

MAP-MRFに基づく画像表現

ビジュアルラベリング

[Besag, J (1974)]

統計的手法に基づいて画像処理を行う場合、通常の画像処理で用いる用語以外にも、統計的手法の用語も用いられる。

サイト(site) --- 画素や特徴などの配置情報.
規則的配置と不規則的配置を含む.

ラベル(label) --- サイトに起きる事象.
連続と離散、順序関係の有無などを表現.

- サイト集合の例

m 個のサイトのインデックス集合 $S = \{1, \dots, m\}$

例えば, 画素, エッジ, 領域などの集合

- ラベル集合の例

離散ラベル集合 $L_d = \{l_1, \dots, l_M\} (= \{1, \dots, M\})$:

M 個のラベル (インデックス) 集合

連続ラベル集合 $L_c = [X_l, X_h] \subset R$:

実数線上の区間: $[X_l, X_h]$

濃度ラベル集合 $L = \{0, \dots, 255\}$:

M 個の順序付きラベル集合

ラベリング問題

多くの画像処理問題が、ラベル L によるサイト S のラベリング問題として記述される。

サイト集合 S のサイト s_i ($i = 1, \dots, m$) に、ラベル集合 L から 1 つのラベル f_i を選び、割り当てること。

$$f = \{ f_1, f_2, \dots, f_m \}$$

ドメイン S からラベル L への写像関数: $f_i = f(i)$

$$f : S \rightarrow L$$

全てのサイトが同じラベル集合をもつならば、

⇒ 配置空間 $F = L \times L \cdots L = L^m$

近傍システム

画像処理と同様に， MRFでも近傍系という概念 が
重要な役 割を果たす．

サイト集合 S 内の各要素は隣接シス テム
(N - system)によって互いに関係付 けられる．

$$\text{N - system: } N = \{N_i \mid \forall i \in S\}$$

N_i は， i に隣接するサイトの集合． ただし，

$$1) i \notin N_i$$

$$2) i \in N_j \Rightarrow j \in N_i$$

近傍システムの例

(規則的サイト)

	0	
0	x	0
	0	

(a)

1次隣接系
(4近傍系)

NS_1 システム

0	0	0
0	x	0
0	0	0

(b)

2次隣接システム
(8近傍系)

NS_2 システム

5	4	3	4	5
4	2	1	2	4
3	1	x	1	3
4	2	1	2	4
5	4	3	4	5

(c)

1～5次の隣接システム
の最外郭サイト

クリーク (Clique)

クリークとは

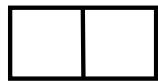
グラフ : $G \equiv (S, N)$:

グラフ G 上のクリーク : s の部分集合

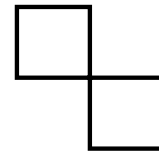
NS_2 システムにおけるクリークの型



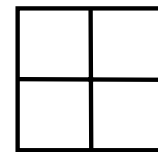
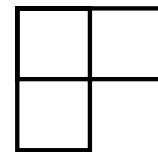
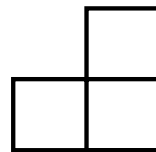
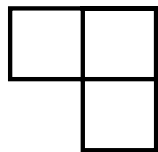
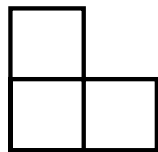
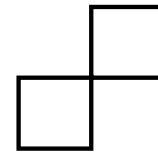
(d)



(e)



(f)



(g)

(h)

クリークの表現

$$C_1 = \{i \mid i \in S\}$$

$$C_2 = \{\{i, i'\} \mid i' \in N_i, i \in S\}$$

$$C_3 = \{\{i, i', i''\} \mid i, i', i'' \in S \text{ で互いに隣接}\}$$

$$\vdots$$

全てのクリークを集めたもの：

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots$$

クリーク中のサイトには順序関係がある。

$$\Rightarrow \{i, i'\} \neq \{i', i\}$$

文脈情報の表現

画像理解では、文脈情報は重要。

確率の観点からは、局所的な条件付確率によって文脈情報を表現。

サイト i におけるラベル f_i

サイト j ($j \in N_i$)におけるラベル f_j

条件付確率 $P(f_i | \{f_j\})$



直接的に観測可能な局所的情報から
大局的情報を推論する。

Markov Random Field (MRF)

物理現象における空間 的、文脈的な依存関係を解析するための 確率論の1つ.

