

経済学分析入門 第4回 マッチング問題(1)

4月28日(月)

河崎 亮

(社会理工学研究科 社会工学専攻)

今日のセッティング

- カップリングパーティーの主催者
- 男性4人, 女性4人
- 異性に対する好みは人それぞれ.

Q: 主催者からの立場から見て,
男女ペアをどのように形成すればよいか？

登場人物



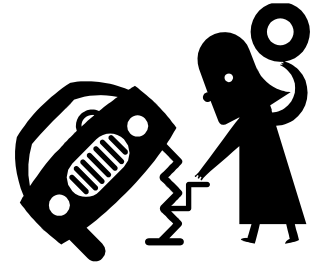
A



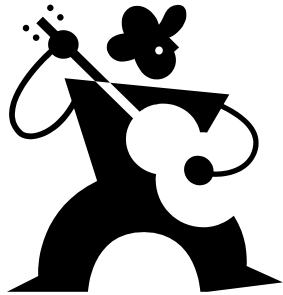
B



W



X



C



D



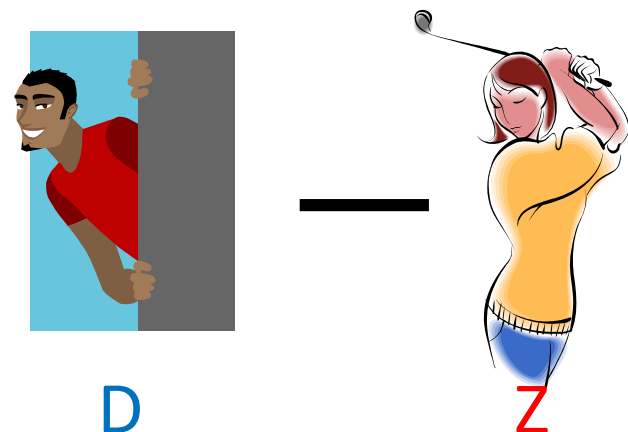
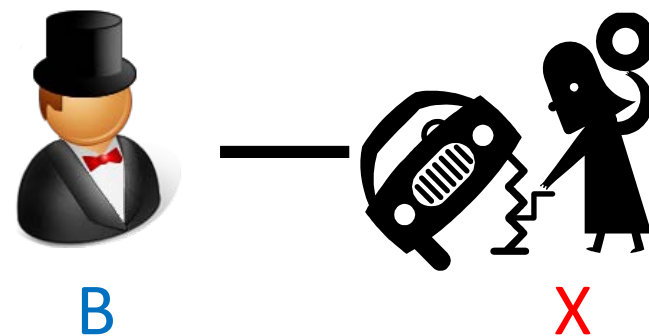
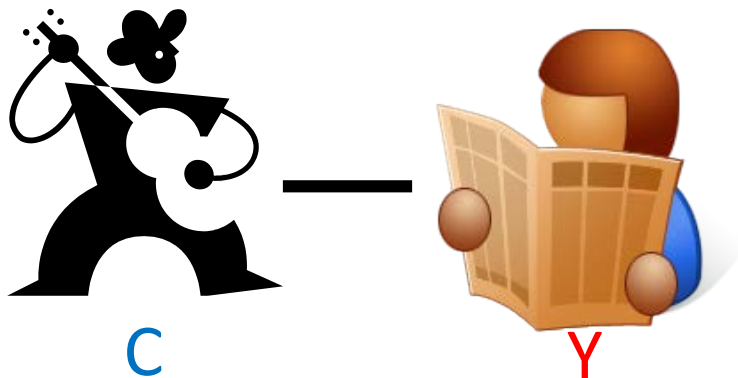
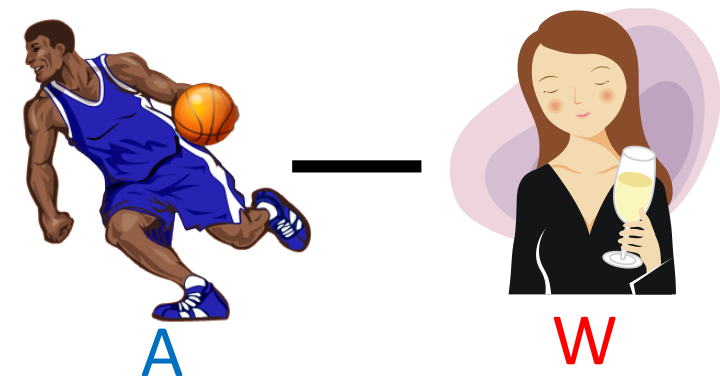
Y



Z

男女のペア作り(マッチング)

- 先の男女計8名で男女4ペアをどう作るか？ → どうマッチするか？
- マッチングの一例：



選好の調査票

- 人々の好み(選好)も考慮する必要がある. → 調査
- 各人に以下の紙を配り記入してもらう.

