新・旧課程

クラス		受験番号	
出席番号		氏　　名	

2014年度　第3回　全統マーク模試

学習の手引き【解答・解説集】

数　　学

【2014年10月実施】

英語冊子巻末に「**自己採点シート**」と「**学力アップ・志望校合格のための復習法**」を掲載していますので，志望校合格へむけた効果的な復習のためにご活用ください。

河合塾

1460630119502110

【数 学 ①】

数 学 I

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正 解	配点	自己採点
第1問	$\dfrac{ア+\sqrt{イ}}{ウ}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	3	
	$\sqrt{エ}-オ$	$\sqrt{5}-1$	3	
	$カ\sqrt{キ}$	$2\sqrt{5}$	2	
	クケ	12	3	
	コサシ	112	3	
	スセ	28	3	
	ソ	2	3	
	第1問 自己採点小計		(20)	
第2問	ア.イ	5.0	3	
	ウエ.オカ	11.20	3	
	キ	2	2	
	ク	5	2	
	ケ.コサ	0.60	2	
	シ	2	3	
	ス	6	2	
	セ	0	3	
	第2問 自己採点小計		(20)	

問題番号	解答記号	正 解	配点	自己採点
第3問	ア	3	3	
	$\dfrac{\sqrt{イウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{35}}{6}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{オカ}}{キ}$	$\dfrac{\sqrt{35}}{4}$	3	
	$\dfrac{ク\sqrt{ケコ}}{サシ}$	$\dfrac{9\sqrt{35}}{35}$	3	
	$\sqrt{スセ}$	$\sqrt{15}$	3	
	$\dfrac{ソタ}{チ}$	$\dfrac{-1}{6}$	3	
	$\sqrt{ツテ}$	$\sqrt{11}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{トナ}}{ニ}$	$\dfrac{\sqrt{11}}{2}$	3	
	$\dfrac{ヌ}{ネ}$	$\dfrac{3}{2}$	3	
	$\dfrac{ノ\sqrt{ハヒ}}{フヘ}$	$\dfrac{3\sqrt{35}}{22}$	3	
	第3問 自己採点小計		(30)	
第4問	$a=ア$, $b=イ$	$a=2$, $b=5$	3	
	ウエ	-2	2	
	オ	3	2	
	カ	2	2	
	$b-キa$	$b-4a$	2	
	クケ	22	2	
	コサ	-5	2	
	$a=シス$, $b=セソ$	$a=-3$, $b=10$	3	
	タチ	-1	3	
	ツ	4	2	
	$テ+\sqrt{ト}$	$1+\sqrt{7}$	2	
	ナ	4	2	
	ニ	1	3	
	第4問 自己採点小計		(30)	
	自己採点合計		(100)	

第1問　数と式

2次方程式 $x^2-x-1=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

であり，$p=2\alpha$，$q=\dfrac{2}{\alpha}$ とすると

$$q=\sqrt{\boxed{エ}}-\boxed{オ}$$

$$p+q=\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$$

である．

また

$$p^2+q^2=\boxed{クケ}$$

$$p^4+q^4=\boxed{コサシ}$$

$$\frac{p^3}{q}+\frac{q^3}{p}=\boxed{スセ}$$

である．

$n\leqq\sqrt{p}+\sqrt{q}<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{ソ}$ である．

【解説】

問題

2次方程式 $x^2-x-1=0$ の解は，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

☜　2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから，

$$\alpha=\frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

よって，

$$\begin{aligned}p&=2\alpha\\&=1+\sqrt{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q&=\frac{2}{\alpha}\\&=\frac{4}{1+\sqrt{5}}\\&=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1}\\&=\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}\end{aligned}$$

☜　分母の有理化．

であり，

$$p+q=(1+\sqrt{5})+(\sqrt{5}-1)$$
$$=\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

　また，

$$pq=2\alpha\cdot\frac{2}{\alpha}=4$$

である．

　したがって，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$$
$$=(2\sqrt{5})^2-2\cdot 4$$
$$=\boxed{12},$$

☜　$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$ より，
$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$.

$$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2(pq)^2$$
$$=12^2-2\cdot 4^2$$
$$=\boxed{112},$$

☜　$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ において，
$A=p^2,\quad B=q^2$
とした．

$$\frac{p^3}{q}+\frac{q^3}{p}=\frac{p^4+q^4}{pq}$$
$$=\frac{112}{4}$$
$$=\boxed{28}$$

である．

　$T=\sqrt{p}+\sqrt{q}$ とおく．

$$T^2=(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2$$
$$=p+q+2\sqrt{pq}$$
$$=2\sqrt{5}+2\sqrt{4}$$
$$=\sqrt{20}+4$$

☜　扱いやすくするために，平方する．

であり，$4<\sqrt{20}<5$ であるから，

$$8<T^2<9$$

である．

　したがって，$4<T^2<9$ であり，$T>0$ より，

$$2<T<3$$

であるから，$n\leqq\sqrt{p}+\sqrt{q}<n+1$ を満たす整数 n は $\boxed{2}$ である．

第２問　データの分析

次の表は，あるクラスの生徒 10 人に対して行われた英語のテストと数学のテスト（各 10 点満点）の得点をまとめたものである．ただし，テストの得点は整数値である．

	英語	数学
生徒 1	1	6
生徒 2	1	4
生徒 3	2	6
生徒 4	2	4
生徒 5	3	5
生徒 6	6	A
生徒 7	8	5
生徒 8	9	5
生徒 9	9	4
生徒 10	9	6

英語のデータの平均値と数学のデータの平均値は等しいことがわかっている．

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

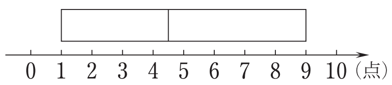
また，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数という．第 2 四分位数は中央値である．データが偶数個の値からなるとき，データを値の大きさの順に並べて 2 等分したときの下位のデータの中央値が第 1 四分位数，上位のデータの中央値が第 3 四分位数である．

(1)　英語のデータの平均値は $\boxed{\text{ア}}$.$\boxed{\text{イ}}$ 点であり，分散は $\boxed{\text{ウエ}}$.$\boxed{\text{オカ}}$ である．

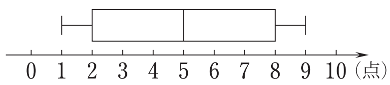
英語のデータの箱ひげ図として適切なものは $\boxed{\text{キ}}$ である．

$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

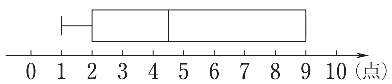
⓪



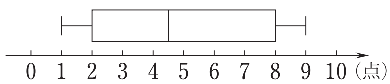
①



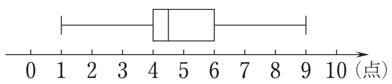
②



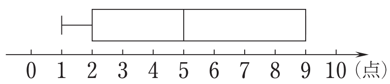
③



④



⑤



(2)　A の値は $\boxed{\text{ク}}$ であり，数学のデータの分散は $\boxed{\text{ケ}}$.$\boxed{\text{コサ}}$ である．

(3)　英語の得点と数学の得点の相関係数として適切な値は $\boxed{\text{シ}}$ であり，英語の得点と数学の得点

の間には $\boxed{\text{ス}}$.

$\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ.

⓪ -0.8　① -0.4　② 0　③ 0.4　④ 0.8

⑤ 正の相関関係がある

⑥ 相関関係はほとんどない

⑦ 負の相関関係がある

(4) 数学のテストに採点ミスがあり，生徒 2 と生徒 10 の正しい数学の得点はそれぞれ 6 点，4 点であった.

得点修正後の英語の得点と数学の得点の相関係数 r の値は $\boxed{\text{セ}}$ を満たす.

$\boxed{\text{セ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ.

⓪ $-0.7 \leqq r \leqq -0.5$

① $-0.4 \leqq r \leqq -0.2$

② $-0.2 < r < 0.2$

③ $0.2 \leqq r \leqq 0.4$

④ $0.5 \leqq r \leqq 0.7$

【解説】

問題

与えられたデータについて，英語のテストの得点を x，数学のテストの得点を y と表す.

(1) 英語のデータの平均値を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x} = \frac{1+1+2+2+3+6+8+9+9+9}{10}$$

$$= \frac{50}{10}$$

$$= \boxed{5}.\boxed{0} \text{（点）}$$

である.

英語のデータの分散を $s_x{}^2$ とすると，

$$s_x{}^2 = \frac{1}{10}\{(1-5)^2+(1-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2 +(3-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2 +(9-5)^2+(9-5)^2\}$$

$$= \frac{112}{10}$$

$$= \boxed{11}.\boxed{20}$$

である.

x のデータは 10（偶数）個の値からなるから，

（第 1 四分位数）＝（五つの値 1，1，2，2，3 の中央値）

＝2,

平均値

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

偏差・分散

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなり，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，（これらの）偏差の 2 乗の平均値が x の分散 s^2 である．つまり，

$$s^2 = \frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2 +\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

$$(\text{中央値})=\frac{3+6}{2}=4.5,$$

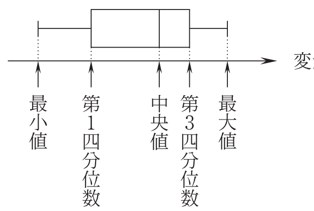
$$(\text{第 3 四分位数})=(\text{五つの値 } 6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 9 \text{ の中央値})=9$$

である．

☜ データが偶数個の値からなるとき，中央値はデータを大きさの順に並べたときに中央に並ぶ二つの値の平均値である．

　また，得点が整数値であることを考慮し，箱ひげ図⓪～⑤の第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数の値を書き出すと次のとおりである．

☜ 下図のように，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値を箱と線（ひげ）を用いて一つの図に表したものを箱ひげ図という．



	⓪	①	②	③	④	⑤
第 1 四分位数	1	2	2	2	4	2
中央値	4.5	5	4.5	4.5	4.5	5
第 3 四分位数	9	8	9	8	6	9

　よって，英語のデータの箱ひげ図として適切なものは②であるから，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

⑵　数学のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，

$$\overline{y}=\frac{6+4+6+4+5+\mathsf{A}+5+5+4+6}{10}=\frac{45+\mathsf{A}}{10}$$

であり，これが $\overline{x}$ と等しいから，

$$\frac{45+\mathsf{A}}{10}=5$$

☜ $\overline{x}=5$.

$$\mathsf{A}=\boxed{5}$$

である．

　数学のデータの分散を ${s_y}^2$ とすると，

$$\begin{aligned}{s_y}^2&=\frac{1}{10}\{(6-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2\\&\qquad+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2\\&\qquad+(4-5)^2+(6-5)^2\}\\&=\frac{6}{10}\\&=\boxed{0}.\boxed{60}\end{aligned}$$

である．

⑶　x と y の共分散を s_{xy} とすると，

$$\begin{aligned}s_{xy}&=\frac{1}{10}\{(-4)\cdot 1+(-4)\cdot(-1)+(-3)\cdot 1+(-3)\cdot(-1)\\&\qquad+(-2)\cdot 0+1\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0\\&\qquad+4\cdot(-1)+4\cdot 1\}\\&=\frac{0}{10}\end{aligned}$$

☜

共分散

　二つの変量 x，y のデータが n 個の組 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$(x_n,\ y_n)$ として与えられているとし，変量 x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}.$$

$=0$

である．よって，x と y の相関係数を r とすると，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$
$$=0$$

であるから，$\boxed{シ}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

これより，x と y の間には相関関係はほとんどないことがわかるから，$\boxed{ス}$ に当てはまるものは $\boxed{⑥}$ である．

☜ **相関係数**

二つの変量 x，y について，それらの分散をそれぞれ $s_x{}^2$，$s_y{}^2$ とし，共分散を s_{xy} とすると，相関係数 r は，

$$r=\frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x{}^2}\sqrt{s_y{}^2}}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

⑷ 数学の得点の修正は，生徒 2 が 4 点から 6 点，生徒 10 が 6 点から 4 点であるから，得点の修正前後で，数学のデータの平均値は変化しない．よって，採点ミスによる 生徒 2，生徒 10 の得点の修正前と修正後のデータはそれぞれ次のとおりである．

修正前

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
生徒 2	1	4	-4	-1	4
生徒 10	9	6	4	1	4

修正後

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
生徒 2	1	6	-4	1	-4
生徒 10	9	4	4	-1	-4

上の修正前と修正後の表の $y-\overline{y}$ の部分について，$(y-\overline{y})^2$ の値は修正前と修正後で二つとも変わらないから，得点の修正前後において，数学のデータの分散 $s_y{}^2$ の値は変化しない．

また，得点修正後の生徒 2，生徒 10 についての $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の値はともに 4 から -4 へ -8 だけ変化することがわかる．

よって，得点修正後の x と y の共分散 s_{xy} の値は，

$$s_{xy}=\frac{0+(-8)+(-8)}{10}=-1.6$$

である．

☜ 得点修正前の x と y の共分散は $\frac{0}{10}$ である．

したがって，得点修正後の x と y の相関係数 r は，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$
$$=\frac{-1.6}{\sqrt{11.20}\sqrt{0.60}}$$
$$=-\frac{1.6}{\sqrt{6.72}}$$
$$=-\frac{16}{\sqrt{672}}$$

である．

$$24^2 < 672 < 32^2$$

であるから，

$$-\frac{16}{24} < r < -\frac{16}{32}$$

であり，

$$-0.67 < r < -0.5$$

が成り立つから，$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものは $\boxed{0}$ である．

☜ $24^2 = 576$，$32^2 = 1024$．

☜ $26^2 = 676$ であり，$\sqrt{672}$ をおよそ 26 とすると，r は

$$-\frac{16}{26} = -\frac{8}{13} = -0.615\cdots.$$

また，

$$\frac{-1.6}{\sqrt{11.20}\sqrt{0.60}} = -0.617\cdots.$$

第3問　図形と計量

$\triangle$ABC は，AB $=3$，BC $=1$，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$ を満たすとする．このとき

$$\mathrm{CA}=\boxed{\text{ア}},\quad \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サシ}}}$

である．

辺 BC の C の側の延長上に点 D を CD $=2$ となるようにとり，線分 CD の中点を E，線分 AD の中点を F とする．このとき

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$$

であり

$$\cos\angle\mathrm{ACE}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \mathrm{AE}=\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$$

である．

また

$$\mathrm{CF}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

であり，$\triangle$ABC の面積を S_1，四角形 ACEF の面積を S_2 とすると

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

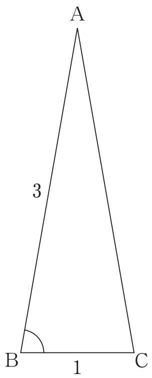
である．

さらに，四角形 ACEF の対角線の交点を G とすると

$$\sin\angle\mathrm{AGC}=\frac{\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である．

【解説】　　問題



余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}\\
&=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{6}\\
&=9
\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{CA}=\boxed{3}$$

である．

また，

$$\begin{aligned}
\sin\angle\mathrm{ABC} &= \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}\\
&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}\\
&=\frac{\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{6}}
\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}
(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}) &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}\\
&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}\\
&=\frac{\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{4}}
\end{aligned}$$

である．

△ABC の外接円の半径を R とし，正弦定理を用いると，

$$2R=\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$$

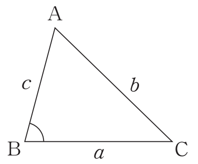
であるから，

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\mathrm{CA}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}}\\
&=\frac{3}{2\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}}\\
&=\frac{9}{\sqrt{35}}\\
&=\frac{\boxed{9}\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{35}}
\end{aligned}$$

である．

与えられた条件より，次の図を得る．

☜ **余弦定理**

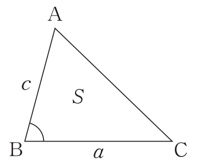


$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

☜ $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，

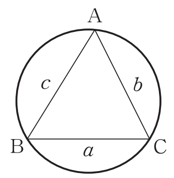
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

☜ **三角形の面積**



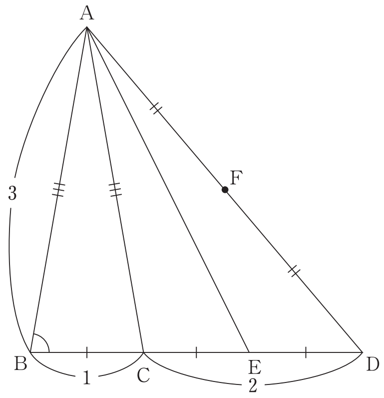
$$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

☜ **正弦定理**



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

（R は △ABC の外接円の半径）



$BD = BC + CD = 1 + 2 = 3$ であるから，$\triangle ABD$ に余弦定理を用いると，

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos\angle ABD$$
$$= 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= 15$$

☜　$\cos\angle ABD = \cos\angle ABC = \frac{1}{6}$.

であるから，

$$AD = \sqrt{\boxed{15}}$$

である．

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であるから，

$$\angle ABC = \angle ACB \qquad \cdots ①$$

であり，$\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$ であるから，

$$\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB$$
$$= 180^\circ - \angle ABC$$

である．よって，

$$\cos\angle ACE = \cos(180^\circ - \angle ABC)$$
$$= -\cos\angle ABC$$
$$= \frac{\boxed{-1}}{\boxed{6}}$$

☜　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.

☜　$\cos\angle ACE$ は，$\triangle ACD$ に余弦定理を用いて，

$$\cos\angle ACE = \frac{3^2 + 2^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$$

として求めてもよい．

であり，$\triangle ACE$ に余弦定理を用いると，

$$AE^2 = CA^2 + CE^2 - 2CA \cdot CE \cos\angle ACE$$
$$= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$= 11$$

☜　E は線分 CD の中点より，

$$CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

であるから，

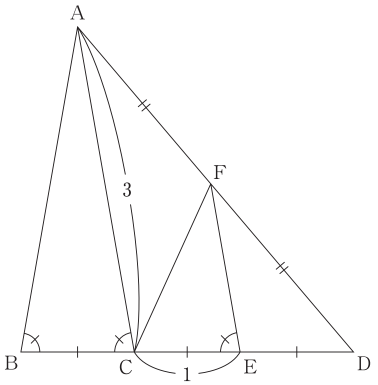
$$AE = \sqrt{\boxed{11}}$$

である．

☜　$BE = 2$ であるから，$\triangle ABE$ に余弦定理を用いて，

$$AE^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= 11$$

より，$AE = \sqrt{11}$ として求めてもよい．



△ACD において，E，F はそれぞれ辺 CD，辺 AD の中点であるから，

$$\mathrm{EF} /\!/ \mathrm{CA},\ \mathrm{EF}=\frac{1}{2}\mathrm{CA}=\frac{3}{2}$$

が成り立つ．また，EF // CA より，

$$\angle\mathrm{CEF}=\angle\mathrm{BCA}\quad（同位角）$$

であることと ① より，

$$\angle\mathrm{CEF}=\angle\mathrm{ABC}$$

である．

△CEF に余弦定理を用いると，

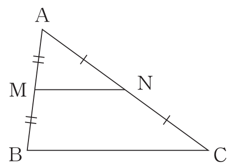
$$\begin{aligned}\mathrm{CF}^2&=\mathrm{CE}^2+\mathrm{EF}^2-2\mathrm{CE}\cdot\mathrm{EF}\cos\angle\mathrm{CEF}\\&=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{11}{4}\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{CF}=\frac{\sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{2}}$$

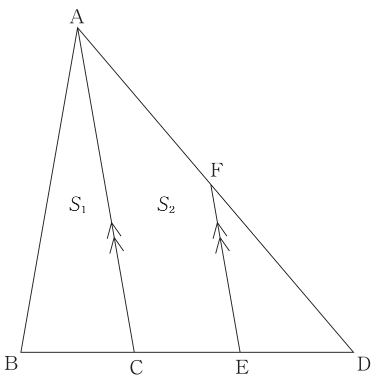
である．

☜ **中点連結定理**



$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{BC},\ \mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}.$

☜ $\cos\angle\mathrm{CEF}=\cos\angle\mathrm{ABC}$
$=\frac{1}{6}.$



BC : CD = 1 : 2 より，

$$S_1 : (\triangle\mathrm{ACD}\ の面積)=1:2$$

であるから，

$$（\triangle ACD \text{ の面積}）=2S_1$$

である．

さらに，EF∥CA より，△ACD∽△FED であり，相似比は 2:1 であるから，

$$（\triangle FED \text{ の面積}）=\left(\frac{1}{2}\right)^2（\triangle ACD \text{ の面積}）$$
$$=\frac{1}{2}S_1$$

☜ （△ACD の面積）$=2S_1$.

である．

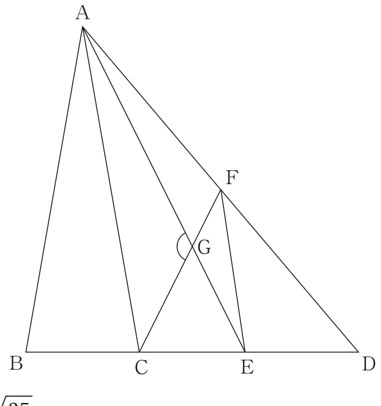
よって，

$$S_2=（\triangle ACD \text{ の面積}）-（\triangle FED \text{ の面積}）$$
$$=2S_1-\frac{1}{2}S_1$$
$$=\frac{3}{2}S_1 \quad \cdots ②$$

となるから，

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

である．



② と $S_1=\frac{\sqrt{35}}{4}$ より，

$$S_2=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{35}}{4}=\frac{3\sqrt{35}}{8} \quad \cdots ③$$

である．

一方，四角形 ACEF の面積 S_2 は対角線の長さ AE，CF を用いて，

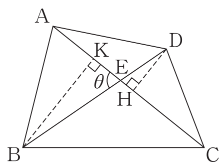
$$S_2=\frac{1}{2}AE\cdot CF\sin\angle AGC$$

と表せるから，これと ③ より，

$$\frac{1}{2}AE\cdot CF\sin\angle AGC=\frac{3\sqrt{35}}{8}$$

となる．

☜



四角形 ABCD について，対角線 AC，BD の交点を E，なす角を θ $(0^\circ<\theta\leqq 90^\circ)$，B，D から直線 AC に下ろした垂線の足をそれぞれ K，H とすると，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BK+\frac{1}{2}AC\cdot DH$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BE\sin\theta+\frac{1}{2}AC\cdot DE\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}AC(BE+ED)\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta.$$

また，$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin(180^\circ-\theta).$$

したがって，

$$\sin\angle\mathrm{AGC}=\frac{3\sqrt{35}}{4\mathrm{AE}\cdot\mathrm{CF}}$$

$$=\frac{3\sqrt{35}}{4\cdot\sqrt{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}}$$

$$=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{22}}$$

である．

第4問　2次関数

a，b を実数 $(a \neq 0)$ とし，x の2次関数

$$y = ax^2 - 4ax + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

(1)　G が2点 $(-1,\ 15)$，$(1,\ -1)$ を通るとき

$a = \boxed{\text{ア}}$，　$b = \boxed{\text{イ}}$

であり，このときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{ウエ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$ だけ平行移動すると，関数 $y = \boxed{\text{ア}}\,x^2$ のグラフに一致する．

(2)　G の頂点の座標は

$\left(\boxed{\text{カ}},\ b - \boxed{\text{キ}}\,a\right)$

である．

$a = 3$，$b = 7$ のとき，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数 ① の最大値は $\boxed{\text{クケ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{コサ}}$ である．

また，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数 ① の最大値が $\boxed{\text{クケ}}$ であり，最小値が $\boxed{\text{コサ}}$ であるとき，$a \neq 3$ とすると

$a = \boxed{\text{シス}}$，　$b = \boxed{\text{セソ}}$

である．

次に，p を $p < 5$ である定数とし，$a = \boxed{\text{シス}}$，$b = \boxed{\text{セソ}}$ とする．このとき，$p \leqq x \leqq 5$ における関数 ① の最小値が $\boxed{\text{コサ}}$ となるような p の値の範囲は

$\boxed{\text{タチ}} \leqq p < 5$

である．

(3)　以下，$a > 0$，$b = 2a^2 - a - 12$ とする．

G が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は

$0 < a \leqq \boxed{\text{ツ}}$

であり，G が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が1より大きくなるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}} < a \leqq \boxed{\text{ナ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．

実数 a に関する条件 s，t を次のように定める．

s：a は ② を満たす

t：G は y 軸の正の部分と共有点をもつ

このとき，t は s であるための $\boxed{\text{ニ}}$．

$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

【解説】 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題

$$f(x)=ax^2-4ax+b$$

☜　$f(x)$ は ① の右辺.

