

MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

Cinétique - Dynamique

I) Rappels

- * Statique du solide indéformable
- * Cinématique du solide indéformable
- * Applications

II) Géométrie des masses

- * Centre d'inertie
- * moments et produits d'inertie
- * Matrice d'inertie et opérateur d'inertie
- * Applications simples

III) Torseur Cinétique et dynamique

- * Torseur cinétique
- * Torseur dynamique
- * Applications

IV) Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

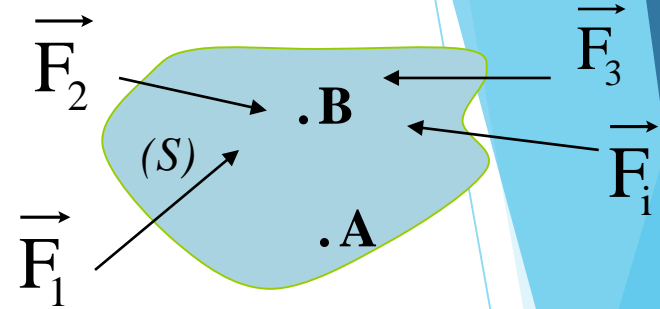
V) Récapitulatif sur les différents torseurs

I) Rappels :

Statique - cinématique - géométrie des masses

Torseur statique :

Soit un solide (S) soumis à un certain nombre d'efforts extérieurs



Le **torseur statique** de la force \vec{F}_i sur le solide (S) écrit au point A est défini comme suit :

$$\mathcal{F}(\vec{F}_i \rightarrow S) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{M}_A(\vec{F}_i) \end{Bmatrix}_A$$

Résultante
Moment

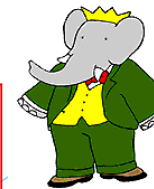
Avec :

$$\vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{F}_i) + \vec{BA} \wedge \vec{F}_i$$

Formule du transport des moments

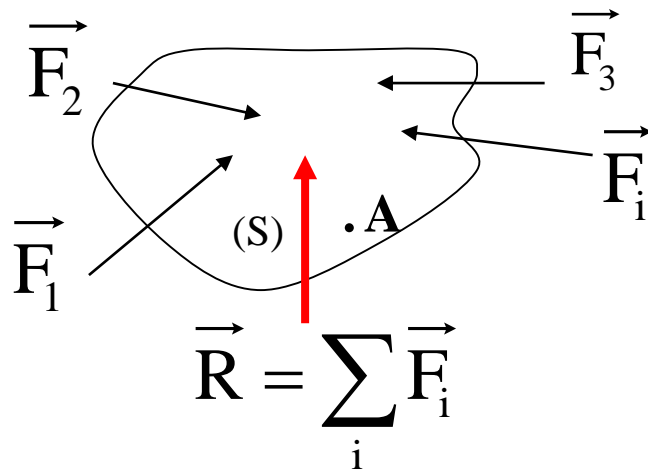
Moyen Mnémotechnique

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$



TM & © Nelvana

PFS :



PFS : le solide (S) est en équilibre ssi

$$\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A(\vec{R}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = 0 \quad \forall A$$

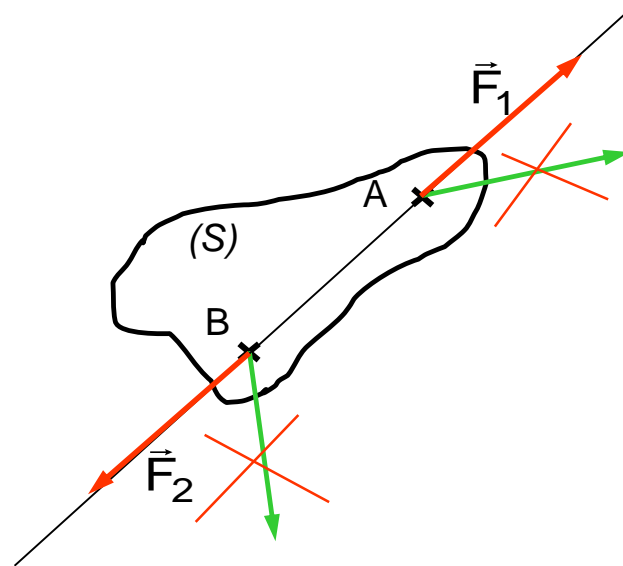
Torseur Statique

Cette équation torsorielle donne deux équations vectorielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{M}_A(\vec{R}) = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i \rightarrow S) = \vec{0} \end{array} \right.$$

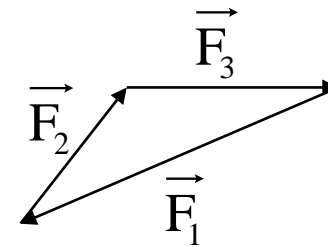
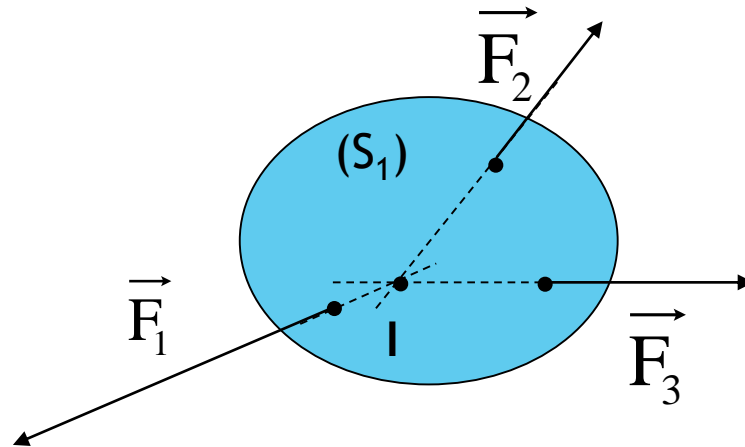
→ 6 équations scalaires

Solide soumis à deux forces :



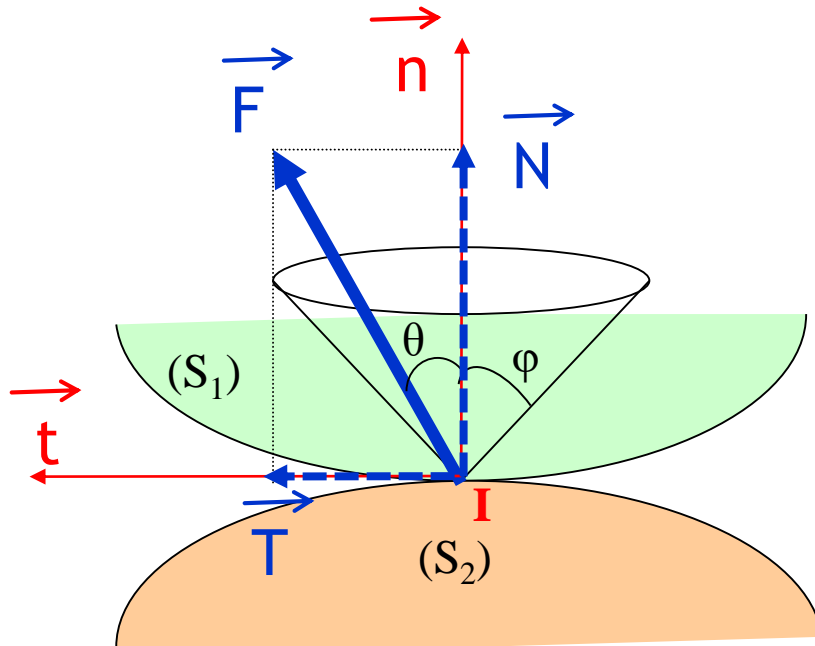
**les 2 forces sont directement opposées
(même direction, même norme et sens opposé)**

Solide soumis à trois forces non parallèles :



les 3 forces sont donc **coplanaires, concourantes** et de
somme géométrique nulle

Frottement : loi de Coulomb



Il existe un coefficient dit de frottement f entre deux solides en contact. Ce coefficient dépend uniquement des matériaux et de leur état de surface.

Le cône de frottement est directement lié à f par la relation suivante : $f = \tan \varphi$

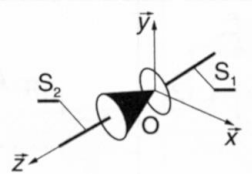
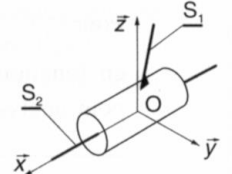
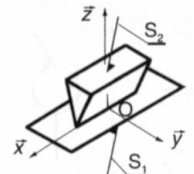
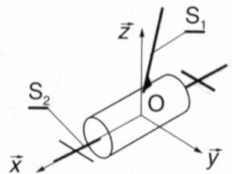
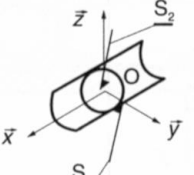
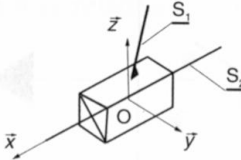
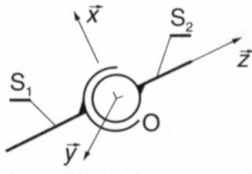
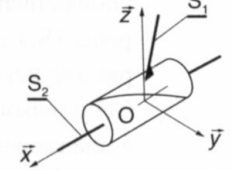
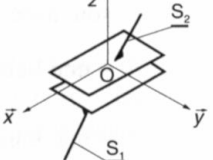
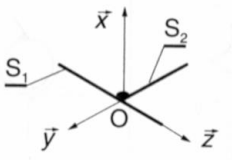
$$\mathcal{F}(S_2 \rightarrow S_1)_I = \begin{cases} \vec{F} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Si $\theta < \varphi \rightarrow \tan \theta < \tan \varphi \rightarrow T < f N \rightarrow$ pas de glissement entre les solides

Si $\theta = \varphi \rightarrow \tan \theta = \tan \varphi \rightarrow T = f N \rightarrow$ glissement entre les solides

~~Si $\theta > \varphi \rightarrow \tan \theta > \tan \varphi \rightarrow T > f N \rightarrow ?$~~

Torseur statique transmissible des principales liaisons :

Liaison	Torseur statique transmissible	Liaison	Torseur statique transmissible
Liaison ponctuelle	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} Z \bar{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour $M \in (O, \bar{z})$</p>	Liaison pivot glissant	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ M\bar{y} + N\bar{z} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour $M \in (O, \bar{x})$</p>
Liaison linéaire rectiligne	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} Z \bar{z} \\ M\bar{y} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour $M \in (O, \bar{x}, \bar{z})$</p>	Liaison pivot	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X\bar{x} + Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ M\bar{y} + N\bar{z} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour $M \in (O, \bar{x})$</p>
Liaison linéaire annulaire	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ <p>O centre de la liaison</p>	Liaison glissière	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ L\bar{x} + M\bar{y} + N\bar{z} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour tout M</p>
Liaison rotule	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X\bar{x} + Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ <p>O centre de la liaison</p>	Liaison hélicoïdale	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X\bar{x} + Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ kX\bar{x} + M\bar{y} + N\bar{z} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour $M \in (O, \bar{x})$</p>
Liaison appui plan	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} Z \bar{z} \\ L\bar{x} + M\bar{y} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour tout M</p>	Liaison encastrement	 $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X\bar{x} + Y\bar{y} + Z \bar{z} \\ L\bar{x} + M\bar{y} + N\bar{z} \end{Bmatrix}_M$ <p>pour tout M</p>

TORSEUR CINEMATIQUE :

$$\mathbf{v}(S/R) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}_A$$

Résultante

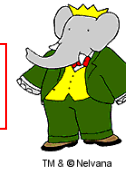
Moment

Notation :

$$\vec{V}_A(S/R) = \vec{V}(A \in S/R)$$

Transport des vitesses (propriétés des torseurs) :

$$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

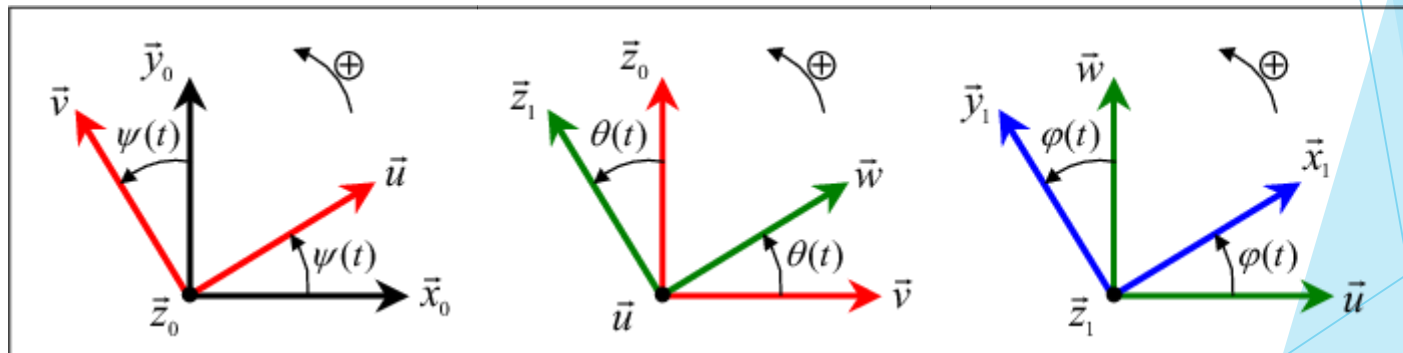
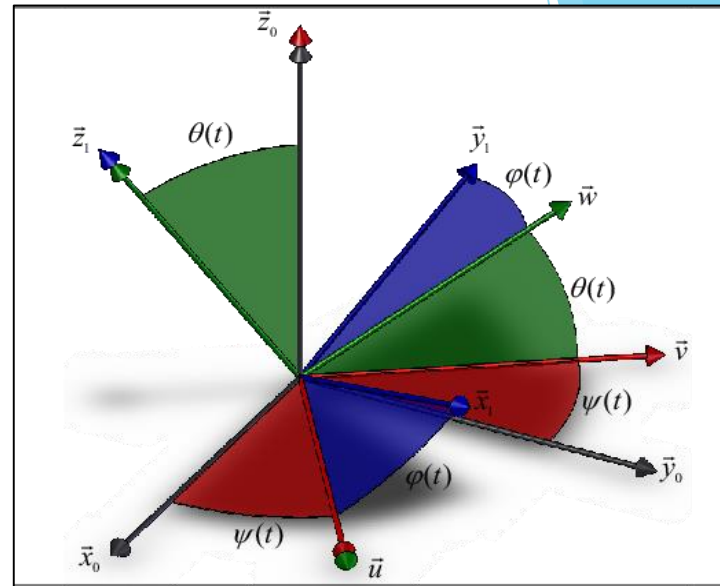


$$\vec{V}_B(S/R) = \vec{V}_A(S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

