

第1章 静電場と静電ポテンシャル 1

● クーロンの法則

電荷 $q_1[\text{C}]$ と $q_2[\text{C}]$ がそれぞれ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に置かれている場合

($q_1 - q_2$ 間の遠隔力) = (q_1 が電場を作る) + (その電場が q_2 に与える力)

$$\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}(1 \rightarrow 2) = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{kq_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad \text{と} \quad \mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) \quad (2)$$

電場の単位は $[\text{N/C}] = [\text{V/m}]$. q_1 と q_2 の役割を入れ替えると、 q_2 が q_1 に与える力 ((1) 式の反作用) が得られる。

● 重ね合わせの原理 (線型性)

点 \mathbf{r} の電場は、(全宇宙の) すべての電荷の電場の重ね合わせで得られる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\text{すべての電荷}} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{kq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i) \quad (3)$$

● 多数の電荷が連続に分布している場合

微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ あたりの電荷 ΔQ によって、電荷密度 $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ を定義し、その連続極限をとると、

$$\Delta Q = \rho \Delta V \xrightarrow{\text{(連続極限)}} dQ(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) dV \equiv \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (d^3\mathbf{r} = dx dy dz) \quad (4)$$

これを用いて、(3) 式の和を積分に書き換えると ($\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}', \Delta V \rightarrow d^3\mathbf{r}'$)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \int d^3\mathbf{r}' k \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5)$$

● 点電荷に対応する電荷分布は (3次元) デルタ関数を用いて表すことができる。電荷の位置を $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ とすると

$$\delta(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (6)$$

$$\rho(\mathbf{r}') = q \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = q \delta(x' - x_0) \delta(y' - y_0) \delta(z' - z_0) \quad (7)$$

簡単のため $\mathbf{r}_0 = 0$ とすると、クーロンの法則は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' k \frac{q \delta^{(3)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = k \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (8)$$

- 無限に長い直線上の一様電荷分布による電場

直線を z 軸にとり、距離 R 離れた点 $(R, 0, 0)$ での電場を計算する。

$\rho(x', y', z') = \lambda \delta(x') \delta(y')$ と置くと z 軸上の一様な直線電荷を表す

$$\mathbf{E}(R, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k\lambda}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} (R, 0, -z'), \quad (9)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k\lambda R}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{2k\lambda}{R} \quad (z' = R \tan \theta \text{ と変数変換}) \quad (10)$$

$$E_y = E_z = 0$$

• ガウスの法則（積分形）

空間 V を囲む閉曲面 S を貫く電場の法線成分の表面積分は V 中の電荷の総量 Q に等しい。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \quad (11)$$

$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ は S 上の微少面積要素ベクトルで、向きは法線方向 V の外向きとする。
(\mathbf{n} は法線方向 V の外向きの単位ベクトル。)

[ガウスの法則の証明]

[A] 原点に置かれた点電荷 q について (11) 式を証明する

(I) 原点を中心とする半径 R の球面を S とすると (11) 式が成り立つ。

[証明] 球面座標 (r, θ, ϕ) を用いて積分を表すと

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \\ dV &= dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = r^2 dr d(\cos \theta) d\phi = r^2 dr d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \mathbf{e}_r R^2 d\Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

角度方向の積分要素 $d\Omega \equiv d(\cos \theta) d\phi$ は微分立体角と呼ばれ、積分区間は θ が $(0, \pi)$, $\cos \theta$ は $(-1, 1)$, ϕ が $(0, 2\pi)$ で、全方向の積分は半径 1 の球面の表面積を与える。

$$\oint d\Omega = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \quad (14)$$

S 上での電場は $\mathbf{E} = k \frac{q}{R^2} \mathbf{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_r$ となり、 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ は R に依存しない。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (15)$$

(II) 原点を内部に含まない閉曲面 S に対して $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ が成り立つ。

[証明] 原点を頂点とし微小な立体角を持つ錐が閉曲面を切り取る微小面積要素を $d\mathbf{S}$ とし、その点までの距離を R とする。 $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}$ は微小面積要素を半径 R の球面上に射影した面積要素で $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \pm R^2 d\Omega$ となる。ここで符号は、 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ と \mathbf{e}_r のなす角度が鋭角 (+) か鈍角 (-) かで決まる。この部分からの積分への寄与は

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = kq \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \pm kq d\Omega \quad (16)$$

で与えられ、電荷 (原点) からの距離や、面積要素の向き \mathbf{n} によらない。

原点を頂点とする微小立体角の錐は閉曲面と 2 回 (あるいは偶数回) 交わり、それらの (11) 式への寄与は同じ立体角で与えられるが、逆符号なので、和は 0 となる。このような微小な錐で閉曲面全体を覆うことにより全体を積分すると (11) 式が成り立つ。

