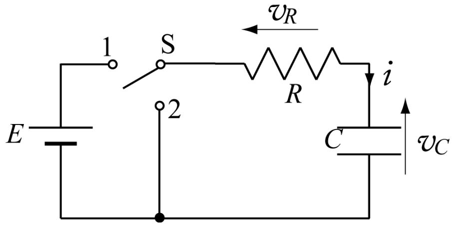
3. 過渡現象とその解析（2）

今回はパルスへの応答の第一歩として、取りかかり易い方形波パルスについて行う。(後にラプラス変換を用いて、より汎用性のあるインパルス応答を行う。)

前回、短絡に用いた回路をもう一回出してこよう。

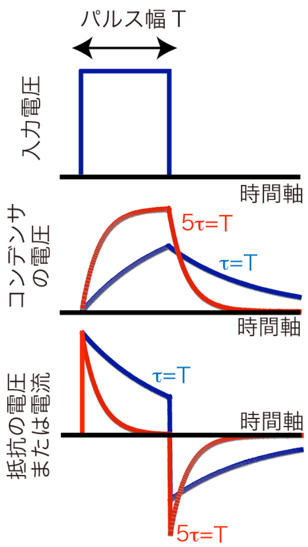


t<0 で、スイッチは 2 側で定常状態、t=0 で 1 側に切り替え、t=T で再び 2 側に切り替える。さて、まず電流だけ求めよう。抵抗の電圧は電流からすぐ求められ、電源電圧から引けばコンデンサの電圧もすぐ出るからである。

まず、0<t<T では、$i=\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$である。次に T<t では、$q=CE(1-e^{-T/\tau})$を t=T での初期条件に入れて、定常解$q=0$を考慮すると、

$$q=CE(1-e^{-T/\tau})e^{-(t-T)/\tau}, i=-\frac{E(1-e^{-T/\tau})}{R}e^{-(t-T)/\tau}$$

となる。
図示すると下の様になる。

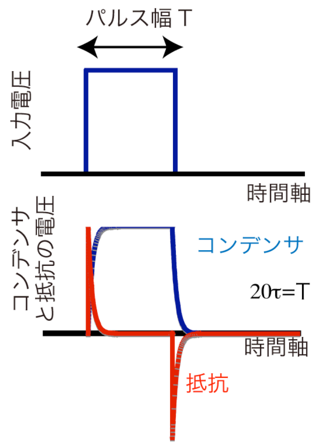


以上の様にパルス電圧を加えたときの過渡応答であるパルス波形は、時定数 τ とパルス幅 T によって変わる。

微分回路

さてパルスの立ち上がりと各電圧に注目しよう。

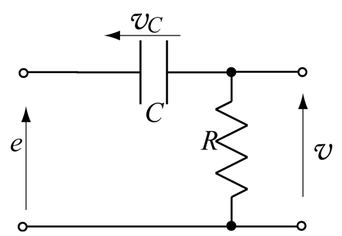
時定数 τ が T に較べて小さくなると、コンデンサの電圧波形v_Cは入力電圧波形v_{in}に近づいていく。



そこで$v_C \cong v_{in}$と近似すると、抵抗の両端に発生する電圧は、

$$v_R = Ri = RC\frac{dv_C}{dt} \cong RC\frac{dv_{in}}{dt}$$

となるので、入力波形v_{in}の時間微分に比例した電圧が出力すると考えうる。そこで抵抗の両端を出力とした下の様な回路を微分回路と呼ぶときがある。

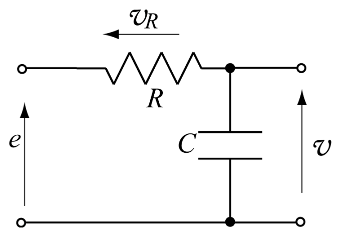


パルスの立ち下がりでも同じ特性が出てくる。ただし、正確な意味での方形波の微分は幅が 0 で高さが無限大のデルタ関数となるが、実際には電圧は入力電圧より高くなることはなく、また時定数程度の広がりを持った幅になって出てくる。また方形波の微分を取ることは当然本来の目的ではない。

