Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
* * * * * *
Université de Sfax
* * * * * *
Faculté des sciences de Sfax

Équations différentielles linéaires.
Systèmes d'équations différentielles linéaires.
AH : Translatés d'une fonction dérivable

Projet réalisé par :
Dammak Yosr.
Encadré par monsieur:
Mnif Maher

AU : 2023-2024

Contents

1 Introduction

Les équations différentielles (ED) sont des équations mathématiques qui décrivent la relation entre une fonction et ses dérivées, qu'il s'agisse de dérivées ordinaires ou de dérivées partielles. Dans sa forme la plus simple, l'équation différentielle décrit la vitesse à laquelle une quantité change en fonction de la quantité elle-même et de ses dérivées.
Les équations différentielles constituent de puissants outils en mathématiques et en sciences, car elles permettent de modéliser un large éventail de phénomènes du monde réel dans diverses disciplines, notamment la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et bien d'autres.

Après avoir exploré les équations différentielles , intéressons-nous maintenant aux systèmes d'équations différentielles. Ces systèmes permettent de modéliser des scénarios comportant de multiples processus interdépendants, ce qui est courant dans les situations complexes du monde réel.

2 Généralités

2.1 Équations différentielles

Définition :
Soit k $\in \mathbb{N}^*$. Une **équation différentielle** d'ordre k est une relation de la forme

$$F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(k)}(x)) = 0 \qquad (\star)$$

où F est une fonction de à (k+2) variable, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^{k+2}$ dans $\mathbb{R}$
Une **solution** de $(\star)$ est la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction
I $\longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre k en tout point de I,
x $\longmapsto$ y(x)
telle que $\forall$ t $\in$ I on ait (t,X(t), . . .,$X^{(k)}$(t)) $\in$ D et l'égalité $(\star)$. On dit alors que y est une solution de $(\star)$ sur I.

Définition :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$.
F $\in C^0$ (Ω, $\mathbb{R}^d$) est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable lorsque pour tout (t_0, x_0) $\in \Omega$ il existe un voisinage U $\subset \Omega$ de (x_0, y_0) et k > 0 tels que :

$$\forall(x, y),(x, y') \in U, \| F(x, y) - F(x, y')\| \leq k \|y - y'\|.$$

Théorème : (Théorème de Cauchy-Lipschitz)(Version locale).
Soit (x_0, y_0) $\in \Omega$. On considère le problème

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Alors il existe h > 0 et y $\in C^1$ $(I_h, \mathbb{R}^d)$ tels que Γ(x) $\subset \Omega$ et y solution du problème sur l'intervalle $I_h := [x_0 - h, x_0 + h]$.En outre, toute autre solution à ce même problème de Cauchy est restriction de la solution maximale.

Exemple :
la solution de y'=x + y vérifiant F(1) est (et c'est la seule).

Définition : (Solution maximal)
On se donne une équation différentielle y'(x)=F(x,y(x)) avec une condition initiale y(x_0) $= y_0$. Une solution maximale pour ce problème est une fonction y = f(x), définie sur un intervalle I, telle que
- f est solution de l'équation différentielle et vérifie la condition initiale ;
- il n'existe pas de solution f de la même équation, vérifiant la même condition initiale et définie sur un intervalle J contenant I et plus grand que I.

Théorème : (sortie de compact)
Soit F : I × Ω une fonction continue et localement Lipschitzienne par rapport à la 2 ème variable (Ω).
Soit (J,y) une solution maximale de l'équation différentielle, on a alors :
-Si β =sup J ∈ I, alors y sort de tout compact de Ω au voisinage de β, c'est-à-dire que, pour tout compact K ⊂ Ω, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\text{y(x)} \notin \text{K}, \forall \text{ x} \in]\beta - \epsilon, \beta[$$

-Si α =inf J ∈ I, alors y sort de tout compact de Ω au voisinage de α, c'est-à-dire que, pour tout compact K ⊂ Ω, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\text{y(x)} \notin \text{K}, \forall \text{ x} \in]\alpha, \alpha + \epsilon[$$

