Álgebra I

28 de febrero de 2017

Índice general

1 Matrices

1.1. Definiciones

Una **matriz** A de tamaño $m \times n$ elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ que están ordenados en m filas y n columnas de la forma:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Las entradas (i, j) se pueden denotar como a_{ij} o como $[A]_{ij}$.

$\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es el **conjunto de matrices**.

Una **matriz cuadrada** o de **orden** n es aquella con igual número de filas y columnas.

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada es:

$$diag(A) = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$$

La **traza** de A es la suma de los elementos de la diagonal.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Tiene las siguientes características:

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.

3. $tr(A) = tr(A^t)$.

4. $tr(AB) = tr(BA)$.

La **subdiagonal** es $(a_{21}, a_{32}, ..., a_{nn-1})$ y la **superdiagonal** es $(a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1n})$.

La **matriz traspuesta** A^t es aquella en la que cada entrada (i, j) es igual a la entrada (j, i) de A.

Una **matriz simétrica** es una matriz **cuadrada** que coincide con su traspuesta.

Una **matriz antisimétrica** es una matriz cuadrada que coincide con su traspuesta cambiada de signo.

La **matriz traspuesta conjugada** es la matriz cuadrada en la que cada entrada (i, j) es igual al conjugado de la entrada (j, i) de A. ($\overline{a + ib} = a - ib$).

La **matriz hermítica** es una matriz cuadrada que coincide con su transpuesta conjugada.

Una **matriz diagonal** $diag(d_1, d_2, ..., d_n)$ es una matriz cuadrada o de orden n en el que todos los elementos fuera de su diagonal principal son 0. Toda matriz diagonal es triangulas superior y triangular inferior.

La **identidad** es una matriz diagonal con todas las entradas en su diagonal a 1.

Una **matriz nula** es una matriz con todas sus entradas a 0. También es una matriz diagonal a 0.

Una **fila/columna nula** es aquella que tiene todas sus entradas a 0.

Una **submatriz** de A se obtiene eliminando de A algunas filas o columnas.

1.2. Operaciones

1.2.1. Suma de matrices y producto por un escala

$$[A + B]_{ij} = a_ij + b_ij$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$[\lambda A]_{ij}=\lambda a_{ij}$$

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

[Leyes de la suma de matrices y producto por un escalar]

La suma de matrices y el producto por un escalar cumple:

1. Asociativa: $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$
2. Conmutativa: A+B=B+A
3. Neutro: A + 0 = A
4. Inverso: A + (-A) = 0
5. Distributiva respecto a la suma de matrices: $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
6. Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
7. Unidad del cuerpo: $1A=A$

1.2.2. Producto de matrices

El producto de matrices tiene sentido si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$$[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

[Leyes del producto de matrices]

1. Asociativa: A(BC)=(AB)C

2. Elemento neutro por la derecha: $AI_n = A$

3. Elemento neutro por la izquierda: $I_n A = A$

4. Asociativa respecto al producto de escalares: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

5. Distributiva respecto a la suma de matrices por la derecha: A(B+C)=AB+AC

6. Distributiva respecto a la suma de matrices por la izquierda: (A+B)C=AC+BC

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa.

Producto de matrices por bloques

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{array}\right)$$

$$(A_{i1} \cdots A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix} = A_{i1}B_{1j} \cdots A_{in}B_{1n}$$

1.2.3. Propiedades de la transpuesta

[Propiedades de la transpuesta] Si la suma o el producto de matrices tiene sentido en cada uno de los casos que enumeramos a continuación, se cumple que:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$

2. $(A_1^+ \ldots + A_n)^t = A_1^t + \ldots + A_n^t$

3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t, \forall \alpha in \mathbb{K}$

4. $(AB)^t = B^t A^t$

5. $(A_1 \ldots A_n)^t = A_n^t \ldots A_1^t$

Si A es una matriz cuadrada entonces:

1. $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica.

