

標準形ゲーム Normal-Form Game

合理的思考の技術 Lecture 4

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

April 28, 2014

Outline

- 1 標準形ゲーム Normal-Form Game
- 2 支配戦略均衡 Dominant Strategy Equilibrium
- 3 パレート効率性 Pareto efficiency と社会的ジレンマ Social Dilemma

標準形ゲーム Normal-Form Game

不確実性を含む意思決定のプロトタイプを複数の意思決定主体の相互作用状況の表現に自然に拡張したのが標準形ゲーム。

Definition (標準形ゲーム Normal-Form Game)

$\langle N, A, u \rangle$:

- $N = \{1, \dots, n\}$ プレーヤーの集合 a set of players
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$ 行動の組の集合 a set of action profiles
- $u = (u_1, \dots, u_n)$ 利得の組 a payoff profile
ただし、 $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ はプレーヤー $i \in N$ の利得関数

- **ゲーム理論 game theory** では、意思決定主体のことを**プレーヤー player**、効用のことを**利得 payoff** という。
- 行動の組のことを**社会状態 social state** ということもある。

標準形ゲームと同時決定 Simultaneous Move

- 標準形ゲームでは、他のプレイヤーの取る行動を知らずに自分の行動を決めることから、同時手番ゲーム simultaneous-move gameといわれることもある。
- しかし、物理的に厳密に同時である必要は必ずしもない。

Example (物理的に同時に決定するわけではない実例)

待ち合わせ 実際に現場で顔を合わせるまで、厳密には、相手がどこにきているかわからない。

秘密投票など 他の有権者の投票行動は知らないで投票を行うが、全員が同時に投票するわけではない。

2人標準形ゲームの双行列 bimatrix 表現

特に、プレイヤーの数が2人の有限標準形ゲームは、利得**双**行列 payoff **bi**matrix により表現可能。

Bimatrix Representation of Two-Player Games

Let $N = \{r(\text{row}), c(\text{column})\}$.

Label of row 行 $a_r \in A_r$

Label of column 列 $a_c \in A_c$

Value of each cell $u(a_r, a_c) := (u_r(a_r, a_c), u_c(a_r, a_c))$

超有名な二人ゲームの例

一人意思決定で定式化した超有名なゲーム状況を、対称性を考慮して二人ゲームに一般化できる。

Definition (Prisoner's Dilemma)

	Cooperate	Defect
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

Definition (Hawk-Dove)

	Dove	Hawk
Dove	3, 3	1, 4
Hawk	4, 1	0, 0

Games of pure conflict (strictly competitive games)

二人ゲームで、互いの利害が衝突することをコンフリクト conflict という。

Definition (Game of pure conflict (Strictly competitive game))

A two-player normal form game $\langle \{1, 2\}, A, u \rangle$ is a game of pure conflict iff $\forall a, b \in A$,

$$u_1(a) \geq u_1(b) \Leftrightarrow u_2(b) \geq u_2(a)$$

pure conflict の特別な場合として、ゼロ和ゲーム zero-sum game が知られている [4]。

Definition (Zero-sum game)

A two-player normal form game $\langle \{1, 2\}, A, u \rangle$ is a zero-sum game iff $\forall a \in A$,

$$u_1(a) + u_2(a) = 0 \quad (\text{or constant})$$

ゼロ和ゲーム Zero-Sum Game の実例

Example (じゃんけん)

勝ち、あいこ、負けによって得られる利得をそれぞれ $1, 0, -1$ とする。

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	0, 0	1, -1	-1, 1
チョキ	-1, 1	0, 0	1, -1
パー	1, -1	-1, 1	0, 0

標準形ゲームにおける他者

ゲーム理論などの数理経済学では、独自の数学記号を使うことがある。

- ベクトルを普通の文字で書く

$$x := (x_i)_{i \in N} = (x_1, \dots, x_n) \in X = \times_{i \in N} X_i$$

- 他の成分

$$\begin{aligned} x_{-i} &:= (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\in X_{-i} := \times_{j \in N \setminus \{i\}} X_j \end{aligned}$$