異性の名前を一番好きな人から順番に書いてください:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

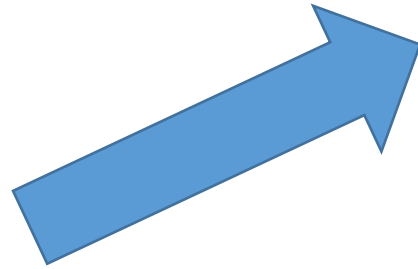
例



A

Aのリスト:

1. W
2. Z
3. Y
4. X



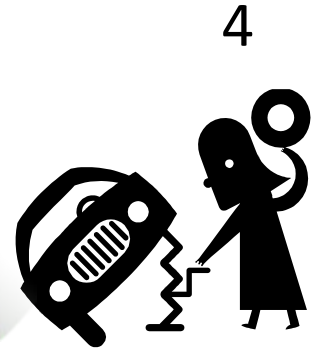
W



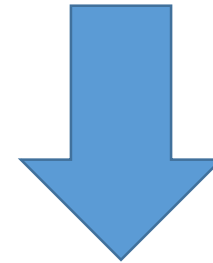
Z



Y



X



表記: $W > Z > Y > X$

全員の好み

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $Y > W > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $Y > W > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $W > Y > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

ペアの決め方1 – 「ルール1」

1. 男性にとって1番好ましい人にプロポーズする. 女性はプロポーズしてきた男性の中から1番好ましい人を選びマッチする. 選ばなかった他の男性を振る.

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

ペアの決め方 – 「ルール1」

1. 男性にとって1番好ましい人にプロポーズする. 女性はプロポーズしてきた男性の中から1番好ましい人を選びマッチする. 選ばなかった他の男性を振る.

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

この時点でAとWの間のペアおよびCとYの間のペアが確定する.

ペアの決め方 – 「ルール1」

2. マッチしていない男性にとって2番好ましい人にプロポーズする。ただし、もうすでにマッチが確定している女性にはプロポーズできない。

女性はプロポーズしてきた男性の中から1番好ましい人を選びマッチする。選ばなかった他の男性を振る。

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $Y > \underline{W} > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $Y > W > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $\underline{W} > \underline{Y} > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

BはWへプロポーズできない。同様にDはYにプロポーズできない。

ペアの決め方 – 「ルール1」

3. マッチしていない男性にとって3番好ましい人にプロポーズする. ただし, もうすでにマッチが確定している女性にはプロポーズできない.

女性はプロポーズしてきた男性の中から1番好ましい人を選びマッチする. 選ばなかった他の男性を振る.

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $Y > W > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $Y > W > X > Z$

