより，

$$ka=mg\sin 30^\circ+F$$

$$\therefore\quad F=ka-\frac{1}{2}mg$$

斜面に垂直な方向の力のつり合いより，

$$N=mg\cos 30^\circ$$

$$\therefore\quad N=\frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

斜面と小球との間の静止摩擦係数は $\mu_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$ なので，最大摩擦力は $F_{max}=\mu_0 N=\frac{2}{\sqrt{3}}N$ である。小球が斜面上を上向きに動き始める条件は，$F>F_{max}$ より，

$$F>\frac{2}{\sqrt{3}}N$$

すなわち，

$$ka-\frac{1}{2}mg>\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$\therefore\quad \underline{a>\frac{3mg}{2k}}$$

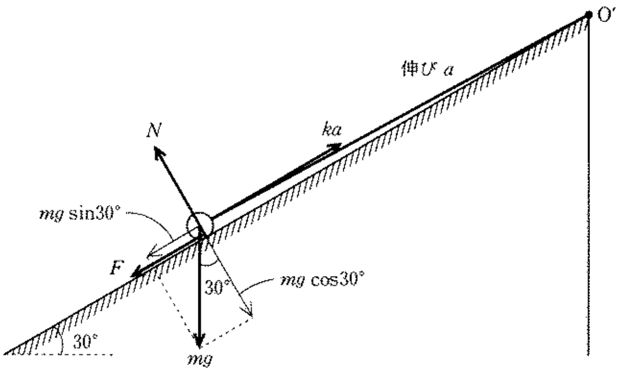
静止摩擦力と最大摩擦力

すべり出す直前（ぎりぎり静止しているとき）の摩擦力の大きさのことを最大摩擦力といい，最大摩擦力 F_{max} は，静止摩擦係数を μ_0，垂直抗力の大きさを N とすると，

$F_{max}=\mu_0 N$

すべりが生じない条件は，静止摩擦力の大きさを F とすると，

$F\leqq F_{max}$



問 7　斜面と小球との間の動摩擦係数は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので，小球にはたらく動摩擦力の大きさ f は，

$$f=\frac{1}{\sqrt{3}}N=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg=\frac{1}{2}mg$$

点 O′ から飛び出すときの小球の運動エネルギーを K とすると，力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$\{K+mg\cdot(L+a)\sin30°\}-\frac{1}{2}ka^2=-f(L+a)$$

$$\therefore\quad \underline{K=\frac{1}{2}ka^2-mg(L+a)}$$

問 8　小球の運動エネルギーが最大になる（すなわち，速さが最大になる）のは，ゴムひもが伸びているときである（ゴムひもがたるんでいるときは，小球は必ず減速するので，運動エネルギーが最大になることはない）。ゴムひもの伸びが y のときの小球の運動エネルギーを K' とする。力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$\left\{K'+mg\cdot(a-y)\sin30°+\frac{1}{2}ky^2\right\}-\frac{1}{2}ka^2=-f(a-y)$$

$$\therefore\quad K'=-\frac{1}{2}ky^2+mgy+\frac{1}{2}ka^2-mga$$

$$=-\frac{1}{2}k\left(y-\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{1}{2}ka^2-mga+\frac{m^2g^2}{2k}$$

よって，運動エネルギー K' は，ゴムひもの伸びが $y=\underline{\dfrac{mg}{k}}$ のとき，最大値 $K'=\underline{\dfrac{1}{2}ka^2-mga+\dfrac{m^2g^2}{2k}}=\underline{\dfrac{1}{2}k\left(a-\dfrac{mg}{k}\right)^2}$ をとることがわかる。

（別解）　運動エネルギーが最大になる，すなわち，速さが最大になるとき，小球にはたらく力の合力は 0 になる。このときのゴムひもの伸びを y_0 とすると，

$$ky_0=mg\sin30°+f$$

すなわち，

$$ky_0=\frac{1}{2}mg+\frac{1}{2}mg$$

$$\therefore\quad \underline{y_0=\frac{mg}{k}}$$

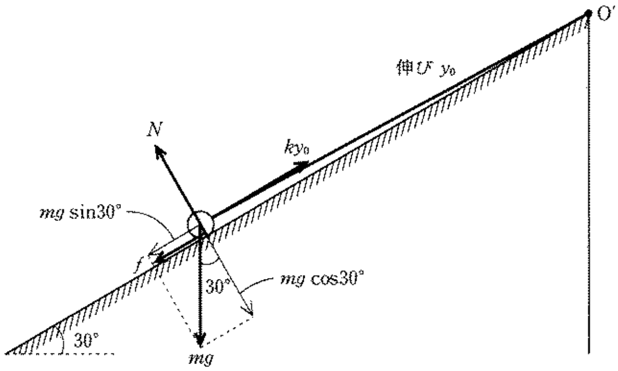
このときの運動エネルギーを K_0' とすると，力学的エネルギーと仕事の関係より，

$$\left\{K_0'+mg\cdot(a-y_0)\sin 30^\circ+\frac{1}{2}ky_0^2\right\}-\frac{1}{2}ka^2=-f(a-y_0)$$

すなわち，

$$\left\{K_0'+mg\cdot\frac{1}{2}\left(a-\frac{mg}{k}\right)+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}ka^2$$
$$=-\frac{1}{2}mg\cdot\left(a-\frac{mg}{k}\right)$$

$$\therefore\quad K_0'=\underline{\frac{1}{2}ka^2-mga+\frac{m^2g^2}{2k}}=\underline{\frac{1}{2}k\left(a-\frac{mg}{k}\right)^2}$$



3 波の性質

問題

【解答】

問1	波長 $2l$	速さ $2fl$	問2	波長 l	速さ fl
問3	(ア) 回折	(イ) 干渉	(ウ) $m\lambda$		
問4	点B b	原点O a	問5 6本	問6	$x=\dfrac{11}{20}l$

【配点】 (33点)

問1　波長　3点　　速さ　2点

問2　波長　3点　　速さ　2点

問3　(ア)　3点　　(イ)　3点　　(ウ)　3点

問4　点B　2点　　原点O　2点

問5　5点

問6　5点

【出題のねらい】

波動分野からの出題である。波の基本知識の確認と，回折および干渉の基本知識の確認と応用力をはかった。

【解説】

問1　与えられた図1より，領域Ⅰでの波の波長 λ_1 は，

$$\lambda_1=\underline{2l}$$

また，領域Ⅰを伝わる波の速さ v_1 は，波の基本式より，

$$v_1=f\lambda_1=\underline{2fl}$$

問2　与えられた図1の x 軸上に着目して，領域Ⅱでの波の波長 λ_2 は，

$$\lambda_2=\underline{l}$$

また，領域Ⅱを伝わる波の速さ v_2 は，領域Ⅱでの波の振動数が領域Ⅰでの波の振動数 f に等しいことに注意して，波の基本式より，

$$v_2=f\lambda_2=\underline{fl}$$

問3 (ア)　スリット S_B, S_C を通った波は回折して領域Ⅱに半円形の波紋を描きながら広がる。そのため，仕切り板の背後にも波が到達する。

(イ)　これら2つの波が干渉して，領域Ⅱでは，波が強め合う場所と弱め合う場所が現れる。

(ウ)　スリット S_B と S_C は同位相の波源と考えられるので，領域Ⅱのある点Pで波が強め合う条件は，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{CP}=\underline{m\lambda}$$

ここで，$\lambda=\lambda_2=l$ である。

問4　点B：三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(\mathrm{AO})^2+(\mathrm{OB})^2}=\sqrt{(4l)^2+(3l)^2}=5l$$

【ポイント】

波の基本式

波の速さを v，波長を λ，振動数を f とすると，

$v=f\lambda$

回折

スリットの幅が，波の波長に比べて狭い場合に顕著におこる現象で，波は直進するのみではなく，回り込むことにより，あらゆる方向に進行する。

干渉

2つ以上の波が，重なり合うことにより，強め合ったり，弱め合ったりする現象。

$AB=\frac{5}{2}\cdot 2l=\frac{5}{2}\lambda_1$ なので，点 A にある波源と点 B での波は逆位相であることがわかる。よって，スリット S_B へ入射する波の変位と時刻 t の関係を表すグラフは b である。

原点 O：$AO=4l=2\cdot 2l=2\lambda_1$ なので，点 A にある波源と原点 O での波は同位相であることがわかる。よって，スリット S_O へ入射する波の変位と時刻 t の関係を表すグラフは a である。

（参考） 与えられた図 1 より，点 A が山のとき，点 B は谷，点 O は山になっているので，上の結果は容易に見抜くことができる。

問 5　**問 4** の結果より，スリット S_B と S_O は逆位相の波源と考えられる。領域IIのある点 P′ で，スリット S_B を通った波とスリット S_O を通った波が強め合う条件は，整数 m を用いて，

$$BP'-OP'=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

すなわち，

$$BP'-OP'=\left(m+\frac{1}{2}\right)l$$

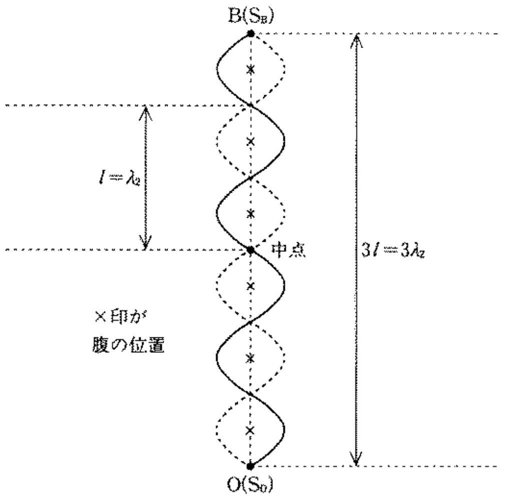
点 B と原点 O の距離は $3l$ であり，領域IIにある任意の点 P′ について，$-3l<BP'-OP'<3l$ なので，

$$-3l<\left(m+\frac{1}{2}\right)l<3l$$

$$\therefore\quad -\frac{7}{2}<m<\frac{5}{2}$$

m は整数なので，領域IIには，強め合う場所を連ねた線は，$m=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ に対応する 6 本あることがわかる。

（別解） 仕切り板に接した，領域IIの BO 間には，中点を節とする下図のような定常波がつくられる。強め合う場所は，定常波の腹に対応するので，6ヶ所あることがわかる。これは強め合う場所を連ねた線の断面なので，6 本あることがわかる。



波の干渉条件

2 つの波源が同位相のとき，

$$(経路差)=\begin{cases} m\lambda \cdots 強め合う \\ \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \cdots 弱め合う \end{cases}$$

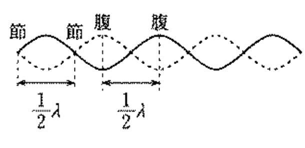
2 つの波源が逆位相のとき，

$$(経路差)=\begin{cases} \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \cdots 強め合う \\ m\lambda \cdots 弱め合う \end{cases}$$

ここで，m は整数，λ は波長である。

定常波

逆向きに進む同じ波形の波（波長 λ）が重なり合うと，定常波を生じる。変位が常に 0 の点を節，最も大きく振動する点を腹という。節と節，腹と腹の間隔はそれぞれ $\frac{1}{2}\lambda$ である。



問 6　領域IIの x 軸上のある点 $\mathrm{P''}$ を考えると，その x 座標を x として，

$$\mathrm{BP''}=\sqrt{x^2+(3l)^2}$$
$$\mathrm{OP''}=x$$

よって，強め合う条件は，整数 m を用いて，

$$\mathrm{BP''}-\mathrm{OP''}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

すなわち，

$$\sqrt{x^2+(3l)^2}-x=\left(m+\frac{1}{2}\right)l$$

ここで，x 軸上に存在するのは，$m=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ のうち，$m=0,\ 1,\ 2$ のときである。そのうち原点Oに最も近い場所は $m=2$ のときなので，

$$\sqrt{x^2+(3l)^2}-x=\frac{5}{2}l$$

$$\therefore\quad x=\underline{\frac{11}{20}l}$$

ちなみに，$m=0$ のときの x 座標は，

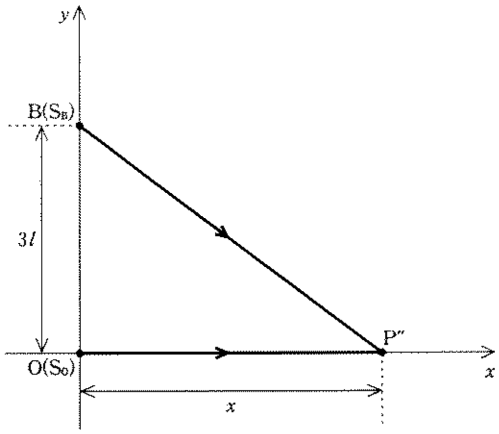
$$\sqrt{x^2+(3l)^2}-x=\frac{1}{2}l$$

$$\therefore\quad x=\frac{35}{4}l$$

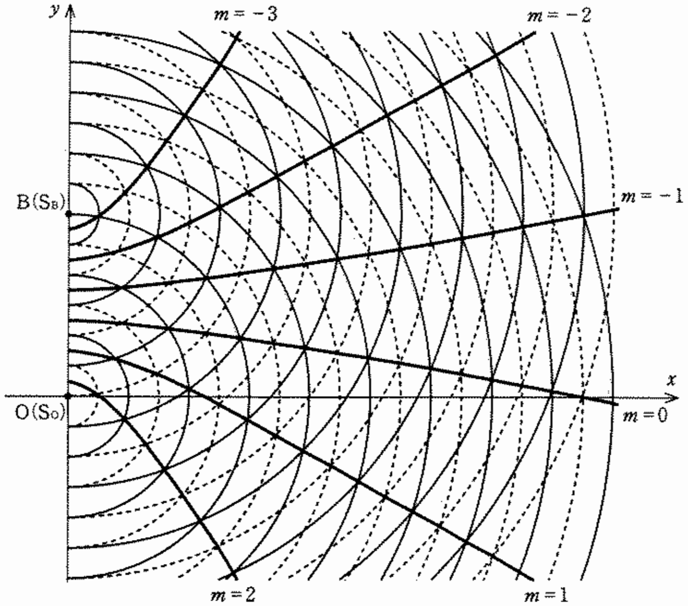
$m=1$ のときの x 座標は，

$$\sqrt{x^2+(3l)^2}-x=\frac{3}{2}l$$

$$\therefore\quad x=\frac{9}{4}l$$



（参考）**問 5**，**問 6** の状況を図示すると，次図のようになる。太い実線が強め合う場所を連ねた線である。



y
m = −3
m = −2
m = −1
B(S_B)
O(S_O)
x
m = 0
m = 2
m = 1

化　学

1　元素の周期表

【解答】

問1	あ	陽子	い	同位体	う	電子親和力
問2	(イ)	問3	(イ)			
問4	(1)	Li, Na, K	(2)	アルミニウム	(3)	K(2)L(8)M(18)N(8)
問5	(オ)	問6	$2F_2 + 2H_2O \longrightarrow 4HF + O_2$			
問7	(1)	$2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow CaCl_2 + 2H_2O + 2NH_3$				
	(2)	発生装置	(ア)	捕集装置	(カ)	

【配点】（25点）

問1　各2点×3　　**問2**　2点　　**問3**　2点　　**問4**　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点

問5　2点　　**問6**　3点　　**問7**　(1)　2点　(2)　各1点×2

【出題のねらい】

原子の構造，同位体，同素体，元素の周期律と周期表などに関する基本的な知識を確認する問題である。

【解説】　問題

問1　原子核中には陽子と中性子が存在し，陽子の数と中性子の数の和を質量数という。多くの元素では，原子番号は等しいが質量数の異なる原子が存在し，これらを互いに同位体という。

気体状態の原子が1個の電子を受け取って，1価の陰イオンになるときに放出するエネルギーを電子親和力という。この値が大きい原子は1価の陰イオンになりやすく，同一周期でこの値が最も大きいのは17族元素である。

問2　原子番号を Z，質量数を A として元素Xを ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ と表すと，原子番号は陽子の数に等しく，質量数は陽子の数と中性子の数の和だから，中性子の数は $A-Z$ で表される。

${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ の中性子の数は $56-26=30$ であり，(ア)～(オ)の各原子の中性子の数は次の通りである。