サイト集合 S 上のランダム変数の族

$$F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$$

において、各ランダム変数 F_i はラベル集合 L 内の値 f_i をとるものとする。 $(F_i = f_i)$

結合事象 $(F_1 = f_1, F_2 = f_2, \dots, F_m = f_m)$ を、

$$F = f, f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

と簡略化.

F_i が値 f_i をとる確率 : $P(F_i = f_i)$, $P(f_i)$ と略記.
 結合確率 : $P(F_1 = f_1, \dots, F_m = f_m)$, $P(f)$ と略記.

連続なラベル集合 L に対しては,

→ 確率密度関数 : $p(F_i = f_i)$, $p(F = f)$

F が次の2つの条件を満たすとき、

- 1) $P(f) > 0, \forall f \in F$ 正值性
- 2) $P(f_i | f_{S-\{i\}}) = P(f_i | N_i)$ マルコフ性

『 F は、隣接システム N に関する
 S 上のマルコフ・ランダム場』である.
 (Markov Random Field)

Gibbs Random Field (GRF)

ランダム変数 F の事象配置がGibbs分布に従うとき、 F は N に関する S 上のGibbsランダム場と呼ばれる。

$P(f)$: 特定の配置パターン f の生起確率(事前情報)。

Gibbs分布: $P(f) = Z^{-1} \times e^{-\frac{1}{T}U(f)}$

$$Z = \sum_{f \in F} e^{-\frac{1}{T}U(f)} \quad ; \text{正規化定数}$$

$$U(f) = \sum_{c \in C} V_c(f) \quad ; \text{エネルギー関数}$$

$V_c(f)$: 全ての可能な C 上のクリークポテンシャル

あるGRFの $V_c(f)$ が、 S 上のクリーク C の
 相対的な位置に依存しないとき、…… 均一性GRF
 方向に対して独立なとき、…… 等方性GRF.

エネルギー関数： $U(f)$

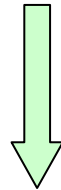
$$\begin{aligned}
 U(f) &= \sum_{c \in C} V_c(f) \\
 &= \sum_{\{i\} \in C_1} V_1(f_i) + \sum_{\{i,j\} \in C_2} V_2(f_i, f_j) + \sum_{\{i,j,k\} \in C_3} V_3(f_i, f_j, f_k) + \dots
 \end{aligned}$$

ペアサイトクリークまでを考慮した場合、

$$U(f) = \sum_{i \in S} V_1(f_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} V_2(f_i, f_j)$$

Markov-Gibbs Equivalence

局所的な性質で特徴付けられるMRF } 等価
大局的な性質で特徴付けられるGRF }



MRFの結合確率 $P(f)$ を特定する手段の提供

同時に, MRFに基づく確率統計モデルの最適化問題を
エネルギー最適化問題とすることが可能.

画像特徴モデル化のためのMRF

基本的な概念：

- 2つのラベル間の文脈的拘束：
単純，低コスト \Rightarrow 広く利用.
- 通常，ペアサイトクリークまでを考慮.

$$U(f) = \sum_{i \in S} V_1(f_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} V_2(f_i, f_j)$$

- V_1, V_2 を目的毎に選択.
 特定のMRF(GRF)を構成可能.

幾つかの代表的なモデルが存在.

Auto Logistic Model

$f_i \in L = \{0,1\}$ とし, ペアサイトまでの文脈を考慮.
ポテンシャル, 条件付確率を次のように仮定.

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} \alpha_i f_i + \sum_{\{i,j\} \in C_2} \beta_{i,j} f_i f_j$$
$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{\exp\{-\alpha_i f_i - \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j\}}{\sum_{f_i \in \{0,1\}} \exp\{-\alpha_i f_i - \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j\}}$$
$$= \frac{\exp\{-\alpha_i f_i - \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j\}}{1 + \exp\{-\alpha_i - \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_j\}}$$

分布が均一ならば、 $\alpha_i = \alpha, \beta_{i,j} = \beta$ として良い.

