$$s.t.\ 1-x_1 \le 0$$
$$x_2 \ge 0$$

解：$B(x_1,x_2,r)=\frac{1}{3}(x_1+1)^2+x_2-r[\ln(x_1-1)+\ln x_2]$

令 $\frac{\partial B}{\partial x_1}=\frac{2}{3}(x_1+1)-\frac{r}{x_1-1}=0 \Rightarrow$ 解得 $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}r+1}$

$\frac{\partial B}{\partial x_2}=1-\frac{r}{x_2}=0$ $\qquad x_2=r$

$\therefore$ 当 $r\to 0$ 时，$x^*=(1,0)$，$f^*=\frac{4}{3}$

---

6 验证 $x^*=(1,1,1)$ 为下面的KT点 $\min f(x)=-3x_1-x_2^2-2x_3^2$

$$s.t.\ c_1(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-3\ge 0$$
$$c_2(x)=-x_1+x_2\ge 0$$
$$c_3(x)=x_1\ge 0$$
$$c_4(x)=x_2\ge 0$$
$$c_5(x)=x_3\ge 0$$

解答见卷一第6题。

---

7. 设 f 是定义在 R^n 上函数，如果对任意的 $x\in R^n$ 及正数 t 均有 $f(tx)=tf(x)$ 则称 f 为正齐次函数。求证：R^n 上正齐次函数 $f(x)$ 为凸函数充要条件是：对任意 $x,y\in R^n$，有 $f(x+y)\le f(x)+f(y)$。

证明：(i) 必要性 $\because f(x)$ 为凸函数 $\therefore f[\alpha x+(1-\alpha)y]\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$

令 $\alpha=\frac{1}{2}$ 则有 $f(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)\le \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$ 由 $f(tx)=tf(x)$ 可得

$\Rightarrow \frac{1}{2}f(x+y)\le \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$

即 $f(x+y)\le f(x)+f(y)$

(ii) 充分性，令 $x'=\alpha x$，$y'=(1-\alpha)y$。

$\therefore f(x'+y')\le f(x')+f(y')$

$\Rightarrow f[\alpha x+(1-\alpha)y]\le f(\alpha x)+f[(1-\alpha)y]$，由 $f(tx)=tf(x)$ 得

$\Rightarrow f[\alpha x+(1-\alpha)y]\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$

$\therefore f(x)$ 为 R^n 上凸函数