Cálculo de probabilidades I

14 de diciembre de 2025

A quien corresponda.

Índice general

El modelo matemático de la probabilidad

Espacio muestral y sucesos

Los resultados posibles constituyen un conjunto finito que se denomina **espacio muestral** del fenómeno aleatorio en cuestos y se designa genéricamente por Ω.

Los subconjuntos del espacio muestral Ω se denominan **sucesos** o **acontecimientos**, a los que puede dar lugar el azar en el experimento considerado. Los subconjuntos con un único elemento, representan uno sólo de los resultados posibles del fenómeno, se llaman **sucesos simples**, mientras que los **sucesos compuestos** se identifican con los subconjuntos que tienen más de un elemento y son, por tanto, uniones de sucesos simples.

El espacio muestral Ω es el **suceso seguro**, y el subconjunto $\emptyset$ es el **suceso imposible**.

Si la intersección de dos sucesos A y B es vacía $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son **incompatibles**.

El **suceso contrario** es $A^c = \Omega - A$.

El concepto de probabilidad

Sobre un espacio muestral finito Ω, una probabilidad es una aplicación

$$P : P(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

que verifique:

1. **Aditividad**: Si $A, B \subset \Omega, A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2. **Normalización**: $P(\Omega) = 1$.

El espacio de probabilidad finito es el par (Ω, P).

0.1. Primeras propiedades de la probabilidad

- Si $A \subset B \subset \Omega$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
- $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$ * Si $A \subset B \subset \Omega$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
- Para cualquier $A \subset \Omega$, $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(B) = P(B \cap A) + P(B - A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$.
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos disjuntos dos a dos, es decir que verifiquen $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ se cumple

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ es el espacio muestral de probabilidad finito (Ω, P) y $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ es un suceso se cumple

$$P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \cdots + P(\{\omega_k\})$$

1 Asignación de probabilidades

1.1. Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso A relativo a un fenómeno aleatorio es

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables de A}}{\text{número de casos posibles}}$$

supuesto que todos los casos posibles son igualmente probables.

1.2. Las formulas de inclusión y exclusión

Probabilidad de una unión de sucesos

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos cualesquiera de un espacio de probabilidad, se cumple

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-2} S_{n-1} + (-1)^{n-1} S_n$$

donde

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Probabilidad de que se realicen m sucesos

En un espacio de probabilidad, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos cualesquiera, la probabilidad $P_{[m]}$ de que ocurran exactamente m de ellos, es

$$P_{[m]} = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - \cdots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n$$

2 Extensiones del modelo matemático

2.1. Espacios muestrales numerables

Los conjuntos finitos son **discretos** y los infinitos numerables son **numerables**.

Si Ω es infinito numerable, el conjunto de sucesos, $P(\Omega)$, no es numerable, si no que su cardinal es aún mayor ($2^{\mathbb{N}}$).

2.2. Propiedades adicionales de la probabilidad

Sobre un espacio muestral numerable Ω, una probabilidad es una aplicación

$$P : P(\Omega) \to [0, 1]$$

que verifique:

1. Si A_n es una sucesión de suceso tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2. $P(\Omega) = 1$ Si se cumplen ambas condiciones, (Ω, P) constituye un espacio de probabilidad numerable.

En las construcciones de espacios de probabilidad no finitos, la regla de Laplace para atribuir probabilidades resulta inservible directamente.

Modelo geométrico o de Pascal

$$\Omega = \mathbb{N} \qquad P(\{n\}) = p(1-p)^{n-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

2.3. Modelos continuos

No es posible que un modelo continuo asigne probabilidad a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se toman en cuenta los intervalos de $\mathbb{R}$.

La probabilidad de un suceso $A \subset \mathbb{R}$ no puede obtenerse sumando la probabilidad de los puntos contenidos en A.

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con un número finito de discontinuidades) se denomina **densidad de probabilidad** si verifica 1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ 2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ El modelo probabilístico asociado a la función de densidad f asigna probabilidad

$$P(x) = \int_I f(x)dx$$

a cualquier intervalo I de $\mathbb{R}$.

