6.LC 回路の合成

　ここでは、得られた回路関数を以下に実際の回路として表現するかを学ぼう。

部分分数展開によるリアクタンス回路網の合成

　前回得られた駆動点インピーダンス

$$Z_{LC}(s)=Z_0\frac{s(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)\cdots(s^2+\omega_{2n}^2)}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)\cdots(s^2+\omega_{2m-1}^2)}$$

または

$$Z_{LC}(s)=Z_0\frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)\cdots(s^2+\omega_{2m-1}^2)}{s(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)\cdots(s^2+\omega_{2n}^2)}$$

　を部分分数展開しよう。

$$Z_{LC}(s)=Z_0\frac{s(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)\cdots(s^2+\omega_{2n}^2)}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)\cdots(s^2+\omega_{2m-1}^2)}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_{2i-1}/2}{s-j\omega_{2i-1}}+\frac{\alpha_{2i-1}/2}{s+j\omega_{2i-1}}\right)+\alpha_\infty s$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_{2i-1}s}{s^2+\omega_{2i-1}^2}+\alpha_\infty s$$

または

$$Z_{LC}(s)=Z_0\frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)\cdots(s^2+\omega_{2m-1}^2)}{s(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_4^2)\cdots(s^2+\omega_{2n}^2)}$$

$$=\frac{\alpha_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{2i}/2}{s-j\omega_{2i}}+\frac{\alpha_{2i}/2}{s+j\omega_{2i}}\right)+\alpha_\infty s$$

$$=\frac{\alpha_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{2i}s}{s^2+\omega_{2i}^2}\right)+\alpha_\infty s$$

となる。

ここで

$$\left(s-j\omega_{2i-1}\right)Z_{LC}(s)\Big|_{s=j\omega_{2i-1}}=\alpha_{2i-1}/2$$

とした。すると、

$$\left(s-j\omega_{2i-1}\right)Z_{LC}(s)\Big|_{s=j\omega_{2i-1}}$$

$$=\frac{\left(s-j\omega_{2i-1}\right)}{(s^2+\omega_{2i-1}^2)}(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Bigg|_{s=j\omega_{2i-1}}$$

$$=\frac{1}{s+j\omega_{2i-1}}(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Bigg|_{s=j\omega_{2i-1}}$$

$$=\frac{1}{2j\omega_{2i-1}}(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Bigg|_{s=j\omega_{2i-1}}$$

であり、

$$\left(s+j\omega_{2i-1}\right)Z_{LC}(s)\Big|_{s=-j\omega_{2i-1}}$$

$$=\frac{1}{s-j\omega_{2i-1}}(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Bigg|_{s=-j\omega_{2i-1}}$$

$$=\frac{1}{-2j\omega_{2i-1}}(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Bigg|_{s=-j\omega_{2i-1}}$$

であること、また

$$(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Big|_{s=j\omega_{2i-1}}$$

であることは、

$$=-(s^2+\omega_{2i-1}^2)Z_{LC}(s)\Big|_{s=-j\omega_{2i-1}}$$

$Z_{LC}(s)$ から自明なので、

$\left(s+j\omega_{2i-1}\right)Z_{LC}(s)\Big|_{s=-j\omega_{2i-1}}=\alpha_{2i-1}/2$ も同時に成り立っていることも判る。

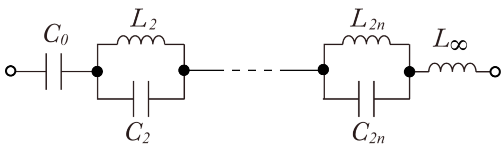
$$Z_{LC}(s)=\frac{\alpha_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{2i}s}{s^2+\omega_{2i}^2}\right)+\alpha_\infty s$$

を回路にするには、第一項を容量として、第二項の和の中の項はLC並列回路として、最終項はインダクタとしたあと直列に接続すると考え、以下のように書き直す。

$$Z_{LC}(s)=\frac{\alpha_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_{2i}s}{s^2+\omega_{2i}^2}\right)+\alpha_\infty s$$

$$=\frac{1}{C_0 s}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{C_{2i}s+\frac{1}{L_{2i}s}}\right)+L_\infty s$$

すると、下図の様なフォスターの直列形回路と呼ばれる回路によって、回路網が実現できることが判る。



ただし、$C_{2i}=\dfrac{1}{\alpha_{2i}}$, $L_{2i}=\dfrac{\alpha_{2i}}{\omega_{2i}^2}$, $L_\infty=\alpha_\infty$ とする必要がある。また、極と零点の数によって第一項に相当するキャパシタや、最終項に相当するインダクタはなくなる場合がある。

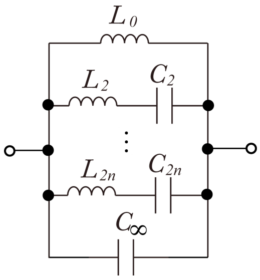
　駆動点アドミタンスで計算を行った場合も同様に部分分数展開ができる。

$$Y_{LC}(s)=\frac{\beta_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_{2i}s}{s^2+\omega_{2i}^2}\right)+\beta_\infty s$$