とすると，

$$f(x)=a(x-2)^2+b-4a \qquad \cdots ①'$$

と変形される.

(1)　G が 2 点 $(-1,\ 15)$，$(1,\ -1)$ を通るとき，

$$f(-1)=15 \quad かつ \quad f(1)=-1$$

すなわち

$$5a+b=15 \quad かつ \quad -3a+b=-1$$

が成り立つ．これより，

$$a=\boxed{2},\quad b=\boxed{5}$$

である.

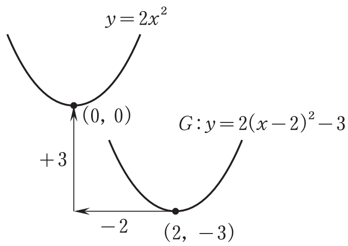
このとき，①′ より，

$$G: y=2(x-2)^2-3$$

であるから，G の頂点の座標は $(2,\ -3)$ である.

よって，G を x 軸方向に $\boxed{-2}$，y 軸方向に $\boxed{3}$ だけ平行移動すると，点 $(0,\ 0)$ を頂点とする関数 $y=2x^2$ のグラフに一致する.

☜



(2)　①′ より G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2},\ b-\boxed{4}a\right)$$

である.

$a=3$，$b=7$ のときの $f(x)$ を $f_1(x)$ とすると，①′ より，

$$f_1(x)=3(x-2)^2-5$$

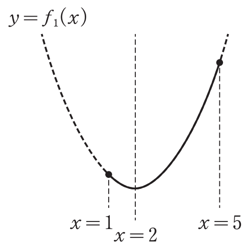
であり，$y=f_1(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，$1\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f_1(x)$ の

$$最大値は \quad f_1(5)=\boxed{22},$$

$$最小値は \quad f_1(2)=\boxed{-5}$$

である.

☜



$a>0$ のとき，関数 $y=f(x)$ の最大値が 22 で，最小値が -5 となるのは $a=3$，$b=7$ のときに限るから，$a<0$ のときについて考える.

$a<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，$1\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f(x)$ の

$$\text{最大値は}\quad f(2)=-4a+b,$$
$$\text{最小値は}\quad f(5)=5a+b$$

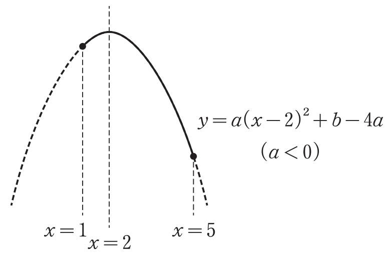
であり，最大値が 22 で，最小値が -5 となるとき，

$$\begin{cases}-4a+b=22,\\ 5a+b=-5\end{cases}$$

を解いて，

$$a=\boxed{-3},\quad b=\boxed{10}$$

である．



$a=-3$，$b=10$ のときの $f(x)$ を $f_2(x)$ とすると，①′ より，

$$f_2(x)=-3(x-2)^2+22$$

であり，$y=f_2(x)$ のグラフは上に凸の放物線である．

放物線 $y=f_2(x)$ の軸が区間 $p\leqq x\leqq 5$ の中央にあるとき，

$$\frac{p+5}{2}=2\quad\text{すなわち}\quad p=-1$$

であり，$f_2(x)=-5$ を満たす 5 でない x の値は，

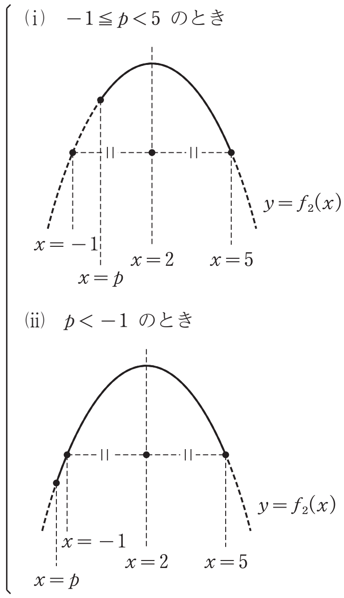
$$x=-1$$

である．

よって，$p\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f_2(x)$ の最小値が -5 すなわち $f_2(5)$ となるような $p<5$ である定数 p の値の範囲は，

$$\boxed{-1}\leqq p<5$$

である．



(3) $a>0$，$b=2a^2-a-12$ のときの $f(x)$ を $f_3(x)$ とすると，①′ より，

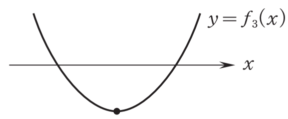
$$f_3(x)=a(x-2)^2+2a^2-5a-12\quad(a>0)$$

であり，$y=f_3(x)$ のグラフは下に凸の放物線である．

放物線 $y=f_3(x)$ $(a>0)$ が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は，

$$a>0\quad\text{かつ}\quad 2a^2-5a-12\leqq 0$$

(頂点の y 座標) $\leqq 0$.



すなわち

$$a>0\quad\text{かつ}\quad (2a+3)(a-4)\leqq 0$$

すなわち

$$a>0\quad\text{かつ}\quad -\frac{3}{2}\leqq a\leqq 4$$

より，

$$0<a\leqq\boxed{4}\qquad\cdots③$$

である．

放物線 $y=f_3(x)$ の軸は直線 $x=2$ (>1) であるから，放物線 $y=f_3(x)$ が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が 1 より大きくなる条件は，

$$③ \quad \text{かつ} \quad f_3(1)>0$$

である．

　$f_3(1)>0$ より，

$$2a^2-4a-12>0$$

すなわち

$$2(a^2-2a-6)>0$$

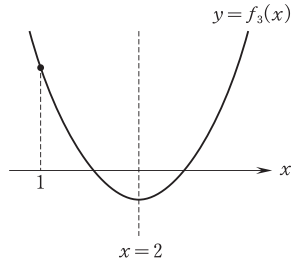
であり，これより，

$$a<1-\sqrt{7},\quad 1+\sqrt{7}<a$$

であるから，これと ③ より求める a の値の範囲は，

$$\boxed{1}+\sqrt{\boxed{7}}<a\leqq\boxed{4} \qquad \cdots ②$$

である．



　放物線 $y=f_3(x)$ $(a>0)$ が y 軸の正の部分と共有点をもつような a の値の範囲は，

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad f_3(0)>0$$

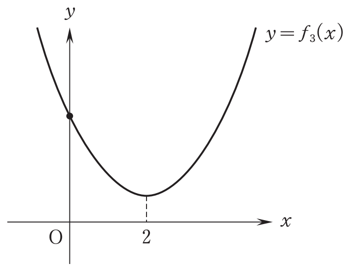
すなわち

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad 2a^2-a-12>0$$

すなわち

$$\frac{1+\sqrt{97}}{4}<a \qquad \cdots ④$$

である．



　②，④ より，

$$s: 1+\sqrt{7}<a\leqq 4,$$
$$t: \frac{1+\sqrt{97}}{4}<a$$

である．

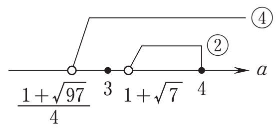
　$9<\sqrt{97}<10$ より $10<1+\sqrt{97}<11$ であるから，

$$\frac{5}{2}<\frac{1+\sqrt{97}}{4}<\frac{11}{4}\quad(<3)$$

であり，また，$2<\sqrt{7}<3$ より $3<1+\sqrt{7}<4$ であるから，

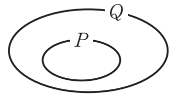
$$\frac{1+\sqrt{97}}{4}<1+\sqrt{7}$$

である．



　よって，「$s \Longrightarrow t$」は真であり「$t \Longrightarrow s$」は偽(反例：$a=3$)であるから，t は s であるための必要条件であるが，十分条件ではないから，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

　条件 p を満たす集合を P，条件 q を満たす集合を Q とする．「$p \Longrightarrow q$」が真であることと $P\subset Q$ であることは同じである．



「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき，
　p は q であるための十分条件，
　q は p であるための必要条件
という．

($\boxed{\text{ニ}}$ の別解)

　放物線 $y=f_3(x)$ の軸は直線 $x=2$ (>1) であり，② のとき $f_3(1)>0$ であるから，$f_3(0)>0$ となる．よって，

$$「s \Longrightarrow t」\text{は真}$$

である．

次に，$a=3$ のとき，

$$f_3(x)=3x^2-12x+3$$

であるから，

$$f_3(0)=3>0$$

となり，$a=3$ のとき ④ すなわち t は成り立つ．

一方，$2<\sqrt{7}<3$ より，$3<1+\sqrt{7}<4$ であるから，$a=3$ のとき ② すなわち s は成り立たない．よって，

「$t \Longrightarrow s$」は偽

である．

☜ $a=3$ は「$t \Longrightarrow s$」に対する反例になっている．

したがって，t は s であるための必要条件であるが，十分条件ではない，すなわち $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	$\frac{ア+\sqrt{イ}}{ウ}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	
	$\sqrt{エ}-オ$	$\sqrt{5}-1$	2	
	$カ\sqrt{キ}$	$2\sqrt{5}$	2	
	クケ	12	2	
	コサシ	112	2	
	ス	3	3	
	$\frac{セ\sqrt{ソ}}{タ}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	3	
	$チ\sqrt{ツ}$	$2\sqrt{2}$	2	
	$\frac{テ\sqrt{ト}}{ナ}$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\frac{ニy^2+ヌ}{32y}$	$\frac{8y^2+5}{32y}$	3	
	$\frac{ネ\sqrt{ノ}}{ハ}$	$\frac{5\sqrt{6}}{4}$	3	
	$\frac{ヒ\sqrt{フ}}{ヘ}$	$\frac{5\sqrt{3}}{9}$	3	
第1問　自己採点小計			（30）	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	ア	2	2	
	$b-イa$	$b-4a$	2	
	ウエ	22	2	
	オカ	−5	2	
	$a=$キク，$b=$ケコ	$a=-3$，$b=10$	3	
	サ	4	2	
	$シ+\sqrt{ス}$	$1+\sqrt{7}$	2	
	セ	4	2	
	ソ	1	3	
	タ.チ	5.0	2	
	ツテ.トナ	11.20	2	
	ニ	2	2	
	ヌ	5	1	
	ネ.ノハ	0.60	1	
	ヒ	2	2	
第2問　自己採点小計			（30）	
第3問	ア	2	3	
	イ	3	3	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{8}$	3	
	$\frac{オ}{カキ}$	$\frac{3}{16}$	3	
	$\frac{ク}{ケコ}$	$\frac{2}{11}$	4	
	$\frac{サシ}{スセソ}$	$\frac{49}{432}$	4	
第3問　自己採点小計			（20）	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア$k-1$	$2k-1$	2	
	イ	1	2	
	ウ	0	2	
	エ	3	3	
	$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{1}{2}$	3	
	$(x-\text{キ})(y-\text{ク})=8$	$(x-4)(y-4)=8$	4	
	ケ，コサ，シス	5，12，13	4	
		第4問　自己採点小計	(20)	
第5問	ア	3	2	
	イ	5	2	
	ウ	4	2	
	エ	1	2	
	$\sqrt{\text{オ}}\,r_1$	$\sqrt{3}\,r_1$	2	
	$(\text{カ}+\sqrt{\text{キ}})r_1$	$(2+\sqrt{3})r_1$	2	
	$\sqrt{\text{ク}}-\text{ケ}$	$\sqrt{3}-1$	4	
	コ$\sqrt{\text{サ}}\,\pi$	$4\sqrt{3}\,\pi$	4	
		第5問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

第１問　数と式，図形と計量

〔１〕　２次方程式 $x^2-x-1=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

であり，$p=2\alpha$，$q=\dfrac{2}{\alpha}$ とすると

$$q=\sqrt{\boxed{エ}}-\boxed{オ}$$

$$p+q=\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$$

である．

　また

$$p^2+q^2=\boxed{クケ}$$

$$p^4+q^4=\boxed{コサシ}$$

である．

〔２〕　△ABC は，AB＝3，BC＝2，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{3}$ を満たすとする．このとき

$$\mathrm{CA}=\boxed{ス},\quad \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$$

であり，△ABC の面積は $\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$ である．

　△ABC の外接円上の点Ｂを含まない弧 CA 上に点Ｄを CD＝AD であるようにとる．CD＝x とすると

$$x=\frac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$$

である．

　また，BD＝y とし，△BCD に余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{CBD}=\frac{\boxed{ニ}y^2+\boxed{ヌ}}{32y}$$

であり，同様に，△ABD に余弦定理を用い，さらに，∠CBD＝∠ABD であることにより

$$y=\frac{\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$$

を得る．

　四角形 ABCD の対角線の交点をＥとすると

$$\sin\angle\mathrm{AEB}=\frac{\boxed{ヒ}\sqrt{\boxed{フ}}}{\boxed{ヘ}}$$

である．

【解説】 問題

〔1〕

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解は,

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

☜ 2 次方程式
$$ax^2+bx+c=0$$
の解は,
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

であるから,

$$\alpha=\frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である.

よって,

$$\begin{aligned}p&=2\alpha\\&=1+\sqrt{5},\\q&=\frac{2}{\alpha}\\&=\frac{4}{1+\sqrt{5}}\\&=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1}\\&=\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}\end{aligned}$$

☜ 分母の有理化.

であり,

$$\begin{aligned}p+q&=(1+\sqrt{5})+(\sqrt{5}-1)\\&=\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}\end{aligned}$$

である.

また,

$$pq=2\alpha\cdot\frac{2}{\alpha}=4$$

である.

したがって,

$$\begin{aligned}p^2+q^2&=(p+q)^2-2pq\\&=(2\sqrt{5})^2-2\cdot4\\&=\boxed{12},\end{aligned}$$

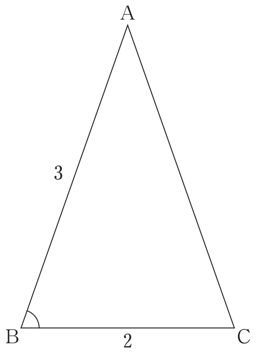
☜ $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$ より,
$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq.$$

$$\begin{aligned}p^4+q^4&=(p^2+q^2)^2-2(pq)^2\\&=12^2-2\cdot4^2\\&=\boxed{112}\end{aligned}$$

☜ $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ において,
$$A=p^2,\quad B=q^2$$
とした.

である.

〔2〕 **問題**



余弦定理より，

$$\begin{aligned}CA^2 &= AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC\\ &= 3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{3}\\ &= 9\end{aligned}$$

であるから，

$$CA=\boxed{3}$$

である．

また，

$$\begin{aligned}\sin\angle ABC &= \sqrt{1-\cos^2\angle ABC}\\ &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= \frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

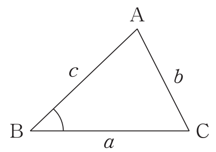
であり，

$$\begin{aligned}(\triangle ABC\text{の面積}) &= \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC\\ &= \frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ &= \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}\end{aligned}$$

である．

与えられた条件より，次の図を得る．

☜ **余弦定理**

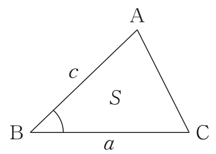


$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

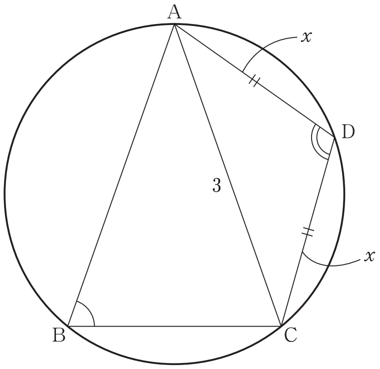
☜ $0°<\theta<180°$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$



四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$$
$$=-\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

である．

△ACD に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

すなわち

$$3^2=x^2+x^2-2x\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

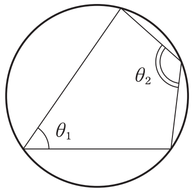
であるから，

$$x^2=\frac{27}{8}$$

となり，$x>0$ より，

$$x=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

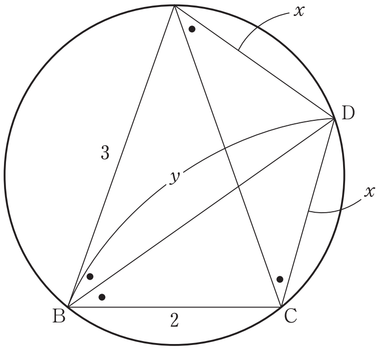
である．



円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから，

$$\theta_2=180^\circ-\theta_1.$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.$$



△BCD に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{CBD}=\frac{\mathrm{BD}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2}{2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{y^2+2^2-x^2}{2\cdot y\cdot 2}$$

$$= \frac{\boxed{8}\,y^2 + \boxed{5}}{32y} \qquad \cdots ① \quad ☜ \quad x^2 = \frac{27}{8}.$$

であり，△ABD に余弦定理を用いると，

$$\cos\angle \mathrm{ABD} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}}$$

$$= \frac{3^2 + y^2 - x^2}{2\cdot 3y}$$

$$= \frac{8y^2 + 45}{48y} \qquad \cdots ②$$

である．

CD＝AD より，∠CBD＝∠ABD であるから，

$$\cos\angle \mathrm{CBD} = \cos\angle \mathrm{ABD}$$

が成り立つ．

これに ①，② を代入すると，

$$\frac{8y^2 + 5}{32y} = \frac{8y^2 + 45}{48y}$$

である．

これより，

$$\frac{8y^2 + 5}{2} = \frac{8y^2 + 45}{3}$$

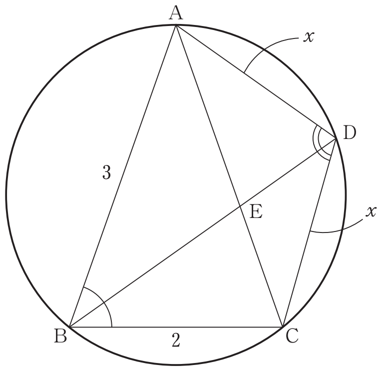
すなわち

$$y^2 = \frac{75}{8}$$

であり，$y > 0$ より，

$$y = \frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{4}}$$

である．



四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$S = (\triangle \mathrm{ABC} \text{ の面積}) + (\triangle \mathrm{ACD} \text{ の面積})$$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{ADC}$$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}x^2 \sin(180^\circ - \angle \mathrm{ABC})$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{27}{16}\sin\angle ABC$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{27}{16}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{25\sqrt{2}}{8} \qquad \cdots ③$$

である．

一方，S は対角線の長さ AC，BD を用いて，

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle AEB$$

と表せるから，これと ③ より，

$$\frac{25\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle AEB$$

となる．

したがって，

$$\sin\angle AEB=\frac{25\sqrt{2}}{4AC\cdot BD}$$

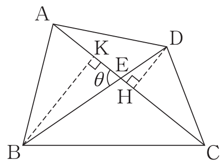
$$=\frac{25\sqrt{2}}{4\cdot 3\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}}$$

$$=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}$$

である．

☜ $x^2=\frac{27}{8}$.

☜



四角形 ABCD について，対角線 AC，BD の交点を E，なす角を θ $(0°<\theta\leqq 90°)$，B，D から直線 AC に下ろした垂線の足をそれぞれ K，H とすると，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BK+\frac{1}{2}AC\cdot DH$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BE\sin\theta+\frac{1}{2}AC\cdot DE\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}AC(BE+ED)\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta.$$

また，$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin(180°-\theta).$$

第2問　2次関数，データの分析

〔1〕 a，b を実数 $(a \neq 0)$ とし，x の2次関数

$$y = ax^2 - 4ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

(1) G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ b - \boxed{\text{イ}}\,a\right)$$

である．

$a = 3$，$b = 7$ のとき，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数 ① の最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{オカ}}$ である．

また，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数 ① の最大値が $\boxed{\text{ウエ}}$ であり，最小値が $\boxed{\text{オカ}}$ であるとき，$a \neq 3$ とすると

$$a = \boxed{\text{キク}},\quad b = \boxed{\text{ケコ}}$$

である．

(2) 以下，$a > 0$，$b = 2a^2 - a - 12$ とする．

G が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は

$$0 < a \leqq \boxed{\text{サ}}$$

であり，G が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が1より大きくなるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}} < a \leqq \boxed{\text{セ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．

実数 a に関する条件 s，t を次のように定める．

s : a は ② を満たす

t : G は y 軸の正の部分と共有点をもつ

このとき，t は s であるための $\boxed{\text{ソ}}$．

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

〔2〕 次の表は，あるクラスの生徒10人に対して行われた英語のテストと数学のテスト(各10点満点)の得点をまとめたものである．ただし，テストの得点は整数値である．

	英語	数学
生徒 1	1	6
生徒 2	1	4
生徒 3	2	6
生徒 4	2	4
生徒 5	3	5
生徒 6	6	A
生徒 7	8	5
生徒 8	9	5
生徒 9	9	4
生徒 10	9	6

英語のデータの平均値と数学のデータの平均値は等しいことがわかっている．

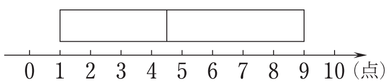
以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

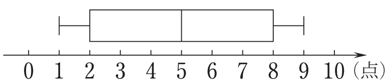
また，四分位数とは，データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値であり，小さい方から順に，第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数という．第 2 四分位数は中央値である．データが偶数個の値からなるとき，データを値の大きさの順に並べて 2 等分したときの下位のデータの中央値が第 1 四分位数，上位のデータの中央値が第 3 四分位数である．

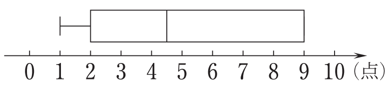
(1) 英語のデータの平均値は $\boxed{\text{タ}}.\boxed{\text{チ}}$ 点であり，分散は $\boxed{\text{ツテ}}.\boxed{\text{トナ}}$ である．

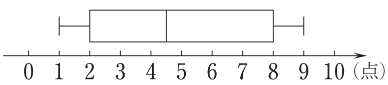
英語のデータの箱ひげ図として適切なものは $\boxed{\text{ニ}}$ である．

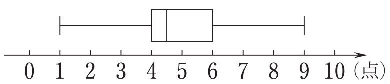
$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

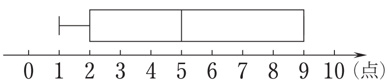
⓪


①


②


③


④


⑤


(2) A の値は $\boxed{\text{ヌ}}$ であり，数学のデータの分散は $\boxed{\text{ネ}}.\boxed{\text{ノハ}}$ である．

(3) 英語の得点と数学の得点の相関係数として適切な値は $\boxed{\text{ヒ}}$ である．

$\boxed{\text{ヒ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ -0.8　　① -0.4　　② 0　　③ 0.4　　④ 0.8

【解説】

問題

〔1〕

$$f(x)=ax^2-4ax+b$$

☜ $f(x)$ は ① の右辺.

