第4章 约束最优化方法.

4.1、证明：记 $\alpha=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i$，则 $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i=\begin{cases}0\in C & \alpha_i=0 \quad i=1,\cdots r\\ \alpha\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{\alpha}x_i, & \alpha_i\text{不全为零}\end{cases}$

当 α_i 不全为零时，由 C 是凸集，$\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{\alpha}=1$，知 $\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{\alpha}x_i\in C$，

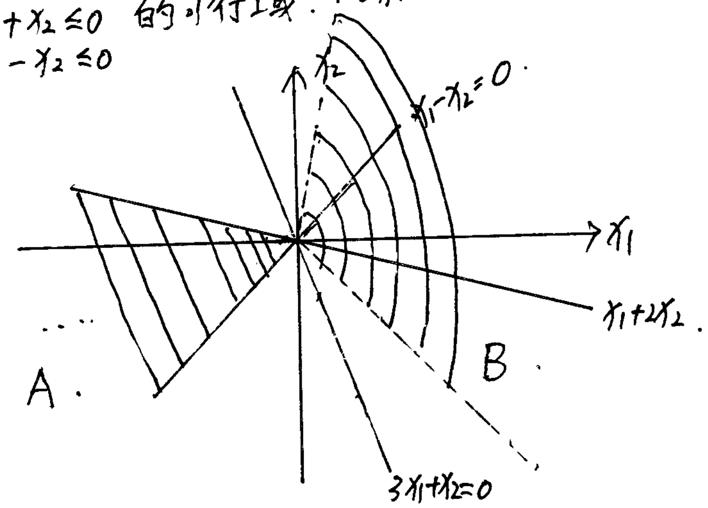
又因为 C 是以原点为顶点的凸锥，且 $\alpha>0$；故

$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i=\alpha\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{\alpha}x_i\in C$.

因此总有 $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i\in C$

4.2：(1) A集合为 $\begin{cases}x_1+2x_2\le 0\\ 3x_1+x_2\le 0\\ x_1-x_2\le 0\end{cases}$ 的可行域．B集合为与A中任意点都成钝角的点的集合．

作图：



图中A、B标出．

(2) 设 $b_0 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1, \cdots x_3 \geq 0 \text{ 且 } x_1 x_2 x_3 \text{不同时为} 0 \end{cases}$$

系数变化范围可表示成下列集合.

$A = B \cup C \cup D$.

其中 $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = \frac{2}{3},\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

$C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 5x_2 + 3x_3 = 4\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$

$D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 5x_1 - 4x_3 = -2.\ \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.

4.3 (1) 解: 设 $b_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$.

则 $\begin{cases} 4 = 4\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{14}{15} \geq 0 \\ \lambda_2 = \frac{4}{15} \geq 0 \end{cases}$

则 $b_1 = \frac{14}{15} a_1 + \frac{4}{15} a_2$.

即 a_1, a_2, b_1 满足Farkas引理的条件

则命题成立.

设 $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. 则.

$$\begin{aligned} &4x_1 + x_2 \geq 0 \qquad (*) \\ &x_1 + 4x_2 \geq 0. \\ &x_1, x_2 \in R \end{aligned}$$

则 P向量 的集合为 $\{(x_1, x_2)^T \mid 4x_1 + x_2 \geq 0,\ x_1 + 4x_2 \geq 0\}$

(2) 设 $b_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$.

则 $\begin{cases} 4 = 4\lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{16}{15}. \\ \lambda_2 = -\frac{4}{15} < 0 \end{cases}$

即不存在非负实数 $\lambda_1\ \lambda_2$ 使 $b_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$

由Farkas引理 可知: 至少存在一个 $\hat{p}$ 满足 $a_1^T \hat{p} \geq 0$. $a_2^T \hat{p} \geq 0$, 但 $b_2^T \hat{p} < 0$.

$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \geq 0 \\ 4x_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{p}$ 的各分量应满足 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 < 0. \end{cases}$ 如 $\hat{p} = (-1, 4)$ 即满足条件

44: (1) 设 $x^*=(a,b)$ 为局部最优解.

显然：$\nabla f(x^*)=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\nabla C_1(x^*)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$\nabla C_2(x^*)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\nabla C_3(x^*)=\begin{pmatrix}-2a+6\\1\end{pmatrix}$

令

KT条件: $\begin{cases}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}-2a+6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & ①\\ \lambda_1C_1(x^*)=\lambda_1(4-a-b)=0 & ②\\ \lambda_2C_2(x^*)=\lambda_2\cdot(b+7)=0 & ③\\ \lambda_3C_3(x^*)=\lambda_3(-(a-3)^2+b+1)=0 & ④\\ 4-a-b\geq0 \text{ 且 } b+7\geq0 \text{ 且 } -(a-3)^2+b+1\geq0 & ⑤\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq0 & ⑥\end{cases}$

由①~⑥解得.

