Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels

1. Définition

On rappelle les définitions suivantes :

Définition I.1. Soit E un ensemble. Une loi interne sur E est une application de $E \times E$ dans E

Exemple I.2. • $+$ est une loi interne sur $\mathbb{Z}$: $(x, y) \mapsto x + y$
• $-$ n'est pas une loi interne sur $\mathbb{N}$: $2 - 3 \notin \mathbb{N}$.

Définition I.3. Soit E un ensemble. Une loi externe à coefficients dans K est une application de $K \times E$ dans E.

Exemple I.4. Si $E = \mathbb{R}^2$ et $K = \mathbb{R}$ l'application

$$(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2$$

est une loi externe. Par contre si $E = \mathbb{R}^2$ et $K = \mathbb{C}$ l'application

$$(\lambda, (x, y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{C}^2 \neq \mathbb{R}^2$$

n'est pas une loi externe.

Définition I.5. On appelle **espace vectoriel sur** K ou K**-espace vectoriel** un ensemble E non vide muni d'une loi interne notée $+$ et appelée addition et d'une loi externe notée $.$: $K \times E \to E$ appelée multiplication par un scalaire, telles que :

(1) les quatres axiomes suivants concernant $+$ sont vérifiés :
  (a) E possède un élément neutre pour $+$ noté 0_E
  (b) pour tout $y \in E$, il existe $y' \in E$ tel que $y + y' = 0_E$ (on le note $-y$).
  (c) pour tous $x, y, z \in E$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ ($+$ est associative).
  (d) pour tous $x, y \in E$, $x + y = y + x$ ($+$ est commutative).

(2) les quatre axiomes suivants concernant $.$ sont vérifiés :
  (a) $\forall x \in E, 1.x = x$
  (b) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x \in E$, $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$
  (c) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x \in E$, $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
  (d) $\forall \alpha \in K$, $\forall x, y \in E$, $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

Les élements de E sont appelés **vecteurs**. L'élément neutre pour $+$ est appelé **vecteur nul** et est noté 0_E ou simplement 0. L'opposé de $x \in E$ est noté $-x$. Les élements de K sont appelées **scalaires**.

Proposition I.6. *Soit E un K-espace vectoriel.*

(1) *$\forall x \in E$, $0.x = 0_E$,*

(2) $\forall \alpha \in K$, $\alpha.0_E = 0_E$,

(3) $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in E$ $\alpha.x = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0$ *ou* $x = 0_E$.

Démonstration. (1) D'après l'axiome (c), on a $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$ donc $0.x = 0_E$.

(2) D'après l'axiome (d), pour tout $\alpha \in K$, $\alpha.0_E = \alpha(0_E + 0_E) = \alpha 0_E + \alpha 0_E$. On obtient $\alpha.0_E = 0_E$.

(3) Supposons que $\alpha.x = 0_E$ et que $\alpha \neq 0$. Les axiomes (a) et (b) nous donnent $x = 1.x = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \alpha.x = \frac{1}{\alpha} 0_E$.

□

II. Exemples

1. Vecteurs du plan et de l'espace

Rappelons quelques résultats concernant le calcul vectoriel dans le plan :

•Addition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On définit le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ de la manière suivante.
Soit A un point du plan. Il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et il existe un unique point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. On pose alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On a ainsi la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

(i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (l'addition est commutative).

(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (l'addition est associative).

(iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est élément neutre pour l'addition).

(iv) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

L'ensemble des vecteurs du plan, muni de l'addition, est donc un groupe abélien.

•Multiplication par un scalaire

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
Sinon, $k\vec{u}$ est le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$, et de norme $|k|.\|\vec{u}\|$.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et pour tous α, $\beta \in \mathbb{R}$:

(i) $1\vec{u} = \vec{u}$.

(ii) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.

(iii) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

(iv) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

Proposition II.1. *L'ensemble V_2 formés par les vecteurs du plan muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

De même :

Proposition II.2. *L'ensemble V_3 formés par les vecteurs de l'espace muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

C'est ce dernier exemple qui a donné son nom à la structure étudiée dans ce chapitre.

