Grado Ingeniería Informática - ETSIIT

Robótica Industrial

Práctica 3: Sistemas Analógicos y de Control

ÓSCAR JIMÉNEZ FERNÁNDEZ
15-5-2019

MEMORIA DE PRÁCTICAS

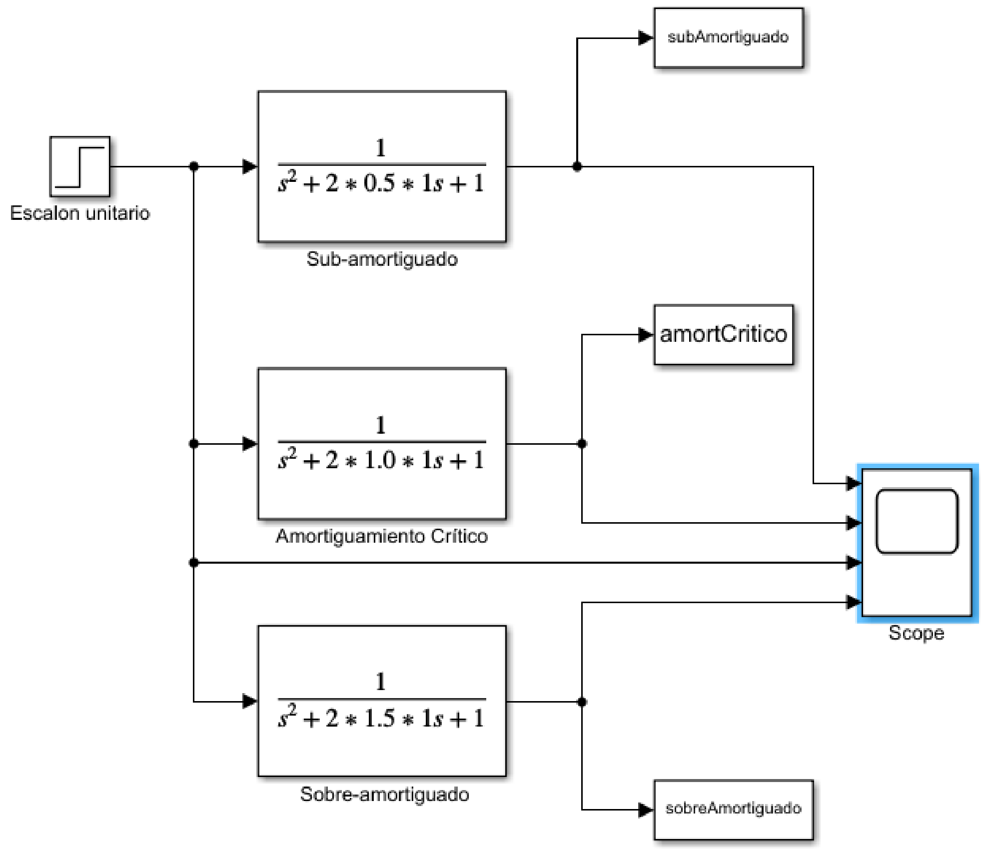
Sistemas de Segundo Orden

Para este primer caso deberemos estudiar la respuesta de un sistema analógico de segundo orden a una entrada tipo escalón unitario, cuya función de transferencia tendrá los siguientes valores $\omega n = 1$ y $\delta = 0.5$:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Deberemos realizar la simulación de la función de transferencia dada y analizar los resultados obtenidos para diferentes valores de amortiguamiento $\delta = 1$ (amortiguamiento crítico) y $\delta = 1.5$ (sobre-amortiguado), calculando de manera práctica y teórica los valores de sobreoscilación (Mp), tiempo de pico (Tp) y tiempo de establecimiento al 2% (Ts).

Para ello empleamos la herramienta Simulink integrada en Matlab y creamos el siguiente circuito:



La duración de la simulación será de 20 segundos, obteniendo un total de 2001 muestras (T=0.01). Para hallar el cálculo práctico de los valores solicitados, implementamos el script “ejercicio1.m” donde hacemos uso de la función definida ‘getValues(salida,error)’ localizada en el fichero “getValues.m”. Con esta función calculamos dichos valores pasándole como argumento el valor de la señal de salida obtenida con cada una de las funciones de transferencia tras la simulación del circuito en ‘Simulink’, la cual es pasada al *workspace* de ‘Matlab’ con el bloque “To Workspace”. Como segundo parámetro introducimos el valor del error en tanto por ciento con el que queramos calcular el tiempo de establecimiento.

