MODUL 2

Penaksir Titik dan Sifat-sifatnya

Prof. Dr. Zanzawi Soejoeti

PENDAHULUAN

Dalam Modul 1 telah dipelajari konsep tentang sampel, statistik, dan distribusinya. Materi dalam Modul 1 yang lalu merupakan dasar bagi inferensi statistik yang sering digunakan dalam analisis statistik.

Pada Modul 2 ini, materi yang akan disajikan terbagi menjadi 2 subpokok bahasan, yaitu tentang menentukan penaksir titik dan kriteria menilai penaksir.

Dalam Kegiatan Belajar 1 akan dibahas mengenai metode untuk menentukan penaksir parameter yang meliputi metode momen, maksimum likelihood, termasuk sifat invariansi penaksir maksimum *likelihood*, sedangkan dalam Kegiatan Belajar 2 akan dibahas mengenai penaksir tak bias dan penaksir tak bias bervariansi minimum uniform.

Materi Modul 3 yang akan datang sebagian besar masih membahas kelanjutan dari materi pada Modul 2 ini. Oleh karena itu, Anda diharapkan dapat memahami materi modul ini dengan baik.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

1. menentukan penaksir titik dengan menggunakan metode momen maupun dengan metode maksimum *likelihood*;
2. menilai penaksir-penaksir berdasarkan berbagai kriteria

KEGIATAN BELAJAR 1

Penaksiran Titik dan Sifat-sifatnya

MENENTUKAN PENAKSIR TITIK

Dalam Modul 1 telah kita kembangkan konsep peluang dan variabel random guna menyusun model matematik bagi fenomena fisik yang tidak deterministik. Sering kali sifat numerik tertentu fenomena fisik itu tidak dapat dihitung secara langsung. Melainkan, perlu diamati nilai-nilai (satu atau beberapa) variabel random yang distribusinya bergantung pada sifat numerik yang menjadi perhatian kita itu. Tujuan utama kita, dalam modul ini dan modul-modul yang akan datang adalah mengembangkan metode-metode guna menganalisis nilai-nilai variabel random yang diamati itu untuk memperoleh informasi tentang sifat numerik yang tidak diketahui itu.

Sebagaimana telah disebutkan di atas, proses guna memperoleh hasil pengamatan suatu fenomena fisik dinamakan eksperimen. Misalkan, hasil eksperimen itu adalah variabel random X, dan $f(x;\theta)$ menunjukkan fungsi peluangnya. Biasanya kita memandang X sebagai nilai pengukuran yang diperoleh dari individu yang dipilih secara random dari suatu populasi. Dalam hal ini, $f(x;\theta)$ akan menunjukkan fungsi peluang populasi-nya, dan itu mencerminkan distribusi pengukuran-pengukuran individu dalam populasi itu.

Dalam beberapa hal, mungkin kita dapat sampai pada model tertentu berdasarkan anggapan-anggapan aksiomatik atau pengetahuan lain tentang populasi itu. Sering kali, pembuat eksperimen tidak dapat menyatakan dengan lengkap fungsi peluangnya, tetapi mungkin hanya dapat menganggap bahwa $f(x;\theta)$ adalah suatu anggota dari keluarga distribusi yang diketahui (seperti : normal, gamma, Weibull atau Poisson), dan θ adalah parameter yang tidak diketahui, seperti mean atau variansi distribusi itu. Tujuan penaksiran titik adalah menentukan nilai yang kiranya sesuai bagi θ berdasarkan data observasi dari populasi itu.

Hasil-hasil dari pelaksanaan eksperimen yang diulang-ulang dapat dimodelkan secara matematik sebagai sampel random dari fungsi peluang populasi itu. Dengan perkataan lain, dianggap bahwa sekumpulan n variabel random independen, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, masing-masing dengan fungsi peluang

$f(x;\theta)$, akan diamati menghasilkan sekumpulan data $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Tentu saja dapat kita tuliskan fungsi peluang bersama variabel random itu sebagai hasil kali $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1;\theta).f(x_2;\theta). \ldots .f(x_n;\theta)$.

Fungsi peluang bersama ini memberikan hubungan antara data pengamatan (observasi) dan model matematik populasinya. Dalam modul ini kita akan mempelajari cara-cara bagaimana memanfaatkan data guna menaksir nilai parameter θ yang tidak diketahui itu.

Dalam modul-modul selanjutnya, akan dikembangkan cara-cara analisis yang lain. Misalnya, data tidak hanya dapat memberikan informasi tentang nilai parameter, tetapi dapat juga memberikan informasi tentang pertanyaan-pertanyaan yang lebih mendasar, misalnya kita harus mulai dengan keluarga fungsi peluang apa. Hal ini, yang biasanya dikenal sebagai uji kesesuaian (goodness of fit), akan kita pelajari dalam Modul 6 yang akan datang. Dapat juga kita menjawab pertanyaan-pertanyaan tertentu tentang populasinya tanpa menganggap bentuk fungsional bagi $f(x;\theta)$. Metode semacam itu, yang dikenal metode nonparametrik, dan juga jenis-jenis analisis yang lain, seperti interval kepercayaan dan uji hipotesis tentang nilai θ, akan kita pelajari kemudian.

Dalam modul ini kita akan menganggap bahwa distribusi populasi yang menjadi perhatian kita dapat dinyatakan dengan anggota keluarga fungsi peluang $f(x;\theta)$ tertentu, yang bergantung pada parameter θ. Dalam beberapa hal, parameter itu akan berbentuk *vektor parameter*, yang akan kita tulis dengan $\underset{\sim}{\theta}$.

Kita misalkan Ω, yang dinamakan *ruang parameter*, menunjukkan himpunan semua nilai-nilai yang mungkin bagi parameter θ. Jika $\underset{\sim}{\theta}$ suatu vektor maka Ω merupakan himpunan bagian suatu Euclidean berdimensi sama, dan dimensi Ω akan berkaitan dengan banyak parameter yang tidak diketahui itu.

Dalam pembicaraan di sini, kita akan menganggap bahwa $X_1, X_2, \ldots, X_n$. adalah sampel random dari $f(x;\theta)$ dan $\tau(\theta)$ adalah suatu fungsi θ.

Definisi 2.1. 1

Statistik, T = t ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) yang digunakan untuk menaksir nilai X dinamakan penaksir (estimator) untuk $\tau(\theta)$, dan nilai pengamatan statistik itu, t = t $((x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dinamakan taksiran (estimasi) untuk $\tau(\theta)$.

Tentu saja, ini termasuk menaksir nilai parameter itu sendiri jika kita ambil $\tau(\theta) = \theta$. Perhatikan bahwa kita menggunakan tiga macam huruf yang berbeda dalam notasi kita. Huruf T besar menunjukkan statistik yang kita gunakan sebagai penaksir, huruf kecil t sebagai nilai observasinya atau estimasinya, dan huruf latin t sebagai fungsi yang kita gunakan pada sampel random itu.

A. METODE PENAKSIRAN

Dalam beberapa hal, penaksir yang "**baik**" dapat diperoleh berdasarkan pertimbangan intuisi, tetapi berbagai metode umum telah dikembangkan guna mendapatkan penaksir-penaksir yang diinginkan. Dalam modul ini kita akan mempelajari beberapa metode diantaranya adalah berikut ini.

1. Metode Momen

Dalam Modul 1 telah diusulkan mean sampel $\overline{X}$, sebagai penaksir mean populasinya, μ. Selanjutnya, di sini akan kita kembangkan metode yang lebih umum yang akan menghasilkan penaksir yang dinamakan *Penaksir Metode Momen* (PMM).

Dipandang fungsi peluang suatu populasi, $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$, yang bergantung pada parameter $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ (dapat juga k = 1, artinya satu parameter saja). Telah kita pelajari bahwa momen terhadap titik asal, μ'_j, umumnya bergantung pada beberapa parameter $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$, yakni:

$$\mu'_j(\theta_1, \ldots, \theta_k) = E(X^j); \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Akan kita definisikan momen-momen distribusi ini sebagai berikut.

Definisi 2.1.2

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sampel random dari $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ maka momen sampel ke k yang pertama adalah:

Orde Momen

Fungsi ini memberikan gambaran tentang sejauh mana distribusi sampel menyebar atau berkumpul di sekitar titik asal.

$$\boxed{M'_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^j}{n}, \quad \boxed{j} = 1, \ 2, \ \ldots, \ k} \qquad (2.1.1)$$

Sebagaimana telah kita pelajari, momen pertama adalah mean, $\mu'_1 = \mu$. Demikian juga, momen sampel yang pertama adalah mean sampel.

Kita pandang kasus yang sederhana, yakni kasus dengan satu parameter yang tidak diketahui, yakni $\theta = \theta_1$. Dengan memandang $\overline{X} = M'_1$ sebagai penaksir yang baik bagi $\mu = \mu_1(\theta)$ maka cukup beralasan untuk menggunakan penyelesaian persamaan $M'_1 = \mu'_1(\hat{\theta})$, yakni $\hat{\theta}$, sebagai penaksir untuk θ. Dengan perkataan lain, karena M'_1 cenderung dekat dengan $\mu'_1(\theta)$ maka dengan syarat tertentu kita dapat mengharapkan $\hat{\theta}$ akan dekat dengan θ.

Secara umum kita katakan, prinsip metode momen adalah memilih penaksir $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ untuk parameter $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ yang membuat momen-momen populasi sama dengan momen-momen sampel. Dengan perkataan lain, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan:

$$M'_j = \mu'_j(\hat{\theta}_1, \ \ldots, \ \hat{\theta}_k); \quad j = 1, \ 2, \ \ldots, \ k \qquad (2.1.2)$$

Contoh 2.1.1

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari

$f(x;\theta) = (\theta+1)x^{\theta}; \quad 0 < x < 1$

Kita ingin menghitung Penaksir Metode Momen (PMM) untuk θ. Pertama-tama kita hitung μ'_1 sebagai berikut.

$$\mu'_1 = E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta} dx$$

$$= \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

Maka, dengan menggunakan momen sampel yang pertama $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ kita peroleh persamaan:

$$\frac{\hat{\theta} + 1}{\hat{\theta} + 2} = \bar{X} \text{ sehingga } \hat{\theta} = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}} \text{ adalah PMM untuk } \theta$$

Contoh 2.1.2

Misalkan, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari distribusi Uniform:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta - \alpha}; \quad \alpha < x < \beta.$$

Hasil dari integral x.f(x)
Lihat caranya di contoh 2.1.1

Dapat kita hitung:

$$\mu_1' = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ dan } \mu_2' = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}$$

Integral kedua

Dengan menuliskan momen sampel $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ dan $\bar{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n$ kita punyai persamaan:

1. $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \bar{X}$
2. $\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{12} + \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \bar{\bar{X}}$

Sistem persamaan itu dapat disederhanakan menjadi

Deviasi Standar

1. $\hat{\beta} + \hat{\alpha} = 2\bar{X}$
2. $\hat{\beta} - \hat{\alpha} = S\sqrt{12}$ dengan $\boxed{S = \sqrt{\bar{\bar{X}} - \bar{X}^2}}$

Maka, kita peroleh PMM:

$$\hat{\beta} = \bar{X} + \frac{1}{2}S\sqrt{12} \text{ dan } \hat{\alpha} = \bar{X} - \frac{1}{2}S\sqrt{12}$$

Contoh 2.1.3

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari suatu distribusi eksponensial dengan mean θ. Misalkan pula kita ingin menaksir peluang $p(\theta) = P(X \geq 1) = e^{-1/\theta}$

Perhatikan bahwa $\mu_1'(\theta) = E(X) = \mu = \theta$ sehingga PMM untuk θ adalah $\hat{\theta} = \bar{X}$.

