Réduction Matricielle

I. Intérêts de la réduction matricielle

1. Le modèle proie/prédateur

Dans une forêt, à une année n donnée, on considère les populations de renards et de lapins. L'évolution de chaque population est liée à l'évolution de la population opposée : plus il y a de lapins, plus les renards auront de ressources, plus ils se reproduiront et leur population augmentera. Ceci dit, l'année suivante, avec une grosse population de renards, il ne restera plus beaucoup de lapins. La population de renard baissera, laissant place à celle des lapins, etc...

Tentons de modéliser ce phénomène. Appelons $x_1(n)$ le nombre de renards à l'année n et $x_2(n)$ le nombre de lapins à l'année n. Pour $n \geq 1$, on obtient le système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ll} x_1(n) & = ax_1(n-1) + bx_2(n-1) \\ x_2(n) & = -cx_1(n-1) + dx_2(n-1) \end{array} \right.$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$. Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit matriciellement $X_n = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix} X_{n-1}$. Appelons A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$. Une récurrence immédiate nous conduit à établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

Problème : Il faut calculer A^n. Si A était sous forme diagonale, ce serait très simple. En effet, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, on a $A^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix} X_0$ si bien que $\left\{ \begin{array}{ll} x_1(n) & = (\lambda_1)^n x_1(0) \\ x_2(n) & = (\lambda_2)^n x_2(0) \end{array} \right.$

A n'étant pas sous forme diagonale, nous allons essayer de trouver (lorsque c'est possible) une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle l'endormorphisme canoniquement associé à A possède une matrice diagonale.

2. Système d'équations différentielles

Soient x_1, x_2 deux fonctions numériques de classes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) & = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) & = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{array} \right.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, on obtient $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X$.

Si on avait un système dont la matrice était diagonale, c'est-à-dire un système du type $X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X$ on obtiendrait

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) & = \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) & = \lambda_2 x_2(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1(t) & = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) & = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right.$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Notre but sera de déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle l'endormorphisme canoniquement associé à A possède une matrice diagonale.

II. Valeurs propres et vecteurs propres

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel.

1. Eléments propres d'un endomorphisme

Définition 1
Soit $u : E \to E$ un endomorphime. Un vecteur x de E est un **vecteur propre** de u si

(1) $x \neq 0_E$

(2) il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans ce cas, on dit que λ est la **valeur propre** associée au vecteur propre x.

Remarque. Un scalaire $\lambda \in K$ est appelé valeur propre de u s'il existe un vecteur propre $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Remarque. Le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre. Par contre 0 peut-être une valeur propre de u et dans ce cas, les vecteurs propres associés forment un ensemble qui est $\ker u$.

Définition 2
L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre de** u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

Exemple. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application $\begin{array}{cccc} u & : & E & \to & E \\ & & P & \mapsto & P' \end{array}$

Recherchons les valeurs propres et vecteurs propres de u. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = \lambda P$, c'est-à-dire tel que $P' = \lambda P$. Le polynôme P étant de degré inférieur ou égal à n, le polynôme P' est de degré inférieur ou égal à $n-1$. L'égalité $P' = \lambda P$ conduit à deux cas distincts :

- Soit $\lambda = 0$ et P est constant ($P' = 0$)
- Soit $P = 0$ et $\lambda \neq 0$ mais ce cas est exclu.

Les seules valeurs propres de u sont les polynômes constants et la valeur propre associée est $\lambda = 0$.

Exemple. Soit l'endomorphisme $\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$. Déterminons ses valeurs propres et vecteurs propres.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u(x,y) = \lambda(x,y)$.

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) = \lambda(x,y) & \Leftrightarrow & (x+y, x-y) = (\lambda x, \lambda y) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x + y = \lambda x \\ x - y = \lambda y \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (\lambda - 1)x - y = 0 \\ x - (\lambda+1)y = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 - 2)y = 0 \\ x - (\lambda+1)y = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \neq \pm\sqrt{2} \text{ et } x = y = 0 \text{ (exclu)} \\ \lambda = \pm\sqrt{2} \text{ et } y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \left(1 \pm \sqrt{2}\right) y \end{array} \right. \end{array}$$

Nous avons deux valeurs propres :

- $\lambda_1 = \sqrt{2}$ pour laquelle les vecteurs propres associés sont de la forme $((1+\sqrt{2})y, y)$.
- $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ pour laquelle les vecteurs propres associés sont de la forme $((1-\sqrt{2})y, y)$.