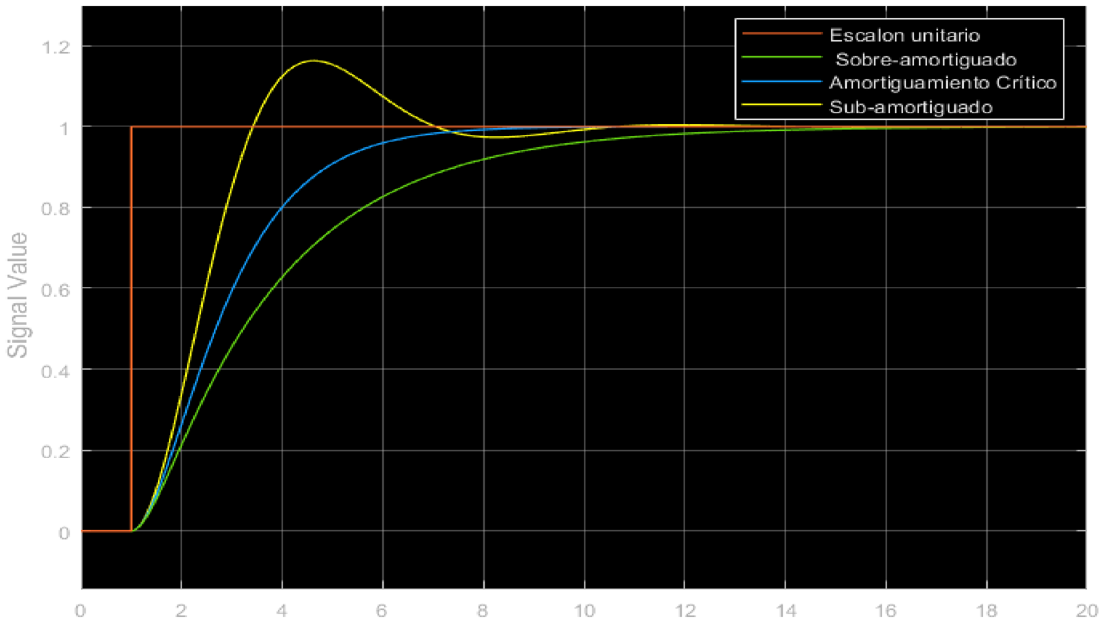
Con esta función, la sobreoscilación es hallada llamando a la función ‘max(salida)’ para hallar el valor máximo, y posteriormente calculamos el tiempo de pico localizando el índice de este valor en el array de salida que recibía la función como argumento.

Para hallar el tiempo de establecimiento comprobamos desde el final del array salida hasta el inicio, que la diferencia entre el valor de consigna y el valor del array para la posición de tiempo concreta es menor que el error y asignamos en dicho caso el índice actual como valor de tiempo de establecimiento. En caso de que esta diferencia sea mayor que el error permitido, devolveremos como tiempo de establecimiento el valor dado por la diferencia entre el total de muestras (2001 en nuestro caso) y el último valor de ts hallado desde el final. Esto es necesario precisamente debido a que hemos comenzado desde el final para localizarlo, debido a que no podemos comenzar desde el inicio ya que con sistemas sub-amortiguados, tendremos el problema de que puede oscilar varias veces entorno al valor de consigna, lo que nos daría un resultado erróneo si este es calculado de la forma descrita desde el inicio del array.

Para el primer caso con $\delta = 0.5$, será lógico esperar que la función nos devuelva unos valores coherentes para las variables solicitadas en el ejercicio, pero para el resto de casos con $\delta = 1.0$ y $\delta = 1.5$, no tendrá sentido el cálculo de la sobreoscilación y tiempo de pico, ya que al tratarse de sistemas de amortiguamiento crítico y sobreamortiguado, el máximo valor que se alcanzará será el valor de consigna, y por ende, el tiempo de pico que obtendremos para estos casos deberá de corresponderse con el tiempo máximo de la simulación ya que no se dará sobreoscilación, por lo que obviaremos estos resultados para ambos casos.

Respecto al valor de establecimiento, será de esperar que el sistema con amortiguamiento crítico sea el primero que alcance el valor de consigna y por ello, obtenga un menor tiempo de establecimiento.

Los resultados gráficos obtenidos para cada una de las funciones de trasferencia son los siguientes:



Los respectivos valores obtenidos con la función 'getValues' para cada una de las funciones de transferencia representadas son los siguientes:

AMORTIGUAMIENTO	**TS**	**MP**	**TP**
SUB-AMORTIGUADO	9,09 s	0.1630	4,64 s
CRÍTICO	6,85 s	-	- (20,01) s
SOBRE-AMORTIGUADO	11,67	-	- (20,01) s

Como habíamos predicho, con amortiguamiento crítico alcanzamos antes el valor de consigna, y de igual forma, la respuesta del sistema sub-amortiguado muestra un menor TS frente al sobre-amortiguado, aunque no siempre tendrá que darse esta situación, ya que si el coeficiente de amortiguamiento presenta un valor que hace que se den unas fuertes oscilaciones y para un segundo valor sobre-amortiguado, nos encontramos cerca del valor crítico, probablemente sea alcanzado antes el valor de consigna por el sobre-amortiguado respecto al sub-amortiguado.

En correspondencia con las gráficas, vemos como para el caso sub-amortiguado se observa sobre-oscilación. Respecto al TP, como adelantábamos, solo tendrá sentido el valor hallado para el caso sub-amortiguado, que, en consonancia con la gráfica, se encuentra en 4,64s.

Comentar adicionalmente como la respuesta obtenida por las funciones de transferencia se inicia desde el segundo 1, momento en el cual es generada la señal de entrada por el escalón unitario. Además, en esta podemos notar como conforme aumentamos este coeficiente de amortiguamiento, la rapidez en la respuesta de nuestro sistema de control disminuye.

De manera teórica, los resultados a obtener vendrían dados por las siguientes expresiones:

$$M_p(s) = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$T_p(s) = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$T_s(s) \approx \frac{4}{\omega_n\delta}$$

Si sustituimos los valores de $\delta\ y\ \omega_n$, teniendo en cuenta que en nuestro caso la señal se aplica a partir del instante de tiempo 1 segundo, tendríamos:

AMORTIGUAMIENTO	**TS**	**MP**	**TP**
SUB-AMORTIGUADO	9 s	0.1630	4,62 s

Comparando con los resultados prácticos, para el caso sub-amortiguado vemos como se corresponde con un pequeño error del orden 10e-2; para el resto de casos, al tener un valor de $\delta > 0.99$, no podremos calcularlo teóricamente mediante las expresiones dadas.