Karena mean nya sudah diketahui dari persamaan distribusi eksponensial
maka, momen pertama tidak perlu dicari lagi, karena sama dengan mean

Dari $p = p(\theta) = e^{-1/\theta} = e^{-1/\mu}$ kita peroleh $\mu = \mu(p) = -1/\ln p$ dan jika disamakan maka $\overline{X} = \mu(\hat{p}) = -1/\ln \hat{p}$ maka PMM untuk p adalah $\hat{p} = e^{-1/\bar{x}}$.

Jadi dalam hal ini $\hat{p} = p(\hat{\theta})$. (sifat invariansi).

Jadi, untuk menaksir $\tau(\theta)$, mungkin pertama-tama kita selesaikan $\overline{X} = \mu(\hat{\theta})$ guna memperoleh PMM bagi θ, dan selanjutnya menggunakan τ $(\hat{\theta})$ untuk memperoleh PMM bagi τ. Dapat juga kita menuliskan secara langsung μ dalam τ dan menyelesaikan $\overline{X} = \mu(\hat{\tau})$ guna memperoleh PMM bagi τ. Tidak jelas apakah kedua pendekatan itu akan selalu memberikan hasil yang sama ataukah tidak, tetapi jika $\hat{\theta}$ adalah PMM untuk θ maka kita juga akan menyatakan bahwa $\tau(\hat{\theta})$ juga PMM untuk $\tau(\theta)$. Pada umumnya, jika sudah diperoleh PMM untuk parameter $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ maka $\hat{\tau}_j(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \tau_j(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k)$ akan digunakan untuk menaksir fungsi lain dari parameter-parameter itu.

2. Metode Maksimum Likelihood

Sekarang akan kita pelajari metode yang sangat sering menghasilkan penaksir yang mempunyai sifat-sifat yang disenangi, khususnya sifat-sifat sampel besar. Metode ini akan memilih nilai dalam ruang parameter yang berkaitan dengan *likelihood* (kemungkinan) yang terbesar bagi data observasi sebagai penaksir suatu parameter yang tidak diketahui.

Contoh 2.1.4

Misalkan, kita punyai sebuah mata uang yang tidak seimbang (atau bias) dan diketahui bahwa rata-rata proporsi muka (M) adalah salah satu dari tiga nilai p = 0,20; 0,30; atau 0,80. Suatu eksperimen dilakukan dengan melemparkan mata uang logam itu dua kali dan diamati berapa banyak M diperoleh. Hal ini dapat dimodelkan secara matematik sebagai sampel random berukuran $n = 2$, X_1 dan X_2, dari distribusi Bernoulli, $X_i \sim BIN\ (1; p)$, dengan ruang parameter $\Omega = \{0{,}20;\ 0{,}30;\ 0{,}80\}$. Perhatikan bahwa PMM untuk p, yakni $\overline{X}$, tidak menghasilkan taksiran yang "baik" dalam contoh ini, sebab nilai-nilai yang mungkin hanya $\overline{X}$ = 0; 0,5; atau 1, dan nilai-nilai ini tidak ada dalam Ω.

Pendekatan ini mencerminkan situasi di mana penaksiran metode momen tidak selalu menghasilkan taksiran yang masuk akal atau dapat diterima dalam konteks distribusi diskrit seperti distribusi Bernoulli, terutama ketika ruang parameter terbatas. Oleh karena itu, metode penaksiran lain, seperti metode Maksimum Likelihood (ML), mungkin lebih sesuai dalam kasus ini.

Sekarang kita pandang fungsi peluang bersama sampel random itu,

$$f(x_1,\ x_2;\ p) = p^{x_1 + x_2}(1-p)^{2 - x_1 - x_2} \quad ; \quad x_i = 0;\ 1.$$

Nilai-nilai $f(x_1, x_2; p)$ dituangkan dalam Tabel 2.1.1 untuk berbagai pasangan (x_1, x_2) dan nilai-nilai p.

Tabel 1.2
Fungsi Peluang Bersama Banyak M 2 Lemparan 1 Mata Uang Logam yang Tak Seimbang

p	$(x_1;\ x_2)$ (0;0)	(0;1)	(1;0)	(1;1)
0,20	0,64	0,16	0,16	0,04
0,30	0,49	0,21	0,21	0,09
0,80	0,04	0,16	0,16	0,64

Misalkan, eksperimen itu menghasilkan pengamatan pasangan $(x_1;\ x_2)$ = (0; 0). Dari Tabel 2.1.1 terlihat bahwa kemungkinannya lebih besar bahwa p = 0,20 dari pada dua nilai yang lain. Demikian juga, $(x_1;\ x_2)$ = (0; 1) atau (1; 0) akan berkaitan dengan p = 0,30, dan $(x_1;\ x_2)$ = (1;1) akan berkaitan dengan p = 0,80. Jadi taksiran yang memaksimumkan *likehood* (kemungkinan) untuk pasangan pengamatan $(x_1;\ x_2)$ adalah:

$$\hat{p} = \begin{cases} 0,20 & \text{jika} \quad (x_1; x_2) = (0;\ 0) \\ 0,30 & \text{jika} \quad (x_1; x_2) = (0;\ 1) \quad \text{atau} \quad (1;\ 0) \\ 0,80 & \text{jika} \quad (x_1; x_2) = (1;\ 1) \end{cases}$$

Secara lebih umum, suatu himpunan variabel random diskret, fungsi peluang bersama suatu sampel random yang dievaluasi pada suatu himpunan data sampel tertentu, misalnya $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$, menunjukkan peluang bahwa himpunan data observasi $x_1, x_2, ..., x_n$ akan terjadi.

Untuk variabel random kontinu, $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$ bukan suatu peluang, tetapi masih mencerminkan "likelihood" relatif bahwa himpunan data itu akan terjadi, dan kemungkinan ini bergantung pada nilai parameter yang sebenarnya.

Definisi 2.1.3:Fungsi *Likelihood*

Fungsi peluang bersama *n* variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ pada nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$, yakni $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ dinamakan *fungsi "likehood"*. Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n$, tertentu fungsi *likelihood* adalah fungsi θ yang sering ditulis dengan $L(\theta)$.

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ menunjukkan sampel random dari $f(x; \theta)$ maka:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta), f(x_2;\theta), \dots, f(x_n;\theta) \qquad (2.1.3)$$

Untuk suatu himpunan data pengamatan, $L(\theta)$ memberikan suatu "likelihood" himpunan itu terjadi sebagai fungsi θ. Prinsip penaksiran "maksimum likelihood" adalah memilih nilai taksiran bagi θ, untuk himpunan data yang kita punyai, yang merupakan nilai yang memberikan kemungkinan terbesar bahwa himpunan data itu akan terjadi. Yakni, kemungkinan (*likelihood*) akan mengamati suatu himpunan observasi tertentu lebih tinggi jika $\theta = \theta_1$ dari pada jika $\theta = \theta_2$ maka akan beralasan jika kita memilih θ_1 sebagai nilai taksiran bagi θ dari pada nilai θ_2.

Definisi 2.1.4. **Penaksir Maksimum Likelihood**

Misalkan, $L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$; $\theta \in \Omega$ adalah fungsi peluang bersama $X_1, X_2, \dots, X_n$. Untuk suatu himpunan observasi tertentu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ suatu nilai $\hat{\theta}$ dalam Ω yang membuat $L(\hat{\theta})$ maksimum dinamakan taksiran "likelihood" maksimum untuk θ. Yakni, $\hat{\theta}$ adalah nilai yang memenuhi

$$f(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \underset{\theta \in \Omega}{maks}\, f(x_1, \dots, x_n; \theta) \qquad (2.1.4)$$

Perhatikan bahwa jika setiap himpunan observasi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ berkaitan dengan satu nilai tunggal $\hat{\theta}$ maka prosedur ini mendefinisikan suatu fungsi, $\hat{\theta} = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Fungsi yang sama ini jika dikenakan pada sampel random, $\boxed{\hat{\theta} = t(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ dinamakan Penaksir Maksimum "Likelihood" (PML).

Dalam banyak hal, $L(\theta)$ menunjukkan fungsi peluang bersama suatu sampel random, namun prinsip maksimum "likelihood" juga berlaku bagi kasus-kasus lain, seperti himpunan statistik berurut.

Jika Ω suatu interval terbuka, dan jika $L(\theta)$ dapat didefinisikan dan mempunyai maksimum dalam Ω maka penaksir maksimum "likelihood" akan merupakan penyelesaian persamaan "*likelihood*.

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0 \qquad (2.1.5)$$

Jika ada satu penyelesaian atau lebih dalam persamaan “Likelihood" itu maka harus diperiksa yang mana (jika ada) yang memaksimumkan $L(\theta)$. Perhatikan juga bahwa setiap nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$ juga akan memaksimumkan fungsi "log-likelihood", $\ln L(\theta)$ sehingga untuk memudahkan perhitungan kita gunakan persamaan "log-likelihood" sebagai berikut.

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \qquad (2.1.6)$$

untuk memperoleh penaksir maksimum "likelihood".

Contoh 2.1.5

Pandang sampel random dari distribusi Poisson, $X \sim POI\ (\lambda)$. Fungsi *likelihood*-nya adalah:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i\,!}$$

dan fungsi *log-likelihood*-nya adalah:

$$\ln L(\theta) = -n\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\theta - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\,!\right)$$

Memaksimalkan fungsi log-likelihood

Persamaan *likelihood*-nya adalah:

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} \boxed{= 0}$$

Sehingga $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ adalah penyelesaiannya. Dapat diperiksa bahwa nilai ini adalah maksimum dengan menggunakan turunan kedua,
$\dfrac{d^2 \ln L(\theta).}{d\theta^2} = -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{\theta^2}$ yang selalu negatif.

