７．利潤最大化

企業は，労働と資本をどれだけ使用するのか？

企業の目的＝利潤の最大化：企業は利潤を最大化するように生産要素の投入量を決定するものとする．利潤＝収入－費用：$\pi = R - C$

ここで，収入＝価格×数量：$R = pq = pF(L,K)$

さらに，費用＝賃金×労働投入量＋資本の価格×資本投入量：$C = wL + rK$．

よって，$\pi = R - C = pF(L,K) - wL - rK$　利潤は労働量 L と資本量 K の関数 $\pi(L,K)$．

７．１　労働の最適投入量

いま資本量を $\overline{K}$ に固定し，労働の投入量のみを変化させるとしよう．

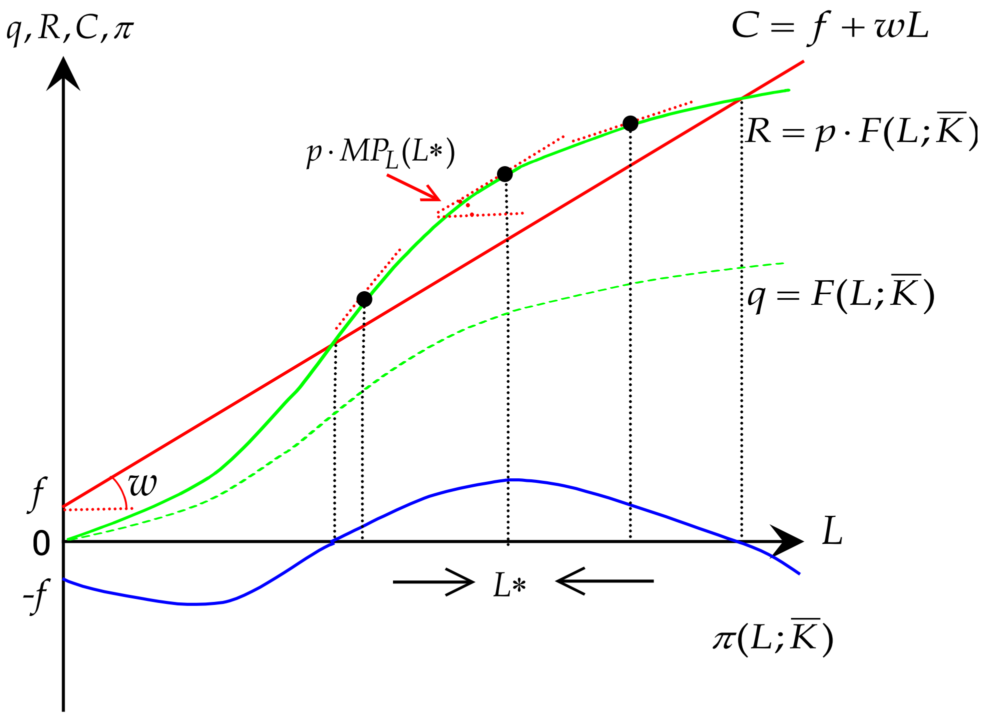

図７．１：総生産曲線，総収入曲線 R，総費用線 C，利潤曲線 π

利潤の大きさ $\pi(L)$＝収入曲線 $R(L)$ と費用曲線 $C(L)$ の間の高低差.

労働投入量が $L*$ の時，利潤は最大になる．最適投入量 $L*$ では次の条件が成立する：

総収入曲線 R の $L*$ における接線の傾き＝費用線 C の傾き

つまり，$pMP_L(L*) = w$　労働の限界生産物の価値＝労働の価格（賃金）

結果７．１：

企業が利潤を最大にする労働投入水準 $L*$においては，労働の限界生産物の価値と労働の価格が等しくなる，つまり，$pMP_L(L*) = w$ が成立する．

注：結果７．１は，利潤関数 $\pi(L,\overline{K}) = pF(L,\overline{K}) - wL - r\overline{K}$ を L について偏微分したものをゼロとおく，つまり，

$$\frac{\partial \pi(L*,\overline{K})}{\partial L} = p\frac{\partial F(L*,\overline{K})}{\partial L} - w = 0$$

から求まる．ただし，これは利潤最大化のための１階の条件（必要条件）にすぎず，上式の解 $L*$ が利潤を最大にしていることを保証するためには，さらに以下の最大化のための２階の条件（十分条件）が満たされなければならない：

$$\frac{\partial^2 \pi(L*,\overline{K})}{\partial L^2} = p\frac{\partial^2 F(L*,\overline{K})}{\partial L^2} < 0$$

いま価格は正の値をとる（$p > 0$）なので，このことは，利潤を最大にする労働量 $L*$ では，労働の限界生産物が逓減している（$\frac{\partial^2 F(L*,\overline{K})}{\partial L^2} < 0$）ことを意味している．

７．２　資本の最適投入量

次に，労働量を $\overline{L}$ に固定し，資本の投入量のみを変化させる場合を考える．この時も前節と同じ分析を当てはめることができる．

結果７．２：

企業が利潤を最大にする資本投入水準 $K*$においては，資本の限界生産物の価値と資本の価格が等しくなる，つまり，$pMP_K(K*) = r$ が成立する．

注：結果７．２は，

$$\frac{\partial \pi(\overline{L},K*)}{\partial K} = p\frac{\partial F(\overline{L},K*)}{\partial K} - r = 0$$

から求まる．これが利潤最大化のための１階の条件（必要条件）で，２階の条件（十分条件）は，

$$\frac{\partial^2 \pi(\overline{L}, K*)}{\partial K^2} = p\frac{\partial^2 F(\overline{L}, K*)}{\partial K^2} < 0,$$

つまり，資本の限界生産物が逓減していなければならない（$\frac{\partial^2 F(\overline{L}, K*)}{\partial K^2} < 0$）．

８．費用最小化

問題：ある与えられた生産量q_0だけ生産物をつくるために，費用が最も少なくてすむ労働と資本の効率的な組合せは何か？

８．１．費用最小化条件

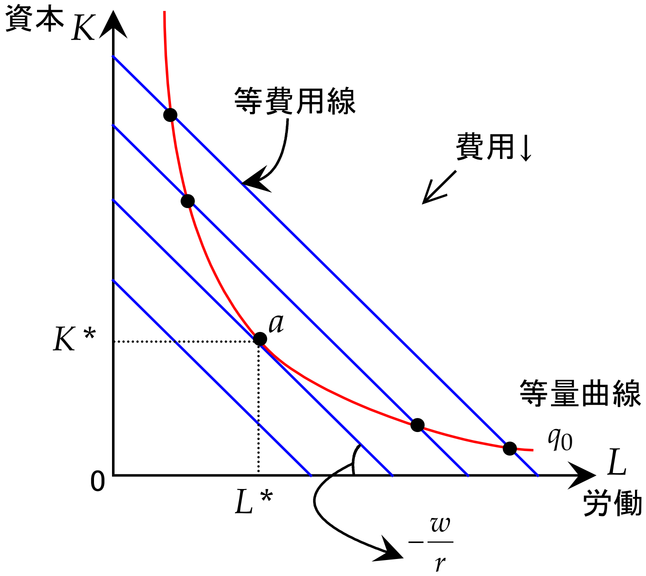

図 8.1：費用最小化

左下に位置する等費用線ほど，費用は小さい．生産水準q_0を実現し費用が最小ですむ労働と資本の組合せは，等費用線が等量曲線と接する a 点（L^*, K^*）で与えられ，以下の関係が成立する．

