第三章 无约束最优化方法

3.1 解：

由一阶必要条件：$g^* = \nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

可得 $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

此三点为驻点。

对于 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$g^*\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$，$G^* = G(x^*) = \begin{pmatrix} 4 + 12x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 正定。

对于 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$g^*(\ ) = 0$　$G^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 正定。

对于 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　$g^*\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$　$G^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 负定。

由二阶充分条件，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为局部极小点。

由于该函数在整体区域不满足凸函数二阶条件，则非凸函数。

则 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 不是整体极小点。

3.2 证明：设 x_1 和 x_2 都是局部极小点，并且 $x_1 \neq x_2$

若 $f(x_1) > f(x_2)$，对 $\forall n \in Z^+$，

$f(x_1) > (1-\frac{1}{n}) f(x_1) + \frac{1}{n} f(x_2) \geq f((1-\frac{1}{n}) x_1 + \frac{1}{n} x_2)$；

设 $y_n = (1-\frac{1}{n}) x_1 + \frac{1}{n} x_2$，显然 $\lim_{n \to +\infty} y_n = x_1$，但

$f(y) < f(x_1)$，与 $f(x_1)$ 为局部极小点矛盾。

因此 $f(x_2) \geq f(x_1)$；

同理 $f(x_2) \leq f(x_1)$，

那么有 $f(x_1) = f(x_2)$

易得在定义域内必然有 $f(x) \geq f(x_1)$

因此局部极小点也必然是整体极小点。

若 $f(x)$ 是 I上 严格凸函数，设 x_0 是 I上 一个极小点。

用反证法：设若存在另一极小点 x_1，不妨设 $f(x_1) \leq f(x_0)$。

则由定义：$\exists U^\circ(x_0)$，s.t. 当 $x \in U(x_0)$ 时有：

$f(x) \geq f(x_0)$。

由 f 是严格凸函数，因此 $\forall \lambda \in (0,1)$，有

$x = \lambda x_0 + (1-\lambda) x_1 \in U^\circ(x_0) \cap I$，且有 $f(x) \leq f(x_0)$

这与 x_0 是 I上 极小点矛盾，

故 x_0 是 I上 唯一的极小点。

则严格凸函数的极小点是唯一的。

证毕。

另解：设 $\bar{x}$ 是在 S 中的局部极小点，即存在 $\bar{x}$ 的 $\varepsilon > 0$ 邻域 $N_\varepsilon(\bar{x})$ 使得对 $\forall x \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$，有 $f(x) \geq f(\bar{x})$。若 $\bar{x}$ 不是整体极小点，则 $\exists x^{(0)} \in S$，使 $f(\bar{x}) > f(x^{(0)})$，

∵ ~~S是凸集~~

∵ S是凸集，则 $\forall \lambda \in (0,1)$，有 $\lambda x^{(0)} + (1-\lambda)\bar{x} \in S$

∵ f 是 S上 的凸函数，

∴ $f(\lambda x^{(0)} + (1-\lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x^{(0)}) + (1-\lambda) f(\bar{x})$

$< \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{x}) = f(\bar{x})$

当 λ 充分小时，可使 $\lambda x^{(0)} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$，

这与 $\bar{x}$ 为局部极小点矛盾。

∴ $\bar{x}$ 是在 S上 的整体极小点。

3.3 证明：必要性：若x^*是整体极小点，自然是局部极小点，根据定理3.1.1（一阶必要条件）必有$g^*=0$

充分性：设$g^*=0$，则对任意$x\in R^n$，有$\nabla f(x^*)^T(x-x^*)=0$.

由于$f(x)$是可微的凸函数，则有：

$$f(x)\geq f(x^*)+\nabla f(x^*)^T(x-x^*)=f(x^*)$$

即x^*是整体极小点.

证毕.