$a=1 \quad b=3$

$\lambda_1=\frac{16}{3} \quad \lambda_2=0 \quad \lambda_3=\frac{7}{3}$

即 $x^*=(1,3)^T$ 满足KT条件：

$\nabla f(x^*)-\frac{16}{3}\nabla C_1(x^*)-0\times\nabla C_2(x^*)-\frac{7}{3}\nabla C_3(x^*)$.

$\lambda_i^* C_i(x^*)=0 \quad , i=1,\cdots m$

$\lambda_i^*\geq0 \quad , i=1,\cdots m$.

则 $x^*=(1,3)^T$ 是KT点

(2) Lagrange 函数为 $L(x,\lambda)=(x_1+x_2)^2+2x_1+x_2^2-\lambda_1(4-x_1-3x_2)-\lambda_2(3-2x_1-x_2)-\lambda_3 x_1-\lambda_4 x_2$

K-T 条件为：

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2)+2+\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=0 & ① \\ 2(x_1+x_2)+2x_2+3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4=0 & ② \\ \lambda_1(4-x_1-3x_2)=0 & ③ \\ \lambda_2(3-2x_1-x_2)=0 & ④ \\ \lambda_3 x_1\geq 0 & ⑤ \\ \lambda_4 x_2\geq 0 & ⑥ \\ x_1+3x_2\leq 4 & ⑦ \\ 2x_1+x_2\leq 3 & ⑧ \\ x_1,x_2\geq 0 & ⑨ \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\geq 0 & ⑩ \end{cases}$$

(a) 若 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$，则 $\begin{cases}4-x_1-3x_2=0\\3-2x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=1\end{cases}$，从而有 $\lambda_3=\lambda_4=0$

由①② $\begin{cases}6+\lambda_1+2\lambda_2=0\\6+3\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}$，这与 $\lambda_1\lambda_2\geq 0$ 矛盾，故 $\lambda_1\lambda_2=0$，矛盾，舍去

(b) 若 $\lambda_1=0$ 而 $\lambda_2\neq 0$，则 $3-2x_1-x_2=0$ 可知 x_1 与 x_2 不同时为0，从而 $\lambda_3\lambda_4=0$

i) $\lambda_3=\lambda_4=0$

此时有 $\begin{cases}2(x_1+x_2)+2+2\lambda_2=0\\2(x_1+x_2)+2x_2+\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{8}{5}\\x_2=-\frac{1}{5}<0\\x_3=-\frac{12}{5}<0\end{cases}$ 矛盾

ii) $\lambda_3=0$ $\lambda_4\neq 0$，则 $x_2=0$. $x_1=\frac{3}{2}$，由①可知 $\lambda_2=-\frac{5}{2}<0$，矛盾

iii) $\lambda_3\neq 0$ $\lambda_4=0$，则 $x_1=0$ $x_2=3$ 由②可知 $\lambda_2=-12<0$，矛盾

(c) 若 $\lambda_2=0$；$\lambda_1\neq 0$，则 $4-x_1-3x_2=0$. 则 x_1 与 x_2 不同时为零，从而 $\lambda_3\lambda_4=0$

i) $\lambda_3=\lambda_4=0$，此时有 $\begin{cases}2(x_1+x_2)+2+\lambda_1=0\\2(x_1+x_2)+2x_2+3\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow x_1=-\frac{13}{5}$ $x_2=\frac{11}{5}$ $\lambda_1=-\frac{6}{5}<0$，矛盾

ii) $\lambda_3=0$ 而 $\lambda_4\neq 0$，则 $x_2=0$ $x_1=4$. 由①可知 $\lambda_1=-10<0$ 矛盾

iii) $\lambda_3\neq 0$ 而 $\lambda_4=0$，则 $x_1=0$ $x_2=\frac{4}{3}$ 由②可知 $\lambda_1=-\frac{16}{9}<0$ 矛盾

(d) 若 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由①②有 $\begin{cases}2(x_1+x_2)+2-\lambda_3=0 & ⑦\\2(x_1+x_2)+2x_2-\lambda_4=0 & ⑧\end{cases}$

i) $\lambda_3=\lambda_4=0$，则 $x_1=-2$ $x_2=1$ 矛盾　ii) $\lambda_3=0$ $\lambda_4\neq 0$ 则 $x_2=0$ $x_1=-1$ 矛盾

iii) $\lambda_3\neq 0$ $\lambda_4=0$ 则 $x_1=0$ $x_2=0$ $\lambda_3=2$ 满足KT条件

iv) $\lambda_3\lambda_4\neq 0$，则 $x_1=x_2=0$，但由⑧有 $\lambda_4=0$，矛盾

综上所述：KT点为 $x^*=(0,0)^T$，此时 $\lambda^*=(0,0,2,0)^T$

(2) 另解：将原问题化为：

$$\min\ f(x)=(x_1+x_2)^2+2x_1+x_2^2$$

$$\text{s.t.}\ c_1(x)=-x_1-3x_2+4\geq 0$$

$$c_2(x)=-2x_1-x_2+3\geq 0$$

$$c_3(x)=x_1\geq 0$$

$$c_4(x)=x_2\geq 0$$

此问题显然有唯一最优解：$x^*=(0,0)^T$

下面验证 $(0,0)^T$ 为 KT 点：

对 $x^*=(0,0)^T$ 有 $I^*=\{3,4\}$

$\nabla f(x^*)=(2,0)^T$

$\nabla c_3(x^*)=(1,0)^T$

$\nabla c_4(x^*)=(0,1)^T$

KT 条件：令 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\lambda_4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda_3\\-\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_3=2\quad \lambda_4=0$

