C. Niclaeys

EXERCICES DE MECANIQUE DU SOLIDE 2

CINETIQUE - DYNAMIQUE

TD1 (Rappel de statique cinématique)

Exercice I : cinématique

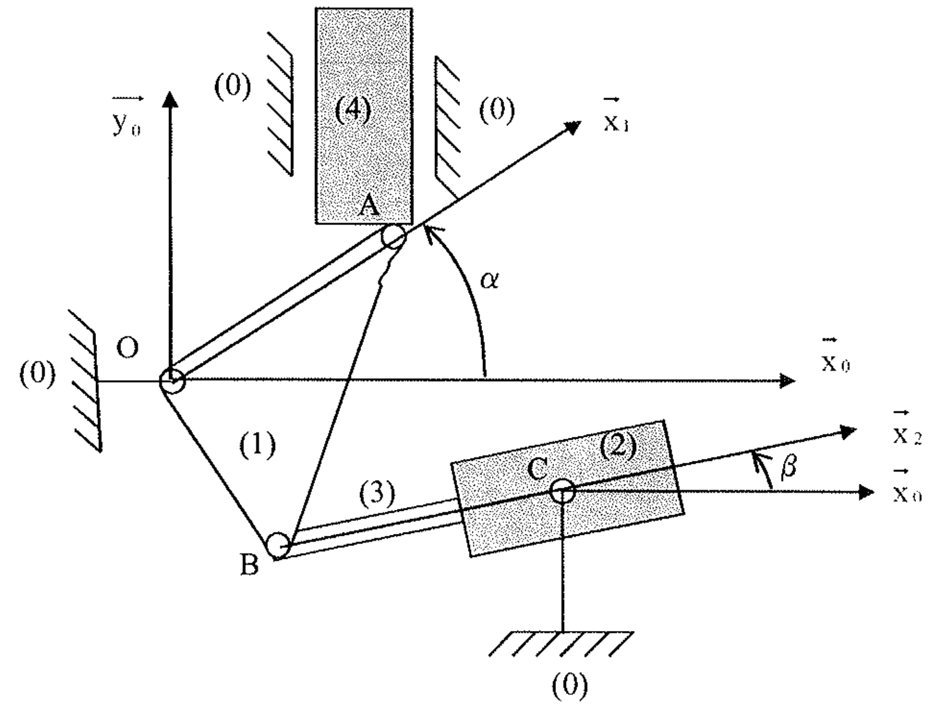
Soit une partie d'un manipulateur de fraiseuse composé d'un bâti (0), d'un levier (1), d'un vérin (2)+(3) ((3) étant la tige du vérin et (2) le corps du vérin) et d'un piston (4). Ce dispositif sert à alimenter ou à évacuer des pièces grâce au piston (4).

Soient $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au bâti (0).

$R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au levier (1).

$R_2(C, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au corps du vérin (2).

On a $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = \beta$



Le levier (1) est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ avec le bâti (0).

La tige (3) du vérin est en liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ avec le levier (1).

La tige (3) du vérin est en liaison glissière d'axe $(B, \overrightarrow{x_2})$ avec le corps (2) du vérin.

Le corps (2) du vérin est en liaison pivot d'axe $(C, \overrightarrow{z_0})$ avec le bâti (0).

Le piston (4) est en liaison glissière d'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$ avec le bâti (0).

Le piston (4) est en appui simple sur le levier (1) en A.

On notera que : $\overrightarrow{CB} = -\lambda \, \overrightarrow{x_2}$ avec λ dépendant du temps

$\overrightarrow{BO} = d \, \overrightarrow{y_1}$ avec d fixe

$$\overrightarrow{AO} = -d\,\overrightarrow{x_1}$$

On notera également que la vitesse de glissement du levier (1) sur le piston (4) en A est : $\vec{V}(A \in 4/R_1) = v\,\overrightarrow{x_0}$

Questions :

1) Expliquer en quelques lignes le fonctionnement de ce dispositif.
2) Faire les figures de calcul nécessaire à cette étude, puis donner les vecteurs vitesses de rotation de R_1 par rapport à R_0, de R_2 par rapport à R_0 et de R_2 par rapport à R_1.
3) Déterminer le torseur cinématique de la tige (3) dans son mouvement par rapport à R_2, au point B.
4) Calculer de deux façons différentes la vitesse du point B appartenant à (3) par rapport à R_0.
5) Calculer la vitesse de B appartenant à (1) par rapport à R_0.
6) Déduire des deux questions précédentes une relation vectoriel faisant intervenir $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ et $\dot{\lambda}$.
7) Calculer la vitesse de A appartenant à (4) par rapport à R_0, puis écrire ce vecteur dans le repère R_0.
8) En observant le mouvement du piston (4) par rapport au repère R_0, déduire une relation entre v, d et α.

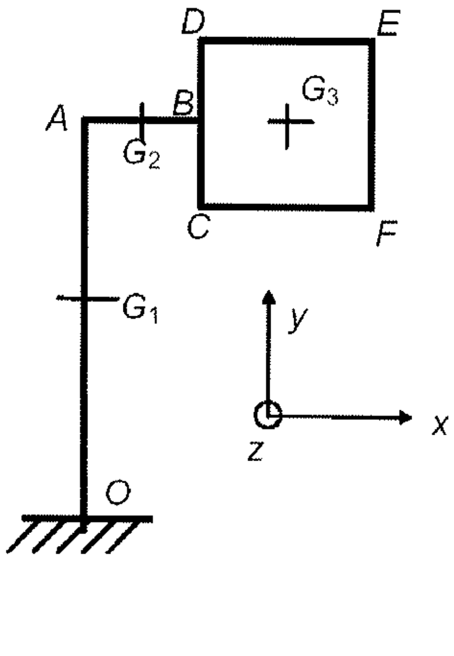
Exercice II : statique

Une pancarte carré CDEF de coté a et de centre de gravité G_3 est attachée en B sur un poteau OAB. Le poteau est composé d'une poutre OA de longueur L et de centre de gravité G_1, et d'une poutre AB de longueur d et de centre de gravité G_2. On appellera structure l'ensemble pancarte CDEF + poteau OAB.

Soit m_1 la masse de la poutre OA, m_2 la masse de la poutre AB et M la masse de la pancarte CDEF.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND.

L'action du vent sur la pancarte est représentée par une densité surfacique d'efforts $\vec{p} = p\,\vec{z}$ avec p constant.

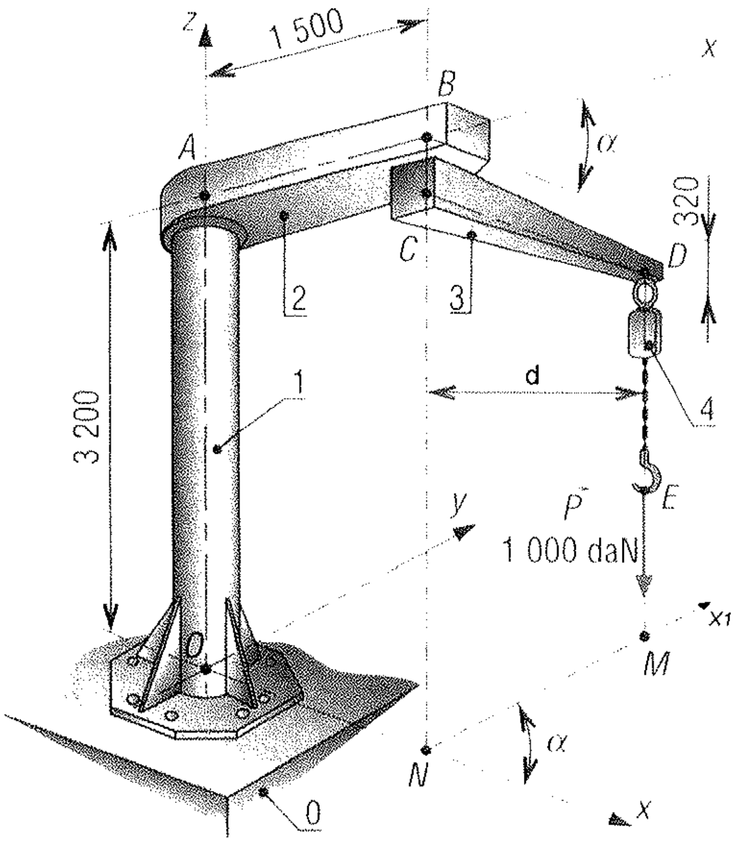


1) Calculer l'effort résultant $\vec{R}$ du vent s'exerçant sur la pancarte.
2) Placer sur la figure ci-contre les différents efforts que subit la structure.
3) Déterminer le torseur statique de l'action du sol sur la structure.