(ア)　$53-24=29$　(イ)　$55-25=30$　(ウ)　$57-26=31$

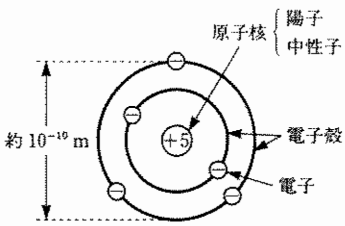
(エ)　$59-27=32$　(オ)　$60-28=32$

したがって，${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ と中性子の数が等しいのは(イ)である。

問3 (ア)　正しい。炭素原子の価電子は4個であり，ダイヤモンドは，4個の価電子すべてが炭素原子間の共有結合に使われているため，電気伝導性がない。一方，黒鉛は，3個の価電子が平面を

【ポイント】

原子の構造



例：${}_{5}\mathrm{B}$

同位体

原子番号が等しく，質量数が異なる原子どうし。つまり，陽子の数が等しく，中性子の数が異なる原子どうし。

電子親和力

気体状態の原子が電子を1個受け取って1価の陰イオンになるときに放出するエネルギー。

つくる共有結合に使われ，残りの1個の価電子はその平面内を移動することができるため，電気伝導性がある。

(イ) 誤り。斜方硫黄と単斜硫黄は環状のS_8分子からなり，ゴム状硫黄は多数の原子が共有結合した鎖状の高分子からなる。

(ウ) 正しい。黄リンはP_4分子からなり，空気中の酸素と容易に反応して自然発火するため水中に保存する。赤リンは多数の原子が共有結合した高分子からなり，空気中で自然発火しない。

(エ) 正しい。酸素O_2は無色の気体であり，オゾンO_3は淡青色の気体である。

問4 (1) 水素を除く1族の元素をアルカリ金属元素という。表1では，リチウムLi，ナトリウムNa，カリウムKの3元素が該当する。

(2) 第3周期，13族の元素**ロ**はアルミニウムAlである。

(3) 第4周期，17族の元素**ハ**は臭素Brであり，その電子配置はK(2)L(8)M(18)N(7)である。Br原子が1個の電子を取り入れて臭化物イオンBr^-になると，希ガスのKrと同じ安定な電子配置になり，その電子配置はK(2)L(8)M(18)N(8)である。

問5 原子の最外電子殻に入っている1～7個の電子を価電子という。18族の希ガスは電子配置が安定であり，価電子の数は0とする。希ガス以外の元素では，典型元素の価電子の数は，周期表の族番号の1位の数に一致する。したがって，原子番号と価電子の数の関係を表すグラフは(オ)である。

(ア)は原子番号とイオン化エネルギーの関係を表すグラフである。イオン化エネルギーはアルカリ金属が小さく，希ガスが大きい。イオン化エネルギーを同一周期で比較すると，周期表の右へいくほど大きくなる傾向がある。

(イ)は原子番号と電気陰性度の関係を表すグラフである。電気陰性度が大きいほど陰性が強く，小さいほど陽性が強い。電気陰性度はアルカリ金属が小さく，ハロゲンが大きい。また，結合をつくらない希ガスの電気陰性度は定義されない。電気陰性度を同一周期で比較すると，周期表の右へいくほど大きくなる。電気陰性度については化学IIで詳しく学習する。

(ウ)は原子番号と原子半径(希ガスは除く)の関係を表すグラフである。原子半径を同一周期で比較すると，周期表の右へいくほど小さくなる傾向がある。

(エ)は原子番号と最外殻電子の数の関係を表すグラフである。最外殻電子の数は，典型元素の場合，Heを除いて族番号の1位の数に一致する。なお，Heの最外殻電子の数は2である。

問6 F_2は酸化力がきわめて強く，水と激しく反応してO_2を発生する。

$$2F_2 + 2H_2O \longrightarrow 4HF + O_2$$

原子番号，質量数

元素記号をXとすると，

$$\begin{array}{l}\text{質量数} \\ \text{原子番号}\end{array} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$$

質量数＝陽子の数＋中性子の数

原子番号＝陽子の数＝電子の数

同素体

同じ元素からなる単体で，構造や性質が異なるもの。

S (単斜硫黄，斜方硫黄，ゴム状硫黄)

C (黒鉛，ダイヤモンド，フラーレン)

O (酸素O_2，オゾンO_3)

P (黄リン，赤リン)

電子殻

原子核に近いものから順にK，L，M，N殻…といい，n番目の電子殻に収容可能な電子の数は$2n^2$である。

電子殻	K	L	M	N	…	…
n	1	2	3	4	…	n
収容可能な電子数	2	8	18	32	…	$2n^2$

電子配置の規則

① 原子番号の増加にともない，K殻から順に電子が収容される。

② 最外殻電子の数は8(K殻では2)を超えない。

価電子

化学結合に関与する電子

(第1)イオン化エネルギー

気体状態の原子から電子1個を取り去り，1個の陽イオンにする際に必要な最小のエネルギー。一般に，周期表の右上に位置する元素ほど大きく，左下に位置する元素ほど小さい。

電気陰性度

原子が結合するとき，それぞれの原子が結合に使われる電子を引きつける強さを相対的に示す尺度。結合をつくらない希ガスについては定義されない。

問 7 (1)　元素**イ**は窒素であり，その水素化合物は塩基性の気体であることから，アンモニア NH_3 と考えられる。弱塩基である NH_3 は，アンモニウム塩と強塩基を混合して加熱することによって得られる。【試薬群】のうち，アンモニウム塩は NH_4Cl，強塩基は $Ca(OH)_2$ だから，これらの混合物を加熱して発生させる。

$$2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow CaCl_2 + 2H_2O + 2NH_3$$

(2)　NH_4Cl と $Ca(OH)_2$ は固体であり，これらの混合物を加熱して NH_3 を発生させる際には，発生装置(ア)を用いる。

NH_3 は水に非常によく溶け，その密度は空気の密度より小さいので，上方置換(カ)により捕集する。

弱酸・弱塩基の遊離

弱酸の塩 ＋ 強酸

$\longrightarrow$ 強酸の塩 ＋ 弱酸

弱塩基の塩 ＋ 強塩基

$\longrightarrow$ 強塩基の塩 ＋ 弱塩基

気体の捕集法

水に溶けにくい気体 (H_2，O_2 など)

…水上置換

水に溶け，空気より重い気体

(HCl, NO_2, SO_2, H_2S など)…下方置換

水に溶け，空気より軽い気体 (NH_3)

…上方置換

2 酸・塩基

【解答】

I	問1	(エ)								
	問2	(1)	1.0	(2)	2×10^{-2}					
		(3)	記号 イ	理由	激しく気泡が発生する					
	問3	(1)	$x=2y$	(2)	5×10^{-2} mol/L	問4	(1)	中性	(2)	塩基性
II	問5	$2NaHCO_3 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2$								
	問6	メスフラスコ		問7	(エ)	問8	(1)	6.25×10^{-2} mol	(2)	83.3 %

【配点】 (30点)

I　**問1**　2点　　**問2**　(1)　2点　　(2)　2点　　(3)　記号：1点　理由：3点

　問3　(1)　2点　　(2)　2点　　**問4**　(1)　2点　　(2)　2点

II　**問5**　3点　　**問6**　2点　　**問7**　2点　　**問8**　(1)　2点　　(2)　3点

【出題のねらい】

I　酸・塩基，塩に関する基本的な知識と計算を確認する問題である。

II　炭酸ナトリウムの二段滴定に関する実験操作と思考力を問う問題である。

【解説】

問題

I

問1　1923年，デンマークの化学者ブレンステッドは酸と塩基を次のように定義した。「酸とは水素イオンを相手に与える物質のことをいい，塩基とは水素イオンを受け取る物質のことをいう」。

問2 (1)　HCl は1価の強酸であり，水溶液 A (0.10 mol/L 塩酸) では HCl は完全に電離していると考えてよいので，
$[H^+] = 1.0\times10^{-1}$ (mol/L) となり，pH = 1.0 である。

(2)　酢酸 CH_3COOH は1価の弱酸であり，酢酸水溶液の濃度を c [mol/L]，酢酸の電離度を α とすると，$[H^+]$ は次のように表される。

$$[H^+] = c\alpha$$

水溶液 B の pH は 2.7 だから，

$$[H^+] = 1\times10^{-2.7} = 2\times10^{-3}\ (\text{mol/L})$$

したがって，水溶液 B (0.10 mol/L 酢酸水溶液) の酢酸の電離度 α は，

$$2\times10^{-3} = 0.10\times\alpha \qquad \therefore\ \alpha = 2\times10^{-2}$$

(3)　**ア**　HCl と NaOH，CH_3COOH と NaOH の中和反応はそれぞれ次式で表される。

$$HCl + NaOH \longrightarrow NaCl + H_2O$$

$$CH_3COOH + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + H_2O$$

【ポイント】

酸・塩基の定義

アレーニウスの定義

酸：水に溶けて水素イオン H^+ を生じる物質

塩基：水に溶けて水酸化物イオン OH^- を生じる物質

ブレンステッドの定義

酸：水素イオン H^+ を与える物質

塩基：水素イオン H^+ を受け取る物質

$[H^+]$ と pH

$[H^+] = 10^{-n}$ (mol/L) のとき pH = n

c mol/L の酸の水溶液の $[H^+]$

n 価の強酸の水溶液では，強酸が完全に電離していると考えて，

$[H^+] = c\times n$

1価の弱酸の水溶液では，弱酸の電離度を α とすると，

$[H^+] = c\times\alpha$

HCl は強酸，CH_3COOH は弱酸であるが，同じ物質量の HCl と CH_3COOH の中和に要する NaOH の物質量は同じである。

同体積の水溶液 A と B には同じ物質量の HCl と CH_3COOH が含まれており，これを中和するのに要する NaOH の物質量は等しい。したがって，水溶液 A と B を識別できない。

イ　酸の水溶液に Zn を加えると，次式によって H_2 が発生する。

$$Zn + 2H^+ \longrightarrow Zn^{2+} + H_2$$

水溶液 A は pH 1.0，水溶液 B は pH 2.7 だから，$[H^+]$ は水溶液 A の方が大きい。したがって，水溶液 A と B のそれぞれに Zn を加えると，水溶液 A の方が B より激しく H_2 の気泡が発生する。

問 3 (1)　水溶液 C と D の pH がいずれも 13.0 であることから，C と D の $[OH^-]$ は等しい。NaOH は 1 価の強塩基，$Ba(OH)_2$ は 2 価の強塩基だから，

$$[OH^-] = 1 \times x = 2 \times y \qquad \therefore \quad x = 2y$$

(2)　$pH = 13.0$ より，$[H^+] = 1 \times 10^{-13}$ (mol/L) であり，$[H^+]$ と $[OH^-]$ の積は 1.0×10^{-14} $(mol/L)^2$ で一定だから，

$$1 \times 10^{-13} \times [OH^-] = 1.0 \times 10^{-14}$$

$$\therefore \quad [OH^-] = 1 \times 10^{-1} \text{ (mol/L)}$$

(1) より，$[OH^-] = 2y$ だから，

$$2y = 1 \times 10^{-1} \qquad \therefore \quad y = 5 \times 10^{-2} \text{ (mol/L)}$$

問 4 (1)　HCl と $Ba(OH)_2$ の中和反応は次式で表される。

$$2HCl + Ba(OH)_2 \longrightarrow BaCl_2 + 2H_2O$$

水溶液 A と D を 1 L ずつ混合したとすると，混合した HCl は 0.10 mol，$Ba(OH)_2$ は 0.050 mol であり，これらは過不足なく反応して，反応後は $BaCl_2$ の水溶液となる。$BaCl_2$ は強酸と強塩基の中和で生じた正塩であり，その水溶液は中性を示す。

(2)　CH_3COOH と NaOH の中和反応は次式で表される。

$$CH_3COOH + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + H_2O$$

水溶液 B と C を 1 L ずつ混合したとすると，混合した CH_3COOH は 0.10 mol，NaOH は 0.10 mol であり，これらは過不足なく反応して，反応後は CH_3COONa の水溶液となる。CH_3COONa は弱酸と強塩基の中和で生じた塩であり，その水溶液は塩基性を示す。

正塩の水溶液の性質

弱酸と強塩基の中和で生じた塩…塩基性

強酸と弱塩基の中和で生じた塩…酸性

強酸と強塩基の中和で生じた塩…中性

II

問 5　$NaHCO_3$ を加熱すると，次式のように分解して Na_2CO_3 が生じる。

$$2NaHCO_3 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2$$

問 6　正確な体積の溶液を調製するときには，メスフラスコを用いる。

問 7　ホールピペットは，はかりとる水溶液で数回すすいだのち，

滴定で用いる実験器具

ホールピペット…決まった体積の液体を正確に分け取るときに用いる。

ビュレット…滴下した液体の体積を正確にはかるときに用いる。

メスフラスコ…正確な体積の溶液をつくるときに用いる。

中がその水溶液で濡れたまま用いる(これを共洗いという)。また，正確な体積をはかる実験器具は，加熱乾燥してはいけない。

問8 (1) 下線部②の混合物中のNa_2CO_3をa〔mol〕，$NaHCO_3$をb〔mol〕とする。フェノールフタレインが変色するまでに式(i)の反応が完了するので，

$$a\times\frac{20.0}{1000}=0.100\times\frac{12.5}{1000}$$

$$\therefore\quad a=6.25\times10^{-2}\,(\text{mol})$$

(2) 式(i)の反応後，メチルオレンジが変色するまでに式(ii)の反応が完了する。このとき，式(i)によってNa_2CO_3から生じた$NaHCO_3$と，はじめの混合物に含まれていた$NaHCO_3$の両方がHClと反応するので，

$$(a+b)\times\frac{20.0}{1000}=0.100\times\frac{17.5}{1000}$$

$$\therefore\quad b=2.50\times10^{-2}\,(\text{mol})$$

試験管に入れた$NaHCO_3$の分解による物質量の変化は次のように整理できる。

	$2NaHCO_3$ ⟶	Na_2CO_3 +	H_2O +	CO_2
はじめ	$2a+b$	0	0	0
変化量	$-2a$	$+a$	$+a$	$+a$
反応後	b	a	a	a

(単位：mol)

はじめの$NaHCO_3$ $2a+b$〔mol〕のうち，分解した$NaHCO_3$は$2a$〔mol〕だから，分解した割合は，

$$\frac{2a}{2a+b}\times100=\frac{2\times6.25\times10^{-2}}{2\times6.25\times10^{-2}+2.50\times10^{-2}}\times100$$

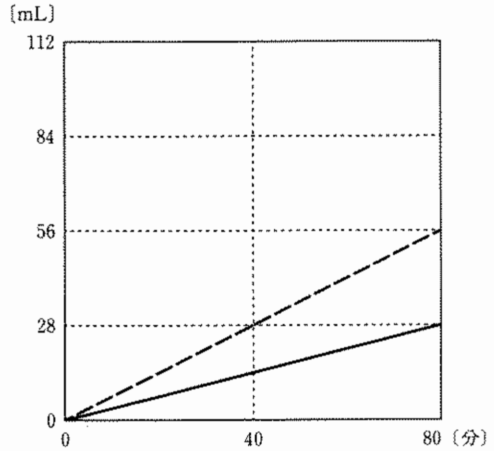
$$=83.33\fallingdotseq83.3\,(\%)$$

共洗いをする必要がある実験器具

ホールピペット，ビュレット

3 電気分解

【解答】

I	問1	(ウ)	問2	$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$	
	問3	(1)	0.10 A		
		(2)			
II	問4	(1)	$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$	(2)	0.075 mol/L
	問5	(1)	Cl_2	(2)	(イ)
	問6	0.035 mol	問7	4.2	
	問8	0.20 mol/L			

【配点】 (25点)

I　問1　2点　　問2　2点　　問3　(1)　2点　　(2)　3点

II　問4　(1)　2点　　(2)　2点　　問5　(1)　2点　　(2)　2点　　問6　2点

　　問7　3点　　問8　3点

【出題のねらい】

電気分解の反応と量的関係に関する知識および思考力を問う問題である。

【解説】

問題

I

問1，2　Na_2SO_4 水溶液を Pt 電極を用いて電気分解するとき，陰極では，イオン化傾向の大きい Na のイオンである Na^+ よりも H_2O の方が還元されやすいので，式①のように H_2 が発生する。陽極では，電極の Pt や水溶液中の SO_4^{2-} よりも H_2O の方が酸化されやすいので，式②のように O_2 が発生する。①×2＋②より，全体として式③のように H_2O の分解が起こる。

