centralelille IG2I

Nom : LEROY

Prénom : Quentin

Promo : LE2 Groupe : A2

Date : 24/01/2017 Place :

Epreuve de : Mathématiques

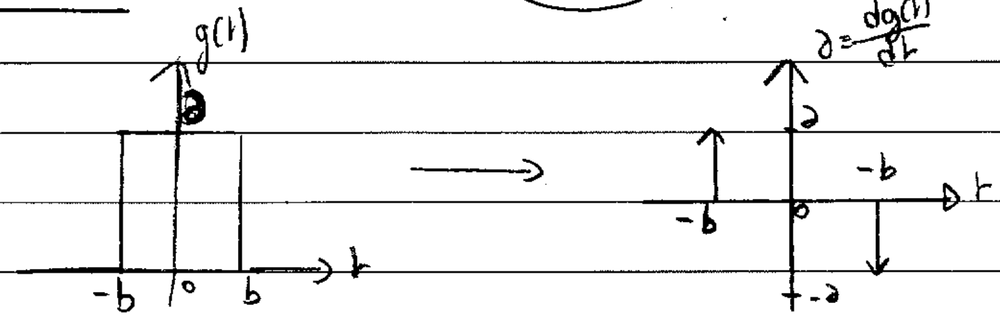
Copie 1/2

Note et appréciations :

19

Exercice 1:

1)



$a(t) = a\delta(t+b) - a\delta(t-b)$

$A(f) = a e^{j2\pi fb} - a e^{-j2\pi fb}$

$A(f) = a\left[e^{j2\pi fb} - e^{-j2\pi fb}\right] = a\left[2j\sin(2\pi fb)\right]$

Or $g(t) = \int a(z)\,dz$

Pour la question n°2

$G(f) = \frac{1}{j2\pi f} \times \left[2ja\sin(2\pi fb)\right]$.

$G(f) = \frac{a}{\pi f} \times \sin(2\pi fb) = 2ab \times \frac{\sin(2\pi fb)}{2\pi fb}$

On a donc $|G(f)| = 2ab \times \frac{\sin(2\pi fb)}{2\pi fb}$ (Pas de partie imaginaire)

On a $W = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t))^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2\,df$.

$$\cancel{W = \int_{-b}^{b} |G(f)|^2 df.}$$

$$\cancel{W = 2\int_{0}^{b} |G(f)|^2 df.}$$

$$\cancel{W = 2\int_{0}^{b} \left(2ab \times \frac{\sin(2\pi fb)}{2\pi fb}\right)^2 df.}$$

$$\cancel{W = 8a^2b^2 \int_{0}^{b} \left(\frac{\sin(2\pi fb)}{2\pi fb}\right)^2 df.}$$

<u>Calcul de l'énergie:</u>

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t))^2 dt = \int_{-b}^{b} (g(t))^2 dt$$

$$= 2\int_{0}^{b} (g(t))^2 dt$$

$$= 2\int_{0}^{b} a^2 dt = 2a^2 [t]_0^b$$

$$\boxed{W = 2a^2 b}$$

2) Calcul à la questio. précédente (voir parenthèse verte)

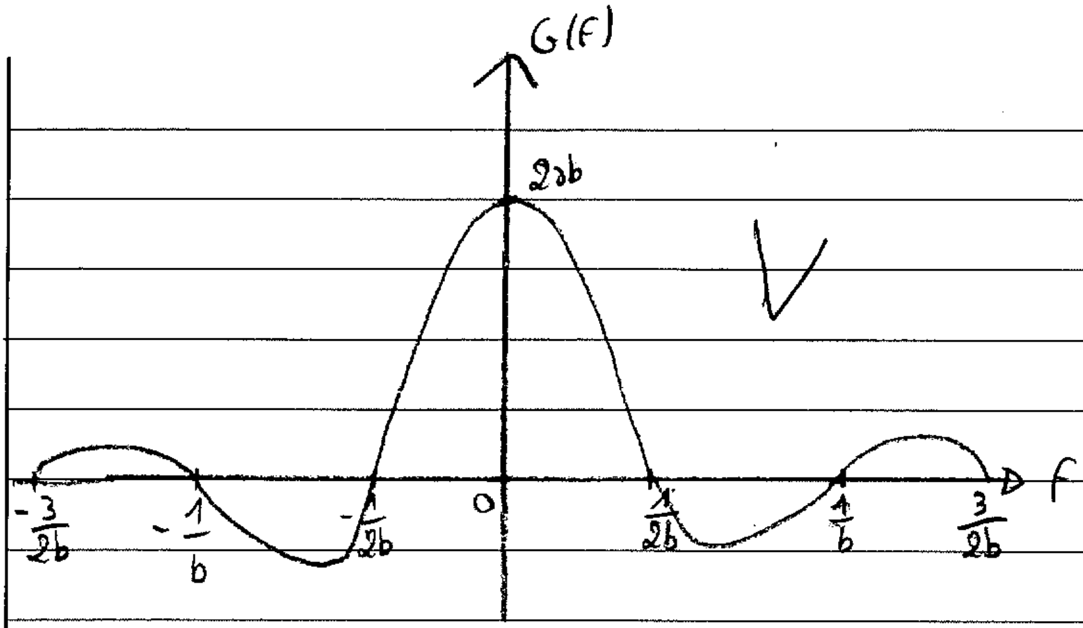
$$G(f) = 2ab \times \frac{\sin(2\pi fb)}{2\pi fb}$$