意思決定分析とゲーム

標準形ゲーム $\langle N, A, u \rangle$ は、 $i \in N$ の不確実性下の意思決定問題

$$\langle A_i, \Omega_i, u_i \rangle$$

をならべたものとみることもしできる。ただし $\Omega_i := A_{-i}$

他者のプレーの推測と最適応答

リスク下の意思決定では、不確実性の状態の確率分布は**外生的** **exogenous** に与えられたが、標準形ゲーム理論の中心的課題は、他者の行動をゲームの情報から**内生的** **endogenous** に推測することである。

推測 conjecture

他のプレイヤーの行動の組の集合上の確率分布 $\phi^i \in \Delta(A_{-i})$ を**推測** **conjecture** とよぶ。

最適応答 Best Response

Definition (最適応答 best response)

プレイヤー i にとって、推測 $\phi^i \in \Delta(A_{-i})$ に対する最適応答の集合は、

$$B_i(\phi^i) := \arg \max_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \phi^i(a_{-i}) u_i(a_i, a_{-i})$$

特に、他のプレイヤーの行動 $a_{-i} \in A_{-i}$ に対する最適応答の集合は、

$$B_i(a_{-i}) := \arg \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i})$$

Outline

- 1 標準形ゲーム Normal-Form Game
- 2 支配戦略均衡 Dominant Strategy Equilibrium
- 3 パレート効率性 Pareto efficiency と社会的ジレンマ Social Dilemma

支配戦略均衡 Dominant Strategy Equilibrium

すべてのプレイヤーに支配戦略が存在し、全員が支配戦略に従ってプレーしている社会状態のことを支配戦略均衡という。

Definition (Dominant Strategy Equilibrium)

$a^* \in A$ is a dominant strategy equilibrium iff $\forall i \in N, \forall a_{-i} \in A_{-i}$,

$$a_i^* \in B_i(a_{-i})$$

不確実性下の意思決定同様に、常に支配戦略が存在するとは限らない。

支配戦略均衡の例

Example (囚人のジレンマ)

		2	
		C	D
1	C	3, 3	-1, 5
	D	5, -1	1, 1

1 の支配戦略

		2	
		C	D
1	C	3, 3	-1, 5
	D	5, -1	1, 1

2 の支配戦略

(D, D) が支配戦略均衡

n 人ゲームの実例

Example (大気汚染)

- $N = \{1, \dots, n\}$
- $\forall i \in N, A_i = \{C (= \text{汚染対策あり}), D (= \text{汚染対策なし})\}$
- $\forall i \in N, u_i(a) = \begin{cases} p_i - \sum_{j \in N} c_j(a_j) & (a_i = D) \\ - \sum_{j \in N} c_j(a_j) & (a_i = C) \end{cases}$
- $c_i(a_i) = \begin{cases} c_i \geq 0 & (a_i = D) \\ 0 & (a_i = C) \end{cases}$ 全員に累積的に及ぶコスト
- $p_i \geq 0$ i の個人的 private 効用

c_i のように、行為が他者の効用に影響を及ぼすことを外部効果 externality（外部経済効果）とよぶ。

Q. 大気汚染ゲームの支配戦略均衡を求めよ。

支配戦略均衡の例

Example (Second Price Auction)

