C. Niclaeys

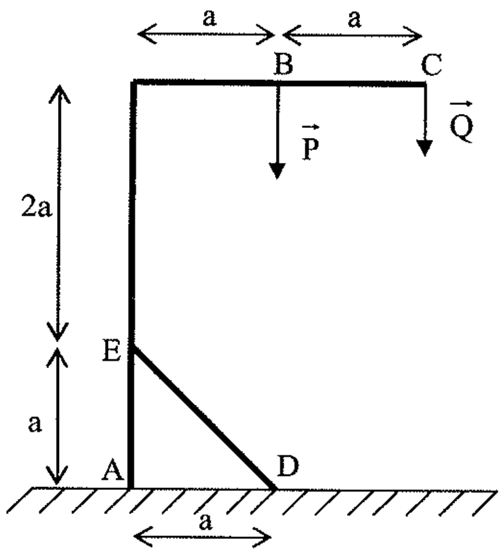
EXERCICES DE MECANIQUE DU SOLIDE 1

STATIQUE - CINEMATIQUE

TD1

Exercice 1 : *(examen mai 2005)*

Soit $R(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un Repère Orthogonal Normé Direct (ROND).
Soit une grue schématisée sur la figure suivante :



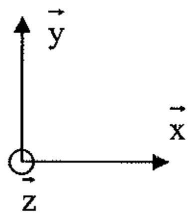
GRUE

On donne :

$\|\vec{Q}\| = 150N$

$\|\vec{P}\| = 250N$

$a = 1,80$ m



1) En isolant la barre ED à l'équilibre, déterminer la direction de la réaction du sol au point D sur la grue (direction de $\overrightarrow{R_D}$). En déduire les composantes de $\overrightarrow{R_D}$ dans le repère R en fonction du module R_D.

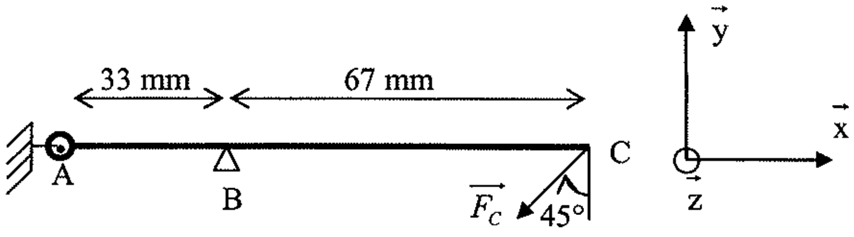
2) En isolant la grue complète à l'équilibre (elle est soumises à 4 forces, en A, D, B et C), déterminer la réaction du sol sur la grue au point A ($\overrightarrow{R_A}$) et le module R_D. On pose

$$\mathcal{T}_{(\overrightarrow{R_A}\to \text{grue})} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_A} = X_A\,\vec{x} + Y_A\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Exercice 2 : *(examen mai 2005)*

Soit $R(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un Repère Orthogonal Normé Direct (ROND).
Soit une poutre schématisée sur la figure suivante (non à l'échelle):
Cette poutre est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z})$ en A, en appui en B et est sollicité par une force $\overrightarrow{F_C}$ en C.

On donne : $\left\|\overrightarrow{F_C}\right\| = 15N$



1) Déterminer graphiquement les directions et les modules des efforts en A et B ($\left\|\overrightarrow{F_A}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{F_B}\right\|$). (Pour cela refaire la poutre à l'échelle et prendre 1N $\equiv$ 2mm).

2) Déterminer analytiquement les efforts en A et B ($\left\|\overrightarrow{F_A}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{F_B}\right\|$). (Pour cela utiliser le Principe Fondamental de la Statique (PFS) appliqué à la poutre).

TD2

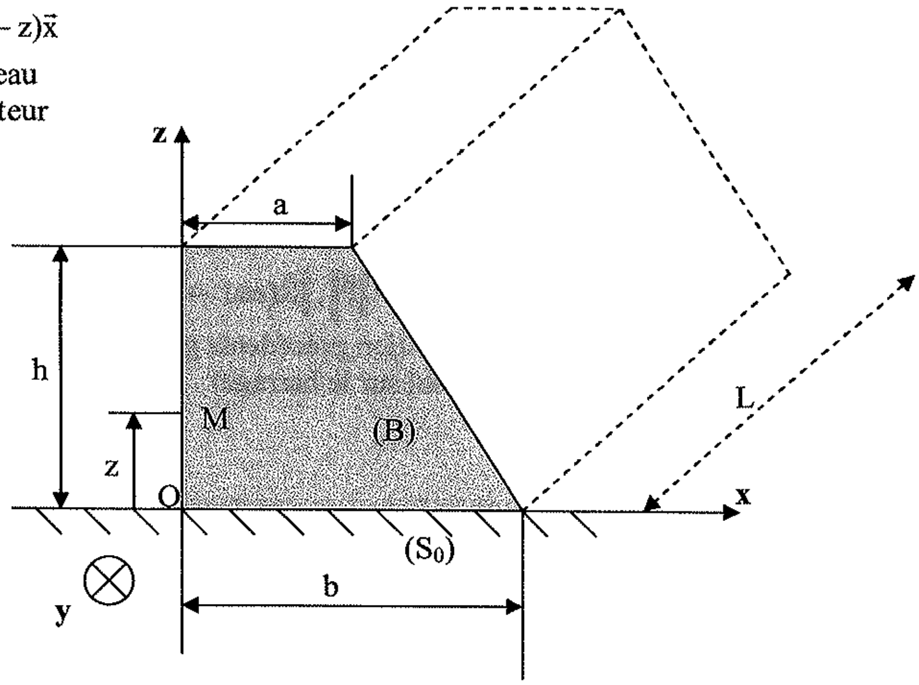
Exercice 1 : *(examen avril 2004)*

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un Repère Orthogonal Normé Direct (ROND)

Un barrage (B) en béton (masse volumique ρ_B), de section droite trapézoïdale (de petite base a, de grande base b et de hauteur h), de longueur L repose sur le sol (S_0). L'eau exerce sur la paroi verticale du barrage une action mécanique définie par la densité surfacique en tout point M de cote Z :

$$\vec{f}_M = \rho_e g(h-z)\vec{x}$$

ρ_e : masse volumique de l'eau
g : accélération de la pesanteur
z : cote du point M



1) On donne la position du centre de gravité G (situé dans le plan médian (xoy)) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)}\vec{x} + \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}\vec{z}$$

a) Donner l'expression du poids $\vec{P}$ appliqué en G du barrage en fonction des données du problème.

b) Définir le torseur statique associé au poids du barrage sur le barrage par ses éléments de réduction au point G, en fonction des données du problème.

c) Définir le torseur statique associé au poids du barrage sur le barrage par ses éléments de réduction au point O, en fonction des données du problème.

2) Soit :

$$F_O(\text{eau} \rightarrow B) = \begin{cases} \vec{R}(\text{eau} \rightarrow B) = (\rho_e g \dfrac{h^2}{2} L)\vec{x} \\ \vec{M}_O(\text{eau} \rightarrow B) = (\rho_e g \dfrac{h^3}{6} L)\vec{y} \end{cases}$$

Soit H (0,0,h/3) le point d'application de $\vec{R}$ (eau→B)

a) Appliquer le PFS au barrage et donner les deux équations vectorielles qui en découlent.

b) En déduire $\vec{R}$ (s_0→B) et $\vec{M}_O$ (s_0→B) en fonction des données du problème.

c) Application numérique :

on donne $\rho_B = 2500$ kg/m^3
$\rho_e = 1000$ kg/m^3
$g = 9{,}81$m/s^2
a = 5m
b = 20m
h = 30m
L = 1m

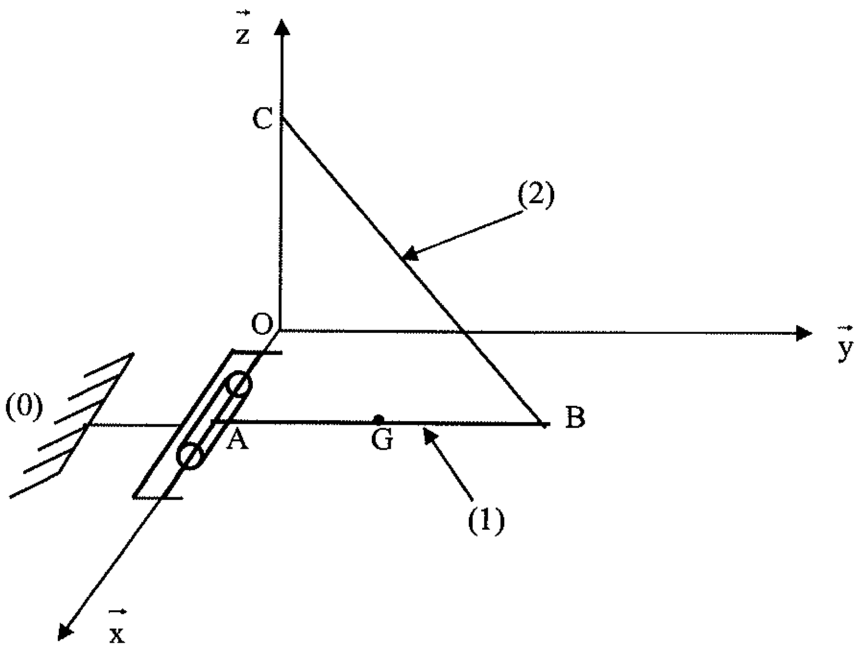
Calculer les valeurs suivantes : $\|\vec{P}\|$, $\|\vec{R}(\text{eau} \rightarrow B)\|$, $\|\vec{R}(s \rightarrow B)\|$

3) Retrouver les résultats de la question précédente graphiquement (notament le point d'application de la résultante du sol sur le barrage)

Exercice 2 :

Soit un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Une barre (1) homogène, de masse m, de longueur AB = L, de centre de gravité G (placé au centre de la barre) est en liaison pivot sans frottement d'axe $(A, \vec{x})$ avec le bâti (0).
Cette barre est maintenue horizontale (dans le plan Oxy) par l'intermédiaire d'un câble (2) de masse négligeable relié au bâti en C et relié à la barre en B : voir figure.



<u>Données :</u> AB = L
OC = h
OA = d
m = masse de la barre
g = gravité terrestre

Avec $\overrightarrow{AB} = L\,\vec{y}$

1) Déterminer les éléments de réduction $\vec{R}$ et $\vec{M}_A$ du torseur d'action mécanique du bâti (0) sur la barre (1) au point A, en fonction de m, g, d, h et L.
   Déterminer également la tension T du câble en fonction de m, g, d, h et L.

