クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

新・旧課程

2014年度　第1回　全統マーク模試

学習の手引き【解答・解説集】

数　学

【2014年5月実施】

• **新課程数学**

数学①

数学Ⅰ …… 1

数学Ⅰ・数学A …… 16

数学②

数学Ⅱ …… 40

数学Ⅱ・数学B …… 49

• **旧課程数学**

数学①

旧数学Ⅰ …… 72

旧数学Ⅰ・旧数学A …… 79

数学②

旧数学Ⅱ・旧数学B …… 96

英語冊子巻末に「**自己採点シート**」と「**学力アップ・志望校合格のための復習法**」を掲載していますので，志望校合格へむけた効果的な復習のためにご活用ください。

河合塾

1460610119502110

【数 学 ①】

数 学 Ⅰ

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{\sqrt{アイ}+\sqrt{ウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{オカ}-\sqrt{キ}}{ク}$	$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$	3	
	ケ	2	3	
	$\dfrac{\sqrt{コ}-サ}{シ}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	3	
	ス	1	4	
	セ	8	2	
	ソタ	14	2	
	第1問 自己採点小計		(20)	
第2問	ア	0	2	
	イ	2	2	
	ウ	5	2	
	エ	7	2	
	オ.カ	5.0	3	
	キ.クケ	6.27	3	
	コ	3	3	
	サ	4	3	
	第2問 自己採点小計		(20)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	ア	0	3	
	イ	1	3	
	$\dfrac{\sqrt{ウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	4	
	$\sqrt{オ}$	$\sqrt{5}$	4	
	$カ\sqrt{キ}$	$2\sqrt{3}$	4	
	$\dfrac{クケ}{コ}$	$\dfrac{-1}{5}$	4	
	$\dfrac{サ\sqrt{シ}}{ス}$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$	4	
	$\sqrt{セソ}$	$\sqrt{10}$	4	
	第3問 自己採点小計		(30)	
第4問	$ア a$	$2a$	2	
	$イ a^2-ウ a-エ$	$2a^2-2a-4$	2	
	$オカ < a < キ$	$-1 < a < 2$	4	
	ク	6	3	
	ケコ	-1	2	
	$\dfrac{サシ}{ス}$	$\dfrac{-2}{3}$	2	
	セソ	24	4	
	$\dfrac{タチ}{ツ}$	$\dfrac{-1}{4}$	3	
	$\dfrac{テト}{ナ}$	$\dfrac{-2}{3}$	4	
	$\dfrac{ニ\pm\sqrt{ヌ}}{ネ}$	$\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$	4	
	第4問 自己採点小計		(30)	
	自己採点合計		(100)	

第1問　数と式

2次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

不等式 $\dfrac{1}{\alpha}<x<\alpha$ を満たす整数 x は $\boxed{\text{ケ}}$ 個である．

n を正の整数とし，実数 x に関する条件 p，q を次のように定める．

$$p:\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$$

$$q:\left|\frac{20}{n}x-\sqrt{5}\right|<1$$

(1)　$n=10$ とする．

条件 q を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}<x<\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であり，このとき

p は q であるための $\boxed{\text{ス}}$．

$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　「p が q であるための必要条件」であるような整数 n の最小値は $\boxed{\text{セ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{ソタ}}$ である．

【解説】　問題

2次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解は，

$$x=\frac{-(-\sqrt{10})\pm\sqrt{(-\sqrt{10})^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}$$

であるから，

☜　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a，b，c は実数)の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{10}}+\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

であり，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}\\&=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})}\\&=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{10}}-\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

☜　分母を有理化するために，分母，分子に $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ を掛けた．

である．

これより，不等式 $\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$ は，

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}<x<\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots ①$$

である．

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ と $3<\sqrt{10}<4$ より，

☜　$1<2<4$，$9<10<16$ による．

$$3-2<\sqrt{10}-\sqrt{2}<4-1,\quad 3+1<\sqrt{10}+\sqrt{2}<4+2$$

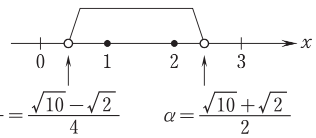
☜　$1<\sqrt{2}<2$ より，$-2<-\sqrt{2}<-1$.

であり，

$$(0<)\,\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}<\frac{3}{4}\,(<1),\quad 2<\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}<3$$

であるから，① を満たす整数 x は，

☜



$$1,\quad 2$$

の $\boxed{2}$ 個である．

$$p:\ \frac{1}{\alpha}<x<\alpha,$$

$$q:\ \left|\frac{20}{n}x-\sqrt{5}\right|<1\ （n\ は正の整数）.$$

(1)　$n=10$ のとき，条件 q を満たす x の値の範囲は，

$$\begin{gathered}\left|2x-\sqrt{5}\right|<1\\-1<2x-\sqrt{5}<1\\\sqrt{5}-1<2x<\sqrt{5}+1\\\frac{\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}}{\boxed{2}}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}\qquad\cdots ②\end{gathered}$$

☜　$a>0$ のとき，X の不等式 $|X|<a$ の解は，

$$-a<X<a.$$

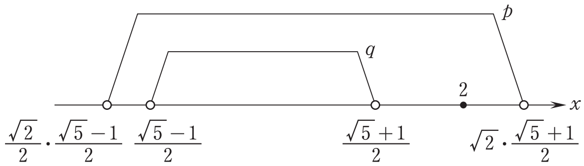
である．

また，条件 p は，① より，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\qquad\cdots ①'$$

となる．

①′，② より，次図を得る．



$\sqrt{2}<2$ つまり $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ と $\sqrt{5}-1>0$ より，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$1<\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}+1>0$ より，

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

よって，「$p \Longrightarrow q$」は偽(反例：$x=2$)であり，「$q \Longrightarrow p$」は真であるから，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない，すなわち $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

2 つの条件 s，t について，

「$s \Longrightarrow t$」が真

のとき，

s は t であるための十分条件，

t は s であるための必要条件．

(2)　p が q であるための必要条件，すなわち

「$q \Longrightarrow p$」が真　　　…③

が成り立つ条件を考える．

ここで，条件 q を満たす x の値の範囲は，

$$\left|\frac{20}{n}x-\sqrt{5}\right|<1$$

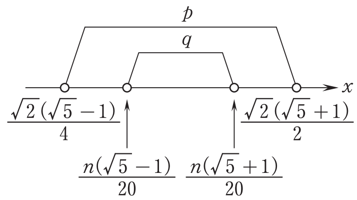
$$-1<\frac{20}{n}x-\sqrt{5}<1$$

$$\sqrt{5}-1<\frac{20}{n}x<\sqrt{5}+1$$

$$\frac{n(\sqrt{5}-1)}{20}<x<\frac{n(\sqrt{5}+1)}{20}$$

であるから，③ が成り立つ条件は，

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\leqq\frac{n(\sqrt{5}-1)}{20}\quad \text{かつ}\quad \frac{n(\sqrt{5}+1)}{20}\leqq\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{2}$$



$$\frac{\sqrt{2}}{4}\leqq\frac{n}{20}\quad \text{かつ}\quad \frac{n}{20}\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

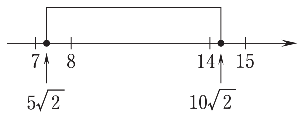
$$\frac{\sqrt{2}}{4}\leqq\frac{n}{20}\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5\sqrt{2}\leqq n\leqq 10\sqrt{2}$$

であり，n は整数であるから，

$$8\leqq n\leqq 14$$

である．



$49<50<64$ より，$7<5\sqrt{2}<8$.

$196<200<225$ より，$14<10\sqrt{2}<15$.

よって，「p が q であるための必要条件」であるような整数 n の最小値は $\boxed{8}$ であり，最大値は $\boxed{14}$ である．

第 2 問　データの分析

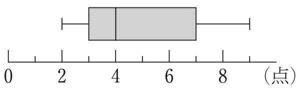
15 人の生徒に対して行った 10 点満点のテスト A，テスト B の得点のデータについて，それぞれの第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数を調べたところ次の表のようになった．ただし，得点はすべて整数値である．

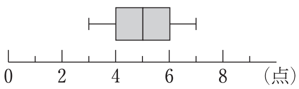
なお，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数という．第 2 四分位数は中央値である．データの大きさが奇数のときは，データを値の小さい方から順に左から並べたとき，中央の位置にくる値よりも左側のデータを下位のデータ，右側のデータを上位のデータと呼ぶこととすると，下位のデータの中央値が第 1 四分位数，上位のデータの中央値が第 3 四分位数である．

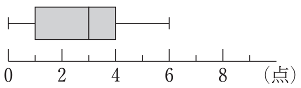
	テスト A	テスト B
第 1 四分位数	3	1
中　央　値	4	3
第 3 四分位数	7	4

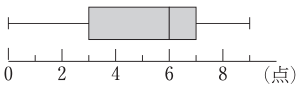
次の⓪～⑦の箱ひげ図とヒストグラムには，テスト A，テスト B の得点のものが含まれている．

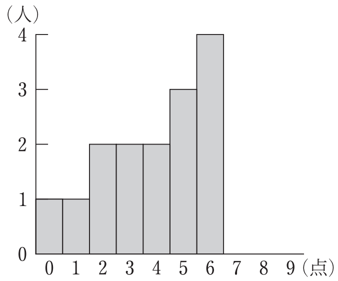
(1) の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

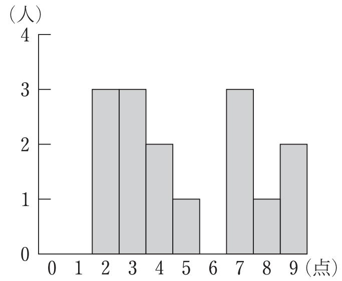
⓪


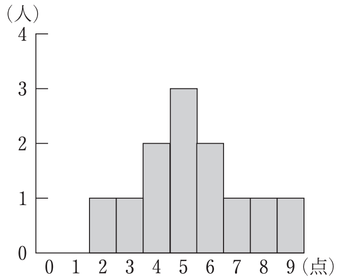
①


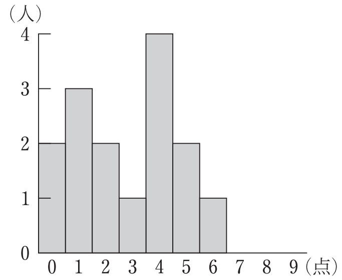
②


③


④


⑤


⑥


⑦


以下，小数の形で解答する場合，指定された桁（けた）の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

(1)　テスト A の得点の箱ひげ図は $\boxed{\text{ア}}$ であり，テスト B の得点の箱ひげ図は $\boxed{\text{イ}}$ である．また，テスト A の得点のヒストグラムは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，テスト B の得点のヒストグラムは $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2)　テスト A の得点の平均値は $\boxed{\text{オ}}$．$\boxed{\text{カ}}$ 点であり，分散は $\boxed{\text{キ}}$．$\boxed{\text{クケ}}$ である．

(3)　テスト A を 20 点満点にするため，テスト A の得点を 2 倍にした．このとき，変更前のものと比較して

テスト A の得点の平均値は $\boxed{\text{コ}}$．

テスト A の得点の分散は $\boxed{\text{サ}}$．

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～④のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪　$\frac{1}{4}$ 倍になる

①　$\frac{1}{2}$ 倍になる

②　変化しない

③　2 倍になる

④　4 倍になる

【解説】

問題

(1)　⓪～③の第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数は次表のようになる．

	⓪	①	②	③
第 1 四分位数	3	4	1	3
中　央　値	4	5	3	6
第 3 四分位数	7	6	4	7

これより，テスト A の得点の箱ひげ図は⓪であり，テスト B の得点の箱ひげ図は②である，すなわち

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$，

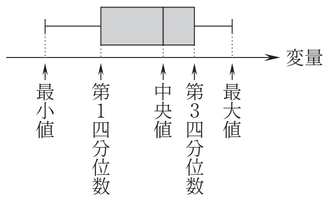
$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$

である．

また，④，⑤，⑦は 15 人分のデータであり，⑥は 12 人分のデータである．

④，⑤，⑦について，データを値の大きさの順に並べると次のようになる．

☜　下図のように，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値を箱と線（ひげ）を用いて 1 つの図に表したものを箱ひげ図という．



④　0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6
⑤　2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 8, 9, 9　　…(*)
⑦　0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6

	④	⑤	⑦
第1四分位数	2	3	1
中　央　値	4	4	3
第3四分位数	6	7	4

したがって，テストＡの得点のヒストグラムは⑤であり，テストＢの得点のヒストグラムは⑦である，すなわち

$\boxed{ウ}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$,

$\boxed{エ}$ に当てはまるものは $\boxed{⑦}$

である．

☜　最大値，最小値も箱ひげ図と一致し，適している．

(2)　(*)より，テストＡの得点の平均値は，

$$\frac{2+2+2+3+3+3+4+4+5+7+7+7+8+9+9}{15}$$
$$=\frac{75}{15}$$
$$=\boxed{5}.\boxed{0}\ (点)$$

であり，テストＡの得点の分散は，

$$\frac{1}{15}\{(2-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2$$
$$+(5-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=\frac{94}{15}$$
$$=6.266\cdots$$

より，$\boxed{キ}.\boxed{クケ}$ は $\boxed{6}.\boxed{27}$ である．

☜ **平均値**
変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，
$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

☜ **偏差・分散**
変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなり，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，
$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$
をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，(これらの)偏差の2乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，
$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

(3)　得点を2倍にした後のテストＡのデータは次のようになる．

4, 4, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 14, 14, 14, 16, 18, 18

このとき，テストＡの得点の平均値は，

$$\frac{4+4+4+6+6+6+8+8+10+14+14+14+16+18+18}{15}$$
$$=2\times\frac{2+2+2+3+3+3+4+4+5+7+7+7+8+9+9}{15}$$
$$=2\times5.0\ (点)$$

である．

よって，テストＡの得点の平均値は2倍になる．すなわち，

$\boxed{コ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜　新たに平均値を求めなくても，すべてのデータの値が2倍になることから変更前のものと比べて平均値は2倍になることがわかる．

また，このときのテストＡの得点の分散は，

$$\frac{1}{15}\{(4-10)^2+(4-10)^2+(4-10)^2+(6-10)^2+(6-10)^2+(6-10)^2+(8-10)^2+(8-10)^2$$
$$+(10-10)^2+(14-10)^2+(14-10)^2+(14-10)^2+(16-10)^2+(18-10)^2+(18-10)^2\}$$

$$=2^2\times\frac{1}{15}\{(2-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2$$
$$+(5-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=4\times6.266\cdots$$
である．

よって，テスト A の得点の分散は 4 倍になる．すなわち，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

☜ データの値，平均値ともに 2 倍になることから偏差も 2 倍になり，偏差の 2 乗は 4 倍になる．これより，新たに分散を求めなくても，変更前のものと比べて分散は 4 倍になることがわかる．

第３問　図形と計量

$\triangle$ABC を $\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ である直角三角形とする．

辺 AC の中点を M とし，$\triangle$ABM，$\triangle$BCM の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とする．$\angle \mathrm{CAB} = \theta$ とするとき

$$2R_1 = \frac{\mathrm{BM}}{\boxed{\text{ア}}},\quad 2R_2 = \frac{\mathrm{BM}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪と①のうちからそれぞれ一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ $\sin\theta$　　① $\cos\theta$

さらに，$R_1 = \sqrt{3}R_2$ が成り立つとき

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．

以下，$R_1 = \sqrt{3}R_2$，$R_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ とする．

$$\mathrm{BM} = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

直線 AC に関して B と反対側に点 D を $\mathrm{MD} = \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$\sin\angle\mathrm{CBD} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ となるようにとる．このとき

$$\mathrm{CD} = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

であり

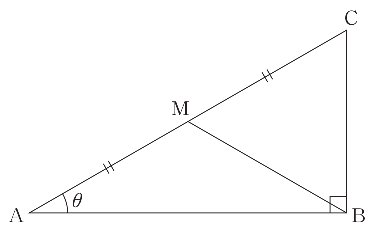
$$\cos\angle\mathrm{CMD} = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\quad \sin\angle\mathrm{CMD} = \frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

空間内で，四角形 ABCD を直線 CA を折り目として，$\triangle$ACD を，$\triangle$ABC と垂直になるように折る．折った後の点 D を点 E と呼ぶことにすると，四面体 EABC の体積は $\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$ である．

【解説】

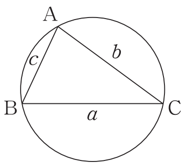
問題



$\triangle$ABM に正弦定理を用いると，

$$2R_1=\frac{\mathrm{BM}}{\sin\angle\mathrm{BAM}}$$
$$=\frac{\mathrm{BM}}{\sin\theta}$$

☜ **正弦定理**



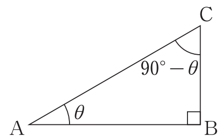
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

（R は三角形 ABC の外接円の半径）

であるから $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ であり，△BCM に正弦定理を用いると，

$$2R_2=\frac{\mathrm{BM}}{\sin\angle\mathrm{MCB}}$$
$$=\frac{\mathrm{BM}}{\sin(90^\circ-\theta)}$$
$$=\frac{\mathrm{BM}}{\cos\theta}$$

☜



上図より，

$$\sin(90^\circ-\theta)=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}=\cos\theta.$$

であるから $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

これより，

$$R_1=\frac{\mathrm{BM}}{2\sin\theta},\quad R_2=\frac{\mathrm{BM}}{2\cos\theta}$$

であるから，$R_1=\sqrt{3}R_2$ のとき，

$$\frac{\mathrm{BM}}{2\sin\theta}=\sqrt{3}\cdot\frac{\mathrm{BM}}{2\cos\theta}$$

であり，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

すなわち

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$$

☜ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}.$

である．

よって，

$$\theta=30^\circ$$

☜ $0^\circ<\theta<90^\circ.$

であり，$R_2=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，$R_2=\dfrac{\mathrm{BM}}{2\cos\theta}$ より，

$$\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\mathrm{BM}}{2\cos 30^\circ}$$

すなわち

$$\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\mathrm{BM}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

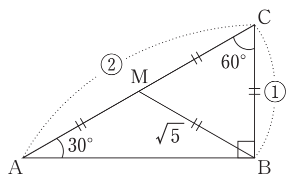
であるから，

$$\mathrm{BM}=\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

△ABC は ∠CAB $=\theta=30^\circ$，∠BCA $=60^\circ$，∠ABC $=90^\circ$ の直角三角形であり，M は辺 CA の中点であるから，△BCM は正三角形であり，

☜

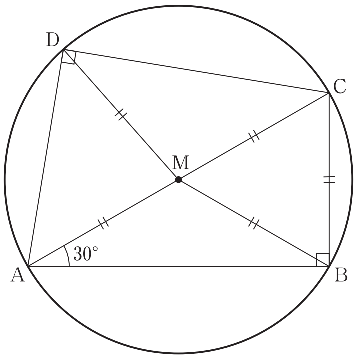


$$\mathrm{CM}=\mathrm{BC}=\mathrm{BM}=\sqrt{5} \qquad \cdots ①$$

である．

　$\mathrm{MD}=\sqrt{5}$ となるように D をとるから，D は △ABC の外接円上の点である．

☜　$\mathrm{MD}=\sqrt{5}$ と $\mathrm{MA}=\mathrm{MC}$ と①より，$\mathrm{MD}=\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=\mathrm{MC}=\sqrt{5}$．



　よって，△BCD に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CBD}}=2\cdot\sqrt{5}$$

☜　△BCD と △ABC の外接円は一致し，半径は $\sqrt{5}$．

であり，$\sin\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ より，

$$\frac{\mathrm{CD}}{\frac{\sqrt{15}}{5}}=2\sqrt{5}$$

であるから，

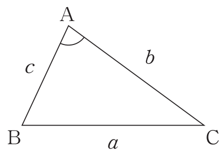
$$\mathrm{CD}=\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$$

である．

　また，△CDM に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{CMD}&=\frac{\mathrm{CM}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{CM}\cdot\mathrm{DM}}\\&=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}\\&=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{5}}\end{aligned}$$

☜ **余弦定理**



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

より，

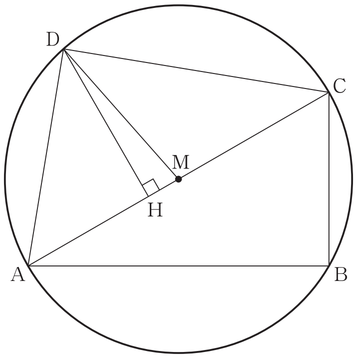
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

であり，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{CMD}&=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{CMD}}\\&=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}\\&=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{5}}\end{aligned}$$

☜　$0^\circ<\alpha<180^\circ$ のとき，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$．

である．



☜　$\cos\angle \mathrm{CMD}=-\dfrac{1}{5}<0$ より，$\angle \mathrm{CMD}>90^\circ$ であるから，H は線分 AM 上にある．

D から直線 AC に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{DH}&=\mathrm{DM}\sin\angle \mathrm{DMH}\\&=\mathrm{DM}\sin(180^\circ-\angle \mathrm{CMD})\\&=\mathrm{DM}\sin\angle \mathrm{CMD}\\&=\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}\\&=\frac{2\sqrt{30}}{5}\end{aligned}$$

☜　$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

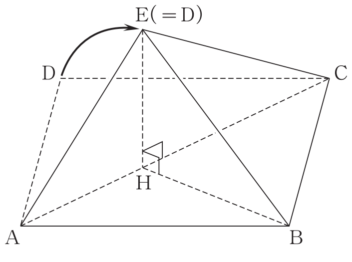
である．

よって，四面体 EABC の体積は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\cdot(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})\cdot \mathrm{DH}\\=&\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot \mathrm{AB}\right)\cdot \mathrm{DH}\\=&\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}\right)\cdot\frac{2\sqrt{30}}{5}\\=&\sqrt{\boxed{10}}\end{aligned}$$

☜　① より，$\mathrm{BC}=\sqrt{5}$.
$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$，$\theta=30^\circ$ より，
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{3}\,\mathrm{BC}\\&=\sqrt{15}.\end{aligned}$$

である．



第4問　2次関数

a を実数とし，x の2次関数

$$y=x^2-4ax+6a^2-2a-4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

関数①のグラフを G とする．

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2-\boxed{\text{ウ}}\,a-\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1)　G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{オカ}}<a<\boxed{\text{キ}}$$

であり，$a=\boxed{\text{オカ}}$ のときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{キ}}$ のときの G に一致する．

(2)　G が x 軸の負の部分と異なる2点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ケコ}}<a<\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(3)　$-1\leqq x\leqq 0$ における関数①の最大値を M とする．

$a=-2$ のとき，$M=\boxed{\text{セソ}}$ である．

G と y 軸との交点の y 座標を Y とすると，$M=Y$ となるような a の値の範囲は

$$a\leqq\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，このとき，$M>0$ となるような a の値の範囲は

$$a<\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．

(4)　G が x 軸と2点A，Bで交わり，線分ABの長さが2であるとき

$$a=\frac{\boxed{\text{ニ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である．

【解説】　問題

$$f(x)=x^2-4ax+6a^2-2a-4$$

とする．

$$f(x)=(x-2a)^2+2a^2-2a-4 \qquad \cdots ①'$$

であるから，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}\,a,\ \boxed{2}\,a^2-\boxed{2}\,a-\boxed{4}\right) \qquad \cdots ②$$

☜ 放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$(q,\ r)$．

である.

