

5. 回路関数の性質

2 端子回路

回路は複雑だと、その理解は難しくなってくる。その場合、ブロック毎に切り分けて、そのブロック毎での入出力特性のみを示すことでも回路の表記が可能である。

そこで回路を一纏めにして、そこへ n 個の端子対を設け、各端子対が入出力として使われることを考えよう。各端子対へは電源をつないでも良いし、単純な負荷を繋いでも良く、また、異なる回路と繋いでも良い。当然のことながら、端子対が増えると扱いは複雑になる。そこで、まずは一端子対=2端子回路のみを扱う。なお、ここでは電圧や電流はラプラス変換法により定義された複素角周波数 $s = \sigma + j\omega$ の関数として取り扱う。

2端子回路における端子 1-1'間の電圧 $V_1(s)$ と電流 $I_1(s)$ の関係は、両者の比であるインピーダンス $Z(s)$ 、またはアドミタンス $Y(s)$ によって以下の様に表せる。

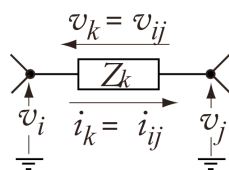
$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}, Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)}$$

これらは、電源を接続した端子(駆動点)における応答であり、 $Z(s)$ は駆動点インピーダンス、 $Y(s)$ は駆動点アドミタンスと呼ばれる。

テレゲンの定理(Tellegen's Theorem)

さて、準備としてテレゲンの定理の説明を行う。名前が付いている回路の諸定理は、殆ど線形回路で教わったが、このテレゲンの定理だけが抜けていたので、ここで説明する。

テレゲンの定理は”回路中の全ての素子の電圧と電流の積の総和はゼロである”というものである。素子の数を b とすれば、 $\sum_{k=1}^b v_k i_k = 0$ というものである。電流の向きは受動素子では電流が流れる方向にして、電源では正の端子から流れ込む方向にする。



この証明は以下の様である。接点の数を n とし、素子 k が接点 i と j の間にあるとすると、

接点の電位 v_i と v_j で電圧 $v_k = v_i - v_j$ と表せる。電流も $i_k = i_{ij}$ と表すことにしよう。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^b v_k i_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v_i - v_j) i_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n i_{ij} - \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n i_{ij} \right) \end{aligned}$$

となる。 $1/2$ は i と j を逆にも数える為である。ここで、

$\sum_{i=1}^n i_{ij}$ は接点 j から流れ出る電流の総和(繋がっていない接点は電流 0 とする)なので、キルヒホッフの電流則から 0 となり、全て 0 となる。

また、この関係はキルヒホッフの電流則しか使っていないので、電流だけを複素共役にしても良く、 $\sum_{k=1}^b v_k \bar{i}_k = 0$ が成り立つ。電源では

正のエネルギーを生み出し、受動素子ではそれを消費することで、電力を保存していることをしめして、電源と受動素子に分けて表記すると、電力保存則と呼んでも良い。

さらに R, L, C からなる同一回路構造を有する二つの回路 A, B において、回路 A の素子の電圧 v_{kA} と、もう一つの回路の対応する素子の

電流 i_{kB} の積の総和は零 ($\sum_{k=1}^m v_{kA} i_{kB} = 0$) である。

という拡張テレゲン定理も、上の証明において、電流と電圧をそれぞれ違う回路に当てて考えれば簡単に証明できる。

正実関数

テレゲンの定理を用いると、集中定数素子の抵抗、インダクタンス、コンデンサからなる線形受動回路網では、以下の様な関係が成り立っていることが判る。

$$\begin{aligned} V_1(s) \{-\bar{I}_1(s)\} + \sum_{i=1}^{n_R} V_{Ri}(s) \bar{I}_{Ri}(s) \\ + \sum_{i=1}^{n_L} V_{Li}(s) \bar{I}_{Li}(s) + \sum_{i=1}^{n_C} V_{Ci}(s) \bar{I}_{Ci}(s) = 0 \end{aligned}$$

