演習問題　D．需要関数（続き）

１２）**双対性の理論**:効用関数を$u(x,y)=\ln x+2\ln y$, Xの価格を$p_x>0$, Yの価格を$p_y>0$, 所得を$I>0$としよう.

> 価格が(p_x,p_y)，所得がIのときに効用を最大にする問題をこれまで考察してきた：
>
> （A）**効用最大化問題：** $\max_{x,y}\ u(x,y)\quad \text{s.t.}\ \ p_x x+p_y y=I$.
>
> この効用最大化問題に対する解，つまり価格が(p_x,p_y)，所得がIのときに最大の効用水準を達成する財の組み合わせは，「**財 X の需要関数**$x(p_x,p_y,I)$」と「**財 Y の需要関数**$y(p_x,p_y,I)$」で表される.

ａ）需要関数$x(p_x,p_y,I)$， $y(p_x,p_y,I)$を求めよ（ラグランジェ法を用いよ）.

ｂ) 財XとYの各々について, 需要の価格弾力性$\varepsilon_x,\varepsilon_y$, 需要の所得弾力性$\eta_x,\eta_y$を求めよ.

> **間接効用関数**:最適な財の組み合わせ（$x(p_x,p_y,I)$，$y(p_x,p_y,I)$）で得られている効用の値を
>
> $$v(p_x,p_y,I)\equiv u(x(p_x,p_y,I),y(p_x,p_y,I))$$
>
> と表そう．これは，予算制約のもとで得られる効用の最大値を表す．この値は，Xの価格p_x，Yの価格p_y，所得Iに依存し，$v(p_x,p_y,I)$は「**間接効用関数**」と呼ばれる.

ｂ）間接効用関数を$v(p_x,p_y,I)$を求めよ.

ｃ）$x(p_x,p_y,I)=-\dfrac{\partial v(p_x,p_y,I)}{\partial p_x}\Big/\dfrac{\partial v(p_x,p_y,I)}{\partial I}$， $y(p_x,p_y,I)=-\dfrac{\partial v(p_x,p_y,I)}{\partial p_y}\Big/\dfrac{\partial v(p_x,p_y,I)}{\partial I}$ という関係が成立していることを示せ．これらは「**ロワの恒等式**」と呼ばれる.

次に，価格が(p_x, p_y)のとき，ある与えられた効用水準uを達成するために最低限必要な所得を求める問題を考えよう：

（B）**支出最小化問題：** $\min_{x,y}\ p_x x + p_y y \quad \text{s.t.}\ \ u(x,y) = u$.

この支出最小化問題に対する解，つまり価格が(p_x, p_y)のとき，効用水準uを達成し，かつ総支出を最小にする財の組み合わせを表すものを,「**財 X の補償需要関数**(compensated demand function)，$x^c(p_x, p_y, u)$」,「**財 Y の補償需要関数**，$y^c(p_x, p_y, u)$」と呼ぶ.

また，価格が(p_x, p_y)のとき，効用水準uを達成するために必要な最小支出を

$$e(p_x, p_y, u) \equiv p_x x^c(p_x, p_y, u) + p_y y^c(p_x, p_y, u)$$

と表す．関数$e(p_x, p_y, u)$は「**支出関数**」と呼ばれ，最小支出が価格と効用水準にどのように依存するかを表す.

d）補償需要関数$x^c(p_x, p_y, u)$，$y^c(p_x, p_y, u)$と支出関数$e(p_x, p_y, u)$を求めよ（ラグランジェ法を用いよ）.

シェパード・マッケンジーの補題：

もし支出関数が(p_x^*, p_y^*, u)において微分可能で，$p_x^* > 0, p_y^* > 0$ならば,

$$x^c(p_x^*, p_y^*, u) = \frac{\partial e(p_x^*, p_y^*, u)}{\partial p_x}, \quad y^c(p_x^*, p_y^*, u) = \frac{\partial e(p_x^*, p_y^*, u)}{\partial p_y}.$$

e）シェパード・マッケンジーの補題が成立していることを示せ.

f）もし$(x*, y*)$が効用最大化問題（A）に対する解で，$u = u(x*, y*)$ならば，$(x*, y*)$は支出最小化問題（B）に対する解となる，つまり,

$$x(p_x, p_y, I) \equiv x^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I)), \quad y(p_x, p_y, I) \equiv y^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))$$

が成立することを示せ.

ｇ）もし(x^*, y^*)が支出最小化問題（B）に対する解で，$I = p_x x^* + p_y y^*$ならば，(x^*, y^*)は効用最大化問題（A）に対する解となる，つまり，

$$x^c(p_x, p_y, u) \equiv x(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u)), \quad y^c(p_x, p_y, u) \equiv y(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u))$$

が成立することを示せ.

ｈ）$e(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I)) \equiv I$ならびに$v(p_x, p_y, e(p_x, p_y, u)) \equiv u$が成立することを示せ.

