MODUL 7

Statistika Inferensia: Pendugaan

Dr. Sutikno, M.Si.
Dewi Juliah Ratnaningsih, S.Si., M.Si.

PENDAHULUAN

Setelah selesai mempelajari distribusi variabel acak, sekarang Anda akan mempelajari teori tentang pendugaan parameter populasi. Namun, sebelum ke pendugaan, terlebih dahulu Anda mempelajari distribusi sampling. Dalam mempelajari materi ini, pemahaman Anda mengenai distribusi variabel acak sangatlah dibutuhkan. Karena, materi yang akan kita bahas masih menggunakan konsep-konsep distribusi peluang variabel acak.

Materi pada Modul ini membahas tentang distribusi sampling dan teorema limit pusat, serta pendugaan parameter populasi yang meliputi rata-rata (nilai tengah), proporsi, dan varians. Agar bahasan materi dalam modul ini lebih sistematis, maka Modul 7 ini dibagi ke dalam 4 subpokok bahasan, yaitu:

1. Distribusi sampling dan teorema limit pusat.
2. Pendugaan titik dan selang : mean.
3. Pendugaan titik dan selang : proporsi.
4. Pendugaan titik dan selang : varians.

Secara khusus, setelah mempelajari modul in 1, diharapkan Anda dapat:

1. Menjelaskan konsep pendugaan.
2. Menjelaskan konsep distribusi sampling.
3. Menjelaskan konsep teorema limit pusat.
4. Menghitung pendugaan titik untuk mean.
5. Menghitung pendugaan selang untuk mean pada sampel besar (σ tidak diketahui) dan sampel kecil (σ tidak diketahui).
6. Menghitung pendugaan titik untuk proporsi.
7. Menghitung pendugaan selang untuk proporsi.
8. Menghitung pendugaan titik untuk varians.
9. Menghitung pendugaan selang untuk varians.

Pemahaman terhadap modul ini, akan memudahkan Anda dalam memahami materi-materi yang ada dalam modul selanjutnya.

KEGIATAN BELAJAR 1

Distribusi Sampling dan Teorema Limit Pusat

Apakah yang dimaksud dengan distribusi sampling? Anda tentu bertanya-tanya mengenai hal ini, bukan? Untuk memahaminya, mari kita sadari kembali bahwa saat ini kita sedang berbicara pada ranah statistika inferensia. Pada ranah ini sesungguhnya proses yang dilakukan berkaitan dengan generalisasi dan peramalan.

Adanya proses generalisasi atau peramalan menandakan bahwa dalam konteks ini ada objek yang disebut populasi dan sampel. Tentunya, kita bekerja dengan data pada ranah sampel untuk kemudian digunakan dalam menyimpulkan keadaan populasi. Seperti telah kita bahas pada Modul 1, bahwa populasi dan sampel masing-masing memiliki karakteristik numerik. Karakteristik numerik dari populasi disebut sebagai *parameter* dan karakteristik sampel disebut *statistik*. Parameter dan statistik ini dapat berupa rata-rata, varians, simpangan baku, atau proporsi. Lalu apa hubungannya distribusi sampling dengan statistik?

Saudara, misalnya kita memiliki populasi berukuran 6 yang anggotanya $\{A, B, C, D, E, \text{dan } F\}$. Sampel berukuran 3 akan diambil dari populasi tersebut secara acak. Apa saja kemungkinan-kemungkinan sampel yang dapat diambil? Tentu Anda dapat menjabarkan berbagai kemungkinan yang dapat terjadi, karena kita mengambil sampel ini secara acak. Misalnya, Anda diminta mengambil sampel satu kali dan Anda memperoleh $\{A, C, D\}$, lalu teman Anda diminta mengambil sampel tersebut juga dan diperoleh $\{A, B, C\}$, dan seterusnya. Jika dilakukan pengambilan sampel lagi akan ada banyak kemungkinan sampel yang dapat terpilih. Seandainya, kita sedang berbicara mengenai rata-rata, maka rata-rata sampel yang diperoleh akan berbeda-beda dari satu sampel dengan sampel yang lain. Hal ini menunjukkan bahwa karakteristik sampel, yakni statistik, nilainya berubah-ubah, akan sangat bergantung pada sampel yang terambil. Karena nilainya berubah-ubah itulah, maka statistik merupakan variabel acak yang nilainya bervariasi sesuai dengan variasi sampel yang terambil.

Suatu variabel acak tentu memiliki distribusi peluang. Nah, karena statistik itu merupakan variabel acak, maka statistik juga memiliki distribusi peluang, yang dinamakan distribusi sampling.

Distribusi sampling adalah distribusi peluang dari suatu statistik.

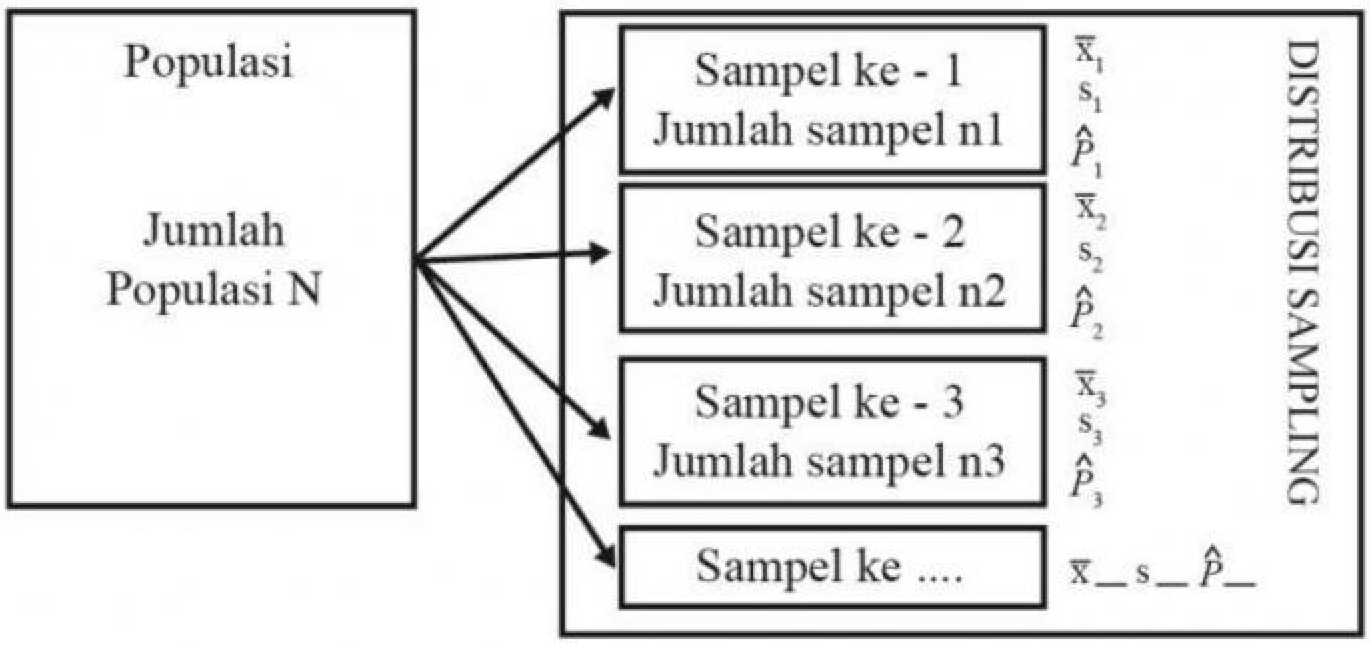
Sebuah distribusi tentu memiliki nilai tengah atau rataan dan juga keragaman yang dicirikan oleh simpangan baku. Nah, simpangan baku dari suatu statistik disebut sebagai *standar error* atau galat baku. Misalnya statistik yang kita perhatikan adalah rata-rata $\left(\overline{X}\right)$. Distribusi peluang $\overline{X}$ disebut distribusi sampel dari rataan, dan standar error bagi rataan adalah simpangan baku dari distribusi sampel $\overline{x}$.

Simpangan baku distribusi sampel suatu statistik disebut *standard error* atau galat baku dari statistik tersebut.

Pertanyaan berikutnya yang menarik untuk dijawab adalah, untuk apa kita perlu mengetahui distribusi sampling?

Saudara, di awal tadi kita telah ketahui bahwa pada statistika inferensia yang menjadi fokusnya adalah adanya proses generalisasi mengenai karakteristik populasi melalui data sampel. Generalisasi ini meliputi pendugaan dan pengujian hipotesis. Ketidaktahuan kita mengenai parameter populasi yang sesungguhnya menjadi alasan perlunya kita melakukan pengukuran terhadap data sampel. Pada saat melakukan generalisasi, karena data yang digunakan hanya data sampel, yaitu sebagian dari populasi, maka sudah pasti generalisasi tersebut tidak seratus persen akurat, meskipun sedikit pasti ada *error*-nya. Nah, untuk dapat melakukan generalisasi dengan baik terhadap populasi, pengetahuan mengenai distribusi dari suatu statistik atau distribusi sampling sangatlah diperlukan. Inilah yang dapat menuntun kita agar dapat melakukan generalisasi terhadap populasi dengan benar.

Misalnya, dari sebuah populasi berukuran N, dapat diambil sampel berukuran n_1, n_2, dan seterusnya. Masing-masing sampel memberikan statistik tersendiri. Nilai-nilai statistik dari setiap sampel tentu nilainya bervariasi sehingga statistik tersebut memiliki distribusi. Gambar 7.1 berikut memberikan gambaran mengenai distribusi sampling.



Gambar 7.1
Distribusi Sampling, sampel dan Populasi

Pada pokok bahasan berikutnya kita akan membahas pendugaan parameter dan juga pengujian hipotesis. Keduanya adalah proses inferensia terhadap populasi. Pemahaman mengenai distribusi sampling sangat diperlukan pada kedua pokok bahasan tersebut.

Penentuan distribusi sampling tergantung pada ukuran populasi, ukuran sampel, dan bagaimana metode pengambilan sampelnya. Oleh karena itu, ada beberapa formula mengenai distribusi sampling, yaitu pada saat pengambilan sampel dengan pengembalian, tanpa pengembalian, apabila ukuran sampelnya besar (teorema limit pusat), dan apabila ukuran sampelnya kecil. Pada Kegiatan Belajar 1 ini akan dipelajari distribusi sampling bagi rata-rata untuk berbagai keadaan tersebut.

A. DISTRIBUSI SAMPLING BAGI RATA-RATA UNTUK PENGAMBILAN SAMPEL DENGAN PENGEMBALIAN

Ukuran penting dari suatu distribusi adalah rata-rata dan varians-nya atau simpangan bakunya. Sebagai contoh, misalnya kita memiliki sebuah populasi berukuran $N = 4$, dengan data sebagai berikut: 1,2,3,4. Dari populasi tersebut diambil sampel berukuran $n = 2$ dengan pengembalian. Artinya, setelah mengambil sampel yang pertama, kemudian data yang terambil tersebut dikembalikan lagi sehingga ada kemungkinan satu data terambil berulang kali.

