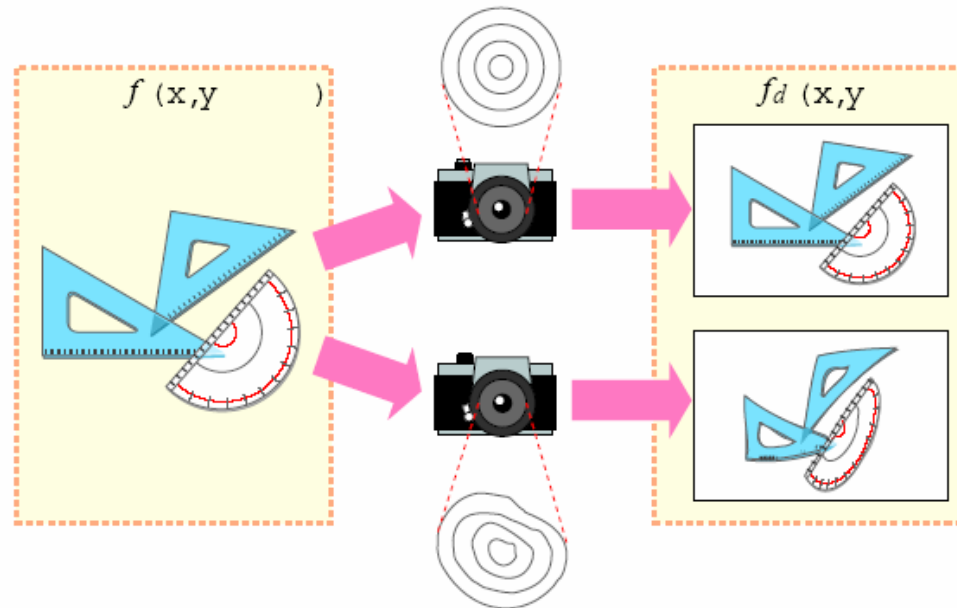


# 画像の復元

# 画像復元の枠組み

- 3次元シーンを2次元画像に投影時, 理想的なピンホールカメラを用いると仮定すると透視投影
- 実際の光学機器にはレンズや光学系の歪みなどがあり, 観測される画像 $f_d(x, y)$  は, 本来得られる筈であった画像 $f(x, y)$  から劣化(degradation)している場合がある



# 画像復元の枠組み

- 観測画像の画素値 $f_d(x, y)$ は、本来得られる筈である理想画像の画素値 $f(\xi, \eta)$ が何らかの形で劣化した結果であると仮定
- このとき $f(\xi, \eta)$ が $f_d(x, y)$ へ劣化することを表現する関数 $h(x, y, \xi, \eta)$ , それ以外の要因を $n(x, y)$ とおけば,

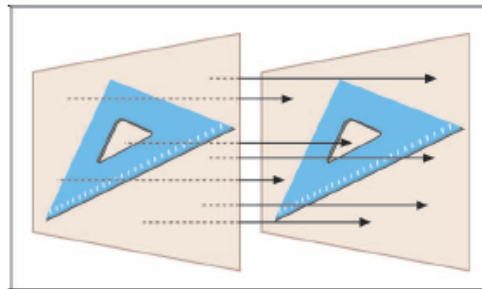
$$f_d(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + n(x, y)$$

と定式化

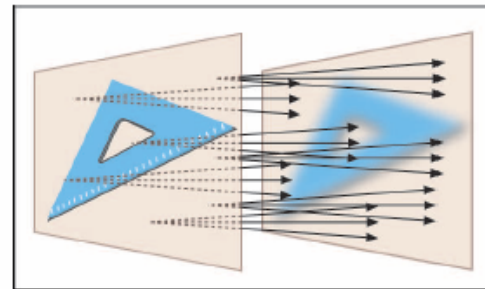
このとき4変数関数 $h(x, y, \xi, \eta)$ は劣化関数と呼ばれる  
ここでは $n(x, y)$ をノイズと呼ぶことにする

# 劣化の種類

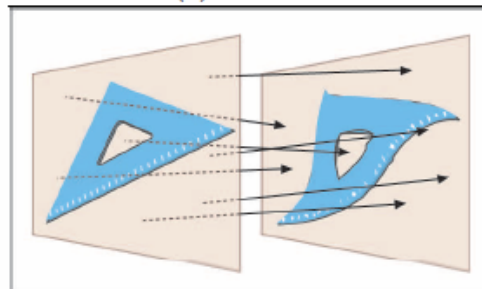
- 式 $f_d(x, y)$ を解くのは困難であるが、以下のように仮定すると、解くことが可能
- 1番目の仮定
  - 劣化関数が位置に不変である.
  - 観測画像の点 $(x, y)$  に対して理想画像の1点 $(\xi, \eta)$  が1対1対応で影響を与える
- 2番目の仮定
  - 座標値の歪み
  - 画素値の歪み(座標は歪んでいない)