(1) G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は,

$$2a^2-2a-4<0$$

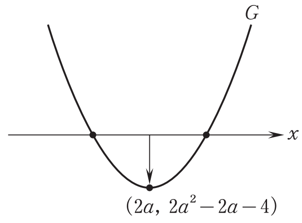
すなわち

$$2(a+1)(a-2)<0$$

より,

$$\boxed{-1}<a<\boxed{2} \qquad \cdots ③$$

である.



また, $a=-1$ のときの G を G_1 とすると, G_1 の頂点の座標は, ② より,

$$(-2,\ 0)$$

であり, $a=2$ のときの G を G_2 とすると, G_2 の頂点の座標は, ② より,

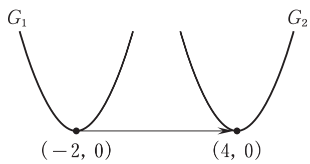
$$(4,\ 0)$$

である.

よって, G_1 を x 軸方向に,

$$4-(-2)=\boxed{6}$$

だけ平行移動すれば, G_2 と一致する.



(2) G が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は,

$$③ \quad かつ \quad 2a<0 \quad かつ \quad f(0)=6a^2-2a-4>0$$

より,

$$③ \quad かつ \quad a<0 \quad かつ \quad 2(3a+2)(a-1)>0$$

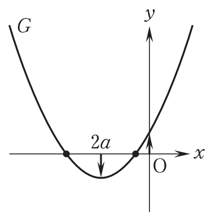
すなわち

$$-1<a<2 \quad かつ \quad a<0 \quad かつ \quad 「a<-\frac{2}{3},\ 1<a」$$

から,

$$\boxed{-1}<a<\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}$$

である.



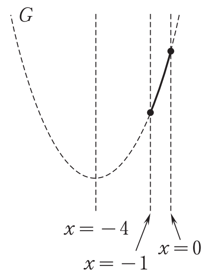
(3) $a=-2$ のとき,

$$f(x)=x^2+8x+24$$

であり, G の軸は直線 $x=-4$ であるから,

$$M=f(0)=\boxed{24}$$

である.



$M=Y$ となるような a の値の範囲は，

$$2a \leqq \frac{(-1)+0}{2}$$

より，

$$a \leqq \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}} \qquad \cdots ④$$

である．

このとき，$M>0$ となるような a の値の範囲は，

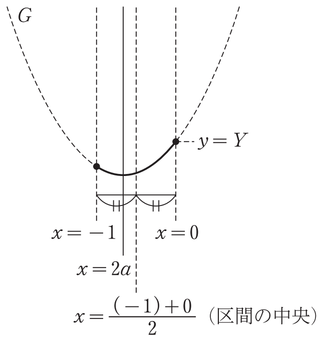
$$M=Y=f(0)=6a^2-2a-4>0$$

$$a<-\frac{2}{3},\quad 1<a$$

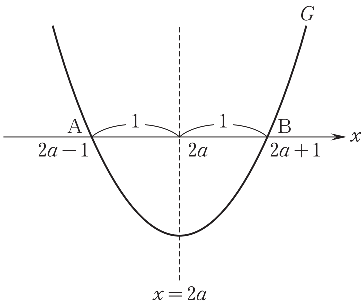
および ④ より，

$$a<\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}$$

である．

☜ 

(4)



G が x 軸と 2 点 A，B で交わり，線分 AB の長さが 2 となる条件は，G が点 $(2a+1,\ 0)$ を通ることであるから，①′ より，

$$0=f(2a+1)$$

$$0=\{(2a+1)-2a\}^2+2a^2-2a-4$$

☜ 点 $(2a-1,\ 0)$ を通ることから，

$$0=f(2a-1)$$

を考えてもよい．

すなわち

$$2a^2-2a-3=0$$

であり，

$$a=\frac{\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ 2 次方程式

$$px^2+2qx+r=0$$

（p，q，r は実数の定数）

の解は，

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-pr}}{p}.$$

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{\sqrt{アイ}+\sqrt{ウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{オカ}-\sqrt{キ}}{ク}$	$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$	2	
	$\dfrac{\sqrt{ケ}-コ}{サ}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	2	
	シ	1	3	
	$\sqrt{スセ}$	$\sqrt{10}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{ソタ}}{チ}$	$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\dfrac{ツ\sqrt{テト}}{ナ}$	$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\dfrac{ニ\sqrt{ヌ}}{ネ}$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	3	
	$\dfrac{ノ\sqrt{ハヒ}}{フ}$	$\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$	4	
	$\dfrac{ヘ}{ホ}$	$\dfrac{5}{8}$	4	
第1問 自己採点小計			(30)	
第2問	アa	$2a$	2	
	イa^2－ウa－エ	$2a^2-2a-4$	2	
	オカ＜a＜キ	$-1<a<2$	4	
	ク	6	4	
	$\dfrac{ケコ}{サ}$	$\dfrac{-1}{4}$	4	
	$\dfrac{シス}{セ}$	$\dfrac{-2}{3}$	4	
	ソ	0	2	
	タ	5	2	
	チ	3	3	
	ツ	4	3	
第2問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{ア}{イ}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	$\dfrac{ウ}{エ}$	$\dfrac{1}{9}$	2	
	$\dfrac{オ}{カ}$	$\dfrac{4}{9}$	2	
	$\dfrac{キ}{クケ}$	$\dfrac{4}{81}$	3	
	$\dfrac{コサ}{シス}$	$\dfrac{25}{81}$	3	
	セ	0	3	
	$\dfrac{ソタ}{チツテ}$	$\dfrac{41}{729}$	5	
第3問 自己採点小計			(20)	
第4問	ア	5	3	
	イ	6	3	
	ウ	1	3	
	(p－エ)(q－オ)＝カキクケ	$(p-8)(q-2)=1350$	3	
	コサ	35	2	
	シス	52	2	
	セソタ	107	2	
	チツテ	-72	2	
第4問 自己採点小計			(20)	
第5問	ア	2	3	
	$\sqrt{イ}$	$\sqrt{5}$	3	
	ウ : x	$1:x$	2	
	$\dfrac{エ}{オ}$	$\dfrac{5}{3}$	2	
	$\dfrac{\sqrt{カ}}{キ}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$	3	
	$\dfrac{ク}{ケ}(\sqrt{コ}-1)$	$\dfrac{5}{8}(\sqrt{5}-1)$	3	
	$\dfrac{5(サ\sqrt{シ}-ス)}{セソ}$	$\dfrac{5(3\sqrt{5}-5)}{16}$	4	
第5問 自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　数と式，図形と計量

〔１〕 2 次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{アイ}}+\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$$

であり

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{\boxed{オカ}}-\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$$

である．

実数 x に関する条件 p，q を次のように定める．

$$p：\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$$

$$q：\left|2x-\sqrt{5}\right|<1$$

条件 q を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}}{\boxed{サ}}<x<\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}+\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

であり，このとき

p は q であるための $\boxed{シ}$．

$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件ではない
②　十分条件であるが，必要条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない

〔２〕 △ABC において BC＝2，CA＝3，$\cos\angle\mathrm{BCA}=\frac{1}{4}$ とする．このとき

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\boxed{スセ}},\quad \sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チ}}$$

である．

また，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナ}}$ であり，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$ である．

次に，点 D を △ABC の外接円の点 B を含まない弧 CA 上に，線分 BD が △ABC の外接円の直径となるようにとる．このとき

$$\mathrm{CD}=\frac{\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハヒ}}}{\boxed{フ}}$$

である．

さらに，空間内で，四角形 ABCD を直線 CA を折り目として，△ACD を △ABC と垂直になるように折る．折った後の点 D を点 E と呼ぶことにすると，四面体 EABC の体積は

$$\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

である．

【解説】

問題

〔1〕

2 次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解は，

$$x=\frac{-(-\sqrt{10})\pm\sqrt{(-\sqrt{10})^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}$$

☜　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c は実数）の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから，

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{10}}+\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

であり，

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}-\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$$

☜　分母を有理化するために，分母，分子に $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ を掛けた．

である．

$$p:\frac{1}{\alpha}<x<\alpha,$$

$$q:\left|2x-\sqrt{5}\right|<1.$$

条件 q を満たす x の値の範囲は，

$$-1<2x-\sqrt{5}<1$$

$$\sqrt{5}-1<2x<\sqrt{5}+1$$

$$\frac{\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}}{\boxed{2}}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \cdots ①$$

☜　$a>0$ のとき，X の不等式 $|X|<a$ の解は，

$$-a<X<a.$$

である．

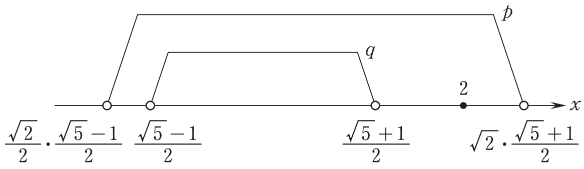
また，条件 p の不等式 $\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$ は，

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}<x<\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \cdots ②$$

となる.

①，② より，次図を得る.



☜ $\sqrt{2}<2$ つまり $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ と $\sqrt{5}-1>0$ より，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$1<\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}+1>0$ より，

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}<\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

よって，「$p \Longrightarrow q$」は偽(反例：$x=2$)であり，「$q \Longrightarrow p$」は真であるから，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない，すなわち $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である.

☜ 2つの条件 s，t について，

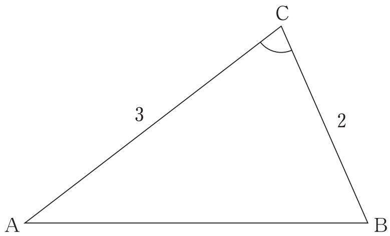
「$s \Longrightarrow t$」が真

のとき，

s は t であるための十分条件，

t は s であるための必要条件.

［2］ **問題**



余弦定理より，

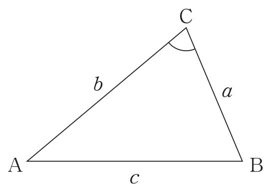
$$\begin{aligned}AB^2&=BC^2+CA^2-2BC\cdot CA\cos\angle BCA\\&=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{4}\\&=10\end{aligned}$$

であるから，

$$AB=\sqrt{\boxed{10}}$$

である.

☜ **余弦定理**



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

$$\begin{aligned}\sin\angle BCA&=\sqrt{1-\cos^2\angle BCA}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

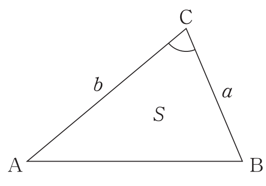
☜ $0°<\theta<180°$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

であり，

$$(\triangle ABC\ の面積)=\frac{1}{2}BC\cdot CA\sin\angle BCA$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$$

である．

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{BCA}}$$

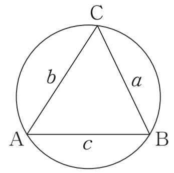
$$=\frac{\sqrt{10}}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{15}}$$

$$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$$

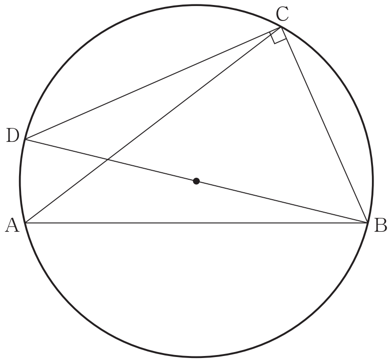
である．

☜ **正弦定理**

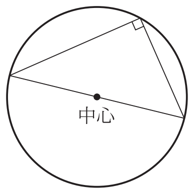


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

（R は △ABC の外接円の半径）



線分 BD は △ABC の外接円の直径であるから，∠BCD＝90° であり，△BCD は直角三角形である．

☜ 

半円の弧に対する円周角は 90° である．

△BCD に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{\mathrm{BD}^2-\mathrm{BC}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2-2^2}$$

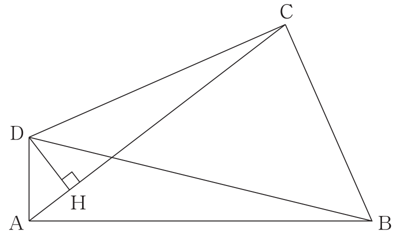
$$=\sqrt{\frac{20}{3}}$$

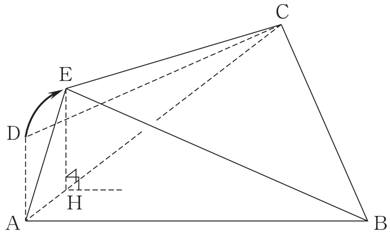
$$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{3}}$$

☜ $\mathrm{BD}=2R=2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}.$

である．

D から直線 AC に下ろした垂線の足を H とする.





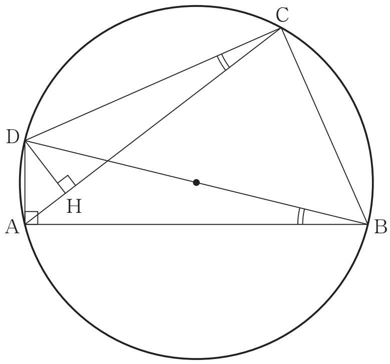
DH＝EH であるから，四面体 EABC の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})\cdot\mathrm{EH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})\cdot\mathrm{DH} \qquad \cdots(*)$$

である.

ここで，線分 DH の長さを求める.



∠BAD＝90° であるから，直角三角形 ABD に三平方の定理を用いると，

☜ 線分 BD は △ABC の外接円の直径である.

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{BD}^2-\mathrm{AB}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2-(\sqrt{10})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

である.

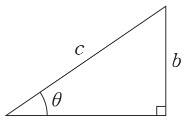
よって，直角三角形 ABD に着目すると，

$$\sin\angle\mathrm{ABD}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

☜



$\sin\theta=\frac{b}{c}.$

であるから，

$$\sin\angle \mathrm{ACD} = \sin\angle \mathrm{ABD}$$
$$= \frac{1}{4}$$

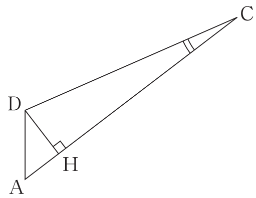
☜ 弧 AD に対する円周角は等しい.

である.

したがって，直角三角形 CDH に着目すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{DH} &= \mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{HCD}\\ &= \mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{ACD}\\ &= \frac{2\sqrt{15}}{3}\cdot\frac{1}{4}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{6}\end{aligned}$$

☜



$\sin\angle \mathrm{HCD} = \dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{CD}}$ より，

$\mathrm{DH} = \mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{HCD}$.

である.

よって，(∗) より，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{6}\\ &= \frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\end{aligned}$$

である.

（注） 線分 DH の長さを求める部分的別解

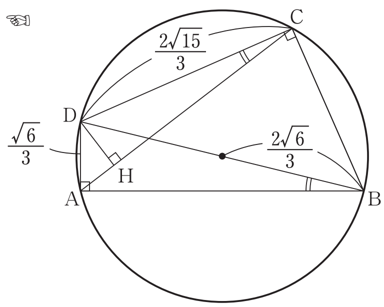
線分 AD の長さを求めるところまでは同じ.

△CDH∽△BDA より，

$$\begin{aligned}\mathrm{DH} &= \mathrm{DA}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\frac{2\sqrt{15}}{3}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{6}\end{aligned}$$

である.

☜



第２問　２次関数，データの分析

〔１〕 a を実数とし，x の２次関数

$$y = x^2 - 4ax + 6a^2 - 2a - 4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

関数 ① のグラフを G とする．

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

⑴ G が x 軸と異なる２点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{オカ}} < a < \boxed{\text{キ}}$$

であり，$a = \boxed{\text{オカ}}$ のときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{\text{キ}}$ のときの G に一致する．

⑵ $-1 \leqq x \leqq 0$ における関数 ① の最大値を M とする．

G と y 軸との交点の y 座標を Y とすると，$M = Y$ となるような a の値の範囲は

$$a \leqq \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であり，このとき，$M > 0$ となるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

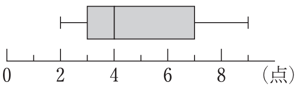
〔２〕 15 人の生徒に対して行った 10 点満点のテスト A の得点のデータについて，第１四分位数，中央値，第３四分位数を調べたところ次の表のようになった．ただし，得点はすべて整数値である．

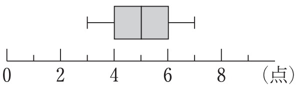
なお，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第１四分位数，第２四分位数，第３四分位数という．第２四分位数は中央値である．データの大きさが奇数のときは，データを値の小さい方から順に左から並べたとき，中央の位置にくる値よりも左側のデータを下位のデータ，右側のデータを上位のデータと呼ぶこととすると，下位のデータの中央値が第１四分位数，上位のデータの中央値が第３四分位数である．

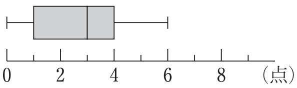
	テスト A
第１四分位数	3
中　央　値	4
第３四分位数	7

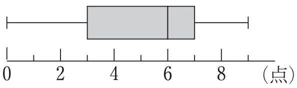
次の⓪～⑦の箱ひげ図とヒストグラムには，テスト A の得点のものが含まれている．

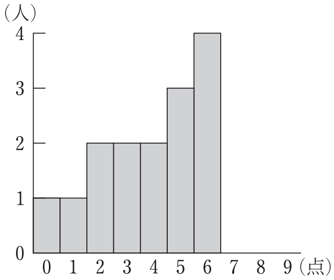
⑴ の $\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ．

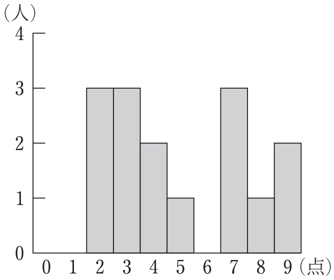
⓪


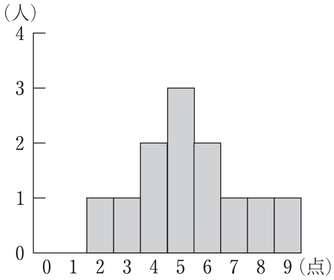
①


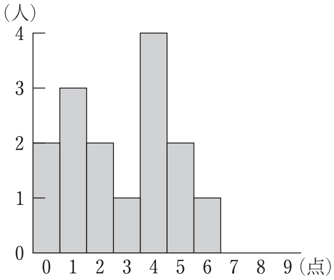
②


③


④


⑤


⑥


⑦


(1) テスト A の得点の箱ひげ図は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，ヒストグラムは $\boxed{\text{タ}}$ である．

(2) テスト A を 20 点満点にするため，テスト A の得点を 2 倍にした．このとき，変更前のものと比較して

テスト A の得点の平均値は $\boxed{\text{チ}}$．

テスト A の得点の分散は $\boxed{\text{ツ}}$．

$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，それぞれ次の⓪～④のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ $\frac{1}{4}$ 倍になる

① $\frac{1}{2}$ 倍になる

② 変化しない

③ 2 倍になる

④ 4 倍になる

【解説】

問題

〔1〕

$$f(x)=x^2-4ax+6a^2-2a-4$$

とする．

$$f(x)=(x-2a)^2+2a^2-2a-4$$

であるから，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}a,\ \boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}\right) \quad \cdots ②$$

である．

放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$$(q,\ r).$$

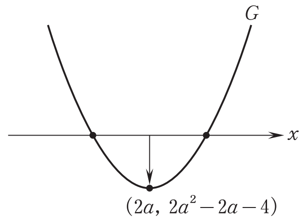
(1) G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は，

$$2a^2-2a-4<0 \quad すなわち \quad 2(a+1)(a-2)<0$$

より，

$$\boxed{-1}<a<\boxed{2}$$

である．



また，$a=-1$ のときの G を G_1 とすると，G_1 の頂点の座標は，② より，

$$(-2,\ 0)$$

であり，$a=2$ のときの G を G_2 とすると，G_2 の頂点の座標は，② より，

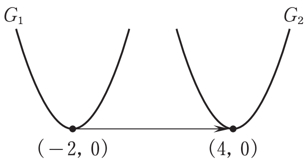
$$(4,\ 0)$$

である．

よって，G_1 を x 軸方向に，

$$4-(-2)=\boxed{6}$$

だけ平行移動すれば，G_2 と一致する．



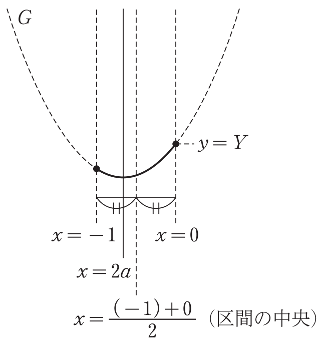
(2) $M=Y$ となるような a の値の範囲は，

$$2a \leqq \frac{(-1)+0}{2}$$

より，

$$a \leqq \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}} \quad \cdots ③$$