2. A se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

3. AA^t es simétrica.

1.3. Método de Gauss

1.3.1. Combinación lineal de filas de una matriz

Una **combinación lineal** de matrices fila $F_1, \ldots, F_k$ del mismo tamaño es una expresión

$$\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_k F_k, \alpha_i, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$$

Las matrices fila $F_1, \ldots, F_k$ son **dependientes** si existe alguna que es combinación lineal de las demas. En caso contrario, las matrices fila $F_1, \ldots, F_k$ son **independientes**.

Sean $F_1, \ldots, F_k$ matrices fila del mismo tamaño, entonces $F_1, \ldots, F_k$ son dependientes si y sólo si existe una combinación lineal que no es trivial de la forma

$$\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_k F_k = 0$$

1.3.2. Operaciones elementales de filas. Matrices elementales

Las transformaciones que se pueden aplicar a una matriz en el conocido método de Gauss se denominan **operaciones elementales de filas**. Son de 3 tipos y consisten en lo siguiente:

Tipo I Intercambiar 2 filas. Se denota $f_i \leftrightarrow f_j$.

Tipo II Suma a una fila otra multiplicada por un escalar. Se denota $f_i \leftrightarrow f_i + \alpha f_j, \alpha \in \mathbb{K}$.

Tipo III Multiplicar una fila por un escalar no nulo. Se denota $f_i \leftrightarrow \alpha f_i, \alpha \in \mathbb{K}$.

Matrices elementales

Una **matriz elemental** de orden n es la matriz resultante de aplicar a la matriz identidad I_n una operación elemental de filas. Las hay de 3 tipos:

- $E_{f_i \leftrightarrow f_j}$ Matriz resultante de aplicar a I_n la operación elemental $f_i \leftrightarrow f_j$.
$$I_n \underset{f_i \leftrightarrow f_j}{\longrightarrow} E_{f_i \leftrightarrow f_j}$$

- $E_{f_i \leftrightarrow f_i + \alpha f_j}$ Matriz resultante de aplicar a I_n la operación elemental $f_i \leftrightarrow f_i + \alpha f_j$.
$$I_n \underset{f_i \leftrightarrow f_i + \alpha f_j}{\longrightarrow} E_{f_i \leftrightarrow f_i + \alpha f_j}$$

- $E_{f_i \leftrightarrow \alpha f_i}$ Matriz resultante de aplicar a I_n la operación elemental $f_i \leftrightarrow \alpha f_i$.
$$I_n \underset{f_i \leftrightarrow \alpha f_i}{\longrightarrow} E_{f_i \leftrightarrow \alpha f_i}$$

Matrices escalonadas y escalonadas reducidas

El primer elemento no nulo de cada fila se denomina **pivote**. Si la fila es nula no tiene pivote.

La matriz A es **escalonada** si cumple las siguientes propiedades:

- Si A tiene k filas nulas, estas son las últimas k filas.
- Todo pivote de A tiene más ceros a la izquierda que su fila inmediatamente superior. Esto no afecta a la primera fila.

La matriz A es **escalonada reducida** si es escalonada y cumple:

- Todo pivote tiene valor 1.
- Todo entrada de A situado en la misma columna que un pivote es 0.

Matrices equivalentes por filas

Dos matrices A y B son equivalentes por filas $A \sim_f B$ si existe una sucesión finíta de operaciones elementales por filas, o si existe una serie de matrices elementales por filas $E_1, \ldots, E_k$, tal que $B = E_k \cdots E_1 A$.

La equivalencia por filas es una relación de equivalencia.

Si $A \sim_f B$ entonces toda fila de B es combinación lineal de las filas de A.

Equivalencia por filas a una matriz escalonada

Toda matriz es equivalente a una matriz escalonada.

Pero esta no es única, es decir, puede ser equivalente a varias matrices escalonadas distintas.

El **método de Gauss** consiste en aplicar de solo operaciones elementales de **Tipo I** y **Tipo II**.

Equivalencia por filas a una matriz escalonada reducida

Toda matriz es equivalente a una matriz escalonada reducida.

El **método de Gauss-Jordan** añade el uso de la operación elemental de **Tipo III** para hacer que los pivotes sean 1.

Si A y B son matrices escalonadas reducidas y $A \sim_f B$ entonces $A = B$

Toda matriz es equivalente a una única matriz escalonada.

