

経済学分析入門 第5回 マッチング問題(2)

5月7日(水)

河崎 亮

(社会理工学研究科 社会工学専攻)

前回まで

- マッチングの例：男女のペア，研修医，学校選択
 - 異なるグループから一つずつペアを作る → マッチング
 - 安定なマッチングを作るように目指す：「駆け落ち」を防ぐ
 - 「駆け落ち」：男女間のコミュニケーションを伴う行為 → 協力ゲーム理論に分類されがち
-
- ペアを作る側の視点

今回: リストを申告する際の戦略的行動

- 前回: 主催者は以下の申告されたリストを基に, マッチングを形成するアルゴリズムを紹介.

異性の名前を一番好きな人から順番に書いてください:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Q: 各個人は正直に選好リストを申告するべきか?
(ゲーム的状况である(詳しくは後ほど))



アルゴリズムの復習

ルール1: (第1希望重視)

- 男性にとって1番好ましい人からプロポーズする.
- ペアが出来た時点でペア**確定**
→ その後**変更**されない.
- 出来上がったマッチングが**安定**
とは限らない.

ルール2: (Gale-Shapley (GS))

- 男性にとって1番好ましい人からプロポーズする.
- ただし, プロポーズを受けても**キープ**している状態 → ペアが出来ても**後で変更の可能性あり**.
- 出来上がったマッチングは**安定**.

前回の例(復習)

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $Y > W > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $Y > W > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $W > Y > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

ルール1を使った結果(復習)

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > ~~A~~ > D

B: Y > ~~W~~ > Z > X

X: A > D > B > C

C: ~~Y~~ > W > X > Z

Y: A > D > ~~C~~ > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

Bが嘘をついたとする

- BはあまりYに好かれていない → Yを第1希望にすると損することを察する.
- 以下の緑の部分のように嘘の選好を申告.

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $W > Y > Z > X$

X: $A > D > B > C$

本当は $Y > W$

C: $Y > W > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $W > Y > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

Bが嘘をついたとする(2)

- 以下の選好でルール1を適用する.
- BとWのペアが確定する.

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: W > Y > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

Bが嘘をついたとする(3)

- 以下の選好でルール1を適用する。(続き)

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: W > Y > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

結果の比較 (B嘘)

A: $\boxed{W} > \bigcirc Z > Y > X$

損する正直者

B: $Y > \bigcirc W > \boxed{Z} > X$

真の選好で比較

C: $\bigcirc Y > W > X > Z$

D: $W > Y > \boxed{X} > Z$

W: $C > \bigcirc B > \boxed{A} > D$

X: $A > \bigcirc D > B > C$

Y: $A > D > \bigcirc C > B$

Z: $\bigcirc A > \boxed{B} > D > C$

記号: \bigcirc Bが嘘をついた場合の「ルール1」のマッチングによる相手

$\boxed{}$ Bが嘘をつかなかった場合の「ルール1」のマッチングによる相手

考察

- ルール1を使ってマッチングを決定することがわかっている
- どのように選好を申告すればよいか → 戦略
- 申告の仕方によって、決められるマッチングが変わる(相手が変わる) → ゲーム的状況(詳しくは4月21日分を参照)
- それぞれ独立に選好リストを提出すると仮定した場合 → 非協力ゲーム理論にあたる.
- 同じマッチング問題でも協力ゲーム理論と非協力ゲーム理論の側面を持っている.

女性側について

- ルール1を用いた場合, 女性側は嘘をついても得をしない.
- 例えば, Wが嘘をついて場合は以下のとおり. プロポーズを受けた段階で選んだ人が最終的にペアを組まされる → 正直に申告したほうがよい.

嘘の選好:

W: $C > B > \underline{D} > \underline{A}$ (スライド7)

真の選好:

W: $C > B > \boxed{A} > \bigcirc D$

記号: \bigcirc Wが嘘をついた場合の「ルール1」のマッチングによる相手

$\boxed{}$ Wが嘘をつかなかった場合の「ルール1」のマッチングによる相手

他の人も嘘を付く可能性が

- Dも嘘をつく誘因がある. 例えばDが以下の選好を表明したとする.
- また, Bは同じように選好を偽っているとする.

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $W > Y > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $Y > W > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $Y > W > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

Dが偽った場合(1)

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: W > Y > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: Y > W > X > Z

Z: A > B > D > C

Dが偽った場合(2)

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: W > Y > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > ~~W~~ > X > Z

Y: A > D > E > B

D: Y > W > X > Z

Z: A > B > D > C

結果の比較(B, D嘘)

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > W > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

損する正直者

記号: ○ Bのみが嘘をついた場合の「ルール1」のマッチングによる相手

□ BとDが嘘をついた場合の「ルール1」のマッチングによる相手

他の人も嘘を付く可能性が

- Dも選好を偽った場合, Cにも偽る誘因がある.

