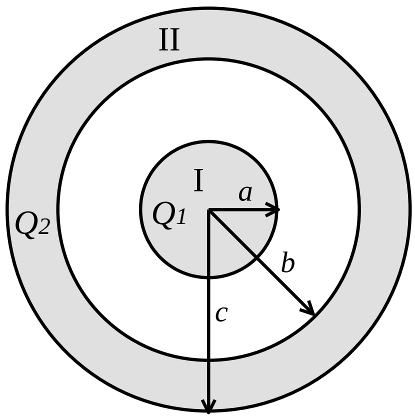
電磁気学Ⅰ　演習 第６回 解答

9.

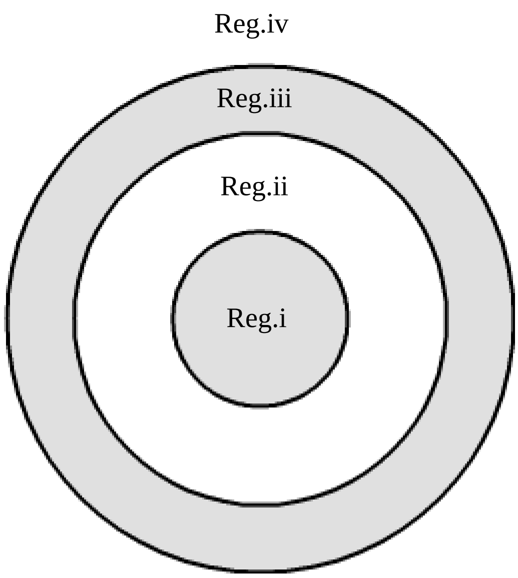
(1) 図のように２つの**同心導体球**がある。内導体Ｉに電荷量Q_1 (> 0)を、外導体IIに電荷量Q_2 (> 0)を与えたとき、電界を内導体Ｉの中心からの距離rの関数として求め、グラフを描け。

(2) 無限遠の電位を基準(0)としたとき、電位分布を無限遠から中心に向かって順に積分していくことにより求めよ。



【解答】

(1) 電界を求める



(i) Reg.i ($0 \le r < a$)

導体中に電界は無いから

$$\mathbf{E} = 0$$

(ii) Reg.ii ($a \le r < b$)

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(iii) Reg.iii ($b \le r < c$)

導体中に電界は無いから

$$\mathbf{E} = 0$$

(iv) Reg.iv ($c \le r$)

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

よって、まとめると、

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & (0 \le r < a) \\ \hat{r}\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a \le r < b) \\ \mathbf{0} & (b \le r < c) \\ \hat{r}\dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (c \le r) \end{cases}$$

(2) 電位を求める

(iv) Reg.iv ($c \le r$)

$$V = -\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V = -\int_{r=\infty}^{r} E_r dr = -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r=\infty}^{r} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(iii) Reg.iii ($b \le r < c$)

$$\begin{aligned} V &= -\int_{r=\infty}^{r} E_r dr = -\int_{r=\infty}^{c} E_r dr - \int_{r=c}^{r} E_r dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} - \int_{r=c}^{r} 0 dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{aligned}$$

(ii) Reg.ii ($a \le r < b$)

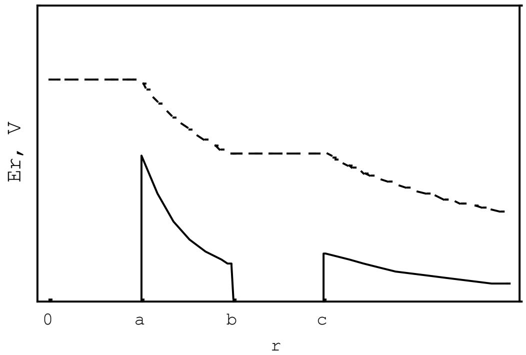
$$\begin{aligned} V &= -\int_{r=\infty}^{r} E_r dr = -\int_{r=\infty}^{c} E_r dr - \int_{r=c}^{b} E_r dr - \int_{r=b}^{r} E_r dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=b}^{r} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r=b}^{r} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{aligned}$$

(i) Reg.i ($0 \le r < a$)

$$V = -\int_{r=\infty}^{r} E_r dr = -\int_{r=\infty}^{c} E_r dr - \int_{r=c}^{b} E_r dr - \int_{r=b}^{a} E_r dr - \int_{r=a}^{r} E_r dr$$
$$= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \int_{r=a}^{r} 0 dr$$
$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

よって、まとめると、

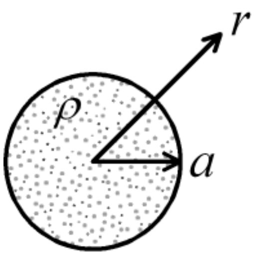
$$V = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (0 \le r < a) \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (a \le r < b) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (b \le r < c) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (c \le r) \end{cases}$$