Exercice III : statique

On considère une potence de manutention représentée ci-contre :

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au sol (0), soit $R_1(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au corps (1), soit $R_2(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à la tête (2), soit $R_3(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ lié au bras (3), soit $R_4(D,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ lié au palan (4) et soit $R_5(E,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ lié à la charge (5).



Le corps (1) de la potence d'une longueur de 3,2m est fixé au sol (0) par une liaison encastrement. La tête (2) d'une longueur de 1,5m est encastrée au point A sur le corps (1). Au point C, le bras (3) fait l'objet d'un guidage en rotation autour de l'axe vertical $(C,\vec{z})$ par rapport à (2).

On notera $\alpha=(\vec{x},\overrightarrow{x1})$.

Le palan (4) est accroché au point D, $D\in(C,\overrightarrow{x1})$, sur le bras (3) et peut se déplacer en translation suivant la direction $\overrightarrow{x1}$.

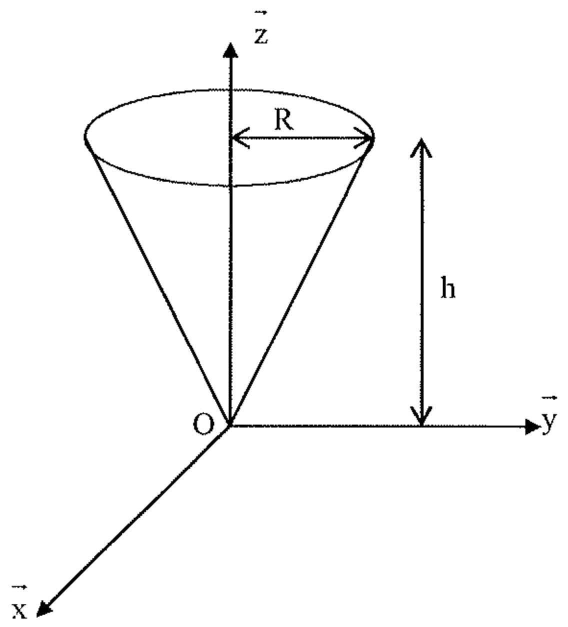
On notera $\overrightarrow{CD}=d\overrightarrow{x1}$, **(d variable)**. Enfin la charge (5) située au point E peut monter ou descendre suivant l'axe $(D,\vec{z})$. On notera $\overrightarrow{ED}=h.\vec{z}$, **(h variable)**.

1) Peut-on avec cette potence amener le point E au point N. Si non expliquer pourquoi, si oui donner les valeurs numériques de d et de h.
2) Faire la ou les figures de calcul nécessaires, puis déterminer les vecteurs vitesses suivants : $\vec{\Omega}(R_5/R_4)$, $\vec{\Omega}(R_4/R_3)$, $\vec{\Omega}(R_3/R_2)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ et $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$.
3) Calculez l'expression de la vitesse du point E par rapport au repère fixe R_0. (détaillez les calculs intermédiaires)
4) Calculez l'expression de l'accélération du point E par rapport au repère fixe R_0.

TD2 (Géométrie des masses et matrice d'inertie)

Exercice I :

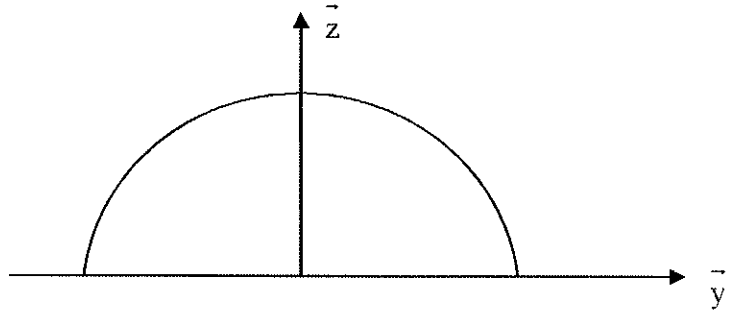
Soit un cône de révolution plein, de sommet O, d'axe $(O,\vec{z})$, de hauteur h et de rayon de base R. La masse volumique est constante en tout point du cône.



1) Calculer le volume du cône
2) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G

Exercice II :

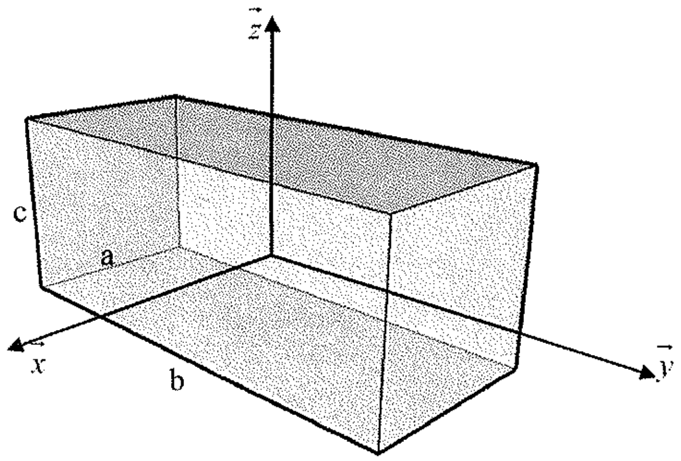
Soit une demie sphère creuse homogène et de rayon R telle que :



1) Déterminer de 2 façons différentes (en intégrant suivant $d\theta$ et dz) l'aire de la demi-sphère
2) Déterminer de 2 façons différentes la position du centre de gravité G

Exercice III :

Soit un parallélépipède rectangle tel que sur la figure suivante :

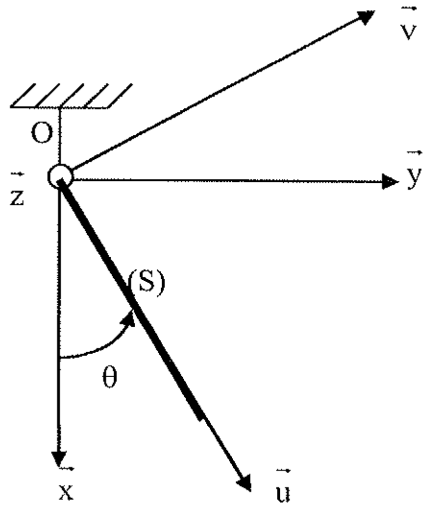


Déterminer la matrice d'inertie $I_G(S/R)$.

TD3 (Torseurs cinétique et dynamique)

Exercice I :

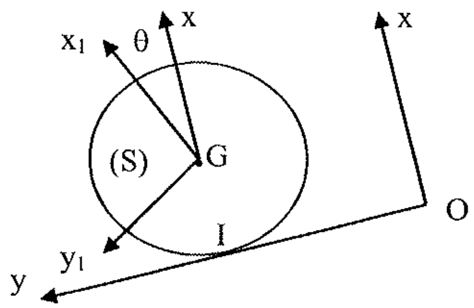
Soit un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (S) de longueur L et d'épaisseur négligeable. Cette tige est homogène, de masse m et de centre de gravité G.
Soient $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère fixe lié au bâti et $R_1(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ un repère lié à la tige (S).
La tige est en liaison pivot d'aze $(O,\vec{z})$ avec le bâti.



1) Déterminer le torseur cinétique, au point O, de la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.
2) Déterminer le torseur dynamique, au point O puis au point G, de la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.

