Ｂ．予算制約

どのような財の組合せが購入可能なのか？　←　所得と財の価格に依存

７．予算制約

７．１　予算制約と予算線

２種類の財　p_x：Ｘの価格　　p_y：Ｙの価格　　I：所得

予算制約：Ｘの支出額とＹの支出額を加えたものが所得を超えないこと，つまり，

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq I.$$

予算制約を満たす財の組合せの集合を図に書いて表そう．この集合の境界線

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = I$$

のことを**予算線**という．上式を書き換えると，以下のようになる．

$$y = -\frac{p_x}{p_y} \cdot x + \frac{I}{p_y}$$

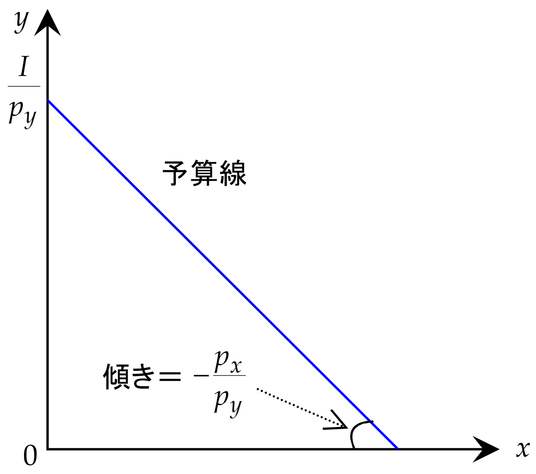

図７．１　予算線

y 切片：$\frac{I}{p_y}$　　$x=0$ の時，購入することのできるＹの量.

x 切片：$\frac{I}{p_x}$　　$y=0$ の時，購入することのできるＸの量.

傾き：$-\frac{p_x}{p_y}$　　$\frac{p_x}{p_y}$ は，全ての所得を使っているとき，Ｘをもう１単位買うためにはＹをいくらあきらめなければならないかを示す.

例）$p_x = 100$ 円，$p_y = 50$ 円，$\dfrac{p_x}{p_y} = 2$，Xをもう１単位買うためにはYを２単位あきらめなければならない.

例）$p_x = 10$，$p_y = 2$，$I = 100$（単位，円，ドル，フラン等）

予算線：$10x + 2y = 100$，つまり，$y = -5x + 50$.

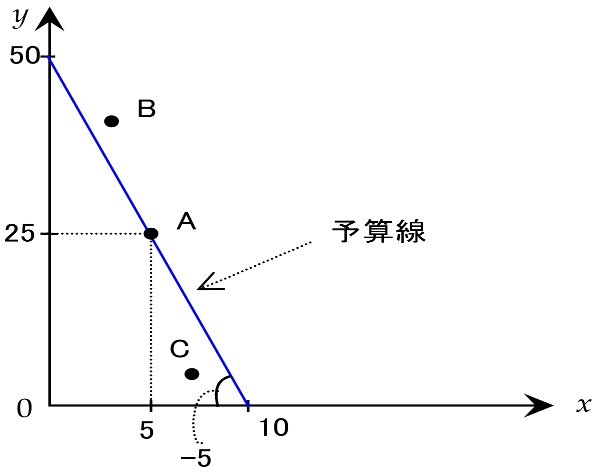

図７．２：予算線：$p_x = 10$，$p_y = 2$，$I = 100$

A=(5,25) : 予算制約を満たし, かつ予算線上にある. B=(3,40) : 予算制約を満たさない.
C=(8,6)：予算制約を満たすが，予算線上にない.

７．２．　予算制約の変化

ここでは３種類の変化について考察する.

ａ）所得の変化

所得の増加：$I^0 < I^1$　XとYの価格 p_x, p_y 変化なし　予算線は右上に平行シフトする.
傾きは変化なし.

