Statique et Cinématique des solides indéformables

C. Niclaeys

Plan

I) Statique du solide

* Notion de forces et de moments
* Notion de torseurs
* Torseur statique
* Modélisation des forces mécaniques
* Modélisation des liaisons parfaites
* Principe Fondamental de la Statique (PFS)
* Application

II) Cinématique du solide

* Notion de référentiels
* Trajectoire - vecteur position et déplacement
* Vecteur vitesse/accélération
* Mouvement rectiligne et circulaire
* Applications (cinématique du point)
* Cinématique du solide
* Application

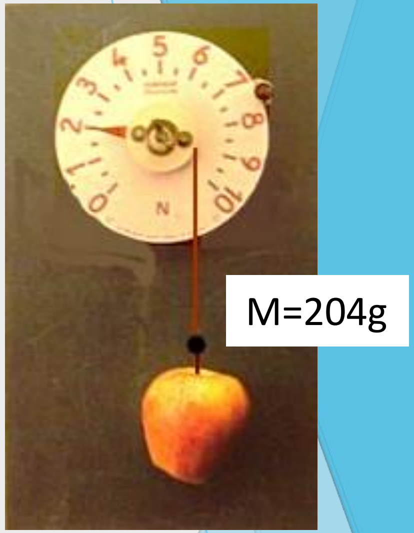
STATIQUE DU SOLIDE

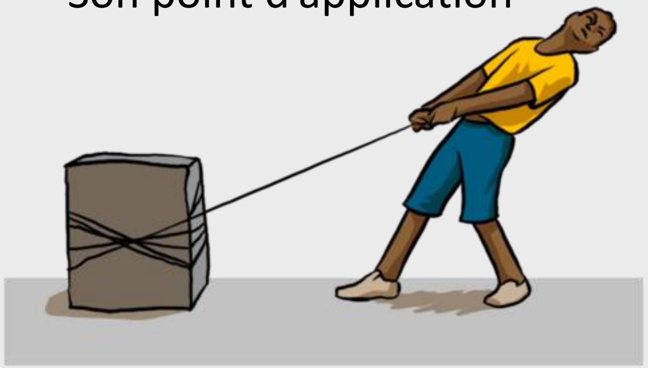
Statique du solide : Notion de forces et de moments

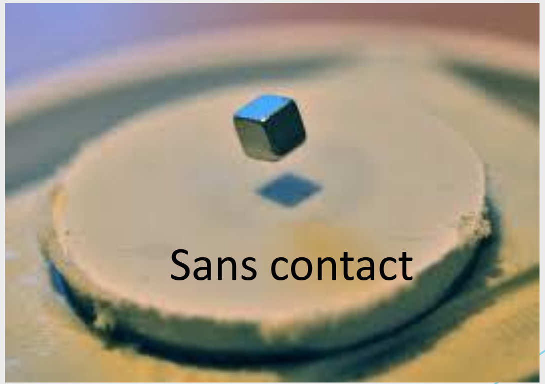
Qu'est ce qu'une force ? :

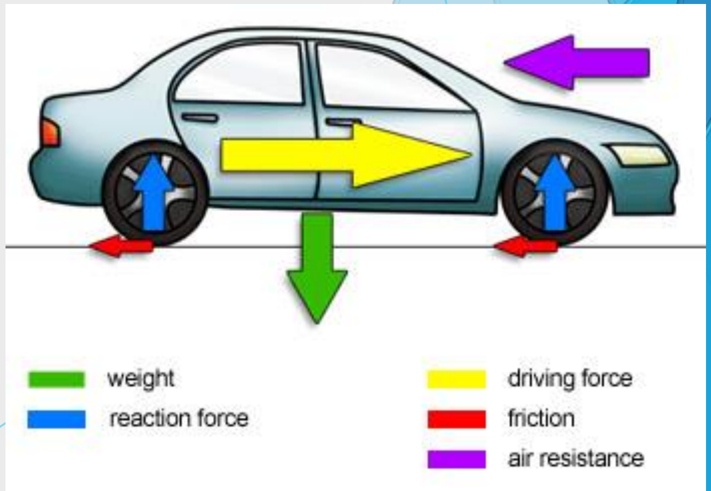
- Une force est une action mécanique entre deux objets. Il n'y a pas automatiquement de contact entre les objets (force à distance).
- L'unité est le Newton N (P=mg : 1N=1kg m/s^2 : 1N représente la force capable de faire accélérer une masse de **1** kg d'une vitesse de **1** m/s chaque seconde : 1N représente également l'action d'une masse d'environ 0,1 kg sur le sol (car g=9,81 m/s^2))
- Une force est caractérisée par :
  - Sa norme (sa valeur en Newton)
  - Sa direction
  - Son sens
  - Son point d'application

Elle se modélise donc par un **vecteur**



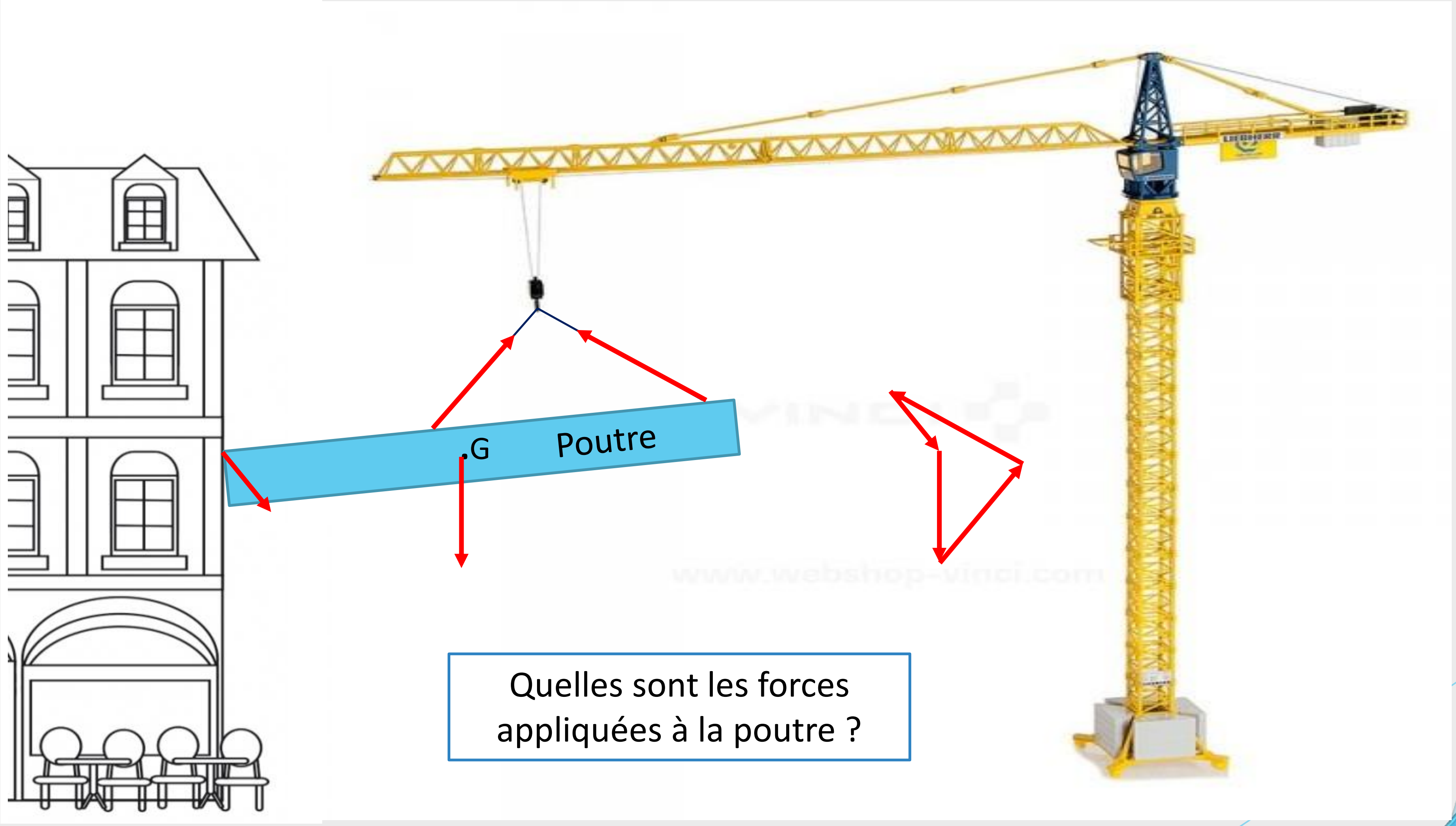






Statique du solide : Notion de forces et de moments

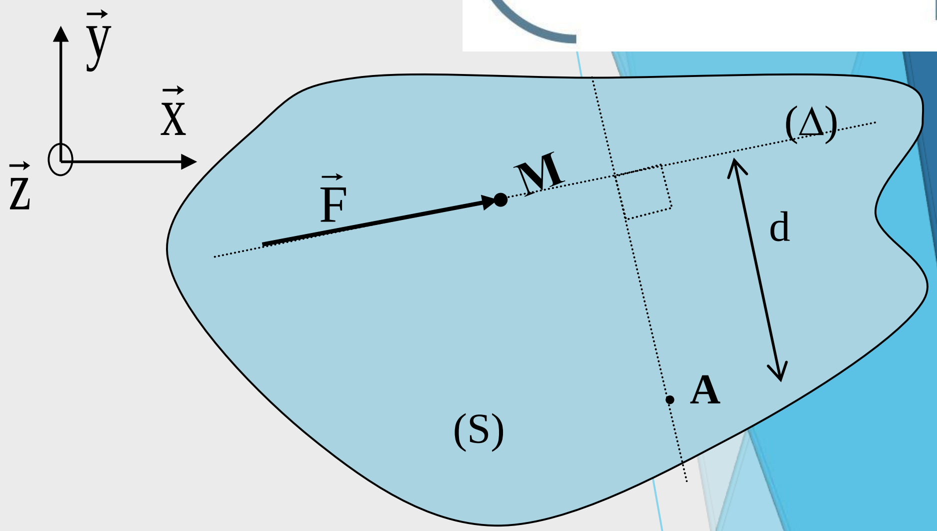
Qu'est ce qu'une force ? :



Quelles sont les forces appliquées à la poutre ?

Statique du solide : Notion de forces et de moments

<u>Qu'est ce qu'un moment ? :</u>



<u>Approche intuitive :</u>

** La force essaie-t-elle de faire tourner le solide (S) autour du point A ?*

OUI

** Que va « ressentir » le point A s'il résiste à la rotation ?*

Une « action » qui a tendance à vouloir le faire tourner sur lui même

** De quoi dépend l'intensité de cette « action »?*

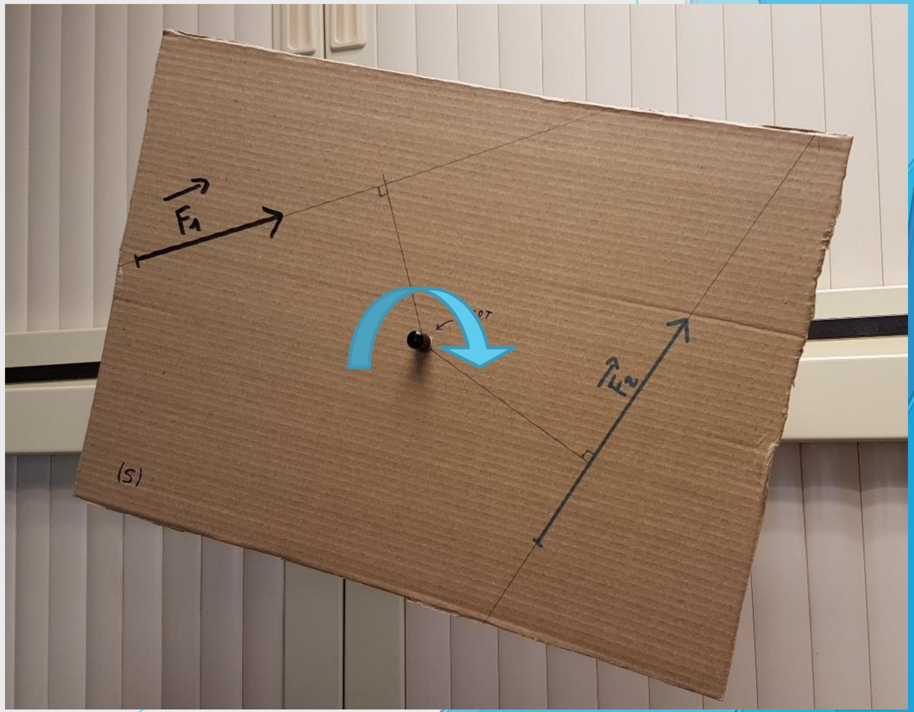
De l'intensité de F et de la distance d

<u>Définition :</u>

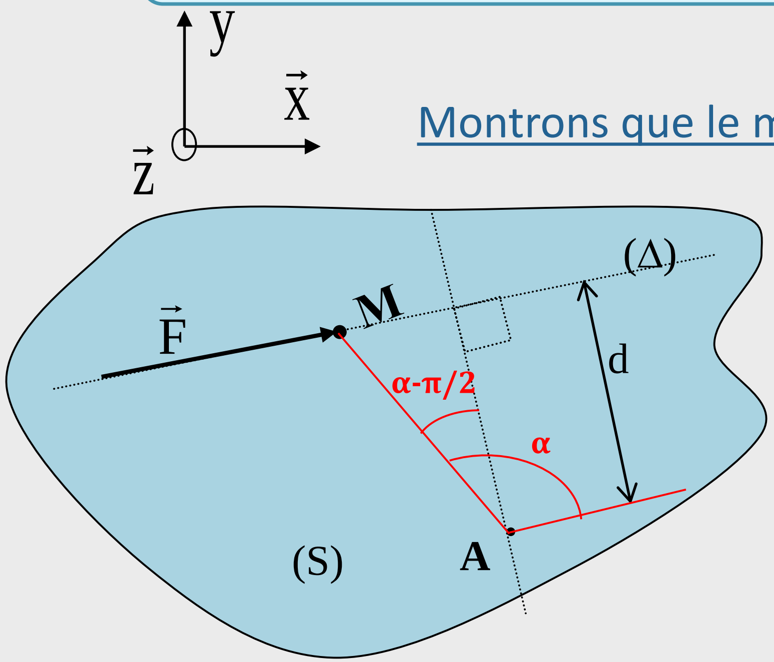
➡ Cette action est le moment au point A dû à la force $\vec{F}$

$$\boxed{\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$$

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{si} \quad \vec{F} = \vec{0} \text{ ou si } A \in (\Delta)$$



Montrons que le moment dépend de l'intensité de F et de la distance d



$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = -\left(AM.F.\sin(\alpha)\right).\vec{z} = -F.AM.\sin(\alpha).\vec{z}$$

$$\text{or, } \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{AM}$$

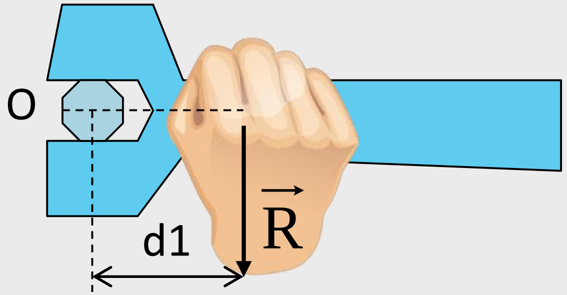
$$\text{donc, } AM.\sin(\alpha) = d$$

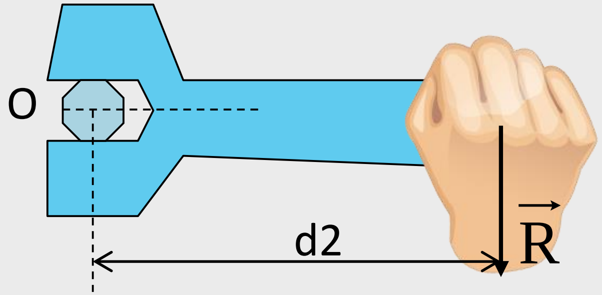
$$\boxed{\text{il en résulte que } \overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = -F.d.\vec{z}}$$

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{si } \vec{F} = \vec{0} \text{ ou } d = 0 \text{ (si } A \in (\Delta))$$

Statique du solide : Notion de forces et de moments

Illustration du moment :





$$\left\|\overrightarrow{M_O}(\vec{R})\right\| = \left\|\vec{R}\right\|.d_1 \quad << \quad \left\|\overrightarrow{M_O}(\vec{R})\right\| = \left\|\vec{R}\right\|.d_2$$

Formule du transport des moments

$$\boxed{\overrightarrow{M_B}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}}$$

Babar

Statique du solide : Notion de forces et de moments

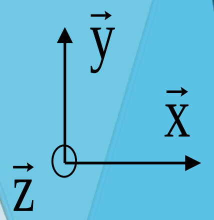
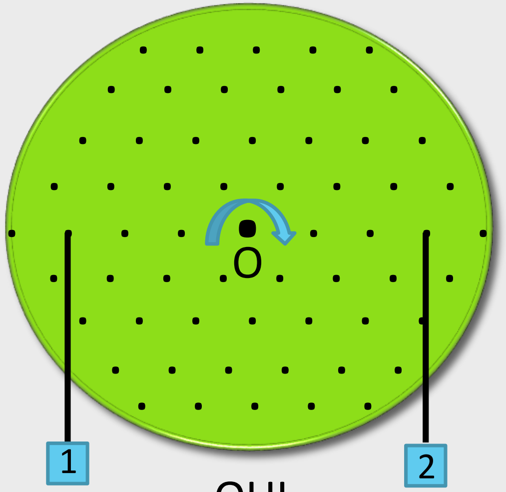


Illustration du moment :

Soit un plateau circulaire en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$, 2 masses m identiques sont positionnées à différents endroits de plateau. (la distance horizontale entre 2 positions est de 1 unité)

Pour chacun des cas suivants :

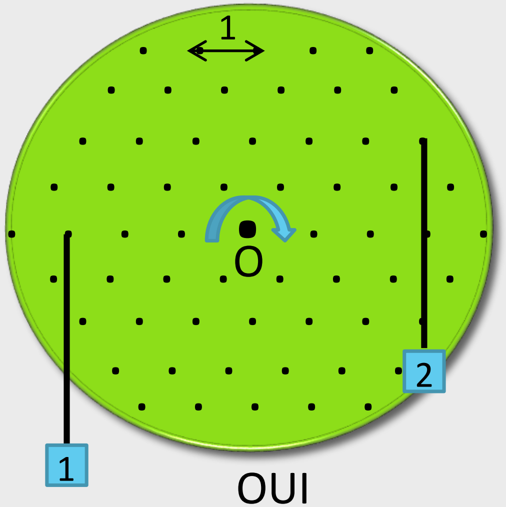
* Est ce que le disque est en équilibre?
* Donnez la valeur des moments en O.
* Conclure



OUI

$$\overrightarrow{M_O}(1) = 3mg\vec{z}$$

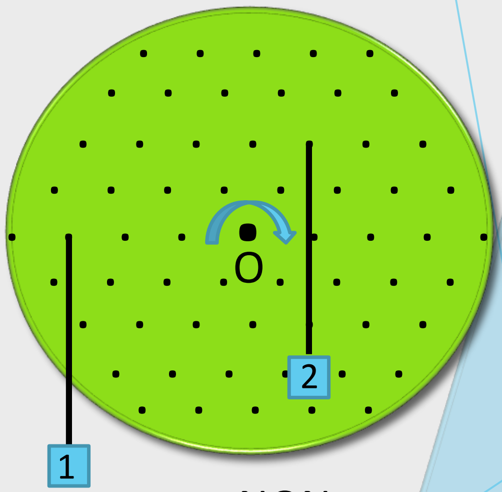
$$\overrightarrow{M_O}(2) = -3mg\vec{z}$$



OUI

$$\overrightarrow{M_O}(1) = 3mg\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_O}(2) = -3mg\vec{z}$$



NON

$$\overrightarrow{M_O}(1) = 3mg\vec{z}$$

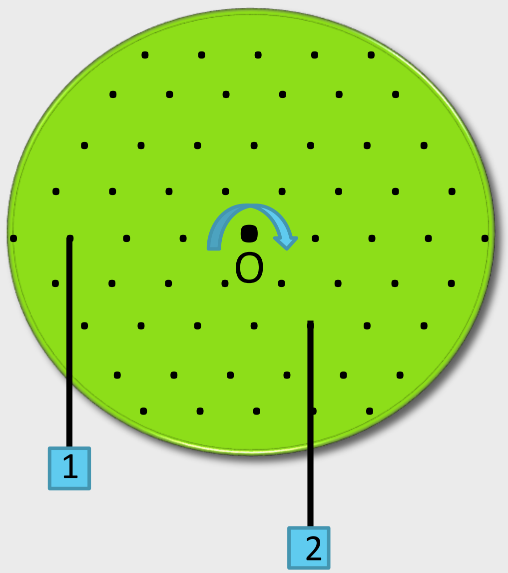
$$\overrightarrow{M_O}(2) = -mg\vec{z}$$

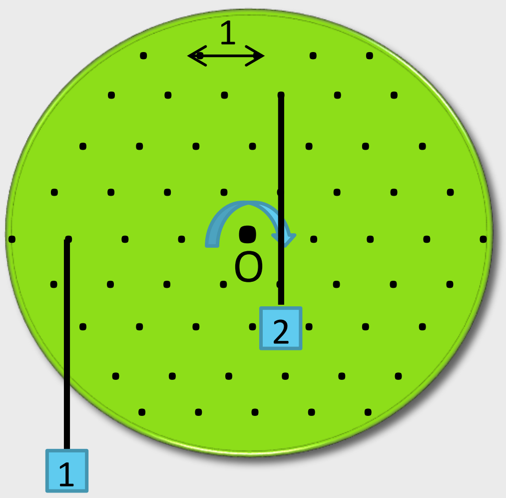
Si La somme des moments est nulle alors le solide est en équilibre

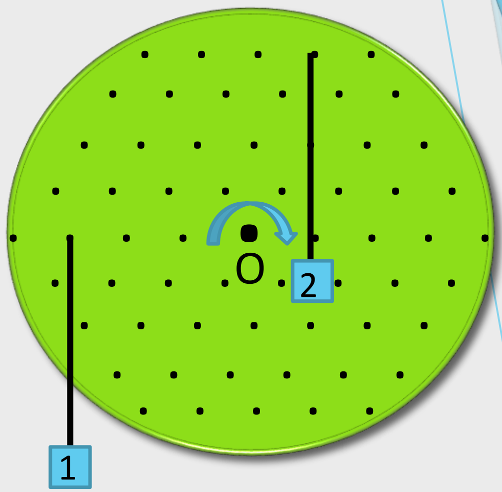
Statique du solide : Notion de forces et de moments

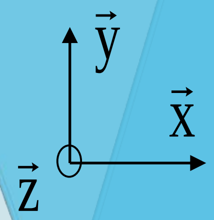
Illustration du moment :

Pour chacun des cas suivants, déterminez la masse 2 pour que le plateau soit en équilibre.









$$3m_1 g\vec{z} - m_2 g\vec{z} = \vec{0}$$
$$3m_1 - m_2 = 0$$

$$\boldsymbol{m_2 = 3m_1}$$

$$3m_1 g\vec{z} - \frac{1}{2} m_2 g\vec{z} = \vec{0}$$
$$3m_1 - \frac{1}{2} m_2 = 0$$

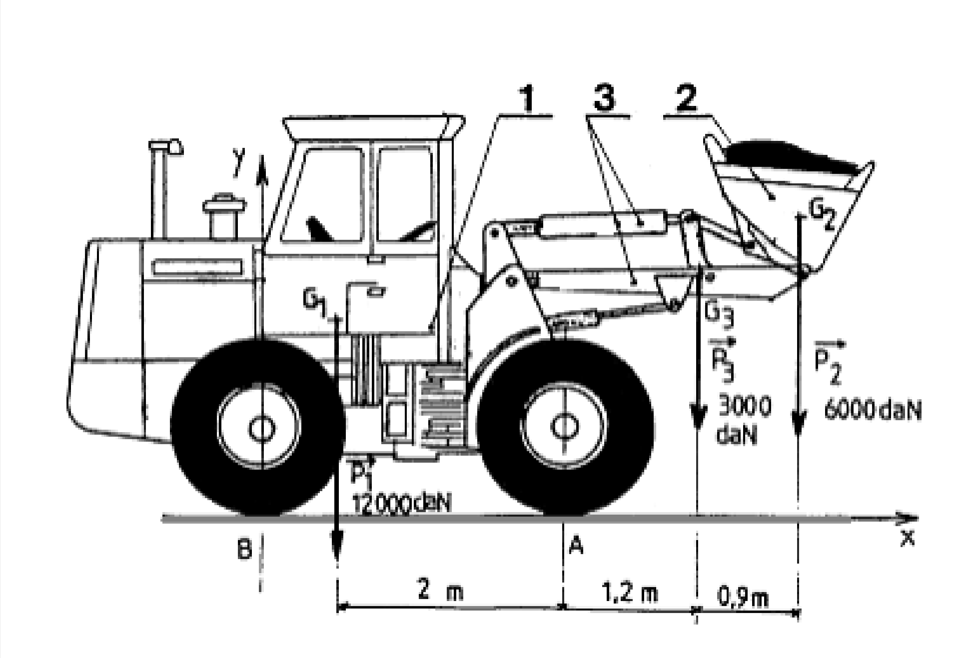
$$\boldsymbol{m_2 = 6m_1}$$

$$3m_1 g\vec{z} - m_2 g\vec{z} = \vec{0}$$
$$3m_1 - m_2 = 0$$

$$\boldsymbol{m_2 = 3m_1}$$

Illustration du moment :

Le tracteur va-t-il basculer vers l'avant ?



$$\overrightarrow{M_A}(P_1) = +120\,000 * 2\,\vec{Z} = 240\,000 \text{ Nm } \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{M_A}(P_2) = -60\,000 * 2{,}1\vec{Z} = -126\,000 \text{ Nm } \vec{Z}$$

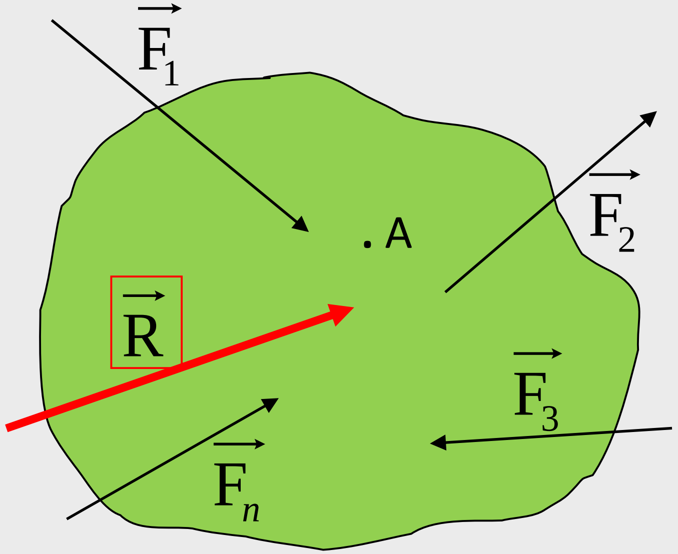
$$\overrightarrow{M_A}(P_3) = -30\,000 * 1{,}2\vec{Z} = -36\,000 \text{ Nm } \vec{Z}$$

$$\overrightarrow{M_A} = 78\,000 \text{ Nm}\vec{Z} \quad > 0$$

Le moment en A est positif (de X vers Y), donc pas de basculement vers l'avant.
Le basculement vers l'arrière autour du point A est empêché par la roue arrière en contact avec le sol au point B

Statique du solide : Notion de forces et de moments

Force et moment résultant :



La résultante des forces $\vec{F}_i$ est :

$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i}$$

Le moment résultant en A est :

$$\boxed{\overrightarrow{M_A}(\vec{R}) = \sum_i \overrightarrow{M_A}(\vec{F}_i)}$$

Fin cours 1

Statique du solide : Notion de torseur

Définition d'un torseur :

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides (**le torseur cinématique**) et les actions mécaniques qu'il subit de la part de son environnement extérieur (**le torseur statique**). On découvrira en L2 le **torseur cinétique** et le **torseur dynamique**

Un torseur est composé d'une résultante et d'un moment et vérifie la formule du transport des moments.