Proposition-Définition 3
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme et $\lambda \in K$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp(u)} \Leftrightarrow \ker(u - \lambda \mathrm{id}) \neq 0.$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp(u)}$, les vecteurs propres de u associés à λ sont les vecteurs propres de $\ker(u - \lambda\mathrm{id})$ et ce dernier est appelé **sous espace propre de** u **associé à la valeur propre** λ. On le note E_λ.

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathrm{Sp(u)} & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\}\, u(x) = \lambda x \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\}\, (u - \lambda \mathrm{id})(x) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\}\, x \in \ker(u - \lambda \mathrm{id}) \\ & \Leftrightarrow & \ker(u - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0_E\} \end{array}$$

Reprenons l'exemple précédent $\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.

- $E_{\sqrt{2}} = \left\{((1+\sqrt{2})y, y) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((1+\sqrt{2}), 1)$
- $E_{-\sqrt{2}} = \left\{((1-\sqrt{2})y, y) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((1-\sqrt{2}), 1)$

Proposition 1
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u de E et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres alors la famille $x_1, \ldots, x_n$ est libre.

Preuve. Par récurrence sur $n \geq 1$.

- **Initialisation :** un vecteur non nul forme à lui seul une famille libre.
- **Hérédité :** Supposons la propriété vraie à un certain rang k. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \in K$ tels que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0_E$$

En appliquant u (linéaire) à cette égalité :

$$u(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = \alpha_1 u(x_1) + \ldots + \alpha_{k+1} u(x_{k+1}) = u(0_E) = 0_E$$

Comme λ_i est valeur propre de u, il vient

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0_E.$$

On a aussi $\alpha_1 \lambda_{k+1} x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0_E$ donc en soustrayant les deux égalités précédentes on obtient

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1 + \ldots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k = 0_E.$$

Comme les λ_i sont tous distincts deux à deux et que $x_1, \ldots, x_k$ est libre (c'est notre hypothèse de récurrence), on a

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Puis $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0_E \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$ car $x_k \neq 0$.

Application. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $\begin{array}{cccc} u & : & E & \rightarrow & E \\ & & f & \mapsto & f'' \end{array}$. On pose pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k''(x) = -k^2 \cos(kx) = -k^2 f_k(x)$ donc f_k est vecteur propre de la valeur propre $-k^2$, or les nombres $-k^2$ pour $k = 0, \ldots, n$ sont tous distincts. Donc la famille $(f_1, \ldots, f_k)$ est libre dans E.

2. Cas de la dimension finie et application aux matrices

Dans cette partie, on suppose que E est un K-espace vectoriel de dimension finie n. On considère $\mathcal{B}$ une base de E.

Notations.

- Si x est un vecteur de E, on note X le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ dont les composantes sont les coordonées de x dans la base base $\mathcal{B}$.
- Si u est un endormorphisme de E. On note A la matrice de u dans la base canonique.

Définition 4
Soit A une matrice carrée d'ordre n. Un **vecteur propre de** A est un vecteur colonne composé des coordonnées d'un vecteur propre de u dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi :

- $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ est **vecteur propre** de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ s'il existe $\lambda \in K$ tel que $AX = \lambda X$.
- $\lambda \in K$ est **valeur propre** de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ non nul tel que $AX = \lambda X$. L'espace propre E_λ associé à cette valeur propre est l'ensemble $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{id})$.

Remarque. Les valeurs propres de A sont donc les valeurs propres de u. Ainsi :

$$\mathrm{Sp(u)} = \mathrm{Sp(A)}$$

Si $u : E \to E$ est un endomorphisme.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathrm{Sp(u)} & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\} \, u(x) = \lambda x \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\} \, (u - \lambda \mathrm{id})(x) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & \exists x \in E \setminus \{0_E\} \, x \in \ker(u - \lambda \mathrm{id}) \\ & \Leftrightarrow & \ker(u - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \det(u - \lambda \mathrm{id}) = \{0_E\} \end{array}$$

De ce fait, si A est la matrice de u dans la base canonique de E. On obtient l'équivalence :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathrm{I_n}) = 0.$$

Rappel : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre n.

Définition 5

Le polynôme $\det(A - x\mathrm{I_n})$ est un polynôme de degré n appelé **polynôme caractéristique de** A et on le note $\chi_A(x)$.

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda \text{ est une racine de } \chi_A$$

.

