クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2014年度　第1回　**全統記述模試**

学習の手引き【解答・解説集】

数学・理科

【2014年5月実施】

※英語冊子巻末に「**自己採点シート**」と「**学力アップ・志望校合格のための復習法**」を掲載していますので、志望校合格へむけた効果的な復習のためにご活用ください。

河合塾

1461210119501040

【数　　学】

【Ｉ型受験者用】

1　小問集合

【Ｉ型共通　必須問題】

（配点　60点）

(1)　次の問に答えよ．

(i)　$(x^2+x+2)(x^2-x+2)$ を展開せよ．

(ii)　x^4+5x^2+9 を因数分解せよ．

(2)　実数 x，y が $x+y=3$，$xy=-1$ を満たすとき，次の式の値を求めよ．

(i)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　(ii)　x^2+y^2　　(iii)　x^3+y^3

(3)　a は定数とする．x の方程式

$$a|x-2|-3=0 \qquad \cdots(*)$$

がある．

(i)　(*)が $x=-1$ を解にもつとき，a の値を求めよ．

(ii)　a が(i)で求めた値のとき，(*)を解け．

(4)　$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CA}=4$ である三角形 ABC がある．

(i)　$\cos A$，$\sin A$ の値をそれぞれ求めよ．

(ii)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(iii)　三角形 ABC の外接円の半径と内接円の半径をそれぞれ求めよ．

【配点】

(1)　10 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．

(2)　15 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．(iii)　5 点．

(3)　12 点．

(i)　6 点．(ii)　6 点．

(4)　23 点．

(i)　8 点．(ii)　5 点．(iii)　10 点．

【出題のねらい】

(1)　展開や因数分解を正しく実行できるかをみる問題である．

(2)　基本対称式を利用して対称式の値を求められるかをみる問題である．

(3)　絶対値記号を含む方程式を解くことができるかをみる問題である．

(4)　三角比に関するいくつかの公式を正しく用いられるかをみる問題である．

【解答】

(1)(i)
$$\begin{aligned}&(x^2+x+2)(x^2-x+2)\\&=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}\\&=(x^2+2)^2-x^2\\&=\boldsymbol{x^4+3x^2+4}.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}&x^4+5x^2+9\\&=x^4+6x^2+9-x^2\\&=(x^2+3)^2-x^2\\&=\{(x^2+3)+x\}\{(x^2+3)-x\}\\&=\boldsymbol{(x^2+x+3)(x^2-x+3)}.\end{aligned}$$

(2)(i)
$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{x+y}{xy}\\&=\frac{3}{-1}\\&=\boldsymbol{-3}.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=3^2-2(-1)\\&=\boldsymbol{11}.\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)\\&=11\cdot3-(-1)\cdot3 \quad \text{((ii)より)}\\&=\boldsymbol{36}.\end{aligned}$$

(3)(i)　$x=-1$ を(*)に代入すると，

$$a|-3|-3=0.$$
$$3a-3=0.$$
$$\boldsymbol{a=1}.$$

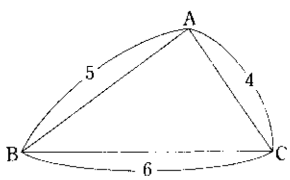
(ii)　(i)より，(*)は，

$$|x-2|-3=0.$$

これを解くと，

$$|x-2|=3.$$
$$x-2=\pm3.$$
$$\boldsymbol{x=-1,\ 5}.$$

(4)



(i)　余弦定理から，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A.$$
$$6^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cos A.$$
$$40\cos A=5.$$
$$\cos A=\boldsymbol{\frac{1}{8}}.$$

また，$0°<A<180°$ より，$\sin A>0$ であるから，

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}.$$

(ii)　(i)より，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$$
$$=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}.$$

(iii)　三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理から，

$$2R\sin A=BC.$$

(i)より，

$$2R\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=6.$$
$$R=\frac{8}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{7}}{7}}.$$

三角形 ABC の内接円の半径を r とすると，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)r.$$

(ii)より，

$$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}(5+6+4)r.$$
$$r=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}.$$

【解説】　**問題**

(1)(i)

$$(x^2+x+2)(x^2-x+2)$$
$$=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$$

として，

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

展開の公式

を用いればよい．

(ii)

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

因数分解の公式 1

に注目して，

$$x^4+5x^2+9=x^4+6x^2+9-x^2$$
$$=(x^2+3)^2-x^2$$

とし，

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

因数分解の公式 2

を用いればよい．

(2)(i)，(ii)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy},$$
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

として，それぞれに $x+y=3$，$xy=-1$ を代入すればよい．

(iii)　**【解答】**では，(ii)の結果を利用することを考えて，

$$x^3+y^3=(x^2+y^2)(x+y)-x^2y-xy^2$$
$$=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)$$

としたが，次のようにしてもよい．

((2)(iii)の別解)

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=3^3-3\cdot(-1)\cdot 3$$
$$=36.$$

((2)(iii)の別解終り)

(3)(i)　(＊)が $x=-1$ を解にもつとは，(＊)に $x=-1$ を代入した等式が成り立つことである．

このことから，(＊)に $x=-1$ を代入した式，

$a|(-1)-2|-3=0$，すなわち，$3a-3=0$

から，a の値を求めればよい．

(ii)　(i)より，$a=1$ であるから，(＊)は，

$$|x-2|-3=0. \qquad \cdots①$$

このあと**【解答】**では，① を，

$$|x-2|=3$$

と変形し，

A が正の定数のとき，

$$|X|=A \iff X=\pm A$$

絶対値の性質 1

を用いて ① の解を求めた．

また，

$$|X|=\begin{cases} X & (X\geqq 0 \text{ のとき}), \\ -X & (X<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

絶対値の性質 2

を用いて，次のように ① を解いてもよい．

(① を解く別解)

(ア)　$x-2\geqq 0$ のとき．

$$x\geqq 2. \qquad \cdots②$$

このとき ① は，

$$(x-2)-3=0.$$
$$x=5.$$

これは ② を満たす．

(イ)　$x-2<0$ のとき．

$$x<2. \qquad \cdots③$$

このとき ① は，

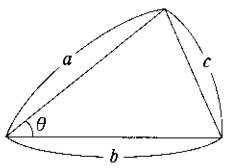
$$-(x-2)-3=0,$$
$$x=-1.$$

これは③を満たす．

(ア)，(イ)より，①の解は，
$$x=5,\ -1.$$

（①を解く別解終り）

(4)(i)　三角形ABCにおいて，3辺の長さが与えられているから，



上図において，
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

余弦定理

を用いると，$\cos A$ の値を求めることができる．

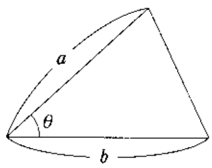
また，$\cos A$ の値を求めたあとは，

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

三角比の相互関係

を用いると，$\sin A$ の値を求めることができる．

(ii)　(i)で $\sin A$ の値を求めているから，

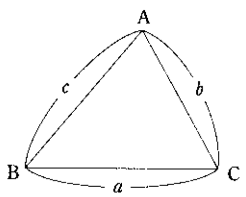


上図の三角形の面積は，
$$\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

三角形の面積

を用いればよい．

(iii)　(i)で $\sin A$ の値を求めているから，

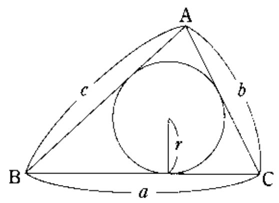


上図において，三角形ABCの外接円の半径を R とすると，
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

正弦定理

を用いると，外接円の半径を求めることができる．

また，(ii)で三角形ABCの面積を求めているから，



上図において，三角形ABCの内接円の半径を r とすると，
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

三角形の内接円の半径

を用いると，内接円の半径を求めることができる．

2　2次関数

【I型数学I　必須問題】

（配点　40点）

a は実数の定数とする．2つの2次関数
$$f(x)=x^2-2x-4,\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax$$
があり，$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を p，最小値を q とする．さらに，$0\leqq x\leqq 3$ における $g(x)$ の最小値を $m(a)$ とする．

(1)　$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　p と q の値を求めよ．

(3)　$m(a)$ を a を用いて表せ．

(4)　$q\leqq m(a)\leqq p$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　6点．

(2)　12点．

(3)　12点．

(4)　10点．

【出題のねらい】

グラフを利用して，2次関数の最大値，最小値を正しく求められるかをみる問題である．

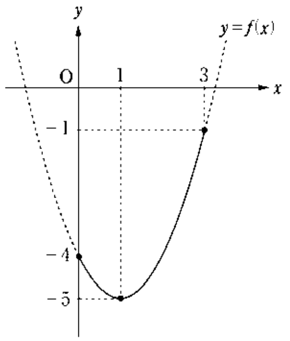
【解答】

(1)
$$f(x)=x^2-2x-4$$
$$=(x-1)^2-5$$

より，求める頂点の座標は，

$$(1,\ -5).$$

(2) (1)より，$y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフは次のようになる．



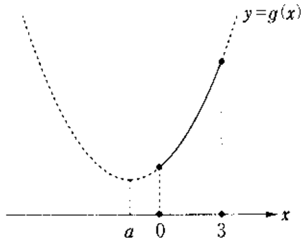
よって，

$$p=-1,\ q=-5.$$

(3)
$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax$$
$$=\frac{1}{2}(x-a)^2-\frac{1}{2}a^2.$$

$m(a)$について，放物線 $y=g(x)$ の軸 $x=a$ の位置で場合分けをして考える．

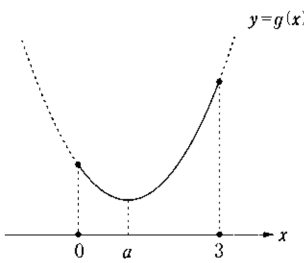
(ア) $a<0$ のとき．



グラフより，$0\leqq x\leqq 3$ において，$g(x)$ は $x=0$ のとき最小となるから，

$$m(a)=g(0)$$
$$=0.$$

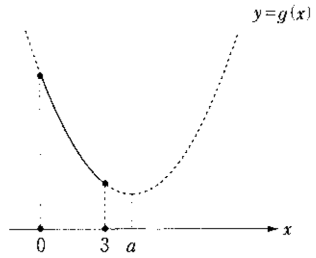
(イ) $0\leqq a\leqq 3$ のとき．



グラフより，$0\leqq x\leqq 3$ において，$g(x)$ は $x=a$ のとき最小となるから，

$$m(a)=g(a)$$
$$=-\frac{1}{2}a^2.$$

(ウ) $3<a$ のとき．



グラフより，$0\leqq x\leqq 3$ において，$g(x)$ は $x=3$ のとき最小となるから，

$$m(a)=g(3)$$
$$=\frac{9}{2}-3a.$$

(ア)，(イ)，(ウ)より，

$$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases} 0 & (a<0\ のとき), \\ -\dfrac{1}{2}a^2 & (0\leqq a\leqq 3\ のとき), \\ \dfrac{9}{2}-3a & (3<a\ のとき). \end{cases}}$$

(4) (2)より，

$$q\leqq m(a)\leqq p$$

は，

$$-5\leqq m(a)\leqq -1. \qquad \cdots(*)$$

(エ) $a<0$ のとき．

(3)より，$m(a)=0$ であり，これは$(*)$を満たさない．

(オ) $0\leqq a\leqq 3$ のとき．

(3)より，$m(a)=-\frac{1}{2}a^2$ であるから，$(*)$は，

$$-5\leqq -\frac{1}{2}a^2\leqq -1.$$
$$2\leqq a^2\leqq 10.$$

$0\leqq a\leqq 3$ より，

$$\sqrt{2}\leqq a\leqq 3.$$

(カ) $3<a$ のとき．

(3)より，$m(a)=\frac{9}{2}-3a$ であるから，$(*)$は，

$$-5\leqq \frac{9}{2}-3a\leqq -1.$$
$$\frac{11}{6}\leqq a\leqq \frac{19}{6}.$$

$3<a$ より，

$$3<a\leqq \frac{19}{6}.$$

(エ)，(オ)，(カ)より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{\sqrt{2}\leqq a\leqq \frac{19}{6}}.$$

【解説】 問題

(1) 一般に，放物線 $y=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ の頂点を求めるには，平方完成して，

$$y=A(x-\alpha)^2+\beta$$

と変形すればよい．このとき，グラフの頂点の座標は，

$$(\alpha,\ \beta)$$

である．

(2) $0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値 p，最小値 q を求めるには，$y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフを利用すればよい．

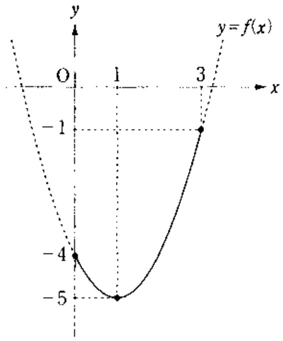
$y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフについては，

$$f(x)=(x-1)^2-5$$

と変形したあと，

> 2次関数 $y=a(x-p)^2+q\ (a\neq 0)$ のグラフは，
> $a>0$ のとき，
> 　頂点の座標が $(p,\ q)$ の下に凸の放物線，
> $a<0$ のとき，
> 　頂点の座標が $(p,\ q)$ の上に凸の放物線
> である
>
> **2次関数のグラフ**

を用いると，次のようになる．



(3) $y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，$g(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最小値 $m(a)$ を求めるには，放物線 $y=g(x)$ の軸と $0\leqq x\leqq 3$ の位置関係で場合分けをして考えることになる．

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)^2-\frac{1}{2}a^2$$

より，放物線 $y=g(x)$ の軸は $x=a$ であるから，a が $0\leqq x\leqq 3$ に含まれるか，含まれないかで，

(ア) $a<0$

(イ) $0\leqq a\leqq 3$

(ウ) $3<a$

の3通りの場合分けを行えばよい．

(4) (2)より，

$$q\leqq m(a)\leqq p$$

は，

$$-5\leqq m(a)\leqq -1 \qquad \cdots(*)$$

となる．

【解答】では，a の不等式 $(*)$ を解くために，

(エ) $a<0$

(オ) $0\leqq a\leqq 3$

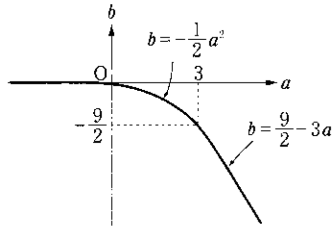
(カ) $3<a$

の3通りに場合分けをして考えた．

また，ab 平面上で $b=m(a)$ のグラフを考えて，次のように $(*)$ を解いてもよい．

((4)の別解) ($(*)$ までは**【解答】**と同じ)

(3)より，$b=m(a)$ のグラフは次のようになる．



ここで，

$$\frac{1}{2}a^2=1 \quad (0\leqq a\leqq 3)$$

を解くと，

$$a=\sqrt{2}.$$

また，

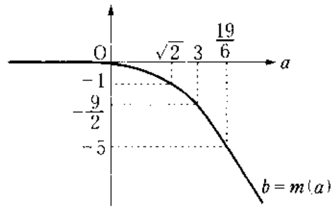
$$\frac{9}{2}-3a=-5 \quad (3<a)$$

を解くと，

$$a=\frac{19}{6}.$$

よって，$b=m(a)$ のグラフより，$(*)$ を満たす a の値の範囲は，

$$\sqrt{2}\leqq a\leqq\frac{19}{6}.$$



((4)の別解終り)

$\boxed{3}$ 場合の数

【Ⅰ型数学Ⅰ，A　必須問題】

（配点　40点）

> 0から9までの数字がひとつずつ書かれた10枚のカード$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，…，$\boxed{9}$がある．この中から5枚取り出して左から右へ一列に並べる並べ方を考える．
>
> (1)(i)　並べ方は何通りあるか．
>
> (ii)　$\boxed{0}$が$\boxed{1}$と隣り合うような並べ方は何通りあるか．
>
> (iii)　$\boxed{0}$が$\boxed{1}$，$\boxed{2}$の少なくとも一方と隣り合うような並べ方は何通りあるか．
>
> (2)　$\boxed{0}$より左に$\boxed{1}$があり，$\boxed{0}$より右に$\boxed{2}$があるような並べ方を考える．
>
> (i)　並べ方は何通りあるか．
>
> (ii)　$\boxed{0}$より左にあるカードで定まる数をL，$\boxed{0}$より右にあるカードで定まる数をRとする．例えば，
>
> $\boxed{1}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{2}$のとき，$L=13$，$R=42$，
>
> $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$のとき，$L=1$，　$R=234$．
>
> (i)で求めた並べ方のうち，$L<R$となる並べ方は何通りあるか．

【配点】

(1)　20点．

(i)　6点．(ii)　6点．(iii)　8点．

(2)　20点．

(i)　8点．(ii)　12点．

【出題のねらい】

状況を正確に把握し，条件を満たす順列の個数を正確に数え上げられるかをみる問題である．

【解答】

(1)(i)　異なる10枚のカードから5枚のカードを取り出す順列の総数を求めればよいから，求める場合の数は，

$${}_{10}\mathrm{P}_5=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$$
$$=\mathbf{30240}(\textbf{通り}).$$

(ii)　隣り合う$\boxed{0}$と$\boxed{1}$をまとめて$\boxed{\mathrm{X}}$で表すことにすると，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$以外の8枚のカードから取り出した3枚と$\boxed{\mathrm{X}}$の合計4つのものの並べ方を考えればよい．

$\boxed{\mathrm{X}}$の作り方は，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$の並べ方を考えて，

$$2!=2(\text{通り}).$$

異なる8枚のカードから3枚のカードを取り出す組合せは，

$${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56(\text{通り}).$$

この3枚のカードと$\boxed{\mathrm{X}}$の合計4つのものの並べ方は，

$$4!=24(\text{通り}).$$

よって，$\boxed{0}$が$\boxed{1}$と隣り合うような並べ方は，

$$2\cdot56\cdot24=\mathbf{2688}(\textbf{通り}).$$

(iii)　$\boxed{0}$と$\boxed{1}$が隣り合うような並べ方は，(1)より，

2688通り．

同様に，$\boxed{0}$と$\boxed{2}$が隣り合うような並べ方は，

2688通り．

さらに，$\boxed{0}$と$\boxed{1}$，$\boxed{0}$と$\boxed{2}$がともに隣り合うような並べ方は，隣り合う$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$をまとめて$\boxed{\mathrm{Y}}$で表すことにすると，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$以外の7枚のカードから取り出した2枚と$\boxed{\mathrm{Y}}$の合計3つのものの並べ方を考えればよい．

$\boxed{\mathrm{Y}}$の作り方は，$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}$，$\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$の

2通り．

異なる7枚のカードから2枚のカードを取り出す組合せは，

$${}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21(\text{通り}).$$

この2枚のカードと$\boxed{\mathrm{Y}}$の合計3つのものの並べ方は，

$$3!=6(\text{通り}).$$

よって，$\boxed{0}$と$\boxed{1}$，$\boxed{0}$と$\boxed{2}$がともに隣り合うような並べ方は，

$$2\cdot21\cdot6=252(\text{通り}).$$

よって，$\boxed{0}$が$\boxed{1}$，$\boxed{2}$の少なくとも一方と隣り合うような並べ方は，

$$2688\cdot2-252=\mathbf{5124}(\textbf{通り}).$$

(2)(i)

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

上記の5ヵ所の$\boxed{}$のうち，まず3ヵ所を選び，その3ヵ所に左から順に$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{2}$を並べ，残りの2ヵ所に，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$以外の7枚のカードから2枚のカードを取り出して並べればよい．

5ヵ所から3ヵ所を選ぶ方法は，

$${}_5\mathrm{C}_3=10(\text{通り}).$$

7枚のカードから2枚のカードを取り出して並べる方法は，

$${}_7\mathrm{P}_2=42(\text{通り}).$$

よって，$\boxed{0}$より左に$\boxed{1}$があり，$\boxed{0}$より右に$\boxed{2}$があるような並べ方は，

$$10\cdot42=\mathbf{420}(\textbf{通り}).$$

(ii) $\boxed{0}$の位置で場合分けをして考える．

$L<R$となるためには，

(ア) $\boxed{A}\boxed{0}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$　(イ) $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{0}\boxed{C}\boxed{D}$

のいずれかの場合を考えればよい．

(ア)のとき，$A=1$であり，B，C，Dは$\boxed{2}$と残り7枚のカードから取り出した2枚の合計3枚のカードの並べ方を考えればよい．

よって，$L<R$となる並べ方は，

$${}_7C_2\cdot 3!=126(\text{通り}).$$

(イ)のとき，$A=1$または$B=1$である．

$A=1$の場合，C，Dは$\boxed{2}$と残り7枚のカードから取り出した1枚の合計2枚のカードを並べ，Bには残り6枚のカードから1枚のカードを選べばよい．

よって，$L<R$となる並べ方は，

$${}_7C_1\cdot 2!\cdot {}_6C_1=84(\text{通り}).$$

$B=1$の場合，$C=2$とすると$L>R$となり不適であるから，$D=2$である．さらに，$L<R$となるには，7枚のカードから2枚のカードを選んで小さい方の数をA，大きい方の数をCとすればよい．

よって，$L<R$となる並べ方は，

$${}_7C_2=21(\text{通り}).$$

(ア)，(イ)より，$L<R$となる並べ方は，

$$126+84+21=\mathbf{231(通り)}.$$

【解説】 問題

(1)(i) 異なる10枚のカードから異なる5枚のカードを取り出して並べるのであるから，次の公式を用いればよい．

> 異なるn個のものから，異なるr個を取り出して並べる方法の総数は，
>
> $${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$
> $$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
>
> **順列の公式**

(ii) $\boxed{0}$と$\boxed{1}$が隣り合うような並べ方を数える場合，「隣り合うものは1つにまとめる」という考え方が重要である．その際，1つにまとめたものの順序にも注意する必要がある．

(iii) 「$\boxed{0}$と$\boxed{1}$が隣り合う並べ方」，「$\boxed{0}$と$\boxed{2}$が隣り合う並べ方」がそれぞれ何通りあるかを求めた後，これらを直接加えると，「$\boxed{0}$と$\boxed{1}$，$\boxed{0}$と$\boxed{2}$がともに隣り合う並べ方」を2回重複して数えてしまうことになる．そこで，**【解答】**では，「$\boxed{0}$と$\boxed{1}$，$\boxed{0}$と$\boxed{2}$がともに隣り合う並べ方」が何通りあるかを求めたあと，

> 2つの集合A，Bに対して，
>
> $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
>
> **和集合の要素の個数**

に従って，場合の数を求めた．

(2)(i) $\boxed{0}$より左に$\boxed{1}$があり，$\boxed{0}$より右に$\boxed{2}$があるような並べ方を考えるには，まず，

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

の5ヵ所のうち，3ヵ所を選び，選んだ3ヵ所に左から順に$\boxed{1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{2}$と並べ，残った2ヵ所に，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$以外の7枚のカードから2枚のカードを選んで並べればよい．

(ii) $\boxed{0}$の位置に着目して場合分けすればよい．

$\boxed{0}$より左に$\boxed{1}$があり，$\boxed{0}$より右に$\boxed{2}$があるような並べ方を考えるのであるから，$\boxed{0}$が両端にくることはない．

したがって，

(ア) $\boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

(イ) $\boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{}$

(ウ) $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{}$

の3つの場合について考えればよい．

(ウ)の場合，Lは3桁の数，Rは1桁の数であるから，$L<R$を満たさない．

したがって，(ア)，(イ)の2つの場合を考えればよい．

(ア)の場合，

$\boxed{A}\boxed{0}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}$

とおくと，$A=1$となるから，$L=1$．さらに，Rは3桁の数であるから，つねに$L<R$が成り立つ．

したがって，あとは$\boxed{B}$，$\boxed{C}$，$\boxed{D}$のいずれかは$\boxed{2}$であることに注意して，B，C，Dの決め方を考えればよい．

(イ)の場合，

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{0}\boxed{C}\boxed{D}$

とおくと，$A=1$または$B=1$となる．

L，Rはいずれも2桁の数であるから，$A=1$のとき，つねに$L<R$が成り立つ．

したがって，あとは，$\boxed{C}$，$\boxed{D}$のいずれかは$\boxed{2}$であることに注意して，B，C，Dの決め方を考えればよい．

また，$B=1$のとき，$C=2$または$D=2$である．$C=2$とすると，$3\leqq A\leqq 9$より，$L>R$となり不適であるから，$D=2$でなければならない．

$\boxed{A}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{C}\boxed{2}$

あとは，$A<C$ となるような A，C の決め方を考えればよい．

【Ⅱ型受験者用】

1　小問集合

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50 点）

(1) 三角形 ABC において，AB＝1，AC＝$\sqrt{3}$，$\angle$BAC＝30° のとき，辺 BC の長さと三角形 ABC の外接円の半径を求めよ．

(2) 4 人で 1 回だけジャンケンをする．
　(i) 1 人だけが勝者となる確率を求めよ．
　(ii) 1 人の勝者も出ない確率を求めよ．

(3) x の方程式 $4^x-a\cdot 2^x+12=0$ が $x=2$ を解にもつとする．
　定数 a の値を求めよ．また，方程式の解をすべて求めよ．

(4) 定積分 $\int_1^3 x^2-1\,dx$ の値を求めよ．

(5) 円 $C:(x-3)^2+y^2=1$ と直線 $l:y=mx-1$ が異なる 2 点で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ．

【配点】

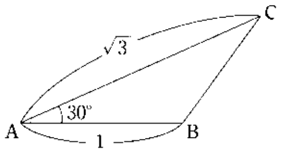
(1)　10 点．
(2)　13 点．
　(i)　5 点．(ii)　8 点．
(3)　9 点．
(4)　10 点．
(5)　8 点．

【出題のねらい】

(1) 三角比における余弦定理と正弦定理を正しく用いられるかをみる問題である．
(2) 根元事象を正しく把握して確率を求められるかをみる問題である．
(3) 指数方程式の意味を正しく理解し，それを解くことができるかをみる問題である．
(4) 絶対値を含む定積分の値を正しく求められるかをみる問題である．
(5) 円と直線の位置関係を正しく捉えられるかをみる問題である．

【解答】

(1)



余弦定理から，

$$BC^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cos 30^\circ$$
$$=1+3-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=1.$$

よって，

$$BC=1.$$

また，三角形ABCの外接円の半径を R とすると，正弦定理から，

$$2R\sin 30^\circ=1.$$

よって，

$$R=1.$$

(2)(i) 4人の手の出し方の総数は，

$$3^4 \text{ 通り}$$

あり，これらは同様に確からしい．

このうち，1人だけが勝者となるのは，

$$\begin{cases}\text{誰が勝つかが}\quad 4\text{ 通り},\\ \text{どの手で勝つかが}\quad 3\text{ 通り}\end{cases}$$

より，

$$4\cdot 3 \text{ 通り}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{4\cdot 3}{3^4}=\frac{4}{27}.$$

(ii) 2人だけが勝者となるのは，

$$\begin{cases}\text{誰が勝つかが}\quad {}_4C_2\text{ 通り},\\ \text{どの手で勝つかが}\quad 3\text{ 通り}\end{cases}$$

より，

$${}_4C_2\cdot 3 \text{ 通り}.$$

したがって，2人だけが勝者となる確率は，

$$\frac{{}_4C_2\cdot 3}{3^4}=\frac{6}{27}.$$

また，3人だけが勝者となる確率は，1人だけが敗者となる確率であるから，(i)と同様に考えて，

$$\frac{4}{27}.$$

これらと(i)を合わせて，余事象を考えると，求める確率は，

$$1-\left(\frac{4}{27}+\frac{6}{27}+\frac{4}{27}\right)=\frac{13}{27}.$$

(3)
$$4^x-a\cdot 2^x+12=0. \qquad \cdots(*)$$

(*)が $x=2$ を解にもつことから，

$$4^2-a\cdot 2^2+12=0.$$
$$28-4a=0.$$

よって，

$$a=7.$$

このとき(*)は，

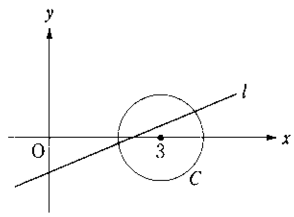
$$4^x-7\cdot 2^x+12=0.$$
$$(2^x)^2-7\cdot 2^x+12=0.$$
$$(2^x-3)(2^x-4)=0.$$
$$2^x=3,\ 4.$$
$$x=\log_2 3,\ 2.$$

(4)
$$|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x\leqq -1,\ 1\leqq x),\\ 1-x^2 & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

であるから，

$$\int_{-1}^{3}|x^2-1|\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)\,dx$$
$$=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}+\left(6+\frac{2}{3}\right)$$
$$=8.$$

(5)



C の中心は点$(3,\ 0)$であり，半径は1．

C の中心と l の距離を d とすると，

$$d=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

C と l が異なる2点で交わる条件は，

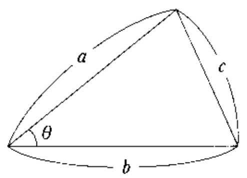
$$d<1.$$

これより，

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}<1.$$
$$|3m-1|<\sqrt{m^2+1}.$$
$$(3m-1)^2<m^2+1.$$
$$8m^2-6m<0.$$
$$2m(4m-3)<0.$$
$$0<m<\frac{3}{4}.$$

【解説】　**問題**

(1)



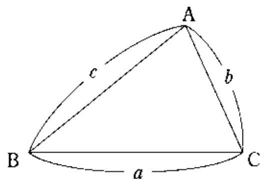
上図において，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

余弦定理

を用いると，辺 BC の長さを求めることができる．

また，



上図において，三角形 ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

正弦定理

を用いると，三角形 ABC の外接円の半径を求めることができる．

(2)　ジャンケンをする 4 人を A，B，C，D とする．

4 人で 1 回だけジャンケンをするとき，手の出し方の総数は，

$$3^4 \text{ 通り}$$

である．

(i)　例えば，A だけが勝者になるのは，

$$\begin{cases}\text{A の手の出し方が　3 通り，}\\ \text{B，C，D の手の出し方が　1 通り}\end{cases}$$

であるから，A だけが勝者になる手の出し方は

$$3\cdot 1=3(\text{通り}).$$

B，C，D についても同様であるから，1 人だけが勝者となるような手の出し方は，

$$4\cdot 3=12(\text{通り})$$

となる．

あとは，

事象 A の起こる確率を $P(A)$ とすると，

$$P(A)=\frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

確率の定義

に従えばよい．

(ii)　**【解答】**では，1 人だけが勝者となる確率，2 人だけが勝者となる確率，3 人だけが勝者となる確率をそれぞれ求め，

事象 A が起こる確率を $P(A)$ とすると，余事象 $\overline{A}$ が起こる確率は，

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

余事象の確率

を用いて，1 人の勝者も出ない確率を求めた．

また，余事象を用いずに，次のように解くこともできる．

((2)(ii) の別解)

4 人で 1 回だけジャンケンをするとき，1 人の勝者も出ないのは次の (ア)，(イ) の場合である．

(ア)　4 人とも同じ手を出す場合．

この場合の手の出し方は，

3 通り．

(イ)　4 人の出す手が 3 種類となる場合．

この場合の手の出し方は，

$$\begin{cases}\text{どの 2 人が同じ手を出すかが } {}_4C_2 \text{ 通り，}\\ \text{その 2 人がどの手を出すかが 3 通り，}\\ \text{残りの 2 人の手の出し方が 2 通り}\end{cases}$$

より，

$${}_4C_2\cdot 3\cdot 2=36(\text{通り}).$$

(ア)，(イ) より，求める確率は，

$$\frac{3+36}{3^4}=\frac{13}{27}.$$

((2)(ii) の別解終り)

(3)　x の方程式

$$4^x-a\cdot 2^x+12=0 \qquad \cdots(*)$$

が $x=2$ を解にもつとは，(*) に $x=2$ を代入した等式が成り立つことである．

このことから，(*) に $x=2$ を代入した式，

$$4^2-a\cdot 2^2+12=0,\ \text{すなわち，}\ 28-4a=0$$

が成り立ち，ここから a の値を求めればよい．

$a=7$ を得たあと，この値を (*) に代入すると，

$$4^x-7\cdot 2^x+12=0.$$

$2^x=t$ とおくと，

$$t^2-7t+12=0.$$
$$(t-3)(t-4)=0.$$
$$t=3,\ 4.$$

したがって，

$$2^x=3,\ 4.$$

あとは，

$a>0$，$a\neq 1$ で $M>0$ とするとき，

$$M=a^p \Longleftrightarrow \log_a M=p$$

指数と対数

を用いればよい．

(4)

$$|X|=\begin{cases} X & (X\geqq 0 \text{ のとき}), \\ -X & (X\leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

絶対値の性質

に従うと，

$$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x^2-1\geqq 0 \text{ のとき}), \\ 1-x^2 & (x^2-1\leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-1 & (x\leqq -1,\ 1\leqq x \text{ のとき}), \\ 1-x^2 & (-1\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

そこで，積分区間を$-1\leqq x\leqq 1$と$1\leqq x\leqq 3$に分割して，

$$\int_{-1}^{3}|x^2-1|\,dx=\int_{-1}^{1}|x^2-1|\,dx+\int_{1}^{3}|x^2-1|\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-1)\,dx$$

として計算すればよい．

【解答】では，

> $y=f(x)$のグラフがy軸対称のとき，
>
> $$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$
>
> **定積分の性質**

を用いて $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$ を計算したが，

> $$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
>
> **定積分の公式**

を用いて，次のように計算することもできる．

((4)の部分的別解)

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3$$

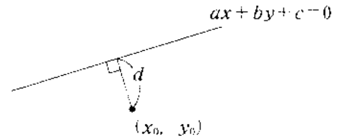
$$=\frac{4}{3}.$$

((4)の部分的別解終り)

(5) **【解答】**では，

> 円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$の
>
> 中心は$(a,\ b)$，半径はr
>
> **円の中心と半径**

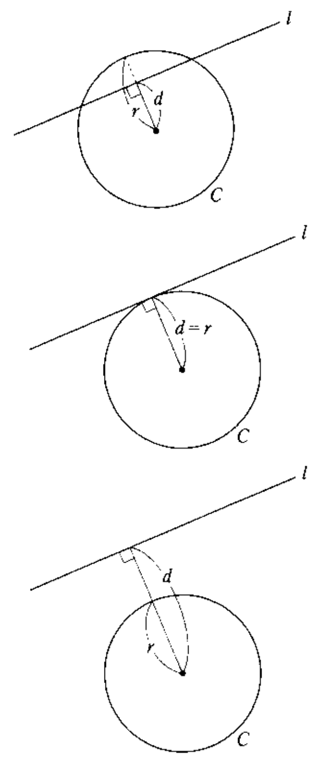
を用いてCの中心と半径を求めたあと，



> 点$(x_0,\ y_0)$と直線$ax+by+c=0$の距離dは，
>
> $$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
>
> **点と直線の距離の公式**

を用いてCの中心とlの距離dを求め，

> 円Cと直線lについて，Cの半径をr，Cの中心とlの距離をdとすると，
>
> ・$d<r$のとき，Cとlは異なる2点で交わる
>
> ・$d=r$のとき，Cとlは接する
>
> ・$d>r$のとき，Cとlは共有点をもたない



> **円と直線の位置関係**

に従って，Cとlが異なる2点で交わる条件

$$d<1$$

を求めた．

また，次のように解くこともできる．

((5)の別解)

$$C:(x-3)^2+y^2=1, \qquad \cdots①$$

$l : y = mx - 1.$ …②

①, ② から y を消去すると,

$$(x-3)^2+(mx-1)^2=1.$$

$$(m^2+1)x^2-2(m+3)x+9=0. \quad \cdots③$$

C と l が異なる 2 点で交わるのは, x の方程式 ③ が異なる 2 つの実数解をもつときである.

③ の判別式を D とすると, この条件は,

$$\frac{D}{4}=(m+3)^2-(m^2+1)\cdot 9>0.$$

$$8m^2-6m<0.$$

$$2m(4m-3)<0.$$

$$0<m<\frac{3}{4}.$$

((5) の別解終り)

2 場合の数

【Ⅱ型共通 必須問題】

(配点 50 点)

0 から 9 までの数字がひとつずつ書かれた 10 枚のカード $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, …, $\boxed{9}$ がある. この中から 5 枚取り出して左から右へ一列に並べる並べ方を考える.