Funciones de Transferencia con Ceros

Para el segundo ejercicio deberemos introducir un cero en la función de transferencia anterior y ver para que valores de a podemos despreciar el efecto del cero:

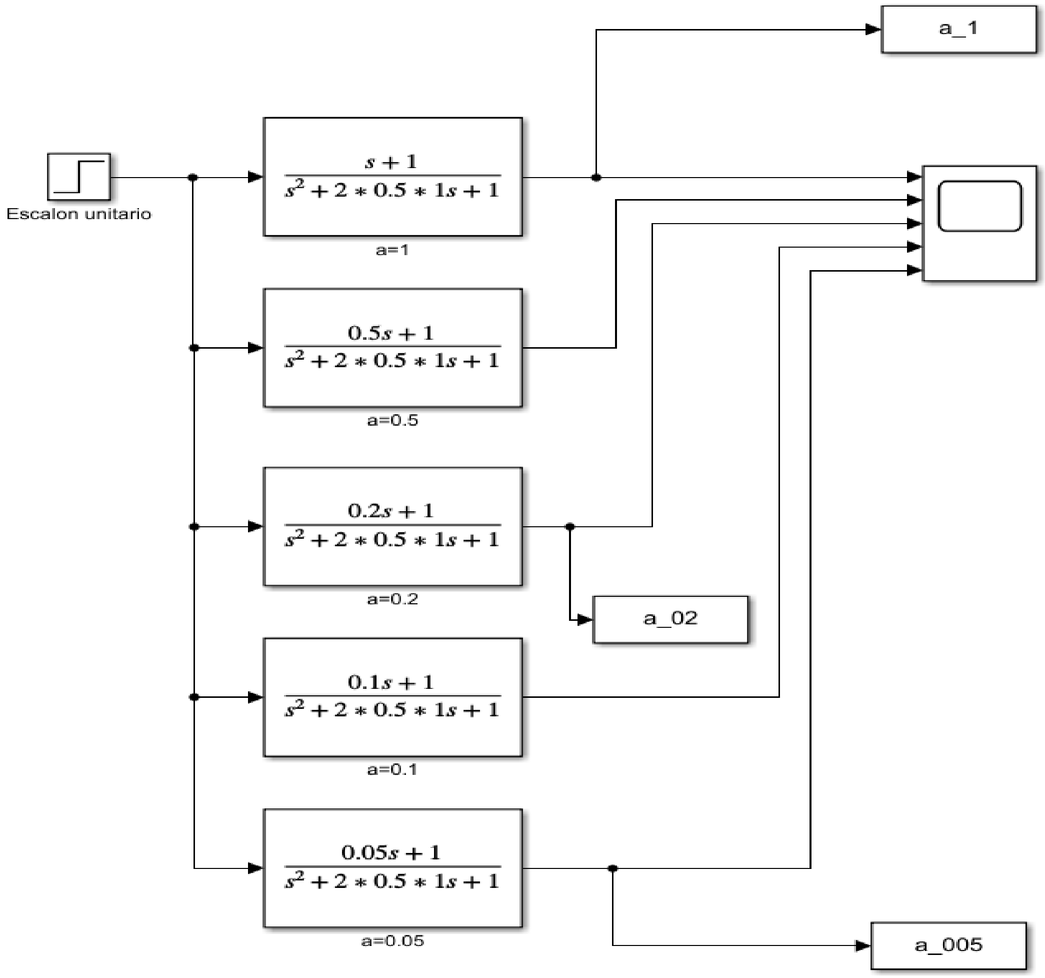
$$G(s) = \frac{as+1}{s^2+s+1}$$

Como norma práctica, tenemos que si $\delta > 0{,}5$ y $|Z_0| > 5\delta\omega_n$, podremos obviar el factor (as+1).