Exercice II :

Soit un cylindre plein de révolution (S) de masse m, rayon a, de hauteur h et de centre de gravité G, roulant sans glisser sur un plan incliné comme indiqué su la figure ci–dessous.
Soient $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère fixe lié au plan incliné et $R_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ un repère lié au cylindre (S).

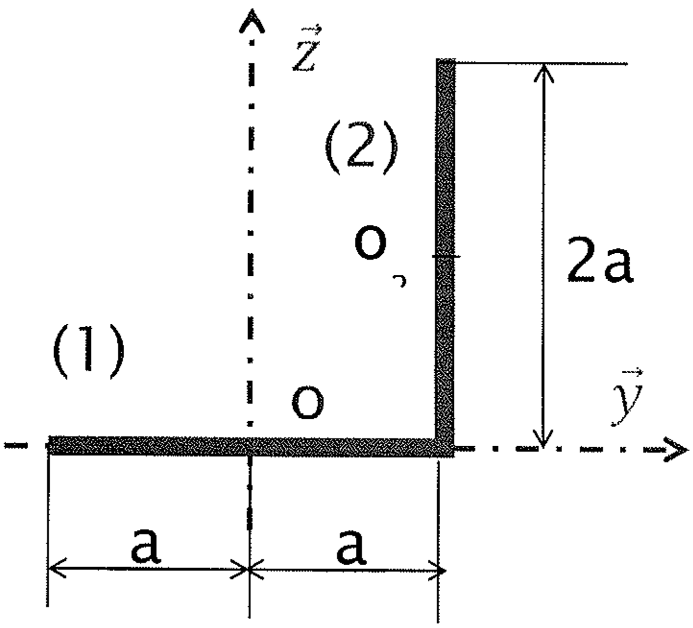


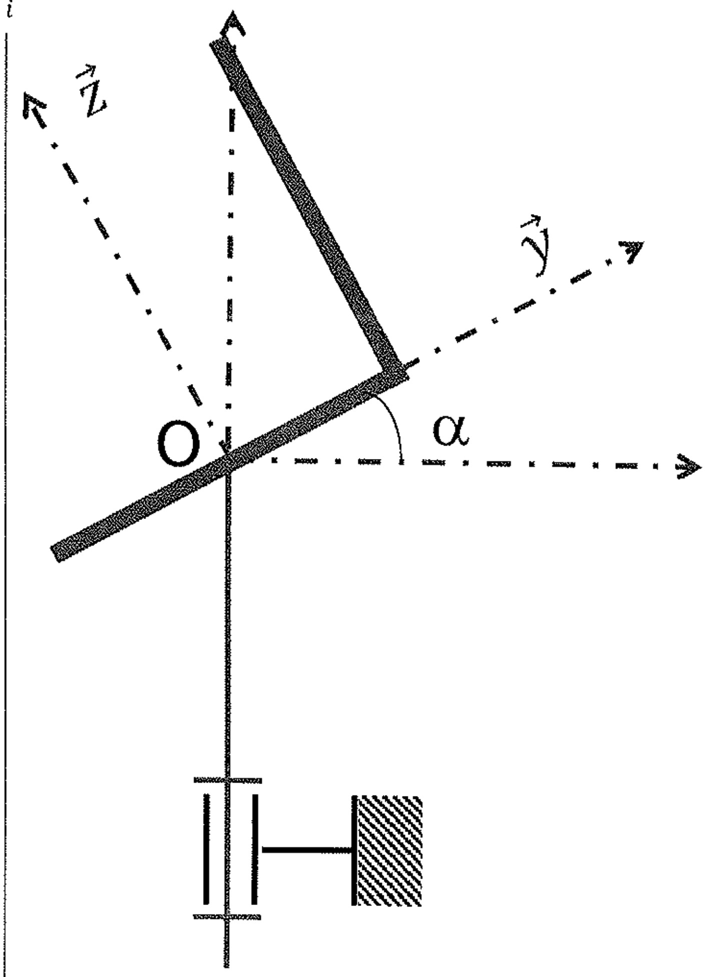
1) Déterminer la matrice d'inertie au point G du cylindre (S) dans sont mouvement par rapport à R.
2) Déterminer le torseur cinétique, au point G, du cylindre (S) dans son mouvement par rapport à R.
3) Déterminer le torseur dynamique, au point I, du cylindre (S) dans son mouvement par rapport à R de deux façons distinctes.

TD4 (Torseurs cinétique et dynamique)

Considérons le solide (S) de masse m constitué de l'assemblage de 2 tiges identiques (1) et (2), de longueur 2a, soudées l'une à l'autre perpendiculairement.
Le matériau est un acier de masse volumique ρ, de section carrée de côté b.
La tige (1) est d'axe (O,y). Son milieu est noté O.
La tige (2) est d'axe (O_2,z). Son milieu est noté O2
AN : on pourra prendre a = 40cm, b=4mm, ρ = 7800 kg.m^{-3}

$$(S) = (1) \cup (2) = \sum_i (i)$$





1) Déterminer la masse m de (S)
2) Déterminer la position du centre d'inertie G de (S)
3) Déterminer la matrice d'inertie en O de (S)

Le solide (S) précédent est soudé à un axe de masse négligeable. Nous appelons toujours (S) cet assemblage de solide.

Le solide (S) est en liaison pivot parfaite d'axe (O, Z_0) avec le bâti (0). Le bâti (0) est fixe dans le repère $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$.

Le repère $R(O, x, y, z)$ est lié au solide (S) et est déduit d'une rotation d'un angle α constant autour de (O, x) du repère $R_1(O, x, y_1, z_0)$.

$R_1(O, x, y_1, z_0)$ est aussi lié au solide (S) et est repéré par l'angle ψ(t) autour de (O, Z_0).

4) Déterminer les figures de calcul correspondant aux mouvements R_1/R_0 et R/R_1
5) Déduisez en (R_1/R_0) , (R/R_1) et (S/R_0)
6) Calculez le torseur cinématique du mouvement de (S) rapport à R_0 en G
7) Calculez le torseur cinétique du mouvement de (S) rapport à R_0 en O

TD5 (PFD)

Le but de cet exercice est de comparer 3 types de transmission de puissance pour un véhicule (Traction, propulsion et 4 roues motrices).

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère Galiléen lié à la route d'axe $(O,\vec{x})$.

Le véhicule est de masse M, de centre de gravité G et toutes les dimensions nécessaires à l'étude sont sur le dessin ci-dessous.

Le véhicule est animé d'un mouvement de translation rectiligne, d'accélération $\gamma\vec{x}$.

Soient (S) le véhicule complet (avec ses roues)
(S_1) la roue 1
(S_2) la roue 2

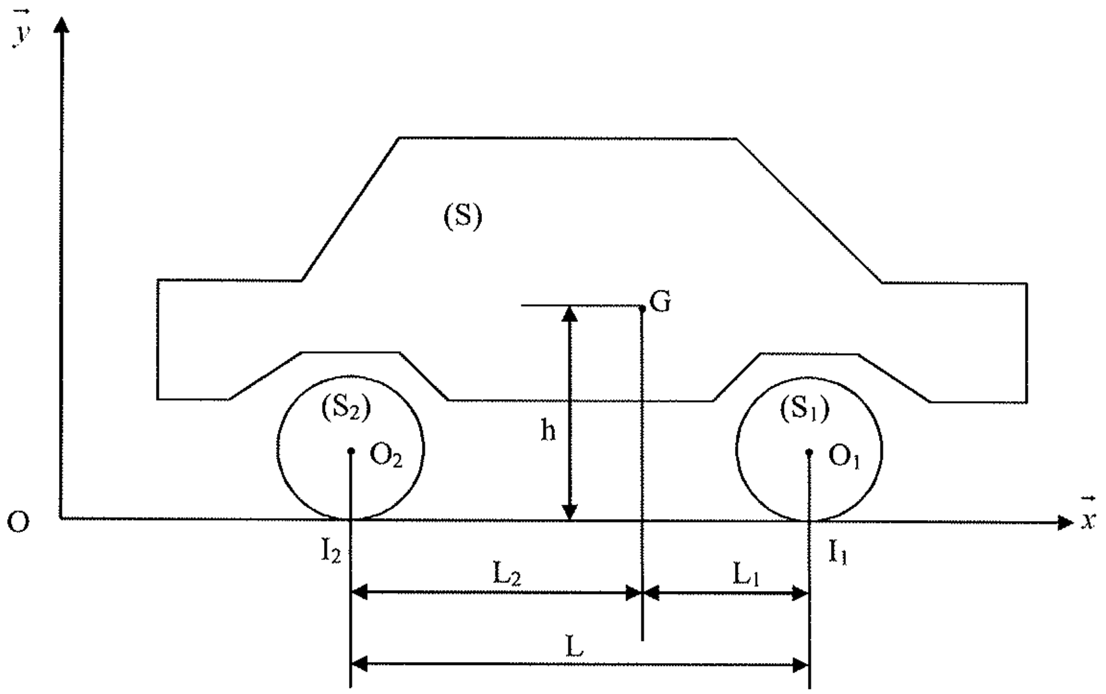
Les actions mécaniques de la route sur les roues sont définies par les torseurs suivants :

