7. CR 回路と LR 回路の合成

RC 回路

考え方は LC 回路と同じである。まず式は第 5 回の駆動点インピーダンスの式からインダクタンスの分を除いた形になるので、

$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{\left|I_1(s)\right|^2}(F+\frac{U}{s})$$

但し $F=\sum_{i=1}^{n_R}R_i\left|I_{Ri}(s)\right|^2, U=\sum_{i=1}^{n_C}\frac{\left|I_{Li}(s)\right|^2}{C_i}$ である。

零点 $-\frac{U}{F}$ は負の実数である。これは、直流では、コンデンサは全て開放になり、抵抗だけが残ると考えても良い。

駆動点アドミタンスは

$Y_{RC}(s)=\frac{1}{\left|V_1(s)\right|^2}(F^*+sU^*)$ と書け、

極 $-\frac{F^*}{U^*}$ は負の実数または 0 である。0 が含まれてよいのは、直流でコンデンサは全て開放になった時に、抵抗に電流が流れない場合、アドミタンスが 0 になるからである。

極と零点の相対関係の為に、σ に対する挙動を調べよう。$\left|I_1(s)\right|^2=1$ で規格化して実部と虚部に分かれて考えると、

$$Z_{RC}(s)=F+\frac{U}{\sigma+j\omega}$$

$$=F+\frac{\sigma U}{\sigma^2+\omega^2}-\frac{j\omega U}{\sigma^2+\omega^2}$$ であり、

$$=R(\sigma+j\omega)+jX(\sigma+j\omega)$$

$$\frac{\partial X}{\partial\omega}=\frac{\omega^2-\sigma^2}{\left(\sigma^2+\omega^2\right)^2}U-\frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}\frac{\partial U}{\partial\omega}$$ で、

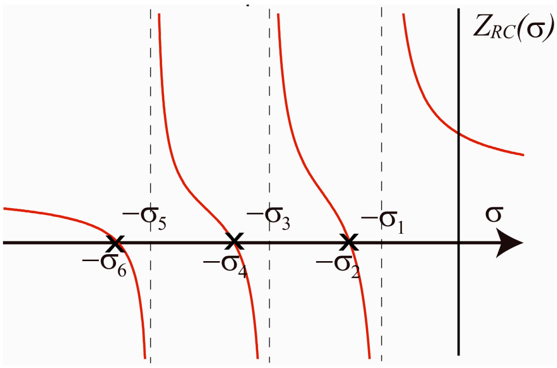
$\lim_{\omega\to 0}\frac{\partial X}{\partial\omega}=-\frac{U}{\sigma^2}<0$ であるから、コーシーリーマンの関係により $\left.\frac{\partial R}{\partial\sigma}\right|_{\omega=0}<0$ であり

$R_{RC}(\sigma)$ の傾きは常に負である。

さらに直流である $s=0$ で、開放またはある抵抗値をとることを考慮すると、実軸上で原点に近いのは極（原点である場合も含む）で、極と零点は交互に並ぶので、

$$Z_{RC}(s)=Z_0\frac{(s+\sigma_2)(s+\sigma_4)\cdots(s+\sigma_{2n})}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_3)\cdots(s+\sigma_{2m-1})}$$

となる。ただし、$m=n$ または $m=n+1$ である。$m=n$ の場合の $Z_{RC}(\sigma)$ を図示すると次のようになる。σ が正負の無限大のときに Z_0 に収束する。



$m=n+1$ の場合は極の方が多いので σ が正負の無限大のときには 0 に収束する。

LC 回路の時とは違い、軸は s の実部であることに注意しよう。

ここで、この関数を実現するためには、やはり部分分数分解または連分数分解でおこなえばよい。

部分分数分解なら

$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{C_0 s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_{2i}s+\frac{1}{R_{2i}}}+R_\infty$$

（フォスターの直列回路になる）や

$$Y_{RC}(s)=C_\infty s+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_{2i}+\frac{1}{C_{2i}s}}+\frac{1}{R_0}$$

