

付録2

2次元アフィン変換

直交変換

たたみ込み

1. 2次元のアフィン変換

座標 (x', y') を (x, y) に移すことを2次元での変換. 特に, 変換が

$$\begin{cases} x &= ax' + by' + e \\ y &= cx' + dy' + f \end{cases}$$

と書けるとき, アフィン変換, アフィン変換は, その1次の項による変換

$$\begin{cases} x'' &= ax' + by' \\ y'' &= cx' + dy' \end{cases}$$

と0次の項による変換

$$\begin{cases} x &= x'' + e \\ y &= y'' + f \end{cases}$$

アフィン変換

0次の項は平行移動

1次の項は座標 (x', y') をベクトルと考えて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

このようなもの2次元ベクトルの線形写像

線形写像

2次元の線形写像は行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

として表すことが可能. x, y 方向の単位ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が, この変換により

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

に移される. これらが2次元の空間を張る基底になるには行列式が

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

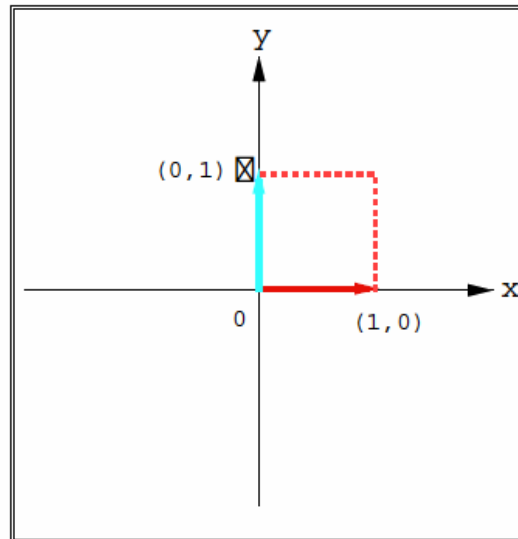
を満たさなければならない.

恒等写像

- 恒等写像
 - x', y' を同じ値に変換するものである

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

アフィン変換で, 1次の項が恒等写像で, 0次の項が有限の場合は単なる平行移動となる.



