עיבוד תמונה דיגיטלי

תרגיל בית 2

מגישים:

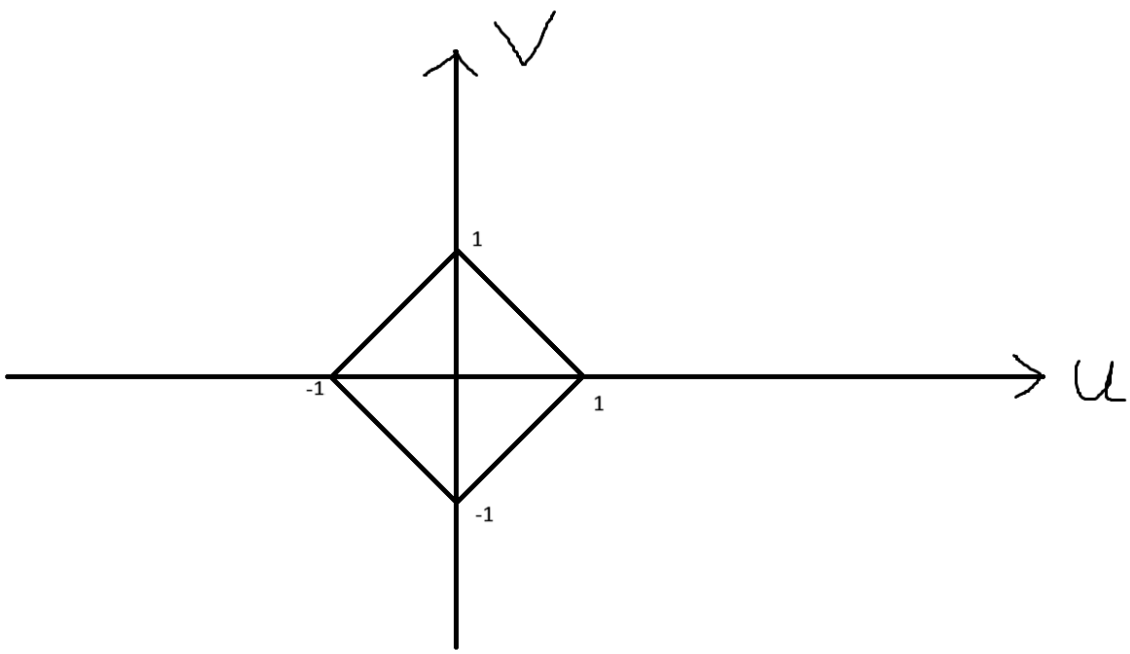
יגאל ספקטור 214146896

יוסף גורן 211515606

שאלה 2

א.

לפי הגדרת $F(u,v)$ מתקיים שהיא נראית כך:



כאשר התחום בתוך המעוין (כולל הקצוות) שווה ל1 והתחום מבחוץ שווה ל0.

נמצא את f באמצעות התמרת פורייה ההפוכה. נגדיר פונקציה

$$H(u,v) = rect\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \cdot rect\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)$$

לכן לפי הגדרת $rect$ מתקיים:

$$H(u,v) = \left(\begin{cases} 1, & \left|\frac{u}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{1}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}\right) \cdot \left(\begin{cases} 1, & \left|\frac{v}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{1}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}\right) =$$

$$= \left(\begin{cases} 1, & |u| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}\right) \cdot \left(\begin{cases} 1, & |v| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}\right)$$

המכפלה שווה 1 אם"ם $|u| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ and $|v| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ לכן:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & |v| \le \frac{\sqrt{2}}{2}, |u| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

ולכן H נראה כמו ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים, שמרכזו בראשית הצירים ואורך הצלע שלו הוא $\sqrt{2}$.
היות ש-F הוא ריבוע שמרכזו בראשית הצירים ואורך אלכסונו הוא 2 אזי אורך הצלע שלו הוא $\sqrt{2}$ על כן $F(u,v)$ היא סיבוב של H ב45 מעלות. לכן נגדיר

$$A=\begin{bmatrix}\cos(45°) & \sin(45°)\\ -\sin(45°) & \cos(45°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

לכן

$$F(u,v)=H\big(A(u,v)\big)$$

התמרת הפורייה של $sinc$ זה $rect$ לכן לפי

$$sinc(x)\xrightarrow{F}rect(u)$$

נגדיר $h(x,y)=\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}x\big)\cdot\sqrt{2}\cdot sinc(\sqrt{2}y)$

ואז מתקיים היות ש$sinc$ הוא התמרת פורייה של $rect$ ולהפך:

$$h(x,y)=\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}x\big)\cdot\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}y\big)$$

$$\xrightarrow{F}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}x\big)\cdot\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}y\big)e^{-2\pi j(ux+vy)}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}x\big)e^{-2\pi jux}\cdot\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}y\big)e^{-2\pi jvy}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}x\big)e^{-2\pi jux}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\cdot sinc\big(\sqrt{2}y\big)e^{-2\pi jvy}dy=$$

נבצע החלפת משתנים $\sqrt{2}x=t,\sqrt{2}y=y\Rightarrow\sqrt{2}dx=dt,\sqrt{2}dy=ds$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot sinc(t)e^{-\frac{2\pi jut}{\sqrt{2}}}dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot sinc(s)e^{-\frac{2\pi jvs}{\sqrt{2}}}ds\underset{fourier\ of\ sinc}{=}$$

$$=rect\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\cdot rect\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)=H(u,v)$$