Le torseur associé à la résultante $\vec{R}$ écrit au point A est noté :

Résultante du torseur

Résultante du torseur

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) \end{matrix} \right\}_A \equiv \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_B}(\vec{R}) \end{matrix} \right\}_B$$

Moment en A de la résultante

Moment en B de la résultante

Avec

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

Babar

Statique du solide : Notion de torseur

Opérations sur les torseurs :

$$\text{Soient} \quad \tau_1 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R_1})} \end{Bmatrix}_A \quad \text{et} \quad \tau_2 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R_2})} \end{Bmatrix}_A$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R_1})} + \overrightarrow{M_A(\vec{R_2})} \end{Bmatrix}_A$$

$$\tau_1 = \tau_2 \quad ssi \quad \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R_1})} = \overrightarrow{M_A(\vec{R_2})} \end{cases}$$

$$\lambda\tau_1 = \begin{Bmatrix} \lambda\overrightarrow{R_1} \\ \lambda\overrightarrow{M_A(\vec{R_1})} \end{Bmatrix}_A \qquad \forall \lambda \in R$$

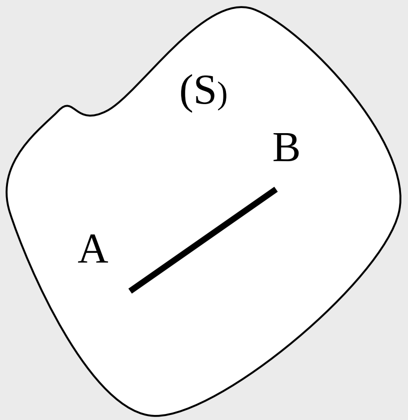
$$\tau_1 = 0 \quad ssi \quad \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R_1})} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\tau_1 \otimes \tau_2 = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_A(\vec{R_2})} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_A(\vec{R_1})}$$

ce produit de torseur (également appelé commoment) est indépendant du point pour écrire les deux torseurs pourvu que ce soit le même

Solide indéformable :

On appelle solide indéformable l'ensemble des points matériels tel que la distance entre deux points quelconques de ce solide reste constante au cours du temps et du chargement



AB = Constante

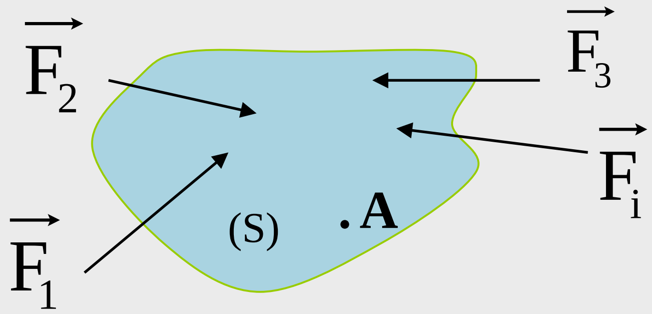
En général il n'existe pas de solide indéformable. Nous supposons que les variations de distances sont suffisamment faibles pour pouvoir les négliger :

Cours de Mécanique du solide indéformable

centralelille IG2I

Définition du torseur statique :

Soit un solide (S) soumis à un certain nombre d'efforts extérieurs



Le **torseur statique** de la force $\vec{F}_i$ sur le solide (S) écrit au point A est défini comme suit :

$$\mathcal{F}(\vec{F}_i \rightarrow S) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{M}_A(\vec{F}_i) \end{Bmatrix}_A$$

Force mécanique $\vec{F}_i$

Moment en A due à la force $\vec{F}_i$

Avec :

$$\boxed{\vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{F}_i) + \vec{BA} \wedge \vec{F}_i}$$

Formule du transport des moments

Cas de la pesanteur :

La gravité terrestre exerce en tout point matériel d'un solide une force élémentaire $\vec{p}$

tel que $\left\|\vec{p}\right\| = mg$

avec m la masse du point matériel et g la gravité terrestre (g = 9.81 m/s^2).

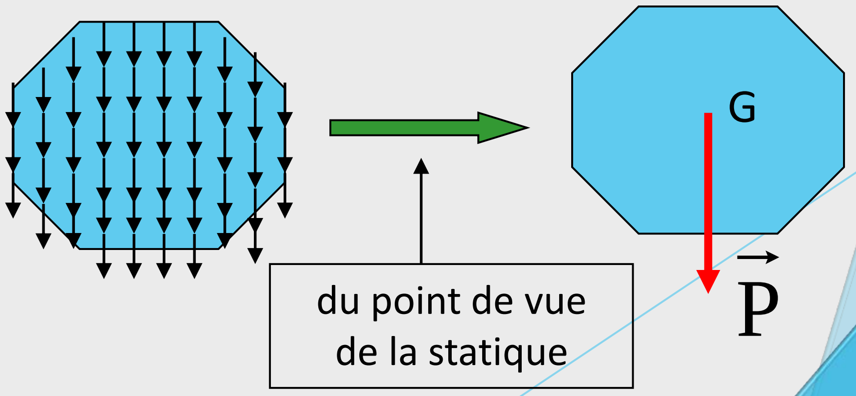
Ces forces $\vec{p}$ sont représentées par une force $\vec{P}$

appelée poids et appliquée au centre de gravité G du solide.

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathrm{g} \rightarrow \mathrm{S}) = {}_{\mathrm{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\mathrm{P}} = \mathrm{M}\vec{\mathrm{g}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

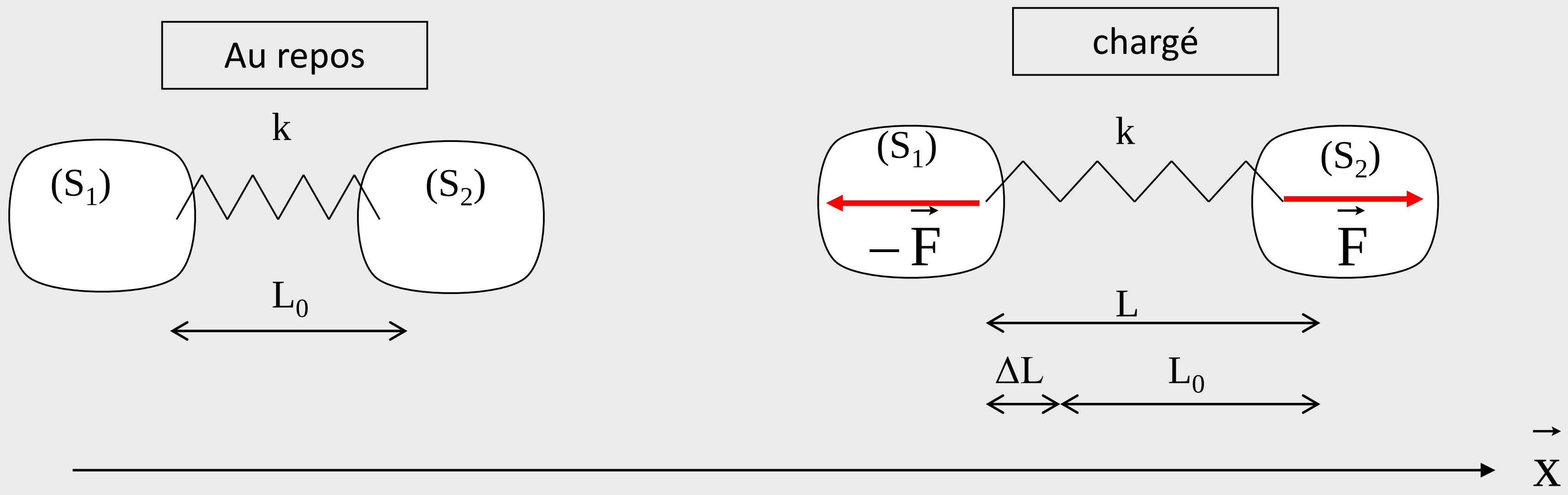
Avec M la masse du solide (S)

Équilibre des moments au point G



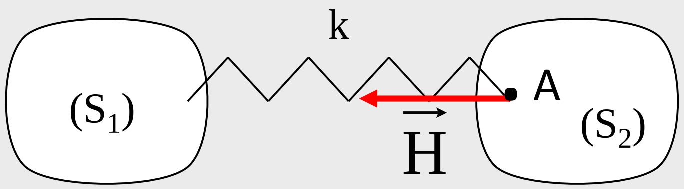
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas du ressort de raideur k :



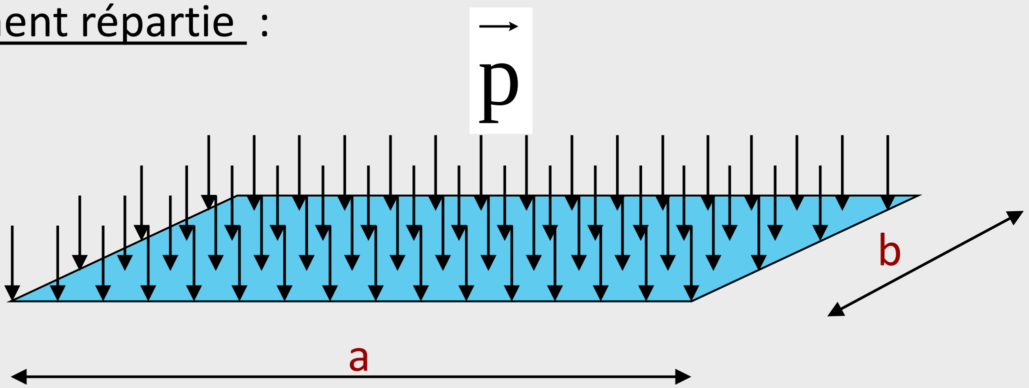
Si on regarde l'action du ressort sur (S_2) on obtient :

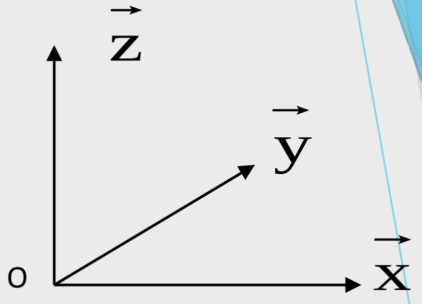
$$\boxed{\mathcal{F}(res \rightarrow S_2) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{H} = -k\,\Delta L\,\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$



Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas de la force uniformément répartie :





Si la force répartie (surfacique) est uniforme et vaut p alors :

$$\vec{R} = \int \overrightarrow{df} = \int_S \overrightarrow{p(x,y)}.ds = \int_S \vec{p}.ds = \vec{p}\int_S ds = \vec{p}.S = -pS\,\vec{z}$$

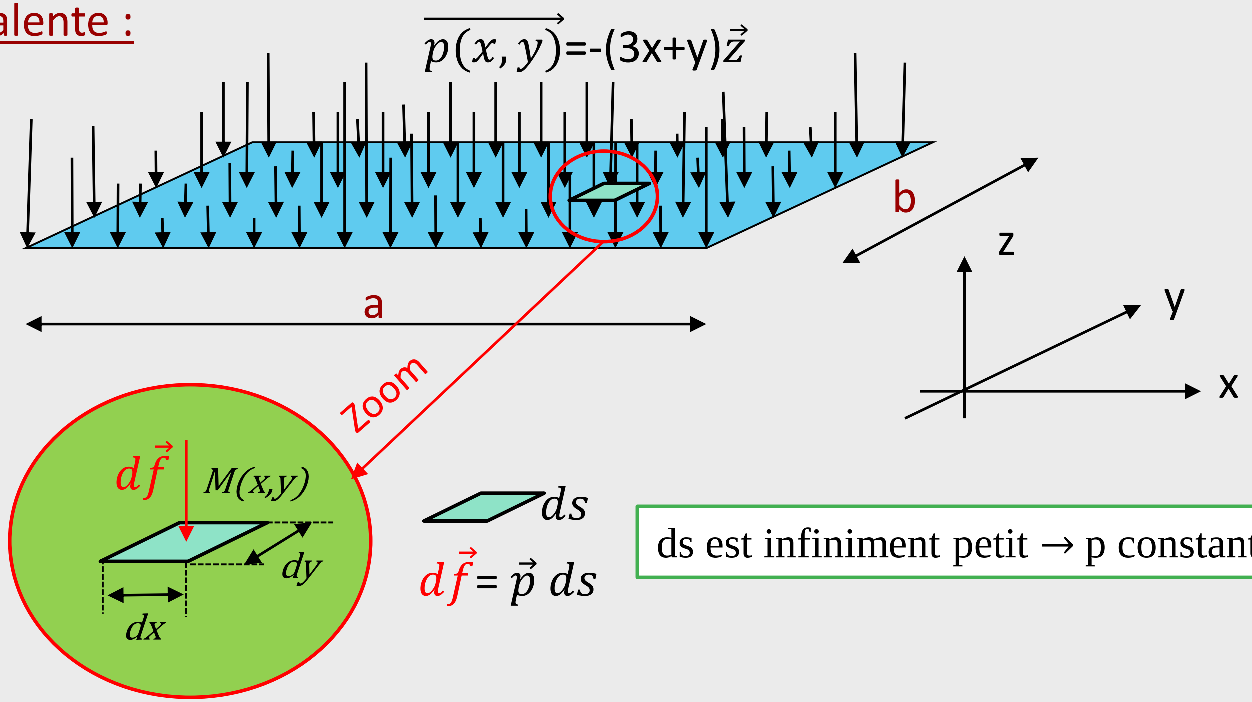
Donc R = pS

Et si la force n'est pas uniformément répartie ???

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

<u>cas de la force non uniformément répartie</u> :

<u>* Calculez la force équivalente :</u>



ds est infiniment petit → p constant sur ds

$$\vec{R}=\int d\vec{f}=\int \vec{p}\,ds=\iint \vec{p}\,ds=\iint -(3x+y)\,\vec{z}\,ds=-\int_0^b\int_0^a (3x+y)\,dx\,dy\,\vec{z}$$

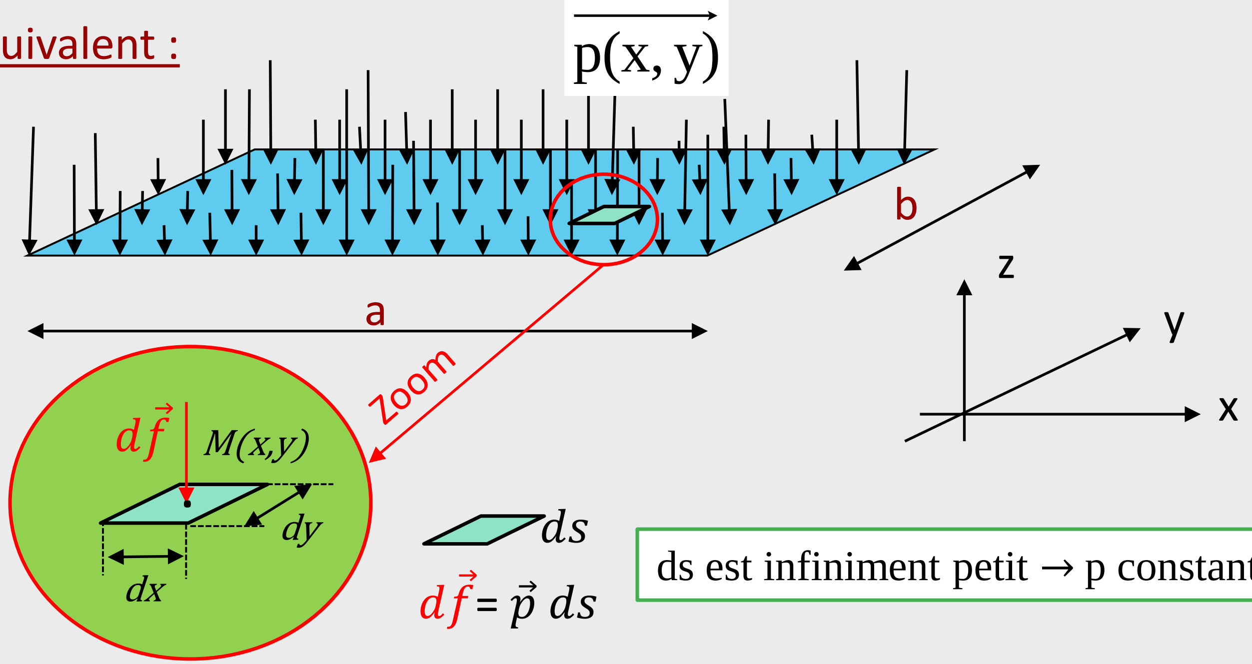
$$\vec{R}=-\int_0^b\left[\frac{3x^2}{2}+yx\right]_0^a dy\,\vec{z}=-\int_0^b\left(\frac{3a^2}{2}+ya\right)dy\,\vec{z}=-\left[\frac{3a^2}{2}y+\frac{y^2a}{2}\right]_0^b\vec{z}=-\left(\frac{3a^2b}{2}+\frac{b^2a}{2}\right)\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{R}=-\frac{ab}{2}(3a+b)\vec{z}}$$

cas de la force non uniformément répartie :

* Calculez le moment équivalent :

$\overrightarrow{p(x,y)}$=-(3x+y)$\vec{z}$



ds est infiniment petit → p constant sur ds

$$\overrightarrow{M_O} = \int d\overrightarrow{m_O} = \int \left(d\overrightarrow{m_M} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} ds \right) = \int (x\vec{x} + y\vec{y}) \wedge -(3x+y)\vec{z}\, dxdy = \int \left[(3x^2 + xy)\vec{y} - (3xy + y^2)\vec{x} \right] dxdy$$

$$= \int_0^b \left[\left(\frac{3x^3}{3} + \frac{yx^2}{2} \right)\vec{y} - \left(\frac{3yx^2}{2} + xy^2 \right)\vec{x} \right]_0^a dy = \int_0^b \left[\left(a^3 + \frac{a^2}{2} y \right)\vec{y} - \left(\frac{3a^2}{2} y + a y^2 \right)\vec{x} \right] dy$$

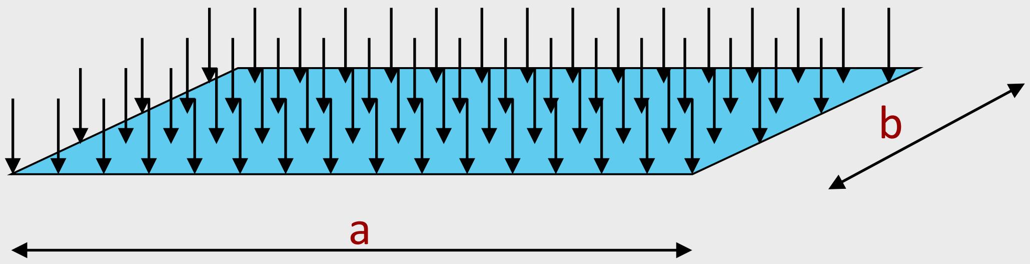
$$= \left[\left(a^3 y + \frac{a^2}{4} y^2 \right)\vec{y} - \left(\frac{3a^2}{4} y^2 + \frac{a}{3} y^3 \right)\vec{x} \right]_0^b = \left(a^3 b + \frac{a^2}{4} b^2 \right)\vec{y} - \left(\frac{3a^2}{4} b^2 + \frac{a}{3} b^3 \right)\vec{x}$$

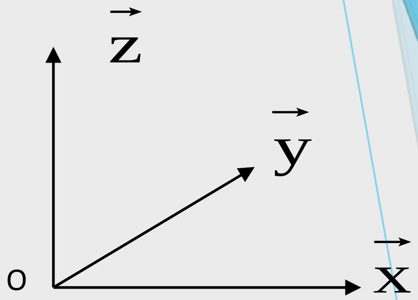
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas de la force non uniformément répartie :

* torseur :

$\overrightarrow{p(x,y)}$=-(3x+y)$\vec{z}$

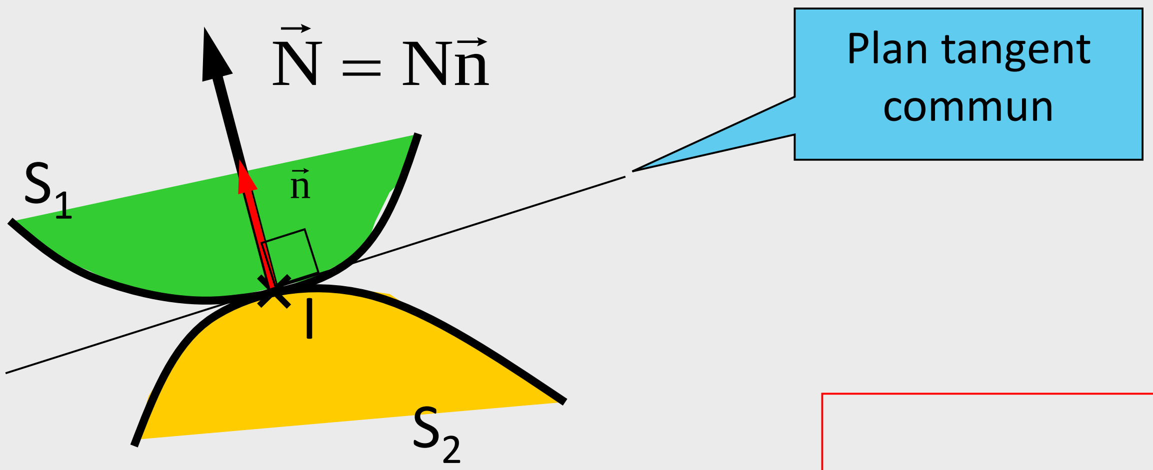




$$\mathcal{F}(\vec{p} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{ab}{2}(3a+b)\vec{z} \\ -\left(\dfrac{3}{4}a^2b^2 + \dfrac{1}{3}ab^3\right)\vec{x} + \left(a^3b + \dfrac{1}{4}a^2b^2\right)\vec{y} \end{array} \right\}_0$$

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

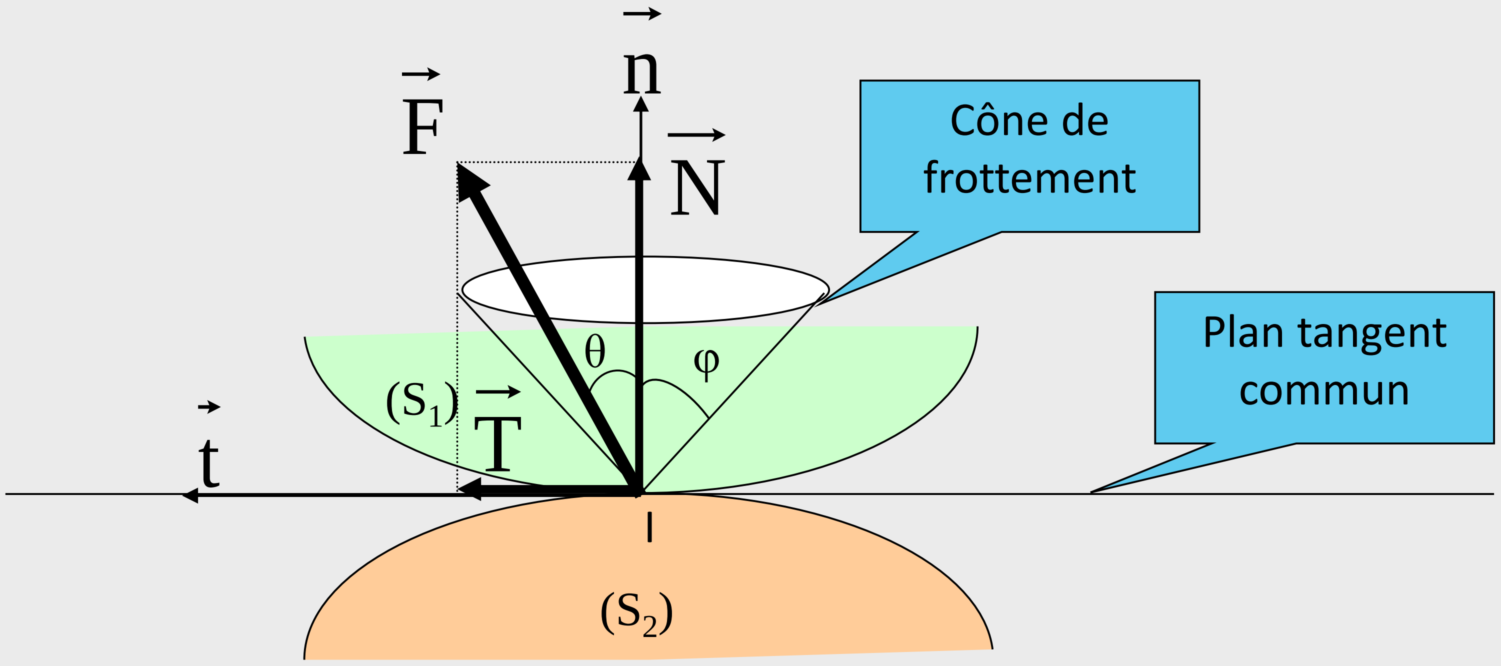
cas de la force ponctuelle sans frottement :



$$\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1) = \left\{ \begin{matrix} N\,\vec{n} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$$

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

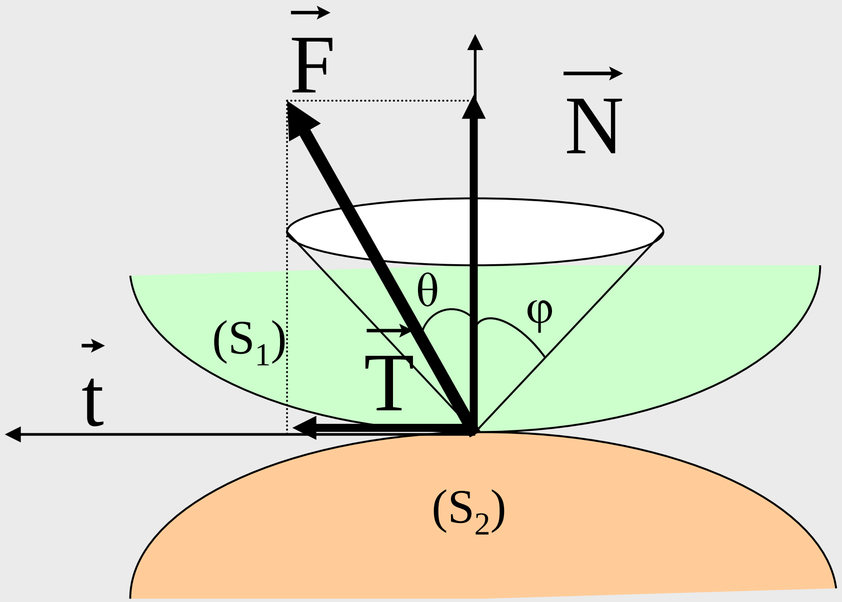
cas de la force ponctuelle avec frottement :



$$\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1) = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$$

