IG2I LE2 Mathématiques
Année 2019-2020

Devoir Surveillé

Durée 2h.
Documents,calculatrices, smartphones interdits. Tableau "transformées de Laplace usuelles et propriétés" autorisé.
Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la copie.

Exercice I*(16 points)* Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0,\ w_0 = 0$$

et les relations de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

et on note A la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Démontrer que A admet 2 comme seule valeur propre.
   (b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à cette unique valeur propre. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.
   On notera dorénavant $\mathcal{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   (b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence ou bien de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante de T :
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   démontrer que l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n est
   $$T^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   (a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

   (b) Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (les calculs devront figurer sur la copie).

   (c) Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice II*(4 points)* En utilisant la transformée de Laplace, déterminer la fonction causale $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 3y = e^{2t} \text{ où } y(0) = y'(0) = 0.$$