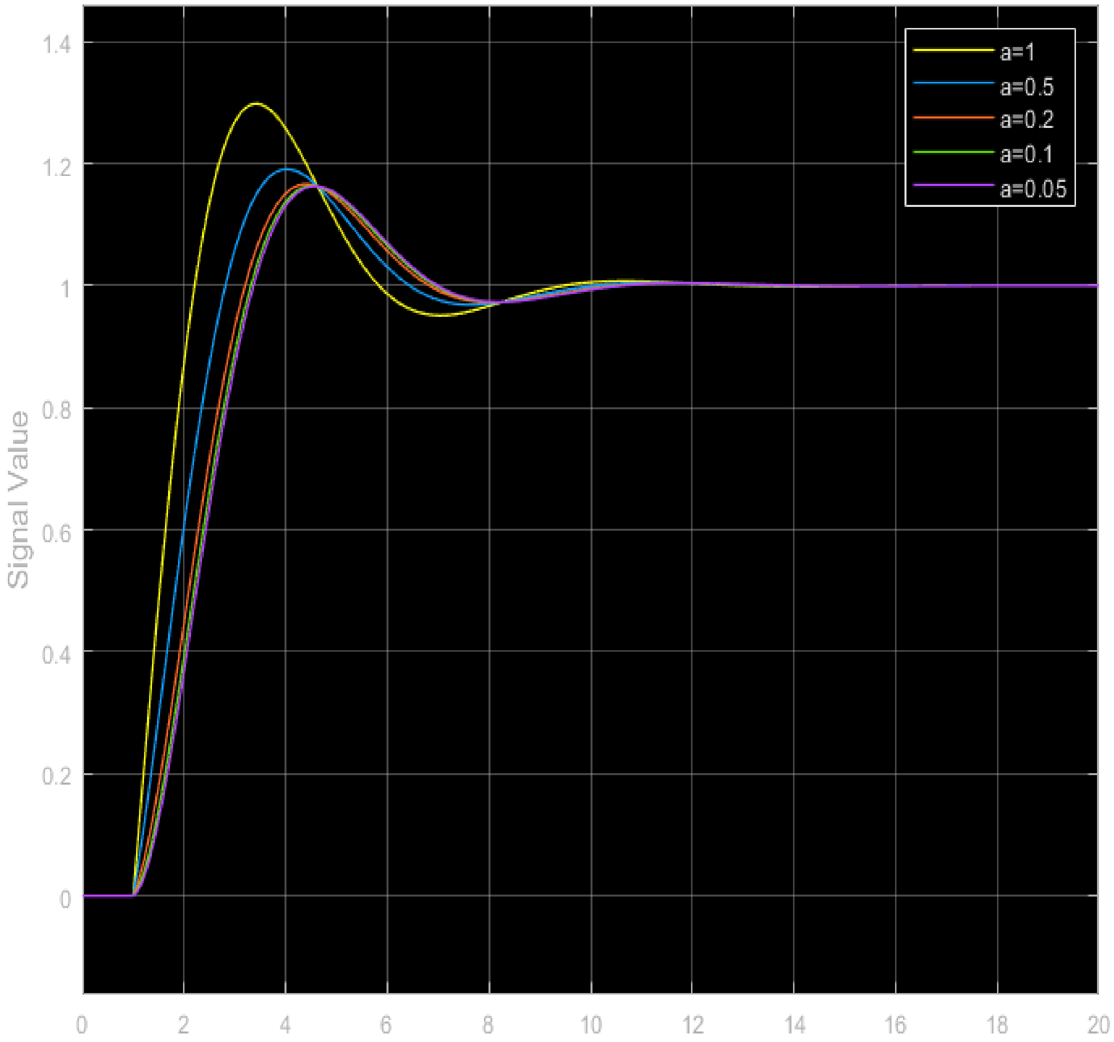
Para nuestro caso, ¿$|Z_0| > 5*0.5*1 = 2.5$?, siendo $Z_0 = -1/a$, por lo que el valor de 'a' a partir del que se cumple vendrá dado por $|-1/a| > 2.5 \Rightarrow -1/2.5 < a < 1/2.5$, lo que nos deja que podremos despreciar el efecto del cero para $a < 0.4$.

Los valores de amortiguamiento se establecen al igual que en el apartado anterior ($\delta = 0{,}5$ y $\omega n = 1$). Atendiendo a los resultados teóricos, deberemos de esperar que para los valores de a = [0.2, 0.1, 0.05], el efecto del cero podrá ser obviado.

Hemos simulado el siguiente circuito variando los valores de a (a = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05) y generando cada una de las siguientes funciones de transferencia para mostrar la salida y valorar los resultados:



Los resultados obtenidos, tanto gráficos como atendiendo a los valores estudiados en el ejercicio anterior son:



VALOR DE 'A'	**TS**	**MP**	**TP**
1	8.52 s	0.2984	3.43 s
0.2	8.91 s	0.1668	4.42 s
0.05	9.04 s	0.1632	4.59 s

Atendiendo a estos, a partir de un valor de a=0.2, podríamos despreciar el efecto del polo, como predecimos anteriormente con los resultados teóricos. Si observamos los resultados obtenidos y comparamos con los del mismo caso para el ejercicio anterior:

AMORTIGUAMIENTO	**TS**	**MP**	**TP**
SUB-AMORTIGUADO	9,09 s	0.1630	4,64 s

La diferencia entre ambos resultados para un valor de a<0.2 es prácticamente despreciable, siendo algo más notable en el TS con una diferencia de 0.18s.

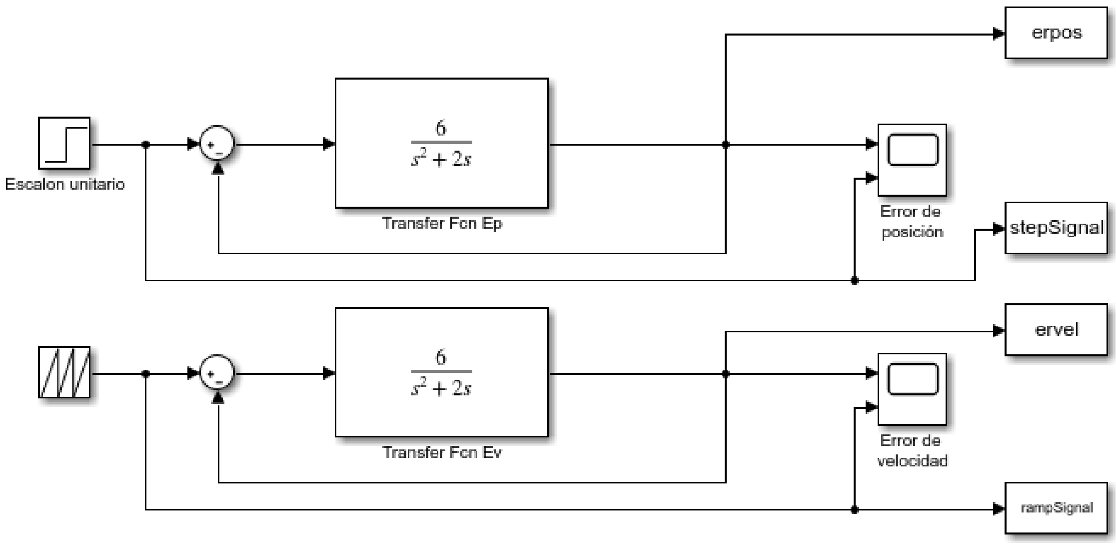
Sistemas Realimentados

Para este último ejercicio simularemos dos sistemas realimentados con los que mediremos el error de posición y velocidad, comparando a su vez con un segundo caso en el que deberemos introducir la acción de un controlador PI con kp = ki = 1.

