最优化题目

November 27, 2018

有几题图片有问题, 在这里补充

线性规划(LP) $\begin{aligned} &\min -x_1-3x_2 \\ &s.t.\ 4x_1-x_2\ge -2 \\ &\quad x_1+x_2\le 3 \\ &\quad x_1\ge 0 \end{aligned}$ 的对偶规划为__________________________，对于线性规划(LP)，在点 $(0.2,2.8)^T$ 处，方向 $(a,-1)^T$ 为可行方向，则 a 的取值范围是________，点 $(0.2,2.8)^T$ 处的有效集为__________。

Figure 1: 第3题

六、（12%）用内罚函数法（对数罚函数）求解 $\begin{aligned} &\min\ x_1^2+2x_2^2 \\ &s.t.\ x_1+x_2-1\ge 0 \end{aligned}$。

Figure 2: 第53题

七（10%）、给定非线性规划问题

$$\min \quad f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x_i}$$

$$s.t.\quad \sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b$$

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0$$

其中 a_i,b,c_i 都是正常数。设 x^* 是该问题的最优解，证明：该问题的最优值为

$$f(x^*)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ic_i}\right)^2}{b}$$

Figure 3: 第54题

六、（10%）用外罚函数法求解 $\begin{aligned} &\min\ (x-1)^2 \\ &s.t.\ x-2\geq 0 \end{aligned}$ 。

Figure 1: 题目 1.

八、（8%） $f:R^n\to R$ 为可微凸函数，证明 x^* 为优化问题 $\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &s.t. \quad x\geq 0 \end{aligned}$ 的最优解的充要条件是 $x^*\geq 0, \nabla f(x^*)\geq 0, (\nabla f(x^*))^T x^*=0$ 。

Figure 2: 题目 2.

用 DFP 方法求解问题 $\min \ \frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1$，初始点 $x^{(0)}=(0,0)^T$，取初始矩阵为单位阵。（提示：DFP 方法中矩阵的递推公式为：$H_{k+1}=H_k-\frac{H_ky_ky_k^TH_k}{y_k^TH_ky_k}+\frac{s_ks_k^T}{y_k^Ts_k}$）

Figure 4: 题目 4.

用 FR 方法求解问题 $\min \ 2x_1^2+8x_2^2+2x_1x_2-x_1+13x_2$，初始点 $x^{(0)}=(1,1)^T$.

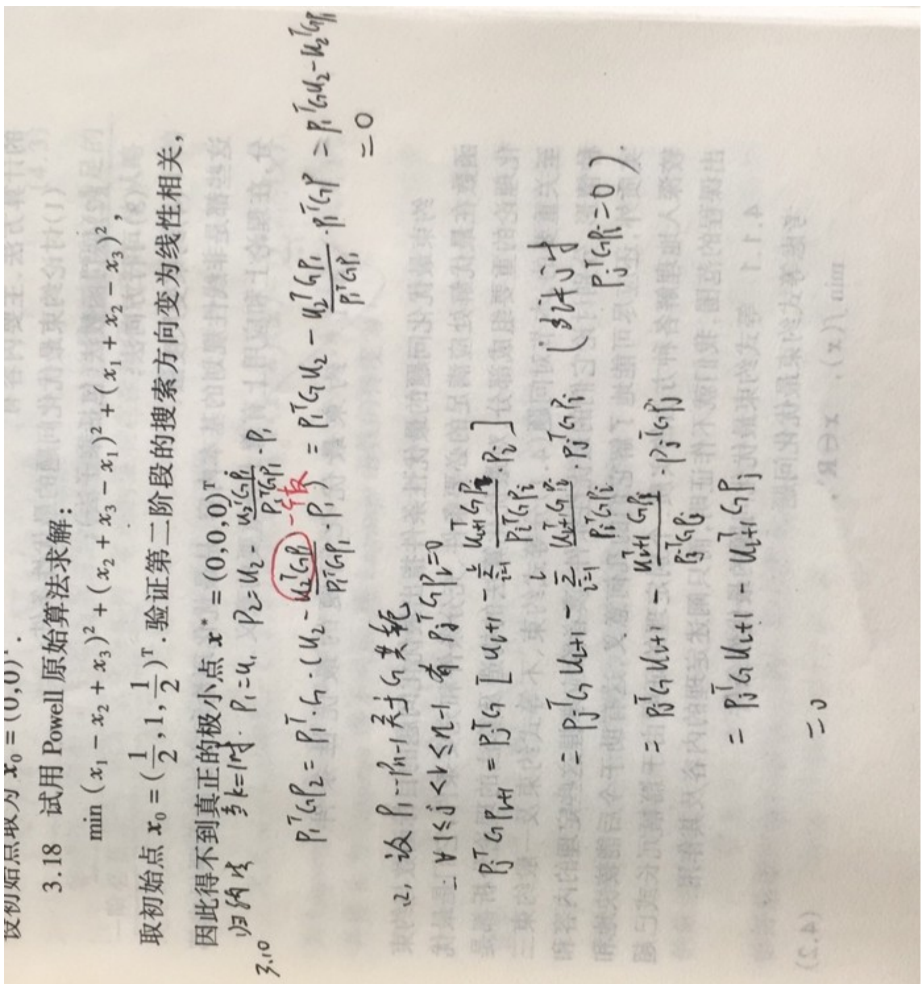
Figure 5: 题目 5.