Multi-Level Logistic Model

$f_i \in L = \{1, \dots, M\}$ とし, ペアサイトクリークまでを考慮. ALLを一般化.

- 単一サイトクリーク:

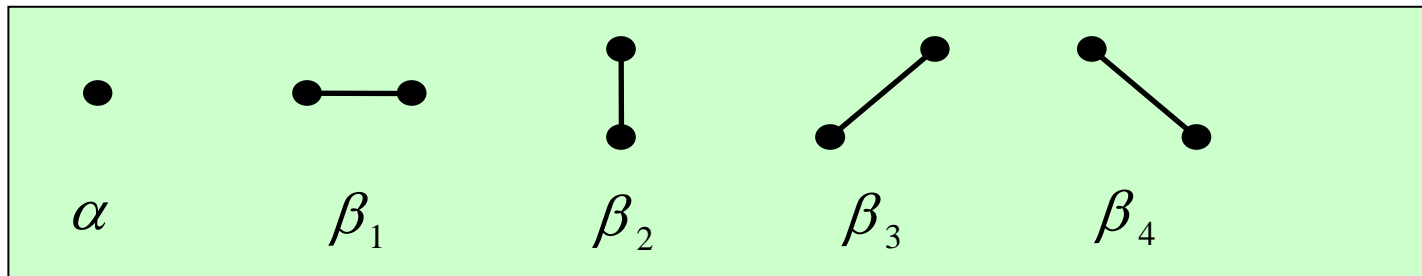
$$V_1(f_i) = \alpha_i, \text{ もし } f_i = i \in L$$

- ペアサイトクリーク:

$$V_2(f_i, f_j) = \begin{cases} \beta_C, & \{i, j\} \in C_2 \text{ が同一ラベル} \\ -\beta_C, & \text{それ以外} \end{cases}$$

ここで, α_i : ラベル i に対するポテンシャル,
 $\beta_C (< 0)$: ペアサイトポテンシャル.