On passe par un autre point fixe par rapport à (S)

Figures de calcul :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un ROND $\psi(t)$
 $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ un ROND $\theta(t)$
 $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ un ROND $\varphi(t)$
 $R_3(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un ROND



http://www.lpmm.fr/faure/cariboot_files/cours_cinematique.html

deux règles à respecter :

$$\text{angle} \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

la figure se fait dans le sens direct (vecteur normal orienté vers vous)

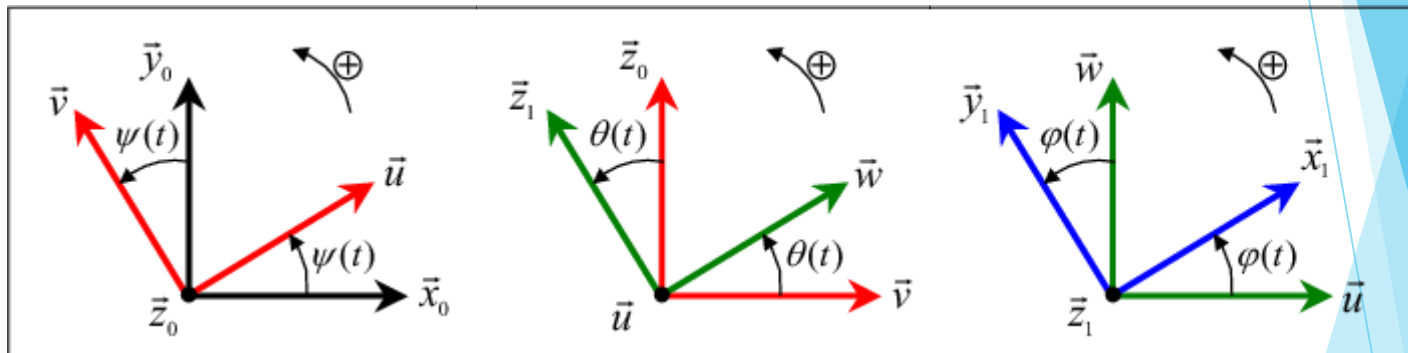
Figures de calcul :

$$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$$R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

$$R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$$

$$R_3(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$



http://www.lpmm.fr/faure/cariboost_files/cours_cinematique.html

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta} \vec{u}$$

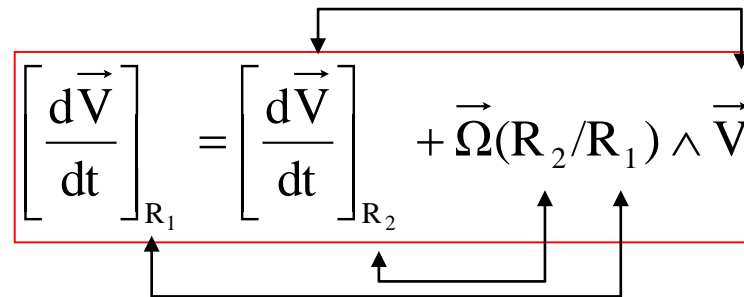
$$\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \dot{\phi} \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}(R_3/R_0) = \vec{\Omega}(R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\phi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{z}_0$$

Calculez : $\vec{w} \wedge \vec{z}_1$, $\vec{x}_0 \wedge \vec{u}$, $\vec{y}_0 \wedge \vec{u}$, $\vec{x}_1 \wedge \vec{v}$

Formules à savoir :

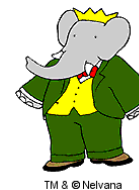
* Formule de dérivation d'un vecteur :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}$$


* Formule de distribution / transport des vitesses : propriété du torseur

On passe par un autre point

$$\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$



Formules à savoir :

* Formule de composition des vitesses : $R_i \equiv S_i$

On passe par un autre repère

$$\vec{V}(P \in R_9/R_0) = \vec{V}(P \in R_9/R_8) + \vec{V}(P \in R_8/R_7) + \vec{V}(P \in R_7/R_6) + \dots + \vec{V}(P \in R_1/R_0)$$

* Formule de composition des vitesses : $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ 3 ROND, P un point de S lié à R_2

$$\vec{V}_P(R_2/R_0) = \vec{V}_P(R_2/R_1) + \vec{V}_P(R_1/R_0)$$

Vitesse absolue

Vitesse relative

Vitesse d'entraînement

$$\text{avec } \vec{V}_P(R_1/R_0) = \vec{V}_{O_1}(S_1/R_0) + \overrightarrow{PO_1} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R_0)$$

* Condition roulement sans glissement en I entre 1 et 2 :

$$\vec{V}(I \in 1/2) = \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$$

Accélération :

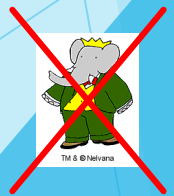
* Accélération d'un point P d'un solide S par rapport à R : $\vec{\Gamma}(P \in S/R) = \vec{\Gamma}_P(S/R)$

$$\vec{\Gamma}(P \in S/R) = \vec{\Gamma}_P(S/R) = \left[\frac{d\vec{V}_P(S/R)}{dt} \right]_R = \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OP}}{dt^2} \right]_R$$

* Remarque importante :

$$\vec{\Gamma}_B(S/R) = \vec{\Gamma}_A(S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \frac{d}{dt} \left[\vec{\Omega}(S/R) \right]_R + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R) \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB})}_{\text{non représentable par un torseur}}$$

Le champ des accélérations n'est pas représentable par un torseur



Comment calculer une vitesse : $V(A \in S/R_2) = ?$

1) Le point A a un mouvement de translation dans R2 :

oui, on dérive le vecteur position :

non, on passe au point 2

$$\vec{V}(A \in S/R_2) = \left[\frac{d\vec{O_2A}}{dt} \right]_{R_2}$$

2) Le solide S est directement lié à R2 (fig. de calcul) :

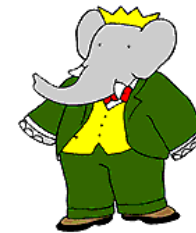
oui, on passe au point 3

non, on utilise la composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S/R_2) = \vec{V}(A \in S/R_1) + \vec{V}(A \in R_1/R_2)$$

3) On passe par un autre point **fixe dans S** :

$$\vec{V}(A \in S/R_2) = \vec{V}(B \in S/R_2) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}(S/R_2)$$

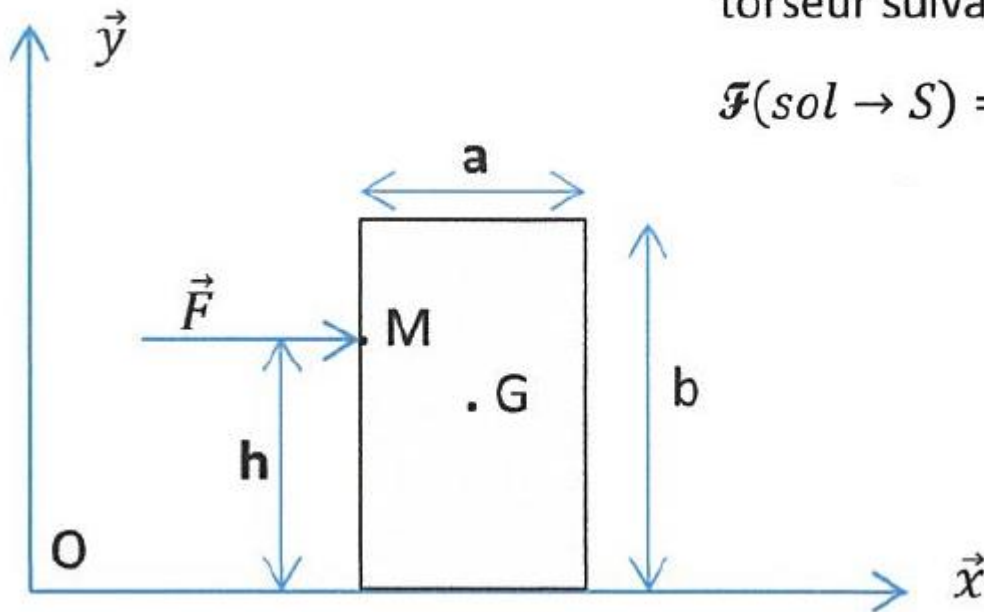


TM & © Nelvana

Soit $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND

Afin de déplacer une armoire de masse m , de largeur a et de hauteur b lors d'un déménagement, une personne exerce au point M une force F horizontale. Cette armoire repose sur un parquet, le coefficient de frottement entre l'armoire et le parquet est f . L'action du sol sur l'armoire est représenté par le torseur suivant :

$$\mathcal{F}(sol \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{sol}} = -T\vec{x} + N\vec{y} \\ \vec{M} = M\vec{z} \end{array} \right\}_G$$



Partie 1 (F est connue)

- 1) Déterminer en fonction des données du problème, les inconnues T, N et M.
- 2) Calculer T, N, M et le module R_{sol} . Avec $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$, $h=1,3\text{m}$, $F=150\text{N}$, $g=9,81\text{ ms}^{-2}$ et $m=50\text{kg}$
- 3) Retrouver graphiquement la valeur de R_{sol} (refaire le schéma de l'armoire avec l'échelle $2\text{m} \equiv 10\text{cm}$), puis trouver graphiquement le point d'application de la réaction du sol.
- 4) Comment se situe la réaction du sol par rapport au cône de frottement? Concluez.

Partie 2 (F est inconnue)

- 5) On considère à présent que l'armoire est à la limite du glissement? Calculer la nouvelle force F qu'il faut appliquer en M en fonction des données de problème (pas de valeur numérique)
- 6) Donnez la valeur de F avec $g=9,81\text{ ms}^{-2}$, $m=50\text{kg}$ et $f=0,2$
- 7) Question indépendante : quelle valeur maximale peut prendre l'angle d'inclinaison de la réaction du sol par rapport à la verticale pour être à la limite du basculement?

Application 2 : cinématique

Une nacelle est fixée sur la tige (3) d'un vérin. Cette tige (3) est en liaison glissière avec le corps (2) du vérin. Le corps (2) de ce vérin est en liaison pivot avec la pièce (1). Et la pièce (1) est en liaison pivot avec le bâti (0).

Les axes et directions des différentes liaisons sont schématisés sur le dessin.

Soit $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un ROND lié au bâti (0)

Soit $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un ROND lié à la pièce (1)

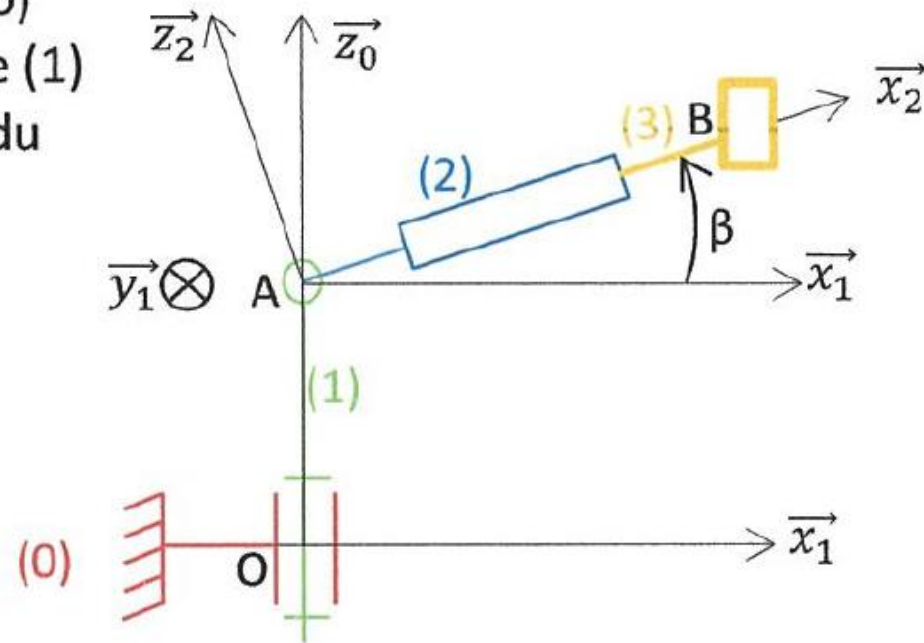
Soit $R_2(0, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ un ROND lié au corp du vérin (2) et à la nacelle (3).

Le paramètre angulaire représentant la position de R_1 par rapport à R_0 est α

Le paramètre angulaire représentant la position de R_2 par rapport à R_1 est β .

$\vec{OA} = a\vec{z}_0$ avec a constant

$\vec{AB} = \mu\vec{x}_2$ avec μ dépendant du temps.



- 1) Faire les figures de calcul correspondantes à l'étude et donner les vecteurs vitesse de rotations correspondants.
- 2) Déterminer le torseur cinématique de (3) par rapport à (2) au point B
- 3) Déterminer le torseur cinématique de (3) par rapport à (1) au point B
- 4) Déterminer le torseur cinématique de (3) par rapport à (0) au point B
- 5) Déterminer l'accélération du point B appartenant à (3) par rapport à (0)

II) géométrie des masses

généralités

Un solide indéformable (S) est caractérisé par :

- sa géométrie (dimensions en m)
- sa masse volumique ρ (en kg.m^{-3}).

