確率と統計(O)
「大数の法則と中心極限定理(第8章)」

- 担当教員:　杉山　将（計算工学専攻）
- 居室:　W8E-406
- 電子メール:　　　sugi@cs.titech.ac.jp
- 授業のウェブサイト:

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

講義計画(シラバス)

- 確率と統計の基礎
- 確率変数，確率分布
- 積率，積率母関数
- 離散型の確率分布の例
- 連続型の確率分布の例
- 確率不等式， 擬似乱数
- 多次元の確率分布
- 大数の法則，中心極限定理
- 統計的推定，仮説検定

独立同一分布

- 同じ分布から独立に n 個の標本

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

を取り出したとき，これらは独立同一分布に従う (independent and identically distributed，略して i.i.d.)という

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$の同時確率密度関数は

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$$

$g(x)$: 各標本の確率密度関数

i.i.d確率変数の標本平均

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: 期待値 μ, 分散 σ^2 のi.i.d.標本
- 標本平均 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の性質（証明は演習）:
  - 期待値は変わらない: $E(\overline{X}_n) = \mu$
  - 分散は $1/n$ になる: $V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

→ 標本平均を取れば値が安定する！

注意: ここでの期待値 E は, n 個全ての確率変数に対する期待値である

$$E[Z] = \int\int\cdots\int Zg(X_1)g(X_2)\cdots g(X_n)dX_1dX_2\cdots dX_n$$

大数の法則

- 大数の法則(law of large numbers):任意の正の定数 ε に対して，$n \to \infty$ のとき

$$P(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) \to 1$$

証明は宿題

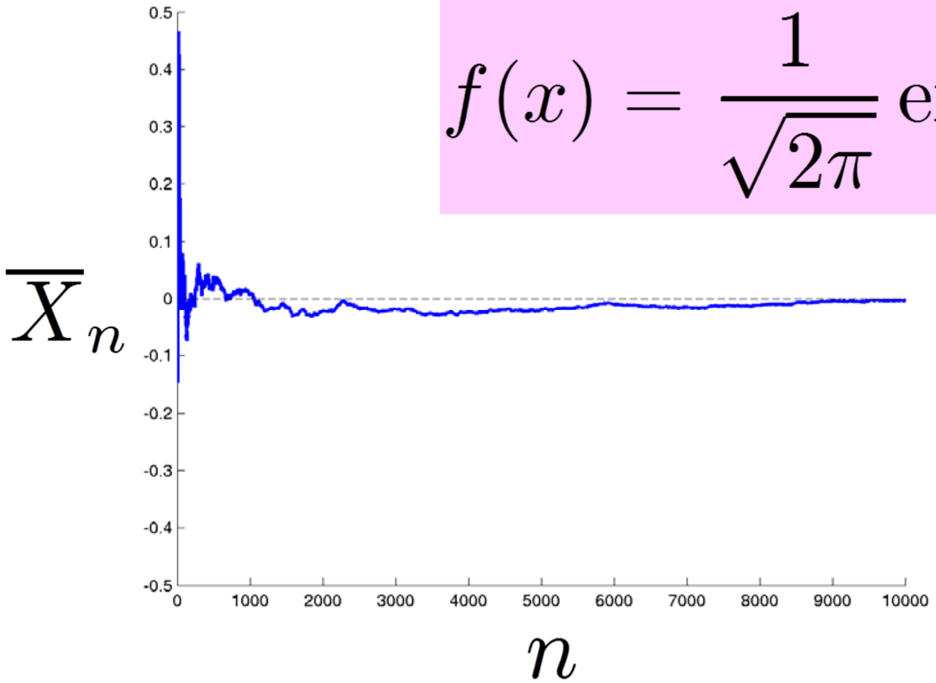
- 確率論の用語ではこれを，$\overline{X}_n$ が μ に確率収束(convergence in probability)するという

- 解釈:標本を十分たくさん取れば，標本平均を真の期待値とみなしても良い

大数の法則の例(1)

- $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ が，期待値0，分散1の標準正規分布に独立に従うとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



