

Statique et Cinématique des solides indéformables

Plan

I) Statique du solide

- * Notion de forces et de moments
- * Notion de torseurs
- * Torseur statique
- * Modélisation des forces mécaniques
- * Modélisation des liaisons parfaites
- * Principe Fondamental de la Statique (PFS)
- * Application

II) Cinématique du solide

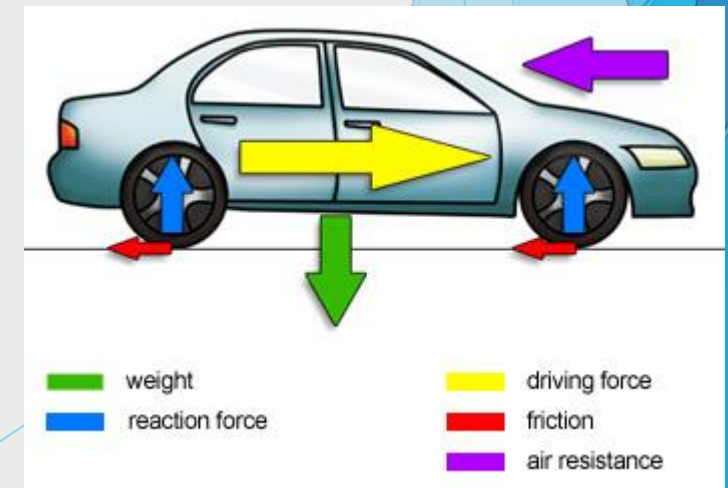
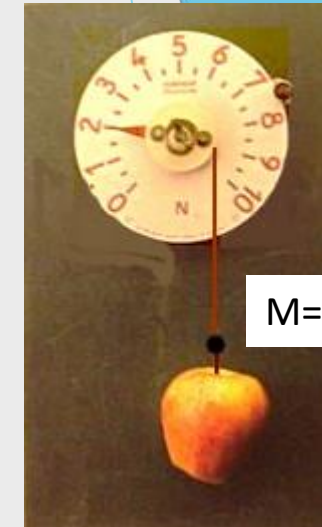
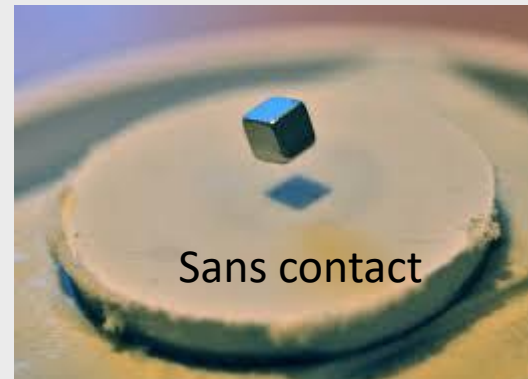
- * Notion de référentiels
- * Trajectoire - vecteur position et déplacement
- * Vecteur vitesse/accélération
- * Mouvement rectiligne et circulaire
- * Applications (cinématique du point)
- * Cinématique du solide
- * Application

STATIQUE DU SOLIDE

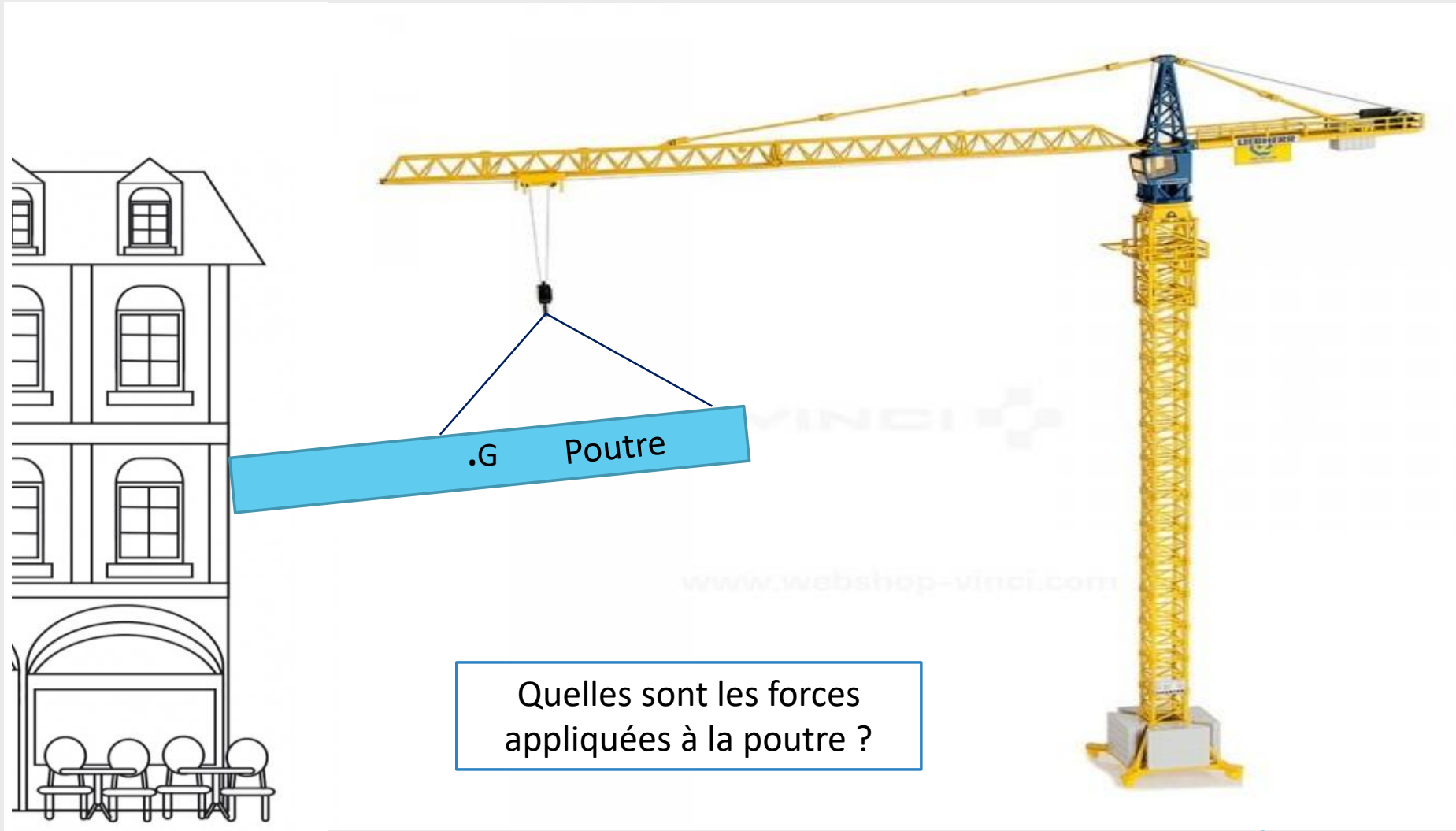
Qu'est ce qu'une force ? :

- Une force est une action mécanique entre deux objets. Il n'y a pas automatiquement de contact entre les objets (force à distance).
- L'unité est le Newton N ($P=mg$: $1\text{N}=1\text{kg m/s}^2$: 1N représente la force capable de faire accélérer une masse de 1 kg d'une vitesse de 1 m/s chaque seconde : 1N représente également l'action d'une masse d'environ 0,1 kg sur le sol (car $g=9,81\text{ m/s}^2$))
- Une force est caractérisée par :
 - Sa norme (sa valeur en Newton)
 - Sa direction
 - Son sens
 - Son point d'application

Elle se modélise donc
par un **vecteur**



Qu'est ce qu'une force ? :



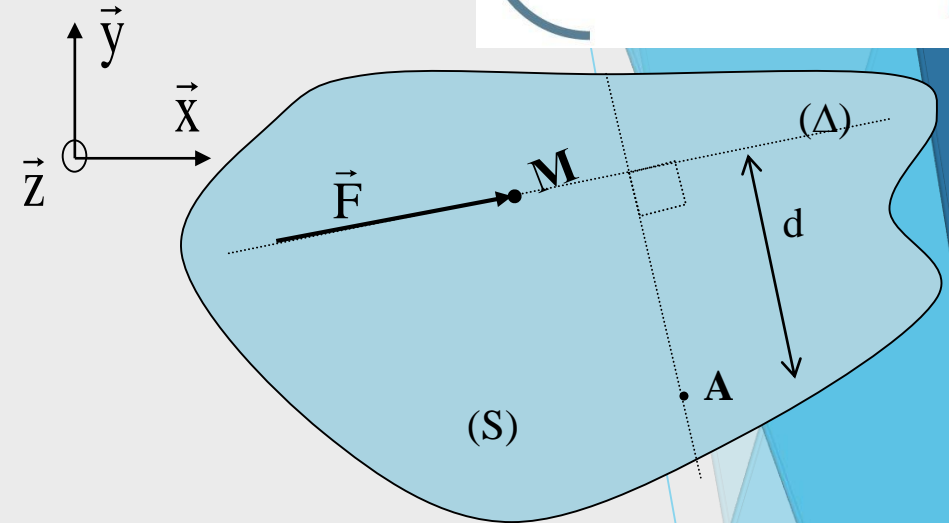
Qu'est ce qu'un moment ? :

Approche intuitive :

* La force essaie-t-elle de faire tourner le solide (S) autour du point A ?

* Que va « ressentir » le point A s'il résiste à la rotation ?

* De quoi dépend l'intensité de cette « action » ?

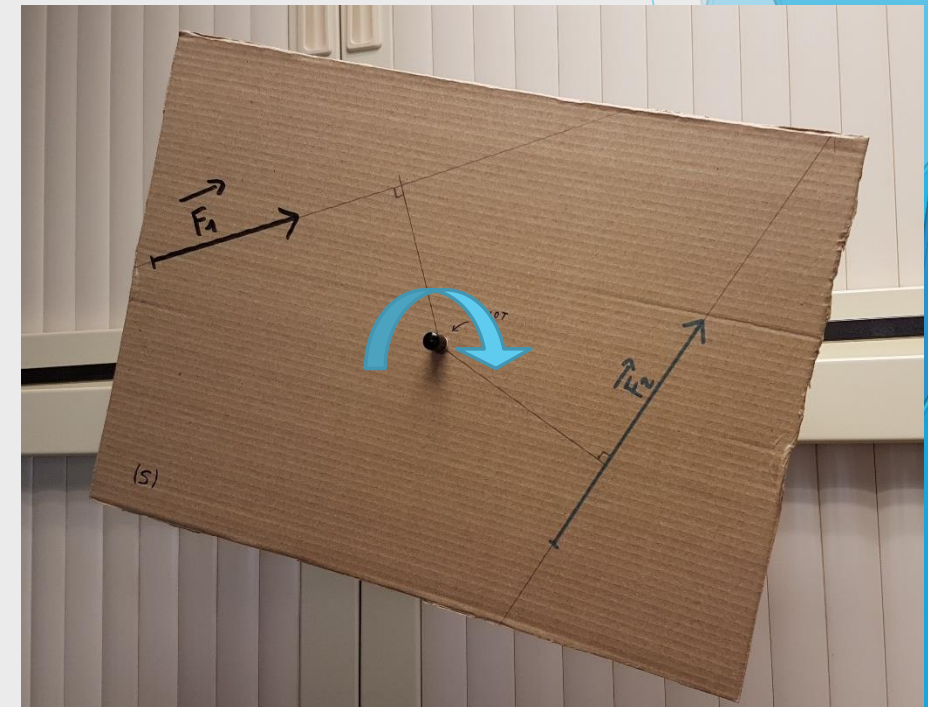


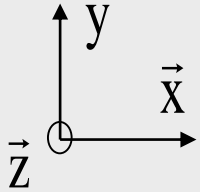
Définition :

➡ Cette action est le moment au point A dû à la force \vec{F}

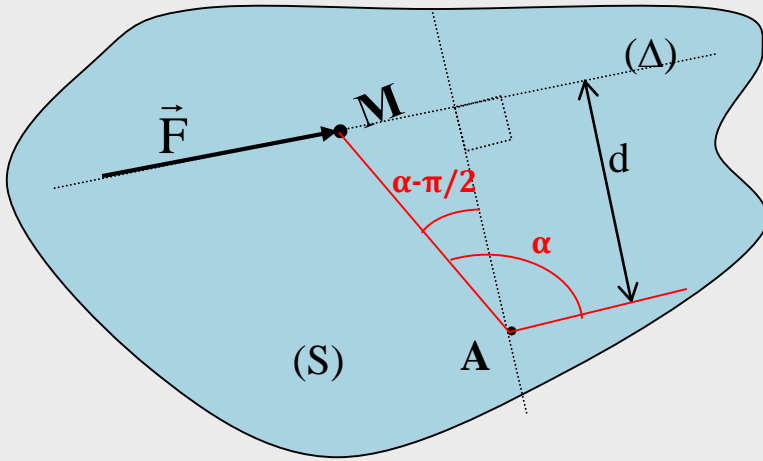
$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{si} \quad \vec{F} = \vec{0} \text{ ou si } A \in (\Delta)$$





Montrons que le moment dépend de l'intensité de F et de la distance d



$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = -(\overline{AM} \cdot F \cdot \sin(\alpha)) \cdot \vec{z} = -F \cdot \overline{AM} \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{z}$$

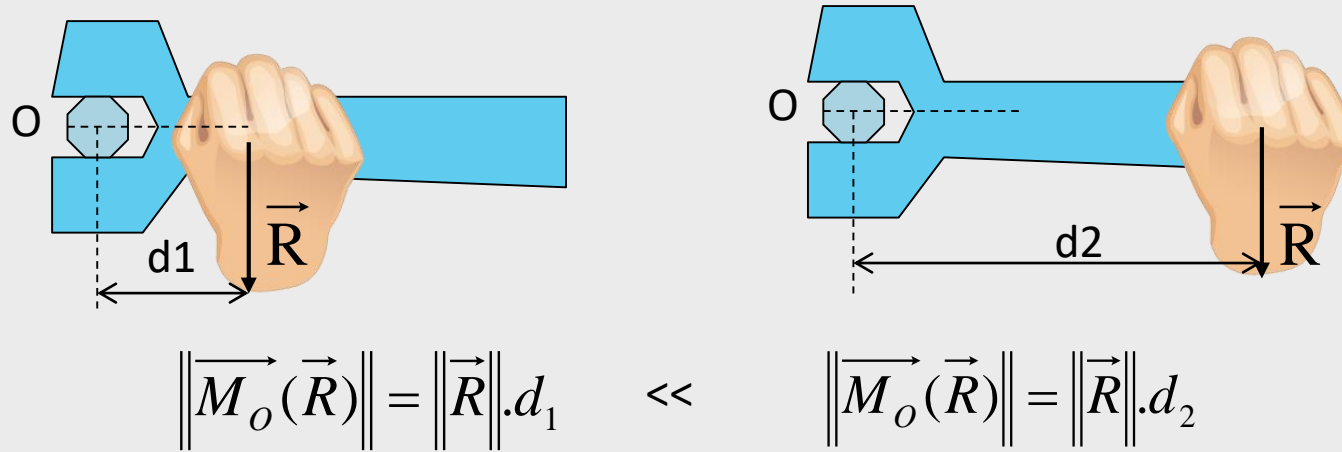
$$\text{or, } \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{\overline{AM}}$$

$$\text{donc, } \overline{AM} \cdot \sin(\alpha) = d$$

il en résulte que $\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = -F \cdot d \cdot \vec{z}$

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{si } \vec{F} = \vec{0} \text{ ou } d = 0 \text{ (si } A \in (\Delta))$$

Illustration du moment :



Formule du transport des moments

$$\vec{M}_B(\vec{R}) = \vec{M}_A(\vec{R}) + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$



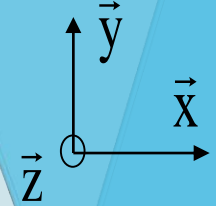
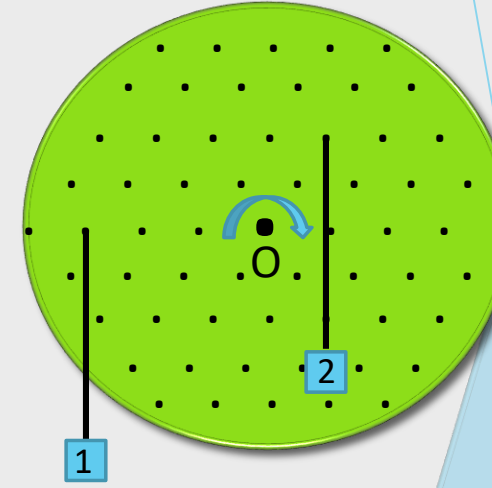
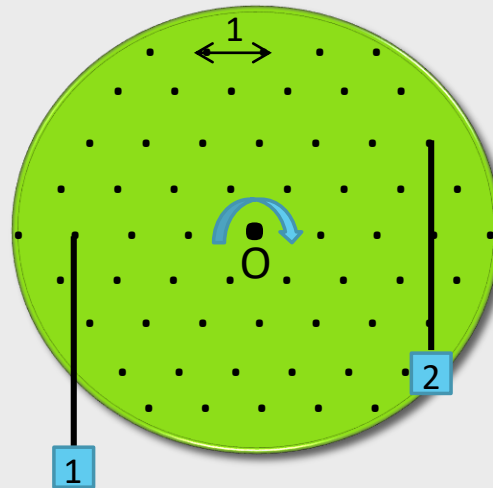
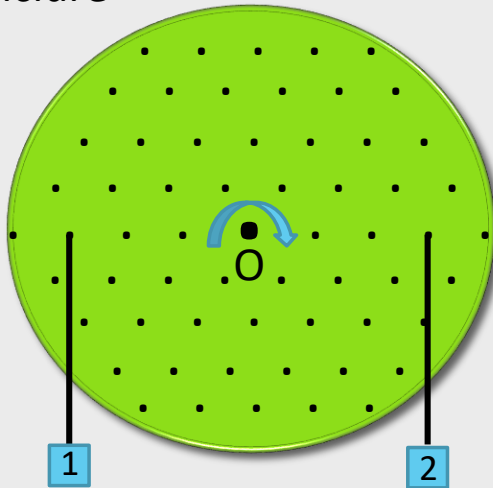
Statique du solide : Notion de forces et de moments

Illustration du moment :

Soit un plateau circulaire en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) , 2 masses m identiques sont positionnées à différents endroits de plateau. (la distance horizontale entre 2 positions est de 1 unité)

Pour chacun des cas suivants :

- * Est ce que le disque est en équilibre?
- * Donnez la valeur des moments en O.
- * Conclure



Statique du solide : Notion de forces et de moments

Illustration du moment :

Pour chacun des cas suivants, déterminez la masse 2 pour que le plateau soit en équilibre.

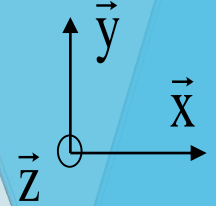
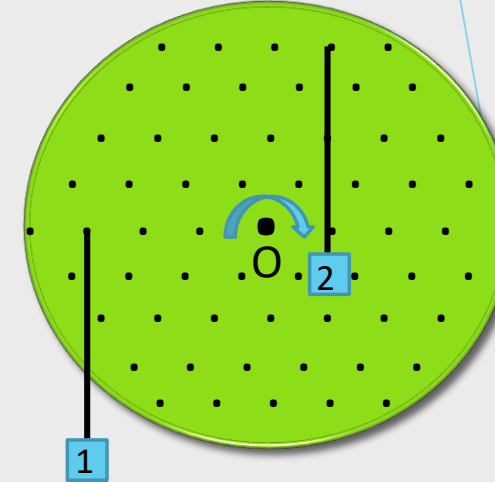
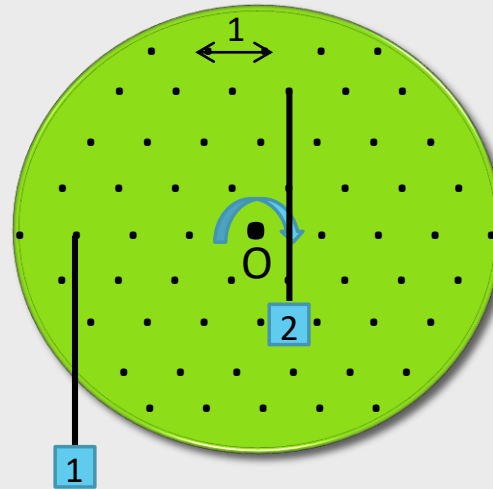
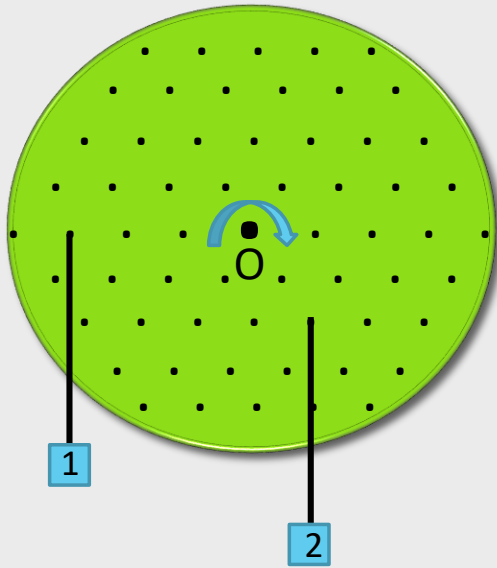
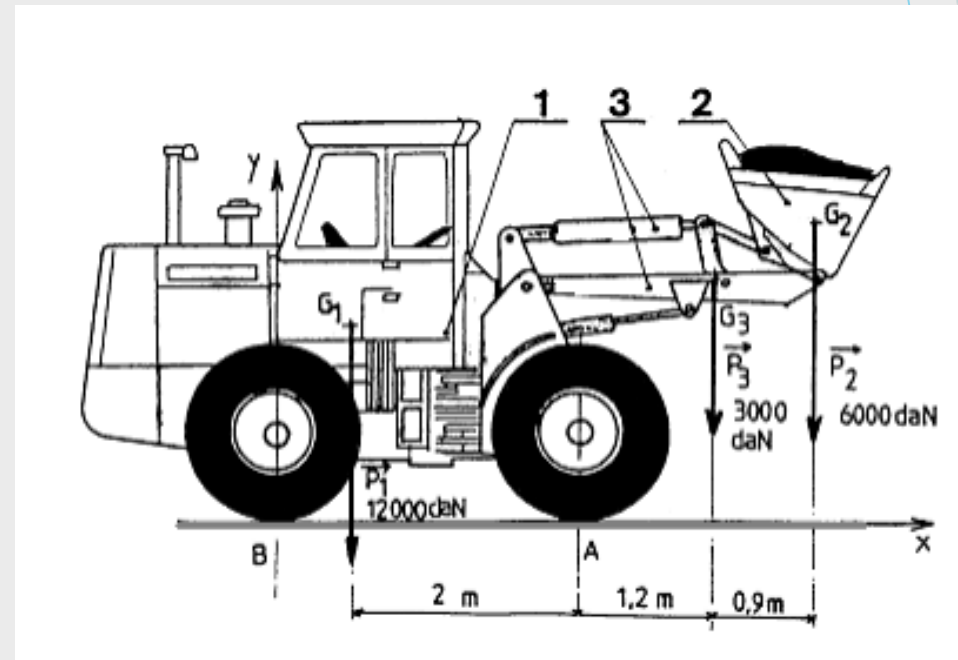
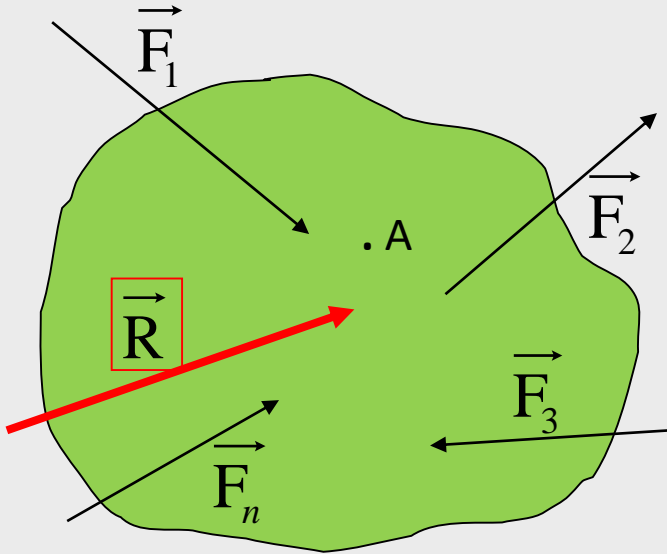


Illustration du moment :

Le tracteur va-t-il basculer vers l'avant ?



