配布資料１：２人戦略形ゲームにおける諸概念の定義

1. $(N = \{1, 2\}, (X^1, X^2), (f^1, f^2))$

   - N　プレイヤーの集合
   - X^k　プレイヤー k の戦略の集合,　$k = 1, 2$
   - $f^k : X^1 \times X^2 \longrightarrow \Re$ （$\Re$ は実数の全体）　プレイヤー k の利得関数，$k = 1, 2$

2. 有限個の純粋戦略の場合

   - $X^1 = S^1 = (s^1_1, s^1_2, ..., s^1_m)$　$X^2 = S^2 = (s^2_1, s^2_2, ..., s^2_n)$
   - 利得行列による表現

$$
\begin{array}{cccccc}
1\backslash 2 & s^2_1 & \cdots & s^2_j & \cdots & s^2_n \\
s^1_1 & a^1_{11}, a^2_{11} & \cdots & a^1_{1j}, a^2_{1j} & \cdots & a^1_{1n}, a^2_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
s^1_i & a^1_{i1}, a^2_{i1} & \cdots & a^1_{ij}, a^2_{ij} & \cdots & a^1_{in}, a^2_{in} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
s^1_m & a^1_{m1}, a^2_{m1} & \cdots & a^1_{mj}, a^2_{mj} & \cdots & a^1_{mn}, a^2_{mn}
\end{array}
$$

ここで，$a^1_{ij} = f^1(s^1_i, s^2_j)$，$a^2_{ij} = f^2(s^1_i, s^2_j)$

3. 戦略の支配

   - 支配

     プレイヤー１の２つの純粋戦略 s^1_i と $s^1_{i'}$ をとる。

     s^1_i が $s^1_{i'}$ を支配する　$\Longleftrightarrow a^1_{ij} > a^1_{i'j} \ \ \forall j = 1, ..., n$

     プレイヤー２の２つの純粋戦略 s^2_j と $s^2_{j'}$ をとる。

     s^2_j が $s^2_{j'}$ を支配する　$\Longleftrightarrow a^2_{ij} > a^2_{ij'} \ \ \forall i = 1, ..., m$

   - 弱支配

     プレイヤー１の２つの純粋戦略 s^1_i と $s^1_{i'}$ をとる。

     s^1_i が $s^1_{i'}$ を弱支配する

     $\Longleftrightarrow$ (a) $a^1_{ij} \geq a^1_{i'j} \ \ \forall j = 1, ..., n$　かつ　(b) $a^1_{ij} > a^1_{i'j} \ \ \exists j = 1, ..., n$

     プレイヤー２の２つの純粋戦略 s^2_j と $s^2_{j'}$ をとる。

     s^2_j が $s^2_{j'}$ を弱支配する

     $\Longleftrightarrow$ (a)　$a^2_{ij} \geq a^2_{ij'} \ \ \forall i = 1, ..., m$　かつ　(b)　$a^2_{ij} > a^2_{ij'} \ \ \exists i = 1, ..., m$