等量曲線の接線の傾き＝等費用線の傾き

つまり，生産の限界代替率＝賃金／資本の価格，$MRS_p(L^*, K^*) = \frac{w}{r}$

８．２．生産要素価格の変化

いま，賃金が w_0 から w_1 へ上昇し，資本の価格 r には変化がないものとする．

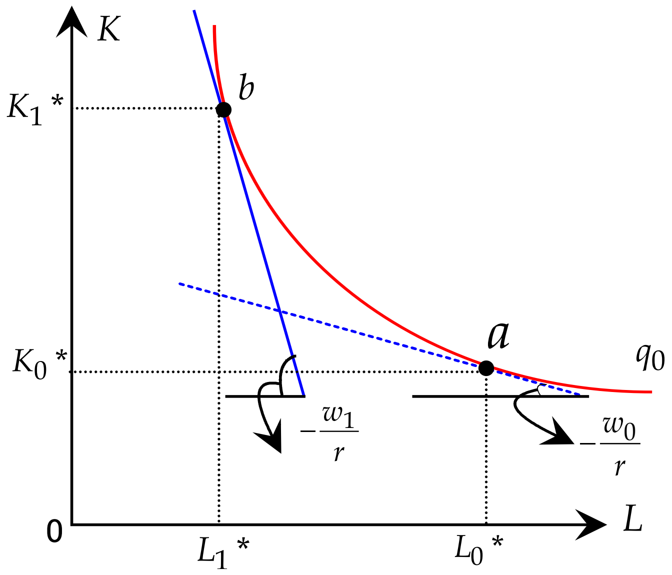

図８．２：賃金の変化　$w_0 < w_1$

生産量 q_0 を実現し費用最小化をもたらす生産要素の組合せ：

賃金：$w_0 \quad < \quad w_1$　労働：$L_0^* \quad > \quad L_1^*$　資本：$K_0^* \quad < \quad K_1^*$

代替効果：賃金が相対的に高くなったため，労働の投入量が L_0^* から L_1^* に減少し，代わりに資本の投入量が K_0^* から K_1^* へ増大した．

８．３．拡張経路

賃金 w と資本の価格 r は一定で，生産量を変化させる．

拡張経路：生産要素の価格は一定にして，生産量をさまざまに変化させた時の，費用最小点の軌跡，つまり，費用最小を実現する生産要素の組合せがどのように変化するかを表したもの．

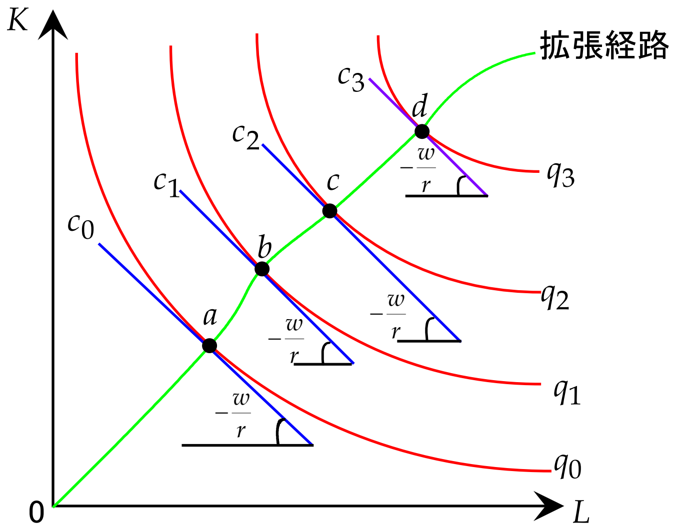

図８．３：拡張経路

生産量水準	費用最小化をもたらす(L,K)	最小費用の値
q_0	$a=(L_0^*,K_0^*)$	$C_0=wL_0^*+rK_0^*$
q_1	$b=(L_1^*,K_1^*)$	$C_1=wL_1^*+rK_1^*$
q_2	$c=(L_2^*,K_2^*)$	$C_2=wL_2^*+rK_2^*$
q_3	$d=(L_3^*,K_3^*)$	$C_3=wL_3^*+rK_3^*$

９．費用曲線

拡張経路から，それぞれの生産量に対応した最小費用を知ることができる．

費用関数，C : さまざまな生産量 q に対して，それを実現するための最小費用額$C(q)$を表したもの．

９．１．固定費用，可変費用，総費用

固定費用(fixed cost) : 生産量の水準とは無関係に支払わねばならない費用．記号 f で表す．例）工場の建設費用

可変費用(variable cost)：生産量の増加につれ上昇する費用（生産量が変わるとそれにつれて費用も変わるので「可変」費用と呼ぶ）とは生産量が q の時の可変費用の値を $VC(q)$ と表す．例）原材料購入コスト，支払い賃金

総費用(total cost)：可変費用と固定費用の和． $C(q) = VC(q) + f$ と表す.

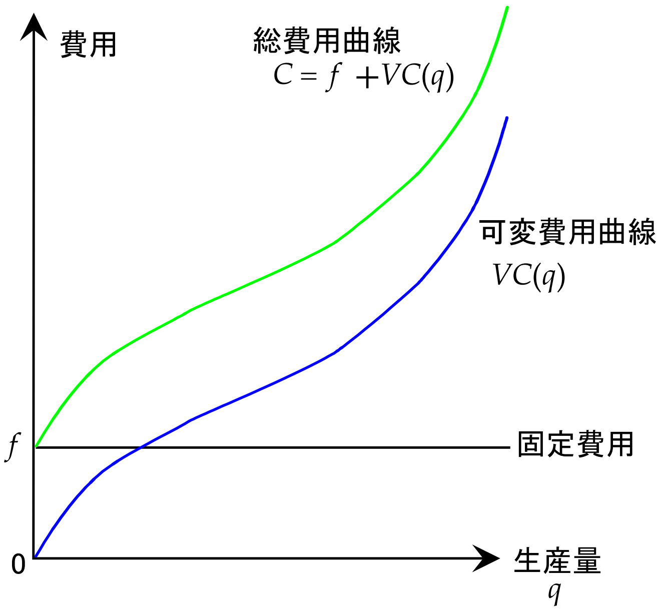

図９．１：総費用曲線，可変費用曲線，固定費用曲線

９．２．平均費用と限界費用

平均費用(average cost), AC：生産物１単位当たりの総費用の値.