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas de la force ponctuelle avec frottement :



Il existe un coefficient dit de frottement **f** entre deux solides en contact. Ce coefficient dépend uniquement des matériaux et de leur état de surface.
Le cône de frottement est directement lié à f par la relation suivante : **f = tan ϕ**

Si $\theta < \varphi \rightarrow \tan\theta < \tan\varphi \rightarrow$ **T< f N** $\rightarrow$ pas de glissement entre les solides

Si $\theta = \varphi \rightarrow \tan\theta = \tan\varphi \rightarrow$ **T= f N** $\rightarrow$ glissement entre les solides

~~Si $\theta > \varphi \rightarrow \tan\theta > \tan\varphi \rightarrow$ **T> f N** $\rightarrow$?~~

cas de la force ponctuelle avec frottement :

VALEURS DU FACTEUR DE FROTTEMENT ɥ*		
MATERIAUX EN CONTACT		
Désignation des matériaux	**Lubrification – température - pression**	**ɥ**
Acier / Fonte Acier / Bronze	Surfaces sèches Surfaces grasses Surfaces graissées	0,19 0,16 0,10
Fonte / Bronze Fonte / Fonte	Surfaces sèches Surfaces grasses Surfaces graissées	0,21 0,15 0,05 – 0,10
Acier trempé / Bronze	Graissage moyen Graissage sous pression	0,10 0,05
Acier trempé / Acier trempé	Graissage moyen Graissage abondant Graissage sous pression Faible pression de contact et bain d'huile	0,10 0,07 0,05 0,04
Garniture amiantée pour freins d'automobile / Fonte Garniture métallique frittée / Acier	Sèches – Température max. 140° C Pression de contact 0,2 à 0,6 Mpa Sèches – Température max. 300° C Pression de contact 0,2 à 1 Mpa	0,35 – 0,40 0,10 – 0,20

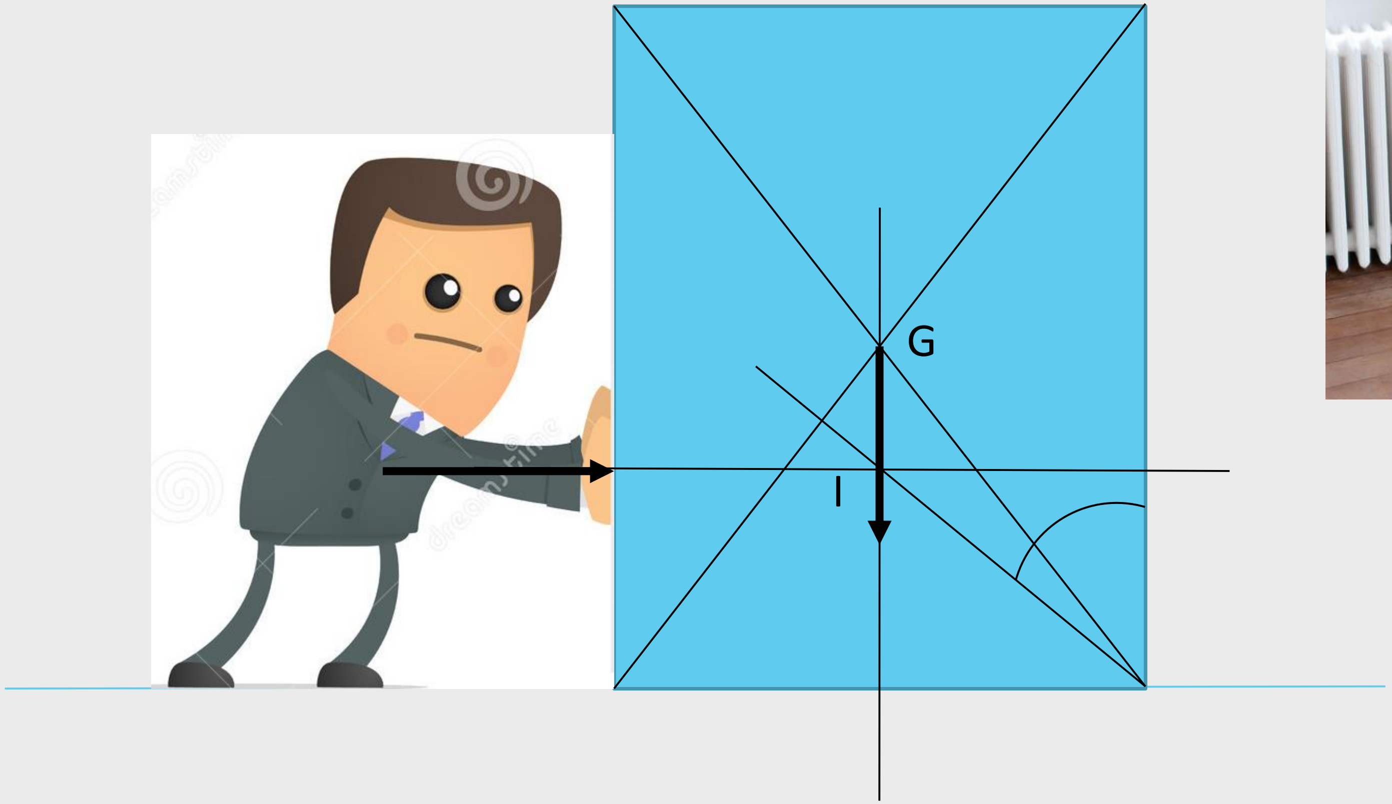
cas de la force ponctuelle avec frottement :

VALEURS DU FACTEUR DE FROTTEMENT ɥ*		
MATERIAUX EN CONTACT		
Désignation des matériaux	**Lubrification – température - pression**	**ɥ**
Coussinet fritté (bronze + acier) / Acier	Lubrifiées à l'huile Lubrifiées à la graisse	0,01 0,05
Caoutchouc / Fonte	Surface polie	0,20
Matières plastiques (toutes natures)	Surfaces lubrifiées	0,02 – 0,08
Polyamide 6 ; 6-6 ; 6-10 / Acier	Surfaces sèches	0,38 – 0,42
Polyamide 11 / Acier	Surfaces sèches	0,32 – 0,38
Polycarbonate / Acier	Surfaces sèches	0,52 – 0,58
Polyéthylène – téréphtalate / Acier	Surfaces sèches	0,24 – 0,28
Polystyrène / Acier	Surfaces sèches	0,35 – 0,5
Polytétrafluorothylène / Acier	Surfaces sèches	0,22
Pneus / Route goudronnée	Route sèche Route mouillée Route verglacée	0,60 – 0,70 0,35 – 0.60 0,10

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

Application graphique :

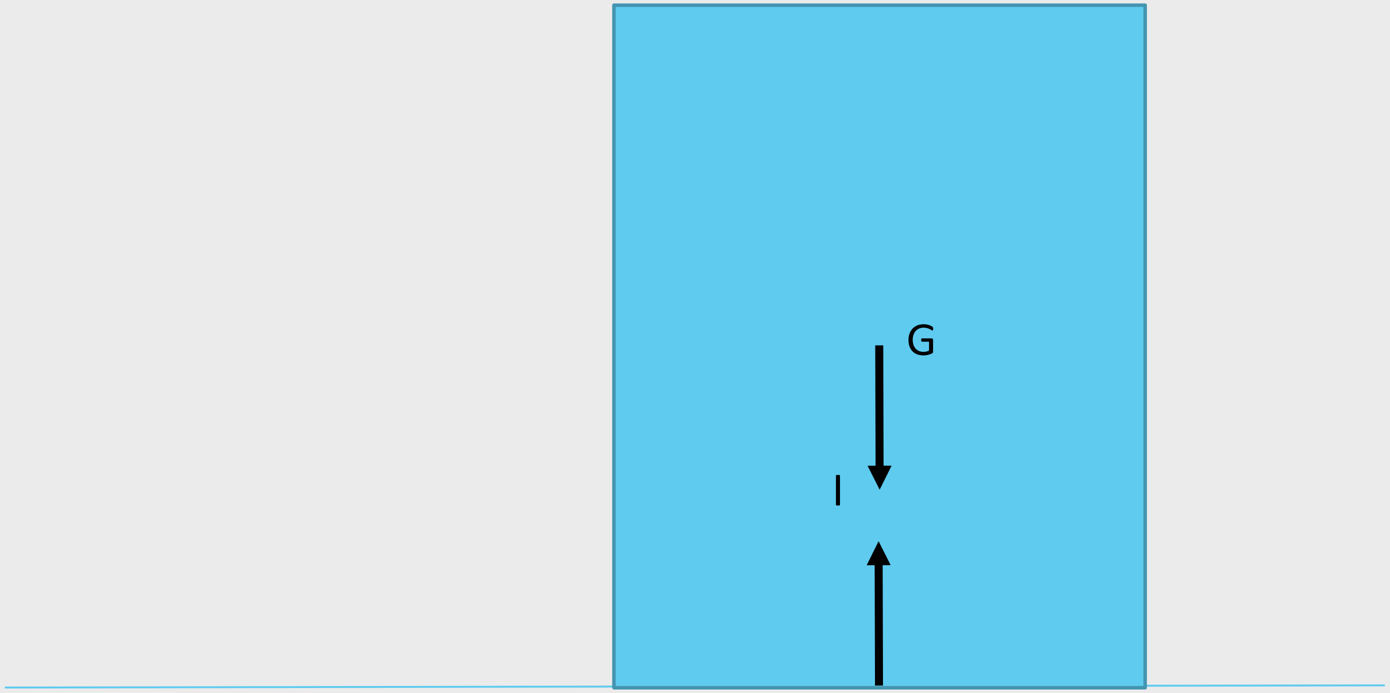
Quel coefficient de frottement maximal faut-il pour être certain de pouvoir faire glisser cette armoire?



Ici f=tanφ = 1.21 donc φ=50,4°

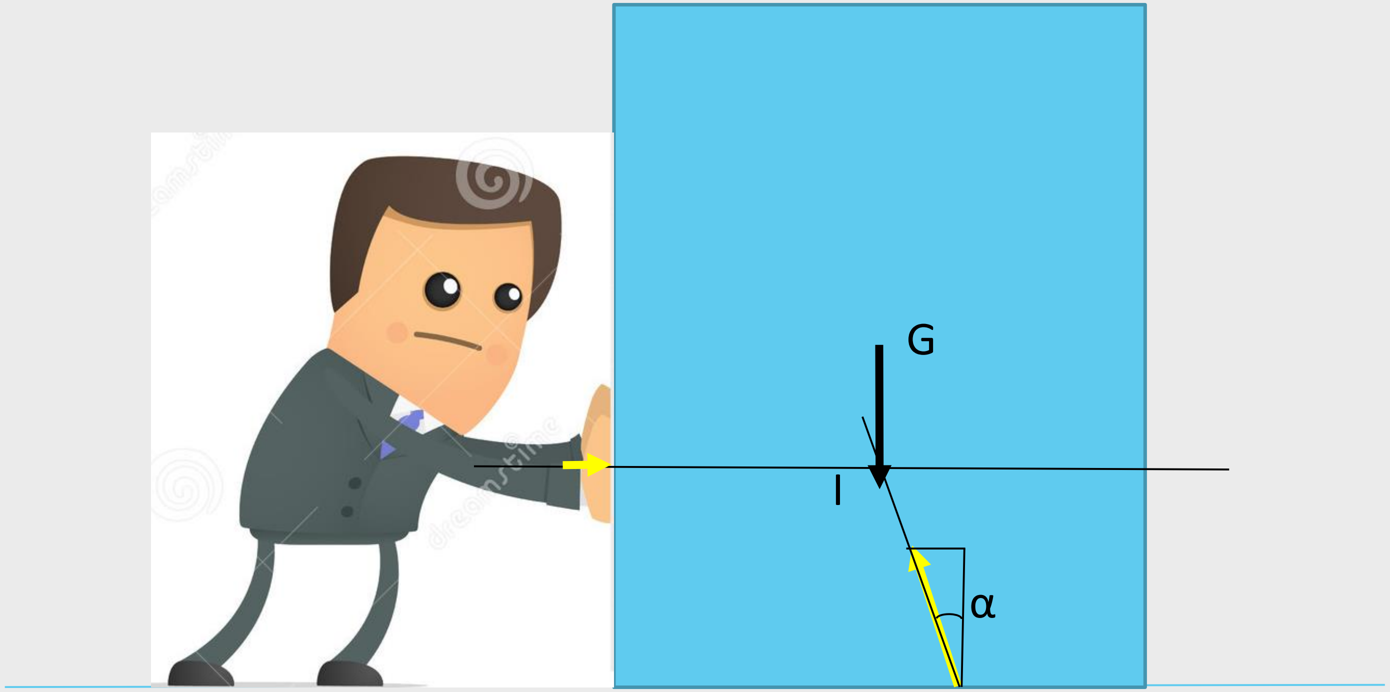
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

On ne pousse pas l'armoire



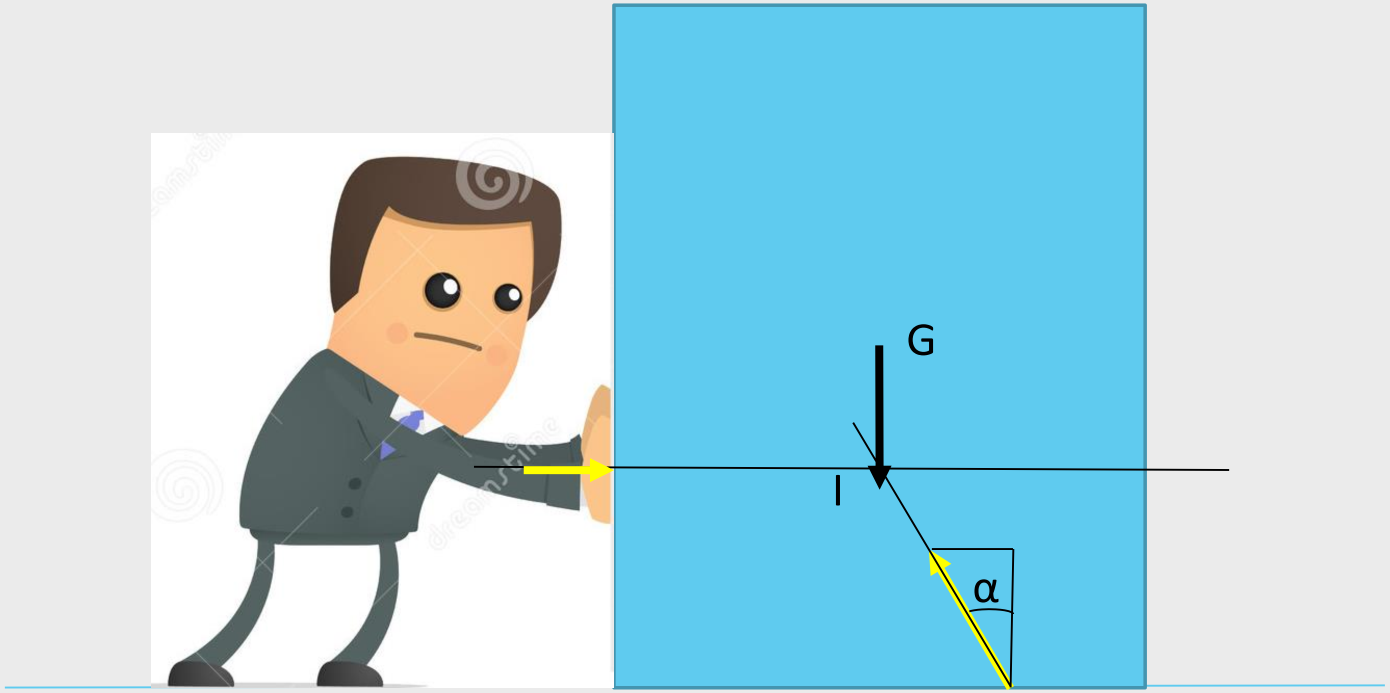
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

On pousse très légèrement l'armoire



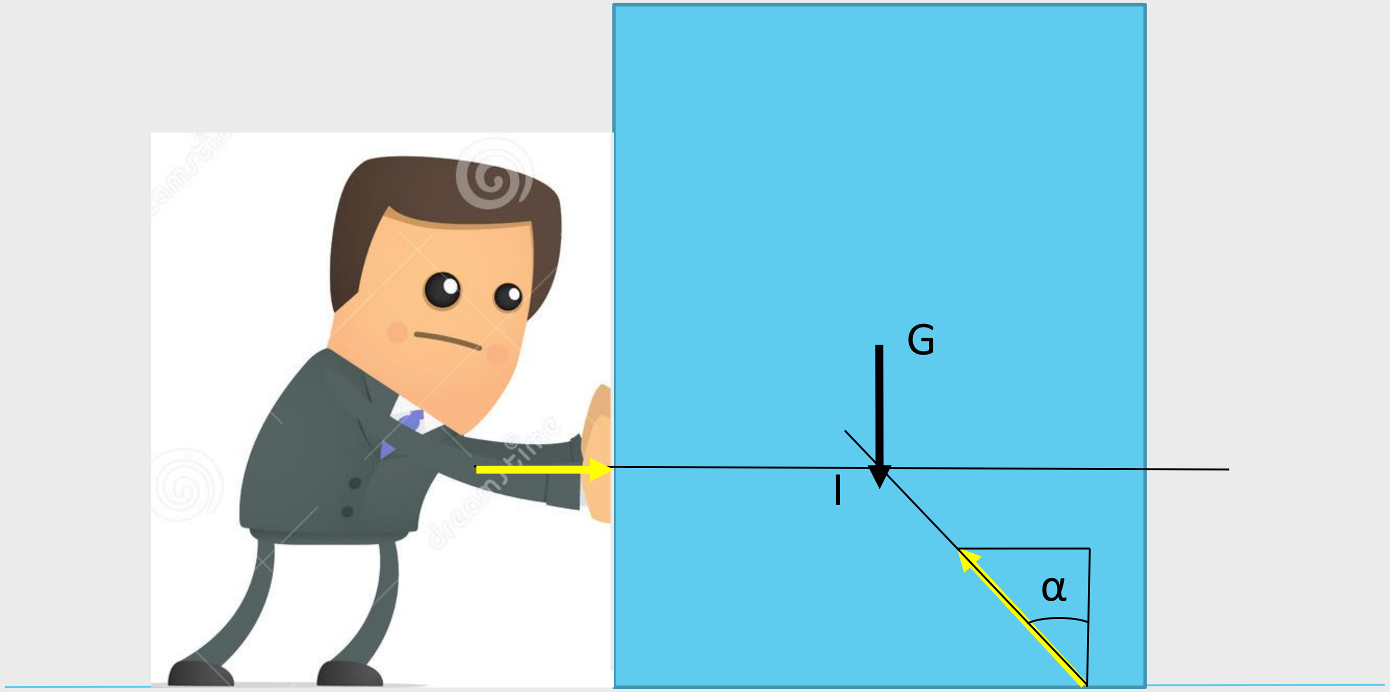
Si tanα < f pas de glissement

On pousse un peu plus l'armoire



Si tanα < f pas de glissement

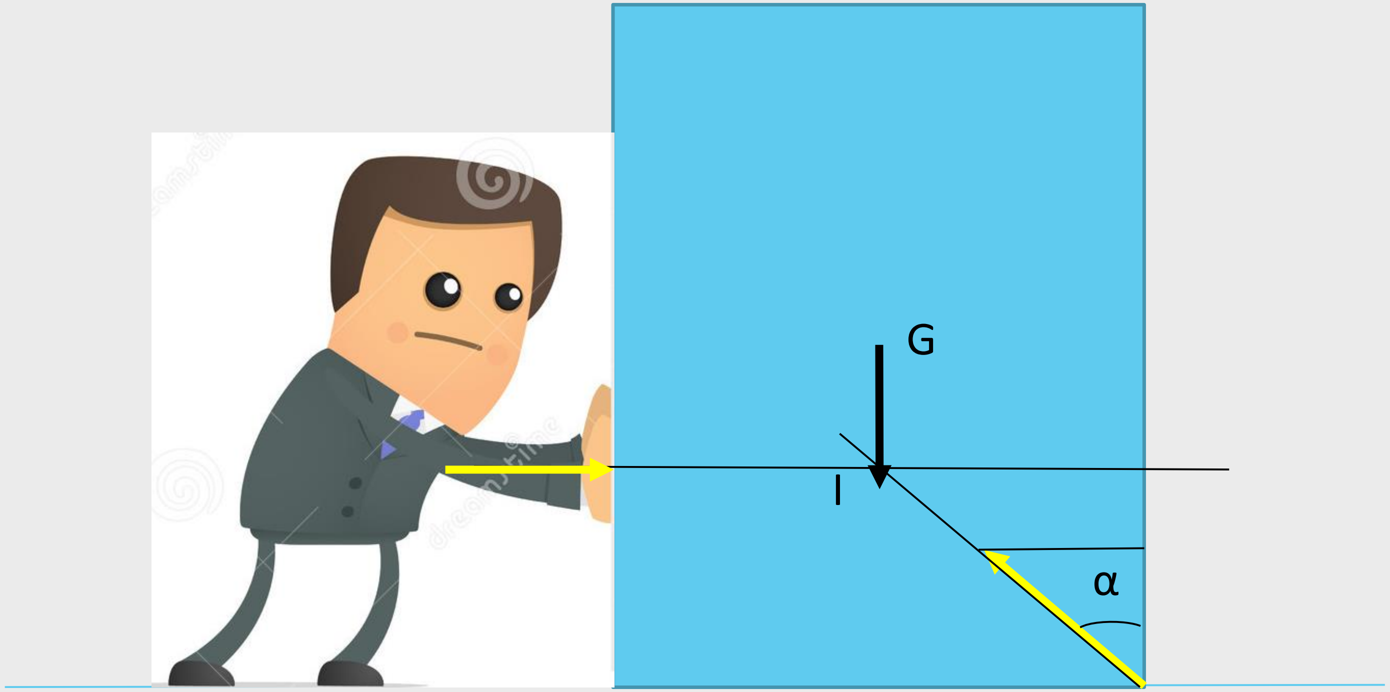
On pousse un peu plus l'armoire



Si tanα < f pas de glissement

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

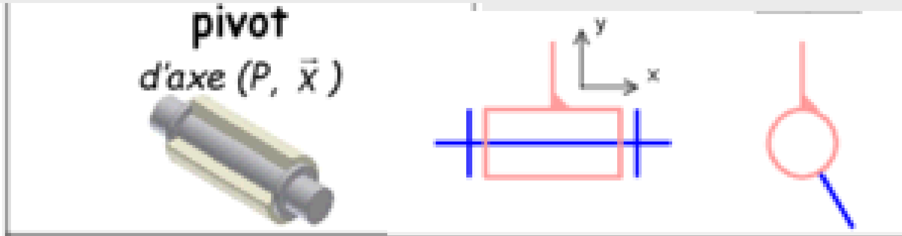
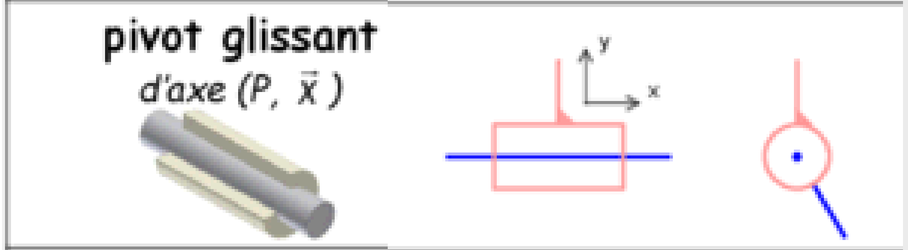
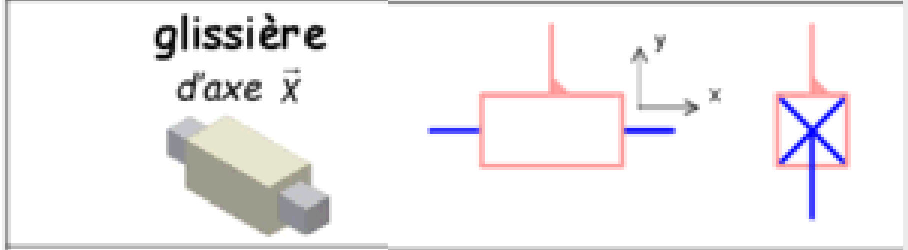
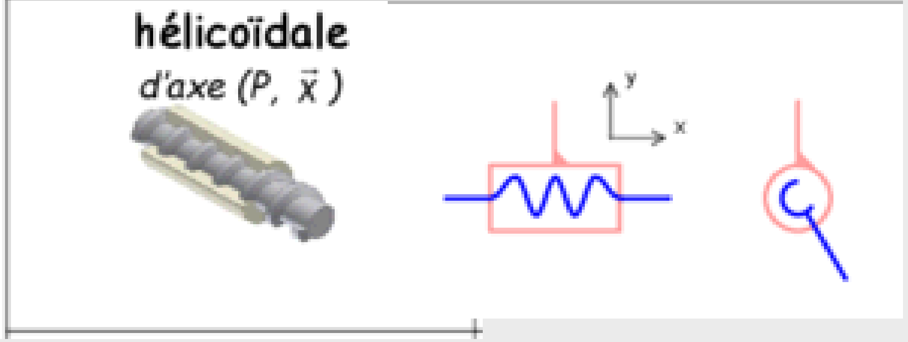
On pousse un peu plus l'armoire



Si tanα < f pas de glissement
Attention nous allons basculer !!!