Force et moment résultant :



La résultante des forces \vec{F}_i est :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

Le moment résultant en A est :

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i)$$

Définition d'un torseur :

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides (**le torseur cinématique**) et les actions mécaniques qu'il subit de la part de son environnement extérieur (**le torseur statique**). On découvrira en L2 le **torseur cinétique** et le **torseur dynamique**

Un torseur est composé d'une résultante et d'un moment et vérifie la formule du transport des moments.

Le torseur associé à la résultante \vec{R} écrit au point A est noté :

Résultante
du torseur

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A(\vec{R}) \end{array} \right\}_A \equiv \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B(\vec{R}) \end{array} \right\}_B$$

Résultante
du torseur

Moment en **A** de
la résultante

Moment en **B** de
la résultante

Avec

$$\vec{M}_B(\vec{R}) = \vec{M}_A(\vec{R}) + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$



Babar

Opérations sur les torseurs :

Soient $\tau_1 = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_A(R_1)} \end{array} \right\}_A$ et $\tau_2 = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_A(R_2)} \end{array} \right\}_A$

$$\tau_1 + \tau_2 = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_A(R_1)} + \overrightarrow{M_A(R_2)} \end{array} \right\}_A \quad \tau_1 = \tau_2 \quad \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_A(R_1)} = \overrightarrow{M_A(R_2)} \end{array} \right.$$

$$\lambda \tau_1 = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \overrightarrow{R_1} \\ \lambda \overrightarrow{M_A(R_1)} \end{array} \right\}_A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

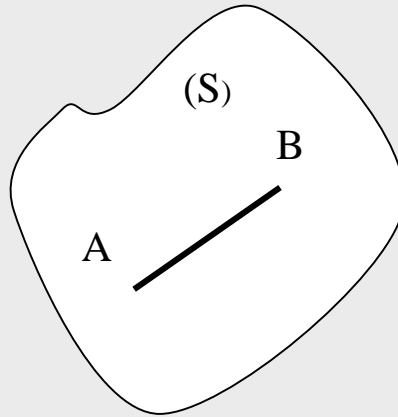
$$\tau_1 = 0 \quad \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A(R_1)} = \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\tau_1 \otimes \tau_2 = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{M_A(R_2)} + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{M_A(R_1)}$$

ce produit de torseur (également appelé commoment) est indépendant du point
pour écrire les deux torseurs pourvu que ce soit le même

Solide indéformable :

On appelle solide indéformable l'ensemble des points matériels tel que la distance entre deux points quelconques de ce solide reste constante au cours du temps et du chargement



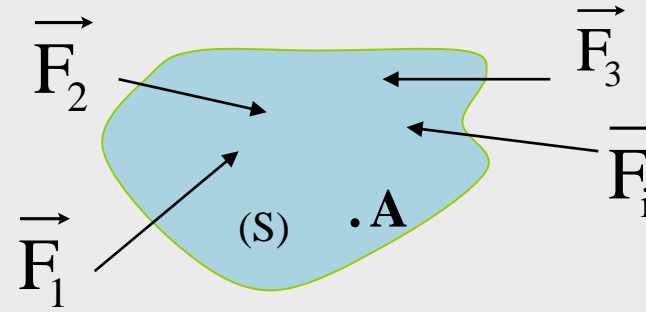
$$AB = \text{Constante}$$

En général il n'existe pas de solide indéformable. Nous supposons que les variations de distances sont suffisamment faibles pour pouvoir les négliger :

Cours de Mécanique du solide indéformable

Définition du torseur statique :

Soit un solide (S) soumis à un certain nombre d'efforts extérieurs



Le **torseur statique** de la force \vec{F}_i sur le solide (S) écrit au point A est défini comme suit :

$$\mathcal{F}(\vec{F}_i \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_i \\ \vec{M}_A(\vec{F}_i) \end{array} \right\}$$

Force mécanique \vec{F}_i

Moment en A due à la force \vec{F}_i

Avec :

$$\vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{F}_i) + \vec{BA} \wedge \vec{F}_i$$

Formule du transport des moments

Cas de la pesanteur :

La gravité terrestre exerce en tout point matériel d'un solide une force élémentaire \vec{p}

tel que $\|\vec{p}\| = mg$

avec m la masse du point matériel et g la gravité terrestre ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$).

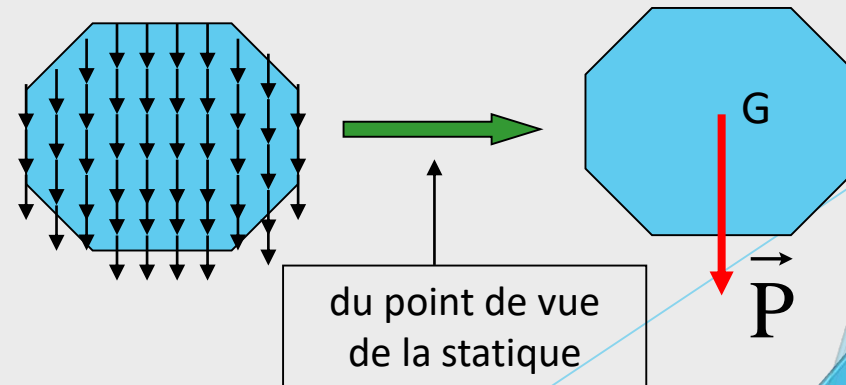
Ces forces \vec{p} sont représentées par une force \vec{P}

appelée poids et appliquée au centre de gravité G du solide.

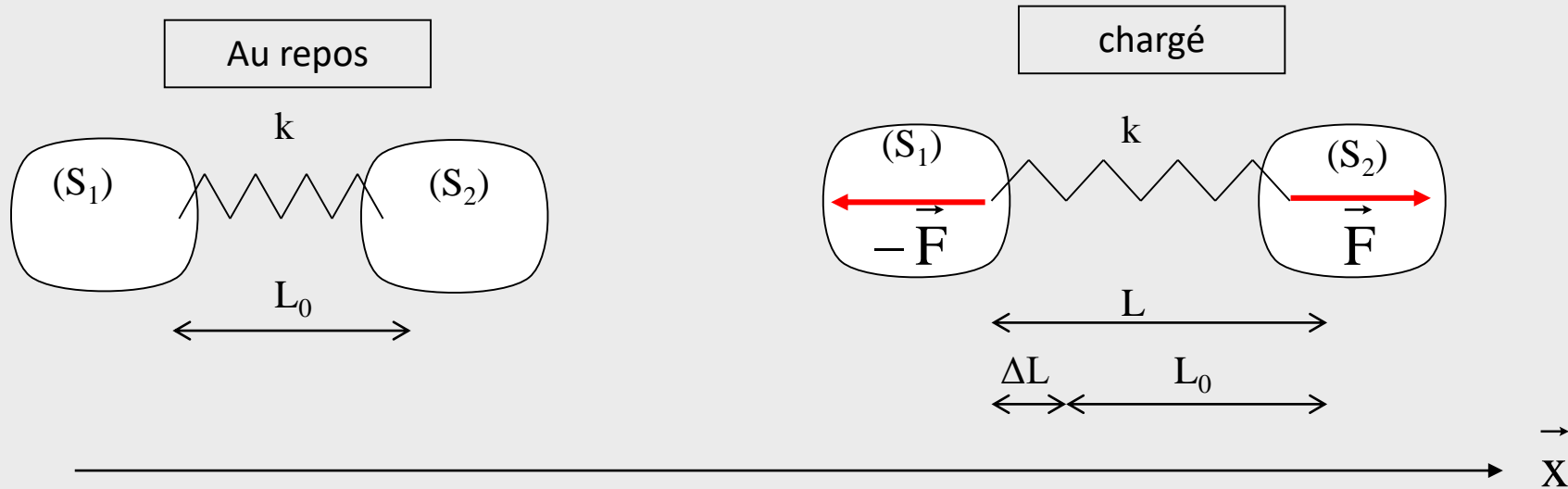
$$\mathcal{F}(g \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} = M\vec{g} \\ \vec{O} \end{array} \right\}_G$$

Avec M la masse du solide (S)

Équilibre des
moments au point G

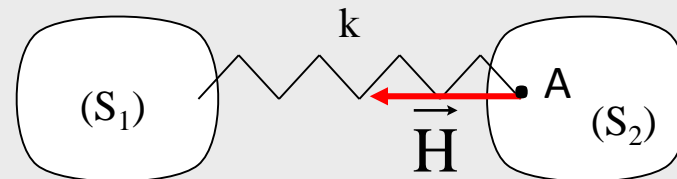


cas du ressort de raideur k :

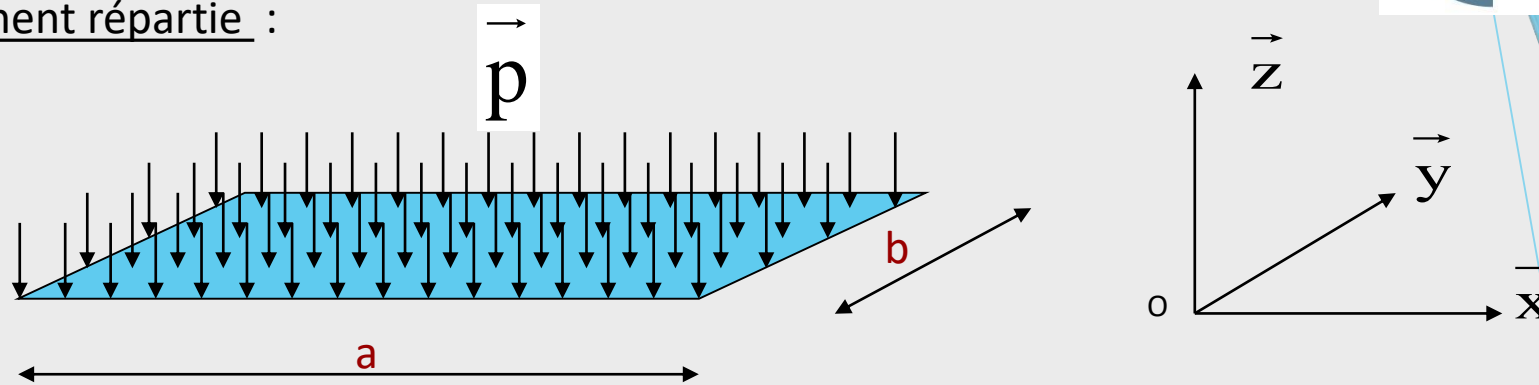


Si on regarde l'action du ressort sur (S_2) on obtient :

$$\mathcal{F}(\text{res} \rightarrow S_2) = \begin{cases} \vec{H} = -k \Delta L \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}_A$$



cas de la force uniformément répartie :



Si la force répartie (surfactive) est uniforme et vaut p alors :

$$\vec{R} = \int_S d\vec{f} = \int_S \vec{p}(x, y) \cdot ds = \int_S \vec{p} \cdot ds = \vec{p} \int_S ds = \vec{p} \cdot S = -pS \vec{z}$$

Donc $R = pS$



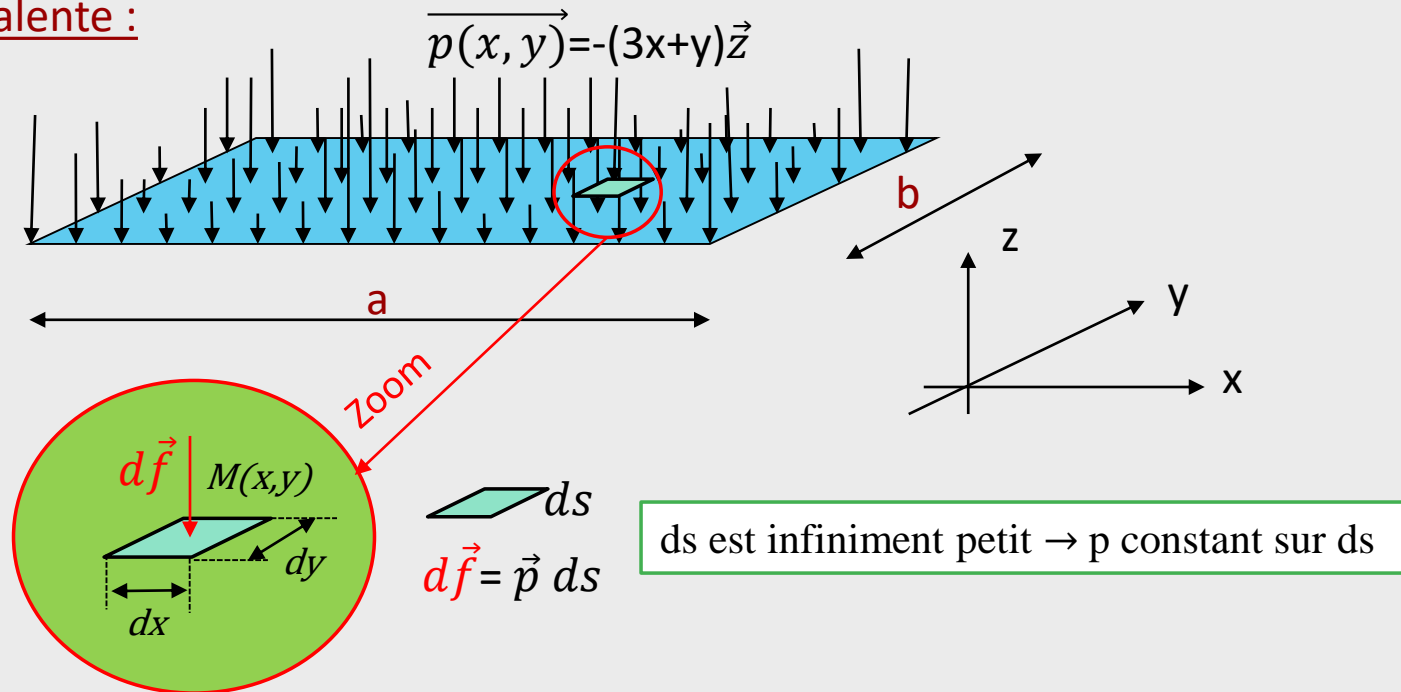
Et si la force n'est pas uniformément répartie ???



Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas de la force non uniformément répartie :

* Calculez la force équivalente :

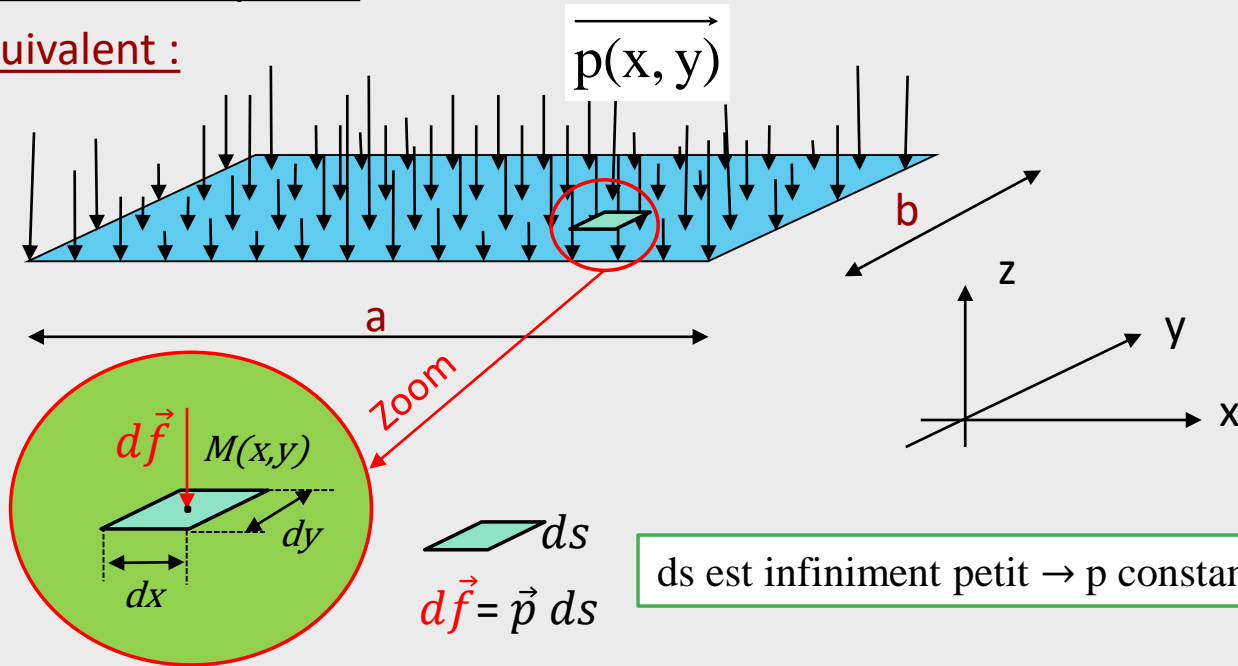


Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas de la force non uniformément répartie :

* Calculez le moment équivalent :

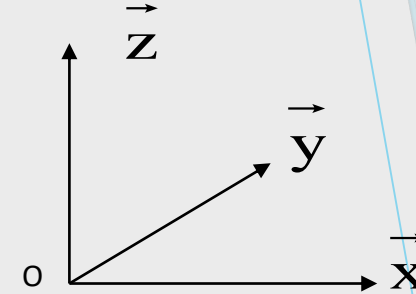
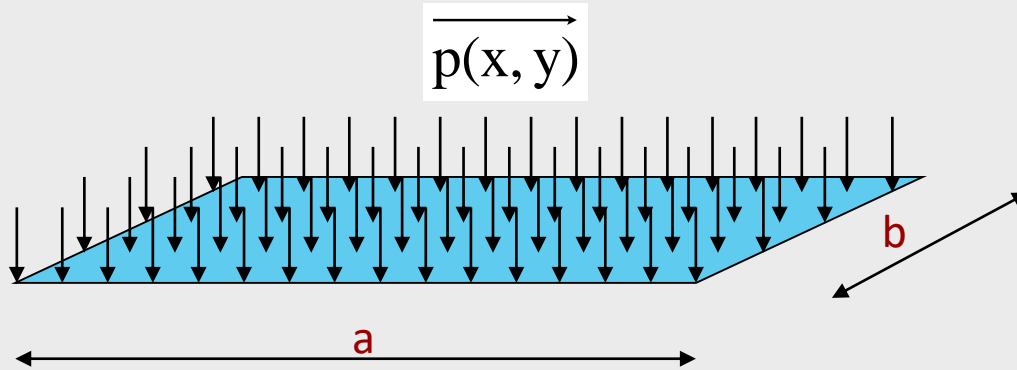
$$\vec{p}(x, y) = -(3x + y)\vec{z}$$



Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

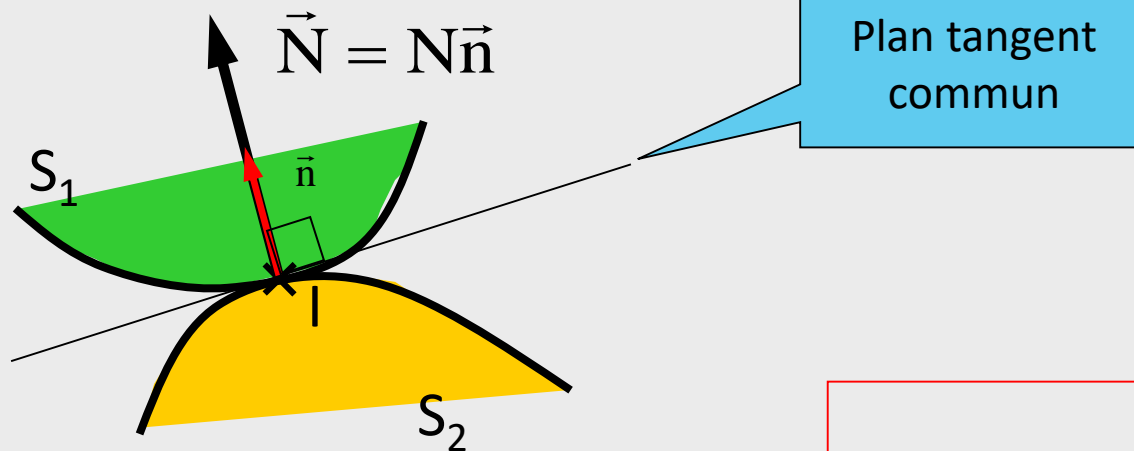
cas de la force non uniformément répartie :

* torseur :



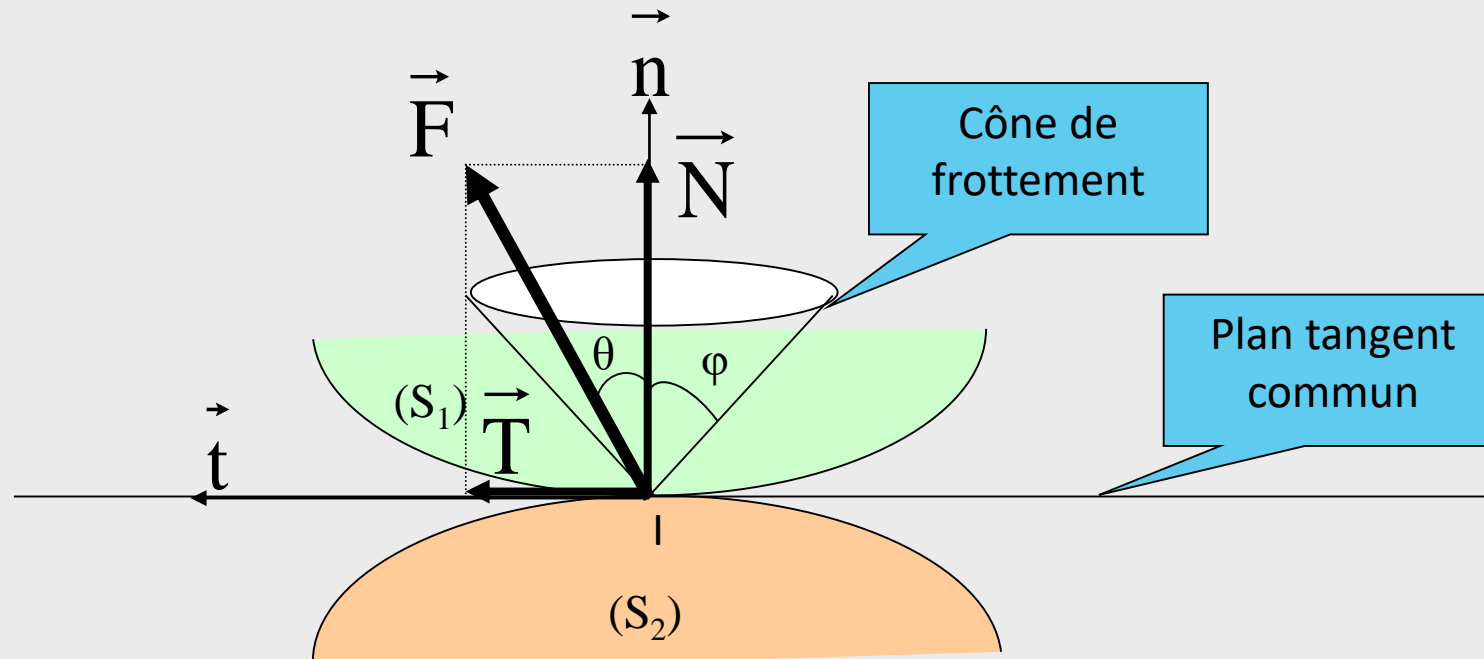
$$\mathcal{F}(\vec{p} \rightarrow S)_0 = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{ab}{2}(3a+b)\vec{z} \\ -\left(\frac{3}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}ab^3\right)\vec{x} + \left(a^3b + \frac{1}{4}a^2b^2\right)\vec{y} \end{array} \right\}$$

cas de la force ponctuelle sans frottement :



$$\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{matrix} & \vec{n} \\ \begin{matrix} N \\ \vec{0} \end{matrix} \\ I \end{matrix}$$

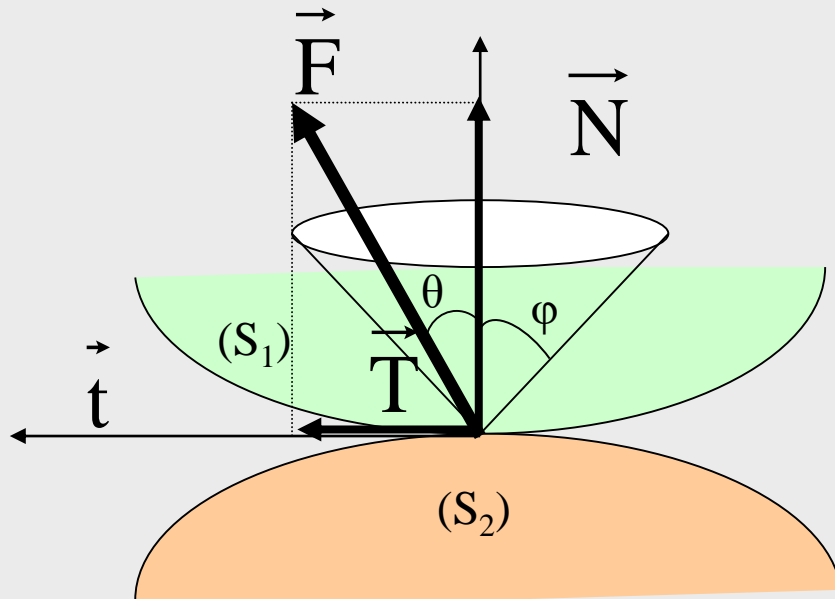
cas de la force ponctuelle avec frottement :



$$\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)_I = \begin{cases} \vec{F} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

cas de la force ponctuelle avec frottement :



Il existe un coefficient dit de frottement f entre deux solides en contact. Ce coefficient dépend uniquement des matériaux et de leur état de surface.