$$\mathcal{F}(\text{route} \rightarrow S_1) = {}_{I_1}\begin{Bmatrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\text{route} \rightarrow S_2) = {}_{I_2}\begin{Bmatrix} T_2\vec{x} + N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On considère également les deux coefficients suivants :

$$\mu_1 = \frac{T_1}{N_1} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{T_2}{N_2}$$

On néglige l'action de l'air sur le véhicule et le poids des roues.



On donne : g = 10m/s², L_1 = 1 m, L_2 = 1,3m, h = 0,5 m, M = 1200kg.

Questions :

1) Déterminer pour chaque type de transmission les expressions de μ_1 et μ_2 en fonction de l'accélération de véhicule. Tracer les graphes et interpréter les résultats. (Pour les 4 roues motrices, on suppose l'équiadhérence : $\mu_1 = \mu_2$)
2) Dans la réalité, pour les véhicules de série, l'hypothèse de l'équiadhérence est fausse. C'est plutôt la puissance transmise par le moteur aux roues avant et arrière qui est identique. C'est-à-dire que $T_1 = T_2$.
   Dans ces conditions, déterminer de nouveau en fonction de l'accélération du véhicule, μ_1 et μ_2 pour le véhicule à 4 roues motrices. Tracer sur le graphe précédent les 2 nouvelles courbes et interpréter ces résultats.
3) Pour les véhicules de rallye à 4 roues motrices, on cherche à obtenir l'équiadhérence en répartissant convenablement la puissance moteur entre roues avant et roues arrière. Déterminer en fonction de l'accélération de véhicule le rapport T1/T2 qu'il faudrait pour obtenir cette équiadhérence. Tracer la courbe.
4) Schématiser les actions du sol sur les roues dans les 4 cas vus dans les questions précédentes (faire simplement 4 petits dessins).

TD6

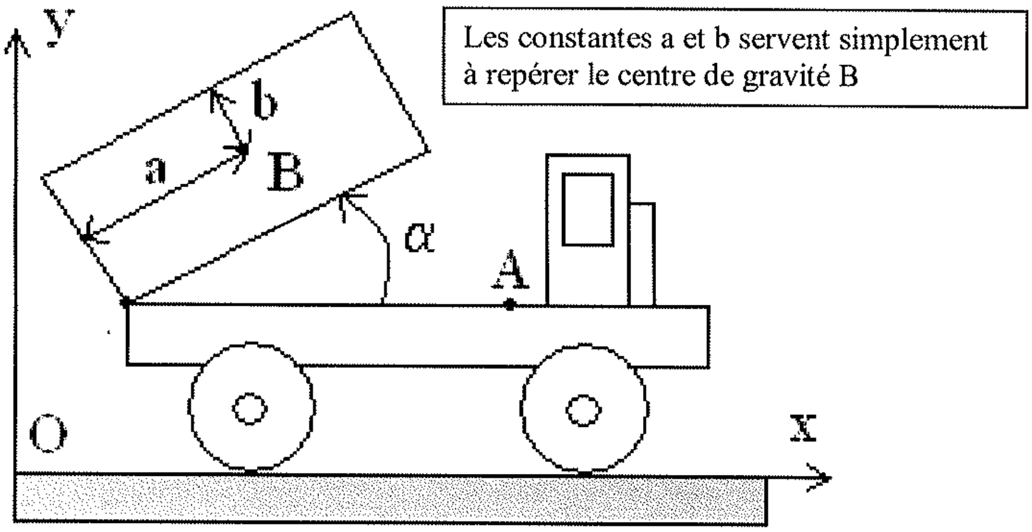
Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un ROND

Un camion (tracteur+benne) est arrêté sur une route horizontale, le moteur est coupé mais le chauffeur a oublié de serrer son frein à main. Il fait alors basculer la benne d'un angle α à un angle α_0. La masse du tracteur est notée M et celle de la benne est notée m. On note A le centre de gravité du tracteur, B celui de la benne et G celui du camion complet (les centre de gravité A et B sont fixes au cours du mouvement).

Le camion est posé sur ses 4 roues, chacune de centre C_k (k variant de 1 à 4), de rayon r et de masse négligeable, tournant autour de leur axe respectif sans frottements.

On note $\overrightarrow{R_k} = T_k \vec{x} + N_k \vec{y}$ les réactions du sol sur les roues (k) au niveau de chacun des points de contact camion-sol.

On note également $\vec{\gamma} = \gamma_{Gx}\vec{x} + \gamma_{Gy}\vec{y} + \gamma_{Gz}\vec{z}$ l'accélération du centre de gravité G du camion.

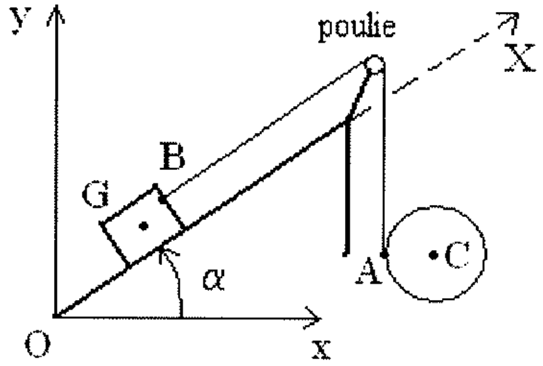


1) Démonter rigoureusement que $\overrightarrow{\delta_{C_k}}(roue/R) = \vec{0}$
2) Appliquer le théorème du moment dynamique à une roue pour déterminer T_k.
3) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au camion pour déterminer γ_{Gx} γ_{Gy} et γ_{Gz} en fonction des donnés du problème. En déduire le déplacement du point G dans la direction horizontale.
4) Représenter sur la figure ci-dessus la position du camion après basculement de la benne à un angle α_0. On placera le point G ainsi que les nouvelles positions de A, B et G (noté A', B' et G') de manière rigoureuse.

EXERCICE II :

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un ROND

Soit $R_1(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{z})$ un ROND



Le référentiel terrestre (R) est supposé galiléen. On considère le système constitué par un cube (S_1) de masse M et de centre de gravité G et par un cylindre (S_2) homogène de masse m, de centre C, et de rayon a.

Un fil inextensible et sans masse est attaché à une face du cube et enroulé autour du cylindre. On note $\vec{T} = T\vec{y}$ la force exercée par le fil sur le cylindre en A.

Le cube glisse sans frottements sur le plan incliné et on considère que la poulie a une masse négligeable et tourne sans frottements autour de son axe de rotation.
Le système est abandonné sans vitesse initiale, le brin entre la poulie et le cylindre étant parfaitement vertical et celui entre la poulie et le cube parallèle au plan incliné. On note $\vec{\Omega}(S_2/R) = \dot{\theta}\,\vec{z}$.

1) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au cylindre (S_2). En déduire $\left\|\overrightarrow{\gamma_C}\right\|$ et que le mouvement de C est vertical.