ולכן לפי ההדרכה:

$$h\big(A(x,y)\big)\xrightarrow{F}H\big(A(u,v)\big)=F(u,v)$$

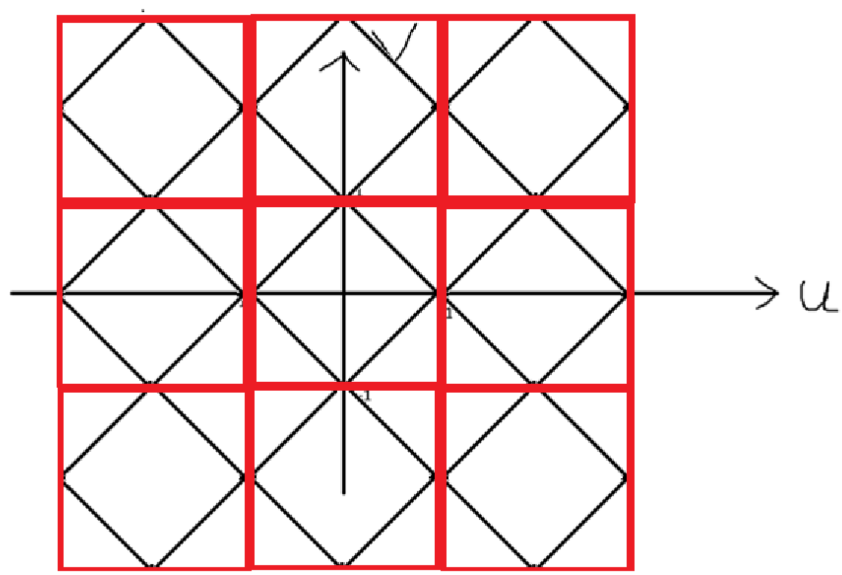
לכן $f(x,y)=h\big(A(x,y)\big)$ שזה שווה:

$$f(x,y)=h\big(A(x,y)\big)=h\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}y}{2},\frac{-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y}{2}\right)=$$

$$= \sqrt{2}sinc\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}y}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}sinc\left(\frac{-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y}{2\sqrt{2}}\right) = 2sinc\left(\frac{x+y}{2}\right)sinc\left(\frac{-x+y}{2}\right)$$

ב.1.

על מנת לקבל סריג דגימה מלבני בעל נצילות גבוהה ביותר נצטרך לכסות את האות בתדר עם כמה שפחות "בזבוז שטח", על כן נקבל את הסריג הבא



בעצם לקחנו ריבוע שאורך צלעו הוא 2 כך שמרכז כל צלע של הריבוע נוגע בקדקודי המעוין (הריבוע באדום מסמל את תא הדגימה) ואז שכפלנו את כל המעוינים שהם האות במרחב התדר ואת הריבועים המסמלים את תא הדגימה אינסוף פעמים, וזה סריג הדגימה שלנו. נעיר בנוסף כי הסריג עומד בתנאי נייקוויסט שכן האות המקסימלי בשני הצירים הוא 1 ואורך צלע הריבוע הוא $2 \le 2 = 2 \cdot 1$.

ב.2.

מטריצת הדגימה בתדר היא

$$U^{-T} = \begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}$$

היות ש $\Delta u = \Delta v = 2$ נקבל

$$U^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן מטריצת הדיגמה במקום היא

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ב.3.

נצילות הדגימה בתדר מוגדרת להיות $\frac{S_{support}}{|detU^{-T}|}$. מתקיים כי $|\det U^{-T}| = 4$ ושטח המעוין מחושב באופן הבא: נוכל לחלק את המעוין ל4 משולשים ישרי זוית שאורך כל ניצב שלהם הוא 1 (החילוק מתבצע באמצעות אלכסוני המעוין). על כן השטח הוא $4 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 2$ ולכן הנצילות היא

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

ג.

נחשב את התמרת פורייה של g:

$$F\{g\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x,y) - \frac{1}{4}f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)e^{j\pi x}\right)e^{-2j\pi(ux+vy)}dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(x,y))e^{-2j\pi(ux+vy)}dx\,dy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)e^{j\pi x}\right)e^{-2j\pi(ux+vy)}dx\,dy$$

$$\underset{fourier\ of\ f}{=} F(u,v) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)e^{j\pi x}\right)e^{-2j\pi(ux+vy)}dx\,dy$$

$$= F(u,v) - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)\right)e^{-2j\pi(ux+vy)+j\pi x}dx\,dy$$

נבצע החלפת משתנים $k = \frac{x}{2}, dk = \frac{dx}{2}, l = \frac{y}{2}, dl = \frac{dy}{2}$ ואז:

$$= F(u,v) - \frac{1}{4}\cdot 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(k,l))e^{-2j\pi(u\cdot 2k+v\cdot 2l)+j\pi 2k}dk\,dl$$

$$= F(u,v) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(k,l))e^{-2j\pi(u\cdot 2k-k+v\cdot 2l)}\,dk\,dl$$

$$= F(u,v) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(k,l))e^{-2j\pi((2u-1)k+2v\cdot l)}dk\,dl =$$