A: $W > Z > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $W > Y > Z > X$

X: $A > D > B > C$

C: $W > Y > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $Y > W > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

この場合のマッチング

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: W > Y > Z > X

X: A > D > B > C

C: W > Y > X > Z

Y: A > D > C > B

D: Y > W > X > Z

Z: A > B > D > C

Bがまた偽り

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Z > Y > W > X

X: A > D > B > C

C: W > Y > X > Z

Y: A > D > C > B

D: Y > W > X > Z

Z: A > B > D > C

偽り合いの結果

A: $Z > W > Y > X$

W: $C > B > A > D$

B: $Z > Y > W > X$

X: $A > D > B > C$

C: $W > Y > X > Z$

Y: $A > D > C > B$

D: $Y > W > X > Z$

Z: $A > B > D > C$

偽り合いの結果

A: Z > W > Y > X

W: C > B > A > D

B: Z > Y > W > X

X: A > D > B > C

C: W > Y > X > Z

Y: A > D > C > B

D: Y > W > X > Z

Z: A > B > D > C

この状況から一人だけ選好を偽り得をすることができる人はいない
→ 上のような選好の仕方がナッシュ均衡になっている。

GSルールによるマッチング（復習）

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > ~~W~~ > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

B, C, Dが共に選好を偽った結果, **安定マッチング**が達成された.
(一般的に成り立つ: Ergin and Sonmez (2006, Journal of Public Economics))

戦略的推論

- 前回の学校選択制度の例:「ルール1」=「ボストン方式」, 実際にボストン市の学校選択ルールとして使用されていた.
- しかし, この方式を撤廃した要因: 戦略的操作が容易に可能.
- 公平性の観点から望ましくない
 - 戦略的操作するには**相当な推論能力が必要**.
 - 推論能力高い \approx 教育水準が高い \approx 裕福な家庭 \rightarrow 金持ちに有利
 - 戦略的操作を上手くするためには, 全員の選好を知っている必要.
- 誰も選好を偽って得することができないという性質 = 「**耐戦略性**」

GSルールと嘘（男性側）

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > ~~W~~ > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

GSルールを用いた場合：男性側（プロポーズする側）においては、選好を偽って得をすることは、**いかなる場合でもあり得ない**。

選好を偽る＝プロポーズの順番を変える

- プロポーズする女性の順番を変える.
 - 第1希望重視のルール1と違い, プロポーズが早いから得とは限らない.
 - また赤い下線の女性より好ましくない人に先にプロポーズしても得をしない.

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Y > ~~W~~ > Z > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

例：Bの場合（1）

- Bが緑の選好を申告したとする.
- 最初のステップでBはZにキープされる.

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Z > W > Y > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: W > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

例：Bの場合（2）

- まだBはZにキープ.
- 他の男性は順番通りにプロポーズしていく.

A: W > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Z > W > Y > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

例：Bの場合（3）

A: ~~W~~ > Z > Y > X

W: C > B > A > D

B: Z > W > Y > X

X: A > D > B > C

C: Y > W > X > Z

Y: A > D > C > B

D: ~~W~~ > Y > X > Z

Z: A > B > D > C

例：Bの場合（4）

- ところが、AがZにプロポーズすることになり、**Bは振られる**.
- 残りのWとYにプロポーズしても、受け入れてくれなく、**振られる**.
- 選好を偽る → プロポーズする順番が変わる → **振られるタイミングだけが変わる**.

A: ~~W~~ > **Z** > Y > X

W: **C** > B > A > D

B: **Z** > ~~W~~ > **Y** > **X**

X: A > D > **B** > C

C: Y > **W** > X > Z

Y: A > **D** > C > B

D: ~~W~~ > **Y** > X > Z

Z: **A** > ~~B~~ > D > C

GSルールと嘘（女性側）

- 最初の例：女性側が嘘をついても得をしない。（スライド39にヒント）
- ただし、一般的な性質ではなく、**選好を偽ることにより得をする場合もある**。以下がその例。

A: $X > Y > Z$

X: $B > A > C$

B: $Y > X > Z$

Y: $C > A > B$

C: $X > Z > Y$

Z: $B > A > C$

GSルールと嘘(女性側)

A: X > Y > Z

X: B > A > C

B: Y > X > Z

Y: C > A > B

C: X > Z > Y

Z: B > A > C

GSルールと嘘(女性側)

A: X > Y > Z

X: B > A > €

B: Y > X > Z

Y: C > A > B

C: ~~X~~ > Z > Y

Z: B > A > C

キープする人を変える

- 今度はXが以下のように選好を偽ったとする.
- すなわち, XにAとCがプロポーズをしたとき, Aではなく, より好ましくないCをキープする.