とすると,

$$f(x)=a(x-2)^2+b-4a \qquad \cdots ①'$$

と変形される.

⑴ ①′ より G の頂点の座標は,

$$\left(\boxed{2},\ b-\boxed{4}a\right)$$

である.

$a=3$, $b=7$ のときの $f(x)$ を $f_1(x)$ とすると,①′ より,

$$f_1(x)=3(x-2)^2-5$$

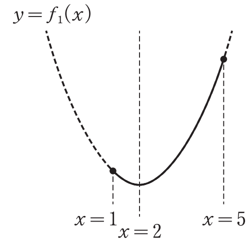
であり,$y=f_1(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから,$1\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f_1(x)$ の

$$\text{最大値は}\quad f_1(5)=\boxed{22},$$

$$\text{最小値は}\quad f_1(2)=\boxed{-5}$$

である.

☜



$a>0$ のとき,関数 $y=f(x)$ の最大値が 22 で,最小値が -5 となるのは $a=3$, $b=7$ のときに限るから,$a<0$ のときについて考える.

$a<0$ のとき,$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから,$1\leqq x\leqq 5$ における関数 $y=f(x)$ の

$$\text{最大値は}\quad f(2)=-4a+b,$$

$$\text{最小値は}\quad f(5)=5a+b$$

であり,最大値が 22 で,最小値が -5 となるとき,

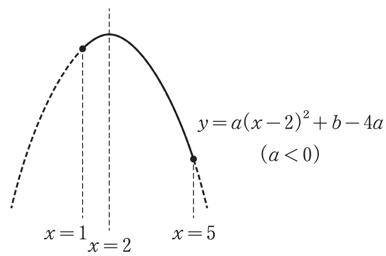
$$\begin{cases}-4a+b=22,\\ 5a+b=-5\end{cases}$$

を解いて,

$$a=\boxed{-3},\quad b=\boxed{10}$$

である.

☜



⑵ $a>0$, $b=2a^2-a-12$ のときの $f(x)$ を $f_2(x)$ とすると,①′ より,

$$f_2(x)=a(x-2)^2+2a^2-5a-12 \quad (a>0)$$

であり,$y=f_2(x)$ のグラフは下に凸の放物線である.

放物線 $y=f_2(x)$ $(a>0)$ が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は,

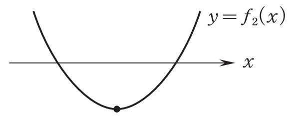
$$a>0 \quad \text{かつ} \quad 2a^2-5a-12\leqq 0$$

すなわち

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad (2a+3)(a-4)\leqq 0$$

すなわち

☜ (頂点の y 座標) $\leqq 0$.



$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{3}{2} \leqq a \leqq 4$$

より，

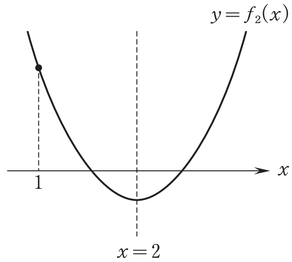
$$0 < a \leqq \boxed{4} \qquad \cdots③$$

である．

　放物線 $y = f_2(x)$ の軸は直線 $x = 2$ (>1) であるから，放物線 $y = f_2(x)$ が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が 1 より大きくなる条件は，

$$③ \quad \text{かつ} \quad f_2(1) > 0$$

☜



である．

　$f_2(1) > 0$ より，

$$2a^2 - 4a - 12 > 0$$

すなわち

$$2(a^2 - 2a - 6) > 0$$

であり，これより，

$$a < 1 - \sqrt{7}, \quad 1 + \sqrt{7} < a$$

であるから，これと ③ より求める a の値の範囲は，

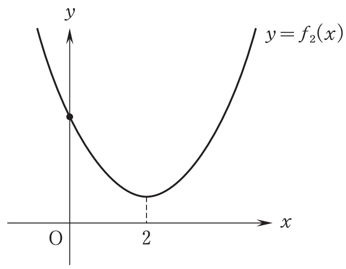
$$\boxed{1} + \sqrt{\boxed{7}} < a \leqq \boxed{4} \qquad \cdots②$$

である．

　放物線 $y = f_2(x)$ $(a > 0)$ が y 軸の正の部分と共有点をもつような a の値の範囲は，

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad f_2(0) > 0$$

☜



すなわち

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad 2a^2 - a - 12 > 0$$

すなわち

$$\frac{1 + \sqrt{97}}{4} < a \qquad \cdots④$$

である．

　②，④ より，

$$s : 1 + \sqrt{7} < a \leqq 4,$$

$$t : \frac{1 + \sqrt{97}}{4} < a$$

である．

　$9 < \sqrt{97} < 10$ より $10 < 1 + \sqrt{97} < 11$ であるから，

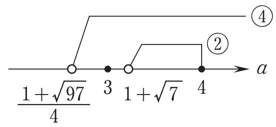
$$\frac{5}{2} < \frac{1 + \sqrt{97}}{4} < \frac{11}{4} \ (< 3)$$

であり，また，$2 < \sqrt{7} < 3$ より $3 < 1 + \sqrt{7} < 4$ であるから，

$$\frac{1 + \sqrt{97}}{4} < 1 + \sqrt{7}$$

である．

よって，「$s \Longrightarrow t$」は真であり「$t \Longrightarrow s$」は偽（反例：$a=3$）であるから，t は s であるための必要条件であるが，十分条件ではないから，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．



（$\boxed{\text{ソ}}$ **の別解**）

放物線 $y=f_2(x)$ の軸は直線 $x=2$（>1）であり，② のとき $f_2(1)>0$ であるから，$f_2(0)>0$ となる．よって，

$$「s \Longrightarrow t」\text{は真}$$

である．

次に，$a=3$ のとき，

$$f_2(x)=3x^2-12x+3$$

であるから，

$$f_2(0)=3>0$$

となり，$a=3$ のとき ④ すなわち t は成り立つ．

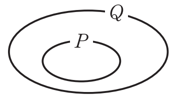
一方，$2<\sqrt{7}<3$ より，$3<1+\sqrt{7}<4$ であるから，$a=3$ のとき ② すなわち s は成り立たない．よって，

$$「t \Longrightarrow s」\text{は偽}$$

である．

したがって，t は s であるための必要条件であるが，十分条件ではない，すなわち $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

条件 p を満たす集合を P，条件 q を満たす集合を Q とする．「$p \Longrightarrow q$」が真であることと $P \subset Q$ であることは同じである．



「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき，

p は q であるための十分条件，

q は p であるための必要条件

という．

$a=3$ は「$t \Longrightarrow s$」に対する反例になっている．

［2］

問題

英語のテストの得点を x，数学のテストの得点を y と表す．

(1) 英語のデータの平均値を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{1+1+2+2+3+6+8+9+9+9}{10}$$
$$=\frac{50}{10}$$
$$=\boxed{5}.\boxed{0}\ (\text{点})$$

である．

英語のデータの分散を $s_x{}^2$ とすると，

$$s_x{}^2=\frac{1}{10}\{(1-5)^2+(1-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=\frac{112}{10}$$
$$=\boxed{11}.\boxed{20}$$

である．

x のデータは 10（偶数）個の値からなるから，

平均値

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

偏差・分散

変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，…，x_n からなり，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x}，x_2-\overline{x}，\cdots，x_n-\overline{x}$$

をそれぞれ x_1，x_2，…，x_n の偏差といい，（これらの）偏差の 2 乗の平均値が x の分散 s^2 である．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

（第 1 四分位数）＝（五つの値 1，1，2，2，3 の中央値）
$= 2$，

（中央値）$= \dfrac{3+6}{2}$
$= 4.5$，

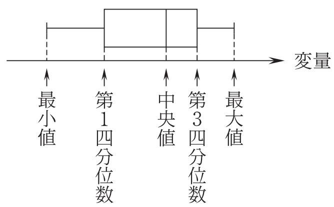
☜　データが偶数個の値からなるとき，中央値はデータを大きさの順に並べたときに中央に並ぶ二つの値の平均値である．

（第 3 四分位数）＝（五つの値 6，8，9，9，9 の中央値）
$= 9$

である．

また，得点が整数値であることを考慮し，箱ひげ図⓪～⑤の第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数の値を書き出すと次のとおりである．

☜　下図のように，最小値，第 1 四分位数，中央値，第 3 四分位数，最大値を箱と線（ひげ）を用いて一つの図に表したものを箱ひげ図という．



	⓪	①	②	③	④	⑤
第 1 四分位数	1	2	2	2	4	2
中央値	4.5	5	4.5	4.5	4.5	5
第 3 四分位数	9	8	9	8	6	9

よって，英語のデータの箱ひげ図として適切なものは②であるから，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

(2)　数学のデータの平均値を $\overline{y}$ とすると，

$$\overline{y} = \frac{6+4+6+4+5+\mathsf{A}+5+5+4+6}{10}$$
$$= \frac{45+\mathsf{A}}{10}$$

であり，これが $\overline{x}$ と等しいから，

$$\frac{45+\mathsf{A}}{10} = 5$$

☜　$\overline{x} = 5$.

$$\mathsf{A} = \boxed{5}$$

である．

数学のデータの分散を ${s_y}^2$ とすると，

$$\begin{aligned}{s_y}^2 &= \frac{1}{10}\{(6-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2 \\ &\qquad +(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2 \\ &\qquad +(4-5)^2+(6-5)^2\} \\ &= \frac{6}{10} \\ &= \boxed{0}.\boxed{60}\end{aligned}$$

である．

(3) x と y の共分散を s_{xy} とすると，

$$s_{xy}=\frac{1}{10}\{(-4)\cdot1+(-4)\cdot(-1)+(-3)\cdot1+(-3)\cdot(-1)$$
$$+(-2)\cdot0+1\cdot0+3\cdot0+4\cdot0$$
$$+4\cdot(-1)+4\cdot1\}$$
$$=\frac{0}{10}$$
$$=0$$

である．よって，x と y の相関係数を r とすると，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$
$$=0$$

であるから，$\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である．

☜ **共分散**

二つの変量 x，y のデータが n 個の組 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$ として与えられているとし，変量 x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}.$$

☜ **相関係数**

二つの変量 x，y について，それらの分散をそれぞれ $s_x{}^2$，$s_y{}^2$ とし，共分散を s_{xy} とすると，相関係数 r は，

$$r=\frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x{}^2}\sqrt{s_y{}^2}}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}.$$

第3問　場合の数と確率

(1) 文字R，W，Bについて，R，W，B各一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，R三つ，W一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．

(2) 袋の中に赤玉3個，白玉2個，黒玉1個の合計6個の玉が入っている．

この袋から1個の玉を取り出し，取り出した玉の色を記録し，玉を袋に戻す．この操作を，同じ色が3回記録されるか3色がすべて記録されるまで繰り返す．

赤が3回記録されて3回で操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

赤が3回記録されてちょうど4回で操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，4回目に赤が記録されて操作が終了するという条件のもとで，3色がすべて記録されて操作が終了する条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

5回目に赤が記録されて操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である．

【解説】　問題

(1) R，W，B各一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は，はじめの二つの文字が，W，B各一つとなるときであるから，その並べ方を考えて，

$$2! = \boxed{2} \text{（通り）}$$

ある．

☜ WBR
BWR

R三つ，W一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は，はじめの三つの文字が，R二つ，W一つとなるときであるから，その並べ方を考えて，

$${}_3C_1 = \boxed{3} \text{（通り）}$$

ある．

☜ WRRR
RWRR
RRWR

(2) 取り出した玉の色に対して，赤，白，黒を，それぞれR，W，Bと記録することとする．

袋から1個の玉を取り出すとき，Rと記録する確率は，

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

Wと記録する確率は，

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

B と記録する確率は,

$$\frac{1}{6}$$

である.

R が 3 回記録されて 3 回で操作が終了する確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}}$$

である.

R が 3 回記録されてちょうど 4 回で操作が終了するのは次のいずれかである.

・はじめの 3 回で R が 2 回, W が 1 回記録され, 4 回目に R が記録される.

・はじめの 3 回で R が 2 回, B が 1 回記録され, 4 回目に R が記録される.

WRR R
RWR R
RRW R

よって, R が 3 回記録されてちょうど 4 回で操作が終了する確率は,

$$\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{16}} \qquad \cdots ①$$

である.

4 回目に R が記録されて操作が終了するという事象を E, 3 色がすべて記録されて操作が終了するという事象を F とする.

$E\cap F$ は次のいずれかである.

・はじめの 3 回で W が 2 回, B が 1 回記録され, 4 回目に R が記録される.

・はじめの 3 回で W が 1 回, B が 2 回記録され, 4 回目に R が記録される.

WWB R
WBW R
BWW R

よって, $E\cap F$ が起こる確率 $P(E\cap F)$ は,

$$P(E\cap F)=\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{24}. \qquad \cdots ②$$

また, ちょうど 4 回で R が 3 回記録されて操作が終了するという事象と 4 回目に R が記録され 3 色すべてが記録されて操作が終了するという事象は互いに排反であるから, E が起こる確率 $P(E)$ は, ①, ② より,

$$P(E)=\frac{3}{16}+\frac{1}{24}$$

$$=\frac{11}{48}.$$

よって，求める条件つき確率 $P_E(F)$ は，

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$$

$$=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{11}{48}}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{11}}$$

である．

☜ **条件つき確率**

事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件つき確率といい，$P_A(B)$ で表す．

A，$A\cap B$ が起こる確率をそれぞれ $P(A)$，$P(A\cap B)$ とすると，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

5 回目に R が記録されて操作が終了するのは次のいずれかである．

- はじめの 4 回で R が 2 回，W が 2 回記録され，5 回目に R が記録される．

☜ R が 3 回記録されて終了する．

- はじめの 4 回で R が 2 回，B が 2 回記録され，5 回目に R が記録される．

☜ R が 3 回記録されて終了する．

- はじめの 4 回で W が 2 回，B が 2 回記録され，5 回目に R が記録される．

☜ 3 色がすべて記録されて終了する．

よって，5 回目に R が記録されて操作が終了する確率は，

$$\left\{{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\left\{{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\boxed{49}}{\boxed{432}}$$

である．

第 4 問　整数の性質

(1)　自然数 n が奇数であるとき，k を自然数として $n=\boxed{\text{ア}}k-1$ と表すことができ，n^2 を 4 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$ である．

自然数 n が偶数であるとき，k を自然数として $n=\boxed{\text{ア}}k$ と表すことができ，n^2 を 4 で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　a，b，c はどの二つも互いに素な自然数であり

$$a^2+b^2=c^2$$

を満たしている．

このとき，a^2，b^2，c^2 を 4 で割った余りを考えることにより，$\boxed{\text{エ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　a，b，c のうち奇数は一つだけ
①　c は偶数
②　a，b，c はすべて偶数
③　a，b のうちいずれか一方のみが偶数

(3)　3 辺の長さがどの二つも互いに素な自然数であるような直角三角形のうち，その面積が周の長さと等しいものを求めてみよう．

直角三角形の 3 辺の長さを x，y，z とする．ただし，$x\leqq y<z$ である．

このとき

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}xy=x+y+z \end{cases}$$

が成り立つ．

これらから z を消去すると

$$\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)=8$$

が成り立つから，条件を満たす直角三角形の 3 辺の長さは

$$\boxed{\text{ケ}}\ と\ \boxed{\text{コサ}}\ と\ \boxed{\text{シス}}$$

である．ただし，$\boxed{\text{コサ}}<\boxed{\text{シス}}$ とする．

【解説】　問題

(1)　自然数 n が奇数であるとき，k を自然数として，

$$n=\boxed{2}k-1$$

と表すことができるから，

$$n^2=4(k^2-k)+1$$

であり，n^2 を 4 で割った余りは $\boxed{1}$ である．

自然数 n が偶数であるとき，k を自然数として，

$$n = 2k$$

と表すことができるから，

$$n^2 = 4k^2$$

であり，n^2 を 4 で割った余りは $\boxed{0}$ である．

⑵
$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad \cdots ①$$

a，b それぞれの奇数，偶数に対して，$a^2 + b^2$ を 4 で割った余りは，⑴の結果により，次の表のようになる．

a ＼ b	奇数	偶数
奇数	2	1
偶数	1	0

条件より，a，b は互いに素な自然数であるから，a，b が両方とも偶数であることはない．

☜　②は不適である．

さらに，⑴の結果より c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であるから，a，b，c が ① を満たすとき，上の表より，

「a，b のうち一方は偶数で他方は奇数」

であり，「c^2 を 4 で割った余りは 1」すなわち

「c は奇数」

である．

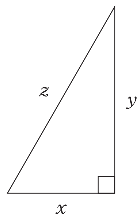
☜　選択肢⓪，①はともに不適である．

したがって，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

☜　$a=3$，$b=4$，$c=5$ とすると ① は成り立つから，③を満たす a，b，c は存在する．

⑶　直角三角形の 3 辺の長さが x，y，z（$x \leqq y < z$）であるとき，三平方の定理により，

☜



$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \cdots ②$$

が成り立ち，この直角三角形について，

$$(\text{面積}) = \frac{1}{2}xy,\quad (\text{周の長さ}) = x + y + z$$

であるから，

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}xy = x + y + z$$

すなわち

$$z = \frac{1}{2}xy - (x + y) \qquad \cdots ③$$

が成り立つ．

③ を ② に代入すると，

$$x^2 + y^2 = \left\{\frac{1}{2}xy - (x + y)\right\}^2$$

であり，この右辺を変形すると，

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}x^2y^2-2\cdot\frac{1}{2}xy\cdot(x+y)+(x+y)^2$$

すなわち

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}x^2y^2-xy(x+y)+(x^2+2xy+y^2)$$

となるから,

$$0=\frac{1}{4}x^2y^2-xy(x+y)+2xy$$

である.

この両辺を $xy\ (>0)$ で割ると,

$$0=\frac{1}{4}xy-(x+y)+2$$

すなわち

$$xy-4(x+y)+8=0$$

である.

これより,

$$(x-4)(y-4)-16+8=0$$

すなわち

$$\left(x-\boxed{4}\right)\left(y-\boxed{4}\right)=8$$

が成り立つ.

$x-4$, $y-4$ は, $-4<x-4\leqq y-4$ を満たす整数であり, ともに 8 の約数であるから,

☜ $0<x\leqq y$ より, $-4<x-4\leqq y-4$.

$$(x-4,\ y-4)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$$

すなわち

$$(x,\ y)=(5,\ 12),\ (6,\ 8)$$

である.

ここで, x と y は互いに素であるから,

$$(x,\ y)=(5,\ 12)$$

である.

このとき, ③ より,

$$z=13$$

☜ このとき, x, y, z はどの二つも互いに素である.

であるから, 条件を満たす直角三角形の 3 辺の長さは,

$\boxed{5}$ と $\boxed{12}$ と $\boxed{13}$

である.

第 5 問　図形の性質

互いに外接している三つの球 O_1，O_2，O_3 があり，中心をそれぞれ A，B，C とし，半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とする．

(1)　$r_1=1$，$r_2=2$ のとき，二つの球 O_1，O_2 が外接していることから

$$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ア}}$$

である．

さらに，$r_3=3$ であるとき

$$\mathrm{BC}=\boxed{\text{イ}},\quad \mathrm{CA}=\boxed{\text{ウ}}$$

であり，△ABC は $\boxed{\text{エ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　鋭角三角形　　①　直角三角形　　②　鈍角三角形

(2)　$r_1<r_2<r_3$ であり，△ABC の内角の大きさが 30°，60°，90° であるとき

$$r_2=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,r_1,\quad r_3=\left(\boxed{\text{カ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right)r_1$$

である．

さらに，△ABC の面積が $2\sqrt{3}$ であるとする．このとき，O_1 と O_2 の接点を D，O_2 と O_3 の接点を E，O_3 と O_1 の接点を F とすると，△DEF の外接円の半径は

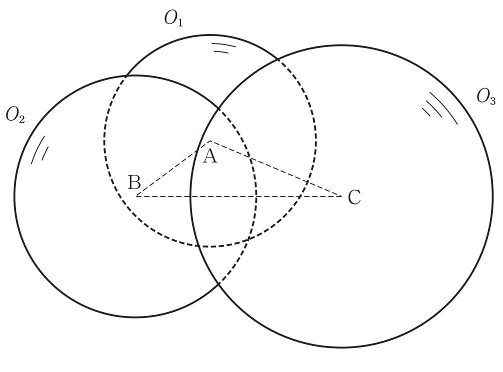
$$\sqrt{\boxed{\text{ク}}}-\boxed{\text{ケ}}$$

であり，△DEF の外接円の中心を通り辺 AB に垂直な平面と O_3 の交わりの円の面積は

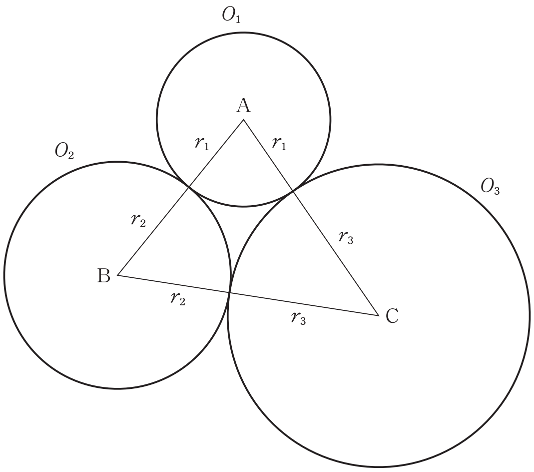
$$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,\pi$$

である．

【解説】　問題



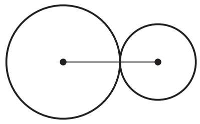
平面 ABC による切り口は次のようになる．



⑴　$r_1=1$，$r_2=2$ のとき，O_1，O_2 が外接していることから，

$$AB=r_1+r_2$$
$$=\boxed{3}$$

である．



二つの球が外接するとき，
（中心間の距離）＝（半径の和）．

　さらに，$r_3=3$ であるとき，O_2，O_3 が外接していることから，

$$BC=r_2+r_3$$
$$=\boxed{5}$$

であり，また，O_3，O_1 が外接していることから，

$$CA=r_3+r_1$$
$$=\boxed{4}$$

である．

　このとき，$AB^2+CA^2=BC^2$ が成り立つから，△ABC は直角三角形であり，$\boxed{エ}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

三平方の定理の逆．

⑵　$r_1<r_2<r_3$ より，

$$r_1+r_2<r_1+r_3<r_2+r_3$$

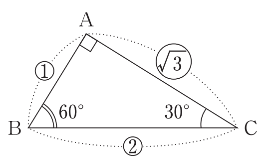
すなわち

$$AB<CA<BC$$

であるから，△ABC の内角の大きさが 30°，60°，90° であるとき，

$$AB:CA:BC=1:\sqrt{3}:2$$

である．



　$AB:CA=1:\sqrt{3}$ より，$CA=\sqrt{3}AB$ であるから，

$$r_1+r_3=\sqrt{3}(r_1+r_2) \quad \cdots ①$$

であり，$AB:BC=1:2$ より，$BC=2AB$ であるから，

$$r_2+r_3=2(r_1+r_2) \quad \cdots ②$$

である．

　①，② の辺々を引くと，

$$r_1-r_2=(\sqrt{3}-2)r_1+(\sqrt{3}-2)r_2$$

すなわち

$$(\sqrt{3}-1)r_2=(3-\sqrt{3})r_1$$
$$=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)r_1$$

であり，

$$r_2=\sqrt{\boxed{\ 3\ }}\,r_1 \qquad \cdots ③$$

である．

　これを ① に代入すると，

$$r_1+r_3=\sqrt{3}(r_1+\sqrt{3}r_1)$$

であり，

$$r_3=\left(\boxed{\ 2\ }+\sqrt{\boxed{\ 3\ }}\right)r_1 \qquad \cdots ④$$

である．

　さらに，△ABC の面積が $2\sqrt{3}$ より，

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}=2\sqrt{3}$$

であり，

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{AB}^2=2\sqrt{3}$$

☜　$\mathrm{CA}=\sqrt{3}\,\mathrm{AB}$.