標本平均は確かに母平均0に収束していく

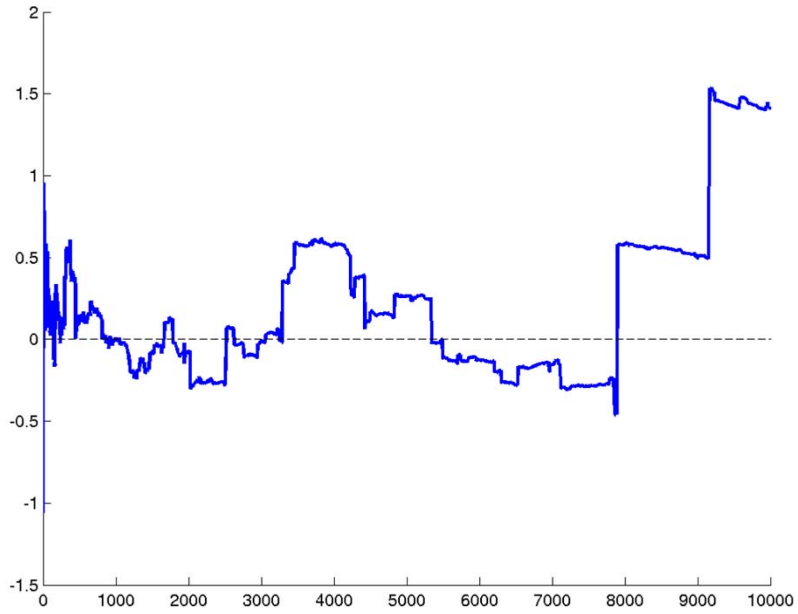
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

大数の法則の例（2）

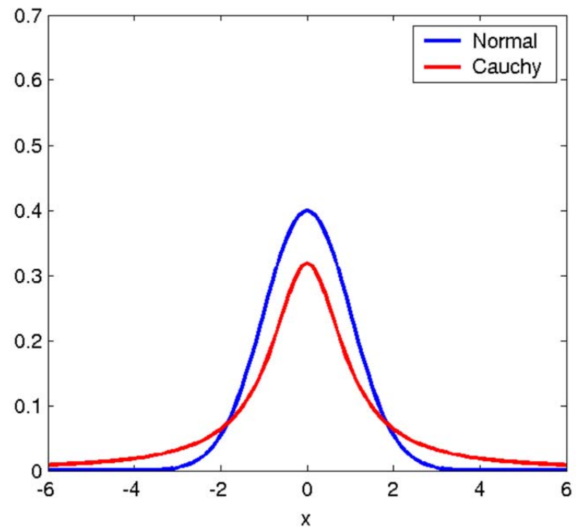
- $\{X_i\}_{i=1}^n$ が“中心”0のコーシー分布に独立に従うとき

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$\overline{X}_n$



n



標本平均は収束しない

⇒ コーシー分布の期待値は存在しない

標本平均の分布

- 大数の法則から，標本平均が真の期待値に近づいていくことがわかった
- 大標本の極限の少し手前では，標本平均はどのように分布しているのであろうか？

中心極限定理

- 標本平均を標準化する:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$E[Z_n] = 0, \quad V[Z_n] = 1$$

- 中心極限定理(central limit theorem):

$n \to \infty$ のとき

$$P(a \leq Z_n \leq b) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

中心極限定理(続き)

- 確率論の用語ではこれを, Z_n が標準正規分布に法則収束(convergence in law), または分布収束(convergence in distribution)するという.

- また, Z_n は漸近的(asymptotically)に標準正規分布に従うともいう.

中心極限定理の解釈

n が大きいとき, もとの分布が何であろうと

標本平均 $\overline{X}_n$ は,

期待値 μ, 分散 σ^2/n の正規分布に大体従う

中心極限定理の証明

- 標準正規分布の積率母関数は $e^{t^2/2}$ なので，次式を示す

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$$

- $Z_n = \dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n - \sqrt{n}\mu}{\sigma} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \mu}{\sigma}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i$$

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

- Y_i は期待値0，分散1なので，積率母関数は

$$M_{Y_i}(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = 1$

中心極限定理の証明(続き)

- Z_nの積率母関数は

$$
\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= \left[M_{Y_i/\sqrt{n}}(t)\right]^n \\
&= \left[M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{\mu_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \cdots\right]^n \\
&= (1+u)^n
\end{aligned}
$$

独立ならば

$$M_{Y_1+Y_2}(t) = M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)$$

一般に

$$M_{aY}(t) = E(e^{taY}) = M_Y(at)$$

$$u = \frac{t^2}{2n} + \frac{\mu_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \cdots$$

- 以下，$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$ の両辺の対数をとり

$$\lim_{n\to\infty}(\log M_{Z_n}(t) - t^2/2) = 0$$

を示す

中心極限定理の証明(続き)