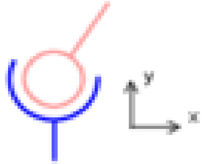
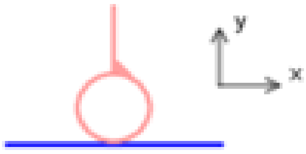
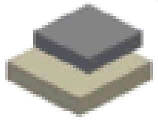
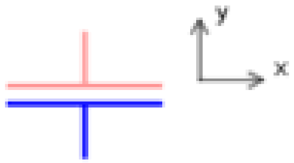
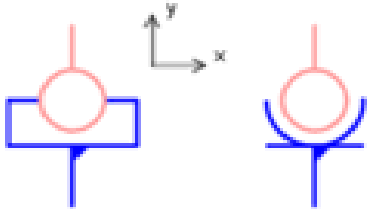
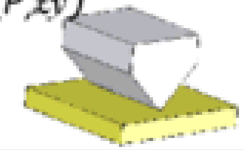
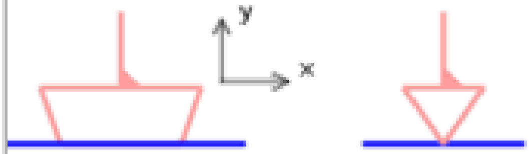
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas des liaisons parfaites : **Liaison parfaite : géométrie parfaite, sans jeu et sans frottement**

Nom et schématisation	Torseur statique
	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
	$\begin{Bmatrix} X & kX \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

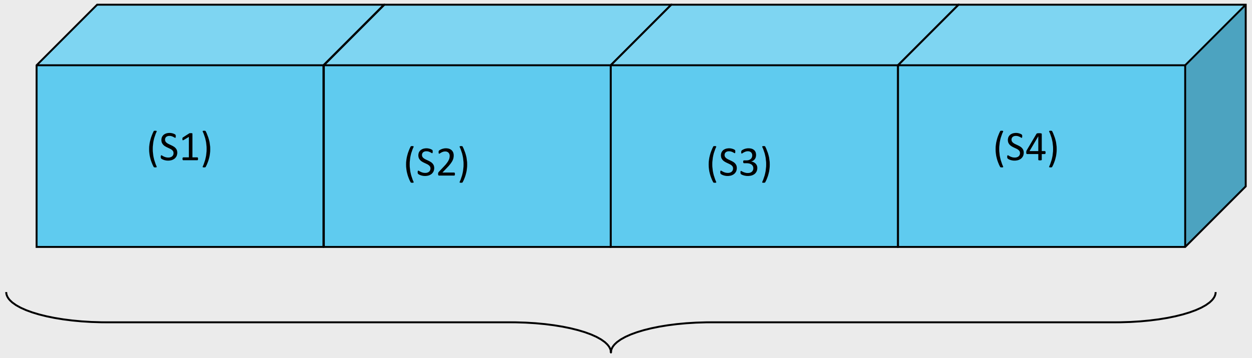
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

<u>cas des liaisons parfaites</u> :

rotule *de centre P* 		$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
ponctuelle *de normale* $(P,\vec{y})$ 		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
appui plan *de normale* $\vec{y}$ 		$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
linéaire annulaire *d'axe* $(P,\ \vec{x})$ 		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
linéaire rectiligne *de normale* $(P,\vec{y})$ *d'axe* $(P,\vec{x})$ 		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

$\left(\bar{S}\right)$



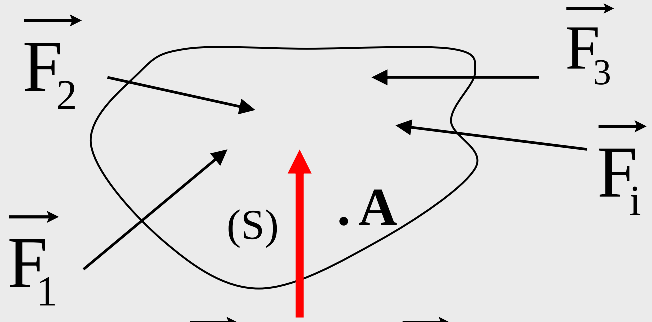
(S) = (S1) + (S2) + (S3) + (S4)

On appelle système matériel un ensemble (S) constitué des solides (Si)

On appelle $\left(\bar{S}\right)$ tout ce qui n’appartient pas à (S)

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Un système matériel (S) est en équilibre par rapport à un repère galiléen (Rg), si le torseur représentant l'ensemble des actions mécaniques extérieures appliquées à (S) est nul en tout point, quel que soit le point de réduction du torseur.

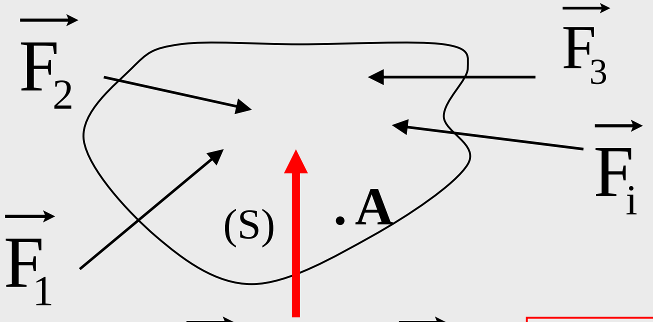


$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i}$$ Résultante

$$\boxed{\overrightarrow{M_A} = \sum_i \overrightarrow{M_A}(\vec{F}_i)}$$ Moment résultant en A

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)



$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

PFS : le solide (S) est en équilibre ssi

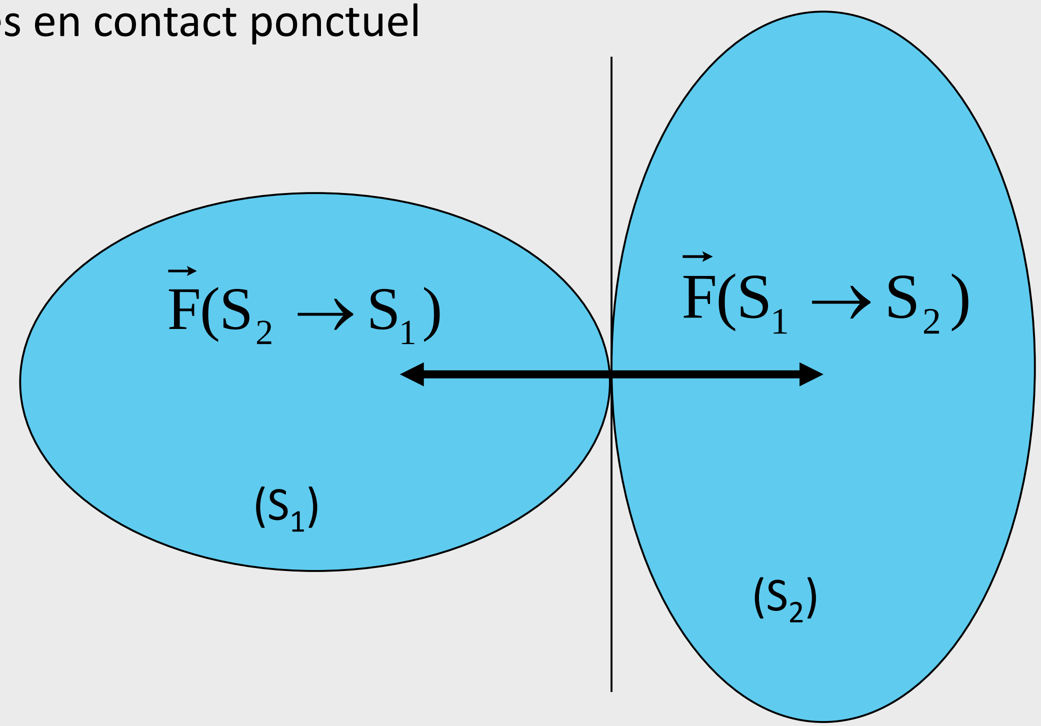
$$\boxed{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) = \sum_i \mathcal{F}(\vec{F}_i \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A = 0 \quad \forall A}$$

Cette équation torsorielle donne deux équations vectorielles

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A} &= \sum_i \overrightarrow{M_A}(\vec{F}_i \rightarrow S) = \vec{0} \end{aligned} \right.$$

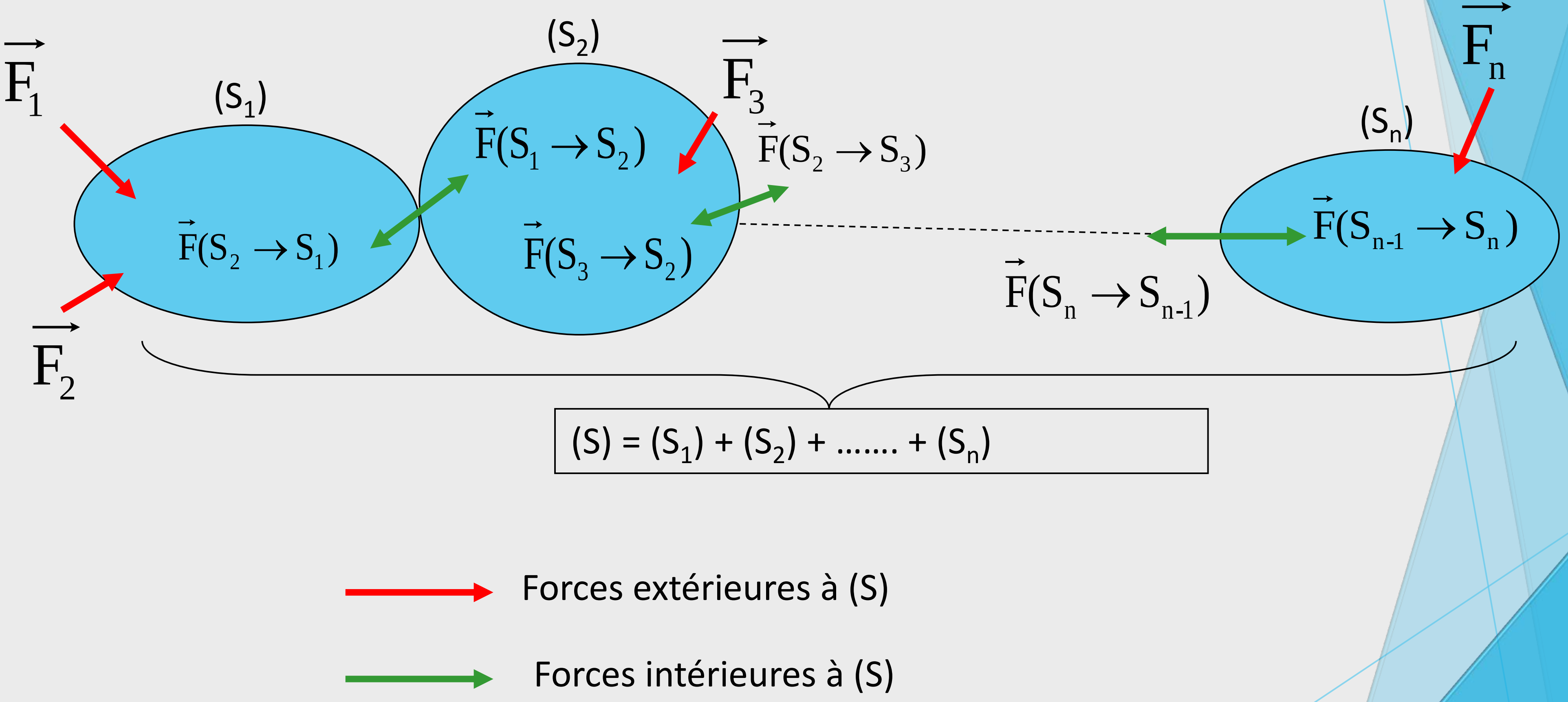
⇨ 6 équations scalaires

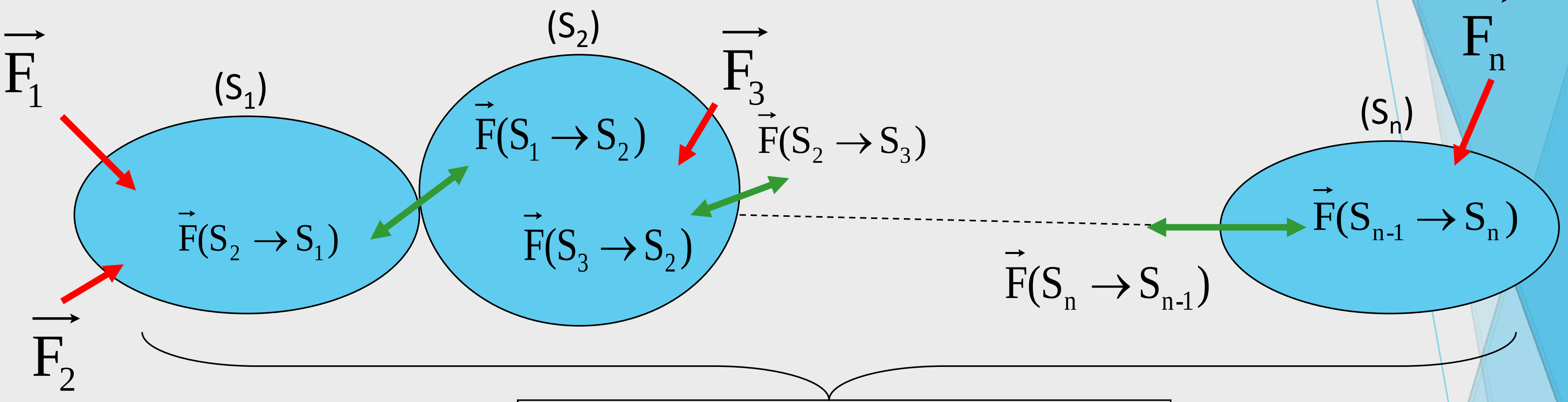
(S1) et (S2) deux solides en contact ponctuel



$$\boxed{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2) = -\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)}$$

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)





$(S) = (S_1) + (S_2) + \ldots\ldots. + (S_n)$

Pour appliquer le PFS, il ne faut tenir compte que des Forces extérieures au système isolé.

Si on prend en compte les forces intérieures, elles s'annulent deux à deux.

- Quelles sont les forces extérieures à (S2) ?

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

centralelille IG2I

Résolution des problèmes de statique: méthode analytique

1	•On isole le solide (ou ensemble de solides) -on précise lequel
2	On fait le Bilan des Efforts Extérieurs (BEE) -on écrit le torseur statique associé à chaque force extérieure -on transporte ces torseurs en un point judicieux
3	On applique le PFS -1 équation torsorielle -2 équations vectorielles - 6 équations scalaires (ou 3 si on travaille en 2D)
4	On résout le système d'équations scalaires

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

<ins>Résolution des problèmes de statique:</ins> méthode graphique

Tout problème peut se résoudre graphiquement

- 2D la résolution est relativement facile.
- 3D il faut travailler successivement dans les 3 plans et résoudre 3 fois comme un problème 2D

•On isole le solide (ou ensemble de solides)

-on précise lequel

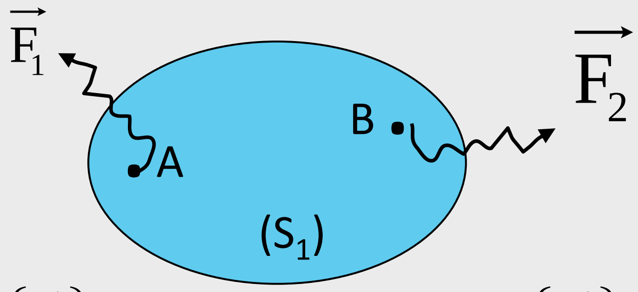
•On fait le Bilan graphique des Efforts <ins>Extérieures</ins> (tracer sur le dessin)

•Résolution graphique (nous verrons 2 cas)

- cas de 2 forces
- cas de 3 forces non parallèles

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

<u>Cas particulier des systèmes en équilibre soumis à 2 ou 3 forces :</u> cas de 2 forces



* On isole (S_1)

* BEE appliqués à (S_1) :

$$\mathcal{F}(\vec{F}_1 \rightarrow S_1) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad ; \quad \mathcal{F}(\vec{F}_2 \rightarrow S_1) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_2 \end{Bmatrix}_A$$

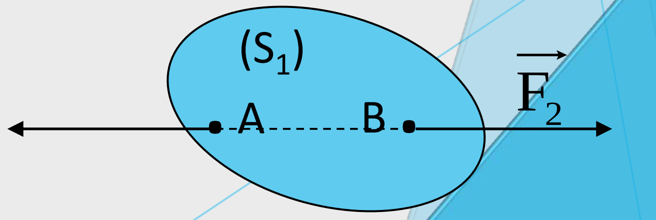
* PFS appliqués à (S_1) :

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \boxed{\Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0} \qquad \boxed{\Rightarrow (\overrightarrow{AB}) // \vec{F}_2}$$

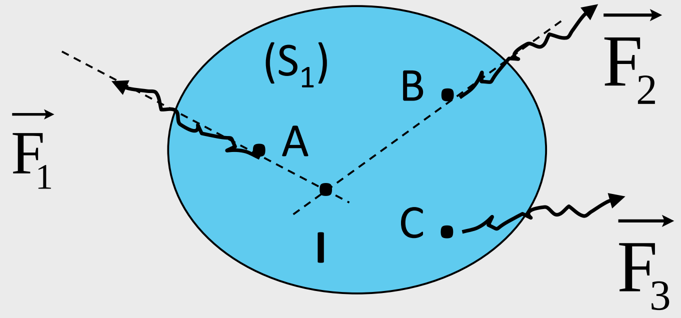
<u>Conclusion :</u> les 2 forces sont directement opposées

(<u>**même droite support, même norme et sens opposé**</u>).



Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

<u>Cas particulier des systèmes en équilibres soumis à 2 ou 3 forces :</u> cas de 3 forces non parallèles



* On isole (S_1)

* BEE appliqués à (S_1) :

$$\mathcal{F}(\vec{F_1} \to S_1) = \begin{Bmatrix} \vec{F_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I \quad ; \quad \mathcal{F}(\vec{F_2} \to S_1) = \begin{Bmatrix} \vec{F_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I \quad ; \quad \mathcal{F}(\vec{F_3} \to S_1) = \begin{Bmatrix} \vec{F_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \vec{F_3} \\ \vec{IC} \wedge \vec{F_3} \end{Bmatrix}_I$$

* PFS appliqués à (S_1) :

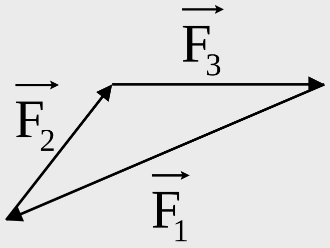
$$\sum \vec{F_i} = \vec{0} \qquad \boxed{\Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}} \quad (1)$$

$$\sum \vec{M_I} = \vec{0} \Rightarrow \vec{IC} \wedge \vec{F_3} = \vec{0} \qquad \boxed{\Rightarrow (\vec{IC}) // \vec{F_3}} \quad (2)$$

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

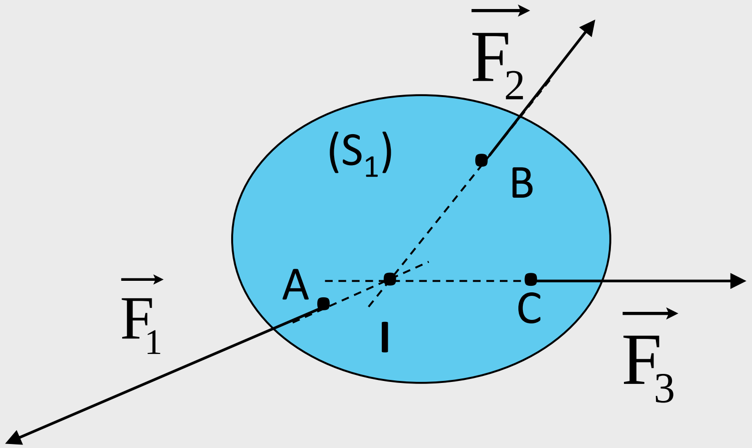
Cas particulier des systèmes en équilibres soumis à 2 ou 3 forces : cas de 3 forces non parallèles

(1) $\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$



les 3 forces sont donc **coplanaires** et de **somme géométrique nulle**

(2) $\Rightarrow (\overrightarrow{IC}) // \vec{F}_3$

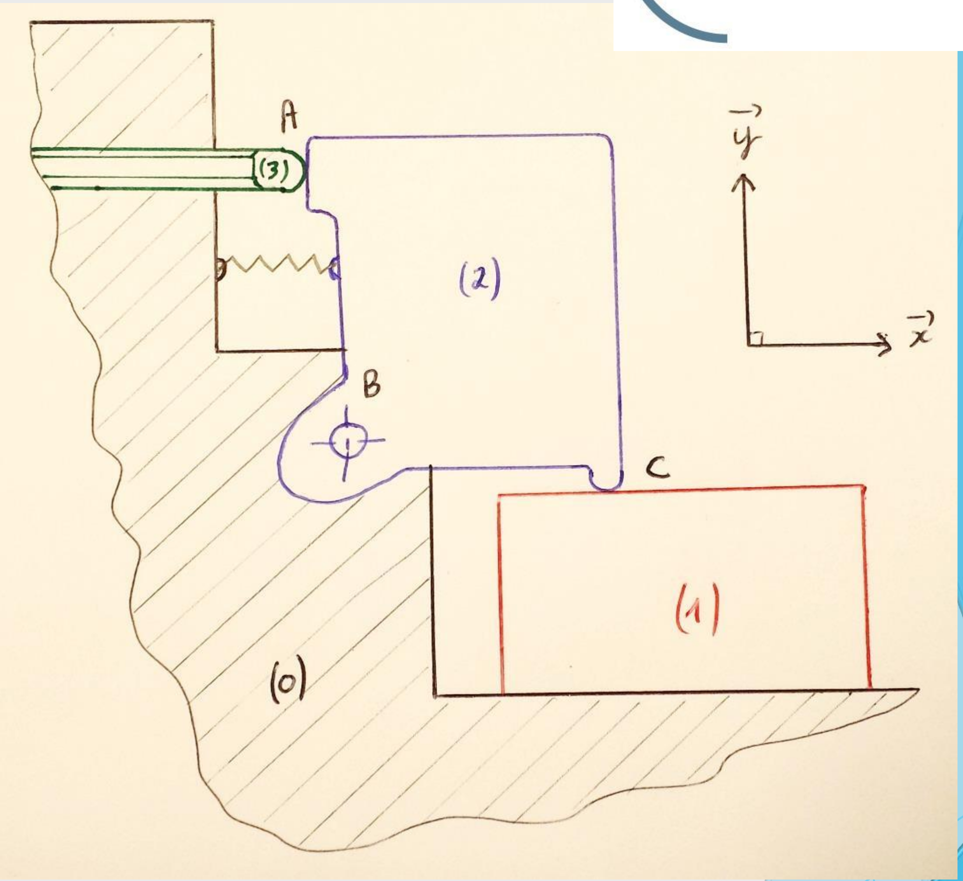


les 3 forces sont donc **concourantes**

Application :

Soit un dispositif de bridage comprenant :
un bâti (0), une pièce (1), une bride (2) et une vis de serrage (3).
La vis de serrage (3) appuie en A sur la bride (2) qui pivote autour de B et vient appuyer en C sur la pièce (1) à bloquer.
La force du ressort de rappel ainsi que le poids des pièces sont négligés.

- La vis (3) est en contact ponctuel sans frottement sur la bride (2)
- La bride (2) est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ avec le bâti (0)
- La bride (2) est en contact ponctuel sans frottement avec la pièce (1)



Données : $\left\| \overrightarrow{F_{3\to2}} \right\| = F ; \overrightarrow{AB} = a\vec{x} - b\vec{y} ; \overrightarrow{BC} = c\vec{x} - d\vec{y}$

Questions :

- déterminer analytiquement les efforts en B et C
- A.N. avec F = 3000N a = 10mm, b = 80mm, c = 75mm et d = 10mm
- déterminer graphiquement les efforts en B et C

Statique du solide : Application

Application : résolution analytique

- On isole la bride (2)
- BEE appliqués à (2)

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \left\{ \begin{matrix} F\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A \qquad \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \left\{ \begin{matrix} Y_C\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C \qquad \mathcal{F}(0 \rightarrow 2) = \left\{ \begin{matrix} X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B \quad \textit{car en } 2D$$

Pour appliquer le PFS il faut que tous les torseurs soient écrits en un même point.
Ici il est judicieux de transporter tous ces torseurs en B, car le torseur représentant la liaison pivot contient le plus d’inconnues au niveau de la résultante, il faut donc éviter de le transporter.
Si l’on fait l’erreur de transporter les torseurs en un autre point le résultat sera le même, mais les équations à résoudre pour y parvenir seront plus compliquées !!!