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{VC(q)}{q} + \frac{f}{q}$$

平均可変費用(average variable cost), AVC：生産物１単位当たりの可変費用の値.

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q}$$

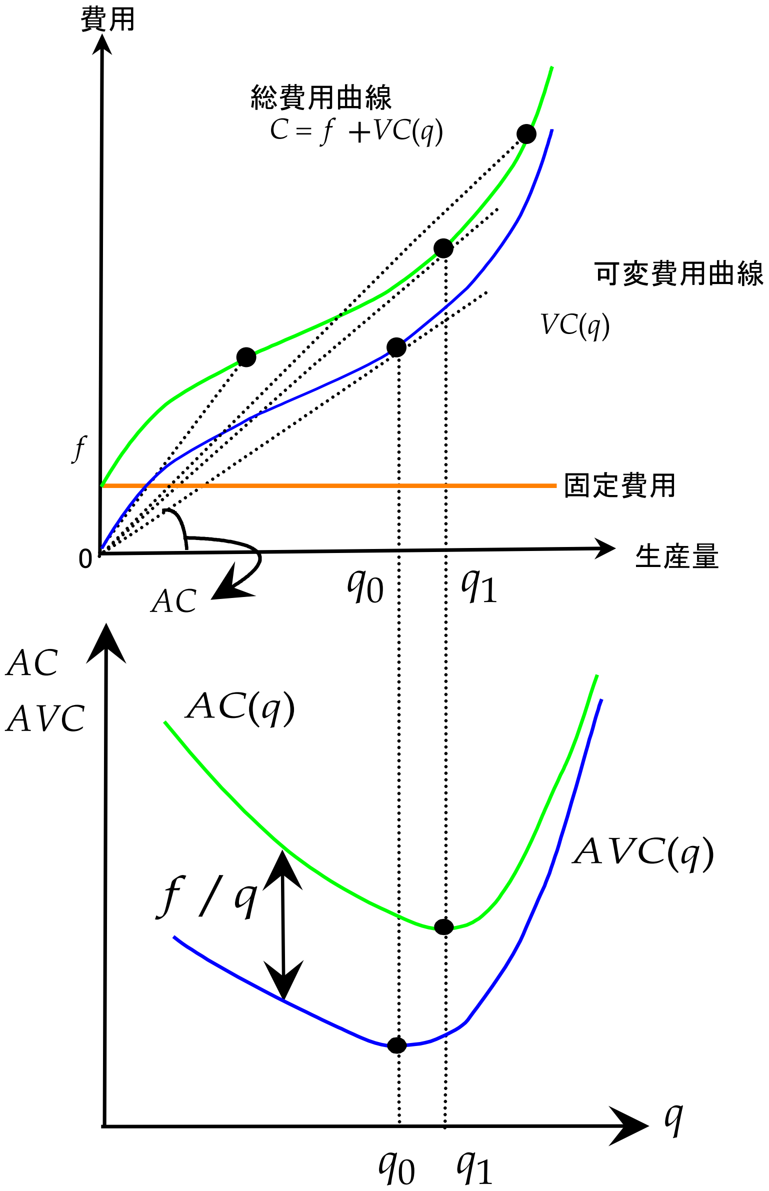

図９．２：総費用曲線，平均費用曲線，平均可変費用曲線

平均（可変）費用は原点から総費用（可変費用）曲線を結んだ直線の傾きで表せる．

$AC(q) = AVC(q) + f/q$ という関係があり，$f/q > 0$ であるので，$AC(q) > AVC(q)$ である．しかし，生産量 q が増大するにつれ，f/q の値は小さくなり，$AC(q)$ と $AVC(q)$ の差は小さくなっていく．平均可変費用曲線 AVC が最小値をとる生産量 q_0 は平均費用曲線 AC が最小値をとる生産量 q_1 より小さい．

限界費用(marginal cost)，MC：生産物を追加的に１単位増大するために必要な費用の増加分． $MC=\dfrac{dC}{dq}$

MC は費用曲線の接線の傾きである．いま， $MC=\dfrac{dC}{dq}=\dfrac{dVC}{dq}+\dfrac{df}{dq}=\dfrac{dVC}{dq}$ であることに注意しよう．つまり，可変費用だけが限界費用に関して問題となる．

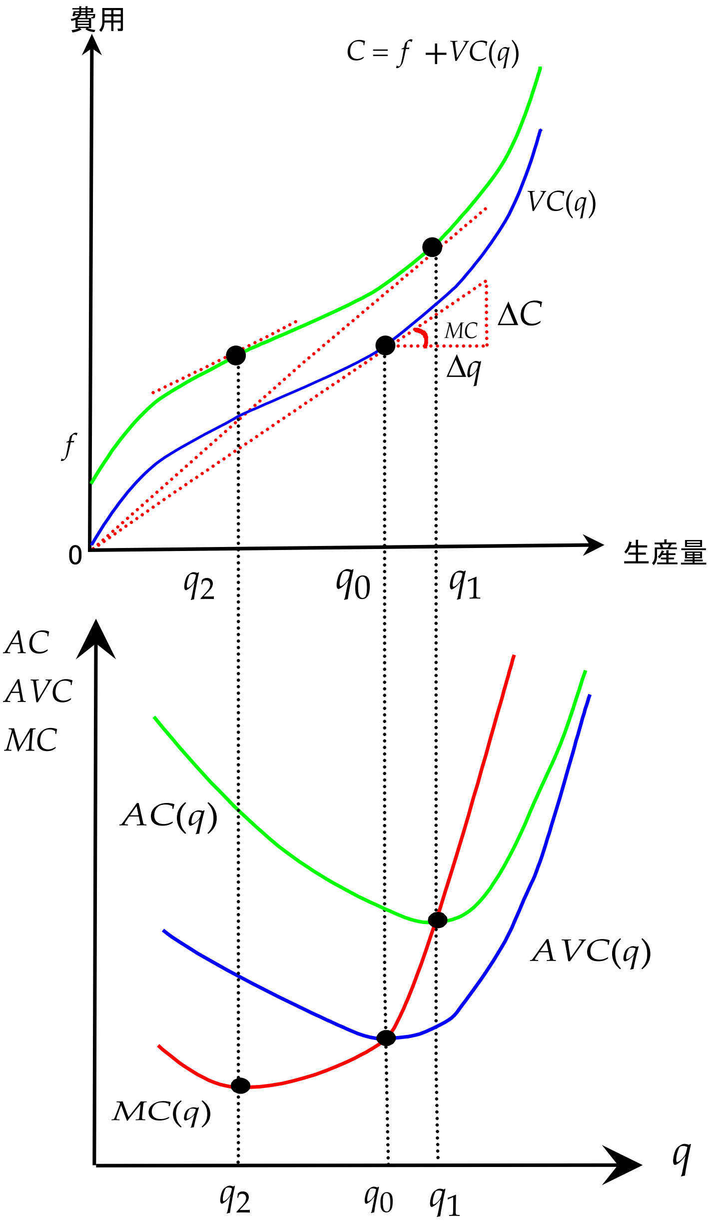

図９．３：総費用曲線，限界費用曲線，平均費用曲線，平均可変費用曲線

MC 曲線の特徴，MC, AC, AVC 曲線の関係：

１）MC 曲線は当初減少して，最小値に達して，以後増加傾向を示す.

