La conducción del calor. Ley de Fourier

sc.ehu.es/sbweb/fisica_/transporte/cond_calor/conduccion/conduccion.html

Introducción

El objetivo de este capítulo es el estudio de dos importantes fenómenos análogos:

- La transmisión del calor a lo largo de una barra metálica.
- La difusión unidimensional de un soluto en un disolvente.

Las leyes físicas que describen su comportamiento son simples y fácilmente comprensibles, pero la descripción analítica es compleja. Trataremos además, de resaltar las diferencias entre los mecanismos básicos que explican ambos fenómenos, y cómo afectan las condiciones de contorno a su evolución temporal. Así, en el problema de la conducción del calor a lo largo de una barra metálica se establecerán temperaturas fijas en los extremos de la barra, mientras que en el problema de la difusión se establecerá una masa de soluto en el origen de un medio unidimensional infinito en extensión.

Los fenómenos de transporte son aquellos procesos en los que hay una transferencia neta o transporte de materia, energía o momento lineal en cantidades grandes o macroscópicas. Estos fenómenos físicos tienen rasgos comunes que pueden ser descritos mediante la ecuación diferencial para la propagación unidimensional

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}=\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Donde *a* es una constante característica de cada situación física y Ψ es el campo correspondiente al fenómeno de transporte de que se trata.

Históricamente, la ecuación que describe la difusión se denomina **ley de Fick**. El campo Ψ describe la concentración de soluto en el disolvente y la constante $\alpha=D$, siendo D el coeficiente de difusión. La difusión se establece siempre que exista un gradiente o diferencia de concentración entre dos puntos del medio.

La ecuación que describe la conducción térmica se conoce como **ley de Fourier**, en este caso el campo Ψ es la temperatura T, y el coeficiente $\alpha=K/(\rho c)$, donde K, es la conductividad térmica, ρ la densidad, y c es el calor específico del material. La conducción del calor se establece siempre que exista un gradiente o diferencia de temperaturas entre dos puntos de una barra metálica.

Se estudia cada uno de los fenómenos en dos partes:

- Se **calcula** la solución de la ecuación diferencial que gobierna el proceso.
- Se **simulan** los fenómenos a partir de mecanismos básicos simples. La simulación nos permitirá explicar las facetas esenciales de la descripción matemática del fenómeno en cuestión.

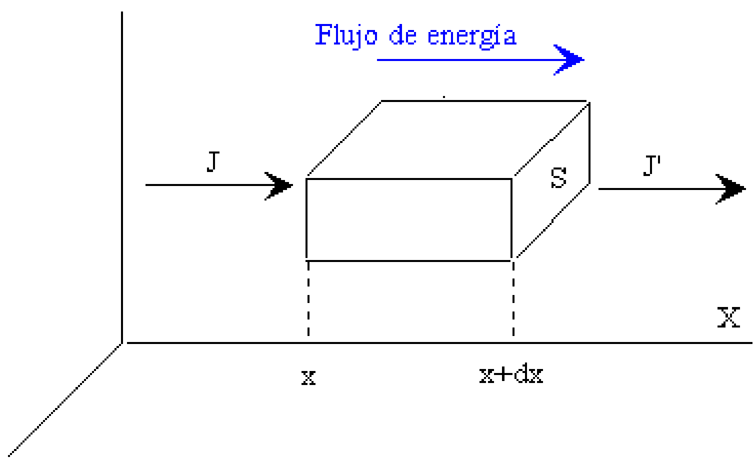
Ley de Fourier

Sea *J* la densidad de corriente de energía (energía por unidad de área y por unidad de tiempo), que se establece en la barra debido a la diferencia de temperaturas entre dos puntos de la misma. La ley de Fourier afirma que hay una proporcionalidad entre el flujo de energía *J* y el gradiente de temperatura.

$$J=-K\frac{\partial T}{\partial x}$$

Siendo *K* una constante característica del material denominada conductividad térmica.

Consideremos un elemento de la barra de longitud *dx* y sección *S*. La energía que entra en el elemento de volumen en la unidad de tiempo es *JS*, y la que sale es *JS*. La energía del elemento cambia, en la unidad de tiempo, en una cantidad igual a la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente.



$$JS-J'S=-\frac{\partial J}{\partial x}S\,dx$$

Esta energía, se emplea en cambiar la temperatura del elemento. La cantidad de energía absorbida o cedida (en la unidad de tiempo) por el elemento es igual al producto de la masa de dicho elemento por el calor específico y por la variación de temperatura.