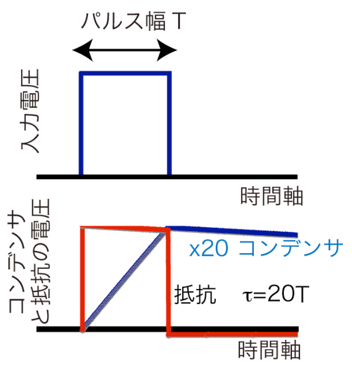
RL 回路の立ち上がりでも、電流が時定数の数倍で立ち上がる。従って、上のパルス波形において、コンデンサの電圧を電流に比例=抵抗の電圧、抵抗の電圧をインダクタの電圧と読み変えれば同じ形の波形となり、RL 回路の L の両端を出力としても、微分回路として働く。

積分回路

今度はτ>>T の場合を考えてみよう。このとき RC 直列回路でのコンデンサにはあまり電荷が貯まらないことから、入力電圧v_{in}はほとんど抵抗にかかると近似できる。するとコンデンサの両端に生じる電圧を $v_C=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \cong \frac{1}{C}\int_0^t \frac{v_{in}}{R}dt$ と表せる。
従ってコンデンサの両端を出力とした下の様な回路を積分回路と呼ぶときがある。



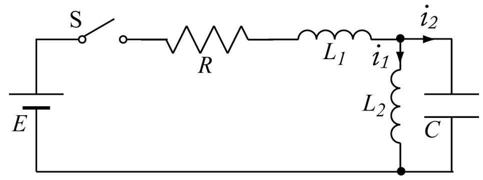
またパルスが立ち下がった後に放電するがそれは非常にゆっくりであるので積分の機能は持ち続けている。ただし、積分を行うためには、非常に小さな振幅となるので、実際には演算増幅器などが必要である。



RL 回路でもτ>>T の場合は電流の立ち上がりが積分の形となる。従って、コンデンサの電圧を抵抗の電圧として、抵抗の電圧をインダクタの電圧と読み変えれば同じ形の波形となり、RL 回路の R の両端を出力としても入力電圧と時定数が等しければ同じ積分回路として働く。

さて、比較的簡単な直列回路を中心に微分方程式を解いてきたが、いままで扱っていた微分方程式はたかだか 2 階であった。しかしながら、回路に並列分岐があると階数はすぐに上がっていく。

例えば下の様な回路を考えよう。



$i_2=\frac{dq}{dt}, L_2\frac{di_1}{dt}=\frac{q}{C}$　なので

$$E=L_1\frac{d(i_1+i_2)}{dt}+R(i_1+i_2)+\frac{q}{C}$$

$$=L_1\frac{di_1}{dt}+Ri_1+L_1\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}$$

$$=L_1\frac{di_1}{dt}+Ri_1+CL_1L_2\frac{d^3i_1}{dt^3}+RCL_2\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2\frac{di_1}{dt}$$

と三階の微分方程式にすぐなってしまう。特性方程式を解くのも簡単では無くなる。5 階を超えると特性方程式の一般解がなくなる。

そこで、この微分方程式を時間領域で直接解く方法に変わって周波数領域で解く方法として用いられるのが前期で習ったラプラス変換である。

ラプラス変換

ラプラス変換は関数$f(t)$に積分して $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とすることである。ここで $s=\sigma+j\omega$ の複素数であり、$\sigma\geq 0$である。

ラプラス変換は、t→無限大での収束性を良くするために減衰する指数関数を掛けているところがフーリエ変換との大きな違いであり、その為フーリエ変換などと違い、直接の物理的意味をもたない。そこで挙動を示すためには逆ラプラス変換を行い、時間の関数に戻す必要がある。$f(t)=\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$