クリークポテンシャルの例



モデルが等方性の場合， $\beta_C = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$

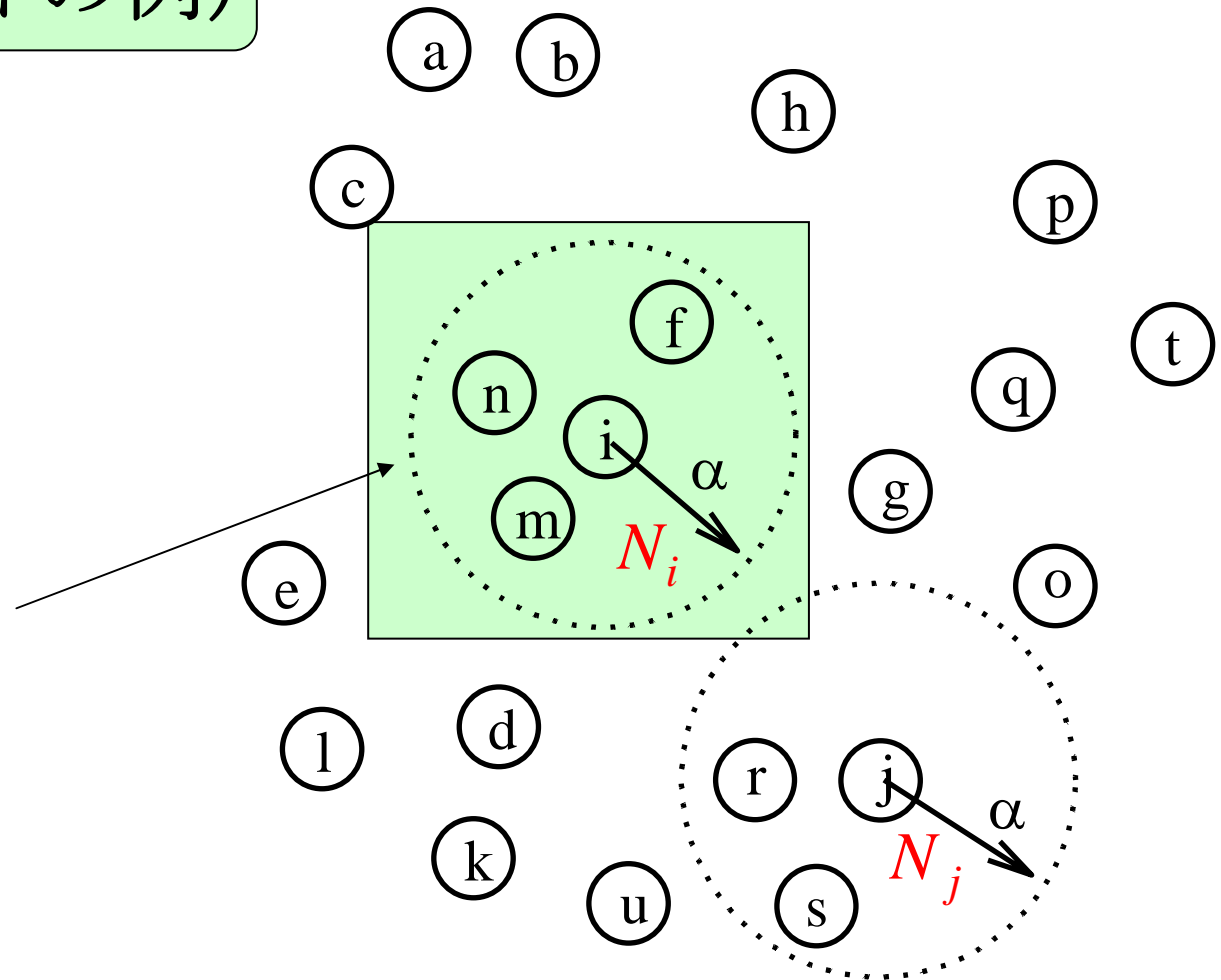
モデルが等方性の場合， MLLにおける条件付確率は

$$P(f_i = m \mid f_{N_i}) = \frac{\exp\{-\alpha_m - \beta \cdot n_i(m)\}}{\sum_{m=1}^M \exp\{-\alpha_m - \beta \cdot n_i(m)\}}$$

$n_i(m)$: m でラベル付けられた N_i のサイト数

(不規則サイトの例)

近傍系の定義



Bayes推定

あるリスクを最小化して最適値を推定する

推定値 f^* のBayesリスクは,

$$R(f^*) = \int_{f \in F} C(f^*, f) P(f | d) df \quad (\text{期待値計算})$$

$C(f^*, f)$: コスト関数、 d : 観測値

$$P(f | d) = \frac{p(d | f)P(f)}{p(d)}, \quad \text{事後確率}$$

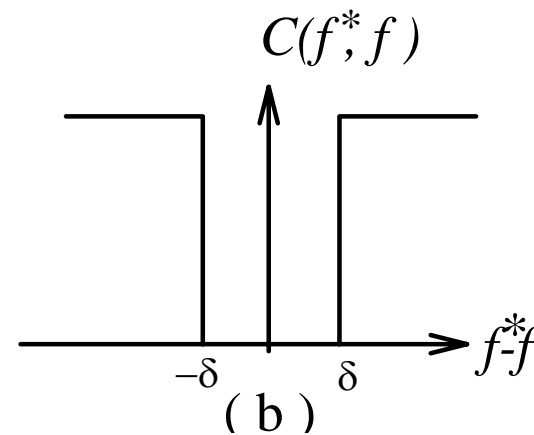
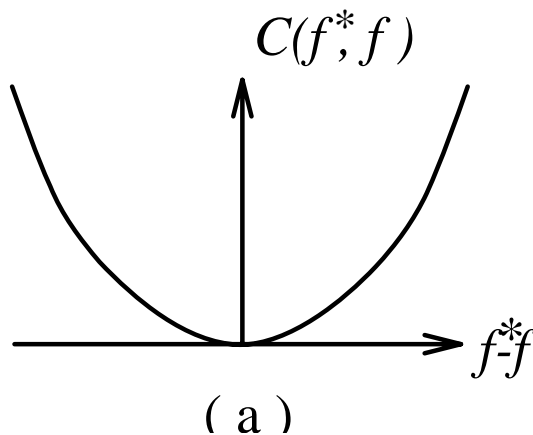
$p(d | f)$: ラベリング f の尤度関数