陰極：$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$　……①

陽極：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$　……②

全体：$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$　……③

【ポイント】

水溶液の電気分解の電極反応

陽極：

① 電極が Pt または C 以外のとき

⇒電極の金属が溶け出す。

例：$Cu \longrightarrow Cu^{2+} + 2e^-$

② 電極が Pt または C のとき

(i)　水溶液中に Cl^-，Br^-，I^- があるとき⇒Cl_2，Br_2，I_2 が生成する。

例：$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

(ii)　水溶液中に Cl^-，Br^-，I^- がないとき⇒O_2 が発生する。

問 3 (1)　式①より，流れた電子の物質量は，

$$\frac{56\times10^{-3}}{22.4}\times2=5.0\times10^{-3}\,(\mathrm{mol})$$

　したがって，流した電流を x〔A〕とすると，

$$\frac{x\times80\times60}{9.65\times10^{4}}=5.0\times10^{-3}\qquad\therefore\ \ x=0.100\fallingdotseq0.10\,(\mathrm{A})$$

(2)　式③より，陰極で H_2 が標準状態で 56 mL 発生したときに陽極で発生した O_2 は標準状態で 28 mL である。また，電流が一定だから，0 分から 80 分までに発生する O_2 の体積は，発生した H_2 の体積と同様に，時間に比例して変化する。したがって，時間と発生した O_2 の標準状態における体積の関係を表すグラフは，**【解答】**に示した実線(直線)になる。

II

問 4 (1)　A槽では次の電極反応が起こる。

陰極：$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$　……④

陽極：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$　……⑤

(2)　Cu が 0.80 g 析出したことから，電気分解後の Cu^{2+} の濃度は，

$$\frac{0.10\times0.50-\dfrac{0.80}{64}}{0.50}=0.075\,(\mathrm{mol/L})$$

問 5 (1), (2)　B槽では次の電極反応が起こる。

陰極：$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$　……⑥

陽極：$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$　……⑦

⑥+⑦より，全体として次の反応が起こる。

全体：$2NaCl + 2H_2O \longrightarrow Cl_2 + H_2 + 2NaOH$

　このとき，電解液中の Cl^- と OH^- は陽極へ，Na^+ は陰極へ向かって移動しようとするが，陽イオンだけが通過できる膜(陽イオン交換膜)を用いて電解液を仕切っているので，Na^+ だけが陽極側から陰極側へ移動する。よって，陽極側では，反応により減少した Cl^- と等しい物質量の Na^+ が陰極側へ移動して減少し，陰極側では，反応により増加した OH^- と等しい物質量の Na^+ が陽極側から移動して増加する。

　なお，電解液に陽イオン交換膜のような仕切りがないと，生じた Cl_2 と NaOH の一部が次のように反応してしまう。

$2NaOH + Cl_2 \longrightarrow NaCl + NaClO + H_2O$

問 6　Cu が 0.80 g 析出したことから，式④より，A槽を流れた電子の物質量は，

$$\frac{0.80}{64}\times2=0.025\,(\mathrm{mol})$$

　したがって，C槽を流れた電子の物質量は，

$0.060-0.025=0.035\,(\mathrm{mol})$

問 7　A槽では，式④，⑤より，電子が 1 mol 流れると，陽極で

$4OH^- \longrightarrow O_2 + 2H_2O + 4e^-$

$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$

陰極：

(i)　水溶液中に重金属イオン(Cu^{2+}, Ag^+ など)があるとき

⇒重金属の単体が析出する。

例：$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

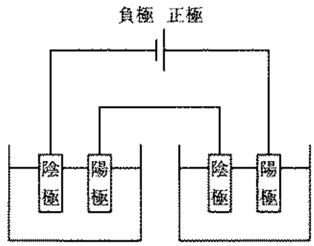
(ii)　水溶液中に重金属イオンがないとき⇒H_2 が発生する。

$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$

$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$

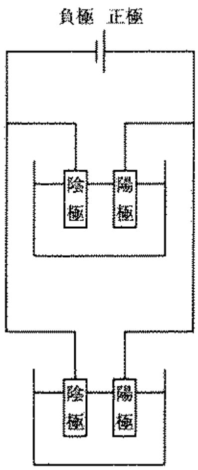
直列回路と並列回路の電気分解

直列回路



各極板に流れる電流および電子の物質量は等しい。

並列回路



電源から流れ出る電流および電子の物質量は各回路に分配される。

$\frac{1}{4}$ mol の O_2 が発生する。また，C 槽では，式①，②より，電子が 1 mol 流れると，両極で合計 $\frac{3}{4}$ mol の気体 (H_2，O_2) が発生する。A 槽には 0.025 mol，C 槽には 0.035 mol の電子が流れたので，求める気体の体積比は，

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{4} \times 0.025 : \frac{3}{4} \times 0.035 = 1 : 4.2$$

問 8　④×2+⑤ より，A 槽全体でははじめに次の反応が起こる。

$$2CuSO_4 + 2H_2O \longrightarrow 2Cu + O_2 + 2H_2SO_4$$

A 槽中の Cu^{2+} (0.10×0.50 =) 0.050 mol がすべて還元されたとき，式④より，電子 (0.050×2 =) 0.10 mol が消費され，このとき式⑤より，0.10 mol の H^+ が生成する。電解液の体積は 0.50 L のままと考えてよいから，$[H^+]$ は (0.10÷0.50 =) 0.20 mol/L になる。

Cu^{2+} がすべて還元された後は希硫酸の電気分解と同じになり，次の電極反応が起こる。⑧×2+⑨ より，全体として式③と同様に H_2O の分解が起こり，電解液中の H^+ の物質量は変化しない。

陰極：$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$　……⑧

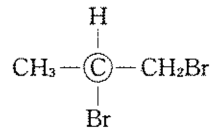
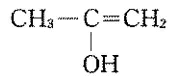
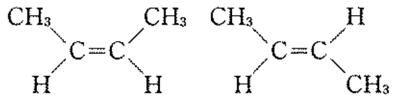
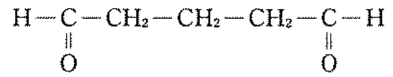
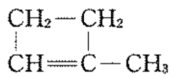
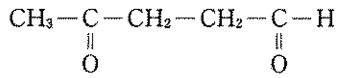
陽極：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$　……⑨

全体：$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$　……③

このとき流れた電子の物質量は，(0.50−0.10 =) 0.40 mol だから，電気分解により減少する H_2O の物質量は，式③より 0.20 mol となるが，電解液の体積変化は無視できるので，Cu^{2+} がすべて還元された後は，$[H^+]$ は変化せず 0.20 mol/L のままである。

4 有機化学（炭化水素）

【解答】

I	問1	あ	アルカン	い	3	う	アルキン
I	問2	$CH_4 + Cl_2 \longrightarrow CH_3Cl + HCl$					
I	問3		問4				
II	問5		問6				
II	問7	B		C			

【配点】 (20点)

Ⅰ　**問1**　各2点×3　　**問2**　2点　　**問3**　2点　　**問4**　2点

Ⅱ　**問5**　2点　　**問6**　2点　　**問7**　**B**：2点　**C**：2点

【出題のねらい】

Ⅰ　炭化水素の性質と反応に関する基本的な問題である。

Ⅱ　オゾン分解を用いた炭化水素の構造決定の問題である。

【解説】

問題

Ⅰ

問1　一般式 C_nH_{2n+2} で表される鎖式飽和炭化水素をアルカンという。アルカンと Cl_2 を混合して光を当てると置換反応が起こる。

一般式 C_nH_{2n} で表される鎖式不飽和炭化水素をアルケンという。アルケンは炭素間二重結合を1つもち，付加反応を起こしやすい。$n \geqq 3$ のアルケンには，環状構造を1つもつ環式飽和炭化水素（シクロアルカン）の異性体が存在する。

一般式 C_nH_{2n-2} で表される鎖式不飽和炭化水素のうち，炭素間三重結合を1つもつものをアルキンという。アルキンもアルケンと同様に付加反応を起こしやすい。

問2　CH_4 と Cl_2 を混ぜて光を照射すると，クロロメタン CH_3Cl と HCl が生じる。

$$CH_4 + Cl_2 \longrightarrow CH_3Cl + HCl$$

【ポイント】

アルカン

鎖式飽和炭化水素。一般式 C_nH_{2n+2} で表される。

アルケン

炭素間二重結合を1つもつ鎖式不飽和炭化水素。一般式 C_nH_{2n} で表される。

アルキン

炭素間三重結合を1つもつ鎖式不飽和炭化水素。一般式 C_nH_{2n-2} で表される。

シクロアルカン

環を1つもつ環式飽和炭化水素。一般式 C_nH_{2n} で表される。($n \geqq 3$)

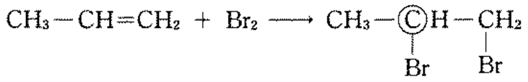
置換反応

アルカンなどに光を当てながらハロゲンを加えると置換反応が起こる。

付加反応

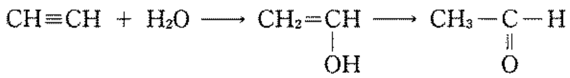
炭素原子間の二重結合や三重結合をもつ化合物は付加反応を起こしやすい。

問 3　プロペンに Br_2 が付加すると，不斉炭素原子を 1 つもつ化合物 $CH_3-CHBr-CH_2Br$ が生成する。



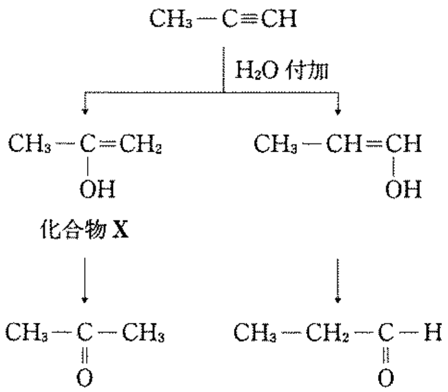
（○で囲んだ炭素は不斉炭素原子）

問 4　アセチレンに H_2O が付加すると，不安定なビニルアルコールを経て，アセトアルデヒドが生じる。



ビニルアルコール　アセトアルデヒド

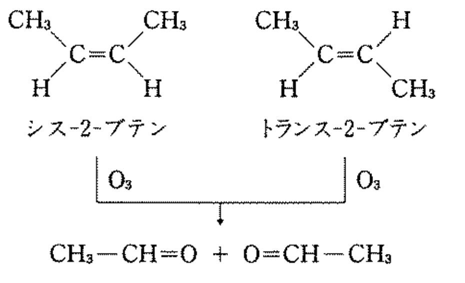
同様に，プロピンに H_2O が付加すると，生じる不安定な中間体には次の 2 種類が考えられるが，生成物がアセトンであることから，化合物 **X** は**【解答】**のように決まる。



アセトン　プロピオンアルデヒド

II

問 5　アルケン **A**（分子式 C_4H_8）のオゾン分解で生じるのがアセトアルデヒドのみであることから，**A** は 2-ブテンと決まる。このとき，1 分子の 2-ブテンからアセトアルデヒドが 2 分子生じる。2-ブテンにはシス形とトランス形の幾何異性体が存在し，そのどちらからもアセトアルデヒドが生成する。



不斉炭素原子

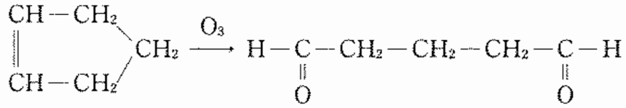
1 つの炭素原子に 4 個の異なる原子や原子団が結合しているとき，その炭素原子を不斉炭素原子という。

幾何異性体

二重結合などの回転できない構造によって生じる立体異性体。同じ原子，または原子団が二重結合をはさんで同じ側にある場合はシス形，反対側にある場合はトランス形という。

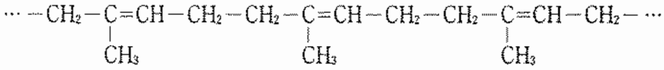
問 6　環の中に 1 つの炭素間二重結合をもつ化合物をオゾン分解すると，1 種類の鎖状の化合物が生成する。

シクロペンテン C_5H_8 をオゾン分解した場合，次のように **Y** のみが得られる。

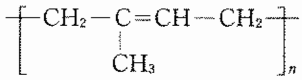


化合物 **Y**

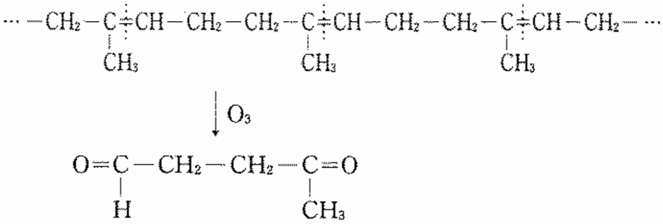
問 7　ポリイソプレンは，$-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}=CH-CH_2-$ の構造が多数つながった構造をしている。



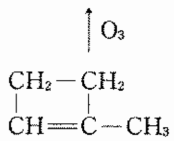
このような高分子化合物の構造は，次のように繰り返し単位でまとめて表す。



ポリイソプレンをオゾン分解すると，次のように分子式 $C_5H_8O_2$ の化合物 **C** が生成する。



化合物 **C**



化合物 **B**

化合物 **B** をオゾン分解すると化合物 **C** が生成することから，**B** の構造は上記のように決まる。また，この構造は化合物 **B** が分子中にメチル基，環状構造，炭素間二重結合を 1 つずつもつという条件に矛盾しない。

生　物

1　浸透圧

【解答】

問1	1	半透	2	溶血	3	液胞						
問2	エネルギーを用い，濃度勾配に逆らって物質を輸送する。(26字)											
問3	ウ											
問4	孔辺細胞の細胞壁は気孔側が厚いので，孔辺細胞の浸透圧が上昇して吸水すると，膨圧が高くなり，孔辺細胞が湾曲して気孔が開く。(60字)											
問5	(1)	5	(2)	1	(3)	6	(4)	0	(5)	8	(6)	0
問6	エ	問7	①	ア	②	ア	③	ア				

【配点】（25点）

問1　各2点×3，　問2　2点，　問3　2点，　問4　4点
問5　各1点×6，　問6　2点，　問7　各1点×3

【出題のねらい】

浸透圧に関する知識問題と，花粉管の伸長と膨圧に関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　溶媒は透過させるが溶質は透過させない膜の性質を半透性といい，溶媒と溶質のどちらも透過させる膜の性質を全透性という。細胞膜は半透性に近い性質をもち，細胞壁は全透性の性質をもつ。

ヒトの赤血球を極端な低張液に入れると，浸透圧差により赤血球内に水が流入して膨張し，やがて細胞膜が破れてヘモグロビンなどの細胞内容物が流出する。この現象を溶血という。

植物細胞にみられる発達した液胞は，細胞の浸透圧の調節に関与しており，植物細胞を高張液に入れると液胞内の水が細胞外に流出し，低張液に入れると液胞内に細胞外から水が流入する。

問2　受動輸送では濃度勾配にしたがって物質が輸送されるのに対し，能動輸送ではエネルギーを用いて濃度勾配に逆らって物質が輸送される。

問3　体液と等張な食塩水を生理食塩水という。ほ乳類や鳥類の生理食塩水の濃度は約0.9％であるので，ウが正解である。

問4　孔辺細胞では，次ページの図のように気孔に面した側の細胞壁が厚くなっている。このため，孔辺細胞の浸透圧が上昇して細胞内に水が入り，膨圧が上昇すると，気孔に面した側の細胞壁はあまり伸びないが，気孔と反対側の細胞壁はよく伸びるので，孔辺細胞が外側に向かって湾曲する結果，気孔が開く。