２）MC 曲線は AC 曲線の最小値と AVC 曲線の最小値の両方を通過する.

３）MC 曲線が AC 曲線より下方（上方）に位置する時，AC 曲線は減少（増加）する. 同様の関係は MC 曲線と AVC 曲線についても成立する.

生産の理論７章～９章に関する演習問題

１）ａ）以下の語句の定義を書け．図を用いて表わせるものはそのグラフも書け.

総生産曲線，総収入曲線，総費用線，利潤曲線，拡張経路，費用関数，固定費用，可変費用，総費用，平均費用，平均可変費用，限界費用

ｂ）いま，資本の投入量を一定に固定したとする．利潤が最大になるような労働の最適投入量においてはどのような条件が成立していなければならないか？また，労働の投入量を一定に固定した場合に，利潤が最大になるような資本の最適投入量において成立していなければならない条件は何か？

ｃ）一定の生産量水準を実現し，費用が最小になるような労働と資本の最適な組み合わせにおいては成立している条件は何か？

２）ラグランジェ法を用いて，費用最小化条件を導出せよ.

３）コブ＝ダグラス型生産関数 $q = F(L,K) = L^{1/2}K^{1/2} = \sqrt{LK}$ を考えよう．いま，生産量 $q = 10$ とする.

ａ）$w_0 = 10, r = 40$ とする。ラグランジェ法を用いて，費用最小化をもたらす生産要素の組合せ L_0^*, K_0^* 求めよ.

ｂ）賃金が $w_0 = 10$ から $w_1 = 60$ に上昇したとする（資本の価格は同じ）．ラグラン

ジェ法を用いて，費用最小化をもたらす生産要素の組合せL_1^*, K_1^*を求めよ.

ｃ）ａ）とｂ）の答えを，等量曲線を書いて図に表せ．一般に，資本の価格は変化せず，労働の価格（賃金）が上昇したとき，費用最小化をもたらす資本と労働の組み合わせはどのように変化すると言えるか？

４）ａ）コブ＝ダグラス型生産関数$q = F(L,K) = L^{1/2}K^{1/2} = \sqrt{LK}$を考えよう．$w = 40, r = 10$とする．生産量が$q_0 = 10$，$q_1 = 20$，$q_2 = 40$と変わった時の，費用最小化をもたらす生産要素の組合せ(L_0^*, K_0^*)，(L_1^*, K_1^*)，(L_2^*, K_2^*)を各々求めよ（ラグランジェ法を使え）．また，それらを図に表せ．　さらに，各生産量を達成する最小費用の値C_0, C_1, C_2を求めよ.

ｂ）ａ）の答えの一般化。以下のコブ＝ダグラス型生産関数を考えよう：$q = F(L,K) = L^a K^{1-a} (0 < a < 1)$。賃金と資本の価格が与えられたものとし，それらを一般的に，賃金の値をw，資本の価格の値をrと表そう．また，生産量の値も一般的にqと表す．この時，ラグランジェ法を用いて，費用最小化をもたらす生産要素の組合せ$(L*, K*)$を求めよ（$L*$をq，w，rの関数$L*(q;w,r)$，同様に$K*$もq，w，rの関数$K*(q;w,r)$として表せ）．拡張経路はどのような形になるか、図で表せ。また，費用関数を求めよ（最小費用をq，w，rの関数$C(q;w,r)$として表せ）.

＊ 注：拡張経路が原点を通る直線となるケース，つまり，生産の限界代替率が原点を通る直線上で一定となる生産関数は**ホモセティックな生産関数**と呼ばれる．コブ＝ダグラス型生産関数はホモセティックな生産関数の一種である.

＊５）限界費用（ＭＣ）曲線，平均費用（ＡＣ）曲線，平均可変費用（ＡＶＣ）曲線の間の関係を数学的に導出できるか？（ヒント：商の微分を使う．「限界性産物曲線と平均生産物の関係」を参照．）

