УДК 517.91
DOI ????????????????

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИКИ ФОТОСИНТЕЗА В АВТОТРОФНЫХ СИСТЕМАХ#

Э. М. Мухамадиев[1], И. Дж. Нуров[2], З. И. Шарифзода[2]

[1] Вологодский государственный университет, Россия, 160000, Вологда, Ленина, 15;
[2] Научно-исследовательский институт Таджикского национального университета, Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

E-mail: emuhamadiev@rambler.ru, nid1@mail.ru, sakhara-2803@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая фотосинтез в автотрофных системах. Выделена область, инвариантная относительно движения вдоль траектории системы при возрастании времени. В этой области установлено существование единственного стационарного решения и исследованы вопросы его устойчивости. В настоящее время в связи с экспоненциальным ростом численности населения, индустриальным прогрессом и, как следствие, увеличением общего загрязнения биосферы, исследование устойчивости растительных организмов к антропогенным загрязнениям приобретают важнейшее практическое и теоретическое значение. Вместе с тем стала чрезвычайно актуальной проблема качественного исследования процессов фотосинтеза. В задачах, связанных с фотосинтезом, большой интерес представляет определение законов функционирования системы, а также выбор методов математического и компьютерного моделирования. Так как процесс является нелинейным, то он зависит от многих параметров. Поэтому, прежде всего следует выделять ключевые параметры. Применение элементов компьютерного моделирования намного ускоряют работу процесса. Фотосинтез является значимым процессом нашей планеты. Это процесс преобразования поглощенной энергии света в химическую энергию органических соединений — единственный процесс в биосфере, ведущий к увеличению энергии биосферы за счёт внешнего источника — Солнца, обеспечивающего существование как растений, так и всех гетеротрофных организмов. Наиболее важными среди внешних факторов, влияющих на процессы фотосинтеза и фотодыхания, являются температура, фотосинтетически активная радиация, водный режим, режим минерального питания растения, а также содержание в окружающем пространстве углекислого газа и кислорода. В последние десятилетия наблюдается рост концентрации углекислого газа в атмосфере и изменение теплового режима в масштабах планеты. В связи с этим актуальной является задача прогнозирования изменения интенсивности фотосинтеза растений, обусловленного изменением концентрации атмосферного углекислого газа и температуры.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, стационарное решение, фазовый портрет, линеаризация, устойчивость.

Mathematical Subject Classification (2010): 34A34, 34C60.

Образец цитирования: *Мухамадиев Э. М., Нуров И. Дж., Шарифзода З. И.* Качественный анализ и устойчивость динамики фотосинтеза в автотрофных системах // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. ??, вып. ?.—С. ??–??. DOI: ???.

1. Постановка задачи

Следует отметить, что данной тематике посвящено много работ (см., например, [1–3]). На сегодняшний день математическое моделирование проникло во все области науки и производства.

#Работа выполнена при финансовой поддержке Республики Таджикистан, проект № 0117TJ00807.

Основной задачей химической кинетики является нахождение концентраций неизвестных функций в любой момент времени, исходя из известных начальных концентраций, схем реакций и констант скоростей.

Настоящая статья посвящена качественному анализу нелинейной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1bx(1-y-z) + k_{-1}b(1-x)y - k_2bxy + k_{-2}b(1-x)z + k_0(1-x), \\ \frac{dy}{dt} = k_1ax(1-y-z) - k_{-1}a(1-x)y - k_2axy + k_{-2}a(1-x)z, \\ \frac{dz}{dt} = k_2axy - k_{-2}az(1-x) - k_3z, \end{cases} \tag{1}$$

описывающей фотосинтез в автотрофных системах. Здесь параметры a, b, k_0, k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_3 являются положительными константами, а x, y, z — неизвестными функциями, подлежащими определению.

Система (1) была предложена профессором Г. Ю. Ризниченко как математическая модель, описывающая ключевой этап взаимодействия систем первичных процессов фотосинтеза с системой метаболических реакций в автотрофных (фотосинтезирующих) системах и являющейся развитием моделей, изученных в работах [1–3].

Ниже проводится качественное исследование системы (1). Выделена область

$$\Pi = \{(x, y, z):\ 0 < x < 1,\ y > 0,\ z > 0,\ y + z < 1\}, \tag{2}$$

инвариантная относительно движения вдоль траектории системы при возрастании времени. В этой области установлено существование единственного стационарного решения системы (1) и исследованы вопросы его устойчивости [4, 5]. Геометрически данная область имеет следующий вид:

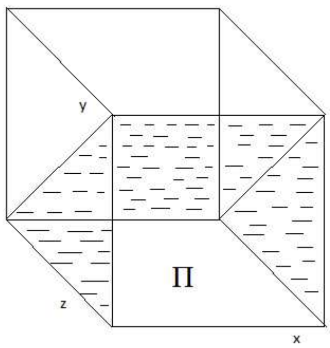

Рис. 1. Область П.

