第2章，线性规划.

2.1. 证：设x,y为区域中任意两点，$\alpha\in[0,1]$，则有

$$\|\alpha(x-x_0)+(1-\alpha)(y-x_0)\|\le\alpha\|x-x_0\|+(1-\alpha)\|y-y_0\|$$

$$\le\alpha r+(1-\alpha)r=r$$

即点$\alpha x+(1-\alpha)y$属于该区域，所以该区域是凸集.

2.2. 证明：

先证三角形区域内任意一点可表示为三顶点的凸组合，设三顶点为X_1,X_2,X_3.

不妨取一极点X_1，作一条与任意点X的连线XX_1，并延长交于X_2,X_3连线上一点X'. 因X'是X_2,X_3上一点，故可用线性组合表示为：

~~$X'=u_1X_2+u_2X_3$，$u_1+u_2=1$，$0\le u_1,u_2\le1$~~

$$X'=\alpha X_2+(1-\alpha)X_3\qquad0\le\alpha\le1$$

又X是X'与X_1连线上一点，故：

$$X=\lambda X'+(1-\lambda)X_1\qquad0\le\lambda\le1$$

将X'代入上式中得到：

$$X=\lambda[\alpha X_2+(1-\alpha)X_3]+(1-\lambda)X_1$$

$$=\lambda\alpha X_2+\lambda(1-\alpha)X_3+(1-\lambda)X_1$$

令$u_1=\alpha\lambda$，$u_2=(1-\lambda)$，$u_3=\lambda(1-\alpha)$

则$X=u_1X_2+u_2X_1+u_3X_3$.

$$\sum_{i=1}^{3}u_i=1,\quad0\le u_i\le1.$$

则对任意三角形内一点，X可表示为三个极点的凸组合.

又任意凸多边形可看作有限个三角形的并集.

则对任意多边形内一点，X可表示为其极点的凸组合.

下面考虑凸多面体T内点X，

取任一极点，不妨取X_1，作一条与X的连线XX_1，并延长交T的一个面上任意一点X_0，由上述过程，X_0可表示为其面上的极点的凸组合，

类似地：X可表示为X_0与X_1的凸组合.

同上述过程：X可表示为：

$$X=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k$$

其中$\sum\lambda_i=1$.

证毕.

2.3. 证明：设任意顶点 x_0，~~与区域内任意两点 x_1、x_2~~。
若 x 不为极点，则必 $\exists \alpha\in(0,1)$，$x_1,x_2\in D$。
使得 $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ 成立。
因为 $\alpha\in(0,1)$，由平面内线性组合知识，
x 必然在 x_1 和 x_2 连线之间。
显然，正方形的顶点不满足 $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$。
则其顶点为极点。

2.4. 证明：设 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$ 及 $y=(y_1,y_2\cdots y_n)^T\in H^+$。
即 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geq b$。
$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n\geq b$。

对 $\forall\alpha\in[0,1]$ 有

$$\alpha x+(1-\alpha)y=[\alpha x_1+(1-\alpha)y_1,\cdots,\alpha x_n+(1-\alpha)y_n]^T,$$

$$a_1[\alpha x_1+(1-\alpha)y_1]+\cdots+a_n[\alpha x_n+(1-\alpha)y_n]$$
$$=\alpha(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+(1-\alpha)\cdot(a_1y_1+\cdots+a_ny_n)$$
$$\geq\alpha b+(1-\alpha)b$$
$$=b$$

即点 $\alpha x+(1-\alpha)y\in H^+$

所以 H^+ 是凸集。

2.5 (1) 解：$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}4&0\\0&6\end{pmatrix}=G(x)$。
则 $G(x)$ 是正定的。
则 $f(x_1,x_2)$ 是严格凸函数。

(2) 解：$\nabla^2 g(x)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-6x_2\end{pmatrix}$
则 $G(x)$ 是正定的。
则 $g(x_1,x_2)$ 是严格凸函数。

(3) 解：$\nabla^2 h(x)=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$
则 $h(x_1\ x_2\ x_3)$ 是正定的。
则 $h(x_1,x_2,x_3)$ 是严格凸函数。

2.6 证明：

必要性：若 $f(x)$ 是 R^n 上的凸函数，则由定义有：

~~设~~对 $\forall x, y \in R^n$，

$$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \le \frac{1}{2}f(y)+\frac{1}{2}f(x).$$

又 ~~f~~ 对 $\forall \lambda > 0$ 有 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.

