事例２－３（ナッシュ均衡が存在しない例）

A ＼ B	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

（ド　，ド×）　→　（ド×，バ　）

→　（バ　，バ×）　→　（バ×，ド　）

↓

×　最適反応にならない

下線の重なるところなし

→　両プレイヤーともに最適反応になる戦略の組なし

混合戦略

			q	1ー q
		B	ドラマ	バラエティ
	A			
p	ドラマ		7　3	4　6
1ー p	バラエティ		5　5	6　4

混合戦略　A　$\mathbf{p} = (p, 1-p)$,　$0 \leq p \leq 1$　(⇔ 純粋戦略)

B　$\mathbf{q} = (q, 1-q)$,　$0 \leq q \leq 1$

期待利得　$E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4pq - 2p - q + 6$

$E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4pq + 2p + q + 4$

ナッシュ均衡の求め方（1／2）

B の $\mathbf{q} = (q, 1-q)$ に対する A の最適反応戦略

$$\max_{\mathbf{p}} E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_p (4pq - 2p - q + 6)$$

$$4pq - 2p - q + 6 = p(4q - 2) - q + 6$$

$$4q - 2 > 0\ (q > 1/2) \quad \rightarrow \quad p = 1$$

$$4q - 2 < 0\ (q < 1/2) \quad \rightarrow \quad p = 0$$

$4q - 2 = 0\ (q = 1/2) \quad \rightarrow$ すべての p

同様に，A の $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ に対する B の最適反応戦略

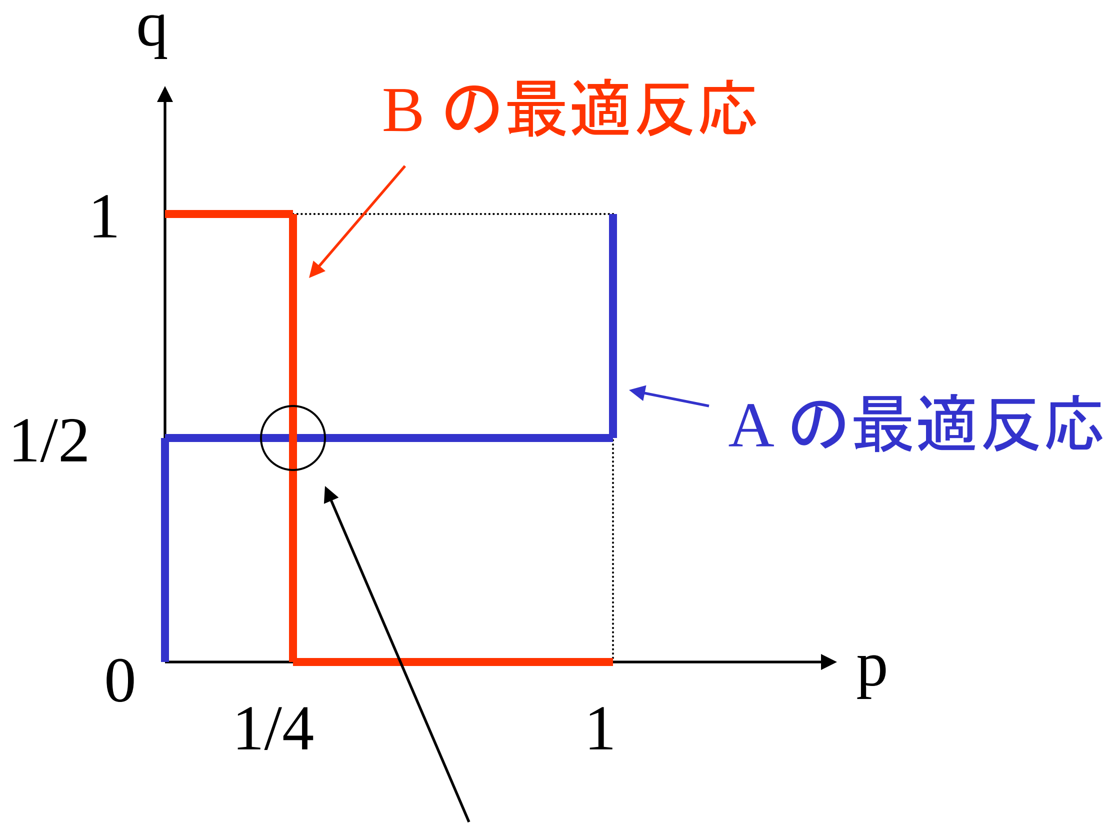
$$-4pq + 2p + q + 4 = q(-4p + 1) + 2p + 4$$

