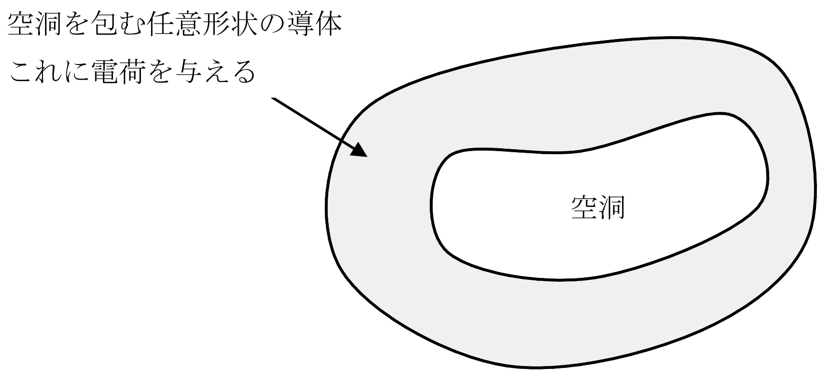
電磁気学Ｉ　演習 第８回 解答

23'．任意形状帯電導体に囲まれた空洞内の静電界

図のように任意形状の導体とそれに囲まれた空洞（電荷は存在しない）がある。今導体に電荷を与えたとするとそれはどのように導体上に分布するであろうか？空洞内に電界は発生するか？導体が球殻となっている場合は対称性により電荷は導体の外側表面に均一に分布し、空洞内に電界は存在しないことがわかる。では導体形状が任意ではどうなるだろうか？この場合も電荷は導体の外側表面に分布し、空洞内には電界が存在しない。このことを、解の一意性とガウスの法則を用いることにより説明せよ。

ヒント：まず、空洞に面している導体の電位分布はどのようになるかを考え、そこから空洞内の電位分布の解を見つける。解の一意性を考慮して空洞内の電位分布を決定し、その電界を求める。その後、適当な閉曲面においてガウスの法則を用い電荷を求める。



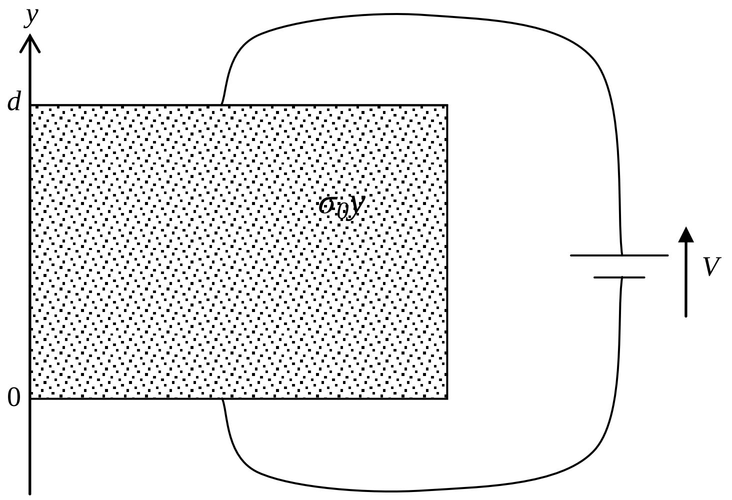
【解答】

・（空洞内の電界の説明）まず、導体中は全て等電位である。もちろん空洞に面している導体表面も全て等電位である。「空洞内で電位$\phi=$一定 」はこの境界条件を満たすラプラス方程式の解である。解の一意性より、「空洞内で電位$\phi=$一定 」以外の解はありえない。これより、空洞内での電界は$\mathbf{E}=-\nabla\phi=0$であることがわかる。

・（電荷分布の説明）導体中を通る閉曲面 S を考えて、ガウスの法則を 適用すると、電界は 0 なので、内部の電荷の総和は 0 である。S 内ではいたるところ、電界は 0 なので、電荷はどこにも存在しない。よって導体に与えられた電荷は全て導体の外側表面に存在している。

■

26''. 図のように 2 枚の平行平板が $y=0, y=d$ に置かれ、x-z 方向に無限に広がっている。平行平板の間の一部 $0 \le y \le d$ に電荷密度 $\sigma_0 y$ の領域がある。平行平板間に電圧 V が与えられているとき、電位(電池の負側を 0 とする)と電界を求めよ。



【解答】

x, z 方向に一様であるので $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} = 0$ だからポアソンの方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} y$$

となる。これより $\phi(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D$（$A$，$B$，$C$，$D$ は定数）の形で表されると予想できる。境界条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6Ay + 2B = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} y$$
$$\phi(0) = D = 0$$
$$\phi(d) = Ad^3 + Bd^2 + Cd + D = V$$

を用い、定数を求め電位を決定する。また、電界は電位の勾配をとれば良い。

$$\phi(y) = \frac{V}{d} y + \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}(yd^2 - y^3)$$

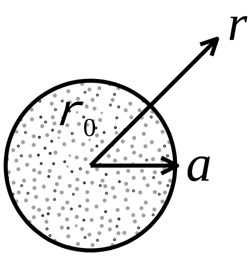
$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left\{ \frac{V}{d} + \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}(d^2 - 3y^2) \right\} \hat{\mathbf{y}}$$

■

27. 図のように電荷密度$\rho\,[C/m^3]$の分布を

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

とする点対称の電荷分布がある。ポアソンの方程式を解いて半径rの球面上での電位と電界を求めよ。無限遠の電位を基準(0)とし、中心の電位は無限大に発散しないことに注意すること。



【解答】

(i) $r \le a$のとき

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}r^2$$

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r^3 + A$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r + \frac{A}{r^2}$$

$$\phi = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{A}{r} + B$$

$r = 0$でϕは有限な値を取るので、 $A = 0$

$$\phi = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + B$$

(ii) $r > a$のとき

$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=0$$

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}=C$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{C}{r^2}$$

$$\phi=-\frac{C}{r}+D$$

$r=\infty$ で $\phi=0$ なので、$D=0$

$$\phi=-\frac{C}{r}$$

【境界条件】

$r=a$ で ϕ および $\partial\phi/\partial r$ は連続なので、

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2+B=-\dfrac{C}{a} & (\phi(a-0)=\phi(a+0)) \\ -\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a=\dfrac{C}{a^2} & (\phi'(a-0)=\phi'(a+0)) \end{cases}$$

よって、

$$C=-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a^3$$

$$B=-\frac{C}{a}+\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a^2+\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}a^2$$

まとめると、

$$\phi=\begin{cases} \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3a^2-r^2\right) & (r\le a) \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r>a) \end{cases}$$

電界は r 成分しか持たない。

$$E_r=\begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r & (r\le a) \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r>a) \end{cases}$$

■