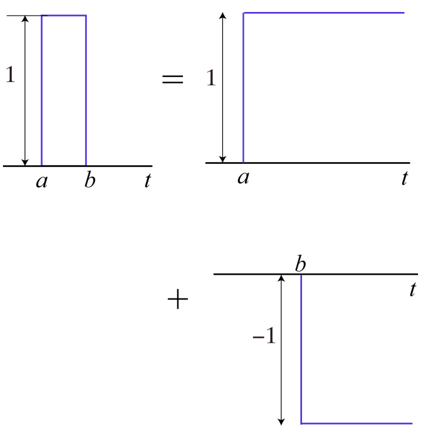
4. 電気回路の過渡現象とその解析(3)

前回のラプラス変換の解析時では、回路に対しての動作はスイッチを入れるという形をとった。しかしながら、スイッチを入れたり切ったりする場合では、その動作をステップ関数を用いてラプラス変換する必要がある。さらに二端子対回路として扱う場合には、入力にはステップ関数だけでなく、それ以外の入力も可能となる。

単独波形のラプラス変換

時間 a で立ち上がり、時間 b で立ち下がる方形波パルスの例では、ステップ関数 u(t-a) からステップ関数 u(t-b)を引けば、b<t の時間では二つのステップ関数が打ち消しあって出力は 0 になり、単独波形となる。



以上から関数系は

$$f(t) = u(t-a) - u(t-b)$$

となる。この関数をラプラス変換するために用いるのが、推移定理

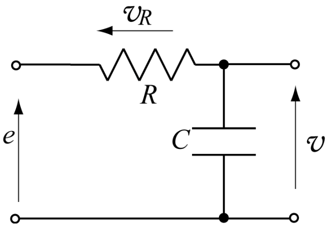
$e^{-as}F(s) = \mathscr{L}(f(t-a))$ であり、

$$\mathscr{L}(f(t)) = \mathscr{L}(u(t-a)) - \mathscr{L}(u(t-b))$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-sa} - e^{-sb})$$

となる。

これは、微分方程式で過渡現象を解いたときのスイッチを時間 0<t<T だけ切り替える場合と同じである。さて、先と同じくこれを CR による積分回路に入力すると考えよう。



入力 e に対して

$e = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = RC\frac{dv}{dt} + v$ でラプラス変換は

$E(s) = sRCV(s) + V(s)$ となり、

$V(s) = \frac{E(s)}{1+sRC} = \frac{1}{RC}\frac{E(s)}{s+1/RC}$ である。入力波形 $E(s) = \frac{1}{s}(e^{-sa} - e^{-sb})$ で、$\tau = \frac{1}{RC}$ とすると、

$$V(s) = \frac{\tau}{s(s+\tau)}(e^{-sa} - e^{-sb})$$

となる。これを逆変換

$$= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\tau}\right)(e^{-sa} - e^{-sb})$$

すると

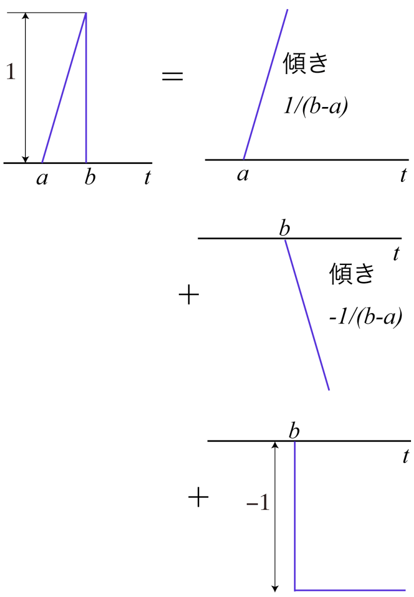
$$v = u(t-a)(1-e^{-\tau(t-a)}) - u(t-b)(1-e^{-\tau(t-b)})$$

となる。

既知の関数の一部で有る場合、既知の関数における単独波形と異なる部分を推移定理を使って方形波パルスの場合と同様に打ち消せば良い。

例えば、t=a から線形的に増えて、t=b で出力 1 となり、そのあと立ち下がるノコギリ波単パルスを表すには、

$f(t) = u(t-a)\frac{(t-a)}{b-a} - u(t-b)\frac{(t-b)}{b-a} - u(t-b)$ となる。



これをラプラス変換すると、

$$\mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{b-a}\frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s^2} - \frac{e^{-sb}}{s}$$ となる。