即 $\nabla f(x^*)=2\nabla c_3(x^*)+0\times\nabla c_4(x^*)$

$\lambda_i c_i(x^*)=0 \quad i\in I^*$

$\lambda_i\geq 0$

故 $x^*=(0,0)^T$ 为 KT 点。

(3) $L(x,\lambda)=(x_1-x_2+x_3)^2-\lambda_1(x_1+2x_2-x_3-5)-\lambda_2(x_1-x_2-x_3+1)$

KT 条件为：

$$\begin{cases}2(x_1-x_2+x_3)-\lambda_1-\lambda_2=0 & ①\\ -2(x_1-x_2+x_3)-2\lambda_1+\lambda_2=0 & ②\\ 2(x_1-x_2+x_3)+\lambda_1+\lambda_2=0 & ③\end{cases}$$

由①+③，②+③可得：

$\lambda_1=0\quad -\lambda_1+2\lambda_2=0$

从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$

由 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2-x_3=5\\ x_1-x_2-x_3=-1\end{cases}$

得 KT 点 $x^*=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(3) 另解 对于 $f(x)$ 的 Hess 矩阵，

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

显然是正定的，则 $f(x)$ 是凸函数，此题为凸规划问题。

又显然 $x^*=(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2})^T$ 为其最优解

则由定理 4.1.10，可得 $x^*=(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2})$ 为 KT 点。

4.5：设局部极小点为 (a, b)，

则 $\nabla f(x^*)=(2a+2, 2b-2)^T$

$\nabla c_1(x^*)=(4-2a^2-b^2+2a, -2ab+2b)^T$

$\nabla c_2(x^*)=(-4a, -2b)^T$，$\nabla c_3(x^*)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

令 KT 条件：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}2a+2\\2b-2\end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}4-2a^2-b^2+2a\\-2ab+2b\end{pmatrix}-\lambda_2\begin{pmatrix}-4a\\-2b\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & ① \\ \lambda_1 c_1(x^*)=\lambda_1(4a-a^3-ab^2-4+a^2+b^2)=0 & ② \\ \lambda_2 c_2(x^*)=\lambda_2(100-2a^2-b^2)=0 & ③ \\ \lambda_1\geq 0 \quad \lambda_2\geq 0 & ④ \\ b-\frac{1}{2}=0, (a-1)(4-a^2-b^2)\geq 0, (100-2a^2-b^2)\geq 0 & ⑤ \end{cases}$$

由①-③可得 若 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$，$a=-1$，$b=\frac{1}{2}$，不满足⑤，舍去。

若 $\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2\neq 0$，由②③得：a 无解：舍去。

若 $\lambda_1=0$，$\lambda_2\neq 0$，由③得：$a=\pm\frac{\sqrt{399}}{8}$，由①得 $\lambda_2=\frac{-a-1}{2a}<0$，$\lambda_3=\frac{-3a-1}{2a}$ 不满足④舍去。

若 $\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2=0$，由②得：$a=\frac{-\sqrt{15}}{2}$，代入①得：$\lambda_1=\frac{4\sqrt{15}-8}{4\sqrt{15}+15}\geq 0$，满足 KT 条件。

则原问题 KT 点为 $(\frac{-\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$

此问题为凸规划问题

则 $(\frac{-\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$ 为局部极小点。

4.6. 证明：令约束条件分别为 $c_i(x)$，则

$$\min f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

s.t. $c_i(x)=x_j\geq 0$ $\quad i\in I=\{\cdot n+1\}$

$c_i(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j-1=0 \quad i\in E=\{1,\cdots n\}$

$\because x^*$为最优解，有效集 $I^*=\{i|c_i(x^*)=0,\ i\in I\}$.

$f(x)$ 与 $c_i(x)$ 在点 x^* 可微，

若 $x^*=\ \ 0$，

则 $x_j^*=0$. $j=1,\cdots n$.

此时显然存在实数 u^* 使 $f_j'(x_j^*)\geq u^*$

若 $x^*\neq 0$

则对所有 $i\in E\cup I^*$，$\nabla c_i(x^*)$ 线性无关，

则存在向量 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\cdots,\lambda_{n+1}^*)^T$ 使得

$$\nabla f(x^*)-\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^*\nabla c_i(x^*)=0$$

即 $f_j'(x_j^*)=\sum_{j\in I^*}\lambda_j^*+\lambda_{n+1}^*$，$j=1,\cdots n+1$.