Jika dihitung, nilai rata-rata dan varians populasi dari data tersebut diperoleh
Rata-rata:

$$\mu = \frac{\sum x}{N} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,50.$$

Varians:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{N} = 1,25.$$

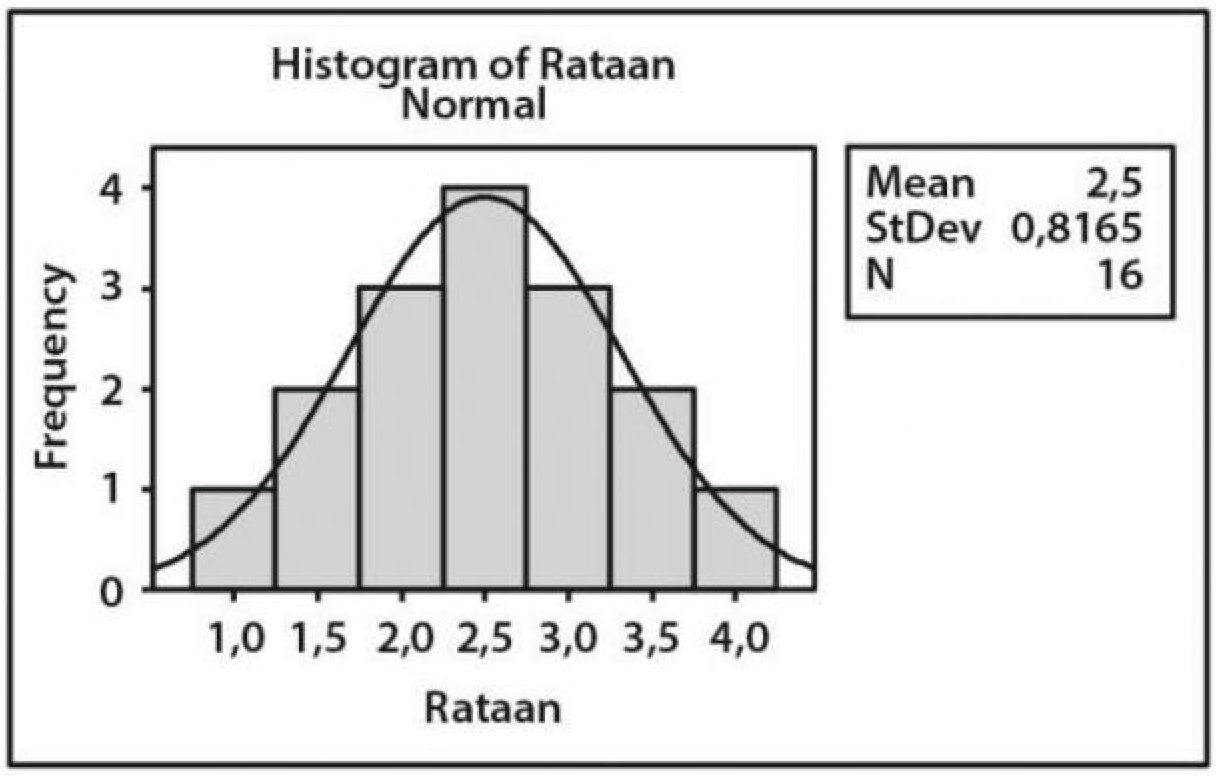
Dari populasi tersebut, berbagai kemungkinan sampel yang dapat diambil adalah sebagai berikut.

Kemungkinan	Sampel		Rataan sampel
1	1	1	1
2	1	2	1,5
3	1	3	2
4	1	4	2,5
5	2	1	1,5
6	2	2	2
7	2	3	2,5
8	2	4	3
9	3	1	2
10	3	2	2,5
11	3	3	3
12	3	4	3,5
13	4	1	2,5
14	4	2	3
15	4	3	3,5
16	4	4	4
Rata-rata			**2,5**
varians			**0,67**

Ternyata, melalui pengambilan sampel dengan pengembalian, ada 16 kemungkinan sampel yang dapat diambil, dimana masing-masing sampel memiliki rata-rata. Misalnya sampel ke-1, rata-ratanya adalah $\overline{x}_1 = 1$, sampel kedua rata-ratanya $\overline{x}_2 = 1,5$, dan seterusnya hingga sampai ke-enambelas. Dapat Anda lihat bahwa setiap sampel nilai rata-ratanya berbeda. Hal ini bergantung pada hasil sampling yang diperoleh. Sehingga, nilai-nilai rataan ini membentuk suatu sebaran tersendiri yang jika dihitung ekspektasi atau rata-ratanya menjadi $\mu_{\bar{x}} = 2,50$ dan variansnya $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0,63$.

Lihat bahwa, nilai rata-rata dari rataan sampel $\left(\bar{X}\right)$ sama dengan rata-rata populasi, $\mu_{\bar{x}} = \mu$.

Sedangkan, varians dari rataan sampel $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0,63 = \dfrac{1,25}{2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
Kemudian, bentuk distribusi dari $\bar{X}$ adalah normal, sebagaimana diperlihatkan pada histogram Gambar 7.2.



Gambar 7.2
Histogram Peluang bagi $\bar{X}$ dengan Pengembalian

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa jika X berdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2 maka $\bar{X}$ juga berdistribusi normal dengan rataan dan varians $\dfrac{\sigma^2}{n}$ atau simpangan baku $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Penerapan distribusi sampling ini biasanya untuk menghitung peluang termbilnya sampel dengan nilai rataan tertentu. Oleh karenanya, informasi mengenai $\mu_{\bar{x}}$ dan $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ diperlukan untuk transformasi menjadi variabel acak baku Z. Agar lebih memahami penerapan distribusi sampling dengan pengembalian, pelajari *Contoh 7.1*.

Distribusi Sampling bagi $\overline{X}$ dengan Pengembalian
Bila semua kemungkinan sampel acak berukuran n yang diambil dengan pengembalian dari populasi berhingga berukuran N yang mempunyai rataan μ dan simpangan baku σ, maka distribusi sampling bagi $\overline{X}$ adalah normal dengan espektasi/rataan $E(\overline{X}) = \mu_{\overline{x}} = \mu$ dan simpangan baku $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Sehingga nilai variabel acak baku z yang bersesuaian adalah:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Contoh 7.1.
Bila diberikan populasi 1, 1, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6, dan 7. Hitunglah peluang bahwa suatu contoh acak berukuran 36, yang diambil dengan pemulihan, akan menghasilkan nilai tengah yang lebih besar daripada 3,8 tetapi lebih kecil daripada 4,5 bila nilai tengah itu diukur sampai per sepuluh terdekat.

Jawab:
Karena data dalam populasi tersebut ada yang nilainya sama, maka setiap nilai memiliki peluang yang berbeda. Sebaran peluang bagi populasi tersebut dicatat sebagai berikut

X	1	3	4	5	6	7
$P(X = x)$	0,3	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1

Nilai ekspektasi atau rata-rata populasi adalah:

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= \sum xp(x) \\ &= (1)(0,3) + (3)(0,1) + \cdots + (7)(0,1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Varians populasi diperoleh:

$$\mu = 4E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2$$

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum x^2 p\left(x\right) \\ &= \left(1\right)\left(0,3\right) + \left(9\right)\left(0,1\right) + \cdots + \left(49\right)\left(0,1\right) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Distribusi sampling bagi rata-rata sampel, $\overline{x}$, adalah normal dengan nilai tengah $\mu_{\overline{x}} = \mu = 4$ dan varians $\sigma_{\overline{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{5}{36}$. Dengan mengambil akar dari $\sigma_{\overline{x}}^2$ diperoleh simpangan baku $\overline{x}$, yaitu $\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\sigma_{\overline{x}}^2} = 0,373$. Peluang bahwa $\overline{x}$ lebih besar daripada 3,8 tetapi lebih kecil daripada 4,5 diberikan oleh $\overline{x}$ luas daerah gelap dalam Gambar 8.3. nilai z padanan $\overline{x}_1 = 3,85$ dan $\overline{x}_2 = 4,45$ adalah:

$$\overline{x}_1 = \frac{3,85 - 4}{0,373} = -0,40$$

$$\overline{x}_2 = \frac{4,45 - 4}{0,373} = 1,21.$$

Dengan demikian:

$$\begin{aligned} P\left(3,8 < \overline{x} < 4,5\right) &= P(-0,40 < Z < 1,21) \\ &= P\left(Z < 1,21\right) - P\left(Z < -0,40\right) \\ &= 0,8869 - 0,3446 \\ &= 0,5423. \end{aligned}$$

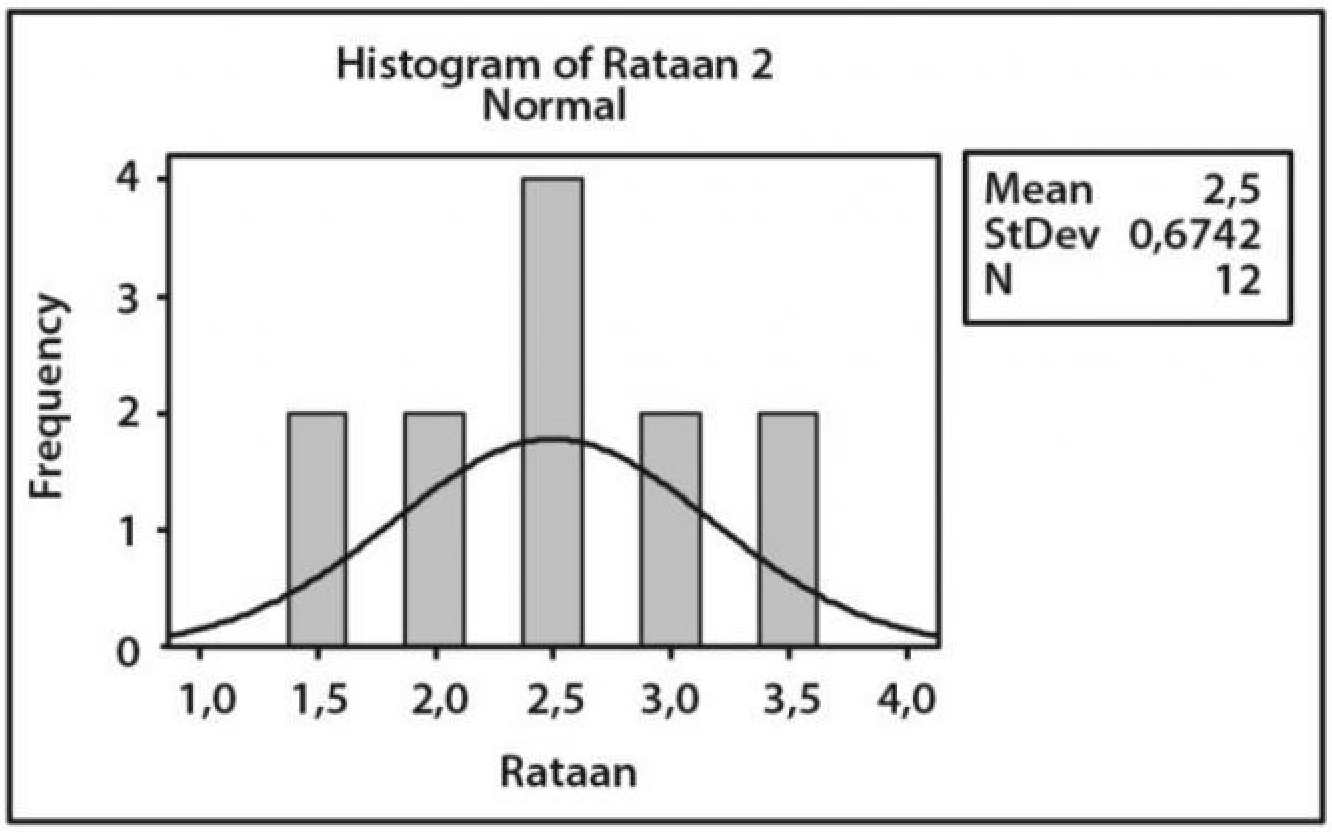
B. DISTRIBUSI SAMPLING BAGI RATA-RATA UNTUK PENGAMBILAN SAMPEL TANPA PENGEMBALIAN

Sekarang, bagaimana jika populasi yang beranggotakan nilai-nilai 1,2,3,4 dilakukan pengambilan sampel berukuran $n = 2$ tanpa pengembalian? Berbagai kemungkinan sampel yang akan terpilih adalah sebagai berikut.

