南京郵電大學
Nanjing University of Posts and Telecommunications

最优化方法课程论文

题目：基于最速下降法的应用研究

学　　　　号　1215043027
姓　　　　名　汤健
专　　　　业　计算机技术
手　　机　　号　13851664695

摘要

本文主要研究了基于最速下降法的平面选址问题的无约束优化求解方法,针对实际问题建立数学模型,最后在 Matlab 中利用最速下降法求解。梯度下降法是一个最优化算法，通常也称为最速下降法。最速下降法是求解无约束优化问题最简单和最古老的方法之一，虽然现在已经不具有实用性，但是许多有效算法都是以它为基础进行改进和修正而得到的。最速下降法是用负梯度方向为搜索方向的，最速下降法越接近目标值，步长越小，前进越慢。

关键词: 最速下降法无约束优化 ;概念;应用;Matlab

1 概念

最速下降法(steepest descent method)是以负梯度方向作为下降方向的极小化算法,又称梯度法,是 1874 年法国科学家 Cauchy 提出的,最速下降法是无约束最优化中最简单的方法。最速下降法具有结构简单,计算量小,存储量小,对初始点没有特殊要求等优点。特别适合于低维空间的无约束最优化求解问题,例如,我们提出的平面选址问题就是二维空间的无约束优化问题。

2 基本思想

求解无约束优化问题 min f(x),从当前点 X^k 出发,取函数 f(x)在点 X^k 处的负梯度方向 $d^k=-\nabla f(X^k)$,即最速下降方向,得 到点列{X^k}满足条件 $f(x^{(k+1)})<f(X^k)$,最终使得点列{X^k}中的某个点或某个极限点是 min f(x)的解或稳定点,即为问题 min f(x)的最优解。

3 求解过程

顾名思义，最速下降法的计算过程就是沿梯度下降的方向求解极小值（也可以沿递度上升方向求解极大值）。其迭代公式为$a_{k+1}=a_k+\rho_k\bar{s}^{(k)}$,其中$\bar{s}^{(k)}$代表梯度负方向，$\rho_k$表示梯度方向上的搜索步长。梯度方向我们可以通过对函数求导得到，步长的确定比较麻烦，太大了的话可能会发散，太小收敛速度又太慢。一般确定步长的方法是由线性搜索算法来确定，即把下一个点的坐标 a_{k+1} 看做是的函数，然后求满足 $f(a_{k+1})$ 的最小值的 即可。因为一般情况下，梯度向量为 0 的话说明是到了一个极值点，此时梯度的幅值也为 0.而采用梯度下降算法进行最优化求解时，算法迭代的终止条件是梯度向量的幅值接近 0 即可，可以设置个非常小的常数阈值。

一般步骤如下:

步 1：给定初始点 x_0,精度 ε >0,令 k=0

步 2：计算 $g_k=g(x_k)$

步 3：若 $\|g_k\|\le\varepsilon$，则 $x^*=x_k$,停；否则，令 $p_k=-g_k$，由一维搜索确定步长αk，使得 $f(x_k+\partial_k p_k)=\min\limits_{\partial\ge0} f(x_k+\partial p_k)$

步 4：令 $x_{k+1}=x_k+\partial_k p_k$, k:=k+1,转步 2

举一个非常简单的例子，如求函数$f(x)=x^2$的最小值。利用梯度下降的方法解题步骤如下：

1、求梯度，$\nabla=2x$

2、向梯度相反的方向移动x，如下$x\leftarrow x-\gamma\cdot\nabla$，其中，$\gamma$为步长。如果步长足够小，则可以保证每一次迭代都在减小，但可能导致收敛太慢，如果步长太大，则不能保证每一次迭代都减少，也不能保证收敛。

3、循环迭代步骤 2，直到x的值变化到使得$f(x)$在两次迭代之间的差值足够小，比如 0.00000001，也就是说，直到两次迭代计算出来的$f(x)$基于没有变化，则说明此时$f(x)$已经达到局部最小值了。

4、此时，输出x，这个x就是使得函数$f(x)$最小时的x的取值 。

在 MATLAB 实现如下。

```
syms  x;
f=x^2;
step=0.1;
x=2;
loss_changed=x^2;
loss=x^2;
while  loss_changed>0.000000001
        x=x-step*2*x;
        loss_changed  =  loss  -  x^2;
        loss  =  x^2  ;
end
x
```

4 应用

平面选址问题是运筹学中的一个经典问题。最早的选址问题是由经济学家 Alfred Weber 于 1909 年提出的,他所考虑的选址问题是确定一个仓库位置,从而使仓库与各处客户之间总的运输距离最短,这就是著名的 Weber 问题。选址问题在现实生活中有着广泛的应用背景,系统工程、现代物流、金融经济、甚至军事中都有着非常广泛的应用,如银行、超市、急救中心、消防站、垃圾处理中心、物流中心、导弹仓库的选址等。选址是最重要的长期决策之一,选址的好坏直接影响到企业的成本,人民生活的便利程度,战争的成败等;好的选址可以为企业降低服务成本,提高服务质量、服务效率,扩大利润和市场份额等,进而影响到企业

