Transformation de Laplace

I. Transformée de Laplace

1. Definition

Définition 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable t, continue par morceaux et causale (nulle pour $t < 0$). On appelle transformée de Laplace de f la fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie, lorsqu'elle a un sens, par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Remarque. Le terme "causale" vient du fait qu'un effet ne peut précéder sa cause. Si la fonction R d'une variable $t \in \mathbb{R}$ caractérise la réponse d'un système physique à un signal $S(t)$ parvenu au temps $t = 0$, cette fonction réponse doit être nulle pour $t < 0$.

Définition 2
L'application F est aussi appelée **image de** f. L'application $\mathcal{L}$ qui à f associe son image F est appelée **transformation de Laplace**. Ainsi, l'application F sera aussi notée $\mathcal{L}(f)$. La lettre $\mathcal{L}$ désignant "transformée de Laplace de".

$$f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$$

⚠ F est une fonction à valeurs complexes même si f est à valeurs réelles.

Remarque. Considérons la fonction $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \sin(t) \end{array}$. A priori, on ne peut pas définir la transformée de Laplace de f car elle est non nulle pour $t < 0$. Cependant, on peut définir une nouvelle fonction g en posant $g(t) = f(t)\gamma(t)$ où

$$\begin{array}{ccccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{array}.$$

C'est pourquoi on devrait plutôt définir la transformée de Laplace d'une fonction f par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\gamma(t) dt.$$

La fonction γ est souvent omise mais elle sera indispensable lorsqu'on effectuera des translations de la fonction f. Par la suite on n'oubliera pas que F est l'image de la fonction $f.\gamma$.

2. Condition d'existence

Vous aurez remarqué que la transformée de Laplace est en réalité une intégrale impropre et donc qu'elle n'existe que si l'intégrale impropre est convergente.

Exemple. On considère la fonction

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Calculons $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} dt = \left[\frac{-1}{p+1} e^{-(p+1)t} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{p+1} + \frac{1}{p+1}.$$

Or, en posant $p = a + jb$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{-(p+1)t} = e^{-(a+jb+1)t} = e^{-(a+1)t}e^{-jbt}$$

on a $\left|e^{-jbt}\right| = 1$ et

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+1)t} \text{ est finie si et seulement si } a+1 > 0.$$

D'où

$$F(p) \text{ existe si et seulement si } \mathrm{Re}(p) > -1$$

et dans ce cas

$$F(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Dans toute la suite du cours, afin de garantir l'existence de F, on imposera à f deux conditions :

- être **continue par morceaux** sur $\mathbb{R}$ (nombre fini de discontinuités sur tout intervalle de longueur finie et limite finie à gauche et à droite aux discontinuités).
- être à **croissance exponentielle**, c'est-à-dire qu'il existe trois nombres réels $M > 0$,α et T tels que pour tout $t \geq T$,

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Nous allons démontrer que si les hypothèses précédentes sont vérifiées alors $F(p)$ existe.

Démonstration.

$$|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|e^{-pt}f(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} \left|e^{-(a+jb)t}f(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,|f(t)|\,dt$$

or

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,|f(t)|\,dt = \int_0^{T} e^{-at}\,|f(t)|\,dt + \int_T^{+\infty} e^{-at}\,|f(t)|\,dt$$

et on sait que $\int_0^T e^{-at}\,|f(t)|\,dt = M_0$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé. Par ailleurs, sur $[T, +\infty[$, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. d'où

$$|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt\right| \leq M_0 + \int_0^{+\infty} Me^{\alpha t}e^{-at}dt.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} Me^{\alpha t}e^{-at}dt = \int_0^{+\infty} Me^{(\alpha-a)t}dt$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(p) = a > \alpha$ et vaut $\frac{M}{a-\alpha}$. □