~~则 $f(2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y))$~~

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x+y) &= f\left(2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\right)=2f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \\ &\le 2\left(\frac{1}{2}f(y)+\frac{1}{2}f(x)\right) \\ &= f(y)+f(x). \end{aligned}$$

必要性得证.

充分性：若 $f(x+y) \le f(y)+f(x)$.

令 $x=\alpha m$，$y=(1-\alpha)n$，其中 $m, n \in R^n$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(\alpha m+(1-\alpha)n) &\le f(\alpha m)+f((1-\alpha)n) \\ &= \alpha f(m)+(1-\alpha)f(n). \end{aligned}$$

由定义：$f(x)$ 是 R^n 上的凸函数.

充分性得证.

证毕.

2.7. 证明：设 x_1 和 x_2 都是局部极小点，并且 $x_1 \ne x_2$.

若 $f(x_1) > f(x_2)$，对 $\forall n \in Z^+$，

$$f(x_1) > \left(1-\frac{1}{n}\right)f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2) \ge f\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x_1+\frac{1}{n}f(x_2)\right);$$

设 $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)x_1+\frac{1}{n}f(x_2)$，显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_1$，但

$f(y)<f(x_1)$，与 $f(x_1)$ 为局部极小点矛盾.

因此 $f(x_1) \ge f(x_2)$;

同理 $f(x_1) \le f(x_2)$,

那么有 $f(x_1)=f(x_2)$.

易得在定义域内必然有 $f(x) \ge f(x_1)$.

因此局部极小点也必然是~~全~~整体极小点.

2.8 证明：提示：已经调出的变量检验值小于零，
如果下次迭代时又调入，则会使得
目标函数的值向非期望方向
变化，即变回转换前的值。

2.9 解：(1) 引入松弛变量 $x_5, x_6 \geq 0$.
则上述线性规划标准型为：

$$\min y = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4,$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 15,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_6 = 6,$$

$$x_1, \cdots, x_4, x_5, x_6 \geq 0;$$

(2) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6，再令 $x_1 = x_1' - x_1''$
则上述线性规划标准型为：

$$\min -x_1' + 2x_2 - 3x_3 + x_1''$$

$$\text{s.t.}\ -x_1' + x_1'' + x_2 + x_3 + x_4 = 6;$$

$$x_1' - x_1'' + 2x_2 + 4x_3 - x_5 = 12;$$

$$x_1' - x_1'' - x_2 + x_3 - x_6 = 2,$$

$$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

2.10 解：$f_0 = (-2, 1, 0)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\ -4 & -\frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = -1,$

$b' = B^{-1}b = (b_2', b_3', b_6')^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -49 \end{pmatrix}$

$\sigma_N = (\sigma_1, \sigma_4, \sigma_5) = (-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8})$.

$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{13}{6} & -4 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ ——算到这儿作者几近崩kui.

对应的规范式为：

$$\min f(x) = -1 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{8}x_5.$$

$$\text{s.t.}\quad x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_5.$$

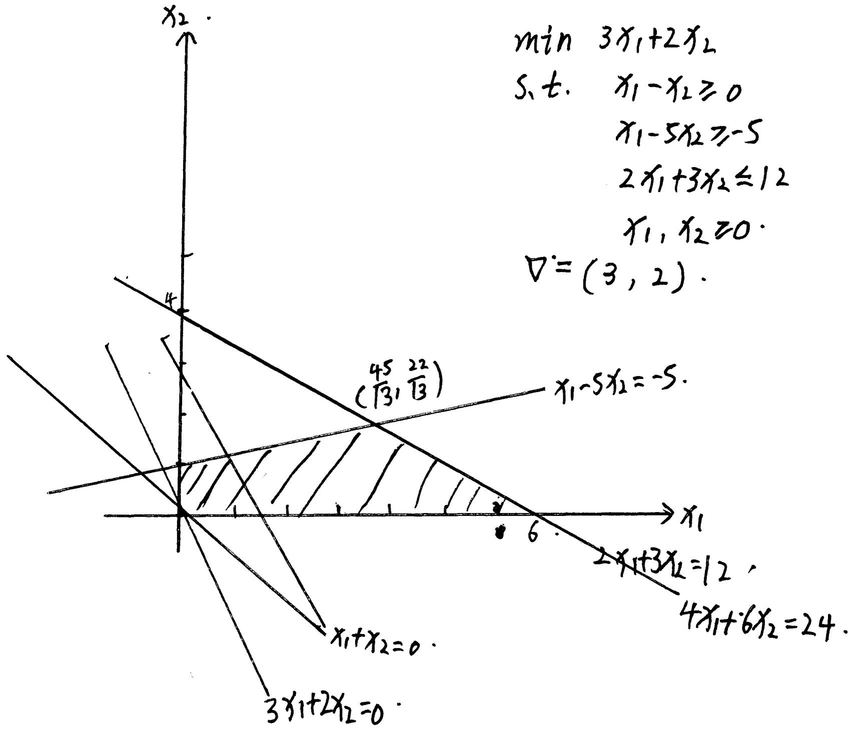
$$x_3 = 5 - \frac{5}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{8}x_5.$$

