MODUL 9

Teori Keputusan: Analisis Posterior dan Preposterior

Prof. Dr. Zanzawi Soejoeti

PENDAHULUAN

Dalam modul ini akan kita pelajari teori keputusan Bayesian di mana pembuat keputusan mempunyai pilihan akan memperoleh informasi yang lebih banyak sebelum keputusan terakhir diambil. Jika dia menggunakan pilihan ini, keputusan terakhir diambil dengan distribusi peluang posterior variabel random keadaan alam yang dibuat dengan informasi sampel tambahan yang diperoleh dari sampel atau eksperimen atau uji dalam bentuk apa pun. Jenis pengambilan keputusan ini dinamakan *analisis posterior.* Hal ini dapat dibenarkan jika biaya pengumpulan informasi tambahan lebih kecil dari nilai informasi sempurna harapan prior.

Khususnya, jika informasi tambahan harus digabungkan ke dalam proses pembuat keputusan, teori keputusan Bayesian mempunyai bentuk yang kita namakan *analisis preposterior*, yaitu suatu studi makalah, antara lain mencoba untuk menilai akibat-akibat tindakan yang mungkin dari semua hasil sampel yang mungkin setiap ukuran sampel yang dapat dipakai dan kemudian memilih "fungsi keputusan yang optimal". Tepatnya, analisis preposterior dirancang guna menjawab dua pertanyaan sebelum suatu sampel benar-benar diambil, yaitu sebagai berikut.

1. Apakah suatu sampel benar-benar harus diambil dalam suatu masalah pengambilan keputusan?
2. Jika ya, seberapa besarkah sampel itu?

Jawaban dari pertanyaan-pertanyaan ini terpusat di sekitar perbandingan antara nilai informasi sampel yang dapat diharapkan dan biaya guna memperoleh informasi seperti itu.

Pertama-tama akan kita pelajari prosedur analisis posterior, kemudian kita bicarakan mekanisme analisis preposterior. Untuk analisis preposterior ini kita akan memulai dengan mengetengahkan sifat yang menonjol dari studi semacam ini dengan situasi pengambilan keputusan yang sederhana yang melibatkan dua tindakan dan beberapa keadaan alam. Setelah mempelajari prosedur umum analisis preposterior, kita akan memberikan komentar tentang sifat dan hubungan antara nilai harapan informasi sempurna, nilai harapan informasi sampel, dan biaya pengambilan sampel, kemudian metode tertentu yang telah disederhanakan tentang pengumpulan informasi yang optimal dengan sampling normal dan binominal akan kita pelajari. Seluruh presentasi kita dalam modul ini menganggap bahwa pembuat keputusan adalah netral terhadap risiko dalam arti bahwa fungsi kegunaannya untuk ruang adalah linear, yakni memaksimalkan pendapatan ruang harapan adalah kriterium yang memadai.

KEGIATAN BELAJAR 1

Pengambilan Keputusan dengan Informasi Sampel

A. ANALISIS POSTERIOR

Dalam analisis posterior, pembuat keputusan perlu:
membentuk distribusi peluang prior untuk variabel random keadaan alam;
1. mengambil sampel atau melakukan suatu percobaan dan mengamati hasil-hasilnya;
2. berdasarkan informasi tambahan yang dikumpulkan distribusi peluang prior diubah menjadi distribusi posterior dengan menggunakan teorema Bayes;
3. menggunakan strategi Bayesian bagi distribusi posterior untuk memilih tindakan yang optimal, yakni tindakan dengan pendapatan harapan tertinggi atau kesempatan rugi harapan yang terendah.

Sekarang, kita lihat contoh berikut ini. Sebelum setiap produk baru dipasarkan secara nasional, suatu pabrik kosmetik tertentu selalu mempunyai panel eksekutif yang meramalkan (memperkirakan) respons pasar terhadap produk itu. Staf peneliti produk pabrik itu baru saja menyelesaikan produk baru dengan bahan-bahan dari timur jauh, diberi nama "Kemala Hitam". Pemberian peringkat bersama para eksekutif menunjukkan distribusi prior bagi berbagai tingkat penjualan Kemala Hitam adalah sebagai berikut

θ_1 : tingkat penjualan tertinggi dengan $f_0(\theta_1)=0,4$

θ_2 : tingkat penjualan sedang dengan $f_0(\theta_2)=0,4$

θ_3 : tingkat penjualan rendah dengan $f_0(\theta_3)=0,2$

Untuk situasi pengambilan keputusan ini kita pikirkan dua tindakan yang mungkin:

a_1 : memasarkan produk baru secara nasional

a_2 : membuang produk baru.

Tindakan yang optimal, seperti biasa bergantung pada keadaan alam mana yang akan terjadi dan fungsi pendapatan bagi tiap tindakan. Misalkan bahwa menurut taksiran biaya dan kemungkinan hasil pendapatan untuk pengusaha itu adalah seperti dalam Tabel 9.1 di bawah.

Tabel 9.1
Matriks Pendapatan untuk Masalah Kemala Hitam (Dalam Jutaan Dolar)

Tindakan	Keadaan Alam		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	4,0	1,0	-1,6
a_2	0,0	0,0	0,0

Jika keputusan akhir harus dibuat berdasarkan informasi yang ada sekarang maka tindakan a_1, yakni memasarkan produk baru, akan merupakan tindakan yang optimal karena

$$EP_0(a_1{*}) = 4,0(0,4) + 1,0(0,4) + (-1,6)(0,2)$$
$$= 1.68$$

Dan yang lebih besar dari

$$EP_0(a_2) = 0$$

Untuk tindakan yang optimal, nilai harapan informasi sempurna prior atau nilai harapan kesempatan rugi adalah:

$$EVPI_0 = EPPI_0 - EP_0(a_1{*})$$
$$= 4,0(0,4) + 1,0(0,4) + 0(0,2) - 1,68$$
$$= 0,32$$

mengingat nilai $EVPI_0$ yang agak besar, analisis posterior mungkin dibenarkan.

Informasi tambahan untuk analisis posterior dalam hal ini dapat diperoleh baik dengan penelitian, survei pemasaran atau dengan uji pasar. Uji pasar meliputi pengenalan Kemala Hitam dalam suatu percobaan dalam suatu pasar lokal yang “dipilih”. Dalam kedua hal itu hasil yang mungkin x_k survei atau uji itu akan mempunyai relevansi berikut:

x_1 hasil menunjukkan tingkat penjualan tinggi;

x_2 hasil menunjukkan tingkat penjualan sedang;

x_3 hasil menunjukkan tingkat penjualan rendah.

Selanjutnya, untuk merevisi peluang prior, jika diketahui hasil survei atau uji, kita perlu gambaran tentang "keandalan" yang diharapkan dari indikasi uji itu. Misalkan, menurut survei pasar dan uji yang lalu dalam meramalkan penjualan produk baru, kita dapat membentuk susunan peluang seperti tertuang dalam Tabel 9.2.

Tabel 9.2
Peluang bersyarat untuk masalah Kendala Hitam

Hasil survei atau uji yang mungkin x_k	Keadaan Alam		
	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	0,7	0,3	0,1
x_2	0,2	0,5	0,1
x_3	0,1	0,2	0,8

Nilai-nilai peluang dalam Tabel 9.2 perlu diinterpretasikan dengan benar. Pertama, tiap kolom memuat distribusi peluang bersyarat hasil survei atau uji jika diketahui keadaan alam tertentu. Misalnya, menunjuk pada kolom θ_1, kita punyai

$$f(x_1|\theta_1)=0,7$$

$$f(x_2|\theta_1)=0,2$$

$$f(x_3|\theta_1)=0,1$$

Ini berarti bahwa jika diketahui θ_1 (tingkat penjualan tinggi) maka survei atau uji akan menghasilkan tingkat penjualan tinggi (x_1) adalah tiga setengah kali lebih mungkin daripada akan menghasilkan tingkat penjualan sedang (x_2) dan tujuh kali lebih mungkin daripada akan menghasilkan tingkat penjualan rendah (x_3). Sebaliknya, tiap baris dalam Tabel 9.2 memuat penilaian tentang keandalan hasil-hasil survei atau uji itu. Misalnya, jika kita perhatikan baris dua, kita peroleh

$f(x_2 \mid \theta_1) = 0,2$
$f(x_2 \mid \theta_2) = 0,5$
$f(x_2 \mid \theta_3) = 0,1$

Ini adalah peluang bersyarat bahwa x_2 akan diamati jika diketahui berbagai keadaan alam. Khususnya, di masa yang lalu jika produk baru dikenalkan di pasar nasional dan tingkat penjualan sedang merupakan keadaan alam yang sebenarnya maka hasil survei pasar atau uji menunjukkan dengan benar tingkat penjualan sedang 50% kali, tetapi jika tingkat penjualan yang sebenarnya tinggi maka sekitar 20% kali hasil menunjukkan tingkat penjualan sedang, dan jika tingkat penjualan yang sebenarnya rendah, sekitar 10% hasil menunjukkan tingkat penjualan sedang. Dengan perkataan lain, frekuensi relatif ini adalah kemungkinan (*likelihood*) suatu hasil survei atau uji menunjukkan tingkat penjualan sedang untuk tiap-tiap keadaan alam yang mungkin. Nilai-nilai digunakan untuk mengubah peluang prior jika yang terjadi tingkat penjualan sedang. Baris-baris yang lain harus diinterpretasikan dengan cara yang sama.

Misalkan, Kemala Hitam baru saja diuji pasar di tempat "tertentu" dan penjualan dalam uji pasar itu adalah rendah, apakah tindakan yang optimal dengan adanya informasi baru ini? Guna menjawab pertanyaan ini, pertama-tama kita harus mengubah distribusi peluang prior, yang dilakukan dalam Tabel 9.3. selanjutnya, ukuran Bayesian dapat diperoleh untuk tiap-tiap tindakan dengan peluang posterior bagi variabel random keadaan alam sebagai nilai bobot. Untuk ini kita punyai

$$EP_1(a_1) = 4(0,14) + 1(0,29) + (-1,6)(0,57)$$
$$= -0,062$$
$$EP_1(a_2{**}) = 0$$

Tabel 9.3
Penghitungan Peluang Posterior Masalah Kemala Hitam

$f_0(\theta_j)$	$f(x_3 \mid \theta_j)$	$f_0(\theta_j) f(x_3 \mid \theta_j)$	$f_1(\theta_j \mid x_3)$
0,4	0,1	0,04	0,14
0,4	0,2	0,08	0,29
0,2	0,8	0,16	0,57
$f(x_3) = 0,28$			1,00

(Petunjuk "**" untuk tindakan yang optimal berarti setelah adanya fakta sampel". Petunjuk "*" berarti "berdasarkan semata-mata pada peluang prior").

Jadi a_2, yakni "membuang" produk menjadi tindakan yang optimal dalam analisis posterior karena hasil percobaan menunjukkan tingkat penjualan rendah, berbeda dengan kesimpulan yang dicapai berdasarkan informasi prior saja. Tentu saja, a_1 masih tetap tindakan yang optimal jika sekiranya x_2 dan x_1 yang diamati.

Menarik untuk dicatat bahwa $EVPI_0$ suatu pengambilan keputusan merupakan batas atas untuk manfaat memperoleh informasi tambahan. Setelah informasi tambahan dikumpulkan, kita dapat juga menentukan nilai harapan posterior informasi sempurna, $EVPI_1$. Perubahan yang terjadi antara $EVPI_0$ dan $EVPI_1$ mengandung pelajaran dalam menilai keputusan yang harus dibuat dan manfaat upaya pengumpulan informasi tambahan. Secara analogi dengan analisis prior, $EVPI_1$ posterior dihitung dengan mengurangkan pendapatan harapan posterior dari informasi sempurna (atau dalam ketidakpastian).

Contoh:

$$\begin{aligned} EVPI_1 &= EPPI_1 - EP_1(a_2\,**) \\ &= [4(0,14) + 1(0,24) + 0(0,57)] - 0 \\ &= 0,85 \end{aligned}$$

Ini lebih besar dari $EVPI_0$ yang sama dengan 0,32 juta dolar. Kenaikan dalam nilai harapan informasi sempurna dari analisis prior ke analisis posterior berarti bahwa biaya ketidakpastian bertambah, yakni mengingat informasi tambahan (petunjuk uji tentang tingkat penjualan rendah) telah diperoleh dari percobaan, tersedianya informasi sempurna lebih berharga daripada sebelum pengambilan sampel. Ini dapat terjadi, seperti dalam contoh jika selisih antara distribusi peluang posterior dan prior cukup besar bahwa perubahan dalam tindakan optimal terjadi setelah penggabungan informasi sampel ke dalam proses pengambilan keputusan. Tentu saja, penurunan dalam EVPI dari analisis prior ke posterior dapat terjadi. Ini dapat terjadi jika analisis prior dan posterior keduanya menuju pada tindakan optimal yang sama. Berkurangnya nilai EVPI setelah memasukkan informasi tambahan yang diperoleh dapat diinterpretasikan sebagai keraguan dalam pengambilan keputusan telah berkurang karena adanya informasi tambahan.

B. ANALISIS PREPOSTERIOR

Di atas telah kita sebutkan beberapa kali bahwa akan sangat berharga bagi pembuat keputusan untuk membayar sampai senilai EVPI untuk informasi sempurna guna menghilangkan ketidakpastiannya tentang keadaan alam, tetapi karena tidak ada sampel atau percobaan yang dapat diharapkan menghasilkan informasi sempurna, pembuat keputusan belum punya petunjuk yang jelas tentang manfaat pengumpulan informasi lebih lanjut. Guna memungkinkannya menghitung manfaat informasi tambahan dari suatu sumber, gagasan tentang "nilai harapan informasi sampel" adalah penting sekali. Gagasan ini akan membantu pembuat keputusan dalam menentukan ukuran sampel yang terbaik dalam suatu situasi pengambilan keputusan tertentu. Dengan demikian, ini adalah inti utama dalam analisis preposterior.

Prosedur analisis preposterior untuk masalah-masalah pengambilan keputusan dengan sebarang banyak tindakan dan atau sebarang banyak keadaan alam adalah sama, tetapi untuk tujuan penyederhanaan hitungan, kita akan membicarakannya dengan masalah yang sederhana yang hanya dengan dua tindakan dan beberapa keadaan alam.

Suatu perusahaan penggalian HANOR ditawari suatu kontrak untuk menggali tempat guna dibangun 3 menara radar oleh suatu instansi pemerintah sepanjang pantai sejuk dengan bayaran \$10.000. Manajer perusahaan HANOR menaksir bahwa penggalian itu akan memakan biaya \$2.200 untuk menggali tiap tempat jika tidak ada lapisan-lapisan batu yang dijumpai dalam pekerjaan itu dan \$4.000 untuk menggali tiap tempat jika dijumpai lapisan-lapisan batu dalam pekerjaan itu. Dalam hal ini, jelas HANOR mempunyai dua pilihan tindakan:

a_1 : menerima tawaran;

a_2 : menolak tawaran.

Fungsi pendapatan untuk 2 tindakan ini, dapat ditentukan dengan mudah dari pernyataan masalah itu dan dituangkan dalam 2 kolom terakhir dari Tabel 9.4.

HANOR tidak yakin benar apakah lapisan batu akan dijumpai dalam 3 tempat penggalian itu, tetapi dapat memberikan nilai peluang prior kepada keempat keadaan alam yang mungkin berdasarkan pengetahuan kondisi umum tempat-tempat penggalian itu, dan ini tertuang dalam 2 kolom pertama Tabel 9.4.

Tabel 9.4
Distribusi Prior dan Pendapatan untuk Masalah Penggalian

Keadaan Alam: Banyak Tempat yang Memuat Lapisan Batu θ_j	Peluang Prior $f_0(\theta_j)$	Pendapatan	
		a_1 : Menerima	a_2 : Menolak
$\theta_1 = 0$	0,30	3400	0
$\theta_2 = 1$	0,35	1600	0
$\theta_3 = 2$	0,20	-200	0
$\theta_4 = 3$	0,15	-2000	0

Dapat dicatat bahwa dalam analisis preposterior pemilihan tindakan yang optimal dengan informasi yang ada sekarang ekuivalen dengan proses pengambilan keputusan dengan ukuran sampel O, yakni analisis prior sekarang dapat dinamakan *fungsi keputusan* dengan n = 0. Untuk contoh kita ini dengan n = 0 kita mempunyai:

$$\begin{aligned} EP_0(a_1{*}) &= 3400(0,30) + 1600(0,35) + (-200)(0,20) + (-2000)(0,15) \\ &= 1240 \end{aligned}$$

dan

$$EP_0(a_2) = 0$$

Jadi fungsi keputusan dengan n = 0 membawa kepemilihan a_i sebagai tindakan yang optimal. Untuk tindakan ini maka

$$\begin{aligned} EVPI_0 &= EPPI_0 - EP_0(a*_1) \\ &= 3400(0,30) + 1600(0,35) + 0(0,20) + 0(0,15) - 1240 \\ &= 1580 - 1240 \\ &= 340 \end{aligned}$$

yang menentukan batas atas untuk harga akan memperoleh informasi tambahan.

Melanjutkan kemungkinan akan mendapatkan informasi lebih lanjut sebelum dibuat keputusan terakhir, marilah kita anggap bahwa HANOR dapat menentukan apakah suatu tempat tertentu mempunyai atau tidak lapisan batu melalui percobaan pengeboran dengan biaya $150 tiap tempat. Dengan informasi biaya ini, kita lihat bahwa ukuran sampel yang optimal tidak pernah melebihi 2.

Setelah menentukan ukuran sampel yang mungkin, HANOR harus menilai hasil setiap hasil yang mungkin sampai dua. Untuk n = 1, yakni jika HANOR memilih satu tempat secara random dan mengebornya maka ada dua hasil sampel yang mungkin, yaitu:

x_1 : pengeboran menunjukkan tidak ada lapisan batu, dan

x_2 : pengeboran menunjukkan adanya lapisan batu.

Kita anggap bahwa informasi sampel mutlak benar (tidak seperti pada contoh Kemala Hitam). Sekarang peluang prior dapat diubah untuk masing-masing dari kedua hasil yang mungkin itu. Perubahan ini tertuang dalam Tabel 9.5.