Exemple :
On considère l'équation différentielle x'= $\frac{-1}{x}$,c'est-à-dire F(t, x) = $\frac{-1}{x}$, (t,x)∈ $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ donc I = $\mathbb{R}$ et Ω =]0 , +∞[.
Soit $x_0 \in \Omega$, on veut résoudre le problème de Cauchy pour la donnée $x(0) = x_0$. Pour cela on multiplie par x et on intègre, ce qui donne :

$$-xx' = 1$$
$$-\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} = \text{t}$$

D'où

$$x(\text{t})=\sqrt{x_0^2 - 2t},\ \forall \in]-\infty, \tfrac{x_0^2}{2}[$$

On voit donc que la solution maximale n'est pas globale. Au voisinage du temps d'existence on a

$$\lim_{t\to\frac{x_0^2}{2}} \text{x(t)} = 0,$$

et comme $0 \notin \Omega$, cela illustre bien le fait que la solution sort de tout compact de Ω

2.2 Équations différentielles linéaires

Définition :
Une équation différentielle linéaire d'ordre n est de la forme :

$$y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y^{(2)} + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y = b(x) \qquad \text{(E)}$$

avec y (ou y(x)) est une fonction
a_i et b sont des fonctions réelles continues a un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

Remarque :
Une équation différentielle linéaire vectorielle aura le même aspect, en remplaçant les a_i par des applications linéaires (ou souvent des matrices) fonctions de x et b par une fonction de x à valeurs vectorielles. Une telle équation sera parfois aussi appelée système différentiel linéaire.

2.3 Systèmes d'équations différentiels linéaires

Théorème :
Les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1, i.e. des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1 à coefficients $a_{i,j}$de la forme:

$$\text{(S)} \begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n + b(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n + b(t) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, le système (S) s'écrit :

$$\text{(S)} \qquad Y'(t) = AX(t) + B(t)$$

On posant $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n dont le coefficient de la i ème ligne et j ème colonne est a_{ij} et

$$X(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \ B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

2.4 Existence et unicité des solutions

Théorème : (Sortie de tout compact)

Soit]a,b[un intervalle ouvert, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et F:]a,b[$\times$ U $\to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit f :]c,d[$\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle y'=F(t,y). Alors, si d < b (resp. a < c), pour tout compact K de U, il existe un voisinage V de d (resp. c) dans]c,d[tel que f(t) $\notin$ K $\forall$ t de V.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire :
Soit a : I $\to$ L(E) et b : I $\to$ E continues. Soit $x_0 \in$ E, $t_0 \in$ I. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (\star)$$

$(\star)$ admet une unique solution f : I $\to$ E de classe C^1, tel que $\forall$ t $\in$ I f'(t)=a(t)(f(t))+b(t).

Démonstration :

1. La fonction x : I $\to$ E est solution du problème de Cauchy si et seulement si x est continue et que pour tout t $\in$ I :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}(a(s)(x(s)) + b(s))\, ds.$$

2. On définit une suite de fonctions continues par $x_0(t) = x_0$ et

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x_n(s)) + b(s))\, ds.$$

3. Si S $\subset$ I est un segment, on note $C_S = \|x_1 - x_0\|_{\infty,S}$ et $M_S = \sup_{u\in S}|||a(s)|||$. Alors $\forall$ n $\in$ N, $\|x_{n+1} - x_n\|_{\infty,S} \leq C_S\frac{M_S^n|t-t_0|^n}{n!}$

4. La suite (x_n) converge uniformément sur S, simplement sur I, vers une fonction g. Alors g est solution du problème de Cauchy.

5. Unicité : si h est une autre solution. Pour S $\subset$ I segment, on pose $K_S = \|g-h\|_{\infty,S}$,S. Alors $\forall$ n $\in$ N, $\|g-h\|_{\infty,S} \leq K_S\frac{M_S^n|t-t_0|^n}{n!}$
d'où g=h

Définition : (structure de l'ensemble des solution)
Soit a : I $\to$ L(E), b : I $\to$ E deux fonctions continues.
L'ensemble des solutions S de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1$(I , E) de dimension n = dim(E). De plus, l'application x $\mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de S sur E.
L'ensemble des solutions de l'équation complète

$$\mathrm{x'(t)+a(t)(x(t))=b(t)}$$

est un sous-espace affine de dimension n = dim(E)