2) Le moment d'inertie de (S_2) par rapport à l'axe $(C,\vec{z})$ est égal à $\frac{ma^2}{2}$. Appliquer le théorème du moment dynamique au cylindre au point C pour déterminer T en fonction de m, a et $\ddot{\theta}$.

3) Sachant que le cylindre roule sans glisser sur le fil en A (c'est-à-dire que $\left\|\overrightarrow{V_A}(fil/R)\right\| = \left\|\overrightarrow{V_A}(S_2/R)\right\|$ avec $\left\|\overrightarrow{V_A}(fil/R)\right\| = -V_t$), trouver une relation entre la vitesse du point C $\left\|\overrightarrow{V_C}(S_2/R)\right\| = V_C$, V_t, a et $\dot{\theta}$.

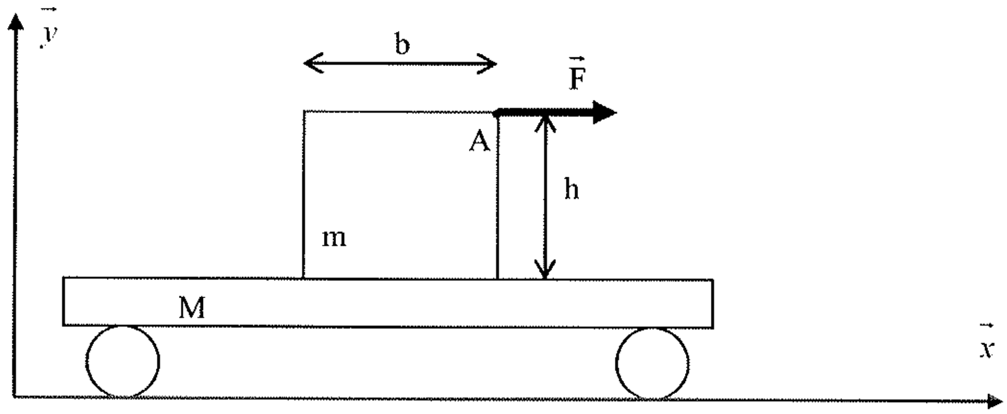
4) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au cube et déterminer R et T en fonction des données du problème. On notera $\vec{R}$ la réaction du sol sur le cube et $\vec{T}$ la force en B du fil sur le cube. (Conseil : travailler dans le repère $R_1(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{z})$)

5) Déduire de toutes les équations précédentes T en fonction de m, M, α et g.

TD7

Exercice I :

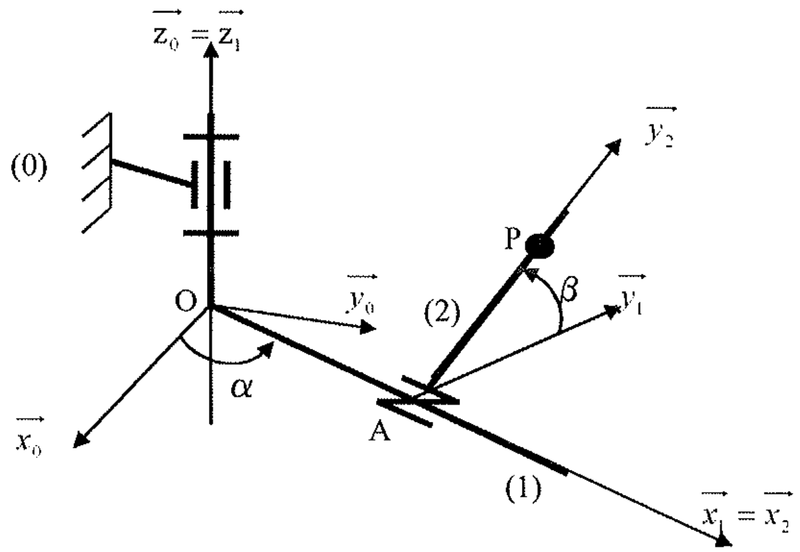
Un bloc de masse m, de hauteur h et de largeur b est placé sur un chariot de masse M pouvant se déplacer horizontalement sur des rails. Les roues sont de masse négligeable.
Soit f le coefficient de frottement entre le bloc sur le chariot tel que $f = \tan\phi$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur maximale de la force F que l'on peut appliquer en A pour qu'il n'y ait aucun glissement du bloc sur le chariot.
Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère Galiléen lié aux rails d'axe $(O,\vec{x})$.



1) Isoler l'ensemble chariot + bloc, faite un bilan des efforts extérieurs sur un dessin et appliquer le théorème de la résultante dynamique pour obtenir 2 équations scalaires.
2) Isoler le bloc, faite un bilan des efforts extérieurs sur un dessin et appliquer le théorème de la résultante dynamique pour obtenir 2 équations scalaires.
3) Quelle est la condition de non glissement du bloc sur le chariot.
4) Déterminer F_{maxi} pour être à la limite du glissement entre le bloc sur le chariot, en fonction de m, M, g et f
5) A.N. avec $m = 50$ Kg
$M = 200$ Kg
$g = 9.81\ m/s^2$
$f = 0.2$

Exercice II :

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère Galiléen lié au bâti (0).
Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ un repère Galiléen lié à la pièce (1).
Soit $R_2(A,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère Galiléen lié à la pièce (2).
La pièce (1) est en liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$
Le solide (2) est en liaison hélicoïdale de pas p avec le solide (1). Ce solide est assimilable à une tige homogène de longueur 2L, de cdg G et de masse M.
Une masse ponctuelle (P) est en liaison pivot glissant d'axe $(A,\overrightarrow{y_2})$.
On notera m la masse de (P) et $\overrightarrow{AP}=\rho\,\overrightarrow{y_2}$
Conditions limites : à β=0 on a OA=0



1) faire les figures de calcul nécessaires à l'étude.
2) Calculer les vecteurs vitesses de rotation suivants : $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$; $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$; $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$.
3) Déterminer le torseur cinématique au point A de (2) dans son mvt par rapport à R_0.
4) Déterminer la vitesse du point G appartenant à (2) dans son mvt par rapport à R_0.
5) Déterminer l'accélération du point G appartenant à (2) dans son mvt par rapport à R_0.
6) Déterminer la vitesse du point P appartenant à la masse ponctuelle dans son mvt par rapport à R_0.
7) Déterminer la matrice d'inertie de (2) au point G dans le repère R_2.
8) Déterminer le torseur cinétique au point G de (2) dans son mvt par rapport à R_0.
9) Déterminer le moment dynamique en G de (2) dans son mvt par rapport à R_0.

TD8

La figure ci-dessous schématise un chasse-neige se déplaçant sur une horizontale. Ce chasse-neige (S) est constitué d'une roue creuse (S_1) (de centre d'inertie *C*, de rayon *R*, de longueur l et de masse *m* répartie uniformément sur la circonférence) et d'une partie (S_2) ($CABI_2$), indéformable, de même masse *m* que la roue et de centre d'inertie *A* en mouvement de translation parallèlement à l'axe *Ox*.