且 $\lambda_i^* c_i(x^*)=0 \quad i\in I$

$\lambda_i^*\geq 0$

则当 $x_j^*>0$，则 $j\notin I^*$，则 $\lambda_j^*=0$.

$\Rightarrow f_j'(x_j^*)=\lambda_{n+1}^*$

当 $x_j^*=0$，则 $j\in I^*$，则 $\lambda_j^*\geq 0$.

$\Rightarrow f_j'(x_j^*)=\sum_{j\in I^*}\lambda_j^*+\lambda_{n+1}^*\geq\lambda_{n+1}^*$

即存在实数 $u^*=\lambda_{n+1}^*$，满足题意。

证毕

47.(1)解：用外罚函数求解：

$$P(x,\delta)=\frac{3}{2}x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2-x_1x_2-x_2x_3+x_1+x_2+x_3+\delta|x_1-2x_2+x_3-4|^2$$

$$=(\frac{3}{2}+\delta)x_1^2+(1+4\delta)x_2^2-(1+4\delta)x_1x_2+(\frac{1}{2}+\delta)x_3^2+(1-8\delta)x_3+(1+16\delta)x_2+2x_1x_3+16$$
$$+(1-8\delta)x_1-(1+4\delta)x_2x_3$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=(3+2\delta)x_1-(1+4\delta)x_2+(1-8\delta)+2x_3$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=(2+8\delta)x_2-(1+4\delta)x_1-(1+4\delta)x_3+1+16\delta$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3}=(1+2\delta)x_3+(1-8\delta)-(1+4\delta)x_2+2x_1$$

令 $\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=\frac{\partial P}{\partial x_3}=0$

得 $x_1(\delta)=\frac{3(2\delta-1)}{8\delta^2-12\delta+2}$，$x_2(\delta)=\frac{-64\delta^3+128\delta^2-16\delta-1}{(8\delta^2-12\delta+2)(1+4\delta)}$

$x_3(\delta)=\frac{3+6\delta}{8\delta^2-12\delta+2}$

它是 $\min P(x,\delta)$ 的最优解

当 $\delta\to+\infty$ 时：

$x_1(\delta)\to 0$，$x_2(\delta)\to -2$　$x_3(\delta)\to 0$

则 $x(\delta)\to x^*=(0,-2,0)^T$

则原问题最优解为 $(0,-2,0)^T$，最优值 $f^*=2$

(2). 解：用内罚函数求解

构造如下增广目标函数：

$$B(x,r)=x_1^2+4x_2^2+r\left(\ln(-x_1+x_2+1)+\ln(x_1+x_2-1)+\ln(1-x_2)\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1}=2x_1-\frac{r}{-x_1+x_2+1}+\frac{r}{x_1+x_2-1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2}=8x_2+\frac{r}{-x_1+x_2+1}+\frac{r}{x_1+x_2-1}-\frac{r}{1-x_2}$$

令 $\frac{\partial B}{\partial x_1}=\frac{\partial B}{\partial x_2}=0$，且当 $r\to 0$ 时 可得

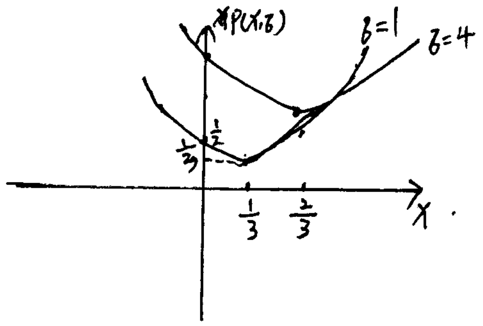
$x_1(r)\to\frac{4}{5}$　$x_2(r)\to\frac{1}{5}$

则原问题最优解为 $x^*=(\frac{4}{5},\frac{1}{5})^T$

最优值为 $f^*=\frac{4}{5}$

4.8.(1) $\sigma=1$　　　　　　$\sigma=4$时

$P(x;\sigma)=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$　　　$P(x,\sigma)=3x^2-4x+2$.



(2) 证明：因为 $\frac{\partial P}{\partial x}=(2+\sigma)x-\sigma$

令 $\frac{\partial P}{\partial x}=0$

$\Rightarrow x=\frac{\sigma}{2+\sigma}$. 则 $x=\frac{\sigma}{2+\sigma}$ 是局部最优解

对于无约束问题.

$\min P(x,\sigma)$.

由 $P(x,\sigma)=x^2+\frac{\sigma}{2}(x-1)^2$, 对 $x\neq 1$; $\sigma\to-\infty$

有 $P(x,\sigma)\to-\infty$

因此 没有整体最优解

(3). 解: $\min\ P(x,\sigma)=\frac{2+\sigma}{2}x^2-\sigma x+\frac{\sigma}{2}$

s.t. $x+2\geq 0$

$-x+2\geq 0$

用内罚函数求解.

