Battle of sexes における UPS の図示

講義で紹介された,Battle of sexes における効用可能集合UPSを数学的に求め図示する.

Battle of sexes

$$N = \{1 - Woman, 2 - Man\}$$

1 \ 2	M	B
M	4,2	1,1
B	0,0	2,4

プレーヤー1 の混合戦略を$(p, 1-p)$, プレーヤー2 の混合戦略を$(q, 1-q)(0 \le p, q \le 1)$とすると
プレーヤー1,2 が得られる期待利得$E_1(p,q), E_2(p,q)$はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} E_1(p,q) \\ E_2(p,q) \end{pmatrix} = pq\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + p(1-q)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-p)q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p)(1-q)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5pq - p - 2q + 2 \\ 5pq - 3p - 4q + 4 \end{pmatrix}$$

よって効用可能集合UPSは

$$\mathrm{UPS} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) = (5pq - p - 2q + 2, 5pq - 3p - 4q + 4)\ \ s.t. 0 \le p, q \le 1\}$$

と表される.

さて,ここでxy平面における座標が

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

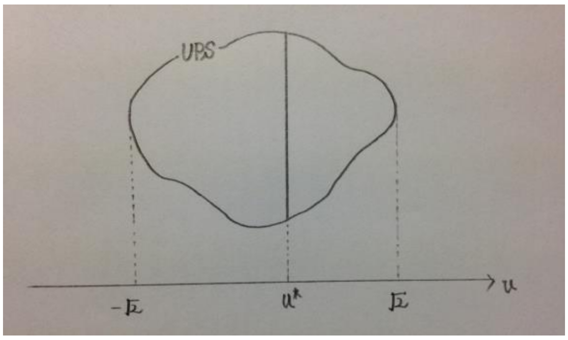
であるようなベクトル$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$を基底とする$uv$平面($xy$平面を原点を中心に45°負向きに回転させた座標系)を新たに定めると,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

ゆえにuv平面における効用可能集合UPSは

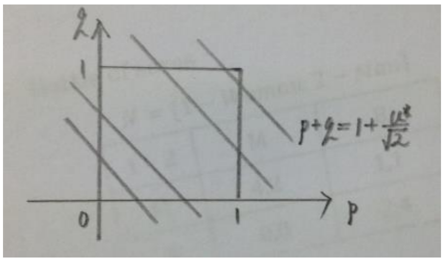
$$\mathrm{UPS} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| (u,v) = \left(\sqrt{2}(p+q-1), \sqrt{2}(5pq - 2p - 3q + 3)\right)\ \ s.t. 0 \le p, q \le 1\right\}$$

ここで効用可能集合UPSの$u = u^*(-\sqrt{2} \le u^* \le \sqrt{2})$における$v$の変域を求める.



$$u^* = \sqrt{2}(p+q-1) \Leftrightarrow q = -p+1+\frac{u^*}{\sqrt{2}}$$

$0 \le p, q \le 1$ より $0 \le p, q = -p+1+\dfrac{u^*}{\sqrt{2}} \le 1$　　$\therefore \max\left\{0, \dfrac{u^*}{\sqrt{2}}\right\} \le p \le \min\left\{1, 1+\dfrac{u^*}{\sqrt{2}}\right\}$



1° $0 \le u^* \le \sqrt{2}$のとき$\dfrac{u^*}{\sqrt{2}} \le p \le 1$ で$q = -p+1+\dfrac{u^*}{\sqrt{2}}$より

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{2}(5pq-2p-3q+3) \\
&= \sqrt{2}\left(-5p^2+5p+\frac{5u^*}{\sqrt{2}}p-2p+3p-3-\frac{3u^*}{\sqrt{2}}+3\right) \\
&= \sqrt{2}\left\{-5p^2+\left(6+\frac{5u^*}{\sqrt{2}}\right)p-\frac{3u^*}{\sqrt{2}}\right\} \\
&= \sqrt{2}\left[-5\left\{p-\left(\frac{3}{5}+\frac{u^*}{2\sqrt{2}}\right)\right\}^2+\frac{5}{8}u^{*2}+\frac{9}{5}\right]
\end{aligned}$$