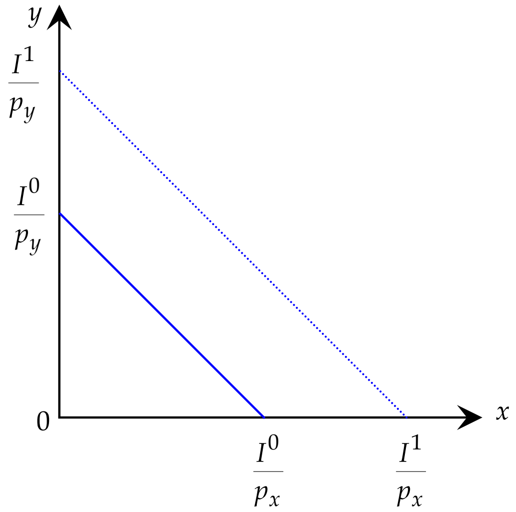

図７．３：所得の変化

ｂ）Ｘの価格の変化

Ｘの価格が上昇：$p_x^0 < p_x^1$　Ｙの価格 p_y と所得 I は変化なし

予算線は y 切片を軸にして左下へ回転．傾きは上昇，y 切片は変化なし，x 切片は左へ移動．

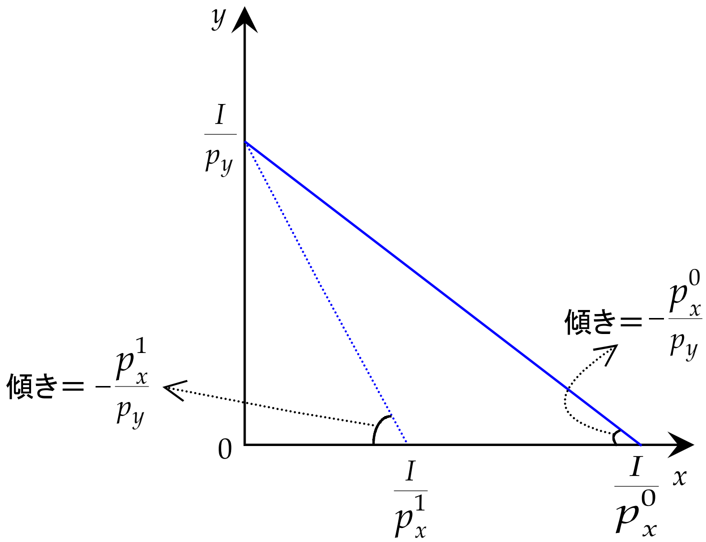

図７．４：Ｘの価格の変化

ｃ）Ｙの価格の変化

Ｙの価格が上昇：$p_y^0 < p_y^1$　Ｘの価格 p_x と所得 I は変化なし．

予算線は x 切片を軸にして左下へ回転．傾きは減少，x 切片は変化なし，y 切片は下降．

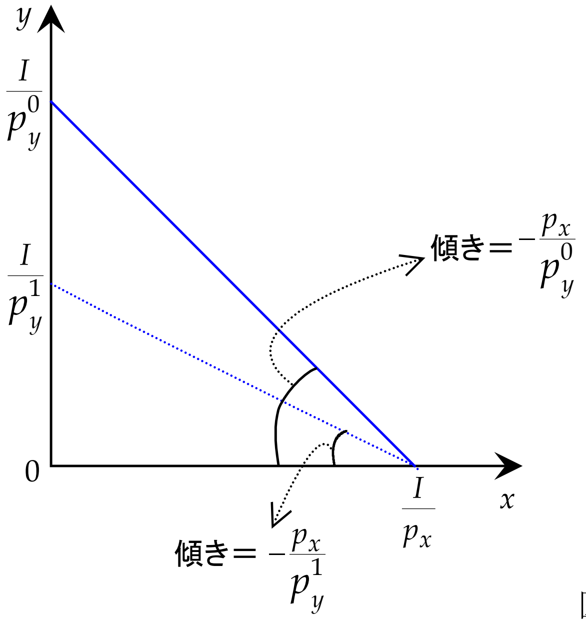

図７．５：Ｙの価格の変化

Ｃ．消費者の選択

以下では次のことを仮定する．

合理性の仮定：各個人は，購入可能な財の組合せの中から，最も好ましい財の組合せを選択し，消費する，つまり，消費者は予算制約の下で最も高い効用をもたらす財の組合せを選択する．