No	Sampel		Rataan	No	Sampel		Rataan
1	1	2	1,5	7	3	1	2
2	1	3	2	8	3	2	2,5
3	1	4	2,5	9	3	4	3,5
4	2	1	1,5	10	4	1	2,5
5	2	3	2,5	11	4	2	3
6	2	4	3	12	4	3	3,5
						rata-rata	2,5
						varians	0,42

Melalui pengambilan sampel tanpa pengembalian terdapat 12 kemungkinan sampel yang dapat terpilih dengan rata-rata $\mu_{\bar{x}} = 2,50$ dan $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0,42$. Sementara telah kita dapatkan bahwa rata-rata populasi $\mu = 2,50$ dan $\sigma^2 = 1,25$.

Perhatikan bahwa ternyata $\mu_{\bar{x}} = \mu = 2,50$ sedangkan, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0,42$ akan sama dengan $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{1,25}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = 0,42$. Kemudian, histogram dari rataan sampel $\bar{X}$ juga terlihat mengikuti distribusi normal seperti disajikan pada Gambar 7.3.



Gambar 7.3
Histogram Peluang bagi $\bar{X}$ tanpa Pengembalian

Dengan demikian, jika sampel diambil tanpa pengembalian, distribusi $\overline{X}$ juga menyebar normal dengan rataan μ dan ragam $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ atau simpangan baku $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$. Untuk lebih memahami penerapannya, pelajari *Contoh 7.2.*

Distribusi Sampling bagi $\overline{X}$ tanpa Pengembalian

Bila semua kemungkinan sampel acak berukuran n diambil tanpa pemulihan dari suatu populasi terhingga berukuran N yang mempunyai nilai tengah μ dan simpangan baku σ, maka distribusi sampling bagi nilai tengah sampel $\overline{X}$ akan menghampiri sebaran normal dengan nilai tengah dan simpangan baku:

$$\mu_{\overline{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

Sehingga nilai variabel acak normal baku z yang bersesuaian adalah:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}.$$

Contoh 7.2.

Diberikan sebuah populasi yang terdiri atas nilai-nilai 1, 1, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6, dan 7. Dari populasi ini diambil semua kemungkinan contoh berukuran 4 tanpa pemulihan, dan untuk setiap contoh yang diperoleh dihitung nilai tengah contohnya, sehingga diperoleh sebaran penarikan contoh bagi semua nilai tengah contoh itu. Hitunglah nilai tengah dan simpangan baku bagi sebaran penarikan contoh itu. Sekurang-kurangnya ¾ di antara semua nilai tengah contoh itu kita harapkan akan jatuh di antara dua nilai berapa?

Jawab:

Dari *Contoh 7.1* diperoleh bahwa $\mu = 4$ dan $\sigma^2 = 5$. Ekspektasi atau rataan dan simpangan baku bagi distribusi sampling $\overline{X}$ adalah:

$$E\left(\overline{X}\right) = \mu_{\overline{x}} = 4$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\sqrt{\frac{10-4}{10-1}} = 0,91.$$

Selanjutnya, dengan menerapkan dalil Chebyshev, kita mengharapkan bahwa sekurang-kurangnya ¾ di antara semua nilai tengah contoh itu akan jatuh dalam $\mu_{\overline{x}} \pm 2\sigma_{\overline{x}} = 4 \pm (2)(0,91)$ selang, atau antara 2,17 dan 5,83.

C. TEOREMA LIMIT PUSAT UNTUK UKURAN SAMPEL BESAR

Dalam kenyataannya, suatu populasi belum tentu berdistribusi normal. Banyak juga populasi yang tidak diketahui apa distribusinya. Nah, jika kita berkepentingan untuk mengetahui distribusi sampling bagi rata-rata sampel, apa yang harus kita lakukan? Sementara itu, sudah jelas bahwa distribusi sampling diturunkan dari distribusi populasinya.

Dalam kondisi demikian, ada sebuah dalil yang menyatakan bahwa jika ukuran sampel n besar, maka distribusi $\overline{x}$ mendekati normal apapun bentuk distribusi populasinya.

Teorema Limit Pusat

Dalam pengambilan sampel acak dari suatu populasi sembarang dengan nilai tengah μ dan simpangan baku σ, jika n besar, maka distribusi $\overline{X}$ mendekati normal dengan ekspektasi atau rataan μ dan simpangan baku $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Dengan demikian, $z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ merupakan sebuah nilai bagi variabel acak $Z \sim N(0;1)$.

Teorema limit pusat akan sangat baik hasilnya jika digunakan pada $n \geq 30$, apapun bentuk populasinya. Jika $n \leq 30$, hampiran distribusi normal melalui teorema limit pusat ini baik digunakan hanya jika populasinya diketahui beristribusi normal atau mendekati normal. Bila populasinya normal maka $\bar{X}$ akan tepat menyebar normal betapapun kecilnya ukuran sampelnya (Walpole, 1995).

Contoh 7.3.
Misalkan bahwa distribusi populasi kekuatan genggaman karyawan-karyawan industri diketahui mempunyai rata-rata 110 dan simpangan baku 10. Untuk suatu sampel acak dengan 75 karyawan, berapakah peluang bahwa rata-rata genggaman sampel itu akan:
1. Antara 109 dan 112?
2. Lebih besar dari 111?

Jawab:
Di sini rata-rata dan simpangan baku populasi itu adalah $\mu = 110$ dan $\sigma = 10$. Ukuran sampel n = 75, tergolong ukuran sampel besar karena lebih dari 30, sehingga teorema limit pusat meyakinkan bahwa distribusi $\bar{x}$ mendekati normal dengan nilai tengah 110 dan simpangan baku $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,155$.

1. Untuk mendapatkan $P\left(109 < \bar{x} < 112\right)$ kita ubah menjadi variabel normal baku yang bersesuaian, yaitu $z = \frac{\bar{x} - 110}{1,155}$.

   Untuk $\bar{x}_1 = 109$, bersesuaian dengan $z = \frac{109 - 110}{1,155} = -0,866$.

   Untuk $\bar{x}_2 = 112$, bersesuaian dengan $z = \frac{112 - 110}{1,155} = 1,732$.

   Maka peluang yang diminta adalah:
$$
\begin{aligned}
P\left(109 < \bar{x} < 112\right) &= P\left(-0,866 < Z < 1,732\right) \\
&= 0,958 - 0,193 \\
&= 0,765.
\end{aligned}
$$

2. Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$P(\bar{x} > 111) = P\left(Z > \frac{111 - 110}{1{,}155}\right)$$
$$= P(Z > 0{,}866)$$
$$= 1 - P(Z < 0{,}866)$$
$$= 1 - 0{,}807$$
$$= 0{,}193.$$

D. DISTRIBUSI *t*

Dalam penelitian sering pula kita jumpai keadaan dimana varians populasi tempat kita mengambil sampel tidak diketahui. Hal ini akan bermasalah pada penentuan nilai $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, karena σ tidak diketahui. Jika demikian, bagaimana cara mengatasinya?

Untuk ukuran sampel yang besar $(n \geq 30)$, σ^2 dapat diduga dengan s^2 secara baik. Asalkan s^2 tidak terlalu bervariasi dari satu sampel ke sampel yang lain, maka nilai-nilai $\dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ masih mendekati distribusi normal baku, sehingga dalil limit pusat masih berlaku. Namun, jika ukuran sampelnya kecil $(n \leq 30)$, nilai-nilai s^2 akan sangat bervariasi dari satu sampel ke sampel yang lain, sehingga nilai-nilai $\dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ tidak lagi berdistribusi normal baku. Nah, dalam keadaan demikian, nilai-nilai $\dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ berdistribusi t-*student* dengan derajat bebas $v = n - 1$. Distribusi ini menyerupai distribusi normal yang setangkup di sekitar nilai 0. Untuk n mendekati tak hingga $(n \rightarrow \infty)$ kedua sebaran ini menjadi sama. Nilai-nilai peluang distribusi *t* ini juga telah diberikan dalam tabel distribusi *t*, seperti halnya tabel distribusi normal baku. Mengenai hubungan distribusi *t-student* dengan distribusi normal dapat dilihat pada literatur lain, salah satunya Walpole (1995).

Distribusi *t*
Bila $\overline{x}$ dan s^2 masing-masing adalah nilai tengah dan ragam suatu contoh acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2, maka:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

Merupakan sebuah nilai peubah acak T yang mempunyai sebaran t dengan $v = n - 1$ derajat bebas.

Contoh 7.4.
Sebuah produsen bohlam menyatakan bahwa bohlam produksinya mencapai umur rata-rata 500 jam. Untuk menjaga nilai rata-rata ini, ia menguji 25 bohlam setiap bulan. Bila nilai t yang diperolehnya jatuh antara $-t_{0,05}$ dan $t_{0,05}$ ia puas. Kesimpulan apa yang ditariknya bila ia memperoleh nilai tengah $\overline{x} = 518$ jam dan simpangan baku $s = 40$ jam? Asumsikan bahwa umur bohlam itu menyebar normal.

Jawab:
Dari distribusi *t*, kita mendapatkan bahwa $t_{0,05} = 1,711$ untuk derajat bebas $v = 24$. Dengan demikian, produsen itu puas bila contoh bohlam itu menghasilkan nilai t antara -1,711 dan 1,711 bila $\mu = 500$, maka:

$$t = \frac{518 - 500}{40 / \sqrt{25}} = 2,25.$$

Suatu nilai yang jauh di atas 1,711. Peluang mendapatkan nilai *t* untuk $\mu = 24$ yang sama atau lebih besar dari 2,25 kurang lebih adalah 0,02? Bila $\mu > 500$ maka nilai *t* yang diperoleh tersebut akan lebih wajar. Dengan demikian, dalam kasus ini, produsen itu akan menyimpulkan bahwa bohlam produksinya ternyata lebih baik yang disangkanya.

