クラス		受験番号	
出席番号		氏　名	

2012年度

第1回 全統記述模試問題

数　学

（Ⅰ・ⅠA型　80分
ⅡA・ⅡB型　100分
ⅢB・ⅢC型　120分）

2012年５月実施

試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開かず，下記および本冊子裏表紙の注意事項をよく読むこと。

注　意　事　項

1．問題冊子は11ページである。

2．解答用紙は別冊になっている。(解答用紙冊子表紙の注意事項を熟読すること。)

3．本冊子に脱落や印刷不鮮明の箇所及び解答用紙の汚れ等があれば，試験監督者に申し出ること。

4．下表のような「問題選択型」が用意されているので，志望する大学・学部・学科の出題範囲・科目に合わせて，選択型を選んで解答すること。出題範囲に合わない型を選択した場合には，志望校に対する判定が正しく出ないことがあるので注意すること。

型	出　題　範　囲	問題ページ	解　答　用　紙
Ⅰ	数学Ⅰ	P．2～3	Ⅰ・ⅠA型１枚
ⅠA	数学Ⅰ，A		
ⅡA	数学Ⅰ，Ⅱ，A	P．4～7	ⅡA・ⅡB型２枚
ⅡB	数学Ⅰ，Ⅱ，A，B		
ⅢB	数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B	P．8～11	ⅢB・ⅢC型３枚
ⅢC	数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，C		

5．解答用紙は，選択する型によって異なる。必ず指定された解答用紙に正しく答えよ。**誤った番号の箇所に解答している場合は得点としないので注意すること。**

6．試験開始の合図で解答用紙冊子の数学の解答用紙を切り離し，下部の所定欄に 氏名(フリカナ，漢字)・在・卒高校名・クラス名・出席番号・受験番号(受験票の発行を受けている場合)を記入すること。また，選択問題がある場合は，上部の所定欄に 選択問題 を記入すること。

7．解答には，必ず黒色鉛筆を使用し，解答用紙の所定欄に記入すること。解答欄外に記入された解答部分は，採点対象外となる。

8．試験終了の合図で上記6.の事項を再度確認し，試験監督者の指示に従って解答用紙を提出すること。ただし，白紙の解答用紙は提出しないこと。

河合塾

Ⅰ・ⅠA 型の問題は次ページから始まる．

I・II A型

I型，II A型受験者は次の表に従って解答すること．

I 型	1，2 を必答．
II A 型	1，3 を必答．

1 【I・II A型共通　必須問題】（配点　60点） 解説

(1) $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とするとき，次の式の値を求めよ．

(i) ab　　(ii) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$　　(iii) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

(2) a を正の定数とし，2つの x の不等式

$$|x|<a, \qquad \cdots ①$$

$$x+1 \leqq 2x \leqq 6-x \qquad \cdots ②$$

がある．

(i) ① を解け．

(ii) ② を解け．

(iii) ①，② をともに満たす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ．

(3) x の方程式 $x^2-(a+1)x+a+4=0$ が重解をもつような実数 a の値と，そのときの重解を求めよ．

(4) $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=6$，$\angle\mathrm{BAC}=60°$ を満たす三角形ABCがある．

(i) 辺BCの長さを求めよ．

(ii) 三角形ABCの外接円の半径 R を求めよ．

Ⅰ・ⅠA型

2 【Ⅰ型　必須問題】（配点　40点）

解説

a を 0 以上の定数とする．O を原点とする座標平面上に，点 A(12, 0) と直線 $l: y=x+2a$ がある．

点 P は O を，点 Q は A を同時に出発し，

P は x 軸上を正の向きに毎秒 1 の速さで，

Q は x 軸上を負の向きに毎秒 2 の速さで

動くものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と l の交点を R とする．

Q が O に達するまで動くとき，次の問に答えよ．

(1)　2 点 P，Q が出発してから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq 6)$ の P，Q，R の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　$a=0$ のときの三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．また，そのときの Q の座標を求めよ．

(3)　三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．

3 【ⅠA型　必須問題】（配点　40点）

解説

1，2，3 と書かれた赤色のカードがそれぞれ 1 枚ずつ，4，5，6 と書かれた黄色のカードがそれぞれ 1 枚ずつ，7，8，9 と書かれた青色のカードがそれぞれ 1 枚ずつ，合計 9 枚のカードがある．