1 次のコスト関数

$$C(f^*, f) = \begin{cases} 0, & \|f^* - f\| \leq \delta \text{ のとき} \\ 1, & \text{それ以外} \text{ のとき} \end{cases}$$

2 次のコスト関数

$$C(f^*, f) = \|f^* - f\|^2$$



1 次コスト関数によるBayesリスク

$$\begin{aligned} R(f^*) &= \int_{f: \|f^* - f\| > \delta} P(f | d) df \\ &= 1 - \int_{f: \|f^* - f\| \leq \delta} P(f | d) df \end{aligned}$$

$R(f^*)$ を最小化する $f^* \longrightarrow \int_{f: \|f^* - f\| \leq \delta} P(f | d) df$ を最大化

2 次コスト関数によるBayesリスク

$$\begin{aligned} R(f^*) &= \int_{f \in F} \|f^* - f\|^2 P(f | d) df \\ \frac{\partial R(f^*)}{\partial f^*} &= 0 \longrightarrow f^* = \int_{f \in F} f \cdot P(f | d) df \\ &\quad (\text{ラベリング } f \text{ の事後確率平均}) \end{aligned}$$

1 次コストによる推定では一般に $\delta \rightarrow 0$.

従って, 最小リスク推定は, $f^* = \arg \max_{f \in F} P(f | d)$

→ MAP (maximum a posterior) 推定

観測された d に対する確率 $p(d)$ を一定とすると

$$P(f | d) = \frac{p(d | f)P(f)}{p(d)} \propto p(d | f)P(f)$$

MAP 推定は等価的に: $f^* = \arg \max_{f \in F} \{p(d | f)P(f)\}$

さらに, 事前確率 $P(f)$ をフラットと仮定すると

→ $f^* = \arg \max_{f \in F} p(d | f)$; 最尤推定

MAP-MRF Labeling

$P(f | d)$ の導出 \Leftarrow MRF

$$P(f) = \frac{1}{Z} e^{-U(f)} \quad , U(f): \text{事前エネルギー}$$

$$P(f | d) p(d) = p(d | f) P(f)$$

$$P(f | d) = \frac{p(d | f) P(f)}{p(d)} \propto p(d | f) P(f) \text{より、}$$

事後エネルギー $U(f | d)$ に関して

$$U(f | d) \propto U(d | f) + U(f)$$

MAP推定：事後エネルギーを最小化する f

$$f^* = \arg \min_f U(f | d) = \arg \min_f \{U(d | f) + U(f)\}$$

MAP-MRF法の概要

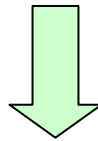
1. 与えられた問題を適切なMRFモデルで表現.
2. MAP解を定義する事後エネルギーを導く.
 - 2-1) サイト集合 S 上の近接システム N と, N に対するクリーク集合を定義.
 - 2-2) $U(f)$ を定義する事前クリークポテンシャル $V_c(f)$ を定義.
 - 2-3) 尤度エネルギー $U(d|f)$ を導く.
 - 2-4) 事後エネルギー $U(f|d) \leftarrow U(f) + U(d|f)$ を得る.
3. MAP解を探す.

MAP-MRF法と正則化

ビジョンにおける不良設定問題を良設定化する

一般的枠組み： 正則化 (Regularization)

→ 滑らかさ拘束条件の付加(事前仮説)



MAP-MRF法において

$[f^{(n)}]^2$ の事前エネルギーを考えた場合と等価.

主な参考文献

Besag, J. ;”Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems“,
Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 36, pp192--236 (1974).

S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the
Bayesian restoration of images," IEEE Trans. on PAMI, vol. PAMI-6, no. 6,
pp. 721--741, (1984).

S.Z.Li, Markov Random Field Modeling in Computer Vision, Springer-Verlag,
(1995)