3 Résolution des équations différentielles linéaires

3.1 A coefficients constants :

On appelle équation différentielle linéaire à coefficients constants toute équations de la forme : $\mathrm{y}^{(n)} + \ldots + \mathrm{a}_2\mathrm{y}^{(2)} + \mathrm{a}_1\mathrm{y}^{(1)} + \mathrm{a}_0\mathrm{y} = \mathrm{b(x)}$ et b une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a_{n-1} \ldots a_0$sont des coefficients constante dans $\mathbb{R}$.

3.1.1 Équation homogène:

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre n peut s'écrire sous la forme d'un système différentielle linéaire d'ordre 1.
On dit qu'il est homogène si la fonction b est identiquement nulle (B(t)est un vecteur nul), et l'on définit :

$$\mathrm{y}^{(n)} + \ldots + \mathrm{a}_2\mathrm{y}^{(2)} + \mathrm{a}_1\mathrm{y}^{(1)} + \mathrm{a}_0\mathrm{y} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Y'(t)=A(t)Y(t)}$$

Avec A : I $\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Où on cherche ici une fonction dérivable Y : I $\longrightarrow \mathbb{R}^n$. on peut cette équation sous forme étendue

$$\mathrm{Y'(t)} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y"(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y"(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ b(t) - a_0y(t) - a_1y'(t) - \cdots - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

Exemple :
Soit $y"(t) + (t+1)y'(t) + y(t) = b(t)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Y(t)= $\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, Y'(t)= $\begin{pmatrix} y'(t) \\ y"(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ b(t) - (t+1)y'(t) - y(t) \end{pmatrix}$

Donc Y'(t)= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(t+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

3.1.2 Exponentielle matricielle

:
On a, avec le développement de Taylor, $e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!} = 1 + x + x^2 + \dots \forall x \in \mathbb{R}$.
On peut utiliser cette même formule pour exprimer l'exponentielle d'une matrice carré: $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!} = 1 + A + A^2 + \dots$$

Proposition
Soit a $\in M_n(\mathbb{R})$, Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on appelle exponentielle de A et noté e^A.
Exemple :
Avec A=Id$_2$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix}\frac{1}{k!} & 0\\ 0 & \frac{1}{k!}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & 0\\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}$$
$$= e^{I_n} = eI_n = \begin{pmatrix}e & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & e\end{pmatrix}$$

Propriété :

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Alors

• La série qui définit l'exponentielle converge normalement sur tout compact de$M_n(C)$. L'exponentielle est une fonction continue (ne pas oublier de parler de l'utilisation des normes subordonnées, qui sont sous multiplicatives).

• Pour A quelconque et P inversible, on a : $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}ete^{t_A}) = t_{e^A}$.

•$e^0 = I_n + \dfrac{0}{1} + \frac{0^2}{2!} + \dots = I_{n/}$

•$Soit A \in M_n(\mathbb{R}), e^A e^{-A} = e^0 = I_n$. Donc e^A est inversible d'inverse e^{-A}
.

•$AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

• Si une matrice N est nilpotente, alors e^N - Id est nilpotente.

• Le spectre de e^A est e^λ; $\lambda \in$ Spec(A).

• Pour a quelconque, e^{tA}; t $\in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$

$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \|e^{tA}\| \leq e^{|t|} e^{\|A\|}$

Démonstration

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \times \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{B^{k'}}{k'!}$$
$$= \sum_{k=0 k'=0} \frac{A^k}{k!} \times \frac{B^{k'}}{k'!}$$
$$= \sum_{k=0 k'=0} \frac{B'^{k'}}{k'!} \times \frac{A^k}{k!}$$
$$= \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{B^{k'}}{k'!} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k=!}$$
$$= e^B e^A$$

2)$\|e^{tA}\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$(par définition)

$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|tA\|^k}{k!}$ (inégalité triangulaire)

$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(|t|\|A\|)^k}{k!} \leq e^{|t|\|A\|}$(définition de l'exponentielle réelle)

Théorème

Le système linéaire d'équation différentielle $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution donnée par y(t) = $e^{tA} y_0$.