<u>Rappels :</u> $F(0 \to 1) = {}_A\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix} \right\}$ $\qquad \overrightarrow{F_B}(2 \to 1) = T\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$

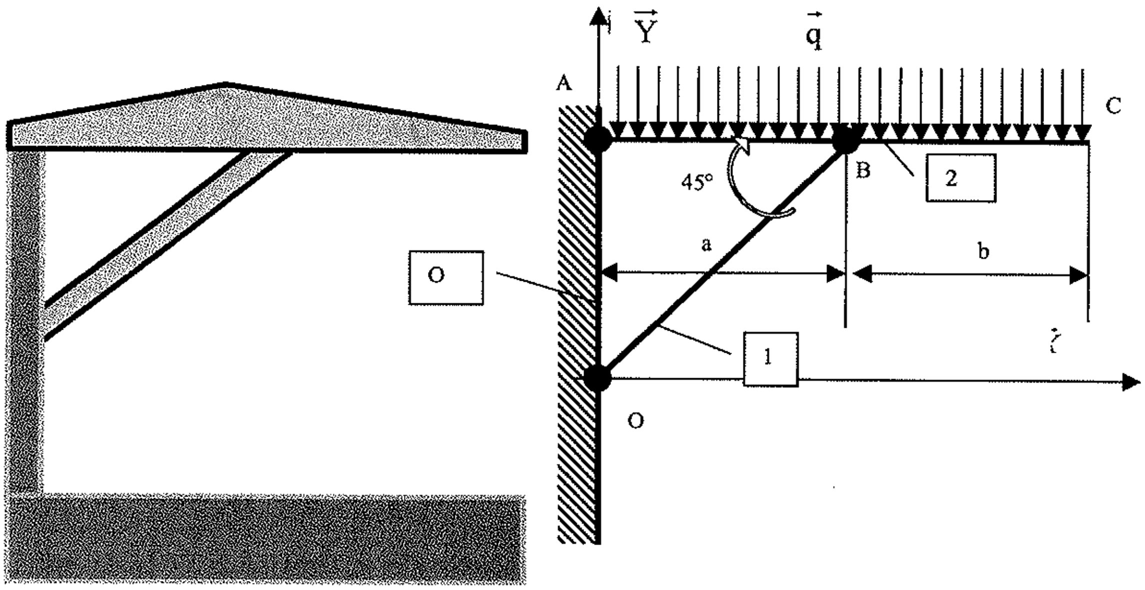
2) application numérique : déterminer $\left\|\vec{R}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{M_A}\right\|$ et T avec m = 50 kg
   g = 9.81 m/s^2
   L = 1 m
   h = 3.5 m
   d = 40 cm

<u>**TD3**</u>

Exercice 1 : *(Examen juin 2006)*

Le toit d'un stade de longueur (a+b) représenté sur la figure suivante est sollicité par son propre poids $\vec{q} = -q\,\vec{Y}$ avec q force linéique en N/m.
Ce toit (2) est fixé au bâti (0) en A, et un renfort (1) est placé entre (2) et (0). L'angle $\left(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}\right) = 45°$
<u>On travaille dans le plan</u> (en 2D).

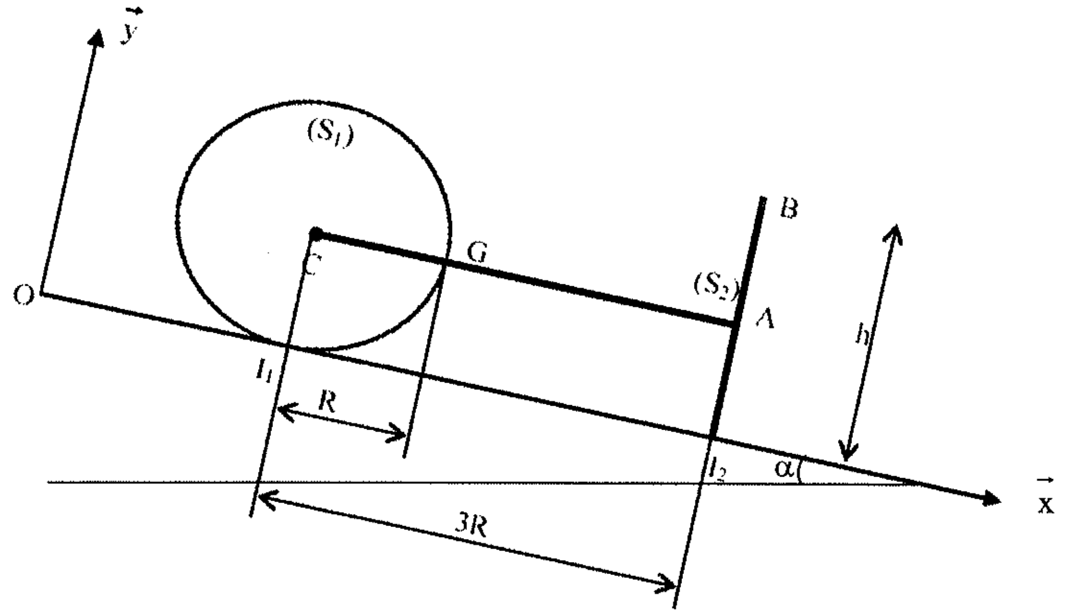
1) Déterminer la direction de l'effort mécanique $\vec{B}$ de (1) sur (2). Justifier.
2) Déterminer les efforts mécaniques en A et B c'est-à-dire les forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (soyez rigoureux dans la rédaction).
3) En déduire l'effort $\vec{O}$ de (1) sur (0).
4) Applications numériques : déterminer $\|\vec{A}\|$ et $\|\vec{B}\|$ avec q = 5kN/m, a = 4m et b = 5m.



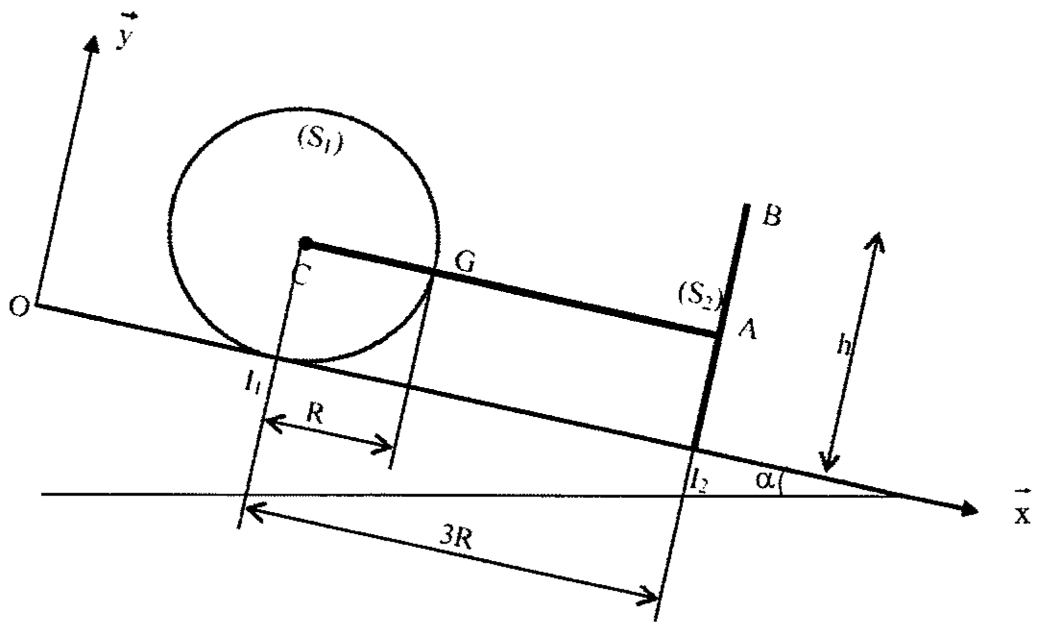
<u>Rappel :</u> la force linéique uniformément répartie $\vec{q}$ équivaut, en statique, à une force résultante unique placée au centre de AC de norme q(a+b) Newton.

Exercice 2 : *(Examen du 13 mai 2006)*

La figure ci dessous schématise un chasse-neige sur une route inclinée d'un angle α. Ce chasse-neige (S) est constitué d'une roue creuse (S_1) de rayon R et de masse m. Et d'une partie (S_2) ($CABI_2$), indéformable et de même masse m que la roue.
Le centre de gravité de (S) = (S_1) + (S_2) est G
La liaison en C est une liaison pivot supposée parfaite.
On suppose qu'il n'y a pas de roulement ni de frottement en I_1.
Par contre il y a du frottement en I_2 .
Le système est en équilibre.
Soient $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND et g l'accélération de la pesanteur.



1) Déterminer les efforts en I_1 et I_2 en fonction des données du problème (m, g et α).
2) Applications numériques avec m = 250kg, g = 9.81 ms^{-2} et α = 12.4°
3) Déterminer le coefficient de frottement mimimal pour que la condition de non glissement soit respectée en I_2 .
4) Retrouver graphiquement les valeurs numériques des efforts en I_1 et I_2 en utilisant l'annexe (n'oublier pas de préciser l'échelle et de faire apparaître toutes les constructions éventuelles).

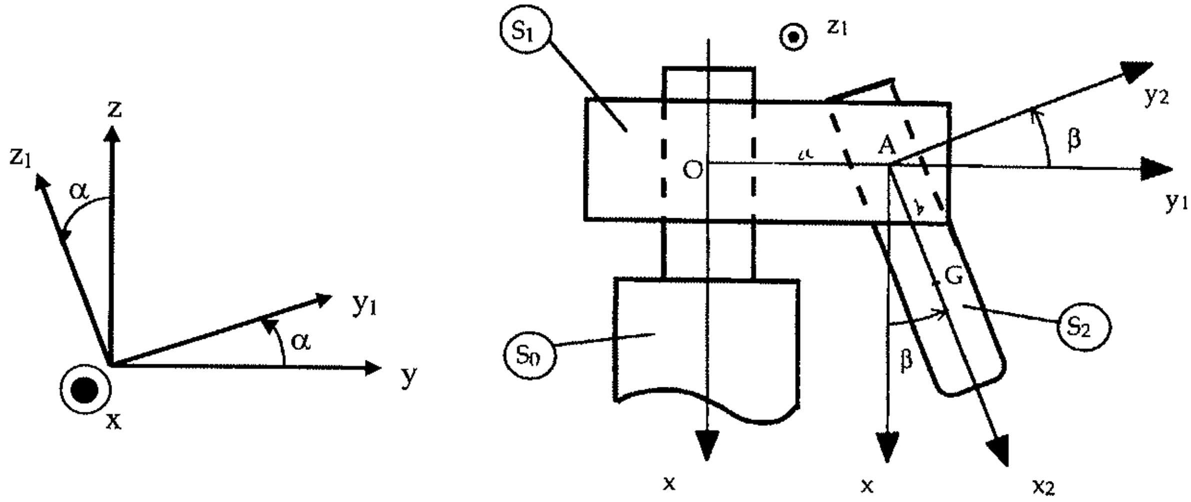


$\vec{y}$
(S_1)
B
C
G
(S_2)
O
A
h
I_1
R
I_2
α
$\vec{x}$
3R

TD4

Exercice 1 :

Considérons une centrifugeuse de laboratoire composée d'un bâti fixe (S_0), d'un bras (S_1) et d'une éprouvette (S_2) contenant deux liquides de masses volumiques différentes. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras (S_1) autour de l'axe (Ox), l'éprouvette (S_2) s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond de l'éprouvette, ce qui réalise la séparation des deux liquides.



Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un Repère Orthogonal Normé Direct (ROND) lié à (S_0). Les solides (S_0) et (S_1) sont en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$. $R_1(O,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est un ROND lié à (S_1). Posons $\alpha(t)=(\vec{y},\vec{y}_1)$.

Les solides (S_1) et (S_2) sont en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z}_1)$ telle que : $\overrightarrow{OA}=a\vec{y}_1$ (a constant). $R_2(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_1)$ est un ROND lié à (S_2). Posons $\beta(t)=(\vec{x},\vec{x}_2)$, β étant une fonction du temps inconnue.

Soit G le centre de gravité de (S_2) tel que : $\overrightarrow{AG}=b\vec{x}_2$ (b constant).

1) Faire les figures de calcul correspondantes aux deux paramètres de position α(t) et β(t).

2) Déterminer en fonction des données du problème le vecteur vitesse de rotation du ROND R_1 (c'est-à-dire du solide (S_1)) par rapport au ROND R_0 (c'est-à-dire du solide (S_0)) : $\vec{\Omega}(S_1/R_0)=\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, puis le vecteur vitesse de rotation du ROND R_2 (ou du solide (S_2)) par rapport au ROND R_1 : $\vec{\Omega}(S_2/R_1)=\vec{\Omega}(R_2/R_1)$.

En déduire $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$ par composition des vitesses.

3) Définir, en fonction des données du problème, le torseur cinématique caractéristique du mvt du solide (S_1) par rapport à (S_0) au point O. En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R_0)$.

4) Déterminer, en fonction des données du problème, le torseur cinématique caractéristique du mvt du solide (S_2) par rapport à (S_0) au point A. En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(G/R_0)$.

5) Déterminer, en dérivant le vecteur position $\overrightarrow{OG}$, $\vec{V}(G/R_0)$. Comparer avec le résultat précédent.

Exercice 2 : *(examen juin 2004)*

On se propose d'étudier un compresseur à gaz utilisant un système bielle-manivelle représenté schématiquement sur la figure ci-dessous. Dans cette étude aucune application numérique ne sera demandée.

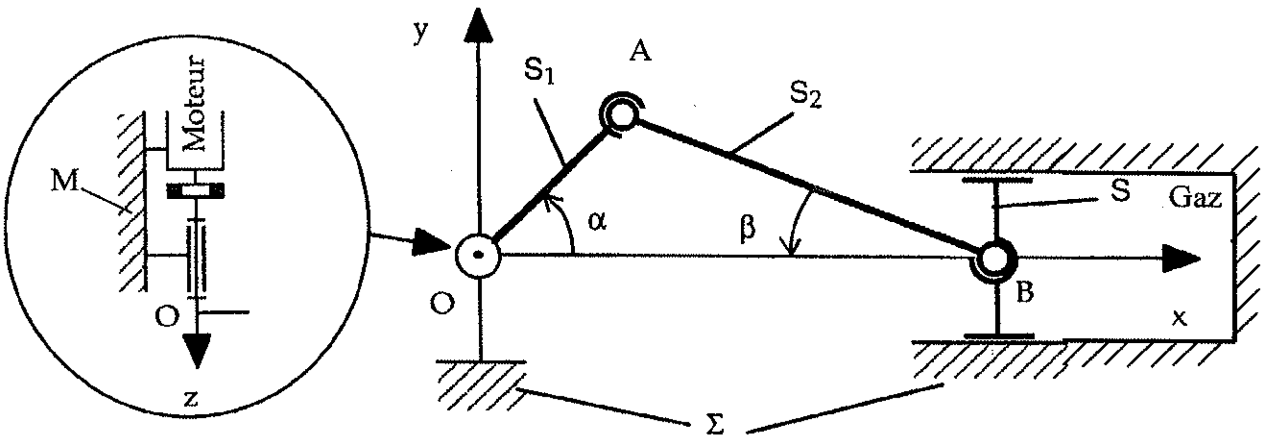


Fig : Système bielle manivelle d'un compresseur pneumatique

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un Repère Orthogonal Normé Direct (ROND), de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, lié au bâti (Σ).
La manivelle (S1), de masse négligeable, est en liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (Σ).
Le coulisseau (S), de masse négligeable, est en liaison glissière avec frottement (coefficient de frottement f) de direction $\vec{x}$ avec le bâti (Σ).
La bielle (S2), de masse négligeable, est en liaison rotule de centre A avec la manivelle (S1) et en liaison rotule de centre B avec le coulisseau (S). Ces deux liaisons sont sans frottement et le point B est sur l'axe $(O, \vec{x})$.
On pose : OA = R ; AB = L ; $(\vec{x}, \overrightarrow{OA}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{AB}, \vec{x}) = \beta$
Le moteur électrique d'axe $(O, \vec{z})$ exerce sur la manivelle (S1) un couple, donné par le moment $C\vec{z}$ (avec C>0).
Le gaz exerce sur le coulisseau (S) une force $(B, F\vec{x})$. F est algébrique.
On suppose l'ensemble du système en équilibre par rapport au bâti (Σ) dans une position telle que : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, représentée sur la figure.

1) Quelle relation y-a-t-il entre α et β ?

Dans la suite on notera, par exemple, X_O, Y_O et Z_O les 3 composantes d'une force inconnue dont la ligne d'action passerait par le point O.

2) Etudier l'équilibre de la manivelle (S1) et déterminer les 6 équations scalaires qui en découlent. *(Attention : il y a 3 actions appliquées à la manivelle).*

3) Etudier l'équilibre de la bielle (S2) et déterminer les 6 équations scalaires qui en découlent.

4) Etudier l'équilibre du coulisseau (S) et déterminer les 6 équations scalaires qui en découlent. *(Attention : il y a 3 actions appliquées au coulisseau).*

5) Déduire de l'ensemble des équations scalaires ainsi déterminées la forme du torseur des efforts extérieurs exercés par (Σ) sur (S).

6) Déterminer la relation traduisant le non-glissement du coulisseau (S) par rapport au bâti (Σ) à l'aide de la loi de coulomb appliquée à l'équilibre strict.

TD5

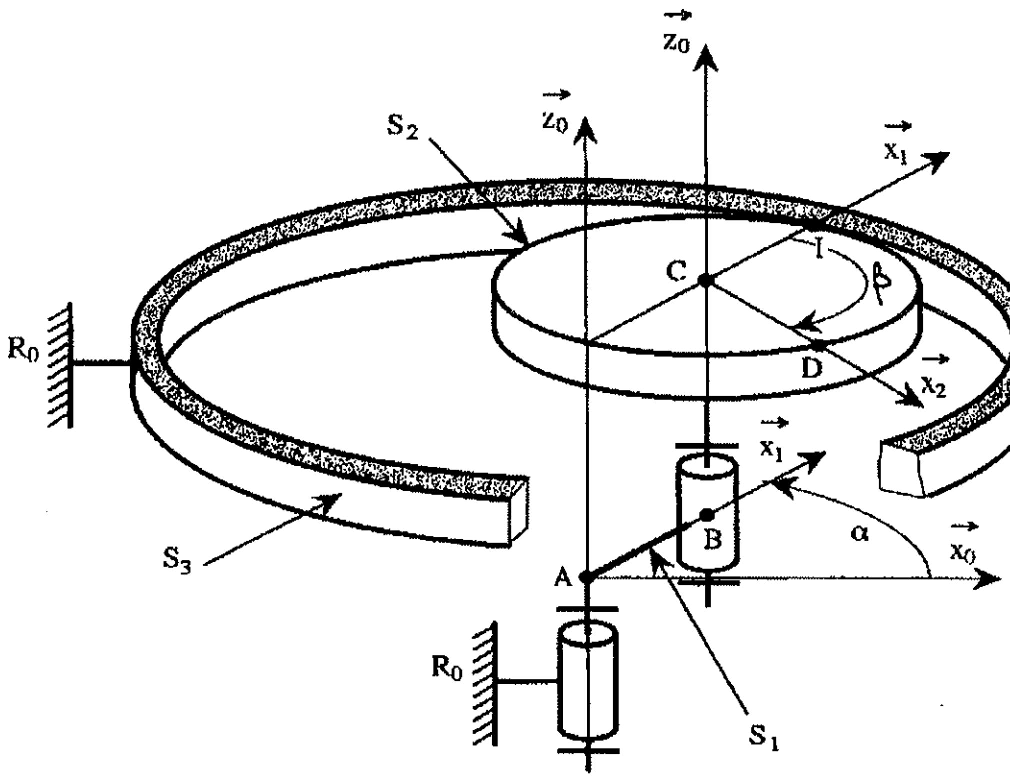
Exercice 1 :

Données géométriques :

$\overrightarrow{AB} = r\,\vec{x_1}$

$\overrightarrow{BC} = h\,\vec{z_0}$

$\overrightarrow{CD} = r\,\vec{x_2}$



Schématisation du mécanisme :

Bâti R0 : $R_0(A\,\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

Excentrique S1 : Liaison pivot par rapport à R_0 d'axe $(A,\overrightarrow{z_0})$
Paramètre de position α
$R_1(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$

Satellite S2 : Liaison pivot par rapport à R_1 d'axe $(B,\overrightarrow{z_0})$
Paramètre de position β
$R_2(B,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$

Couronne S3 : Lie au bâti R_0

La position initiale du mécanisme est : $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

Questions :

1) Faire les figures de calcul de l'étude et donner les vecteurs rotations de S_1 par rapport R_0, de S_2 par rapport à R_1 et de S_2 par rapport à R_0.
2) Ecrire l'équation de liaison qui traduit le roulement sans glissement en I de S_2 par rapport à S_3 (*$\dot{\alpha}$ en fonction de $\dot{\beta}$, puis α en fonction β*).
3) Déterminer $\vec{V}(D/R_0)$ (en utilisant la composition des vitesses) en fonction des vecteurs $\vec{y_1}$ *et* $\vec{y_2}$ puis écrire $\vec{V}(D/R_0)$ dans R_0.
4) Déterminer la trajectoire de D.
5) Déterminer $\vec{\Gamma}(D/R_0)$.

