第 0 章　はじめに

0.はじめに ---線形システムとは---

この講義では、「線形システム」を対象とする。

線形システムとは？

その動作が、数学的に線形の関数方程式で記述されるシステム。

すなわち、入力 $f_1(t)$ および $f_2(t)$ に対する出力が、それぞれ $y_1(t)$ および $y_2(t)$ であるとき、$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$ の入力に対する出力が $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ となるシステム(系)は線形システムである。

第 1 章　フーリエ級数 ---> 周期波の展開

・入力が単一周波数の関数(正弦関数)であると、線形システムの出力(応答)は容易に求められる。そこで、周期的な入力 a を正弦関数の和で表すことを考える。

・各(正弦)関数を入力とした場合の応答を求め、その和をとると元の入力 a に対する応答がわかる。用いる正弦関数は周波数が異なるだけであるから、ある周波数に対する入力対出力の対応関係が分かれば、各(正弦)関数に対する応答は容易に求まる。

第 2 章　フーリエ変換 ---> 非周期波(孤立波)の周波数分析

・孤立波の応答も、周期波に対する考え方を拡張して考えることができる。

・時間領域の振る舞いは周波数領域でどのように特徴づけられるのか考える

第 3 章　ラプラス変換 ---> 過渡現象の解析

・入力が過渡的に変化する場合の応答はラプラス変換で考えることができる。

・過渡現象は微分方程式に帰着できる。

-->ラプラス変換は微分方程式を簡単な代数方程式に変換してしまう

第 1 章　フーリエ級数

1-1.フーリエ(Fourier)級数の基礎

・(時間的、空間的に)周期的に変化する現象を数学的に表現 ---> 周期関数

・周期関数を簡単な周期関数(正弦関数)の和で表現する --->フーリエ級数

・時間変数 t の関数 $f(t)$ に対して考える。周期を T とすると

$$f(t)=f(t+nT) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots \tag{1.1}$$

1-1-1 フーリエ級数展開係数の求め方

次の正弦・余弦関数は、周期 T の周期関数である。

$$\begin{aligned}&1,\cos\frac{2\pi}{T}t,\cos 2\frac{2\pi}{T}t,\cdots\cos n\frac{2\pi}{T}t,\cdots\\&\sin\frac{2\pi}{T}t,\cdots,\sin n\frac{2\pi}{T}t,\cdots\end{aligned} \tag{1.2}$$

任意の周期関数 $f(t)$ を、$\cos n\frac{2\pi}{T}t,\cdots,\sin n\frac{2\pi}{T}t,\cdots$ の線形和で展開する。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + a_2 \cos 2\frac{2\pi}{T}t + \cdots a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + \cdots + b_1 \sin\frac{2\pi}{T}t + \cdots b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t \qquad (1.3)$$

ここで、展開係数$a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$は、次のようにして求まる。

(1) a_0 ：式(1.3)の両辺に 1 をかけて、1 周期$-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$にわたって積分

$n \ne 0$に対して

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{T}{2n\pi}\left[\sin n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{-T}{2n\pi}\left[\cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-T}{2n\pi}\left(\cos n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} - \cos n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) = 0$$

より

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{a_0}{2}T$$

すなわち、

$$\underline{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt} \qquad (1.4)$$

(2) a_n ：式(1.3)の両辺に$\cos m\frac{2\pi}{T}t$をかけて、1 周期$-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$にわたって積分

(2-1) $\cos n\frac{2\pi}{T}t$の項

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\cos(n+m)\frac{2\pi}{T}t + \cos(n-m)\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

(i) $n \ne m$なら

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\frac{2\pi}{T}} + \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\frac{2\pi}{T}}\right)$$

$$\because \sin(n \pm m)\pi = 0$$

(ii) $n = m$なら

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1+\cos 2m\frac{2\pi}{T}t}{2}dt = \frac{T}{2}$$

(2-2) $\sin n\frac{2\pi}{T}t$の項

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sin(n+m)\frac{2\pi}{T}t + \sin(n-m)\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

(i) $n \ne m$なら

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(n+m)\pi-\cos(n+m)\pi}{(n+m)\frac{2\pi}{T}}+\frac{\cos(n-m)\pi-\cos(n-m)\pi}{(n-m)\frac{2\pi}{T}}\right)=0$$