８．最適な財の組合せ

８．１．効用最大化条件

問）いま，無差別曲線と予算線が以下の図で示すように与えられたとしよう．合理性の仮定の下では，どの財の組合せが選ばれるのか？

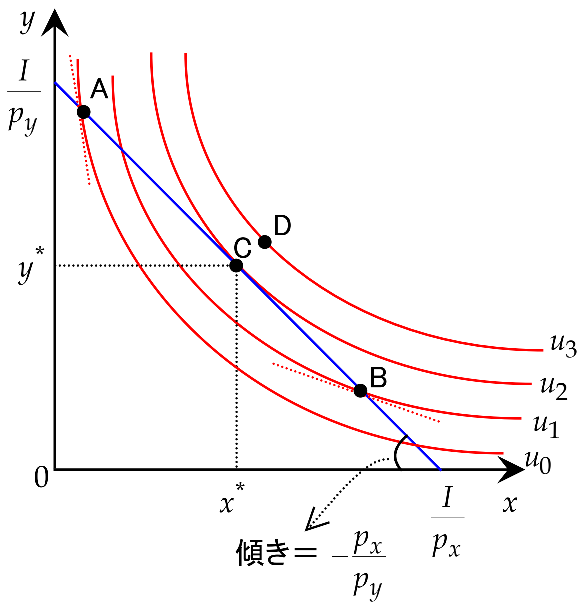

図８．１：最適な選択

解）消費者が選ぶ最適な選択は，予算線上にあり最も高い効用をもたらす組合せ $C=(x^*,y^*)$ である．なぜか？

無差別曲線は凸であり，予算線と無差別曲線の接点はただ１点Ｃに決まる．このＣ点より大きな効用をもたらし，なおかつ予算線上にあるような財の組合せは存在しない．例えば，Ｂ点のように，予算線上にあるが，Ｃ点よりＸをより多く消費し，Ｙをより少なく消費する財の組合せを通る無差別曲線の効用 u_1 は，Ｃ点を通る無差別曲線の効用 u_2 よりも小さい．

同様に，Ａ点のように，予算線上にあるが，Ｃ点よりＹをより多く消費し，Ｘをより少なく消費する財の組合せを通る無差別曲線の効用 u_0 は，Ｃ点を通る無差別曲線の効用 u_2 よりも小さい．また，Ｄ点はＣ点より高い効用 u_3 をもたらすが，予算制約を満たさず，購入可能でない．

結果８．１：消費者が選択する最適な財の組合せは，予算線と無差別曲線の接点である．

結果８．２：消費者が選択する財の組合せ (x^*,y^*) において，無差別曲線の接線の傾きと予算線の傾きが等しくなっている，つまり，

限界代替率＝価格比， $MRS(x*,y*)=\frac{p_x}{p_y}$

が成立している．

なぜか？結果８．２の式 $MRS=\frac{p_x}{p_y}$ が成立していない時，予算制約を満たす別の財の組合せを選択することによって効用を増大することが可能であるからである．例えば，Ａ点においては，$MRS>\frac{p_x}{p_y}$ が成立している．この事は，「財Ｘをもう１単位余分に消費した時支払ってもよいと思っている財Ｙの量」が「財Ｘをもう１単位余分に買うためにあきらめなければならない財Ｙの量」より大きいことを意味している．よって，消費者はＸの消費量を増加しＹの消費量を減少させる取引を行うことによって，つまり，予算線上の右下に移動することによって，効用を増大することできる．

逆に，Ｂ点においては，$MRS<\frac{p_x}{p_y}$ が成立しているので，消費者はＹの消費量を増加しＸの消費量を減少させる取引を行うことによって，つまり，予算線上の左上に移動することによって，効用を増大することできる．