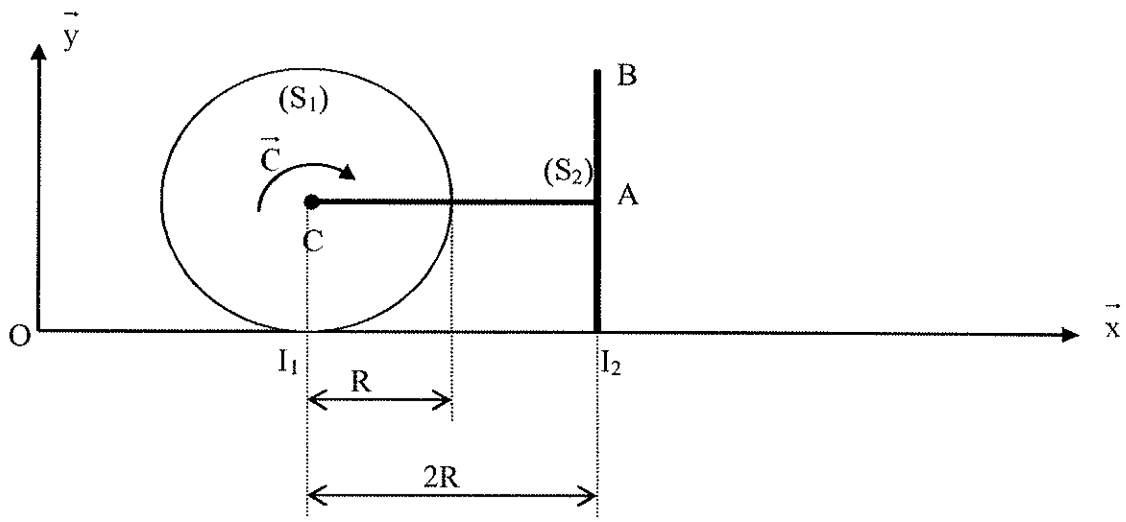
Un moteur exerce sur la roue un couple de moment $\vec{C} = C\vec{z}$.
La roue tourne sans frottement autour de son axe et roule sans glisser sur le sol. On suppose que le coefficient de frottement de glissement *f* sur le sol est le même en I_1 et en I_2

Soient $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND et g l'accélération de la pesanteur.

On donne : * $\vec{\Omega}(S_1 / R) = \dot{\theta}\,\vec{z}$

* L'action du sol sur (S) en I_1 : $\vec{I_1} = T_1\,\vec{x} + N_1\,\vec{y}$
* L'action du sol sur (S) en I_2 : $\vec{I_2} = T_2\,\vec{x} + N_2\,\vec{y}$
* La matrice d'inertie de (S1) écrite dans le repère $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[I_C(S_1)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

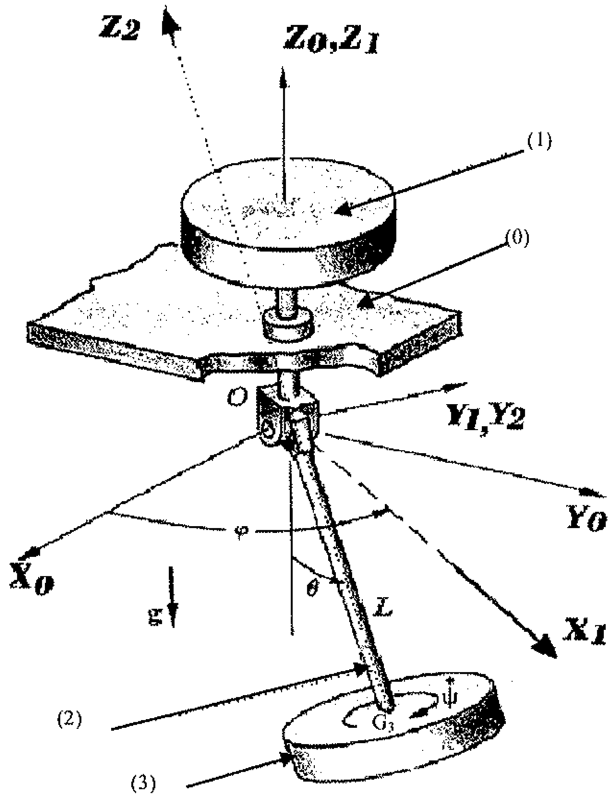


1) Tracer sur le schéma le centre de gravité G de (S) et les 3 efforts extérieurs appliqués à (S).
2) Ecrire au point G le torseur des efforts extérieurs appliqués à (S) : $F(\vec{F}_{ext} \rightarrow (S))$

3) En appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S) déterminer 2 relations reliant m, g, N_1, N_2, T_1, T_2 et V(G/R).
4) Déterminer le moment dynamique de la roue (S_1) dans son mouvement par rapport à R au point G (commencer par le faire au point C).
5) Déterminer le moment dynamique de (S_2) dans son mouvement par rapport à R au point G (commencer par le faire au point A).
6) En déduire le moment dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R au point G.
7) En appliquant le théorème du moment dynamique à (S) déterminer 1 relation reliant N1, N2, T1, T2 et θ.
8) En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue (S_1) déterminer une relation reliant C, T_1 et θ.
9) En écrivant la condition de roulement sans glissement en I1, déterminer V(C/R) en fonction de R et θ.
10) Ecrire les 2 relations imposées par le glissement en I_2 et le non glissement en I_1.
11) Reprendre toutes les équations déterminées dans les questions précédentes et relever le nombre et le nom des inconnues.
Ce système est il résolvable ?
Quelle relation doit on vérifier pour que le mouvement d'avance du chasse neige soit réalisable.

TD9

ETUDE D'UN PENDULE GYROSCOPIQUE



Ce pendule est constitué : d'un bâti (0), d'un arbre d'entré (1) de masse m_1 et de centre de gravité G_1 (G_1 appartient à l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$), d'une tige (2) de masse négligeable et d'une pièce cylindrique (3) de masse m_3 et de centre de gravité G_3 (G_3 appartient à l'axe $(O,\overrightarrow{z_2})$).

Soient $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au bâti (0), $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$ un ROND lié à l'arbre d'entré (1), $R_2(O,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2})$ un ROND lié à la tige (2) et $R_3(P,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_2})$ un ROND lié à la masse (3).

- l'arbre d'entrée (1) est en liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ avec le bâti (0), tel que $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})=(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1})=\varphi$
- la tige (2) est en liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{y_1})$ avec l'arbre d'entré (1), tel que $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})=(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2})=\theta$
- la masse (3) est en liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_2})$ avec la tige (2), tel que $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3})=(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_3})=\psi$

Les liaisons sont considérées comme parfaites.

Un moteur crée sur l'arbre d'entré (1) un couple d'entré $\overrightarrow{C_e}=C_e\overrightarrow{z_0}$.

La matrice d'inertie du solide (3) par rapport à R_2 est : $[I_O(3)]=\begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2})}$

On donne également :

$\overrightarrow{OG_3}=-L\overrightarrow{z_2}$

Questions :

- le but de ces questions n'est pas de résoudre les équations provenant du PFD, mais plutôt de mettre en place tous les éléments permettant d'appliquer le PFD.
- Beaucoup de questions sont indépendantes

1) Faite les figures de calcul nécessaires à l'étude et donner les vecteurs vitesses de rotation correspondants. En déduire $\overrightarrow{\Omega_{(2/0)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{(3/0)}}$.
2) Calculer la vitesse du point G_3 appartenant à (2) par rapport à R_0. Puis la vitesse du point G_3 appartement à (3) par rapport à R_0.
3) Calculer l'accélération du point G_3 appartenant à (3) par rapport à R_0.
4) Le moment d'inertie du solide (1) par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$, est connue et noté C_1. Donner la forme de la matrice d'inertie du solide (1) par rapport à R_1.
5) Calculer le moment cinétique du solide (1) dans son mouvement par rapport à R_0 en O.
6) Calculer le moment cinétique du solide (2) dans son mouvement par rapport à R_0 en O.
7) Calculer le moment cinétique du solide (3) dans son mouvement par rapport à R_0 en O.
8) Calculer les moments dynamiques des solides (1) et (2) dans leur mouvement par rapport à R_0 en O. On considérera dans la suite que $\overrightarrow{\delta_O(3/R_0)}$ est connu.
9) En isolant l'ensemble (S)=(2)+(3), déterminer le torseur statique des efforts extérieurs sur (S) en O.
10) Déterminer le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_0 en O.
11) En isolant l'arbre d'entrée (1), déterminer le torseur statique des efforts extérieurs sur (1) en O.
12) Déterminer le torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0 en O.