Tabel 9.5.
Perubahan Peluang untuk n = 1 pada Masalah Penggalian

x_k	θ_j	$f_0(\theta_j)$	$f(x_k \mid \theta_j)$	$f_0(\theta_j)f(x_k \mid \theta_j)$	$f_1(\theta_j)$
x_1	θ_1	0,30	1	0,30	0,50
	θ_2	0,35	2/3	0,23	0,38
	θ_3	0,20	1/3	0,07	0,12
	θ_4	0,15	0	0,00	0,00
		1,00	-	$f(x_1) = 0,60$	1,00
x_2	θ_1	0,30	0	0,00	0,00
	θ_2	0,35	1/3	0,12	0,30
	θ_3	0,20	2/3	0,13	0,32
	θ_4	0,15	1	0,15	0,38
		1,00	-	$f(x_2) = 0,40$	1,00

Dua observasi harus untuk hitungan-hitungan dalam Tabel 9.5. *Pertama*, kemungkinan adalah tambahan untuk keadaan alam yang sebenarnya.

Misalnya, $f(x_1|\theta_1) = 1$ karena jika tidak ada tempat yang mempunyai lapisan batu, peluang bahwa hasil pengeboran menunjukkan tidak ada lapisan batu harus sama dengan 1, dan seterusnya. Selanjutnya, nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ membentuk apa yang dinamakan *distribusi peluang prediktif* karena $f(x_k)$ digunakan untuk membuat prediksi (perkiraan) tentang hasil-hasil sampel sebelum benar-benar diamati.

Melanjutkan analisis kita untuk n = 1, kita catat bahwa dalam bentuk peluang terubah, kita mempunyai:

$$\begin{aligned}
EP_1(a_1{**}|\ x_1) &= 3400(0,50) + 1600(0,38) + (-200)(0,12) + (-2000)(0) \\
&= 2284 \\
EP_1(a_2|\ x_1) &= 0 \\
EP_1(a_1|\ x_2) &= 3400(0) + 1600(0,30) + (-200)(0,32) + (-2000)(0,38) \\
&= -344 \\
EP_1(a_2{**}|\ x_2) &= 0
\end{aligned}$$

Hitungan-hitungan ini menunjukkan jika x_1 terjadi maka a_1 adalah tindakan optimal posterior; jika x_2 terjadi maka a_2 adalah tindakan optimal posterior. Perhatikan dengan hati-hati bahwa nilai-nilai harapan bagi tindakan optimal posterior adalah *bersyarat* pada hasil-hasil yang sama, dan peluang sampel akan menunjukkan x_1 dan x_2 adalah peluang prediktif $f(x_1) = 0,60$ dan $f(x_2) = 0,40$. Dengan demikian, *pendapatan harapan tak bersyarat*, yang akan kita *namakan pendapatan harapan untuk fungsi keputusan* dengan n = 1, ditulis EP(1), harus merupakan pendapatan harapan tertimbang tindakan optimal posterior dengan peluang prediktif sebagai nilai timbangannya.

Contoh:

$$\begin{aligned}
EP(1) &= EP_1(a_1{**}|\ x_1)f(x_1) + EP_1(a_2{**}|\ x_2)f(x_2) \\
&= 2284(0,60) + 0(0,40) \\
&= 1370,40
\end{aligned}$$

Sekarang kita perhatikan bahwa dalam contoh kita $EP(1) > EP(0)$ dengan $EP(0)$ adalah pendapatan harapan untuk tindakan optimal prior.

Hasil ini menunjukkan bahwa percobaan pengeboran satu tempat yang dipilih secara random mungkin bermanfaat. Kenaikan dalam pendapatan harapan dari n = 0 ke n = 1 adalah $130.40. Kenaikan dalam pendapatan harapan suatu fungsi keputusan dengan ukuran sampel n dari pendapatan harapan tindakan optimal prior didefinisikan sebagai *nilai harapan informasi sampel*, $EVSI(n)$. Misalnya,

$$\begin{aligned} \text{EVSI}(1) &= \text{EP}(1) - \text{EP}(0) \\ &= 1370{,}40 - 1240{,}00 \\ &= 130{,}40 \end{aligned}$$

Selagi informasi sampel bekerja untuk mengurangi ketidakpastian yang melekat pada variabel keadaan alam. Dengan demikian untuk meningkatkan pendapatan harapan tindakan optimal, masih akan belum terdapat keuntungan bersih dari pengambilan sampel, kecuali $EVSI(\text{n})$ lebih besar dari biaya pengambilan sampel, C(n). Selisih antara $EVSI(\text{n})$ dan C(n) dinamakan keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel, $ENGS(\text{n})$.

Contoh:

$$\begin{aligned} \text{ENGS}(1) &= 130{,}40 - 150{,}00 \\ &= -19{,}60. \end{aligned}$$

yang merupakan bilangan negatif. Ini menunjukkan bahwa sampel dengan n = 1 tidak ekonomis dan harus tidak dilakukan. Penting untuk dicatat di sini bahwa nilai negatif ENGS(1) tidak menutup kemungkinan bahwa sampel yang berukuran lebih besar mungkin masih bermanfaat. Jadi, kita harus melanjutkan untuk menilai fungsi keputusan dengan n = 2.

Untuk n = 2, kita hanya mengulangi prosedur untuk n = 1. Jika HANOR memilih dua tempat secara random untuk percobaan pengeboran maka akan ada 3 hasil sampel yang mungkin sebagai berikut.

x_1 : tidak satu pun dari dua tempat itu mengandung lapisan batu.

x_2 : ada satu tempat dari kedua tempat itu mengandung lapisan batu.

x_3 : kedua tempat mengandung lapisan batu.

Haruskah sampel itu dengan pengembalian atau tanpa pengembalian? Kadang-kadang sampel harus diambil dengan pengembalian, tetapi di sini sampel itu harus diambil tanpa pengembalian. Sekali HANOR mengetahui dengan pasti apakah tempat tertentu mengandung lapisan batu, jelas akan merupakan pemborosan \$150 untuk mengebor lagi tempat yang sama.

Jadi kemungkinan-kemungkinan itu adalah peluang hipergeometrik. Tepatnya nilai $f(x_k | \theta_j)$ dalam Tabel 9.6 diperoleh sebagai berikut.

$$f(x_1 | \theta_1) = \binom{3}{2} \Big/ \binom{3}{2} = 1$$

$$f(x_1 | \theta_2) = \binom{1}{0}\binom{2}{2} \Big/ \binom{3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_1 | \theta_3) = f(x_1 | \theta_4) = 0$$

$$f(x_2 | \theta_1) = f(x_2 | \theta_4) = 0$$

$$f(x_2 | \theta_2) = \binom{1}{1}\binom{2}{1} \Big/ \binom{3}{2} = \frac{2}{3}$$

$$f(x_2 | \theta_3) = \binom{2}{1}\binom{1}{1} \Big/ \binom{3}{2} = \frac{2}{3}$$

$$f(x_3 | \theta_1) = f(x_3 | \theta_2) = 0$$

$$f(x_3 | \theta_3) = \binom{2}{2}\binom{1}{0} \Big/ \binom{3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_3 | \theta_4) = \binom{3}{2} \Big/ \binom{3}{2} = 1$$

Dari peluang posterior dalam Tabel 9.6, kita mempunyai pendapatan harapan bersyarat untuk berbagai tindakan jika diketahui masing-masing hasil sampel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} EP_1(a_1 ^{**} | x_1) &= 3400(0,71) + 1600(0,29) + (-200)(0) + (-2000)(0) \\ &= 2878 \\ E(a_2 | x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Tabel 9.6
Perubahan Peluang untuk n = 2 Masalah Penggalian

x_k	θ	$f_0(\theta_j)$	$f(x_k\|\theta_j)$	$f_0(\theta_j)f(x_k\|\theta_j)$	$f_1(\theta_j)$
x_1	θ_1	0,30	1	0,30	0,71
	θ_2	0,35	1/3	0,12	0,29
	θ_3	0,20	0	0,00	0,00
	θ_4	0,15	0	0,00	0,00
		1,00	-	$f(x_1) = 0,42$	1,00
x_2	θ_1	0,30	0	0,00	0,00
	θ_2	0,35	2/3	0,23	0,64
	θ_3	0,20	2/3	0,13	0,36
	θ_4	0,15	0	0,00	0,00
		1,00	-	$f(x_2) = 0,36$	1,00
x_3	θ_1	0,30	0	0,00	0,00
	θ_2	0,35	0	0,00	0,00
	θ_3	0,20	1/3	0,07	0,32
	θ_4	0,15	1	0,15	0,68
		1,00	-	$f(x_3) = 0,22$	1,00

$$EP_0(a_1^{**}|\ x_2) = 3400(0) + 1600(0,64) + (-200)(0,36) + (-2000)(0)$$
$$= 952$$
$$EP_1(a_2|\ x_2) = 0$$
$$EP_1(a_1|\ x_3) = 3400(0) + 1600(0) + (-200)(0,32) + (-2000)(0,68)$$
$$= -1424$$
$$EP_1(a_2^{**}|\ x_3) = 0$$

Jadi, X_1 tak ada lapisan batu atau X_2 satu lapisan batu, diamati dalam sampel berukuran 2, a_1 adalah optimal jika X_3, dua lapisan batu, diamati maka a_2 optimal. Pendapatan harapan bersyarat untuk fungsi keputusan dengan n = 2 menjadi

$$
\begin{aligned}
EP(2) &= \sum_k EP_1(a_i^{**} | \; x_k) f(x_k) \\
&= 2878(0,42) + 952(0,36) + 0(0,22) \\
&= 1551,48
\end{aligned}
$$

Juga, untuk fungsi keputusan ini

$$
\begin{aligned}
EVSI(2) &= EP(2) - EP(0) \\
&= 1551,48 - 1240,00 \\
&= 311,48
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
ENGS(2) &= EVSI(2) - C(n) \\
&= 311,48 - 300,00 \\
&= 11,48
\end{aligned}
$$

Yang merupakan bilangan positif maka n = 2 bermanfaat secara ekonomi.

Hitungan-hitungan di atas mengungkapkan bahwa fungsi keputusan dengan n = 2 lebih baik dari pada dengan n = 1 karena $ENGS(2) > ENGS(1)$, tetapi apakah mungkin untuk meningkatkan keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel dengan n = 3? Jawaban untuk contoh kita ini adalah tidak! Oleh karena telah ditentukan bahwa ukuran sampel yang optimal tidak dapat lebih dari 2 dalam bentuk $EVPI_0$ dan $C(n)$. Jadi, kita dapat menyatakan aturan pengambilan keputusan optimal untuk masalah HANOR sebagai berikut. Lakukan percobaan pengeboran dua tempat yang dipilih secara random; ambil a_1, terima penawaran jika tidak ada atau satu tempat yang memuat lapisan batu. Ambil a_2 menolak penawaran jika kedua tempat memuat lapisan batu.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) a. Tentukan tindakan optimal posterior dalam masalah Kemala Hitam yang kita pelajari di depan jika diketahui bahwa uji pasar menunjukkan tingkat penjualan tinggi!
   b. Lakukan sama seperti di atas (soal a) jika diketahui bahwa uji pasar menunjukkan tingkat penjualan medium!
   c. Hitunglah nilai harapan posterior informasi sempurna untuk masing-masing dua hasil di atas dan berilah komentar tentang nilai-nilai relatif terhadap $EVPI_0$!

2) Misalkan, operator dalam contoh pengeboran minyak yang kita pelajari dalam modul 8 akan memandang suatu analisis posterior dengan uji geologi dalam bentuk informasi seismik. Biaya tiap-tiap uji semacam itu adalah $15.000. Menurut pengetahuan dan pengalaman operator yang lalu dalam hal pengeboran minyak, dia mampu menilai peluang bersyarat untuk berbagai hasil uji jika diketahui masing-masing keadaan alam seperti tertuang dalam tabel berikut ini.

x_k	**Keadaan Alam**					
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
x_1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1
x_2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2
x_3	0,1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

Dengan
x_1 = tidak ada struktur, jelek.
x_2 = struktur terbuka, sedang.
x_3 = struktur tertutup, baik.

Tunjukkan bahwa untuk berbagai hasil uji yang mungkin, peluang posterior adalah seperti tertuang pada tabel berikut ini.

	$f(\theta_j \mid x_1)$	$f(\theta_j \mid x_2)$	$f(\theta_j \mid x_3)$
θ_1	0,725	0,569	0,216
θ_2	0,132	0,155	0,176
θ_3	0,066	0,103	0,157
θ_4	0,044	0,103	0,196
θ_5	0,022	0,034	0,118
θ_6	0,011	0,034	0,137

RANGKUMAN

Kita pelajari analisis posterior untuk pengambilan keputusan. Unsur-unsur yang harus kita punyai dalam analisis posterior adalah:

1. distribusi peluang prior untuk variabel keadaan alam;
2. observasi sampel;
3. mengubah distribusi peluang prior menjadi distribusi peluang posterior berdasarkan informasi tambahan yang dikumpulkan;
4. menggunakan strategi Bayesian untuk distribusi peluang posterior guna memilih tindakan yang optimal.

Analisis posterior adalah suatu studi di atas kertas yang, antara lain mencoba menilai akibat-akibat yang mungkin pada tindakan-tindakan yang ada dari sebuah hasil sampel yang mungkin dengan berbagai ukuran sampel, kemudian memilih fungsi keputusan yang optimal. Analisis posterior dirancang guna menjawab dua pertanyaan dasar, sebelum sampel benar-benar diambil (a) apakah suatu sampel perlu diambil dalam suatu situasi pengambilan keputusan; (b) jika ya, berapa besarkah ukuran sampel itu?

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 8.
Pandang suatu masalah dengan dua keadaan alam,

θ_1 akan hujan di sore hari;

θ_2 tidak akan hujan di sore hari;

dan tiga tindakan,

a_1 tinggal di Rumah;

a_2 pergi tanpa membawa payung;

a_3 pergi dengan membawa payung.

Tabel berikut ini memberikan pendapatan (dalam kegunaan) yang menunjukkan dilema yang membentuk masalah keputusan.

Tindakan	**Keadaan Alam**	
	θ_1	θ_2
a_1	0,5	0,1
a_2	0,0	1,0
a_3	0,4	0,3

1) Jika peluang prior adalah $P(\theta_1) = 0,4$ dan $P(\theta_2) = 0,6$ maka pendapatan harapan berdasarkan informasi prior saja adalah ....
A. $EP_0(a_1) = 0,26$
B. $EP_0(a_1) = 0,32$
C. $EP_0(a_2) = 0,39$
D. $EP_0(a_2) = 0,43$

2) Lihat kembali soal (1) maka pendapatan harapan berdasarkan informasi prior saja adalah ....
A. $EP_0(a_2) = 0,21$
B. $EP_0(a_2) = 0,28$
C. $EP_0(a_3) = 0,34$
D. $EP_0(a_3) = 0,42$

3) Misalkan, satu observasi suatu indikator hujan menghasilkan *likelihood*, seperti dalam tabel di berikut.

	θ_1	θ_2
x_1	0,8	0,1
x_2	0,2	0,9

dengan x_1, menunjukkan pengamatan "hujan" dan x_2 menunjukkan "tidak hujan". Jika indikator hujan memperkirakan x_1 maka ....

A. $EP_1(a_1) = 0,3262$

B. $EP_1(a_1) = 0,3832$

C. $EP_1(a_1) = 0,4368$

D. $EP_1(a_1) = 0,5263$

4) Lihat kembali soal (3) maka ....

A. $EP_1(a_2) = 0,1122$

B. $EP_1(a_2) = 0,1579$

C. $EP_1(a_2) = 0,2122$

D. $EP_1(a_2) = 0,2639$

5) Pandang kembali soal (3) maka ....

A. $EP_1(a_3) = 0,4242$

B. $EP_1(a_3) = 0,2828$

C. $EP_1(a_3) = 0,3122$

D. $EP_1(a_3) = 0,3824$

6) Jika indikator hujan menunjukkan x_2 maka ....

A. $EP_1(\mathrm{a}_1) = 0,0165$

B. $EP_1(\mathrm{a}_1) = 0,1516$

C. $EP_1(\mathrm{a}_1) = 0,2651$

D. $EP_1(\mathrm{a}_1) = 0,3516$

7) Pandang kembali soal (6). Maka ....
   A. $EP_1(a_2) = 0,7108$
   B. $EP_1(a_2) = 0,8710$
   C. $EP_1(a_2) = 0,9187$
   D. $EP_1(a_2) = 0,9718$

8) Pandang kembali soal (6). Maka, ...
   A. $EP_1(a_3) = 0,3129$
   B. $EP_1(a_3) = 0,3921$
   C. $EP_1(a_3) = 0,4192$
   D. $EP_1(a_3) = 0,4912$

II. Untuk soal nomor 9 sampai dengan nomor 11. Lihat kembali soal nomor 2 pada latihan di depan.

9) Jika hasilnya x_1 maka a_4 tindakan optimal dengan ....
   A. $EP_1(a_4 ** | x_1) = 4849,50$
   B. $EP_1(a_4 ** | x_1) = 5489,50$
   C. $EP_1(a_4 ** | x_1) = 8594,50$
   D. $EP_1(a_4 ** | x_1) = 9458,50$

10) Jika hasilnya x_2 maka a_4 tindakan optimal dengan ....
   A. $EP_1(a_4 ** | x_2) = 12363.00$
   B. $EP_1(a_4 ** | x_2) = 23163.50$
   C. $EP_1(a_4 ** | x_2) = 31236.00$
   D. $EP_1(a_4 ** | x_2) = 62313.50$

11) Jika hasilnya x_3 maka a_1 tindakan optimal dengan ....
   A. $EP_1(a_1 ** | x_3) = 48.320$
   B. $EP_1(a_1 ** | x_3) = 82.430$
   C. $EP_1(a_1 ** | x_3) = 143.820$
   D. $EP_1(a_1 ** | x_3) = 280.430$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Pengambilan Keputusan dengan Informasi Sampel (Lanjutan)

A. ANALISIS PREPOSTERIOR UMUM

Prosedur analisis preposterior yang kita pelajari dalam kegiatan belajar terdahulu adalah sangat umum dan dapat diterapkan untuk setiap masalah pengambilan keputusan dengan banyak tindakan dan keadaan alam berapa pun, tetapi untuk mendapatkan pengertian yang lebih sistematis tentang prosedur ini, sekarang kita akan merumuskan kembali, memperluas, dan membuatnya umum (generalisasi) tentang apa yang telah kita pelajari di depan.