$MRS=\frac{p_x}{p_y}$ が成立しているＣ点においてのみ，消費者は，取引を行い別の組合せに変えることによって効用を増大することはできない．

結果８．３：消費者にとって最適な財の組合せは，以下の二つの連立方程式を解くことによって求めることができる．

（１） $MRS(x,y)=\frac{p_x}{p_y}$ （最適消費の条件）

（２） $p_x \cdot x+p_y \cdot y=I$ （予算線）

p_x， p_y，I の値が与えられた下で，未知数 x, y について解く．

いま，結果５．１：$MRS(x*,y*)=\dfrac{MU_X(x*,y*)}{MU_Y(x*,y*)}$ と結果８．２：$MRS(x*,y*)=\dfrac{p_x}{p_y}$ より，最適な組合せ$(x*,y*)$においては,

$$\frac{MU_X(x*,y*)}{MU_Y(x*,y*)}=\frac{p_x}{p_y}$$，限界効用の比＝価格比

が成立する．上式を書き換えると,

$$\frac{MU_X(x*,y*)}{p_x}=\frac{MU_Y(x*,y*)}{p_y}$$

つまり，１円当たりの限界効用が，二つの財について等しくなっている．

結果８．３′：消費者にとって最適な財の組合せは，以下の二つの連立方程式を解くことによっても求めることができる．

（１′）$\dfrac{MU_X(x,y)}{p_x}=\dfrac{MU_Y(x,y)}{p_y}$　（最適消費の条件）

（２）$p_x \cdot x + p_y \cdot y = I$　（予算線）

p_x，p_y，I の値が与えられた下で，未知数 x, y について解く．

８．２　効用最大化条件のラグランジェ法による導出

> 制約条件付き最大化問題：制約条件 $g(x,y)=0$ のもとで，目的関数の値 $z=f(x,y)$ を最大にする $x\geq 0$ と $y\geq 0$ の値を求めよ．

$g(x,y)=I-p_x\cdot x-p_y\cdot y=0$ とすれば，制約条件 $g(x,y)=0$ は予算制約条件となる．さらに，目的関数 $f(x,y)$ を効用関数 $u(x,y)$ とすることによって，予算制約の下での効用最大化問題は制約条件付き最大化問題の一種であることがわかる．

> ラグランジェの定理：制約条件付き最大化問題の解の値が，$x>0$ でかつ $y>0$ となるように得られたとしよう．この時，これらの解は，連立方程式
>
> (1) $g(x,y)=0$，　$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$
>
> または,
>
> (1′) $g(x,y)=0$，　$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)+\lambda g(x,y)\right]=0$，　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)+\lambda g(x,y)\right]=0$　　（$\lambda\neq 0$ は定数）
>
> を解くことによって得られる．

証明：条件 $g(x,y)=0$ から，一般に y は x の関数となるから，z は x の関数とみなすことができる．よって，$z=f(x,y)$ と $g(x,y)=0$ を x について微分すると以下の式を得る：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},\quad \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

これら二つの式から $\dfrac{dy}{dx}$ を消去して，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial g}{\partial y}$．また最大値では $\dfrac{dz}{dx}=0$ が成立するので，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ を得る．従って，この式と $g(x,y)=0$ から，z の最大値は求まる．

いま，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=-\lambda$

とおくと，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)+\lambda g(x,y)\right]=0$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)+\lambda g(x,y)\right]=0$を得る．

注：$g(x,y)=I-p_x\cdot x-p_y\cdot y=0$，$f(x,y)=u(x,y)$とすれば，ラグランジェの定理から消費者にとって最適な財の組合せにおいて成立している条件（**結果８．３′**）を得ることができる．

ラグランジェ法：制約条件付き最大化問題は以下のようにして解くことができる．制約条件$g(x,y)=0$，目的関数$f(x,y)$，ある変数$\lambda\neq 0$（ラングンジェ乗数と呼ばれる）を用いて，(x,y,λ)を変数とする新たな関数（ラングンジェ関数と呼ばれる）を作る．

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

このラングンジェ関数を各変数について偏微分してゼロとおく．その結果得られた連立方程式

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)+\lambda g(x,y)\right]=0,\quad \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}==\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)+\lambda g(x,y)\right]=0,$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=g(x,y)=0$$

を解くことによって制約条件付き問題の解を求めることができる（この連立方程式は（１′）に他ならない）

８．３　最大化のための十分条件：2階の条件

上記の定理は，制約付き最小化問題の解，制約付き極大化問題の解，制約付き極小化問題の解についても成立する．つまり，ラグランジェ法は制約付き最大，最小，極大，極小問題のいずれを解く場合でも用いることができる．連立方程式（１′）は「1階の条件」と呼ばれ，最大化のための必要条件であるが十分条件ではない．

