Chasse neige

La figure ci dessous schématise un chasse-neige se déplaçant sur une horizontale. Ce chasse-neige (S) est constitué d'une roue creuse (S_1) (de centre d'inertie *C*, de rayon *R*, de longueur l et de masse *m* répartie uniformément sur la circonférence) et d'une partie (S_2) ($CABI_2$), indéformable, de même masse *m* que la roue et de centre d'inertie *A* en mouvement de translation parallèlement à l'axe *Ox*.

Un moteur exerce sur la roue un couple de moment $\vec{C} = C\vec{z}$.

La roue tourne sans frottement autour de son axe et roule sans glisser sur le sol. On suppose que le coefficient de frottement de glissement *f* sur le sol est le même en I_1 et en I_2

Soient $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND et g l'accélération de la pesanteur.

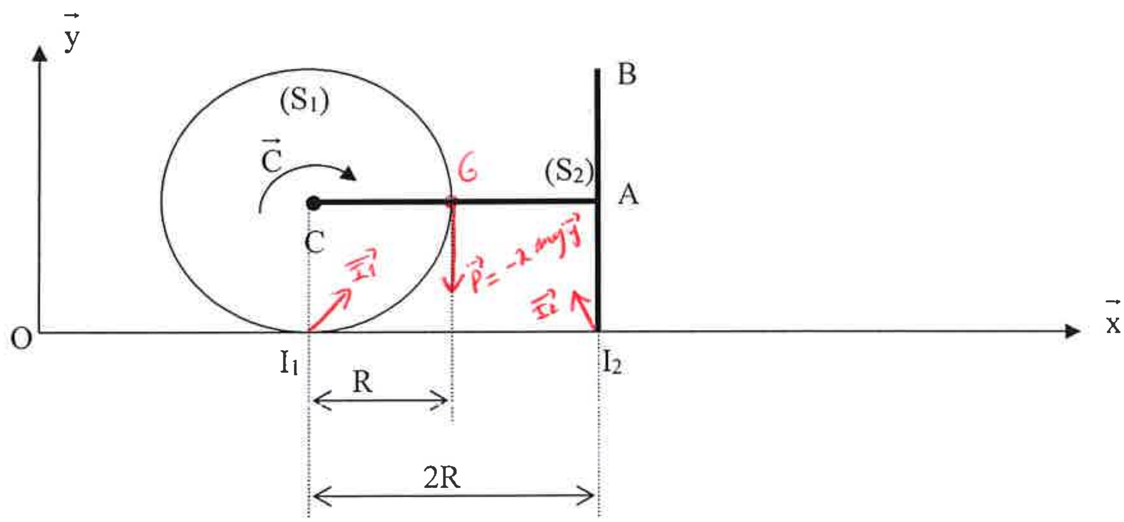
On donne : * $\vec{\Omega}(S_1 / R) = \dot{\theta}\,\vec{z}$

* L'action du sol sur (S) en I_1 : $\vec{I_1} = T_1\,\vec{x} + N_1\,\vec{y}$

* L'action du sol sur (S) en I_2 : $\vec{I_2} = T_2\,\vec{x} + N_2\,\vec{y}$

* La matrice d'inertie de (S1) écrite dans le repère $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[I_C(S_1)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



1) Tracer sur le schéma le centre de gravité G de (S) et les 3 efforts extérieurs appliqués à (S).
2) Ecrire au point G le torseur des efforts extérieurs appliqués à (S) : $F(\vec{F}_{ext} \rightarrow (S))$

3) En appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S) déterminer 2 relations reliant m, g, N_1, N_2, T_1, T_2 et V(G/R).
4) Déterminer le moment dynamique de la roue (S_1) dans son mouvement par rapport à R au point G (commencer par le faire au point C).
5) Déterminer le moment dynamique de (S_2) dans son mouvement par rapport à R au point G (commencer par le faire au point A).
6) En déduire le moment dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R au point G.
7) En appliquant le théorème du moment dynamique à (S) déterminer 1 relation reliant N1, N2, T1, T2 et θ.
8) En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue (S_1) déterminer une relation reliant C, T_1 et θ.
9) En écrivant la condition de roulement sans glissement en I1, déterminer V(C/R) en fonction de R et θ.
10) Ecrire les 2 relations imposées par le glissement en I_2 et le non glissement en I_1.
11) Reprendre toutes les équations déterminées dans les questions précédentes et relever le nombre et le nom des inconnues.
    Ce système est il résolvable ?
    Quelle relation doit on vérifier pour que le mouvement d'avance du chasse neige soit réalisable.

Chasse neige

1) Voir schéma

2) $\hat{F}(\vec{F}_{ext} \rightarrow S) = ?$

* on isole (S)
* BEE

$$\hat{F}(\text{poids} \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} -2mg\,\vec{y}' \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$$

$$\hat{F}(\vec{I_1} \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} T_1\vec{x}' + N_1\vec{y}' \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{matrix} T_1\vec{x}' + N_1\vec{y}' \\ (-R\vec{x}-R\vec{y}) \wedge (T_1\vec{x}' + N_1\vec{y}) \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} T_1\vec{x}' + N_1\vec{y}' \\ (-RN_1 + RT_1)\vec{z} \end{matrix} \right\}_G$$

$$\hat{F}(I_2 \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} T_2\vec{x}' + N_2\vec{y}' \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_1} = \left\{ \begin{matrix} T_2\vec{x}' + N_2\vec{y}' \\ (R\vec{x} - R\vec{y}) \wedge (T_2\vec{x}' + N_2\vec{y}) \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} T_2\vec{x}' + N_2\vec{y}' \\ (RN_2 + RT_2)\vec{z}' \end{matrix} \right\}_G$$