)用 PRP 方法求解问题 $\min \ 2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+6x_1$，初始点 $x^{(0)}=(0,0)^T$.

Figure 6: 题目 6.

设 H_k 是对称半正定但奇异的矩阵，从而存在某个向量 $u\neq 0$ 使得 $H_ku=0$，证明 DFP 修正公式得到的 H_{k+1} 也是奇异的。

Figure 7: 题目 7.



设初始点取为 $x_0=(0,0)^T$.

3.18 试用 Powell 原始算法求解:

$$\min\ (x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3-x_1)^2+(x_1+x_2-x_3)^2,$$

取初始点 $x_0=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$. 验证第二阶段的搜索方向变为线性相关,

因此得不到真正的极小点 $x^*=(0,0,0)^T$.

3.10 归纳法 当 $k=1$ 时: $p_1=u_1$, $p_2=u_2-\frac{u_2^TGp_1}{p_1^TGp_1}\cdot p_1$

$p_1^TGp_2=p_1^TG\cdot(u_2-\frac{u_2^TGp_1}{p_1^TGp_1}\cdot p_1)=p_1^TGu_2-\frac{u_2^TGp_1}{p_1^TGp_1}\cdot p_1^TGp_1=p_1^TGu_2-u_2^TGp_1$

$=0$

设 $p_1\cdots p_{k-1}$ 关于 G 共轭

$\forall\ 1\le j<k\le n-1$ 有 $p_j^TGp_k=0$

$p_j^TGp_{k+1}=p_j^TG\,[u_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{k+1}^TGp_i}{p_i^TGp_i}\cdot p_i]$

$=p_j^TGu_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{k+1}^TGp_i}{p_i^TGp_i}\cdot p_j^TGp_i$ (当 $i\ne j$ 时 $p_j^TGp_i=0$)

$=p_j^TGu_{k+1}-\frac{u_{k+1}^TGp_j}{p_j^TGp_j}\cdot p_j^TGp_j$

$=p_j^TGu_{k+1}-u_{k+1}^TGp_j$

$=0$

Figure 8: 题目 8.

引理 有界凸集C内的任意点均可表成顶点的凸组合

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda x^{(1)} + (1-\lambda) y \\
&= \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)(\mu x^{(3)} + (1-\mu) x^{(4)}) \\
&= \lambda x^{(1)} + \mu(1-\lambda) x^{(3)} + (1-\mu)(1-\lambda) x^{(4)} \\
&= \lambda x^{(1)} + \mu(1-\lambda) x^{(3)} + (1-\mu)(1-\lambda) x^{(4)} \\
&\quad + 0x^{(2)} + 0x^{(5)},\ \text{且}\ \lambda + \mu(1-\lambda) + (1-\mu)(1-\lambda) + 0 + 0 = 1
\end{aligned}
$$

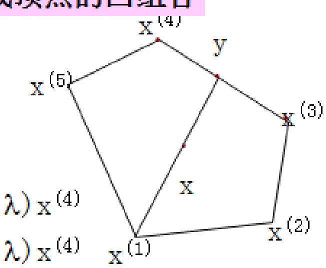


Figure 9: 题目 9.