連立方程式（１′）の解が最大値であるためには，「2 階の条件」と呼ばれ十分条件

も満たされなければならない．以下の関数の性質を考えよう．

強い意味の凹関数：関数の定義域に属する任意の異なる 2 点(x,y)，(x',y')と$0<t<1$について，

$$f(tx+(1-t)x',ty+(1-t)y')>tf(x,y)+(1-t)f(x',y')$$

が成立するとき，fは強い意味で凹関数であるといわれる．上式が等号で成立する場合も許した関数は，単に**凹関数**と呼ばれる．

強い意味の準凹関数：関数の定義域に属する任意の異なる 2 点(x,y)，(x',y')と$0<t<1$について，

$$f(tx+(1-t)x',ty+(1-t)y')>\min\{f(x,y),f(x',y')\}$$

が成立するとき，fは強い意味で準凹関数であるといわれる．上式が等号で成立する場合も許した関数は，単に**準凹関数**と呼ばれる．

効用最大化問題

$$\max_{x\geq 0,y\geq 0} u(x,y)$$

s.t. $p_x x+p_y y=I$ （s.t. は subject to の略．～という制約の下での意味）

に関しては，以下の条件の内，いずれかが成立することが，効用最大化のための 2 階の十分条件となることが知られている．

(i) 効用関数uが凹性を満たす．

(ii) 効用関数 u が準凹性を満たし，なおかつ，$\dfrac{\partial u}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}>0$が成立する．後者の条件は，財$X$と財$Y$の限界効用が常に正になることであり，選好の単調性が満たされるならば，この条件は満たされる．

(i)もしくは(ii)が成立するならば，ラグランジェの定理の連立方程式（1′）の解が最大値となる（ただし，ここで，目的関数fは効用関数uである）．

効用関数に関しては，上記の「効用関数の準凹性」と以下で定義する「選好の凸性」の間には密接な関係がある．

任意の異なる 2 つの財の組合せ(x,y)，(x',y')について，「(x,y)が(x',y')より好まれる」ことを記号「$(x,y)\succ(x',y')$」，「(x,y)と(x',y')が無差別である」ことを記号「$(x,y)\sim(x',y')$」，「(x,y)が(x',y')より好まれるかもしくは(x,y)と(x',y')が無差別である（(x',y')が(x,y)より好まれることはない）」ことを記号「$(x,y)\succsim(x',y')$」と表す．

選好の強い意味の凸性：任意の異なる二つの財の組合せ(x,y)，(x',y')と$0<t<1$について，$(x,y)\succsim(x',y')\Rightarrow(tx+(1-t)x',ty+(1-t)y')\succ(x',y')$．

選好の凸性：任意の異なる二つの財の組合せ(x,y)，(x',y')と$0<t<1$について，$(x,y)\succsim(x',y')\Rightarrow(tx+(1-t)x',ty+(1-t)y')\succsim(x',y')$．

「選好の強い意味の凸性」と「その選好を表す効用関数の強い意味の準凹性」は同値である．また，「選好の凸性」と「その選好を表す効用関数の準凹性」は同値である．効用関数の凹性と準凹性，選好の凸性の性質に関しては演習問題で吟味する．

９．コーナー解

これまでは，効用最大化問題において，予算線と無差別曲線の接点が内点で存在する，つまり，$x>0$でかつ$y>0$のところに接点があるケースについて分析してきた．また，ラグランジェ法においても，制約条件付き最大化問題の解の値が，$x>0$でかつ$y>0$となるように得られたケースについて考察した．しかしながら，$x>0$でかつ$y>0$となる内点には，接点が存在しないケースも起こりうる．