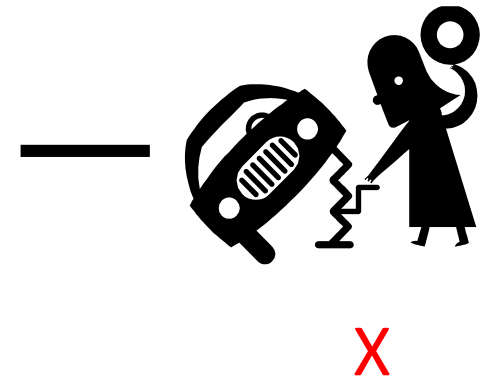
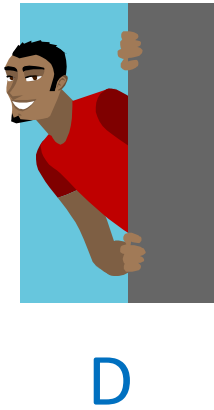
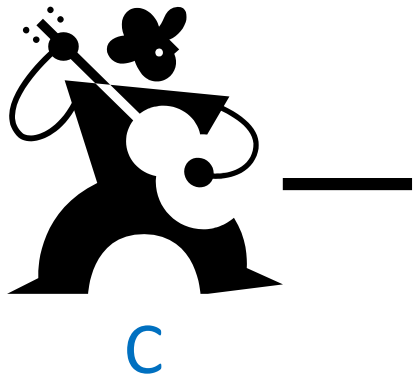
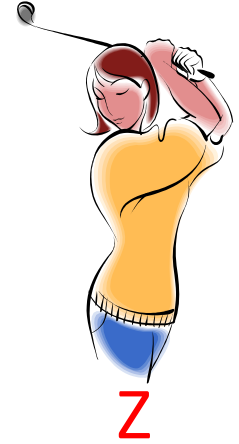
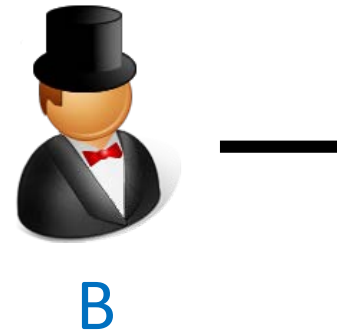
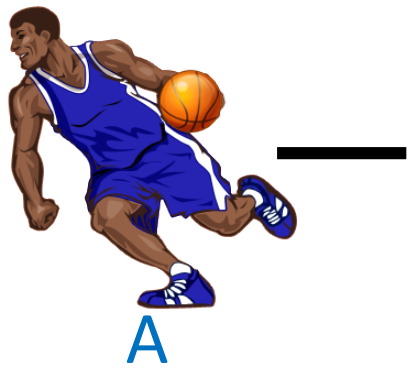
Y: $A > D > C > B$

D: $W > Y > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

全ての男性が女性にマッチしている時点で終了.

「ルール1」による結果



ペアを決めた方がいいが

Bさんが不満, たまたま連絡したWさんもパートナーに不満.
→BさんとWさんは互いに決められたペアを解消し, **駆け落ち**.
同様に, DさんとYさんも駆け落ちする誘因がある.

B: $Y > \textcircled{W} > \underline{Z} > X$

W: $C > \textcircled{B} > \underline{A} > D$

D: $W > \textcircled{Y} > \underline{X} > Z$

Y: $A > \textcircled{D} > \underline{C} > B$

駆け落ちは避けたい

- 先の例では決められたペアに対する不満を持つ男女のペアがいたのが問題.
- 主催者にとっては, 信頼性に関わる問題.
- 駆け落ちが生じないマッチング = 「安定マッチング」.

Q: 安定マッチングを与える決め方?

A: 最初のルールに一箇所変更点を加える → 「ルール2」と呼ぶ.

その前に, 駆け落ちが出てきた原因を見よう.

駆け落ちが生じる主な原因

- B, D共にそれぞれWとYにプロポーズしたくても出来ない。(WはAと, YはCとそれぞれペアが確定していたため.)
- WはBからプロポーズを受けていたら, Aとのペアを解消したい.
- 同様に, YはDからのプロポーズを受けていたら, Cとのペアを解消したい.

B: $Y > \underline{W} > Z > X$

W: $C > B > \textcolor{blue}{A} > D$

D: $\textcolor{blue}{W} > \underline{Y} > X > Z$

Y: $A > D > \textcolor{blue}{C} > B$

各段階でペアを確定するのではなく... (次のスライドに続く)

ペアの決め方 – 「ルール2」

1. 男性にとって1番好ましい人にプロポーズする. 女性はプロポーズしてきた男性の中から1番好ましい人を選びキープする. 選ばなかった他の男性を振る.

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

この時点でAとWの間のペアおよびCとYの間のペアはまだ確定していない.

ペアの決め方 – 「ルール2」

2. 振られた男性は次に好ましい人にプロポーズする. (その相手がすでにキープしている男性がいてもOK)

女性は「プロポーズしてきた男性とキープした男性」の中から1番好ましい人を選びキープする. 選ばなかった他の男性を振る.

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > \underline{B} > A > D$

B: $Y > \underline{W} > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $Y > W > X > Z$

Y: $A > \underline{D} > C > B$

D: $\cancel{W} > \underline{Y} > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

ペアの決め方 – 「ルール2」

2. 振られた男性はその次に好ましい人にプロポーズする。(その相手がすでにキープしている男性がいてもOK)

女性は「プロポーズしてきた男性 + キープした男性」の中から1番好ましい人を選びキープする。選ばなかった他の男性を振る。

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

ペアの決め方 – 「ルール2」

先の手順を繰り返す. ただし, ある段階においてどの男性も振られていなければ, このアルゴリズムを終了する.