すなわち

$$\mathrm{AB}=2$$

である．

　よって，

$$r_1+r_2=2$$

であり，$r_2=\sqrt{3}r_1$ より，

$$r_1+\sqrt{3}r_1=2$$

すなわち

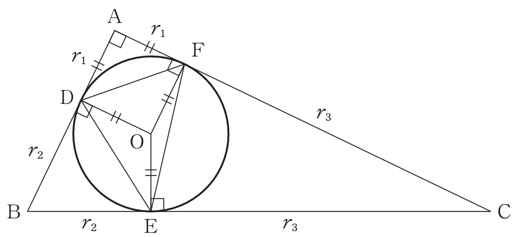
$$r_1=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$$

である．

　これと ③，④ より，

$$r_2=3-\sqrt{3},\quad r_3=\sqrt{3}+1$$

である．



　△DEF の外接円は △ABC の内接円である．

　この円の中心を O とすると，四角形 ADOF は正方形であるから，△DEF の外接円の半径は，

☜　OD＝OE＝OF かつ OD⊥AB かつ OE⊥BC かつ OF⊥CA より，△DEF の外接円と △ABC の内接円は一致する．

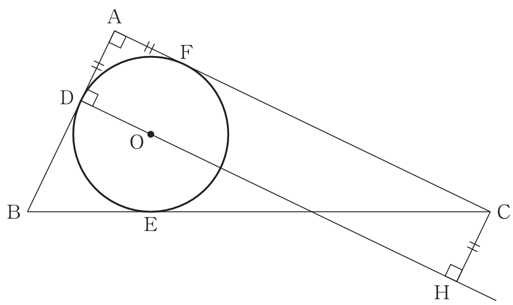
$$\mathrm{OD}=r_1$$
$$=\sqrt{\boxed{3}}-\boxed{1}$$

である．

☜　△ABC の内接円の半径を r として，

$$\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=2\sqrt{3}$$

から r を求めてもよい．



△DEF の外接円の中心 O を通り，辺 AB に垂直な平面と平面 ABC の交わりは，直線 DO である．

C から直線 DO に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\mathrm{CH}=\mathrm{AD}=r_1$$

である．

直線 DO と球 O_3 の交点のうち D に近い方を G とすると，

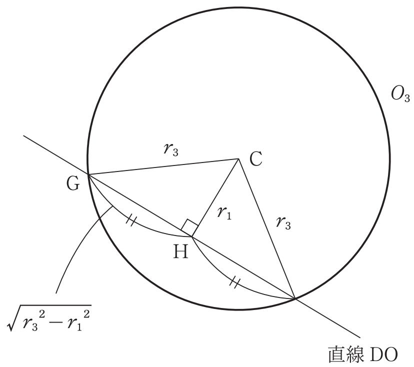
$$\mathrm{CG}=r_3$$

である．

△DEF の外接円の中心 O を通り辺 AB に垂直な平面と O_3 の交わりの円の中心は H であるから，

$$\mathrm{GH}=\sqrt{\mathrm{CG}^2-\mathrm{CH}^2}=\sqrt{{r_3}^2-{r_1}^2}$$

である．



よって，求める面積は，

$$\pi\cdot\mathrm{GH}^2=\pi({r_3}^2-{r_1}^2)$$
$$=\pi\{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2\}$$
$$=\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}\pi$$

である．

【数 学 ②】

数 学 Ⅱ

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	3，5	2	
	ウ，エ	2，1	2	
	オ，カ	3，5	2	
	キ，ク	4，3	3	
	ケコ	50	2	
	サ$\sqrt{\text{シス}}$	$5\sqrt{10}$	3	
	$\dfrac{\text{セソタ}}{\text{チ}}$	$\dfrac{-35}{9}$	2	
	ツ	0	2	
	テ，ト，ナ	2，2，2	3	
	ニ	3	3	
	ヌ	0	2	
	ネ，ノ	0，1	2	
	$\dfrac{\text{ハ}+\sqrt{\text{ヒ}}}{\text{フ}}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第2問	アイ，ウ	−4，2	3	
	エオ	−2	2	
	カ	5	2	
	キク	−4	3	
	ケ	6	3	
	コ	3	3	
	サ，シ，ス	3，8，6	4	
	セ，ソタ，チ，ツ	6，12，8，6	4	
	テト	−1	1	
	$\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	ヌネ$+\sqrt{\text{ノ}}$	$-2+\sqrt{3}$	1	
	$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア，イ	0，2	1	
	ウエ，$\sqrt{\text{オ}}$	−1，$\sqrt{3}$	1	
	カ	1	1	
	キ	2	1	
	ク	2	2	
	$\sqrt{\text{ケ}}$	$\sqrt{5}$	2	
	$\dfrac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$	1	
	シ$\sqrt{\text{ス}}$	$2\sqrt{5}$	1	
	セ，$\sqrt{\text{ソ}}$	1，$\sqrt{5}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$	2	
	ツ，$\sqrt{\text{テ}}$	2，$\sqrt{5}$	2	
	$\dfrac{\text{ト}\sqrt{\text{ナ}}}{\text{ニヌ}}$	$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$	3	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　　解	配点	自己採点
第4問	ア	0	1	
	イ，ウ	2，1	1	
	エ	2	1	
	オ，カ，キ，ク	2，1，3，2	3	
	$\dfrac{ケ-\sqrt{コサ}}{シ}$	$\dfrac{2-\sqrt{11}}{2}$	2	
	ス，セ	0，2	2	
	ソ	6	2	
	タ	1	2	
	チ，ツ	2，1	2	
	テ，ト	3，2	2	
	$\dfrac{ナ\pm\sqrt{ニヌ}}{ネ}$	$\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{4}$	2	
第4問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　図形と方程式，指数関数・対数関数

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第１問 に同じである．

問題

第２問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第２問 に同じである．

第３問　三角関数

Ｏを原点とする座標平面において，点Ｐの座標を $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ とする．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときの点Ｐの座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のときの点Ｐの座標は $\left(\boxed{\text{ウエ}},\ \sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)$ である．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とし，点Ｑの座標を $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ とする．点Ｐは第 $\boxed{\text{カ}}$ 象限に存在し，点Ｑは第 $\boxed{\text{キ}}$ 象限に存在する．

また，点 $(0,\ 2)$ をＡとし，四角形OPAQの面積を S とすると

$$S=\sin\theta+\boxed{\text{ク}}\cos\theta$$
$$=\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\sin(\theta+\alpha)$$

と表される．ただし，α は鋭角 $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \sin\alpha=\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を満たすものとする．

(i) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，S のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{セ}}<S\leqq\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である．さらに，$S=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ のときの θ を θ_0 とすると，$\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である．

(ii) k を正の実数とする．

θ の方程式 $S=k$ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において異なる二つの解をもつような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{ツ}}<k<\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

である．また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，θ の方程式 $S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ の異なる二つの解のうち，小さい方を β とすると

$$\cos\beta=\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$$

である．

【解説】

問題

(1)　点 P の座標 $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ について

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ であるから

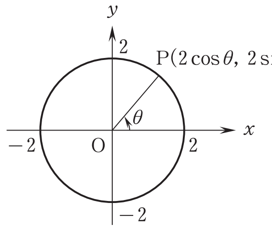
$$\left(\boxed{0},\ \boxed{2}\right)$$

であり，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\left(\boxed{-1},\ \sqrt{\boxed{3}}\right)$$

である．

☜　点 P は原点中心，半径 2 の円周上に存在する．



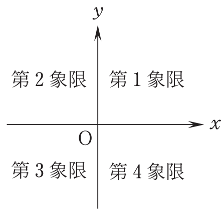
(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ は第 $\boxed{1}$ 象限にあり，

点 $\mathrm{Q}(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ は第 $\boxed{2}$ 象限にある．

よって，四角形 OPAQ は下図のようになる．

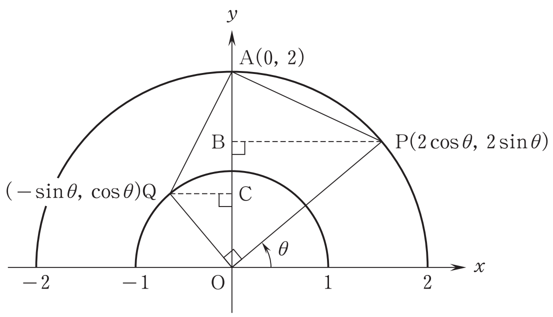
☜



$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから，点 Q の x 座標，y 座標は

$$\begin{cases}-\sin\theta<0\\ \cos\theta>0\end{cases}$$

を満たす．



2 点 P，Q から y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ B，C とすると，四角形 OPAQ の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OPA}+\triangle\mathrm{OQA}\\&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{PB}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{QC}\\&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}(\mathrm{PB}+\mathrm{QC})\\&=\frac{1}{2}\cdot2(2\cos\theta+\sin\theta)\\&=\sin\theta+\boxed{2}\cos\theta\\&=\sqrt{\boxed{5}}\sin(\theta+\alpha)\qquad\cdots①\end{aligned}$$

☜　点 Q の x 座標が

$$-\sin\theta<0$$

であるから

$$\mathrm{QC}=|-\sin\theta|=\sin\theta$$

である．

と表される．ただし，α は鋭角 $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}\qquad\cdots②$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}}{5}\qquad\cdots③$$

☜

三角関数の合成

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，角 α は

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす定角である．

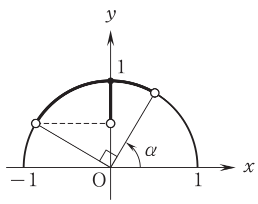
を満たす．

(i)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\alpha<\theta+\alpha<\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ であり，このとき，

$\sin(\theta+\alpha)$ のとり得る値の範囲は

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)<\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$$

☜



すなわち

$$\frac{\sqrt{5}}{5}<\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$$

☜　②，③ より $\tan\alpha=2$ であるから，α は $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

② より

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

である．

である．よって，S のとり得る値の範囲は

$$\boxed{1}<S\leqq\sqrt{\boxed{5}}$$

である．さらに，$S=\sqrt{5}$ のときの θ を θ_0 とすると

$$\theta_0+\alpha=\frac{\pi}{2}$$

より

$$\theta_0=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

であるから

$$\sin\theta_0=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{5}}$$

☜　② より，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

である．

(ii)　$k>0$ である．θ の方程式 $S=k$ は，① より

$$\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)=k$$

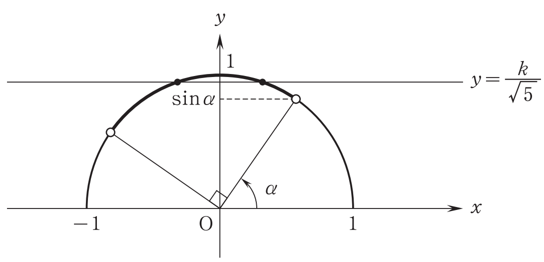
すなわち

$$\sin(\theta+\alpha)=\frac{k}{\sqrt{5}}$$

と表される．よって，θ の方程式 $S=k$ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において異なる二つの解をもつ条件は下図より

$$\sin\alpha<\frac{k}{\sqrt{5}}<1$$

である．



さらに，③ より $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ であるから，求める k の値の

範囲は

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}<\frac{k}{\sqrt{5}}<1$$

より

$$\boxed{2}<k<\sqrt{\boxed{5}} \qquad \cdots ④$$

である.

また，θ の方程式 $S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ は

$$\sin\theta+2\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

すなわち

$$\sin\theta=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos\theta$$

と表される．これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$$

$$10\cos^2\theta-12\sqrt{2}\cos\theta+7=0$$

$$(\sqrt{2}\cos\theta-1)(5\sqrt{2}\cos\theta-7)=0$$

より

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{7}{5\sqrt{2}} \qquad \cdots ⑤$$

である．さらに，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$ であるから，θ の方程式 $S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の異なる二つの解のうち，小さい方の解である β は

$$\cos\beta=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{\boxed{7}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{10}}$$

を満たす.

☜ $k=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ は ④ を満たしているから，θ の方程式 $S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において異なる二つの解をもつ.

☜ $S=\sin\theta+2\cos\theta$ である.

☜ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\theta$ は単調減少であるから，$S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす二つの θ を β，γ $(\beta<\gamma)$ とすると

$$\cos\gamma<\cos\beta$$

が成り立つ．すなわち ⑤ より

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\beta=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

である.

第4問　高次方程式

p，q を実数とし，x についての3次式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^3-qx^2-px+6p+4$$

と定める．以下においては，x の方程式 $P(x)=0$ が -2 と二つの虚数を解にもつときを考える．

$P(-2)=\boxed{\text{ア}}$ より $q=\boxed{\text{イ}}p-\boxed{\text{ウ}}$ であるから，$P(x)$ は

$$P(x)=\left(x+\boxed{\text{エ}}\right)\left\{x^2-\left(\boxed{\text{オ}}p+\boxed{\text{カ}}\right)x+\boxed{\text{キ}}p+\boxed{\text{ク}}\right\}$$

と因数分解できる．また，p のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}<p<\frac{\boxed{\text{ケ}}+\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．

(1)　p を整数とするとき，最小の p の値は $\boxed{\text{ス}}$ であり，最大の p の値は $\boxed{\text{セ}}$ である．

$p=\boxed{\text{ス}}$ のときの x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解を α，β とし，$p=\boxed{\text{セ}}$ のときの x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解を γ，δ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\boxed{\text{ソ}}$$

であり，さらに

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta\ \boxed{\text{タ}}\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

の関係が成り立つ．$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　$<$　　　①　$=$　　　②　$>$

(2)　x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解を

$$u+vi,\quad u-vi\quad（u,\ v \text{ は実数},\ v\neq 0）$$

とすると

$$\begin{cases}2u=\boxed{\text{チ}}p+\boxed{\text{ツ}}\\ u^2+v^2=\boxed{\text{テ}}p+\boxed{\text{ト}}\end{cases}$$

である．よって，$u=v$ となるような p の値は

$$p=\frac{\boxed{\text{ナ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

である．

【解説】　問題

$P(x)=x^3-qx^2-px+6p+4$ より

$$\begin{aligned}P(-2)&=-8-4q+2p+6p+4\\&=8p-4q-4\end{aligned}$$

である．x の方程式 $P(x)=0$ が -2 を解にもつから

$P(-2)=\boxed{0}$ なので

$$8p-4q-4=0$$

すなわち

$$q=\boxed{2}p-\boxed{1}$$

である．このとき，$P(x)$ は $x+2$ で割り切れるから

$P(x)=x^3-(2p-1)x^2-px+6p+4$

$=\left(x+\boxed{2}\right)\left\{x^2-\left(\boxed{2}p+\boxed{1}\right)x+\boxed{3}p+\boxed{2}\right\}$

と因数分解できる．

$$\begin{array}{r} x^2-(2p+1)x+3p+2 \\ x+2\,\big)\overline{x^3-(2p-1)x^2-px+6p+4} \\ x^3\qquad +2x^2\qquad\qquad\quad \\ \hline -(2p+1)x^2-px\qquad\quad \\ -(2p+1)x^2-2(2p+1)x\qquad \\ \hline (3p+2)x+6p+4 \\ (3p+2)x+6p+4 \\ \hline 0 \end{array}$$

x の 2 次方程式 $x^2-(2p+1)x+3p+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(2p+1)^2-4(3p+2)$$
$$=4p^2-8p-7$$

であるから，x の方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつ条件は $D<0$ より

$$\frac{\boxed{2}-\sqrt{\boxed{11}}}{\boxed{2}}<p<\frac{2+\sqrt{11}}{2} \qquad \cdots ①$$

である．

解の判別

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots(*)$$

において，b^2-4ac を判別式といい，これを D とすると

$D>0 \iff (*)$ は異なる二つの実数解をもつ，

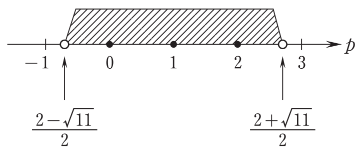
$D=0 \iff (*)$ は(実数の)重解をもつ，

$D<0 \iff (*)$ は異なる二つの虚数解をもつ．

(1)　$3<\sqrt{11}<4$ より

$$-1<\frac{2-\sqrt{11}}{2}<-\frac{1}{2},\quad \frac{5}{2}<\frac{2+\sqrt{11}}{2}<3$$

である．よって，① を満たす整数 p のうち，最小の値は $\boxed{0}$ であり，最大の値は $\boxed{2}$ である．



$p=0$ のときの x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解 α，β は

$$x^2-x+2=0$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=2\end{cases}$$

である．

$p=2$ のときの x の方程式 $P(x)=0$ の虚数解 γ，δ は

$$x^2-5x+8=0$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$\begin{cases}\gamma+\delta=5\\ \gamma\delta=8\end{cases}$$

である．よって

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1+5=\boxed{6}$$

である．また

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの解を α，β とすると

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

である．

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\&=1^2-2\cdot2+5^2-2\cdot8\\&=6\end{aligned}$$

であるから，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ である．

すなわち，$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

(2) x の 2 次方程式

$$x^2-(2p+1)x+3p+2=0 \qquad \cdots ②$$

の虚数解が $u+vi$，$u-vi$（u, v は実数，$v\neq0$）であるから，解と係数の関係により

$$\begin{cases}(u+vi)+(u-vi)=2p+1\\(u+vi)(u-vi)=3p+2\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2u=\boxed{2}p+\boxed{1}\\u^2+v^2=\boxed{3}p+\boxed{2}\end{cases}$$

☜ $i^2=-1$ であるから

$$\begin{aligned}(u+vi)(u-vi)&=u^2-v^2i^2\\&=u^2-v^2\cdot(-1)\\&=u^2+v^2.\end{aligned}$$

である．よって，$u=v$ のとき

$$\begin{cases}2u=2p+1\\2u^2=3p+2\end{cases} \qquad \cdots ③$$

である．この式から u を消去すると

$$2\left(p+\frac{1}{2}\right)^2=3p+2$$

より

$$4p^2-2p-3=0$$

が得られる．これより

$$p=\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$$

となる．このとき，③ より $u=v=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{4}$ $(\neq0)$ となり，

確かに ② は虚数解をもつ．よって

$$p=\frac{\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{4}}$$

である．

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】

（100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	3，5	2	
	ウ，エ	2，1	2	
	オ，カ	3，5	2	
	キ，ク	4，3	3	
	ケコ	50	2	
	サ$\sqrt{\text{シス}}$	$5\sqrt{10}$	3	
	$\dfrac{\text{セソタ}}{\text{チ}}$	$\dfrac{-35}{9}$	2	
	ツ	0	2	
	テ，ト，ナ	2，2，2	3	
	ニ	3	3	
	ヌ	0	2	
	ネ，ノ	0，1	2	
	$\dfrac{\text{ハ}+\sqrt{\text{ヒ}}}{\text{フ}}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	アイ，ウ	−4，2	3	
	エオ	−2	2	
	カ	5	2	
	キク	−4	3	
	ケ	6	3	
	コ	3	3	
	サ，シ，ス	3，8，6	4	
	セ，ソタ，チ，ツ	6，12，8，6	4	
	テト	−1	1	
	$\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	ヌネ$+\sqrt{\text{ノ}}$	$-2+\sqrt{3}$	1	
	$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア，イ	3，1	3	
	$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$，$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$	3	
	キ，ク	2，3	2	
	ケ	3	2	
	コ，サ	3，3	2	
	シ，ス，セ	3，3，2	2	
	ソ	3	2	
	タチ，ツ	−3，1	2	
	テトナ	668	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア，イ，ウエ	0，2，−1	2	
	オ，カ，キ	0，2，1	2	
	ク	0	2	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{1}{5}$	3	
	$\frac{サ}{シ}$，ス，$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{3}{4}$，0，$\frac{1}{4}$	2	
	$\frac{タ}{チ}$，$\frac{ツ}{テ}$，$\frac{ト}{ナニ}$	$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{12}$	3	
	$\frac{ヌ}{ネ}$，$\frac{ノ}{ハ}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$	3	
	ヒ，フ	9，5	3	
		第4問　自己採点小計	(20)	
第5問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{2}$	1	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{3}$	1	
	$\frac{オ}{カ}$	$\frac{1}{3}$	1	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{3}{2}$	2	
	$\frac{ケコ}{サシ}$	$\frac{11}{12}$	2	
	$\frac{ス}{セ}$	$\frac{5}{6}$	2	
	$\frac{ソタ}{チツ}$	$\frac{41}{36}$	2	
	テトナ	600	2	
	ニヌ	20	2	
	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{1}{3}$	1	
	$\frac{ハ}{ヒフ}$	$\frac{1}{90}$	1	
	ヘ	1	3	
		第5問　自己採点小計	(20)	
		自己採点合計	(100)	

数学Ⅱ・数学B

第1問　図形と方程式，指数関数・対数関数

〔1〕　座標平面上に2点 A$(1,\ -2)$，B$(3,\ 4)$ がある．直線 AB の方程式は

$$\boxed{\text{ア}}x-y=\boxed{\text{イ}}$$

である．線分 AB の中点 M の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であり，M を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$x+\boxed{\text{オ}}y=\boxed{\text{カ}}$$

である．

直線 $x+2y=2$ を ℓ とする．また，中心が ℓ 上にあり，2点 A，B を通る円を C とする．C の方程式は

$$\left(x+\boxed{\text{キ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)^2=\boxed{\text{ケコ}}$$

である．円 C と直線 ℓ の2交点を D，E とする．三角形 ADE の面積は $\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ である．

〔2〕　p を1でない正の実数として，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=p^{2x}-p^{x+1}-p$$

とする．

(1)　$p=3$ のとき，$f(-1)=\dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である．

(2)　$p=2$ とする．$t=2^x$ とおくと，x がすべての実数を変化するとき，t のとり得る値の範囲は $t>\boxed{\text{ツ}}$ であり，$f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=t^{\boxed{\text{テ}}}-\boxed{\text{ト}}t-\boxed{\text{ナ}}$$

と表される．よって，x の方程式 $f(x)=1$ の解は

$$x=\log_2\boxed{\text{ニ}}$$

である．また，$\log_2\boxed{\text{ニ}}$ と2の大小関係は $\log_2\boxed{\text{ニ}}\ \boxed{\text{ヌ}}\ 2$ である．$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪　$<$　　　①　$=$　　　②　$>$

(3)　x の方程式 $f(x)=1$ の解が2より小さくなるような p の値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}}<p<\boxed{\text{ノ}},\quad \frac{\boxed{\text{ハ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}<p$$

である．

【解説】

問題

〔1〕

A$(1,\ -2)$，B$(3,\ 4)$ であるから，直線 AB の傾きは

$$\frac{4-(-2)}{3-1}=3$$

☜ $x_1\neq x_2$ のとき，2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$．

である．よって，直線 AB の方程式は

$$y+2=3(x-1)$$

より

$$\boxed{3}x-y=\boxed{5}$$

である．また，線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{-2+4}{2}\right)$$

すなわち

$$\left(\boxed{2},\ \boxed{1}\right)$$

である．M を通り，直線 AB に垂直な直線を n とすると，n の傾きは $-\dfrac{1}{3}$ であるから，n の方程式は

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$$

より

$$x+\boxed{3}y=\boxed{5} \qquad \cdots ①$$

である．

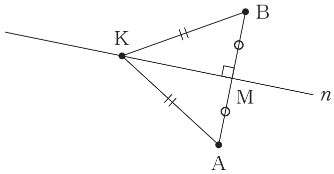
☜ **直線の方程式**
点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は
$$y-y_0=m(x-x_0).$$

☜ 傾きが m $(\neq 0)$ の直線に垂直な直線の傾きは $-\dfrac{1}{m}$.

$$\ell:\ x+2y=2. \qquad \cdots ②$$

円 C の中心を K とする．C は 2 点 A，B を通るから，AK＝BK であり，K は線分 AB の垂直二等分線である直線 n 上にある．K は直線 ℓ 上にもあるから，K は 2 直線 ℓ と n の交点である．よって，① と ② から $x=-4$, $y=3$ であり，K の座標は $(-4,\ 3)$ である．

☜ AK＝BK＝(C の半径).