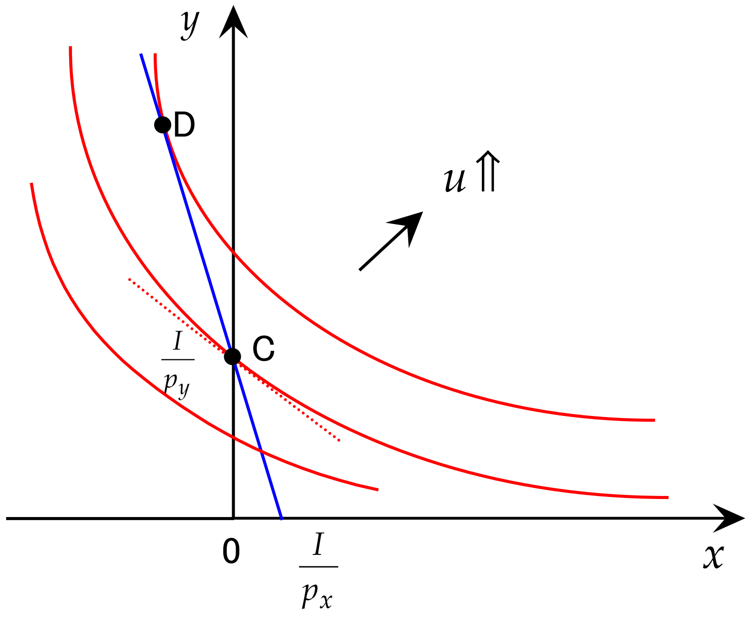

図９．１：y 軸上のコーナー解になるケース

$x<0$ の領域において予算線と無差別曲線はＤ点で接する．しかし，$x>0, y>0$ を満たす領域では，予算線と無差別曲線は接することはない．

問）予算制約を満たす組合せの内，最も高い効用をもたらすものは何か？

解）Ｃ点：$x=0, y=I/p_y$ が最適な組合せである．$x=0$ の時，「無差別曲線に対する接線の傾きの大きさ」が「予算線の傾きの大きさ」より小さいこと，つまり $MRS<p_x/p_y$ が成立していることに注意しよう．つまり，「財Ｘをもう１単位余分に買うためにあきらめなければならない財Ｙの量（p_x/p_y）」が「財Ｘをもう１単位余分に消費した時支払ってもよいと思っている財Ｙの量（MRS）」より大きいことを意味している．従って，消費者は $x=0$ から財Ｘの購入量を増やそうとはしない．言い換えれば，消費者にとって財Ｘの価格が高すぎるために，Ｘは全く購入されない．