である．



このとき，$M>0$ となるような a の値の範囲は，

$$M=Y=f(0)=6a^2-2a-4>0$$

$$2(3a+2)(a-1)>0$$

$$a<-\frac{2}{3},\quad 1<a$$

および ③ より，

$$a<\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}$$

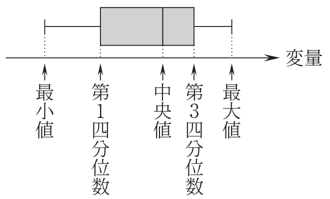
である．

［2］ **問題**

⑴ ⓪～③の第1四分位数，中央値，第3四分位数は次表のようになる．

	⓪	①	②	③
第1四分位数	3	4	1	3
中　央　値	4	5	3	6
第3四分位数	7	6	4	7

☜ 下図のように，最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，最大値を箱と線（ひげ）を用いて1つの図に表したものを箱ひげ図という．



これより，テストAの得点の箱ひげ図は⓪であり，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

また，④，⑤，⑦は15人分のデータであり，⑥は12人分のデータである．

④，⑤，⑦について，データを値の大きさの順に並べると次のようになる．

④　0，1，2，2，3，3，4，4，5，5，5，6，6，6，6

⑤　2，2，2，3，3，3，4，4，5，7，7，7，8，9，9　　…(*)

⑦　0，0，1，1，1，2，2，3，4，4，4，4，5，5，6

	④	⑤	⑦
第1四分位数	2	3	1
中　央　値	4	4	3
第3四分位数	6	7	4

したがって，テストAの得点のヒストグラムは⑤であり，

$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$ である．

☜ 最大値，最小値も箱ひげ図と一致し，適している．

⑵ (*)より，得点を2倍にした後のテストAのデータは次のようになる．

4，4，4，6，6，6，8，8，10，14，14，14，16，18，18

このとき，テストAの得点の平均値は，

$$\frac{4+4+4+6+6+6+8+8+10+14+14+14+16+18+18}{15}$$

$$=2\times\frac{2+2+2+3+3+3+4+4+5+7+7+7+8+9+9}{15}$$

＝2×(元のテストAの得点の平均値)

である．

☜ **平均値**

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

よって，テストAの得点の平均値は2倍になる，すなわち，

$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜ 新たに平均値を求めなくても，すべてのデータの値が2倍になることから変更前のものと比べて平均値は2倍になることがわかる．

また，このときのテスト A の得点の分散は，

$$\frac{1}{15}\{(4-10)^2+(4-10)^2+(4-10)^2+(6-10)^2+(6-10)^2+(6-10)^2+(8-10)^2+(8-10)^2$$
$$+(10-10)^2+(14-10)^2+(14-10)^2+(14-10)^2+(16-10)^2+(18-10)^2+(18-10)^2\}$$
$$=2^2\times\frac{1}{15}\{(2-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2$$
$$+(5-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}$$

＝4×(元のテスト A の得点の分散)

である．

よって，テスト A の得点の分散は 4 倍になる，すなわち $\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{④}$ である．

偏差・分散

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなり，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，(これらの)偏差の 2 乗の平均値が x の分散 s^2 となる．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

データの値，平均値ともに 2 倍になることから偏差も 2 倍になり，偏差の 2 乗は 4 倍になる．これより，新たに分散を求めなくても，変更前のものと比べて分散は 4 倍になることがわかる．

第3問　場合の数と確率

A，Bの二人がそれぞれ袋を持っている．

はじめ，Aの袋には赤球が1個，白球が2個の合計3個の球が入っており，Bの袋には赤球が2個，白球が1個の合計3個の球が入っている．

次の規則に従ってゲームをする．

（規則）

A，Bの二人がそれぞれ自分の袋から1個の球を取り出し，取り出した球2個の色について

- 同じ色であれば，引き分けとし，取り出した球をそれぞれ自分の袋に戻す．
- 異なる色であれば，赤球を取り出した方を勝ちとし，取り出した球をそれぞれ相手の袋に入れる．

(1)　ゲームを1回行うとき，Aが赤球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，Aが勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，Bが勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

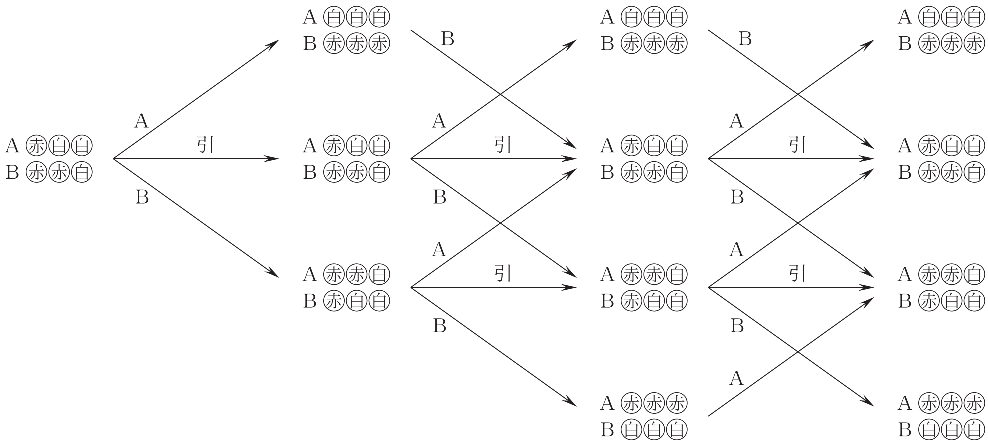
(2)　ゲームを2回続けて行うとき，Aの勝ちと引き分けが1回ずつとなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であり，Aの勝ちとBの勝ちが1回ずつとなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である．また，Aの勝ちが2回となる確率は $\boxed{\text{セ}}$ である．

(3)　ゲームを3回続けて行うとき，Aの勝ちの回数がBの勝ちの回数よりも多くなる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である．

【解説】　　**問題**

Aの勝ち，引き分け，Bの勝ちを順に，「A」，「引」，「B」と表して，3回までのゲームの推移を表すと次図のようになる．

その際，二人のうち，一方の袋に赤球が3個が入っているときは，必ずこの袋を持っている方が勝つことに注意する．



(1)　ゲームを1回行うとき，A が赤球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$　☜　「赤白白」から赤を取り出す.

である.

　ゲームを1回行うとき，A が勝つのは，A が赤球を取り出し，B が白球を取り出す場合であるから，その確率は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}} \qquad \cdots ①$$

☜　B が白を取り出すのは「赤赤白」から白を取り出す場合であり，その確率は $\frac{1}{3}$ である.

である.

　ゲームを1回行うとき，B が勝つのは，A が白球を取り出し，B が赤球を取り出す場合であるから，その確率は，

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}} \qquad \cdots ②$$

である.

　また，ゲームを1回行うとき，引き分けとなる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9} \qquad \cdots ③$$

☜　二人が取り出す球の色が，「ともに赤」または「ともに白」であるから，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

としてもよい.

である.

(2)　A の袋に赤球が2個，白球が1個入っており，B の袋に赤球が1個，白球が2個入っているとき，

A が勝つ確率 $\cdots\dfrac{4}{9}$,　☜　② と同様.

引き分ける確率 $\cdots\dfrac{4}{9}$,　☜　③ と同様.

B が勝つ確率 $\cdots\dfrac{1}{9}$　☜　① と同様.

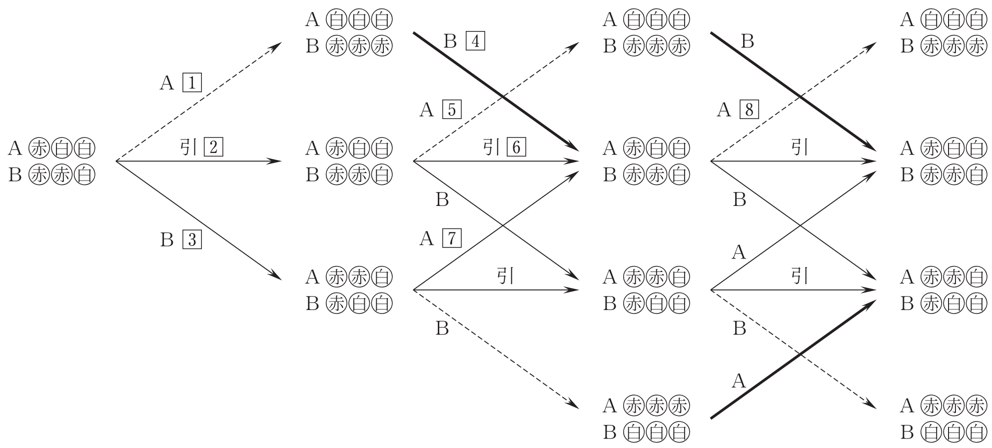
である.

$\longrightarrow$ …確率が $\frac{4}{9}$ であるとき，

$\dashrightarrow$ …確率が $\frac{1}{9}$ であるとき，

$\boldsymbol{\longrightarrow}$ …確率が 1 であるとき

と表すと，3 回までのゲームの推移は次図のようになる．



ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちと引き分けが 1 回ずつとなるのは，1 回目は引き分けで，2 回目に A が勝つ場合であるから，その確率は，

☜ 1 回目に A が勝ったとき，2 回目は必ず B が勝ち（図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$），2 回目に引き分けになることはない．

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{81}}$$

☜ 図の矢印 $\boxed{2}$，$\boxed{5}$．

である．

ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちと B の勝ちが 1 回ずつとなるのは，

	1 回目	2 回目
(i)	A の勝ち	B の勝ち
(ii)	B の勝ち	A の勝ち

☜ 図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$．

☜ 図の矢印 $\boxed{3}$，$\boxed{7}$．

の 2 つの場合があり，その確率は，

$$\underbrace{\frac{1}{9}\cdot 1}_{\text{(i)の場合}}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}}_{\text{(ii)の場合}}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{81}}$$

である．

ゲームを 2 回続けて行うとき，A の勝ちが 2 回となることはないから，その確率は $\boxed{0}$ である．

☜ 1 回目に A が勝ったとき，2 回目は必ず B が勝ち（図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$），2 回目に A が勝つことはない．

(3)　ゲームを3回続けて行うとき，Aの勝ちの回数がBの勝ちの回数よりも多くなるのは，

	1回目	2回目	3回目
(Ⅰ)	Aの勝ち	Bの勝ち	Aの勝ち
(Ⅱ)	引き分け	引き分け	Aの勝ち
(Ⅲ)	Bの勝ち	Aの勝ち	Aの勝ち

☜　図の矢印 $\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{8}$．
☜　図の矢印 $\boxed{2}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$．
☜　図の矢印 $\boxed{3}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$．

の3つの場合があり，その確率は，

$$\underbrace{\frac{1}{9}\cdot 1\cdot\frac{1}{9}}_{\text{(Ⅰ)の場合}}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}}_{\text{(Ⅱ)の場合}}+\underbrace{\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}}_{\text{(Ⅲ)の場合}}=\frac{\boxed{41}}{\boxed{729}}$$

である．

第 4 問　整数の性質

(1)　十の位の数が a である 4 桁(けた)の整数 $13a0$ が 9 の倍数であるとき $a=$ **ア** である．このとき，$\sqrt{\dfrac{13a0}{n}}$ が整数となる最小の整数 n は **イ** である．

(2)　$A<B$ である二つの自然数 A，B について，最大公約数，最小公倍数がそれぞれ d，ℓ であり，p，q を 2 桁の自然数として

$$A=pd,\quad B=qd$$

と表されるとする．このとき

$$\ell = \boxed{\text{ウ}}$$

である．

ウ に当てはまるものを，次の⓪～②から一つ選べ．

⓪　pq　　①　pqd　　②　pqd^2

さらに

$$\ell = 2A+8B+1334d \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つとする．このとき，① を p，q を用いて表すと

$$\left(p-\boxed{\text{エ}}\right)\left(q-\boxed{\text{オ}}\right)=\boxed{\text{カキクケ}}$$

である．

またさらに，$p-$ エ が 27 の倍数であるとすると

$$p=\boxed{\text{コサ}},\quad q=\boxed{\text{シス}}$$

である．

次に

$$\boxed{\text{コサ}}\,x+\boxed{\text{シス}}\,y=1$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ のうち，x の値が 100 に最も近い組は

$$(x,\ y)=\left(\boxed{\text{セソタ}},\ \boxed{\text{チツテ}}\right)$$

である．

【解説】

問題

(1)　整数 $13a0$ が 9 の倍数となるのは，各位の和すなわち

$$(1+3+a+0=)\,4+a$$

が 9 の倍数となるときである．a は 0 以上 9 以下の整数であるから，

$$a=\boxed{5}$$

である．

このとき，

$$13a0=1350$$
$$=2\cdot3^3\cdot5^2$$

☜　千の位，百の位，十の位，一の位の数がそれぞれ α，β，γ，δ である 4 桁の整数 N について，

$$N=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta$$
$$=9(111\alpha+11\beta+\gamma)+\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

であるから，N が 9 の倍数であることと $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ が 9 の倍数であることは同じである．

より，

$$\sqrt{\frac{13a0}{n}}=\sqrt{\frac{2\cdot3^3\cdot5^2}{n}}$$
$$=15\sqrt{\frac{6}{n}}$$

であるから，これが整数となる最小の整数 n は，

$$n=\boxed{\ 6\ }$$

である．

(2) $$A=pd,\quad B=qd\ (A<B).$$

A，B の最大公約数が d であるから，p と q は互いに素である．

このとき，A，B の最小公倍数 ℓ は，

$$\ell=pqd$$

であるから，$\boxed{\ ウ\ }$ に当てはまるものは $\boxed{\ ①\ }$ である．

さらに，

$$\ell=2A+8B+1334d \qquad \cdots ①$$

が成り立つとき，$A=pd$，$B=qd$，$\ell=pqd$ を ① に代入すると，

$$pqd=2pd+8qd+1334d$$

であり，$d\neq0$ であるから，

☜ d は公約数より，$d\neq0$.

$$pq=2p+8q+1334$$

すなわち

$$pq-2p-8q=1334$$
$$(p-8)(q-2)-16=1334$$

となり，p，q は，

$$\left(p-\boxed{\ 8\ }\right)\left(q-\boxed{\ 2\ }\right)=\boxed{1350} \qquad \cdots ②$$

を満たす．

$$1350=2\cdot3^3\cdot5^2$$

であることと，$p-8$ が 1350 の約数であることから，p が 2 桁の自然数であり，$p-8$ が 27 の倍数であるとき，

$$p-8=27,\ 54$$

である．

☜ $p-8$ が正で 27 の倍数のとき，$p-8$ は，

3^3，　$3^3\cdot5$，　$3^3\cdot5^2$，

$3^3\cdot2$，$3^3\cdot2\cdot5$，$3^3\cdot2\cdot5^2$

の 6 個が考えられる．

$p-8=54$ のとき，② より $q-2=25$ すなわち

$$p=62,\quad q=27$$

となり，$A<B$ すなわち $p<q$ に適さない．

$p-8=27$ のとき，② より $q-2=50$ すなわち

$$p=\boxed{35},\quad q=\boxed{52}$$

となり，$A<B$ すなわち $p<q$ であり，p，q は互いに素な 2 桁の自然数であるから適する．

☜ $p=5\cdot7$，$q=2^2\cdot13$.

次に，方程式

$$35x+52y=1 \qquad \cdots ③$$

を考える．

$x=3$，$y=-2$ は ③ の整数解の 1 つであり，

$$35\cdot 3+52\cdot(-2)=1 \quad \cdots ④$$

である．

③−④ から，

$$35(x-3)+52(y+2)=0$$

すなわち

$$35(x-3)=-52(y+2) \quad \cdots ⑤$$

である．

35 と 52 は互いに素であるから，$x-3$ は 52 の倍数である．

よって，k を整数として，

$$x-3=52k$$

と表される．

これを ⑤ に代入して，整理すると，

$$y+2=-35k$$

となるから，③ の整数解は，

$$x=52k+3,\quad y=-35k-2 \quad (k \text{ は整数})$$

である．

x の値が 100 に最も近いのは $k=2$ のときで，

$$(x,\ y)=\left(\boxed{107},\ \boxed{-72}\right)$$

である．

☜ 整数解の 1 つが簡単に見つからない場合，互除法が利用できる．

$$52=35\cdot 1+17,$$
$$35=17\cdot 2+1$$

より，

$$\begin{aligned}1&=35-17\cdot 2\\&=35-(52-35\cdot 1)\cdot 2\\&=35\cdot 3+52\cdot(-2)\end{aligned}$$

であるから，③ の整数解の 1 つは，

$$(x,\ y)=(3,\ -2).$$

☜ a，b が互いに素である自然数であり，整数 X，Y について，

$$aX=bY$$

が成り立つとき，

X は b の倍数，

Y は a の倍数

である．

☜ $k=1$ のとき，

$$(x,\ y)=(55,\ -37).$$

第５問　図形の性質

点 O を中心とする半径１の円 O があり，円 O の外部の点 A から円 O に引いた２本の接線と円 O との接点をそれぞれ B，C とする．

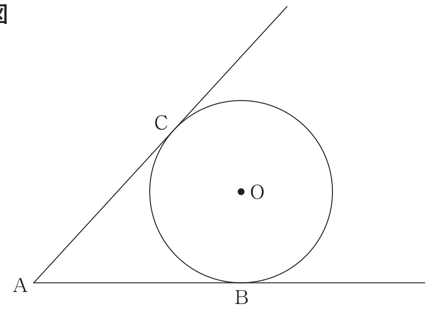
以下，AB＝2 とする．

このとき

$$\mathrm{AC}=\boxed{\text{ア}},\quad \mathrm{OA}=\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

参考図



直線 OB と直線 AC の交点を D とし，OD＝x とおくと

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\boxed{\text{ウ}}:x$$

であり

$$x=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

線分 OA と線分 BC の交点を E とすると

$$\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である．

さらに，線分 OA と円 O の交点を F，直線 DF と線分 AB の交点を G とする．このとき，△OAB と直線 DG にメネラウスの定理を用いることにより

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GB}}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{コ}}}-1\right)$$

を得る．

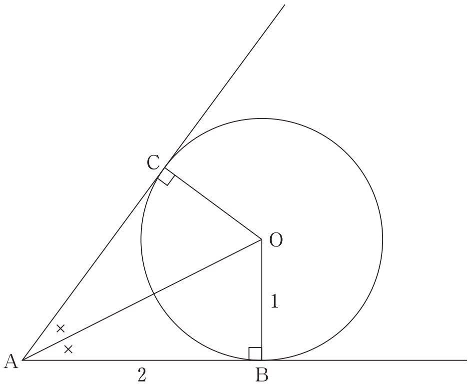
△FAG，△EGB の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{5\left(\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}-\boxed{\text{ス}}\right)}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である．

【解説】

問題



直線 AB，AC は円 O の接線であるから，

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}$$
$$=\boxed{\ 2\ }$$

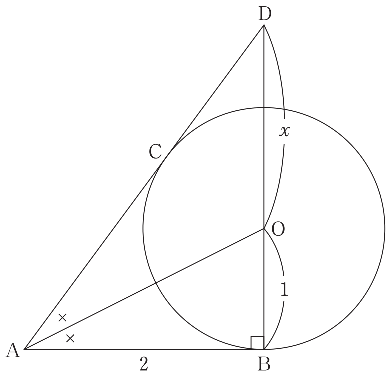
である.

$\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$ であり，直角三角形 OBA に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{OB}^2}$$
$$=\sqrt{2^2+1^2}$$
$$=\sqrt{\boxed{\ 5\ }}$$

☜ OB＝1（円 O の半径）.

である.



△ABD において，線分 AO は ∠BAD の二等分線であるから，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\mathrm{OB}:\mathrm{OD}$$

であり，OB＝1，OD＝x より，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\boxed{\ 1\ }:x$$

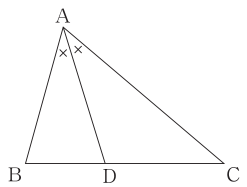
である.

AB＝2 より，

$$2:\mathrm{AD}=1:x$$

すなわち

☜ **角の二等分線の性質**



BD : DC＝AB : AC.

$$\mathrm{AD}=2x$$

であるから，直角三角形 ABD に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2$$

すなわち

$$(2x)^2=2^2+(1+x)^2$$

☜ $\mathrm{BD}=\mathrm{OB}+\mathrm{OD}$
$=1+x.$

が成り立つ．

　これを整理すると，

$$3x^2-2x-5=0$$

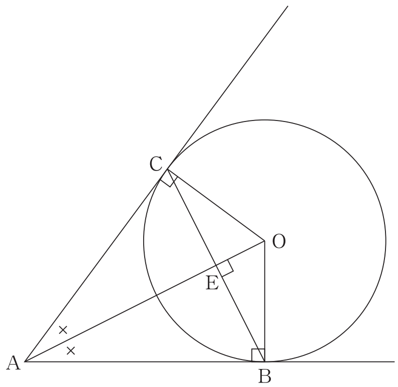
すなわち

$$(3x-5)(x+1)=0$$

となり，$x>0$ より，

$$x=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$$

である．



　$\triangle$OEB と $\triangle$OBA は相似であるから，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{OB}=\mathrm{OB}:\mathrm{OA}$$

☜ $\angle\mathrm{BOE}=\angle\mathrm{AOB}$（共通），
$\angle\mathrm{OEB}=\angle\mathrm{OBA}$（$=90^\circ$）．

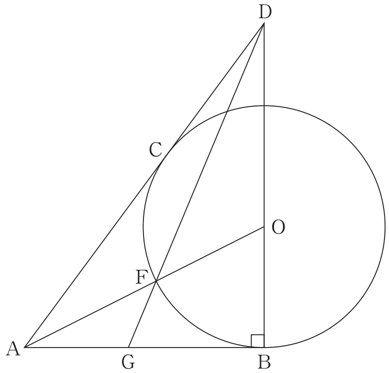
すなわち

$$\mathrm{OE}:1=1:\sqrt{5}$$

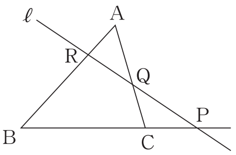
であり，

$$\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$$

である．



メネラウスの定理



$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1.$$

△OAB と直線 DG にメネラウスの定理を用いると,

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BD}{DO}\cdot\frac{OF}{FA}=1$$

すなわち

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}-1}=1$$

☜ $BD=1+x=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$,

$DO=x=\frac{5}{3}$,

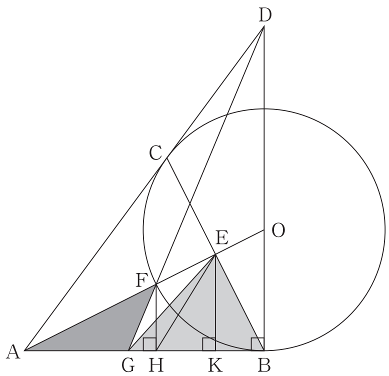
$OF=1$ (円 O の半径),

$FA=OA-OF=\sqrt{5}-1$.

