$(1+\sigma)x_1+2\sigma x_2=2\sigma$

$2\sigma x_1+(1+\ldots)x_2=2\sigma$ $\quad x_1=\frac{2\sigma}{1+\ldots\sigma}$

五：用外罚函数法求解问题 $\min \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{6}x_2^2$

$s.t: x_1+x_2-1=0$

解：增广目标函数：$\boxed{P(x,\sigma)}=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{6}x_2^2+\sigma(x_1+x_2-1)^2 \quad (\sigma>0)$.

则 $\frac{\partial P}{\partial x_1}=x_1+2\sigma(x_1+x_2-1)=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_2}=\frac{1}{3}x_2+2\sigma(x_1+x_2-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_2 \\ x_2=\frac{6\sigma}{1+8\sigma} \\ x_1=\frac{2\sigma}{1+8\sigma} \end{cases} \quad \sigma\to\infty \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{4} \\ x_2=\frac{3}{4} \end{cases}$

六 线性规划 $\min c^Tx$ $s.t\ Ax\geq b$, $x\geq 0$ 的对偶规划定义为 $\max b^Ty$ $s.t\ A^Ty\leq c$, $y\geq 0$.

$-Ax\geq -b$

根据此定义推导出标准型线性规划 $\min c^Tx$ $s.t\ Ax=b$, $x\geq 0$ 的对偶线性规划：$\max b^Ty$, $A^Ty\leq c$, y为自由变量.

七、设有非线性规划问题 $\min \frac{1}{2}x^TGx$, $s.t\ x\geq b$，其中G为n阶对称正定矩阵，b为n维向量，设μ是问题的最优

解：证明μ与$\mu-b$关于矩阵G共轭（用K-T条件）$\boxed{\mu^TG(\mu-b)=0}$

KT条件

$\nabla f(x^*)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla c_i(x^*)=0$

$\lambda_i^*c_i(x^*)=0,\ i=1,\ldots,m$

$\lambda_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m.$

证明：$\min \frac{1}{2}x^TGx$

$s.t \begin{cases} x_1-b_1\geq 0 \\ x_2-b_2\geq 0 \\ \vdots \\ x_n-b_n\geq 0 \end{cases}$ $\quad c_1(x)=x_1-b_1,\ \ldots,\ c_n(x)=x_n-b_n$.

$\because$ μ是此问题的最优解，则：μ也是此问题K-T点 $\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(\mu)-\sum\lambda\nabla c(x)|_{x=\mu}=0 & ① \\ \lambda^Tc(x)|_{x=\mu}=0 & ② \\ \lambda\geq 0 \end{cases}$

由① $\Rightarrow \frac{1}{2}G\mu=\lambda \Rightarrow \lambda^T=\frac{1}{2}\mu^TG^T \Rightarrow \frac{1}{2}\mu^TG^T(\mu-b)=0$

由② $\Rightarrow \lambda^T(\mu-b)=0$

$\because$ G是对称正定矩阵 $G^T=G$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\mu^TG(\mu-b)=0 \Rightarrow \mu^TG(\mu-b)=0$

$\Rightarrow$ μ与$\mu-b$关于矩阵G共轭.

要注意，由 $\nabla f(x)-\lambda^T\nabla c(x)=0$

$\Rightarrow Gx-\lambda=0|_{x=\mu} \Rightarrow G\mu=\lambda$