3. Transformée de Laplace de fonctions usuelles

3.1. Fonction échelon unité ou fonction de Heaviside

Il s'agit de la la fonction déja rencontrée

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Sa transformée de Laplace est donnée par $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}$. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|e^{-pt}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}(p)t} = 0$ si $\mathrm{Re}(p) > 0$. Lorsque $\mathrm{Re}(p) > 0$, on a $F(p) = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{L}(\gamma)(p) = \frac{1}{p}, \mathrm{Re}(p) > 0.}$$

3.2. Impulsion de Dirac

Rappels. On considère la famille de fonctions définies par, pour $\epsilon > 0$:

$$\begin{array}{rcl} \delta_\epsilon & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } 0 < t < \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{array}$$

Remarquons que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)dt = 1.$$

Lorsque ϵ tend vers 0, la limite des fonctions δ_ϵ (qui n'est pas une fonction), défnit **l'impulsion de Dirac**, notée δ, qui sert à représenter en physique une action s'exerçant sur un temps très court (impulsion). On écrit abusivement :

$$\begin{array}{rcl} \delta & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} . \end{array}$$

On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Calculons la transformée de Laplace des fonctions δ_ϵ :

$$\mathcal{L}(\delta_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{-pt}dt = \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^\epsilon = \frac{1-e^{-p\epsilon}}{p\epsilon}.$$

Or, on sait que lorsque $p \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1-e^{-p\epsilon}}{p\epsilon} = 1.$$

Il en est de même pour tout $p \in \mathbb{C}$, et on conclut :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{C}, \mathcal{L}(\delta)(p) = 1}$$

3.3. Fonctions puissances

Soit, pour tout $\in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} f_n & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \mapsto \begin{cases} t^n & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} . \end{array}$$

La transformée de Laplace de f_n est donnée par

$$F_n(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt.$$

Une intégration par parties nous donne

$$F_n(p) = \left[-t^n\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^{n-1}dt.$$

Si $\text{Re}(p) > 0$ alors

$$\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-pt} = 0.$$

En posant $I_n = F_n(p)$, on obtient alors la relation de récurrence

$$I_n = \frac{n}{p}I_{n-1}.$$

On obtient donc

$$I_n = \frac{n}{p} \times \frac{n-1}{p} \times \ldots \times \frac{1}{p} \times I_0.$$

Or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$ d'où finalement

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n \gamma(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \mathrm{Re}(p) > 0.}$$

3.4. Fonction exponentielle

Soit $a \in \mathbb{C}$, on définit la fonction f de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{array}.$$

La transformée de Laplace de f est donnée par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt = \left[-\frac{e^{-(p+a)t}}{p+a} \right]_0^{+\infty}$$

Si $\mathrm{Re}(p) > -\mathrm{Re}(a)$ alors

$$\lim_{t \to +\infty} \left| e^{-(p+a)t} \right| = 0.$$

d'où finalement

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at} \gamma(t))(p) = \frac{1}{p+a}, \mathrm{Re}(p) > -\mathrm{Re}(a).}$$

3.5. Fonctions trigonométriques

D'après le paragraphe précédent, fixons $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive :

$$\mathcal{L}\left(e^{-j\omega t} \gamma(t)\right)(p) = \frac{1}{p + j\omega} = \frac{p - j\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

D'après les formules d'Euler,

$$\mathcal{L}\left(\cos(\omega t)\gamma(t)\right)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \gamma(t)\right)(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\left(\sin(\omega t)\gamma(t)\right)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \gamma(t)\right)(p) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\cos(\omega t)\gamma(t)\right)(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \mathrm{Re}(p) > 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\sin(\omega t)\gamma(t)\right)(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \mathrm{Re}(p) > 0.}$$

4. Propriétés de la transformée de Laplace

4.1. Linéarité

Propriété 1

La transformation de Laplace est linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g, continues par morceaux et à croissance exponentielle et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g).$$

Démonstration. L'intégrale est linéaire. $\square$

Exemple.
- Soit $f(t) = (t^2 - 3t + 1)\gamma(t)$, alors par linéarité, $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{3}{p^2} + \frac{1}{p}$.
- Soit $g(t) = \cos^2(t)\gamma(t)$, en utilisant le fait que $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ et la linéarité de $\mathcal{L}$, on obtient $\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right)$.