ここでいちいち積分記号を書くのが大変なのでラプラス変換を $F(s)=\mathscr{L}(f(t))$ と、ラプラス逆変換を $f(t)=\mathscr{L}^{-1}(F(s))$ と書くことにしよう。

ここで注意すべきは関数$f(t)$について t<0 で$f(t)=0$の条件をつけていることである。この条件によってあとの証明が楽になる。

積分だけ見ていると計算は複雑になっている様に見える。しかし実際はいくつかの定理を使いながら知られている関数のラプラス変

換・逆変換を表に従って行うため、実際の計算で積分をおこなうことはない。そこで、初等的な関数だけで、過渡現象が解くことが出来る。

ラプラス変換に関する定理

加法定理

$$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)=\mathscr{L}(a_1f_1(t)+a_2f_2(t))$$

微分定理(1)

$$sF(s)-f(0)=\mathscr{L}(\frac{df(t)}{dt})$$

微分定理(2)

$$s^2F(s)-sf(0)-\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}=\mathscr{L}(\frac{d^2f(t)}{dt^2})$$

微分定理(3)

$$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}\left.\frac{d^kf(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=\mathscr{L}(\frac{d^nf(t)}{dt^n})$$

積分定理(1)

$$\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\left.\int f(t)dt\right|_{t=0}=\mathscr{L}\int f(t)dt)$$

積分定理(2) $$\frac{F(s)}{s}=\mathscr{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau)$$

たたみこみ積分

$$F_1(s)F_2(s)=\mathscr{L}(\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau)$$

$$\equiv f_1(t)*f_2(t)$$

相似定理 $$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})=\mathscr{L}(f(at))$$

推移定理(1) $$e^{-as}F(s)=\mathscr{L}(f(t-a))$$

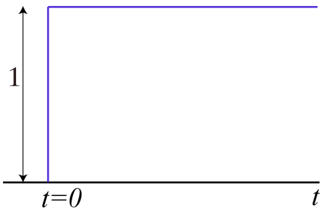
推移定理(2) $$F(s+b)=\mathscr{L}(e^{-bt}f(t))$$

基本的な関数に対するラプラス変換

ステップ関数

t=0 でスイッチを閉じて直流電源に繋ぐ様な関数をステップ関数 $u(t)$ と呼ぶ。

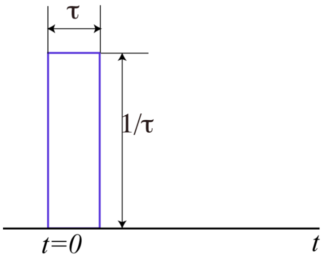
$$\mathscr{L}(u(t))=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$



単位インパルス関数

幅 τ、高さ 1/ τ の方形波パルスにおいて $\tau\to0$ の極限を単位インパルス関数と呼び、$u_0(t)$ で表すが、そのラプラス変換は

$$\mathscr{L}(u_0(t))=\lim_{\tau\to0}\int_0^\tau\frac{1}{\tau}e^{-st}dt=e^0\lim_{\tau\to0}\int_0^\tau\frac{1}{\tau}dt=1$$



他に基本的な関数として

$$\mathscr{L}(t)=\frac{1}{s^2}\qquad\mathscr{L}(\frac{t^n}{n})=\frac{1}{s^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}(\frac{t^{n-1}e^{\mp at}}{(n-1)!})=\frac{1}{(s\pm a)^n}\qquad\mathscr{L}(e^{\pm at})=\frac{1}{s\mp a}$$

$$\mathscr{L}(\sin(\omega t))=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}(\cos(\omega t))=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

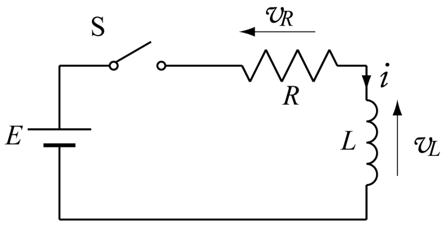
$$\mathscr{L}(\sinh(\beta t))=\frac{s}{s^2-\beta^2}$$

$$\mathscr{L}(\cosh(\beta t))=\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$$

