2. 電気回路の過渡現象とその解析(1)

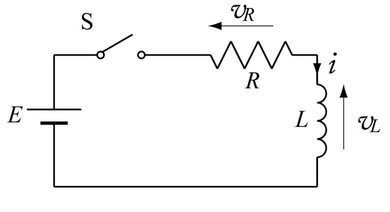
受動素子と電源からなる回路にスイッチを入れ、そのスイッチ等を断続的に動作させる様なことで時間的変化を与えた場合、各受動素子にも時間的な電圧と電流の変化が現れるが、スイッチの断続など瞬間におこるものの、受動素子の電圧や電流などの時間的変化は有る程度長い時間続く。これは、受動素子 L において電流の時間微分が電圧に比例すること、受動素子 C においては、電流の時間積分が電圧に比例することによる。

しかしながら時間的変化を与えず、一定の状態においた場合、抵抗が 0 でない回路においては必ず時間的変化が小さくなり、最後には時間的変化がなくなる定常状態に達する。

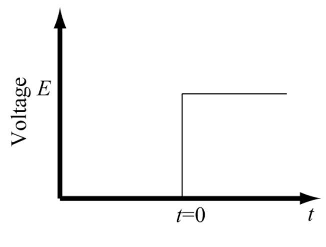
さて、L,C 以外の受動素子 R の電圧と電流の関係は単純な比例であることから、各受動素子を組み合わせた回路における電圧電流の関係は微分方程式あるいは積分方程式で表すことが出来る。微分とするか積分とするかは好みにも寄るので、ここでは回路の電圧と電流を解くために使う回路方程式を、微分方程式によって表すことにする。

RL 直列回路の回路方程式

まず第一歩として、下図に示す様な *RL* 直列回路において直流電圧源との間のスイッチ S を時間 t=0 で閉じた直後の過渡状態を回路方程式で表そう。



まず、スイッチを閉じることで、*RL* 直列回路には、図の様なステップ電圧 $Eu(t)$ が加わる。



ここで回路電流 i の時間変化を求めよう。抵抗での電圧が $v_R=Ri$ であり、インダクタでの電圧が $v_L=Ldi/dt$ なので、

$$Eu(t)=Ri+L\frac{di}{dt}$$

スイッチが閉じた後の t>0 では、

$$E=Ri+L\frac{di}{dt}$$

という定数係数の一次線形微分方程式になる。

解 i は、

左辺 $E=0$ としたときの式(同次方程式)

$$0=Ri+L\frac{di}{dt}$$

の解 i_t と

左辺 $E\neq 0$ としたときの式(非同次方程式)

$$E=Ri+L\frac{di}{dt}$$

を満足する特殊解のひとつ i_s との和

$$i=i_t+i_s$$

で表される。

ここで、特殊解 i_s は定常状態にすることで簡単に求められるので、そのようにして求めた特殊解を定常解とも呼ぶ、その場合、i_t は過渡状態を表すので過渡解と呼ぶ。

定常解 i_s は直流電圧しかにない受動回路では、最終的に時間変化がなくなるので、$0=di/dt$ とすればよく、

$$i_s=\frac{E}{R}$$

となる。

過渡解 i_t は $\frac{di_t}{dt}=-\frac{R}{L}i_t$, $\frac{di_t}{i_t}=-\frac{R}{L}dt$ となるので、この解は

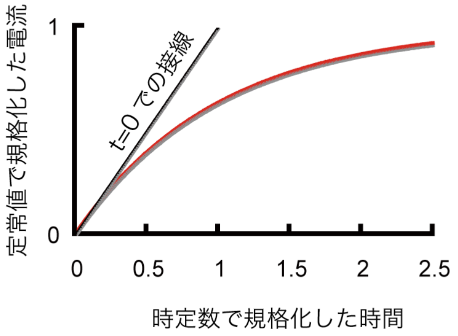
$\ln i_t=-\frac{R}{L}t+c$, $i_t=Ae^{-\frac{R}{L}t}$ となる。(ただし、 c と A は積分定数)

二つ併せて $i=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$ が答えになる。

ここで、積分定数の求め方だが、これは初期条件または初期値で定まる。

初期条件はどの様にもとめるかであるが、これは t<0 で電流が流れていなくて、かつインダクタは流れる電流は不連続に変化できないので、スイッチが閉じた直後の t=0 でも i=0 と考える。 $0=\frac{E}{R}+A$ となるので、 $A=-\frac{E}{R}$ となる。併せて $i=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$ となる。