このような最適な組合せはコーナーに位置することから，**コーナー解**と呼ばれる．

結果９.１：最適な財の組合せ(x^*, y^*)が y 軸上のコーナー解になるための条件：

もし $x=0$ の時「無差別曲線に対する接線の傾きの大きさ」が「予算線の傾きの大き

さ」より小さいならば，y 軸上のコーナー解になる，つまり，

もし $x=0$ の時 $MRS(x,y)<\dfrac{p_x}{p_y}$ ならば，$x^*=0$，$y^*=I/p_y$．

逆に，x 軸上のコーナー解になるケースもある．

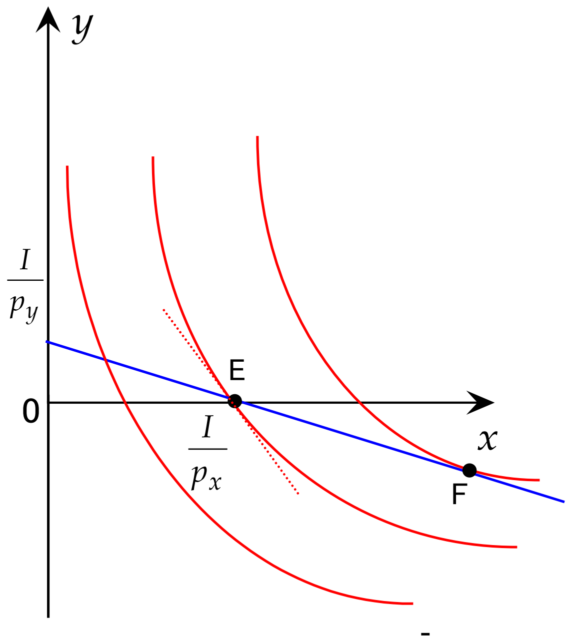

図９．２：x 軸上のコーナー解になるケース

E点：$x=\dfrac{I}{p_x}, y=0$ が最適な組合せである．

結果９.２：最適な財の組合せ (x^*,y^*) が x 軸上のコーナー解になるための条件：

もし $y=0$ の時「無差別曲線に対する接線の傾きの大きさ」が「予算線の傾きの大きさ」より大きいならば，x 軸上のコーナー解になる，つまり，

もし $y=0$ の時 $MRS(x,y)>p_x/p_y$ ならば，$x^*=I/p_x$，$y^*=0$．

また，完全代替の場合には，コーナー解になる．いま，ある消費者にとって，コカコーラとペプシコーラが完全代替で，限界代替率が１であるとする．この場合，最適な選択は，価格の相対的に安いブランドのコーラを買い，高い方は買わないことである．

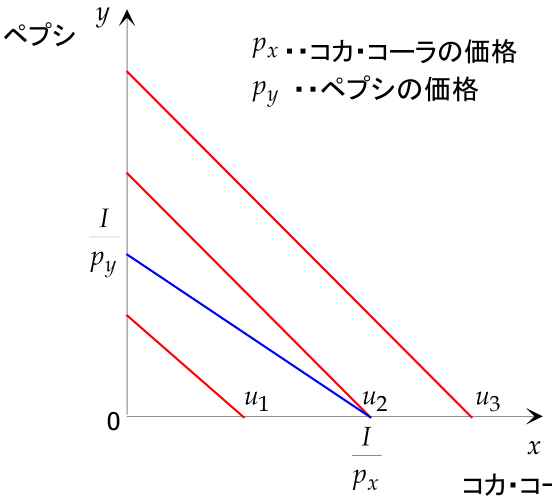

図９．３：完全代替のケース

上図に関して，結果９．２を適用すると，$y=0$ の時 $MRS(x,y)=1>p_x/p_y$ なので，最適な組合せは $x^*=I/p_x$，$y^*=0$ である．すなわち，コークの価格がペプシの価格より低いので，コークを買い，ペプシは買わない．

演習問題２　Ⅰ．消費の決定：B．予算制約　C．消費者の選択

１）ノボル君のミカン（X）とリンゴ（Y）に関する選好は、以下の効用関数で表せるものとする：$u(x,y)=10xy$

a）Xの限界効用 $MU_X=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ とYの限界効用 $MU_Y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ．

b）限界代替率 $MRS(x,y)$ を求めよ（一般的にxとyの関数として表せ）．

c）ノボル君がミカンを４個（x＝４）、リンゴを４個（y＝４）消費したときの、限界代替率を求めよ。また、ミカンを２個（x＝２）、リンゴを８個（y＝８）消費1したときの、限界代替率を求めよ。さらに、ミカンを８個（x＝８）、リンゴを２個（y＝２）消費したときの、限界代替率はいくらか？限界代替率逓減の法則は成立しているか？効用水準が160である時の無差別曲線を描き，これら3点における限界代替率を図示せよ．

d）ノボル君は800円持っており、ミカンとリンゴを買おうとしている。いま、ミカンの価格が一個100円(p_x = 100)、リンゴの価格が一個100円(p_y = 100)であったとする。

彼の予算線を式に表し、図示せよ。また、彼が購入する財の組合せを求め、図示せよ。最適な財の組合せにおいて、限界代替率はいくらか？また、限界代替率と価格比が等しくなっているか？

ｅ）ノボル君は800円持っており、ミカンの価格が一個50円($p_x = 50$)、リンゴの価格が一個200円($p_y = 200$)であったとする。彼の予算線を式に表し、図示せよ。また、彼が購入する財の組合せを求め、図示せよ。最適な財の組合せにおいて、限界代替率はいくらか？また、限界代替率と価格比が等しくなっているか？

２）ヨウイチロウ君の効用関数が$u(x, y) = xy$で与えられたものとする。Ｘの価格がp_x＝２、Ｙの価格がp_y＝３、所得が I＝24の時、彼にとって最適な財の組合せ(x^*, y^*)をラグランジェ法で求めよ。

