確率と統計(O)
「条件付き確率と
多次元正規分布(第7章)」

- 担当教員: 杉山 将(計算工学専攻)
- 居室: W8E-406
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

- 授業のウェブサイト:

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

講義計画(シラバス)

- 確率と統計の基礎
- 確率変数，確率分布
- 積率，積率母関数
- 離散型の確率分布の例
- 連続型の確率分布の例
- 確率不等式，擬似乱数
- 多次元の確率分布
- 大数の法則，中心極限定理
- 統計的推定，仮説検定

条件付き確率（離散型の場合）

■離散型の確率変数 X, Y の条件付き確率分布 (conditional probability distribution)：
$Y = y$ が起こったもとで $X = x$ が起こる確率

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$\text{for } P(Y = y) \neq 0$$

■離散型の確率変数に対する条件付き確率関数 (conditional probability function)：

$$p(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \quad \text{for } h(y) \neq 0$$

$$h(y) = \sum_y f(x, y)$$

条件付き確率の例

■ 分割表(contingency table)

（人）

X ＼ Y	確率と統計の講義中に眠たい	確率と統計の講義中に眠たくない	合計
確率と統計が好き	20	40	60
確率と統計が嫌い	20	20	40
合計	40	60	100

P(X=好)=0.6, P(X=嫌)=0.4

P(X=好 | Y=眠)=0.5, P(X=嫌| Y=眠)=0.5

P(X=好 | Y=不眠)=0.67, P(X=嫌| Y=不眠)=0.33

条件付き確率(連続型の場合)

- 条件付き確率関数を連続型に変えることにする.
- 条件付き確率密度関数(conditional probability density function):

$$p(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad \text{for } h(y) \neq 0$$

$$h(y) = \int f(x,y)dx$$

- $p(x|y)$ が確率密度関数になっていることの証明:
  - 非負性: $f(x,y) \geq 0,\ h(y) > 0$ より $p(x|y) \geq 0$.
  - 正規性: $\displaystyle\int p(x|y)dx = \int \frac{f(x,y)}{h(y)}dx = \frac{h(y)}{h(y)} = 1$

条件付きの期待値と分散

- 条件付き確率も確率なので，期待値や分散が定義できる
- 条件付き期待値(conditional expectation):

$$E(X|y) = \int xp(x|y)dx$$

- 条件付き分散(conditional variance):

$$V(X|y) = \int (x - E(X|y))^2 p(x|y)dx$$

ベイズの定理

- ベイズの定理(Bayes' theorem):

$$p(x|y) = \frac{q(y|x)g(x)}{\int q(y|x)g(x)dx}$$

- $g(x)$ ： x の事前確率(prior probability)
  y を知る前の x の確率
- $p(x|y)$ ： x の事後確率(posterior probability)
  y を知った後の x の確率
- 事前確率 $g(x)$ と条件付き確率 $q(x|y)$ から, 事後確率 $p(x|y)$ が計算できる

演習

- 確率と統計の授業が好きな人，嫌いな人の確率が

  P(X=好)=0.8　　P(X=嫌)=0.2

  であるとする．また，確率と統計の授業が好きな人の中で授業中眠たい人，および，確率と統計の授業が嫌いな人の中で授業中眠たい人の確率が，それぞれ

  P(Y=眠｜X=好)=0.25　　P(Y=眠｜X=嫌)=0.25

  であるとする．

  1. P(X=好, Y=眠)を求めよ．
  2. P(Y=眠)を求めよ．
  3. P(X=好｜Y=眠) を求めよ．
  4. 確率と統計の好き嫌いと授業中眠たい事は独立か？

ベイズの定理の使用例

- 結構精度の良いウソ発見器:
  - X:被験者の発言がウソか本当か
  - Y:ウソ発見器の出力
  - ウソをウソと判定する確率:

    P(Y=ウソ | X=ウソ)=0.99
  - 本当を本当と判定する確率:

    P(Y=本当 | X=本当)=0.95
- 被験者がウソをつく確率が

  P(X=ウソ)=0.001

のとき，ウソ発見器がウソだと言ったら信用すべきか？

ベイズの定理の使用例

- ベイズの定理を用いると

  P(X=ウソ | Y=ウソ) ≒0.019

  P(X=本当 | Y=ウソ) ≒0.981

- P(X=ウソ | Y=ウソ) ≪ P(X=本当 | Y=ウソ) なので，ウソ発見器の結果は信用すべきでない！

- ウソつきが少ない場合はウソ発見器は信用できない
- 実際，P(X=ウソ | Y=ウソ) ＞ P(X=本当 | Y=ウソ) が成り立つためには，

  P(X=ウソ)>0.048

  である必要がある

畳み込み

- X, Y : 独立な確率変数
- $g(x), h(y)$: それぞれの確率密度関数
- $Z = X + Y$ の確率密度関数 $k(z)$は

$$k(z) = \int g(x)h(z-x)dx \qquad y = z - x$$

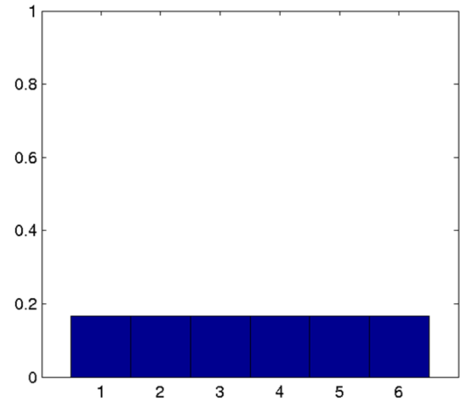
- 6面体のサイコロ2個の和が7のとき，それぞれの値は(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)なので，それらの確率を足しあわせれば良い

- これを畳み込み(convolution)とよび，$k = g * h$で表す．
- 再生的(reproductive) : 同じ種類の確率分布の畳み込みの結果が再び同じ種類の確率分布になる（例 : 正規分布）

畳み込みの例

- さいころ1の出る目 X:

$$g(x) = \frac{1}{6} \text{ for } x = 1, 2, \ldots, 6$$



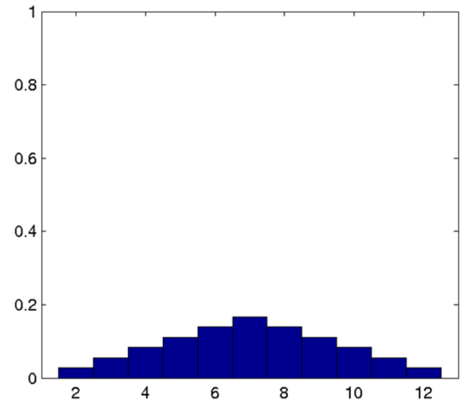
- さいころ2の出る目 Y:

$$h(y) = \frac{1}{6} \text{ for } y = 1, 2, \ldots, 6$$

- 二つのさいころの出る目の和 $Z = X + Y$:

$$k(z) = \frac{6 - |7 - z|}{36}$$

$$\text{for } z = 2, 3, \ldots, 12$$



2次元正規分布(標準正規形)

$X, Y \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$

- X, Yが独立に標準正規分布に従うとき，同時確率密度関数は

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- 期待値：

$$E(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$$

- 分散共分散行列：

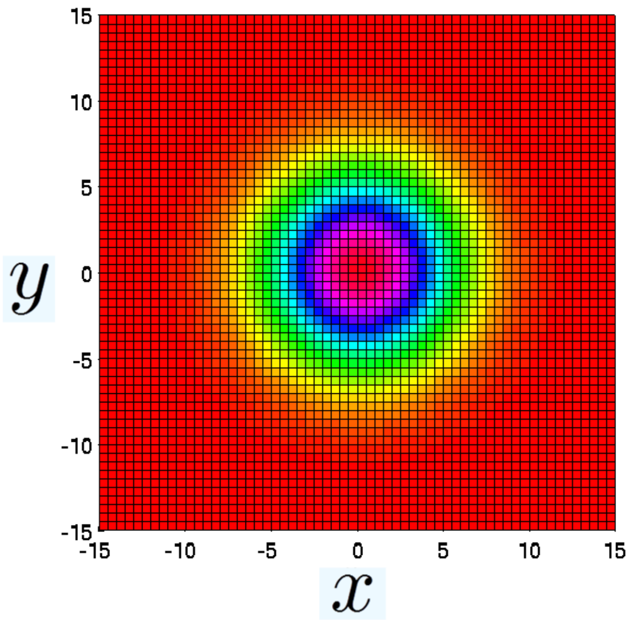
$$V(\boldsymbol{z}) = E\{\ [\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{z} - E(\boldsymbol{z})]^\top \}$$