Un solide dont la masse volumique est constante, quel que soit le point du solide considéré, est un solide homogène. Un solide dont la masse volumique varie suivant le point du solide considéré est un solide hétérogène

* Pour utiliser les équations de la dynamique, il nous faut déterminer :

- la masse M_S grandeur scalaire
- les coordonnées du centre de masse G_S grandeur vectorielle
- les éléments d'inertie du solide, grandeur matricielle
ou, au moins certains d'entre eux

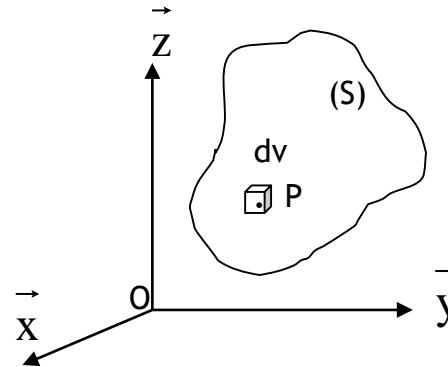
Centre d'inertie

Masse d'un solide :

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND fixe

- (S) un solide de volume V
- P un point de (S), entouré par un volume élémentaire dv de masse dm .
- ρ la masse volumique de (S)

$$dm = \rho dv$$



★ La masse totale de (S) est : $M = \int_V dm = \int_V \rho dv = \rho \int_V dv = \rho V$

$$M = \rho V$$

Si ρ est constant

Pour les solides Homogènes la masse
vaut : $M = \rho V$

Centre d'inertie

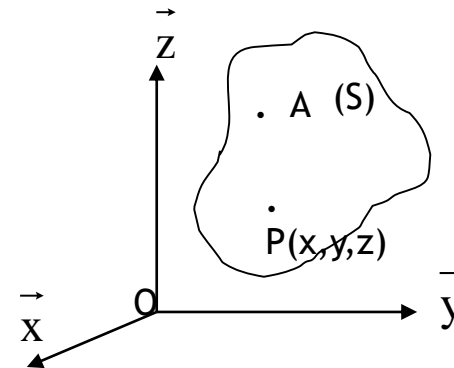
Centre d'inertie :

✦ On appelle centre de masse, centre de gravité ou centre d'inertie, le point G tel que :

$$M \overrightarrow{AG} = \int_v \overrightarrow{AP} dm \quad \text{Quelque soit A}$$

si A = O alors : $M \overrightarrow{OG} = \int_v \overrightarrow{OP} dm$ avec P(x,y,z)

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int_v x dm \\ y_G = \frac{1}{M} \int_v y dm \\ z_G = \frac{1}{M} \int_v z dm \end{cases}$$



si A = G alors : $\int_v \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$

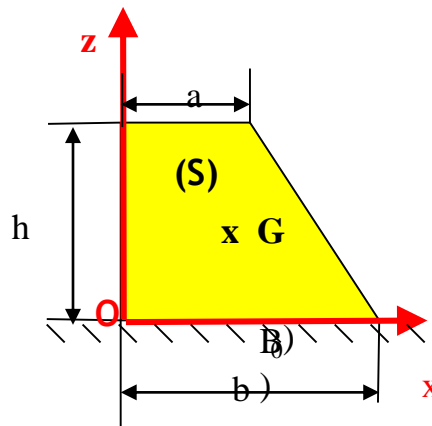
Centre d'inertie

Centre d'inertie :

✦ si (S) est constitué d'un nombre fini de solide (S_i) de cdg G_i
alors :

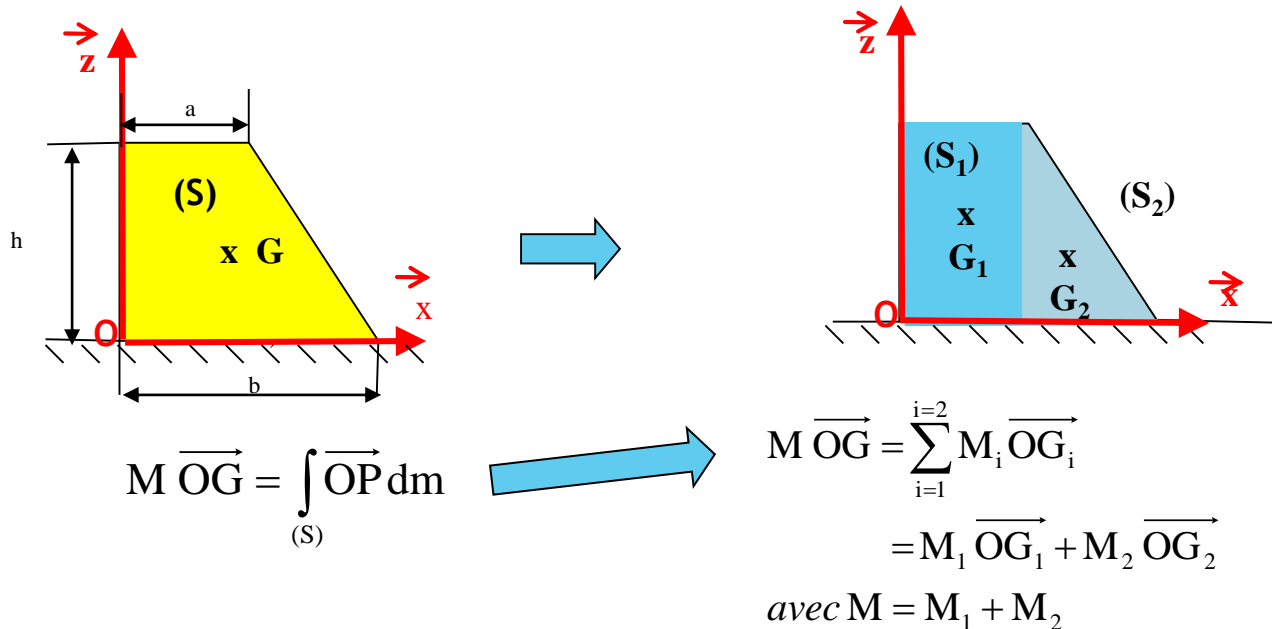
$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AG_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

✦ Application au barrage



Centre d'inertie

Centre d'inertie :



Montrez que :

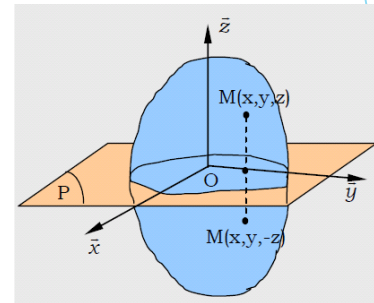
$$\overrightarrow{OG} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)} \vec{x} + \frac{h(2a+b)}{3(a+b)} \vec{z}$$

Centre d'inertie

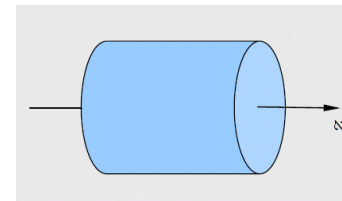
$$M \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int_S x dm \\ y_G = \frac{1}{M} \int_S y dm \\ z_G = \frac{1}{M} \int_S z dm \end{cases}$$

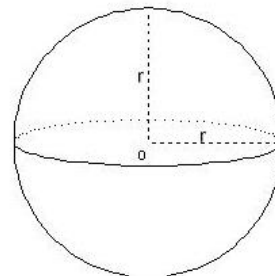
* si le solide admet un plan (P) de symétrie alors G appartient à (P)



* si le solide admet un axe (Δ) de symétrie alors G appartient à (Δ)



* si le solide admet un centre O de symétrie alors $G \equiv O$



Centre d'inertie

Exemple du cône (S) :

* cône de révolution de hauteur h et de rayon R

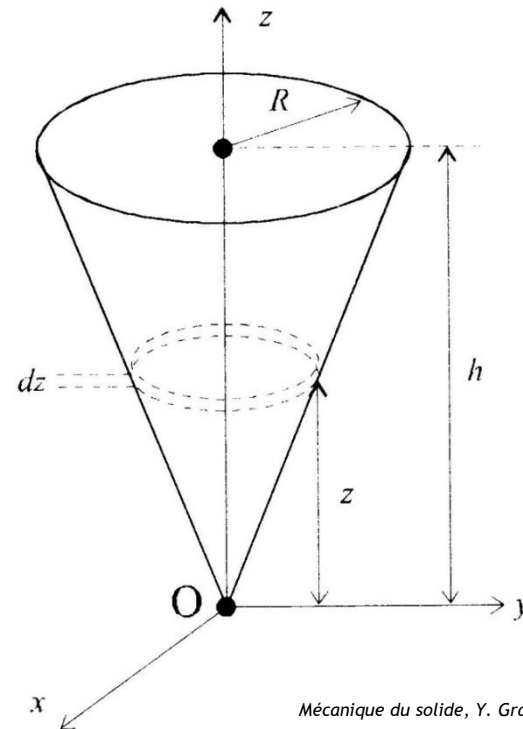
* $\Delta = (O\vec{z})$ axe de symétrie, donc $G \in \Delta$

$$* Z_G = \frac{\int_{(S)} z \, dm}{m} = \frac{\rho \int_{(S)} z \, dV}{m}$$

* choisir le bon « découpage » pour
calculer $\int_{(S)} z \, dV$

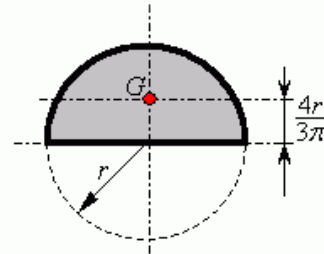
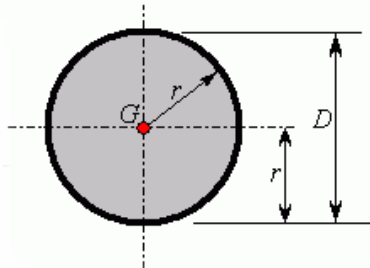
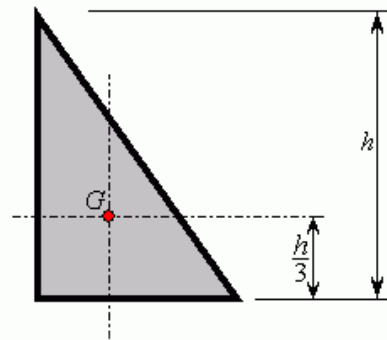
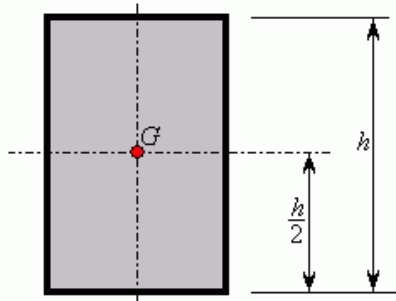
conseil : choisir le plus grand « dV » possible
tel que « z » soit constant sur ce « dV »

* voir application en TD

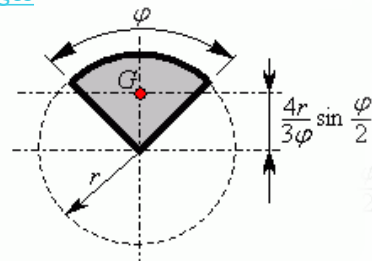
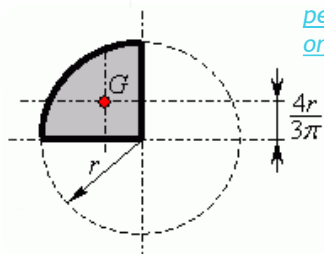


Mécanique du solide, Y. Granjon, Dunod

Centre d'inertie



<http://math.15873.pages.perso-orange.fr/page9.htm>



Applications 1

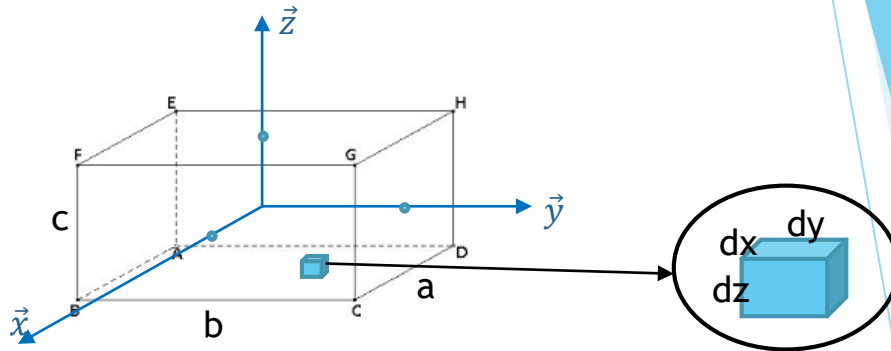
Le parallélépipède rectangle : Soit un parallélépipède rectangle de coté a , b et c dans un ROND

Solide dont on connaît déjà le volume et la position du cdg.

Vérifions que :

* $V=abc$

* $G(0,0,0)$ dans R



1) Retrouver le volume du parallélépipède

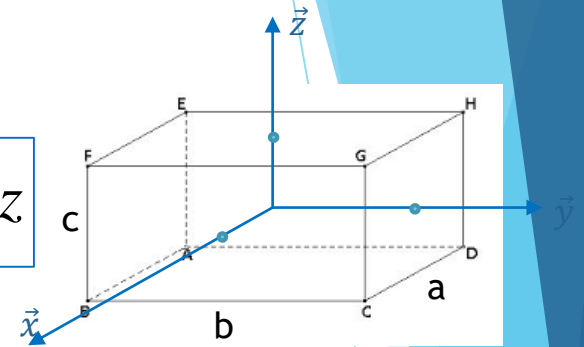
Applications 1

Le parallélépipède rectangle :

$$V = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \right) dy \right) dz$$

ou

$$V = \int_0^c \left(\int_0^b \left(\int_0^a dx \right) dy \right) dz$$

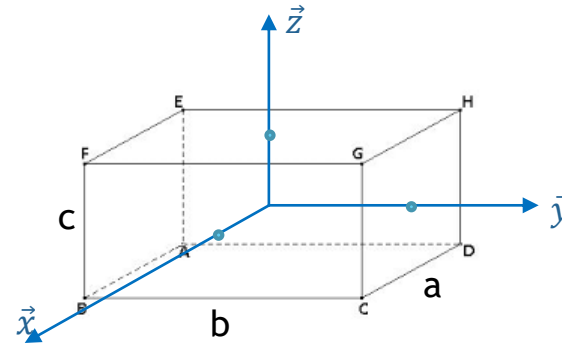


Applications 1

Le parallélépipède rectangle :

2) Retrouver la position du cdg :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int_V x dm \\ y_G = \frac{1}{M} \int_V y dm \\ z_G = \frac{1}{M} \int_V z dm \end{cases}$$



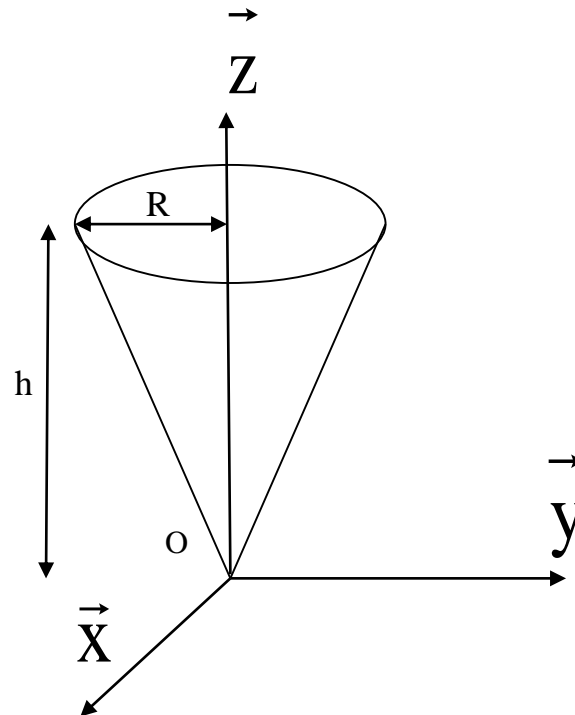
Application 2

Le Cône plein : Soit un cône plein de hauteur h et de rayon R

Ici c'est un solide dont on ne connaît a priori pas ni le volume ni la position du cdg.