Statique du solide : Application

Application : résolution analytique

Transport des moments au point B

$$\mathcal{F}(3\rightarrow 2)=\begin{Bmatrix}F\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}F\vec{x}\\ \overrightarrow{M_B}(F\vec{x}\rightarrow 2)=\overrightarrow{M_A}(F\vec{x}\rightarrow 2)+\overrightarrow{BA}\wedge F\vec{x}\end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix}F\vec{x}\\ \left(-a\vec{x}+b\vec{y}\right)\wedge F\vec{x}\end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix}F\vec{x}\\ -bF\vec{z}\end{Bmatrix}_B$$

$$\mathcal{F}(1\rightarrow 2)=\begin{Bmatrix}Y_C\vec{y}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_C=\begin{Bmatrix}Y_C\vec{y}\\ \overrightarrow{M_B}(Y_C\vec{y}\rightarrow 2)=\overrightarrow{M_C}(Y_C\vec{y}\rightarrow 2)+\overrightarrow{BC}\wedge Y_C\vec{y}\end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix}Y_C\vec{y}\\ \left(c\vec{x}-d\vec{y}\right)\wedge Y_C\vec{y}\end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix}Y_C\vec{y}\\ cY_C\vec{z}\end{Bmatrix}_B$$

$$\mathcal{F}(0\rightarrow 2)=\begin{Bmatrix}X_B\vec{x}+Y_B\vec{y}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_B$$

Application : résolution analytique

☆ PFS appliqués à (S)

$$\mathcal{F}(\bar{2} \to 2) = {}_B\left\{ \begin{array}{c} F\vec{x} + Y_C\vec{y} + X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} \\ -bF\vec{z} + cY_C\vec{z} \end{array} \right\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Cela nous donne 3 équations scalaires, 2 pour la résultante et 1 pour le moment **car 2D**

Pour info, en 3D on aurait 6 équations scalaires, 3 pour la résultante et 3 pour le moment

Résultante

Projection sur x : $F + X_B = 0$ (1)

Projection sur y : $Y_C + Y_B = 0$ (2)

Moment

Projection sur z : $-bF + cY_C = 0$ (3)

◯ = inconnues

Statique du solide : Application

Application : résolution analytique

☆ Résolution des équations

(1) $X_B = -F$ (3) $Y_C = F\dfrac{b}{c}$ (2) $Y_B = -F\dfrac{b}{c}$

☆ Applications numériques

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} -3000\text{ N} \\ -3200\text{ N} \\ 0 \end{vmatrix} = -3000\text{ N}\,\vec{x} - 3200\text{ N}\,\vec{y}$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} 0 \\ 3200\text{ N} \\ 0 \end{vmatrix} = 3200\text{ N}\,\vec{y}$$

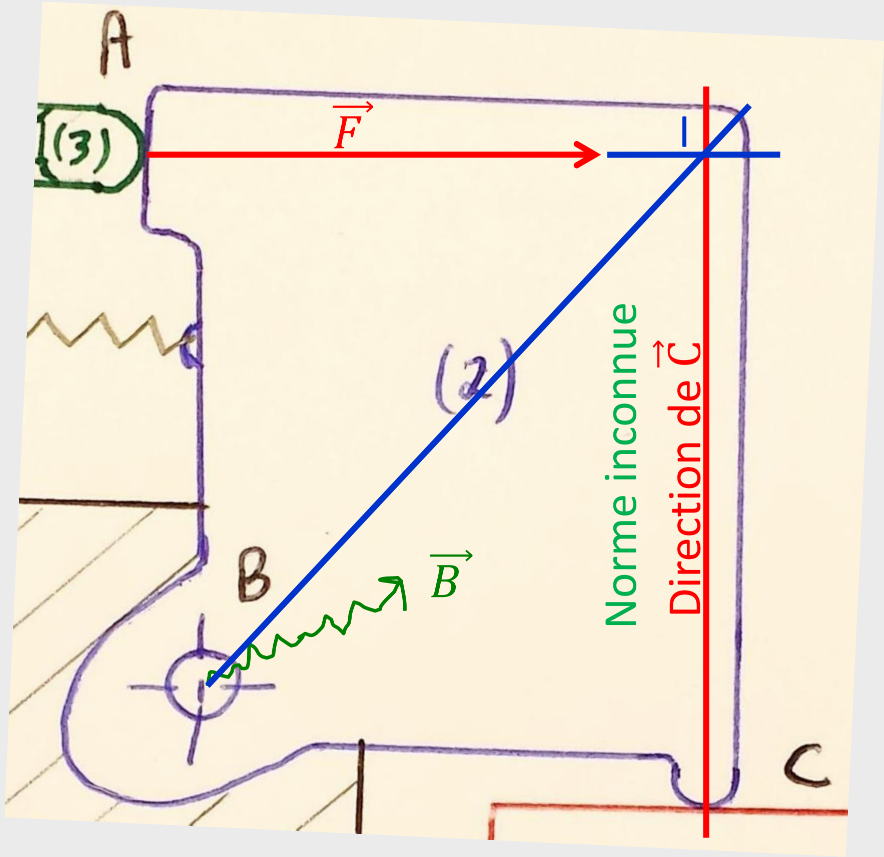
Statique du solide : Application

Application : résolution graphique

Echelle des distances : 1mm = 1mm

Connus

Inconnus



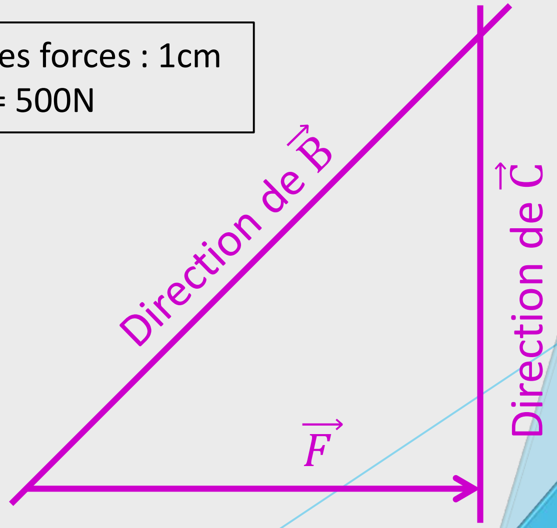
- On isole la bride (2)
- BEE
  - $\vec{A}=\vec{F}$ entièrement connue
  - $\vec{C}$ direction connue (ponctuelle sans frottement)
  - $\vec{B}$ inconnue
- PFS solide soumis à 3 forces non parallèles

➡ **coplanaire** OK

➡ **concourante** : (on trouve le point I et donc la direction de la force en B)

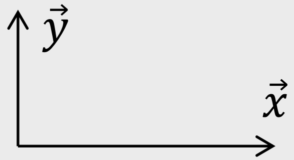
➡ **de somme géométrique nulle** : (voir construction)

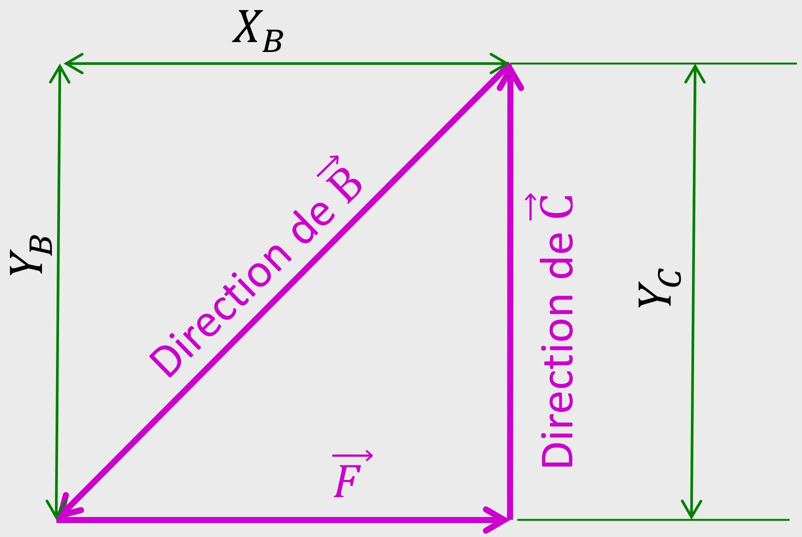
Echelle des forces : 1cm = 500N

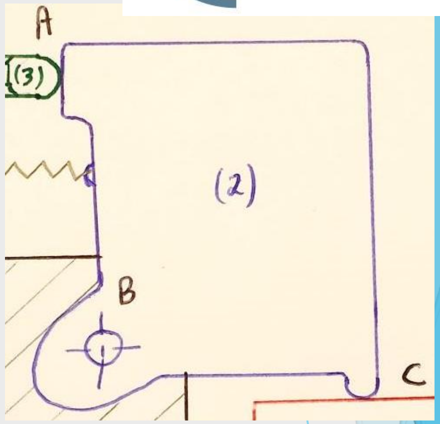


Statique du solide : Application

Echelle des forces : 1cm = 500N







$$\begin{cases} X_B = 6\,cm \\ Y_B = 6.4\text{cm} \\ Y_C = 6{,}4\,\text{cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = 3000\,N \\ Y_B = 3200\,N \\ Y_C = 3200\,\text{N} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} -3000\text{ N} \\ -3200\text{ N} \\ 0 \end{vmatrix} = -3000\text{ N}\,\vec{x} - 3200\text{ N}\,\vec{y}$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} 0 \\ 3200\text{ N} \\ 0 \end{vmatrix} = 3200\text{ N}\,\vec{y}$$

CINEMATIQUE DU SOLIDE

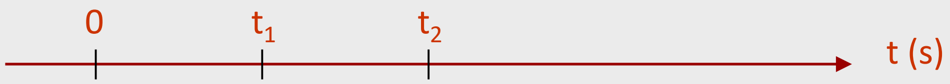
Cinématique du solide : Notion de référentiel

Qu'est ce qu'un référentiel ? :

Référentiel = repère spatial + repère temporel

★ un repère spatial = origine spatiale + base orthonormée directe (ROND) $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

★ un repère temporel = origine temporel + base de temps



Chaque point de ce repère est appelé **instant**.
L'abscisse de l'instant est appelée **date** (t). Son unité est la **seconde** (s).

Les différents repères spatiaux :

Le repère :

L'étude du mouvement d'un objet et l'expression de sa position, de sa vitesse ou de son accélération nécessitent au préalable le choix d'un repère.

Rappels : Un repère spatial est défini par un point et trois axes pointant dans des directions fixes. Les repères les plus courants sont:

- **Le repère terrestre** associé à une portion de surface terrestre qui peut être choisi pour des mouvements de faible amplitude et de durée très faible par rapport à la période de rotation terrestre. Ex : repère lié à la salle de classe (étude classique).
- **Le repère géocentrique** associé au centre de la Terre et trois axes pointant en direction d'étoiles fixes qui peut être utilisé pour étudier des mouvements de grande amplitude autour de la Terre mais dont la durée est négligeable devant la période de révolution terrestre. (étude de mise sur orbite)
- **Le repère héliocentrique** associé au centre du Soleil et trois axes pointant en direction d'étoiles pouvant être considérées comme fixes. Étude des voyages interplanétaires

Le repère absolu est le repère lié au système solaire

Un repère considéré comme absolu est un repère fixe par rapport à ce que l'on étudie

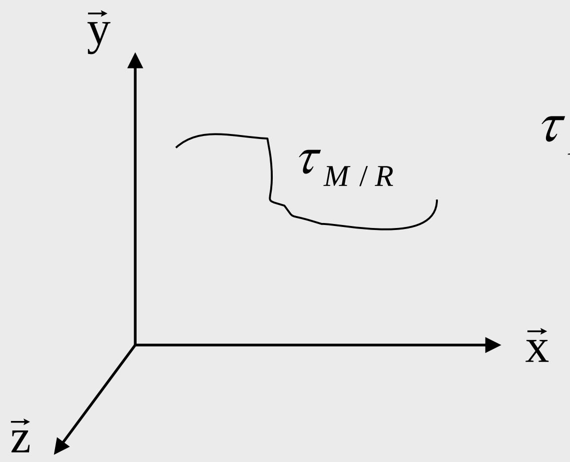
Tout repère non absolu est dit repère relatif

Cinématique du solide : Trajectoire - vecteur position et déplacement

Trajectoire :

$R(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un ROND

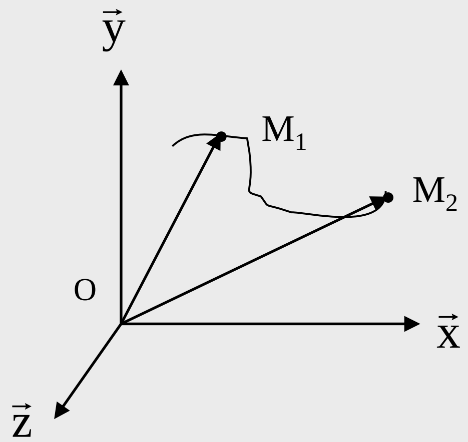
On appelle trajectoire du point M dans le repère R, le lieu des points géométriques du point M dans le repère R au cours du temps



$\tau_{M/R}$ est la trajectoire du point M dans le repère R

Vecteur position et déplacement :

On appelle **vecteur position** du point M dans $R(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ à l'instant t, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ définissant la position du point M dans R à l'instant t
Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 est la position du point M à l'instant t_2, alors le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est appelé **vecteur déplacement** de M dans le repère R entre les instants t_1 et t_2



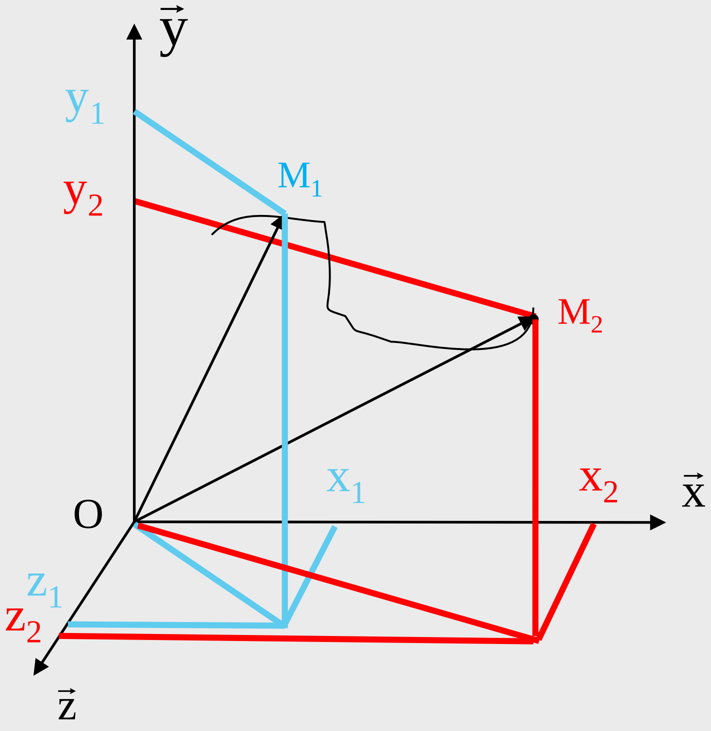
$\overrightarrow{OM_1}$ vecteur position du point M à $t = t_1$

$\overrightarrow{OM_2}$ vecteur position du point M à $t = t_2$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ vecteur déplacement entre les instants t_1 et t_2

centralelille IG2I

Vecteur position et déplacement :



$\overrightarrow{OM_1}$ vecteur position du point M à $t = t_1$

$\overrightarrow{OM_2}$ vecteur position du point M à $t = t_2$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ vecteur déplacement entre les instants t_1 et t_2

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} \\ \overrightarrow{OM_2} &= x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} \end{aligned}\right\} \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = (x_2 - x_1)\vec{x} + (y_2 - y_1)\vec{y} + (z_2 - z_1)\vec{z}$$

Cinématique du solide : Vecteur vitesse/accélération

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 est la position du point M à l'instant t_2, alors le vecteur **vitesse moyenne** entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{t_1,t_2}^{moy}}(M/R) = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}}$$

La **vitesse instantanée** du point M dans son mouvement par rapport à R à l'instant t est :

$$\boxed{\vec{V}(M/R,t) = \vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R}$$

Si l'étude porte sur un ensemble de solides, il faut préciser l'appartenance du point M à un des solides :

$$\boxed{\vec{V}(M \in S_i/R,t) = \vec{V}(M \in S_i/R) = \vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R}$$

Cinématique du solide : Vecteur vitesse/accélération

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1, M_2 est la position du point M à l'instant t_2,

$\overrightarrow{V_1}(M/R)$ la vitesse du point M à l'instant t_1 et $\overrightarrow{V_2}(M/R)$ la vitesse du point M à l'instant t_2,

alors le **vecteur accélération moyen** entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma^{moy}_{t_1,t_2}}(M/R) = \frac{\overrightarrow{V_2}(M/R) - \overrightarrow{V_1}(M/R)}{\Delta t}}$$

L'accélération instantanée du point M dans son mouvement par rapport à R à l'instant t est :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/R,t) = \vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_R}$$

S'il y a un ensemble de solides, il faut préciser l'appartenance du point M à un des solides :

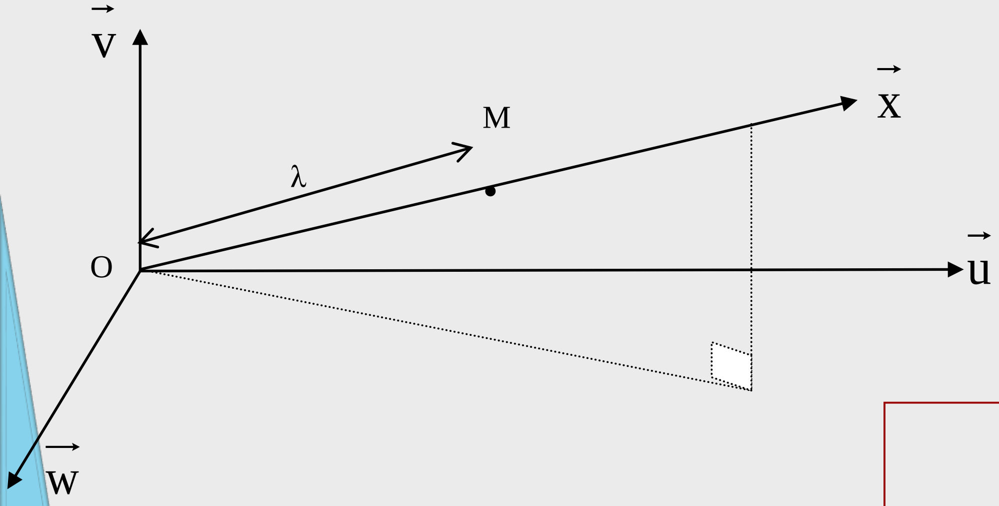
$$\boxed{\vec{\Gamma}(M \in S_i/R,t) = \vec{\Gamma}(M \in S_i/R) = \vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_R}$$

Cinématique du point : mouvement rectiligne

On appelle mouvement rectiligne le mouvement d'un point matériel dont la trajectoire est une droite

$R(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un ROND

Soit un point matériel M se déplaçant le long de l'axe $(O, \vec{x})$ avec $\|\vec{x}\| = 1$



Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\,\vec{x}$$

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\lambda\vec{x}}{dt}\right]_R = \frac{d\lambda}{dt}\vec{x} = \dot{\lambda}\,\vec{x}$$

Vecteur accélération

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_R = \left[\frac{d\dot{\lambda}\,\vec{x}}{dt}\right]_R = \ddot{\lambda}\,\vec{x}$$

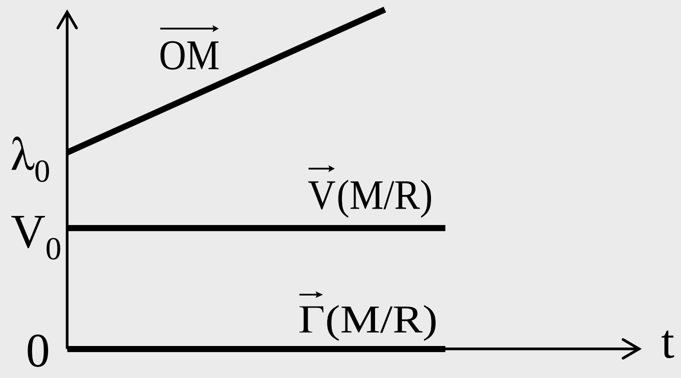
Cinématique du point : mouvement rectiligne

Cas du mouvement rectiligne uniforme

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(M/R) = cte\,\vec{x} = V_0\ \vec{x}$$

$$\overrightarrow{OM} = (V_0 t + cte)\vec{x} = (V_0 t + \lambda_0)\vec{x}$$

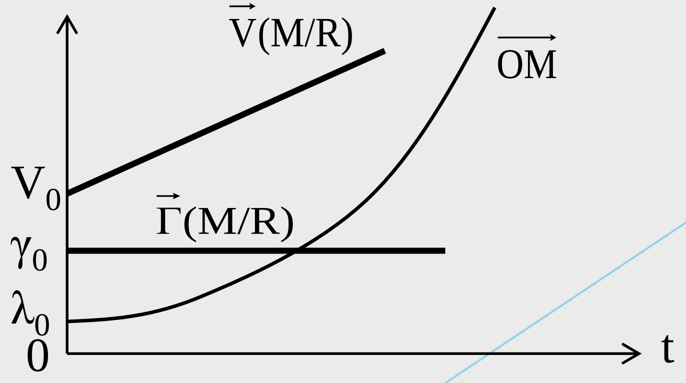


Cas du mouvement rectiligne uniformément varié

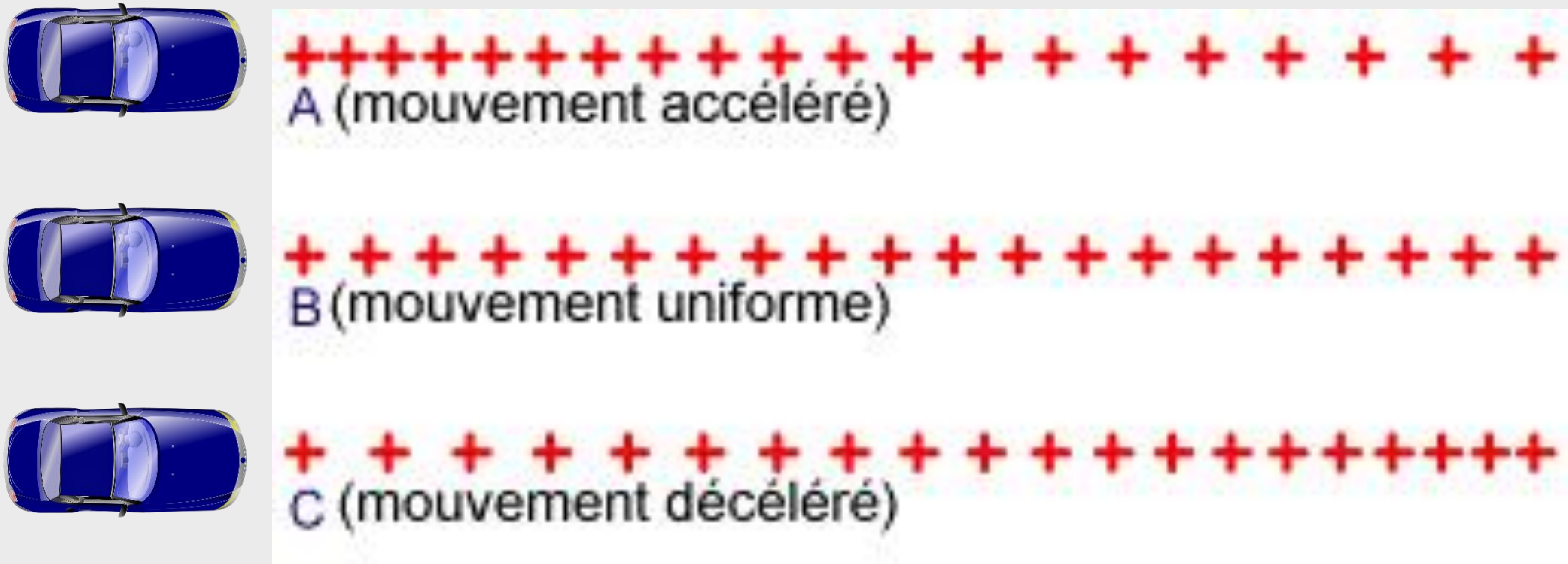
$$\vec{\Gamma}(M/R) = cte\ \vec{x} = \gamma_0\ \vec{x}$$

$$\vec{V}(M/R) = (\gamma_0 t + V_0)\vec{x}$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\gamma_0 \frac{t^2}{2} + V_0 t + \lambda_0\right)\vec{x}$$



Cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré / uniforme / uniformément ralenti



Fin cours 1

Cinématique du solide : Mouvement rectiligne et circulaire

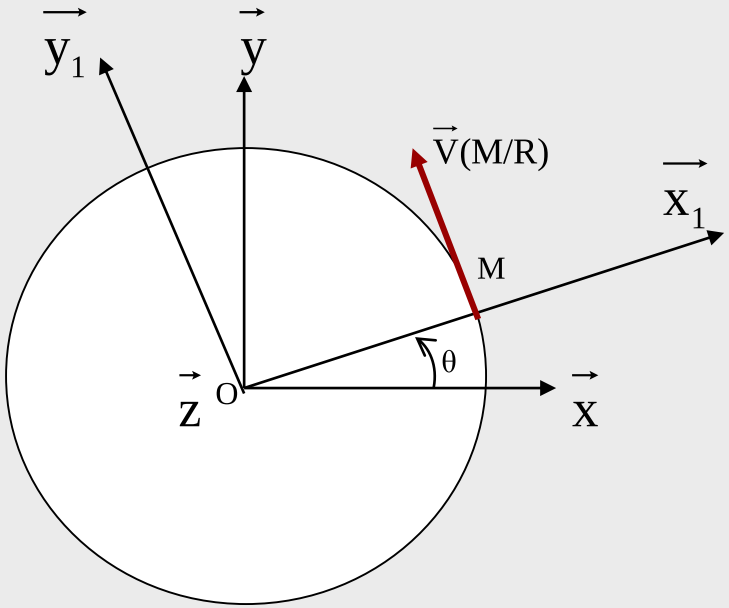
Cinématique du point : mouvement circulaire

On appelle mouvement circulaire le mouvement d'un point matériel dont la trajectoire est un cercle

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND fixe

$R(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$ un ROND lié au point M

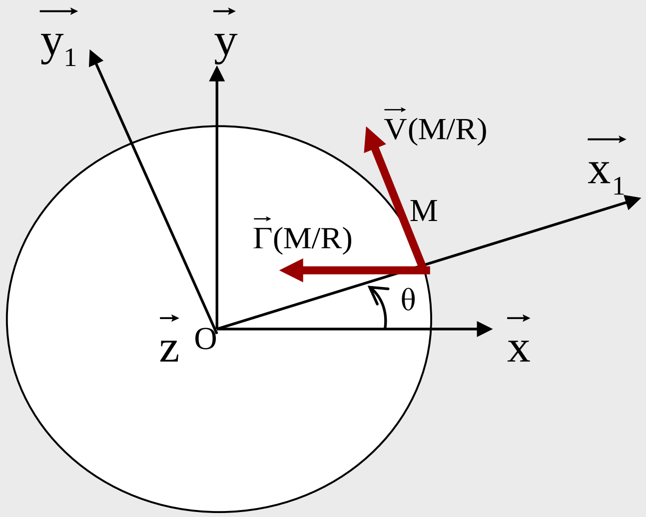
θ : paramètre de position



Cercle de rayon R

$\omega \vec{z} = \dot{\theta}\, \vec{z}$: vecteur vitesse de rotation (ou vitesse angulaire)

Cinématique du point : mouvement circulaire



$$\boxed{Vecteur\ \ position : \overrightarrow{OM} = \mathrm{R}\cos\theta\,\vec{x} + \mathrm{R}\sin\theta\,\vec{y} = R\,\overrightarrow{x_1}}$$

$$\boxed{\text{Vecteur vitesse} : \vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}) = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1}}$$

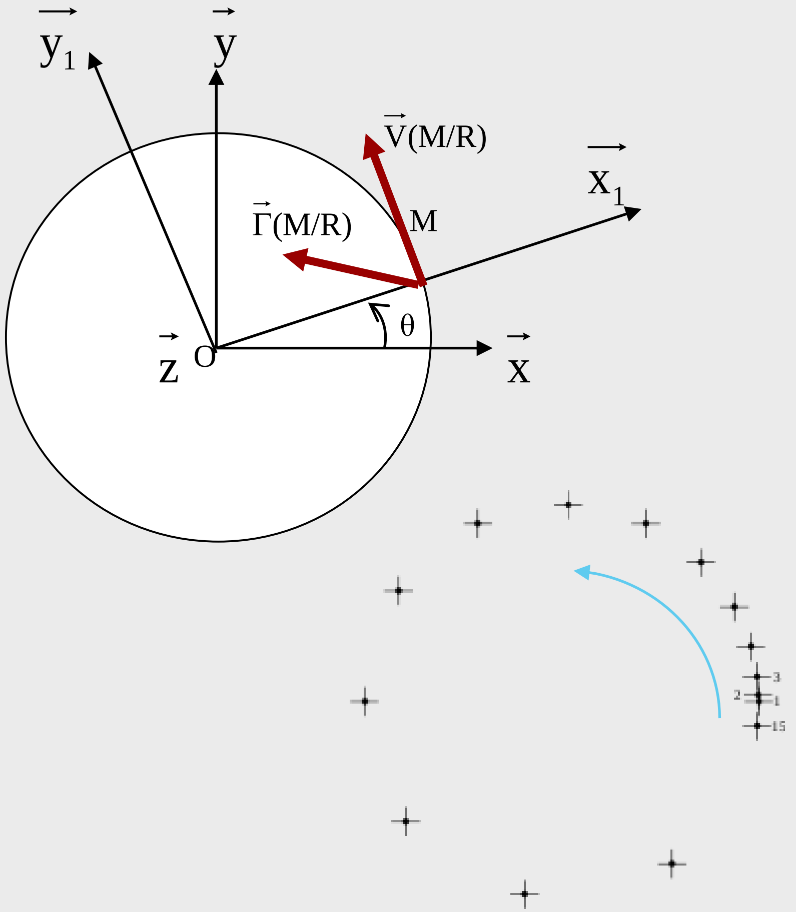
$$\boxed{\text{Vecteur accélération} : \vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right]_R = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{x_1}}$$

