

不確実性下の意思決定 Decision under Uncertainty

合理的思考の技術 Lecture 2

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

April 14, 2014

Outline

- 1 不確実性下の意思決定 Decisions under Uncertainty
- 2 リスク（確率つき不確実性） Decisions under Risk
- 3 不確実性と世界の状態 States of the World

不確実性下の意思決定の表現

Decisions under Uncertainty

Definition ((Prototype) Decision Problem with Uncertainty)

A decision problem with uncertainty is a structure $\langle A, \Omega, u \rangle$, where:

- A is a set of alternatives 選択肢の集合
- Ω is a state space of uncertainty 不確実性の状態空間
- $u : A \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ is a utility function 効用関数

Matrix Representation 行列表現 of Uncertainty

Label of row 行 alternatives $a \in A$

Label of column 列 uncertainty states $\omega \in \Omega$

Value of each cell (a, ω) $u(a, \omega)$

行列表現の例 I

Example (天気と外出)

$A \setminus \Omega$	晴れ or 曇り fine	雨 rain
外出 out	1	-1
家にいる in	0	0

行列表現の例 II

Example (じゃんけん)

プレイヤー1, 2 による2人じゃんけんを考える。
 勝ち、あいこ、負けによって得られる効用をそれぞれ $1, 0, -1$
 1, 2 の出す手の集合は $A_1 = A_2 = \{ \text{グー, チョキ, パー} \}$
 プレイヤー1 の意思決定問題は、

- $A = A_1$
- $\Omega = A_2$

$A_1 \backslash A_2$	グー	チョキ	パー
グー	0	1	-1
チョキ	-1	0	1
パー	1	-1	0

超有名なゲームの一人意思決定モデルとしての表現

Definition (囚人のジレンマ
Prisoners' Dilemma)

	Cooperate	Defect
C	3	-1
D	5	1

社会規範 norm、協力関係や信頼 trustなどをモデル化する際に使われるゲームモデル。

Definition (チキン Chicken
もしくはタカハト Hawk-Dove)

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

進化ゲーム理論 evolutionary game theory において、特に重要なゲーム。

注意

上記のゲームの定義における効用は序数効用 ordinal utility。

支配 Dominance

意思決定状況によっては、不確実性の状態 ω によらず、ある選択肢 a のほうが別の選択肢 a' より望ましいことがある。

Definition (支配 Dominance)

$a \in A$ dominates $a' \in A$ iff $\forall \omega \in \Omega$,

$$u(a, \omega) \geq u(a', \omega)$$

$a \in A$ is a dominant strategy 支配戦略 iff $\forall a' \in A$, a dominates a' .

支配の実例

Example (Prisoners' Dilemma)

	Cooperate	Defect
C	3	-1
D	5	1

D dominates C

タカハトゲームには、支配戦略は存在しない。

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

Max-Min Strategy, Max-Max Strategy

支配戦略が存在しない場合の意思決定手法の一つとして以下の様な手法が考えられる。

Definition (Max-Min Strategy)

$$\arg \max_{a \in A} \min_{\omega \in \Omega} u(a, \omega)$$

自分の行動 $a \in A$ ごとに最悪の場合を想定し、想定被害 $\min_{\omega \in \Omega} u(a, \omega)$ を最小にする最も悲観的な戦略

Definition (Max-Max Strategy)

$$\arg \max_{a \in A} \max_{\omega \in \Omega} u(a, \omega)$$

$a \in A$ ごとに最高の場合を想定し、想定利幅 $\max_{\omega \in \Omega} u(a, \omega)$ を最大にする最も楽観的な戦略

Max-Min Strategy の実例 – Hawk-Dove

Example (タカハト)

Step 1 – $a \in A$ ごとに最悪の効用の場合を想定する

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

Step 2 – $\min u(a, \omega)$ を最大にする $a \in A$ を求める

	Dove	Hawk
Dove	3	1
Hawk	4	0

Hawk-Dove ゲームでは、max-min 戦略の集合は $\{dove\}$ となる。

Q. 囚人のジレンマゲームや天気の実例で max-min 戦略を求め、その性質を体感してみよう。

Outline

- 1 不確実性下の意思決定 Decisions under Uncertainty
- 2 リスク（確率つき不確実性）Decisions under Risk
- 3 不確実性と世界の状態 States of the World