また，C の半径 r は

$$\begin{aligned} r=\mathrm{AK}&=\sqrt{(-4-1)^2+\{3-(-2)\}^2} \\ &=5\sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから，C の方程式は

$$\{x-(-4)\}^2+(y-3)^2=(5\sqrt{2})^2$$

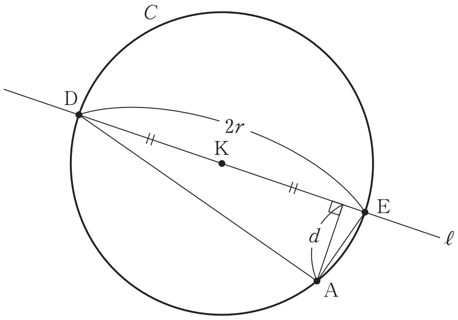
すなわち

$$\left(x+\boxed{4}\right)^2+\left(y-\boxed{3}\right)^2=\boxed{50}$$

である．

☜ **2 点間の距離**
2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

☜ **円の方程式**
点 $(a,\ b)$ を中心とし，半径が r の円の方程式は
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$



☜ D と E の位置は逆でもよい．

A(1, −2) と ℓ: $x+2y-2=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1+2\cdot(-2)-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

であるから，三角形 ADE の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$$

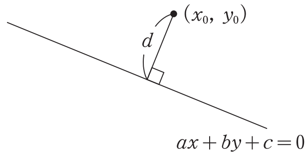
$$=\boxed{5}\sqrt{\boxed{10}}$$

である.

点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



$\mathrm{DE}=2r=10\sqrt{2}$.

［2］ 問題

$$p>0,\quad p\neq 1.$$

$$f(x)=p^{2x}-p^{x+1}-p.$$

(1) $p=3$ のとき，$f(x)=3^{2x}-3^{x+1}-3$ であるから

$$f(-1)=3^{-2}-3^0-3$$

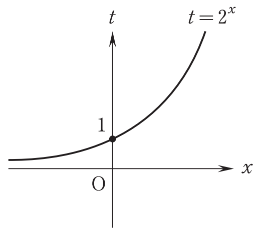
$$=\frac{1}{3^2}-1-3$$

$$=\frac{\boxed{-35}}{\boxed{9}}$$

である.

(2) $p=2$ のとき，$f(x)=2^{2x}-2^{x+1}-2$ である.

$t=2^x$ とおくと，x がすべての実数を変化するとき，t のとり得る値の範囲は $t>\boxed{0}$ であり



$$f(x)=(2^x)^2-2^x\cdot 2^1-2$$

$$=t^{\boxed{2}}-\boxed{2}t-\boxed{2}$$

である．よって，x の方程式 $f(x)=1$ は

$$t^2-2t-2=1$$

すなわち

$$t^2-2t-3=0$$

$$(t+1)(t-3)=0$$

となる．$t>0$ であるから，$t=3$.

よって，$2^x=3$ より，$f(x)=1$ の解は

$t=2^x$.

$$x=\log_2\boxed{3}$$

対数

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$ のとき

$$a^x=M \iff x=\log_a M.$$

である．また，$\log_2 3$ と 2 の大小関係は

$$\log_2 3<\log_2 4=2$$

底：$2>1$.

であるから，$\boxed{\text{ヌ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる.

(3) $s=p^x\ (>0)$ とおくと

$$f(x)=(p^x)^2-p^x\cdot p^1-p$$
$$=s^2-ps-p$$

である．よって，x の方程式 $f(x)=1$ は

$$s^2-ps-p=1$$

すなわち

$$s^2-ps-(p+1)=0$$
$$(s+1)\{s-(p+1)\}=0$$

となる．

$s>0$ であるから

$$s=p+1$$

すなわち

$$p^x=p+1 \qquad \cdots ①$$

☜ $s=p^x$.

である．

① において，$x<2$ を満たすような p の値の範囲を考える．

(i) $0<p<1$ のとき $\cdots ②$

$$x<2 \quad より \quad p^x>p^2$$

☜ $0<a<1$ のとき $M<N \iff a^M>a^N$.

であるから，① より

$$p+1>p^2 \qquad \cdots ③$$

となる．ここで，② より

$$p+1>1>p^2$$

が成り立つから，② を満たすすべての p について ③ が成り立つ．

(ii) $p>1$ のとき $\cdots ④$

$$x<2 \quad より \quad p^x<p^2$$

☜ $a>1$ のとき $M<N \iff a^M<a^N$.

であるから，① より

$$p+1<p^2$$

すなわち

$$p^2-p-1>0$$

となる．さらに ④ より

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<p.$$

したがって，方程式 $f(x)=1$ の解が 2 より小さくなるような p の値の範囲は

$$\boxed{0}<p<\boxed{1},\quad \frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}<p$$

である．

第２問　微分法・積分法

p，q を実数とし，x の関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 3$$

$$g(x) = x^2 + px + q$$

とする．また，曲線 $y = f(x)$，曲線 $y = g(x)$ をそれぞれ C，D とする．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{アイ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$$

である．曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{エオ}}\,x + \boxed{\text{カ}}$$

である．

曲線 D が点 A を通り，A における D の接線が ℓ と一致するとき

$$p = \boxed{\text{キク}},\quad q = \boxed{\text{ケ}}$$

である．以下，$p = \boxed{\text{キク}}$，$q = \boxed{\text{ケ}}$ とする．

k を $k > -2$ を満たす実数とし，点 A を通り，傾き k の直線を m とする．D と m の共有点の x 座標は

$$1,\quad k + \boxed{\text{コ}}$$

である．D と m と y 軸で囲まれた部分の面積を S_1，D と m で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{サ}}\,k + \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

$$S_2 = \frac{k^3 + \boxed{\text{セ}}\,k^2 + \boxed{\text{ソタ}}\,k + \boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．ここで，$S(k) = S_1 - S_2$ とする．

a を $a > -2$ を満たす定数とし，k が $-2 < k < a$ の範囲を変化するとき，$S(k)$ のとり得る値の範囲は

$$-2 < a \leqq \boxed{\text{テト}}\ \text{のとき，}\ \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} < S(k) < S(a)$$

$$\boxed{\text{テト}} < a \leqq \boxed{\text{ヌネ}} + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}\ \text{のとき，}\ \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} < S(k) \leqq \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

$$\boxed{\text{ヌネ}} + \sqrt{\boxed{\text{ノ}}} < a\ \text{のとき，}\ S(a) < S(k) \leqq \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である．

【解説】

問題

$f(x)=-2x^2+2x+3$ であるから，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{-4}\,x+\boxed{2}$$

である．よって，曲線 C 上の点 A(1, 3) における C の接線 ℓ の傾きは $f'(1)=-2$ であるから，ℓ の方程式は

$$y-3=-2(x-1)$$

より

$$y=\boxed{-2}\,x+\boxed{5}$$

である．

導関数

$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$,

$(c)'=0$ （c は定数）.

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t).$$

$g(x)=x^2+px+q$ であるから，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ は

$$g'(x)=2x+p$$

である．曲線 D が点 A を通り，A における D の接線が ℓ と一致する条件は

$$\begin{cases} g(1)=3 \\ g'(1)=-2 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 1+p+q=3 \\ 2+p=-2 \end{cases}$$

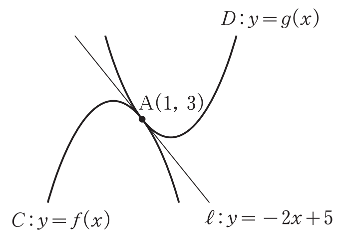
である．これより

$$p=\boxed{-4},\quad q=\boxed{6}$$

である．以下，$p=-4$，$q=6$，すなわち

$$g(x)=x^2-4x+6$$

とする．



点 A を通り，傾き k $(k>-2)$ の直線が m であるから，m の方程式は

$$y-3=k(x-1)$$

より

$$y=kx-k+3$$

である．$h(x)=kx-k+3$ とおくと

直線の方程式

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き k の直線の方程式は

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

$$\begin{aligned} g(x)-h(x)&=(x^2-4x+6)-(kx-k+3) \\ &=x^2-(k+4)x+k+3 \qquad \cdots ① \\ &=(x-1)\{x-(k+3)\} \end{aligned}$$

である．k が $k>-2$ を満たすとき，D と m の共有点の x 座標は

$$g(x)-h(x)=0$$

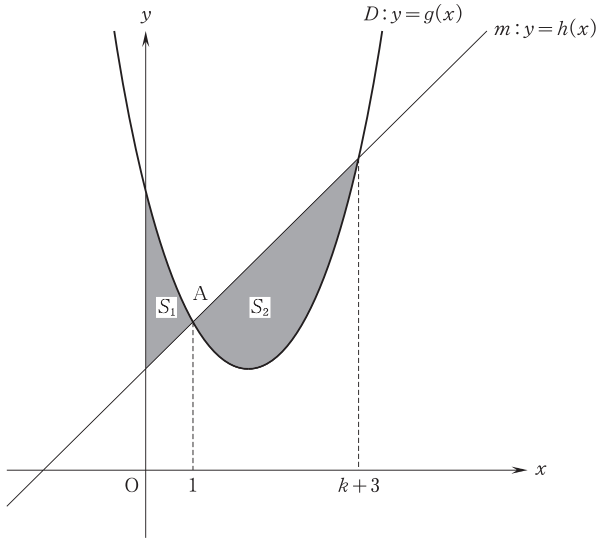
すなわち

$$(x-1)\{x-(k+3)\}=0$$

より

$$1,\ k+\boxed{3}$$

である．また，$k>-2$ より，$k+3>1$ である．



D と m と y 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1=\int_0^1\{g(x)-h(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1\{x^2-(k+4)x+k+3\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k+4}{2}x^2+(k+3)x\right]_0^1$$

$$=\frac{\boxed{3}\,k+\boxed{8}}{\boxed{6}}$$

である．D と m で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2=\int_1^{k+3}\{h(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=-\int_1^{k+3}(x-1)\{x-(k+3)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(k+3)-1\}^3$$

$$=\frac{1}{6}(k+2)^3$$

$$=\frac{k^3+\boxed{6}\,k^2+\boxed{12}\,k+\boxed{8}}{\boxed{6}}$$

である．よって

$$S(k)=S_1-S_2$$

$$=\frac{(3k+8)-(k^3+6k^2+12k+8)}{6}$$

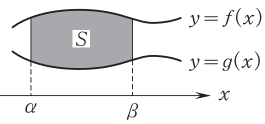
$$=-\frac{1}{6}(k^3+6k^2+9k)$$

である．このとき

面積

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ ならば2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



☜ ① を用いた．

☜ **不定積分**

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

（$n=0$，1，2，…，C は積分定数.）

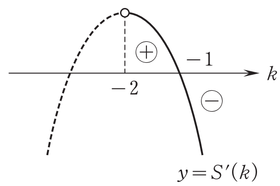
☜ $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いた．

$$S'(k) = -\frac{1}{6}(3k^2+12k+9)$$
$$= -\frac{1}{2}(k^2+4k+3)$$
$$= -\frac{1}{2}(k+1)(k+3)$$

であるから，$k>-2$ における $S(k)$ の増減は次の表のようになる．

k	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$
$S'(k)$		$+$	0	$-$
$S(k)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	↗	$\frac{2}{3}$	↘

☜



$S'(k)$ の符号は $y=S'(k)$ のグラフを用いて判断するとよい．

ここで，$S(k)=\frac{1}{3}$ かつ $k>-2$ を満たす k の値を求める．

$S(k)=\frac{1}{3}$ は

$$-\frac{1}{6}(k^3+6k^2+9k)=\frac{1}{3}$$

すなわち

$$k^3+6k^2+9k+2=0$$

となり，この左辺を因数定理を用いて因数分解すると

$$(k+2)(k^2+4k+1)=0$$

となる．よって

$$k=-2,\ -2\pm\sqrt{3}.$$

$k>-2$ より

$$k=-2+\sqrt{3}.$$

☜ $k \geqq -2$ で考えると

$$S(-2)=\frac{1}{3}$$

が成り立っているので

$$T(k)=k^3+6k^2+9k+2$$

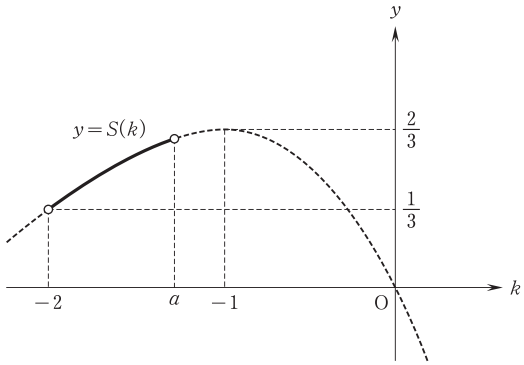
とおくと

$$T(-2)=0$$

が成り立つ．よって，因数定理より $T(k)$ は $k+2$ で割り切れる．

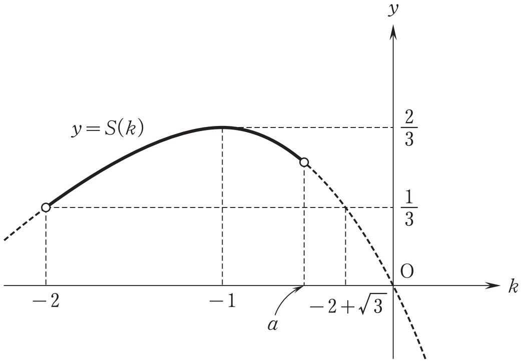
したがって，k が $-2<k<a$ $(a>-2)$ の範囲を変化するとき，$S(k)$ のとり得る値の範囲は次のようになる．

(i) $-2<a \leqq \boxed{-1}$ のとき



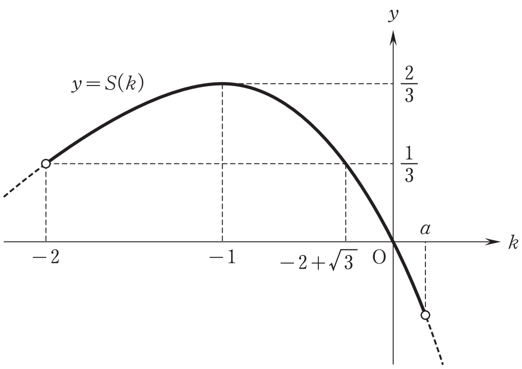
$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} < S(k) < S(a).$$

(ii)　$-1 < a \leqq \boxed{-2} + \sqrt{\boxed{3}}$ のとき



$$\frac{1}{3} < S(k) \leqq \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}.$$

(iii)　$-2+\sqrt{3} < a$ のとき



$$S(a) < S(k) \leqq \frac{2}{3}.$$

第3問　数　列

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ア}}n-\boxed{\text{イ}}$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}n^2+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n$$

である．

(1)　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n+a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で定める．① と，① の n を $n+1$ に置きかえて得られる等式から

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\boxed{\text{キ}}(b_{n+1}-b_n)+\boxed{\text{ク}}$$

が得られる．ここで，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ で定める．このとき

$$c_{n+1}+\boxed{\text{ケ}}=\boxed{\text{キ}}\left(c_n+\boxed{\text{ケ}}\right)$$

が成り立つ．よって

$$c_n=\boxed{\text{コ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{\,n}-\boxed{\text{サ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから

$$b_n=\boxed{\text{シ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{\,n}-\boxed{\text{ス}}n-\boxed{\text{セ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2)　$S_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．m を自然数として

$$S_{2m}=\boxed{\text{ソ}}m$$

$$S_{2m-1}=\boxed{\text{タチ}}m+\boxed{\text{ツ}}$$

と表されるから，$S_n\geqq 1000$ を満たす最小の自然数 n の値は

$$\boxed{\text{テトナ}}$$

である．

【解説】　問題

$$a_1=2,$$
$$a_{n+1}=a_n+3\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

より，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 3 の等差数列なので

$$a_n=\boxed{3}n-\boxed{1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
$$=\frac{n\{2+(3n-1)\}}{2}$$

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=a+(n-1)d.$$

等差数列の和

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n(a+\ell)}{2}.$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}n^2+\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}n$$

である．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=1,$$
$$b_{n+1}=2b_n+a_n$$

すなわち

$$b_{n+1}=2b_n+3n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots ①$$

☜ $a_n=3n-1$.

で定める．① の n を $n+1$ に置きかえると

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+3n+2 \qquad \cdots ②$$

を得る．②−① より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\boxed{2}(b_{n+1}-b_n)+\boxed{3}$$

が成り立つから，$b_{n+1}-b_n=c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より

$$c_{n+1}=2c_n+3 \qquad \cdots ③$$

☜ $c_{n+1}=b_{n+2}-b_{n+1}$.

となる．さらに変形すると

$$c_{n+1}+\boxed{3}=2(c_n+3) \qquad \cdots ④$$

☜ $c_{n+1}=pc_n+q \quad (p\neq 1)$

は

$$\alpha=p\alpha+q$$

を満たす α を用いて

$$c_{n+1}-\alpha=p(c_n-\alpha)$$

と変形できる．③ は，$p=2$，$q=3$ の場合であり，$\alpha=-3$ である．

が得られる．

また，① より

$$b_2=2b_1+2=2\cdot1+2=4$$

であるから

$$c_1=b_2-b_1=4-1=3$$

である．

よって，$c_1=3$ と ④ より，数列 $\{c_n+3\}$ は初項 $c_1+3=6$，公比 2 の等比数列なので

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}.$$

$$c_n+3=6\cdot2^{n-1}$$
$$=3\cdot2^n$$

☜ $6\cdot2^{n-1}=3\cdot2\cdot2^{n-1}=3\cdot2^n$.

であるから

$$c_n=\boxed{3}\cdot2^n-\boxed{3} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すなわち

$$b_{n+1}-b_n=3\cdot2^n-3 \qquad \cdots ⑤$$

☜ $c_n=b_{n+1}-b_n$.