$$x_6 = -49 - \frac{13}{6}x_1 + 4x_5 + \frac{7}{4}x_5.$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots 6.$$

2.11 解：

(1)



$\min\ 3x_1+2x_2$

s.t. $x_1-x_2\geq 0$

$x_1-5x_2\geq -5$

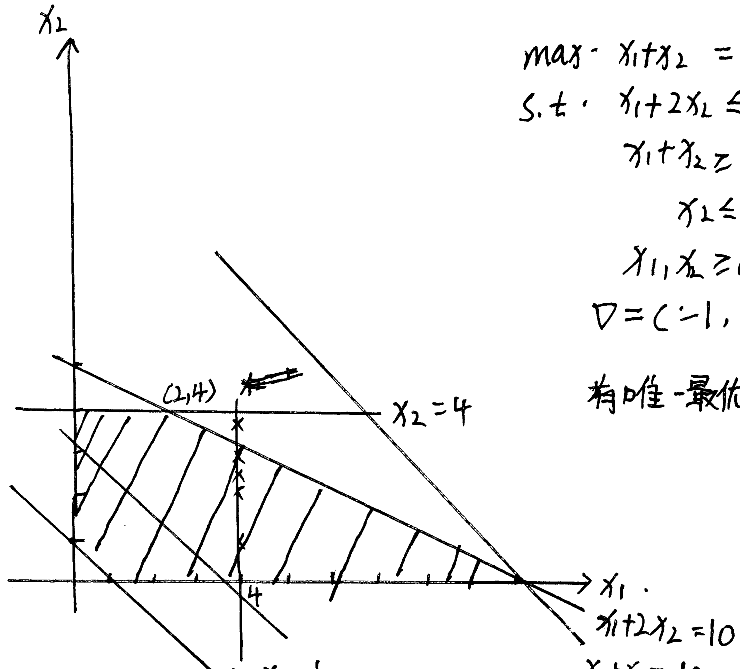
$2x_1+3x_2\leq 12$

$x_1, x_2\geq 0$

$\nabla=(3,2)$.

则 有唯一最优解 ~~min 3x1+2x2~~ $x^*=(0,0)$，$f^*=0$.

(2)



$\max\ x_1+x_2 = \min\ -x_1-x_2$.

s.t. $x_1+2x_2\leq 10$

$x_1+x_2\geq 1$

$x_2\leq 4$

$x_1, x_2\geq 0$.

$\nabla=(-1,-1)$.

有唯一最优解 $x^*=(10,0)$.

$f^*=10$.

(3) 如(1)中的图：

~~此~~ 有无穷多最优解 满足：$2x_1+3x_2=12$.

$f^*=$ ~~24~~ 24.

2.12 解：化为标准型：

$$\min z = 2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$$

$$\text{s.t.}\ 2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8,$$

$$x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3,$$

$$x_1,\cdots,x_4\geq 0.$$

基本解如下表

基	基解	可行否	是否退化
$B_1=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}$	$X_1=(1,2,0,0)^T$	可行	非
$B_2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&6\end{pmatrix}$	$X_2=(\frac{45}{13},0,\frac{-14}{3},0)^T$	否	一
$B_3=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-7\end{pmatrix}$	$X_3=(\frac{34}{5},0,0,\frac{7}{5})^T$	可行.	非
$B_4=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&6\end{pmatrix}$	$X_4=(0,\frac{45}{16},\frac{7}{16},0)^T$	可行	非
$B_5=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&-7\end{pmatrix}$	$X_5=(0,\frac{68}{29},0,\frac{-7}{29})^T$	否	一
$B_6=\begin{pmatrix}-1&-4\\6&-7\end{pmatrix}$	$X_6=(0,0,\frac{-68}{31},\frac{-45}{31})^T$	否	一