Démonstration

EXISTENCE :

Vérifions que l'application f $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto e^{tA}y_0 \end{array} \right.$ est bien une solution du système donnée :

• Comme on a vu dessus, f'(t) = $Ae^{tA}y_0 = A$f(t)

• f(0) = $e^{0.A}y_0 = I_n y_0 = y_0$

UNICITE :

Soit y une solution du système, alors :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(e^{-tA}y) &= -Ae^{tA}y + e^{-tA}\tfrac{dy}{dt} \\ &= -Ae^{-tA}y + Ae^{-tA}y \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $e^{-ta}y$ est une constante, et on a ∀ t∈ $\mathbb{R}$

$$e^{-tA}y = y_0 \Rightarrow y = e^{tA}e_0$$

4 Translatés d'une fonction dérivable($\mathcal{C}^1$)

Rappel :

Familles dans un espace vectoriel

On considère dans toute la suite E un espace vectoriel. Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel. On dit que la famille $(V_1, \ldots, V_n)$ est :

• **liée :** S'il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$,tels que $a_1V_1 + \cdots + a_nV_n$= 0

• **libre :** Si elle n'est pas liée .Autrement dit, la famille $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre si, dés qu'on a une égalité $a_1V_1 + \cdots + a_nV_n$= 0, alors nécessairement $a_1 = \cdots = a_n = 0$. On dit encore que les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement indépendants.

• **génératrice :** Si tout vecteur V de l'espace E est une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, \ldots, V_n$: il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que V = $a_1V_1 + \cdots + a_nV_n$

• **base :** si elle est à la fois une famille libre et génératrice. Ceci entraîne que l'écriture de V comme combinaison linéaire de $V_1, \ldots, V_n$ est unique.

Intérieur:

Soit E un espace vectoriel normé (ou un espace métrique, ou un espace topologique), et A une partie de E. On dit qu'un point x est intérieur à A si A est un voisinage de x. Dans le cas des espaces métriques ou des espaces vectoriels normés, cela revient à dire qu'il existe un réel r $\succ$ 0 tel que la boule de centre x et de rayon r est contenue dans A.

On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A.

L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.

On note l'intérieur de A : A°

Remarque :

-les solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n forment un espace vectoriel de dimension n.

• **Dualité**

Soit E est k-espace vectoriel. On appelle dual de E l'ensemble des formes linéaires de E à valeurs dans K. On le note en général E^*.E^* est lui-même un espace vectoriel, de même dimension que E si E est de dimension finie.

Proposition: Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un base d'un espace vectoriel E. Pour chaque j $\in$ {1, ... , n}, il existe une unique forme linéaire e_j^* telle que

$$\forall \text{ i} \in \{1,\ldots,\text{n}\} : e_j^*(e_i) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j \end{cases}$$

Théorème Pour toute base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E , il existe une unique base $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^*, appelée **base duale** de $\mathcal{B}$(ou:base duale à $\mathcal{B}$,de E^*)telle que $\forall$ i,j $\in$ {1, ... , n} $e_j^*(e_i)=\delta_{ij}$

Proposition: Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E^* son espace dual,

$$\text{Si X} \subseteq E^* \text{ alors Vect(X)} = (X^\circ)^\perp$$

-$(E^*)^\circ$=0

Notation :

-on note f_a: $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+a) \end{cases}$ les translatés de f (pour a $\in \mathbb{R}$)

Théorème : (Translatés d'une fonction dérivable)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants si et seulement si les translatés de f engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

Lemme :
Soient $f_1, \dots, f_n$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$(f_1, \dots, f_n) \text{ libre dans } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \iff \text{il existe } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que la matrice } (f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} \text{ soit inversible}$$

Démonstration du lemme $\Longleftarrow$ Par contra posée, si $f_1, \dots, f_n$ sont liées, alors, pour tous les $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, les colonnes de la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ sont liées. Ainsi la matrice ne sera pas inversible.
$\Longrightarrow$ Si $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F} = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ de dimension n. Pour tout a $\in \mathbb{R}$, on pose la forme linéaire sur $\mathcal{F}$ suivante

$$e_a : \left\{ \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(a) \end{array} \right.$$

L'ensemble A = $\{e_a$, a $\in \mathbb{R}\}$ est une partie génératrice de F^*.