Demikianlah berbagai kondisi dari formulasi distribusi sampling bagi rata-rata. Dalam penggunaannya untuk menyelesaikan permasalahan Anda mesti dapat mengidentifikasi formula mana yang harus digunakan. Pemahaman terhadap materi ini merupakan fondasi penting untuk mempelajari materi pendugaan parameter.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Sebuah penelitian terbaru mengenai upah per jam anggota kru pemeliharaan untuk maskapai penerbangan menunjukkan rata-rata upah per jam adalah \$20,50 dengan simpangan baku \$3,50. Asumsikan distribusi upah per jam mengikuti distribusi normal. Jika diambil 10 anggota kru secara acak sebagai contoh, berapakah ekspektasi dari rataan sampel dan *standard error*-nya?
2) Untuk soal no. 1, berapakah peluang rata-rata upah per jamnya lebih dari \$23?
3) Untuk soal no. 1, berapakah peluang rata-rata upah per jamnya kurang dari \$23?
4) Untuk soal no. 1, berapakah peluang rata-rata upah per jamnya antara \$17 sampai \$23?
5) Bila standar error rata-rata untuk distribusi sampling bagi sampel berukuran 36 yang diambil dari populasi tak hingga adalah 2, berapa ukuran sampel itu harus ditingkatkan agar *standard error*-nya berkurang menjadi 1,2?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui:

$$\mu = 20,50$$

$$n = 10$$

$$x = upah\ per\ jam$$

$$\chi \sim N(20,50;3,50)$$

$$E(\overline{x}) = \mu_{\overline{x}} = \mu = 20,50$$

karena x berdistribusi normal, maka berlaku Teorema Limit Pusat. Sehingga varians $(\overline{x}) = \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(3,50)^2}{10} = 1,225.$

2) P (rata-rata upah per jam > 23)

$$= P(\bar{x} > 23)$$

$$= P\left(Z > \frac{23 - 20,50}{3,50/\sqrt{10}}\right)$$

$$= P(Z > 2,26)$$

$$= 1 - P(Z < 2,26)$$

$$= 1 - 0,9881$$

$$= 0,0119.$$

3) P (rata-rata upah per jam < 23)

$$= P(\bar{x} < 23)$$

$$= P(\bar{x} < 23)$$

$$= P(Z < 2,26)$$

$$= 0,9881.$$

4) P(rata-rata upah antara 17 sampai 23)

$$= P(17 < \bar{x} < 23)$$

$$= P\left(\frac{23 - 20,50}{3,50/\sqrt{10}} < Z < \frac{23 - 20,50}{3,50/\sqrt{10}}\right)$$

$$= P(-3,16 < Z < 2,26)$$

$$= P(Z < 2,26) - P(Z < -3,16)$$

$$= 0,9881 - 0,0008$$

$$= 0,9873.$$

5) Diketahui:

$n = 36 \rightarrow \sigma_{\bar{x}} = 2$

n=···?→ σ_x¯=1,2

Karena populasi tak hingga, dan n > 30, maka berlaku Teorema Limit Pusat. Sehingga, *standard error* $\bar{x}$ adalah:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2 = \frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$

Untuk $\sigma_{\bar{x}} = 1,2 \Leftrightarrow 1,2 = \dfrac{12}{\sqrt{n}}$

$$\sqrt{n} = 10$$

$$n = 100$$

RANGKUMAN

Kondisi populasi dan sampel	Distribusi sampling $\bar{X}$
■ Populasi normal dengan nilai tengah μ dan varians σ^2. ■ Sampel diambil dengan pengembalian	$\bar{X}$ berdistribusi normal dengan: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
■ Populasi normal dengan nilai tengah μ dan varians σ^2. ■ Sampel diambil tanpa pengembalian.	$\bar{X}$ berdistribusi normal dengan: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}}$
■ Apapun sebaran populasinya. ■ Ukuran sampel besar atau ■ Ukuran sampel kecil, namun populasinya normal.	(Teorema limit pusat) $\bar{X}$ berdistribusi normal dengan: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
■ Populasi normal dengan nilai tengah μ dan varians tidak diketahui. ■ Ukuran sampel besar $(n \geq 30)$ dengan rataan $\bar{x}$ dan simpangan baku s.	(Teorema limit pusat) $\bar{X}$ berdistribusi normal dengan: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$
■ Populasi normal dengan nilai tengah μ dan varians tidak diketahui. ■ Ukuran sampel kecil $(n \geq 30)$ dengan rataan $\bar{x}$ dan simpangan baku s.	$\bar{X}$ berdistribusi t-*student* dengan: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ derajat bebas $v = n - 1$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Suatu populasi terdiri dari empat bilangan {2, 4, 6, 8}, kita ambil sampel random berukuran 2 dari populasi itu (dengan pengembalian). Nilai tengah distribusi sampling $\overline{x}$ sama dengan ....
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 7

2) Lihat soal no. 1. Simpangan baku distribusi sampling $\overline{x}$ adalah ....
   A. 1,06
   B. 1,73
   C. 2,47
   D. 2,83

3) Pandang sampel random dari suatu populasi dengan nilai tengah 550 dan simpangan baku 70. Maka nilai tengah dan simpangan baku $\overline{x}$ untuk ukuran sampel 16 adalah ....
   A. 500 dan 15,3
   B. 500 dan 16,7
   C. 550 dan 17,5
   D. 550 dan 18,7

4) Lihat soal no. 3. Nilai tengah dan simpangan baku $\overline{x}$ untuk ukuran sampel 160 adalah ....
   A. 550 dan 4,2
   B. 550 dan 5,5
   C. 600 dan 3,7
   D. 600 dan 5,2

5) Berat buah apel dalam suatu pohon berdistribusi normal dengan nilai tengah 0,32 pound dan simpangan baku 0,08 pound. Jika satu apel dipilih secara random, maka peluang bahwa beratnya antara 0,28 dan 0,34 pound adalah ....
   A. 0,2103
   B. 0,2902
   C. 0,3212
   D. 0,3907

6) Lihat soal no. 5. Jika $\overline{x}$ menunjukkan berat rata-rata sampel random dengan 4 apel, maka peluang $\overline{x}$ antara 0,28 dan 0,34 pound adalah....
   A. 0,4312
   B. 04721
   C. 0,5328
   D. 0,6721

7) Suatu sampel random berukuran 150 diambil dari suatu populasi yang mempunyai nilai tengah 60 dan simpangan baku 8. Distribusi populasi itu tidak normal. Peluang bahwa $\overline{x}$ akan terletak antara 59 dan 61 adalah....
   A. 0,8217
   B. 0,8972
   C. 0,9092
   D. 0,9036

8) Lihat soal no. 7. Peluang bahwa $\overline{x}$ akan lebih besar dari 62 adalah ....
   A. 0,8007
   B. 0,8212
   C. 0,8740
   D. 0,9036

9) Pandang suatu sampel random berukuran n = 100 dan suatu populasi yang mempunyai simpangan baku σ = 20. Peluang bahwa nilai tengah sampel akan terletak dalam 2 unit dari nilai tengah populasinya, yakni $P\left(-2 \leq \overline{x} - \mu \leq 2\right)$ sama dengan ....
   A. 0,5998
   B. 0,6113
   C. 0,6826
   D. 0,7442

10) Lihat soal no. 9. Nilai k adalah $P\left(k \leq \overline{x} - \mu \leq k\right) = 0,90$ adalah....
   A. 2,02
   B. 2,32
   C. 2,71
   D 3,29

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Pendugaan Titik dan Selang:Rata-rata

Materi tentang distribusi sampling yang Anda pelajari pada Kegiatan Belajar 1 sangat berguna dalam pendugaan parameter. Adapun materi pendugaan yang dibahas pada Kegiatan Belajar 2 ini adalah pendugaan bagi rata-rata.

Sebagaimana telah disebutkan sebelumnya bahwa dalam statistika inferensia tujuan utamanya adalah melakukan generalisasi terhadap populasi, salah satunya yaitu pendugaan. Penduga bagi parameter populasi ini ada dua macam, yaitu penduga titik dan penduga selang. Penduga titik berupa sebuah nilai, sedangkan penduga selang berupa interval nilai. Penduga ini kita dapatkan dari data sampel yang kita ambil dari populasi. Konsep mengenai pendugaan ini adalah sebagai berikut.

Suatu sampel acak $x_1, x_{2,} \cdots, x_n$ dari n sampel memiliki dugaan titik yang dengan dinyatakan dengan :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Pendugaan selang rata-rata μ terdiri dari 2 jenis yaitu sampel besar (σ diketahui) dan sampel kecil (σ tidak diketahui). Pada σ diketahui, maka distribusi sampling $\overline{x}$ mengikuti distribusi sampling $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ atau

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) .$$

Pada distribusi normal standard,

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < -Z_{\alpha/2}) = (1-\alpha)100\%$$

maka:

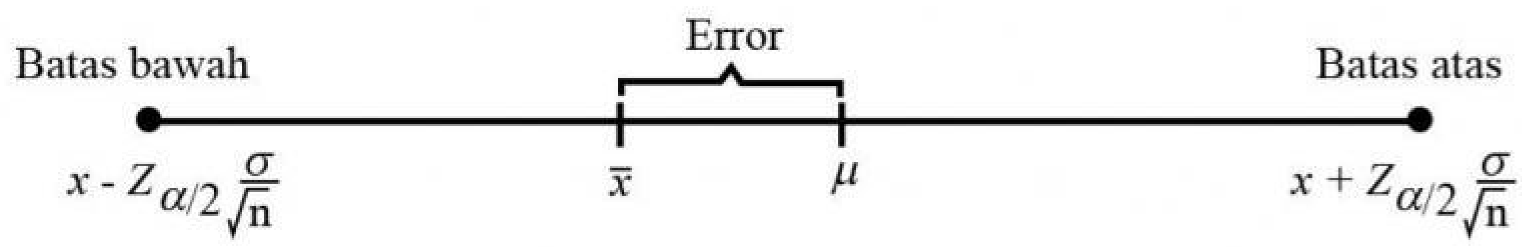
$$P(-Z_{\alpha/2} < \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < -Z_{\alpha/2}) = (1-\alpha)100\%$$

$$P(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (1-\alpha)100\%.$$

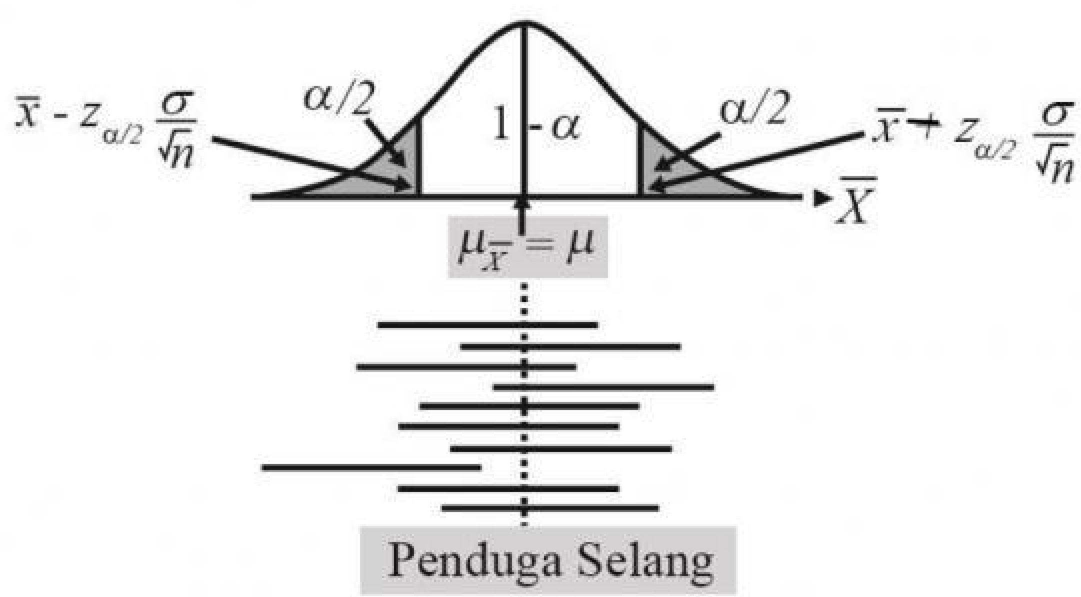
Sehingga didapatkan penduga selang:

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ merupakan batas bawah dan $\bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ merupakan batas atas. Selisih antara rata-rata populasi dan penduga titik rata-rata adalah *error*.