2. Определение стационарных решений (особых точек)

Исследуем стационарные решения системы (1). Для этого приравниваем правую часть системы к нулю, получим

$$\begin{cases} -k_1bx(1-y-z) + k_1b(1-x)y - k_2bxy + k_{-2}b(1-x)z + k_0(1-x) = 0, \\ k_1ax(1-y-z) - k_{-1}a(1-x)y - k_2axy + k_{-2}a(1-x)z = 0, \\ k_2axy - k_{-2}a(1-x)z - k_3z = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Так как все параметры системы (3) положительны, первое уравнение умножаем на $\frac{1}{2b}$, а второе и третье — на $\frac{1}{a}$. Затем, складывая и вычитая полученные первые два равенства, приходим к системе, эквивалентной системе (3):

$$\begin{cases} -k_2xy + k_{-2}(1-x)z + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0, \\ -k_1x(1-y-z) + k_{-1}(1-x)y + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0, \\ k_2xy - k_{-2}(1-x)z - \frac{k_3}{a}z = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Далее, складывая третье уравнение системы (4) с первым, получим

$$-\frac{k_3}{a}z + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0,$$

т. е.

$$z = \frac{ak_0}{2bk_3}(1-x). \tag{5}$$

С другой стороны, из третьего уравнения системы (4) получим

$$z = \frac{k_2axy}{k_{-2}a(1-x) + k_3}. \tag{6}$$

Приравнивая (5) и (6), найдем

$$k_2xy = \frac{k_0(1-x)(ak_{-2}(1-x) + k_3)}{2bk_3}. \tag{7}$$

Если x, y, z — решение системы (4), то из равенства (7) следует, что $x \neq 0$. Из второго уравнения системы (4), раскрывая скобки, получим

$$-k_1x + k_1xy + k_1xz + k_{-1}(1-x)y + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0,$$

или, что то же самое,

$$-k_1x + \frac{1}{k_2}\left(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x}\right)k_2xy + k_1xz + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0. \tag{8}$$

Подставляя выражения z и k_2xy из (5) и (7) в уравнение (8), имеем

$$f(x) \equiv -k_1x + \frac{k_0(1-x)}{2bk_2k_3}\left(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x}\right)(ak_{-2}(1-x) + k_3) \\ + \frac{ak_0k_1}{2bk_3}(1-x)x + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Лемма 1. *Система уравнений* (3) *эквивалентна системе*

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ 2bk_2k_3xy - k_0(1-x)(ak_{-2}(1-x) + k_3) = 0, \\ 2bk_3z - ak_0(1-x) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из леммы 1 следует, что по каждому решению x уравнения (9) однозначно определяется решение x, y, z системы (3). Поэтому уравнение (9) будет основным объектом для исследования вопроса разрешимости системы (3). Рациональная функция $f(x)$, определенная левой частью уравнения (9), имеет единственную точку разрыва $x = 0$.

Лемма 2. *Уравнение* (9) *в полуинтервале* $(0, 1]$ *имеет единственное решение* x_0, $0 < x_0 < 1$.

$\lhd$ Рассмотрим функцию

$$\frac{f(x)}{x} \equiv -k_1 + \frac{k_0}{2bk_2k_3}\frac{1-x}{x}\left(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x}\right)(ak_{-2}(1-x) + k_3) + \frac{ak_0k_1}{2bk_3}(1-x) + \frac{k_0}{2b}\frac{1-x}{x}.$$

Так как функции $1-x$, $\frac{1-x}{x}$ монотонно убывают на отрезке $(0,1]$ и функция $\frac{f(x)}{x}$ есть комбинация суммы и произведения этих функций с положительными коэффициентами, то функция $\frac{f(x)}{x}$ также монотонно убывает на этом отрезке. Далее, значение функции $\frac{f(x)}{x}$ при $x = 1$ равно $-k_1 < 0$, а при $x \to +0$ стремится к $+\infty$. Поэтому уравнение $\frac{f(x)}{x} = 0$, в силу теоремы Больцано — Коши, имеет решение, причем единственное. $\rhd$

Умножая уравнение (9) на k_2x после несложных преобразований, группируя коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим следующее уравнение относительно неизвестного x:

$$k_2xf(x) \equiv a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0, \quad x \neq 0, \tag{11}$$

где

$$a_1 = \frac{ak_0}{2bk_3}(k_{-2}(k_1 - k_{-1}) - k_1k_2),$$

$$b_1 = \frac{ak_0}{2bk_3}(k_1k_2 + 3k_{-1}k_{-2} - 2k_1k_{-2}) - \frac{k_0}{2b}(k_1 - k_{-1} + k_2) - k_1k_2,$$

$$c_1 = \frac{k_0}{2bk_3}(ak_1k_{-2} - 3ak_{-1}k_{-2} + k_1k_3 - 2k_{-1}k_3 + k_2k_3),$$

$$d_1 = \frac{k_0}{2bk_3}(ak_{-1}k_{-2} + k_{-1}k_3).$$

Уравнение (11) является кубическим [6], если $a_1 \neq 0$, квадратным если $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ и, наконец, линейным, если $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$. Нетрудно видеть,что при соответствующем выборе значений положительных параметров a, b, k_0, k_1, k_2, k_{-1}, k_{-2}, k_3 все три случая реализуются.

Ненулевое решение уравнения (11) является решением уравнения (9) и, обратно, решение уравнения (9) является решением (11). Так как коэффициент $d_1 \neq 0$, то уравнение (11) не имеет нулевого решения. Следовательно, уравнение (11) эквивалентно уравнению (9).

В силу леммы 2 уравнение (11) при любых положительных значениях параметров имеет единственный корень в интервале $(0, 1)$. А если коэффициент $a_1 > 0$, то имеет еще два вещественных корня, один из которых отрицательный, а другой больше единицы. Заметим, что решения x, y, z системы (10), соответствующие этим корням, не принадлежат множеству $M = \{(x, y, z) : \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ z \geqslant 0\}$.

Из лемм 1 и 2 следует следующая

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений* (1) *в множестве* M *имеет единственное стационарное решение, принадлежащее области* Π.