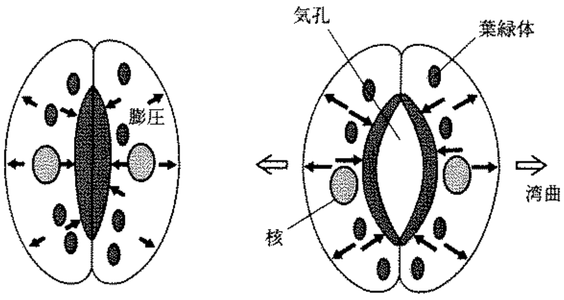
【ポイント】

半透性
溶媒は透過させるが溶質は透過させない膜の性質

全透性
溶媒と溶質のどちらも透過させる膜の性質

受動輸送
濃度勾配にしたがう輸送で，エネルギーを必要としない。

能動輸送
濃度勾配に逆らう輸送で，エネルギーを必要とする。



問 5　細胞膜が細胞壁から離れるか離れないかの状態を限界原形質分離といい，このとき細胞の浸透圧と外液の浸透圧は等しい。問題文から，浸透圧が 6 気圧のスクロース溶液に浸したときに限界原形質分離の状態になるので，この植物細胞に対して，浸透圧が 6 気圧のスクロース溶液は等張液，浸透圧が 8 気圧のスクロース溶液は高張液，浸透圧が 4 気圧のスクロース溶液は低張液であることがわかる。

限界原形質分離
細胞膜が細胞壁から離れるか離れないかの状態

植物細胞を低張液に浸すと，細胞内に水が流入して膨圧を生じる。このとき，「吸水力＝細胞の浸透圧－膨圧」の関係が成立し，吸水力＝外液の浸透圧，となった状態で水の出入りがなくなり，体積の変化が停止する。等張液である浸透圧が 6 気圧のスクロース溶液に入れたときの細胞の浸透圧は 6 気圧で，このときの細胞膜で囲まれた部分の体積を V とすると，浸透圧が 4 気圧のスクロース溶液に入れたときの細胞膜で囲まれた部分の体積は 1.2 V である。このときの細胞の浸透圧を P とすると，細胞の浸透圧は細胞膜で囲まれた部分の体積に反比例することから，$6\times V=P\times 1.2\,V$ が成り立つ。これより，$P=6\times\frac{1}{1.2}=5$ (気圧) となる。また，膨圧は細胞の浸透圧と外液の浸透圧(＝吸水力)の差になるので，5 (気圧) －4 (気圧) ＝1 (気圧) となる。よって，(1)に入る数値は 5，(2)に入る数値は 1 となる。

吸水力 ＝ 細胞の浸透圧－膨圧

(細胞の浸透圧)×(細胞膜で囲まれた部分の体積) ＝ 一定

等張液中の植物細胞では膨圧は生じておらず(膨圧＝ 0 気圧)，細胞の浸透圧は外液の浸透圧と等しい。したがって，浸透圧が 6 気圧のスクロース溶液に浸したときの細胞の浸透圧は 6 気圧であり，膨圧は 0 気圧である。よって，(3)に入る数値は 6，(4)に入る数値は 0 となる。

植物細胞を浸透圧が 8 気圧のスクロース溶液のような高張液に浸すと，細胞内から水が流出して原形質分離が起こり，やがて細胞の浸透圧が外液の浸透圧と同じになると水の出入りがなくなり，細胞膜で囲まれた部分の体積の変化は停止する。原形質分離をしている状態では膨圧は生じていないので，浸透圧が 8 気圧のスクロース溶液に浸したときの細胞の浸透圧は 8 気圧であり，膨圧は 0 気圧である。よって，(5)に入る数値は 8，(6)に入る数値は 0

となる。

問 6　Bの前文に，「花粉管の伸長は，細胞内外の浸透圧差により花粉管が周囲から吸水し，細胞膜が細胞壁を押し広げることで起こる」とあるので，伸長中の花粉管では常に膨圧が生じていることがわかる。**問 5** で述べたように，膨圧が生じるのは外液の浸透圧が細胞の浸透圧よりも小さいときであるので，伸長中の花粉管の浸透圧は常に培地の浸透圧よりも高くなっている。よって，エが正解である。

問 7　花粉管は周囲の浸透圧が高いときには，膨圧を一定に保つために細胞の浸透圧を高くするように調節していると考えられる。伸長中の花粉管に培地より低い濃度のスクロース溶液を滴下したときには，滴下したスクロース溶液の濃度が同じでも，スクロース濃度が高い培地で伸長している花粉管ほど，滴下したスクロース溶液との浸透圧差が大きいので，流入する水の量が多いと考えられる。よって，①はア，②はアが正解である。

その結果，Bの前文にも「伸長中の花粉管の先端部は細胞壁が薄いため，吸水量が多くなりすぎると花粉管が破裂してしまう」とあるように，膨圧が大きくなりすぎて破裂すると考えられる。よって，③はアが正解である。

2　発生

問題

【解答】

問 1	1	灰色三日月環(灰色新月環)	2	陥入	問 2	イ	オ		
問 3	(1)	局所生体染色法	(2)	A	7	B	4	C	6
	(3)	A	ア	B	ウ	C	キ	(4)	ウ
問 4	原口背唇部は形成体としてはたらき，接触している予定外胚葉を神経管に誘導するとともに，原口背唇部自身は脊索に分化する。(58字)								
問 5	ウ	問 6	エ						

【配点】(25点)

問 1　各 2 点× 2，　問 2　各 2 点× 2 (順不同)

問 3　(1)　1 点，(2)　各 1 点× 3，(3)　各 1 点× 3，(4)　2 点，　問 4　4 点，　問 5　2 点

問 6　2 点

【出題のねらい】

カエルの初期発生過程および器官形成に関する知識問題と，カエルの皮膚の誘導に関する実験考察問題を出題した。

【解説】

問 1　カエルの卵では，精子が進入した点の反対側に他の部分とは色素分布が異なる灰色の部分が現れる。この部分は灰色三日月環(灰色新月環)と呼ばれ，発生が進むとこの部分の植物極寄りに原口が形成される。したがって灰色三日月環を生じる側が将来の胚

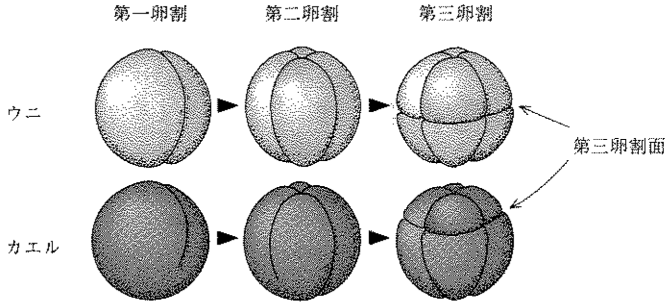
【ポイント】

灰色三日月環

精子進入点の反対側に現れる灰色の部分で，この部分の植物極寄りに原口が生じる。

の背側になり，この反対側が腹側になる。つまり，受精直後に胚の背腹軸が決まるといえる。卵割が進んで胞胚期を過ぎると原口が現れ，胚表面の細胞が胚の内側に向かって入り込む。このことを陥入と呼び，陥入によって新たに生じる腔所を原腸と呼ぶ。また，この時期の胚を原腸胚と呼ぶ。

問2　ウニとカエルの発生過程を比較すると，いろいろな点で違いがみられる。卵には発生に必要な栄養として卵黄が含まれているが，ウニの卵は卵黄が少なく均等に分布している等黄卵であるのに対し，カエルの卵は卵黄が植物極側に偏って分布している端黄卵である。よって，アは正しい。受精卵は卵割と呼ばれる体細胞分裂を繰り返し，細胞数を増やしていく。ウニもカエルも第一卵割から第三卵割の過程は，下図に示すように，経割→経割→緯割の順に起こる。よって，イは誤りである。卵黄は卵割の妨げになるので，卵黄の量と分布の違いにより卵割様式が異なる。下図に示すように，等黄卵のウニでは第三卵割までは同じ大きさの割球が生じるが，端黄卵のカエルでは卵黄が多く分布する植物極側で卵割が起こりにくく，第三卵割は赤道面よりやや動物極側で起こるので，割球の大きさに違いが生じる。ウニのような卵割を等割，カエルのような卵割を不等割と呼ぶ。よって，ウは正しい。



卵割が進むと胚の内部に腔所が生じ，胞胚期になるとこの腔所が大きくなって胞胚腔と呼ばれるようになる。ウニでは胚の中央に球状の胞胚腔が生じるが，カエルでは卵割が動物極側で起こりやすいので，胞胚腔は半球状で動物極側に偏った位置に生じる。よって，エは正しい。ウニでもカエルでも，原口から口が形成されるのではなく，原口(またはその付近)から肛門が生じ，口はその反対側に新しく形成される。よって，オは誤りである。原腸胚期になると，ウニでもカエルでも陥入が起こり，胚を構成する細胞は，外側をおおう外胚葉，陥入して原腸を取り囲むように位置する内胚葉，それらの中間に位置する中胚葉の3つの胚葉に分化する。よって，カは正しい。カエルでは原腸胚期を過ぎると，神経胚期，尾芽胚期，幼生へと発生過程が進行していくが，ウニでは原腸胚期を過ぎると，プリズム幼生を経てプルテウス幼生となり，神経胚期や尾芽胚期はみられない。よって，キは正しい。以

ウニ

等黄卵，等割

胞胚腔は球状であり，原口が植物極側に生じる。

カエル

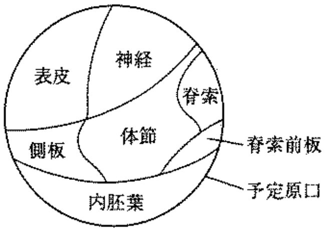
端黄卵，不等割

胞胚腔は半球状であり，原口が赤道面のやや植物極寄りに生じる。

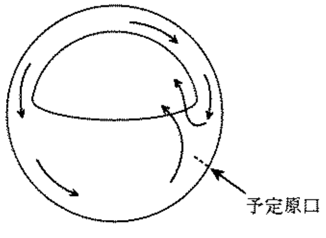
上から，イとオが誤った記述である。

問 3 (1)　フォークトは，中性赤やナイル青など生体に無害な色素で胞胚の表面を部分的に染め分け，その移動を追跡した。このような染色法を局所生体染色法といい，これによって，胚の各部が発生の進行にともなって将来どのような組織になるかを解明した。それを図に示したのが，下の原基分布図である。

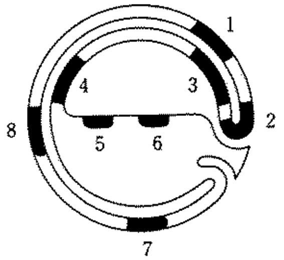
イモリの原基分布図(後期胞胚)



(2)(3)　図 1 で染色した 1 ～ 8 の部位の予定運命は，フォークトの原基分布図から，1 は神経，2 は神経あるいは脊索，3・4 は脊索，5・6 は内胚葉，7・8 は表皮とわかる。陥入によって，図 1 の染色した各部は下図の左に示すように移動していく。具体的には，原口の上側にある原口背唇部(図 1 の 3・4)は 4 を先頭に胞胚腔の内部に陥入し，原口の下側(図 1 の 5・6)は 5 を先頭に内部に陥入する。このとき，予定表皮域(図 1 の 7・8)は胚を外側からおおうように下方へ移動する。したがって，陥入後の後期原腸胚(図 2)では，図 1 の 1 ～ 8 の各部が下図の右のように位置している。



胞胚(断面)



後期原腸胚(断面)

上図の右より，A は予定表皮域の 7 に，B は予定脊索域の 4 に，C は予定内胚葉域の 6 に由来する。また，尾芽胚(図 3)では，アは表皮，イは神経管，ウは脊索，エは体節，オは腎節，カは側板，キは腸管を囲む内胚葉を示しているので，A はア，B はウ，C はキとなる。

(4)　図 2 は胚を左右に分ける縦断面図で，成体の a の面の断面図である。図 3 は胚を前後に分ける横断面図で，成体の c の面の断面図である。よって，ウが正解である。

問 4　シュペーマンは，色の異なる 2 種のイモリの初期原腸胚を用

局所生体染色法
生体に無害な色素で胚の各部を染色し，各部域がどのような組織に分化するかを追跡する方法

原基分布図
胚の各部が将来どのような組織・器官になるかを示した図

い，一方の胚の原口背唇部を他方の胚の胞胚腔に移植した。すると，本来の胚の他に脊索や神経管などをもつ第二の胚(二次胚)が，移植片を中心に形成された。二次胚の組織の色を調べたところ，脊索と体節の一部は移植片に由来するが，神経管など残りの部分は移植を受けた胚に由来することがわかった。この結果から，原口背唇部は，接触している予定外胚葉にはたらきかけて神経管に誘導するとともに，自身は脊索に分化することがわかった。原口背唇部のように，他の部分にはたらきかけてその胚域の発生に影響をあたえる部域を形成体と呼ぶ。

誘導
他の部分にはたらきかけて分化を引き起こす現象

形成体
誘導のはたらきをもつ部域

問 5　カエルの幼生(オタマジャクシ)から成体への変態では，尾の消失とともに，皮膚の形態が幼生皮膚から前成体皮膚をへて成体皮膚へと変化する。つまり，尾部以外の皮膚は成体皮膚に変化するが，消失する尾部の皮膚では成体皮膚への変化が起こらず，細胞は退化・消失する。

本来，尾の表皮は幼生皮膚の表皮のままで，前成体皮膚の表皮に変化せず，やがて退化・消失する。しかし，**実験 1** で背の真皮と結合させると前成体皮膚の表皮に変化することがわかる。また，背の表皮は，本来，前成体皮膚の表皮に変化するはずであるが，尾の真皮と結合させると幼生皮膚の表皮のままで前成体皮膚の表皮に変化しない。これらの結果から，背の表皮も尾の表皮も結合させた真皮により運命が変更されたといえるので，ウが正しい。つまり，表皮が前成体皮膚の表皮となるか幼生皮膚の表皮にとどまるかは真皮によって決まり，背の真皮は接する表皮を前成体皮膚の表皮へ誘導する能力をもつが，尾の真皮にはそのような誘導能力がないと考えられる。

表皮が前成体化するか否かは，真皮によって決まる。

問 6　**実験 2** では，背の真皮と尾の表皮を結合させたものと，尾の真皮と背の表皮を結合させたもので，**実験 1** と結果が異なっている。これは，発生が段階Bに進むと，誘導に反応する表皮の能力，あるいは真皮のもつ形成体としての誘導能力が変化したためと考えることができる。表1・2を比較すると尾の真皮と背の表皮を結合させたものの結果が，**実験 1** を行った段階Aでは－であるが，**実験 2** を行った段階Bでは＋になっている。尾の真皮は，尾の表皮との組合せでは段階A，Bともに－であるから，誘導能力はもっていない。したがって，段階Aでは表皮の運命がまだ決定されていないが，段階Bではすでに決定されている(つまり段階Aから段階Bの間に決定した)と解釈することが可能である。このため，誘導能力のない尾の真皮と結合させても段階Bの背の表皮は＋になったと考えることができる。したがって，エの可能性はない。また，背の真皮と尾の表皮を結合させたものの結果が，**実験 1** を行った段階Aでは＋だが**実験 2** を行った段階Bでは－になっていることから，段階Bではすでに尾の

表皮の運命が決定されているため，背の真皮からの誘導に対して反応する能力が失われていると解釈することも可能である。したがって，アとウは可能性がある。また，背の真皮と尾の表皮を結合させたものの結果が，**実験 1** を行った段階 A では＋だが**実験 2** を行った段階 B ではーになっていることの解釈として，真皮の表皮に対する誘導能力は段階 A ではあるが段階 B になると失われると考えることも可能である。したがって，イの可能性もある。以上のことから，可能性がないのはエのみである。

3 体液

問題

【解答】

問 1	1	右心房	2	自動性	3	毛細血管	4	リンパ		
問 2	イ	オ	問 3	ウ	問 4	(1)	95 %	(2)	53 %	(3) 10 mL

問 5	(1)	組織で酸素ヘモグロビンの割合が低くなるので，組織により多くの酸素を供給することができる。(44字)
	(2)	酸素分圧の低い環境でも，酸素と結合しやすく，肺で多くの酸素を得ることができる。(39字)

【配点】(25点)

問 1　各 2 点× 4，　問 2　各 2 点× 2 (順不同)，　問 3　1 点
問 4　(1)　2 点，(2)　2 点，(3)　2 点，　問 5　(1)　3 点，(2)　3 点