Dengan sampel yang berbeda maka akan menghasilkan banyak kemungkinan seperti pada Gambar 7.4.



Gambar 7.4.
Penduga Selang pada Distribusi Normal dengan Sampel yang Berbeda-beda

> Jika $\bar{x}$ adalah rata-rata dari sampel acak n yang diambil dari populasi dengan ragam σ^2 diketahui, maka penduga selang $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah
>
> $$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
>
> Dimana $z_{\alpha/2}$ adalah nilai peluang atau luasan pada kurva normal $\alpha/2$.

Apabila σ tidak diketahui maka dapat diduga dengan simpangan baku sampel atau *s*. Distribusi yang digunakan adalah distribusi *t-student* dengan derajat bebas *n*-1.

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Pada distribusi *t-student*,

$$P(-t_{\alpha/2} < T < -t_{\alpha/2}) = (1-\alpha)100\%$$

maka:

$$P\left(-t_{\alpha/2} < \frac{\overline{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} < -t_{\alpha/2}\right) = (1-\alpha)100\%$$

$$P\left(\overline{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = (1-\alpha)100\%.$$

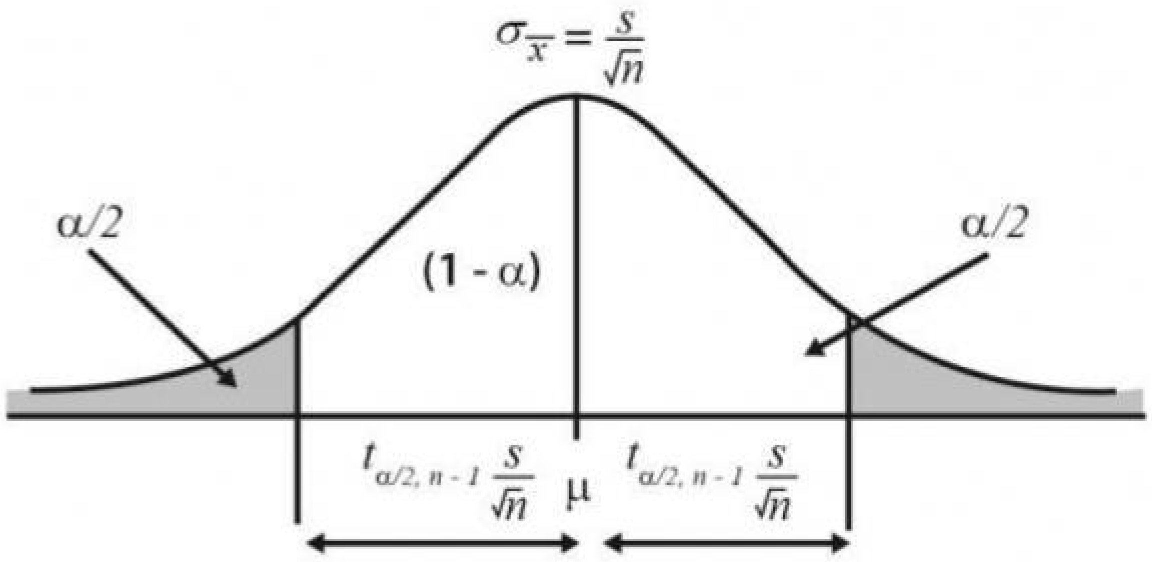
Sehingga didapatkan penduga selang:

$$\overline{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Jika $\overline{x}$ dan *s* adalah rata-rata dan simpangan baku dari sampel acak *n* yang diambil dari populasi dengan ragam σ^2 tidak diketahui, maka penduga selang (1-α)100% untuk μ adalah:

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Dimana $t_{\alpha/2}$ adalah nilai peluang atau luasan pada kurva distribusi *t-student* α/2 dengan derajat bebas *n*-1.



Gambar 7.5.
Penduga Selang proporsi pada Distribusi *t-Student*

Contoh 7.5.
Data berat badan 10 sampel ayam adalah sebagai berikut:

Tabel 7.1
Data Berat Badan 10 sampel ayam

No	Berat badan
1	2,50
2	2,60
3	2,50
4	2,29
5	2,30
6	2,22
7	2,12
8	2,45
9	2,50
10	2,43

Hitunglah penduga titik dan selang untuk rata-rata berat badan untuk populasi ayam dengan $\alpha = 5\%$!

1. Penduga titik:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{10} \frac{x_i}{10} = \frac{2,50 + 2,60 + ... + 2,43}{10} = 2,391$$

2. Penduga selang:

Karena σ diketahui, yaitu 0,8 maka penduga selang adalah sebagai berikut:

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2,391 - 1,96 \frac{0,8}{\sqrt{10}} < \mu < 2,391 + 1,96 \frac{0,8}{\sqrt{10}}$$

$$2,138 < \mu < 2,644.$$

Batas bawah dan batas atas tersebut menunjukkan bahwa dugaan rata-rata berat badan ayam adalah antara 2,138 hingga 2,644.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Suatu sampel acak 10 rokok merek tertentu mempunyai rata-rata kadar nikotin $\overline{x} = 5$ mg dan simpangan baku sampel 2 mg. Dapatkan penduga selang (selang kepercayaan) 90% rata-rata kadar nikotin tersebut!
2) Nilai tengah nilai Matematika sampel acak 36 mahasiswa tingkat sarjana, masing-masing 2,6. Hitunglah selang kepercayaan 95% dan 99% untuk rataan nilai matematika semua mahasiswa tingkat sarjana. Anggap bahwa simpangan baku populasinya adalah 0,3.
3) Berapa besar sampel yang diperlukan pada soal No 2 bila ingin percaya 95% bahwa dugaan untuk μ meleset kurang dari 0,05?
4) Tujuh botol yang mirip masing-masing berisi asam sulfat 9,8, 10,2, 10,4, 9,8, 10,0, 10,2, dan 9,6 liter. Carilah selang kepercayaan 95% untuk nilai tengah isi botol semacam itu bila distribusinya dianggap hampir normal.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui:

$n = 10$

$\overline{x} = 5$

$s = 2$

Tentukan selang kepercayaan 90% bagi μ, $\alpha = 10\%, \frac{\alpha}{2} = 0{,}05.$

Jawab:

Karena $n < 30$ dan σ tidak diketahui, gunakan t.

$$\overline{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$5 \pm t_{0,05;9} \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$5 \pm (1{,}833)(0{,}632)$$

$$5 \pm 1{,}159$$

Sehingga, selang kepercayaan 90% bagi μ adalah:

$3{,}841 < \mu < 6{,}159.$

2) Penduga titik untuk μ ialah $\overline{x} = 2{,}6$. Nilai z yang luas di sebelah kanannya 0,025, jadi luas sebelah kirinya sebesar 0,975, adalah $z_{0,025} = 1{,}96$. Jadi selang kepercayaan 95% adalah:

$$2{,}6 - (1{,}96)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2{,}6 + (1{,}96)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right)$$

Yang dapat disederhanakan menjadi:

$$2{,}50 < \mu < 2{,}70.$$

Untuk mencari selang kepercayaan 99%, carilah nilai z sehingga di sebelah kanannya terdapat luas sebesar 0,005 atau 0,995 di sebelah kirinya. Menurut Tabel t $z_{0,005} = 2{,}575$ dan selang kepercayaan 99% yang dicari adalah:

$$2{,}6 - (2{,}575)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2{,}6 + (2{,}575)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right)$$

Atau, bila disederhanakan:

$$2{,}47 < \mu < 2{,}73.$$

3) Simpangan baku populasi σ = 0,3. Maka, menurut Teorema 7.2

$$n = \left[\frac{(1,96)(0,3)}{0,05}\right]^2 = 138,3.$$

Jadi, dengan kepercayaan 95% sampel acak ukuran 139 akan memberikan taksiran $\overline{x}$ yang perbedaannya dengan μ kurang dari 0,05.

4) Nilai tengah dan simpangan baku sampel di atas adalah:

$$\overline{x} = 10,0 \text{ dan } s = 0,283$$

Dari Tabel t diperoleh $t_{0,025} = 2,447$ untuk derajat kebebasan $v = 6$.

Jadi selang kepercayaan 95% untuk μ adalah:

$$10,0 - (2,447)\left(\frac{0,283}{\sqrt{7}}\right) < \mu < 10,0 + (2,447)\left(\frac{0,283}{\sqrt{7}}\right)$$

Yang, bila disederhanakan, menjadi:

$$9,74 < \mu < 10,26.$$

RANGKUMAN

Dugaan titik rata-rata μ adalah :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Dugaan selang bagi μ :

- Sampel besar (σ diketahui) :

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

- Sampel kecil (σ tidak diketahui) :

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Penduga selang dengan $n \geq 30$ dapat didekati dengan distribusi ....
   A. *t-student*
   B. normal
   C. eksponensial
   D. log normal

2) Sejumlah data *sulfuric acid* adalah sebagai berikut 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10; 10,2; dan 9,6 liter. Penduga titik rata-ratanya adalah.....
   A. 8,71
   B. 3,58
   C. 10,00
   D. 9,00

3) Dengan mengasumsikan data pada no. 2 mengikuti distribusi normal, 95% penduga selang rata-rata data tersebut adalah....
   A. antara 9,8 dan 10,26
   B. antara 10,7 dan 10,26
   C. antara 9,7 dan 10,26
   D. antara 9,7 dan 10,00

4) Suatu data volume sampah selama 31 hari memiliki rata-rata 137,496 m^3. Sementara itu, simpangan baku populasi adalah 7,09. 90% penduga selang rata-rata volume sampah adalah....
   A. antara 135,3949 dan 139,5971 m^3
   B. antara 135,3949 dan 140 m^3
   C. antara 135,3349 dan 139,6571 m^3
   D. antara 136 dan 139,6571 m^3

5) Suatu perusahaan listrik yang membuat bola lampu yang panjang umurnya berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku 40 jam. Bila sampel 30 bola lampu berumur rata-rata 780 jam. Selang kepercayaan 96% untuk rataan populasi bola lampu yang dihasilkan perusahaan adalah....
   A. $765 < \mu < 795$
   B. $767 < \mu < 797$

C. $770 < \mu < 790$

D. $778 < \mu < 793$

6) Sarapan teratur sereal yang diberi pemanis sebelumnya menyebabkan kerusakan gigi, sakit jantung, dan penyakit lainnya menurut penelitian yang dilakukan oleh Dr. W. H. Bowen dari Institut Kesehatan Nasional dan Dr. J. Yudhen, Profesor Nutrisi dan Diet di Universitas London. Dalam suatu sampel acak 20 porsi yang sama Alpha-Bits (sejenis sereal) rata-rata kadar gulanya 11,3 gr dengan simpangan baku 2,45 gr. Bila dimisalkan bahwa kadar gula berdistribusi normal, selang kepercayaan 95% untuk rataan kadar gula berdistribusi normal adalah....

