Méthodes Mathématiques

Exercice 1

Calculer la transformée de Laplace des fonctions causales suivantes, a est un nombre complexe non nul, ω est nombre réel strictement positif :

a) $t \rightarrow e^{at}\gamma(t)$
b) $t \rightarrow \sin^2(\omega t)\gamma(t)$
c) $t \rightarrow \cos^2(\omega t)\gamma(t)$
d) $t \rightarrow (t^2-1)^2\,\gamma(t)$
e) $t \rightarrow (\sin(2t) - 3\cos(2t))\gamma(t)$
f) $t \rightarrow (e^{-t}\cos(3t))\gamma(t)$
g) $t \rightarrow (e^{-2t}(t^3+1))\gamma(t)$
h) $t \rightarrow \begin{cases} 1 \; si \; 0 \leq t < T \\ 0 \; si \; t \geq T \end{cases}$
i) $t \rightarrow \begin{cases} t \; si \; 0 \leq t < T \\ 0 \; si \; t \geq T \end{cases}$
j) $t \rightarrow \begin{cases} t \; si \; 0 \leq t < T \\ T \; si \; t \geq T \end{cases}$

Exercice 2

Représenter les fonctions suivantes et comparer leur transformée de Laplace :

a) $f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\gamma(x - \frac{\pi}{4})$
b) $f_2(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\gamma(x)$
c) $f_3(x) = \sin(x)\gamma(x - \frac{\pi}{4})$

Exercice 3

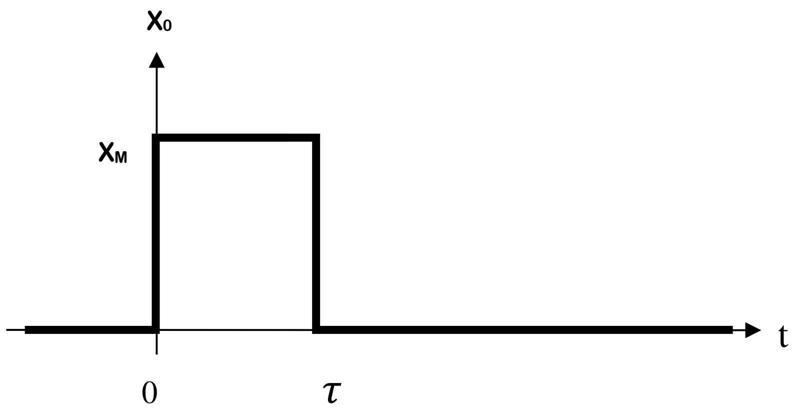
Soit a un nombre réel strictement positif. Exprimer au moyen de fonctions échelon unité la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq a \\ 2, & a < x \leq 2a \\ 3, & 2a < x \leq 3a \\ & \dots \end{cases}$$

En déduire la transformée de Laplace de f.

Exercice 4

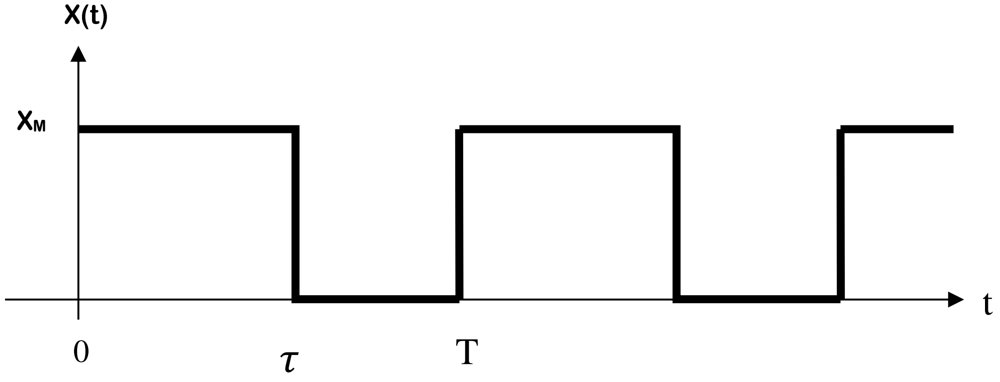
a) Calculer la transformée de Laplace du signal suivant par calcul direct :



b) Calculer de nouveau la transformée de ce signal par construction graphique.

