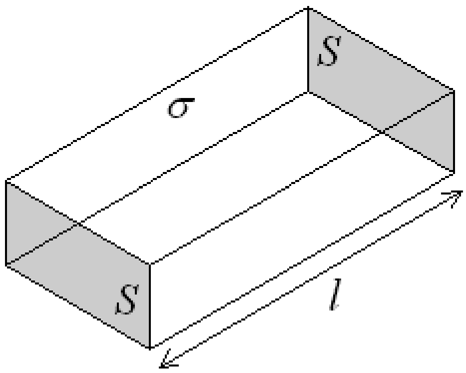
電磁気学Ⅰ　演習 第１４回 解答

56. 直径d, 長さlの導電率σの導線の抵抗を求めよ。具体的な値として、直径 0.5[mm], 長さ 10[m]の銅線の抵抗を求めよ。ただし、銅の導電率は5.8×10^7 [S/m]とする。

【解答】



両端の電圧: $V = El$

電流: $I = \sigma ES$　　(ただし、Sは抵抗体の断面積)

$$R = \frac{V}{I} = \frac{El}{\sigma ES} = \frac{l}{\sigma S}$$

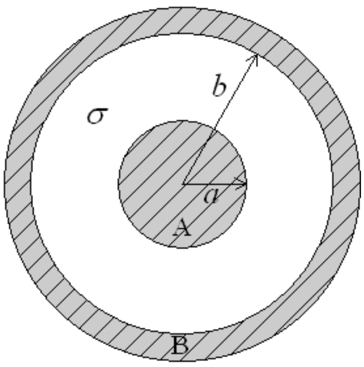
ここで、$S = \pi (d/2)^2$ より、

$$R = \frac{l}{\sigma\pi(d/2)^2} = \frac{4l}{\pi\sigma d^2}$$

$d = 0.0005$[m], $l = 10$[m], $\sigma = 5.8\times10^7$ [S/m]を代入すると、

$R \cong 0.878$ [Ω]

58. 内導体 A の半径a, 外導体 B の内側までの半径bの円筒導体 A, B の間に導電率σの物質がつまっている。この導電率は A, B の導電率より十分小さいとする。円筒の軸方向の長さをlとして、A, B 間の抵抗Rを求めよ。まず、導電率σの媒質を誘電率εの誘電体に置き換え容量を計算し、C と G の類似性から求める。



【解答】

C と G の類似性（アナロジー, analogy）を使うと知っている知識を使えるので計算が簡単である。まず、導電率σの媒質が誘電率εの誘電体だったとして C を計算する。A が単位長

あたりλ[C/m]の線電荷密度に帯電しているとすると、ガウスの定理と対称性より、

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$2\pi r l \varepsilon E_r = \lambda l$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

よって、

$$V = -\int_b^a E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln r\right]_b^a = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\ln a - \ln b\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

長さl辺りの容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda l}{V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$$

さて、C と G のアナロジーより、$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$からGを計算すると($G = \frac{\sigma}{\varepsilon}C$と計算すればいいのだが、簡単に言うと上の式で、$C \to G$, $\varepsilon \to \sigma$と書き換えてしまえばいいということである）、

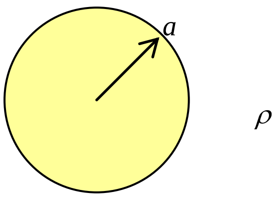
$$G = \frac{2\pi\sigma l}{\ln\frac{b}{a}}$$

よって、

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\sigma l}\ln\frac{b}{a}$$

■

58’ 抵抗率ρの無限に広い媒質中に半径aの導体球がある。導体球と無限遠の間の抵抗を求めよ。導体球の抵抗率は 0 とする。（静電容量とコンダクタンスの類似性より、まず容量を求め、その後$C \to G$, $\varepsilon \to \sigma = 1/\rho$と置き換える。）



【解答】

誘電率εの無限に広い媒質中におかれた半径aの導体球の静電容量は、

$$C = 4\pi\varepsilon a$$

となる。したがって、静電容量とコンダクタンスの類似性より、$C \to G$, $\varepsilon \to \sigma = 1/\rho$と

置き換えればよいので、

$$G = 4\pi\sigma a = \frac{4\pi a}{\rho}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\rho}{4\pi a} \qquad \blacksquare$$