La **forma de Hermite por filas** o **forma escalonada reducida** de A es la única matriz escalonada reducida equivalente por filas de A. Se denota como $H_f(A)$

Dos matrices A y B son equivalentes por filas si y sólo si $H_f(A) = H_f(B)$

1.3.3. Operaciones elementales por columnas. Matrices elementales por columnas

Las transformaciones que se pueden aplicar a una matriz en el conocido método de Gauss se denominan **operaciones elementales de columnas**. Son de 3 tipos y consisten en lo siguiente:

Tipo I Intercambiar 2 columnas. Se denota $c_i \leftrightarrow c_j$.

Tipo II Suma a una columna otra multiplicada por un escalar. Se denota $c_i \leftrightarrow c_i + \alpha c_j, \alpha \in \mathbb{K}$.

Tipo III Multiplicar una columna por un escalar no nulo. Se denota $c_i \leftrightarrow \alpha c_i, \alpha \in \mathbb{K}$.

Matrices equivalentes por columnas

Dos matrices A y B son equivalentes por columnas $A \sim_c B$ si existe una sucesión finita de operaciones elementales por columnas, o si existe una serie de matrices elementales por columnas $F_1, \ldots, F_k$, tal que $B = AF_1 \cdots F_k$.

La equivalencia por columnas es una relación de equivalencia.

1.3.4. Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son **equivalentes**, si se puede transformar A en B mediante una sucesión finita de operación elementales por columnas o filas. Equivalentemente, si existe matrices elementales por filas $E_1, \ldots, E_k$ o por columnas $F_1, \ldots, F_j$ tales que $B = E_1 \cdots E_k A F_1 \cdots F_j$.

La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

1.4. Rango de una matriz

El rango de una matriz A, $rg(A)$, es el máximo número de filas independientes de A.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas que tenga.

El rango de una matriz es invariante con respecto a las operaciones elementales.

Dos matrices equivalentes por filas tienen igual rango.

El rango de una matriz es el número de filas no nulas de cualquier matriz equivalente por filas.

Sea A una matriz de orden n. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $rg(A) = n$.
2. $A \sim_f I_n$.
3. A es un producto de matrices elementales de orden n.

1.4.1. Matrices equivalentes y rango

Sea $H_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $H_s = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de igual tamaño. Entonces $H_r \sim_f H_s$ si y sólo si $r = s$.

Sea A y $H_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de igual tamaño. Entonces $A \sim_f H_r$ si y sólo si $rg(A) = r$.

Dos matrices son equivalentes si y solo tienen igual rango.

1.4.2. Rango de una matriz traspuesta

Sean A y B dos matrices de tamaño $m \times n$. Son ciertas las afirmaciones:

- $A \sim B$ si y sólo si $A^t \sim B^t$.
- Si A es cuadrada $A \sim A^t$.
- $rg(A) = rg(A^t)$.
- Si A tiene tamaño $m \times n$ entonces $rg(A) \leq \min\{m, n\}$.

1.4.3. Rango de la suma y del producto de matrices

Sean $A, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathfrak{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Son ciertas las siguientes afirmaciones:

- $|rg(A) - rg(B)| \leq rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$.
- $rg(A) = rg(\alpha A), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$.
- $rg(AD) \leq \min\{rg(A), rg(D)\}$.

- Si $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $rg(C) = n$ entonces $rg(AC) = rg(A)$.
- Si $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $rg(C) = n$ entonces $rg(CD) = rg(D)$.

1.5. Inversa de una matriz cuadrada

La matriz A de orden n es **invertible** o **regular** si existe una matriz de orden n, que se llama **matriz inversa** de A y se denota por A^{-1}, tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Y la matriz A es **singular** si no tiene inversa.

Una matriz invertible tiene una **única inversa**.

