電磁気学Ｉ　演習 第５回 解答

6’’. (1)　Fig. 6’’(a)のように半径 r の円輪を線電荷密度σで一様に帯電させるとき、円輪の中心を通り垂直な軸上（z 軸上）の電界を、円輪の周上の微小電荷σdl がつくる電界を足し合わせることにより求めよ。

(2)　もし線電荷が r 方向に微小幅 dr を持ち、細い平板ドーナツ状になっているとき、これが z 軸上につくる電界は、(1)の結果において線電荷密度σ を面電荷密度σ' に置き換え、それに dr をかけたものになる。それを踏まえ、Fig. 6’’(b)のように、半径 a の円盤が面電荷密度σ'で一様に帯電しているとき、同様に z 軸上に作る電界を求めよ。

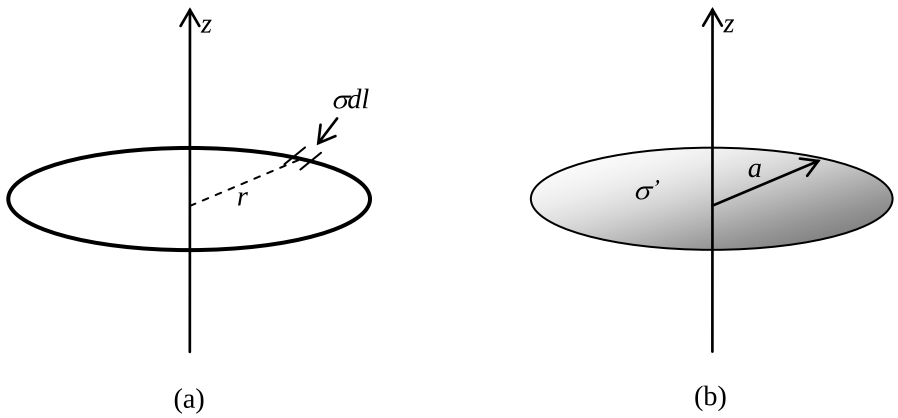


Fig. 6’’

【解答】

(1)

対称性より、電界は z 成分しか持たない。微小線分が作る z 方向の電界は、

$$dE_z = \frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dl = \frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}rd\varphi$$

であるので、

$$E_z = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}rd\varphi$$

$$= \frac{z\sigma r}{2\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

(2)

問題文の通り、微小幅の平板ドーナツが作る z 方向の電界は、

$$dE_z = \frac{z\sigma' r}{2\varepsilon_0 \left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dr$$

よって、

$$E_z = \int_{r=0}^{a} \frac{z\sigma' r}{2\varepsilon_0 \left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dr$$

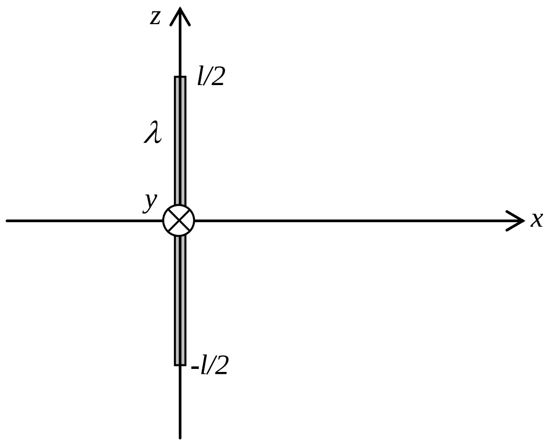
$$= \frac{z\sigma'}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{z\sigma'}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

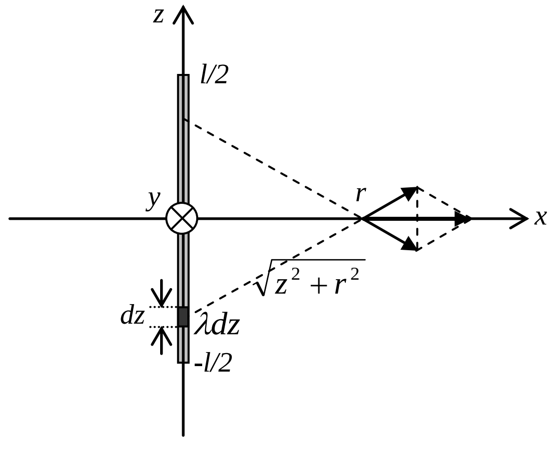
5. 長さ l の直線状電荷があるとき、この直線状電荷の中点を通り、かつ垂直な面内の電界を求めよ。ただし、線状電荷の線電荷密度は λ [C/m]とする。必要があれば

公式 $\displaystyle\int (z^2+a^2)^{-3/2}dz = \frac{z}{a^2\sqrt{z^2+a^2}}+C$

を用いて良い。

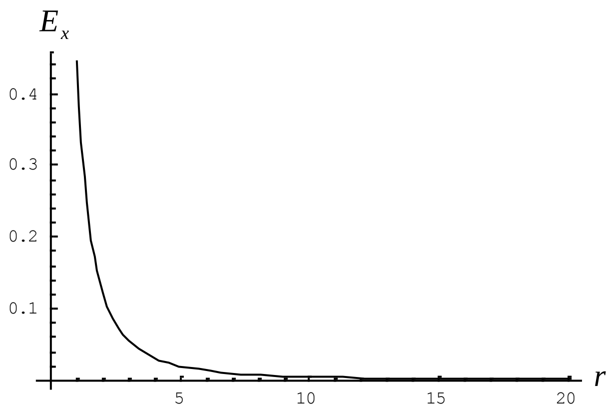


解答



対称性より、電界は x 軸上で x 成分しか持たない。z の位置にある長さ dz の微小線電荷が $x=r$ の位置に作る電界の x 成分は $\frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+r^2)} \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}$ であり、これを積分して、

