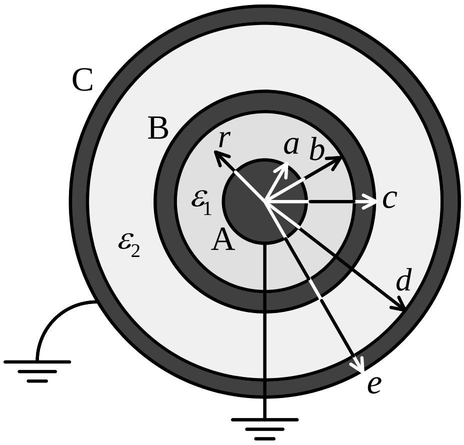
電磁気学Ⅰ　演習 第１２回 解答

48. 図に示すように、半径aの導体球 A と内半径d、外半径eの同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径b、外半径cの導体球殻 B が挿入されている。導体 A,B 間は誘電率ε_1の誘電体で満たされており、導体 B,C の間は誘電率ε_2の誘電体で満たされている。さらに導体 A,C は接地されている。今導体 B に電荷量 Q を与えた。以下の問に答えよ。



(1) 球の中心から$r=a,b,c,d,e$における真電荷量を以下の誘導に従い①−⑧に式を埋めながら求めよ。

$r=a,b,c,d,e$における真電荷の総和をそれぞれQ_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_eとおく。導体 B に与えた電荷Qは$r=b$と$r=c$に分かれて分布するので、Q、Q_b、Q_cの関係は

①　$Q=Q_b+Q_c$

今導体 B の内部に閉曲面（導体 A、ε_1の誘電体をくるむ様な閉曲面）をとりガウスの法則を適用する。導体内部は電界が 0 であるから、Q_a, Q_bには次の関係が成り立つ。

②　$Q_a+Q_b=0$

同様に、導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、Q_c, Q_dに成り立つ関係は

③　$Q_c+Q_d=0$

もしQ_eが有限の値であると、無限遠と導体 C は電位差を持つことになる。しかし今導体 C は接地されているのでQ_eは、

④　$Q_e=0$

対称性により電界は放射方向成分rのみの関数である。$a \le r \le b$に球状の閉曲面をとりガ

ウスの法則を適用すると$a \le r \le b$の電界は、

⑤ $E(r) = \dfrac{-Q_b}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$

$c \le r \le d$に球状の閉曲面をとりガウスの法則を適用すると$c \le r \le d$の電界は、

⑥ $E(r) = \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$

導体 A と C はともに接地されているので電位差は 0。よって、A から B までの電位と C から D までの電位をたせば 0 になるので、以下の式が成り立つ。

⑦ $-\int_a^d E(r)dr = -\int_a^b \dfrac{-Q_b}{4\pi\varepsilon_1 r^2}dr - \int_c^d \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_2 r^2}dr = \dfrac{Q_b}{4\pi\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{Q_c}{4\pi\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}\right) = 0$

よって、①－④、⑦式より、Q_a, Q_b, Q_c, Q_d は、

⑧ $Q_a = -\dfrac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}Q$

$Q_b = \dfrac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}Q$

$Q_c = \dfrac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}Q$

$Q_d = -\dfrac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}Q$

(2) 球の中心から$r = a,b,c,d,e$における分極電荷量を以下の誘導に従い⑨－⑫に式を埋めながら求めよ。

r=a,b,c,d,e における分極電荷を q_a, q_b, q_c, q_d, q_e とおくと、r>e は真空なので q_e は、

⑨ $q_e = 0$

導体 B の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、②式と導体内部は電界が 0 であることから、q_a, q_b,に成り立つ関係は、

⑩ $Q_a + q_a + Q_b + q_b = q_a + q_b = 0$

同様に、導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、q_c, q_d に成り立つ関係は、

⑪ $Q_a + q_a + Q_b + q_b + Q_c + q_c + Q_d + q_d = q_c + q_d = 0$

a≦r≦b および c≦r≦d における電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、q_a, q_b, q_c, q_d をそれぞれ求めると、

⑫

$\dfrac{Q_a + q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \Rightarrow$

$$q_a = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right) Q_a = -\frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right) Q$$

$$q_b = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right) Q_b = \frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right) Q$$

$$q_c = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right) Q_c = \frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right) Q$$

$$q_d = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right) Q_d = -\frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1\right) Q$$

(3) 導体 B と導体 AC 間の静電容量を求めよ。

導体 B の電位 V は、

$$V = -\int_a^b \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2} dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

よって静電容量は、

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\left(\varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c}\right)$$

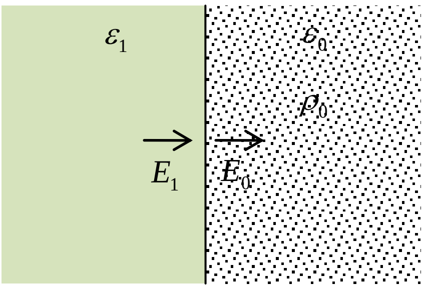
■

48’. 図のように、平面境界を境に左の空間は誘電率ε_1の誘電体で満たされ、右の空間は誘電率ε_0で一様な電荷密度ρ_0で満たされている。左右の空間にそれぞれE_1，E_0の電界の境界垂直成分があるとき、次の量を求めよ。

(i) 左右の空間の電束密度D_1，D_0

(ii) 境界上の真電荷の面電荷密度σ

(iii) 境界上の分極電荷の面電荷密度σ_p



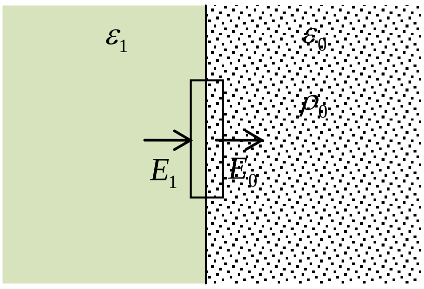
【解答】

(i)

$D_1 = \varepsilon_1 E_1$

$D_0 = \varepsilon_0 E_0$

(ii)



($\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dv$ より)

$D_0 - D_1 = \sigma$

$\sigma = D_0 - D_1 = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_1 E_1$

(iii)

($\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \dfrac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} dv$ より)

$$E_0 - E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma + \sigma_p)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 E_1 - \sigma \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \end{aligned}$$

■