ここで、 n_R, n_L, n_C は、抵抗・インダクタンス・コンデンサ抵抗の数を示し、また $V_{Ri}(s), I_{Ri}(s)$ 等は各素子の電圧、電流を示す。

各素子の素子値から、

$$V_{Ri}(s) = \mathcal{L}(R_i i_{Ri}(t)) = R_i I_{Ri}(s)$$

$$V_{Li}(s) = \mathcal{L}(L_i \frac{di_{Li}(t)}{dt}) = sL_i I_{Li}(s)$$

$$V_{Ci}(s) = \mathcal{L}(\frac{1}{C_i} \int i_{Li}(t) dt) = \frac{1}{sC_i} I_{Li}(s)$$

の関係を出して代入すると

$$V_1(s) \bar{I}_1(s)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_R} R_i |I_{Ri}(s)|^2 + s \sum_{i=1}^{n_L} L_i |I_{Li}(s)|^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n_C} \frac{|I_{Ci}(s)|^2}{C_i}$$

と変形できる。ここから駆動点インピーダンスを出すと、

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{V_1(s) \bar{I}_1(s)}{I_1(s) \bar{I}_1(s)}$$

$$= \frac{1}{|I_1(s)|^2} \left(\sum_{i=1}^{n_R} R_i |I_{Ri}(s)|^2 \right)$$

$$+ s \sum_{i=1}^{n_L} L_i |I_{Li}(s)|^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n_C} \frac{|I_{Ci}(s)|^2}{C_i}$$

$$= \frac{1}{|I_1(s)|^2} \left(F + sT + \frac{U}{s} \right)$$

となる。ただし、

$$F = \sum_{i=1}^{n_R} R_i |I_{Ri}(s)|^2, T = \sum_{i=1}^{n_L} L_i |I_{Li}(s)|^2, U = \sum_{i=1}^{n_C} \frac{|I_{Ci}(s)|^2}{C_i}$$

である。式から、 F, T, U は正の実数なので、

① $R_e[s] = \sigma > 0$ ならば、 $R_e[Z(s)] > 0$ である。

② s が実数の時 $Z(s)$ も実数である。

という正実関数と呼ばれる関数の性質がでる。

駆動点アドミタンスも

$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{I_1(s) \bar{V}_1(s)}{V_1(s) \bar{V}_1(s)}$$

$$= \frac{1}{|V_1(s)|^2} \left(\sum_{i=1}^{n_R} \frac{1}{R_i} |V_{Ri}(s)|^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n_L} \frac{1}{L_i} |V_{Li}(s)|^2 + s \sum_{i=1}^{n_C} C_i |V_{Ci}(s)|^2$$

$$= \frac{1}{|V_1(s)|^2} \left(F^* + \frac{T^*}{s} + sU^* \right)$$

但 し 、

$$F^* = \sum_{i=1}^{n_R} \frac{1}{R_i} |V_{Ri}(s)|^2, T^* = \sum_{i=1}^{n_L} \frac{1}{L_i} |V_{Li}(s)|^2, U^* = \sum_{i=1}^{n_C} C_i |V_{Ci}(s)|^2$$

と考えれば、同様に正実関数である。

そこで、さらに以下の性質を持つ。

①実係数の有理関数(分母・分子の多項式の係

数が実数)

$$Z(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

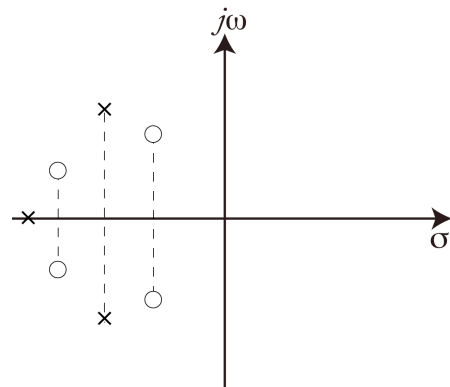
(駆動点インピーダンスでの例)