$$-4p + 1 > 0\ (p < 1/4) \quad \rightarrow \quad q = 1$$

$$-4p + 1 < 0\ (p > 1/4) \quad \rightarrow \quad q = 0$$

$-4p + 1 = 0\ (p = 1/4) \quad \rightarrow$ すべての q

ナッシュ均衡の求め方（２／２）



ナッシュ均衡　((1/4, 3/4), (1/2, 1/2))

混合戦略まで考えたときのナッシュ均衡 （注意）

１　各プレイヤーの純粋戦略の数が有限個

→　混合戦略まで考えれば，
ナッシュ均衡は必ず少なくとも１つ存在する。

２　純粋戦略の範囲でのナッシュ均衡

→　混合戦略まで考えてもナッシュ均衡

（（弱）支配戦略の組

→　混合戦略まで考えてもナッシュ均衡）

３　支配戦略の組

→　混合戦略まで考えても唯一つのナッシュ均衡

パレート支配

A＼B	維持	引き下げ
維持	4 4	1 6
引き下げ	6 1	2 2

（維持，維持）は（引き下げ，引き下げ）を<u>パレート支配</u>する

4 ＞ 2，4 ＞ 2

どの戦略の組からもパレート支配されない戦略の組

→ <u>パレート最適，パレート効率的</u>

パレート弱支配

B / A	維持	引き下げ
維持	4, 2	1, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

（維持，維持）は（引き下げ，引下げ）をパレート弱支配する

4 ＞ 2, 4 ＝ 2

どの戦略の組からもパレート弱支配されない戦略の組

→ 強パレート最適，強パレート効率的

マックスミニ戦略

相手が自分にとって最悪の行動をとると仮定
その中で最善の行動をとる

→ 各戦略について自分の最小（ミニ）の利得をとり，
その中で最大（マックス）の利得を与える戦略をとる

→ マックスミニ戦略

事例２－３のマックスミニ戦略

事例２－３

B / A	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	７	３	４	６
バラエティ	５	５	６	４

Ａ ドラマ　min（７，４）＝４,

バラエティ　min（５，６）＝５,　max（４，５）＝５

Ａ のマックスミニ戦略　バラエティ,　マックスミニ値　５

Ｂ ドラマ　min（３，５）＝３,

バラエティ　min（６，４）＝４,　max（３，４）＝４

Ｂ のマックスミニ戦略　バラエティ,　マックスミニ値　４

マックスミニ戦略とナッシュ均衡

事例２－３

B A	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	7	3	4	6
バラエティ	5	5	6	4

マックスミニ戦略の組　（バラエティ，バラエティ）

ナッシュ均衡ではない

Ｂ のバラエティは

A のバラエティに対する最適反応ではない

混合戦略におけるマックスミニ戦略（１／５）

B / A	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	７	３	４	６
バラエティ	５	５	６	４

混合戦略　A　$\mathbf{p} = (p, 1-p), \quad 0 \leq p \leq 1$

B　$\mathbf{q} = (q, 1-q), \quad 0 \leq q \leq 1$

期待利得　$E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4pq - 2p - q + 6$

$E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4pq + 2p + q + 4$

混合戦略におけるマックスミニ戦略（２／５）

Ａ のマックスミニ戦略

期待利得　$E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4pq - 2p - q + 6$

$$\min_{\mathbf{q}} E^A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_q (4pq - 2p - q + 6)$$

