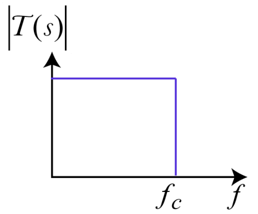
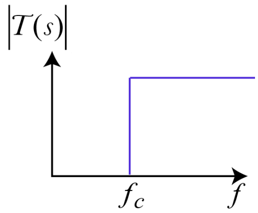
9.フィルタ(1)

受動素子のみで作製した 2 端子対網の代表的応用例としてフィルタがある。フィルタという名は、水の濾過器とか、カメラのレンズにつけるもの等様々な所に使われているが、不要なものを除害し、必要なものだけを通す装置である。ここでは周波数に対して必要な帯域だけをとりだすことを呼ぶ。

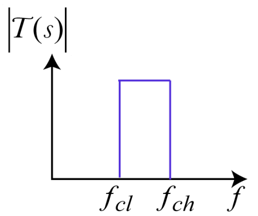
フィルタが通す周波数範囲を透過域、減衰を与え通さない周波数範囲を阻止域または減衰域と呼ぶ。両者の境界の周波数を遮断周波数と呼んでいる。フィルタは、通過域と阻止域の配置により、低域通過型フィルタ、高域通過型フィルタ、帯域通過型フィルタ、帯域除去型フィルタなどに分割される。伝達関数による各フィルタの特性を下図に表す。



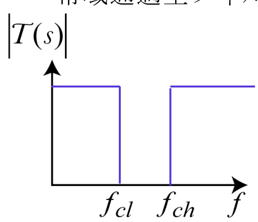
低域通過型フィルタ



高域通過型フィルタ



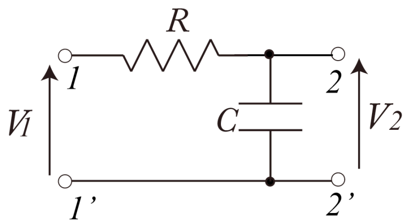
帯域通過型フィルタ



帯域除去型フィルタ

実際のフィルタは残念ながら有る周波数で完全に遮断することは不可能であり、ある程度の裾を引く。

もしも、終端側に負荷をつけ無い場合は比較的解析は簡単である。例えば RC 回路

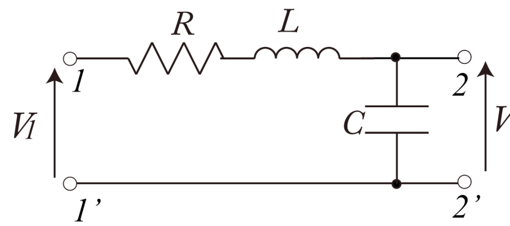


では、電圧の伝達関数は $T(s)=\dfrac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\dfrac{1}{sCR+1}$ となり、周波数に対する振幅の変化は $|T(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2C^2R^2+1}}$ となる。1/周波数に比例して減衰していき、1 次のフィルタと呼ばれる。

演算増幅器(OP アンプ)の進歩により、RC 回路の特性でもフィルタは作製でき、特に低周波側(コイルなどが大きくなりやすい)の小型化には有利である。

振幅最大平坦特性

もっとも簡単な、終端側に負荷をつけ無い場合の RC 回路での 1 次のフィルタを示した。しかし、より切れを良くするためには、LCR 回路の方が望ましい。



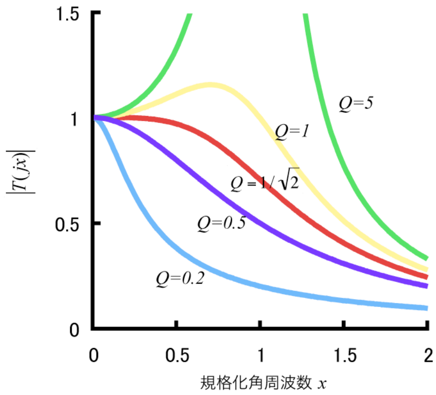
で行うと、

$$T(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{SL+R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{s^2LC+sCR+1}$$ であり、

$$|T(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+\left(\omega CR\right)^2}}$$ となる。

1/周波数の二乗に比例して減衰し、2 次のフィルタであるが、$R=0$ 且つ $\omega_C=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ で $|T(j\omega)|$ は無限大になる。従って R の選び方で、ω_C 付近の平坦性が変わる。

そこで、共振回路として考えたときの $Q=\frac{\omega_C L}{R}$ および周波数の規格化 $x=\frac{\omega}{\omega_C}$ として、$|T(jx)|=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$ と書くと、Q によって以下の様になる。



