MODUL 4

Distribusi Normal Multivariat

Prof. Dr. Sri Haryatmi Kartiko, M.Sc.

PENDAHULUAN

Setelah Anda mempelajari vektor random dalam modul sebelumnya yang juga telah Anda jumpai dalam materi pokok Pengantar Probabilitas maka dalam modul ini Anda siap mempelajari distribusi normal multivariat. Dalam hal ini densitas normal univariat memegang peranan penting, karena densitas normal multivariat dapat dipandang sebagai perluasan darinya. Seperti telah diketahui meskipun data hampir tidak pernah tepat berdistribusi normal, densitas normal sering merupakan pendekatan yang bermanfaat untuk distribusi populasi. Juga didukung oleh teorema limit pusat yang sangat terkenal, yaitu bahwa suatu kuantitas pivotal yang memuat rata-rata sampel akan berdistribusi normal untuk n besar menyebabkan distribusi normal menjadi lebih terkenal.

Karena dalam praktek sering dijumpai data yang terdiri atas lebih dari satu variabel maka dibicarakan distribusi normal multivariat yang telah berkembang pesat dan besar manfaatnya untuk para pengguna statistika. Akan Anda jumpai dalam Kegiatan Belajar 1, yaitu densitas normal multivariat lengkap dengan sifat-sifatnya yang harus Anda pahami betul-betul karena merupakan dasar dari pembahasan tentang densitas normal multivariat bersyarat yang ditulis dalam Kegiatan Belajar 2.

Secara umum setelah selesai mempelajari modul ini, Anda diharapkan dapat menjelaskan distribusi normal multivariat dan sifat-sifatnya. Secara khusus setelah selesai mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

1. menuliskan distribusi normal multivariat;
2. menulis dan menggunakan fingsi pembangkit momen distribusi normal multivariat;
3. menulis dan menggambarkan kontur probabilitas konstan;
4. mencari distribusi kombinasi linear variabel random;
5. menuliskan distribusi normal multivariat bersyarat; dan
6. menentukan independen atau tidaknya 2 variabel random.

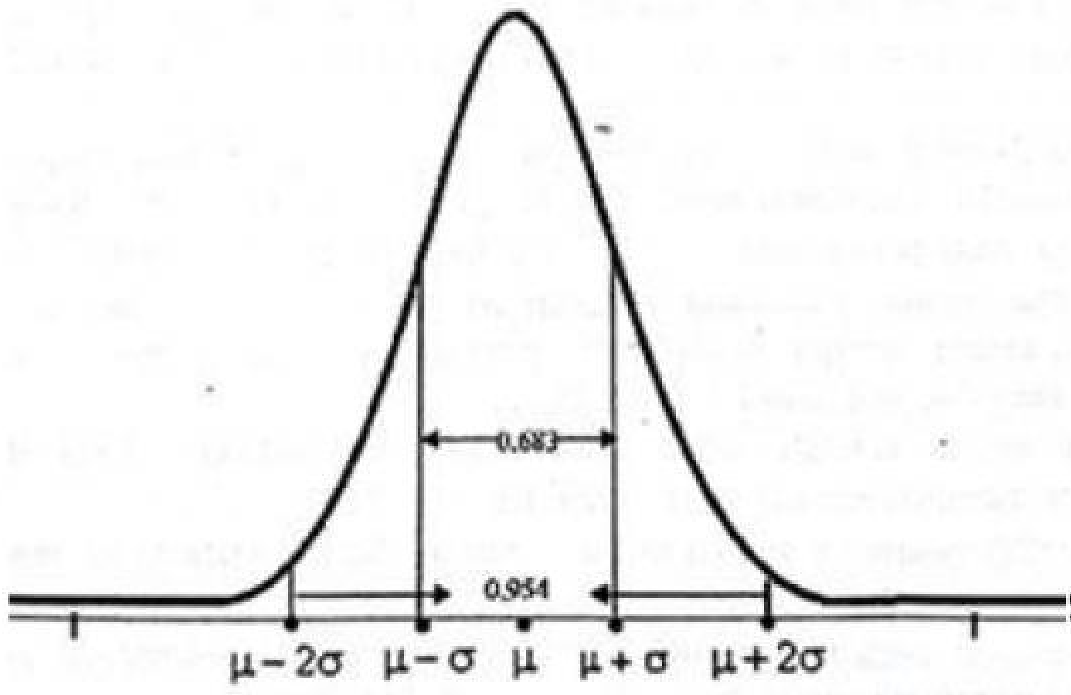
KEGIATAN BELAJAR 1

Densitas Normal Multivariat

Sebaiknya Anda ingat lebih dahulu bahwa distribusi normal univariat dengan mean μ dan variansi σ mempunyai fungsi densitas probabilitas.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 ; \infty \leq x \leq \infty \tag{4.1}$$

Plot dari fungsi densitas probabilitas tersebut di atas mempunyai bentuk lonceng, seperti tampak pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1

Seperti tampak pada gambar di atas

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = 0,68$$
$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) = 0,95$$

Fungsi distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 ditulis dengan notasi $N(\mu,\sigma)$.

Notasi distribusi normal univariat ini akan diperluas untuk kasus multivariat.

Kuantitas

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$$

diperluas untuk vektor $\underset{\sim}{x}$ dengan dimensi p menjadi

$$(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})$$

dimana

$$\underset{\sim}{\mu} = E(\underset{\sim}{X})$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = Kov(\underset{\sim}{X})$$

dengan $\underset{\sim}{\Sigma}$ definit positif.

Supaya volume di bawah luasan

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right)$$

sama dengan 1 maka deperlukan konstanta

$$2\pi^{-\frac{p}{2}}\left|\underset{\sim}{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

Dengan demikian densitas normal multivariat p dimensi untuk vektor random

$$\underset{\sim}{X} = \left[X_1, \ldots, X_p\right]'$$

mempunyai bentuk

$$f(x) = 2^{-1}\pi^{-\frac{p}{2}}\left|\underset{\sim}{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right); -\infty \le x_i \le \infty, i = 1, 2, \ldots, p$$

yang kemudian diberi notasi

$$N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma}).$$

Contoh 4.1

Distribusi normal 2 variat dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

di mana

$\mu_1 = E(X_1)$

$\mu_2 = E(X_2)$

$\sigma_{11} = Var(X_1)$

$\sigma_{22} = Var(X_2)$

$\sigma_{21} = \sigma_{12} = Kov(X_1, X_2)$

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

Dengan menuliskan $\sigma_{12} = \rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}$

didapat $\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}\left(1-\rho_{12}^2\right)$ dan $(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})$

$$= (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2)\frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}\left(1-\rho_{12}^2\right)}\begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \\ -\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{12}} & \sigma_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_{22}(x_1 - \mu_1)^2 + \sigma_{11}(x_2 - \mu_2)^2 - 2\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{12}}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}\left(1-\rho_{12}^2\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]$$

Dengan mengingat $|\underset{\sim}{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}\left(1-\rho_{12}^2\right)$.

Jadi, $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ mempunyai densitas

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})\right) \text{ atau}$$

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}\left(1-\rho_{12}^2\right)}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-\rho_{12}^2\right)}\left[\left\{\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2 \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -2\rho_{12}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right\}\right]\right]$$

Dari kedua bentuk densitas variabel random X di atas, bentuk pertama lebih banyak digunakan. Dari bentuk ini untuk densitas normal p variat, path dari X dengan tinggi konstan adalah merupakan *ellipsoida.* Dengan perkataan lain densitas normal multivariat konstan pada luasan dengan jarak $(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})$ konstan. Path ini juga disebut kontur.

Kontur densitas konstan

$$=\left\{\underset{\sim}{x}\middle|(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})=c^2\right\}$$

= *luasan semua ellipsoida dengan pusat* $\underset{\sim}{\mu}$

Sedangkan sumbu elipsoida searah dengan eigen-vektor $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$, dengan panjang sebanding dengan kebalikan jarak akar eigen-value $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$. Perhitungan menggunakan $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$ dapat dihindari mengingat eigen-value dan eigen-vektor dari $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$ tertentu bila eigen-value dan eigen-vektor $\underset{\sim}{\Sigma}$ tertentu.

Teorema 4.1

Bila $\underset{\sim}{\Sigma}$ definit positif sehingga $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$ ada maka $\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e}=\lambda\underset{\sim}{e}$ berarti $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{e}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)\underset{\sim}{e}$ dan $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$ definit positif.

Bukti

Karena $\underset{\sim}{\Sigma}$ definit positif akibatnya vektor eigen $\underset{\sim}{e}\neq 0$ sehingga:

$$0<\underset{\sim}{e}'(\underset{\sim}{\Sigma})\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{e}'(\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e})=\underset{\sim}{e}'(\lambda\underset{\sim}{e})=\lambda\underset{\sim}{e}\underset{\sim}{e}'=\lambda$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{e}&=\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e})\\&=\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\lambda\underset{\sim}{e})\\&=\lambda\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{e}\end{aligned}$$

atau

$$\frac{1}{\lambda}\underset{\sim}{e}=\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{e}$$

Yang berarti bahwa $\left(\frac{1}{\lambda},\underset{\sim}{e}\right)$ adalah eigen value dan eigen vektor dari $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$.

Kemudian untuk sembarang $\underset{p\times 1}{X}$

$$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i}\underset{\sim}{e}_i\underset{\sim}{e}_i'\right)\underset{\sim}{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_i}\left(\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{e}_i\right)^2\right) \geq 0$$

$\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{e}_i' = 0$ untuk setiap i hanya bila $\underset{\sim}{x} = 0$ yang berarti untuk $\underset{\sim}{x} \neq 0$ mengakibatkan

$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_i}\left(\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{e}_i\right)^2\right) > 0$ atau $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}$ definit positif.

Kontur densitas konstan untuk distribusi normal p variat adalah ellipsoida

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = c^2$$

Ellipsoida ini berpusat di $\underset{\sim}{\mu}$ dengan sumbu $\pm c\sqrt{\lambda_i \underset{\sim}{e}_i}$ dan $\Sigma \underset{\sim}{e}_i = \lambda_i \underset{\sim}{e}_i, i = 1 \ldots p$.

Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

Sumbu utama ellipsoida adalah garis yang melalui dimensi tertinggi. Bila sembarang garis melalui $\underset{\sim}{\mu}$ memotong luasan ellipsoida di titik dengan koordinat x maka sumbu utamanya mempunyai koordinat yang memaksimumkan kuadrat jarak terhadap $\underset{\sim}{\mu}$ yaitu:

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})$$

dengan syarat

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = c^2$$

Dengan Lagrange multiplier λ, akan dicari x supaya

$$f(\underset{\sim}{x}) = (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) - \lambda\left[(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) - c^2\right]$$

mencapai maksimum

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial \underset{\sim}{x}} = 2(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) - 2\lambda\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = 0$$

$$(\underset{\sim}{I} - \lambda\underset{\sim}{\Sigma}^{-1})(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = 0$$

kemudian karena $\underset{\sim}{\Sigma}$ nonsingular, maka

$$(\underset{\sim}{\Sigma} - \lambda \underset{\sim}{I})(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = 0$$

Jadi, koordinat yang menentukan sumbu utama proposional dengan elemen eigen vektor $\underset{\sim}{\Sigma}$; eigen vektor yang mana $(\underset{\sim}{I} - \lambda \underset{\sim}{\Sigma}^{-1})(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = 0$ dikalikan dengan 4 $(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'$,

didapat $4(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = 4\lambda(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = 4\lambda c^2$.

Untuk suatu c tertentu panjang sumbu utama mencapai maksimum bila λ adalah eigen value terbesar dari $\underset{\sim}{\Sigma}$ (sebut λ_1). Dengan panjang sumbu utama adalah $2c\sqrt{\lambda_1}$ atau sumbu utama adalah $\pm c\sqrt{\lambda_i \underset{\sim}{e}_i}$, dengan $\underset{\sim}{e}_i$ adalah eigen vektor yang bersesuaian dengan λ_1.

Sumbu panjang yang kedua dan seterusnya didapat dengan cara yang sama. Bila eigen value berbeda, misalnya $\lambda_1 > \lambda_2 > ... \lambda_p > 0$; posisi sumbu-sumbu, tertentu secara tunggal. Karena $\lambda_i \neq \lambda_j$ berarti $\underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_j = 0$ maka sumbu ke-i dan sumbu ke-j saling tegak lurus, untuk setia i dan j. Kemudian bila ada dua eigen value yang sama maka perpotongan ellipsoida dengan bidang yang dihasilkan oleh kedua sumbu yang bersesuaian dengan kedua eigen value tersebut berbentuk lingkaran.

Perhatikan bila diambil transformasi $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{A}'(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$ dengan kolom ke i dari matriks $\underset{\sim}{A}$ adalah eigen vektor satuan $\underset{\sim}{e}_i$ maka matriks kovariansi dari $\underset{\sim}{Y}$ adalah $\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}$ (bukti diterangkan dalam Kegiatan Belajar 2 modul ini). Sedangkan variansi pada sumbu ke i dan kovariansi antara sumbu ke-i dan ke-j adalah:

$$Var(Y_i) = \underset{\sim}{e}_i'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e}_i = \lambda_i$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_i, Y_j) &= \underset{\sim}{e}_i'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e}_j; i \neq j \\ &= 0 \end{aligned}$$

FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN DISTRIBUSI NORMAL MULTIVARIAT

Teorema 4.2

Bila variabel random X berdistribusi normal multivariat dengan mean $\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$ maka

$$M_x(t) = \exp\left(t'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2} t'\underset{\sim}{\Sigma} t \right)$$

Bukti:

$$f(\underset{\sim}{x}) = 2^{-1}\pi^{-\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) \right); -\infty \le x_i \le \infty, i = 1, 2, ..., p$$

$$M_{\underset{\sim}{x}} t = E\left(\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right)\right)$$

$$= \int_R \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right) f(\underset{\sim}{x}) dx \text{ dengan} R = \left\{ x \middle| -\infty < x_i < \infty, \text{ untuk } i = 1, 2, ..., p \right\}$$

$$= \int_R \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) \right) d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_R \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} \right) d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_R \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + (\underset{\sim}{\mu}' + \underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma})\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} \right) d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_R \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + (\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} \right) d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_R \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} - \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}) + (\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{x} \right) dx$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}) \right) d\underset{\sim}{x}$$

$$= 1.\exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}) \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{t} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t} \right)$$

$$= \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t} \right).$$

Contoh 4.2

Carilah kedua sumbu kontur densitas untuk distribusi normal bivariat untuk suatu kejadian khusus yaitu $\sigma_{11} = \sigma_{22}$.

Penyelesaian:

Densitas normal bivariate dengan matriks kovariansi

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Eigen value dari matriks kovariansi didapat dari $\left|\underset{\sim}{\Sigma} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = 0$. Sehingga dapat diturunkan

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{11} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\sigma_{11} - \lambda)^2 - \sigma_{12}^2 = 0$$

$$(\lambda - \sigma_{11} - \sigma_{12})(\lambda - \sigma_{11} + \sigma_{12}) = 0$$

$$\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$$

$$\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$$

Eigen vektor $\underset{\sim}{e}_i$ ditentukan oleh:

$$\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e}_i = \lambda_i \underset{\sim}{e}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{12})e_1$$

$$\sigma_{12}e_1 + \sigma_{11}e_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{12})e_2$$

Kedua persamaan ini mengakibatkan $e_1 = e_2$, misal dengan mengambil $e_1 = 1$ didapat $e_2 = 1$. Dengan normalisasi, didapat pasangan eigen value, eigen vektor pertama

$$\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$$

$$\underset{\sim}{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Eigen vektor e_2 ditentukan oleh

$$\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e} = \lambda_2 \underset{\sim}{e}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} e_1 + \sigma_{12} e_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{12}) e_1$$
$$\sigma_{12} e_1 + \sigma_{11} e_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{12}) e_2$$

Kedua persamaan ini mengakibatkan $e_1 = -e_2$, misal dengan mengambil $e_1 = 1$ didapat $e_2 = -1$. Dengan normalisasi, didapat pasangan eigen value, eigen vektor pertama

$$\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$$
$$\underset{\sim}{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

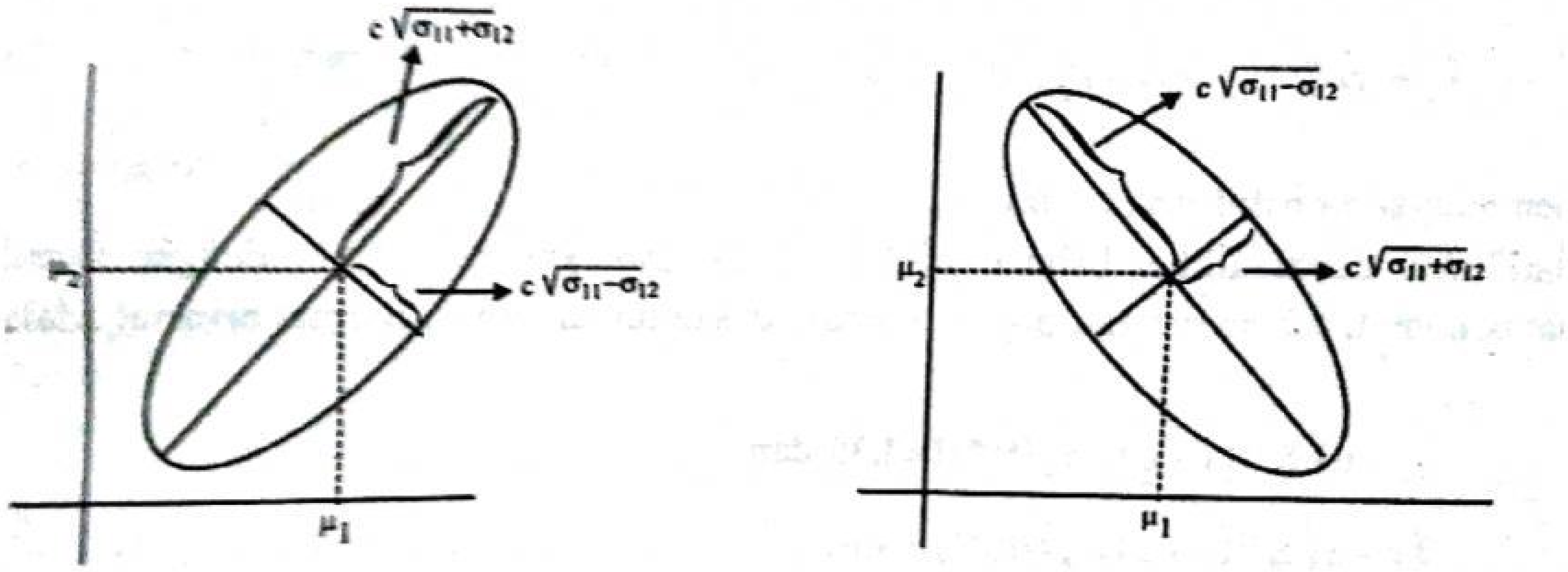
Bila kovariansi σ_{12} atau korelasi ρ_{12} berharga positip, maka $\lambda_2 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ merupakan eigen value terbesar. Eigen vektor yang bersesuaian dengannya adalah:

$$\underset{\sim}{e}_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Yang mempunyai sudut arah 45° melalui titik

$$\underset{\sim}{\mu}_1' = [\mu_1 \quad \mu_2]$$

Sumbu-sumbu elips densitas konstan diberikan oleh $\pm c\sqrt{\lambda_1 e_1}$ dan $\pm c\sqrt{\lambda_2 e_2}$ dengan masing-masing eigen vektor mempunyai panjang sumbu utama atau sumbu paling panjang bersesuaian dengan eigen value terbesar, seperti tampak dalam Gambar 4.2.



Gambar 4.2a dan 4.2b

Bila kovariansi atau korelasi negatip maka $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ merupakan eigen value terbesar, sumbu utama dari ellips densitas konstan diberikan oleh

$$\underset{\sim}{e}_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

yang mempunyai sudut arah 135° melalui titik

$$\underset{\sim}{\mu}_1' = [\mu_1 \quad \mu_2]$$

seperti tampak dalam Gambar 4.2b.