スルツキー方程式: 代替効果と所得効果の数式表現. 補償需要関数は観察不可能なものだが，観察可能な通常の需要関数と関連付けることができる.

（１）$$\frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_x} = \frac{\partial x^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))}{\partial p_x} - \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial I} x(p_x, p_y, I)$$

（２）$$\frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_y} = \frac{\partial x^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))}{\partial p_y} - \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial I} y(p_x, p_y, I)$$

（３）$$\frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial p_y} = \frac{\partial y^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))}{\partial p_y} - \frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial I} y(p_x, p_y, I)$$

（４）$$\frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial p_x} = \frac{\partial x^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))}{\partial p_x} - \frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial I} x(p_x, p_y, I)$$

スルツキー方程式より，財 Y の価格がΔp_yだけ変化したときの，財 X の需要に与える影響は二つの効果，代替効果と所得効果に分解されることがわかる.

$$\Delta x \approx \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_y}\Delta p_y = \frac{\partial x^c(p_x, p_y, v(p_x, p_y, I))}{\partial p_y}\Delta p_y - \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial I}\Delta p_y y(p_x, p_y, I)$$

（総効果）＝　（代替効果）　＋　（所得効果）

他の価格変化の需要に与える影響についても同様である.

ｉ）上記のスルツキー方程式（１）～（４）が成立することを示せ.

ｊ）補償自己価格効果が負である，$\dfrac{\partial x^c}{\partial p_x} \leq 0, \dfrac{\partial y^c}{\partial p_y} \leq 0$．つまり，補償需要関数は右下がりとなることを示せ.

ｋ）交差価格効果は対称であること，$\dfrac{\partial x^c}{\partial p_y} = \dfrac{\partial y^c}{\partial p_x}$，を示せ.

Ｅ．顕示選好の理論

問Ａ）財Ｘをビール，財Ｙを焼き鳥とします．以下の３つのケースで，あなたはどれを選択しますか．各ケースで，使えるお金で買える財の組み合わせが示してありますが，その中から一つ選んで，〇で囲んでください.

ケース1　　ビールの価格　＝　120円　　焼鳥の価格　＝　120円
使えるお金　＝　1200円

x = ビールの量　y = 焼鳥の量

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	10																				
0	9	1	9																		
0	8	1	8	2	8																
0	7	1	7	2	7	3	7														
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6												
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5										
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4								
0	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3	7	3						
0	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2				
0	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	1		
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9	0	10	0

ケース2　　ビールの価格　＝　200円　　焼鳥の価格　＝　100円
使えるお金　＝　1200円

x = ビールの量　y = 焼鳥の量

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	12												
0	11												
0	10	1	10										
0	9	1	9										
0	8	1	8	2	8								
0	7	1	7	2	7								
0	6	1	6	2	6	3	6						
0	5	1	5	2	5	3	5						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	3	1	3	2	3	3	3	4	3				
0	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2		
0	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1		
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0

ケース3　　ビールの価格　＝　100円　　焼鳥の価格　＝　200円
使えるお金　＝　1200円

x = ビールの量　y = 焼鳥の量

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	6																								
0	5	1	5	2	5																				
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4																
0	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3												
0	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2								
0	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	1	10	1				
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9	0	10	0	11	0	12	0

問Ｂ）問Ａ）と同じ質問．ただし，財Ｘはボールペン（黒），財Ｙはシャープペン（黒）．

ケース1　　ボールペンの価格　＝　120円　　シャープペンの価格　＝　120円
使えるお金　＝　1200円

x = ボールペンの量　　y = シャープペンの量

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	10																				
0	9	1	9																		
0	8	1	8	2	8																
0	7	1	7	2	7	3	7														
0	6	1	6	2	6	3	6	4	6												
0	5	1	5	2	5	3	5	4	5	5	5										
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4								
0	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3	7	3						
0	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2				
0	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	1		
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9	0	10	0

ケース2　　ボールペンの価格　＝　200円　　シャープペンの価格　＝　100円
使えるお金　＝　1200円

x = ボールペンの量　　y = シャープペンの量

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	12												
0	11												
0	10	1	10										
0	9	1	9										
0	8	1	8	2	8								
0	7	1	7	2	7								
0	6	1	6	2	6	3	6						
0	5	1	5	2	5	3	5						
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4				
0	3	1	3	2	3	3	3	4	3				
0	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2		
0	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1		
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0

ケース3　　ボールペンの価格　＝　100円　　シャープペンの価格　＝　200円
使えるお金　＝　1200円

x = ボールペンの量　　y = シャープペンの量

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	6																								
0	5	1	5	2	5																				
0	4	1	4	2	4	3	4	4	4																
0	3	1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3												
0	2	1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2								
0	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1	9	1	10	1				
0	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9	0	10	0	11	0	12	0

