電磁気学Ⅰ　演習 第１１回 解答

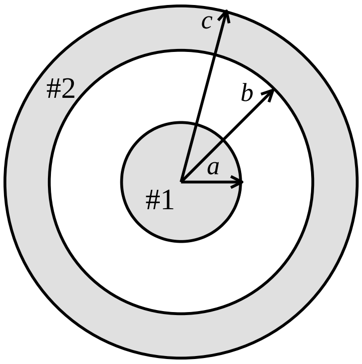
38. 図のように２つの同心導体球がある。内導体を#1、外導体を#2 としたとき、

(1) 導体系の電位係数行列を求めよ。ただし、無限遠の電位を基準(0V)とする。

(2) 容量係数行列を求めよ。

(3) 導体#1, #2 が電極であるコンデンサの静電容量を求めよ。

ヒント： 2 導体間に電圧（例えば V_1、V_2）を印可したとき、#1, #2 にはそれぞれ大きさが同じで符号が逆の電荷が現れることを利用する。



ただし、次の結果を利用してもよい。

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (0 \le r < a) \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (a \le r < b) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (b \le r < c) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (c \le r) \end{cases}$$

【解答】

①

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}$$

上のように行列表現し、右のように展開すると、 p_{ij} を次のように計算できることがわかる

（これは行列の**線形性**を利用した解法である)。

$$p_{11}=\left.\frac{V_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0}=\frac{1}{Q_1}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$p_{12}=\left.\frac{V_1}{Q_2}\right|_{Q_1=0}=\frac{1}{Q_2}\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

$$p_{21}=\left.\frac{V_2}{Q_1}\right|_{Q_2=0}=\frac{1}{Q_1}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

$$p_{22}=\left.\frac{V_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0}=\frac{1}{Q_2}\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix}\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}$$

②

容量係数は

$$\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}Q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2\\Q_2=C_{21}V_1+C_{22}V_2\end{cases}$$

だから電位係数の逆行列である。

電位係数の行列式は

$$\Delta=\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{c}\right)^2\right\}=\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}$$

Cramer の公式より、

$$[C]=[p]^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}p_{22} & -p_{21}\\-p_{21} & p_{11}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}}\begin{bmatrix}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\\-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{1}{c} & \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+1 \end{bmatrix}$$

③

静電容量は導体系の問題の特殊な場合である。考える金属は２つだけであり（自由空間中の導体球のように無限遠を１つの金属とみなす場合もあるが)、それら２つの金属は最初帯電しておらず、その２つの金属に電圧をかける状況を想定している。従って、２つの金属には電圧をかけた場合には絶対値が等しく、符号が逆の電荷が溜まる。この性質を利用して問題を解く。

$V = V_1 - V_2$

$Q = Q_1 = -Q_2$ として、

$$C = \frac{Q}{V} = \left.\frac{Q}{V_1 - V_2}\right|_{\substack{Q_1=Q \\ Q_2=-Q}} = \frac{Q}{p_{11}Q - p_{12}Q - (p_{21}Q - p_{22}Q)}$$

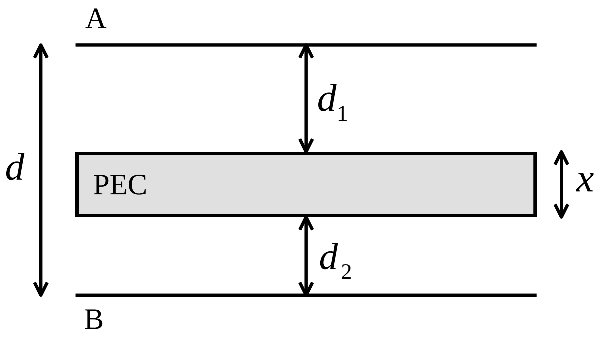
$$= \frac{1}{p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

■

43. 図のように幅 d の平行導体板コンデンサの両極板 A,B 間に厚さ x の導体板を挿入したとき、このコンデンサの単位面積あたりの容量 C を d, x の関数として求め、C の x による変化をグラフで示せ。ただし、極板の端部効果は無視し、電気力線は均等に垂直に極板間をはしっているとする。また、このコンデンサに蓄えられる静電エネルギーを求めよ。



【解答】

電界を求めると、

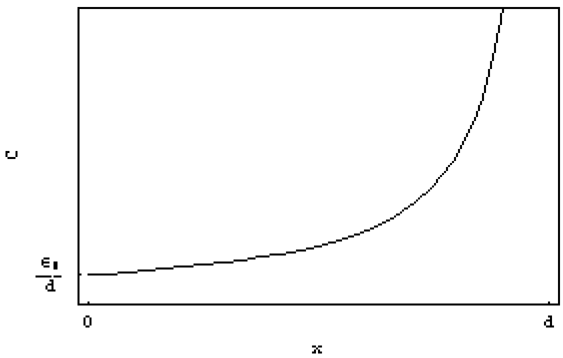
$$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d_1 + d_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d - x)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d - x)} = \frac{\varepsilon_0}{d - x}$$

d_1，d_2 の関数にはならない（つまり、厚さ x の板はどこにあっても同じ）。



x が大きくなって極板間が狭くなるほど静電容量は大きくなることがわかる。実際の電子部品のコンデンサもできるだけ面積を大きくし、極板間の距離を小さくするように工夫されている。