$f(p) \coloneqq \sqrt{2}\left[-5\left\{p-\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{u^*}{2\sqrt{2}}\right)\right\}^2+\dfrac{5}{8}u^{*2}+\dfrac{9}{5}\right]$　$\left(\dfrac{u^*}{\sqrt{2}} \le p \le 1\right)$と定めると

$0 \le u^* \le \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$のとき$f(p)$の極値$p^* = \dfrac{3}{5}+\dfrac{u^*}{2\sqrt{2}}$は$p$の変域に属するから

$$\min\left\{f\left(\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right), f(1)\right\} \le v \le f(p^*)$$

$$\min\{3u^*, 2u^*+\sqrt{2}\} \le v \le \sqrt{2}\left(\frac{5}{8}u^{*2}+\frac{9}{5}\right)$$

$$\therefore 3u^* \le v \le \sqrt{2}\left(\frac{5}{8}u^{*2}+\frac{9}{5}\right) \quad \left(0 \le u^* \le \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$$

$\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \le u^* \le \sqrt{2}$のとき$f(p)$の極値$p^* = \dfrac{3}{5}+\dfrac{u^*}{2\sqrt{2}}$は$p$の変域に属さないので

$$\min\left\{f\left(\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right), f(1)\right\} \le v \le \max\left\{f\left(\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right), f(1)\right\}$$

$$\min\{3u^*, 2u^*+\sqrt{2}\} \le v \le \max\{3u^*, 2u^*+\sqrt{2}\}$$

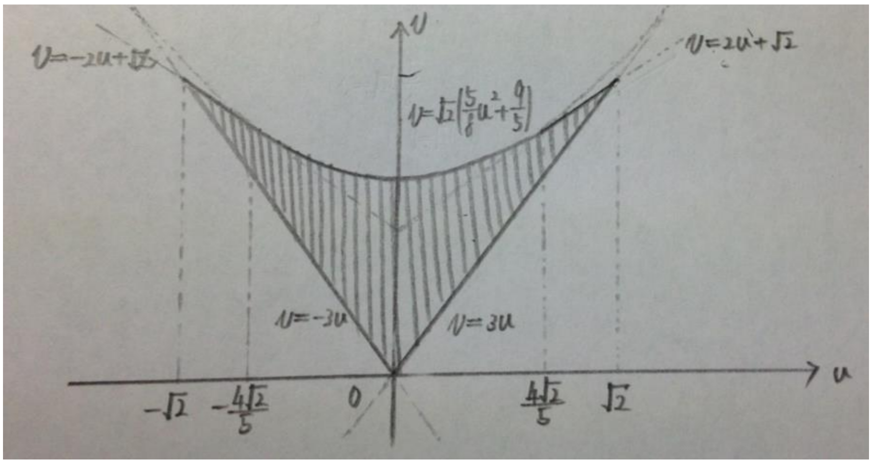
$$\therefore 3u^* \le v \le 2u^*+\sqrt{2} \quad \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} \le u^* \le \sqrt{2}\right)$$

$2°\ -\sqrt{2} \leq u^* \leq 0$ のときu^*を$-u^*$に置き換えかえて 1°の結果を用いれば,

$$-3u^* \leq v \leq \sqrt{2}\left(\frac{5}{8}u^{*2} + \frac{9}{5}\right) \quad \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5} \leq u^* \leq 0\right)$$

$$-3u^* \leq v \leq -2u^* + \sqrt{2} \qquad \left(-\sqrt{2} \leq u^* \leq -\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$$

1°, 2°より効用可能集合UPSをuv平面に図示すると,下図のようになる.



以上より求めるべきxy平面上での効用可能集合UPSは下図のようになる.