(1)(i) 並べ方は何通りあるか.

(ii) $\boxed{0}$ が $\boxed{1}$ と隣り合うような並べ方は何通りあるか.

(iii) $\boxed{0}$ が $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ の少なくとも一方と隣り合うような並べ方は何通りあるか.

(2) $\boxed{0}$ より左に $\boxed{1}$ があり, $\boxed{0}$ より右に $\boxed{2}$ があるような並べ方を考える.

(i) 並べ方は何通りあるか.

(ii) $\boxed{0}$ より左にあるカードで定まる数を L, $\boxed{0}$ より右にあるカードで定まる数を R とする. 例えば,

$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{2}$ のとき, $L=13$, $R=42$.

$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ のとき, $L=1$, $R=234$.

(i) で求めた並べ方のうち, $L<R$ となる並べ方は何通りあるか.

【配点】

(1) 26 点.

(i) 8 点. (ii) 8 点. (iii) 10 点.

(2) 24 点.

(i) 10 点. (ii) 14 点.

【出題のねらい】

状況を正確に把握し, 条件を満たす順列の個数を正確に数え上げられるかをみる問題である.

【解答】 Ⅰ型 3 【解答】参照.

【解説】 Ⅰ型 3 【解説】参照.

問題

3 三角関数

【Ⅱ型共通 必須問題】

(配点 50 点)

座標平面上に 2 つの円

$$C_1 : x^2+y^2=4,$$
$$C_2 : x^2+y^2=1$$

と, C_1, C_2 上を動く点 P, Q がある. 点 P は点 A(2, 0) を出発し C_1 上を, 点 Q は点 B(1, 0) を出発し C_2 上を,

(P が進んだ道のり) = (Q が進んだ道のり)

を満たしながら反時計まわりに進む.

P が C_1 上を一周するとき, 次の問に答えよ.

(1) P の座標が $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のとき, それまでに Q が進んだ道のりと, Q の座標を θ を用いて表せ.

(2) (1) で求めた Q を, y 軸方向に -1 だけ平行移動した点を R とする.

(i) $t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき, PR^2 を t を用いて表せ.

(ii) θ が $0\leqq\theta<2\pi$ を満たして変化するとき, 線分 PR の長さが最大となる P の座標を求めよ.

【配点】

(1) 16 点.

(2) 34 点.

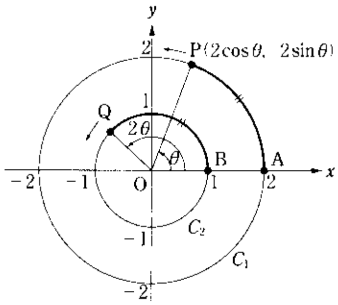
(i) 18 点. (ii) 16 点.

【出題のねらい】

線分の長さを三角関数を用いて表し, 置き換えなどを利用して, それが最大となる条件を求められるかをみる問題である.

【解答】

(1)



$P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$のとき，半直線OPは角$\theta$の動径であり，$C_1$の半径は2であるから，Pが進んだ道のりは，

$$2\theta.$$

したがって，Qが進んだ道のりは，

$$\boldsymbol{2\theta}.$$

これと，$OQ=1$より，半直線OQは角2θの動径であるから，Qの座標は，

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\cos 2\theta,\ \sin 2\theta}).$$

(2)(i) Qをy軸方向に-1だけ平行移動した点がRであるから，Rの座標は，

$$R(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta-1).$$

したがって，

$$\begin{aligned}PR^2&=(\cos 2\theta-2\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-1-2\sin\theta)^2\\&=\cos^2 2\theta-4\cos 2\theta\cos\theta+4\cos^2\theta+\sin^2 2\theta\\&\quad+1+4\sin^2\theta-2\sin 2\theta+4\sin\theta-4\sin 2\theta\sin\theta\\&=-4(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)\\&\qquad\qquad-2\sin 2\theta+4\sin\theta+6\\&=-4\cos\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta+6\\&=4(\sin\theta-\cos\theta)-4\sin\theta\cos\theta+6.\end{aligned}$$

ここで，$t=\sin\theta-\cos\theta$とおくと，

$$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$

より，

$$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2.$$

よって，PR^2をtを用いて表すと，

$$\begin{aligned}PR^2&=4t-2(1-t^2)+6\\&=\boldsymbol{2t^2+4t+4}.\end{aligned}$$

(ii) $f(t)=2t^2+4t+4$とおくと，

$$f(t)=2(t+1)^2+2.$$

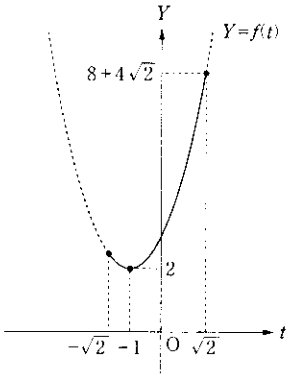
また，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

より，θが$0\leqq\theta<2\pi$の範囲を動くとき，tは，

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

の範囲を動く．



この範囲における$Y=f(t)$のグラフを考えると，$t=\sqrt{2}$のとき$f(t)$は最大となり，線分PRの長さも最大となる．

$t=\sqrt{2}$のとき，

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

より，

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$であるから，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，

すなわち，

$$\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

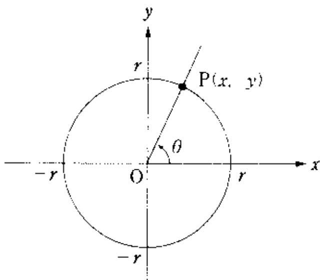
よって，線分PRの長さが最大となるときのPの座標は，$P\left(2\cos\frac{3}{4}\pi,\ 2\sin\frac{3}{4}\pi\right)$，すなわち，

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}}).$$

【解説】

問題

(1) まず，三角関数の定義を確認しておこう．

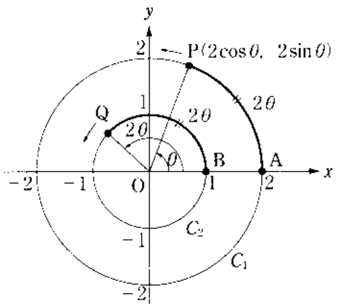


座標平面上で，角θの動径と，原点を中心とする半径rの円との交点Pの座標を$(x,\ y)$とするとき，

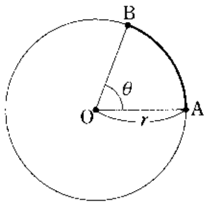
$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$

と定める

三角関数の定義



P$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$のとき，半直線 OP は角 θ の動径となる．



上図において，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=r\theta$$

扇形の弧長

を用いると，C_1 の半径は 2 であることから，P が進んだ道のりは 2θ となり，条件から，Q が進んだ道のりも 2θ となる．

このとき，半直線 OQ は，C_2 の半径が 1 であることから，角 2θ の動径となる．

よって，三角関数の定義により，Q の座標は，

$$\mathrm{Q}(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$$

と表せる．

(2)(i) R の座標は$(\cos2\theta,\ \sin2\theta-1)$であるから，

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$間の距離 AB は，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2 点間の距離

を用いて，

$$\mathrm{PR}^2=(\cos2\theta-2\cos\theta)^2+(\sin2\theta-1-2\sin\theta)^2$$

となる．

これを展開し，

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

三角関数の相互関係

を用いて整理すると，

$$\mathrm{PR}^2=-4(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)-2\sin2\theta+4\sin\theta+6.$$

ここで，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

余弦の加法定理

を用いると，

$$\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta=\cos(2\theta-\theta)=\cos\theta.$$

さらに，

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

2 倍角の公式

を用いると，

$$\mathrm{PR}^2=-4\cos\theta-2\cdot2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta+6$$
$$=4(\sin\theta-\cos\theta)-4\sin\theta\cos\theta+6$$

と変形できる．

したがって，$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$

より，

$$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2$$

であるから，これらを代入することにより，PR^2 を t を用いて表すことができる．

(ii) $\mathrm{PR}^2=f(t)$とおくと，$f(t)$は t の 2 次関数であるから，

$$f(t)=2(t-1)^2+2$$

と平方完成し，$Y=f(t)$のグラフを利用して，$f(t)(=\mathrm{PR}^2)$が最大になるときを考えればよい．

このとき，t のとり得る値の範囲に注意しなければならない．

【解答】では，

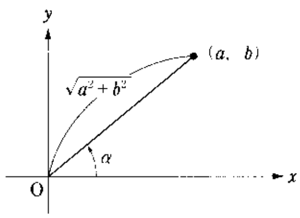
$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$のとき，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である

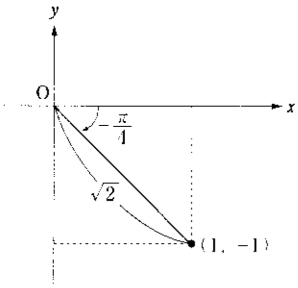


三角関数の合成

を用いて，まず，$t=\sin\theta-\cos\theta$ を，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形した．



次に，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$のとり得る値の範囲を調べると，$\theta$が$0\leqq\theta<2\pi$の範囲を動くとき，

$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$$

であり，点$\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)$は単位円周上をすべて動き得るから，

$$-1\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1.$$

したがって，tのとり得る値の範囲は，

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

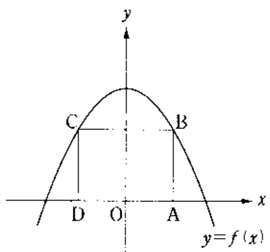
であることがわかる．

あとは，この範囲における$Y=f(t)$のグラフをかき，$f(t)$が最大となるときのtの値とそのときのθの値を求めて，Pの座標を求めればよい．

4　2次関数

【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ　選択問題】

(配点　50点)



aは正の定数とし，$f(x)=-ax^2+a$とする．

xy平面上に，4点$\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(t,\ f(t))$，$\mathrm{C}(-t,\ f(-t))$，$\mathrm{D}(-t,\ 0)$をとり，長方形ABCDの周の長さをlとする．ただし，$0<t<1$とする．

(1)　lをa，tを用いて表せ．

(2)(i)　$a=2$のとき，lのとり得る値の範囲を求めよ．

(ii)　lのとり得る値の範囲をaを用いて表せ．

(3)　$l=12$を満たすtがちょうど2個存在するようなaの値の範囲を求めよ．

【配点】

(1)　12点．

(2)　26点．

(i)　10点．(ii)　16点．

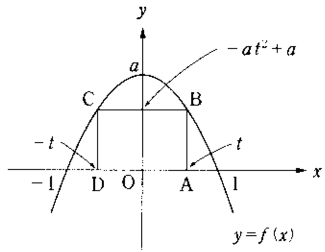
(3)　12点．

【出題のねらい】

適切な場合分けをすることにより，2次関数のとり得る値の範囲を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)



$$\begin{aligned} l&=2(\mathrm{AB}+\mathrm{AD})\\ &=2\{(-at^2+a)+2t\}\\ &=\boldsymbol{-2at^2+4t+2a.} \end{aligned}$$

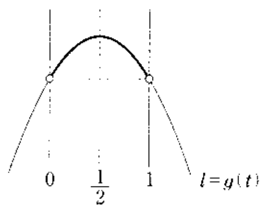
(2)　(1)より，

$$\begin{aligned} l&=-2at^2+4t+2a\\ &=-2a\left(t-\frac{1}{a}\right)^2+2a+\frac{2}{a} \end{aligned}$$

であり，右辺を$g(t)$とおく．

(i)　$a=2$のとき，

$$g(t)=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5.$$



$0<t<1$において，

$$g(0)<g(t)\leqq g\left(\frac{1}{2}\right)$$

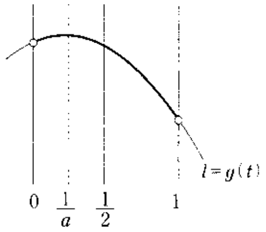
であるから，

$$\boldsymbol{4<l\leqq 5.}$$

(ii)　放物線$l=g(t)$の軸$t=\frac{1}{a}$について，$a>0$より，

$\dfrac{1}{a}>0$ であることに注意する．

(ア)　$0<\dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{1}{2}$，すなわち，$a\geqq 2$ のとき．



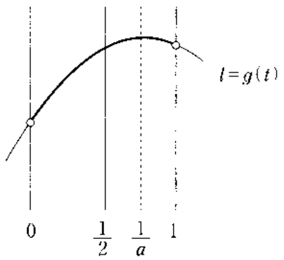
$0<t<1$ において，

$$g(1)<g(t)\leqq g\left(\frac{1}{a}\right)$$

であるから，

$$4<l\leqq 2a+\frac{2}{a}.$$

(イ)　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{a}<1$，すなわち，$1<a<2$ のとき．



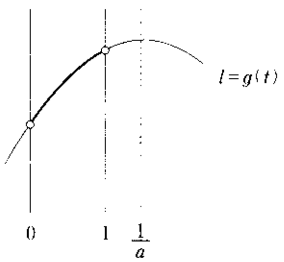
$0<t<1$ において，

$$g(0)<g(t)\leqq g\left(\frac{1}{a}\right)$$

であるから，

$$2a<l\leqq 2a+\frac{2}{a}.$$

(ウ)　$1\leqq\dfrac{1}{a}$，すなわち，$0<a\leqq 1$ のとき．



$0<t<1$ において，

$$g(0)<g(t)<g(1)$$

であるから，

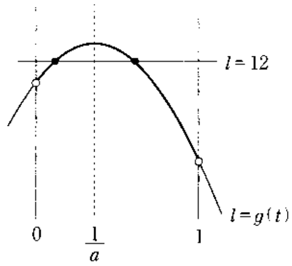
$$2a<l<4.$$

以上により，l のとり得る値の範囲は，

$$\begin{cases} 4<l\leqq 2a+\dfrac{2}{a} & (a\geqq 2 \text{ のとき}), \\ 2a<l\leqq 2a+\dfrac{2}{a} & (1<a<2 \text{ のとき}), \\ 2a<l<4 & (0<a\leqq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(3)　(2)(ii) の (ア)，(イ)，(ウ) のそれぞれの場合について考える．

(ア) のとき．



グラフより，$0<t<1$ において，$l=12$ を満たす t がちょうど 2 個存在するための条件は，

$$g(0)<12<g\left(\frac{1}{a}\right).$$

すなわち，

$$2a<12<2a+\frac{2}{a}.$$

$$a<6<a+\frac{1}{a}.$$

$a\geqq 2$ であるから，

$$2\leqq a<6 \quad かつ \quad a^2-6a+1>0.$$

$$3+2\sqrt{2}<a<6.$$

(イ) のとき．

$$1<a<2 \quad かつ \quad l\leqq 2a+\frac{2}{a}$$

より，

$$l<2\cdot 2+\frac{2}{1}=6$$

であるから，$l=12$ となることはない．

(ウ) のとき．

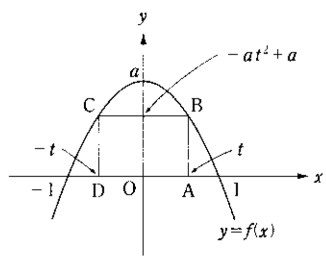
$l<4$ であるから，$l=12$ となることはない．

以上により，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{3+2\sqrt{2}<a<6.}$$

【解説】　**問題**

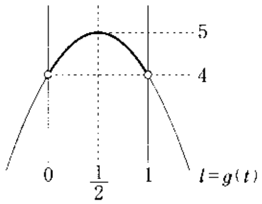
(1)



$$\mathrm{AB}=(\text{B の } y \text{ 座標})$$
$$=f(t)$$
$$=-at^2+a,$$
$$\mathrm{AD}=(\text{A の } x \text{ 座標})-(\text{D の } x \text{ 座標})$$
$$=t-(-t)$$
$$=2t$$
であり，長方形ABCDの周の長さは2(AB+AD)であるから，
$$l=-2at^2+4t+2a$$
となる．

(2) (1)で求めた l を t の関数とみなし，$g(t)$ とおく．

(i) $a=2$ のとき，
$$g(t)=-4t^2+4t+4$$
$$=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5.$$



$l=g(t)$ のグラフは，$t=\frac{1}{2}$ を軸とする上に凸の放物線であり，
$$g(0)=g(1)=4,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=5$$
であるから，l のとり得る値の範囲は，
$$4<l\leqq 5$$
となる．

(ii)
$$g(t)=-2at^2+4t+2a$$
$$=-2a\left(t-\frac{1}{a}\right)^2+2a+\frac{2}{a}.$$

$l=g(t)$ のグラフは，$t=\frac{1}{a}$ を軸とする上に凸の放物線である．$\frac{1}{a}>0$ であることに注意して，

【解答】のように，区間 $0<t<1$ と軸 $t=\frac{1}{a}$ の位置関係により，(ア)，(イ)，(ウ)の3つの場合に分けて，l のとり得る値の範囲を求めればよい．

(3) **【解答】**では，(ア)，(イ)，(ウ)の3つの場合に分けて，$l=12$ を満たす t がちょうど2個存在するような a の値の範囲を得たが，次のように解くこともできる．

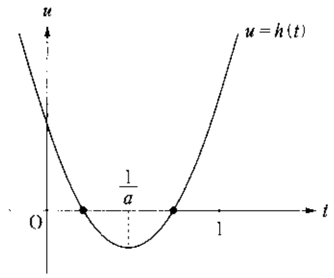
((3)の別解)

$l=12$ のとき，(1)より，
$$-2at^2+4t+2a=12.$$
$$at^2-2t+6-a=0. \qquad \cdots①$$

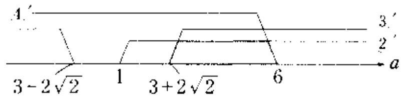
①が $0<t<1$ の範囲に異なる2つの解をもつような a の値の範囲を求めればよい．

①の左辺を $h(t)$ とおくと，
$$h(t)=a\left(t-\frac{1}{a}\right)^2+6-a-\frac{1}{a}.$$

$a>0$ より，$u=h(t)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，求める条件は，
$$\begin{cases} 0<\dfrac{1}{a}<1, & \cdots② \\ h\left(\dfrac{1}{a}\right)=6-a-\dfrac{1}{a}<0, & \cdots③ \\ h(0)=6-a>0, & \cdots④ \\ h(1)=4>0. & \cdots⑤ \end{cases}$$



②より，
$$a>1. \qquad \cdots②'$$
これと③より，
$$6a-a^2-1<0.$$
$$a^2-6a+1>0.$$
$$a<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<a. \qquad \cdots③'$$
④より，
$$a<6. \qquad \cdots④'$$
⑤はつねに成り立つから，②′，③′，④′より，求める a の値の範囲は，
$$3+2\sqrt{2}<a<6.$$



((3)の別解終り)

5 微分法

【Ⅱ型共通　選択問題】

(配点　50点)

> a，b は実数の定数とし，
> $$f(x)=x^3-3x^2-(3-3a)x+b$$
> とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通るとする．
>
> (1) b を a を用いて表せ．

(2) $f(x)$が極値をもつような a の値の範囲を求め，そのときの極値を a を用いて表せ．

(3) 次の(条件)を考える．

(条件) x の方程式 $|f(x)|=k$ がちょうど5つの実数解をもつ．

(条件)を満たす実数 k が存在するような a の値の範囲を求め，k を a を用いて表せ．

【配点】

(1) 12点．

(2) 18点．

(3) 20点．

【出題のねらい】

3次関数のグラフの接線や極値を正しく求められるか，また，絶対値記号を含む方程式の実数解の個数を，グラフを利用して正しく考えられるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$f(x)=x^3-3x^2+(3-3a)x+b$$
より，
$$f'(x)=3x^2-6x+3-3a.$$
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線 l の方程式は，
$$y=f'(2)(x-2)+f(2).$$
$$y=(3-3a)(x-2)+2-6a+b.$$
条件より，l は点 $(1,\ 0)$ を通るから，
$$0=(3-3a)(1-2)+2-6a+b.$$
$$\boldsymbol{b=3a+1.}$$

(2) $f(x)$が極値をもつ条件は，

「$f'(x)$の符号が変化する」，

すなわち，

「$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ」

である．

よって，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，求める a の値の範囲は，
$$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(3-3a)>0$$
より，
$$\boldsymbol{a>0.}$$
このとき，$f'(x)=0$ を解くと，
$$3x^2-6x+3-3a=0.$$
$$x^2-2x+1-a=0.$$
$$x=1\pm\sqrt{a}.$$
したがって，$f(x)$の増減は次表のようになる．

x	$\cdots$	$1-\sqrt{a}$	$\cdots$	$1+\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また，(1)より，
$$f(x)=x^3-3x^2+(3-3a)x+3a+1.$$
よって，$f(x)$は，

$x=1-\sqrt{a}$ のとき極大となり，極大値は，
$$f(1-\sqrt{a})=\boldsymbol{2a\sqrt{a}+2},$$
$x=1+\sqrt{a}$ のとき極小となり，極小値は，
$$f(1+\sqrt{a})=\boldsymbol{-2a\sqrt{a}+2}.$$

(3) 方程式 $|f(x)|=k$ がちょうど5つの実数解をもつ条件は，

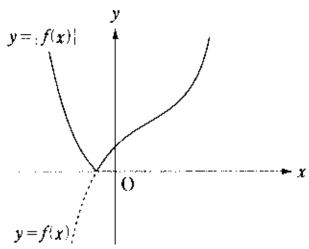
「曲線 $y=|f(x)|$ と直線 $y=k$ がちょうど5つの共有点をもつ」 …(＊)

である．

(i) $a\leqq 0$ のとき．
$$f'(x)=3x^2-6x+3-3a$$
$$=3(x-1)^2-3a\geqq 0$$
より，

$f(x)$は単調増加である．

よって，$y=|f(x)|$ のグラフは次図のようになるから，(＊)を満たす実数 k は存在しない．

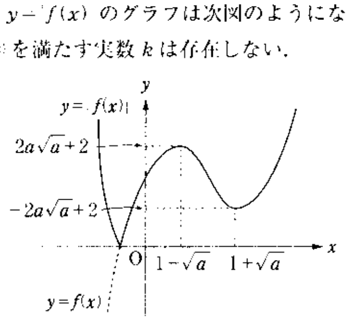


(ii) $a>0$ のとき．

(2)より，$f(x)$は極値をもち，極大値は，
$$2a\sqrt{a}+2>0$$
であるから，極小値 $-2a\sqrt{a}+2$ の符号を考える．

(ア) $-2a\sqrt{a}+2\geqq 0$，すなわち，$0<a\leqq 1$ のとき．

$y=|f(x)|$ のグラフは次図のようになるから，(＊)を満たす実数 k は存在しない．



(イ) $-2a\sqrt{a}+2<0$，すなわち，$a>1$ のとき．

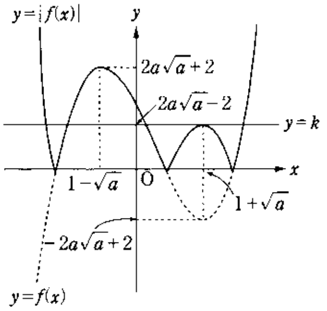
$$f(1-\sqrt{a})-\{-f(1+\sqrt{a})\}$$
$$=(2a\sqrt{a}+2)-(2a\sqrt{a}-2)$$
$$=4>0$$

より，

$$f(1-\sqrt{a})>-f(1+\sqrt{a}).$$

よって，$y=|f(x)|$ のグラフは次図のようになるから，(*) を満たす実数 k は存在し，

$$k=2a\sqrt{a}-2.$$

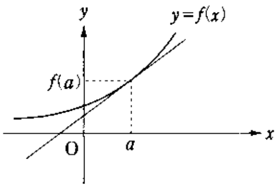


(i), (ii) より，

$$\boldsymbol{a>1,\ \ k=2a\sqrt{a}-2.}$$

【解説】 問題

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線 l の方程式を求めるには，



曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから，接線の方程式は，

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

接線の方程式

を用いればよい．

あとは，接線 l が点 $(1,\ 0)$ を通ることより，l の方程式に $(x,\ y)=(1,\ 0)$ を代入すればよい．

(2) 関数 $f(x)$ の増減は，

ある区間で，
つねに $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調に増加する，
つねに $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調に減少する

導関数の符号と関数の増減

から，$f'(x)$ の符号を調べることでわかる．

また，極値については，

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$f'(a)=0$ であり，$f'(x)$ の符号が，$x=a$ の前後で正から負に変わるとき $f(a)$ は極大値，負から正に変わるとき $f(a)$ は極小値

関数の極大・極小

となることから，$f(x)$ が極値をもつ条件は，

「$f'(x)$ の符号が変化する」　…(#)

である．

$$f'(x)=3x^2-6x+3-3a$$

より，(#) は

「放物線 $y=f'(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わる」，

すなわち，

「2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ」

と同値である．

あとは，

実数を係数とする x の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$$

が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，判別式を D として，

$$D=b^2-4ac>0$$

とくに，$b=2b'$ のときは，

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac>0$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつ条件

を用いて，a の値の範囲を求めればよい．

次に，$f(x)$ の極値は，$f'(x)=0$ となる x の値を求め，その前後における $f'(x)$ の符号を調べることで求められる．

その増減の様子を表にしたものが増減表であるから，本問のような「極値を求めよ」という問に答えるには，**【解答】**のように，増減表を完成させることが有効である．

さらに，極値は，

$$\begin{aligned}f(1-\sqrt{a})&=(1-\sqrt{a})^3-3(1-\sqrt{a})^2\\&\qquad+(3-3a)(1-\sqrt{a})+3a+1\\&=(1-3\sqrt{a}+3a-a\sqrt{a})-3(1-2\sqrt{a}+a)\\&\qquad+(3-3\sqrt{a}-3a+3a\sqrt{a})+3a+1\\&=2a\sqrt{a}+2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(1+\sqrt{a})&=(1-\sqrt{a})^3-3(1+\sqrt{a})^2\\&\qquad+(3-3a)(1+\sqrt{a})+3a+1\\&=(1+3\sqrt{a}+3a+a\sqrt{a})-3(1+2\sqrt{a}+a)\\&\qquad+(3+3\sqrt{a}-3a-3a\sqrt{a})+3a+1\\&=-2a\sqrt{a}+2\end{aligned}$$

のように，$f(x)$ に $x=1\pm\sqrt{a}$ を直接代入すること

で計算できるが，次のように求めることもできる．

（極値の計算方法）

$f(x)$ を $f'(x)$ で割ると，

$$\text{商は } \frac{1}{3}x-\frac{1}{3},\ \text{余りは } -2ax+2a-2$$

であるから，

$$f(x)=f'(x)\cdot\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-2ax+2a-2.$$

ここで，$x=1\pm\sqrt{a}$ は $f'(x)=0$ の2解より，

$$f'(1\pm\sqrt{a})=0$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} f(1\pm\sqrt{a})&=f'(1\pm\sqrt{a})\cdot\left\{\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{a})-\frac{1}{3}\right\}\\ &\qquad -2a(1\pm\sqrt{a})+2a+2\\ &=-2a(1\pm\sqrt{a})+2a+2\\ &=\mp 2a\sqrt{a}+2.\ \text{（複号同順）}\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，

$x=1-\sqrt{a}$ のとき極大となり，極大値は，

$$f(1-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+2,$$

$x=1+\sqrt{a}$ のとき極小となり，極小値は，

$$f(1+\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+2.$$

（極値の計算方法終り）

(3) **【解答】**では，

> 方程式 $g(x)=k$ の実数解は，曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の x 座標である
>
> **方程式の実数解**

を用いて，方程式 $|f(x)|=k$ の異なる実数解の個数を，曲線 $y=|f(x)|$ と直線 $y=k$ の異なる共有点の個数と捉えた．

そこで，$y=|f(x)|$ のグラフについて，

> $$|X|=\begin{cases} X & (X\geqq 0\ \text{のとき}),\\ -X & (X<0\ \text{のとき}) \end{cases}$$
>
> **絶対値の性質1**

を用いると，

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqq 0\ \text{のとき}),\\ -f(x) & (f(x)<0\ \text{のとき}) \end{cases}$$

であるから，これを用いて $y=f(x)$ のグラフの形状および x 軸との位置関係を考えることになる．

まず，$a\leqq 0$ のときは，$f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調増加である．

したがって，**【解答】**のグラフのように，曲線 $y=|f(x)|$ と直線 $y=k$ の異なる共有点の個数は最大2個となり，異なる5つの共有点をもつことはない．

次に，$a>0$ のとき，(2)より，$f(x)$ の極大値は，

$$f(1-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+2>0$$

であるから，曲線 $y=|f(x)|$ の形状を考えるために，極小値 $f(1+\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+2$ の符号によって場合分けした．

(ア) $-2a\sqrt{a}+2\geqq 0$，すなわち，$0<a\leqq 1$ のとき．

$f(x)$ の極大値と極小値はともに0以上であるから，**【解答】**のグラフのように，曲線 $y=|f(x)|$ と直線 $y=k$ の異なる共有点の個数は最大4個となり，異なる5つの共有点をもつことはない．

(イ) $-2a\sqrt{a}+2<0$，すなわち，$a>1$ のとき．

関数 $y=|f(x)|$ は，2つの極大値，

$$f(1-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+2,$$
$$-f(1+\sqrt{a})=2a\sqrt{a}-2$$

をもち，これらの大小関係を調べると，

$$\begin{aligned} &f(1-\sqrt{a})-\{-f(1+\sqrt{a})\}\\ &=(2a\sqrt{a}+2)-(2a\sqrt{a}-2)\\ &=4>0\end{aligned}$$

より，

$$f(1-\sqrt{a})>-f(1+\sqrt{a}).$$

したがって，**【解答】**のグラフのように，曲線 $y=|f(x)|$ と直線 $y=k$ がちょうど5つの共有点をもつのは，直線 $y=k$ が点 $(1+\sqrt{a},\ 2a\sqrt{a}-2)$ を通るときであることがわかる．

また，

> k が0以上の定数のとき，
>
> $$|X|=k \iff X=\pm k$$
>
> **絶対値の性質2**

を用いて，方程式 $|f(x)|=k$ の異なる実数解の個数を，曲線 $y=f(x)$ と図形 $y=\pm k$ の異なる共有点の個数と捉えることもできる．

（(3)の別解）

x の方程式 $|f(x)|=k$ が実数解をもつためには

$$k\geqq 0 \qquad \cdots①$$

であることが必要であり，このとき，

$$|f(x)|=k \iff f(x)=\pm k.$$

したがって，方程式 $|f(x)|=k$ がちょうど5つの実数解をもつ条件は，$k\geqq 0$ のもとで，

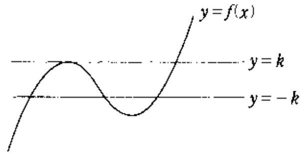
「曲線 $y=f(x)$ と図形 $y=\pm k$ が
ちょうど5つの共有点をもつ」 $\cdots$(**)

である．

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=c$（c は定数）が異なる3つの共有点をもつためには $f(x)$ が極値をもつことが必要であることに注意すると，(**)が成り立つのは次の(i)，(ii)の場合である．

(i) $f(x)$ が極値をもち，かつ，

$$\begin{cases} k=(\text{極大値}), \\ (\text{極小値})<-k<(\text{極大値}). \end{cases}$$



このとき，(2)より，

$$\begin{cases} a>0, \\ k=2a\sqrt{a}+2, \\ -2a\sqrt{a}+2<-k<2a\sqrt{a}+2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0, \\ k=2a\sqrt{a}+2 \\ -2a\sqrt{a}+2<-2a\sqrt{a}-2<2a\sqrt{a}+2. \end{cases} \quad \cdots②$$

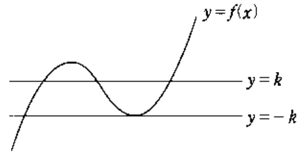
②を整理すると，

$$2<-2<4a\sqrt{a}+2$$

となり，これを満たす実数 a は存在しない．

(ii) $f(x)$ が極値をもち，かつ，

$$\begin{cases} -k=(\text{極小値}), \\ (\text{極小値})<k<(\text{極大値}). \end{cases}$$



このとき，(2)より，

$$\begin{cases} a>0, \\ -k=-2a\sqrt{a}+2, \\ -2a\sqrt{a}+2<k<2a\sqrt{a}+2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0, \\ k=2a\sqrt{a}-2, \\ -2a\sqrt{a}+2<2a\sqrt{a}-2<2a\sqrt{a}+2. \end{cases} \quad \cdots③$$

③を整理すると，

$$-4a\sqrt{a}+2<-2<2.$$

$a>0$ のもとでこれを解くと，

$$a>1.$$

(このとき $k=2a\sqrt{a}-2$ は①を満たす)

(i)，(ii)より，

$$a>1,\ k=2a\sqrt{a}-2.$$

((3)の別解終り)

6 平面ベクトル

【II型数学I，A，II，B　選択問題】

(配点　50点)

> 平面上に $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$ を満たす三角形OABがある．辺OAを直径とする円が直線ABと2点A，Mで交わっている．
>
> (1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．
>
> (2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．
>
> (3) 点Qが辺OB上を動くとき，AQ+QMが最小となるときのQを $\mathrm{Q_0}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

【配点】

(1)　8点．

(2)　16点．

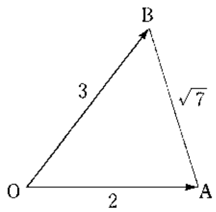
(3)　26点．

【出題のねらい】

ベクトルの基本知識，計算力をみるとともに，条件を正確に把握し，ベクトルで表現する力をみる問題である．

【解答】

(1)



$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=7.$$

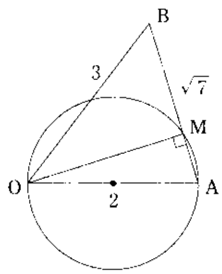
$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=7.$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$ より，

$$9-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4=7.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3.$$

(2)



Mは直線AB上にあるから，実数 s を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots①$$

と表せる．

また，Mは線分OAを直径とする円上にあるから，

$$\angle\mathrm{OMA}=90°.$$

これより，$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AB}$ であり，

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

したがって，

$$\{(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0.$$

$$(s-1)|\overrightarrow{OA}|^2 + (1-2s)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + s|\overrightarrow{OB}|^2 = 0.$$

$|\overrightarrow{OA}| = 2$，$|\overrightarrow{OB}| = 3$ であり，(1) より，

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ であるから，

$$4(s-1) + 3(1-2s) + 9s = 0.$$

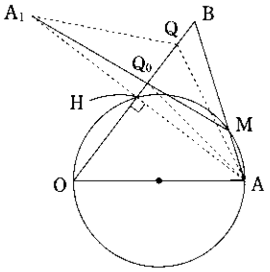
$$7s - 1 = 0.$$

$$s = \frac{1}{7}.$$

① に代入して，

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}.$$

(3)



直線 OB に関して A と対称な点を A_1 とすると，

$$AQ + QM = A_1Q + QM \geqq A_1M$$

より，AQ + QM が最小となるのは，等号が成り立つとき，すなわち，A_1，Q，M が一直線上に並ぶときである．

したがって，Q_0 は直線 A_1M と辺 OB との交点である．

A から直線 OB に下ろした垂線の足を H とすると，実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OB} \qquad \cdots②$$

と表せる．

AH⊥OB より，

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

$$(t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

$$t|\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

$|\overrightarrow{OB}| = 3$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ であるから，

$$9t - 3 = 0.$$

$$t = \frac{1}{3}.$$

② に代入して，

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.$$

$\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AH}$ が成り立つから，

$$\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}).$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} &= 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

Q_0 は直線 A_1M 上にあるから，実数 k を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ_0} &= (1-k)\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{OM} \\ &= (1-k)\left(-\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) + k\left(\frac{6}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \left(\frac{13}{7}k - 1\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{21}k\right)\overrightarrow{OB} \qquad \cdots③\end{aligned}$$

と表せる．

また，Q_0 は辺 OB 上にあるから，$0 \leqq u \leqq 1$ を満たす実数 u を用いて，

$$\overrightarrow{OQ_0} = u\overrightarrow{OB} \qquad \cdots④$$

と表せる．

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であるから，③，④ より，

$$\begin{cases} \dfrac{13}{7}k - 1 = 0, \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{11}{21}k = u. \end{cases}$$

これを解いて，

$$k = \frac{7}{13}, \quad u = \frac{5}{13}.$$

（これは $0 \leqq u \leqq 1$ を満たす）

④ に代入して，

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ_0}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}.$$

【解説】 **問題**

(1) **【解答】**では，$AB = \sqrt{7}$ に着目し，これを $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7}$ と捉えた．

さらに，$|\overrightarrow{AB}|^2 = 7$ とし，$\overrightarrow{AB}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表したあと，

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$
$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (k \text{ は実数})$$

ベクトルの内積の性質

を用いて計算した．

また，余弦定理を用いて，次のように $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めることもできる．

((1) の別解)

余弦定理より，

$$\cos\angle AOB=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}$$
$$=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

これと $|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=3$ より,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$$
$$=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}$$
$$=3.$$

((1) の別解終り)

(2) **【解答】**では，M は直線 AB 上の点であるから，

> O を定点，A，B を異なる 2 点とする．
> P が直線 AB 上にある
> $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}$ (α は実数) と表せる
> $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}$ (α は実数) と表せる
>
> **共線条件**

を用いて，$\overrightarrow{OM}$ を ① のように表した．

次に，辺 OA が円の直径であることから，$\angle OMA=90°$ であることに着目した．

このとき，$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから，

> $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
> $\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
>
> **ベクトルの垂直条件**

より，

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

となる．

これより，s に関する方程式を導いて s を求め，① に代入すればよい．

また，円の半径が 1 であることに着目して，次のように解くこともできる．

((2) の別解) (① までは**【解答】**と同じ)

$$\overrightarrow{OM}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots①$$

円の中心を C とすると，C は辺 OA の中点であるから，

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$$

したがって，

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}.$$

$|\overrightarrow{CM}|=1$ より，

$$\left|\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}\right|^2=1.$$

$$\left(\frac{1}{2}-s\right)^2|\overrightarrow{OA}|^2+2s\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+s^2|\overrightarrow{OB}|^2=1.$$

$|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=3$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ であるから，

$$4\left(\frac{1}{2}-s\right)^2+6s\left(\frac{1}{2}-s\right)+9s^2=1.$$
$$7s^2-s=0.$$
$$s(7s-1)=0.$$

M は A とは異なる点であるから，$s\neq 0$.