Jadi sumbu-sumbu ellips densitas konstan untuk distribusi normal bivariate dengan $\sigma_{11} = \sigma_{12}$ diberikan oleh:

$$\pm c\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{12}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ dan } \pm c\sqrt{\sigma_{11} - \sigma_{12}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Dari Teorema 4.10 dalam Kegiatan Belajar 2 modul ini didapat hasil: bahwa dengan dipilih $c^2 = \chi_p^2(\alpha)$ di mana $\chi_p^2(\alpha)$ adalah 100α persentil untuk distribusi Chi-kuadrat dengan derajat bebas p, dihasilkan kontur yang memuat $(1-\alpha)100\%$ dari data.

Dengan kata lain, daerah ellipsoida x yang memenuhi

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) \leq \chi_p^2(\alpha)$$

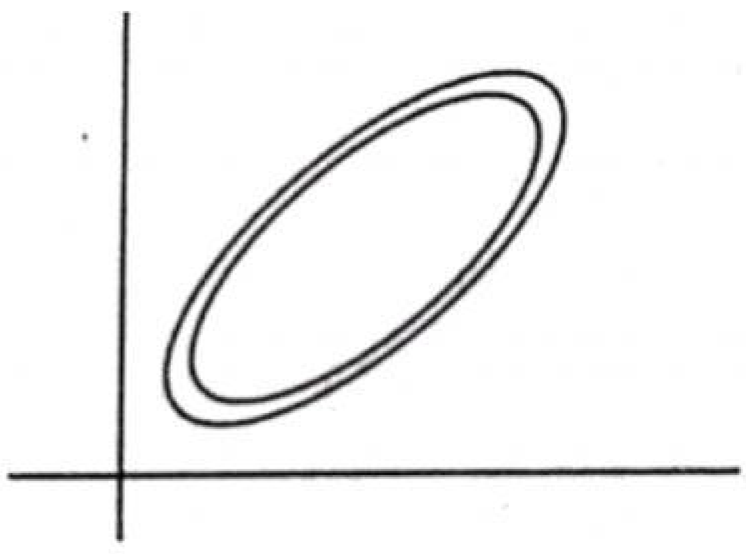
mempunyai probabilitas $(1-\alpha)$.

Dari tabel dapat dilihat bahwa $\chi_2^2(50\%) = 1,39$ dan $\chi_2^2(10\%) = 4,61$, dengan demikian untuk contoh 4.2 ini dengan $\rho_{12} > 0$ kontur 50% untuk distribusi normal bivariate adalah:

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = \chi_2^2(50\%) = 1,39 \text{ dan}$$

$$(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = \chi_2^2(10\%) = 4,61$$

seperti termuat dalam Gambar 4.3.



Gambar 4.3

Contoh 4.3

Diketahui vektor random

$\underset{\sim}{X}' = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_1)$

$\underset{\sim}{Y}' = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3]$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_2)$

$\underset{\sim}{X}$ dan $\underset{\sim}{Y}$ independen dengan

$$\underset{\sim}{\mu}_1' = [2 \quad 2 \quad 2]$$

$$\underset{\sim}{\mu}_2' = [3 \quad 4 \quad 2]$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Carilah distribusi dari $\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{Y}$. (Petunjuk: gunakan fungsi pembangkit momen).

Penyelesaian:

$$\underset{\sim}{X} \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_1)$$

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = E(\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X})) = \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}_1 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}_1\underset{\sim}{t}\right)$$

$$\underset{\sim}{Y} \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_2)$$

$$M_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{t}) = E(\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y})) = \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}_2 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}_2\underset{\sim}{t}\right)$$

Akan dicari fungsi pembangkit momen dari $\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{Y}$. Karena $\underset{\sim}{X}$ dan $\underset{\sim}{Y}$ independen maka

$$\begin{aligned}
M_{\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{Y}}(t) &= E\left(\exp\left(\underset{\sim}{t}'\left(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}\right)\right)\right)\\
&= E\left(\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right).\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{y}\right)\right)\\
&= E\left(\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{x}\right).E\left(\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{y}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}_1 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}_1\underset{\sim}{t}\right).\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu}_2 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}_2\underset{\sim}{t}\right)\\
&= \exp\left(\underset{\sim}{t}'\left(\underset{\sim}{\mu}_1+\underset{\sim}{\mu}_2\right) + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\left(\underset{\sim}{\Sigma}_1+\underset{\sim}{\Sigma}_2\right)\underset{\sim}{t}\right)
\end{aligned}$$

yang merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal multivariat dengan mean $\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$

$$\underset{\sim}{\mu} = \underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\mu}_2$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Sigma}_1 + \underset{\sim}{\Sigma}_2$$

Dalam contoh ini $\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{Y}$ berdistribusi normal 3 variat dengan mean $\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$ seperti tersebut di bawah ini.

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) $\underset{\sim}{X} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Gunakan kontur densitas konstan 50% dan 90% untuk $\underset{\sim}{X}$.

2) $\underset{\sim}{X}_3 \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_1)$ Petunjuk Jawaban Latihan

$\underset{\sim}{X}_2 \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_2), \underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ independen.

Carilah distribusi dari $\underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Hitung eigen value dan eigen vektor dari matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$. Carilah $\chi_2^2(0{,}50)$ dan $\chi_2^2(0{,}10)$.

Gambarlah kontur

a) $(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = \chi_2^2(0{,}50)$ dan

b) $(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})' \underset{\sim}{\Sigma}^{-1} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) = \chi_2^2(0{,}10)$

Kontur a) mempunyai sumbu utama

$$\pm \lambda_1 \sqrt{\chi_2^2(0{,}50)\underset{\sim}{e}_1}$$

dan sumbu kedua

$$\pm\lambda_2\sqrt{\chi_2^2(0{,}10)\underset{\sim}{e}_2}$$

Dengan λ_1 merupakan eigen value terbesar dan $\underset{\sim}{e}_1$ eigen vektor yang bersesuaian dengannya.

2) Cari fungsi pembangkit momen dari $\underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$ dengan menggunakana ketentuan bahwa $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ independen.

RANGKUMAN

1. $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ berarti $\underset{\sim}{X}$ mempunyai densitas

$$f(\underset{\sim}{x}) = 2^{-2}\pi^{-\frac{1}{2}}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})\right); -\infty \le x_i \le \infty, i = 1, 2, \ldots, p$$

Dibaca $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi normal multivariat atau p variat dengan mean $\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$.

2. Kontur densitas probabilitas konstan
   $(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) = c^2$
   Berbentuk ellipsoida dengan
   Sumbu utama $\pm\lambda_1 c\underset{\sim}{e}_1$
   Sumbu kedua $\pm\lambda_2 c\underset{\sim}{e}_2$
   Sumbu ke-p $\pm\lambda_p c\underset{\sim}{e}_p$
   dimana $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots\lambda_p$ dengan $\underset{\sim}{e}_i$ adalah eigen vektor yang bersesuaian dengan λ_i.

3. Bila $c^2 = \chi_p^2(\alpha)$ maka $(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) = c^2$ disebut kontur-densitas probabilitas konstan $(1-\alpha)100\%$

4. $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ maka

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = E(\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X})) = \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t}\right)$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) X berdistribusi $N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$, dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Eigen vektor satuan dari matriks $\underset{\sim}{\Sigma}$ adalah….

A. $\underset{\sim}{e}_1' = (1,1)$ $\quad \underset{\sim}{e}_2' = (1,-1)$

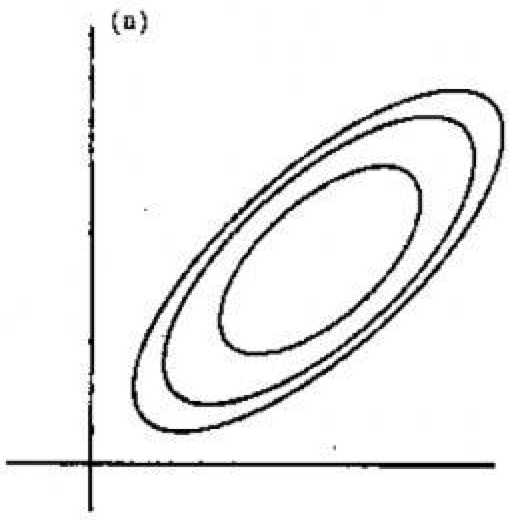
B. $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

C. $e_1' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad e_2' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

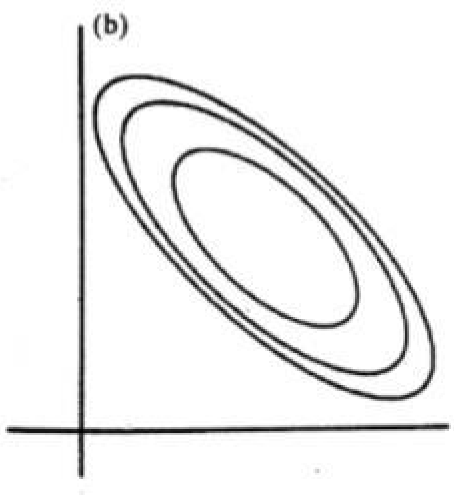
D. A, B, C, tidak benar

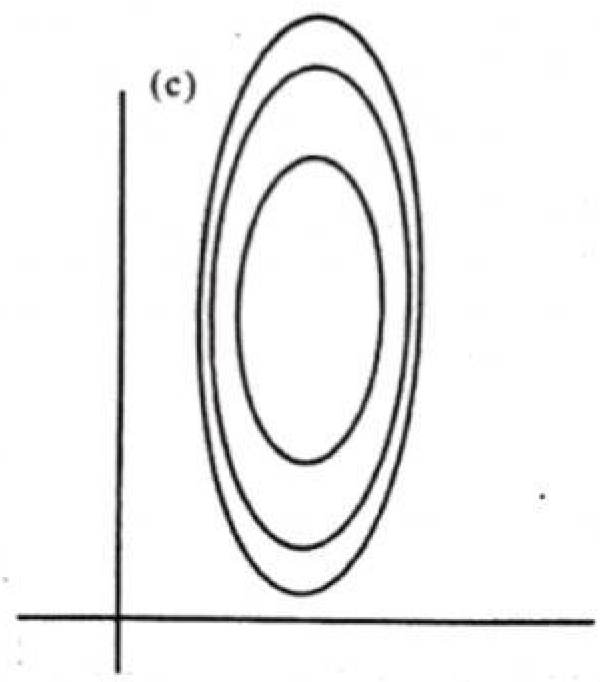
2) Dari soal 1, bila $\rho > 0$ maka kontur probabilitas konstan adalah….