さて得られた式を評価しよう。回路定数によるパラメータは二つに集約できる。まず、電流の大きさの最大値は、定常値でもある$\dfrac{E}{R}$で決まり、時間 t への依存性は$\dfrac{L}{R}$の何倍の値を持っているかで決まる。そこで、このふたつで規格化した特性を次の図に示す。



ここで特に時間$\dfrac{L}{R}$のことを時定数 τ と呼び、

$i=\dfrac{E}{R}(1-e^{-t/\tau})$ と表す。

t= τ で定常値$\dfrac{E}{R}$の 63%、5 τ で 99.3%になる。

また $t=0$ で接線を引くと、その接線が定常値の値になるのは、$t/\tau=1$ のときである。

以上は電流を基に解いたが、電圧を基に解いても良い。抵抗の両端の電圧$v_R=Ri$を元に式をたてれば、

$$E=v_R+\frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt}$$

となり、定常解 v_s と過渡解 v_t は

$$v_s=E, v_t=Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

となり、解は

$$v_R=E+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

t=0 で$v_R=0$の初期条件を入れ、$\tau=L/R$とすると、

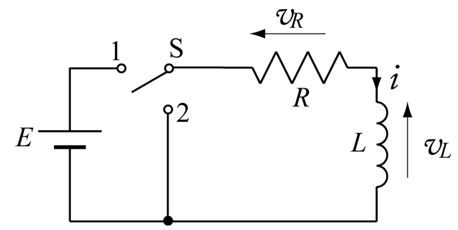
$$v_R=E(1-e^{-t/\tau})$$

また電流 i とインダクタの両端の電圧v_Lは

$$i=\frac{E}{R}(1-e^{-t/\tau}), v_L=Ee^{-t/\tau}$$

となる。当然$v_R+v_L=E$の関係はいつでも成り立つ。

次に、下図の回路でスイッチが 1 側にあり、定常電流 $I=E/R$ が流れていた時に、t=0 でスイッチを 2 側に切り替えて短絡させたときの過渡現象を見よう。



短絡後の回路方程式は同次方程式と同形であり、解は前の i_t で求めた。また初期条件は t=0 で $i=E/R$ であるから、解は

$$i=\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

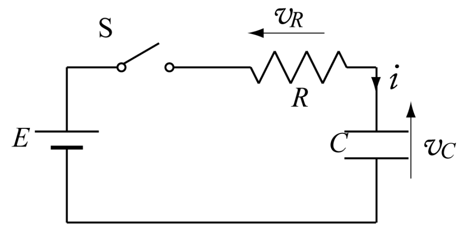
であり、抵抗とインダクタの両端電圧は

$v_R=Ee^{-t/\tau}, v_L=-Ee^{-t/\tau}$

となり、電流はインダクタの電流が不連続になれないので、t=0 から指数関数的に減少し、抵抗はそれに比例した電圧が、インダクタには併せて 0 になる様な電圧がそれぞれかかる。

<u>*RC* 直列回路の回路方程式</u>

次に下図に示す様な *RC* 直列回路において直流電圧源との間のスイッチ S を時間 $t=0$ で閉じた直後の過渡状態を回路方程式で表そう。



コンデンサにたまる電荷 q を時間微分すると電流 i だから、

$$E=R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}$$

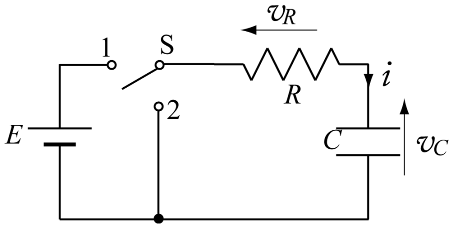
となる。前と同様にして、定常解$q_S=CE$、過渡解$q_t=Ae^{-\frac{t}{CR}}$となり、CR をこの回路の時定数 τ として、さらに初期条件である電荷は不連続に貯まれない→t=0 で q=0 を考えると答えは、

$$q=CE(1-e^{-t/\tau})$$

となる。これを観測できる量である電流、電圧にすると、

$i=\dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}, v_R=Ee^{-t/\tau}, v_C=E(1-e^{-t/\tau})$ となる。

