$\boxed{\textbf{Matrices}}$

Dans tout ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. L'espace des matrices

1. Notion de matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Définition I.1. On appelle **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans K toute application

$$A \ : \ \begin{array}{ccc} \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\} & \to & K \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$$

On la note alors $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{2,2} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ ou plus simplement $A = (a_{ij})$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Terminologie : (n,p) est la **taille** ou le **type** de la matrice A.

Notation. L'ensemble des matrtices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Exemple I.2. L'ensemble $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ où pour tous $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Matrices particulières :

- $n = 1$: on dit de A que c'est une **matrice ligne** et on la note $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$.
- $p = 1$: on dit de A que c'est une **matrice colonne** et on la note $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.
- $n = p$: on dit de A que c'est une **matrice carrée** et on note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des **matrices carrées d'ordre** n.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une **matrice diagonale** lorsqu'elle est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

  Autrement dit, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice diagonale lorsque : $\forall i, j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une **matrice triangulaire supérieure** lorsqu'elle est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Autrement dit, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice triangulaire supérieure lorsque : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une **matrice triangulaire inférieure** lorsqu'elle est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Autrement dit, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice triangulaire inférieure lorsque : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- La **matrice nulle** de $\in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$ ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.
- La **matrice identité** est la matrice carré d'ordre n $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On la note I_n.

Définition I.3. Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite symétrique lorsque pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple I.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Définition I.5. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On appelle **transposée** de A et on note ${}^tA$ la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}, b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Exemple I.6. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Proposition I.7. *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, ${}^t({}^tM) = M$.*

2. Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Définition I.8. On définit sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ une addition et une multiplication par un élément de K en posant :

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}},$$
$$\alpha(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Remarque. L'élément neutre de l'addition est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et la matrice opposée de (a_{ij}) est $(-a_{ij})$.

Exemple I.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

Théorème I.10. *L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ muni de l'addition et de la multiplication par un élément de K définis précédemment est un K-espace vectoriel puisque c'est l'ensemble des applications de $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$ dans K.*

Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.

Exemple I.11. Si $n = 2$ et $p = 3$ on a $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition I.12. *La famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ est une base du K-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. C'est la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.*

Démonstration.

Par exemple, la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ est la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$. Toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ s'écrit de manière unique :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire I.13. *La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est np.*

3. Morphismes remarquables de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Proposition I.14. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} {}^t. : & \mathcal{M}_{n,p}(K) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(K) \\ & A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

est linéaire.

Démonstration.

Définition I.15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle **trace** de $A = (a_{ij})$ et on note $tr(A)$ le nombre $\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Proposition I.16. *La trace est linéaire sur* $\mathcal{M}_n(K)$.

II. Représentation matricielle des applications linéaires

1. Représentation matricielle d'un vecteur

Définition II.1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ un base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe des uniques $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tels que $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots x_n e_n$.

On appelle **matrice de x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(K)$

Exemple II.2. Donner la matrice de $(1, 2, -1)$ dans la base $((1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. L'application

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}_{\mathcal{B}} & : & E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(K) \\ & & x & \mapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est une bijection. On dit alors que $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ représente x dans la base $\mathcal{B}$.

2. Matrice d'une application linéaire

Définition II.3. Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle matrice de u **dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ la matrice obtenue en plaçant dans la j^e colonne les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$, cela pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{cc} u(e_1) \ldots u(e_p) & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /f_1 \\ \vdots \\ /f_n \end{array} \end{array}$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, p\},\ u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i.$$

Exemple II.4. Soit l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y,z) = (2x - y + 5z, 3x + 4y - 2z)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Exemple II.5. Soit l'application $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $u(P) = XP - X^2P' + P''$. Soient $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Exemple II.6. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et Id l'application idéntité de E vers E. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(Id)$.

Proposition II.7. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et pour toute base $\mathcal{C}$ de F, l'application*

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(K) \\ & & u & \mapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ et pour tout $\alpha \in K$ on a :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u+v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) + \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\alpha u) = \alpha \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

et la bijectivité de $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ signifie que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$.

Corollaire II.8. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie $n \times p$.*

Définition II.9. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique application $u_A \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques de K^p et K^n est A.

Autrement dit, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de K^p et K^n alors $A = \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u_A)$. Ainsi, lorsque'on parle du noyau ou de l'image d'une matrice, il faut en fait comprendre que l'on parle du noyau ou de l'image de u_A.

Exemple II.10. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, donner l'application linéaire de K^2 dans K^3 canoniquement associée à A

3. Produit matriciel

- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition II.11. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Pour tout vecteur $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ on a $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$ où $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$*

Démonstration.