IG2I **DS de rattrapage de mécanique** **2009/20010**

Aucun document - Pas de calculatrice – durée : 2h00

Soit un disque plein (S2), de rayon r, de masse m, de centre de gravité O et d'épaisseur négligeable, en liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ avec une tige (S1). Il est entrainé en rotation par un moteur qui lui applique un couple $Cm\,\overrightarrow{z_0}$ en O. Ce disque roule sans glisser sur un plateau (3) (I point de contact entre (S3) et (S2)).
La tige (S1), de masse négligeable, est en liaison pivot d'axe $(C,\overrightarrow{z_0})$ avec le bâti (S0).
Le plateau (S3) de masse M et de centre de gravité A, est en liaison glissière avec la bâti (S0).
Un ressort placé entre le plateau (S3) et le bâti (S0) transmet un effort sur (S3) tel que $\vec{F}(So \to S3) = F\,\overrightarrow{y_0}$ (F non constant mais connue).
Soit f le coefficient de frottement entre (S2) et (S3) au point I.

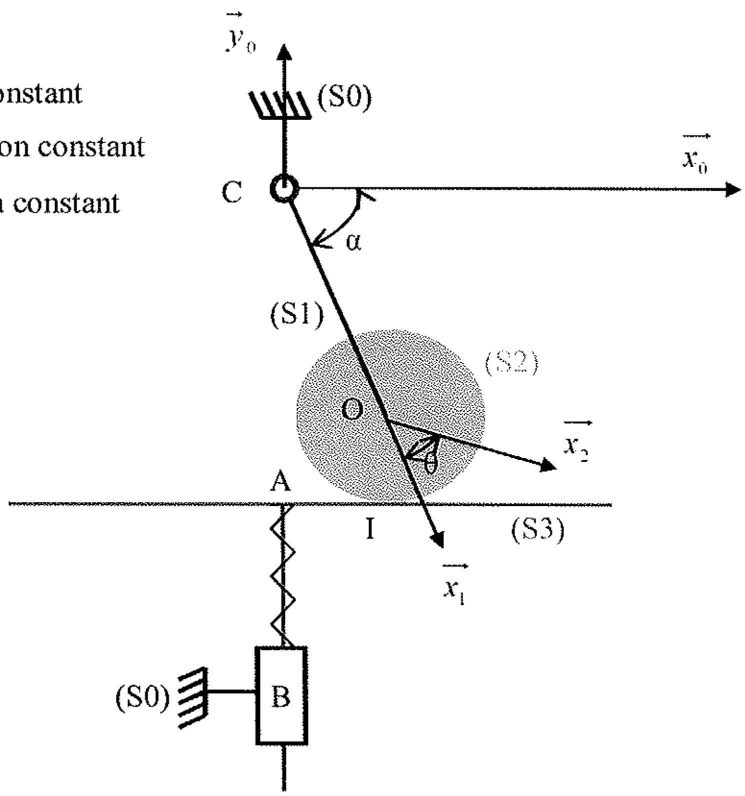
Soit $R_0(C,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au bâti (S0).
Soit $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$ un ROND lié à (S1).
Soit $R_2(O,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$ un ROND lié à (S2).
Avec $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}) = \theta$

On prendra comme notations pour les torseurs des liaisons, les notations habituelles.
Par exemple pour un encastrement au point P entre des solides S8 et S9, on a en <u>2D</u> :

$$F(S8 \to S9) = \begin{Bmatrix} X_P\overrightarrow{x_0} + Y_P\overrightarrow{y_0} \\ N_P\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_P$$

On donne :

- $\overrightarrow{CO} = a\overrightarrow{x_1}$ avec a constant
- $\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{y_0}$ avec λ non constant
- $\overrightarrow{AI} = l\overrightarrow{x_0}$ avec l non constant
- $I_{O\overrightarrow{z_0}}(S2) = J$



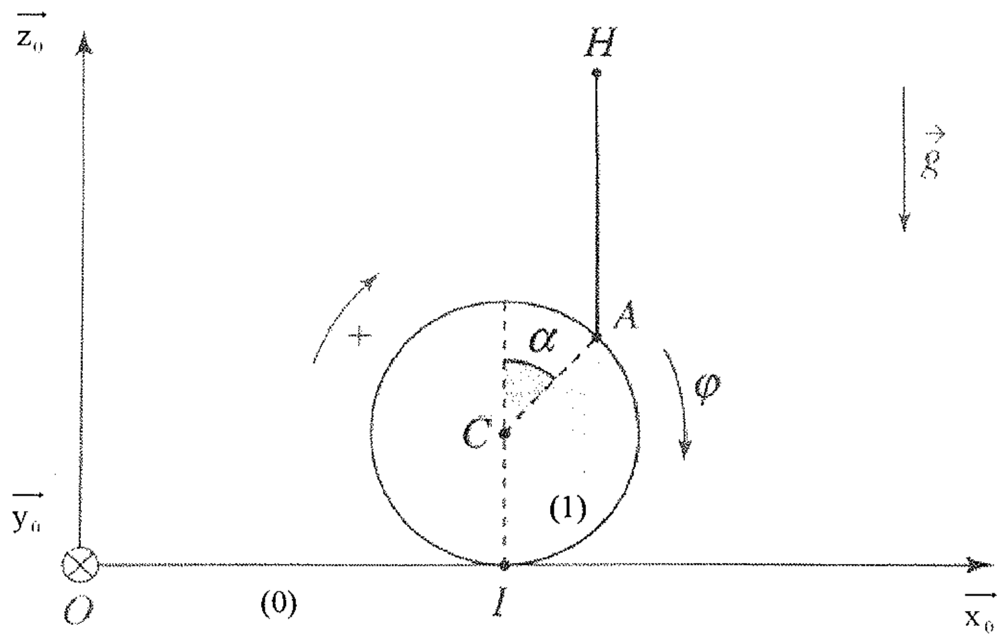
Questions :

1) Dessiner les figures de calcul nécessaires à l'étude et préciser les vecteurs vitesses de rotations correspondants.
2) Déterminer le torseur dynamique de (S1) dans son mouvement par rapport à R_0 au point O.
3) Déterminer le torseur dynamique de (S3) dans son mouvement par rapport à R_0 au point A.
4) Déterminer le torseur dynamique de (S2) dans son mouvement par rapport à R_0 au point O.
5) On isole (S3) : déterminer le torseur des efforts extérieurs $(\overline{S3})$ sur (S3) au point A.
6) On isole (S2) : déterminer le torseur des efforts extérieurs $(\overline{S2})$ sur (S2) au point O.
7) Appliquer le PFD à (S3), écrire les 3 équations scalaires qui en découlent sans les résoudre.
8) Appliquer le théorème du moment dynamique à (S2), écrire l'équation scalaire qui en découle sans la résoudre.
9) Ecrire la résultante du torseur dynamique de (S2) dans son mouvement par rapport R_0, dans R0.
10) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à (S2), écrire les 2 équations scalaires qui en découlent sans les résoudre.
11) Déterminer les torseurs statiques des actions mécaniques de (S2) sur (S3) et de (S0) sur (S3), en fonction de M, g, F, J, C, r, l, λ, α et θ (ou de leurs dérivées).

IG2I L2 DS de mécanique - rattrapage de septembre 2007/2008

Une feuille personnelle A4 est autorisée
Calculatrice autorisée

Equilibre d'un clown sur un ballon en mouvement



Un ballon (1) sphérique de rayon R, rigide, de masse m uniformément répartie **en surface**, roule sans glisser sur le sol (0) horizontal.

Soit $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ un ROND lié au sol (0).

Soit $R_1(C,\vec{x_1},\vec{y_0},\vec{z_1})$ un ROND lié au ballon (1). R_1 se déduit à tout instant de R_0 par une rotation d'angle ϕ autour de l'axe $(O,\vec{y_0})$, tel que $(\vec{x_0},\vec{x_1}) = \varphi$.

L'intensité de la pesanteur est g. Le coefficient de frottement du ballon sur le sol est constant et égal à f. On note $\vec{R} = T\vec{x_0} + N\vec{z_0}$ la réaction du sol sur le ballon au point de contact I.

