Ex 1

צריך לפתור על ידי טור סביב $x=0$, נקודה סינגולרית.

$$x\cdot y''+y'-y=0$$

Solution:

$$x\cdot p\left(x\right)=x\cdot\frac{1}{x}=1$$

$$x^{2}\cdot q\left(x\right)=x^{2}\cdot\frac{1}{x}=x$$

מכאן: $x=0$ היא נקודה סינגולרית חלשה

$$\begin{cases}p_{0} & =1\\ q_{0} & =0\end{cases}$$

משוואת האינדקסים:

$$\delta\left(r\right)=r\cdot\left(r-1\right)+r=0\qquad\rightarrow r_{1}=r_{2}=\underline{\boldsymbol{0=r}}$$

$$\left[\delta\left(r\right)=r\left(r-1\right)+p_{0}\cdot r+q_{0}\right]$$

פתרונות:

$$\varphi_{1}\left(x\right)=x^{r}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

$$\varphi_{2}\left(x\right)=\varphi_{1}\left(x\right)\cdot\ln x+x^{r}\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}x^{n}$$

בפיתוח שיעשה כאן נראה ש־b_{0} שווה ל־0.

$$\varphi_{1}\rightarrow\varphi_{2}$$

$$\left\{x\cdot y''+y'-y=0\right\}$$

פתרון ראשון:

$$\varphi_{1}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

$$\varphi_{1}'\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$\varphi_{1}''\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\cdot n\cdot\left(n-1\right)x^{n-2}$$

נציב במשוואה:

$$x\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{n}\right]=0$$

$$x\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}\right]+\left[\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\boldsymbol{a_{n-1}\cdot x^{n-1}}\right]=0$$

$$a_0\cdot[0]\cdot x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot n\cdot(n-1)+a_n\cdot n-a_{n-1}\right]\cdot x^{n-1}=0$$

ניתן לבחור את a_0 שרירותית (אבל לא 0) ולכן $a_0=1$
מתוך הסכום נקבל את נוסחת הנסיגה:

$$a_n\cdot n\cdot(n-1)+a_n\cdot n-a_{n-1}=0\qquad\Rightarrow\qquad a_n=\left[\frac{1}{n^2}\right]\cdot a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}=\frac{1}{\left(n\cdot(n-1)\right)^2}\cdot a_{n-2}=\cdots=\left(\frac{1}{n!}\right)^2\cdot a_0$$

מכאן מקבלים את הפתרון הראשון:

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^2x^n$$

$$\varphi_1(x)=1+x+\frac{1}{4}x^2+\dots$$

עכשיו נחפש את הפתרון השני:

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)\cdot\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^{n+r|_{r=0}}$$

$$\varphi_2'(x)=\varphi_1'(x)\cdot\ln x+\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$\varphi_2''(x)=\varphi_1''(x)\cdot\ln x+2\varphi_1'(x)\cdot\ln x-\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$$

הצבה למשוואה:

$$x\left[\varphi_1''(x)\cdot\ln x+2\varphi_1'(x)\cdot\ln x-\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}\right]+$$

$$+\left[\varphi_1'(x)\cdot\ln x+\varphi_1(x)\cdot\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot x^{n-1}\right]-$$

$$-\left[\varphi_1(x)\cdot\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^{n}\right]=0$$

$$\ln x\left[x\cdot\varphi_1''+\varphi_1'-\varphi\right]\qquad @\left\{x\cdot\varphi_1''+\varphi_1'-\varphi=0\right\}$$

לכן אפשר למחוק כל מקום שיש $\ln$ ואז מה שנשאר:

$$2\varphi_1'+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot n\cdot x^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}b_{n-1}\cdot x^{n-1}=0$$

כעת ניתן לקבץ איברים:

$$b_1\cdot x^0+\sum_{n=2}^{\infty}\left[b_n\cdot n^2-b_{n-1}\right]\cdot x^{n-1}=-2\varphi_1'=-2\cdot x^0-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n!)^2}\cdot x^{n-1}$$

עושים השוואת מקדמים של החזקות:

$$\begin{aligned} x^0: &\qquad b_1=-2\\ x^n|_{n\geq1}: &\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left[b_n\cdot n^2-b_{n-1}\right]=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n!)^2}\end{aligned}$$

מסדרים ומקבלים:

$$\begin{aligned} x^0: &\qquad b_1=-2\\ x^n|_{n\geq1}: &\qquad b_n=\frac{1}{n^2}\left[b_{n-1}-2\frac{n}{(n!)^2}\right]\end{aligned}$$

עכשיו אפשר לחשב את האיברים הראשונים:

$$b_2=\frac{1}{4}\cdot\left(-2-2\frac{2}{(2!)^2}\right)=-\frac{3}{4},\qquad b_3=\cdots=-\frac{11}{108}$$

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\varphi_2=\varphi_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^n$$

וזהו הפתרון.