(III) 点電荷 q が作る電場について、任意の閉曲面で (11) 式が成り立つ。

[証明] 任意の閉曲面を q を中心とする (微小な) 球面と、 q を含まない複数個の閉曲面に分割する。分割した 2 つの閉曲面が接する面では、それぞれの面の外向き法線方向が逆向きなので、それらの寄与が互いに打ち消し合うことに注意する。それぞれの閉曲面に対して、(11) 式が成り立つので、それらの和をとれば、任意の閉曲面で (11) 式が成り立つことが分かる。

[B] 任意の電荷分布について (11) 式が成り立つことを証明する

[証明] 重ね合わせの原理を用いると、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ である。それぞれの q_i と \mathbf{E}_i の組について、(11) 式が成り立つので、それらの和をとると任意の電荷分布について、(11) 式が成り立つことが分かる。

- 導体の表面電荷 (表面電荷密度 σ [C/m²]) による電場を求める。
無限平面導体に一様に電荷が分布していると仮定する。閉曲面を導体の表面に垂直な底面積が 1 の円筒にとり、表面に垂直外向き方向の電場を E_\perp とすると

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (17)$$

ここで、導体内部では静電場が 0 であることに注意する。

- ガウスの法則の微分形
閉曲面 S として、微小な長さ a を一辺とする立方体 ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$) の表面をとり、ガウスの法則を適用する。

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &\simeq (E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z))\Delta y\Delta z \\ &\quad + (E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z))\Delta z\Delta x \\ &\quad + (E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z))\Delta x\Delta y \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (18)$$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} \simeq \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (19)$$

(18) 式と (19) 式を a^3 で割って, $a \rightarrow 0$ の極限を比較すると

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{ガウスの法則の微分形}) \quad (20)$$

特に電荷のない空間 (点) では $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

- ガウスの発散定理
ベクトル場 \mathbf{A} に対して

$$\int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \int_{S=\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \quad (21)$$

S は閉曲面で, V は S によって囲まれる 3 次元領域を表す。 dV は体積要素、 $d\mathbf{S} (= \mathbf{n} dS)$ は面積要素で法線方向外向きのベクトル。

$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}$ とおけば、ガウスの法則の微分形から積分形が得られる。

問題 1

クローンの法則が逆二乗則ではなくて、力が $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$ ($\epsilon \neq 0$) に比例するとすると、ガウスの法則が成り立たないことを示せ。

問題 2

ガウスの法則を用いて、無限に広い (薄い) 平面上に表面電荷密度 σ の一様電荷が分布するときの電場を求めよ。

問題 3

(a) $(x, y, z) = (0, 0, a)$ と $(0, 0, -a)$ にそれぞれ電荷 q が置かれているとき、 $(R, 0, 0)$ における電場を求めよ。

(b) z 軸上の $z = 0, \pm a, \pm 2a, \dots$ (無限) にそれぞれ電荷 q が置かれたとき、 $(R, 0, 0)$ における電場を求めよ。

(c) $q/a = \lambda$ を一定にして、 $a \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ の極限をとる。 $(R, 0, 0)$ における電場を求めよ。
(ヒント: $na/R = \xi$ へ変数変換すると良い)

第2章 静電場と静電ポテンシャル 2

● 電場の線積分

始点 A と終点 B を結ぶ曲線 L にそって、接線方向の電場を線積分すると、 $\int_{L(A \rightarrow B)} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ は点 A と B の静電ポテンシャルの差で与えられる。

[証明] \mathbf{r}_0 に置いた点電荷 q による電場の場合、

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (22)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (23)$$

が成り立つ。重ね合わせの原理より、一般の電荷分布についても (23) 式が成り立つ。

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (24)$$

曲線の微小部分 $\Delta\boldsymbol{\ell} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ についての Φ の全微分

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \Phi(x, y, z) \\ &\simeq \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta z = \nabla\Phi \cdot \Delta\boldsymbol{\ell} \end{aligned}$$

を用いて、 $\Delta\boldsymbol{\ell} \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\int_{L(A \rightarrow B)} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_A^B d\Phi = -\Phi(\mathbf{r}_B) + \Phi(\mathbf{r}_A) \quad (25)$$

特に、始点と終点が一致 ($A=B$) する閉曲線 C に沿った積分は

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (26)$$

経路 L に沿ってテスト電荷 q を移動した場合に電場が電荷に与える仕事は

$$W = \int_{L(A \rightarrow B)} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{L(A \rightarrow B)} q\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -q(\Phi(\mathbf{r}_B) - \Phi(\mathbf{r}_A)) \quad (27)$$