- Matrice de la composée de deux applications linéaires

Proposition II.12. *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimensions respectives q, p et n. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_n)$ une base de*

G. Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux applications linéaires. Soit $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq k\leq p}}$ la matrice de v dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et soit $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}}$ où :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \forall j \in \{1,\ldots,q\},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Démonstration.

•Définition du produit matriciel.

Définition II.13. Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq k\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On appelle **produit des matrices** A **et** B la matrice $A \times B = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ définie par :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \forall j \in \{1,\ldots,q\}\,,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Ainsi, avec les hypothèses de la proposition précédentes,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

Autrement dit, la matrice de la composée $v \circ u$ de deux applications linéaires v et u est égale au produit des matrices de v et de u.
On notera que pour pouvoir calculer $A \times B$, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, et que le produit d'une matrice de type (n,p) et d'une matrice de type (p,q) donne une matrice de type (n,q). Pour le calcul on pourra utiliser la disposition suivante :

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ c_{ij} \\ \\ \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple II.14. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -9 \\ -4 & -4 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -9 \\ -4 & -4 & 11 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Ecriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur

Proposition II.15. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{C}$ une base de F. Soit $u : E \to F$ une application linéaire et soit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. Soit $x \in E$ de matrice X dans $\mathcal{B}$. Alors la matrice de $y = u(x)$ dans $\mathcal{C}$ est $Y = AX$. Autrement dit :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$

Exemple II.16. Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 13 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

4. Propriétés du produit matriciel

- Associativité

Proposition II.17. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$. Alors :*

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

- Bilinéarité

Proposition II.18. *Le produit matriciel est bilinéaire :*

$$(A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B$$
$$(\alpha A) \times B = \alpha A \times B$$
$$A \times (B_1 + B_2) = A \times B_1 + A \times B_2$$
$$A \times (\alpha B) = \alpha A \times B$$

• Elément neutre

Proposition II.19. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors :*

$$A \times I_n = I_p \times A = A.$$

• Le produit matriciel n'est pas commutatif

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ deux matrices. A t-on $AB = BA$?
− Si $n \neq q$ alors on ne peut pas calculer BA.
− Si $n = q$ mais que $n \neq p$, alors $AB \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ alors que $BA \in \mathcal{M}_{p,p}(K)$: on ne peut donc pas avoir $AB = BA$.
− Si $n = p = q$, alors AB et BA sont de même type, mais elles ne sont pas forcément égales. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et que $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$.

• Le produit matriciel n'est pas intègre

L'égalité $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Par exemple, si $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = 0$.

• Transposition du produit matriciel

Proposition II.20. *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$,*

$$^t(MN) =^t N^t M.$$

5. Matrices inversibles

Définition II.21. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si A est inversible, B est unique et est appelé inverse de A et notée A^{-1}. On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.

Remarque. − Si A^{-1} existe, elle est unique.
− Si A est inversible, alors A^{-1} aussi, et $(A^{-1})^{-1} = A$.
− La matrice nulle n'est pas inversible (car $0 \times B = B \times 0 = 0$ pour toute matrice B). La matrice identité I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$ car $I_n \times I_n = I_n$.

Proposition II.22. *Si les matrices A et B sont inversibles, alors AB aussi, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

En effet, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, et de même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.

Proposition II.23. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{C}$ une base de F. Soit u une application linéaire de E dans F et soit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors A est inversible si et seulement si u est bijective. Dans ce cas $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = A^{-1}$.*

Proposition II.24. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est inversible.*
(2) *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A \times B = I_n$.*
(3) *Il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $B \times A = I_n$.*

Ainsi, pour montrer qu'une matrice est inversible, il suffit donc de montrer qu'elle est inversible à gauche ou qu'elle est inversible à droite.

•Calcul pratique de l'inverse d'une matrice.

Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est bijectif et déterminer f^{-1}, on résout l'équation $f(x) = y$: si cette équation admet une solution unique pour tout $y \in E$, alors f est bijectif et l'équivalence $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ permet d'obtenir l'expression de $f^{-1}(y)$.

Traduction matricielle : pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible et déterminer A^{-1}, on résout l'équation $AX = Y$ (où X et Y sont des matrices colonnes) : si cette équation admet une solution unique pour tout Y, alors A est inversible et l'équivalence $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$ permet d'obtenir A^{-1}.