Q1,Q2>0 のとき

■

11. 半径 a、電荷密度 ρ [C/m^3]の無限長円筒状電荷がある。円筒表面を電位の基準にとり、r の関数として、電界及び電位の分布を求めよ。



【解答】

対称性より、電界はr成分E_rしか持たない。ガウスの法則$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv$を単位長の円筒に適用して、

(a) $0 \le r \le a$のとき、

$$2\pi r E_r = \frac{\pi r^2 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

(b) $a < r$のとき、

$$2\pi r E_r = \frac{\pi a^2 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0 r}$$

まとめると、

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r & (0 \le r \le a) \\ \dfrac{a^2\rho}{2\varepsilon_0 r} & (a < r) \end{cases}$$

電位は電界の接線線積分で求められる。

(a) $0 \le r \le a$のとき、

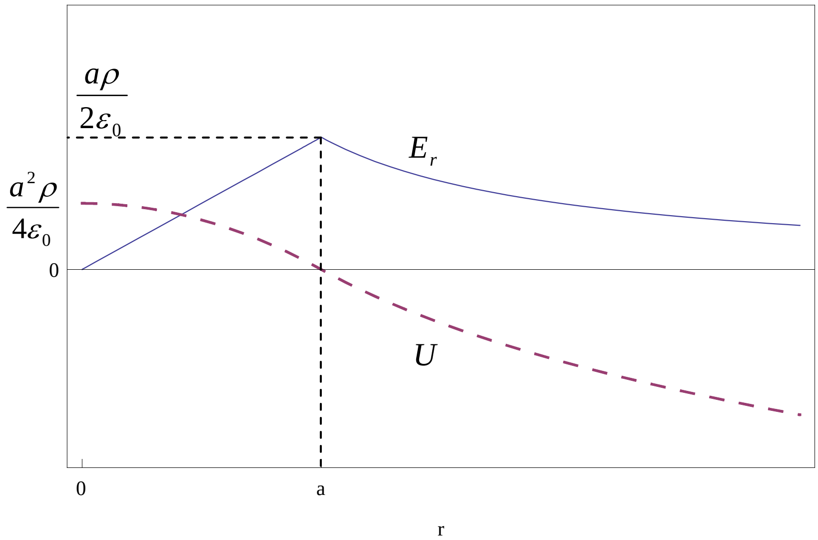
$$U = -\int_{r=a}^{r} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{r=a}^{r} r dr = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^r = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2)$$

(b) $a < r$のとき、

$$U = -\int_{r=a}^{r} \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0 r} dr = -\frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}\int_{r=a}^{r}\frac{dr}{r} = -\frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}\left[\log r\right]_a^r = -\frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}\log\frac{r}{a}$$

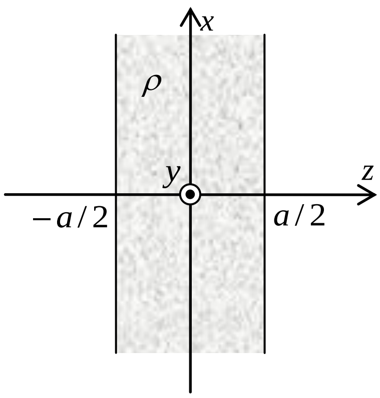
まとめると、

$$U = \begin{cases} \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(a^2 - r^2) & (0 \le r \le a) \\ -\dfrac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}\log\dfrac{r}{a} & (a < r) \end{cases}$$



■

11'．$-a/2 \le z \le a/2$ の空間は一様な電荷密度 ρ で満たされており、x, y 方向には一様な分布をしているとき、z 軸上 $(z \ge 0)$ の電界分布を求めよ。



【解答】

(i) $-a/2 \le z \le a/2$ でガウスの法則を適用する

面積 S で軸が z 軸に平行な筒を考え、その筒に対してガウスの法則 $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} dv$ を適用する。筒の両端の位置は $\pm z$ とすると、対称性より、両端での電界の値は等しい（向きは逆）。また、対称性より、電界は筒の側面成分は持たない。従って、

$$2E_z S = \frac{\rho \cdot 2zS}{\varepsilon_0}$$

$$E_z = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

(ii) $a/2 \le |z|$ でガウスの法則を適用する

$$2E_z S = \frac{\rho a S}{\varepsilon_0}$$

$$E_z = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$$

まとめると、

$$E_z = \begin{cases} \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0} & (z \le a/2) \\ \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0} & (z > a/2) \end{cases}$$