4.2. Transformée de $f(at)$, $a > 0$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t continue par morceaux, causale et à croissance exponentielle. On fixe $a > 0$ et on pose $g(t) = f(at)$. Déterminons la transformée de Laplace de g :

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt$$

en effectuant le changement de variable $x = at$, on obtient

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{px}{a}} f(x)\frac{1}{a}dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{px}{a}} f(x)dx = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$$

d'où, en notant $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$:

$$\boxed{\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)}.$$

4.3. Transformée de Laplace d'une fonction retardée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t continue par morceaux, causale et à croissance exponentielle. On fixe $a > 0$ et on pose

$$\begin{array}{rcll} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases} \end{array}.$$

Déterminons la transformée de Laplace de g :

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)dt$$

en effectuant le changement de variable $x = t - a$, on obtient

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p(a+x)} f(x)dx = e^{-pa}\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx = e^{-pa}\mathcal{L}(f)(p)$$

d'où, en notant $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$:

$$\boxed{\mathcal{L}(g)(p) = e^{-pa}F(p)}.$$

La fonction g peut s'écrire $g(t) = f(t-a)\gamma(t-a)$ car $\gamma(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$.

Propriété 2 [Théorème du retard]

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t-a)\gamma(t-a))(p) = e^{-pa}\mathcal{L}(f)(p)}.$$

Exemple. On considère une impulsion f unitaire de durée $t_0 > 0$.

On a alors
$$f(t) = \gamma(t) - \gamma(t - t_0).$$
Par linéarité de la transformée de Laplace, on a :
$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(\gamma)(p) - \mathcal{L}(\gamma(t - t_0))(p) = \frac{1}{p} - e^{-pt_0}\frac{1}{p}$$

4.4. Transformée de Laplace d'une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t continue par morceaux, causale, à croissance exponentielle et de période $T > 0$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} f_0(t) = f(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ f_0(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, T] \\ \forall n \in \mathbb{N} & f_n(t) = f_0(t - nT) \end{cases}$$

A l'aide de cette suite, on peut "reconstruire" la fonction f périodique :
$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$
En utilisant la linéarité de la transformation de Laplace et le théorème du retard :
$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}\left(f_n\right)(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT}\mathcal{L}\left(f_0\right)(p).$$
Or,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \text{ lorsque } \left|e^{-pT}\right| < 1.$$
Mais $\left|e^{-pT}\right| < 1$ si et seulement si $\mathrm{Re}(p) < 0$.

Propriété 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t continue par morceaux, causale, à croissance exponentielle et de période $T > 0$. En notant f_0 la fonction qui coincide avec f sur l'intervalle $[0, T]$ et qui est nulle en dehors de cet intervalle, on a

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\mathcal{L}(f_0)(p)}{1 - e^{-pT}}, \mathrm{Re}(p) > 0.}$$

4.5. Transformée de Laplace de la dérivée

Théorème 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, causale et à croissance exponentielle

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)}$$

$f(0^+)$ représentant la limite en 0^+ de f.

Démonstration. $\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$ et à l'aide d'une intégration par parties on a

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left[e^{-pt}f(t)\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t) = 0$, $\left[e^{-pt}f(t)\right]_0^{+\infty} = -f(0^+)$. On en déduit

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+).$$

□

Généralisation. Si f'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème on obtient :

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0^+) = p\left[p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)\right] - f'(0^+)$$

D'où

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+).$$

Plus généralement, si f et ses dérivées successives possèdent de "bonnes" propriétés

$$\boxed{\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+).}$$

Dans le cas particulier où $f(0^+) = f'(0^+) = \ldots = 0$ on $\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p)$: transformer la dérivée de f revient à multiplier $\mathcal{L}(f)(p)$ par p.