Exemple. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On commence par calculer le polynôme caractéristique

$$\chi_A(x) = \det(A - x\mathrm{I_n}) = \begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 \times 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Le polynôme $\lambda^2 - 4\lambda - 5$ possède deux racines qui sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 5$. On obtient ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 5\}$. On détermine ensuite les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(A - (-1)\mathrm{I}_2) &\Leftrightarrow (A + \mathrm{I}_2)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2x + 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A - (-1)\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, on peut montrer que $E_5 = \mathrm{Ker}(A - 5\mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)x^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

où $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de A, c'est-à-dire la somme des élements qui sont sa diagonale.

Preuve. En notant $A = (a_{i,j})$ En développant le déterminant de $A - xI_n$ suivant sa première colonne, on observe que les termes de degré n et $n-1$ du polynôme obtenu sont ceux de $(a_{1,1} - x)(a_{2,2} - x)\ldots(a_{n,n} - x)$.

Application. Dans le cas où $n = 2$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

Remarque. $\chi_A(x)$ est un polynôme de degré n et fournira au plus n valeurs propres distinctes. Ceci est bien en cohérence avec le fait suivant : les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre et en dimension n, une famille libre est constituée d'au plus n vecteurs.

Remarque. Si $K = \mathbb{C}$, le théorème de D'Alembert nous dit que $\chi_A(x)$ est scindé, c'est-à-dire qu'il n'admet que des racines simples. On peut écrire que

$\chi_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_n)x^{n-1} + \ldots + \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n.$
Ainsi

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A)$$

$$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n = \det(A).$$

Dans le cas où $n = 2$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A).$$

Proposition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(K)$. Les matrices A et $B = P^{-1}AP$ ont la même trace, le même déterminant et les mêmes valeurs propres.

Preuve. $B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$. On sait, d'après les propriétés du déterminant, que $\det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = (\det(P))^{-1}\det(A - \lambda I_n)\det(P) = \det(A - \lambda I_n)$. Ainsi, A et B ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres, même déterminant, même trace.

Remarque. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E est le polynôme caractéristique de la matrice de u dans une base donnée de E. Celui-ci est indépendant de la base de E choisie.

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de A. On peut noter

$$\chi_A(x) = (x - \lambda)^m Q(x)$$

où $Q(\lambda) \neq 0$. (pour rappel, m est la multiplicité de λ). La dimension de $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est au plus égale à m.

Preuve. Posons $p = \dim(E_\lambda)$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_λ. Il s'agit d'une famille libre de E que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de K^n. La matrice A est alors semblable à

On a alors $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & Q \end{array}\right)$ avec $Q \in \mathcal{M}_{n-p}$.

On en déduit que $\chi_A(x) = \chi_{A'}(x) = \det(A' - xI_n) = (\lambda - x)^p \cdot \det(Q - xI_{n-p})$ et donc λ est racine de χ_A d'ordre au moins $p = \dim(E_\lambda)$.
On a donc bien $\dim(E_\lambda) \leq m$.

3. Polynômes annulateurs et valeurs propres

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \dots a_dx^d \in K[x]$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On considère la matrice $P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_dA^d$.

Définition 6

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \dots a_dx^d \in K[x]$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On considère la matrice $P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_dA^d$. Si $P(A) = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de A.

Proposition 6

Si $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et si $P \in K[X]$ est un polynôme annulateur de A alors

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda \in K \mid P(\lambda) = 0\}$$

Démonstration. Supposons que $P(A) = 0$ et que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Par suite, il vient $A^2X = A\lambda X = \lambda^2 X, \dots, A^d = \lambda^d X$. D'où $0 = P(A)X = P(\lambda)X \Rightarrow P(\lambda) = 0$ □

Application. Quelles sont les valeurs propres possibles d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 - 2A = 0$? Le polynôme $P = X^3 + X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A. Il possède 3 racines qui sont $0, 1, -2$. On déduit de la proposition précédente que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, -2\}$

III. Diagonalisation

Rappel. On dit d'une matrice D qu'elle est diagonale si elle est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Dans ce cas,

$$\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

et

$$\chi_D(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\dots(\lambda_n - x).$$

En regroupant les valeurs propres identiques on peut noter

$$\chi_D(x) = (\lambda_{i_1} - x)^{\alpha_1}(\lambda_{i_2} - x)^{\alpha_2}\dots(\lambda_{i_r} - x)^{\alpha_r}$$

où α_j est le nombre de fois où λ_{i_j} apparait sur la diagonale de D. Notons que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

Définition 7

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite diagonalisable s'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- Un endomorphisme $u : E \to E$ d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice D de u est diagonale.

Théorème 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u : E \to E$ un endomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) u est diagonalisable.

