電磁気学Ⅰ 演習 第７回 解答

16’. ２階常微分方程式 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}=0$ を求めよ。ただし、$f(x)$ は $0\le x\le 1$ で定義され、$f(0)=1$, $f(1)=3$ とする。

【解答】

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=0$$

$$\frac{df}{dx}=C_1$$

$$f(x)=C_1 x+C_0$$

$$\begin{cases} f(0)=C_0=1 \quad \Rightarrow \quad C_0=1 \\ f(1)=C_1+C_0=3 \quad \Rightarrow \quad C_1=2 \end{cases}$$

よって、

$$f(x)=2x+1$$

■

20. 原点に置かれた単位点電荷 $\rho(\mathbf{r})=\delta(\mathbf{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ が作る電位を求める。電位 ϕ はポアソンの方程式 $\nabla^2\phi(\mathbf{r})=-\dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ を満たすので、微分方程式 $\nabla^2\phi(x,y,z)=-\dfrac{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}{\varepsilon_0}$ を ϕ について解けばよい。

(1) 球対称性を仮定し、斉次方程式 $\nabla^2\psi(x,y,z)=0$（ラプラスの方程式）の解を求めよ。ただし、ψ は原点からはるか遠方では 0 であるとする。（ヒント：球座標で解くと楽である。また、途中で $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)=r\dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ を考慮し、$\Psi=r\psi$ と置換する）

(2) (1)で求めた解は原点以外において $\nabla^2\psi(x,y,z)=0$ であるが、原点では発散する。ポアソンの方程式に(1)の解を代入して(1)の未知係数を決定せよ。（ヒント：原点を中心とする球内で両辺を体積積分する。左辺は $\nabla^2\psi=\nabla\cdot\nabla\psi$ だからガウスの発散定理を用いて境界の面積分に変換できる）

【解答】

(1)

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}=0$ を考慮し、ラプラシアン $\nabla^2\psi=\nabla\cdot(\nabla\psi)$ を球座標で表現すると、

$\nabla\psi=\hat{\mathbf{r}}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ より、

$$\nabla^2\psi=\nabla\cdot(\nabla\psi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

よって、解くべきラプラスの方程式 $\nabla^2\psi=0$ は

$$\frac{1}{r^2}\underline{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)}=0$$

$$\frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial\psi}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]=0$$

$$\underbrace{2\frac{\partial\psi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}}_{=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)=0$$

ここで、$\Psi=r\psi$ と置くと、

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}=0\ \rightarrow\ \frac{\partial\Psi}{\partial r}=A\ \rightarrow\ \Psi=Ar+B$$ (A,B は r に依存しない任意係数)

$$r\psi=Ar+B$$

$$\psi=A+\frac{B}{r}$$

ここで、条件 $\psi\big|_{r=\infty}=A=0$ より、

$$\psi=\frac{B}{r}$$

【微分方程式解法の別解】

$$2\frac{\partial\psi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=0$$

$$2\psi'+r\psi''=0$$

$$\frac{\psi''}{\psi'}=-\frac{2}{r}$$

$$\log\psi' = -2\log r + C$$

$$\begin{aligned}\log\psi' &= \log r^{-2} + \log B \qquad (C = \log B)\\ &= \log Br^{-2}\end{aligned}$$

$$\psi' = \frac{B}{r^2}$$

$$\psi = -\frac{B}{r} + A$$

(2)

(1)の係数 B を決定する問題である。ポアソンの方程式 $\nabla^2\psi = -\dfrac{\delta}{\varepsilon_0}$ を体積積分して、

$$\iiint_V \nabla^2\psi(x,y,z)dv = -\iiint_V \frac{\delta(x,y,z)}{\varepsilon_0}dv$$

$$R.H.S = -\iiint_V \frac{\delta}{\varepsilon_0}dv = -\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}L.H.S &= \iiint_V \nabla^2\psi dv = \iiint_V \nabla\cdot(\nabla\psi)dv = \oiint_S \nabla\psi\cdot d\mathbf{S}\\ &= \oiint_S \left(-\frac{B}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot(r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\hat{\mathbf{r}})\\ &= -B\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -B\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{=2}\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi} = -4\pi B\end{aligned}$$

よって、

$$-4\pi B = -\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

つまり、ポアソンの方程式 $\nabla^2\psi = -\dfrac{\delta}{\varepsilon_0}$ を満たす関数は

$$\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

である。■

22. z 軸から垂直に r の距離にある点の電位が $be^{-r/a}$ で与えられる空間の電荷密度分布を求めよ。ただし、a、b は定数である。

【解答】

円筒座標でのポアソン方程式は、$\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0$ を考慮して、

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = -\varepsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}(be^{-r/a})\right\} = \varepsilon_0 \frac{b}{a}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(re^{-r/a}\right) = \varepsilon_0 \frac{b}{a}\frac{1}{r}\left(e^{-r/a} - \frac{r}{a}e^{-r/a}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 b}{a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)e^{-r/a}$$

■