הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב

עיבוד תמונות דיגיטלי 236860
חורף תשפ"ו

<u>תרגיל בית מס׳ 1</u>

מועד הגשה: עד 1.12.25 בשעה 23:59. הגשה אלקטרונית דרך Moodle.

<u>שאלה מס׳ 1</u>

נתונה תמונה בינארית בגודל $M \times N$. לאחר שרשור העמודות לווקטור ממימד $1 \times NM$ מתקבלת הסדרה בעלת חוק ההסתברות המיוצג ע״י הטבלה הבאה:

כאשר x_{n-1} הינו בתחום התמונה:

x_{n-1}	x_n	$\Pr(x_{n-1}, x_n)$
0	0	0.4
0	1	0.1
1	0	0.1
1	1	0.4

וכאשר x_{n-1} אינו בתחום התמונה: $\Pr(x_n = 0) = 0.5$.

זאת עבור $1 \le n \le NM$.

א. חשבו את הערכים הבאים לכל n:

1. $\Pr(x_{n-1})$.
2. $\Pr(x_{n-1} | x_n)$.
3. $\Pr(x_n + x_{n-1})$.

ב. חשבו את התוחלת המותנית: $E(x_n | x_{n-1})$ עבור $2 \le n \le NM$.

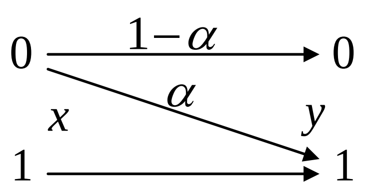
<u>שאלה מס׳ 2</u>

נתון משתנה אקראי x, מפולג על פי פילוג $\text{Bernoulli}(p)$, כאשר p הינו קבוע נתון ($0 < p \le 1/2$):

$$\Pr(X) = \begin{cases} p, & X = 0 \\ 1 - p, & X = 1 \end{cases}$$

המשתנה האקראי x עובר טרנספורמציה למשתנה האקראי y על פי הפילוג מותנה הבא (α הינו קבוע כלשהו, $0 \le \alpha \le 1/2$):

$$\Pr(y | x) = \begin{cases} 1-\alpha, & x = 0 \quad y = 0 \\ \alpha, & x = 0 \quad y = 1 \\ 0, & x = 1 \quad y = 0 \\ 1, & x = 1 \quad y = 1 \end{cases}$$



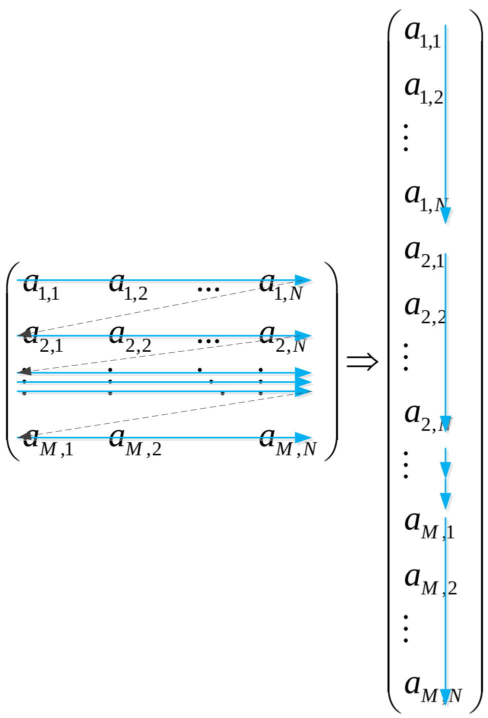
מצאו ביטוי להסתברות של y, $\Pr(y)$ כפונקציה של p ו- α.

<u>שאלה מס' 3</u>

חלקי שאלה זו הינם בלתי תלויים.