短絡する場合も RL 直列回路と同様であり、



答えは、初期条件 t=0 で $q=CE$ を入れると

$$q=CEe^{-t/\tau}, i=-\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

となる。短絡は放電なので、電流は逆に流れる。
また電圧は、抵抗の電圧は電流に比例し、抵抗とコンデンサの電圧の和は 0 となるので、

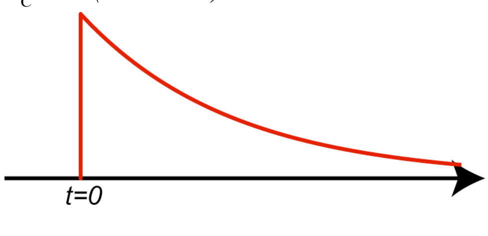
$$v_R=-Ee^{-t/\tau}, v_C=Ee^{-t/\tau}$$

となる。

<u>初期条件の整理</u>

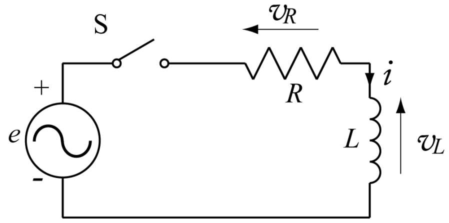
微分方程式をたてれば、あとは初期条件だけが注意する点になる。ここで注目するのは、t=0 での各素子の挙動である。物理的には、インダクタの電流が t=-0 と t=+0 で連続であるとして初期条件を決めている。またキャパシタの電圧（または電荷）についても t=-0 と t=+0 で変化することが出来ないので、連続であるとして、初期条件を決めている。本質は磁束保存則と電荷保存則である。

なお、自然が不連続を嫌うという表現をこの場合に使ってはいけない。現時点での回路方程式は、t=0 で急に電圧が発生する $v_C=E(1-e^{-t/\tau})$ のよう表記もある。



明らかに電圧は不連続である。このような不連続は周波数応答が追いつかず実際の回路では、出来ないが、この場合の回路の解にはなっている。従って、不連続がでることを意外に思ってはいけない。

<u>交流回路の過渡現象</u>



上の様な交流回路でもなにも変わらない。電圧を複素表現して $E_m e^{j(\omega t+\theta)}$ と表し、実際の変化をその実数部をとることとする。定常解は交流回路で解けばよいので、

$$E_m e^{j(\omega t+\theta)}=Ri_S+j\omega Li_S$$

となり

$$i_S=I_s e^{j(\omega t+\theta-\phi)}$$

とすれば、$E_m=RI_s e^{j\phi}+j\omega LI_s e^{j\phi}$ となり、

振幅　$I_s=E_m/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$,

偏角 $\phi=\arg(e^{j\phi})=\arg\{(R+j\omega L)I_s/E_m\}=tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$

となる。

過渡解は $\tau=L/R$ として $i_t=Ae^{-t/\tau}$ なので、

$$i_S=I_s e^{j(\omega t+\theta-\phi)}+Ae^{-t/\tau}$$

t=0 で i=0 の初期条件から、

$$i_S=I_s e^{j(\theta-\phi)}(e^{j\omega t}-e^{-t/\tau})$$

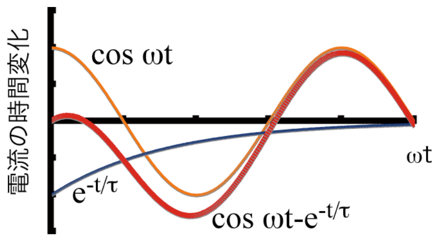
となる。ここで $\theta=\phi\pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき $e^{j(\theta-\phi)}=\pm j$ なので実数部では過渡解は無くなり、

$$i_S=\mp I_s sin\ \omega t$$

になる。θ = φ の時、$e^{j(\theta-\phi)}=1$ なので、実数部での過渡解は最も大きく、

$$i_S=I_s(cos\omega t-e^{-t/\tau})$$

となる。この波形が少し判りにくいのでこれをグラフに書くと



となる。*t=0* では、過渡解が定常解を打ち消すことで 0 になっているのが判る。もし時定数が大きければ、過渡解が大きいままなので、解はマイナス側に大きく振れ続け、その最大値は定常振幅の 2 倍程度にまでなる。