$\lhd$ Пусть $(x, y, z) \in M$ — стационарное решение системы дифференциальных уравнений (1). В силу леммы 1 (x, y, z) — решение системы (10). Из третьего уравнения системы (10) следует, что $x \in [0, 1]$ и, следовательно, из первого уравнения, в силу леммы 2, следует справедливость включения $x \in (0,1)$. Далее, из второго и третьего уравнений системы (10) следует положительность координат y и z.

Покажем, что точка (x,y,z) принадлежит области П. Из определения функции $f(x)$ для решения (x,y,z) системы (10) имеем

$$k_1x(y+z)+k_{-1}(1-x)y+\frac{k_0}{2b}(1-x)-k_1x$$
$$=-k_1x(1-y-z)+k_{-1}(1-x)y+\frac{k_0}{2b}(1-x)=f(x)=0.$$

Следовательно,

$$k_1x(y+z)+k_{-1}(1-x)y+\frac{k_0}{2b}(1-x)=k_1x,$$

или

$$(y+z)+\left(k_{-1}y+\frac{k_0}{2b}\right)\frac{1-x}{k_1x}=1.$$

Отсюда, в силу условий $x \in (0,1)$, $y>0$ и $z>0$, следует наше утверждение. $\triangleright$

3. Инвариантное множество относительно движения

Изучим вопрос о существовании инвариантного множества относительно движения вдоль траектории системы (1) при возрастании времени.

Теорема 2. *Если* $(x(t),y(t),z(t))$ *— решение системы* (1) *с начальными условиями* $(x(0),y(0),z(0)) \in \Pi$, *то* $(x(t),y(t),z(t)) \in \Pi$ *при* $t>0$.

$\triangleleft$ По решению $(x(t),y(t),z(t))$ системы (1) с начальным условием $(x(0),y(0),z(0)) \in \Pi$ определим функцию $\varphi(t)=x(t)y(t)z(t)(1-x(t))(1-y(t)-z(t))$. По условию $\varphi(0)>0$ и поэтому наше утверждение будет доказано, если покажем, что $\varphi(t)>0$ при всех $t>0$.

Перепишем первое уравнение системы (1) в следующих формах:

$$\frac{dx}{dt}=-[k_1b(1-y-z)+k_2by]x+k_1b(1-x)y+k_{-2}b(1-x)z+k_0(1-x),$$

и

$$\frac{d(1-x)}{dt}=-[k_1by+k_{-2}bz+k_0](1-x)+[k_1b(1-y-z)+k_2by]x.$$

Аналогично из второго и третьего уравнений системы (1), имеем

$$\frac{dy}{dt}=-[k_{-1}a(1-x)+k_2ax]y+k_1ax(1-y-z)+k_{-2}a(1-x)z,$$

$$\frac{dz}{dt}=-[k_{-2}a(1-x)+k_3]z+k_2axy,$$

$$\frac{d(1-y-z)}{dt}=-k_1ax(1-y-z)+k_{-1}a(1-x)y+k_3z.$$

Если $(x(t),y(t),z(t))$ — решение системы (1), то выше приведенные уравнения превращаются в тождества. Ниже используются эти свойства.

Теперь предположим, что существует $t_0>0$ такое, что $\varphi(t_0)=0$ и $\varphi(t)>0$ для любого $t \in [0,t_0)$. Тогда все функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $1-x(t)$, $1-y(t)-z(t)$ положительны на полуинтервале $[0,t_0)$ и, по крайней мере, одна из них обращается в нуль в точке $t = t_0$. Обозначим через $u(t)$ одну из обращающихся в нуль в точке $t = t_0$ функцию. Функция $u(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения вида $u' = A(t)u + B(t)$ с начальным условием $u(0) > 0$, где функции $A(t)$, $B(t)$ определяются в зависимости от $u(t)$, непрерывны на отрезке $[0, t_0]$, причем $B(t) > 0$ для любого $t \in [0, t_0)$.

Например, если $u(t) = 1 - x(t)$, то $A(t) = -[k_1 by(t) + k_{-2} bz(t) + k_0]$ и $B(t) = [k_1 b(1 - y(t) - z(t)) + k_2 by(t)]x(t)$. Поэтому $B(t) > 0$ для любого $t \in [0, t_0)$.

Так как функция $u(t)$, как решение линейного уравнения, представляется в виде

$$u(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau)\,d\tau\right)\left[u(0) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s A(\tau)\,d\tau\right)B(s)\,ds\right],$$

то, в силу условий $u(0) > 0$, $B(t) > 0$ для любого $t \in [0, t_0)$, имеем, что $u(t_0) > 0$. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. $\rhd$

Отметим, что множество $M = \{(x, y, z) :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$ не является инвариантным относительно движения вдоль траектории системы (1) при возрастании времени. Действительно, пусть $(x(t), y(t), z(t))$ — решение, удовлетворяющее начальному условию $(x(0), y(0), z(0)) = (2, 0, 2)$. Из второго уравнения системы для функции $y(t)$ имеем представление

$$y(t) = \int_0^t \exp\left(\int_s^t A(\tau)\,d\tau\right)B(s)\,ds,$$

где $A(t) = -[k_1 ax(t) + k_{-1} a(1 - x(t)) + k_2 x(t)]$ и $B(t) = [k_1 a(1 - z(t)) + k_{-2} a(1 - x(t))]z(t)$. Так как $B(0) = [k_1 a(1 - z(0)) + k_{-2} a(1 - x(0))]z(0) < 0$, то, в силу непрерывности, $B(t) < 0$ при достаточно малых $t > 0$. Из представления функции $y(t)$ следует, что $y(t) < 0$ при малых $t > 0$. Это означает, что решение $(x(t), y(t), z(t)) \notin M$ при малых $t > 0$. Что и требовалось доказать.