同様に先の積分回路に入れると

$$V(s)=\frac{\tau}{s+\tau}\left(\frac{1}{b-a}\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{s^2}-\frac{e^{-sb}}{s}\right)$$

となり、

$$=\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{b-a}\frac{\tau}{(s+\tau)s^2}-e^{-sb}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\tau}\right)$$

$\frac{\tau}{(s+\tau)s^2}$ の項はｓ＝０で重複極を持つが、この項を $F(s)$ と書くと重複極の係数は

$$k_2=\left[s^2F(s)\right]_{s=0}=1 \quad k_1=\frac{d}{ds}\left[s^2F(s)\right]_{s=0}=-\frac{1}{\tau}$$

また $s=-\tau$ の極の係数は $\frac{1}{\tau}$ であり、

$$V(s)=\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{b-a}\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\tau}\right)-e^{-sb}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\tau}\right)$$

となり、

$$v=\frac{u(t-a)}{(b-a)\tau}\{\tau(t-a)-(1-e^{-\tau(t-a)})\}$$
$$-\frac{u(t-b)}{(b-a)\tau}\{\tau(t-b)-(1-(b-a)\tau)(1-e^{-\tau(t-b)})\}$$

となる。

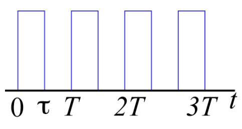
繰り返し波形のラプラス変換

既知である単独波形を周期Ｔで繰り返したいならば、やはり推移定理で時間Ｔだけずらしたものを足し合わせることによってラプラス変換でも表すことができる。

先の方形波パルスを周期Ｔで繰り返させそう。

$$f(t)=u(t-a)-u(t-b)+u(t-a-T)-u(t-b-T)$$
$$+u(t-a-2T)-u(t-b-2T)+\cdots$$

となる。



これをラプラス変換すると、

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(u(t-a))-\mathcal{L}(u(t-b))$$
$$+\mathcal{L}(u(t-a-T))-\mathcal{L}(u(t-b-T))+\cdots$$ となる。

$$=\frac{1}{s}(e^{-sa}-e^{-sb})+\frac{e^{-sT}}{s}(e^{-sa}-e^{-sb})$$
$$+\frac{e^{-2sT}}{s}(e^{-sa}-e^{-sb})+\cdots$$
$$=\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{s(1-e^{-sT})}$$

方形波パルス以外でも同様な形となる。

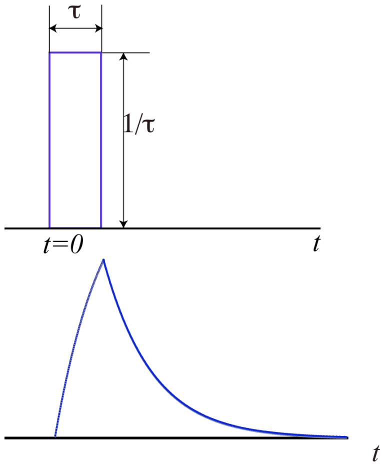
インパルス応答と重ね合わせの定理

ここで回路をブラックボックス化して考えよう。この考え方は第８回で出てくる２端子対パラメータの考え方である。ここではまず入力電圧 $e_s(t)$ に対して、出てくる出力電流 $i(t)$ を考えよう。回路にコンデンサやインダクタンスを含む場合は微分や積分などの表記が入るが、$e_s(t)$ にを $E_s(s)$ に、$i(t)$ を $I(s)$ にラプラス変換することで $I(s)=Y(s)E_s(s)$ とすれば、全ての周波数領域をカバーする形で表すことが出来る。ここで $Y(s)$ をその次元からアドミタンス関数と呼ぼう。

さてブラックボックス化した場合は回路網の形で表せ得ないが、何らかの標準入力系を仮定すれば、その出力で回路の特性を表すことが出来る。

方形波パルスでは、パルス幅によって異なる応答が出てくるが、パルス幅を無限小になるまでにしたものが前回述べたインパルス関数である。前回は単位インパルス関数を幅 τ、高さ 1/ τ の方形波パルスにおいて τ →0 の極限と説明したが、正確な定義は、如何なる関数 $f(t)$ にも $f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u_0(t)dt$ となる超関数である。元々ディラックが量子力学の為に考案したので、物理学では(ディラックの)デルタ関数と呼び $\delta(t)$ と表記する方が一般的である。