3.4 证明：由已知可得：$\nabla f(x)=g(x)=Gx+b$，$\nabla^2 f(x)=G$

$\because f(x_k+\alpha_k p_k)=\frac{1}{2}(x_k+\alpha_k p_k)^T G(x_k+\alpha_k p_k)+b^T(x_k+\alpha_k p_k)+c$，

$\cancel{\because f(x_k+\alpha_k p_k)=\frac{1}{2}(x_k+\alpha_k p_k)^T G(x_k+\alpha_k p_k)+b}$

$\because \alpha_k$是$\varphi(\alpha)=f(x_k+\alpha p_k)$的极小点，

$\therefore$有$\frac{d\varphi}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_k}=0$

即$p_k^T G(x_k+\alpha_k p_k)+b^T p_k=0$

$\therefore p_k^T G x_k+\alpha_k p_k^T G p_k+p_k^T b=0$，

$\therefore p_k^T(Gx_k+b)+\alpha_k p_k^T G p_k=0$

$\therefore p_k^T g_k+\alpha_k p_k^T G p_k=0$

$\therefore \alpha_k=-\frac{g_k^T p_k}{p_k^T G p_k}$

证毕.

3.5. 解：$g(x)=\begin{pmatrix}2x_1\\4x_2\end{pmatrix}$，$G(x)=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$

显然，目标函数是正定的二次函数，有唯一极小点$x^*=(0,0)^T$.

由于$g_0=g(x_0)=\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}^T$. 所以：

$$x_1=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}-\frac{(8,16)\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}}{(8,16)\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

则$g_1=g(x_1)=\begin{pmatrix}\frac{32}{9}\\-\frac{16}{9}\end{pmatrix}^T$

$$x_2=\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}-\frac{(\frac{32}{9},-\frac{16}{9})\begin{pmatrix}\frac{32}{9}\\-\frac{16}{9}\end{pmatrix}}{(\frac{32}{9},-\frac{16}{9})\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{32}{9}\\-\frac{16}{9}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\frac{32}{9}\\-\frac{16}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{27}\\\frac{8}{27}\end{pmatrix}$$

则$g_2=g(x_2)=\begin{pmatrix}\frac{16}{27}\\\frac{32}{27}\end{pmatrix}^T$

$$x_3=\begin{pmatrix}\frac{8}{27}\\\frac{8}{27}\end{pmatrix}-\frac{(\frac{16}{27},\frac{32}{27})\begin{pmatrix}\frac{16}{27}\\\frac{32}{27}\end{pmatrix}}{(\frac{16}{27},\frac{32}{27})\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{16}{27}\\\frac{32}{27}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\frac{16}{27}\\\frac{32}{27}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{32}{333}\\\frac{-8}{333}\end{pmatrix}$$

验证：$g_0^T g_1 = (8,16)\begin{pmatrix}\frac{32}{9}\\ -\frac{16}{9}\end{pmatrix}=0$

$g_1^T g_2 = \left(\frac{32}{9},-\frac{16}{9}\right)\begin{pmatrix}\frac{16}{27}\\ \frac{32}{27}\end{pmatrix}=0$

即相邻两次迭代的搜索方向正交.

3.6 解：$g(x)=\begin{pmatrix}8x_1-2x_1x_2\\ 2x_2-x_1^2\end{pmatrix}$

$G(x)=\begin{pmatrix}8-2x_2 & -2x_1\\ -2x_1 & 2\end{pmatrix}$

$k=0$.

$g_0=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ $\quad \|g_0\|=\sqrt{37}\approx 6.0828$ $\quad p_0=\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$

$x_1=x_0+\alpha p_0=\begin{pmatrix}1-6\alpha\\ 1-\alpha\end{pmatrix}$

$\phi(\alpha)=f(x_0+\alpha p_0)=f\begin{pmatrix}1-6\alpha\\ 1-\alpha\end{pmatrix}=6-63\alpha+193\alpha^2-36\alpha^3$

$\phi'(\alpha)=0$

~~可得~~

$x_1=x_0+\alpha p_0=\begin{pmatrix}-0.75\\ -1.25\end{pmatrix}$

$f(x_1)=4.5156$.

$k=1$ 时

可求得

$\|g_1\|=8.4495$.