Также следует отметить, что в общем случае условия положительности параметров не достаточно для инвариантности единичного куба $K = \{(x, y, z) :\ 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\} \subset M$ относительно движения вдоль траектории системы (1) при возрастании времени. Например, легко видеть, что при $k_1 > k_2$ или $ak_2 > k_3$ решение $(x(t), y(t), z(t))$, удовлетворяющее начальному условию $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$, не принадлежит множеству K при достаточно малых $t > 0$. Аналогично при $k_{-2} > k_{-1}$ решение $(x(t), y(t), z(t))$, удовлетворяющее начальному условию $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 1)$, также не принадлежит множеству K при достаточно малых $t > 0$.

4. Линеаризация

Исследование поведения траекторий системы (1) в окрестности стационарных решений является одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений. В силу известной теоремы о линеаризации [7, 8], если нелинейная система имеет особую точку, тогда в малой окрестности этой особой точки фазовый портрет нелинейной системы эквивалентен фазовому портрету линейной системы, если только особая точка не является центром. Для удобства систему (1) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Пусть $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ — положение равновесия системы $x' = f(x)$, $x \in R^n$, т. е. $f(x_0) = 0$. Разлагая $f(x)$ вблизи точки x_0 по формуле Тейлора [9, 10] до членов первого порядка малости, получаем систему

$$x_i' = a_{i1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + a_{in}(x_n - x_{n0}) + \varphi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\varphi_i(x) = o(|x - x_0|)$ при $x \to x_0$. Перенося начало координат в точку x_0 заменой $x = x_0 + y$, получаем (в векторной записи)

$$y' = Ay + \varphi_0(y), \quad \varphi_0(y) = o(|y|),\ y \to 0,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица Якоби вектор-функции $f(x)$ в точке x_0.

Применительно к системе (1), полагая $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, $z = z_0 + w$, имеем

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, \\ \frac{dw}{dt} = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w. \end{cases} \tag{12}$$

Соответствующая системе (12) матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$a_{11} = -b[k_1(1 - y_0 - z_0) + k_{-1}y_0 + k_2y_0 + k_{-2}z_0] - k_0,$
$a_{12} = b[k_1x_0 + k_{-1}(1 - x_0) - k_2x_0],$
$a_{13} = b[k_1x_0 + k_{-2}(1 - x_0)],$
$a_{21} = a[k_1(1 - y_0 - z_0) + k_{-1}y_0 - k_2y_0 - k_{-2}z_0],$
$a_{22} = -a[k_1x_0 + k_{-1}(1 - x_0) + k_2x_0],$
$a_{23} = -a[k_1x_0 - k_{-2}(1 - x_0)],$
$a_{31} = a[k_2y_0 + k_{-2}z_0],$
$a_{32} = ak_2x_0,$
$a_{33} = -ak_{-2}(1 - x_0) - k_3.$

5. Устойчивость стационарного решения

Безусловно, представляется актуальным вопрос об устойчивости или, более точнее, об асимптотической устойчивости найденного стационарного решения системы (1). Этот вопрос важен как для качественной теории дифференциальных уравнений, так и для приложения системы (1) как математической модели, описывающий биологический или физический процесс.

В настоящем пункте получен положительный ответ на сформулированный вопрос. Доказано, что стационарное решение системы (1) является асимптотически устойчивым без дополнительных ограничений на параметры a, b, k_0, k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_3 системы (1) при единственном условии их положительности. Более того, доказано, что свойство асимптотической устойчивости стационарного решения системы (1) является следствием более общего свойства системы (1). А именно, оказалось, что все собственные значения матрицы Якоби (13), для вектор-функции, порожденной правой частью системы (1), в любой точке области (2) имеют отрицательную вещественную часть.

Функции $a_{ij} = a_{ij}(x, y, z, a, b, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3)$ — элементы матрицы Якоби A, нам удобно представить в виде

$$a_{11} = a^0_{11} \cdot b - k_0, \quad a_{12} = a^0_{12} \cdot b, \quad a_{13} = a^0_{13} \cdot b,$$

$$a_{21} = a^0_{21} \cdot a, \quad a_{22} = a^0_{22} \cdot a, \quad a_{23} = a^0_{23} \cdot a,$$

$$a_{31} = a^0_{31} \cdot a, \quad a_{32} = a^0_{32} \cdot a, \quad a_{33} = a^0_{33} \cdot a - k_3,$$

где функции $a^0_{ij} = a^0_{ij}(x, y, z, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3)$ определяются равенствами

$$a^0_{11} = -k_1(1-y-z)-k_{-1}y-k_2y-k_{-2}z, \quad a^0_{12} = k_1x+k_{-1}(1-x)-k_2x, \quad a^0_{13} = k_1x+k_{-2}(1-x),$$

$$a^0_{21} = k_1(1-y-z)+k_{-1}y-k_2y-k_{-2}z, \quad a^0_{22} = -k_1x-k_{-1}(1-x)-k_2x, \quad a^0_{23} = -k_1x-k_{-2}(1-x),$$

$$a^0_{31} = k_2y + k_{-2}z, \quad a^0_{32} = k_2x, \quad a^0_{33} = -k_{-2}(1 - x).$$

Сформулируем основной результат о свойстве матрицы Якоби $A = A(x, y, z)$.