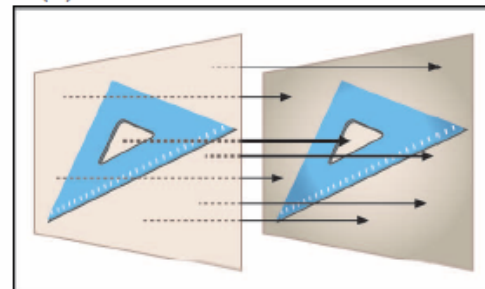
(a) 劣化なし



(b) 位置不変な劣化関数による劣化



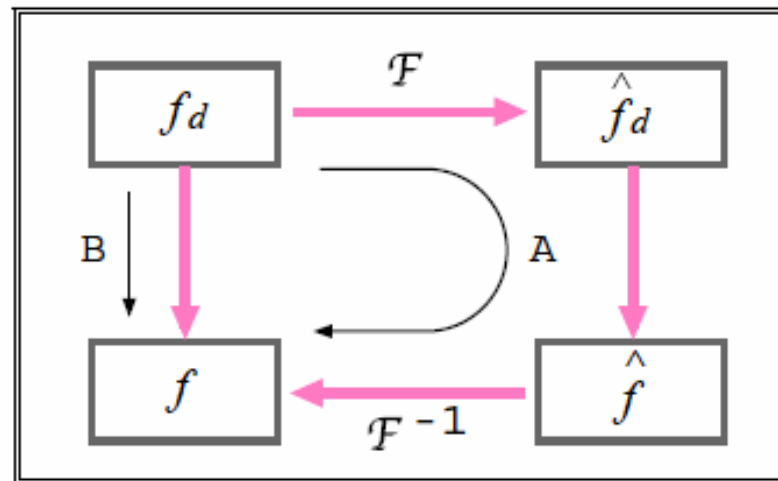
(c) 座標値の歪み



(d) 画素値の歪み

# 復元方法

- 復元方法として
  - 周波数領域での復元(図のA を通る方法)
  - 実空間での復元(図のB を通る方法)



# 周波数領域での復元

- 劣化関数 $h(x, y, \xi, \eta)$  が位置に不変
  - これは, 任意の理想画像の点 $(\xi, \eta)$  が観測画像の点 $(x, y)$  に対して与える影響が理想画像と観測画像の点の相対的位置関係 $(x - \xi, y - \eta)$ だけに依存
  - この制約により劣化関数は2変数関数 $h(x, y, \xi, \eta)$  で表現可能
- このとき、観測画像の生成式は

$$\begin{aligned} f_d(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + n(x, y) \\ &= (f * h) + n \end{aligned}$$

と表現可能。ここで $f * h$ はたたみ込み(convolution)

# 周波数領域での復元

- 式 $f_d(x, y)$ をフーリエ変換すると

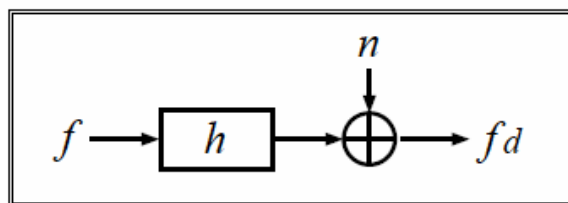
$$\begin{aligned}\hat{f}_d &= \mathcal{F}[f_d] \\ &= \mathcal{F}[f * h + n] \\ &= \hat{f}\hat{h} + \hat{n}\end{aligned}$$

- 周波数領域で考えると画像復元は

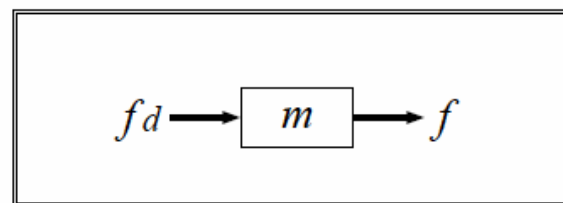
$$\hat{f}(k_x, k_y) = \hat{m}(k_x, k_y)\hat{f}_d(k_x, k_y)$$

なる $\hat{m}$ を求めることと定式化することが可能

- これを解くには
  - 逆フィルタ(inverse lter)
  - ウィーナーフィルタ(Wiener lter)の二つの方法が知られている.



(a) 劣化



(b) 復元

ブロック図

# 逆フィルタ

- ノイズ  $\hat{n}$  が無い場合

- このとき,  $\hat{h} \neq 0$  であるならば, 簡単に

$$\hat{f} = \frac{\hat{f}_d}{\hat{h}}, \quad \hat{m} = \frac{1}{\hat{h}}$$

- 一般には  $\hat{h}(k_x, k_y) = 0$  となる点  $(k_x, k_y)$  が存在する. このとき  $\hat{f}_d(k_x, k_y) = 0$  であるので  $0/0$  となり値は定まらない. しかし  $\hat{h} = 0$  となる点がたかだか可算個であるならば, 逆フーリエ変換のときの積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_d}{\hat{h}} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

に与える影響は小さいので無視することが出来る.



# 手ぶれモデル

- 焦点距離 $f$  のカメラで光軸に垂直な平面状の対象物体を撮影
- この平面のピンホールからの距離を $L$  とする. このとき時刻- $T/2$ から $T/2$ までのシャッター開放(露光)時間中, 手ぶれでカメラが $Y$  方向に速度 $-V$ で動いていたとする.
- カメラを固定して考えれば, 相対的に対象物体が速度 $V$  で移動したことになり, 画像座標上では対象物体が $y$ 方向に速度 $v = fV/L$  で移動する.
  - このとき, 時刻0 で静止しているカメラが単位時間撮影した場合の理想画像を $f(x, y)$  とする. カメラの手ぶれにより劣化した画像は

$$f_d(x, y) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y + vt) dt$$

ここで  $vt = -\eta$  とおけば、

$$\begin{aligned} f_d(x, y) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y + vt) dt \\ &= \frac{-1}{vT} \int_{vT/2}^{-vT/2} f(x, y - \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{vT} \int_{-vT/2}^{vT/2} f(x, y - \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{vT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi, y - \eta) \text{rect}\left(\frac{\eta}{vT}\right) \delta(\xi) d\xi d\eta \end{aligned}$$

