電磁気学Ⅰ　演習 第１３回 解答

48. 図に示すように、半径aの導体球 A と内半径d、外半径eの同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径b、外半径cの導体球殻 B が挿入されている。導体 A,B 間は誘電率ε_1の誘電体で満たされており、導体 B,C の間は誘電率ε_2の誘電体で満たされている。さらに導体 A,C は接地されている。今導体 B に電荷量 Q を与えた。
（演習 12 回の続き）

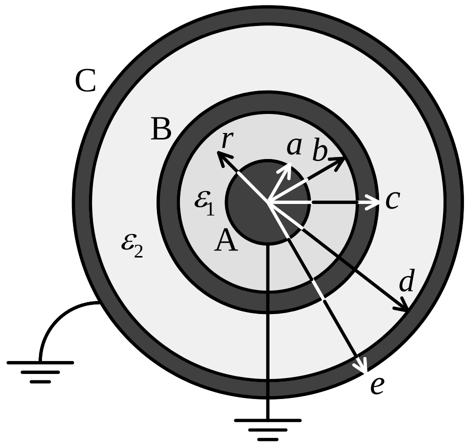
~~(1) 球の中心から$r = a, b, c, d, e$における真電荷量、分極電荷量を符号も含めて求めよ。~~

~~(2) 導体 B と導体 AC 間の静電容量を求めよ。~~

(3) 系に蓄えられている静電エネルギーを求めよ。ただし静電容量を用いる方法、エネルギー密度を空間積分する方法の二通りの方法で求め、両者が等しくなることを確認せよ。エネルギー密度は A 領域と B 領域で異なるので、それぞれ分離して求める。演習 12 回の結果を参照すること。

(4) 仮想変位の原理から、導体Cの内側$r = d$の境界が受ける力を向きも含め求めよ。ヒント：電源は無いので、与えられた Q は一定として、静電エネルギーをdで微分する。符号に注意（マイナスが付く）。

(5) 同様に、導体 B の外側$r = c$の境界が受ける力を向きも含め求めよ。



【解答】

(3) 系に蓄えられる静電エネルギーは、

[電界が蓄えるエネルギー]

$$W=\iiint_V \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv=\int_a^b \frac{1}{2}\frac{{Q_a}^2}{16\pi^2\varepsilon_1 r^4}4\pi r^2 dr+\int_c^d \frac{1}{2}\frac{(Q_a+Q_b+Q_c)^2}{16\pi^2\varepsilon_2 r^4}4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{{Q_a}^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{{Q_c}^2}{8\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\varepsilon_1\left(ab(d-c)\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\varepsilon_2\left(cd(b-a)\right)^2\right\}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2\left\{(b-a)\varepsilon_1 ab(d-c)^2+(d-c)\varepsilon_2 cd(b-a)^2\right\}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2\left\{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)\right\}(b-a)(d-c)$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{(b-a)(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}$$

[コンデンサが蓄えるエネルギー]

$$W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{8\pi\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}$$

(4)

境界に働く力は、r 方向を力の正の向きとすると、仮想変位の原理から、

$$F=-\left.\frac{\partial W}{\partial d}\right|_{Q=\text{一定}}$$

$$=-\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial d}\left\{\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}\right\}=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\varepsilon_2\frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2}\right)$$

$$=-\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\varepsilon_2}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\frac{c}{d-c}\right)^2$$

【別解(V=一定で計算しても結果は同じ)】

$$F=\left.\frac{\partial W}{\partial d}\right|_{V=\text{一定}}=\left.\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{1}{2}CV^2\right)\right|_{V=\text{一定}}=\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d}$$

$$=\frac{V^2}{2}\frac{\partial}{\partial d}\left\{4\pi\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)\right\}=2\pi\varepsilon_2V^2\frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2}$$

$$=2\pi\varepsilon_2\left\{\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}}\right\}^2\frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2}$$

$$=-\frac{Q}{8\pi}\frac{\varepsilon_2}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\frac{c}{d-c}\right)^2$$

$F<0$ なので収縮しようとする。

(5)

$$F=-\left.\frac{\partial W}{\partial c}\right|_{Q=\text{一定}}$$

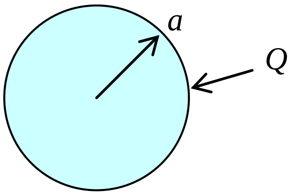
$$=-\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}\right\}=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\varepsilon_2\frac{d(d-c)-cd(-1)}{(d-c)^2}\right)$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\varepsilon_2}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\frac{d}{d-c}\right)^2$$

$F>0$ なので膨張しようとする。

■

54’．半径 a の球状の水滴がある。この水滴に Q [C]の電荷を与えたとする。水滴は導体と見なせるとすると、水滴の表面が受ける力を向きも含めて求めよ。
ヒント：孤立導体球の静電容量を計算し（教科書 90 頁)、次に静電エネルギーを求め、仮想変位の原理を a において使う。



【解答】
孤立導体球の静電容量は

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

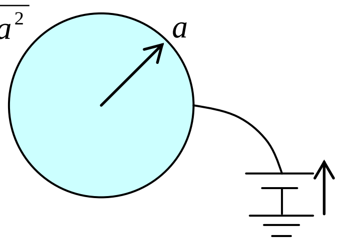
仮想変位の原理より、表面全体が受ける力は、

$$F = -\frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{Q^2}{2(4\pi\varepsilon_0 a)^2}4\pi\varepsilon_0 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$$

よって、表面は半径方向に伸びる力を受けている。■

<u>電圧が一定の場合は？</u>

$$F = \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{V^2}{2}4\pi\varepsilon_0 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$$



$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$