最优化方法（卷二）

1. 对于无约束问题 $\min f(x)$，若在点 x_k 处下降方向为 p_k，采用精确一维搜索方法得下一个迭点 x_{k+1}，求证：$g_{k+1}^T p_k = 0$，其中 g_{k+1} 表示 $f(x)$ 在 x_{k+1} 处梯度

证明：由一阶条件可得 $\nabla f(x_k+\alpha_k p_k)=0$

而 $\nabla f(x_k+\alpha_k p_k) = g(x_{k+1})^T p_k = 0$

$\therefore g_{k+1}^T p_k = 0$

---

2. 同卷一第2题

3.（1）用单纯形法求线性规划 $\min -2x_2+x_3$

$$\text{s.t. } x_1-2x_2+x_3 \ge -4$$
$$x_1+x_2+x_3 \le 9$$
$$2x_1-x_2-x_3 \le 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

（2）若在上面线性规划为整数，在松弛整数规划中对变量 x_1 写出对应割平面方程

解：（1）引入松弛变量 x_4, x_5, x_6 化为标准形：

$\min -2x_2+x_3$

$$\text{s.t. } -x_1+2x_2-x_3+x_4 = 4$$
$$x_1+x_2+x_3+x_5=9$$
$$2x_1-x_2-x_3+x_6=5$$
$$x_i \ge 0,\ i=1,2,\dots 6$$

单纯形表.

	c_j		0	-2	1	0	0	0	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ_i
0	P_4	4	-1	(2)	-1	1	0	0	2
0	P_5	9	1	1	1	0	1	0	9
0	P_6	5	2	-1	-1	0	0	1	/
	σ_j		0	-2	1	0	0	0	θ_i
-2	P_2	2	-1/2	1	-1/2	1/2	0	0	/
0	P_5	7	(3/2)	0	3/2	1/2	1	0	14/3
0	P_6	7	1/2	0	-3/2	1/2	0	1	14
	σ_j		-1	0	0	1	0	0	
-2	P_2	13/3	0	1	0	2/3	1/3	0	
0	P_1	14/3	1	0	1	1/3	2/3	0	
0	P_6	14/3	0	0	-2	1/3	-1/3	1	
	σ_j		0	0	1	4/3	2/3	0	

$\therefore x^* = (\frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 0)^T$

（2）对 $x_1+x_3+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}x_5=\frac{14}{3}$

$-x_1+x_3-4 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5 \le 0$

$\therefore$ 割平面方程 $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x_4-\frac{2}{3}x_5 \le 0$

---

4. 用FR算法求解 $\min x_1^2+2x_2^2$，初始点 $x^{(0)}=(5,5)^T$

解：$g(x)=(2x_1, 4x_2)^T$，$g_0=(10,20)^T$ $\therefore$ 取 $p_0=-g_0=(-10,-20)^T$ 从 x_0 出发沿 p_0 精确一维搜

$\min f(x_0+\alpha_0 p_0)=900\alpha_0^2-500\alpha_0+75$ 取极值时 $\alpha_0=\frac{5}{18}$

$\therefore x_1 = x_0+\alpha_0 p_0 = (\frac{20}{9}, -\frac{5}{9})^T$，$g_1=(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9})^T$

对于FR算法 $\beta_{k-1}=\frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}}$ $\therefore \beta_0=\frac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0}=\frac{4}{81}$

$\therefore p_1 = -g_1+\beta_0 p_0 = (-\frac{400}{81}, \frac{100}{81})^T$ 沿 x_1 出发沿 p_1 精确一维搜索.

$\min f(x_1+\alpha_1 p_1) = \frac{180000}{181^2}\alpha_1^2-\frac{18000}{9\times 81}\alpha_1+\frac{450}{81}$ 取极值时 $\alpha_1=\frac{9}{20}$

$\therefore x_2 = x_1+\alpha_1 p_1 = (0,0)^T$，$g_2=(0,0)^T$

$\therefore x^* = x_2 = (0,0)^T$