【出題のねらい】

体液とその循環に関する知識問題と，ヘモグロビンの酸素解離曲線に関する考察問題を出題した。

【解説】

問 1　ほ乳類の心臓は 2 心房 2 心室で，これらが一定の周期で収縮を繰り返すことで血液を体中に送り出している。右心房の上部には洞房結節(ペースメーカー)があり，洞房結節から一定の周期で信号が送られることで，心臓は他からの刺激によらず，自律的に拍動を続けることができる。このような性質を心臓の自動性という。動脈は組織や器官に入ると細い毛細血管に分かれ，組織や器官を通過後，再び静脈に集まって心臓にもどる。このように動脈と静脈の間に毛細血管をもつ循環系を，閉鎖血管系という。また，血しょうの一部は血管壁から組織側へしみだして組織液となり，さらにリンパ管内に入ってリンパ液となる。リンパ液は鎖骨下静脈で血液と合流し，再び血しょうとなる。

問 2　酸素濃度が高く二酸化炭素濃度の低い血液を動脈血，酸素濃度が低く二酸化炭素濃度の高い血液を静脈血と呼ぶ。大静脈から右心房にもどった血液は，右心室に入り，肺動脈を通って肺に入る。したがって，大静脈と肺動脈には静脈血が流れている。肺に入った血液は酸素を受け取る一方，二酸化炭素を放出し，肺静脈を通って左心房にもどる。左心房にもどった血液は左心室に入

【ポイント】

体液
血液，組織液，リンパ液

心臓の自動性
他からの刺激によらず，自律的に拍動を続ける性質

肺動脈には静脈血が，肺静脈には動脈血が流れる。

り，そこから大動脈を通って体全体を流れる。したがって，肺静脈と大動脈には動脈血が流れている。よって，アとウは誤りであり，イは正しい。また，肝動脈には動脈血が流れ，静脈血が流れる肝静脈に比べて二酸化炭素濃度は低いので，エは誤りである。タンパク質が分解されて生じるアンモニアは肝臓で尿素に変換されるので，肝臓から出る血液が流れる肝静脈は，肝臓に入る血液が流れる肝動脈に比べて尿素濃度が高い。よって，オは正しい。尿素は腎臓に運ばれ，その一部は尿中に排出されるので，腎静脈は腎動脈に比べて尿素濃度が低い。よって，カは誤りである。

アンモニアは肝臓で尿素に変換される。

問 3　ヒトの血液は，有形成分と液体成分である血しょうからなり，それぞれ重量の約 45 % と約 55 % を占める。よって，アは正しい。有形成分には，赤血球，白血球および血小板がある。血液 1 mm^3 中に，赤血球は約 450 万～500 万個，血小板は約 20 万～40 万個，白血球は約 6000～8000 個が含まれるので，イは正しい。また，白血球には核があるが，赤血球と血小板には核がない。よって，ウは誤りである。赤血球はヘモグロビンを含み酸素の運搬を行い，血小板は血液凝固に関与し，白血球の多くは異物を取り込んで分解する食作用をもつ。よって，エは正しい。

赤血球
ヘモグロビンを含み，酸素の運搬を行う。

血小板
血液凝固に関与する。

白血球
食作用により，異物を細胞内に取り込んで分解する。

問 4 (1)　問題文から，肺胞での酸素分圧は 100 mmHg，二酸化炭素分圧は 40 mmHg である。したがって，肺胞における酸素ヘモグロビンの割合は，図 1 において，二酸化炭素分圧が 40 mmHg のグラフで，横軸の酸素分圧が 100 mmHg のときの酸素ヘモグロビンの割合を読めばよい。よって，肺胞における酸素ヘモグロビンの割合は 95 % となる。

(2)　問題文から，ある組織での酸素分圧は 30 mmHg，二酸化炭素分圧は 60 mmHg である。よって，組織における酸素ヘモグロビンの割合は，図 1 において，二酸化炭素分圧が 60 mmHg のグラフで，横軸の酸素分圧が 30 mmHg のときの酸素ヘモグロビンの割合を読み，45% となる。全ヘモグロビンのうち組織で酸素を解離したヘモグロビンの割合は 95−45 (%) であるが，肺胞における酸素ヘモグロビンの割合は 95 (%) であるので，酸素を解離した酸素ヘモグロビンの割合は $\frac{95-45}{95} \times 100 = 52.6... \fallingdotseq 53$ (%) となる。

二酸化炭素分圧が高いと，酸素と結合するヘモグロビンの割合は低くなる。

(3)　問題文中に，「血液 100 mL 中に含まれるヘモグロビンは最大で 20 mL の酸素と結合できる」とある。これは，酸素ヘモグロビンの割合が 100 % の場合，20 mL の酸素と結合できるということである。全ヘモグロビンに対して，酸素を解離したヘモグロビンの割合は 95−45 = 50 (%) であるので，血液 100 mL 中に含まれるヘモグロビンが組織に供給した酸素は $20\ \mathrm{mL} \times \frac{50}{100} = 10\ \mathrm{mL}$ である。

問 5 (1)　コウテイペンギンは，長時間の潜水中には呼吸による酸

素の供給と二酸化炭素の放出ができないので，血中の二酸化炭素濃度が上昇し，血液の pH は低下する(酸性になる)。図 2 より，pH 7.5 よりも酸性側である pH 7.4 の方が組織における酸素ヘモグロビンの割合が低い。これは，組織でより多くの酸素を解離できることを意味し，組織により多くの酸素を供給できる利点をもつ。

(2) インドガンが渡りの際に飛行する高度 7000～8000 メートルは，地表に比べて酸素分圧が低い。図 3 から，そのような酸素分圧の低い環境でも，インドガンのヘモグロビンは低地に生息するガチョウのヘモグロビンに比べて酸素との結合力が高いので，肺で多くの酸素を得ることができる。これにより，高い高度を飛行中も組織に効率よく酸素を供給することができる利点をもつ。

4 遺伝

【解答】

問 1	(1)	Aa	(2)	エ	(3)	オ	(4)	ア
問 2	(1)	AABbDd	(2)	ア	エ			
問 3	(1)	20 %	(2)	66：9：25	(3)	34 %		
問 4	1：4：4：1							

【配点】 (25点)

問 1 (1) 2 点，(2) 2 点，(3) 2 点，(4) 2 点，　問 2 (1) 2 点，(2) 各 2 点× 2 (順不同)

問 3 (1) 2 点，(2) 3 点，(3) 3 点，　問 4 3 点

【出題のねらい】

遺伝の分野から，アサガオの 3 種類の変異遺伝子を題材にして，各遺伝子の連鎖と組換えについて考察する問題を出題した。

【解説】 問題

問 1 (1) **交配 1** では，花色が青色の系統と白色の系統を交配して得られる F_1 の表現型がすべて青色であることから，花色に関して青色は白色に対して優性であることがわかる。よって，青色遺伝子を A，白色遺伝子を a とおいて花色に関する遺伝子について**交配 1** を表すと，下図のようになり，F_1 の遺伝子型は Aa となる。

P　青色系統 AA　×　白色系統 aa

F_1　青色 Aa

(2) 遺伝子型 Aa の F_1 を白色の系統(遺伝子型 aa)と交配すると，F_1 の配偶子の遺伝子型の分離比が A：a＝1：1 であるので，生じる子の遺伝子型の分離比は Aa：aa＝1：1 となり，表

【ポイント】

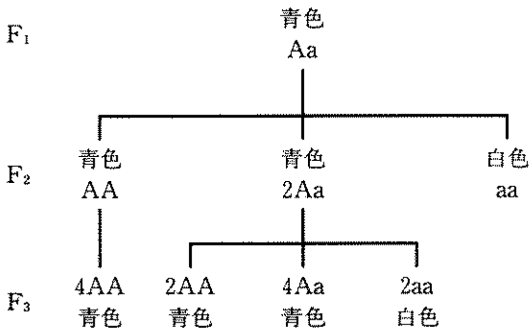
異なる表現型をもつ純系個体間の交雑において，雑種第一代に現れた形質が優性である。

現型の分離比は青色：白色＝1：1となる。よって，エが正解である。

(3) 遺伝子型 Aa の F_1 を自家受精して生じる F_2 の遺伝子型の分離比は，AA：Aa：aa＝1：2：1である。このうち遺伝子型が AA と Aa の個体が青色の個体であり，ホモ接合体とヘテロ接合体の分離比は，ホモ接合体（AA）：ヘテロ接合体（Aa）＝1：2である。よって，オが正解である。

(4) F_2 のうち青色の個体の遺伝子型は AA と Aa で，(3)で述べたように AA：Aa＝1：2である。遺伝子型 AA の個体を自家受精して生じる次世代の遺伝子型はすべて AA となる。一方，遺伝子型 Aa の個体を自家受精して生じる次世代の遺伝子型の分離比は AA：Aa：aa＝1：2：1である。ここで，各遺伝子型の個体が自家受精したときに，生じる子の個体数は同じになるとするとともに，自家受精した親の個体数の比を考慮して計算する必要がある。つまり，F_2 の遺伝子型 AA の個体の自家受精で生じる子の数を4倍し，F_2 の遺伝子型 Aa の個体に生じる子の数を F_2 の AA の個体に生じる子の数の2倍にする必要がある。表現型の分離比は，下図のようになり，青色：白色＝10：2＝5：1となる。よって，アが正解である。

1個体のつくる次世代の個体数は同じと考える。



問2 (1) **交配2** の F_1 がすべて青色で覆輪があり草丈が正常であることから，覆輪の有無に関して，覆輪ありは覆輪なしに対して優性であり，草丈に関して，正常は矮性に対して優性であることがわかる。よって，覆輪について，覆輪ありの遺伝子を B，覆輪なしの遺伝子を b，草丈について，正常遺伝子を D，矮性遺伝子を d とおいて**交配2** を表すと，次ページの図のようになり，F_1 の遺伝子型は AABbDd となる。

P　青色・覆輪なし・正常　AAbbDD　×　青色・覆輪あり・矮性　AABBdd

F_1　青色・覆輪あり・正常　AABbDd

F_2　青色・覆輪あり・正常　2　　青色・覆輪あり・矮性　1　　青色・覆輪なし・正常　1

(2)　(1)の説明から，アは正しく，イは誤りであることがわかる。花色に関してはすべての個体が遺伝子Aのホモ接合体なので，以下では遺伝子B(b)と遺伝子D(d)のみに着目して考える。B(b)とD(d)が独立であると仮定すると，遺伝子型BbDdであるF_1を自家受精して生じるF_2の表現型の分離比は，覆輪あり・正常：覆輪あり・矮性：覆輪なし・正常：覆輪なし・矮性＝9：3：3：1となるはずである。しかし，実際の**交配2**の結果は，覆輪あり・正常：覆輪あり・矮性：覆輪なし・正常＝2：1：1となっていることから，B(b)とD(d)は独立ではなく，連鎖していることがわかる。よって，ウは誤りである。

2対の対立遺伝子がそれぞれヘテロ接合体で独立の場合，自家受精による次世代の表現型の分離比は9：3：3：1となる。

これをふまえて**交配2**を示し直すと下図のようになる。なお，Bd/bDは一方の相同染色体でBとdが，もう一方の相同染色体でbとDが，それぞれ連鎖していることを表す。F_1では遺伝子Bとd，遺伝子bとDが連鎖していて，遺伝子B(b)と遺伝子D(d)の間で組換えが起こらないため，F_1が形成する配偶子の遺伝子型の分離比がBd：bD＝1：1となり，これによって生じるF_2の遺伝子型の分離比が，下表のようにBd/bD：Bd/Bd：bD/bD＝2：1：1となったと考えると，**交配2**の結果をすべて説明できる。よって，エは正しく，オは誤りである。

P　覆輪なし・正常　bD/bD　×　覆輪あり・矮性　Bd/Bd

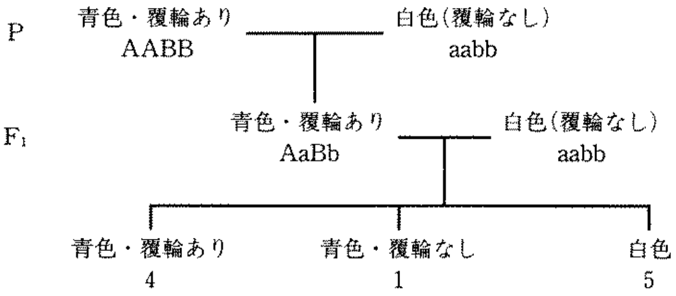
F_1　覆輪あり・正常　Bd/bD

↓

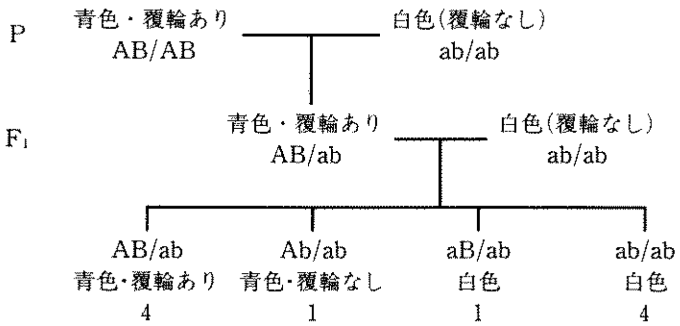
配偶子
Bd：bD＝1：1

	Bd	bD
Bd	Bd/Bd 覆輪あり・矮性	Bd/bD 覆輪あり・正常
bD	Bd/bD 覆輪あり・正常	bD/bD 覆輪なし・正常

問 3 (1)　**交配 3** では草丈について考慮されていないことから，遺伝子 A(a) と遺伝子 B(b) のみについて**交配 3** を示すと，下の図のようになる。



ここで，仮に A(a) と B(b) が独立であるとすると，検定交雑で生じる次世代の比は〔AB〕:〔Ab〕:〔aB〕:〔ab〕= 1：1：1：1 となり，表現型の分離比は，〔aB〕と〔ab〕がどちらも白色となる(白色花では覆輪の有無は判別できない)ので，青色・覆輪あり：青色・覆輪なし：白色 = 1：1：2 となるはずである。**交配 3** ではこれと異なる結果が得られていることから，遺伝子 A(a) と遺伝子 B(b) は連鎖していることになる。このことを考慮して**交配 3** を示し直すと，下図のようになる。



すなわち，F_1 では A と B，a と b が連鎖しており，検定交雑で青色・覆輪ありの AB/ab と青色・覆輪なしの Ab/ab の個体が 4：1 の比で生じていることから，検定交雑で生じた次世代の比を AB/ab：Ab/ab：aB/ab：ab/ab = 4：1：1：4 と考えると，前述のように aB/ab と ab/ab がどちらも白色となるので，表現型の分離比が青色・覆輪あり：青色・覆輪なし：白色 = 4：1：5 となることを説明できる。よって，F_1 が形成する配偶子の遺伝子型の分離比は，AB：Ab：aB：ab = 4：1：1：4 であり，花色に関する遺伝子と覆輪の有無に関する遺伝子の間の組換え価は，$\frac{1+1}{4+1+1+4}\times 100 = 20$ (%) となる。

組換え価 (%) = $\frac{\text{組換えによって生じた配偶子数}}{\text{得られた全配偶子数}}\times 100$

(2)　F_1 が形成する配偶子の遺伝子型の分離比は AB：Ab：aB：ab = 4：1：1：4 なので，F_1 を自家受精して得られる F_2 の分離

比は，下の表のように〔AB〕:〔Ab〕:〔aB〕:〔ab〕= 66 : 9 : 9 : 16 となるので，表現型の分離比は，青色・覆輪あり：青色・覆輪なし：白色 = 66 : 9 : 25 となる。

	4AB	1Ab	1aB	4ab
4AB	16AB/AB 16〔AB〕	4AB/Ab 4〔AB〕	4AB/aB 4〔AB〕	16AB/ab 16〔AB〕
1Ab	4AB/Ab 4〔AB〕	1Ab/Ab 1〔Ab〕	1Ab/aB 1〔AB〕	4Ab/ab 4〔Ab〕
1aB	4AB/aB 4〔AB〕	1Ab/aB 1〔AB〕	1aB/aB 1〔aB〕	4aB/ab 4〔aB〕
4ab	16AB/ab 16〔AB〕	4Ab/ab 4〔Ab〕	4aB/ab 4〔aB〕	16ab/ab 16〔ab〕