La matriz inversa de cada tipo de matriz elemental viene dada por:

$$\begin{aligned} E^{-1}_{f_i \leftrightarrow f_j} &= E_{f_j \leftrightarrow f_i} \\ E^{-1}_{f_i \leftrightarrow f_i + \alpha f_j} &= E_{f_i \leftrightarrow f_i - \alpha f_j} \\ E^{-1}_{f_i \leftrightarrow \alpha f_i} &= E_{f_i \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} f_i} \end{aligned}$$

Sean $A, B, A_1, \ldots, A_k$ matrices invertibles de orden n. Son ciertas las afirmaciones:

1. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$

1.5.1. Caracterización de matrices invertibles

Sea A una matriz de orden n. Son ciertas las siguientes afirmaciones:

1. A tiene inversa.
2. $BA = CA \Rightarrow B = C$.
3. $BA = 0 \Rightarrow B = 0$.

4. $rg(A) = n$.

5. $H_f(A) = I_n$ y $H_c(A) = I_n$.

6. A es un producto de matrices elementales. $A = E_1 \cdots E_k$.

Sean A y B matrices de orden n. Son ciertas las afirmaciones:

1. $AB = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$

2. $BA = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$

Sean A y B dos matrices del mismo tamaño. Son ciertas las afirmaciones:

1. $A \sim_f B$ si y sólo si existe una matriz invertible P tal que $PA = B$.

2. $A \sim_c B$ si y sólo si existe una matriz invertible Q tal que $AQ = B$.

3. $A \sim B$ si y sólo si existen matrices invertibles P y Q tal que $PAQ = B$.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$.

- Una **inversa por la izquierda** de A es una matriz X de tamaño $n \times m$ tal que $XA = I_n$.

- Una **inversa por la derecha** de A es una matriz Y de tamaño $n \times m$ tal que $XA = I_m$.

Una matriz A de tamaño $m \times n$ tiene:

- Inversa por la izquierda si y sólo si $rg(A) = n$.

- Inversa por la derecha si y sólo si $rg(A) = m$.

Si $rg(A) = n = m$ entonces la inversa de A coincide con la única inversa de A por la izquierda y la única inversa de A por la derecha.

1.6. Determinante de una matriz cuadrada

Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Se denota por A_{ij} a la submatriz de A de orden $n-1$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A.

Llamaremos **menor adjunto**, α_{ij}, del elemento a_{ij} de A al escalar:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

Si $n = 1$ y $A = (a)$ entonces $det(A) = a$.

Si $n > 1$ entonces $det(A)$ viene determinado por la formula de Laplace por la fila i o columna j:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

Si A es una matriz de orden n triangular superior/inferior el determinante de A es el producto de los n elementos de su diagonal principal, es decir:

$$det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.6.1. ¿Cómo afecta las operaciones elementales al determinante?

$$A \xrightarrow[f_k \leftrightarrow f_h]{} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$$
$$A \xrightarrow[f_k \leftrightarrow t f_h]{} B \Rightarrow \det(B) = t\det(A)$$
$$A \xrightarrow[f_k \leftrightarrow f_k + t f_h]{} B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

El $\det(A) = 0$ si:

- Si A tiene 2 filas iguales.
- Si A tiene una fila nula.

Sean A, B, C tres matrices que se diferencias únicamente en su fila j, en concreto la fila j de A es igual a la suma de las filas j de B y C. Entonces $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.

El determinantes de las matrices elementales viene dado por:

1. $\det(E_{f_k \leftrightarrow f_h}) = -1$.
2. $\det(E_{f_k \leftrightarrow f_k + t f_h}) = 1$.

3. $\det(E_{f_k \leftrightarrow t f_k}) = 1$.

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y E es una matriz elemental de orden n entonces:

$$\det(EA) = \det(E)\det(A)$$

Sean A y B dos matrices de orden n. Son ciertas las afirmaciones:

1. $\det(A) \neq 0$ si y sólo si A es invertible.

2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3. $\det(A) = \det(A^t)$.