始点と終点だけで与えられるので、経路 L の取り方によらない。仕事を経路によらない力は保存力と呼ばれる。

● 電位と等電位面

静電ポテンシャルの値を電位とも呼び、 $\Phi(\mathbf{r}) = \text{定数}$ となる点の集合を等電位面と呼ぶ。等電位面に沿って動くテスト電荷には電場が仕事を与えないので、電場（あるいは電気力線）は等電位面に垂直である。

静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ を $\Phi'(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \Phi_0$ (Φ_0 は定数) と変形しても、対応する電場が変化しない。したがって、電位は一意的ではなく、定数だけの不定性がある。

静電ポテンシャル（電位）の単位は $[V] = [J/C]$ である。

- 電場の回転

閉曲線に沿った静電場の線積分が0となることを、 $x-y$ 平面上の微少な正方形の周上の積分に適用する。経路 L として $(x, y) \rightarrow (x + \Delta x, y) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y) \rightarrow (x, y + \Delta y) \rightarrow (x, y)$ をとると

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} &\simeq (E_x(x, y, 0) - E_x(x, y + \Delta y, 0))\Delta x + (E_y(x, y + \Delta y, 0) - E_y(x, y, 0))\Delta y \\ &\simeq \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

よって、静電場の回転 (rotation) は常に0となる。すなわち、

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{E})_z = 0, \quad \text{他の成分も同様} \quad (29)$$

したがって、静電場は $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を満たす。

- ストークスの定理

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \int_{C=\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A} \quad (30)$$

S は向きの付いた2次元面でその境界を C とする。 $d\boldsymbol{\ell}$ は C 上の線素ベクトルで向きは S を右手の法則で囲む向きにとる。

静電場は $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を満たすため、ストークスの定理により、始点と終点を決めると線積分が経路によらない。したがって、静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ が定義できて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (31)$$

と表すことができる。

逆に、 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ と表される静電場は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\Phi = 0 \quad (32)$$

を満たす。

- 直線電荷、面電荷に対応する静電ポテンシャル

$$\text{面電荷} \quad \mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \longrightarrow \Phi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \quad (33)$$

$$\text{線電荷} \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \longrightarrow \Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho \quad (\boldsymbol{\rho} = (x, y, 0)) \quad (34)$$

無限遠でのポテンシャルを0にとることはできないことに注意。

- ポアソン方程式

ガウスの法則から静電ポテンシャルが満たすポアソン方程式を導く。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{より} \\ \Delta \Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}\tag{35}$$

ここで、ラプラシアン Δ を次式で定義した。

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{36}$$

- 電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ による静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ がポアソン方程式を満たすこと

$$\begin{aligned}\text{公式} \quad \Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \text{ を用いると (証明は次ページ)} \\ \Delta_{\mathbf{r}} \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\end{aligned}\tag{37}$$

(2つ以上の変数があつて、微分がどの変数にかかるかを明らかにする必要がある場合には、 $\Delta_{\mathbf{r}}$ のように微分のかかる変数を添え字で表す。)

- ラプラス方程式

電荷がない空間で、静電ポテンシャルは、ラプラス方程式

$$\Delta \Phi = 0\tag{38}$$

を満たす。ラプラス方程式を満たす関数を調和関数とよぶことがある。

- アーンショウの定理

ラプラス方程式の解は極値 (極大、極小) をもたない。すなわち、静電ポテンシャルは電荷のない点で極大値あるいは極小値をとらない。この定理は (38) 式を満たす Φ が極値を持つと仮定し、極値の近傍での体積積分にガウスの定理を用いることにより、背理法により証明する。

- アーンショウの定理の応用

静電場によって電荷を安定に固定することはできない。正電荷は (他の電荷が作る) Φ が極小の点で安定を保つことができるが、アーンショウの定理によれば、 Φ は極値をとれないので、安定点も存在しない。負電荷の場合は極大について同じ論理を用いる。

- 公式 $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ の証明

右辺の3次元デルタ関数 $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ は原点で正則（微分可能）な任意の関数 $f(\mathbf{r})$ について

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{0}) \quad (39)$$

を満たす。ただし、 V は原点を含む領域を表す。

クーロンポテンシャルがラプラス方程式を満たすことからわかる通り、 $\Delta \frac{1}{r}$ は原点以外では0となる。しかし、原点では発散してしまうため

$$\int_V f(\mathbf{r}) \Delta \frac{1}{r} d^3\mathbf{r} = -4\pi f(\mathbf{0}) \quad (40)$$

を証明することにする。

(40) 式の左辺の積分を、原点を中心とする半径 ϵ の球の内部 R_ϵ とその外側 $\int_V = \int_{V-R_\epsilon} + \int_{R_\epsilon}$ の2つの部分に分ける。計算の最後で、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることにする。

R_ϵ の外側では、 $\Delta \frac{1}{r} = 0$ であるから

$$\int_{V-R_\epsilon} f(\mathbf{r}) \Delta \frac{1}{r} d^3\mathbf{r} = 0 \quad (41)$$

R_ϵ の部分にはグリーンの公式（3次元の部分積分）を用いると、

$$\begin{aligned} & \int_{R_\epsilon} f(\mathbf{r}) \Delta \frac{1}{r} d^3\mathbf{r} \\ &= - \int_{R_\epsilon} \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \nabla \frac{1}{r} d^3\mathbf{r} + \int_{R_\epsilon} \nabla \cdot \left(f(\mathbf{r}) \nabla \frac{1}{r} \right) d^3\mathbf{r} \\ &= \int_{R_\epsilon} \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} d^3\mathbf{r} - \int_S f(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (42)$$

右辺第1項は $|\nabla f(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0})|$ が有界であることを用いて、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では

$$\int_{R_\epsilon} \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} d^3\mathbf{r} \simeq \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \int_{R_\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} d^3\mathbf{r} = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \int \mathbf{n} d\Omega = 0 \quad (43)$$

第2項は半径 ϵ の球面上での積分で、 $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r \epsilon^2 d\Omega$ を用いて

$$- \int_S f(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} \simeq -f(\mathbf{0}) \frac{1}{\epsilon^2} \int \epsilon^2 d\Omega = -4\pi f(\mathbf{0}) \quad (44)$$

よって、(40) 式が成り立つことが示された。

- 静電ポテンシャルによる静電場の計算

静電場の問題は、電場そのものよりも静電ポテンシャルを計算する方が簡単である場合が多い。実例として、距離 d だけ離れて置かれている $+q$ と $-q$ の正負電荷が作る電場を $r \gg d$ の領域で計算する。電荷が並んでいる方向を z 軸にとると ($z = r \cos \theta$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - (d/2)\mathbf{e}_z|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} = \frac{1}{r} + \frac{zd}{2r^3} + \dots \simeq \frac{1}{r} + \frac{d \cos \theta}{2r^2} \quad (45)$$

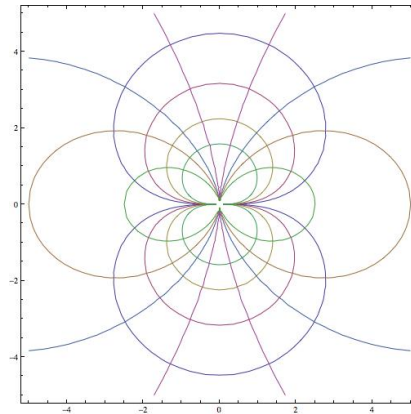
$$\Phi(\mathbf{r}) = kq \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{d}{2}\mathbf{e}_z|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{d}{2}\mathbf{e}_z|} \right) \simeq kq \frac{d \cos \theta}{r^2} = kp \frac{z}{r^3} \quad (p \equiv qd) \quad (46)$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ に注意して、 x, y, z で偏微分すると

$$\mathbf{E} \simeq k \frac{p}{r^5} (3xz, 3yz, 3z^2 - r^2) = \frac{k}{r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}) \quad (47)$$

ここで、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ を用いた。 $\mathbf{p} = pe_z \equiv qd\mathbf{e}_z$ は電気双極子モーメントと呼ばれる。

この例のように、静電ポテンシャルは1成分で表せるので、一般に電場の3成分を計算するよりは簡単である。電気双極子による電場とポテンシャルを下図に示す。



問題 4

点電荷による電場 \mathbf{E} が $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, (29) 式を満たすことを確かめよ。

問題 5

一般に微分可能な $\Phi(\mathbf{r})$ について、ベクトル $\nabla \Phi$ が $\Phi = \text{一定}$ で定義される2次元面に垂直であることを示せ。(ヒント：接線方向の微小変位 $d\ell$ に沿った Φ の変化を考える。)

問題 6

(a) 原点においた電気双極子 $\mathbf{p} = pe_z$ による静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r}) = kp \frac{\cos \theta}{r^2}$ が $r \neq 0$ でラプラス方程式 $\Delta \Phi = 0$ を満たすことを示せ。

(b) $z = 0$ 平面上 ($r \neq 0$) での電場の大きさを原点からの距離の関数として図示せよ。

第3章 静電場の基本法則 1

● グリーンの公式

微分可能なスカラー関数 $\Phi(\mathbf{r})$, $\Psi(\mathbf{r})$ について

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \Phi \nabla \Psi = \int_V dV \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) = \int_V dV (\Phi \Delta \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) \quad (48)$$

特に $\Phi = \Psi$ とすると

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \Phi \nabla \Phi = \int_V dV (\Phi \Delta \Phi + |\nabla \Phi|^2) \quad (49)$$

● 導体と境界値問題

すべての電荷分布が与えられていれば、静電ポテンシャルが計算できるが、一般には電荷分布を知ることが難しい場合が多い。一方、境界が導体表面あるいは無限遠で与えられる空間 V 中では、それぞれの導体の電位または電荷を与えれば、ポアソン方程式の解が一意的に決まる。導体中では電荷が自由に移動できるので、電位差があると電荷に力が加わって電流が流れてしまう。したがって、定常状態では、導体内の電位は一定で、電荷は導体内部には存在できず、導体表面にのみ存在する。

● ポアソン方程式の解の一意性

空間 V の境界 S が導体あるいは無限遠であるとし、無限遠の電位は 0 であると仮定する。 V 中の電荷分布 ρ が与えるポアソン方程式の解は一意的であることを証明することができる。

まず、同一のポアソン方程式を満たす解として $\Phi_1(\mathbf{r})$ と $\Phi_2(\mathbf{r})$ があると仮定する。 $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})$ と定義すると、 $\Delta \Phi = 0$ をみたすので、(49) 式に代入すると、

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \Phi \nabla \Phi = \int_V dV |\nabla \Phi|^2 \quad (50)$$

境界条件として

(1) 導体の電位が与えられている場合

$\Phi|_S = \Phi_1|_S - \Phi_2|_S = 0$ だから、(50) 式の左辺は 0。従って、 $|\nabla \Phi| = 0$ となり、 $\Phi = (\text{一定})$ 。しかし、 Φ は境界 S 上で 0 なので、 V 内のすべての点で $\Phi = 0$ 、すなわち $\Phi_1 = \Phi_2$ となって、解が一意であることが分かる。

(2) それぞれの導体を持つ全電荷が与えられている場合

1 つの導体について、(50) 式の左辺は、導体表面の電位が一定であるから、

$$\begin{aligned} \int_S d\mathbf{S} \cdot \Phi \nabla \Phi &= -(\Phi_1 - \Phi_2) \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \\ &= +(\Phi_1 - \Phi_2) \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 - Q_2) = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

となり、同じく、 $|\nabla \Phi| = 0$ が得られる。この場合は電位は定数分だけ自由に選ぶことができる。無限遠の電位を基準点 ($\Phi = 0$) とすると、定数が決まる。

- 導体に囲まれた電荷のない空間

導体の電位が一定であることとアーンショウの定理から、導体に囲まれた電荷のない空間ではポテンシャルは一定でなければならない。したがって $\mathbf{E} = 0$ 。このことは、ラプラス方程式の解の一意性からも言える。

- 解の一意性を用いて、ポアソン方程式を解く

z 軸方向の一様な定電場 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ 中に半径 R の導体球を置く。(この場合は、無限遠の電位を 0 とすることはできないが、導体球から十分離れた場所においた無限に広い平面導体上の電荷により定電場が作られていると考えれば、解の一意性に必要な条件を満たす。) 定電場を与える静電ポテンシャル $\Phi_{\text{定電場}}(r, \theta, \phi) = -Ez = -Er \cos \theta$ に、導体表面に誘起された電荷による $\Phi_{\text{球}}(\mathbf{r})$ が加わって、全静電ポテンシャルは

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{定電場}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{球}}(\mathbf{r}) \quad (52)$$

$\Phi_{\text{球}}(\mathbf{r})$ はラプラス方程式を満たし、境界条件として無限遠で $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ 、導体球の電位を $\Phi_0 (= \text{一定})$ とおくと、導体表面で

$$\begin{aligned} \Phi(R, \theta, \phi) &= -ER \cos \theta + \Phi_{\text{球}}(R) = \Phi_0 \quad \text{より} \\ \Phi_{\text{球}}(R, \theta, \phi) &= \Phi_0 + ER \cos \theta \end{aligned} \quad (53)$$

を満たさなければならない。 $\frac{1}{r}$ と $\frac{\cos \theta}{r^2}$ が $r \neq 0$ でラプラス方程式を満たすことから、

$$\Phi_{\text{球}}(r, \theta, \phi) = \Phi_0 \frac{R}{r} + E \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \quad (54)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 \frac{R}{r} + \left(-Er + \frac{ER^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (55)$$

- 鏡像法

点電荷を導体境界のそばに置くと、導体表面に電荷が集まる現象がおこる。これを静電誘導と呼ぶ。最も簡単な場合として、 $z < 0$ の領域を埋め尽くす導体の前面 $(0, 0, a)$ 点に点電荷 q を置く。導体は接地されていて、導体の電位は $\Phi = 0$ とする。

$$\Phi(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} + \Phi_1(x, y, z) \quad (56)$$

$\Phi_1(\mathbf{r})$ は、導体表面に誘起された電荷によるポテンシャルで、 $z = 0$ で $\Phi(x, y, 0) = 0$ でなければならないので

$$\Phi_1(x, y, 0) = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} \quad (57)$$

この条件を満たし、 $z > 0$ の領域でラプラス方程式を満たす関数は

$$\Phi_1(x, y, z) = -\frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad (58)$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad (59)$$

第2項は仮想的に $(0, 0, -a)$ 点に電荷 $-q$ を置いた場合の静電ポテンシャルで、 $z = 0$ でちょうど点電荷 q による静電ポテンシャルを打ち消して、 $\Phi = 0$ とする効果がある。

- 導体球と点電荷の場合

原点を中心とする半径 R の導体球の外側の点 $(0, 0, a)$ ($a > R$) に点電荷 q を置く。静電ポテンシャルとして

$$\Phi(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{kq(R/a)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - R^2/a)^2}} \quad (60)$$

とすると、導体球の電位を 0 とする解が得られる。第2項は、電荷 $q' = (R/a)q$ を導体球内部の点 $(0, 0, R^2/a)$ に置いたことに相当する。

- 静電場のエネルギー

孤立した導体に電荷 Q を与えた時の電位 Φ は Q に比例する。 $\Phi = \frac{Q}{C}$ と書いて、 C を導体の静電容量と呼ぶ。この系の静電エネルギーは、電位 Φ の導体に無限遠 ($\Phi = 0$) から微少電荷 δQ を加えるのに必要なエネルギーを用いて次の様に与えられる。

$$\delta \mathcal{E} = \Phi \delta Q = \frac{Q}{C} \delta Q \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Phi = \frac{1}{2} C \Phi^2 \quad (61)$$

グリーンの公式を用いて、導体表面以外には電荷が存在しないことを用いると、

$$\begin{aligned} \int_V dV (\Phi \Delta \Phi + |\nabla \Phi|^2) - \int_S dS \cdot \Phi \nabla \Phi &= \int_V dV \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\epsilon_0} Q \Phi = 0 \quad \text{より} \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Q \Phi = \int_V dV \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \end{aligned} \quad (62)$$

こうして静電エネルギーを電荷によって生じる電場が場として持っているエネルギーとして書き表すことができる。よって、電場のエネルギー密度は $\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2$ で与えられる。

- 導体系の静電エネルギー

複数の導体に電荷 $Q_i (i = 1, \dots, N)$ を与えたとき、それぞれの電位が Φ_i となったとする。このとき、電位と電荷の関係は

$$\Phi_i = \sum_j (C^{-1})_{ij} Q_j, \quad Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j \quad (63)$$

となる。ここで、 C^{-1} は C の逆行列を表す。 $(C^{-1})_{ij}$ は Q_j 以外の電荷をすべて 0 とし、 $Q_j = 1$ とした場合の Φ_i として定義される。

電位が 0 の無限遠点から微少電荷 δQ_i を導体 i に付け加えると、静電エネルギーは

$$\delta \mathcal{E} = \delta Q_i \Phi_i = \sum_j \delta Q_i (C^{-1})_{ij} Q_j \quad (64)$$

だけ変化するから、

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_i (C^{-1})_{ij} Q_j = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Phi_i C_{ij} \Phi_j \quad (65)$$

- コンデンサーの静電容量

2個の近接した導体にそれぞれ電荷 Q と $-Q$ を与えた時の導体間の電位差は

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= ((C^{-1})_{11} - (C^{-1})_{12})Q, & \Phi_2 &= ((C^{-1})_{21} - (C^{-1})_{22})Q \\ V_{12} \equiv \Phi_1 - \Phi_2 &= ((C^{-1})_{11} - (C^{-1})_{12} - (C^{-1})_{21} + (C^{-1})_{22})Q \equiv \frac{Q}{C}\end{aligned}\quad (66)$$

コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Q(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2}QV_{12} = \frac{Q^2}{2C}\quad (67)$$

- 点電荷の系の静電エネルギー

点電荷 q が与える電場を上のを要領で積分すると無限大となる。これは、点電荷の自己エネルギーが $+\infty$ の値をとるためである。点電荷の系の静電エネルギーは、自己エネルギーを差し引いて計算する。すなわち

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi'_i(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\quad (68)$$

$$\Phi'_i(\mathbf{r}) \equiv \sum_{j \neq i} k \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (i \text{ を除く電荷による静電ポテンシャル})\quad (69)$$

問題 7

(a) (55) 式のポテンシャルに対応する電場を求めよ。

(ヒント) 3次元球面座標系での微分演算子は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\quad (70)$$