（フォスターの並列回路になる）の形にする。

ここで、添え字の 0 や∞がついた素子は、そのまま直列または並列に入る。そこで、直列回路に抵抗があれば、周波数が∞になった時に現れるのは抵抗であることから R_∞ が、コンデンサがあれば、周波数が 0 になった時に開放を決定することから C_0 が、一方、並列回路に抵抗があれば、直流になった時に現れるのは抵抗であることから R_0 が、コンデンサがあれば、周波数が∞になった時に短絡を決定することから C_∞ が、それぞれ添え字が決まり、かつ、この係数を決定するときにはその添え字の条件に収束させる。

連分数分解なら

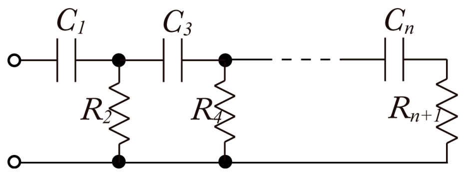
$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{C_1 s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{R_2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{C_3 s}+\cdots}}$$

または

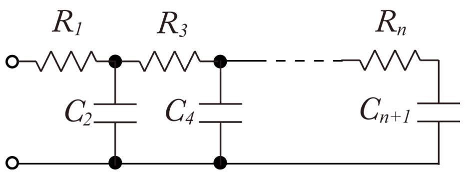
$$Z_{RC}(s)=R_1+\cfrac{1}{C_2 s+\cfrac{1}{R_3+\cdots}}$$

にする。

$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{C_1 s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{R_2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{C_3 s}+\cdots}}$$ なら下図の様になる。（最初のコンデンサがあるか、最後に抵抗が入るかは回路による）



$$Z_{RC}(s)=R_1+\cfrac{1}{C_2 s+\cfrac{1}{R_3+\cdots}}$$ ならば、



の様になる。（最初の抵抗があるか、最後にコンデンサが入るかは回路による）

ここで、実際に $Z_{RC}(s)=\dfrac{s^2+2s+1/2}{s(s+1)}$ を回路にしてみよう。
まず、インピーダンスのまま部分分数分解をすると、$Z_{RC}(s)=\dfrac{C_0}{s}+\dfrac{C_1}{(s+1)}+C_\infty$ の形になるが、

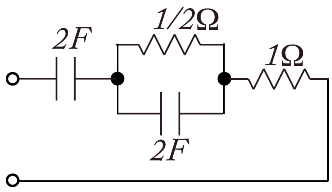
$$C_0=sZ_{RC}(s)\big|_{s=0}=1/2$$

$$C_1=(s+1)Z_{RC}(s)\big|_{s=-1}=1/2$$

$$C_\infty=Z_{RC}(s)\big|_{s=\infty}=1$$

なので

$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{C_0 s}+\sum_{i=1}^{n}\cfrac{1}{C_{2i}s+\cfrac{1}{R_{2i}}}+R_\infty$$ の形にすると、$Z_{RC}(s)=\dfrac{1}{2s}+\dfrac{1}{2s+2}+1$ であり、



となる。

次に、アドミタンスにしたときの部分分数分

$$Y_{RC}(s)=C_\infty s+\sum_{i=1}^{n}\cfrac{1}{R_{2i}+\cfrac{1}{C_{2i}s}}+\frac{1}{R_0}$$

解だが、

$$=C_\infty s+\sum_{i=1}^{n}\cfrac{s}{sR_{2i}+\cfrac{1}{C_{2i}}}+\frac{1}{R_0}$$

という形で部分分数分解をする。

$$Y_{RC}(s)=\frac{s(s+1)}{(s+\frac{2+\sqrt{2}}{2})(s+\frac{2-\sqrt{2}}{2})}$$ の形

$$=sC_\infty+\frac{sC_1}{s+\frac{2+\sqrt{2}}{2}}+\frac{sC_2}{s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}}+C_0$$