   - 支配戦略

     プレイヤー１の純粋戦略 s^1_i が支配戦略

     $\Longleftrightarrow s^1_i$ が１の他のすべての純粋戦略を支配する。

     プレイヤー２の純粋戦略 s^2_j が支配戦略

     $\Longleftrightarrow s^2_j$ が２の他のすべての純粋戦略を支配する。

   - 弱支配戦略

     プレイヤー１の純粋戦略 s^1_i が弱支配戦略

     $\Longleftrightarrow s^1_i$ が１の他のすべての純粋戦略を弱支配する。

プレイヤー２の純粋戦略 s_j^2 が弱支配戦略

$\Longleftrightarrow$ s_j^2 が２の他のすべての純粋戦略を弱支配する。

4. 最適反応戦略

プレイヤー１の戦略 s_i^1 がプレイヤー２の戦略 s_j^2 に対する最適反応戦略

$\Longleftrightarrow a_{ij}^1 \geq a_{i'j}^1 \quad \forall i' = 1, ..., m$

プレイヤー２の戦略 s_j^2 がプレイヤー２の戦略 s_i^1 に対する最適反応戦略

$\Longleftrightarrow a_{ij}^2 \geq a_{ij'}^2 \quad \forall j' = 1, ..., n$

5. 合理化できる戦略

相手のどの戦略に対しても最適反応戦略とならない戦略を逐次除去していった場合に残った各プレイヤーの戦略をそのプレイヤーの合理化できる戦略という

6. ナッシュ均衡

２人のプレイヤーの純粋戦略の組 (s_i^1, s_j^2) がナッシュ均衡

$\Longleftrightarrow$ (a) $a_{ij}^1 \geq a_{i'j}^1 \quad \forall i' = 1, ..., m$ 　かつ　(b) $a_{ij}^2 \geq a_{ij'}^2 \quad \forall j' = 1, ..., n$

s_i^1 は s_j^2 に対するプレイヤー１の最適反応戦略

s_j^2 は s_i^1 に対するプレイヤー２の最適反応戦略

7. 狭義ナッシュ均衡

２人のプレイヤーの純粋戦略の組 (s_i^1, s_j^2) が狭義ナッシュ均衡

$\Longleftrightarrow$ (a) $a_{ij}^1 > a_{i'j}^1 \quad \forall i' = 1, ..., m, \ i' \neq i$ 　かつ　(b) $a_{ij}^2 > a_{ij'}^2 \quad \forall j' = 1, ..., n, \ j' \neq j$

s_i^1 は s_j^2 に対するプレイヤー１の唯一つの最適反応戦略

s_j^2 は s_i^1 に対するプレイヤー２の唯一つの最適反応戦略

8. パレート支配と弱パレート支配

２人のプレイヤーの純粋戦略の組 (s_i^1, s_j^2) が $(s_{i'}^1, s_{j'}^2)$ をパレート支配する

$\Longleftrightarrow$ (a) $a_{ij}^1 > a_{i'j'}^1$ 　かつ　(b) $a_{ij}^2 > a_{i'j'}^2$

(s_i^1, s_j^2) が $(s_{i'}^1, s_{j'}^2)$ を弱パレート支配する

$\Longleftrightarrow$ (a) $a_{ij}^1 > a_{i'j'}^1$ 　かつ　(b) $a_{ij}^2 \geq a_{i'j'}^2$

または　(a) $a_{ij}^1 \geq a_{i'j'}^1$ 　かつ　(b) $a_{ij}^2 > a_{i'j'}^2$

9. パレート最適性と強パレート最適性

２人のプレイヤーの純粋戦略の組がパレート最適

$\Longleftrightarrow$ 　この戦略の組をパレート支配する戦略の組が存在しない。

２人のプレイヤーの純粋戦略の組が強パレート最適

$\Longleftrightarrow$ 　この戦略の組を弱パレート支配する戦略の組が存在しない。

10. 混合戦略まで考えた戦略形ゲーム

- プレイヤー 1 の混合戦略の集合
  $X^1 = \Pi^1 = \{p^1 = (p^1_1, ..., p^1_i, ..., p^1_m) : \sum_{i=1}^m p^1_i = 1, p^1_i \geq 0 \ \forall i = 1, ..., m\}$
- プレイヤー 2 の混合戦略の集合
  $X^2 = \Pi^2 = \{p^2 = (p^2_1, ..., p^2_j, ..., p^2_n) : \sum_{j=1}^n p^2_j = 1, p^2_j \geq 0 \ \forall j = 1, ..., n\}$
- 期待利得 $f^1(p^1, p^2) = E^1(p^1, p^2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a^1_{ij} p^1_i p^2_j$
  $f^2(p^1, p^2) = E^2(p^1, p^2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a^2_{ij} p^1_i p^2_j$