よって，

$$s=\frac{1}{7}.$$

① に代入して，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{6}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{OB}.$$

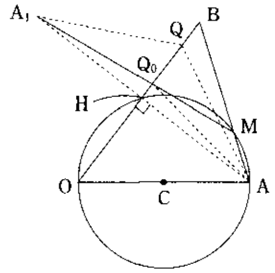
((2) の別解終り)

(3) 点 A の直線 OB に関する対称点を A_1 とすると，

$$AQ+QM=A_1Q+QM\geqq A_1M$$

であることから，AQ＋QM が最小となるのは，等号が成立するとき，すなわち，A_1, Q, M が一直線上に並ぶときである．

したがって，Q_0 は直線 A_1M と辺 OB の交点である．



【解答】では，$\overrightarrow{OA_1}$ を求めるために，まず，$\overrightarrow{OH}$ を求めた．

H は直線 OB 上にあるから，実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OB} \qquad \cdots②$$

と表せる．

このあと**【解答】**(2) のように，

$\angle OHA=90°$ を用いて $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

とするか，**((2) の別解)**のように，

$|\overrightarrow{CH}|=1$ を用いて $\left|t\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|^2=1$

として，t に関する方程式を導いて t を求め，② に代入すれば $\overrightarrow{OH}$ を求めることができる．

また，② を用いずに，次のようにして $\overrightarrow{OH}$ を求めることもできる．

($\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求める別解)

(1)より,

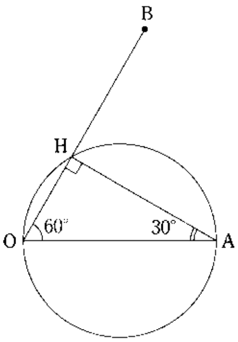
$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{2}.$$

したがって,

$$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ.$$

これより，三角形AOHは内角が30°，60°，90°の直角三角形であり，

$$\mathrm{OH}:\mathrm{OA}:\mathrm{AH}=1:2:\sqrt{3}.$$



よって，OA＝2より，

$$\mathrm{OH}=1.$$

Hは直線OB上にあり，OB＝3であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

($\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を求める別解終り)

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求めたあとは，$\mathrm{A_1}$ が直線OBに関するAの対称点であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}=2\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

が成り立ち，これより $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ を求めることができる．

$\mathrm{Q_0}$ は直線 $\mathrm{A_1M}$ 上にあり，かつ辺OB上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}$ を③，④のように2通りに表せる．

このあと，

> $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立であるという．このとき実数 s，t，s'，t' について，
>
> $$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$
> $$\iff s=s' \text{ かつ } t=t'$$
>
> **ベクトルの1次独立**

に従って，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数をそれぞれ比較することで，k，u に関する連立方程式を導いて k，u を求め，③または④に代入すればよい．

なお，本問は，次のように，座標を設定して解くこともできる．

((3)の別解)

原点をOとして，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 方向を x 軸の正の方向とし，Aの y 座標が正となるように座標軸をとる．

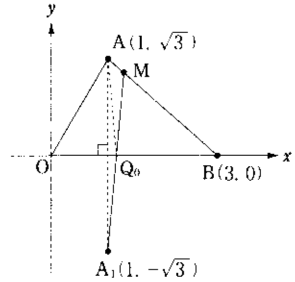
(1)より，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{2}$$

であるから，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$．

これとOA＝2，OB＝3より，

$$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3}),\ \mathrm{B}(3,\ 0).$$



このとき，(2)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{6}{7}(1,\ \sqrt{3})+\frac{1}{7}(3,\ 0)$$
$$=\left(\frac{9}{7},\ \frac{6\sqrt{3}}{7}\right).$$

ここで，

$$\mathrm{AQ}+\mathrm{QM}=\mathrm{A_1Q}+\mathrm{QM}\geqq\mathrm{A_1M}$$

より，AQ＋QMが最小となるのは，等号が成り立つとき，すなわち，$\mathrm{A_1}$，Q，Mが一直線上に並ぶときである．

したがって，$\mathrm{Q_0}$ は直線 $\mathrm{A_1M}$ と線分OBとの交点である．

$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3})$ の直線OB(x軸)に関する対称点 $\mathrm{A_1}$ の座標は $(1,\ -\sqrt{3})$ であるから，直線 $\mathrm{A_1M}$ の方程式は，

$$y-(-\sqrt{3})=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{7}-(-\sqrt{3})}{\frac{9}{7}-1}(x-1).$$

$$y=\frac{13\sqrt{3}}{2}x-\frac{15\sqrt{3}}{2}. \qquad \cdots⑤$$

直線 $\mathrm{A_1M}$ と線分OBとの交点 $\mathrm{Q_0}$ は，⑤に $y=0$ を代入して，

$$0=\frac{13\sqrt{3}}{2}x-\frac{15\sqrt{3}}{2},$$

$$x=\frac{15}{13}$$

(これは $0\leqq x\leqq 3$ を満たす)

より，

$$\mathrm{Q_0}\left(\frac{15}{13},\ 0\right).$$

$\left(\frac{15}{13},\ 0\right)=\frac{5}{13}(3,\ 0)$ より,

$$\overrightarrow{OQ_0}=\frac{5}{13}\overrightarrow{OB}.$$

((3)の別解終り)

【Ⅲ型受験者用】

1 小問集合

【Ⅲ型 必須問題】

(配点 40点)

(1) $\sin 15°+\sin 75°$ の値を求めよ.

(2) $f(x)=4^x-a\cdot 2^x+12$ とする.

(i) x の方程式 $f(x)=0$ が $x=2$ を解にもつとき, 定数 a の値を求めよ.

(ii) a が(i)で求めた値のとき, 不等式 $f(x)<0$ を解け.

(3) $2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$ の正の約数の個数と総和を求めよ.

(4) n を自然数とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{2n+1}}{3^{2n}+5^{n+1}}$ を求めよ.

【配点】

(1) 8点.

(2) 10点.

(i) 4点. (ii) 6点.

(3) 7点.

(4) 8点.

(5) 7点.

【出題のねらい】

(1) 三角関数の加法定理を正しく用いられるかをみる問題である.

(2) 指数方程式の解を正しく利用できるか, また, 指数不等式を解くことができるかをみる問題である.

(3) 整数の正の約数の個数と総和を求められるかをみる問題である.

(4) 分母の有理化を用いて数列の和を求められるかをみる問題である.

(5) 等比数列の極限を正しく理解しているかをみる問題である.

【解答】

(1)
$$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$$
$$= \sin(45^\circ - 30^\circ) + \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= (\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ) + (\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ)$$
$$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ$$
$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}.$$

(2)(i) x の方程式 $f(x)=0$ が $x=2$ を解にもつとき，
$$f(2)=0.$$
$$4^2 - a\cdot 2^2 + 12 = 0.$$
$$28 - 4a = 0.$$
よって，
$$a = 7.$$

(ii) (i)より，$a=7$ であり，このとき，
$$f(x) = 4^x - 7\cdot 2^x + 12$$
$$= (2^x)^2 - 7\cdot 2^x + 12$$
$$= (2^x - 3)(2^x - 4).$$
したがって，不等式 $f(x)<0$ を解くと，
$$3 < 2^x < 4.$$
$$\boldsymbol{\log_2 3 < x < 2}.$$

(3) 2，3，5 が素数であることに注意すると，
$2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$ の正の約数は，
$$2^i\cdot 3^j\cdot 5^k.$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ;\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ;\ k=0,\ 1,\ 2)$$
よって，$2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$ の正の約数の個数は，
$$4\cdot 4\cdot 3 = \mathbf{48}\,\textbf{(個)}.$$
また，これら正の約数の総和は，
$$(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1+5^2)$$
$$= 15\cdot 40\cdot 31$$
$$= \mathbf{18600}.$$

(4)
$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}$$
$$= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}.$$
$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると，
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}.$$

(5)
$$\frac{2^n+3^{2n+1}}{3^{2n}+5^{n+1}} = \frac{2^n+3\cdot 9^n}{9^n+5\cdot 5^n}$$
$$= \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3}{1+5\left(\frac{5}{9}\right)^n}.$$

$n\to\infty$ のとき，
$$\left(\frac{2}{9}\right)^n \to 0,\quad \left(\frac{5}{9}\right)^n \to 0$$
であるから，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{2n+1}}{3^{2n}+5^{n+1}} = \frac{0+3}{1+0} = \mathbf{3}.$$

【解説】 問題

(1) 【解答】では，
$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ),\quad \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$
と捉えて，

> $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$
> $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
>
> **三角関数の加法定理**

を用いて $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$ の値を求めた．

また，

> $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
>
> **90° − θ の三角比**

> $a^2+b^2 \neq 0$ のとき，
> $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
> ただし，α は，
> $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
> を満たす角である
>
> **三角関数の合成**

を用いて，次のように解くこともできる．

((1)の別解)
$$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \sin 15^\circ + \sin(90^\circ - 15^\circ)$$
$$= \sin 15^\circ + \cos 15^\circ$$
$$= \sqrt{2}\sin(15^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sqrt{2}\sin 60^\circ$$
$$= \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

((1)の別解終り)

(2)(i) x の方程式 $f(x)=0$ が $x=2$ を解にもつとは，$f(2)=0$ が成り立つことである．

したがって，
$$f(2) = 28 - 4a = 0$$
から，a の値を求めればよい．

(ii) (i)より，$a=7$ であるから，不等式 $f(x)<0$ は，
$$4^x - 7\cdot 2^x + 12 < 0.$$
$2^x = t$ とおくと，この不等式は，
$$t^2 - 7t + 12 < 0.$$

$$(t-3)(t-4)<0.$$
$$3<t<4.$$
したがって,
$$3<2^x<4.$$
あとは，$3=2^{\log_2 3}$，$4=2^2$ に注意して，

> $a>1$ のとき，
> $$m<n \iff a^m<a^n$$
> **指数関数の性質**

を用いればよい．

(3) 2，3，5 が相異なる素数であることに注意すると，$2^3\cdot3^3\cdot5^2$ の正の約数は，
$$2^i\cdot3^j\cdot5^k \ (i,\ j,\ k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$
の形に表せる．ここで，

i のとり得る値は，$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ の 4 通り，
j のとり得る値は，$j=0,\ 1,\ 2,\ 3$ の 4 通り，
k のとり得る値は，$k=0,\ 1,\ 2$ の 3 通り．

$2^i\cdot3^j\cdot5^k$ と $(i,\ j,\ k)$ は1対1に対応するから，求める正の約数の個数は，
$$4\cdot4\cdot3=48(\text{個})$$
となる．

また，$2^3\cdot3^3\cdot5^2$ の正の約数は，
$$(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1+5^2)$$
を展開したときの項として過不足なく現れる．

以上のように考えると，一般に次のことが成り立つ．

> 自然数 N を素因数分解した結果が $N=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdot\cdots$ であるとき，N の正の約数の個数は，
> $$(a+1)(b+1)(c+1)\cdot\cdots(\text{個})$$
> また，N の正の約数の総和は，
> $$(p^0+p^1+\cdots+p^a)(q^0+q^1+\cdots+q^b)$$
> $$(r^0+r^1+\cdots+r^c)\cdots$$
> **約数の個数と総和**

(4)

> $a>b>0$ のとき，
> $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$
> $$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$
> **分母の有理化**

を用いて，
$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$
と変形し，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を代入して辺々加えると，
$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{4}}$$
$$\vdots$$
$$+\big)\ \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$
となる．

(5)
$$\frac{2^n+3^{2n+1}}{3^{2n}+5^{n+1}}=\frac{2^n+3\cdot9^n}{9^n+5\cdot5^n}$$
と変形したとき，2^n，5^n，9^n のうち，底が最大のものが 9^n であることに注目して，分母と分子を 9^n で割ると，
$$\frac{2^n+3^{2n+1}}{3^{2n}+5^{n+1}}=\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n+3}{1+5\left(\frac{5}{9}\right)^n}$$
となる．

このあと，

> $$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}\infty & (r>1),\\ 1 & (r=1),\\ 0 & (-1<r<1)\end{cases}$$
> **数列 $\{r^n\}$ の極限**

を用いると，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{2n+1}}{3^{2n}+5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n+3}{1+5\left(\frac{5}{9}\right)^n}$$
$$=\frac{0+3}{1+0}$$
$$=3$$
となる．

2 確　率

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

> 2つの袋 X，Y があり，袋 X には 3 枚のカード $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が，袋 Y には 3 枚のカード $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{1}$ が入っている．
> 「A が袋 X から，B が袋 Y からそれぞれ 1 枚のカードを引き，書かれた数字を記録して袋に戻す」という試行を T とする．T を 1 回行い，A，B が引いたカードに書かれた数字をそれぞれ a，b としたとき，次の規則に従って A と B に点を

与える．

・$a>b$ のとき，A に $a-b$ 点を与え，B には点を与えない．

・$a<b$ のとき，B に $b-a$ 点を与え，A には点を与えない．

・$a=b$ のとき，A，B のどちらにも点を与えない．

(1) T を1回行ったとき，A が1点を得る確率，A が2点を得る確率，および A と B のどちらも点を得ない確率を求めよ．

(2) T を4回行ったあと，A，B が得た点の合計をそれぞれ S_A，S_B とする．

(i) $S_A=S_B=0$ となる確率を求めよ．

(ii) $S_A=S_B$ となる確率を求めよ．

【配点】

(1) 12点．

(2) 28点．

(i) 10点，(ii) 18点．

【出題のねらい】

事象を的確に捉え，独立な試行に関する確率を正しく求めることができるかをみる問題である．

【解答】

(1) すべてのカードを区別して考える．

T を1回行ったとき，A，B のカードの引き方の総数は，

$$3\cdot 3=9(\text{通り})$$

あり，これらは同様に確からしい．

A が1点を得るのは，

$$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (2,\ 1)$$

となる場合である．

$(a,\ b)=(1,\ 0)$ となるカードの引き方は，

$$1\cdot 1=1(\text{通り}).$$

$(a,\ b)=(2,\ 1)$ となるカードの引き方は，

$$1\cdot 2=2(\text{通り}).$$

よって，A が1点を得る確率は，

$$\frac{1+2}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

A が2点を得るのは，

$$(a,\ b)=(2,\ 0)$$

となる場合であり，このようになるカードの引き方は，

$$1\cdot 1=1(\text{通り}).$$

よって，A が2点を得る確率は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{9}}.$$

また，A と B のどちらも点を得ないのは，

$$(a,\ b)=(0,\ 0),\ (1,\ 1)$$

となる場合である．

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ となるカードの引き方は，

$$1\cdot 1=1(\text{通り}).$$

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ となるカードの引き方は，

$$1\cdot 2=2(\text{通り}).$$

よって，A と B のどちらも点を得ない確率は，

$$\frac{1+2}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

(2) T を1回行ったとき，B が点を得るのは，

$$(a,\ b)=(0,\ 1)$$

となる場合であり，このとき B は1点を得る．

この確率は，

$$\frac{1\cdot 2}{9}=\frac{2}{9}.$$

ここで，T を1回行ったとき，

事象 A_1「A が1点を得る」，

事象 A_2「A が2点を得る」，

事象 B_1「B が1点を得る」，

事象 C「A と B のどちらも点を得ない」

とすると，(1)と合わせて，

$$P(A_1)=\frac{1}{3},\ P(A_2)=\frac{1}{9},$$

$$P(B_1)=\frac{2}{9},\ P(C)=\frac{1}{3}.$$

(i) $S_A=S_B=0$ となるのは，

$$C \text{ が4回}$$

起こる場合であるから，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\boldsymbol{\frac{1}{81}}.$$

(ii) $S_A=S_B$ となるのは，次の(ア)，(イ)，(ウ)の場合である．

(ア) $S_A=S_B=0$

(イ) $S_A=S_B=1$

(ウ) $S_A=S_B=2$

(ア)となる確率は，(i)より，

$$\frac{1}{81}.$$

(イ)となるのは，

A_1 が1回，B_1 が1回，C が2回

起こる場合であり，この確率は，

$$\frac{4!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{81}.$$

(ウ)となるのは，

「A_1 が2回，B_1 が2回」

または，

「A_2 が1回，B_1 が2回，C が1回」

起こる場合であり，この確率は，

$$\frac{4!}{2!2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{4!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{24}{729}+\frac{16}{729}$$

$$=\frac{40}{729}.$$

(ア)，(イ)，(ウ)は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{81}+\frac{8}{81}+\frac{40}{729}=\mathbf{\frac{121}{729}}.$$

【解説】 問題

(1) 本問のような確率を考える問題では，カードをすべて区別して考えることが基本である．そこで，袋Xに入っているカードを$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$とし，袋Yに入っているカードを，$\boxed{0}$，$\boxed{1_\alpha}$，$\boxed{1_\beta}$とする．

T を1回行ったとき，AとBがそれぞれ引いたカードに対する $a-b$ の値をまとめると次表のようになる．

B＼A	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
$\boxed{0}$	0	1	2
$\boxed{1_\alpha}$	-1	0	1
$\boxed{1_\beta}$	-1	0	1

$a-b>0$ の場合は，Aが $a-b$ 点を得る．

$a-b<0$ の場合は，Bが $b-a$ 点を得る．

$a-b=0$ の場合は，A，Bのどちらも点を得ない．

このことから，**【解答】**にある4つの事象 A_1，A_2，B_1，C のいずれかが起こることがわかり，この表をもとにして，それぞれの確率を求めた．

(2)(i) T を4回行ったとき，$S_A=S_B=0$ となるのは，

「AとBのどちらも4回とも点を得ない」，

すなわち，

「事象 C が4回起こる」

場合である．

(1)より，$P(C)=\frac{1}{3}$ であるから，あとは，

> 2つの試行 T_1，T_2 が独立であるとき，T_1 で事象 E_1 が起こり，T_2 で事象 E_2 が起こる確率は，
>
> $$P(E_1)\cdot P(E_2)$$
>
> **独立な試行の確率**

を用いて，$S_A=S_B=0$ となる確率を求めればよい．

(ii) T を4回行ったとき，$S_A=S_B$ となるのは，

(ア) $S_A=S_B=0$

(イ) $S_A=S_B=1$

(ウ) $S_A=S_B=2$

の3つの場合がある．

(ア)の場合の確率は(i)で求めた．

(イ)となるのは，

「AとBがそれぞれ1点ずつを得る」，

すなわち，4回の試行において，

「A_1 が1回，B_1 が1回，C が2回起こる」…(＊)

場合である．

ここで，

> n 個のもののうち，m_1 個，m_2 個，…がそれぞれ同じものであるとき，この n 個のものを並べてできる順列の総数は，
>
> $$\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots}\qquad(m_1+m_2+\cdots=n)$$
>
> **同じものを含む順列の総数**

であるから，T を4回行ったとき，(＊)となるのは，A_1，B_1，C，C の順列を考えることで，

$$\frac{4!}{2!}=12(\text{通り})$$

ある．

この12通りそれぞれが起こる確率は，いずれも

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

であるから，$S_A=S_B=1$ となる確率は，

$$12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

となる．

$S_A=S_B=2$ となる場合についても，同様にすればよい．

3 三角関数

【Ⅲ型 必須問題】

（配点 40点）

> 座標平面上に原点Oを中心とする半径2の円 C_1 と，点$(0,\ -1)$を中心とする半径1の円 C_2 がある．C_1，C_2 上を動く点P，Qがあり，点Pは点A$(2,\ 0)$を出発し C_1 上を，点Qは点B$(1,\ -1)$を出発し C_2 上を，
>
> （Pが進んだ道のり）＝（Qが進んだ道のり）
>
> を満たしながら反時計まわりに進む．
>
> Pが C_1 上を一周するとき，次の問に答えよ．
>
> (1) Pの座標が$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$のと

き，それまでにQが進んだ道のりと，Qの座標を θ を用いて表せ．

(2) 線分PQの長さの最大値と，そのときのPの座標を求めよ．

【配点】

(1) 16点．

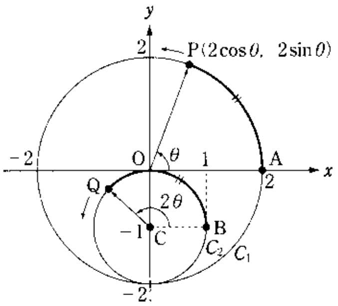
(2) 24点．

【出題のねらい】

線分の長さを三角関数を用いて表し，置き換えなどを利用して，その最大値を求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)



$P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ のとき，$\overrightarrow{OP}$ と x 軸の正の向きとのなす角は θ であり，C_1 の半径は2であるから，Pが進んだ道のりは，

$$2\theta.$$

したがって，Qが進んだ道のりは，

$$\boldsymbol{2\theta}.$$

C_2 の中心を点 $C(0,\ -1)$ とおくと，C_2 の半径は1であり，$\overrightarrow{CQ}$ と x 軸の正の向きとのなす角は 2θ であるから，

$$\overrightarrow{CQ}=(\cos2\theta,\ \sin2\theta).$$

これより，

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}$$
$$=(0,\ -1)+(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$$
$$=(\cos2\theta,\ \sin2\theta-1).$$

よって，Qの座標は，

$$\mathbf{Q(\cos2\theta,\ \sin2\theta-1)}.$$

(2)
$$PQ^2=(\cos2\theta-2\cos\theta)^2+(\sin2\theta-1-2\sin\theta)^2$$
$$=\cos^2 2\theta-4\cos2\theta\cos\theta+4\cos^2\theta+\sin^2 2\theta+1$$
$$+4\sin^2\theta-2\sin2\theta+4\sin\theta-4\sin2\theta\sin\theta$$
$$=-4(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)$$
$$-2\sin2\theta+4\sin\theta+6$$
$$=-4\cos\theta-4\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta+6$$
$$=4(\sin\theta-\cos\theta)-4\sin\theta\cos\theta+6.$$

ここで，$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$

より，

$$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2.$$

よって，PQ^2 を t を用いて表すと，

$$PQ^2=4t-2(1-t^2)+6$$
$$=2t^2+4t+4.$$

$f(t)=2t^2+4t+4$ とおくと，

$$f(t)=2(t+1)^2+2.$$

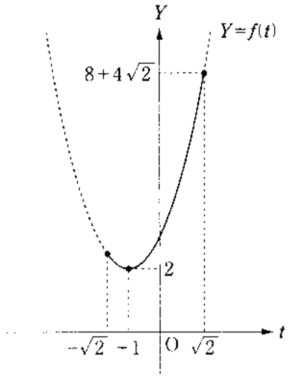
また，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

より，θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を動くとき，t は，

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

の範囲を動く．



この範囲における $Y=f(t)$ のグラフを考えると，$t=\sqrt{2}$ のとき $f(t)$ は最大となり，線分PQの長さも最大となる．

$t=\sqrt{2}$ のとき，

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

より，

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるから，$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，すなわち，

$$\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

よって，線分 PQ の長さの最大値は，

$$\sqrt{f(\sqrt{2})}=\mathbf{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

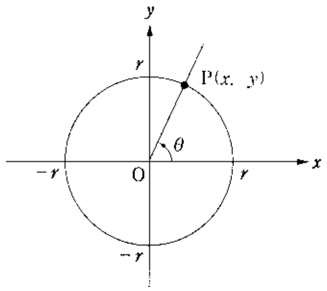
また，このときの P の座標は，

$\mathrm{P}\left(2\cos\frac{3}{4}\pi,\ 2\sin\frac{3}{4}\pi\right)$，すなわち，

$$\mathbf{P(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})}.$$

【解説】 問題

(1) まず，三角関数の定義を確認しておこう．



座標平面上で，角 θ の動径と，原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$

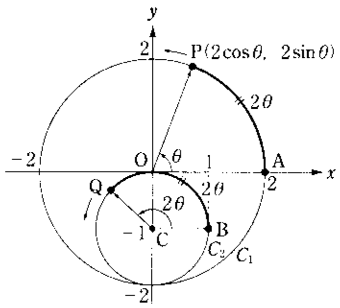
と定める

三角関数の定義

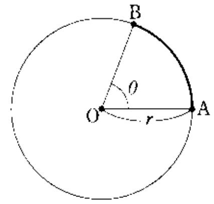
上の定義から，一般に，$\vec{a}$ について，$|\vec{a}|=r\ (r>0)$，$\vec{a}$ と x 軸の正の向きとのなす角が α のとき，

$$\vec{a}=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$$

と表せる．



$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸の正の向きとのなす角は θ となる．



上図において，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=r\theta$$

扇形の弧長

を用いると，C_1 の半径は 2 であることから，P が進んだ道のりは 2θ となり，条件から，Q が進んだ道のりも 2θ となる．

C_2 の中心を点 $\mathrm{C}(0,\ -1)$ とおくと，C_2 の半径が 1 であることから，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と x 軸の正の向きとのなす角は 2θ となる．

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(\cos2\theta,\ \sin2\theta).$$

これと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ とから，Q の座標を求めることができる．

(2) Q の座標は $(\cos2\theta,\ \sin2\theta-1)$ であるから，

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2 点間の距離

を用いて，

$$\mathrm{PQ}^2=(\cos2\theta-2\cos\theta)^2+(\sin2\theta-1-2\sin\theta)^2$$

となる．

これを展開し，

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

三角関数の相互関係

を用いて整理すると，

$$\mathrm{PQ}^2=-4(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)-2\sin2\theta+4\sin\theta+6.$$

ここで，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

余弦の加法定理

を用いると，

$$\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta=\cos(2\theta-\theta)=\cos\theta.$$

さらに，

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

2 倍角の公式

を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=-4\cos\theta-2\cdot2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta+6\\&=4(\sin\theta-\cos\theta)-4\sin\theta\cos\theta+6\end{aligned}$$

と変形できる．

ここで，$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$

より，

$$2\sin\theta\cos\theta=1-t^2$$

であるから，これらを代入することにより，PQ^2 を t を用いて表すことができる．

$PQ^2=f(t)$ とおくと，$f(t)$ は t の2次関数であるから，

$$f(t)=2(t+1)^2+2$$

と平方完成し，$Y=f(t)$ のグラフを考えることにより，$f(t)(=PQ^2)$ が最大になるときを考えればよい．

このとき，t のとり得る値の範囲に注意しなければならない．

【解答】では，

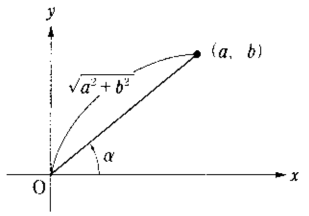
$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき，

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である

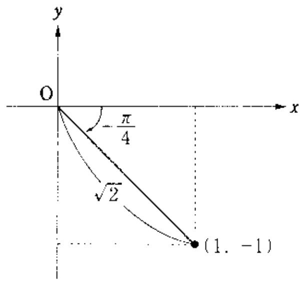


三角関数の合成

を用いて，まず，$t=\sin\theta-\cos\theta$ を，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形した．



次に，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のとり得る値の範囲を調べると，θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を動くとき，

$$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$$

であり，点 $\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ は単位円周上をすべて動き得るから，

$$-1\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1.$$

したがって，t のとり得る値の範囲は，

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

であることがわかる．

あとは，この範囲における $Y=f(t)$ のグラフをかき，$f(t)$ が最大となるときの t の値とそのときの θ の値を求めて，PQ の長さの最大値と P の座標を求めればよい．

4 平面ベクトル

【Ⅲ型　必須問題】

（配点　40点）

平面上に三角形 OAB があり，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とする．

$$\overrightarrow{OA_1}=-4\vec{a}+3\vec{b}$$

により点 A_1 を定める．

(1) 三角形 OAA_1 の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OB と直線 AA_1 の交点を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ．また，$AC:A_1C$ を求めよ．

(3) $OA=1$，$OB=2$，$OA_1=4$ とする．

(i) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求め，$\cos\angle AOB$ と $\cos\angle A_1OB$ の値を求めよ．

(ii) $\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$ となるように点 B_1 を定める．ただし，B_1 は直線 OB に関して A と反対側にあるものとする．

三角形 OBB_1 の重心を G_1 とするとき，$\overrightarrow{OG_1}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【配点】

(1)　4点．

(2)　10点．

(3)　26点．

(i)　12点，(ii)　14点．

【出題のねらい】

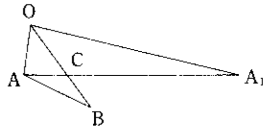
ベクトルの基本知識，計算力をみるとともに，条件を正確に把握し，ベクトルで表現する力をみる問題である．

【解答】

(1) Gは三角形OAA_1の重心であるから,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA_1}}{3}$$
$$=\frac{\vec{a}+(-4\vec{a}+3\vec{b})}{3}$$
$$=-\vec{a}+\vec{b}.$$

(2)



Cは直線OB上の点であるから,実数kを用いて,

$$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}$$
$$=k\vec{b} \qquad \cdots①$$

と表せる.

また,Cは直線AA_1上の点であるから,実数lを用いて,

$$\overrightarrow{AC}=l\overrightarrow{AA_1} \qquad \cdots②$$

と表せる.