であり,

$$\frac{AG}{GB}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\left(\sqrt{\boxed{5}}-1\right) \quad \cdots ①$$

を得る.



F, E から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB の交点をそれぞれ H, K とする. △AFH と △AEK は相似であるから,

$$\frac{FH}{EK}=\frac{FA}{EA}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$$
$$=\frac{5-\sqrt{5}}{4} \quad \cdots ②$$

☜ $EA=OA-OE$
$=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}$
$=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

である.

①, ② より,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{(\triangle\mathrm{FAG}\text{の面積})}{(\triangle\mathrm{EGB}\text{の面積})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AG}\cdot\mathrm{FH}}{\frac{1}{2}\mathrm{GB}\cdot\mathrm{EK}}$$

$$=\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GB}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{EK}}$$

$$=\frac{5}{8}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{5}{32}(6\sqrt{5}-10)$$

$$=\frac{5\left(\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{5}\right)}{\boxed{16}}$$

である.

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	2，1	2	
	ウ，エ，オ	2，1，1	2	
	カ	0	1	
	$\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\frac{2}{3}$	1	
	$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$	$\frac{4}{3}$	1	
	$\frac{\sqrt{\text{サシ}}}{\text{ス}}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	2	
	$\frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$	$\frac{-9}{8}$	2	
	チ	0	2	
	ツ	4	3	
	テ	1	2	
	ト，ナ	5，6	2	
	ニ，ヌ，ネ	1，2，3	3	
	ノハ	−2	2	
	$\frac{\text{ヒ}}{\text{フ}}$	$\frac{9}{2}$	2	
	ヘ	2	3	
第1問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ	−，4	2	
	ウ	0	1	
	エオ	−3	2	
	カ	4	1	
	$\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$	$\frac{23}{3}$	2	
	コ	6	3	
	サ	3	2	
	シ	3	2	
	ス，$\frac{\text{セソ}}{\text{タ}}$	1，$\frac{-4}{3}$	3	
	$\frac{\text{チツ}}{\text{テ}}$	$\frac{13}{3}$	2	
	$\frac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$，ヌ，ネ	$\frac{-1}{3}$，5，6	4	
	ノ	3	3	
	ハヒ，フ	20，7	3	
第2問 自己採点小計			(30)	
第3問	アイウ	−10	2	
	エオ	−2	2	
	カキ	20	1	
	ク$\sqrt{\text{ケ}}$	$2\sqrt{5}$	2	
	コ	5	2	
	サ，シ	4，2	2	
	スセ	20	2	
	ソ，タ，チ	2，1，5	3	
	ツ	1	2	
	テ，$\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$	4，$\frac{5}{2}$	2	
第3問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア，イ	3，1	2	
	ウ	1	1	
	エ，オ，カ	2，3，1	3	
	$\dfrac{キ - \sqrt{ク}}{ケ}$	$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$	2	
	コサ	-2	2	
	シ，ス	3，1	2	
	セ，$\dfrac{ソ}{タ}$	1，$\dfrac{1}{2}$	2	
	チ	0	2	
	ツテ	-4	2	
	ト，ナニ	$-$，-4	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

数学Ⅱ

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

問題

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第１問 に同じである．

第２問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第２問 に同じである．

第３問　図形と方程式

Ｏを原点とする座標平面上に，直線 $\ell_1 : y = \frac{1}{2}x + 5$ がある．

直線 ℓ_1 と x 軸の交点Ａの座標は $\left(\boxed{\text{アイウ}},\ 0\right)$ であり，点Ａを通り直線 ℓ_1 に垂直な直線を ℓ_2 とすると，ℓ_2 の方程式は

$$y = \boxed{\text{エオ}}\,x - \boxed{\text{カキ}}$$

である．

点Ｏと直線 ℓ_1 の距離は $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，ℓ_1 に平行で点Ｏとの距離が $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である直線のうち ℓ_1 でない方を ℓ_3 とすると，ℓ_3 の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x - \boxed{\text{コ}}$$

である．

３直線 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 のすべてに接し，中心が不等式 $y > \boxed{\text{エオ}}\,x - \boxed{\text{カキ}}$ で表される領域にある円 C_1 の方程式は

$$\left(x + \boxed{\text{サ}}\right)^2 + \left(y + \boxed{\text{シ}}\right)^2 = \boxed{\text{スセ}}$$

である．

点Ｐが円 C_1 の周上を動くとき，点Ｂ(8, 4) と点Ｐを結ぶ線分ＢＰの中点Ｑの軌跡は

$$\text{円 } C_2 : \left(x - \boxed{\text{ソ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{タ}}\right)^2 = \boxed{\text{チ}}$$

であり，点Ｏは円 C_2 の $\boxed{\text{ツ}}$ にある．$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　内部　　　①　周上　　　②　外部

連立不等式

$$\begin{cases} \left(x - \boxed{\text{ソ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{タ}}\right)^2 \leqq \boxed{\text{チ}} \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

で表される領域の面積は $\boxed{\text{テ}} + \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi$ である．

【解説】

問題

$$\ell_1 : y=\frac{1}{2}x+5.$$

直線 ℓ_1 と x 軸の交点の x 座標は

$$0=\frac{1}{2}x+5 \quad より \quad x=-10$$

であるから，点 A の座標は $\left(\boxed{-10},\ 0\right)$ である．

直線 ℓ_2 の傾きは，ℓ_1 に垂直であることから -2 である．したがって，ℓ_2 の方程式は

$$y-0=-2\{x-(-10)\}$$

より

$$y=\boxed{-2}\,x-\boxed{20}$$

である．

$\mathrm{O}(0,\ 0)$ と直線 $\ell_1 : x-2y+10=0$ の距離は

$$\frac{|0-2\cdot 0+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

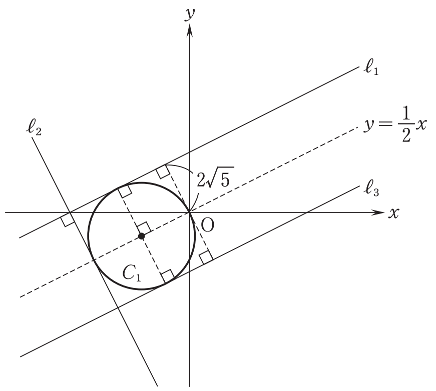
直線 ℓ_3 の方程式は，ℓ_1 に平行であることから $x-2y+k=0$ とおける．点 O と ℓ_3 の距離が $2\sqrt{5}$ なので

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \quad より \quad k=\pm 10.$$

ℓ_1 でない方を ℓ_3 とするので，$k=-10$ であり，ℓ_3 の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x-\boxed{5}$$

である．



円 C_1 は ℓ_1，ℓ_3 に接するので半径は $2\sqrt{5}$ である．また，C_1 の中心は $y=\frac{1}{2}x$ 上にあるので，その座標を $(2t,\ t)$ とおく．

円 C_1 は ℓ_2 にも接するので，C_1 の中心と ℓ_2 の距離が $2\sqrt{5}$ である．したがって，$\ell_2 : 2x+y+20=0$ より

$$\frac{|2\cdot 2t+t+20|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$$

直交条件

傾き m の直線と傾き m' の直線が直交する条件は

$$mm'=-1.$$

直線の方程式

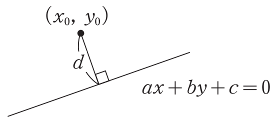
点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



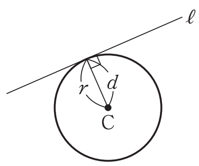
$\ell_1 : x-2y+10=0$ より，$k \neq 10$ である．

直線 ℓ_1 と ℓ_3 は原点 O に関して対称な位置にある．

円と直線

点 C を中心とする半径 r の円が直線 ℓ と接する条件は，C と ℓ の距離を d とすると

$$d=r.$$



$$|5t+20|=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$$
$$|t+4|=2$$
$$t+4=\pm 2$$
$$t=-2,\ -6$$

であるから，C_1 の中心は

$$(-4,\ -2)\quad \text{または}\quad (-12,\ -6).$$

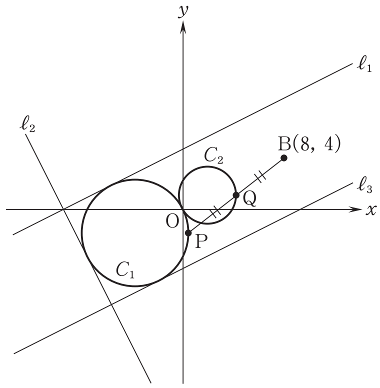
このうち，不等式 $y>-2x-20$ で表される領域にあるのは

$$(-4,\ -2)$$

であるから，円 C_1 の方程式は

$$(x+\boxed{4})^2+(y+\boxed{2})^2=\boxed{20}$$

である．



☜ **円の方程式**

中心 $(a,\ b)$，半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

P$(a,\ b)$，Q$(X,\ Y)$ とする．点 P は円 C_1 の周上にあるから

$$(a+4)^2+(b+2)^2=20 \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．

線分 BP の中点 Q の座標は $\left(\dfrac{a+8}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$ であるから

$$X=\frac{a+8}{2},\quad Y=\frac{b+4}{2}$$

すなわち

$$a=2X-8,\quad b=2Y-4$$

である．これを ① に代入して

$$(2X-8+4)^2+(2Y-4+2)^2=20$$
$$(2X-4)^2+(2Y-2)^2=20$$
$$4(X-2)^2+4(Y-1)^2=20$$
$$(X-2)^2+(Y-1)^2=5.$$

よって，点 Q の軌跡は

$$\text{円 } C_2:(x-\boxed{2})^2+(y-\boxed{1})^2=\boxed{5}$$

である．

点 O と円 C_2 の中心 $(2,\ 1)$ の距離は $\sqrt{5}$ であり，円 C_2 の半径に等しいので，O は円 C_2 の周上にある．したがって，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

☜ 円 C_2 の方程式に点 O の座標 $(0,\ 0)$ を代入すると

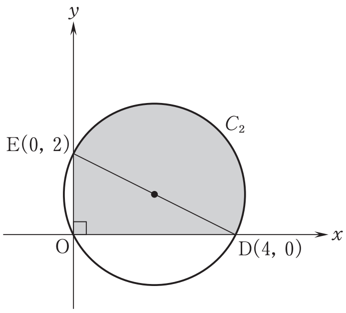
$$(0-2)^2+(0-1)^2=5$$

となり成り立つ．したがって，点 O は C_2 の周上にある．

連立不等式

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq 5 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

で表される領域は，下図の影の部分(境界を含む)である．



円 C_2 と x 軸および y 軸との交点のうち，O でないものどうしを結んでできる線分 DE は C_2 の直径である．よって，求める面積は

☜ 円 C_2 と x 軸および y 軸との O 以外の交点は D$(4,\ 0)$，E$(0,\ 2)$ であり，$\angle\mathrm{DOE}=90^\circ$ より，線分 DE は C_2 の直径である．

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2=\boxed{4}+\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}\pi$$

である．

☜ 直角三角形と半円に分けて求めた．円 C_2 の半径は $\sqrt{5}$ である．

第 4 問　高次方程式

a，b を実数とし，x の整式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(5a-1)x+b$$

とする．また，$P(-1)=0$ が成り立っている．

$$b=\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}}$$

であり，$P(x)$ は

$$P(x)=\left(x+\boxed{\text{ウ}}\right)\left(x^2+\boxed{\text{エ}}ax+\boxed{\text{オ}}a-\boxed{\text{カ}}\right)$$

と因数分解される．

x の 3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような a のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}<a<\frac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

であり，このとき，二つの虚数解を α，β とする．

解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\boxed{\text{コサ}}a \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta=\boxed{\text{シ}}a-\boxed{\text{ス}}$$

であるから，$\alpha^2+\beta^2=0$ を満たすような a の値は $\boxed{\text{セ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．

以下，$a=\boxed{\text{セ}}$ とする．

(1)　$\alpha^{50}+\beta^{50}=\boxed{\text{チ}}$ である．

(2)　$\alpha^4=\beta^4=\boxed{\text{ツテ}}$ である．また，n を自然数とするとき

$$\alpha^{4n-1}+\beta^{4n-1}=\boxed{\text{ト}}\left(\boxed{\text{ナニ}}\right)^n$$

である．

【解説】　問題

$$P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(5a-1)x+b$$

について，$P(-1)=0$ より

$$(-1)^3+(2a+1)\cdot(-1)^2+(5a-1)\cdot(-1)+b=0$$

$$-3a+b+1=0$$

であるから

$$b=\boxed{3}a-\boxed{1}$$

である．このとき，$P(x)$ は

$$P(x)=x^3+(2a+1)x^2+(5a-1)x+3a-1$$

であり，因数定理から $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．

☜ **因数定理**

整式 $P(x)$ において
$P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる
$\iff P(\alpha)=0$.

$$
\begin{array}{r}
x^2 \qquad + 2ax \ + 3a - 1 \\
x+1 \overline{\smash{\big)}\, x^3 + (2a+1)x^2 + (5a-1)x + 3a - 1} \\
\underline{x^3 + \qquad\quad x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
2ax^2 + (5a-1)x \qquad\qquad \\
\underline{2ax^2 + \qquad\ 2ax \qquad\qquad} \\
(3a-1)x + 3a - 1 \\
\underline{(3a-1)x + 3a - 1} \\
0
\end{array}
$$

上の割り算より，$P(x)$ は

$$P(x) = \left(x + \boxed{1}\right)\left(x^2 + \boxed{2}\,ax + \boxed{3}\,a - \boxed{1}\right)$$

と因数分解される．よって，x の 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつための条件は，x の 2 次方程式

$$x^2 + 2ax + 3a - 1 = 0 \qquad \cdots ①$$

が虚数解をもつこと，すなわち，① の判別式を D とすると $D < 0$ が成り立つことである． ☜

$$\frac{D}{4} = a^2 - (3a - 1)$$

であるから

$$a^2 - 3a + 1 < 0$$

より，a のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{3} - \sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}} < a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \qquad \cdots ②$$

である．このとき，① の二つの虚数解が α と β であるから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \boxed{-2}\,a \quad かつ \quad \alpha\beta = \boxed{3}\,a - \boxed{1} \qquad \cdots ③$$ ☜

である．これらを

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad すなわち \quad (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 0$$

に代入すると

$$(-2a)^2 - 2(3a - 1) = 0$$
$$2a^2 - 3a + 1 = 0$$
$$(a - 1)(2a - 1) = 0$$

より

$$a = 1,\ \frac{1}{2}$$

が得られ，これらはともに ② を満たす．

よって，$\alpha^2 + \beta^2 = 0$ を満たすような a の値は

$$\boxed{1} \quad と \quad \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．

以下，$a = 1$ のときを考える．

解の判別

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

において，$b^2 - 4ac$ を判別式といい，これを D とすると

$D > 0 \iff$ 異なる二つの実数解をもつ，

$D = 0 \iff$ (実数の)重解をもつ，

$D < 0 \iff$ 異なる二つの虚数解をもつ．

解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の二つの解を α，β とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

である．

(1) $a=1$ のとき，$\alpha^2+\beta^2=0$ すなわち $\beta^2=-\alpha^2$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\alpha^{50}+\beta^{50}&=\alpha^{50}+(\beta^2)^{25}\\&=\alpha^{50}+(-\alpha^2)^{25}\\&=\alpha^{50}-\alpha^{50}\\&=\boxed{0}\end{aligned}$$

である．

(2) $a=1$ のとき，① は

$$x^2+2x+2=0$$

であり，これを満たす x については

$$x^2+2=-2x$$

の両辺を平方して

$$x^4+4x^2+4=4x^2$$

より

$$x^4=-4$$

が成り立つ．すなわち

$$\alpha^4=\beta^4=\boxed{-4}$$

である．

よって，n を自然数とするとき

$$\begin{aligned}\alpha^{4n-1}+\beta^{4n-1}&=\frac{(\alpha^4)^n}{\alpha}+\frac{(\beta^4)^n}{\beta}\\&=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot(-4)^n\\&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\cdot(-4)^n\end{aligned}$$

である．ここで，$a=1$ のとき ③ より

$$\alpha+\beta=-2 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta=2$$

であるから

$$\begin{aligned}\alpha^{4n-1}+\beta^{4n-1}&=\frac{-2}{2}\cdot(-4)^n\\&=\boxed{-}\left(\boxed{-4}\right)^n\end{aligned}$$

である．

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】　(100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	2，1	2	
	ウ，エ，オ	2，1，1	2	
	カ	0	1	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{2}{3}$	1	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{4}{3}$	1	
	$\frac{\sqrt{サシ}}{ス}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	2	
	$\frac{セソ}{タ}$	$\frac{-9}{8}$	2	
	チ	0	2	
	ツ	4	3	
	テ	1	2	
	ト，ナ	5，6	2	
	ニ，ヌ，ネ	1，2，3	3	
	ノハ	−2	2	
	$\frac{ヒ}{フ}$	$\frac{9}{2}$	2	
	ヘ	2	3	
	第1問　自己採点小計		(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア，イ	−，4	2	
	ウ	0	1	
	エオ	−3	2	
	カ	4	1	
	$\frac{キク}{ケ}$	$\frac{23}{3}$	2	
	コ	6	3	
	サ	3	2	
	シ	3	2	
	ス，$\frac{セソ}{タ}$	1，$\frac{-4}{3}$	3	
	$\frac{チツ}{テ}$	$\frac{13}{3}$	2	
	$\frac{トナ}{ニ}$，ヌ，ネ	$\frac{-1}{3}$，5，6	4	
	ノ	3	3	
	ハヒ，フ	20，7	3	
	第2問　自己採点小計		(30)	
第3問	ア	2	2	
	イ	3	2	
	ウ	8	3	
	エ，オ，カ	3，2，1	3	
	キ，ク	5，4	2	
	$\frac{ケ}{コ}$，$\frac{サ}{シ}$	$\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$	2	
	スセソ	106	3	
	タチツテト	25513	3	
	第3問　自己採点小計		(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{3}$	2	
	$\frac{オ}{カ}$, $\frac{キ}{ク}$	$\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$	2	
	ケ	1	1	
	コ	1	1	
	$\frac{サ}{シ}$, $\frac{ス}{セ}$	$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$	2	
	$\frac{ソ}{タ}$	$\frac{1}{6}$	3	
	チ	2	2	
	$\frac{ツ}{テ}$, $\frac{ト}{ナ}$	$\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$	3	
	$\frac{ニ\sqrt{ヌ}}{ネ}$	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	2	
		第4問　自己採点小計	(20)	
第5問	ア	2	2	
	$\frac{イ}{ウ}$	$\frac{3}{2}$	3	
	$\frac{エオ}{カ}$	$\frac{21}{8}$	2	
	$\frac{キクケ}{コサ}$	$\frac{103}{64}$	3	
	$\frac{シス}{セ}$	$\frac{53}{8}$	3	
	$\frac{ソ}{タチツ}$	$\frac{5}{512}$	3	
	テ	5	2	
	$\frac{\sqrt{トナ}}{ニ}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	2	
		第5問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

第１問　三角関数，指数関数・対数関数

〔１〕 $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，θ の関数 $f(\theta) = \cos 2\theta - \cos\theta$ を考える．

$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}}\cos^2\theta - \boxed{\text{イ}}$ であるから，$\cos\theta = t$ とすると，$f(\theta)$ は t を用いて

$$f(\theta) = \boxed{\text{ア}}t^2 - t - \boxed{\text{イ}}$$

と表される．

(1) $$f(\theta) = \left(\boxed{\text{ウ}}t + \boxed{\text{エ}}\right)\left(t - \boxed{\text{オ}}\right)$$

と変形できるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式 $f(\theta) = 0$ を解くと

$$\theta = \boxed{\text{カ}},\quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である．ただし，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} < \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ とする．

(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ の最小値を与える θ のうち，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるものを α とすると

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(3) k を実数とする．$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，θ の方程式 $f(\theta) = k$ が異なる４個の実数解をもつような k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}} < k < \boxed{\text{チ}}$$

であり，この４個の実数解の和は $\boxed{\text{ツ}}\pi$ である．

〔２〕 x の不等式

$$2\log_2(x-1) \leqq \log_2(2x^2 - 7x + 7) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

について考える．

すべての実数 x に対して $2x^2 - 7x + 7 > 0$ であるから，真数が正となるような x の値の範囲は $x > \boxed{\text{テ}}$ である．この条件のもとで，$(*)$ を変形すると

$$x^2 - \boxed{\text{ト}}x + \boxed{\text{ナ}} \geqq 0$$

となるから，$(*)$ を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ニ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌ}},\quad \boxed{\text{ネ}} \leqq x$$

である．

次に，x の不等式

$$\frac{1}{4} < 2^x < 16\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

を解くと

$$\boxed{\text{ノハ}} < x < \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$$

である．

(*) かつ (**) を満たす x のうちで，$\log_{\sqrt{3}} x$ が整数となるような x の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ 個ある．

【解説】

問題

〔1〕 $f(\theta)=\cos 2\theta-\cos\theta.$

$\cos 2\theta=\boxed{2}\cos^2\theta-\boxed{1}$ であるから，$\cos\theta=t$ とすると，$f(\theta)$ は t を用いて

$$f(\theta)=(2t^2-1)-t$$
$$=2t^2-t-1$$

と表される．

☜ 2倍角の公式

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=2\cos^2\theta-1$$
$$=1-2\sin^2\theta.$$