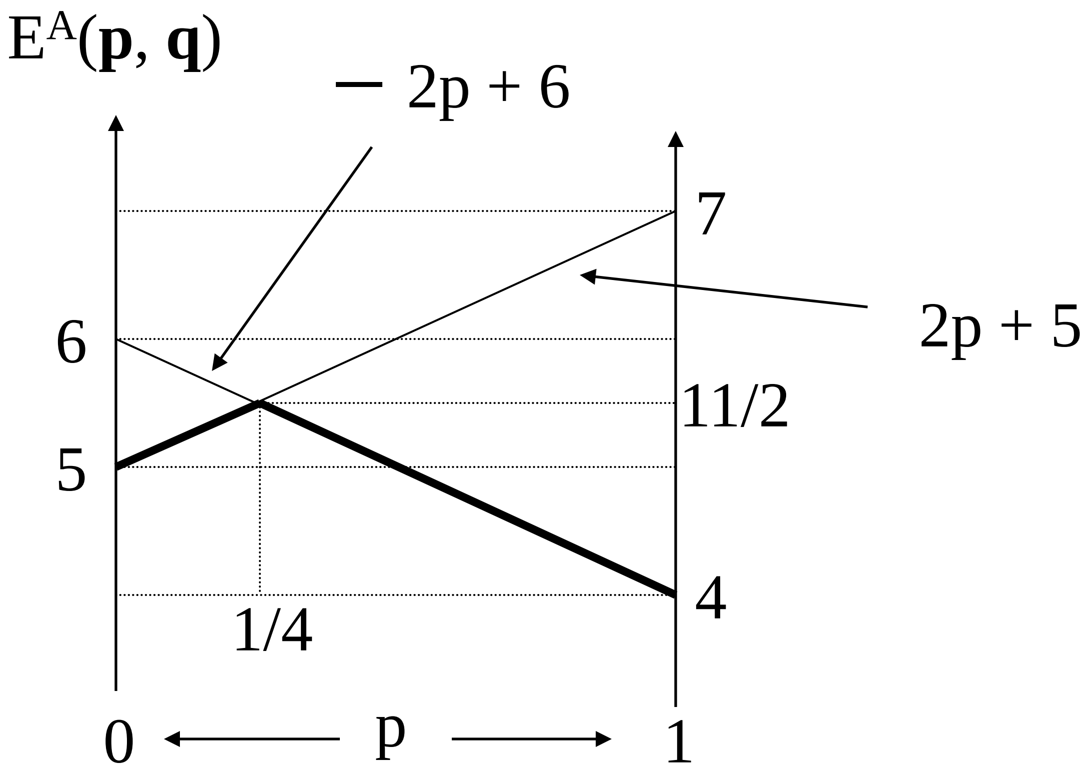
$4pq - 2p - q + 6 = q(4p - 1) - 2p + 6$

$4p - 1 > 0 \ (p > 1/4) \ \rightarrow \ q = 0$　　$-2p + 6$

$4p - 1 < 0 \ (p < 1/4) \ \rightarrow \ q = 1$　　$2p + 5$

$4p - 1 = 0 \ (p = 1/4) \ \rightarrow$ すべての q　　$11/2$

混合戦略におけるマックスミニ戦略 （３／５）



A のマックスミニ戦略　(1/4, 3/4)