Le cône de frottement est directement lié à f par la relation suivante : $f = \tan \phi$

Si $\theta < \phi \rightarrow \tan \theta < \tan \phi \rightarrow \mathbf{T < f N} \rightarrow$ pas de glissement entre les solides

Si $\theta = \phi \rightarrow \tan \theta = \tan \phi \rightarrow \mathbf{T = f N} \rightarrow$ glissement entre les solides

~~Si $\theta > \phi \rightarrow \tan \theta > \tan \phi \rightarrow \mathbf{T > f N} \rightarrow ?$~~

cas de la force ponctuelle avec frottement :

| VALEURS DU FACTEUR DE FROTTEMENT μ^* | | |
|---|---|-------------|
| MATERIAUX EN CONTACT | | |
| Désignation des matériaux | Lubrification – température - pression | μ |
| Acier / Fonte Acier / Bronze | Surfaces sèches | 0,19 |
| | Surfaces grasses | 0,16 |
| | Surfaces graissées | 0,10 |
| Fonte / Bronze Fonte / Fonte | Surfaces sèches | 0,21 |
| | Surfaces grasses | 0,15 |
| | Surfaces graissées | 0,05 – 0,10 |
| Acier trempé / Bronze | Graissage moyen | 0,10 |
| | Graissage sous pression | 0,05 |
| Acier trempé / Acier trempé | Graissage moyen | 0,10 |
| | Graissage abondant | 0,07 |
| | Graissage sous pression | 0,05 |
| | Faible pression de contact et bain d'huile | 0,04 |
| Garniture amiantée pour freins d'automobile / Fonte | Sèches – Température max. 140° C Pression de contact 0,2 à 0,6 Mpa | 0,35 – 0,40 |
| Garniture métallique frittée / Acier | Sèches – Température max. 300° C Pression de contact 0,2 à 1 Mpa | 0,10 – 0,20 |

cas de la force ponctuelle avec frottement :

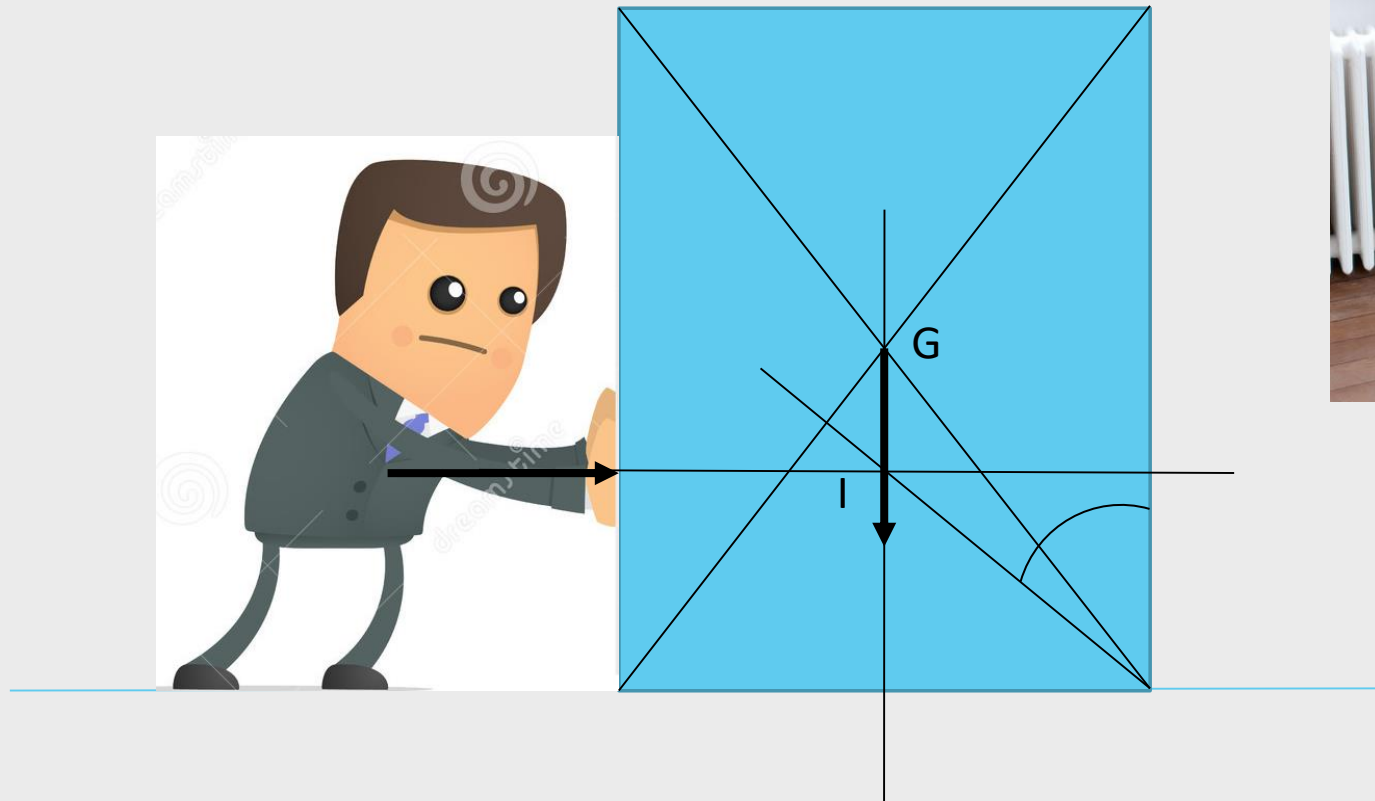
VALEURS DU FACTEUR DE FROTTEMENT μ^*

MATERIAUX EN CONTACT

| Désignation des matériaux | Lubrification – température - pression | μ |
|---|--|-------------|
| Coussinet fritté (bronze + acier) / Acier | Lubrifiées à l'huile | 0,01 |
| | Lubrifiées à la graisse | 0,05 |
| Caoutchouc / Fonte | Surface polie | 0,20 |
| Matières plastiques (toutes natures) | Surfaces lubrifiées | 0,02 – 0,08 |
| Polyamide 6 ; 6-6 ; 6-10 / Acier | Surfaces sèches | 0,38 – 0,42 |
| Polyamide 11 / Acier | Surfaces sèches | 0,32 – 0,38 |
| Polycarbonate / Acier | Surfaces sèches | 0,52 – 0,58 |
| Polyéthylène – téréphtalate / Acier | Surfaces sèches | 0,24 – 0,28 |
| Polystyrène / Acier | Surfaces sèches | 0,35 – 0,5 |
| Polytétrafluoroéthylène / Acier | Surfaces sèches | 0,22 |
| Pneus / Route goudronnée | Route sèche | 0,60 – 0,70 |
| | Route mouillée | 0,35 – 0,60 |
| | Route verglacée | 0,10 |

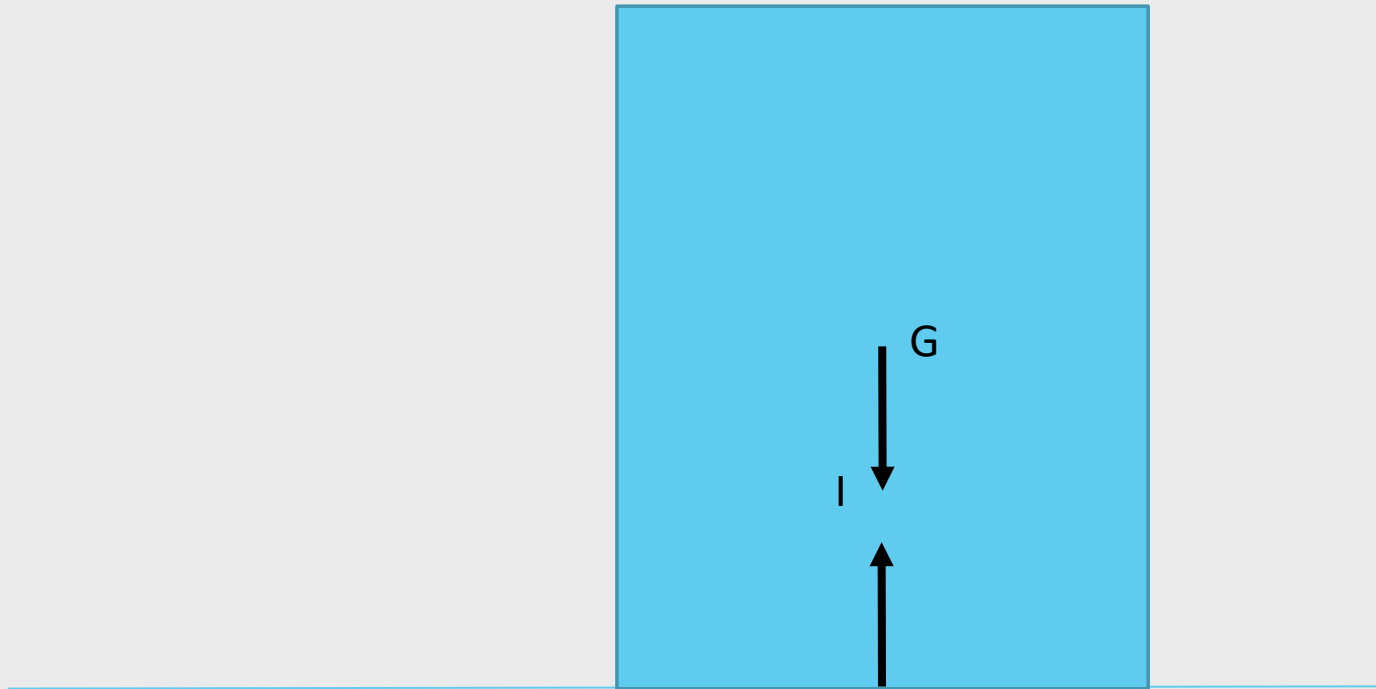
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

Application graphique : Quel coefficient de frottement maximal faut-il pour être certain de pouvoir faire glisser cette armoire?