１０．最適規模

　費用関数の概念を用いて企業の利潤最大化行動を再検討する．

利潤＝収入－費用： $\pi(q) = R(q) - C(q) = pq - C(q)$

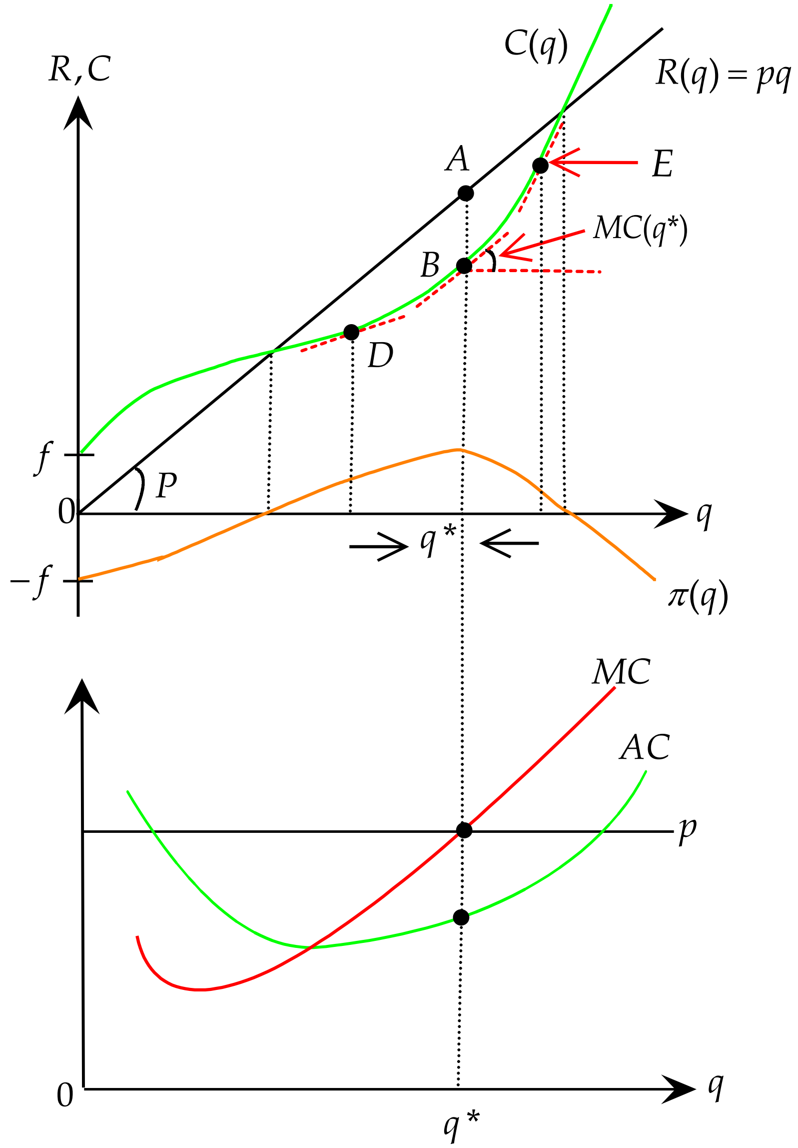

図１０．１：利潤最大化

利潤の大きさ $\pi(q)$＝収入直線 $R(q)$ と費用曲線 $C(q)$ の間の高低差

生産量が $q*$ の時，利潤は最大となる．最適生産量では以下の条件が成立している：

収入直線Ｒの傾き＝費用曲線Ｃの $q*$ における接線の傾き

つまり，　$p = MC(q*)$　生産物価格＝限界費用

なぜか？

（ｉ）$q<q*$ では,

（１０．１）　　　　$p>MC(q)$

が成立している（例えばＤ点）．いま q から１単位生産を増大させたとしよう．その時収入 R は，$\Delta R=p$ だけ増加する．しかし，同時に費用も，$\Delta C=MC(q)$ だけ増加する．すると利潤は,

$$\Delta\pi=\Delta R-\Delta C=p-MC(q)>0 \quad \text{（（１０．１）より）}$$

だけ増加することになる．よって，$q<q*$ では利潤最大化は実現されず，生産量を増やすことによって利潤は増大できる．

(ii)　$q>q*$ では,

（１０．２）　　　　$p<MC(q)$

が成立している（例えばＥ点）．いま q から１単位生産を減少させたとしよう．その時収入 R は，$\Delta R=-p$ だけ減少する．しかし，同時に費用も，$\Delta C=-MC(q)$ だけ節約できる．すると利潤は,

$$\Delta\pi=\Delta R-\Delta C=-p+MC(q)>0 \quad \text{（（１０．２）より）}$$

だけ増加することになる．よって，$q>q*$ では利潤最大化は実現されず，生産量を減少させることによって利潤は増大できる．

よって，$q*$以外の生産水準においては，生産量を変化させることによって利潤を増大できる．他方，$q*$においては，そこから生産量を変化させても利潤は減少するだけである．

結果１０．１：

企業が利潤を最大にする生産水準 $q*$においては，価格と限界費用が等しくなる，つまり，$p=MC(q*)$ が成立する．

注：結果１０．１は, 利潤関数 $\pi(q)=pq-C(q)$ を q について微分したものをゼロとおく，つまり,

$$\frac{d\pi(q*)}{dq} = p - \frac{dC(q*)}{dq} = 0$$

から求まる．ただし，これは利潤最大化のための１階の条件（必要条件）にすぎず，上式の解 $q*$ が利潤を最大にしていることを保証するためには，さらに以下の最大化のための２階の条件（十分条件）が満たされなければならない：

$$\frac{d^2\pi(q*)}{dq^2} = -\frac{d^2C(q*)}{dq^2} < 0$$

このことは，利潤を最大にする生産量 $q*$ では，限界費用が逓増している（$\frac{d^2C(q*)}{dq^2} > 0$）ことを意味している．

１１．企業の供給曲線

価格が変化すると最適生産量はどう変化するのか？

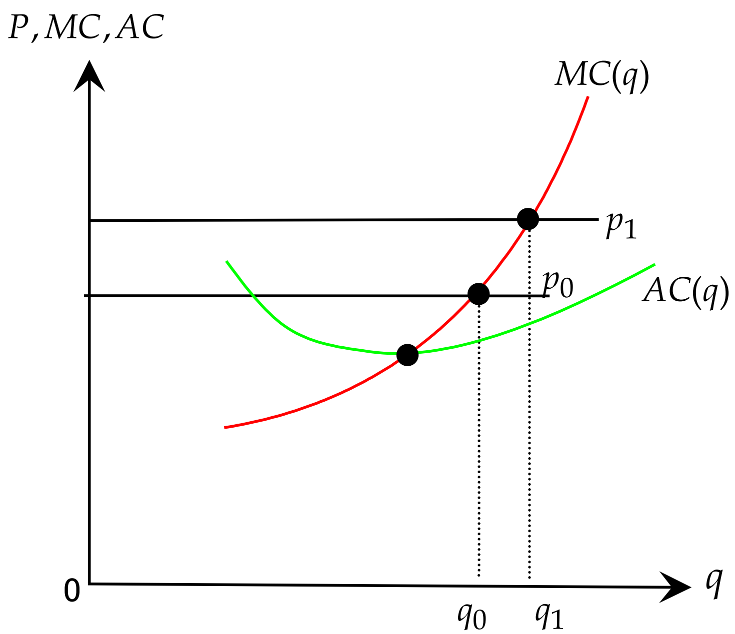

図 11.1:最適生産量と価格変化　価格上昇：$p_0 \to p_1$　最適生産量：$q_0 \to q_1$

価格が上昇すると，価格と最適生産量の組合せを表す点はＭＣ曲線上に沿って上昇．

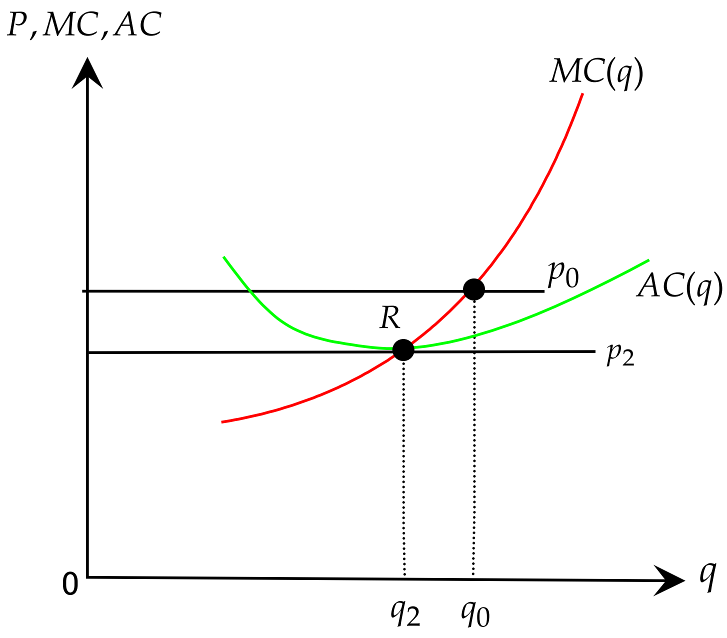

図１１．２　損益分岐点

価格下落：$p_0 \to p_2$　最適生産量：$q_0 \to q_2$

点 R においては，$p_2 = AC(q_2) = C(q_2)/q_2$ が成立．よって，$\pi(q_2) = p_2 q_2 - C(q_2) = 0$．つまり，価格が p_2 の時，企業の最適生産量は q_2 で，可能な最大利潤は０である．点 R は**損益分岐点**と呼ばれる．最大利潤がゼロとなるような価格と生産量の組合せを表すのが損益分岐点である．