Sekarang, misalkan kita ingin menaksir $\tau = \tau(\theta) = P(X = 0) = e^{-\theta}$

Maka, dapat kita tulis $\theta = -\ln \tau$. Kita peroleh fungsi peluang bersama:

$$f^*(\underset{\sim}{x};\tau) = \frac{\tau^n (-\ln \tau)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Jika $L^*(\tau)$ merupakan fungsi likelihood relatif terhadap τ maka:

$$\ln L^*(T) = n \ln \tau + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(-\ln \tau) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\frac{d \ln L^*(T)}{d\tau} = \frac{n}{\tau} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{-\ln \tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

dan menyamakan turunan itu dengan nol diperoleh $-\ln \hat{\tau} = \overline{x}$ dan $\hat{\tau} = e^{-\overline{x}}$
Dalam contoh ini $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\theta) = \tau(\hat{\theta})$.

Dalam kasus ini kita dapat memperoleh $L^*(\theta)$ maksimum relatif terhadap τ langsung melalui aturan rantai tanpa melalui reparameterisasi seperti di atas, yakni $\dfrac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \dfrac{d \ln L^*(\tau)}{d\tau} \cdot \dfrac{d\tau}{d\theta}$
dan jika $d\tau / d\theta \neq 0$, maka $d(\ln L^*(\tau))/d\tau = 0$ manakala $d(\ln L(\theta))/d\theta = 0$ sehingga maksimumnya relatif terhadap τ terjadi pada $\tau(\hat{\theta})$.

Harus diperhatikan bahwa kita telah menggunakan notasi τ baik untuk fungsi θ maupun suatu nilai dalam rentang fungsi itu. Meskipun ini bukan suatu notasi matematik yang standar, tetapi sering akan memudahkan kita jika kita gunakan dalam masalah-masalah yang menyangkut reparameterisasi.

Umumnya, jika U suatu fungsi satu-satu dengan inversi U^{-1}, dan jika $\tau = U(\theta)$ maka dapat kita definisikan $L^*(\tau) = L(U^{-1}(\tau))$. Maka, $\hat{\tau}$ akan memaksimumkan $L^*(\tau)$ jika $U^{-1}(\hat{\tau}) = \hat{\theta}$; atau $\hat{\tau} = U(\hat{\theta})$. Jika U bukan fungsi satu-satu maka tidak ada penyelesaian tunggal untuk $\tau = U(\theta)$ untuk setiap nilai τ. Pendekatan yang biasa kita lakukan dalam hal ini adalah memperluas definisi fungsi $L^*(\tau)$. Misalnya, jika untuk setiap nilai τ; $L(\theta)$ mencapai maksimum pada himpunan bagian dari Ω sehingga $\tau = U(\theta)$ maka kita definisikan $L^*(\tau)$ sebagai nilai maksimum ini. Keadaan ini menjadikan fungsi "likelihood" dengan reparameterisasi lebih umum dengan U tidak satu-satu, sehingga $\hat{\tau} = U(\hat{\theta})$ memaksimumkan $L^*(\tau)$ jika $\hat{\theta}$ memaksimumkan $L(\theta)$. Hal ini di ringkaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1.1

Jika $\hat{\theta}$ penaksir "maksimum likelihood" untuk θ, dan jika $U(\theta)$ suatu fungsi θ maka $U(\hat{\theta})$ adalah penaksir "maksimum likelihood" untuk $U(\theta)$.

Dengan perkataan lain jika kita reparameterisasi dengan $\tau = \tau(\theta)$ maka penaksir "maksimum likelihood" untuk τ adalah $\hat{\tau} = \tau(\hat{\theta})$.

Contoh 2.1.6

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sampel random dari distribusi eksponensial, $X_i \sim Exp(\theta)$. Fungsi "likelihood" untuk suatu sampel berukuran n adalah:

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta}, \qquad 0 < x_i < \infty$$

Fungsi *log-likelihood*-nya adalah:

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$$

dan

$$\frac{d \ \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

Dengan menyamakan derivatif ini dengan nol, kita peroleh penaksir "maksimum likelihood" (PML):

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

Jika kita ingin menaksir $p(\theta) = P(X \geq 1) = e^{-1/\theta}$, maka dari Teorema 2.1.1. di atas kita tahu PML-nya adalah $p(\hat{\theta}) = e^{-1/\overline{x}}$

Banyak kasus kita jumpai PML ada tetapi tidak dapat kita peroleh sebagai penyelesaian dari persamaan likelihood.

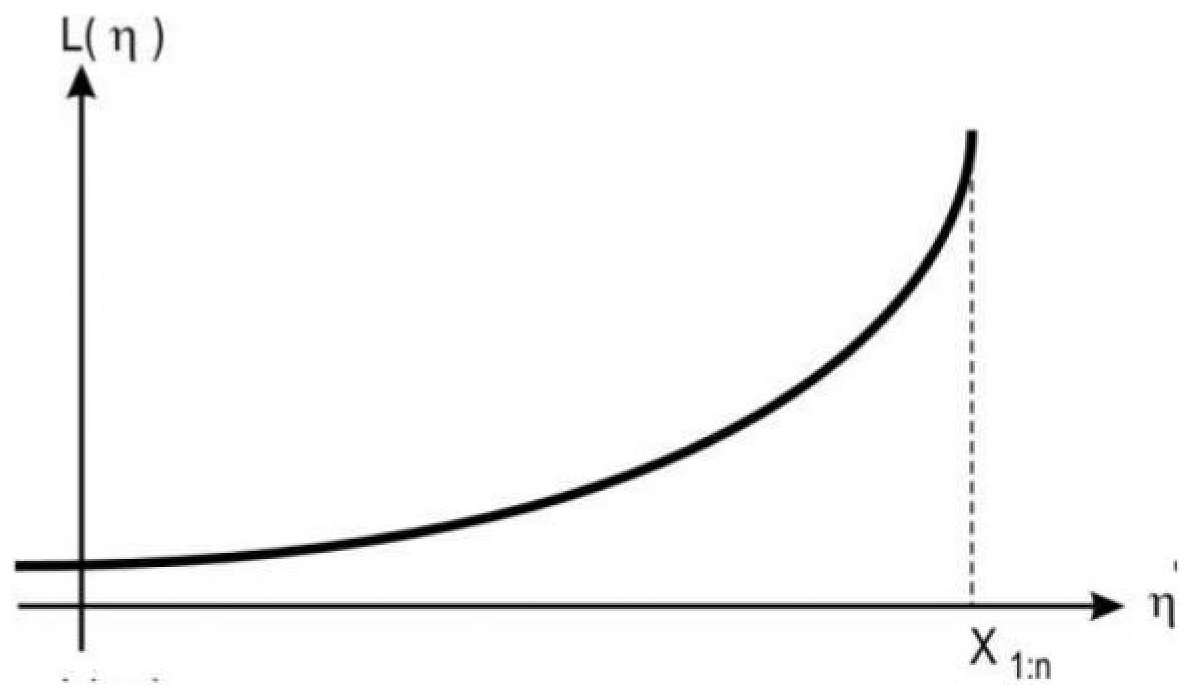
Contoh 2.1.7

Misalkan, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari distribusi eksponensial dua parameter, $X_i \sim Exp(1; \eta)$. Maka fungsi *likelihood*-nya adalah:

$$L(\eta) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \eta\right)\right]; \quad x_i \geq \eta$$

Jika kita tulis minimum dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan $x_{1:n}$ maka dapat kita tulis:

$L(\eta) = \exp\left[n(\eta - \overline{x})\right]$; $x_{1:n} \geq \eta$. Grafik $L(\eta)$ ditunjukkan dalam Gambar 2.1.1.



Gambar 2.1.1.
Fungsi *Likelihood* untuk Sampel Random dari *Exp*(1; η)

Jelas dari gambar itu bahwa $L(\eta)$ mencapai maksimum pada $\hat{\eta} = x_{1:\eta}$, dan penaksir ML itu adalah statistik berurut yang pertama. Ini adalah satu contoh dengan PML dan PMM berbeda.

Seperti telah kita sebutkan di atas, azas ML dapat digunakan dalam keadaan dimana variabel-variabel yang diamati tidak independen atau berdistribusi identik.

Contoh 2.1.8

Tahan hidup suatu komponen tertentu dianggap berdistribusi eksponensial, *Exp(θ)*. Misalkan, n komponen dipilih secara random dan diletakkan dalam uji hidup, dan tahan hidup r komponen yang pertama diamati, dan ditulis $x_{1:n}, x_{2:n}, \ldots, x_{r:n}$. Maka, fungsi peluang bersama $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{r:n}$ adalah:

$$L(\theta) = f(x_{1:n}, \; \ldots, \; x_{r:n} \; ; \; \theta)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{-\sum_{i=1}^{r} x_{i:n}}{\theta} \right) \exp \left[\frac{-(n-r) \;\; x_{r:n}}{\theta} \right] \left(\frac{1}{\theta} \right)^{r}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)! \; \theta^{r}} \exp \frac{-\left[\sum_{i=1}^{r} x_{i:n} + (n-r) x_{r:n} \right]}{\theta}$$

Perhatikan bahwa $T = \sum_{i=1}^{r} X_{i:n} + (n-r) x_{r:n}$ merupakan jumlah tahan hidup semua n benda dalam uji sampai uji hidup dihentikan. Untuk memperoleh PML bagi θ berdasarkan data ini, kita punyai

$$\ln L(\theta) = \text{konstan} - r \ln \theta - \frac{T}{\theta}$$

$$\frac{d \ln(\theta)}{d\theta} = \frac{-r}{\theta} + \frac{T}{\theta^2}$$

Dengan menyamakan derivatif itu dengan nol diperoleh: $\hat{\theta} = \frac{T}{r}$. Jika diamati sampel lengkap maka $r = n$ dan seperti di atas $\hat{\theta} = \overline{X}$.

Dalam contoh-contoh di atas kita telah melibatkan distribusi dengan satu parameter yang tidak diketahui. Definisi fungsi likelihood dan penaksir "maksimum likelihood" dapat diterapkan untuk kasus lebih dari satu parameter yang tidak diketahui, yakni vektor parameter $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Meskipun pada umumnya $\underset{\sim}{\Theta}$ dapat berbentuk hampir setiap himpunan berdimensi k, namun dalam contoh-contoh kita kebanyakan adalah produk Cartesian k interval. Jika $\underset{\sim}{\Theta}$ dalam bentuk ini dan jika derivatif parsial $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ ada, dan PML itu tidak terjadi pada batas $\underset{\sim}{\Theta}$ maka PML itu akan merupakan penyelesaian sistem persamaan

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta_1, \ldots, \theta_k) = 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, k \tag{2.1.7}$$

Ini dinamakan **persamaan "likelihood" maksimum**, dan penyelesaian itu ditulis dengan $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ Seperti dalam hal satu parameter, umumnya perlu diperiksa bahwa penyelesaian persamaan "likelihood" maksimum itu memang memaksimumkan $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$.

Teorema 2.1.2 (Sifat Invariansi)

Jika $\hat{\underset{\sim}{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k)$ merupakan PML untuk $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ maka PML untuk $\underset{\sim}{\tau} = \left(\tau_1(\underset{\sim}{\theta}), \ldots, \tau_r(\underset{\sim}{\theta})\right)$ adalah $\hat{\underset{\sim}{\tau}} = \left(\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_r\right) = \tau_1(\hat{\underset{\sim}{\theta}}), \ldots, \tau_r(\hat{\underset{\sim}{\theta}})$; dengan $1 \le r \le k$

Keadaan di sini serupa dengan keadaan satu parameter. Jika $\underset{\sim}{\tau}$ merupakan transformasi satu-satu maka fungsi "likelihood" yang diubah parameternya dapat didefinisikan, dan PML untuk $\underset{\sim}{\tau}$ dapat diperoleh sebagai transformasi PML untuk $\underset{\sim}{\theta}$. Dalam hal transformasi yang bukan satu-satu. fungsi "likelihood" relatif terhadap $\underset{\sim}{\tau}$ dapat diperluas dengan cara serupa, seperti kasus satu parameter.

Perhatikan bahwa penaksir multiparameter sering tidak sama seperti penaksir individual jika parameter-parameter yang lain dianggap diketahui. Hal ini ditunjukkan dengan contoh berikut.

Contoh 2.1.8

Untuk suatu himpunan variabel random $X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$, diinginkan PML untuk μ dan $\sigma^2 = \theta$ berdasarkan suatu sampel random.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}\right]$$

$$L(\mu;\theta) = (2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right]$$

maksudnya tanda "+"

$$\ln L(\mu;\theta) = \text{konstan} - \frac{n}{2}\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu;\theta)}{\partial\mu} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{2\theta} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \ln L(\mu;\theta)}{\partial\theta} = \frac{-n}{2\theta} \boxed{=} \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}$$

Menyamakan derivatif-derivatif ini dengan nol dan menyelesaikan sistem persamaan itu kita peroleh PML $\hat{\mu}$ dan $\hat{\theta}$ sebagai:

$$\hat{\mu} = \bar{x} \text{ dan } \hat{\theta} = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}.$$

Metode "likelihood" maksimum menikmati sifat invariansi dalam kasus normal dua parameter. Misalnya, jika fungsi "likelihood" dimaksimumkan terhadap μ dan σ maka kita peroleh $\hat{\mu} = \bar{x}$ dan $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\theta}}$, dan demikian juga untuk fungsi-fungsi lain dari parameter-parameternya. Perhatikan bahwa jika $\theta = \theta_0$ diketahui maka dari persamaan "likelihood" yang:

pertama $\dfrac{2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})}{2\theta_0} = 0$ kita peroleh $\hat{\mu} = \bar{x}$, seperti di atas. Tetapi jika $\mu = \mu_0$ diketahui maka dari persamaan "likelihood" yang kedua $\dfrac{-n}{2\hat{\theta}} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\hat{\theta}_0} = 0$ kita peroleh $\hat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n}$

Contoh 2.1.9

Pandang suatu sampel random dari suatu distribusi berparameter dua yang kedua parameter itu tidak diketahui, $X_i \sim Exp(\theta, \eta)$. Fungsi peluang populasinya adalah $f(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-(x-\eta)/\theta\right]$; $\eta \le x$.

Fungsi "likelihood"-nya adalah $L(\theta;\eta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left[\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)}{\theta}\right]$ semua $x_i \ge \eta$ dan fungsi *log-likelihood*-nya adalah:

$$\ln L(\theta;\eta) = -n\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\eta}{\theta} \; ; \; x_{1:n} \ge \eta$$

dengan $x_{1:n}$ adalah minimum dari $x_1, x_2, ..., x_n$. Seperti dalam Contoh 2.1.7 fungsi "likelihood" dimaksimumkan terhadap η dengan mengambil $\hat{\eta} = x_{1:n}$. Untuk memaksimumkan relatif terhadap θ, kita dapat mendiferensialkan $\ln L(\theta;\hat{\eta})$ terhadap θ, dan menyelesaikan persamaan yang dihasilkan:

$$\frac{d\ln L(\theta;\hat{\eta})}{d\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\eta})}{\theta^2} = 0$$

yang menghasilkan

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\eta}\right)}{n} = \bar{x} - \hat{\eta} = \bar{x} - x_{1:n}$$

Persentil ke- α, yakni x_α, sehingga $F(x_\alpha) = \alpha$ diberikan oleh $x_\alpha = -\theta\ln(1-\alpha) + \eta$, dan PML untuk x_α adalah $\hat{x}_\alpha = -\hat{\theta}\ln(1-\alpha) + \hat{\eta}$

Contoh 2.1.10

Marilah kita pandang penaksiran "likelihood" maksimum untuk parameter dalam distribusi gamma berdasarkan sampel random berukuran *n*. Kita punyai $f(x) = \frac{1}{\theta^\beta\Gamma(\beta)} x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$; $x > 0$

$$L(\theta;\beta) = \frac{1}{\theta^{n\beta}\left[\Gamma(\beta)\right]^n}\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} x_i / \theta\right]$$

dan

$$\ln L(\theta;\beta) = -n\beta \ln\theta - n\ln\Gamma(\beta) + (\beta-1)\ln\prod_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i / \theta.$$

Maka, derivatif parsial fungsi log"likelihood" itu adalah:

Harusnya theta

$$\frac{\partial \ln L(\theta;\beta)}{\partial \boxed{\beta}} = -\frac{n\beta}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta;\beta)}{\partial \beta} = -n\ln\theta - n\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i$$

Jika kita tulis $\tilde{x} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ sebagai mean geometrik sampel dan $\Psi(\beta) = \Gamma'(\beta)/\Gamma(\beta)$ menunjukkan fungsi psi maka dengan menyamakan kedua derivatif di atas dengan nol diperoleh persamaan:

(I) $\hat{\theta} = \overline{x} / \hat{\beta}$

(II) $\ln\hat{\beta} - \psi(\hat{\beta}) - \ln(\overline{x}/\tilde{x}) = 0$

Ini memberikan satu contoh yang persamaan *likelihood*-nya tidak dapat diselesaikan dalam penyelesaian bentuk rumus, meskipun penyelesaian numerik untuk $\hat{\beta}$ dapat diperoleh dari persamaan (II) dengan menggunakan tabel fungsi psi. Kita lihat bahwa $\hat{\beta}$ adalah fungsi $\overline{x}/\tilde{x}$ dan bukan fungsi $\overline{x}$ $\tilde{x}$, dan n secara terpisah. Maka, akan bermanfaat untuk membuat Tabel $\hat{\beta}$ dalam bentuk $\overline{x}/\tilde{x}$. Mungkin pendekatan terbaik untuk penaksiran "likelihood" maksimum bagi distribusi gamma adalah menggunakan pendekatan rasional sebagai berikut.

$$\hat{\beta} = \frac{0,5000876 + 0,1648852M - 0,0544274M^2}{M} ; 0 < M \le 0,5772$$

$$\hat{\beta} = \frac{8,898919 + 9,059950M + 0,9775373M^2}{M\left(17,79728 + 11,968477M + M^2\right)} ; 0,5772 < M \le 17$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{M} \; ; \; M > 17$$

dengan $M = \ln(\bar{x} / \tilde{x})$.

PML tidak sama dengan PMM, tetapi PML untuk mean adalah $\hat{\mu} = \hat{\theta}.\ \hat{\beta} = \bar{x}.$ Dapat juga diperoleh penyelesaian persamaan "likelihood" itu dengan metode numerik menggunakan komputer.

Contoh 2.1.11

Kita pandang sampel random berukuran n dari suatu distribusi Weibull dengan parameter skala dan parameter bentuk keduanya tidak diketahui, $X_i \sim Wei(\theta;\beta)$. Fungsi peluang populasinya adalah:

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right] \; ; \; x > 0 \; ; \; \theta, \beta > 0 .$$

Fungsi *log-likelihood*-nya adalah:

$$\ln L(\theta,\beta) = n\ln(\beta/\theta) + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i/\theta) - \sum_{i=1}^{n}(x_i/\theta)^{\beta}$$

Sehingga persamaan *likelihood*-nya adalah:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta;\beta) = -\frac{n\beta}{\theta} + \frac{\beta}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln L(\theta;\beta) = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\theta}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\theta}\right) = 0$$

Setelah disederhanakan, kita peroleh:

$$g(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} - \frac{1}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n} = 0$$

$$\theta = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\beta}}{\theta} \right]^{1/\beta}$$

Persamaan $g(\beta) = 0$ tidak dapat diselesaikan secara eksplisit sebagai suatu fungsi data, tetapi untuk suatu himpunan data tertentu $g(\beta) = 0$ itu dapat kita selesaikan dengan metode numerik literatif dengan komputer.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Hitunglah Penaksir Metode Momen (PMM) dan Penaksir Maksimum Likelihood (PML) untuk θ berdasarkan sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang diambil dari fungsi peluang berikut ini.
   A. $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$; $0 < x < 1,\ \theta > 0$
   B. $f(x;\theta) = (\theta+1) x^{-\theta-2}$; $x > 1,\ \theta > 0$
   C. $f(x;\theta) = \theta^2 xe^{-\theta x}$; $x > 0,\ \theta > 0$
   D. $f(x;\theta) = 2\theta^2 x^{-3}$; $x \geq \theta$
2) Hitunglah PMM dan PML berdasarkan sampel random berukuran n dari distribusi berikut:
   A. X_i berdistribusi binomial negatif $(k\,;\,p)$
   B. X_i berdistribusi gamma $(\theta\,;\,\beta)$
   C. X_i berdistribusi weibull $(\theta\,;\,\beta)$
   D. X_i berdistribusi binomial $(n\,;\,p)$
   E. X_i berdistribusi geometrik (p)
   F. X_i berdistribusi Uniform $(\alpha\,;\,\beta)$
3) Misalkan, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari distribusi geometrik dengan parameter p. Carilah PML kuantitas-kuantitas berikut.
   A. $E(X) = 1/p$
   B. $var\,(X) = (1-p)/p^2$
   C. $P(X > k) = (1-p)^k$, untuk sebarang $k = 1, 2, 3, \ldots$

RANGKUMAN

Telah kita pelajari dua metode untuk menentukan penaksir parameter yang tidak diketahui, yakni metode *momen* dan metode "*maksimum likelihood*". Termasuk sifat invariansi penaksir maksimum likelihood. Dua metode ini adalah metode yang paling mendapat perhatian orang. Tentu saja masih banyak lagi metode menentukan penaksir yang belum kita pelajari.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misalkan, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari distribusi beta dengan parameter α dan β .

a. Maka PMM untuk α adalah (dengan $\overline{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$) adalah ….

A. $\dfrac{\left(3\overline{\overline{x}} + 4\overline{x}^2\right)}{\left(1 - 2\overline{x}\right)}$

B. $\dfrac{\left(4\overline{\overline{x}} - 2\overline{x}\right)}{\left(1 + 2\overline{x}\right)}$

C. $\dfrac{\left(2\overline{x} - 3\overline{\overline{x}}\right)}{\left(1 - 2\overline{x}\right)}$

D. $\dfrac{\left(4\overline{\overline{x}} + 3\overline{x}\right)}{\left(1 + 2\overline{x}\right)}$

b. Maka, PMM untuk β adalah ….

A. $\dfrac{\left(3\overline{\overline{x}} - 4\overline{x}^2\right)}{\left(1 - 2\overline{x}\right)}$

B. $\dfrac{\left(2\overline{x} + 3\overline{\overline{x}}\right)}{\left(1 - 2\overline{x}\right)}$

C. $\dfrac{\left(3\overline{x} - 4\overline{\overline{x}}\right)}{\left(1 + 2\overline{x}\right)}$

D. $\dfrac{\left(4\overline{\overline{x}} - 2\overline{x}^2\right)}{\left(1 + 2\overline{x}\right)}$.

2) Misalkan, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari suatu populasi dengan fungsi peluang

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \; ; \; \theta_1 \le x < \theta_2$$

a. Maka, PML untuk θ_1 adalah ….
   A. maks ($X_1, X_2, \ldots, X_n$)
   B. min ($X_1, X_2, \ldots, X_n$)
   C. $\sum_{i=1}^{n} X_i / n$
   D. $2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n$

b. Maka, PML untuk θ_2 adalah ….
   A. $\sum_{i=1}^{n} X_i / (2n)$
   B. $2\overline{X}$
   C. min ($X_1, X_2, \ldots, X_n$)
   D. maks ($X_1, X_2, \ldots, X_n$)

c. Maka, PMM untuk θ_1 adalah ….
   $\left(\text{dengan } S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right)$
   A. $\overline{X} - \frac{1}{2} S\sqrt{12}$
   B. $\overline{X} + S\sqrt{6}$
   C. $\overline{X} - \frac{1}{2} S\sqrt{6}$
   D. $\overline{X} + S\sqrt{12}$

d. Maka, PMM untuk θ_2 adalah ….
   A. $\overline{X} - \frac{1}{2} S\sqrt{6}$

B. $\bar{X} + S\sqrt{6}$

C. $\bar{X} - S\sqrt{12}$

D. $\bar{X} - \frac{1}{2} S\sqrt{12}$

3) Pandang sampel random berukuran n dari distribusi Pareto, $X_i \sim PAR(\theta$;2). Maka fungsi likelihood-nya adalah ….

A. $\sum_{i=1}^{n} \left(x_1^2 - \theta x_i \right) = n$

B. $\sum_{i=1}^{n} \left[x_i / \left(x_i + \theta \right) \right] = n/3$

C. $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i \left(x_i - \theta \right) \right) = n/3$

D. $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i / x_i - \theta \right) = n$

4) Pandang sampel random independen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dari distribusi normal dengan mean yang sama μ, tetapi variansi yang mungkin berbeda σ_1^2 dan σ_2^2 sehingga
$X_i \sim N\left(\mu; \sigma_1^2\right)$ dan $Y_i \sim N\left(\mu; \sigma_2^2\right)$.

a. PML untuk μ adalah $\hat{\mu}$ sama dengan ….

A. $\sum_{i=1}^{n} X_i / nm + \sum_{i=1}^{m} Y_i / nm$

B. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i \right) / nm$

C. $\sum_{i=1}^{n} X_i / n + \sum_{i=1}^{m} Y_i / m$

D. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{m} Y_i \right) / \left(n + m \right)$

b. Maka, PML untuk σ_1^2 adalah ….

A. $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$

B. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+\mu\right)^2$

C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\mu}\right)^2$

D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

c. Maka, PML σ_2^2 adalah ….

A. $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$

B. $\frac{1}{(m-1)}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$

C. $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i+\mu\right)^2$

D. $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\hat{\mu}\right)^2$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Kriteria Menilai Penaksir

Akan kita pelajari beberapa sifat "baik" suatu penaksir, antara lain tak bias. efisiensi dan beberapa yang lain yang kita pelajari dalam Modul 3, yang akan datang.

Definisi 2.2.1

Penaksir T dikatakan penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$ jika

$$E(T) = \tau(\theta) \tag{2.2.1}$$

Untuk semua θ ∈ Θ. Jika tidak demikian maka T dinamakan penaksir bias untuk $\tau(\theta)$.

Jika penaksir tak bias digunakan untuk menentukan nilai $\tau(\theta)$ maka nilai yang benar untuk $\tau(\theta)$ mungkin tidak pernah dicapai oleh nilai taksiran mana pun, *t*, tetapi nilai "rata-rata" *T* akan sama dengan $\tau(\theta)$.

Contoh 2.2.1

Pandang suatu sampel random dari distribusi $f(x;\ \underset{\sim}{\theta})$ dengan $\underset{\sim}{\theta}$ = $(\mu;\sigma^2)$; di sini μ dan σ^2 adalah masing-masing mean dan variansi populasinya.

Telah pernah kita pelajari bahwa mean dan variansi sampel, $\bar{X}$ dan S^2 masing-masing adalah penaksir tak bias untuk μ dan σ^2. Jika μ dan σ^2 keduanya tidak diketahui maka ruang parameter yang sesuai adalah himpunan bagian ruang Euclidean dua dimensi. Khususnya $\underset{\sim}{\Theta}$ adalah produk cartesian interval (–∞ ; ∞) dan (0; ∞). Jadi, $\underset{\sim}{\Theta}$ = (–∞ ; ∞) x (0; ∞). Jika hanya satu parameter yang tidak diketahui maka $\underset{\sim}{\Theta}$ akan terdiri dari himpunan satu dimensi yang berkaitan. Sebagai contoh, misalkan populasi itu normal dengan mean μ yang tidak diketahui, tetapi variansi-nya diketahui σ^2 = 9. Ruang parameter yang sesuai adalah $\underset{\sim}{\Theta}$ = (–∞ ; ∞) karena pada umumnya untuk mean suatu distribusi normal, -∞ < μ < ∞. Mungkin kita ingin menaksir suatu persentil, misalnya persentil ke 95 dari distribusi $N(\mu\,; 9)$. Ini suatu contoh dari fungsi parameter karena $\tau(\mu) = \mu + \sigma z_{0,95} = \mu + (\sqrt{9}.1,65) = \mu + 4,95$. Maka, $T = \overline{X} + 4,95$ adalah penaksir tak bias untuk $\tau(\mu)$, karena

$E(T) = E(\overline{X} + 4,95) = E(\overline{X}) + 4,95 = \mu + 4,95$, berapa pun nilai μ.

Sering kali kita mempunyai penaksir yang bias yang dapat kita buat menjadi tak bias.

Contoh 2.2.2

Kita pandang sampel random berukuran n dari distribusi eksponensial. $X_i \sim Exp\ (\theta)$, dengan parameter θ. Oleh karena θ merupakan mean distribusi itu, kita tahu bahwa PML, $\overline{X}$ adalah tak bias untuk θ. Jika kita ingin menaksir kebalikan dari mean, $\tau\ (\theta) = 1/\theta$ maka dengan sifat invariansi PML-nya adalah $T_1 = 1/\overline{X}$. Tetapi T_1 adalah penaksir yang bias untuk $1/\theta$, karena $E(T_1) = E(1/\overline{X}) \neq 1/\theta$.

Tetapi kita tahu bahwa $Y = \dfrac{2n\overline{X}}{\theta} = \sum_{i-1}^{n} \dfrac{2X_i}{\theta} \sim \chi^2(2n)$ dan dari Teorema 1.1.4 untuk $k = -1$ maka $E(Y^{-1}) = 1/\left[2(n-1)\right]$. Dengan demikian,

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{1}{\theta}$$

Meskipun ini menunjukkan bahwa T_1 adalah penaksir yang bias untuk $1/\theta$, tetapi juga dapat kita lihat bahwa penaksir dalam bentuk cT_1, dengan $c = (n - 1)/n$ adalah tak bias untuk $1/\theta$. Ini juga menunjukkan bahwa T_1 bias, tetapi masih "layak" karena biasnya $1/[(n - 1)]\ \theta]$ akan kecil jika n besar.

Tidak selalu mungkin untuk mengubah penaksir yang bias dengan cara seperti ini. Sebagai contoh, misalkan kita ingin menaksir $1/\theta$ dengan hanya menggunakan observasi yang terkecil, yang berarti hanya akan mengamati statistik berurut pertama, $X_{1:n}$. Kita tahu bahwa $X_{1:n} \sim Exp\,(\theta/n)$. Dengan demikian, $n\,X_{1:n}$ merupakan contoh lain penaksir tak bias untuk θ. Ini berarti $T_2 = 1/(nX_{1:n})$ juga dapat digunakan sebagai penaksir $1/\theta$.. Statistik T_2 tidak dapat diubah dengan cara seperti di atas untuk memperoleh penaksir tak bias bagi $1/\theta$ karena $E(T_2)$ bahkan tidak ada.

Statistik T_1 dan T_2 melukiskan kekurangan yang mungkin terjadi dalam konsep ketidakbiasan sebagai azas yang umum. Khususnya, jika $\hat{\theta}$ suatu penaksir tak bias untuk $\hat{\theta}$ maka $\tau(\hat{\theta})$ tidak harus merupakan penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$. Namun demikian, $\tau(\hat{\theta})$ mungkin merupakan penaksir yang pantas bagi $\tau(\theta)$, seperti halnya $\hat{\theta} = \bar{X}$ dan $\tau(\hat{\theta}) = 1/\bar{X}$ di atas.

Sering kali mungkin bagi kita untuk menurunkan beberapa penaksir potensial yang berbeda bagi suatu parameter. Misalnya, dalam beberapa kasus, PML dan PMM pada dasarnya mempunyai bentuk yang berbeda. Ini akan menimbulkan pertanyaan bagaimana memutuskan penaksir mana yang "terbaik" dalam arti tertentu, dan pertanyaan ini akan kita bicarakan kemudian.

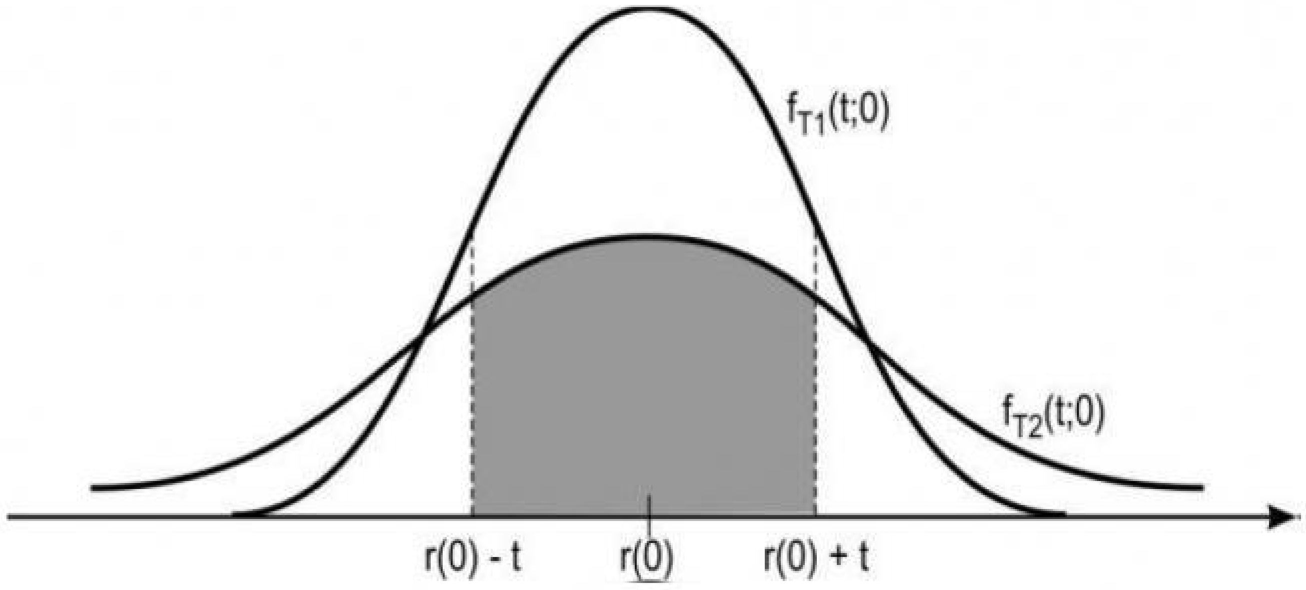
Gagasan yang sangat umum adalah memilih penaksir yang cenderung terdekat atau "paling berkonsentrasi" di sekitar nilai yang sebenarnya parameter itu. Mungkin cukup pantas untuk mengatakan bahwa T_1 lebih *berkonsentrasi* dari pada T_2 terhadap $\tau(\theta)$ jika:

$P\left[\tau(\theta)-\varepsilon < T_1 < \tau(\theta)+\varepsilon\right] \geq P\left[\tau(\theta)-\varepsilon < T_2 < \tau(\theta)+\varepsilon\right]$ untuk semua $\varepsilon > 0$, dan dikatakan suatu penaksir *paling Terkonsentrasi* jika penaksir itu lebih terkonsentrasi dari setiap penaksir yang lain.

Gagasan suatu penaksir lebih terkonsentrasi dilukiskan dalam Gambar 2.2.1 menunjukkan grafik fungsi peluang kedua penaksir T_1 dan T_2. Tidak jelas bagaimana memperoleh suatu penaksir yang paling terkonsentrasi, tetapi beberapa konsep yang lain akan kita bicarakan yang mungkin sebagian memenuhi tujuan ini. Sebagai contoh, T suatu penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$ maka menurut pertidaksamaan *Chebyshev*:

$$P\left[\tau(\theta)-\varepsilon < T < \tau(\theta)+\varepsilon\right] \geq 1-\frac{\operatorname{var}(T)}{\varepsilon^2}$$

untuk semua $\varepsilon > 0$. Ini berarti bahwa untuk penaksir tak bias, salah satu yang variansi-nya lebih kecil akan cenderung lebih terkonsentrasi sehingga mungkin lebih disenangi.



Gambar 2.2.1
Konsep tentang "lebih Terkonsentrasi".

Contoh 2.2.3

Marilah kita pandang kembali Contoh 2.2.2 di atas, di mana kita hanya ingin menaksir mean, θ. Jika $\hat{\theta}_1 = \overline{X}$ dan $\hat{\theta}_2 = nX_{1:n}$ maka kedua penaksir itu tak bias untuk θ, tetapi $\text{var}(\hat{\theta}_1) = \theta^2/n$ dan $\text{var}(\hat{\theta}_2) = \theta^2$ sehingga untuk $n > 1$, $\text{var}(\hat{\theta}_1) < \text{var}(\hat{\theta}_2)$ untuk semua $\theta > 0$, dan $\hat{\theta}_1$ adalah penaksir yang lebih baik menurut kriterium ini.

Dalam beberapa hal, satu penaksir mungkin mempunyai variansi yang lebih kecil untuk beberapa nilai θ dan variansi yang lebih besar untuk nilai-nilai yang lain. Dalam hal seperti itu, pada umumnya, satu penaksir tidak dapat dikatakan lebih baik dari yang lain. Dalam hal-hal tertentu dimungkinkan untuk menunjukkan bahwa suatu penaksir tak bias tertentu mempunyai variansi sekecil mungkin di antara semua penaksir tak bias untuk semua nilai-nilai θ. Dalam hal seperti itu, kita dapat membatasi perhatian kita pada penaksir tertentu.

PENAKSIR TAK BIAS BERVARIANSI MINIMUM UNIFORM

Definisi 2.2.2

Misalkan, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random berukuran n, dari $f(x;\theta)$. Suatu penaksir T* untuk $\tau(\theta)$ dinamakan penaksir tak bias bervariansi minimum Uniform (uniformly minimum variance unbiased estimator) untuk $\tau(\theta)$ jika

1. T* tak bias untuk $\tau(\theta)$
2. Untuk setiap penaksir tak bias yang lain T untuk $\tau(\theta)$, $\text{var}(T^*) \le \text{var}(T)$ untuk semua $\theta \in \Theta$

Dalam beberapa hal, batas bawah dapat diturunkan untuk variansi penaksir tak bias. Jika dapat ditemukan penaksir tak bias yang mencapai batas bawah seperti itu maka ini berarti bahwa penaksir itu adalah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform. Dalam pembicaraan berikut, jika derivatif yang sesuai ada dan dapat dilintaskan di bawah tanda integral (atau penjumlahan) maka batas bawah untuk variansi penaksir tak bias dapat ditentukan. Di antara hal-hal yang lain, ini akan memerlukan bahwa domain integrand itu harus tidak bergantung θ.

Jika T penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$ maka *batas bawah* Cramer-Rao (C – R) berdasarkan suatu sampel random adalah:

$$\text{var}(T) \geq \frac{\left[\tau'(\theta)\right]^2}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(x;\theta\right)\right]^2} \tag{2.2.2}$$

Dengan anggapan syarat diferensiabilitas tersebut di atas, batas bawah C – R dapat dikembangkan sebagai berikut. Kita akan menganggap kasus pengambilan sampel dari distribusi kontinu. Kasus distribusi diskrit sama saja.

Kita pandang fungsi yang didefinisikan sebagai

$$U(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(x_1,\ \ldots,x_n;\theta\right)$$

yang dapat juga ditulis $U\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right) = \dfrac{1}{f\left(x_1,\ldots,\ x_n;\theta\right)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)$

Jika kita definisikan variabel random $U = U\left(X_1,\ldots,X_n;\theta\right)$ maka

$$\begin{aligned}
E(U) &= \int\ldots\int u\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)f(x_1,\ldots,x_n;\theta)\ dx_1\ \ldots\ dx_n \\
&= \int\ldots\int \frac{\partial}{\partial\theta}f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)dx_1\ \ldots\ dx_n \\
&= \frac{d}{d\theta}\int\ldots\int f\left(x_1,\ldots,x_n;\theta\right)dx_1 \ldots\ dx_n \\
&= \frac{d}{d\theta}1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa jika $A = \mathrm{A}(X_1, \ldots, X_n)$ adalah tak bias untuk $\tau(\theta)$ maka

$$\tau(\theta) = E(T) = \int \ldots \int \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n; \theta) dx_1 \ldots dx_n$$

Jika kita diferensialkan terhadap θ maka

$$\begin{aligned}
\tau'(\theta) &= \int \ldots \int \mathrm{A}\ (x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x_1, \ldots, x_n; \theta) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int \ldots \int \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n) U(x_1, \ldots, x_n; \theta) f(x_1, \ldots, x_n; \theta) dx_1 \ldots dx_n \\
&= E\ (TU)
\end{aligned}$$

Ini juga berarti, karena $E(U) = 0$ maka *var* $(U) = E(U^2)$ dan *cov* $(T,U) = E\ (TU)$.

Oleh karena koefisien korelasi selalu antara ± 1 maka

$\left[\mathrm{cov}(TU)\right]^2 \leq \mathrm{var}(T).\mathrm{var}(U)$, dan dengan demikian

$\mathrm{var}(T) E(U^2) \geq \left[\tau'(\theta)\right]^2$ sehingga

$$\mathrm{var}(T) \geq \frac{\left[\tau'(\theta)\right]^2}{E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X_1, \ldots, X_n; \theta)\right]^2} \qquad (2.2.3)$$

Jika $X_1, \ldots, X_n$ merupakan sampel random

$f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \ldots f(x_n; \theta)$ sehingga

$U(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_i; \theta)$ dan

$$E(U^2) = \mathrm{var}(U) = n\,\mathrm{var}\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X; \theta)\right] = n\,E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X; \theta)\right]^2$$

yang menghasilkan rumus batas bawah C – R

Perhatikan bahwa jika syarat diferensiabilitas yang wajar berlaku, seperti yang telah kita sebutkan di atas, dapat ditunjukkan bahwa:

$$E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X; \theta)\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(X; \theta)\right]$$

Contoh 2.2.4

Pandang suatu sampel random dari distribusi eksponensial, $X_i \sim Exp(\theta)$. Oleh karena

$$\ln f(x;\theta) = -\frac{x}{\theta} - \ln\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}$$
$$= \frac{x - \theta}{\theta^2}$$

Jadi, $E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right]^2 = E\left[\frac{(X-\theta)^2}{\theta^4}\right] = \frac{\theta^2}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2}$ dan batas bawah C − R untuk $\tau(\theta) = \theta$ adalah $1 \Big/ \left[n(1/\theta)^2\right] = \theta^2/n.$ Oleh karena $\operatorname{var}(\bar{X}) = \theta^2/n,$ maka $\bar{X}$ adalah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk θ.

Kita mungkin dapat memperoleh informasi lebih tentang jenis penaksir, yang variansinya mencapai batas bawah C − R, dengan memandang lebih lanjut turunan pertidaksamaan (2.2.3). Batas bawah itu dicapai hanya apabila koefisien korelasi T dan U adalah $\pm$ 1, dan ini terjadi jika dan hanya jika T dan u berhubungan secara linear, yakni $T = aU + b$ dengan peluang 1 untuk suatu konstan $a \neq 0$ dan b. Jadi untuk T supaya mencapai batas bawah C - R - nya $\tau(\theta)$, harus merupakan fungsi linear $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_i;\theta)$.

Contoh 2.2.5

Kita ambil sampel random $X_1, \ldots, X_n$ dari distribusi geometrik dengan parameter $\theta = p$, dan ingin mendapatkan penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk $\tau(\theta) = 1/\theta$. Oleh karena

$$\ln f(x;\theta) = \ln\theta + (x-1)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{x-1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta} + \frac{x-1}{\theta-1}$$
$$= \frac{x - 1/\theta}{\theta - 1}$$

Supaya variansi penaksir tak bias T mencapai batas bawah C - R, harus berbentuk $T = a\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - 1/\theta\right)/\left(\theta - 1\right)\right] - b$ yang juga dapat dinyatakan sebagai fungsi linear mean sampel, yakni $T = c\overline{X} + d$, dengan c dan d konstan. Oleh karena $\overline{X}$ tak bias untuk $1/\theta$ maka perlu c = 1 dan d = 0, sehingga T = $\overline{X}$ adalah satu-satunya penaksir semacam itu. Variansi ($\overline{X}$) adalah $var(\overline{X}) = (1-\theta)/(n\theta^2)$, yang juga dapat ditunjukkan sebagai batas bawah C - R untuk kasus ini.

Pembicaraan ini juga berarti bahwa hanya jenis fungsi tertentu yang memuat penaksir tak bias yang variansinya dapat mencapai batas bawah C - R.

Contoh 2.2.6

Jika ada suatu penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$, yang variansinya mencapai batas bawah C - R maka hanya fungsi linear $\tau(\theta)$, yang memuat penaksir tak bias, yang variansinya mencapai batas bawah C - R yang bersangkutan.

Jadi, dalam contoh terdahulu, tidak ada penaksir tak bias, yang variansinya mencapai batas bawah C - R bagi penaksir tak bias untuk θ karena θ bukan fungsi linear dari $1/\theta$. Tidak dapat disimpulkan dari sini bahwa penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk θ tidak ada, hanya saja tidak dapat diperoleh dengan pendekatan batas bawah C - R. Dalam Modul 4 akan kita pelajari cara yang sering bekerja baik jika cara yang kita pelajari di sini gagal.

Pembandingan variansi penaksir sering digunakan untuk menilai dan memutuskan metode mana yang memanfaatkan data secara lebih efisien.

Definisi 2.2.3 (Efisiensi)

Efisiensi relatif penaksir tak bias T untuk $\tau(\theta)$ terhadap penaksir tak bias lain T* untuk $\tau(\theta)$ diberikan oleh

$$ER\left(T;T^*\right) = \frac{\operatorname{var}\left(T^*\right)}{\operatorname{var}\left(T\right)} \tag{2.2.4}$$

Suatu penaksir tak bias T* untuk $\tau(\theta)$ dikatakan efisien jika $ER(T, T^*) \leq 1$ untuk semua penaksir tak bias T untuk $\tau(\theta)$, dan semua $\theta \in \Theta$. Efisiensi suatu penaksir tak bias T untuk $\tau(\theta)$ diberikan oleh

Ef (T) = ER (T,T*) (2.2.5)

Jika T* penaksir efisiensi untuk $\tau(\theta)$.

Perhatikan bahwa dalam terminologi ini suatu penaksir efisien adalah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform.

Istilah efisiensi relatif dapat diinterpretasi dalam bentuk ukuran sampel yang diperlukan oleh kedua jenis penaksir itu guna menaksir suatu parameter dengan ketepatan yang dapat dipersamakan. Khususnya, misalkan bahwa T_1 dan T_2 penaksir-penaksir tak bias untuk $\tau(\theta)$ dan variansi-variansinya berbentuk $\text{var}(T_1) = k_1 / n$ dan $\text{var}(T_2) = k_2 / n$. Dalam hal ini efisiensi relatif-nya berbentuk $ER(T_1, T_2) = k_2 / k_1$. Jika diinginkan untuk memilih ukuran sampel n_1 dan n_2, untuk mencapai variansi yang sama maka $k_1 / n_1 = k_2 / n_2$, yang berarti $n_2 / n_1 = ER(T_1, T_2)$. Dengan perkataan lain, jika T_1 kurang efisien dari pada T_2 kita dapat memilih ukuran sampel yang lebih besar, dengan faktor k_1 / k_2, untuk mencapai variansi sama.

Beberapa penulis mendefinisikan efisiensi T sebagai perbandingan batas bawah C - R dengan $var(T)$, yang memberikan kemungkinan bahwa penaksir tak bias bervariansi minimum uniform dapat ada tetapi tidak efisiens dengan definisi ini. Tetapi, ini berarti bahwa jika perbandingan batas bawah C - R dan $var(T)$ sama dengan 1 maka dengan definisi di atas, T adalah penaksir yang efisien. Pada taraf ini, penggunaan batas bawah C - R adalah satu-satunya cara yang enak yang kita punyai untuk memeriksa apakah suatu penaksir itu efisien atau tidak.

Contoh 2.2.7

Pandang kembali Contoh 2.2.5 bahwa penaksir $T = (n-1)/(n\bar{X})$ adalah tak bias untuk $1/\theta$. Dalam hal ini $\tau'(\theta) = -1/\theta^2$ dan batas bawah C - R adalah $\left[-1/\theta^2\right]^2 \Big/ \left[n\left(1/\theta^2\right)\right] = 1/\left(n\theta^2\right)$. Telah diperoleh dalam Contoh 2.2.5 bahwa variansi $\bar{X}$ mencapai batas bawah C - R penaksir tak bias untuk θ. Oleh karena $\tau(\theta) = 1/\theta$ bukan fungsi linear θ,maka tidak ada penaksir tak bias untuk $1/\theta$ yang variansinya sama dengan $1/(n\theta^2)$. Dalam bentuk variabel random $Y = 2n\bar{X}/\theta$, kita dapat menyatakan T sebagai $T = \left[2(n-1)/\theta\right]Y^{-1}$. Dari bentuk ini kita dapat menunjukkan bahwa

$\operatorname{var}(T) = 1/\left[(n-2)\theta^2\right]$. Meskipun var(*T*) tidak mencapai batas bawah C - R, tetapi sangat dekat dengannya untuk *n* besar. Sering kali kita mungkin memperoleh suatu penaksir tak bias, yang variansinya dekat dengan batas bawah C - R meskipun tidak mencapai dengan tepat, sehingga batas bawah C - R dapat bermanfaat dalam menilai penaksir yang diusulkan (digunakan), apakah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform ada atau tidak ada. Sebenarnya, kita akan dapat menunjukkan dalam Modul 4 bahwa penaksir *T* adalah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk $1/\theta$. Ini berarti bahwa *T* adalah satu contoh penaksir efisien yang tidak dapat diperoleh dengan metode batas bawah C - R.

Contoh 2.2.8

Ingat kembali bahwa dalam Contoh 2.1.4 kita mempunyai penaksir tak bias $\hat{\theta}_1 = \overline{X}$ dan $\hat{\theta}_2 = nX_{1:n}$ untuk θ. Kemudian, telah ditemukan bahwa $\hat{\theta}_1$ adalah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform; Jadi, $\hat{\theta}_1$ suatu penaksir efisien untuk θ dan efisiensi $\hat{\theta}_2$ adalah

$Ef\left(\hat{\theta}_2\right) = ER\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1\right) = \dfrac{\theta^2/n}{\theta^2} = \dfrac{1}{n}$, jadi $\hat{\theta}_2$ adalah penaksir untuk θ yang sangat jelek karena efisiensi kecil untuk *n* besar.

Suatu penaksir yang sedikit bias yang sangat terkonsentrasi di sekeliling parameter yang kita pelajari mungkin lebih disenangi dari pada penaksir tak bias yang kurang terkonsentrasi. Jadi, sebaiknya kita punyai kriteria yang lebih umum yang dapat digunakan untuk membandingkan baik penaksir yang bias maupun penaksir yang tak bias.

Definisi 2.2.4

Jika T suatu penaksir untuk θ maka besar bias-nya diberikan oleh

$$b(T) = E(T) - \tau(\theta) \qquad (2.2.6)$$

dan sesatan kuadrat rata-rata (SKR) adalah

$$SKR(T) = E\left[T - \tau(\theta)\right]^2 \qquad (2.2.7)$$

Teorema 2.2.1

Jika T penaksir untuk τ (θ) maka

$$SKR(T) = \text{var}(T) - \left[b(T)\right]^2 \tag{2.2.8}$$

Bukti

$$\begin{aligned} SKR(T) &= E\left[T - \tau(\theta)\right]^2 \\ &= E\left[T - E(T) + E(T) - \tau(\theta)\right]^2 \\ &= E\left[T - E(T)\right]^2 + 2\left[E(T) - \tau(\theta)\right]\left[E(T) - E(T)\right] + \left[E(T) - \tau(\theta)\right]^2 \\ &= \text{var}(T) + \left[b(T)\right]^2 \end{aligned}$$

SKR adalah kriterium yang pantas yang memperhatikan baik variansi maupun besar bias suatu penaksir, dan ini sama dengan kriterium variansi jika perhatian kita batasi pada penaksir tak bias. Ini merupakan cara yang bermanfaat untuk membandingkan dua penaksir atau lebih, tetapi tidak mungkin untuk memperoleh penaksir yang mempunyai SKR minimum uniform untuk semua $\theta \in \Theta$ dan semua penaksir yang mungkin.

