展開形ゲーム Extensive Game と標準形 Normal Form

– 合理的思考の技術 6 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

May 12, 2014

Outline

1. 展開形ゲームの標準形（戦略形）表現とナッシュ均衡
2. 完全情報ゲームの拡張と部分ゲーム完全均衡 SPNE

完全情報ゲームの定式化 (復習)

Definition (完全情報ゲーム)

$\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, u \rangle$:

- $\mathcal{K} = \langle H, A \rangle$ 根付き木 rooted tree:
  - H ノード node（履歴 history ）の集合
    最終履歴 terminal history の集合を $Z (\subset H)$ と書く
  - A 枝 arc（行動 actions ）の集合
- $P : H \setminus Z \to N$ 各決定ノードに、そこで決定するプレーヤーを対応付けるプレーヤー関数
  - N プレーヤーの集合
- $u_i : Z \to \Re$ プレーヤー$i \in N$ の効用関数.

ノード・枝と履歴・行動

履歴の特徴

完全情報ゲームの木では、決定ノードと履歴、枝と行動が一対一対応する。

- 木の根に対応して、空の履歴 null history （初期履歴 initial history） $\varnothing \in H$ という記号を用いる
- 履歴を空の履歴からの行動プロファイル（行動の組）の列で表すことができる e.g.) $h = (a^1, \cdots, a^T)$
(右上の添字は、プレーヤーの添字ではないことに注意。)
- 同様に、履歴の合成を考えることができる e.g.) $h = (h', h'')$

履歴と行動

履歴 $\forall h \in H$ における行動の集合は、

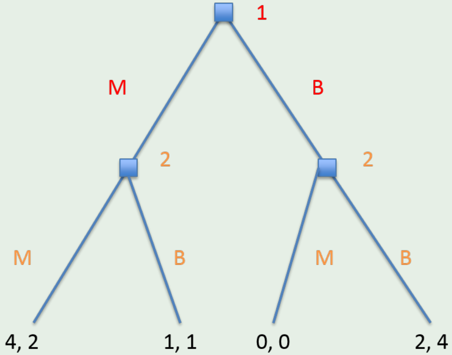
$$A(h) := \{a \in A | (h, a) \in H\} (\subset A)$$

Example (Battle of Sexes)

$N = \{$1 – Woman, 2 – Man$\}$

		2: Museum	2: Boxing
1	M	$4, 2$	$1, 1$
1	B	$0, 0$	$2, 4$

Example (2 Stage Battle of Sexes)



$H = \{\varnothing, M, B, MM, MB, BM, BB\}$

復習 – 展開形ゲームの戦略

各プレーヤーについて、その全ての決定ノードにおける行動選択を列挙したものを戦略という

Definition (戦略 Strategy)

プレーヤーi の戦略 s_i とは、$P(h) = i$ である　$h \in H \setminus Z$ に対して、$s_i(h) \in A(h)$ を定める関数

Example (2 stage BoS)

各プレーヤーの戦略の集合は、

- $S_1 = A(\varnothing) = \{M, B\}$
- $S_2 = A(M) \times A(B) = \{M, B\} \times \{M, B\} = \{MM, MB, BM, BB\}$

戦略の組の結果 Outcome

各戦略の組 $s = (s_i)_{i \in N} \in S$ に対して、始点ノードから、s に従ったプレーで逐次的にプレーの履歴を構成していって到達する終端ノードのことを s の結果という。

Definition (Outcome)

最終履歴 $h \in Z$ が、戦略の組 $s \in S$ の結果 outcome $O(s)$ であるとは、$\forall h' < h$ （$h' \in H \setminus Z$ が h の部分列）

$$(h', s_{P(h')}(h')) \leq h$$

Example (2 stage BoS)

$(s_1, s_2) = (B, MB)$ のとき、
$O(s_1, s_2) = (s_1(\varnothing), \cdots) = (B, s_2(B)) = BB \in Z$

展開形ゲームの標準形（戦略形）表現

Definition

完全情報ゲーム $\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, u \rangle$ の標準形表現とは、$\langle N, S, U \rangle$ s.t.:

- S_i はプレーヤーi の戦略の集合
- $\forall i \in N,\ U_i(s) := u_i(O(s))$

Example (2 stage BoS)

