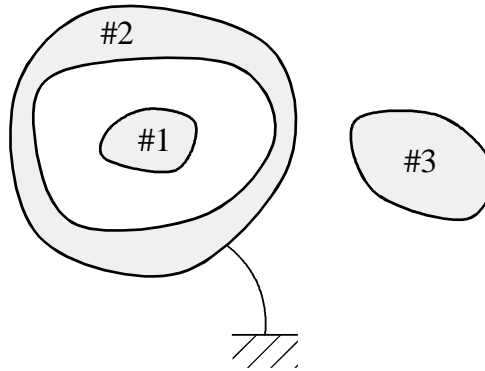


## 電磁気学 I 演習 第 10 回 解答

36. 図に示す 3 つの導体がある。閉殻導体 #2 を接地したとき、内部の導体 #1 の電位を変えても外部の導体 #3 の電荷は変化せず、外部の導体 #3 の電位を変えても内部の導体 #1 の電荷は変化しないこと（静電遮蔽）を容量係数行列を用いて説明せよ。（ヒント：#1 を  $V_1 = 1$  とし、それ以外を  $0V$  にして各導体の電荷を計算する。容量係数行列の対称性を利用する。）



【解答】

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

#1 を  $V_1 = 1$  とし、それ以外を  $0V$  にする。#1 には  $Q_1 = C_{11}V_1$  の電荷が生じる。そのとき、#2 は閉じた導体なのでガウスの発散定理から、 $Q_2 = -Q_1$  の電荷がある。#2, #3 はともに電位 0 なので間に電界は無く、#3 の電荷は  $Q_3 = 0$  である。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}V_1 \\ C_{21}V_1 \\ C_{31}V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ -Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $C_{21} = -C_{11}$ ,  $C_{31} = 0$  となる。容量係数行列の対称性から、

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{11} & 0 \\ -C_{11} & C_{22} & C_{33} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

特に、 $V_2 = 0$  なので、

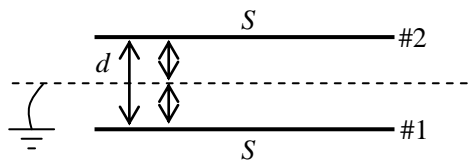
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{11} & 0 \\ -C_{11} & C_{22} & C_{33} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 \\ Q_2 &= -C_{11}V_1 + C_{33}V_3 \\ Q_3 &= C_{33}V_3 \end{aligned}$$

となり、第 1 式、第 3 式より、

$$\begin{cases} V_1 = Q_1 / C_{11} \\ V_3 = Q_3 / C_{33} \end{cases}$$

#1, #3 の導体の電位は互いに独立となる。■

37. 面積  $S$  で非常に薄い 2 つの同じ導体板 #1, #2 がある。そのまま面に垂直方向に距離  $d$  離して平行に置いたとする。電位の基準を導体板の間中央にとるとき、これら 2 つの導体の電位係数行列を求めよ。ただし、端部効果（電界の導体端部での乱れ）は無視する。



【解答】

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = \left. \frac{V_1}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{\frac{Q_1/S}{2\epsilon_0} \cdot \frac{d}{2}}{Q_1} = \frac{d}{4\epsilon_0 S}, \quad p_{21} = \left. \frac{V_2}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{-\frac{Q_1/S}{2\epsilon_0} \cdot \frac{d}{2}}{Q_1} = -\frac{d}{4\epsilon_0 S}$$

$$p_{22} = \left. \frac{V_2}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \frac{\frac{Q_2/S}{2\epsilon_0} \cdot \frac{d}{2}}{Q_2} = \frac{d}{4\epsilon_0 S}, \quad p_{12} = \left. \frac{V_1}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \frac{-\frac{Q_2/S}{2\epsilon_0} \cdot \frac{d}{2}}{Q_2} = -\frac{d}{4\epsilon_0 S}$$

よって、電位係数行列は

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{d}{4\epsilon_0 S} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

■

【補足 1】

極板間の静電容量を求める。

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \bigg|_{Q_1 = -Q_2 = Q} = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{4\epsilon_0 S} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix} = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon_0 S}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

【補足 2】「教科書では電位係数行列の成分はすべて正と説明があるのに、なぜ負があるのか？」

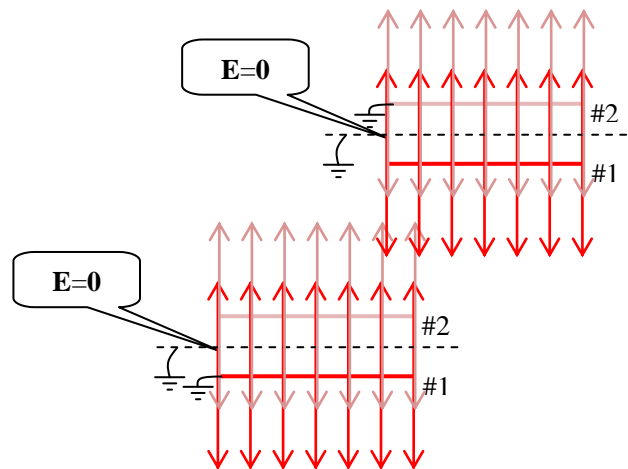
これは、教科書の説明では無限遠が電位 0 であるとしているが、この問題では極板の間を電位 0 としてしまったことによるものである。

【補足 3】「この問題の逆行列、つまり容量係数行列は求まらないのではないか？」

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

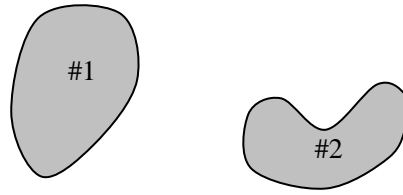
$$C_{11} = \frac{Q_1}{V_1} \bigg|_{V_2=0} = \infty, \quad C_{21} = \frac{Q_2}{V_1} \bigg|_{V_2=0} = \infty$$

$$C_{22} = \frac{Q_2}{V_2} \bigg|_{V_1=0} = \infty, \quad C_{12} = \frac{Q_1}{V_2} \bigg|_{V_1=0} = \infty$$