11. 混合戦略まで考えたときの支配，弱支配，支配戦略，弱支配戦略

- 支配
  プレイヤー 1 の 2 つの混合戦略 p^1 と q^1 をとる
  p^1 が q^1 を支配する $\iff E^1(p^1, p^2) > E^1(q^1, p^2) \ \ \forall p^2 \in \Pi^2$
  プレイヤー 2 の 2 つの混合戦略 p^2 と q^2 をとる。
  p^2 が q^2 を支配する $\iff E^2(p^1, p^2) > E^1(p^1, q^2) \ \ \forall p^1 \in \Pi^1$
- 弱支配
  プレイヤー 1 の 2 つの混合戦略 p^1 と q^1 をとる
  p^1 が q^1 を弱支配する
  $\iff$ (a) $E^1(p^1, p^2) \geq E^1(q^1, p^2) \ \ \forall p^2 \in \Pi^2$
  かつ (b) $E^1(p^1, p^2) > E^1(q^1, p^2) \ \ \exists p^2 \in \Pi^2$
  プレイヤー 2 の 2 つの混合戦略 p^2 と q^2 をとる
  p^2 が q^2 を弱支配する
  $\iff$ (a) $E^2(p^1, p^2) \geq E^2(p^1, q^2) \ \ \forall p^1 \in \Pi^1$
  かつ (b) $E^2(p^1, p^2) > E^1(p^1, q^2) \ \ \exists p^1 \in \Pi^1$
- 支配戦略
  プレイヤー 1 の混合戦略 p^1 が支配戦略
  $\iff p^1$ が 1 の他のすべての混合戦略を支配する。
  プレイヤー 2 の混合戦略 p^2 が支配戦略
  $\iff p^2$ が 2 の他のすべての混合戦略を支配する。
- 弱支配戦略
  プレイヤー 1 の混合戦略 p^1 が弱支配戦略
  $\iff p^1$ が 1 の他のすべての混合戦略を弱支配する。
  プレイヤー 2 の混合戦略 p^2 が弱支配戦略
  $\iff p^2$ が 2 の他のすべての混合戦略を弱支配する。

12. 混合戦略まで考えたときの最適反応戦略
    プレイヤー 1 の混合戦略 p^1 がプレイヤー 2 の混合戦略 p^2 に対する最適反応戦略
    $\iff E^1(p^1, p^2) \geq E^1(p'^1, p^2) \ \ \forall p'^1 \in \Pi^1$
    プレイヤー 2 の混合戦略 p^2 がプレイヤー 1 の混合戦略 p^1 に対する最適反応戦略
    $\iff E^2(p^1, p^2) \geq E^2(p^1, p'^2) \ \ \forall p'^2 \in \Pi^2$

13. 混合戦略まで考えたときの合理化できる戦略
相手のどの混合戦略に対しても最適反応戦略とならない混合戦略を逐次除去していった場合に残った各プレイヤーの混合戦略をそのプレイヤーの合理化できる戦略という

14. 混合戦略まで考えたときのナッシュ均衡
２人のプレイヤーの混合戦略の組 (p^1, p^2) がナッシュ均衡
$\iff$ (a) $E^1(p^1, p^2) \geq E^1(p'^1, p^2) \ \ \forall p'^1 \in \Pi^1$
かつ (b) $E^2(p^1, p^2) \geq E^2(p^1, p'^2) \ \ \forall p'^2 \in \Pi^2$

p^1 は p^2 に対するプレイヤー１の最適反応戦略
p^2 は p^1 に対するプレイヤー２の最適反応戦略

15. 混合戦略まで考えたときの狭義ナッシュ均衡
２人のプレイヤーの混合戦略の組 (p^1, p^2) が狭義ナッシュ均衡
$\iff$ (a) $E^1(p^1, p^2) > E^1(p'^1, p^2) \ \ \forall p'^1 \in \Pi^1, \ p'^1 \neq p^1$
かつ (b) $E^2(p^1, p^2) > E^2(p^1, p'^2) \ \ \forall p'^2 \in \Pi^2, \ p'^2 \neq p^2$

p^1 は p^2 に対するプレイヤー１の唯一つの最適反応戦略
p^2 は p^1 に対するプレイヤー２の唯一つの最適反応戦略