ここで、 $\delta(x)$  はデルタ関数である。また、 $\text{rect}(x)$  は

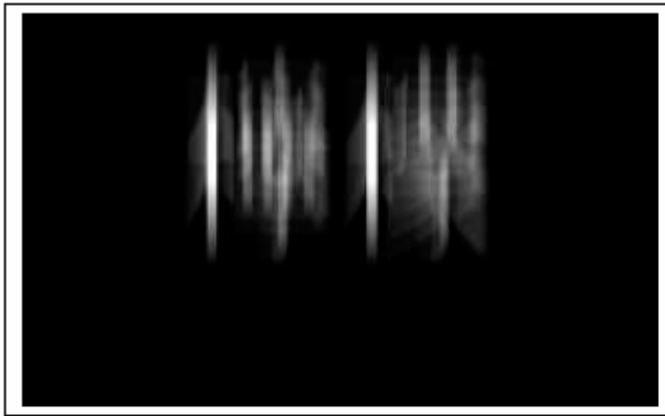
$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

と定義。よって劣化関数は

$$h(x, y) = \frac{1}{vT} \delta(x) \text{rect}\left(\frac{y}{vT}\right)$$

## 周波数領域では

$$\begin{aligned}\hat{h}(k_x, k_y) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{vT}\delta(x)\text{rect}\left(\frac{y}{vT}\right)\right] \\ &= \frac{\sin(vTk_y/2)}{\pi vTk_y}\end{aligned}$$



(a) 劣化画像



(b) 復元

$vT = 40$  とした場合の劣化をシミュレートした観測画像と逆フィルターによる復元例

次にノイズ $n$ が存在するとする

$$\hat{f} = \frac{\hat{f}_d}{\hat{h}} - \frac{\hat{n}}{\hat{h}}$$

$\hat{h} = 0$  のとき  $\hat{n}$  は有限の値を持つ可能性があるので,  $\hat{n}/\hat{h}$  は発散してしまう.

- そこで画像に関して次の仮定をおく.
  - 理想画像はなめらか
  - ノイズは小さい
- これらの仮定からある周波数 $W$  に対して
  - 低周波数の領域
    - 滑らかな理想画像の影響がノイズより強く, 上式 の第1項が第2項より大きい
  - 高周波数の領域
    - 理想画像の成分は減少しノイズと劣化関数の成分だけが残る, 第2項が大きくなり画像の復元に悪影響を与える

- そこで, 高周波数では, ノイズや劣化関数の影響を除去して逆フィルタを次のように定義

$$\hat{m} = \begin{cases} \frac{1}{\hat{h}}, & |k_x^2 + k_y^2| < |W|^2 \\ 1, & |k_x^2 + k_y^2| \geq |W|^2 \end{cases}$$

- ここでは, 高周波数領域ではノイズや劣化関数の影響を無視して  $\hat{m} = 1$  と近似
- 低周波数領域で  $\hat{h}$  が0に近い場合はその点を無視することにして計算

# ウィーナーフィルター

- 理想画像を $F(x, y)$ , 観測画像を $F_d(x, y)$ , 既知の劣化関数を $H(x, y)$ , ノイズを $N(x, y)$  とすると, 離散的な場合も連続的な場合と全く同様に劣化過程は

$$\hat{F}_d = \hat{F}\hat{H} + \hat{N}$$

と表現. 離散フーリエ変換すれば

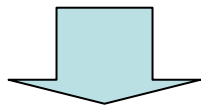
$$F_d = F * H + N$$

復元問題は

$$\hat{M}\hat{F}_d = \hat{F}_e$$

とにおいて, 復元画像 $F_e$  と理想画像 $F$  の差のノルムの二乗  $\|F - F_e\|^2$  が小さくなるような  $\hat{M}$  を見つけるという形で定式化可能

- 問題となるのは未知のノイズ $N$ が存在すること



- ウィーナーフィルター
  - 同じ被写体を同じ条件で撮影し、多数の画像 $F_d$ の集合が与えられたものとして、その統計的性質から復元する手法
  - すなわち、集合平均を $E[\cdot]$ とし、

$$E[\|\hat{F} - \hat{F}_e\|^2]$$

が最小になるようにする. この問題はパーセバルの等式から

$$E[\|F - F_e\|^2]$$

を最小化することと同値.  $\hat{M}\hat{F}_d = \hat{F}_e$  から

$$\begin{aligned} E[\|\hat{F} - \hat{M}\hat{F}_d\|^2] &= E\left[\sum_{k,l} |\hat{F}(k,l) - \hat{M}(k,l)\hat{F}_d(k,l)|^2\right] \\ &= \sum_{k,l} E[(\hat{F}(k,l) - \hat{M}(k,l)\hat{F}_d(k,l))(\hat{F}^*(k,l) - \hat{M}^*(k,l)\hat{F}_d^*(k,l))] \end{aligned}$$

ここで、 $*$  は複素共役を表す。

M を変化させたときの  $E[\|\hat{F} - \hat{M}\hat{F}_d\|^2]$  の最小値を求める.  
 このための必要条件は上式をM で偏微分すると0 になることである.  
 そこで  $\hat{M}(k_x, k_y)$  で偏微分して0 とおくと

$$E[\hat{F}_d(k_x, k_y)(\hat{F}^*(k_x, k_y) - \hat{M}^*(k_x, k_y)\hat{F}_d^*(k_x, k_y))] = 0.$$