A. $9,45 < \mu < 11,95$

B. $10,00 < \mu < 12,45$

C. $10,15 < \mu < 12,45$

D. $10,45 < \mu < 13,00$

7) Sebuah mesin menghasilkan potongan logam yang berbentuk silinder. Sampai beberapa potongan diukur dan ternyata diameternya 1,01; 0,97; 1,03; 1,04; 0,99; 0,98; 0,99; 1,01; dan 1,03 cm. Selang kepercayaan 99% untuk rataan diameter potong yang dihasilkan mesin tersebut bila dimisalkan distribusinya hampir normal adalah....

A. $0,978 < \mu < 1,003$

B. $0,978 < \mu < 1,033$

C. $0,989 < \mu < 1,044$

D. $0,999 < \mu < 1,055$

8) Sampel acak 8 batang rokok merek tertentu mempunyai kadar nikotin rata-rata 2,6 mg dengan simpangan baku 0,9 mg. Selang kepercayaan 99% untuk kadar nikotin rata-rata sesungguhnya rokok merek tersebut, jika anggap distribusinya hampir normal adalah....

A. $1,49 < \mu < 3,71$

B. $1,52 < \mu < 3,82$

C. $1,57 < \mu < 3,88$

D. $1,58 < \mu < 3,89$

9) Sampel acak 12 paku penjepit gunting besar diambil untuk meneliti kekerasan Rockwell kepala paku tersebut. Kekerasan Rockwell kedua belas kepala paku diukur dan pengukuran menghasilkan nilai rata-rata 48,50 dengan simpangan baku sampel 1,5. Bila dimisalkan pengukuran berdistribusi normal, selang kepercayaan 90% untuk rataan kekerasan Rockwell adalah....
   A. $42,722 < \mu < 44,278$
   B. $47,722 < \mu < 49,278$
   C. $48,722 < \mu < 50,278$
   D. $49,722 < \mu < 51,278$

10) Sampel acak 12 lulusan suatu sekolah sekretaris mengetik rata-rata 79,3 kata per menit dengan simpangan baku 7,8 kata per menit. Anggap jumlah kata yang diketik per menit berdistribusi normal, selang kepercayaan 95% untuk rata-rata jumlah kata yang diketik per menit oleh semua lulusan sekolah adalah....
   A. $68,99 < \mu < 80,26$
   B. $70,11 < \mu < 81,26$
   C. $71,33 < \mu < 83,26$
   D. $74,34 < \mu < 84,26$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
$< 70\%$ = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Pendugaan Titik dan Selang: Proporsi

Selain rata-rata, parameter lainnya yang juga sangat penting untuk menggambarkan populasi dan sering dijumpai kasusnya dalam bidang-bidang terapan adalah proporsi. Pendugaan titik bagi proporsi mengikuti kejadian distribusi Binomial yang identik dengan kejadian sukses dan gagal. Distribusi Binomial memiliki parameter p yang menyatakan peluang kejadian sukses. Dalam pembahasan kali ini, peluang tersebut dinamakan proporsi. Pendugaan titik proporsi adalah:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}.$$

Dimana x adalah jumlah kejadian sukses yang diinginkan pada sampel dan n adalah jumlah sampel. Nilai proporsi berkisar antara 0 dan 1.

Dengan cara yang sama seperti pada pendugaan rata-rata μ, maka perhitungan pendugaan selang proporsi p adalah sebagai berikut:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leq z_{\alpha/2}) = (1-\alpha)100\%$$

$$P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (1-\alpha)100\%.$$

Sehingga didapatkan penduga selang:

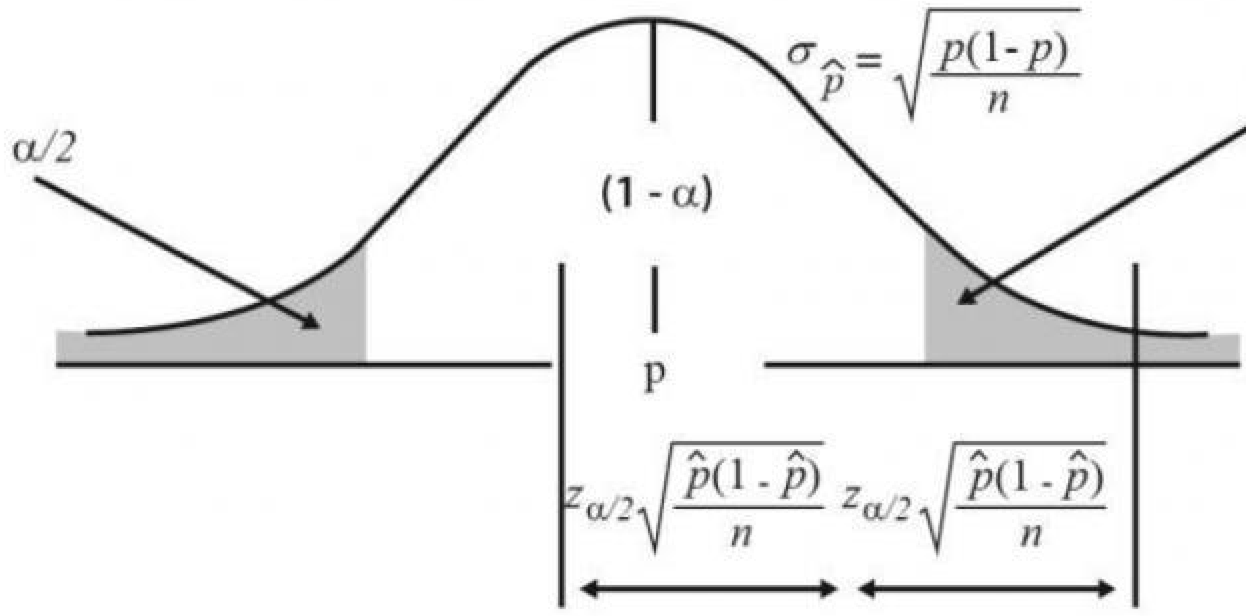
$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Margin *error*-nya adalah $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Jika $\hat{p}$ adalah proporsi kejadian sukses dari sampel acak n dan $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, maka penduga selang $(1-\alpha)100\%$ untuk p sebagai parameter distribusi Binomial adalah:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Dimana $z_{\alpha/2}$ adalah nilai peluang atau luasan pada kurva normal α/2.



Gambar 7.6
Penduga Selang Proporsi pada Distribusi Normal Standard

Contoh 7.6.
Seperti pada *Contoh 7.5,* hitunglah penduga titik dan selang untuk proporsi berat badan ayam yang lebih dari 2,4 kg. Jumlah sampel telah diketahui yaitu $n = 10$. Gunakan $\alpha = 5\%$.

Jawab:
1. Terdapat 6 ayam yang memiliki berat badan lebih dari 2,4 kg, sehingga penduga titiknya adalah:

   $$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

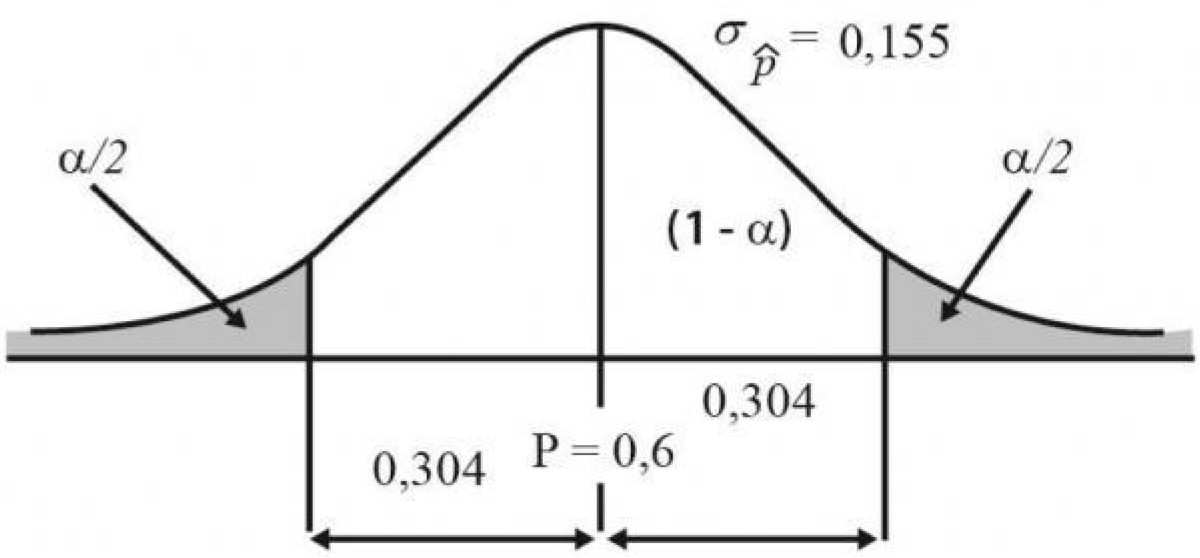
2. Penduga selang:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.6 - 1,96\sqrt{\frac{(0,6)(0,4)}{10}} \le p \le 0,6 - 1,96\sqrt{\frac{(0,6)(0,4)}{10}}$$

$$0,296 \le p \le 0,904.$$

Batas bawah dan batas atas tersebut menunjukkan bahwa proporsi ayam yang memiliki berat badan lebih dari 2,4 kg adalah antara 0,296 dan 0,904. Dengan kata lain, terdapat sejumlah 29,6% hingga 90,4% ayam memiliki berat badan lebih dari 2,4 kg. Ilustrasinya disajikan pada Gambar 7.7.



Gambar 7.7
Penduga selang bagi Proporsi Data Berat-Badan Ayam

Dalam pendugaan parameter sesungguhnya kita tidak mengetahui dimana letak parameter tersebut. Bila proporsi populasi *p*, berada tepat di tengah selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ maka $\hat{p}$ menduga *p* tanpa *error*. Tapi, yang sering dijumpai adalah kondisi dimana $\hat{p}$ tidak akan tepat sama dengan *p* dan dugaan titik meleset (mempunyai *error*). Nah, besarnya *error* ini sama dengan selisih positif antara $\hat{p}$ dan *p*, dan dengan kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ selisih ini akan lebih kecil dari $z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$.

Bila $\hat{p}$ dipakai sebagai penduga *p*, galatnya akan lebih kecil daripada $z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$ dengan kepercayaan $(1-\alpha)100\%$.

Kemudian, hal yang menarik untuk dikaji adalah penentuan ukuran sampel yang baik untuk menduga proporsi populasi ini. Terkait dengan kondisi di atas, berapa besarkah sampel yang diperlukan agar terjamin bahwa galat dalam menduga p tidak melebihi suatu besaran tertentu g. Menurut formula di atas, ini berarti n harus dipilih agar $z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} = g$.

Bila $\hat{p}$ dipakai sebagai taksiran p, maka dengan kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ galat akan lebih kecil dari besaran tertentu g *bila* ukuran sampel sebesar $n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2\hat{p}\hat{q}}{g^2}$.

Namun, formula tersebut agak membingungkan karena untuk menentukan ukuran sampel n digunakan $\hat{p}$, padahal $\hat{p}$ dihitung dari sampel. Bila p dapat diduga secara kasar tanpa mengambil sampel maka dugaan ini dapat dipakai untuk menentukan n. Bila ini tidak tersedia atau tidak dapat dilakukan, maka ambil sampel pendahuluan berukuran $n \geq 30$ untuk menduga p. Kemudian, dengan menggunakan formula $n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2\hat{p}\hat{q}}{g^2}$, dapat ditentukan perkiraan besarnya sampel yang diperlukan agar derajat ketepatan yang diinginkan tercapai. Sekali lagi, semua nilai pecahan n agar dibulatkan ke bilangan bulat yang lebih besar terdekat. Untuk lebih memahami konsep ini, pelajari soal-soal latihan.