点 R で最大利潤はゼロなので，企業は操業を停止するのか？

停止しない！なぜか？いま企業が操業を停止したとする，つまり，$q = 0$．この時利潤は，$\pi(0) = p \cdot 0 - C(0) = 0 - VC(0) - f = -f < 0 = \pi(q_2)$

となる．よって，価格が p_2 の時，企業は q_2 生産した方が，操業停止するよりも多くの利潤を得ることができる．

さらに価格が下落し，p_2 よりも低い水準まで下がると，最大利潤はマイナスとなる．しかし，そのマイナス分が，操業停止したときの利潤＝固定費用のマイナス分($-f$)より大きい限り，操業を続行($q > 0$)する．

操業を停止するのは，利潤のマイナス分が固定費用のマイナス分($-f$)と等しくなると

ころ，つまり，

$$pq - C(q) = -f$$

が成立するようなところである．上式を書き換えると，

$$pq - VC(q) - f = -f \qquad \therefore p = \frac{VC(q)}{q}$$

つまり，価格 p と平均可変費用 $AVC(q)$ が等しくなるところで企業は操業を停止する．

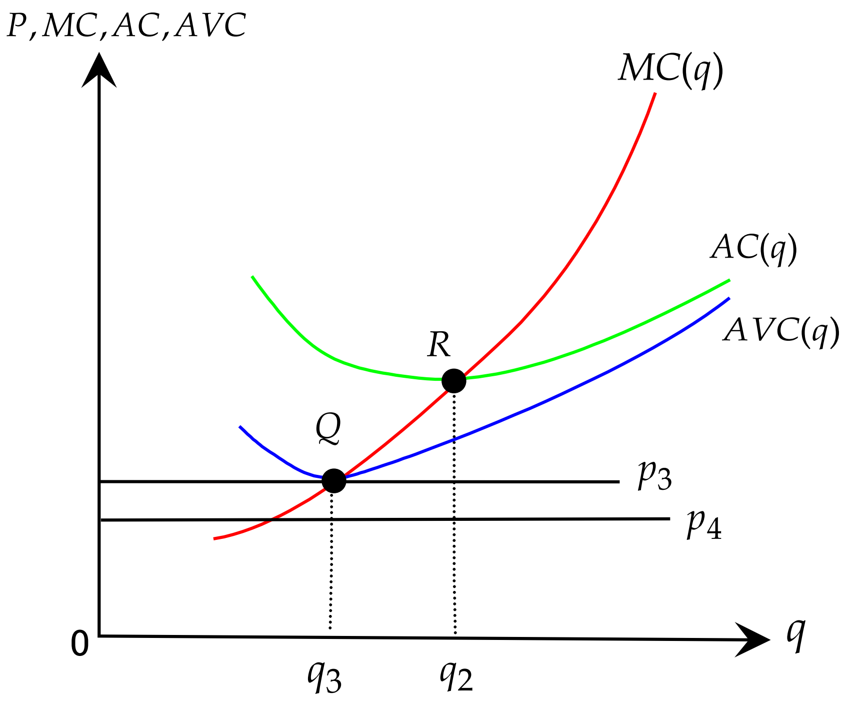

図１１．３　操業停止点

価格が p_3 の時，生産量 q_3 で $p_3 = MC(q_3)$ が成立する．ところが，q_3 においては，$p_3 = AVC(q_3)$，つまり，価格と平均可変費用は等しくなり，企業は生産量 q_3 を選んでも，操業を停止し生産量ゼロを選んでも利潤は同じとなる．価格が p_3 より低くなれば，企業は操業停止した方が，価格と限界費用が等しくなるような生産量を選ぶよりも大きな利潤を得る．点Ｑは**操業停止点**と呼ばれ，そこでは限界費用曲線ＭＣと平均可変費用ＡＶＣが交わっている．最大利潤が操業停止した場合に得られる利潤と等しくなるような価格と生産量の組合せを表すのが操業停止点である．

企業の供給曲線 S：さまざまな価格水準に対して最適生産水準はいくらかを示したもの．

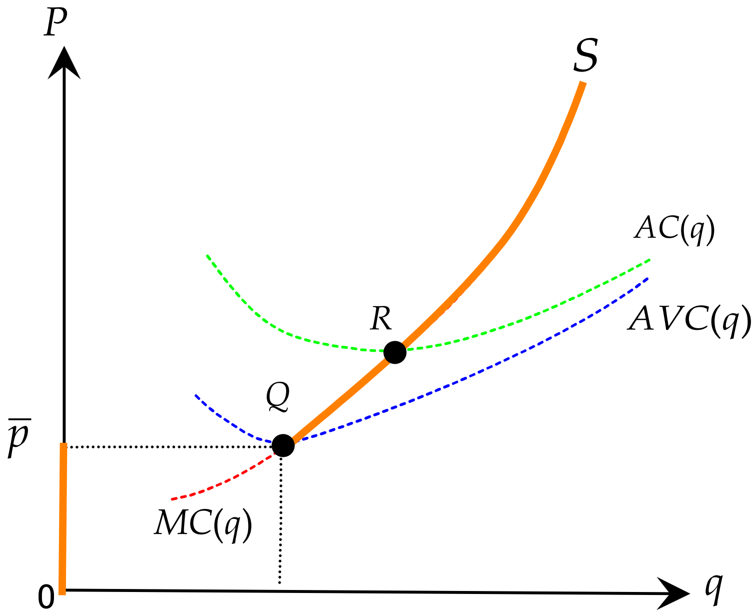

図１１．４　企業の供給曲線

価格が $\overline{p}$ 以上の時，供給曲線はＭＣ曲線と同じである．

価格が $\overline{p}$ より小さい時，供給曲線は縦軸$(q = 0)$となる．

１２．産業供給

ある特定の財を生産している企業の集まりを産業と呼ぶ．産業供給は，ある産業に属する n 個の企業の総産出量である．例えば，価格が p^0 の時，各企業の産出量は q_i^0 で，産業供給量は $Q^0 = \sum_{i=1}^{n} q_i^0$ である．一般に，価格が p の時の産業企業供給量は $Q(p) = \sum_{i=1}^{n} q_i(p)$ で表される，ここで $q_i(p)$ は価格が p の時の企業 i の供給量である．