A.



B.



C. 

D. A, B, C, tidak benar

3) $\underset{\sim}{X}_1 \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_1)$

$\underset{\sim}{X}_2 \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_2)$ dengan $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ independen. Distribusi dari $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ adalah ….

A. $N_6(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} \text{ dan } \underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_1 & \underset{\sim}{\Sigma}_2 \end{bmatrix}$$

B. $N_6(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} \text{ dan } \underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_1 \\ \underset{\sim}{\Sigma}_2 \end{bmatrix}$$

C. $N_6(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} \text{ dan } \underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\Sigma}_2 \end{bmatrix}$$

D. A, B, C, tidak benar

4) $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$, dengan

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sumbu utama melalui titik….
A. (1,1,1)
B. (1,2,1)
C. $\left(1, \sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
D. $\left(1, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1\right)$

5) Kontur densitas probabilitas konstan 90% dari soal no 4 mempunyai panjang sumbu utama….
A. 2
B. $3\sqrt{3}$
C. 3,85
D. A, B, C tidak benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Sifat-sifat Distribusi Normal Multivariat

Sifat-sifat tertentu dari distribusi normal multivariat akan digunakan berulang kali dalam mata kuliah Metode Statistik Multivariat. Sifat-sifat ini memudahkan manipulasi distribusi normal multivariat.

Beberapa sifat penting yang dalam kegiatan belajar ini dibicarakan secara matematis adalah:

Bila $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi normal multivariat maka:

1. Kombinasi linear dari komponen-komponen $\underset{\sim}{X}$ juga berdistribusi normal multivariat.
2. Semua himpunan bagian dari komponen-komponen $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi normal multivariat.
3. Kovariansi 0 antara komponen-komponen menyebabkan komponen-komponen yang bersangkutan independen.
4. Distribusi bersyarat dari komponen-komponen adalah normal multivariat.

Teorema 4.3

$\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ maka $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X} = a_1X_1 + \ldots + a_pX_p$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a})$.

Bukti: Karena X berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$, berarti

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\Sigma\underset{\sim}{t}\right)$$

$$\begin{aligned}
M_{\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) &= E(\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X})) \\
&= E(\exp(\underset{\sim}{t}\underset{\sim}{a})'\underset{\sim}{X}) \\
&= M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{t}) \\
&= \exp\left[(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\Sigma}(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{t})\right] \\
&= \exp\left(\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu}) + \frac{1}{2}t(\underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a})\underset{\sim}{t}\right)
\end{aligned}$$

Merupakan fungsi pembangkit momen untuk distribusi normal multivariat dengan mean $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{a}$. Jadi $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X}$ berdistribusi normal multivariat dengan mean $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{a}$.

Teorema 4.4

Jika $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$ maka $\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{d}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu}+\underset{\sim}{d},\underset{\sim}{\Sigma})$

Bukti:

Karena $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$ berarti

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}\right)$$

$$\begin{aligned}
M_{\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{d}}(\underset{\sim}{t}) &= E(\exp(\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{d}))) \\
&= E(\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X})\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{d})) \\
&= \exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{d})E(\exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{X})) \\
&= \exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{d})M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) \\
&= \exp(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{d})\exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}\right) \\
&= \exp\left(\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{\mu}+\underset{\sim}{d}) + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}\right)
\end{aligned}$$

Merupakan fungsi pembangkit momen distribusi normal multivariat p variabel dengan mean $\underset{\sim}{\mu}+\underset{\sim}{d}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$. Jadi $\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{d}$ distribusi normal multivariat dengan mean $\underset{\sim}{\mu}+\underset{\sim}{d}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}$.

Teorema 4.5

Jika $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$ maka untuk siatu matrik $\underset{\sim}{A}$ bertipe $q \times p$, $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')$.

Bukti:

Karena $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$ maka

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp\left(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{t}\right)$$

$$= E(\exp(\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X})))$$
$$= E(\exp(\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{X})$$
$$= \exp\left((\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{t})'\underset{\sim}{\mu} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{t})'\Sigma(\underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{t})\right)$$
$$= \exp\left(\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}) + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A})'\underset{\sim}{t}\right)$$
$$M_{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}}\underset{\sim}{t} = \exp\left(\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}) + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}'(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')\underset{\sim}{t}\right)$$

merupakan fungsi pembangkit momen distribusi normal multivariat p variabel dengan mean $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}$ dan matriks kovariansi $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}'$.

Teorema 4.6

Jika $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$ maka semua himpunan $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi normal. Yang berarti bila dibuat partisi untuk $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma}$ dengan

$$\underset{\sim}{X}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ (q\times 1) \\ \\ \underset{\sim}{X}_2 \\ (p-q)\times 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mu}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ (q\times 1) \\ \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \\ (p-q)\times 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \underset{(p\times q)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{11}} & \underset{q\times(p-q)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{12}} \\ \\ \underset{(p-q)\times q}{\underset{\sim}{\Sigma}_{22}} & \underset{(p-q)\times(p-q)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{22}} \end{bmatrix}$$

maka:

1. $\underset{\sim}{X}_1$ berdistribusi $N_q(\underset{\sim}{\mu}_1,\underset{\sim}{\Sigma}_{11})$
2. $\underset{\sim}{X}_2$ berdistribusi $N_{p-q}(\underset{\sim}{\mu}_2,\underset{\sim}{\Sigma}_{22})$

Bukti

1. Ambil matriks $\underset{\sim}{A}_{q\times p}$, dengan

$$\underset{\sim}{A}_{q\times p} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{I}_{q\times p} & \underset{\sim}{0}_{q\times(q-p)} \end{bmatrix}$$

lalu dengan menggunakan Teorema 4.3 didapat $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')$ yang berarti

$$\left[\underset{\sim}{I} \;\vdots\; \underset{\sim}{0}\right]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$$

berdistribusi normal q variat dengan mean

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu} = \left[\underset{\sim}{I} \quad \underset{\sim}{0}\right]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}_1$$

2. Dengan cara yang sama, diambil matriks $A_{(p-q)\times p}$, dengan

$$\underset{\sim}{A}_{q\times p} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0}_{(p-q)\times p} & \underset{\sim}{I}_{(p-q)(q-p)} \end{bmatrix}$$

lalu dengan Teorama 4.5 didapat $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')$ yang berarti

$$\left[\underset{\sim}{0} \;\vdots\; \underset{\sim}{I}\right]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$$

berdistribusi normal q variat dengan mean

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu} = \left[\underset{\sim}{I} \;\vdots\; \underset{\sim}{0}\right]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \hline \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}_2$$

dan matriks kovariansi

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}' = \left[0 \;\vdots\; I\right]\left[\begin{array}{c:c} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \hdashline \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{array}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ I \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\Sigma}_{22}$$

sehingga $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_2$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_{22})$.

Teorema 4.7

1. Jika $\underset{q_1\times 1}{\underset{\sim}{X}_1}$ dan $\underset{q_2\times 1}{\underset{\sim}{X}_2}$ independen maka $kov(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2) = 0$
2. Jika $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ berdistribusi $N_{q_1\times q_2}\left(\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \hline \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{array}\right]\right)$

   maka $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ independen bila dan hanya bila $\underset{\sim}{\Sigma}_{12} = 0$.
3. Jika $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ independen, masing-masing berdistribusi $N_{q_1}(\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_{11})$ dan $N_{q_2}(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_{22})$.

   maka $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \hline \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ berdistribusi $N_{q_1+q_2}\left(\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{0} \\ \hline \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{array}\right]\right)$

Lemma 4.1

Jika A matriks bujur sangkar, dengan $A = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \hline \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{array}\right]$ maka

$|\underset{\sim}{A}| = |\underset{\sim}{A}_{22}|\,|\underset{\sim}{A}_{11} - \underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\underset{\sim}{A}_{21}|$ untuk $|\underset{\sim}{A}_{22}| \neq 0$

$= |\underset{\sim}{A}_{11}|\,|\underset{\sim}{A}_{22} - \underset{\sim}{A}_{21}\underset{\sim}{A}_{11}^{-1}\underset{\sim}{A}_{12}|$ untuk $|\underset{\sim}{A}_{11}| \neq 0$

Lemma 4.2

Jika A matriks simetris dengan $\underset{\sim}{A} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \hline \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{array}\right]$ maka

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{0} \\ \hline -\underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{I} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} (\underset{\sim}{A}_{11} - \underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1}\underset{\sim}{A}_{21})^{-1} & \underset{\sim}{0} \\ \hline \underset{\sim}{0}' & \underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{I} & -\underset{\sim}{A}_{12}\underset{\sim}{A}_{22}^{-1} \\ \hline \underset{\sim}{0}' & \underset{\sim}{I} \end{array}\right]$$

Lemma 4.3

Jika $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \text{-----} \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \hline \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{array}\right]$

dan $A = \left[\underset{\sim}{X}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \right]$

maka $(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) = \underset{\sim}{A}'(\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21})^{-1}\underset{\sim}{A} + (\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$

Teorema 4.8

Jika $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \text{-----} \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \text{-----} \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \hline \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{array}\right]$

Dan $\underset{\sim}{\Sigma}_{22} > 0$ maka distribusi bersyarat $\underset{\sim}{X}_1$ diberikan $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ adalah normal dengan mean $= \mu_{11} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)$ dan matriks kovariansi $= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$. (Kovariansi tidak tergantung pada $\underset{\sim}{x}_2$).

Bukti:

$$f_{\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{x}_1 / \underset{\sim}{x}_2) = \frac{f_{\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)}{f_{\underset{\sim}{x}_2}(\underset{\sim}{x}_2)}$$

$$f_{\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{x}_1 / \underset{\sim}{x}_2) = f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp -\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{A}'\left(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)^{-1}\underset{\sim}{A} \right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2)'\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{x}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \right)$$

dengan $\underset{\sim}{A} = (\underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1) - \Sigma_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{x}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$.

Dengan Teorema 4.6, X_2 berdistribusi $N(\underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\Sigma}_{22})$, yaitu

$$f_{\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} |\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)'\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{x}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2) \right)$$

Menurut Lemma 4.1, $|\underset{\sim}{\Sigma}| = |\underset{\sim}{\Sigma}_{22}||\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}|$ yang berarti

$$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{1}{2}} = |\underset{\sim}{\Sigma}_{22}|^{\frac{1}{2}}|\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}|^{\frac{1}{2}}$$

$$f_{\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{x}_1 / \underset{\sim}{x}_2) = \frac{f_{\underset{\sim}{X}_1,\underset{\sim}{X}_2}(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2)}{f_{\underset{\sim}{X}_1}(\underset{\sim}{x}_1)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}|\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{A}'(\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21})^{-1}\underset{\sim}{A}\right)$$

Dengan demikian $\underset{\sim}{X}_1 / \underset{\sim}{X}_2$ berdistribusi normal q variat dengan mean

$$\underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$$

dan matriks kovariansi

$$\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}$$

yang biasa ditulis sebagai:

$$\underset{\sim}{X}_1 / \underset{\sim}{X}_2 = x_2 \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2), \underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}).$$

Teorema 4.9

Jika $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan

$$\underset{\sim}{X}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \underset{q\times 1}{\underset{\sim}{X}_1} \\ \cdot \\ \underset{(p-q)\times 1}{\underset{\sim}{X}_2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mu}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \underset{q\times 1}{\underset{\sim}{\mu}_1} \\ \cdot \\ \underset{(p-q)\times 1}{\underset{\sim}{\mu}_2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}_{p\times q} = \begin{bmatrix} \underset{p\times q}{\underset{\sim}{\Sigma}_{11}} & \underset{q\times(p-q)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{12}} \\ \cdot & \\ \underset{(p-q)\times q}{\underset{\sim}{\Sigma}_{21}} & \underset{(p-q)\times(p-q)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{22}} \end{bmatrix}$$

maka distribusi bersyarat dari $\underset{\sim}{X}_2$ dengan $\underset{\sim}{X}_1 = x_1$ adalah normal dengan mean $= \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\Sigma}_{21}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}(\underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{\mu}_1)$

matriks kovariansi $= \underset{\sim}{\Sigma}_{22} - \underset{\sim}{\Sigma}_{21}\underset{\sim}{\Sigma}_{11}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{12}$

Bukti dari teorema ini sama dengan Teorema 4.8.

Teorema 4.10

Jika X berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan $|\underset{\sim}{\Sigma}| > 0$ maka

1. $(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$ berdistribusi χ_p^2 (chi-kuadrat dengan derajat bebas p)
2. $P\left(\underset{\sim}{X} \big/ (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) \le \chi_{p(\alpha)}^2\right) = 1 - \alpha$ di mana $\chi_{p(\alpha)}^2$ adalah 100α persentil atas dari distribusi χ_p^2 dan $(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) \le \chi_{p(\alpha)}^2$ merupakan *daerah ellipsoida.*

Bukti:

1. Karena χ_p^2 didefinisikan sebagai distribusi jumlahan $Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_p^2$ di mana $Z_1^2, Z_2^2, \ldots, Z_p^2$ variabel random yang masing-masing berdistribusi $N(0,1)$ maka dengan menggunakan dekomposisi spektral,

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} \underset{\sim}{e}_i . \underset{\sim}{e}_i' \text{ di mana } \underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{e}_i = \lambda_i \underset{\sim}{e}_i \text{ sehingga } \underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{e}_i = \frac{1}{\lambda_i}\underset{\sim}{e}_i$$

$$\begin{aligned}
(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) &= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{e}_i\underset{\sim}{e}_i'(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} \left(\underset{\sim}{e}_i'\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\underset{\sim}{e}_i'\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \underset{\sim}{Z}_i^2
\end{aligned}$$

dengan $\underset{\sim}{Z}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underset{\sim}{e}_i'\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)$.

Kemudian untuk $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{A}\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)$ dimana

$$\underset{P\times 1}{\underset{\sim}{Z}} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix}, \underset{P\times q}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underset{\sim}{e}_1{}' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underset{\sim}{e}_2{}' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underset{\sim}{e}_p{}' \end{bmatrix} \text{dan } \left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right) \sim \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{\Sigma})$$

maka dengan Teorema 4.5, $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{A}\left(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}\right)$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')$ dimana

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underset{\sim}{e}_1{}' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underset{\sim}{e}_2{}' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underset{\sim}{e}_p{}' \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_i{}'\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underset{\sim}{e}_1{}' & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underset{\sim}{e}_2{}' & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underset{\sim}{e}_p{}' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underset{\sim}{e}_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underset{\sim}{e}_2' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underset{\sim}{e}_p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underset{\sim}{e}_1' & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underset{\sim}{e}_2' & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underset{\sim}{e}_p' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{I}$$

Menurut Teorema 4.7, $Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_p^2$ merupakan variabel random normal standar yang masing-masing independen, sehingga

$$(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \text{ berdistribusi } \chi_p^2 .$$

2. Dari bukti 1 karena
   $(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})$ berdistribusi χ_p^2
   maka
   $P\left(\underset{\sim}{X}\big/(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \le \chi_p^2(\alpha)\right)=1-\alpha$
   di mana $\left\{(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \le \chi_p^2(\alpha)\right\}$ merupakan daerah ellipsoida.

Teorema 4.11

Apabila $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, ..., \underset{\sim}{X}_n$ mutually independent dengan $\underset{\sim}{X}_j$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu}_j, \underset{\sim}{\Sigma})$ dan

$V_1 = c_1\underset{\sim}{X}_1 + c_2\underset{\sim}{X}_2 + ... + c_n\underset{\sim}{X}_n$ berdistribusi $N_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\underset{\sim}{\mu}_j, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\underset{\sim}{\Sigma}\right)$

selanjutnya, jika

$$\underset{\sim}{V}_2 = \underset{\sim}{b}_1\underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{b}_2\underset{\sim}{X}_2 + ... + \underset{\sim}{b}_n\underset{\sim}{X}_n \text{ maka}$$

$\underset{\sim}{V}_1$ dan $\underset{\sim}{V}_2$ mempunyai distribusi normal multivariat bersama dengan matriks kovariansi.

Bukti:

Variabel random

$$\left[X_{11},...,X_{1p,}X_{12},...,X_{2p},...,X_{np}\right] = \left[\underset{\sim}{X}_1', \underset{\sim}{X}_2', ..., \underset{\sim}{X}_n'\right] = \underset{(1\times np)}{\underset{\sim}{X}'}$$

berdistribusi normal multivariat $N_{np}(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma}_x)$ dengan $\underset{(np\times 1)}{\underset{\sim}{\mu}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\mu}_n \end{bmatrix}$ dan

$$\underset{(np\times np)}{\underset{\sim}{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\Sigma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \underset{\sim}{\Sigma} \end{bmatrix}$$

Kemudian jika diambil

$$\underset{(2p\times np)}{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} c_1\underset{\sim}{I} & c_2\underset{\sim}{I} & \cdots & c_n\underset{\sim}{I} \\ b_1\underset{\sim}{I} & b_2\underset{\sim}{I} & \cdots & b_n\underset{\sim}{I} \end{bmatrix}$$

dengan $\underset{\sim}{I}$ adalah matriks identitas bertipe $p \times p$, selanjutnya didapat

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_j \underset{\sim}{X}_j \\ \sum_{j=1}^{n} b_j \underset{\sim}{X}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{V}_1 \\ \underset{\sim}{V}_2 \end{bmatrix}$$

Dengan $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$ berdistribusi normal $N_{2p}(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}_x\underset{\sim}{A}')$, kemudian dengan menggunakan Teorema 4.5 dihasilkan

$$A\Sigma_x A' = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P} & \underset{\sim}{Q} \\ \underset{\sim}{Q} & \underset{\sim}{P} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\underset{\sim}{P} = \left[c_1\underset{\sim}{\Sigma} \quad c_2\underset{\sim}{\Sigma} \quad \cdots \quad c_n\underset{\sim}{\Sigma}\right]\left[c_1\underset{\sim}{I} \quad c_2\underset{\sim}{I} \quad \cdots \quad c_n\underset{\sim}{I}\right]' = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\underset{\sim}{\Sigma}$$

$$\underset{\sim}{R} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\underset{\sim}{\Sigma}$$

$$\underset{\sim}{Q} = \left[c_1\underset{\sim}{\Sigma} \quad c_2\underset{\sim}{\Sigma} \quad \cdots \quad c_n\underset{\sim}{\Sigma}\right]\left[b_1\underset{\sim}{I} \quad b_2\underset{\sim}{I} \quad \cdots \quad cb\underset{\sim}{I}\right]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j\right)\underset{\sim}{\Sigma} = (b'c)\underset{\sim}{\Sigma} .$$

Selanjutnya jika $\sum_{j=1}^{n} c_j b_j = \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{c} = 0$, sedemikian sehingga $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_j\right)\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{p\times p}{\underset{\sim}{0}}$ maka Teorema 4.7 $\underset{\sim}{V}_1$ dan $\underset{\sim}{V}_2$ independen.

Berikut ini diberikan beberapa contoh yang berkaitan dengan teorema di atas.

Contoh 4.4

Misalkan $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_p(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$. Carilah distribusi dari $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X}$ untuk $\underset{1\times p}{\underset{\sim}{a}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

Dari Teorema 4.3 dapat dipahami bahwa $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a})$

$$\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \underset{\sim}{X}_1$$

$$\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu}_1$$

$$\underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_{11}$$

Jadi, $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1$, berdistribusi $N(\mu_1,\sigma_{11})$ atau secara umum $\underset{\sim}{X}_i$ erdistribusi $N(\mu_i,\sigma_{ii})$

Contoh 4.5

Misalkan variabel random $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$. Carilah distribusi

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Dengan mengambil

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

maka didapat

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$$

Kemudian menurut Teorema 4.5, $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_2(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')$ dengan

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix}$$

dan

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{12} & \sigma_{12} - \sigma_{22} & \sigma_{13} - \sigma_{23} \\ \sigma_{12} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - \sigma_{23} & \sigma_{23} - \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 4.6

Misalkan variabel random berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ seperti pada Contoh 4.5. Apakah variabel random $X_1 - X_2$ dan $X_2 - X_3$ independen?

Penyelesaian:

$X_1 - X_2$ dan $X_2 - X_3$ independen, hanya bila

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} = 0$$

Karena harga ini tidak dapat dihitung (tidak diketahui) maka independensi dari $X_1 - X_2$ dan $X_2 - X_3$ tidak dapat ditentukan.