Saudara, terkadang tidak praktis mencari dugaan p untuk digunakan dalam menentukan ukuran sampel n pada suatu taraf kepercayaan tertentu. Bila ini terjadi, batas atas untuk n dapat diperoleh dengan menyadari bahwa $\hat{p}\hat{q} = \hat{p}(1-\hat{p}) \leq 1/4$, karena $\hat{p}$ terletak antara 0 dan 1. Ini dapat dibuktikan dengan melengkapi bentuk kuadrat. Jadi,

$$\begin{aligned}\hat{p}(1-\hat{p}) &= -\left(\hat{p}^2-\hat{p}\right) = \frac{1}{4} - \left(\hat{p}^2 - \hat{p} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Yang selalu lebih kecil dari ¼ kecuali bila $p = 1/2$ yang mengakibatkan $\hat{p}\hat{q} = 1/4$. Jadi, bila dimasukkan $\hat{p} = 1/2$ pada rumus $n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2\hat{p}\hat{q}}{g^2}$. Padahal, sesungguhnya, p cukup berbeda dengan ½, maka tentunya n akan melebihi dari yang diperlukan untuk taraf kepercayaan yang ditetapkan dan sebagai akibatnya taraf kepercayaan yang diperoleh akan meningkat (Walpole, 1995). Untuk memahami lebih dalam, pelajari soal-soal latihan.

Bila $\hat{p}$ dipakai sebagai penduga p, maka dengan kepercayaan paling sedikit $(1-\alpha)100\%$ error akan lebih kecil dari besaran tertentu g bila ukuran sampel:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4g^2}.$$

Ilustrasi mengenai kedua formula ini ada di soal latihan. Dari Latihan No 2 dan Latihan No 3, terlihat bahwa dugaan mengenai p, yang diperoleh dari sampel pendahuluan atau pun mungkin dari pengalaman masa silam, dapat dipakai untuk menarik sampel yang lebih kecil dengan tetap mempertahankan taraf ketelitian semula.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Pada suatu sampel acak $n = 500$ keluarga yang memiliki pesawat televisi di kota Hamilton, Kanada, ditemukan bahwa $x = 340$ memiliki TV berwarna. Carilah selang kepercayaan 95% untuk proporsi sesungguhnya dari keluarga yang memiliki TV berwarna di kota tersebut.
2) Berapa besarkah diperlukan sampel pada soal no. 1 agar dugaan p meleset kurang dari 0,02 dengan kepercayaan 95%?
3) Berapa besarkah sampel yang diperlukan pada soal no. 1 agar kita yakin paling sedikit 95% bahwa nilai dugaan p yang dihasilkan berada dalam jarak sebesar-besarnya 0,02?
4) Manajer marketing hendak menyelidiki produk minuman apa yang paling diminati konsumen. Jumlah konsumen pada tahun 2011 adalah sekitar 1 juta. Kedua jenis produk di antaranya minuman rasa lemon dan

stroberi. Hasil riset pasar terhadap 250 responden menghasilkan data bahwa 145 di antaranya menyukai rasa stroberi dan sisanya menyukai rasa lemon. Berapa persen dugaan konsumen yang menyukai rasa lemon? Gunakan α=20%!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Penduga titik untuk p ialah $\hat{p} = \frac{340}{500} = 0,68$. Dari tabel normal baku diperoleh $z_{0,025} = 1,96$. Jadi, selang kepercayaan 95% untuk p adalah:

$$0,68 - 1,96\sqrt{\frac{(0,68)(0,32)}{500}} < p < 0,68 + 1,96\sqrt{\frac{(0,68)(0,32)}{500}}$$

Yang, bila disederhanakan akan menjadi:

$$0,64 < p < 0,72.$$

Bila p berada tepat di tengah selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ maka $\hat{p},$ menaksir p tanpa galat. Tapi, biasanya, $\hat{p}$ tidak akan tepat sama dengan p dan taksiran titik meleset (mempunyai galat). Besarnya galat sama dengan selisih positif antara $\hat{p}$ dan p, dan dengan kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ selisih ini akan lebih kecil dari $z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}.$

2) Anggaplah ke-500 keluarga sebagai sampel pendahuluan yang memberikan dugaan $\hat{p} = 0,68.$ Maka, ukuran sampel yang diperlukan adalah:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{g^2} = \frac{(1,96)^2 (0,68)(0,32)}{(0,02)^2} = 2.090.$$

Jadi, bila dugaan p didasarkan atas sampel acak ukuran 2.090 maka proporsi sampel tidak akan berbeda lebih dari 0,02 dengan proporsi sesungguhnya, dengan kepercayaan 95%.

3) Dengan kepercayaan paling sedikit 95% proporsi sampel yang kita peroleh tidak akan berbeda dari proporsi sesungguhnya melebihi 0,02 bila kita memilih ukuran sampel:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4g^2} = \frac{(1,96)^2}{4(0,02)^2} = 2.401.$$

4) Diketahui:
$n = 250$
$x = 145$ (yang menyukai rasa stroberi).
a. Dugaan proporsi orang yang menyukai rasa stroberi:
$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{145}{250} = 0,58.$$
b. Dugaan proporsi orang yang menyukai rasa lemon:
$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,58 = 0,42.$
Jadi, orang yang menyukai rasa lemon = 42%.
Selang kepercayaan bagi rata-rata orang yang menyukai rasa lemon.
$$\hat{q} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
$$0,42 \pm Z_{0,025} \sqrt{\frac{(0,58)(0,42)}{250}}$$
$$0,42 \pm (1,96)(0,0098).$$

RANGKUMAN

Dugaan titik proporsi p adalah:
$$\hat{p} = \frac{x}{n}.$$
Dugaan selang bagi proposi p:
$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Penduga selang proporsi dengan $n \geq 30$ dapat didekati dengan distribusi ....
   A. Weibull
   B. normal
   C. eksponensial
   D. log normal

2) Sejumlah data *sulfuric acid* adalah sebagai berikut 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10; 10,2; dan 9,6 liter. Penduga titik proporsi *sulfuric acid* yang lebih dari 10 adalah....
   A. 3/10
   B. 3/7
   C. 3
   D. 4/10

3) Dengan mengasumsikan data pada no. 2 mengikuti distribusi normal, 95% penduga selang proporsi tersebut adalah....
   A. antara 0,12 dan 0,74
   B. antara 3 dan 10
   C. antara 3 dan 7
   D. antara 0,12 dan 0,8

4) Suatu sampel acak 200 pemilih diambil dan ternyata 114 dari padanya mendukung calon A. Selang kepercayaan 96% untuk proporsi populasi pemilih yang mendukung calon A adalah....
   A. $0,298 < p < 0,442$
   B. $0,398 < p < 0,542$
   C. $0,498 < p < 0,642$
   D. $0,598 < p < 0,742$

5) Apa yang dapat dikatakan mengenai kemungkinan besarnya galat dengan kepercayaan 96% bila taksiran proporsi pemilih yang mendukung calon A diambil 0,57?
   A. Galat/*error* $\leq 0,072$
   B. Galat/*error* $\leq 0,074$

C. Galat/*error* $\leq 0,075$
D Galat/*error* $\leq 0,077$

6) Suatu sampel acak 500 perokok diambil dan 86 daripadanya ternyata lebih menyukai merek X. Selang kepercayaan 90% untuk proporsi populasi perokok yang lebih menyukai merek X adalah....
A. $0,1442 < p < 0,1998$
B. $0,1552 < p < 0,2010$
C. $0,1662 < p < 0,2310$
D. $0,1772 < p < 0,2020$

7) Apa yang dapat dikatakan mengenai kemungkinan besarnya galat/*error* dengan kepercayaan 90% bila taksiran proporsi perokok yang lebih menyukai merek X diambil 0,172?
A. Galat/*error* $\leq$ 0,0178
B. Galat/*error* $\leq$ 0,0278
C. Galat/*error* $\leq$ 0,0378
D. Galat/*error* $\leq$ 0,0478

8) Dari suatu sampel acak 1000 rumah di suatu kota ternyata 228 menggunakan gas Elpiji. Selang kepercayaan 99% untuk proporsi rumah di kota tadi yang menggunakan gas Elpiji adalah....
A. $0,193 < p < 0,260$
B. $0,194 < p < 0,262$
C. $0,195 < p < 0,260$
D. $0,196 < p < 0,262$

9) Selang kepercayaan 98% untuk proporsi hasil yang cacat pada suatu proses bila ditemukan 8 yang cacat dalam sampel ukuran 100 adalah....
A. $0,014 < p < 0,139$
B. $0,015 < p < 0,140$
C. $0,016 < p < 0,141$
D. $0,017 < p < 0,143$

10) Berapakah sampel yang diperlukan pada soal 1 agar proporsi sampel berjarak paling jauh 0,02 dari proporsi sesungguhnya populasi pemilih dengan kepercayaan 96%?
A. 2.115
B. 2.576
C. 2.666
D. 2.793

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 4. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 4

Pendugaan Titik dan Selang: Varians

Selain rata-rata dan proporsi, parameter populasi lainnya yang sangat penting untuk diketahui adalah varians. Penduganya juga dapat berupa penduga titik dan penduga selang.

Untuk sampel berukuran *n*, misalnya $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka penduga titik bagi varians adalah:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Metode pendugaan selang untuk ragam sama seperti pendugaan selang rata-rata, yaitu dengan menurunkan distribusi sampling untuk s^2 sebagai penduga σ^2.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

atau

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

Jika *X* mengikuti distribusi $N(m, \sigma^2)$ maka:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

dan

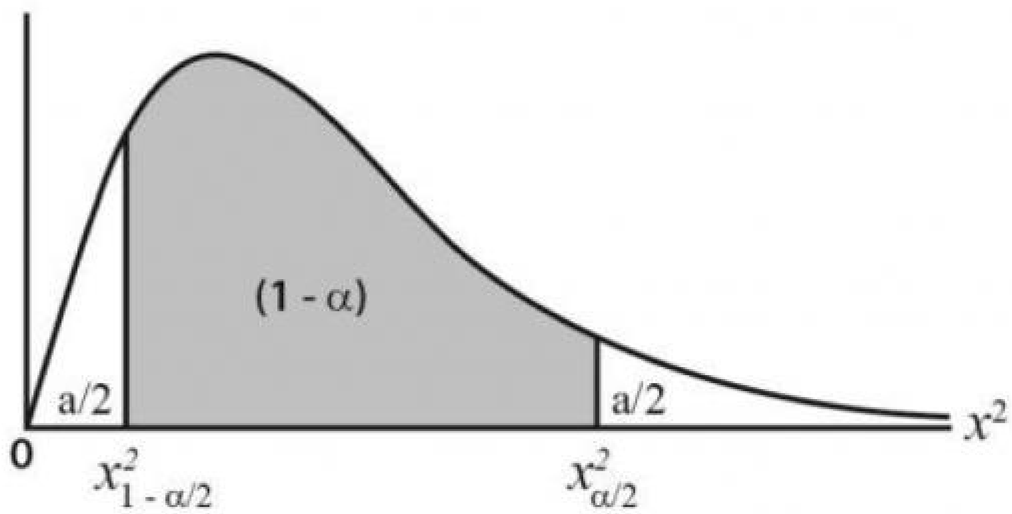
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Sehingga didapatkan:

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = (1-\alpha)100\%$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = (1-\alpha)100\%$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}.$$



Gambar 7.8
Penduga Selang varians pada Distribusi *Chi-square*

Jika s^2 adalah ragam dari sampel acak n dari populasi yang berdistribusi normal, maka penduga selang $(1-\alpha)100\%$ untuk σ^2 adalah:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}.$$

Dimana $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ dan $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ adalah nila X^2 pada tabel *Chi-square* dengan derajat bebas $n-1$.