2. L'espace $(K, +, .)$

Les lois + et . sont l'addition et la multiplication habituelle dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition II.3. $(K, +, .)$ *est* K*-espace vectoriel.*

$\mathbb{R}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Démonstration. (1) Vérifions les axiomes pour la loi + : :

(a) 0 est élément neutre pour +.

(b) Tout $x \in K$ possède un symétrique pour + : c'est $-y$

(c) + est évidemment associative

(d) + est commutative

Vérifions les axiomes pour la loi . :

(2) (a) 1 est élément neutre pour la multiplication

(b) La multiplication dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est associative.

(c) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

(d) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

□

3. L'espace vectoriel $(K^n, +, .)$

On rappelle que K^n est l'ensemble des n-uples d'éléments de K,

$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots x_n \in K\}.$$

L'addition sur K^n est définie de la manière suivante

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

et la multiplication par un sclaire $\alpha \in K$ par :

$$\alpha.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots \alpha x_n)$$

Proposition II.4. $(K^n, +, .)$ *est un* K*-espace vectoriel.*

Démonstration. L'addition est commutative et associative sur K donc elle l'est également sur K^n. L'élément neutre pour l'adition est $(0, 0, \ldots, 0)$ et l'opposé de $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. La vérification des quatre axiomes (a), (b), (c) et (d) est triviale. □

Remarque. Tout vecteur du plan ou de l'espace peut être identifié à ses coordonnées dans un reprère donné. On pourra alors idendifier le plan à $\mathbb{R}^2$ et l'espace à $\mathbb{R}^3$.

4. L'espace vectoriel $(K[X], +, .)$

On rappelle que $K[X]$ est l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K. Si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$, on sait que

$$P + Q = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i$$

et que, pour tout $\alpha \in K$,

$$\alpha.P = \sum_{i=0}^n (\alpha a_i) X^i$$

l'addition et la multiplication par un scalaire vérifient respectivement les quatre axiomes précédents les concernant.

5. L'espace vectoriel $(K^{\mathbb{N}}, +, .)$

$K^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites d'éléments de K. Muni de l'addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ et de la multiplication par un scalaire : $\alpha.(u_n) = (\alpha u_n)$, il possède une structure d'espace vectoriel.

6. L'espace vectoriel $(\mathcal{F}(I, K), +, .)$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(I, K)$ des applications de I dans K est muni d'une addition ($f + g$ est définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$) et d'une multiplication par un scalaire ($\alpha.f$ est définie par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$). Muni de ces deux lois $(\mathcal{F}(I, K), +, .)$ est un K-espace vectoriel.

En fait, les propriétés des opérations + et . sur K se transmettent à celles de $\mathcal{F}(I, K)$. Par exemple, l'associativité de + se démontre de la façon suivante :

Pour tout $x \in I$, on a $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$

Ainsi, $(f + g) = h) = f + (g + h)$.

De façon générale, on a

Proposition II.5. *Soit X un ensemble et E un espace vectoriel, $(\mathcal{F}(X, E), +, .)$ est un K-espace vectoriel.*

III. Sous-espaces vectoriels

1. Définition

Définition III.1. Soit $(E, +, .)$ un K-espace vectoriel. Un **sous-espace vectoriel de** E est un sous-ensemble F non vide stable par addition et par multiplication par un scalaire, c'est-à-dire

(1) $F \neq \emptyset$

(2) $\forall x, y \in F, x + y \in F$

(3) $\forall x \in F, \forall \alpha \in K, \alpha x \in F$

Remarque. – On peut remplacer les deux derniers points de la définition par :

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in K, \alpha x + \beta y \in F$$

- Si F est un sous-espace vectoriel, alors $0_E \in F$. En effet, soit $x \in F$ (F est non vide), on a $0.x = 0_E \in F$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors les opérations + et . peuvent se restreindre à F et $(F, +, .)$ est alors également un K-espace vectoriel. Pour montrer qu'un ensemble a une structure d'espace vectoriel, on pourra ainsi commencer par esssayer de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