にしたい。

$$C_\infty=\frac{Z_{RC}(s)}{s}\bigg|_{s=\infty}=0$$

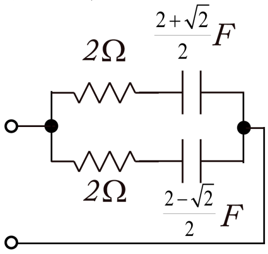
$$C_2=\frac{s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{s}Y_{RC}(s)\bigg|_{s=-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$C_0=Y_{RC}(s)\big|_{s=0}=0$$

なので

$$Y_{RC}(s)=\frac{s}{2s+2+\sqrt{2}}+\frac{s}{2s+2-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{s}{2s+\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}}+\frac{s}{2s+\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}}$$
の形にすると、



となる。
一方、連分数分解なら

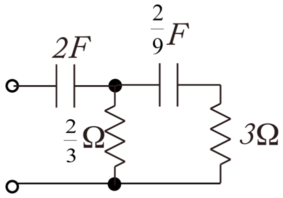
$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{C_1 s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{R_2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{C_3 s}+\cdots}}$$

の形にするには、まず $s=0$ の極をとりだして $\frac{1}{C_1 s}$ がでる。

$$s\,Z_{RC}(s)\Big|_{s=0}=\frac{s^2+2s+1/2}{s+1}\Bigg|_{s=\infty}=\frac{1}{2}$$ なので、

$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{2s}+\frac{s^2+2s+1/2-(s+1)/2}{s(s+1)}$$
$$=\frac{1}{2s}+\cfrac{1}{\cfrac{s+1}{s+3/2}}=\frac{1}{2s}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{3}+\cfrac{s+1-2s/3-1}{s+3/2}}$$
$$=\frac{1}{2s}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{3}+\cfrac{s/3}{s+3/2}}=\frac{1}{2s}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{3}+\cfrac{1}{\cfrac{9}{2s}+3}}$$
$$=\frac{1}{2s}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{3}+\cfrac{1}{\cfrac{9}{2s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3}}}}$$

となり、回路は、



となる。
また、

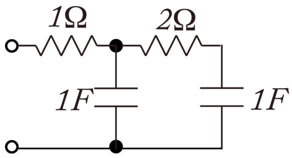
$$Z_{RC}(s)=R_1+\cfrac{1}{C_2 s+\cfrac{1}{R_3+\cdots}}$$

の形にするには、まず $s=\infty$ の極をとりだして R_1 がでる。

$Z_{RC}(s)\Big|_{s=\infty}=1$ なので、

$$Z_{RC}(s)=1+\frac{s^2+2s+1/2-s^2-s}{s^2+s}$$
$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{s^2+s}{s+1/2}}=1+\cfrac{1}{s+\cfrac{s^2+s-s^2-s/2}{s+1/2}}$$ と
$$=1+\cfrac{1}{s+\cfrac{s/2}{s+1/2}}=1+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{2+1/s}}$$

なり、回路は、



となる。

<u>*LR* 回路</u>

考え方は同じである。式は前回の駆動点インピーダンスの式からキャパシタンス分を除いた形になるので、

$$Z_{LR}(s)=\frac{1}{\left|I_1(s)\right|^2}(F+sT)$$

但し $F=\sum_{i=1}^{n_R}R_i\left|I_{Ri}(s)\right|^2, T=\sum_{i=1}^{n_L}L_i\left|I_{Li}(s)\right|^2$ である。

そこで、零点は $-\frac{F}{T}$ であり、0 を含む負の実数である。これは、直流でインダクタが全て短絡になった時に、インダクタだけで短絡されれば 0 になるからである。
駆動点アドミタンスは

$$Y_{RC}(s)=\frac{1}{\left|V_1(s)\right|^2}(F^*+\frac{T^*}{s})$$ と書け、

極 $-\dfrac{T^*}{F^*}$ は負の実数であり、単極である。直流でインダクタが全て短絡になった時には、0を含む抵抗値が必ず残るので $s=0$ では極を持てないと言っても良い。