Теорема 3. *Пусть точка (x, y, z) принадлежит области (2). Тогда все собственные значения матрицы Якоби $A = A(x, y, z)$ имеют отрицательную вещественную часть при всех положительных значениях параметров a, b, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3.*

$\lhd$ Собственные значения матрицы A являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv det(\lambda E - A) = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0, \tag{14}$$

где коэффициенты b_1, b_2, b_3 определяется через элементы матрицы (13) равенствами

$$b_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \tag{15}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$b_3 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Согласно критерию Рауса — Гурвица [11, 12], корни уравнения (14) имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда коэффициенты b_1, b_2, b_3 удовлетворяют условиям

$$b_1 > 0, \quad b_1 \cdot b_2 > b_3 > 0. \tag{18}$$

Поэтому теорема 3 будет доказана, если мы установим справедливость условия (18) при любых $(x, y, z) \in \Pi$ и положительных значениях параметров a, b, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3. Из представления элементов $a_{ij} = a_{ij}(x, y, z, a, b, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3)$, $i, j = 1, 2, 3$, непосредственно следует, что $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2, 3$ при всех $(x, y, z) \in \Pi$ и положительных a, b, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3. Функции $a^0_{ij} = a^0_{ij}(x, y, z, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3)$, $i, j = 1, 2, 3$, зависят от параметров k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3 и $a^0_{ii} < 0$, $i = 1, 2, 3$. Наряду с функциями a^0_{ij} определим миноры

$$\Delta_{i,j} \equiv \begin{vmatrix} a^0_{ii} & a^0_{ij} \\ a^0_{ji} & a^0_{jj} \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3. \tag{19}$$

Этапы доказательства справедливости неравенств (18) изложим в виде отдельных утверждений.

Лемма 3. *Функции a^0_{1j}, a^0_{2j}, a^0_{3j}, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют следующим условиям:*

а) $a^0_{1j} + a^0_{2j} + 2a^0_{3j} \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$;

б) *для миноров* $\Delta_{i,j}$ *справедливы представления*

$$\Delta_{12} = 2 \cdot \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x \\ k_{-1} y + k_1(1-y-z) & k_1 x + k_{-1}(1-x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} k_1 x + k_{-1}(1-x) & -k_1 x \\ k_2 x & k_2(1-x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = -\frac{1}{2}\Delta_{12} + \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x - k_{-2}(1-x) \\ k_{-1} y + k_1(1-y-z) & k_{-1}(1-x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = -a^0_{11}(a^0_{22} + a^0_{33}) + k_{-2}(1-x)[k_{-1}y + k_1(1-y-z)] + [k_{-1}y + k_1(1-y-z)] \cdot k_1 x + [k_{-1}y + k_{-2}y + k_{-2}z + k_1(1-y-z)] \cdot [k_2 x + k_{-1}(1-x) + k_{-2}(1-x)].$$

$\lhd$ а) Покажем справедливость тождества

$$a^0_{1j} + a^0_{2j} + 2a^0_{3j} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для $j = 1$ имеем

$$a^0_{11} + a^0_{21} + 2a^0_{31} = -k_1(1-y-z) - k_{-1}y - k_2 y - k_{-2}z + k_1(1-y-z) + k_{-1}y - k_2 y - k_{-2}z + 2(k_2 y + k_{-2}z) \equiv 0.$$

Аналогично для $j = 2$

$$a^0_{12} + a^0_{22} + 2a^0_{32} = k_1 x + k_{-1}(1-x) - k_2 x - k_1 x - k_{-1}(1-x) - k_2 x + 2k_2 x \equiv 0,$$

и для $j = 3$

$$a^0_{13} + a^0_{23} + 2a^0_{33} = k_1 x + k_{-2}(1-x) + k_{-2}(1-x) - k_1 x - 2k_{-2}(1-x) \equiv 0.$$

б) Используя тождества а), имеем

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a^0_{11} & a^0_{12} \\ a^0_{21} & a^0_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^0_{11} + a^0_{21} & a^0_{12} + a^0_{22} \\ a^0_{21} & a^0_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a^0_{31} & -2a^0_{32} \\ a^0_{21} & a^0_{22} \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} a^0_{31} & a^0_{32} \\ a^0_{21} + a^0_{31} & a^0_{22} + a^0_{32} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x \\ k_{-1} y + k_1(1-y-z) & k_1 x + k_{-1}(1-x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} a^0_{22} & a^0_{23} \\ a^0_{32} & a^0_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^0_{22} + a^0_{32} & a^0_{23} + a^0_{33} \\ a^0_{32} & a^0_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -k_1 x - k_{-1}(1-x) & -k_1 x \\ k_2 x & -k_2(1-x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 x + k_{-1}(1-x) & -k_1 x \\ k_2 x & k_2(1-x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a^0_{11} & a^0_{13} \\ a^0_{31} & a^0_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^0_{11} + a^0_{31} & a^0_{13} + a^0_{33} \\ a^0_{31} & a^0_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k_{-1}y - k_1(1-y-z) & k_1 x \\ k_2 y + k_{-2} z & -k_{-2}(1-x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1 x \\ k_2 y + k_{-2} z & k_{-2}(1-x) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -k_2 y + k_{-2} z & k_{-2}(1-x) \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z)z & k_1 x \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\Delta_{12} + \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1 x + k_{-1}(1-x) \end{vmatrix}$$

$$
-\begin{vmatrix} k_2y+k_{-2}z & k_{-2}(1-x) \\ k_{-1}y+k_1(1-y-z)z & k_1x \end{vmatrix}
$$
$$
=-\frac{1}{2}\Delta_{12}+\begin{vmatrix} k_2y+k_{-2}z & -k_2x-k_{-2}(1-x) \\ k_{-1}y+k_1(1-y-z) & k_{-1}(1-x) \end{vmatrix}.
$$

Второе представление Δ_{13} проверяется аналогично. $\triangleright$

Из леммы 3 следует, что миноры Δ_{12} и Δ_{23} положительны, а минор Δ_{13} может принимать отрицательное значение, но суммы $\Delta_{12}+\Delta_{13}$ и $a^0_{11}(a^0_{22}+a^0_{33})+\Delta_{13}$ положительны.