Exercice 2 :*(examen mai 2005)*

Soient 5 repères orthogonaux normés directs et 4 paramètres de position (toutes les informations sont sur le schéma cinématique).
Soit une lampe de bureau schématisée sur la figure suivante :

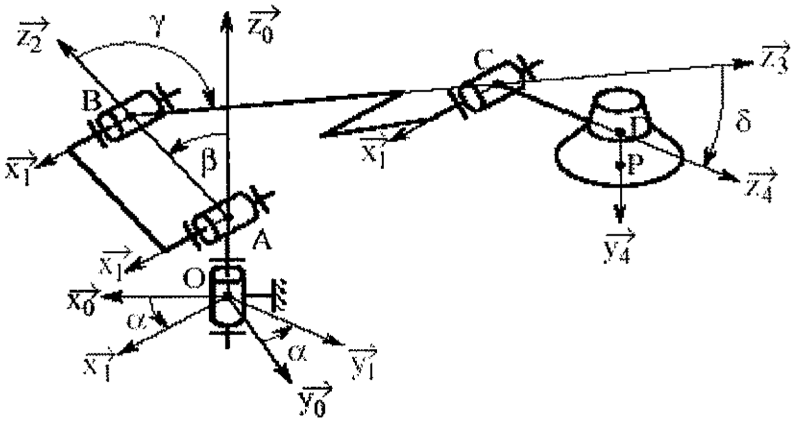


Schéma cinématique

on a :

$\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{Z_0}$

$\overrightarrow{AB} = b\,\overrightarrow{Z_2}$ avec a, b, c et d constants

$\overrightarrow{BC} = c\,\overrightarrow{Z_3}$

$\overrightarrow{CD} = d\,\overrightarrow{Z_4}$

1) Faire les 4 figures de calcul.
2) Déterminer les vecteurs de rotation suivants :

$\vec{\Omega}(S_4/S_3), \vec{\Omega}(S_3/S_2), \vec{\Omega}(S_2/S_1), \vec{\Omega}(S_1/S_0), \vec{\Omega}(S_4/S_0), \vec{\Omega}(S_3/S_0)$ *et* $\vec{\Omega}(S_2/S_0))$

3) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in S_3/R_0)$ en utilisant les formules du cours.
4) Déterminer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(B \in S_3/R_0)$.

TD6

Exercice 1 :

La figure ci dessous schématise un chasse-neige essayant de se déplacer sur une horizontale. Ce chasse-neige (S) est constitué d'une roue creuse (S_1) de rayon R , de longueur L et de masse m. Et d'une partie (S_2) ($CABI_2$), indéformable, de même masse m et de même longueur L que la roue.

Le centre de gravité de (S) = (S_1) + (S_2) est G

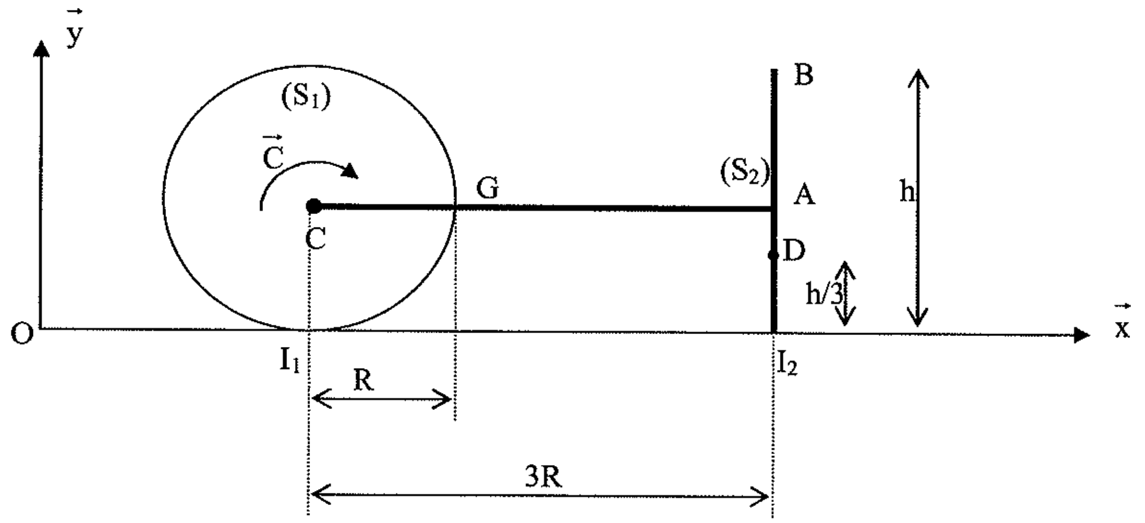
Un moteur exerce sur la roue un couple de moment $\vec{C} = C\vec{z}$.

La liaison en C est supposée parfaite.

L'action mécanique exercée en I_2 est le contact avec le sol $\vec{N}$ (on suppose qu'il n'y a pas de frottement) et la poussée de la neige $\vec{F}$ (supposée suivant l'axe des abscisses) est appliquée en D.

Le coefficient de frottement (ou de glissement) entre le sol et la roue est f.

Soient $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND et g l'accélération de la pesanteur.

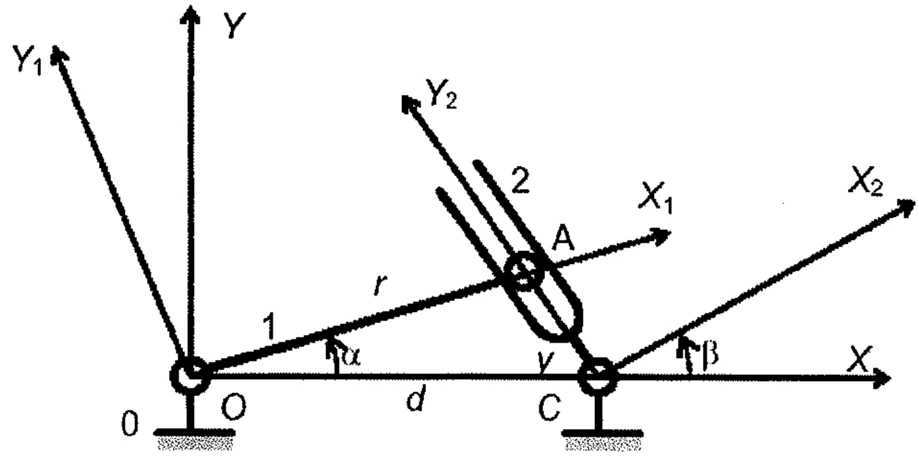


1) Placer les efforts mécaniques extérieurs exercés sur le système (S) sur une nouvelle figure.
2) A partir de quelle force $\overrightarrow{F_{max}}$ le chasse neige n'avance plus ?
3) AN pour m = 50kg, R = 0.25m, h = 0.5m et f = 0.3.
4) En supposant que la force surfacique qu'exerce la neige sur cette plaque rectangulaire avant du chasse-neige est :

   $\overrightarrow{p(y)} = (-800y + 400)\vec{x}$ en N/m^2.

   Déterminer la longueur L du chasse neige pour qu'il puisse avancer en permanence (sans déraper).

Exercice 2:



Le mécanisme ci-dessus transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre (1) en un mouvement de rotation intermittent de la pièce (2).
La pièce (2) est constitué de 3 branches à 120° identiques à CA (seule la branche CA est représentée sur le dessin).
Lorsque le doigt A de l'arbre (1) quitte la rainure de la pièce (2), l'angle OAC est égale à 90° et l'angle ACO est égale à 60°, de façon qu'au tour suivant le doigt A puisse entrer dans la rainure suivante (non représentée) de la pièce (2).

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un ROND lié au bâti (0).

Soit $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\vec{z})$ un ROND lié à l'arbre (1).

Soit $R_2(C,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\vec{z})$ un ROND lié à la pièce (2).

L'arbre (1) est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le bâti (0).

La pièce (2) est en liaison pivot d'axe $(C,\vec{z})$ avec le bâti (0).

On a $\alpha = (\vec{x},\overrightarrow{x_1})$ et $\beta = (\vec{x},\overrightarrow{x_2})$.

On a $\overrightarrow{OA} = r\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{OC} = d\vec{x}$ et $\overrightarrow{CA} = y(t)\overrightarrow{y_2}$ (avec y(t) variable et positif).

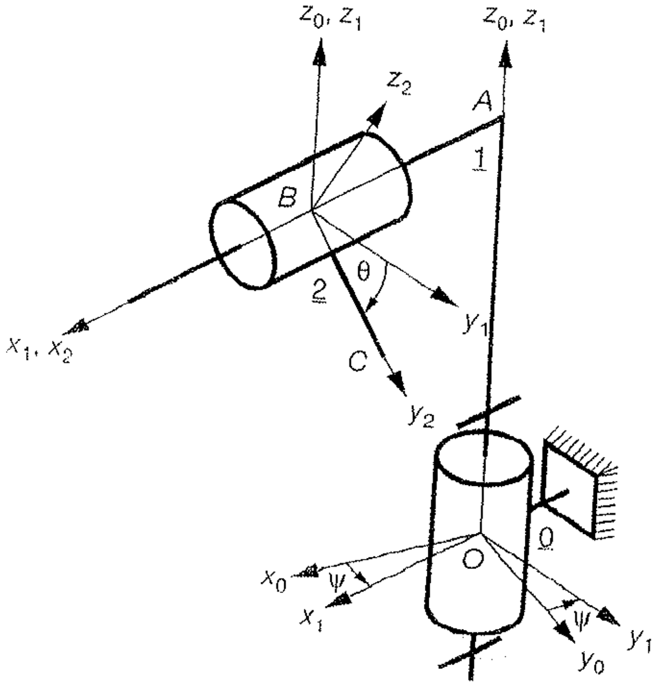
QUESTIONS :

1) Expliquer en quelques mots le fonctionnement du mécanisme (il est conseillé de faire un dessin).
2) Combien de tours doit faire l'arbre (1) pour faire tourner la pièce (2) de 2 tours ?
3) Quand le doigt A quitte la rainure de (2) que vallent α et β
4) Faire les deux figures de calcul et en déduire $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$.
5) Déterminer $\vec{V}(A \in 1/R_0)$ en fonction des données du problème.
6) Déterminer $\vec{V}(A \in 2/R_0)$ en fonction des données du problème.
7) En déduire $\vec{V}(A \in 1/R_2)$ en fonction des données du problème.
8) Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}(A \in 1/R_2)$ en fonction des données du problème.
9) Exprimer $\vec{V}(A \in 1/R_2)$ dans le repère R_2 (*rappel trigonométrique : cosa cosb + sina sinb = cos(a-b) et sina cosb – sinb cosa = sin(a-b)*).

TD7

Exercice 1 :

On considère le système représenté ci-dessous.

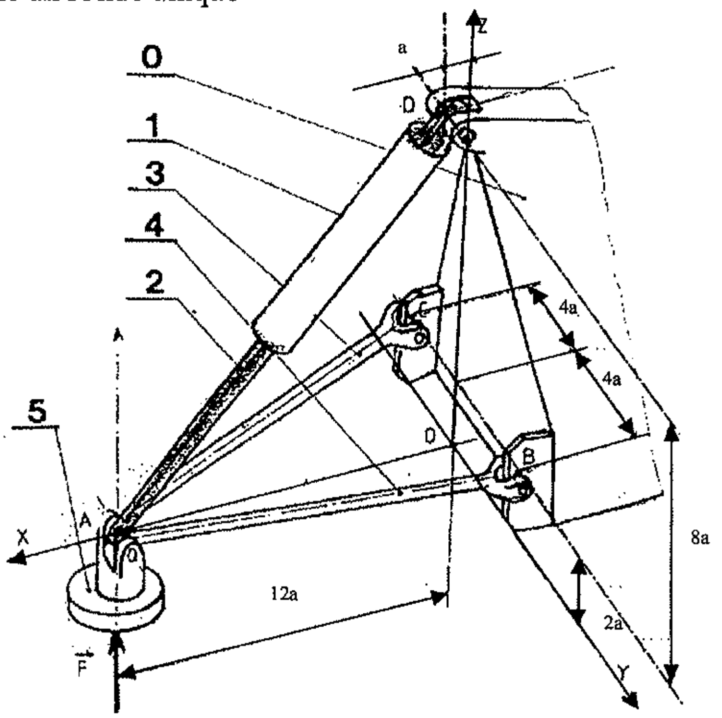


Soit R₀ $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère lié au bâti (0), R₁ $(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$ un repère lié au corps (1) et R₂ $(B,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ un repère lié à la tête (2). Le corps (1) est en liaison pivot autour de l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ par rapport au bâti (0). On notera $\psi = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})$ et OA=a. La tête (2), composée d'un tube et d'une tige BC, est en liaison pivot glisant autour de l'axe $(A,\overrightarrow{x_1})$ par rapport au corps (1). On notera $\theta = (\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_2})$, AB= $\mu(t)$ et BC=c.