证明：(I) 与 (II) 的对偶规划分别为

$$
(DI)\ \begin{array}{ll} & \max\ b^T y \\ s.t. & A^T y \le c \\ & y \ge 0 \end{array}
\qquad
(DII)\ \begin{array}{ll} & \max\ (b+d)^T y \\ s.t. & A^T y \le c \\ & y \ge 0 \end{array}
$$

(I) 的最优值与 (DI) 的最优值相同，得 $z^* = b^T y^*$，

y^* 是 (DI) 对偶规划的最优解，从而是 (DII) 的可行解。y^* 在 (DII) 的目标函数值不大于最优值，$(b+d)^T y^* \le s^*$。因此 $z^* + y^{*T} d \le s^*$。

Figure 10: 题目 10.

八、(8%) $f: R^n \to R$ 为可微凸函数，证明 x^* 为优化问题 $\begin{array}{ll}\min & f(x) \\ s.t. & x \ge 0\end{array}$ 的最优解的充要条件是 $x^* \ge 0, \nabla f(x^*) \ge 0, (\nabla f(x^*))^T x^* = 0$。

Figure 11: 题目 11.

八、(10%) 设 $\boldsymbol{f}$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数，如果对于任意的 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ 及正数 $\boldsymbol{t}$ 均有 $\boldsymbol{f(tx) = tf(x)}$，则称 $\boldsymbol{f(x)}$ 为正齐次函数。证明 $\boldsymbol{R}^n$ 上的正齐次函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 为凸函数的充要条件是：对任意的 $\boldsymbol{x, y \in R^n}$，有 $\boldsymbol{f(x+y) \le f(x) + f(y)}$。

Figure 12: 题目 12.

八、（8%）设 A 为 n 阶对称正定矩阵，非零向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 关于矩阵 A 共轭，证明

$A^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k p_k^T}{p_k^T A p_k}$。

Figure 13: 题目 13.

八、(6%))设 z^*, s^* 分别是两个线性规划问题(I)是 $\begin{array}{ll} \max & z_1 = C^T X \\ s.t. & AX \le b \\ & X \ge 0 \end{array}$ 与(II) $\begin{array}{ll} \max & z_2 = C^T X \\ s.t. & AX \le b + k \\ & X \ge 0 \end{array}$

的最优值，y_1^* 是（I）的对偶问题的最优解。，求证：$s^* \le z^* + y_1^{*T} k$。

Figure 14: 题目 14.

$$x_1 + 3x_2 \le 13$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

（2）若在上面的线性规划中要求变量为整数，用分枝定界法求解相应的整数规划，针对变量 x_2 写出分枝后的线性规划。

Figure 15: 题目 15.

二、（10%） $f(x)$ 为凸集 $D \subset R^n$ 上的函数，令 $epi(f)=\{(x,y)\mid x\in D, y\in R, y\ge f(x)\}$，

证明: $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $epi(f)$ 为凸集。

Figure 16: 题目 16.

二、（12%）对于任意给定的一个函数 $f(x)$,用最速下降法求解其最小值,若一维搜索是精确的,证明两个相邻的搜索方向一定正交。

Figure 17: 题目 17.

（7）对于无约束优化问题 $\min \ x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$，$p=(1,a)^T$ 为目标函数在点 $(0,1)^T$ 的下降方向，则 a 的取值范围是______________________

Figure 18: 题目 18.

（6）求函数 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2$ 的极小点，取 $x^{(0)}=(0,1)^T$，用最速下降法一步得到的下一迭代点 $x^{(1)}=$______________

Figure 19: 题目 19.

（4）若 $f(x)=3x_1^2+x_2^2+ax_1x_2$ 为严格凸函数，则 a 的取值范围是________________，

用 Newton 法求该函数的极小点，取 $x^{(0)}=(2,3)^T$，迭代一步得到的点为______________。

Figure 20: 题目 20.

（3）对问题 $\min(x_1-3)^2+(x_2-5)^2$，取初始点 $x^{(0)}=(120,-101)^T$，用 Newton 法一步得到的下一迭代点 $x^{(1)}=$__________________________。

Figure 21: 题目 21.