Déterminer :

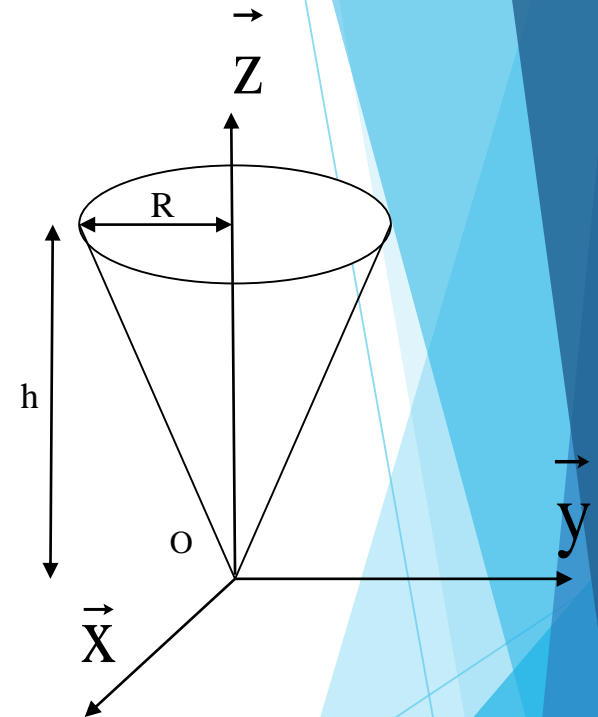
- * Le volume V
- * La position du cdg



Application 2

Le Cône plein : Soit un cône plein de hauteur h et de rayon R

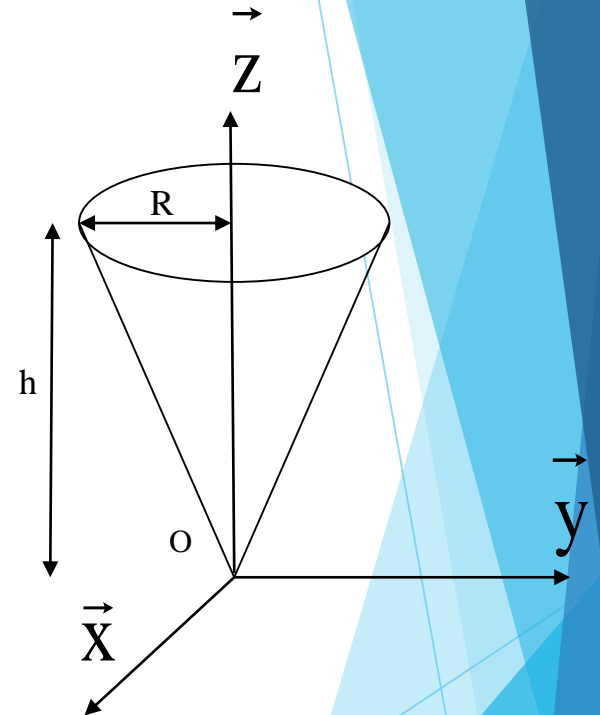
1) volume du cône :



Application 2

Le Cône plein : Soit un cône plein de hauteur h et de rayon R

2) Position du cdg du cône :



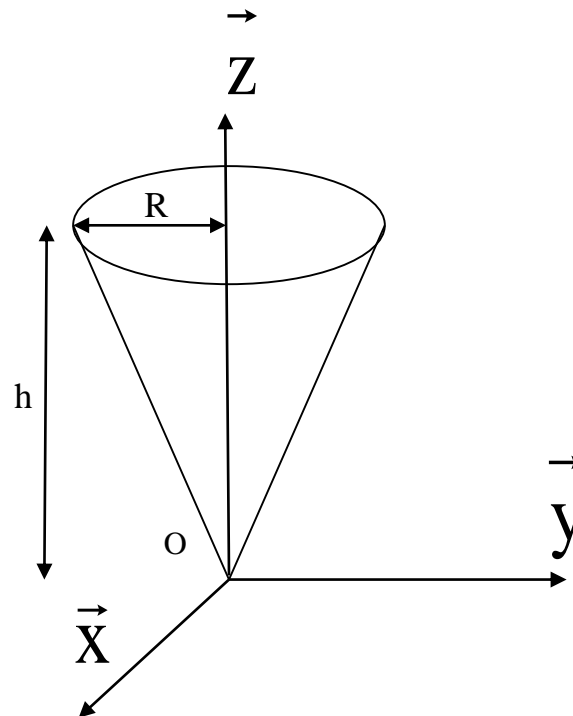
Application 3

Le Cône Creux : Soit un cône creux de hauteur h et de rayon R

Ici c'est un solide dont on ne connaît a priori pas ni le volume ni la position du cdg.

Déterminer :

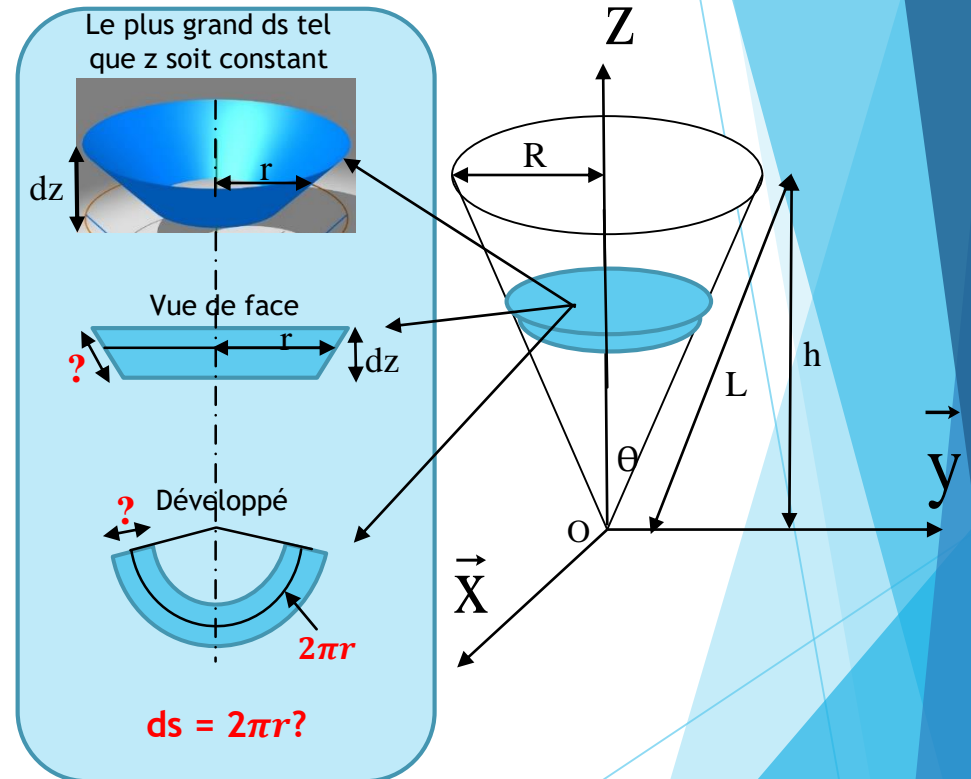
- * Le surface S
- * La position du cdg



Application 3

Le Cône Creux : Soit un cône creux de hauteur h et de rayon R

1) Surface du cône :



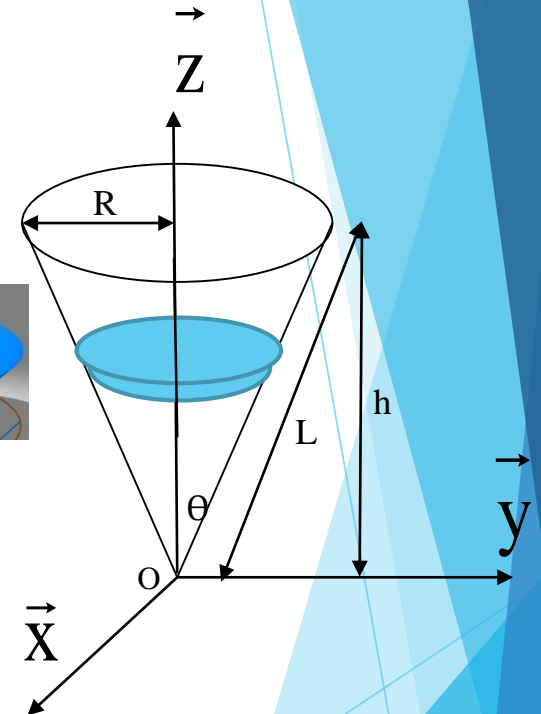
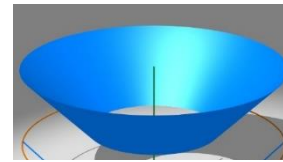
Application 3

Le Cône Creux : Soit un cône creux de hauteur h et de rayon R

Application 3

Le Cône Creux Soit un cône plein de hauteur h et de rayon R

2) Position du cdg du cône :



Moment d'inertie

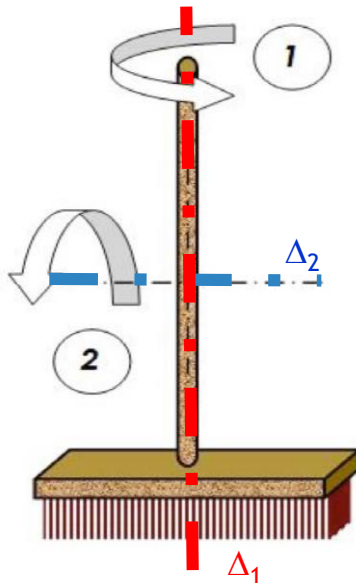
Approche intuitive :

■ Cas de la translation : (Inertie d'un solide)

La masse m du solide (S) suffit à traduire la difficulté à accélérer le solide en translation

■ Cas de la rotation : (moment d'inertie d'un solide)

ici la masse m du solide (S) ne suffit plus à traduire la difficulté à accélérer le solide en rotation



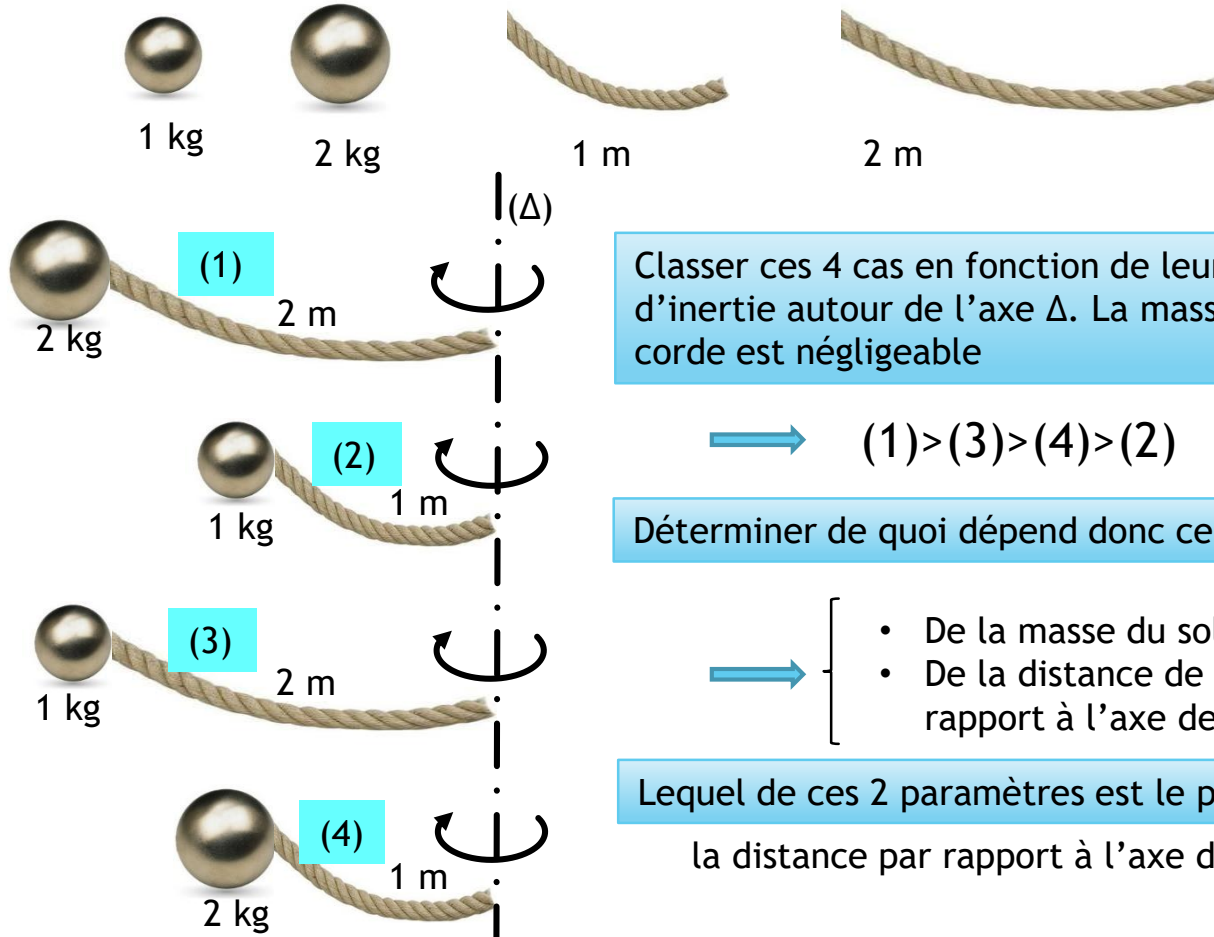
Ici la difficulté à accélérer le balai autour des 2 axes n'est pas la même, alors que la masse est la même !!!