$B(x,\sigma,r)=\frac{2+\sigma}{2}x^2-\sigma x+\frac{\sigma}{2}+r\left(\ln(x+2)+\ln(-x+2)\right)$

$\frac{\partial B}{\partial x}=(2+\sigma)x-\sigma+\frac{r}{x+2}+\frac{r}{-x+2}$

令 $\frac{\partial B}{\partial x}=0$　　令 $r\to 0$.

$\bar{x}(\sigma)=\frac{\sigma}{2+\sigma}$.

则 $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\bar{x}(\sigma)=1=x^*$.

或 (由(2), $\bar{x}(\sigma)=\frac{\sigma}{2+\sigma}$, 有 $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\bar{x}(\sigma)=1=x^*$)

4.9 (1) 解：增广目标函数为：

$$M(x_1,x_2,\lambda,\sigma)=x_1^2+2x_2^2+\frac{1}{2\sigma}\{[\max(0,\lambda-\sigma(x_1+x_2-1))]^2-\lambda^2\}$$

$$=\begin{cases} x_1^2+2x_2^2-\dfrac{\lambda^2}{2\sigma}, & x_1+x_2-1>\dfrac{\lambda}{\sigma}, \\ x_1^2+2x_2^2+\dfrac{1}{2\sigma}\{[\lambda-\sigma(x_1+x_2-1)]^2-\lambda^2\}, & x_1+x_2-1\le\dfrac{\lambda}{\sigma}. \end{cases}$$

当 $x_1+x_2-1>\frac{\lambda}{\sigma}$ 时，令

$$\frac{\partial M}{\partial x_1}=2x_1=0,\quad \frac{\partial M}{\partial x_2}=4x_2=0$$

得 $\bar{x}=(0,0)^T$，当 σ 充分大时，此点不满足 $x_1+x_2-1>\frac{\lambda}{\sigma}$，即 $\bar{x}$ 不是 M 的极小点.

当 $x_1+x_2-1\le\frac{\lambda}{\sigma}$ 时，令

$$\frac{\partial M}{\partial x_1}=2x_1-[\lambda-\sigma(x_1+x_2-1)]=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_2}=4x_2-[\lambda-\sigma(x_1+x_2-1)]=0$$

得 $x_1=\frac{2\lambda+2\sigma}{4+3\sigma}$　$x_2=\frac{\lambda+\sigma}{4+3\sigma}$，满足 $x_1+x_2-1\le\frac{\lambda}{\sigma}$.

将 λ 换成为 λ_k 代入乘子的修正公式修正 λ_k，有

$$\lambda_{k+1}=\max(0,\lambda_k-\sigma(x_1+x_2-1))=\max\left(0,\frac{4\lambda_k+4\sigma}{4+3\sigma}\right)$$

若给定 $\lambda_1>0$ 且 $\sigma>0$,

$$\lambda_{k+1}=\frac{4}{4+3\sigma}\lambda_k+\frac{4\sigma}{4+3\sigma}>0$$

显然，当 $\sigma>0$ 时 $\{\lambda_k\}$ 收敛，且 σ 越大收敛越快.

如取 $\sigma=10$，则 $\lambda_{k+1}=\frac{2}{17}\lambda_k+\frac{20}{17}$

设 $\lambda_k\to\lambda^*$，对上式取极限得：

$$\lambda^*=\frac{2}{17}\lambda^*+\frac{20}{17}\quad 即\ \lambda^*=\frac{4}{3}.$$

在 $x_1=\frac{2\lambda+2\sigma}{4+3\sigma}$　$x_2=\frac{\lambda+\sigma}{4+3\sigma}$ 中再令 $\sigma=10$, $\lambda=\lambda^*=\frac{4}{3}$ 得原问题最优解

$$x^*=(x_1^*,x_2^*)^T=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T$$

最优值为 $\frac{2}{3}$.

(2) 解：增广Lagrange函数为：

$$M(x_1,x_2,\lambda,\sigma)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2-\lambda(x_1+2x_2-4)+\frac{\sigma}{2}(x_1+2x_2-4)^2.$$

令 $\frac{\partial M}{\partial x_1}=2x_1+x_2-\lambda+\sigma(x_1+2x_2-4)=0$

$\frac{\partial M}{\partial x_2}=\quad x_1+2x_2-2\lambda+2\sigma(x_1+2x_2-4)$

得：$x_1=0 \qquad x_2=\frac{\lambda+4\sigma}{1+2\sigma}$

将λ换成λ_k，再把x_1,x_2的值代入乘子迭代公式

$\lambda_{k+1}=\lambda_k-\sigma(x_1+2x_2-4)$.

即 $\lambda_{k+1}=\frac{1}{1+2\sigma}\lambda_k+\frac{4\sigma}{1+2\sigma}$.