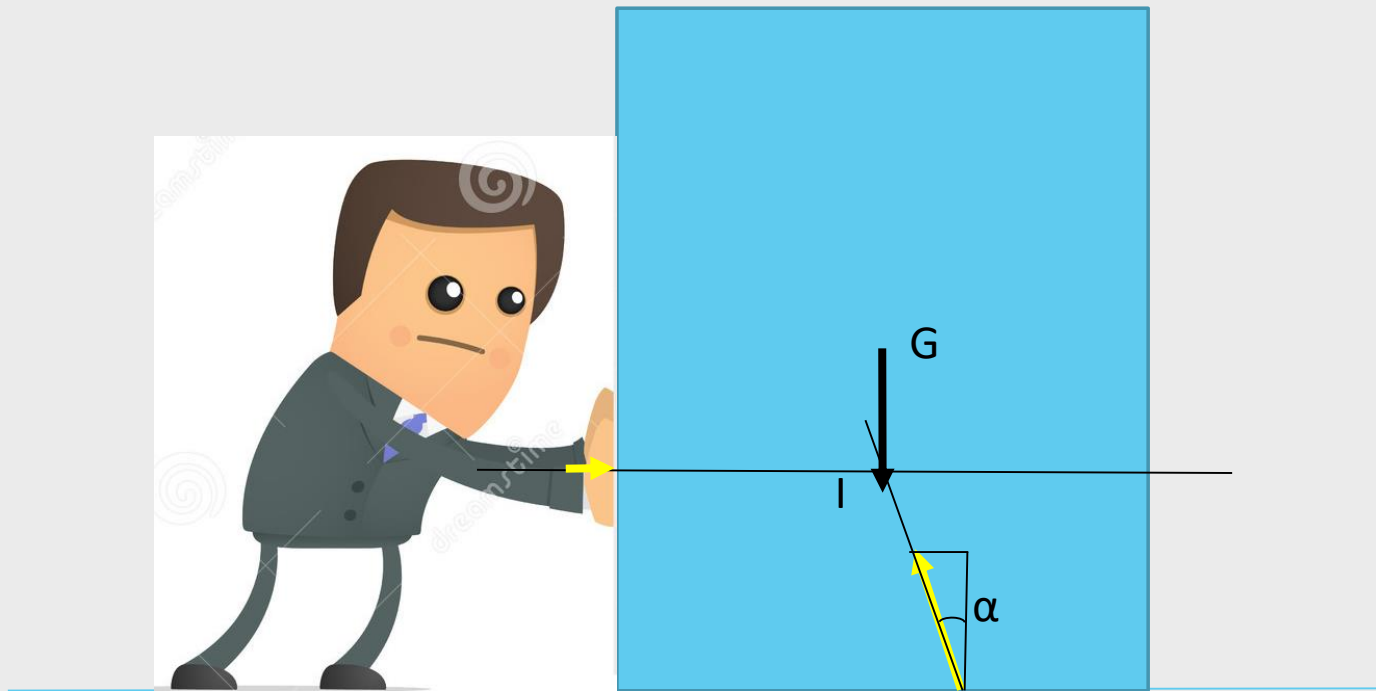


Ici $f = \tan \varphi = 1.21$ donc $\varphi = 50,4^\circ$

On ne pousse pas l'armoire

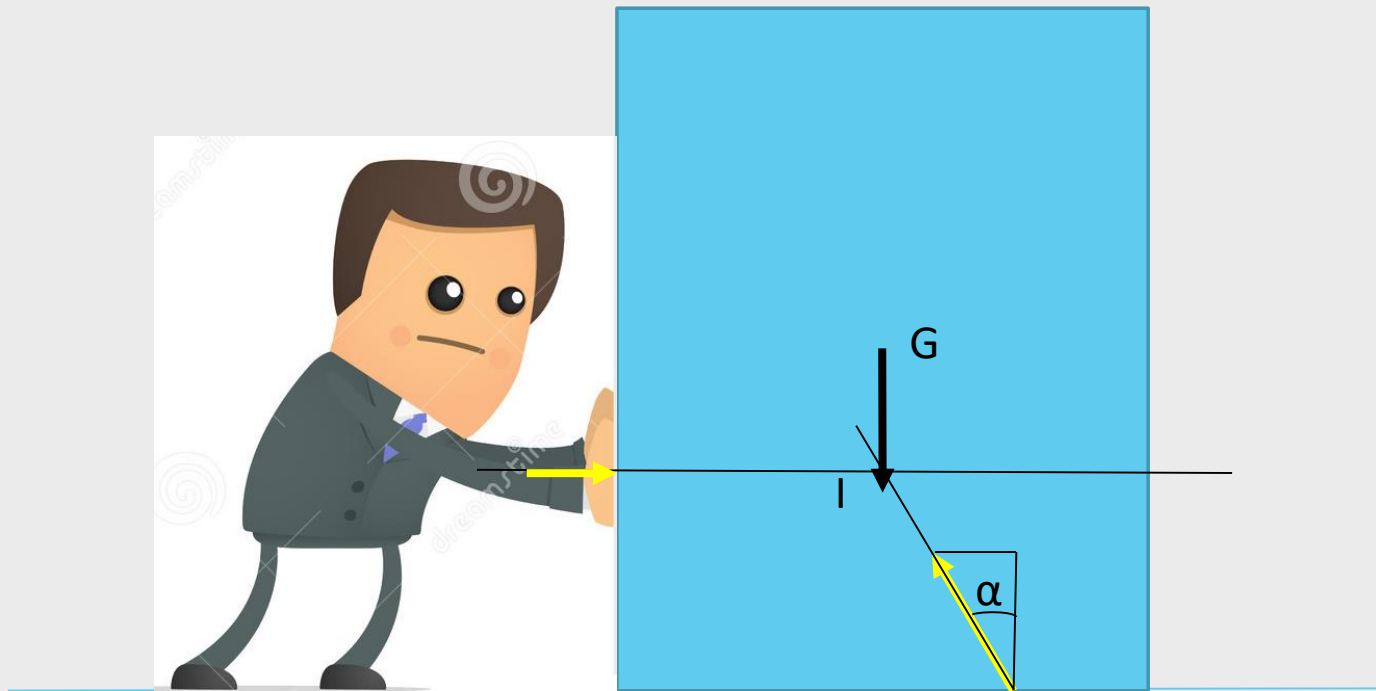


On pousse très légèrement l'armoire



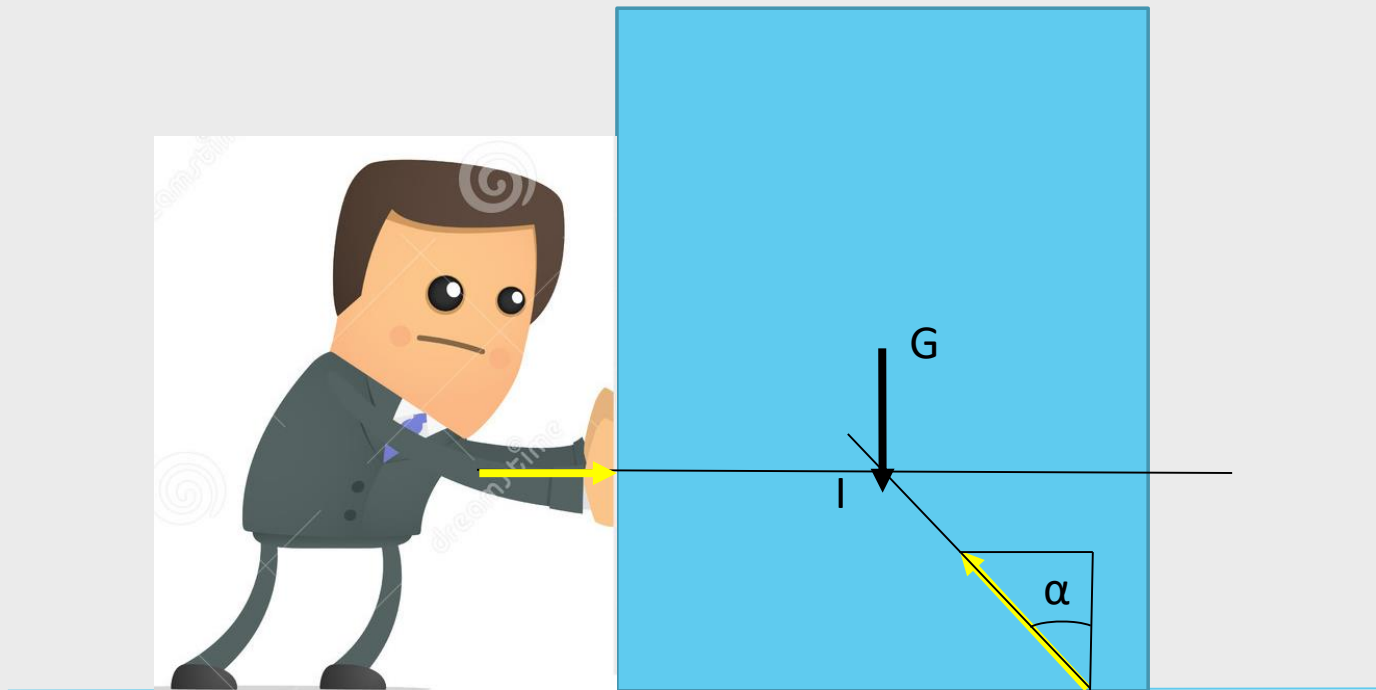
Si $\tan \alpha < f$ pas de glissement

On pousse un peu plus l'armoire



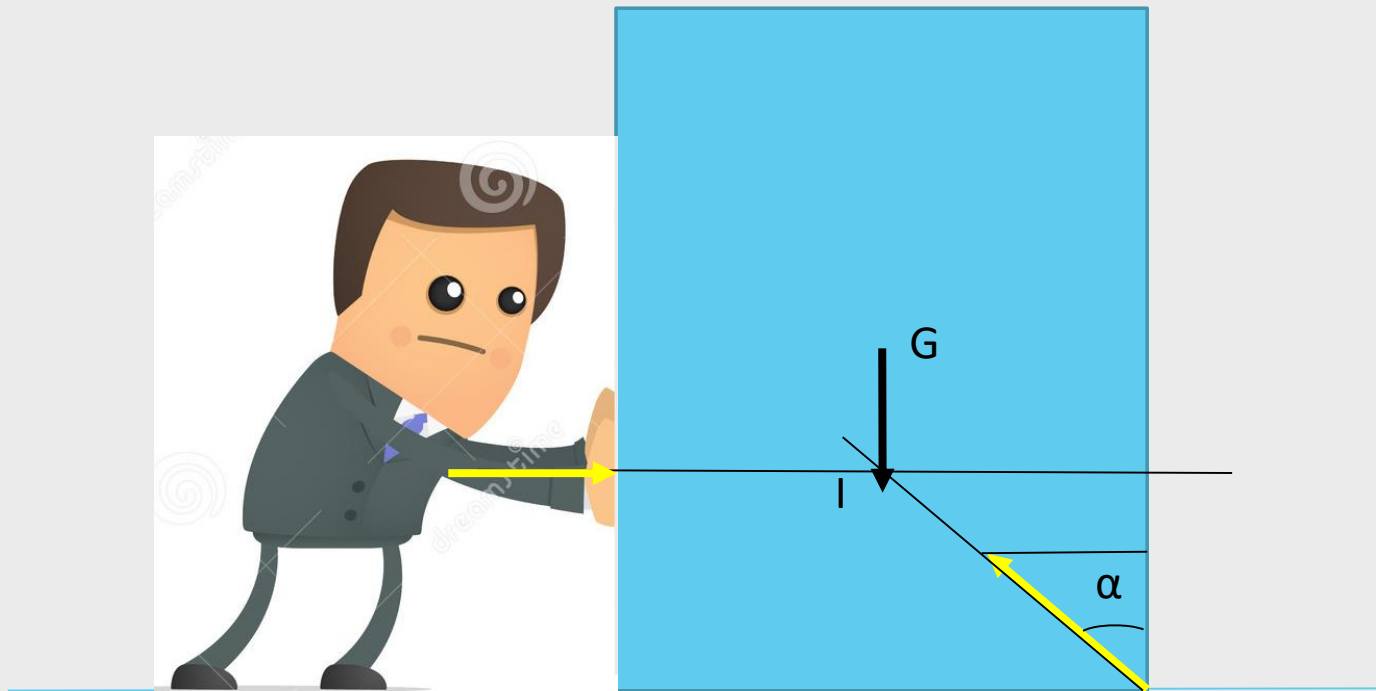
Si $\tan \alpha < f$ pas de glissement

On pousse un peu plus l'armoire



Si $\tan \alpha < f$ pas de glissement

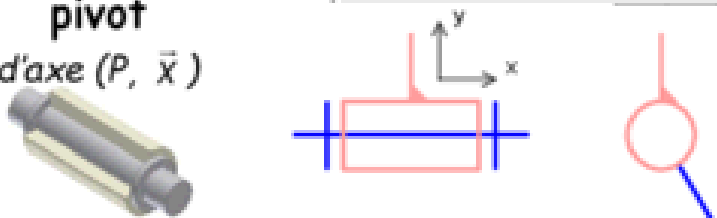
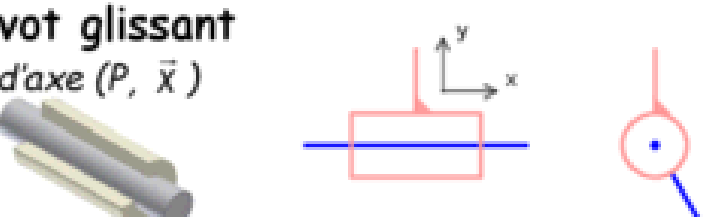
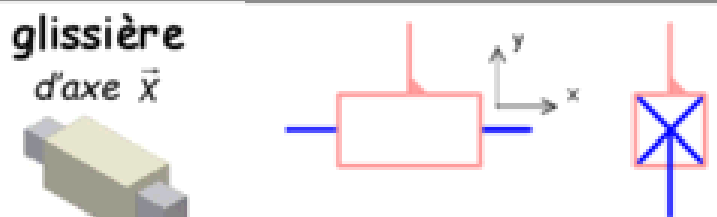
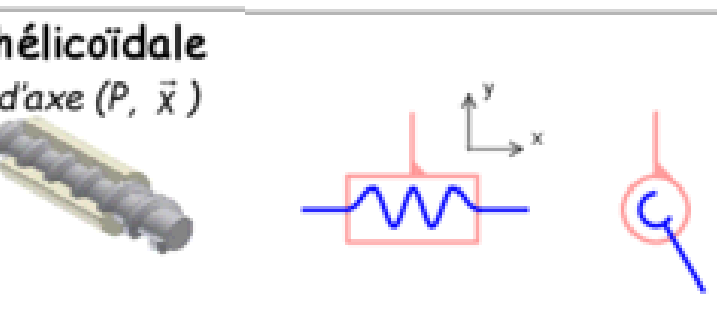
On pousse un peu plus l'armoire



Si $\tan \alpha < f$ pas de glissement
Attention nous allons basculer !!!


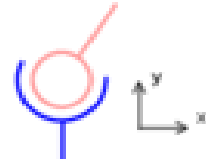

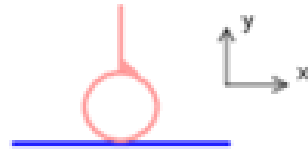
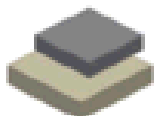
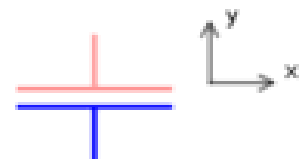

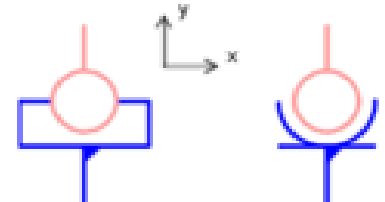

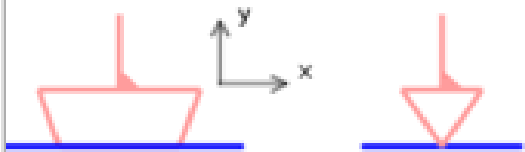
Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

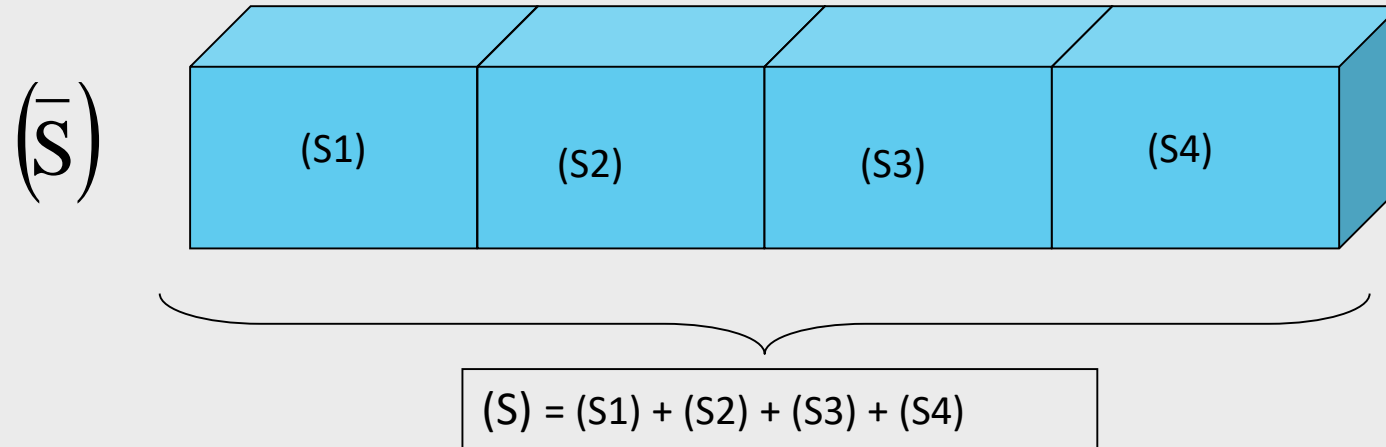
cas des liaisons parfaites : **Liaison parfaite : géométrie parfaite, sans jeu et sans frottement**

| Nom et schématisation | Torseur statique |
|--|--|
| <p>pivot d'axe (P, \vec{x})</p>  | $\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| <p>pivot glissant d'axe (P, \vec{x})</p>  | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| <p>glissière d'axe \vec{x}</p>  | $\begin{pmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| <p>hélicoïdale d'axe (P, \vec{x})</p>  | $\begin{pmatrix} X & kX \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |

Statique du solide : Modélisation des forces mécaniques

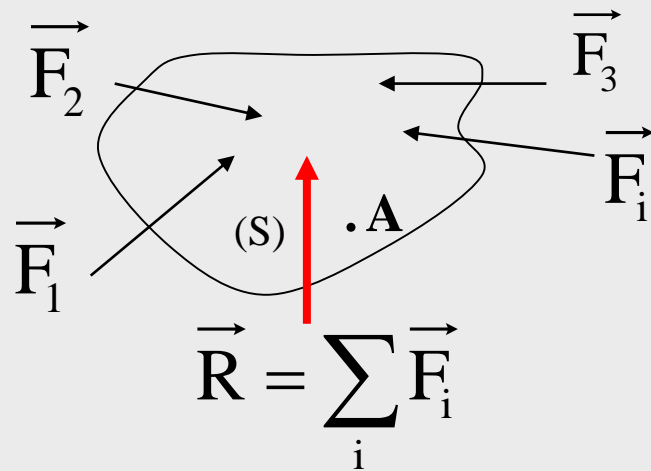
cas des liaisons parfaites :

| | | |
|--|--|---|
| rotule de centre P  |  | $\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| ponctuelle de normale (P, \vec{e}_y)  |  | $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| appui plan de normale \vec{y}  |  | $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| linéaire annulaire d'axe (P, \vec{x})  |  | $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |
| linéaire rectiligne de normale (P, \vec{e}_y) d'axe (P, \vec{e}_x)  |  | $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ |



- On appelle système matériel un ensemble (S) constitué des solides (Si)
- On appelle (\bar{S}) tout ce qui n'appartient pas à (S)

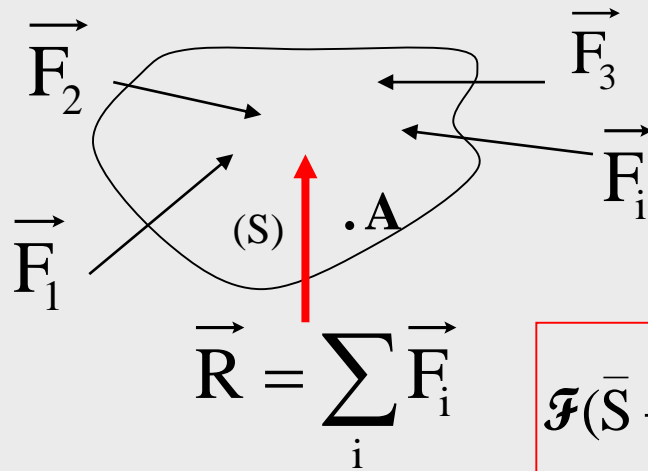
Un système matériel (S) est en équilibre par rapport à un repère galiléen (Rg), si le torseur représentant l'ensemble des actions mécaniques extérieures appliquées à (S) est nul en tout point, quel que soit le point de réduction du torseur.



$$\boxed{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i} \quad \text{Résultante}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i)}$$

Moment résultant en A



PFS : le solide (S) est en équilibre ssi

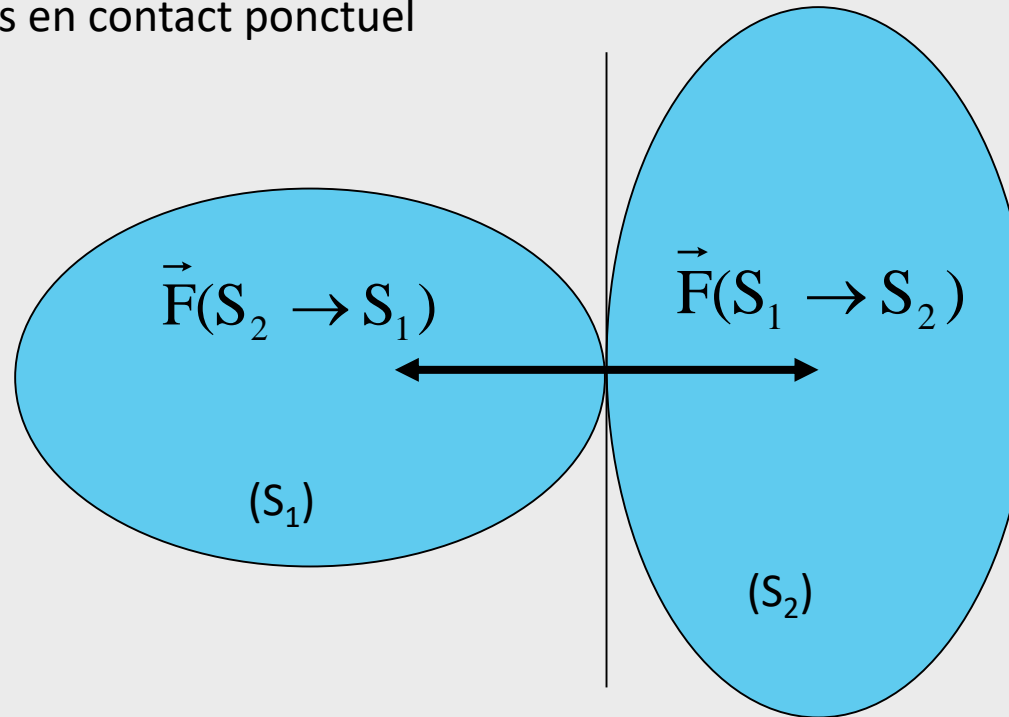
$$\mathcal{F}(\vec{S} \rightarrow S) = \sum_i \mathcal{F}(\vec{F}_i \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A = 0 \quad \forall A$$

Cette équation torsielle donne deux équations vectorielles

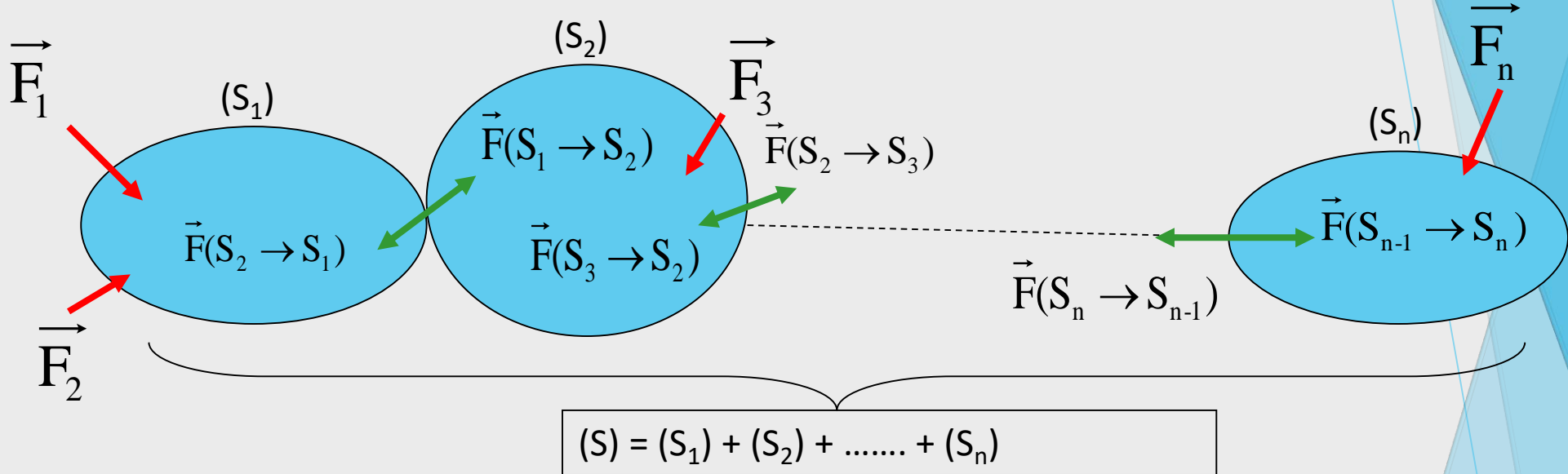
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i \rightarrow S) = \vec{0} \end{array} \right.$$

→ 6 équations
scalaires

(S1) et (S2) deux solides en contact ponctuel

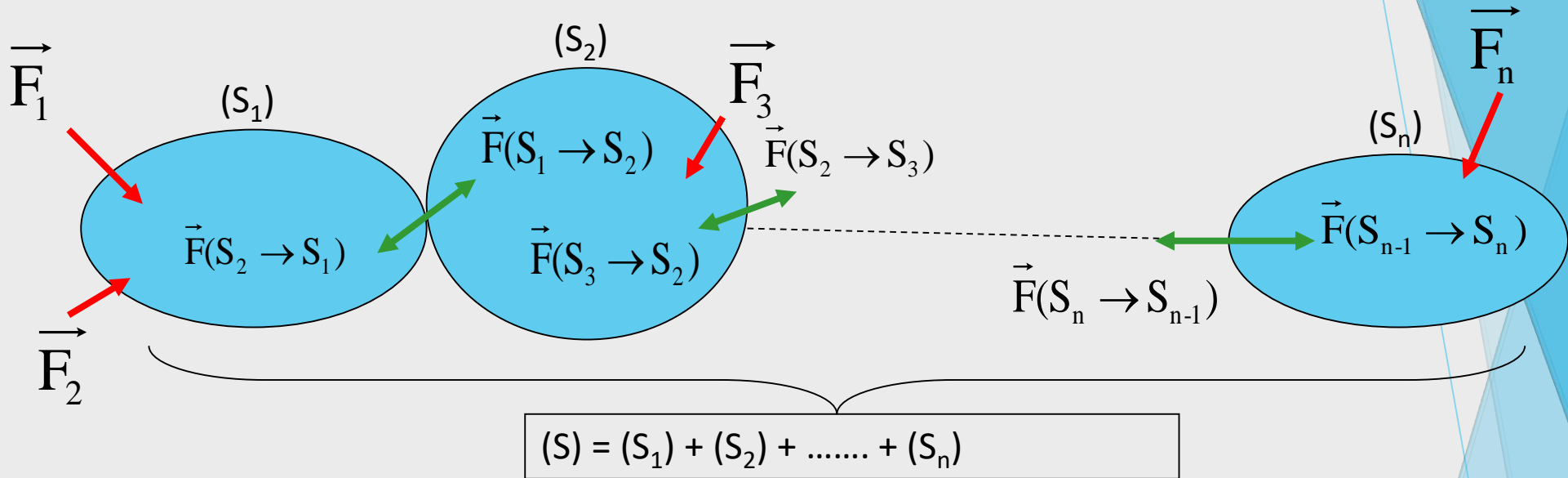


$$\vec{\mathcal{F}}(S_1 \rightarrow S_2) = -\vec{\mathcal{F}}(S_2 \rightarrow S_1)$$



→ Forces extérieures à (S)

→ Forces intérieures à (S)



**Pour appliquer le PFS, il ne faut tenir compte que des Forces extérieures au système isolé.
Si on prend en compte les forces intérieures, elles s'annulent deux à deux.**

• Quelles sont les forces extérieures à (S_2) ?

Résolution des problèmes de statique: méthode analytique

1

- On isole le solide (ou ensemble de solides)
 - on précise lequel

2

- On fait le Bilan des Efforts Extérieurs (BEE)
 - on écrit le torseur statique associé à chaque force extérieure
 - on transporte ces torseurs en un point judicieux

3

- On applique le PFS
 - 1 équation torsorielle
 - 2 équations vectorielles
 - 6 équations scalaires (ou 3 si on travaille en 2D)

4

- On résout le système d'équations scalaires

Résolution des problèmes de statique: méthode graphique

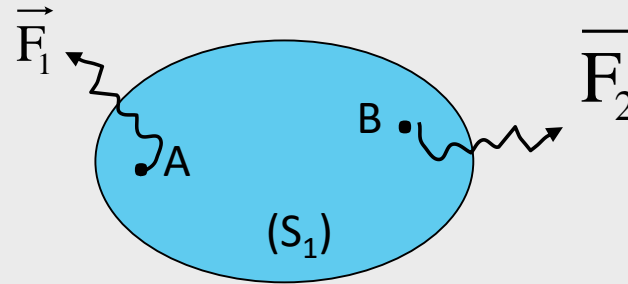
Tout problème peut se résoudre graphiquement

- 2D la résolution est relativement facile.
- 3D il faut travailler successivement dans les 3 plans et résoudre 3 fois comme un problème 2D

- On isole le solide (ou ensemble de solides)
 - on précise lequel
- On fait le Bilan graphique des Efforts Extérieures (tracer sur le dessin)
- Résolution graphique (nous verrons 2 cas)
 - cas de 2 forces
 - cas de 3 forces non parallèles

Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

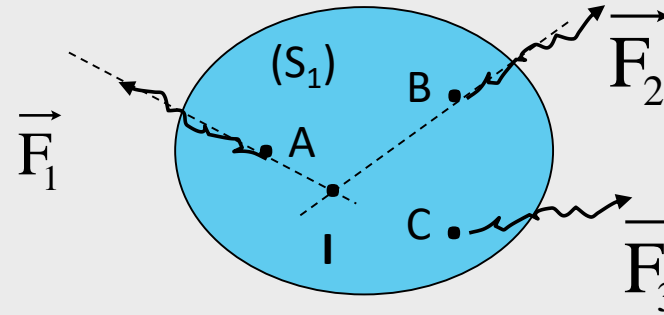
Cas particulier des systèmes soumis à 2 ou 3 forces : cas de 2 forces



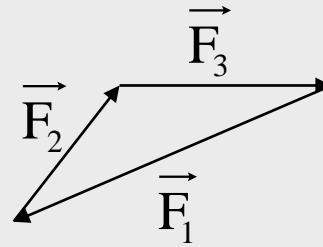
Statique du solide : Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Cas particulier des systèmes soumis à 2 ou 3 forces : cas de 3 forces

* On isole (S_1)



Cas particulier des systèmes soumis à 2 ou 3 forces : cas de 3 forces non parallèles



Application :

Soit un dispositif de bridage comprenant :
un bâti (0), une pièce (1), une bride (2) et une vis de serrage (3).

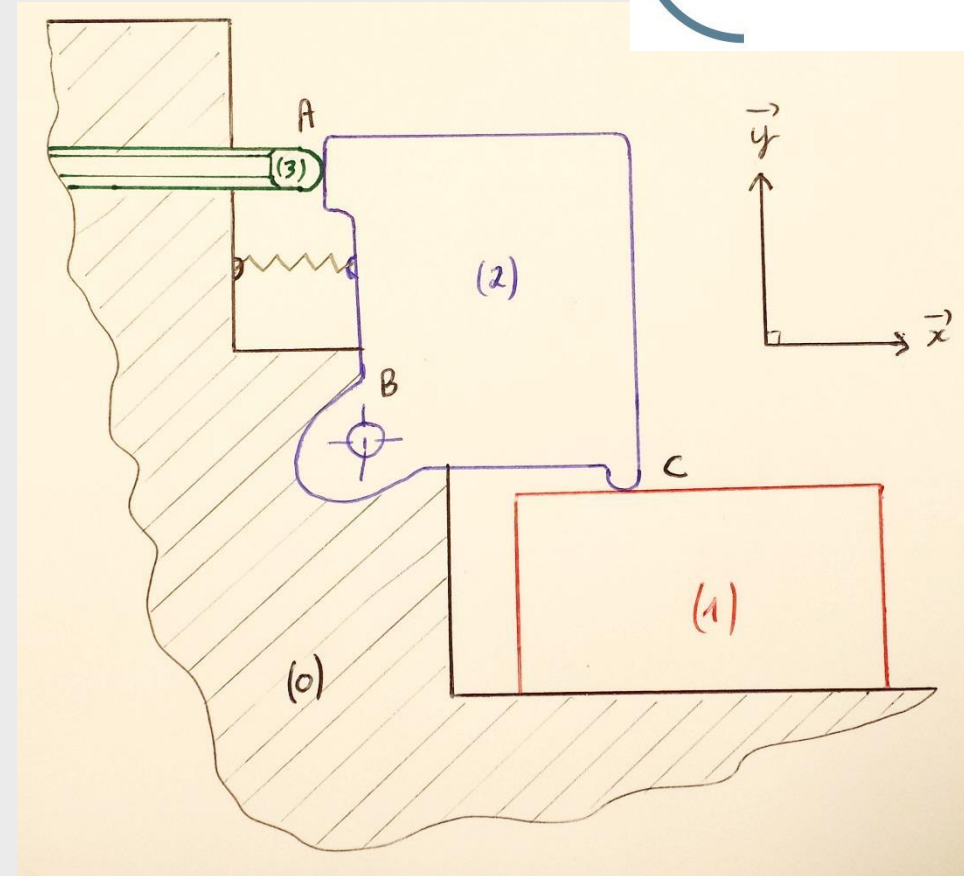
La vis de serrage (3) appuie en A sur la bride (2) qui pivote autour de B et vient appuyer en C sur la pièce (1) à bloquer. La force du ressort de rappel ainsi que le poids des pièces sont négligés.

