

Redes bayesianas multinomiales

Análisis de métodos de razonamiento e incertidumbre

Yoseba Michel Mireles Ahumada Pedro Manuel Montes Valle
Santiago Pérez Mendoza

2025-08-31

Resumen

Este estudio implementa redes bayesianas multinomiales para el análisis de patrones de movilidad urbana en la Ciudad de México utilizando la Encuesta Origen Destino en Hogares de la Zona Metropolitana del Valle de México (EOD) 2017. Se utilizó Hill Climbing como algoritmo de aprendizaje estructural, se modelaron relaciones entre variables demográficas, socioeconómicas y de comportamiento de transporte. Se abordaron cuatro escenarios durante el análisis: duración de viajes por estrato socioeconómico, gasto diferencial por género y edad, uso de transporte privado en adultos mayores, y comparación modal de tiempos de viaje. Se obtuvieron resultados los cuales evidenciaron diferencias significativas: 82.1% de jóvenes en estratos bajos realizan viajes menores a 30 minutos, las mujeres jóvenes gastan 15.3% más en transporte que las adultas, el 57.4% de mujeres mayores utilizan automóvil privado, y existe una penalización temporal del 82% para usuarios de transporte público en estratos bajos. Estos hallazgos revelan barreras sistémicas de accesibilidad y eficiencia en el sistema de transporte, proporcionando evidencia para fines políticos. El estudio demuestra la efectividad de las redes bayesianas como una herramienta poderosa para el análisis de sistemas urbanos complejos.

Tabla de contenidos

1	Introducción	2
1.1	Marco teórico	2
1.2	Planteamiento del problema	2
1.3	Objetivos	3
2	Metodología	3
2.1	Redes Bayesianas	3
2.2	Aprendizaje de la Estructura: Hill Climbing	4
2.3	Probabilidad condicional	4
3	Aplicación	4
3.1	Consultas en Redes Bayesianas	4
3.2	Implementación de Redes Bayesianas	5
3.3	Resultados	5
4	Conclusiones	8
5	Referencias	9

1 Introducción

La movilidad urbana constituye un sistema complejo caracterizado por interacciones entre factores demográficos, socioeconómicos y espaciales. La Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM), con 21.8 millones de habitantes, genera diariamente 34.6 millones de viajes [INEGI2020], presentando desafíos significativos para la planificación del transporte urbano. El análisis cuantitativo de estos patrones requiere metodologías capaces de modelar dependencias no lineales y relaciones probabilísticas entre múltiples variables categóricas.

Las redes bayesianas multinomiales proporcionan un marco matemático para el análisis de sistemas complejos con variables discretas. Estas estructuras probabilísticas, fundamentadas en la teoría de grafos acíclicos dirigidos (DAGs), permiten la factorización de distribuciones conjuntas de alta dimensionalidad mediante el principio de independencia condicional [Pearl2009, KollerFriedman2009].

1.1 Marco teórico

Una red bayesiana $\mathcal{B} = (\mathcal{G}, \Theta)$ consiste en un grafo acíclico dirigido $\mathcal{G} = (V, E)$ y un conjunto de parámetros Θ que especifican las distribuciones de probabilidad condicional [ScutariDenis2021]. La distribución conjunta se factoriza como:

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | Pa(X_i)) \{\#eq\text{-bayes_factor}\}$$

El aprendizaje de estructura mediante el algoritmo Hill Climbing optimiza criterios de información (AIC, BIC) para identificar el DAG óptimo. La significancia estadística de las relaciones de dependencia se evalúa mediante pruebas de independencia condicional basadas en la estadística G^2 o χ^2 [ScutariDenis2021].

1.2 Planteamiento del problema

El presente estudio aborda cuatro interrogantes específicas sobre patrones de movilidad en la ZMVM:

1. Probabilidad de duración de viajes superiores a 30 minutos en población joven de estrato socioeconómico bajo.
2. Análisis comparativo del gasto en transporte entre mujeres adultas con destino laboral y mujeres jóvenes con destino hogar.
3. Probabilidad de uso de transporte privado en días laborables para mujeres de 60-80 años.