(a) 基底



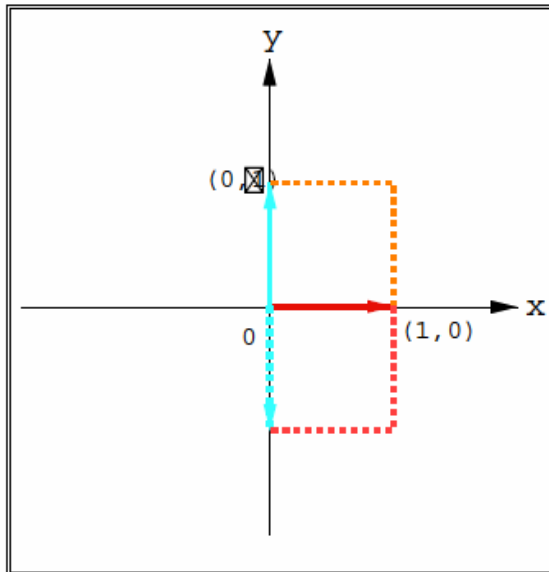
(b) 図形の変形

鏡像

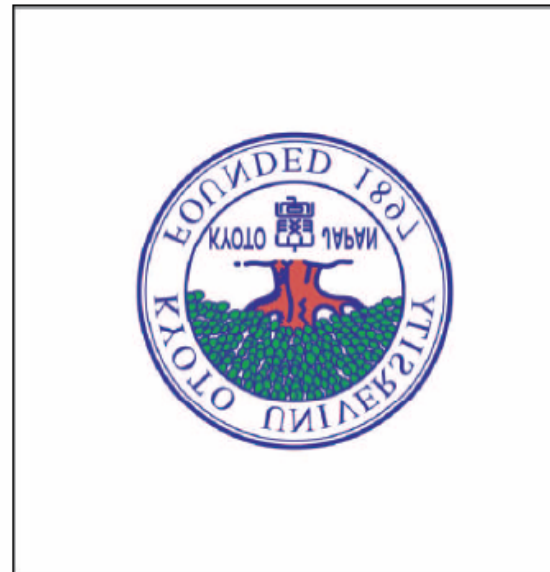
- 鏡像

- ある軸を中心に対称の位置に座標が変換される. 図では x 軸を対称軸とする場合を示す

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



(a) 基底



(b) 図形の変形

向きを変える写像

- 向きを変える写像
 - 恒等写像のときは読むことが出来た字は、傾けてみても読むことは出来ない場合
 - アフィン変換の場合行列式が

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$$

- ならば向きを変える写像
- それに対して行列式が正の場合を向きを保つ写像

回転

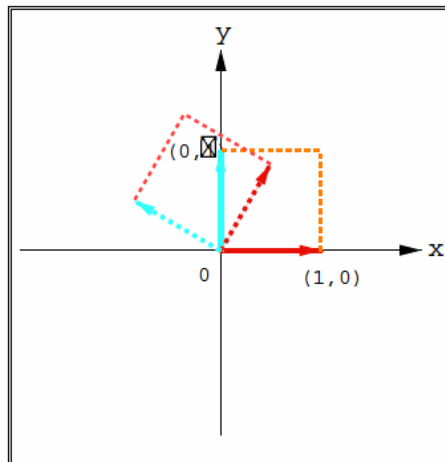
- 反時計回りに θ の回転

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

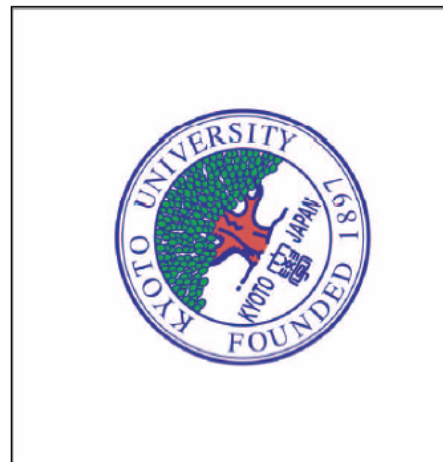
で与えられる. $\theta = \pi/3$ の場合を図に示す.

- アフィン変換のうち,
 - 回転
 - 鏡像
 - 平行移動

の3つの変換は2点の距離を変えないため等長変換と呼ばれる



(a) 基底



(b) 図形の変形

伸縮

$a > 0; d > 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

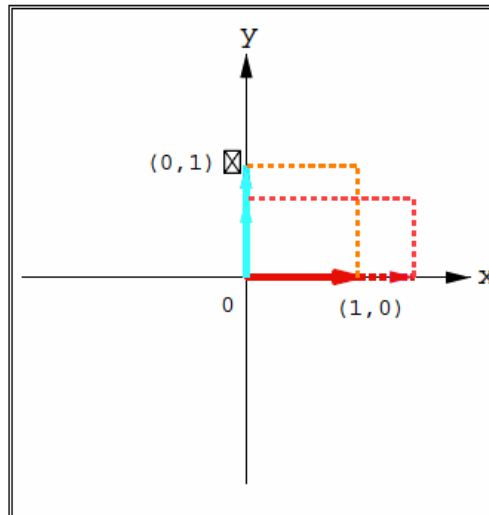
はx 軸方向へ倍率 a , y 軸方向へ倍率 d での伸縮となる.