2. Exemples

Proposition III.2. *Soit E un K-espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

2.1. Sous-espaces vectoriels de V_2

Pour rappel, $(V_2, +, .)$ est l'ensemble des vecteurs du plan. On a $\left\{\vec{0}\right\}$ et V_2 qui sont évidemment des sous-espaces vectoriels de V_2. Considérons $\vec{v}$ un vecteur non nul. On appelle **droite vectorielle** engendrée par $\vec{v}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{v}$. On le note $\mathbb{R}\vec{v}$.

$$\mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On montre facilement qu'une telle droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de V_2. Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de V_2 non réduit au vecteur nul. Il contient donc au moins un vecteur non-nul $\vec{v}$: il contient également les vecteurs de la forme $\lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$. Si F contient un vecteur $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{v}$. Il contient l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire le plan tout entier.

Proposition III.3. *Les sous-espaces vectoriels de V_2 sont le sous-espace réduit au vecteur nul, les droites vectorielles et V_2 tout entier.*

2.2. Sous-espaces vectoriels de V_3

Pour rappel, $(V_3, +, .)$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace. On a $\left\{\vec{0}\right\}$, les droites vectorielles $\mathbb{R}\vec{v}$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$ et V_3 qui sont évidemment des sous-espaces vectoriels de V_3. Considérons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle **plan vectoriel** engendrée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire

$$\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,.$$

On montre facilement qu'un tel plan est un sous-espace vectoriel de V_3. Considérons F un sous-espace vectoriel de V_3 non réduit au vecteur nul. Il contient donc au moins un vecteur non-nul $\vec{v}$: il contient également les vecteurs de la forme $\lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$. S'il contient un vecteur $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{v}$, il contient les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si F contient un vecteur $\vec{w}$ non coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors il contient l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire V_3 tout entier.

Proposition III.4. *Les sous-espaces vectoriels de V_3 sont $\left\{\vec{0}\right\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et V_3 tout entier.*

3. Sous-espaces vectoriels de $K[X]$

Proposition III.5. $K_n[X] = \{P \in K[X] \mid \deg P \leq n\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $K[X]$.

Démonstration. (1) $K_n[X]$ n'est pas vide puisqu'il contient le polynôme nul.

(2) Soient $P, Q \in K_n[X]$, $\deg(P + Q) \leq n$ donc $P + Q \in K_n[X]$.

(3) Soient $P \in K_n[X]$ et $\alpha \in K$, $\deg(\alpha P) \leq n$ donc $\alpha P \in K_n[X]$.

□

Il existe bien sûr d'autres sous-espaces vectoriels de $K[X]$. Par exemple, l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel. Qu'en est-il de l'ensemble de polynômes P de $K[X]$ tels que $P(0) = 1$?

4. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Proposition III.6. *L'ensemble F des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$*

Démonstration. (1) F est non vide puisque la suite nulle est dans F.

(2) Si (u_n) et (v_n) sont convergentes, $(u_n + v_n)$ l'est aussi.

(3) F est evidemment stable par multiplication par un scalaire.

□

Exemple III.7. L'ensemble des suites arithmétiques est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

5. Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Proposition III.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, .)$*

Pouvez-vous en citer d'autres ?

IV. Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition IV.1. *Soit E un K-espace vectoriel. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ aussi.*

Démonstration.

Attention ! En général une réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

V. Sous-espaces engendrés par une famille de vecteurs

Définition V.1. Soit E un K-espace vectoriel et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que un vecteur v de E est **combinaison lineaire** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tels que

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots \alpha_n u_n.$$

Définition V.2. Soit E un K-espace vectoriel et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Le **sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs** $u_1, \dots u_2$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \dots u_n$. On le note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}$$

Exemple V.3. Le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur v non nul est $\mathrm{Vect}(v) = \{\alpha u \mid \alpha \in K\}$, on parle également de droite vectorielle engendrée par u. Le sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs u et v non colinéaires est $\mathrm{Vect}(u, v) = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in K\}$: c'est le plan vectoriel engendré par u et v.