1. Prosedur Analisis Preposterior untuk Tindakan dan keadaan Alam yang berhingga banyak.

Suatu analisis preposterior adalah studi kertas yang mencoba untuk menentukan fungsi keputusan optimal sebelum informasi lebih lanjut yang sebenarnya dikumpulkan. Ini dimulai dengan membentuk distribusi peluang prior bagi variabel random keadaan alam dan penaksiran biaya pengambilan sampel. Selanjutnya, nilai harapan informasi sempurna atau kesempatan rugi harapan, untuk tindakan optimal prior dihitung. Jika $EVPI_0 = EL_0(a_i*) < C_{(n)}$, untuk semua $n \geq 1$, pengambilan keputusan akhir harus dilakukan sekarang dengan informasi yang ada. Jika tidak demikian, mungkin akan bermanfaat mendapatkan informasi tambahan sebelum diambil keputusan terakhir.

Jika pengambilan sampel dinilai akan bermanfaat, kita mulai dengan fungsi keputusan dengan n = 1 dan kita naikkan ukuran sampel n itu terus-menerus sampai diperoleh ukuran sampel yang optimal, ditulis n*. Untuk setiap nilai n analisisnya sama dan ini meliputi langkah-langkah berikut.

1. Ubahlah peluang prior untuk masing-masing dan setiap hasil sampel yang mungkin bagi sampel berukuran n = 1.
2. Carilah tindakan optimal posterior, $a**$ bagi setiap hasil sampel tertentu dan hitunglah pendapatan harapan bersyarat sebagai:

$$EP_1(a_i ** | \; x_k) = \sum_j m_{ij} \; f_1(\theta_j | \; x_k)$$

atau kesempatan rugi bersyarat sebagai:

$$EL_1(a_i ** | \; x_k) = \sum_j l_{ij} \; f_1(\theta_j | \; x_k)$$

3. Dengan pendapatan (atau kesempatan rugi) harapan bersyarat tindakan optimal posterior untuk berbagai hasil sampel yang diperoleh. Selanjutnya pendapatan (kesempatan rugi) harapan tak bersyarat untuk fungsi keputusan dengan ukuran sampel tertentu dihitung. Nilai harapan ini adalah rata-rata tertimbang pendapatan (kesempatan rugi) harapan bersyarat tindakan optimal posterior dengan peluang prediktif sebagai nilai timbangnya. Jadi, kita punyai:

$$EP(n) = \sum_k EP_1(a_i ** | \; x_k) \; f(x_k)$$

dalam bentuk pendapatan atau

$$EL(n) = \sum_k EL_1(a_i ** | \; x_k) \; f(x_k)$$

dalam bentuk kesempatan rugi, dengan n = 1, 2, 3, …

4. Kenaikan dalam pendapatan harapan atau penurunan dalam kesempatan rugi harapan sebagai hasil pengambilan sampel, dibandingkan dengan pengambilan keputusan tanpa pengambilan sampel, dinamakan nilai harapan informasi sampel yang didefinisikan sebagai:

$$\text{EVPSI}(\text{n}) = \text{EP}(\text{n}) - \text{EP}(0)(a_i *)$$

dalam bentuk pendapatan atau

$$\text{EVPSI}(\text{n}) = \text{EL}(0)(a_i *) - \text{EL}(\text{n})$$

dalam bentuk kesempatan rugi. Perhatikan juga bahwa analisis prior di sini dinamakan fungsi keputusan untuk n = 0, jadi $\text{EP}_0(a_i *)$ dapat ditulis sebagai EP_0 dan $\text{EL}(a_i *)$ dapat ditulis sebagai $\text{EL}_{(0)}$.

5. *Kecuali* nilai harapan informasi sampel melebihi biaya untuk memperoleh sampel, pengambilan sampel merupakan pemborosan waktu dan uang. Keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel adalah $\text{ENGS}(\text{n}) = EVSI(\text{n}) - C(\text{n})$. Jika, ENGS suatu sampel yang diusulkan sama dengan nol atau negatif maka sampel itu harus tidak diambil.

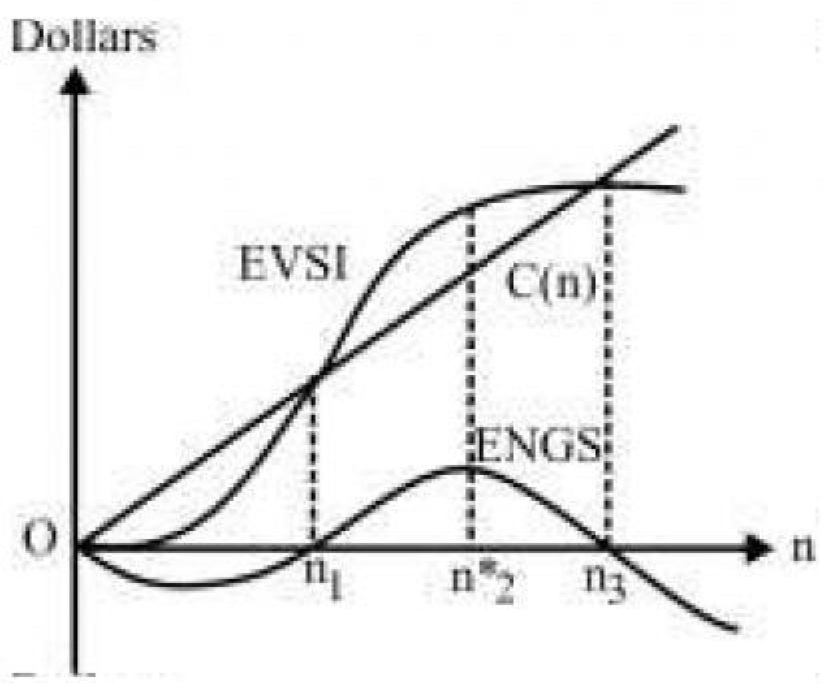
6. Proses ini diulang untuk n yang senantiasa bertambah sampai diperoleh ukuran sampel yang optimal. Ukuran sampel optimal n* adalah n dengan keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel maksimum, yakni:
$$\text{ENGS}(n^*) \geq \text{ENGS}(n)$$
untuk semua n yang mungkin.

Dalam hal n* = 0, pembuat keputusan harus membuat keputusannya yang akhir tanpa pengambilan sampel lebih lanjut.

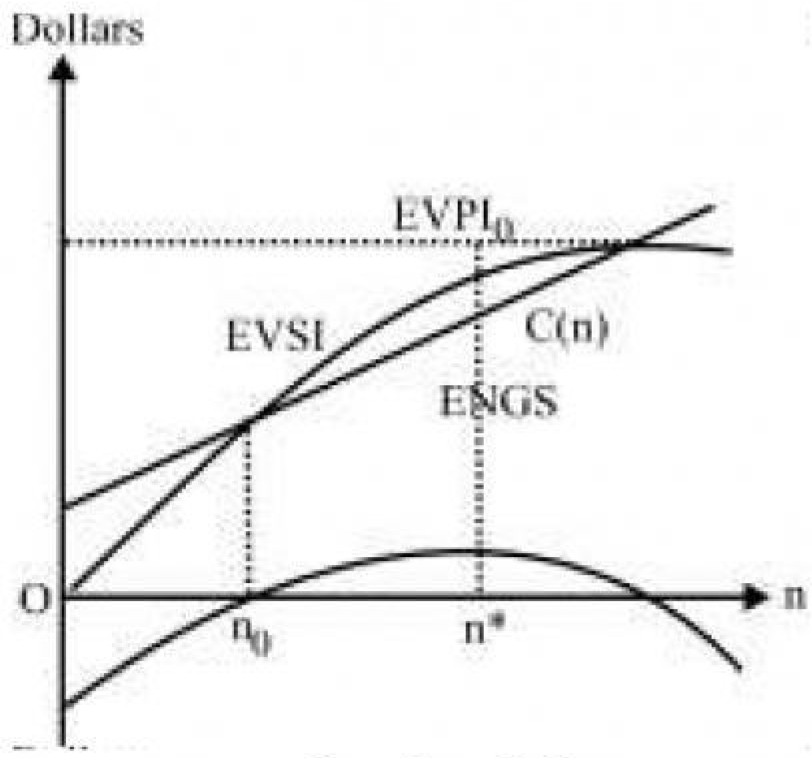
Dapat dicatat bahwa penentuan n* bergantung pad ENGS yang selanjutnya bergantung pada EVSI dan $C(n)$. Untuk mendapatkan tambahan wawasan tentang analisis preposterior, marilah kita lakukan beberapa pengamatan tentang sifat ini dan hubungan-hubungannya.

1. Sifat ENGS

Dua jenis kurva ENGS yang sering dijumpai adalah seperti yang tertuang dalam Gambar 9.1. dan 9.2. *Pertama* digambar dengan anggapan bahwa $C(n) = (v)(n)$ dan yang *kedua* $C(n) = F + (v)(n)$. Dalam rumus ini, F menunjukkan biaya tetap mengambil sampel seluruhnya (perancangan, pelaksanaan, analisis, pelaporan, dan sebagainya) yang akan diadakan jika suatu sampel berukuran berapa pun akan diambil, dan berarti urut biaya variabel pengambilan sampel dengan anggapan bahwa tambahan biaya untuk tiap tambahan observasi sampel sama.



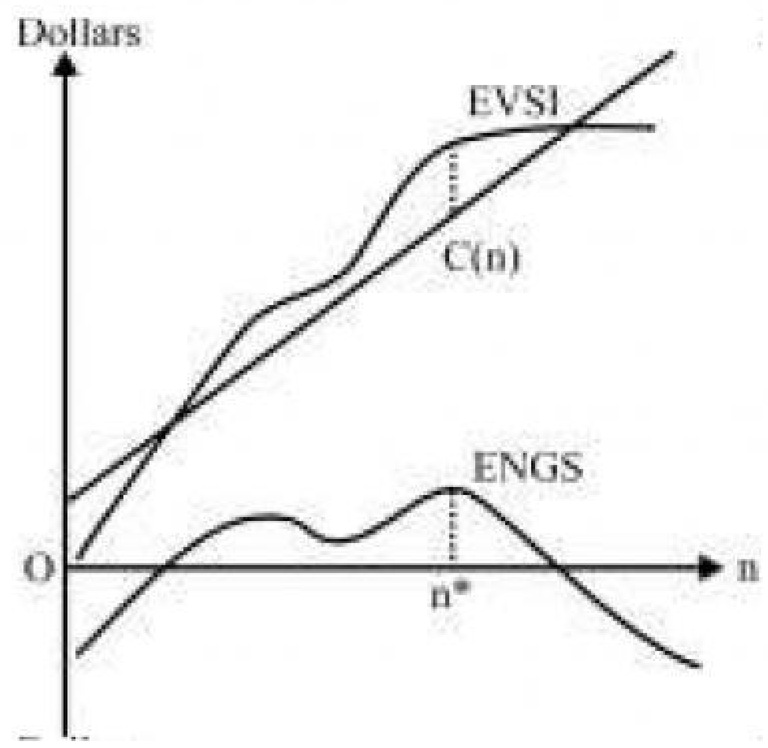
Gambar 9.1
Sifat ENGS dengan C(n) = V(n)



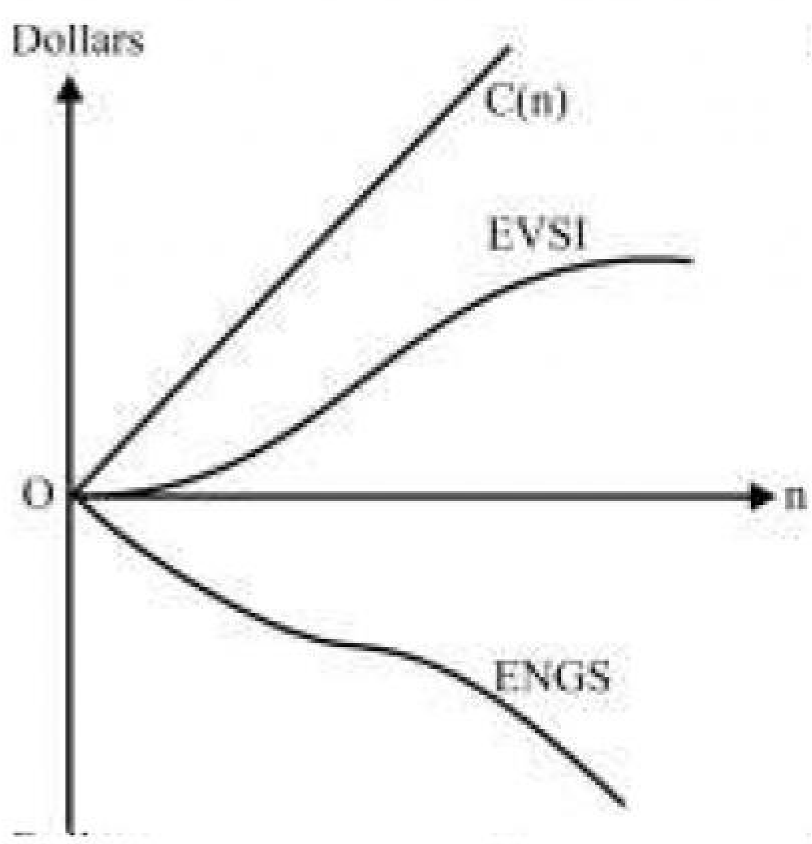
Gambar 9.2
Sifat ENGS dengan C(n) = F + V(n)

Perhatikan bahwa sifat EVSI, $C(n)$, ENGS dan hubungan-hubungannya dalam kedua hal itu hampir sama. Dalam tiap hal kita melihat bahwa EVSI naik secara kontinu dengan naiknya ukuran sampel, tetapi EVSI naik dengan tingkat kenaikan yang menurun dengan $EVPI_0$) sebagai batasnya. Perhatikan juga bahwa $C(n)$ suatu fungsi linear. Oleh karena sifat-sifat kedua fungsi ini, ENGS yang merupakan selisih antara EVSI dan $C(n)$, pada awalnya akan naik mencapai maksimum, kemudian menurun, dan selanjutnya menjadi negatif. Ukuran sampel yang bersesuaian dengan maksimumnya kurva ENGS dalam kedua diagram itu adalah ukuran sampel yang optimal. Juga dengan Gambar 9.2, kita melihat bahwa jika ada unsur biaya tetap yang besar dalam $C(n)$ untuk n yang lebih kecil dari n_0, ENGS adalah negatif. Ini berarti bahwa jika suatu sampel berukuran kecil tidak ekonomis, sampel besar mungkin masih bermanfaat.

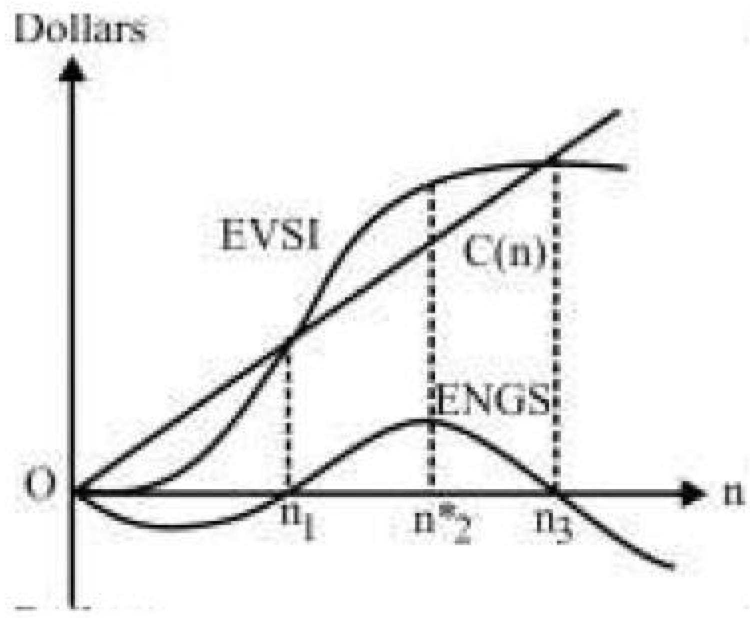
Kurva untuk ENGS, seperti yang disajikan dalam Gambar 9.1. dan 9.2 hanyalah contoh 2 jenis kurva ENGS. Selanjutnya, kita akan membicarakan tiga bentuk kurva ENGS yang lain yang mungkin akan sering kita jumpai juga. *Pertama*, seperti terungkap dalam Gambar 9.3, suatu kurva ENGS dapat menurun dari suatu puncak, kemudian ke puncak lagi. Kita lihat bahwa dalam kasus ini n* bersesuaian dengan puncak kedua kurva ENGS itu. Kasus *kedua*, seperti ditunjukkan Gambar 9.4, yaitu keadaan dengan nilai harapan informasi sampel tidak dapat memenuhi biaya pengambilan sampelnya berapa pun ukuran sampel itu. Dalam hal ini ENGS negatif untuk semua ukuran sampel dan sebagai hasilnya, pembuat keputusan harus memilih tindakan yang optimal dengan informasi yang ada sekarang. Kasus *ketiga,* seperti ditampilkan gambar 9.5, yakni ukuran sampel yang mana saja dalam interval antara n_1 dan n_3 akan bermanfaat, ENGS mempunyai satu puncak, dan $n_2{}^* = n_2$. Tetapi jika keadaannya adalah sedemikian sehingga pembuat keputusan tidak dapat mengamati sampel yang lebih besar dari n_1, pengambilan sampel lebih lanjut harus ditolak dan pengambilan keputusan terakhir dibuat berdasarkan informasi yang ada. Ini dapat terjadi, misalnya ada pembatasan waktu yang dituntut pada pengambilan keputusan yang final.