インパルス関数を入れたときに出てくる応答をインパルス応答と呼ぶ。単位インパルス関数は、実際の回路で作製することは不可能であるが、応答を理想化する為には重要な概念である。



インパルス関数とその応答例

このインパルス応答を

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)\mathcal{L}\{u_0(t)\}]=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]\equiv h(t)$$

という形で書くことにする。

　インパルス応答 $h(t)$ が既知であると、任意の入力 $e_s(t)$ に対する応答 $i(t)$ は $h(t)$ と $e_s(t)$ の畳み込み積分で与えられる。

$$\begin{aligned}
&i(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)E_s(s)]\\
&=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}\{h(t)\}\mathcal{L}\{e_s(t)\}]\\
&=\int_0^t h(t-\tau)e_s(\tau)d\tau=\int_0^t h(\tau)e_s(t-\tau)d\tau
\end{aligned}$$

これは畳み込み積分に関する定理

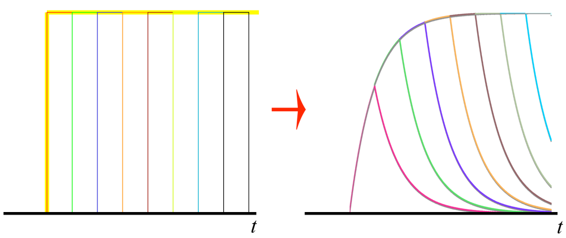
$$F_1(s)F_2(s)=\mathcal{L}(\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau)$$

で簡単に説明が出来る。従って $h(t)$ によって回路の特性を表すことが出来る。

　この式の意味を考えよう。

　時刻 τ に単位インパルスが入力すると時刻 t での出力は $h(t-\tau)$ になる。

　任意の入力を微小時間幅 $d\tau$ のインパルスに分解しよう。その中の時刻 τ のインパルスに対する応答は $h(t-\tau)e_S(\tau)$ になる。各応答は線形性と非時変性を持っているので、時刻 t における出力 $i(t)$ は、時刻 0 から時刻 t までを重ね合わせることで出てくる。



　ステップ関数を分解してインパルスにして出力合成した例

<u>ステップ応答と重ね合わせの定理</u>

　インパルス応答と同様に、ステップ関数を入力したときにでてくる応答をステップ応答と呼び

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)\mathcal{L}\{u(t)\}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{Y(s)}{s}]\equiv A(t)$$

という形で書くことにする。

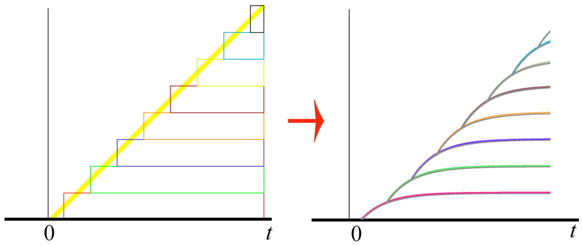
　ステップ関数も本来は立ち上がりに無限に高い周波数成分を含んでおり、実際の回路で作製することは不可能であることに注意しよう。

　ステップ応答に対しても同様に重ね合わせの定理が使える。

　今度は任意の入力を微小時間幅 $d\tau$ 毎の増分 $\frac{de_s(t)}{dt}d\tau$ によってステップ関数に分解しよう。その中の時刻 τ に始まるステップ関数に対する応答は $A(t-\tau)\frac{de_s(t)}{dt}d\tau$ になる。各応答は線形性と非時変性を持っているので、時刻 t における出力 $i(t)$ は、時刻 0 から時刻 t までを重ね合わせることで出てくる。あとは積分定数を置き直すだけである。定式化すると

$$\begin{aligned}
&i(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)E_s(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{Y(s)}{s}sE_s(s)]\\
&=A(t)*(\frac{de_s(t)}{dt}+e_s(0))\\
&=A(t)e_s(0)+\int_0^t \left.\frac{de_s(t)}{dt}\right|_{t=\tau} A(t-\tau)d\tau\\
&=A(t)e_s(0)+\int_0^t \left.\frac{de_s(t)}{dt}\right|_{t=t-\tau} A(t)d\tau
\end{aligned}$$

となる。



直線増加を分解してステップ関数にして出力
合成した例

従って $A(t)$ も回路の特性を同様に表す。