Se puede aproximar mediante

$$P([x, x + \triangle x]) \simeq f(x) \triangle x$$

Distribución normal

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

3 Probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{\text{número de casos favorables de } A \text{ y } B}{\text{número de casos en los que ocurre } B}$$

Si A y B son sucesos de un cierto de espacio de probabilidad y se cumple que $P(B) > 0$, la probabilidad de A condicionada a B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

3.1. Propiedades

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ son sucesos disjuntos se cumple

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots |B) \\ & \qquad = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \cdots)}{P(B)} \\ & \qquad = \frac{P((A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) + \cdots)}{P(B)} \\ & \qquad = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots + P(A_n|B) + \cdots \end{aligned}$$

   de forma que $P(\cdot|B)$ es numeralmente aditiva.

2. Por otra parte

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$$

   y más concretamente

$$P(B|B) = 1$$

Proposición 3.1 (Formula de las probabilidades totales) *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ es una familia de sucesos de probabilidades positivas, disjuntos dos a dos, tales que*

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots = \Omega$$

se verifica

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n) + \cdots$$

para cualquier suceso $A \subset \Omega$.

Proposición 3.2 (Formula de Bayes) *Si* $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ *es una familia de sucesos de probabilidades positivas, disjuntos dos a dos, tales que*

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots = \Omega$$

para cualquier suceso A *de probabilidad positiva, de acuerdo con la definición, se tiene*

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

lo cual, combinado con la fórmula de las probabilidades totales se puede expresar

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)}$$

3.2. El método recurrente

Una situación en la que obtener la probabilidad de un suceso dependa exclusivamente de lo ocurrido en la etapa anterior se llama situación **markoviana**.

4 Independencia de sucesos

4.1. Sucesos dependientes e independientes

Si un suceso A influye, favorablemente o desfavorablemente, en otro B, se dice que el segundo es **dependiente** del primero.

En un fenómeno aleatorio, el suceso A se dice **independiente** del suceso B (supuesto que B tiene probabilidad positiva) si

$$P(A|B) = P(A) \qquad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \qquad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Si A y B son independientes, también lo son A y B^c.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$$

4.2. Espacios producto

Dados dos espacios de probabilidad (Ω_1, P_1) y (Ω_2, P_2), el **espacio producto** (Ω, P) sería

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad P = P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$$

Un **conjunto cilindro** de una sucesión de términos a_i de $\Omega^{(N)}$ es aquella en la que los primeros n términos deben cumplir una condición y el resto no esta sometido a ninguna limitación.

4.3. Independencia de varios sucesos

En un espacio de probabilidad, tres sucesos A_1, A_2, A_3 son independientes si se cumplen las condiciones

1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$
2. $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$
3. $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$
4. $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Tres sucesos pueden ser independientes dos a dos, sin ser independientes.

En un espacio de probabilidad, los sucesos $\{A_i | i \in I\}$ se dicen independientes si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera que sea $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$.

4.4. La independencia condicional

Sea A, B y C tres sucesos en un espacio de probabilidad (Ω, P). Si se verifica

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

se dice que A y B son **independientes condicionalmente** a C.

Los sucesos A y B pueden ser condicionalmente independientes, tanto cuando ocurre C como cuando no ocurre, y no ser independientes.

Dos sucesos A y B pueden ser independientes, per no ser condicionalmente independientes a C ni a C^c.

5 Variables aleatorias

5.1. El concepto de variable aleatoria

En un espacio de probabilidad discreto (Ω, P), se denomina **variable aleatoria**, a cualquier función

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Si la variable aleatoria X estuviese definida en un espacio muestral no numerable no habría ninguna garantías que conjuntos del tipo $X^{-1}(a, b]$ fuesen sucesos.

5.2. Distribución de una variable aleatoria

La colección de probabilidades $= \{X \in B\}$, correspondientes a cada subconjunto B de $\mathbb{R}$, se denomina la **distribución de la variable aleatoria** X.

Una variable aleatoria X es **discreta** si toma a lo sumo un número numerable de valores

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_2, \dots, x_n\}$$

La función que a cada x_k asigna el valores

$$p_k = P\{X = x_k\}$$

se denomina **función de probabilidad de** X.