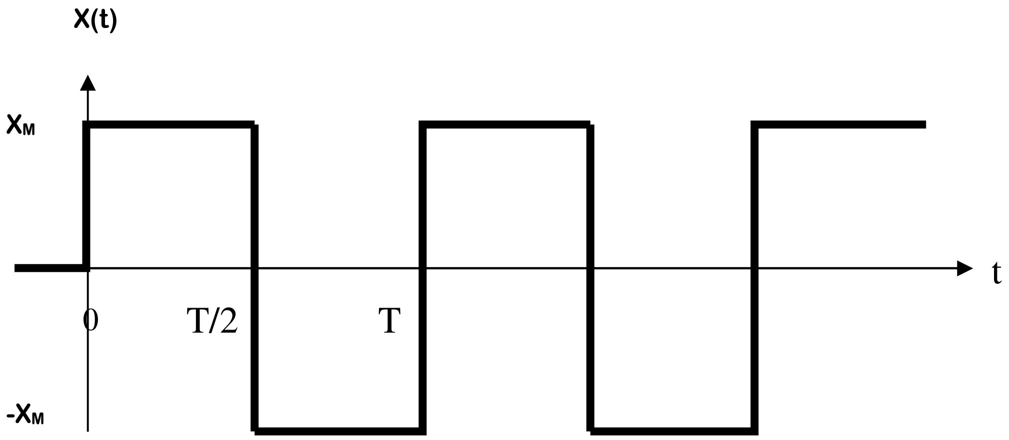
Exercice 5

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :



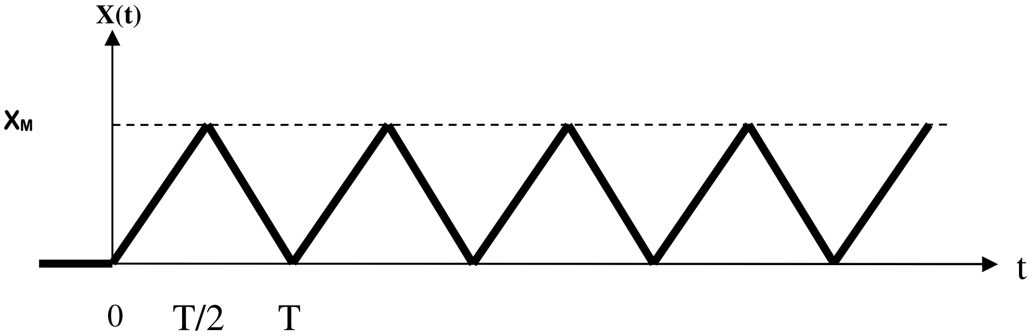
Exercice 6

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :



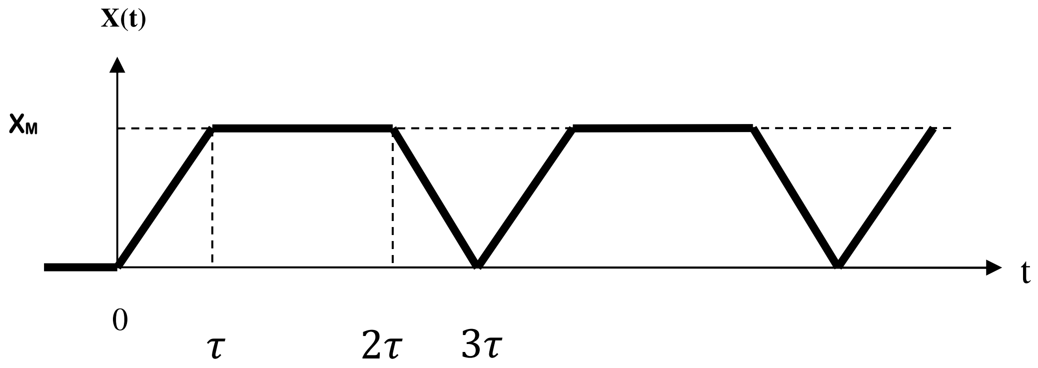
Exercice 7

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :



Exercice 8

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :



Exercice 9

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace correspondant à une arche de sinusoïde $x_0(t)$ puis la transformée de Laplace d'une sinusoïde redressée $x(t)$.

Exercice 10

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes et dessiner leur évolution temporelle :

a) $F(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$

b) $F(p) = \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}$

c) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$

d) $F(p) = \frac{e^{-p\pi}}{p^2+2p+2}$

e) $F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-p})}$

f) $F(p) = \frac{1-e^{-2\pi p}}{p(p^2+1)}$

Exercice 12

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes à l'aide d'une décomposition en éléments simples :

a) $F(p) = \frac{1}{p(p+1)}$

b) $F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2}$

c) $F(p) = \frac{p+1}{p^2+3p+2}$

d) $F(p) = \frac{1}{(p^2-9)(p+2)}$

e) $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)^2}$

f) $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+2)^2}$

g) $F(p) = \frac{3(p+1)-2}{(p+1)^2+4}$

h) $F(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}$

i) $F(p) = \frac{2}{p^2+2p+5}$

Exercice 13

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes en utilisant le produit de convolution :

a) $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p+1)}$
b) $F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

Exercice 14

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes en utilisant la transformée inverse de leur dérivée :

a) $F(p) = Arctan\left(\frac{1}{p}\right)$
b) $F(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
c) $F(p) = \ln(1 + \frac{1}{p^2})$