Коэффициенты характеристического уравнения (14) выразим через параметры a, b, k_0, k_3, a^0_{ij} и миноры Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{23}. Из равенств (15)–(17) имеем

$$
b_1=k_0+k_3-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)-ba^0_{11}, \tag{20}
$$
$$
b_2=k_0k_3-a\left[k_0\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)+k_3a^0_{22}\right]-bk_3a^0_{11}+a^2\Delta_{23}+a\cdot b(\Delta_{12}+\Delta_{13}), \tag{21}
$$
$$
b_3=-ak_0k_3a^0_{22}+a^2k_0\Delta_{23}+abk_3\cdot\Delta_{12}. \tag{22}
$$

Отметим, что для получения представления коэффициента b_3 были использованы свойства коэффициентов a^0_{ij} из пункта а) леммы 3. Из равенств (20)–(22), в силу условий $a^0_{ij}<0$ и леммы 3, следует, что коэффициенты b_1, b_2 и b_3 положительны: $b_1>0$, $b_2>0$, $b_3>0$.

Лемма 4. *Справедливо тождество*

$$
\begin{aligned}
b_1b_2-b_3=k_0\left(b_2-a^2\Delta_{23}+ak_3a^0_{22}\right)+k_3[b_2-ab\left(\Delta_{12}+\Delta_{13}\right)] \\
+abk_3\left[\Delta_{13}+a^0_{11}\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)\right]-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)\left(b_2+bk_3a^0_{11}\right)-ba^0_{11}\cdot b_2.
\end{aligned} \tag{23}
$$

$\triangleleft$ Для выражения $b_1b_2-b_3$ из равенств (20)–(22) имеем

$$
\begin{aligned}
b_1b_2-b_3&=k_0b_2+k_3b_2-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)b_2-ba^0_{11}b_2+\left[ak_0k_3a^0_{22}-a^2k_0\Delta_{23}+abk_3\Delta_{12}\right] \\
&=k_0\left[b_2+ak_3a^0_{22}-a^2\Delta_{23}\right]+k_3\left[b_2-ab\Delta_{12}\right]-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)b_2-ba^0_{11}b_2
\end{aligned}
$$

или

$$
b_1b_2-b_3=k_0\left(b_2-a^2\Delta_{23}+ak_3a^0_{22}\right)+k_3\left[b_2-ab\Delta_{12}\right]-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)b_2-ba^0_{22}\cdot b_2. \tag{24}
$$

Теперь разность $k_3[b_2-ab\Delta_{12}]-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)b_2$ запишем в виде

$$
\begin{aligned}
k_3[b_2-ab\Delta_{12}]-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)b_2=k_3\left[b_2-ab\left(\Delta_{12}+\Delta_{13}\right)\right] \\
+k_3ab\left[\Delta_{13}+a^0_{11}\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)\right]-a\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)\left[b_2+bk_3a^0_{11}\right].
\end{aligned} \tag{25}
$$

Из равенств (24) и (25) следует равенство (23). $\triangleright$

Для завершения доказательства теоремы 3 заметим, что

$$
b_2-a^2\Delta_{23}+ak_3a^0_{22}=k_0k_3-ak_0\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)-bk_3a^0_{11}+ab\left(\Delta_{12}+\Delta_{13}\right)>0,
$$
$$
b_2-ab(\Delta_{12}+\Delta_{13})>0, \quad \Delta_{13}+a^0_{11}\left(a^0_{22}+a^0_{33}\right)>0, \quad b_2+bk_3a^0_{11}>0.
$$

Поэтому из равенства (23) следует, что $b_1\cdot b_2-b_3>0$. Теорема 3 доказана. $\triangleright$

Как приложение этой теоремы к исследованию устойчивости стационарного решения мы получим следующее утверждение.

Следствие. *Стационарное решение системы* (1) (x_0, y_0, z_0), *принадлежащее области* (2), *является асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

6. Численная пристрелка и фазовые портреты

Предположим, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют следующим условиям:
a) $b_1^2 - 3b_2 > 0$ и $b_3 \in [M_1, M_2]$, тогда особая точка является типа узел;
b) $b_1^2 - 3b_2 > 0$ и $b_3 \notin [M_1, M_2]$, тогда особая точка является типа фокус.

Здесь $M_{1,2} = \pm\frac{2}{27}\sqrt{(b_1^2 - 3b_2)^3} + \frac{b_1 b_2}{3} - \frac{2b_1^3}{27}$.

Пусть параметры системы (1) определены равенствами $a = 2$, $b = 1$, $k_1 = 8$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_{-1} = 0.4$, $k_{-2} = 0.7$, $k_0 = 0.2$. Тогда $(x_0, y_0, z_0) = (0.18247, 0.704, 0.082)$ является особой точкой системы (1). Следовательно, матрица (13) имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = -6.01809, \quad \lambda_2 = -3.154974, \quad \lambda_3 = -0.863858.$$

Таким образом, стационарное решение системы (1) является устойчивым узлом.

