Ex 1

צריך לפתור על ידי טור סביב $x=0$, נקודה סינגולרית.

$$x \cdot y'' + y' - y = 0$$

Solution:

$$x \cdot p(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 \cdot q(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$$

מכאן: $x=0$ היא נקודה סינגולרית חלשה

$$\begin{cases} p_0 & = 1 \\ q_0 & = 0 \end{cases}$$

משוואת האינדקסים:

$$\delta(r) = r \cdot (r-1) + r = 0 \qquad \to r_1 = r_2 = \underline{\boldsymbol{0 = r}}$$

$$[\delta(r) = r(r-1) + p_0 \cdot r + q_0]$$

פתרונות:

$$\varphi_1(x) = x^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \cdot \ln x + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

בפיתוח שיעשה כאן נראה ש-b_0 שווה ל-0.

$$\varphi_1 \to \varphi_2$$

$$\{x \cdot y'' + y' - y = 0\}$$

פתרון ראשון:

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\varphi_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\varphi_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) x^{n-2}$$

נציב במשוואה:

$$x\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{n}\right]=0$$

$$x\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}\right]+\left[\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\boldsymbol{a_{n-1}\cdot x^{n-1}}\right]=0$$

$$a_0\cdot[0]\cdot x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot n\cdot(n-1)+a_n\cdot n-a_{n-1}\right]\cdot x^{n-1}=0$$

ניתן לבחור את a_0 שרירותית (אבל לא 0) ולכן $a_0=1$
מתוך הסכום נקבל את נוסחת הנסיגה:

$$a_n\cdot n\cdot(n-1)+a_n\cdot n-a_{n-1}=0\qquad\Rightarrow\qquad a_n=\left[\frac{1}{n^2}\right]\cdot a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}=\frac{1}{(n\cdot(n-1))^2}\cdot a_{n-2}=\cdots=\left(\frac{1}{n!}\right)^2\cdot a_0$$

מכאן מקבלים את הפתרון הראשון:

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^2x^n$$

$$\varphi_1(x)=1+x+\frac{1}{4}x^2+\ldots$$

עכשיו נחפש את הפתרון השני:

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)\cdot\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^{n+r|_{r=0}}$$

$$\varphi_2'(x)=\varphi_1'(x)\cdot\ln x+\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$\varphi_2''(x)=\varphi_1''(x)\cdot\ln x+2\varphi_1'(x)\cdot\ln x-\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$$

הצבה למשוואה:

$$x\left[\varphi_1''(x)\cdot\ln x+2\varphi_1'(x)\cdot\ln x-\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\right]+$$

$$+\left[\varphi_1'(x)\cdot\ln x+\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot x^{n-1}\right]-$$

$$-\left[\varphi_1(x)\cdot\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^n\right]=0$$

$$\ln x\left[x\cdot\varphi_1''+\varphi_1'-\varphi\right]\qquad @\left\{x\cdot\varphi_1''+\varphi_1'-\varphi=0\right\}$$

לכן אפשר למחוק כל מקום שיש ln ואז מה שנשאר:

$$2\varphi_1'+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot x^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}b_{n-1}\cdot x^{n-1}=0$$

כעת ניתן לקבץ איברים:

$$b_1\cdot x^0+\sum_{n=2}^{\infty}\left[b_n\cdot n^2-b_{n-1}\right]\cdot x^{n-1}=-2\varphi_1'=-2\cdot x^0-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n!)^2}\cdot x^{n-1}$$

עושים השוואת מקדמים של החזקות:

$$\begin{aligned}
x^0: &\qquad b_1=-2\\
x^n|_{n\geq1}: &\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left[b_n\cdot n^2-b_{n-1}\right]=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

מסדרים ומקבלים:

$$\begin{aligned}
x^0: &\qquad b_1=-2\\
x^n|_{n\geq1}: &\qquad b_n=\frac{1}{n^2}\left[b_{n-1}-2\frac{n}{(n!)^2}\right]
\end{aligned}$$

עכשיו אפשר לחשב את האיברים הראשונים:

$$b_2=\frac{1}{4}\cdot\left(-2-2\frac{2}{(2!)^2}\right)=-\frac{3}{4},\qquad b_3=\cdots=-\frac{11}{108}$$

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\varphi_2=\varphi_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^n$$

וזהו הפתרון.