これより,

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{AA_1} \quad (②より)$$
$$=\overrightarrow{OA}+l(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\vec{a}+l(-4\vec{a}+3\vec{b}-\vec{a})$$
$$=(1-5l)\vec{a}+3l\vec{b}. \qquad \cdots③$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$は1次独立であるから,①,③より,

$$\begin{cases}0=1-5l,\\ k=3l.\end{cases}$$

これを解いて,

$$k=\frac{3}{5},\ l=\frac{1}{5}.$$

よって,①より,

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\vec{b}.$$

また,②より,

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AA_1}.$$

よって,

$$AC : A_1C=\mathbf{1 : 4}.$$

(3)(i) $OA_1=4$ より,

$$|-4\vec{a}+3\vec{b}|=4.$$
$$|-4\vec{a}+3\vec{b}|^2=16.$$
$$16|\vec{a}|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=16.$$

$OA=1$, $OB=2$ より,$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ であるから,

$$16\cdot1-24\vec{a}\cdot\vec{b}+9\cdot4=16.$$
$$24\vec{a}\cdot\vec{b}=36.$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}. \qquad \cdots④$$

$\angle AOB$は$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角であるから,

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$
$$=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ および④より,

$$\cos\angle AOB=\frac{\frac{3}{2}}{1\cdot2}$$
$$=\frac{3}{4}.$$

$\angle A_1OB$は$\overrightarrow{OA_1}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角であるから,

$$\cos\angle A_1OB=\frac{\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA_1}||\overrightarrow{OB}|}.$$

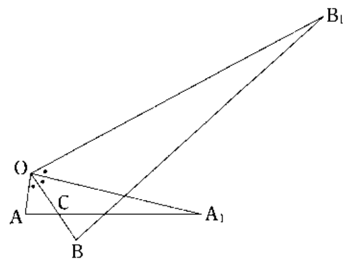
$|\overrightarrow{OA_1}|=4$, $|\overrightarrow{OB}|=2$ であり,

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB}=(-4\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{b}$$
$$=-4\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$$
$$=-4\cdot\frac{3}{2}+3\cdot2^2 \qquad (④より)$$
$$=6.$$

よって,

$$\cos\angle A_1OB=\frac{6}{4\cdot2}$$
$$=\frac{3}{4}.$$

(ii)



$\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$より,

$$OA : OA_1=OB : OB_1.$$
$$1 : 4=2 : OB_1.$$
$$OB_1=8. \qquad \cdots⑤$$

また,(i)より,

$$\cos\angle AOB=\cos\angle A_1OB$$

であるから,

$$\angle AOB=\angle A_1OB.$$

これとB_1の定め方から,

$$\angle A_1OB_1=\angle A_1OB=\angle AOB. \qquad \cdots⑥$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$は1次独立であるから,

$$\overrightarrow{OB_1}=p\vec{a}+q\vec{b}\quad（p,\ q \text{ は実数}）$$

と表せる．

このとき，⑤より，

$$|p\vec{a}+q\vec{b}|=8.$$

$$|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=8^2.$$

$$p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=64.$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ および④より，

$$p^2+3pq+4q^2=64. \quad \cdots⑦$$

また，

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=|\overrightarrow{OA_1}||\overrightarrow{OB_1}|\cos\angle A_1OB_1.$$

(i)と⑤，⑥より，

$$(-4\vec{a}+3\vec{b})\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=4\cdot8\cdot\frac{3}{4}.$$

$$-4p|\vec{a}|^2+(-4q+3p)\vec{a}\cdot\vec{b}+3q|\vec{b}|^2=24.$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ および④より，

$$-4p+(-4q+3p)\cdot\frac{3}{2}+12q=24.$$

$$p+12q=48.$$

$$p=48-12q. \quad \cdots⑧$$

⑦，⑧より，

$$(48-12q)^2+3(48-12q)q+4q^2=64.$$

$$4(12-3q)^2+3(12-3q)q+q^2=16.$$

$$28q^2-252q+560=0.$$

$$q^2-9q+20=0.$$

$$(q-4)(q-5)=0.$$

$$q=4,\ 5.$$

⑧より，

$$(p,\ q)=(0,\ 4),\ (-12,\ 5).$$

B_1 は直線 OB 上にはないから $p\neq0$ であり，これより，

$$(p,\ q)=(-12,\ 5).$$

したがって，

$$\overrightarrow{OB_1}=-12\vec{a}+5\vec{b}.$$

G_1 は三角形 OBB_1 の重心であるから，

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_1}}{3}$$

$$=\frac{\vec{b}+(-12\vec{a}+5\vec{b})}{3}$$

$$=\boldsymbol{-4\vec{a}+2\vec{b}}.$$

【解説】 **問題**

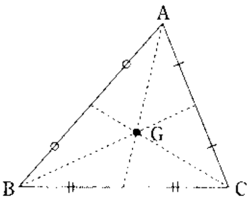
(1) 三角形の重心の位置ベクトルについては，

点 O と三角形 ABC に対して，三角形 ABC の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

とくに，O と A が一致するとき，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$



重心を表すベクトル

を用いればよい．

(2) C は 2 直線の交点であるから，

異なる 2 点 A，B に対し，

点 P が直線 AB 上にある

$\iff$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ （k は実数）と表せる

共線条件

を用いて，$\overrightarrow{OC}$ を①，③のように 2 通りに表せる．

このあと，

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるという．このとき，実数 s，t，s'，t' に対して，

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$$

$$\iff s=s' \quad かつ \quad t=t'$$

ベクトルの 1 次独立

に従って，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の係数をそれぞれ比較することにより，$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すことができる．

さらに，**【解答】**にあるように，$\overrightarrow{AC}=l\overrightarrow{AA_1}$ を満たす実数 l を求めることができ，$AC:A_1C$ も求めることができる．

(3)(i) $OA_1=4$ より，$|-4\vec{a}+3\vec{b}|=4$ である．これを

$$|-4\vec{a}+3\vec{b}|^2=16$$

とし，

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （k は実数）

ベクトルの内積の性質

に従って**【解答】**のように計算すればよい．

$\cos\angle AOB$ に関しては，**【解答】**にあるように，$\angle AOB$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角と捉えて，

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でないベクトル，θ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角とするとき，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

ベクトルの内積となす角

を用いて求めればよい．

$\cos\angle A_1OB$ についても同様である．

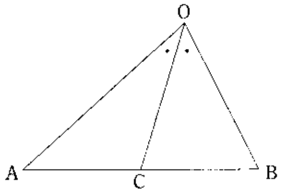
また，(2) と与えられた条件から，

$$AC : A_1C=1:4=OA:OA_1$$

が成り立つから，

三角形OABにおいて，$\angle AOB$ の二等分線と辺ABの交点をCとするとき，

$$AC : CB=OA:OB$$



角の二等分線の性質

を用いて，次のように $\cos\angle A_1OB$ を求めてもよい．

((3)(i) の部分的別解)

(2) より，

$$AC : A_1C=1:4=OA:OA_1.$$

したがって，角の二等分線の性質より，直線OCは $\angle AOA_1$ を二等分する．

よって，

$$\cos\angle A_1OB=\cos\angle AOB=-\frac{3}{4}.$$

((3)(i) の部分的別解終り)

(ii) $\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから，

$$\overrightarrow{OB_1}=p\vec{a}+q\vec{b}\ \ (p,\ q \text{ は実数})$$

と表せる．あとは各条件から p，q の満たす関係式を導き，p，q の値を求めればよい．

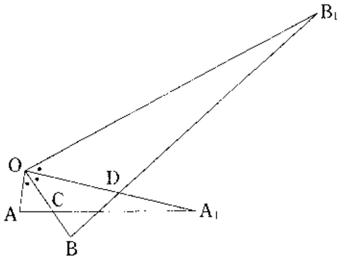
【解答】では，まず，B_1 の定め方から $OB_1=8$，すなわち，$|p\vec{a}+q\vec{b}|=8$ であることを用いて ⑦ を導き，次に，(i) より，$\angle AOB=\angle A_1OB_1$ であることに注目して，

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=|\overrightarrow{OA_1}||\overrightarrow{OB_1}|\cos\angle A_1OB_1$$

から ⑧ を導き，⑦ と ⑧ を連立して p，q の値を求めた．

また，⑧ のかわりに，直線 OA_1 が $\angle BOB_1$ を二等分することを用いて，次のように $\overrightarrow{OB_1}$ を求めてもよい．

((3)(ii) の部分的別解)



⑥ より，直線 OA_1 は $\angle BOB_1$ を二等分するから，直線 OA_1 と直線 BB_1 の交点をDとすると，

$$BD:DB_1=OB:OB_1=2:8=1:4.$$

したがって，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{4\overrightarrow{OB}+1\cdot\overrightarrow{OB_1}}{1+4}=\frac{4\vec{b}+\overrightarrow{OB_1}}{5}. \qquad \cdots⑨$$

Dは直線 OA_1 上の点であるから，

$$\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA_1}\ \ (\alpha \text{ は実数，} \alpha\neq 0)$$

と表せ，⑨ より，

$$\frac{4\vec{b}+\overrightarrow{OB_1}}{5}=\alpha(-4\vec{a}+3\vec{b}).$$

$$4\vec{b}+p\vec{a}+q\vec{b}=-20\alpha\vec{a}+15\alpha\vec{b}.$$

$$p\vec{a}+q\vec{b}=-20\alpha\vec{a}+(15\alpha-4)\vec{b}.$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから，

$$p=-20\alpha,\ q=15\alpha-4. \qquad \cdots⑩$$

⑦，⑩ より，

$$400\alpha^2-60\alpha(15\alpha-4)+4(15\alpha-4)^2=64.$$

$$100\alpha^2-15\alpha(15\alpha-4)+(15\alpha-4)^2=16.$$

$$100\alpha^2-60\alpha=0.$$

$\alpha\neq 0$ より，

$$\alpha=\frac{3}{5}.$$

⑩ より，

$$p=-12,\ q=5.$$

よって，

$$\overrightarrow{OB_1}=-12\vec{a}+5\vec{b}.$$

((3)(ii) の部分的別解終り)

また，$\triangle OAA_1\backsim\triangle OBB_1$，$OA=1$，$OB=2$ から，三角形 OBB_1 は三角形 OAA_1 をOのまわりに $\angle AOB$ だけ回転し，2倍の相似拡大したものとみることができる．

この回転と相似拡大について，

Aが B，Bが A_1，A_1 が B_1，Gが G_1

に対応していることに注目すると，

$$\overrightarrow{OG}=-\vec{a}+\vec{b}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

より，

$$\overrightarrow{OG_1}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA_1}$$

が成り立つことがわかる．

ここから，

$$\overrightarrow{OG_1}=-\vec{b}+(-4\vec{a}-3\vec{b})$$
$$=-4\vec{a}+2\vec{b}$$

とすることもできる．

5　数列の極限

【Ⅲ型　選択問題】

（配点　40点）

一辺の長さが4の正三角形ABCがあり，その内部に，

　2辺AB，ACに接する円A_1，A_2，A_3，…，

　2辺BC，BAに接する円B_1，B_2，B_3，…，

　2辺CA，CBに接する円C_1，C_2，C_3，…

があり，A_1，B_1，C_1は半径が等しく，どの2つも互いに外接している．

ただし，自然数nに対し，A_nとA_{n+1}，B_nとB_{n+1}，C_nとC_{n+1}は互いに外接し，

　A_{n+1}の半径はA_nの半径より小さく，

　B_{n+1}の半径はB_nの半径より小さく，

　C_{n+1}の半径はC_nの半径より小さい

ものとする．

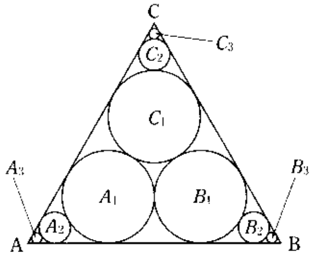
(1)　A_1の半径を求めよ．

(2)　A_2の半径を求めよ．

(3)　3つの円A_n，B_n，C_nの面積の和をS_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)とするとき，無限級数

$$S_1+S_2+S_3+\cdots$$

の和を求めよ．



【配点】

(1)　8点．

(2)　12点．

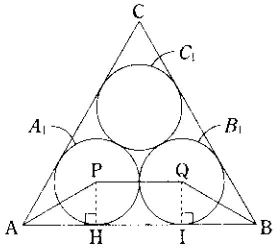
(3)　20点．

【出題のねらい】

図形の条件から条件式を立式する力，無限等比級数の基本的な知識を運用する力をみる問題である．

【解答】

(1)



求める半径をr_1とおく．また，A_1の中心をP，B_1の中心をQとし，P，Qから辺ABに下ろした垂線の足をそれぞれH，Iとする．

Pは∠CABの二等分線上にあるから，

$$\angle \mathrm{PAH}=\frac{\pi}{6}.$$

したがって，

$$\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{PH}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}\,r_1.$$

同様に，

$$\mathrm{BI}=\sqrt{3}\,r_1.$$

さらに，

$$\mathrm{HI}=\mathrm{PQ}=2r_1.$$

よって，

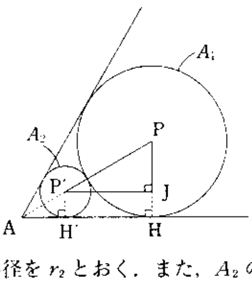
$$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}+\mathrm{HI}+\mathrm{IB}$$
$$=\sqrt{3}\,r_1+2r_1+\sqrt{3}\,r_1$$
$$=2(\sqrt{3}+1)r_1.$$

AB＝4であるから，

$$2(\sqrt{3}+1)r_1=4.$$

$$r_1=\frac{4}{2(\sqrt{3}+1)}=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}.$$

(2)



求める半径をr_2とおく．また，A_2の中心をP′とし，P′から直線ABに下ろした垂線の足をH′とし，P′から直線PHに下ろした垂線の足をJとする．

P，P′はともに∠CABの二等分線上にあるから，

$$\angle \mathrm{PP'J}=\angle \mathrm{PAH}=\frac{\pi}{6}.$$

また，A_1とA_2が外接することから，

$$PP'=r_1+r_2.$$

さらに，

$$PJ=PH-P'H'=r_1-r_2.$$

よって，

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{PJ}{PP'}$$

より，

$$\frac{1}{2}=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}.$$

$$r_1+r_2=2(r_1-r_2).$$

$$r_2=\frac{1}{3}r_1=\frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

(3) A_nの半径をr_nとおく（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）．

(2)と同様にして，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n.$$

これより，数列$\{r_n\}$は公比$\frac{1}{3}$の等比数列であるから，

$$r_n=r_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{3^{n-1}}.$$

B_n，C_nの半径もr_nであるから，

$$\begin{aligned}S_n&=3\cdot\pi r_n^2\\&=3\pi\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3^{n-1}}\right)^2\\&=\frac{6(2-\sqrt{3})}{9^{n-1}}\pi.\end{aligned}$$

よって，数列$\{S_n\}$は，

初項　$6(2-\sqrt{3})\pi$，公比　$\frac{1}{9}$

の等比数列である．

$\left|\frac{1}{9}\right|<1$であるから，無限等比級数

$$S_1+S_2+S_3+\cdots$$

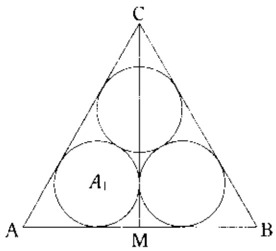
は収束して，その和は，

$$\frac{6(2-\sqrt{3})\pi}{1-\frac{1}{9}}=\frac{27(2-\sqrt{3})}{4}\pi.$$

【解説】 問題

(1) **【解答】**では，辺ABの長さをA_1の半径r_1を用いて表したが，次のように，A_1を内接円にもつ三角形に着目して解くこともできる．

((1)の別解)



求める半径をr_1とおく．また，辺ABの中点をMとする．

対称性より，線分CMはA_1に接するから，A_1は三角形ACMの内接円である．

$$AM=\frac{1}{2}AB=2,$$

$$CM=AC\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

であるから，三角形ACMの面積を2通りに表して，

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}=\frac{1}{2}(4+2+2\sqrt{3})r_1.$$

$$2\sqrt{3}=(3+\sqrt{3})r_1.$$

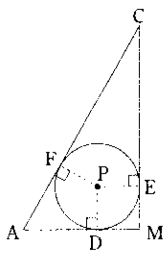
よって，

$$r_1=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1.$$

（(1)の別解終り）

また，次のように解くこともできる．

((1)の部分的別解)



（AM，CMを求めるところまでは**((1)の別解)**と同じ）

A_1の中心をPとし，A_1と3辺AM，MC，CAの接点をそれぞれD，E，Fとする．

四角形PDMEは正方形であるから，

$$DM=EM=r_1.$$

したがって，

$$AF=AD=2-r_1,$$

$$CF=CE=2\sqrt{3}-r_1.$$

AF＋CF＝ACより，

$$(2-r_1)+(2\sqrt{3}-r_1)=4.$$

$$2r_1=2\sqrt{3}-2.$$

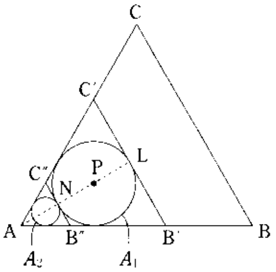
$$r_1=\sqrt{3}-1.$$

（(1)の部分的別解終り）

(2) 【解答】では，A_1 と A_2 が互いに外接すること，および，ともに辺ABに接することから，2つの円の半径の和および差を考え，その比を調べた．

一方，次のように考えることもできる．

（(2)の別解）



A_1 の接線で，辺BCと平行なものを考え，辺AB，ACとの交点を図のようにB′とC′，B″とC″とする．また，線分B′C′の中点をL，線分B″C″の中点をNとし，A_1 の中心をPとする．

A_1 は三角形AB′C′の内接円であり，Pは三角形AB′C′の内心である．三角形AB′C′は正三角形であるから，内心と重心は一致し，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PL}=2:1.$$

対称性より，L，Nは直線AP上にあり，線分LNは A_1 の直径であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{AN}&=\mathrm{AL}-2\mathrm{PL}\\&=\mathrm{AL}-\frac{2}{3}\mathrm{AL}\\&=\frac{1}{3}\mathrm{AL}.\end{aligned}$$

これより，2つの正三角形AB′C′，AB″C″の相似比は3：1であり，その内接円の半径の比も3：1となる．

正三角形AB″C″の内接円が A_2 であるから，その半径は，(1)より，

$$\frac{1}{3}r_1=\frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

（(2)の別解終り）

(3) (2)で A_2 の半径が A_1 の半径の $\frac{1}{3}$ 倍であることを示したのとまったく同じ手順で，A_{n+1} の半径が A_n の半径の $\frac{1}{3}$ 倍であることが示される．このことから，A_n の半径を r_n とすると，数列 $\{r_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であることがわかり，B_n，C_n の半径も同じであるから，数列 $\{S_n\}$ は公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列であることがわかる．あとは，

> 初項 $a(\neq 0)$，公比 r の無限等比級数
> $$a+ar+ar^2+\cdots$$
> は，$-1<r<1$ のとき収束し，その和は，
> $$\frac{a}{1-r}$$
> **無限等比級数の和**

を用いればよい．

6 微分法

【Ⅲ型　選択問題】

（配点　40点）

> a は正の定数とし，
> $$f(x)=\frac{e^x}{x-a}\quad(x>a)$$
> とする．原点Oから曲線 $y=f(x)$ に引いた接線と $y=f(x)$ の接点をPとし，Pの x 座標を t とする．
> (1) a と t の満たす関係式を求めよ．
> (2) a の値が増加するとき，t の値も増加することを示せ．
> (3) a の値が増加するとき，直線OPの傾きも増加することを示せ．

【配点】

(1) 12点．

(2) 14点．

(3) 14点．

【出題のねらい】

微分法を用いて接線の方程式を求められるか，関係式で結ばれた2つの変数間の相互関係を調べることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)
$$f(x)=\frac{e^x}{x-a}\quad(x>a)$$

のとき，

$$f'(x)=\frac{e^x(x-a-1)}{(x-a)^2}$$

であるから，点 $(t,\ f(t))\ (t>a)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は，

$$y-\frac{e^t}{t-a}=\frac{e^t(t-a-1)}{(t-a)^2}(x-t).$$

これが原点Oを通る条件は，

$$-\frac{e^t}{t-a}=-\frac{te^t(t-a-1)}{(t-a)^2}.$$

これを整理すると，

$$t-a=t(t-a-1).$$

$$t^2-(a+2)t+a=0.$$

よって，求める a と t の関係式は，

$$\boldsymbol{t^2-(a+2)t+a=0 \quad \text{かつ} \quad t>a.}$$

(2) (1)より，

$$(t-1)a=t(t-2).$$

$t=1$ はこの式を満たさないから，

$$t\neq 1.$$

よって，

$$a=\frac{t(t-2)}{t-1}. \qquad \cdots①$$

また，$t>a>0$ より，

$$t>\frac{t(t-2)}{t-1}>0.$$

$$t(t-1)^2>t(t-1)(t-2)>0.$$

$$\begin{cases} t(t-1)>0, \\ t(t-1)(t-2)>0. \end{cases}$$

これより，

$$t>2. \qquad \cdots②$$

② において，

$$\frac{da}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-2t}{t-1}\right)$$

$$=\frac{(2t-2)(t-1)-(t^2-2t)\cdot 1}{(t-1)^2}$$

$$=\frac{t^2-2t+2}{(t-1)^2}$$

$$=\frac{(t-1)^2+1}{(t-1)^2}$$

$$>0.$$

したがって，

$$\frac{dt}{da}=\frac{1}{\frac{da}{dt}}>0.$$

よって，a の値が増加するとき，t の値も増加する．

(3) $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ より，直線 OP の傾きを m とすると，

$$m=\frac{f(t)}{t}=\frac{e^t}{t(t-a)}.$$

① を用いると，

$$m=\frac{e^t}{t\left\{t-\frac{t(t-2)}{t-1}\right\}}$$

$$=\frac{e^t(t-1)}{t^2}.$$

② において，

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^t(t-1)}{t^2}\right\}$$

$$=\frac{\{e^t(t-1)+e^t\}t^2-e^t(t-1)\cdot 2t}{t^4}$$

$$=\frac{e^t(t^2-2t+2)}{t^3}$$

$$=\frac{e^t\{(t-1)^2+1\}}{t^3}$$

$$>0.$$

したがって，m は t に関して単調増加である．

(2) より，a の値が増加するとき t の値は増加し，これにともなって m の値も増加する．

すなわち，a の値が増加するとき，直線 OP の傾きも増加する．

【解説】 問題

(1) 接点 P の x 座標が t であるから，P における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ である．また，この接線は $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を通るから，その方程式は，

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

で与えられる．

> 微分可能な関数 $f(x)$ に対して，曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，
>
> $$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
>
> **接線の方程式**

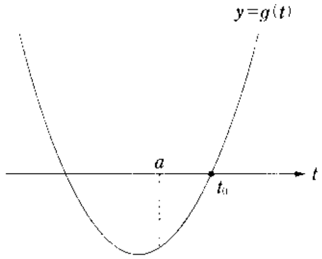
あとは，$x=y=0$ を代入することで，この接線が原点を通る条件を得ることができる．

(2)(3)
$$g(t)=t^2-(a+2)t+a$$

とおくと，$a>0$ より，

$$g(a)=-a<0$$

であるから，t の 2 次方程式 $g(t)=0$ の $t>a$ を満たす解は，与えられた任意の正の数 a に対してただ 1 つに定まる(その解は，次図の t_0 である)．



よって，t は a の関数である．

このように，パラメータ a の値を定めることにより，接点の x 座標 t はただ 1 つに定まる．

また，$g(t)=0$ を

$$t^2-2t=a(t-1)$$

と変形することにより，図形的考察によって題意を証明することもできる．

（(2) の部分的別解）

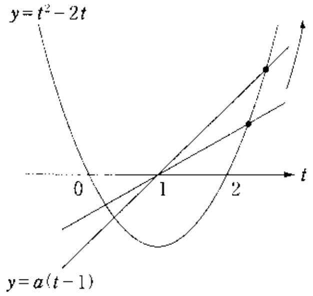
t の方程式

$$t^2-2t=a(t-1)$$

の大きい方の解は，ty 平面上の

放物線 $y=t^2-2t$ と直線 $y=a(t-1)$

の２つの共有点の t 座標のうちの大きい方である．



$y=a(t-1)$ は，a の値によらず点 $(1,\ 0)$ を通る直線であり，$y=t^2-2t$ は下に凸の放物線である．

よって，上図のように $y=a(t-1)$ の傾き a が増加するにつれて右側の交点の t 座標も増加する．すなわち，a の値が増加するとき，t の値も増加する．

（(2) の部分的別解終り）

【解答】では，(1) で得た a と t の関係式は，t について解くより a について解いた方が（根号を含まないので）易しいと判断し，逆に t から a が定まることに注目した．

> 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対し，
> $$x_1<x_2 \iff f(x_1)<f(x_2)$$
> **連続な単調増加関数の性質**

であるから，$a=\varphi(t)$ が t の単調増加関数であるとわかれば，その逆関数 $t=\varphi^{-1}(a)$ が存在して，$\varphi^{-1}(a)$ も a の単調増加関数である．

このように，**【解答】**では，逆関数を考えることによって間接的に題意を示したが，t や OP の傾きを a の式で表して，次のように解くこともできる．

（(2)，(3) の別解）

(2)
$$g(t)=t^2-(a+2)t+a$$
とおくと，
$$g(a)=-a<0$$
より，与えられた正の数 a に対応して定まる t は，t の２次方程式 $g(t)=0$ の大きい方の解
$$t=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$$
である．

さらに，$a>0$ において，a，$\sqrt{a^2+4}$ はともに単調増加である．

よって，a の値が増加するとき，t の値も増加する．

(3) 直線 OP の傾きを m とすると，
$$m=\frac{f(t)}{t}=\frac{e^t}{t(t-a)}.$$
$$t=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}\ (=h(a))$$
を用いると（ただし，以下，$h(a)=h$，$h'(a)=h'$ と略記する），
$$\begin{aligned}\frac{dm}{da}&=\frac{d}{da}\left\{\frac{e^t}{t(t-a)}\right\}\\&=\frac{d}{da}\left\{\frac{e^h}{h(h-a)}\right\}\\&=\frac{\left(\dfrac{d}{da}e^h\right)(h^2-ah)-e^h\dfrac{d}{da}(h^2-ah)}{h^2(h-a)^2}.\end{aligned}$$

ここで，(分母)>0 であり，
$$\begin{aligned}(\text{分子})&=e^hh'(h^2-ah)-e^h(2hh'-h-ah')\\&=e^h(h^2h'-ahh'-2hh'+h+ah')\\&=e^h[\{h^2-(a+2)h-a\}h'+h].\end{aligned}$$

(1) より，
$$t^2-(a+2)t+a=0$$
であり，$t=h(a)$ であるから，
$$h^2-(a+2)h+a=0.$$

これより，
$$(\text{分子})=he^h$$
となるから，$h>a>0$ より，
$$\frac{dm}{da}=\frac{he^h}{h^2(h-a)^2}>0.$$

よって，a の値が増加するとき，直線 OP の傾きも増加する．

（(2)，(3) の別解終り）

[7] 複素数平面

【Ⅲ型　選択問題】

（配点　40点）

> α は $0<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ を満たす実数とし，
>
> $w=8(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)$ とおく．
>
> z の２つの３次方程式
> $$z^3=8 \quad \cdots ①, \qquad z^3=w \quad \cdots ②$$
> を考える．ただし，i は虚数単位とする．
>
> (1) 方程式 ① を解け．
>
> (2) 方程式 ② の解を極形式で表せ．

(3) 複素数平面上で ①, ② の解が表す点を反時計まわりに順に結んでできる六角形の面積を S とする.

(i) S を α を用いて表せ.

(ii) α が $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たして変化するとき, S のとり得る値の範囲を求めよ.

【配点】

(1) 6点.

(2) 10点.

(3) 24点.

(i) 16点. (ii) 8点.

【出題のねらい】

3次方程式の複素数解を極形式で表すことができるかを確認し, これらの解が複素数平面上で表す点を頂点とする図形の面積のとり得る値の範囲を求めることができるかをみる問題である.

【解答】

$$z^3=8 \quad \cdots ①, \qquad z^3=w. \quad \cdots ②$$

(1) ① より,

$$z^3-2^3=0.$$
$$(z-2)(z^2+2z+4)=0.$$
$$z-2=0, \quad z^2+2z+4=0.$$

よって, ① の解は,

$$\boldsymbol{z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i.}$$

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi) \quad \cdots ③$

とおくと, ド・モアブルの定理より,

$$z^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).$$

また,

$$w=8(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha).$$

② の両辺の絶対値と偏角を比較して,

$$r^3=8,\ 3\theta=3\alpha+2k\pi \ (k \text{ は整数}).$$

$r>0$ であるから,

$$r=2. \quad \cdots ④$$

また,

$$\theta=\alpha+\frac{2k\pi}{3} \ (k \text{ は整数}).$$

α は $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たす実数であるから,

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では, $k=0,\ 1,\ 2$ である.

よって,

$$\theta=\alpha,\ \alpha+\frac{2}{3}\pi,\ \alpha+\frac{4}{3}\pi. \quad \cdots ⑤$$

④, ⑤ を ③ に代入して, 求める解は,

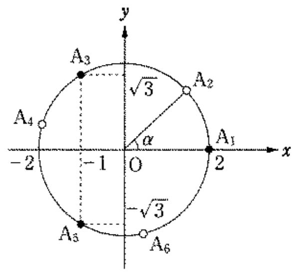
$$z=2(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$
$$2\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)\right\},$$
$$2\left\{\cos\left(\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)\right\}.$$

(3)(i) $\quad -1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$

$$-1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

および (2) より, ①, ② の解はすべて $|z|=2$ を満たす.

$0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ に注意すると, ①, ② の解は複素数平面上で次のような点を表す.



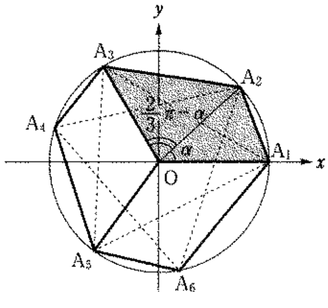
(•…① の解, ∘…② の解)

これら6個の複素数が表す点を上図のように, A_1, A_2, …, A_6 とする.

三角形 $A_1A_3A_5$, 三角形 $A_2A_4A_6$ はともに正三角形であり,

$$\angle A_1OA_2=\alpha$$

であるから, 題意の六角形は次図のようになる.



図において, A_1, A_2, A_3 を O のまわりに $\frac{2}{3}\pi$ 回転すると, それぞれ A_3, A_4, A_5 にうつり, さらに $\frac{2}{3}\pi$ 回転すると, それぞれ A_5, A_6, A_1 にうつる.

よって, 四角形 $OA_1A_2A_3$, 四角形 $OA_3A_4A_5$, 四角形 $OA_5A_6A_1$ はすべて合同であるから,

$S=3$(四角形 $OA_1A_2A_3$ の面積)

$$=3(\triangle OA_1A_2+\triangle OA_2A_3)$$

$$=3\left\{\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\right\}$$

$$=6\left\{\sin\alpha+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\right\}.$$

(ii) (i) より,

$$S=6\left\{\sin\alpha+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\right\}$$

$$=6\cdot 2\sin\frac{\alpha+\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)}{2}\cos\frac{\alpha-\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)}{2}$$

$$=12\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$

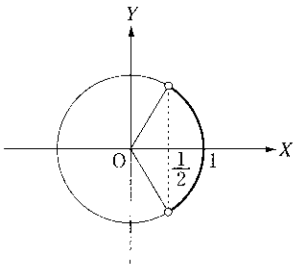
$$=6\sqrt{3}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

α が $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たして変化するとき,

$$-\frac{\pi}{3}<\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$$

より, $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ のとり得る値の範囲は,

$$\frac{1}{2}<\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1.$$



よって, S のとり得る値の範囲は,

$$3\sqrt{3}<S\leqq 6\sqrt{3}.$$

【解説】 問題

(1) $z^3=8$ を解くために,

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

因数分解の公式

を用いて z^3-8 を因数分解した.

このあと現れる2次方程式 $z^2+2z+4=0$ の係数は実数であるから,

x の2次方程式

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, a, b, c は実数)

の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2次方程式の解の公式

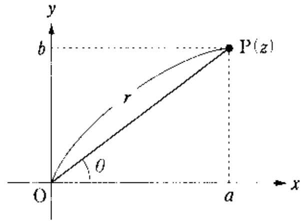
を用いて解を求めることができる.

(2) 複素数平面上で $z=a+bi$ ($z\neq 0$) の表す点をPとし,

OP$=r$, 動径OPの表す角を θ

とすると,

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$



r を z の絶対値といい, $|z|$ で表し, θ を z の偏角といい, $\arg z$ で表す

複素数の極形式

これより,

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくことができる.

このとき,

$$z^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$

において,

整数 n に対して,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

ド・モアブルの定理

を用いると,

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

を得るから, ② より,

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=8(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha).$$

この両辺の絶対値と偏角を比較することにより, r, θ それぞれの方程式を作り, それらを解けばよい.

① についても, 極形式を利用して解くことができる.

((1) の別解)

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくと, ド・モアブルの定理より,

$$z^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta).$$

また,

$$8=8(\cos 0+i\sin 0)$$

であるから, ① より,

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=8(\cos 0+i\sin 0).$$

両辺の絶対値と偏角を比較して,

$$r^3=8,\ 3\theta=2k\pi\ (k \text{ は整数}).$$

よって，$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ に注意すると，

$$r=2,\quad \theta=0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$$

より，

$$z=2,\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

すなわち，

$$z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i.$$

((1)の別解終り)

(3)(i)　一般に，

> 複素数 z，w に対して，
> $$|zw|=|z||w|$$
> とくに，自然数 n について，
> $$|z^n|=|z|^n$$
> **複素数の絶対値**

が成り立つから，① について，

$|z^3|=8$ より，$|z|^3=8$.

したがって，

$$|z|=2.$$

同様に，② について，

$|z^3|=|w|$ より，$|z|^3=8$.

したがって，

$$|z|=2.$$

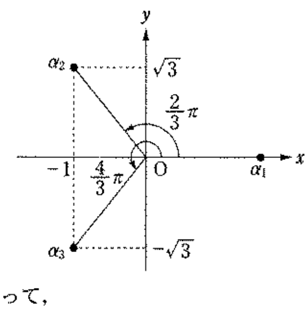
よって，①，② の解はすべて複素数平面上で，原点 O を中心とする半径 2 の円 C の周上にある．

ここで，① の解を

$$\begin{cases}\alpha_1=2,\\ \alpha_2=-1+\sqrt{3}\,i,\\ \alpha_3=-1-\sqrt{3}\,i\end{cases}$$

とおいて，α_2，α_3 を極形式で表すと，

$$\alpha_2=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$
$$\alpha_3=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right).$$



よって，

$$\arg\alpha_1=0,\ \arg\alpha_2=\frac{2}{3}\pi,\ \arg\alpha_3=\frac{4}{3}\pi$$

ととることができるから，3 点 α_1，α_2，α_3 を結んでできる三角形は C に内接する正三角形である．

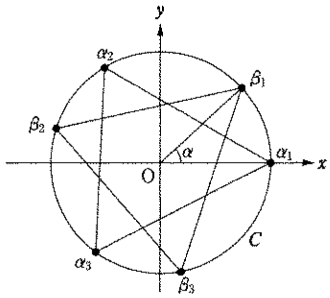
同様に，② の解を

$$\begin{cases}\beta_1=2(\cos\alpha+i\sin\alpha),\\ \beta_2=2\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)\right\},\\ \beta_3=2\left\{\cos\left(\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)\right\}\end{cases}$$

とおくと，

$$\arg\beta_1=\alpha,\ \arg\beta_2=\alpha+\frac{2}{3}\pi,\ \arg\beta_3=\alpha+\frac{4}{3}\pi$$

ととることができるから，3 点 β_1，β_2，β_3 を結んでできる三角形は C に内接する正三角形である．

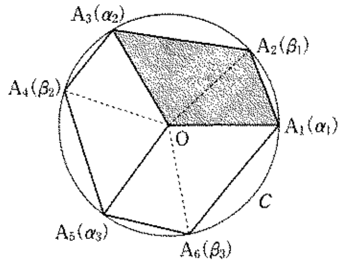


α_1，α_2，α_3 を O のまわりに α 回転するとそれぞれ β_1，β_2，β_3 にうつるから，α_1，α_2，α_3，β_1，β_2，β_3 は上図のように並んでいる．

【解答】では，これら 6 点を，改めて次図のように A_1，A_2，…，A_6 としたとき，四角形 $OA_1A_2A_3$，四角形 $OA_3A_4A_5$，四角形 $OA_5A_6A_1$ が合同であることに着目し，

$$S=3(\text{四角形 } OA_1A_2A_3 \text{ の面積})$$
$$=3(\triangle OA_1A_2+\triangle OA_2A_3)$$

とした．



このことは，

$$\triangle OA_1A_2\equiv\triangle OA_3A_4\equiv\triangle OA_5A_6,$$
$$\triangle OA_2A_3\equiv\triangle OA_4A_5\equiv\triangle OA_6A_1$$

であることからも確認できる．

あとは，

$$\angle A_1OA_2=\alpha,\ \angle A_2OA_3=\frac{2}{3}\pi-\alpha$$

を用いて，$\triangle OA_1A_2$，$\triangle OA_2A_3$ を求めればよい．

(ii)　(i)で得られた

$$S=6\left\{\sin\alpha+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\right\}$$

を α の関数とみて，$0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ のときの S のとり得る値の範囲を求めればよい．

【解答】では，

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

和を積に直す公式

を用いて S を変形し，変数 α を1ヵ所に集めて

$$S=6\sqrt{3}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$

とした．

また，

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

加法定理

を用いて S を $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の1次式で表してから，

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき，

$$a\sin\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角

三角関数の合成

を利用して解答することもできる．

((3)(ii)の別解)

(i)より，

$$\begin{aligned}S&=6\left\{\sin\alpha+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\right\}\\&=6\left(\sin\alpha+\sin\frac{2}{3}\pi\cos\alpha-\cos\frac{2}{3}\pi\sin\alpha\right)\\&=6\left(\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)\\&=6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)\\&=6\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

α が $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi$ を満たして変化するとき，

$$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$$

より，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{1}{2}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1.$$

よって，S のとり得る値の範囲は，

$$3\sqrt{3}<S\leqq 6\sqrt{3}.$$

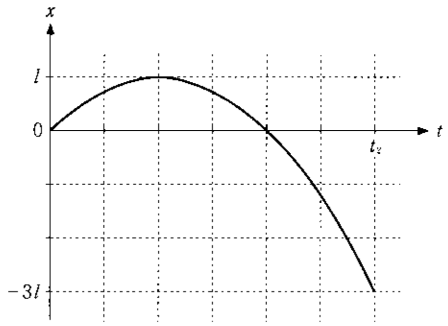
((3)(ii)の別解終り)

【理　科】

物　理

1 運動方程式と等加速度直線運動

【解答】

問1	(1) $\frac{1}{2}Mg$	(2) $\frac{1}{2}(M-m)g$		
問2	式・説明 物体Aについての運動方程式は， $Ma=\frac{1}{2}Mg-T$ 物体Bについての運動方程式は， $ma=T-\frac{1}{2}mg$ 以上2式より， $a=\frac{(M-m)g}{2(M+m)}$，$T=\frac{Mmg}{M+m}$		答 $a=\frac{(M-m)g}{2(M+m)}$	$T=\frac{Mmg}{M+m}$
問3	$t_1=\frac{v_0}{a}$	$l=\frac{v_0^2}{2a}$	問4	$t_2=\frac{3v_0}{a}$
問5				

【配点】（33点）

問1　(1)　4点　　(2)　4点

問2　8点

問3　t_1　4点　　l　4点

問4　4点

問5　5点

【出題のねらい】

　力学分野からの出題である。物体にはたらく力が見抜けるかどうか，運動方程式が正しく立てられるかどうかを確認した。また，等加速度直線運動が正しく扱えるかも確認した。**問1**，**問2**は基本的な問であり，正解できていない受験生は，物体にはたらく力，運動の法則について，教科書等を利用して早急に復