En effet, si f $\in A^\circ$, on a f(a) = e_a(f) = 0 $\forall$ a $\in \mathbb{R}$, donc f est la fonction nulle, ainsi A° =$\{$ f $\in \mathcal{F}$ | x, e_a(f)=f(a)=0 $\}$= $\{0\}$. On peut alors écrire

$$\text{Vect(A)} = (Vect(A)^\circ)^\perp = (A^\circ)^\perp = 0^\perp = F^*$$

On peut donc choisir $x_1, \dots, x_n$ tels que $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ base de F^*. On pose ensuite la matrice M = $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$.
Montrons que les lignes $L_1, \dots, L_n$ de M forment une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \dots , \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i L_i$=0. On a alors

$$\forall \text{ j} \in [\![1;\text{n}]\!], \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i f_i(x_j)=0$$

Autrement dit, $e_{x_j}(\sum\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i f_i)$=0. Comme $(e_{x_j})_{1\leq j\leq n}$ est une base de F^*, on a

$$\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i f_i \in (F^*)^\circ = \{0\}.$$

Ainsi

$$\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i f_i=0$$

or $(f_1, \dots, f_n)$ forment une base de F, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc la matrice M est inversible.

Démonstration du théorème .

$\Longrightarrow$ Soit (E) l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants dont f est solution. On note p l'ordre de (E). Tous les translatés de f sont des solutions de (E) (car (E) est homogène). Or l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre p forme un espace vectoriel de dimension p. Ainsi l'ensemble des translatés de f engendre un espace vectoriel de dimension inférieure à p, donc de dimension finie.

$\Longleftarrow$ On note F l'ensemble engendré par les translatés de f. Par hypothèse, F est de dimension finie, on note n sa dimension.

On considère $a_1, \ldots, a_n$ tels que $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ soit une base de F. Par le lemme, il existe $x_1, \ldots, x_n$ tels que M = $(f_{a_i}(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

La fonction f étant $\mathcal{C}^1$, les fonctions f_{a_i} le sont aussi. Donc tout élément de F est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit g $\in F$. Montrons que g' $\in F$.

On a, pour tout a $\in \mathbb{R}$, $g_a \in F$ car $g_a \in$ vect$(f_{a_1+a}, \ldots, f_{a_n+a}) \subset F$

Il existe donc $\lambda_1(a), \ldots, \lambda_n(a)$ tels que

$$g_a = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(a) f_{a_i}$$

On veut maintenant montrer que les λ_i sont dérivables.

On a, pour tout $1 \leq$ j $\leq$ n,

$$\mathrm{g}(\mathrm{a}+x_j) = g_a(x_j) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$$

Autrement dit,

$$M^T \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a(x_1) \\ \vdots \\ g_a(x_n) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = (M^{-1})^T \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} \text{ car } M \text{ est inversible donc } M^T \text{ aussi.}$$

Comme $(M^{-1})^T$ est indépendante de a, pour tout j $\in [\![1;\mathrm{n}]\!]$, λ_j est combinaison des $g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}$.

Les λ_i sont donc des fonctions $\mathcal{C}^1$ comme les g_{x_i} . On a

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \text{ g(x+a)=} \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$$

En dérivant par rapport à a, on a :

$$\text{g'(x+a)=} \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$$

On applique en a = 0,

$$\text{g'(x)=} \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i'(0) f_{a_i}(x)$$

Ainsi

$$\text{g'=} \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i'(0) f_{a_i} \in F$$

Donc tout élément de F est $\mathcal{C}^1$ et pour tout k $\in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)} \in F$.
Ainsi, on peut appliquer ce résultat pour notre fonction f. Or l'espace vectoriel F étant de dimension finie n, il existe p $\in$ ⟦1;n⟧tel que

$$f^{(p)} \in \text{Vect}(f,\ f',\vdots,\ f^{(p-1)})$$

La fonction f est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant d'ordre p.