電磁気学Ⅰ 演習 第１回 解答

【VA-3】 $f(x,y,z) = yz^2 + zx + xy^2$ について，以下の経路での線積分を求めよ。

(1) OからB(2, 0, 0)，C(2, 3, 0) を経てA(2, 3, 4)に至る折れ線

(2) 原点OからAまでの線分

（線分OAのパラメータ表示、$x = 2t, y = 3t, z = 4t (0 \le t \le 1)$ を利用せよ）

<u>解答</u>

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_{O\to B\to C\to A} f(x,y,z)dl &= \int_{O\to B} f(x,y,z)dl + \int_{B\to C} f(x,y,z)dl + \int_{C\to A} f(x,y,z)dl \\
&= \int_{x=0}^{2} f(x,y,z)\Big|_{y=z=0} dx + \int_{y=0}^{3} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=2\\z=0}} dy + \int_{z=0}^{4} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=2\\y=3}} dz \\
&= \int_{x=0}^{2} 0dx + \int_{y=0}^{3} 2y^2 dy + \int_{z=0}^{4} (3z^2 + 2z + 18)dz \\
&= 0 + \left[\frac{2y^3}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{3z^3}{3} + \frac{2z^2}{2} + 18z\right]_0^4 \\
&= 0 + 18 + 64 + 16 + 72 \\
&= 170
\end{aligned}
$$

(2)

線分OAをパラメータ表示すると、$x = 2t, y = 3t, z = 4t (0 \le t \le 1)$。

$$
f(x,y,z) = yz^2 + zx + xy^2 = (3t)(4t)^2 + (4t)(2t) + (2t)(3t)^2 = 66t^3 + 8t^2
$$

$$
dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}dt = \sqrt{29}dt
$$

$$
\int_{O\to A} f(x,y,z)dl = \int_{t=0}^{1} \left(66t^3 + 8t^2\right)\sqrt{29}dt = \sqrt{29}\left[\frac{66}{4}t^4 + \frac{8}{3}t^3\right]_0^1 = \sqrt{29}\left(\frac{33}{2} + \frac{8}{3}\right) = \frac{115}{6}\sqrt{29}
$$

<u>別解</u>

$$\int_{O\to A} f(x,y,z)dl = \int_{O\to A}\left\{f(x,y,z)\hat{l}\right\}\cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_{O\to A}\left\{f(x,y,z)\frac{\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right\}\cdot(\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz)$$

$$= \int_{O\to A} f(x,y,z)\left\{\frac{dx^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\frac{dy^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\frac{dz^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right\}$$

$$= \int_{O\to A} f(x,y,z)\left\{\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}+\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}+\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}}\right\}$$

ここで、直線は $x=2t, y=3t, z=4t(0\le t\le 1)$ なので、

$$= \int_{x=0}^{2} f(x,y,z)\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}+\int_{y=0}^{3} f(x,y,z)\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}+\int_{z=0}^{4} f(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}}$$

$$= \int_{x=0}^{2} f(x,3x/2,2x)\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}}+\int_{y=0}^{3} f(2y/3,y,4y/3)\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}+\int_{z=0}^{4} f(z/2,3z/4,z)\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}}$$

$$= \frac{115}{6}\sqrt{29}$$

【VA-11】以下のような円筒座標系において、(3, 0, 0)から(3, $\frac{\pi}{2}$, 0)までFig.11の経路に沿って接線線積分せよ。

$$\int_C (\sin\varphi\hat{\mathbf{\rho}} + \rho\cos\varphi\hat{\varphi} + \tan\varphi\hat{\mathbf{z}})\cdot d\mathbf{l}$$

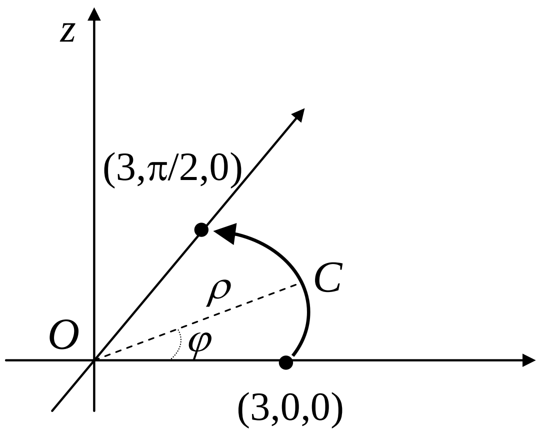

Fig. 11

<u>解答</u>

経路は円弧なので、円筒座標（あるいは球座標）を用いると簡単である。ここでは円筒座標を用いる。円筒座標系の線素は$d\mathbf{l} = \hat{\rho}d\rho + \hat{\varphi}\rho d\varphi + \hat{z}dz$ であり、また、経路 C は円弧で半径は一定、z 方向の変化は無いため、C: $\rho = 3$, $d\rho = 0$, $dz = 0$,

$$\int_C (\sin\varphi\hat{\mathbf{\rho}} + \rho\cos\varphi\hat{\varphi} + \tan\varphi\hat{\mathbf{z}})\cdot d\mathbf{l}$$
$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (\sin\varphi\hat{\mathbf{\rho}} + 3\cos\varphi\hat{\varphi} + \tan\varphi\hat{\mathbf{z}})\cdot(\hat{\rho}\cdot 0 + \hat{\varphi}3d\varphi + \hat{z}\cdot 0)$$
$$= 9\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 9\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = 9$$