- $n \to \infty$ のとき, $|u| < 1$ なので次のようにテーラー展開できる

$$\log(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 - \cdots$$

- 従って $\log M_{Z_n}(t) - t^2/2 = n\log(1+u) - t^2/2$

$$= n(u - u^2/2 + u^3/3 - \cdots) - t^2/2$$

- $nu = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{\mu_3}{3!}\dfrac{t^3}{n^{1/2}} + \cdots$ より

$$\lim_{n\to\infty} nu = t^2/2$$

- また

$$\lim_{n\to\infty} nu^q = 0 \quad (q \geq 2)$$

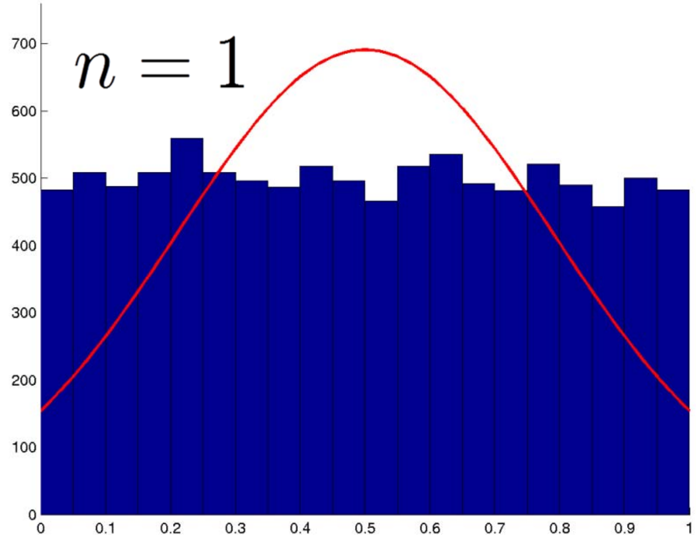
- 従って

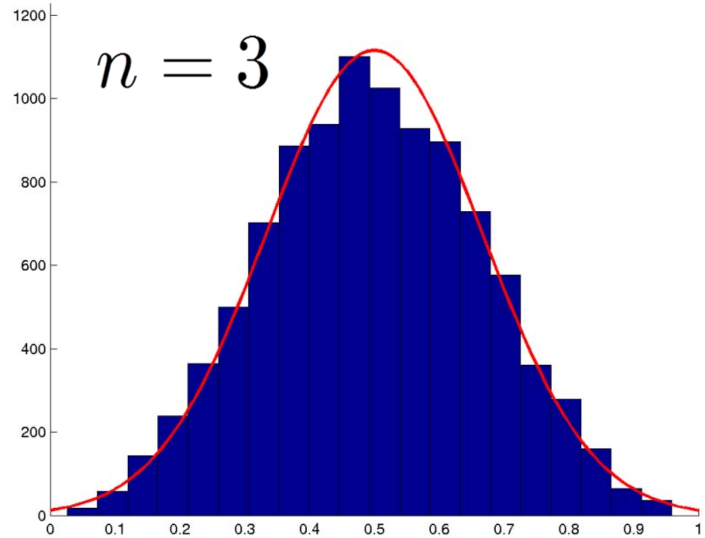
$$\lim_{n\to\infty} (\log M_{Z_n}(t) - t^2/2) = 0$$

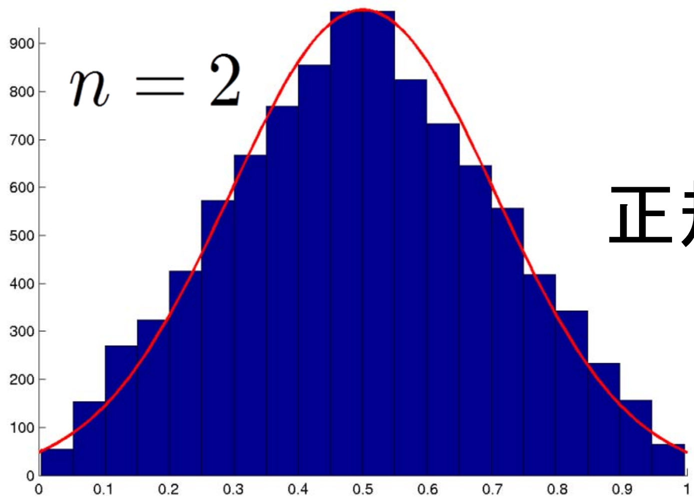
(Q.E.D.)