1.6.2. Determinante de una matriz triangular por bloques

Si A es una matriz de orden n y B es una matriz de orden m entonces:

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Si A es una matriz de orden n triangular superior/inferior por bloques tal que las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ situadas en diagonal principal son cuadradas, entonces:

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_n)$$

1.6.3. Calculo de la inversa usando el determinante

Se llama **matriz adjunta** de A, $Adj(A)$, a la matriz:

$$Adj(A) = (\alpha_{ij})$$

$$Adj(A)^t A = \det(A) I_n$$

1.6.4. Menores y rango

Un **menor de orden** p de una matriz A es el determinante de una submatriz A de orden p. Si A es cuadrada, de orden n, el **menor principal** de orden k para $k = 1, \ldots, n$ es:

$$\triangle_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

El rango de A es mayor o igual que el rango de una submatriz de A.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y P una submatriz de A de orden $m-1$ y rango $m-1$. Si $rg(A) = m$ entonces A tiene una submatriz de orden m y rango m que contiene a P.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y P una submatriz de A de orden $p-1$ y rango $p-1$. Si $rg(A) \geq p$ entonces A tiene una submatriz de orden p y rango p que contiene a P.

El rango de A es igual al mayor orden de un menor no nulo de A.

2 Sistemas lineales

Dos sistemas lineales son **equivalentes** si coinciden en su solución general.

Para $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ son equivalentes los sistemas lineales:

$$\mathcal{A} \equiv \{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\mathcal{A}' \equiv \{\alpha a_{11}x_1 + \cdots + \alpha a_{1n}x_n = \alpha b_i$$

Para $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ son equivalentes los sistemas lineales:

$$\mathcal{A} \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$
$$\mathcal{A}' \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{21} + \alpha a_{11})x_1 + \cdots + (a_{2n} + \alpha a_{1n})x_n = b_2 \end{cases}$$

Dos sistemas lineales con matrices ampliadas equivalentes por filas son sistemas equivalentes.

2.1. Discusión y resolución de sistemas lineales

Un sistema lineal $\mathcal{A}$ se caracteriza por el número de soluciones:

- $\mathcal{A}$ es **incompatible** si no tiene solución.
- $\mathcal{A}$ es **compatible determinado** si tiene una única solución.
- $\mathcal{A}$ es **compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones.

Resolver $\mathcal{A}$ es encontrar la solución general, y **discutir** $\mathcal{A}$ es determinar si es incompatible, compatible determinado o indeterminado.

En un **sistema escalonado**:

- Si aparece $b = 0$ con $b \neq 0$ entonces es incompatible.
- Si aparece $0 = 0$, una fila nula, se puede eliminar.

2.1.1. Discusión de sistemas lineales

Sea $\mathcal{A}$ un sistema lineal escalonado con n incógnitas y sea $(A|B)$ su matriz ampliada.

1. Si $(A|B)$ tiene un pivote en su última columna entonces $\mathcal{A}$ es incompatible.
2. Si $(A|B)$ no tiene pivote en la última columna:
   a) $(A|B)$ tiene n entonces es compatible determinado.
   b) $(A|B)$ tiene menos n entonces es compatible indeterminado.

2.1.2. Teorema de Rouche-Fröbenius

Sea $\mathcal{A}$ un sistema lineal con n incógnitas y sea $(A|B)$ su matriz ampliada:

1. $\mathcal{A}$ es incompatible si y sólo si $rg(A) < rg(A|B)$.
2. $\mathcal{A}$ es compatible determinado si y sólo si $rg(A) = rg(A|B) = n$.
3. $\mathcal{A}$ es compatible indeterminado si y sólo si $rg(A) = rg(A|B) < n$.

Un sistema lineal $AX = B$ con A de orden n tiene solución única si y sólo si A es invertible.

2.1.3. Regla de Cramer

La única solución de un sistema regular de orden n $AX = B$ viene dada por:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{det(A)}, x_2 = \frac{\triangle_2}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\triangle_n}{det(A)}$$

donde $\triangle_i$ es el determinante de la matriz que se obtiene cambiando la columna i de A por B.

3 Espacios vectoriales

3.1. Definición de espacio vectorial

Un conjunto V no vacío es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ sí:

- En V está definida una operación interna (suma):

$$\begin{aligned} + : & V \times V \to V \\ & (u, v) \to u + v \end{aligned}$$

  tal que $(V, +)$ es un **grupo abeliano**. Esto es. se cumplen las siguientes propiedades:

  1. **Conmutativa**: $\forall u, v \in V; u + v = v + u$.

  2. **Asociativa**: $\forall u, v, w; u + (v + w) = (u + v) + w$.