Plus la masse d'un solide est répartie loin de l'axe de rotation Δ , plus la résistance à son accélération est importante

Moment d'inertie

Moment d'inertie

Approche intuitive :



Classer ces 4 cas en fonction de leur moment d'inertie autour de l'axe Δ . La masse de la corde est négligeable

→ $(1) > (3) > (4) > (2)$

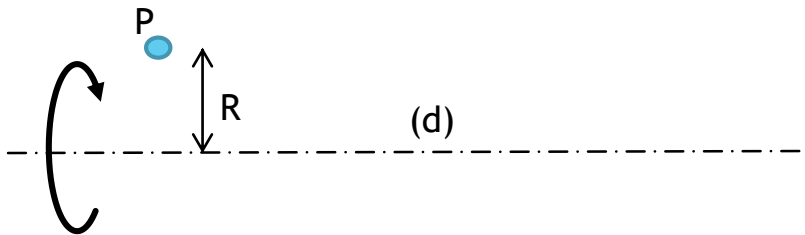
Déterminer de quoi dépend donc ce moment d'inertie.

→

- De la masse du solide à faire tourner
- De la distance de ce solide par rapport à l'axe de rotation

Lequel de ces 2 paramètres est le plus important?
la distance par rapport à l'axe de rotation

Moment d'inertie



Nous verrons dans le cours de « mécanique du solide » que le moment d'inertie du point P de masse M par rapport à l'axe (d) est :

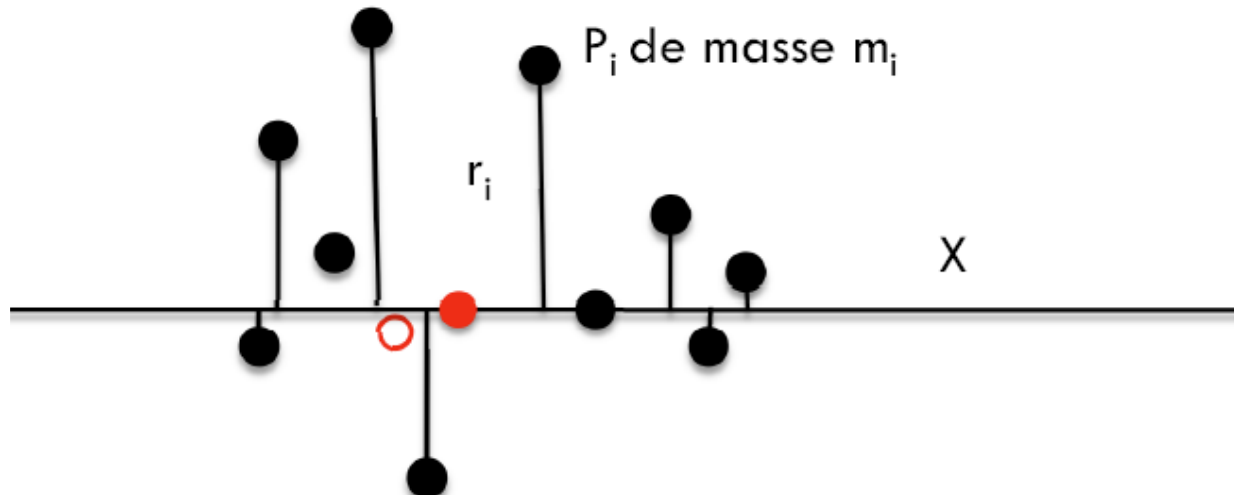
$$I_d(P) = M R^2$$

Ce moment d'inertie représente la difficulté à faire accélérer le point P de masse M autour de l'axe (d)

Moment d'inertie

- Généralisation : Moment d'inertie par rapport à l'axe de l'ensemble des points P_i
- Nous verrons que :

$$I_{ox} = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{Unités : kg.m}^2$$

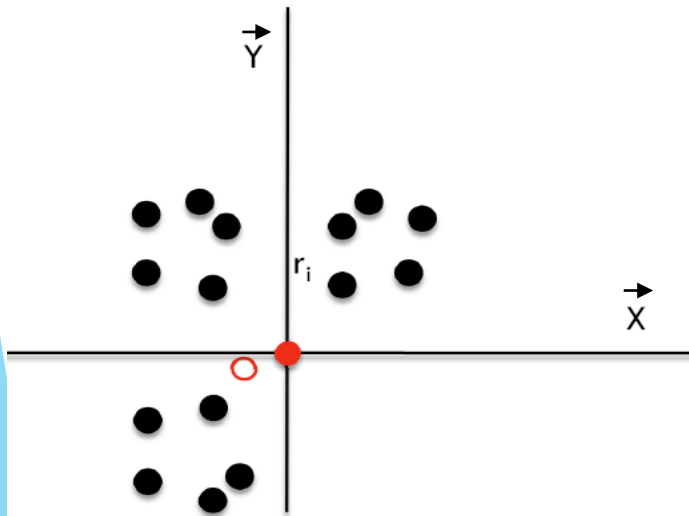


(O, \vec{x})

Produit d'inertie

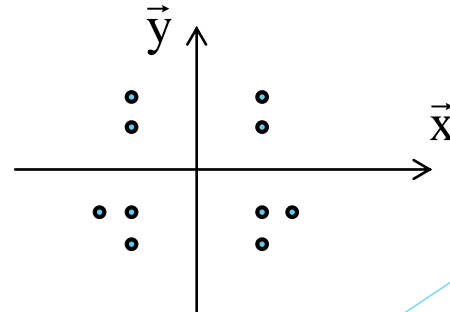
- Le produit d'inertie traduit une asymétrie massique dans un plan
- F est le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (o, \vec{x}) et (O, \vec{y}) il traduit l'asymétrie dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y})
- Nous verrons que :

$$F = \sum_i m_i x_i y_i \quad (\text{Unités : kg.m}^2)$$



Produit d'inertie

Ex :



$F = 0$

Moment d'inertie

moment d'inertie de (S) par rapport à O

$$I_O = \int_{P \in S} OP^2 dm = \int_{P \in S} \rho^2 dm = \int_{P \in S} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

moment d'inertie de (S) par rapport à (O, \vec{z})

$$I_{OZ} = \int_{P \in S} HP^2 dm = \int_{P \in S} r^2 dm = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm$$

de même

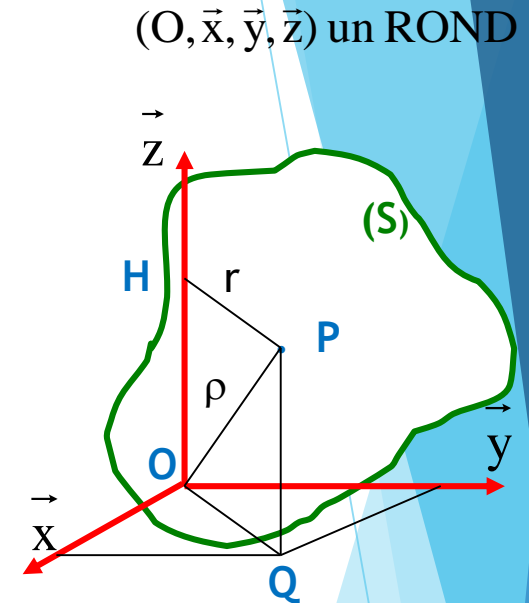
$$\begin{cases} I_{OY} = \int_{P \in S} (x^2 + z^2) dm \\ I_{Ox} = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm \end{cases}$$

le moment d'inertie de (S) par rapport au plan (xOy)

$$I_{XOY} = \int_{P \in S} QP^2 dm = \int_{P \in S} z^2 dm$$

de même

$$\begin{cases} I_{XOZ} = \int_{P \in S} y^2 dm \\ I_{YOZ} = \int_{P \in S} x^2 dm \end{cases}$$



Moment d'inertie

Propriétés :

$$I_{OZ} = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm = \int_{P \in S} x^2 dm + \int_{P \in S} y^2 dm = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

$$I_{OY} = I_{XOY} + I_{YOZ}$$

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ}$$

$$I_O = \int_{P \in S} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{P \in S} x^2 dm + \int_{P \in S} y^2 dm + \int_{P \in S} z^2 dm = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ} = \frac{1}{2} (I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ})$$

Notation :

On note le moment d'inertie d'un solide (S) autour d'un axe (Δ) : $I_{(S/\Delta)}$ ou $I(S/\Delta)$.

$$I_{OX} = I(S, O_x)$$

Produit d'inertie

On appelle produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z})

$$D = \int_S yz \, dm$$

On appelle produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{z})

$$E = \int_S xz \, dm$$

On appelle produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})

$$F = \int_S xy \, dm$$

Matrice d'inertie

On appelle matrice d'inertie du solide (S) au point O par rapport à R, la matrice :

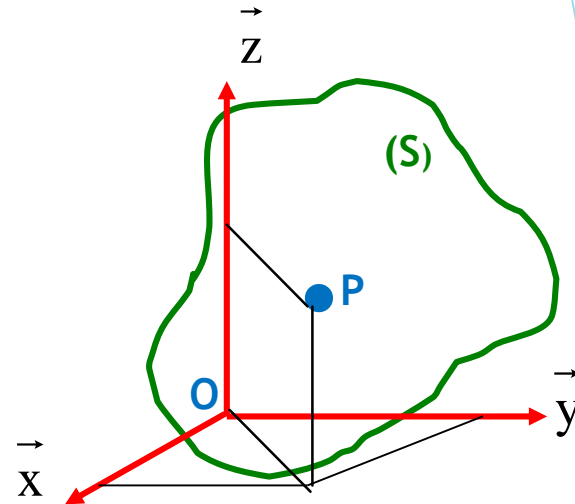
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

avec

$$\begin{cases} A = I_{Ox} \\ B = I_{Oy} \\ C = I_{Oz} \end{cases}$$

$\begin{cases} D, E \text{ et } F \text{ ont été} \\ \text{définis précédemment} \end{cases}$

$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND



Cette matrice est toujours définie en 1 pt du solide et écrite dans une base liée au solide (attention, lors de produits matriciels, les différentes matrices doivent être écrites dans la même base)

Matrice d'inertie : cas d'un plan de symétrie

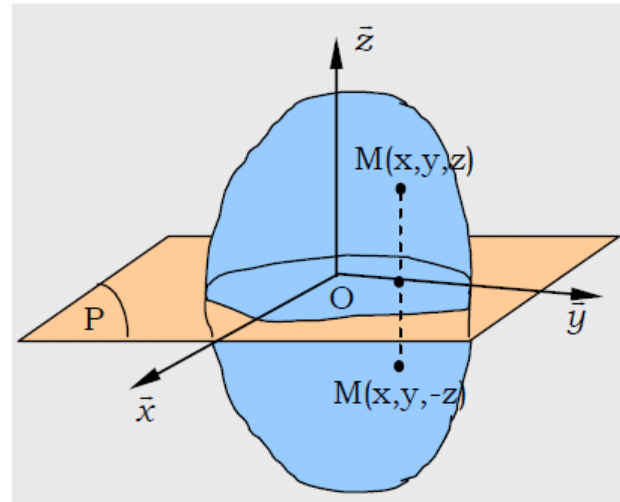
(P) est le plan de symétrie de normale z du solide (S)

A tout point $M(x,y,z)$, on peut associer un point $M'(x,y,-z)$.

Donc :

$$E = \int_S xz \, dm = 0$$

$$D = \int_S yz \, dm = 0$$



$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Matrice d'inertie : cas de 2 plans de symétrie

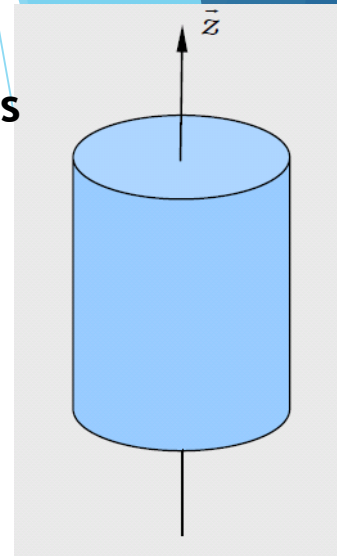
(S) admet deux plans de symétrie orthogonaux de normales x et z :

$$[I_o(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Matrice d'inertie : cas d'une symétrie de révolution

Un solide de révolution d'axe z (un cylindre par exemple), admet au moins deux plans de symétrie perpendiculaires, donc les **produits d'inertie** sont nuls.

Les axes x et y jouent le même rôle d'un point de vue géométrique et d'un point de vue de la répartition des masses : donc les **moments d'inertie A et B** sont égaux.

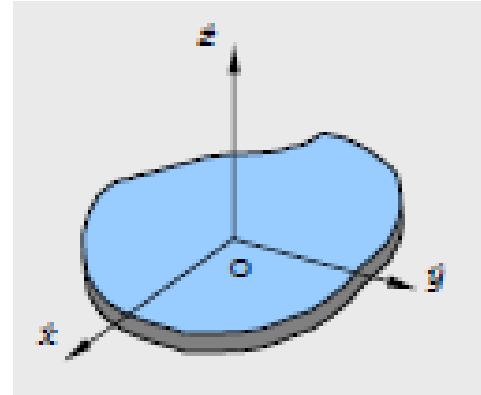


$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

Matrice d'inertie : cas d'une plaque

Si épaisseur négligeable alors $z = 0$

$$D = E = 0 \text{ et } C = A + B$$

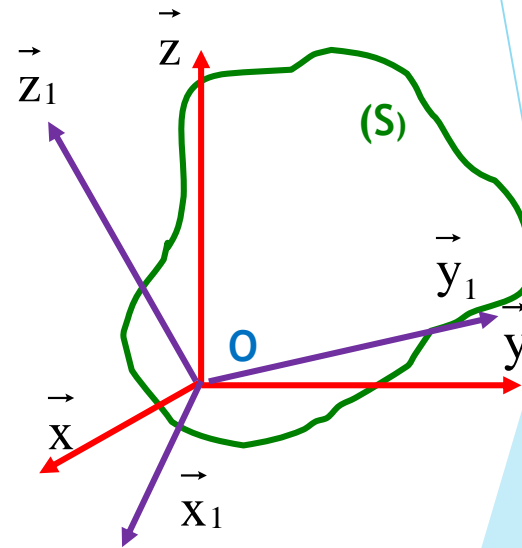


$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A + B \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Matrice d'inertie et opérateur d'inertie : matrice d'inertie

Il existe, en tout point, au moins une base orthonormée directe, appelée base principale d'inertie, dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$



- ★ $(O, \vec{x}_1), (O, \vec{y}_1)$ et (O, \vec{z}_1) sont appelés **axes principaux d'inertie** du solide (S)
- ★ Les moments d'inertie A_1, B_1 et C_1 sont appelés **moments principaux d'inertie** du solide (S)