となる．① を ⑤ に代入して b_{n+1} を消去すると

$$(2b_n+3n-1)-b_n=3\cdot2^n-3$$

より

$$b_n=\boxed{3}\cdot2^n-\boxed{3}n-\boxed{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2) $S_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，m を自然数として

$$\begin{aligned}S_{2m}&=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k\\&=\sum_{\ell=1}^{m}\{(-1)^{2\ell-1}a_{2\ell-1}+(-1)^{2\ell}a_{2\ell}\}\\&=\sum_{\ell=1}^{m}(-a_{2\ell-1}+a_{2\ell})\\&=\sum_{\ell=1}^{m}3\\&=\boxed{\ 3\ }m\end{aligned}$$

☜ $a_{2\ell-1}$ と $a_{2\ell}$ は等差数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項なので

$$a_{2\ell}-a_{2\ell-1}=3\quad(=\text{公差})$$

である．

☜ $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}3=\overbrace{3+3+\cdots+3}^{m\text{ 個}}$
$=3m.$

と表され

$$\begin{aligned}S_{2m-1}&=S_{2m}-(-1)^{2m}a_{2m}\\&=3m-(6m-1)\\&=\boxed{-3}m+\boxed{\ 1\ }\end{aligned}$$

☜ $a_n=3n-1$ であるから
$a_{2m}=3\cdot 2m-1=6m-1.$

と表される．$S_{2m-1}=-3m+1<0$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから，$S_n\geqq 1000$ を満たす n は偶数である．

よって

$$S_{2m}=3m\geqq 1000$$

より

$$m\geqq\frac{1000}{3}=333+\frac{1}{3}$$

を満たす m を考えればよい．m は自然数だから

$$m\geqq 334$$

となり，$S_n\geqq 1000$ を満たす最小の自然数 n の値は

$$n=2\cdot 334=\boxed{668}$$

☜ $m=334$ のときの n の値である．

である．

第 4 問　ベクトル

O を原点とする座標空間に，4 点 A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(1, 2, 0)，D(0, 2, 0) がある．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}})$$

である．

(1) 直線 AD 上の点 H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を満たしている．このとき，t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表されるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}t,\ \boxed{\text{キ}}-t)\end{aligned}$$

である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{\text{ク}}$ であるから

$$t=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である．

(2) 線分 AB を 3:1 に内分する点を L とすると，L の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \boxed{\text{ス}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$ である．

また，三角形 ALD の重心を G とすると，G の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}\right)$ である．

平面 ACD と直線 OG の交点を K とする．点 K は平面 ACD 上にあるから，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表される．また，点 K は直線 OG 上にあるから

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}},\quad \beta=\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である．

(3) (1) の点 H と (2) の点 K について，四面体 OHAC の体積を V_1，四面体 OKAC の体積を V_2 とすると

$$V_1:V_2=\boxed{\text{ヒ}}:\boxed{\text{フ}}$$

である．

【解説】 問題

A(0, 0, 1)，D(0, 2, 0) であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(0,\ 2,\ 0)-(0,\ 0,\ 1)\\&=(\boxed{0},\ \boxed{2},\ \boxed{-1})\end{aligned}$$

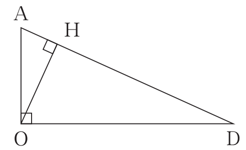
☜ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(0,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 0,\ 1)$．

である．

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
すなわち
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
より
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+t(0,\ 2,\ -1)\\&=\left(\boxed{0},\ \boxed{2}\,t,\ \boxed{1}-t\right)\end{aligned}$$
である．また
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=0\cdot 0+2t\cdot 2+(1-t)\cdot(-1)\\&=5t-1\end{aligned}$$
であり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{0}$ であるから
$$5t-1=0$$
すなわち
$$t=\frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$$
である．

内積

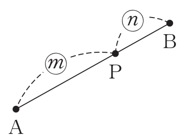
$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$
$$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$
のとき
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$



(2) 線分 AB を 3:1 に内分する点が L であるから
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OL}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}\\&=\frac{1}{4}(0,\ 0,\ 1)+\frac{3}{4}(1,\ 0,\ 0)\\&=\left(\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$
より，L の座標は
$$\left(\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}},\ \boxed{0},\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}\right)$$
である．また，三角形 ALD の重心が G であるから
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}\\&=\frac{1}{3}(0,\ 0,\ 1)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}(0,\ 2,\ 0)\\&=\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{12}\right)\end{aligned}$$
より，G の座標は
$$\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}},\ \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}},\ \frac{\boxed{5}}{\boxed{12}}\right)$$
である．

点 K は平面 ACD と直線 OG の交点である．点 K は平面 ACD 上にあるから，実数 α，β を用いて

内分点の位置ベクトル



線分 AB を $m:n$ の比に内分する点を P とすると
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}.$$

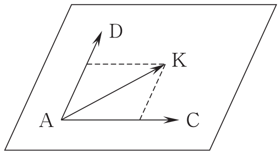
重心の位置ベクトル

三角形 ABC の重心を G とすると
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}.$$

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$
$$=(0,\ 0,\ 1)+\alpha(1,\ 2,\ -1)+\beta(0,\ 2,\ -1)$$
$$=(\alpha,\ 2\alpha+2\beta,\ 1-\alpha-\beta) \quad \cdots ①$$

☜ A(0, 0, 1), C(1, 2, 0) より

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ -1).$$



点 K が平面 ACD 上にあるから，α，β を実数として

$$\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

と表される．よって

$$\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

より

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}.$$

と表される．また，点 K は直線 OG 上にあるから，実数 γ を用いて

$$\overrightarrow{OK}=\gamma\overrightarrow{OG}$$
$$=\gamma\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{12}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}\gamma,\ \frac{2}{3}\gamma,\ \frac{5}{12}\gamma\right) \quad \cdots ②$$

と表される．よって，① と ② より

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{4}\gamma \\ 2\alpha+2\beta=\dfrac{2}{3}\gamma \\ 1-\alpha-\beta=\dfrac{5}{12}\gamma \end{cases}$$

が成り立つ．この連立方程式を解くと

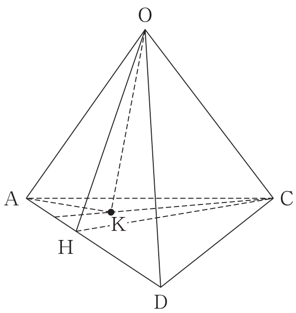
$$\alpha=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}},\quad \beta=\frac{\boxed{1}}{\boxed{9}},\quad \gamma=\frac{4}{3}$$

である．

(3) (1) の点 H と (2) の点 K について，四面体 OHAC の体積が V_1，四面体 OKAC の体積が V_2 である．四面体 OHAC と四面体 OKAC は頂点 O が共通であり，2 点 H，K はともに平面 ACD 上にあることより

$$V_1 : V_2=\triangle ACH : \triangle ACK$$

☜

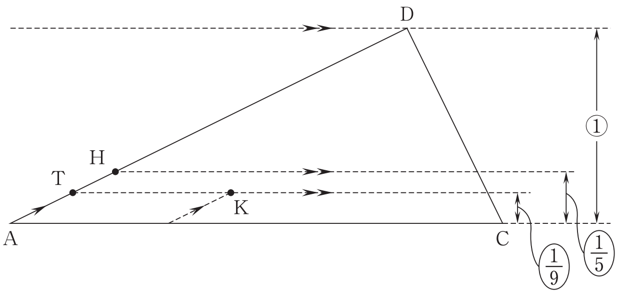


四面体 OHAC の底面を三角形 HAC，四面体 OKAC の底面を三角形 KAC とみると，二つの四面体の高さは同じである．よって

（体積比）＝（底面積比）

が成り立つ．

である．さらに，二つの三角形 ACH と ACK の底辺をともに辺 AC とみると，二つの三角形の面積比は高さの比と一致する．



$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ より，AH : AD＝1 : 5.　☜ $t=\dfrac{1}{5}$.

また，TK // AC を満たすように点 T を辺 AD 上にとると，

$\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AD}$ より，AT : AD＝1 : 9.　☜ $\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\beta=\dfrac{1}{9}$.

よって，二つの三角形 ACH と ACK の高さの比は

$$\frac{1}{5}:\frac{1}{9}=9:5$$

であるから

$$V_1:V_2=\boxed{\ 9\ }:\boxed{\ 5\ }$$

である。

第 5 問　確率分布と統計的な推測

1 個のさいころを投げるとき，出た目の数を 2 で割ったときの余りを R，出た目の数を 4 で割ったときの余りを S とする．

(1)　$R=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$S=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，$R=S=1$ である確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である．また，確率変数 S の期待値は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$，分散は $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}$ である．

さらに，$T=RS$ とおくと，確率変数 T の期待値は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$，分散は $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チツ}}$ である．

(2)　1 個のさいころを n 回投げるとき，$S=1$ となった回数を X とする．

(i)　$n=1800$ とすると，確率変数 X は平均 $\boxed{テトナ}$，標準偏差 $\boxed{ニヌ}$ の二項分布に従う．さらに，試行回数 1800 は十分大きいと考えられるので，$Y=\dfrac{X}{1800}$ とおけば，Y は近似的に平均 $\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$，標準偏差 $\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒフ}}$ の正規分布に従う．

(ii)　$\left|\dfrac{X}{n}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right| \leqq 0.01$ となる確率が 0.95 以上になるような n の最小値を n_0 とする．n_0 に最も近い値は $\boxed{ヘ}$ である．$\boxed{ヘ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　4270　　①　8540　　②　17080　　③　42700　　④　85400

ただし，Z を標準正規分布に従う確率変数とするとき，$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96)=0.95$ である．

【解説】

問題

(1)　1 個のさいころを投げて出た目の数を k とする．k が 1，2，3，4，5，6 である各々の根元事象はすべて同様に確からしい．

k の値それぞれに対する R，S，T の値をまとめると以下の表になる．

k	1	2	3	4	5	6
R	1	0	1	0	1	0
S	1	2	3	0	1	2
T	1	0	3	0	1	0

☜　R は出た目の数を 2 で割ったときの余りであり，S は 4 で割ったときの余りである．さらに，$T=RS$ である．

表より，$R=1$ である確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

$S=1$ である確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

$R=S=1$ である確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$$

である．

また，確率変数 S の期待値を $E(S)$ とすると

$$E(S)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$$

であり，S の分散を $V(S)$ とすると

$$V(S)=E(S^2)-\{E(S)\}^2$$

$$=\left(1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\boxed{11}}{\boxed{12}}$$

である．

さらに，確率変数 T の期待値を $E(T)$ とすると

$$E(T)=1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{6}}$$

であり，T の分散を $V(T)$ とすると

$$V(T)=E(T^2)-\{E(T)\}^2$$

$$=\left(1^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$=\frac{\boxed{41}}{\boxed{36}}$$

である．

期待値(平均)

確率変数 X のとり得る値を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とすると，X の期待値(平均) $E(X)$ は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k.$$

分散

確率変数 X のとり得る値を

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$$

とすると，X の分散 $V(X)$ は，$E(X)=m$ として

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k \quad \cdots\text{(i)}$$

または

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2. \quad \cdots\text{(ii)}$$

ここでは(ii)を用いた．

(2) 1個のさいころを投げる試行を n 回行い，$S=1$ となった回数が X である．

$X=r$ となる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

である．すなわち，確率変数 X は

$$\text{二項分布 } B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$$

二項分布

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると，X の平均 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ は

$$E(X)=np,$$
$$V(X)=npq,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{npq}$$

である．

に従い

$$X\text{ の平均は }\ n\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$$
$$\text{標準偏差は }\ \sqrt{n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2n}}{3} \qquad \cdots ①$$

である．

(i)　$n=1800$ とすると，確率変数 X は

$$\text{平均}\qquad \frac{1800}{3}=\boxed{600},$$
$$\text{標準偏差}\ \ \frac{\sqrt{2\cdot1800}}{3}=\boxed{20}$$

の二項分布 $B\left(1800,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う．

試行回数 1800 は十分大きいと考えられるので，X は近似的に，平均 600，標準偏差 20 の正規分布 $N(600,\ 400)$ に従う．

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N(np,\ npq)$ に従う．

ただし，$q=1-p$ である．

さらに $Y=\dfrac{X}{1800}$ とおくと，Y は近似的に

$$\text{平均}\qquad \frac{600}{1800}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}},$$

$E(Y)=\dfrac{E(X)}{1800}$.

$$\text{標準偏差}\ \ \frac{20}{1800}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{90}}$$

$\sigma(Y)=\dfrac{\sigma(X)}{1800}$.

の正規分布に従う．

(ii)　n が大きいとき，① より

$$Z=\frac{X-\frac{n}{3}}{\frac{\sqrt{2n}}{3}} \qquad \cdots ②$$

は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

標準正規分布

平均 0，標準偏差 1 の正規分布 $N(0,\ 1)$ を，標準正規分布という．

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X に対し，$Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は，n が大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$E(X)=\dfrac{n}{3}$，$\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{2n}}{3}$ である．

② を変形すると

$$\frac{X}{n}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}Z$$

であるから

$$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{3}\right|\leqq 0.01 \qquad \cdots ③$$

は

$$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}|Z|\leqq 0.01$$

すなわち

$$|Z|\leqq 0.01\cdot\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

となる．

よって，③ となる確率が 0.95 以上となる条件は

$$P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)=0.95$$

すなわち

$$P(|Z| \leqq 1.96) = 0.95$$

より

$$0.01 \cdot \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geqq 1.96$$

を満たすことである．この不等式をさらに変形すると

$$n \geqq \frac{2 \cdot (196)^2}{9} = 8536.8\cdots$$

となる．

よって，⓪～④のうち，n_0 に最も近い値は 8540 である．

したがって，$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

【数 学 ①】

旧 数 学 Ⅰ

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第1問	ア＋$\sqrt{イ}$	$2+\sqrt{6}$	2	
	ウ	4	3	
	エオ＋$\sqrt{カ}<x<$キ＋$\sqrt{ク}$	$-1+\sqrt{6}<x<5+\sqrt{6}$	2	
	ケ	5	3	
	a＋コb	$a+2b$	2	
	±$\sqrt{サ}$	$\pm\sqrt{7}$	2	
	シス$\sqrt{セ}$	$13\sqrt{7}$	3	
	ソタチ$\sqrt{ツ}$	$139\sqrt{7}$	3	
	第1問　自己採点小計		(20)	
第2問	a＝ア，b＝イ	$a=2$，$b=5$	2	
	ウエ	-2	2	
	オ	3	2	
	カ	2	2	
	b－キa	$b-4a$	2	
	クケ	22	2	
	コサ	-5	2	
	a＝シス，b＝セソ	$a=-3$，$b=10$	3	
	タチ	-1	2	
	ツ	4	2	
	テ＋$\sqrt{ト}$	$1+\sqrt{7}$	2	
	ナ	4	2	
	第2問　自己採点小計		(25)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第3問	ア	3	3	
	$\dfrac{\sqrt{イウ}}{エ}$	$\dfrac{\sqrt{35}}{6}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{オカ}}{キ}$	$\dfrac{\sqrt{35}}{4}$	3	
	$\dfrac{ク\sqrt{ケコ}}{サシ}$	$\dfrac{9\sqrt{35}}{35}$	3	
	$\sqrt{スセ}$	$\sqrt{15}$	3	
	$\dfrac{ソタ}{チ}$	$\dfrac{-1}{6}$	3	
	$\sqrt{ツテ}$	$\sqrt{11}$	3	
	$\dfrac{\sqrt{トナ}}{ニ}$	$\dfrac{\sqrt{11}}{2}$	3	
	$\dfrac{ヌ}{ネ}$	$\dfrac{3}{2}$	3	
	$\dfrac{ノ\sqrt{ハヒ}}{フヘ}$	$\dfrac{3\sqrt{35}}{22}$	3	
	第3問　自己採点小計		(30)	
第4問	－(アa＋イ)(ウa－エ)	$-(2a+1)(3a-2)$	4	
	(x－オa－カ)(x＋キa－ク)	$(x-2a-1)(x+3a-2)$	3	
	ケコ$<x<$サ	$-1<x<3$	4	
	$a<\dfrac{シス}{セ}$，ソ$<a$	$a<\dfrac{-1}{3}$，$1<a$	4	
	$a<\dfrac{タ}{チ}$	$a<\dfrac{1}{5}$	4	
	$\dfrac{ツテ-\sqrt{トナ}}{ニ}$	$\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$	3	
	ヌ－$\sqrt{ネ}$	$1-\sqrt{2}$	3	
	第4問　自己採点小計		(25)	
	自己採点合計		(100)	

第 1 問　方程式・不等式，数と式

〔1〕 2 次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha=\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，$m\leqq\alpha<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

n を自然数とする．x の不等式

$$|x-\alpha|<n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について，$n=3$ のとき ① の解は

$$\boxed{\text{エオ}}+\sqrt{\boxed{\text{カ}}}<x<\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，① の解に負の整数を含まないような n の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

〔2〕 a，b を定数とし

$$x^2+y^2=a,\quad xy=b$$

とする．このとき

$$(x+y)^2=a+\boxed{\text{コ}}\,b$$

である．

以下，$a=11$，$b=-2$ とする．

$$x+y=\pm\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

である．

$x+y=\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ のとき

$$x^3+y^3=\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

$$x^5+y^5=\boxed{\text{ソタチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．

【解説】　問題

〔1〕 旧数学Ⅰ・旧数学Ａ 第 1 問〔1〕に同じである．

〔2〕　問題

$$x^2+y^2=a,\quad xy=b$$

より，

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$
$$=a+\boxed{2}\,b$$

である．

$a=11$，$b=-2$ のとき，

$$(x+y)^2=11+2\cdot(-2)=7$$

であるから，

$$x+y=\pm\sqrt{\boxed{7}}$$

である．

　$b=-2$ より $xy=-2$ であるから，$x+y=\sqrt{7}$ のとき，

$$\begin{aligned} x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\ &=(\sqrt{7})^3-3\cdot(-2)\cdot\sqrt{7}\\ &=\boxed{13}\sqrt{\boxed{7}} \end{aligned}$$

☜ $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ より，
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.

である．

　また，

$$x^2+y^2=11$$

☜ $a=11$.

であり，

$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$$

☜ x^5+y^5 を作ることを考える．

であるから，

$$\begin{aligned} x^5+y^5&=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)\\ &=11\cdot13\sqrt{7}-(-2)^2\cdot\sqrt{7}\\ &=\boxed{139}\sqrt{\boxed{7}} \end{aligned}$$

である．

第２問　２次関数

問題

旧数学Ⅰ・旧数学Ａ 第２問に同じである．

第３問　図形と計量

問題

数学Ⅰ 第３問に同じである．

第 4 問　方程式・不等式

a を実数とし

$$P=x^2+(a-3)x-6a^2+a+2$$

とする．

$$-6a^2+a+2=-\left(\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)\left(\boxed{\text{ウ}}\,a-\boxed{\text{エ}}\right)$$

であり

$$P=\left(x-\boxed{\text{オ}}\,a-\boxed{\text{カ}}\right)\left(x+\boxed{\text{キ}}\,a-\boxed{\text{ク}}\right)$$

である．

(1)　$a=1$ のとき，x の不等式 $P<0$ の解は

$$\boxed{\text{ケコ}}<x<\boxed{\text{サ}}$$

である．

(2)　x の不等式 $P<0$ の解に $x=3$ が含まれるような a の値の範囲は

$$a<\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}},\quad \boxed{\text{ソ}}<a$$

である．

(3)　$\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}<-\boxed{\text{キ}}\,a+\boxed{\text{ク}}$ であるような a の値の範囲は

$$a<\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

であり，このとき，x の不等式 $P<0$ の解に $x=a^2$ が含まれるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ツテ}}-\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}<a<\boxed{\text{ヌ}}-\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

である．

【解説】　**問題**

$$-6a^2+a+2$$
$$=-\left(\boxed{2}\,a+\boxed{1}\right)\left(\boxed{3}\,a-\boxed{2}\right)$$

☞ $-6a^2+a+2=-(6a^2-a-2)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 \longrightarrow & 3 \\ 3 & -2 \longrightarrow & -4 \\ \hline 6 & -2 & -1 \end{array}$$

であり，

$$P=x^2+(a-3)x-6a^2+a+2$$
$$=x^2+(a-3)x-(2a+1)(3a-2)$$
$$=\{x-(2a+1)\}\{x+(3a-2)\}$$
$$=\left(x-\boxed{2}\,a-\boxed{1}\right)\left(x+\boxed{3}\,a-\boxed{2}\right)\quad\cdots①$$

☞

$$\begin{array}{ccc} 1 & -(2a+1) \longrightarrow & -2a-1 \\ 1 & 3a-2 \longrightarrow & 3a-2 \\ \hline 1 & -(2a+1)(3a-2) & a-3 \end{array}$$

である．

(1)　$a=1$ のとき，① より，

$$P=(x-3)(x+1)$$

であるから，$P<0$ より，

$$(x-3)(x+1)<0.$$

よって，不等式 $P<0$ の解は，

$$\boxed{-1}<x<\boxed{3}$$

である．

☜　$p<q$ のとき，x の不等式
$$(x-p)(x-q)<0$$
の解は，
$$p<x<q.$$

(2)　x の不等式 $P<0$ の解に $x=3$ が含まれるとき，① より，

$$(3-2a-1)(3+3a-2)<0$$

☜　$x=3$ のとき，$P<0$ が成り立つ．

すなわち

$$-2(a-1)(3a+1)<0$$

すなわち

$$(a-1)(3a+1)>0.$$

よって，求める a の値の範囲は，

$$a<\frac{\boxed{-1}}{\boxed{3}},\quad \boxed{1}<a$$

である．

(3)　$2a+1<-3a+2$ より，

$$a<\frac{\boxed{1}}{\boxed{5}}$$

であり，このとき，x の不等式 $P<0$ の解は，

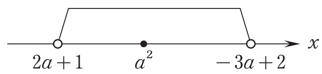
$$2a+1<x<-3a+2$$

であるから，x の不等式 $P<0$ の解に $x=a^2$ が含まれるとき，

$$2a+1<a^2<-3a+2$$

が成り立つ．

☜



これより，

$$\begin{cases} a^2-2a-1>0, & \cdots ② \\ a^2+3a-2<0. & \cdots ③ \end{cases}$$

a の方程式 $a^2-2a-1=0$ の解は，

$$a=1\pm\sqrt{2}$$

☜　2 次 方 程 式 $px^2+2q'x+r=0$ の 解 は，
$$x=\frac{-q'\pm\sqrt{q'^2-pr}}{p}.$$

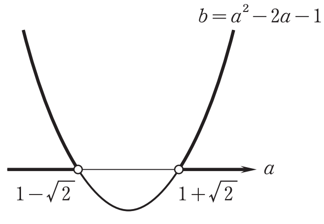
であるから，② は，

$$\{a-(1-\sqrt{2})\}\{a-(1+\sqrt{2})\}>0$$

となり，② の解は，

$$a<1-\sqrt{2},\quad 1+\sqrt{2}<a \qquad \cdots ②'$$

☜



である．

a の方程式 $a^2+3a-2=0$ の解は，

$$a=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

であるから，③ は，

$$\left(a-\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(a-\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)<0$$

となり，③ の解は，

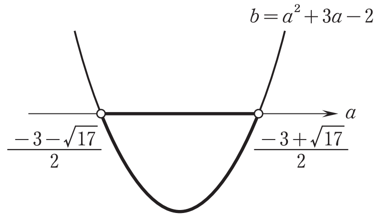
$$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \qquad \cdots ③'$$ ☜

である．

②′，③′ より，x の不等式 $P<0$ の解に $x=a^2$ が含まれるような a の値の範囲は，

$$\frac{\boxed{-3}-\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{2}}<a<\boxed{1}-\sqrt{\boxed{2}}$$

である．



☜ $1<2<4$ より，$1<\sqrt{2}<2$ であるから，

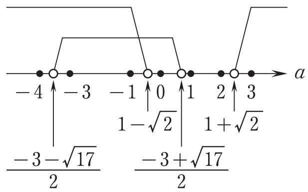
$$-1<1-\sqrt{2}<0,\quad 2<1+\sqrt{2}<3$$

