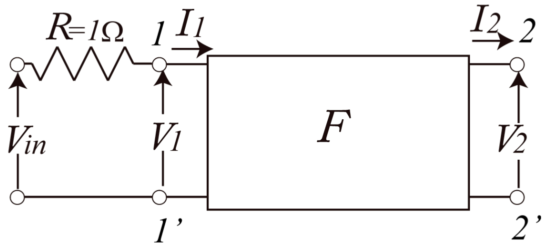
10.フィルタ(2)

フィルタの実現

次にフィルタを実現しよう。最大平坦特性を持つフィルタの極は実部をもつ複素数なので、リアクタンス回路では、極が純虚数のみであることから実現できないことが判る。まず、最初の例と同じく、入力側に純抵抗を入れ、残りのフィルタ部分はリアクタンス回路と考え、F パラメータで表そう。ここで単純化するために抵抗は 1Ω とする。



$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ をまず

$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ と比較しよう。下の段か

$V_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} V_2 - \frac{1}{Y_{21}} I_2$ となり、上の段も

$I_1 = -\frac{Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} V_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2 + Y_{12} V_2$ となるので、

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}, B = -\frac{1}{Y_{21}}, C = \frac{Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}}, D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

となる。2 端子対リアクタンス回路の Y パラメータは 2 端子対リアクタンス回路網の性質からすべて純虚数なので、A と D は実数、B と C は純虚数であることがわかる。またこの特性から、A と D は、s の偶数次成分のみを、B と C は s の奇数次成分のみを持つこともわかる。

F 行列に $I_2 = 0$ と $V_{in} = I_1 + V_1$ を入れると、

$\begin{matrix} V_{in} - I_1 = AV_2 \\ I_1 = CV_2 \end{matrix}$ となるので、$\frac{V_2}{V_{in}} = \frac{1}{A + C}$ となる。

またこのリアクタンス回路の入力インピーダンスは $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2}{CV_2} = \frac{A}{C}$ となる。

一方、与えられた伝達関数 $T(p)$ が

$T(p) = \frac{k}{D(p)}$ であるとする。

$D(p)$ を s の偶数次成分 $D_e(p)$ と奇数次成分 $D_o(p)$ とに分解しよう。すると、両者の比較から、$A = \frac{D_e(p)}{k}, C = \frac{D_o(p)}{k}$ となるべきであることがわかる。そこで与えられた $T(p)$ から A,C を出し、そこからでる Z_{in} を実現するようにフィルタを作れる。

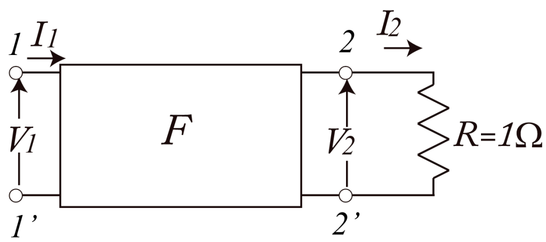
例えば、2 次のフィルタなら、

$T(p) = \frac{k}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$ で、$A = \frac{p^2 + 1}{k}$、

$C = \frac{\sqrt{2}p}{k}$ で、$Z_{in} = \frac{p^2 + 1}{\sqrt{2}p} = \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}p}$ で、

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ [H]のインダクタと $\sqrt{2}$ [F]のコンデンサの直列で実現できる。

つぎに出力側に負荷として純抵抗 *1*Ω を入れ、残りのフィルタ部分はリアクタンス回路と考え、F パラメータで表そう。



F 行列で $V_{in} = V_1 = AV_2 + BI_2$ であり、$I_2 = V_2$ を入れると、$V_{in} = (A + B)V_2$ となるので、

$\frac{V_2}{V_{in}} = \frac{1}{A + B}$ となる。前回と同様に

$T(p) = \frac{k}{D(p)}$ であるとして、s の偶数次成分 $D_e(p)$ と奇数次成分 $D_o(p)$ とに分解すると、両者の比較から、$A = \frac{D_e(p)}{k}, B = \frac{D_o(p)}{k}$ となるべきであることがわかる。

また、$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}, B = -\frac{1}{Y_{21}}$ から、$Y_{22} = \frac{A}{B}$ であり、この入力側を短絡した状態での 2-2'側からみたアドミタンスが $\frac{A}{B}$ となるようにリアクタンス回路を作れば良い。例えば、2 次のフィルタなら、$T(p) = \frac{k}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$ で、$A = \frac{p^2 + 1}{k}$、

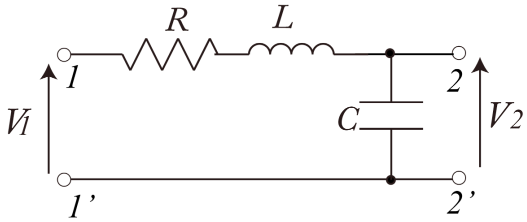
$B = \frac{\sqrt{2}p}{k}$ で、$Y_{22} = \frac{p^2 + 1}{\sqrt{2}p} = \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}p}$ で、

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ [F]のコンデンサと $\sqrt{2}$ [H]のインダクタを並列にすれば実現できる。

インピーダンス変換・周波数変換

　実際にフィルタを作るときには、入力側からみたインピーダンスや遮断周波数を設計することも重要である。ただ、インピーダンスを変えるのは、回路中のすべての素子のインピーダンスを定数倍しても伝達関数は変わらないというインピーダンススケーリングを使えばよい。また、周波数についても、規格化した性質を使ってリアクタンス回路部分だけを変更する周波数スケーリングを使えばよい。そこで $T(p)$ を求めてから、まずインピーダンスは適当にきめて遮断角周波数 1 のフィルタを実現する。そのあとインピーダンス変換をおこなって、周波数変換を行って、作りたい遮断周波数のフィルタを実現する。

　より具体的に行おう。



の回路では、

$$T(p)=\frac{\frac{1}{pC}}{pL+R+\frac{1}{pC}}=\frac{1}{p^2LC+pCR+1}$$

$$=\frac{k}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

であるから、k=1 と考え、まず $R=1\Omega$ として、$CR=\sqrt{2}$ から、$C=\sqrt{2}$ を、$LC=1$ から $L=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。次に R の値を k 倍にしたければ、

$$T(p)=\frac{\frac{k}{pC}}{kpL+kR+\frac{k}{pC}}=\frac{1}{p^2LC+pCR+1}$$ と

すれば、全く同じ特性になるので、インダクタの値を k 倍、コンデンサの値を 1/k 倍すればよい。最後に周波数変換をするときには、

$p=jx=j\frac{\omega}{\omega_C}=\frac{s}{\omega_C}$ なので、

抵抗については、そのまま、インダクタは $pL\to\frac{sL}{\omega_C}$、コンデンサは $\frac{1}{pC}\to\frac{\omega_C}{pC}$ とすれば、

$$T(p)=\frac{\frac{k}{pC}}{kpL+kR+\frac{k}{pC}}=\frac{\frac{k\omega_C}{sC}}{k\frac{sL}{\omega_C}+kR+\frac{k\omega_C}{sC}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_C}\right)^2LC+\frac{s}{\omega_C}RC+1}$$

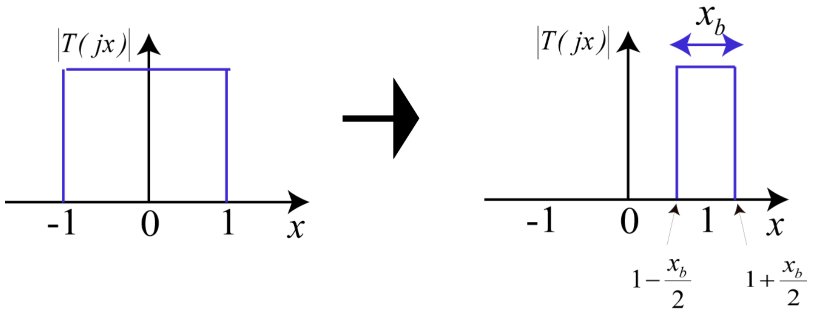
となり、遮断角周波数は ω_C にできる。遮断周波数は $f_C=\frac{\omega_C}{2\pi}$ である。

高域通過型フィルタ

いままでは低域通過型フィルタを設計してきたが、ここで、$p\to\frac{1}{p}$ の変換を行えば高域通過型フィルタを構成できる。このとき、抵抗についてはそのまま、インダクタはコンデンサに切り替えて値を $L[H]\to\frac{1}{L}[F]$ に、コンデンサはインダクタに切り替えて、$C[F]\to\frac{1}{C}[H]$ とすれば、高域フィルタになる。

帯域通過型フィルタ

帯域通過型フィルタでは、もうすこしややこしい変換を行う。低域通過型フィルタの x の負側まで考えた場合のフィルタ特性を変換すると考えるべきであり、規格化した通過帯域幅を x_b とすれば、0 を 1 に、1 を $1+\frac{x_b}{2}$ に、-1 を $1-\frac{x_b}{2}$ にする変換を行えば良い。



そのような変換は $\frac{1}{x_b}(x-\frac{1}{x})$ という変換をおこなうと実現できる。$x=1+\frac{x_b}{2}$ を入れれば、

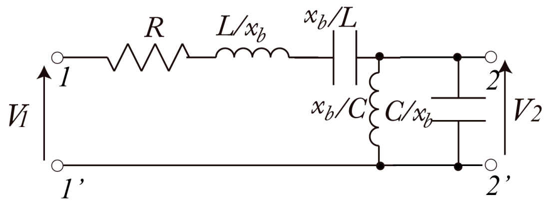
$$\frac{1}{x_b}(1+\frac{x_b}{2}-\frac{1}{1+\frac{x_b}{2}})\simeq\frac{1}{x_b}(1+\frac{x_b}{2}-(1-\frac{x_b}{2}))=1$$

$x=1-\frac{x_b}{2}$ では、

$$\frac{1}{x_b}(1-\frac{x_b}{2}-\frac{1}{1-\frac{x_b}{2}})\simeq\frac{1}{x_b}(1-\frac{x_b}{2}-(1+\frac{x_b}{2}))=-1$$

$x=1$ では、$\frac{1}{x_b}(1-\frac{1}{1})=0$ で確認できる。

$p=jx$ なので、p での変換は $\frac{1}{x_b}(p+\frac{1}{p})$ となる。従って抵抗についてはそのまま、インダクタは $pL\to\frac{L}{x_b}(p+\frac{1}{p})$ なので、$\frac{L}{x_b}[H]$ のインダクタと $\frac{x_b}{L}[F]$ のコンデンサの直列に、コンデンサは、$pC\to\frac{C}{x_b}(p+\frac{1}{p})$ なので、$\frac{C}{x_b}[F]$ のキャパシタンスと $\frac{x_b}{C}[H]$ のコンデンサの並列に置き換えればよい。結果として、フィルタの次数は二倍になる。



次に、この回路を実現させよう。
今は単純に 2 次のフィルタとすると、

$$T(p)=\frac{k}{\left(p-e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(p-e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}=\frac{k}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

$$T(jx)==\frac{k}{-x^2+j\sqrt{2}x+1}$$

となる。

帯域除去型フィルタは、このあと低域通過型→高域通過型と同じことをすれば実現できる。