電位の基準が無限遠でないこと、そして、端部効果を見逃したことがいけなかった。

38-2. 電位係数行列がわかっている 2 つの導体がある。導体 1 を  $Q$  に帯電し、その後細い導線で両導体を繋いだ後に導体 1, 2 が得る電荷  $Q_1, Q_2$  を、電位係数を用いて表しなさい。  
ヒント：両導体を繋ぐと同電位になる。与えた電荷は移動するが電荷量の総和は保存される。



【解答】

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}$$

導線で両導体を繋いだ後は電位が等しいので、

$$V_1 = V_2$$

$$p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2$$

$$(p_{11} - p_{21})Q_1 = (p_{22} - p_{12})Q_2 \quad (1)$$

また、電荷は保存される（消滅したり生成したりしない）ので、

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad (2)$$

式(1),(2)の連立一次方程式を  $Q_1, Q_2$  について解くと、

$$(p_{11} - p_{21})Q_1 = (p_{22} - p_{12})(Q - Q_1)$$

$$(p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})Q_1 = (p_{22} - p_{12})Q$$

$$Q_1 = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q$$

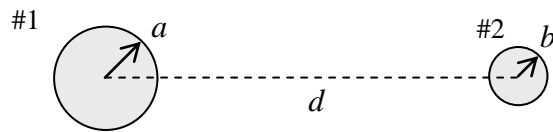
$$Q_2 = Q - Q_1 = \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q$$

■

38-3. 半径  $a, b$  の 2 つの導体球がある。2 導体間の距離  $d$  は十分離れている ( $d \gg a, b$ ) とする。

(i) この導体系の電位係数行列を求めよ。

(ii) 導体#1 を  $Q$  に帯電し、その後細い導線で両導体を繋いだ後に導体#1, #2 が得る電荷の比  $Q_2 / Q_1$  を求めよ(38-2 の結果を利用)。また、そのとき、導体#1 および導体#2 の表面の電界の比  $E_2 / E_1$  を求めよ。



【解答】

(i)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = \left. \frac{V_1}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad p_{22} = \left. \frac{V_2}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\begin{aligned} p_{12} &= \left. \frac{V_1}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = V_2 - \int_b^{d-a-b} E_r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} - \int_b^{d-a-b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} + \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_b^{d-a-b} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (d-a-b)} \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} \end{aligned}$$

$$p_{21} = p_{12}$$

よって、電位係数行列は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} 1/a & 1/d \\ 1/d & 1/b \end{bmatrix}$$

(ii)

38-2 より、

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{22} - p_{12}} = \frac{1/a - 1/d}{1/b - 1/d} \cong \frac{1/a}{1/b} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b^2}}{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2}} = \frac{a^2}{b^2} \frac{Q_2}{Q_1} \cong \frac{a^2}{b^2} \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

蓄積電荷量は半径が大きい方が多いが、表面の電界強度は半径が小さい方が強い。→尖っているところは電界が強い（避雷針の原理）

■



コーヒーブレイク（避雷針・放電装置について）



雷雲は地上に対して負に帯電している。地上にある物体は等電位であり、等電位面を想像すると、電子は電位勾配が最も急な方向へ落ちていくので、雷は高いところに落ちやすい。また、等電位の金属の塊を考えると、尖ったところでは一般に電荷密度が高まり、電界が強い ([1], p.79 の規範問題参照)。電界が強いところでは絶縁破壊が起こり易いので、雷は尖ったところに落ちやすいこともわかる。つまり、媒質（金属や絶縁体）によらず、雷は高く尖ったところに落ちやすいのである。これを利用して、建物の屋上には尖った避雷針が設置されており(図 1)、落ちるならばここに落ちるよう誘導しているのである。屋上の全ての設備は、避雷針の頂点を含む水平面から下に向かって 30 度の円錐内に入るようになっている。避雷針は導線で地面に設置されている。



図 1: 建物の屋上の避雷針

コンピュータは落雷によるサージに弱いため、特に落雷には気をを使う必要がある。例えば、2002 年～2004 年まで世界最高速を誇っていた日本のスーパーコンピュータ、**地球シミュレータ**(35.86TFLOPS)には屋根の周囲に電線を張り巡らした落雷装置がある(図 2)。他にも機械的には高性能な免震構造になっており、より性能が落ちる免震構造の本館との連絡通路でつながっていて、本館に引きずられないように連絡通路は動くようになっている。さらに、コンピュータは蛍光灯などのノイズにも弱いため、計算機室の照明は蛍光灯ではなく、外部の光源の光を徐々に漏らす発光チューブが使用されている。



図 2: 地球シミュレータ

また、尖ったところに電荷がたまりやすいという性質があるため、尖った部分から電荷は放電され易い。これを利用して飛行機には通常主翼の後部に尖った放電装置が付いている(図 3)。この装置が摩擦で帯電した電荷や落雷した場合に溜まった電荷を空中に逃がしているのである。雷が落ちても内部の乗客が安全な理由は静電遮蔽の原理からわかるだろう。しかし、地上に対して電位が変化することは確実であり、また飛行機は空気との摩擦で正に帯電してしまい、落雷しやすいので、放電装置で電荷を逃がしているのである。



図 3: 飛行機の放電装置

[参考文献]

[1] ファインマン・レイトン・サンズ、ファインマン物理学 III 電磁気学、岩波書店