中心極限定理の例（1）

- （0，1）上の一様分布





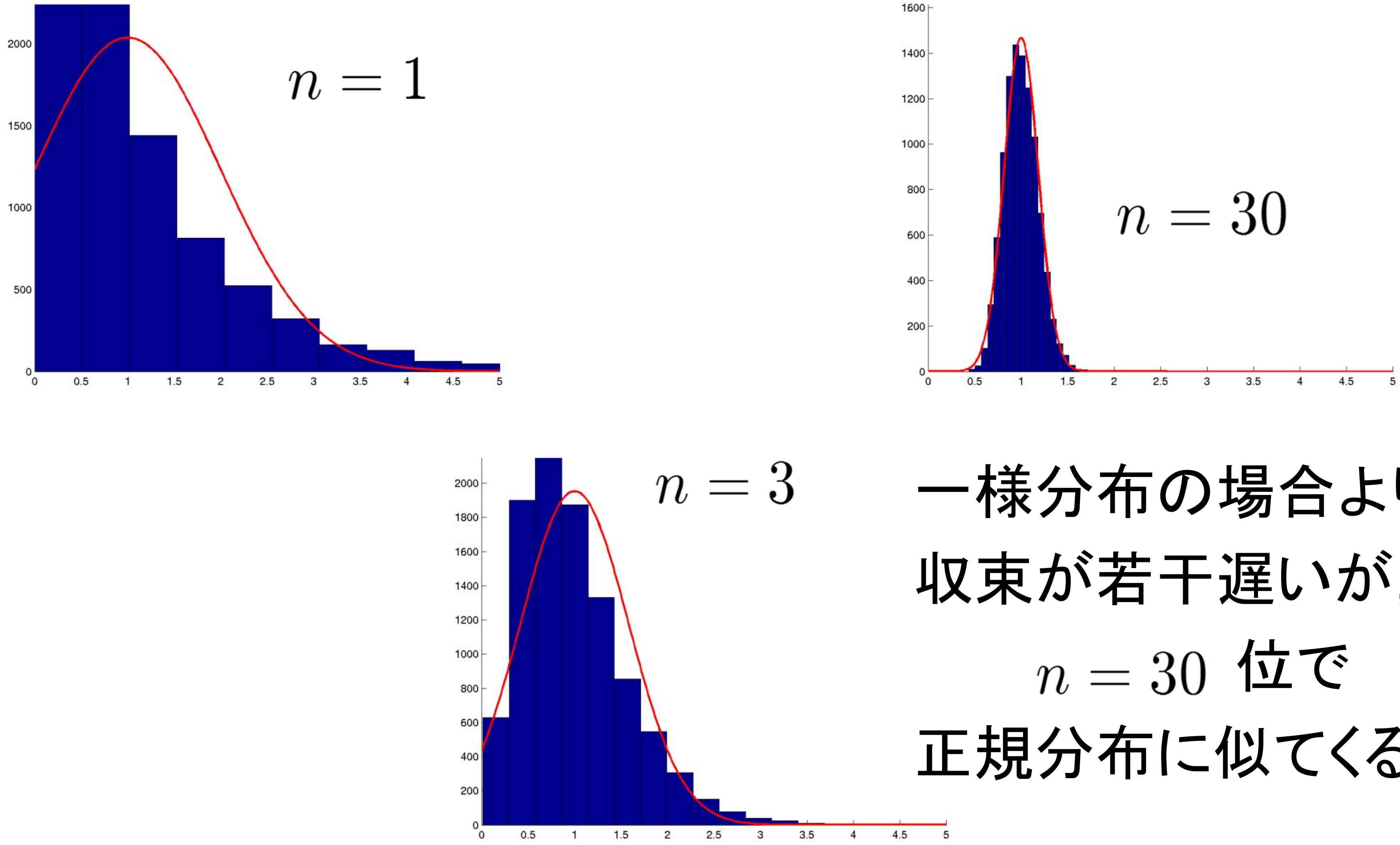


$n = 2, 3$ 位で

正規分布に似てくる

中心極限定理の例(2)

