IG2I LE2 TLR
Année 2020-2021

Contrôle Terminal

Durée 2h.
Documents,calculatrices, smartphones interdits.
Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la copie.

Exercice I*(10 points)* Il est proposé à une population de N individus de s'abonner à un nouveau service pour une durée de 2 ans renouvelable. Les abonnés sont de deux sortes : ceux qui en sont à la première année de l'abonnement en cours et on note u_n leur nombre la n-ième année ; ceux qui en sont à la seconde année de l'abonnement en cours et on note v_n leur nombre la n-ième année. On note w_n le nombre de personnes qui ne sont pas abonnées la n-ième année. On pose $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $w_0 = N$. On suppose que 8 abonnés sur 10 en fin de contrat renouvellent leur abonnement en fin d'année, que 8 non abonnés sur 10 d'une année s'abonnent l'année suivante et qu'aucune personne ne résilie le contrat en cours d'abonnement.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n. Justifier.
   Soit A la matrice
   $$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Pour tout entier naturel n, on note X_n la matrice colonne
   $$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$
2. Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.
3. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
4. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible dont la dernière ligne est (111) telles que $A = PDP^{-1}$. On admettra dans la suite de l'exercice que
   $$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 1 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 5/36 & -1/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$
6. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.
8. Que peut-on dire de la somme $u_n + v_n + w_n$?
9. Déterminer la limite des trois suites (u_n), (v_n), (w_n).

Dans la suite du sujet, on note

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Exercice II*(4 points)* En utilisant la transformée de Laplace, déterminer la fonction causale $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + 16y = e^{2t}\gamma(t) \text{ où } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 4.$$

Exercice III*(3 points)* La fonction de transfert d'un système linéaire, continu et invariant est $H(p) = \frac{p}{p^2+6p+10}$.

1. Quelle est la réponse $y(t)$ à une impulsion de Dirac $x(t) = \delta(t)$.
2. Quelle est la réponse $y(t)$ à une entrée échelon $x(t) = 2\gamma(t)$.

Exercice IV*(3 points)* On considère la fonction 2-périodique causale définie de la manière suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 4 - 2t & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

1. Donner la représentation graphique de f sur $[-2, 4]$.
2. Calculer la transformée de Laplace de f.

Transformées de Laplace usuelles

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\gamma(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$t^n\gamma(t)(n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at}\gamma(t)(a \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{p-a}$
$\cos(\omega t)\gamma(t)(\omega \in \mathbb{R}_+^*)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\gamma(t)(\omega \in \mathbb{R}_+^*)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Propriétés de la transformation de Laplace

Propriétés	Domaine temporel	Domaine de Laplace
	$f(t)\gamma(t)$, $g(t)\gamma(t)$	$F(p)$, $G(p)$
Linéarité	$(\alpha f(t) + \beta g(t))\gamma(t), (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$
Changement d'échelle de t	$f(at)\gamma(t)(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
Changement d'échelle de p	$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\gamma(t)(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$F(ap)$
Translation de t	$f(t-a)\gamma(t-a)$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$e^{-ap}F(p)$
Translation de p	$e^{-at}f(t)\gamma(t)$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$F(p+a)$
Périodicité de période $T > 0$	Motif : $f_0(t)\gamma(t)$ $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t-nT)\gamma(t-nT)$	$F_0(p)$ $F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$
Dérivation de $f(t)$	$f'(t)\gamma(t)$ $f^{(n)}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$ $p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+)$ $-p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
Dérivation de $F(p)$	$-tf(t)\gamma(t)$	$F'(p), p \in \mathbb{R}$
Intégration de $f(t)$	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
Intégration de $F(p)$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
Produit de convolution	$f(t)\gamma(t) * g(t)\gamma(t)$ $= \int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$