クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2014年度

全統医進模試問題

数　　学

2014年11月実施

（200点・100分）

試験開始の合図があるまで，この「問題」冊子を開かず，下記の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1．　この「問題」冊子は，５ページである。

2．　解答用紙（４枚）は問題冊子に挟み込まれているので抜き出して解答すること。

3．　本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所および解答用紙の汚れ等があれば試験監督者に申し出ること。

4．　試験開始の合図で解答用紙の下段の所定欄に **氏名**（**漢字及びフリガナ**），**在・卒高校名**，**クラス名**，**出席番号**，**受験番号**（**受験票の発行を受けている場合のみ**）を明確に記入すること。

5．　解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。

6．　試験終了の合図で上記４.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。

河合塾

1461410112110010

数学の問題は次ページから始まる。

$\boxed{1}$ （配点　50点）　**解説**

a は実数の定数とする．2 つの関数

$$f(x)=\frac{4e^{x}-3}{e^{2x}+1},\quad g(x)=\frac{a}{2}e^{2x}-4e^{x}+(a+3)x$$

について，以下の問に答えよ．

⑴ $f(x)$ の極値，および極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ を求めよ．

⑵ 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

⑶ $g(x)$ が極大値をとる x の個数 N，極小値をとる x の個数 n を，a の値によって分類して答えよ．

$\boxed{2}$ （配点　50点）

解説

座標平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．

C の第 1 象限に含まれる部分に点 P をとり，P における C の接線と x 軸との交点を Q とする．さらに，線分 OQ を直径とする円を S とし，$\angle$POQ の二等分線と S の交点のうち O と異なるものを R とする．線分 OP と x 軸の正方向のなす角を 2θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ として，以下の問に答えよ．

(1)　線分 OQ の長さを θ で表せ．また，線分 OR の長さ r を θ で表せ．

点 R′ を，三角形 ORR′ が辺 OR′ を斜辺とする直角二等辺三角形となるようにとる．ただし，R′ は直線 OR に関して Q と反対側にあるとする．

(2)　$\angle \mathrm{QOR}'=\theta'$ とする．線分 OR′ の長さ r' を θ' で表せ．

(3)　R′ の座標を $(x,\ y)$ とする．

　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，点 R′ の軌跡 F の方程式を求め，F を図示せよ．

$\boxed{3}$ （配点　50点）　　**解説**

n は自然数とする．xy 平面上で，曲線 $y=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{n}}$，$x$ 軸，y 軸，および直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれる部分の面積を S_n として，以下の問に答えよ．

(1) S_n を n を用いて表し，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ を用いて定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta}\tan^2 x\,dx$ を求めよ．

さらに，$x^2\leqq \tan^2 x\leqq \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて $\dfrac{\theta^3}{3}\leqq \tan\theta-\theta\leqq \dfrac{\tan^3\theta}{3}$ を示せ．

(3) (1)で求めた極限値を c とする．$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}(S_n-c)$ が 0 以外の定数に収束するように定数 α を定め，その極限値を求めよ．

$\boxed{4}$ （配点　50点）　**解説**

n は自然数とする．

箱の中に A と書かれたカード(以下，$\boxed{\mathrm{A}}$ と表す)と B と書かれたカード(以下，$\boxed{\mathrm{B}}$ と表す)が 1 枚ずつ入っている．この状態から始めて次の操作 T を繰り返す．

操作 T

この箱からカードを 1 枚取り出す．取り出したカードが $\boxed{\mathrm{A}}$ のときはその $\boxed{\mathrm{A}}$ を箱に戻し，さらに $\boxed{\mathrm{B}}$ 1 枚を箱の中に追加する．取り出したカードが $\boxed{\mathrm{B}}$ のときはカードを戻さない．

T を n 回繰り返した後の箱の中に入っているカードの枚数を X_n とし，$X_n=k$ となる確率を $P_n(k)$ とする．

(1) $P_3(5)$，$P_3(3)$，および $P_4(4)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $P_n(n+2)$ を求めよ．

(3) $P_n(n)=q_n$ とおく．

(i) q_{n+1} を q_n を用いて表せ．

(ii) $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}$ とする．q_n を S_n を用いて表せ．