<u>חלק א'</u>

נגדיר את הפעולה S, המבצעת מיון גלובלי למטריצות בגודל $M \times N$. ראשית, המטריצה $\underline{\underline{X}}$ עוברת המרה לווקטור ע"י סריקה משמאל לימין ומלמעלה למטה, באופן הבא:



נסמן את הווקטור המתקבל ב- $\underline{X}_{vect}$, וממנו נייצר וקטור חדש, $\underline{Y}_{vect}$, המכיל את כל איברי $\underline{X}_{vect}$ כך שמתקיים:

$$\underline{Y}_{vect}[n+1] \geq \underline{Y}_{vect}[n], \quad n \in [0, NM-2]$$

לאחר מכן, הווקטור $\underline{Y}_{vect}$ עובר המרה למטריצה $\underline{\underline{Y}}$ בתהליך הפוך לתהליך שתואר לעיל.

סה"כ לדוגמה:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow}}_{\mathbf{S}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{Y}}$$

האם הפעולה S לינארית? האם היא תלויה במקום? הוכיחו או הסבירו.

הערה: ניתן להתייחס להזזה ציקלית עבור תכונת הקביעות במקום.

חלק ב'

א. נתונה המערכת H_1 המקבלת כקלט את התמונה $f\left(x,y\right)$ ומוציאה את התמונה:

$$g\left(x,y\right)=H_1\left\{f\left(x,y\right)\right\}=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y}f\left(\alpha,\beta\right)d\alpha d\beta$$

1. האם המערכת לינארית? הוכיחו את תשובתכם.
2. האם המערכת קבועה במקום? הוכיחו את תשובתכם.

ב. כעת נתונה המערכת H_2 המקבלת כקלט את התמונה $f\left(x,y\right)$ ומוציאה את התמונה:

$$g\left(x,y\right)=H_2\left\{f\left(x,y\right)\right\}=f\left(2x-1,3y+1\right)$$

1. האם המערכת לינארית? הוכיחו את תשובתכם.
2. האם המערכת קבועה במקום? הוכיחו את תשובתכם.

חלק ג'

החציון של קבוצת מספרים הוא הערך שחוצה את הקבוצה, עם מספר איברים שווה מתחתיו ומעליו. למשל החציון של קבוצת המספרים {2,3,8,20,21,25,31} הוא 20. נגדיר כעת את פעולת חציון_3 המחשבת לכל איבר בקבוצה B (הניחו קבוצה אינסופית עם סדר) את ערך החציון בסביבת שני האיברים הסמוכים. לדוגמה:

$$\left[\ldots\boxed{12,2,8},3,7,5,3,4,2,\ldots\right]\quad\Rightarrow\quad\left[\ldots\boxed{8},3,7,5,5,4,3\ldots\right]$$

א. האם חציון_3 היא פעולה לינארית? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

ב. האם חציון_3 היא פעולה קבועה במקום? אם כן, נמקו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

שאלה מס' 4

חלקי שאלה זו בלתי תלויים זה בזה.

חלק א'

נתונה תמונה $f\left(x,y\right)$ אשר רמת האפור שלה f מפולגת לפי פונקציית צפיפות הסתברות נתונה $p_f\left(u\right)$. לפונקציית הצפיפות תמך רציף בין 0 ל- u_0 חיובי כלשהו, והיא חיובית ממש בכל התחום $0<u<u_0$ ומתאפסת מחוץ לתחום.

במקרה הצורך, ניתן להשאיר ביטוי אינטגרלי ב- $p_f\left(u\right)$, אך יש לפשט ככל הניתן. ברצוננו לבצע קוונטיזציה אופטימלית ל- N רמות לפי פונקציית העיוות הבאה:

$$d\left(u,u_Q\right)=\left|u^2-u_Q^2\right|.$$

א. מצאו ביטוי לרמות ההחלטה האופטימליות $\left\{r_k\right\}_{k=0}^{N}$ כתלות ברמות הייצוג $\left\{f_k\right\}_{k=1}^{N}$. נמקו.

ב. מצאו ביטוי לרמות הייצוג האופטימליות $\left\{f_k\right\}_{k=1}^{N}$ כתלות ברמות ההחלטה $\left\{r_k\right\}_{k=0}^{N}$. נמקו.

