配布資料 5：2 人戦略形ゲームの繰り返しゲーム
（参考文献 12「ゲーム理論」（岡田章著，有斐閣）205 − 232 ページ参照）

1. 繰り返しゲーム

   (a) 成分ゲーム（2 人戦略形ゲーム）

   - $G = (N = \{1, 2\}, \{X^i\}_{i \in N}, \{f^i\}_{i \in N})$
     - N：プレイヤーの集合
     - X^i：プレイヤー i の戦略の集合
     - $f^i : X = X^1 \times X^2 \to \Re$　プレイヤー i の利得関数
   - 成分ゲームにおけるミニマックス行動
     成分ゲーム $G = (N, \{X^i\}_{i \in N}, \{f^i\}_{i \in N})$ において，

     $$max_{x^i} f^i(x^i, \hat{x}^j) = min_{x^j}(max_{x^i} f^i(x^i, x^j))$$

     を満たす j の行動 $\hat{x}^j$ を j の i に対する <u>ミニマックス行動</u> という．$max_{x^i} f^i(x^i, \hat{x}^j)$ を i の <u>ミニマックス利得</u> といい，v^i と書く．$v = (v^1, v^2)$ を <u>ミニマックス点</u> という．
   - 成分ゲームにおける個人合理的行動
     行動の組 $x = (x^1, x^2)$ が <u>個人合理的</u>$\leftrightarrow$ $f^i(x) \geq v^i$ ，$i = 1, 2$
     行動の組 $x = (x^1, x^2)$ が <u>強く個人合理的</u>$\leftrightarrow$ $f^i(x) > v^i$，$i = 1, 2$
   - <u>命題</u>: G のナッシュ均衡を $e = (e^1, e^2) \in X$ とすると，$f^i(e) \geq v^i$，$i = 1, 2$, である．

   (b) 有限回繰り返しゲーム G^T

   - 成分ゲーム G を有限回（T 回）繰り返す．各プレイヤーは過去のプレイを完全に知る．
   - プレイヤーの集合　$N = \{1, 2\}$
   - 各プレイヤー i の戦略
     - $t - 1$ 期目までの両プレイヤーの選択の結果をすべて知った上で，t 期目の選択を行う．
     - $X_{t-1} = X \times ... \times X$（$t - 1$ 個）（$X = X^1 \times X^2$）
       $X_0 = \{\emptyset\}$
     - $h_{t-1} = (x_1, ..., x_{t-1}) \in X_{t-1}$：$t - 1$ 期目までの <u>履歴</u>
       $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2), \ldots, x_{t-1} = (x_{t-1}^1, x_{t-1}^2)$
     - i の t 期目の選択：$s_t^i : X_{t-1} \to X^i$，$i = 1, 2$
     - i の（純粋）戦略 $s^i = (s_t^i)_{t=1}^T$
     - i の戦略の全体 X^{Ti}，戦略の組 (s^1, s^2) の全体 $X^T = X^{T1} \times X^{T2}$
   - 各プレイヤー i の利得
     - 戦略の組 $s = (s^1, s^2)$ によって，各期の選択の組が以下のように定まる
       * $x_1(s) = (s_1^1(\emptyset), s_1^2(\emptyset))$
       * $x_2(s) = (s_2^1(x_1(s)), s_2^2(x_1(s))$
       * $x_t(s) = (s_t^1(x_1(s), ..., x_{t-1}(s)), s_t^2(x_1(s), ..., x_{t-1}(s)))$, $t = 3, 4, 5, ...$

- 選択の組の列 $x(s) = (x_t(s))_{t=1}^T$ における各期の利得の割引因子 δ による 割引利得和

$$f^{Ti}(s) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} f^i(x_t(s))$$

- (平均利得 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f^i(x_t(s))$)

- 成分ゲーム G の割引因子 δ を持つ T 回繰り返しゲーム
  $G^T(\delta) = (N, \{X^{Ti}\}_{i \in N}, \{f^{T^i}\}_{i \in N})$
- 定理:すべての部分ゲームにおいて成分ゲームのナッシュ均衡の行動を選択する戦略の組は T 回繰り返しゲームのナッシュ均衡になり，部分ゲーム完全均衡にもなる．
- 定理:成分ゲームが唯一つのナッシュ均衡 x^* を持つとする．このとき，T 回繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡 s^* は唯一つ存在し，$x(s^*) = (x^*, ..., x^*)$ である．

(c) 無限回繰り返しゲーム G^∞

- i の（純粋）戦略 $s^i = (s_t^i)_{t=1}^\infty$
  i の純粋戦略の全体 $X^{\infty i}$，$i = 1, 2$
- 選択の組の列 $x(s) = (x_t(s))_{t=1}^\infty$ における各期の利得の割引因子 δ $(0 < \delta < 1)$ による割引利得和 $f^{\infty i}(s) = \sum_{t=1}^\infty \delta^{t-1} f^i(x_t(s))$
- 正規化利得（平均利得） $(1-\delta)\sum_{t=1}^\infty \delta^{t-1} f^i(x_t(s))$

(d) フォーク定理

- 無限回繰り返しゲームのナッシュ均衡
  $G^\infty(\delta)$ において，戦略の組 $s^* = (s^{*1}, s^{*2}) \in \bar{X}$ が ナッシュ均衡 $\Longleftrightarrow$

  - $f^{\infty 1}(s^{*1}, s^{*2}) \geq f^{\infty 1}(s^1, s^{*2}) \ \forall s^1 \in X^{\infty 1}$
  - $f^{\infty 2}(s^{*1}, s^{*2}) \geq f^{\infty 2}(s^{*1}, s^2) \ \forall s^2 \in X^{\infty 2}$
- 定理（フォーク定理）:成分ゲーム G の強く個人合理的な任意の行動の組 $x = (x^1, x^2)$ をとる．このとき，

$$\delta \geq \frac{max_{y^i} f^i(y^i, x^j) - f^i(x)}{max_{y^i} f^i(y^i, x^j) - v^i} \quad \forall i, j = 1, 2, \ i \neq j$$

  が成り立つならば，繰り返しゲーム $G^\infty(\delta)$ のナッシュ均衡 $s^* = (s^{*1}, s^{*2})$ が存在して $x(s^*) = (x, x, ...)$ が成り立つ．