３）リョウジ君の効用関数が$u(x, y) = xy^2$で与えられたものとする。Ｘの価格がp_x＝４、Ｙの価格がp_y＝６、所得が I＝３６の時、この消費者にとって最適な財の組合せ(x^*, y^*)をラグランジェ法で求めよ。

４）演習問題１で登場したシゲオ君、キョウコさんについて再び考察する。

a) いまシゲオ君の所得が１万円、ビールが一本500円、日本酒が一本1,000円であったとする。横軸にビールの量（ｘ）、縦軸に日本酒の量（ｙ）をとった平面に、彼の予算線を図示し、縦軸と横軸の切片、予算線の勾配を求めよ。

b) 彼の所得が２万円に変わった時の予算線を図示せよ。

c) 所得が１万円のままで、ビールの値段が一本1,000円になった時の予算線を図示せよ。

d) 所得が１万円のままで、ビールの値段が一本1,000円で日本酒が一本500円の時の予算線を図示せよ。

e) a)～d)のそれぞれの所得と価格のもとで、彼が選択する最適な財の組合せはそれ

ぞれ何かを求め、図示せよ。最適な財の組合せにおいて、限界代替率と価格比が等しくなっているか？もし、そうでないならば、なぜか？

f)　キョウコさんの所得が２万円、ウォッカが一杯1,000円、トマトジュースが一杯500円の時の彼女が選択する最適な財の組合せは何かを求め、図示せよ。

５）Ｘを米、Ｙを鳥肉とする。価格は $p_x = 1{,}000$、 $p_y = 500$である。(単位円/kg)マコト君は I = 50,000円持っている。

ａ）彼の予算線と無差別曲線を描き、最適な消費行動を例示せよ。

ｂ）米不足の結果として、政府が「米配給券」を発行することにした。その配給券は一定額Ｃ円を払うと、ｘ* kgの量のお米が貰える。いま、Ｃ＝15,000、ｘ* ＝ 25とする。米の配給券は一人一枚だけ購入できる。マコト君が配給券を購入した場合の予算線を図示し、式で表せ。配給券を購入して、さらにｘ* kgを超えて米を消費することもできるが、その場合の米の価格は$p_x = 1{,}000$である。

ｃ）マコト君が配給券を購入するか否かを決めることができるとしよう。購入する場合の状況を、予算線と無差別曲線を描き例示せよ。配給券を購入しない場合がありうるか？

ｄ）政府は配給券を一枚発行するごとに、いくら負担しなければならないか？もし、配給券を発行する代わりに、この負担額だけのお金をマコト君に直接与えたとしたら、彼は、ａ）で示された状況より高い効用を得ることができることを示せ。

６）以下の性質を満たす無差別曲線を描け

A) 選好が強い意味で凸である.

B) 選好が凸であるが，強い意味で凸ではない.

C) 選好が凸ではない.

７）選好が凸でないか，もしくは，選好が凸であっても限界効用が正でなければ，ラグランジェの定理の連立方程式（１）の解であるが，効用最大化問題の解となると

は限らない．以下のケースについて，このことを図で示せ．

A）　効用極大化は実現されているが，効用は最大化されてはいない例．

B）　効用最小化されている例．

８）選好が凸であるが，強い意味で凸ではないとしよう．この時，予算制約の下での効用最大化の解がただ一つに決まるとは限らず，複数個解が存在するケースがありうることを図で示せ．

９）以下の記述は成立するか？成立するならば証明せよ．成立しないならば反例を一つあげよ．

A) 関数が強い意味で凹であれば，その関数は強い意味で準凹である．
B) 関数が強い意味で準凹であれば，その関数は強い意味で凹である．
C) 選好が強い意味で凸であれば, その選好を表す効用関数は強い意味で準凹である．
D) 選好を表す効用関数が強い意味で準凹であれば, その選好は強い意味で凸である．
E) 選好が凸であれば，その選好を表す効用関数は準凹である．
F) 選好を表す効用関数が準凹であれば，その選好は凸である．
G) 選好が強い意味で凸ならば, その選好を表す効用関数が強い意味で凹である．
H) 選好を表す効用関数が強い意味で凹ならば, その選好は強い意味で凸である．