最优化方法（卷一）

1. $f(x)$ 为凸集 $D\subset R^n$ 上的函数，$epi(f)=\{(x,y)\mid x\in D,\ y\in R,\ y\geq f(x)\}$

证：$f(x)$ 是凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 是凸集.

证明：(i) 必要性. 取 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in epi(f)$ 则有 $f(x_1)\leq y_1,\ f(x_2)\leq y_2$

取任意实数 $\alpha\in[0,1]$ 要证 $epi(f)$ 是凸集 只需证 $\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\in epi(f)$

$\because x_1,x_2\in D$ 且 $f(x)$ 为凸函数 $\quad\therefore f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\leq\alpha y_1+(1-\alpha)y_2$

$\therefore(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\ \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\in epi(f)$

$\therefore epi(f)$ 是凸集

(ii) 充分性. 取 $x_1,x_2\in D$ 则有 $f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2$ 取任意实数 $\alpha\in[0,1]$

$\because epi(f)$ 是凸集 $\quad\therefore f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha y_1+(1-\alpha)y_2=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 是凸函数.

---

2. 设 G 为 n 阶正定对称矩阵，$u_1,u_2,\cdots u_n\in R^n$ 线性无关，P_k 按如下方式生成：$P_1=u_1$，$P_{k+1}=$ $P_k-\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{k+1}^TGP_i}{P_i^TGP_i}P_i\ (k=1,2,\cdots n-1)$ 求证：$P_1,P_2,\cdots P_n$ 关于 G 共轭.

证明：下面用数学归纳法证明

(i). $k=1$ 时. $P_2=u_2-\frac{u_2^TGu_1}{u_1^TGu_1}u_1$,

$\therefore P_2^TGP_1=\left(u_2-\frac{u_2^TGu_1}{u_1^TGu_1}u_1\right)^TGu_1=u_2^TGu_1-\frac{u_2^TGu_1}{u_1^TGu_1}u_1^TGu_1=0$

$\therefore P_1,P_2$ 关于 G 共轭.

(ii) 设 $P_1,P_2,\cdots P_{n-1}$ 关于 G 共轭，设 $k=1,2,\cdots n-1$.

$\therefore P_n^TGP_k=\left(P_{n-1}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{u_n^TGP_i}{P_i^TGP_i}P_i\right)^TGP_k$ $\because$ 当 $i\neq k$ 时 $P_i^TGP_k=0$

$\therefore P_n^TGP_k=P_n^TGP_k-\frac{u_n^TGP_k}{P_k^TGP_k}P_k^TGP_k=0$

$\therefore P_1,P_2,\cdots P_n$ 关于 G 共轭.

---

3. 小用单纯形法求解：$\min\ -x_1-x_2$

$s.t.\ 2x_1+x_2\leq 6$

$4x_1+5x_2\leq 20$

$x_1,x_2\geq 0$

(2) 若在上面的线性规划中，要求变量是整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出其对应的割平面方程.

解：(1) 引入松弛变量 x_3,x_4 化为标准形.

$\min\ -x_1-x_2$

$s.t.\ 2x_1+x_2+x_3=6$

$4x_1+5x_2+x_4=20$

$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$

单纯形表.

	C_j		-1	-1	0	0	θ
C_B	X_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	
0	P_3	6	(2)	1	1	0	3
0	P_4	20	(4)	5	0	1	5
	σ_j		-1	-1	0	0	
-1	P_1	3	1	1/2	1/2	0	6
0	P_4	8	0	(3)	-2	1	8/3

	C_j		-1	-1	0	0
C_B	X_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
-1	P_1	5/3	1	0	5/6	-1/6
-1	P_2	8/3	0	1	-2/3	1/3
	σ_j		0	0	1/6	1/6

$\therefore x^*=(5/3,\ 8/3)$