Gambar 9.3
Kasus dengan ENGS Mempunyai Lebih dari Satu Puncak



Gambar 9.4
Kasus ENGS Negatif untuk Semua n



Gambar 9.5
Kasus dengan ENGS Negatif untuk n Kecil

Jika diketahui bahwa informasi tambahan bermanfaat dan mungkin, ukuran sampel yang optimal untuk masalah pengambilan keputusan dengan tindakan dan keadaan alam yang berhingga biasanya ditentukan dengan coba-coba, dengan prosedur yang dinamakan *interaktif*. Masalah dengan prosedur ini memerlukan banyak tenaga dan waktu penghitungan untuk mendapatkan EVSI (jadi juga ENGS) jika n besar yang menakutkan dan membuat frustrasi untuk mengerjakannya. Untungnya dalam praktik jika diinginkan untuk melakukan analisis preposterior biasanya masalah itu diprogram dalam komputer.

Dalam hubungan ini, dapat juga diamati, seperti dalam hal analisis prior, bahwa jika variabel keadaan alam kontinu dan distribusi peluang prior merupakan distribusi sekawannya maka sering kali rumus-rumus matematika yang agak mudah dapat dirumuskan guna menentukan EVSI dan n* secara langsung. Sekarang kita akan memandang prosedur-prosedur yang sederhana untuk analisis posterior dan pengumpulan informasi optimal untuk dua keadaan pengambilan keputusan khusus tetapi sering kita jumpai, seperti kasus pengambilan sampel binomial dan normal.

3. Analisis Preposterior dengan Sampling Binomial

Dalam kasus pengambilan sampel binomial, variabel keadaan alam sering dianggap kontinu dengan *fungsi peluang prior beta*. Maka penyelesaian masalah pengambilan keputusan itu bergantung pada banyak tindakan dan jenis fungsi kerugian. Ingat bahwa banyak tindakan tak berhingga dan fungsi kerugian berbentuk $L(a, p) = b(a - p)^2$, tindakan yang optimal adalah tindakan yang nilai numeriknya sama dengan nilai harapan variabel random keadaan alam p. Dengan banyak tindakan tak berhingga banyak, tetapi fungsi kerugian sepotong-sepotong linear, tindakan optimal (atau taksiran) bersesuaian dengan $f^* = b_u/(b_u + b_0)$ bagian dari distribusi keadaan alam pembuat keputusan. Akhirnya, jika ada dua tindakan dan jika fungsi kerugian linear, tindakan yang optimal dipilih berkenaan dengan nilai *break even* dari p, yakni p_b. Untuk kasus *pertama*, satu rumus dapat diturunkan guna menentukan ukuran sampel yang optimal. Sayangnya, ini tidak dapat dilakukan untuk dua kasus yang terakhir. Apa yang dapat dilakukan untuk kasus yang *kedua* adalah mendapatkan jawaban-jawaban pendekatan dengan metode yang sesuai dengan pengambilan sampel dari distribusi normal, dan untuk kasus *ketiga*, dapat diperoleh jawabannya dengan bantuan komputer. Jadi, pertama-tama kita hanya akan membicarakan kasus pertama saja dahulu.

Kita tahu bahwa jika peluang prior variabel random keadaan alam p adalah distribusi beta dengan parameter r_0 dan n_0 dan bahwa fungsi kerugian berbentuk kuadratik maka

$$EVPI_0 = bV_0(p)$$
$$= \frac{b\left[r_0\left(n_0 - r_0\right)\right]}{n_0^2\left(n_0 + 1\right)}$$

dengan

$$V_0(p) = \frac{r_0\left(n_0 - r_0\right)}{n_0^2\left(n_0 + 1\right)}$$

Dapat ditunjukkan bahwa sampel random berukuran n diambil dari populasi binomial dengan parameter P yang tidak diketahui, dianggap berdistribusi prior beta maka nilai harapan informasi sampel diberikan oleh:

$$EVSI(n) = bV_0(n)\left(\frac{n}{n_0 + n}\right)$$
$$= EVPI_0\left(\frac{n}{n_0 + n}\right)$$

Persamaan ini sangat mudah digunakan setelah diperoleh nilai $EVPI_0$. Ini juga menunjukkan bahwa $EVPI_0$ adalah batas atas dari EVSI. Di sini kita melihat bahwa n bertambah besar, $\frac{n}{(n_0+n)}$ mendekati 1 dan $EVSI(n)$ mendekati $EVPI_0$

Marilah kita kembali ke masalah penentuan ukuran sampel yang optimal, kita anggap bahwa $C(n)=F+(v)(n)$ dan keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel dalam hal ini haruslah sebagai berikut.

$$\text{ENGS}(n)= bV_0(p)\left(\frac{n}{n_0+n}\right)-\left[F+(v)(n)\right]$$

Dapat ditunjukkan bahwa nilai maksimum fungsi ini atau ukuran sampel yang optimal n* adalah

$$n^*=\sqrt{\frac{b\left[v_0(p)\right]n_0}{v}}-n_0$$

Rumus ini menghasilkan ukuran sampel optimal asalkan n* yang dihasilkan memberikan $n^*>0$ dan $\text{ENGS}(n^*)>0$ jika kedua syarat itu tidak dipenuhi maka ukuran sampel yang optimal n* = 0.

Sebagai suatu ilustrasi, marilah kita lihat masalah berikut. Eksekutif suatu jaringan TV nasional mencoba untuk menaksir calon pemirsa suatu program TV yang baru. Untuk situasi pengambilan keputusan ini, eksekutif itu menganggap bahwa distribusi prior adalah distribusi beta dengan r_0=2 dan n_0=10. Mereka juga menggunakan fungsi kerugian $L(a,p)=200.000(a-p)^2$. Dalam keadaan seperti ini maka:

$$V_0(p)=\frac{2(10\text{-}2)}{10^2(10+1)}=0,0145$$

Selanjutnya, biaya pengambilan sampel ditaksir sebagai

$C(n)=100+5(n)$ dollar

Maka,

$$\begin{aligned}n^*&=\sqrt{\frac{200.000(0,0145)(10)}{5}}-10\\&\approx 66\end{aligned}$$

Untuk fungsi keputusan optimal ini, kita mempunyai

$$\begin{aligned}\text{ENGS}(66) &= 200.000(0{,}0145)\left(\frac{66}{10+66}\right) - [100+5(66)] \\ &\approx 2088\end{aligned}$$

Aturan pengambilan keputusan optimal yang lengkap menjadi: Ambil sampel random dengan n = 66 dan tentukan nilai harapan posterior keadaan alam, $E_1(p)$. Berdasarkan $E_1(p)$, ambillah keputusan apakah program itu harus dikenalkan atau tidak.

4. Analisis Preposterior dengan Sampling Normal.

Jika mungkin dilakukan pengambilan sampel normal, ini sering kali lebih disenangi daripada pengambilan sampel binomial karena informasi yang lebih sesuai untuk pengambilan keputusan dapat diperoleh. Misalnya, dalam pengendalian kualitas, studi tentang nilai-nilai dimensi, seperti diameter pipa besi atau kekuatan tegangan kawat baja, jelas lebih menarik daripada klasifikasi hasil ke dalam klasifikasi cacat atau tidak cacat. Pembicaraan kita tentang analisis preposterior bagi pengambilan sampel normal akan dibatasi pada situasi pengambilan keputusan dengan dua tindakan, fungsi pendapatan linear, dan variansi diketahui, sedangkan perhatian utama kita adalah dengan pengumpulan informasi optimal. Di sini kita akan mulai pembicaraan kita dengan analisis posterior untuk pengambilan sampel normal untuk dapat memahami dengan lebih baik berbagai aspek yang berkaitan dengan analisis preposterior. Kasus ilustratif yang akan kita gunakan adalah contoh produk baru yang telah kita bicarakan di atas.

5. Analisis Posterior

Kita ingat bahwa analisis prior untuk contoh produk baru telah dinilai dengan anggapan bahwa peluang prior untuk penjualan rata-rata tiap pelanggan adalah normal dengan $M_0 = 60$ dan $\sigma_0{}^2 = 16$, sedangkan, fungsi pendapatan untuk dua tindakan, yaitu:

a_1 : memperkenalkan produk baru;

a_2 : membuang produk itu.

Ditaksir sebagai bentuk linear berikut.

$$M(a_1;\mu) = -8.100.000 + 150.000\mu$$
$$M(a_2;\mu) = 0$$

Dari fungsi pendapatan ini, nilai rata-rata *break even* ditentukan sama dengan $\mu_b = 54$. Oleh karena $\mu_0 > \mu_b$ maka a_1 adalah tindakan optimal prior, dan untuk tindakan optimal ini

$$\begin{aligned} EP_0(a_1{*}) &= -8.100.000 + 150.000(60) \\ &= 900.000 \\ EVPI_0 &= (b_1 - b_2)\sigma_0 L_n(D_0) \\ &= 150.000(4)(0,02931) \\ &= 17.586 \end{aligned}$$

Prosedur analisis posterior untuk masalah dua tindakan fungsi pendapatan linear tepat sama, seperti analisis prior, kecuali pemilihan tindakan posterior didasarkan pada mean terubah (posterior) dan bahwa nilai harapan posterior informasi sempurna dihitung dengan parameter posterior μ_1 dan σ_1.

Misalkan, dalam melakukan analisis posterior, pabrik itu telah membuat dan mengirim beberapa unit sampel produk baru kepada 80 dari 50.000 calon langganan secara random dengan hasil sebagai berikut.

$$\bar{x} = 57; \qquad \lambda^2 = 320; \qquad \hat{\sigma}_{\bar{x}}^{\;2} = \frac{320}{80} = 4$$

Di sini n cukup besar bagi kita untuk memperlakukan $\hat{\sigma}_{\bar{x}}^{\;2}$ sebagai $\sigma_{\bar{x}}^{\;2}$. Sekarang karena mean sampel yang diamati lebih besar dari μ_b, kita segera tahu bahwa tindakan yang optimal masih tetap a_1, tetapi untuk mendapatkan analisis posterior yang lengkap, kita harus juga menentukan fungsi peluang posterior untuk μ_x yang adalah normal dan didefinisikan oleh

$$\mu_1 = \frac{\mu_0\hat{\sigma}_{\Sigma}^2 + \bar{x}\sigma_0^{\;2}}{\sigma_0^{\;2} + \hat{\sigma}_{\bar{x}}^{\;2}} = \frac{60(4) + 57(16)}{16+4} = 57,6$$

$$\sigma_1^{\;2} = \frac{\left(\sigma_0^{\;2}\right)\left(\hat{\sigma}_{\bar{x}}^{\;2}\right)}{\sigma_0^{\;2} + \hat{\sigma}_{\bar{x}}^{\;2}} = \frac{(16)(4)}{16+4} = 3,2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{3,2} = 1,7889$$

Dengan diketahuinya parameter-parameter posterior kita punyai pendapatan harapan posterior untuk tindakan optimal dan nilai harapan posterior informasi sempurna sebagai berikut.

$$EP_0(a_1 **) = EP(80) = -8.100.000 + 150.000(57,6)$$
$$= 540000$$
$$EVPI_1 = (b_1 - b_2)\sigma_1 L_N(D_1)$$
$$= 150.000(1,7889)(0,008266)$$
$$= 2.218$$

Perhatikan kesamaan antara rumus untuk $EVPI_0$ dan $EVPI_1$. Perhatikan juga bahwa nilai D_1 dalam integral kerugian L_N didefinisikan sebagai

$$D_1 = \left|\frac{\mu_b - \mu_1}{\sigma_1}\right|$$
$$= \left|\frac{54 - 57,6}{1,7886}\right| \approx 2,01$$

dan

$$L_{N(D_1)} = L_N(2,01) = 0,008266,$$

dari tabel yang tersedia.

6. Pengumpulan Informasi Optimal

Menarik untuk diamati bahwa pendapatan harapan posterior untuk tindakan optimal dan nilai harapan informasi sempurna untuk contoh produk baru keduanya lebih kecil dari yang diperoleh dalam analisis prior. Penurunan dalam EP_1 dari EP_0 jelas mencerminkan kenyataan bahwa, mengingat hasil sampel mean posterior μ_1 lebih kecil dari mean prior μ_0. Pada umumnya, untuk kebanyakan hasil sampel kesempatan rugi harapan setelah pengambilan sampel harus lebih kecil karena informasi tambahan yang cenderung menghasilkan variasi posterior yang lebih kecil. Dengan demikian mengurangi ketidakpastiannya. Contoh kita sesuai dengan generalisasi ini. Suatu pengecualian terhadap generalisasi ini adalah jika nilai μ_1 jauh lebih dekat dengan μ_b daripada μ_0. Dengan demikian, membuat D_1 lebih kecil dari D_0 sehingga membuat $L_N(D_1)$ lebih besar dari $L_N(D_0)$.

Tetapi, observasi yang tidak jadi dilakukan bukan merupakan masalah dalam hal analisis preposterior. Sekarang, pengetahuan tentang ukuran sampel optimal sebelum pengambilan sampel yang diinginkan. Sekali lagi, nilai harapan suatu fungsi keputusan atau perencanaan pengambilan sampel, bergantung pada kerugian yang dihindarkannya, yang selanjutnya bergantung pada berkurangnya tingkat ketidakpastian yang melekat pada variabel random keadaan alam. Khususnya, untuk menentukan nilai harapan informasi sampel diperlukan ukuran yang akan menunjukkan banyak pengurangan dalam variansi alam. Jelas bahwa ukuran semacam itu dapat dipikirkan sebagai selisih antara variansi prior dan posterior. Yakni, dengan menuliskan ukuran ini dengan $\sigma^2 *$ kita punyai

$$\begin{aligned}\sigma^2 * &= \sigma_0{}^2 - \sigma_1{}^2 \\ &= \sigma_0{}^2 - \frac{\left(\sigma_0{}^2\right)\left(\sigma_{\overline{x}}{}^2\right)}{\sigma_0{}^2 + \sigma_{\overline{x}}{}^2} \\ &= \frac{\left(\sigma_0{}^2\right)^2}{\sigma_0{}^2 + \sigma_{\overline{x}}{}^2}\end{aligned}$$

Ini adalah variansi fungsi peluang prior untuk mean posterior μ_1, yang ditentukan sebelum pengambilan sampel yang sebenarnya. Lagi pula, peluang prior ini mempunyai nilai harapan $E_0(M_1) = M_0$. Fungsi peluang ini adalah sebelum diubah atau preposterior, fungsi peluang untuk M_1 yang jangan dikacaukan dengan fungsi peluang posterior untuk $\mu_{\overline{x}}$. Penyelesaian untuk n* sekarang bergantung pada fungsi peluang prior untuk mean posterior, yang darinya dapat kita hitung $E_0(M_1)$ dan σ^{2*}, dan bagaimana M_1 berdistribusi prior pengambilan sampel yang sebenarnya. Kita sebutkan di sini tanpa penjelasan lebih lanjut bahwa fungsi peluang ini normal jika fungsi peluang prior juga normal. Selanjutnya, prosedur untuk mendapatkan nilai harapan informasi sampel serupa dengan cara peroleh nilai harapan informasi sempurna, yakni:

$$EVSI(n) = |b_1 - b_2| \ \sigma * L_N(D*)$$

dengan

$$D* = \left| \frac{\mu_b - \mu_0}{\sigma *} \right|$$

Dapat kita catat beberapa hal tentang rumus di atas, *pertama* semakin kecil selisih antara μ_b dan M_0, semakin sulit kita menarik kesimpulan yang benar. Dengan demikian, semakin besar nilai harapan informasi sampel. Kedua, segala sesuatu yang lain sama dan ${\sigma_0}^2$ besar maka tingkat ketidakpastian tinggi. Jadi, semakin besar ${\sigma_0}^2 \frac{1}{n}$ maka semakin besar kemungkinan kita membuat keputusan salah atau semakin tinggi nilai informasi sampel. *Ketiga*, semakin kecil variansi populasinya atau taksirannya $\hat{\lambda}^2$ maka semakin besar nilai $EVSI$. Satu alasan untuk ini ialah bahwa $\sigma_{\bar{x}}^2$ akan lebih kecil maka distribusi sampling lebih kompak sebagai hasil dari populasi yang lebih memencar. Satu hal lain adalah D^* akan berkurang yang menyebabkan naiknya $L_N(D^*)$. Akhirnya $EVSI$ naik dengan naiknya n_1, dengan $EVPI_0$ sebagai limitnya jika n menjadi besar tak terhingga.

Marilah kita lihat pada fungsi keputusan dengan n = 80 untuk contoh produk baru. Dari analisis prior dan preposterior yang kita lakukan sebelumnya, kita mempunyai:

$$\sigma^{2*} = \frac{16^2}{16+4} = 12,8$$

$$\sigma^* = \sqrt{12,8} = 3,58$$

$$D^* = \left|\frac{54-60}{3,58}\right| = 1,68$$

$$L_N(D^*) = L_N(1,68) = 0,01920$$

$$EVSI = 150.000(3,58)(0,01920) = 10310.$$

Dengan menganggap bahwa biaya pengambilan sampel dalam hal ini diberikan oleh

$$C(n) = 1.000 + 20(n)$$

Maka, keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel untuk fungsi keputusan ini menjadi:

$$\text{ENGS}(80) = 10.310 - [1.000 + 20(80)] = 7710$$

Nilai ENGS yang bernilai positif dan cukup besar ini, menunjukkan bahwa sampel berukuran 80 yang diusulkan bermanfaat, tetapi apakah n = 80 merupakan ukuran sampel yang optimal?