　極と零点の相対関係の為の σ に対する挙動は、$\left|I_1(s)\right|^2=1$ で規格化して実部と虚部に分かれて考えると、

$$Z_{LR}(s)=F+(\sigma+j\omega)T$$

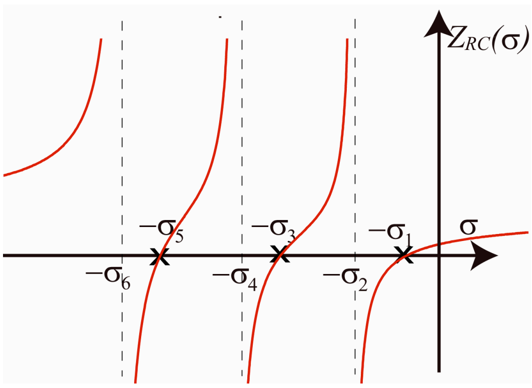
$$=R(\sigma+j\omega)+jX(\sigma+j\omega)$$

、$\dfrac{\partial X}{\partial \omega}=T+\omega\dfrac{\partial T}{\partial \omega}$ で、$\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\partial X}{\partial \omega}=T>0$。コーシーリーマンの関係から、$\left.\dfrac{\partial R}{\partial \sigma}\right|_{\omega=0}>0$ であり $R_{RC}(\sigma)$ の傾きは常に正である。

　そこで、極と零点は交互に並び、原点に近いのは零点(原点である場合も含む)。分母と分子の次数差は同じか、分子が一次高い。従って

$$Z_{LR}(s)=Z_0\frac{(s+\sigma_1)(s+\sigma_3)\cdots(s+\sigma_{2m-1})}{(s+\sigma_2)(s+\sigma_4)\cdots(s+\sigma_{2n})}$$

となる。ただし、$m=n$ または $m=n+1$ である。$m=n$ での $Z_{RC}(\sigma)$ を図示すると次のようになる。



　$s\to\pm\infty$ で $Z_{LR}(s)\to Z_0$ と定数になる。

　$m=n+1$ では、$s\to\infty$ で $Z_{LR}(s)\to\infty$ に、$s\to-\infty$ で $Z_{LR}(s)\to-\infty$ になる。ただし、たかだか一次なので、漸近線は直線になる。

ここで、この関数を実現するためには、やはり部分分数分解または連分数分解でおこなえばよい。

部分分数分解なら

$$Z_{LR}(s)=R_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\dfrac{1}{R_{2i}}+\dfrac{1}{L_{2i}s}}+L_\infty s$$

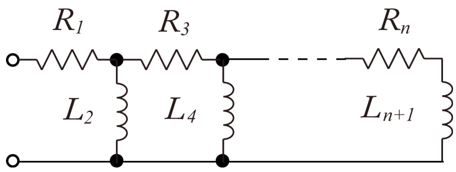
(フォスターの直列回路になる)や

$$Y_{LR}(s)=\frac{1}{L_0 s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_{2i}s+R_{2i}}+\frac{1}{R_\infty}$$

(フォスターの並列回路になる)の形にする。

連分数分解では、

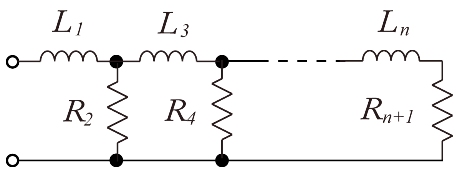
$Z_{LR}(s)=R_1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{L_2 s}+\cfrac{1}{R_3+\cdots}}$ という形にすれば、



という形(最初の抵抗があるか、最後にインダクタが入るかは回路による)に

$$Z_{LR}(s)=L_1 s+\cfrac{1}{R_2+\cfrac{1}{L_3 s+\cdots}}$$

というような形ならば、



という形(最初のインダクタがあるか、最後に抵抗が入るかは回路による)にすればよい。

なお、連分数分解は $s=0$ または $s\to\infty$ のインピーダンスとアドミタンスの極を交互に取り出して行くプロセスであり、完全なはしご型にならない可能性があるが、回路実現のプロセスとしては、別に二種類の素子のみである必要は無い。そこで、LCR の 3 種類が混ざった場合でも、連分数分解による回路合成で実現しうる。