(1) $$f(\theta)=2t^2-t-1$$
$$=\left(\boxed{2}t+\boxed{1}\right)\left(t-\boxed{1}\right)$$

と変形できるから，$f(\theta)=0$ は

$$(2t+1)(t-1)=0$$

と表される．これより

$$t=1,\ -\frac{1}{2}$$

すなわち

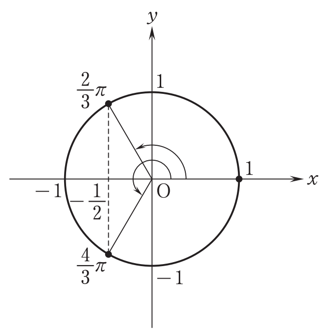
$$\cos\theta=1,\ -\frac{1}{2}$$

であるから，$0\leqq\theta<2\pi$ において $f(\theta)=0$ の解は

$$\theta=\boxed{0},\quad \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi,\quad \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\pi$$

である．

☜



(2) θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $-1\leqq t\leqq 1$ であり

$$f(\theta)=2t^2-t-1$$
$$=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

であるから，$f(\theta)$ が最小値をとるのは

$$t=\frac{1}{4}\quad すなわち\quad \cos\theta=\frac{1}{4}$$

のときである．これを満たす θ のうち，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるものが α であるから

$$\cos\alpha=\frac{1}{4}$$

である．このとき，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\alpha>0$ に注意すると

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

☜ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

である．よって

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\&=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{8}}\end{aligned}$$

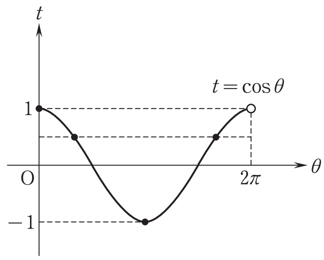
☜ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

である．

(3) t の値が 1 個決まったとき，$0\leqq\theta<2\pi$ において，$t=\cos\theta$ を満たす θ の値は

$$\begin{cases}-1<t<1 \text{ のとき，} & 2\text{ 個}\\ t=\pm1 \text{ のとき，} & 1\text{ 個}\\ t<-1,\ 1<t \text{ のとき，} & 0\text{ 個}\end{cases}$$

☜



存在する．よって，$0\leqq\theta<2\pi$ において，θ の方程式 $f(\theta)=k$ が異なる 4 個の実数解をもつ条件は，t の方程式

$$2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}=k \qquad \cdots①$$

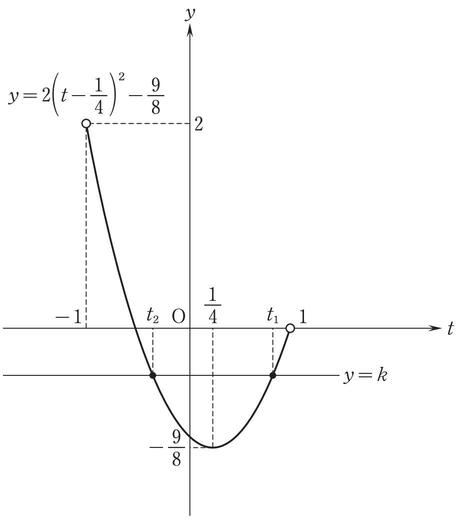
☜ $f(\theta)=2t^2-t-1$
$=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$.

が $-1<t<1$ の範囲に異なる 2 個の実数解をもつことである．

このような実数 k の値の範囲は，下のグラフより

$$\frac{\boxed{-9}}{\boxed{8}}<k<\boxed{0}$$

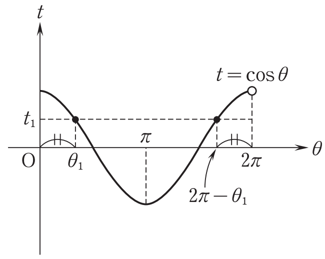
である．



① の 2 個の実数解を t_1，t_2 とする．

$$t_1 = \cos\theta$$

を満たす 2 個の θ の値のうち，小さい方を θ_1 とすると，大きい方は $2\pi-\theta_1$ である．よって，これらの値の和は 2π である．同様にして $t_2=\cos\theta$ を満たす 2 個の θ の値の和も 2π である．よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における θ の方程式 $f(\theta)=k$ の異なる 4 個の実数解の和は $\boxed{4}\pi$ である．



［2］　$2\log_2(x-1) \leqq \log_2(2x^2-7x+7)$.　$\cdots(*)$

問題

すべての実数 x に対して $2x^2-7x+7>0$ であるから，真数が正となるような x の値の範囲は $x-1>0$ より

☜ $2x^2-7x+7=2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0.$

$$x > \boxed{1} \qquad \cdots ①$$

である．この条件のもとで (*) を変形すると

$$\log_2(x-1)^2 \leqq \log_2(2x^2-7x+7)$$

☜ $a>0$，$a \neq 1$，$M>0$，p が実数のとき
$p\log_a M = \log_a M^p$.

となる．底 2 は 1 より大きいから

$$(x-1)^2 \leqq 2x^2-7x+7$$

☜ $a>1$，$M>0$，$N>0$ のとき
$\log_a M \leqq \log_a N \iff M \leqq N$.

$$x^2-\boxed{5}x+\boxed{6} \geqq 0$$

$$(x-2)(x-3) \geqq 0$$

$$x \leqq 2,\quad 3 \leqq x \qquad \cdots ②$$

となる．よって，① かつ ② から，(*) を満たす x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{1} < x \leqq \boxed{2},\quad \boxed{3} \leqq x$$

である．次に，x の不等式

$$\frac{1}{4} < 2^x < 16\sqrt{2} \qquad \cdots(**)$$

を変形すると

$$2^{-2} < 2^x < 2^{\frac{9}{2}}$$

☜ $16\sqrt{2}=2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{4+\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{2}}$.

となり，底 2 は 1 より大きいから

$$\boxed{-2} < x < \frac{\boxed{9}}{\boxed{2}}$$

☜ $a>1$ のとき
$a^M < a^N \iff M<N$.

である．

以上より，(*) かつ (**) を満たす x の値の範囲は

$$1 < x \leqq 2,\quad 3 \leqq x < \frac{9}{2} \qquad \cdots ③$$

である．ここで，$\log_{\sqrt{3}} x = n$ とおくと

$$x = (\sqrt{3})^n$$

☜ $a>0$，$a \neq 1$，$R>0$ のとき
$\log_a R = r \iff R = a^r$.

である．また，$\sqrt{3}>1$ であるから

$$\cdots<(\sqrt{3})^{-1}<(\sqrt{3})^{0}<(\sqrt{3})^{1}<(\sqrt{3})^{2}<(\sqrt{3})^{3}<\cdots$$

$$(\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad (\sqrt{3})^{0}=1,\quad (\sqrt{3})^{1}=\sqrt{3},\quad (\sqrt{3})^{2}=3,\quad (\sqrt{3})^{3}=3\sqrt{3}$$

が成り立つ．よって，③ を満たす x のうちで，$\log_{\sqrt{3}} x\,(=n)$ が整数となるような x の値は

$$(\sqrt{3})^1=\sqrt{3},\quad (\sqrt{3})^2=3$$

の $\boxed{\ 2\ }$ 個である．

☜ $(\sqrt{3})^0=1$,

$\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}<27=(3\sqrt{3})^2$ より

$$\frac{9}{2}<3\sqrt{3}$$

であるから n が整数のとき

$$(\sqrt{3})^n \quad (n\leqq 0,\ 3\leqq n)$$

は ③ を満たさない．

第2問　微分法・積分法

x の関数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3$ があり，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とする．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イ}}x$$

であるから，$f(x)$ は

$x=\boxed{\text{ウ}}$ のとき　極小値 $\boxed{\text{エオ}}$

$x=\boxed{\text{カ}}$ のとき　極大値 $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

をとる．

(1)　k を正の実数とする．

$0\leqq x\leqq k$ における $f(x)$ の最小値が $\boxed{\text{エオ}}$ 未満となるような k の値の範囲は

$$k>\boxed{\text{コ}}$$

である．

(2)　C_1 上の点 $\mathrm{A}(3,\ 6)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{サ}}x-\boxed{\text{シ}}$$

である．点Aと異なる点Bを C_1 上にとる．点Bにおける C_1 の接線 m が ℓ と平行であるとき，Bの座標は $\left(\boxed{\text{ス}},\ \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ であり，m の方程式は

$$y=\boxed{\text{サ}}x-\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である．

次に，x の2次関数 $g(x)$ があり，放物線 $y=g(x)$ を C_2 とする．C_2 は点Aにおいて直線 ℓ と接し，さらに点Bを通る．このとき

$$g(x)=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}x^2+\boxed{\text{ヌ}}x-\boxed{\text{ネ}}$$

である．

放物線 C_2，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分を D とすると，D の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ であり，D は直線 m によって面積比が $\boxed{\text{ハヒ}}:\boxed{\text{フ}}$ である二つの部分に分けられる．

【解説】

問題

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned}f'(x)&=\boxed{-}x^2+\boxed{4}x\\&=-x(x-4)\end{aligned}$$

☜ **導関数**

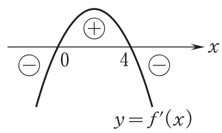
$(x^n)'=nx^{n-1}$　（n は自然数）

$(c)'=0$　（c は定数）．

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{23}{3}$	$\searrow$

☜ $f'(x)$ の符号は，$y=f'(x)$ のグラフで確認するとよい．



よって，$f(x)$ は

$$x=\boxed{0}\ \text{のとき，極小値}\ \boxed{-3}$$

$$x=\boxed{4}\ \text{のとき，極大値}\ \frac{\boxed{23}}{\boxed{3}}$$

をとる．

(1) x の方程式 $f(x)=-3$ を満たす x の値は

$$-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3=-3$$

すなわち

$$x^2(x-6)=0$$

より

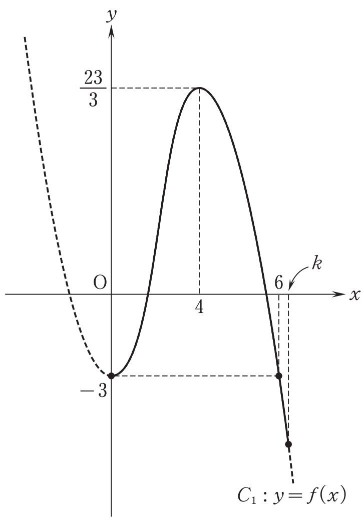
$$x=0,\ 6$$

である．

よって，k を正の実数とするとき，$0\leqq x\leqq k$ における $f(x)$ の最小値が -3 未満となるような k の値の範囲は，下のグラフより

$$k>\boxed{6}$$

である．



(2) $f'(x)=-x^2+4x$ より，$f'(3)=-3^2+4\cdot 3=3$ であるから，
C_1 上の点 A(3, 6) における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y-6=3(x-3)$$

すなわち

$$y=\boxed{3}x-\boxed{3}$$

である．

☜ **接線の方程式**
点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は
$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

点 A 以外の C_1 上の点 B における C_1 の接線 m が ℓ と平行であるとき，B の x 座標を t とすると，$f'(t)=3$ より

$$-t^2+4t=3$$
$$(t-1)(t-3)=0.$$

$t \neq 3$ であるから

$$t=1$$

となるので，B の座標は $\left(\boxed{1},\ \dfrac{\boxed{-4}}{\boxed{3}}\right)$ である．よって，

☜ 点 B の y 座標は
$$f(1)=-\frac{1}{3}+2-3=-\frac{4}{3}.$$

接線 m の方程式は

$$y-\left(-\frac{4}{3}\right)=3(x-1)$$

より

$$y=3x-\frac{\boxed{13}}{\boxed{3}}$$

である．

x の 2 次関数 $g(x)$ は $g(x)=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ とおけ，放物線 $y=g(x)$ が C_2 である．

まず，C_2 が点 A において ℓ と接する条件は

$$g(3)=6 \quad \text{かつ} \quad g'(3)=3$$

☜ C_2 は点 A を通るので，$g(3)=6$.
C_2 上の点 A における C_2 の接線の傾きは ℓ の傾きと一致するので，$g'(3)=3$.

であり，さらに，C_2 が点 B を通る条件は

$$g(1)=-\frac{4}{3}$$

であるから

$$\begin{cases} 9a+3b+c=6 \\ 6a+b=3 \\ a+b+c=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

☜ $g'(x)=2ax+b$ より，$g'(3)=6a+b$.

を解いて

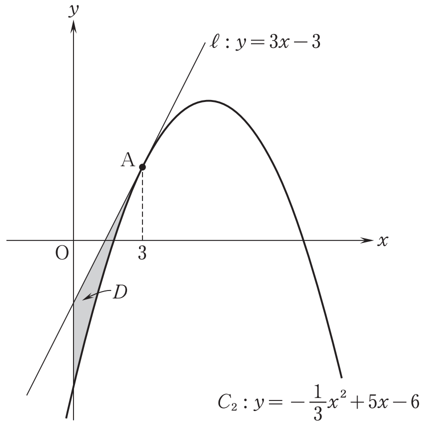
$$a=-\frac{1}{3}, \quad b=5, \quad c=-6$$

が得られる．よって，$g(x)$ は

$$g(x)=\frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}}x^2+\boxed{5}x-\boxed{6}$$

である．

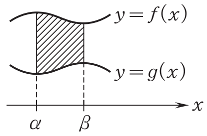
放物線 C_2，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分が D であるから，D は下図の影の部分である．



☜ **面積**

区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに $g(x) \leqq f(x)$ ならば，二つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および二つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



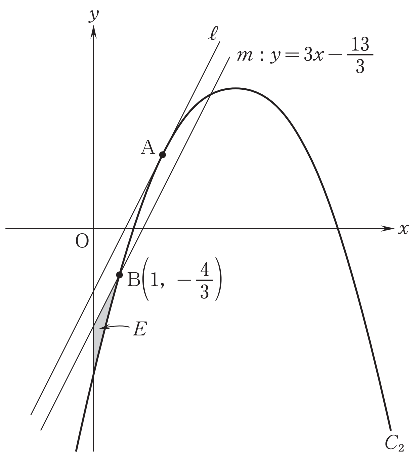
D の面積をS とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{(3x-3)-\left(-\frac{1}{3}x^2+5x-6\right)\right\}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 (x^2-6x+9)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3 \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

である．

☜
$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\int_0^3 (x^2-6x+9)\,dx \\ &=\frac{1}{3}\int_0^3 (x-3)^2\,dx \\ &=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^3 \\ &=\frac{1}{9}\{0-(-3)^3\} \\ &=3 \end{aligned}$$
と計算してもよい．

さらに，放物線 C_2，直線 m および y 軸で囲まれた部分を E とすると，E は下図の影の部分である．



E の面積を T とすると

$$T=\int_0^1\left\{\left(3x-\frac{13}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}x^2+5x-6\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(x^2-6x+5)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right]_0^1$$

$$=\frac{7}{9}$$

であるから，D は直線 m によって面積比が $\boxed{20}$: $\boxed{7}$ である二つの部分に分けられる．

☜ $(S-T):T=\left(3-\frac{7}{9}\right):\frac{7}{9}$

$=\frac{20}{9}:\frac{7}{9}$

$=20:7.$

第3問　数　列

　数列 $\{a_n\}$ は $a_2=6$，$a_3=12$ である等比数列である．数列 $\{a_n\}$ の公比は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$a_1=\boxed{\text{イ}}$ である．$a_n<500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{ウ}}$ である．また，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\boxed{\text{エ}}\left(\boxed{\text{オ}}^n-\boxed{\text{カ}}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

　次に，数列 $\{b_n\}$ は等差数列であり，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とすると

$$b_5=21,\quad T_5=55$$

を満たしている．

$$b_n=\boxed{\text{キ}}n-\boxed{\text{ク}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$T_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}n^2-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

　数列 $\{a_n\}$ か数列 $\{b_n\}$ の少なくとも一方に現れる数を，小さいものから順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする．ただし，数列 $\{a_n\}$ にも数列 $\{b_n\}$ にも現れる数は，数列 $\{c_n\}$ には一度だけ現れるものとする．$c_n<500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{スセソ}}$ であり

$$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{スセソ}}}c_k=\boxed{\text{タチツテト}}$$

である．

【解説】

問題

　等比数列 $\{a_n\}$ の公比を r とすると

$$r=\frac{a_3}{a_2}=\frac{12}{6}=\boxed{2}$$

☜　$a_2=6$，　$a_3=12$.

であり，初項 a_1 は

$$a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$$

であるから，一般項は

$$a_n=3\cdot2^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ **等比数列の一般項**

　公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a_1r^{n-1}.$$

である．よって，$a_n<500$ は

$$3\cdot2^{n-1}<500$$

より

$$2^{n-1}<\frac{500}{3}\ \left(=166+\frac{2}{3}\right)$$

となり，n は自然数であるから

$$n-1\leqq7$$

☜　$2^7=128$，　$2^8=256$.

より

$$n\leqq8$$

となる．よって，$a_n<500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{8}$ である．

また，等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}$$
$$=\boxed{3}\left(\boxed{2}^n-\boxed{1}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

> **等比数列の和**
> 初項 a，公比 $r\ (\neq 1)$，項数 n の等比数列の和は
> $$\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

次に，等差数列 $\{b_n\}$ の公差を d とすると，$b_5=21$ より

$$b_1+4d=21. \quad\cdots①$$

> **等差数列の一般項**
> 公差 d の等差数列 $\{b_n\}$ の一般項は
> $$b_n=b_1+(n-1)d.$$

さらに，$T_5=55$ より

$$\frac{5(b_1+b_5)}{2}=55$$
$$b_1+b_5=22$$

> **等差数列の和**
> 初項 b，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は
> $$\frac{n(b+\ell)}{2}.$$

が成り立ち，$b_5=21$ であるから

$$b_1+21=22$$

より

$$b_1=1$$

となる．これを ① に代入して d を求めると

$$d=5$$

である．よって

$$b_n=1+(n-1)\cdot 5$$
$$=\boxed{5}n-\boxed{4}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad\cdots②$$

であり

$$T_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}$$
$$=\frac{n\{1+(5n-4)\}}{2}$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}n^2-\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

> $$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(5k-4)$$
> $$=5\cdot\frac{n(n+1)}{2}-4n$$
> $$=\frac{5}{2}n^2-\frac{3}{2}n$$
> と計算してもよい．

数列 $\{b_n\}$ は 5 で割ったときの余りが 1 となる自然数を小さいものから順に並べたものであり，各項の一の位は 1 または 6 である．

> ② より，$b_n=5(n-1)+1$．

よって，$a_n<500$ を満たす a_n である a_1 から a_8，すなわち

$$a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=12,\ a_4=24,$$
$$a_5=48,\ a_6=96,\ a_7=192,\ a_8=384$$

のうち，数列 $\{b_n\}$ にも現れるものは a_2 と a_6 の 2 個である．

> $a_2=b_2=6,\quad a_6=b_{20}=96.$

また，$b_n<500$ は

$$5n-4<500$$

であるから

$$n < \frac{504}{5} \ \left(= 100 + \frac{4}{5} \right)$$

となり，n は自然数であるから

$$n \leqq 100$$

となる．よって，$b_n < 500$ を満たす b_n は b_1 から b_{100} までの 100 個である．したがって，$c_n < 500$ を満たす c_n は

$$a_1,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_7,\ a_8 \quad と \quad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{100}$$

の 106 個であるから，$c_n < 500$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{106}$ であり

☜　これら 106 個の項を小さいものから順に並べたものが，数列 $\{c_n\}$ の項のうち 500 未満の部分である．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{106} c_k &= \{S_8 - (a_2 + a_6)\} + T_{100} \\ &= 3(2^8 - 1) - (6 + 96) + \left(\frac{5}{2} \cdot 100^2 - \frac{3}{2} \cdot 100 \right) \\ &= \boxed{25513}\end{aligned}$$

☜　$S_n = 3(2^n - 1)$.

☜　$T_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

である．

第４問　ベクトル

平行四辺形 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

線分 BC の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\vec{c}$$

である．また，三角形 ABC の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{c}$$

である．

(1)　点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{c}$ となるようにとり，直線 OM と直線 BD の交点を E とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表そう．

点 E が直線 OM 上にあることから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}s\vec{a}+s\vec{c}$$

となる．さらに，点 E が直線 BD 上にあることから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\boxed{\text{ケ}}-t\right)\vec{a}+\left(\boxed{\text{コ}}+t\right)\vec{c}$$

となる．これらから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$$

である．

また，三角形 DME の面積は平行四辺形 OABC の面積の $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ 倍である．

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\cos\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．このとき

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{チ}}$$

である．

また，点 G を通り直線 AC に垂直な直線と，直線 AC との交点を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\vec{c}$$

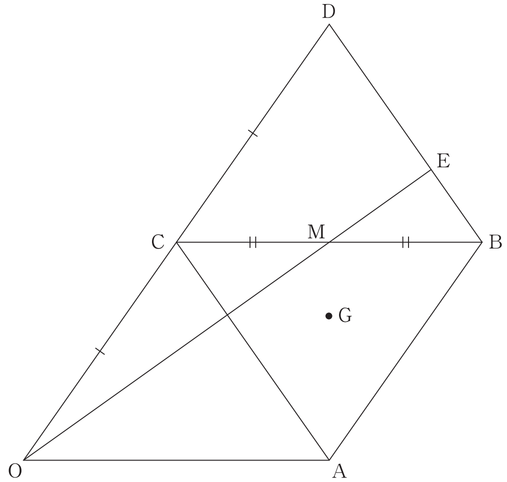
であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\frac{\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である．

【解説】

問題



四角形 OABC は平行四辺形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{c}$$

である．また，点 M は線分 BC の中点だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\vec{a}+\vec{c}\end{aligned}$$

である．さらに，点 G は三角形 ABC の重心だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{3}\{\vec{a}+(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}\}\\&=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{c}\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$.