Untuk menjawab pertanyaan di atas, dan anggapan bahwa belum ada sampel yang diambil, tetapi $\sigma^2 = 320$, kita catat bahwa pada umumnya

$$ENGS(n) = |b_1 - b_2| \sigma^* L_N(D^*) - [F + (v)(n)]$$

Tetapi rumus ini agak sukar untuk dimanipulasi dengan tujuan memperoleh ukuran sampel yang optimal. Jadi, dalam praktik kita sampai pada suatu metode untuk mendapatkan n* yang ekuivalen sebagai berikut:

$$n^* = anti\log(T + \log\sigma^2 - \log\sigma_0{}^2)$$

dengan

$$T = f(D_0; \log G)$$

dan

$$D_0 = \left|\frac{\mu_b - \mu_0}{\sigma_0}\right|$$

$$\log G = \log\left[\frac{b(\sigma_0{}^2)^{3/2}}{v\sigma^2}\right]$$

$$= \log b + \frac{3}{2}\log\sigma_0^2 - (\log v + \log\sigma^2)$$

Nilai-nilai fungsi T telah ditabelkan. Untuk menggunakan tabel ini, kita gunakan praktik pembulatan nilai-nilai D_0 dan G sampai satu angka di belakang koma dan kemudian kita lakukan interpolasi linear. Dalam rumus di atas $b = |b_1 - b_2|$. Untuk contoh kita tentang produk baru, kita mempunyai:

$$D_0 = \left|\frac{54 - 60}{4}\right| = 1,5$$

$$\log G = \log 150.000 + \frac{3}{2}\log 16 - (\log 20 + \log 320)$$

$$3,2$$

$$T = f\left(1,5; 3,2\right) = 0,94 \qquad \text{(dari tabel yang ada)}$$

$$\therefore\ n^* = \text{anti}\log(0,94 + \log 320 - \log 16)$$
$$= \text{anti}\log(2,2410)$$
$$174$$

Jika n* lebih kecil dari satu, di sini kita akan menunjukkan bahwa pengambilan sampel tidak dilakukan, dan keputusan harus kita ambil hanya dengan menggunakan distribusi prior untuk variabel keadaan alam. Oleh karena dalam contoh kita di atas n* lebih besar dari satu, kita harus melakukan satu perhitungan lagi. Kita harus menghitung ENGS(n*). Jika ENGS(n*) negatif, kita simpulkan bahwa pengambilan sampel yang paling bermanfaat pun tidak senilai dengan biaya dan sekarang keputusan juga harus diambil dengan hanya menggunakan distribusi prior bagi variabel keadaan alam. Jika ENGS(n*) positif, kita simpulkan untuk mengambil sampel berukuran n*, kemudian mengambil keputusan tindakan yang terbaik. Sebenarnya, jika biaya tetap pengambilan sampel nol (jika F = 0), kita dapat melupakan langkah menghitung ENGS(n*) karena hal ini tidak akan mengubah keputusan mengenai pengambilan sampel. Dalam contoh biaya tetap pengambilan sampel lebih besar nol sehingga kita harus menghitung ENGS(n*). Guna menghitung ENGS(n*), kita tetap menggunakan $\widehat{\lambda}^2 = 320$ yang diperoleh sebelumnya sebagai taksiran untuk σ^2. Dengan n* = 174,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{320}{174} = 1,8391;$$
$$\sigma^{2*} = \frac{16^2}{16 + 1,8391} = 14,3505;$$
$$\sigma^* = \sqrt{14,3505} = 3,7882;$$
$$D^* = \frac{54-60}{3,7882} = 1,58;$$
$$L_N(D^*) = L_N(1,58) = 0,02436$$
$$EVSI(174) = 150.000(3,7882)(0,02436) \approx 13842$$
$$C(174) = 1.000 + 20(174) = 4.480$$
$$\text{ENGS}(174) = 13.842 - 4480 = 9362$$

Oleh karena $\text{ENGS} > 0$, sampel yang diusulkan dapat dibenarkan. Di sini harus dicatat bahwa n* yang kita peroleh dengan rumus di atas hanya merupakan pendekatan karena pembulatan nilai-nilai D_0 dan log G, serta interpolasi. Hal seperti ini tidak merupakan masalah dalam praktik. Analisis matematika tentang pengaruh penggunaan $n \neq n^*$ adalah sebagai berikut. Jika n dalam rentang 20% dari n*, yakni antara 0,8 n* dan 1,2 n*, nilai harapan prior dari kerugian optimal posterior dengan menggunakan n paling besar 2,5 persen di atas nilai harapan prior dari kerugian optimal posterior dengan menggunakan n*. Jadi, nilai n* hasil hitungan yang tidak sesuai dengan n* yang sebenarnya karena pembulatan dan interpolasi biasanya cukup akurat. Harus ditegaskan bahwa sekali n yang digunakan sangat berbeda dengan n* yang seharusnya digunakan, akibatnya dapat jelek sekali. Hanya di sekitar n* yang penggunaan $n \neq n^*$ tidak berakibat jelek.

Untuk menyatakan fungsi keputusan yang optimal secara lengkap, kita masih memerlukan nilai kritis dari *mean sample*, kita tulis $\overline{x}_c$, untuk menentukan apakah a_1 atau a_2 yang merupakan tindakan optimal. Umumnya a_1 harus dipilih jika $\overline{x} > \overline{x}_c$ dan a_2 jika $\overline{x} \leq \overline{x}_c$. Untuk menurunkan rumus $\overline{x}_c$, kita perhatikan bahwa suatu keputusan untuk masalah dengan dua tindakan dan pendapatan linear dapat dibuat dengan membandingkan nilai harapan keadaan alam dengan nilai *break even* keadaan alam itu. Tindakan optimal prior dan posterior dapat dibalik hanya jika nilai harapan prior dan posterior ada pada posisi yang berlawanan dari μ_b. Lagipula, mean posterior adalah rata-rata tertimbang dari mean sampel dan prior:

$$M_1 = \frac{M_0\sigma_{\overline{x}}^2 + \overline{x}\sigma_0^2}{\sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_0^2}$$

Akibatnya, nilai mean sampel yang cukup kecil (jika $\mu_b < M_0$) atau cukup besar(jika $\mu_b > M_0$), untuk membuat $M_1 = \mu_b$ dapat diturunkan dari rumus untuk M_1 dengan membuat $M_1 = M_b$. Nilai mean sampel yang lebih kecil dari nilai yang menyamakan μ_b dengan ruas kanan persamaan di atas akan menghasilkan M_1 yang lebih kecil dari μ_b, dan sebaliknya. Dalam hal yang mana pun, keputusan prior dan posterior akan berubah. Jadi, $\overline{x}_c$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan

$$\mu_b = \frac{M_0\sigma_{\overline{x}}^2 + \overline{x}_c\sigma_0^2}{\sigma_{\overline{x}}^2 + \sigma_0^2}$$

untuk $\overline{x}_c$. Kita peroleh

$$\bar{x}_c = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_0^2}(\mu_b - M_0) + \mu_b$$

Kita gunakan rumus di atas untuk contoh produk baru, dengan menganggap nilai taksiran σ^2 adalah 320 sehingga $\sigma_{\bar{x}}^2 = 1{,}8391$ seperti sebelumnya, kita mempunyai:

$$\begin{aligned}\bar{x}_c &= \frac{1{,}8391}{16}(54 - 60) + 54 \\ &= 53{,}31\end{aligned}$$

Dengan hasil ini, aturan pengambilan keputusan yang lengkap untuk contoh produk baru dapat dinyatakan sebagai berikut. Ambil sampel random sederhana dengan n = 174 dan hitung mean sampel. Pilih a_1, yakni memperkenalkan produk baru, jika $\bar{x} > 53{,}31$; pilih a_2 yakni membuang produk itu, jika $\bar{x} \leq 53{,}31$.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Suatu perusahaan yang mencoba untuk menaksir potensi pasar suatu produk baru mempunyai prior distribusi beta dengan $r_0 = 1$ dan $n_0 = 1$. Di sini tindakan yang dapat dipilih tak berhingga banyak karena terdiri dari semua nilai yang mungkin untuk bagian pasar yang dicapai dari a = 0 sampai a = 1. Dia juga menaksir fungsi kerugiannya adalah $\angle(a:p) = 150.000(a-p)^2$ dan fungsi biaya pengambilan sampel C(n) =200 + 3n. Tunjukkan bahwa dalam situasi pengambilan keputusan ini n* = 58 dan ENGS(58)=908,48.
2) Lihat kembali soal nomor 1 di atas. Perusahaan itu akan mengenalkan produknya hanya apabila bagian pasar baginya 0,20 atau lebih. Sekarang misalkan dalam suatu sampel dengan n* = 58, terdapat 11 yang menunjukkan akan membeli produknya; apakah keputusannya? Mengapa?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Rumus-rumus yang digunakan adalah

$$V(p) = \frac{r_0(n_0 - r_0)}{n_0^2(n_0 + 1)}$$

$C(n) = F + (v)(n)$ Jadi, dalam soal di sini F=200 dan v=3.

$L(a, p) = b(a - p)^2$ Jadi, dalam soal di sini b=150000

$$n^* = \sqrt{\frac{b\left[v_0(p)\right]n_0}{v}} - n_0$$

$$\text{ENGS}(n^*) = bV_0(p)\left(\frac{n^*}{n_0 + n^*}\right) - \left[F + (v)(n)\right]$$

2) Hitung E_1(p) dengan rumus

$$E_1(\text{p}) = \frac{r_0 + n}{r_0 + n_0 + n^*}$$

jika $E_1(\text{p}) \geq 0{,}20$, diputuskan mengenalkan produknya.

RANGKUMAN

Kita pelajari kembali analisis preposterior (umum) yang merupakan generalisasi dari analisis preposterior yang telah kita pelajari dalam Kegiatan Belajar 1. Selanjutnya, kita pelajari juga nilai keuntungan bersih harapan dari pengambilan sampel ENGS(n) dan sifat-sifatnya.

Secara singkat kita pelajari analisis preposterior dengan sampling binomial dengan fungsi peluang prior adalah fungsi peluang beta. Selanjutnya kita pelajari pula analisis preposterior dengan sampling normal.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. Suatu bank ingin membuka cabang baru di kota kecil Manding. Menurut studi kelayakan yang dilakukan oleh seorang ekonom, proporsi (bagian) penduduk di daerah itu yang akan menjadi nasabah cabang tersebut dikarakterisasi dengan distribusi beta yang parameternya $r_0 = 2$ dan $n_0 = 15$ Ekonom juga menganggap fungsi kerugiannya $L(a, p) = 500000(a-p)^2$. Selanjutnya, misalkan: $C(n) = 500 + 6(n)$.

1) Jika bank mendasarkan keputusannya pada analisis preposterior maka ukuran sampel yang optimal adalah ....
   A. n* = 90
   B. n* = 80
   C. n* = 70
   D. n* = 60

2) Lihat soal nomor 1 di atas. Untuk aturan pengambilan keputusan yang optimal maka $EVPI_0$ sama dengan ....
   A. 3344,44
   B. 3433,33
   C. 3522,22
   D. 3611,11

3) Maka, ESVI(n*) sama dengan EVSI(n)=EVPI$_0 \dfrac{n^*}{n_0 + n^*}$ adalah ....
   A. 3040,94
   B. 3124,29
   C. 3434,26
   D. 3624,64

4) Maka, ENGS(n*) sama dengan ....
   A. 1829,67
   B. 1919,24
   C. 2060,94
   D. 2128,65

II. Pedagang eceran mempunyai kesempatan membeli satu kotak benda yang terdiri dari 100.000 unit dengan harga \$15.000 yang dapat dijual dengan harga \$0,30 per unitnya. Pengecer itu percaya bahwa dia dapat menjual sebagian besar benda-benda itu, tetapi setiap unit benda yang tidak terjual menjadi tidak berharga sama sekali. Dia menilai bahwa penjualan mempunyai fungsi peluang normal prior dengan $M_0 = 54.000$ dan $\sigma_0 = 11250$ unit. Dia mempunyai 1.800 langganan biasa. Dengan demikian analisis prior dalam bentuk mean penjualan per pelanggan akan didefinisikan dengan $M_0 = \frac{54.000}{1.800} = 30$ dan $\sigma_0 = \frac{11.250}{1.800} = 6,25.$

5) Fungsi pendapatan untuk a_1 = membeli kotak itu adalah ....
   A. 0;
   B. $(0,3\mu - 15000)$
   C. $(0,3\mu + 15000)$
   D. $(15000 - 0,3\mu)$

6) Fungsi pendapatan untuk a_2 : tidak membeli kotak adalah ....
   A. 0;
   B. 4;
   C. 6;
   D. 8;

7) Dengan analisis prior kita peroleh $EP_0 = \left(a_1^*\right)$ sama dengan ....
   A. 1100.
   B. 1200
   C. 1300.
   D. 1400

8) Dengan analisis prior kita peroleh EVPI_0 sama dengan ....
   A. 825,19
   B. 737,28
   C. 692,12
   D. 626,32

9) Misalkan pedagang eceran itu ingin keputusan akhir dengan informasi tambahan melalui suatu sampel random dengan n = 40 yang menghasilkan

$$\overline{x} = 32{,}5;\ \xi{=}160;\ \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{160}{40} = 4$$

dengan hasil sampel itu kita peroleh ....

A. $EP_1\left(a_1^{**}\right)$=2424,61

B. $EP_1\left(a_1^{**}\right)$=2725,16

C. $EP_1\left(\theta_1^{**}\right)$=2811,27 .

D. $EP_1\left(a_1^{**}\right)$=2929,62

10) Kita akan memperoleh EVSI(40) sama dengan ....
A. 664,73
B. 774,36
C. 846,73.
D. 936,47

11) Sekarang, misalkan C(n) = 100 + 3 n. Sebelum sampel dengan n = 40 diambil aturan pengambilan keputusan lengkap dalam analisis preposterior haruslah menganggap bahwa $\sigma^2 = 160$, mengambil sampel dengan n = 25 dan menghitung mean sampel jika $\overline{x} > K$ maka a_1 yang optimal; jika $\overline{x} \le K$ maka a_2 yang optimal maka K sama dengan
A. 25,57
B. 26,63
C. 27,41
D. 29,52

12) Kita hitung ENGS(25) sama dengan ....
A. 378,32
B. 451,29
C. 567,69
D. 756,96

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat mengikuti Ujian Akhir Semester (UAS) **Selamat!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A
2) C
3) C
4) B
5) D
6) B
7) B
8) A.
9) A
10) C
11) D

Tes Formatif 2

1) B
2) D
3) A
4) C
5) B
6) A
7) B
8) A
9) A
10) B
11) C
12) C

Daftar Pustaka

Chao, L.L. (1981). *Statistics for Management*. Belmont, California: Wadsworth Asian Student Edition, Wadsworth, Inc.

DeGroot, M.H. (1970). *Optimal Statistical Decisions*. USA: McGraw-Hill Book Company.

Pfeffenberger, R.C. and J.H. Peterson (1977). *Statistical Methods for Business and Economics.* Illinois: Richard D. Irwin.

Lampiran

TABLE I

THE NUMBER OF COMBINATIONS $\binom{n}{r}$

n \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1								
3	3	1							
4	6	4	1						
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1				
7	21	35	35	21	7	1			
8	28	56	70	56	28	8	1		
9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	78	286	715	1,287	1,716	1,716	1,287	715	286
14	91	364	1,001	2,002	3,003	3,432	3,003	2,002	1,001
15	105	455	1,365	3,003	5,005	6,435	6,435	5,005	3,003
16	120	560	1,820	4,368	8,008	11,440	12,870	11,440	8,008
17	136	680	2,380	6,188	12,376	19,448	24,310	24,310	19,448
18	153	816	3,060	8,568	18,564	31,824	43,758	48,620	43,758
19	171	969	3,876	11,628	27,132	50,388	75,582	92,378	92,378
20	190	1,140	4,845	15,504	38,760	77,520	125,970	167,960	184,756

SOURCE: Hoel, Paul G. *Elementary Statistics*, John Wiley & Sons, New York, (1971).