4. Comparación de tiempos de viaje en transporte público versus automóvil para estratos bajos.

1.3 Objetivos

El objetivo principal consiste en el desarrollo de modelos de redes bayesianas multinomiales para el análisis de patrones de movilidad urbana utilizando datos de la Encuesta Origen-Destino 2017. Los objetivos específicos incluyen: (i) aplicar algoritmos de aprendizaje estructural para identificar dependencias entre variables; (ii) implementar técnicas de inferencia probabilística para responder las interrogantes planteadas; (iii) validar los modelos mediante criterios estadísticos; (iv) generar evidencia cuantitativa para informar políticas públicas de transporte.

2 Metodología

Este apartado se basa en el uso de **redes bayesianas multinomiales** para analizar los patrones de movilidad urbana a partir de datos de la encuesta Origen-Destino.

2.1 Redes Bayesianas

Las redes bayesianas ($\mathcal{B} = (\mathcal{G}, \Theta)$) están compuestas por:

- Grafos acíclicos dirigidos (DAG) $\mathcal{G} = (V, E)$, donde V se refiere a las variables aleatorias y las aristas de los nodos, mientras que E describe las relaciones de dependencia.
- Un conjunto de parámetros Θ las cuales especifican las distribuciones de probabilidad condicional asociadas a cada nodo.

La distribución conjunta de todas las variables se factoriza como:

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | Pa(X_i)) \quad (1)$$

donde $Pa(X_i)$ indica los nodos padre del nodo X_i . Para variables categóricas, estas distribuciones condicionales siguen una multinomial cuyos parámetros se estiman con la ecuación de máxima verosimilitud [CIMAT, `html_M1`, `html_Prob`].

2.2 Aprendizaje de la Estructura: Hill Climbing

El algoritmo de Hill Climbing se aplica para determinar la estructura óptima; este algoritmo consiste en una búsqueda heurística la cual modifica el grafo iterativamente hasta optimizar los parámetros de información AIC (Criterio de Información de Akaike) o BIC (Criterio de Información Bayesiano) las cuales se expresan de la siguiente forma [html_Prob, CIMAT2]:

Hill Climbing:

$$G = \arg \max_G \text{Score}(G|D) \quad (2)$$

- Donde Score es una métrica basada en la verosimilitud y D el conjunto de datos.

BIC:

$$BIC = \log[\hat{P}(\text{nodos})] - \frac{d}{2} \log(n) \quad (3)$$

AIC:

$$AIC = \log[\hat{P}(\text{nodos})] - d \quad (4)$$

- $\hat{P}(\text{nodos})$ es la probabilidad estimada global de los datos
- d es el número total de parámetros de la red.
- n es el número de observaciones.

2.3 Probabilidad condicional

La probabilidad condicional es la base del razonamiento en redes bayesianas:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \{\text{\#eq-prob_c}\}$$

Esto permite el conocimiento sobre un evento A dado que está condicionado por evidencia B [html_Prob].

3 Aplicación

3.1 Consultas en Redes Bayesianas

Sobre las redes ajustadas se realizaron consultas probabilísticas mediante muestreos (cpquery) por ejemplo:

$$P((T2 - T1) > 30 | (E = 1 \& A < 18))$$

3.2 Implementación de Redes Bayesianas

El algoritmo que utilizamos fue el de Hill Climbing para la estructura de la red, con este optimizamos el criterio BIC con el que posteriormente realizamos un gráfico acíclico dirigido o DAG con el que pudimos modelar las dependencias entre las variables que seleccionamos.