Matrice d'inertie et opérateur d'inertie : opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point O, est l'opérateur qui à tout vecteur \vec{u} fait correspondre le vecteur :

$$\boxed{\vec{I}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) \, dm} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{I}_O(S, \vec{u}) = [I_O(S)] \vec{u}}$$

La matrice d'inertie définie précédemment s'obtient en disposant en colonnes les composantes des vecteurs de base transformés par l'opérateur d'inertie

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$\vec{I}_O(S, \vec{x}) \longrightarrow \uparrow$
 $\vec{I}_O(S, \vec{y})$

\uparrow
 $\vec{I}_O(S, \vec{z})$

$$I(S/\Delta) = \vec{u} \cdot \vec{I}_O(S, \vec{u}) = \vec{u} \cdot [I_O(S)] \vec{u}$$

\vec{u} le vecteur directeur unitaire de (Δ)

retrouver le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (Ox)

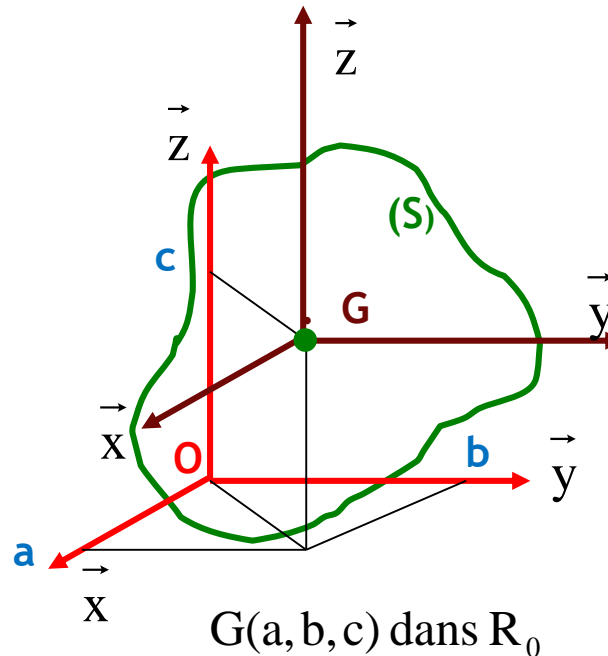
Matrice d'inertie et opérateur d'inertie : Théorème de HUYGENS

On peut passer d'une matrice d'inertie écrite dans le repère R_1 à une matrice écrite dans R_0 grâce aux relations de HUYGENS suivantes :

$R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND

$R_1(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND

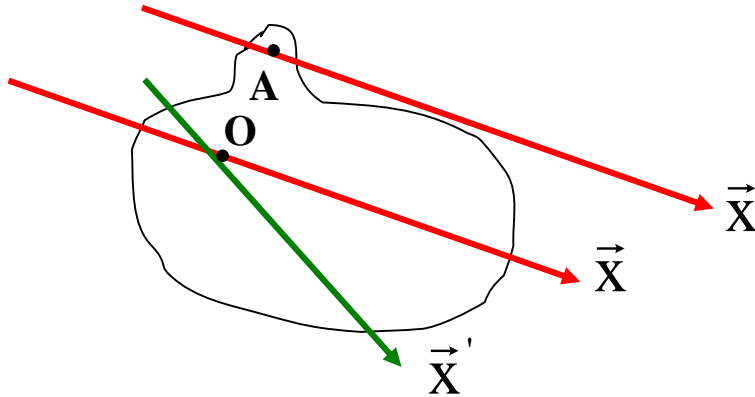
$$\begin{aligned} A_0 &= A_G + m(b^2 + c^2) \\ B_0 &= B_G + m(c^2 + a^2) \\ C_0 &= C_G + m(a^2 + b^2) \\ D_0 &= D_G + mbc \\ E_0 &= E_G + mca \\ F_0 &= F_G + mab \end{aligned}$$



ATTENTION ces relations ne sont valables qu'avec G centre de gravité

Matrice d'inertie et opérateur d'inertie : Théorème de HUYGENS

La matrice d'inertie dépend donc, non seulement, de la base vectorielle dans laquelle elle est écrite, mais également du point pris comme origine pour repérer les coordonnées x , y et z

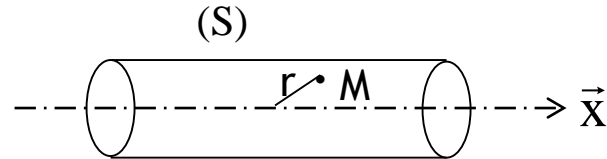


$I_{Ox'} \neq I_{Ox}$ dépend bien de la base choisie

$I_{Ox} \neq I_{Ax}$ dépend bien du point choisi

$$I_{Ox} < I_{Ox'} < I_{Ax}$$

Applications simples : Cylindre plein de révolution

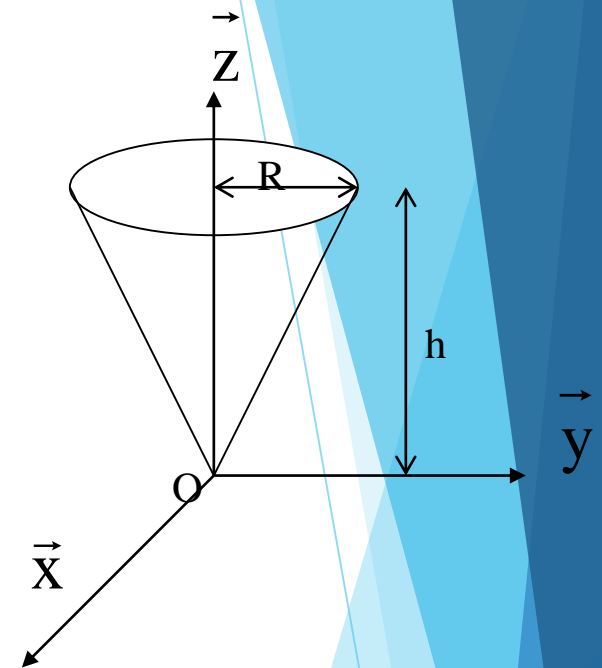


Cylindre de révolution de rayon R et de longueur l et de centre de gravité G

$$I_{Gx} = \int_{M \in S} r^2 dm = \int_{M \in S} r^2 \rho dv$$

Applications simples : cône plein de révolution

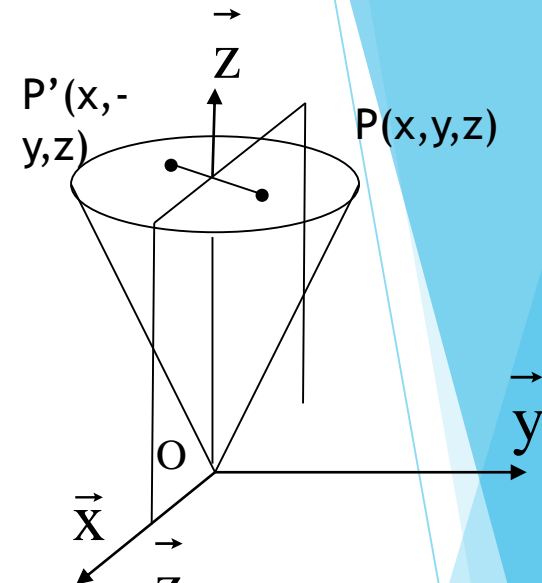
$$I_{Oz} = ?$$



Applications simples : cône plein de révolution

$$[I_O(S)] = ?$$

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\left(\begin{smallmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{smallmatrix}\right)}$$

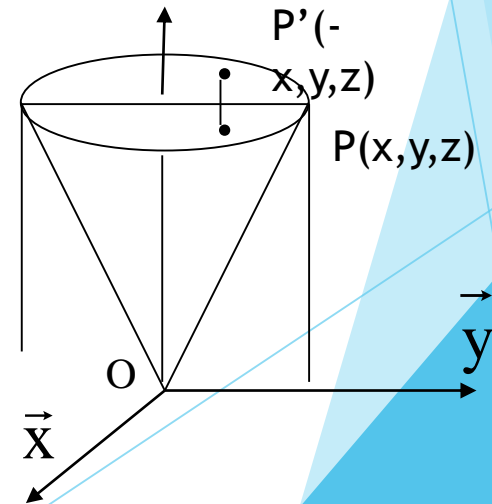


Le plan (xOz) est un plan de symétrie donc à tout point $P(x, y, z)$, on peut associer un point $P'(x, -y, z)$ de même masse dm . Donc :

$$D = \int_{p \in S} yz \, dm = 0 = \int_{p \in S} xy \, dm = F$$

De même le plan (yOz) est un plan de symétrie donc à tout point $P(x, y, z)$, on peut associer un point $P'(-x, y, z)$ de même masse dm . Donc :

$$E = \int_{p \in S} xz \, dm = 0 = \int_{p \in S} xy \, dm = F$$



Applications simples : cône plein de révolution

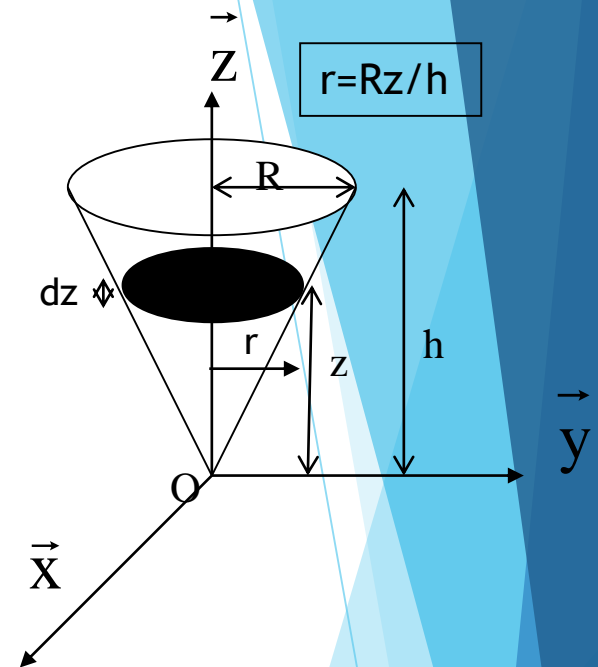
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3MR^2}{10} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Comme il s'agit d'un cône de révolution autour de z, x et y jouent exactement le même rôle :

→ $I_{ox} = I_{oy} \Rightarrow A = B$

→ $A + B = 2A = \int (x^2 + y^2 + 2z^2) dm = \int (x^2 + y^2) dm + 2 \int (z^2) dm = C + 2 \int (z^2) dm$

avec $dm = \rho dv = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi R^2 z^2 dz / h^2$



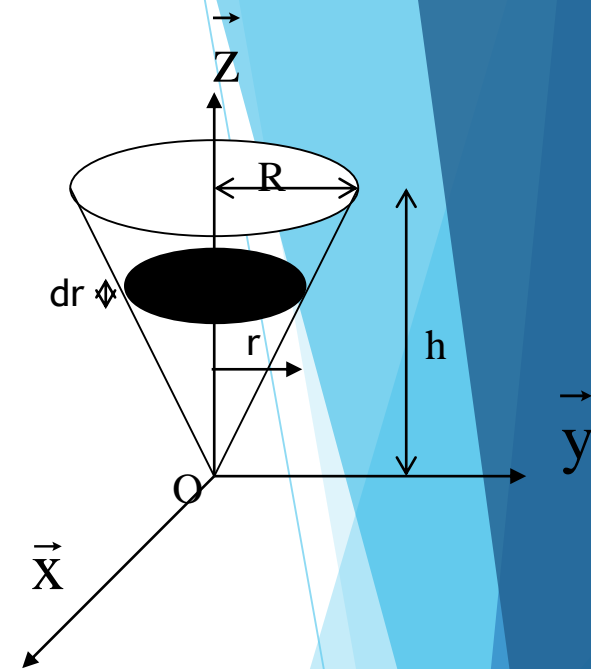
Applications simples : cône plein de révolution

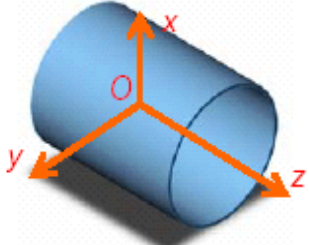
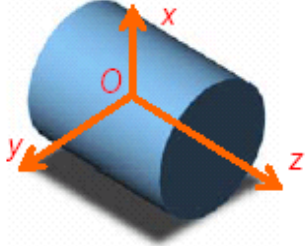
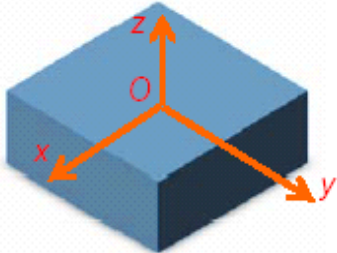
$$A = \frac{C}{2} + \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{C}{2} + \rho \frac{\pi R^2 h^3}{5}$$

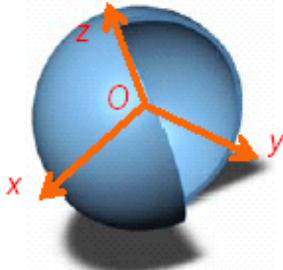
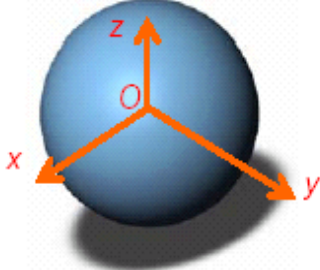
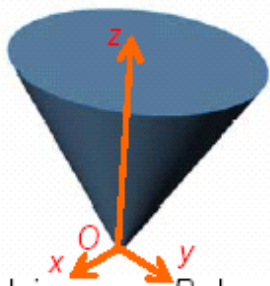
$$\Rightarrow A = \frac{3}{20} MR^2 + \rho \frac{\pi R^2 h}{3} \frac{3h^2}{5} = \frac{3}{20} MR^2 + \frac{3}{5} Mh^2$$

$$A = B = \frac{3}{20} M(R^2 + 4h^2)$$

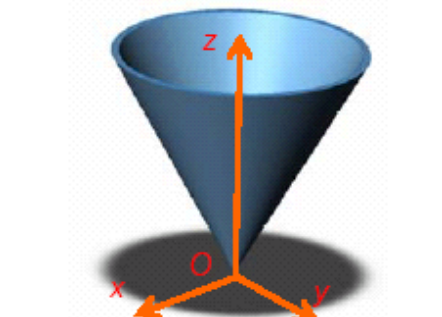
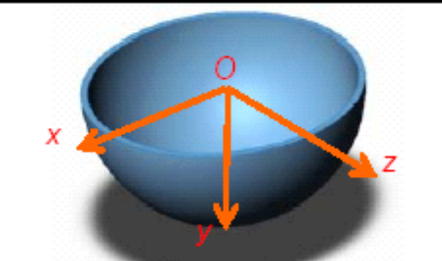
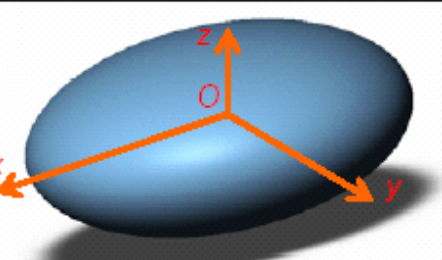
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} M(R^2 + 4h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} M(R^2 + 4h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3MR^2}{10} \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}}$$