$x_2=(-0.1550,-0.1650)^T$

$f(x_2)=0.1273$.

3.7. (1) 解: $g(x)=(2x_1-2,\ 8x_2+18,\ 18x_3^2)^T$ $\quad G(x)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&8&0\\0&0&36x_3\end{pmatrix}$

$k=0$，取 $x_0=(1,-\frac{9}{4},\frac{1}{7})$

$x_1=x_0-G_0^{-1}g_0=\begin{pmatrix}1\\-\frac{9}{4}\\\frac{1}{7}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2},&0,&0\\0,&\frac{1}{8},&0\\0,&0,&\frac{7}{36}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{18}{49}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{9}{4}\\\frac{1}{14}\end{pmatrix}$.

此时 $\|\nabla f(x_1)\|=0.0918<0.5$，$G(x_1)$ 正定.

则极小点为 $(1,-\frac{9}{4},\frac{1}{14})^T$.

(2) 解: $g(x)=(2x_1-2x_2+1,\ -2x_1+3x_2-2)^T$ $\quad G(x)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&3\end{pmatrix}$ 正定.

$k=0$. 取 $x_0=(\frac{1}{2},1)$

$x_1=x_0-G_0^{-1}g_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

此时 $\|\nabla f(x_1)\|=0<0.5$

则极小点为 $(\frac{1}{2},1)$.

(3) 解: $g(x)=(4(x_1-1)^3,\ 4x_2)^T$ $\quad G(x)=\begin{pmatrix}12(x_1-1)^2&0\\0&4\end{pmatrix}$

$k=0$

$x_1=x_0-G_0^{-1}g_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{12},&0\\0,&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$

$g_1=(-\frac{256}{27},0)^T$, $\quad G_1(x)=\begin{pmatrix}\frac{64}{3},&0\\0,&4\end{pmatrix}$.

$k=1$.

$x_2=x_1-G_1^{-1}g_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{64},&0\\0,&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{256}{27}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}\\0\end{pmatrix}$

$g_2=(-\frac{2048}{729},0)^T$ $\quad G_2(x)=\begin{pmatrix}\frac{256}{27},&0\\0,&4\end{pmatrix}$

$k=2$

$x_3=x_2-G_2^{-1}g_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{27}{256},&0\\0,&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2048}{729}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{27}\\0\end{pmatrix}$

$g_3=(-\frac{131072}{19683},0)^T$ $\quad G_3(x)=\begin{pmatrix}\frac{12288}{729},&0\\0,&4\end{pmatrix}$

$k=3$

$x_4=x_3-G_3^{-1}g_3=\begin{pmatrix}-\frac{5}{27}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{729}{12288},&0\\0,&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{131072}{19683}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{81}\\0\end{pmatrix}$

(人类无法算下去了!)-

3.8 解：由于 $G(x)=\begin{pmatrix}4+12x_1+12x_1^2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$，当 $x_1<\frac{-3-\sqrt{3}}{6}$ 或 $x_1>\frac{-3+\sqrt{3}}{6}$ 时

$G(x)$ 正定.

则 G^* 正定且 $G(x)$ 是连续的.

则当 $N(x^*)=\{x \mid \|x-x^*\|\leq\frac{3-\sqrt{3}}{6}\}$ 时.

$G(x)$ 在其中正定，且 $G(x)^{-1}$ 有上界.

$N(x^*)$ 即为最大开球

~~当 $|x_1^0-0|<\frac{3-\sqrt{3}}{6}$~~

当 $|x_1^0|<\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，$|x_2^0|<\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 时，牛顿法收敛.

即当 x_0 充分接近 x^* 时，牛顿法收敛.

3.9 解：(1) $g(x)=(2x_1-x_2+2,\ -x_1+2x_2-4)^T$，$G(x)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$k=0$：

因为 $g_0=(4,-2)^T\neq0$，故取 $p_0=(-4,2)^T$，从 x_0 出发，沿 p_0 做一维搜索，即求

$\min f(x_0+\alpha p_0)=\min f\begin{pmatrix}2-4\alpha\\ 2+2\alpha\end{pmatrix}=28\alpha^2-20\alpha$ 的极小点.