A: X > Y > Z

X: B > C > A

B: Y > X > Z

Y: C > A > B

C: X > Z > Y

Z: B > A > C

その結果...

A: ~~X~~ > Y > Z

X: B > C > A

B: Y > X > Z

Y: C > A > B

C: X > Z > Y

Z: B > A > C

その結果...

A: ~~X~~ > Y > Z

X: B > C > A

B: Y > X > Z

Y: C > A > B

C: X > Z > Y

Z: B > A > C

その結果...

A: ~~X~~ > Y > Z

X: B > ~~€~~ > ~~A~~

B: ~~¥~~ > X > Z

Y: C > A > ~~B~~

C: ~~X~~ > Z > Y

Z: B > A > C

比較

A: $X \succ Y \succ Z$

B: $Y \succ X \succ Z$

C: $X \succ Z \succ Y$

X: $B \succ A \succ C$

Y: $C \succ A \succ B$

Z: $B \succ A \succ C$

記号: ○ x が嘘をついた場合の「GSルール(男性プロポーズ型)」のマッチングによる相手

□ x が正直に申告した場合の「GSルール(男性プロポーズ型)」のマッチングによる相手

プロポーズはどちらから？（GSルール）

- 今までは**男性側**がプロポーズ
- **女性側**がプロポーズする決め方も考えられる. この場合も**安定マッチングが形成される**. (必ずしも男性側がプロポーズしたときに得られたマッチングと**一致するとは限らない**.)
- **男性側がプロポーズ** → 安定マッチングの範囲内, **男性の一番好ましい相手**. (男性最適安定マッチング)
- **女性側がプロポーズ** → 安定マッチングの範囲内, **女性の一番好ましい相手**. (女性最適安定マッチング)

おまけ：安定マッチングに関する性質

- 安定マッチングに関しては男女の利害は相反する.
 - 男性最適安定マッチング = 女性最悪安定マッチング
 - 女性最適安定マッチング = 男性最悪安定マッチング
- 男性側がプロポーズした場合のGSルールを用いた時, 女性の誰かが嘘の選好を申告し, 得をすることはある.
- 女性側がプロポーズした場合のGSルールにおいては
 - 女性 は選好を偽る誘因はない.
 - 男性 は選好を偽る誘因はある.
- 「男性側プロポーズ = 女性側プロポーズ」とは限らない
 - スライド5の例 – 一致する → 安定マッチングは一つ
 - スライド30の例 – 一致しない → 安定マッチングは複数

両立不可能

- 一般的には安定性と耐戦略性は**両立できない**. (Roth (1982, Mathematics of Operations Research))
- 言い換えれば:
 - **安定マッチング**を生成するルールに対し, **誰かが嘘について得をする可能性**がある. (GSでは, プロポーズを受ける側が嘘をつく可能性がある.)
 - **耐戦略性**を重視すれば, **駆け落ちが生じるマッチングが得られてしまい**, 制度自体が危うい.

→ この状況下, どのような制度を採用するかは状況によって異なる.

推論能力

- 男女の問題であれば、選好の表明の観点からは、どの方式(ルール)がよいかは**完全に明らかではない**.
- 第1希望重視(ルール1)を用いた場合は、選好を偽れば得できることは明白であり、**推奨されている**.
- ただし、偽り合いのゲームをどう攻略するかには、**相当な推論能力が必要**.
- 一方、GSルールも偽るためには相当な情報と推論能力が必要.
- 学校選択のように、学生側を優先的に考える目的があれば、GSルールが妥当かと考えられる.

次回は実験

- 制度を作る際に、制度の性質を確認する必要がある。
- 制度が出来上がったとき、**利用者がどう行動するかを考える必要がある。**
 - 当事者同士のゲーム的状况が生じる → **ゲーム理論**
 - ゲーム的状况における行動を考慮し、制度を設計する必要がある。
- **理論的予測だけでは、制度の有用性を完全に測れない。**
 - 意思決定者の合理性を仮定し、理論を構築している → 近似
 - 実際の人間の行動パターンを見たい → **実験**
 - 実際に**学校選択制度に関する実験研究**もいくつかある → GSルールを支持
- 次回：5月12日(月)ゲームの**実験**