Contoh 4.7

Misalkan variabel random X berdistribusi $N_5(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$. Carilah distribusi vektor random

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan persoalan ini diambil

$$\underset{\sim}{X}_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{\mu}_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \text{ dan } \underset{\sim}{\Sigma}_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$$

sehingga $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{\mu}$ dan $\underset{\sim}{\Sigma}$ dapat disusun dan dipartisi sebagai berikut.

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ \cdots \\ X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} \mu = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \\ \cdots \\ \mu_1 \\ \mu_3 \\ \mu_5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc:ccc} \sigma_{22} & \sigma_{24} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{25} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} & \sigma_{14} & \sigma_{34} & \sigma_{45} \\ \hdashline \sigma_{12} & \sigma_{14} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{15} \\ \sigma_{23} & \sigma_{34} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & \sigma_{35} \\ \sigma_{25} & \sigma_{45} & \sigma_{15} & \sigma_{35} & \sigma_{55} \end{array}\right]$$

atau

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{(2\times1)}{\underset{\sim}{X}_1} \\ \ldots\ldots \\ \underset{(3\times1)}{\underset{\sim}{X}_2} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{(2\times1)}{\underset{\sim}{\mu}_1} \\ \ldots\ldots \\ \underset{(3\times1)}{\underset{\sim}{\mu}_2} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{(2\times2)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{11}} & : & \underset{(2\times3)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{12}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{(3\times2)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{21}} & : & \underset{(3\times3)}{\underset{\sim}{\Sigma}_{22}} \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menggunakan Teorema 4.6 $\underset{\sim}{X}_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$ berdistribusi

$$N_2(\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\Sigma}_{11}) = N_2\left(\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_2 \\ \underset{\sim}{\mu}_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}\right)$$

Contoh 4.8

Misalkan variabel random $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{\Sigma})$, dengan

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Apakah X_1 dan X_2 independen?
2. Apakah (X_1, X_2) dan X_3 independen?

Penyelesaian:

1. X_1 dan X_2 mempunyai matriks kovariansi $\sigma_{12} \neq 0$. Jadi, X_1 dan X_2 tidak independen.
2. Partisi dari $\underset{\sim}{X}$ dan $\underset{\sim}{\Sigma}$ adalah

$$\underset{\sim}{X} = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \hdashline X_3 \end{array}\right], \qquad \underset{\sim}{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi, $\underset{\sim}{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ dan X_3 mempunyai matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sehingga $(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2)$ dan $\underset{\sim}{X}_3$ independen.

Contoh 4.9

Diketahui matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Carilah ρ_{123}.

Penyelesaian:

$$\rho_{ij.h} = \frac{\rho_{ij} - \rho_{ih}\rho_{jh}}{\sqrt{(1-\rho_{ih}^2)(1-\rho_{jh}^2)}}$$

$$\rho_{12.3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{12.3} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}} = 0.$$

EKSPLORASI SEBARAN NORMAL GANDA

Untuk mengevaluasi apakah gugus data yang dimiliki menyebar normal ganda (*multivariate normal*) kita dapat melakukan penelusuran secara ekplorasi.Seperti halnya untuk kasus *univariate* penelusuran sebaran (distribusi) normal ganda dapat juga memanfaatkan plot quantil-quantil. Plot quantil-quantil yang digunakan dalam kasus univariate adalah quantil normal sedangkan dalam kasus multivariate plot quantil-quantil didekati dengan quantil khi-kuadrat.

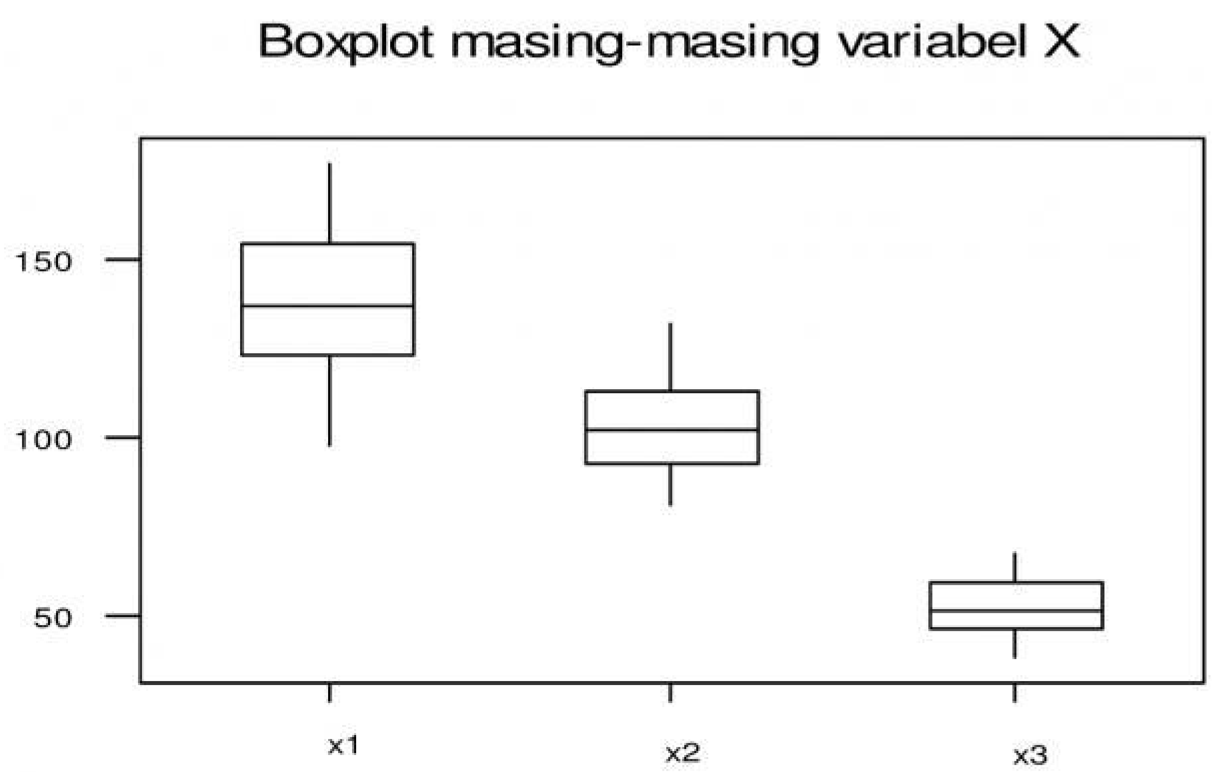
Tahapan yang dapat dilakukan dalam menyusun Plot Kuartil χ^2 adalah sebagai berikut:

1. Hitung: $d_{ii}^{\,2} = (\underline{x}_{(i)} - \mu)' \Sigma^{-1} (\underline{x}_{(i)} - \mu)$
2. Beri peringkat nilai d_{ii}^2
3. Tentukan/hitung nilai khi-kuadrat dari nilai (i –1/2)/n dengan derajat bebas (degree of freedom) p : $\chi_p^2\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right)$.
4. Buat plot $\chi_p^2\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right)$ dengan d_{ii}^2, bila pola hubungannya mengikuti garis lurus maka data tersebut dapat dikatakan menyebar normal ganda. Namun demikian untuk lebih menyakinkan dapat dilakukan dengan menghitung nilai korelasi person $\chi_p^2\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right)$ dengan d_{ii}^2. Apabila nilai korelasi ini nyata (*significant*) maka data tersebut mengikuti sebaran normal ganda.

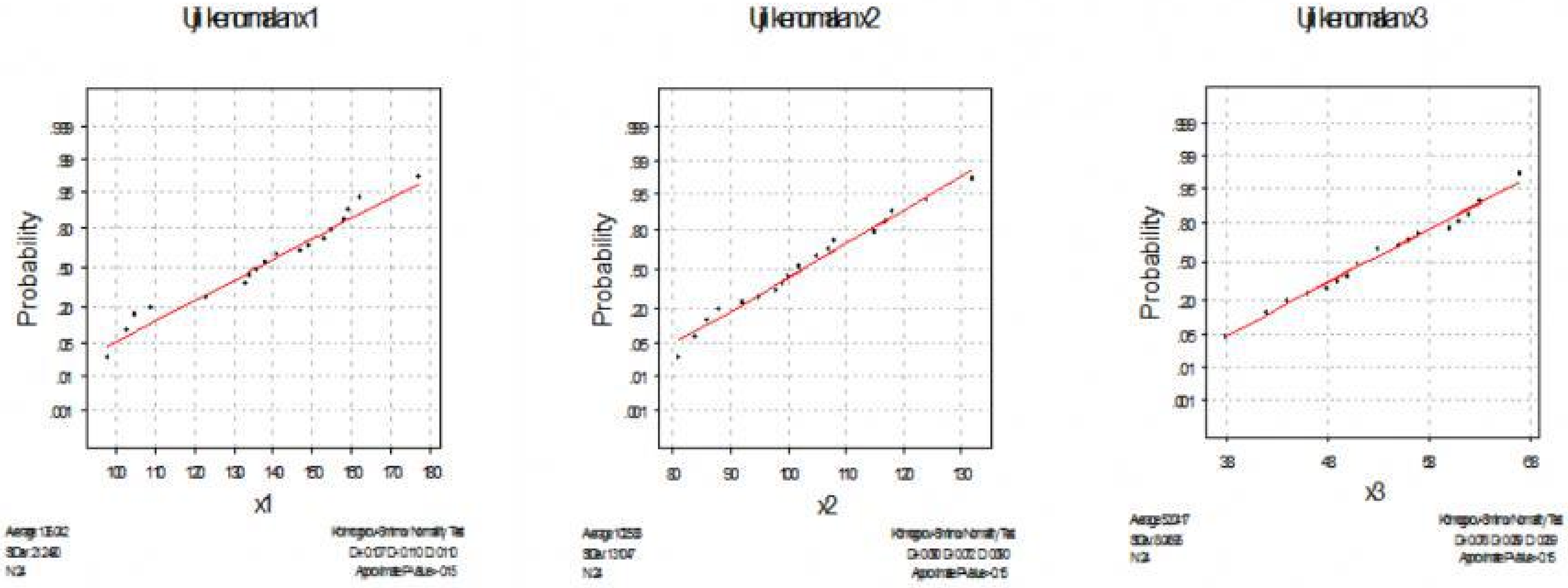
Sebagai ilustrasi perhatikan untuk suatu pengamatan data yang diperoleh sebagai berikut:

Obs	x1	x2	x3	Obs	x1	x2	x3
1	98	81	38	13	138	98	51
2	103	84	38	14	138	99	51
3	103	86	42	15	141	105	53
4	105	86	42	16	147	108	57
5	109	88	44	17	149	107	55
6	123	92	50	18	153	107	56
7	123	95	46	19	155	115	63
8	133	99	51	20	155	117	60
9	133	102	51	21	158	115	62
10	133	102	51	22	159	118	63
11	134	100	48	23	162	124	61
12	136	102	49	24	177	132	67

Secara eksplorasi ketiga peubah (*variable*) yang diamati tidak ada yang aneh, bahkan dari diagram kotak garis (box-plot) terlihat bahwa ketiga peubah menyebar simetrik sebagaimana disajikan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4
Boxplot masing-masing peubah X1, X2, dan X3



Gambar 4.5
Uji kenormalan Kolmogorov-Smirnov untuk peubah X1, X2 dan X3

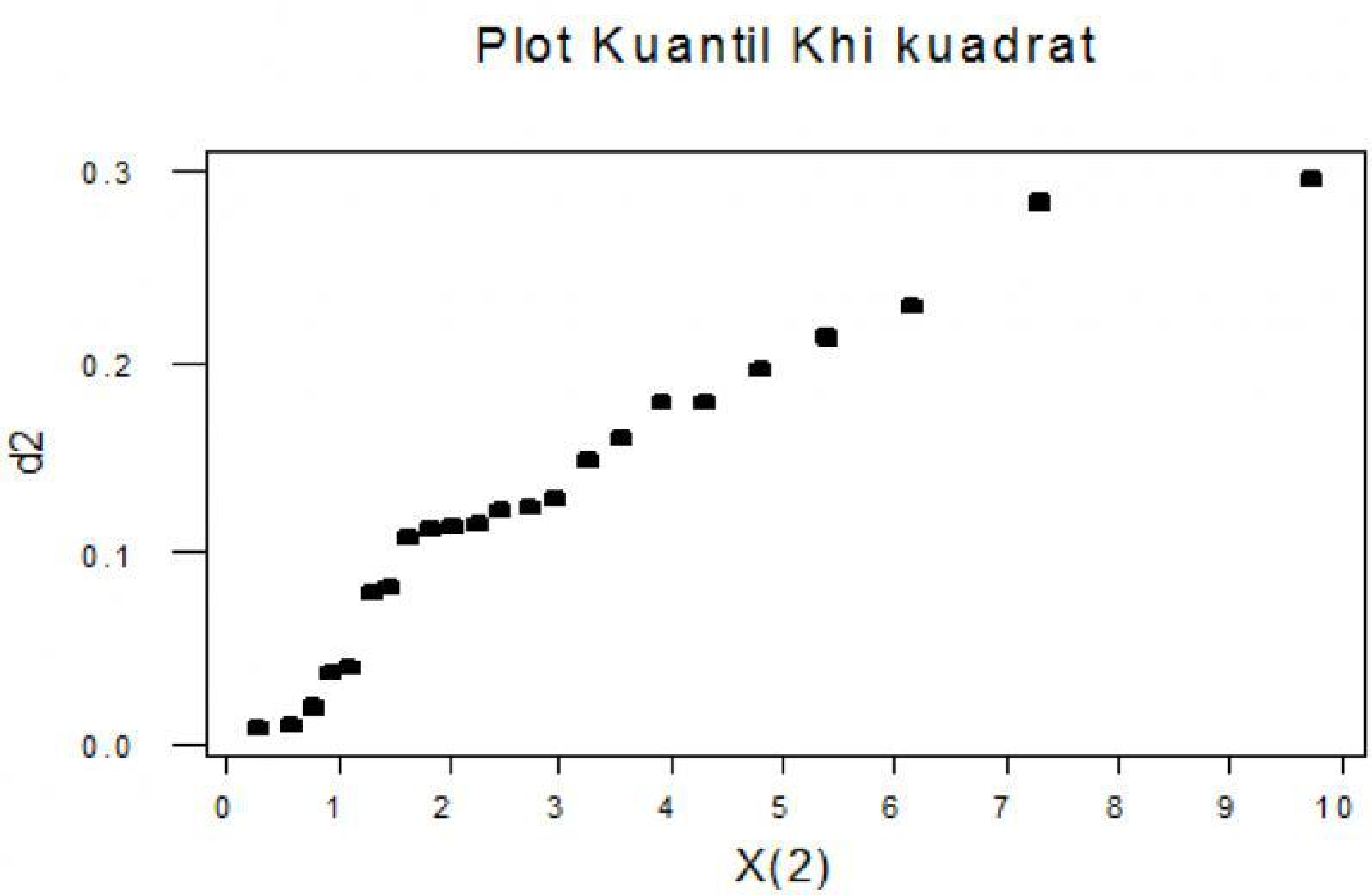
Dari Gambar 4.5, dapat ditunjukkan bahwa plot kuantil ketiga peubah membentuk garis lurus yang mengindikasikan ketiga peubah menyebar normal secara univariate, hal ini juga didukung oleh hasil pengujian kenormalan Kolmogorov-Smirnov dimana nilai p_value yang lebih besar dari 5% untuk semua peubah X1, X2, dan X3. Jadi untuk masing-masing peubah tersebut dapat diterima mengikuti sebaran Normal.

Berikutnya secara bersama-sama, apakah X1, X2, X3 dapat dikatakan mengikuti sebaran normal, kita dapat melakukan eksplorasi plot kuantil-kuantil khi-kuadrat dari ketiga peubah tersebut.Evaluasi dilakukan dengan melakukan analisis apakah plot yang dibentuk menunjukkan pola yang linier sehingga dapat bisa disimpulkan ketiga peubah tersebut menyebar Normal Ganda. Perhitungan d^2 dan $\chi^2(p)$ secara lengkap dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1.
Perhitungan d^2 dan $\chi^2(p)$

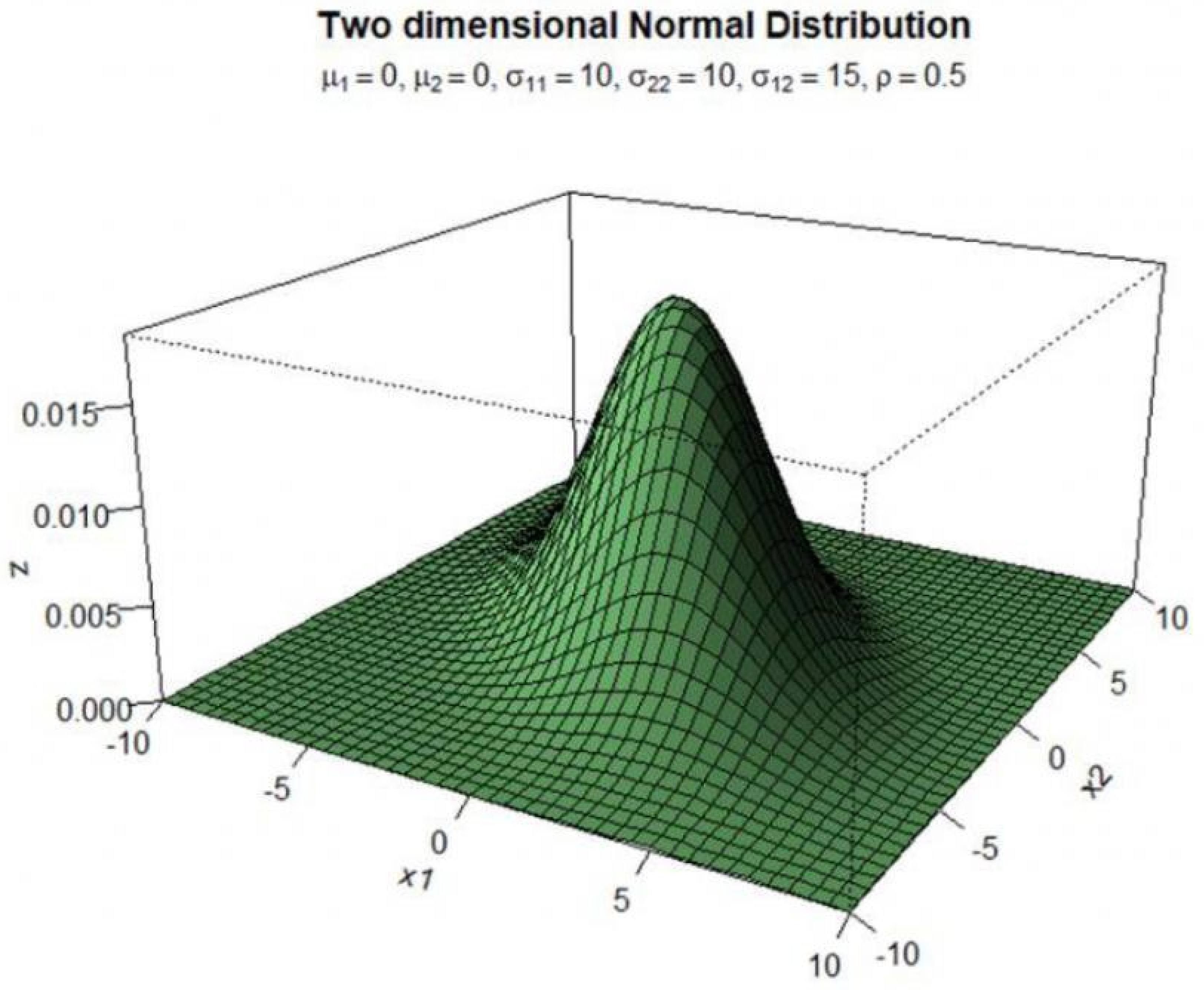
Obs	x1	x2	x3	d^2	Peringkat d^2	P=(i-1/2)/n	$\chi^2(p)$
1	98	81	38	0.15	16	0.65	3.25
2	103	84	38	0.18	19	0.77	4.32
3	103	86	42	0.18	18	0.73	3.91
4	105	86	42	0.12	13	0.52	2.48
5	109	88	44	0.11	11	0.44	2.05
6	123	92	50	0.21	21	0.85	5.38
7	123	95	46	0.04	6	0.23	1.13