リスク下の意思決定問題

不確実性の状態の生起確率が与えられている状況をリスク risk とよぶことがある。

Definition ((Prototype) Decision Problem under Risk)

A decision problem under risk is a structure $\langle A, \Omega, p, u \rangle$, where:

- A is a set of alternatives
- Ω is a state space of uncertainty
- $p \in \Delta(\Omega)$ is a probability distribution 確率分布 on Ω
- $u : A \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ is a utility function

実例

Example (天気と外出)

Ω	fine	rain
p	0.7	0.3

$A \setminus \Omega$	fine	rain
out	1	-1
in	0	0

ゲームにおける他のプレイヤーの行動の推測

ゲーム理論では、他のプレイヤーの行動に関する**推測** **conjecture** を確率分布で表現することがあり [2]、この表現が理論的に有用なことがある。

Example (二人ゲームにおけるプレイヤー1 の 2 の行動に関する推測)

$$\phi^1 \in \Delta(A_2)$$

ゲームが与えられた時、理論的に推測を絞ることが、ゲーム理論の最も主要な役割の一つ。

期待効用 Expected Utility

Definition (Expected Utility)

Expected utility of alternative $a \in A$ is

$$Eu(a) := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

リスク下での**期待効用最大化** expected utility maximization

$$\max_{a \in A} Eu(a)$$

は、合理的選択の最も基本的なモデル化の一つ。

特に、リスク下の意思決定状況では、max-min のような他の意思決定基準に比べて尤もらしそうに感じられることを後に議論する。

Example (天気と外出)

$p(\text{fine}) = p \in [0, 1]$ とおく。

$$\begin{aligned} Eu(\text{out}) &= p(\text{fine}) \cdot u(\text{out}, \text{fine}) + p(\text{rain}) \cdot u(\text{out}, \text{rain}) \\ &= p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1 \end{aligned}$$

$$Eu(\text{in}) = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{cases} Eu(\text{in}) \geq Eu(\text{out}) & (p \in [0, 1/2]) \\ Eu(\text{out}) \geq Eu(\text{in}) & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

$$\max_{a \in A} Eu(a) = \begin{cases} Eu(\text{in}) = 0 & (p \in [0, 1/2]) \\ Eu(\text{out}) = 2p - 1 & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

$$\arg \max_{a \in A} Eu(a) = \begin{cases} \{\text{in}\} & (p \in [0, 1/2)) \\ \{\text{in}, \text{out}\} & (p = 1/2) \\ \{\text{out}\} & (p \in (1/2, 1]) \end{cases}$$

情報の価値 Value of Information

不確実性を解消するべく情報をゲットするかどうかの意思決定に使う情報の評価値のもっとも基本的なモデル化として**完全情報の価値の期待値 EVPI** がある。

Definition (Expected Value of Perfect Information (EVPI))

The expected value of obtaining perfect information regarding ω is

$$EVPI = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \max_{a \in A} u(a, \omega) - \max_{a \in A} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

Theorem (Knowledge is Power 知は力なり)

$$(\forall p, u) \quad EVPI \geq 0$$

証明のアイデア) 情報を得た後では、 ω ごとに柔軟に a を調整できるので、得られる効用の期待値は大きくなる。

「知は力なり」の実例

Example (天気と外出)

EVPI の第一項では、状態によらず最適な選択をするので、

$$\begin{aligned} \text{(第一項)} &= p(\text{fine}) \cdot u(\text{out}, \text{fine}) + p(\text{rain}) \cdot u(\text{in}, \text{rain}) \\ &= p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p \end{aligned}$$

$$EVPI = \begin{cases} p - Eu(\text{in}) = p & (p \in [0, 1/2]) \\ p - Eu(\text{out}) = 1 - p & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

よって、確かに $\forall p \in [0, 1], EVPI \geq 0$

感度分析 Sensitivity Analysis

- システムのパラメータを変えて、出力の振る舞いを調べることを感度分析という。
- パラメータを変化させて、**仮想**シナリオ（様々な均衡）の変化を見るという意味で**比較静学** **comparative statics** という表現が用いられることもある。

以下、 u , p などを動かして情報の価値の定性的性質を調べてみよう。

情報の価値がない場合 I – 無差別（無関心）Indifference

全ての状態で評価値が変わらない場合、意思決定主体は不確実性の状態について無関心（効用が無差別）であるという。

Definition (Indifference)

The decision maker is indifferent among the states of uncertainty Ω iff

$$\forall a \in A, \forall \omega, \omega' \in \Omega [u(a, \omega) = u(a, \omega')]$$

cf) 好きの反対は無関心。

Proposition

If the decision maker is indifferent among the states of uncertainty, then EVPI is zero.