4.6. Théorème de la valeur initiale et finale

Lorsque f et f' possèdent de bonnes propriétés, on vient d'établir que pour $p \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$. Supposons que $p \in \mathbb{R}$ et faisons tendre p vers $+\infty$. En admettant que

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt}f'(t)dt = 0$$

on obtient :

Théorème 2 [Théromème de la valeur initiale]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, causale et à croissance exponentielle

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} p\mathcal{L}(f)(p) = f(0^+)}$$

$f(0^+)$ représentant la limite en 0^+ de f.

Supposons toujours que $p \in \mathbb{R}$ et cette fois faisons tendre p vers 0. Dans ce cas, $e^{-pt} \to 1$. En admettant que $\lim\limits_{p\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) - f(0^+)$, on obtient :

Théorème 3 [Théromème de la valeur finale]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, causale et à croissance exponentielle

$$\boxed{\lim_{p\to 0} p\mathcal{L}(f)(p) = f(+\infty)}$$

$f(+\infty)$ représentant la limite en $+\infty$ de f.

4.7. Transformée de Laplace de la primitive

Théorème 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t continue par morceaux, causale et à croissance exponentielle

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}}$$

Démonstration. Soit la fonction $\varphi(t) = \int_0^t f(x)dx$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\varphi'(t) = f(t)$ et $\varphi(0^+) = 0$. Par ailleurs, $\mathcal{L}(\varphi')(p) = p\mathcal{L}(\varphi)(p)$. D'où $\mathcal{L}(\varphi')(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ donne $\mathcal{L}(\varphi)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}$. □

4.8. Dérivation dans le domaine de Laplace

Formellement, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable t continue par morceaux, causale et à croissance exponentielle et $p \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\mathcal{L}(f)}{dp}(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} -te^{-pt} f(t)dt = -\mathcal{L}(tf(t))(p)$$

D'où en notant $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ on obtient

$$\boxed{\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(p)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^2 f(t)\right] = (-1)^2 F''(p)}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)}$$

5. Transformée de Laplace et produit de convolution

5.1. Rappels sur le produit de convolution

Défintion 3

Lorsqu'il existe, on appelle produit de convolution de deux fonctions numériques f et g la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx$$

et on note

$$h = f * g$$

Propriété 4

Le produit de convolution

- est commutatif : $f * g = g * f$

- est associatif : $(f*g)*h = f*(g*h)$.
- est distributif par rapport à l'addition : $f*(g+h) = f*g+f*h$.

Démonstration.
- Faire le changement de variable $u = t-x$ dans $f*g$.
- Admis.
- Grâce à la linéarité de l'intégrale

□

Propriété 5 [produit de convolution de deux fonctions causales]

Soient f et g deux fonctions causales :

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Examinons comment se comporte l'impulsion de Dirac avec le produit de convolution. On rappelle que l'impulsion de Dirac δ a été définie comme la limite de fonctions créneaux dont la largeur tend vers 0 et l'amplitude tend vers l'infini. Pour $\epsilon > 0$:

$$\begin{array}{rcll} \delta_\epsilon & : & \mathbb{R} & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } 0 < t < \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{array}$$

On a $\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t) = \delta$. et on obtient

$$\begin{array}{rcll} \delta & : & \mathbb{R} & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases} . \end{array}$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)f(t)dt = \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon}f(t)dt = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f(t)dt$$

D'après le théorème de la valeur moyenne, il existe $\zeta \in [0, \epsilon]$ tel que $\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon f(t)dt = f(\zeta)$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0).$$

Avec un raisonnement analogue et le changement de variable $u = t-x$, on obtient aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-x)f(t)dt = f(x).$$

Propriété 6

L'impulsion de Dirac est élément neutre pour le produit de convolution.

