12 分布定数回路(3)

さて、今まではステップ関数を入力して分布定数回路のイメージを掴むことに専念した。実際には高周波で使うからこそ分布定数回路的な扱いが必要になるので、今回は正弦波で励振しよう。

半無限長線路の正弦波での励振

まず無損失線路で考えよう。半無限長線路で考えたので、$V(x,s)=E(s)exp(-\frac{sx}{v_p})$ となる。ここで、電源が正弦波 $E_m sin(\omega t)$ とすると、

$V(x,s)=E_m\frac{\omega}{s^2+\omega^2}exp(-\frac{sx}{v_p})$ となり、逆変換すると、

$$v(x,t)=E_m sin\{\omega(t-\frac{x}{v_p})\}u(t-\frac{x}{v_p})$$

$$=E_m sin\{\omega t-\beta x\}u(t-\frac{x}{v_p})$$

と書ける。但し、$\beta=\frac{\omega}{v_p}$ である。正弦波電圧が同じ値=同じ位相を取る時は、$\omega t-\beta x$ は一定であり、$\frac{dx}{dx}=\frac{\omega}{\beta}=v_p$ と書ける。そこで、v_p は同じ位相の点が進行する速度であり位相速度と呼ばれる。

また、x が $2\pi/\beta$ 変わると同一位相になる。従って波長 λ は $2\pi/\beta$ であり、β は、位相定数あるいは波長定数と呼ばれる。

さて、ここまではラプラス変換を中心に考えたが、正弦波電源で駆動し続けると考えると、交流回路で考えて良い。その場合 $v(x,t)=Re[V(x)e^{j\omega t}]$, $i(x,t)=Re[I(x)e^{j\omega t}]$ と表すことが出来る。ただし、$V(x)$、$I(x)$ は、x の関数である複素数である。このとき、今まで扱いにくかった損失のある分布定数回路も扱い易くなる。

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=Ri(x,t)+L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=Gv(x,t)+C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

に入れると、

$$-\frac{dV(x)}{dx}=(R+j\omega L)I(x)$$

$$-\frac{dI(x)}{dx}=(G+j\omega C)V(x)$$

となり、これを解くと、

$$V(x)=A exp(-\gamma x)+B exp(\gamma x)$$

$$I(x)=\frac{1}{Z_0}(A exp(-\gamma x)-B exp(\gamma x))$$

ただし、

$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$,

$Z_0=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$ である。

γ は一般に複素数なので、$\gamma=\alpha+j\beta$ と書ける。

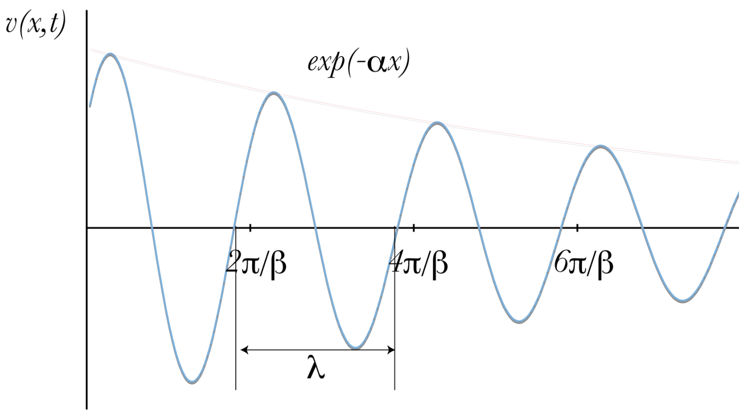
すると

$$V(x)e^{j\omega t}=A\,exp(-\alpha x+j(\omega t-\beta x))$$
$$+B\,exp(\alpha x+j(\omega t+\beta x))$$

$$I(x)e^{j\omega t}=\frac{1}{Z_0}\left\{\begin{array}{l}A\,exp(-\alpha x+j(\omega t-\beta x))\\ -B\,exp(\alpha x+j(\omega t+\beta x))\end{array}\right\}$$ と

なる。

$exp(-\alpha x)$ は、進行波が進行距離 x と共に指数関数則で減衰することを示しているので、α は減衰定数と呼ばれる。



図示した進行波

ここで損失が少ないとしてテイラー展開 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\cdots$ を使って伝搬定数を近似すると、