である．

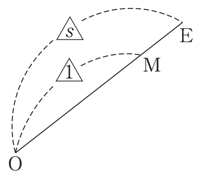
⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{c}$ であり，点 E は直線 OM と直線 BD の交点である．

まず，点 E が直線 OM 上にあることから，実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{1}{2}s\vec{a}+s\vec{c}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

☜

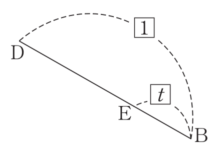
☜ $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}$.



と表される．

次に，点 E が直線 BD 上にあることから，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表されるから

☜



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=(1-t)(\vec{a}+\vec{c})+t\times(2\vec{c})\\&=\left(\boxed{1}-t\right)\vec{a}+\left(\boxed{1}+t\right)\vec{c}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

☜ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\vec{c}$.

となる．

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから，①，② より

$$\frac{1}{2}s=1-t\quad かつ\quad s=1+t$$

が成り立ち，これより，$s=\dfrac{4}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$ である．

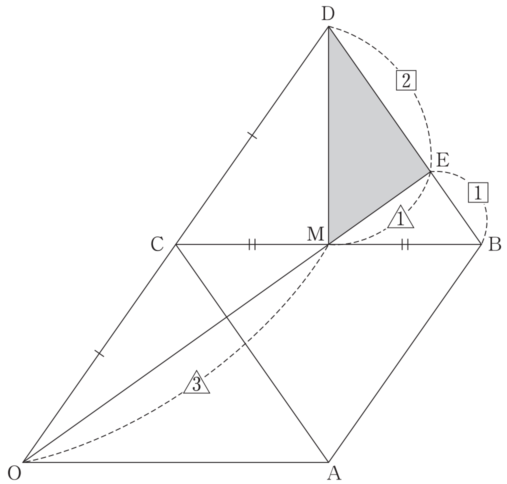
☜ α，β，α'，β' が実数であり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$$
$$\iff \alpha=\alpha'\quad かつ\quad \beta=\beta'.$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{a}+\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\vec{c}$$

となり，s，t の値より，下の図を得る．



☜ $s=\dfrac{4}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$t=\dfrac{1}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

よって，平行四辺形 OABC の面積を S とおくと

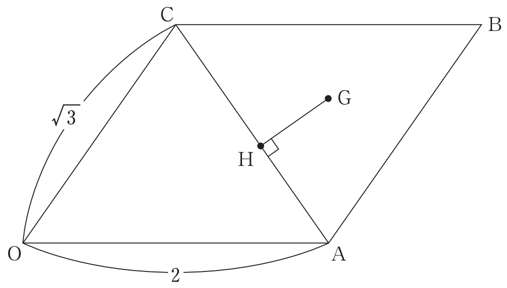
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DME}&=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{DMB}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\triangle\mathrm{DCB}\right)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S\right)\\&=\frac{1}{6}S\end{aligned}$$

であるから，三角形 DME の面積は平行四辺形 OABC の面積の

$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$ 倍である．

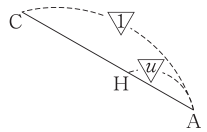
(2) $$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{AOC}$$
$$=2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=\boxed{2}$$
である．

☜ **内積の定義**
$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$



点 H は，点 G を通り直線 AC に垂直な直線と，直線 AC との交点である．

まず，点 H が直線 AC 上にあることから，実数 u を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるから

☜


$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=u(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
より
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(1-u)\vec{a}+u\vec{c} \qquad \cdots ③$$
となる．よって
$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$
$$=(1-u)\vec{a}+u\vec{c}-\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$
☜ $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$.
$$=\left(\frac{1}{3}-u\right)\vec{a}+\left(u-\frac{2}{3}\right)\vec{c} \qquad \cdots ④$$
である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=0$ であるから
$$(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}-u\right)\vec{a}+\left(u-\frac{2}{3}\right)\vec{c}\right\}=0$$

☜ **垂直条件**
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

より
$$\left(u-\frac{1}{3}\right)|\vec{a}|^2+\left(u-\frac{2}{3}\right)|\vec{c}|^2+(-2u+1)\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
☜ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

が成り立つ．

さらに，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ であるから
$$4\left(u-\frac{1}{3}\right)+3\left(u-\frac{2}{3}\right)+2(-2u+1)=0$$
より
$$u=\frac{4}{9}$$
である．これを ③ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}\vec{a}+\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}\vec{c}$$

である．また，④ より

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=-\frac{1}{9}\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{9}(\vec{a}+2\vec{c})$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|^2=\frac{1}{9^2}\left(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2\right)$$

$$=\frac{1}{9^2}(4+8+12)$$

$$=\frac{24}{9^2}$$

☜ $|\vec{a}|=2$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ を代入した．

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{9}}$$

である．

第 5 問　確率分布と統計的な推測

袋の中に 1 と記されたカードが 2 枚，2 と記されたカードが 1 枚，4 と記されたカードが 1 枚ある．

この袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードに記されている数字を記録し，このカードを袋に戻す．この操作を T とする．

(1) 操作 T を 1 回行ったときに記録される数字を X とし，操作 T を 2 回行ったときに記録される数字のうち小さくない方を Y とする．

確率変数 X の期待値(平均)は $\boxed{\text{ア}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

確率変数 Y の期待値(平均)は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{キクケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である．

$Z=2X+Y$ により確率変数 Z を定める．確率変数 Z の期待値(平均)は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

(2) 操作 T を 10 回行う．このとき，数字 1 が記録される回数を W とする．

$P(W=1)=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチツ}}}$ である．また，確率変数 W の期待値(平均)は $\boxed{\text{テ}}$ であり，標準偏差は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である．

【解説】

問題

(1) 確率変数 X のとり得る値は 1, 2, 4 である．$X=k$ $(k=1, 2, 4)$ となる確率 $P(X=k)$ を求めると

$$P(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{4}$$

である．よって，X の確率分布は下の表のようになる．

X	1	2	4	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

ゆえに，X の期待値(平均) $E(X)$ は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\boxed{2}$$

である．また

期待値(平均)

確率変数 X のとり得る値を

x_1, x_2, $\cdots$, x_n

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

p_1, p_2, $\cdots$, p_n

とすると，X の期待値(平均) $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k.$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{11}{2}$$

であるから，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{11}{2}-2^2$$
$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ **分散**

確率変数 X のとり得る値を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とすると，X の分散 $V(X)$ は，$E(X)=m$ として

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2 p_k \quad \cdots ①$$

または

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2. \quad \cdots ②$$

ここでは ② を用いた．

確率変数 Y のとり得る値は 1，2，4 である．$k=1$，2，4 に対し，$Y\leqq k$ となるのは，2 回とも k 以下の数のカードを取り出した場合であることに注意すると，$Y=k$ ($k=1,2,4$) となる確率 $P(Y=k)$ は

$$P(Y=1)=P(Y\leqq 1)=\frac{2^2}{4^2}=\frac{1}{4}$$
$$P(Y=2)=P(Y\leqq 2)-P(Y\leqq 1)$$
$$=\frac{3^2}{4^2}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{5}{16}$$
$$P(Y=4)=P(Y\leqq 4)-P(Y\leqq 2)$$
$$=1-\frac{3^2}{4^2}$$
$$=\frac{7}{16}$$

である．よって，Y の確率分布は下の表のようになる．

Y	1	2	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

☜ 1 回目，2 回目に記録される数をそれぞれ X_1，X_2 とする．Y のとり得る値は下の表のようになる．

X_1 \ X_2	1	1	2	4
1	1	1	2	4
1	1	1	2	4
2	2	2	2	4
4	4	4	4	4

この表をもとに

$$P(Y=1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$
$$P(Y=2)=\frac{5}{16}$$
$$P(Y=4)=\frac{7}{16}$$

と求めてもよい．

ゆえに，Y の期待値(平均) $E(Y)$ は

$$E(Y)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{5}{16}+4\cdot\frac{7}{16}$$
$$=\frac{\boxed{21}}{\boxed{8}}$$

である．また

$$E(Y^2)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{5}{16}+4^2\cdot\frac{7}{16}$$
$$=\frac{17}{2}$$

であるから，Y の分散 $V(Y)$ は

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$
$$=\frac{17}{2}-\left(\frac{21}{8}\right)^2$$
$$=\frac{\boxed{103}}{\boxed{64}}$$

である．

$Z=2X+Y$ で定まる確率変数 Z の期待値(平均) $E(Z)$ は

$$E(Z)=E(2X+Y)$$
$$=2E(X)+E(Y)$$
$$=2\cdot 2+\frac{21}{8}$$
$$=\frac{\boxed{53}}{\boxed{8}}$$

である．

☜ **期待値(平均)の性質**

a，b を定数とすると，二つの確率変数 X，Y に対して

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

が成り立つ．

(2) 確率変数 W は二項分布 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$P(W=1)={}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9$$
$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{512}}$$

である．また，W の期待値(平均) $E(W)$ は

$$E(W)=10\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\boxed{5}$$

であり，W の標準偏差 $\sigma(W)$ は

$$\sigma(W)=\sqrt{10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{2}}$$

である．

☜ **二項分布**

確率変数 X のとり得る値が

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$

であり，X の確率分布が

$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

であるとき，この確率分布を二項分布といい，$B(n,\ p)$ で表す．

☜ **二項分布の期待値(平均)，標準偏差**

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると X の期待値(平均) $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ は

$E(X)=np$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

である．

【数 学 ①】

旧 数 学 Ⅰ

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{\sqrt{アイ}+\sqrt{ウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{オカ}-\sqrt{キ}}{ク}$	$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$	3	
	ケ	2	4	
	$n^{コ}(n-サ)(n+シ)$	$n^2(n-1)(n+1)$	2	
	$\dfrac{n(n-ス)}{セ}$	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	1	
	$\dfrac{n(n+ソ)}{タ}$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1	
	チ	7	3	
	ツテ	40	3	
第1問　自己採点小計			(20)	
第2問	アa	$2a$	2	
	イa^2−ウa−エ	$2a^2-2a-4$	2	
	オカ＜a＜キ	$-1<a<2$	4	
	ク	6	4	
	$\dfrac{ケコ}{サ}$	$\dfrac{-1}{4}$	4	
	$\dfrac{シス}{セ}$	$\dfrac{-2}{3}$	4	
	$\dfrac{ソ\pm\sqrt{タ}}{チ}$	$\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$	5	
第2問　自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	ア	0	3	
	イ	1	3	
	$\dfrac{\sqrt{ウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	4	
	$\sqrt{オ}$	$\sqrt{5}$	4	
	カ$\sqrt{キ}$	$2\sqrt{3}$	4	
	$\dfrac{クケ}{コ}$	$\dfrac{-1}{5}$	4	
	$\dfrac{サ\sqrt{シ}}{ス}$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$	4	
	$\sqrt{セソ}$	$\sqrt{10}$	4	
第3問　自己採点小計			(30)	
第4問	$A_1{}^{ア}+イ$	$A_1{}^2+2$	2	
	$B_2{}^{ウ}-エ$	$B_2{}^2-2$	2	
	$A_{オ}+A_1$	A_3+A_1	2	
	$A_3B_{カ}-A_1$	$A_3B_2-A_1$	2	
	キ	1	2	
	$\sqrt{ク}$	$\sqrt{5}$	2	
	$\sqrt{ケ}$	$\sqrt{5}$	2	
	コ	3	2	
	サ	4	2	
	シ	7	2	
	スセ	76	2	
	ソタチツ	3571	3	
第4問　自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第1問　数と式，方程式・不等式

〔1〕 2次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{アイ}}+\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$$

であり

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{\boxed{オカ}}-\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$$

である．

不等式 $\dfrac{1}{\alpha}<x<\alpha$ を満たす整数 x は $\boxed{ケ}$ 個である．

〔2〕 n を自然数の定数とする．x の不等式

$$4x^2-4n^2x+n^4-n^2\leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

$$n^4-n^2=n^{\boxed{コ}}\left(n-\boxed{サ}\right)\left(n+\boxed{シ}\right)$$

であり，不等式①の解は

$$\frac{n\left(n-\boxed{ス}\right)}{\boxed{セ}}\leqq x\leqq\frac{n\left(n+\boxed{ソ}\right)}{\boxed{タ}}$$

である．

不等式①が，$x=25$ を解に含むとき $n=\boxed{チ}$ であり，$x=800$ を解に含むとき $n=\boxed{ツテ}$ である．

【解説】 問題

〔1〕 旧数学I・旧数学A 第1問〔1〕に同じである．

〔2〕 問題

$$4x^2-4n^2x+n^4-n^2\leqq 0 \quad (n \text{ は自然数}). \qquad \cdots ①$$

①の定数項 n^4-n^2 は，

$$\begin{aligned} n^4-n^2&=n^2(n^2-1)\\ &=n^{\boxed{2}}\left(n-\boxed{1}\right)\left(n+\boxed{1}\right) \end{aligned}$$

☜ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

と因数分解できるから，①は，

$$4x^2-4n^2x+n^2(n-1)(n+1)\leqq 0$$

☜
$$\begin{array}{lll} 2 & -n(n-1) & \longrightarrow\ -2n^2+2n \\ 2 & -n(n+1) & \longrightarrow\ -2n^2-2n \ (+ \\ \hline & & \quad -4n^2 \end{array}$$

となり，さらに，

$$\{2x-n(n-1)\}\{2x-n(n+1)\}\leqq 0$$

と変形できる．

n は自然数であり，$\dfrac{n(n-1)}{2}<\dfrac{n(n+1)}{2}$ であるから，①の

解は，

$$\frac{n\left(n-\boxed{1}\right)}{\boxed{2}} \leqq x \leqq \frac{n\left(n+\boxed{1}\right)}{\boxed{2}} \quad \cdots ②$$

である．

①が $x=25$ を解に含むとき，②より，

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqq 25 \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

が成り立つから，

$$(n-1)n \leqq 50 \leqq n(n+1) \quad \cdots ③$$

となる．

ここで，$n(n+1)$ は自然数 n の増加に従って増加することと，$6\cdot7=42$，$7\cdot8=56$ より，③を満たす自然数 n は，

$$\boxed{7}$$

である．

☜ $7^2=49$ であるから，$n=7$ ぐらいで③を満たす自然数 n を見つけるとよい．

①が $x=800$ を解に含むとき，②より，

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqq 800 \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

が成り立つから，

$$(n-1)n \leqq 1600 \leqq n(n+1) \quad \cdots ④$$

となる．

ここで，$n(n+1)$ は自然数 n の増加に従って増加することと，$39\cdot40=1560$，$40\cdot41=1640$ より，④を満たす自然数 n は，

$$\boxed{40}$$

である．

☜ $40^2=1600$ であるから，$n=40$ ぐらいで④を満たす自然数 n を見つけるとよい．

第２問　２次関数

問題

旧数学Ⅰ・旧数学Ａ 第２問に同じである．

第３問　図形と計量

問題

数学Ⅰ 第３問に同じである．

第 4 問　数と式

n を自然数，a を 0 でない実数とする．

$A_n = a^n - \dfrac{1}{a^n}$，$B_n = a^n + \dfrac{1}{a^n}$ とするとき

$$B_2 = A_1^{\boxed{ア}} + \boxed{\quad イ \quad}$$

$$B_4 = B_2^{\boxed{ウ}} - \boxed{\quad エ \quad}$$

である．

また

$$A_2 = A_1 B_1$$

であり，$\left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = A_{\boxed{オ}} + A_1$ より

$$A_{\boxed{オ}} = A_2 B_1 - A_1$$

である．

さらに

$$A_5 = A_3 B_{\boxed{カ}} - A_1$$

である．

以下，$a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とする．

$$A_1 = \boxed{\quad キ \quad},\quad B_1 = \sqrt{\boxed{\quad ク \quad}}$$

$$A_2 = \sqrt{\boxed{\quad ケ \quad}},\quad B_2 = \boxed{\quad コ \quad}$$

であり

$$A_3 = \boxed{\quad サ \quad}$$

$$B_4 = \boxed{\quad シ \quad}$$

である．

また

$$A_9 = \boxed{\quad スセ \quad},\quad A_{17} = \boxed{\quad ソタチツ \quad}$$

である．

【解説】　問題

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$$

$$= a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

☜　$(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$.

より，

$$A_1{}^2 = B_2 - 2$$

☜　$A_1 = a - \dfrac{1}{a}$，$B_2 = a^2 + \dfrac{1}{a^2}$.

すなわち

$$B_2 = A_1^{\boxed{2}} + \boxed{\quad 2 \quad} \qquad \cdots ①$$

である．

$$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=a^4+2a^2\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}$$ ☜ $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$.

$$=a^4+\frac{1}{a^4}+2$$

より，

$$B_2{}^2=B_4+2$$ ☜ $B_2=a^2+\dfrac{1}{a^2}$, $B_4=a^4+\dfrac{1}{a^4}$.

すなわち

$$B_4=B_2{}^{\boxed{2}}-\boxed{\ 2\ } \qquad \cdots ②$$

である．

また，

$$a^2-\frac{1}{a^2}=a^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2$$ ☜ $p^2-q^2=(p-q)(p+q)$.

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

であるから，

$$A_2=A_1B_1 \qquad \cdots ③$$ ☜ $A_2=a^2-\dfrac{1}{a^2}$, $A_1=a-\dfrac{1}{a}$,

である． $B_1=a+\dfrac{1}{a}$.

次に，

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^3+a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^3}$$

$$=\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$=A_{\boxed{3}}+A_1$$

より，

$$A_2B_1=A_3+A_1$$ ☜ $A_2=a^2-\dfrac{1}{a^2}$, $B_1=a+\dfrac{1}{a}$.

すなわち

$$A_3=A_2B_1-A_1 \qquad \cdots ④$$

である．

さらに，

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=a^5+a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^5}$$

$$=\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$=A_5+A_1$$

より，

$$A_3B_2=A_5+A_1$$ ☜ $A_3=a^3-\dfrac{1}{a^3}$, $B_2=a^2+\dfrac{1}{a^2}$.

すなわち

$$A_5=A_3B_{\boxed{2}}-A_1 \qquad \cdots ⑤$$

である．

$a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$ ☜ 分母の有理化.

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

であるから,

$$A_1=a-\frac{1}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$=\boxed{1},$$

$$B_1=a+\frac{1}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$=\sqrt{\boxed{5}},$$

$$A_2=A_1B_1$$ ☜ $A_2=A_1B_1$. …③

$$=\sqrt{\boxed{5}},$$

$$B_2={A_1}^2+2$$ ☜ $B_2={A_1}^2+2$. …①

$$=1^2+2$$

$$=\boxed{3}$$

である.

④より,

$$A_3=A_2B_1-A_1$$

$$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-1$$

$$=\boxed{4}$$

である.

②より,

$$B_4={B_2}^2-2$$

$$=3^2-2$$

$$=\boxed{7}$$

である.

また,

$$\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)=a^9+a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^9}$$

$$=\left(a^9-\frac{1}{a^9}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$=A_9+A_1$$

より,

$$A_5B_4=A_9+A_1$$ ☜ $A_5=a^5-\frac{1}{a^5}$, $B_4=a^4+\frac{1}{a^4}$.

すなわち

$$A_9=A_5B_4-A_1$$

である．これと ⑤ より，

$$\begin{aligned}A_9&=A_5B_4-A_1\\&=(A_3B_2-A_1)B_4-A_1\\&=(4\cdot3-1)\cdot7-1\\&=\boxed{76}\end{aligned}$$

☜ $A_5=A_3B_2-A_1$. …⑤

である．

さらに，

$$\begin{aligned}\left(a^9-\frac{1}{a^9}\right)\left(a^8+\frac{1}{a^8}\right)&=a^{17}+a-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^{17}}\\&=\left(a^{17}-\frac{1}{a^{17}}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\\&=A_{17}+A_1\end{aligned}$$

より，

$$A_9B_8=A_{17}+A_1$$ ☜ $A_9=a^9-\frac{1}{a^9}$, $B_8=a^8+\frac{1}{a^8}$.

すなわち

$$A_{17}=A_9B_8-A_1$$

である．

ここで，

$$\begin{aligned}\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)^2&=a^8+2a^4\cdot\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^8}\\&=a^8+\frac{1}{a^8}+2\end{aligned}$$

より，

$${B_4}^2=B_8+2$$ ☜ $B_4=a^4+\frac{1}{a^4}$, $B_8=a^8+\frac{1}{a^8}$.