等の関係がある。

解析手順

それでは実際に解析してみよう。まずは一番簡単な RL 直列回路でスイッチ S を時間 t=0 で閉じた直後の過渡状態を解こう。



回路方程式は $E=Ri+L\dfrac{di}{dt}$、まず知りたいのは $I(s)=\mathcal{L}(i(t))$、

E はステップ関数として加わるので、

$$\frac{E}{s}=\mathcal{L}(Eu(t)),$$

$\mathcal{L}(L\dfrac{di}{dt})=L\mathcal{L}(\dfrac{di}{dt})=LsI(s)-Li(0)$，但し、今は初期条件から $i(0)=0$ である。従って $\dfrac{E}{s}=LsI(s)+RI(s)$, $I(s)=\dfrac{E}{s(Ls+R)}$ となる。この形は単純な変換はない。しかし分母を因数分解して部分分数分解して $I(s)=\dfrac{E}{s(Ls+R)}=\dfrac{E}{R}\dfrac{(Ls+R)-Ls}{s(Ls+R)}=\dfrac{E}{R}(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+R/L})$ とすると

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{E}{R}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+R/L}))$$

$$=\frac{E}{R}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s})-\frac{E}{R}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+R/L})$$

$$=\frac{E}{R}(u(t)-e^{-\frac{R}{L}t})$$

として答えが出た。ラプラス変換は分母を因数分解して、分子側の次元を出来るだけ低く(基本はなくす)ことで公式に持っていき解くことが出来る。

<u>単純極と重複極</u>

$F(s)=\dfrac{K_1}{s-s_1}+\dfrac{K_2}{s-s_2}+\dots\dfrac{K_n}{s-s_n}$ と部分分数分解できるとしよう。この係数 K_i の求め方だが、

$$(s-s_i)F(s)=\frac{K_1(s-s_i)}{s-s_1}+\ \dots K_i\dots+\frac{K_n(s-s_i)}{s-s_n}$$

となるので、$K_i=(s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}$ とすればよい。ここで $F(s)=\infty$ となる s_i は重要であり、極と呼ばれる。さて、分母に $(s-s_i)^n$ の項があると、上のやり方では部分分数分解できない。そこで、この様な高次の項を持たない極を単純極(あるいは一位の極)とよび、高次の項を持った場合は重複極(あるいは高位の極)と呼ぶ。

重複極の場合は $\mathcal{L}(\dfrac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!})=\dfrac{1}{(s+a)^n}$ のラプラス変換を使う。

重複極を持つ場合は、やり方が異なる。重複極が 3 位の極 s_1 一つだけの場合で例を示そう。極 s_1 の関係だけを部分分数分解すると $F(s)=\dfrac{k_1}{s-s_1}+\dfrac{k_2}{(s-s_1)^2}+\dfrac{k_3}{(s-s_1)^3}+F_1(s)$ となる。

$$(s-s_1)^3F(s)=(s-s_1)^2k_1+(s-s_1)k_2+k_3+(s-s_1)^3F_1(s)$$

なので、−3 乗の項の係数 k_3 は $k_3=(s-s_i)^3F(s)\big|_{s=s_i}$ で求まる。

次に−2 乗の項の係数は

$$\frac{d}{ds}\left((s-s_1)^2k_1+(s-s_1)\ k_2+k_3+(s-s_1)^3F_1(s)\right)$$

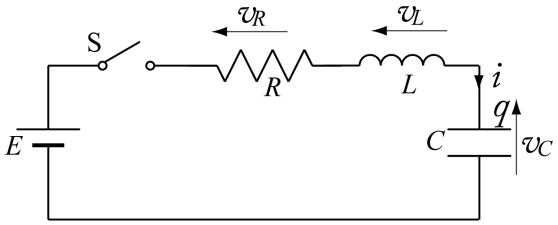
$$=2(s-s_1)k_1+k_2+3(s-s_1)^2F_1(s)+(s-s_1)^3\frac{dF_1(s)}{ds}$$