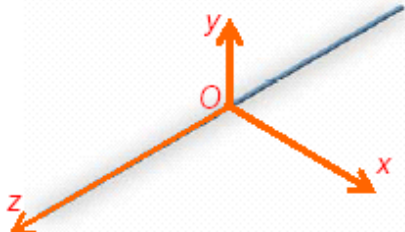
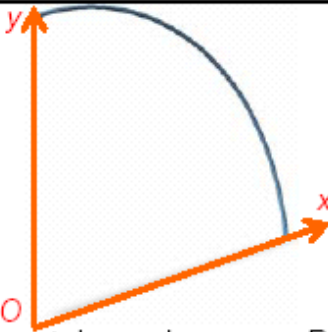
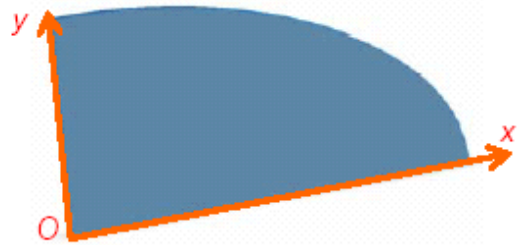
Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
 cylindre creux : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 cylindre plein : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 parallélépipède rectangle : coté a, b, c	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
 sphère creuse : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 sphère pleine : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}$
 cône plein : rayon R , hauteur h	$z_c = \frac{3h}{4}$	$\begin{pmatrix} \frac{3m}{5} \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{5} \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3m}{5} \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$

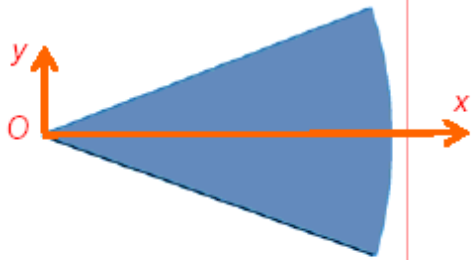
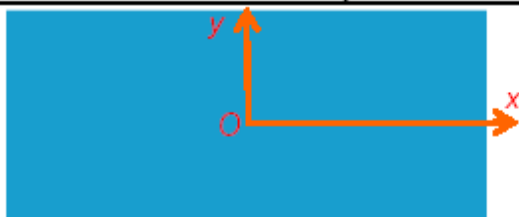
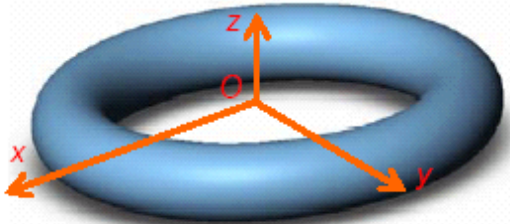
http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/documents/masses_t.pdf

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 cône creux : rayon R , hauteur h	$z_c = \frac{2h}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{2}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{2}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 demi sphère creuse : rayon R	$z_c = \frac{R}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 ellipsoïde : axes $2a$, $2b$, $2c$	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$

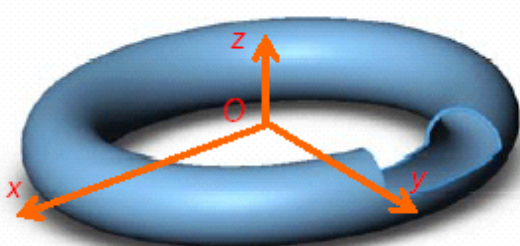
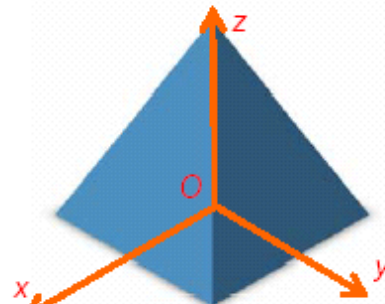
http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/documents/masses_t.pdf

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 tige rectiligne : longueur $2a$	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 quart de cercle : rayon R	$x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & \frac{1}{\pi}mR^2 & 0 \\ \frac{1}{\pi}mR^2 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 quart de plaque elliptique : demi-axes a, b	$x_C = \frac{4a}{3\pi}$ $y_C = \frac{4b}{3\pi}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & \frac{1}{2\pi}mab & 0 \\ \frac{1}{2\pi}mab & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(a+b)^2 \end{pmatrix}$

http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/documents/masses_t.pdf

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 secteur circulaire : rayon R	$x_C = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 rectangle : a et b	centre	$\begin{pmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$
 tore plein : rayons R et a	centre	$\begin{pmatrix} m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{8} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{8} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \left(a^2 + \frac{3R^2}{4} \right) \end{pmatrix}$

http://perso.wanadoo.fr/philippe.fichou/documents/masses_t.pdf

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 <p>tore creux : rayons R et a</p>	centre	$\begin{pmatrix} m\left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{2} + \frac{5R^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(a^2 + \frac{3R^2}{2}\right) \end{pmatrix}$
 <p>pyramide : a, b, h</p>	$x_C = \frac{h}{4}$	$\begin{pmatrix} m\left(\frac{b^2}{20} + \frac{h^2}{10}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{20} + \frac{h^2}{10}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{20}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$

III) Torseurs cinétique et dynamique

Statique :

Etude de l'équilibre des solides ou systèmes de solides.
(Notion de forces, frottement)

Cinématique :

Etude du mouvement des solides ou systèmes de solides indépendamment de leurs causes: les forces. (Notion de mouvement, de déplacement, de position, de trajectoire, de vitesse et d'accélération)

Cinétique :

Etude des grandeurs caractéristiques du mouvement des masses qui serviront à l'énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD).
(Notion de torseur cinétique, résultante cinétique et moment cinétique)

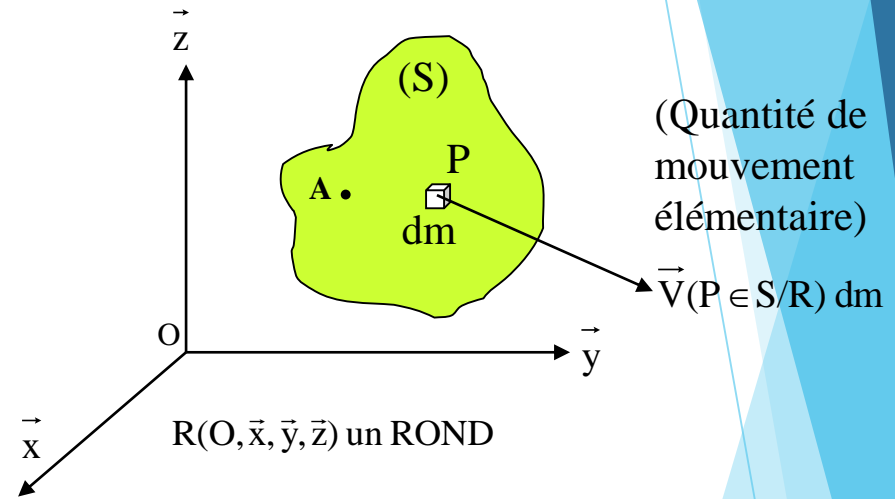
Dynamique :

Etude du mouvement des solides en fonction des causes qui les produisent : les forces.
(Notion de torseur dynamique, résultante dynamique et moment dynamique et PFD)

Torseur cinétique : définition

Le **torseur Cinétique** du solide (S) dans son mouvement par rapport à R, écrit en un point quelconque A de (S) est :

$$\mathcal{C}(S/R)_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in S/R) dm \\ \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm \end{array} \right\}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in S/R) dm \\ \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm \end{array} \right\}$$

la résultante cinétique

le moment cinétique

Torseur cinétique : définition

or on sait que :

$$\overrightarrow{MOG} = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm \quad \longrightarrow \quad \left[\frac{d}{dt} (M \overrightarrow{OG}) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm \right) \right]_R$$

Principe de
conservation de la
masse

$$\longrightarrow M \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OG}) \right]_R = \int_{P \in (S)} \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OP}) \right]_R dm$$

$$\longrightarrow M \vec{V}(G \in S/R) = \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in S/R) dm$$

on en déduit que la quantité de mouvement d'un système matériel (S) est égale à celle de son centre d'inertie où serait concentré toute la masse :

le moment cinétique au point A du torseur $\mathcal{C}(S/R)$ est noté : $\vec{\sigma}_A(S/R)$

$$\mathcal{C}(S/R) = \begin{Bmatrix} M \vec{V}(G \in S/R) \\ \vec{\sigma}_A(S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Montrons maintenant que les 2 éléments de réduction constituent bien un torseur

Torseur cinétique : définition

Soit un point B quelconque, on a :

$$\overrightarrow{\sigma}_B(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V}(P \in S/R) dm \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{\sigma}_B(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{V}(P \in S/R) dm + \int_{P \in (S)} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P \in S/R) dm$$

$$\overrightarrow{\sigma}_B(S/R) = \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P \in (S)} \overrightarrow{V}(P \in S/R) dm + \overrightarrow{\sigma}_A(S/R)$$

$$\overrightarrow{\sigma}_B(S/R) = \overrightarrow{BA} \wedge M \overrightarrow{V}(G \in S/R) + \overrightarrow{\sigma}_A(S/R)$$

$$\overrightarrow{\sigma}_B(S/R) = \overrightarrow{\sigma}_A(S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge M \overrightarrow{V}(G \in S/R)$$

les 2 éléments de réduction constituent bien un torseur

Torseur cinétique : expression du moment cinétique

Soient A un point matériel du solide (S) et B un point quelconque

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{BP} \wedge \left(\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right) dm$$

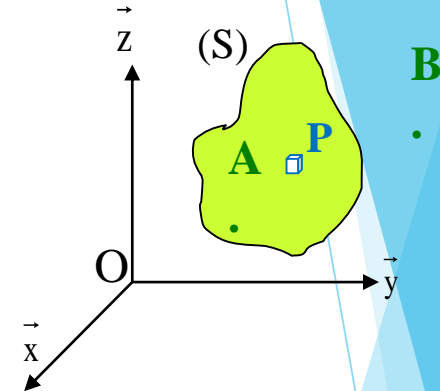
$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \int_{P \in (S)} \left(\overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(A \in S/R) \right) dm + \int_{P \in (S)} \left(\overrightarrow{BP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP} \right) \right) dm$$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{BP} dm \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \int_{P \in (S)} \left(\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \right) \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP} \right) \right) dm$$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = M \overrightarrow{BG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \int_{P \in (S)} \left(\overrightarrow{BA} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP} \right) \right) dm + \int_{P \in (S)} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP} \right) \right) dm$$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = M \overrightarrow{BG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \int_{P \in (S)} \overrightarrow{AP} dm \right) + \vec{I}_A(S, \vec{\Omega}(S/R))$$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = M \overrightarrow{BG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge M \overrightarrow{AG} \right) + [\vec{I}_A(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$



Torseur cinétique : expression du moment cinétique

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = M \vec{BG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + M \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AG} + [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$

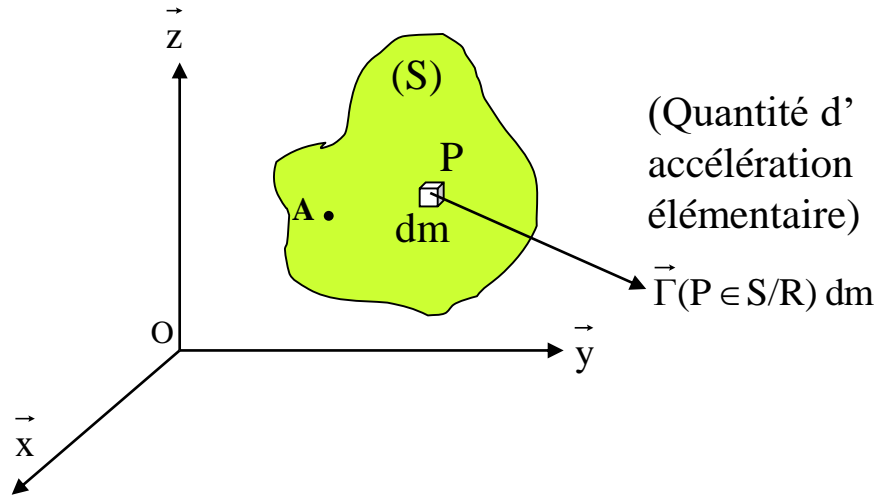
Comment utiliser en pratique cette relation :

✦ si $B \equiv A \in (S)$:
$$\vec{\sigma}_A(S/R) = M \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$

✦ si $B \equiv A \equiv G \in (S)$:
$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$

✦ si $B \equiv A \in (S)$ fixe dans R
$$\vec{\sigma}_A(S/R) = [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$

Torseur dynamique : définition



Le **torseur Dynamique** du solide (S) dans son mouvement par rapport à R, écrit en un point A quelconque de (S) est :

$$\mathcal{D}(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in (S)} \vec{\Gamma}(P \in S/R) dm \\ \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R) dm \end{array} \right\}_A$$

Torseur dynamique : définition

De la même façon que pour la résultante cinétique on peut montrer que : *(à faire pour vous entraîner)*

$$\mathbf{M} \vec{\Gamma}(G \in S/R) = \int_{P \in (S)} \vec{\Gamma}(P \in S/R) dm$$

La quantité d'accélération d'un système matériel S est égale à celle de son centre d'inertie où serait concentrée toute la masse

le moment dynamique au point A du torseur $\mathcal{D}(S/R)$ est noté $\vec{\delta}_A(S/R)$

$$\mathcal{D}(S/R)_A = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M} \vec{\Gamma}(G \in S/R) \\ \vec{\delta}_A(S/R) \end{array} \right\}$$