- 倍率が1 より大きければ拡大
- 1 より小さければ縮小
- $a = d$ のときは変換された図形はもとの図形と相似

一般に行列式が正である対称行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

による変換はある直交した2つの軸方向への伸縮



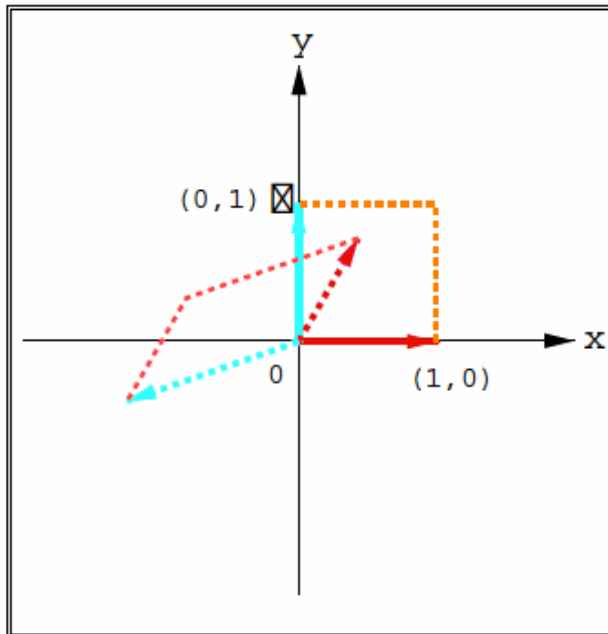
(a) 基底



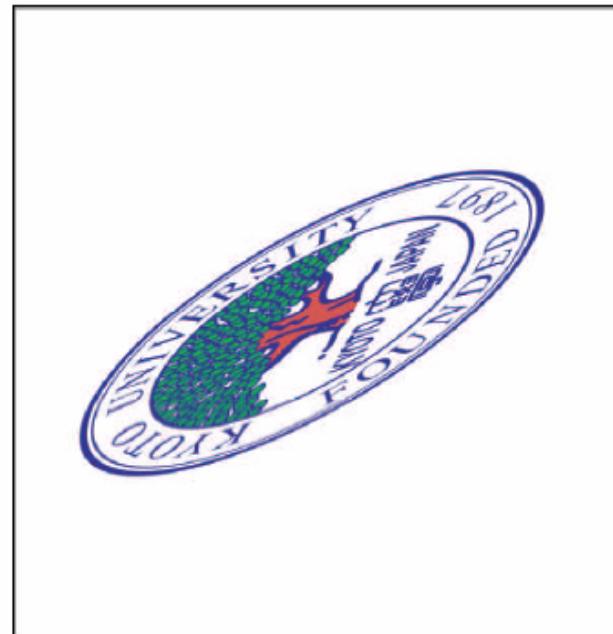
(b) 図形の変形

一般の線形変換

- 一般の向きを保つ2次元の線形変換
 - 伸縮と回転変換の組み合わせで表現可能
 - アフィン変換は“線形変換+平行移動”で表現可能
 - 線形変換の性質を考慮すれば結局
 - アフィン変換= 回転×伸縮+ 平行移動



(a) 基底



(b) 図形の変形

同次座標系

- アフィン変換では

- 処理が線形変換部分である行列演算と平行移動部分であるベクトルの和の部分がある. このとき, 次数を1つ上げて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- と座標を表現することでアフィン変換は線形変換に帰着

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 座標 (u, v, w) に対して(ただし $u = v = w = 0$ を除く)線形変換を許し, その比 $u : v : w$ が等しいものを同一視する幾何学を(2次元)射影幾何
- 特に $w \neq 0$ ならば, 座標値としては結局 $(p = u/w, q = v/w)$ の2変数を持つことになる.
- 2次元アフィン幾何は2次元射影幾何のうち $u = x, v = y, w = 1$ の特別な場合である

2. 直交変換(実数の場合)

- 任意の $n \times n$ の実行列を $A = (a_{ij})$, 任意の n 次元実ベクトルを x, y とする. このときベクトル x とベクトル Ay の内積は,

$$(x, Ay) = (A^t x, y)$$

- ここで, A^t は A の転置行列としている. ここで行列 A が任意のベクトル x, y に対して内積を保存するとする.