$$G(f) = 2ab \times \frac{\sin X}{X} \quad \text{avec } X = 2\pi fb$$

$\frac{\sin x}{x}$ s'annulle quand $X = k\pi$

$$2\cancel{\pi}fb = k\cancel{\pi}$$

$$f = \frac{k}{2b}$$



3) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-b}^{b} a\,dt = 2\int_{0}^{b} a\,dt$

$= 2a \times [t]_0^b$

$= 2ab$

Or on veut que $2ab = 1$

$\boxed{a = \frac{1}{2b}}$

Donc l'amplitude $g(t)$ doit être égal à $\frac{1}{2b}$

pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1$

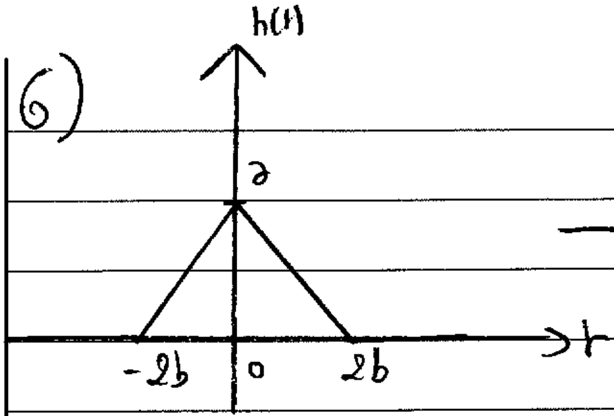
4) On $g(t) = a$ si $-b \leq t \leq b$ 0 sinon

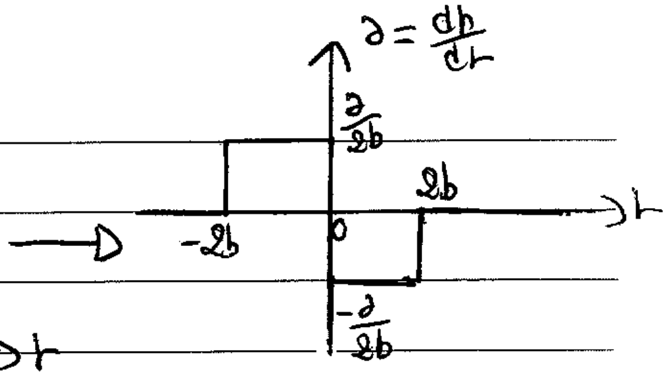
Soit $\boxed{g(t) = a \times [\gamma(t+b) - \gamma(t-b)]}$.

5) Lorsque $\boxed{b \to 0 \text{ on a } g(t) = a\,\delta(t)}$

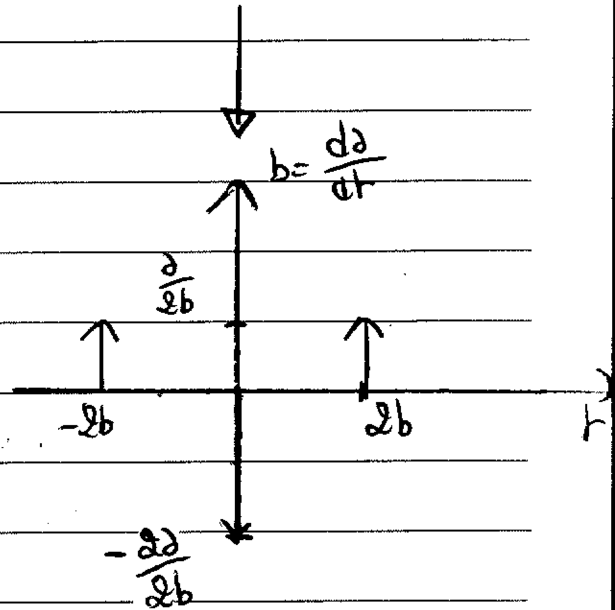
On n'a plus que impulsion de Dirac.

