I. Элементы теории погрешностей

Важнейшим моментом при математическом моделировании является обеспечение достоверности полученных решений. Но из практики известно, что лишь в редких случаях удается найти метод решения, приводящий к точному результату. Как правило, приближенные решения используются совместно с точными решениями, поэтому, наряду с выбором вычислительного метода, с точки зрения оптимальности алгоритма его реализации, важной задачей является оценка степени точности получаемого решения. Ее принято оценивать некоторой численной величиной, называемой **погрешностью**.

Под погрешностью понимается некоторая величина, характеризующая точность результата. Существует четыре вида погрешностей:

На рассмотренных выше этапах математического моделирования имеют место следующие источники погрешностей:

1) погрешность математической модели;

2) погрешность исходных данных (неустранимая погрешность):

3) погрешность численного метода;

4) вычислительная погрешность.

Погрешность математической модели возникает из-за стремления обеспечить сравнительную простоту ее технической реализации и доступности исследования. Нужно иметь в виду, что конкретная математическая модель (ММ), прекрасно работающая в одних условиях, может быть совершенно неприменима в других. С точки зрения потребителя, важным является правильная оценка области ее (ММ) применения.

Погрешность численного метода (погрешность аппроксимации), связана, например, с заменой интеграла суммой, с усечением рядов при вычислении функций, с интерполированием табличных значений функциональных зависимостей и т.п. Как правило, погрешность численного метода регулируема и может быть уменьшена до любого разумного значения путем изменения некоторого параметра.

Вычислительная погрешность возникает из-за округления чисел, промежуточных и окончательных результатов счета. Она зависит от правил и необходимости округления, а также от алгоритмов численного решения.

Вспомним технологию округления чисел.

1. Если старший отбрасываемый разряд меньше 5, то предшествующая ему цифра в числе не меняется.

2. Если старший отбрасываемый разряд больше 5, то предшествующая цифра в числе увеличивается на 1.

3. Если старший отбрасываемый разряд равен 5, то по общепринятому соглашению предшествующая ему четная цифра в числе не меняется (например, $c = 3{,}965$; $c^* \approx 3{,}96$), а нечетная – увеличивается на единицу (например, $c = 3{,}915$; $c^* \approx 3{,}92$).

4. При округлении целого числа отброшенные знаки не следует заменять нулями, надо применять умножение на соответствующие степени 10.

В основе процессов округления лежит идея минимальности разности значения c и его округления c*.

Пример 1. Округлить число с соответствующее количество знаков:

1)		2)	
	$c = 1{,}9396712$;		$c = 245{,}351365$;
	$c^* = 1{,}939671$;		$c^* = 245{,}35136$;
	$c^* = 1{,}93967$;		$c^* = 245{,}3514$;
	$c^* = 1{,}9397$;		$c^* = 245{,}351$;
	$c^* = 1{,}940$;		$c^* = 245{,}35$;
	$c^* = 1{,}94$;		$c^* = 245{,}4$;
	$c^* = 1{,}9$;		$c^* = 245$;

$c^* = 2$; $c^* = 2{,}4\cdot 10^2$;

$c^* = 2\cdot 10^2$;

Пример 2. Для обоснования необходимости применения округлений в целях экономии памяти приведем следующий пример. Задано выражение

$$S = 25{,}71\cdot 1{,}42 – 3{,}21\cdot 7{,}46 + 0{,}93\cdot 7{,}75 – 4{,}31\cdot 2{,}69 .$$

1. Вычислить S точно:

$$S = 36{,}5082 – 23{,}9466 + 7{,}2075 – 11{,}5939 = 8{,}1752.$$

2. Вычислить S и округлить его до двух знаков после запятой:

$S1^* = 8{,}18$.

3. Вычислить каждое произведение с двумя знаками после запятой и просуммировать:

$$S2^* = 36{,}51 – 23{,}95 + 7{,}21 – 11{,}59 = 8{,}18.$$

Основная задача теории погрешностей - указание области неопределенности результата.

Приближенным числом а называется число, незначительно отличающееся от точного числа А и заменяющее последнее в вычислениях.

Если $a < A$, то a называется приближенным значением числа A по недостатку, если же $a > A$, то по избытку. Например, для π число 3.141будет приближенным значением по недостатку, а 3.142 – по избытку, так как $3.141 < \pi < 3.142$. Если a является приближенным значением числа A, то это соотношение обозначается через $a \approx A$.

Пусть A - точное значение какой-либо величины, которое, как правило, неизвестно, и a - её приближенное значение, найденное каким-либо способом. **Ошибкой** или **погрешностью** Δa приближенного числа a называется разность между соответствующим точным числом A и приближенным числом a, т.е. $\Delta a = A - a$.

Абсолютной погрешностью Δ приближенного значения a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным значением A и его приближенным значением a, т.е.

$$\Delta = |A - a|.$$

Абсолютная и относительная погрешности числа принято округлять в большую сторону, т.к. при округлениях границы неопределенности числа, как правило, увеличиваются. По этой причине вычисления ведут с одним-двумя запасными знаками.