であり，$16<17<25$ より，$4<\sqrt{17}<5$ であるから，

$$-4<\frac{-3-\sqrt{17}}{2}<-\frac{7}{2},$$

$$\frac{1}{2}<\frac{-3+\sqrt{17}}{2}<1$$

である．



旧数学Ⅰ・旧数学A

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア＋$\sqrt{イ}$	$2+\sqrt{6}$	2	
	ウ	4	3	
	エオ＋$\sqrt{カ}<x<$キ＋$\sqrt{ク}$	$-1+\sqrt{6}<x<5+\sqrt{6}$	2	
	ケ	5	3	
	コ	0	3	
	サ	3	2	
	シ	1	2	
	ス	0	3	
第1問 自己採点小計			(20)	
第2問	$a=$ア，$b=$イ	$a=2$，$b=5$	2	
	ウエ	-2	2	
	オ	3	2	
	カ	2	2	
	$b-$キa	$b-4a$	2	
	クケ	22	2	
	コサ	-5	2	
	$a=$シス，$b=$セソ	$a=-3$，$b=10$	3	
	タチ	-1	2	
	ツ	4	2	
	テ＋$\sqrt{ト}$	$1+\sqrt{7}$	2	
	ナ	4	2	
第2問 自己採点小計			(25)	
第3問	ア	2	3	
	$\frac{イ}{ウ}$	$\frac{3}{4}$	3	
	$\frac{エ\sqrt{オ}}{カ}$	$\frac{3\sqrt{7}}{4}$	4	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{3}{2}$	3	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{1}{3}$	4	
	1:サ	1:6	3	
	シ$R-$AE	$2R-$AE	3	
	$\frac{ス}{セ}R$	$\frac{9}{5}R$	3	
	ソタ:チ:ツ:3	15:5:7:3	4	
第3問 自己採点小計			(30)	
第4問	ア	2	4	
	イ	3	4	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{1}{8}$	4	
	$\frac{オカ}{キク}$	$\frac{13}{72}$	4	
	$\frac{ケコ}{サシス}$	$\frac{49}{432}$	4	
	$\frac{セソタ}{チツテ}$	$\frac{875}{432}$	5	
第4問 自己採点小計			(25)	
自己採点合計			(100)	

第1問　方程式・不等式，集合・論理

〔1〕 2次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解のうち大きい方を α とする．

$$\alpha = \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

n を自然数とする．x の不等式

$$|x-\alpha| < n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について，$n=3$ のとき ① の解は

$$\boxed{\text{エオ}} + \sqrt{\boxed{\text{カ}}} < x < \boxed{\text{キ}} + \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，① の解に負の整数を含まないような n の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

〔2〕 次の $\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

自然数 n について，集合 N を次のように定める．

$$N = \{m \mid m \text{ は } n \text{ の正の約数}\}$$

このとき

(i) N の要素の個数が1であることは，$n=1$ であるための $\boxed{\text{コ}}$．

(ii) N の要素の個数が偶数であることは，n が素数でないための $\boxed{\text{サ}}$．

(iii) N の要素の個数が3であることは，$n \in \{4,\ 9,\ 25,\ 49,\ 121\}$ であるための $\boxed{\text{シ}}$．

(iv) N の要素の個数が奇数であることは，$n \in \{\ell^2 \mid \ell \text{ は自然数}\}$ であるための $\boxed{\text{ス}}$．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

【解説】 問題

〔1〕

2次方程式 $x^2-4x-2=0$ の解は，

$$x = 2 \pm \sqrt{6}$$

であるから，

$$\alpha = \boxed{2} + \sqrt{\boxed{6}}$$

である．

$2 < \sqrt{6} < 3$ より，

$$4 < 2+\sqrt{6} < 5$$

であるから，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{4}$ である．

☜ 2次方程式

$$ax^2+2b'x+c=0$$

の解は，

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

旧数学Ⅰ・旧数学A

x の不等式

$$|x-\alpha|<n \qquad \cdots ①$$

は，$n>0$ より，

$$-n<x-\alpha<n$$

☜ X の不等式

$$|X|<p \quad (p>0)$$

の解は，

$$-p<X<p.$$

となるから，① の解は，

$$\alpha-n<x<\alpha+n$$

すなわち

$$2-n+\sqrt{6}<x<2+n+\sqrt{6} \qquad \cdots ②$$

である．

したがって，$n=3$ のとき，① の解は，

$$\boxed{-1}+\sqrt{\boxed{6}}<x<\boxed{5}+\sqrt{\boxed{6}}$$

である．

また，① の解に負の整数を含まないための条件は，② より，

$$-1\leqq 2-n+\sqrt{6}$$

すなわち

$$n\leqq 3+\sqrt{6}$$

である．

$2<\sqrt{6}<3$ より，

$$5<3+\sqrt{6}<6$$

であるから，① の解に負の整数を含まないような n の最大値は $\boxed{5}$ である．

〔2〕 問題

自然数 n の正の約数の個数を $r(n)$ と表す．

☜ $r(n)$ は，

$$N=\{m\,|\,m \text{ は } n \text{ の正の約数}\}$$

の要素の個数．

(i) k を 2 以上の自然数とすると，k は少なくとも 1 と k を約数にもつから，$r(k)\geqq 2$ である．

また，$r(1)=1$ である．

よって，

$$N \text{ の要素の個数が } 1 \iff n=1$$

であり，N の要素の個数が 1 であることは，$n=1$ であるための必要十分条件である．

したがって，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

(ii) 2 は素数であり，2 の正の約数は 1 と 2 であるから，$r(2)=2$ である．また，4 は素数ではなく，4 の正の約数は，

$$1,\quad 2,\quad 4$$

であるから，$r(4)=3$ である．

よって，

「N の要素の個数が偶数 $\Longrightarrow$ n は素数でない」は偽，
☜ 反例は $n=2$.

「n が素数でない $\Longrightarrow$ N の要素の個数は偶数」は偽
☜ 反例は $n=4$.

であるから，N の要素の個数が偶数であることは，n が素数でないための必要条件でも十分条件でもない．

したがって，$\boxed{サ}$ に当てはまるものは $\boxed{③}$ である．

(iii) p を素数とすると，$n=p^2$ のとき n の正の約数は，

$$1,\quad p,\quad p^2$$

であるから，$r(n)=3$ である．

$$4=2^2,\quad 9=3^2,\quad 25=5^2,\quad 49=7^2,\quad 121=11^2$$

であり，2，3，5，7，11 は素数であるから，

$$r(4)=r(9)=r(25)=r(49)=r(121)=3$$

である．

また，$169=13^2$ であり，13 は素数であるから，$r(169)=3$ である．

よって，

「N の要素の個数が 3 $\Longrightarrow$ $n\in\{4,\ 9,\ 25,\ 49,\ 121\}$」は偽，
☜ 反例は $n=169$.

「$n\in\{4,\ 9,\ 25,\ 49,\ 121\}$ $\Longrightarrow$ N の要素の個数は 3」は真

であるから，N の要素の個数が 3 であることは，

$n\in\{4,\ 9,\ 25,\ 49,\ 121\}$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない．

したがって，$\boxed{シ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である．

(iv) n がある自然数 k を用いて $n=k^2$ と表されるとき，n は k を約数にもち，k より小さい正の約数の個数と k より大きい正の約数の個数は等しいから，$r(n)$ は奇数である．

☜ 例えば，$n=36=6^2$ であれば，

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4}_{4\text{個}},\ ⑥,\ \underbrace{9,\ 12,\ 18,\ 36}_{4\text{個}}$$

$(36=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6)$.

また，$n=12$ であれば，

$$\sqrt{12}\ \downarrow\qquad \underbrace{1,\ 2,\ 3}_{3\text{個}},\ \underbrace{4,\ 6,\ 12}_{3\text{個}}$$

$(12=1\cdot 12=2\cdot 6=3\cdot 4=\sqrt{12}\cdot\sqrt{12})$.

$n=k^2$ を満たす自然数 k が存在しないとき，$\sqrt{n}$ は整数ではなく，n に対して，$\sqrt{n}$ より小さい正の約数の個数と $\sqrt{n}$ より大きい正の約数の個数は等しいから，$r(n)$ は偶数である．

よって，N の要素の個数が奇数であることは，

$n\in\{\ell^2 \mid \ell \text{ は自然数}\}$ であるための必要十分条件である．

したがって，$\boxed{ス}$ に当てはまるものは $\boxed{⓪}$ である．

第2問　2次関数

a，b を実数 $(a \neq 0)$ とし，x の2次関数

$$y = ax^2 - 4ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．

(1)　G が2点 $(-1,\ 15)$，$(1,\ -1)$ を通るとき

$$a = \boxed{\text{ア}},\quad b = \boxed{\text{イ}}$$

であり，このときの G を x 軸方向に $\boxed{\text{ウエ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$ だけ平行移動すると，関数 $y = \boxed{\text{ア}}\,x^2$ のグラフに一致する．

(2)　G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{カ}},\ b - \boxed{\text{キ}}\,a\right)$$

である．

$a=3$，$b=7$ のとき，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数①の最大値は $\boxed{\text{クケ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{コサ}}$ である．

また，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数①の最大値が $\boxed{\text{クケ}}$ であり，最小値が $\boxed{\text{コサ}}$ であるとき，$a \neq 3$ とすると

$$a = \boxed{\text{シス}},\quad b = \boxed{\text{セソ}}$$

である．

次に，p を $p<5$ である定数とし，$a = \boxed{\text{シス}}$，$b = \boxed{\text{セソ}}$ とする．このとき，$p \leqq x \leqq 5$ における関数①の最小値が $\boxed{\text{コサ}}$ となるような p の値の範囲は

$$\boxed{\text{タチ}} \leqq p < 5$$

である．

(3)　以下，$a>0$，$b = 2a^2 - a - 12$ とする．

G が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は

$$0 < a \leqq \boxed{\text{ツ}}$$

であり，G が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が1より大きくなるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}} < a \leqq \boxed{\text{ナ}}$$

である．

【解説】　問題

$$f(x) = ax^2 - 4ax + b$$

☜　$f(x)$ は①の右辺．

とすると，

$$f(x) = a(x-2)^2 + b - 4a \qquad \cdots ①'$$

と変形される．

(1)　G が2点 $(-1,\ 15)$，$(1,\ -1)$ を通るとき，

$$f(-1) = 15 \quad \text{かつ} \quad f(1) = -1$$

すなわち

$$5a+b=15 \quad \text{かつ} \quad -3a+b=-1$$

が成り立つ．これより，

$$a=\boxed{2}, \quad b=\boxed{5}$$

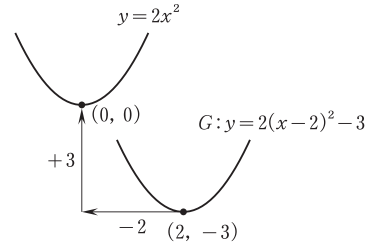
である．

　このとき，①′ より，

$$G: y=2(x-2)^2-3$$

であるから，G の頂点の座標は $(2,\ -3)$ である．

　よって，G を x 軸方向に $\boxed{-2}$，y 軸方向に $\boxed{3}$ だけ平行移動すると，点 $(0,\ 0)$ を頂点とする関数 $y=2x^2$ のグラフに一致する．



(2)　①′ より G の頂点の座標は，

$$\left(\boxed{2},\ b-\boxed{4}a\right)$$

である．

　$a=3$，$b=7$ のときの $f(x)$ を $f_1(x)$ とすると，①′ より，

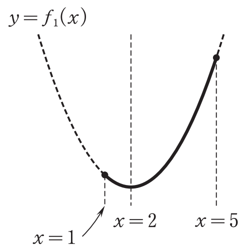
$$f_1(x)=3(x-2)^2-5$$

であり，$y=f_1(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数 $y=f_1(x)$ の

$$\text{最大値は} \quad f_1(5)=\boxed{22},$$

$$\text{最小値は} \quad f_1(2)=\boxed{-5}$$

である．



　$a>0$ のとき，関数 $y=f(x)$ の最大値が 22 で，最小値が -5 となるのは $a=3$，$b=7$ のときに限るから，$a<0$ のときについて考える．

　$a<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，$1 \leqq x \leqq 5$ における関数 $y=f(x)$ の

$$\text{最大値は} \quad f(2)=-4a+b,$$

$$\text{最小値は} \quad f(5)=5a+b$$

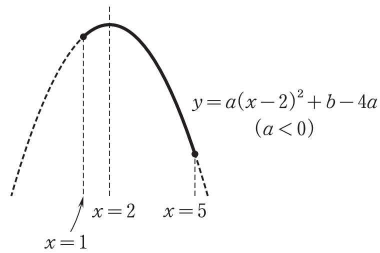
であり，最大値が 22 で，最小値が -5 となるとき，

$$\begin{cases} -4a+b=22, \\ 5a+b=-5 \end{cases}$$

を解いて，

$$a=\boxed{-3}, \quad b=\boxed{10}$$

である．



　$a=-3$，$b=10$ のときの $f(x)$ を $f_2(x)$ とすると，①′ より，

$$f_2(x)=-3(x-2)^2+22$$

であり，$y=f_2(x)$ のグラフは上に凸の放物線である．

　放物線 $y=f_2(x)$ の軸が区間 $p \leqq x \leqq 5$ の中央にあるとき，

$$\frac{p+5}{2}=2 \quad \text{すなわち} \quad p=-1$$

であり，$f_2(x)=-5$ を満たす 5 でない x の値は，

$$x=-1$$

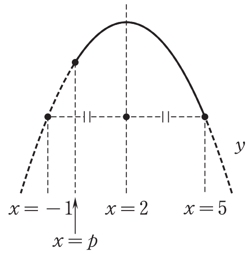
である．

よって，$p \leqq x \leqq 5$ における関数 $y=f_2(x)$ の最小値が -5 すなわち $f_2(5)$ となるような $p<5$ である定数 p の値の範囲は，

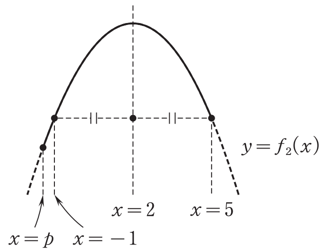
$$\boxed{-1} \leqq p<5$$

である．

(i)　$-1 \leqq p<5$ のとき



(ii)　$p<-1$ のとき



(3)　$a>0$，$b=2a^2-a-12$ のときの $f(x)$ を $f_3(x)$ とすると，①′ より，

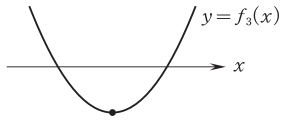
$$f_3(x)=a(x-2)^2+2a^2-5a-12 \quad (a>0)$$

であり，$y=f_3(x)$ のグラフは下に凸の放物線である．

放物線 $y=f_3(x)$ $(a>0)$ が x 軸と共有点をもつような a の値の範囲は，

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad 2a^2-5a-12 \leqq 0$$

（頂点の y 座標）$\leqq 0$．



すなわち

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad (2a+3)(a-4) \leqq 0$$

すなわち

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{3}{2} \leqq a \leqq 4$$

より，

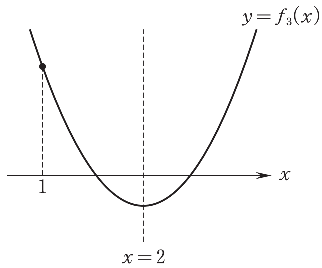
$$0<a \leqq \boxed{4} \qquad \cdots ②$$

である．

放物線 $y=f_3(x)$ の軸は直線 $x=2$ (>1) であるから，放物線 $y=f_3(x)$ が x 軸と共有点をもち，さらにそのすべての共有点の x 座標が 1 より大きくなる条件は，

$$② \quad \text{かつ} \quad f_3(1)>0$$

である．



$f_3(1)>0$ より，

$$2a^2-4a-12>0$$

すなわち

$$2(a^2-2a-6)>0$$

であり，これより，

$$a<1-\sqrt{7}, \quad 1+\sqrt{7}<a$$

であるから，これと ② より求める a の値の範囲は，

$$\boxed{1}+\sqrt{\boxed{7}}<a \leqq \boxed{4}$$

である．

第３問　図形と計量，平面図形

△ABC は，$AB=\sqrt{7}$，$AC=2$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ を満たすとする．このとき

$$BC=\boxed{\text{ア}},\ \sin\angle BAC=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．

△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，△ABC の外接円の中心を O とし，円 O の半径を R とすると $\dfrac{BC}{R}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

直線 AO と円 O との交点のうち A と異なる方を D とすると

$$BD=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

であり，さらに，辺 BC と線分 AD の交点を E とする．このとき

$$BE:AE=ED:EC=1:\boxed{\text{サ}}$$

であり，

$$BE+EC=\frac{1}{\boxed{\text{サ}}}AE+\boxed{\text{サ}}ED \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．

$BC=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}R$ であり，$ED=\boxed{\text{シ}}R-AE$ であることと ① から

$$AE=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}R$$

である．

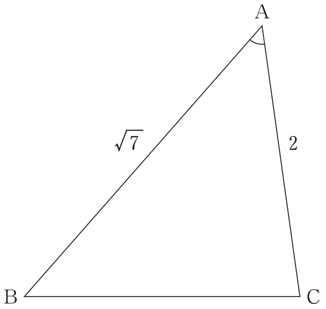
直線 BO と円 O との交点のうち B と異なる方を F，線分 BD の中点を M とし，線分 AD と線分 FM の交点を G とする．このとき，線分の長さの比について

$$AO:OG:GE:ED=\boxed{\text{ソタ}}:\boxed{\text{チ}}:\boxed{\text{ツ}}:3$$

が成り立つ．

【解説】

問題



△ABC に余弦定理を用いると，

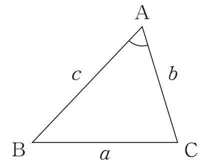
$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}\\&=2^2+(\sqrt{7})^2-2\cdot2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\\&=4\end{aligned}$$

であり，BC＞0 であるから，

$$\mathrm{BC}=\boxed{2}$$

である．

☜ **余弦定理**



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

また，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC}&=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}\\&=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

であり，

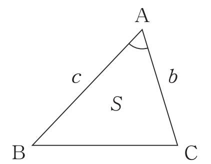
☜ $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}.$

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})&=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}\\&=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{3}{4}\\&=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$

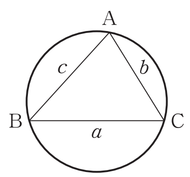
△ABC に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{BC}}{R}&=2\sin\angle\mathrm{BAC}\\&=2\cdot\frac{3}{4}\\&=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\end{aligned}$$

☜ **正弦定理**



△ABC の外接円の半径を R とすると，

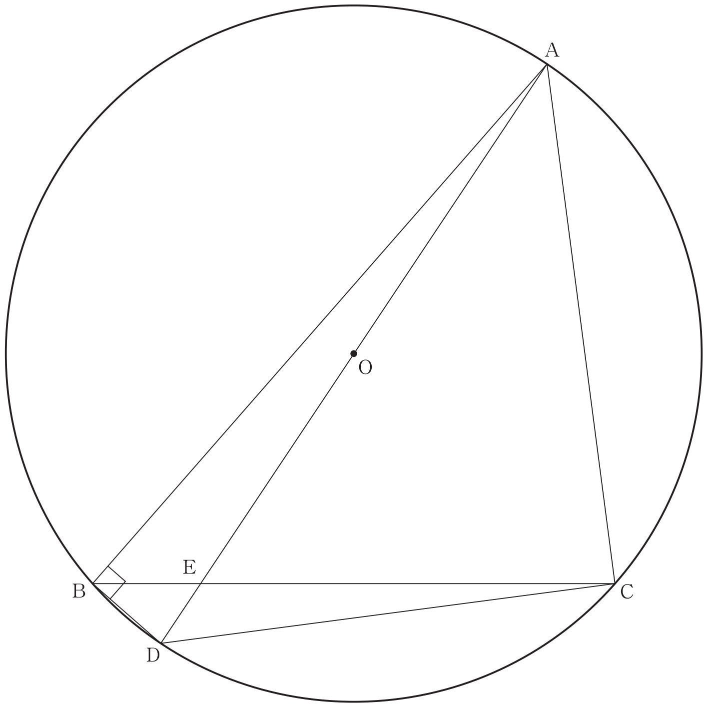
$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$

である．

よって，

$$R=\frac{2}{3}\mathrm{BC}=\frac{4}{3}$$

である．



線分 AD は外接円 O の直径であるから，

$$\angle\mathrm{ABD}=90^\circ$$

であり，直角三角形 ABD に三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}&=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2}\\&=\sqrt{(2R)^2-\mathrm{AB}^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2-(\sqrt{7})^2}\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

である．

円周角の定理より，∠CBD＝∠CAD すなわち

$$\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{EAC}$$

であり，同様に，∠ADB＝∠ACB すなわち

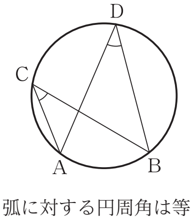
$$\angle\mathrm{EDB}=\angle\mathrm{ECA}$$

である．

よって，△EBD と △EAC は相似であり，

$$\mathrm{BE}:\mathrm{AE}=\mathrm{ED}:\mathrm{EC}=\mathrm{BD}:\mathrm{AC}$$

☜



同じ弧に対する円周角は等しい．

（円周角の定理）

∠ACB＝∠ADB．

である．

BD$=\dfrac{1}{3}$，AC$=2$ であるから，

$$\mathrm{BE}:\mathrm{AE}=\mathrm{ED}:\mathrm{EC}=\frac{1}{3}:2=1:\boxed{6}$$

である．

よって，

$$\mathrm{BE}=\frac{1}{6}\mathrm{AE},\quad \mathrm{EC}=6\mathrm{ED}$$

であり，

$$\mathrm{BE}+\mathrm{EC}=\frac{1}{6}\mathrm{AE}+6\mathrm{ED} \qquad \cdots ①$$

である．

BE＋EC＝BC であるから，

$$\mathrm{BE}+\mathrm{EC}=\frac{3}{2}R$$

☜ $\dfrac{\mathrm{BC}}{R}=\dfrac{3}{2}$.

であり，

$$\mathrm{ED}=\mathrm{AD}-\mathrm{AE}$$
$$=\boxed{2}R-\mathrm{AE}$$

☜ AD は円 O の直径であり，
AD$=2R$.