Contoh 2.2.9

Kita pandang keluarga fungsi peluang $f(x;\theta)$ dengan ruang parameter Θ yang memuat paling sedikit dua nilai. Jika tidak ada pembatasan pada jenis penaksir yang kita pandang maka penaksir konstan, $\hat{\theta}_c = c$ untuk $c \in \Theta$, tidak dapat dikeluarkan. Jelas bahwa penaksir semacam itu tidak disenangi dari titik pandang praktis karena penaksir-penaksir itu tidak bergantung pada sampel, namun tiap penaksir semacam itu mempunyai SKR yang kecil untuk nilai-nilai θ dekat c. Khususnya, SKR ($\hat{\theta}_c$) = $(c-\theta)^2$, yang sama dengan nol jika $\theta = c$. Ini berarti bahwa untuk penaksir dengan SKR minimum uniform, $\hat{\theta}$, haruslah SKR($\hat{\theta}$) = 0 untuk semua $\theta \in \Theta$. Ini akan berarti bahwa $\hat{\theta}$ konstan, misalnya $\hat{\theta}$ = c^* (dengan peluang 1). Sekarang, jika $\theta \in \Theta$ dan $\theta \neq c^*$ maka SKR ($\hat{\theta}$) = $(c^*-\theta)^2 > 0$, yang berarti $\hat{\theta}$ tidak mempunyai SKR yang minimum uniform.

Jika kelas penaksir yang kita pandang dapat dibatasi pada kelas yang lebih kecil maka mungkin kita dapat memperoleh penaksir dengan SKR minimum uniform. Misalnya, pembatasan pada penaksir yang tak bias akan menghilangkan penaksir-penaksir jenis konstan, karena $\hat{\theta}_c = c$ bukan penaksir tak bias untuk θ.

Contoh 2.2.10

Kita pandang sampel random dari distribusi eksponensial dua-parameter dengan parameter skala diketahui, misalnya $\theta = 1$, dan parameter lokasi η tidak diketahui. Dengan perkataan lain, $X_i \sim Exp(1\,;\eta)$. Kita ingin membandingkan PMM dan PML, masing-masing $\hat{\eta}_1$ dan $\hat{\eta}_2$. Khususnya, misalkan $\hat{\eta}_1 = \bar{X} - 1$ dan $\hat{\eta}_2 = X_{1:n}$. Mudah untuk menunjukkan bahwa $\bar{X} - \eta \sim$ Gamma $(1/n\,;n)$ dan $X_{1:n} - \eta \sim Exp(1/n)$ dan ini berarti bahwa:

$$E(\hat{\eta}_1) = E(\bar{X} - 1) = E(\bar{X}) - 1 = 1 + \eta - 1 = \eta$$

dan

$$E(\hat{\eta}_2) = E(X_{1:n}) = E(X_{1:n} - \eta + \eta)$$
$$= E(X_{1:n} - \eta) + \eta = 1/n + \eta$$

Jadi, $\hat{\eta}_1$ tak bias dan $\hat{\eta}_2$ bias dengan besar biasnya adalah $b(\hat{\eta}_2) = 1/n$. SKR-nya masing-masing adalah:

$$SKR(\hat{\eta}_1) = \text{var}(\bar{X} - 1) = 1/n$$

dan

$$SKR(\hat{\eta}_2) = \text{var}(\hat{\eta}_2) + (1/n)^2 = Var(X_{1:n}) + (1/n)^2$$
$$= Var(X_{1:n} - \eta) + (1/n)^2 = (1/n)^2 + (1/n)^2 = 2/n^2$$

Maka, untuk $n > 2$ penaksir yang bias mempunyai SKR yang jauh lebih kecil dari penaksir yang tak bias.

Mungkin juga kita mengubah $\hat{\eta}_2$ menjadi tak bias, misalnya: $\hat{\eta}_3 = X_{1:n} - 1/n$, sehingga $E(\hat{\eta}_3) = E(X_{1:n}) - 1/n = \eta + 1/n - 1/\eta = \eta$ dan $SKR(\hat{\eta}_3) = \text{var}(X_{1:n}) = \text{var}(X_{1:n} - \eta) = 1/n^2$. Jadi untuk $n > 1$, $\hat{\eta}_3$ mempunyai SKR yang terkecil di antara ketiganya.

Menarik untuk diperhatikan bahwa dalam Contoh 2.2.1, jika sampel dianggap diambil dari suatu distribusi eksponensial dengan parameter skala θ yang tidak diketahui maka PML untuk θ, yang tidak lain adalah $\bar{X}$, jauh lebih baik dari penaksir yang didasarkan atas $X_{1:n}$. Dalam contoh sekarang ini, yang distribusinya adalah eksponensial dengan parameter skala diketahui dan parameter lokasi tidak diketahui, hasilnya akan terbalik.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Pandang kembali soal nomor 1 Latihan pada kegiatan belajar 1. Hitunglah batas bawah C - R untuk variansi penaksir parameternya. Identifikasikan penaksir mana yang variansinya mencapai batas bawah C - R.
2) Pandang kembali soal nomor 2, Latihan kegiatan belajar 1. Kerjakan seperti soal nomor 1.
1) Pandang sampel random berukuran n dari suatu distribusi Bernoulli dengan parameter p.
   a. Hitunglah batas bawah C - R untuk variansi penaksir tak bias bagi p
   b. Hitunglah batas bawah C - R untuk variansi penaksir tak bias bagi $p(1-p)$
   c. Hitunglah penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk p
4) Misalkan, $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel random dari distribusi normal, $N(0; \theta)$
   a. Apakah PMM $\hat{\theta}$ tak bias untuk θ?
   b. Apakah $\hat{\theta}$ penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk θ?

RANGKUMAN

Pada umumnya diinginkan untuk mempunyai distribusi penduga sangat terkonsentrasi di sekitar nilai yang sebenarnya parameter yang ditaksir. Konsentrasi ini dapat dicerminkan oleh variansi-nya jika penaksir itu tak bias. Dalam kelas penaksir tak bias terdapat penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk semua nilai-nilai yang mencapai batas bawah C - R maka kita tahu bahwa penaksir itu penaksir tak bias bervariansi minimum uniform.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Misalkan, X berdistribusi binomial dengan parameter n dan p; dan $\hat{p} = X / n$

   a. Supaya $E\left[k\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\right] = p\left(1-p\right)$ maka k sama dengan ….

      A. $n/(n-1)$
      B. $(n-1)/n$
      C. $n/(n+1)$
      D. $(n+1)/n$

   Penaksir tak bias untuk $var(X)$ adalah ….

      A. $\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)/\left[n\left(n-1\right)\right]$
      B. $n^2\left(n-1\right)\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)$
      C. $n\left(n-1\right)/\left[\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\right]$
      D. $\left[n^2/\left(n-1\right)\right]\hat{p}(1-\hat{p})$

   c. Pandang sampel random berukuran N dari distribusi binomial (n ; p). Maka penaksir tak bias untuk p berdasarkan sampel itu adalah….

      A. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i / n\right)$
      B. $\sum_{i=1}^{N}\left[X_i / \left(nN\right)\right]$
      C. $\sum_{i=1}^{N}\left(X_i / N\right)$
      D. $\sum_{i=1}^{n}\left[X_i / \left(n+N\right)\right]$

   d. Seperti pada soal c, penaksir tak bias untuk var (X) adalah ….

      A. $\sum_{i=1}^{n} n\left(n-1\right)\left(x_i / n\right)\left(1+x_i / n\right)$
      B. $\sum_{i=1}^{n}\left[n\left(n-1\right)\left(x_i / n\right)\left(1-x_i / n\right)\right]$

C. $\sum_{i=1}^{n}\left[n/(n-1)\right](X_i/n)(1-X_i/n)/N$

D. $\sum_{i=1}^{n}\left[(n-1)/n\ \right](x_i/n)(1-x_i/n)\right]$.

2) Pandang sampel random berukuran n dari distribusi uniform $(0;\ \theta)$

a. Jika $\hat{\theta}$ adalah PML untuk θ maka $E(\hat{\theta})$ sama dengan ….

A. $n\theta/(n-1)$

B. $\theta/\left[n(n-1)\right]$

C. $n\theta/(n+1)$

D. $\theta/\left[n(n+1)\right]$

b. Jika $\tilde{\theta}$ adalah PMM untuk θ maka $E(\tilde{\theta})$ sama dengan ….

A. $n\theta$

B. $n\theta/(n-1)$

C. $(n-1)\theta/n$

D. θ

c. Maka, SKR untuk $\hat{\theta}$ sama dengan ….

A. $n\theta^2/\left[(n+1)^2(n+2)\right]$

B. $n^2\theta^2/\left[(n-1)(n+2)\right]$

C. $n\theta^2/\left[(n-1)(n-2)\right]$

D. $n^2\theta^2/\left[(n+1)(n-2)\right]$

d. Maka, SKR untuk $\tilde{\theta}$ sama dengan ….

A. $n\theta^2/(n-1)$

B. θ^2/n

C. $n\theta^2/(n+2)$

D. $\theta^2/(n+2)$

3) Pandang sampel random berukuran n dari distribusi Poisson dengan parameter λ.

a. Batas bawah C - R variansi penaksir tak bias untuk λ adalah ….

A. $n\lambda$

B. λ/n

C. $n^2\lambda^2$
D. λ^2/n

b. Batas bawah C - R variansi penaksir tak bias untuk $\theta = Exp\ (-\lambda)$ adalah ….
A. $e^{-2\lambda}/n$
B. λ/n
C. $\lambda e^{-2\lambda}/n$
D. $e^{2\lambda}/n$

c. Penaksir tak bias bervariansi minimum uniform untuk λ adalah ….
A. $\overline{X}$
B. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - \overline{X}\right)^2$
C. $\left(\overline{X}^2 - \overline{X}\right)/n$
D. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}^2\right)$

d. Penaksir tak bias untuk θ adalah ….
A. $(n+1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
B. $(n-1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
C. $n^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$
D. $\left[(n-1)/n\right]^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul berikutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) a. C b. A
2) a. B b. D c. A d. D
3) B
4) a. D b. D c. C

Tes Formatif 2

1) a. A b. D c. B d. C
2) a. C b. D c. A d. C
3) a. B b. C c. A d. D

Daftar Pustaka

Bain, L.J. & Engelhardt, M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics* 2^{nd}. California: Duxbury Press.

Hogg, R.V. & Craig, A.T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics*. 5^{th}. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.