　そこで、これを回路にするには、第一項を

インダクタとして、第二項の和の中の項はLC直列回路として、最終項は容量としたあと並列に接続すればよく、下図の様なフォスターの並列形回路と呼ばれる回路によって、回路網が実現できることが判る。

ただし、$L_{2i}=\dfrac{1}{\beta_{2i}}$，$C_{2i}=\dfrac{\beta_{2i}}{\omega_{2i}^{\ 2}}$，$\boxed{C_\infty=\beta_\infty}$である。



ここで実例として、駆動点インピーダンスが$Z_{LC}(s)=\dfrac{s(s^2+2)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)}$となる回路を合成しよう。

部分分数分解するには、

$\left(s-j\omega_{2i-1}\right)Z_{LC}(s)\Big|_{s=j\omega_{2i-1}}=\alpha_{2i-1}/2$ とすれば係数がだせるので、

$$\left(s-j\right)Z\left(s\right)\Big|_{s=j}=\frac{j(-1+2)\cdot(-1+4)}{(2j)(-1+3)}=\frac{3}{4}$$

$$\left(s-\sqrt{3}j\right)Z\left(s\right)\Big|_{s=\sqrt{3}j}$$

$$=\frac{\sqrt{3}j(-3+2)\cdot(-3+4)}{(-3+1)(2\sqrt{3}j)}=\frac{1}{4}$$

として、$\alpha_{2i-1}/2$を出して、その二倍から、

$$Z_{LC}(s)=s+\frac{\frac{3}{2}s}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3}$$

とする方法と

$$Z_{LC}(s)=s+\frac{s^5+6s^3+8}{(s^2+1)(s^2+3)}-s$$

$$=s+\frac{6s^3+8s-4s^3-3s}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$=s+\frac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$=s+\frac{\frac{3}{2}s}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3}$$

と力ずくでやる方法とがある。なお、この計算では、素子の値と係数の符号が同じなので、必ず正になる。負になるのはどこかで計算を間違えているのである。

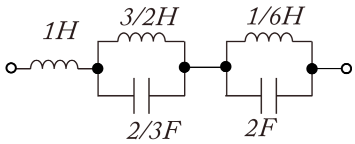
回路素子は、

$Z_{LC}(s)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\frac{1}{C_{2i}s+\frac{1}{L_{2i}s}}\Bigg)+L_\infty s$ という形にするので、

$$Z_{LC}(s)=s+\frac{\frac{3}{2}s}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3}$$

$$=s+\frac{1}{\frac{2}{3}s+\frac{2}{3s}}+\frac{1}{2s+\frac{6}{s}}$$

として、回路は次の様に成る。



アドミタンスにしてから部分分数分解するには同様に

$$sY\left(s\right)\Big|_{s=0}$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}$$

$$\left(s-\sqrt{2}j\right)Y\left(s\right)\Big|_{s=\sqrt{2}j}$$

$$=\frac{(-2+1)\cdot(-2+3)}{\sqrt{2}j(2\sqrt{2}j)(-2+4)}=\frac{1}{8}$$

$$Y_{LC}(s)=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{4}s}{s^2+2}+\frac{\frac{3}{8}s}{s^2+4}$$

$$\left(s-2j\right)Y\left(s\right)\Big|_{s=2j}$$

$$=\frac{(-4+1)\cdot(-4+3)}{2j\cdot 4j(-4+2)}=\frac{3}{16}$$

と$\beta_{2i-1}/2$などを出して、その二倍から、

$$Y_{LC}(s)=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{4}s}{s^2+2}+\frac{\frac{3}{8}s}{s^2+4}$$

とする方法と

$$Y_{LC}(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+3)}{s(s^2+2)(s^2+4)}$$

$$=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{s^4+4s^2+3-\frac{3}{8}(s^2+2)(s^2+4)}{s(s^2+2)(s^2+4)}$$

$$=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{\frac{5}{8}s^3+\frac{7}{4}s}{(s^2+2)(s^2+4)}$$

$$=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{4}s}{s^2+2}+\frac{\frac{3}{8}s}{s^2+4}$$

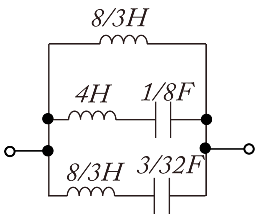
と力ずくでやる方法がある。回路素子は、

$Y_{LC}(s)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{L_{2i}s+\frac{1}{C_{2i}s}}\right)$ という形にするので、

$Y_{LC}(s)=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{4}s}{s^2+2}+\frac{\frac{3}{8}s}{s^2+4}$ として次の様に

$=\frac{1}{\frac{8}{3}s}+\frac{1}{4s+\frac{8}{s}}+\frac{\frac{3}{8}s}{\frac{8}{3}s+\frac{32}{3s}}$

成る。



<u>連分数展開によるリアクタンス回路網の合成</u>

前回述べた様に、リアクタンス回路は、$s=0$ と $s\to\infty$ では、$Z_{LC}(s)$ は 0 か無限大になること、極も零点も交互に並び、かつ $s=0$ 以外では複素共役の対を持つことから、極と零点の数は必ず異なる(差は一つしかない)。