よって,  $\hat{M}\hat{F}_d = \hat{F}_e$  を用いて

$$E[\hat{F}^*(k_x, k_y)\hat{F}_d(k_x, k_y)] = E[\hat{F}_e^*(k_x, k_y)\hat{F}_d(k_x, k_y)].$$

$\hat{M}\hat{F}_d = \hat{F}_e$  と  $\hat{F}_d = \hat{F}\hat{H} + \hat{N}$  の複素共役から

$$\hat{F}_e^*(k_x, k_y) = \hat{M}^*(k_x, k_y)(\hat{F}^*(k_x, k_y)\hat{H}^*(k_x, k_y) + \hat{N}^*(k_x, k_y))$$

これと  $\hat{M}\hat{F}_d = \hat{F}_e$  を  $E[\hat{F}^*(k_x, k_y)\hat{F}_d(k_x, k_y)] = E[\hat{F}_e^*(k_x, k_y)\hat{F}_d(k_x, k_y)]$ . に代入すれば

$$E[\hat{F}^*(k_x, k_y)(\hat{F}(k_x, k_y)\hat{H}(k_x, k_y) + \hat{N}(k_x, k_y))] = E[\hat{M}^*(k_x, k_y)|\hat{F}(k_x, k_y)\hat{H}(k_x, k_y) + \hat{N}(k_x, k_y)|^2].$$



よって

$$E[|\hat{F}(k_x, k_y)|^2 \hat{H}(k_x, k_y)] + E[\hat{F}^*(k_x, k_y) \hat{N}(k_x, k_y)] = E[\hat{M}^*(k_x, k_y) |\hat{F}(k_x, k_y) \hat{H}(k_x, k_y) + \hat{N}(k_x, k_y)|^2].$$

ここで  $\hat{N}$  が他の関数と無相関であるとすれば

$$E[|\hat{F}(k_x, k_y)|^2 \hat{H}(k_x, k_y)] = E[\hat{M}^*(k_x, k_y) (|\hat{F}(k_x, k_y)|^2 |\hat{H}(k_x, k_y)|^2 + |\hat{N}(k_x, k_y)|^2)].$$

$\hat{H}, \hat{M}$  は、画像集合中のどの画像でも一定であるので平均の外に出すことが出来るので、 $P(k_x, k_y) = E[|\hat{F}(k_x, k_y)|^2]$ ,  $Q(k_x, k_y) = E[|\hat{N}(k_x, k_y)|^2]$  とおくと

$$P(k_x, k_y) \hat{H}(k_x, k_y) = \hat{M}^*(k_x, k_y) (|\hat{H}(k_x, k_y)|^2 P(k_x, k_y) + Q(k_x, k_y)).$$

よって

$$\hat{M}(k_x, k_y) = \frac{\hat{H}^*(k_x, k_y)}{|\hat{H}(k_x, k_y)|^2 + Q(k_x, k_y)/P(k_x, k_y)}$$

が得られる．実際には  $P(k_x, k_y), Q(k_x, k_y)$  は不明な場合が多く，適当な定数  $\Gamma$  を設定し  $\Gamma = Q/P$  とおく．ノイズがない場合は  $Q = 0$  であるので，逆フィルタ  $1/\hat{H}$  と一致する．

# ノイズの無い場合

- 長時間露光シミュレーション



ノイズ画像



単純な逆変換

# ノイズの無い場合

- 焦点外れシミュレーション



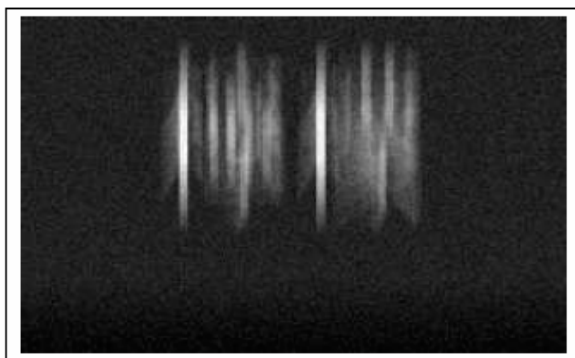
ノイズ画像



単純な逆変換

# ノイズのある場合のフィルター

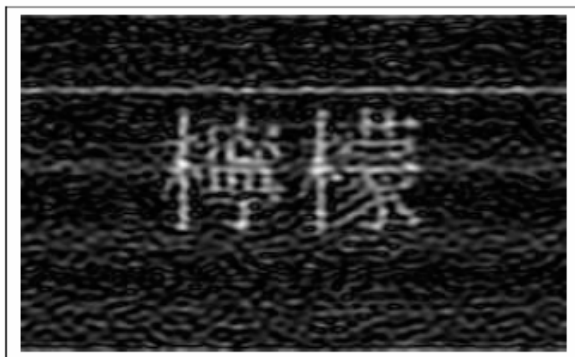
- $y$  方向に  $vT = 40$  で手ぶれがあるときのシミュレーション画像に対して、画像全体に一様乱数でノイズを付与した画像に対する復元結果