習すること。

【解説】 問題

問 1　(1)　このときの糸の張力の大きさを T_0 とする。物体 A について，斜面 S_1 に沿った方向の力のつり合いより，

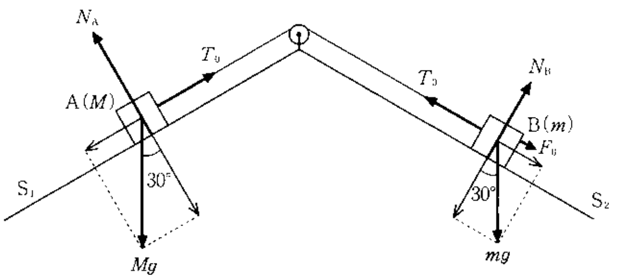
$$T_0 = Mg\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad T_0 = \frac{1}{2}Mg$$

(2)　加えている外力の大きさを F_0 とする。物体 B について，斜面 S_2 に沿った方向の力のつり合いより，

$$F_0 + mg\sin 30^\circ = T_0$$

$$\therefore \quad F_0 = T_0 - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}(M \quad m)g$$



(注)　斜面に垂直な方向も力はつり合っている。物体 A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N_A とすると，

$$N_A = Mg\cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad N_A = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg$$

物体 B が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N_B とすると，

$$N_B = mg\cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad N_B = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

問 2　物体 A についての運動方程式は，斜面 S_1 に沿って下向きを正として，

$$Ma = Mg\sin 30^\circ - T$$

$$\therefore \quad Ma = \frac{1}{2}Mg - T \quad \cdots ①$$

物体 B についての運動方程式は，斜面 S_2 に沿って上向きを正として，

$$ma = T - mg\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad ma = T - \frac{1}{2}mg \quad \cdots ②$$

①，② 式より，T を消去すると，

$$(M+m)a = \frac{1}{2}(M-m)g$$

$$\therefore \quad a = \frac{(M-m)g}{2(M+m)}$$

【ポイント】

力のつり合い

物体が静止もしくは等速度運動しているとき，物体にはたらく力はつり合っている。

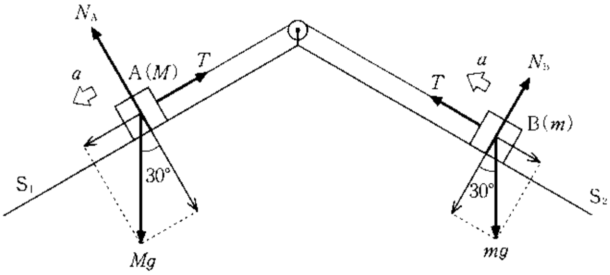
運動方程式

物体の質量を m，加速度を a，物体にはたらく力を F として，

$ma = F$

また，a を消去すると，

$$T=\underline{\frac{Mmg}{M+m}}$$



（注）　この場合も，斜面に垂直な方向は力がつり合っている。
問 1 のときと同様に，

$$N_A=\frac{\sqrt{3}}{2}Mg$$

$$N_B=\frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

である。

問 3　物体 B は，斜面 S_2 に沿って上向きに大きさ a の等加速度直線運動をする。点 L で速さが 0 になったときの時刻 t_1 は，等加速度直線運動の式より，斜面 S_2 に沿って下向きを正として，

$$0=v_0+(-a)t_1$$

$$\therefore\quad t_1=\underline{\frac{v_0}{a}}$$

また，点 O から点 L までの距離 l は，

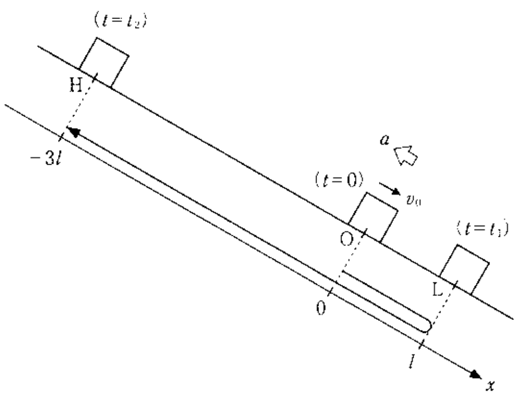
$$0^2-v_0{}^2=2(-a)l$$

$$\therefore\quad l=\underline{\frac{v_0{}^2}{2a}}$$

（別解）　点 O から点 L までの距離 l は，t_1 を用いて，

$$l=v_0t_1+\frac{1}{2}(-a)t_1{}^2$$

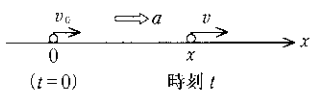
から求めてもよい。



等加速度直線運動の式

x 軸上を一定の加速度 a で物体が運動するとき，時刻 t における物体の位置を x，その速度を v（$t=0$ のとき，$x=0$，$v=v_0$）とすると，次の 3 式が成立する。

$$\begin{cases} v=v_0+at \\ x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2-v_0{}^2=2ax \end{cases}$$



問 4　点 H を通過したときの時刻 t_2 は，

$$-3l=v_0t_2+\frac{1}{2}(-a)t_2^2$$

問 3 で求めた $l=\dfrac{v_0^2}{2a}$ を代入して，整理すると，

$$t_2^2-\frac{2v_0}{a}t_2-\frac{3v_0^2}{a^2}=0$$

$$\therefore\quad \left(t_2+\frac{v_0}{a}\right)\left(t_2-\frac{3v_0}{a}\right)=0$$

よって，

$$t_2=-\frac{v_0}{a},\ \frac{3v_0}{a}$$

$t_2>0$ より，

$$t_2=\frac{3v_0}{a}\ (=3t_1)$$

（別解）　点 L で折り返してから点 H を通過するまでの時間を t' とすると，

$$4l\left(=4\cdot\frac{v_0^2}{2a}\right)=\frac{1}{2}at'^2$$

$$\therefore\quad t'=\frac{2v_0}{a}$$

よって，

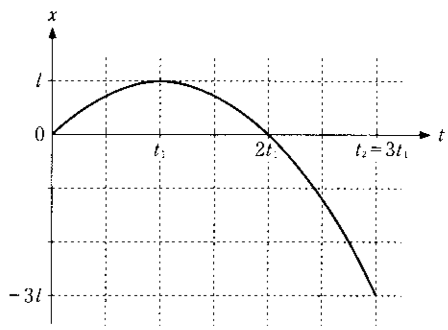
$$t_2=t_1+t'=\frac{3v_0}{a}$$

問 5　物体 B の位置 x を時刻 t の関数として表すと，

$$x=v_0t+\frac{1}{2}(-a)t^2$$

$$=-\frac{1}{2}a\left(t-\frac{v_0}{a}\right)^2+\frac{v_0^2}{2a}$$

よって，横軸に時刻 t，縦軸に位置 x をとったグラフは，$t=\dfrac{v_0}{a}=t_1$，$x=\dfrac{v_0^2}{2a}=l$ を頂点とし，上に凸な放物線であることがわかり，下図のようになる。



2 運動量保存の法則

【解答】

問1	(1) $\frac{1}{2}mv_0=\frac{1}{2}mv_A+mv_B$		(2) $v_B-v_A=ev_0$		(3) $v_B=\frac{1}{3}(1+e)v_0$		
問2	$v\sqrt{\frac{2h}{g}}$	問3	$\frac{mv}{m+M}$	問4	$\frac{mMv}{m+M}$	問5	$\frac{v}{\cos\theta}$
問6	(1) $\tan\phi=\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta+V}$		(2) $V=\frac{m(v-u\cos\theta)}{m+M}$				

【配点】 (34点)

問1 (1) 3点 (2) 3点 (3) 4点

問2 4点

問3 4点

問4 4点

問5 4点

問6 (1) 4点 (2) 4点

【出題のねらい】

力学分野からの出題である。入試頻出の一直線上での2球の衝突から始まり，水平投射，衝突以外の運動量保存の法則，力積，さらには相対速度について，基本事項の確認と，応用力を測った。**問1**，**問2**は基本的な問であり，正解できていない受験生は，運動量保存の法則，反発係数，落体の運動（放物運動）について，教科書等を利用して早急に復習すること。

【解説】 問題

問1 (1) 小球Aと小球Bの衝突において成り立つ，運動量保存の法則の式は，

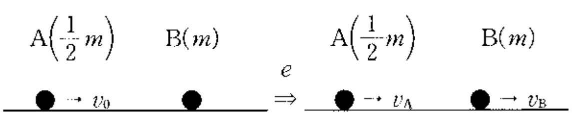
$$\frac{1}{2}mv_0+m\cdot 0=\frac{1}{2}mv_A+mv_B$$

$$\therefore\ \underline{\frac{1}{2}mv_0=\frac{1}{2}mv_A+mv_B}\quad\cdots①$$

(2) 反発係数の関係式は，

$$e=-\frac{v_B-v_A}{0-v_0}$$

$$\therefore\ \underline{v_B-v_A=ev_0}\quad\cdots②$$



(3) ①，②式より，v_Aを消去すると，

$$\frac{1}{2}mv_0=\frac{1}{2}m(v_B-ev_0)+mv_B$$

$$\therefore\ \underline{v_B=\frac{1}{3}(1+e)v_0}$$

（注） v_Bを消去すると，

$$v_A=\frac{1}{3}(1-2e)v_0$$

【ポイント】

運動量

物体の質量をmとすると，速度vの物体の運動量pは，

$p=mv$

運動量保存の法則（保存則）

物体系に外力がはたらかないとき（外力の力積が0のとき），物体系の運動量の和は一定に保たれる。

反発係数（はねかえり係数）

衝突前のAの速度をv_{A0}，Bの速度をv_{B0}，衝突後のAの速度をv_A，Bの速度をv_Bとすると，反発係数eは，

$$e=-\frac{v_B-v_A}{v_{B0}-v_{A0}}$$

また，反発係数eの範囲は，$0\leqq e\leqq 1$である。

これより，衝突直後の小球Aは，$0 \leqq e < \frac{1}{2}$ ならば右向きに運動し，$e=\frac{1}{2}$ ならば静止し，$\frac{1}{2}<e \leqq 1$ ならば左向きに運動することがわかる。

問 2　小球Bが高さ h だけ落下する間の時間を t とすると，鉛直方向には，重力加速度の大きさ g の等加速度運動をするので，

$$h=0 \cdot t+\frac{1}{2} g t^{2}$$

$$\therefore \quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

水平方向への移動距離を l とすると，水平方向には，速さ v の等速度運動をするので，

$$l=vt$$

$$\therefore \quad l=\underline{v\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

放物運動

空中に投げ出された物体の運動は，空気抵抗などの抵抗力がはたらかないとき，

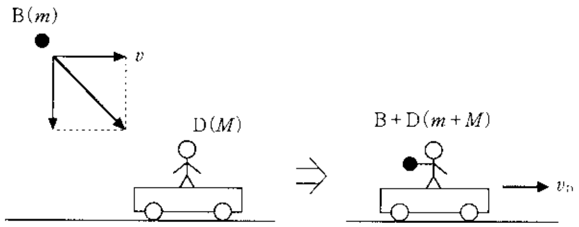
水平方向：等速度運動

鉛直方向：下向きに重力加速度の大きさ g の等加速度運動

問 3　動き出した物体Dの速さを v_D とする。C君が小球Bを受け止めるとき，その直前と直後の小球Bと物体Dの運動量の和について，水平方向の運動量保存の法則が成り立つので，

$$mv+M \cdot 0=(m+M) v_{D}$$

$$\therefore \quad v_{D}=\underline{\frac{mv}{m+M}}$$



（注）　鉛直方向には，外力である重力や水平面RSから受ける垂直抗力がはたらくため，運動量保存の法則は成り立たない。

問 4　物体Dが受けた力積の水平成分の大きさを I_D とすると，物体Dの運動量変化の水平成分の大きさを求めればよいので，

$$I_{D}=Mv_{D}-0=\underline{\frac{mMv}{m+M}}$$

力積

物体に力 F が時間 Δt だけはたらくとき，物体が受けた力積 I は，

$I=F\Delta t$

また，物体が受けた力積は，物体の運動量変化に等しい。

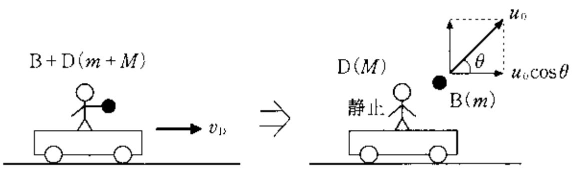
問 5　飛び出した小球Bの速さを u_0 とする。C君が小球Bを投げ出すとき，その直前と直後の小球Bと物体Dの運動量の和について，水平方向の運動量保存の法則が成り立つので，

$$(m+M) v_{D}=m u_{0} \cos \theta+M \cdot 0$$

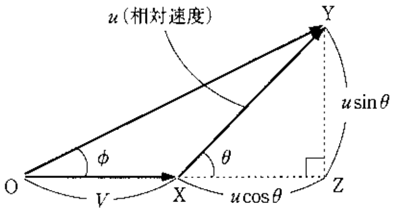
問 3 の結果より，

$$mv=mu_{0} \cos \theta$$

$$\therefore \quad u_{0}=\underline{\frac{v}{\cos \theta}}$$



問 6　(1)　このときの速度の関係を図示すると，次図のようになる。



$\overrightarrow{OX}$ が静止した観測者から見た物体 D の速度(大きさ V)，$\overrightarrow{XY}$ が C 君から見た小球 B の相対速度(大きさ u)，$\overrightarrow{OY}$ が静止した観測者から見た小球 B の速度である。これらのベクトルの間には，

(D に対する B の相対速度)＝(B の速度)－(D の速度)

より，

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$$

すなわち，

$$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XY}$$

の関係がある。よって，三角形 OYZ に着目して，

$$\underline{\tan\phi=\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta+V}}$$

(2)　水平方向の運動量保存の法則が成り立つので，

$$(m+M)v_D=m(u\cos\theta+V)+MV$$

問 3 の結果より，

$$mv=m(u\cos\theta+V)+MV$$

$$\therefore\quad \underline{V=\frac{m(v-u\cos\theta)}{m+M}}$$

相対速度

A の速度を v_A，B の速度を v_B とすると，A に対する B の相対速度(A から見た B の速度) v_{AB} は，

$$v_{AB}=v_B-v_A$$

3　弦の共振

【解答】

問1	(ア) 定常	(イ) 固定端	(ウ) $2l$	(エ) $2fl$	(オ) $\frac{1}{\sqrt{2}}A$
問2	$f_1=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}$	問3	(1) b	(2) $\frac{4}{3}f_1$	
問4	(1) $4f_1$	(2) 9			

【配点】 (33点)

問1 (ア) 2点　(イ) 2点　(ウ) 3点　(エ) 3点　(オ) 3点

問2 4点

問3 (1) 4点　(2) 4点

問4 (1) 4点　(2) 4点

【出題のねらい】

波動分野からの出題である。弦の振動(共振)について，基本知識の確認と，応用力を測った。難易度はさほど高くはないが，弦の振動の特徴が理解できているかどうか，基本振動数および倍振動数が即座に求められるかどうかで，大きく差がつく。**問1**(ア)～(エ)，**問2**は基本的な問であり，正解できていない受験生は，定常波，自由端反射・固定端反射から弦の振動までを，教科書等を利用して早急に復習すること。

【解説】

問題

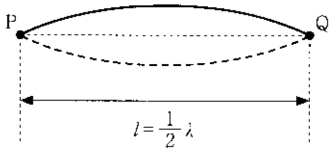
問1 (ア) 左右に進行する同じ波形の波が重なり合うと，上下には振動するが左右には進行しないように見える波が生じる。この波を<u>定常</u>波という。

(イ) 点P，Qは固定端であり，弦を伝わる横波は，点P，Qで<u>固定端</u>反射をする。

(ウ) 弦を伝わる横波の波長をλとすると，問題文に与えられた図1より，

$$l=\frac{1}{2}\lambda$$

$$\therefore\quad \lambda=\underline{2l}$$



(エ) 横波の速さをvとすると，波の基本式より，

$$v=f\lambda=\underline{2fl}$$

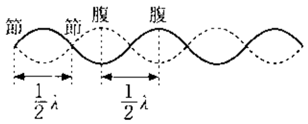
(オ) 端Pから距離$\frac{1}{4}l$の弦の位置での振幅をaとすると，次図より，

$$a=A\sin 2\pi\frac{\frac{1}{4}l}{\lambda}=A\sin\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}A}$$

【ポイント】

定常波

逆向きに進む同じ波形の波(波長λ)が重なり合うと，定常波を生じる。変位が常に0の点を節，最も大きく振動する点を腹という。節と節，腹と腹の間隔はそれぞれ$\frac{1}{2}\lambda$である。



反射と定常波

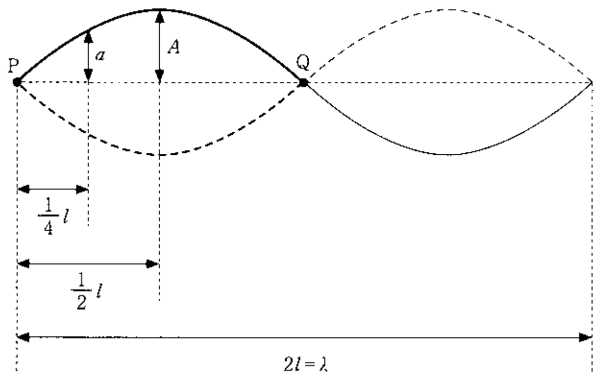
自由端は定常波の腹になる。

固定端は定常波の節になる。

波の基本式

波の速さをv，波長をλ，振動数をfとすると，

$v=f\lambda$



問 2　弦 a を伝わる横波の波長を λ_1 とすると，基本振動が生じているので，

$$l=\frac{1}{2}\lambda_1$$

$$\therefore\quad \lambda_1=2l$$

おもりにはたらく力のつり合いより，弦 a の張力は mg に等しいことがわかる。弦 a を伝わる横波の速さを v_1 とすると，与えられた式より，

$$v_1=\sqrt{\frac{mg}{\rho}}$$

よって，波の基本式より，

$$f_1=\frac{v_1}{\lambda_1}=\underline{\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}}$$

弦を伝わる横波の速さ

弦の張力が S，線密度が ρ のとき，弦を伝わる横波の速さ v は，

$$v=\sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

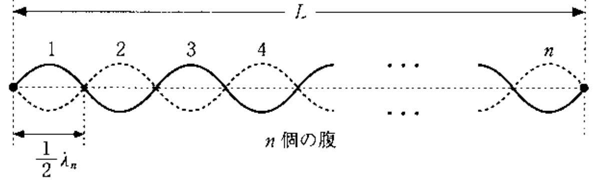
問 3，問 4　まずはじめに，弦の固有振動の一般的な関係式をつくっておこう。長さ L，線密度 ρ，張力 S の両端が固定された弦に，腹の数が n の定常波(n 倍振動)が生じたとする。弦を伝わる横波の波長を λ_n とすると，

$$L=n\cdot\frac{1}{2}\lambda_n$$

$$\therefore\quad \lambda_n=\frac{2L}{n}$$

弦の固有振動

弦に特別な振動数を与えると，弦は共振し，弦には定常波がつくられる。この振動を弦の固有振動といい，振動数を弦の固有振動数という。



弦を伝わる横波の速さを v_n とすると，

$$v_n=\sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

よって，振動数を f_n とすると，波の基本式より，

$$f_n=\frac{v_n}{\lambda_n}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

このようにして，弦の固有振動数（n 倍振動数）の式が得られた。

次に，弦 a，b，c の固有振動数を求めておこう。弦 a の固有振動数を f_{an} とすると，$L=l$，$S=mg$ なので，

$$\begin{aligned}f_{an}&=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}\\&=nf_1\\&=f_1,\ 2f_1,\ 3f_1,\ 4f_1,\ 5f_1,\ \cdots\end{aligned}$$

弦 b の固有振動数を f_{bn} とすると，$L=\frac{3}{4}l$，$S=mg$ なので，

$$\begin{aligned}f_{bn}&=\frac{n}{2\cdot\frac{3}{4}l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}\\&=\frac{4}{3}nf_1\\&=\frac{4}{3}f_1,\ \frac{8}{3}f_1,\ 4f_1,\ \frac{16}{3}f_1,\ \frac{20}{3}f_1,\ \cdots\end{aligned}$$

弦 c の固有振動数を f_{cn} とすると，$L=l$，$S=4mg$ なので，

$$\begin{aligned}f_{cn}&=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{4m\cdot g}{\rho}}\\&=2nf_1\\&=2f_1,\ 4f_1,\ 6f_1,\ 8f_1,\ 10f_1,\ \cdots\end{aligned}$$

これらの固有振動数を，振動数が小さい順に並べると，次表のようになる。

弦 a	f_1		$2f_1$		$3f_1$	$4f_1$	$5f_1$		$6f_1$		$7f_1$	$8f_1$	…
弦 b		$\frac{4}{3}f_1$		$\frac{8}{3}f_1$		$4f_1$		$\frac{16}{3}f_1$		$\frac{20}{3}f_1$		$8f_1$	…
弦 c			$2f_1$			$4f_1$			$6f_1$			$8f_1$	…

この結果を用いて，以下を解答していく。

問 3　(1)，(2)　振動源の振動数を f_1 からゆっくりと増加させていくと，次に共振状態になるのは弦 $\underline{\text{b}}_{(1)}$ で，その振動数は $\underline{\frac{4}{3}f_1}_{(2)}$ である。

問 4　(1)，(2)　振動源の振動数をさらにゆっくりと増加させていくと，次に共振状態になるのは弦 a と弦 c で，その振動数は $2f_1$ である。

さらに振動数をゆっくりと増加させていくと，次に共振状態になるのは弦 b で，その振動数は $\frac{8}{3}f_1$ である。

さらに振動数をゆっくりと増加させていくと，次に共振状態になるのは弦 a で，その振動数は $3f_1$ である。

さらに振動数をゆっくりと増加させていくと，次に共振状態に

弦の固有振動数の式

長さ L の弦に腹が n 個の定常波ができているとき，弦の振動数 f_n は，

$$f_n=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

ここで，S は弦の張力，ρ は弦の線密度である。

また，$n=1$（腹の数が 1 個）のときの振動を基本振動，$n=2$，3，4，…のときの振動を倍振動という。

なるのは，３本の弦a，b，cが同時で，その振動数は$\underline{4f_1}_{(1)}$である。このとき，弦aは４倍振動，弦bは３倍振動，弦cは２倍振動なので，弦a，b，cに生じている腹の数の和は
$4+3+2=\underline{9}_{(2)}$である。

化　学

1 化学結合，結晶

【解答】

問1	あ	自由電子	い	分子間(ファンデルワールス)			
問2	(1)	(c)	(2)	Cl_2 < Li < LiCl			
問3	(1)	:N⋮⋮N:	(2)	NH_3，HF			
問4	分子間で水素結合を形成している						
問5	面心立方	問6	$l = \frac{\sqrt{2}}{2}a$	問7	4個	問8	1.7 g/cm^3

【配点】（28点）

問1　各2点×2　　**問2**　(1)　2点　　(2)　3点　　**問3**　(1)　2点　　(2)　3点

問4　3点　　**問5**　2点　　**問6**　3点　　**問7**　2点　　**問8**　4点

【出題のねらい】

化学結合および物質の構造と性質についての知識の確認と，ドライアイスを題材とした結晶構造に関する理解を試す問題である。

【解説】　問題

問1　**あ**　金属元素は陽性が強く，価電子は原子から離れやすい。多数の金属原子が集まると，隣り合った原子の電子殻の重なりを介して，価電子が自由に移動できるようになる。このような価電子を自由電子という。

い　分子結晶においては，共有結合によって形成された分子(ただし，希ガスは単原子分子)どうしがファンデルワールス力によって結びついている。分子間力としては，ファンデルワールス力のほかに，水素結合がはたらく場合がある。分子間力はイオン結合，共有結合，金属結合に比べて弱いため，分子結晶は比較的軟らかく，また，融点が低く，昇華しやすいものもある。

問2　(1)　リチウムLiは金属元素であり，その結晶は金属結晶である。非金属元素の単体である塩素Cl_2は，2個のCl原子が共有結合してできた分子からなり，その結晶は，多数の分子がファンデルワールス力によって集まってできた分子結晶である。金属元素と非金属元素からなる塩化リチウムLiClの結晶は，Li^+とCl^-が静電気力(クーロン力)によって結びついてできたイオン結晶である。よって，これら3種類の物質のいずれにも該当しない結晶は共有結合の結晶である。

(2)　アルカリ金属であるLiは，他のアルカリ金属の単体と同様

【ポイント】

化学結合と分子間力

共有結合…対になった電子を共有してできる結合。

イオン結合…陽イオンと陰イオンが静電気力(クーロン力)によって引き合ってできる結合。

金属結合…価電子(自由電子)を全原子で共有することによってできる結合。

分子間力…分子どうしの間にはたらく弱い力。非常に弱いファンデルワールス力のほかに，やや強い水素結合がはたらく場合がある。

に，金属単体の中では融点が比較的低い(181 °C)。Cl_2 は常温，常圧で気体であり，融点がかなり低い(−101 °C)。LiCl はイオン結晶であり，融点が高い(605 °C)。以上より，これらの物質を融点の低い順に並べると，Cl_2 < Li < LiCl となる。

問 3　(1)　N は周期表の 15 族に属する元素であり，その原子は価電子を 5 個もつ。窒素分子 N_2 では，2 個の N 原子が 3 個ずつ価電子を出し合って電子対をつくり，これらを共有して三重結合をつくる。それぞれの原子の残りの 2 個ずつの価電子は非共有電子対となる。この結果，それぞれの N 原子はネオンと同じ安定な電子配置となる。

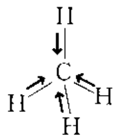
:N⋮⋮N:

(2)　異なる元素の原子が共有結合する場合，共有電子対は電気陰性度がより大きい原子の方に引きつけられ，電荷の偏りが生じる。これを，結合に極性があるという。分子全体で電荷の偏りがある場合は極性分子となるが，分子中のそれぞれの結合の極性が打ち消し合う場合は，分子全体として電荷の偏りがなくなり，無極性分子となる。以下の図において，矢印 → は電子が引きつけられる方向を表している。

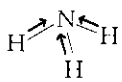
窒素分子 N_2 は，同じ元素の原子 2 個が結合しているため，結合に極性がなく，無極性分子である。

N≡N

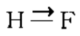
メタン分子 CH_4 は正四面体形であり，4 個の C−H 結合の極性がたがいに打ち消し合うため，無極性分子となる。



アンモニア分子 NH_3 は三角錐形であり，3 個の N−H 結合の極性はたがいに打ち消し合わないため，極性分子となる。



フッ化水素分子 HF は，異なる元素の原子 2 個が結合しているため，極性分子となる。



以上より，極性分子は NH_3 と HF である。

問 4　O 原子と H 原子は電気陰性度の差が大きく，O−H 結合は非常に大きい極性をもつため，H_2O 分子の負の電荷を帯びた O 原子と，他の H_2O 分子の正の電荷を帯びた H 原子が，静電気力によって引き合う。このような結合は水素結合とよばれ，その結合力はファンデルワールス力よりも強い。16 族元素の水素化合物のうち分子量が最も小さい H_2O が，分子量から予想される値

電子式

最外殻電子を，元素記号のまわりに点で示した式。

電子対

共有電子対…2 原子間に共有されている電子対。

非共有電子対…共有結合に使われていない電子対。

電気陰性度

原子が結合するとき，それぞれの原子が結合に使われる電子を引きつける強さを相対的に示す尺度。結合をつくらない希ガスについては定義されない。

結合の極性

共有結合をしている 2 原子間の電荷の偏り。2 原子の電気陰性度の差が大きいほど結合の極性は大きい。

分子の極性

分子全体としての電荷の偏り。分子中の各結合に極性があっても，たがいに打ち消し合うと無極性分子になる。

分子の形

H_2O…折れ線形

NH_3…三角錐形

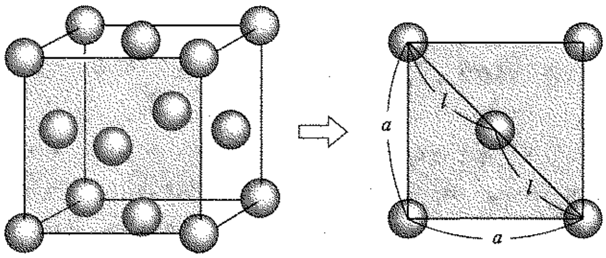
CH_4…正四面体形

CO_2…直線形

よりも非常に高い沸点を示すのは，分子間で水素結合を形成しているからである。15 族，17 族元素の水素化合物のうち，NH_3 や HF も分子間で水素結合を形成する。

問 5　図 2 のように，立方体の各頂点および各面の中心に原子が配置された単位格子は面心立方格子である。

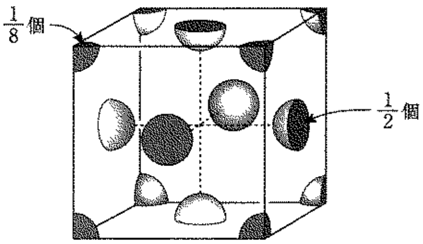
問 6　ドライアイスの単位格子において，立方体の各面の中心の C 原子に最も近い C 原子は，その面の頂点の C 原子である。よって，立方体の一つの面上にある C 原子の配列に注目すると，次のようになる。



右上の図より，

$$2l = \sqrt{2}a \qquad \therefore \quad l = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

問 7　CO_2 分子中の C 原子は面心立方格子の配列になっているから，単位格子 1 個あたりには$\left(\frac{1}{8}\times 8 + \frac{1}{2}\times 6 =\right)$4 個の C 原子が含まれる。



したがって，CO_2 分子も C 原子と同じく単位格子 1 個あたりに 4 個含まれる。

問 8　結晶の密度 d [g/cm³] は次のように計算できる。

$$d = \frac{\text{単位格子中の原子の質量の総和 [g]}}{\text{単位格子の体積 [cm}^3\text{]}}$$

CO_2（モル質量 44 g/mol）分子 1 個の質量は，

$$\frac{44\ \text{g/mol}}{6.0\times 10^{23}/\text{mol}} = \frac{44}{6.0}\times 10^{-23}\ \text{g}$$

であり，また，5.6×10^{-10} m $= 5.6\times 10^{-8}$ cm だから，単位格子の体積は，

$$(5.6\times 10^{-8}\ \text{cm})^3 = 176\times 10^{-24}\ \text{cm}^3$$

水素結合

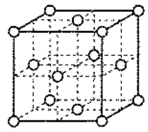
電気陰性度が非常に大きい原子 X（F，O，N）と共有結合して正電荷を帯びた H 原子が，その H 原子と直接結合していない負電荷を帯びた原子 X と引き合ってできる結合。

X－H……X－H

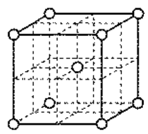
電気陰性度が非常に大きい F，O，N　　水素結合

金属の結晶構造と単位格子中の原子数

面心立方格子



体心立方格子



	単位格子中の原子数
面心立方格子	4
体心立方格子	2

結晶の密度

$$\text{密度} = \frac{\text{単位格子中の原子の質量の総和}}{\text{単位格子の体積}}$$

である。単位格子1個あたりには4個のCO_2分子が含まれるから，ドライアイスの密度は，

$$\frac{\frac{44}{6.0} \times 10^{-23}\,\text{g} \times 4}{176 \times 10^{-24}\,\text{cm}^3} = 1.66 \fallingdotseq 1.7\,\text{g/cm}^3$$

2 酸・塩基

【解答】

I	問1	①	(ア)	②	(ウ)	問2	(イ)		
I	問3	(1)	(a)	(2)	3.15 g	(3)	1.0×10 mL	(4)	(ア)
II	問4	$2NaOH + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O$							
II	問5	2.0×10^{-2} mol	問6	6.7×10 %					

【配点】 (25点)

I　問1　3点　　問2　3点　　問3　(1)　2点　　(2)　3点　　(3)　3点　　(4)　3点

II　問4　2点　　問5　3点　　問6　3点

【出題のねらい】

I　酸と塩基，塩の性質，中和滴定に関する基本的な知識の確認と計算の問題である。

II　炭酸ナトリウムと水酸化ナトリウムの混合水溶液の滴定実験を通して思考力を問う問題である。

【解説】

問題

I

問1　水溶液 **A** 中の HCl は強酸であり，通常の濃度の水溶液中で HCl は完全に電離する。

$$HCl \longrightarrow H^+ + Cl^-$$

一方，水溶液 **B** 中の CH_3COOH は弱酸であり，通常の濃度の水溶液中で CH_3COOH はわずかしか電離しない(0.10 mol/L では電離度は約 0.01)。

$$CH_3COOH \rightleftarrows CH_3COO^- + H^+$$

したがって，**A** と **B** は同じ濃度だから，水溶液中に存在するイオンの濃度は **A** の方が **B** より大きい。イオンの濃度が大きい水溶液の方が電気をよく導くから，**A** の方が電球が明るく点灯する。

問2　(ア)　**A**(HCl 水溶液) と **C**(NH_3 水溶液) は同じ濃度だから，これらを同体積ずつ混合すると NH_4Cl 水溶液となる。

$$HCl + NH_3 \longrightarrow NH_4Cl$$

NH_4Cl は強酸と弱塩基から生じる正塩であり，その水溶液は酸性を示す(pH はおよそ 5)。

(イ)　**A**(HCl 水溶液) と **D**(NaOH 水溶液) は同じ濃度だから，これらを同体積ずつ混合すると NaCl 水溶液となる。

$$HCl + NaOH \longrightarrow NaCl + H_2O$$

NaCl は強酸と強塩基から生じる正塩であり，その水溶液は中性を示す(25 ℃ では pH は 7)。

(ウ)　**C** と **D** はともに塩基性の水溶液であり，これらの混合水溶液も塩基性である(NaOH が強塩基なので pH はおよそ 13)。

【ポイント】

酸・塩基の強弱

強酸・強塩基

HCl, HNO_3, H_2SO_4,
NaOH, KOH, $Ca(OH)_2$,
$Ba(OH)_2$ など

弱酸・弱塩基

CH_3COOH, NH_3 など

電離度

$$電離度 = \frac{電離した溶質の物質量}{溶かした溶質の物質量}$$

正塩の水溶液の性質

弱酸と強塩基の中和で生じる塩
…水溶液は塩基性

強酸と弱塩基の中和で生じる塩
…水溶液は酸性

強酸と強塩基の中和で生じる塩
…水溶液は中性

よって，pH は(ア)<(イ)<(ウ)の順であり，pH が 2 番目に大きいのは(イ)となる。

問 3 (1) 図 2 の実験器具はメスフラスコである。メスフラスコは，正確な体積の溶液を調製するときに用いる。

(2) w〔g〕の $H_2C_2O_4 \cdot 2H_2O$（モル質量 126 g/mol）中の $H_2C_2O_4$ の物質量は $\dfrac{w\,[\mathrm{g}]}{126\ \mathrm{g/mol}}$ である。これを水に溶かして 500 mL = 0.500 L にした水溶液の濃度が 0.0500 mol/L だから，

$$\frac{w\,[\mathrm{g}]}{126\ \mathrm{g/mol}} \times \frac{1}{0.500\ \mathrm{L}} = 0.0500\ \mathrm{mol/L}$$

$$\therefore\quad w = 3.15\ \mathrm{g}$$

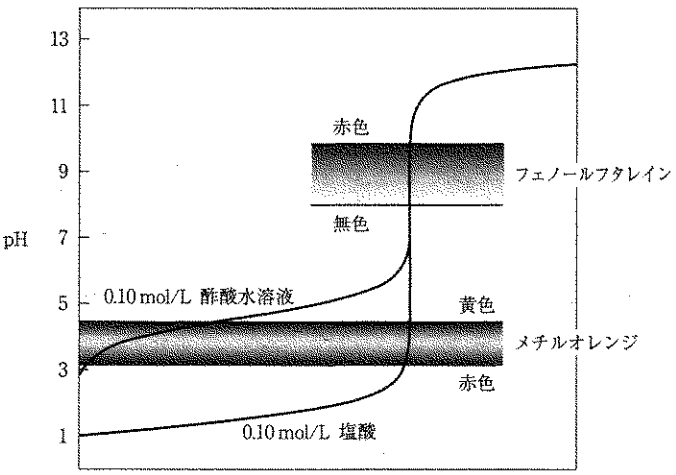
(3) $H_2C_2O_4$ は 2 価の酸，NaOH は 1 価の塩基だから，中和点までに必要な **D**（NaOH 水溶液）の体積 v〔mL〕は，中和の量的関係より，

$$2 \times 0.0500\ \mathrm{mol/L} \times \frac{10}{1000}\ \mathrm{L} = 1 \times 0.10\ \mathrm{mol/L} \times \frac{v}{1000}\ [\mathrm{L}]$$

$$\therefore\quad v = 1.0 \times 10\ \mathrm{mL}$$

(4) HCl のような強酸を NaOH 水溶液で滴定する場合，次図のように，中和点付近では NaOH 水溶液を 1 滴加えるだけで，pH が極めて大きく変化するため，指示薬としてフェノールフタレイン（変色域 pH 8.0～9.8）またはメチルオレンジ（変色域 pH 3.1～4.4）のどちらを使用してもよい。