(2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

(3) Le polynôme caractéristique de u est scindé, c'est-à-dire de la forme

$$\chi_u(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1}(\lambda_2 - x)^{n_2}\dots(\lambda_r - x)^{n_r}$$

et

$$\dim\ker(u - \lambda_i \mathrm{id}) = n_i, i \in \{1, \dots, r\}$$

Démonstration.

- $\underline{1 \Leftrightarrow 2 :}$ l'endormorphisme u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que la matrice de u dans E est sous la forme

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

  Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et e_i est non nul puisqu'il s'agit d'un vecteur propre. Ainsi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres pour u.
- $\underline{1 \Rightarrow 3 :}$ Supposons u diagonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres pour u et notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les r valeurs propres **distinctes** de u. On obtient que $\chi_u(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1}(\lambda_2 - x)^{n_2}\dots(\lambda_r - x)^{n_r}$ où n_i est le nombre de fois où la valeur λ_i apparait sur la diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

On observe que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\dim\ker(u-\lambda_i\mathrm{id}) = n - \dim\mathrm{Im}(u-\lambda_i\mathrm{id}) \geq n_i$ car $\dim\mathrm{Im}(u-\lambda_i\mathrm{id}) \leq n-n_i$. Oui mais $\dim\ker(u-\lambda_i\mathrm{id}) \leq n_i$. D'où $\dim\ker(u-\lambda_i\mathrm{id}) \leq n_i$.

- <u>$3 \Rightarrow 1$:</u> Si $\chi_u(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1}(\lambda_2 - x)^{n_2}\dots(\lambda_r - x)^{n_r}$ et $\dim\ker(u-\lambda_i\mathrm{id}) \leq n_i$ alors $n = \deg(\chi_u) = n_1 + n_2 + \dots + n_r$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on choisit une base de V_{λ_j} et on réunit l'ensemble des vecteurs obtenus. On obtient une famille libre de n vecteurs de K^n : c'est une base de E de vecteurs propres pour u.

□

Corollaire 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre égale la multiplicité de sa valeur propre associée dans le polynôme caractéristique.

Corollaire 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

⚠ La réciproque est fausse : prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ comme contrexemple.

Exemple. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de K^3. Soit $u \in \mathcal{L}(K^3)$ défini par $\begin{cases} u(e_1) = 2e_1 + 1e_2 + e_3 \\ u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$ On cherche à savoir si u est diagonalisable. Cela revient à étudier si la matrice associée $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Déterminons les valeurs propres de A :
On pose $\chi_A(x) = \det(A - xI)$

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 2 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3-x & 1 \\ -1 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & 4 & 3-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)\left[(3-x)^2 - 4\right] \\
&= (1-x)^2(5-x)
\end{aligned}$$

λ est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$ donc A admet 2 valeurs propres distinctes : 1 (valeur propre d'ordre 2) et 5 (valeur propre d'ordre 1).

On vérifie que la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité $1+1+5 = 7$ correspond à $Tr(A) = 2+3+2 = 7$.

- Déterminons $E_5 = \ker(A - 5I_3)$: $A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

  On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de K^3. On remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur (non nul) de E_5, or $\dim(E_5) = 1$ donc c'est une base de E_5.

- Déterminons $E_1 = \ker(A - I_3)$: $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

  On remarque que $2C_1 - C_2 = 0$ et que $C_1 - C_3 = 0$ donc $2e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de E_1.

  De plus, on sait que $\dim(E_1) \leq 2$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de E_1.

  Si vous n'êtes pas l'aise avec cette méthode pour déterminer un base du noyau, vous pouvez aussi revenir aux fondamentaux en utilisant un système :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - \mathrm{I}_3)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 2y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

On a donc $\dim(E_1) = 2$ qui est la multiplicité de 2 dans χ_A et $\dim(E_5) = 1$ qui est la multiplicité de 1 dans χ_A. On en déduit que u et A sont diagonalisables.

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour u.

De plus, A est semblable à la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

On a même $A' = P^{-1}AP$ avec $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple. On cherche à savoir si la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Déterminons les valeurs propres de B :

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -2 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -2 \\ -1 & 2-x & 1 \\ -1+x & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -2 \\ -1 & 2-x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-x) \begin{vmatrix} -1-x & 1 & -2 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(-1-x)(2-x) \end{aligned}$$

λ est valeur propre de B si et seulement si $\chi_B(\lambda) = 0$ donc A admet 3 valeurs propres distinctes : 1 (valeur propre d'ordre 1), -1 (valeur propre d'ordre 1) et 2 (valeur propre d'ordre 1).

On vérifie que la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité $1-1+2 = 2$ correspond à $Tr(A) = 1+2-1 = 2$. Comme $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes, B est diagonalisable.