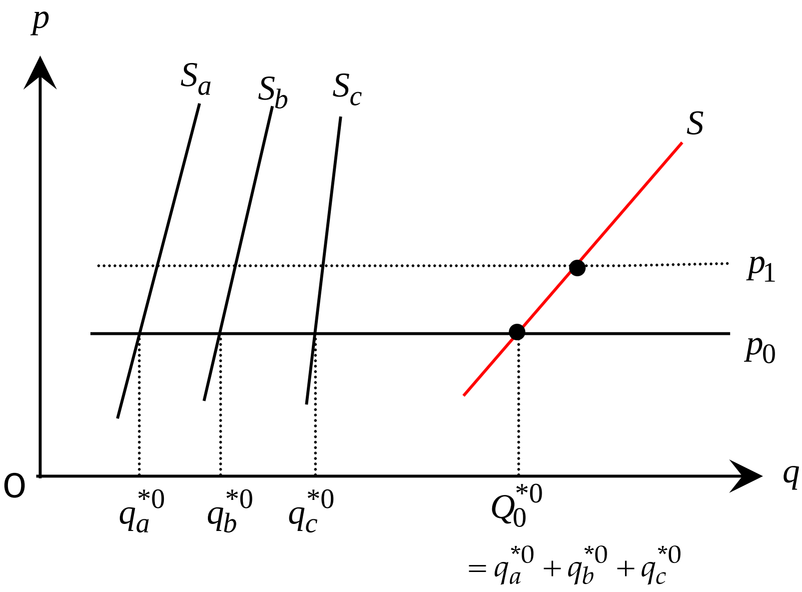

図１２．１　産業供給曲線：３企業 a , b, c のケース

競争産業の供給曲線は，企業の供給曲線を水平に足し合わせたものである.

１３．短期と長期

２種類の生産要素：

可変要素：すぐに調整できるもの．労働，原材料等.

固定要素：調整に時間のかかるもの．資本，土地などの生産設備.

短期：固定要素，つまり資本，土地などの生産設備は変更できない．労働，原材料といった可変要素のみ調整できる.

長期：固定要素，つまり資本，土地などの生産設備も変更できる．すべての生産要素は可変要素となる.

これまでは短期について分析してきた．この節では，長期の費用曲線について考察する．長期においては生産設備の大きさも企業は選択できる.

例）三つの生産設備の規模：

小規模 f_1，中規模 f_2，大規模 f_3，固定費用の大きさが異なる． $f_1 < f_2 < f_3$

C_1 ：小規模生産設備下での短期費用曲線　C_2 ：中規模生産設備下での短期費用曲線

C_3 ：大規模生産設備下での短期費用曲線

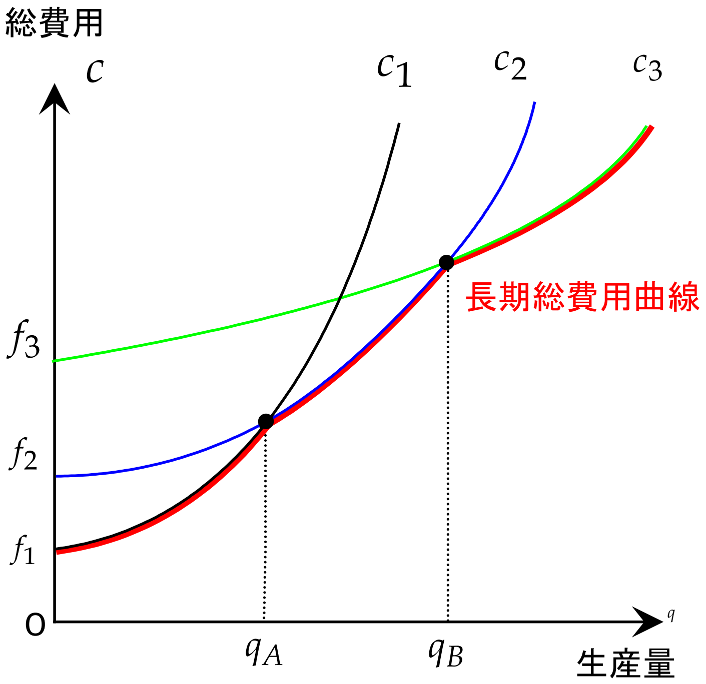

図１３．１　長期総費用曲線

小規模生産　$0 \le q \le q_A$　　C_1 が最も下に位置する．小規模設備が効率的.

中規模生産　$q_A < q \le q_B$　C_2 が最も下に位置する．中規模設備が効率的.

大規模生産　$q_B < q$　　　C_3 が最も下に位置する．大規模設備が効率的.

「長期総費用曲線」　各生産水準について，生産設備の水準の調整も行った上で実現できる最も低い総費用はいくらかを表す.