显然，当$\sigma>0$时$\{\lambda_k\}$收敛，且σ越大收敛越快.

如取$\sigma=10$.

则 $\lambda_{k+1}=\frac{1}{21}\lambda_k+\frac{40}{21}$.

对$\lambda_k\to\lambda^*$，对上式取极限得

$\lambda^*=\frac{1}{21}\lambda^*+\frac{40}{21}$

即 $\lambda^*=2$

在$x_1=0 \qquad x_2=\frac{\lambda+4\sigma}{1+2\sigma}$ 中取$\sigma=10$，$\lambda=2$得原问题最优解：

$x^*=(x_1^*,x_2^*)^T=(0,2)^T$.

最优值为：$f^*=4$

4.10：证明：增广Lagrange函数为：$M(x,\lambda,\sigma)=\frac{1}{2}x^TQx+\alpha b^Tx-\lambda(b^Tx)+\frac{\sigma}{2}(b^Tx)^T(b^Tx)$

最优性条件为：$\nabla_x M(x^*,\lambda^*,\sigma)=\nabla_x$

4.11. 解：增广目标函数为：

$$M(x_1,x_2,\lambda,\sigma)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2+\frac{1}{2\sigma}\{[\max(0,\lambda-\sigma(-x_1^2+x_2))]^2-\lambda^2\}$$

$$=\begin{cases}(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2-\frac{\lambda^2}{2\sigma}, & -x_1^2+x_2>\frac{\lambda}{\sigma}\\ (x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2+\frac{1}{2\sigma}\{[\lambda-\sigma(-x_1^2+x_2)]^2-\lambda^2\} & -x_1^2+x_2\le\frac{\lambda}{\sigma}\end{cases}$$

当 $-x_1^2+x_2>\frac{\lambda}{\sigma}$ 时，令

$$\frac{\partial M}{\partial x_1}=4(x_1-2)^3+2(x_1-2x_2)=0;\quad \frac{\partial M}{\partial x_2}=-4(x_1-2x_2)=0$$

得 $x=(2,1)^T$，当 σ 充分大时，此点不满足 $-x_1^2+x_2>\frac{\lambda}{\sigma}$，即 x 不是极小点。

当 $-x_1^2+x_2\le\frac{\lambda}{\sigma}$ 时，令

$$\frac{\partial M}{\partial x_1}=4(x_1-2)^3+2(x_1-2x_2)+2x_1\cdot(\lambda-\sigma(-x_1^2+x_2))$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_2}=-4(x_1-2x_2)-[\lambda-\sigma(-x_1^2+x_2)]=0$$

后面过程用matlab计算

可得结果为 $x^*=(2,4)$.

$f^*=0$.

4.12. 增广目标函数，取 $x_0=(0,2)$.

$$P(x,r)=e^{x_1}-x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{r}\left[\min(0,-2x_1-x_2+2)^2+(x_1^2+x_2^2-4)^2+(-2x_1-x_2+2)^2\right]$$

第一次迭代：$P(x,r)=e^{x_1}-x_1x_2+x_2^2+\frac{1}{r}\left[(x_1^2+x_2^2-4)^2+(-2x_1-x_2+2)^2\right]$

令 $\frac{\partial P}{\partial x_1}=e^{x_1}-x_2+\frac{1}{r}\left(8x_1+4x_2+4x_1(x_1^2+x_2^2-4)-8\right]=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2-x_1+\frac{1}{r}\left[4x_1+2x_2+4x_2(x_1^2+x_2^2-4)-4\right]=0$

后面过程用matlab完成.

可得 $x^*=(0,2)$

$f^*=5$

4.13. (1) 这题不是线性约束问题，不做讨论.

(2) 原题化为：$\min f(x)$ s.t. $\begin{cases}-2x_1-5x_2\geq-25\\ x_1-2x_2\geq-8\\ x_1\geq0\\ x_2\geq0\end{cases}$

$\nabla f(x)=(18x_2-16x_1-e^{-x_1-x_2}-2,\ 18x_1-20x_2-e^{-x_1-x_2})^T$，取 $x_1=(0,0)$

第一次迭代：$\nabla f(x_1)=(-3,-1)^T$. $I_1=\{3,4\}$为有效集，$A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$P_2=I-A_2(A_2^TA_2)^{-1}A_2^T=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

则 $P_2\nabla f(x_1)=(0,0)^T$. 令 $\lambda=(A_2^TA_2)^{-1}A_2^T\nabla f(x_1)=(-3,-1)^T$. 取 $\lambda_1=-3<0$，从A_2中去掉λ_1对应的第一列后 $A_1=A_{2-1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 令 $P_1=P_{2-1}=I-A_1(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

$p_1=-P_1\nabla f(x_1)=-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

进行精确搜索 $\min f(x_1+\alpha p_1)=e^{-3\alpha}+(3\alpha-1)^2-72\alpha^2$，$0\leq\alpha\leq\frac{25}{6}$