これに対して，CH_3COOH のような弱酸を NaOH 水溶液で滴定する場合，次図のように，滴定開始後すぐに pH がメチルオレンジの変色域に達してしまうため，指示薬としてメチルオレンジを使用することはできない。

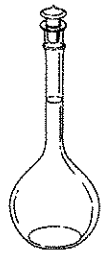


0.10 mol/L NaOH水溶液の滴下量

$H_2C_2O_4$ も弱酸であり，NaOH 水溶液で滴定する際に指示薬と

滴定実験で用いる実験器具

メスフラスコ



一定体積の溶液を調製するときに用いる。内部が水で濡れていてもそのまま使用してよい。

ホールピペット

一定体積の液体を正確にはかり取るときに用いる。内部が水で濡れているときは，共洗いしてから使用する。

ビュレット

滴下した溶液の体積をはかる器具。内部が水で濡れているときは，共洗いしてから使用する。

中和の量的関係

中和点では次の関係が成立する。

酸が放出した H^+ の物質量

＝塩基が受け取った H^+ の物質量
（塩基が放出した OH^- の物質量）

指示薬

フェノールフタレイン

変色域；（無色）pH 8.0～pH 9.8（赤色）

メチルレッド

変色域；（赤色）pH 4.2～pH 6.2（黄色）

メチルオレンジ

変色域；（赤色）pH 3.1～pH 4.4（黄色）

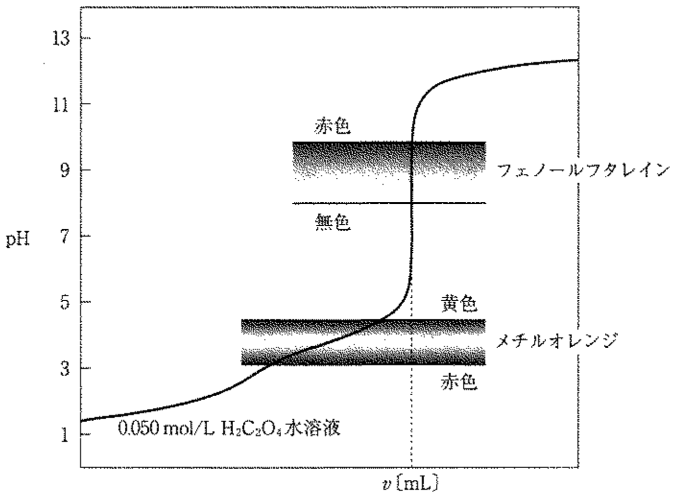
中和滴定の指示薬

強酸と強塩基の滴定…フェノールフタレインまたはメチルオレンジ（メチルレッド）

弱酸と強塩基の滴定…フェノールフタレイン

弱塩基と強酸の滴定…メチルレッドまたはメチルオレンジ

してメチルオレンジを用いると，次図のように，中和点の手前で変色してしまうことになり，$v > v'$ となる。



0.10 mol/L NaOH 水溶液の滴下量

II

問 4 NaOH に CO_2 を吸収させると，式(ii)のように，Na_2CO_3 が生じる。

$$2NaOH + CO_2 \longrightarrow Na_2CO_3 + H_2O \quad \cdots(ii)$$

問 5 下線部(e)で発生した CO_2 の物質量を x〔mol〕とする。

$$CaCO_3 \longrightarrow CaO + CO_2 \quad \cdots(i)$$

CO_2 を吸収させる前の NaOH 水溶液中の NaOH の物質量は，

$$0.10\ \text{mol/L} \times \frac{500}{1000}\ \text{L} = 0.050\ \text{mol}$$

だから，CO_2 を吸収させたときの変化は次のようになる。

	$2NaOH$	$+ CO_2 \longrightarrow$	Na_2CO_3	$+ H_2O$
はじめ	0.050	x	0	
変化量	$-2x$	$-x$	$+x$	
反応後	$0.050-2x$	0	x	（単位：mol）

これより，CO_2 吸収後の水溶液は，x〔mol〕の Na_2CO_3 と $(0.050-2x)$〔mol〕の NaOH の混合水溶液となっている。この混合水溶液 500 mL から 10 mL を取って，フェノールフタレインが変色するまで 0.10 mol/L の塩酸で滴定したとき，次の反応が起こる。

$$NaOH + HCl \longrightarrow NaCl + H_2O \quad \cdots(iii)$$

$$Na_2CO_3 + HCl \longrightarrow NaHCO_3 + NaCl \quad \cdots(iv)$$

式(iii)と式(iv)の反応に必要な塩酸の体積の合計が 6.0 mL であることから，

$$\{(0.050-2x)+x\}\ \text{〔mol〕} \times \frac{10\ \text{mL}}{500\ \text{mL}} = 0.10\ \text{mol/L} \times \frac{6.0}{1000}\ \text{L}$$

$\therefore \quad x = 2.0 \times 10^{-2}$ mol

問6　式(i)より，下線部(e)で発生したCO_2の物質量と分解した$CaCO_3$(モル質量100 g/mol)の物質量は等しいから，固体試料中に含まれる$CaCO_3$の質量は，

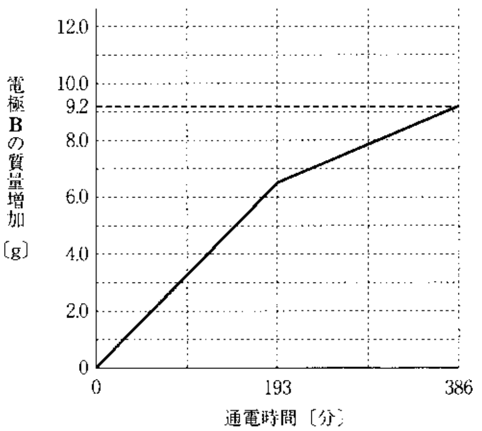
$$100\ \text{g/mol} \times 2.0 \times 10^{-2}\ \text{mol} = 2.0\ \text{g}$$

したがって，固体試料中の$CaCO_3$の含有率(質量パーセント)は，

$$\frac{2.0\ \text{g}}{3.0\ \text{g}} \times 100 = 6.66 \times 10 \fallingdotseq 6.7 \times 10 (\%)$$

3 電池，電気分解

【解答】

I	問1	酸化	問2	a	0	b	+1
I	問3	$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O$	問4	0.13 mol			
II	問5	(1)	0.50 A	(2)	6.5 g	(3)	(ウ)
II	問6	(1)	$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$	(2)	1.4 倍		
II	問7						

【配点】 (26点)

I　問1　2点　　問2　2点　　問3　2点　　問4　2点

II　問5　(1)　3点　　(2)　3点　　(3)　3点　　問6　(1)　2点　　(2)　3点　　問7　4点

【出題のねらい】

I　燃料電池を題材とした電池の基本事項の確認と計算の問題である。

II　電気分解の基本的な考え方を確認する問題，および，応用的な並列電気分解の計算問題である。

【解説】

問題

I

問1，2　単体を構成する原子の酸化数は 0 である。通常の化合物中の H 原子の酸化数は +1 である。したがって，負極における H 原子の酸化数の変化は，

$$\underset{0}{\underline{H}_2} \longrightarrow \underset{+1}{\underline{H}_2O}$$

負極では，H 原子の酸化数が 0 → +1 に増加しており，H 原子が酸化されている。一方，正極では，O 原子の酸化数が 0 → −2 に減少しており，O 原子が還元されている。

$$\underset{0}{\underline{O}_2} \longrightarrow \underset{-2}{\underline{O}H^-}$$

電池の負極では電子を放出する酸化反応が起こり，正極では電子を受け取る還元反応が起こる。

【ポイント】

酸化数の決め方

① 単体を構成する原子…0

② 化合物や多原子イオンを構成する原子

アルカリ金属原子，H原子…+1

O原子…−2

（ただし，NaHなどのH原子…−1

H_2O_2などのO原子…−1）

化合物では，

酸化数の総和＝0

多原子イオンでは，

酸化数の総和＝符号を付けた価数

他の原子の酸化数は，以上に基づいて算出する。

アルカリ型水素-酸素燃料電池の放電時に各電極で起こる反応は次のとおりである。

負極：$H_2 + 2OH^- \longrightarrow 2H_2O + 2e^-$ …①

正極：$O_2 + 2H_2O + 4e^- \longrightarrow 4OH^-$ …②

式①×2＋式②により，e^-を消去すると，

$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$

この反応式からもわかるように，燃料電池全体では，H_2の完全燃焼と同じ反応が起こる。

酸化・還元の定義

	電子を	酸化数
酸化される	失う	増加
還元される	得る	減少

電池

負極…放電時に還元剤が電子を放出する。酸化反応が起こる。

正極…放電時に酸化剤が電子を受け取る。還元反応が起こる。

活物質…負極または正極において，電子を放出したり受け取ったりする物質。

問3　電解液が酸性の場合は，塩基性の場合の反応式中のOH^-がH^+によって中和される，と考えるとよい。したがって，リン酸型の水素-酸素燃料電池の場合，負極で起こる反応は，式①の両辺に$2H^+$を加えて整理すると，次のようになる。

負極：$H_2 \longrightarrow 2H^+ + 2e^-$

同様に，正極で起こる反応は，式②の両辺に$4H^+$を加えて整理すると，次のようになる。

正極：$O_2 + 4H^+ + 4e^- \longrightarrow 2H_2O$

問4　式①より，e^- 1 molが流れるとH_2 $\frac{1}{2}$ molが負極で消費されるから，0.250 molのe^-が流れたとき，消費されたH_2の物質量は，

$$0.250\ \mathrm{mol} \times \frac{1}{2} = 0.125 \fallingdotseq 0.13\ \mathrm{mol}$$

II

問5　(1)　流れたe^-の物質量が6.00×10^{-2} molだから，流れた電気量について，

$9.65 \times 10^4\ \mathrm{C/mol} \times 6.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol} = x[\mathrm{A}] \times (193 \times 60)\ \mathrm{s}$

$\therefore\ x = 0.50\ \mathrm{A}$

(2)　電解槽Iでは次の反応が起こる。

電極**A**(陽極)：$Ag \longrightarrow Ag^+ + e^-$ …③

電極**B**(陰極)：$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag$ …④

式④より，電極**B**ではe^- 1 molが流れるとAg 1 molが析出するから，流れたe^-の物質量が6.00×10^{-2} molのとき，電極**B**の質量増加は，

$108\ \mathrm{g/mol} \times 6.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol} = 6.48 \fallingdotseq 6.5\ \mathrm{g}$

電気量の求め方(1)

n[mol]の電子が流れたときの電気量Q[C]は，

$Q[\mathrm{C}] = F[\mathrm{C/mol}] \times n[\mathrm{mol}]$

F；ファラデー定数

電気量の求め方(2)

i[A]の電流がt[s]流れたときの電気量Q[C]は，

$Q[\mathrm{C}] = i[\mathrm{A}] \times t[\mathrm{s}]$

(3)　式③と式④より，電極**A**で生じるAg^+の物質量と電極**B**で反応するAg^+の物質量が等しいから，電解液中のAg^+の物質量は電気分解の前後で変化しない。また，電解液の体積変化は無視できるから，電解槽Iの$AgNO_3$水溶液のモル濃度は変化しない。

電気分解

陰極：外部電源の負極に接続した電極。還元反応が起こる。

陽極：外部電源の正極に接続した電極。酸化反応が起こる。

問6　(1)　電解槽IIでは，次の反応が起こる。

電極**C**(陽極)：$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$ …⑤

電極**D**(陰極)：$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$ …⑥

式⑤＋式⑥×2により，e^-を消去すると，全体の反応は次のようになる。

$$2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$$

これは，水素-酸素燃料電池の全体の反応の逆反応である。

(2) **操作1**と**操作2**で，回路全体に流れた電流と通電時間は同じだから，回路全体に流れた電子の物質量は等しい。

式⑥より，H_2 1 mol が発生するとき，e^- 2 mol が流れるから，標準状態で 0.392 L の H_2 が電極**D**で発生したとき，電解槽IIに流れた e^- の物質量は，

$$\frac{0.392\ \mathrm{L}}{22.4\ \mathrm{L/mol}} \times 2 = 3.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}$$

したがって，このとき電解槽Iに流れた e^- の物質量は，

$$6.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol} - 3.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol} = 2.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}$$

よって，**操作2**の間に電解槽IIに流れた e^- の物質量は，電解槽Iに流れた e^- の物質量の $\left(\dfrac{3.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}}{2.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}} = \right)$ 1.4 倍となる。

問7 通電時間を t〔分〕，電極**B**の質量増加（析出した Ag の質量）を w〔g〕とする。

(i) $0 \leqq t \leqq 193$ のとき（**操作1**）

流れた電流は 0.500 A で一定だから，w は t に比例する。

したがって，**問5** (2)より，グラフは2点(0, 0)と(193, 6.48)を通る直線になる。

(ii) $193 < t \leqq 386$ のとき（**操作2**）

回路全体に流れた電流は**操作1**と同じ 0.500 A で一定で，電流を流した時間も**操作1**と同じ 193 分間であり，電解槽Iに流れた電流は一定だから，w は**操作2**を開始してからの経過時間に比例する。

問6 (2)より，**操作2**で電解槽Iに流れた e^- の物質量は，2.50×10^{-2} mol だから，このとき析出した Ag の質量は，

$$108\ \mathrm{g/mol} \times 2.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol} = 2.70\ \mathrm{g}$$

よって，$t = 386$ のとき，

$$w = 6.48\ \mathrm{g} + 2.70\ \mathrm{g} = 9.18 \fallingdotseq 9.2\ \mathrm{g}$$

したがって，グラフは2点(193, 6.48)と(386, 9.18)を通る直線になる。

以上より，**操作1**と**操作2**を通して，通電時間と電極**B**の質量増加の関係を表すグラフは次のようになる。

水溶液の電気分解の電極反応

陽極：

① 電極が Pt または C 以外のとき

$\Longrightarrow$ 電極の金属が溶出

例：$Cu \longrightarrow Cu^{2+} + 2e^-$

② 電極が Pt または C のとき

(i) 水溶液中に Cl^-，Br^-，I^- があるとき

$\Longrightarrow$ Cl_2，Br_2，I_2 が生成

例：$2Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2e^-$

(ii) 水溶液中に Cl^-，Br^-，I^- がないとき

$\Longrightarrow$ O_2 が発生

$4OH^- \longrightarrow O_2 + 2H_2O + 4e^-$

$2H_2O \longrightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$

陰極：

(i) 水溶液中に重金属イオン（Cu^{2+}，Ag^+ など）があるとき

$\Longrightarrow$ 重金属の単体が析出

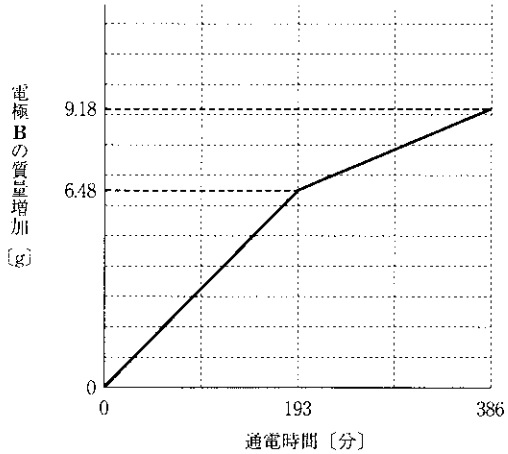
例：$Cu^{2+} + 2e^- \longrightarrow Cu$

(ii) 水溶液中に重金属イオンがないとき

$\Longrightarrow$ H_2 が発生

$2H^+ + 2e^- \longrightarrow H_2$

$2H_2O + 2e^- \longrightarrow H_2 + 2OH^-$



【別解】 通電時間 t〔分〕と電極 B の質量増加 w〔g〕の関係を表す式を求めてグラフを描く。

(i) $0 \leqq t \leqq 193$ のとき(**操作 1**)

スイッチを開いて電解槽 I だけに電流が流れるようにしてあり，電解槽 I に流れた e^- の物質量は $\dfrac{0.500\ \mathrm{A}\times(60\times t)\,[\mathrm{s}]}{9.65\times10^4\ \mathrm{C/mol}}$ だから，

$$w = 108\ \mathrm{g/mol}\times\frac{0.500\ \mathrm{A}\times(60\times t)\,[\mathrm{s}]}{9.65\times10^4\ \mathrm{C/mol}} = \frac{6.48}{193}t$$

$$\left(t = 193 \text{ のとき，} w = \frac{6.48}{193}\times193 = 6.48 \fallingdotseq 6.5\ \mathrm{g}\right)$$

(ii) $193 < t \leqq 386$ のとき(**操作 2**)

スイッチを閉じて電解槽 I と II の両方に電流が流れるようにしてあり，**問 6** (2) より，このとき電解槽 I に流れた e^- の物質量は，回路全体に流れた電子の物質量の $\left(\dfrac{2.50\times10^{-2}\ \mathrm{mol}}{6.00\times10^{-2}\ \mathrm{mol}}=\right)\dfrac{5}{12}$ 倍となる。よって，電解槽 I に流れた e^- の物質量は，

$$\frac{0.500\mathrm{A}\times(60\times193)\mathrm{s}}{9.65\times10^4\ \mathrm{C/mol}} + \frac{0.500\mathrm{A}\times\{60\times(t-193)\}[\mathrm{s}]}{9.65\times10^4\ \mathrm{C/mol}}\times\frac{5}{12}$$

$$= 3.5\times10^{-2} + \frac{12.5}{9.65}t\times10^{-4}\,[\mathrm{mol}]$$

したがって，

$$w = 108\ \mathrm{g/mol}\times\left(3.5\times10^{-2} + \frac{12.5}{9.65}t\times10^{-4}\right)[\mathrm{mol}]$$

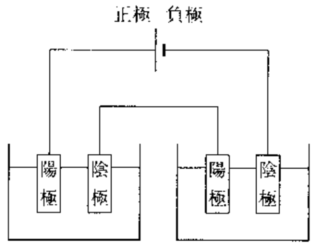
$$= 3.78 + \frac{2.70}{193}t$$

$$\left(t = 386 \text{ のとき，} w - 3.78 + \frac{2.70}{193}\times386 = 9.18 \fallingdotseq 9.2\ \mathrm{g}\right)$$

以上より，グラフは次のようになる。

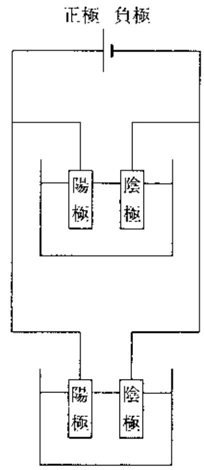
直列回路と並列回路の電気分解

直列回路

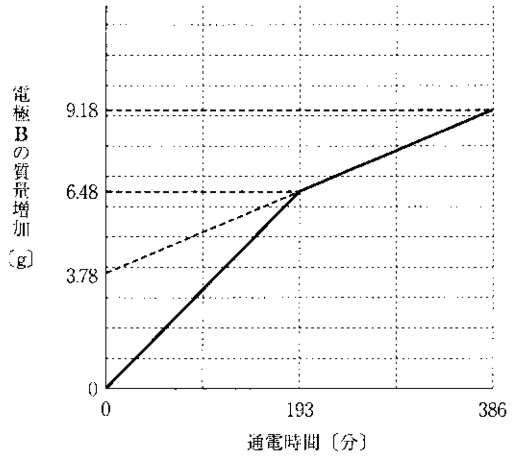


各電解槽に流れる電流および電気量は等しい。

並列回路



電源から流れ出る電流および電気量は各電解槽に分配される。



電極Bの質量増加〔g〕
9.18
6.48
3.78
0
0
193
386
通電時間〔分〕

4 希薄溶液

【解答】

問1	(エ)	問2	(1)	b	(2)	2.6×10^{-2} K	問3	1.3×10^{2}
問4	(1)	3.00×10^{-2} mol/kg	(2)	(オ)	(3)	$+2h$〔mm〕	(4)	50.5 g

【配点】 (21点)

問1　2点　**問2**　(1)　2点　(2)　3点　**問3**　3点

問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　3点　(4)　4点

【出題のねらい】

希薄溶液の蒸気圧降下と沸点上昇に関して，基本から応用まで問う問題である。

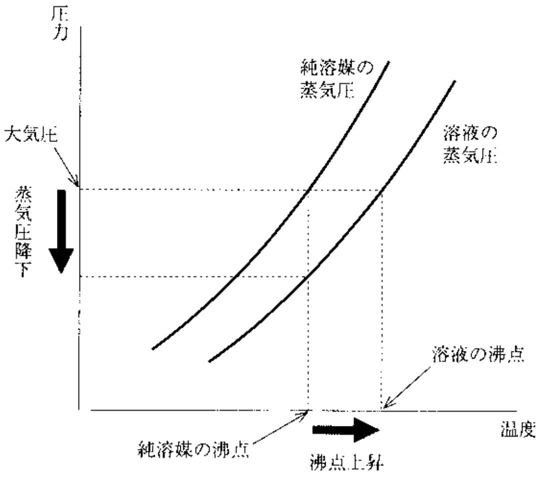
【解説】

問題

問1　温度を一定に保って溶媒に不揮発性の物質を溶かすと，純溶媒に比べて，溶液中の溶媒分子の数の割合が減少するため，単位時間あたりに液体表面から蒸発する溶媒分子の数が減少し，蒸気圧が小さくなる(蒸気圧降下)。

問2　液体の温度が上昇すると蒸発が盛んに起こるようになり，蒸気圧は急激に大きくなる。一定の圧力のもとで液体を加熱していくとき，蒸気圧が液体に加わる圧力(外圧，通常は大気圧)に等しくなると，液体の内部からも蒸発が起こるようになる。この現象が沸騰であり，このときの温度が沸点である。

不揮発性の物質を溶かした溶液の蒸気圧は，純溶媒の蒸気圧より小さくなるから，溶液の蒸気圧曲線と純溶媒の蒸気圧曲線の関係は下の図のようになる。このため，溶液の沸点は純溶媒の沸点より高くなる(沸点上昇)。



(1)　溶液の蒸気圧は純溶媒の蒸気圧より小さくなるから，曲線a～cのうち，aが水の蒸気圧曲線であることはすぐにわかる。

電解質である$CaCl_2$は水溶液中で次のように完全に電離す

【ポイント】

飽和蒸気圧(蒸気圧)

気液平衡になるときの圧力

蒸気圧は温度だけで決まり，温度の上昇とともに急激に大きくなる。

蒸気圧降下

不揮発性の溶質を含む溶液の蒸気圧が純溶媒の蒸気圧より小さくなる現象。

希薄溶液の蒸気圧降下の大きさは，溶質粒子の質量モル濃度に比例する。

沸点

蒸気圧が外圧(通常は大気圧)に等しくなるときの温度。

外圧を一定に保って液体を加熱していくとき，沸点に達すると沸騰が起こる。

沸点上昇

不揮発性の溶質を含む溶液の沸点は，純溶媒の沸点より高くなる。

希薄溶液の沸点上昇度は，溶質粒子の質量モル濃度に比例する。

$\Delta T_b = K_b \cdot m$

ΔT_b；沸点上昇度

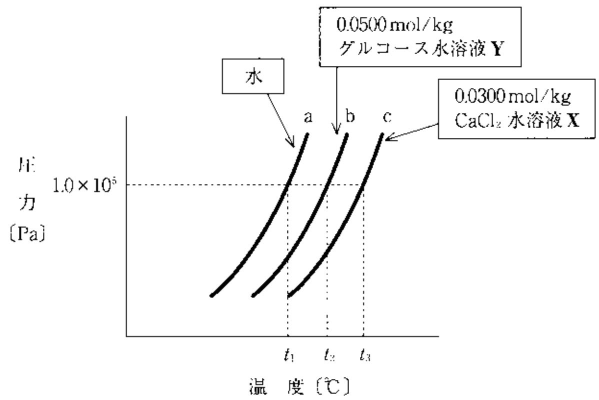
m；溶質粒子の質量モル濃度

K_b；モル沸点上昇

る。

$CaCl_2 \longrightarrow Ca^{2+} + 2Cl^-$

よって，0.0300 mol/kg の $CaCl_2$ 水溶液 **X** 中に実際に存在する溶質粒子（イオン）の質量モル濃度は 0.0300×3 mol/kg となり，非電解質であるグルコースの水溶液 **Y** の質量モル濃度 0.0500 mol/kg より大きい。したがって，溶質粒子の質量モル濃度は **X**＞**Y** だから，同じ温度における蒸気圧は **X** の方が **Y** より小さく，沸点は **X**＞**Y** となる。よって，c が **X**，b が **Y** の蒸気圧曲線である。



(2)　**X** と **Y** の沸点上昇度はそれぞれ (t_3-t_1)〔K〕と (t_2-t_1)〔K〕であり，沸点上昇度は溶質粒子の質量モル濃度に比例するから，

$$(t_3-t_1)\,[\mathrm{K}] : (t_2-t_1)\,[\mathrm{K}] = 0.0300\times3\ \mathrm{mol/kg} : 0.0500\ \mathrm{mol/kg}$$

また，$t_3-t_1 = 0.0468$ K より，

$$t_2-t_1 = 0.0468\ \mathrm{K}\times\frac{0.0500\ \mathrm{mol/kg}}{0.0300\times3\ \mathrm{mol/kg}} \fallingdotseq 2.6\times10^{-2}\ \mathrm{K}$$

【別解】　水のモル沸点上昇を K_b〔K·kg/mol〕とすると，**X**，**Y** の沸点上昇度について，

$$(t_2-t_1)\,[\mathrm{K}] = K_b\,[\mathrm{K\cdot kg/mol}]\times0.0500\ \mathrm{mol/kg}$$

$$(t_3-t_1)\,[\mathrm{K}] = K_b\,[\mathrm{K\cdot kg/mol}]\times0.0300\times3\ \mathrm{mol/kg}$$

これらと $t_3-t_1 = 0.0468$ K より，

$$K_b = 0.0468\ \mathrm{K}\times\frac{1}{0.0300\times3\ \mathrm{mol/kg}} = 0.52\ \mathrm{K\cdot kg/mol}$$

$$t_2-t_1 \fallingdotseq 0.0468\ \mathrm{K}\times\frac{0.0500\ \mathrm{mol/kg}}{0.0300\times3\ \mathrm{mol/kg}} \fallingdotseq 2.6\times10^{-2}\ \mathrm{K}$$

問 3　**Z** のモル質量を M〔g/mol〕とすると，**Z** 0.52 g をベンゼン 50 g（＝0.050 kg）に溶かした溶液の溶質粒子の質量モル濃度は，**Z** は解離も会合もしないから，

$$\frac{0.52\ \mathrm{g}}{M\,[\mathrm{g/mol}]}\times\frac{1}{0.050\ \mathrm{kg}}$$

この溶液の沸点上昇度について，

$$(80.30-80.10)\,\mathrm{K} = 2.53\ \mathrm{K\cdot kg/mol}\times\frac{0.52\ \mathrm{g}}{M\,[\mathrm{g/mol}]}\times\frac{1}{0.050\ \mathrm{kg}}$$

質量モル濃度

$$質量モル濃度\,[\mathrm{mol/kg}] = \frac{溶質の物質量\,[\mathrm{mol}]}{溶媒の質量\,[\mathrm{kg}]}$$

∴　$M = 1.31 \times 10^2 \fallingdotseq 1.3 \times 10^2$ g/mol

したがって，**Z** の分子量 ≒ 1.3×10^2

問4　(1)　水 100.0 g（= 0.1000 kg）にグルコース（分子量 180.0）0.540 g が溶けているから，フラスコ **B** に入れたグルコース水溶液の質量モル濃度は，

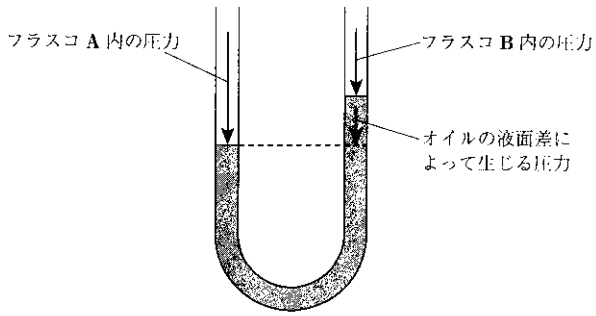
$$\frac{0.540\ \text{g}}{180.0\ \text{g/mol}} \times \frac{1}{0.1000\ \text{kg}} = 3.00 \times 10^{-2}\ \text{mol/kg}$$

(2)　グルコース水溶液を入れたフラスコ **B** 内の水蒸気の分圧（蒸気圧）は，蒸気圧降下により，水を入れたフラスコ **A** 内の水蒸気の分圧（蒸気圧）より小さい。このため，U 字管内のオイルの **A** 側の液面に加わる圧力の方が **B** 側の液面に加わる圧力より大きい。よって，しだいに **A** 側の液面が下がり，**B** 側の液面が高くなり，やがて，

A 内の圧力

= **B** 内の圧力 + オイルの液面差によって生じる圧力

となると，液面の高さは変化しなくなる。



溶液の蒸気圧降下の大きさは溶質粒子の質量モル濃度に比例する。フラスコ **B** に入れる水溶液を，水 100.0 g にグルコース 0.540 g を溶かした水溶液から水 50.0 g にグルコース 0.270 g を溶かした水溶液に代えても，水溶液の濃度が同じなので，オイルの **B** 側の液面に加わる圧力は変わらない。したがって，この場合も，**B** 側の液面の方が **A** 側の液面より h〔mm〕高くなって静止する。

(3)　フラスコ **A** に入れた水溶液の溶質粒子の質量モル濃度は，水 100.0 g（= 0.1000 kg）に非電解質である尿素（モル質量 60.0 g/mol）0.540 g が溶けているから，

$$\frac{0.540\ \text{g}}{60.0\ \text{g/mol}} \times \frac{1}{0.1000\ \text{kg}} = 9.00 \times 10^{-2}\ \text{mol/kg}$$

よって，フラスコに入れた水溶液の溶質粒子の濃度は **A** の方が **B** より大きく，蒸気圧降下の大きさも **A** の方が **B** より大きいから，水蒸気の分圧（蒸気圧）は **B** の方が **A** より大きい。したがって，オイルの **A** 側の液面の方が **B** 側の液面より高くなり，その液面差は，両側の水溶液の水蒸気の分圧（蒸気圧）の差，つま

り，両側の水溶液の溶質粒子の質量モル濃度の差に比例する。水(フラスコ **A**)と 3.00×10^{-2} mol/kg のグルコース水溶液(フラスコ **B**)の場合の液面差が h〔mm〕だから，9.00×10^{-2} mol/kg の尿素水溶液(フラスコ **A**)と 3.00×10^{-2} mol/kg のグルコース水溶液(フラスコ **B**)の場合の液面差を x〔mm〕とすると，

$$3.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol/kg} : (9.00 \times 10^{-2} - 3.00 \times 10^{-2})\ \mathrm{mol/kg}$$

$$= h\,[\mathrm{mm}] : x\,[\mathrm{mm}]$$

$$\therefore \quad x = h\,[\mathrm{mm}] \times \frac{6.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol/kg}}{3.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol/kg}} = 2h\,[\mathrm{mm}]$$

したがって，答は $+2h$〔mm〕となる。

(4) コックを開いてフラスコ **A** と **B** を連結すると，水蒸気の分圧(蒸気圧)は **B** の方が **A** より大きいため，**B** から **A** に水蒸気が移動する。その結果，**A** では凝縮が起こって溶媒の水の量が増え，**B** では蒸発が起こって溶媒の水の量が減り，全体として濃度が小さい **B** 内の水溶液から濃度が大きい **A** 内の水溶液に，水が移動することになる。この水の移動は，フラスコ **A**，**B** 内の水溶液の溶質粒子の質量モル濃度が等しくなると停止する。水の移動が停止するまでに，**B** から **A** に y〔g〕の水が移動したとすると，

$$\frac{0.540\ \mathrm{g}}{60.0\ \mathrm{g/mol}} \times \frac{1}{(100.0+y) \times 10^{-3}\,[\mathrm{kg}]}$$

$$= \frac{0.540\ \mathrm{g}}{180.0\ \mathrm{g/mol}} \times \frac{1}{(100.0-y) \times 10^{-3}\,[\mathrm{kg}]}$$

$$\therefore \quad y = 50.0\ \mathrm{g}$$

したがって，**B** 内の水溶液の質量は，

$$100.0\ \mathrm{g} + 0.540\ \mathrm{g} - 50.0\ \mathrm{g} = 50.54 \fallingdotseq 50.5\ \mathrm{g}$$

生　物

1　細胞の構造

【解答】

問1	1	リン脂質	2	小胞体	3	ゴルジ体	4	微小管	
問2	原核細胞には核膜に包まれた核がなく，葉緑体やミトコンドリアなど生体膜で構成された細胞小器官がない。(49字)								
問3	ウ	問4	(1)	モータータンパク質	(2)	ミオシン	(3)	エ	
問5	(1)	3	(2)	エ	問6	ウ			

【配点】（25点）

問1　各2点×4，　問2　3点，　問3　2点，　問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　1点

問5　(1)　2点　(2)　3点，　問6　2点

【出題のねらい】

細胞に関する知識問題と，細胞骨格に関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　細胞は，細胞膜に包まれて周囲から独立したまとまりをつくっている。真核細胞内には細胞小器官と呼ばれる構造物が発達しており，これらはそれぞれ独自の働きをもっている。細胞膜や細胞小器官を構成する膜は生体膜と呼ばれ，リン脂質の二重層の中にタンパク質がモザイク状に埋め込まれた構造をしている。細胞小器官には，2枚の生体膜で囲まれた核・ミトコンドリア・葉緑体，1枚の生体膜で囲まれた小胞体・ゴルジ体・液胞・リソソーム，膜構造をもたないリボソーム・中心体などがある。表面にリボソームが付着した小胞体は粗面小胞体と呼ばれ，小胞体の表面のリボソームで合成されたタンパク質はそのまま小胞体内に取り込まれる。タンパク質は小胞体内を輸送され，小胞を介してゴルジ体に渡される。ゴルジ体ではタンパク質の修飾（加工）や濃縮が行われ，タンパク質は分泌小胞を介して細胞外へと分泌される。細胞小器官や細胞の形は，タンパク質でできた繊維状の構造物によって維持されている。この構造は細胞骨格と呼ばれ，構成するタンパク質の種類によって，アクチンフィラメント・中間径フィラメント・微小管の3つに大別される。

問2　原核細胞は，大きさが1～10 μm 程度で，細胞内部には膜構造をもった細胞小器官，すなわち核膜に包まれた核やミトコンドリア，葉緑体などはみられない。細胞内部には，DNA が核様体という領域に折りたたまれて存在するほか，リボソームが存在する。また，細胞膜の外側には細胞壁が存在する。