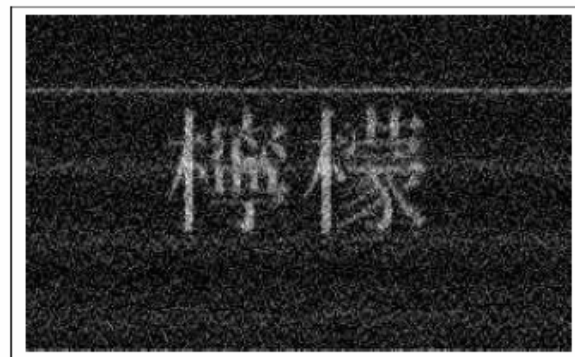
劣化画像



単純な逆フィルタ



ノイズに対応した逆フィルタ



ウィーナーフィルタ

# ノイズのある場合

- 長時間露光シミュレーション



ノイズ画像



単純な逆変換



ノイズ考慮



ウィーナー

# ノイズのある場合

- 焦点外れシミュレーション



ノイズ画像



単純な逆変換



ノイズ考慮



ウィーナー

# 実空間での復元

- 観測画像の点 $(x, y)$ が $(x', y')$ の点の間に連続かつ1対1な対応があるとする. このとき点 $(x', y')$ は $(x, y)$ の関数として

$$(x', y') = (h_x(x, y), h_y(x, y))$$

と表現

このとき

- 座標値の歪み
- 濃度の歪み

について, それぞれ

- 幾何学的復元(geometric correction)
- 濃淡補正

で求めることが可能.

# 幾何学的復元

- 平面上の点 $(x', y')$  を $(x, y)$  に移すことを(座標)変換(transformation)
- 観測画像の点 $(x, y)$  が理想画像の点 $(x', y')$  と連続で1対1の変換

$$x = h_x(x', y'), y = h_y(x', y')$$

で表現。このとき式は、下記のように表現される

$$\begin{aligned} f_d(x, y) &= \iint f(\xi, \eta) \delta(h_x(x', y') - \xi, h_y(x', y') - \eta) d\xi d\eta \\ &= f(h_x(x', y'), h_y(x', y')) \end{aligned}$$

- この式はこのままでは解くことは困難
- そこで対応の連続性から画像の特徴的な点を基準点として見出し、その点の観測画像と理想画像の点の間の変換式を決定



# 幾何学的復元

具体的手順は

- 変換モデルの選択
- 基準点の選定
- 補正式の決定
- 再配列
- 補間

# 変換モデルの選択

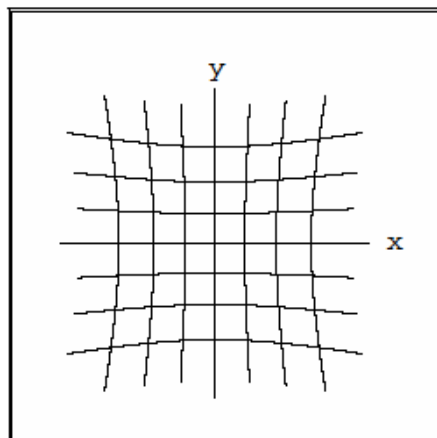
- 座標変換の変換モデルを選択
  - これによりモデルのパラメータを決定すれば, 変換が一意に定まる.
  - 以下に変換モデルの例を示す.
  - アフィン変換
    - 変換モデルとしてもっとも簡単なのはアフィン変換(ane transform)
    - a からf までの6つのパラメータで決定

$$\begin{cases} x &= ax' + by' + e \\ y &= cx' + dy' + f \end{cases}$$

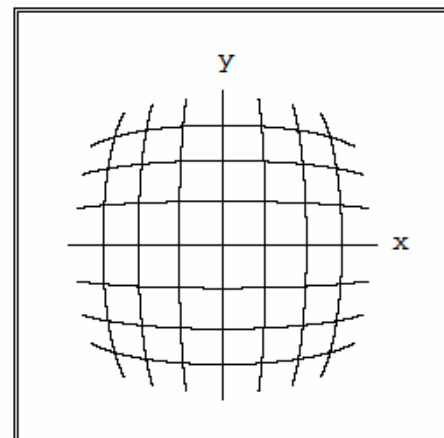
# 歪曲(ひずみ)

- 3次元シーンを撮影するときに、通常は、ピンホールの代わりにレンズを用いたカメラが利用
  - 理想画像との間にレンズが原因となるさまざまな歪みが表れる。
- 像の歪曲(distortion)
  - 理想画像の座標と観測画像の座標の間にずれが生じる
- 歪曲にはその光学的性質により
  - 樽型ひずみ(barrel distortion)
  - 糸巻型ひずみ(pincussion distortion)
- 式で表現すると

$$\begin{cases} x &= k_1 x' (1 + k_2 (x'^2 + y'^2)) \\ y &= k_1 y' (1 + k_2 (x'^2 + y'^2)) \end{cases}$$



(a) 糸巻型 ( $k_1 = 1, k_2 = -0.01$ )



(b) 樽型 ( $k_1 = 1, k_2 = 0.01$ )

# 歪曲(ひずみ)

- 一般の場合

- $x = h_x(x', y')$ ,  $y = h_y(x', y')$  が必要な階数だけ微分可能であるとする。とM 階までマクローリン(Maclaurin) 展開すれば.

$$\begin{cases} x &= \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} (x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y})^m h_x(0, 0) \\ y &= \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} (x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y})^m h_y(0, 0) \end{cases}$$