La función de transferencia para este ejercicio es la siguiente:

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s}$$

Para medir el error de posición mediremos la salida del sistema con el escalón unitario como entrada, y para el caso del error de velocidad, el módulo 'Repeating Sequence' como se muestra a continuación:



Para medir el error de posición y velocidad de manera práctica, mediremos la diferencia en el último punto de la simulación entre la señal de entrada generada y la obtenida como salida de la función de transferencia que enviamos al workspace de Matlab a través de los módulos 'ToWorkspace' como realizábamos en los ejercicios anteriores.

Además, emplearemos la función de los ejercicios anteriores 'getValues', para hallar el valor de sobre-oscilación.

De manera teórica, para el primer caso en el que el sistema no sufre la acción del controlador PI, los resultados que esperamos obtener serían:

$$ep = \frac{1}{1 + Kp}\ ; Kp = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{6}{0} = \infty$$

$$ev = \frac{1}{Kv}\ ; Kv = \lim_{s \to 0} s * G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{6s}{s(s+2)} = \frac{6}{2} = 3$$

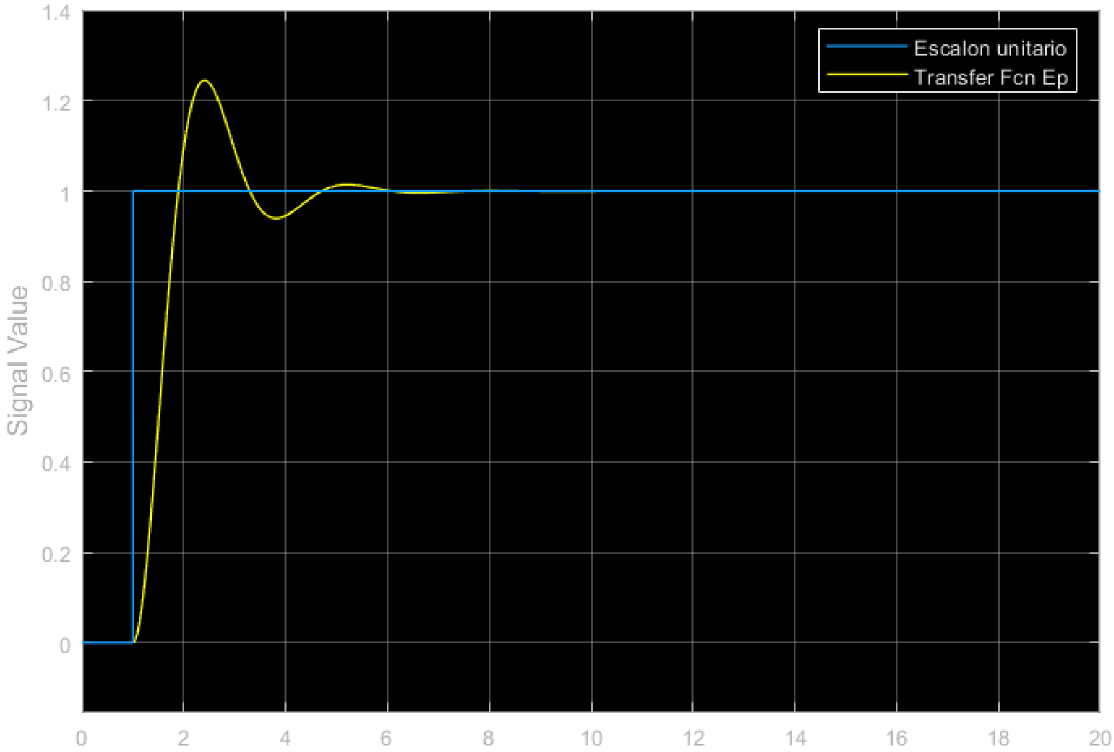
$$M_p(S) = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = e^{-\frac{0.408\pi}{\sqrt{1-0.408^2}}} = 0.245$$

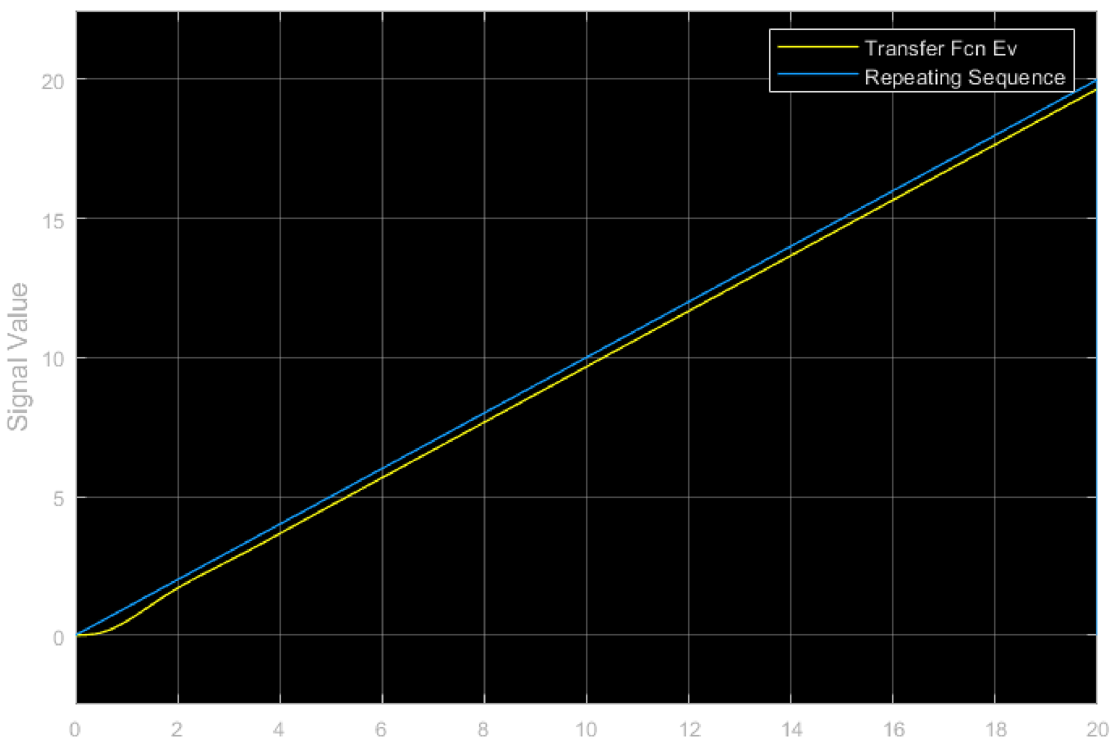
Por lo que, si sustituimos, los errores teóricos esperados para este primer caso son:

$$ep = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$ev = \frac{1}{3}$$

Procederemos ahora a ejecutar la simulación para comprobar si los resultados teóricos se corresponden con los prácticos obtenidos:



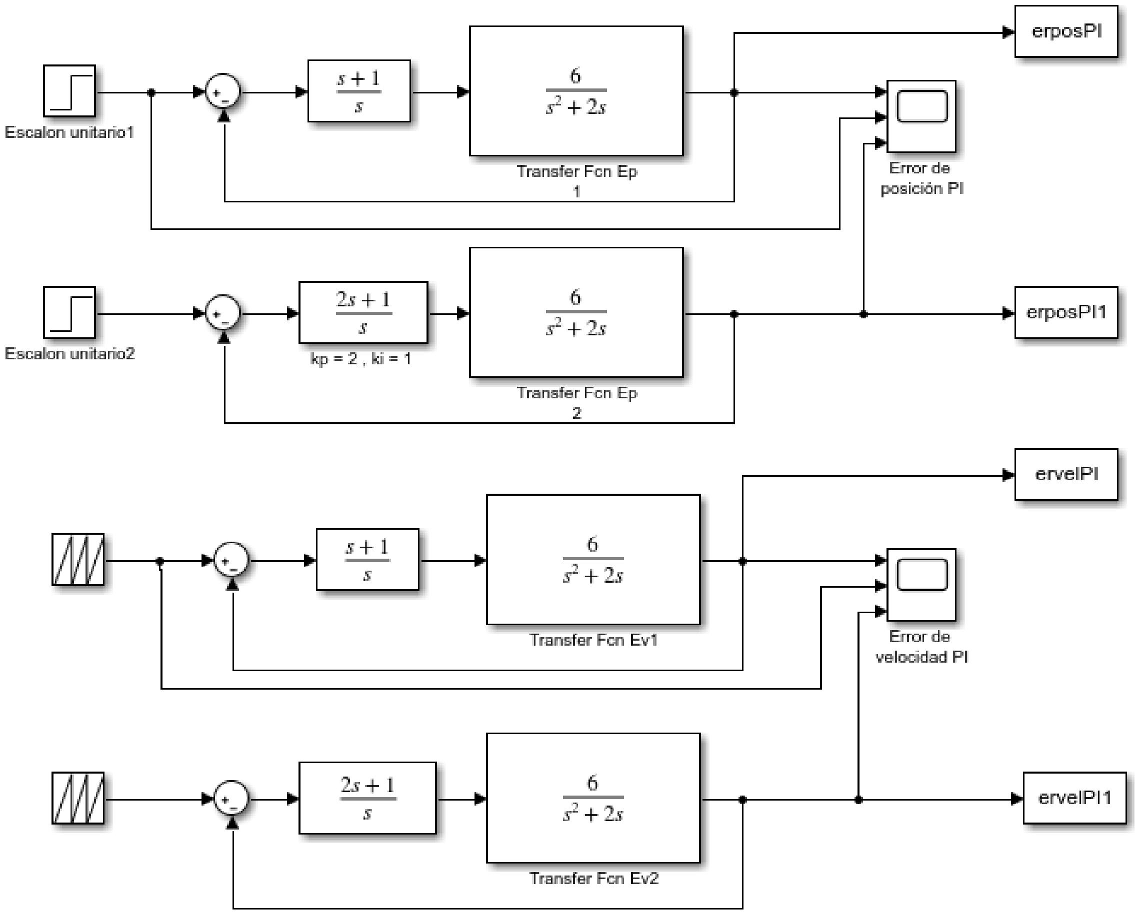


Hacemos ahora uso de las funciones implementadas para hallar el cálculo de los errores solicitados con los valores obtenidos de la simulación:

CASO	EP	EV	MP
1	2.2366e-09	0.3333	0.2454

Como podemos observar, los resultados obtenidos se corresponden por completo con los esperados teóricos.

Para el segundo caso, veremos cómo afecta a la simulación la acción de un control PI en el sistema. Para ello simularemos los siguientes circuitos, variando además los valores de las constantes kp y ki para reducir la sobre-oscilación obtenida:



Para la primera simulación, tendremos el valor de kp=ki=1. En el segundo caso, kp = 2, ki = 1.