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

- このような行列 A を直交行列という. 内積が保存される場合

$$(Ax, Ay) = (A^t Ax, y)$$

が常に成り立つことから

$$A^t = A^{-1}$$

である. これは, 行列 A の j 番目の列ベクトルを a_j とすれば, この各列ベクトルは正規直交である.

$$(a_j, a_k) = \delta_{jk}$$

直交変換(実数の場合)

- 2次元の場合

- 向きを保つ直交行列が回転となる. 2次元の直交行列では4つのパラメータ a, b, c, d が出てくるが正規直交性により3つの制約条件がつき, 実際には1つのパラメータで表現できる. これが2次元の線形変換で出てきた角度 θ である.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 通常, 行列の積は可換ではないが2次元の回転行列の積は可換である.

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

直交変換(実数の場合)

- 3次元の場合
 - 直交行列を

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

として表す.

この行列の行列式が1である場合, 向きが保たれ3次元の回転となる. 正規直交系の制約から6つの制約が入るので9つのパラメータはあるが, 3次元の回転は3変数で表現できることが推測される. 実際x,y,zそれぞれの軸の回転を

$$R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}, R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix}, R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば一般の回転は,

$$R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x)$$

で表すことが出来る. ただし, 2次元の回転と違い, 回転行列は一般には可換ではないので例えば一般には

$$R_z(\theta_z)R_y(\theta_y) \neq R_y(\theta_y)R_z(\theta_z)$$

である. また, 角度 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ が決まれば, 回転が定まるが, 逆にある回転(すなわち回転行列)に対して角度は一意には定まらない.

直交変換(実数の場合)

- 離散コサイン変換

$$G(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} C_m \sum_{X=0}^{N-1} F(X) \cos\left(\frac{2\pi m(X + \frac{1}{2})}{2N}\right)$$

は積和演算であり, 行列形式で容易に表すことが出来る

$$\begin{pmatrix} G(0) \\ G(1) \\ \vdots \\ G(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{N}} C_0 \cos\left(\frac{2\pi 0(0+\frac{1}{2})}{2N}\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} C_0 \cos\left(\frac{2\pi 0(N-1+\frac{1}{2})}{2N}\right) \\ \sqrt{\frac{2}{N}} C_1 \cos\left(\frac{2\pi 1(0+\frac{1}{2})}{2N}\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} C_1 \cos\left(\frac{2\pi 1(N-1+\frac{1}{2})}{2N}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{N}} C_{N-1} \cos\left(\frac{2\pi (N-1)(0+\frac{1}{2})}{2N}\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} C_{N-1} \cos\left(\frac{2\pi (N-1)(N-1+\frac{1}{2})}{2N}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix}$$

この行列の列ベクトルは互いに正規直交しているので直交行列である. よって, この行列の転置行列は逆行列になり, 逆変換に対応している.

直交変換(複素数の場合)

任意の $n \times n$ の複素行列を $A = (a_{ij})$, 任意の n 次元複素ベクトルを x, y とする. このときベクトル x とベクトル Ay の内積は,

$$(x, Ay) = (A^{*t}x, y)$$

となる. ここで, A^t は A の転置行列, A^* は A の各成分の複素共役としている. このような転置で複素共役をエルミート共役といい

$$A^\dagger = A^{*t}$$

ここで行列 A が任意のベクトル x, y に対して内積を保存するとする

$$(Ax, Ay) = (A^\dagger Ax, y)$$

このような行列 A をユニタリ行列という. 内積が保存される場合

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

が常に成り立つことから

$$A^\dagger = A^{-1}$$

である.

これは, 行列 A の j 番目の列ベクトルを a_j とすれば, この各列ベクトルは正規直交であることを意味する.

$$(a_j, a_k) = \delta_{jk}$$

直交変換（複素数の場合）

- 離散フーリエ変換

$$\hat{F}(m) = \mathcal{F}[F(X)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{X=0}^{N-1} F(X) e^{-\frac{2\pi j m X}{N}}$$