得步长 $\alpha_0=\frac{5}{14}$ 于是得到

$x_1=x_0+\alpha_0p_0=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ \frac{19}{7}\end{pmatrix}$，$g_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{6}{7}\end{pmatrix}$

$k=1$：

由FR公式得 $\beta_0=\frac{g_1^Tg_1}{g_0^Tg_0}=\frac{9}{196}$.

故 $p_1=-g_1+\beta_0p_0=\begin{pmatrix}-\frac{30}{49}\\ -\frac{75}{98}\end{pmatrix}$

同上述过程可得：

$x_2=\begin{pmatrix}-0.0269\\ 1.9334\end{pmatrix}$　　$g_2=\begin{pmatrix}0.0128\\ -0.1062\end{pmatrix}$

$k=2$ 时：

$x_3=\begin{pmatrix}-0.0341\\ 1.9682\end{pmatrix}$　　$g_3=\begin{pmatrix}-0.0364\\ -0.0295\end{pmatrix}$

⋮

$k=6$ 时：

$x_5=\begin{pmatrix}0\\ 2.0001\end{pmatrix}$　　$g_5=\begin{pmatrix}-0.00002988\\ -0.0000225\end{pmatrix}$

则 x_5 为最优解，最优值为 $f^*=-4$

(2). $g(x)=(-2+2x_1+8x_1^3-8x_1x_2,\ 4x_2-4x_1^2)^T$

$$G(x)=\begin{pmatrix}2+24x_1^2-8x_2 & -8x_1\\ -8x_1 & 4\end{pmatrix}$$

$k=0$

因为 $g_0=(-2,0)^T\neq 0$，故取 $p_0=(2,0)^T$，从 x_0 出发，沿 p_0 做一维搜索，即求：

$\min f(x_0+\alpha p_0)=\min f\begin{pmatrix}2\alpha\\0\end{pmatrix}=(1-2\alpha)^2+32\alpha^4$

则 $\alpha_0=0.216$.

则 $x_1=\begin{pmatrix}0.4320\\0\end{pmatrix}$，$g_1=\begin{pmatrix}-0.490\\-0.7465\end{pmatrix}$

用FR共轭梯度法求解过程如下：

$x_2=\begin{pmatrix}0.7525\\0.2687\end{pmatrix}$ $g_2=\begin{pmatrix}1.2957\\-1.1899\end{pmatrix}$

$x_3=\begin{pmatrix}0.9201\\0.5863\end{pmatrix}$ $g_3=\begin{pmatrix}1.7555\\-1.0409\end{pmatrix}$

3.10. 老师病了才出这个题.

3.11：证明：

由函数得：$g(x)=(x_1, x_2)^T$，取 $p_0=(-1,0)^T$，从 x_0 出发

沿 p_0 做一维搜索，即求：

$$\min f(x_0+\alpha p_0)=\min f\begin{pmatrix}1-\alpha_0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(1-\alpha_0)^2+\frac{1}{2}$$

当 $\alpha_0=1$ 时，$\min f(x_0+\alpha_0 p_0)=\frac{1}{2}$.

$$x_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$g_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

由 FR 公式得：$\beta_0=\dfrac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0}=\dfrac{1}{2}$

则 $p_1=-g_1+\beta_0 p_0=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

此时，$p_0^T G p_1=(-1,0)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0$

则 p_0 与 p_1 不是关于 G 共轭的.