  3. Existe **elemento neutro**: $\exists 0 \in V, \forall u \in V; u + 0 = u$.

  4. Existe **elemento opuesto**: $\forall u \in V, \exists - u \in V; u + (-u) = 0$.

- En V esta definida una **operación externa (producto de escalares)**

$$\begin{aligned} \cdot : & \mathbb{K} \times V \to V \\ & (\alpha, v) \to \alpha \cdot v \end{aligned}$$

  que cumple las siguientes propiedades:

  1. **Asociativa**: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V; \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$.

  2. El elemento $1 \in \mathbb{K}, 1 \cdot u = u, \forall u \in V$.

  3. **Distributiva** del producto respecto de la suma en V:

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$$

4. **Distributiva** del producto respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$$

Proposición 3.1 (Leyes de la suma de vectores y producto de escalares)**.** Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Son ciertas las afirmaciones:

1. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. $0u = \mathbf{0}$.
3. $\alpha u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.
4. $u + v = u + w \Leftrightarrow v = w$.
5. $\alpha u = \beta u \vee u \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
6. $\alpha u = \alpha v \vee \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha$.
7. $(-\alpha)u = -\alpha u = \alpha(-u)$.

3.2. Dependencia e independencia lineal

Definición 3.1. Los vectores $v_1, \cdots, v_n$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V son:

Linealmente dependientes Si alguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Linealmente independientes Si ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Proposición 3.2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Son ciertas las afirmaciones:

1. Si $0 \in v_1, \cdots, v_n$ entonces $v_1, \cdots, v_n$ son linealmente dependientes.
2. $v_1, \cdots, v_n$ son linealmente dependientes si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, no todos iguales a 0, para los que se cumple que $\alpha_1 v_i + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.
3. $v_1, \cdots, v_n$ son linealmente independientes si y sólo si los únicos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ para los que se cumple $\alpha_1 v_i + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ son $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Proposición 3.3. Si $v_1, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes en V y v_{n+1} es un vector, que no es combinación lineal de los anteriores, entonces Si $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ son linealmente independientes.

3.3. Sistemas generadores

Definición 3.2. Un **sistema generador** de un espacio vectorial V es un conjunto S de vectores de V tales que todo vector de V es combinación lineal de los de S. El espacio V es de **dimensión finita** si existe un sistema generador de V con un número finito de vectores.

Proposición 3.4. Si $v_1, \ldots, v_n$ es un sistema generador de V y v_n es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_{n-1}$ es un sistema generador de V.

Proposición 3.5. Sea V un espacio vectorial. Si $v_1, \ldots, v_r$ son vectores linealmente independientes de V y $w_1, \ldots, w_s$ es un sistema generador de V, entonces $r \leq s$.

3.4. Bases

Definición 3.3. Una **base** de un espacio vectorial V es un conjunto ordenado

$$\mathcal{B} = v_1, \ldots, v_n$$

de vectores linealmente independientes que forman un sistema generador de V.

Teorema 3.1. Todas las bases de un espacio vectorial finito V tienen igual número de vectores.

La **dimensión** de V, $dim(V)$, es el número de vectores de cualquier base de V.

Proposición 3.6. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Son ciertas las afirmaciones:

1. Un sistema generador de V tiene como mínimo n vectores.
2. un conjunto de vectores linealmente independientes de V tiene como máximo n vectores.
3. Todo sistema generador de V de n vectores es una base de V.
4. Todo conjunto de n vectores linealmente independientes de V es una base de V.

Teorema 3.2. Sea $v_1, \ldots, v_n$ un sistema genrador de un espacio vectorial V de dimensión d. Si $d > n$ entonces se pueden eliminar $d - n$ vectores de $v_1, \ldots, v_n$ y quedarnos con una base de V.

Teorema 3.3 (Teorema de ampliación de la base)**.** Sea $v_1, \ldots, v_n$ un sistema genrador de un espacio vectorial V de dimensión d. Si $n < d$ entonces se pueden añadir $d - n$ vectores $v_{n+1}, \ldots, v_d$ y tales que $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_d$ es una base de V.