<u>חלק ב'</u>

נתון הבלוק $h[m,n]$, אשר גודלו 5×5:

$$h[m,n]=\boxed{\begin{array}{ccccc} -1.5 & -1.5 & -4 & -1.5 & -1.5 \\ -1.5 & -4 & -4 & 3.3 & -1.5 \\ -4 & -4 & 20 & -4 & -4 \\ -1.5 & 3.3 & -4 & -4 & -1.5 \\ -1.5 & -1.5 & -4 & -1.5 & -1.5 \end{array}}$$

ג. הוחלט לבצע קוונטיזציה אחידה של $h[m,n]$ לשלוש רמות ייצוג, כלומר: רמות ההחלטה הקיצוניות הן בקצוות התחום הדינאמי של $h[m,n]$, אזורי ההחלטה שווים בגודלם ורמות הייצוג נמצאות במרכז אזורי ההחלטה. נסמן קוונטייזר זה Q_1.

מצאו את רמות הייצוג $\left\{f\right\}_{k=1}^{3}$ ורמות ההחלטה $\left\{r\right\}_{k=0}^{3}$ המתאימות עבור ערכי $h[m,n]$.

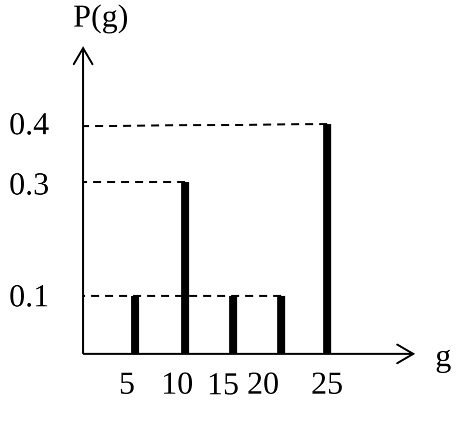
ד. קיים קוונטייזר <u>אחיד</u> אחר לשלוש רמות ייצוג Q_2, שהפרמטרים שלו לא נגזרים ישירות מהתמונה $h[m,n]$. הפעלת Q_2 על התמונה $h[m,n]$ מקטינה את שגיאת ה-MSE לעומת הפעלת Q_1 עליה. הסבירו <u>איכותית</u> כיצד שונות רמות הייצוג וההחלטה של Q_2 מאלו של Q_1. תנו דוגמה לקוונטייזר Q_2 אפשרי.

<u>שאלה מס' 5</u>

נתונה תמונה שבה 32 רמות אפור (0 ... 31), בעלת ההיסטוגרמה המנורמלת שמופיעה באיור.

הניחו:

- ערכי רמות ההחלטה מעוגלים לערכים חצי שלמים הגבוהים הקרובים (כלומר לערך החצי שלם הקרוב ביותר אשר גדול מהערך הנתון. לדוגמה, ערך 17.6 יעוגל ל-18.5. בנוסף, ערך שלם יעוגל למעלה. לדוגמה, ערך 12 יעוגל ל-12.5).
- ערכי רמות הייצוג מעוגלים לערך השלם הקרוב (לדוגמה, 5.1 מעוגל ל-5. בנוסף, ערך חצי שלם יעוגל למעלה. לדוגמה, 6.5 יעוגל ל-7).



א. חשבו קוונטייזר בעל שלוש רמות יצוג לתמונה הנ״ל תוך שימוש באלגוריתם Max-Lloyd (כאשר משתמשים במדד שגיאה ריבועית ממוצעת). התחילו בבחירה הבאה של רמות הייצוג:

$$f_1^1 = 5, f_2^1 = 15, f_3^1 = 25$$

ב. ציירו את ההיסטוגרמה של התמונה במוצא הקוונטייזר מהסעיף הקודם, וחשבו שגיאה ריבועית ממוצעת (ביחס לתמונה המקורית).

ג. כעת רוצים להשתמש באלגוריתם Max-Lloyd כאשר האתחול הוא

$$f_1^1 = 5, f_2^1 = 10, f_3^1 = 15$$

מצאו קוונטייזר זה.

ד. ציירו את ההיסטוגרמה של התמונה במוצא הקוונטייזר מהסעיף הקודם, וחשבו שגיאה ריבועית ממוצעת (ביחס לתמונה המקורית). השוו לקוונטייזר מסעיף א׳.