電磁気学Ⅰ　演習 第３回 解答

【VA-28】次のスカラ関数の勾配を直角座標、球座標においてそれぞれ計算せよ。

$\frac{1}{r}$　（ここで、$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

<u>解答</u>

直角座標では、

$\nabla\,\mathbf{A}=\frac{\partial A}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial A}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial A}{\partial z}\hat{z}$ より、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\hat{z}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\hat{x}-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y\hat{y}-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z\hat{z}$$

$$=-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}\right)$$

球座標では、

$\nabla V=\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$ より、

$$\nabla\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}=-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\quad\left(=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$$

■

【VA-29】次のスカラ関数の勾配を円筒座標において計算せよ。

$\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z$

<u>解答</u>

円筒座標系において、$\nabla V=\hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$ だから、

$$\nabla\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z\right)=\left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z\right)$$

$$=\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z\right)+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z\right)+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z\right)$$

$$= \hat{\rho}\{\cos\varphi + \sin\varphi\} + \hat{\varphi}\{\cos\varphi - \sin\varphi\} + \hat{z}$$

■

【VA-44】次のベクトル関数の発散を直角座標、球座標においてそれぞれ計算せよ。

$$\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2 + y^2 + z^2}$$ （ここで、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ）

<u>解答</u>

直角座標では、

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ より、

$$\nabla \cdot \left(\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \left\{ \left((x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot 2x \right) + \left((x^2 + y^2 + z^2) - y \cdot 2y \right) + \left((x^2 + y^2 + z^2) - z \cdot 2z \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

球座標では、

$\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2 + y^2 + z^2}$ は、$\frac{\hat{r}}{r}$ に書き換えられるから、

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ より、

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2}$$

■

【VA-45】次のベクトル関数の発散を円筒座標において求めよ。

$$\rho^2 \cos\varphi \cdot \hat{\rho} + \rho\sin\varphi \cdot \hat{\varphi} + z\rho\cos\varphi \cdot \hat{z}$$

解答

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$ より、

$$\nabla\cdot(\rho^2\cos\varphi\cdot\hat{\rho}+\rho\sin\varphi\cdot\hat{\varphi}+z\rho\cos\varphi\cdot\hat{z})$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\rho^2\cos\varphi\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\rho\sin\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z\rho\cos\varphi\right)$$
$$=\left(4\rho+1\right)\cos\varphi$$

■

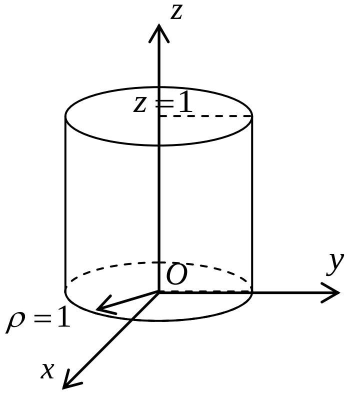
【VA-50】円柱 $x^2+y^2=1$，$z=0$，$z=1$ の全表面に関する $\mathbf{A}=x\hat{x}-y\hat{y}+(z^2+z-1)\hat{z}$ の法線面積分を求めよ。ただし、面素ベクトルは円柱の外向きとする。また、円柱の内部に対して $\mathbf{A}$ の発散の体積積分を求めてガウスの定理が成り立つことを確認せよ。

解答

[面積分]

側面での積分

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{\rho}=\cos\varphi\\ \hat{y}\cdot\hat{\rho}=\sin\varphi\\ \hat{z}\cdot\hat{\rho}=0\end{cases}$$



$$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\underbrace{d\mathbf{S}}_{=\hat{\rho}\rho d\varphi dz}=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1}(x\hat{\mathbf{x}}-y\hat{\mathbf{y}}+(z^2+z-1)\hat{\mathbf{z}})\cdot(\hat{\rho}d\varphi dz)$$
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)d\varphi dz$$
$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}(2\cos^2\varphi-1)d\varphi\int_{z=0}^{1}dz$$
$$=2\pi-2\pi=0$$

下面での積分

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{z}=0\\ \hat{y}\cdot\hat{z}=0\\ \hat{z}\cdot\hat{z}=1\end{cases}$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot \underbrace{d\mathbf{S}}_{=-\hat{z}\rho d\rho d\varphi} = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}} + (0^2+0-1)\hat{\mathbf{z}})\cdot(-\hat{z}\rho d\rho d\varphi)$$
$$= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho d\rho d\varphi$$
$$= \underbrace{\int_{\rho=0}^{1}\rho d\rho}_{=1/2}\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}$$
$$= \pi$$

上面での積分

$$\iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot \underbrace{d\mathbf{S}}_{=\hat{z}\rho d\rho d\varphi} = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}} + (1^2+1-1)\hat{\mathbf{z}})\cdot(\hat{z}\rho d\rho d\varphi)$$
$$= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho d\rho d\varphi$$
$$= \pi$$

よって、

$$\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$

[体積積分]

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 1-1+2z+1 = 2z+1$$
$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dv = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1}(2z+1)\rho d\rho d\varphi dz$$
$$= \int_{\rho=0}^{1}\rho d\rho\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{z=0}^{1}(2z+1)dz$$
$$= 2\pi$$

よって、ガウスの発散定理 $\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dv$ が成り立っている。