利润和市场竞争力,甚至决定了企业的命运;差的选址往往会带来很大的不便和损失,甚至是灾难,所以,选址问题的研究有着重大的经济、社会和军事意义。一般意义下的选址问题可能是非常复杂的,涉及到时间的、空间的、自然的、社会的各种复杂条件。本文仅研究最常见的一种无约束平面选址问题,即二维空间的极值最优化问题:在平面上给定 n 个位置点 $p_i(x_i, y_i)$(i=1,2, ,n),现要确定选址位置点 P(x,y),使点 P(x,y)到平面上 n 个点的距离之和最小,

即 min $D(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$ 对于无约束优化问题 min D(x,y)本文仅利用最速下降法求解。

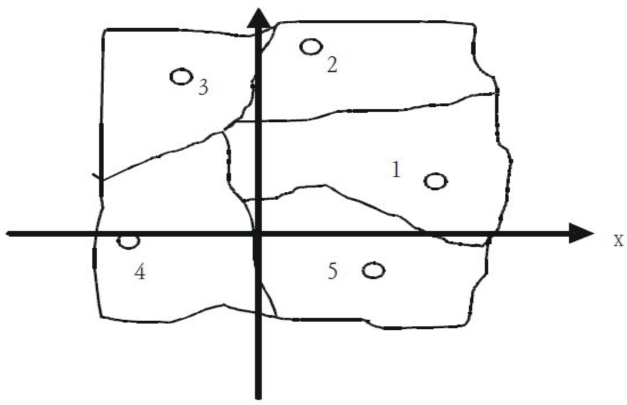

图 1 居民区分布示意图

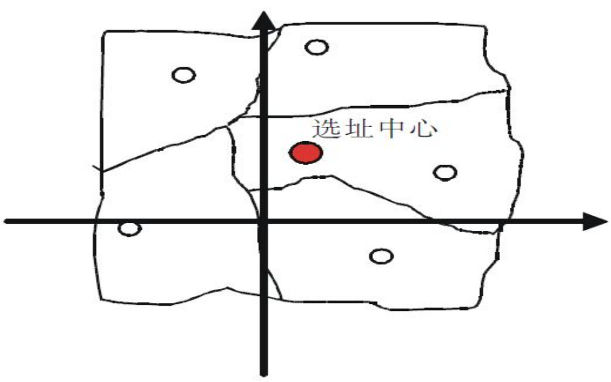

图 2 选址中心位置示意图

居民区号	x	y
1	10	4
2	2	15
3	-4	12
4	-5	0
5	6	-3

4.1 实际问题提出及模型建立

如图 1 为某市一片市民居住区分布示意图。政府欲在这几个居住人口密集的社区附近建立一个灾难应急场所,使得居民在遇到紧急情况时,能迅速到达应急避难场所,以保证市民的人身安全,并且要求大家所走的路程最短,该如何选择应急场所修建的位置?

依据居民区分布示意图,建立直角坐标系如图 1 所示,分别对 5 个居民区核心位置设置坐标如表 1 所示。该应急场所的选址就是一个典型的平面选址问题,其实质就是一个求距离和最小值问题,即是 2 维空间的无约束最优化问题求解,假设需确定的选址位置的坐标为(x, y) ,则建立如下优化模型。

$$\min\ D(x,y)=\sqrt{(x-10)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-15)^2}$$
$$+\sqrt{(x+4)^2+(y-12)^2}+\sqrt{(x+5)^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y+3)^2}$$

4.2 最速下降法求解

在 Matlab 中,用无约束优化算法中的最速下降法求解,在 Matlab 命令窗口中输入:

》 syms x y;

$$》 D = \mathrm{sqrt}\ ((x-10)\hat{}\,2 + sqrt\ ((x-2)\hat{}\,2) + (y-15)\hat{}\,2) + sqrt\ ((x+4)\hat{}\,2 + (y-12)\hat{}\,2) + sqrt\ (x+5)\hat{}\,2 + y\hat{}\,2) + sqrt\ ((x-6)\hat{}\,2 + (y+3)\hat{}\,2)$$

$$》 [xm\ , mf\ ] = \min\ FD\,(D\,,[0,0],[x\,,y])$$

其中,minFD 为最速下降法函数;

D 为目标函数;

X_0 为初始点为(0,0);

mf 为目标函数最小值;

xm 为目标函数取最小值时的变量值。

结果如下:

xm=1.7807 5.6636

mf=44.7733

即选址中心位置坐标为(1.7807,5.6636),它到各个居民区的

总距离为 44.7733;根据 Matlab 求出的结果,选址中心的坐标如图 2 中“选址中心”所示。

平面选址问题在实际生产生活中有着广泛的应用背景,本文主要研究了基于最速下降法的平面选址问题的求解方法,通过最速下降法在实际生活中的应用研究,以期能在系统工程优化、经济金融等多个应用领域给读者一点启发,为决策者提供一定的参考依据,将理论研究更好地为实际生产生活服务。

参考文献

[1] 朱德通.最优化模型与实验[M].上海:同济大学出版社,2003.

[2] 薛毅.最优化原理与方法[M].北京:北京工业大学出版社,2004.

[3] 张天赐.平面选址问题概述[J].运筹学杂志,1985(1).

[4] 王金华,孙可伟,等.城市垃圾中转站选址研究[J].环境科学与管理,2008(5).

[5] 龚纯,王正林.Matlab 最优化计算[M].北京:电子工业出版社,2010.

[6] 袁和金,王翠茹.粒子群优化算法在求解平面选址问题中的应用研究[J].华北电力大学学报,2004(4).

[7] 李董辉,等.数值最优化[M].北京:科学出版社,2005