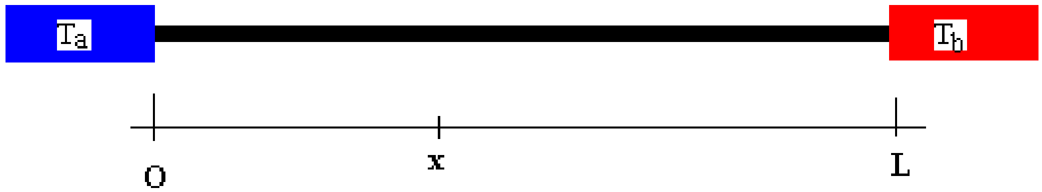
$$(\rho\,Sdx)c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Igualando ambas expresiones, y teniendo en cuenta la ley de Fourier, se obtiene la ecuación diferencial que describe la conducción térmica

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\qquad \alpha=\frac{K}{\rho c}$$

Solución analítica

Supongamos una barra metálica de longitud *L*, conectada por sus extremos a dos focos de calor a temperaturas T_a y T_b respectivamente. Sea T_0 la temperatura inicial de la barra cuando se conectan los focos a los extremos de la barra.



Al cabo de cierto tiempo, teóricamente infinito, que en la práctica depende del tipo de material que empleamos, se establece un **estado estacionario** en el que la temperatura de cada punto de la barra no varía con el tiempo. Dicho estado está caracterizado por un flujo *J* constante de energía. La ley de Fourier establece que la temperatura variará linealmente con la distancia *x* al origen de la barra.

$$T_a+\frac{T_b-T_a}{L}x$$

Para describir el estado transitorio buscamos una solución de la forma $T(x, t)=F(x)\cdot G(t)$, variables separadas

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial^2 x} \qquad \frac{1}{\alpha}\frac{1}{G(t)}\frac{dG(t)}{dt}=\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{d^2x}=-\omega^2$$

El signo negativo asegura el carácter transitorio.

Integramos la primera ecuación diferencial

$$\frac{dG(t)}{dt}+\alpha\omega^2 G(t)=0 \qquad G(t)=G(0)\cdot\exp(-\alpha\omega^2 t)$$

Integramos la segunda ecuación diferencial

$$\frac{d^2F(x)}{d^2x}+\omega^2F(x)=0$$

Es una ecuación diferencial similar a la de un MAS, cuya solución es $a\cdot\text{sen}(\omega x+\delta)$

La temperatura en cualquier punto *x* a lo largo de la barra, en un instante determinado, $T(x, t)$ es la solución de la ecuación diferencial, que es una combinación de dos términos, la que corresponde al régimen permanente más la del régimen transitorio.

$$T(x,t)=T_a+\frac{T_b-T_a}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\alpha\omega_n^2 t)\sin(\omega_n x+\delta_n)$$

Condiciones de contorno

En $x=0$, $T(0, t)=T_a$, temperatura fija del extremo izquierdo de la barra

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\alpha\omega_n^2 t)\sin(\delta_n) \qquad \delta_n=0$$

En $x=L$, $T(L, t)=T_b$, temperatura fija del extremo derecho de la barra

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\alpha\omega_n^2 t)\sin(\omega_n L) \qquad \omega_n L=n\pi$$

El régimen variable general de temperaturas de la barra es

$$T(x,t)=T_a+\frac{T_b-T_a}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left(-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Distribución inicial de temperaturas

Solamente, queda por determinar los coeficientes a_n, identificando esta solución con la distribución inicial de temperaturas en la barra $T(x, 0)=T_0$ en el instante $t=0$.

$$T(x,0)=T_a+\frac{T_b-T_a}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad f(x)=T_0-T_a-\frac{T_b-T_a}{L}x$$

Más abajo, se proporcionan los detalles del cálculo de los coeficientes a_n del desarrollo en serie al lector interesado.

La temperatura en cualquier punto de la barra x, en un instante t, se compone de la suma de un término proporcional a x, y de una serie rápidamente convergente que describe el estado transitorio.

$$T(x,t)=T_a+\frac{T_b-T_a}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left(-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad a_n=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}(2T_0-T_a-T_b) & n \text{ impar}\\ \frac{2}{n\pi}(T_b-T_a) & n \text{ par}\end{cases}$$

El valor de $\alpha=K/(\rho c)$ nos da una medida de la rapidez con la que el sistema alcanza el estado estacionario. Cuanto mayor sea α antes se alcanza el estado estacionario

Actividades

En este programa, estudiaremos la conducción del calor a lo largo de una barra metálica cuyos extremos están conectados a dos focos de calor que tienen distintas temperaturas. Observaremos la evolución de la temperatura de cada punto de la barra a medida que transcurre el tiempo.

Examinaremos los factores que determinan la conducción del calor a lo largo de una barra metálica, probando barras de distintos materiales, con distintas temperaturas fijas de los extremos e inicial de la barra.

> Se selecciona en el control selección el **Metal** de la barra. Las unidades de las magnitudes están expresadas en el Sistema Internacional de Unidades de Medida.

