最优化证明题

1. 若对任意的n维向量x，及实数$\lambda>0$，都有$f(\lambda x)=\lambda f(x)$，试证$f(x)$是$R^n$上的凸函数的充分必要条件为 $f(x+y)\le f(x)+f(y)$，$x,y\in R^n$

证明：⇒ 必要性：

$\because$ $f(x)$是凸函数

$\therefore$ $\forall x,y\in D$，$\forall \alpha\in[0,1]$

$f[\alpha x+(1-\alpha)y]\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$

取 $\alpha=\frac{1}{2}$，则

$f[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y]\le \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$

由于$f(\lambda x)=\lambda f(x)$

$\frac{1}{2}f(x+y)\le \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$

即 $f(x+y)\le f(x)+f(y)$

⇐ 充分性：$\forall x',y'\in D$，$\forall \alpha\in[0,1]$

令 $x'=\alpha x$　$y'=(1-\alpha)y$

$f(x'+y')\le f(x')+f(y')$

即 $f[\alpha x+(1-\alpha)y]\le f(\alpha x)+f[(1-\alpha)y]$

$=\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$

其中 $f(\alpha x)=\alpha f(x)$　$f[(1-\alpha)y]=(1-\alpha)f$

$\therefore$ $f(x)$为R^n上的凸函数

2. 设$f(x)$是定义在凸集D上的凸函数，试证$f(x)$的任何局部极小点也必为整体极小点，(2)且全体极小点组成凸集，(3)严格凸函数的极小点是唯一的。

证明(1) 假设x^*是$f(x)$的局部极小点，但不是整体极小点，

即$\exists x$ 使得 $f(x)<f(x^*)$

$\because$ $f(x)$是凸函数

$\therefore$ $\exists \alpha\in[0,1]$ 使得 $f[\alpha x^*+(1-\alpha)x]\le \alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x)$

$<\alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x^*)$

$=f(x^*)$

当$\alpha\to 1$时，$\alpha x^*+(1-\alpha)x\to x^*$

则在x^*的某一领域内$\exists y$使得$f(y)<f(x^*)$，

这与x^*是局部极小点相矛盾，故x^*是整体极小点。

(2) 设x_1，x_2是$f(x)$的两个极小点。

由(1)可知 x_1，x_2是整体极小点

即 $f(x_1)=f(x_2)=f(x^*)$

又对 $\forall\alpha\in[0,1]$ 有

$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\le \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

$=\alpha f(x^*)+(1-\alpha)f(x^*)$

$=f(x^*)$

且 $f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\ge f(x^*)$

$\therefore$ $f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]=f(x^*)$

$\therefore$ $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$也是$f(x)$的极小点，属于极小点组成的

$\therefore$ 全体极小点组成的集合是凸集

(3) 假设x_1，x_2均为整体极小点，则 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\ne x_2$

$\because$ $f(x)$是严格凸函数

$\therefore$ 对 $\forall\alpha\in[0,1)$　$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

$=f(x_1)$

这与x_1，x_2均为整体极小点矛盾

故严格凸函数的极小点是唯一的。

3. 设 z^*, s^* 分别是两个线性规划问题 (I) $\max z_1 = C^T X$ 与 (II) $\max z_2 = C^T X$

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \max\ & z_1 = C^T X \\ \text{s.t. } & AX \le b \\ & X \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(II)}\quad \begin{aligned} \max\ & z_2 = C^T X \\ \text{s.t. } & AX \le b+k \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

的最优值，y_1^* 是 (I) 的对偶问题的最优解。求证：$s^* \le z^* + y_1^{*T} k$。

证明：(I) 与 (II) 的对偶规划分别为

$$\text{(DI)}\quad \begin{aligned} \min\ & b^T y \\ \text{s.t. } & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{与 (DII)}\quad \begin{aligned} \min\ & (b+k)^T y \\ \text{s.t. } & A^T y \ge C \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

(I) 的最优值与 (DI) 最优值相同，得 $z^* = b^T y_1^*$；y_1^* 是 (DI) 对偶规划的最优解，且 (DI) 与 (DII) 约束条件相同，从而 y_1^* 是 (DII) 的可行解。

y_1^* 在 (DII) 的目标函数值不小于最优值，即 $(b+k)^T y_1^* \ge s^*$

因此 $s^* \le z^* + y_1^{*T} k$.

4 设 $f(x)$ 在 R^n 上是凸函数，且有一阶连续偏导数，则 x^* 为 $f(x)$ 的整体极小点的充分必要条件为 $g^* = 0$

证明：⇒ 必要性：

∵ x^* 为 $f(x)$ 的整体极小点、

∴ x^* 必为某领域内的局部极小点、

假设 $g^* \ne 0$，则 ∃ 方向 $P \in R^n$ 使 $P^T g^* < 0$

由微分中值定理，∃ $\alpha_1 \in (0, \alpha)$ 使得

$f(x^* + \alpha P) = f(x^*) + \alpha P^T g(x^* + \alpha_1 P)$ 成立

由于 g 在 x^* 的某个领域内连续，故存在 $\delta > 0$，

使得 $\forall \alpha \in [0, \delta]$

有 $P^T g(x^* + \alpha P) < 0$，所以对 $\forall \alpha \in [0, \delta]$

有 $f(x^* + \alpha P) < f(x^*)$

这与 x^* 是 f 的局部极小点矛盾

⇐ 充分性：

∵ $f(x)$ 为凸函数

∴ 对 $\forall y \in D$

$f(y) \ge f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (y - x^*)$

又 ∵ $g^* = \nabla f(x^*) = 0$

∴ $f(y) \ge f(x^*)$

即 x^* 为 $f(x)$ 的整体极小点、

5 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^TGx+b^Tx+c$，其中 G 为 $n\times n$ 对称正定矩阵，$b\in R^n$，$c\in R^1$，沿射线 $x_k+\alpha p_k$ 进行一维搜索：$\min\limits_{\alpha\ge 0} f(x_k+\alpha p_k)$，试证明步长 $\alpha_k=\frac{-g_k^Tp_k}{p_k^TGp_k}$，其中 $g_k=\nabla f(x_k)$

