第 3 章　ラプラス変換

3-1.ラプラス変換の基礎

3-1-1 ラプラス変換の定義

フーリエ変換では、$-\infty < t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ に $e^{-j\omega t}$ をかけて $-\infty < t < \infty$ で積分していた。$t \to \pm\infty$ における $f(t)$ の振る舞いによっては積分が収束しない場合もある($F(\omega)$ が存在しない)。

これに対して、ラプラス変換では、区間 $0 \le t < \infty$ のみを考える。さらに、$e^{-j\omega t}$ の代わりに $e^{-(\sigma + j\omega)t}$ をかけて $0 \le t < \infty$ で積分する。このとき、σ は積分が収束するように適当に選ぶことを許す。このようにして変換された関数をラプラス変換とよぶ(変換可能な関数の範囲がフーリエ変換に比べて広がった)。

すなわち、$0 \le t < \infty$ で定義された関数 $f(t)$ が $t \to \infty$ で発散してフーリエ積分 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ が計算できない。これに対して、$g(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ を考え、$0 \le t < \infty$ 以外では $f(t) = 0$ として

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \tag{3.1}$$

を計算する。σ を適当に選べば、この積分は存在し、$G(\omega)$ を計算することができる。
$s = \sigma + j\omega$ とおいて、あらためてラプラス変換・逆変換は次のように定義される。

ラプラス変換：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3.2}$$

ラプラス逆変換：

$$f(t) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3.3}$$

3-1-2 ラプラス変換の性質

関数 $f(t)$ をラプラス変換して $F(s)$ を求めることを、$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ と書くことにする。ラプラス変換では次の関係(性質)が成り立つ。

⑴線形性

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha\mathcal{L}[f_1(t)] + \beta\mathcal{L}[f_2(t)] \tag{3.4}$$

⑵原関数の移動

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \exp(-s\tau)\mathcal{L}[f(t)] \quad (\tau > 0) \tag{3.5}$$

(3)像関数の移動

$$\mathcal{L}\left[\exp\left(-at\right)f(t)\right]=F(s+a) \tag{3.6}$$

(4)時間軸の拡大

$$\mathcal{L}\left[f(At)\right]=\frac{1}{A}F\left(\frac{s}{A}\right) \qquad (A>0) \tag{3.7}$$

(5)時間微分

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=s\mathcal{L}\left[f(t)\right]-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=s^2\mathcal{L}\left[f(t)\right]-\left(sf(0)+f'(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^n\mathcal{L}\left[f(t)\right]-\left(s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+s^{n-3}f''(0)+\cdots sf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)\right) \tag{3.8}$$

(6)畳み込み関数のラプラス変換

$f_1 * f_2=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ に対して、$\mathcal{L}[f_1 * f_2]=\mathcal{L}[f_1]\mathcal{L}[f_2]$ (3.9)

3-2.ラプラス変換の応用

3-2-1 定係数微分方程式の解法

(1)解法の流れ

定係数線形微分方程式を考える。

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)=f(t)\qquad (t\geq 0)\qquad (3.10)$$

において、$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$、$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$とする。
式(3.10)の両辺をラプラス変換すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}&s^nY(s)-\left(s^{n-1}y(0)+s^{n-2}y'(0)+s^{n-3}y''(0)+\cdots sy^{(n-2)}(0)+y^{(n-1)}(0)\right)\\&+a_{n-1}\left(s^{n-1}Y(s)-\left(s^{n-2}y(0)+s^{n-3}y'(0)+s^{n-4}y''(0)+\cdots sy^{(n-3)}(0)+y^{(n-2)}(0)\right)\right)\\&\cdots+a_1\left(sY(s)-y(0)\right)+a_0Y(s)=F(s)\end{aligned}$$

これを整理すると、

$$\begin{aligned}&s^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+a_{n-2}s^{n-2}Y(s)+\cdots+a_1sY(s)+a_0Y(s)\\&=F(s)+y(0)\left(s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1\right)+y'(0)\left(s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2\right)+\cdots+y^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

であるから、$A(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0$ とおくと、

$$Y(s)=\frac{F(s)}{A(s)}+\frac{s^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1}{A(s)}y(0)+\frac{s^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2}{A(s)}y'(0)+\cdots+\frac{1}{A(s)}y^{(n-1)}(0)\quad (3.11)$$

この$Y(s)$をラプラス逆変換することによって$y(t)$を求めることができる。なお、初期値は既に取り込まれていることに注意されたし。

(2) 部分分数展開と逆変換

$Y(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$が既約分数であるとすると、$Y(s)$は次のように部分分数に展開することができる。