なので、$k_2=\dfrac{d}{ds}\left[(s-s_i)^3F(s)\right]_{s=s_i}$ で求まる。−1 乗の項は同様にして $k_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{ds^2}\left[(s-s_i)^3F(s)\right]_{s=s_i}$ で求まる。

$F(s)$ が r 位の重複極 s_1 をもつならば、その $-l$(<r) 乗の項の係数は、$k_l=\dfrac{1}{(r-l)!}\dfrac{d^{r-l}}{ds^{r-l}}\left[(s-s_i)^rF(s)\right]_{s=s_i}$ で求められる。

<u>*RLC* 直列回路の応答</u>

ここで、下図に示す様な RLC 直列回路において、直流電圧源とのスイッチ S を時間 t=0 で閉じた直後の過渡状態をラプラス変換で解こう。



直列回路なので、ループ(閉路)方程式は

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt$$

ラプラス変換すると

$$\frac{E}{s} = L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) + \frac{1}{C}\{\frac{I(s)}{s} + \frac{q(0)}{s}\}$$

初期値は今の設定では 0 なので、

$$\frac{E}{s} = sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}$$

電源側から見た電圧/電流比(=インピーダンス)は $sL+R+\frac{1}{sC}$ であり、$e^{j\omega t}$ を使った交流回路との違いは $j\omega$ が s になっただけである。

$$I(s) = \frac{E}{s}\frac{1}{sL+R+\frac{1}{sC}} = \frac{E}{L}\frac{1}{s^2+2\alpha s+\omega^2}$$ ただし、

$\alpha = \frac{R}{2L}, \omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ である。

極 $s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\omega^2}$ であり、$\beta^2 = \alpha^2 - \omega^2$ が正か、0 か、負かで答えが変わる。微分方程式で解いたのを同じである。

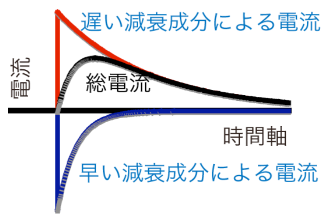
正ならば実軸上の二つの異なる単純極であり、

$$i = \frac{E}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+2\alpha s+\omega^2})$$

$$= \frac{E}{2\beta L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{(s+\alpha+\beta)-(s+\alpha-\beta)}{s^2+2\alpha s+\omega^2})$$

$$= \frac{E}{2\beta L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+\alpha-\beta} - \frac{1}{s+\alpha+\beta})$$

$$= \frac{E}{2\beta L}(e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t})$$



0 ならば実軸上に負の二位の重複極を持ち

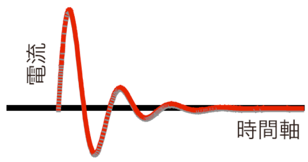
$$i = \frac{E}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{(s+\alpha)^2}) = \frac{E}{L}te^{-\alpha t}$$

負ならば二つの共役複素数の単純極であり、

$\omega_f{}^2 = \omega^2 - \alpha^2$ とすると

$$i = \frac{E}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_f{}^2}) = \frac{E}{L\omega_f}e^{-\alpha t}\sin\omega_f t$$

となる。



安定性

極 α についてラプラス逆変換をすると、$e^{\alpha t}$ という項が出てくる。極を実部と虚部に分けて考えると、

$e^{\alpha t} = e^{Re[\alpha]t}e^{jIm[\alpha]t}$ $= e^{Re[\alpha]t}(\cos(Im[\alpha]t) + j\sin(Im[\alpha]t))$ となる。

従って、極の実部が正だと無限大に発散する解ができてしまい、受動回路ではあり得ない。そこで、回路が安定である為には、極の実部が負または 0 であることが必須である。