確率と統計(O)
「積率と積率母関数(第5章)」

■担当教員: 杉山 将 (計算工学専攻)

■居室: W8E-406

■電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

■授業のウェブサイト:

http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

講義計画(シラバス)

- 確率と統計の基礎
- 確率変数, 確率分布
- 積率, 積率母関数
- 離散型の確率分布の例
- 連続型の確率分布の例
- 確率不等式, 擬似乱数
- 多次元の確率分布
- 大数の法則, 中心極限定理
- 統計的推定, 仮説検定

確率変数のばらつきの指標

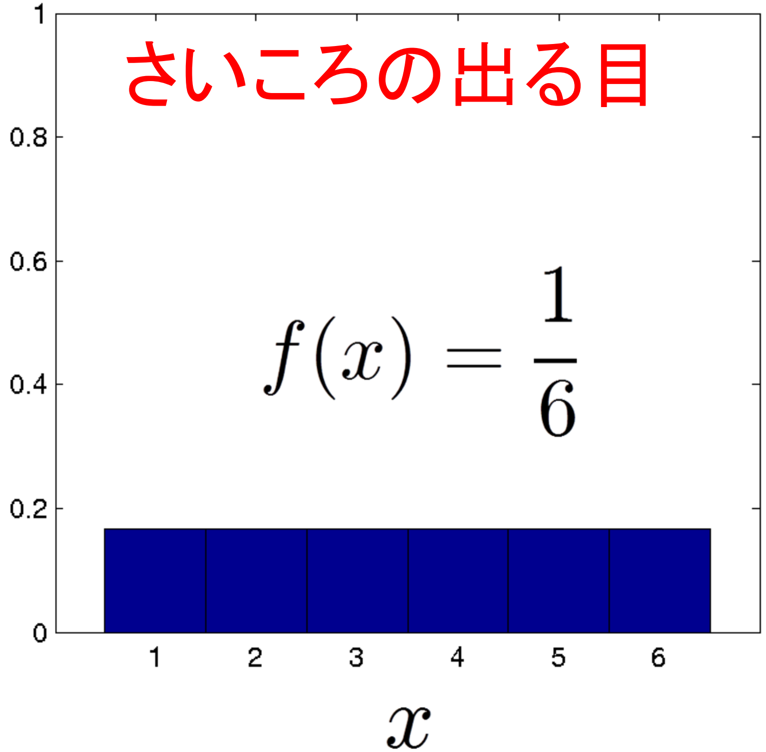
- 期待値は確率変数の代表する値を表す指標
- 分散(variance):確率変数の散らばり具合を表す指標

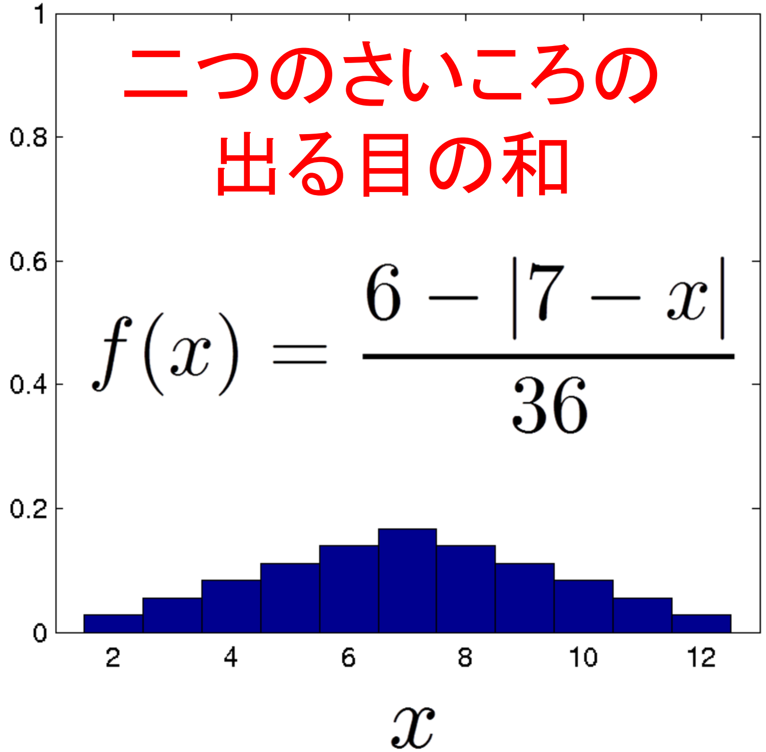
$$V(X) = E\{(X - E[X])^2\}$$

- 次式の方が計算しやすいこともある

$$V(X) = E\{X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2\}$$
$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

例





期待値：7／2
分散：35／12

期待値：7
分散：35／6

演習

- １，２，３，４が１／４の確率で出る4面体のさいころを考える.

$$f(x) = \frac{1}{4}$$

1. さいころの出る目 X の期待値と分散を求めよ.
2. さいころの出る目＋2（ $X+2$ ）の期待値と分散を求めよ.
3. さいころの出る目×2（ $2X$ ）の期待値と分散を求めよ.

分散演算の性質

- 定数の分散はゼロ

$$V(c) = 0$$

- 定数を足したものの分散は，もとの分散と等しい

$$V(X + c) = V(X)$$

- 定数倍の分散は，もとの分散に定数の2乗をかけたものと等しい

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

- 証明は宿題！

標準偏差と標準化

- 標準偏差(standard deviation): 分散の平方根

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

- 分散の値を σ^2 で，標準偏差の値を σ で表わすことが多い
- 標準化(standardization): 任意の確率変数 X に対して

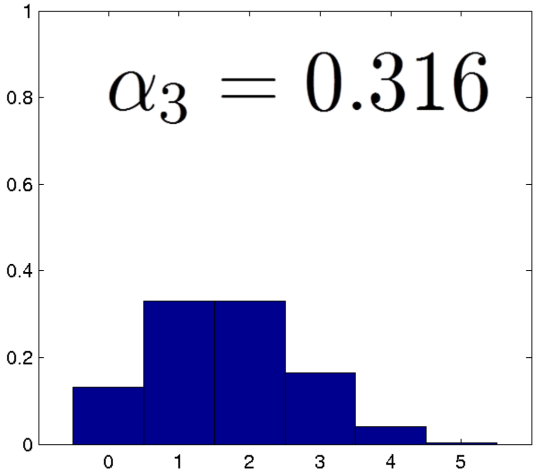
$$Z = \frac{X - E(X)}{D(X)}$$

と定義すれば，Z は期待値0，分散1になる

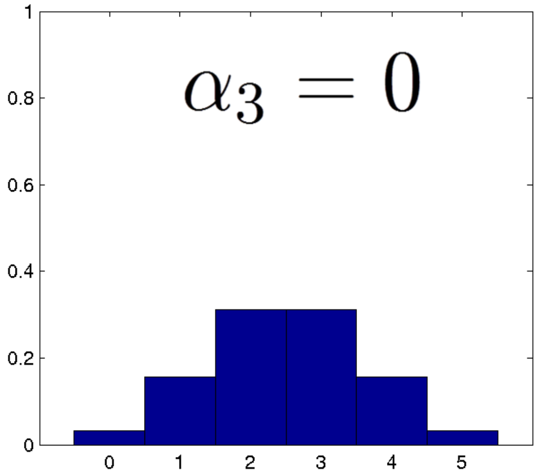
確率分布の形の指標(1)

- 歪度(skewness) α_3 :確率分布の非対称性を表わす

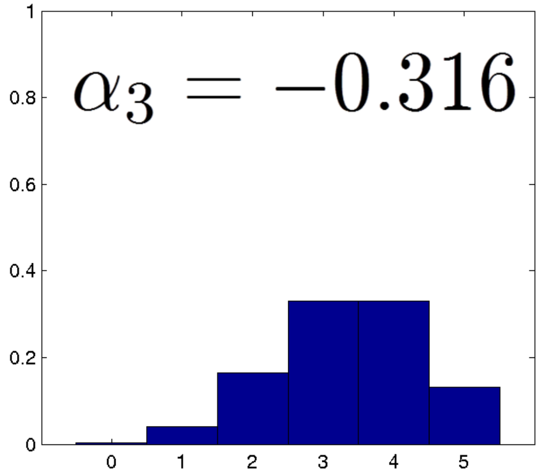
$$\alpha_3 = \frac{E\{[X - E(X)]^3\}}{\{D(X)\}^3}$$



右すそが長い



左右対称

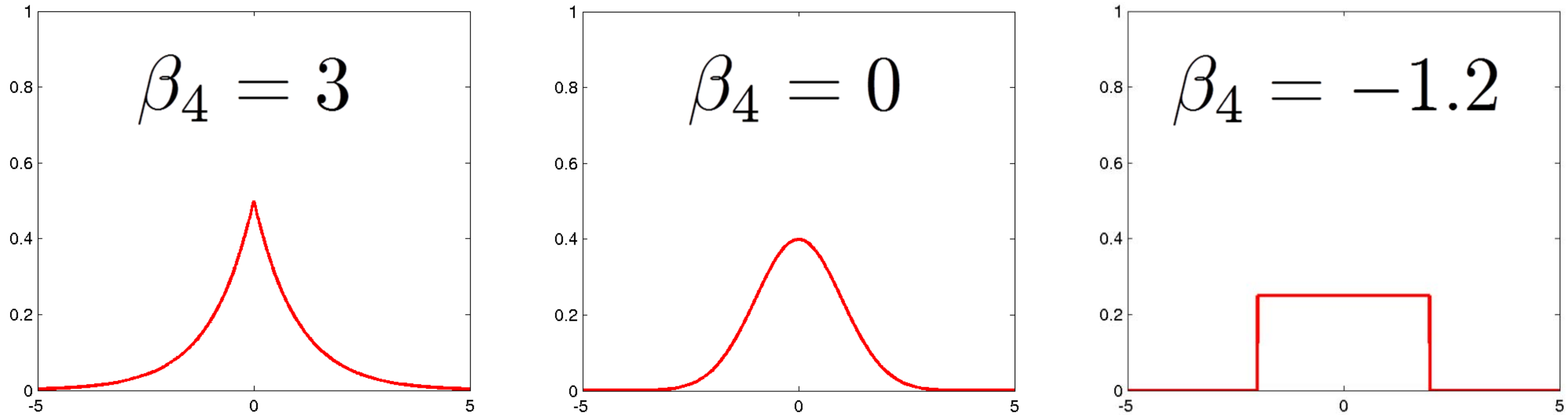


左すそが長い

確率分布の形の指標(2)

- 尖度(kurtosis) β_4 :確率分布の尖り具合を表わす

$$\beta_4 = \frac{E\{[X - E(X)]^4\}}{\{D(X)\}^4} - 3$$



尖っている（“すそが重い”）　標準的な尖り具合（正規分布）　尖っていない（“すそが軽い”）

積率

- 確率分布は，期待値，分散，歪度，尖度を指定していくと，形が限定されていく
- r次の積率(moment)：

$$\mu_r = E[X^r]$$

- 期待値まわりのr次の積率：

$$\nu_r = E\left[(X - E[X])^r\right]$$

- 全ての次数の積率を指定すれば，確率分布を一意に決定することができる

積率母関数

- 積率母関数(moment generating function): 全ての次数の積率を生成する関数（詳細は次ページ）

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} f(x) \\ \displaystyle\int e^{tx} f(x) dx \end{cases}$$

- 但し，積率母関数は存在しない（無限大に発散する）こともある

積率母関数と積率

- 定理:積率母関数の導関数にゼロを代入すれば積率が得られる

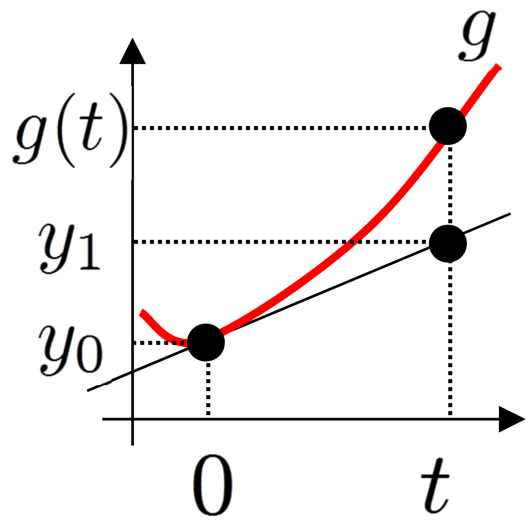
$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r$$

- 証明の前に復習:

(原点周りの)テーラー展開:

$g(t)$ が無限回微分可能のとき

$$g(t) = g(0) + t\frac{g'(0)}{1!} + t^2\frac{g''(0)}{2!} + \cdots$$



$$y_0 = g(0)$$

$$y_1 = g(0) + t\frac{g'(0)}{1!}$$

積率母関数と積率(続き)

- 証明:まず, e^{tX} を原点周りでテーラー展開する

$$e^{tX} = 1 + (tX) + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$

$$g(t) = e^{tX}$$
$$g^{(r)}(t) = X^r e^{tX}$$
$$g^{(r)}(0) = X^r$$

両辺の期待値を取れば,

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

$$= E[1] + tE[X] + t^2\frac{E[X^2]}{2!} + t^3\frac{E[X^3]}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + t\mu_1 + t^2\frac{\mu_2}{2!} + t^3\frac{\mu_3}{3!} + \cdots$$

$$\mu_r = E[X^r]$$

積率母関数と積率(続き)

- 両辺を微分すれば

$$M_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$M'_X(t) = \mu_1 + \mu_2 t + \frac{\mu_3}{2!}t^2 + \frac{\mu_4}{3!}t^3 + \cdots$$

$$M''_X(t) = \mu_2 + \mu_3 t + \frac{\mu_4}{2!}t^2 + \frac{\mu_5}{3!}t^3 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$M^{(r)}_X(t) = \mu_r + \mu_{r+1} t + \frac{\mu_{r+2}}{2!}t^2 + \frac{\mu_{r+3}}{3!}t^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad M^{(r)}_X(0) = \mu_r$$

（Q. E. D. ）

まとめ

- 確率変数のばらつきの指標
  - 分散
  - 標準偏差
- 確率分布の形の指標
  - 歪度
  - 尖度
- 積率と積率母関数

宿題

1. 以下の分散の性質を証明せよ.

A) $V(c) = 0$

B) $V(X + c) = V(X)$

C) $V(cX) = c^2 V(X)$

2. 歪度, 尖度を(原点周りの)積率を用いて表せ.

ヒント: 分散は, 原点周りの積率を用いて

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

と表すことができる.