Sementara itu penduga selang bagi simpangan baku diperoleh dengan menghitung akar pada masing-masing batas bawah dan atas penduga selang varians.

Contoh 7.7.
Hitunglah penduga titik dan selang untuk varians berat badan ayam dari data contoh 7.5. Gunakan $\alpha = 5\%$.

Jawab:
1. Penduga titik:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{\left(x_i - 2,391\right)^2}{9}$$

$$= \frac{\left(2,50 - 2,391\right)^2}{9} + \frac{\left(2,60 - 2,391\right)^2}{9} + ... + \frac{\left(2,43 - 2,391\right)^2}{9}$$

$$= 0,0228.$$

2) Penduga selang:

$$\frac{\left(n-1\right)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{\left(n-1\right)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{(9)(0,0228)}{19,023} \le \sigma^2 \le \frac{(9)(0,0228)}{2,700}$$

$$0,011 \le \sigma^2 \le 0,076.$$

Jadi penduga selang 95% untuk σ^2 adalah antara 0,011 hingga 0,076.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Dalam membuat produksi baut, seorang ahli sangat memperhitungkan presisi diameter baut. Untuk itu dilakukan pengamatan terhadap 12 buah mur yang telah dilewati pemeriksaan kualitas akhir, diperoleh data berikut.

2	2,5	2,3	2,1	1,9	1,8
2	2,4	1,7	2,2	3	2,5

a. Tentukan penduga titik untuk ragam diameter baut tersebut!
b. Tentukan 90% dugaan selang untuk ragam diameter tersebut!

2) Sejumlah 100 siswa di suatu sekolah telah mengikuti ujian akhir Matematika. Rata-rata nilai 20 mahasiswa adalah 72 dan varians adalah 16. Apabila diasumsikan nilai tersebut mengikuti distribusi normal, dapatkan 90% dugaan selang σ^2!
3) Data berikut menyatakan berat, dalam gram, 10 bungkus bibit sejenis tanaman yang dipasarkan oleh suatu perusahaan: 46,4; 46,1; 45,8; 47,0; 46,1; 45,9; 45,8; 46,9; 45,2 dan 46,0. Carilah selang kepercayaan 95% untuk varians semua bungkusan bibit yang dipasarkan perusahaan tersebut, anggap populasinya normal.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Penduga varians
   a. Penduga titik:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{12} \frac{\left(x_i - 2,2\right)^2}{11} \\
&= 0,13.
\end{aligned}
$$

   b. Penduga selang kepercayaan 90%:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{(11)(0,13)}{19,675} \le \sigma^2 \le \frac{(11)(0,13)}{4,575}$$

$$0,0726 \le \sigma^2 \le 0,0,313.$$

2) Diketahui:
$N = 100, n = 20, \overline{x} = 72, s^2 = 16$, derajat bebas = 19
Selang kepercayaan 90% bagi σ^2 :
$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$
$$\frac{(19)(16)}{30,144} \le \sigma^2 \le \frac{(19)(16)}{10,117}$$
$$10,085 \le \sigma^2 \le 30,048.$$

3) Mula-mula hitunglah:
$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\chi_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{(10)(21.273,12)-(461,2)^2}{(10)(9)} = 0,286.$$
Untuk mendapatkan selang kepercayaan 95%, ambil $\alpha = 0,05$. Dari tabel *Chi-square* untuk derajat bebas $v = 9$ diperoleh $\chi^2_{0,025} = 19,023$ dan $\chi^2_{0,975} = 2,700$.
Jadi, selang kepercayaan 95% untuk σ^2 :
$$\frac{(9)(0,286)}{19,023} < \sigma^2 < \frac{(9)(0,286)}{2,700}$$
atau
$$0,135 < \sigma^2 < 0,953.$$

RANGKUMAN

Dugaan titik ragam σ^2 adalah:
$$s^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}.$$

Dugaan selang bagi ragam σ^2 :
$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}.$$

TES FORMATIF 4

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Penduga selang ragam dapat didekati dengan distribusi ....
   A. *Chi-square*
   B. normal
   C. eksponensial
   D. log normal

2) Sejumlah data *sulfuric acid* adalah sebagai berikut 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10; 10,2 dan 9.6 liter. Penduga titik untuk varians *sulfuric acid* adalah ....
   A. 0,080
   B. 0,800
   C. 0.283
   D. 0,008

3) Lihat soal no. 2. 90% penduga selang bagi varians adalah....
   A. antara 0,294 dan 4,890
   B. antara 0,038 dan 0,294
   C. antara 0,214 dan 0,294
   D. antara 0,214 dan 0,332

4) Suatu perusahaan baterai mobil menyatakan bahwa baterainya tahan, pada rata-ratanya, 3 tahun dengan variasi 1 tahun. Bila 5 dari baterai ini tahan selama 1,9; 2,4; 3,0; 3,5 dan 4,2 tahun, selang kepercayaan 95% untuk σ^2 dan apakah pernyataan perusahaan tadi bahwa σ^2 = 1 dapat dibenarkan? Anggap umur populasi baterai berdistribusi hampiran normal.
   A. $0,193 < \sigma^2 < 6,260$; *ya*
   B. $0,233 < \sigma^2 < 6,262$; *ya*
   C. $0,253 < \sigma^2 < 6,260$; *ya*
   D. $0,293 < \sigma^2 < 6,736$; *ya*

5) Dari sampel acak 20 siswa diperoleh nilai UMPTN dengan nilai tengah $\overline{x} = 5$ dan varians $s^2 = 16$. Anggap nilai UMPTN berdistribusi normal, selang kepercayaan 98% untuk σ^2 adalah....
   A. $1.800 < \sigma^2 < 38,827$
   B. $5.400 < \sigma^2 < 38,827$

C. $8.400 < \sigma^2 < 39,827$

D. $8.500 < \sigma^2 < 40,827$

6) Sarapan teratur sereal yang diberi pemanis sebelumnya menyebabkan kerusakan gigi, sakit jantung, dan penyakit lainnya menurut penelitian yang dilakukan oleh Dr. W. H. Bowen dari Institut Kesehatan Nasional dan Dr. J. Yudhen, Profesor Nutrisi dan Diet di Universitas London. Dalam suatu sampel acak 20 porsi yang sama Alpha-Bits (sejenis sereal) rata-rata kadar gulanya 11,3 gr dengan simpangan baku 2,45 gr. Bila dimisalkan bahwa kadar gula berdistribusi normal, selang kepercayaan 95% untuk σ adalah ....
   A. $1,863 < \sigma < 3,578$
   B. $1,963 < \sigma < 1,578$
   C. $1,973 < \sigma < 2,578$
   D. $1,983 < \sigma < 3,578$

7) Sebuah mesin menghasilkan potongan logam yang berbentuk silinder. Sampai beberapa potongan diukur dan ternyata diameternya 1,01; 0,97; 1,03; 1,04; 0,99; 0,98; 0,99; 1,01 dan 1,03 cm. Selang kepercayaan 99% untuk varians diameter potong yang dihasilkan mesin tersebut bila dimisalkan distribusinya hampir normal adalah....
   A. $0,00018 < \sigma^2 < 0,00107$
   B. $0,00019 < \sigma^2 < 0,00117$
   C. $0,00020 < \sigma^2 < 0,00337$
   D. $0,00022 < \sigma^2 < 0,00357$

8) Sampel acak 8 batang rokok merek tertentu mempunyai kadar nikotin rata-rata 2,6 mg dengan simpangan baku 0,9 mg. Selang kepercayaan 99% untuk simpangan baku kadar nikotin sesungguhnya rokok merek tersebut, anggap distribusinya hampir normal adalah....
   A. $1,380 < \sigma < 6,827$
   B. $1,410 < \sigma < 6,385$
   C. $1,390 < \sigma < 6,985$
   D. $1,410 < \sigma < 6,830$

9) Sampel acak 12 paku penjepit gunting besar diambil untuk meneliti kekerasan Rockwell kepala paku tersebut. Kekerasan Rockwell keduabelas kepala paku diukur dan pengukuran menghasilkan nilai rata-rata 48,50 dengan simpangan baku sampel 1,5. Bila dimisalkan pengukuran berdistribusi normal, selang kepercayaan 90% untuk σ^2 adalah ....
   A. $1,258 < \sigma^2 < 5,410$
   B. $2,258 < \sigma^2 < 5,510$
   C. $3,258 < \sigma^2 < 5,610$
   D. $4,258 < \sigma^2 < 5,670$

10) Manakah di antara pernyataan berikut yang benar?
   A. Penduga titik dan penduga selang adalah saling melengkapi.
   B. Penduga titik saja sudah cukup, tidak perlu penduga selang
   C. Penduga selang lebih baik dari pada penduga titik
   D. Pernyataan A, B, dan C semuanya salah.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 4.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 4, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1
1) B
2) A
3) C
4) B
5) B
6) C
7) D
8) C
9) C
10) D

Tes Formatif 2
1) B
2) C
3) C
4) A
5) A
6) C
7) B
8) A
9) B
10) D

Tes Formatif 3
1) B
2) B
3) A
4) C
5) A
6) A
7) B
8) B
9) D
10) B

Tes Formatif 4
1) B
2) A
3) B
4) D
5) C
6) B
7) D
8) D
9) A
10) A

Daftar Pustaka

Agresti, A. & Finlay, B. 1997. *Statistical Methods for the Social Sciences*. 3th Edition. Prentice Hall.

Anderson R.A, D.J Sweeney, T.A Williams. 2011. *Statistics for Business and Economics*. [S.N]. United States. ISBN: 13-978-0-538-47188-6.

Bhattacharyya, G.K., and R.A. Johnson. 1997. *Statistical Concepts and Methods*. John Wiley & Sons. New York.

Freund, J.E. 2001. *Modern Elementary Statistics*. Prentice-Hall.

Hahn, G.J. and Meeker, W.Q. 1991. *Statistical Intervals: A Guide for Practitioners*. John Wilwy & Sons. New York.

Mattjik, A.A. & Sumertajaya, I.M. 2013. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab*. IPB Press. Bogor.

Moore, D. & McCabe G. 1998. *Introduction to the Practice of Statistics*. 3th Edition. Freeman.

Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers Sharon L. Myers Keying Ye, Sharon L. Myers, Keying Ye,. 2007. *Probability and statistics for engineers and scientists. 8th edition*. Pearson Prentice Hall. New Jersey. ISBN: 978-0-13-204767-8.

Rosenkrantz, W. A. 1997. *Introduction to Probaility and Statistict for Scientist and Engineers*. McGraw-Hill Internat.

Walpole, R.E. 1995. *Pengantar Statistika*. Terjemahan Edisi Ketiga. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.