3.4.1. Coordenadas de un vector respecto de una base

Teorema 3.4. El conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V si y sólo si cada vector de V se puede escribir de forma única como una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$

Definición 3.4. Sea $\mathcal{B} = v_1, \ldots, v_n$ una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y v un vector de V. Decimos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las **coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}$** si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los únicos escalares tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + v_n \alpha_n$$

Para referirnos a al expresión anterior usaremos la notación $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$.

3.5. Rango de un conjunto de vectores

Definición 3.5. El **rango de un conjunto de vectores** $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $rg\{v_1, \ldots, v_n\}$ es el mayor número de vectores linealmente independientes que contiene.

Definición 3.6. Dos **conjuntos de vectores** son **equivalentes** si podemos transformar uno en otro mediante operaciones elementales.

Proposición 3.7. Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio vectorial V y sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores de V. Se cumple que

$$rg\{v_1, \ldots, v_n\} = rg\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}} \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \right\} = rg\ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

3.6. Matriz de cambio de base

Si tenemos los vectores $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ expresados respecto la base $\mathcal{B}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$

$$v_i = a_{i1} v_1' + \ldots + a_{in} v_n'$$

la **matriz de cambio de base** sería

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposición 3.8. Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ son 3 bases de un espacio vectorial entonces

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{A}\mathbf{C}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathbf{C}} \mathfrak{M}_{\mathcal{A}\mathbf{B}}$$

3.7. Subespacios vectoriales

Definición 3.7. Un subconjunto U no vacío de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es un **subespacio vectorial** si para todo $u, v \in U$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumplen las propiedades:

1. $u + v \in U$.

2. $\alpha u \in U$.

O, equivalentemente, si para cualquiera $u, v \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple la propiedad:

$$\alpha u + \beta v \in U$$

Un **subespacio vectorial** es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial que contiene a todas las combinaciones lineales de sus vectores.

Definición 3.8. El **subespacio vectorial generado por un conjunto** no vacio S de V es el conjunto

$$L(S) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, v_i \in S\}$$

Proposición 3.9. Sea S un conjunto no vacío de vectores de V. Son ciertas las afirmaciones:

1. $L(S)$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S.

2. Si S es un subespacio vectorial de V entonces $L(S) = S$.

3. Si R es tal que $S \subseteq R \subseteq V$ entonces $L(S) \subseteq L(R) \subseteq L(V)$.

Definición 3.9. Un **sistema generador de un subespacio vectorial** U de V es un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores de U tal que $L(v_1, \ldots, v_n) = U$

Proposición 3.10. Sean $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$ vectores de un espacio vectorial. Si

$$\begin{array}{l} \{v_1, \ldots, v_n\} \subset L(w_1, \ldots, w_n) \\ \{w_1, \ldots, w_n\} \subset L(v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

entonces

$$L(v_1, \ldots, v_n) = L(w_1, \ldots, w_n)$$

Teorema 3.5. Si los conjuntos de vectores R y S son equivalentes entonces $L(R) = L(S)$.

Teorema 3.6. Si $U = L(v_1, \ldots, v_n)$ entonces $dim(U) = rg\{v_1, \ldots, v_n\}$

3.7.1. Subespacios vectoriales $\mathbb{K}^n$ como solución del sistema $AX = 0$

Teorema 3.7. Un subconjunto U de $\mathbb{K}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ si y sólo si U es el conjunto de soluciones de algún sistema lineal homogéneo.

Teorema 3.8. La solución general de un sistema lienal homogéneo $AX = 0$ con n incognitas y coeficientes en $\mathbb{K}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ de dimensión $n - rg(A)$.

3.8. Intersección y suma de subespacios vectoriales

Proposición 3.11. Si V es un espacio vectorial de dimensión n y U un subespacio vectorial de V de dimensión k, entonces U es intersección de $n-k$ hiperplanos.