1) Faire les figures de calcul et déterminer le vecteus de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$.
2) Ecrire au point A les torseurs cinématiques $V(S_1/R_0)$ et $V(S_2/R_1)$.
3) En déduire le torseur cinématique de $V(S_2/R_0)$.
4) Déterminer la vitesse du point C $\vec{V}(C \in S_2/R_0)$.
5) Déterminer l'accélération du point C $\vec{\Gamma}(C \in S_2/R_0)$.

<u>**Exercice 2 :**</u>

La figure ci dessous représente l'un des 4 pieds stabilisateurs d'un engin de chantier. Chaque pied est composé d'un patin (5), de deux barres (3) et (4) et d'un vérin hydraulique (1)+(2) ((1)=corps, (2)=piston). Les barres sont articulées en C et B sur le bâti (0) de l'engin et en A sur le patin. Toutes les liaisons sont considérées comme des liaisons rotules et la liaison en A est commune aux pièces (2), (3), (4) et (5). On considérera dans la suite de l'exercice que le vérin (1)+(2) forme un solide unique



L'effort reçu par le patin est $\vec{F} = F\,\vec{z}$.
On donne a = 200 mm

1) Déterminer les vecteurs unitaires de direction $\overrightarrow{AB}$ noté$(\overrightarrow{N_{\overrightarrow{AB}}})$, $\overrightarrow{AC}$ noté$(\overrightarrow{N_{\overrightarrow{AC}}})$ et de direction $\overrightarrow{DA}$ noté $(\overrightarrow{N_{\overrightarrow{DA}}})$. (rappel : le vecteur unitaire de direction $\vec{u}$ est : $\overrightarrow{N_{\vec{u}}} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$)
2) Déterminer les efforts exercés sur le patin par les barres et le vérin. C'est-à-dire déterminer $\|\vec{F}_{(4\to5)}\|$, $\|\vec{F}_{(3\to5)}\|$ et $\|\vec{F}_{(2\to5)}\|$ en fonction de F.
3) Applications numériques pour F = 30kN

Examen de Mécanique mai 2007

Durée 2h

la calculatrice est autorisée

Exercice I : cinématique

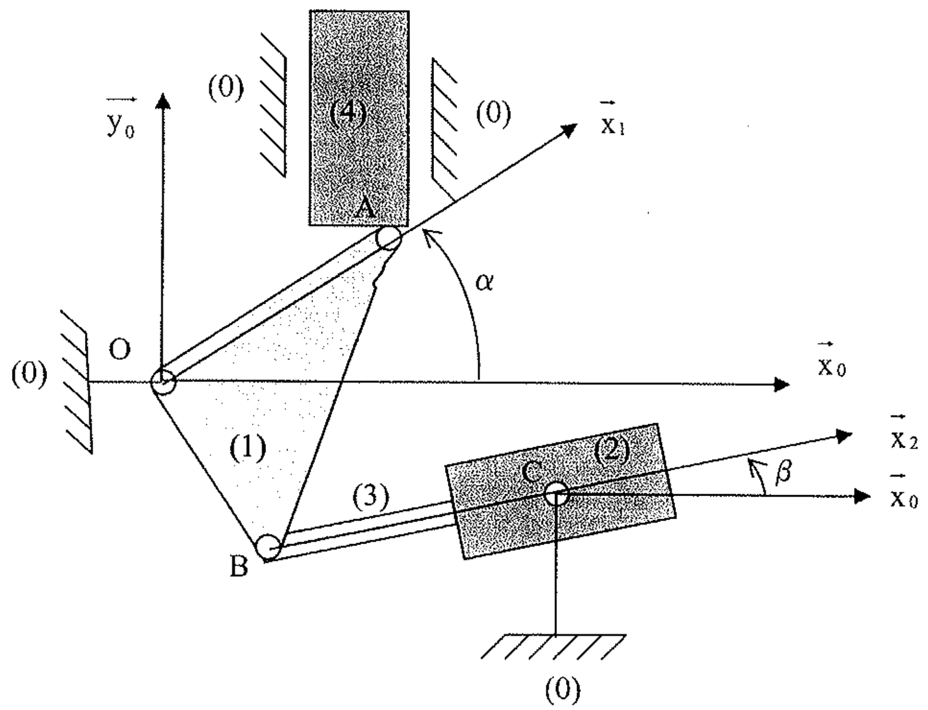
Soit une partie d'un manipulateur de fraiseuse composé d'un bâti (0), d'un levier (1), d'un vérin (2)+(3) ((3) étant la tige du vérin et (2) le corps du vérin) et d'un piston (4). Ce dispositif sert à alimenter ou à évacuer des pièces grâce au piston (4).

Soient $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au bâti (0).

$R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au levier (1).

$R_2(C, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0})$ un ROND lié au corps du vérin (2).

On a $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = \beta$



Le levier (1) est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ avec le bâti (0).

La tige (3) du vérin est en liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ avec le levier (1).

La tige (3) du vérin est en liaison glissière d'axe $(B, \overrightarrow{x_2})$ avec le corps (2) du vérin.

Le corps (2) du vérin est en liaison pivot d'axe $(C, \overrightarrow{z_0})$ avec le bâti (0).

Le piston (4) est en liaison glissière d'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$ avec le bâti (0).

Le piston (4) est en appui simple sur le levier (1) en A.

On notera que : $\overrightarrow{CB} = -\lambda\,\overrightarrow{x_2}$ avec λ dépendant du temps

$\overrightarrow{BO} = d\,\overrightarrow{y_1}$ avec d fixe

$\overrightarrow{AO} = -d\,\overrightarrow{x_1}$

On notera également que la vitesse de glissement du levier (1) sur le piston (4) en A est : $\vec{V}(A \in 4/R_1) = v\,\overrightarrow{x_0}$

Questions :

1) Expliquer en quelques lignes le fonctionnement de ce dispositif.
2) Faire les figures de calcul nécessaire à cette étude, puis donner les vecteurs vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0, de R_2 par rapport à R_0 et de R_2 par rapport à R_1.
3) Déterminer le torseur cinématique de la tige (3) dans son mouvement par rapport à R_2, au point B.
4) Calculer de deux façons différentes la vitesse du point B appartenant à (3) par rapport à R_0.
5) Calculer la vitesse de B appartenant à (1) par rapport à R_0.
6) Déduire des deux questions précédentes une relation vectoriel faisant intervenir $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ et $\dot{\lambda}$.
7) Calculer la vitesse de A appartenant à (4) par rapport à R_0, puis écrire ce vecteur dans le repère R_0.
8) En observant le mouvement du piston (4) par rapport au repère R_0, déduire une relation entre v, d et α.

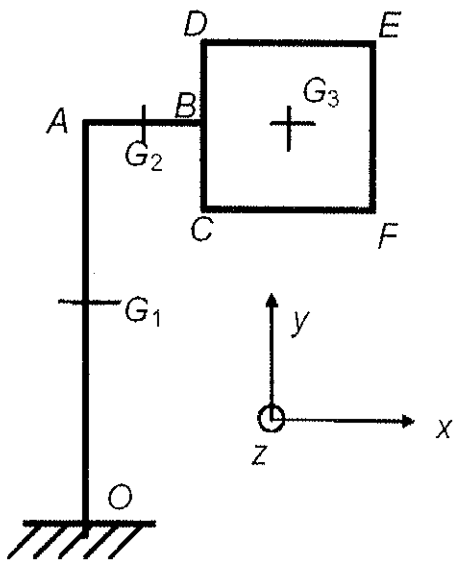
Exercice II : statique

Une pancarte carré CDEF de coté a et de centre de gravité G_3 est attachée en B sur un poteau OAB. Le poteau est composé d'une poutre OA de longueur L et de centre de gravité G_1, et d'une poutre AB de longueur d et de centre de gravité G_2. On appellera structure l'ensemble pancarte CDEF + poteau OAB.

Soit m_1 la masse de la poutre OA, m_2 la masse de la poutre AB et M la masse de la pancarte CDEF.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un ROND.

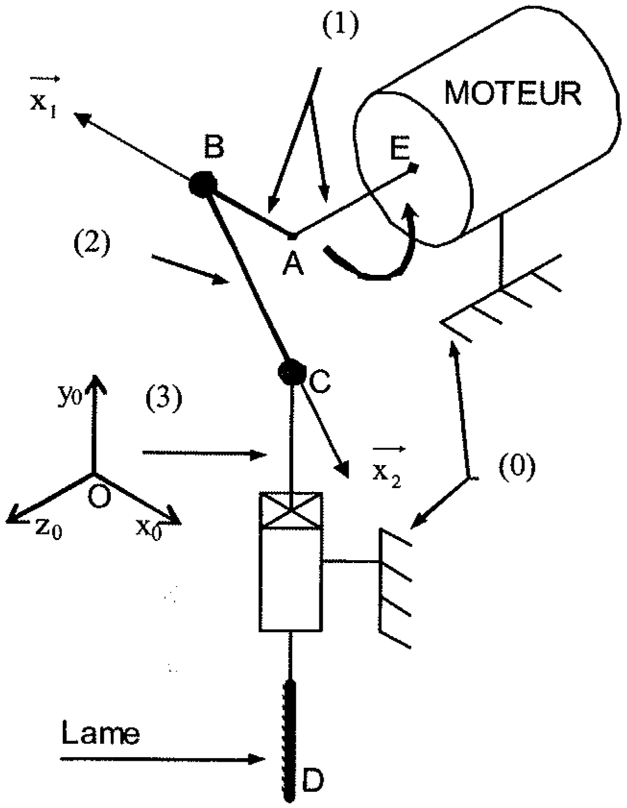
L'action du vent sur la pancarte est représentée par une densité surfacique d'efforts $\vec{p} = p\,\vec{z}$ avec p constant.



