

『量子情報理論』セミナーで出た疑問点について

2024/12/25 (セミナー第 6 回まで)

0.1 疑問点

■ サポート

サポートの定義 (p.5) がおかしいのでは？

- 今の定義では, サポートは 0 か全体にしかない.
- サポートに関する p. 8, (1.22) 付近の議論は全く成立しない.
- p. 116 に, 半正定値行列 ρ に対するサポートの言及がある. (このあたりのサポートに関する議論は筋が通っている)

■ 定義 1.8 (Heisenberg-Weyl 群)

- 「Heisenberg-Weyl 演算子は $d = 2$ の場合に Pauli 演算子と一致する」 \leftarrow upto scalar では確かに一致するが, 完全には一致していない. 演算子に関しても upto scalar で一致すれば同じと考えるのか?
- $d = 2$ のときの Heisenberg-Weyl 群が Pauli 群と一致するわけでもない. 「一般化 Pauli 群」と呼ぶのが本当に適切か?

■ 定義 1.9

$\sqrt{\cdot}$ や, \log が \mathbb{C} 全体で定義されている訳ではないので, 次のように書いた方が良いのでは？

「 $U \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする. 正規行列 $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $M = \sum_{j=0}^{d-1} m_j |e_j\rangle\langle e_j|$, ($m_j \in U$) と対角化される
とき, 任意の複素数値関数 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, \dots 」

■ 量子状態のアンサンブル

「量子状態のアンサンブル」という語の定義が書かれていない.

教科書を記述通りに読むならば, (2.27) は「部分系 B を測定したが, 測定結果を知らない」という状況を表している. しかし, 本来は「B を無視して A だけに注目した量子状態」と解釈すべきなのでは？

古典的な確率論における周辺化に近いものという言い方もできる.

■ 系 A での物理操作

「系 A での物理操作」とは何を意味するか？

例えば, 複合系 AB において, エンタングルした量子状態にあったときに, 「系 B における測定を行い, 結果を知らせない」は系 A の物理操作に含めるのかどうか？

■ 2.3.1 節の論理

2.3.1 節の冒頭で「... という状況が量子論の最も一般的な時間発展になることが分かる。」とあるが、これを言うために、次のことを暗黙の了解としているように見える。

(暗黙の了解 1) $\forall A$: 量子系, $\exists E$: 補助系 such that 複合系 AE の時間発展はユニタリで表せる。
恐らく、「一般的」という語の解釈が、物理と数学とで異なる。

- 数学では、それ以外に可能性がない事を論証して、初めて何かについて一般的に論じたことになる。
- 物理では、理論を記述可能な範囲で拡張して行き、その範囲内で最も一般的であることを一般的と称する

例えば、「量子状態をどう記述するか」を考えた場合、
数学的には、「すべての量子状態は、量子状態のアンサンブルで表示できる」という事を、公理や定理などで保証しておかなければ、「量子状態のアンサンブルで表示できる状態の考察を一般的な考察とは呼べない。

物理的には、これまで考察した中で出てきた最も一般的な形が「量子状態のアンサンブル表示」なのだから、これについて考察すれば、一般的な状態を考察したことになる

今の論理を少し数学寄りに寄せる場合は、次のように公理を考えるとよい。

(追加公理 1) 孤立系において、測定を伴わない物理プロセスの時間発展はユニタリで書ける。

(追加公理 2) 任意の量子系 A は、適切に補助系 E を追加することで複合系 AE を孤立系とできる。

■ 3.1.4 節 測度について

p. 43 定義 3.7 において、 $U(\mathcal{H})$ 上の測度 H を、 $H: U(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$ のように書いてしまっている。その数行下で「ユニタリ群のある部分集合 $W \subset U(\mathcal{H})$ を選ぶ確率」といった表現も不適切。

「ユニタリ群から H に従ってランダム抽出した点が W に含まれる確率」という書きの方が良い？

■ 3.1.5 節 ユニタリデザインの存在

p. 47 の「また、練習問題 34 より、... 無数に存在することも分かるだろう。」の部分について
 $t \geq 4$ のとき、一様でないユニタリ t -デザインの存在は言えていない。従って、ユニタリ t -デザインが「各 t に対して無数に存在すること」は練習問題 34 からは言えない。

0.2 メモ

■ 練習問題 6 (p.10)

「Heisenberg-Weyl 演算子はユニタリだがエルミートではない」とあるが、エルミートにはなり得る。
「Heisenberg-Weyl 演算子はユニタリだがエルミートとは限らない」とすべきでは？

■ 定理 2.5 の証明 (p.24)

Schmidt 分解に言及する際に「練習問題 17 より」という文言を加えた方がよい。

■ 練習問題 31 (p.45)

M^B が何なのか明示されていない.

$M^B = \text{Tr}_A[M^{AB}]$ とするとよい.

■ ユニタリ・デザイン

p.43 の「確率的に選ばれるユニタリを $U \sim \nu$ と表記する」部分について, この時点で確率変数という語を出した方が, (数学者にとっては) 分かりやすい.

確率変数については, p. 111 のフットノートで初めて言及される.

0.3 誤植

- p. 3, l. -4. ブラベクトル $|w\rangle \rightarrow \langle w|$
- p. 4, l. -5. 複素列ベクトル \rightarrow 複素行ベクトル
- p. 5, l. -4. 二つの演算子 \rightarrow 三つの演算子
- p.25, (2.47). $|\rho_1\rangle^{AB} \rightarrow |\rho_1\rangle^{AB'}$
- p.25, (2.48). $|\rho_2\rangle^{AB} \rightarrow |\rho_2\rangle^{AB'}$
- p.27, (2.50). $\langle +|+\rangle^A \rightarrow |+\rangle\langle +|^A$
- p.37, (3.9). $\sup_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}} \rightarrow \sup_{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \setminus \{0\}}$
- p.39, 練習問題 25. 任意の $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n) \rightarrow$ 任意の $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$
- p.39-40, (3.23),(3.30), (3.31) $c^\ell(j) \rightarrow c^{\ell-1}(j)$