(i) $A(s)=0$の根$s_1,s_2,\cdots,s_n$が全て単根の場合

$$Y(s)=\frac{\alpha_1}{s-s_1}+\frac{\alpha_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-s_n}\qquad (3.12)$$

と部分分数に分解することができる。係数は次のようにして求めることができる。

$$(s-s_i)Y(s)=\left(\frac{\alpha_1}{s-s_1}+\frac{\alpha_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-s_n}\right)(s-s_i)+\alpha_i$$

であるから、この式で$s=s_i$とおけば、

$$\alpha_i = (s - s_i)Y(s)\Big|_{s=s_i} \tag{3.13}$$

このとき、式(3.12)の各項はラプラス変換の性質を用いて次のように逆変換することができる。

$$y(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{s_n t} \tag{3.14}$$

(ii) $A(s) = 0$ の根のうち、s_1 が l 重根の場合

$$Y(s) = \left\{ \frac{\alpha_{1,1}}{s - s_1} + \frac{\alpha_{1,2}}{(s - s_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{1,l}}{(s - s_1)^l} \right\} + \frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-l}}{s - s_{n-l}} \tag{3.15}$$

と部分分数に分解できる。

・$\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-l}$ は単根であるから次のようにして求まる。

$$\alpha_i = (s - s_i)Y(s)\Big|_{s=s_i} \tag{3.16}$$

・$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \cdots, \alpha_{1,l}$ は次のようにして求まる。

$$\alpha_{1,i} = \frac{1}{(l-i)!} \frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}} Y(s)(s - s_1)^l \Big|_{s=s_1} \tag{3.17}$$

[説明]

式(3.15)より

$$Y(s)(s - s_1)^l = (s - s_1)^{l-1}\alpha_{1,1} + (s - s_1)^{l-2}\alpha_{1,2} + \cdots (s - s_1)^{l-i}\alpha_{1,i} + \cdots + \alpha_{1,l} + (s - s_1)^l \left\{ \frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-l}}{s - s_{n-l}} \right\} \tag{3.18}$$

であるので、$\alpha_{1,l}$ は $\alpha_{1,l} = Y(s)(s - s_1)^l \Big|_{s=s_1}$ で求まる。すなわち、式(3.17)が成り立つ。

$l > i$ なる i に対して、式(3.18)を $l - i$ 回微分する。

$$\frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}} Y(s)(s - s_1)^l = (l-1)(l-2)\cdots i(s - s_1)^{i-1}\alpha_{1,1} + \cdots + (l-i)!\alpha_{1,i} + \frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}}(s - s_1)^l \left(\frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-l}}{s - s_{m-l}} \right)$$

ここで、$\frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}}(s - s_1)^l \left(\frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-l}}{s - s_{m-l}} \right)$ を計算すると、$(s - s_1)$ なる因子が残るので、$s = s_1$ とおけば、$\frac{d^{l-i}}{ds^{l-i}} Y(s)(s - s_1)^l \Big|_{s=s_1} = (l-i)!\alpha_{1,i}$ となる。すなわち、式(3.17)が成り立つ。

式(3.15)で、$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} \right] = \frac{1}{(s-a)^n}$ を用いて、項別にラプラス逆変換することによって、$y(t)$ が求まる。

(3)微分方程式解法の例

(a) $\dfrac{dy}{dt} = ky$ 　初期条件は $y(0) = a$

$sY(s) - a - kY(s) = 0$ より $Y(s) = \dfrac{a}{s-k}$

これをラプラス逆変換して、 $y = ae^{kt}$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}$ 　初期条件は $y(0) = 1$

$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$ より $Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$

これをラプラス逆変換して、 $y = e^{-t}$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin t$

関数 $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ 、 $t = 0$ における関数とその 1 階微分をそれぞれ $y(0)$ 、 $y'(0)$ とすると、

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - y(0)s - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

であるから、微分方程式のラプラス変換は次のようになる。

$$s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

この式を整理すると

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{y(0)s + y'(0)}{s^2+4}$$

ここで、 $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ を部分分数に展開すると、次の式をえる。

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t$ 、 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t$ であるから、ラプラス逆変換は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + y(0)\cos 2t + \frac{y'(0)}{2}\sin 2t \\ &= \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{2}\left(y'(0) - \frac{1}{3}\right)\sin 2t + y(0)\cos 2t \end{aligned}$$