5.2. Réponse impulsionnelle d'un système

Dans la plupart des applications fondées sur la propagation des ondes, en acoustique ou en électromagnétisme, on simplifie les problèmes étudies en faisant des hypothèses sur la manière dont un système déforme le signal. On écrira un système physique au moyen d'un opérateur liant un signal d'entrée $x(t)$ et un signal de sortie $y(t)$. Le but est d'établir l'expression mathématique de cet opérateur. Un système est :

- **continu** lorsque l'on peut trouver une équation instantanée ou différentielle avec le temps comme variable indépendante qui donne la relation entre les signaux d'entrée et de sortie.
- **linéaire** si, quelques soient réponses $y_1(t)$ et $y_2(t)$ aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et quelques soient les réels λ, μ, lorsqu'on applique au système l'entrée $\lambda x_1(t)+\mu x_2(t)$, sa réponse vaut $\lambda y_1(t)+\mu y_2(t)$.

- **invariant** lorsqu'une translation dans le temps de l'entrée se traduit par cette même translation dans la temps de la réponse. Autrement dit, si $y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $x(t)$, pour tout $\tau > 0$, la réponse du système à l'entrée $x(t-\tau)$ est alors $y(t-\tau)$.
- **causal** si toute réponse du système à un instant $t = t_0$ est indépendant des valeurs du signal d'entrée aux instants postérieurs à t_0.
- **stable** si tout signal d'entrée d'amplitude finie produit une réponse d'amplitude finie.

Définition 4
La réponse impulsionnelle d'un système est le signal en sortie $h(t)$ obtenu si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac.

Théorème 5
Soit h la réponse impulsionnelle d'un système continu, linéaire et invariant. Si x est le signal d'entrée appliqué au système alors la réponse y de ce système est donné par :
$$y = x * h$$

Démonstration. On sait que
$$x(t) = (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$
Comme le système est invariant, chacune des impulsions décalées $\delta(t-\tau)$ engendre une réponse impulsionnelle décalée $h(t-\tau)$.Comme le système est linéaire, la réponse en sortie est donnée par
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = (x * h)(t)$$
□

5.3. Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Théorème 6
Soient f et g deux fonctions numériques causales, continues par morceaux, à croissance exponentielle et telles que $f * g$ existe, on a
$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{C}$,
$$\mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du \int_0^{+\infty} g(v)e^{-pv}dv = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)g(v)e^{-p(u+v)}dudv.$$
Dans cette intégrale double, on effectue le changement de variable $t = u + v$:
$$\mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t-v)g(v)e^{-pt}dtdv = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left[\int_0^{+\infty} f(t-v)g(v)dv\right]dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(f * g)(t)dt.$$
□

II. Transformée de Laplace inverse

1. Définition

Dans toute cette partie, on note E l'ensemble des fonctions f d'une variable réelle à valeurs réelles, causales, continues par morceaux, sur tout intervalle $[0, t_0]$ ($t_0 > 0$) et à croissance exponentielle à l'infini. Le fait que f appartienne à E garantit l'existence de sa transformée de Laplace $F(p)$ pour certaines valeurs de p dans $\mathbb{C}$

Définition 5
On appelle **transformée de Laplace inverse** ou **original** de F la fonction f.

Notation. On note $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

Exemple.

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = t\gamma(t)$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}\right) = \cos(2t)\gamma(t)$

Propriété 6

L'original $f(t)$ d'une fonction $F(p)$ est unique sur tout sous-ensemble où il est continu.

2. Propriétés de la transformée de Laplace inverse

Propriété 7

La transformation de Laplace inverse est linéaire.

Exemple. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{4}{p+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)$. D'où

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{4}{p+1}\right) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 4e^{-t}\right)U(t).$$

Pour obtenir l'original d'une fraction rationnelle $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ où N et D désignent des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on utilisera une décompsition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exemple. Soit $F(p) = \frac{p+1}{p^2(p^2+4)}$. La décomposition de F sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$F(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Par le calcul , on arrive à $A = B = 1/4$, $C = D = -1/4$. Ainsi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+4}\right).$$

Il vient $f(t) = \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t)\right)\gamma(t)$.