Un clown a les pieds en un point A du ballon tel que la droite (CA) fait, à tout instant, un angle α **constant** avec la verticale. Le clown marche ou court à petits pas sur le ballon en direction de son point le plus haut. Le clown est assimilé à un solide de masse M, de centre de gravité H : (AH) est constamment vertical et $AH = 2R$. On néglige l'inertie des parties mobiles du clown dans sa marche ou sa course à petits pas de sorte que son mouvement est, dans R_0, un **mouvement de translation.**

On désigne par v et par a les intensités respectives de la vitesse et de l'accélération du centre de gravité C du ballon

On appelle (S) le système Ballon + clown

Le moment cinétique $\vec{\sigma_H}(\text{clown}/R_0) = \vec{0}$ car on suppose, pour simplifier le problème, que toute la masse du clown est concentrée en H.

QUESTIONS

Partie cinétique

1) Dessiner la figure de calcul de cette étude et donner le vecteur vitesse de rotation correspondant.
2) Déterminer au point C la matrice d'inertie du ballon (1) dans le repère R_0 : $[I_C(1)]$ (justifier succinctement chaque valeur)
3) Quelles sont les trajectoires des points H et C par rapport au repère R_0? Déterminer alors quelles sont la vitesse $v(H \in cl/R_0)$ et l'accélération $a(H \in cl/R_0)$ de H dans R_0.
4) Utiliser la relation traduisant le roulement sans glissement du ballon sur le sol au point I pour déterminer une relation donnant $\dot{\varphi}$ en fonction de R et v.

   En déduire le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(1/R_0)$ en fonction de R et v.
5) Déterminer le moment cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0 au point C, en fonction de m, R et v.
6) En déduire le moment cinétique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0 au point I, en fonction de m, R et v.
7) Déterminer le moment dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à R_0 au point I, en fonction de m, R et a.
8) Déterminer le moment dynamique du clown dans son mouvement par rapport à R_0 au point I, en fonction de m, R, α et a.
9) En déduire le moment dynamique de l'ensemble (S) dans son mouvement par rapport à R_0 au point I, en fonction de m, R, α et a.

Partie dynamique

10) Faire le bilan des torseurs d'actions mécaniques extérieures subies par l'ensemble S=(clown+ballon). Exprimer tous ces torseurs au point de contact I.
11) En appliquant le théorème du **moment dynamique** à l'ensemble S, calculer l'accélération a du point C en fonction de m, M, g et α. Comment varie cette accélération au cours du temps ? Faire l'application numérique avec : M = 60 kg ; m = 6 kg ; $\alpha = 5°$; R = 0.5 m et g = 9.81 ms^{-2}.
12) En appliquant le théorème de la **résultante dynamique** à l'ensemble S, calculer les composantes tangentielles T et N de la réaction du sol sur le ballon.
13) En prenant a = 0.2 ms^{-2}, déterminer la valeur du coefficient de frottement f à partir de laquelle il y a glissement du ballon sur le sol.

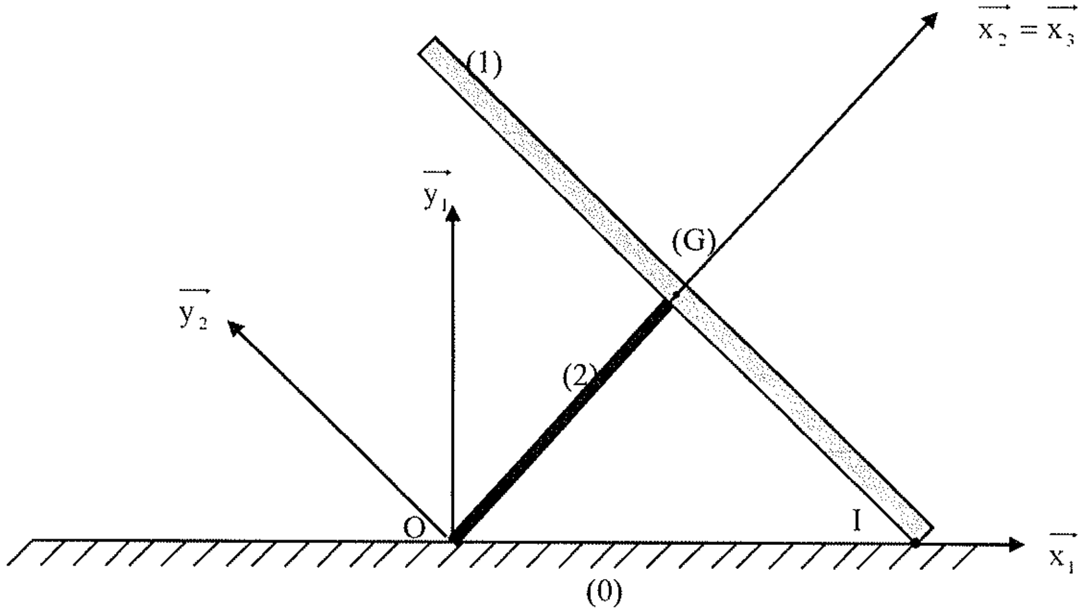
IG2I L2 | DS de mécanique rattrapage | 2007/2008

Une feuille personnelle A4 est autorisée
Calculatrice non autorisée

On considère le solide (S) ci-dessus constitué :

- d'un disque (1) homogène, de centre de gravité G, de rayon a, de masse M et d'épaisseur négligeable.
- D'une tige (2) de longueur a, de masse négligeable, fixée sur le disque (1) comme représenté sur la figure.

Le solide (S) roule sans glisser au point I sur le sol horizontal (0) de telle manière que l'extrémité de la tige (2) coïncide en permanence avec le point O fixe du sol.



Soit $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au sol (0).

Soit $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_1})$ un ROND. R_1 se déduit à tout instant de R_0 par une rotation d'angle θ autour de l'axe $(O,\overrightarrow{y_0})$: $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_1}) = \theta$.

Soit $R_2(O,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_1})$ un ROND lié à la tige (2). R_2 se déduit à tout instant de R_1 par une rotation d'angle 45° autour de l'axe $(O,\overrightarrow{z_1})$.

Soit $R_3(O,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$ un ROND lié au solide (S). R_3 se déduit à tout instant de R_2 par une rotation d'angle ϕ autour de l'axe $(O,\overrightarrow{x_2})$: $(\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_3}) = (\overrightarrow{z_2},\overrightarrow{z_3}) = \varphi$.

On note $\overrightarrow{R_0} = X_0\overrightarrow{x_1} + Y_0\overrightarrow{y_1} + Z_0\overrightarrow{z_1}$ l'action du sol sur le solide (S) en O.

On note $\overrightarrow{R_1} = X_1\overrightarrow{x_1} + Y_1\overrightarrow{y_1} + Z_1\overrightarrow{z_1}$ l'action du sol sur le solide (S) en I.

QUESTIONS :

14) Dessiner les figures de calcul de cette étude.
15) Déterminer le vecteur vitesse de rotation de (S) dans son mouvement par rapport à R_0.
16) Trouver une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ en utilisant la condition de non glissement en I, (ie : $\vec{V}(I \in R_3/R_0) = \vec{0}$).
17) En déduire le vecteur vitesse de rotation de (S) dans son mouvement par rapport à R_0 en fonction de $\dot{\theta}$.
18) Déterminer par dérivation du vecteur position, la vitesse du point G appartenant à (S) dans son mouvement par rapport à R_0.
19) Déterminer l'accélération du point G appartenant à (S) dans son mouvement par rapport à R_0.
20) Démontrer proprement que la matrice d'inertie de (S) dans le repère $(G, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})$ s'écrit : $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} \frac{Ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{4} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_1})}$
21) Déterminer le moment d'inertie I_{Gx_1} de S par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{x_1})$. Pour cela on utilisera la matrice déterminée à la question précédente.
22) En déduire le moment d'inertie I_{Ox_1} de S par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{x_1})$. Pour cela on utilisera le théorème de Huygens.
23) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au solide (S). Effectuer ensuite une projection de l'égalité obtenue dans R_1 pour déterminer 3 équations scalaires.
24) Exprimer dans R_1 le moment cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R_0 au point O.
25) En déduire le moment dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_0 au point O.