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1+\frac{R}{j\omega L}}\sqrt{1+\frac{G}{j\omega C}}$$

という形に書け、

$$= j\omega\sqrt{LC}(1-j\frac{R}{2\omega L}+\frac{1}{8}\frac{R^2}{\omega^2 L^2}+\cdots)(1-j\frac{G}{2\omega C}+\frac{1}{8}\frac{G^2}{\omega^2 C^2}+\cdots)$$

$R << \omega L$かつ$G << \omega C$の低損失線路では、一次の成分まで取れば$\alpha = \sqrt{LC}(\frac{R}{2L}+\frac{G}{2C})$、$\beta = \omega\sqrt{LC}$となる。$v_p = \frac{\omega}{\beta}$なので、この近似では位相速度は周波数依存性をもたない。ただし、ω^{-2}の成分が無視できない場合は、周波数が変わると異なる位相速度を持つ様になり、様々な周波数に分解される単位インパルス関数では、周波数によって到達時間が異なり、パルス波形や立ち上がり波形がくずれることになる。分散特性と一般的に呼ばれる。

ω^{-3}の成分まで無視できない場合は、減衰定数も周波数依存性を持つ様になる。

また、同様の計算を行えば、特性インピーダンスの周波数依存性も求めうる。

<u>定在波</u>

有限の長さℓの分布定数回路の受端条件を変えたことでどのような電圧・電流分布になるかを見よう。簡単に考える為に無損失線路にする。

$$V(x) = A\,exp(-j\beta x) + B\,exp(j\beta x)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}\{A\,exp(-j\beta x) - B\,exp(j\beta x)\}$$

に境界条件を入れる。

受端での電圧をV_r、電流をI_rとすると

$$V_r = A\,exp(-j\beta\ell) + B\,exp(j\beta\ell)$$

$$I_r = \frac{1}{Z_0}\{A\,exp(-j\beta\ell) - B\,exp(j\beta\ell)\}$$

$$A = (\frac{V_r + Z_0 I_r}{2})exp(j\beta\ell)$$

、

$$B = (\frac{V_r - Z_0 I_r}{2})exp(-j\beta\ell)$$

となる。

受端にインピーダンスZ_2を接続すると、$\frac{V_r}{I_r} = Z_2$なので、

AとBの指数関数以外の比は

$$\frac{V_r - Z_0 I_r}{V_r + Z_0 I_r} = \frac{\frac{V_r}{I_r} - Z_0}{\frac{V_r}{I_r} + Z_0} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = r$$

と反射係数となる。一般解は

$$V(x) = (\frac{V_r + Z_0 I_r}{2})\{exp(-j\beta(x-\ell)) + r\,exp(j\beta(x-\ell))\}$$

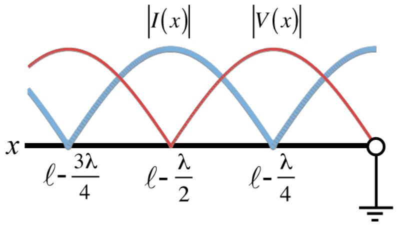
$$I(x) = (\frac{V_r + Z_0 I_r}{2Z_0})\{exp(-j\beta(x-\ell)) - r\,exp(j\beta(x-\ell))\}$$

さて、いくつかの例をここで入れてみよう。

1) r=−1（受端短絡）の場合（$V_r = 0$）

$$V(x) = \frac{Z_0 I_r}{2}\{exp(-j\beta(x-\ell)) - exp(j\beta(x-\ell))\}$$
$$= -jZ_0 I_r sin(\beta(x-\ell))$$

$$I(x) = \frac{I_r}{2}\{exp(-j\beta(x-\ell)) + exp(j\beta(x-\ell))\}$$
$$= I_r cos(\beta(x-\ell))$$



