Corrigé DS Méthodes Mathématiques
Réduction matricielle 17/18

Ex I : voir cours.

Ex II : 1. A est symétrique à coeff réels | donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. $$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -X & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -X \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 1-X & 1-X \\ 1/2 & -X & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -X & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -X \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -X-1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -X-1/2 \end{vmatrix} = (1-X)(-X-1/2)^2 = (1-X)(X+1/2)^2.$$

d'où $Sp(A) = \{1, -1/2\}$.

3. $$\text{Ker}(A - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x = y \\ z = y \end{array} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(A + \tfrac{1}{2}I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on obtient $D = P^{-1}AP$
i.e. $A = PDP^{-1}$.

4. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow \frac{L_1}{3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{matrix}}_{P^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

5. $$A^n = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots PDP^{-1}}_{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

6. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- initialisation $n=0$ $\quad X_0 = \underbrace{A^0}_{I_3} X_0$.
- hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$.

$X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1} X_0$.

D'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

7. $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0 \iff \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A^n} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

$$\iff \begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0) + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3}u_0 - \frac{1}{3}v_0 - \frac{1}{3}w_0\right) \\ v_n = \frac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0) + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}v_0 - \frac{1}{3}w_0\right) \\ w_n = \frac{1}{3}(u_0 + v_0 + w_0) + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{3}u_0 - \frac{1}{3}v_0 + \frac{2}{3}w_0\right) \end{cases}$$

or $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

$$\iff \begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

8. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-1/2\right)^n = 0$ car $0 < |-1/2| < 1$. d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1/3$.

<u>Ex III</u> : 1. $\det(A) = 0$ donc A non inversible ($\iff f$ non bijectif). A admet donc 0 comme valeur propre.

2. $Au = 0 = 0.u$ donc u est une vecteur propre attaché à la valeur propre $0 = \lambda$

$Av = v$ donc v est un vecteur propre attaché à la valeur propre $1 = \mu$

$\mathrm{Ker}(A - 0I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x=0 \\ 2y+z=0 \end{matrix} \right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(u)$.

$\mathrm{Ker}(A - 1.I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x=0 \\ z=-y \end{matrix} \right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v)$.

$\dim E_\lambda = \dim E_\mu = 1$.

3. Il faut déterminer "<u>toutes</u>" les valeurs propres : $\det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2-X & -2 & -1-X \end{vmatrix}$

$= (1-X)\left[(2-X)(-1-X)+2\right] = (1-X)\left[X^2 - X\right] = (1-X)X(X-1) = -X(X-1)^2$

$Sp(A) = \{\underset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{0}}, \underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{1}}\}$ et $\dim E_\mu$ est différent de la multiplicité de μ dans le polynôme caractéristique donc f n'est pas diagonalisable.

4.

4. $t=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad f(t)=t+v \iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$

$$\iff \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}x=x.\\x+2y+z=y+1\\2x-2y-z=z-1\end{cases} \iff \begin{cases}x+y+z=1\\2x-2y-2z=-1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=1/4\\y+z=3/4\end{cases} \iff \begin{cases}x=1/4.\\y=3/4-z.\end{cases} \iff \begin{cases}x=1/4.\\z=3/4-y.\end{cases}$$

5. $t=\begin{pmatrix}1/4.\\3/4\\0\end{pmatrix}$ est telle que $f(t)=t+v$

(u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix}0&0&1/4\\1&1&3/4\\-2&-1&0\end{vmatrix}\neq 0$ et dans cette base la matrice de f est $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$ car $Au=0.u$

$Av=1.v$

$At=t+v.$