3-2-2 ラプラス変換と線形回路

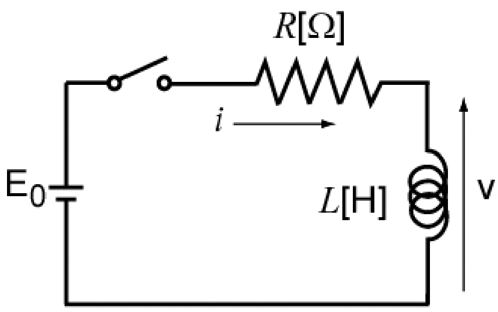
(1)回路応答の過渡解析

ラプラス変換は、定係数の線形微分方程式を解く手段として用いられる。電気回路(線形回路)の過渡応答は微分方程式を解くことによって得られるので、この目的でラプラス変換がよく用いられる。

[例]

右の図で、$t=0$ においてSWがonになったとする。また、SWをonにする直前の電流が $i(0_-)=I_i$ であったとする。$t=0$ 以後、回路の電圧電流の関係式は次のようになる。

$$L\frac{d}{dt}i+Ri=E_0 \tag{3.19}$$



電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とすると、式(3.18)のラプラス変換は

$$L\left(sI(s)-I_i\right)+RI(s)=\frac{E_0}{s}$$

これを $I(s)$ についてまとめると、次の式を得る。

$$(Ls+R)I(s)=\frac{E_0}{s}+LI_i$$

$$\begin{aligned}I(s)&=\frac{E_0}{s(Ls+R)}+\frac{LI_i}{Ls+R}=\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{L}{Ls+R}\right)+\frac{LI_i}{Ls+R}=\frac{E_0}{R}\frac{1}{s}+\frac{L}{Ls+R}\left(I_i-\frac{E_0}{R}\right)\\&=\frac{E_0}{R}\frac{1}{s}+\left(I_i-\frac{E_0}{R}\right)\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\end{aligned} \tag{3.20}$$

式(3.20)をラプラス逆変換して、電流 $i(t)$ が次のように求まる。

$$i(t)=\frac{E_0}{R}+\left(I_i-\frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \tag{3.21}$$

ここで、SWをonにする直前の電流が $i(0\_)=I_i=0$ であったとすると、$t=0$ 以後に回路を流れる電流は次のようになる。

$$i(t)=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

(2)任意の入力信号に対する応答

線形回路の特性が時不変であり、インパルス応答が $T\left[\delta(t)\right]=h(t)$ で与えられるものとする。このとき、任意の信号 $f(t)$ を入力に加えた場合の応答 $g(t)$ は、次のようにして求まる。

$$g(t)=T\left[f(t)\right]=T\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

すなわち、

$$g(t)=f*h \qquad (3.22)$$

である。さらに、変数変換により、

$$g(t)=\int_{\infty}^{-\infty} f(t-\tau')T\left[\delta(\tau')\right](-d\tau')=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

ここで、$\delta(t)=0\,(t<0)$であるから、因果律により $h(t)=0 \quad (t<0)$ であることに注意すると、

$$g(t)=\int_{0}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad (3.24)$$

となる。

さらに、回路応答の初期値をすべて 0 とし、$t<0$ において $f(t)=0$ であるような入力信号を加える場合を考えて式(3.24)の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau e^{-st}dt=\int_0^{\infty} h(\tau)\int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dtd\tau\\ &=\int_0^{\infty} h(\tau)\int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dte^{-s\tau}d\tau=\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_{-\tau}^{\infty} f(t')e^{-st'}dt'\\ &=\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\int_0^{\infty} f(t')e^{-st'}dt'\end{aligned}$$

すなわち、$g(t)$、$f(t)$、$h(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $G(s)$、$F(s)$、$H(s)$ と書くことにすれば、

$$G(s)=H(s)F(s) \qquad (3.25)$$

が成り立つ。ここで、$H(s)$ をこの回路の伝達関数とよぶ。

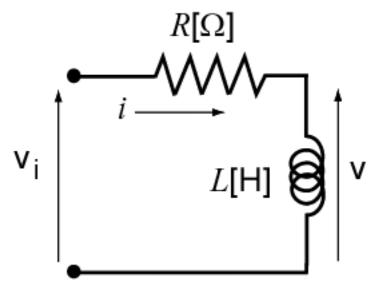
(3)伝達関数

伝達関数 $H(s)$ を求める例を示す。

[例 1]

電源電圧 $v_i(t)$ を入力、L-R 直列回路に流れる電流 $i(t)$ を応答と考える。

$$L\frac{d}{dt}i(t)+Ri(t)=v_i(t) \qquad (3.26)$$



電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とし、初期状態を $i(0\_)=0$ とおく。さらに入力電圧として $v_i(t)=\delta(t)$ を考えた場合の応答 $i(t)$ のラプラス変換が伝達関数であるので、式(3.26)から次の関係が成り立つ。

$$sLH(s) + RH(s) = 1$$

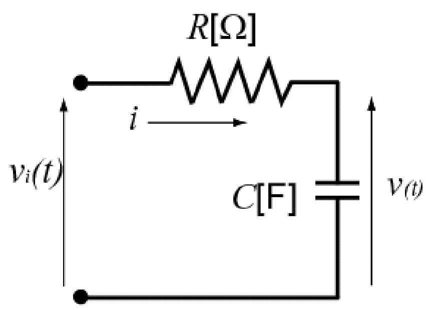
すなわち、この回路の伝達関数は

$$H(s) = \frac{1}{R + sL} \tag{3.27}$$

[例 2]

電源電圧 $v_i(t)$ を入力、C-R 直列回路において C の両端に発生する電圧 $v(t)$ を応答と考える。

$$\begin{aligned} v(t) + Ri(t) &= v_i(t) \\ i(t) &= C\frac{dv(t)}{dt} \end{aligned} \tag{3.28}$$



より、$v_i(t) = \delta(t)$ 、$v(0\_) = 0$ として両辺をラプラス変換する。このとき、伝達関数は応答 $v(t)$ のラプラス変換 $H(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ であるから、

$$H(s) + RCsH(s) = 1$$

すなわち、

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs} \tag{3.29}$$

と求まる。