- La vis (3) est en contact ponctuel sans frottement sur la bride (2)
- La bride (2) est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) avec le bâti (0)
- La bride (2) est en contact ponctuel sans frottement avec la pièce (1)

Données : $\|\vec{F}_{3 \rightarrow 2}\| = F$; $\vec{AB} = a\vec{x} - b\vec{y}$; $\vec{BC} = c\vec{x} - d\vec{y}$

Questions :

- déterminer analytiquement les efforts en B et C
- A.N. avec $F = 3000\text{N}$ $a = 10\text{mm}$, $b = 80\text{mm}$, $c = 75\text{mm}$ et $d = 10\text{mm}$
- déterminer graphiquement les efforts en B et C



Application : résolution analytique

★ On isole la bride (2)

★ BEE appliqués à (2)

$$\boxed{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{F_X} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}} \quad \boxed{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{C}{\begin{Bmatrix} Y_C \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}} \quad \boxed{\mathcal{F}(0 \rightarrow 2) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}} \quad \text{car en 2D}$$

Pour appliquer le PFS il faut que tous les torseurs soient écrits en un même point. Ici il est judicieux de transporter tous ces torseurs en B, car le torseur représentant la liaison pivot contient le plus d'inconnues au niveau de la résultante, il faut donc éviter de le transporter.

Si l'on fait l'erreur de transporter les torseurs en un autre point le résultat sera le même, mais les équations à résoudre pour y parvenir seront plus compliquées !!!

Statique du solide : Application

Application : résolution analytique

Transport des moments au point B

Statique du solide : Application

Application : résolution analytique

★ PFS appliqués à (S)

Statique du solide : Application

Application : résolution analytique

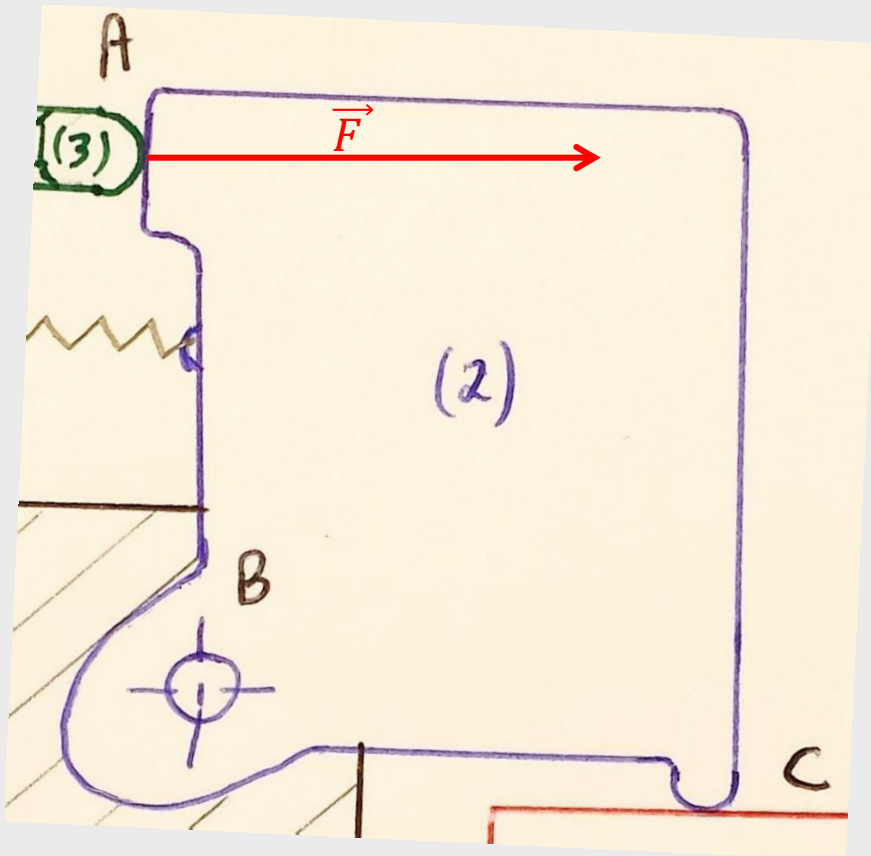
Statique du solide : Application

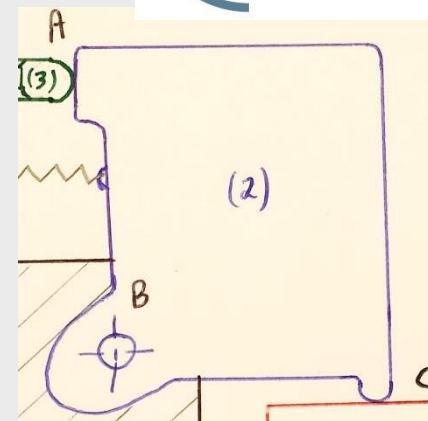
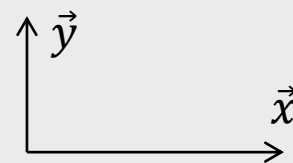
Application : résolution graphique

Echelle des distances : 1mm = 1mm

— Connus

— Inconnus



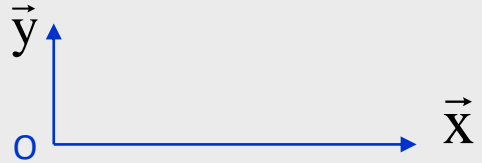


CINEMATIQUE DU SOLIDE

Qu'est ce qu'un référentiel ? :

Référentiel = **repère spatial** + **repère temporel**

★ un repère spatial = origine spatiale + base orthonormée directe (ROND) $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



★ un repère temporel = origine temporelle + base de temps



Chaque point de ce repère est appelé **instant**.

L'abscisse de l'instant est appelée **date** (t). Son unité est la **seconde** (s).

Les différents repères spatiaux :

Le repère :

L'étude du mouvement d'un objet et l'expression de sa position, de sa vitesse ou de son accélération nécessitent au préalable le choix d'un repère.

Rappels : Un repère spatial est défini par un point et trois axes pointant dans des directions fixes. Les repères les plus courants sont:

- **Le repère terrestre** associé à une portion de surface terrestre qui peut être choisi pour des mouvements de faible amplitude et de durée très faible par rapport à la période de rotation terrestre. Ex : repère lié à la salle de classe (étude classique).
- **Le repère géocentrique** associé au centre de la Terre et trois axes pointant en direction d'étoiles fixes qui peut être utilisé pour étudier des mouvements de grande amplitude autour de la Terre mais dont la durée est négligeable devant la période de révolution terrestre. (étude de mise sur orbite)
- **Le repère héliocentrique** associé au centre du Soleil et trois axes pointant en direction d'étoiles pouvant être considérées comme fixes. Étude des voyages interplanétaires

Le repère absolu est le repère lié au système solaire

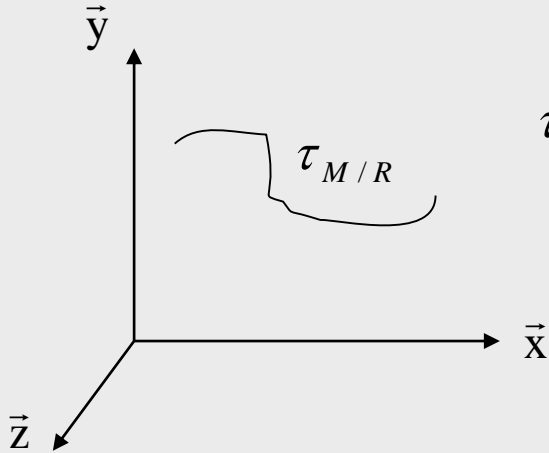
Un repère considéré comme absolu est un repère fixe par rapport à ce que l'on étudie

Tout repère non absolu est dit repère relatif

Trajectoire :

$R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND

On appelle trajectoire du point M dans le repère R, le lieu des points géométriques du point M dans le repère R au cours du temps

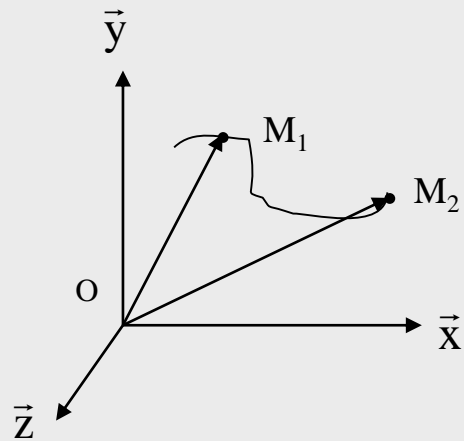


$\tau_{M/R}$ est la trajectoire du point M dans le repère R

Vecteur position et déplacement :

On appelle **vecteur position** du point M dans $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à l'instant t, le vecteur \overrightarrow{OM} définissant la position du point M dans R à l'instant t

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 est la position du point M à l'instant t_2 , alors le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est appelé **vecteur déplacement** de M dans le repère R entre les instants t_1 et t_2

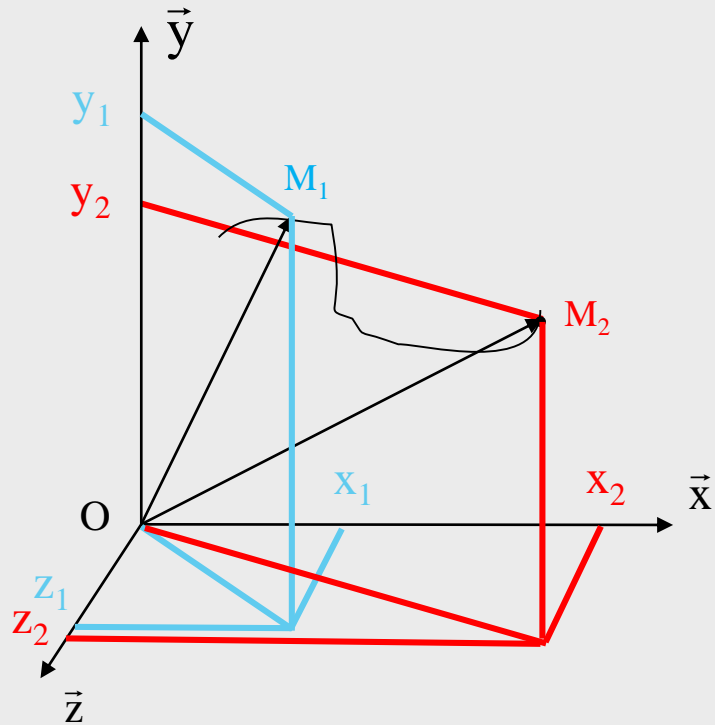


$\overrightarrow{OM_1}$ vecteur position du point M à $t = t_1$

$\overrightarrow{OM_2}$ vecteur position du point M à $t = t_2$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ vecteur déplacement entre les instants t_1 et t_2

Vecteur position et déplacement :



$\overrightarrow{OM_1}$ vecteur position du point M à $t = t_1$

$\overrightarrow{OM_2}$ vecteur position du point M à $t = t_2$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ vecteur déplacement entre les instants t_1 et t_2

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} \\ \overrightarrow{OM_2} &= x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} \end{aligned} \right\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = (x_2 - x_1)\vec{x} + (y_2 - y_1)\vec{y} + (z_2 - z_1)\vec{z}$$

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 est la position du point M à l'instant t_2 , alors le vecteur **vitesse moyenne** entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\overrightarrow{V}_{t_1, t_2}^{\text{moy}}(M/R) = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t}$$

La **vitesse instantanée** du point M dans son mouvement par rapport à R à l'instant t est :

$$\vec{V}(M/R, t) = \vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_R$$

Si l'étude porte sur un ensemble de solides, il faut préciser l'appartenance du point M à un des solides :

$$\vec{V}(M \in S_i/R, t) = \vec{V}(M \in S_i/R) = \vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_R$$

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 , M_2 est la position du point M à l'instant t_2 ,
 $\vec{V}_1(M/R)$ la vitesse du point M à l'instant t_1 et $\vec{V}_2(M/R)$ la vitesse du point M à l'instant t_2 ,
alors le **vecteur accélération moyen** entre les instants t_1 et t_2 est :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{t_1, t_2}^{\text{moy}}(M/R) = \frac{\vec{V}_2(M/R) - \vec{V}_1(M/R)}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée du point M dans son mouvement par rapport à R à l'instant t est :

$$\vec{\Gamma}(M/R, t) = \vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right]_R = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \Big|_R = \left[\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right]_R$$

S'il y a un ensemble de solides, il faut préciser l'appartenance du point M à un des solides :

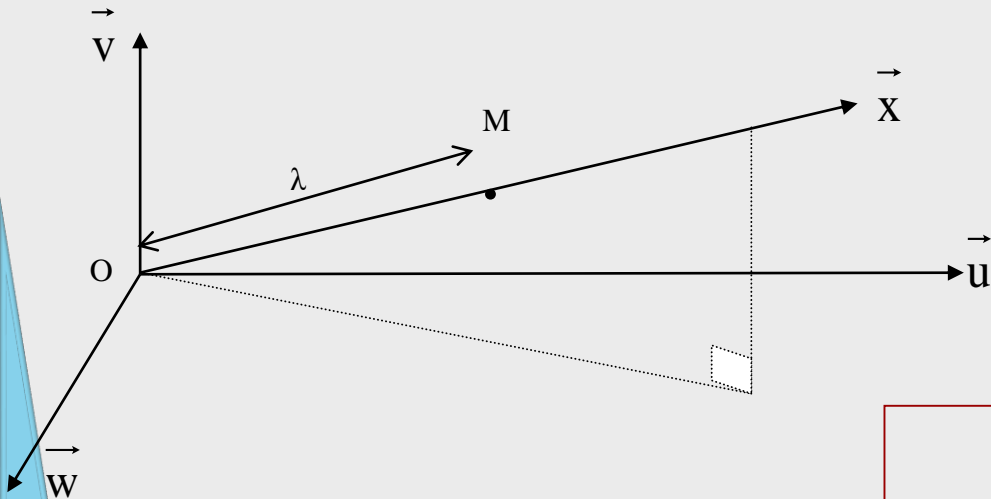
$$\vec{\Gamma}(M \in S_i/R, t) = \vec{\Gamma}(M \in S_i/R) = \vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right]_R = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \Big|_R = \left[\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right]_R$$

Cinématique du point : mouvement rectiligne

On appelle mouvement rectiligne le mouvement d'un point matériel dont la trajectoire est une droite

$R(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un ROND

Soit un point matériel M se déplaçant le long de l'axe (O, \vec{x}) avec $\|\vec{x}\| = 1$



Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{x}$$

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\lambda \vec{x}}{dt} \right]_R = \frac{d\lambda}{dt} \vec{x} = \dot{\lambda} \vec{x}$$

Vecteur accélération

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right]_R = \left[\frac{d\dot{\lambda} \vec{x}}{dt} \right]_R = \ddot{\lambda} \vec{x}$$

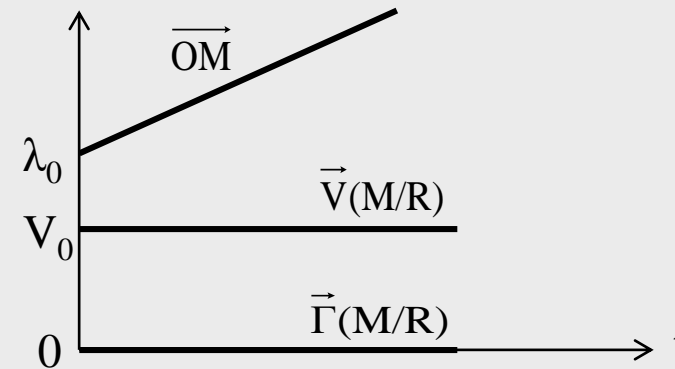
Cinématique du point : mouvement rectiligne

Cas du mouvement rectiligne uniforme

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(M/R) = \text{cte } \vec{x} = V_0 \vec{x}$$

$$\vec{OM} = (V_0 t + \text{cte}) \vec{x} = (V_0 t + \lambda_0) \vec{x}$$

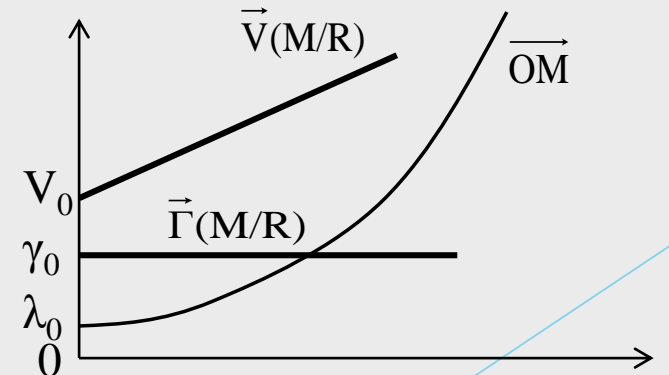


Cas du mouvement rectiligne uniformément varié

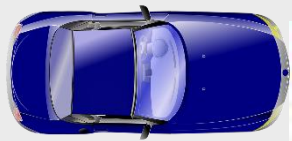
$$\vec{\Gamma}(M/R) = \text{cte } \vec{x} = \gamma_0 \vec{x}$$

$$\vec{V}(M/R) = (\gamma_0 t + V_0) \vec{x}$$

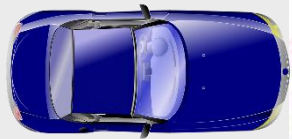
$$\vec{OM} = \left(\gamma_0 \frac{t^2}{2} + V_0 t + \lambda_0 \right) \vec{x}$$



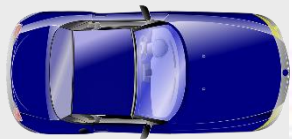
Cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré / uniforme / uniformément ralenti



+++++
A (mouvement accéléré)



+ + + + +
B (mouvement uniforme)



+ + + + +
C (mouvement décéléré)

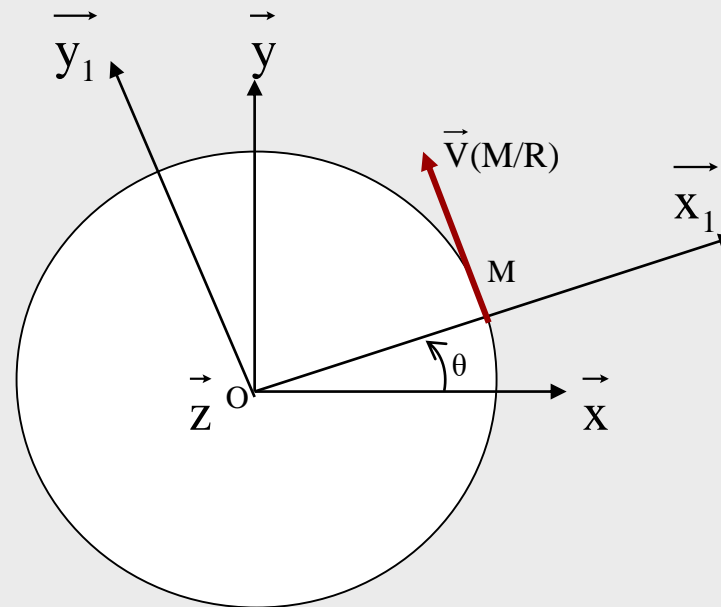
Cinématique du point : mouvement circulaire

On appelle mouvement circulaire le mouvement d'un point matériel dont la trajectoire est un cercle

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND fixe

$R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un ROND lié au point M

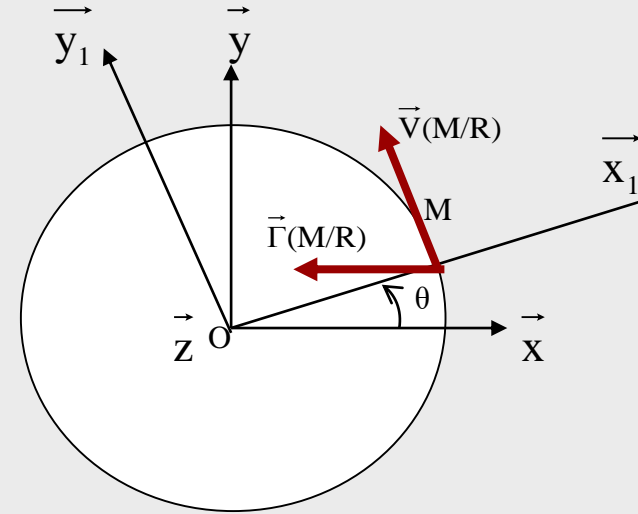
θ : paramètre de position



Cercle de rayon R

$\vec{\omega} \vec{z} = \dot{\theta} \vec{z}$: vecteur vitesse de rotation (ou vitesse angulaire)

Cinématique du point : mouvement circulaire



Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = R\cos\theta \vec{x} + R\sin\theta \vec{y} = R \vec{x}_1$

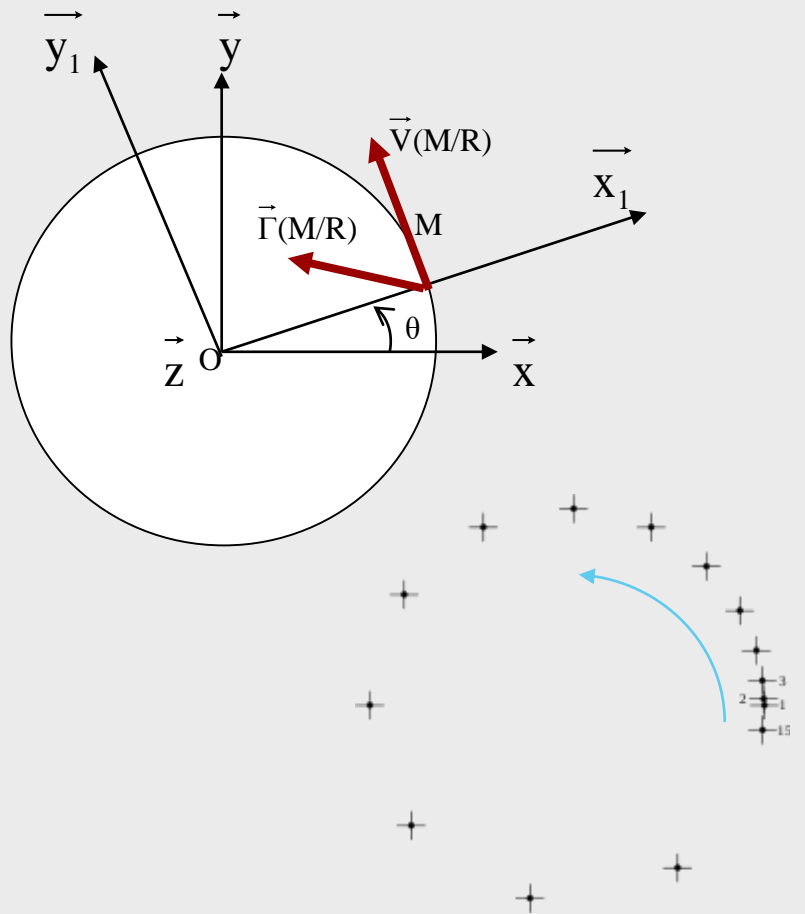
Vecteur vitesse : $\vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R = R\dot{\theta}(-\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y}) = R\dot{\theta} \vec{y}_1$