$Q=1/\sqrt{2}$ の時に丁度平坦化されている。

これをもう少し拡張すると、n 次のフィルタに於いて振幅二乗伝達関数の分母の x に対する微係数が高次まで $x=0$ において 0 であると考える。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{1}{T(jx)^2}\right| = 2\left(1-x^2\right)(-2x)+\frac{2x}{Q^2}\Big|_{x=0}=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|\frac{1}{T(jx)^2}\right| = -4\left(1-x^2\right)+4x(2x)+\frac{2}{Q^2}\Big|_{x=0}$$

$$=-4+\frac{2}{Q^2}=0$$

これが最大平坦の条件であり、一般的には、$|T(jx)|=\frac{k}{\sqrt{1+x^{2n}}}$ という伝達関数の特性と表す。ただし、n はフィルタの次数であり、k は定数である。この特性は最大平坦振幅特性、またはバターワースフィルタ特性と呼ばれる。また、$x=0$ では $|T|=k$ であり、$x=1$ としたときに $|T|=\frac{k}{\sqrt{2}}$ となるので、角周波数

$\omega \le \omega_C$ までは直流の値から $1/\sqrt{2}$ 倍までの間に伝達関数の絶対値(=振幅値)がある。その間では、比較的なめらかに変化することから、どこを遮断周波数にするかを定義するのが難しい。そこで、振幅が直流から $1/\sqrt{2}$ (-3dB)になった周波数を振幅最大平坦特性においては遮断周波数 f_C としている。$f_C=\frac{\omega_C}{2\pi}$ となる。

さてこの場合の極を求めよう。以下は周波数を規格化して考える。

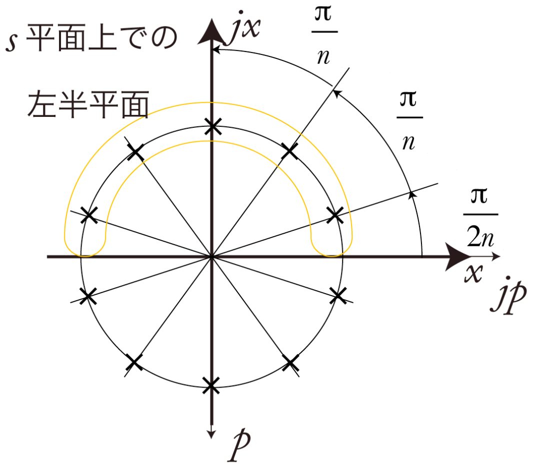
$1+x^{2n}=0$ から、$x^{2n}=-1=e^{j(2i+1)\pi}$ なので、2n 個の $x=e^{\frac{j(2i+1)\pi}{2n}}$ が極で、

$$|T(jx)|^2=\frac{k^2}{(x-e^{\frac{j\pi}{2n}})(x-e^{\frac{3j\pi}{2n}})(x-e^{\frac{5j\pi}{2n}})\cdots(x-e^{\frac{j(4n-1)\pi}{2n}})}$$

となる。ただし、$e^{\frac{j\pi}{2n}}$ と $e^{\frac{j(4n-1)\pi}{2n}}$ は複素共役である。共役を使うと、

$$|T(jx)|^2=\frac{k^2}{(x-e^{\frac{j\pi}{2n}})(x-\overline{e^{\frac{j\pi}{2n}}})\cdots(x-e^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}})(x-\overline{e^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}}})}$$

となる。



ここで、s の様な複素関数の形にしないと実際の回路関数にならないので、j と-j を各項に掛けると、

$$|T(jx)|^2 = \frac{k^2}{(jx - je^{\frac{j\pi}{2n}})(-jx + j\overline{e^{\frac{j\pi}{2n}}})\cdots(jx - je^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}})(-jx + j\overline{e^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}}})}$$

$$= \frac{k^2}{(jx - je^{\frac{j\pi}{2n}})\overline{(jx - je^{\frac{j\pi}{2n}})}\cdots(jx - je^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}})\overline{(jx - je^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}})}}$$

$$= \frac{k^2}{\left|jx - je^{\frac{j\pi}{2n}}\right|^2 \left|jx - je^{\frac{3j\pi}{2n}}\right|^2 \cdots \left|jx - je^{\frac{j(2n-1)\pi}{2n}}\right|^2}$$

$p = jx$(p は周波数を規格化した時の s である。)で回路関数に戻し、整理すると、

$$|T(p)|^2 = \frac{k^2}{\left|p - e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n})}\right|^2 \left|p - e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2n})}\right|^2 \cdots \left|p - e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n-1)\pi}{2n})}\right|^2}$$

単純に極を考えると 2n 個あるが、正実関数では極は左半平面のみに存在するので、実際に許される極は半分の n 個のみである。従って

$$T(p) = \frac{k}{\left(p - e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n})}\right)\left(p - e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2n})}\right)\cdots\left(p - e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{(2n-1)\pi}{2n})}\right)}$$

となる。これは n 次のフィルタでは、分母はせいぜい n 次にしかならず、n 個の極しか許されないことから考えると妥当である。

実例として最初に示した 2 次のフィルタでは、

$$T(p) = \frac{k}{\left(p - e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(p - e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)} = \frac{k}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

$$T(jx) == \frac{k}{-x^2 + j\sqrt{2}x + 1}$$

とすればよいことが判る。

振幅最大平坦特性以外にも、通過域内で振幅特性がうねる振幅等リプル特性（チェビシェフ特性）や信号の遅延の周波数特性が平坦になるようにした遅延最大平坦特性（ベッセル特性）等の特性等がある。