Ex.2

$x \cdot y'' + y = 0$
$y'' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$

$$q(x) = \frac{1}{x} \qquad p(x) = 0$$

$$x^2 \cdot q(x) = 0 + x \qquad x \cdot p(x) = 0$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 \cdot r + q_0 = 0 \qquad \to r(r-1) = 0 \qquad \Rightarrow r_1 = 1;\ r_2 = 0$$

Solving for φ_1:

$$\varphi_1(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1}$$

$$\varphi_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (n+1) \cdot x^n$$

$$\varphi_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n-1}$$

Subs

$$x \cdot y'' + y = 0$$

$$x \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n-1}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} = 0$$

$$a_0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot x^0 + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cdot n \cdot (n+1) + a_{n-1}] \cdot x^n = 0$$

$$a_0 \cdot 0 = 0 \to \boldsymbol{a_0 = 1}$$

$$a_n \cdot n \cdot (n+1) + a_{n-1} = 0 \to \boldsymbol{a_n = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot (n-1)}}$$

Summary:

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot(n!)^2} \cdot x^n$$

Solving for φ_2:

$$\varphi_2(x) = x^0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n + \mathbf{K} \cdot \ln x \cdot \varphi_1$$

Assuming (wrongly !!!):

$$\varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^{n+0}$$

$$\varphi_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\varphi_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Subs to eq:

$$x \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^{n+0} = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} \cdot x^{n-1} = 0$$

$$n = 0: \qquad b_0 \cdot 0 \cdot x^0 = 0 \rightarrow b_0 = 1$$

$$n \geq 1: \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} \rightarrow b_n = \frac{-b_{n-1}}{n\cdot(n-1)}$$

ככה ($b_n = \frac{-b_{n-1}}{n\cdot(n-1)}$) לא טוב להסתכל על זה. בוא נחזור לנוסחת נסיגה

:

$b_n \cdot n \cdot (n-1) + b_{n-1} = 0$

$n = 1: \quad \square \cdot 0 + b_0 = 0$

hence this is **wrong**!!!!

Defining φ_2 again, correct this time:

$$\varphi_2(x) = x^0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n + \mathbf{K} \cdot \ln x \cdot \varphi_1$$

$$\varphi_2'(x) = \mathbf{K} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \varphi_1 + \ln x \cdot \varphi_1'\right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\varphi_2''(x) = \mathbf{K} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \varphi_1' + \ln x \cdot \varphi_1'' \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Subst to eq:

$$x \cdot \left[\mathbf{K} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \varphi_1' + \ln x \cdot \varphi_1'' \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \right] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n + \mathbf{K} \cdot \ln x \cdot \varphi_1 = 0$$

$$\left[\mathbf{K} \cdot \left(-\frac{1}{x} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_1' + \underline{\ln x} \cdot x \cdot \varphi_1'' \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} \right] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n + \mathbf{K} \cdot \underline{\ln x} \cdot \varphi_1 = 0$$

$$\mathbf{K} \cdot \ln x \cdot \left[x \cdot \varphi_1'' + \varphi' \right] = 0 \qquad \rightarrow \text{everything w lnx falls}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \mathbf{K} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \varphi_1 - 2 \cdot \varphi_1' \right)$$

Performing usual steps of shifting indices and collecting terms.

$$b_0 \cdot 0 \cdot x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-1} + b_{n-1} \right] \cdot x^{n-1} = \mathbf{K} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \varphi_1 - 2 \cdot \varphi_1' \right)$$

$\Rightarrow \; b_0 = 1$

Comparing both sides and solving.

Summary:

$$\varphi_2(x) = \underset{=-1}{\mathbf{K}} \cdot \ln x \cdot \varphi_1 + \left[1 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{36} x^3 + \ldots \right]$$

$n = 1 \; \left(x^0\right)$:

$$\begin{aligned} b_0 &= \mathbf{K} \cdot (1-2) \\ &= -\mathbf{K} = 1\varphi \end{aligned}$$