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

ペアの決め方 – 「ルール2」

先の手順を繰り返す. ただし, ある段階においてどの男性も振られていなければ, このアルゴリズムを終了する.

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > ~~W~~ > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

ペアの決め方 – 「ルール2」

先の手順を繰り返す. ただし, ある段階においてどの男性も振られていなければ, このアルゴリズムを終了する.

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > ~~W~~ > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

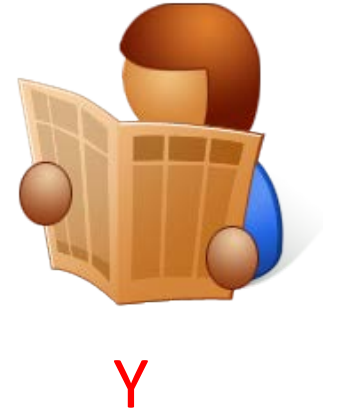
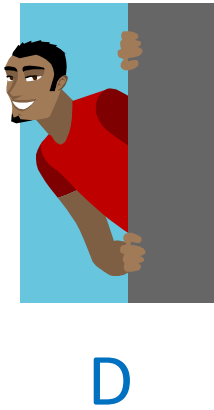
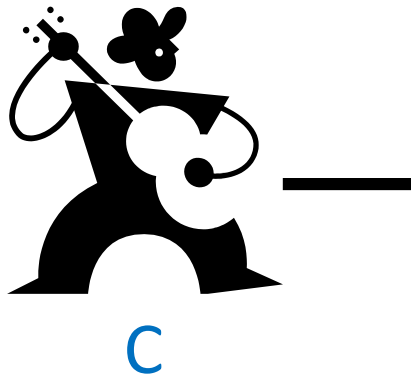
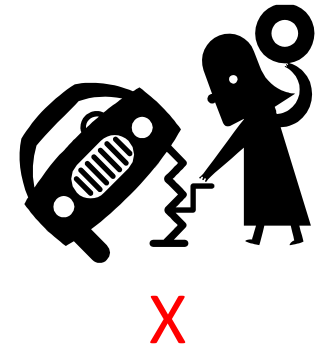
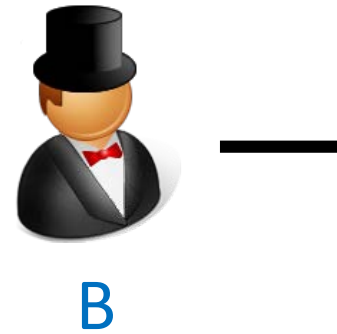
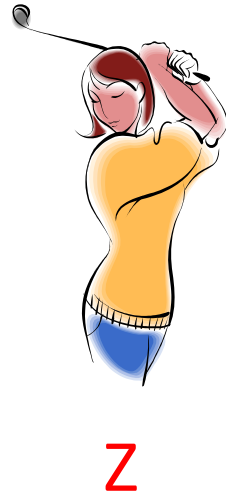
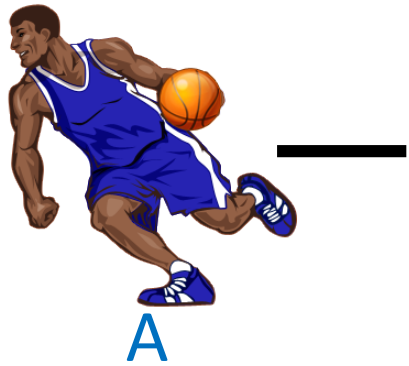
Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

どの男性も振られていない → 終了.

「ルール2」による結果



ルール1で不満だった人たち

Bさんが不満, またまたWさんに連絡.

→しかしWさんはBさんと組むために現在のペアを解消したくない.

→駆け落ちが成立しない.

一方, DさんはYさんとペアになった.