Exercice 15

A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre les équations différentielles d'inconnue y suivantes :

a) $y'' - y' - 6y = U(t)$ avec $y(0) = 1 \; et \; y'(0) = 0$
b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}U(t)$ avec $y(0) = 1 \; et \; y'(0) = 0$
c) $y'' + y' - 2y = e^{-2t}U(t)$ avec $y(0) = 0 \; et \; y'(0) = 0$

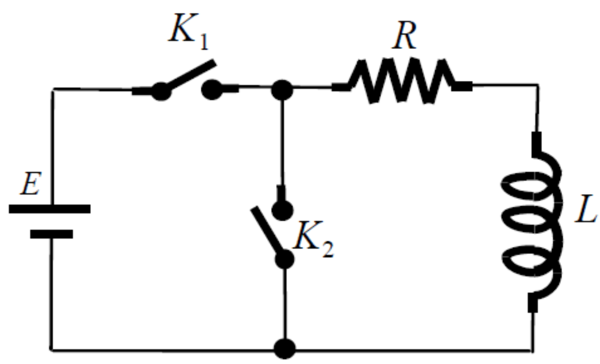
Exercice 16

Résoudre par le calcul symbolique le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -7x(t) + 6y(t) + t \\ y'(t) = -12x(t) + 10y(t) \end{cases}, \quad \text{avec } x(0) = y(0) = 0$$

Exercice 17

On considère le montage suivant :

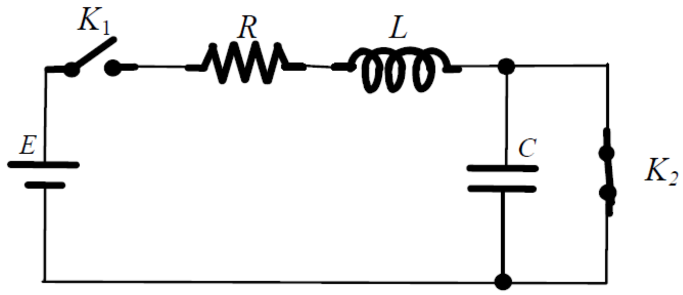


Avec $= 1\Omega$, $L = 100mH$, $E = 1V$. Les interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts.

a) A t=0, le courant dans la bobine est nul, on ferme l'interrupteur K_1. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans l'interrupteur.
b) On suppose maintenant que le courant dans la bobine a une valeur de 0.5 A à l'instant initial (t=0). Calculer à nouveau l'évolution temporelle du courant dans la résistance.
c) A t=60s, on ouvre l'interrupteur K_1 et on ferme K_2.Déterminer l'évolution temporelle du courant dans la résistance.

Exercice 18

On considère le montage suivant :

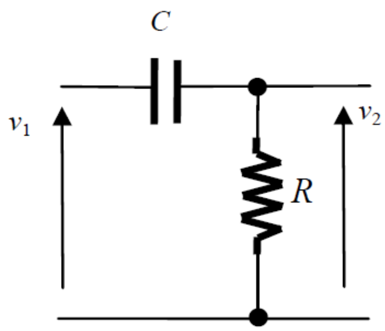


Avec $= 10k\Omega$, $L = 10mH$, $E = 10V$, $C = 10nF$.

a) A t=0, le courant dans la bobine est nul, on ferme l'interrupteur K_1 , l'interrupteur K_2 reste fermé. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans le circuit.
b) L'interrupteur K_1 étant fermé depuis un temps très long, on ouvre l'interrupteur K_2 brusquement. Déterminer l'expression du courant débité par le générateur.

Exercice 19

Soit le montage suivant :

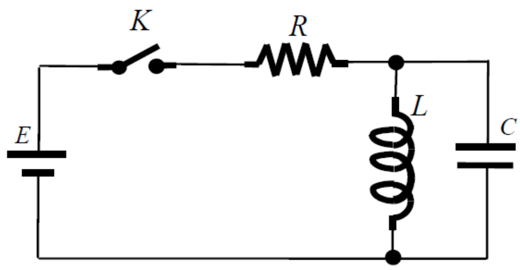


A t=0, la tension aux bornes du condensateur est nulle. On applique à l'entrée de ce montage un échelon d'amplitude E.

a) Calculer et représenter l'évolution temporelle de $v_2(t)$.
b) On applique maintenant à l'entrée de ce montage un créneau d'amplitude E et de largeur τ. Calculer et représenter l'évolution de $v_2(t)$.

Exercice 20

Soit le montage suivant :



La tension aux bornes du condensateur et le courant dans la bobine sont initialement nuls. $L = 100\ mH$, $C = 2.5\mu F$. On ferme brusquement l'interrupteur K à t=0. Déterminer l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur (v(t)) lorsque :

a) R=100 Ω
b) R=200 Ω
c) R=50 Ω