$$= F(u,v) - F(2u-1,2v)$$

לכן התמרת הפורייה $G(u,v)$ שווה

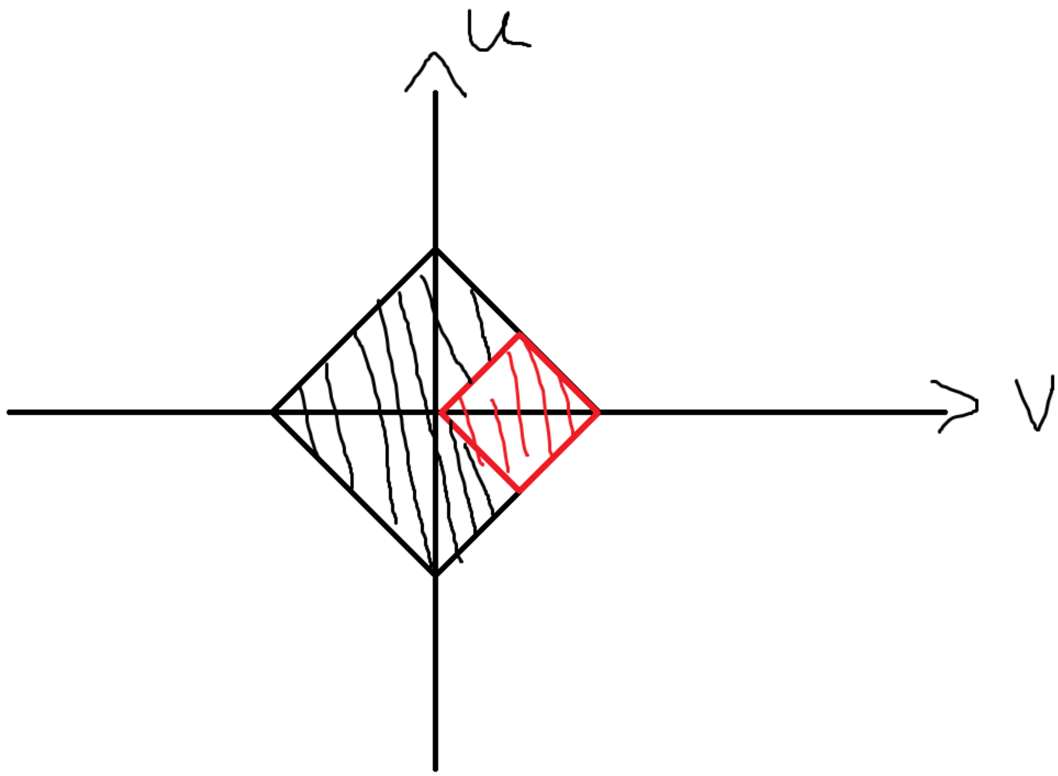
$$G(u,v) = F(u,v) - F(2u-1,2v)$$

כדי לאייר את G ננסה להבין מה הנוסחא שלו:

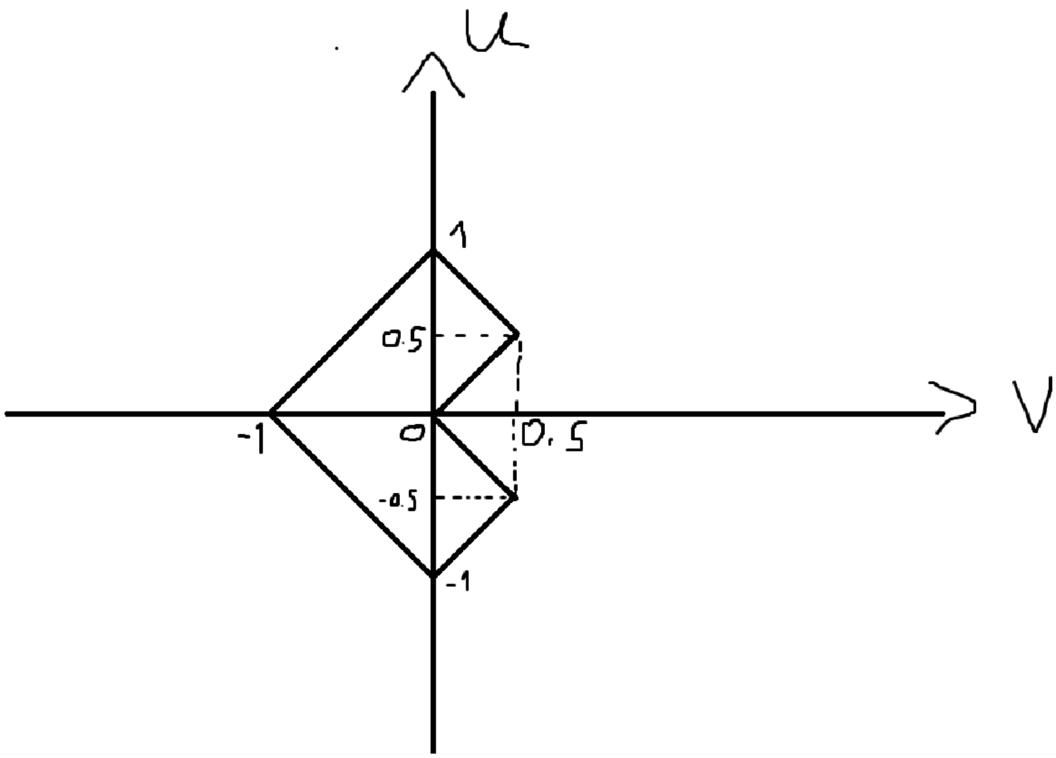
$$G(u,v)=\begin{cases}1, & |u|+|v|\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}-\begin{cases}1, & |2u-1|+|2v|\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & |u|+|v|\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}+\begin{cases}-1, & |2u-1|+|2v|\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

התחום בו $|2u-1|+|2v|\le 1$ שקול לתחום $\left|u-\frac{1}{2}\right|+|v|\le\frac{1}{2}$ על כן זה בעצם מעוין שמרכזו ב-$\left(\frac{1}{2},0\right)$ וכל זוויותיו ישרות ואורך אלכסונו הוא 1. לכן נקבל כי G הוא הבא:



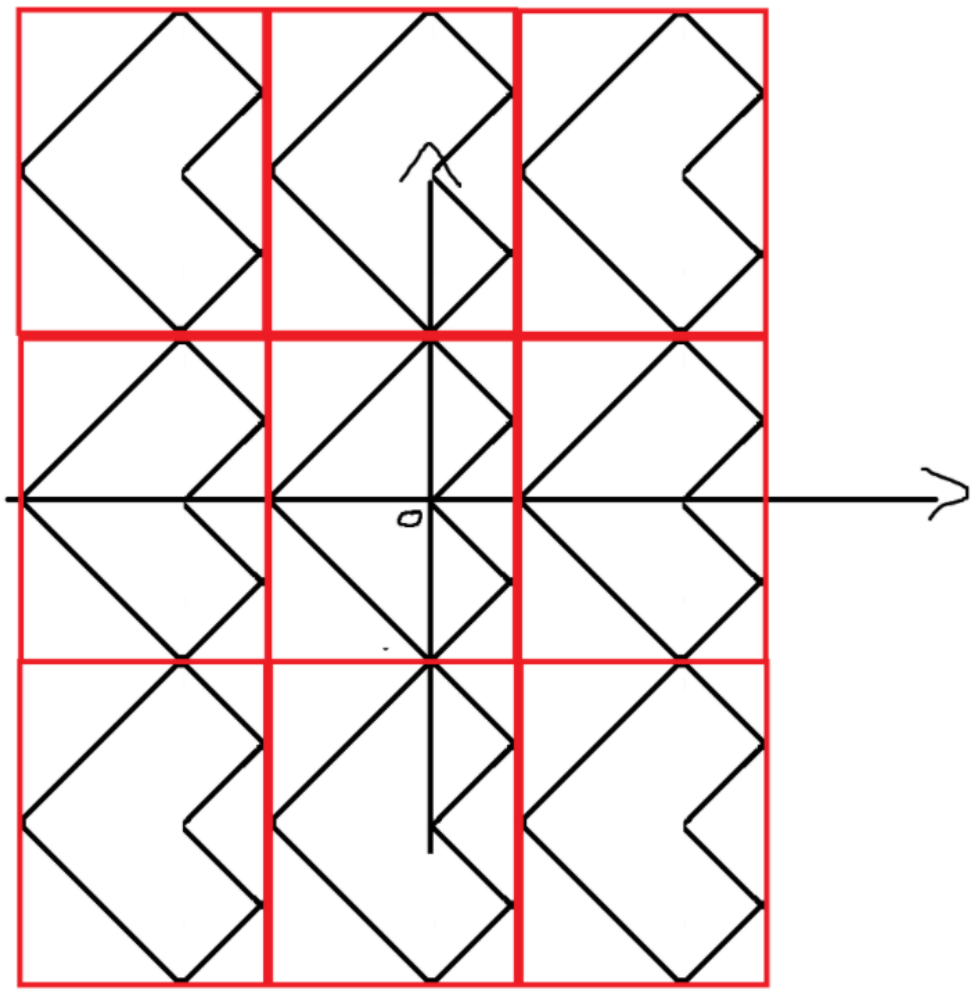
כאשר לפי הגדרת G התחום המקוקו באדום הוא $0=1-1$ והתחום המקוקו בשחור הוא $1=1-0$
על כן סה"כ ללא התחום האדום נקבל:



כאשר G שווה ל1 אם"ם אנחנו בתוך התחום הסגור בציור 0 אחרת.

ד.1.

עבור סריג הדגימה המלבני עם הנצילות הגבוהה ביותר נרצה תא יחידה מלבני ש"מבזבז" הכי מעט שטח. לכן נקבל את הסריג הבא (תא הדגימה הוא הריבוע האדום):



נעיר כי זה לא עומד בתנאי נייקוייסט שכן אורך צלע מינימלי בציר אופקי הוא $1 \cdot 2 = 2$ אבל אנחנו לקחנו צלע באורך 1.5.

ד.2.

מתקיים כי $\Delta u = 1.5$ ו$\Delta v = 2$ ולכן מטריצת הדגימה בתדר היא

$$U^{-T} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ד.3.

נצילות הדגימה היא $\frac{S_{sampling}}{|detU^{-T}|}$. מתקיים כי $|detU^{-T}| = 1.5 \cdot 2 = 3$. שטח הדגימה הוא שטח המעוין הגדול מהסעיפים הקודמים פחות המעוין הקטן שהצגנו בסעיף ג. שטח המעוין הגדול הוא 2 כפי שראינו,

ושטח המעוין הקטן הוא $\frac{1}{2}$ כי בדיוק רבע מהמעוין הגדול. על כן $S_{sampling} = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$ ולכן הנצילות היא

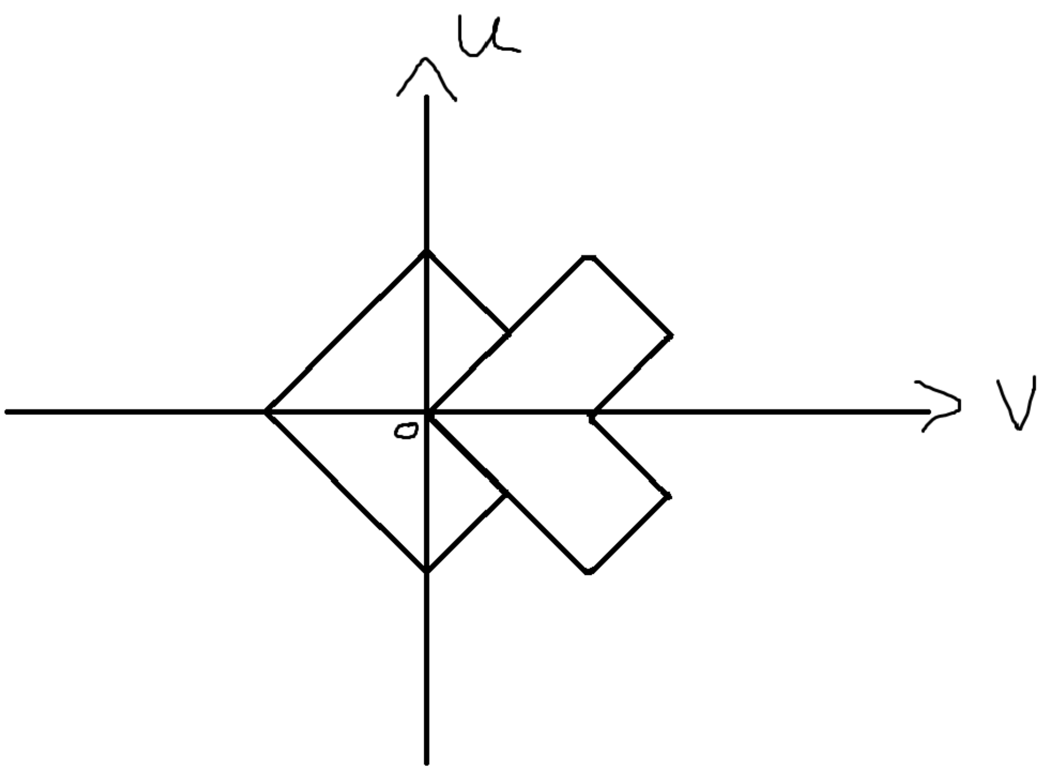
$$\frac{1.5}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$$

ה.1.

למשל, ניקח $u_1 = 1, v_1 = 0$

ה.2.

נקבל את הצורה הבאה:



ה.3.

ניקח סריג לא מלבני, שצורתו תהיה בדיוק כמו הצורה שציירנו ואז נוכל לרצף איתו את כל המרחב (נראה זאת בסעיף הבא). מטריצת הדגימה בתדר היא

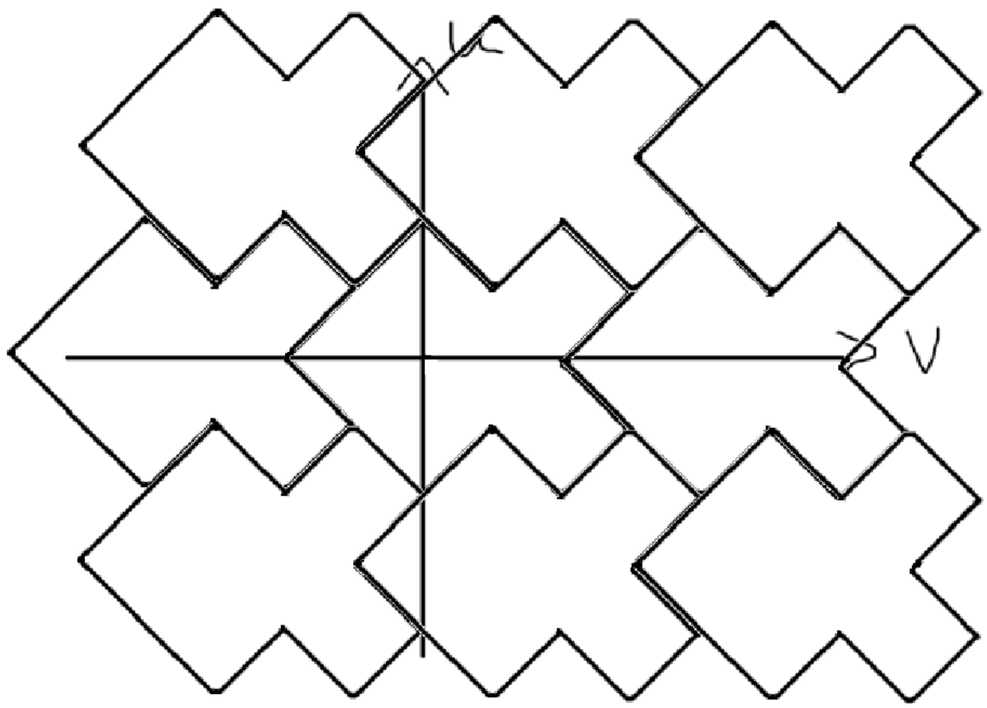
$$U^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

כי כדי לרצף את המרחב ניקח וקטור שמעתיק את הצורה בכיוון 2 ימינה, ועוד וקטור שמעתיק את הצורה בכיוון 0.5 ימינה ו1.5 למעלה. ואז היות ששטח הצורה הוא 3 (כי השטח של הצורה ללא השכפול הוא 1.5 ולכן לאחר השכפול הוא 3) נקבל נצילות ששווה 1 כי

$$\frac{S_{sampling}}{|detU^{-T}|} = \frac{3}{3} = 1$$

ה.4.

באמצעות מטריצת הדגימה הזאת נוכל לרצף את כל המרחב



ה.5.

כדי שנוכל לשחזר באופן מושלם את g ניקח מסנן LPF שצורתו היא כצורה שהראנו בתת-סעיף ה.2. לאחר מכן נוכל לקבל את הסינגל המקורי שהוא $G(u,v) + G_1(u,v)$ במרחב התדר ומפה נוכל לקבל את $g(x,y) + g(x,y)e^{2\pi j(u_1 x + v_1 y)} = g(x,y)(1 + e^{2\pi j(u_1 x + v_1 y)})$ באמצעות התמרת פורייה הפוכה. נחלק בקבוע ונקבל את $g(x,y)$.

שאלה 4

א.

בשביל מפענח Run Length צריך רצף התחלתי שהוא '1' ואורך רצף מקסימלי שהוא 10 לפי הנתון. כמות הרצפים האפשריים הם אפוא בין 0 ל10. על כן נזדקק ל11 רצפים כלומר $ceiling(\log_2 11) = 4$ ביטים. בנוסף, נעיר כי המפענח יודע את גודל התמונה לכן לא צריך סימון לתחילת שורה.

תשובה סופית: 4 ביטים.

ב.