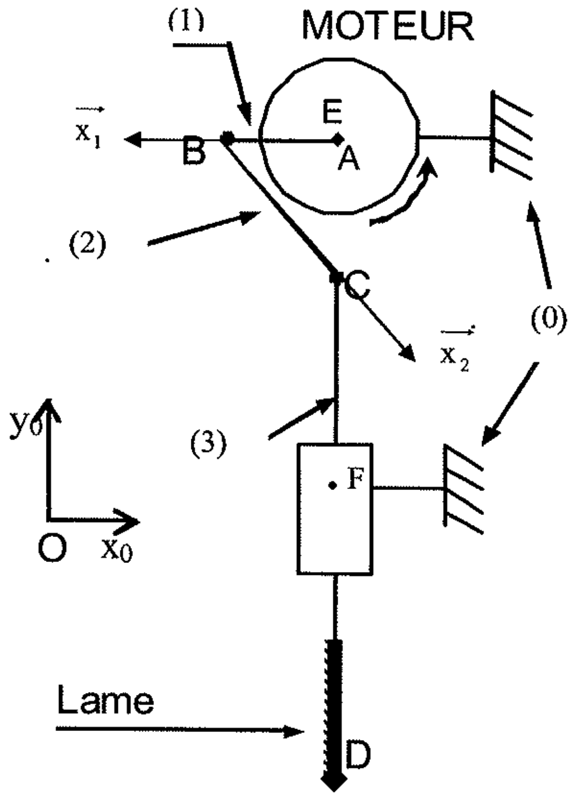
1) Calculer l'effort résultant $\vec{R}$ du vent s'exerçant sur la pancarte.
2) Placer sur la figure ci-contre les différents efforts que subit la structure.
3) Déterminer le torseur statique de l'action du sol sur la structure.

Exercice 1 – Scie sauteuse (Cinématique)

Le principe de fonctionnement de la scie sauteuse est décrit sur le schéma ci-dessous.
Le moteur entraîne en rotation l'axe (1). La bielle (2) est en liaison pivot d'axe $(B,\overrightarrow{z_0})$ en B et d'axe $(C,\overrightarrow{z_0})$ en C. La lame (3) est en liaison glissière avec le bâti (0). Mis à part le repère R_0, les repères ne sont pas indiqués sur la figure.



Shéma 1 : schématisation en 3D



Shéma 2 : schématisation en 2D

Schématisation

Bâti (0)	Repère lié R_0 $(E,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$
Axe (1)	Repère lié R_1 $(E,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$
	Liaison pivot d'axe $(E,\overrightarrow{z_0})$ par rapport au bâti 0 de paramètre β
Bielle (2)	Repère lié R_2 $(B,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$
	Liaison pivot d'axe $(B,\overrightarrow{z_0})$ par rapport à l'axe 1 de paramètre θ
Lame (3)	Repère lié R_3 $(C,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$
	Liaison glissière de direction $(C,\overrightarrow{y_0})$ par rapport au bâti (0)

$AB = a\,\overrightarrow{x_1}$, $BC = b\,\overrightarrow{x_2}$, $FC = \lambda\,\overrightarrow{y_0}$

a et b sont des constantes, λ, β et θ sont variables.

Questions :

1) Dessiner les figures de calcul nécessaires à l'étude. En déduire les vecteurs vitesses de rotation correspondantes.
2) Calculer $\vec{V}(B \in 1/0)$
3) Calculer $\vec{\Gamma}(B \in 1/0)$
4) Faire le schéma 2 pour $\beta = \pi/2$, dans ce cas que vaut θ ?
5) Calculer $\vec{V}(C \in 2/0)$ en passant par l'axe (1). (réponse en fonction de a, b, θ et β)
6) Ecrire $\vec{V}(C \in 2/0)$ dans R_0.
7) Calculer $\vec{V}(C \in 2/0)$ en passant par la lame (3) (réponse en fonction de λ)
8) Calculer $\vec{V}(D \in 3/0)$

Rappel :

$$\begin{aligned}
\sin(A-B) &= \sin A\cos B - \cos A\sin B\\
\sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\\
\cos(A-B) &= \cos A\cos B + \sin A\sin B\\
\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B
\end{aligned}$$

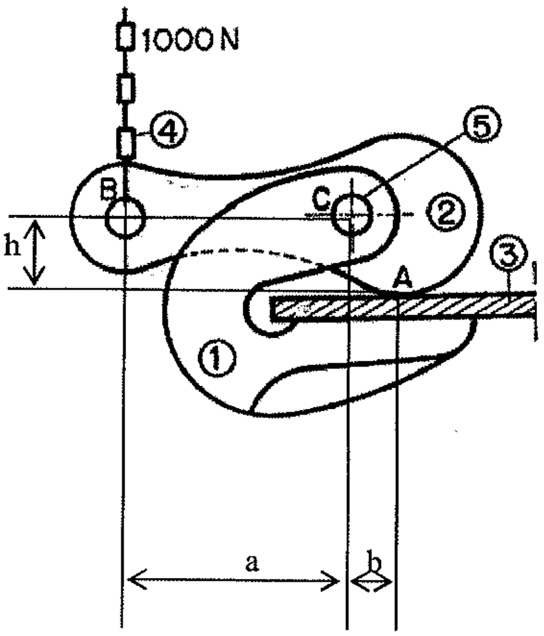
Exercice 2 – frottement (Statique)

Un dispositif de levage de plaques de tôles est constitué par deux pinces symétriques données par la figure ci–dessous. Au moment du levage, sous l'effet de la tension progressive de la chaîne 4, la pièce 1 ne lisse pas sur la tôle, tandis que la pièce 2, articulée en *C*, serre la tôle en *A* en glissant avant de prendre une position d'équilibre. La liaison entre (1) et (2) est une liaison pivot parfaite. Nous travaillons en 2D et $\vec{F}$ est connue.

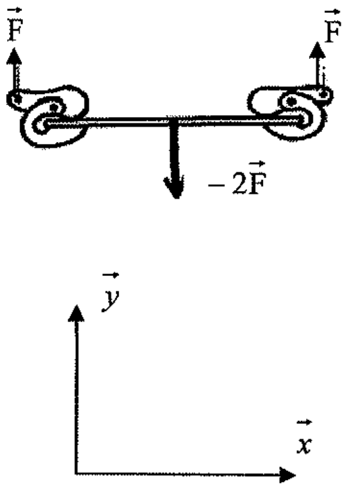
Question :

1) Juste au moment de prendre une position d'équilibre, déterminer le torseur de l'action de (1) sur (2) en fonction des données du problème.
2) Déterminer numériquement la force de (1) sur (2), avec :

a = 1m
b = 10cm
h = 15cm
f = 0.2
F = 1000N



1000 N
4
5
B
C
2
h
3
A
1
a
b



$\vec{F}$
$\vec{F}$
$-2\vec{F}$
$\vec{y}$
$\vec{x}$

Etude d'un robot 4 axes

Le schéma ci-dessous représentent un robot 4 axes constitué des solides 1, 2, 3 ,4 et du bâti 0.

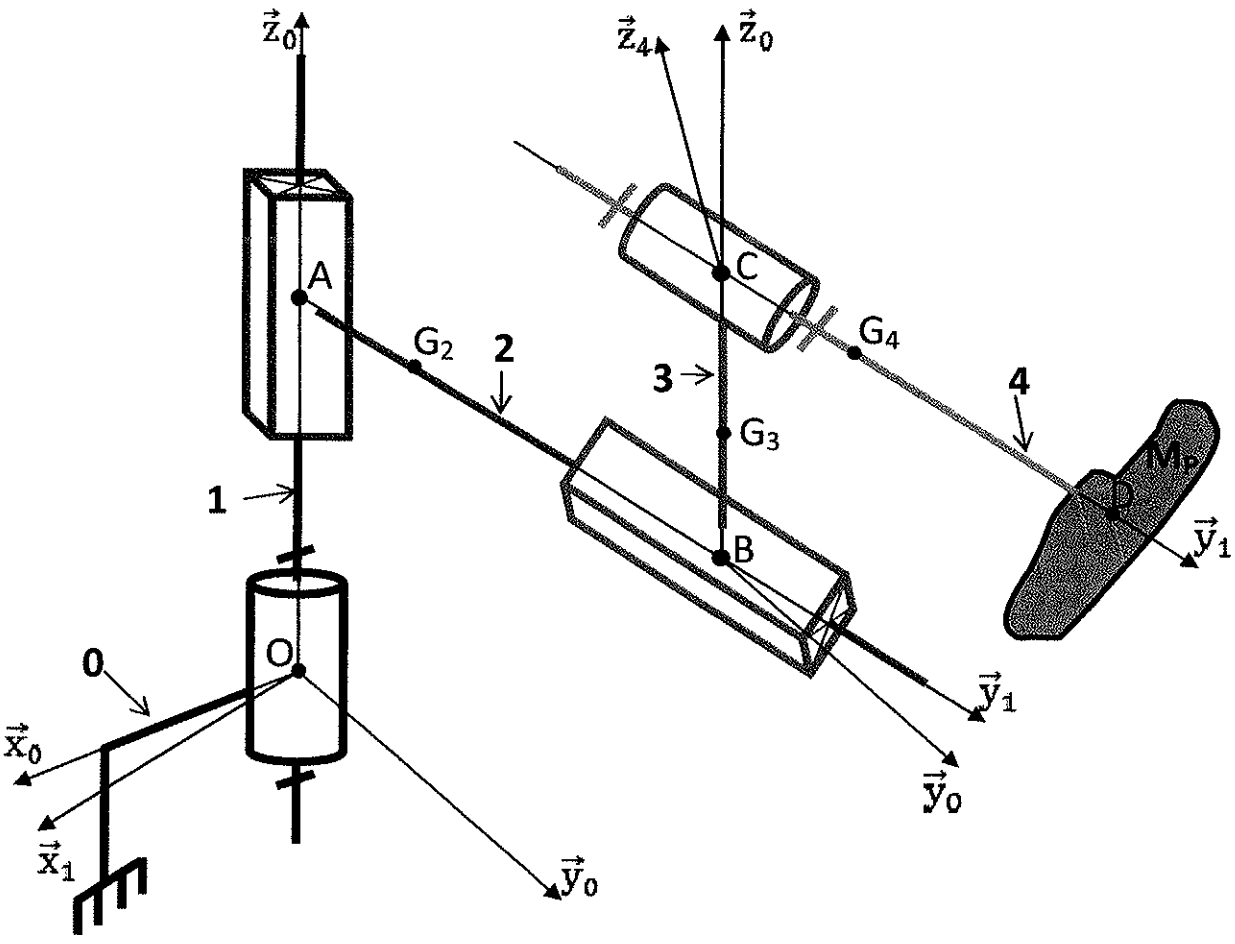
Le solide 1 est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z_0})$ par rapport au bâti 0.

Le solide 2 est en liaison glissière d'axe $(O,\vec{z_0})$ par rapport au solide1.

Le solide 3 est en liaison glissière d'axe $(A,\vec{y_1})$ par rapport au solide 2.