TABLE 2

CUMULATIVE BINOMIAL PROBABILITIES $P[X \le c] = \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n	c	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95
n = 1	0	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.050
	1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 2	0	.902	.810	.640	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010	.002
	1	.997	.990	.960	.910	.840	.750	.640	.510	.360	.190	.097
	2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 3	0	.857	.729	.512	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001	.000
	1	.993	.972	.896	.784	.648	.500	.352	.216	.104	.028	.007
	2	1.000	.999	.992	.973	.936	.875	.784	.657	.488	.271	.143
	3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 4	0	.815	.656	.410	.240	.130	.063	.026	.008	.002	.000	.000
	1	.986	.948	.819	.652	.475	.313	.179	.084	.027	.004	.000
	2	1.000	.996	.973	.916	.821	.688	.525	.348	.181	.052	.014
	3	1.000	1.000	.998	.992	.974	.938	.870	.760	.590	.344	.185
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 5	0	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000
	1	.977	.919	.737	.528	.337	.188	.087	.031	.007	.000	.000
	2	.999	.991	.942	.837	.683	.500	.317	.163	.058	.009	.001
	3	1.000	1.000	.993	.969	.913	.813	.663	.472	.263	.081	.023
	4	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.969	.922	.832	.672	.410	.226
	5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 6	0	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000
	1	.967	.886	.655	.420	.233	.109	.041	.011	.002	.000	.000
	2	.998	.984	.901	.744	.544	.344	.179	.070	.017	.001	.000
	3	1.000	.999	.983	.930	.821	.656	.456	.256	.099	.016	.002
	4	1.000	1.000	.998	.989	.959	.891	.767	.580	.345	.114	.033
	5	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.984	.953	.882	.738	.469	.265
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 7	0	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.956	.850	.577	.329	.159	.063	.019	.004	.000	.000	.000
	2	.996	.974	.852	.647	.420	.227	.096	.029	.005	.000	.000
	3	1.000	.997	.967	.874	.710	.500	.290	.126	.033	.003	.000
	4	1.000	1.000	.995	.971	.904	.773	.580	.353	.148	.026	.004

TABLE 2 (*Continued*)

n	c	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95
	5	1.000	1.000	1.000	.996	.981	.938	.841	.671	.423	.150	.044
	6	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.992	.972	.918	.790	.522	.302
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 8	0	.663	.430	.168	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.943	.813	.503	.255	.106	.035	.009	.001	.000	.000	.000
	2	.994	.962	.797	.552	.315	.145	.050	.011	.001	.000	.000
	3	1.000	.995	.944	.806	.594	.363	.174	.058	.010	.000	.000
	4	1.000	1.000	.990	.942	.826	.637	.406	.194	.056	.005	.000
	5	1.000	1.000	.999	.989	.950	.855	.685	.448	.203	.038	.006
	6	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.965	.894	.745	.497	.187	.057
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.942	.832	.570	.337
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 9	0	.630	.387	.134	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.929	.775	.436	.196	.071	.020	.004	.000	.000	.000	.000
	2	.992	.947	.738	.463	.232	.090	.025	.004	.000	.000	.000
	3	.999	.992	.914	.730	.483	.254	.099	.025	.003	.000	.000
	4	1.000	.999	.980	.901	.733	.500	.267	.099	.020	.001	.000
	5	1.000	1.000	.997	.975	.901	.746	.517	.270	.086	.008	.001
	6	1.000	1.000	1.000	.996	.975	.910	.768	.537	.262	.053	.008
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.929	.804	.564	.225	.071
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.990	.960	.866	.613	.370
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 10	0	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000
	2	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000
	3	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000
	4	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000
	5	1.000	1.000	.994	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.002	.000
	6	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001
	7	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 11	0	.569	.314	.086	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.898	.697	.322	.113	.030	.006	.001	.000	.000	.000	.000
	2	.985	.910	.617	.313	.119	.033	.006	.001	.000	.000	.000
	3	.998	.981	.839	.570	.296	.113	.029	.004	.000	.000	.000

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 2 (*Continued*)

	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	4	1.000	.997	.950	.790	.533	.274	.099	.022	.002	.000	.000
	5	1.000	1.000	.988	.922	.753	.500	.247	.078	.012	.000	.000
	6	1.000	1.000	.998	.978	.901	.726	.467	.210	.050	.003	.000
	7	1.000	1.000	1.000	.996	.971	.887	.704	.430	.161	.019	.002
	8	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.967	.881	.687	.383	.090	.015
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.970	.887	.678	.303	.102
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.980	.914	.686	.431
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 12$	0	.540	.282	.069	.014	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.882	.659	.275	.085	.020	.003	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.980	.889	.558	.253	.083	.019	.003	.000	.000	.000	.000
	3	.998	.974	.795	.493	.225	.073	.015	.002	.000	.000	.000
	4	1.000	.996	.927	.724	.438	.194	.057	.009	.001	.000	.000
	5	1.000	.999	.981	.882	.665	.387	.158	.039	.004	.000	.000
	6	1.000	1.000	.996	.961	.842	.613	.335	.118	.019	.001	.000
	7	1.000	1.000	.999	.991	.943	.806	.562	.276	.073	.004	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.998	.985	.927	.775	.507	.205	.026	.002
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.981	.917	.747	.442	.111	.020
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.980	.915	.725	.341	.118
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.986	.931	.718	.460
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 13$	0	.513	.254	.055	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.865	.621	.234	.064	.013	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.975	.866	.502	.202	.058	.011	.001	.000	.000	.000	.000
	3	.997	.966	.747	.421	.169	.046	.008	.001	.000	.000	.000
	4	1.000	.994	.901	.654	.353	.133	.032	.004	.000	.000	.000
	5	1.000	.999	.970	.835	.574	.291	.098	.018	.001	.000	.000
	6	1.000	1.000	.993	.938	.771	.500	.229	.062	.007	.000	.000
	7	1.000	1.000	.999	.982	.902	.709	.426	.165	.030	.001	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.996	.968	.867	.647	.346	.099	.006	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.954	.831	.579	.253	.034	.003
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.942	.798	.498	.134	.025
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.987	.936	.766	.379	.135
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.990	.945	.746	.487
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 14$	0	.488	.229	.044	.007	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.847	.585	.198	.047	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.970	.842	.448	.161	.040	.006	.001	.000	.000	.000	.000

APPENDIX

TABLE 2 (*Continued*)

	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	3	.996	.956	.698	.355	.124	.029	.004	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.991	.870	.584	.279	.090	.018	.002	.000	.000	.000
	5	1.000	.999	.956	.781	.486	.212	.058	.008	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.988	.907	.692	.395	.150	.031	.002	.000	.000
	7	1.000	1.000	.998	.969	.850	.605	.308	.093	.012	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.992	.942	.788	.514	.219	.044	.001	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.910	.721	.416	.130	.009	.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.971	.876	.645	.302	.044	.004
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.960	.839	.552	.158	.030
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.953	.802	.415	.153
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.993	.956	.771	.512
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 15$	0	.463	.206	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.829	.549	.167	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.964	.816	.398	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.995	.944	.648	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000
	4	.999	.987	.836	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000
	5	1.000	.998	.939	.722	.403	.151	.034	.004	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.982	.869	.610	.304	.095	.015	.001	.000	.000
	7	1.000	1.000	.996	.950	.787	.500	.213	.050	.004	.000	.000
	8	1.000	1.000	.999	.985	.905	.696	.390	.131	.018	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.996	.966	.849	.597	.278	.061	.002	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.164	.013	.001
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.352	.056	.005
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.602	.184	.036
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.833	.451	.171
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.794	.537
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 16$	0	.440	.185	.028	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.811	.515	.141	.026	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.957	.789	.352	.099	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.993	.932	.598	.246	.065	.011	.001	.000	.000	.000	.000
	4	.999	.983	.798	.450	.167	.038	.005	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.997	.918	.660	.329	.105	.019	.002	.000	.000	.000
	6	1.000	.999	.973	.825	.527	.227	.058	.007	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.993	.926	.716	.402	.142	.026	.001	.000	.000
	8	1.000	1.000	.999	.974	.858	.598	.284	.074	.007	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.993	.942	.773	.473	.175	.027	.001	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.998	.981	.895	.671	.340	.082	.003	.000

TABLE 2 (*Continued*)

n	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.962	.833	.550	.202	.017	.001
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.935	.754	.402	.068	.007
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.901	.648	.211	.043
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.974	.859	.485	.189
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.972	.815	.560
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 17	0	.418	.167	.023	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.792	.482	.118	.019	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.950	.762	.310	.077	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.991	.917	.549	.202	.046	.006	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.999	.978	.758	.389	.126	.025	.003	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.995	.894	.597	.264	.072	.011	.001	.000	.000	.000
	6	1.000	.999	.962	.775	.448	.166	.035	.003	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.989	.895	.641	.315	.092	.013	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.997	.960	.801	.500	.199	.040	.003	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.987	.908	.685	.359	.105	.011	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.997	.965	.834	.552	.225	.038	.001	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.928	.736	.403	.106	.005	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.975	.874	.611	.242	.022	.001
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.954	.798	.451	.083	.009
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.923	.690	.238	.050
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.981	.882	.518	.208
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.977	.833	.582
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 18	0	.397	.150	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.774	.450	.099	.014	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.942	.734	.271	.060	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.989	.902	.501	.165	.033	.004	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.998	.972	.716	.333	.094	.015	.001	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.994	.867	.534	.209	.048	.006	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.999	.949	.722	.374	.119	.020	.001	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.984	.859	.563	.240	.058	.006	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.996	.940	.737	.407	.135	.021	.001	.000	.000
	9	1.000	1.000	.999	.979	.865	.593	.263	.060	.004	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.760	.437	.141	.016	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.999	.980	.881	.626	.278	.051	.001	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.952	.791	.466	.133	.006	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.985	.906	.667	.284	.028	.002
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.967	.833	.499	.098	.011

APPENDIX

TABLE 2 (*Continued*)

n	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.940	.729	.266	.058
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.986	.901	.550	.226
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.850	.603
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 19	0	.377	.135	.014	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.755	.420	.083	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.933	.705	.237	.046	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.987	.885	.455	.133	.023	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.998	.965	.673	.282	.070	.010	.001	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.991	.837	.474	.163	.032	.003	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.998	.932	.666	.308	.084	.012	.001	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.977	.818	.488	.180	.035	.003	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.993	.916	.667	.324	.088	.011	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	.998	.967	.814	.500	.186	.033	.002	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.989	.912	.676	.333	.084	.007	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.997	.965	.820	.512	.182	.023	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.916	.692	.334	.068	.002	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.968	.837	.526	.163	.009	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.990	.930	.718	.327	.035	.002
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.977	.867	.545	.115	.013
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.954	.763	.295	.067
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.990	.917	.580	.245
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.986	.865	.623
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
n = 20	0	.358	.122	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.736	.392	.069	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.925	.677	.206	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.984	.867	.411	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.997	.957	.630	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.989	.804	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.998	.913	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.968	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.990	.887	.596	.252	.057	.005	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	.997	.952	.755	.412	.128	.017	.001	.000	.000
	10	1.000	1.000	.999	.983	.872	.588	.245	.048	.003	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.995	.943	.748	.404	.113	.010	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.032	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.087	.002	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.196	.011	.000

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 2 (*Continued*)

	c	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.370	.043	.003
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.589	.133	.016
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.794	.323	.075
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.931	.608	.264
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.988	.878	.642
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$n = 25$	0	.277	.072	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.642	.271	.027	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.873	.537	.098	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.966	.764	.234	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	.993	.902	.421	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	.999	.967	.617	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	.991	.780	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	.998	.891	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	.953	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	.983	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000
	10	1.000	1.000	.994	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000
	11	1.000	1.000	.998	.956	.732	.345	.078	.006	.000	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	.983	.846	.500	.154	.017	.000	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	.994	.922	.655	.268	.044	.002	.000	.000
	14	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.006	.000	.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.017	.000	.000
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.047	.000	.000
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.109	.002	.000
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.220	.009	.000
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.383	.033	.001
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.579	.098	.007
	21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.766	.236	.034
	22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.902	.463	.127
	23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.973	.729	.358
	24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.928	.723
	25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

(Column heading: *p*)

APPENDIX

TABLE 3

CUMULATIVE POISSON PROBABILITIES $P[X \leq c] = \sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-m}m^x}{x!}$

c	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	1.00
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
3	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

c	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
0	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135
1	.699	.663	.627	.592	.558	.525	.493	.463	.434	.406
2	.900	.879	.857	.833	.809	.783	.757	.731	.704	.677
3	.974	.966	.957	.946	.934	.921	.907	.891	.875	.857
4	.995	.992	.989	.986	.981	.976	.970	.964	.956	.947
5	.999	.998	.998	.997	.996	.994	.992	.990	.987	.983
6	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999	.998	.997	.997	.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

c	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
0	.122	.111	.100	.091	.082	.074	.067	.061	.055	.050
1	.380	.355	.331	.308	.287	.267	.249	.231	.215	.199
2	.650	.623	.596	.570	.544	.518	.494	.469	.446	.423
3	.839	.819	.799	.779	.758	.736	.714	.692	.670	.647
4	.938	.928	.916	.904	.891	.877	.863	.848	.832	.815
5	.980	.975	.970	.964	.958	.951	.943	.935	.926	.916
6	.994	.993	.991	.988	.986	.983	.979	.976	.971	.966
7	.999	.998	.997	.997	.996	.995	.993	.992	.990	.988
8	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999	.998	.998	.997	.996
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

(Column heading: *m*)

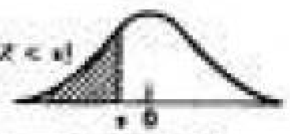
TABLE 3 (Continued)

	m									
c	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90	4.00
0	.045	.041	.037	.033	.030	.027	.025	.022	.020	.018
1	.185	.171	.159	.147	.136	.126	.116	.107	.099	.092
2	.401	.380	.359	.340	.321	.303	.285	.269	.253	.238
3	.625	.603	.580	.558	.537	.515	.494	.473	.453	.433
4	.798	.781	.763	.744	.725	.706	.687	.668	.648	.629
5	.906	.895	.883	.871	.858	.844	.830	.816	.801	.785
6	.961	.955	.949	.942	.935	.927	.918	.909	.899	.889
7	.986	.983	.980	.977	.973	.969	.965	.960	.955	.949
8	.995	.994	.993	.992	.990	.988	.986	.984	.981	.979
9	.999	.998	.998	.997	.997	.996	.995	.994	.993	.992
10	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999	.998	.998	.998	.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	m									
c	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00
0	.011	.007	.004	.002	.002	.001	.001	.000	.000	.000
1	.061	.040	.027	.017	.011	.007	.005	.003	.002	.001
2	.174	.125	.088	.062	.043	.030	.020	.014	.009	.006
3	.342	.265	.202	.151	.112	.082	.059	.042	.030	.021
4	.532	.440	.358	.285	.224	.173	.132	.100	.074	.055
5	.703	.616	.529	.446	.369	.301	.241	.191	.150	.116
6	.831	.762	.686	.606	.527	.450	.378	.313	.256	.207
7	.913	.867	.809	.744	.673	.599	.525	.453	.386	.324
8	.960	.932	.894	.847	.792	.729	.662	.593	.523	.456
9	.983	.968	.946	.916	.877	.830	.776	.717	.653	.587
10	.993	.986	.975	.957	.933	.901	.862	.816	.763	.706
11	.998	.995	.989	.980	.966	.947	.921	.888	.849	.803
12	.999	.998	.996	.991	.984	.973	.957	.936	.909	.876
13	1.000	.999	.998	.996	.993	.987	.978	.966	.949	.926
14	1.000	1.000	.999	.999	.997	.994	.990	.983	.973	.959
15	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.995	.992	.986	.978
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.996	.993	.989
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.997	.995
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APPENDIX

TABLE 4
STANDARD NORMAL PROBABILITIES



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 4 (*Continued*)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

TABLE 5

PERCENTAGE POINTS OF t DISTRIBUTIONS

d.f.	α = .25	.10	.05	.025	.01	.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

TABLE 6
PERCENTAGE POINTS OF χ^2 DISTRIBUTIONS

d.f. \ α	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005
1	392704×10^{-10}	157088×10^{-9}	982069×10^{-9}	393214×10^{-8}	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	.0100251	.0201007	.0506356	.102587	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	.0717212	.114832	.215795	.351846	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	.206990	.297110	.484419	.710721	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	.411740	.554300	.831211	1.145476	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	.675727	.872085	1.237347	1.63539	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	.989265	1.239043	1.68987	2.16735	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	124.342	129.561	135.807	140.169

From "*Biometrika Tables for Statisticians*," Vol. 1, (3rd Edition) Cambridge University Press (1966); Edited by E. S. Pearson and H. O. Hartley.

TABLE 7

PERCENTAGE POINTS OF $F(\nu_1, \nu_2)$ DISTRIBUTIONS

$\alpha = .10$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.241	58.204	58.906	59.439	59.858
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3427	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400
4	4.5448	4.3246	4.1908	4.1073	4.0506	4.0098	3.9790	3.9549	3.9357
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163
6	3.7760	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7265	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473
11	3.2252	2.8595	2.6602	2.5362	2.4512	2.3891	2.3416	2.3040	2.2735
12	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.3940	2.3310	2.2828	2.2446	2.2135
13	3.1362	2.7632	2.5603	2.4337	2.3467	2.2830	2.2341	2.1953	2.1638
14	3.1022	2.7265	2.5222	2.3947	2.3069	2.2426	2.1931	2.1539	2.1220
15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.2730	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862
16	3.0481	2.6682	2.4618	2.3327	2.2438	2.1783	2.1280	2.0880	2.0553
17	3.0262	2.6446	2.4374	2.3077	2.2183	2.1524	2.1017	2.0613	2.0284
18	3.0070	2.6239	2.4160	2.2858	2.1958	2.1296	2.0785	2.0379	2.0047
19	2.9899	2.6056	2.3970	2.2663	2.1760	2.1094	2.0580	2.0171	1.9836
20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649
21	2.9609	2.5746	2.3649	2.2333	2.1423	2.0751	2.0232	1.9819	1.9480
22	2.9486	2.5613	2.3512	2.2193	2.1279	2.0605	2.0084	1.9668	1.9327
23	2.9374	2.5493	2.3387	2.2065	2.1149	2.0472	1.9949	1.9531	1.9189
24	2.9271	2.5383	2.3274	2.1949	2.1030	2.0351	1.9826	1.9407	1.9063
25	2.9177	2.5283	2.3170	2.1843	2.0922	2.0241	1.9714	1.9292	1.8947
26	2.9091	2.5191	2.3075	2.1745	2.0822	2.0139	1.9610	1.9188	1.8841
27	2.9012	2.5106	2.2987	2.1655	2.0730	2.0045	1.9515	1.9091	1.8743
28	2.8939	2.5028	2.2906	2.1571	2.0645	1.9959	1.9427	1.9001	1.8652
29	2.8871	2.4955	2.2831	2.1494	2.0566	1.9878	1.9345	1.8918	1.8560
30	2.8807	2.4887	2.2761	2.1422	2.0492	1.9803	1.9269	1.8841	1.8498
40	2.8354	2.4404	2.2261	2.0909	1.9968	1.9269	1.8725	1.8289	1.7929
60	2.7914	2.3932	2.1774	2.0410	1.9457	1.8747	1.8194	1.7748	1.7380
120	2.7478	2.3473	2.1300	1.9923	1.8959	1.8238	1.7675	1.7220	1.6843
∞	2.7055	2.3026	2.0838	1.9449	1.8473	1.7741	1.7167	1.6702	1.6315

APPENDIX

TABLE 7 (*Continued*)