(1)　この 9 枚のカードから 4 枚を取り出して一列に並べる順列を考える．

(i)　順列は全部で何通りあるか．

(ii)　両端が同じ色，または両端が偶数になる順列は何通りあるか．

(2)　この 9 枚のカードから 4 枚を取り出して円形に並べる円順列を考える．

(i)　円順列は全部で何通りあるか．

(ii)　同じ色が隣り合わない円順列は何通りあるか．

ⅡA・ⅡB型

ⅡA型，ⅡB型受験者は次の表に従って解答すること．

ⅡA型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ より1題選択．
ⅡB型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より1題選択．

$\boxed{1}$ **【ⅡA・ⅡB型共通　必須問題】**（配点　50点）

解説

(1)　x の方程式 $x^2-(a+1)x+a+4=0$ が重解をもつような実数 a の値と，そのときの重解を求めよ．

(2)　$3\cos^2\theta-8\sin\theta=0$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，次の値を求めよ．

(i)　$\sin\theta$　　　　(ii)　$\sin 2\theta$

(3)　$a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$ とする．次の値を a，b を用いて表せ．

(i)　$\log_{10}12$　　　　(ii)　$\log_{10}15$

(4)　$\displaystyle\int_1^2(x^2+ax-2)\,dx=0$ を満たす実数 a の値を求めよ．

Ⅱ A・Ⅱ B型

2 【Ⅱ A・Ⅱ B型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

(1) $2x^2+3xy-2y^2-5x-10y$ を因数分解せよ．

(2) xy 平面上において不等式

$$2x^2+3xy-2y^2-5x-10y \leqq 0$$

で表される領域を D とする．

(i) D を図示せよ．

(ii) y 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ a)$（a は正の定数）を中心とする半径 r の円を C とする．C が D に含まれるような r の最大値を a を用いて表せ．

3 【Ⅱ A・Ⅱ B型共通　必須問題】（配点　50点）

解説

a，b を実数の定数とする．関数

$$f(x)=2x^3-3ax^2+6bx$$

は $x=1$ で極大になるとする．

(1) b を a を用いて表せ．また，a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ の極小値 m を a を用いて表せ．

(3) a の値をいろいろ変えて m を調べてみたところ，異なる2つの実数 a_1，a_2 $(a_1<a_2)$ の値を a に代入した場合に m が同じ値になった．このような a_1，a_2 のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ．

ⅡA・ⅡB型

4 【ⅡA型　選択問題】（配点　50点）

解説

a を 0 以上の定数とする．O を原点とする座標平面上に，点 A(12, 0) と直線 l : $y=x+2a$ がある．

点 P は O を，点 Q は A を同時に出発し，

P は x 軸上を正の向きに毎秒 1 の速さで，

Q は x 軸上を負の向きに毎秒 2 の速さで

動くものとする．P を通り x 軸に垂直な直線と l の交点を R とする．

Q が O に達するまで動くとき，次の問に答えよ．

(1) 2 点 P，Q が出発してから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq 6)$ の P，Q，R の座標をそれぞれ求めよ．

(2) $a=0$ のときの三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．また，そのときの Q の座標を求めよ．

(3) 三角形 OQR の面積の最大値を求めよ．

5 【ⅡA・ⅡB型共通　選択問題】（配点　50点）

解説

separate の 8 文字を横一列に並べて文字列を作る．

(1) aa，ee を両方とも含むものは何通りあるか．

(2) aa，ee の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．

(3) aa，ee, ae, ea の少なくとも一つを含むものは何通りあるか．

(4) ae，ea の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．

6 **【Ⅱ B型　選択問題】**（配点　50点）

解説

平面上に三角形OABがあり，

$$OA=2,\ OB=3,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=k \quad (k\text{は実数})$$

を満たしている．

辺OBを2：1に内分する点をC，辺ABを1：3に内分する点をDとし，線分AC，ODの交点をE，Eから直線OAに下ろした垂線の足をHとする．

(1) $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，k を用いて表せ．

(2) 点Eの直線OAに関する対称点をE′とする．三角形OEE′が正三角形になるような k の値を求めよ．また，そのときの四角形OE′ABの面積を求めよ．

ⅢB・ⅢC型

ⅢB型，ⅢC型受験者は次の表に従って解答すること．

ⅢB型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ より１題選択．
ⅢC型	$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を必答し，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ より１題選択．