A continuación, realizaremos de igual forma que en el anterior caso, el cálculo teórico esperado con la introducción de esta nueva acción de control:

$$G_c(s) = kp + \frac{ki}{s} = \frac{kp * s + ki}{s} = \frac{kp\left(s + \frac{ki}{s}\right)}{s}$$

$$G_{PI}(s) = \frac{kp\left(s + \frac{ki}{s}\right)}{s} * \frac{6}{s^2 + s}$$

$$ep = \frac{1}{1 + Kp}\ ; Kp = \lim_{s \to 0} G_{PI}(s) = \infty$$

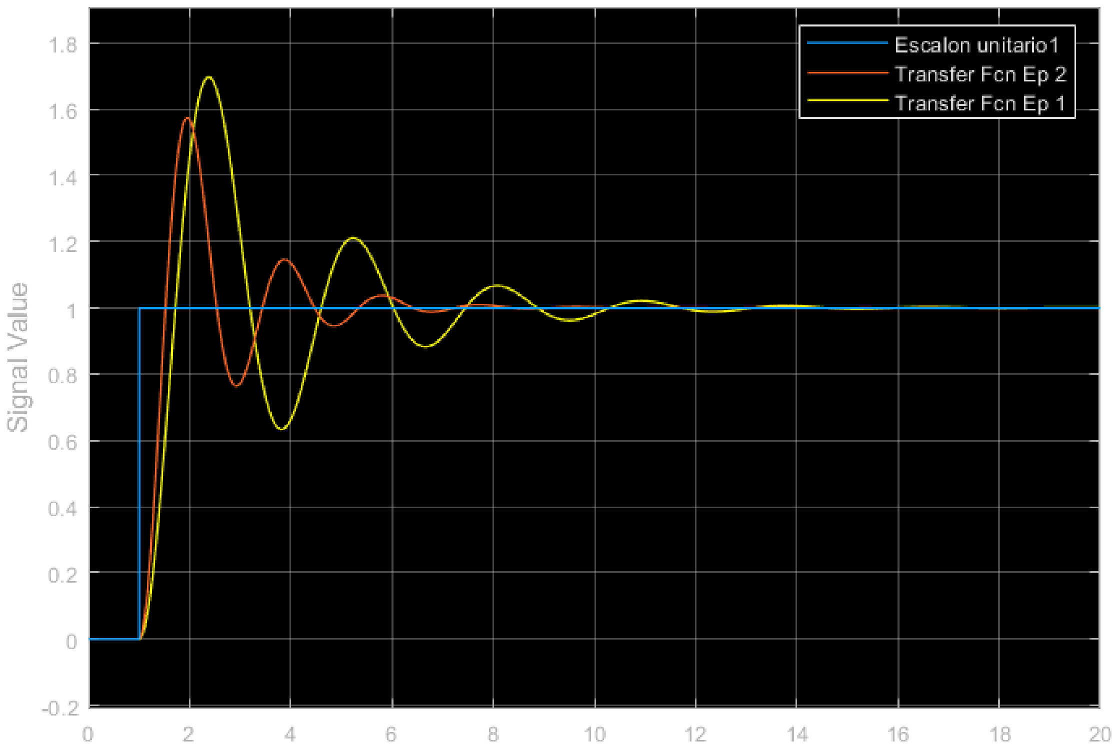
$$ev = \frac{1}{Kv}\ ; Kv = \lim_{s \to 0} \mathrm{s} * G_{PI}(s) = ki * \infty = \infty$$

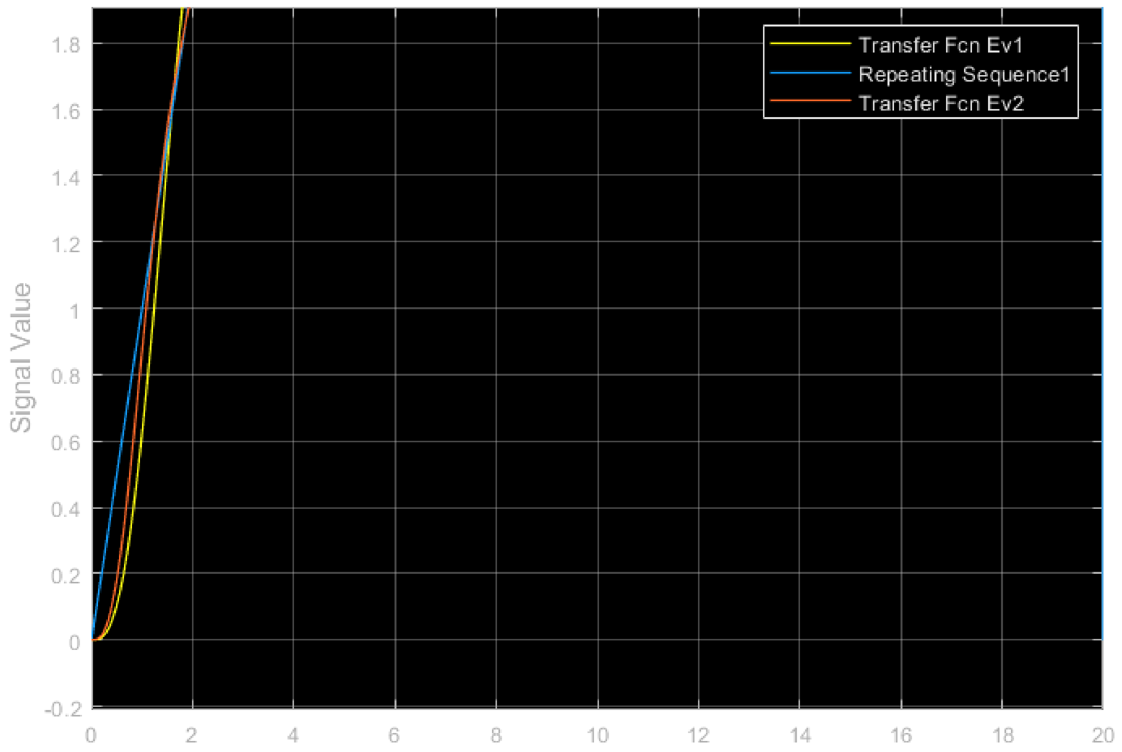
$$ep = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$ev = \frac{1}{\infty} = 0$$

Para este caso, obtenemos de manera teórica que tanto el error de posición como el de velocidad sea 0.