まず、$s\to\infty$ で極（無限大になる）を持つ場合を考えよう。その場合、$Z_{LC}(s)=L_1s+Z_1(s)$ と書ける。先の

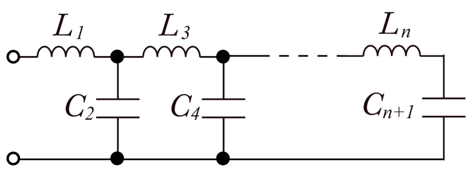
$Z_{LC}(s)=\frac{1}{C_0s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_{2i}s+\frac{1}{L_{2i}s}}+L_\infty s$ という形と較べると、$L_\infty=L_1$ であり、

$Z_1(s)=\frac{1}{C_0s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_{2i}s+\frac{1}{L_{2i}s}}$ に相当するので、

$Z_1(s)$ もリアクタンス関数である。ただし、L_1s という項が無くなったので、$s\to\infty$ では、無限大になれず、0 になる。$s\to\infty$ は零点となる。つぎにこの $Z_1(s)$ の逆数を取ってアドミタンスにしよう。$s\to\infty$ では、無限大になり、$\frac{1}{Z_1(s)}=Y_1(s)=C_2s+Y_2(s)$ と書ける。同様にして、$Y_2(s)$ はリアクタンス関数であり、$s\to\infty$ では、0 になる。そこで、この $Y_2(s)$ の逆数を取ってインピーダンスにしよう。$s\to\infty$ では、無限大になり、$\frac{1}{Y_2(s)}=Z_2(s)=L_3s+Z_3(s)$ と書ける。以下同様に繰り返すと、

$Z_{LC}(s)=L_1s+\cfrac{1}{C_2s+\cfrac{1}{L_3s+\cdots}}$ という形にできる。

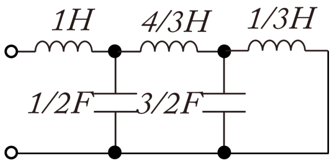
この形の回路を描くとはしご型回路と呼ばれる下図の様な形になる。



実際に $Z_{LC}(s)=\frac{s(s^2+2)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)}$ となる回路を合成しよう。

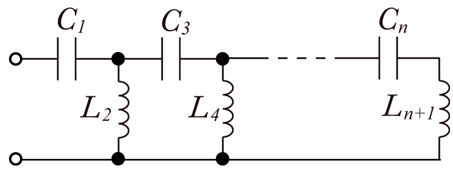
$$Z_{LC}(s)=\frac{s(s^2+2)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$
$$=\frac{s^5+6s^3+8s}{s^4+4s^2+3}$$
$$=s+\frac{s^5+6s^3+8s-s\left(s^4+4s^2+3\right)}{s^4+4s^2+3}$$
$$=s+\frac{1}{\dfrac{s^4+4s^2+3}{2s^3+5s}}=s+\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{2s^3+5s}{\dfrac{3}{2}s^2+3}}}$$
$$=s+\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}s+\dfrac{s}{\dfrac{3}{2}s^2+3}}}=s+\frac{1}{\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}s+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}s+3\dfrac{1}{s}}}}$$

となる。そこで回路は下図の様になる。



因みに零点の方が極より少ない場合は、いきなり逆数を取ってアドミタンスにすれば、$s\to\infty$で無限大になり、同じことができる。（一つ目のインダクタが無くなる)。このプロセスは$s\to\infty$の極を取り出しているとも言える。

次に$s=0$の極を取り出して見よう。もし$s=0$に極を持ってれば、$Z_{LC}(s)=\dfrac{1}{C_1 s}+Z_1(s)$と書ける。先の$Z_{LC}(s)=\dfrac{1}{C_0 s}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_{2i}s+\dfrac{1}{L_{2i}s}}+L_\infty s$という形と較べると、$C_0=C_1$であり、$Z_1(s)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_{2i}s+\dfrac{1}{L_{2i}s}}+L_\infty s$に相当するので、$Z_1(s)$もリアクタンス関数である。ただし、$\dfrac{1}{C_0 s}$という項が無くなったので、$s=0$では、無限大になれず、0 になる。$s=0$は零点となる。つぎにこの$Z_1(s)$の逆数を取ってアドミタンスにしよう。$s=0$では、無限大になり、$\dfrac{1}{Z_1(s)}=Y_1(s)=\dfrac{1}{L_2 s}+Y_2(s)$と書ける。以下同様に繰り返すと、$Z_{LC}(s)=\dfrac{1}{C_1 s}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{L_2 s}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{C_3 s}+\cdots}}$という形にできる。この形の回路を描くと下図の様になる。



$s=0$に極が無ければ零点なので、いきなり逆数を取ってアドミタンスにすれば、アドミタンスは$s=0$で極であり、同じことが出来る。（一つ目のキャパシタが無くなる。）このプロセスは$s=0$の極を取り出していると言える。