Definición 3.10. La **suma** de los subespacios vectoriales $V_1, \ldots, V_n$ de V es el menor subespacio vectorial que contiene a $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, esto es,

$$V_1, \ldots, V_n = L(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$$

Proposición 3.12. Si $V_1, \ldots, V_n$ son subespacios vectoriales de V entonces

$$V_1 + \cdots + V_n = \{v_1 + \cdots + v_n : v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n\}$$

3.8.1. Suma directa de subespacios vectoriales

Definición 3.11. La suma $V_1 + \cdots + V_n$ es **suma directa** dsi cada vector de $V_1 + \cdots + V_n$ se puede expresar de forma única de vectores de $V_1, \ldots, V_n$. La suma directa se denota $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$

Teorema 3.9. Sean $V_1, \ldots, V_n$ subespacios vectoriales de V. Son equivalentes las afirmaciones:

1. $V_1 + \cdots + V_n$ es suma directa.
2. $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) = \{0\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
3. Si $v_1 + \ldots + v_n = 0$ con $v_j \in V_j$ entonces $v_1 = \ldots = v_n = 0$.

Lema 3.1. Sea $\mathcal{B}_i$ una base del subespacio vectorial V_i de V para $i = 1, \ldots, n$. Son ciertas las afirmaciones:

1. $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$ es sistema generador de $V_1 + \cdots + V_n$.

2. $V_1 + \cdots + V_n$ es suma directa si y sólo si $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$ es una base de $V_1 + \cdots + V_n$.

3. $V_1 + \cdots + V_n$ es suma directa si y sólo si $dim(V_1 + \cdots + V_n) = dim(V_1) + \cdots + dim(V_n)$.

3.8.2. Subespacios suplementarios en un espacio vectorial

Definición 3.12. Los **subespacios vectoriales** U y W son **suplementarios** en V si

$$U \oplus W = V$$

O lo que es lo mismo

$$dim(U) + dim(W) = dim(U + W) = dim(V)$$

Proposición 3.13. $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una vase de V si y sólo si $L(\mathcal{B}_1)$ y $L(\mathcal{B}_2)$ son suplementarios.

3.8.3. Fórmula de dimensiones de Grassmann

Teorema 3.10 (Fórmula de Grassmann)**.** Si U y W son subespacios vectoriales de V entonces

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

3.9. El espacio cociente módulo un subespacio vectorial

Para cada subespacio U de V se define la relación de equivalencia

$$u \sim_U w \Leftrightarrow u - w \in U$$

Definición 3.13. Sea U subespacio vectorial de V. La **clase de equivalencia** de $v \in V$ módulo U es el conjunto

$$v + U = \{u + v : u \in U\}$$

El **espacio cociente de** V **módulo** U es el conjunto de clases de equivalencia módulo U

$$V/U = \{v + U : v \in V\}$$

Teorema 3.11. Si V es un espacio vectorial de dimensión d y U un subespacio vectorial de V de dimensión k, entonces V/U es un espacio vectorial de dimension $n-k$. Por lo tanto

$$dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$$

Además, si $\{v_{k+1}, \ldots, v_d\}$ es un conjunto de vectores que extiende cualquier base de U a una base de V entonces $\{v_{k+1} + U, \ldots, v_d\} + U$ es una base de V/U.

4 Aplicaciones lineales

Definición 4.1. Una aplicación $f : U \longrightarrow V$ entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales es **una aplicación lineal** si para todo $u, w \in U$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

O equivalentemente, si $\forall u, v \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Denotamos $\mathcal{L}(U, V)$ como el conjunto de aplicaciones lineales:

$$\mathcal{L}(U, V) \equiv \{f : U \longleftarrow V : f \text{ } es\ una\ aplicacion\ lineal\}$$

Toda aplicación lineal queda completamente determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base.

Proposición 4.1. Sea $f : U \longrightarrow V$: una aplicación lineal. Son ciertas las afirmaciones:

1. $f(0_U) = 0_V$.
2. $f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n).\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \forall u_1, \ldots, u_n \in U$

Proposición 4.2. Sean U y V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de U y $v_1, \ldots, v_n$ vectores de V. Existe una única aplicación lineal $f : U \longleftarrow V$ tal que $f(u_i) = v_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. Definimos la aplicación f tal que $f(u_i) = v_i$, para $i = 1, \ldots, n$ y que para un vector cualquiera $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathbb{B}}$ de U cumple que:

$$f(x) = x_1 f(u_1) + \cdots + x_n f(x_n)$$

Comprobamos que f es aplicación lineal. Sean $x = ()$ □