2 stage battle of sexes の標準形は

1 \ 2	MM	MB	BM	BB
M	4,2	4,2	1,1	1,1
B	0,0	2,4	0,0	2,4

元の BoS と 2 stage BoS が異なる標準形ゲームであることに注意！

ナッシュ均衡

Theorem

完全情報ゲームの後ろ向き帰納法の解はナッシュ均衡でもある。

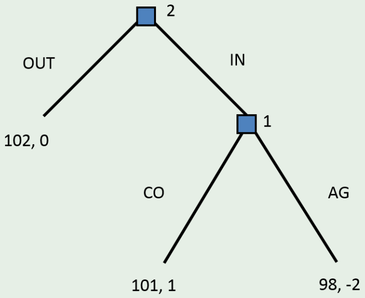
Example (2 stage BoS)

後ろ向き帰納法の解 (M, MB)

ナッシュ均衡 $(M, MB), (M, MM), (B, BB)$

後ろ向き帰納法の解でないナッシュ均衡については、その解釈がなかなか難しい。以下、有名なゲームを通じて、両者の関係性を探る。

Example (Chain store game[4])



標準形 (プレーヤー番号の順序に注意！)

		2: OUT	2: IN
1	CO	102, 0	101, 1
	AG	102, 0	98, -2

- プレーヤー
  1. チェーン・ストア
  2. 参入企業
- 後ろ向き帰納法の解
  (CO, IN)
- ナッシュ均衡
  $(CO, IN), (AG, OUT)$

チェーン・ストア　パラドックス Chain Store Paradox

- チェーンストアゲームでの後ろ向き帰納法でないナッシュ均衡は、チェーンストアによる「参入してきたら価格競争 AG に巻き込むぞ」とする事前の脅しに参入企業が屈した格好と解釈できる。
- しかし、実際に参入企業が参入 IN すると、チェーンストアにとっては妥協する方が得。結局、チェーン・ストアは妥協の誘惑に勝てないだろうという考え方をするのが後ろ向き帰納法。
- 後ろ向き帰納法に矛盾するような脅しのことを信憑性のない脅し incredible threat という。
- 現実のチェーン・ストア寡占市場では、これにもかかわらず、脅しが機能し、しばしばチェーン・ストアの独占が達成されているようにも見える。この理論と現実の乖離をチェーン・ストア・パラドックスという [4]。

脅しに信憑性をもたせる方法 – 代理人 Delegate

Example (日本企業の売上最大化)

Q. 日本企業はしばしば利潤最大化ではなく、（コスト度外視で）売上最大化を行っているようにみえる。この経営の合理性は？

Ans. の候補

- 売上 No. 1 の宣伝効果
- 社員の士気を上げる
- ロックイン効果
- ネットワーク外部性 → フリーミアム free-mium 戦略
- 寡占市場におけるコミットメント効果（今回の講義に関係する効果）
  Cournot 寡占市場では、売上最大化にコミットしたほうが利潤が高い

株主本人の代理人として、社長を雇い、コミットメント自体を遂行するようなインセンティブを与えることが有力な戦略となる [1]。

Outline

不確実性を含む拡張

Definition (不確実性を含む完全情報ゲーム)

$\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, f_c, u \rangle$:（拡張部分のみ記述）

- $P : H \setminus Z \to N \oplus \{c\}$ がプレーヤー関数 (プレーヤーc は不確実性 *chance* または自然 *nature* と呼ばれる),
- $f_c(\cdot|h) \in \Delta(A(h))$ は $h \in P^{-1}(\{c\})$ に対する $A(h)$ 上の確率分布

後ろ向き帰納法は、決定の木と同様に行う。

同時決定を含む拡張 [3]

Definition (同時決定を含む完全情報ゲーム)

$\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, u \rangle$: （拡張部分のみ記述）

- $P : H \setminus Z \to \mathcal{P}(N)$ 各履歴 $h \in H$ に、その直後に行動するプレーヤーの部分集合を対応させる関数,
- $A(h) = \times_{i \in P(h)} A_i(h)$ 各履歴 h 直後の行動の集合上のプレーヤー分割.