は積和演算であり、行列形式で表すことが可能

$$\begin{pmatrix} G(0) \\ G(1) \\ \vdots \\ G(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} e^{-\frac{2\pi j 0 \times 0}{N}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{N}} e^{-\frac{2\pi j 0 \times (N-1)}{N}} \\ \sqrt{\frac{1}{N}} e^{-\frac{2\pi j 1 \times 0}{N}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{N}} e^{-\frac{2\pi j 1 \times (N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{N}} e^{-\frac{2\pi j (N-1) \times 0}{N}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{N}} e^{-\frac{2\pi j (N-1) \times (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix}$$

この行列の列ベクトルは互いに複素ベクトルとして正規直交であるので、ユニタリ行列である。よって、この逆行列はエルミート共役になり、逆変換に対応している。

デルタ関数

- 複素数値関数 $f(x)$, $g(x)$ をベクトルと考えたとき, その内積は

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx$$

であった. ここでは f , g は二乗可積分

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)dx < \infty$$

$$(g, g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g^*(x)dx < \infty$$

かつ, 十分滑らかであるとする. 導関数との内積は

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dx}, g\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} g^*(x)dx \\ &= [f(x)g^*(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dg^*(x)}{dx} dx \\ &= -(f, \frac{dg}{dx}) \end{aligned}$$

デルタ関数

- なる関係がある. ここで有限次元のベクトルについて復習する. 有限次元 n のベクトルの正規直交基底が e_1, e_2, \dots, e_n であるとする, 任意のベクトル v は

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

と表すことが出来る. このとき i 番目の成分は

$$v_i = (v, e_i)$$

となる. このアナロジーで関数の連続的な引数をベクトルの添字と考え, 関数 f を $x = a$ での成分が $f(a)$ であるベクトルと考えることにする. $x = a$ での基底ベクトル e_a とすると,

$$f(a) = (f, e_a)$$

となる. 関数の内積の定義から

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$$

となる関数 $\delta(x)$ があれば,

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx$$

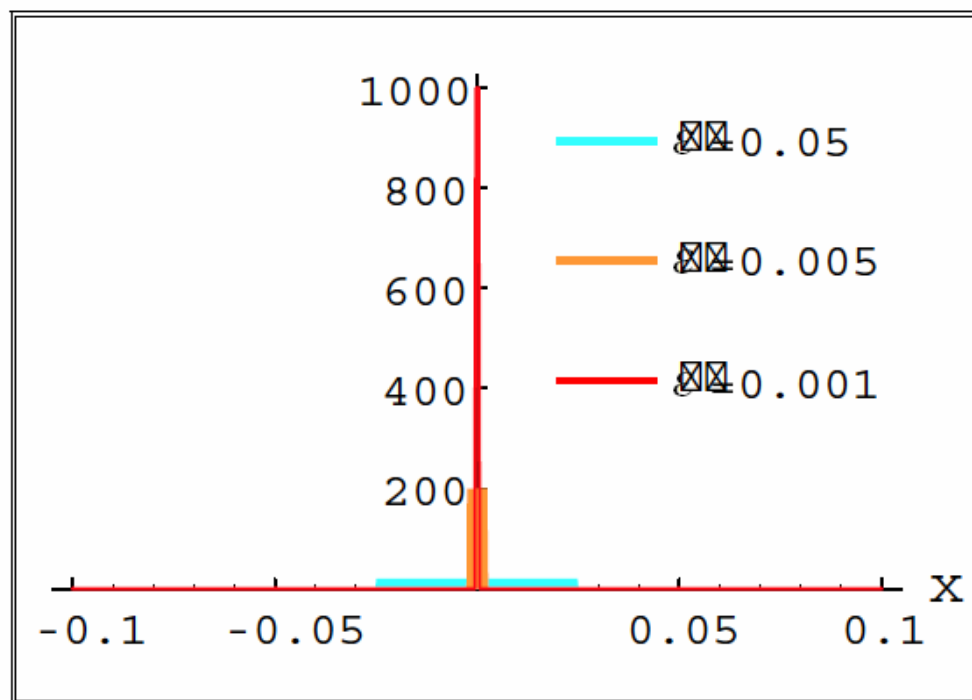
とすることで基底としての役割を果たす

デルタ関数

- このような関数 $\delta(x)$ をデルタ関数或は単位インパルス関数といい、厳密には通常関数ではないが、例えば、 $\varepsilon > 0$ として関数

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

の $\varepsilon \rightarrow 0$ での極限と考えることが出来る.