$\boxed{1}$ **【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】**（配点　40点）

解説

(1)　a，b を実数の定数とする．x の方程式

$$2x^2+ax+b=0$$

が $2+\sqrt{5}\,i$ を解にもつとき，a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(2)　16^{100} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

(3)　$3\cos^2\theta-8\sin\theta=0$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，次の値を求めよ．

(i)　$\sin\theta$　　　(ii)　$\sin2\theta$

(4)　n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ を求めよ．

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}}$ を求めよ．

ⅢB・ⅢC型

2 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

a，x を実数の定数とする．

初項 a，公比 $x+1$ の等比数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$

が成り立つとする．

(1)　x のとり得る値の範囲を求め，a を x を用いて表せ．

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ を x を用いて表せ．また，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 < 1$ となるような x の値の範囲を求めよ．

3 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】（配点　40点）

解説

separate の 8 文字を横一列に並べて文字列を作る．

(1)　aa，ee を両方とも含むものは何通りあるか．

(2)　aa，ee の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．

(3)　aa，ee，ae，ea の少なくとも一つを含むものは何通りあるか．

(4)　ae，ea の少なくとも一方を含むものは何通りあるか．

ⅢB・ⅢC型

4 【ⅢB・ⅢC型共通　必須問題】(配点　40点)

解説

(1) 放物線 $y=x^2$ 上に動点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとる．Pと定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ (a は正の定数)の距離APの最小値を a を用いて表せ．また，そのときのPの座標を a を用いて表せ．

(2) xy 平面上において，不等式

$$(y-x^2)(2\sqrt{2}x-2y+1)\geqq 0$$

で表される領域を D とする．

(i) D を図示せよ．

(ii) $x^2+(y-b)^2\leqq r^2$ (b は正の定数，r は0以上の定数)で表される図形を K とする．K と D が共有点をもつような r の最小値を b を用いて表せ．

5 【ⅢB・ⅢC型共通　選択問題】(配点　40点)

解説

平面上に三角形OABがあり，

$$\mathrm{OA}=2,\ \mathrm{OB}=3,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\quad (k \text{は実数})$$

を満たしている．

辺OBを2：1に内分する点をC，辺ABを1：3に内分する点をDとし，線分AC，ODの交点をE，Eから直線OAに下ろした垂線の足をHとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$k$ を用いて表せ．

(2) 点Eの直線OAに関する対称点をE′とする．三角形OEE′が正三角形になるような k の値を求めよ．また，そのときの四角形OE′ABの面積を求めよ．

Ⅲ B・Ⅲ C型

6 【Ⅲ B・Ⅲ C型共通　選択問題】（配点　40点）

解説

O を原点とする座標平面上に点 A(0, 2) をとる．線分 OA を直径にもつ円の $x \geqq 0$ の部分を C_1，放物線 $y=ax^2$ を C_2 とし，C_1 と C_2 は第 1 象限にある点 P で交わっている．$\angle \mathrm{AOP}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1)　a を θ を用いて表せ．

(2)　C_1，線分 OP および y 軸で囲まれる図形の面積を S_1，C_2 と線分 OP で囲まれる図形の面積を S_2 とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$ を求めよ．

7 【Ⅲ C型　選択問題】（配点　40点）

解説

整数を成分とする 2 つの 2 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

がある．

A, B が

$$(A+B)^2=(A-B)^2$$

を満たしているとき，次の問に答えよ．

(1)　A を x，y を用いて表せ．

(2)　$(A+B)^3=(A-B)^3$ が成り立つような A を求めよ．

Ⅰ・ⅠA型，ⅡA・ⅡB型，ⅢB・ⅢC型 はそれぞれ問題選択型のいずれかによって解答（選択解答）する問題が指定されている。指示に従い，必ず指定された問題を解答（選択解答）し，下記の記入例に従って解答用紙に必要事項を記入すること。

〈記入例〉　ⅡB型 選択生の場合

〈数学ⅡA・ⅡB型 解答用紙（その２）裏　面〉