Предельная абсолютная погрешность приближенного числа Δ_a это всякое число, не меньшее абсолютной погрешностью этого числа, т.е. $|\Delta| \leq \Delta_a$. Если Δ_a-предельная абсолютная погрешность приближенного числа a, заменяющего точное A, то $\Delta = |A - a| \leq \Delta_a$. Следовательно, точное значение число A заключено в границах

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \quad \text{или} \quad A = a \pm \Delta_a.$$

Пример 3. Определить предельную абсолютную погрешность числа $a = 1.41$, заменяющего число $\sqrt{2}$.

Решение. Так как имеет место неравенство $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$, то $\left|a - \sqrt{2}\right| < 0.01$, поэтому можно принять $\Delta_a = 0.01$.

Относительной погрешностью δ приближенного значения a величины A называется отношение абсолютной погрешности Δ этого значения к модулю соответствующего точного значения A $(A \neq 0)$: $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$, так как чаще всего A неизвестно, то $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$. Отсюда $\Delta = |A| \cdot \delta$, следовательно, $|A - a| = |A| \cdot \delta$. Отсюда видно, что $\delta = \left|\frac{A-a}{A}\right|$.

Точность результата лучше характеризует его относительная погрешность. Например, рассмотрим два числа $\pi^* = 3{,}14$ и $l^* = 256795$. Известно, что $\pi = 3{,}14159265\ldots$. Значит $\Delta\pi^* = 3{,}14159265 - 3{,}14 = 0{,}0016$. Тогда относительная погрешность

$$\delta\pi^* = \frac{0{,}0016}{3{,}14} = 0{,}0005 \text{ или } \Delta\pi^* = 0{,}05\%.$$

Известно, что $\Delta l^* = 1$, значит $\delta l^* = \frac{1}{256795} = 0{,}0000039$ или $\delta l^* = 0{,}00039\%$. Хотя $\Delta\pi^* \ll \Delta l^*$, само l^* определено точнее числа π^*.

Предельной относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа, т.е. $\delta \leq \delta_a$. Отсюда $\frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$ и $\Delta \leq |A| \cdot \delta_a$. Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа a можно принять величину $\Delta_a = |A| \cdot \delta_a$.

Всякое положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \cdots + a_{n-m+1} 10^{n-m+1} + \cdots$$

Например,

$$576.941 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

Значащей цифрой числа считается любая цифра в его десятичной записи, отличная от нуля и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного разряда. Например, в числе 0.000120701 первые четыре нуля не являются значащими цифрами, а остальные нули - значащими, потому что они расположены между значащими цифрами. Другими словами, **значащими цифрами числа** называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева, например, $x = 2{,}396029$ - все цифры (и 0!) значащие; $x = 0{,}00267$ - значащие только 2, 6, 7; первые три нуля - незначащие, ибо они служат вспомогательной цели - определению положения цифр 2, 6, 7, поэтому может быть принята запись $x = 2{,}67 \cdot 10^{-3}$; $x = 2270000$ или $x = 2{,}27 \cdot 106$ (в первой записи все семь цифр значащие, во второй - значащие только 2, 2, 7).

Если известно, что с - число точное и с = 3200, то для него нельзя использовать запись $c = 3{,}2 \cdot 10^3$, ибо тем самым два нуля переводятся в разряд незначащих цифр.

Под верной цифрой числа, понимается его значащая цифра, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит данная значащая цифра. Если для приближенного числа a, заменяющего точное число A, известно, что

$$\Delta = |A - a| \leq \frac{1}{2} 10^{n-m+1},$$

то по определению, первые m цифр $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-m+1}$ этого числа являются верными.

Например, для точного числа $A = 576.941$ число $a = 577$ является приближением с четырьмя верными знаками, так как $|A - a| = 577 - 576.941 = 0{,}059 < \frac{1}{2} \cdot 0.1$. В приближенном числе $x = 2{,}718 \pm 0{,}006$ цифры $1, 7, 2$ верные ($0{,}006 \leq 0{,}01$; $0{,}006 \leq 0{,}1$; $0{,}006 \leq 1$), а цифра 8 является сомнительной, т.к. неравенство $0{,}006 \leq 0{,}001$ неверно.

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом

1. если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

2. если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

3. если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;

4. если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Если точное число A округлить по правилу дополнения до n значащих цифр, то полученное таким образом приближенное число a будет иметь n верных цифр **в узком смысле**. Если приближенное число a, имеющее n верных цифр, округлить до n значащих цифр, то полученное новое приближенное число a_1 будет иметь n верных цифр **в широком смысле**.

Правило подсчета верных цифр:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел младший сохраненный десятичный разряд результата должен являться старшим среди десятичных разрядов, выражаемых последними верными значащими цифрами исходных данных.

2. При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении приближенного числа в квадрат или куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько верных

значащих цифр имеет основание степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет подкоренное число.

5. При вычислении промежуточных результатов следует сохранить на одну-две значащие цифры больше, чем рекомендуют правила 1 - 4. В окончательном результате эти «запасные» цифры отбрасываются.

6. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с m верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которое согласно предыдущим правилам обеспечивает $m + 1$ верную цифру в результате.

Эти правила применимы, если данные содержат только верные цифры, а число операций невелико.