(3) 上の表より，F_1(AB/ab = AaBb) と同じ遺伝子型の個体は AB/ab または Ab/aB で，上表の網掛けで塗った部分が該当する。F_2 の合計が 10×10 = 100 であるので，F_2 全体に対する遺伝子型 AaBb の個体の割合は，$\frac{16+1+1+16}{100} \times 100 = 34$ (%) である。

問 4　**交配 2・3** の結果から，遺伝子 A(a) と遺伝子 B(b) は組換え価 20 % の不完全連鎖，遺伝子 B(b) と遺伝子 D(d) は完全連鎖（組換え価 0 %）である。

遺伝子 A(a) と遺伝子 D(d) は連鎖しており，A(a) − B(b) 間と A(a) − D(d) 間の染色体上での距離は等しいとみなせるので，A(a) − D(d) 間の組換え価は，A(a) − B(b) 間と同じ 20 % である。

この交配では覆輪を生じさせる遺伝子をもつ個体が存在しないので，A(a) と D(d) のみについて考えると，下図のようになる。

P　青色・矮性 Ad/Ad × 白色・正常 aD/aD

F_1　青色・正常 Ad/aD × 白色・矮性 ad/ad

AD/ad	Ad/ad	aD/ad	ad/ad
青色・正常	青色・矮性	白色・正常	白色・矮性
1	4	4	1

ここで，前述のように遺伝子 A(a) と遺伝子 D(d) の間の組換え価は 20 % であり，F_1 は A と d，a と D が連鎖しているので，F_1 が形成する配偶子の遺伝子型の分離比は，AD : Ad : aD : ad = 1 : 4 : 4 : 1 である。よって，F_1 を検定交雑して得られる次世代の花色と草丈の表現型の分離比は，青色・正常：青色・矮性：白色・正常：白色・矮性 = 1 : 4 : 4 : 1 となる。

地　学

1　太陽系の天体

【解答】

問1	1	木星	2	海王星	3	離心率	4	尾	5	冥王星
問2	3.7年	問3	ウ	問4	ア，エ				
問5	(1)	西から昇り，天頂を通過して東に沈む。	(2)	11時間					

【配点】 (20点)

問1　各1点×5，　問2　3点，　問3　3点，　問4　3点(完答・順不同)，

問5　(1)　3点　(2)　3点

【出題のねらい】

小天体を中心に，太陽系の天体の知識とケプラーの法則の理解などを問う問題を出題した。問われているのは，受験勉強を開始するにあたって，この分野での基礎的な知識ばかりである。間違えた諸君は理解に努めてほしい。

【解説】

問題

問1 $\boxed{1}$：太陽とその近辺の天体の集まりを太陽系と呼ぶ。その中でも，惑星に満たない大きさの小天体の中で，比較的古くから知られていたのが小惑星である。火星と木星の公転軌道の間には多くの小惑星が分布しており，小惑星帯と呼ばれる。近年は，後述の太陽系外縁天体が分布する領域と区別するため，メインベルトとも呼ばれる。

$\boxed{2}$：太陽系の惑星は太陽に近いものから順に，水星ー金星ー地球ー火星ー木星ー土星ー天王星ー海王星である。このうち，土星までは肉眼でも容易に観測でき，古来よりその存在が知られていたが，天王星と海王星は望遠鏡が発明されてから発見された。また，これら太陽系の八つの惑星は，地球型惑星と木星型惑星の二種類に大別される。それぞれの共通の特徴を表1－1に示す。ここでまとめられている内容は覚えておきたい。

$\boxed{3}$・$\boxed{4}$：彗(すい)星は太陽からの距離が遠いときは小惑星と区別がつかないが，太陽に近づくと熱せられた表面から揮発性物質が蒸発し，ガスや塵(ちり)からなる尾が生じることから小惑星と区別できる。彗星の軌道は，離心率が大きな楕(だ)円軌道か離心率が1以上の放物線あるいは双曲線軌道をとる。彗星の起源は海王星の軌道の外側を公転する小天体が，他の天体の重力の影響を受け軌道が変化したものと考えられている。

$\boxed{5}$：太陽系外縁天体を代表する天体の一つが冥(めい)王星である。冥王星はかつては惑星に分類されていたが，近年になって冥王星と似た大きさの天体が海王星以遠にいくつも見つかったこと

【ポイント】

太陽系
太陽とその周囲を公転する天体の総称。

小惑星帯
火星と木星の公転軌道の間に存在する。小惑星が多数分布する。

地球型惑星と木星型惑星

表1－1

	地球型惑星	木星型惑星
惑星名	水星・金星 地球・火星	木星・土星 天王星・海王星
直径と質量	小	大
平均密度	大	小
衛星数	地－1・火－2	多
環	なし	あり
自転周期	長い	短い
大気主成分	金・火－CO_2 地－N_2・O_2	H_2・He
偏平率	小	大

彗星
氷と岩石からなる小天体。太陽に近づくと，太陽と反対側に尾が生じる。

から，惑星の定義が見直された。その結果，2006 年に冥王星は惑星でなくなり準惑星と呼ばれるようになった。なお，太陽系外縁天体のうち冥王星に準じる大きさで，衛星ではない天体は冥王星型天体とも呼ばれている。

問 2　17 世紀始めにドイツの天文学者のケプラーは，惑星の運動に関する三つの法則を発表した。以下に三法則を示す。

第一法則(楕円軌道の法則)：惑星は，太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を公転する。

第二法則(面積速度一定の法則)：太陽と惑星を結ぶ線分が，一定時間に描く面積は一定である。

第三法則(調和の法則)：惑星の太陽からの平均距離の三乗は，公転周期の二乗に比例する。

これらの法則は，惑星だけでなくさまざまな天体の運動でも成り立つのでしっかりと理解しよう。本問では，ベスタと太陽の平均距離が 2.4 天文単位と与えられている。したがって，ベスタの公転周期を x 年とすると，地球と太陽の平均距離が 1.0 天文単位，地球の公転周期が 1.0 年なので，

$$\frac{1.0^3}{1.0^2}=\frac{2.4^3}{x^2}$$

の関係が成り立っている。よって，$x^2=2.4^3$，$x=2.4\sqrt{2.4}$ であり，$\sqrt{2.4}=\sqrt{\frac{12}{5}}=\sqrt{\frac{4\times3}{5}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=2\times\frac{1.7}{2.2}$ なので，$x\fallingdotseq3.7$ となる。

問 3　ベスタの表面には，玄武岩質の岩石が確認されており，かつて火成活動があったと考えられている。月の表面でも玄武岩は見られるが，ベスタの平均密度は月よりも大きいため，ベスタの内部には，もっと密度の大きな物質があると考えられる。このことから，解答はウとなる。

他の選択肢について考えると，アの引力が小さい，イの自転周期が短い(したがって遠心力が大きい)，は共にベスタの圧縮を弱め，平均密度を小さくするので誤りである。エのように揮発性成分の割合が多いと平均密度は小さくなるので誤りである。ちなみに，ベスタは内部が地球型惑星のように分化しており，中心に鉄などの金属からなる核があると考えられている。ただし，小惑星すべてがベスタのように内部が分化しているわけではない。例えば，小惑星帯最大の天体である準惑星ケレス(セレス)は，岩石と氷からなるために平均密度がベスタより小さいと考えられている。

問 4　ベスタは，5.7 等まで明るくなる。これは肉眼で観測できる限界の明るさとされる 6 等より明るいため，ベスタは肉眼で観測できる。この理由を問う問題であるが，どのような条件で太陽系の天体は明るく見えるかを考えながら各選択肢を見ればよい。

ア：天体の明るさは距離の二乗に反比例するので，地球により近くなる天体の方が明るく見える可能性はある。したがって，この

ケプラーの法則

- 第一法則(楕円軌道の法則)
  惑星は，太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を公転する。
- 第二法則(面積速度一定の法則)
  太陽と惑星を結ぶ線分が，一定時間に描く面積は一定である。
- 第三法則(調和の法則)
  惑星の太陽からの平均距離の三乗は，公転周期の二乗に比例する。

見かけの明るさと距離の関係

見かけの明るさは距離の二乗に反比例する。

選択肢は正しい。

イ：小惑星は，その質量が小さいため，重力も小さく，大気を表面につなぎとめておくことができない。よって，ベスタには大気が存在しない。したがって，この選択肢は誤りである。

ウ：ベスタ，ケレスともに小惑星帯に存在するため，惑星として考えると外惑星の位置にある。このため，太陽から大きく離れて見えることのない内惑星と異なり，ともに太陽から180°離れた衝の位置でも観測できる。よって，この選択肢は誤りである。

エ：太陽以外の太陽系の天体は，太陽からの光を反射して光っている。この反射する割合が反射能(アルベド)である。反射能が大きければ，より多くの太陽光を反射して明るく見える可能性がある。したがって，この選択肢は正しい。

よって，正解はアとエとなる。このような，ベスタが明るく見える理由を知っている必要はなく，各選択肢を吟味することで正答にたどり着いてほしい。

問5　火星は，フォボスとダイモスという二つの衛星をもつ。二つの衛星は十km程度の大きさでいびつな形をしており，小惑星が火星の重力に捕らえられて衛星になったと考えられている。

(1)　フォボスの公転周期は，火星の自転周期より短いため，地球から月を観測した場合と逆に，西から昇って東に沈む運動をする。また，フォボスは火星の赤道上空の円軌道上を公転し，赤道上の地点で観測するとあるので，真西から天頂を通って真東に運動すると述べる必要がある。

(2)　衛星が南中してから再び南中するまでの期間は，天体が同じ位置関係になるまでの期間，すなわち会合周期と見なすことができる。会合周期は，以下のように考えられる。公転速度が速い(公転周期が短い)方の天体の公転周期を P_1，公転速度が遅い(公転周期が長い)方の天体の公転周期を P_2 とすると，単位時間に動く角度(角速度)はそれぞれ $\frac{360°}{P_1}$，$\frac{360°}{P_2}$ となり，単位時間に $\frac{360°}{P_1}-\frac{360°}{P_2}$ の角度差が生じる。一度会合してから角度差が増加して，360°になるまでの期間が会合周期である。会合周期を S とおくと，

$$\left(\frac{360°}{P_1}-\frac{360°}{P_2}\right)\times S=360°$$

となり，S を移項して360°で割ると，次の式が得られる。

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}$$

火星表面のある地点が火星の中心の周囲を公転していると考えると，その周期が24.6時間と表せるため，求める時間を y とすると，

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{7.7}-\frac{1}{24.6}$$

これを解くと，$y≒11$ となる。

外惑星
地球より外側を公転する惑星。
火星・木星・土星・天王星・海王星。

内惑星
地球より内側を公転する惑星。
水星・金星。

会合周期
同じ天体現象を繰り返す期間。

2　地球表層の構造

【解答】

問1	モホロビチッチ不連続面	問2	エ	問3	2	イ	3	エ	4	エ	5	ウ
問4	(1)	ウ	(2)	アセノスフェア	問5	アイソスタシー	問6	エ				
問7	放射性同位体が崩壊するときに発生する熱。											

【配点】 (20点)

問1　2点，　問2　3点，　問3　各1点×4，　問4　(1)　2点　(2)　2点，
問5　2点，　問6　2点，　問7　3点

【出題のねらい】

地球表層の構造を理解しているかを問う問題とした。地殻・マントルの特徴，プレートとの関係，アイソスタシー，地殻熱流量に関して基本的な問題を出題した。

【解説】　問題

問1　地球は表面から地殻，マントル，外核，内核に分けられる。地殻とマントルの境界面は，発見者の名前からモホロビチッチ不連続面という。省略してモホ不連続面やモホ面ということも多い。

問2　問題文から，地殻の厚さは大陸地殻で30～50 km程度，海洋地殻で5～10 km程度である。一方，問題文に出てこない地球の半径は約6400 kmであるが，この値は知っていなければならない。地殻の厚さを地球の半径で割って割合を出すと，大陸地殻は地球の半径の0.5～0.8 %，海洋地殻は地球の半径の0.08～0.16 %となる。したがって，選択肢から最も近い0.1～1 %を選べばよい。地球全体から見ると，地殻は非常に薄いことがわかる。

問3　図2－1のように，大陸地殻は上部が花こう岩質岩石，下部が玄武岩質岩石，海洋地殻は玄武岩質岩石，上部マントルはかんらん岩質岩石からできている。地球の表層付近がどのような岩石でできているか知っておこう。平均密度は，花こう岩質岩石，玄武岩質岩石，かんらん岩質岩石の順で大きくなり，下層ほど大きな密度の物質が分布していることがわかる。

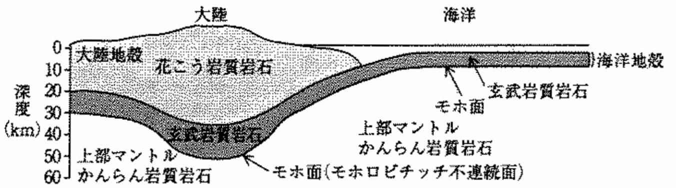


図2－1　地球表層の構造

問4 (1)・(2)　地球表層は，地殻・マントルという分け方の他に，リソスフェア・アセノスフェアという分け方がある(図2－2)。地球表層のかたい部分をリソスフェア，その下のやわらかい部分を

【ポイント】

モホロビチッチ不連続面
地殻とマントルの境界面。

地球の半径
約6400 km

地殻・マントルの構成岩石
大陸地殻上部：花こう岩質岩石
大陸地殻下部：玄武岩質岩石
海洋地殻　　：玄武岩質岩石
上部マントル：かんらん岩質岩石

リソスフェア
地球表層のかたい部分。プレート。厚さは70～150 km程度。

アセノスフェアという。アセノスフェアの最上部には地震波の低速度層があり，特にやわらかくなっている。プレートはかたいリソスフェアの部分を指している。下のアセノスフェアをすべり面として上に乗ったリソスフェアが移動していくのがプレート移動の原理である。リソスフェア(プレート)の厚さは70～150 km程度で，一般に大陸の方が海洋よりも厚くなっている。地殻の厚さは5～50 km程度であるから，大陸でも海洋でもリソスフェア(プレート)は地殻よりも厚い。

問5　地殻と比較してマントルの方が密度は大きく，軽い地殻が重いマントルの上に浮かんでいる状態となっており，通常は均衡面より上の部分の重さが等しくなるような状態でつり合っている。このようなつり合いが取れている状態をアイソスタシーという。

問6　地殻の密度は大陸地殻が約2.7～3.0 g/cm³，海洋地殻が約3.0 g/cm³，上部マントルが約3.3 g/cm³である。地殻よりも上部マントルの密度の方が大きいが，その密度差は小さい。このため，図2－3のように，山脈として上に出っ張る部分(図中のa)よりも，モホ面が下に潜っている部分(図中のb)の方が大きい状態でつり合う。

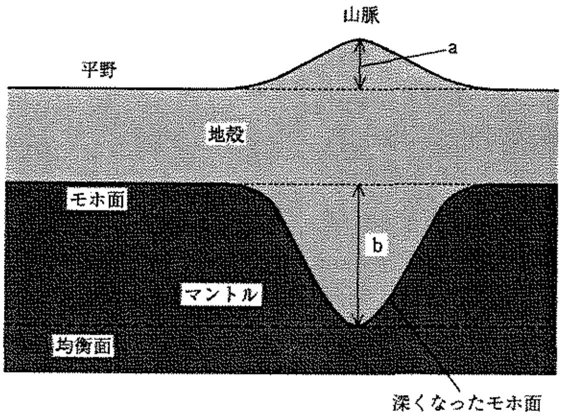


図2－3　アイソスタシー
aよりもbの方が大きい。

この原理は，密度差が小さい水(密度1.0 g/cm³)と氷(密度0.9 g/cm³)の場合を考えるとわかりやすいだろう。図2－4のように，水槽の水に氷を浮かべると，密度差が小さいため水面の上に出ている部分はわずかで，大部分が水面の下に潜っている状態でつり合う。ここに厚さが2倍の氷を浮かべると，水面の上に出ている部分も下に潜っている部分も左の氷の2倍になる状態でつり合う。そのため，図2－4のaよりもbの方が大きくなる。厚さが2倍の氷の上面が山脈に相当し，底面が下に大きく潜っているモホ面に相当する。図2－3と図2－4を対応させて，モホ