Le solide 4 est en liaison pivot d'axe $(C,\vec{y_1})$ par rapport au solide 3

Ce robot permet de déplacer un objet de masse M_p fixé sur la pince du solide 4 en D,



Schématisation

Bâti 0	R_0 $(\mathbf{O}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ROND lié au bâti 0
Solide 1	R_1 $(\mathbf{O}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ ROND lié au solide 1
	$\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$
	Centre de gravité O, masse m_1
Solide 2	R_2 $(\mathbf{A}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ ROND lié au solide 2
	$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \lambda\, \vec{z}_0$ (λ non constant)
	Le centre de gravité est défini par G_2 tel que $\overrightarrow{\mathbf{AG_2}} = \mathbf{a}\, \vec{y}_1$, masse m_2
Solide 3	R_3 $(\mathbf{B}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ ROND lié au solide 3
	$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mu\, \vec{y}_1$ (μ non constant)
	Le centre de gravité est défini par G_3 tel que $\overrightarrow{\mathbf{BG_3}} = \mathbf{b}\, \vec{z}_0$, masse m_3
Solide 4	R_4 $(\mathbf{C}, \vec{x}_4, \vec{y}_1, \vec{z}_4)$ ROND lié au solide 4
	$\beta(t) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$
	Le centre de gravité est défini par G_4 tel que $\overrightarrow{\mathbf{CG_4}} = \mathbf{c}\, \vec{y}_1$, masse m_4
	Le point D appartient au solide 4 et $\overrightarrow{\mathbf{CD}} = \mathbf{d}\, \vec{y}_1$

Le centre de gravité de l'objet de masse M_p à déplacer est D

$\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \mathbf{r}\, \vec{z}_0$

a, b, c, d et e sont des constantes.

L'axe $\vec{z}_0$ est vertical orienté vers le haut.

Partie statique :

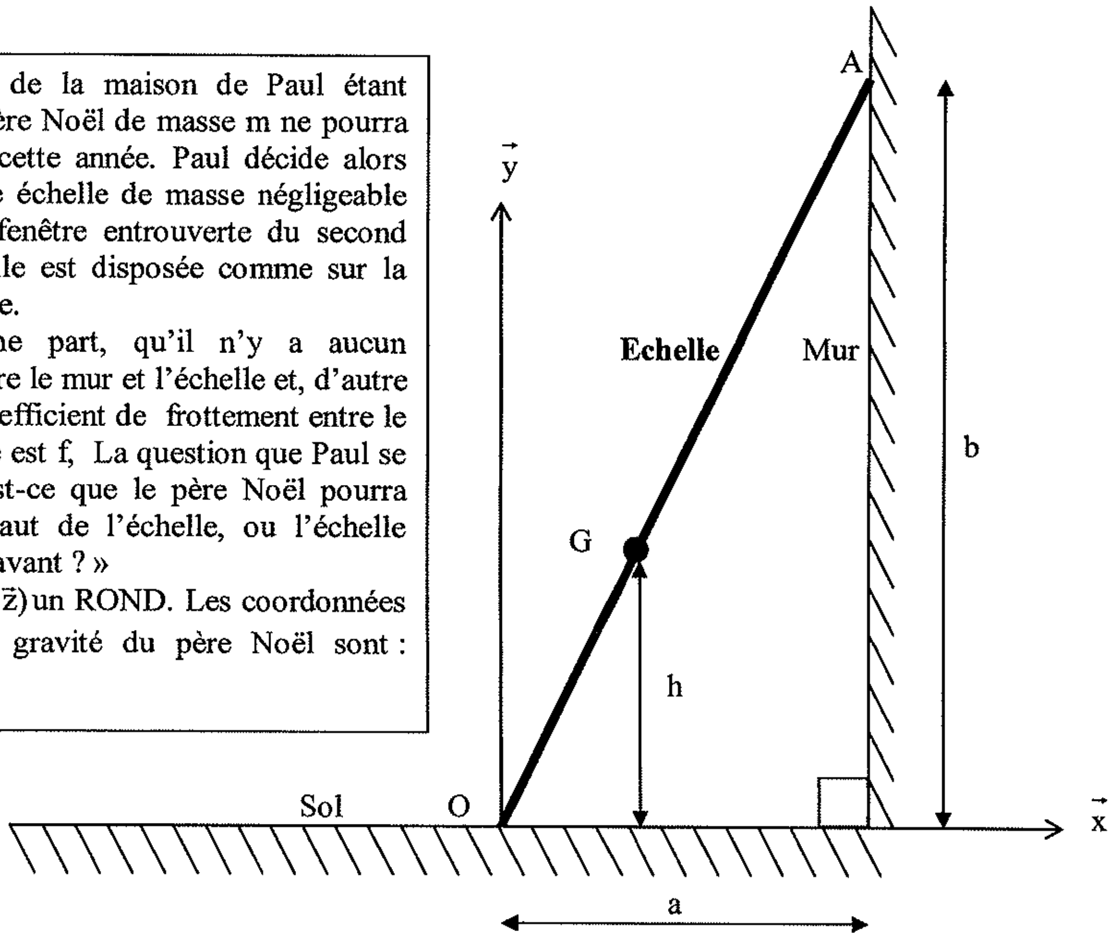
1. Isoler le solide 4
   - Faire le bilan des actions mécaniques appliquées.
   - Calculer le torseur de l'action de 3 sur 4 en fonction des données.

Partie cinématique :

1. Tracez les figures de calcul définissant α et β, en représentant tous les vecteurs impliqués.
2. Déterminer $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$, $\vec{\Omega}_{3/2}$, $\vec{\Omega}_{4/3}$ et $\vec{\Omega}_{4/0}$
3. Calculer $\vec{V}_{A\,1/0}$ et écrire le torseur cinématique du mouvement de 1 par rapport à 0 en A.
4. Quel le mouvement de 2 par rapport à 1 ? Déterminer $\vec{V}_{A\,2/1}$ et en déduire le torseur cinématique du mouvement de 2 par rapport à 0 en B.
5. Ecrire le torseur cinématique du mouvement de 3 par rapport à 0 en B.
6. Ecrire le torseur cinématique du mouvement de 4 par rapport à 0 en D.

Exercice 1 (statique) : (réalisé le 24 décembre)

La cheminée de la maison de Paul étant obstruée, le père Noël de masse m ne pourra pas y passer cette année. Paul décide alors d'installer une échelle de masse négligeable menant à la fenêtre entrouverte du second étage. L'échelle est disposée comme sur la figure ci-contre.
Sachant, d'une part, qu'il n'y a aucun frottement entre le mur et l'échelle et, d'autre part, que le coefficient de frottement entre le sol et l'échelle est f, La question que Paul se pose est : « est-ce que le père Noël pourra atteindre le haut de l'échelle, ou l'échelle glissera t-elle avant ? »
Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un ROND. Les coordonnées du centre de gravité du père Noël sont : $G(X_G,h)$.



QUESTIONS :

1) Déterminer, de manière rigoureuse, X_G en fonction des données du problème (a,b,h)
2) En considérant que XG= ah/b, déterminer (en fonction des données du problème) à quelle hauteur h le père Noël va faire glisser l'échelle ?
3) Application Numérique avec : a=1m ; b=3m et f=0,1
4) Quel coefficient de frottement f (en fonction des données du problème) faudrait-il pour que le père Noël puisse accéder à la fenêtre du second étage ?
5) Application Numérique avec : a=1m ; b=3m

Exercice 2 (cinématique) :

Bâti (0) Repère lié R_0 $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$

Pièce (1) Repère lié R_1 $(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$

Liaison pivot d'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ par rapport au bâti 0, de paramètre $\alpha(t)$

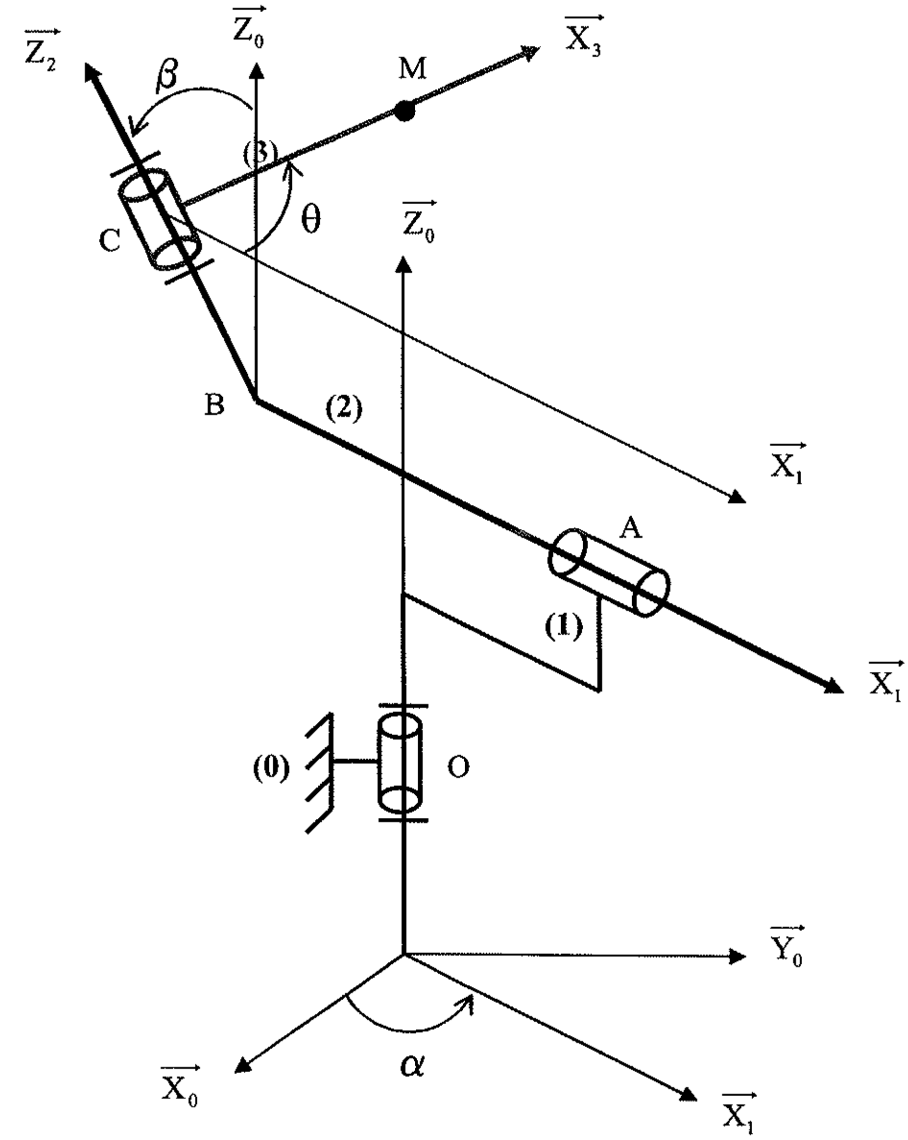
Pièce (2) Repère lié R_2 $(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

Liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$ par rapport à (1), de paramètre $\beta(t)$

Pièce (3) Repère lié R_3 $(C, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_2})$

Liaison pivot d'axe $(C, \overrightarrow{Z_2})$ par rapport à (2), de paramètre $\theta(t)$