B: Y > W > Z > X

W: C > B > A > D

D: W > Y > X > Z

Y: A > D > C > B



「ルール2」が安定なマッチングを導く理由

- キープに関する性質：女性がある男性をキープしているとする.
 - このアルゴリズムの各段階では、**この男性より好ましくない人をキープすることはない**.
 - 場合によっては、**段階的により好ましい人をキープする**.（以下Wさんの場合）

W: $C > B > \underline{A} > D$ （スライド16）

W: $C > \underline{B} > A > D$ （スライド18）

W: $\underline{C} > B > A > D$ （スライド20）

「ルール2」が安定なマッチングを導く理由

- 男性が駆け落ちを企てようとしても、成立しない.
 - アルゴリズム中、振られる → **キープしている男性より好ましくない.**
 - キープの性質より、最終的にマッチする男性が**キープしてきた男性の中、一番好ましい.**
 - よって、女性側と一緒に駆け落ちする誘因がない.

Y: A > D > C > B

B: Y > ~~W~~ > Z > X

W: C > B > A > D

Z: A > B > D > C

参考: 二つのルールの比較

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

記号: 「ルール2」のマッチングによる相手

 「ルール1」のマッチングによる相手

実例1：研修医のマッチング

- 医学部卒業 → 病院において研修.
- **その配属先**を決める制度を考える.
- **研修医**と**研修先の病院**間のマッチング.



- 今までの話では、男女のペア：男性1人に女性1人（**一対一マッチング**）.
- この場合は、一つの病院に複数の研修医もあり得る（**多対一マッチング**）.
- 今日紹介した部分：多対一にも適用できる.

「ルール1」≈「バーミングハム制度」

- 最初に紹介した「ルール1」のように、第1希望重視のルールは実在した。（細かい部分では多少異なる）
- バーミングハム（イギリス）の研修医マッチング制度として使用
- 安定なマッチングを実現しない → 「駆け落ち」
- 「駆け落ち」＝「病院と研修医の間で制度を通さずマッチングを決める。」 → 制度の信頼性が失われる。
- しかし、過去3回この制度が撤廃されている。今は使われていない。
- 理由：「駆け落ち」の原理同様、その制度を介さずにマッチングを決めた方が得する。
- 第1希望重視のルールは基本的にはうまく機能しない。

「ルール2」＝「NIMP アルゴリズム」

- 一方、ルール2も実在していた – NIMP (National Intern Matching Program) アルゴリズム (アメリカ).
- バーミングハム制度と違い、このルールは長く使われてきた.
- 一方、理論研究 → ゲール・シャープレイ(Gale-Shapley (GS))アルゴリズム (Gale and Shapley (1962, American Mathematics Monthly))
- NIMP=Gale-Shapley (Roth (1984, Journal of Political Economy))によりこの関係を数学的に明らかにしている.)
- 「ルール2」＝「ゲール・シャープレイ(GS)アルゴリズム」と呼ばれている.
- 当初のアルゴリズムからは多少変更されているが、まだ大まかな部分は現在も残っている.

実例2：学校選択制におけるマッチング制度

- 学生と学校間のマッチングを考える.
- 住んでいる地域によって、通う公立校が決まる → 指定校制度
- 学校選択制：住んでいる地域の指定校以外の学校を(ある程度)自由に選べる制度.
- 学校側の「好み」＝「優先順位」(学区内の住民を優先, 卒業生・在校生の親戚を優先, etc.)
- 「学生Aが学校Xと駆け落ち」→
 - 学生Aは学校Xに通いたいに通えない.
 - 学校Xへ通える別の学生Bがいる. しかも, Aの優先順位がBのよりも高い.
- 公平性からの観点からはよろしくない.