（6）对问题 $\min x_1^3+x_2^2$，取初始点 $x^{(0)}=(2,1)^T$，用 Newton 法一步得到的下一迭代点 $x^{(1)}=$__________________________________。

Figure 22: 题目 22.

）验证 $\boldsymbol{x}^*=(1,1,1)^T$ 为下面问题的 KT 点，

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x)=-3x_1^2-x_2^2-2x_3^2\\
s.t.\ & c_1(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-3=0\\
& c_2(x)=-x_1+x_2\ge 0\\
& c_3(x)=x_1\ge 0\\
& c_4(x)=x_2\ge 0\\
& c_5(x)=x_3\ge 0
\end{aligned}
$$

。

Figure 23: 题目 23.

三、（18%）（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1-3x_2 \\ s.t.\ & 2x_1+3x_2\le 14 \\ & 3x_1+x_2\le 16 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_1 写出对应的割平面方程。

Figure 24: 题目 24.

（7）已知线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & -3x_1+x_2+x_3 & & +10x_6+10x_7 \\ s.t.\ & x_1-2x_2+x_3 & +x_5 & =11 \\ & -4x_1+x_2+2x_3-x_4 & +x_6 & =3 \\ & -2x_1 \quad +x_3 & +x_7 & =1 \\ & x_1,\cdots,x_7\ge 0 \end{aligned}$$

的最优基为 (p_1,p_2,p_3)，该线性规划的影子价格向量是________________________________。

Figure 25: 题目 25.

（6）函数 $f(x_1,x_2)=2x_1^2+ax_1x_2+2x_2^2-2x_1-x_2$ 为严格凸函数，则常数 a 的取值范围是

Figure 26: 题目 26.

（3）用黄金分割法求函数 x^2-3x+2 在 $[0,4]$ 上的极小点，迭代一步之后得到的区间为____________。

（4）集合 $\{(x,y)\mid x^2+2y^2\le 4, x\ge 1, y\ge 1\}$ 的极点构成的集合为

Figure 27: 题目 27.

（5）集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$ 的极点构成的集合为

Figure 28: 题目 28.

（3）用黄金分割法求函数在 $[0,1]$ 上的极小点，迭代两步之后区间的长度为_(

Figure 29: 题目 29.

（3）对于优化问题

$$\begin{aligned} \min\ & f(x_1,x_2) \\ s.t.\ & 4-(x_1^2+x_2^2)\ge 0 \\ & x_1 \ge 0 \\ & 1-x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

，该问题可行域的极点集合为__________

Figure 30: 题目 30.

）线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1-x_2 \\ s.t.\ & 2x_1-x_2\ge 4 \\ & -3x_1+5x_2\le 1 \\ & x_2\le 0 \end{aligned}$$

的对偶规划为______________________________。

Figure 31: 题目 31.

八、（7%）若线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & x_1+2x_2+x_3 \\ s.t.\ & 3x_1+4x_2 \qquad = 5 \\ & x_1 \qquad\quad +2x_3 = u \\ & x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

的最优解为 $(a,b,c)^T$，其对偶规划的最优解为 $(1/6,1/2)^T$。a,b,c,u 四个常数中，你可以确定哪些？如果有不能确定的常数，确定其范围。

Figure 32: 题目 32.

（6）函数 $f(x_1,x_2)=ax_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_1+2x_2+1$ 为严格凸函数，则常数 a 的取值范围是______________________________。

Figure 33: 题目 33.

（7）对于二次规划

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\ s.t.\ & 2-x_1-x_2\ge 0 \\ & 5-x_1-5x_2\ge 0 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2\ge 0 \end{aligned}$$

，点 $(0,1)^T$ 的有效集为__________，

写出在 $(0,1)^T$ 的一个可行下降方向：______________________________。

Figure 34: 题目 34.

（4）用黄金分割法求函数在区间[2,5]上的极小点，第一步所取的两个点为______________

Figure 35: 题目 35.

（4）用黄金分割法求函数 x^2-x+1 在区间[-4,1]上的极小点，经过______迭代后可以使得区间的长度小于 1。

Figure 36: 题目 36.

（3）在二维空间 R^2 中，集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, y\ge x\}$ 的极点构成的集合为

____。

Figure 37: 题目 37.

若 $f(x)=3x_1^2+x_2^2+ax_1x_2$ 为严格凸函数，则 a 的取值范围是____________

Figure 38: 题目 38.