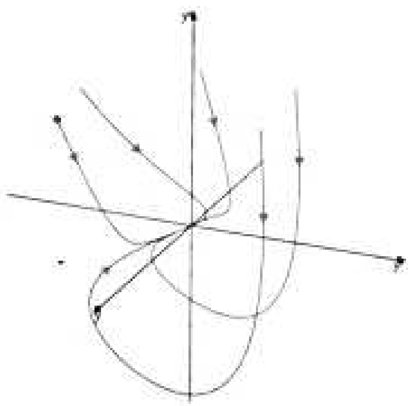

Рис. 2. Устойчивый узел.

Приведем другой вариант подбора параметров уравнения (1). Если $a = 1$, $b = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_{-1} = 1$, $k_{-2} = 1$, $k_0 = 3$, то $(x_0, y_0, z_0) = (0.7235, 0.366, 0.207)$ — особая точка системы (1). Следовательно, матрица (13) имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = -5.9907, \quad \lambda_2 = -1.370603 - 0.388319i, \quad \lambda_3 = -1.370603 + 0.388319i.$$

Отсюда следует, что фазовый портрет системы (1) будет устойчивым фокусом [13, 14].

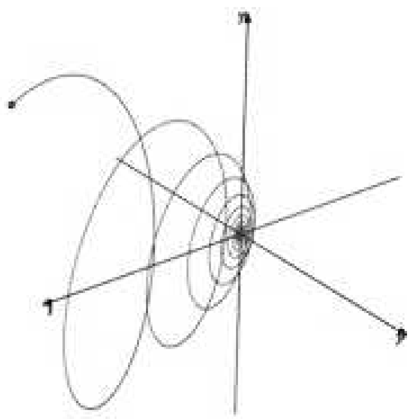

Рис. 3. Устойчивый фокус.

Литература

1. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии.—М.–Ижевск: Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.—558 с.
2. *Рубин А. Б.* Биофизика. Том 2. Биофизика клеточных процессов / 2-изд.—М.: Изд-во МГУ, 2000.—468 с.
3. *Ризниченко Г. Ю., Беляева Н. Е., Коваленко И. Б., Рубин А. Б.* Математическое и компьютерное моделирование первичных процессов фотосинтеза // Биофизика.—2009.—Т. 54, № 1,—С. 16–33.
4. *Нуров И. Д., Шарифзода З. И.* Качественное исследования системы кинетических уравнений, описывающих взаимодействие одноэлектронного и двухэлектронного переносчика // XXVI Междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование» (г. Пущино, 28 января — 2 февраля 2019 г.).—2019.—С. 17.
5. *Мухамадиев Э. М., Шарифзода З. И., Нуров И. Д.* Качественные исследования нелинейной задачи фотосинтеза // Докл. АН Респ. Таджикистан.—2019.—Т. 62, № 9–10.—С. 511–518.
6. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.—М.: Наука, 1968.—431 с.
7. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.—М.: Наука, 1976.—496 с.
8. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1970.—720 с.
9. *Арабов М. К.* Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка // Изв. АН Респ. Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук.—2015.—Т. 158, № 1.—С. 42–49.
10. *Илолов М., Кучакшоев Х. С.* Об абстрактных уравнениях с неограниченными нелинейностями и их приложения // Докл. АН.—2009.—Т. 428, № 3.—С. 310–312.
11. *Мухамадиев Э. М., Нуров И. Д., Халилова М. Ш.* Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Уфим. мат. журн.—2014.—Т. 6, № 1.—С. 84–93.
12. *Мухамадиев Э. М., Гулов А. М., Нуров И. Д.* Анализ рождения предельных циклов одного класса нелинейной уравнений второго порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2016.—№ 1.—С. 118–125.
13. *Юмагулов М. Г.* Введение в теорию динамических систем: Учеб. пособие.—СПб.: Лань, 2015.—272 с.
14. *Gulov A. M., Sharifzoda Z. I.* Certification: That they are the authors of the computer program of the “A software package for constructing phase portraits of dynamic systems” from 21.06.2019.

Статья поступила ?? ??? 2020 г.

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич
Вологодский государственный университет,
Профессор кафедры математики и информатики
РОССИЯ, 160000, Вологда, Ленина, 15
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Нуров Исхокбой Джумаевич
Научно-исследовательский институт Таджикского
национального университета,
Главный научный сотрудник
Таджикистан, 734025, Душанбе, Рудаки, 17
E-mail: nid1@mail.ru

Шарифзода Зебонисои Иброхим
Научно-исследовательский институт Таджикского
национального университета,
Научный сотрудник
Таджикистан, 734025, Душанбе, Рудаки, 17
E-mail: sakhara-2803@mail.ru

QUALITATIVE ANALYSIS AND STABILITY OF THE DYNAMICS OF PHOTOSYNTHESIS IN AUTOTROPHIC SYSTEMS

Mukhamadiev, E. M.[1], Nurov, I. D.[2] and Sharifzoda, Z. I.[2]

[1] Vologda state University, 15 Lenina St., Vologda 160000, Russia;
[2] Research Institute of the Tajik National University, 17 Rudaki St., Dushanbe 734025, Tajikistan
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru, nid1@mail.ru, emuhamadiev@rambler.ru