である．

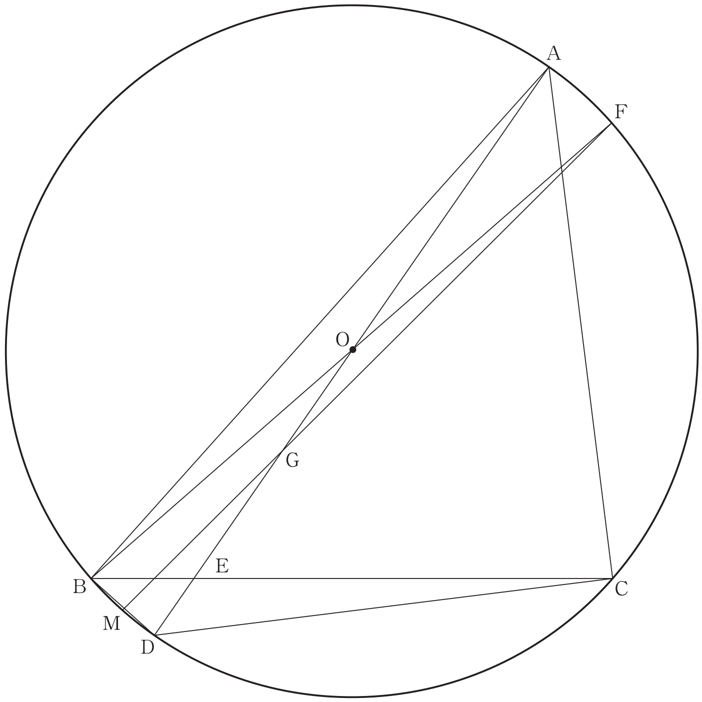
これらを ① に代入すると，

$$\frac{3}{2}R=\frac{1}{6}\mathrm{AE}+6(2R-\mathrm{AE})$$

であり，これより，

$$\mathrm{AE}=\frac{\boxed{9}}{\boxed{5}}R$$

である．



$$\text{AO} = R \qquad \cdots ②$$

であり，$\text{AE} = \dfrac{9}{5}R$ より，

$$\text{OE} = \text{AE} - \text{AO} = \frac{9}{5}R - R = \frac{4}{5}R,$$

$$\text{ED} = \text{AD} - \text{AE} = 2R - \frac{9}{5}R = \frac{1}{5}R \qquad \cdots ③$$

である．

△BDF において，M，O はそれぞれ辺 BD，辺 FB の中点であるから，G は △BDF の重心であり，

$$\text{OG} = \frac{1}{3}\text{OD} = \frac{1}{3}R \qquad \cdots ④$$

である．

よって，

$$\text{GE} = \text{OE} - \text{OG} = \frac{4}{5}R - \frac{1}{3}R = \frac{7}{15}R \qquad \cdots ⑤$$

である．

したがって，②，④，⑤，③ より，

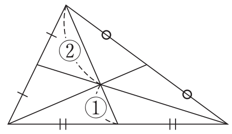
$$\text{AO} : \text{OG} : \text{GE} : \text{ED} = R : \frac{1}{3}R : \frac{7}{15}R : \frac{1}{5}R$$

$$= \boxed{15} : \boxed{5} : \boxed{7} : 3$$

である．

☜ **重心**

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる．この点を重心といい，重心は各中線を 2:1 に内分する．



第4問　場合の数と確率

(1) 文字R，W，Bについて，R，W，B各一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は $\boxed{ア}$ 通りあり，R三つ，W一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は $\boxed{イ}$ 通りある．

(2) 袋の中に赤玉3個，白玉2個，黒玉1個の合計6個の玉が入っている．

この袋から1個の玉を取り出し，取り出した玉の色を記録し，玉を袋に戻す．この操作を，同じ色が3回記録されるか3色がすべて記録されるまで繰り返す．

(i) 赤が3回記録されて3回で操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ であり，3回目に赤が記録されて操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である．

5回目に赤が記録されて操作が終了する確率は $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシス}}$ である．

(ii) 得点を次のように定める．

- 最後に赤が記録されて操作が終了したとき，終了するまでの操作の回数を得点とする．
- 最後に赤でない色が記録されて操作が終了したとき，得点を0点とする．

このとき，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{セソタ}}{\boxed{チツテ}}$ 点である．

【解説】 問題

(1) R，W，B各一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は，はじめの二つの文字が，W，B各一つとなるときであるから，その並べ方を考えて，

$$2! = \boxed{2}\ (通り)$$

ある．

☜ WBR
BWR

R三つ，W一つを一列に並べる並べ方のうちRが最後に並ぶ並べ方は，はじめの三つの文字が，R二つ，W一つとなるときであるから，その並べ方を考えて，

$${}_3C_1 = \boxed{3}\ (通り)$$

ある．

☜ WRRR
RWRR
RRWR

(2)(i) 取り出した玉の色に対して，赤，白，黒を，それぞれR，W，Bと記録することとする．

袋から1個の玉を取り出すとき，Rと記録する確率は，

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

W と記録する確率は，

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

B と記録する確率は，

$$\frac{1}{6}$$

である．

R が 3 回記録されて 3 回で操作が終了する確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} \quad \cdots ①$$

である．

また，3 回目に R が記録され 3 色すべてが記録されて操作が終了する確率は，

$$2!\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{18} \quad \cdots ②$$

☜ WBR
BWR
の 2 通り．

である．

R が 3 回記録されて 3 回で操作が終了するという事象と 3 回目に R が記録され 3 色すべてが記録されて操作が終了するという事象は互いに排反であるから，3 回目に R が記録されて操作が終了する確率は，①，② より，

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{18}$$

$$=\frac{\boxed{13}}{\boxed{72}}$$

である．

5 回目に R が記録されて操作が終了するのは次のいずれかである．

- はじめの 4 回で R が 2 回，W が 2 回記録され，5 回目に R が記録される． ☜ R が 3 回記録されて終了する．
- はじめの 4 回で R が 2 回，B が 2 回記録され，5 回目に R が記録される． ☜ R が 3 回記録されて終了する．
- はじめの 4 回で W が 2 回，B が 2 回記録され，5 回目に R が記録される． ☜ 3 色がすべて記録されて終了する．

よって，5 回目に R が記録されて操作が終了する確率は，

$$\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\boxed{49}}{\boxed{432}}$$

である．

(ii) 4回目にRが記録されて操作が終了するのは，次のいずれかである．

・はじめの3回でRが2回，Wが1回記録され，4回目にRが記録される．

☜ Rが3回記録されて終了する．

・はじめの3回でRが2回，Bが1回記録され，4回目にRが記録される．

☜ Rが3回記録されて終了する．

・はじめの3回でWが2回，Bが1回記録され，4回目にRが記録される．

☜ 3色がすべて記録されて終了する．

・はじめの3回でWが1回，Bが2回記録され，4回目にRが記録される．

☜ 3色がすべて記録されて終了する．

よって，4回目にRが記録されて操作が終了する確率は，

$$\left\{{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}$$
$$+\left\{{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\right\}\cdot\frac{1}{2}+\left\{{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{11}{48}.$$

最後にRが記録されて操作が終了するまでの操作の回数は，3，4，5回のいずれかであり，得点と確率は次の表のようになる．

得点	3	4	5
確率	$\frac{13}{72}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{49}{432}$

☜ 得点が0点である確率は，
$$1-\left(\frac{13}{72}+\frac{11}{48}+\frac{49}{432}\right)=\frac{103}{216}.$$

これより，得点の期待値は，

$$3\cdot\frac{13}{72}+4\cdot\frac{11}{48}+5\cdot\frac{49}{432}$$
$$=\frac{\boxed{875}}{\boxed{432}}$$

である．

☜ **期待値**

試行によって定まる値 X のとり得る値が，
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$
であり，それぞれの起こる確率が，
$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$$
$$(p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1)$$
であるとき，X の期待値 E は，
$$E=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n.$$

得点が0点のときの確率を求めなくても得点の期待値を求めることはできる．

旧数学Ⅱ・旧数学B

【解答・採点基準】 （100点満点）

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア，イ	3，5	2	
	ウ，エ	2，1	2	
	オ，カ	3，5	2	
	キ，ク	4，3	3	
	ケコ	50	2	
	サ$\sqrt{\text{シス}}$	$5\sqrt{10}$	3	
	$\dfrac{\text{セソタ}}{\text{チ}}$	$\dfrac{-35}{9}$	2	
	ツ	0	2	
	テ，ト，ナ	2，2，2	3	
	ニ	3	3	
	ヌ	0	2	
	ネ，ノ	0，1	2	
	$\dfrac{\text{ハ}+\sqrt{\text{ヒ}}}{\text{フ}}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	
第1問　自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	アイ，ウ	−4，2	3	
	エオ	−2	2	
	カ	5	2	
	キク	−4	3	
	ケ	6	3	
	コ	3	3	
	サ，シ，ス	3，8，6	4	
	セ，ソタ，チ，ツ	6，12，8，6	4	
	テト	−1	1	
	$\dfrac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\dfrac{1}{3}$	2	
	ヌネ$+\sqrt{\text{ノ}}$	$-2+\sqrt{3}$	1	
	$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
第2問　自己採点小計			(30)	
第3問	ア，イ	3，1	3	
	$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$，$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$	3	
	キ，ク	2，3	2	
	ケ	3	2	
	コ，サ	3，3	2	
	シ，ス，セ	3，3，2	2	
	ソ	3	2	
	タチ，ツ	−3，1	2	
	テトナ	668	2	
第3問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	ア，イ，ウエ	0，2，−1	2	
	オ，カ，キ	0，2，1	2	
	ク	0	2	
	$\frac{ケ}{コ}$	$\frac{1}{5}$	3	
	$\frac{サ}{シ}$，ス，$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{3}{4}$，0，$\frac{1}{4}$	2	
	$\frac{タ}{チ}$，$\frac{ツ}{テ}$，$\frac{ト}{ナニ}$	$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{12}$	3	
	$\frac{ヌ}{ネ}$，$\frac{ノ}{ハ}$	$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$	3	
	ヒ，フ	9，5	3	
第4問　自己採点小計			(20)	
第5問	ア	7	2	
	イウ	30	2	
	エオ	30	2	
	カキ.ク	40.0	2	
	ケコサ	644	2	
	シス.セ	80.0	2	
	ソタ.チ	12.0	2	
	ツテ.ト	36.0	2	
	ナ.ニ	0.9	2	
	ヌ	1	2	
第5問　自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第6問	ア	1	2	
	イウエ	180	2	
	オ	3	2	
	カキク	190	2	
	ケ	5	2	
	コ	8	2	
	サシス	200	2	
	セソタ	150	2	
	チ	1	2	
	ツ	9	2	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第１問　図形と方程式，指数関数・対数関数

問題

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第１問 に同じである．

第２問　微分法・積分法

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第２問 に同じである．

第３問　数　列

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第３問 に同じである．

第４問　ベクトル

問題

数学Ⅱ・数学Ｂ 第４問 に同じである．

第５問　統　計

次の表は，ある高校の生徒 50 人の通学時間を調査したときの度数分布表である．また，通学時間(分)を変量 x とする．

通学時間(分)	度数(人)
0 以上 ～ 20 未満	12
20 ～ 40	17
40 ～ 60	10
60 ～ 80	A
80 ～ 100	3
100 ～ 120	1

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ．途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること．

⑴　上の表における A の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

⑵　ある階級に含まれるすべての資料は，その階級の階級値をとるものとする．変量 x の中央値(メジアン)は $\boxed{\text{イウ}}$ 分，最頻値(モード)は $\boxed{\text{エオ}}$ 分である．また，変量 x の平均値は $\boxed{\text{カキ}}.\boxed{\text{ク}}$ 分，分散の値は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である．

⑶　調査した 50 人の生徒の中から 5 人の生徒 P，Q，R，S，T を選び，通学時間 y (分)と 1 ヶ月にかかる通学交通費 z (千円)を調べ次の表にまとめた．

	y	z
P	70	8
Q	80	12
R	60	10
S	100	16
T	90	14

変量 y の平均値は $\boxed{シス}.\boxed{セ}$ 分，変量 z の平均値は $\boxed{ソタ}.\boxed{チ}$ 千円である．さらに，変量 y と変量 z の共分散の値は $\boxed{ツテ}.\boxed{ト}$，相関係数の値は $\boxed{ナ}.\boxed{ニ}$ であるから，変量 y と変量 z の間には $\boxed{ヌ}$ ことがわかる．$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ 強い負の相関がある
① 強い正の相関がある
② 弱い負の相関がある
③ 弱い正の相関がある
④ 相関関係はない

【解説】

問題

(1) 度数の和が 50 であるから

$$12+17+10+\mathsf{A}+3+1=50$$

が成り立つ．これより

$$\mathsf{A}=\boxed{7}.$$

(2) 階級値を x，度数を f として資料を整理すると次のようになる．

x	f	xf	x^2f
10	12	120	1200
30	17	510	15300
50	10	500	25000
70	7	490	34300
90	3	270	24300
110	1	110	12100
合計	50	2000	112200

上表より，中央値(メジアン)は $\boxed{30}$ 分，最頻値(モード)は $\boxed{30}$ 分である．

☜ 階級値 10 の度数が 12，階級値 30 の度数が 17 であるから，25 番目の生徒と 26 番目の生徒の変量 x の値はともに 30 である．よって，25 番目と 26 番目の生徒の平均値，すなわち中央値は 30 である．

また，変量 x の平均値は

$$\overline{x}=\frac{2000}{50}=\boxed{40}.\boxed{0}\text{ 分}$$

である．

☜ **平均値**

変量 x がとる N 個の値を

x_1，x_2，$\cdots$，x_N

とすると x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k.$$

さらに，変量 x の分散の値は

$$s_x{}^2 = \frac{112200}{50} - 40.0^2$$
$$= \boxed{644}$$

である．

> **分散**
>
> 変量 x がとる N 個の値を x_1，x_2，…，x_N とすると，分散 s^2 は，平均値を $\overline{x}$ として
>
> $$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2 \quad \cdots(\mathrm{i})$$
>
> または
>
> $$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k{}^2 - \overline{x}^2. \quad \cdots(\mathrm{ii})$$
>
> ここでは(ii)を用いた．

(3) 変量 y の平均値は

$$\overline{y} = \frac{70+80+60+100+90}{5} = \frac{400}{5} = \boxed{80}.\boxed{0}\ \text{分}$$

であり，変量 z の平均値は

$$\overline{z} = \frac{8+12+10+16+14}{5} = \frac{60}{5} = \boxed{12}.\boxed{0}\ \text{千円}$$

である．

よって，資料を整理すると次のようになる．

	y	z	$y-\overline{y}$	$z-\overline{z}$	$(y-\overline{y})^2$	$(z-\overline{z})^2$	$(y-\overline{y})(z-\overline{z})$
P	70	8	-10	-4	100	16	40
Q	80	12	0	0	0	0	0
R	60	10	-20	-2	400	4	40
S	100	16	20	4	400	16	80
T	90	14	10	2	100	4	20
合計	400	60			1000	40	180

変量 y と変量 z の共分散 s_{yz} の値は

$$s_{yz} = \frac{180}{5} = \boxed{36}.\boxed{0}$$

である．また，y の分散を $s_y{}^2$，z の分散を $s_z{}^2$ とすると，上表より

$$s_y{}^2 = \frac{1000}{5} = 200$$

$$s_z{}^2 = \frac{40}{5} = 8$$

であるから，変量 y と変量 z の相関係数の値は

$$\frac{36}{\sqrt{200}\sqrt{8}} = \frac{36}{\sqrt{1600}} = \frac{36}{40} = \boxed{0}.\boxed{9}$$

である．

したがって，変量 y と変量 z の間には強い正の相関があるので，$\boxed{\text{ヌ}}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

> **共分散**
>
> 変量 x と変量 y の N 組の資料
>
> $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_N,\ y_N)$
>
> が与えられているとき，x，y の平均値を $\overline{x}$，$\overline{y}$ とする．このとき
>
> $$s_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$
>
> を x と y の共分散という．

> **相関係数**
>
> 変量 x の標準偏差を s_x，変量 y の標準偏差を s_y，x と y の共分散を s_{xy} とすると，x と y の相関係数 r は
>
> $$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

【$\boxed{\text{カキ}}$.$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケコサ}}$ の別解】

$x=50+20u$ $\left(u=\dfrac{x-50}{20}\right)$ とする．

x	f	u	uf	u^2f
10	12	-2	-24	48
30	17	-1	-17	17
50	10	0	0	0
70	7	1	7	7
90	3	2	6	12
110	1	3	3	9
合計	50		-25	93

変量 u の平均値は

$$\overline{u}=\frac{-25}{50}=-\frac{1}{2}=-0.5$$

であるから，変量 x の平均値は

$$\overline{x}=50+20\times(-0.5)=40.0 \text{ 分}$$

である．

また，u の分散は

$$s_u{}^2=\frac{93}{50}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{161}{100}$$

であるから，x の分散は

$$s_x{}^2=20^2\times\frac{161}{100}=4\times161=644$$

である．

☜ $x=x_0+cu$ とおくと

$$\overline{x}=x_0+c\overline{u}$$

$$s_x{}^2=c^2s_u{}^2$$

である．

第6問　コンピュータ

2以上の自然数 M，N（$M \leqq N$）が与えられたとき，M と N が互いに素であれば「互いに素である」と出力し，そうでなければ「互いに素でない」と出力する〔プログラム1〕を作った.

（注）　自然数 M と N が互いに素であるとは，M と N の最大公約数が1であることをいう.

〔プログラム1〕

```
100 INPUT M,N
110 FOR J=2 TO M
120   IF [ア] THEN
130     PRINT "互いに素でない"
140     GOTO [イウエ]
150   END IF
160 NEXT J
170 PRINT "互いに素である"
180 END
```

(1)　120行ではJがMとNの公約数であるかどうかを判定している. [ア] に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ.

⓪　INT(M/J)*J=M OR INT(N/J)*J=N
①　INT(M/J)*J=M AND INT(N/J)*J=N
②　INT(M/J)*J=N AND INT(N/J)*J=M
③　INT(M/J)*J<>M AND INT(N/J)*J<>N
④　INT(M/J)*J<>M OR INT(N/J)*J<>N

(2)　[イウエ] に適当な行番号を入れてプログラムを完成せよ.

N を2以上の自然数とする.

〔プログラム1〕を参考にして，$\frac{1}{N}$，$\frac{2}{N}$，$\frac{3}{N}$，……，$\frac{N}{N}$ の N 個の分数の中に，既約分数がいくつあるかを求め，それを出力する〔プログラム2〕を作った.

〔プログラム2〕

```
100 INPUT N
110 LET A=0
120 FOR M=2 TO N
130   FOR J=2 TO M
140     IF [ア] THEN
150       LET A=[オ]
160       GOTO [カキク]
170     END IF
```

```
180    NEXT J
190 NEXT M
200 PRINT [ケ]
210 END
```

(3) $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを選んでもよい．また，$\boxed{\text{カキク}}$ には適当な行番号を入れよ．

⓪ J	① J+1	② A	③ A+1
④ N-A+1	⑤ N-A	⑥ M+A	⑦ M-A

(4) 〔プログラム 2〕を実行し，変数 N に 12 を入力したとき，150 行は $\boxed{\text{コ}}$ 回実行される．

次に，$A>B$ を満たす二つの自然数 A，B に対して，分数 $\dfrac{B}{A}$ が既約分数になる条件を考えよう．

A を B で割った商を Q，余りを R とすると，$A=BQ+R$ が成り立つ．このとき，

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{BQ+R}{B}=Q+\dfrac{R}{B}$ であり，$R\neq 0$ であれば，$\dfrac{R}{B}$ を改めて $\dfrac{B}{A}$ とみなしてこの操作を続ける．すると，有限回の操作で $R=0$ となる．このときの B の値はもとの分数の分母と分子の最大公約数である．

このことを利用して，〔プログラム 2〕と同じ働きをする次の〔プログラム 3〕を作った．

〔プログラム 3〕

```
100 INPUT N
110 LET C=0
120 FOR K=1 TO N
130    LET A=N
140    LET B=K
150    LET R=A-INT(A/B)*B
160    IF R=0 THEN GOTO [サシス]
170    LET A=B
180    LET B=R
190    GOTO [セソタ]
200    IF B=[チ] THEN LET C=C+1
210 NEXT K
220 PRINT C
230 END
```

(5) $\boxed{\text{サシス}}$, $\boxed{\text{セソタ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまる行番号または数を入れて，〔プログラム 2〕と〔プログラム 3〕の出力が同じになるようにせよ．

(6) 〔プログラム 3〕を実行し，変数 N に 12 を入力したとき，170 行は $\boxed{\text{ツ}}$ 回実行される．

【解説】

問題

⑴　変数 M，N の値がいずれも J で割り切れるときに「互いに素でない」と出力すればよい．したがって，$\boxed{ア}$ には

「M が J で割り切れ，かつ，N が J で割り切れる」

☜　「J は M と N の公約数である」.

という条件を入れればよい．したがって，$\boxed{ア}$ に当てはまるものは

INT(M/J)*J=M AND INT(N/J)*J=N

☜　P AND Q は二つの条件 P, Q がともに成立するとき真となる．
P OR Q は二つの条件 P, Q のうち，少なくとも一方が成り立つとき真となる．

すなわち $\boxed{⓪}$ である．

⑵　M と N が互いに素でないことがわかった場合には，「互いに素でない」と出力してすぐにプログラムを終了すればよい．

したがって，$\boxed{イウエ}$ は $\boxed{180}$ とすればよい．

☜　2，3，4，…，M がいずれも M と N の公約数でない場合には，M と N は互いに素である．したがって，170 行に移動して「互いに素である」と出力する．

⑶　分数 $\dfrac{M}{N}$ が既約分数であるための必要十分条件は M と N が互いに素となることである．

そこで，〔プログラム 1〕を参考にして，次のような〔プログラム 2〕を作ればよい．

・N の値を入力する．
・変数 A を 0 に初期化する．
・M を 2, 3, …, N と変化させて M と N が互いに素でなければ A を 1 増やす．
・$N-A$ の値を表示する．

☜　$\dfrac{1}{N}$ は既約であるから，調べる必要はない．この処理が終わった時点で，変数 A には 1，2，3，…，N のうち，N と互いに素でないものの個数が格納されている．したがって，N と互いに素であるものの個数は $N-A$ として計算することができる．

したがって，$\boxed{オ}$ には A+1 すなわち $\boxed{③}$ が当てはまり，$\boxed{ケ}$ には N-A すなわち $\boxed{⑤}$ が当てはまる．

また，M と N が互いに素でない場合は，M の値を 1 増やして次の M の値を調べるので，$\boxed{カキク}$ には $\boxed{190}$ が当てはまる．

⑷　変数 N に 12 を入力した場合，A の値が増えるのは

$$M=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12$$

☜　2 以上 12 以下の M の値に対し，12 と M が互いに素でない場合に A が増加する．

の 8 回である．したがって，150 行は $\boxed{8}$ 回実行される．

⑸　2 数 N，K の最大公約数は $R=0$ となったときの変数 B の値であるから，B が 1 に等しければ N と K が互いに素であることになる．そこで，160 行は

```
160 IF R=0 THEN GOTO 200
```

とし，さらに 200 行は

```
200 IF B=1 THEN LET C=C+1
```

とすればよい．また，$R=0$ でないときは，$\dfrac{R}{B}$ を改めて $\dfrac{B}{A}$ とみなして割り算を繰り返す．したがって，190 行は

190 GOTO 150

とすればよい．以上より，$\boxed{サシス}$，$\boxed{セソタ}$，$\boxed{チ}$ にはそれぞれ $\boxed{200}$，$\boxed{150}$，$\boxed{1}$ が当てはまる．

(6) 変数Nに12を入力したとき，変数の値の変化は次の表のようになる．150行で割り算を実行したとき(正確には，割り算の余りを求めたとき)，余りが0になった場合は170行は実行されない．したがって，170行が実行されるのは次の表で○がつけられた場合である．

K	A	B	R
1	12	**1**	0
2	12	**2**	0
3	12	**3**	0
4	12	**4**	0
5	12	5	②
	5	2	①
	2	**1**	0
6	12	**6**	0
7	12	7	⑤
	7	5	②
	5	2	①
	2	**1**	0
8	12	8	④
	8	**4**	0
9	12	9	③
	9	**3**	0
10	12	10	②
	10	**2**	0
11	12	11	①
	11	**1**	0
12	12	**12**	0

☜ 変数の値の変化を追いかけよう．割り切れなかった場合は，B と R を改めて A と B に置き換えて割り算が続けられることに注意する．

なお，太字は $R=0$ となったときの変数Bの値である．このBの値は2数 N，K の最大公約数になっていることがわかる．

以上より，〔プログラム3〕を実行し，変数Nに12を入力したとき，170行は $\boxed{9}$ 回実行される．

MEMO

MEMO