Proposition V.4. *Soit E un K-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n$, n vecteurs de E,* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_n$.*

Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient $u_1, \dots, u_n$ alors il contient $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration.

VI. Somme de deux sous-espaces

Définition VI.1. Soient E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La **somme** de F et G est l'ensemble

$$\{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

On le note $F + G$

Proposition VI.2. *La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration.

VII. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition VII.1. Soient E un K-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** si $F + G = E$ et si $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $E = F \oplus G$

Ainsi, F et G sont supplémentaires si leur seul vecteur commun est le vecteur nul et si tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Proposition VII.2. *F et G sont supplémentaires si et seulement si tout élément de E peut s'écrire de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall u \in E, \exists!(x,y) \in F \times G, u = x + y$$

Démonstration.

Exemple VII.3. (1) Dans V_2, deux droites vectorielles non confondues sont supplémentaires.

(2) Dans V_3, deux droites F et G non confondues ne sont pas supplémentaires. On a bien $F \cap G = \{0\}$ mais pas $E_3 = F + G$. Par contre, un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans le plan sont supplémentaires. Deux plans vectoriels F et G non confondus ne sont pas supplémentaires.

(3) L'ensemble F des fonctions numériques paires et l'ensemble G des fonctions numériques impaires sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

VIII. Familles de vecteurs d'un espace vectoriel

1. Familles libres, familles liées

Définition VIII.1. Soit E un K-espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_1, \dots, u_n)$ est une **famille libre**, ou que les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ sont

linéairement indépendants si, pour tous $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n \in K$:

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Si $(u_1, \ldots, u_n)$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si la seule manière d'obtenir 0 comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ est d'imposer à tous les coefficients d'être nuls. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée s'il existe $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E$.

Remarquons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ est toujours solution de l'équation $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E$. La famille $u_1, \ldots, u_n$ est libre si et seulement s'il n'y a pas d'autres solutions.

Exemple VIII.2. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$ est une famille libre.

Exemple VIII.3. Soient $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (3, 0, -1)$. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est liée.

Proposition VIII.4. (1) *Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, elle est liée.*

(2) *Si une famille de vecteurs contient deux fois le même vecteur alors elle est liée.*

(3) *Si on enlève un vecteur à une famille libre, elle reste libre.*

(4) *Si on ajoute un vecteur à une famille liée, elle reste liée*

Démonstration.

Proposition VIII.5. *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration.

2. Familles génératrices

Définition VIII.6. Soit E un K-espace vectoriel. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_1, \ldots u_n)$ est une **famille génératrice** de E si $E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Autrement dit, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E si tout vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$:

$$\forall v \in E, \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n, v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Exemple VIII.7. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Proposition VIII.8. *Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, elle reste génératrice.*

Démonstration.

Proposition VIII.9. *Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice et si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors la famille obtenue à partir de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ en supprimant ce vecteur est génératrice.*

Démonstration.

3. Bases

Définition VIII.10. Soit E un K-espace vectoriel. Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est **une base** de E si elle est libre et génératrice.

Théorème VIII.11. *$\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique commme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.*

Autrement dit, $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\forall v \in E, \exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n, v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

On dit alors que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont **les coordonnées** du vecteur v dans la base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$.
Démonstration.

Exemple VIII.12. Soient $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (3, 0, -1)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition VIII.13. *La famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ est une base de K^n. On dit que $\mathcal{B}$ est la base canonique de K^n.*

Démonstration.

Proposition VIII.14. *La famille $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$. On dit que $\mathcal{B}$ est la base canonique de $K_n[X]$.*

IX. Dimension d'un espace vectoriel

1. Espace vectoriel de dimension finie

Définition IX.1. On dit qu'un K espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

E est donc dimension finie s'il existe une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E telle que $E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

2. Théorème de la base incomplète

Théorème IX.2. *Soit E un K-espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Autrement dit, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E en lui ajoutant certains vecteurs de $\mathcal{G}$.