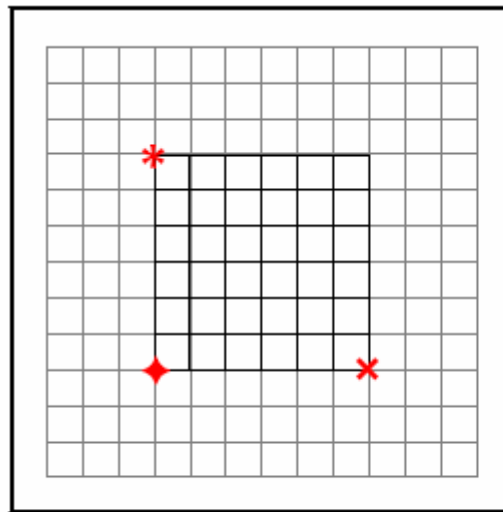
よってM 次までの近似を求めるのであれば,

$$\begin{cases} x &= \sum_{i,j=0}^{i+j=M} a_{ij} x'^i y'^j \\ y &= \sum_{i,j=0}^{i+j=M} b_{ij} x'^i y'^j \end{cases}$$

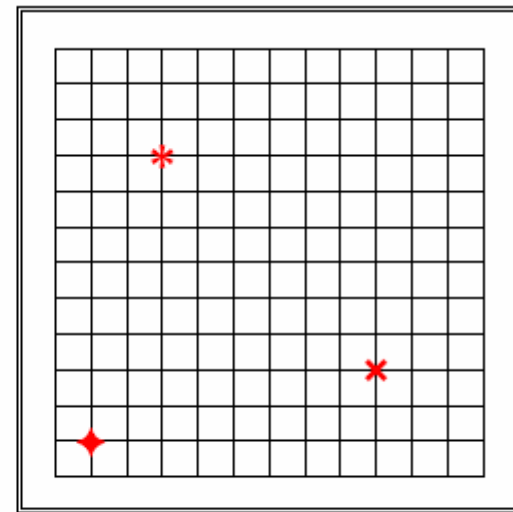
とにおいて, 係数 $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  を決定し変換式を決定する. アフィン変換や歪曲も, この枠組みで表現可能

# 基準点の選定

- 基準点は,
  - 画像でその点が明確化できること
  - 理想画像での座標がわかっていることが重要
- 光学系の歪みはその構成や設定が同じならば一定と考える
- 基準点を人工的に事前に与えて変換式を求めることがある.
- 与えた基準点はGT(Ground Truth) と呼ばれる



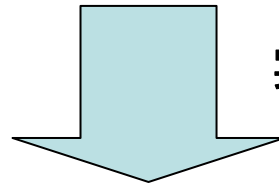
理想画像（実世界）の基準点



観測画像中の基準点

# 補正式の決定

- 基準点の理想画像と観測画像での座標値が厳密に与えられるのであれば.
  - 補正式を特徴づける係数の数を決めるのに必要な数の基準点を求めれば十分である.

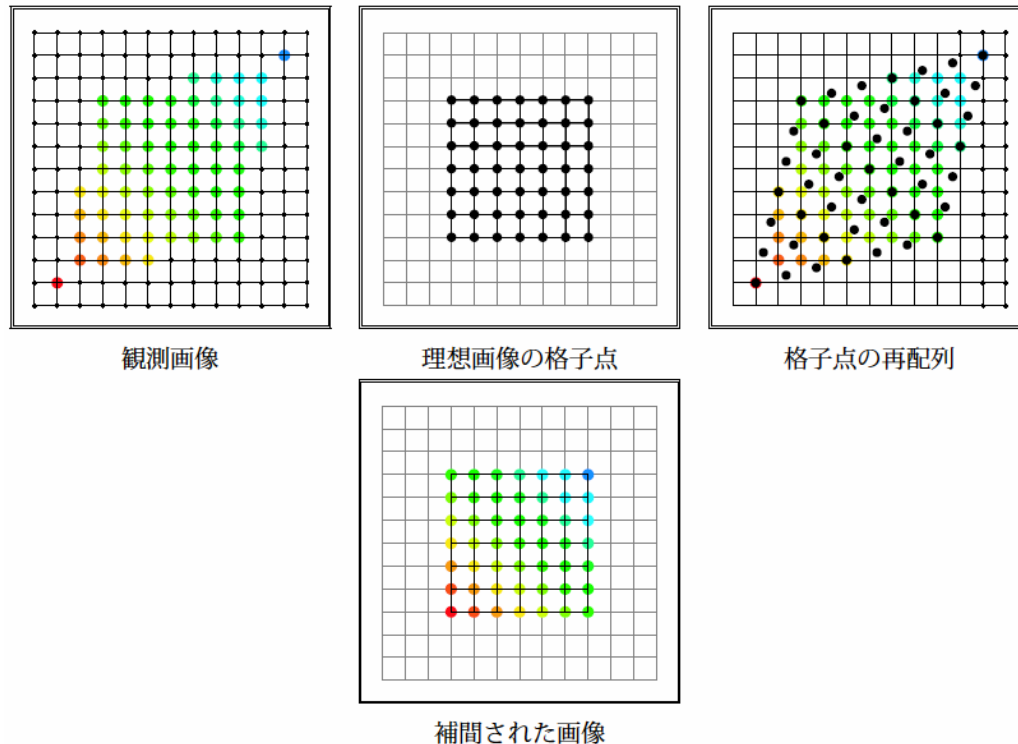


実際には誤差が存在

- 方程式を解くために必要な数より多くの基準点を設け, 最小二乗法で係数を決定
- 逆に基準点の数が係数の数より少ない場合でも, 何らかの制約を設け, 最適化問題として補正式を決定。