Exemple II.25. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$AX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 = y_1 \\ 5x_1 - 2x_2 = y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 3x_1 - y_1 \\ -x_1 + 2y_1 = y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 5y_1 - 3y_2 \\ x_1 = 2y_1 - y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = 5y_1 - 3y_2 \end{array} \right. .$$

Le système admet une solution unique, donc la matrice A est inversible. De plus le dernier système correspond à l'égalité $X = A^{-1}Y$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que l'on a bien $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

III. Rang d'une matrice

1. Rang d'une famille de vecteurs

Définition III.1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. La **matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$** est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dont la j^e colonne est constituée des coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. On la note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Exemple III.2.
(1) Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soient $u = (3, 2, 7)$, $v = (4, -1, 3)$ et $w = (8, 0, 2)$. La matrice de la famille (u, v, w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soient $P_1 = 4X^2 - 2X + 3$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = 12$ et $P_4 = X - 2$. La matrice de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 12 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Rang d'une matrice

Définition III.3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Le **rang de A** est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. On le note $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition III.4. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $\mathcal{C}$ une base de F. Soit f une application linéaire de E dans F de matrice A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors le rang de f est égal au rang de A.*

Démonstration.

Corollaire III.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors* $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Démonstration.

Corollaire III.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors A est inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration.

3. Calcul du rang d'une matrice

Proposition III.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors* $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

Remarque. Par conséquent, le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes mais aussi au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Définition III.8. On dit qu'une matrice est **échelonnée** si :

- les lignes non nulles sont placées au-dessus des lignes nulles,
- sous le premier terme non nul (le **pivot**) de chaque ligne non nulle, il n'y a que des 0.

Exemple III.9. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée.

Proposition III.10. *Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses lignes non nulles.*

Démonstration.

Proposition III.11. *On ne change pas le rang d'une matrice :*
- *en échangeant deux de ses lignes (ou deux de ses colonnes),*
- *en multipliant une de ses lignes (ou une de ses colonnes) par un scalaire non nul,*
- *en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).*

Démonstration.

La méthode pratique de calcul du rang d'une matrice consiste à appliquer les opérations élémentaires précédentes (sur les lignes et/ou les colonnes) jusqu'à l'obtention d'une matrice échelonnée.

Exemple III.12. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 8 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. Changement de base

1. Matrice de passage

Définition IV.1. Soientt E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dont la j-ième colonne contient les coordonnées dans $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de $\mathcal{B}'$.

Exemple IV.2.

(1) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (2, -1)$ et $f_2 = (1, 3)$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E et soit $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 - X^2$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de E (libre et de cardinal égal à $\dim E$), et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On remarque que $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$

Proposition IV.3. *$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.*

Démonstration.

2. Effet d'un changement de base

•Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition IV.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Soit x un vecteur de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et de matrice X' dans $\mathcal{B}'$. Alors :*

$$X = PX'.$$

Démonstration.

Remarque. La formule de changement de base $X = PX'$ permet de calculer les anciennes coordonnées (dans la base $\mathcal{B}$) en fonction des nouvelles (dans la base $\mathcal{B}'$). Pour avoir les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, on écrira :

$$X' = P^{-1}X.$$

Exemple IV.5. Reprenons l'exemple précédent $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (2, -1)$ et $f_2 = (1, 3)$. On a vu que $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a facilement $P^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ en calculant le produit :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}y \\ -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ sont donc $\left(\frac{3}{7}x - \frac{1}{7}y, -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y\right)$.

•Effet sur la matrice d'une application linéaire

Proposition IV.6. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$. Soit u une application linéaire de E dans F. Soit M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et soit M' sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Alors :*

$$M' = Q^{-1}MP.$$

Démonstration.

Exemple IV.7. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1, 2, 0)$, $e'_2 = (-1, 0, 1)$ et $e'_3 = (0, 1, 1)$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ où $f'_1 = (2, -1)$ et $f'_2 = (1, 3)$.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ est $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, donc la matrice M' de u dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ est :

$$M' = Q^{-1}MP = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 33 & 6 & 27 \end{pmatrix}.$$

Corollaire IV.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit u un endomorphisme de E. Soit M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et soit M' sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Alors :*

$$M' = P^{-1}MP.$$

Terminologie

- Si M et M' sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont telles qu'il existe $U \in GL_n(K)$ et $V \in GL_p(K)$ telles que $M' = UMV$, on dit que M et M' sont **équivalentes**. Autrement dit, elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
- Si M et M' sont des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ sont telles qu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que que $M' = P^{-1}MP$, on dit que M et M' sont **semblables**. Autrement dit, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Remarque. Deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse.