$R(T)=\{T(\alpha)\mid \alpha\in V\}$ $N(T)=\{\alpha \mid T(\alpha)=0,\ \alpha\in V\}$

2013 级硕士研究生《矩阵论》期末试卷

院（系）________ 班级________ 学号________ 姓名 [illegible]

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一．填空题（每空 3 分，共计 30 分）$x_1, x_2, \dots x_n$ 线性相关

1. 设 $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$，则 $\dim W=$ $n-1$

2. 设 $C^n=W_1\oplus W_2$，P 为沿 W_2 向 W_1 的投影算子，则 $R(P)=$ W_1，$N(P)=$ W_2.

$R(P)=\{P(W_2) \mid W_2\in C^n\}$ $P(W_2)\to W_1$

3. $\alpha_1=(1,2,1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,-1,2)^T\in R^3$，则 $W=span(\alpha_1,\alpha_2)$ 的正交补 $W^\perp$ 的一组基是 $(-5\ 1\ 3)^T$

4. 特征多项式是 $(\lambda-5)(\lambda-2)^3$ 的矩阵 A 可对角化，则 A 最小多项式为 $(\lambda-5)(\lambda-2)$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2i&0\\2&0&1\\2&5&2\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}2\\i\\-1\end{pmatrix}$，则 $\|Ax\|_\infty=$ $\sqrt{29}$ $\|x\|_2=\sqrt{6}$ $\|A\|_1=7$

$Ax=\begin{pmatrix}0\\3\\2+5i\end{pmatrix}$

6. 已知 $A\in C^{n\times n}$，并且 $\rho(A)<1$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A^k=$ $(I-A)^{-1}$

7. 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，$A$ 的非零奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$，则 $\|A\|_F^2=$ $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2$

$\|A\|_F=\left(\sum\sum|a_{ij}|^2\right)^{1/2}=(tr(A^HA))^{1/2}$

二．$\forall X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in C^{2\times2}$，在 $C^{2\times2}$ 上定义线性变换 $T(X)=\begin{pmatrix}b&-b\\-c&c\end{pmatrix}$

(1) 求 T 在 $C^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵；

(2) 分别求 T 的值域 $R(T)$ 及核子空间 $N(T)$ 的维数与一组基，并说明 $R(T)+N(T)$ 是否是直和。（10 分）

(1) $T(E_{11})=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $T(E_{12})=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ $T(E_{21})=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}$ $T(E_{22})=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$T(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

(2) $T(E_{11})T(E_{12})T(E_{21})T(E_{22})$ 矩阵组的秩为 2，$R(T)$ 是二维的。$T(E_{12})T(E_{21})$ 是一个极大无关组，即为值域 $R(T)$ 的一组基。

$R(T)=span\{T(E_{12}),T(E_{21})\}$

设 $x=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in N(T)$，$T(x)=\begin{pmatrix}x_2&-x_2\\-x_3&x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$x_1=k_1$，$x_2=x_3=0$，$x_4=k_2$

即 $X=\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$N(T)$ 的一组基为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，为 2 维的。

$R(T)+N(T)$ 是直和

三．$R[x]_3$ 表示实数域上次数小于 3 的多项式连同零多项式构成的线性空间，在其中定义内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，$f(x),g(x)\in R[x]_3$，从基 $1,x,x^2$ 出发，求出 $R[x]_3$ 的一组标准正交基。（8 分）

$\alpha_1=1$，$\alpha_2=x$，$\alpha_3=x^2$

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=x-\frac{\int_{-1}^1 x\cdot 1dx}{\int_{-1}^1 1\cdot 1dx}\cdot 1=x$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=x^2-\frac{\int_{-1}^1 x^2\cdot 1dx}{\int_{-1}^1 1dx}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^1 x^2\cdot x dx}{\int_{-1}^1 x\cdot x dx}\cdot x=x^2-\frac{1}{3}$

$\|\beta_1\|=\sqrt{\int_{-1}^1 1^2dt}=\sqrt{2}$ $\|\beta_2\|=\sqrt{\int_{-1}^1 x^2dt}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\|\beta_3\|=\sqrt{\int_{-1}^1(x^2-\frac{1}{3})^2dx}=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$

四．求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解。（10 分）

$AA^T=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=6$ $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 单位正交阵 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$A^TA=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ $\lambda_3=6$ 单位正交化 $V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$

$A=U\begin{pmatrix}\sqrt6&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}V^H$

五．已知 3 阶矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 及最小多项式 $m_A(\lambda)$ 相等为 $(\lambda-1)\lambda^2$，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，分别求 A 和 B 的 Jordan 标准形，A 与 B 是否相似？为什么？（10 分）

$f_A(\lambda)=m_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$ ∴ A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 存在可逆阵 P，$P^{-1}AP=J$

$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-1)$，$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，$(\lambda I-B)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)\lambda^2\end{pmatrix}$ ∴ 不变因子为 $\lambda-1$，λ^2，$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 存在可逆阵 Q，$Q^{-1}BQ=J$

∴ A 与 B 相似

$P_1^{-1}AP_1=J$ $P_2^{-1}BP_2=J$ $A=P_1JP_1^{-1}=P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1}$

六．设 $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$，求 e^{At}。（10 分）

$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$ $m(\lambda)=(\lambda+1)^2$

$e^{-t}=c_0-c_1$，$te^{-t}=c_1$；$c_0=e^{-t}+te^{-t}$，$c_1=te^{-t}$

$e^{At}=c_0I+c_1A=e^{-t}I+te^{-t}A$

七．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，(1) 求 A^+；(2) 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解；(3) 求方程组 $Ax=b$ 的最小范数解或最小二乘解（要求指出所求的是哪种解）（14 分）

$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $F=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$A^+=G^+F^+=G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H$

(3) $AA^+b\neq b$，无解

(4) 唯一的极小范数最小二乘解为 $X=A^+b$

最小二乘通解 $X=A^+b+(I-A^+A)Y$

八．证明题（每小题 4 分，共 8 分）

(1) 设 $\|\ \|$ 是相容矩阵范数，证明对任意方阵 A，A 的谱半径 $\rho(A)\le\|A\|$；

(2) 设矩阵 A 的某种范数满足 $\|A\|<1$，I 为 n 阶单位矩阵，证明 $I+A$ 可逆。

(1) $Ax=\lambda x$

$|\lambda|\cdot\|x\|=\|\lambda x\|\le\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

∴ $|\lambda|\le\|A\|\Rightarrow\rho(A)\le\|A\|$

(2) 设 A 的特征值为 λ，$I+A$ 的特征值为 u

$|uI-(I+A)|=|(u-1)I-A|$

∴ $u-1=\lambda\Rightarrow u=1+\lambda$

∵ $\rho(A)<1$ ∴ $-1<\lambda<1$ ∴ $0<u<2$

∴ $u\neq0$ $|I+A|\neq0$ 即 $(I+A)$ 可逆