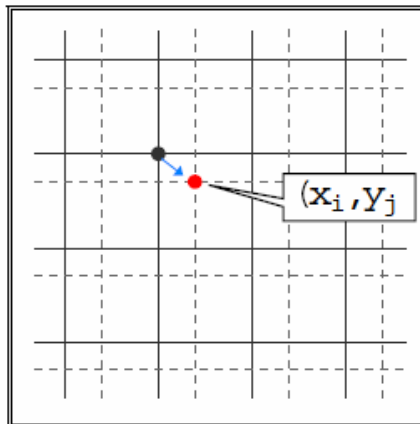
# 再配列(resampling)

- 再配列
  - 理想画像の画素を観測画像中に並べる処理
- 補正式が分かれば, その逆変換によって理想画像の各画素の座標( $i, j$ )に対する観測画像での連続的な座標値( $x_i, y_j$ )が決定可能

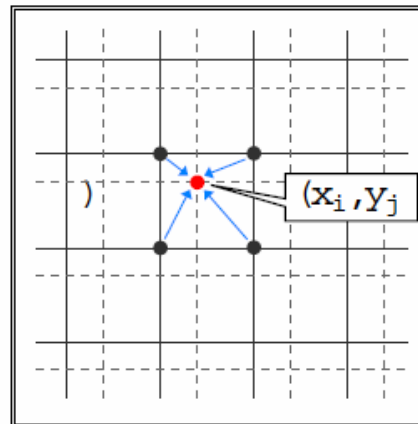


# 補間(interpolation)

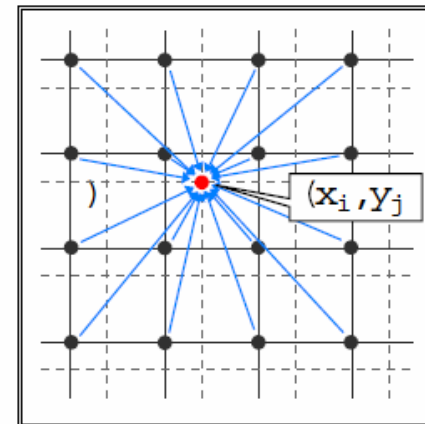
- 再配列によって観測画像中に埋め込まれた理想画像の画素の位置 $(x_i, y_j)$ での画素値 $f(x_i, y_j)$ を観測画像での座標値 $f(m, n)$ での値をもとに決定
  - 再近隣補間法(nearest neighbor interpolation)
  - 共一次補間法(bi-linear interpolation)
  - 3次たたみ込み補間法(cubic convolution interpolation)



(a) 再近隣補間法



(b) 共一次補間法



(c) 三次たたみ込み補間法



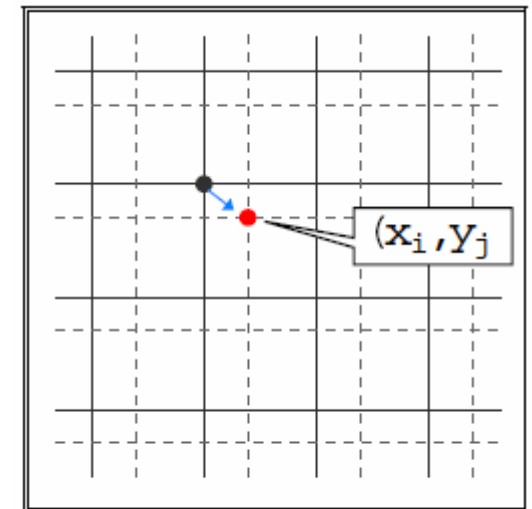
# 再近隣補間法

- 点 $(x_i, y_j)$ の画素値を, 最も近い観測画像での座標点 $([x_i + 0.5], [y_j + 0.5])$ の値とする.

$$f(x_i, y_j) = f([x_i + 0.5], [y_j + 0.5])$$

- 得られた画素値をそのまま使うのでデータ内容が壊されない利点があるが座標値は通常一致しない

$$(x_i, y_j) \neq ([x_i + 0.5], [y_j + 0.5])$$

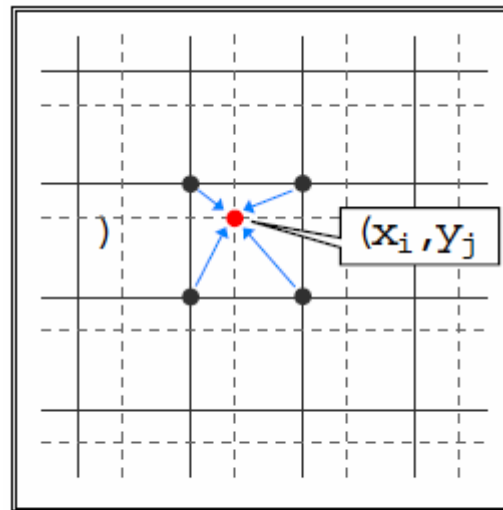


(a) 再近隣補間法

# 共一次補間法

$(x_i, y_i)$  に近傍の4 点の格子点からの線形近似

$$\begin{aligned}\hat{f}(x_i, y_j) = & f([x_i], [y_j])(1 - (x_i - [x_i]))(1 - (y_j - [y_j])) + f([x_i] + 1, [y_j])(x_i - [x_i])(1 - (y_j - [y_j])) \\ & + f([x_i], [y_j] + 1)(1 - (x_i - [x_i]))(y_j - [y_j]) + f([x_i] + 1, [y_j] + 1)(x_i - [x_i])(y_j - [y_j])\end{aligned}$$