上では三種類の生産設備の規模の選択のみが可能であった．生産設備の水準が様々なレベルに調整できる場合，長期総費用曲線は以下のようになる．

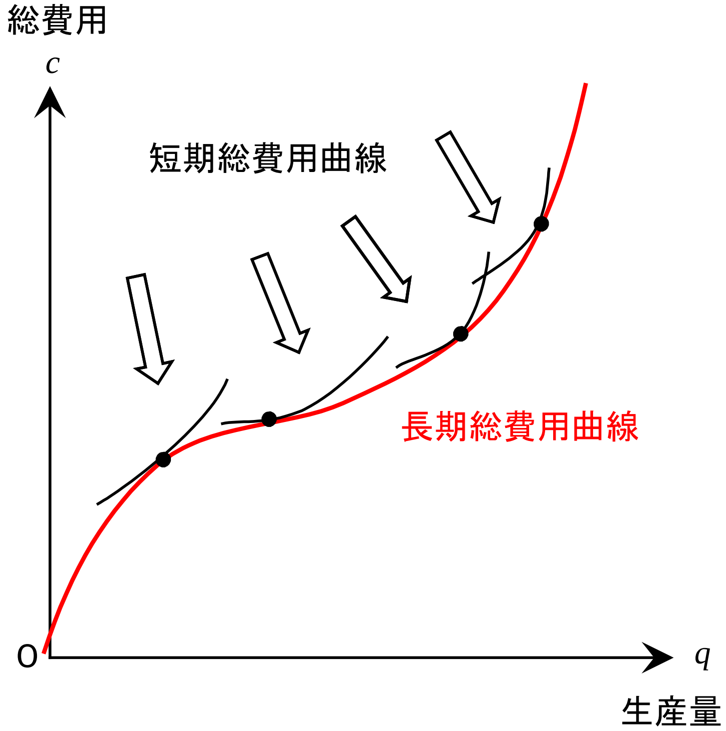

図１３．２　長期総費用曲線と短期総費用曲線

長期総費用曲線は短期総費用曲線群の下方包絡線となる．

限界費用曲線と平均費用曲線は短期と長期ではどうような関係にあるか？

LMC：長期限界費用曲線　*LAC*：長期平均費用曲線

SMC：短期限界費用曲線　*SAC*：短期平均費用曲線

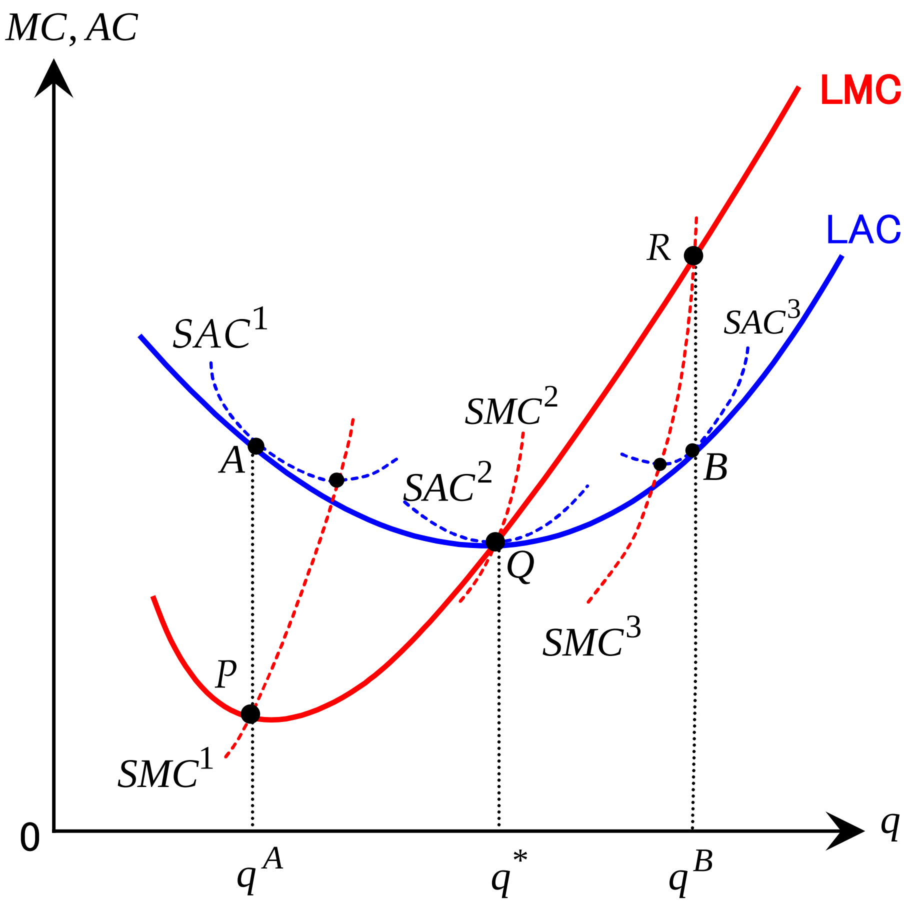

図１３．３　限界費用曲線と平均費用曲線：短期と長期

***LMC*，*LAC*，*SMC*，*SAC* の特徴：**

１）長期平均費用曲線 *LAC* は短期平均費用曲線群 *SAC* の下方包絡線である．

２）長期限界費用曲線 *LMC* と長期平均費用曲線 *LAC* は，共に当初下降して最小点に達し，それ以降上昇する．しかし，*LMC* の最小点は *LAC* 最小点より左側にある．

３）長期限界費用曲線 *LMC* は短期限界費用曲線群 *SMC* の下方包絡線とはならない．（*SMC* は生産量が変化した時の短期可変費用のみの変化率に等しいが，*LMC* は固定費用を含めたすべての費用が変わる時，生産量が変化した時の総費用の変化率である．）

生産の理論１１章～１３章に関する演習問題

１）ａ）企業が利潤を最大にする生産水準において成立している条件は何か？なぜその条件が成立していなければならないか？

ｂ）以下の語句の定義を書き，図を用いて表せ.

損益分岐点，操業停止点，企業の供給曲線，産業の供給曲線

２）ａ）生産活動に関して，長期と短期の重要違いは何か？

ｂ）長期総費用曲線とは何か？一つの図に長期費用曲線と短期総費用曲線を描け.

ｃ）一つの図に，長期限界費用曲線（LMC），長期平均費用曲線（LAC），短期限界費用曲線（SMC），短期平均費用曲線（SAC）を描け．それらの特徴を述べよ.

３）完全競争市場に属するある企業の（短期における）生産活動を考える．いま財の生産量をqで表わそう．固定費用=２４，可変費用関数を$VC(q) = 6q^2$とする.

ａ）総費用関数$C(q)$を求めよ．また，総費用曲線，可変費用曲線，固定費用を一つの図に書け.

ｂ）平均費用関数$AC(q)$，平均可変費用関数$AVC(q)$，限界費用関数$MC(q) = \frac{dC}{dq}$を求めよ.

ｃ）財の価格はｐ＝４８であるとしよう．利潤を最大にする生産量の値 $q*$ を求めよ．また，最大利潤の値$\pi*$を求めよ.

ｄ）損益分岐点と操業停止点を求めよ．また，平均費用曲線，平均可変費用曲線，限界費用曲線を一つの図に書け．さらに，損益分岐点と操業停止点がどこかを示せ.

ｅ）この企業の供給曲線を求め，図に表せ.

４）固定費用 = 32，可変費用関数を$VC(q) = q^3 - 6q^2 + 18q$とする．問３）と同じ問題ａ）～ｅ）について答えよ．ただし，ｃ）について価格は$p = 198$であるとする.

５）賃金w，資本の価格rを所与として行動する完全競争企業を考える．いま，生産関数は$q=AL^{a}K^{1-a}(A>0,0<a<1)$で表されるものとする．また，短期において，労働が可変要素，資本が固定要素であるとしよう．

ａ）短期費用関数$C_S(q)$を求めよ．

ｂ）長期費用関数$C_L(q)$を求めよ．

ｃ）長期費用関数を描いた長期費用曲線が短期費用関数を描いた短期費用曲線の包絡線になっていることを示せ，つまり，

（１）任意の$q>0$について，$C_L(q)\leq C_S(q)$が成立する．

（２）上の不等式の等号は，ただ一つの生産量$q(K;w,r)$において成立する．また，この点において，$C_L(q)$と$C_S(q)$はお互いに接する．