問3　ミトコンドリアの内膜は内側に突き出して，クリステと呼ばれるひだをつくっており，電子伝達系にかかわるタンパク質が含

【ポイント】

細胞膜
　リン脂質とタンパク質からなる

小胞体　細胞内でのタンパク質などの物質輸送に関与

ゴルジ体　タンパク質の修飾（加工）と分泌に関与

細胞骨格
　アクチンフィラメント，中間径フィラメント，**微小管**

まれている。したがって，アは誤りである。ミトコンドリアの内膜に囲まれた部分はマトリックスと呼ばれ，クエン酸回路を進行させる酵素が存在する。したがって，イは誤りである。葉緑体の内部にはチラコイドと呼ばれる扁平な袋状の構造があり，クロロフィルなどの光合成色素が含まれている。したがって，ウは正しい。葉緑体のチラコイドの間を満たす部分はストロマと呼ばれ，カルビン・ベンソン回路を進行させる酵素が存在する。したがって，エは誤りである。

問 4 (1) 細胞骨格は，細胞の形を保持するだけでなく，細胞の運動，細胞内の物質や細胞小器官の輸送にも働いている。この際，細胞骨格とともに働くタンパク質を，モータータンパク質と呼ぶ。モータータンパク質は，ATP の分解によって生じるエネルギーを利用して，細胞骨格の上を移動している。

(2) アクチンフィラメント上を ATP 分解によって生じるエネルギーを利用して移動するモータータンパク質の例としては，ミオシンがある。ミオシンは骨格筋の筋繊維(筋細胞)において，筋収縮に関与している。

(3) 原形質流動も筋収縮と同じしくみで起こっている。植物細胞の細胞膜のすぐ内側にはアクチンフィラメントが存在し，葉緑体などの細胞小器官にはミオシンが結合している。ミオシンは ATP 分解によって生じるエネルギーでアクチンフィラメント上を移動していく。その結果，葉緑体などの細胞小器官の移動が起こり，この移動によって原形質に流れが生じる。これが原形質流動である。アは細胞膜に存在するポンプと呼ばれる膜タンパク質，イは細胞膜に存在するチャネルと呼ばれる膜タンパク質の働きによるものであり，ウは生体膜における浸透と呼ばれる水の移動によるものである。

問 5 (1) アクチンフィラメント(以下，フィラメント)は，球状のタンパク質であるアクチンが重合した鎖が 2 本，らせん状に巻きついてできている。末端部分において，アクチンの重合や解離が起こることで，フィラメントの伸長や短縮が起こる。このとき，アクチンの重合速度が大きい末端をプラス端，小さい末端をマイナス端と呼ぶ。フィラメントの伸長や短縮はアクチン濃度に依存しており，アクチン濃度が高いとアクチンが重合してフィラメントは伸長し，アクチン濃度が低いとアクチンが解離してフィラメントは短縮する。

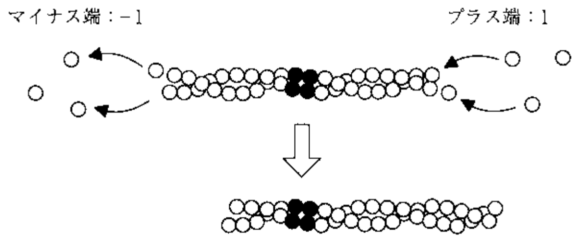
アクチン濃度が 3 のとき，図 2 よりプラス端の重合速度は 1 であり，プラス端は伸長している。また，マイナス端の重合速度は -1 であり，マイナス端は短縮している。このとき，プラス端の伸長速度と，マイナス端の短縮速度が等しいことから，フィラメント全体の長さは変化せず，フィラメントがプラス端側へ移動す

ミトコンドリア
内膜 電子伝達系が存在
ひだ状の構造は**クリステ**と呼ばれる
マトリックス クエン酸回路が存在

葉緑体
チラコイド クロロフィルを含み，光エネルギーを吸収し，NADPH と ATP を生成
ストロマ カルビン・ベンソン回路が存在

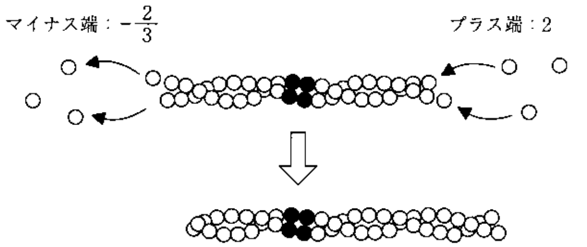
モータータンパク質
ATP 分解のエネルギーを用いて，細胞骨格の上を運動
例：**ミオシン，ダイニン，キネシン**

る。したがって，アクチン濃度3が正解である。

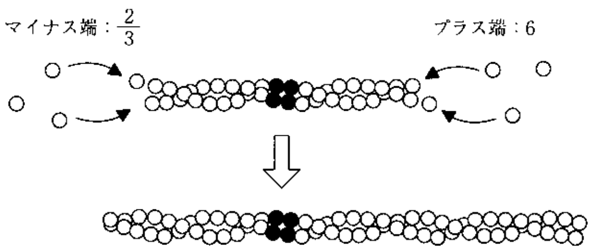


（伸長や短縮がわかるように，同じ位置のアクチンを●で示している。）

(2) アクチン濃度が4のとき，図2よりプラス端の重合速度は2であり，マイナス端の重合速度は $-\frac{2}{3}$ である。したがって，フィラメント全体の長さは，$2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ の速度で伸長している。



アクチン濃度が8のとき，図2よりプラス端の重合速度は6であり，マイナス端の重合速度は $\frac{2}{3}$ である。したがって，フィラメント全体の長さは，$6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$ の速度で伸長している。



したがって，アクチン濃度が8のときの伸長速度は，アクチン濃度が4のときの伸長速度の $\frac{20}{3}\div\frac{4}{3}=5$ 倍となる。

問6 図3において，フィラメントは仮足の突出方向に伸長する必要があるため，伸長速度の大きいプラス端が②側となる。したがって，アとイは誤りである。また，図2よりアクチン濃度が高いほどフィラメントの伸長速度は大きくなるため，仮足が突出する部分ではアクチン濃度が上昇していると考えられる。したがって，ウが正しく，エは誤りである。

2 排出

【解答】

問1	1	恒常性(ホメオスタシス)	2	組織液	3	腎小体(マルピーギ小体)	4	バソプレシン	
問2	ア	問3	(1)	尿素	(2)	肝臓			
問4	タンパク質はろ過されず，グルコースはろ過された後すべて再吸収される。(34字)								
問5	(1)	98％	(2)	ア	(3)	増減なし	(4)	87％減少した	

【配点】(25点)

問1　各2点×4，　問2　2点，　問3　(1)　2点　(2)　2点，　問4　3点

問5　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点　(4)　2点

【出題のねらい】

恒常性の分野から，ヒトのホルモンおよび排出に関する知識問題，体液濃度の調節に関するデータ考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　生物は体外環境(外部環境)が変化しても体内環境(内部環境)を一定に保つしくみをもつ。これを恒常性(ホメオスタシス)という。脊椎動物の体液は，血管内を流れる血液，細胞と細胞の間を満たす組織液，リンパ管内を流れるリンパ液からなり，体内で発生した熱や細胞にとって必要な物質，あるいは生命活動によって生じる老廃物などを運搬している。腎臓は，ヒトではソラマメのような形をした器官であり，背中側に左右一対存在する。1個の腎臓は約100万個の腎単位(ネフロン)からなる。腎単位は，糸球体とボーマンのうからなる腎小体と細尿管(腎細管)からなる。毛細血管が球状にからみあった糸球体を流れた血しょうの一部は，ボーマンのうへろ過され原尿になる。続く細尿管を原尿が流れるうちに，グルコースやアミノ酸，あるいは水など生体にとって必要な物質が再吸収される。再吸収されなかった物質が尿となり，腎う，輸尿管，ぼうこうを経て体外へ排出される。この再吸収の過程で，水や Na^+ などの再吸収量を変えることで，体液濃度の調節が行われる。例えば，体液濃度が上昇した場合には，脳下垂体後葉からバソプレシンが分泌される。バソプレシンは集合管に作用して水の再吸収を促進し，体液濃度を低下させる。

問2　糖質コルチコイドは，副腎皮質から分泌されるホルモンであるので，アが誤りである。インスリンはすい臓のランゲルハンス島B細胞，グルカゴンはすい臓のランゲルハンス島A細胞，チロキシンは甲状腺，パラトルモンは副甲状腺(上皮小体)から分泌されるホルモンであり，イ～オは正しい。

問3　タンパク質などの有機窒素化合物が分解されることで生じるアンモニアは有毒な物質である。このため，ヒトなどの哺乳類や両生類の成体では，アンモニアは肝臓で無毒な尿素へと変換され

【ポイント】

恒常性(ホメオスタシス)
体液濃度や温度，血糖量，pHなどを一定に保つ性質

体液　血液・組織液・リンパ液

腎臓
腎単位(ネフロン)
腎小体　**糸球体**
ボーマンのう
細尿管

バソプレシン　脳下垂体後葉から分泌
集合管で水の再吸収促進

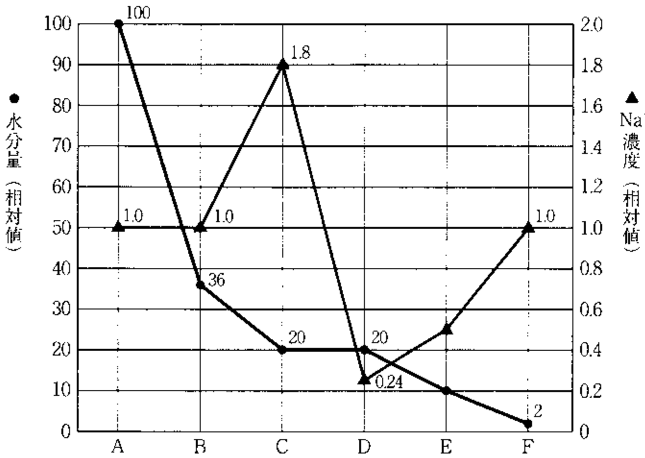
肝臓
アンモニア(有毒)から尿素(無毒)を生成

る。肝臓に存在するこの反応系をオルニチン回路(尿素回路)という。

問4　健常者では血しょうから原尿が生じるときに，タンパク質は糸球体からボーマンのうへろ過されない。また，グルコースはそのままろ過されるが，細尿管ですべて再吸収される。この結果，タンパク質，グルコースともに尿中には排出されない。

タンパク質　糸球体でろ過されない
グルコース　ボーマンのうへそのままろ過されるが，細尿管ですべて再吸収

問5　下の図は図2のグラフで使用する数値を確認したものである。



(1)　Aはボーマンのうであり，ここにろ過されたものが原尿である。ここからFに到る過程で水が再吸収される。Aでは水分量が100(相対値)あり，Fでは2となっている。したがって，100 − 2 = 98となり，98%の水が再吸収されたことになる。

(2)　A − B間では水分量は100から36へと減少しているが，Na^+濃度は1.0から1.0なので変化していない。水分量が減少しても濃度が変わっていないということは，Na^+は水と同じ割合で再吸収されていることを意味する。よって，アが正しい。

(3)　含まれる物質の量は，溶液の体積(L)×その物質の濃度で求めることができる。溶液の体積は水の体積(水分量)と同じとみなせるので，Na^+量は水分量×Na^+濃度で求めることができる。Bでは水分量は36で，Na^+濃度は1.0であるので，Na^+量は36 × 1.0 = 36となる。Cも同様に，水分量が20で，Na^+濃度は1.8であるので，Na^+量は20 × 1.8 = 36となり，B−C間ではNa^+量は変化していないことがわかる。これより，B−C間では水のみが再吸収され，Na^+は再吸収されていないことがわかる。

(4)　(3)で求めたように，CではNa^+量は36である。Dでは水分量が20で，Na^+濃度は0.24であるので，Na^+量は20 × 0.24 = 4.8となるので，B−C間ではNa^+量は36 − 4.8 = 31.2減少したことがわかる。これよりCにおけるNa^+量と比べてDにおけ

る Na^+ 量の減少率は，$31.2 \div 36 \times 100 = 86.6\cdots \fallingdotseq 87$ となり，約87%の Na^+ が再吸収されることがわかる。

3 遺伝子

【解答】

<table>
<tr><td>問1</td><td>1</td><td>リン酸</td><td>2</td><td>デオキシリボース</td><td>3</td><td>リボソーム</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="6">mRNA のコドンと相補的なアンチコドンをもち，コドンが指定するアミノ酸を mRNA 上へと運搬する。(48字)</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="6">オ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問4</td><td>(1)</td><td colspan="5">5′-CAGTG-3′
3′-GTCAC-5′</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="5">メチオニン－アスパラギン－フェニルアラニン</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="5">プロリン－アルギニン－アルギニン</td></tr>
<tr><td>問5</td><td>(1)</td><td>基本転写因子</td><td>(2)</td><td>プロモーター</td><td>問6</td><td>エ</td></tr>
</table>

【配点】(25点)

問1　2点×3，　問2　4点，　問3　2点，　問4　(1)　2点　(2)　2点　(3)　2点

問5　(1)　2点　(2)　2点，　問6　3点

【出題のねらい】

遺伝子の分野から，遺伝子全般に関する知識問題と，遺伝子の発現調節に関する考察問題を出題した。

【解説】

問題

問1　DNA や RNA などの核酸は，ヌクレオチドを構成単位としている。DNA を構成するヌクレオチドは，リン酸と五炭糖(1分子あたり炭素が5つ含まれる糖)の一種であるデオキシリボース，および4種類の塩基からなる。

DNA が塩基配列として保持している遺伝情報は mRNA に転写され，mRNA の遺伝情報はリボソームでアミノ酸配列へと翻訳される。リボソームはタンパク質合成の場であり，rRNA とタンパク質を構成成分としている。

問2　tRNA は，アンチコドンと呼ばれる3つ組の塩基をもち，アンチコドンを介して mRNA のコドンと相補的に結合する。また，tRNA は細胞質中で酵素(アミノアシル tRNA 合成酵素)の働きによって，特定のアミノ酸と結合する。このとき，tRNA と結合するアミノ酸は，アンチコドンと結合できる(相補的な)コドンが指定するアミノ酸である。このため，tRNA は mRNA のコドンが指定するアミノ酸をコドンの位置に運ぶことができる。

問3　分化が起こる際には，それぞれの組織・器官に特異的な遺伝子が発現し，この結果，組織や器官は特徴的な形態や機能をもつようになる。例えば，眼の水晶体の細胞はクリスタリンを多量に含み，他の組織ではクリスタリンがみられないが，これは，水晶

【ポイント】

核酸　DNA，RNA
ヌクレオチドが基本単位

ヌクレオチド　リン酸，糖，塩基

コドン　mRNA の3つ組塩基
アンチコドン　tRNA の3つ組塩基

特異的タンパク質
ヘモグロビン　赤血球に存在
フィブリノーゲン　肝臓で合成，血液中に分泌
免疫グロブリン　B 細胞が合成，血液中に分泌
クリスタリン　水晶体に存在

体の細胞でクリスタリンの遺伝子が特異的に発現するためであり，この結果として水晶体は眼のレンズとして機能することができる。

なお，アのヘモグロビンの遺伝子は赤血球の前駆細胞(赤血球の成熟過程で核を失う前の細胞)で特異的に発現するので，ヘモグロビンは赤血球のみに存在する。イのフィブリノーゲンの遺伝子は肝臓の肝細胞で発現し，フィブリノーゲンは血液中に分泌されて血しょうタンパク質となる。エの免疫グロブリンの遺伝子はリンパ球のB細胞や抗体産生細胞で特異的に発現し，抗体産生細胞は免疫グロブリンを体液中に分泌する。また，ウのカタラーゼの遺伝子は肝細胞をはじめとして体内の多くの細胞で発現し，カタラーゼはそれらの細胞内などに存在する。

問4(1)　核酸(DNA・RNA)どうしが相補的に結合する際には，5′末端と3′末端に関して逆向きに結合する。転写の際には，DNAを構成する2本のヌクレオチド鎖のうち一方のみが鋳型となる。よって，二重下線部のmRNAの塩基配列について，この部分の鋳型となったDNAの1本鎖(鋳型鎖)の塩基配列は，以下のようになる。

mRNA　　　　5′-CAGUG-3′
DNA(鋳型鎖)　3′-GTCAC-5′

次に，この鋳型鎖と相補的なDNAのもう一方のヌクレオチド鎖(相補鎖)の塩基配列は，以下のようになる。

DNA(相補鎖)　5′-CAGTG-3′
DNA(鋳型鎖)　3′-GTCAC-5′

(2)　問題文にもあるように，翻訳はmRNAの5′末端に最も近い位置の開始コドン(AUG)の位置から始まる(なお，図1の塩基配列はmRNA，すなわちスプライシングが終了しているものであるので，イントロンについては考慮しなくてよい)。1番目の塩基から順にAUGを探していくと，57番目のAの位置に最初のAUGが現れる。この57番目の塩基から65番目の塩基までの塩基配列を抜粋すると，以下のようになる(下線部が57番目の塩基である)。

…<u>A</u>UG AAC UUU…

表2の遺伝暗号表より，コドンAUGはメチオニン，コドンAACはアスパラギン，コドンUUUはフェニルアラニンを指定することがわかるので，アミノ酸配列はメチオニン-アスパラギン-フェニルアラニンとなる。

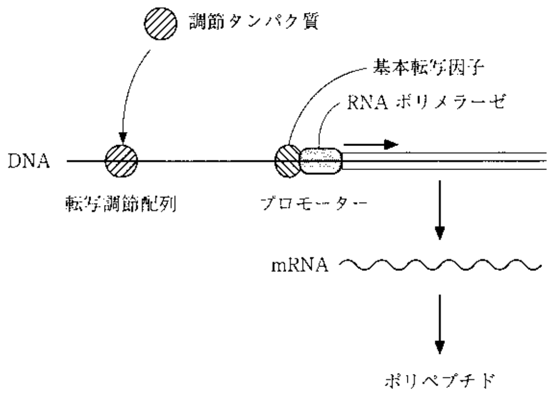
(3)　VEGFは191個のアミノ酸からなるタンパク質であり，57番目の塩基から始まる開始コドンから翻訳が始まる。翻訳の際には1個のアミノ酸は3個の塩基(コドン)によって指定されるので，191個のアミノ酸を指定するのに必要なmRNAの塩基は，

191 × 3 = 573 塩基である。よって，56 + 573 = 629 番目(56 は開始コドンの1つ手前の塩基の番号)の塩基までがアミノ酸配列の情報をもっており，終止コドンは 630 番目の塩基から始まると考えられる。この付近の塩基配列を抜粋すると以下のようになる(下線部が 630 番目の塩基である)。

…CCG AGG CGG <u>U</u>GA…

表2の遺伝暗号表より，コドン CCG はプロリン，コドン AGG はアルギニン，コドン CGG もアルギニンを指定することがわかるので，最後に合成される側の末端から3つ目までのアミノ酸，すなわち終止コドンの手前の3つのアミノ酸の配列はプロリン-アルギニン-アルギニンとなる。

問5 真核生物の遺伝子の転写は，遺伝子の周辺に存在する転写調節配列やプロモーターと，これらの塩基配列に結合する種々のタンパク質によって調節されている。真核生物である遺伝子の転写が開始される際には，まず，その遺伝子の周辺の転写調節配列に，調節タンパク質が結合する。次に，調節タンパク質は，基本転写因子とRNA ポリメラーゼ(RNA 合成酵素)と呼ばれるタンパク質複合体のプロモーターへの結合を，促進または抑制する。



問6 **実験**の結果から，調節タンパク質 X の mRNA は酸素濃度にかかわらず常に細胞内に存在していることがわかる。ところが，調節タンパク質 X 自体は，酸素濃度が高い環境(通常の酸素濃度)では検出されていない。ここから考えられる可能性は以下の2つである。

① 酸素濃度が高い環境では，合成された調節タンパク質 X が分解される。

② 酸素濃度が高い環境では，調節タンパク質 X の mRNA の翻訳が抑制される。

実験のみではこの①と②のどちらが妥当であるかは判断できないが，②の可能性を示す選択肢がこの問題では用意されていないことから，①の可能性(酸素濃度が高い環境では合成された調節

タンパク質Xが分解され，酸素濃度が低下すると調節タンパク質Xの分解が抑制される）が適当，すなわち，選択肢エとクのいずれかが適当であると考えて検討すればよい。

さらに，酸素濃度が低下し調節タンパク質Xが分解されずに存在するときに，調節タンパク質Xは *VEGF* 遺伝子の転写調節配列に結合すると考えられるが，問題文に *VEGF* 遺伝子は酸素が不足した組織で発現することが記されているので，調節タンパク質Xは *VEGF* 遺伝子の転写を促進すると考えられる。よってエが正しい。

4 生態系

【解答】

問1	1	分解者	2	食物連鎖	3	栄養				
問2	イ	問3	エ							
問4	物質は循環するが，エネルギーは一方向に流れ循環しない。（27字）									
問5	イ									
問6	(1)	P	エ	Q	オ	(2)	357（g炭素/m^2/年）	(3)	1142（g炭素/m^2）	
	(4)	1年間の炭素の放出量が吸収量よりも20g炭素/m^2多いことから，大気中の二酸化炭素量を増加させている。（49字）								

【配点】（25点）

問1　2点×3，　問2　2点，　問3　2点，　問4　3点，　問5　2点

問6　(1)　1点×2　(2)　2点　(3)　3点　(4)　3点

【出題のねらい】

森林生態系に関する知識問題と，炭素循環に関する考察問題を出題した。

【解説】　問題

問1　生態系を構成する生物群集は，光合成などによって無機物から有機物をつくる生産者，外界から取り入れた有機物を利用している消費者，および枯死体・遺体・排出物などに含まれる有機物を無機物に分解する過程にかかわる分解者に分けられる。生態系では生産者を摂食する植食性動物は一次消費者，一次消費者を捕食する肉食性動物は二次消費者，さらにこれらを捕食する高次消費者が存在し，このような被食者と捕食者の連続的な関係は食物連鎖と呼ばれる。実際の生態系では，食物連鎖は相互につながった複雑な網目状の関係になっており，このような関係は食物網と呼ばれる。また，生産者から数えて同じ数の段階を経て食物を得ている生物は，同じ栄養段階に属しているという。食物連鎖を構成する生物について，生物の生物量や個体数を生産者を底辺として栄養段階の順に積み重ねて示すとピラミッド型になるので，これを生態ピラミッドと呼ぶ。

【ポイント】

生態系の**生物群集**
　生産者，消費者，分解者

栄養段階
　食物連鎖の段階

生態ピラミッド
　栄養段階の高いものほど個体数や生物量が少なくなる

問 2　ジョロウグモは肉食性動物なので少なくとも二次消費者以上であり，アは誤りである。モンシロチョウは，幼虫のときはアブラナ科の植物の葉や茎を，成虫になると花の蜜を栄養源としており，一生にわたり生産者である植物から栄養を得ているので一次消費者であり，イが正解である。セイヨウタンポポは植物であるので生産者であり，ニホンノウサギは植物を摂食する一次消費者であるので，ウおよびエは誤りである。

生産者　植物
一次消費者　植食性動物
二次消費者　肉食性動物

問 3　硝化細菌(硝化菌)とは，アンモニウムイオンを硝酸イオンへと酸化する細菌のことで，アンモニウムイオンを亜硝酸イオンへと酸化する細菌は亜硝酸菌，亜硝酸イオンを硝酸イオンへと酸化する細菌は硝酸菌であるので，アとイは正しい。植物はアンモニウムイオンや硝酸イオンを吸収し，葉緑体においてアミノ酸をつくることができる。このような働きは窒素同化と呼ばれる。したがって，ウは正しい。脱窒素細菌はアンモニウムイオンではなく，硝酸イオンを分子状の窒素に変えている。したがって，エが誤りである。

硝化細菌(硝化菌)
亜硝酸菌，硝酸菌

亜硝酸菌
アンモニウムイオン → 亜硝酸イオン
硝酸菌
亜硝酸イオン → 硝酸イオン
脱窒素細菌
硝酸イオン → 窒素ガス(N_2)

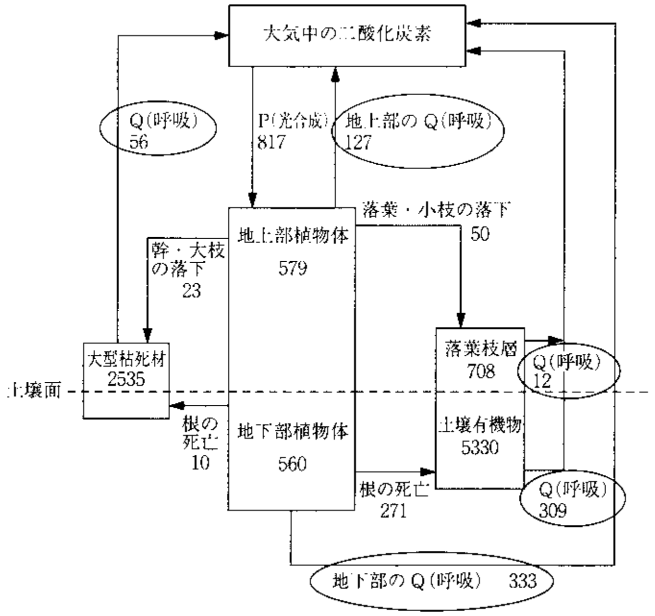
問 4　生態系内では，炭素や窒素などさまざまな物質は，生産者によって非生物的環境から取り入れられ，食物連鎖を通して生物間を移動した後，非生物的環境に戻る。つまり，物質は生態系内を循環している。一方，太陽から生態系に供給された光エネルギーの一部は，生産者の光合成によって化学エネルギーとして有機物に蓄えられる。この有機物中の化学エネルギーは食物連鎖を通して生物間を移動し，呼吸などに伴う熱エネルギーとして放出され，最終的には赤外線などのエネルギーとして宇宙空間に放出される。つまり，エネルギーは生態系内を循環せず，一方向に流れている。

生態系内を物質は循環するが，エネルギーは一方向に流れる

問 5　アのミズナラとブナは夏緑樹林で優占する樹種，イのシラビソとコメツガは針葉樹林で優占する樹種，ウのスダジイとアラカシは照葉樹林で優占する樹種である。エのガジュマルとヘゴは亜熱帯多雨林にみられる樹種である。よって，イが正解である。

日本の**バイオーム**と優占種
針葉樹林　シラビソ，コメツガ
夏緑樹林　ブナ，ミズナラ
照葉樹林　スダジイ，アラカシ
亜熱帯多雨林　ガジュマル，ヘゴ

問 6 (1)　図１において，Ｐは大気中の二酸化炭素を植物体に取り込む過程であるので，光合成を示す。Ｑは植物体から二酸化炭素が大気中へ放出される過程と大型枯死材，落葉枝層，土壌有機物から分解者によって二酸化炭素が大気中へと放出される過程であるので，呼吸を示す。



(2)　問題文に「生産者が光合成によって生産した有機物の総量は総生産量と呼ばれ，単位時間あたりの生産者の光合成量を示す。また，総生産量から生産者自身の呼吸量を引いたものは，純生産量と呼ばれる」とあるので，生産者の純生産量は，図1のP(光合成)から地上部と地下部のQ(呼吸)の合計を引いた値になる。よって，817 − (127 + 333) = 357(g炭素/m^2/年)となる。

純生産量＝総生産量　呼吸量

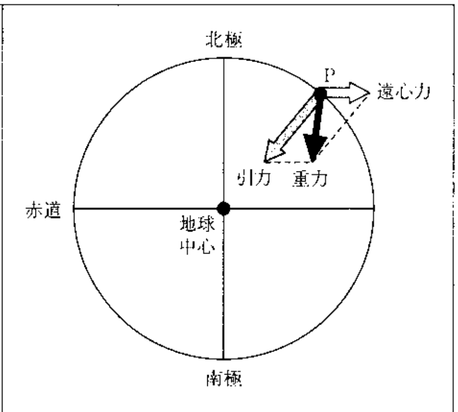
(3)　植物体量の増加分は，植物体における炭素の流入量から流出量を引いた値と等しい。図1から，炭素の流入量は817(g炭素/m^2/年)，炭素の流出量は地上部の呼吸 + 幹・大枝の落下 + 落葉・小枝の落下 + 根の死亡(大型枯死材へ) + 根の死亡(土壌有機物へ) + 地下部の呼吸であるので，127 + 23 + 50 + 10 + 271 + 333 = 814(g炭素/m^2/年)となる。したがって，現存量の増加分は，817 − 814 = 3(g炭素/m^2/年)となる。植物体量は地上部と地下部の合計で，579 + 560 = 1139(g炭素/m^2)で，これが1年後には3(g炭素/m^2)増加することになるので，1139 + 3 = 1142(g炭素/m^2)となると推測される。

(4)　この森林全体が大気から1年間に吸収する炭素量は生産者の総生産量と等しく817(g炭素/m^2/年)である。一方，この森林全体が大気中に1年間に放出する炭素量は，生産者と分解者の呼吸量の合計(上図で◯で囲んだ過程の合計) = 127 + 333 + 56 + 12 + 309 = 837(g炭素/m^2/年)となる。よって，この森林では炭素の放出量が吸収量よりも1年間で，837 − 817 = 20(g炭素/m^2)多いことがわかる。この炭素は二酸化炭素として放出されているので，この森林は大気中の二酸化炭素量の増加を引き起こしていると考えられる。

地　　学

[1] 固体地球

【解答】

問1	カ	問2	

問3	緯度1°あたりの子午線弧の長さが高緯度ほど長かったこと。

問4	ジオイド	問5	イ	エ	問6	エ

問7	7	モホロビチッチ	8	深い	問8	7.6×10^{1} km

【配点】 (20点)

問1　2点，　問2　3点，　問3　3点，　問4　2点，　問5　2点(完答)，
問6　2点，　問7　$\boxed{7}$ 2点　$\boxed{8}$ 1点，　問8　3点

【出題のねらい】

固体地球をテーマとして，地球の形，重力，地磁気，地球表層の構造およびアイソスタシーの計算についての基本事項を出題した。

【解説】

問題

A　地球の形と重力，地磁気

問1　重力は，地球中心(重心)に向かってはたらく引力(万有引力)と地球自転によって自転軸に直角外向きに生じる遠心力の合力である。引力は地球中心からの距離の2乗に反比例するため，地球を赤道方向に膨らんだ回転楕円(だえん)体とみなしたとき，赤道で最小，極で最大となる。また，遠心力は自転軸からの距離に比例するため，赤道で最大，極で最小(ゼロ)となる。したがって，引力と遠心力の合力である重力は，赤道で最小，極で最大となる(図1－1)。

【ポイント】

引力(万有引力)
地球中心(重心)に向かってはたらく力。赤道で最小，極で最大。

遠心力
地球自転により，自転軸に直角外向きに生じる力。赤道で最大，極で最小(ゼロ)。

重力
引力と地球自転による遠心力の合力。赤道で最小，極で最大。

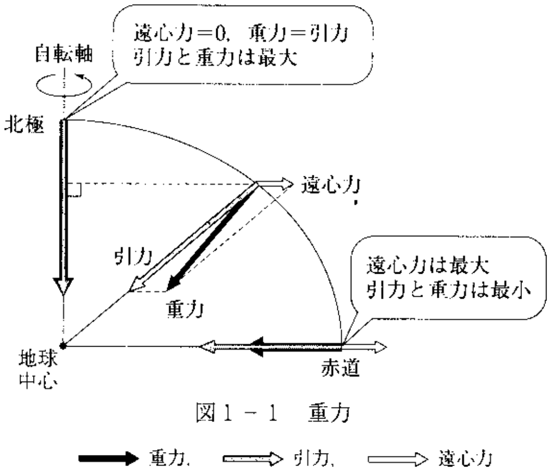


図１－１　重力

問２　図１－１に示すように，重力は引力と遠心力の合力として作図される。北半球中緯度の地点Ｐにある物体にはたらく遠心力は，自転軸に対して直角外向きにはたらく。重力は，引力と遠心力を２辺とする平行四辺形の対角線として表され，その向きは，極と赤道を除き地球の中心方向とは一致しない。

問３　地球の形が赤道方向に膨らんだ回転楕円体に近いことは，緯度1°あたりの子午線弧(経線弧)の長さが，低緯度よりも高緯度で長いことから明らかとなった(図１－２)。

問４　潮汐や波などの影響を受けて変化する海水面の長期間の平均をとったものを平均海水面という。重力の方向は平均海水面に垂直である。さらに，陸域にも海水を引き入れたと仮定して，平均海水面で地球の全表面を覆ったとしたときにできる閉曲面をジオイドという。したがって，ジオイドは重力の方向に垂直である。このジオイドの形と大きさに最も近い回転楕円体を地球楕円体という。

引力は，物体の質量によって変化するため，重力の大きさや向きも地表付近の密度の影響を受けて変化する。たとえば，地下に周囲よりも密度の大きい物質があると，重力がその方向に傾くため，ジオイドが上に凸の形状となる(図１－３)。

問５　偏角は，水平分力の方向が真北の方向からどれくらいずれているかを表す角度である(図１－４)。地磁気を表す要素のうち，偏角は他の要素とは独立した要素であり，緯度にはよらない。したがって，アとオは誤りである。また，偏角は，他の要素とは独立しているので，地磁気の三要素に必ず含めなくてはならない。偏角以外の要素は，そのうちの二つを用いて他の要素を表すことができるので，どれを選んでもよい。したがって，イは正しく，ウは誤りである。伏角は，地磁気の向きと水平面とのなす角を表す。伏角が0°のときは鉛直分力が0となるので，水平分力は全磁力に等しくなる。したがって，エは正しい。

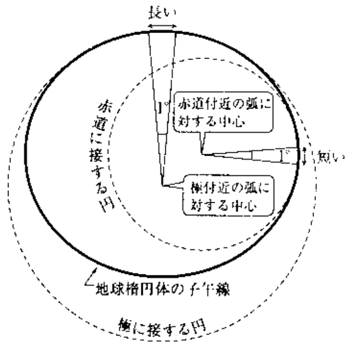


図１－２　赤道と極における緯度1°あたりの子午線弧の長さ

平均海水面
長期間にわたって平均した海水面。

ジオイド
平均海水面で地球を覆ったと仮定したときの面。標高の基準。重力の方向に垂直。

地球楕円体
ジオイドの形と大きさに最も近い回転楕円体。

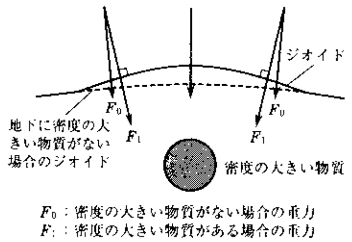


図１－３　地球内部の物質による重力の方向とジオイドの変化

偏角
水平面における地磁気の向きと真北とのずれの角度。

地磁気の三要素
偏角を必ず含めた三つの要素。

伏角
地磁気の向きと水平面とのなす角度。

地学

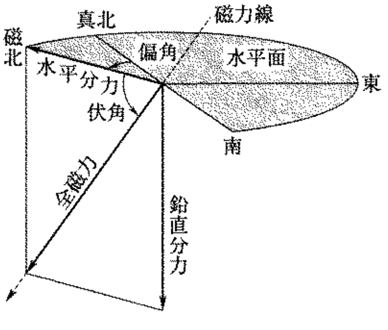


図１－４　地磁気の三要素

B　地球表層の構造

問６　地球内部の密度は深部ほど大きく，大陸地殻上部は花こう岩質岩石，大陸地殻下部は玄武岩質岩石，海洋地殻は玄武岩質岩石からなる。地殻の下の上部マントルはかんらん岩質岩石からなる(図１－５)。

問７　$\boxed{7}$：地殻とマントルの境界面をモホロビチッチ不連続面(モホ面，モホ不連続面)といい，この不連続面を境にして，地殻からマントルに入射した地震波の速度が急増する。