の様に表すことが出来る。

② 零点及び極は複素 s 平面の虚軸を含めた左半平面のみに存在する。なお極は第 3 回に話した様に分母が 0 になる点であり、零点はその逆の分子が 0 になる点である。

③ 分母子の多項式の次数は等しいか、せいぜい 1 次しか違わない。

④ 分母子の多項式は虚軸上では重根を持たない。(極の実部がゼロならば、その極は単極と言っても良い)



駆動点関数の零点と極の配置例(○が零点、×が極)

このうち、極は複素 s 平面の虚軸を含めた左半平面のみに存在するは、以下の様に背理法で証明される。

正実関数 $Z(s)$ が m 位の同一の極 s_k を持つとする。ただし m は 1 以上の整数である。この

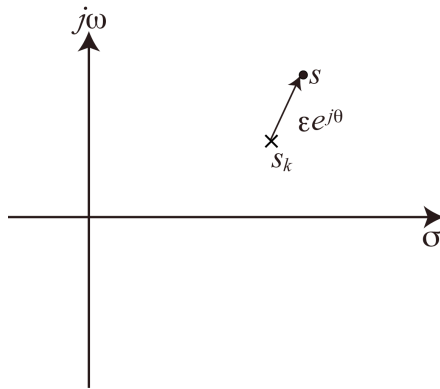
とき $Z(s) = \frac{1}{(s-s_k)^m} \frac{N(s)}{F(s)}$ と表せる。但し、

$N(s)$ 、 $F(s)$ は $(s-s_k)$ を因数として含まない s の多項式である。 s が s_k の充分近傍に有れば

$Z(s) \cong \frac{1}{(s-s_k)^m} \frac{N(s_k)}{F(s_k)}$ と近似できる。ここで

$$\epsilon e^{j\theta} \equiv s - s_k, \quad A e^{j\phi} \equiv \frac{N(s_k)}{F(s_k)} \text{ と極座標表示}$$

で置き換えると



$$Z(s) \equiv \frac{A}{\epsilon^m} e^{j(\phi-m\theta)} = \frac{A}{\epsilon^m} \{\cos(\phi-m\theta) + j\sin(\phi-m\theta)\}$$

と書ける。

ここで $R_e[s_k] > 0$ を仮定する。近傍にある s でも $R_e[s] > 0$ は成り立つ。しかし近傍と言っても任意の方向から近づいて良いので、 θ は如何なる角度でも良く、

$$Re[Z(s)] \equiv \frac{A}{\epsilon^m} \cos(\phi-m\theta) \text{ は正負とも自由に取}$$

りうるので、正実関数の定義から外れ

$R_e[s_k] > 0$ の仮定が間違っていることが判る。

同様にして虚軸上で重根を持たないのも示せる。

虚軸上にあり s_k の実部が 0 の時は、先の極座標表示から $R_e[s] = \epsilon \cos \theta$ となる。従って

$$R_e[s] > 0 \text{ の為には } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ を取りうる。こ}$$

こで $Re[Z(s)] \equiv \frac{A}{\epsilon^m} \cos(\phi-m\theta)$ は m が 2 以上を仮定すると必ず負の範囲に入る θ が出てくる。そこで再び矛盾し、 m は 1 であることが判る。

以上は極のみでおこなったが、アドミタンスの極はインピーダンスの零点なのインピーダンスをアドミタンスに読み替えれば零点も証明できる。

なお、実係数の有理関数となることから、極と零点は必然的に負の実軸上にあるか、挙軸を含む左半平面での共役な対をなす。

なお、 $s \rightarrow \infty$ にした場合 ($\omega \rightarrow \infty$ と考えると)、大きなインダクタンスからどんどん開放と同様に、また大きなキャパシタからどんどん短絡に近づいていく。そこで最後に残るのはインピーダンスで見ると一定値の抵抗になるか、単一キャパシタに近づいて $1/s$ に比例して小さくなるか、または単一インダクタに近づいて s に比例して大きくなるかであり、その意味で、分母子の多項式の次数は等しいか、