これまでの消費理論では，価格が与えられた下で，各人の選好からどのような財の組み合わせが選択されるかを見てきた．その結果選ばれた財を表現したのが需要関数である．

しかし，実際に観察できるのは，価格と需要に関するデータだけで，各人の選好は直接観察できない．それにもかかわらず，価格と需要に関する観察可能なデータは，合理的な消費者の選好について有用な情報を示してくれる．

いま，二つの価格ベクトル(p_x^t, p_y^t)，(p_x^s, p_y^s)について，(p_x^t, p_y^t)の下では(x^t, y^t)が選ばれ，(p_x^s, p_y^s)の下では(x^s, y^s)が選ばれたとしよう．いま，

$p_x^t x^t + p_y^t y^t \geq p_x^t x^s + p_y^t y^s$の時，$(x^t, y^t)$は$(x^s, y^s)$より顕示選好されるといい，

$(x^t, y^t) R (x^s, y^s)$と表わす．

つまり，(p_x^t, p_y^t)という価格のもとで，(x^s, y^s)も購入可能だったのが，実際には(x^t, y^t)を選んでいるので，(x^t, y^t)は(x^s, y^s)より（弱い意味で）好ましいはずである（厳密に好ましいか，もしくは無差別である）．

同様に，

$p_x^s x^s + p_y^s y^s \geq p_x^s x^t + p_y^s y^t$の時，$(x^s, y^s)$は$(x^t, y^t)$より顕示選好されるといい，

$(x^s, y^s) R (x^t, y^t)$と表わす．

次に，顕示選好が満たすべき条件を考えよう．需要に関するデータが，合理的な消費者が選択を行なった結果であるならば，以下の条件が満たされなければならないであろう．

顕示選好の弱公理（Weak Axiom of Revealed Preference）

いま，価格(p_x^t, p_y^t)の下では(x^t, y^t)が選ばれ，価格(p_x^s, p_y^s)の下では(x^s, y^s)が選ばれて，$(x^t, y^t) \neq (x^s, y^s)$であるとしよう．以下のことが成り立つ時，顕示選好の弱公理が満たされているという：

もし$p_x^t x^t + p_y^t y^t \geq p_x^t x^s + p_y^t y^s$ならば，$p_x^s x^t + p_y^s y^t > p_x^s x^s + p_y^s y^s$.

すなわち，もし$(x^t, y^t) R (x^s, y^s)$（(x^t, y^t)は(x^s, y^s)より顕示選好される）ならば，

$(x^s, y^s)\,R\,(x^t, y^t)$ ではない（(x^s, y^s) は (x^t, y^t) より顕示選好されることはない）．

演習問題Ｅ

１）上記の問Ａ）に対するあなたの答えに関して，顕示選好の弱公理が満たされているかどうかをチェックしなさい．３つのケースに関するすべての組み合わせ（全部で 3 通り）について考察すること. また, あなたの顕示選好が推移律を満たしているかどうかもチェックしなさい.

２）上記の問Ｂ）に対するあなたの答えに関して，１）と同じ問題について解答しなさい.

３）無差別曲線と予算線を描いた図を用いて，顕示選好の弱公理が満たされる例を二つ，満たされない例を二つ，それぞれ図示しなさい．問Ａ）と問Ｂ）では，財Ｘと財Ｙの量は離散値だけに限りましたが，ここでは，財Ｘの量と財Ｙの量は実数値をとるものとします.

Ｆ．効用最大化の十分条件（2 階の条件）：行列式による判別

2 階偏微分係数を $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$、$u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$、$u_{yx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ と表そう。

命題１：もし、任意の点 $(x, y) \in \Re_+^2$ において、関数 $u : \Re_+^2 \to \Re$ のヘッセ行列式が

$$u_{xx} < 0 \text{、} \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

を満たすならば、u は強い意味の凹関数である。

注）上記の二つの条件が満たされれば、$u_{yy} < 0$ が成立する。

命題２：もし、任意の点 $(x, y) \in \Re_+^2$ において、関数 $u : \Re_+^2 \to \Re$ の縁付きヘッセ行列式が

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_x \\ u_x & 0 \end{vmatrix} < 0 \text{、} \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_x \\ u_{yx} & u_{yy} & u_y \\ u_x & u_y & 0 \end{vmatrix} > 0$$

を満たすならば、u は強い意味の準凹関数である。

注）2 番目の条件が成立するならば、1 番目の条件も満たされるので、実は、2 番目の条件だけで十分である。しかし、命題１の条件と似た形で書ける点では、メリットがある。

演習問題Ｆ

１）　以下の効用関数が、それぞれ、強い意味の凹関数か否か、また、強い意味の準凹関数か否かを示せ。

a) $u = x^{2/5}y^{3/5}$ 、b) $u = x^3y^2$ 、c) $u = 2\ln x + \ln y$ 、d) $u = (2/3)\ln x + (1/3)\ln y$ 、e) $u = 5x + 2y$

２）　命題１の二つの条件が満たされると、$u_{yy} < 0$ が成立することを示せ。

３）　命題２の２番目の条件が成立するならば、１番目の条件も満たされることを示せ。