デルタ関数

- デルタ関数の導関数 δ' は、通常の導関数の内積を拡張して解釈すると

$$(f, \delta') = -(f', \delta) = -f'(0)$$

となることから、これを定義とする。また、ヘビサイド (Heaviside) 関数、或は単位ステップ関数と呼ばれる次の関数を考える。

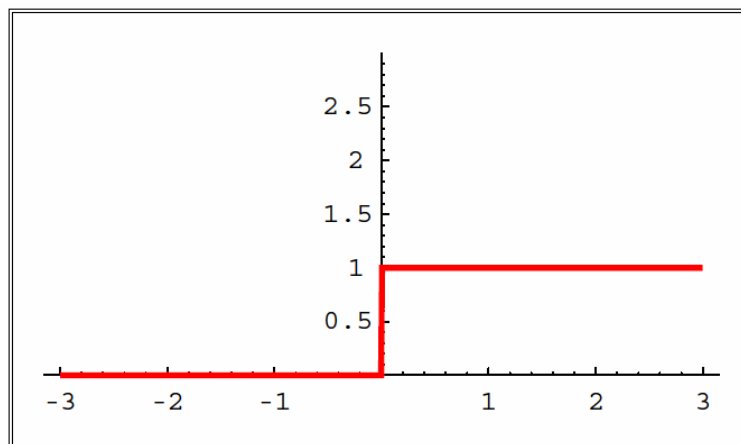
$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \leq x) \end{cases}$$

ヘビサイド関数

ヘビサイド関数の導関数 θ' の内積をとると

$$\begin{aligned}(f, \theta') &= -(f', \theta) \\&= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\theta(x)dx \\&= -\int_0^{\infty} f'(x)dx \\&= -(f(\infty) - f(0)) \\&= f(0)\end{aligned}$$

となることから, $\theta' = \delta$ であることが分かる. 逆に見ればデルタ関数の積分はヘビサイド関数になる.



3. たたみ込み

- 関数 f, g のたたみ込みは

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi$$

で定義

- たたみ込みの性質
 - 交換法則

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(x - t)g(t)dt \quad (t = x - \xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x - t)dt \\ &= g * f \end{aligned}$$

たたみ込み

- たたみ込みの性質
 - 結合法則

$$\begin{aligned}(f_1 * f_2) * f_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\zeta - \xi) d\xi \right) f_3(x - \zeta) d\zeta \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\zeta - \xi) f_3(x - \zeta) d\xi \right) d\zeta \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - \xi - t) f_3(t) dt d\xi \quad (t = x - \zeta) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) (f_2 * f_3)(x - \xi) d\xi \\&= f_1 * (f_2 * f_3)\end{aligned}$$

- 分配法則

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2) * g &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(\xi) + f_2(\xi)) g(x - \xi) d\xi \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) g(x - \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\xi) g(x - \xi) d\xi \\&= f_1 * g + f_2 * g\end{aligned}$$

- このような数学的な性質はたたみ込み代数と呼ばれ、数の間の積と類似の性質があることが分かる.

デルタ関数の微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f * g) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{d}{dx} g(x - \xi)d\xi \\ &= f * g'\end{aligned}$$

交換法則から

$$\frac{d}{dx}(f * g) = f' * g$$

も成り立つ.

デルタ関数とたたみ込み

- 一般の関数 f とデルタ関数のたたみ込みをすると

$$\delta * f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f$$

となり, もとの関数 f のままである. このようにデルタ関数はたたみ込みで, 単位元としての役割を果たす. また, デルタ関数の導関数 δ' と畳込むと

$$\delta' * f = -[\delta'(x - \xi) f(\xi)]_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f'(\xi) d\xi = f'$$

となり, f の導関数を求めることになる.