八、（10%）证明凸规划的任一局部极小点是整体极小点，且全体极小点组成凸集。

Figure 39: 题目 39.

七,考虑约束优化优化问题 $\begin{aligned}\min\quad & f(x)\\ s.t.\quad & c_1(x)\le 0,\\ & c_2(x)\le 0\end{aligned}$，其中 $c_1(x),c_2(x),f(x)$ 为凸函数，

证明：（1）该问题的可行域 D 为凸集；（2）设最优解组成的集合为 A，则 A 为凸集。

Figure 40: 题目 40.

八、（10%）设 f 是定义在 R^n 上的函数，如果对于任意的 $x\in R^n$ 及正数 t 均有

$f(tx)=tf(x)$，则称 $f(x)$ 为正齐次函数。证明 R^n 上的正齐次函数 $f(x)$ 为凸函数的充要

条件是：对任意的 $x,y\in R^n$，有 $f(x+y)\le f(x)+f(y)$。

Figure 41: 题目 41.

(1)以(p1,p2)初始可行基,用单纯形方法求解
$$\begin{aligned}
&\min\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\
&s.t.\ x_1+x_2+x_3+x_4=3\\
&\quad 2x_1+2x_3-6x_4=5\\
&\quad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0
\end{aligned}$$

Figure 42: 题目 42.

（4）用黄金分割法求函数 $2x^2-5x+1$ 在[1,6]上的极小点，要使得最后区间的长度小于 1，必须至少迭代____4____________步。

Figure 43: 题目 43.

）线性规划
$$\begin{aligned}
&\max\ 2x_1+x_2\\
&s.t.\ -x_1+2x_2\ge 1\\
&\quad x_1+3x_2=5\\
&\quad x_1\ge 0
\end{aligned}$$
的对偶规划为

Figure 44: 题目 44.

（7）对于二次规划
$$\begin{aligned}
&\min\ 2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2\\
&s.t.\quad 2-x_1-x_2\ge 0\\
&\quad 5-x_1-5x_2\ge 0\\
&\quad x_1\ge 0\\
&\quad x_2\ge 0
\end{aligned}$$
,点 $(0,1)^T$ 的有效集为____________，

写出在 $(0,1)^T$ 沿着可行域边界的一个可行下降方向：________________________。

Figure 45: 题目 45.

1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &\min\ -4x_1-3x_2\\ &s.t.\ 2x_1+3x_2\le 14\\ &\quad 3x_1+x_2\le 16\\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

求此线性规划的影子价格向量

Figure 46: 题目 46.

（18%）（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &\min\ -3x_1-4x_2\\ &s.t.\ 2x_1+x_2\le 4\\ &\quad x_1+3x_2\le 3\\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

写出该线性规划的影子价格向量；

Figure 47: 题目 47.

四、（18%）（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &\min\ -12x_1-9x_2\\ &s.t.\ 2x_1+x_2\le 10\\ &\quad -x_1+5x_2\le 6\\ &\quad 3x_1-2x_2\le 3\\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

（3）若在上面的线性规划中要求变量为整数，在相应的整数规划中，请对变量 x_2 写出对应

Figure 48: 题目 48.

四、（16%）（1）用单纯形方法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &\min\ -2x_1-x_2\\ &s.t.\ 2x_1+3x_2\le 7\\ &\quad x_1+x_2\le 5\\ &\quad 5x_1+11x_2\le 20\\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

（2）写出该线性规划的影子价格向量；

Figure 49: 题目 49.

六、（10%）用乘子法求解问题 $\begin{array}{l}\min\ x_1^2+x_2^2\\ s.t.\ x_1+x_2-3=0\end{array}$

Figure 50: 题目 50.

七、（10%）讨论 $x^*=(0,1)^T$ 是否下面问题的 KT 点 $\begin{array}{l}\min\ f(x)=x_1^2+x_2^2\\ s.t.\ 2x_1+x_2\le 2\\ \quad\ \ x_2\ge 1\end{array}$ 。

Figure 51: 题目 51.

（2）用乘子法求解问题 $\begin{array}{l}\min\ f(x)\\ s.t.\quad x_1-x_2=0\end{array}$ ，其增广 Lagrange 函数为

Figure 52: 题目 52.