マックスミニ値　11/2

混合戦略におけるマックスミニ戦略（４／５）

Ｂのマックスミニ戦略

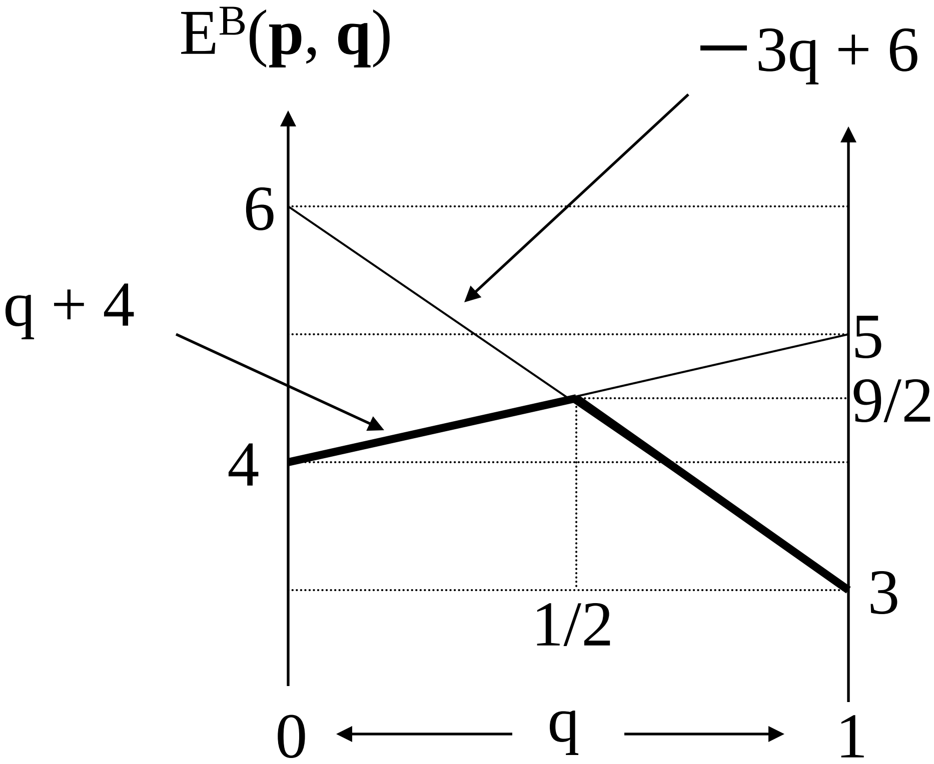
期待利得 $E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4pq + 2p + q + 4$

$$\min_{\mathbf{p}} E^B(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \min_p (-4pq + 2p + q + 4)$$

$$-4pq + 2p + q + 4 = p(-4q + 2) + q + 4$$

$-4q + 2 > 0$	$(q < 1/2)$	$\rightarrow$ $p = 0$	$q + 4$
$-4q + 2 < 0$	$(q > 1/2)$	$\rightarrow$ $p = 1$	$-3q + 6$
$-4q + 2 = 0$	$(q = 1/2)$	$\rightarrow$ すべての p	$9/2$

混合戦略におけるマックスミニ戦略 （5／5）



B のマックスミニ戦略 (1/2, 1/2), マックスミニ値 9/2

マックスミニ戦略の組 ((1/4, 3/4), (1/2, 1/2)) → ナッシュ均衡

定和ゲームとゼロ和ゲーム

事例２－３

B / A	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	７	３	４	６
バラエティ	５	５	６	４

Ａの利得＋Ｂの利得＝１０（一定）→ 定和ゲーム

50%からの増減を考えると

B / A	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	２	－２	－１	１
バラエティ	０	０	１	－１