アセノスフェア
リソスフェアの下にあるやわらかい部分。最上部には地震波の低速度層があり，特にやわらかい。

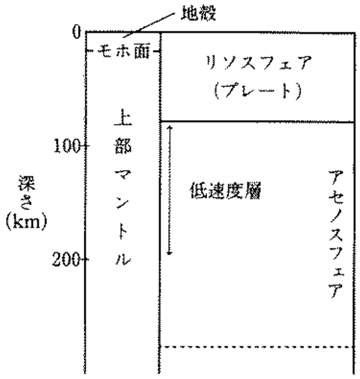


図2－2　地球表層の区分

アイソスタシー
密度の小さい地殻が密度の大きいマントルの上に浮かんでいるようにつり合っている状態。

山脈とモホ面
山脈がある部分では，アイソスタシーによってモホ面は深くなっている。その深さは山脈の高さよりも大きい。

面が山脈の下では大きく潜ったようになることを理解しておこう。

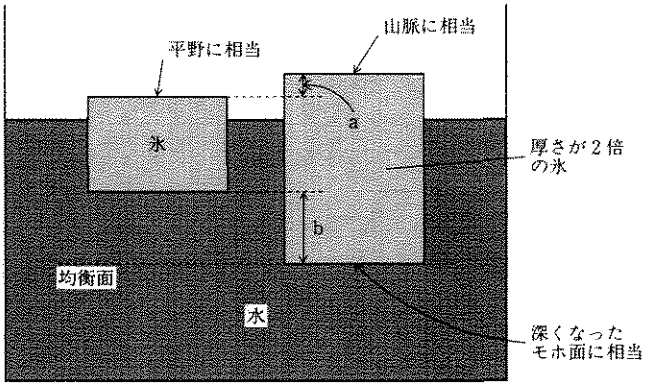


図2－4　アイソスタシーの概念図
aよりもbの方が大きい。

問7　地殻熱流量の熱源に関する問題である。地殻熱流量とは，地殻中を地表に向かって流れる熱量のことで，主な熱源は，地球創成期に閉じ込められた熱と放射性同位体の崩壊に伴う熱の二つがある。

地球の内部は高温であるが，その大部分は地球が誕生したときの高温状態が残ったものである。地球創成期に閉じ込められた熱とは，この地球内部の熱のことである。高温の地球内部から低温の地表に向かって熱が流れており，海洋地殻ではこの熱が多くなっている。

一方，カリウム40などの放射性同位体は一定の割合で自然に崩壊して安定同位体に変化する。放射性同位体の崩壊に伴う熱とは，このとき放出される熱である。地殻に含まれる放射性同位体には，カリウム，トリウム，ウランなどがあり，花こう岩に多く含まれる。大陸地殻では花こう岩質岩石が多いので，この放射性同位体の崩壊に伴う熱が多くなっている。

地殻熱流量

地殻中を地表に向かって流れる熱量。熱源は，地球創成期に閉じ込められた熱と放射性同位体の崩壊に伴う熱。

地殻に含まれる放射性同位体

カリウム（^{40}K），トリウム（^{232}Th），ウラン（^{235}U，^{238}U），ルビジウム（^{87}Rb）など。

3 マグマと火成岩

【解答】

問1	1	かんらん石	2	Ca	3	カルデラ
問2	⑤	問3	SiO_2 重量％：62.1％	岩石名：閃緑岩		
問4	(1)	揮発性成分が発泡し，発生したガスの圧力によって爆発を起こす。				
	(2)	高温の火山ガスと火山砕屑物が混ざり合って高速で流下する現象。				
問5	X	等粒状	Y	色指数	Z	斑れい岩

【配点】 (20点)

問1　各1点×3，　問2　2点，　問3　SiO_2 重量％　3点　岩石名　2点，

問4　(1)　3点　(2)　3点，　問5　X・Y　各1点×2　Z　2点

【出題のねらい】

マグマが冷却・固結して形成される火成岩は，冷却速度の違いや化学組成によって分類される。化学組成や含まれる鉱物など，火成岩の性質はマグマの結晶分化作用との関係が深いため，岩石名をただ暗記するのではなく，どのような過程で形成されるのかを確実に理解する必要がある。今回は，マグマの結晶分化作用を中心に，火山活動や火成岩の基本的理解を問うた。

【解説】 問題

問1 　1 ・ 2 ：上部マントルを構成するかんらん岩質岩石は，温度上昇や圧力低下，水の添加によるかんらん岩の融点低下によって部分溶融が生じる(図3－1)。部分溶融によって生じるマグマは，元のかんらん岩質岩石よりも SiO_2 重量％が高い玄武岩質マグマとなる。上部マントルで生じた玄武岩質マグマは本源マグマとも呼ばれる。マグマの温度低下に伴ってマグマ中では結晶が順次晶出する。有色鉱物では，かんらん石→輝石→角閃石→黒雲母の順に晶出し，無色鉱物では，Caに富む斜長石が初期に晶出し，後にNaに富む斜長石，カリ長石，石英が晶出する。マグマ中で結晶が晶出する際，結晶に取り込まれた成分はマグマから除かれるため，残りのマグマの化学組成が変化する。このように，結晶の晶出に伴ってマグマの化学組成が変化していくことをマグマの結晶分化作用という(表3－1)。

表3－1　結晶分化作用

SiO_2 重量％	マグマの組成変化	有色鉱物	無色鉱物	
45％		かんらん石	Ca斜長石	早期(高温)
塩基性	玄武岩質			
52％		輝石	中間組成の斜長石	
中性	安山岩質	角閃石		
66％			Na斜長石	
酸性	デイサイト質 流紋岩質	黒雲母	カリ長石	
			石　英	晩期(低温)

【ポイント】

マグマの発生

上部マントルでかんらん岩質岩石が部分溶融して生じる。

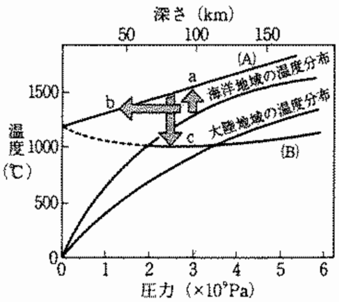


図3－1　マグマの発生

(A)　無水かんらん岩の融点

(B)　H_2O 飽和のかんらん岩の融点

a　温度が上昇して融解する。

b　圧力が減少して融解する。

c　水が添加されてかんらん岩の融点が(A)から(B)に低下して融解する。

マグマの結晶分化作用

結晶の晶出によって，残りのマグマの化学組成が変化していくこと。

有色鉱物の晶出順序

かんらん石→輝石→角閃石→黒雲母

3：地下のマグマ溜(だま)りが溶岩や火山砕屑(さいせつ)物の噴出によって空洞となると，地表が陥没して大きな凹地形が形成されることがある。そのうち直径 2 km 以上のものをカルデラと呼ぶ(ポルトガル語で「大鍋」の意味)。国内では，熊本県の阿蘇(あそ)カルデラが有名である。

無色鉱物の晶出順序
Ca 斜長石→Na 斜長石，カリ長石，石英

一般に，高温の玄武岩質マグマは，粘性が低く流動性に富むため，火口や地表の割れ目などから多くの溶岩流を流出する穏やかな噴火となる。また，溶岩が火口から遠くまで流出するため，裾野が広く傾斜が緩やかな盾状火山が形成される。盾状火山の例として，ハワイ島のマウナロア山がある。マグマの量が非常に多く，広範囲に広がったものが溶岩台地である。溶岩台地の例として，インドのデカン高原がある。それらに対し，低温の流紋岩質マグマは粘性が高く流れにくいため，火口付近に滞留し，火口からゆっくりと溶岩が押し出されながら盛り上がり，溶岩ドーム(溶岩円頂丘)を形成する。溶岩ドームの例として，雲仙普賢(ふげん)岳の平成新山があげられる。

盾状火山，溶岩台地
粘性の低い玄武岩質マグマによる。

溶岩ドーム(溶岩円頂丘)
粘性の高い流紋岩質マグマによる。

問 2　(　ア　)・(　イ　)：マグマは結晶分化作用が進むにつれて，SiO_2 重量％が増加し，SiO_2 重量％によって，玄武岩質マグマ，安山岩質マグマ，流紋岩質マグマに分類される(図 3－2)。結晶分化作用の初期は，有色鉱物では $FeO+Fe_2O_3$ 成分や MgO 成分を多く含むかんらん石や輝石の晶出が多いため，マグマ中の $FeO+Fe_2O_3$ 重量％および MgO 重量％はしだいに低下していく。また，無色鉱物では，初期に Ca 成分に富む斜長石が晶出するため，CaO 重量％も低下していく。

マグマの分類
SiO_2 重量％による。
塩基性マグマ(45～52％)
中性マグマ(52～66％)
酸性マグマ(66％以上)

(　ウ　)：マグマの粘性は，SiO_2 重量％と関係がある。SiO_2 重量％が大きいほど粘性が高くなり，流れにくくなる(図 3－2)。

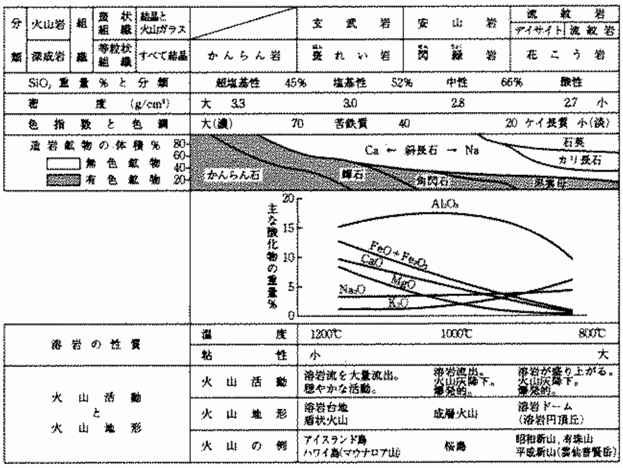


図 3－2　火成岩と火山

問3　問題のマグマAの重量が100 kgであるとすると，SiO_2重量％が63.5％であることから，マグマAに含まれるSiO_2は63.5 kgとなる。マグマAの70.0重量％に相当する分が深成岩Gとなったため，深成岩Gは70.0 kg，残りのマグマは30.0 kgである。残りのマグマのSiO_2重量％が66.8％であることから，残りのマグマに含まれるSiO_2は，$30.0\times\frac{66.8}{100}=20.04$ kgとなる。したがって，深成岩Gに含まれるSiO_2は，
$63.5-20.04=43.46$ kgであるため，深成岩GにおけるSiO_2の割合は，$\frac{43.46}{70.0}\times100=62.08\fallingdotseq62.1$重量％となる。$SiO_2$重量％が52～66％の中性岩に分類されることから，深成岩Gは閃緑(せんりょく)岩である。

問4(1)　粘性が高いマグマは，揮発性成分(ガス成分)を多く含む。揮発性成分を多く含むマグマが地表付近に上昇すると圧力が低下するため，マグマ中で一気に発泡し，ガスが生じる。発生したガスは上部に溜まり，溜まったガスの圧力によって爆発的な噴火が起きる。

(2)　火砕流とは，高温の火山ガスと火山砕屑物が混じりあい，山腹を高速で流下する現象である。流紋岩質マグマの火山活動のように，爆発的な噴火をすると軽石や火山灰などの火山砕屑物が多量に生じ，火砕流が発生することがある。

火砕流
高温の火山ガスと火山砕屑物が混じりあったものが，高速で流下する現象。

問5　火成岩は，冷却の過程による組織の違いから，深成岩と火山岩に分類される。地下深所のマグマ溜りで晶出した結晶が，マグマ溜りの底部に沈積して固結すると，結晶の大きさがそろった等粒状($\boxed{\text{X}}$)組織を示す深成岩となる。一方，地表付近で形成される火山岩は，マグマ溜りですでに晶出していた大きな結晶(斑晶(はんしょう))の周囲を，急冷によって固結した細粒の結晶やガラス質からなる部分(石基(せっき))が取り囲む斑状組織となる。

問題文では，「鉱物の大きさは比較的そろっており」という記述があるため，等粒状組織を示す深成岩と判断できる。また，火成岩は，結晶分化作用によって変化するマグマのSiO_2重量％によって，塩基性岩(45～52％)，中性岩(52～66％)，酸性岩(66％以上)に分類される(図3－2)。塩基性岩には有色鉱物が多く含まれるため，色指数($\boxed{\text{Y}}$)が大きい(岩石の色が黒っぽい)のに対し，酸性岩は有色鉱物の割合が少なく，色指数が小さい(岩石の色が白っぽい)。問題文では，結晶分化作用の初期に晶出する輝石が含まれ，色指数が約50と大きいことから，岩石の色が黒っぽい塩基性岩であると判断できる。したがって，この岩石は斑れい岩($\boxed{\text{Z}}$)である。

深成岩
地下深所でゆっくり冷却・固結する。等粒状組織。
例：斑れい岩，閃緑岩，花こう岩

火山岩
地表付近で急冷・固結する。斑晶と石基からなる斑状組織。
例：玄武岩，安山岩，流紋岩

色指数
岩石に含まれる有色鉱物の体積％。

4 地質調査とボーリング

【解答】

問1	1	地層累重	2	褶曲	3	逆転
	4	鍵	5	基底礫岩	6	岩脈

問2	級化層理	斜交葉理	問3	ウ

問4	古い　A層 → 断層F → G岩体 → D層　新しい

問5	・短期間の火山活動によって放出された火山砕屑物からなる。
	・火山砕屑物が風に乗って広範囲に広がって形成された。
	・鉱物組成や色など，他の地層と区別しやすい。

問6	炭素 14 法

【配点】 (20点)

問1　各1点×6，　問2　各2点×2(順不同)，　問3　2点，　問4　3点，

問5　各1点×3(順不同)，　問6　2点

【出題のねらい】

地質分野における基礎的用語，図の読解から地層などの形成順序，断層の種類を読みとる問題である。基礎用語に関しては，センター試験でも二次試験でも，問題の読解に不可欠な事項である。地層などの形成順序は図の読解とともに，文章の理解力も必要である。また，断層の種類に関しては，その判別方法とともに，図の処理の仕方をしっかりと理解していないと難しく思える種類の問題を出題した。

【解説】　問題

問1　河川などによって海へ運ばれた砕屑物は，ほぼ水平に，下から上へと積み重なって地層を形成していく。したがって，露頭で観察した場合，傾いている地層であっても，下から上へと順に堆積したと考えられる。この考えにしたがえば，下位から上位に向かって地層は新しくなる。これを地層累重の法則($\boxed{\ 1\ }$)と呼ぶ。

しかし，地層が褶曲($\boxed{\ 2\ }$)している場合，この法則が成り立たない場合がある。例えば，次の図4－1の場合，地層はa，b，c，dの順に堆積したが，褶曲した結果，露頭Aでは地層の逆転($\boxed{\ 3\ }$)が生じており，d，c，b，aの順に堆積したように見える。

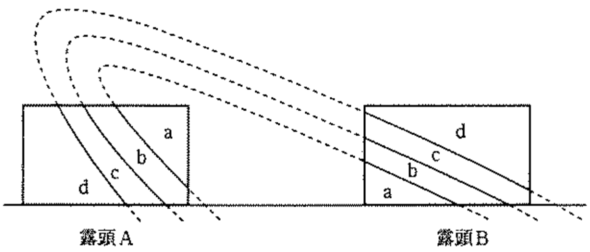


図4－1　地層の逆転

地層の対比に有効な地層を鍵層($\boxed{\ 4\ }$)という。詳しくは**問5**

【ポイント】

地層累重の法則

下位の地層は古く，上位の地層は新しい。

地層が褶曲している場合などには成り立たないことがある。

の解説を読んでほしい。

不整合面の直上にある礫岩を基底礫岩($\boxed{5}$)という。礫岩を構成する礫は，礫が堆積した時代に陸上に分布していたために侵食された地層や岩体に由来する。