Corollaire IX.3. *Soit E un K-espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Soit x un vecteur non nul de E. Alors la famille (x) est libre, donc d'après le théorème précédent, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $(x) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. □

Théorème IX.4. *Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul possède une base.*

Démonstration. Il possède par définition une famille génératrice et on applique le corollaire précédent. □

Corollaire IX.5. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Alors toute famille libre de E peut-être complétée en une base de E.*

Autrement dit, on peut lui ajouter des vecteurs pour obtenir une base. C'est souvent ce corollaire qu'on applique quand on parle de théorème de la base incomplète.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E. Par hypothèse, E possède une famille génératrice $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est également une famille génératrice, donc d'après le théorème IX.2, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. $\square$

3. Dimension d'un K-espace vectoriel

Théorème IX.6. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul. Alors toute les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce cardinal commun est appelé **dimension** de E et noté* $\dim(E)$.

Remarque. Par convention, si $E = \{0_E\}$, alors on pose $\dim(E) = 0$.

Exemples :
On a vu que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ est une base de K^n. Comme elle est formée de n vecteurs, on a :

Proposition IX.7. $\dim K^n = n$.

On a vu que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$. Comme elle est formée de $n + 1$ vecteurs, on a

Proposition IX.8. $\dim K_n[X] = n + 1$.

4. Familles libres et familles génératrices en dimension finie

Proposition IX.9. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors* $\operatorname{card}(\mathcal{F}) \geq n$. *Si de plus,* $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = n$, *alors $\mathcal{F}$ est une base de E.*

Démonstration. D'après le corollaire IX.3, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B}$ de E : on a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Puisque $\dim(E) = n$ alors $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = n$ et donc $\operatorname{card}(\mathcal{B}) \geq n$. De plus, il y a égalité si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. $\square$

Proposition IX.10. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors* $\operatorname{card}(\mathcal{F}) \leq n$. *Si de plus,* $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = n$, *alors $\mathcal{F}$ est une base de E.*

Démonstration. D'après le corollaire IX.5, on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B}$ de E : on a donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Puisque $\dim(E) = n$ alors $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = n$ et donc $\operatorname{card}(\mathcal{F}) \leq n$. De plus, il y a égalité si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. $\square$

Exemple IX.11. Montrer que la famille $((1, 2), (3, 4))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

X. Dimension d'un sous-espace vectoriel

1. Bases et dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On sait que $(F, +, .)$ peut être vu comme un K-espace vectoriel, le cardinal commun des bases de F est appelée **dimension de F.**

Pratiquement, pour déterminer une base de F, on écrit un élément quelconque de F comme combinaison linéaire d'une famille de vecteurs, puis on retire de cette famille tout vecteur qui est combinaison linéaire des autres, et on recommence jusqu'à obtenir une famille libre.

Exemple X.1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner une base et la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Proposition X.2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est dimension finie et* $\dim(F) \leq \dim(E)$. *Si, de plus,* $\dim(F) = \dim(E)$, *alors $F = E$.*

Application : Pour montrer que deux K-espaces vectoriels de dimension finie sont égaux, il suffit de montrer que $E \subset F$ et que $\dim E = \dim F$ (il n'est alors pas nécessaire de montrer que $F \subset E$).

2. Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

2.1. Sous espaces supplémentaires et bases

Proposition X.3. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F et G des sous-espaces supplémentaires de E. Si $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{C}$ est une base de G. Alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E. En particulier* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_p\}$ et $\mathcal{C} = \{g_1, \ldots, g_q\}$. Montrons d'abord que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ tels que $\lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$. Alors $\lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_p f_p = -(\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q) \in F \cap G$. Or $F \cap G = \{0\}$ donc $\lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_p f_p = 0$ et $\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$. Mais $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont libres, donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$.