יש לנו 11 רצפים אפשריים (מ0 עד 10). מתקיים כי יש 33 מספרים ברצף הנתון כאשר כל מספר מיוצג על ידי 4 ביטים. לכן כמות הביטים היא

$$number\ of\ bits = 4 \cdot 33 = 132$$

יש לנו 81 פיקסלים לכן קצב השידור הוא:

$$rate = \frac{132}{81} = 1.63\ bits\ per\ pixel$$

אבל קידוד *bitmap* עבור תמונה בינארית דורש ביט אחד לכל פיקסל, לכן קידוד *bitmap* הוא יותר חסכוני.

ג.

קידוד *bitmap* איננו רגיש שכן תמיד כל המספרים בתמונה מיוצגים באמצעות מטריצה כך שכל מספר מקבל ביט אחד. כלומר, *bitmap* תמיד דורש ביט אחד לכל פיקסל ללא תלות ברוטציה ובטרנזלציה.

קידוד *run length* תלוי ברוטציה. למשל, אם ניקח את התמונה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח קידוד מקסימלי של 10 ביטים וכי ידוע שהפיקסל הראשון הוא 1. (ולכן צריך 4 ביטים לייצוג)

אז נקבל קידוד *run length* של 3 1 1 1 2 5 2 1. יש 8 מספרים שדורשים 4 ביטים לכן כמות הביטים היא

$$4 \cdot 8 = 32$$

כמות הפיקסלים היא 16 לכן:

$$rate = \frac{32}{16} = 2\ bits\ per\ pixel$$

אבל אם נסובב 90 מעלות נגד כיוון השעון נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז נקבל את הקידוד הבא:

$$2\ 3\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1$$

יש לנו 9 מספרים שכל אחד דורש 4 ביטים לקידוד ויש לנו 16 פיקסלים לכן:

$$rate = \frac{9 \cdot 4}{16} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2.25\ bits\ per\ pixel$$

כלומר קיבלנו קצב גבוה יותר. לכן הוא רגיש לרוטציה.

קידוד ה*run length* גם רגיש לטרנזלציה. למשל, ניקח מטריצה $2x2$ ונבצע טרנזלציה ביט אחד ימינה: (נניח כי ביטים חדשים שנוספו הם אפסים). נניח כי ידוע כי הביט הראשון הוא 0 ושרצף מקסימלי הוא בגודל 4. על כן צריך $\log_2 4 = 2$ שני ביטים לייצוג כל מספר.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לאחר הזזה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בתמונה הראשונה הקוד הוא 1 2 1 קצב השידור הוא:

$$\frac{2 \cdot 3}{4} = 1.5\ bits\ per\ pixel$$

בתמונה השנייה הקוד הוא 1 3 וקצב השידור הוא:

$$\frac{2 \cdot 2}{4} = 1\ bits\ per\ pixel$$

קיבלנו קצב שידור שונה לכן התמונה רגישה לטרנזלציה.

עבור קידוד *chain code* לעשות מאוחר יותר

ד.

מסנן חציון בסביבת 4 של A מחשב, לכל פיקסל, את החציון של הקבוצה {פיקסל נוכחי,פיקסל מעליו, פיקסל מתחתיו, פיקסל משמאלו, פיקסל מימינו}. על כן התמונה B היא:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 1 & 2 \\ 10 & 10 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ה.

1.

האנטרופיה היא:

$$H = -\sum_i \log_2\big(p(x_i)\big) \cdot p(x_i)$$

$$p(10)=\frac{5}{12}, p(9)=\frac{1}{12}, p(1)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}, p(2)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

לכן:

$$H=-\log_2\left(\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{5}{12}-\log_2\left(\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{1}{12}-2\cdot\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$$
$$=1.82501\ bits\ per\ pixel$$

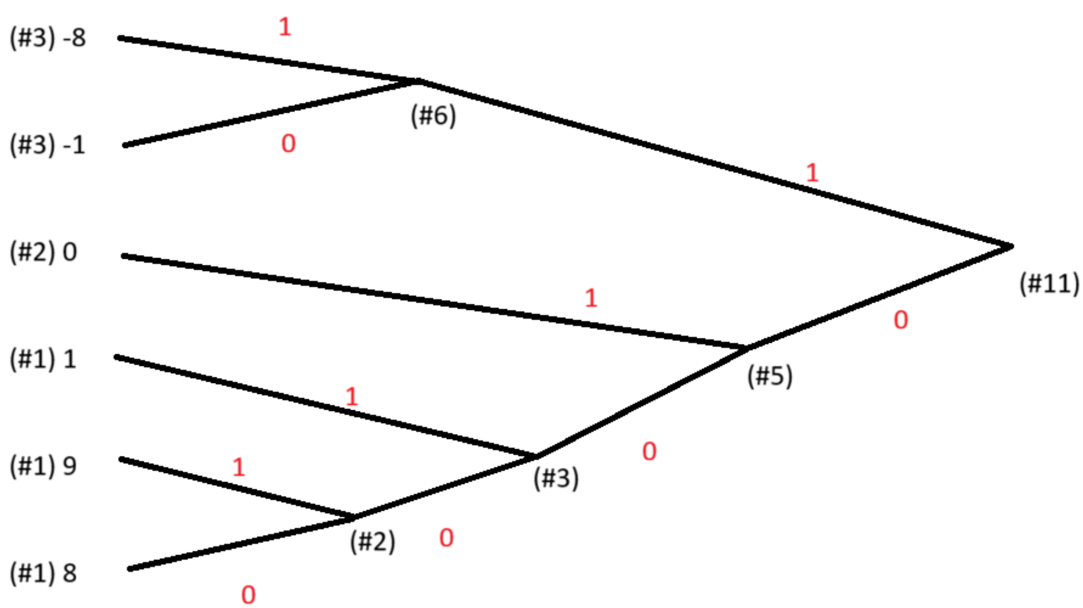
.2

לפי שיטת קידוד הפרשים נקבל:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -8 & -1 \\ 9 & -1 & -8 & 1 \\ 8 & 0 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

.3

נסדר את המספרים המופיעים בתמונה (חוץ מהמספר 10 כי נתון שהוא מקודד עם 4 ביטים) לפי כמות ההופעות שלהן ונבנה את עץ הופמן לפי האלגוריתם לבניית עץ הופמן.