コンデンサの単位面積が蓄積するエネルギーは、

$$\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}C\left(\frac{\sigma}{C}\right)^2=\frac{\sigma^2}{2C}=\frac{\sigma^2}{2\left(\dfrac{\varepsilon_0}{d-x}\right)}$$

【蓄積エネルギーの別解】

空間の電界のエネルギーの総和を計算。

$$\iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2 dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2\cdot(d-x)=\frac{\sigma^2(d-x)}{2\varepsilon_0}$$

■

44’．電位係数行列を用いたコンデンサの並列・直列接続の公式の導出を行う。２つのコンデンサがあり、極板の導体は全部で 4 つあるので、4 導体系と見なすことができる。コンデンサ 1 は導体#1,#2 により形成され、コンデンサ 2 は導体#3,#4 により形成される。今、相互結合を無視し、電位係数行列が次の形に書けたとする。

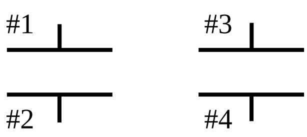
$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}&\alpha&0&0\\\alpha&p_{22}&0&0\\0&0&p_{33}&\beta\\0&0&\beta&p_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{bmatrix}$$

このとき、次の量を求めよ。

(1) コンデンサ#1,#2 の静電容量C_{12}および、コンデンサ#3,#4 の静電容量C_{34}

(2) 導体#1,#3 を導線で接続、導体#2,#4 を導線で接続（並列接続）したときの導体#1(#3), #2(#4)間の静電容量

(3) 導体#2,#3 を導線で接続（直列接続）したときの#1,#4 間の静電容量



【解答】

(1)

コンデンサ#1,#2 の静電容量C_{12}は、$Q_1=-Q_2=Q$，$V=V_1-V_2$として、

$$\begin{cases}V_1=(p_{11}-\alpha)Q\\V_2=(\alpha-p_{22})Q\end{cases}$$

よって、

$$C_{12} = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2\alpha}$$

同様に、コンデンサ#3,#4 の静電容量C_{34}

$$C_{34} = \frac{1}{p_{33} + p_{44} - 2\beta}$$

(2)

並列接続し、上下の極板に異符号、同量の電荷を与えるので、次の条件が必要となる。

$$\begin{cases} Q_2 = -Q_1 \\ Q_4 = -Q_3 \\ Q_1 + Q_3 = Q \\ Q_2 + Q_4 = -Q \\ V_1 - V_2 = V_3 - V_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = (p_{11} - \alpha)Q_1 = (p_{33} - \beta)(Q - Q_1) & (V_1 = V_3 \text{より}) \\ V_2 = (\alpha - p_{22})Q_1 = (\beta - p_{44})(Q - Q_1) & (V_2 = V_4 \text{より}) \end{cases}$$

$$V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2\alpha)Q_1 = (p_{33} + p_{44} - 2\beta)(Q - Q_1)$$

$$\rightarrow \; Q_1 = \frac{p_{33} + p_{44} - 2\beta}{p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} - 2\alpha - 2\beta} Q$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{(p_{11} + p_{22} - 2\alpha)Q_1} = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} - 2\alpha - 2\beta}{(p_{11} + p_{22} - 2\alpha)(p_{33} + p_{44} - 2\beta)}$$

$$= \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2\alpha} + \frac{1}{p_{33} + p_{44} - 2\beta} = C_{12} + C_{34}$$

(3)

直列接続すると次の条件が必要となる。

$$\begin{cases} Q_1 = Q \\ Q_2 = -Q \\ Q_3 = Q \\ Q_4 = -Q \\ V_2 = V_3 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
V_1 = (p_{11} - \alpha)Q & ① \\
V_2 = (\alpha - p_{22})Q = (p_{33} - \beta)Q \quad \to p_{22} + p_{33} - \alpha - \beta = 0 & ② \\
V_4 = (\beta - p_{44})Q & ③
\end{cases}
$$

$$
C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_4} = \frac{1}{p_{11} + p_{44} - \alpha - \beta}
$$

一方、

$$
\frac{1}{\dfrac{1}{C_{12}} + \dfrac{1}{C_{34}}} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} - 2\alpha - 2\beta}
$$

$$
= \frac{1}{p_{11} + p_{44} - \alpha - \beta}
$$

したがって、

$$
C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_{12}} + \dfrac{1}{C_{34}}}
$$

■