D'où
$$\boxed{\hat{F}(\vec{F}_{ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{matrix} (T_1+T_2)\vec{x}' + (N_1+N_2-2mg)\vec{y}' \\ (T_1+T_2-N_1+N_2)R \quad \vec{z} \end{matrix} \right\}_G}$$

3) Théorème de la résultante dynamique

$$\Sigma(\vec{F}_{ext} \rightarrow S) = 2m\,\vec{\Gamma}(G \in S/R) = 2m \left.\frac{d\,\vec{V}(G \in S/R)}{dt}\right|_R = 2m\frac{dV_G}{dt}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} T_1 + T_2 = 2m\dfrac{dV_G}{dt} = 2m\dot{V}_G \\ N_1 + N_2 = 2mg \end{matrix}}$$

4) $$\overrightarrow{\delta_C}(S_1/R) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_C}(S_1/R)}{dt}\right|_R \quad \text{car } C \text{ cdg de } (S_1)$$

or $$\overrightarrow{\sigma_C}(S_1/R) = [I_C(S_1)] \cdot \overrightarrow{\Omega}(S_1/R) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}\vec{z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_C}(S_1/R) = mR^2\dot{\theta}\,\vec{z}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta_C}(S_1/R) = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z}}$$

$$\overrightarrow{\delta_G}(S_1/R) = \overrightarrow{\delta_C}(S_1/R) + \overrightarrow{GC} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma}(C \in S_1/R)$$
$$= mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z} + \underbrace{(-R)\vec{x} \wedge m\,\Gamma_C\,\vec{x}}_{=\vec{0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta_G}(S_1/R) = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{z}}$$

5) $\overrightarrow{\delta_A(S_2/R)} = \dfrac{d\,\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)}}{dt}\Big/_R$ car A cdg de S_2

or $\overrightarrow{\sigma_A(S_2/R)} = [I(S_2/R)] \cdot \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S_2/R)}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$

D'où $\boxed{\overrightarrow{\delta_A(S_2/R)} = \vec{0}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_G(S_2/R)} = \cancel{\overrightarrow{\delta_A(S_2/R)}} + \overrightarrow{GA} \wedge m\,\Gamma_A\,\vec{x}$

$= R\,\vec{x} \wedge m\,\Gamma_A\,\vec{x} = \vec{0}$

$\boxed{\overrightarrow{\delta_G(S_2/R)} = \vec{0}}$

6) $\boxed{\overrightarrow{\delta_G(S/R)}} = \overrightarrow{\delta_G(S_1/R)} + \overrightarrow{\delta_G(S_2/R)} = \boxed{m R^2 \ddot{\theta}\,\vec{z}}$

7) Théorème du moment dynamique

$\sum \overrightarrow{M_G(F_{ext} \to S)} = \overrightarrow{\delta_G(S/R)}$

$(T_1 + T_2 - N_1 + N_2) R\,\vec{z} = m R^2 \ddot{\theta}\,\vec{z}$

$\boxed{T_1 + T_2 - N_1 + N_2 = m R \ddot{\theta}}$

8) Théorème du moment dynamique :

$\sum \overrightarrow{M_G(F_{ext} \to S_1)} = \overrightarrow{\delta_G(S_1/R)}$

or * on isole (S_1)

* BEE $\quad \mathcal{F}(\Sigma_1 \to S_1) = {}_{I_1}\begin{Bmatrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_{C}\begin{Bmatrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ -R\vec{y} \wedge (T_1\vec{x} + N_1\vec{y}) \end{Bmatrix} = {}_{C}\begin{Bmatrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ R T_1\,\vec{z} \end{Bmatrix}$

$\mathcal{F}(c \to S_1) = {}_{C}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\,\vec{z} \end{Bmatrix}$ $\quad \mathcal{F}(\text{poids} \to S_1) = {}_{C}\begin{Bmatrix} -mg\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$\mathcal{F}(S_2 \to S_1) = {}_{C}\begin{Bmatrix} X\vec{x} + Y\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

D'où $\boxed{R T_1 + C = m R^2 \ddot{\theta}}$

9) $\overrightarrow{V(I_1 \in S_1/R)} = \vec{0}$ (conditio de RLI sans glissement)

$\Rightarrow \overrightarrow{V(C \in S_1/R)} + \overrightarrow{I_1 C} \wedge \overrightarrow{\Omega(S_1/R)} = \vec{0}$

$\Rightarrow V(C \in S_1/R)\,\vec{x}' + R\vec{y}' \wedge \dot{\theta}\,\vec{z}' = \vec{0}$

$\Rightarrow V(C \in S_1/R)\,\vec{x}' + R\dot{\theta}\,\vec{x}' = \vec{0}$

$\Rightarrow \underline{V(C \in S_1/R) = -R\dot{\theta}}$

10) glissement en I_2 $\Rightarrow \dfrac{|T_2|}{|N_2|} = f$

non glissement en I_1 $\Rightarrow \dfrac{|T_1|}{|N_1|} < f$

11)
$$\left.\begin{cases} T_1 + T_2 = 2m\,\dot{V}_G \\ N_1 + N_2 = 2m\,g \\ T_1 + T_2 - N_1 + N_2 = m R \ddot{\theta} \\ R T_1 + C = m R^2 \ddot{\theta} \\ V(C \in S_1/R) = -R\dot{\theta} \\ |T_2| = f\,|N_2| \\ |T_1| \le f\,|N_1| \end{cases}\right\}$$

6 eq avec 6 inc ($T_1, T_2, N_1, N_2, \theta$ et $V(C \in S_1/R)$)

avec ce système on doit trouver T_1 et N_1, ensuite il faut vérifier que l'inégalité $|T_1| \le f\,|N_1|$ soit vérifiée sinon le mvt d'avance du chasse neige n'est pas réalisable