関数 $y=e^x$ で表される曲線 C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(t,e^t)$ に対し，点 P で曲線 C_1 の上側で接する半径 1 の円 C を考え，その中心を点 O' とする．線分 PQ が円 C の直径になるような点 Q とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 O' の座標を t を用いて表せ．
(2) 点 P を $0 \leqq t \leqq \dfrac{\log 3}{2}$ の範囲で動かしたとき，点 O' が通る軌跡の曲線の長さを求めよ．
(3) t が実数全体を動くときの点 Q が描く曲線を曲線 C_2 とする．また，$t=0$ での点 Q の x 座標の値を a，$t=\dfrac{\log 3}{2}$ での点 Q の x 座標の値を b とするとき，曲線 C_1 と x 軸，$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を求めよ．
(4) 点 P を $0 \leqq t \leqq \dfrac{\log 3}{2}$ の範囲で動かしたとき，円 C が通過する領域の面積を求めよ．

(1) $y=e^x$ のとき，$y'=e^x$ より，点 P における法線の傾きは $-\dfrac{1}{e^t}$．

これは直線 PO' の傾きでもあるので，$\mathrm{PO}'=1$ と，円 C は C_1 の上側で接することより，

$\overrightarrow{\mathrm{PO}'}=\left(-\dfrac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+1}},\dfrac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\right)$.

$\mathrm{P}(t,e^t)$ より，答 $\mathrm{O}'\left(t-\dfrac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+1}},e^t+\dfrac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\right)$

(2)

$$\frac{dx}{dt}=1-\frac{e^t}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}}\qquad \frac{dy}{dt}=e^t-\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}}$$

求める曲線の長さを ℓ として，

$$\begin{aligned}\ell&=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt\\&=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\left(1-\frac{e^t}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{1+e^{2t}}dt\\&=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\left(\sqrt{1+e^{2t}}-\frac{e^t}{e^{2t}+1}\right)dt\end{aligned}$$

$e^t=\tan\theta$ と置換すると，$0\leqq t\leqq\dfrac{\log 3}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}e^t&=\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt}\\\Leftrightarrow dt&=\frac{d\theta}{e^t\cos^2\theta}=\frac{d\theta}{\tan\theta\cos^2\theta}=\frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\sqrt{1+e^{2t}}&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\\&=\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\\&=2-\sqrt{2}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=-\frac{1}{2}\log\left(9-6\sqrt{2}\right)\\&=-\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{e^t}{e^{2t}+1}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$$

以上より，$\ell=$ 答 $2-\sqrt{2}-\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)-\dfrac{\pi}{12}$

(3) (1) の結果より，

$\mathrm{Q}\left(t-\dfrac{2e^t}{\sqrt{e^{2t}+1}}, e^t+\dfrac{2}{\sqrt{e^{2t}+1}}\right)$．$f(t)=t-\dfrac{2e^t}{\sqrt{e^{2t}+1}}$ とおくと，

$$a=f(0)=-\sqrt{2}\quad b=f\left(\frac{\log 3}{2}\right)=\frac{\log 3}{2}-\sqrt{3}$$

また，

$$\frac{dx}{dt}=1-2\frac{e^t\sqrt{e^{2t}+1}-e^t\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+1}}}{e^{2t}+1}=1-\frac{2e^t}{\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

よって，

$$\int_b^a ydx=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\left(e^t+\frac{2}{\sqrt{e^{2t}+1}}\right)\left(1-\frac{2e^t}{\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\left\{e^t+\frac{2}{\sqrt{e^{2t}+1}}-\frac{2e^{2t}}{\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{4e^t}{\left(e^{2t}+1\right)^2}\right\}dt$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{\log 3}{2}}e^t=\Big[e^t\Big]_0^{\frac{\log 3}{2}}=\sqrt{3}-1$$

$$\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{2e^{2t}}{\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}dt=\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{\left(e^{2t}+1\right)'}{\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\left[-\frac{2}{\sqrt{e^{2t}+1}}\right]_0^{\frac{\log 3}{2}}=\sqrt{2}-1$$

(2) と同様に置換すると，

$$\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{2}{\sqrt{e^{2t}+1}}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sin\theta}d\theta$$

$$=2\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\log 3}{2}}\frac{4e^t}{\left(e^{2t}+1\right)^2}dt=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

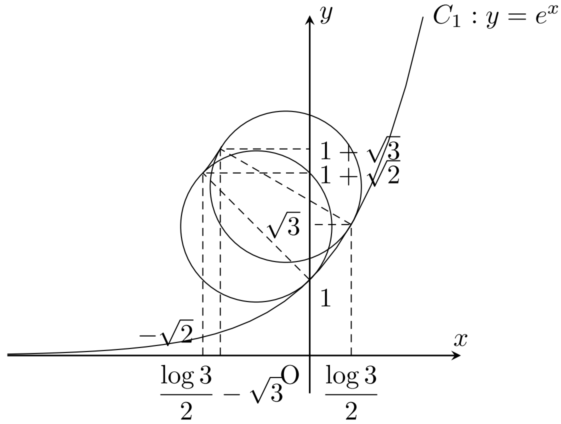
$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

以上より，求める面積を S として，

$$S=\left(\sqrt{3}-1\right)+2\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$

$$=1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{6}$$

(4) 求める領域は以下の通り．



点 P における法線の傾きは $-\dfrac{1}{e^t}$ なので，

$t=0$ のとき，傾きは -1 で，$t=\dfrac{\log 3}{2}$ のとき，傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

以上より，求める面積を S' として，

$$S'=1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\left(1+1+\right.$$

$$-\int_0^{\frac{\log 3}{2}}e^xdx+\pi$$

$$=\boxed{答}\ 4-2\sqrt{2}-2\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{6}\pi x$$

別解

(2) の結果より，

$$S'=2\left(2-\sqrt{2}-\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{12}\right)+\pi$$

$$=\boxed{答}\ 4-2\sqrt{2}-2\log\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{6}\pi$$