すなわち

$$\begin{aligned}B_8&={B_4}^2-2\\&=7^2-2\\&=47\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}A_{17}&=A_9B_8-A_1\\&=76\cdot47-1\\&=\boxed{3571}\end{aligned}$$

である．

旧数学Ⅰ・旧数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{\sqrt{アイ}+\sqrt{ウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{オカ}-\sqrt{キ}}{ク}$	$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$	3	
	ケ	2	4	
	コ	2	3	
	サ	2	2	
	シ	1	2	
	ス，セ	1，5(※)	3	
第1問 自己採点小計			(20)	
第2問	アa	$2a$	2	
	イa^2－ウa－エ	$2a^2-2a-4$	2	
	オカ＜a＜キ	$-1<a<2$	4	
	ク	6	4	
	$\dfrac{ケコ}{サ}$	$\dfrac{-1}{4}$	4	
	$\dfrac{シス}{セ}$	$\dfrac{-2}{3}$	4	
	$\dfrac{ソ\pm\sqrt{タ}}{チ}$	$\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$	5	
第2問 自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	$\dfrac{ア}{イ}$	$\dfrac{7}{8}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{ウエ}}{オ}$	$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$	3	
	$\dfrac{カ\sqrt{キク}}{ケ}$	$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$	3	
	$\dfrac{コ\sqrt{サシ}}{スセ}$	$\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$	3	
	$\dfrac{ソタチ}{ツテ}$	$\dfrac{-11}{16}$	3	
	$\dfrac{ト}{ナ}$	$\dfrac{5}{4}$	4	
	$\dfrac{ニ}{ヌ}$	$\dfrac{3}{2}$	3	
	$\dfrac{ネ}{ノ}$	$\dfrac{7}{4}$	4	
	$\dfrac{\sqrt{ハヒ}}{フヘ}$	$\dfrac{\sqrt{15}}{16}$	4	
第3問 自己採点小計			(30)	
第4問	ア	5	2	
	イ	2	2	
	ウ	9	4	
	$\dfrac{エ}{オカ}$	$\dfrac{7}{36}$	4	
	$\dfrac{キク}{ケコ}$	$\dfrac{55}{18}$	4	
	サシ	30	4	
	$\dfrac{ス}{セ}$	$\dfrac{5}{8}$	5	
第4問 自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

(※) ス，セは5，1でもよい．

第1問　数と式，集合・論理

〔1〕 2次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

不等式 $\dfrac{1}{\alpha}<x<\alpha$ を満たす整数 x は $\boxed{\text{ケ}}$ 個である．

〔2〕 k を整数の定数とする．集合 A，B，C を

$A=\{x \mid x=(n-k)n(n+k)$，n は整数$\}$

$B=\{x \mid x=2n$，n は整数$\}$

$C=\{x \mid x=3n$，n は整数$\}$

とする．

(1) $k=1$ とする．

整数 x が A に属することは，整数 x が $B\cap C$ に属するための $\boxed{\text{コ}}$．

$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 命題「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」と命題「整数 x が A に属するならば整数 x は C に属する」について

$k=2$ とするとき $\boxed{\text{サ}}$．

$k=3$ とするとき $\boxed{\text{シ}}$．

$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ 「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」と「整数 x が A に属するならば整数 x は C に属する」はともに真である
① 「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」は真であり，「整数 x が A に属するならば整数 x は C に属する」は偽である
② 「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」は偽であり，「整数 x が A に属するならば整数 x は C に属する」は真である
③ 「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」と「整数 x が A に属するならば整数

x は C に属する」はともに偽である

(3) 命題「整数 x が A に属するならば整数 x は $B \cap C$ に属する」が真であるとき，k を 6 で割った余りは $\boxed{\text{ス}}$ または $\boxed{\text{セ}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ス}}$ と $\boxed{\text{セ}}$ は解答の順序を問わない．

【解説】

問題

［1］

2 次方程式 $x^2-\sqrt{10}x+2=0$ の解は，

$$x=\frac{-(-\sqrt{10})\pm\sqrt{(-\sqrt{10})^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}$$

☜ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数)の解は，
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから，

$$\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{10}}+\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}$$

であり，

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})}$$

☜ 分母を有理化するために，分母，分子に $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ を掛けた．

$$=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{10}}-\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$$

である．

これより，不等式 $\frac{1}{\alpha}<x<\alpha$ は，

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}<x<\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} \qquad \cdots①$$

である．

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ と $3<\sqrt{10}<4$ より，

☜ $1<2<4$，$9<10<16$ による．

$$3-2<\sqrt{10}-\sqrt{2}<4-1,\quad 3+1<\sqrt{10}+\sqrt{2}<4+2$$

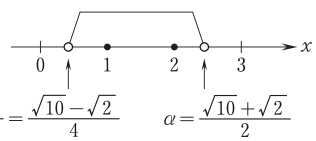
☜ $1<\sqrt{2}<2$ より，$-2<-\sqrt{2}<-1$.

であり，

$$(0<)\ \frac{1}{4}<\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}<\frac{3}{4}\ (<1),\quad 2<\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}<3$$

であるから，① を満たす整数 x は，

☜



1，2

の $\boxed{2}$ 個である．

［2］ **問題**

⑴ $k=1$ のとき，

$$A=\{x \mid x=(n-1)n(n+1),\ n\text{ は整数}\}$$

である．

また，

$$B\cap C=\{x \mid x=6n,\ n\text{ は整数}\}$$

である．

$x=(n-1)n(n+1)$（n は整数）について考える．

$n-1$，n は隣接する 2 つの整数であるから，いずれか一方は 2 の倍数である．

☜ n，$n+1$ についても同様にいずれか一方は 2 の倍数である．

$n-1$，n，$n+1$ は隣接する 3 つの整数であるから，いずれか 1 つは 3 の倍数である．

よって，

$$\text{積 }(n-1)n(n+1)\text{ は 6 の倍数} \qquad \cdots(*)$$

であり，「整数 x が A に属するならば整数 x は $B\cap C$ に属する」は真である．

逆に，$x=12$ は $B\cap C$ に属するが，$(n-1)n(n+1)$（n は整数）の形で表すことはできないから，A には属さない．よって，「整数 x が $B\cap C$ に属するならば整数 x は A に属する」は偽である．

☜ $x=12$ は反例．

よって，整数 x が A に属することは，整数 x が $B\cap C$ に属するための十分条件であるが，必要条件ではないので，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

⑵ $k=2$ のとき，

$$A=\{x \mid x=(n-2)n(n+2),\ n\text{ は整数}\}$$

である．

整数 x が A に属するとき，整数 x が B に属するか属さないかを考える．

$$n-(n-2)=2,\quad (n+2)-n=2$$

より，$n-2$，n，$n+2$ の偶奇は一致するから，n が奇数のとき x は奇数となり，x は B に属さない．

よって，「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」は偽である．

次に，整数 x が A に属するとき，整数 x が C に属するか属さないかを考える．

$n=3\ell$（ℓ は整数）のとき，

$$x=(3\ell-2)3\ell(3\ell+2)$$

であるから，x は C に属する．

☜ 整数 n は，
$n=3\ell$，$3\ell+1$，$3\ell+2$ （ℓ は整数）
のいずれかの形で表すことができる．

$n=3\ell+1$（ℓ は整数）のとき，

$$x=(3\ell-1)(3\ell+1)(3\ell+3)$$
$$=3(3\ell-1)(3\ell+1)(\ell+1)$$
であるから，x は C に属する．

$n=3\ell+2$（ℓ は整数）のとき，
$$x=3\ell(3\ell+2)(3\ell+4)$$
であるから，x は C に属する．

これより，「整数 x が A に属するならば整数 x は C に属する」は真である．

よって，$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

$k=3$ のとき，
$$A=\{x \mid x=(n-3)n(n+3),\ n \text{ は整数}\}$$
である．

整数 x が A に属するとき，整数 x が B に属するか属さないかを考える．

$n=2\ell$（ℓ は整数）のとき，
$$x=(2\ell-3)2\ell(2\ell+3)$$
であるから，x は B に属する．

☜ 整数 n は，
$$n=2\ell,\ 2\ell+1 \quad (\ell \text{ は整数})$$
のいずれかの形で表すことができる．

$n=2\ell+1$（ℓ は整数）のとき，
$$x=(2\ell-2)(2\ell+1)(2\ell+4)$$
$$=2(\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+4)$$
であるから，x は B に属する．

これより，「整数 x が A に属するならば整数 x は B に属する」は真である．

次に，整数 x が A に属するとき，整数 x が C に属するか属さないかを考える．
$$n-(n-3)=3,\quad (n+3)-n=3$$
より，$n-3$，n，$n+3$ を 3 で割った余りは一致するから，n が 3 の倍数でないとき x は 3 の倍数ではなく，x は C に属さない．

よって，「整数 x が A に属するならば整数 x は C に属する」は偽である．

したがって，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(3) $$n-(n-k)=k,\ (n+k)-n=k.$$

(i) k が偶数のとき，$n-k$，n，$n+k$ の偶奇は一致するから，n が奇数のとき x は奇数となり，x は B に属さず，$B\cap C$ にも属さない．

(ii) k が 3 の倍数のとき，$n-k$，n，$n+k$ を 3 で割った余りは一致するから，n が 3 の倍数でないとき x は 3 の倍数ではなく，x は C に属さず，$B\cap C$ にも属さない．

(i)，(ii) より，k が偶数でも 3 の倍数でもないとき，すなわち m を整数として，

$$k=6m+1,\ 6m+5$$

と表されるときを調べればよい．

☜ 整数 k は，整数 m を用いて，

$k=6m$，$6m+1$，$6m+2$，$6m+3$，$6m+4$，$6m+5$

と表すことができる．このうち，

$6m$，$6m+2$，$6m+4$ は偶数，

$6m$，$6m+3$ は 3 の倍数

であり，k が偶数でも 3 の倍数でもないとき，

$k=6m+1$，$6m+5$

と表せる．

$k=6m+1$（m は整数）のとき，

$$\begin{aligned} x&=(n-k)n(n+k)\\ &=n^3-nk^2\\ &=n^3-n(6m+1)^2\\ &=n^3-n(36m^2+12m+1)\\ &=n^3-n-n(36m^2+12m)\\ &=(n-1)n(n+1)-6n(6m^2+2m) \end{aligned}$$

であることと，(*) により，x は 6 の倍数であるから，x は $B\cap C$ に属する．

☜ 積 $(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数．…(*)

$k=6m+5$（m は整数）のとき，

$$\begin{aligned} x&=n^3-nk^2\\ &=n^3-n(6m+5)^2\\ &=n^3-n(36m^2+60m+25)\\ &=n^3-n-n(36m^2+60m+24)\\ &=(n-1)n(n+1)-6n(6m^2+10m+4) \end{aligned}$$

であることと，(*) により，x は 6 の倍数であるから，x は $B\cap C$ に属する．

以上より，「整数 x が A に属するならば整数 x は $B\cap C$ に属する」が真であるとき，k を 6 で割った余りは $\boxed{1}$ または $\boxed{5}$ である．

第2問　2次関数

a を実数とし，x の2次関数

$$y=x^2-4ax+6a^2-2a-4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

関数①のグラフを G とする．

G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}a,\ \boxed{\text{イ}}a^2-\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1)　G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{オカ}}<a<\boxed{\text{キ}}$$

であり，$a=\boxed{\text{オカ}}$ のときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{キ}}$ のときの G に一致する．

(2)　$-1\leqq x\leqq 0$ における関数①の最大値を M とする．

G と y 軸との交点の y 座標を Y とすると，$M=Y$ となるような a の値の範囲は

$$a\leqq\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であり，このとき，$M>0$ となるような a の値の範囲は

$$a<\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

(3)　G が x 軸と2点A，Bで交わり，線分ABの長さが2であるとき

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である．

【解説】　問題

$$f(x)=x^2-4ax+6a^2-2a-4$$

とする．

$$f(x)=(x-2a)^2+2a^2-2a-4 \quad \cdots ①'$$

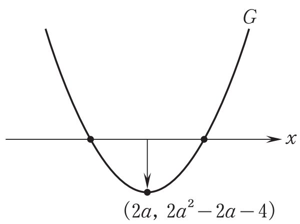
であるから，G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2}a,\ \boxed{2}a^2-\boxed{2}a-\boxed{4}\right) \quad \cdots ②$$

である．

放物線 $y=p(x-q)^2+r$ の頂点の座標は，

$(q,\ r)$.



(1)　G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は，

$$2a^2-2a-4<0$$

すなわち

$$2(a+1)(a-2)<0$$

より，

$$\boxed{-1} < a < \boxed{2}$$

である．

　また，$a=-1$ のときの G を G_1 とすると，G_1 の頂点の座標は，② より，

$$(-2,\ 0)$$

であり，$a=2$ のときの G を G_2 とすると，G_2 の頂点の座標は，② より，

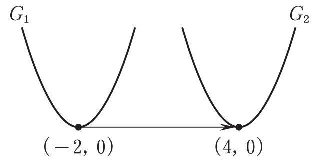
$$(4,\ 0)$$

である．

　よって，G_1 を x 軸方向に，

$$4-(-2)=\boxed{6}$$

だけ平行移動すれば，G_2 と一致する．

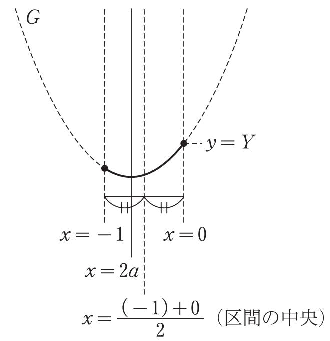


(2)　$M=Y$ となるような a の値の範囲は，

$$2a \leqq \frac{(-1)+0}{2}$$

$$a \leqq \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}} \qquad \cdots ③$$

である．



　このとき，$M>0$ となるような a の値の範囲は，

$$M=Y=f(0)=6a^2-2a-4>0$$

$$2(3a+2)(a-1)>0$$

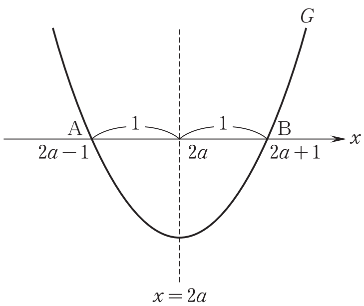
$$a<-\frac{2}{3},\quad 1<a$$

および ③ より，

$$a<\frac{\boxed{-2}}{\boxed{3}}$$

である．

(3)



　G が x 軸と 2 点 A，B で交わり，線分 AB の長さが 2 となる条件は，G が点 $(2a+1,\ 0)$ を通ることであるから，①′ より，

$$0=f(2a+1)$$

$$0=\{(2a+1)-2a\}^2+2a^2-2a-4$$

点 $(2a-1,\ 0)$ を通ることから，

$$0=f(2a-1)$$

を考えてもよい．

すなわち

$$2a^2-2a-3=0$$

であり，

$$a=\frac{\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

である．

☜　2 次方程式

$$px^2+2qx+r=0$$

（p，q，r は実数の定数）

の解は，

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-pr}}{p}.$$

第 3 問　図形と計量，平面図形

△ABC において AB＝4，BC＝2，CA＝3 とする．このとき

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

また，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である．

点 D を △ABC の外接円の点 B を含まない弧 CA 上に，AD : DC＝5 : 8 であるようにとる．このとき

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\frac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$$

であり

$$\mathrm{AD}=\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．

2 直線 AD，BC の交点を E とする．このとき

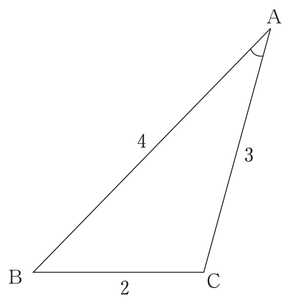
$$\mathrm{CE}=\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}},\quad \mathrm{DE}=\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

である．

△ABE の内接円の中心を I，2 直線 AC，BD の交点を F とするとき，△EIF の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ である．

【解説】

問題



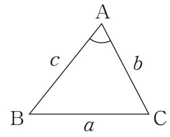
余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}$$

$$=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}$$

$$=\frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$$

余弦定理



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

であるから，

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{8}}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

である．

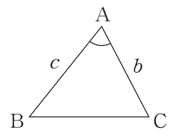
このとき，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{4}}$$

三角形の面積



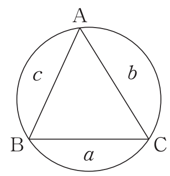
$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

である．

$\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R$$

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

（R は $\triangle$ABC の外接円の半径）

すなわち

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=2R$$

であるから，

$$R=\frac{\boxed{8}\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{15}}$$

である．

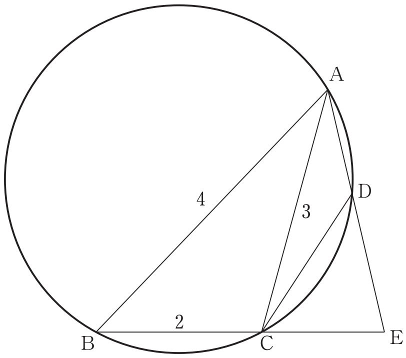
また，余弦定理より，

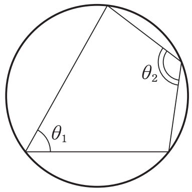
$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

$$=\frac{4^2+2^2-3^2}{2\cdot4\cdot2}$$

$$=\frac{11}{16}$$

である．





四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$$
$$=-\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{\boxed{-11}}{\boxed{16}}$$

である．

☜ 円に内接する四角形の対角の和は180° であるから，

$$\theta_2=180^\circ-\theta_1.$$

☜ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.$

AD : DC＝5 : 8 より，AD＝$5k$，DC＝$8k$ $(k>0)$とおき，△ACD に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

すなわち

$$3^2=(5k)^2+(8k)^2-2\cdot5k\cdot8k\cdot\left(-\frac{11}{16}\right)$$

であり，これを整理すると，

$$9=144k^2$$

となり，$k>0$ より，

$$k=\frac{1}{4}$$

である．

よって，

$$\mathrm{AD}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{4}},\quad \mathrm{DC}=2$$

である．

CE＝x，DE＝y とおくと，△CED∽△AEB であるから，

☜ 四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{DCE}=\angle\mathrm{BAE}$$

であり，さらに，

$$\angle\mathrm{CED}=\angle\mathrm{AEB}\ （共通）$$

であるから，

$$\triangle\mathrm{CED}\backsim\triangle\mathrm{AEB}.$$

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EB}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}$$

すなわち

$$\frac{x}{y+\frac{5}{4}}=\frac{y}{x+2}=\frac{2}{4}$$

であり，これより，

$$\begin{cases} 2x = y + \dfrac{5}{4}, \\ 2y = x + 2 \end{cases}$$

である．

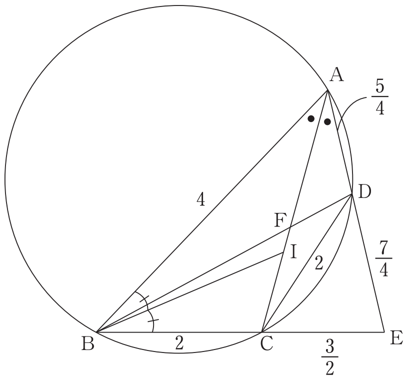
これを解くと，

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{7}{4}$$

であるから，

$$\mathrm{CE} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}, \quad \mathrm{DE} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}$$

である．



△ABC の外接円において，BC＝DC (＝2) より，対応する弧に対する円周角を考えて，

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{DAC}$$

であるから，AC は ∠BAE の二等分線である．

さらに，I は △ABE の内接円の中心であるから，I は線分 AC 上にある．

三角形の内接円の中心は内角の二等分線の交点である．

また，BI は ∠ABC の二等分線であるから，

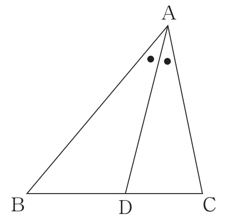
$$\begin{aligned} \mathrm{AI} : \mathrm{IC} &= \mathrm{BA} : \mathrm{BC} \\ &= 2 : 1 \end{aligned}$$

であり，

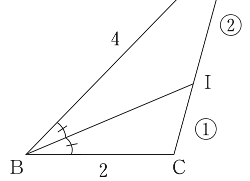
$$\begin{aligned} \mathrm{AI} &= \frac{2}{2+1}\mathrm{AC} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である．

角の二等分線の性質



AB : AC＝BD : DC.



四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle \mathrm{BCD} = 180° - \angle \mathrm{BAD}$$

であり，

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{AF}}=\frac{(\triangle \mathrm{BCD}\text{ の面積})}{(\triangle \mathrm{ABD}\text{ の面積})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin(180^\circ-\angle \mathrm{BAD})}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle \mathrm{BAD}}$$

$$=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{BAD}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle \mathrm{BAD}}$$

$$=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{2\cdot 2}{4\cdot\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{4}{5}$$

である．

よって，

$$\mathrm{AF}=\frac{5}{4+5}\mathrm{AC}$$

$$=\frac{5}{9}\cdot 3$$

$$=\frac{5}{3}$$

であるから，

$$\mathrm{FI}=\mathrm{AI}-\mathrm{AF}$$

$$=2-\frac{5}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

である．

したがって，

$$(\triangle \mathrm{EIF}\text{ の面積})=\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{AC}}\cdot(\triangle \mathrm{AEC}\text{ の面積})$$

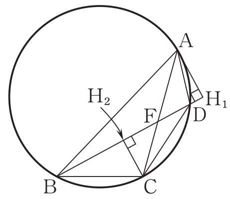
$$=\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}\cdot(\triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積})$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$$

である．

☜



点 A，C から直線 BD に下ろした垂線と直線 BD の交点をそれぞれ H_1，H_2 とする．

$\triangle \mathrm{AFH}_1 \backsim \triangle \mathrm{CFH}_2$ であるから，

$$\mathrm{AH}_1:\mathrm{CH}_2=\mathrm{AF}:\mathrm{CF}$$

すなわち

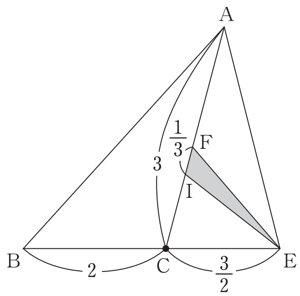
$$\frac{\mathrm{CH}_2}{\mathrm{AH}_1}=\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{AF}}$$

であり，これを用いて，

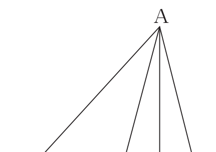
$$\frac{(\triangle \mathrm{BCD}\text{ の面積})}{(\triangle \mathrm{ABD}\text{ の面積})}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}\cdot\mathrm{CH}_2}{\cancel{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}\cdot\mathrm{AH}_1}$$

$$=\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{AF}}.$$

☜



☜



$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{AEC}$ について，辺 BC と辺 CE を底辺とみると高さは共通であるから，面積の比は底辺の長さの比と等しい．

第 4 問　場合の数と確率

1 個のさいころを繰り返し投げ，次の規則に従って袋に球を入れる．ただし，初めは袋に球は入っていない．

1 回目は次のようにする．

- 出た目の数が 1，2，3 のときは袋に 1 個の球を入れる
- 出た目の数が 4，5 のときは袋に 2 個の球を入れる
- 出た目の数が 6 のときは袋に 3 個の球を入れる

2 回目以降は次のようにする．

- 袋に入っている球の個数が 3 個のときは出た目の数によらず袋に球を入れない
- 袋に入っている球の個数が 3 個でないときは 1 回目の規則と同様に袋に球を入れる

(1)　さいころを 2 回投げた後に袋に入っている球の個数について

最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\boxed{\text{ア}}$ 個となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．

2 個となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．

4 個となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

さいころを 2 回投げた後に袋に入っている球の個数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

(2)　さいころを 3 回投げた後に袋に入っている球の個数について

5 個となるさいころの目の出方は $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある．

3 個となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である．

【解説】　問題

(1)　1 個のさいころを 1 回投げたとき，

事象 A：1，2，3 の目が出る（3 通り）
事象 B：4，5 の目が出る（2 通り）
事象 C：6 の目が出る（1 通り）

とする．

また，1 個のさいころを 2 回投げた後，袋に入っている球の個数を X とする．

1 個のさいころを 2 回投げた後，事象の起こり方と場合の数，および X の値は次表のようになる．

	事象の起こり方	場合の数	X
(i)	$A \to A$	$3 \cdot 3$ 通り	$1+1=2$
(ii)	$A \to B$	$3 \cdot 2$ 通り	$1+2=3$
(iii)	$A \to C$	$3 \cdot 1$ 通り	$1+3=4$
(iv)	$B \to A$	$2 \cdot 3$ 通り	$2+1=3$
(v)	$B \to B$	$2 \cdot 2$ 通り	$2+2=4$
(vi)	$B \to C$	$2 \cdot 1$ 通り	$2+3=5$
(vii)	$C \to \triangle$	$1 \cdot 6$ 通り	$3+0=3$

（△ は A, B, C のいずれか）

☜ A, B, C のとき，それぞれ 1 個，2 個，3 個の球を袋に入れる．

☜ 1 回目が C のときは，2 回目の出た目の数によらず袋に球を入れない．

よって，1 個のさいころを 2 回投げた後，X の最大値は，

$$\boxed{5}$$

であり，このときのさいころの目の出方は，(vi) より，

$$2 \cdot 1 = \boxed{2}\ (\text{通り}) \qquad \cdots ①$$

ある．

また，1 個のさいころを 2 回投げた後，$X=2$ となるさいころの目の出方は，(i) より，

$$3 \cdot 3 = \boxed{9}\ (\text{通り}) \qquad \cdots ②$$

ある．

1 個のさいころを 2 回投げたとき，さいころの目の出方の総数は，$6^2=36$（通り）であり，これらはすべて同様に確からしい．

1 個のさいころを 2 回投げた後，$X=4$ となるさいころの目の出方は，(iii) と (v) より，

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7\ (\text{通り})$$

あるから，$X=4$ となる確率は，

$$\frac{\boxed{7}}{\boxed{36}} \qquad \cdots ③$$

である．

$X=2$ となる確率は，② より，$\dfrac{9}{36}$ である．

$X=3$ となる確率は，(ii)，(iv)，(vii) より，$\dfrac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6}{36} = \dfrac{18}{36}$

である．

$X=4$ となる確率は，③ より，$\dfrac{7}{36}$ である．

$X=5$ となる確率は，① より，$\dfrac{2}{36}$ である．

X	2	3	4	5	計
確率	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

　したがって，袋に入っている球の個数の期待値は，

$$2\times\frac{9}{36}+3\times\frac{18}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{\boxed{55}}{\boxed{18}}$$

である．

期待値
　試行によって定まる値 X のとり得る値が，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

であり，それぞれの起こる確率が，

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$
$$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$$

であるとき，期待値 E は，

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

(2)　1 個のさいころを 3 回投げた後，袋に入っている球が 5 個となるのは，

$$A\to A\to C,\quad A\to C\to A,\quad B\to B\to A$$

のときであり，このようなさいころの目の出方は，

$$3\cdot3\cdot1+3\cdot1\cdot3+2\cdot2\cdot3=\boxed{30}\ (\text{通り})$$

ある．

☞　(1) の (i)，(iii)，(v) に続けて考えるとよい．

　また，1 個のさいころを 3 回投げた後，袋に入っている球が 3 個となるのは，

$$A\to A\to A,\quad A\to B\to\triangle,\quad B\to A\to\triangle,\quad C\to\triangle\to\triangle$$

のときである．

☞　(1) の (i)，(ii)，(iv)，(vii) に続けて考えるとよい．

　1 個のさいころを 3 回投げたとき，さいころの目の出方の総数は，6^3 通りであり，これらはすべて同様に確からしいから，求める確率は，

$$\frac{3\cdot3\cdot3+3\cdot2\cdot6+2\cdot3\cdot6+1\cdot6\cdot6}{6^3}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}$$

である．

旧数学Ⅱ・旧数学B

【解答・採点基準】

(100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	2，1	2	
	ウ，エ，オ	2，1，1	2	
	カ	0	1	
	$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{2}{3}$	1	
	$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}$	$\dfrac{4}{3}$	1	
	$\dfrac{\sqrt{\text{サシ}}}{\text{ス}}$	$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$	2	
	$\dfrac{\text{セソ}}{\text{タ}}$	$\dfrac{-9}{8}$	2	
	チ	0	2	
	ツ	4	3	
	テ	1	2	
	ト，ナ	5，6	2	
	ニ，ヌ，ネ	1，2，3	3	
	ノハ	−2	2	
	$\dfrac{\text{ヒ}}{\text{フ}}$	$\dfrac{9}{2}$	2	
	ヘ	2	3	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア，イ	−，4	2	
	ウ	0	1	
	エオ	−3	2	
	カ	4	1	
	$\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{23}{3}$	2	
	コ	6	3	
	サ	3	2	
	シ	3	2	
	ス，$\dfrac{\text{セソ}}{\text{タ}}$	1，$\dfrac{-4}{3}$	3	
	$\dfrac{\text{チツ}}{\text{テ}}$	$\dfrac{13}{3}$	2	
	$\dfrac{\text{トナ}}{\text{ニ}}$，ヌ，ネ	$\dfrac{-1}{3}$，5，6	4	
	ノ	3	3	
	ハヒ，フ	20，7	3	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア	2	2	
	イ	3	2	
	ウ	8	3	
	エ，オ，カ	3，2，1	3	
	キ，ク	5，4	2	
	$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}$，$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{3}{2}$	2	
	スセソ	106	3	
	タチツテト	25513	3	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\dfrac{ア}{イ}$	$\dfrac{1}{2}$	2	
	$\dfrac{ウ}{エ}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	$\dfrac{オ}{カ}$, $\dfrac{キ}{ク}$	$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3}$	2	
	ケ	1	1	
	コ	1	1	
	$\dfrac{サ}{シ}$, $\dfrac{ス}{セ}$	$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{3}$	2	
	$\dfrac{ソ}{タ}$	$\dfrac{1}{6}$	3	
	チ	2	2	
	$\dfrac{ツ}{テ}$, $\dfrac{ト}{ナ}$	$\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{4}{9}$	3	
	$\dfrac{ニ\sqrt{ヌ}}{ネ}$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
第5問	ア	6	1	
	イ	7	1	
	ウ	9	1	
	エ	1	1	
	オ	0	1	
	カ	6	2	
	キ	6	2	
	ク	7	2	
	ケ.コ	2.0	2	
	サ.シ	1.6	2	
	スセ.ソ	−0.9	2	
	タ	2	3	
第5問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第6問	ア・・(イ，ウ)	1・・(0，0)	1	
	エ・・(オ，カ)	2・・(1，0)	1	
	キ・・(ク，ケ)	3・・(0，1)	1	
	コ・・(サ，シ)	4・・(2，0)	1	
	スセ・・(ソ，タ)	21・・(0，5)	3	
	チ	4	3	
	ツ	6	3	
	テト・・(ナ，ニ)	25・・(0，4)	3	
	(ヌネ，ノ)	(11，1)	4	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第1問　三角関数，指数関数・対数関数

問題

数学Ⅱ・数学B 第1問 に同じである．

問題

第2問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学B 第2問 に同じである．

第3問　数列

問題

数学Ⅱ・数学B 第3問 に同じである．

第4問　ベクトル

問題

数学Ⅱ・数学B 第4問 に同じである．

第5問　統　計

10人の生徒A，B，……，Jの二つのテストに関する得点をそれぞれ変量x，yとし，それを記録したものが［資料Ⅰ］である．変量yの平均値は7点である．また，変量xの度数分布表が［資料Ⅱ］である．

ただし，テストの得点は0以上10以下の整数とする．

［資料Ⅰ］

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x(点)	a	a	4	a	b	3	b	a	b	8
y(点)	8	6	8	8	6	c	6	5	6	8

［資料Ⅱ］

x（点）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
度数(人)	0	0	0	1	d	e	4	3	1	0	0

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．なお，必要なら，$\sqrt{5}=2.24$ として計算せよ．

⑴　a，b，c，d，eの値を求めると

$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，　$b=$ $\boxed{\text{イ}}$，　$c=$ $\boxed{\text{ウ}}$，　$d=$ $\boxed{\text{エ}}$，　$e=$ $\boxed{\text{オ}}$

となる．

また，変量xの平均値は $\boxed{\text{カ}}$ 点である．

⑵　変量xの最頻値(モード)は $\boxed{\text{キ}}$ 点，変量yの中央値(メジアン)は $\boxed{\text{ク}}$ 点である．

また，変量xの分散${s_x}^2$は $\boxed{\text{ケ}}$.$\boxed{\text{コ}}$ であり，変量yの分散${s_y}^2$は $\boxed{\text{サ}}$.$\boxed{\text{シ}}$ である．

⑶　変量xと変量yの共分散は $\boxed{\text{スセ}}$.$\boxed{\text{ソ}}$ であり，相関係数に最も近い値は $\boxed{\text{タ}}$ である．

$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ．

⓪ -1.5　① -0.9　② -0.5　③ 0.0
④ 0.5　⑤ 0.9　⑥ 1.5

【解説】　問題

(1)　［資料Ⅱ］から，変量 x が 6 である生徒が 4 人，7 である生徒が 3 人いることがわかる．これと［資料Ⅰ］をくらべて

$$a=\boxed{6},\quad b=\boxed{7}$$

であることがわかる．

一方，［資料Ⅱ］より

$$1+d+e+4+3+1=10$$

☜ テストを受けた生徒は 10 人いる．

が成り立つから

$$d+e=1.$$

よって，d，e の一方は 1，他方は 0，すなわち，変量 x が 4 または 5 である生徒が 1 人だけいることがわかる．

［資料Ⅰ］から，変量 x が 4 である生徒が 1 人いることがわかるので

$$d=\boxed{1},\quad e=\boxed{0}.$$

また，y の平均値 $\overline{y}$ が 7 点であることと［資料Ⅰ］より

$$\overline{y}=\frac{8+6+8+8+6+c+6+5+6+8}{10}=7$$

☜ **平均値**
変量 x のとる値を
$$x_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$
とすると，x の平均値 $\overline{x}$ は
$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k.$$

が成り立つから

$$c=\boxed{9}.$$

以上をもとに，［資料Ⅰ］，x，y の度数分布表を改めてかくと次のようになる．

［資料Ⅰ］

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x(点)	6	6	4	6	7	3	7	6	7	8
y(点)	8	6	8	8	6	9	6	5	6	8

［x の度数分布表］

x（点）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
度数(人)	0	0	0	1	1	0	4	3	1	0	0

［y の度数分布表］

y（点）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
度数(人)	0	0	0	0	0	1	4	0	4	1	0

［x の度数分布表］より，x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{3\cdot1+4\cdot1+6\cdot4+7\cdot3+8\cdot1}{10}=\boxed{6}$$

☜ 変量 x のとる値 x_1，x_2，$\cdots$，x_n の度数がそれぞれ f_1，f_2，$\cdots$，f_n であり，度数の合計が N のとき，x の平均値 $\overline{x}$ は
$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_kf_k.$$
［資料Ⅰ］より x の平均値を次のように求めてもよい．
$$\frac{6+6+4+6+7+3+7+6+7+8}{10}=6.$$

である．

(2) ［x の度数分布表］より，x の最頻値(モード)は $\boxed{6}$ 点である．

［y の度数分布表］より，y の中央値(メジアン)は

$\dfrac{6+8}{2}=\boxed{7}$ 点である．

x の分散 $s_x{}^2$，y の分散 $s_y{}^2$，x と y の共分散を求めるために，各生徒の得点の偏差をまとめると次のようになる．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$x-\overline{x}$	0	0	-2	0	1	-3	1	0	1	2
$y-\overline{y}$	1	-1	1	1	-1	2	-1	-2	-1	1
$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	0	0	-2	0	-1	-6	-1	0	-1	2

x の分散 $s_x{}^2$ は

$$s_x{}^2=\frac{(-2)^2+1^2+(-3)^2+1^2+1^2+2^2}{10}$$
$$=\boxed{2}.\boxed{0}$$

であり，y の分散 $s_y{}^2$ は

$$s_y{}^2=\frac{1^2+(-1)^2+1^2+1^2+(-1)^2+2^2+(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2}{10}$$
$$=\boxed{1}.\boxed{6}$$

である．

(3) x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy}=\frac{-2-1-6-1-1+2}{10}$$
$$=\boxed{-0}.\boxed{9}$$

であり，相関係数を r とすると

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$
$$=\frac{-0.9}{\sqrt{2}\sqrt{1.6}}$$
$$=-\frac{9\sqrt{5}}{40}.$$

$\sqrt{5}=2.24$ として計算すると r はおよそ -0.50 である．

よって，$\boxed{タ}$ は $\boxed{②}$ である．

最頻値(モード)

資料を度数分布表にまとめたとき，度数が最も大きい階級の階級値を最頻値(モード)という．

中央値(メジアン)

資料を大きさの順に並べたとき，その中央の値を中央値(メジアン)という．資料の個数が偶数のときは，中央に並ぶ二つの資料の平均値を中央値とする．

$\overline{x}=6$，$\overline{y}=7$ である．

分散

変量 x のとる値を

x_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$

とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，変量 x の分散 $s_x{}^2$ は

$$s_x{}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2.$$

共分散

変量 x と変量 y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}).$$

相関係数

変量 x と変量 y の相関係数を r とすると

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}.$$

ただし，s_x，s_y はそれぞれ変量 x，y の分散の正の平方根（標準偏差という）であり，s_{xy} は変量 x と変量 y の共分散である．

$r=-\dfrac{9\times 2.24}{40}=-0.504.$

第６問　コンピュータ

座標平面上の点で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．

いま，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で表される領域内の格子点に，原点Oから順にある規則で番号をつけていくプログラムを，次のように考えた．

〔プログラム１〕

```
100 LET  L=0
110 LET  N=1
120 LET  X=L
130 LET  Y=0
140 PRINT  N;"・・(";X;",";Y;")"
150 IF  L=0  THEN  GOTO  250
160 LET  DX=-1
170 LET  DY=1
180 FOR  K=1  TO  L
190    LET  N=N+1
200    LET  X=X+DX
210    LET  Y=Y+DY
220    PRINT N;"・・(";X;",";Y;")"
230 NEXT  K
240 IF N>=20 THEN GOTO 280
250 LET  L=L+1
260 LET  N=N+1
270 GOTO 120
280 END
```

このプログラムを実行すると，何行かにわたって出力が得られるが，その最初の４行は

$\boxed{ア}$・・($\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$)

$\boxed{エ}$・・($\boxed{オ}$，$\boxed{カ}$)

$\boxed{キ}$・・($\boxed{ク}$，$\boxed{ケ}$)

$\boxed{コ}$・・($\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$)

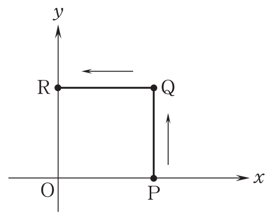
であり，最後に出力される行は

$\boxed{スセ}$・・($\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$)

である．

次にこのプログラムの一部を変更して，次のような規則で番号をつけるプログラムを作ることにする．

＜規則＞



右図のように，O を一つの頂点とし一辺の長さが自然数である正方形 OPQR の辺 PQ，QR 上の格子点を左回り(反時計回り)にたどりながら順に番号をつける．そして点 R に到達したら一辺の長さを 1 増やして同じ方法で格子点をたどりながら順に番号をつける．ただし，原点 O につける番号は 1 とする．すなわち

(0, 0)→(1, 0)→(1, 1)→(0, 1)→(2, 0)→(2, 1)→⋯

のようにたどりながら順に

1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 →⋯

と番号をつける．

そのためには，まず

```
155 FOR  A=1  TO  2
235 NEXT  A
```

の 2 行を新たに挿入し，さらに

辺 PQ 上(プログラムでは A=1 のとき)では x 座標の増分が 0，y 座標の増分が 1

辺 QR 上(プログラムでは A=2 のとき)では x 座標の増分が -1，y 座標の増分が 0

となるように 160 行と 170 行を次のように変更すればよい．

```
160 LET  DX= チ
170 LET  DY= ツ
```

チ ，ツ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを選んでもよい．

⓪ A-1　① A　② A+1　③ A+2
④ 1-A　⑤ -A　⑥ 2-A

正しく変更されたプログラムを実行すると最後に出力される行は

テト・・(ナ , ニ)

である．

さらに 240 行を

```
240 IF N>=200 THEN GOTO 280
```

と変更して出力を増やしたとき，途中に

123・・(ヌネ , ノ)

が出力される．

【解説】

問題

［プログラム 1］を実行したとき，各変数の値の変化と出力をまとめると，下表のようになる．

L	K	N	X	Y	出　力
0		1	0	0	1・・(0, 0)
1		2	1	0	2・・(1, 0)
	1	3	0	1	3・・(0, 1)
2		4	2	0	4・・(2, 0)
	1	5	1	1	5・・(1, 1)
	2	6	0	2	6・・(0, 2)
3		7	3	0	7・・(3, 0)
	1	8	2	1	8・・(2, 1)
	2	9	1	2	9・・(1, 2)
	3	10	0	3	10・・(0, 3)

したがって，出力される最初の 4 行は

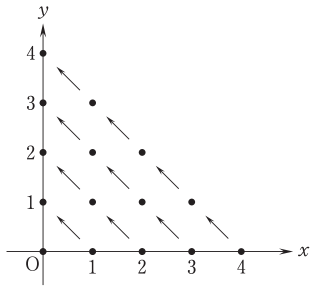
$\boxed{1}$・・($\boxed{0}$, $\boxed{0}$)
$\boxed{2}$・・($\boxed{1}$, $\boxed{0}$)
$\boxed{3}$・・($\boxed{0}$, $\boxed{1}$)
$\boxed{4}$・・($\boxed{2}$, $\boxed{0}$)

である．

このプログラムでは，右図のように

直線 $x+y=\ell$ ($\ell=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

上を点$(\ell,\ 0)$から点$(0,\ \ell)$まで格子点に順に番号をつけ，点$(0,\ \ell)$に到達したら，番号 N と 20 を比較して，20 未満なら ℓ の値を 1 増やし，20 以上なら終了する．



☜　N と 20 を比較するのは，180 行から 230 行のループが終わった後，すなわち線分 $x+y=\ell$ ($x\geqq 0,\ y\geqq 0$) 上のすべての格子点に番号をつけ終わった後である．

ここで，領域 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ 内の格子点は

直線 $x+y=0$ 上に 1 個，
直線 $x+y=1$ 上に 2 個，
直線 $x+y=2$ 上に 3 個，
⋮

ずつある．さらに

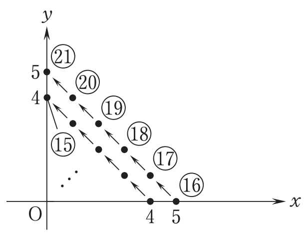
$$1+2+3+4+5=15$$
$$1+2+3+4+5+6=21$$

であり

$$15<20<21$$

が成り立つから，直線 $x+y=5$ 上の最後の格子点$(0,\ 5)$に番号

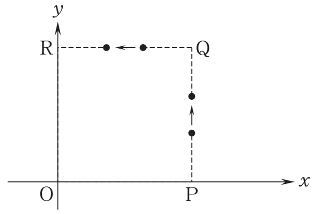
☜



21 をつけてプログラムは終了する．したがって，最後に出力される行は

$\boxed{21}$ ・・($\boxed{0}$, $\boxed{5}$)

である．



番号が 1 増えると，辺 PQ 上（A=1 のとき）では x 座標は変化せず，辺 QR 上（A=2 のとき）では x 座標は 1 減少する．

次に，プログラムを変更して，問題文中の<規則>にあるように番号をつけるためには，x 座標の増分 DX を

A=1 のとき DX=0，　A=2 のとき DX=-1

としたいのだから，160 行は

```
160 LET  DX=1-A
```

とすればよい．すなわち $\boxed{チ}$ は $\boxed{④}$ である．

一方，y 座標の増分 DY を

A=1 のとき DY=1，　A=2 のとき DY=0

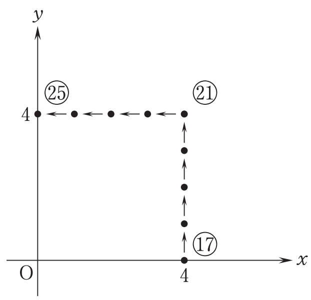
番号が 1 増えると，辺 PQ 上（A=1 のとき）では y 座標は 1 増加し，辺 QR 上（A=2 のとき）では y 座標は変化しない．

としたいのだから，170 行は

```
170 LET  DY=2-A
```

とすればよい．すなわち $\boxed{ツ}$ は $\boxed{⑥}$ である．

4 点 $(0,\ 0)$，$(\ell,\ 0)$，$(\ell,\ \ell)$，$(0,\ \ell)$ を頂点とする一辺の長さ ℓ の正方形の周および内部には，格子点は $(\ell+1)^2$ 個存在するから，変更されたプログラムを実行すると，一辺の長さ 4 の正方形の辺上で最後に番号をつける点 $(0,\ 4)$ に，番号 $5^2=25$ をつけて終了する．

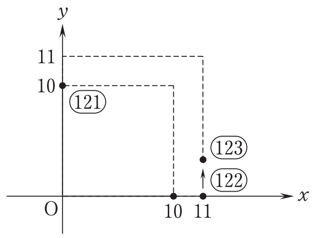


したがって，最後に出力される行は

$\boxed{25}$ ・・($\boxed{0}$, $\boxed{4}$)

である．

同様に，一辺の長さ 10 の正方形の辺上で，最後に番号をつける点 $(0,\ 10)$ に，番号 $11^2=121$ をつけた後，正方形の一辺の長さを 1 増やして，点 $(11,\ 0)$ に番号 122 を，その次の点 $(11,\ 1)$ に番号 123 をつけるから



123・・($\boxed{11}$, $\boxed{1}$)

が出力される．

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO