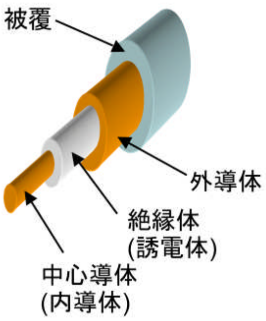
11 分布定数回路(1)

分布定数回路とは？

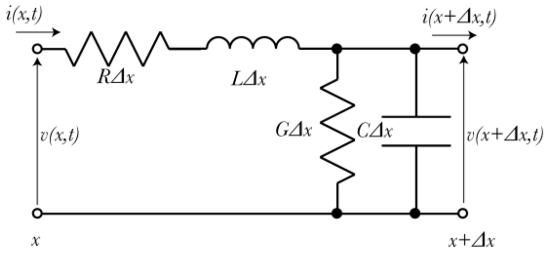
普通、家庭でテレビを見る時、アンテナとテレビの間は線で結ばれている。その線は、切り開くと真ん中に中心導体としての銅線があり、それをポリエチレンという白いプラスチックによる絶縁物が、その外側に外部導体として再度編んだ銅線で囲んでいる同軸断面構造になっている。この線を同軸ケーブルと呼んでいるが、この構造に高周波信号が通ると、減衰したり、位相がずれたりするため、回路としてみることができる。しかしながら、今まで扱ってきた、抵抗、インタクダンス、キャパシタなどの一つ一つが回路の要素として明瞭にはならず、その全ての成分が、線上に一様に分布して存在する。そこで、このような回路を分布定数回路と呼び、従来の要素として扱う場合を集中定数回路と呼ぶことで、区別をする。分布定数回路は扱う周波数が高くなり、波長が短くなると必然的に起こるものでもある。



分布定数回路の等価回路

ここでは同軸ケーブルを考え、外側導体は理想のアースとなっていると考えよう。真ん中の線に電圧を加え、電流を流すと、電流により磁場が、電圧により電界が発生する。そこから、単位長当りの値としてインダクタンス L[H/m],導線間のキャパシタンスとして C[F/m]が見積もれる。内部導体が理想的で無い場合には、中心導線の抵抗として単位長さ当たり R[Ω/m]の抵抗を、また絶縁物が理想的で無い場合は、漏れコンダクタンス G[G/m]を仮定しなければならない。

全体としての大きさは長さで変わることから、微小区間で考えた等価回路を下図の様に示す。



なお、外部導体が理想的なアースでない場合は、抵抗やインダクタンスにおいて外部導体分も見込む必要がある。

電信方程式

ある距離 x における時刻 t の電圧を v(x, t)、電流を i(x, t)として、上の等価回路を微分方程式にしよう。

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = Gv(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

どちらかの式を x で微分して、右辺に出てきた位置微分の項にもう一方の式を入れれば電流または電圧だけの微分方程式がでる。

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

$$= LC\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + (LG+CR)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + RGv(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}$$

$$= LC\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (LG+CR)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + RGi(x,t)$$

この式は電信方程式と呼ばれている。電圧と電流で全く同じ形であり、積分定数以外が $v(x,t)$、$i(x,t)$は同じ形になる。

ここで、ラプラス変換で式の答えを考えよう。

$$-\frac{\partial V(x,s)}{\partial x} = (R+Ls)I(x,s) - Li(x,0)$$

$$-\frac{\partial I(x,s)}{\partial x} = (G+Cs)V(x,s) - Cv(x,0)$$

今までと違い位置によって異なる電圧を持つことから、ラプラス変換も位置の係数を持つことに注意しよう。初期の電流と電圧はどの位置でも 0 として考えて消去して、電圧だけの式の形に変形すると、

$$\frac{\partial^2 V(s)}{\partial x^2} = (R+Ls)(G+Cs)V(x,s)$$
$$= \gamma^2(s)V(x,s)$$
と書ける。ただし

$\gamma(s) \equiv \sqrt{(R+Ls)(G+Cs)}$ である。

このγは、伝搬定数と呼ばれる。

この微分方程式の解は

$$V(x,s) = A(s)\exp(-\gamma(s)x)$$
$$+B(s)\exp(\gamma(s)x)$$

である。これを$-\dfrac{\partial V(x,s)}{\partial x} = (R+Ls)I(x,s)$

に入れると

$I(x,s)$
$$= \frac{\gamma(s)A(s)\exp(-\gamma(s)x) - \gamma(s)B(s)\exp(\gamma(s)x)}{R+Ls}$$
$$= \sqrt{\frac{G+Cs}{R+Ls}}(A(s)\exp(-\gamma(s)x) - B(s)\exp(\gamma(s)x))$$
$$= \frac{1}{Z_0(s)}(A(s)\exp(-\gamma(s)x) - B(s)\exp(\gamma(s)x))$$

ただし、$Z_0(s) \equiv \sqrt{\dfrac{R+Ls}{G+Cs}}$ である。

この$Z_0(s)$は、特性インピーダンスと呼ばれる。

なお、

$$\frac{\partial^2 I(x,s)}{\partial x^2} = (R+Ls)(G+Cs)I(x,s)$$
$$= \gamma^2(s)I(x,s)$$

として、電流から出しても当然良い。

半無限長線路の電圧・電流

ここで、この解を逆フーリエ変換しようとした場合、指数の肩に s の二次の項の平方根が入っているため、面倒な計算になる。そこで、代表的な条件例として$R = G = 0$の無損失線路にして考えてみよう。

$\gamma(s) = \sqrt{LCs^2} = \sqrt{LC}s = \dfrac{s}{v_p}$ となる。但し、

$v_p \equiv \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ である。

答えは

$$V(x,s) = A(s)\exp(-\frac{sx}{v_p}) + B(s)\exp(\frac{sx}{v_p})$$

となる。

ここで、さらに x=0 の点で駆動する半無限長線路（すなわち x=0 から∞にある線路）を考え、またさらに簡単化する為に$B(s) = 0$を考えよう。

$V(x,s) = A(s)\exp(-\dfrac{sx}{v_p})$となる。また電流も

$$I(x,s) = -\frac{1}{Ls}\frac{\partial}{\partial x}A(s)\exp(-\frac{sx}{v_p})$$
$$= \frac{1}{Lv_p}A(s)\exp(-\frac{sx}{v_p}) = \sqrt{\frac{C}{L}}A(s)\exp(-\frac{sx}{v_p})$$
$$= \frac{A(s)}{Z_0(s)}\exp(-\frac{sx}{v_p})$$

となる。

ここで、電圧源$E(s)$で駆動すると、x=0 の境界条件で、$E(s) = A(s)$ となり、境界条件での

$I(0,s) = \dfrac{A(s)}{Z_0(s)}$ となるので、1 端子対網としてみた駆動点インピーダンスは$Z_0(s)$であることが判る。

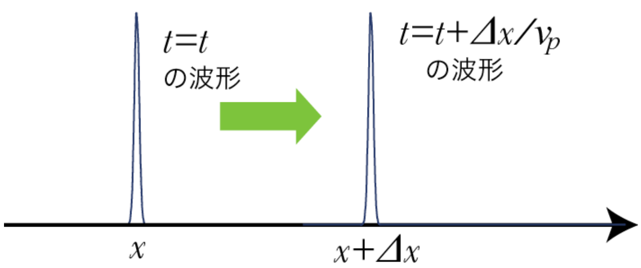
この線路に単位インパルス関数をいれてみよう。

$V(x,s) = \exp(-\dfrac{sx}{v_p})$であり、逆変換すると

推移定理から$v(x,t) = u_0(t - \dfrac{x}{v_p})$となる。

これは、ある位置 x では、$t = \dfrac{x}{v_p}$ の時だけ単位インパルス応答が現れることになる。

すなわちパルスが速度v_pで線路内を走行している。パルスの波形自体は変わらない。重ね合わせを考えれば如何なる波も表せるので、この様な線路を伝搬する波を進行波と呼ばれる。



念のためステップ関数を入れた場合は、
$V(x,s)=\frac{1}{s}exp(-\frac{sx}{v_p})$ となり、逆変換は
$v(x,t)=u(t-\frac{x}{v_p})$ となる。ある位置 x では、
$t=\frac{x}{v_p}$ よりあとでは、大きさ 1 の電圧が現れることになる。

不連続点における反射・透過

異なった線路の接続

異なる二つの特性インピーダンス Z_{01} と Z_{02} を持つ無損失線路を接続したとし、ステップ関数が左側から伝搬したとしよう。特性インピーダンス Z_{01} を持つ左側線路の線路で、左側からやってくる電圧の振幅を V_i とすると、電流 $I_i = V_i/Z_{01}$ であり、特性インピーダンス Z_{02} を持つ右側線路の線路に流れ込む電圧を V_t とすると、電流 I_t は $I_t = V_t/Z_{02}$ であり、そのままでは電圧と電流を同時に一致できない。そこで、接続点で新たな応答が起こり、接続点から左側の方向に向かう振幅 V_r を考える。この電流は $I_r = -V_r/Z_{01}$ となる。

$V_i + V_r = V_t$ 　 $\frac{V_i - V_r}{Z_{01}} = \frac{V_t}{Z_{02}}$ となる必要があるので、

$$V_i + V_r = \frac{Z_{02}}{Z_{01}}\left(V_i - V_r\right)$$

$$V_r\left(Z_{02} + Z_{01}\right) = V_i\left(Z_{02} - Z_{01}\right)$$

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \equiv r$$

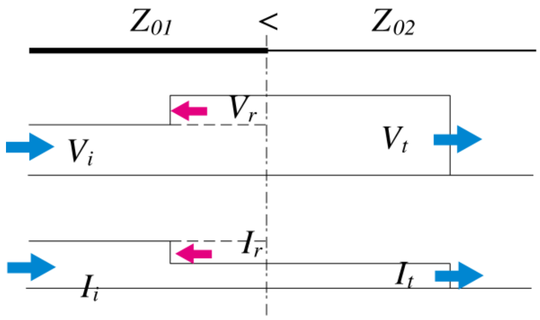
ここで r は反射係数である。

$V_t = V_i + rV_i$ から、$\frac{V_t}{V_i} = 1 + r$ が、また特性インピーダンスで変換すれば $\frac{I_r}{I_i} = \frac{-V_r / Z_{01}}{V_i / Z_{01}} = -r$

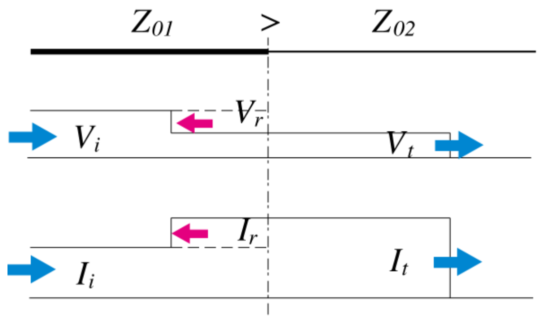
さらに $1+r = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$, $1-r = \frac{2Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$ なので、$\frac{I_t}{I_i} = \frac{V_t Z_{01}}{V_i Z_{02}} = (1+r)\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = 1 - r$ がでる。

そこで、$V_i > 0$ とすれば、

a) $Z_{01} < Z_{02}$ ならば、$r > 0$ となり、$V_r > 0$、$I_r < 0$、$V_t > V_i$, $I_t < I_i$ となり、インピーダンスの高くなる接続点で、電圧は上昇し、電流は減少する。

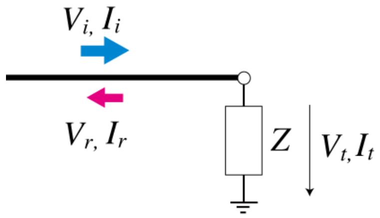


b) $Z_{01} > Z_{02}$ ならば、$r < 0$ となり、$V_r < 0$、$I_r > 0$、$V_t < V_i$, $I_t > I_i$ となり、インピーダンスの低くなる接続点で、電圧は減少し、電流は増大する。



集中インピーダンスの接続

特性インピーダンス Z_0 の線路の受端を、集中インピーダンス Z で終端したとしよう。異なった線路の接続の場合と成立する式は変わらない。従って $r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$ となる。



ここで $Z=\infty$（開放）ならば、集中インピーダンスには電流が流れず、ここでの合成電流 $I_i+I_r=0$ となる。また $r=1$、$V_r=V_i$、$I_r=-I_i$ となり、電圧同符号で電流が反対方向に進む。

$Z=0$（短絡=接地）ならば、集中インピーダンスには電圧は生じえないので、ここでの合成電圧 $V_i+V_r=0$ となる。また $r=-1$、$V_r=-V_i$、$I_r=I_i$ となり、電流は 2 倍に、電圧は 0 になる。

$Z=Z_0$ ならば、反射は生じず、$r=0$ となる。整合がとれていると呼ぶ。