对 $\sigma_{N_1}=(4,7)-(2,3)\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-4\\6&-7\end{pmatrix}=(-95,91)$

$\sigma_{N_3}=(3,4)-(2,7)\begin{pmatrix}\frac{7}{10}&-\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&6\end{pmatrix}=(-\frac{77}{10},\frac{193}{10})$

$\sigma_{N_4}=(2,7)-(3,4)\begin{pmatrix}\frac{17}{24}&\frac{9}{16}\\\frac{1}{8}&\frac{3}{16}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-7\end{pmatrix}=(-\frac{91}{16},\frac{553}{16})$

则~~在此~~其中没有最优解.（已崩!）.

2.13 解：

(1) 引入松弛变量化为标准型：

$$\min\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4,$$

$$\text{s.t.}\ x_1-2x_2+3x_3-x_4+x_5=15,$$

$$2x_1+x_2-x_3+2x_4+x_6=10,$$

$$x_1,\cdots,x_6\geq 0;$$

用单纯形表求最优解，

过程如下，表中(·)元素为主元.

C_j			3	2	1	-1	0	0	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ_i
0	P_5	15	1	-2	3	-1	1	0	/
0	P_6	10	2	1	-1	(2)	0	1	5
σ_j			3	2	1	-1	0	0	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
0	P_5	20	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	
-1	P_4	5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	
σ_j			4	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2	

所以最优解为 $x^*=(\cancel{4,2,0}\ 0,0,0,5,20,0)^T$.

原问题最优解为 $x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)^T=(0,0,0,5)^T$

最优值为 $f^*=-5$.

~~(2) 解：已为标准型~~，

~~用单纯形表求解，过程如下，表中(·)元素为主元~~.

(2) 解：用单纯形表求解，过程如下，表中(·)元素为主元.

C_j			1	1	1	0	0	0	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ_i
1	P_1	5	1	0	0	-1	0	-2	—
1	P_2	3	0	1	0	(2)	-3	1	$\frac{3}{2}$
1	P_3	5	0	0	1	2	-5	6	$\frac{5}{2}$
σ_j			0	0	0	-3	8	5	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_1	$\frac{13}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
0	P_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1	P_3	2	0	-1	1	0	-2	5	
σ_j			0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{2}$	

所以最优解为 $x^*=(\frac{13}{2},0,2,\frac{3}{2},0,0)^T$

原问题最优解为 $x^*=(\frac{13}{2},0,2,\frac{3}{2},0,0)^T$

最优值为 $f^*=\frac{17}{2}$.

(3). 解：引入松弛变量 x_5, x_6, 人工变量 x_7, 并取M足够大,取 $M=10$.

将上述问题改写成新规划问题：

$$\min f(x) = -10x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 10x_7.$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + x_6 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 3 \\ x_1, \cdots, x_7 \geq 0; \end{cases}$$

用单纯形表计算，过程如下.

C_j			-10	-5	-2	6	0	0	10	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ_i
0	P_5	9	5	3	1	0	1	0	0	$\frac{9}{5}$
0	P_6	15	-5	6	15	0	0	1	0	—
10	P_7	3	(2)	1	1	-1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
σ_j			-30	-15	-12	16	0	0	0	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
0	P_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{5}{2}$	
0	P_6	$\frac{45}{2}$	0	$\frac{17}{2}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{5}{2}$	
-10	P_1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	
σ_j			0	0	3	1	0	0	15	

新线性规划问题的最优解为 $(\frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, \frac{45}{2})^T$

原线性规划的最优解 $\bar{x} = (\frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{3}{2})^T$

最优值 $\bar{f} = -6$.