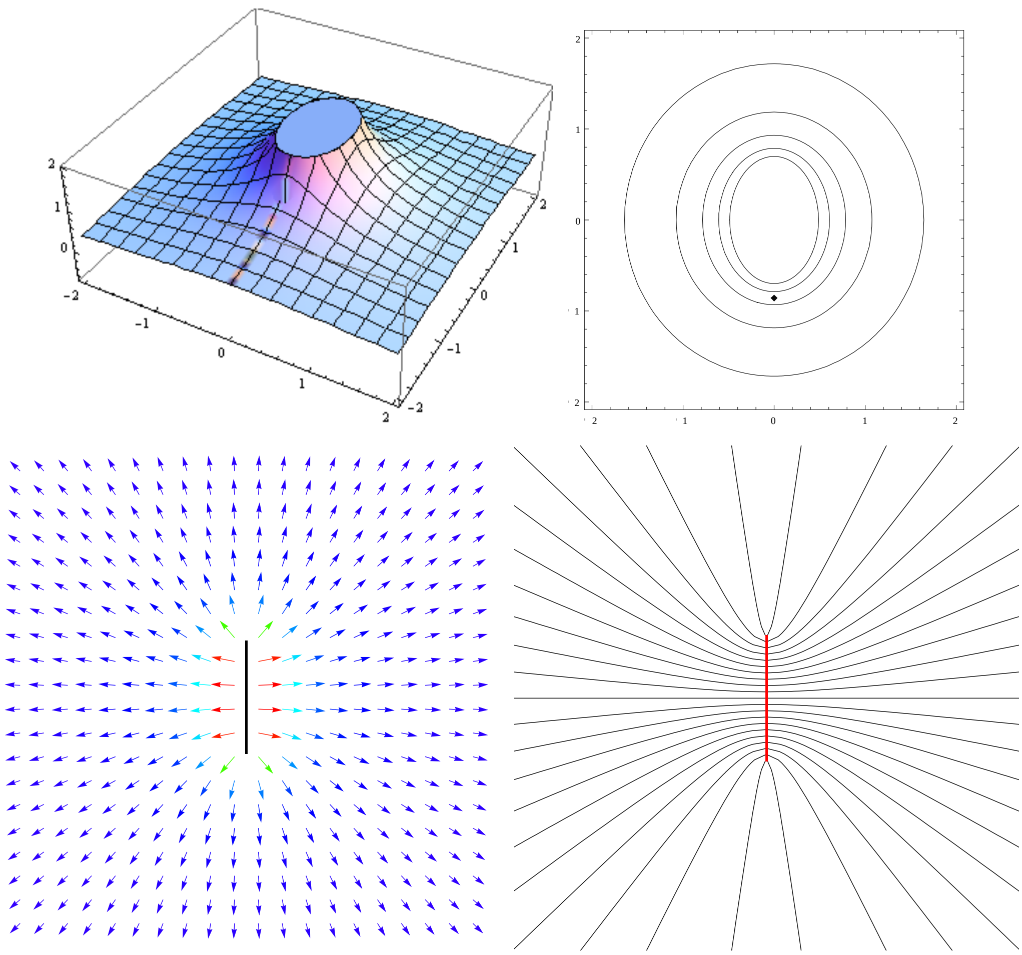
$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z=-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{z}{r^2\sqrt{z^2+r^2}} \right]_{z=-l/2}^{l/2} \\
&= \frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{l/2}{r^2\sqrt{(l/2)^2+r^2}} - \frac{-l/2}{r^2\sqrt{(l/2)^2+r^2}} \right] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+r^2}}
\end{aligned}
$$



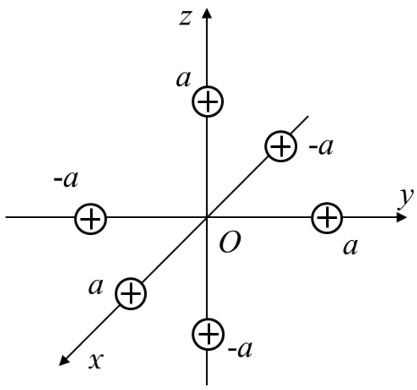
ところで、$l \to \infty$(無限長線電荷)とすると、

$$
\lim_{l\to\infty} E_x = \lim_{l\to\infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+r^2}} = \lim_{l\to\infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{l/2}\right)^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}
$$

となり、ガウスの法則と対称性から求めた解と一致する。逆に言うと、$r << l$ のときは無限長線電荷が作る電界で良く近似できると言える。



6’’’. 6 つの点電荷 $q/6$ が図のように配置されている。x 軸上 $(x \geq 0)$ 上の電界を求め、x に対するグラフの概形を図示せよ。また、点電荷 q が 1 つだけ原点にある場合の電界と比較せよ。



【解答】

(i) $x < a$ のとき

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{6}\left[-\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{4}{a^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$$

(ii) $x \geq a$ のとき

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{6}\left[\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{4}{a^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$$

電荷が原点に 1 個だけあるときは

$E_x = q/4\pi\varepsilon_0 x^2$