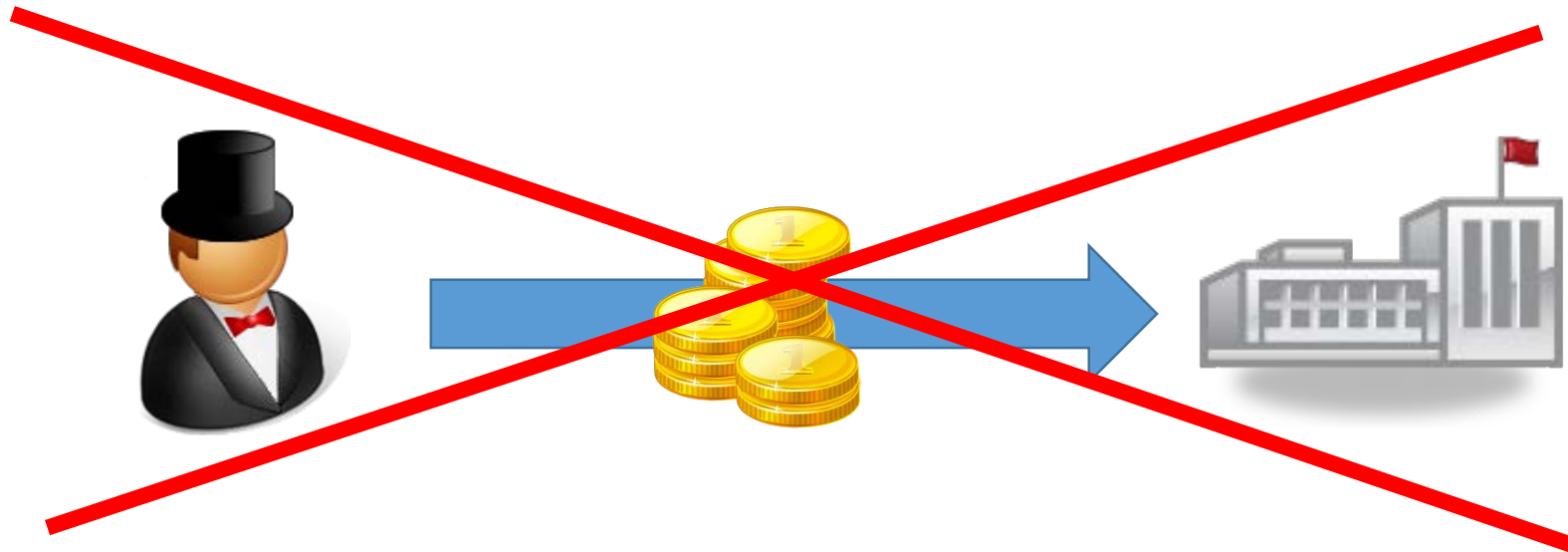


「ルール1」=「ボストン方式」

- ボストン(アメリカ)で使用されていた学校選択制度.
- しかし, 先ほどの例から, 「学生と学校との駆け落ち」があり得る.
- もう一つ重大な欠点: 学生側は戦略的に自分達の選好を表明する方が得. **正直に好みを申告すると損をする.** (次回詳しく説明)
- 上記の理由から, 制度を変えるべく, 経済学者に新しい制度の設計を依頼.

なぜ経済学者？

- ここでの問題：資源（学校）をどう人（学生）に分配するかを考える
→ 経済学で考えられる典型的な問題.
- 難点：「価格」を導入することができない。（賄賂と見なされる。）
→ 従来の経済学の問題とは異なる.



新しい制度:「GS方式」

- 研修医マッチングにおける制度の分析の結果 → マッチングの安定性が重要. (Roth (1984, Journal of Political Economy))
 - 関連する理論研究 (Abdulkadoriglu and Sonmez (2003, American Economic Review))
 - 2005年7月: 既存の方式からGale-**Shapley** アルゴリズムに基づいた制度への移行. (Abdulkadiroglu, Pathak, **Roth**, Sonmez (2005, American Economic Review))
- **「GS方式」**

2012年ノーベル賞経済学部門

マッチング理論を様々な問題に応用し、新たな制度を設計した。

受賞者：

- Lloyd S. Shapley – Ph. D. in mathematics (数学)
- Alvin Roth – Ph. D. in operations research (オペレーションズ・リサーチ)
- (David Gale – 2008年没 Ph. D. in mathematics)

身近な例：学科所属

- 学生と学科のマッチングにも適用できる.
- なるべく、学生の不満が生じないような選び方が望ましい.
- ただし、本学のシステムが今日の講義で現れた、マッチングの決め方と異なる場合がある.
- 注意：今日の講義を理解しやすいための例と考えるように.

次回

- 次回: 同じ問題を当事者目線から分析

- 今日の話: 主催者から見たら各個人の好みは与えている
 - 男性側は好みを正直に伝えた方がよいか?
 - 女性側の場合は?

→ 今日の話に先週のゲーム理論的要素を取り入れる. (マッチング問題の**非協力ゲーム理論的側面**)

→ 同じ問題でも**非協力ゲーム理論**と**協力ゲーム理論**の出番.

- 次回の授業日: **5月7日(水)** (注: 月曜日授業を行う日)