(ii) $n=m$ でも

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\sin 2m\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2m\frac{2\pi}{T}t}{2m\frac{2\pi}{T}}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2m\pi-\cos 2m\pi}{2m\frac{2\pi}{T}}\right)=0$$

すなわち、関数の直交性

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = \begin{cases}1 & (n=m\neq 0)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = 0 \tag{1.5}$$

を用いると、右辺は $\cos m\frac{2\pi}{T}t$ の項だけが非 0 で残り、次のように a_m が求まる

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos m\frac{2\pi}{T}tdt = a_m\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 m\frac{2\pi}{T}tdt = a_m\frac{T}{2}$$

$$\underline{a_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos m\frac{2\pi}{T}tdt} \tag{1.6}$$

(3) b_n ：式(1.3)の両辺に $\sin m\frac{2\pi}{T}t$ をかけて、1 周期 $-\frac{T}{2}\leq t\leq\frac{T}{2}$ にわたって積分

a_n の場合と同様に、次の関数の直交性が成り立つ。

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\frac{2\pi}{T}t\sin m\frac{2\pi}{T}tdt = \begin{cases}1 & (n=m\neq 0)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases} \tag{1.7}$$

したがって、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin m\frac{2\pi}{T}tdt = b_m\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 m\frac{2\pi}{T}tdt = b_m\frac{T}{2}$$

$$\underline{b_m = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin m\frac{2\pi}{T}tdt} \tag{1.8}$$

[まとめ]

$$f(t) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\frac{2\pi}{T}t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\frac{2\pi}{T}t \tag{1.9.a}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{1.9.b}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{1.9.c}$$

1-1-2 フーリエ級数展開の例

(1)全波整流 $f(t)=E\left|\sin\omega t\right|$

全波整流波形の周期 T は $\omega T=\pi$ なる関係がある。

$$a_n=\frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(-E\sin\omega t\right)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\sin\omega t\cos n\frac{2\pi}{T}tdt\right)$$

$$=\frac{4E}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{1}{2}\left(\sin\left(2n+1\right)\omega t-\sin\left(2n-1\right)\omega t\right)dt$$

$$=\frac{2E}{T}\left(-\frac{\cos\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}-1}{\left(2n+1\right)\omega}+\frac{\cos\left(2n-1\right)\frac{\pi}{2}-1}{\left(2n-1\right)\omega}\right)$$

$$=\frac{2E}{T\omega}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{-1}{2n-1}\right)=\frac{4E}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

同様に、

$$b_n=\frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(-E\sin\omega t\right)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\sin\omega t\sin n\frac{2\pi}{T}tdt\right)$$

$$=\frac{2E}{T}\left(\int_{\frac{T}{2}}^{0}\left(\sin\omega t'\right)\sin n\frac{2\pi}{T}t'dt'+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin\omega t\sin n\frac{2\pi}{T}tdt\right)=0$$

したがって、

$$f(t)=\frac{2E}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4E}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\omega t=\frac{2E}{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-4n^2}\cos 2n\omega t\right)$$

(2)半波整流波形

$f(t)=\frac{1}{2}\left(E\left|\sin\omega t\right|+E\sin\omega t\right)$で表すことができるから、

$$f(t)=\frac{E}{\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-4n^2}\cos 2n\omega t\right)+\frac{E}{2}\sin\omega t=\frac{E}{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\sin\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1-4n^2}\cos 2n\omega t\right)$$

(3)矩形波形

$$f(t)=\begin{cases}-E & \left(-\frac{T}{2}\le t<0\right)\\ E & \left(0\le t<\frac{T}{2}\right)\end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(-E\right)\cos n\omega tdt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\cos n\omega tdt\right)=\frac{2E}{T}\left(\int_{\frac{T}{2}}^{0}\cos n\omega tdt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}\cos n\omega tdt\right)=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(-E\right)\sin n\omega tdt+\int_{0}^{\frac{T}{2}}E\sin n\omega tdt\right)=\frac{4E}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin n\omega tdt=\frac{4E}{T}\left(\frac{1-\left(-1\right)^n}{n\omega}\right)$$

すなわち、n が偶数の場合 $b_n = b_{2m} = 0$ 、n が奇数の場合 $b_n = b_{2m-1} = \dfrac{8E}{Tn\omega} = \dfrac{4E}{(2m-1)\pi}$

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)\omega t$$