(4). 解：引入松弛变量 x_5, x_6, x_7, x_8, 再令 $x_4 = x_4' - x_4''$, 人工变量 x_9. 取 $M=10$

则上述规划的~~基本标准型为~~改为新规划问题.

$$\min\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4' + x_4'' + 10x_9.$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4' + x_4'' + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4' - 2x_4'' - x_6 \cancel{=10} + x_9 = 10 \\ x_4' - x_4'' + x_7 = 2 \\ x_4'' - x_4' + x_8 = 2. \\ \cancel{x_1, \cdots, x_8 \geq 0}\ x_1, \cdots x_3 \geq 0,\ x_4', x_4'' \geq 0 \\ x_5 \cdots x_8 \geq 0\ \ x_9 \geq 0. \end{cases}$$

用单纯形表计算，过程如下.

c_j			3	2	1	-1	1	0	0	0	0	10	θ_i
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4'	P_4''	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	
0	P_5	5	1	-2	1	-1	1	1	0	0	0	0	—
10	P_9	10	2	1	-1	2	-2	0	-1	0	0	1	5
0	P_7	2	0	0	0	(1)	-1	0	0	1	0	0	2
0	P_8	2	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	—
σ_j			-17	-8	11	-21	21	0	10	0	0	0	

C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4'	P_4''	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	θ_i
0	P_5	7	1	-2	1	0	1	1	0	1	0	0	7
10	P_9	6	(2)	1	-1	0	0	0	-1	-2	0	1	3
-1	P_4'	2	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	—
0	P_8	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	—
σ_j			-17	-8	11	0	0	0	10	21	0	0	

C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4'	P_4''	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
0	P_5	4	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
3	P_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$
-1	P_4'	2	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0
0	P_8	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
σ_j			0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	4	0	0

新规划问题最优解为 $(3,0,0,2,0,4,0,0,4,0)^T$

原规划问题最优解 $x^* = (3,0,0,2)^T$

最优值 $f^* = 7$

(5) 解：引入松弛变量 x_4, x_5，则上述规划化为标准型：

$$\min \ -x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

用单纯形表计算，过程如下：

c_j	-1	-1	-1	0	0	θ_i
C_B B b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
0 P_4 2	2	1	2	1	0	1
0 P_5 2	(4)	2	1	0	1	$\frac{1}{2}$
σ_j	-1	-1	-1	0	0	
0 P_4 1	0	0	$(\frac{3}{2})$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
-1 P_1 $\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2
σ_j	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	
-1 P_3 $\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	—
-1 P_1 $\frac{1}{3}$	1	$(\frac{1}{2})$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
σ_j	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
-1 P_3 $\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
-1 P_2 $\frac{2}{3}$	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
σ_j	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

新问题最优解为 $(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3},0,0)^T$

原问题最优解为 $x^*=(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$

最优解为 $f^*=\frac{4}{3}$.

(6) 解：引入松弛变量 x_3, x_4', x_4'' x_5，其中 $x_4=x_4'-x_4''$

则上述规则化为标准型，

$$\min\ -3x_1-2x_2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1-3x_2+x_3=6$$

~~$x_1+3x_2+x_5=$~~

$$x_1+2x_2+x_4'-x_4''=4$$

$$-x_1+3x_2+x_5=6$$

$$x_1\ x_2\ x_3\ x_4'\ x_4''\ x_5\ge 0.$$

用单纯形表计算，

过程如下：

c_j			-3	-2	0	0	0	0	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4'	P_4''	P_5	θ_i
0	P_3	6	1	-3	1	0	0	0	6
0	P_4'	4	(1)	2	0	1	-1	0	4
0	P_5	6	-1	3	0	0	0	1	—
σ_j			-3	-2	0	0	0	0	
0	P_3	2	0	-5	1	-1	(1)	0	2
-3	P_1	4	1	2	0	1	-1	0	—
0	P_5	10	0	5	0	1	-1	1	—
σ_j			0	4	0	3	-3	0	
0	P_4''	2	0	-5	1	-1	1	0	
-3	P_1	6	1	-3	1	0	0	0	
0	P_5	12	0	0	1	0	0	1	
σ_j			0	-11	3	0	0	0	