Metal	Densidad	Calor específico	Conductividad térmica	α
Aluminio	2700	880	209.3	$8.81\cdot10^{-5}$
Acero	7800	460	45	$1.25\cdot10^{-5}$
Cobre	8900	390	389.6	$11.22\cdot10^{-5}$
Latón	8500	380	85.5	$2.65\cdot10^{-5}$

Plata	10500	230	418.7	$17.34\cdot10^{-5}$
Plomo	11300	130	34.6	2.35·10-5

Fuente: Koshkin N. I., Shirkévich M. G.. *Manual de Física Elemental*. Editorial Mir 1975. págs 36, 74-75, 85-86

Se introduce, moviendo las flechas de color azul con el puntero del ratón

- La temperatura fija en el extremo izquierdo de la barra T_a.
- La temperatura fija en el extremo derecho de la barra T_b.
- La temperatura inicial de la barra T_0.
- La longitud de la barra metálica se ha fijado en el valor de L=0.5 m.

Se pulsa el botón titulado **Nuevo**

El instante *t,* en minutos, en el que queremos representar la distribución de temperaturas a lo largo de la barra, en el control de edición o actuando en la barra de desplazamiento titulada **Tiempo**.

Se pulsa en el botón titulado **Gráfica**.

El programa interactivo representa la distribución de temperaturas a lo largo de la barra, en el instante actual (en color rojo), y en el instante previamente introducido (en color azul).

Cuestiones:

Examinar la evolución de la distribución de temperaturas con el tiempo. Comprobar que el régimen estacionario es independiente de la temperatura inicial, solamente depende de la temperatura de los focos frío y caliente.

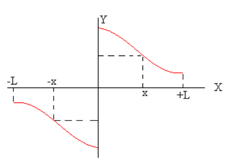
Examinar el comportamiento de barras hechas de distintos materiales, con la misma temperatura inicial y fijas en los extremos.

TermicoApplet3 aparecerá en un explorador compatible con JDK 1.1.

Arrastre con el puntero del ratón las flechas de color azul

Cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie a_n

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\qquad$ $f(x)=T(x,0)-T_a-\frac{T_b-T_a}{L}x$



La parte derecha de la igualdad es el desarrollo en serie de una función *f*(*x*) impar, ya que carece del término independiente y de los términos en coseno. El periodo de *f*(*x*) es 2*L* y se extiende desde –*L* a +*L* tal como se muestra en la figura.

Multiplicamos ambos miembros por sen(*m*π*x/L*) e integramos entre –*L* y +*L*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty} k_n \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$$

Efectuamos el cambio de variable *z=*π*x/L*, *dz=* π*dx/L*

$$\frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}z\right)\sin(mz)\,dz=\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nz)\cdot\sin(mz)\,dz \qquad (1)$$

Integramos por partes la integral que aparece en el segundo miembro

$$\int \sin(nz)\cdot\sin(mz)dz=-\frac{1}{m}\sin(nz)\cos(mz)+\frac{n}{m}\int \cos(nz)\cdot\cos(mz)dz$$

Volvemos a integrar por partes

$$\int \sin(nz)\cdot\sin(mz)dz=\left\{-\frac{1}{m}\sin(nz)\cos(mz)+\frac{n}{m}\left(\frac{1}{m}\cos(nz)\mathrm{sen}(mz)+\frac{n}{m}\int \sin(nz)\cdot\sin(mz)dz\right)\right\}$$
$$\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nz)\cdot\sin(mz)dz=\left.-\frac{1}{m}\sin(nz)\cos(mz)+\frac{n}{m^2}\cos(nz)\sin(mz)\right|_{-\pi}^{\pi}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nz)\cdot\sin(mz)dz=0 \qquad m\neq n$$

Cuando *m=n*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nz)\cdot dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2nz)}{2} dz = \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2n}\sin(2nz)\right)_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

La expresión (1) se simplifica notablemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}z\right)\sin(nz)\,dz = \pi\, a_n \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}z\right)\sin(nz)\,dz$$

Supongamos que la temperatura inicial de la barra en todos sus puntos es la misma $T(x, 0)=T_0$, la función $f(x)$ es lineal

$$f(x) = T_0 - T_a - \frac{T_b - T_a}{L}x \qquad f\left(\frac{L}{\pi}z\right) = T_0 - T_a - \frac{T_b - T_a}{\pi}z = a + bz$$

Calculamos los coeficientes a_n del desarrollo en serie de Fourier

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(a+bz)\sin(nz)\,dz = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{a}{n}\cos(nz) + b\left(-\frac{z}{n}\cos(nz) + \frac{1}{n^2}\sin(nz)\right)\right\}_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(-a-bz)\cos(nz) + \frac{2b}{n^2\pi}\sin(nz)\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(2a+b\pi) & n \text{ impar} \\ -\frac{2b}{n} & n \text{ par} \end{cases}$$

Finalmente,

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(2T_0 - T_a - T_b) & n \text{ impar} \\ \frac{2}{n\pi}(T_b - T_a) & n \text{ par} \end{cases}$$

Referencias

Puig Adam P., *Curso teórico-práctico de ecuaciones diferencias aplicado a la Física y Técnica*. Biblioteca Matemática (1950), págs. 300-303