$\Rightarrow\alpha_1=\frac{25}{6}$，$x_2=x_1+\alpha p_1=(\frac{25}{2},0)^T$

第二次迭代：$\nabla f(x_2)\approx(-202,-225)^T$, $I_2=\{1,2\}$. $A_2=\begin{pmatrix}-2&-5\\1&-2\end{pmatrix}$ $P_2\approx\begin{pmatrix}0&0\\0.11\times10^{-15}&0\end{pmatrix}$

此时 $p_2=-P_2\nabla f(x_2)=\begin{pmatrix}0\\-0.224\times10^{-13}\end{pmatrix}$ 则 $\|P_2\|\to0$. 令 $\lambda=(A_2^TA_2)^{-1}A_2^T\nabla f(x_2)=\begin{pmatrix}-80.1\\72.4\end{pmatrix}$

取 $\lambda_1=-80.1<0$. 从 A_2 中去掉第一列 得 $A_1=A_{2-1}=\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$. $P_1=P_{2-1}=\begin{pmatrix}0.1379&-0.3448\\-0.3448&0.8621\end{pmatrix}$

$p_2=-P_1\nabla f(x_2)=(-49.724,\ 124.310)^T$. 进行精确搜索 $\min f(x_2+\alpha p_2)$, $0\leq\alpha\leq0.0239$

$\Rightarrow\alpha_2=0.0239$. $x_3=x_2+\alpha_2p_2=(11.311,\ 2.971)^T$

第三次迭代：$\nabla f(x_3)=(-129.5,144.2)^T$, $I_3=\{4\}$. $A_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$P_1\nabla f(x_3)=\begin{pmatrix}-129.5\\0\end{pmatrix}$. 令 $\lambda=(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T\cdot\nabla f(x_3)=(144.2)$. 则 $\lambda=144.2>0$.

则 $x_3=(11.311,\ 2.971)^T$为KT点，又$f(x)$是凸函数. 则 x_3是最优解.

4.14. (1) 解：引入松弛变量，化为标准式：

$$\min f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 14x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

此时：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，而 $\nabla f(x) = (2x_1 + x_2 - 6, \ x_1 + 4x_2 - 14, 0, 0)^T$.

取初始可行点 $x_1 = (0, 0, 2, 3)^T$.

第一次迭代，$k=1$.

$x^B = (x_3, x_4)^T$. $x^N = (x_1, x_2)^T$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\nabla_N f(x_1) = (-6, -14)^T$, $\nabla_B f(x_1) = (0, 0)^T$,

$r(x_1^N) = (-6, -14)^T - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-6, -14)^T$.

于是 $p^N = (6, 14)^T$, $p^B = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -22 \end{pmatrix}$,

即 $p_1 = (6, 14, -20, -22)^T$, $p_1 \neq 0$.

故 $\alpha_{max} = \min\{\frac{2}{20}, \frac{3}{22}\} = \frac{1}{10}$.

求解：$\min f(x_1 + \alpha p_1) = 512\alpha^2 - 232\alpha$. $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{10}$.

得：$\alpha_1 = \frac{1}{10}$，故 $x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1 = (\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, 0, \frac{4}{5})^T$.

第二次迭代 $k=2$.

$x^B = (x_2, x_4)^T$. $x^N = (x_1, x_3)^T$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\nabla f(x_2) = (-\frac{17}{5}, -\frac{39}{5}, 0, 0)^T$,

$r(x_2^N) = (-\frac{17}{5}, 0)^T - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{39}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{73}{10} \\ \frac{117}{10} \end{pmatrix}$

$p^N = (\frac{73}{10}, 0)^T$, $p^B = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{73}{10} \\ 0 \end{pmatrix} = (\frac{73}{20}, \frac{-219}{20})^T$

即 $p_2 = (\frac{3}{10}, \frac{73}{20}, 0, \frac{-219}{20})^T$. $p_2 \neq 0$.

$\alpha_{max} = \frac{4}{5} / \frac{219}{20} = \frac{16}{219}$

求解 $\min f(x_2 + \alpha p_2)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{16}{219}$

得 $\alpha_2 = \frac{16}{219}$ $\quad x_3 = x_2 + \alpha_2 p_2 = (\frac{227}{365}, \frac{5}{3}, 0, 0)^T$

第三次迭代，$k=3$

$x^B=(x_1\ x_2)^T \quad x^N=(x_3\ x_4)^T$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. $B^{-1}N=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$\nabla f(x_3)=(-3.089\ \ -6.711,0,0)^T$

$r(x_3^N)=(0,0)^T-\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3.089\\-6.711\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9.8\\10.333\end{pmatrix}$

于是 $p^N=(0,0)^T \quad p^B=-\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=(0,0)^T$

即 $p_3=(0,0,0,0)^T=0$

则 $x_3=(\frac{227}{365},\frac{5}{3},0,0)^T$ 是KT点，

即原问题最优解为 $(\frac{227}{365},\frac{5}{3},0,0)^T$

(2) 引入松弛变量，化为标准型：

$\min\ [(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2+(x_4-4)^2]$

s.t. $3x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=10$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_6=5$

$x_i\geq 0 \quad i=1,\cdots 6$.