Cinématique du solide : Mouvement rectiligne et circulaire

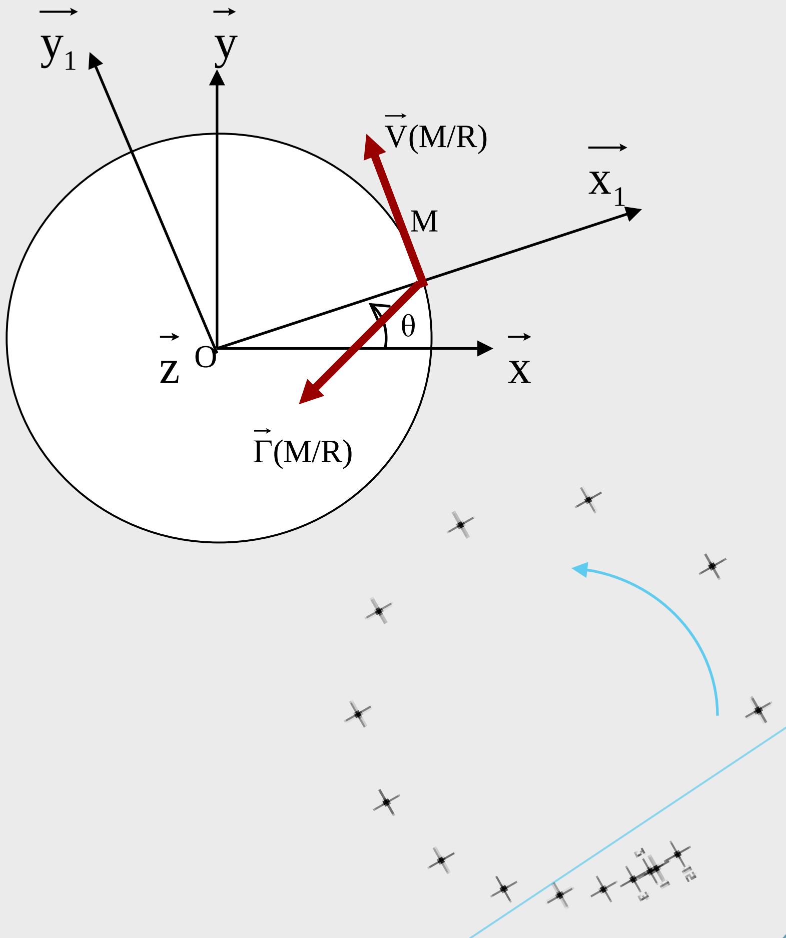
Cinématique du point : mouvement circulaire

$$\vec{V}(M/R) = R\dot{\theta}\,\vec{y_1} \qquad \vec{\Gamma}(M/R) = R\ddot{\theta}\,\vec{y_1} - R\dot{\theta}^2\,\vec{x_1}$$

Mouvement accéléré



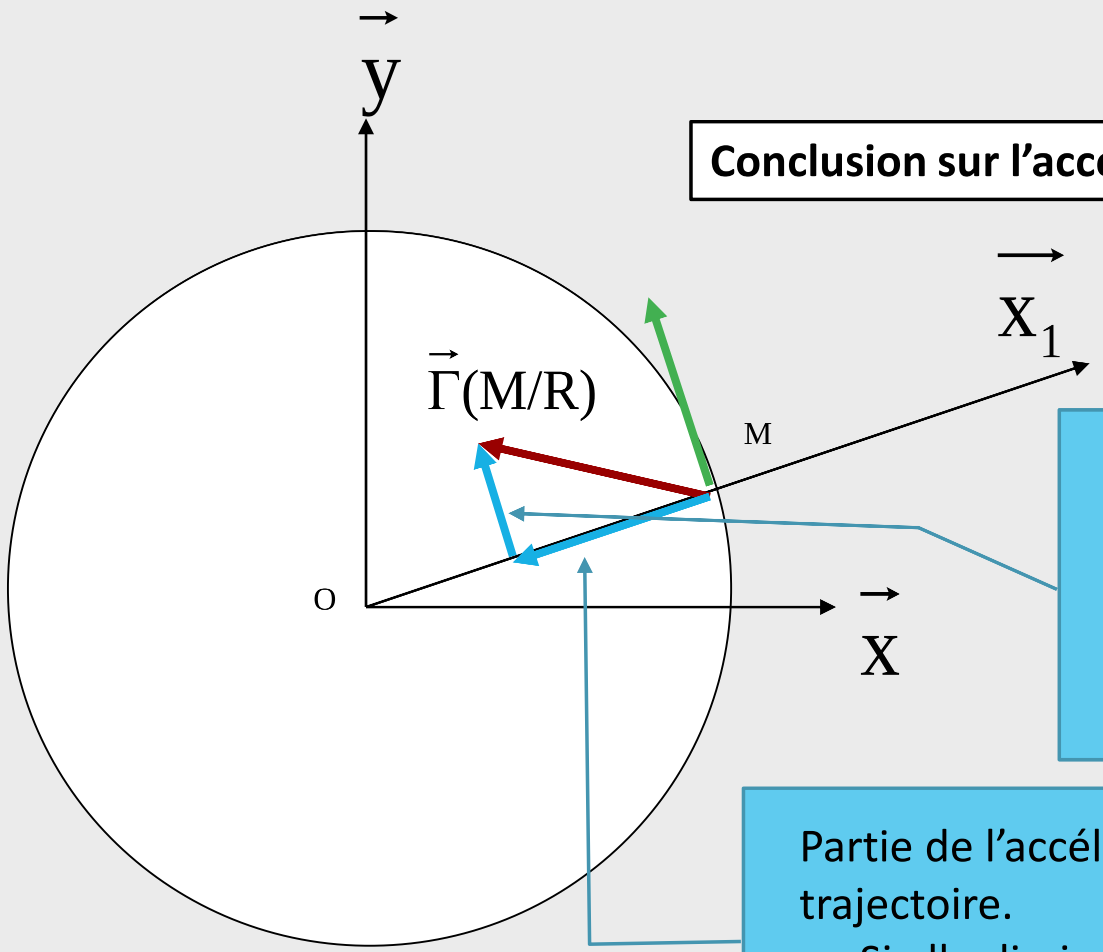
Mouvement ralenti



Cinématique du solide : Mouvement rectiligne et circulaire

Cinématique du point : mouvement circulaire

Conclusion sur l'accélération



Partie de l'accélération qui fait varier la vitesse du point M.

- Si elle diminue la vitesse diminue
- Si elle augmente la vitesse augmente

Ici le point M accélère

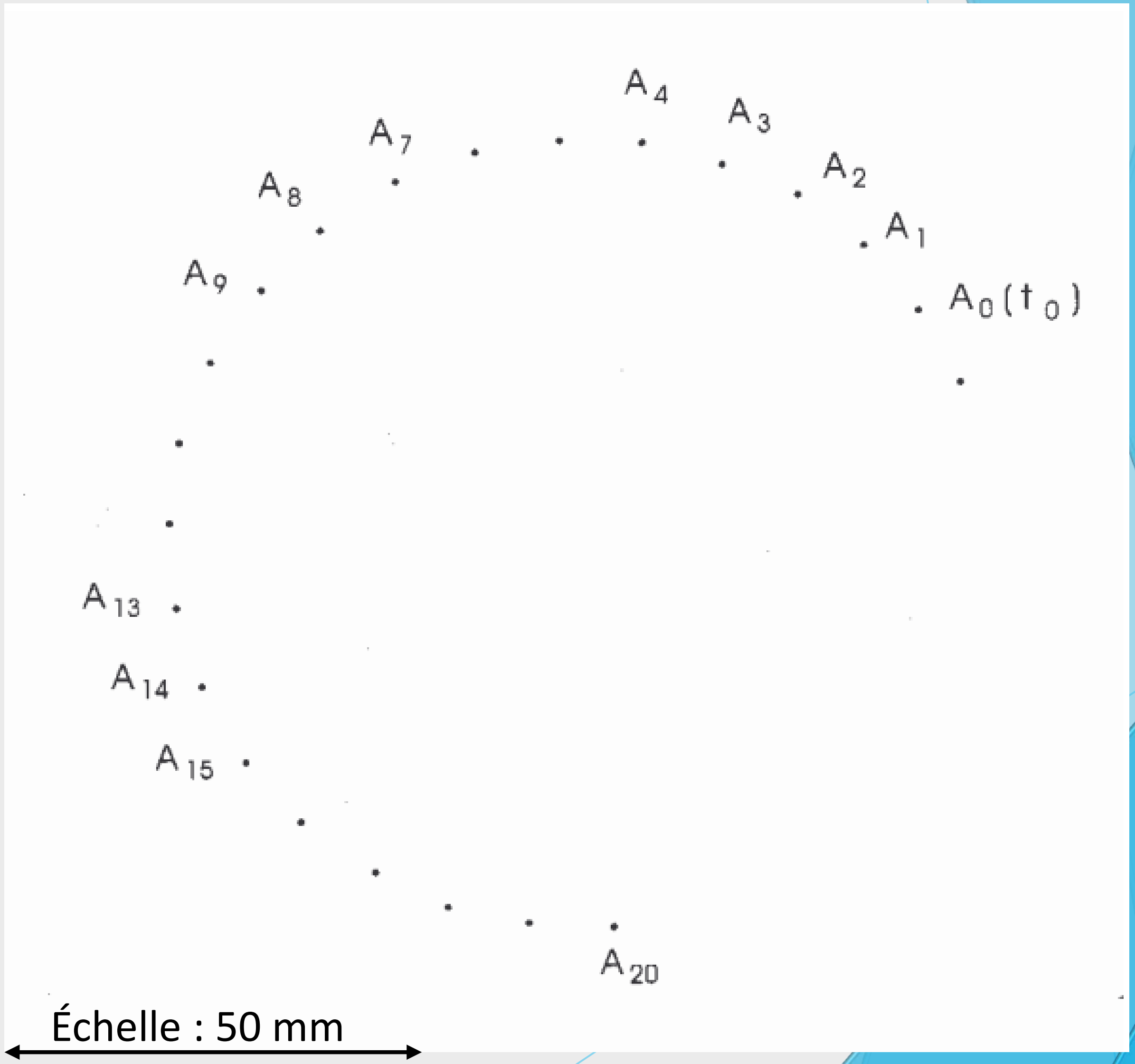
Partie de l'accélération qui maintient la trajectoire.

- Si elle diminue le rayon du cercle grandit
- Si elle augmente le rayon du cercle diminue

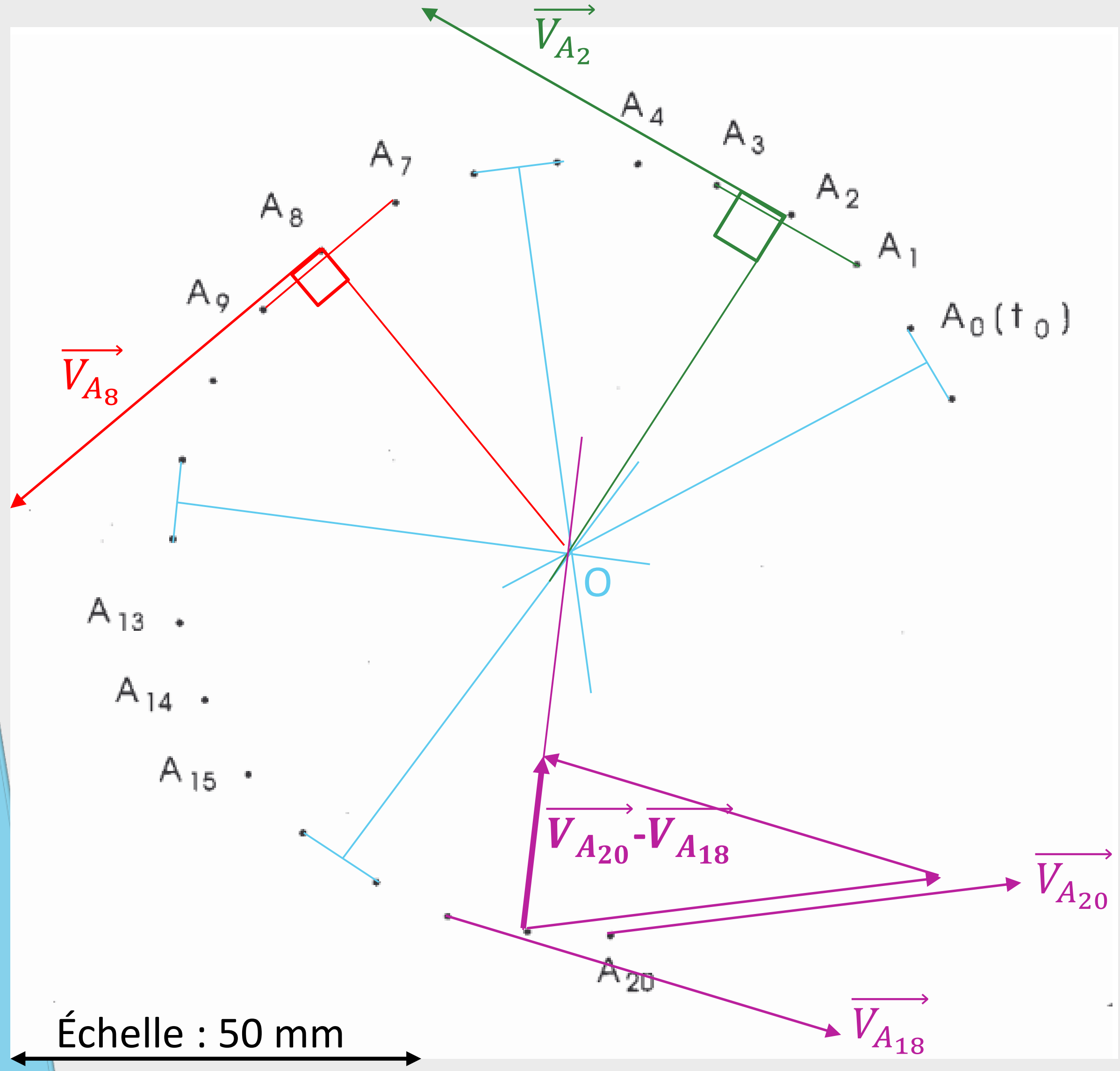
Cinématique du solide : Applications (cinématique du point)

Sur une table parfaitement plane et horizontale, un mobile à coussin d'air est relié à une tige fixe en O. Ce mobil est lancé et décrit dont une trajectoire circulaire autour du point O.
Un système enregistre la position du mobile toutes les 20ms (voir figure).
Le vitesse d'enregistrement permet de faire l'hypothèse que $V_{Ai}=d(A_{i-1}-A_{i+1})/\Delta t$

1) Tracer le point O
2) Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{A_8}}$ et la tracer.
3) Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{A_2}}$ et la tracer.
4) Conclure sur le type de mouvement
5) Calculer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{A_{19}}}$ et la tracer
6) Conclure sur le type de mouvement
7) Les résultats 4) et 6) sont-ils cohérents?



Cinématique du solide : Applications (cinématique du point)



1) Tracé de O : voir ci-contre

2) V_{A_8}= A_9A_7/40ms = 20,5mm/40ms = 0,5m/s

Echelle : 0,1m/s ↔ 10 mm

3) V_{A_2}= A_1A_3/40ms = 20,5mm/40ms = 0,5m/s

4) Mvt circulaire uniforme (vitesse constante)

5) $\overrightarrow{\Gamma_{A_{19}}} = \left(\overrightarrow{V_{A_{20}}} - \overrightarrow{V_{A_{18}}}\right)/\Delta t$

* origine : A_{19}
* direction : $\left(\overrightarrow{V_{A_{20}}} - \overrightarrow{V_{A_{18}}}\right)$
* sens vers l'intérieur du cercle
* norme : $\frac{\left\|\overrightarrow{V_{A_{20}}} - \overrightarrow{V_{A_{18}}}\right\|}{40ms} = 5{,}75\ m/s^2$

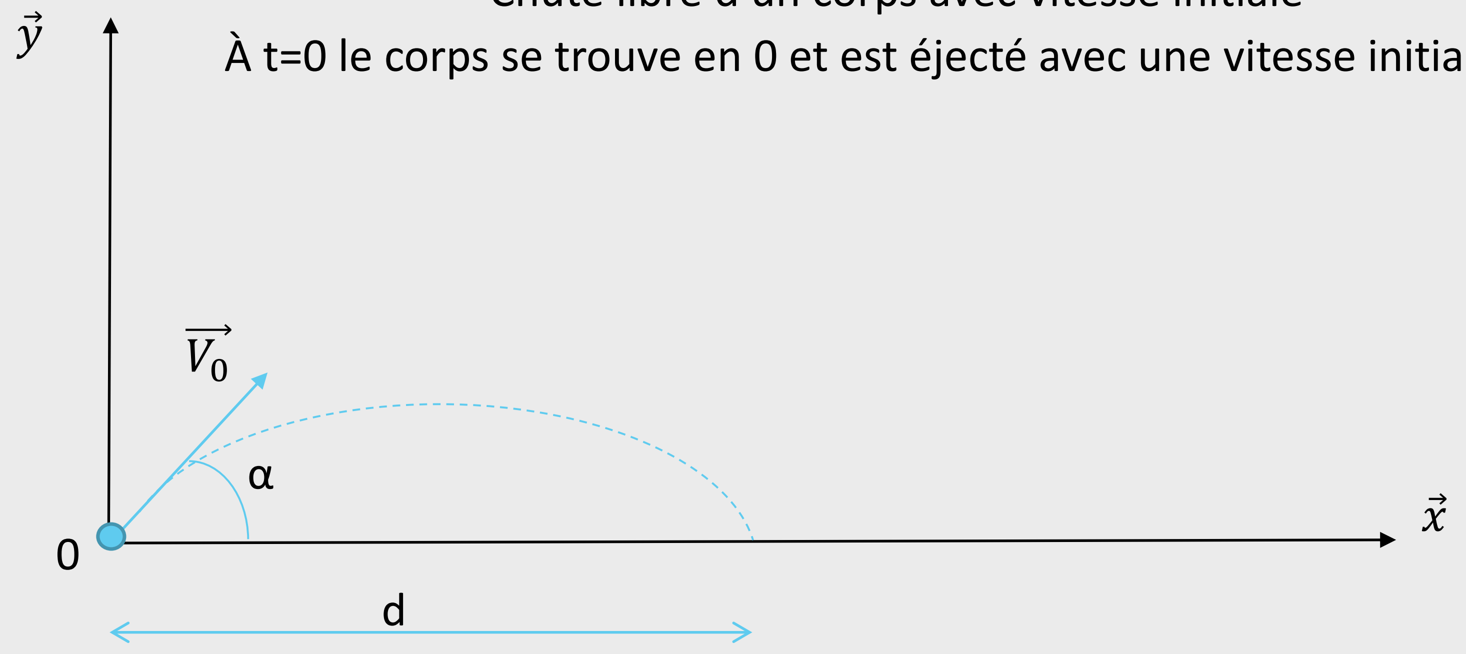
6) Mvt circulaire uniforme (accélération purement radiale)

7) oui

Cinématique du solide : Applications (cinématique du point)

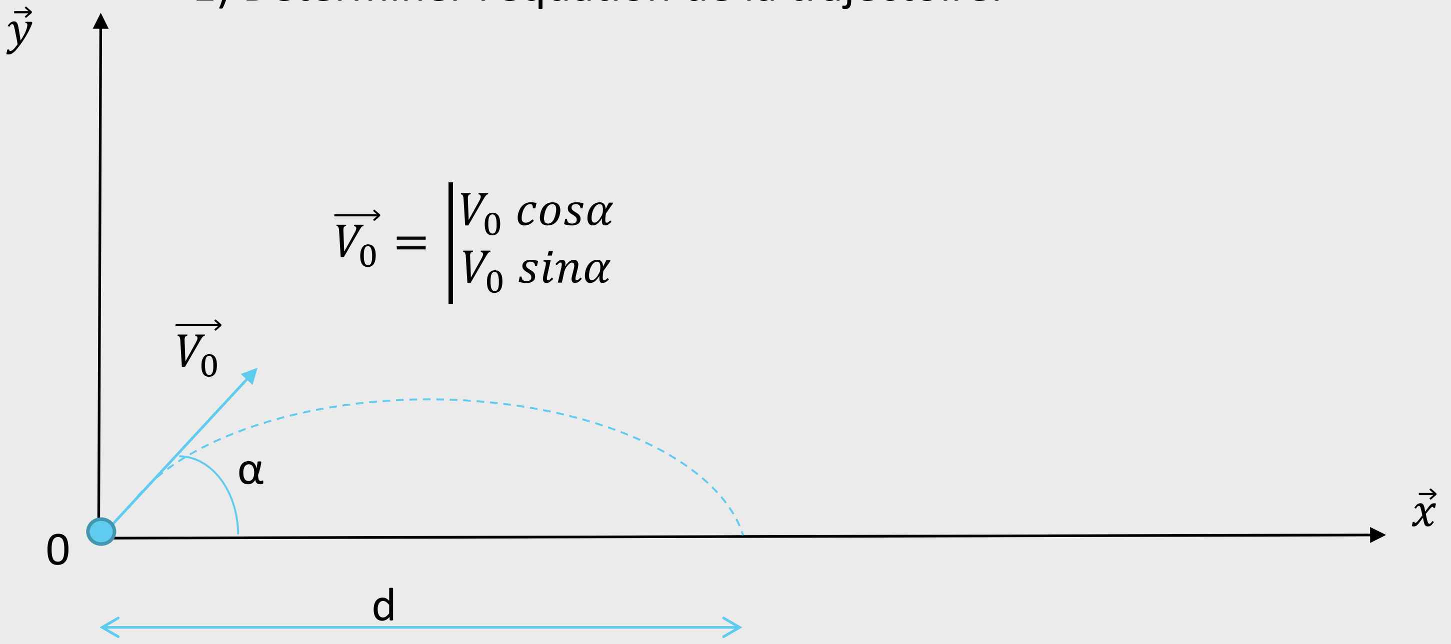
Chute libre d'un corps avec vitesse initiale

À t=0 le corps se trouve en 0 et est éjecté avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$.



1) Déterminer l'équation de la trajectoire.
2) A quelle distance d le corps retombera sur le sol

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.



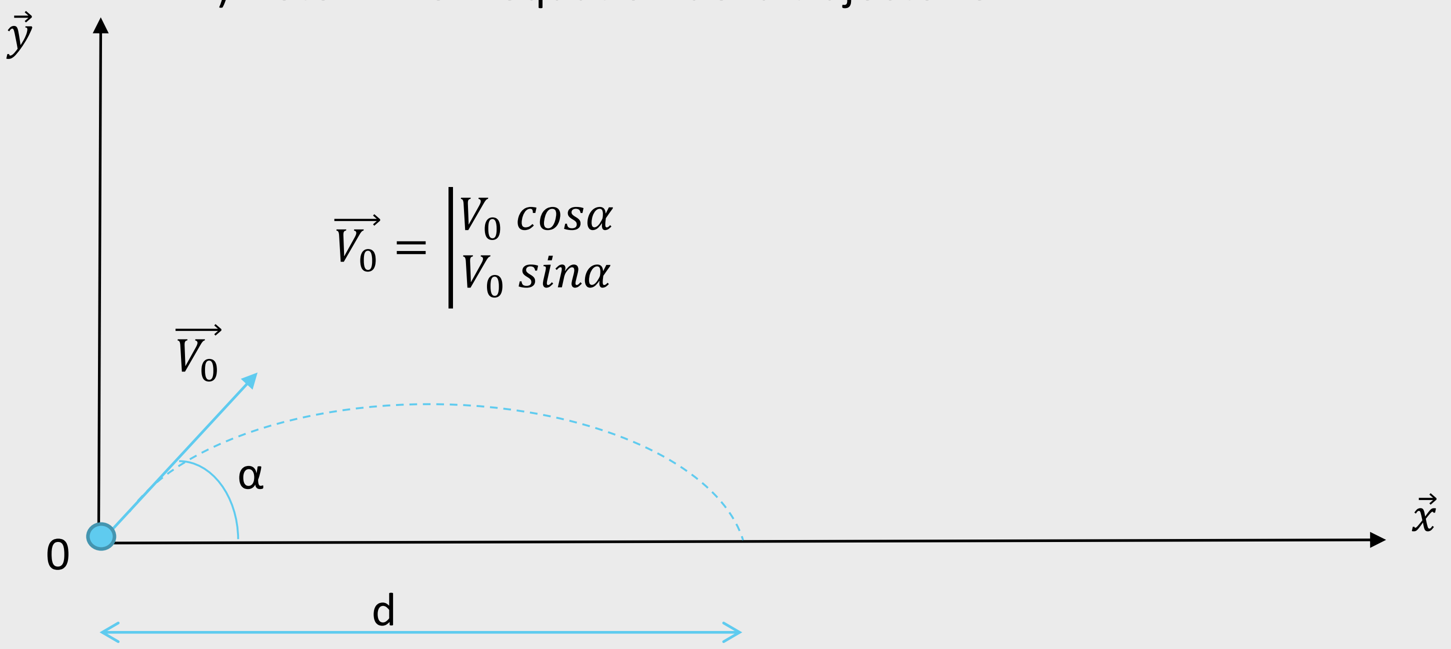
$$\vec{V_0} = \begin{vmatrix} V_0\, cos\alpha \\ V_0\, sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma_G} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}} \Rightarrow \vec{V_G} = \begin{vmatrix} C_1 \\ -gt + C_2 \end{vmatrix}$$

Or à t=0 on a $\vec{V_G} = \vec{V_0} = \begin{vmatrix} V_0\, cos\alpha \\ V_0\, sin\alpha \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = V_0\, cos\alpha \\ C_2 = V_0\, sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V_G} = \begin{vmatrix} V_0\, cos\alpha \\ -\, gt + V_0\, sin\alpha \end{vmatrix}}$$

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.



$$\vec{V_0} = \begin{vmatrix} V_0 \, cos\alpha \\ V_0 \, sin\alpha \end{vmatrix}$$

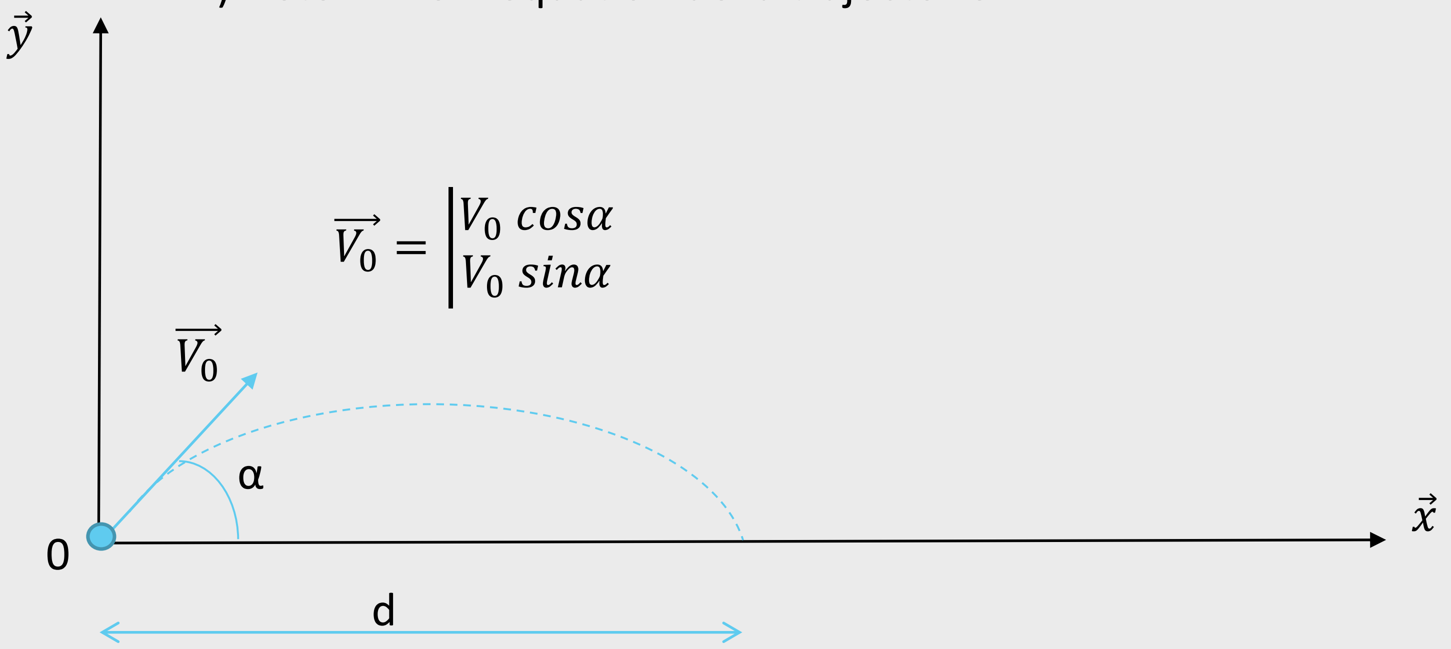
$$\vec{V_G} = \begin{vmatrix} V_0 \, cos\alpha \\ -\,gt + V_0 \, sin\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{OG} = \begin{vmatrix} V_0 \, cos\alpha \; t + C_3 \\ -\,g\dfrac{t^2}{2} + V_0 \, sin\alpha \; t + \; C_4 \end{vmatrix}$$

Or à t=0 on a $\vec{OG} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{OG} = \begin{vmatrix} V_0 \, cos\alpha \; t \\ -\,g\dfrac{t^2}{2} + V_0 \, sin\alpha \; t \end{vmatrix}}$$

Cinématique du solide : Applications

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.