3.12. 解：$\cancel{g(x)=(2x_1-2x_2+2,\ 4x_2-2x_1)^T,\ g_0=(}$

$g(x)=(2x_1-x_2+2,\ -x_1+2x_2-4)^T$,

$g_0=(4,\ -2)^T$,

$p_0=-H_0 g_0=(-4,\ 2)^T$,

(i) 求迭代点 x_1，令 $\varphi_0(\alpha)=f(x_0+\alpha p_0)=28\alpha^2-20\alpha$

得 $\varphi_0(\alpha)$ 极小点为 $\alpha_0=\frac{5}{14}$，所以，

$x_1=x_0+\alpha_0 p_0=(\frac{4}{7},\ \frac{19}{7})^T$，$g_1=(\frac{3}{7},\ \frac{6}{7})^T$

$s_0=x_1-x_0=(-\frac{3}{7},\ \frac{5}{7})^T$，$y_0=g_1-g_0=(-\frac{25}{7},\ \frac{20}{7})^T$

于是，由 DFP 修正公式有：

$$H_1=H_0-\frac{H_0 y_0 y_0^T H_0}{y_0^T H_0 y_0}+\frac{s_0 s_0^T}{y_0^T s_0}=\begin{pmatrix}0.6760&0.3449\\0.3449&0.6812\end{pmatrix}$$

下一个搜索方向为：

$p_1=-H_1 g_1=(-0.5854,\ -0.7317)^T$

(ii) 同上述过程，可得：

$x_2=(-0.0139,\ 1.9826)^T$，$H_2=\begin{pmatrix}0.6667&0.3333\\0.3333&0.6667\end{pmatrix}$ $p_2=(0.0139,\ 0.0174)^T$

所以 $x^*=x_2=(-0.0139,\ 1.9826)^T$ 此时 $f^*=-4$.

且 $p_1^T G p_2=0$，则 p_1, p_2 共轭

~~3.13 解 $g(x)=(-2(1-x_1)$~~,

3.13 解：$g(x)=(-2+2x_1-8x_1x_2+8x_1^3,\ 4x_2-4x_1^2)$

$g_0=(-2,0)^T$

$p_0=-H_0g_0=(2,0)^T$

(1) 求迭代点 x_1，~~令 $\varphi_0(\alpha)=f(x_0+\alpha p_0)=f\left(\frac{2\alpha}{0}\right)=(1-2\alpha)^2+32\alpha^4$~~

~~得 $\varphi_0(\alpha)$ 极小点为 $\alpha=0.5$~~

用精确搜索法：取 $\alpha=0.55$　$\delta=0.4$　$e=10^{-5}$.

可得 $x_1=x_0+\alpha_0p_0=(-0.6050,\ 0)^T$

$$H_1=\begin{pmatrix}0.3972 & 0.3956\\ 0.3956 & 0.8057\end{pmatrix}$$

$P_1=(0.1894,\ 0.7913)^T$

$x_2=(0.7092,\ 0.4352)^T$

$$H_2=\begin{pmatrix}0.4245 & 0.5068\\ 0.5068 & 0.8655\end{pmatrix}$$

$P_2=(0.2211,\ 0.3345)^T$

$x_3=(0.9303\quad 0.7697)^T$

$$H_3=\begin{pmatrix}0.3759 & 0.6111\\ 0.6111 & 1.2164\end{pmatrix}$$

$P_3=(0.0186\quad 0.1156)^T$

3.14. 解：$H_{k+1}=H_k-\dfrac{H_ky_ky_k^TH_k}{y_k^TH_ky_k}+\dfrac{S_kS_k^T}{y_k^TS_k}+W_kW_k^T$

其中 $W_k=(y_k^TH_ky_k)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{S_k}{y_k^TS_k}-\dfrac{H_ky_k}{y_k^TH_ky_k}\right)$

又 $H_k=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$　$y_k=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$　$S_k=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

则 $H_{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}, & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}, & \frac{7}{3}\end{pmatrix}$

3.15. 解：由定理3.5.2（DFP修正公式的正定继承性）

则H_5也必须正定.

由已知条件

$y_4=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$，$s_4=\begin{pmatrix}19\\3\end{pmatrix}$

则$y_4^T s_4=-1<0$.

根据引理3.5.1.

则H_5不是正定矩阵.

则与正定继承性相悖.

则这些数据不正确.

3.16，略．主要是不会.