図の様に振幅が 0 になる点が存在する。

2) r=1（受端開放）の場合（$I_r = 0$）

$$V(x) = \frac{V_r}{2}\{exp(-j\beta(x-\ell)) + exp(j\beta(x-\ell))\}$$
$$= V_r cos(\beta(x-\ell))$$

$$I(x)=\frac{V_r}{2Z_0}\left\{exp(-j\beta(x-\ell)-exp(j\beta(x-\ell))\right\}$$

$$=-j\frac{V_r}{Z_0}sin(\beta(x-\ell))$$

同様に振幅が 0 になる点が存在する。

3) $r=-\frac{1}{2}$（$Z_2=\frac{1}{3}Z_0$）の場合（$V_r=\frac{1}{3}Z_0I_r$）

$$V(x)=\frac{2Z_0I_r}{3}\left\{exp(-j\beta(x-\ell)-\frac{1}{2}exp(j\beta(x-\ell))\right\}$$

$$I(x)=\frac{2I_r}{3}\left\{exp(-j\beta(x-\ell)+\frac{1}{2}exp(j\beta(x-\ell))\right\}$$

絶対値をだすと、

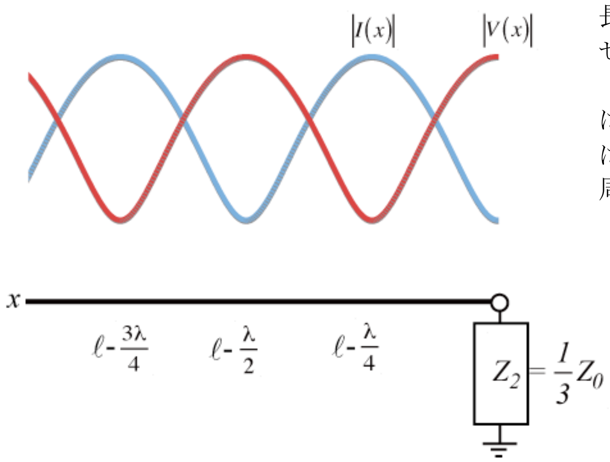
$$|V(x)|=\left|\frac{2Z_0I_r}{3}\right|\sqrt{\left(\frac{1}{2}cos(\beta(x-\ell))\right)^2+\left(\frac{3}{2}sin(\beta(x-\ell))\right)^2}$$

$$=\left|\frac{2Z_0I_r}{3}\right|\sqrt{\frac{1}{4}+2sin(\beta(x-\ell))^2}$$

$$|I(x)|=\left|\frac{2I_r}{3}\right|\sqrt{\left(\frac{3}{2}cos(\beta(x-\ell))\right)^2+\left(\frac{1}{2}sin(\beta(x-\ell))\right)^2}$$

$$=\left|\frac{2I_r}{3}\right|\sqrt{2cos(\beta(x-\ell))^2+\frac{1}{4}}$$

となるので、０になることは無いが、振幅の最大値が場所によって変動することはかわらない。



ここで求めた$V(x)$や$I(x)$に時間依存する項$e^{j\omega t}$を乗じると実際の波形になるが、$V(x)$や$I(x)$がその位置での振幅の最大値を決めていると考えて良い。包絡線と呼んでも良い。この振幅の最大値が位置によって変動することを定在波と呼ぶ。振幅の最大値と最小値の比を定在波比と呼ぶ。

4) r=0（$Z_2=Z_0$）の場合

$$V(x)=V_r\left\{exp(-j\beta(x-\ell)\right\}$$

$$I(x)=I_r\left\{exp(-j\beta(x-\ell)\right\}$$

無損失導波路においては、包絡線関数の絶対値は位置に寄らず 1 のままであり、定在波は存在しない。

<u>分布定数回路の長さによるインピーダンスの変化</u>

さきの受端短絡の場合の送側のインピーダンスを見よう。

$$\frac{V(0)}{I(0)}=\frac{-jZ_0sin(-\beta\ell)}{cos(-\beta\ell)}=\frac{jZ_0sin(\beta\ell)}{cos(\beta\ell)}=jZ_0tan(\beta\ell)$$

　インピーダンスの大きさが長さによって無限大からマイナス無限大まで変わるリアクタンス成分である。

　同様のことが、受端開放の場合も容易に示せる。

　従って無損失線路を使えば分布定数回路で、長さを変えるだけで任意のリアクタンスを表せる様になる。

　一般的に、分布定数回路のインピーダンスは、長さと位相定数により変わる。位相定数は各周波数を位相速度でわったものなので、周波数を変えるとインピーダンスが変わる。