由表中可知当$\sigma_2=-11$时，所对应的a值都不大于0．
则原问题无最优解．

2.14：解：由题意，设生产A_1，A_2各x_1，x_2万瓶，~~有~~
则原题化为如下数学模型．

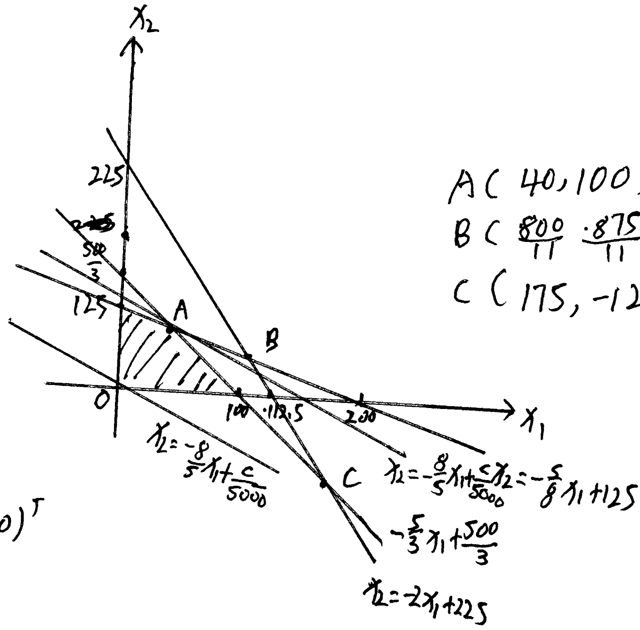
$$\min\ -8000x_1-5000x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1+3x_2\le 500$$

$$100x_1+160x_2\le 20000$$

$$8x_1+4x_2\le 900$$

$$x_1,x_2\ge 0$$



A(40, 100)
B($\frac{800}{11}$, $\frac{875}{11}$)
C(175, -125).

用作图法求解，如右图：
可行域为图中阴影部分，$f(x)$的等值线
为$x_2=-\frac{8}{5}x_1+\frac{c}{5000}$．$\nabla f(x)^T=(-8000,-5000)^T$
则当等值线过A时有
最优解 $x^*=(40,100)^T$
最优值 $f^*=820000$元

2.15 解：设A_1生产B_1，B_2，B_3各x_1 x_2 x_3件.

则A_2生产B_1 B_2 B_3各$70-x_1$，$50-x_2$，$20-x_3$件.

原规划问题有如下数学模型：

$$\min\ -x_1-x_2-x_3+560$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 80 \\ x_1+2x_2+3x_3\ge 130 \\ x_1\le 70 \\ x_2\le 50 \\ x_3\le 20 \\ x_1,\cdots x_3\ge 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

引入松弛变量x_4 x_5 x_6 x_7 x_8，人工变量x_9，取$M=10$.

原问题化为如下规划问题：

$$\min\ -x_1-x_2-x_3+10x_9+560$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=80 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_5+x_9=130 \\ x_1+x_6=70 \\ x_2+x_7=50 \\ x_3+x_8=20 \end{cases}$$

用单纯形表求解：

过程如右图：

		c_j	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	10	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	θ_i
0	P_4	80	1	1	1	1	0	0	0	0	0	80
10	P_9	130	1	2	3	0	-1	0	0	0	1	130/3
0	P_6	70	1	0	0	0	0	1	0	0	0	—
0	P_7	50	0	1	0	0	0	0	1	0	0	—
0	P_8	20	0	0	(1)	0	0	0	0	1	0	20
	σ_j		-11	-21	-31	0	10	0	0	0	0	
0	P_4	60	1	1	0	1	0	0	0	-1	0	60
10	P_9	70	1	(2)	0	0	-1	0	0	-3	1	35
0	P_6	70	1	0	0	0	0	1	0	0	0	—
0	P_7	50	0	1	0	0	0	0	1	0	0	50
-1	P_3	20	0	0	1	0	0	0	0	1	0	—
	σ_j		-11	-21	0	0	10	0	0	31	0	
0	P_4	25	($\frac{1}{2}$)	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	50
-1	P_2	35	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	70
0	P_6	70	1	0	0	0	0	1	0	0	0	70
0	P_7	15	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	—
-1	P_3	20	0	0	1	0	0	0	0	1	0	—
	σ_j		$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$	
-1	P_1	50	1	0	0	2	1	0	0	1	-1	
-1	P_2	10	0	1	0	-1	-1	0	0	-2	1	
0	P_6	20	0	0	0	-2	-1	1	0	-1	1	
0	P_7	40	0	0	0	1	1	0	1	2	-1	
-1	P_3	20	0	0	1	0	0	0	0	1	0	
	σ_j		0	0	0	1	0	0	0	0	10	

可得此问题最优解为$x^*=(50,10,20,0,0,20,40,0,0)^T$

则原问题最优解为$x^*=(50,10,20)$.

最优值为$f^*=480$.

即. A_1生产B_1，B_2 B_3为50，10，20件

A_2生产B_1 B_2 B_3为20，40，0件时.