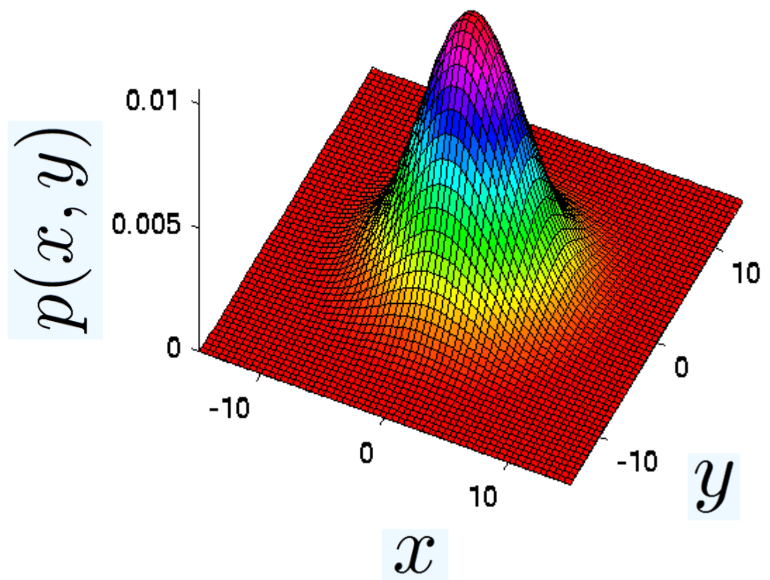
$$= \boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{I}$ ：単位行列

2次元正規分布(標準正規形)

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}}{2}\right) \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$





- 丸い形をしている.

2次元正規分布(一般形)

- 各要素が独立に標準正規分布に従う $\boldsymbol{z}$ を
  - 2×2正則行列 $\boldsymbol{T}$
  - 2次元ベクトル $\boldsymbol{\mu}$

  を用いて $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\mu}$ と変換する.

- $\boldsymbol{\xi}$ の確率密度関数は,

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})$$

$$l(\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{z})|\boldsymbol{T}|^{-1}$$

ヤコビアン

$$= \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^\top$　　$|\boldsymbol{\Sigma}|$: $\boldsymbol{\Sigma}$の行列式

2次元正規分布(一般形)

$$l(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu}) \right)$$

- 期待値:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\mu}$$

$$E(\boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{T}E(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\mu}$$

$$= \boldsymbol{\mu}$$

$$E(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$$

- 分散共分散行列:

$$V(\boldsymbol{\xi}) = E\{\ [\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu}][\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu}]^\top \}$$

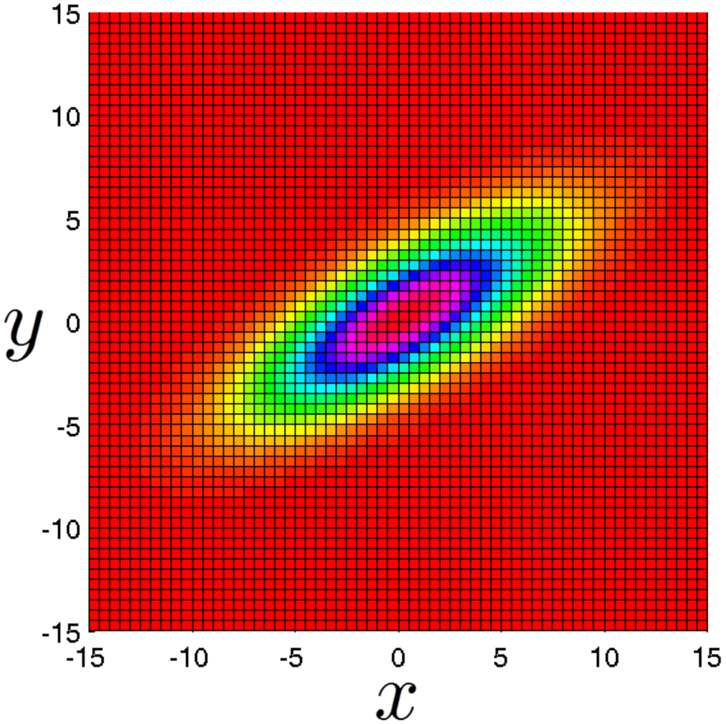
$$= \boldsymbol{T}E[\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\top]\boldsymbol{T}^\top = \boldsymbol{T}V(\boldsymbol{z})\boldsymbol{T}^\top$$