Naturalmente debe ser

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

Una urna en la que se introducen tarjetas que llevan anotado uno de los números x_i. Si la proporción de tarjetas con el número x_i es p_i, el número obtenido al elegir una tarjeta al azar, es una variable aleatoria con la función de probabilidad requerida[1].

[1]El mecanismo tropeará con dificultades si alguna de las p_i es irracional, por la imposibilidad de que, con un número finito de tarjetas, la proporción de algún subconjunto de ellas sea irracional. Una alternativa es dividir $\Omega = [0, 1]$ en segmentos de longitud $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ y escoger un punto con distribución uniforme en $[0, 1]$.

Apéndice I. Combinatoria

5.3. Principios generales

Contar es hallar el **cardinal** de un conjunto. La **combinatoria** es el arte de contar conjuntos sin hacer enumeraciones.

Si en una competición se inscriben n jugadores se juegan $n-1$ partidos.

El **procedimiento constructivo** consiste en recorrer mentalmente los pasos a seguir para formar todos los elementos del conjunto, anotando las alternativas que pueden elegirse en cada uno.

Si los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tienen $n_1, n_2, \ldots, n_n$ elementos respectivamente, el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tiene $n_1 n_2 \cdots n_n$ elementos.

No tiene ninguna relevancia donde se producen las restricciones, solo cuales son estas.

5.4. Patrones más usuales

Ordenaciones

n objetos distintos pueden ordenarse en fila de $n!$ maneras distintas.

Una colección de n objetos, clasificados en k grupos de objetos idénticos entre sí, el primero con n_1 objetos, el segundo con n_2,... se pueden ordenar en fila de

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

maneras distintas, si no se consideran distintas las ordenaciones en las cuales dos objetos iguales han permutado su posición.

Subconjuntos ordenados

Hay

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

subconjuntos ordenados posibles de r elementos, que pueden extraerse de un conjunto de n elementos. También conocidos como **variaciones sin repetición de** r **elementos tomados entre** n.

El número de **variaciones con repetición** de r elementos tomados entre n es n^r.

Subconjuntos

El número de subconjuntos distintos, con r elementos, que pueden extraerse de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r!)}$$

o **combinaciones** de r elementos tomados entre n.

La diferencia entre variaciones y subconjuntos es si el orden de aparición de los elementos es importante.

Repartos

Si hay que repartir r objetos iguales en n grupos, existen

$$\binom{n+r-1}{r}$$

repartos posibles.

5.5. Identidades combinatorias

Una **identidad combinatoria** es una igualdad $f(n) = g(n)$, válida para cada n natural, en la cual $f(n)$ y $g(n)$ son cantidades relacionadas con el cardinal de algún conjunto.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k}\binom{n-1}{m-k-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j-1}{k-j} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1}$$

Si $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}$$

y si $r < 0$

$$\binom{x}{0} = 1 \qquad \binom{x}{r} = 0$$

Identidad inmediata

$$\binom{-x}{r} = (-1)^r \binom{x+r-1}{r}$$

Desarrollo de Taylor Si $|t| < 1$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$(1+t)^x = 1 + \binom{x}{1} t + \binom{x}{2} t^2 + \cdots + \binom{x}{r} t^r + \cdots$$

y si $|b| < |a|$ y cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^x = a^x + \binom{x}{1} b a^{x-1} + \binom{x}{2} b^2 a^{x-2} + \cdots + \binom{x}{r} b^r a^{a-r} + \cdots$$

$$(1-t)^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r = 1$$

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n} \frac{t^n}{2^{2n}} = (1-t)^{\frac{-1}{2}}$$

y si n es un entero positivo

$$\binom{x+y}{n} = \binom{x}{0}\binom{y}{n} + \binom{x}{1}\binom{y}{n-1} + \binom{x}{2}\binom{y}{n-2} + \cdots + \binom{x}{n}\binom{y}{0}$$

5.6. Formula de Stirling

$$n! = \sqrt{2n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

con más precisión

$$1 < \frac{n!}{\sqrt{2n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} < e^{\frac{1}{8n}}$$

Desarrollo de series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{5.1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{5.2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.5}$$

$$\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.6}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.7}$$

$$\log(\frac{1-x}{1+x}) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{1+x*2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.9}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.10}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.14}$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.15}$$

$$argshx = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1, 1) \tag{5.16}$$