Abstract. A nonlinear system of three differential equations is studied that describes photosynthesis in autotrophic systems. An area is identified that is invariant with respect to motion along the trajectory of the system with increasing time. In this area, the existence of a unique stationary solution is established and questions of its stability are investigated. At present, due to the exponential growth of the population, industrial progress and, as a consequence, an increase in the general pollution of the biosphere, the study of the resistance of plant organisms to anthropogenic pollution is acquiring the most important practical and theoretical significance. At the same time, the problem of a qualitative study of the processes of photosynthesis has become extremely urgent. In problems related to photosynthesis, it is of great interest to determine the laws of functioning of the system, as well as the choice of methods of mathematical and computer modeling. Since the process is non-linear, it depends on many parameters. Therefore, first of all, the key parameters should be highlighted. The use of elements of computer modeling significantly speeds up the work of the process. This is the process of converting the absorbed light energy into chemical energy of organic compounds — the only process in the biosphere leading to an increase in the energy of the biosphere due to an external source — the Sun, which ensures the existence of both plants and all heterotrophic organisms. The most important external factors affecting the processes of photosynthesis and photorespiration are temperature, photosynthetic active radiation, water regime, the regime of plant mineral nutrition, as well as the content of carbon dioxide and oxygen in the surrounding space. In recent decades, there has been an increase in the concentration of carbon dioxide in the atmosphere and a change in the thermal regime on a planetary scale. In this regard, the problem of predicting changes in the intensity of photosynthesis of plants caused by changes in the concentration of atmospheric carbon dioxide and temperature is urgent.

Key words: nonlinear differential equation, stationary solution, phase portrait, linearization, stability.

For citation: *Mukhamadiev, E. M., Nurov, I. D. and Sharifzoda, Z. I.* Qualitative Analysis and Stability of the Dynamics of Photosynthesis in Autotrophic Systems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. ??, no. ?, pp. ??–?? (in Russian). DOI: ???.

References

1. *Riznichenko, G. Yu. Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii* [Lectures on Mathematical Models in Biology], Moscow, Ijevsk, Regular and Chaotic Dnamics, 2011, 558 p. (in Russian).
2. *Rubin, A. B. Biophysic. Vol. 2. Biophysics of Cellular Processes*, Moscow, Publishing House of Moscow State University, 2000, 468 p.
3. *Riznichenko, G. Yu., Belyaeva, N. E., Kovalenko, I. B. and Rubin, A. B.* Mathematical and Computer Modeling of Primary of Photosynthetic Processes, *Biophysics*, 2009, vol. 54, no. 1, pp. 10–22.
4. *Nurov, I. D. and Sharifzoda, Z. I.* Qualitative System of Kinetic Equations Describing the Interaction of One-Electron and Two-Electron Carrier, *XXVI Mezhdunar. konf. "Matematika. Komp'juter. Obrazovanie" (Pushhino, 28 janvarja — 2 fevralja 2019)* [Twenty-sixth International Conference "Mathematics. Computer. Education" (Pushino, January 28 — February 2, 2019)], 2019, pp. 17 (in Russian).
5. *Mukhamadiev, E. M., Sharifzoda, Z. I. and Nurov, I. D.* Qualitative Investigation of the Nonlinear Problem of Photosynthesis, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan* [Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan], 2019, vol. 62, no. 9–10, pp. 511–518 (in Russian).
6. *Kurosh, A. G. Kurs vysshej algebry* [Course of Higher Algebra], Moscow, Nauka, 1968, 431 p. (in Russian).
7. *Bautin, N. N. and Leontovich, E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskih sistem na ploskosti* [Methods and Tricks for the Qualitative Study of Dynamical Systems on the Plane], Moscow, Nauka, 1976, 496 p. (in Russian).
8. *Hartman, P. Ordinary Differential Equations*, New York, John Wiley and Sons, 1964.
9. *Arabov, M. K.* Analysis of the Stability of a Singular Point of a Second Order Quasilinear Equation, *Izv. AN Resp. Tadzhikistan. Otd. fiz.-mat., khim., geol. i tekhn. nauk* [News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of Physical Mathematical, Chemical, Geological and Technical Scienses], 2015, vol. 158, no. 1, pp. 42–49 (in Russian).

10. *Ilolov, M. and Kuchakshoev, Kh. S.* On Abstract Equations with Unbounded Nonlinearities and their Applications, *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 694–696. DOI:10.1134/S1064562409050160.
11. *Mukhamadiev, E. M., Nurov, I. D. and Khalilova, M. Sh.* Limiting Cycles of Piece-Linear Second Order Differential Equations, *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 80–89. DOI: 10.13108/2014-6-1-80.
12. *Mukhamadiev, E. M., Gulov, A. M. and Nurov, I. D.* Analysis of Limit Cycle Appearing for one Class of Non-Linear Second Order Differential Equation, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 118–125 (in Russian).
13. *Yumagulov, M. G. Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem: Uchebnoe posobie* [Introduction to the Theory of Dynamical Systems: Tutorial], Saint Petersburg, Lan' Publishing, 2015, 272 p. (in Russian).
14. *Gulov, A. M. and Sharifzoda, Z. I.* Certification: That they are the Authors of the Computer Program of the "A Software Package for Constructing Phase Portraits of Dynamic System" from 21.06.2019.

Received ???? ??, 2020

Ergashboy M. Mukhamadiev
Vologda State University,
15 Lenina St., Vologda 160000, Russia
Professor of the Department of Mathematics and Informatics
E-mail: `emuhamadiev@rambler.ru`

Iskhokboy D. Nurov
Research Institute of the Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734025, Tajikistan
Leading researcher
E-mail: `nid1@mail.ru`

Zebonisoi I. Sharifzoda
Research Institute of the Tajik National University,
17 Rudaki St., Dushanbe 734025, Tajikistan
Researcher
E-mail: `sakhara-2803@mail.ru`