Vecteur accélération : $\vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right]_R = R\ddot{\theta} \vec{y}_1 - R\dot{\theta}^2 \vec{x}_1$

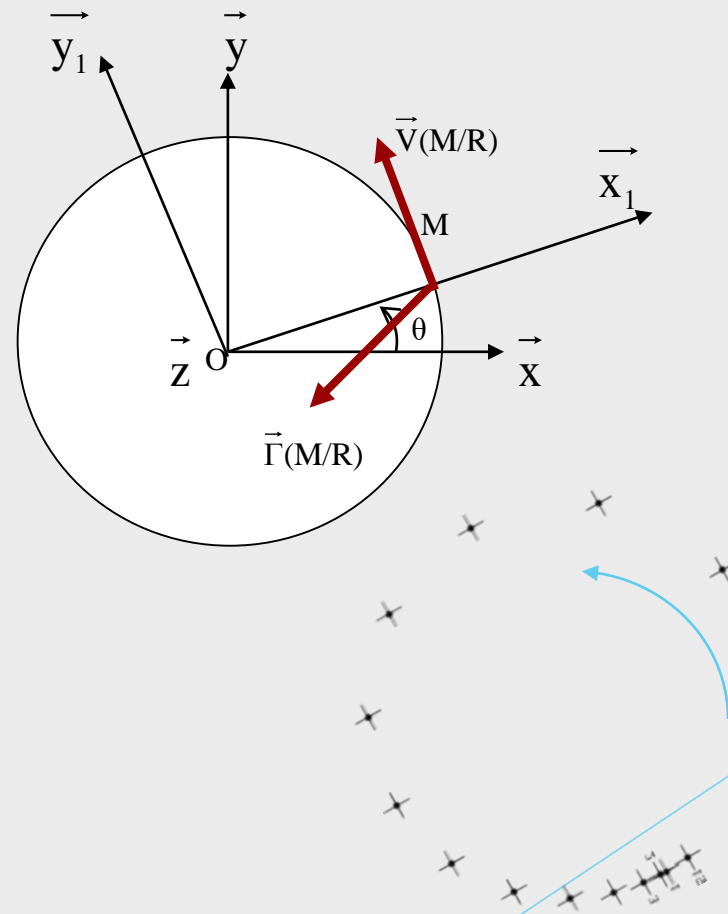
Cinématique du point : mouvement circulaire

$$\vec{V}(M/R) = R\dot{\theta} \vec{y}_1 \quad \vec{\Gamma}(M/R) = R\ddot{\theta} \vec{y}_1 - R\dot{\theta}^2 \vec{x}_1$$

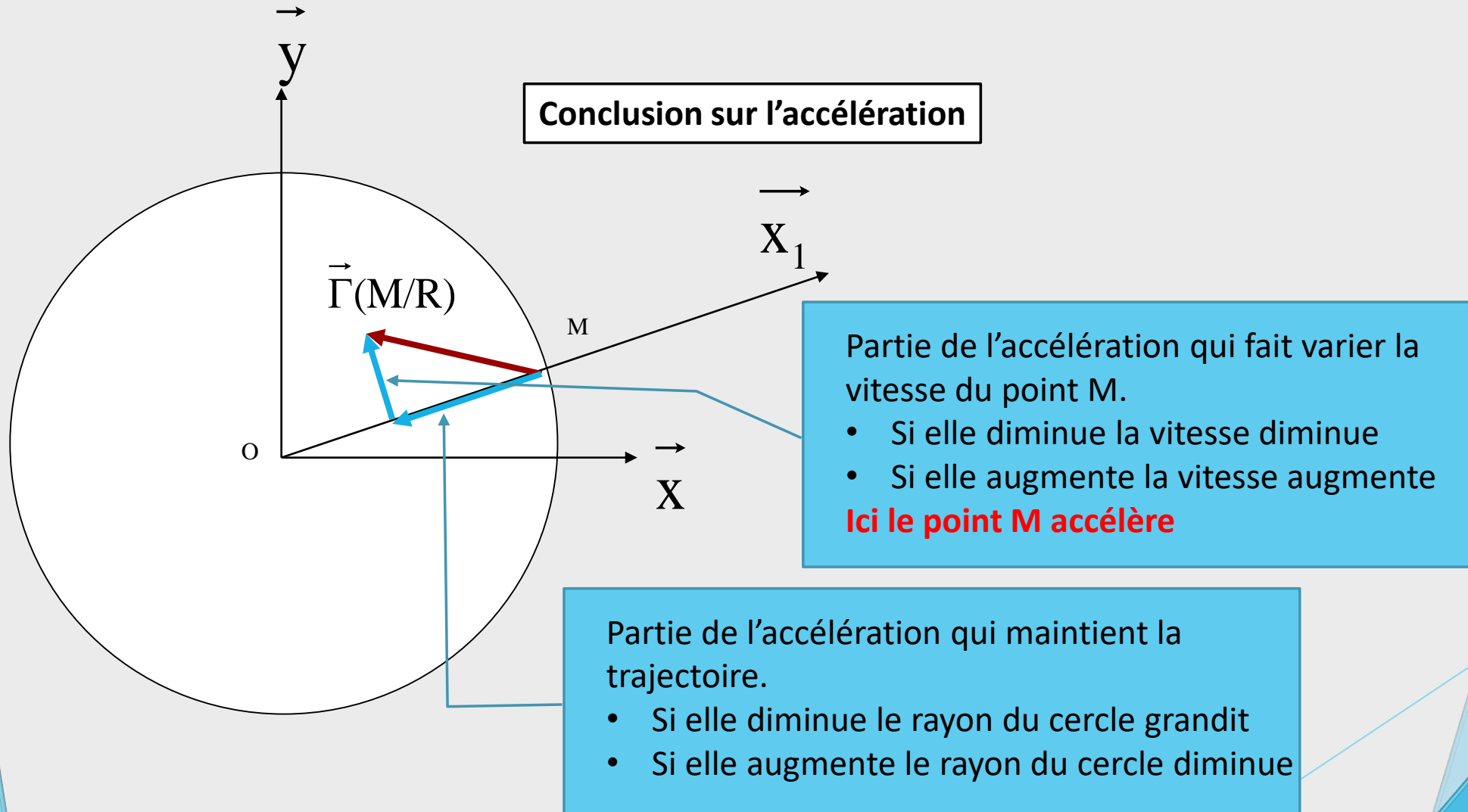
Mouvement accéléré



Mouvement ralenti



Cinématique du point : mouvement circulaire

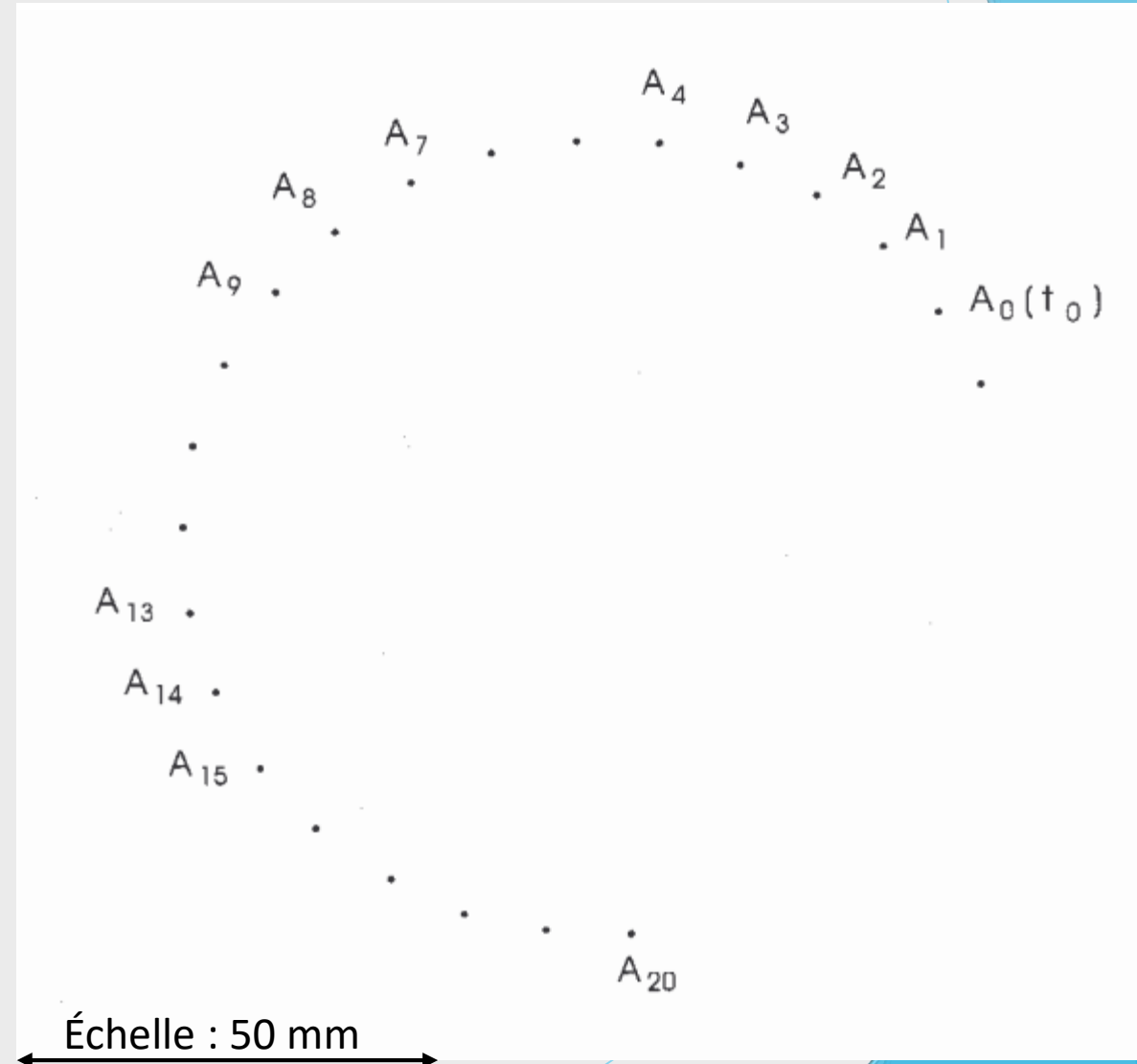


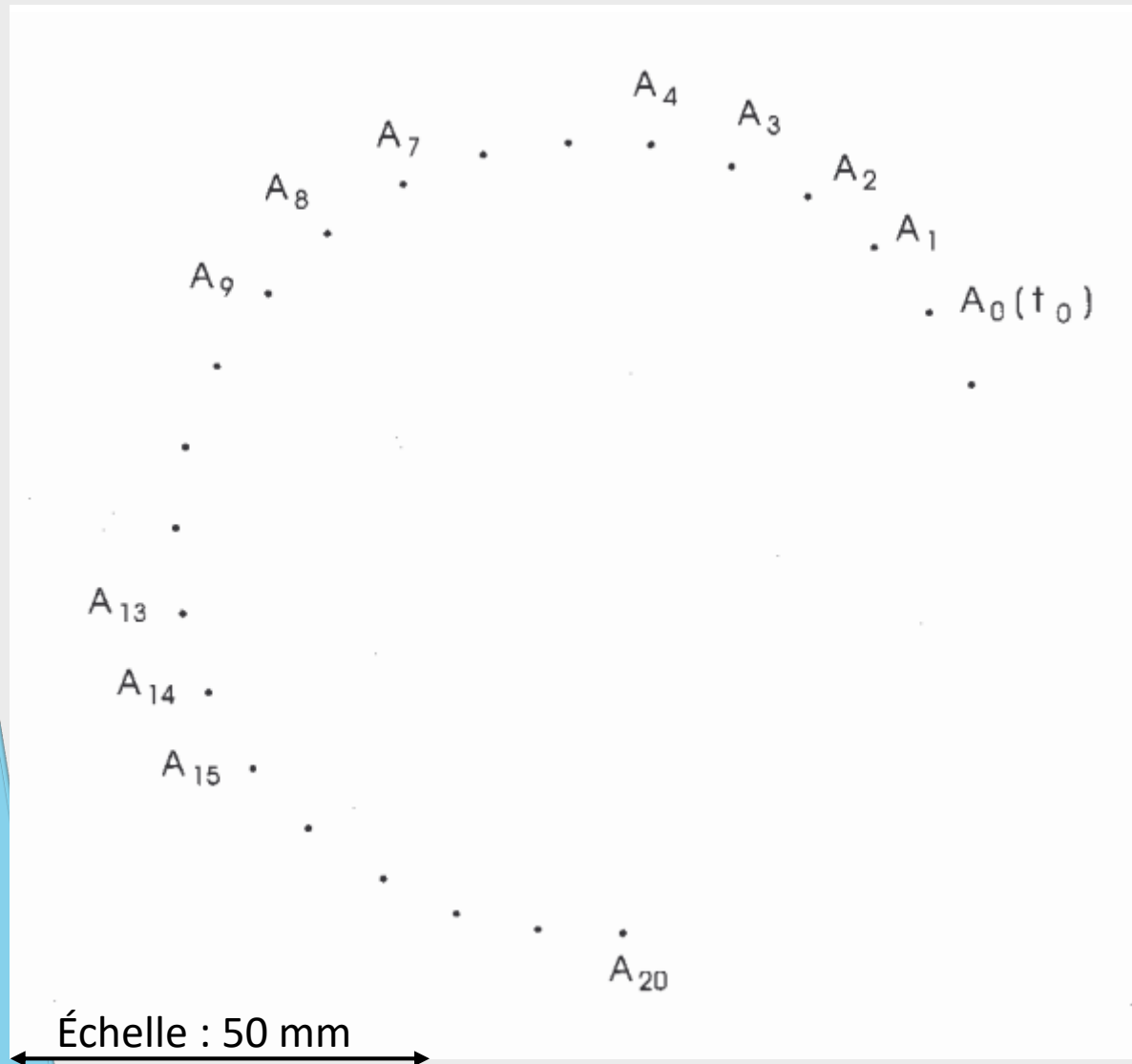
Sur une table parfaitement plane et horizontale, un mobile à coussin d'air est relié à une tige fixe en O. Ce mobile est lancé et décrit donc une trajectoire circulaire autour du point O.

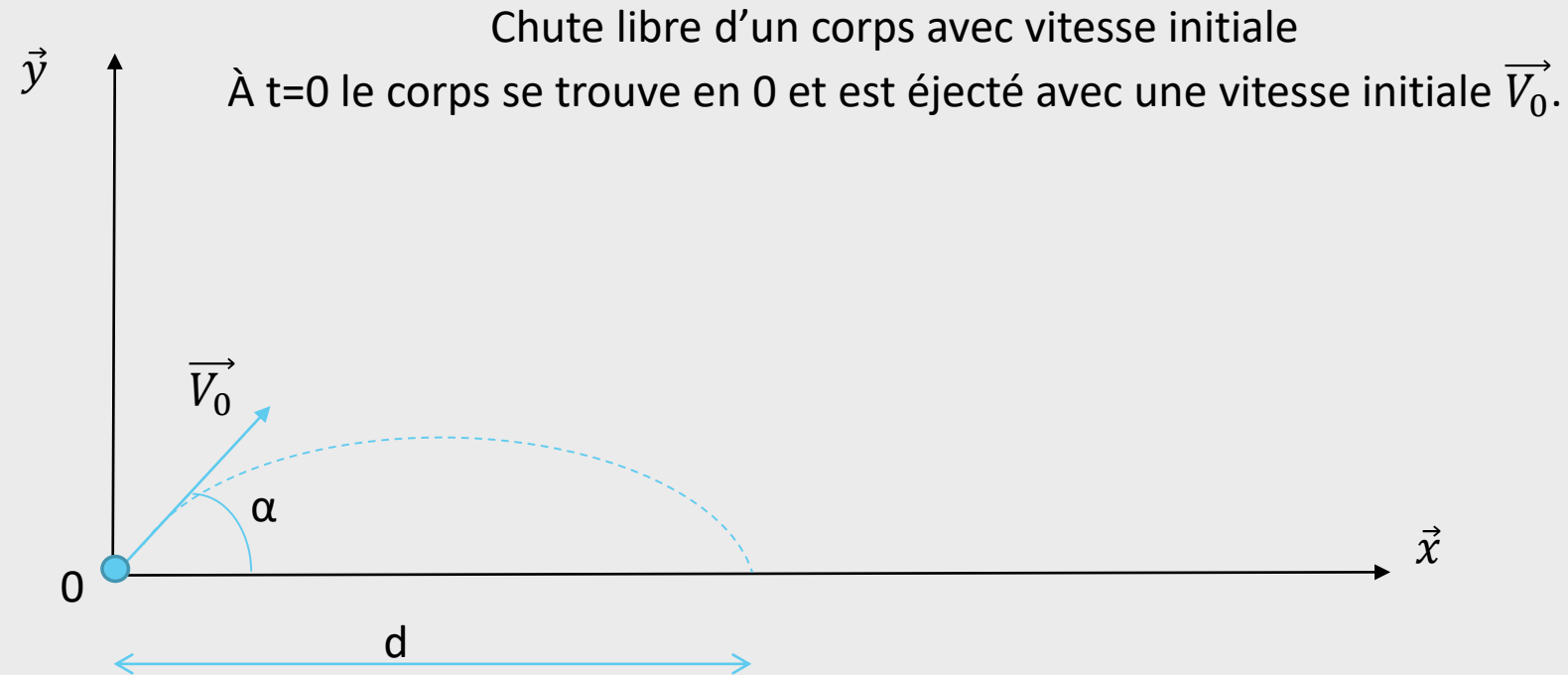
Un système enregistre la position du mobile toutes les 20ms (voir figure).

Le vitesse d'enregistrement permet de faire l'hypothèse que $V_{Ai} = d(A_{i-1} - A_{i+1}) / \Delta t$

- 1) Tracer le point O
- 2) Calculer la vitesse \vec{V}_{A_8} et la tracer.
- 3) Calculer la vitesse \vec{V}_{A_2} et la tracer.
- 4) Conclure sur le type de mouvement
- 5) Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}_{A_{19}}$ et la tracer
- 6) Conclure sur le type de mouvement
- 7) Les résultats 4) et 6) sont-ils cohérents?

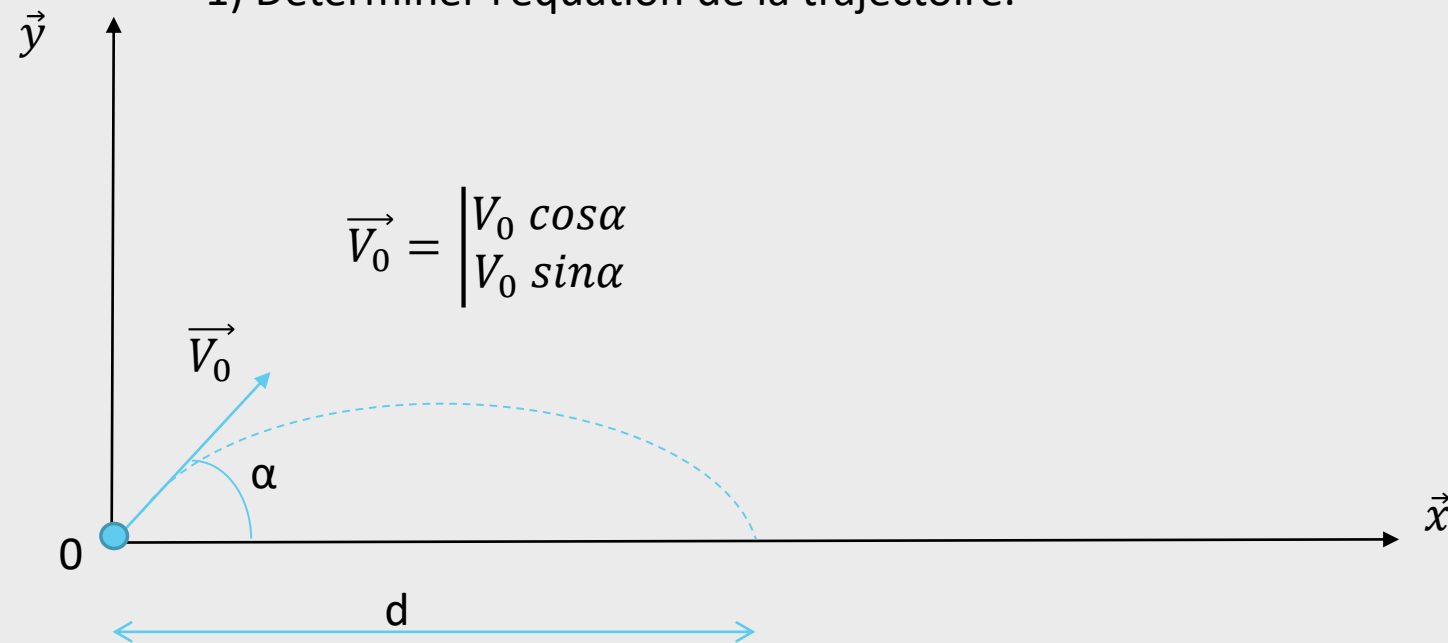




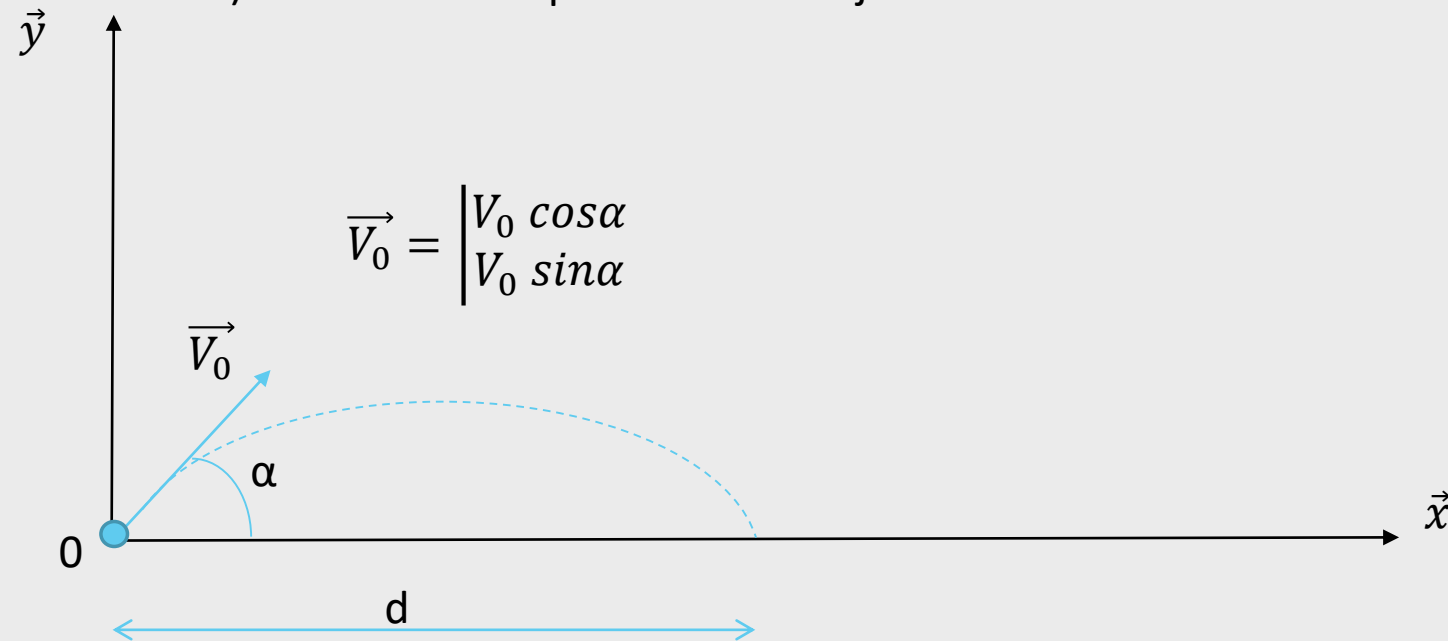


- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire.
- 2) A quelle distance d le corps retombera sur le sol

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.