Ejecutamos ahora la simulación y comprobamos estos resultados:





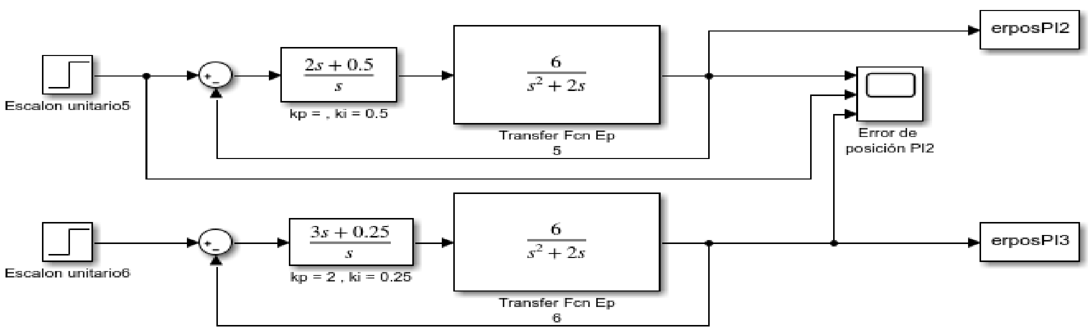
CASO	EP	EV	MP
PI 1	3.0554e-04	2.231e-05	0.697
PI 2	2.2798e-06	3.2280e-06	0.5745

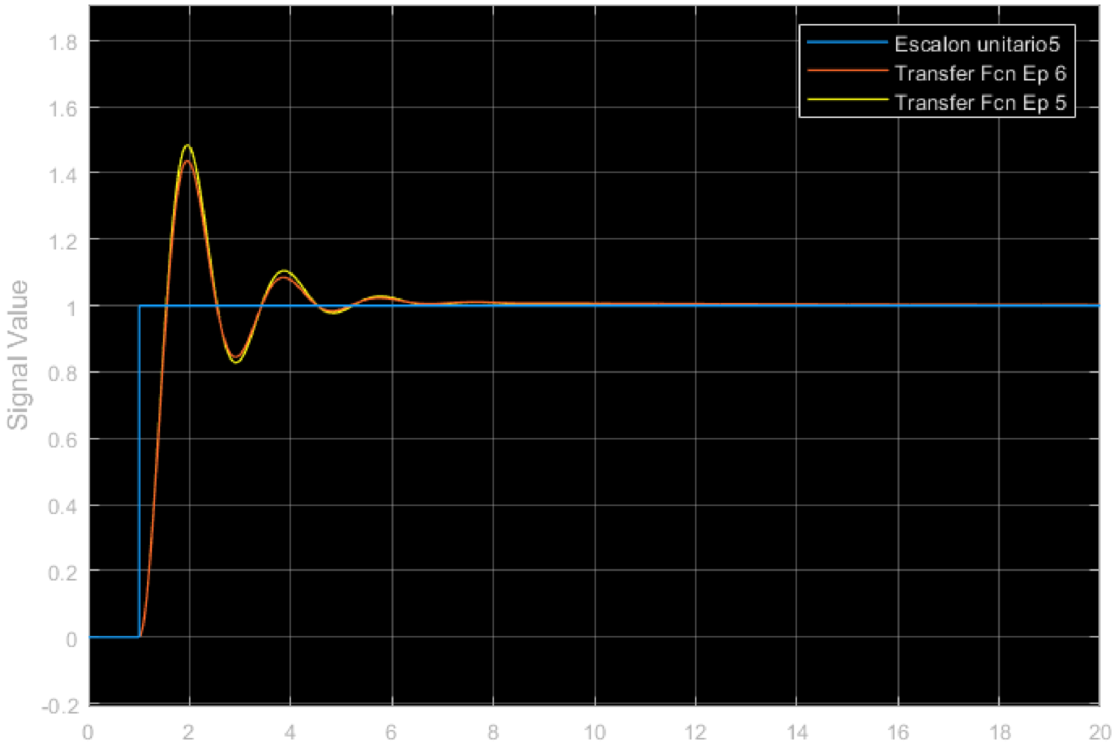
Al igual que en el caso anterior, los resultados prácticos se corresponden con los teóricos esperados en relación a los errores de posición y velocidad.

Respecto a la sobre-oscilación, tenemos que, en este segundo caso, al aumentar el valor de 'kp', el efecto de sobre-oscilación se ve reducido, llegándose a estabilizar entorno al valor de referencia en un menor espacio de tiempo.

Para el cálculo teórico de la sobre-oscilación, al tener un sistema de orden 3 $M(s) = \frac{6s+6}{s^3+2s^2+6kp*s+6ki}$, no hemos podido realizarlo ya que el valor $\delta = 1.2247$ nos impide el cálculo mediante la expresión $M_p(S) = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ al obtener una raíz negativa.

Si comprobamos para más valores de kp y ki:





En este nuevo experimento hemos igualado el valor de kp a 2, y los de ki3 = 0.5, ki4 = 0.25.

CASO	MP
PI 3	0.4843
PI 4	0.4368

Conforme aumentamos el valor de la constante proporcional y reducimos la de ki, el valore de sobre-oscilación se ve reducido.