$\alpha = .10$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60.195	60.705	61.220	61.740	62.002	62.265	62.529	62.794	63.061	63.328
2	9.3916	9.4081	9.4247	9.4413	9.4496	9.4579	9.4663	9.4746	9.4829	9.4913
3	5.2304	5.2156	5.2003	5.1845	5.1764	5.1681	5.1597	5.1512	5.1425	5.1337
4	3.9199	3.8955	3.8689	3.8443	3.8310	3.8174	3.8036	3.7896	3.7753	3.7607
5	3.2974	3.2682	3.2380	3.2067	3.1905	3.1741	3.1573	3.1402	3.1228	3.1050
6	2.9369	2.9047	2.8712	2.8363	2.8183	2.8000	2.7812	2.7620	2.7423	2.7222
7	2.7025	2.6681	2.6322	2.5947	2.5753	2.5555	2.5351	2.5142	2.4928	2.4708
8	2.5380	2.5020	2.4642	2.4246	2.4041	2.3830	2.3614	2.3391	2.3162	2.2926
9	2.4163	2.3789	2.3396	2.2983	2.2768	2.2547	2.2320	2.2085	2.1843	2.1592
10	2.3226	2.2841	2.2435	2.2007	2.1784	2.1554	2.1317	2.1072	2.0818	2.0554
11	2.2482	2.2087	2.1671	2.1230	2.1000	2.0762	2.0516	2.0261	1.9997	1.9721
12	2.1878	2.1474	2.1049	2.0597	2.0360	2.0115	1.9861	1.9597	1.9323	1.9036
13	2.1376	2.0966	2.0532	2.0070	1.9827	1.9576	1.9315	1.9043	1.8759	1.8462
14	2.0954	2.0537	2.0095	1.9625	1.9377	1.9119	1.8852	1.8572	1.8280	1.7973
15	2.0593	2.0171	1.9722	1.9243	1.8990	1.8728	1.8454	1.8168	1.7867	1.7551
16	2.0281	1.9854	1.9399	1.8913	1.8656	1.8388	1.8108	1.7816	1.7507	1.7182
17	2.0009	1.9577	1.9117	1.8624	1.8362	1.8090	1.7805	1.7506	1.7191	1.6856
18	1.9770	1.9333	1.8868	1.8368	1.8103	1.7827	1.7537	1.7232	1.6910	1.6567
19	1.9557	1.9117	1.8647	1.8142	1.7873	1.7592	1.7298	1.6988	1.6659	1.6308
20	1.9367	1.8924	1.8449	1.7938	1.7667	1.7382	1.7083	1.6768	1.6433	1.6074
21	1.9197	1.8750	1.8272	1.7756	1.7481	1.7193	1.6890	1.6569	1.6228	1.5862
22	1.9043	1.8593	1.8111	1.7590	1.7312	1.7021	1.6714	1.6389	1.6042	1.5668
23	1.8903	1.8450	1.7964	1.7439	1.7159	1.6864	1.6554	1.6224	1.5871	1.5490
24	1.8775	1.8319	1.7831	1.7302	1.7019	1.6721	1.6407	1.6073	1.5715	1.5327
25	1.8658	1.8200	1.7708	1.7175	1.6890	1.6589	1.6272	1.5934	1.5570	1.5176
26	1.8550	1.8090	1.7596	1.7059	1.6771	1.6468	1.6147	1.5805	1.5437	1.5036
27	1.8451	1.7989	1.7492	1.6951	1.6662	1.6356	1.6032	1.5686	1.5313	1.4906
28	1.8359	1.7895	1.7395	1.6852	1.6560	1.6252	1.5925	1.5575	1.5198	1.4784
29	1.8274	1.7808	1.7306	1.6759	1.6465	1.6155	1.5825	1.5472	1.5090	1.4670
30	1.8195	1.7727	1.7223	1.6673	1.6377	1.6065	1.5732	1.5376	1.4989	1.4564
40	1.7627	1.7146	1.6624	1.6052	1.5741	1.5411	1.5056	1.4672	1.4248	1.3769
60	1.7070	1.6574	1.6034	1.5435	1.5107	1.4755	1.4373	1.3952	1.3476	1.2915
120	1.6524	1.6012	1.5450	1.4821	1.4472	1.4094	1.3676	1.3203	1.2646	1.1926
∞	1.5987	1.5458	1.4871	1.4206	1.3832	1.3419	1.2951	1.2400	1.1686	1.0000

TABLE 7 (*Continued*)

$\alpha = .05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.32
2	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5265
4	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6878	5.6581	5.6281
5	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3984	4.3650
6	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6688
7	3.6365	3.5747	3.5108	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	3.3472	3.2840	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	2.6021	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2230	2.1778	2.1307
15	2.5437	2.4753	2.4035	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9796	1.9302	1.8780
20	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8895	1.8380	1.7831
23	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8649	1.8128	1.7570
24	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7897	1.7331
25	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7307	1.6717
28	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6377
30	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
∞	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

From "*Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (F) Distribution,*" Biometrika, Vol. 33 (1943), pages 73-88, by Maxine Merrington and Catherine M. Thompson. By permission of Biometrika.

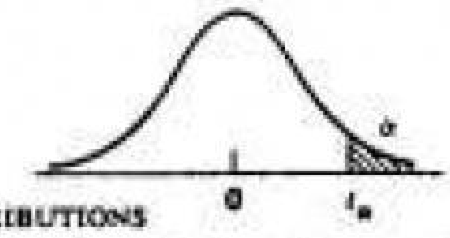


TABLE 8

EXTENDED TABLE OF PERCENTAGE POINTS OF t DISTRIBUTIONS

d.f.	α .0025	.001	.0005	.00025	.0001	.00005	.000025	.00001
1	127.321	318.309	636.619	1,273.239	3,183.099	6,366.198	12,732.395	31,830.989
2	14.089	22.327	31.598	44.705	70.700	99.992	141.416	223.603
3	7.453	10.214	12.924	16.326	22.204	28.000	35.298	47.928
4	5.598	7.173	8.610	10.306	13.034	15.544	18.522	23.332
5	4.773	5.893	6.869	7.976	9.678	11.178	12.893	15.547
6	4.317	5.208	5.959	6.788	8.025	9.082	10.261	12.032
7	4.029	4.785	5.408	6.082	7.063	7.885	8.782	10.103
8	3.833	4.501	5.041	5.618	6.442	7.120	7.851	8.907
9	3.690	4.297	4.781	5.291	6.010	6.594	7.215	8.102
10	3.581	4.144	4.587	5.049	5.694	6.211	6.757	7.527
11	3.497	4.025	4.437	4.863	5.453	5.921	6.412	7.098
12	3.428	3.930	4.318	4.716	5.263	5.694	6.143	6.756
13	3.372	3.852	4.221	4.597	5.111	5.513	5.928	6.501
14	3.326	3.787	4.140	4.499	4.985	5.363	5.753	6.287
15	3.286	3.733	4.073	4.417	4.880	5.239	5.607	6.109
16	3.252	3.686	4.015	4.346	4.791	5.134	5.484	5.960
17	3.223	3.646	3.965	4.286	4.714	5.044	5.379	5.832
18	3.197	3.610	3.922	4.233	4.648	4.966	5.288	5.722
19	3.174	3.579	3.883	4.187	4.590	4.897	5.209	5.627
20	3.153	3.552	3.850	4.146	4.539	4.837	5.139	5.543
21	3.135	3.527	3.819	4.110	4.493	4.784	5.077	5.469
22	3.119	3.505	3.792	4.077	4.452	4.736	5.022	5.402
23	3.104	3.485	3.768	4.048	4.415	4.693	4.972	5.343
24	3.090	3.467	3.745	4.021	4.382	4.654	4.927	5.290
25	3.078	3.450	3.725	3.997	4.352	4.619	4.887	5.241
26	3.067	3.435	3.707	3.974	4.324	4.587	4.850	5.197
27	3.057	3.421	3.690	3.954	4.299	4.558	4.816	5.157
28	3.047	3.408	3.674	3.935	4.275	4.530	4.784	5.120
29	3.038	3.396	3.659	3.918	4.254	4.506	4.756	5.086
30	3.030	3.385	3.646	3.902	4.234	4.482	4.729	5.054
35	2.996	3.340	3.591	3.836	4.153	4.389	4.622	4.927
40	2.971	3.307	3.551	3.788	4.094	4.321	4.544	4.835
45	2.952	3.281	3.520	3.752	4.049	4.269	4.485	4.766
50	2.937	3.261	3.496	3.723	4.014	4.228	4.438	4.711
55	2.925	3.245	3.476	3.700	3.986	4.196	4.401	4.667
60	2.915	3.232	3.460	3.681	3.962	4.169	4.370	4.631
70	2.899	3.211	3.435	3.651	3.926	4.127	4.323	4.576
80	2.887	3.195	3.416	3.629	3.899	4.096	4.288	4.535
90	2.878	3.183	3.402	3.612	3.878	4.072	4.261	4.503
100	2.871	3.174	3.390	3.598	3.862	4.053	4.240	4.478
∞	2.807	3.090	3.291	3.481	3.719	3.891	4.056	4.265

Adapted from Federighi, E. T., "Extended Tables of the Percentage Points of Student's t-Distributions," *Journal of American Statistical Association*, (1959) Vol. 54, p. 684–685.

TABLE 9

Selected Tail Probabilities for the Null Distribution of Wilcoxon's Rank-Sum Statistic

$P = P[W_s \geq x] = P[W_s \leq x^*]$

SMALLER SAMPLE SIZE = 2

LARGER SAMPLE SIZE

3			4			5			6		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
8	.200	4	10	.133	4	11	.190	5	13	.143	5
9	.100	3	11	.067	3	12	.095	4	14	.071	4
10	0	2	12	0	2	13	.048	3	15	.036	3
						14	0	2	16	0	2

7			8			9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
15	.111	5	16	.133	6	18	.109	6	19	.136	7
16	.056	4	17	.089	5	19	.073	5	20	.091	6
17	.028	3	18	.044	4	20	.036	4	21	.061	5
18	0	2	19	.022	3	21	.018	3	22	.030	4
			20	0	2	22	0	2	23	.015	3

SMALLER SAMPLE SIZE = 3

LARGER SAMPLE SIZE

3			4			5			6		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
13	.200	8	16	.114	8	18	.125	9	20	.131	10
14	.100	7	17	.057	7	19	.071	8	21	.083	9
15	.050	6	18	.029	6	20	.036	7	22	.048	8
16	0	5	19	0	5	21	.018	6	23	.024	7
						22	0	5	24	.012	6
									25	0	5

APPENDIX

TABLE 9 (*Continued*)

7			8			9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
22	.133	11	24	.139	12	27	.105	12	29	.108	13
23	.092	10	25	.097	11	28	.073	11	30	.080	12
24	.058	9	26	.067	10	29	.050	10	31	.056	11
25	.033	8	27	.042	9	30	.032	9	32	.038	10
26	.017	7	28	.024	8	31	.018	8	33	.024	9
27	.008	6	29	.012	7	32	.009	7	34	.014	8
28	0	5	30	.006	6				35	.007	7
			31	0	5						

SMALLER SAMPLE SIZE = 4

LARGER SAMPLE SIZE

4			5			6			7		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
22	.171	14	25	.143	15	28	.129	16	31	.115	17
23	.100	13	26	.095	14	29	.086	15	32	.082	16
24	.057	12	27	.056	13	30	.057	14	33	.055	15
25	.029	11	28	.032	12	31	.033	13	34	.036	14
26	.014	10	29	.016	11	32	.019	12	35	.021	13
27	0	9	30	.008	10	33	.010	11	36	.012	12
			31	0	9				37	.006	11

8			9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
34	.107	18	36	.130	20	39	.120	21
35	.077	17	37	.099	19	40	.094	20
36	.055	16	38	.074	18	41	.071	19
37	.036	15	39	.053	17	42	.053	18
38	.024	14	40	.038	16	43	.038	17
39	.014	13	41	.025	15	44	.027	16
40	.008	12	42	.017	14	45	.018	15
			43	.010	13	46	.012	14
						47	.007	13

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 9 (Continued)

SMALLER SAMPLE SIZE = 5

LARGER SAMPLE SIZE

5			6			7			8		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
34	.111	21	37	.123	23	41	.101	24	44	.111	26
35	.075	20	38	.089	22	42	.074	23	45	.085	25
36	.048	19	39	.063	21	43	.053	22	46	.064	24
37	.028	18	40	.041	20	44	.037	21	47	.047	23
38	.016	17	41	.026	19	45	.024	20	48	.033	22
39	.008	16	42	.015	18	46	.015	19	49	.023	21
			43	.009	17	47	.009	18	50	.015	20
									51	.009	19

9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*
47	.120	28	51	.103	29
48	.095	27	52	.082	28
19	.073	26	53	.065	27
50	.056	25	54	.050	26
51	.041	24	55	.038	25
52	.030	23	56	.028	24
53	.021	22	57	.020	23
54	.014	21	58	.014	22
55	.009	20	59	.010	21

SMALLER SAMPLE SIZE = 6

LARGER SAMPLE SIZE

6			7			8			9		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
47	.120	31	51	.117	33	55	.114	35	59	.112	37
48	.090	30	52	.090	32	56	.091	34	60	.091	36
49	.066	29	53	.069	31	57	.071	33	61	.072	35
50	.047	28	54	.051	30	58	.054	32	62	.057	34
51	.032	27	55	.037	29	59	.041	31	63	.044	33
52	.021	26	56	.026	28	60	.030	30	64	.033	32
53	.013	25	57	.017	27	61	.021	29	65	.025	31
54	.008	24	58	.011	26	62	.015	28	66	.018	30
			59	.007	25	63	.010	27	67	.013	29
									68	.009	28

APPENDIX

TABLE 9 (Continued)

SMALLER SAMPLE SIZE = 6

LARGER SAMPLE SIZE

10		
x	P	x^*
63	.110	39
64	.090	38
65	.074	37
66	.059	36
67	.047	35
68	.036	34
69	.028	33
70	.021	32
71	.016	31
72	.011	30
73	.008	29

SMALLER SAMPLE SIZE = 7

LARGER SAMPLE SIZE

7			8			9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
63	.104	42	67	.116	45	72	.105	47	76	.115	50
64	.082	41	68	.095	44	73	.087	46	77	.097	49
65	.064	40	69	.076	43	74	.071	45	78	.081	48
66	.049	39	70	.060	42	75	.057	44	79	.067	47
67	.036	38	71	.047	41	76	.045	43	80	.054	46
68	.027	37	72	.036	40	77	.036	42	81	.044	45
69	.019	36	73	.027	39	78	.027	41	82	.035	44
70	.013	35	74	.020	38	79	.021	40	83	.028	43
71	.009	34	75	.014	37	80	.016	39	84	.022	42
			76	.010	36	81	.011	38	85	.017	41
						82	.008	37	86	.012	40
									87	.009	39

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 9 (*Continued*)

SMALLER SAMPLE SIZE = 8

LARGER SAMPLE SIZE 8			9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
80	.117	56	86	.100	58	91	.102	61
81	.097	55	87	.084	57	92	.086	60
82	.080	54	88	.069	56	93	.073	59
83	.065	53	89	.057	55	94	.061	58
84	.052	52	90	.046	54	95	.051	57
85	.041	51	91	.037	53	96	.042	56
86	.032	50	92	.030	52	97	.034	55
87	.025	49	93	.023	51	98	.027	54
88	.019	48	94	.018	50	99	.022	53
89	.014	47	95	.014	49	100	.017	52
90	.010	46	96	.010	48	101	.013	51
						102	.010	50

SMALLER SAMPLE SIZE = 9

LARGER SAMPLE SIZE 9			10		
x	P	x^*	x	P	x^*
100	.111	71	106	.106	74
101	.095	70	107	.091	73
102	.081	69	108	.078	72
103	.068	68	109	.067	71
104	.057	67	110	.056	70
105	.047	66	111	.047	69
106	.039	65	112	.039	68
107	.031	64	113	.033	67
108	.025	63	114	.027	66
109	.020	62	115	.022	65
110	.016	61	116	.017	64
111	.012	60	117	.014	63
112	.009	59	118	.011	62
			119	.009	61

SMALLER SAMPLE SIZE = 10

LARGER SAMPLE SIZE 10		
x	P	x^*
122	.109	88
123	.095	87
124	.083	86
125	.072	85
126	.062	84
127	.053	83
128	.045	82
129	.038	81
130	.032	80
131	.026	79
132	.022	78
133	.018	77
134	.014	76
135	.012	75
136	.009	74

Adapted from: Kraft, C., and van Eeden, C., *A Nonparametric Introduction to Statistics*, The Macmillan Company, New York, 1968.

APPENDIX

TABLE 10

SELECTED TAIL PROBABILITIES FOR THE NULL DISTRIBUTION OF WILCOXON'S SIGNED-RANK STATISTIC

$P = P[T^+ \geq x] = P[T^+ \leq x^*]$

$n=3$			$n=4$			$n=5$			$n=6$		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
5	.250	1	8	.188	2	12	.156	3	17	.109	4
6	.125	0	9	.125	1	13	.094	2	18	.078	3
7	0		10	.062	0	14	.062	1	19	.047	2
			11	0		15	.031	0	20	.031	1
						16	0		21	.016	0
									22	0	

$n=7$			$n=8$			$n=9$			$n=10$		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
22	.109	6	27	.125	9	34	.102	11	40	.116	15
23	.078	5	28	.098	8	35	.082	10	41	.097	14
24	.055	4	29	.074	7	36	.064	9	42	.080	13
25	.039	3	30	.055	6	37	.049	8	43	.065	12
26	.023	2	31	.039	5	38	.037	7	44	.053	11
27	.016	1	32	.027	4	39	.027	6	45	.042	10
28	.008	0	33	.020	3	40	.020	5	46	.032	9
			34	.012	2	41	.014	4	47	.024	8
			35	.008	1	42	.010	3	48	.019	7
									49	.014	6
									50	.010	5

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 10 *(Continued)*

$n=11$			$n=12$			$n=13$			$n=14$		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
48	.103	18	56	.102	22	64	.108	27	73	.108	32
49	.087	17	57	.088	21	65	.095	26	74	.097	31
50	.074	16	58	.076	20	66	.084	25	75	.086	30
51	.062	15	59	.065	19	67	.073	24	76	.077	29
52	.051	14	60	.055	18	68	.064	23	77	.068	28
53	.042	13	61	.046	17	69	.055	22	78	.059	27
54	.034	12	62	.039	16	70	.047	21	79	.052	26
55	.027	11	63	.032	15	71	.040	20	80	.045	25
56	.021	10	64	.026	14	72	.034	19	81	.039	24
57	.016	9	65	.021	13	73	.029	18	82	.034	23
58	.012	8	66	.017	12	74	.024	17	83	.029	22
59	.009	7	67	.013	11	75	.020	16	84	.025	21
			68	.010	10	76	.016	15	85	.021	20
						77	.013	14	86	.018	19
						78	.011	13	87	.015	18
						79	.009	12	88	.012	17
									89	.010	16

$n=15$					
x	P	x^*	x	P	x^*
83	.104	37	92	.036	28
84	.094	36	93	.032	27
85	.084	35	94	.028	26
86	.076	34	95	.024	25
87	.068	33	96	.021	24
88	.060	32	97	.018	23
89	.053	31	98	.015	22
90	.047	30	99	.013	21
91	.042	29	100	.011	20
			101	.009	19

Adapted from: Kraft, C., and van Eeden, C., *A Nonparametric Introduction to Statistics*, The Macmillan Company, New York, 1968.