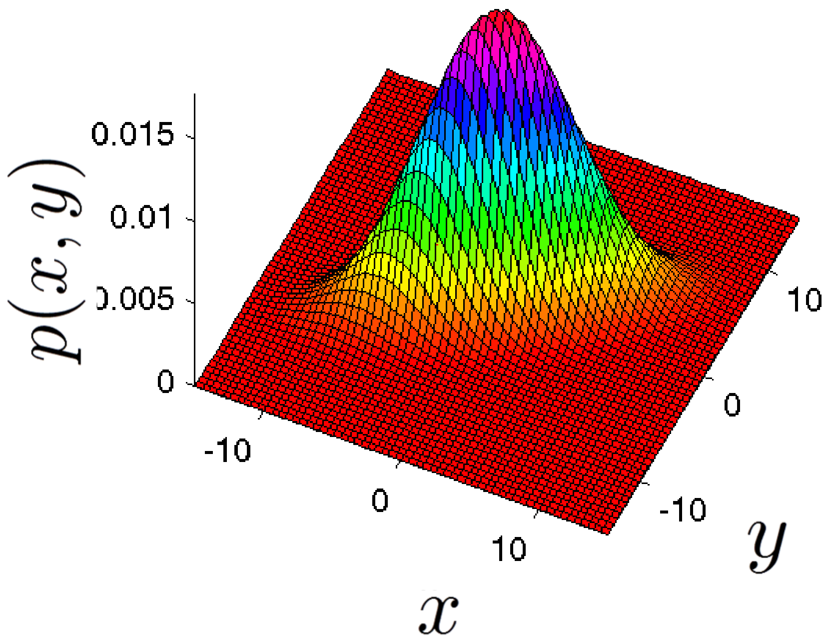
$$= \boldsymbol{\Sigma}$$

$$V(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{I}$$

2次元正規分布(一般形)

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$





- 楕円形をしている.

まとめ

- 条件付き確率
- ベイズの定理
- 畳み込み
- 2次元正規分布

宿題

1. 独立な X, Y の和 $Z = X + Y$ の積率母関数は

$$M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t) \qquad M_X(t) = E[e^{tX}]$$

と表すことができることを証明せよ.

2. 二項分布の再生性を証明せよ.

$$Bi(n_X, p) * Bi(n_Y, p) = Bi(n_X + n_Y, p)$$

ヒント: 二項分布 $Bi(n,p)$ の積率母関数は

$$(pe^t + (1-p))^n$$

3. 正規分布の再生性を証明せよ.

$$N(\mu_X, \sigma_X^2) * N(\mu_Y, \sigma_Y^2) = N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

ヒント: 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の積率母関数は

$$\exp(\mu t + \sigma^2 t^2 / 2)$$

宿題(続き)

4. Octaveなどを使い，2次元正規分布の確率密度関数のグラフ(3次元)を作成せよ．そして，分散共分散行列をいろいろと変化させ，正規分布の形がどのように変化するか調べよ．

ヒント：共分散行列の固有方程式

$$\mathbf{\Sigma}\phi = \lambda\phi$$

を解き $\mathbf{\Sigma}$ を固有値分解せよ.

$$\mathbf{\Sigma} = \lambda_1\phi_1\phi_1^\top + \lambda_2\phi_2\phi_2^\top$$

Octaveではeig関数で固有値・固有ベクトルを計算できる

注意：共分散行列は正値対称行列である