Propriété 8 [Original de $F(ap)$, $a > 0$ réel]

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $f(t)$ l'original de $F(p)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(ap)\right] = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Démonstration.

$$F(ap) = \int_0^{+\infty} e^{-apt}f(t)dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = at$, on obtient

$$F(ap) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f\left(\frac{t}{a}\right)dt.$$

□

Propriété 9 [Original de $F(p+a)$, $a \in \mathbb{C}$]

Soit $f(t)$ l'original de $F(p)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(p+a)\right] = e^{-at}f(t).$$

Démonstration.

$$F(p+a) = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t)dt.$$

□

Exemple. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos(\omega t)\gamma(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\sin(\omega t)\gamma(t).$$

Exemple. Déterminer l'original de $F(p) = \frac{p}{p^2+p+1}$.

Propriété 10 [Originaux de $F'(p)$ et $\int_0^{+\infty} F(u)du$]

Soit $f(t)$ l'original de $F(p)$ ($p \in \mathbb{R}$),

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F'(p)\right] = -tf(t).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(u)du\right] = \frac{f(t)}{t}.$$

Démonstration. La première égalité a été démontrée dans la partie I. Quant à la seconde,

$$\begin{aligned}\int_p^{+\infty} F(u)du &= \int_p^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t)dt\right]du = \int_0^{+\infty}\left[\int_p^{+\infty} e^{-ut} f(t)du\right]dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\left[\frac{e^{-ut}}{-t}\right]_p^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pu}\frac{f(t)}{t}dt\end{aligned}$$

□

Exemple. Comme $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right] = e^{-3t}\gamma(t)$, on a $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^2}\right] = te^{-3t}\gamma(t)$

Exemple. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

Propriété 11 [Original de $F(p)\times G(p)$.]

Soit $f(t)$ l'original de $F(p)$ et soit $g(t)$ l'original de $G(p)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\times G(p)\right)=\int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

L'original du produit algébrique de deux fonctions est donc le produit de convolution des originaux.

Exemple. Déterminer l'original de $\frac{1}{p^2(p+1)}$.

III. Applications de la transformée de Laplace

1. Applications mathématiques.

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients réels constants d'inconnue $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivante :

$$(E): a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f(t)$$

où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est donnée. Notons $Y(p)=\mathcal{L}(y)(p)$ et $F(p)=\mathcal{L}(f)(p)$. En utilisant le fait que

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(y')(p)=pY(p)-y(0),\\ \mathcal{L}(y'')(p)=p^2Y(p)-py(0)-y'(0),\\ \vdots\\ \mathcal{L}(y^{(n)})(p)=p^nY(p)-p^{n-1}y(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)\end{gathered}$$

et appliquant la transformée de Laplace à (E), on obtient par linéarité :

$$(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0)Y(p)+\Phi(p)=F(p)$$

où $\Phi(p)$ est un polynôme de degré $n-1$ en p contenant $y(0),y'(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)$. On obtient

$$Y(p)=\frac{F(p)-\Phi(p)}{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0}.$$

Pour obtenir la solution y de (E), il suffit ensuite d'appliquer $\mathcal{L}^{-1}$.

Exemple. On souhaite résoudre le problème de Cauchy : $y''-2y'+y=te^t\gamma(t)$ où $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. D'une part,

$$\mathcal{L}\left(y''-2y'+y\right)=p^2Y(p)-p-2(pY(p)-1)+Y(p)$$

et d'autre part

$$\mathcal{L}(te^t\gamma(t))=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

D'où $(p^2-2p+1)Y(p)-p+2=\frac{1}{(p-1)^2}$ qui aboutit à

$$Y(p)=\frac{1}{(p-1)^4}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-1}.$$

Puis par passage à la transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = e^t(\frac{t^3}{6} - t + 1)\gamma(t)$$

Remarque. La méthode se généralise au cas des équations différentielles non linéaires à coefficients constants et des systèmes différentiels.