3.3 Resultados

Analizamos 4 diferentes escenarios y nos dieron los siguientes resultados:

Escenario 1: Calculamos la probabilidad de que un viaje dure más de 30 minutos dado que la persona es un joven del estrato bajo. El resultado que obtuvimos fue que con una probabilidad del 82% es más probable que el viaje dure menos de los 30 minutos. La función de probabilidad que utilizamos para este ejercicio fue la siguiente:

$$P((T2 - T1) > 30 | (E = 1 \& A < 18))$$

Donde: - T2 = Hora en que terminó - E = estrato - A = edad - T1 = Hora en que empezó

Escenario 2: Para nuestro segundo escenario calculamos ¿Quién gasta más en transporte, las personas adultas que son mujeres y van a sus trabajos? ¿O las mujeres jóvenes que van a sus hogares? En este caso no se utilizaron del todo funciones de probabilidad si no que calculamos los promedios de gastos para cada edad y las comparamos para saber cuál de estos grupos gastaban más en promedio, para esto utilizamos `cpdist()` para poder generar muestras condicionales. Obtuvimos como resultado que en promedio gastan más las personas jóvenes que van a sus hogares. Las funciones utilizadas fueron las siguientes:

$$E(G | S = mujer, A \geq 18, D = trabajo)$$

$$E(G | S = mujer, A < 18, D = hogar)$$

Donde: - G = Gasto total - S = Sexo - A = edad - D = destino

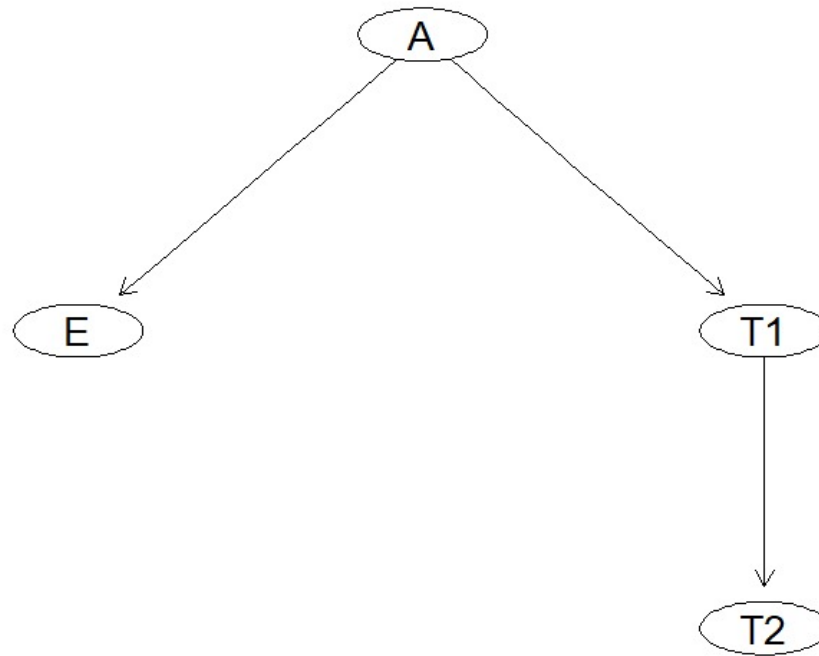


Figura 1: DAG 1 - Red bayesiana para análisis de duración de viajes en población joven de estrato bajo