Example (天気と外出)

外出時に常に屋内にいる場合。

情報の価値がない場合 II – 支配 Dominance

Proposition

If there exists a dominant strategy $a \in A$, then EVPI is zero.

Q. 天気と外出の事例で、どういう場合に支配が成立するか考えてみよう。

Proposition

If the decision maker is indifferent among the states of the world, then there exists a dominant strategy.

無関心は、支配が成り立つ極端な場合である。

情報の価値が小さい場合

– どれかの状態が実現するかほぼわかっている場合 –

Example (天気と外出)

$$EVPI = \begin{cases} p & (p \in [0, 1/2]) \\ 1 - p & (p \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

から分かる通り、ほぼ fine ($p \approx 1$) もしくはほぼ rain ($p \approx 0$) とわかっているときは、

$$EVPI \approx 0$$

(例 – 砂漠では天気予報の情報の価値はほとんどゼロ。)

Q. 情報の価値 EVPI と情報理論におけるエントロピーの関係について議論せよ。

EVPI に関する注意点

- 完全情報 perfect information とは、100 % の確率、完璧な精度の情報のことである。
例) 100 % 当たる天気予報
- EVPI は情報の価値の事前評価に用いる。
例)
 - 砂漠では降水確率がほとんどゼロであるため、天気予報を見ることの EVPI はほとんどゼロだが、
 - 砂漠で雨が降るといいう情報が得られた場合、その情報を利用して選択を修正できることによる価値の上昇（これを情報の事後的価値とでもよぼう）はむしろかなり大きい。

Outline

- 1 不確実性下の意思決定 Decisions under Uncertainty
- 2 リスク（確率つき不確実性） Decisions under Risk
- 3 不確実性と世界の状態 States of the World

不確実性と状態空間

これまで紹介した不確実性の議論は全て以下の非常に強い前提に依拠する。

Each of the states “resolves all uncertainty” [8].

- 世界の状態 Ω は不確実性を完全に記述する fully describe.
cf) MECE (mutually exclusive and collectively exhaustive), 数学での分割 partition
- それぞれの状態での評価値が完全に与えられている。

数理経済学やゲーム理論、意思決定分析などの合理的選択パラダイムのほとんどの枠組みは上記の仮定を暗黙の前提として理論を展開する。

新たな不確実性のモデル化の試み

- 不確実性 uncertainty とリスク risk を分類した Frank Knight[6] にちなんで、非加法的な確率でモデル化される不確実性のことを **Knightian uncertainty** とよぶことがある。[3]
- 各状態が完全には確定していない状況を **曖昧性 ambiguity** と呼ぶことがある。[1, 7]
- 状態の定義や完全性を確保することが極めて困難な状況のモデルとして抜本的に異なるアプローチからモデル化したものに **事例ベース意思決定 case-based decision** がある。[5, 4]（邦訳あり）

References

- [1] M. Amarante and E. Filiz.
Ambiguous events and maxmin expected utility.
Journal of Economic Theory, 134(1):1–33, 2007.
- [2] Robert J. Aumann and Adam Brandenburger.
Epistemic conditions for nash equilibrium.
Econometrica, 63(5):1161–80, 1995.
- [3] James Dow and Sérgio Ribeiro Da Costa Werlang.
Nash equilibrium under knightian uncertainty: Breaking down backward induction.
Journal of Economic Theory, 64(2):305 – 324, 1994.
- [4] Itzhak Gilboa and David Schmeidler.
Case-based decision theory.
The Quarterly Journal of Economics, 110(3):605–39, August 1995.
- [5] Itzhak Gilboa and David Schmeidler.
A Theory of Case-Based Decisions.
Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [6] Frank H. Knight.
Risk, Uncertainty, and Profit.
Schaffner & Marx, Boston, 1921.
- [7] Massimo Marinacci.
Ambiguous games.
Games and Economic Behavior, 31(2):191 – 219, 2000.
- [8] Leonard J. Savage.
The Foundations of Statistics.
John Wiley & Sons, New York, 1 edition, 1954.