MODUL 6

Analisis Variansi

Prof. Dr. Zanzawi Soejoeti

PENDAHULUAN

Kita pernah mempelajari beberapa metode membandingkan mean dua populasi pada mata kuliah Metode Statistika I. Jika ada beberapa (dua atau lebih) mean yang harus dibandingkan, diperlukan metode yang lebih umum. Saat ini dikenal dengan teknik yang sangat bermanfaat yang dinamakan Analisis Variansi (ANAVA) yang memungkinkan kita untuk menganalisis dan menginterpretasikan observasi dari beberapa populasi secara sekaligus. Alat statistik yang sangat berguna ini memisahkan variansi total di dalam himpunan data menurut sumber variansi yang ada. Dalam kaitannya dengan membandingkan mean $k(k \geq 2)$ populasi, dua sumber variansi itu adalah (1) perbedaan antarpopulasi (perlakuan), dan (2) variansi di dalam populasi (sesatan). Modul 6 mata kuliah *Metode Statistika 2* ini akan mempelajari beberapa macam analisis variansi (ANAVA) semacam ini.

Setelah mempelajari Modul 6 ini, secara umum Anda diharapkan dapat memahami dan melakukan pembandingan dua atau lebih mean populasi beserta aplikasinya. Secara khusus Anda diharapkan dapat memperoleh gambaran untuk dapat:

a. membandingkan beberapa perlakuan dengan analisis variansi satu arah atau rancangan random lengkap;
b. membandingkan beberapa perlakuan dengan analisis variansi dua arah atau rancangan blok random; dan
c. memahami dan menguji pengaruh dua faktor dengan analisis variansi atau rancangan percobaan berfaktor.

KEGIATAN BELAJAR 1

Analisis Variansi Satu Arah

A. MEMBANDINGKAN BEBERAPA PERLAKUAN

Biasanya akan lebih bijaksana (baik dalam hal waktu dan biaya) untuk membandingkan beberapa perlakuan sekaligus daripada melakukan beberapa percobaan membandingkan dua perlakuan setiap kali. Istilah *rancangan random lengkap* sinonim dengan pengambilan sampel random independen dari beberapa populasi jika tiap populasi diidentifikasi sebagai populasi respons di bawah perlakuan tertentu. Misalkan, perlakuan 1 digunakan untuk n_1, unit percobaan, perlakuan 2 untuk n_2 unit, …, perlakuan k untuk n_k unit. Dalam rancangan random lengkap n_1 unit percobaan dipilih secara random dari himpunan $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ unit yang ada untuk menerima perlakuan 1, n_2 unit dipilih secara random dari himpunan sisanya untuk untuk menerima perlakuan 2, dan seterusnya, perlakuan k digunakan pada n_k unit sisanya. Kasus khusus rancangan ini untuk membandingkan k = 2 perlakuan telah kita pelajari dalam Metode Statistik I. Struktur data untuk pengukuran respons itu dapat disajikan dengan format, seperti dalam Tabel 6.1 dengan Y_{ij} menunjukkan pengamatan ke-*j* pada perlakuan *i*. Statistik ringkasnya disajikan dalam dua kolom terakhir.

Tabel 6.1
Struktur Data untuk Rancangan Random Lengkap dengan k Perlakuan

	Pengamatan	Mean	Jumlah Kuadrat
Perlakuan 1	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n_1}$	$\overline{y_1}$	$\sum_{j=1}^{n_1}\left(y_{1j}-\overline{y}_1\right)^2$
Perlakuan 2	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n_1}$	$\overline{y}_2$	$\sum_{j=1}^{n_2}\left(y_{2j}-\overline{y}_2\right)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Perlakuan k	$\mathrm{y}_{\mathrm{k}1}, \mathrm{y}_{\mathrm{k}2}, \ldots, \mathrm{y}_{\mathrm{kn}_\mathrm{k}}$	$\overline{\mathrm{y}}_\mathrm{k}$	$\sum_{j=1}^{n_k}\left(y_{kj}-\overline{y}_k\right)^2$
Mean Keseluruhan	$\overline{\mathrm{y}}. = \dfrac{\text{jumlah semua pengamatan}}{n_1+n_2+\ldots+n_k} = \dfrac{n_1\,\overline{\mathrm{y}}_1+\ldots n_k\,\overline{\mathrm{y}}_k}{n_1+\ldots+n_k}$		

Sebelum kita mulai dengan kasus umum k perlakuan akan lebih menarik jika kita mulai dengan contoh numerik untuk menjelaskan penalaran di belakang analisis variansi dan hitungan-hitungan yang terlibat.

Contoh 6.1

Dalam upaya untuk meningkatkan kualitas pita rekaman, dibandingkan pengaruh empat macam lapisan A, B, C, dan D dalam kualitas memancarkan kembali suara. Misalkan, pengukuran distorsi suara yang disajikan dalam Tabel 6.2 diperoleh dari pita yang mendapatkan perlakuan dengan keempat macam lapisan itu.

Tabel 6.2
Distorsi Suara Diperoleh dengan Empat Jenis Lapisan

Lapisan	Pengamatan	Mean	Jumlah Kuadrat
A	10,15,8,12,15	$\overline{y}_1 = 12$	$\sum\left(y_{1j} - \overline{y}_1\right)^2 = 38$
B	14,18,21,15	$\overline{y}_2 = 17$	$\sum\left(y_{2j} - \overline{y}_2\right)^2 = 30$
C	17,16,14,15,17,15,18	$\overline{y}_3 = 16$	$\sum\left(y_{3j} - \overline{y}_3\right)^2 = 12$
D	12,15,17,15,16,15	$\overline{y}_4 = 15$	$\sum\left(y_{4j} - \overline{y}_4\right)^2 = 14$
	Mean keseluruhan $\overline{y} = 15$		

Dua pertanyaan segera timbul dalam pikiran. Apakah ada perbedaan yang signifikan di antara mean distorsi yang diperoleh menggunakan empat lapisan itu? Dapatkah kita menghitung interval kepercayaan untuk selisih mean antara lapisan-lapisan itu?

Analisis hasil-hasil itu pada dasarnya terdiri dari pemisahan observasi ke dalam kontribusi dari berbagai sumber yang berbeda. Memikirkan bahwa penyimpangan satu pengamatan dari mean keseluruhan $\left(y_{ij} - \overline{y}\right)$, sebagian disebabkan karena perbedaan antara mean kualitas lapisan dan sebagian karena variasi random pengukuran-pengukuran itu di dalam kelompok yang sama maka kita peroleh perumusan pemisahan berikut.

$$\text{Pengamatan} = \begin{pmatrix} \text{Mean} \\ \text{Keseluruhan} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Penyimpangan} \\ \text{karena perlakuan} \end{pmatrix} + (\text{Residu})$$

$$y_{ij} = \overline{y} + \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right) + \left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_i\right)$$

Untuk data dalam Tabel 6.2 pemisahan dari semua pengamatan itu dapat disajikan dalam bentuk susunan berikut.

$$\begin{array}{cc} \text{Pengamatan } y_{ij} & \text{Mean keseluruhan } \overline{y} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 & 8 & 12 & 15 & & \\ 14 & 18 & 21 & 15 & & & \\ 17 & 16 & 14 & 15 & 17 & 15 & 18 \\ 12 & 15 & 17 & 15 & 16 & 15 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & & \\ 15 & 15 & 15 & 15 & & & \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Pengaruh perlakuan } \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right) & \text{Residu : } \left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_i\right) \end{array}$$

$$+ \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 & -3 & & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 0 & 3 & & \\ -3 & 1 & 4 & -2 & & & \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

Misalnya, bilangan pojok kiri atas dalam susunan menunjukkan:

$$10 = 15 + (-3) \quad + \quad (-2)$$

$$y_{11} = \overline{y} + \left(\overline{y}_1 - \overline{y}\right) + \left(y_{11} - \overline{y}\right)$$

Jika benar-benar tidak ada perbedaan dalam mean distorsi yang diperoleh dengan menggunakan keempat lapisan pita, kita dapat mengharapkan bilangan-bilangan pada susunan kedua di ruas kanan persamaan itu, yang bentuknya $\left(y_1 - \overline{y}\right)$ akan dekat dengan nol. Sebagai ukuran banyak variasi keseluruhan yang disebabkan oleh perbedaan mean perlakuan, kita hitung jumlah kuadrat semua bilangan dalam susunan ini. Jadi,

$$\underbrace{(-3)^2 + \ldots + (-3)^2}_{n_1=5} + \underbrace{2^2 + \ldots + 2^2}_{n_2=4} + \underbrace{1^2 + \ldots + 1^2}_{n_3=7} + \underbrace{0^2 + \ldots + 0^2}_{n_4=6}$$

$$= 5(-3)^2 + 4\left(2^2\right) + 7\left(1^2\right) + 6\left(0^2\right) = 68$$

Jadi, jumlah kuadrat karena perbedaan dalam mean perlakuan juga dinamakan *jumlah kuadrat perlakuan* diberikan oleh:

$$\text{jumlah kuadrat perlakuan} = \sum_{i=1}^{4} n_i \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2 = 68$$

Susunan terakhir terdiri dari bilangan-bilangan $\left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_i\right)$ yang merupakan deviasi tiap pengamatan dari mean perlakuan yang bersangkutan. Deviasi (penyimpangan) ini mencerminkan variabilitas yang menjadi sifat bahan percobaan dan alat pengukurannya dan dinamakan *residu.* Variasi keseluruhan yang disebabkan oleh sesatan random diukur dengan jumlah kuadrat semua residu ini.

$$(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2 + ... + 1^2 + 0^2 = 94$$

Jadi, kita peroleh:

$$\text{Jumlah kuadrat residu} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \overline{y}_i \right)^2 = 94$$

Perjumlahan rangkap menunjukkan bahwa elemen-elemen itu dijumlah dalam tiap baris, kemudian meliputi baris-baris yang berbeda. Sebagai cara lain, dengan mengingat kolom terakhir dalam Tabel 6.2 kita peroleh:

$$\begin{aligned}
\text{Jumlah kuadrat residu} &= \sum_{j=1}^{5} \left(y_{1j} - \overline{y}_1 \right)^2 + \sum_{j=1}^{4} \left(y_{2j} - \overline{y}_2 \right)^2 + \sum_{j=1}^{7} \left(y_{3j} - \overline{y}_3 \right)^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{7} \left(y_{3j} - \overline{y}_3 \right)^2 + \sum_{j=1}^{6} \left(y_{4j} - \overline{y}_4 \right)^2 \\
&= 38 + 30 + 12 + 14 \\
&= 94
\end{aligned}$$

Akhirnya, deviasi individual pengamatan dari mean keseluruhan, $\left(y_{ij} - \overline{y} \right)$ diberikan oleh susunan:

$$\begin{bmatrix}
-5 & 0 & -7 & -3 & 0 & & \\
-1 & 3 & 6 & 0 & & & \\
2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
-3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 &
\end{bmatrix}$$

Variansi total yang ada dalam data itu diukur oleh jumlah kuadrat semua deviasi ini.

$$\begin{aligned}
\text{Jumlah kuadrat total} &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \overline{y} \right)^2 = 94 \\
&= (-5)^2 + 0^2 + (-7)^2 + ... + 1^2 + 0^2 \\
&= 162
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa jumlah kuadrat total ini sama dengan jumlah kuadrat perlakuan ditambah jumlah kuadrat residu.

Selanjutnya, marilah kita perhatikan juga pemisahan derajat bebas yang berkaitan dengan jumlah kuadrat itu. Dalam bentuk umum, yaitu:

$$\begin{bmatrix}\text{Derajat bebas} \\ \text{berkaitan dengan} \\ \text{jumlah kuadrat}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\textit{Banyaknya elemen} \\ \textit{yang kuadratnya} \\ \textit{dijumlah}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\textit{Banyaknya kendala} \\ \textit{linear yang dipenuhi} \\ \textit{elemen} - \textit{elemen itu}\end{bmatrix}$$

Dalam contoh ini, jumlah kuadrat perlakuan sama dengan jumlah empat suku $n_1(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + n_2(\bar{y}_2 - \bar{y})^2 + n_3(\bar{y}_3 - \bar{y})^2 + n_4(\bar{y}_4 - \bar{y})^2$, yang elemen-elemennya memenuhi satu kendala.

$$n_1(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + n_2(\bar{y}_2 - \bar{y})^2 + n_3(\bar{y}_3 - \bar{y})^2 + n_4(\bar{y}_4 - \bar{y})^2 = 0$$

Persamaan ini berlaku karena mean keseluruhan $\bar{y}$ adalah rata-rata bertimbang mean-mean perlakuan itu atau $\bar{y} = \dfrac{n_1\bar{y}_1 + n_2\bar{y}_2 + n_3\bar{y}_3 + n_4\bar{y}_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$.

Akibatnya, besar derajat bebas yang berkaitan dengan jumlah kuadrat perlakuan adalah 4 – 1 = 3. Untuk menentukan derajat bebas bagi jumlah kuadrat residu, kita perhatikan bahwa bilangan $(y_{ij} - \bar{y})$ dalam tiap baris susunan residu berjumlah nol dan di sana ada empat baris. Maka besar derajat bebas jumlah kuadrat residu adalah $(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - 4 = 22 - 4 = 18$. Jadi, derajat bebas untuk jumlah kuadrat total adalah $(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - 1 = 22 - 1 = 21$ karena ada 22 bilangan $(y_{ij} - \bar{y})$ yang kuadratnya dijumlah memenuhi satu kendala, yakni jumlahnya sama dengan nol. Perhatikan bahwa derajat bebas jumlah kuadrat total sama dengan jumlah dari derajat bebas perlakuan dan sesatan (residu).

Kita ringkaskan hitungan itu dalam Tabel 6.3 berikut.

Tabel 6.3

Sumber	Jumlah Kuadrat	db
Perlakuan	68	3
Sesatan	94	18
Total	162	21

Dipandu oleh contoh numerik ini, sekarang kita sajikan rumus umum bagi analisis variansi untuk membandingkan k perlakuan, dengan menggunakan struktur data yang diberikan dalam Tabel 6.1. Dimulai dengan pemisahan dasar.

$$\left(y_{ij}-\bar{y}\right)=\left(\bar{y}_i-\bar{y}\right)+\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)$$

dan mengkuadratkan kedua ruas persamaan itu, kita peroleh:

$$\left(y_{ij}-\bar{y}\right)^2=\left(\bar{y}_i-\bar{y}\right)^2+\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)+2\left(\bar{y}_i-\bar{y}\right)\left(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_i\right)$$

Jika dijumlah untuk $j = 1, 2, \dots, n_i$, suku terakhir ruas kanan persamaan ini menjadi nol karena hubungan $\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}\right)=0$. Dengan demikian, menjumlah tiap ruas persamaan di atas untuk $j = 1, 2, \dots, n_i$ dan $i = 1, 2, \dots, k$ akan memberikan pemisahan

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}\right)^2=\sum_{j=1}^{k}n_i\left(y_{ij}-\bar{y}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\bar{y}\right)^2$$

$$\begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{JK total} & \text{JK perlakuan} & \text{JK residu (JK sesatan)} \\ db=\sum_{i\ x}^{k}n_i-1 & db=k-1 & db=\sum_{i=1}^{k}n_i-k\end{array}$$

Biasanya pemisahan jumlah kuadrat dan derajat bebas itu kita sajikan dalam bentuk tabel yang dinamakan *tabel analisis variansi,* disingkat *tabel ANAVA*. Tabel ini memuat kolom tambahan untuk *kuadrat rata-rata* yang berkaitan dengan suatu komponen yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{Kuadrat rata-rata}=\frac{\text{jumlah kuadrat}}{\text{db}}$$

Tabel ANAVA untuk membandingkan k perlakuan tampak dalam Tabel 6.4.

Tabel 6.4
Tabel ANAVA untuk Membandingkan k Perlakuan

Sumber	Jumlah Kuadrat	Db	Kuadrat Rata-rata
Perlakuan	$JKP = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2$	$k-1$	$KRP = \dfrac{JKP}{k-1}$
Sesatan	$JKS = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2$	$\sum_{i=1}^{k} n_i - k$	$KRS = \dfrac{JKS}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k}$
Total	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2$	$\sum_{i=1}^{k} n_i - 1$	

1. Beberapa Rumus Alternatif

Dalam melakukan analisis variansi, kita mempunyai rumus-rumus alternatif untuk menghitung jumlah kuadrat adalah:

$$T_i = \sum_{j=1}^{k} y_{ij} = \text{ jumlah semua respons dari perlakuan i}$$

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \text{ jumlah semua pengamatan.}$$

Jumlah kuadrat kita hitung sebagai berikut.

$$JK \text{ total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}, \text{dengan } n = \sum_{i=1}^{k} n_1$$

$$JKP \quad = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{n}$$

$$JKS \quad = JK\ total - JKP$$

Contoh 6.2

Kita kembali ke data dalam Contoh 6.1

$T_1 = 10 + 15 + 8 + 12 + 15 = 60 \qquad n_1 = 5$

$T_2 = 14 + 18 + 21 + 15 = 68 \qquad n_2 = 4$

$T_3 = 17 + 16 + 14 + 15 + 17 + 15 + 18 = 112 \qquad n_3 = 7$

$T_4 = 12 + 15 + 17 + 15 + 16 + 15 = 90 \qquad n_4 = 6$

$$dan T_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \qquad n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$
$$= 60 + 68 + 112 + 90 = 330 \qquad = 5 + 4 + 7 + 6 = 22$$

Oleh karena

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 = 10^2 + 15^2 + ... + 16^2 + 15^2 = 5.112$$

$$JK\ total = 5.112 - \frac{330^2}{22} = 162$$

$$JKP \quad = \frac{60^2}{5} + \frac{68^2}{4} + \frac{112^2}{7} + \frac{90^2}{6} = 68$$

$$JKS \quad = 162 - 68 = 94$$

B. MODEL POPULASI DAN INFERENSI

Guna melakukan uji statistik yang formal bagi tidak adanya perbedaan antara pengaruh beberapa perlakuan kita perlu mempunyai model populasi untuk percobaan itu. Untuk ini, kita anggap bahwa pengukuran respons dengan perlakuan I merupakan sampel random dari suatu populasi normal dengan mean μ_i dan variansi σ^2 sama untuk semua i. Sampel-sampel itu dianggap saling independen.

Model populasi untuk membandingkan k perlakuan

$$Y_{ij} = \mu_i + e_{ij}; j = 1, 2, ..., n_i, i = 1, 2, ..., k$$

dengan μ_i = mean perlakuan i. Sesatan e_{ij} semua independen dan berdistribusi N (0; σ^2).

1. Distribusi F

Hipotesis nol bahwa tidak ada perbedaan antara k mean populasi sekarang dapat dirumuskan $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$.

Hipotesis alternatifnya bahwa tidak semua μ_i itu sama. Dalam mencari kriterium untuk menguji hipotesis nol, kita mengamati jika mean populasi itu semua sama, $\left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)$ diharapkan akan kecil. Sebaliknya kuantitas itu mungkin akan besar jika mean-mean itu berbeda mencolok sekali. Jumlah kuadrat residu yang memberikan taksiran untuk σ^2 , dapat digunakan sebagai ukuran untuk menentukan seberapa besar kuadrat rata-rata perlakuan dapat mencapainya sebelum nilai itu menunjukkan adanya perbedaan yang signifikan. Teori distribusi statistik menyatakan bahwa di bawah H_0 nilai perbandingan (rasio).

$$F = \frac{\text{Kuadrat Rata-rata perlakuan}}{\text{Kuadrat Rata-rata sesatan}} = \frac{JK \text{ perlakuan} / (k-1)}{\text{JK sesatan} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \right)}$$

berdistribusi F dengan $db = (k-1; n-k)$, dengan $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Perhatikan bahwa distribusi F ditentukan dalam bentuk derajat bebas pembilang $\upsilon_1 = (k-1)$ dan derajat bebas penyebutnya $\upsilon_2 = (n-k)$. Kita tulis

$$F_\alpha(\upsilon_1; \upsilon_2) = \text{titik } \alpha \text{ atas distribusi } F \text{ dengan } db = (\upsilon_1; \upsilon_2).$$

Titik α = 0,10 dan α = 0,05 atas distribusi F telah ditabelkan untuk berbagai pasangan derajat bebas. Misalnya, dengan $\upsilon_1 = 7$ dan $\upsilon_2 = 15$, titik α = 0,05 atas distribusi adalah $F_{0,05}(7;15) = 2,71$.

Tabel 6.5.
Titik Persentase Distribusi $F\alpha(\upsilon_1;\upsilon_2)$

υ_2 \ υ_1	………………. 7 ……………….
⋮ 15 ⋮	………………. 2,71 ……………….

Kita ringkaskan uji F yang kita kenalkan, di atas

> Uji F untuk kesamaan beberapa mean
>
> Tolak $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$, jika
> $$F = \frac{JK\text{ Perlakuan}/(k-1)}{\text{JK Sesatan}/(n-k)} \geq F_\alpha(k-1;n-k)$$
> dengan $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ dan $F_\alpha(k-1;n-k)$ titik
> α atas distribusi F dengan $db(k-1;n-k)$

Nilai perbandingan F hitungan biasanya disajikan dalam kolom terakhir tabel ANAVA.

Contoh 6.3

Buatlah tabel ANAVA untuk data dalam Contoh 6.1 tentang pembandingan empat lapisan pita. Ujilah hipotesis nol bahwa mean-mean itu sama. Gunakan $\alpha = 0{,}05$.

Menggunakan hasil hitungan terdahulu untuk jumlah kuadrat komponen, kita buat tabel ANAVA seperti terlihat dalam Tabel 6.6.

Tabel 6.6
Tabel ANAVA Data Contoh 6.1

Sumber	Jumlah Kuadrat	db	Kuadrat Rata-rata	F Ratio
Perlakuan	68	3	22,67	$F = \dfrac{22,67}{5,22}$
Sesatan	94	18	5,22	$= 4,33$
Jumlah	162	21		

Uji hipotesis nol $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ dilakukan dengan membandingkan nilai F hitung 4,34 dengan nilai tabel F dengan db = (3; 18). Dengan tingkat signifikansi 0,05 nilai tabel itu adalah 3,16. Oleh karena ini lebih kecil dari nilai hitungan maka kita simpulkan bahwa ada perbedaan yang signifikan antara kuantitas keempat lapisan pita.

C. INTERVAL KEPERCAYAAN BERSAMA

Uji F ANAVA hanyalah langkah awal dalam analisis kita. Ini menentukan apakah ada perbedaan yang signifikan antara beberapa mean perlakuan. Tujuan kita haruslah lebih dari sekadar menyimpulkan bahwa perbedaan perlakuan ditunjukkan oleh data. Kita harus menyidik persamaan dan perbedaan antara perlakuan. Jadi, masalah penaksiran perbedaan dalan mean perlakuan lebih penting dari uji F keseluruhan.

Kembali keperbandingan k perlakuan menggunakan struktur data dalam Tabel 6.1. Marilah kita periksa bagaimana menghitung interval kepercayaan untuk $\mu_1 - \mu_2$, selisih mean antara perlakuan 1 dan perlakuan 2.

$$t = \frac{\left(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{JKS}{n-k}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

berdistribusi t dengan db = (n – k), dan ini dapat digunakan untuk menghitung interval kepercayaan bagi $\left(\mu_1 - \mu_2\right)$. Secara lebih umum:

Interval Kepercayaan untuk Satu Selisih

Interval kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk $(\mu_1 - \mu_2)$, selisih mean antara perlakuan 1 dan perlakuan 2 diberikan oleh:

$$\left(\overline{y}_1 - \overline{y}_2\right) \pm t_{\alpha/2} \, . \, s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

dengan

$$s = \sqrt{KRS} = \sqrt{\frac{JKS}{n-k}}$$

dan $t_{\alpha/2}$ adalah titik $\alpha/2$ atas distribusi *t* dengan $db = n - k$

Jika pertama-tama uji F menunjukkan perbedaan yang signifikan dalam mean, beberapa statistisi merasa bahwa cukup beralasan untuk membandingkan mean berpasang-pasangan menurut interval-interval terdahulu, tetapi banyak statistisi lebih senang prosedur yang lebih konservatif berdasarkan penalaran berikut.

Tanpa syarat bahwa uji F signifikan, metode yang lalu itu memberikan interval kepercayaan *individual* untuk selisih berpasang-pasangan, misalnya dengan k = 4 perlakuan ada $\binom{4}{2} = 6$ selisih berpasang-pasangan $(\mu_i - \mu_{i'})$, dan prosedur ini digunakan untuk temuan pasangan menghasilkan enam interval kepercayaan, masing-masing mempunyai tingkat kepercayaan $100(1-\alpha)\%$. Sulit untuk menentukan berapa tingkat kepercayaan yang akan dicapai untuk mengklaim bahwa *semua* enam dari interval ini benar. Guna mengatasi dilema ini, berbagai prosedur telah dikembangkan untuk menghitung interval kepercayaan sehingga peluang bersama bahwa semua interval itu benar dijamin tidak jatuh di bawah tingkat yang ditetapkan. Interval semacam itu dinamakan *interval kepercayaan berganda* atau *interval kepercayaan bersama.* Beberapa metode yang diusulkan dalam literatur statistik telah mencapai tingkat kesuksesan yang berbeda-beda. Di sini kita sajikan satu di antaranya yang dapat digunakan dengan mudah dan praktis dalam aplikasi umum.

Prosedur itu yang dinamakan *interval kepercayaan berganda – t,* terdiri dari menghitung interval kepercayaan untuk selisih $(\mu_1 - \mu_2)$ dengan cara yang sangat serupa dengan yang baru saja kita lakukan untuk selisih individual, kecuali digunakannya di sini titik persentase yang berbeda dibaca dari tabel t.

Interval kepercayaan berganda – t

Sekumpulan interval kepercayaan bersama $100(1-\alpha)\%$ untuk m selisih berpasangan $(\mu_1 - \mu_2,)$ diberikan oleh .

$$(\overline{y}_i - \overline{y}_i,) \pm t_{\alpha/(2m)} \,.\, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

dengan $s\sqrt{KRS}\,; m =$ banyak interval kepercayaan, dan $t_{\alpha/(2m)} = \text{titik}\, \alpha/(2m)$ atas distribusi t dengan db = n – k. Menggunakan prosedur ini, peluang bahwa semua m interval akan benar paling sedikit $(1-\alpha)$.

Menurut cara kerjanya, penghitungan interval kepercayaan ini tidak memerlukan sesuatu konsep atau hitungan-hitungan yang baru, tetapi biasanya melibatkan beberapa titik persentase t yang tidak standar. Misalnya, dengan k = 3 dan $(1-\alpha) = 0{,}95$, jika kita ingin menghitung interval bersamaan untuk semua $m = \binom{3}{2} = 3$ selisih berpasangan kita memerlukan titik $\alpha/(2m) = 0{,}05/6 = 0{,}0083$ atas suatu distribusi t.

Contoh 6.4

Suatu percobaan di lakukan untuk menentukan kekurangan kelembaban tanah sebagai akibat dari berbeda-bedanya banyak sisa kayu yang tertinggal setelah pemotongan pohon dalam suatu hutan. Tiga perlakuan adalah perlakuan 1 : tidak ada kayu yang tertinggal; perlakuan 2 : 2.000 unit kayu tertinggal perlakuan 3 : 8.000 unit kayu tertinggal. Pengukuran kekurangan kelembaban tertuang dalam Tabel 6.7. Lakukan uji ANAVA dan hitunglah interval kepercayaan untuk perbedaan perlakuan.

Tabel 6.7
Kekurangan Kelembaban dalam Tanah

Perlakuan	Pengamatan						Jumlah	Mean
1	1,52	1,38	1,29	1,48	1,63		$T_1 = 7,30$	$\overline{y}_1 = 1,460$
2	1,63	1,82	1,35	1,03	2,30	1,45	$T_2 = 9,58$	$\overline{y}_2 = 1,597$
3	2,56	3,32	2,76	2,63	2,12	2,78	$T_3 = 16,17$	$\overline{y}_3 = 2,693$
							Jumlah keseluruhan T = 33,05	Mean keseluruhan $y = 1,944$

Analisis kita menggunakan rumus-rumus alternatif untuk jumlah kuadrat yang melibatkan total.

Banyak pengamatan keseluruhan n = 5 + 6 + 6 = 17

Jika total $= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}$

$= 71,3047 - 64,2531 = 7,0516$

Jika perlakuan $= \sum_{i=1}^{3} n_i\left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{n}$

$= 69,5322 - 64,2531 = 5,2791$

JK sesatan $= JK\ total - JK$ sesatan $= 1,7725$

Tabel ANAVA,seperti tampak dalam Tabel 6.8

Tabel 6.8
Tabel ANAVA untuk Membandingkan Kekurangan Kelembaban

Sumber	Jumlah Kuadarat	db	Kuadrat Rata-rata	F-ratio
Perlakuan	5,2791	2	2,640	20,79
Sesatan	1,7725	14	0,127	
Total	7,0516	16		

Oleh karena nilai F hitungan lebih besar dari nilai Tabel $F_{0,05}$ (2;14) = 3,74, hipotesis nol bahwa tidak ada perbedaan dalam pengaruh perlakuan ditolak pada $\alpha = 0,05$. Sebenarnya penolakan ini akan benar pada hampir setiap tingkat signifikasi. Dalam menghitung sekumpulan interval kepercayaan berganda – t 95% untuk selisih berpasangan, kita perhatikan adanya $\binom{3}{2} = 3$ pasang:

$$\frac{\alpha}{2m} = \frac{0,05}{2(3)} = 0,00833$$

Dari tabel distribusi t titik 0,00833 atas distribusi t dengan db = 14 adalah 2,718. Interval kepercayaan bersama dihitung sebagai berikut.

$$\mu_1 - \mu_2 : (1,597 - 1,460) \pm 2,718(0,356)\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}}$$
$$= 0,137 \pm 0,586 \text{ atau } (-0,449; 0,723)$$
$$\mu_3 - \mu_2 : (2,695 - 1,597) \pm 2,718(0,356)\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}$$
$$= 1,098 \pm 0,559 \text{ atau } (0,539 ; 1,657)$$
$$\mu_3 - \mu_1 : (2,695 - 1,460) \pm 2,718(0,356)\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}}$$
$$= 1,235 \pm 0,586 \text{ atau } (0,649 ; 1,821)$$

Interval-interval kepercayaan ini menunjukkan bahwa perlakuan 1 dan 2 tidak berbeda signifikan, tetapi mean perlakuan 3 cukup berbeda (signifikan) dengan mean perlakuan 1 dan 2.

Peragaan dan Diagnostik Grafik (sebagai tambahan ANAVA)

Sebagai tambahan untuk uji hipotesis dan hitungan interval kepercayaan, suatu analisis data harus memuat pemeriksaan yang kritis terhadap anggapan-anggapan yang terlibat dalam modelnya, seperti dalam analisis regresi yang sebenarnya analisis variansi adalah satu kasus khususnya, nilai-nilai residu harus diperiksa untuk meyakinkan adanya pelanggaran anggapan yang serius. Aspek analisis ini telah kita lupakan dalam tabel ANAVA di atas.

Contoh 6.5

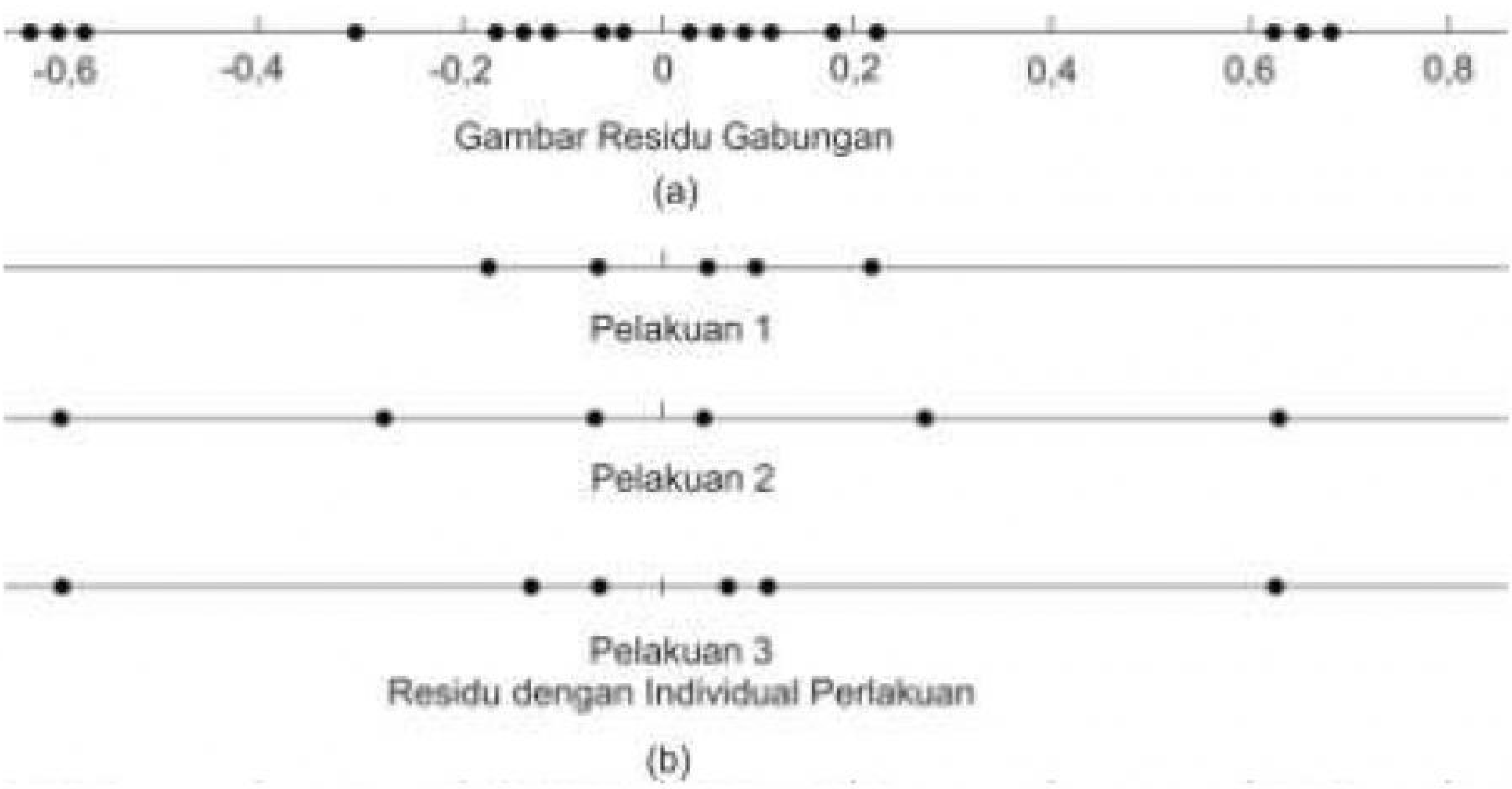
Tentukan nilai-nilai residu untuk data kelembaban dalam Contoh 6.4 (lihat Tabel 6.9) dan periksalah nilai-nilai itu secara grafik untuk melihat adanya kemungkinan pelanggaran terhadap anggapan.

Tabel 6.9

Residu: $\left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}\right)$ untuk Data dari Tabel 6.7

Perlakuan	Residu					
1	0,06	-0,08	-0,17	0,02	0,17	
2	0,03	0,22	-0,25	-0,57	0,70	-0,15
3	-0,14	0,63	0,07	0,07	-0,58	0,09

Gambar residu data ini ditunjukkan dalam Gambar 6.1, dengan diagram titik gabungan disajikan dalam (a) dan diagram titik residu individual perlakuan dalam (b).



Gambar 6.1
Gambar Residu Data Contoh 6.4

Dari pemeriksaan diagram titik itu, variabilitas dalam titik-titik untuk perlakuan 1 tampak sedikit lebih kecil dari variabilitas dalam titik-titik perlakuan 2 dan 3, tetapi hanya dengan beberapa pengamatan, seperti itu sulit untuk menentukan apakah ini terjadi karena kebetulan atau memang perlakuan 1 benar-benar mempunyai variansi yang lebih kecil. Beberapa pengamatan yang lebih banyak lagi biasanya diperlukan guna memperoleh pola yang bermakna bagi gambar individual perlakuan.

Untungnya, prosedur uji ANAVA tegar (*robust*), dalam arti penyimpangan kecil ataupun sedang dari normal dan variansi sama tidak mempengaruhi terlalu serius tentang kinerjanya.

Sebagai tambahan dari analisis mean ANAVA suatu gambaran grafis data, seperti grafik kotak bagi tiap perlakuan membawa informasi penting yang dapat digunakan untuk membandingkan populasi-populasi itu.

Contoh 6.6

Lebar kelopak bunga Iris (tiga jenis: A, B, dan C) masing-masing 50 bunga diukur. Hasil hitungan-hitungan yang dilakukan dituangkan dalam tabel ANAVA sebagai berikut.

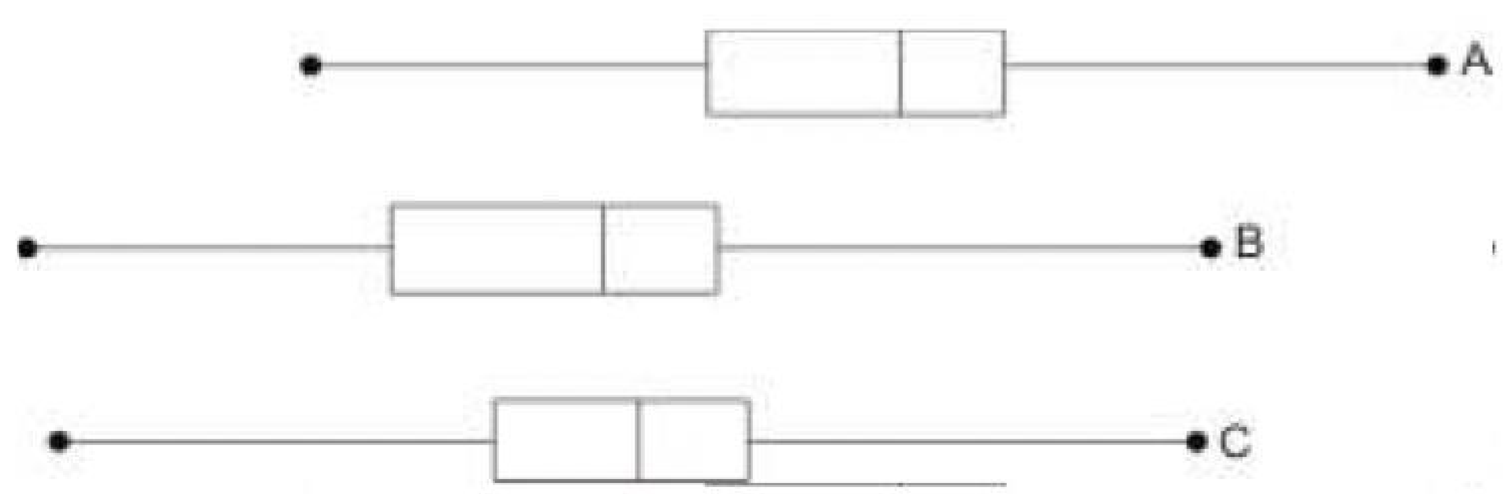
Sumber	JK	db	KR	F
Perlakuan	11,345	2	5,6725	49,16
Sesatan	16,962	147	0,1154	
Jumlah	28,307	149		

Oleh karena $F_{0,05}(2; 147) = 3,05$. kita tolak hipotesis nol bahwa mean lebar kelopak bunga rama, pada tingkat signifikansi 5%.

Perlakuan	Mean Sampel
A	3,428
B	2,770
C	2,974

Jika hitung interval kepercayaan berganda – t akan terlihat bahwa semua mean populasi akan berbeda satu dengan yang lain.

Grafik kotak memperlihatkan secara grafis variasi pengukuran lebar kelopak bunga. Dari Gambar 6.2 kita lihat jenis A mempunyai lebar kelopak yang terbesar di antara ketiganya.



Gambar 6.2
Gambar Kotak untuk Tiga Sampel Iris

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) a. Buatlah susunan yang menunjukkan pemisahan untuk pengamatan-pengamatan berikut!
   b. Hitunglah jumlah kuadrat untuk tiap susunan.
   c. Tentukan derajat bebas untuk tiap jumlah kuadrat.
   d. Tuangkan dalam tabel ANAVA.

Perlakuan	Pengamatan
A	35; 24; 28; 21
B	19; 14; 14; 13
C	21; 16; 21;14

2) Dipunyai statistik ringkasan dari sampel-sampel ini

$$n_1 = 10,\ \overline{y}_1 = 5, (n_1 - 1)\ S_1^2 = \sum_{j=1}^{10} \left(y_{1j} - \overline{y}_1 \right)^2 = 30$$

$$n_2 = 6,\ \overline{y}_2 = 2, (n_2 - 1)\ S_2^2 = \sum_{j=1}^{6} \left(y_{2j} - \overline{y}_2 \right)^2 = 16$$

$$n_3 = 9,\ \overline{y}_3 = 7, (n_3 - 1)\ S_3^2 = \sum_{j=1}^{9} \left(y_{3j} - \overline{y}_3 \right)^2 = 25$$

   Buatlah tabel ANAVA!

3) Menggunakan tabel titik persentase distribusi F, carilah:
   a. titik 5% atas jika $\upsilon_1 = 5$ dan $\upsilon_2 = 10$;
   b. titik 5% atas jika $\upsilon_1 = 10$ dan $\upsilon_2 = 5$;
   c. titik 10% atas jika $\upsilon_1 = 3$ dan $\upsilon_2 = 15$

4) Dipunyai tabel ANAVA sebagai berikut.

Sumber	Jumlah Kuadrat	db
Perlakuan	24	5
Sesatan	57	35
Jumlah (total)	81	40

   Lakukan uji F untuk kesamaan mean dengan $\alpha = 0,05$

5) Tiga resep roti dibandingkan kepadatan hasil rotinya. Dengan tiap resep dibuat lima unit roti.
   a. Jika setiap kali dibuat satu unit, bagaimana Anda memilih urutannya?
   b Dengan data berikut, lakukan uji F dengan $\alpha = 0{,}05$ untuk kesamaan mean

Riset	Pengamatan				
1	0,95	0,86	0,71	0,72	0,74
2	0,71	0,85	0,62	0,72	0,64
3	0,69	0,68	0,51	0,73	0,44

6) Dengan mengambil $\alpha = 0{,}05$ dan $n - k = 26$, tentukan persentil distribusi t yang sesuai jika menghitung interval kepercayaan berganda t dengan (a) m = 3 dan (b) m = 5
7) Dipunyai statistik ringkasan berikut.

$$
\begin{array}{ll}
n_1 = 30 & \overline{y}_1 = 10{,}2 \\
n_2 = 18 & \overline{y}_2 = 8{,}1 \quad s = 3{,}2 \\
n_3 = 24 & \overline{y}_3 = 9{,}7 \\
n_4 = 8 & \overline{y}_4 = 6{,}2
\end{array}
$$

   Gunakan $\alpha = 0{,}05$ dan tentukan:
   a. interval *t* untuk masing-masing enam selisih mean itu.
   b. enam interval kepercayaan berganda *t*.

RANGKUMAN

Beberapa populasi dapat dibandingkan menggunakan *Analisis Variansi ANAVA.*

Pengamatan ke-j pada perlakuan i ditulis y_{ij}. Variansi total dalam pengamatan y_{ij} dinyatakan sebagai:

$$\text{Jumlah kuadrat total} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \overline{y} \right)^2$$

Jumlah kuadrat total itu dipisahkan menjadi dua komponen:
(i) *jumlah kuadrat perlakuan*.

$$JKS = \sum_{i=1}^{k} n_1 \left(\overline{y}_1 - \overline{y}\right)^2$$

(ii) *jumlah kuadrat sesatan*

$$JKS = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \overline{y}\right)^2$$

$$\text{Kuadrat rata-rata} = \frac{\text{Jumlah kuadrat}}{\text{Derajat bebas}}$$

Statistik F=(Kuadrat rata-rata perlakuan)/(Kuadrat rata-rata sesatan) Jika menghitung interval kepercayaan untuk selisih mean populasi, $\mu_1 - \mu_2$, lebih disenangi untuk menggunakan *interval kepercayaan berganda t* guna menjamin tingkat kepercayaan keseluruhan untuk semua interval.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Menggunakan tabel distribusi F maka titik 5% atas distribusi F dengan db = (8; 12) adalah ….
   A. 2,17
   B. 2,56
   C. 2,85
   D. 3,12

Data ini untuk soal nomor 2 sampai dengan nomor 5.

Dipunyai data hasil rancangan random lengkap dengan 3 perlakuan sebagai berikut.

Perlakuan 1	Perlakuan 2	Perlakuan 3
19	16	13
18	11	16
21	13	18
18	14	11
		15
		11

2) Maka, JKP sama dengan ….
   A. 77,86
   B. 79,19
   C. 81,12
   D. 83,69

3) Maka, JKS sama dengan ….
   A. 132,22
   B. 134,12
   C. 136,86
   D. 139,89

4) Untuk uji ANAVA kita hitung statistik F sama dengan ….
   A. 2,126
   B. 3,129
   C. 4,971
   D. 5.122

5) Dengan α = 5% daerah kritis uji ANAVA ini adalah ….
   A. F ≥ 2,62
   B. F ≥ 2,98
   C. F ≥ 3,98
   D. F ≥ 4,67

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10.
Dari data hasil percobaan dengan rancangan random lengkap diperoleh statistik ringkasan sebagai berikut:

Perlakuan 1	Perlakuan 2	Perlakuan 3
$\overline{y}_1 = 81,06$ $s_1 = 17,05$ $n_1 = 32$	$\overline{y}_2 = 78,56$ $s_2 = 15,43$ $n_2 = 16$	$\overline{y}_3 = 87,81$ $S_3 = 14,36$ $n_3 = 16$
dengan $s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \overline{y}_i \right)^2 \Big/ (n_i - 1)$		

6) Maka, JKS sama dengan ….
   A. 15676,19
   B. 14936,26
   C. 14367,12
   D. 14136,91

7) Maka, JKP sama dengan ….
   A. 736,25
   B. 756,75
   C. 776,65
   D. 791,95

8) Statistik F sama dengan ….
   A. 4,96
   B. 3,63
   C. 2,97
   D. 1,47

9) Dengan $\alpha = 5\%$ daerah kritis uji ANAVA adalah ….
   A. $F \geq 3{,}15$
   B. $F \geq 4{,}91$
   C. $F \geq 5{,}12$
   D. $F \geq 6{,}12$

10) Interval kepercayaan berganda t untuk $\mu_1 - \mu_3$ adalah ….
   A. (-21,92; 6,98)
   B. (-21,31; 4,72)
   C. (-19,72; 6,22)
   D. (-18,11; 5,76)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Analisis Variansi Dua Arah

A. RANCANGAN BLOK RANDOM UNTUK MEMBANDINGKAN *K* PERLAKUAN

Seperti halnya kita dapat memasangkan subjek yang serupa untuk meningkatkan prosedur pengambilan sampel-sampel yang independen, kita dapat juga menyusun atau membuat blok subjek-subjek ke dalam kelompok berukuran k yang homogen jika kita ingin membandingkan k perlakuan. Maka, tiap perlakuan digunakan pada satu unit dalam blok itu dan jika pembandingan hanya dilakukan antara respons perlakuan dari blok yang sama, variabilitas yang tak ada hubungannya (dari luar) sangat berkurang. Inilah konsep yang melandasi rancangan blok random. Misalkan, seorang ahli pertanian ingin mempelajari produktivitas dari empat jenis bibit gandum, yang di tanam pada 3 daerah geografis yang gersang yang mewakili kondisi kekeringan yang berbeda. Lokasi-lokasi itu harus dipisahkan menurut tingkat rata-rata curah hujan, dan hasil per petak tiap-tiap varitas gandum itu dicatat sebagai respons. Dalam contoh ini petak tanah yang dipilih pada masing-masing dari tiga lokasi geografis merupakan blok sehingga kondisi kekeringan dibuat homogen dalam tiap blok. Sebenarnya, istilah "rancangan blok" berasal dari rancangan untuk percobaan pertanian seperti itu, di mana blok menunjukkan kelompok petak yang berdekatan. Beberapa contoh lain yang cocok dengan rancangan blok adalah percobaan klinis untuk membandingkan beberapa obat yang sejenis, dengan subjek eksperimen dikelompokkan dalam blok menurut kelompok umur dan beratnya penderitaan sakit itu, percobaan psikologis membandingkan beberapa perangsang dengan subjek yang dimasukkan dalam blok menurut latar belakang sosial ekonomi, membandingkan beberapa teknik penyimpanan buah-buahan atau sayur-sayuran dengan tiap pengiriman yang datang dipandang sebagai blok.

Sebagaimana namanya menunjukkan, *randomisasi* adalah bagian dasar dari rancangan blok. Sekarang jika pengelompokan subjek percobaan yang berupa dalam blok telah dilakukan kita pilih satu subjek secara random dari blok pertama untuk menerima perlakuan 1, pilih satu lagi dari sisanya untuk menerima perlakuan 2, dan seterusnya. Prosedur yang sama diulangi dengan randomisasi baru untuk tiap blok sisanya. Jika sekiranya mungkin juga akan lebih disenangi untuk memilih urutan random dalam melakukan semua percobaan dari pada hanya mengikuti blok ke blok.

Setelah data diperoleh, data itu dapat disusun dalam baris menurut bloknya dan kolom menurut perlakuannya. Dengan menuliskan pengamatan pada blok i dan perlakuan j dengan y_{ij}, struktur data rancangan blok random dengan b blok dan k perlakuan, seperti ditunjukkan dalam Tabel 6.10. Mean baris dan mean kolom ditulis dengan

$$\text{Mean blok (baris) } i : \overline{y}_{i.} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{ij}$$

$$\text{Mean perlakuan (kolom) } j : \overline{y}_{.j} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} y_{ij}$$

Tabel 6.10
Struktur Data Rancangan Blok Random dengan b Blok dan k Perlakuan

	Perlakuan 1	**Perlakuan 2**	...	**Perlakuan k**	**Mean Blok**
Blok 1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	$\overline{y}_1$
Blok 2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	$\overline{y}_2$
⋮					
Blok b	y_{b1}	y_{b2}	...	y_{bk}	$\overline{y}_b$
Mean Perlakuan	$\overline{y}_{1}$	$\overline{y}_{2}$	...	$\overline{y}_{k}$	$\overline{y}$

Mean blok dan mean perlakuan itu ditunjukkan dalam bagian tepi (kanan dan bawah) tabel. Di sini garis atas pada y menunjukkan rata-rata dan titik pada subskrip menandakan bahwa rata-rata itu diambil meliputi subskrip itu.

Sekarang kita pelajari analisis variansi untuk rancangan blok random dengan data seperti tertuang dalam Contoh 6.7.

Contoh 6.7

Kecepatan memotong empat jenis alat kita bandingkan dalam suatu percobaan. Lima macam benda dengan tingkat kekerasan yang berbeda-beda digunakan sebagai blok dalam percobaan itu. Data pengukuran waktu memotong dalam detik tertuang dalam Tabel 6.11.

Tabel 6.11
Pengukuran Waktu Memotong menurut Jenis Alat (Perlakuan) dan Kekerasan Benda (Blok)

Blok	Perlakuan				Mean blok
	1	2	3	4	
1	12	20	13	11	$\bar{y}_1 = 14$
2	2	14	7	5	$\bar{y}_2 = 7$
3	8	17	13	10	$\bar{y}_3 = 12$
4	1	12	8	3	$\bar{y}_4 = 6$
5	7	17	14	6	$\bar{y}_5 = 11$
Mean Perlakuan	$\bar{y}_{\,1} = 6$	$\bar{y}_{\,2} = 16$	$\bar{y}_{\,3} = 11$	$\bar{y}_{\,4} = 7$	$\bar{y} = \frac{200}{20} = 10$

Pengamatan-pengamatan itu membentuk *tabel dua arah,* dan pemisahannya meliputi suku deviasi untuk kolom (perlakuan) dan deviasi untuk baris (blok).

Pemisahan Pengamatan:

$$\text{Pengamatan} = \begin{matrix}\text{Mean}\\ \text{Keseluruhan}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Deviasi karena}\\ \text{Perlakuan}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Deviasi karena}\\ \text{Blok}\end{matrix} + \text{Residu}$$

$$y_{ij} = \bar{y} + \left(\bar{y}_{\,j} - \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_i - \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_{\,j} - \bar{y}\right)$$

Dengan mengambil pengamatan $y_{11} = 12$ dari contoh 6.7 maka:

$$12 = 10 + (6 - 10) + (14 - 10) + (12 - 14 - 6 + 10)$$
$$= 10 + (-4) + (4) + (2)$$

Tabel 6.12 dan 6.13 memuat hasil-hasil pemisahan semua pengamatan dalam dua bentuk yang berbeda.

Tabel 6.12
Pemisahan Pengamatan untuk Percobaan Blok Random dalam Tabel 6.11

$$
\underset{y_{ij}}{\text{Pengamatan}} = \underset{y_{..}}{\text{Mean Keseluruhan}} + \underset{\left(\bar{y}_i - \bar{y}_{..}\right)}{\text{Pengaruh Blok}} +
$$

$$
\begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 11 \\ 2 & 14 & 7 & 5 \\ 8 & 17 & 13 & 10 \\ 1 & 12 & 8 & 3 \\ 7 & 17 & 14 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} +
$$

$$
\underset{\left(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}\right)}{\text{Pengaruh Perlakuan}} + \underset{\left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)}{\text{Residu}}
$$

$$
\begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 & -3 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}
$$

Tabel 6.13
Bentuk Alternatif Tabel Pemisahan untuk Percobaan Blok Random

Blok	**Perlakuan**						**Deviasi Mean Blok dari Mean Keseluruhan**
	1	2	⋯	j	⋯	K	
1				⋮			
2							$\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)$
⋮							⋮
i	⋯			$y_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y}$		⋯	$\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)$
⋮				⋮			
b							$\left(\bar{y}_b - \bar{y}\right)$
Deviasi Mean Perlakuan dari Mean Keseluruhan	$\left(\bar{y}_1 - \bar{y}\right)$	⋯		$\left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)$	⋯	$\left(\bar{y}_k - \bar{y}\right)$	Mean Keseluruhan $\bar{y}$

Banyak masukan yang berbeda dalam susunan deviasi perlakuan adalah k, dan satu kendala bahwa jumlahnya sama dengan nol. Jadi, derajat bebas (k – 1) dikaitkan dengan jumlah kuadrat perlakuan.

Jumlah kuadrat karena perlakuan

$$JKP = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{y}_{j} - \overline{y}\right)^2$$

$$= b\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{y}_{j} - \overline{y}\right)^2$$

$$dengan\ db = \left(k-1\right)$$

Dalam susunan pengaruh perlakuan dari Tabel 6.12 tiap masukan tampak b = 5 kali, sekali dalam tiap blok. Jumlah kuadrat perlakuan untuk contoh ini adalah:

$JKP = 5\left(-4\right)^2 + 5\left(6\right)^2 + 5\left(1\right)^2 + 5\left(-3\right)^2 = 310$ dengan db = (4 – 1) = 3

Dengan cara yang serupa:

Jumlah kuadrat karena blok

$$JKB = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2$$

$$= k\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2$$

$$dengan\ db = \left(b-1\right)$$

Mengingat susunan pengaruh blok dalam Tabel 6.12, jumlah kuadrat blok untuk kita itu diperoleh.

$$JKB = 4\left(4\right)^2 + 4\left(-3\right)^2 + 4\left(2\right)^2 + 4\left(-4\right)^2 + 4\left(1\right)^2 = 184$$

dengan db = (5 – 1) = 4

Banyak derajat bebas yang berkaitan dengan susunan residu adalah (b – 1)(k – 1). Guna memahami mengapa demikian, perhatikan bahwa di antara b × k residu kendala-kendala berikut dipenuhi. Satu kendala adalah jumlah semua masukan sama dengan nol. Kenyataan bahwa jumlah semua baris sama dengan nol memberikan tambahan (b – 1) kendala. Ini karena setelah menentukan sebarang (b – 1) jumlah baris dan jumlah keseluruhan, jumlah baris sisanya otomatis tertentu. Dengan alasan yang sama, (k – 1) kendala tambahan timbul dari kenyataan bahwa jumlah semua kolom adalah nol. Dengan demikian, banyak derajat bebas untuk residu adalah:

$$bk-1-(b-1)-(k-1)=(b-1)(k-1)$$

> Jumlah kuadrat residu (sesatan)
>
> $$JKS=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(y_{ij}-\overline{y}_{i}-\overline{y}_{j}+\overline{y}\right)^{2}$$
>
> $$dengan\, db=(b-1)(k-1)$$

Dalam contoh kita

$$JKS=2^{2}+0^{2}+(-2)^{2}+\ldots+(-2)^{2}=24$$

dengan db = (5 – 1)(4 – 1) = 12

Akhirnya, jumlah kuadrat total sama dengan jumlah kuadrat tiap pengamatan terhadap mean keseluruhan atau

$$JK\,total=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(y_{ij}-\overline{y}\right)^{2}=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}^{2}-bk\,\overline{y}^{2}$$

dengan db = (bk – 1). Dalam contoh, jumlah kuadrat tiap masukan dalam susunan y_{ij} dan menguranginya dengan jumlah kuadrat masukan dalam susunan $\overline{y}$.

$$JK\,total=12^{2}+2^{2}+\ldots+6^{2}-\left(10^{2}+10^{2}+\ldots+10^{2}\right)=518$$

Ini memberikan bilangan yang dapat digunakan untuk memeriksa hitungan-hitungan kita yang terdahulu karena jumlah dari jumlah kuadrat itu dan derajat bebasnya harus sama dengan jumlah kuadrat total dan derajat bebasnya.

Hitungan-hitungan ini diringkaskan dalam tabel ANAVA seperti tertuang dalam Tabel 6.14 untuk kasus yang umum dan dalam Tabel 6.15 untuk data dalam contoh kita. Kolom terakhir, yakni perbandingan F atau *F ratio* akan dijelaskan setelah kita membicarakan model populasinya.

Tabel 6.14
Tabel ANAVA untuk Rancang Blok Random

Sumber	**Jumlah Kuadrat**	**db**	**Kuadrat Rata-rata**	**F-Ratio**
Perlakuan	$JKP = b\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{y}_{j} - \bar{y}\right)^2$	(k – 1)	$KRP = \frac{JKP}{k-1}$	$\frac{KRP}{KRS}$
Blok	$JKB = k\sum_{i=1}^{b}\left(\bar{y}_{i} - \bar{y}\right)^2$	(b – 1)	$KRB = \frac{JKB}{b-1}$	$\frac{KRB}{KRS}$
Sesatan	$JKS = \sum\sum\left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i} - \bar{y}_{j} - \bar{y}\right)^2$	(k -1)(b – 1)	$KRS = \frac{JK}{(b-1)(}$	
Total	$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$	bk – 1		

Tabel 6.15
Tabel ANAVA untuk Data Contoh 6.17

Sumber	**Jumlah Kuadrat**	**db**	**Kuadrat Rata-rata**	**F-Ratio**
Perlakuan	310	3	103,3	51,7
Blok	184	4	46	23
Sesatan	24	12	2	
Total	518	19		

Sekali lagi uji statistik tentang perbedaan perlakuan didasarkan atas model populasi yang mendasarinya.

Model populasi untuk percobaan blok random.

$$\text{Pengamatan} = \begin{matrix}\text{Mean}\\ \text{Keseluruhan}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Pengaruh}\\ \text{blok}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Pengaruh}\\ \text{perlakuan}\end{matrix} + \text{Sesatan}$$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 + \beta_j + e_{ij}$$

$$i = 1,2,\ldots,b \; ; \; j = 1,2,\ldots,k$$

di mana parameter – parameter itu memenuhi

$$\sum_{i=1}^{b} \alpha_i = 0 \quad dan \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$$

dan e_{ij} sesatan random independen berdistribusi $N\left(0;\sigma^2\right)$

Uji untuk tidak adanya perbedaan pengaruh perlakuan atau tidak adanya perbedaan pengaruh blok sekarang dapat dilakukan dengan membandingkan kuadrat rata-rata yang bersangkutan dengan ukuran kuadrat rata-rata sesatan yang menggunakan uji F.

Menolak $H_O : \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$ (tidak ada perbedaan perlakuan) jika

$$\frac{KRP}{KRS} > F\alpha\left[k-1;(b-1)(k-1)\right]$$

Menolak $H_O : \alpha_1 = \ldots = \alpha_6 = 0$ (tidak ada perbedaan blok) jika

$$\frac{KRB}{KRS} > F\alpha\left[b-1;(b-1)(k-1)\right]$$

Untuk menguji hipotesis tidak ada perbedaan perlakuan untuk analisis variansi dalam Tabel 6.15 kita peroleh nilai tabel $F_{0,05}$ (3 ; 12) = 3,49, suatu nilai yang jauh lebih kecil dari nilai F hitungan untuk pengaruh perlakuan. Maka kita simpulkan bahwa perbedaan perlakuan yang sangat signifikan telah ditunjukkan oleh data. Pengaruh blok juga sangat signifikan karena nilai F hitungan 23 jauh lebih besar dari nilai tabel $F_{0,05}$ (4 ; 12) = 3,26.

Perlu ditekankan di sini bahwa suatu pelanggaran yang serius akan anggapan model akan merusak kesimpulan yang ditarik dari analisis karena itu pemeriksaan yang teliti tentang residu harus merupakan kesatuan yang terpadu dari analisisnya. Di samping menggambar seluruh residu dalam satu grafik, gambar yang terpisah untuk individual perlakuan dan individual blok perlu dipelajari. Jika pengamatan dikumpulkan dalam jangka waktu, grafik residu versus urutan waktu juga penting.

Kecuali anggapan distribusi normal dan variansi konstan, ada anggapan lain yang lebih terbatas dalam model ini, yakni pengaruh perlakuan dan pengaruh blok bersifat penjumlahan (*additive*). Dengan perkataan mean populasi respons perlakuan ke-j digunakan untuk satu unit dalam blok ke-i dimodelkan $\mu + \alpha_i + \beta_j$, yang lepas dari mean keseluruhan adalah jumlah komponen murni karena pengaruh perlakuan dan komponen murni pengaruh blok. Jika kinerja relatif dua perlakuan berubah-ubah cukup besar dari satu blok ke blok yang lain, kita katakan ada *interaksi perlakuan - blok* maka model penjumlahan tidak lagi sesuai. Jika jenis alat pemotong yang berbeda dalam Contoh 6.7 bekerja terbaik pada macam benda yang berbeda maka model penjumlahan menjadi rusak.

Interval Kepercayaan untuk Selisih Perlakuan

Selain melakukan uji F keseluruhan untuk menyidik adanya perbedaan perlakuan, peneliti biasanya juga menghitung interval kepercayaan guna membandingkan pasangan perlakuan tertentu. Ini sangat penting khususnya jika uji F berkesimpulan menolak hipotesis nol, yang berarti menyimpulkan adanya perbedaan pengaruh perlakuan.

Selisih mean respons perlakuan j dan j', yakni $\left(\beta_j - \beta_{j'}\right)$, ditaksir dengan $\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_{j'}\right)$, yang berdistribusi normal dengan mean $\left(\beta_j - \beta_{j'}\right)$, dan variansi:

$$\sigma^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)=\sigma^2\left(\frac{2}{b}\right)$$

maka

$$t=\frac{\left(Y_j - Y_{j'}\right)-\left(\beta_j - \beta_{j'}\right)}{\sqrt{KRS}\sqrt{(2/b)}}$$

berdistribusi t dengan db = (b – 1) (k – 1) yang dapat digunakan untuk menghitung interval kepercayaan bagi selisih individual $\left(\beta_j - \beta_{j'}\right)$,

Jika beberapa pembadingan berpasangan seperti itu dijadikan satu menjadi interval kepercayaan bersama, seperti yang telah kita bicarakan berlaku lagi di sini.

B. RANCANGAN PERCOBAAN FAKTORIAL

Kemajuan konsep yang utama dalam rancangan percobaan ditunjukkan oleh rancangan faktorial. Lebih sering penelitian ilmiah dilakukan untuk mempelajari pengaruh beberapa faktor pada respons. Dengan mengubah-ubah faktor-faktor itu secara serentak selama percobaan, informasi dapat dikumpulkan tidak hanya tentang pengaruh individual faktor, tetapi juga tentang bagaimana faktor-faktor itu berinteraksi. Ini berbeda dengan konsep kuno dalam melakukan percobaan secara terpisah dengan satu faktor yang dibuat berubah-ubah. Kelemahan utama dari percobaan satu faktor ini adalah tidak memberikannya informasi tentang kemungkinan adanya interaksi antara beberapa faktor. Lagi pula, himpunan pengukuran yang dikumpulkan dari percobaan satu faktor hanya bermanfaat untuk melakukan inferensi tentang faktor itu saja. Dalam rancangan faktorial, penilaian tentang pengaruh tiap-tiap faktor didasarkan atas himpunan pengukuran keseluruhannya sehingga dapat dicapai pemanfaatan sumber-sumber percobaan yang lebih efisien dalam rancangan ini.

Sebagai pengenalan pada pemikiran dasar suatu rancangan faktorial, kita misalkan 2 faktor A dan B akan dipelajari dalam suatu percobaan, dengan:

Faktor A mempunyai p tingkat

Faktor B mempunyai q tingkat

Tiap kombinasi satu tingkat faktor A dan satu tingkat faktor B mendefinisikan satu perlakuan sehingga seluruhnya ada pq perlakuan dalam percobaan ini. Maka rancangan itu dinamakan rancangan faktorial $p \times q$. Satu replikasi terdiri dari penetapan pq unit percobaan secara random satu perlakuan untuk masing-masing. Struktur data hasilnya dapat disajikan dalam tabel dua arah, seperti ditunjukkan dalam Tabel 6.16. Jika percobaan ini diulang-ulang r kali menggunakan r himpunan pq unit pecobaan, kita akan mempunyai percobaan faktorial $p \times q$ dengan r replikasi.

Sekarang dapat kita catat bahwa struktur data dalam Tabel 6.16 identik dengan rancangan blok random dalam Tabel 6.10. Dalam rancangan blok random, faktor "Blok" berguna untuk mengurangi variansi sesatan. Dengan demikian, akan meningkatkan ketepatan inferensi tentang faktor "perlakuan" yang utama.

Tabel 6.16
Struktur Data untuk Rancangan Faktorial p × q dengan Satu Replikasi

		Tingkat Faktor B			
		B_1	B_2	$\cdots$	B_q
Tingkat Faktor A	A_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1q}
	A_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2q}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	A_p	y_{p1}	y_{p2}	$\cdots$	y_{pq}

Maksud rancangan itu adalah untuk menghilangkan pengaruh blok, tidak untuk mempelajarinya. Dalam rancangan faktorial, diinginkan inferensi untuk setiap pengaruh individual perlakuan inferensi untuk setiap pengaruh individual perlakuan dan jika mungkin tentang interaksi juga, tetapi pemisahan pengamatan dan Tabel ANAVA secara formal identik dengan yang untuk rancangan blok random, dengan blok memainkan peranan faktor A dan perlakuan memainkan peranan faktor B. Rancangan dengan satu replikasi tidak memungkinkan kita untuk membuat inferensi tentang interaksi yang mungkin antara faktor-faktor itu. Analisis didasarkan atas anggapan model penjumlahan.

Model penjumlahan untuk percobaan dua faktor

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

dengan μ = mean keseluruhan

α_i = pengaruh faktor A tingkat i; $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$

β_j = pengaruh faktor A tingkat j; $\sum_{j=1}^{q} \beta_j = 0$

dan e_{ij} sesatan random independen berdistribusi $N\left(0;\sigma^2\right)$

Pemisahan pengamatan

Pengamatan = Mean Keseluruhan + Deviasi karena Faktor A + Deviasi karena Faktor B + Residu

$$\bar{y}_{ij} = \bar{y} + \left(\bar{y}_i - \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}\right)$$

Pisahan jumlah kuadrat tampak dalam tabel ANAVA, seperti tertuang dalam Tabel 6.17, dengan kuadrat rata-rata untuk setiap faktor dibandingkan dengan jumlah kuadrat residu (sesatan) dengan menggunakan uji F.

Tabel 6.17
Tabel ANAVA untuk Rancang Faktorial p × q dengan Satu Replikasi

Sumber	Jumlah Kuadrat	db	Kuadrat Rata-rata	F-Ratio
Faktor A	$JKA = q\sum_{i=1}^{p}\left(\bar{y}_{i} - \bar{y}\right)^2$	p – 1	KRA	$\frac{KRA}{KRS}$
Faktor B	$JKB = p\sum_{j=1}^{q}\left(\bar{y}_{j} - \bar{y}\right)^2$	q – 1	KRB	$\frac{KRB}{KRS}$
Residu (sesatan)	$JKS = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i} - \bar{y}_{j} - \bar{y}\right)^2$	(p – 1) (q – 1)	KRS	
Total	$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\right)^2$	$pq-1$		

Interaksi dan Interpretasi

Dalam model yang selama ini kita pelajari, kita menganggap bahwa.

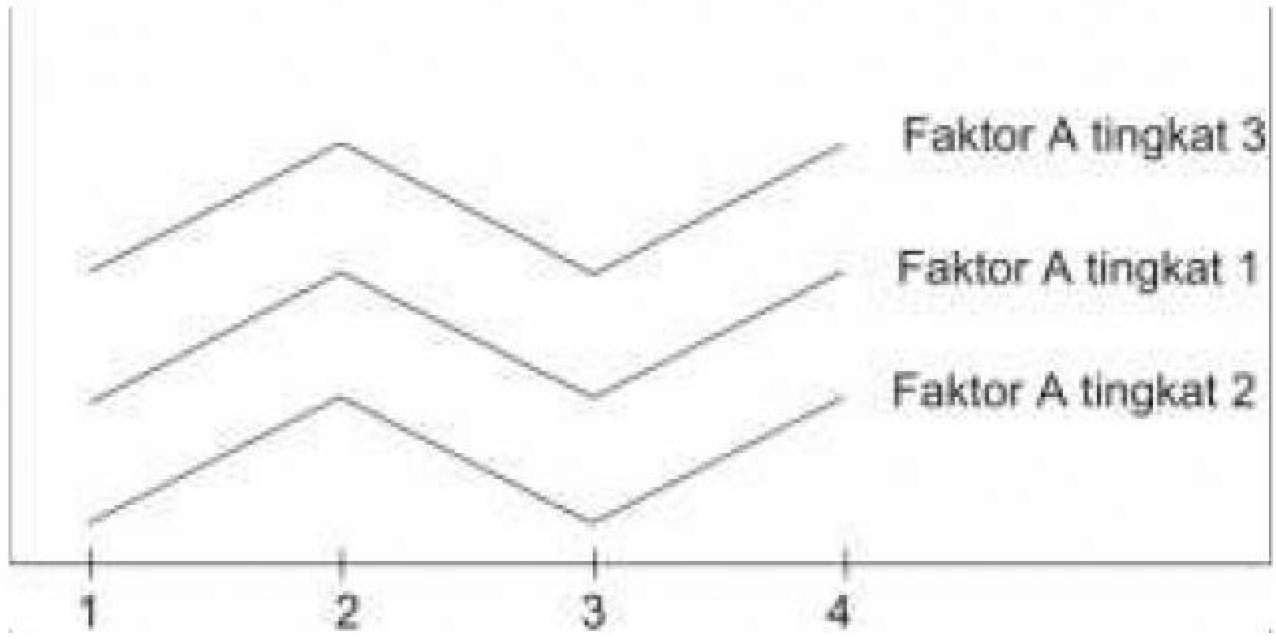
$$E\left(Y_{ij}\right) = E\left(\mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}\right) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

Sekarang kita pandang pembandingan mean populasi faktor A tingkat 1 dan 3 pada faktor B tingkat j yang tetap. Nilai harapan itu dibandingkan dengan:

$$\begin{pmatrix}\text{Mean A}\\ \text{Tingkat 1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Mean A}\\ \text{Tingkat 3}\end{pmatrix} = \mu + \alpha_i + \beta_j - \left(\mu + \alpha_3 + \beta_j\right)$$

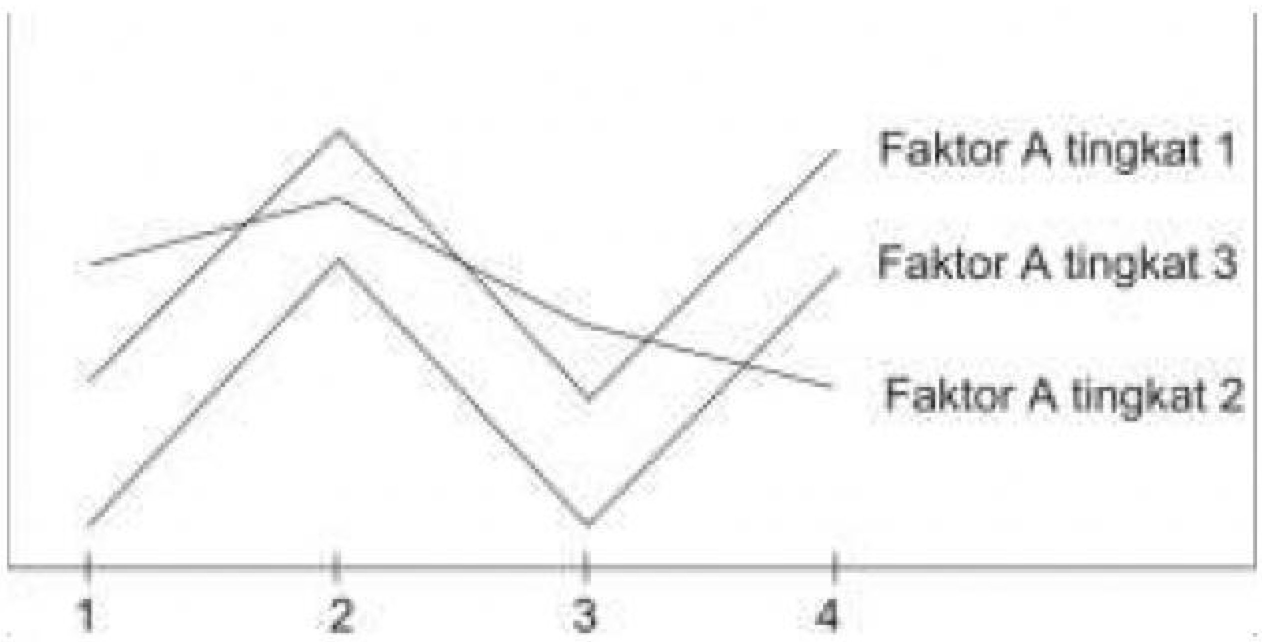
$$= \alpha_1 + \alpha_3$$

Untuk semua faktor B tingkat j. Selisih itu sama apa pun tingkat faktor B-nya. Model ini dinamakan *model penjumlahan* karena pengaruh yang disebabkan oleh tiap faktor itu dijumlahkan. Sifat ini dilukiskan secara grafis dalam Gambar 6.3, dengan selisih antara sebarang dua kurva adalah konstan untuk semua tingkat faktor B.



Gambar 6.3
Kurva untuk Respons Harapan tanpa Interaksi

Situasi yang berbeda digrafikkan dalam Gambar 6.4 dengan selisih dalam mean respons antara faktor A tingkat 1 dan 2 kadang-kadang positif dan kadang-kadang negatif. Karena keadaan di sini bergantung pada tingkat faktor B maka faktor A dan faktor B dikatakan *berinteraksi.* Dalam keadaan seperti itu model penjumlahan tidak berlaku.



Gambar 6.4
Kurva untuk Respons Harapan dengan Interaksi

Interaksi sering kali terjadi dalam praktik, dan penting untuk mengenali kehadirannya. Jika interaksi itu tidak diperhitungkan secara wajar, dapat mengaburkan pengaruh-pengaruh utamanya dalam percobaan. Model kita dapat diperluas dengan memasukkan suku interaksi γ_{ij}, yang bergantung pada faktor A tingkat i dan faktor B tingkat j atau

$$\text{Pengamatan} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \text{sesatan}$$

Tetapi, sebagaimana telah disebutkan sebelumnya, percobaan dengan satu replikasi tidak memungkinkan kita untuk membuat inferensi tentang pengaruh utama dan interaksi. Jika kita mencoba untuk melakukan demikian, komponen yang sebelumnya kita namakan "residu" sekarang harus digunakan untuk menaksir parameter interaksi γ_{ij}, dan tidak tersisa suku yang dapat digunakan untuk menaksir variansi sesatan. Jika komponen interaksi dimasukkan dalam model, diperlukan lebih dari satu replikasi dalam percobaan faktorial itu. Dengan banyak replikasi r dalam percobaan faktorial p × q, pengamatan ke k dengan perlakuan (A_i, B_j) kita tulis y_{ijk}. Dengan sekali lagi menggunakan titik dalam subskrip untuk menunjukkan rata-rata maka pemisahan pengamatan adalah:

$$\text{Pengamatan} = \begin{matrix}\text{Mean}\\ \text{Keseluruhan}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Deviasi karena}\\ \text{Faktor A}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Deviasi karena}\\ \text{Faktor B}\end{matrix} + \text{Residu} + \begin{matrix}\text{Interaksi}\\ \text{A}_\text{i}\text{ dengan B}_\text{j}\end{matrix}$$

$$\bar{y}_{ijk} = \bar{y} + \left(\bar{y}_{i} - \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_{j} - \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i} - \bar{y}_{j} + \bar{y}\right) + \left(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij}\right)$$

Analisis variansinya tampak dalam Tabel 6.18

Tabel 6.18
Tabel ANAVA untuk Percobaan Faktorial dengan r Replikasi

Sumber	Jumlah Kuadrat	db	Kuadrat Rata-rata	F-Ratio
Faktor A	$JKA = qr\sum_{i=1}^{p}\left(\bar{y}_{i} - \bar{y}\right)^2$	p–1	KRA	$\frac{KRA}{KRS}$
Faktor B	$JKB = pr\sum_{j=1}^{q}\left(\bar{y}_{j} - \bar{y}\right)^2$	q–1	KRB	$\frac{KRB}{KRS}$
Interaksi A × B	$JKAB = r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i} - \bar{y}_{j} - \bar{y}\right)^2$	(p–1)(q–1)	KRAB	$\frac{KRAB}{KRS}$
Sesatan	$JKS = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij}\right)^2$	pq(r–1)	KRS	
Total	$JKT = \sum\sum\sum\left(y_{ijk} - \bar{y}\right)^2$	$pqr - 1$		

Suatu contoh rancangan faktorial 2 × 2 dengan dua replikasi akan menolong menjelaskan hitung-hitungan tersebut.

Contoh 6.8

Seorang fotografer yang ingin meningkatkan kejelasan gambar yang dicetak menambahkan dua ukuran Metol (1,5 dan 2,5 gram) dan dua ukuran *hydroquinone* (4 dan 6 gram) pada satu liter pencuci film negatif. Hasil penilaian kejelasan yang diperoleh dituangkan dalam Tabel 6.19

Tabel 6.19
Penilaian Kejelasan

		Hydroquinone		
		4	**6**	
Metol	**1,5**	28;30	33;33	$\overline{y}_1 = 31$
	2,5	42;38	40;42	$\overline{y}_2 = 40,5$
		$\overline{y}_{.1.} = 34,5$	$\overline{y}_{.2.} = 37$	$\overline{y}_{...} = 35,75$

Buatlah tabel ANAVA untuk data ini.

Mengidentifikasi Metol sebagai faktor A dan *hydroquinone* sebagai faktor B, notasinya adalah p = q = 2; r = 2. Jadi,

$$JKA = 2\times 2\left[(31-35,75)^2+(40,5-35,75)^2\right]=180,5$$

$$JKB = 2\times 2\left[(34,5-35,75)^2+(37-35,75)^2\right]=12,5$$

$$JKAB = 2\left[(29-31-34,5+35,75)^2+\ldots+(41-40,5-37+35,75)^2\right]=4,5$$

$$JKS = (28-29)^2+(30-29)^2+(33-33)^2+(33-33)^2+(42-40)^2+(38-40)^2 +(40-41)^2+(42-41)^2=12,0$$

$$JK\ total = (28-35,75)^2+(30-35,75)^2+\ldots+(42-35,75)^2=209,5$$

Tabel 6.20
Tabel ANAVA untuk Penilaian Kejelasan

Sumber	JK	db	KR	F-Ratio
Metol	180,5	1	180,5	60,2
Hydroquinone	12,5	1	12,5	4,2
Interaksi	4,5	1	4,5	1,5
Sesatan	12,0	4	3	
Total	209,5	7		

Titik 5% atas distribusi F dengan db = (1; 4) adalah 7,71 sehingga dalam rentang nilai-nilai dalam percobaan itu hanya ukuran Metol yang mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap kejelasan foto.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) a. Lakukan pemisahan untuk pengamatan berikut dari percobaan blok random!
   b. Hitunglah jumlah kuadrat untuk tiap-tiap susunan!
   c. Tentukan derajat bebas dengan memeriksa kendala bagi tiap susunan!

Blok	Perlakuan		
	1	2	3
1	35	19	21
2	24	14	16
3	28	14	21
4	21	13	14

2) a. Dengan mengingat soal no. 1 di atas, periksalah bahwa susunan pengaruh perlakuan, pengaruh blok, dan residu adalah saling ortogonal!
   b. Buatlah tabel ANAVA!
   c. Kesimpulan apa yang dapat Anda tarik dari kedua uji F?

3) Dipunyai data hasil percobaan lapangan dengan rancangan blok random sebagai berikut.

Blok	Varietas					
	1	2	3	4	5	6
1	19,09	16,28	16,31	17,50	16,25	21,09
2	20,29	17,88	18,17	18,05	16,92	21,37
3	20,31	16,88	17,38	17,59	15,88	21,38
4	19,60	17,57	17,53	17,64	14,78	20,52
5	18,62	16,72	16,34	17,38	15,97	21,09
6	20,10	17,32	17,88	18,04	16,66	21,58

a. Lakukan ANAVA untuk data ini!
b. Hitunglah dan gambarlah nilai-nilai residunya.
c. Misalkan, varietas 6 menjadi perhatian khusus bagi kita. Hitung interval kepercayaan bersama 95% untuk selisih antara mean varietas 6 dengan tiap mean yang lain!

4) Suatu percobaan dirancang untuk mempelajari pengaruh dua faktor, A dan B, terhadap respons. Diperoleh data sebagai berikut.

Faktor A	**Faktor B**		
	B_1	**B_2**	**B_3**
	-19	8	7
A_1	-11	-19	23
	-14	-9	23
	-10	-3	32
A_2	-19	-10	29
	-28	-4	18

a. Sebutkan model statistiknya dan lakukan analisis variansi untuk data ini. Ujilah pengaruh faktor utama dan juga pengaruh interaksinya!
b. Hitunglah dan gambarlah nilai-nilai residunya!
c. Hitunglah interval kepercayaan untuk selisih berpasangan antara tingkat-tingkat faktor B!
d. Bagaimana Anda merandomkan perlakuan dalam percobaan?

RANGKUMAN

Menggunakan blok dalam percobaan dimaksudkan untuk mengurangi variabilitas dari luar.

Data dalam blok i dan perlakuan j ditulis dengan y_{ij}. Mean blok i ditulis $\overline{y}_i$ dan mean perlakuan j : $\overline{y}_j$ dan mean keseluruhan $\overline{y}$.

Jumlah kuadrat total $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}\right)^2$ dipisahkan menjadi:

Jumlah kuadrat pelakuan $b\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{y}_{j}-\overline{y}\right)^{2}$ dengan $db=k-1$

Jumlah kuadrat blok $=k\sum_{i=1}^{b}\left(\overline{y}_{i}-\overline{y}\right)^{2}$ dengan $db=b-1, dan$

Jumlah kuadrat sesatan $=\sum_{i=j}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{y}_{ij}-\overline{y}_{i}-\overline{y}_{j}-\overline{y}\right)^{2}$

Untuk menguji $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$ (tidak ada perbedaan perlakuan)

kita gunakan statistik $F=\left[\left[JKP/(k-1)\right]/JKS/(b-1)(k-1)\right]$

Untuk menguji $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_b = 0$ (tidak ada perbedaan blok)

kita gunakan statistik $F=\left[\left[JKB/(b-1)\right]/JKS/(b-1)(k-1)\right]$

Analisis variansi di atas berdasarkan model penjumlahan :

$$y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+e_{ij}$$

Percobaan faktorial dilakukan untuk mempelajari pengaruh beberapa faktor terhadap respons.

Kombinasi satu tingkat faktor A dengan satu tingkat faktor B dinamakan perlakuan. Jika untuk tiap kombinasi hanya diperoleh satu pengamatan maka ANAVA di sini serupa dengan ANAVA dalam rancangan blok random di atas. Tetapi jika untuk tiap perlakuan diamati lebih dari satu pengamatan (ada replikasi) maka di sini tidak lagi berlaku model penjumlahan, melainkan model dengan interaksi. Model itu ditulis:

$$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+e_{ijk}\ ; \qquad \begin{aligned} i&=1,2,\ldots,p\\ j&=1,2,\ldots,q\\ k&=1,2,\ldots,r\end{aligned}$$

Jumlah kuadrat total dipisahkan menjadi:

(i) Jumlah kuadrat faktor A dengan db = p – 1
(ii) Jumlah kuadrat faktor B dengan db = q – 1
(iii) Jumlah kuadrat interaksi (AB) dengan db = (p – 1) (q – 1)
(iv) Jumlah kuadrat sesatan dengan db = pq (r – 1)

$$JKA = qr\sum_{i=1}^{p}\left(\overline{y}_{i} - \overline{y}\right)^2$$

$$JKB = pr\sum_{j=1}^{q}\left(\overline{y}_{j} - \overline{y}\right)^2$$

$$JKAB = r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{i} - \overline{y}_{j} + \overline{y}\right)^2$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\left(\overline{y}_{ijk} - \overline{y}_{ij}\right)^2$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

I. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 7
Tiga unit roti, masing-masing dibuat dengan resep yang berbeda, di panggang dalam satu *oven* pada waktu yang sama. Oleh karena kemungkinan adanya variansi yang tak terkendali dalam kinerja oven maka tiap pembakaran dipandang sebagai blok. Prosedur ini di ulang lima kali dan diperoleh data sebagai berikut.

Blok	Resep		
	1	2	3
1	0,95	0,71	0,69
2	0,86	0,85	0,68
3	0,71	0,62	0,51
4	0,72	0,72	0,73
5	0,74	0,64	0,44

1) Kita hitung JKP sama dengan ….
A. 0,1005
B. 0,0988
C. 0,0861
D. 0.0743

2) Kita hitung JKB sama dengan ….
   A. 0,0866
   B. 0,0997
   C. 0,1009
   D. 0.1121

3) Kita hitung JKS sama dengan ….
   A. 0,0311
   B. 0,0322
   C. 0,0374
   D. 0.0426

4) Statistik F_P dan F_B sama dengan ….
   A. $F_P = 9{,}28$
      $F_B = 4{,}07$
   B. $F_P = 10{,}11$
      $F_B = 5{,}12$
   C. $F_P = 11{,}12$
      $F_B = 5{,}19$
   D. $F_P = 11{,}37$
      $F_B = 5{,}27$

5) Kita hitung interval kepercayaan 95% bersama untuk selisih mean pengaruh resep 1 dan 2, $\mu_1 + \mu_2$, sama dengan ….
   A. (-0,033; 0,0191)
   B. (-0,038; 0,202)
   C. (-0,049; 0,229)
   D. (-0,094; 0,922)

6) Interval kepercayaan 95% bersama untuk $\mu_1 + \mu_3$ ….
   A. (0,032; 0,312)
   B. (0,039; 0,387)
   C. (0,041; 0,399)
   D. (0,049; 0,327)

7) Interval kepercayaan 95% bersama untuk $\mu_2 + \mu_3$ ….
   A. (-0,036; 0,312)
   B. (-0,041; 0,237)
   C. (-0,049; 0,296)
   D. (-0,051; 0,372)

II. Untuk soal nomor 8 sampai dengan nomor 13

Dalam suatu percobaan faktorial 2 × 3 dengan 4 replikasi diperoleh data berikut.

Faktor A	Faktor		
	B_1	B_2	B_3
A_1	93;90 91;98	79;94 50;70	89;91 86;84
A_2	86;71 68;70	74;91 51;96	60;72 93;68

8) Kita hitung JKP sama dengan ….
   A. 440,09
   B. 442.04
   C. 451,07
   D. 459,29

9) Maka, JKB sama dengan ….
   A. 136,33
   B. 149,32
   C. 157,32
   D. 166,33

10) Maka, JKS sama dengan ….
   A. 3081,25
   B. 3191,27
   C. 3282,28
   D. 3383,29

11) Maka, F_A sama dengan ….
   A. 2,582
   B. 3,879
   C. 4.211
   D. 4,763

12) Maka, F_B sama dengan ….
   A. 3,492
   B. 2,376
   C. 1,034
   D. 0,486

13) Maka, F_{AB} sama dengan ….
  A. 0,609
  B. 1,695
  C. 2,112
  D. 3,163

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul berikutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) C
2) A
3) C
4) B
5) C
6) A
7) B
8) D
9) A
10) C

Tes Formatif 2

1) B
2) A
3) D
4) A
5) C
6) D
7) B
8) B
9) D
10) A
11) A
12) D
13) B

Daftar Pustaka

Battacharyya, G.K. and R.A. Johnson (1977). *Statistics Concepts and Methods*. New York: John Willey.

Freud, J. (1979). *Modern Elementary Statistics*. Prentice Hall.

Kooros, A. (1965). *Elements of Mathematical Economics*. Houghton Muffin Company, Boston.

Pfeffenberger, R.C. and J. H. Peterson (1977). *Statistical Methods for Business and Economics*. Richard D. Irwin, Illinois.

Robbins, H. and J.V. Ryzin (1975). *Introduction to Statistics*. Science Research Associates, Inc.

Siegel, S. (1956). *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. New York: McGraw-Hill.