成本最低为480元.

2.16.(1)解：设对偶变量为y_1, y_2，其对偶线性规划为：

$$\max \; 9y_1 + 11y_2$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & 4y_1 + y_2 \le 3 \\
& -y_1 + y_2 \le 1 \\
& 3y_1 - 4y_2 \le -4 \\
& y_1 \le 2 \\
& -y_2 \le 0. \\
& y_1, y_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

(2)解：设对偶变量为y_1, y_2，其对偶线性规划为：

$$\max \; 9y_1 + 11y_2.$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & 4y_1 + y_2 \le 3 \\
& -y_1 + y_2 \le 1 \\
& 3y_1 - 4y_2 \le -4 \\
& y_1 \le 2 \\
& -y_2 \le 0.
\end{aligned}$$

$y_2 \ge 0$. y_1为自由变量.

(3)解：设对偶变量为y_1, y_2，其对偶线性规划为：

$$\max \; 6y_1 + 3y_2.$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & 2y_1 - 2y_2 \le 3 \\
& 4y_1 + 3y_2 \le 2 \\
& 3y_1 - y_2 \le 1 \\
& y_1 \le 4.
\end{aligned}$$

$y_2 \ge 0$，y_1为自由变量.

(4)解：设对偶变量为y_1, y_2，其对偶线性规划为：

$$\min \; 5y_1 + 9y_2$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & -4y_1 + 3y_2 \ge 3 \\
& 2y_1 + y_2 \ge -2 \\
& -3y_1 - 4y_2 \ge 8
\end{aligned}$$

$y_1 \le 0$. y_2为自由变量.

(5) 解：设对偶变量 y_i, $i=1,2\cdots m, m+1, \cdots m+n$.

其对偶线性规划为：

$$\max \cdot w = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} b_j y_{m+j}$$

s.t. $y_i + y_{m+j} \le c_{ij}$, $j=1,2,\cdots n$, $i=1,2,\cdots m$.

y_i, $i=1,2\cdots m, \cdots, m+n$ 为自由变量.

~~引入人工变量 x_5, 取 $M=10$~~

~~2.17 解：构造 令 $x_4 = x_4' - x_4''$ 则原问题变为以下规划问题.~~

~~$\min f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_5$~~

~~s.t. $x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$~~

~~$4x_2 - 3x_3 + x_5 - x_4 = 4$~~

~~$4x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 4$~~

2.17 解：引入人工变量 x_5, 并取 $M=10$. 将上述问题改为：

$$\min f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_5$$

s.t. $x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$

$4x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 4$

$x_1, \cdots, x_5 \ge 0$.

用单纯形法求解：

C_j			3	1	4	0	10	
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ_i
3	P_1	6	1	−3	1	0	0	—
10	P_5	4	0	(4)	−3	−1	1	1
δ_j			0	−30	31	10	0	
3	P_1	9	1	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	
1	P_2	1	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
δ_j			0	0	$\frac{34}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	

则该规划问题最优解为 $x^* = (9,1,0,0,0)^T$

原问题最优解为 $x^* = (9,1,0,0)^T$

最优值为 $f^* = 28$.

2.18.（1）引入松弛变量将原约束变形为：

$3x_1+4x_2+3x_3+x_4=6$

$2x_1-3x_2+x_3+x_5=-3$.

$x_i\geq 0,\ i=1,\cdots,5$.

计算过程如下：

c_j	3	2	1	-4	0
C_B B b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
-4 P_4 6	3	4	3	1	0
0 P_5 -3	2	(-3)	1	0	1
σ_j	12	18	13	0	0
σ_j/a_{ij} $(a_{ij}<0)$	-	-6	-	-	-
-4 P_4 2	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{13}{3}$	1	$\frac{4}{3}$
2 P_2 1	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
σ_j	24	0	19	0	6

所以，最优解 $x^*=$ ~~$(0,\frac{3}{2},\frac{1}{8},0)^T$ $0,1,0)^T$~~

~~最~~ $(0,1,0,2)^T$

最优值为 $f^*=-6$.

（2）引入松弛变量 x_4 x_5 x_6 后将原问题改为新问题：

~~$\max\ -5x_1-x_2-3x_3$~~

$\min\ 5x_1+x_2+3x_3$

s.t. $2x_1-3x_2+2x_3+x_4=9$

$x_1-x_2+2x_3+x_5=6$

$4x_1+x_2+x_3+x_6=-3$.