Exemple. On cherche à savoir si la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Déterminons les valeurs propres de C :

On a $\chi_C(x) = \det(C - xI) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & -3 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)^3$

λ est valeur propre de C si et seulement si $\chi_C(\lambda) = 0$ donc C admet 1 valeur propre d'ordre 3

On vérifie que la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité $1+1+1 = 3$ correspond à $Tr(A) = 0+0+3 = 3$.
Déterminons une base de $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$

$$
\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) \quad & \Leftrightarrow \quad (A - \mathrm{I}_3)X = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x = y = z \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La multiplicité de la valeur propre 1 dans χ_C étant différente de la dimension du sous-espace propre associé, la matrice C n'est pas diagonalisable.

Theorème 2
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Admise. $\square$

Remarque. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A(x) = x^2$. On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et serait donc nulle elle aussi.

IV. Trigonalisation

Définition 8

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite **trigonalisable** s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
- Un endomorphisme $u : E \to E$ (E étant un K-espace vectoriel de dimension finie n) est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u est triangulaire supérieure.

Théorème 3
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On a les équivalences :

- u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé sur K.
- $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_A est scindé sur K.

Démonstration. Admise. $\square$

Remarque. Sur $\mathbb{C}$, c'est toujours le cas.

Theorème 4 [Cayley-Hamilton]
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\chi_A(A) = 0$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable : il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Comme χ_A est scindé, on a également

$$\chi_A(x) = \chi_T(x) = (\lambda_1 - x)\dots(\lambda_n - x)$$

où $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Soient $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \geq 1$, $(T - \lambda_k I_n)E_k \in \mathrm{Vect}(E_1, \dots, E_{k-1})$. Or, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $(T - \lambda_i I_n)((T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n)$. D'où,

$$(T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n)\dots(T - \lambda_n I_n)E_k = 0.$$

Ce qui implique

$$\chi_A(T) = \chi_A(A) = 0.$$

□

V. Application de la réduction matricielle

1. Calcul de puissance de matrices

Exemple. Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(K)$, calculer pour tout $k \geq 0$ A^k. Si A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible et une matrice D diagonale telle que $D = P^{-1}AP$. En notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$. On obtient

$$A^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Le calcul de A^k revient donc à faire le produit de 3 matrices (et une inversion).

2. Système différentiels

Exemple. Soient x, y, z trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ll} x'(t) & = y(t) + z(t) \\ y'(t) & = x(t) \\ z'(t) & = x(t) + y(t) + z(t) \end{array} \right.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on obtient $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X(t)$. On pose alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on tente de réduire cette matrice. Après calculs (les faire !), on trouve que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. En poursuivant les calculs, on trouve que

$$E_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APP^{-1}X(t) = DP^{-1}X(t).$$

En posant $U(t) = P^{-1}X(t)$, on obtient $U'(t) = DU(t)$. Si $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$, on est ramené à résoudre le système différentiel beaucoup plus simple

$$(\mathcal{S}') \begin{cases} u_1'(t) &= -u_1(t) \\ u_2'(t) &= 2u_2(t) \\ u_3'(t) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) &= C_1 e^{-t}, C_1 \in \mathbb{R} \\ u_2(t) &= C_2 e^{2t}, C_2 \in \mathbb{R} \\ u_3(t) &= C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On en déduit les solutions du système $(\mathcal{S})$ initial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = X(t) = PU(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \\ C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite (u_n) satisfaisant une relation de récurrence du type

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, a, b \in \mathbb{C}.$$

Matriciellement, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et déterminons ses éléments propres. Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A(x) = x^2 - ax - b$.

- Si $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$ alors χ_A admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$ qu'on appelle λ_1 et λ_2. La matrice A est diagonalisable et il existe une matrice P inversible telle que

  $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

  D'où

  $$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

  $$u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

  Les nombres complexes α et β pourront être déterminés avec u_0 et u_1.
- Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$ alors χ_A admet une racine double dans $\mathbb{C}$ qu'on appelle λ. La matrice A n'est pas diagonalisable mais elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On peut facilement montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
  Ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

  $$u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}$$

  Les nombres complexes α et β pourront être déterminés avec u_0 et u_1.

Exemple. On considère la suite de Fibonacci (1202) définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. Ici $\Delta = 5$, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le terme général peut alors s'écrire sous la forme

$$u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Sachant que $0 = u_0 = \alpha + \beta$ et que $1 = u_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} + (\alpha - \beta)\frac{\sqrt{5}}{2}$, on trouve $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$