図4－2のように，地層や岩体を切るように貫入している火成岩体を岩脈($\boxed{6}$)という。地層に平行に貫入している場合は岩床という。また，日本列島に広く分布する花こう岩のように，広大な面積を占めている貫入岩体を底盤(バソリス)という。

問2　一枚一枚の地層を単層といい，それを構成する粒子によってさまざまな堆積構造が形成される。

級化層理(級化成層)は，粒径の異なる粒子が水底に堆積するとき，粒径の大きな粒子が先に沈降し，粒径の小さい粒子が後になって沈降するために，粒径が系統的に下から上へ細かくなっていくように変化する堆積構造である(図4－3)。混濁流(乱泥流)の堆積物であるタービダイトに特徴的に見られる。

斜交葉理(斜交層理，クロスラミナ)は層理面と葉理，もしくは葉理同士が斜交している堆積構造で，切っている葉理が上，切られている葉理が下である(図4－4)。また，斜交葉理は，水流の方向が変化しやすい三角州の堆積物などに多く見られ，水流の方向を知る手がかりともなる。

流痕は水流によって流された砕屑物によって削られた痕跡であり，層理面に残されている。砂層の場合，波や流れによってつくられた漣痕が見られることもある。漣痕では，とがっている方が上である(図4－5)。

なお，この**問2**では「堆積構造」を問題としているので，直立樹幹化石(樹根化石)のような生痕化石は解答として不適切である。

問3　ボーリング試料から断面図を作成すると，次ページの図4－6のようになる。断層Fは西に傾斜し，西側の上盤が下がっているので正断層である。判断しにくいのならば，この図中の断層と上盤側のB層とC層の地層境界線をさらに西方(左側)へ延長して断層と交わらせてみよう。下盤側のB層とC層の地層境界線よりも，上盤側のB層とC層の地層境界線が西方で断層と交わっていることがわかるであろう。

問4　問題の図や文章だけからは判断するのが難しいので，図4－6の断面図を利用して考えるとよい。

A層～C層は断層によって切られてずれているので，断層よりも古い。G岩体は断層Fによってずれていないので，断層Fよりも新しい。G岩体に由来する礫がD層に含まれているので，G岩体はD層に貫入していることはなく，D層に不整合関係で覆われていると考えられる。したがって，地層や岩体などの形成順序は，A層，T層，B層，C層，断層F，G岩体，D層，E層の順である。

問5　凝灰岩は，火山灰が続成作用を受けて形成された岩石であり，鍵層として用いられることが多い。火山活動は，地質学的な

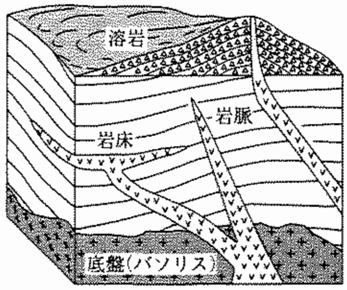


図4－2　火成岩の産状

地層の新旧判定に用いる堆積構造

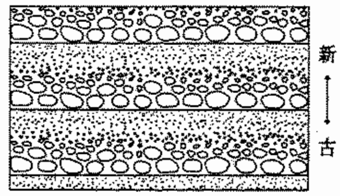


図4－3　級化層理

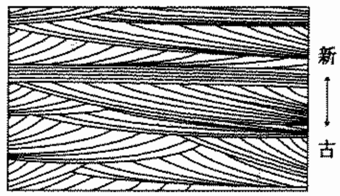


図4－4　斜交葉理

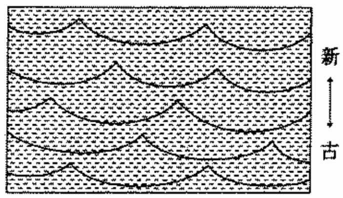


図4－5　漣痕

鍵層
地層の対比に有効な地層
(例)　火山灰，凝灰岩

時間の観点では，非常に短い期間に行われる。火山から放出された火山灰は風に乗って広範囲に降下する。また，火山灰を構成する鉱物の量比は火山活動ごとに異なり，他の地層と区別しやすい。このような理由によって，特徴のある火山灰や凝灰岩は地層の対比に有効な鍵層として用いられることが多い。

問 6　今から何年前かという数値が絶対年代である。この値を知るには，圧力や温度などの物理化学条件に左右されず，一定の割合で崩壊する放射性同位体を用いる。よって，絶対年代を放射年代と呼ぶこともある。放射性同位体の原子個数が半分になるごとの時間を半減期という。半減期の短い放射性同位体は新しい時代，半減期の長い放射性同位体は古い時代の岩石の年代測定に用いられる(表 4 − 1)。

E 層には土器の破片が含まれているので，古くとも 1 万年前程度の地層である。また，炭素が多い木片も含まれている。したがって，このような新しい時代の地層の絶対年代は，半減期の短い炭素 14 法(^{14}C 法，放射性炭素法)を用いて測定する。

U − Pb 法，K − Ar 法などは，火成岩や変成岩の絶対年代を測定する際に用いられ，半減期が長いため，古い時代の岩石の絶対年代の測定に向いている。

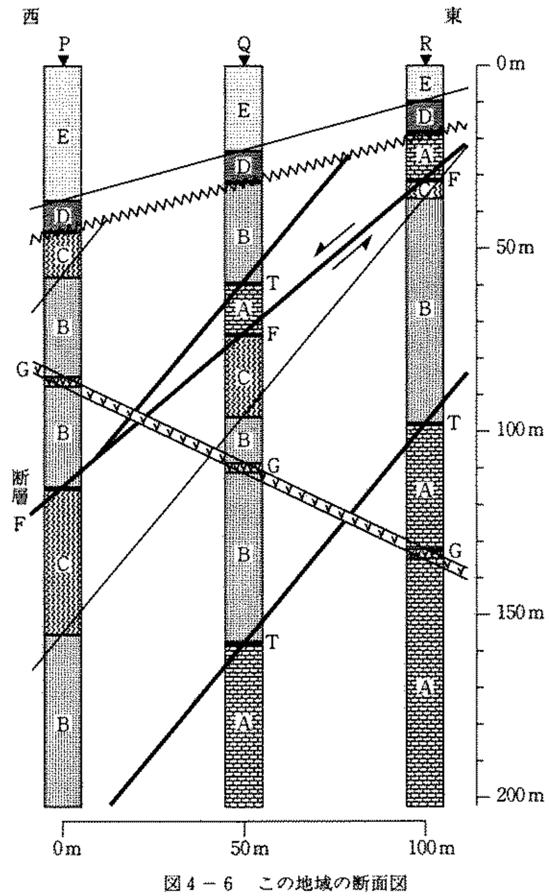


図 4 − 6　この地域の断面図

半減期

放射性同位体の原子個数が半減するごとの時間。

放射年代測定法

半減期が短い　炭素 14 法
半減期が長い　U − Pb 法
K − Ar 法
Rb − Sr 法
Th − Pb 法

表 4 − 1　放射性同位体の半減期

放射性同位体	半減期
^{238}U (ウラン 238)	4.5×10^{9} 年
^{235}U (ウラン 235)	7.0×10^{8} 年
^{232}Th (トリウム 232)	1.4×10^{10} 年
^{40}K (カリウム 40)	1.3×10^{9} 年
^{87}Rb (ルビジウム 87)	4.9×10^{10} 年
^{14}C (炭素 14)	5.7×10^{3} 年

平成 24 年版理科年表より

5 大気の運動

【解答】

問1	1	1.37	2	圏界面	3	コリオリの力	問2	ア
問3	成層圏では高度とともに温度が上昇すること。							
問4	北半球：北東		南半球：南東		問5	エ		
問6	水蒸気が上昇に伴って凝結し，凝結熱（潜熱）を放出して大気を暖めること。							
問7	オゾンホールの形成							

【配点】 （20点）

問1　各2点×3，　問2　2点，　問3　3点，　問4　各1点×2，　問5　2点，
問6　3点，　問7　2点

【出題のねらい】

大気の性質や運動に関する基礎的な知識を確認する問題である。大規模な大気の運動は，地球規模での熱の移動に深く関わっている。それらの原因となっている太陽放射で入射された熱エネルギーが，どのように移動していくのか理解を深めてほしい。

【解説】

問題

問1　基本的な語句や数値の穴埋め問題である。

$\boxed{1}$：地球大気の最上部で，太陽光線に対し垂直に置かれた単位面積に，単位時間あたりに入射するエネルギーは 1.37 kW/m^2 であり，太陽定数と呼ばれている。ただし，地表面が受け取るエネルギーは雲などによる反射や大気による吸収がさし引かれたものとなる。

$\boxed{2}$：地球大気は高度によって性質の異なる層に分類されている（図5－1）。地表から始まり，上下方向の対流運動が活発な層が対流圏で，その上端を圏界面（けんかいめん）（対流圏界面）と呼んでいる。圏界面の高度はおよそ 8 km～16 km で，緯度が低いほど高くなっている。

圏界面より上，高度およそ 50 km までが成層圏である。この名称は，成層圏では上下方向の対流が弱く，比較的安定な層をなしていることからきている。成層圏の上は中間圏，さらにその上は熱圏と呼ばれているが，気象現象にはほとんど関係しない。

$\boxed{3}$：地球は自転しているため，地球表面で運動している物体は，他に何の力もはたらいていなくても直線運動からずれてしまう。このずれを引き起こしているのがコリオリの力（転向力）であり，物体の速度が大きいほど強い。はたらく方向は運動方向に直角で，北半球では右向き，南半球では左向きである。また，コリオリの力の大きさは緯度にも依存し，赤道では 0 で緯度が増すに従って大きくなる。

【ポイント】

太陽定数
地球大気の最上部で太陽の方向に対して垂直に置かれた単位面積に，単位時間あたりに入射する太陽放射のエネルギー。大きさは 1.37 kW/m^2。

大気の温度分布

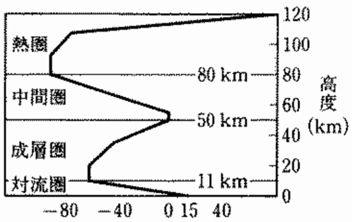


図5－1

対流圏
地球大気の最下層で，対流運動が活発な層。

圏界面
対流圏と成層圏の境界。その高度は，高緯度地域で 8 km ほど，低緯度地域で 16 km ほど。対流圏界面とも呼ばれる。

問 2　地球が太陽放射によってエネルギーを得るだけだと，温度が一方的に上がってしまう。実際には地球自体も赤外線を放射して宇宙空間にエネルギーをすてており，それが太陽から受け取るエネルギーとつり合っているため，地球が一定の温度に保たれているのである。月のように大気も海洋もない天体の場合，受け取った太陽放射は表面を直接暖める。表面の岩石による熱伝導は無視できるほど小さいので，表面の岩石が受け取ったエネルギーをそのまま赤外線放射として放出することでエネルギー収支がつり合っている。

一方，地球では地表に接する形で動きやすい大気や海水が存在しており，それらが運動することで熱エネルギーも移動する。このため，地球表面のある点でのエネルギー収支は，太陽放射による入力と赤外線放射（地球放射）による出力，および大気や海洋によって運び去られたりもち込まれたりするエネルギーの三者でつり合うことになる。

大気や海洋によって，熱は高温な低緯度地域から低温な高緯度地域に輸送される。したがって，低緯度地域では太陽からの入射エネルギーの一部が運び去られるため，地球放射は太陽放射より少なくなる。高緯度地域ではこの逆で，太陽放射より地球放射が上回ることになる。よって，アのグラフが正解となる。

問 3　地球大気の温度分布は図５－１のようになっており，対流圏では高度とともに気温が低下，成層圏では逆に高度とともに気温が上昇していることがわかる。

大気中で上昇気流が起きるためには，ある高度にあった空気塊が何らかの原因で上昇した場合，さらに上昇を促す力がはたらくことが必要である。上昇した空気塊は膨張することで温度が下がるが，そのとき周囲の気温が空気塊の温度より高い場合，上昇した空気塊の密度は周囲より大きくなってしまい，浮力が生じずに下降して元の位置に戻ることになる。この場合は，持続的な上昇気流は起きないわけである。

成層圏では高度とともに気温が上昇しているので，ちょうどその様な状況になっており，上昇気流は発生しにくい。対流圏から上昇気流がやってきても，せいぜい圏界面を押し上げるくらいで，成層圏内には進入できず，水平方向に分散していく結果になるのである。

問 4　赤道付近に向かって収束していく風は，北半球では北から南，南半球ではその逆となる。これらにコリオリの力がはたらくと，北半球では南向きの風に対して力は直角右向きなので西向きに曲げられる。その結果，風向は北東となる。一方，南半球では北向きの風に対して直角左向きに力がはたらくため，やはり西向きに曲げられ，風向は南東となる。

成層圏
圏界面より上，高度およそ50 km までの層。上下方向の大気運動に対し比較的安定である。

コリオリの力
地球が自転しているために，運動する物体に対して生じる力。北半球では運動方向の直角右向き，南半球では直角左向きにはたらく。転向力とも呼ばれる。

地球放射
地球自体が自分の熱をエネルギー源として行う放射。地球では赤外線となる。

風向
風が吹いてくる方角。風の進行方向ではないことに注意。

問5　地球大気の大循環の模式図を図5－2に示す。この図からわかるように，中緯度地域を吹く偏西風は，西から東に地球を一周しているが，同時に南北に大きく蛇行している。この蛇行によって，高緯度側の冷たい空気が低緯度側に運ばれ，逆に低緯度側の暖かい空気が高緯度側に運ばれる。

その結果，高緯度側の気温が上がり，低緯度側の気温は下がるので，熱が低緯度から高緯度へ輸送されたことになる。したがって，エが正解である。

ア・イ：螺旋(らせん)状の風だけでは極側の大気が一方的に増加(ア)または減少(イ)してしまう。

ウ：亜熱帯の海域では，太平洋や大西洋を循環する海流が存在しており，亜熱帯環流と呼ばれている。これは東西方向の流れが大陸に阻まれて南北方向に向きを変えるために，一つの大洋内で循環する流れとなったものである。もし，大陸が存在しない場合は，一定緯度で地球を一周する流れとなっていたはずである。

大気の場合，東西方向の風は山脈などで遮(さえぎ)られることはあるが，これらは容易に上部を越えたり迂回(うかい)できてしまう。このため，偏西風の蛇行の原因になりこそするが，太平洋や大西洋上空を循環する風を生じさせることはできない。

問6　赤道付近の海域では海面温度が高く，海水の蒸発が盛んなので，そこで発生した上昇気流は水蒸気を多く含む。

上昇していく空気塊の温度が下がってくると，この水蒸気は凝結して雲をつくるが，このとき凝結熱として放出された潜熱によって空気塊が暖められる。この結果，空気塊の上昇に伴う温度低下が和らげられて，より大きな浮力をもつことになり，上昇気流を強めるようにはたらくのである。

問7　冬季の南極上空の成層圏では，極夜渦(極渦とも呼ぶ)のために低緯度からの熱の流入が妨げられ，温度が低下する。その結果，極成層圏雲と呼ばれる氷晶からなる雲が発生し，春になって日光があたるようになると，この氷晶の表面でオゾンを分解する反応が起きてしまう。このため，南極上空ではオゾンが減少した穴のような領域，オゾンホールが発生することになる。オゾンの分解反応のためには塩素が必要だが，これを主に供給しているのがフロンなので，フロンの使用が禁止されることになったのである。

偏西風

中緯度地域で地球を一周して吹いている西風。圏界面付近で最も強くなり，その部分は特にジェット気流と呼ばれている。

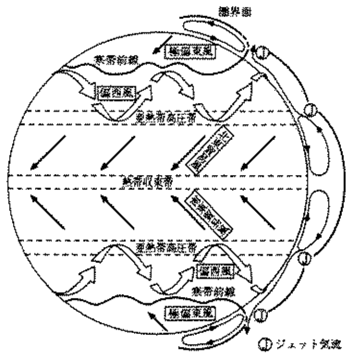


図5－2　大気大循環

潜熱

水蒸気を含む大気が，その蒸発熱としてもっているエネルギー。水蒸気が凝結するとき放出される。

オゾンホール

フロンが原因となって主に南極上空の成層圏でオゾンが分解されて減少し，あたかもオゾン層に穴が開いたかのようになる現象。