フーリエ変換とたたみ込み

- たたみ込みをフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(t)e^{-ik(t+\xi)} d\xi dt \quad (t = x - \xi) \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi} d\xi \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ikt} dt \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]\end{aligned}$$

となる.

- すなわち, たたみ込みは周波数空間では積の定数倍になる.
逆に実空間での関数の積は周波数空間ではたたみ込みになる.

$$\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

離散的な場合のたたみ込み

- 離散的な場合のたたみ込みも, 周期関数として定義
- すなわち, $F(s + N) = F(s)$, $G(s + N) = G(s)$ が成り立つ関数に対してたたみ込み

$$F * G(n) = \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G(n - m)$$

と定義. ここで, n, m は整数, N は正の整数とする.

離散的な場合のたたみ込み

- 交換法則

$$\begin{aligned} F * G &= \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G(n-m) \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} F(n-s)G(s) \quad (s = n-m) \\ &= G * F \end{aligned}$$

- 結合法則

$$\begin{aligned} (F_1 * F_2) * F_3 &= \sum_{t=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} F_1(s)F_2(t-s) \right) F_3(n-t) \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} F_1(s)F_2(t-s)F_3(n-t) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} F_1(s)F_2(n-p-s)F_3(p) \quad (p = n-t) \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} F_1(s) \left(\sum_{p=0}^{N-1} F_2(n-p-s)F_3(p) \right) \\ &= F_1 * (F_2 * F_3) \end{aligned}$$

離散的な場合のたたみ込み

- 分配法則

$$\begin{aligned} F * (G_1 + G_2) = F * G(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} F(m)(G_1(n-m) + G_2(n-m)) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G_1(n-m) + \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G_2(n-m) \\ &= F * G_1 + F * G_2 \end{aligned}$$

離散的な場合のたたみ込み

- 単位元

- 連続な場合はたたみ込みで単位元の役割を果たしたのはデルタ関数であった。離散的な場合にその役割を果たすものとしてクロネッカーのデルタがある。これは整数 i, j に対して

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と定義される。離散的な場合のデルタ関数を

$$\delta(n) = \delta_{n0}$$

とおけば,

$$F * \delta = F$$

が成り立つ。

離散的な場合のたたみ込み

- 差分

- 連続的な場合の微分に相当する概念が差分である. ここでは差分の定義を

$$\Delta[F(n)] = F(n+1) - F(n)$$

- この定義では差分は m に対して正の方向である $+1$ との差を考えていて, m を中心として対称ではない. 差分はたたみ込みに対して

$$\begin{aligned}\Delta[F * G] &= \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G(n+1-m) - \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} F(m)(G(n+1-m) - G(n-m)) \\ &= F * \Delta[G]\end{aligned}$$

離散的な場合のたたみ込み

- 離散フーリエ変換

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[F * G] &= \hat{F * G}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G(n-m)e^{-\frac{2\pi jkn}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} F(m)G(t)e^{-\frac{2\pi jk(t+m)}{N}} \quad (t = n - m) \\ &= \sqrt{N} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} F(m)e^{-\frac{2\pi jkm}{N}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} G(t)e^{-\frac{2\pi jkt}{N}} \right) \\ &= \sqrt{N} \mathcal{F}[F] \mathcal{F}[G]\end{aligned}$$

- これらの性質によりたたみ込みに関する連続的な場合の議論は多くの場合離散的な場合にも成り立つ。

相関

- たたみ込みと類似の概念に相関
 - 関数 f, g の相関は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - x)g(\xi)d\xi = f(-x) * g(x)$$

- で定義される. 相関は一般には交換法則, 結合法則が成り立たない等たたみ込みに比べて代数的に扱いが容易ではないが, 関数 f が実関数のとき自分自身との相関である自己相関については次の有用な性質がある

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[f(x)]^*] &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[f(-x)]] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]] * \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(-x)]] \\ &= f(x) * f(-x)\end{aligned}$$

- パワースペクトルをフーリエ逆変換したものが自己相関になる. 周期性を調べるために, しばしば自己相関が用いられる.