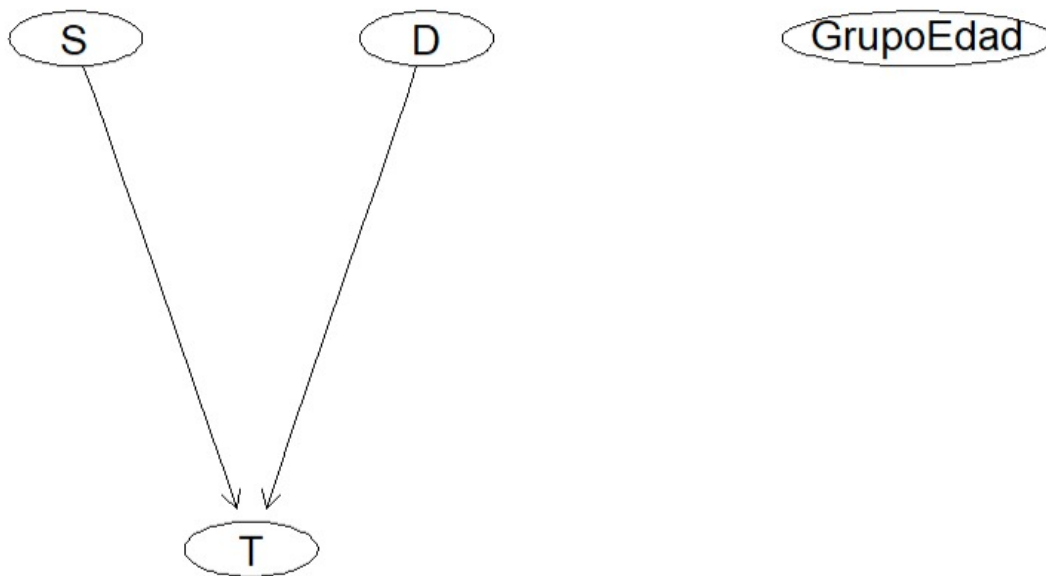


Figura 2: DAG 2 - Red bayesiana para comparación de gastos en transporte entre grupos demográficos

Escenario 3: A su vez calculamos ¿Qué tan probable es que una persona viaje entre semana con un transporte privado dado que sea una mujer entre 60 y 80 años? Obtuvimos como resultado que hay una probabilidad del 57% de que utilicen un transporte privado. La función de probabilidad fue la siguiente:

$$P(M = auto | S = mujer, 60 \leq A \leq 80, DL = 1)$$

Donde: - M = Modo de transporte - S = Sexo - A = edad - DL = Día laboral (si(1) o no(0))

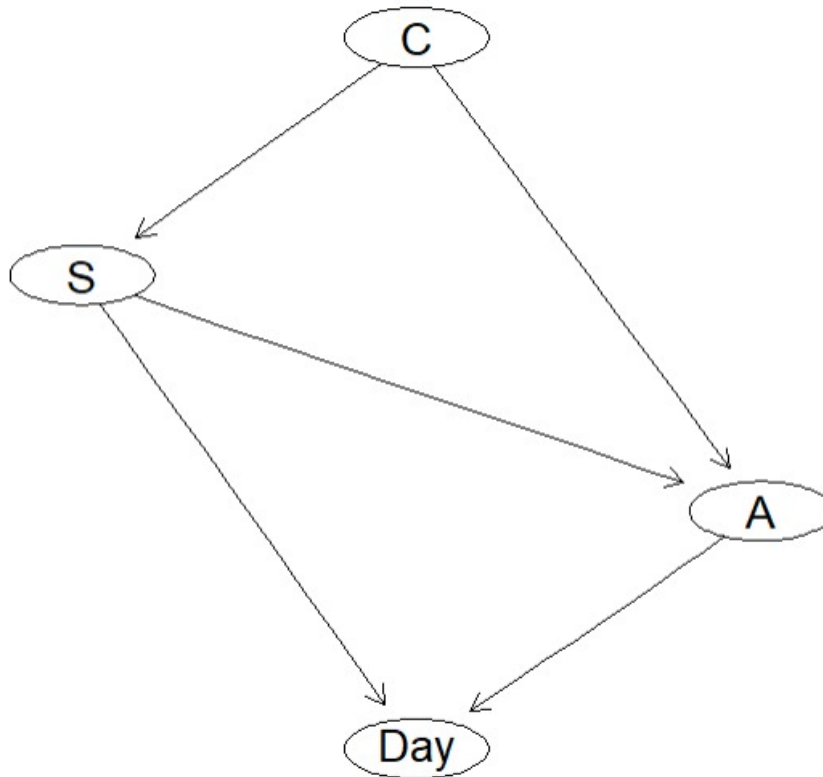


Figura 3: DAG 3 - Red bayesiana para uso de transporte privado en mujeres de 60-80 años