Obs	x1	x2	x3	d^2	Peringkat d^2	P=(i-1/2)/n	$\chi^2(p)$
8	133	99	51	0.02	4	0.15	0.78
9	133	102	51	0.01	1.5	0.04	0.31
10	133	102	51	0.01	1.5	0.04	0.31
11	134	100	48	0.13	15	0.60	2.97
12	136	102	49	0.12	12	0.48	2.26
13	138	98	51	0.16	17	0.69	3.56
14	138	99	51	0.11	10	0.40	1.85
15	141	105	53	0.01	3	0.10	0.60
16	147	108	57	0.04	5	0.19	0.95
17	149	107	55	0.08	8	0.31	1.48
18	153	107	56	0.20	20	0.81	4.79
19	155	115	63	0.23	22	0.90	6.16
20	155	117	60	0.08	7	0.27	1.30
21	158	115	62	0.11	9	0.35	1.66
22	159	118	63	0.12	14	0.56	2.72
23	162	124	61	0.28	23	0.94	7.32
24	177	132	67	0.30	24	0.98	9.75



Gambar 4.6.
Plot quantil khi-kuadrat untuk peubah X1, X2 dan X3

Perhitungan d^2 dan $\chi^2(p)$ untuk X1, X2 dan X3 disajikan pada Gambar 4.6. Untuk membuktikan apakah plot tersebut benar-benar menunjukkan Normal Ganda maka dicari korelasi antara d^2 dengan $\chi^2(p)$ yaitu $r_Q = 0.962$ yang lebih besar dari batas kritis pada taraf nyata 5% yaitu 0.956.Ini menunjukkan bahwa d^2 dan $\chi^2(p)$ memiliki hubungan linier yang nyata, dengan demikian dapat dikatakan bahwa peubah X1, X2, dan X3 mengikuti pola sebaran Normal Ganda. Pada Gambar 4.7. disajikan ilustrasi visual sebaran multivariate normal ganda dua peubah acak (X1, X2) dengan masing-masing nilai parameter yang dispesifikasikan.



$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}} - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right]\right\}$$

Gambar 4.7.
Ilustrasi Normal Ganda dua (X1, X2)

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan variabel random X berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$.

   Carilah distribusi dari $X_1 = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 \end{bmatrix}$

   Apakah $X_1 - X_2$ dan $X_1 + X_2 + X_3$ independen?
2) $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$. Carilah distribusi dari vektor random X_2, X_3 dengan syarat $X_1 = x_1$.
3) $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$. Carilah distribusi dari vektor random X_1, X_4 dengan syarat $X_2 = x_2, X_3 = x_3$.
4) Diketahui $\underset{\sim}{X}$ berdistribusi $N_3(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$, dengan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Manakah diantara variabel ini yang independen?
   a) X_1 dan X_2
   b) X_2 dan X_3
   c) (X_1, X_2) dan X_3
   d) $\dfrac{X_1 + X_2}{2}$ dan X_3
5) Diketahui vektor random dengan matriks kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   Hitunglah $\rho_{12.3}, \rho_{13.2}, \rho_{23.1},$ dan $\rho_{23.2}$!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Tulis dulu matriks A yang digunakan, kemudian gunakan Teorema 4.4.
2) Gunakan Teorema 4.8.
3) Gunakan Teorema 4.8.

4) Carilah sub matriks kovariansi variabel random yang sama dengan 0.

5) Gunakan rumus $\rho_{ij.h} = \dfrac{\rho_{ij} - \rho_{ih}\rho_{jh}}{\sqrt{(1-\rho_{ih}^2)(1-\rho_{jh}^2)}}$

RANGKUMAN

1. $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ maka $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{A}')$ untuk $\underset{\sim}{A}$ bertipe $q \times p$
2. Bila $\underset{\sim}{X}_1$ dan $\underset{\sim}{X}_2$ independen, maka $kov(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2) = 0$.
3. Jika $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}$, dan

   $\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{11} & \underset{\sim}{\Sigma}_{12} \\ \underset{\sim}{\Sigma}_{21} & \underset{\sim}{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$ dan $\underset{\sim}{\Sigma}_{22} > 0$

   maka distribusi bersyarat $\underset{\sim}{X}_1$ diberikan $\underset{\sim}{X}_2 = x_2$ adalah normal dengan mean $= \underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}(\underset{\sim}{X}_2 - \underset{\sim}{\mu}_2)$, kovariansi $\underset{\sim}{\Sigma}_{11} - \underset{\sim}{\Sigma}_{12}\underset{\sim}{\Sigma}_{22}^{-1}\underset{\sim}{\Sigma}_{21}$. (Kovariansi tidak tergantung pada $\underset{\sim}{X}_2$).
4. Jika $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan $|\underset{\sim}{\Sigma}| > 0$ maka
   - $(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})$ berdistribusi χ_p^2 (chi kuadrat p)
   - $P\left(\underset{\sim}{X} / (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu})'\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) \le \chi_p^2(\alpha)\right) = 1 - \alpha$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) X berdistribusi $N_4(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$.

   Bila $\underset{\sim}{V}_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$ maka $\underset{\sim}{V}_1$ berdistribusi

   A. $N_4(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$

   B. $N\left(\frac{1}{4}\mu_0, \frac{1}{16}S\right)$ dengan $\mu_0 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4$ dan $S = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44} - 2\sigma_{12} + 2\sigma_{13} - 2\sigma_{14} + 2\sigma_{24} - 2\sigma_{23} - 2\sigma_{34}$

C. $N\left(\frac{1}{4}\mu_0, \frac{1}{16}S\right)$ dengan $\mu_0 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4$ dan
$S = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44} - 2\sigma_{12} + 2\sigma_{13} - 2\sigma_{14} + 2\sigma_{24} + 2\sigma_{23} + 2\sigma_{34}$

D. $N\left(\frac{1}{4}\mu_0, \frac{1}{16}S\right)$ dengan $\mu_0 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4$ dan
$S = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44} + 2\sigma_{12} + 2\sigma_{13} + 2\sigma_{14} - 2\sigma_{24} - 2\sigma_{23} - 2\sigma_{34}$

2) $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \underset{\sim}{X}_3, \underset{\sim}{X}_4$ adalah vektor random independen, masing-masing berdistribusi $N_4(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$. Carilah densitas bersama dari

$$\underset{\sim}{V}_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

$$\underset{\sim}{V}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$$

A. Normal multivariat dengan mean $\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\mu}_3 - \underset{\sim}{\mu}_4) \\ \frac{1}{4}(\underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\mu}_3 - \underset{\sim}{\mu}_4) \end{bmatrix}$

Matriks kovariansi $\begin{bmatrix} \frac{1}{4}\underset{\sim}{\Sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\underset{\sim}{\Sigma} \end{bmatrix}$

B. Normal multivariat dengan mean $\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\mu}_3 - \underset{\sim}{\mu}_4) \\ \frac{1}{4}(\underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\mu}_3 - \underset{\sim}{\mu}_4) \end{bmatrix}$

dan matriks kovariansi $\begin{bmatrix} \frac{1}{16}\underset{\sim}{\Sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16}\underset{\sim}{\Sigma} \end{bmatrix}$

C. Normal multivariat dengan mean $\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\underset{\sim}{\mu}_1 + \underset{\sim}{\mu}_2 - \underset{\sim}{\mu}_3 - \underset{\sim}{\mu}_4) \\ \frac{1}{4}(\underset{\sim}{\mu}_1 - \underset{\sim}{\mu}_2 + \underset{\sim}{\mu}_3 - \underset{\sim}{\mu}_4) \end{bmatrix}$

dan matriks kovariansi $\begin{bmatrix} \frac{1}{16}\underset{\sim}{\Sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16}\underset{\sim}{\Sigma} \end{bmatrix}$

D. A, B, C tidak benar

3) $\underset{\sim}{X} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ dengan

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Dimana $\rho > 0$. Kontur densitas probabilitas 50% mempunyai sumbu…

A. $\pm\sqrt{1+\rho}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2,88}}{2} \\ \frac{\sqrt{2,88}}{2} \end{bmatrix}$ dan $\pm\sqrt{1-\rho}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2,88}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2,88}}{2} \end{bmatrix}$

B. $\pm\sqrt{1+\rho}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ dan $\pm\sqrt{1-\rho}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

C. $\pm\sqrt{1+\rho}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2,78}}{2} \\ \frac{\sqrt{2,78}}{2} \end{bmatrix}$ dan $\pm\sqrt{1-\rho}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2,78}}{2} \\ \frac{\sqrt{2,78}}{2} \end{bmatrix}$

D. A, B, C tidak benar

4) $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$

Apakah distribusi dari $X_1 / X_2 = x_2$

A. $N\left(\mu_1 + \sigma_{12}(x_2 - \mu_2), \sigma_{11}\left(1 - \rho_{12}^2\right)\right)$

B. $N\left(\mu_1 + \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2), \sigma_{11}\left(1 - \rho_{12}^2\right)\right)$

C. $N\left(\mu_1 + \sigma_{22}(x_2 - \mu_2), \sigma_{11}\left(1 - \rho_{12}^2\right)\right)$

D. $N\left(\mu_1 + \dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}}(x_2 - \mu_2), \sigma_{11}\left(1 - \rho_{12}^2\right)\right)$

5) Diketahui matriks kovariansi

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah $\rho_{i-1,i+1,i}$ untuk $i = 2, 3$.

A. $\dfrac{\rho^2 - \rho}{1 - \rho^2}$

B. $\dfrac{\rho - \rho^2}{1 - \rho^2}$

C. 0

D. A, B, C tidak benar

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A
2) A
3) C
4) A
5) D

Tes Formatif 2

1) B
2) A
3) C
4) B
5) C

Daftar Pustaka

Johnson, R. A., Wichern, D. W. (1982). *Applied multivariate statistical analysis.* Prentice Hall Inc.

Rencher, A. C. & Christensen, W. F. (2012). *Methods of multivariate analysis*. Third Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Tabachnick, B. G., and Fidell, L. S. (2007). *Using multivariate statistics* (5th ed.). Boston: Pearson Education, Inc.