Exemple. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcl} 4y_1 + 4y_2 & = & y_1^{'} \\ y_1 + 4y_2 & = & y_2^{'} \end{array} \right.$

2. Applications en physique

On considère un système physique linéaire invariant : la sortie $y(t)$ et l'entrée $x(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme

$$(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + b_1 x' + b_0 x, (m \leq n)$$

Notons $Y(p) = \mathcal{L}(y)(p)$ et $X(p) = \mathcal{L}(x)(p)$. Soit $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, notons $H(p) = \mathcal{L}(h)(p)$. On sait que $y(t) = (x * h)(t)$ ce qui donne

$$Y(p) = X(p)H(p).$$

Supposons que les dérivée successives de x et y sont nulles à l'instant $t = 0$, appliquons la transformée de Laplace à cette équation différentielle et isolons $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0} X(p).$$

On a donc

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}.$$

Définition 6

La fonction H définie par

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}$$

est appelée **fonction de transfert** du système. La fonction de transfert vérifie la relation $Y(p) = H(p)X(p) + F(p)$ où $F(p)$ est une fraction rationnelle ne dépendant que des conditions initiales du système.

Exemple.

- Un système du premier ordre est défini par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t).$$

  Sa fonction de transfert est donnée par $H(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p}$.

- Un système du second ordre est défini par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants de la forme
$$a_2 y''(t) a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t).$$
Sa fonction de transfert est donnée par $H(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}$.

On cherche à déterminer la réponse y en fonction de l'entrée x pour un système du premier ordre dont la fonction de transfert est notée
$$H(p) = \frac{K}{1+Tp}, K, T \in \mathbb{R}_+^*$$

Exemple. Si l'entrée est un échelon $x(t) = a\gamma(t)$, on a alors $X(p) = \frac{a}{p}$ d'où
$$Y(p) = H(p)X(p) = \frac{Ka}{(1+Tp)p} = \frac{Ka}{p} + \frac{-KaT}{1+Tp} = \frac{Ka}{p} + \frac{-Ka}{p+\frac{1}{T}}.$$
On en déduit que $y(t) = Ka\gamma(t) - Kae^{\frac{-t}{T}}\gamma(t) = Ka(1 - e^{\frac{-t}{T}})\gamma(t)$.

Exemple. Que dire de $y(t)$ si le signal d'entrée est une rampe $x(t) = at\gamma(t)$?

Transformées de Laplace usuelles

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\gamma(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$t^n\gamma(t)(n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at}\gamma(t)(a \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{p-a}$
$\cos(\omega t)\gamma(t)(\omega \in \mathbb{R}_+^*)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\gamma(t)(\omega \in \mathbb{R}_+^*)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Propriétés de la transformation de Laplace

Propriétés	Domaine temporel	Domaine de Laplace
	$f(t)\gamma(t)$, $g(t)\gamma(t)$	$F(p)$, $G(p)$
Linéarité	$(\alpha f(t) + \beta g(t))\gamma(t), (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$
Changement d'échelle de t	$f(at)\gamma(t)(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
Changement d'échelle de p	$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\gamma(t)(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$F(ap)$
Translation de t	$f(t-a)\gamma(t-a)\ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$e^{-ap}F(p)$
Translation de p	$e^{-at}f(t)\gamma(t)\ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$F(p+a)$
Périodicité de période $T > 0$	Motif : $f_0(t)\gamma(t)$ $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t-nT)\gamma(t-nT)$	$F_0(p)$ $F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$
Dérivation de $f(t)$	$f'(t)\gamma(t)$ $f^{(n)}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$ $p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+)$ $-p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
Dérivation de $F(p)$	$-tf(t)\gamma(t)$	$F'(p), p \in \mathbb{R}$
Intégration de $f(t)$	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
Intégration de $F(p)$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
Produit de convolution	$f(t)\gamma(t) * g(t)\gamma(t)$ $= \int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$