APPENDIX
TABLE 11

CONFIDENCE INTERVALS FOR THE MEDIAN OF A SYMMETRIC DISTRIBUTIO
USING THE WILCOXON SIGNED-RANK TEST

n	d	$1-\alpha$	n	d	$1-\alpha$	n	d	$1-\alpha$	n	d	$1-\alpha$
3	1	.750	12	8	.991	18	28	.991	24	62	.990
4	1	.875		9	.988		29	.990		63	.989
5	1	.938		14	.958		41	.952		82	.951
	2	.875		15	.948		42	.946		83	.947
6	1	.969		18	.908		48	.901		92	.905
	2	.937		19	.890		49	.892		93	.899
	3	.906	13	10	.992	19	33	.991	25	69	.990
	4	.844		11	.990		34	.989		70	.989
7	1	.984		18	.952		47	.951		90	.952
	3	.953		19	.943		48	.945		91	.948
	4	.922		22	.906		54	.904		101	.904
	5	.891		23	.890		55	.896		102	.899
8	1	.992	14	13	.991	20	38	.991			
	2	.984		14	.989		39	.989			
	4	.961		22	.951		53	.952			
	5	.945		23	.942		54	.947			
	6	.922		26	.909		61	.903			
	7	.891		27	.896		62	.895			
9	2	.992	15	16	.992	21	43	.991			
	3	.988		17	.990		44	.990			
	6	.961		26	.952		59	.954			
	7	.945		27	.945		60	.950			
	9	.902		31	.905		68	.904			
	10	.871		32	.893		69	.897			
10	4	.990	16	20	.991	22	49	.991			
	5	.986		21	.989		50	.990			
	9	.951		30	.956		66	.954			
	10	.936		31	.949		67	.950			
	11	.916		36	.907		76	.902			
	12	.895		37	.895		77	.895			
11	6	.990	17	24	.991	23	55	.991			
	7	.986		25	.989		56	.990			
	11	.958		35	.955		74	.952			
	12	.946		36	.949		75	.948			
	14	.917		42	.902		84	.902			
	15	.898		43	.891		85	.895			

Adapted from *Introduction to Statistics* by G,E. Noether. Copyright c 1971 by Houghton Mifflin Company. Used by permission of the publisher.

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 12
CONFIDENCE INTERVALS FOR SHIFT USING THE WILCOXON RANK-SUM TEST

Confidence coefficient = $1 - \alpha$

Confidence interval = dth smallest to dth largest of differences $X_{1i} - X_{2j}$

LARGER SAMPLE SIZE	SMALLER SAMPLE SIZE 3		4		5		6		7		8	
	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$
3	1	.900										
4	1	.943	1	.971								
	2	.886	2	.943								
			3	.886								
					1	.992						
5	1	.964	1	.984	2	.984						
	2	.929	2	.968	3	.968						
	3	.857	3	.937	4	.944						
			4	.889	5	.905						
					6	.849						
					2	.991	3	.991				
6	1	.976	1	.990	3	.983	4	.985				
	2	.952	2	.981	4	.970	6	.959				
	3	.905	3	.962	5	.948	7	.935				
	4	.833	4	.933	6	.918	8	.907				
			5	.886	7	.874	9	.868				
					2	.995	4	.992	5	.993		
7	1	.983	1	.994	3	.990	5	.986	6	.989		
	2	.967	2	.988	6	.952	7	.965	9	.962		
	3	.933	4	.958	7	.927	8	.949	10	.947		
	4	.883	5	.927	8	.894	9	.927	12	.903		
			6	.891			10	.899	13	.872		
8	1	.988	2	.992	3	.994	5	.992	7	.991	8	.993
	3	.952	3	.984	4	.989	6	.987	8	.986	9	.990
	4	.915	5	.952	7	.955	9	.957	11	.960	14	.950
	5	.867	6	.927	8	.935	10	.941	12	.946	15	.935
			7	.891	9	.907	11	.919	14	.906	16	.917
					10	.873	12	.892	15	.879	17	.895
9	1	.991	2	.994	4	.993	6	.992	8	.992	10	.992
	2	.982	3	.989	5	.988	7	.988	9	.988	11	.989
	3	.964	5	.966	8	.958	11	.950	13	.958	16	.954
	4	.936	6	.950	9	.940	12	.934	14	.945	17	.941
	5	.900	7	.924	10	.917	13	.912	16	.909	19	.907
			8	.894	11	.888	14	.887	17	.886	20	.886

APPENDIX

TABLE 12 (*Continued*)

Larger Sample Size	Smaller Sample Size 3		4		5		6		7		8	
	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$
10	1	.993	3	.992	5	.992	7	.993	10	.990	12	.991
	2	.986	4	.986	6	.987	8	.989	11	.986	13	.988
	4	.951	6	.964	9	.960	12	.958	15	.957	18	.957
	5	.923	7	.946	10	.945	13	.944	16	.945	19	.945
	6	.888	8	.924	12	.901	15	.907	18	.912	21	.917
			9	.894	13	.871	16	.882	19	.891	22	.899
11	1	.995	3	.994	6	.991	8	.993	11	.992	14	.991
	2	.989	4	.990	7	.987	9	.990	12	.989	15	.988
	4	.962	7	.960	10	.962	14	.952	17	.956	20	.959
	5	.940	8	.944	11	.948	15	.938	18	.944	21	.949
	6	.912	9	.922	13	.910	17	.902	20	.915	24	.909
	7	.874	10	.896	14	.885	18	.878	21	.896	25	.891
12	2	.991	4	.992	7	.991	10	.990	13	.990	16	.990
	3	.982	5	.987	8	.986	11	.987	14	.987	17	.988
	5	.952	8	.958	12	.952	15	.959	19	.955	23	.953
	6	.930	9	.942	13	.936	16	.947	20	.944	24	.943
	7	.899	10	.922	14	.918	18	.917	22	.917	27	.902
			11	.897	15	.896	19	.898	23	.900	28	.885

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 12 (*Continued*)

LARGER SAMPLE SIZE	SMALLER SAMPLE SIZE 9		10		11		12	
	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$	d	$1-\alpha$
9	12	.992						
	13	.989						
	18	.960						
	19	.950						
	22	.906						
	23	.887						
10	14	.992	17	.991				
	15	.990	18	.989				
	21	.957	24	.957				
	22	.947	25	.948				
	25	.905	28	.911				
	26	.887	29	.895				
11	17	.990	19	.992	22	.992		
	18	.988	20	.990	23	.989		
	24	.954	27	.957	31	.953		
	25	.944	28	.949	32	.944		
	28	.905	32	.901	35	.912		
	29	.888	33	.886	36	.899		
12	19	.991	22	.991	25	.991	28	.992
	20	.988	23	.989	26	.989	29	.990
	27	.951	30	.957	34	.956	38	.955
	28	.942	31	.950	35	.949	39	.948
	31	.905	35	.907	39	.909	43	.911
	32	.889	36	.893	40	.896	44	.899

APPENDIX

TABLE 13

SELECTED TAIL PROBABILITIES FOR THE NULL DISTRIBUTION OF SPEARMAN'S STATISTIC $\sum_{i=1}^{n} R_i S_i$

$$P = P\left[\sum_{i=1}^{n} R_i S_i > x\right] = P\left[\sum_{i=1}^{n} R_i S_i < x^*\right]$$

n=4			n=5			n=6			n=7		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x^*
29	.167	21	52	.117	38	84	.121	63	128	.100	96
30	.042	20	53	.067	37	85	.088	62	129	.083	95
31	0	19	54	.042	36	86	.068	61	130	.069	94
			55	.0083	35	87	.051	60	131	.055	93
						88	.029	59	132	.044	92
						89	.017	58	133	.033	91
						90	.0083	57	134	.024	90
									135	.017	89
									136	.012	88
									137	.0062	87

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 13 (*Continued*)

$n=8$			$n=9$			$n=10$		
x	P	x^*	x	P	x^*	x	P	x
183	.108	141	253	.106	197	339	.102	266
184	.098	140	254	.097	196	340	.096	265
185	.085	139	255	.089	195	341	.089	264
186	.076	138	256	.081	194	342	.083	263
187	.066	137	257	.074	193	343	.077	262
188	.057	136	258	.066	192	344	.072	261
189	.048	135	259	.060	191	345	.067	260
190	.042	134	260	.054	190	346	.062	259
191	.035	133	261	.048	189	347	.057	258
192	.029	132	262	.043	188	348	.052	257
193	.023	131	263	.038	187	349	.048	256
194	.018	130	264	.033	186	350	.044	255
195	.014	129	265	.029	185	351	.040	254
196	.011	128	266	.025	184	352	.037	253
197	.0077	127	267	.022	183	353	.033	252
			268	.018	182	354	.030	251
			269	.016	181	355	.027	250
			270	.013	180	356	.024	249
			271	.011	179	357	.022	248
			272	.0086	178	358	.019	247
						359	.017	246
						360	.015	245
						361	.013	244
						362	.012	243
						363	.010	242

Adapted from: Owen, D. B., *Handbook of Statistical Tables*, Addison-Wesley, Boston, 1962. Courtesy of the U.S. Energy Research and Development Administration.

APPENDIX

TABLE 14
5000 Random Digits

00000	10097	32533	76520	13586	34673	54876	80959	09117	39292	74945
00001	37542	04805	64894	74296	24805	24037	20636	10402	00822	91665
00002	08422	68953	19645	09303	23209	02560	15953	34764	35080	33606
00003	99019	02529	09376	70715	38311	31165	88676	74397	04436	27659
00004	12807	99970	80157	36147	64032	36653	98951	16877	12171	76833
00005	66065	74717	34072	76850	36697	36170	65813	39885	11199	29170
00006	31060	10805	45571	82406	35303	42614	86799	07439	23403	09732
00007	85269	77602	02051	65692	68665	74818	73053	85247	18623	88579
00008	63573	32135	05325	47048	90553	57548	28468	28709	83491	25624
00009	73796	45753	03529	64778	35808	34282	60935	20344	35273	88435
00010	98520	17767	14905	68607	22109	40558	60970	93433	50500	73998
00011	11805	05431	39808	27732	50725	68248	29405	24201	52775	67851
00012	83452	99634	06288	98083	13746	70078	18475	40610	68711	77817
00013	88685	40200	86507	58401	36766	67951	90364	76493	29609	11062
00014	99594	67348	87517	64969	91826	08928	93785	61368	23478	34113
00015	65481	17674	17468	50950	58047	76974	73039	57186	40218	16544
00016	80124	35635	17727	08015	45318	22374	21115	78253	14385	53763
00017	74350	99817	77402	77214	43236	00210	45521	64237	96286	02655
00018	69916	26803	66252	29148	36936	87203	76621	13990	94400	56418
00019	09893	20505	14225	68514	46427	56788	96297	78822	54382	14598
00020	91499	14523	68479	27686	46162	83554	94750	89923	37089	20048
00021	80336	94598	26940	36858	70297	34135	53140	33340	42050	82341
00022	44104	81949	85157	47954	32979	26575	57600	40881	22222	06413
00023	12550	73742	11100	02040	12860	74697	96644	89439	28707	25815
00024	63606	49329	16505	34484	40219	52563	43651	77082	07207	31790
00025	61196	90446	26457	47774	51924	33729	65394	59593	42582	60527
00026	15474	45266	95270	79953	59367	83848	82396	10118	33211	59466
00027	94557	28573	67897	54387	54622	44431	91190	42592	92927	45973
00028	42481	16213	97344	08721	16868	48767	03071	12059	25701	46670
00029	23523	78317	73208	89837	68935	91416	26252	29663	05522	82562
00030	04493	52494	75246	33824	45862	51025	61962	79335	65337	12472
00031	00549	97654	64051	88159	96119	63896	54692	82391	23287	29529
00032	35963	15307	26898	09354	33351	35462	77974	50024	90103	39333
00033	59808	08391	45427	26842	83609	49700	13021	24892	78565	20106
00034	46058	85236	01390	92286	77281	44077	93910	83647	70617	42941
00035	32179	00597	87379	25241	05567	07007	86743	17157	85394	11838
00036	69234	61406	20117	45204	15956	60000	18743	92423	97118	96338
00037	19565	41430	01758	75379	40419	21585	66674	36806	84962	85207
00038	45155	14938	19476	07246	43667	94543	59047	90033	20826	69541
00039	94864	31994	36168	10851	34888	81553	01540	35456	05014	51176
00040	98086	24826	45240	28404	44999	08896	39094	73407	35441	31880
00041	33185	16232	41941	50949	89435	48581	88695	41994	37548	73043
00042	80951	00406	96382	70774	20151	23387	25016	25298	94624	61171
00043	79752	49140	71961	28296	69861	02591	74852	20539	00387	59579
00044	18633	32537	98145	06571	31010	24674	05455	61427	77938	91936
00045	74029	43902	77557	32270	97790	17119	52527	58021	80814	51748
00046	54178	45611	80993	37143	05335	12969	56127	19255	36040	90324
00047	11664	49883	52079	84827	59381	71539	09973	33440	88461	23356
00048	48324	77928	31249	64710	02295	36870	32307	57546	15020	09994
00049	69074	94138	87637	91976	35584	04401	10518	21615	01848	76938
00050	09188	20097	32825	39527	04220	86304	83389	87374	64278	58044
00051	90045	85497	51981	50654	94938	81997	91870	76150	68476	64659
00052	73189	50207	47677	26269	62290	64464	27124	67018	41361	82760
00053	75768	76490	20971	87749	90429	12272	95375	05871	93823	43178
00054	54016	44056	66281	31003	00682	27398	20714	53295	07706	17813

STATISTICAL CONCEPTS AND METHODS

TABLE 14 (*Continued*)

00055	08358	69910	78542	42785	13661	58873	04618	97553	31223	08420
00056	28306	03264	81333	10591	40510	07893	32604	60475	94119	01840
00057	53840	86233	81594	13628	51215	90290	28466	68795	77762	20791
00058	91757	53741	61613	62269	50263	90212	55781	76514	83483	47055
00059	89415	92694	00397	58391	12607	17646	48949	72306	94541	37408
00060	77513	03820	86864	29901	68414	82774	51908	13980	72893	55507
00061	19502	37174	69979	20288	55210	29773	74287	75251	65344	67415
00062	21818	59313	93278	81757	05686	73156	07082	85046	31853	38452
00063	51474	66499	68107	23621	94049	91345	42836	09191	08007	45449
00064	99559	68331	62535	24170	69777	12830	74819	78142	43860	72834
00065	33713	48007	93584	72869	51926	64721	58303	29822	93174	93972
00066	85274	86893	11303	22970	28834	34137	73515	90400	71148	43643
00067	84133	89640	44035	52166	73852	70091	61222	60561	62327	18423
00068	56732	16234	17395	96131	10123	91622	85496	57560	81604	18880
00069	65138	56806	87648	85261	34313	65861	45875	21069	85644	47277
00070	38001	02176	81719	11711	71602	92937	74219	64049	65584	49698
00071	37402	96397	01304	77586	56271	10086	47324	62605	40030	37438
00072	97125	40348	87083	31417	21815	39250	75237	62047	15501	29578
00073	21826	41134	47143	34072	64638	85902	49139	06441	03856	54552
00074	73135	42742	95719	09035	85794	74296	08789	88156	64691	19202
00075	07638	77929	03061	18072	96207	44156	23821	99538	04713	66994
00076	60528	83441	07954	19814	59175	20695	05533	52139	61212	06455
00077	83596	35655	06958	92983	05128	09719	77433	53783	92301	50498
00078	10850	62746	99599	10507	13499	06319	53075	71839	06410	19362
00079	39820	98952	43622	63147	64421	80814	43800	09351	31024	73167
00080	59580	06478	75569	78800	88835	54486	23768	06156	04111	08408
00081	38508	07341	23793	48763	90822	97022	17719	04207	95954	49953
00082	30692	70668	94688	16127	56196	80091	82067	63400	05462	69200
00083	65443	95659	18288	27437	49632	24041	08337	65676	96299	90836
00084	27267	50264	13192	72294	07477	44606	17985	48911	97341	30358
00085	91307	06991	19072	24210	36699	53728	28825	35793	28976	66252
00086	68434	94688	84473	13622	62126	98408	12843	82590	09815	93146
00087	48908	15877	54745	24591	35700	04754	83824	52692	54130	55160
00088	06913	45197	42672	78601	11883	09528	63011	98901	14974	40344
00089	10455	16019	14210	33712	91342	37821	88325	80851	43667	70883
00090	12883	97343	65027	61184	04285	01392	17974	15077	90712	26769
00091	21778	30976	38807	36961	31649	42096	63281	02023	08816	47449
00092	19523	59515	65122	59659	86283	68258	69572	13798	16435	91529
00093	67245	52670	35583	16563	79246	86686	76463	34222	26655	90802
00094	60584	47377	07500	37992	45134	26529	26760	83637	41326	44344
00095	53853	41377	36066	94850	58838	73859	49364	73331	96240	43642
00096	24637	38736	74384	89342	52623	07992	12369	18601	03742	83873
00097	83080	12451	38992	22815	07759	51777	97377	27585	51972	37867
00098	16444	24334	36151	99073	27493	70939	85130	32552	54846	54759
00099	60790	18157	57178	65762	11161	78576	45819	52979	65130	04860

SOURCE: *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. The RAND Corporation, The Free Press, New York, 1955. Reproduced by permission of the publishers.