Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Définition

Définition I.1. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **linéaire** ou que f est un **morphisme** si :

(1) Pour tous $x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(2) Pour tout $\alpha \in K$et pour tout $x \in E$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Notation. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensembles des applications linéaires de E dans F.

Proposition I.2. *Soit $f : E \to F$ une application. L'application f est linéaire si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \in K$ et pour tous $x, y \in E$,*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Démonstration.

Proposition I.3. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$.*

Démonstration.

Définition I.4. Soit E un K-espace vectoriel.

(1) Un **endomorphisme** de E est application linéaire de E dans E.

(2) Une **forme linéaire** est une application linéaire de E dans K.

II. Exemples

• **Exemple 1.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x - y, 2x + 5y)$. L'application f est linéaire.

Démonstration.

• **Exemple 2.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2, y^2)$. L'application f n'est pas linéaire.

• **Exemple 3.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. L'application I : $f \to \int_a^b f(t)dt$ est une application linéaire sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

• **Exemple 4.** Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites convergentes. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f((u_n)) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est une application linéaire.

III. Image et noyau d'une application linéaire

• **Image**

Définition III.1. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E_1) = \{f(x) \mid x \in E_1\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

Autrement dit, l'image d'un sous-espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

Définition III.2. Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'**image** de f est l'ensemble des images par f des éléments de E. On la note $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}\,.$$

Proposition III.3. $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F*.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $E_1 = E$.

Proposition III.4. *Soit* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels. Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire. L'application* f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$*.*

Démonstration.

• Noyau

Proposition III.5. *Soit* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels. Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire. Si* F_1 *est un sous-espace vectoriel de* F*, alors* $f^{-1}(F_1) = \{x \in E \mid f(x) \in F_1\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Autrement dit, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Définition III.6. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le **noyau** de f est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est le vecteur nul.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = E\}$$

Proposition III.7. $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration.

Proposition III.8. f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$*.*

Démonstration.

Exemple III.9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = x + y$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\right\}$$

IV. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition IV.1. *Soient* E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels. Soit* $f, g : E \to F$ *deux applications linéaires et soit* $\alpha \in K$*. Alors* fg *et* αf *sont des applications linéaires.*

Ainsi, $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, F), +, .)$. *Démonstration.*

Proposition IV.2. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

V. Isomorphisme, automorphisme

Proposition V.1. *La réciproque d'une application linéaire bijective est est aussi une application linéaire.*

Démonstration.

Définition V.2. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.

Définition V.3. Soit E un K-espace vectoriel. Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E dans E.

VI. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Proposition VI.1. *(1) L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.*

(2) L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Démonstration.

Proposition VI.2. *Soit E un espace vectoriel. L'image d'une famille génératrice de E par une application linéaire de E dans F est une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$*.*

Démonstration.

Corollaire VI.3. *Soit E un espace vectoriel. L'image d'une base de E par un isomorphisme de E dans F est une base de F.*

VII. Applications linéaires en dimension finie

Proposition VII.1. *Soit E et F deux K-espace vectoriels avec E de dimension finie non nulle. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Autrement dit, pour définir une application linéaire de E dans F, il suffit de définir $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

Démonstration.

Exemple VII.2. Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(1, 0) = (2, 3)$ et $f(0, 1) = (-1, 4)$.

Proposition VII.3. *Avec les notations de la proposition précédente :*

(1) L'application f est injective si et seulement la famille $f_1, \ldots, f_n$ est libre.

(2) L'application f est surjective si et seulement la famille $f_1, \ldots, f_n$ est génératrice de F.

(3) L'application f est bijective si et seulement la famille $f_1, \ldots, f_n$ est une base de F.

Démonstration.

Corollaire VII.4. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Alors une application linéaire $f : E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si l'image par f d'une base de E est une base de F.*

Définition VII.5. Deux K-espaces vectoriels E et F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Exemple VII.6. $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(a, b, c) = aX^2 + bX + c$ est un isomorphisme.

Proposition VII.7. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

Démonstration.

Remarque. Tout K-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n.

Proposition VII.8. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

Remarque. Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective ou surjective. En général, l'injectivité est plus simple à établir.

Démonstration.

VIII. **Rang d'une application linéaire**

Lemme VIII.1. *Soient E et F deux K-espace vectoriels de dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors tout sous-espace vectoriel supplémentaire de* $\mathrm{Ker} f$ *est isomorphe à* $\mathrm{Im} f$.

Démonstration. Admis

Théorème VIII.2. *Soient E et F deux K-espace vectoriels avec E de dimension finie. Soit f un application linéaire de E dans F. Alors*

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

Démonstration.

Définition VIII.3. Soient E et F deux K-espace vectoriels avec E de dimension finie. Soit f un application linéaire de E dans F. On appelle **rang** de f et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de l'image de f.

D'où

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg}(f)$$

Proposition VIII.4. *Soient E et F deux K-espace vectoriels avec E de dimension finie. Soit f un application linéaire de E dans F. Alors*

$$\mathrm{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F) \text{ } et$$

$$\begin{gathered} f \textit{ est injective} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim E \\ f \textit{ est surjective} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim F \\ f \textit{ est bijective} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim E = \dim F \end{gathered}$$

Démonstration.

Proposition VIII.5. *Soient E et F deux K-espace vectoriels avec E de dimension finie. Soit f un application linéaire de E dans F. Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors* $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.