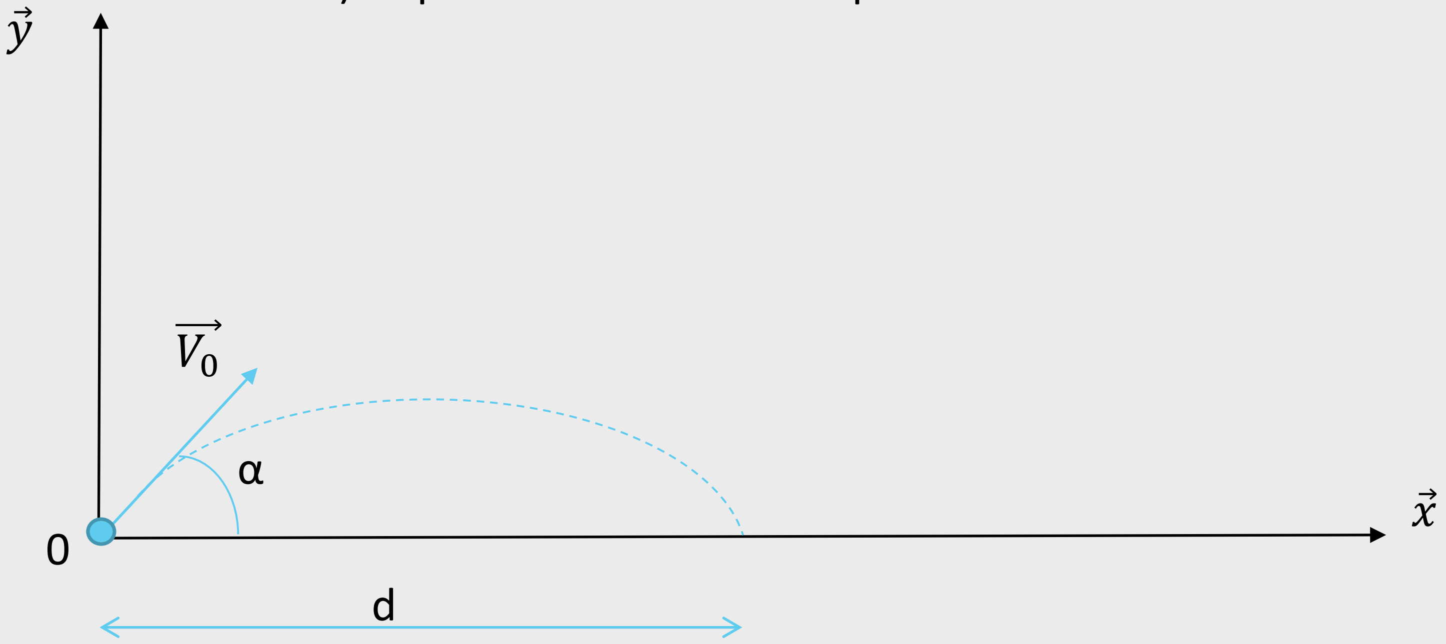
$$\vec{V_0} = \begin{vmatrix} V_0\ cos\alpha \\ V_0\ sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} V_0\ cos\alpha\ t \\ -\ g\,\dfrac{t^2}{2} + V_0\ sin\alpha\ t \end{vmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} x_G = V_0\ cos\alpha\ t & (1) \\ y_G = -\ g\,\dfrac{t^2}{2} + V_0\ sin\alpha\ t & (2) \end{cases}$$

(1) $\quad \mathrm{t} = \frac{x_G}{V_0\ cos\alpha}$

(2) $\quad \boxed{y_G = \left(-\dfrac{g}{2\ V_O^2\ cos^2\alpha}\right) x_G^2 + (\tan\alpha)\ x_G}$

2) A quelle distance d le corps retombera sur le sol



$$y_G = \left(-\frac{g}{2\,V_O^2\,cos^2\alpha}\right)x_G^2 + (\tan\alpha)\,x_G$$

À la retombé on a Y_G=0 $\Rightarrow$ $0 = \left(-\frac{g}{2\,V_O^2\,cos^2\alpha}\right)x_G + (\tan\alpha)$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_G = \mathrm{d} = \left(\frac{2\,V_O^2\,cos^2\alpha\,\tan\alpha}{g}\right)}$

Cinématique du solide

<u>problématique</u>

Lorsque l'on étudie un système composé de plusieurs solides auxquels on relie un repère, on se pose rapidement les questions suivantes :

- Quel est le mouvement du solide i par rapport au repère absolu
- Quelle est la vitesse du point p appartenant au solide j par rapport au repère absolu
- ………………..

<u>Problème :</u> si l'on connaît le mouvement du point P par rapport au repère R_i et si l'on connaît le mouvement du repère R_i par rapport au repère R_j, peut on connaitre le mouvement du point P par rapport au repère R_j ?

problématique

Cinématique du solide

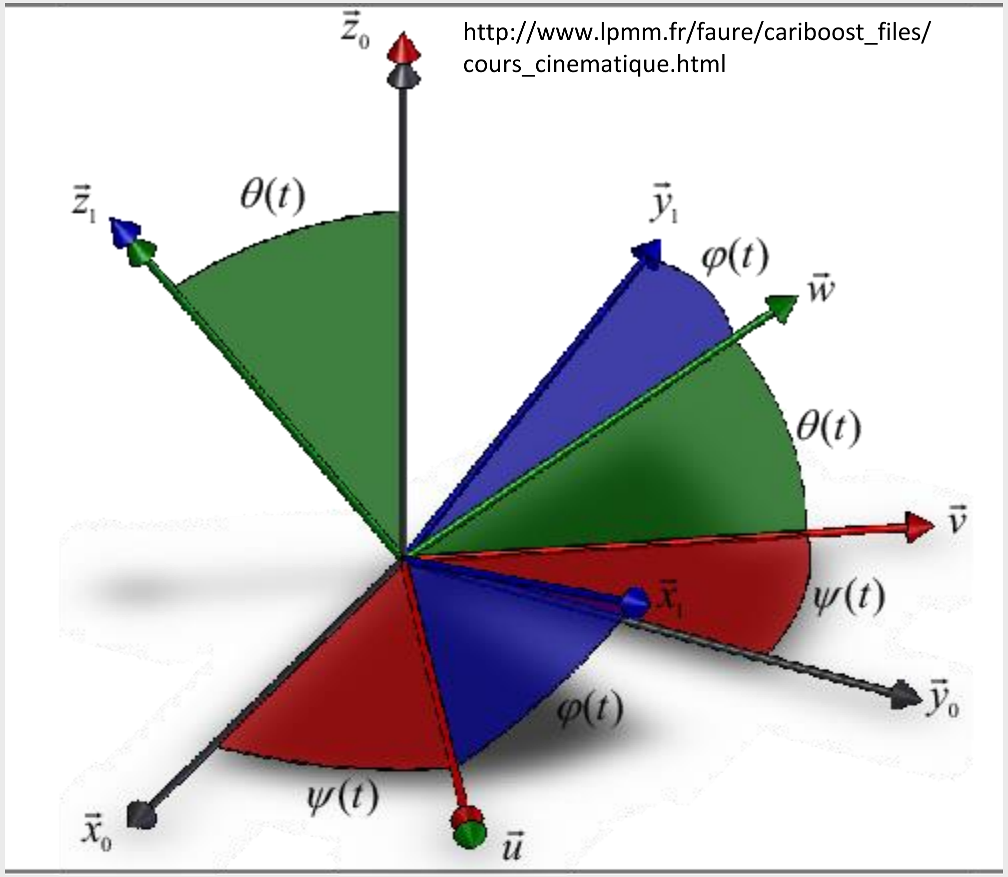
angles d'Euler

$R(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND

$R(O, \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND

$R(O, \vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{z_1})$ un ROND

$R(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un ROND



Cinématique du solide

figures de calcul

$R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\underline{\overrightarrow{z_0}})$ un ROND

$\Psi(t)$

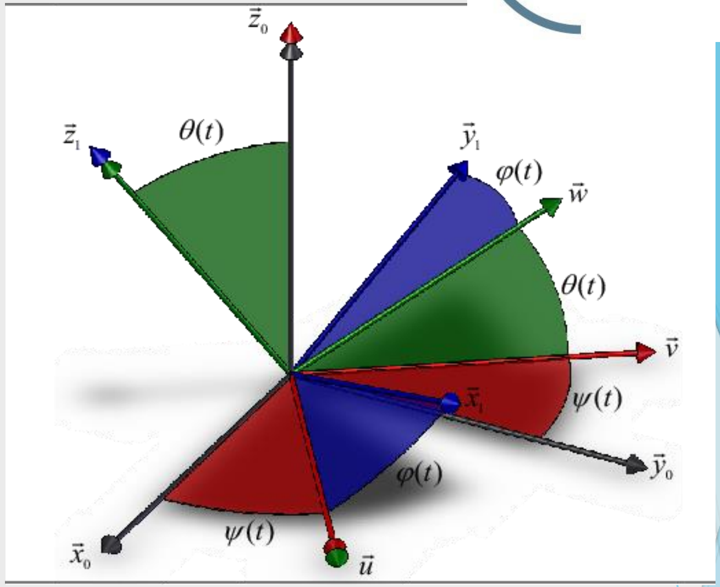
$R_1(O,\underline{\overrightarrow{u}},\overrightarrow{v},\underline{\overrightarrow{z_0}})$ un ROND

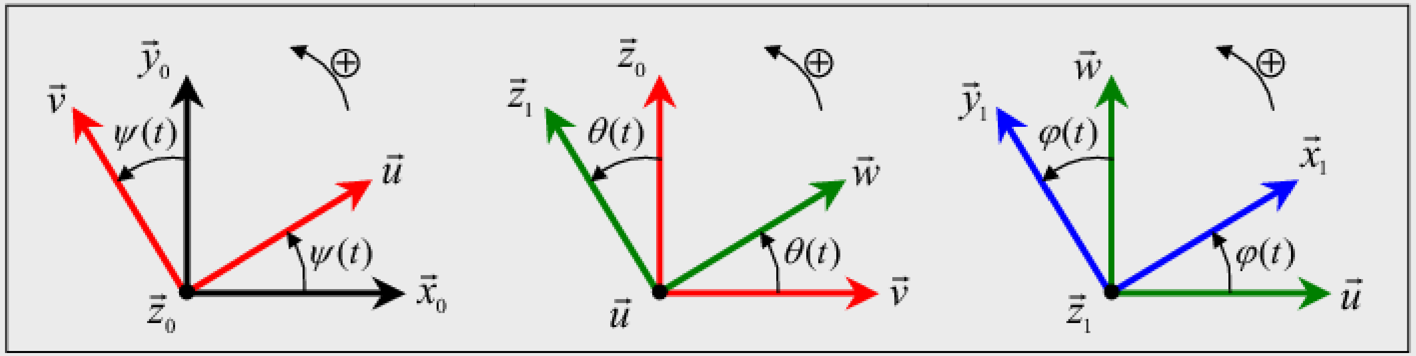
$\theta(t)$

$R_2(O,\underline{\overrightarrow{u}},\overrightarrow{w},\underline{\overrightarrow{z_1}})$ un ROND

$\phi(t)$

$R_3(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\underline{\overrightarrow{z_1}})$ un ROND





http://www.lpmm.fr/faure/cariboost_files/cours_cinematique.html

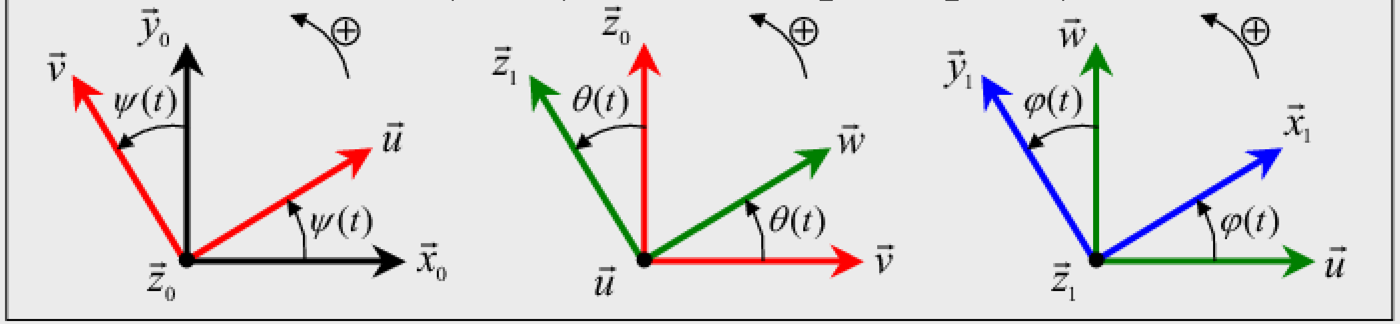
deux règles à respecter :

$\boxed{\text{angle} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]}$

la figure se fait dans le sens direct
(vecteur normal orienté vers vous)

figures de calcul

http://www.lpmm.fr/faure/cariboost_files/cours_cinematique.html



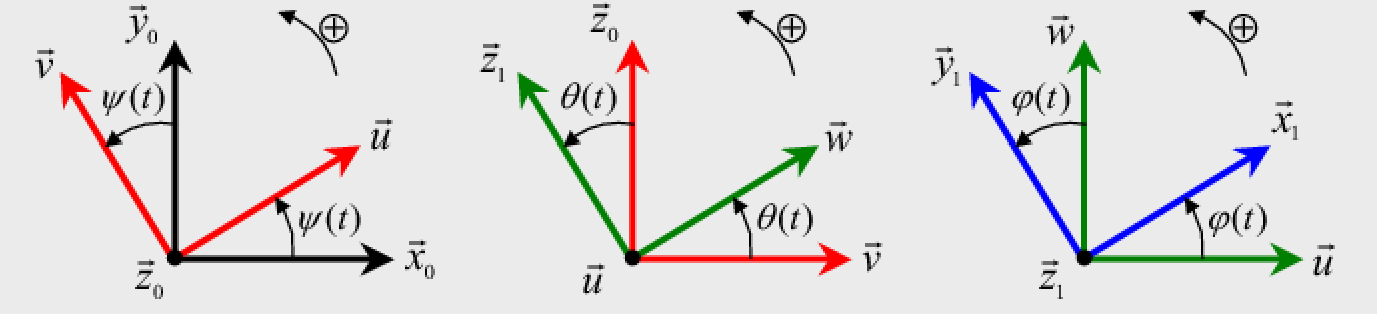
Ces figures de calcul vont nous permettre de calculer facilement tous les produits scalaires et vectoriels dont nous aurons besoin.

$\vec{u}.\vec{v} = ?$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = ?$
$\vec{u}.\overrightarrow{y_0} = ?$	$\vec{u} \wedge \overrightarrow{y_0} = ?$
$\vec{u}.\overrightarrow{y_1} = ?$	$\vec{u} \wedge \overrightarrow{y_1} = ?$
$\overrightarrow{x_1}.\vec{u} = ?$	$\overrightarrow{x_1} \wedge \vec{u} = ?$
$\overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{z_0} = ?$	$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_0} = ?$

centralelille IG2I

figures de calcul

http://www.lpmm.fr/faure/cariboost_files/cours_cinematique.html



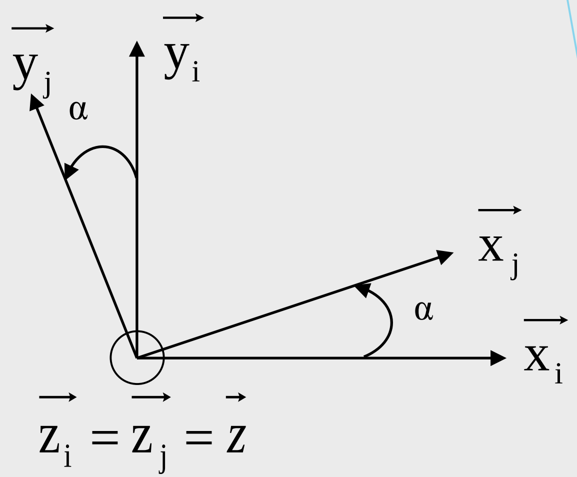
Ces figures de calcul vont nous permettre de calculer facilement tous les produits scalaires et vectoriels dont nous aurons besoin.

$\vec{u}.\vec{v}=0$	$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{z_0}$
$\vec{u}.\vec{y_0}=\cos(\frac{\pi}{2}-\psi)=\sin\psi$	$\vec{u}\wedge\vec{y_0}=\sin(\frac{\pi}{2}-\psi)\vec{z_0}=\cos\psi\ \vec{z_0}$
$\vec{u}.\vec{y_1}=\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)=-\sin\varphi$	$\vec{u}\wedge\vec{y_1}=\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)\vec{z_1}=\cos\varphi\ \vec{z_1}$
$\vec{x_1}.\vec{u}=\cos\varphi$	$\vec{x_1}\wedge\vec{u}=-\sin\varphi\ \vec{z_1}$
$\vec{y_1}.\vec{z_0}=\vec{y_1}.\left(\cos\theta\ \vec{z_1}+\sin\theta\ \vec{w}\right)$	$\vec{y_1}\wedge\vec{z_0}=\vec{y_1}\wedge\left(\cos\theta\ \vec{z_1}+\sin\theta\ \vec{w}\right)$
$=\sin\theta\cos\varphi$	$=\cos\theta\ \vec{x_1}-\sin\theta\sin\varphi\ \vec{z_1}$

Vecteur vitesse de rotation

Soient 2 Repères Orthonormés Directs (ROND)

$$R_i(O, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}) \text{ et } R_j(O, \vec{x_j}, \vec{y_j}, \vec{z_j})$$



Le vecteur vitesse de rotation du repère R_j par rapport au repère R_i est noté :

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_j/R_i) = \dot{\alpha}\,\vec{z}}$$

dérivation d’un vecteur

R_1 et R_2 deux Repères Orthonormés Directs (ROND)

$\vec{V}$ Un vecteur quelconque

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}}$$

En pratique, on choisit toujours R_2 tel que le vecteur soit fixe dans R_2 pour avoir une dérivée nulle

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_1} = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}}$$

Ces relations sont très importantes et seront constamment utilisées en cinématique. Elles permettent en effet de remplacer une dérivation vectorielle par un simple produit vectoriel

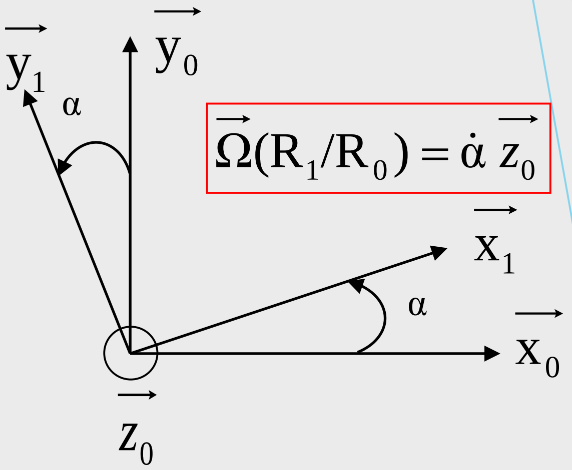
centralelille IG2I

dérivation d'un vecteur

$$\vec{V} = a(t)\,\vec{x_1} + b(t)\,\vec{y_1} + c(t)\,\vec{z_0}$$

$R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ et $R_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_0})$ deux ROND

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_0} = ?}$$



$$\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\alpha}\,\vec{z_0}}$$

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(a\,\vec{x_1} + b\,\vec{y_1} + c\,\vec{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(a\,\vec{x_1}\right)}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\left(b\,\vec{y_1}\right)}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\left(c\,\vec{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= \dot{a}\,\vec{x_1} + a\left[\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{b}\,\vec{y_1} + b\left[\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right]_{R_0} + \dot{c}\,\vec{z_0} + c\cancel{\left[\frac{d\vec{z_0}}{dt}\right]_{R_0}}$$

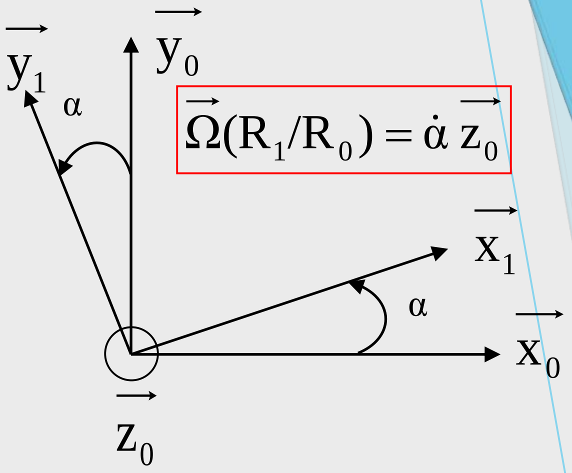
On peut toujours s'arranger pour appliquer la formule de dérivation des vecteurs sur les vecteurs de base

Cinématique du solide

dérivation d'un vecteur

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(R_1/R_0)} \wedge \vec{x}_1 = \vec{0} + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(R_1/R_0)} \wedge \vec{y}_1 = \vec{0} + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$$



$$\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0}$$

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{a}\,\vec{x}_1 + a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{b}\,\vec{y}_1 - b\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 + \dot{c}\,\vec{z}_0 = (\dot{a} - b\,\dot{\alpha})\vec{x}_1 + (\dot{b} + a\,\dot{\alpha})\vec{y}_1 + \dot{c}\,\vec{z}_0}$$

Cinématique du solide

Formule de distribution des vitesses

$R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un ROND lié à (S)

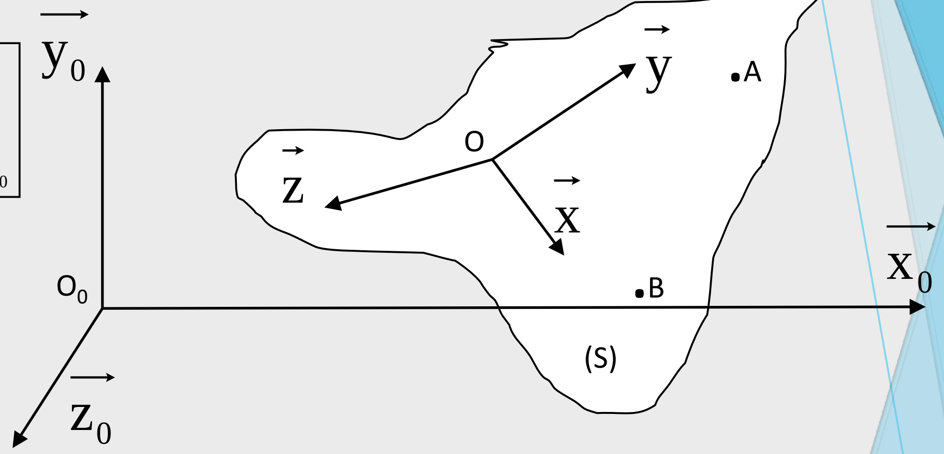
A et B deux points matériels de (S)

$R_0(O_0,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ un ROND absolu

(s) est en mouvement par rapport R_0

$$\boxed{\vec{V}(A\in S/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right]_{R_0}} \quad \boxed{\vec{V}(B\in S/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt}\right]_{R_0}}$$

$$\overrightarrow{O_0A}=\overrightarrow{O_0B}+\overrightarrow{BA}$$



$$\vec{V}(A\in S/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{O_0B}}{dt}\right]_{R_0}+\left[\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right]_{R_0}=\vec{V}(B\in S/R_0)+\left[\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right]_{R}+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{V}(B\in S/R_0)+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{BA}$$

$$\boxed{\vec{V}(A\in S/R_0)=\vec{V}(B\in S/R_0)+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{\Omega}(R/R_0)}$$

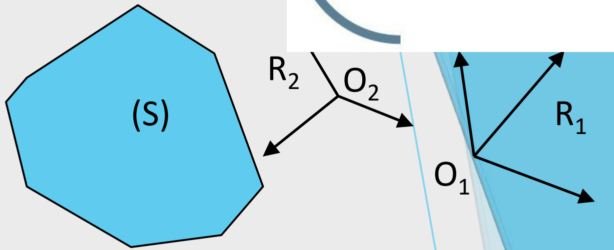
Formule de distribution/transport des vitesses

On passe par un autre point

Cinématique du solide

<u>composition des vitesses</u>

$R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un ROND $\quad R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un ROND



un solide (S) est en mvt par rapport à ces 2 repères qui sont également en mvt entre-eux

Soit P un point de (S) :

$$\overrightarrow{V}(P \in S/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right]_{R_1} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2P}}{dt}\right]_{R_1}$$

$$= \overrightarrow{V}(O_2 \in R_2/R_1) + \left[\frac{d\overrightarrow{O_2P}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{PO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(R_2/R_1)$$

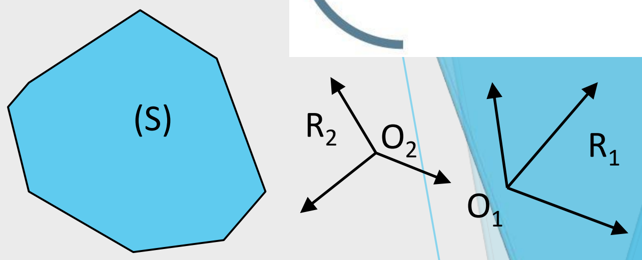
$$= \overrightarrow{V}(O_2 \in R_2/R_1) + \overrightarrow{V}(P \in S/R_2) + \overrightarrow{PO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(R_2/R_1)$$

$$= \overrightarrow{V}(P \in S/R_2) + \overrightarrow{V}(O_2 \in R_2/R_1) + \overrightarrow{PO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(R_2/R_1)$$

$$= \overrightarrow{V}(P \in S/R_2) + \overrightarrow{V}(P \in R_2/R_1)$$

<u>composition des vitesses</u>

$R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un ROND $\quad R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un ROND



un solide (S) est en mvt par rapport à ces 2 repères qui sont également en mvt entre-eux