其中 $A=\begin{pmatrix}3&3&2&1&1&0\\1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}$. $\nabla f(x)=[2x_1-2,2x_2-4\ 2x_3-6,\ 2x_4-8,\ 0,\ 0]$

选取 $x_1=(0,0,0,0,10,5)$ —— 当我看到 $x_1=(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2)$ 时我内心是崩溃的！！！

第一次迭代. $k=1$. $\quad x^B=(x_5,x_6) \quad x^N=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \quad B^{-1}N=\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

$\nabla f(x_1)=(-2,-4,-6,-8,0,0)^T$

$r(x_1^N)=(-2,-4,-6,-8)^T-\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=(-2,-4,-6,-8)^T$

$p^N=(2,4,6,8)^T. \quad p^B=-\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-38\\-20\end{pmatrix}$

即 $p_1=(2,4,6,8,-38,-20)^T$. $p_1\neq 0$

故 $\alpha_{max}=\min\{\frac{10}{38},\frac{5}{20}\}=\frac{1}{4}$，则 $0\leq\alpha\leq\frac{1}{4}$

进行一维搜索：$\min f(x_1+\alpha p_1)=(2\alpha-1)^2+(4\alpha-2)^2+(6\alpha-3)^2+(8\alpha-4)^2$

$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$. 则 $x_2=x_1+\alpha p_1=(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ \frac{1}{2},\ 0)^T$

第二次迭代. $k=2$

$x^B=(x_4,x_5)^T \quad x^N=(x_1,x_2,x_3,x_6)^T$

$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix}3&3&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix} \quad B^{-1}N=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&1&-1\end{pmatrix}$

$\nabla f(x_2)=(-1,-2,-3,-4,0,0)^T$

即 $r(x_2^N)=(-1,-2,-3,0)^T-\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&1&-1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\4\end{pmatrix}$

$p^N=(-\frac{3}{2},-2,-\frac{3}{2},0)^T \quad p^B=-\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&1&-1\end{pmatrix}(-\frac{3}{2},-2,-\frac{3}{2},0)^T=\begin{pmatrix}5\\\frac{17}{2}\end{pmatrix}$

即 $p_2=(-\frac{3}{2},-2,-\frac{3}{2},5,\frac{17}{2},0)^T \quad p_2\neq 0$.

则 $\alpha_{max}=\min\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\}=\frac{1}{3}$ 则 $0\le\alpha\le\frac{1}{3}$

进行一维搜索: $\min f(x_2+\alpha p_2)=(2a+1)^2+(5a-2)^2+(\frac{3a}{2}+\frac{1}{2})^2+(\frac{3a}{2}+\frac{3}{2})^2$

$\Rightarrow \alpha=\frac{10}{67}$. 则 $x_3=x_2+\alpha p_2=(\frac{37}{134},\frac{47}{67},\frac{171}{134},\frac{184}{67},\frac{237}{134},0)^T$

第三次迭代. $k=3$

$x^B=(x_4,x_5)^T \quad x^N=(x_1,x_2,x_3,x_6)$

$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \quad B^{-1}N=\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

$\nabla f(x_3)=(-1,-\frac{174}{67},\frac{-462}{134},\frac{-168}{67},0,0)^T$

$r(x_3^N)=(-1,-\frac{174}{67},\frac{-462}{134},0)^T-\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\frac{-168}{67}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.522\\4.925\\1.567\\2.507\end{pmatrix}$

$p^N=(-1.8,-3.45,-2,0)^T, \quad p^B=-\begin{pmatrix}3&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1.8\\-3.45\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19.75\\7.25\end{pmatrix}$

$p_3=(-1.8,-3.45,-2,19.75,7.25,0)^T$

后面过程略.

k	x_1	x_2	x_3	x_4		$f(x)$
1	0	0	0	0		30
2	0	0	0		3.99999603	14
3	0	0	1.00000265		3.99999735	8.99998942
4	0	0	2.00000131		2.99999869	7.000000
5	0	-6.66666754	1.66666623		2.66666623	6.33333333

4.15. (1) 略

(2) 化为：$\min f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 12x_1 - 4x_2$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 4 \\
& 1 \le x_1 \le 3 \\
& 1 \le x_2 \le 3 \\
& x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

取 $x_1 = (2, 4)^T$

k	x_1	x_2	$f(x_1 x_2)$
1	2	4	44
2	1.125	1.265625	14.15287
3	1.052582	1.107928	12.861072
4	1.019385	1.039145	12.313583
5	1.001452	1.002906	12.023248
6	1.001452	1.002906	12.023248

迭代12次得：

12	1.000000	1.000001	12.000007

则最优解为 $x^* = (1, 1, 12)^T$