6)





$$\frac{y_B - y_A}{x_B - y_A} = \frac{a-0}{0+2b} = \frac{a}{2b}$$



$$b(t) = \frac{a}{2b}\delta(t+2b) - \frac{a}{b}\delta(t) + \frac{a}{2b}\delta(t-2b)$$

$$B(f) = -\frac{a}{b} + \frac{a}{2b}\left[e^{j2\pi f 2b} + e^{-j2\pi f 2b}\right] = -\frac{a}{b} + \frac{a}{2b} \times 2\cos(4\pi f b)$$

$$= -\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cos(4\pi f b)$$

$$\underline{B(f) = \frac{a}{b}\left[\cos(4\pi f b) - 1\right]}.$$

$$A(f) = \frac{1}{j2\pi f} \times B(f) \qquad \text{car } \left[a(t) = \int b(z)\,dz\right].$$

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f} \times A(f) \qquad \left[\text{car } h(t) = \int a(z)\,dz\right].$$

$$H(f) = -\frac{1}{4\pi^2 f^2} \times \frac{a}{b}\left[\cos(4\pi f b) - 1\right].$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a)$$

$$\cos(2a) - 1 = \cos^2 a - \sin^2 a - \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$= -2\sin^2 a.$$

centralelille IG2I

Nom : LEROY
Prénom : Quentin
Promo : LE2 Groupe : A2
Date : 24/01/2017 Place :
Epreuve de : Mathématiques

Copie 2 / 2

Note et appréciations :

$$H(f) = \frac{-a}{4\pi^2 f^2 b}\left[-2\sin^2(2\pi f b)\right]$$

$$H(f) = \frac{a}{2\pi^2 f^2 b} \times \sin^2(2\pi f b)$$

$$H(f) = a \times \frac{\sin^2(2\pi f b)}{2\pi^2 f^2 b}$$

$$H(f) = a \times 2 \times b \times \frac{\sin^2(2\pi f b)}{2^2\pi^2 f^2 b^2}$$

$$\boxed{H(f) = 2ab \times \left(\frac{\sin(2\pi f b)}{2\pi f b}\right)^2}$$

7) $g(t) * g(t) \xrightarrow{TF} G(f) . G(f)$

$$G(f).G(f) = \left(2ab \times \frac{\sin(2\pi f b)}{2\pi f b}\right)^2$$

$$G(f).G(f) = 4a^2b^2 \times \left(\frac{\sin(2\pi f b)}{2\pi f b}\right)^2$$

$$G(f).G(f) = H(f) \times 2ab$$

Le produit de convolution de 2 creneaux $g(t)$ est donc proportionnel à $h(t)$

Car $g(t) * g(t) \xrightarrow{TF} G(f) \cdot G(f)$

et $\boxed{G(f) \cdot G(f) = 2ab \times H(f)}$ Si les transformées de Fourier sont proportionnel les signaux temporels le seront aussi.

Exercice 2 :

$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

Soit : $Y(f) = X(f) * TF(\cos(2\pi f_0 t))$

On calcule donc la TF de $\cos(2\pi f_0 t)$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \quad \text{(Euler)}$$

Or $\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \delta(f - f_0)$

$\frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$

Soit $TF(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$.

Donc $Y(f) = X(f) * [\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$.

0

ν_0

Exercice 3 :

1) La fonction de transfert du réseau de communication s'exprime :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

$$y(t) = a x(t-t_0) + b.x(t-t_1)$$

$$a.x(t-t_0) \xrightarrow{TF} A.X(f).e^{-j2\pi f t_0}$$

$$B.x(t-t_1) \xrightarrow{TF} B.X(f).e^{-j2\pi f t_1}$$

Soit $Y(f) = X(f)\left[A.e^{-j2\pi f t_0} + B e^{-j2\pi f t_1}\right]$.

Donc $H(f) = \dfrac{\cancel{X(f)}\left[A.e^{-j2\pi f t_0} + B e^{-j2\pi f t_1}\right]}{\cancel{X(f)}}$.

Finalement : $\boxed{H(f) = A.e^{-j2\pi f t_0} + B.e^{-j2\pi f t_1}}$

2) On a $G(f) = \dfrac{Z(f)}{Y(f)}$

En sortie on veut $x(t-t_0) \xrightarrow{TF} X(f).e^{-j2\pi f t_0}$.

En entrée on a $Y(f)$.

Donc $G(f) = \dfrac{\cancel{X(f)}.\left[e^{-j2\pi f t_0}\right]}{\cancel{X(f)}.\left[A.e^{-j2\pi f t_0} + B.e^{-j2\pi f t_1}\right]}$.

V

$$G(f) = \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{A \cdot e^{-j2\pi f t_0} + B \cdot e^{-j2\pi f t_1}}$$

3) On a $G(f) = \dfrac{Z(f)}{Y(f)}$

Donc $Z(f) = G(f) \cdot Y(f)$

$\Rightarrow \quad z(t) = g(t) * y(t)$

$$G(f) = \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{A \cdot e^{-j2\pi f t_0} + B \cdot e^{-j2\pi f t_1}} \xrightarrow{TF^{-1}} g(t) = \frac{\delta(t-t_0)}{A \cdot \delta(t-t_0) + B \cdot \delta(t-t_1)}$$

Et donc :

$$z(t) = \frac{\delta(t-t_0)}{A \cdot \delta(t-t_0) + B \cdot \delta(t-t_1)} * y(t)$$

$$z(t) = \frac{\delta(t-t_0)}{A \cdot \delta(t-t_0) + B \cdot \delta(t-t_1)} * \left(a \cdot x(t-t_0) + b \cdot x(t-t_1)\right)$$

NON