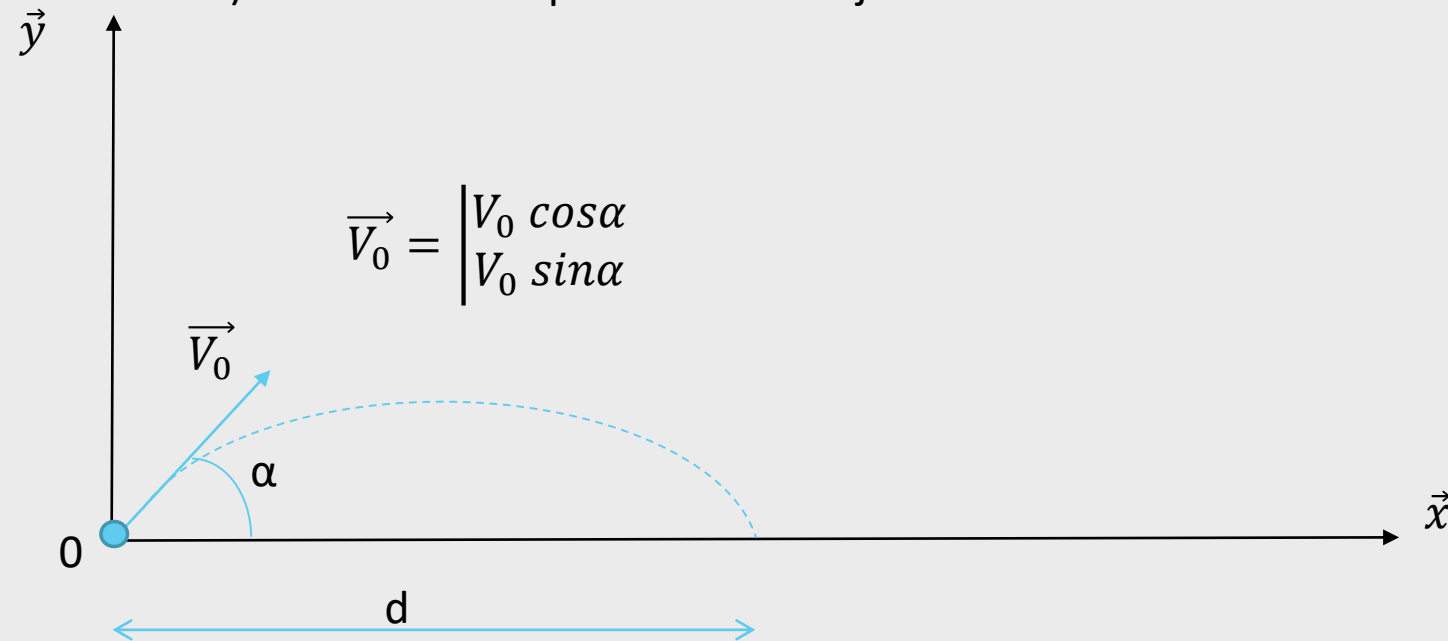


1) Déterminer l'équation de la trajectoire.

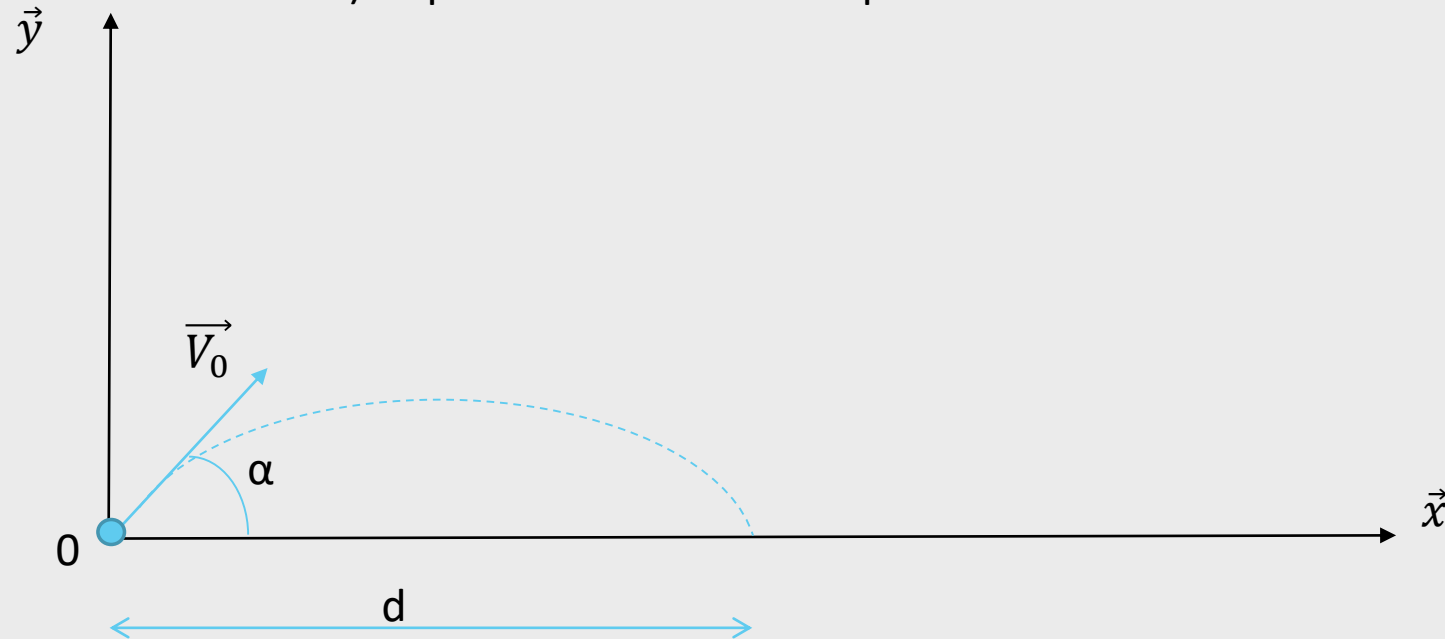


Or à $t=0$ on a $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$

1) Déterminer l'équation de la trajectoire.



2) A quelle distance d le corps retombera sur le sol



problématique

Lorsque l'on étudie un système composé de plusieurs solides auxquels on relie un repère, on se pose rapidement les questions suivantes :

- ✦ Quel est le mouvement du solide i par rapport au repère absolu
- ✦ Quelle est la vitesse du point p appartenant au solide j par rapport au repère absolu
- ✦

Problème : si l'on connaît le mouvement du point P par rapport au repère R_i et si l'on connaît le mouvement du repère R_i par rapport au repère R_j , peut on connaître le mouvement du point P par rapport au repère R_j ?

problématique



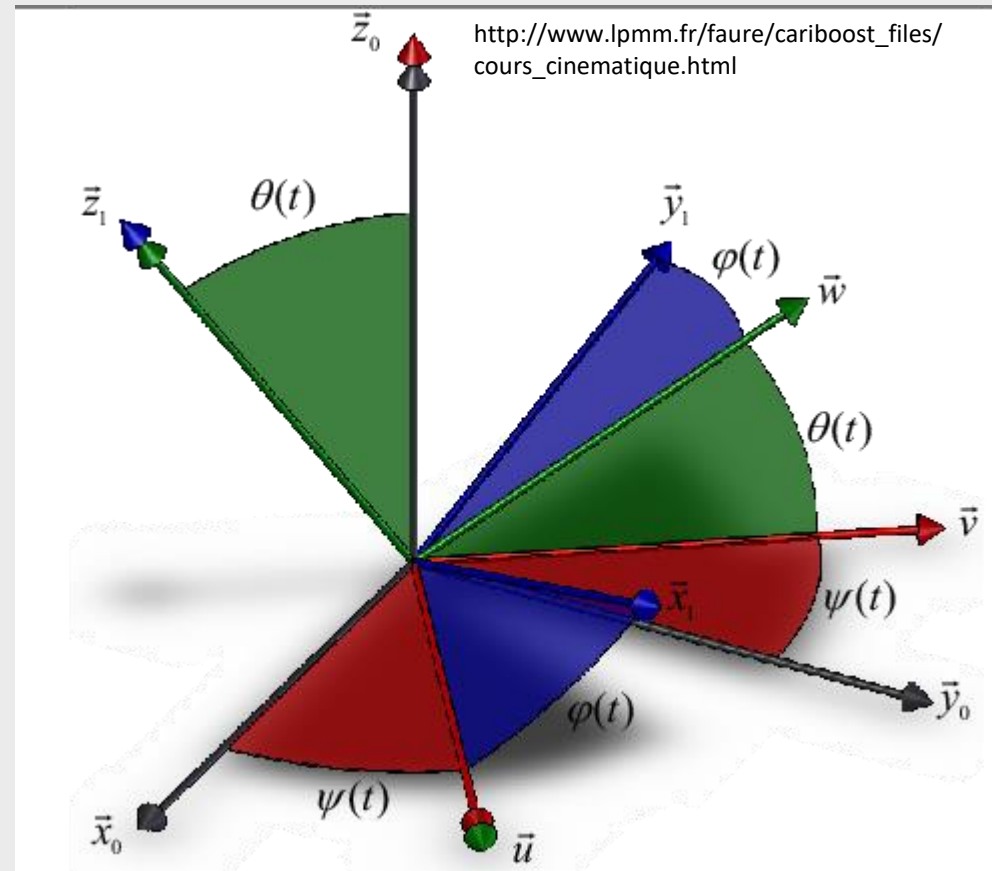
angles d'Euler

$R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un ROND

$R(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ un ROND

$R(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ un ROND

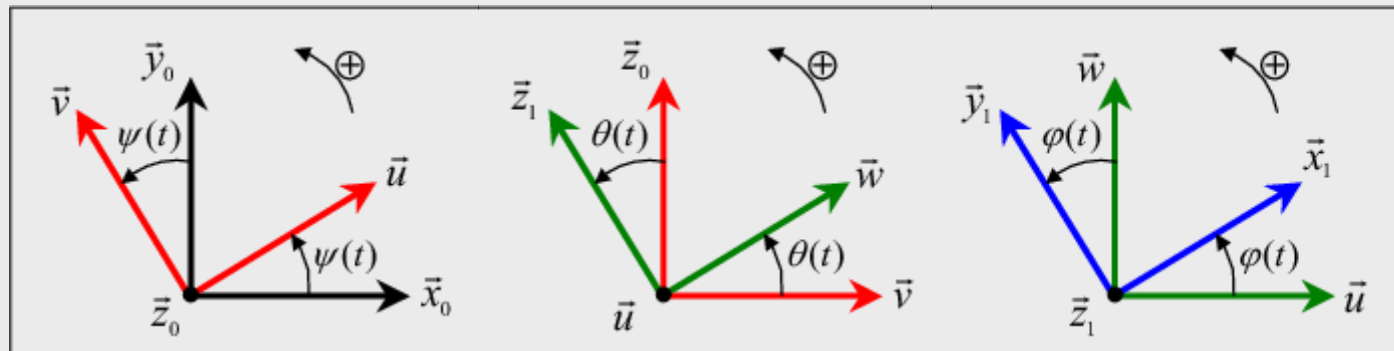
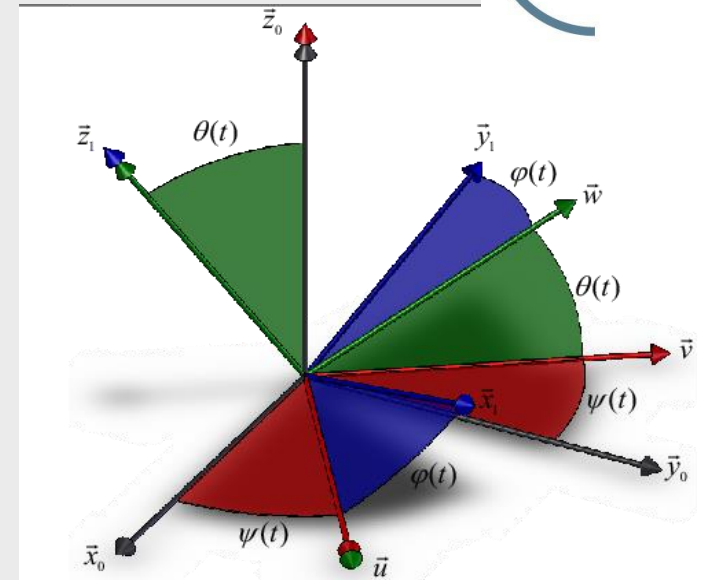
$R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un ROND



figures de calcul

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un ROND
 $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ un ROND
 $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ un ROND
 $R_3(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un ROND

$\psi(t)$
 $\theta(t)$
 $\phi(t)$



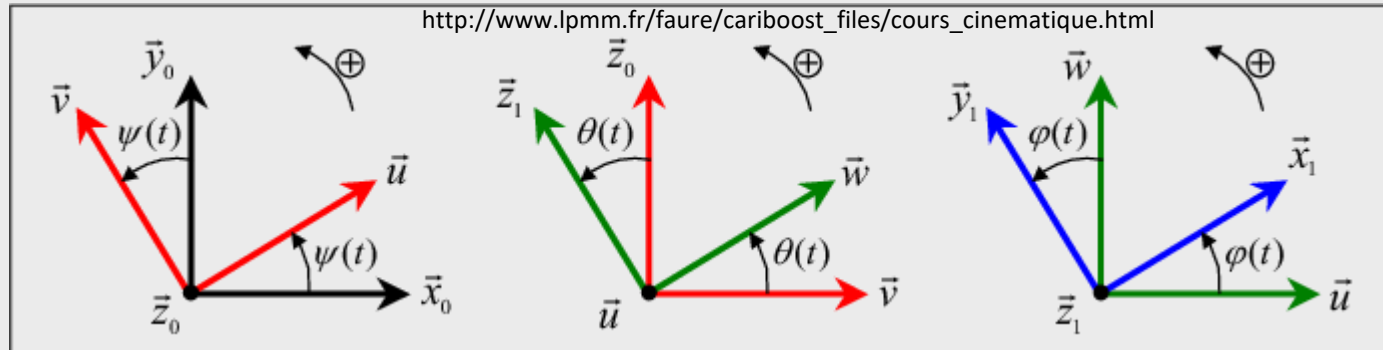
http://www.lpm.fr/faure/cariboost_files/cours_cinematique.html

deux règles à respecter :

$$\text{angle} \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

la figure se fait dans le sens direct
(vecteur normal orienté vers vous)

figures de calcul



Ces figures de calcul vont nous permettre de calculer facilement tous les produits scalaires et vectoriels dont nous aurons besoin.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ?$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = ?$$

$$\vec{u} \cdot \vec{y}_0 = ?$$

$$\vec{u} \wedge \vec{y}_0 = ?$$

$$\vec{u} \cdot \vec{y}_1 = ?$$

$$\vec{u} \wedge \vec{y}_1 = ?$$

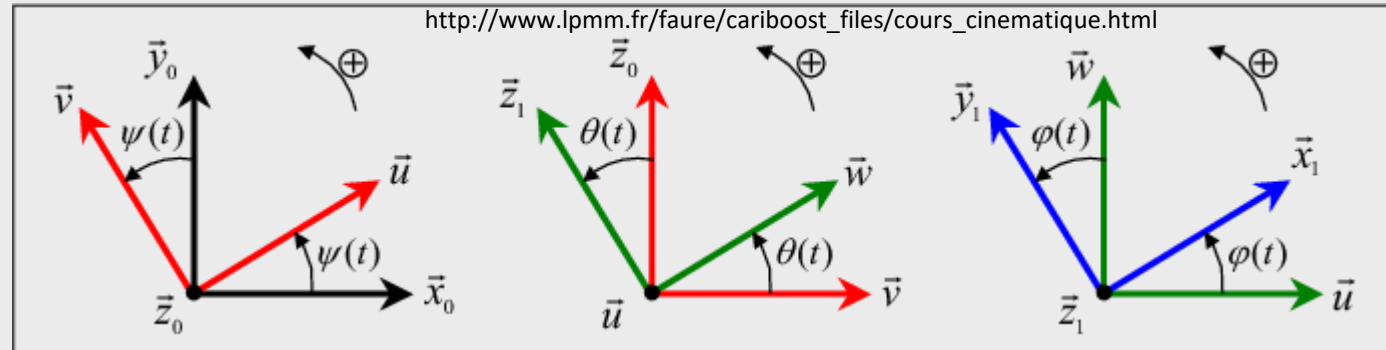
$$\vec{x}_1 \cdot \vec{u} = ?$$

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{u} = ?$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 = ?$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_0 = ?$$

figures de calcul

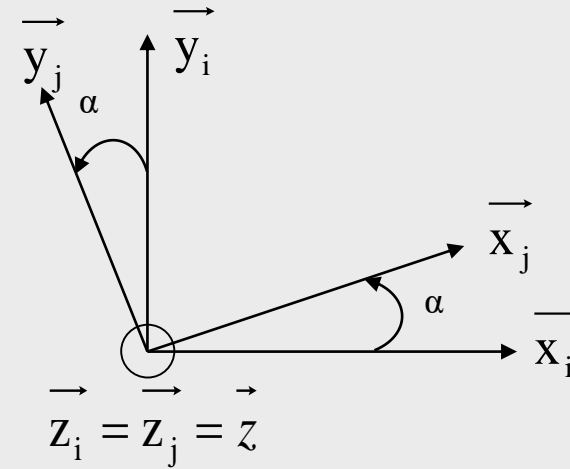


Ces figures de calcul vont nous permettre de calculer facilement tous les produits scalaires et vectoriels dont nous aurons besoin.

Vecteur vitesse de rotation

Soient 2 Repères Orthonormés Directs (ROND)

$$R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i) \text{ et } R_j(O, \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$$



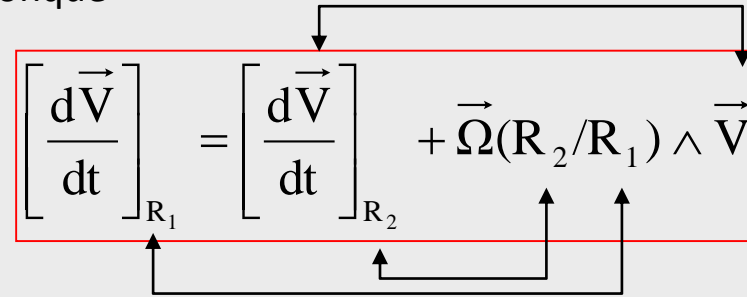
Le vecteur vitesse de rotation du repère R_j par rapport au repère R_i est noté :

$$\vec{\Omega}(R_j/R_i) = \dot{\alpha} \vec{z}$$

dérivation d'un vecteur

R_1 et R_2 deux Repères Orthonormés Directs (ROND)

\vec{V} Un vecteur quelconque

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}$$


En pratique, on choisit toujours R_2 tel que le vecteur soit fixe dans R_2 pour avoir une dérivée nulle

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}$$

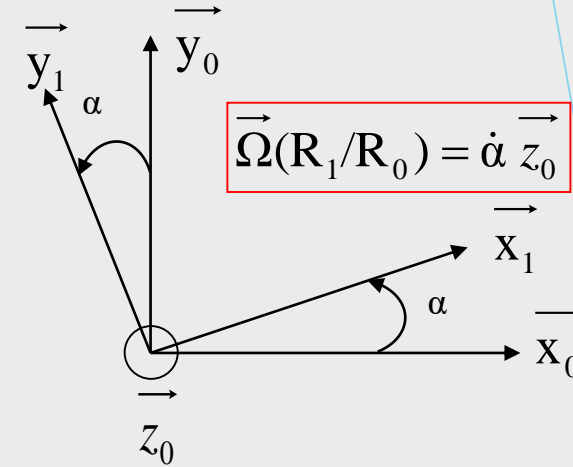
Ces relations sont très importantes et seront constamment utilisées en cinématique. Elles permettent en effet de remplacer une dérivation vectorielle par un simple produit vectoriel

dérivation d'un vecteur

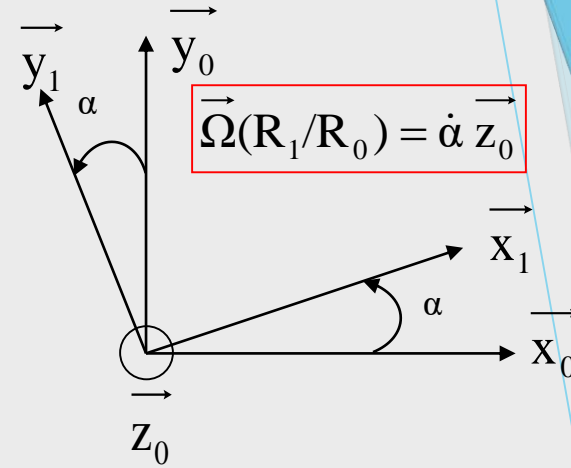
$$\vec{V} = a(t) \vec{x}_1 + b(t) \vec{y}_1 + c(t) \vec{z}_0$$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ deux ROND

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_0} = ?$$



dérivation d'un vecteur



Formule de distribution des vitesses

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND lié à (S)

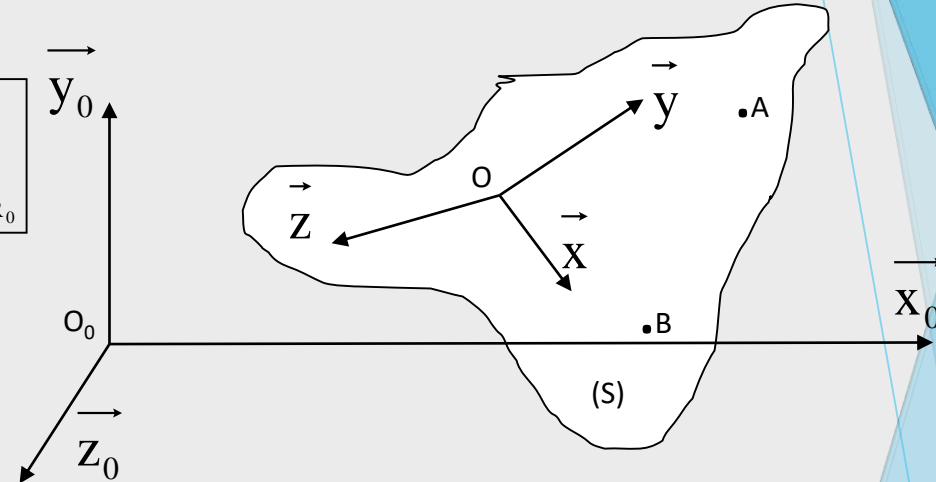
A et B deux points matériels de (S)

$$\vec{V}(A \in S/R_0) = \left[\frac{d\vec{O_0A}}{dt} \right]_{R_0} \quad \vec{V}(B \in S/R_0) = \left[\frac{d\vec{O_0B}}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\vec{O_0A} = \vec{O_0B} + \vec{BA}$$

$R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un ROND absolu

(s) est en mouvement par rapport R_0



$$\vec{V}(A \in S/R_0) = \left[\frac{d\vec{O_0B}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\vec{BA}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{V}(B \in S/R_0) + \left[\frac{d\vec{BA}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{BA} = \vec{V}(B \in S/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{BA}$$

$$\vec{V}(A \in S/R_0) = \vec{V}(B \in S/R_0) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}(R/R_0)$$