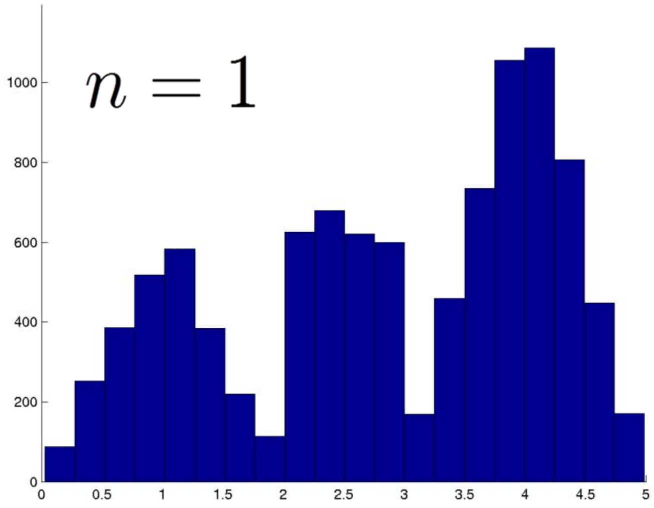
- 指数分布　$f(x) = e^{-x}$

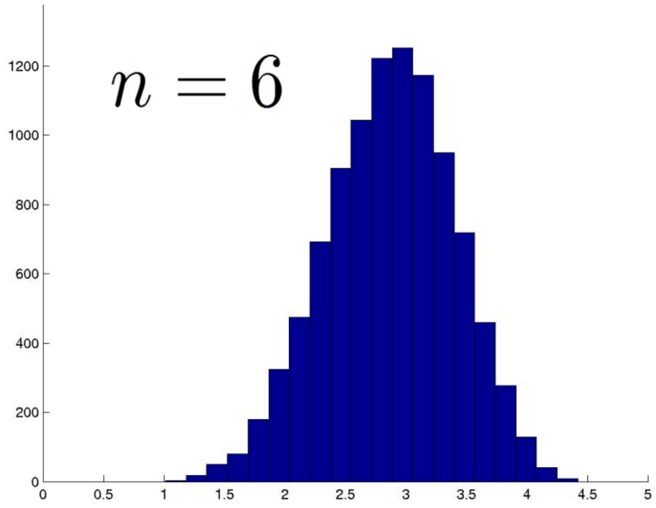


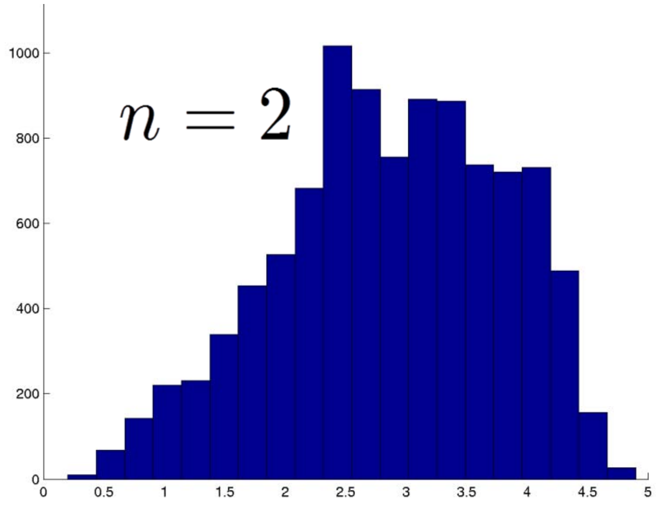
一様分布の場合より
収束が若干遅いが,
$n = 30$ 位で
正規分布に似てくる

中心極限定理の例(3)

- 適当な分布







まとめ

- 独立同一分布
- 大数の法則
- 中心極限定理

宿題

1. 大数の法則を証明せよ.

   ヒント:チェビシェフの不等式を利用する

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

2. Octaveなどを用いて, 一様分布に独立に従う確率変数を生成し, 標本数を増やしていったときの, 標本平均のグラフを作成し, 大数の法則が成り立つことを確認せよ.
   同様に, 標本数を増やしていったときの標本平均の分布ヒストグラム(つまり, n 個の標本を生成し標本平均を求めるという過程を何度も繰り返し, その分布をプロットする)を作成し, 中心極限定理が成り立つことを確認せよ.

宿題(続き)

3. コーシー分布に従う確率変数に対して2と同様の実験を行い，大数の法則，および，中心極限定理が成りたたないことを確認せよ．

   ヒント：標準正規分布に独立に従う確率変数 X, Y の比 X/Y はコーシー分布

   $$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

   に従う

4. 以前の課題で自作した独自の確率分布に従う確率変数に対して，2と同様の実験を行ない，大数の法則，および，中心極限定理が成り立つかどうか確認せよ．