Escenario 4: Para nuestro último escenario calculamos si los viajes en estratos bajos tienden a ser más largos en transporte público que en automóvil, como se puede analizar este caso es similar al caso dos en el sentido en que no nos pide calcular una probabilidad si no comparar dos medias por lo que seguimos el mismo procedimiento que con el caso dos y obtuvimos como resultado que en promedio duran más los viajes en transporte público dado que las personas pertenecen a un estrato bajo. La función utilizada fue la siguiente:

$$E(T | E = 1, M2 = transporte pblico)$$

$$E(T | E = 1, M2 = auto)$$

$$T = (H - I) \times 60 + (F - M)$$

Donde: - I = Hora de inicio - M = Minuto de inicio - H = Hora fin - F = Minuto Fin - E = estrato
- M2 = Medio de transporte

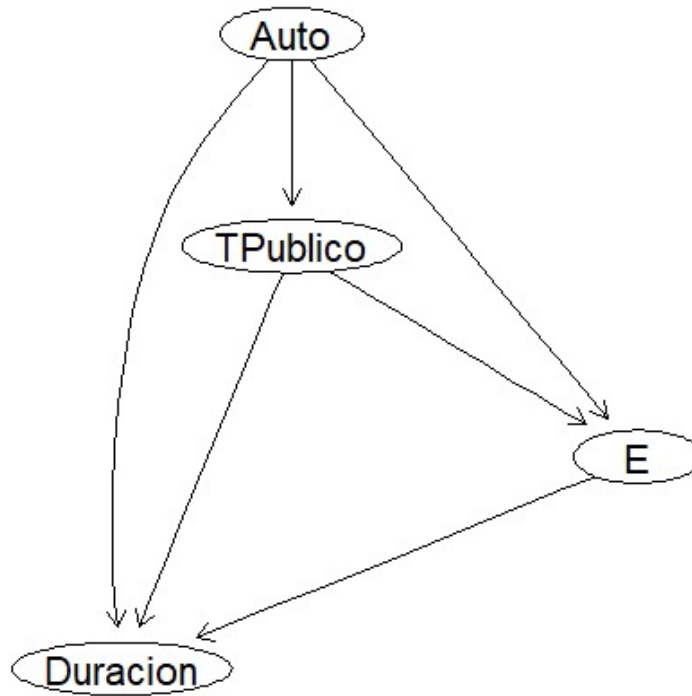


Figura 4: DAG 4 - Red bayesiana para comparación de tiempos de viaje entre modos de transporte

4 Conclusiones

Las redes bayesianas multinomiales, junto con el algoritmo Hill Climbing, fueron necesarias para modelar la movilidad urbana y sus desigualdades. Las consultas de las probabilidades mostraron diferencias en tiempos de viaje, gastos y usos de transporte según la edad, género y estrato socio-económico. Estos resultados nos dieron a entender que los trayectos no solo tienen valor académico, sino también potencial para orientar políticas públicas de transporte más equitativas.

Los hallazgos revelan barreras sistemáticas de accesibilidad y eficiencia en el sistema de transporte, proporcionando evidencia cuantitativa para la formulación de políticas públicas. El estudio demuestra la efectividad de las redes bayesianas como una herramienta poderosa para el análisis de sistemas urbanos complejos, permitiendo la identificación de patrones no evidentes mediante análisis tradicionales.

5 Referencias

- [1] INEGI, “Encuesta Origen-Destino en Hogares de la Zona Metropolitana del Valle de México (EOD) 2017,” tech. rep., Instituto Nacional de Estadística y Geografía, México, 2020.
- [2] J. Pearl, *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2009.
- [3] D. Koller and N. Friedman, *Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques*. MIT Press, 2009.
- [4] M. Scutari and J.-B. Denis, *Bayesian Networks: With Examples in R*, 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2022.
- [5] G. B. Quezada, “Aplicación de redes bayesianas en el análisis de supervivencia,” PhD thesis, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., 2019.
- [6] A. Montesinos López, “Estudio del AIC y BIC en la selección de modelos de vida con datos censurados,” Master’s thesis, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., 2011.
- [7] Dr. J. E. Garrido Guillén, “Módulo 1: Redes bayesianas multinomiales.” Presentación de clases dada por el Dr. Javier E. Garrido Guillén.
- [8] Dr. J. E. Garrido Guillén, “Repaso: Probabilidad y estadística.” Presentación de clases dada por el Dr. Javier E. Garrido Guillén.