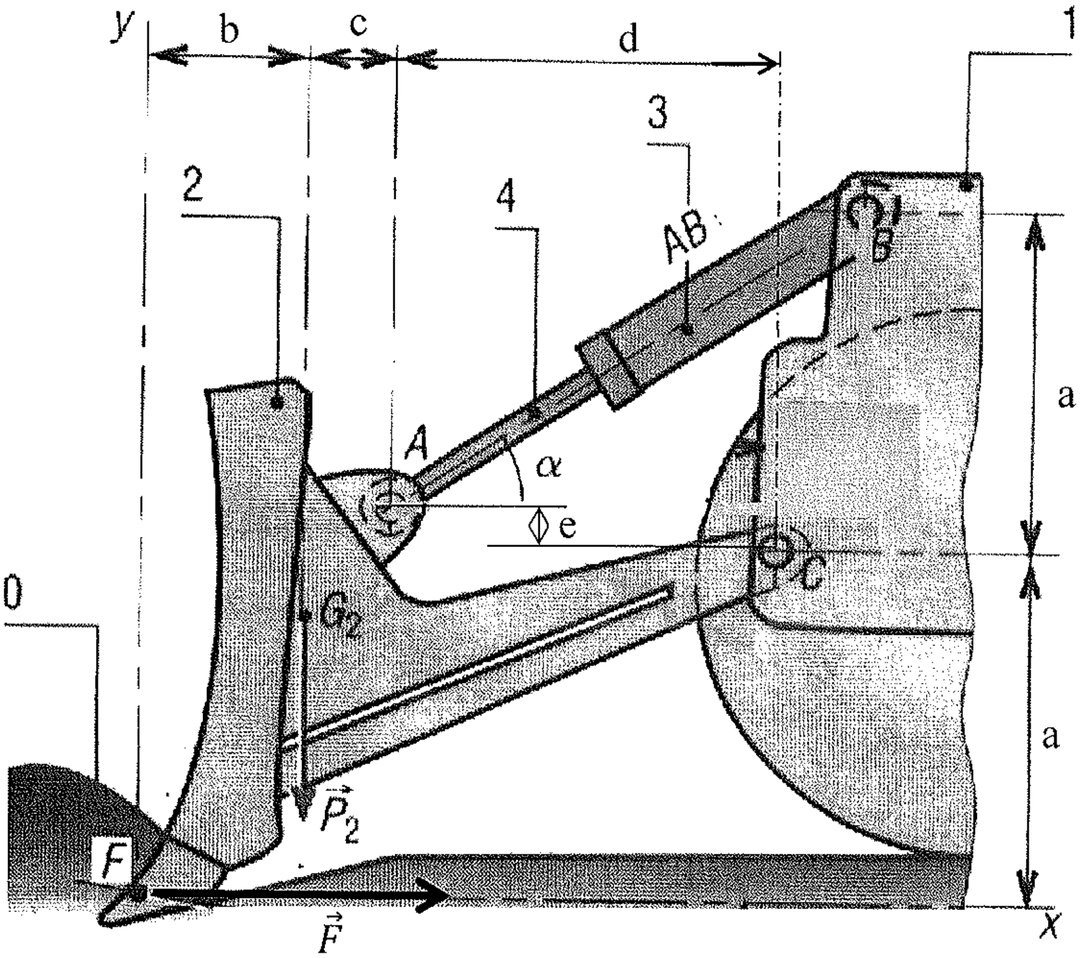
$\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{X_1} + a\overrightarrow{Z_0}$
$\overrightarrow{BA} = \lambda\, \overrightarrow{x_1}$
$\overrightarrow{BC} = c\,\overrightarrow{z_2}$
$\overrightarrow{CM} = d\,\overrightarrow{x_3}$
a, b, c et d sont des constantes λ est variable ($\lambda=\lambda(t)$)



QUESTIONS :

1) Dessiner les figures de calcul nécessaires à l'étude. En déduire les vecteurs vitesses de rotation correspondantes.
2) Calculer le torseur cinématique de la pièce (1) par rapport à R_0 au point A.
3) Calculer le torseur cinématique de la pièce (2) par rapport à R_0 au point B.
4) Calculer le torseur cinématique de la pièce (2) par rapport à R_0 au point C.
5) Calculer le torseur cinématique de la pièce (3) par rapport à R_0 au point C.
6) Calculer $\vec{\Gamma}(B \in 2/0)$.
7) Calculer $\vec{V}(M \in 3/0)$.

Engin de travaux publics : Statique



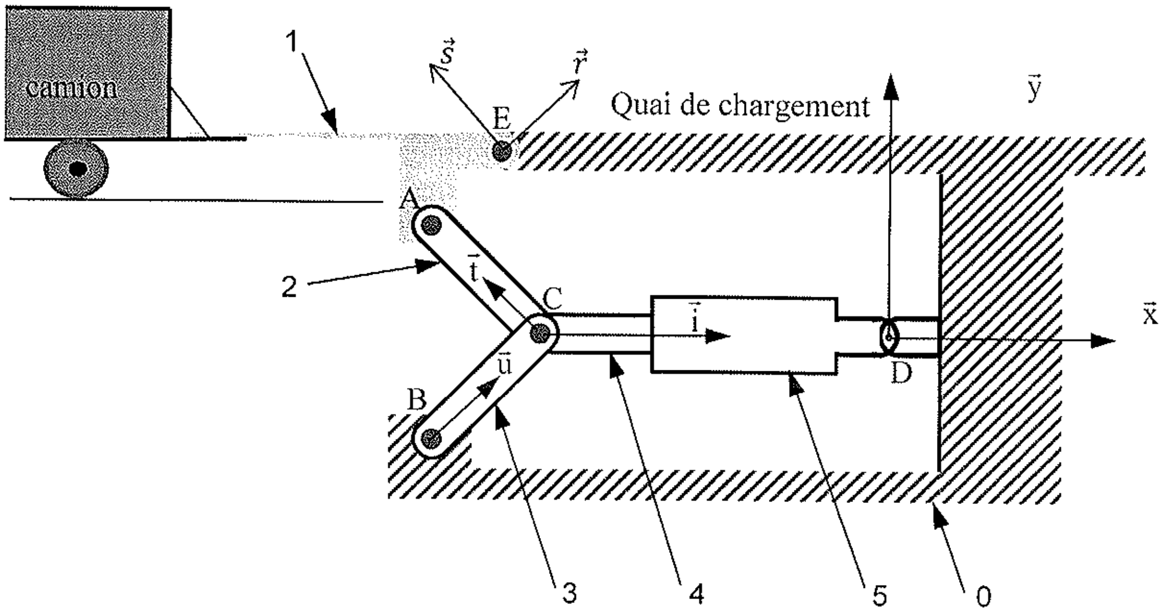
Soit R (F, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un ROND fixe lié au sol.
Les pièces 3 (corps) et 4 (tige) composent le vérin AB.
Il s'agit d'un problème 2D.
Les liaisons en A (entre 4 et 2), en B (entre 1 et 3) et en C (entre 1 et 2) sont des liaisons pivot d'axes parallèles à $\vec{z}$
Toutes les données nécessaires à la résolution du problème sont indiquées sur le schéma.
Soit m la masse de (2). Soit F la norme de $\vec{F}$.
Les forces $\vec{F}$ et $\overrightarrow{P_2} = -mg\vec{y}$ sont connues.
Les constantes a, b, c, d, e, m et α sont connues.

Questions : répondez aux questions de manière rigoureuse en rédigeant comme en cours

1. En isolant le vérin (AB), déterminer la direction de la force de (4) sur (2), notée $\vec{A}$.
2. En déduire l'expression du vecteur $\vec{A}$ en fonction de A (norme de $\vec{A}$) et de α.
3. Déterminer la force de 4 sur 2 ($\vec{A}$) et la force de (1) sur (2) notée $\vec{C} = X_c\,\vec{X} + Y_c\,\vec{Y}$., en fonction des données du problème.
4. Application numérique : déterminer A, X_c et Y_c.
   Avec : a = 1m ; b = 0.4m ; c = 0.2m ; d = 1m ; e = 0.1m, m = 50kg, α = 30°, F = 1000N

Plate-forme de chargement : Cinématique

Le schéma ci-dessous présente le fonctionnement d'une plate-forme de chargement. La plate-forme 1, en liaison pivot avec le bâti 0 en E, permet d'assurer la jonction avec le plancher d'un camion. La manœuvre est assurée par un vérin hydraulique 4 + 5 (4 = tige, 5 = corps) en liaison pivot avec le bâti 0 en D et en liaison pivot sur deux biellettes 2 et 3 en C. Toutes les liaisons pivots sont d'axe $\vec{z}$.
La tige 4 (en liaison glissière avec le corps 5) sort du corps 5 à une vitesse constante $\dot{\mu}$ connue.



$R_0\,(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ROND lié au bâti 0

$R_1\,(E, \vec{r}, \vec{s}, \vec{z})$ ROND lié au à la plate-forme 1. Avec $(\vec{x}, \vec{r}) = \beta$.

$R_2\,(C, \vec{t}, \vec{w}, \vec{z})$ ROND lié à la biellette 2. Avec $(\vec{r}, \vec{t}) = \varphi$.

$R_3\,(B, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ ROND lié à la bielle 3. Avec $(\vec{x}, \vec{u}) = \alpha$.

$R_4\,(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ ROND lié à la tige 4.

$R_5\,(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ ROND lié au corps 5. Avec $(\vec{x}, \vec{\imath}) = \theta$.

$\overrightarrow{CD} = \mu\,\vec{\imath}, \quad \overrightarrow{BC} = a\,\vec{u}, \quad \overrightarrow{CA} = a\,\vec{t}, \quad \overrightarrow{AE} = b\,\vec{r}$

a et b sont des constantes, μ, θ, α, β et φ sont variables.

Remarques :

- Attention $\dot{\vec{i}} \neq \vec{x}$ au cours du mouvement (la figure est dans une position particulière où les 2 vecteurs sont confondus)
- La tige (4) coulisse dans le corps (5) : mouvement de translation
- Bien faire apparaitre les formules utilisées

Questions :

1) Faire les 4 figures de calcul correspondant aux paramètres de positions θ, α, β et φ. En déduire les 4 vecteurs vitesses de rotations correspondantes
2) Calculer $\vec{V}(B \in 3/0)$, $\vec{V}(C \in 3/0)$, puis écrire le torseur cinématique du mouvement de 3 par rapport à 0 en C
3) Calculer $\vec{V}(C \in 4/5)$, puis $\vec{V}(C \in 5/0)$, en déduire $\vec{V}(C \in 4/0)$
4) En utilisant la composition de vitesses en C faisant intervenir les solides (4), (3) et (0), écrire une relation vectorielle liant $\dot{\alpha}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\mu}$ (entre autres).
5) Calculer $\vec{V}(C \in 2/1)$, puis $\vec{V}(C \in 1/0)$, en déduire $\vec{V}(C \in 2/0)$
6) Ecrire le torseur cinématique du mouvement de 2 par rapport à 0 en C
7) En utilisant la composition de vitesses en C faisant intervenir les solides (2), (4) et (0), écrire une relation vectorielle liant $\dot{\varphi}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\mu}$ (entre autres).
8) Calculer $\vec{V}(A \in 1/0)$, puis $\vec{\Gamma}(A \in 1/0)$