- 他の買い手の入札額がわからない状態 (sealed bid) で入札を行い、
- 落札者の支払う金額を2番目に高い入札額とする

オークションの方式を second price auction という。

Q. second price auction を標準形ゲームとして定式化して、各プレイヤーにとって自分の評価額を正直に入札することが支配戦略となることを示せ。

制度設計 Institution Design

Example (First price auction vs. Second price auction)

second price auction はデザインされた制度であると考えられる。

Q. first price auction と second price auction を比較検討せよ。特に、second price auction で相対的に得をしてそうなのは、どのプレイヤーか？

制度設計

想定される均衡から逆算してゲームのルールを設計するのが肝要

関連キーワード：mechanism design, implementation theory

Outline

- 1 標準形ゲーム Normal-Form Game
- 2 支配戦略均衡 Dominant Strategy Equilibrium
- 3 パレート効率性 Pareto efficiency と社会的ジレンマ Social Dilemma

社会状態の評価の基礎 – 直積順序 Product Order

社会状態 $a \in A$ を利得の組 $u(a) \in \mathbb{R}^N$ にもとづいて評価しようとする¹と、直積空間上のランキングを導入する必要がある。
 もっとも基本的な u のランキング方式として直積順序（パレート順序 Pareto order²）がある。

Definition (Product order (Pareto order))

For $x, y \in \mathbb{R}^N$:

- $x \geq y :\Leftrightarrow \forall i \in N, x_i \geq y_i$
- $x > y :\Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$
- $x \gg y :\Leftrightarrow \forall i \in N, x_i > y_i$

¹個人が得る効用に基づき社会状態の評価を体系的に扱う分野を厚生経済学 welfare economics という。

²パレート順序 Pareto order は数理経済学用語 [1]。

パレート効率性 Pareto Efficiency

直積順序のような一般化された順序では、一般には最大元 maximum は存在しない。

代わりに、極大元 maximal element について考えることが便利なが多い。

直積順序の極大元はパレート効率的 Pareto efficient であるという。
(パレート最適 Pareto optimal という表現が使われることもある [3])

Definition (Pareto efficiency (Pareto optimality))

$x \in S \subset \mathbb{R}^N$ is

(weakly) Pareto efficient iff $\neg \exists y \in S, y \gg x$

strongly Pareto efficient iff $\neg \exists y \in S, y > x$

社会的ジレンマ Social Dilemma

ゲームの解がパレート非効率的になることを社会的ジレンマという。

Example (囚人のジレンマ)

	C	D
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

$$u(C, C) = (3, 3) > u(D, D) = (1, 1)$$

支配戦略均衡 (D, D) はパレート非効率的

負の外部性と社会的ジレンマ – 共有地の悲劇 the tragedy of the commons

大気汚染ゲームのようなゲームで、外部性のあるコスト（負の外部性）の累積の効果により均衡がパレート非効率になることを**共有地の悲劇 the tragedy of the commons**[2] という。

Example (大気汚染)

- Q. 大気汚染ゲームで支配戦略均衡がパレート非効率になる条件を求めよ。
- Q. 大気汚染ゲームの汚染対策の実例として、 C = 「自動車に乗らない」、 D = 「自動車に乗る」を考えよう。多くの人が自動車に乗っている現状は共有地の悲劇と言えるだろうか？

正の外部性と社会的ジレンマ – 公共財供給とタダ乗り問題 free rider problem

公共財 public good には逆に正の外部性がある。自分はコスト負担せず、他人が供給してくれた公共財をタダで使おうとすることを**タダ乗り** free ride という。みんながタダ乗りしようとするにより、公共財が過少にしか供給されない社会的ジレンマのことをタダ乗り問題 free rider problem という。

Example (Twitter のまとめ)

Togetter のまとめは典型的な公共財である。

- Q. これを公共財供給ゲームとして定式化し、議論せよ。
- Q. なぜ、実際には、自発的にまとめが行われるのだろうか？

References

- [1] M. Carter.
Foundations of Mathematical Economics.
MIT Press, 2001.
- [2] Garrett Hardin.
The tragedy of the commons.
Science, 162(3859):1243–1248, 1968.
- [3] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green.
Microeconomic Theory.
Oxford University Press, New York, 1995.
- [4] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein.
A Course in Game Theory.
MIT Press, Cambridge, 1994.