计算过程如右图：

c_j	5	1	3	0	0	0
C_B B b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0 P_4 9	2	-3	2	1	0	0
0 P_5 6	1	-1	2	0	1	0
0 P_6 -3	4	1	1	0	0	1

由图中知 $b'_3=-3$ 时，对应的 a_{3j} 都大于等于0.

则原题无可行解.

2.19. 证明：参考定理 2.8.4：

因为 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 分别为 (I)、(II) 的可行解，所以有

$A\bar{x} \geq b \quad \bar{x} \geq 0$ 及 $\bar{y}^T A \leq C^T,\ \bar{y} \geq 0$

从而 $\bar{y}^T b \leq \bar{y}^T (A\bar{x}) = (\bar{y}^T A)\bar{x} \leq C^T \bar{x}$

即：$C^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$

证毕.

2.20. 证明：由对偶性定理有：

$z^* = y^{*T} b$. ①

又因为 (II) 问题有最优值，则必有最优解，

且 (II) 问题的对偶问题有最有解，设为 y_2^*，

则 $s^* = y_2^{*T}(b+d)$ ②

又 y_2^* 是最优解，

则必有 $y_2^{*T}(b+d) \geq y^T(b+d)$

令 $y^T = y^{*T}$.

则 $y_2^{*T}(b+d) \geq y^{*T}(b+d)$. ③

由 ① ② ③ 得：

$$s^* = y_2^{*T}(b+d) \geq y^{*T}(b+d)$$
$$= y^{*T} b + y^{*T} d$$
$$= z^* + y^{*T} d.$$

则 $z^* + y^{*T} d \leq s^*$

证毕.

2.21. (1) 设原问题为 (P0) 问题，解与 (P0) 对应的线性问题的最优解

最优值为：$\bar{x} = \left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}\right)$，$\bar{z} = \frac{-30}{7}$.

构造两个后继子问题.

$$(P1)\quad \begin{aligned} \min\ & z = -3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5,\quad x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$(P2).\quad \begin{aligned} \min\ & z = -3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

分别解这两个线性规划子问题，得(P1)的最优解、最优值为

$\bar{x}_1=(1,\frac{5}{4})^T$，$z_1=-\frac{7}{4}$

(P2)无最优解、最优值：

因为 $\bar{x}_1$ 不是整数解，所以将(P1)分判为两个子问题：

$$(P13)\quad \begin{aligned} \min z &= -3x_1+x_2 \\ s.t.\ & 3x_1-2x_2\le 3 \\ & 5x_1+4x_2\ge 10 \\ & 2x_1+x_2\le 5. \\ & x_1\le 1 \\ & x_2\le 1. \\ & x_1\ x_2\ge 0. \end{aligned}$$

$$(P14)\quad \begin{aligned} \min z &= -3x_1+x_2. \\ s.t.\ & 3x_1-2x_2\le 3 \\ & 5x_1+4x_2\ge 10 \\ & 2x_1+x_2\le 5 \\ & x_1\le 1 \\ & x_2\ge 2. \\ & x_1,x_2\ge 0. \end{aligned}$$

(P13)无可行解，(P14)的最优解、最优值为：

$\bar{x}_4=(1,2)^T$，$z_4=-4$

原问题的最优解 $x^*=(1,2)^T$，最优值 $z^*=-4$

(2). 设原问题为(P0)，解其(P0)对应的线性问题的最优解、最优值为

$\bar{x}=(\frac{51}{14},0)$. $z=-\frac{51}{14}$.

构造两个后继子问题.

$$(P01)\quad \begin{aligned} \min\ z &= -x_1+x_2 \\ s.t.\ & 14x_1+9x_2\le 51 \\ & -6x_1+3x_2\le 1 \\ & x_1\le 4. \\ & x_1,x_2\ge 0. \end{aligned}$$

$$(P02)\quad \begin{aligned} \min z &= -x_1+x_2. \\ s.t.\ & 14x_1+9x_2\le 51 \\ & -6x_1+3x_2\le 1 \\ & x_1\ge 5 \\ & x_1,\ x_2\ge 0 \end{aligned}$$

(P01)的最优解、最优值为 $(4,0)^T=\bar{x}_1$，$z_1=-4$.

(P2)无可行解.

则原问题最优解 $x^*=(4,0)^T$. 最优值 $z^*=-4$