Ａの利得＋Ｂの利得＝０ → ゼロ和ゲーム

定和ゲームとゼロ和ゲームは数学的に同等

→ どちらで分析してもよい

ゼロ和ゲーム

B	ドラマ		バラエティ	
A				
ドラマ	2	−2	−1	1
バラエティ	0	0	1	−1

一方の利得だけで表現できる（他方は符号が反対）

B	ドラマ	バラエティ
A		
ドラマ	2	−1
バラエティ	0	1

→ （2x2）行列ゲーム

ゼロ和ゲームにおけるマックスミニ戦略

A \ B	ドラマ		バラエティ	
ドラマ	２	－２	－１	１
バラエティ	０	０	１	－１

$E^A(p, q) = 2pq - p(1-q) + (1-p)(1-q) = 4pq-2p-q+1$

$E^B(p, q) = -2pq + p(1-q) - (1-p)(1-q) = -4pq+2p+q-1$

注意:　$\underline{E^B(p, q) = -E^A(p, q)}$

ゼロ和ゲームにおけるマックスミニ戦略

A のマックスミニ戦略

$$\max_p(\min_q(E^A(p, q)))$$

B のマックスミニ戦略

$$\max_q(\min_p(E^B(p, q)))$$
$$= \max_q(\min_p(- E^A(p, q)))$$
$$= \max_q(-\max_p(E^A(p, q)))$$
$$= -\min_q(\max_p(E^A(p, q)))$$

→ B のマックスミニ戦略を

（A の利得に関する）ミニマックス戦略　ともいう

$\min_q(\max_p(E^A(p, q)))$ を

（A の利得に関する）ミニマックス値という

（A の利得に関する）ミニマックス値 ＝ －（B のマックスミニ値）

ミニマックス定理

ミニマックス定理

２人のプレイヤーが有限個の純粋戦略を持つ２人ゼロ和ゲームにおいて，混合戦略まで考えれば，

$$\max_p(\min_q(E^A(p, q)) = \min_q(\max_p(E^A(p, q)))$$

マックスミニ値　＝　ミニマックス値

von Neumann and Morgenstern

２人ゼロ和ゲームにおける　ミニマックス定理

↓

Nash

多人数非ゼロ和ゲームにおけるNash均衡の存在定理

マックスミニ戦略とナッシュ均衡

２人ゼロ和ゲームにおいて，

（１） (p, q) がナッシュ均衡であるとする。このとき，
p, q はプレイヤー A，B のマックスミニ戦略である。

（２） p’, q’ がプレイヤー A，B のマックスミニ戦略であるとする。
このとき，マックスミニ値＝ミニマックス値であれば，
(p’, q’) はナッシュ均衡である。

注意：

（１） ミニマックス定理により，混合戦略まで考えれば，マックスミニ戦略の組はナッシュ均衡になる。

（２） ２人非ゼロ和（非定和）ゲームでは，マックスミニ戦略の組は，ナッシュ均衡にはならない．

利得と効用

男女のジレンマ

B / A	サッカー		映画	
サッカー	２	１	０	０
映画	０	０	１	２

A がサッカー，映画を 1/2 の確率，B がサッカーのときの

A の期待利得　$2 \times 1/2 + 0 \times 1/2 = 1$

A, B　ともに映画のときの

A の利得　1

利得　→　金銭の値ではなく，効用（満足度）

効用の期待値をとることはできるのか？　　できる！

→　フォン・ノイマン－モルゲンシュテルン効用

次回までの課題

◎Reading assignment

ゲーム理論入門　38～68ページ（68ページの練習問題を含む）
演習ゲーム理論　例題2.1，演習問題2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5
　　　　　　　　例題3.2, 3.3, 演習問題3.2
配布資料1「2人戦略形ゲームにおける諸概念の定義」
　　　　2「2人戦略形ゲームにおける諸性質」
　　　　3「マックスミニ戦略と2人ゼロ和ゲーム」

◎レポート（次回の授業時間に提出）

１．事例2－2において混合戦略まで考えたときのナッシュ均衡を求めよ。
２．事例2－2においてプレイヤーA, Bのマックスミニ戦略を求め，その組がナッシュ均衡とならないことを確かめよ。
３．練習問題1の1, 2

＊レポートはA4版用紙を用い，2枚以上の場合には左上1箇所をホッチキス止めすること。OCWにアップしてある表紙を付けること