על כן הקידוד הוא:

$$-8: 11$$

$$-1: 10$$

$0: 01$

$1: 001$

$9: 0001$

$8: 0000$

עתה, קצב השידור הממוצע הוא (כאשר אנחנו מתחשבים בפיקסל הראשון שנתון לנו כי הוא מקודד ל4 ביטים, הסיבה שאנחנו מתחשבים בו זה כי זה חשוב לסעיף הבא)

$$\sum_i p(f_i)|L_i| = \frac{3}{12}\cdot 2 + \frac{3}{12}\cdot 2 + \frac{2}{12}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 3 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 4 + \frac{1}{12}\cdot 4 = \frac{31}{12}$$
$$= 2.5833\ bits\ per\ pixel$$

.4

ללא דחיסה אנחנו משקיעים 4 ביטים לפיקסל. עם דחיסה יש לנו לפי הסעיף הקודם (כאשר התחשבנו גם בפיקסל הראשון) 2.5833 ביטים לפיקסל. על כן יחס הדחיסה הוא:

$$compressionRatio = \frac{4}{2.5833} = 1.54840708$$

שאלה 5

.א

מערכת הדחיסה שלנו עובדת באופן הבא: בכל שלב בדחיסה, אנחנו לוקחים תמונה X^{cs} בתור קלט המסודרת בסידור עמודה, לתמונה הזו אנו נותנים סימן פלוס, ולתמונה הקודמת שנכנסה אנחנו נותנים סימן מינוס (היא אצורה בתוך "משהה של תמונות בזמן") ואז מחברים את התמונה הנוכחית עם מינוס התמונה הקודמת (כלומר, מחשבים את ההפרש ביניהם) וזו התמונה D^{cs}. כלומר, הדחיסה שאנחנו מבצעים היא בעצם קידוד הפרשים. לאחר חישוב D^{cs} אנחנו מבצעים קידוד כלשהו ויוצא Y^{cs} בתור פלט.

היות ש-D^{cs} היא קידוד הפרש, אם ב-X^{cs} יש 0 עד n רמות אפור, אז ב-D^{cs} יהיו $-n$ עד n רמות אפור.

רמות האפור של קידוד הפרשים מתפלג עם התפלגות Laplace, על כן הרמות האפור השכיחות ביותר הם אלה שקרובות ל0, והן דועכות ככל שמתקרבים לקצוות של רמות האפור. בתמונה המקורית יש תלות סטטיסטית בין פיקסלים שכנים, כי סביר שיש להם רמות אפור קרובות. על כן אנחנו מנצלים את התלות הזאת כדי שיהיו הרבה רמות אפור שהן 0 או קרובים ל0. על כן רמות אפור שהן קרובות למרכז הן בעל תלות חזקה ואילו ככל שמתרחקים מהמרכז כך התלות דועכת.

.ב

.ג

מתקיים לפי הנתון כי הצפיפות מקיימת

$$p_D(f) = \begin{cases} \frac{a}{2} e^{-|f|} & \text{if } |f| \leq 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

לפי תכונת הנרמול של צפיפות התפלגות בהסתברות, מתקיים כי האינטגרל על הצפיפות צריך להיות 1. לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_D(f)\, df = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-10} p_D(f) df + \int_{-10}^{0} p_D(f) df + \int_{0}^{10} p_D(f) df + \int_{10}^{\infty} p_D(f) df = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-10} 0 df + \int_{-10}^{0} \frac{a}{2} e^{-|f|} df + \int_{0}^{10} \frac{a}{2} e^{-|f|} df + \int_{10}^{\infty} 0 df = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-10}^{0} \frac{a}{2} e^{f} df + \int_{0}^{10} \frac{a}{2} e^{-f} df = 1$$

$$\underset{newton\ leibniz}{\Longleftrightarrow} \frac{a}{2} \left(e^0 - e^{-10} + (-e^{-10} + e^0)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} (1 - e^{-10} - e^{-10} + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{2 - 2e^{-10}} = \frac{1}{1 - e^{-10}}$$

ד.

הקוונטייזר מקודד ל2 סיביות על כן יש $2^2 = 4$ רמות ייצוג ו$2^2 + 1 = 5$ רמות החלטה. נסמן את רמות הייצוג f_1, f_2, f_3, f_4 ואת רמות ההחלטה r_0, r_1, r_2, r_3, r_4. הקוונטייזר הוא אחיד, וקצוות רמות ההחלטה הן ב -10 וב-10, ויש לנו 4 רמות ייצוג על כן

$$r_0 = -10, r_1 = -10 + \frac{10 - (-10)}{4} = -5, r_2 = -5 + \frac{10 - (-10)}{4} = 0, r_3 = 0 + \frac{10 - (-10)}{4} = 5\ , r_4 = 5 + \frac{10 - (-10)}{4} = 10$$

כלומר $r_0 = -10, r_1 = -5, r_2 = 0, r_3 = 5, r_4 = 10$

ורמות הייצוג הן מרכזי תחומי ההחלטה לכן

$$f_1 = \frac{r_0 + r_1}{2} = \frac{-10 - 5}{2} = -7.5$$

$$f_2 = \frac{-5+0}{2} = -2.5$$

$$f_3 = \frac{0+5}{2} = 2.5$$

$$f_4 = \frac{5+10}{2} = 7.5$$

ה.