提供一个思路：

$$H_{k+1}u=H_ku-\frac{Hyy^THu}{y^THy}+\frac{ss^Tu}{y^Ts}$$

因$H_ku=0$

则$H_{k+1}u=0$

$\Rightarrow |H_{k+1}|=0$

则H_{k+1}奇异.

3.17 解 (i) 第一阶段

$f_0=f(x_0)=13$，$p_1=(1,0)^T$，$p_2=(0,1)^T$. 从x_0出发，沿p_1进行

一维搜索：$\min f(x_0+\alpha p_1)=\alpha^2-4\alpha+13$ 得$\alpha_0=2$.

所以$x_1=x_0+\alpha_0p_1=(2,0)^T$，$f_1=f(x_1)=9$，再从$x_1$出发，沿$p_2$进行

一维搜索：$\min f(x_1+\alpha p_2)=(\alpha-3)^2$ 得$\alpha_1=3$

所以$x_2=x_1+\alpha_1p_2=(2,3)^T$，$f_2=f(x_2)=0$

由于$f_0-f_1=4$，$f_1-f_2=9$. 所以$\Delta=\max\{4,9\}=9$，$m=1$，又

$2x_2-x_0=(4,6)^T$，所以$f^*=f(2x_2-x_0)=13$. 显然$f^*\geq f_0$.

故搜索方向不变，令$f_0=f(x_2)=0$，$x_0=(2,3)^T$，$k=1$

(ii)第二阶段

从$x_0=(2,3)^T$出发，沿$p_1=(1,0)^T$作一维搜索：

$\min f(x_0+\alpha p_1)=\alpha^2$　得$\alpha_0=0$

所以$x_1=x_0+\alpha_0 p_1=(2,3)^T$,

$f_1=f(x_1)=0$

再从x_1出发，沿$p_2=(0,1)^T$作一维搜索：

$\min f(x_1+\alpha p_2)=\alpha^2$　得$\alpha_1=0$

所以$x_2=x_1+\alpha_1 p_2=(2,3)^T$. $f_2=f(x_2)=0$.

此时$\|x_2-x_0\|=0$.

则$x^*=x_2=(2,3)^T$

$f^*=0$.

3.18 解 (i)第一阶段

$x_0=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$, 取$p_0=(1,0,0)^T$, $p_1=(0,1,0)^T$, $p_2=(0,0,1)^T$

从x_0出发，沿p_0进行一维搜索：

$\min f(x_0+\alpha p_0)=3\alpha^2+2$, 得$\alpha_0=0$

则$x_1=x_0+\alpha_0 p_0=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

从x_1出发，沿p_1进行一维搜索：

$\min f(x_1+\alpha p_1)=3\alpha^2+4\alpha+3$, 得$\alpha_1=0$

则$x_2=x_1+\alpha p_1=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

从x_2出发出，沿p_2进行一维搜索：

$\min f(x_2+\alpha p_2)=3\alpha^2+2$. 得$\alpha_2=0$.

则$x_3=x_2+\alpha_2 p_2=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

令$p_3=(0,0,0)^T$, $p_0=(0,1,0)^T$, $p_1=(0,0,1)$. $p_2=(0,0,0)^T$

做一维搜索 $\min f(x_3+\alpha p_2)$; 得α_3为任意,取$\alpha_3=1$

则$x_4=x_3+\alpha_3 p_2=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

此时$\|x_4-x_0\|=0$. 停，此时$x^*=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

~~若进入第二阶段.~~

~~令$x_0=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$. $p_0=(0,1,0)^T$ $p_1=(0,0,1)^T$ $p_2=(0,0,0)^T$~~

~~三次迭代得.~~

~~$x_3=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$~~

则第二阶段方向为$p_0=(0,1,0)^T$. $p_1=(0,0,1)^T$ $p_2=(0,0,0)^T$

则$\exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$不全为0使$\lambda_1 p_0+\lambda_2 p_1+\lambda_3 p_2=0$.

即p_0 p_1 p_2线性相关. 得不到真正的极小点.