Corrigé DS LE2

Méthodes Mathématiques 18-19.

Ex I : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 3 \\ 1 & -x & 2 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)\left[-x(3-x)+2\right] = (2-x)\left[x^2-3x+2\right]$

$= (2-x)(x-1)(x-2)$

$= -(x-2)^2(x-1)$

$Sp(A) = \{\underbrace{2}_{\lambda_2}, \underbrace{1}_{\lambda_1}\}$.

2. Après calculs, $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de dimension 1 tous les deux.

3. Comme $\lambda_2 = 2$ est de multiplicité 2 et le sous-espace propre associé de dimension 1, A n'est pas diagonalisable.

4. $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5. $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

donc $\mathcal{C}$ est une base de E.

7. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, après calculs $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u_2} + 2\vec{u_3}$

9. $A\vec{u_1} = 1.u_1$ $A\vec{u_2} = 2\vec{u_2}$ $A\vec{u_3} = \vec{u_2} + 2\vec{u_3}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} A\vec{u_1} & A\vec{u_2} & A\vec{u_3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ \vec{u_3} \end{array} \end{array}$

10. $T = P^{-1}AP$.

11. Par récurrence, • $\underline{n=1}$ $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha_1 = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ alors $T^{n+1} = T.T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n+2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

donc avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$ la relation est bien vérifiée par T^{n+1}.

• Par récurrence, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$ avec $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$.

12. Par récurrence : on a • $\alpha_1 = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n = n 2^{n-1}$ alors $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2n 2^{n-1} + 2^n$

$= 2^n (n+1) = (n+1) 2^{n+1-1}$

Donc $\forall n \geq 1 \quad \alpha_n = n 2^{n-1}$.

Finalement pour $n = 0 \quad A^0 = I$ et pour $n \geq 1 \quad A^n = P T^n P^{-1}$

$$= \dots = \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & -1 + (n+1)2^n \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n & -1 + (n+2)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

<u>Ex II</u> $\quad y'' + 4y' + 3y = e^{2t}$ où $y(0) = y'(0) = 0$.

On note $Y(p) = \mathcal{L}(y)(p)$. En appliquant la transfo de Laplace :

$$p^2 Y(p) + 4pY(p) + 3Y(p) = \frac{1}{p-2}$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + 4p + 3) Y(p) = \frac{1}{p-2} \quad \Leftrightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p+3)(p-2)}.$$

$$Y(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+3} + \frac{c}{p-2}$$

$a = Y(p) \times (p+1) \Big|_{p=-1} = \frac{1}{(-1+3)(-1-2)} = \frac{-1}{6} \qquad b = Y(p) \times (p+3) \Big|_{p=-3} = \frac{1}{(-3+1)(-3-2)} = \frac{1}{10}$.

$c = Y(p) \times (p-2) \Big|_{p=2} = \frac{1}{(2+1)(2+3)} = \frac{1}{15}$

d'où $Y(p) = \frac{-1/6}{p+1} + \frac{1/10}{p+3} + \frac{1/15}{p-2}$ et $y(t) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow}$ $y(t) = \left(\frac{-1}{6} e^{-t} + \frac{1}{10} e^{-3t} + \frac{1}{15} e^{2t}\right) \gamma(t)$

<u>Ex III</u> : $F(p) = \underbrace{\left[2/p - \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} \right]}_{= F_0(p).} \times \frac{1}{1 - e^{-3p}} \qquad f_0(t) = 2\gamma(t) - \cancel{2}\gamma(t-1) - \gamma(t-2)$

f est la fonction périodique de période $T = 3$ dont le motif est f_0.