Montrons maintenant que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une famille génératrice de E. Soit $x \in E$. Alors on peut l'écrire sous la forme $x = u + v$ où $u \in F$ et $v \in G$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$ tels que $u = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p$ et $\beta_1, \ldots, \beta_q \in K$ tels que $u = \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_q g_q$. On a donc $x = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_q g_q$. $\square$

Réciproquement,

Proposition X.4. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Si la famille* $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *est une base de E alors* $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *et* $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *sont des sous-espaces supplémentaires de E.*

Autrement dit, deux sous-espaces engendrés par des parties complémentaires d'une base de E sont supplémentaires.

Démonstration. Soient $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Montrons tout d'abord que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F \cap G$. Puisque $x \in F$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p$ et puisque $x \in G$, il existe $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $x = \alpha_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \alpha_n e_n$. Mézalor on a $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p - \alpha_{p+1} e_{p+1} - \ldots - \alpha_n e_n = 0$. Or, la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = -\alpha_{p+1} = \ldots = -\alpha_n = 0$ et donc $x = 0$.

Montrons maintenant que $E = F + G$. Soit $x \in E$. Puisque $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \alpha_n e_n$. Or, $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p \in F$ et $\alpha_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in G$ donc $x \in F + G$. ☐

2.2. Existence d'un supplémentaire

Proposition X.5. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.*

Autrement dit, en dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire (qui n'est pas unique).

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. C'est donc une famille libre de E que l'on peut, d'après le théorème de la base incomplète, compléter en une base de E $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors, d'après la proposition précédente, $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et F sont supplémentaires. ☐

2.3. Formule de Grassmann

Proposition X.6. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. On va se ramener au cas des sous-espaces supplémentaires. Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (F_1 existe d'après la proposition précédente). On va montrer que F_1 est un supplémentaire de G dans $F + G$.

Montrons tout d'abord que $F_1 \cap G = \{0\}$ Soit $x \in F_1 \cap G$. Alors $x \in F \cap G$ puisque $F_1 \subset F$. Or, $(F \cap G) \cap F_1 = \{0\}$ donc $x = 0$. Montrons mainteant que $F + G = F_1 + G$. Soit $x = u + v \in F + G$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Puisque $F = F_1 + F \cap G$, on peut écrire u sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F \cap G$. On a donc $x = u_1 + u_2 + v = u_1 + (u_2 + v)$ avec $u_1 \in F - 1$ et $u_2 + v \in G$. Par conséquent $x \in F_1 + G$. On a donc bien $F + G = F_1 \oplus G$. Par conséquent $\dim(F + G) = \dim(F_1) + \dim(G)$. Or, $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ donc $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F \cap G)$ d'où $\dim(F_1) = \dim(F) - \dim(F \cap G)$ et donc finalement $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. ☐

2.4. Caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Proposition X.7. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Démonstration. Notons (i), (ii), (iii) et (iv) les quatre propositions. Les assertions (i) et (ii) sont équivalentes par définition.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) : Supposons que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. Alors, par la formule de Grassmann, $\dim(E) = \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) : Supposons $E = F + G$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Alors par la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = \dim(E) - \dim(E) = 0$.

(iv)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons que $F \cap G = \{0\}$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Alors par la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$. Puisque $F + G$ est un sous-espace de E, on en déduit que $F + G = E$. □

2.5. Rang d'une famille de vecteurs

Définition X.8. Soit E un K-espace vectoriel. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Le **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. On le note $rg(u_1, \ldots, u_n)$.

Autrement dit

$$rg(u_1, \ldots, u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$$

Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, alors c'est une base de $(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ donc son rang est égal à n. Sinon, le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est le cardinal de la famille libre maximale que l'on peut extraire de $(u_1, \ldots, u_n)$.

Proposition X.9. *On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs :*
– *en changeant l'ordre de ses vecteurs,*
– *en multipliant l'un de ses vecteurs par un scalaire non nul,*
– *en ajoutant à l'un de ses vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.*