せいぜい 1 次しか違わない。

リアクタンス回路の性質

さらに回路を限定して、 C と L だけのリアクタンス回路網の特性を考えよう。リアクタンス回路網ではそのインピーダンスは先の駆動点インピーダンスの式から抵抗の分を除いた形になるので、

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{|I_1(s)|^2} \left(sT + \frac{U}{s} \right)$$

なる。零点では $s = \pm j\sqrt{\frac{U}{T}}$ でなければならず、

純虚数である。

同様に駆動点アドミタンスの零点=駆動点インピーダンスの極について考えると

$$Y_{LC}(s) = \frac{1}{|V_1(s)|^2} \left(\frac{T^*}{s} + sU^* \right) \text{ となり、極では}$$

$$s = \pm j\sqrt{\frac{T^*}{U^*}} \text{ でなければならず、やはり純虚}$$

数である。

さらに極と零点の相対関係を求めるために、 ω に対してどのような挙動を取るか調べよう。

$|I_1(s)|^2 = 1$ と規格化して考えると、

$$Z_{LC}(s) = Z_{LC}(\sigma + j\omega) = (\sigma + j\omega)T + \frac{1}{\sigma + j\omega}U$$

$$= \sigma T + \frac{\sigma U}{\sigma^2 + \omega^2} + j \left\{ \omega T - \frac{\omega U}{\sigma^2 + \omega^2} \right\}$$

$$= R(\sigma + j\omega) + jX(\sigma + j\omega)$$

とすると、

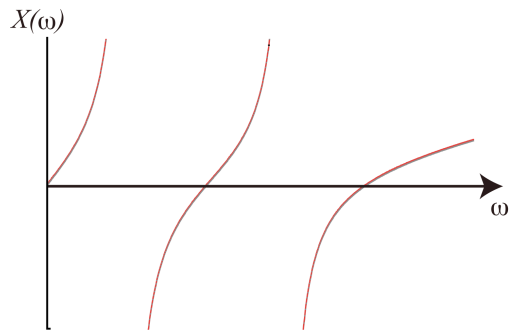
極以外では連続なのでコーシーリーマンの式

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial X}{\partial \omega} \text{ が使え、}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = T + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{(\sigma^2 + \omega^2) - 2\sigma^2}{(\sigma^2 + \omega^2)^2} U \text{ なの}$$

$$\text{で、} \left. \frac{\partial R}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = T + \frac{U}{\omega^2} > 0 \text{ であり、} \frac{\partial X}{\partial \omega} > 0 \text{ で、} \omega$$

に対して常に微分が正である。すると零点と極を交互に持たないといけなことが判る。



$s \rightarrow 0$ にした場合 ($\omega \rightarrow 0$ と考えると)、小さなインダクタンスは短絡していき、小さなキャパシタも開放に近づいていくことから、最後に残るのは、単一キャパシタか単一インダクタであり、 $s \rightarrow 0$ では、 $Z_{LS}(s)$ は 0 か無限大になる。以上と極も零点も複素共役の対をもつことから、 $Z_{LS}(s)$ は次の様に表せる。

$$Z_{LC}(s) = Z_0 \frac{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \cdots (s^2 + \omega_{2n}^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \cdots (s^2 + \omega_{2m-1}^2)}$$

または

$$Z_{LC}(s) = Z_0 \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \cdots (s^2 + \omega_{2m-1}^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \cdots (s^2 + \omega_{2n}^2)}$$

但し m は n または $n+1$ と等しく、 Z_0 は正の定数、 ω_i は、 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots$ を満たす。

この形から、 $s = j\omega$ の定常交流信号で有る場合、 $Z_{LC}(j\omega)$ は純虚数であること、逆数である $Y_{LC}(j\omega)$ も純虚数であることが判る。