(b) 共一次補間法

# 3 次たたみ込み補間法

- サンプリング定理によれば, 高周波数成分を持たなければ離散的な観測値をもとに

$$f(x, y) = \sum_{n_x, n_y = -\infty}^{\infty} f\left(\frac{n_x \pi}{W_x}, \frac{n_y \pi}{W_y}\right) \frac{\sin(W_x x - n_x \pi)}{W_x x - n_x \pi} \frac{\sin(W_y y - n_y \pi)}{W_y y - n_y \pi}$$

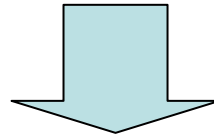
- として再現できる.  $W_x = W_y = \pi$  であるならば

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n_x, n_y = -\infty}^{\infty} f(n_x, n_y) \frac{\sin(\pi(x - n_x))}{\pi(x - n_x)} \frac{\sin(\pi(y - n_y))}{\pi(y - n_y)} \\ &= \sum_{n_x, n_y = -\infty}^{\infty} f(n_x, n_y) \text{sinc}(x - n_x) \text{sinc}(y - n_y) \end{aligned}$$

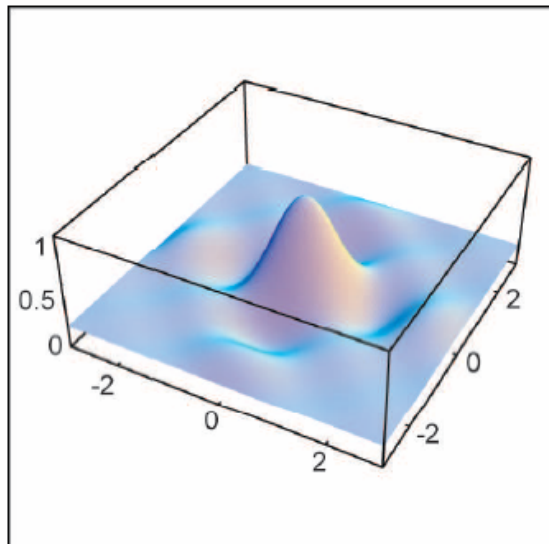
- ここでは  $\text{sinc}(\alpha) = \sin(\pi \alpha) / (\pi \alpha)$  で定義

# 3 次たたみ込み補間法

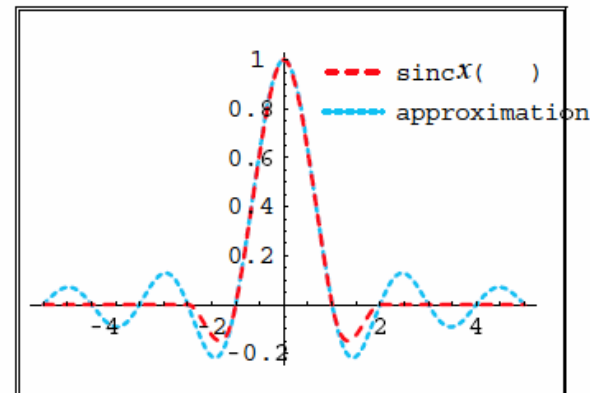
- 式は画像の格子上的画素値で画像全体の連続的な画素値を決定できることを意味
  - 実際に計算できない



- sinc 関数が原点から離れるほど値が小さくなる性質を利用して、再現しようとする画素値の近くの格子点の画素値のみを用いて近似



2次元 sinc 関数

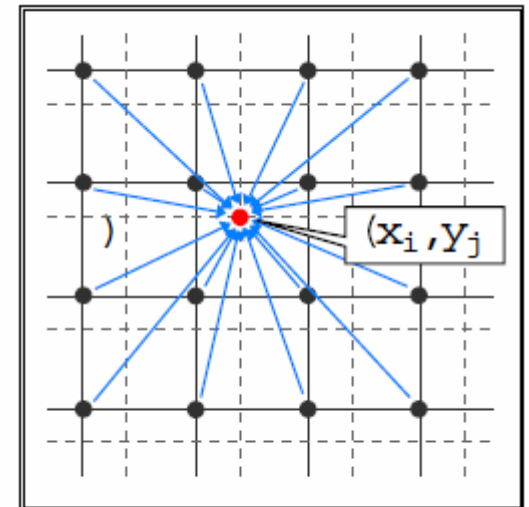


sinc 関数の近似

# 3 次たたみ込み補間法

- 実際にはsinc 関数は $x$  の除算があり計算が不安定になり易い
- 以下のような近似式を用いることが多い.

$$\begin{cases} |x|^3 - 2|x|^2 + 1 & 0 \leq |x| < 1 \\ -|x|^3 + 5|x|^2 - 8|x| + 4 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases}$$



(c) 三次たたみ込み補間法

# 濃淡補正

- カメラでは中心部から離れるほど光の入射量が減る
  - 得られる画像は周辺部が暗くなる.
  - 観測画像の画素値はそれぞれの点ごとにある比率で画素値が変化
  - この変化の比率の逆数
    - 画像位置の関数として $h(x,y)$ で表現すると、

$$\begin{aligned}f_d(x, y) &= \iint f(\xi, \eta) h(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ &= f(x, y) h(x, y)\end{aligned}$$

- 照明条件(露光)が均一となるよう環境を整え、そこに一様な被写体をおいて撮影することで

$$f_c(x, y) = ch(x, y)$$

# 濃淡補正

- 同じ光学系の条件で撮影した画像の画素値が  $f_d(x, y)$  であるとき,

$$\frac{f_d(x, y)}{f_c(x, y)} = \frac{f(x, y)h(x, y)}{ch(x, y)} = \frac{f(x, y)}{c}$$

となり補正可能