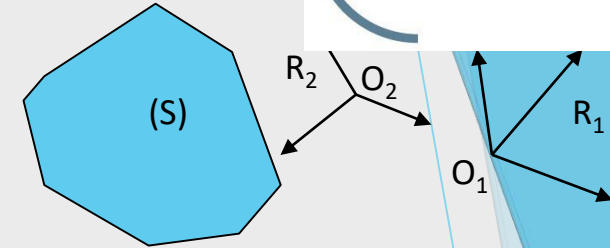
Formule de distribution/transport des vitesses

On passe par un autre point

composition des vitesses

$R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un ROND $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un ROND

un solide (S) est en mvt par rapport à ces 2 repères qui sont également en mvt entre-eux



Soit P un point de (S) :

$$\vec{V}(P \in S/R_1) = \left[\frac{d\vec{O_1P}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d\vec{O_2P}}{dt} \right]_{R_1}$$

$$= \vec{V}(O_2 \in R_2/R_1) + \left[\frac{d\vec{O_2P}}{dt} \right]_{R_2} + \vec{PO_2} \wedge \vec{\Omega}(R_2/R_1)$$

$$= \vec{V}(O_2 \in R_2/R_1) + \vec{V}(P \in S/R_2) + \vec{PO_2} \wedge \vec{\Omega}(R_2/R_1)$$

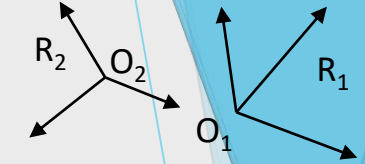
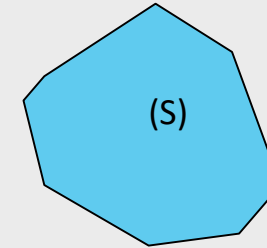
$$= \vec{V}(P \in S/R_2) + \vec{V}(O_2 \in R_2/R_1) + \vec{PO_2} \wedge \vec{\Omega}(R_2/R_1)$$

$$= \vec{V}(P \in S/R_2) + \vec{V}(P \in R_2/R_1)$$

composition des vitesses

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un ROND

$R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un ROND



un solide (S) est en mvt par rapport à ces 2 repères qui sont également en mvt entre-eux

Il en résulte que :

$$\vec{V}(P \in S/R_1) = \vec{V}(P \in S/R_2) + \vec{V}(P \in R_2/R_1)$$

Si R_1 est le repère absolu alors :

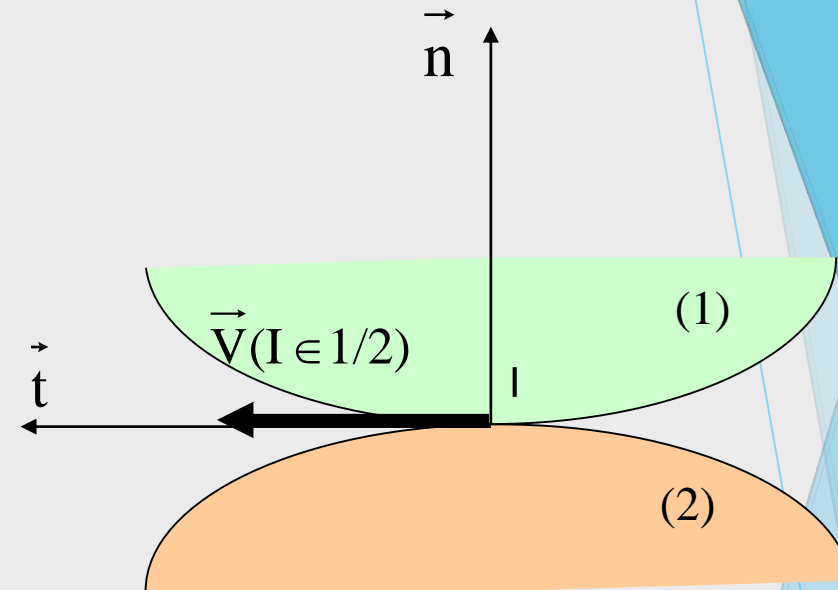
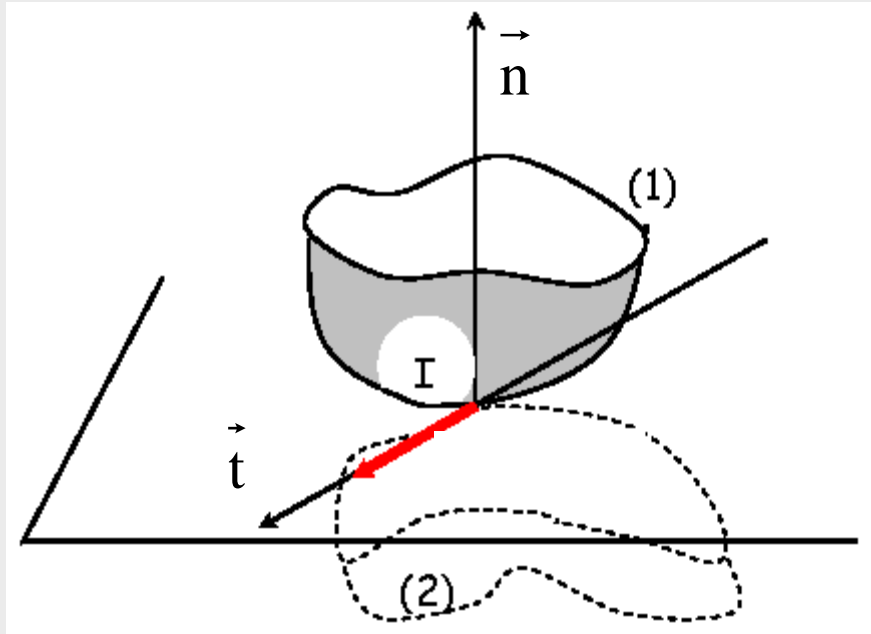
(Vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement)

Généralisation

$$\vec{V}(P \in R_9/R_0) = \vec{V}(P \in R_9/R_8) + \vec{V}(P \in R_8/R_7) + \vec{V}(P \in R_7/R_6) + \dots + \vec{V}(P \in R_1/R_0)$$

Formule de composition des vitesses
On passe par un autre repère

vitesse de glissement

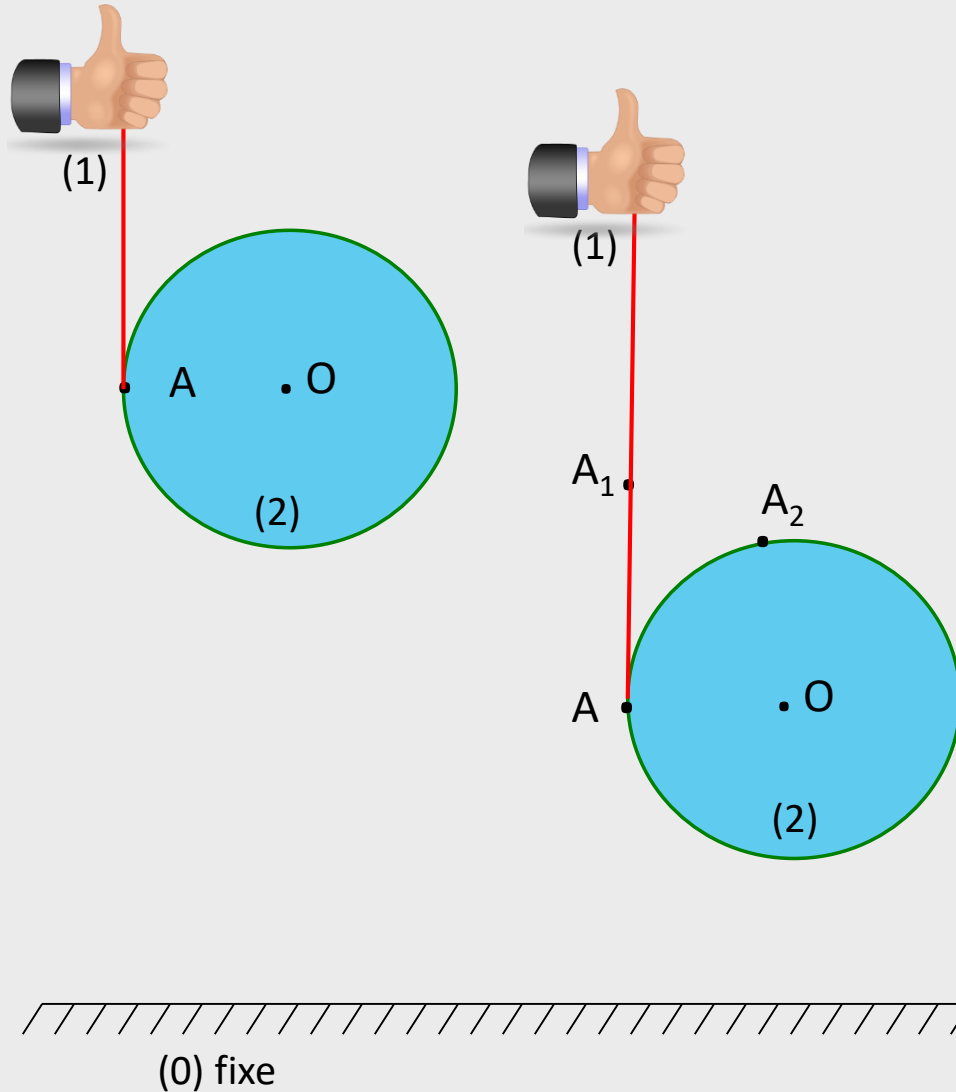


La vitesse de glissement au point de contact I entre les solides (1) et (2) se situe sur le plan tangent commun aux deux solides.

Condition roulement sans glissement

$$\vec{V}(I \in 1/2) = \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$$

attention aux différentes vitesses



R_0 un ROND lié au solide (0)

R_1 un ROND lié au solide (1)

R_2 un ROND lié au solide (2)

$$\vec{V}(A \in 1/0)$$

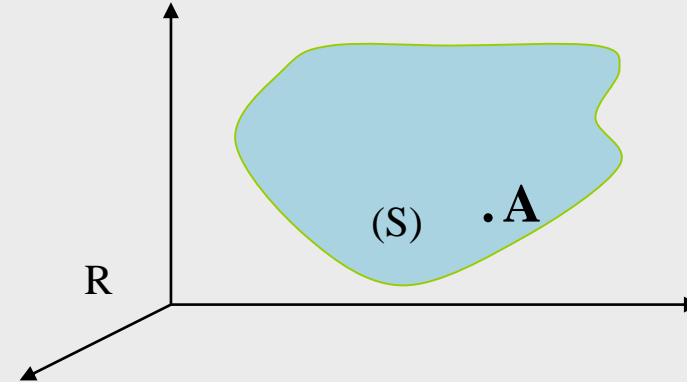
$$\vec{V}(A \in 2/0)$$

$$\vec{V}(A \in 2/1)$$
 Vitesse de glissement

$$\vec{V}(A/0)$$
 Vitesse verticale = vitesse du pt O

torseur cinématique

Soient un solide (S) et R un ROND



Tout comme le torseur statique représente les efforts appliqués à un solide, le torseur cinématique représente les mouvements d'un solide par rapport à un repère

Le **torseur cinématique** du solide (S), dans son mouvement par rapport à R, écrit au point A est défini comme suit :

$$\mathcal{V}(S/R) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}_A$$

Avec :

$$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

Formule du transport des moments/vitesses

Comment calculer une vitesse :

$$\overrightarrow{V}(A \in S/R_2) = ?$$

1) Le point A a un mouvement de translation dans R2 :

oui, on dérive le vecteur position :

non, on passe au point 2

$$\overrightarrow{V}(A \in S/R_2) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_2A}}{dt} \right]_{R_2}$$

2) Le solide S est directement lié à R2 (fig. de calcul) :

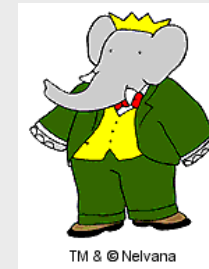
oui, on passe au point 3

non, on utilise la composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V}(A \in S/R_2) = \overrightarrow{V}(A \in S/R_1) + \overrightarrow{V}(A \in R_1/R_2)$$

3) On passe par un autre point **fixe dans S** :

$$\overrightarrow{V}(A \in S/R_2) = \overrightarrow{V}(B \in S/R_2) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_2)$$



(S_1) est en liaison pivot avec (S_0) en O

(S_2) est en liaison pivot avec (S_1) en B

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un ROND lié au solide (S_0)

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un ROND lié au solide (S_1)

$R_2(O, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un ROND lié au solide (S_2)

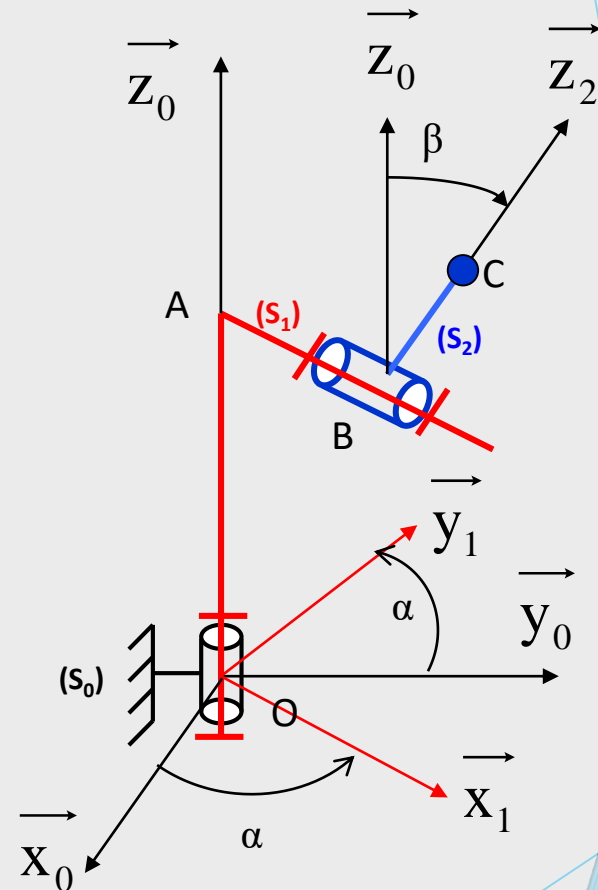
Données :

$OA = \text{cte} = a$

$AB = \text{cte} = b$

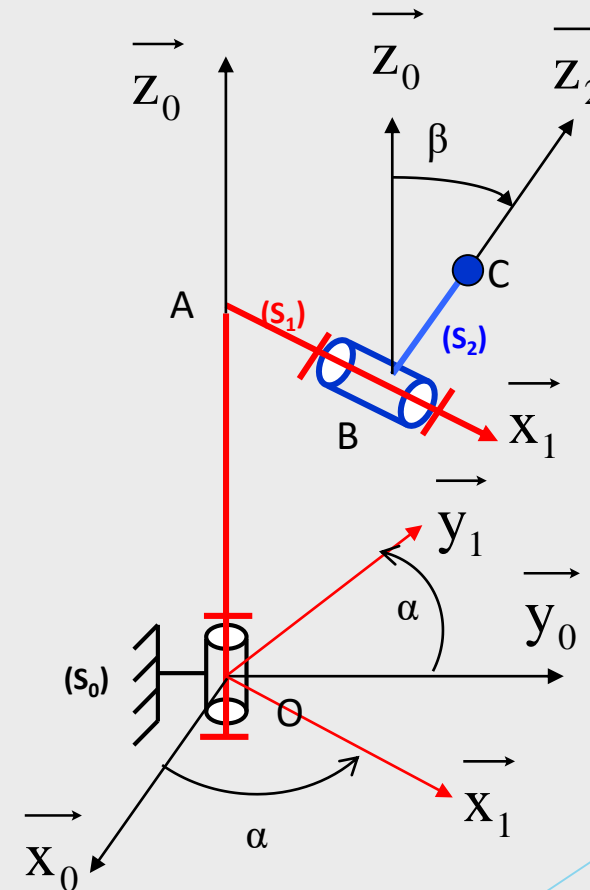
$BC = \text{cte} = c$

α et β paramètres
dépendants du temps

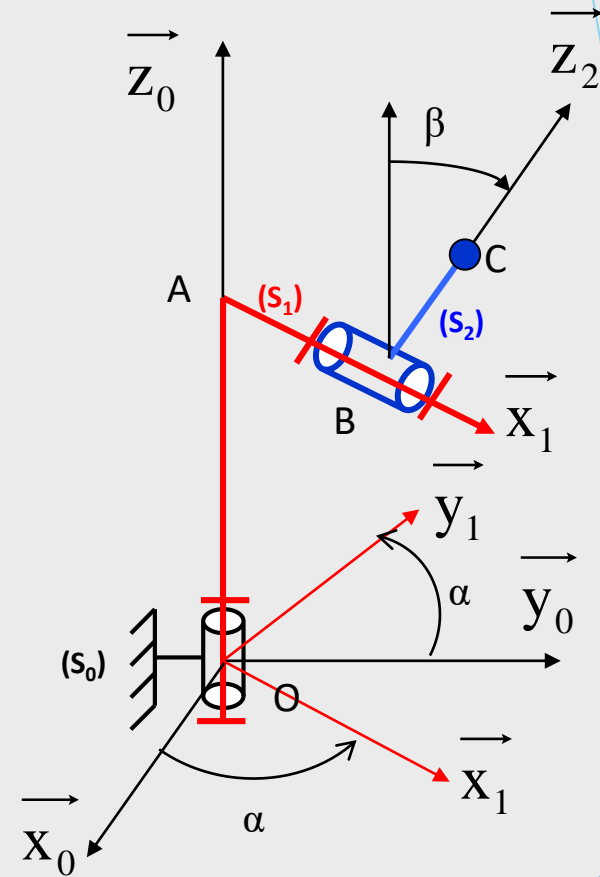


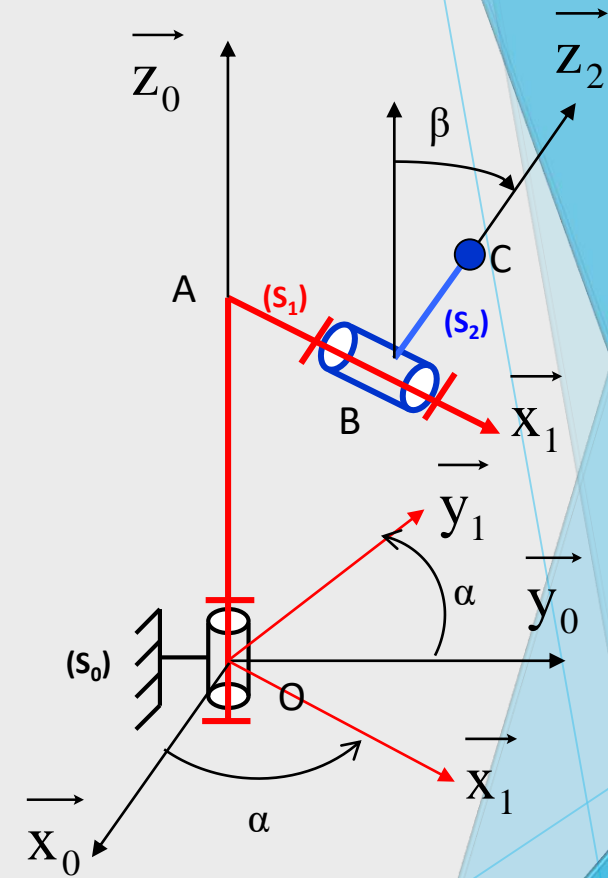
Questions :

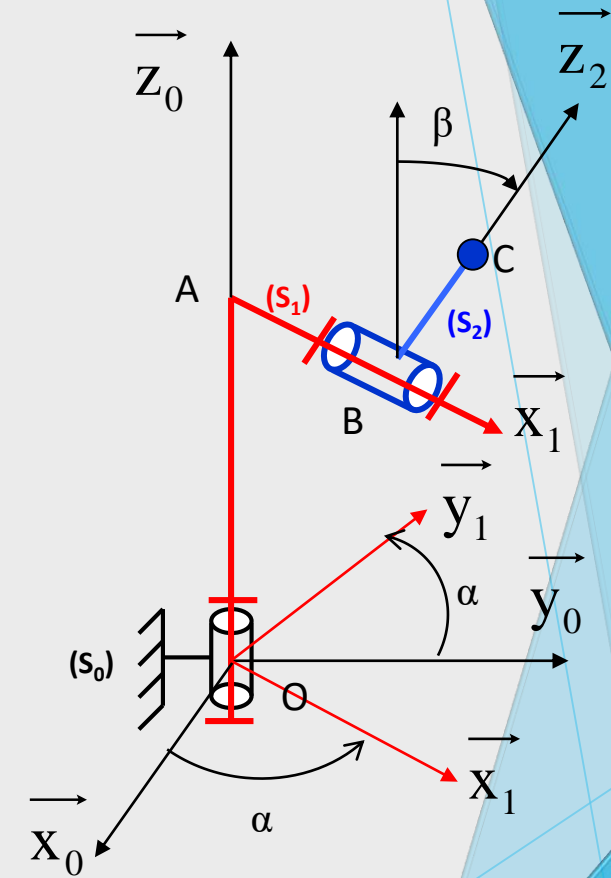
- 1) Tracer les deux figures de calculs nécessaires à l'étude et écrire les vecteurs vitesses de rotations correspondants.
- 2) Déterminer le torseur cinématique en O du mouvement de (S_1) par rapport à R_0 .
- 3) Déterminer le torseur cinématique en A du mouvement de (S_1) par rapport à R_0 .
- 4) Déterminer le torseur cinématique en B du mouvement de (S_1) par rapport à R_0 .
- 5) Déterminer la vitesse du point C appartenant à (S_2) par rapport à R_1 .
- 6) Déterminer la vitesse du point C appartenant à (S_2) par rapport à R_0 .
- 7) Déterminer le torseur cinématique en C du mouvement de (S_2) par rapport à R_0 .
- 8) Déterminer l'accélération du point C appartenant à (S_2) par rapport à R_0 .

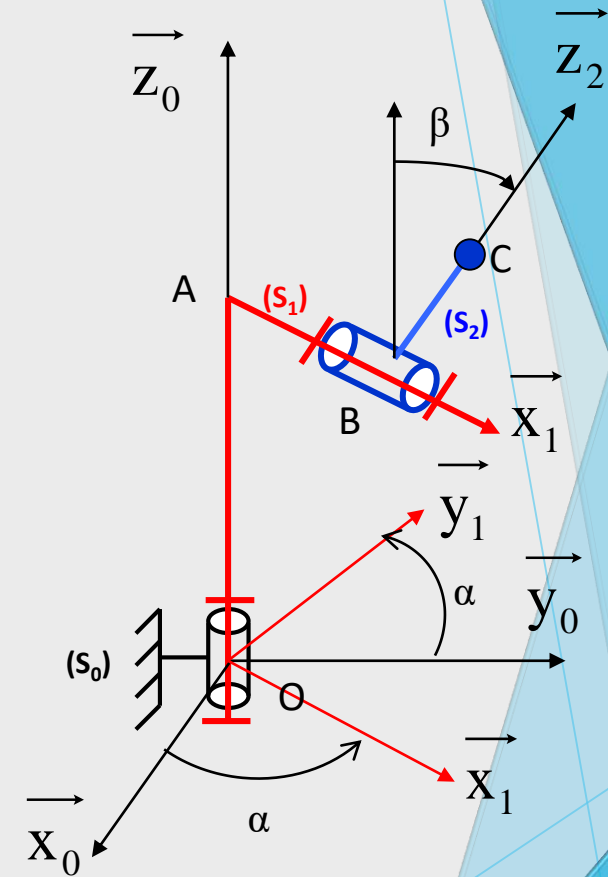


1)









FIN