# Devoir Surveillé

*Durée 2h.*
*Documents,calculatrices, smartphones interdits. Tableau "transformées de Laplace usuelles et propriétés" autorisé.*
*Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la copie.*

**Exercice I***(11 points)* On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la matrice $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $A$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de $A$.
3. Justifier que $A$ n'est pas diagonalisable.
4. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de $E$ vérifiant :
   — $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_1$
   — la première composante de $\overrightarrow{u_1}$ est 1.
5. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de $E$ vérifiant :
   — $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur propre de $A$ associe à la valeur propre $\lambda_2$
   — la deuxième composante de $\overrightarrow{u_2}$ est 1.
6. Soit $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 1)$. A l'aide d'un déterminant (ou autrement), vérifier que $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $E$.
7. Déterminer la matrice de passage $P$ de la la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ puis calculer $P^{-1}$.
8. Montrer que : $A\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_2} + 2\overrightarrow{u_3}$
9. Justifier le fait que la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Rappeler la relation matricielle entre $A$ et $T$.
11. Prouver que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ il existe un réel $\alpha_n$ tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

    On donnera le réel $\alpha_1$ ainsi qu'une relation entre $\alpha_{n+1}$ et $\alpha_n$
12. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = n2^{n-1}$$

    En déduire l'écriture matricielle de $A^n$ en fonction de $n$.

**Exercice II***(5 points)* En utilisant la transformée de Laplace, déterminer la fonction causale $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 3y = e^{2t} \text{ où } y(0) = y'(0) = 0.$$

**Exercice III***(4 points)* Déterminer et représenter la transformée de Laplace inverse de

$$F(p) = \frac{2 - e^{-p} - e^{-2p}}{p(1 - e^{-3p})}$$

**Exercice Bonus***(2 points)* Dans chacun des cas suivants, déterminer (en justifiant soigneusement) la nature des séries numériques de terme général $u_n$.

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1}, u_n = \frac{n}{n^3+n-1}, u_n = \frac{1}{n!}, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$