$$MSE = \int_{r_3}^{r_4} (x - f_4)^2 p_D(x) dx$$

$$= \int_5^{10} (x-7.5)^2 \frac{a}{2} e^{-x} dx =$$

$$\frac{a}{2} \int_5^{10} (x-7.5)^2 e^{-x} dx =$$

נבצע אינטגרציה בחלקים. $u = (x-7.5)^2, du = 2(x-7.5), dv = e^{-x}, v = -e^{-x}$

$$= \frac{a}{2}\left(-(x-7.5)^2 e^{-x}|_5^{10} + \int_5^{10} 2(x-7.5)e^{-x}dx\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(-(x-7.5)^2 e^{-x}|_5^{10} + 2\int_5^{10} (x-7.5)e^{-x}dx\right)$$

נבצע שוב אינטגרציה בחלקים $u = (x-7.5), du = 1, dv = e^{-x}, v = -e^{-x}$

$$= \frac{a}{2}\left(-(x-7.5)^2 e^{-x}|_5^{10} + 2\left(-(x-7.5)e^{-x}|_5^{10} + \int_5^{10} e^{-x}dx\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(-(x-7.5)^2 e^{-x}|_5^{10} + 2\left(-(x-7.5)e^{-x}|_5^{10} + (-e^{-10} + e^{-5})\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2(1-e^{-10})}\Big(\left(-(10-7.5)^2 e^{-10} + (5-7.5)^2 e^{-5}\right) + 2\left(-(10-7.5)e^{-10} + (5-7.5)e^{-5} + (-e^{-10} + e^{-5})\right)\Big) \approx 0.0106$$

ו.

הם שווים. קצב המידע הוא כמות הביטים לפיקסל, אבל שני המהנדסים הציעו שני סיביות לפיקסל, על כן קצב המידע הוא $2\ bits\ per\ pixel$ עבור שתי הגישות.

ז.

אנחנו צריכים שלכל רמות הייצוג תהיה אותה הסתברות. יש 4 רמות ייצוג לכן ההסתברות של כל רמת ייצוג היא 25%. לכן נוכל לסדר אותם בסדר שרירותי, למשל

$$f_1, f_2, f_3, f_4$$

(כי יש לכולם אותה הסתברות). עתה ניקח f_i, f_j כלשהן ונחבר אותם בעץ ונקבל סימבול וירטואלי שנסמנה d_{ij} שההסתברות שלו הוא 50%. כעת עלינו לחבר את הצמתים עם ההסתברות המינימלית, האפשרויות הן, או לחבר שני רמות ייצוג ולקבל 50%, או לחבר רמת ייצוג עם סימבול וירטואלי ולקבל 75%, לכן זה חייב להיות הרמות הייצוג שעוד לא חיברנו, נסמנן f_k, f_l ונקבל את הסימבול הוירטואלי d_{kl}. נותרנו רק עם 2 סימבולים וירטואלים, לכן נחבר אותם ונקבל את השורש שנסמנו t. לכל רמות הייצוג יש את אותו האורך כי זה בעצם כמות הקשתות מהשורש אל רמת הייצוג:

$$t \to d_{kl} \to f_k$$

$$t \to d_{kl} \to f_l$$

$$t \to d_{ij} \to f_i$$

$$t \to d_{ij} \to f_j$$

קיבלנו שתי קשתות לכל רמת ייצוג לכן אורך כל מילה הוא 2. וזה ללא תלות בצמתים שאנחנו בחרנו, וללא תלות בסדר בין רמות הייצוג כי יש לכולן אותה הסתברות, לכן התהליך הוא כללי ותמיד מניב מילים עם אותו אורך.

כעת נמצא את רמות הייצוג האלה. היות שההתפלגות היא סימטרית מתקיים כי

$$\int_{-10}^{0} \frac{a}{2} e^x dx = \int_{0}^{10} \frac{a}{2} e^{-x} dx = 0.5$$

על כן נדרוש $\int_{-10}^{r_1} \frac{a}{2} e^x = 0.25$ ואז אם ניקח $r_3 = -r_1$ מסימטריית ההתפלגות יתקיים כי

$$\int_{r_3}^{10} \frac{a}{2} e^{-x} = 0.25$$

וגם $\int_{r_1}^{0} \frac{a}{2} e^x = \int_{0}^{r_3} \frac{a}{2} e^{-x} = 0.25$ כי

$$0.5 = \int_{-10}^{0} \frac{a}{2} e^x dx = \int_{-10}^{r_1} \frac{a}{2} e^x + \int_{r_1}^{0} \frac{a}{2} e^x = \int_{r_3}^{10} \frac{a}{2} e^{-x} + \int_{0}^{r_3} \frac{a}{2} e^{-x} = \int_{0}^{10} \frac{a}{2} e^{-x} dx = 0.5$$

$$\Rightarrow 0.5 = 0.25 + \int_{r_1}^{0} \frac{a}{2} e^x = 0.25 + \int_{0}^{r_3} \frac{a}{2} e^{-x} = 0.5$$

ומחיסור אכן נקבל כי האינטגרלים שווים 0.25. עתה נחשב:

$$\int_{r_3}^{10} \frac{a}{2} e^{-x} = 0.25$$

$$\frac{a}{2}\int_{r_1}^{10} e^{-x} = 0.25$$

$$-e^{-10} + e^{r_1} = \frac{0.5}{a}$$

$$e^{r1} = \frac{0.5}{a} + e^{-10}$$

$$r_1 = \ln\left(\frac{0.5}{a} + e^{-10}\right) = \ln\left(\frac{0.5}{\frac{1}{1-e^{-10}}} + e^{-10}\right) = \ln\left(\frac{1-e^{-10}}{2} + e^{-10}\right) = \ln\left(\frac{1+e^{-10}}{2}\right)$$

לכן ניקח

$$r_1 = \ln\left(\frac{1+e^{-10}}{2}\right), \qquad r_3 = -r_1 = -\ln\left(\frac{1+e^{-10}}{2}\right)$$

ונקבל את הדרוש לפי ההסברים לעיל.