$\boxed{8}$：図１－５に示したように，モホロビチッチ不連続面は，地殻の厚い大陸地域では深く，地殻が薄い海洋地域では浅い。

問８　問題の図２に示された氷床をのせた大陸地殻と氷床が完全にとけた後の大陸地殻を模式化すると，次のように表される(図１－６)。アイソスタシーが成立しているとき，均衡面における圧力が等しい。各部分の「密度×厚さ」が圧力に比例することから式を立てる。求める隆起量を d km とすると，氷床が完全にとけた後は均衡面より上に d km のマントルが入り込んでいることから，

$$0.93\times2.7+2.8\times45=2.8\times45+3.3\times d$$

が成り立ち，両辺に示した大陸地殻の圧力は相殺され，

$$0.93\times2.7=3.3\times d$$

$$\therefore\quad d\fallingdotseq7.6\times10^{-1}\ \text{(km)}$$

となる。

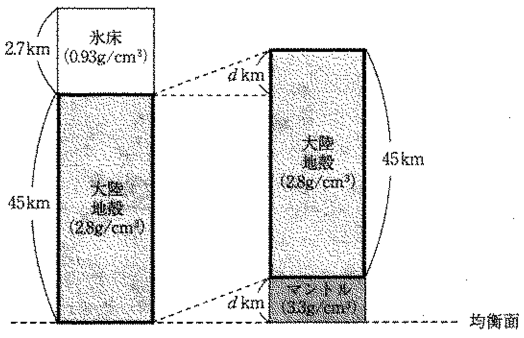


図１－６　アイソスタシー

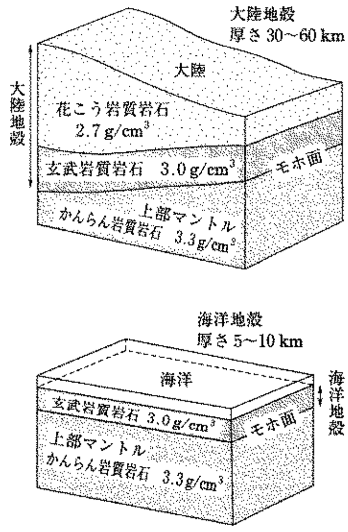


図１－５　地球表層の構造と岩石

モホロビチッチ不連続面
地殻とマントルの境界面。
大陸地域で深く，海洋地域で浅い。

アイソスタシー
均衡面における圧力が等しい。

2 火成岩と火山

【解答】

問1	(1)	A	等粒状組織	B	斑状組織	(2)	A	斑れい岩	B	流紋岩
問2	(1)	MgO	$FeO+Fe_2O_3$	(2)	c	CaO	d	Na_2O	(3)	固溶体
問3	ア→エ→ウ→イ	問4	ア							
問5	高温の火山ガスと火山砕屑物が一体となって，高速で流れ下る現象。									

【配点】 (20点)

問1 (1) 各2点×2 (2) 各2点×2，

問2 (1) 各1点×2(順不同) (2) 各1点×2 (3) 2点，

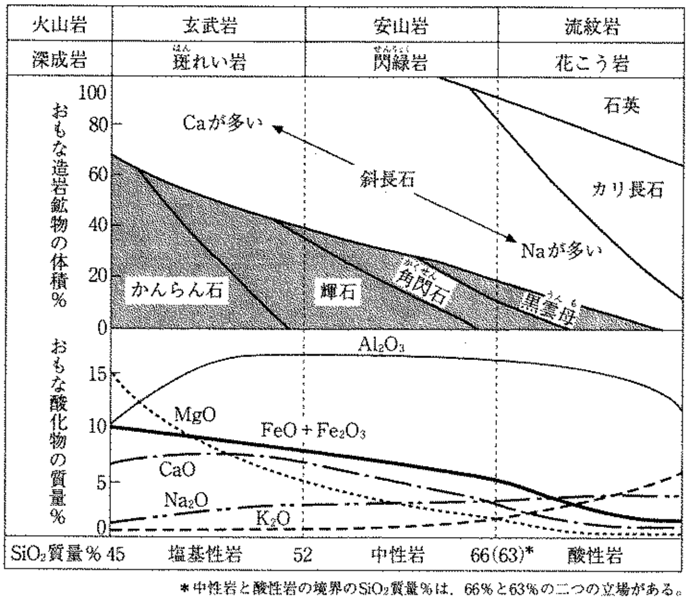
問3 2点， 問4 1点， 問5 3点

【出題のねらい】

火成岩の分類と性質，火山活動に関する基本事項を出題した。覚えるべき事項が多いので，早めに内容をまとめておこう。

【解説】 問題

図2－1に火成岩の分類と鉱物組成，化学組成を示した。これを参考に，解説を読んでほしい。



＊中性岩と酸性岩の境界のSiO_2質量%は，66%と63%の二つの立場がある。

図2－1 火成岩の分類と組成

問1 (1) 火成岩の組織は，マグマの冷却速度に左右される。岩石Aは，数mm程度の大きさの粗粒の結晶のみからなる。これを等粒状組織という。地下深くでマグマがゆっくりと冷えると，結晶が成長して等粒状組織を示す深成岩が形成される。一方，岩石

【ポイント】

火成岩の組織

等粒状組織 深成岩

斑状組織 火山岩

Bは，細かい結晶やガラスからなる石基と，数 mm 程度の大きさの斑晶からなる。これを斑状組織という。地下深くでマグマがゆっくりと冷えていくときに粗粒の結晶が成長し，斑晶が形成される。斑晶を含んだまま，マグマが地表や地表付近で急冷されると，残っていたマグマは細かい結晶やガラスからなる石基として固結し，斑状組織を示す火山岩が形成される。

(2) 岩石Aは，等粒状組織を示す深成岩であり，その鉱物組成から斑れい岩である。かんらん岩であるならば，斜長石はほとんど含まれず，角閃石は含まれない。また，閃緑岩であるならば，かんらん石は含まれない。

岩石Bは，斑状組織を示す火山岩であり，SiO_2 質量％と鉱物組成から考えて流紋岩である。

問2 (1) 有色鉱物(苦鉄質鉱物)に特徴的に含まれる元素は Mg と Fe であり，これらの酸化物である MgO と $FeO+Fe_2O_3$ の含まれる割合は塩基性岩，中性岩，酸性岩の順に減少する。なお，SiO_2 質量％が 45 ～ 52％の範囲では，教科書によってこれら二つの成分の量比は異なる。そのため，この問いでは一括して MgO と $FeO+Fe_2O_3$ として答えてもらうことにした。また，苦鉄質鉱物の「苦」は Mg を意味する漢字である。

有色鉱物に特徴的な元素
Mg と Fe

(2) 斜長石では結晶構造中の同じ位置で Ca と Na が入れ替わる。図2－1に示したように，塩基性岩には Ca，酸性岩には Na に富む斜長石が含まれる。したがって，c は CaO，d は Na_2O である。

斜長石の組成
塩基性 ─→ 酸　性
Caに富む ─→ Naに富む

(3) 結晶構造は一定のまま，化学組成が連続的に変化する鉱物を固溶体という。入試問題では，入れ替わる元素として，有色鉱物の Mg と Fe もしくは斜長石の Ca と Na が問われることが多い。

固溶体
結晶構造は一定のまま，化学組成が連続的に変化する鉱物。

問3 マグマから最初に晶出した結晶は，結晶本来の形状で成長する。このような結晶を自形という。問題の図2では，四角形の辺が欠けておらず，浮き上がって見えるアが自形である。自形の結晶の次に晶出した結晶は，自形の結晶と接する部分では結晶本来の形状をとれないが，それ以外では結晶本来の形で成長する。このような結晶を半自形という。問題の図2では，ウとエの大部分が半自形である。ウはエに邪魔されているものがあるので，エが先に晶出したことがわかる。最後に，隙間を埋めて晶出した結晶は，その結晶本来の形状で成長することができない。このような結晶を他形という。問題の図2ではイと一部のウが他形である。以上から，ア→エ→ウ→イの順に晶出したと決定できる。

鉱物の晶出順序
自形 → 半自形 → 他形

問4 ア　表2－1のように，マグマの温度が低く，SiO_2 質量％が大きいほど，マグマの粘性は高い。したがって，この選択肢が正解である。

イ　火山ガスの主成分は水蒸気であり，二酸化炭素や二酸化硫黄は少ない。火山ガスがマグマに含まれる割合と噴出する溶岩の量はとくに関係がないので，この選択肢は誤りである。

火山ガスの成分
水蒸気が主成分。

ウ　火山は災害をもたらすだけではなく，火山地帯では，地熱発電や温泉など，われわれに恵みも与えてくれる。したがって，この選択肢は誤りである。

火山の恵み
地熱発電，温泉など。

エ　日本列島で活動する火山は，安山岩質マグマの火山活動を主体とするものが多いが，その他に玄武岩質マグマや流紋岩質マグマの火山活動を行う火山もある。伊豆大島三原山や三宅島雄山は玄武岩質マグマの火山活動を行う。したがって，この選択肢は誤りである。

日本の火山
安山岩質マグマによる火山活動を主とするが，それ以外の多様な火山活動も生じている。

表２－１　溶岩の性質と火山活動

火山岩	玄武岩	安山岩	流紋岩
SiO_2質量%45	塩基性　52	中　性 66(63)	酸　性
温　度	1200 ℃ ←	→	900 ℃
粘　性	低　い ←	→	高　い
火山ガス含有量	少ない ←	→	多　い
噴火様式	大量の溶岩流	溶岩流 噴　煙	溶岩盛り上がる 噴　煙
火山地形	溶岩台地 盾状火山	成層火山	溶岩円頂丘 （溶岩ドーム）
火山の例	キラウエア マウナロア	桜　島 浅間山	雲仙普賢岳 昭和新山

問５　玄武岩質の火山や安山岩質の火山は溶岩を噴出する。溶岩が流れ下る速度はあまり速くないので，場合によっては，土木工事によってその流路を変えたり，放水したりして固まらせることもできる。1973年のアイスランドのヘイマエイ島で起きた火山活動では放水を試みている。また，1992年のイタリアのエトナ火山ではダイナマイトを使って溶岩流の流路を変えている。

一方，流紋岩質の活動では，高温の火山ガスと火山灰などの火山砕屑物が一体となった火砕流が発生することがある。火砕流の速度は時速100 kmに達する場合もあり，迫り来る火砕流から逃れることは難しい。また，火砕流の厚さは地表から数百 m もあり，高所にいても逃げようがない。

火砕流
高温の火山ガスと火山砕屑物が一体となって，高速で流れ下る。

1990年に噴火を開始した雲仙普賢岳では，1991年に発生した火砕流で43名の死者・行方不明者が出ている。それでも，雲仙普賢岳の火砕流は溶岩円頂丘（溶岩ドーム）の崩落による小規模なものであった。それに比べて，９万年前の阿蘇山の噴火で生じた火砕流は，九州中央部から，海を渡って山口県の一部地域を覆うほどの大規模なものであった。

3 地層の形成

【解答】

問1	1	地層累重	2	褶曲				
問2	(1)	イ	(2)	(i)	下位ほど粒径が大きく，上位ほど粒径が小さくなった。			
				(ii)	級化構造	(iii)	タービダイト	
問3	(1)	ア，エ	(2)	ア，エ	(3)	逆断層		

【配点】 (20点)

問1　各2点×2，　問2　(1)　2点　(2)(i)2点　(ii)2点　(iii)2点，

問3　(1)　3点(完答)　(2)　3点(完答)　(3)　2点

【出題のねらい】

地層の積み重なり方を正しく判断するためには，地質構造はもちろんのこと，地質年代や示準化石など，さまざまな知識が必要になってくる。しかし，今回は地質年代や示準化石の細かい知識がなくても解答できるように配慮し，地層の形成と露頭の観察を中心に，地質構造や地層・岩体の新旧関係を考察する問題などを出題した。

【解説】 問題

問1 1 ：地層はふつう海底や湖底などの水底で，下から上へ順に積み重なっていく。それゆえ，一連の地層の積み重なりにおいて，下位の地層ほど古く，上位の地層ほど新しい。これを「地層累重(るいじゅう)の法則」といい，地層の新旧を決定する上で最も重要な基本原則である。ただし，地殻変動などによって地層が激しく褶曲(しゅうきょく)して地層の上下が逆転しているような場合には地層累重の法則は適用できない。地層の上下が逆転しているかどうかは，**問2**で説明する級化成層(級化層理)，斜交葉理(クロスラミナ)や漣痕(れんこん)(リップルマーク)などを用いて判断する。

2 ：地層が水平方向から圧縮力を受けると，波状に曲がりくねって変形することがある。そのような現象および構造を「褶曲」という。褶曲の山の部分を背斜，谷の部分を向斜という(図3－1)。本問では背斜・向斜の部分を限定していないので，「褶曲」と答えるのが妥当である。

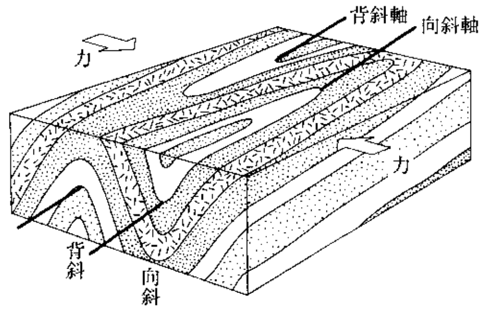


図3－1　背斜と向斜

【ポイント】

地層累重の法則

一連の地層の積み重なりにおいて，下位の地層ほど古く上位の地層ほど新しいという法則。

地層の上下判定に用いる堆積構造

・級化成層(級化層理)
・斜交葉理(クロスラミナ)
・漣痕(リップルマーク)

など。

褶曲

水平方向の圧縮力によって波状に曲がった地層の構造またはその現象。

問 2　(1)　問題の図 1 の粒径分布から，$\frac{1}{16}$ mm ～ 2 mm の砕屑(さいせつ)物がほとんどであることがわかる。粒径が $\frac{1}{16}$ mm ～ 2 mm の砕屑物は砂であるから，これらが続成作用によって固結すれば砂岩となる。なお，粒径が 2 mm 以上の砕屑物を礫(れき)，$\frac{1}{16}$ mm 以下の砕屑物を泥という。泥はさらに粒径 $\frac{1}{256}$ mm を境にシルトと粘土に分けられ，粒径が $\frac{1}{16}$ mm ～ $\frac{1}{256}$ mm のものがシルト，$\frac{1}{256}$ mm 以下のものが粘土である。

(2)　問題の図 1 の粒径分布を示す砕屑物を容器に入れ，水を加えて勢いよく振ったあと放置すると，粒径の大きな砕屑物ほど沈降する速度が大きいので，粒径の大きな砕屑物が先に堆積(たいせき)し，後からその上に粒径の小さな砕屑物が堆積する。こうして，下位ほど粒径が大きく上位ほど粒径が小さい構造が形成される。このような構造を「級化構造(級化成層または級化層理)」という。浅い海底に堆積していた砂や泥が，地震などを引き金にして，海水と一緒に大陸斜面を流れ下る現象およびその流れのことを乱泥流(らんでいりゅう)(混濁(こんだく)流)という。乱泥流によって運搬された砂や泥は深海底に堆積する。これが「タービダイト」である。タービダイトには級化構造がよく見られる。

問 3　(1)　マグマが地層や岩石中に入り込むことを貫入というので，問題の図 2 の露頭 I および露頭 II における A 層と B 層のように火成岩が関係しておらず，上下に重なる 2 枚の地層の関係については貫入の関係はない。A 層は新生代古第三紀に形成された地層であるのに対し，B 層は古生代に形成された地層であり，A 層と B 層の間に中生代の地層が欠落しているので，A 層と B 層は時間的に連続して堆積していないことがわかる。したがって，整合の関係ではなく，不整合の関係の可能性はある。

また，B 層の堆積後，その上に A 層が堆積し，緩やかに西に傾斜する断層が形成されて上位の A 層がずり落ち，断層面を境にして A 層と B 層が接したという可能性もある。

以上により，アとエが正解となる。

(2)　花こう岩は深成岩であるので，マグマが地表に噴出して，その上に地層が形成されるということはない。したがって，A 層と G 岩体が整合で接するということはありえない。また，A 層は新生代古第三紀に形成された地層であるのに対し，G 岩体の花こう岩は中生代に形成された岩石であるから，A 層の堆積後に G 岩体が貫入するということもありえない。しかし，G 岩体が先に貫入していて，その後の地殻変動で地表付近に露出して侵食され，その上に A 層が堆積した不整合の関係の可能性はある。

また，(1)と同様に，G 岩体の貫入後，その上に A 層が堆積し，緩やかに西に傾斜する断層が形成されれば，断層面を境にして A 層と G 岩体が接するという可能性もある。

粒径による砕屑物の分類
礫：2 mm 以上
砂：$\frac{1}{16}$ mm ～ 2 mm
泥：$\frac{1}{16}$ mm 以下

級化構造(級化成層または級化層理)
下位ほど粒径が大きく上位ほど粒径が小さくなっている構造。

タービダイト
乱泥流による海底堆積物。級化構造がよく見られる。

以上により，アとエが正解となる。

(3) 断層Ｆには横ずれ成分がなく，断層面が傾斜しているので，断層Ｆは正断層か逆断層のどちらかになる。露頭Ⅰと露頭Ⅱの間に東に傾斜した断層がある場合，次の図３－２のようになっているであろう。断層面の傾斜角については述べられていないが，断層面が東に傾斜しているのであれば，断層面の東側の地盤が上盤（うわばん）になり，西側が下盤（したばん）になるので，Ａ層とＢ層の境界を延長してみれば，上盤が下盤に対して相対的にずり上がった逆断層であると判断できる（図３－３）。

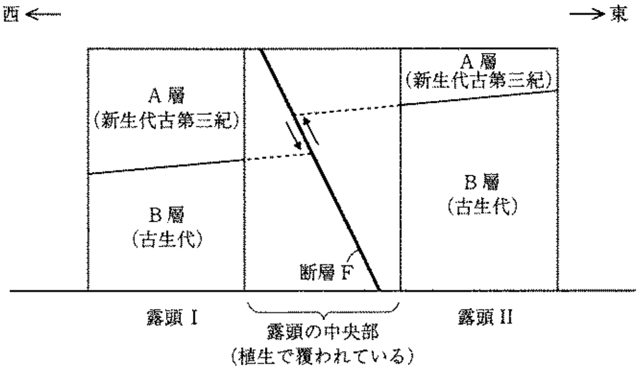


図３－２　断層Ｆの傾斜と地層のずれ方の例
Ａ層，Ｂ層の模様は省略してある。

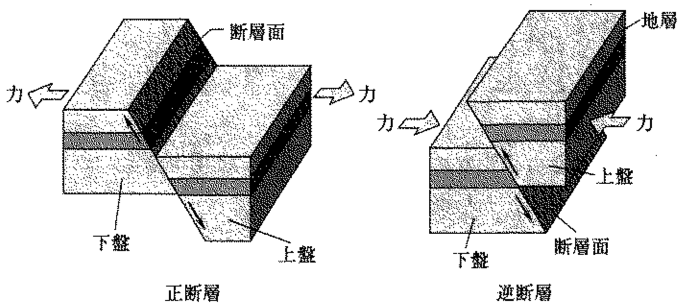


図３－３　正断層と逆断層

正断層
上盤が下盤に対して相対的にずり下がっている断層。

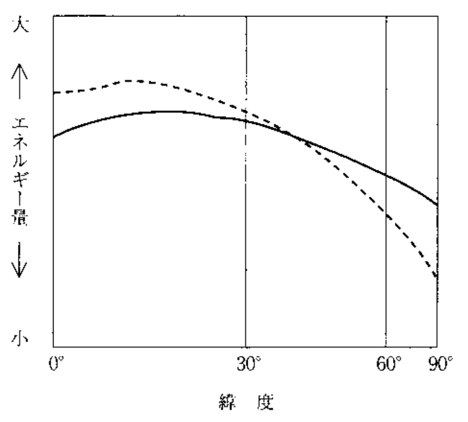
逆断層
上盤が下盤に対して相対的にずり上がっている断層。

4 地球のエネルギー収支と大気

【解答】

問1	1	成層	2	ハドレー		
問2	A	高	B	西	C	上層

問3



問4	(1)	343 W/m^2	(2)	152
	(3)	現象名	放射冷却	
		記号	エ	

問5	気温が上昇し，地球が受け取る放射と宇宙へ放出される放射がつり合うようになる。

【配点】 (20点)

問1 $\boxed{1}$ ・ $\boxed{2}$ ：各2点×2， 問2 {A}～{C}：各1点×3， 問3 2点，
問4 (1) 2点 (2) 2点 (3) 現象名：2点 記号：2点， 問5 3点

【出題のねらい】

気象現象を引き起こす原因の一つは，地球が受け取る太陽放射エネルギーである。今回は，緯度別の受け取るエネルギー量の違いやエネルギー収支を中心に，大気の構造や循環など大学入試で頻出の内容を含めて出題した。

【解説】

問題

問1 $\boxed{1}$ ：大気の鉛直構造と気温変化を図4－1に示す。大気圏は高度に伴う気温変化によって区分されている。対流圏は高度とともに気温が低下する。しかし，それより上の成層圏では，高度とともに昇温する。これは，成層圏に他の部分より多く存在するO_3(オゾン)が太陽放射に含まれる紫外線を吸収して，熱エネルギーに変換しているからである。さらに上の中間圏では気温は再び低下していく。

$\boxed{2}$ ：低緯度域には，赤道付近で上昇し上空を高緯度に向けて移動した後，緯度20°～30°付近で下降して赤道付近に戻る循環がある。これをハドレー循環といい，低緯度域ではこの鉛直方向の循環が熱を輸送している。一方，中緯度域では偏西風が南北にうねって蛇行する水平方向の動きが熱の輸送をしている(図4－2)。これをロスビー循環という。

問2 {A}：対流圏と成層圏の境界を圏界面(対流圏界面)という。その

【ポイント】

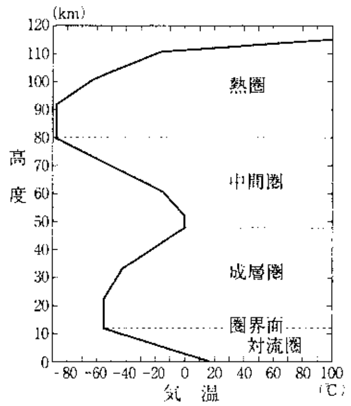


図4－1 大気の鉛直構造

高度は平均すると約 11 km であるが，赤道付近ではそれより高く，極付近では低くなっている。

{B}：赤道付近で上昇した大気は上空で高緯度に向かって動くが，地球の自転の影響を受けて，西よりの風へと向きを変える。その後，緯度 20° ～ 30° 付近で下降して貿易風となって赤道へ戻る。このときにも地球の自転の影響を受けて，北東貿易風(北半球)と南東貿易風(南半球)になる。なお，風向きは風が吹いてくる方向を指す(西風は西から東へ吹く)ことにも注意が必要である。

{C}：中緯度の対流圏内では，西よりの風が吹き偏西風と呼ばれる。その風速は対流圏上層ほど大きく，圏界面付近で最も大きくなる。風速のとくに大きな帯状の気流をジェット気流という。

問 3　太陽からエネルギーを受け取るだけでは，地表は灼熱(しゃくねつ)となるはずである。実際は，地球が受け取った量と同量のエネルギーを宇宙空間へ放出しており，地球のエネルギー収支はつり合いが取れている。太陽放射は可視光線の波長域で最も強いのに対して，地球は赤外線を主とした地球放射を宇宙に向け放射している。しかし，太陽から受け取るエネルギーは，低緯度では多く，高緯度では少ない。地球放射も低緯度では多く，高緯度では少ないが，緯度による差は太陽放射ほど大きくはない。そのため，低緯度域では熱が過剰に，高緯度域では不足する(図 4 － 3)。本問は，地球放射の緯度別のエネルギー量の大きさを示す線を，低緯度で大きく，高緯度で小さく，エネルギー量が過剰な部分と不足する部分の面積が等しくなるように描けばよい。大気や海洋の大循環が低緯度と高緯度の温度差を小さなものにしていることも覚えておこう。

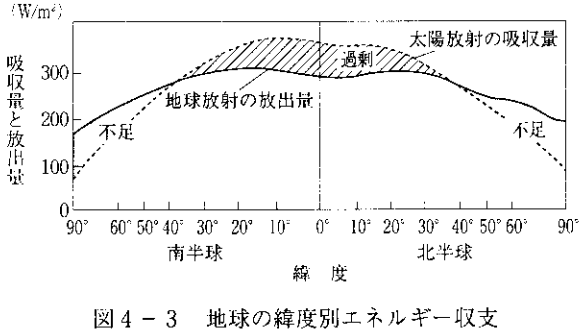


図 4 － 3　地球の緯度別エネルギー収支

問 4　(1)　大気上端の太陽光線に垂直な面が単位時間に受け取る太陽放射エネルギー量を太陽定数という。太陽定数を I，地球半径を r とし，地球を球形と考えると，地球全体で受け取る太陽放射エネルギー量は，太陽定数に地球の断面積を掛けた $\pi r^2 I$ になる。地球全体で平均する場合は，その値を地球の表面積で割るこ

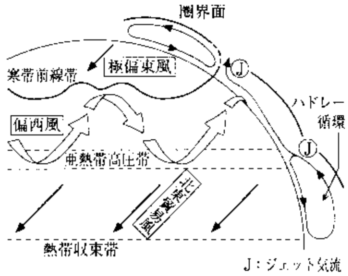


図 4 － 2　大気大循環

圏界面(対流圏界面)
対流圏と成層圏の境界面。
平均高度は 11 km。

風向
風の吹いてくる方向を指す。

ジェット気流
中緯度の対流圏上層の圏界面付近で，とくに強い帯状の偏西風。

太陽放射と地球放射
・太陽放射：可視光線の波長域で最強。
・地球放射：主として赤外線。

地球のエネルギー収支
低緯度：入射量＞放射量
高緯度：入射量＜放射量
地球全体としては入射量と放射量がつり合っている。

太陽定数
地球大気上端で太陽光線に垂直な 1 m² の面が 1 秒に受け取る太陽放射エネルギー量。

とになるので,

$$\frac{\pi r^2 I}{4\pi r^2}=\frac{1}{4}I$$

となり，太陽定数 1370 W/m^2 を 4 で割ればよいので，342.5 となる。よって，343 W/m^2 が答えとなる。

(2) 地球全体で考えた場合，エネルギー収支はつり合っている。そのため，大気や地表で出入りするエネルギー量は等しくなければならない。大気が受け取るエネルギーについて考えると，地表からの放射 114 のうち直接宇宙に出ていくものが 12 であるので，114－12＝102 が大気の吸収するエネルギー Z になる。その他にも，太陽放射から 20，その他のエネルギー輸送で 7＋23＝30 があり，合計 152 のエネルギーを大気は受け取っているので，大気からも同じだけ，つまり 152 のエネルギー X が放出されなければならない。ちなみに 57 は宇宙に出ていくが，152－57＝95 のエネルギー Y は地表に戻される。このため，地表は，太陽からのエネルギー 49 を受け取るだけの状態よりも高温に保たれる。これを温室効果という。

(3) 場所・時間や天候によっては，地表から放射されるエネルギー量が，地表が吸収するエネルギー量を上回ることがある。そうなると地表の温度は下がることになる。これを放射冷却という。太陽放射がなくなる夜間に，温室効果を引き起こす水蒸気や雲が少ない場合，放射冷却はより強くなる。よって，選択肢のエが正解となる。他の選択肢では雲や降水があり，放射冷却はあまり強くならない。

問 5 大気や海洋による南北方向の熱輸送がなくなったとしても，受け取る太陽エネルギー量は変わらないので，最終的に地球から宇宙に放出されるエネルギー量もそれと同じにならなければならない。赤道では，高緯度側にエネルギーが輸送されなくなって，気温が上昇する。気温が上昇すると放射量が増加して，入射する太陽エネルギー量とつり合うはずである。つり合うと気温上昇が止まり，平衡状態になる。

地球が受け取る太陽放射全量
大気上端で考えた場合，太陽定数と地球の断面積との積。

温室効果
地表からの放射のほとんどが大気に吸収され，大気が地表に向けて放射を行うことで地表付近が高温に保たれる効果のこと。

放射冷却
地表からの放射が地表に入ってくる放射を上回り，地表の温度が下がる現象。よく晴れた夜間に強くなる。

5 太陽系の惑星

【解答】

問1	1	二酸化炭素	2	温室効果	問2	(1)	15％	(2)	エ		
問3	(1)	イ	(2)	88日	問4	a	○	b	×	c	○	記号	ウ

【配点】 (20点)

問1　各2点×2，　問2　(1)　3点　(2)　2点，　問3　(1)　2点　(2)　4点，

問4　正誤：各1点×3　記号：2点

【出題のねらい】

地球型惑星である水星，金星，火星の特徴とケプラーの法則を問う問題である。

【解説】

問題

問1　金星と火星は，大気の主成分は二酸化炭素であり，その割合は体積比で9割を超えている。しかし，金星は厚い大気をもち，二酸化炭素による温室効果が強くはたらいているために表面が高温に保たれているのに対し，火星の大気は非常に薄く，温室効果がほとんどはたらいていないために表面は低温であるという違いがある。

問2　(1)　半径 R の球の体積は $\frac{4}{3}\pi R^3$ である。つまり，体積は半径の3乗に比例する。地球の半径は約6400 km であるから，火星の半径は地球の $3396\div6400\fallingdotseq0.53$ 倍である。よって，

$$0.53^3\times100\fallingdotseq15\ (\%)$$

となる。火星の体積は地球よりもかなり小さいことがわかる。

なお，選択肢が与えられているので，このような面倒な計算をしなくても，火星の半径は地球の $\frac{1}{2}$ よりやや大きいので，体積は $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ よりやや大きいはずであるから，$100\times\frac{1}{8}=12.5(\%)$ よりやや大きいと考えて，15％を選択することもできる。

(2)　火星の自転軸は地球と同様に公転面に対して傾いており，季節変化が生じている。したがって，エが誤りの文であり，この問いの正解である。

火星に季節変化がある証拠として，冬側の極地方に極冠と呼ばれる白い氷が地球からも観測できることがあげられる。極冠は，水が凍った氷と二酸化炭素が凍ったドライアイスからなると考えられている。したがって，アは正しい文である。

火星には，峡谷や扇状地など，水が流れた痕跡(こんせき)があり，かつては大量の水が存在していたと考えられている。したがって，イは正しい文である。

地球型惑星は衛星が少なく，水星と金星は0個，地球は月の1個，火星はフォボスとダイモスの2個である。したがって，ウは正しい文である。

問3　水星は非常に小さく，大気がほとんどない。そのため，昼夜

【ポイント】

金星の大気

二酸化炭素を主成分とする厚い大気による温室効果で高温に保たれている。

火星の大気

二酸化炭素を主成分とする薄い大気がある。

球の体積

半径を R とすると，

体積$=\frac{4}{3}\pi R^3$

火星の特徴

自転軸が公転面に対して傾いているために季節変化があり，冬側の極地方に氷とドライアイスでできた極冠が見られる。水が流れた跡や巨大な火山地形が存在する。2個の衛星が存在する。

水星

大気がほとんどなく，昼夜の温度差が激しい。多数のクレーターが存在する。

の温度差が激しい。また，クレーターが多く存在するなど，大気がない月とよく似た特徴をもつ。

(1) 水星は内惑星であるため，外惑星の火星のように真夜中に見ることはできない。とくに水星は太陽に近いために，太陽との離角は最も条件がよい場合でも約28°しかない。したがって，水星が観測できるのは，日の出直前あるいは日没直後の非常に低い空に限られるのである。一方，同じ内惑星でも金星の場合，最大離角は46°程度もあるため，日の出の少し前あるいは日没の少し後の暗い空でも比較的高い空に見えるので観測しやすい。よって，イが正解である。

ア：水星の公転速度は秒速47 kmであるが，地球と水星の距離に比べて47 kmは極めて短い距離であるため，地球から肉眼で観測する場合，公転による移動は認識できず，止まっているようにしか見えない。よって，公転速度が観測を困難にさせる理由にはならない。

ウ・エ：水星の最大光度は −2.4等であるので，最大離角の頃には条件がよければ肉眼で見ることも可能である。太陽系の天体の中では，地球から水星までの距離は比較的近いので，反射率は小さいが，十分に明るく見える。

(2) 自転周期の半分の29.3日をt日とすると，自転周期は$2t$日，公転周期は$3t$日と表せる。図5－1のように，水星がAの位置にあるときの日の出であるa点について考えると，t日後，自転によって半周しているが，公転によって公転軌道を$\frac{1}{3}$周するので，Bの位置のc点に移動している。このとき，日の出を迎えるのはd点であることから，c点は日の出の位置から60°しか動いていないことになる。日没までには日の出の位置から180°動かなくてはならないので，その3倍の時間が必要である。よって，昼の長さは$3t$日となり，$3 \times 29.3 \fallingdotseq 88$日が正解となる。

このように，水星は昼の長さが長いことも，表面温度が400℃にまで達する原因の一つである。

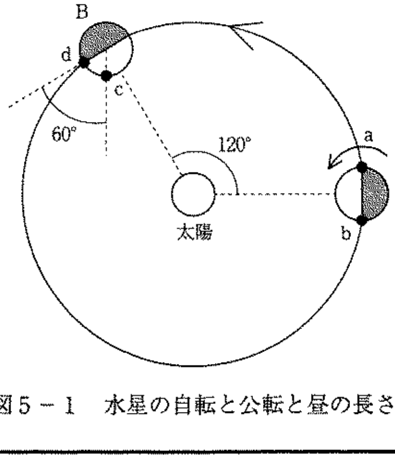


図5－1　水星の自転と公転と昼の長さ

内惑星

地球よりも内側にある惑星。水星と金星。太陽から最も離れる最大離角のときが観測に適している。

外惑星

地球よりも外側にある惑星。火星～海王星。真夜中に南中する衝の頃が観測に適している。

問 4　ケプラーは惑星の運動に関する三つの重要な法則を発見した。

第一法則(楕円軌道の法則)：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を公転する(図 5 − 2)。

第二法則(面積速度一定の法則)：太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に描く面積は一定である(図 5 − 3)。

第三法則(調和の法則)：太陽からの平均距離の 3 乗と公転周期の 2 乗の比は一定である。太陽と惑星の平均距離を a 天文単位，惑星の公転周期を P 年とすると，次の式が成立する。

$$\frac{a^3}{P^2}=1$$

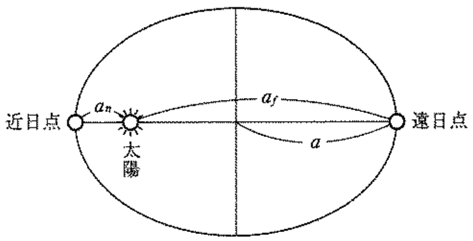


図 5 − 2　惑星の楕円軌道

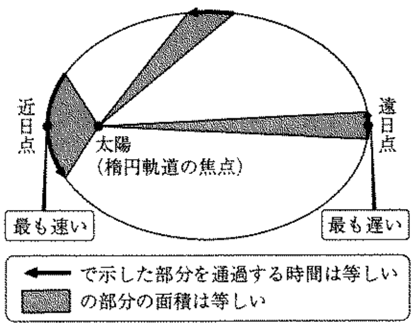


図 5 − 3　ケプラーの第二法則

a：ケプラーの第二法則に関連する。図 5 − 3 のように，太陽に近いほど公転速度は速くなり，近日点で公転速度は最大，遠日点で公転速度は最小になる。したがって，正しい文である。

なお，近日点での公転速度を v_n，遠日点での公転速度を v_f，近日点距離を a_n，遠日点距離を a_f とすると，

$$a_n \cdot v_n = a_f \cdot v_f$$

が成り立つ。

b：ケプラーの第一法則に関連する。すべての惑星は，太陽を一つの焦点とする楕円軌道を公転している。もう一つの焦点には何かあるわけではない。したがって，この文は誤りである。

c：ケプラーの第三法則に関連する。a^3 と P^2 は比例するので，a が小さいほど，P も小さくなる。つまり，太陽に近い距離にある惑星ほど公転周期は短くなる。したがって，正しい文である。

ケプラーの第一法則
惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を公転する。

ケプラーの第二法則
太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に描く面積は一定である。

ケプラーの第三法則
太陽と惑星の平均距離を a 天文単位，惑星の公転周期を P 年とすると，

$$\frac{a^3}{P^2}=1$$