(b) この電場が導体球の表面で表面に垂直であることを示せ。

(c) 導体の全電荷 Q を求め、 Φ_0 を Q を用いて表せ。

問題 8

(60) 式のポテンシャルに対応する、導体球の表面電荷分布および全電荷を求めよ。

問題 9

周りを導体に囲まれた半径 R の球形の穴の中で、球の中心からの距離 $a (< R)$ におかれた点電荷 q が作る静電ポテンシャルを求めよ。

問題 10

(a) 半径 R の導体球に電荷 Q を与えた時の静電エネルギーを計算し、この導体球の静電容量を求めよ。

(b) 点電荷の系のエネルギー $\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ は負になることがあるが、電場のエネルギー密度が負にならないことと矛盾しないのはなぜかを考えよ。

第4章 静電場の基本法則 2

- 原点付近の電荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ による原点から十分離れた点 \mathbf{r} での静電ポテンシャル
電荷分布の大きさ（半径）を a とすると、 $r' < a \ll r$ が成り立つので、静電ポテンシャルを $\xi \equiv r'/r$ で展開する。 \mathbf{r} と \mathbf{r}' のなす角を θ ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \theta$) として

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + (r')^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2}} \\ &\simeq \frac{1}{r} \left(1 + \xi \cos \theta + \xi^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= k \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \simeq \frac{k}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \frac{k}{r^2} \int \rho(\mathbf{r}') r' \cos \theta d^3 \mathbf{r}' + \dots \\ &= k \frac{q}{r} + k \frac{p \cos \theta}{r^2} + \dots = k \frac{q}{r} + k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} + \dots \end{aligned} \quad (72)$$

静電ポテンシャルを $1/r$ で展開すると、最低次が全電荷 $q \equiv \int \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$ 、ついで電気双極子モーメント $\mathbf{p} \equiv \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'$ で表されることがわかる。

- 点状の双極子モーメント \mathbf{p} を \mathbf{r}_0 点においた場合の静電ポテンシャル
電荷分布として $\rho(\mathbf{r}') = -\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$ ととれば良い。

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= k \int \frac{-\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' = -k \int \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \\ &= -k \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = k \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \quad (73)$$

- 誘電体の電気分極場と電束密度場

電荷を持たない絶縁体に電場を加えると、マクロな電荷分布は生じないが、誘電分極によりミクロな電気双極子が生じて電場が変化する。この効果を電気分極場 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ を用いて表す。

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (74)$$

$$\rho_P(\mathbf{r}) = \sum_i (-\mathbf{p}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (75)$$

すなわち、電気分極 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ は分極電荷密度 $\rho_P(\mathbf{r})$ に対応することが分かる。分極電荷密度をマクスウェル方程式に導入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_f + \rho_P}{\epsilon_0} \quad \text{より} \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) &= \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (76)$$

ここで、 ρ_f は分極による電荷密度を除いた自由電荷、あるいはマクロな電荷密度を表す。 \mathbf{D} は電束密度場と呼ばれる。 \mathbf{P} は、加わった電場 \mathbf{E} に比例するとし、その比例定数を $\epsilon_0\chi_e$ とおくと

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E} \quad \text{より} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (77)$$

ϵ は誘電率、 χ_e は電気感受率、 $(1 + \chi_e)$ は比誘電率と呼ばれる。

● 多重極展開

(71) 式をさらに一般的に展開すると、ルジャンドル多項式 $P_\ell(z)$ を用いて

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \theta + \xi^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos \theta) \xi^\ell \quad (|\xi| < 1) \quad \dots \quad P_\ell \text{の母関数} \quad (78)$$

$$P_\ell(z) \equiv \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell \quad (\text{ロドリゲスの公式}) \quad (79)$$

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \dots$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(r')^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) \quad \text{ただし、} r > r' \quad (80)$$

と書くことができる。これを用いて、十分大きい r に対して、 θ を \mathbf{r} から測った角度とすると、

$$\Phi(\mathbf{r}) = k \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{k}{r^{\ell+1}} \int \rho(r', \theta) (r')^\ell P_\ell(\cos \theta) d^3\mathbf{r}' \quad (81)$$

● 極座標によるラプラス方程式の一般解

極座標表示のラプラス方程式を変数分離法により各変数の独立な微分方程式で表す。ラプラス演算子は、極座標表示で

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{L}}^2 \quad (82)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (83)$$

と表される。ラプラス方程式 $\Delta\Phi = 0$ の解で、各変数の関数の積 $\Phi(\mathbf{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\phi)$ の形で書けるものを求める。

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \Theta\Psi - \frac{R}{r^2} \hat{\mathbf{L}}^2(\Theta\Psi) = 0 \quad (84)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2(\Theta\Psi) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \Psi - \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \quad (85)$$

と表される。両辺を $\Phi = R\Theta\Psi$ で割ると

$$\frac{1}{\Phi} \Delta\Phi = \frac{1}{R} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta\Psi} \hat{\mathbf{L}}^2(\Theta\Psi) = 0 \quad (86)$$

$$\frac{1}{\Theta\Psi} \hat{\mathbf{L}}^2(\Theta\Psi) = -\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{1}{\Psi} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} \quad (87)$$

ここで、 ϕ に依存するのは、(87) の最終項だけなので、

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = \text{定数} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = -m^2 \Psi \quad (88)$$

この方程式の解で、 $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ について周期的な解は一般に $\Psi = e^{im\phi}$ (m は整数). この解を (87) 式に代入し、 θ に依存する部分が定数でなければならないことを用いると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} &= \ell(\ell+1) \quad \text{より} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

この微分方程式の $\theta = (0, \pi)$ で正則な解は、 $\ell \geq |m|$ の場合に存在し、ルジャンドル陪関数により $\Theta(\theta) = P_\ell^{(m)}(\cos \theta)$ で表される。特に、 $m = 0$ の場合は、 $\cos \theta$ の ℓ 次多項式 (ルジャンドル多項式) $\Theta(\theta) = P_\ell(\cos \theta) = P_\ell^{(0)}(\cos \theta)$ となる。

$$P_\ell^{(m)}(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-z^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} (z^2-1)^\ell \quad (90)$$

$$P_\ell^{(-m)}(z) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^{(m)}(z) \quad (91)$$

これらをまとめると、 ℓ が 0 または正の整数、 m が $-\ell \leq m \leq \ell$ の範囲の整数である場合に、 (θ, ϕ) について正則な \hat{L}^2 の固有関数 (球面調和関数) が得られる。

$$\hat{L}^2(\Theta(\theta)\Phi(\phi)) = \hat{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (92)$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^{(|m|)}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (93)$$

$$Y_{\ell, m=0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \quad (94)$$

球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ は量子力学でも角運動量の固有状態として用いられる。

角度部分の解は $\Theta(\theta)\Phi(\phi) = Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ で与えられることがわかったので、ラプラス方程式 (84) 式に (92) 式を代入すると、動径部分 $R(r)$ が満たす方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R = 0 \quad (95)$$

$$\text{独立な 2 つの解は} \rightarrow R(r) = r^\ell \quad \text{または} \quad \frac{1}{r^{\ell+1}} \quad (96)$$

これらをまとめて、ラプラス方程式の極座標による一般解は

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} \frac{1}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (97)$$

問題 11

- (a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y$ が電荷のない空間の静電場を表すことを示せ。
 (b) この電場中の原点 $\mathbf{r} = 0$ に置かれた試験電荷 q にかかる力は 0 であるが、この位置の電荷が力学的に安定ではないことを示せ。 $q > 0$ と $q < 0$ の両方の場合を考察せよ。

問題 12

- (a) $f(x)$ を $x = 0$ で微分可能な関数とすると、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-a}^a f(x)\delta'(x) dx = -f'(0) \quad (a > 0) \quad (98)$$

- (b) (73) 式の積分を実行せよ。

問題 13

- (a) 電気双極子モーメント $\mathbf{p} \equiv \int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'$ の単位はなにか。
 (b) (81) 式の $\ell = 2$ の項が

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{k}{2r^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 r_i r_j Q_{ij} \quad (99)$$

(r_i ($i = 1, 2, 3$) は \mathbf{r} の成分を表す) と書けることを示し、 Q_{ij} (電気四重極テンソル) を電荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ の積分で表せ。(ヒント: $rr' \cos \theta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \sum_i r_i r'_i$ を用いる。)

問題 14

無限に広い平面導体から距離 a に点電荷 q を置く。導体表面の電荷分布と全電荷を求めよ。

問題 15

- (a) 無限に長い半径 a の導体円柱と同じく半径 b ($> a$) の導体円柱を中心軸をそろえて置いたとき、2つの導体にはさまれた空間の静電ポテンシャルを求めよ。ただし、導体円柱のそれぞれの電位を $\Phi_a = 0$, $\Phi_b = V$ とする。
 (b) 導体円柱の単位長さあたりの表面電荷を求めよ。
 (c) この導体系の単位長さあたりの静電容量を求めよ。

問題 16

- (a) ガウスの法則を用いて、半径 R の球の表面に一樣に分布した電荷が作る電場と静電ポテンシャルを求めよ。単位面積あたりの電荷を σ_0 とせよ。
 (b) ガウスの法則を用いて、一樣に帯電した半径 R の球が作る電場と静電ポテンシャルを求めよ。単位体積あたりの電荷を ρ_0 とせよ。
 (c) (a) と (b) のそれぞれの電荷分布の静電エネルギーを求めよ。

問題 17

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ と $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を用いて、誘電体 (誘電率 ϵ) と真空との境界での \mathbf{D} と \mathbf{E} の接続条件を求めよ。表面に真の電荷は存在しない ($\rho_f = 0$) としてよい。