Il en résulte que : $\boxed{\overrightarrow{V}(P \in S/R_1) = \overrightarrow{V}(P \in S/R_2) + \overrightarrow{V}(P \in R_2/R_1)}$

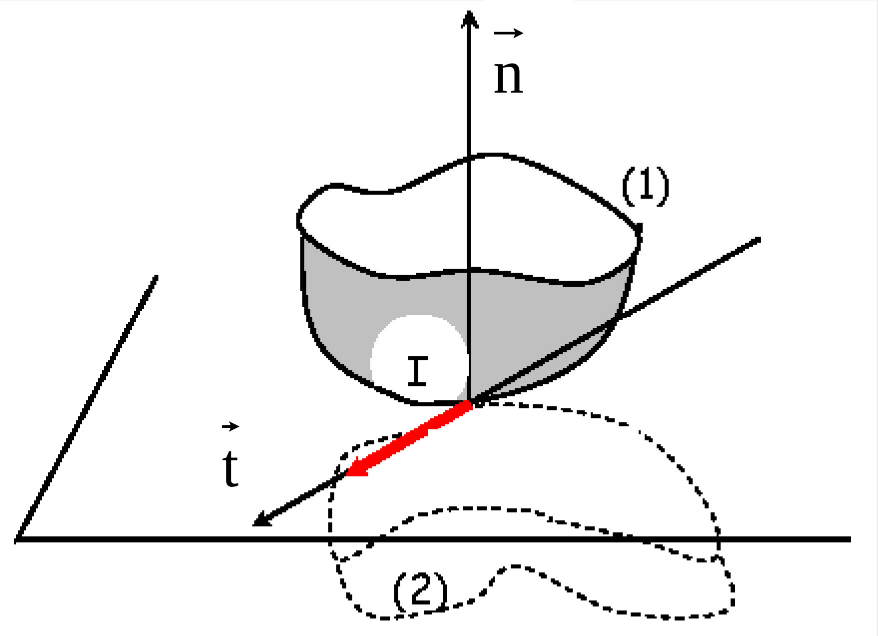
Si R_1 est le repère absolu alors : (Vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement)

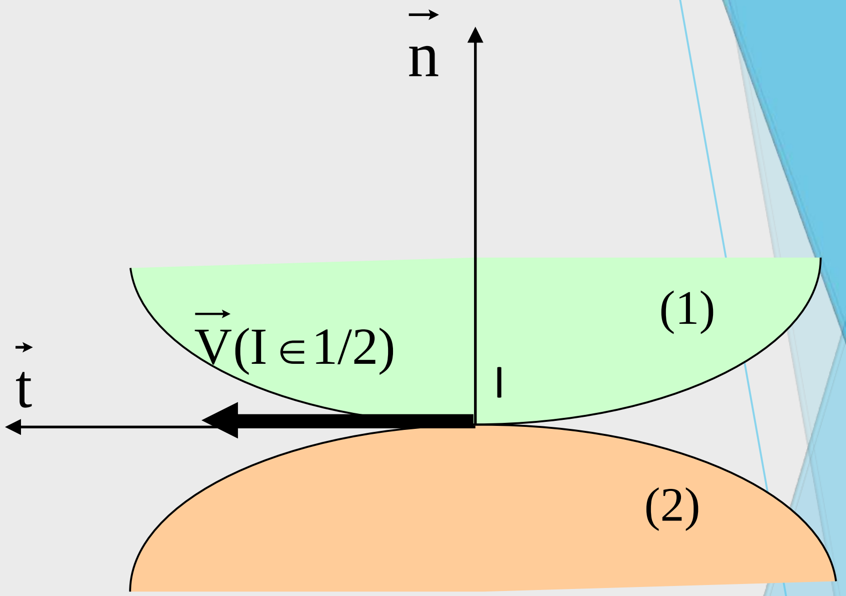
Généralisation

$$\boxed{\overrightarrow{V}(P \in R_9/R_0) = \overrightarrow{V}(P \in R_9/R_8) + \overrightarrow{V}(P \in R_8/R_7) + \overrightarrow{V}(P \in R_7/R_6) + \ldots + \overrightarrow{V}(P \in R_1/R_0)}$$

Formule de composition des vitesses
On passe par un autre repère

vitesse de glissement





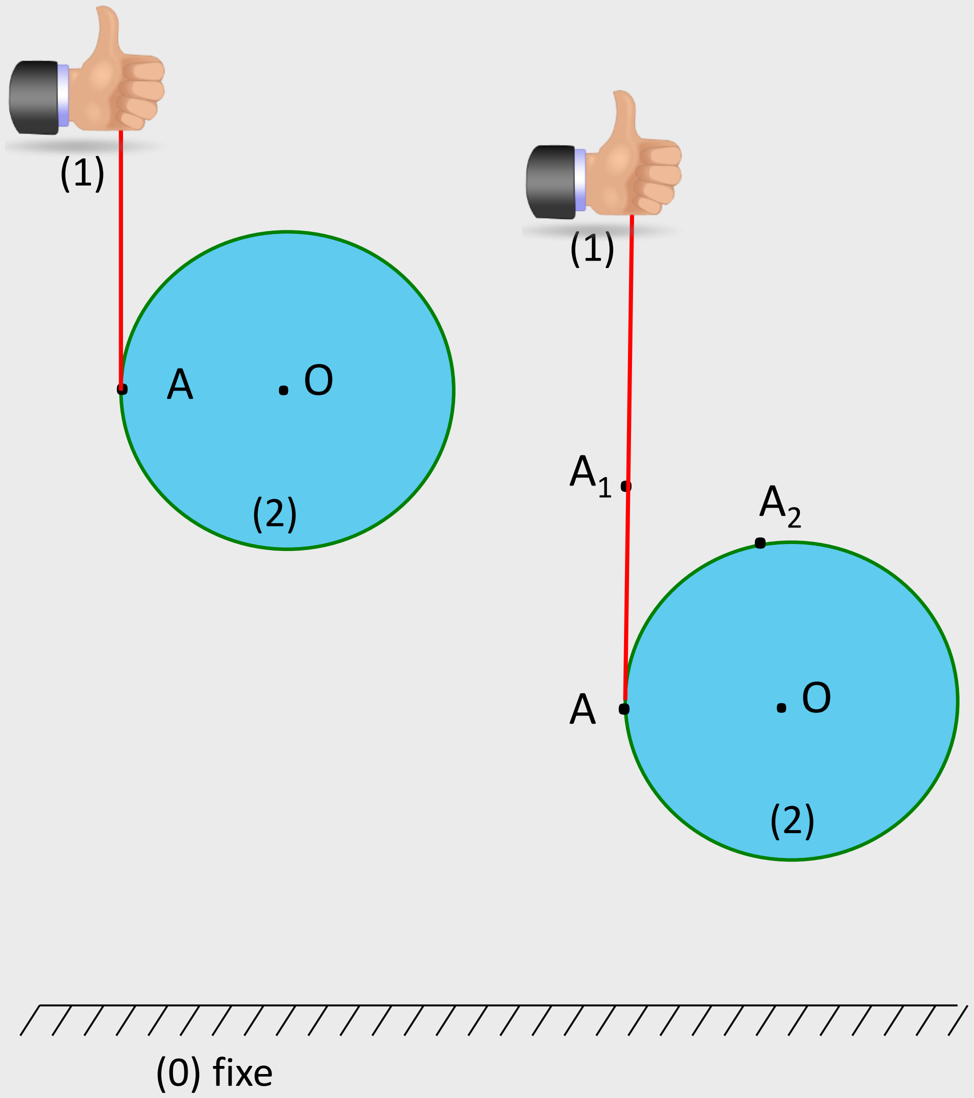
La vitesse de glissement au point de contact I entre les solides (1) et (2) se situe sur le plan tangent commun aux deux solides.

Condition roulement sans glissement

$$\boxed{\vec{V}(I \in 1/2) = \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}}$$

Cinématique du solide

attention aux différentes vitesses



R_0 un ROND lié au solide (0)
R_1 un ROND lié au solide (1)
R_2 un ROND lié au solide (2)

$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in 1/0)}$

$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in 2/0)}$

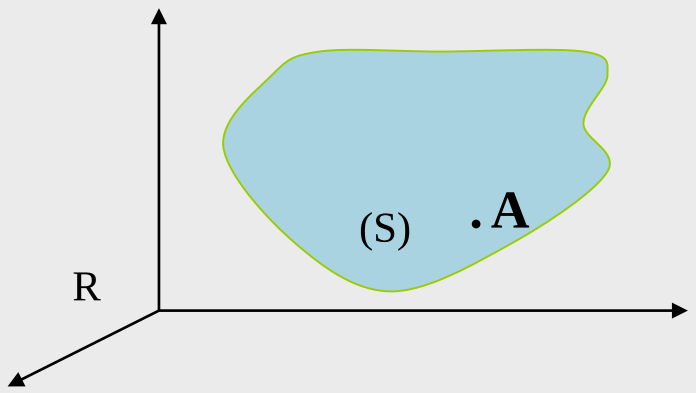
$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in 2/1)}$ Vitesse de glissement

$\boxed{\overrightarrow{V}(A/0)}$ Vitesse verticale = vitesse du pt O

Cinématique du solide

torseur cinématique

Soient un solide (S) et R un ROND



Tout comme le torseur statique représente les efforts appliqués à un solide, le torseur cinématique représente les mouvements d'un solide par rapport à un repère

Le **torseur cinématique** du solide (S), dans son mouvement par rapport à R, écrit au point A est défini comme suit :

$$\boxed{\mathcal{V}(S/R) = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(S/R) \\ \overrightarrow{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}}$$

Avec :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B \in S/R) = \overrightarrow{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R)}$$

Formule du transport des moments/vitesses

Cinématique du solide

<u>Comment calculer une vitesse :</u> $\overrightarrow{V(A \in S/R_2)} = ?$

1) Le point A a un mouvement de translation dans R2 :

oui, on dérive le vecteur position :

non, on passe au point 2

$$\vec{V}(A \in S/R_2) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt}\right]_{R_2}$$

2) Le solide S est directement lié à R2 (fig. de calcul) :

oui, on passe au point 3

non, on utilise la composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S/R_2) = \vec{V}(A \in S/R_1) + \vec{V}(A \in R_1/R_2)$$

3) On passe par un autre point **<u>fixe dans S</u>** :

$$\vec{V}(A \in S/R_2) = \vec{V}(B \in S/R_2) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}(S/R_2)$$

Cinématique du solide : Application

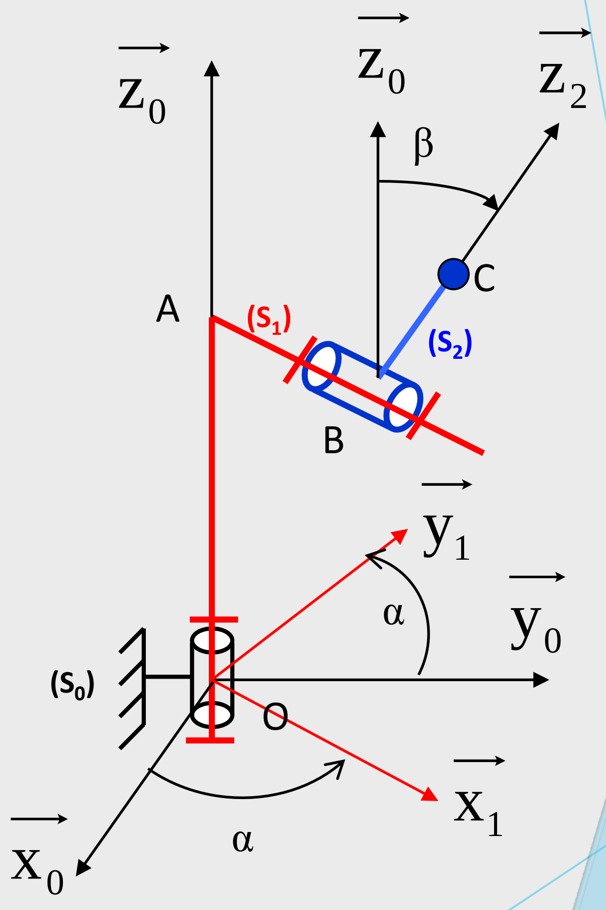
(S_1) est en liaison pivot avec (S_0) en O

(S_2) est en liaison pivot avec (S_1) en B

$R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au solide (S_0)

$R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au solide (S_1)

$R_2(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un ROND lié au solide (S_2)



<u>Données :</u>

OA = cte = a

AB = cte = b

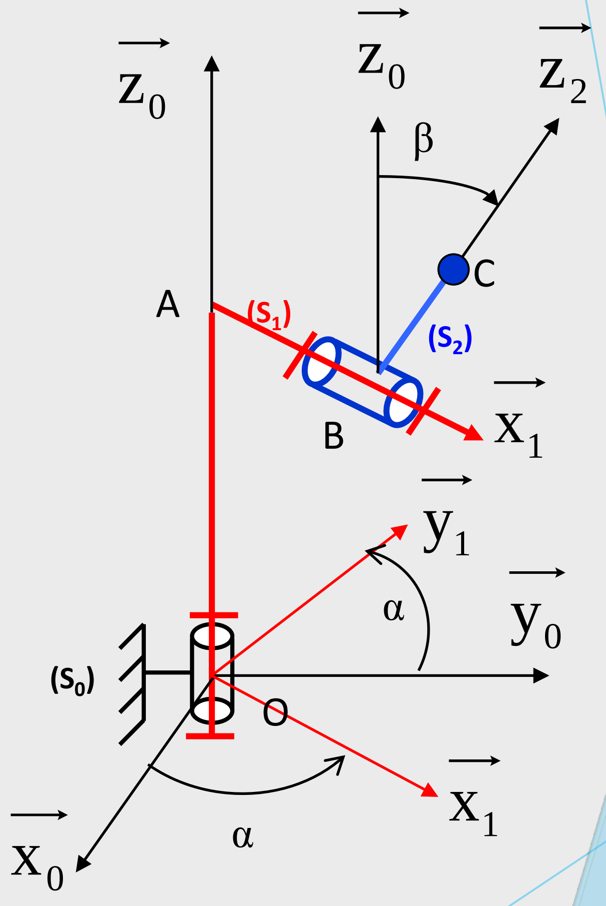
BC = cte = c

α et β paramètres
dépendants du temps

Cinématique du solide : Application

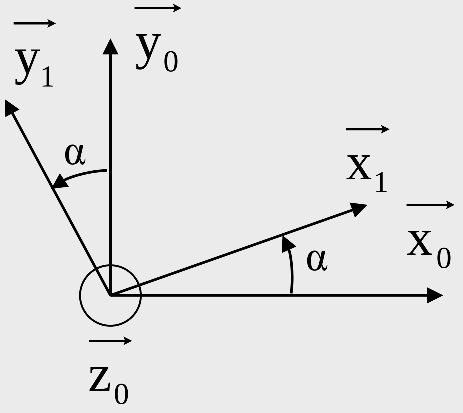
Questions :

1) Tracer les deux figures de calculs nécessaires à l'étude et écrire les vecteurs vitesses de rotations correspondants.
2) Déterminer le torseur cinématique en O du mouvement de (S_1) par rapport à R_0.
3) Déterminer le torseur cinématique en A du mouvement de (S_1) par rapport à R_0.
4) Déterminer le torseur cinématique en B du mouvement de (S_1) par rapport à R_0.
5) Déterminer la vitesse du point C appartenant à (S_2) par rapport à R_1.
6) Déterminer la vitesse du point C appartenant à (S_2) par rapport à R_0.
7) Déterminer le torseur cinématique en C du mouvement de (S_2) par rapport à R_0
8) Déterminer l'accélération du point C appartenant à (S_2) par rapport à R_0

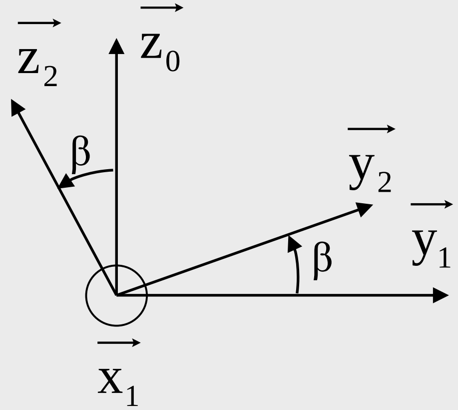


Cinématique du solide : Application

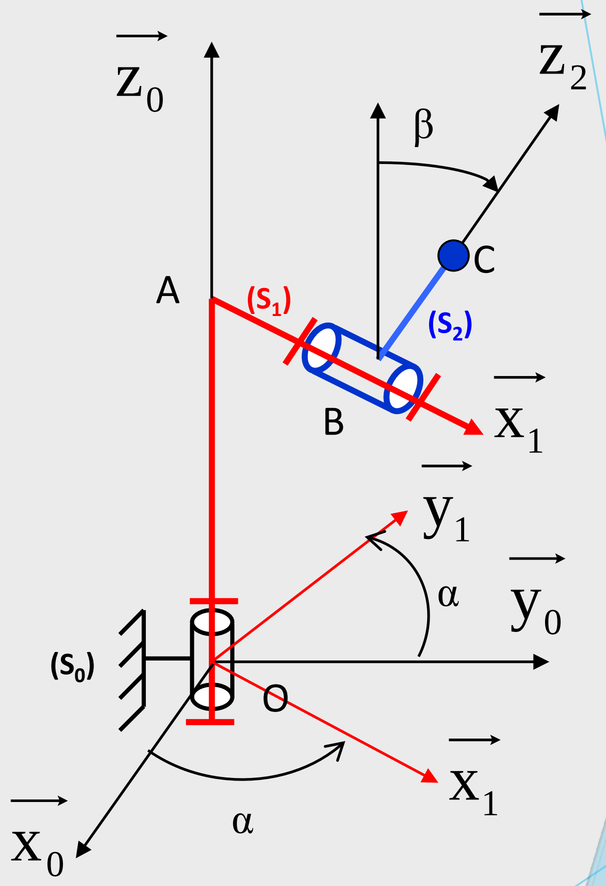
1)



$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$



$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\,\vec{x}_1$$



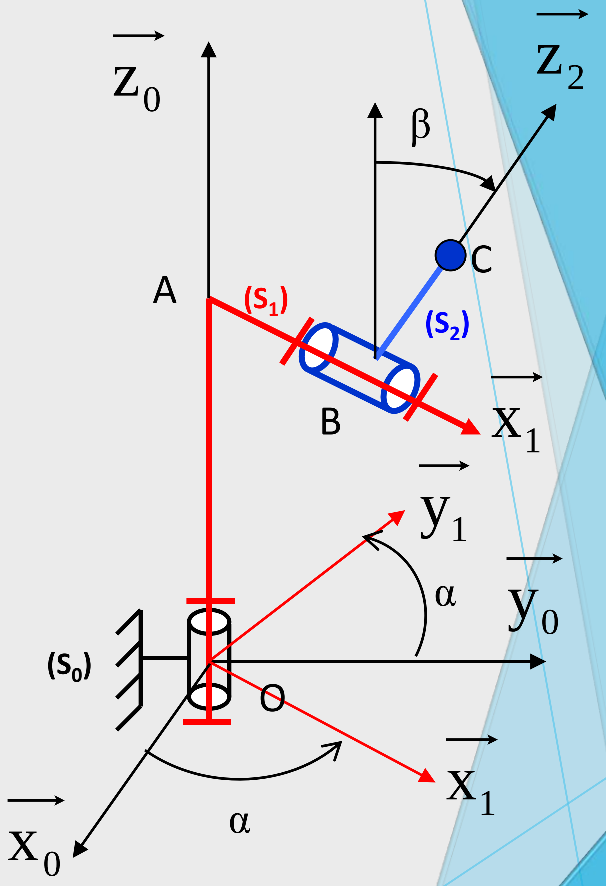
$$\boxed{\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \dot{\beta}\,\vec{x}_1}$$

2) $$\mathcal{V}(S_1/R_0) = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(O \in S_1/R_0) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\, \vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$$

3) $$\mathcal{V}(S_1/R_0) = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(A \in S_1/R_0) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\, \vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$$

Car $$\vec{V}(A \in S_1/R_0) = \vec{V}(O \in S_1/R_0) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}(S_1/R_0)$$
$$= \vec{0} - a\, \vec{z_0} \wedge \dot{\alpha}\, \vec{z_0} = \vec{0}$$

Attention on passe par un autre point qui appartient réellement à (S_1) ou qui est fixe dans R_1



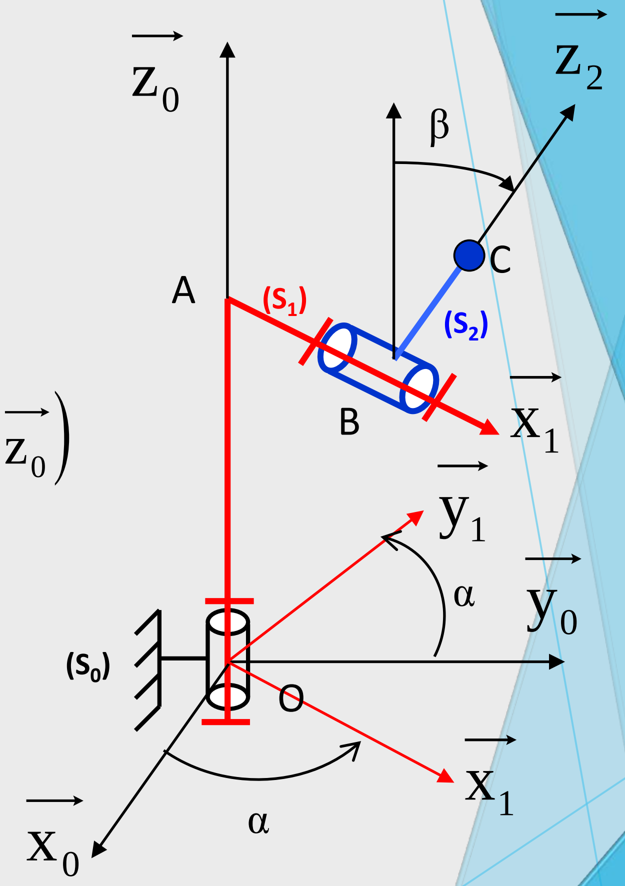
Cinématique du solide : Application

4) $$\boxed{\mathcal{V}(S_1/R_0) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(B \in S_1/R_0) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z_0} \\ b\,\dot{\alpha}\,\vec{y_1} \end{Bmatrix}_B}$$

Car $$\vec{V}(B \in S_1/R_0) = \vec{V}(O \in S_1/R_0) + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega}(S_1/R_0)$$
$$= \vec{0} + \left(-b\,\vec{x_1} - a\,\vec{z_0}\right) \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z_0} = -b\dot{\alpha}\left(\vec{x_1} \wedge \vec{z_0}\right) - a\dot{\alpha}\left(\vec{z_0} \wedge \vec{z_0}\right)$$
$$= b\,\dot{\alpha}\,\vec{y_1}$$

5) $$\vec{V}(C \in S_2/R_1) = \vec{V}(B \in S_2/R_1) + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{\Omega}(S_2/R_1)$$
$$= -c\,\vec{z_2} \wedge \dot{\beta}\,\vec{x_1} = -c\,\dot{\beta}\,\vec{y_2}$$

$$\boxed{\vec{V}(C \in S_2/R_1) = -c\,\dot{\beta}\,\vec{y_2}}$$



Cinématique du solide : Application

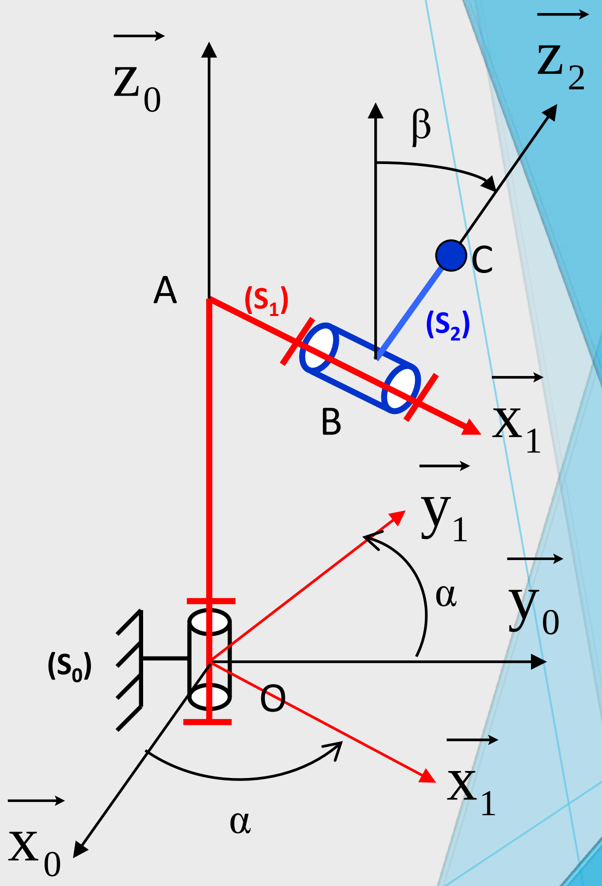
6)

$$\vec{V}(C \in S_2/R_0) = \vec{V}(C \in S_2/R_1) + \vec{V}(C \in S_1/R_0)$$

$$= -c\,\dot{\beta}\,\vec{y_2} + \vec{V}(A \in S_1/R_0) + \vec{CA} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$$

$$= -c\,\dot{\beta}\,\vec{y_2} + (-c\vec{Z_2} - b\vec{x_1}) \wedge \dot{\alpha}\,\vec{Z_0}$$

$$= -c\,\dot{\beta}\,\vec{y_2} + c\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x_1} + b\dot{\alpha}\,\vec{y_1}$$



$$\boxed{\vec{V}(C \in S_2/R_0) = -c\,\dot{\beta}\,\vec{y_2} + c\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x_1} + b\dot{\alpha}\,\vec{y_1}}$$

7)

$$\mathcal{V}(S_2/R_0)=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)\\ \overrightarrow{V}(C\in S_2/R_0)\end{Bmatrix}_C$$

$$=\begin{Bmatrix}\dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_0}+\dot{\beta}\,\overrightarrow{x_1}\\ (c\,\dot{\alpha}\sin\beta\,)\overrightarrow{x_1}+(b\,\dot{\alpha})\,\overrightarrow{y_1}-(c\,\dot{\beta})\,\overrightarrow{y_2}\end{Bmatrix}_C$$

8)

$$\overrightarrow{\Gamma(C\in S_2/R_0)}=\left[\frac{d\overrightarrow{V(C\in S_2/R_0)}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\left(c\dot{\alpha}\sin\beta\overrightarrow{x_1}\right)}{dt}\right]_{R_0}+\left[\frac{d\left(b\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}\right)}{dt}\right]_{R_0}-\left[\frac{d\left(c\dot{\beta}\overrightarrow{y_2}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$=\left(c\ddot{\alpha}\sin\beta+2c\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta-b\dot{\alpha}^2\right)\overrightarrow{x_1}+\left(c\dot{\alpha}^2\sin\beta+b\ddot{\alpha}\right)\overrightarrow{y_1}-\left(c\ddot{\beta}\right)\overrightarrow{y_2}-\left(c\dot{\beta}^2\right)\overrightarrow{z_2}$$

FIN