Definition (戦略 Strategy)

同時決定を含む完全情報ゲーム $\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, u \rangle$ におけるプレーヤー $i \in N$ の（純粋）戦略は、全ての $i \in P(h)$ を満たす終端でない履歴 $h \in H \setminus Z$ に $A_i(h)$ 上の行動を対応付ける関数。

部分ゲーム

Definition (部分ゲーム Subgame)

同時決定を含む完全情報ゲーム $\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, u \rangle$ の履歴 $h \in H$ 後の部分ゲームとは、Γ の構造を全て保存したゲーム $\Gamma(h) = \langle N, \mathcal{K}|_h, P|_h, u|_h \rangle$:

- $\forall h' \in H|_h, (h, h') \in H$
- $\forall h' \in H|_h, P|_h(h') = P(h, h')$
- $\forall h' \in Z|_h, u_i|_h(h') = u_i(h, h')$

Definition (戦略の制限 Restriction)

$\Gamma = \langle \mathcal{K}, P, u \rangle$ におけるプレーヤー$i \in N$ の戦略 s_i の部分ゲーム $\Gamma(h)$ 上への制限 $s_i|_h$ は以下を満たす

$$\forall h' \in H|_h, s_i|_h(h') = s_i(h, h')$$

部分ゲーム完全ナッシュ均衡
Subgame-Perfect Nash Equilibrium (SPNE)

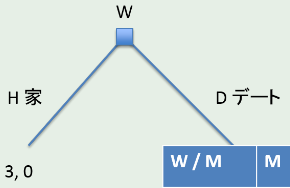
Definition (部分ゲーム完全ナッシュ均衡 SPNE)

同時決定を含む完全情報ゲーム $\Gamma = \langle N, \mathcal{K}, P, u \rangle$ における戦略プロファイル s^* が部分ゲーム完全均衡であるとは、$\forall h \in H$ の部分ゲーム $\Gamma(h)$ において、s^* の $\Gamma(h)$ 上への制限がナッシュ均衡となっていることである。

- 部分ゲーム完全ナッシュ均衡は完全情報ゲームにおける後ろ向き帰納法による解の拡張である。
- 有限完全情報ゲームには（純粋戦略の）部分ゲーム完全ナッシュ均衡が存在する（存在定理)。これは後ろ向き帰納法を用いて数学的帰納法で証明できる。

同時決定を含む展開型ゲームの例

Example (BoS with an outside option)



W / M	M	B
M	4, 2	1, 1
B	0, 0	2, 4

		M: M	M: B
W	HM	3,0	3,0
	HB	3,0	3,0
	DM	4,2	1,1
	DB	0,0	2,4

- デートの行き先の同時決定ゲーム Battle of Sexes に加えて、女性だけ「家にいる」という外部オプションを持つ。
- SPNE は、$(HB, B), (DM, M)$ の２つ。

前向き帰納法 Forward Induction[2]

- W の主張「デートで Boxing に行くくらいなら、家にいる」
  → W がデートに行ったならば、W は断固　Museum を選ぶ（!?）
  → $(s_W, s_M) = (HB, B)$ は SPNE ではあるが、妥当 reasonable な均衡でないとみなされる。
- W の主張に基づいて妥当でない均衡を除去する考え方を前向き帰納法 forward induction という。

Theorem

前向き帰納法により除去されない解は安定 *stable* であるとも言われ、標準形表現をした際に、弱支配戦略の除去によって除去されない。

Q. 先のオプション付きデートゲームの唯一の前向き帰納法で残る SPNE (DM, M) がこの性質を満たすことを確かめよ。

精緻化基準 Refinement Criterion

後ろ向き帰納法や前向き帰納法のように、納得のいく基準を満たすナッシュ均衡のみを解とみなし、行動の予測精度を高めようとする方法を均衡の精緻化 refinement という。

- 精緻化基準は状況によらず普遍的に異論なく適用可能というわけではない。
- Q. 前向き帰納法の突っ込みどころを探してみよう！

References

[1] Chaim Fershtman and Kenneth L. Judd.
Equilibrium incentives in oligopoly.
The American Economic Review, 77(5):927–940, 12 1987.

[2] Elon Kohlberg and Jean-Francois Mertens.
On the strategic stability of equilibria.
Econometrica, 54(5):1003–1037, 1986.

[3] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein.
A Course in Game Theory.
MIT Press, Cambridge, 1994.

[4] Reinhard Selten.
The chain store paradox.
Theory and Decision, 9:127–159, 1978.
10.1007/BF00131770.