De la même façon que pour le moment cinétique on peut montrer que : *(à faire pour vous entraîner)*

$$\vec{\delta}_B(S/R) = \vec{\delta}_A(S/R) + \vec{BA} \wedge \mathbf{M} \vec{\Gamma}(G \in S/R)$$

les 2 éléments de réduction constituent bien un torseur

Torseur dynamique : expression du moment dynamique

En pratique, on ne calcule pas directement le moment dynamique car il faudrait connaître le champ des accélérations (calcul long). On déduit plutôt le moment dynamique du moment cinétique (champ des vitesses plus simple à calculer que le champ des accélérations).
C'est pourquoi nous allons mettre en évidence la relation qui unit ces deux moments

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

Principe de conservation de la masse



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R = \int_{P \in (S)} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \left(\vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) \right) \right]_R}_{\text{Calculons ce terme}} dm$$

Calculons ce terme

Torseur dynamique : expression du moment dynamique

Calculons ce terme

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) \right) \right]_R &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} \right]_R \wedge \vec{V}(P \in S/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P \in S/R) \right]_R \\
 &= \left[\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP} \right]_R - \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_R \right] \wedge \vec{V}(P \in S/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R) \\
 &= \left[\vec{V}(P \in S/R) - \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_R \right] \wedge \vec{V}(P \in S/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R) \\
 &= - \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_R \wedge \vec{V}(P \in S/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R)
 \end{aligned}$$

Torseur dynamique : expression du moment dynamique

$$\left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R)) \right]_R = - \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_R \wedge \vec{V}(P \in S/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R)$$

$$\text{notons } \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_R = \vec{V}(A/R)$$

à ne pas confondre avec $\vec{V}(A \in S/R)$ car A est un point quelconque

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_A(S/R) \right]_R = - \int_{P \in (S)} \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm + \int_{P \in (S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R) dm$$

$$= - \vec{V}(A/R) \wedge \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in S/R) dm + \overrightarrow{\delta}_A(S/R)$$

$$= - \vec{V}(A/R) \wedge M \vec{V}(G \in S/R) + \overrightarrow{\delta}_A(S/R)$$

Torseur dynamique : expression du moment dynamique

d'où
$$\vec{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R + M \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G \in S/R)$$

Relation intéressante car ne fait pas intervenir d'accélération

Cette relation est valable pour un point A quelconque.

Donc A n'appartient pas obligatoirement à S avec $\vec{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R$

Comment utiliser en pratique cette relation :



si $A \equiv G$

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R) \right]_R$$



si A fixe dans R ou

$\vec{V}(A/R)$ colinéaire $\vec{V}(G \in S/R)$

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R$$

Torseur dynamique : conclusion

Pour déterminer le moment dynamique d'un solide (S) dans son mvt par rapport à R en un point A quelconque, il suffit de calculer l'accélération du centre de gravité G de (S) (Cours de cinématique) et le moment cinétique en G de (S) dans son mvt par rapport à R.

$$\overrightarrow{\delta}_G(S/R)$$
$$\overrightarrow{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_G(S/R) \right]_R + \overrightarrow{AG} \wedge M \overrightarrow{\Gamma}(G \in S/R)$$

$$\overrightarrow{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)] \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/R)$$

Remarque

$\overrightarrow{\Omega}(S/R)$ doit être écrit dans la même base que $[I_G(S)]$

Torseur dynamique : conclusion

Bien qu'il soit théoriquement possible de calculer directement le moment dynamique d'un ensemble de solides (Σ), il est plus raisonnable de décomposer la tâche en calculant le moment dynamique de chaque solide (S_i) qui compose l'ensemble (Σ)

$$\vec{\delta}(\Sigma / R) = \sum_i \vec{\delta}(S_i / R)$$

Bibliographie

- Mécanique et Mécanismes en prépa scientifiques, Michel Lajoie, Bernard Lodier, Collection Ellipse, 1998
- Cours et Exercice corrigés Dynamique, Robert Lassia, Christophe Bard collection Ellipse, 2002
- Mécanique du Solide, Yves Granjon, Deug Sciences, Edition Dunod, 2002
- Mécanique du Solide, Applications industrielles, 2eme édition, Pierre Agati, Yves Brémont, Gérard Delville, Edition Dunod, 2003
- Sciences industrielles pour l'ingénieur, 1ere année MPSI, PCSI, Eddy Jegat, Michel lajoie, Bernard Lodier, Edition Tec et Doc, 2007

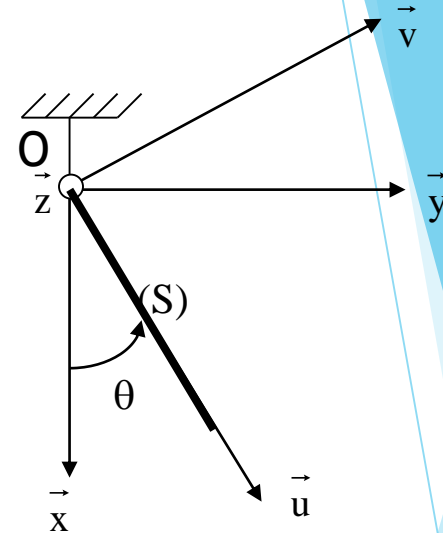
Application :

$R_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ un ROND lié à la tige (S)

$R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND fixe

Soit un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (S) de longueur L et d'épaisseur négligeable. Cette tige est homogène, de masse m et de centre de gravité G

La tige est, avec le bâti, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z})



- 1) Déterminer le torseur cinétique, au point O, de la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.
- 2) Déterminer le torseur dynamique, au point O puis au point G, de la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.

IV) Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Repère Galiléen :

Un **référentiel galiléen** est un référentiel pour lequel l'espace est homogène et isotrope, le temps uniforme et dans lequel tout corps libre (non influencé par une force) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme ; l'immobilité étant un cas particulier.

Repères Galiléens approchés

repère de Copernic :

Origine au centre d'inertie du système solaire, plus trois directions stellaires fixes (pour l'étude des voyages interplanétaires)

repère lié au centre d'inertie de la terre :

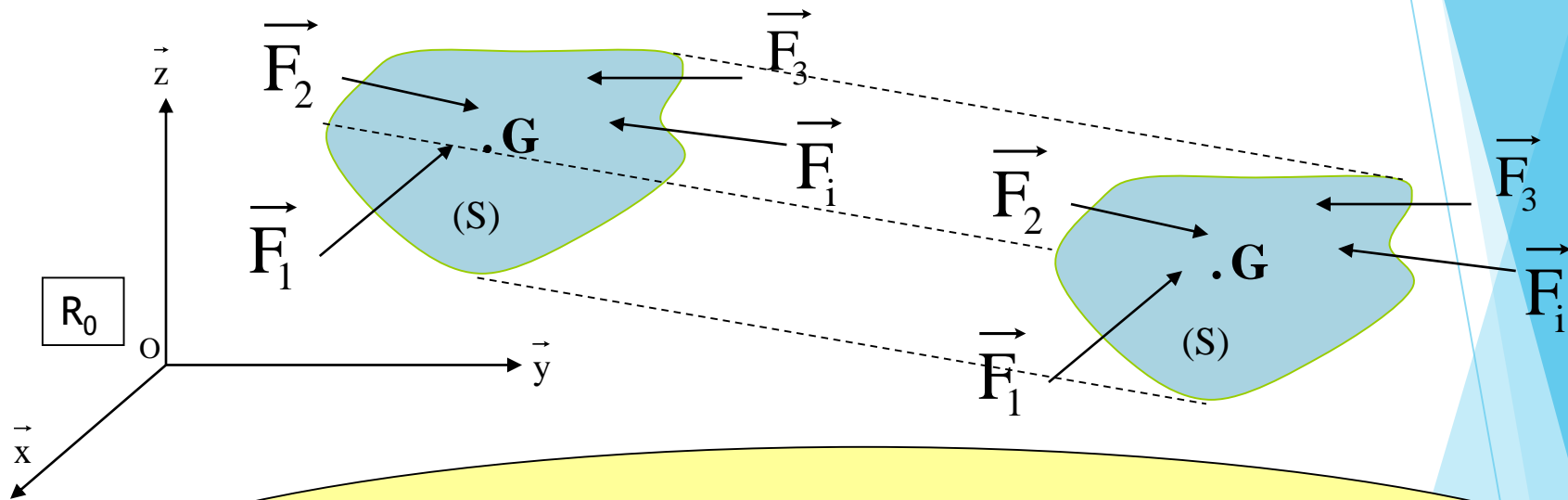
Origine au centre d'inertie de la terre, plus trois directions stellaires fixes (pour l'étude du mvt d'un objet au voisinage de la terre : satellite)

repère lié à la terre :

Origine locale et trois directions appropriées (étude des phénomènes mécaniques classiques)

Solide en translation rectiligne :

Enoncé applicable en tout point matériel (P) de masse m , ou à tout solide (S) de masse m et de centre de gravité G , en **translation rectiligne** dans un repère Galiléen R_0 , et soumis à un ensemble d'actions mécaniques extérieures



Le mvt de translation rectiligne du solide (S) (ou du point (P)) de masse m et de cdg G est décrit par le PFD qui s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i(\text{ext} \rightarrow S) = m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \sum_i \vec{M}_P^i(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow S) = \vec{0} \end{cases}$$

Solide en translation rectiligne : cas de la pesanteur

Soit une bille de masse m et de cdg G en chute libre.
Montrer que l'accélération que subit cette bille est de 9.81ms^{-2}



Solide en rotation autour d'un axe :

Enoncé applicable en tout point matériel (P) de masse m , ou à tout solide (S) de masse m et de centre de gravité G, en **rotation d'angle θ autour d'un axe fixe** dans un **repère Galiléen R_0** , et soumis à un ensemble d'actions $\vec{F}_{\text{mécaniques}}$ extérieures

Le mvt de rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) du solide (S) (ou du point (P)) de masse m et de cdg G est décrit par le PFD qui s'écrit :

1^{er} cas : le cdg $\notin (O, \vec{z})$ (cas général)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i(\text{ext} \rightarrow S) = m \vec{\Gamma}(G / R_0) \\ \sum_i \vec{M}_O^i(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow S) = I_{Oz} \cdot \dot{\Omega}(S / R_0) = I_{Oz} \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z} \quad \forall O \text{ fixe dans } R_0 \text{ ou } O \equiv G \end{array} \right.$$

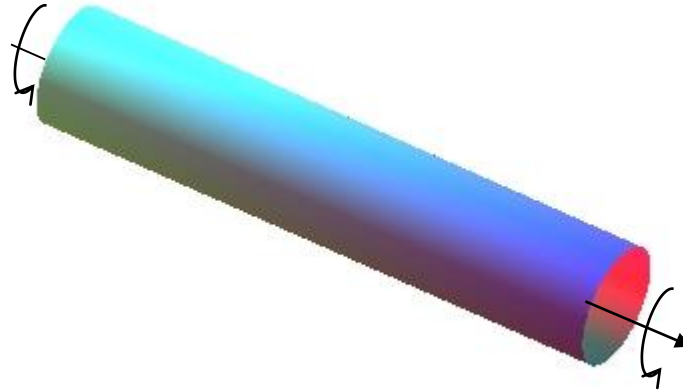
2^{ième} cas : le cdg $\in (O, \vec{z})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i(\text{ext} \rightarrow S) = \vec{0} \\ \sum_i \vec{M}_G^i(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow S) = I_{Gz} \cdot \dot{\Omega}(S / R_0) = I_{Gz} \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z} \end{array} \right.$$

Solide en rotation autour d'un axe : cas du cylindre en rotation

Soit un cylindre plein de rayon R , de masse m et de centre de gravité G , entraîné en rotation autour de son axe (O, Z) par un moteur. Ce moteur applique un couple C au cylindre

Calculer l'accélération angulaire subie par le cylindre



Principe fondamental de la Dynamique :

Le PFD formule l'existence d'au moins un repère Galiléen R et d'au moins une chronologie (mesure du temps) tel que le torseur dynamique du solide (S) (ou ensemble de solides) dans son mvt par rapport à R est égal au torseur des actions mécaniques extérieures F_i appliquées à (S)

$$\mathcal{D}(S/R) = \mathcal{F}(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow S)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} M \vec{\Gamma}(G \in S/R) \\ \vec{\delta}_A(S/R) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \sum_i \vec{F}_i \\ \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i \rightarrow S) \end{array} \right\}_A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i = M \vec{\Gamma}(G \in S/R) \quad \longrightarrow \quad \text{Théorème de la résultante dynamique} \\ \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i \rightarrow S) = \vec{\delta}_A(S/R) \quad \longrightarrow \quad \text{Théorème du moment dynamique} \end{array} \right.$$

FIN

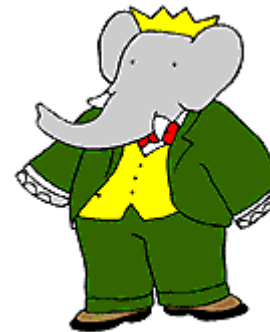
RECAPITULATIF SUR LES DIFFERENTS TORSEURS

TORSEUR STATIQUE

$$\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i \rightarrow S) \end{array} \right.$$

Transport des moments

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$



TM & © Nelvana

TORSEUR CINEMATIQUE

$$\mathcal{V}(S/R) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}_A$$

Transport des vitesses :

$$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$

On passe par un autre point qui appartient à (S)

Composition des vitesses :

$$\vec{V}(P \in S_3 / R_0) = \vec{V}(P \in S_3 / R_2) + \vec{V}(P \in S_2 / R_1) + \vec{V}(P \in S_1 / R_0)$$

On passe par un autre ROND

TORSEUR CINETIQUE

$$\mathcal{C}(S/R) = {}_A \left\{ \begin{array}{l} M \vec{V}(G \in S/R) \\ \vec{\sigma}_A(S/R) \end{array} \right\}$$

Transport des moments :

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \vec{\sigma}_A(S/R) + \vec{BA} \wedge M \vec{V}(G/R)$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$

G : centre de
gravité ou point fixe
dans R

TORSEUR DYNAMIQUE

$$\mathcal{D}(S/R) = {}_A \left\{ \begin{array}{c} M \vec{\Gamma}(G \in S/R) \\ \vec{\delta}_A(S/R) \end{array} \right\}$$

Transport des moments :

$$\vec{\delta}_B(S/R) = \vec{\delta}_A(S/R) + \vec{BA} \wedge M \vec{\Gamma}(G \in S/R)$$

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(S/R) \right]_R$$

O : centre de
gravité ou point fixe
dans R