Devoir Surveillé

Durée 2h.
Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la copie.

Exercice I *(2 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Définir ce qu'est une valeur propre de A.
2. Définir ce qu'est un vecteur propre de A.
3. Définir ce qu'est le polynôme caractéristique de A.
4. Définir ce qu'est un sous-espace propre de A.

Exercice II *(10 points)*

On considère les suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0,\ v_0,\ w_0$ sont trois nombres réels positifs ou nuls vérifiant $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ et telles que

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_n = \dfrac{u_n + w_n}{2} \\ w_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Le but du problème est de déterminer les limites respectives u, v et w de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on pose $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On note également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P\ D\ P^{-1}$.
4. Calculer P^{-1}.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.

6. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N} : X_n = A^n X_0$
7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$
8. Déterminer les limites respectives $u,\ v,\ w$ de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

Exercice III *(8 points)*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

Si λ est une valeur propre de f (donc de A), on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f (donc de A) associé à la valeur propre λ.

1. Justifier que f n'est pas bijectif (c'est-à-dire A non inversible). En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.
2. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.
   Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).
   Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :
$$f(t) = t + v$$
5. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$