证明：$\varphi(\alpha)=f(x_k+\alpha p_k)$

$$=\frac{1}{2}(x_k+\alpha p_k)^TG(x_k+\alpha p_k)+b^T(x_k+\alpha p_k)+c$$

$$=\frac{1}{2}(x_k^TGx_k+2\alpha x_k^TGp_k+\alpha^2p_k^TGp_k)+b^T(x_k+\alpha p_k)+c$$

令 $\varphi'(\alpha)=0 \Rightarrow \varphi'(\alpha)=x_k^TGp_k+\alpha p_k^TGp_k+b^Tp_k=0$

$$\therefore \alpha=-\frac{(x_k^TG+b^T)p_k}{p_k^TGp_k}$$

$\because g_k=\nabla f(x_k)=Gx_k+b^T \quad g_k^T=x_k^TG^T+b^T=x_k^TG+b^T$

$$\therefore \alpha=-\frac{g_k^Tp_k}{p_k^TGp_k}$$

---

6 设 G 为 n 阶正定对称矩阵，$u_1,u_2\cdots u_n\in R^n$ 线性无关。p_k 按如下方式生成：$p_1=u_1$，$p_{k+1}=u_{k+1}-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{u_{k+1}^TGp_i}{p_i^TGp_i}p_i \ (k=1,2,\cdots n-1)$，证明 $p_1,p_2\cdots,p_n$ 关于 G 共轭

证明：① $p_1^TGp_2=p_1^TG(u_2-\frac{u_2^TGp_1}{p_1^TGp_1}p_1)=p_1^TGu_2-u_2^TGp_1=0$

因此 p_1,p_2 关于 G 共轭

② 设 $p_i,p_j \ (1\le i<j\le k)$ 关于 G 共轭，即 $p_j^TGp_i=0$，

证 $p_j \ (1\le j\le k)$ 与 p_{k+1} 共轭

$$p_j^TGp_{k+1}=p_j^TGu_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{k+1}^TGp_i}{p_i^TGp_i}p_j^TGp_i$$

$$=p_j^TGu_{k+1}-\frac{u_{k+1}^TGp_j}{p_j^TGp_j}p_j^TGp_j$$

$$=p_j^TGu_{k+1}-u_{k+1}^TGp_j$$

$$=0$$

由归纳原理，命题成立

7. $f(x)$为凸集$D\subset R^n$上的函数，令$epi(f)=\{(x,y)\mid x\in D, y\in R, y\geq f(x)\}$，证明$f(x)$为凸函数的充要条件为$epi(f)$为凸集

证明：$\Rightarrow$ 必要性：

任取两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in epi(f)$

其中$x_1,x_2\in D$，$y_1,y_2\in R$

$y_1\geq f(x_1)$，$y_2\geq f(x_2)$

$\because$ D，R为凸集

$\therefore$ $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in D$，

$\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\in R$

$\because$ $f(x)$为凸函数

$\therefore$ $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

$\leq\alpha y_1+(1-\alpha)y_2$

$(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\ \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\in epi(f)$

即$epi(f)$为凸集

$\Leftarrow$ 充分性

任取$x_1,x_2\in D$，$y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in epi(f)$

$\because$ $epi(f)$为凸集

$\therefore$ $\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\ \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\in epi(f)$

$\therefore$ $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha y_1+(1-\alpha)y_2$

$=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

$\therefore$ 由凸函数定义知，$f(x)$为凸函数。

设集合$D\subset R^n$，若对于任意点$x,y\in D$及实数$\alpha\in[0,1]$都有$\alpha x+(1-\alpha)y\in D$，则称集合$D$为凸集的几何意义：对于非空集合$D\subset R^n$，联接$D$中任意两点$x,y$的线段仍属于该集合

---

8 设$f(x)=(x-1)^2$，$x\in R^1$，试证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是严格凸函数

证明：设$x,y\in R^1$且$x\neq y$，$\alpha\in(0,1)$，则

$f[\alpha x+(1-\alpha)y]-\alpha f(x)-(1-\alpha)f(y)$

$=[\alpha x+(1-\alpha)y-1]^2-\alpha(x-1)^2-(1-\alpha)(y-1)^2$

$=[\alpha(x-y)+(y-1)]^2-\alpha(x-1)^2-(1-\alpha)(y-1)^2$

$=\alpha^2(x-y)^2-\alpha(x-y)^2$

$=(x-y)^2(\alpha^2-\alpha)<0$

其中$\alpha\in(0,1)$ $\therefore$ $\alpha^2-\alpha<0$

即$f[\alpha x+(1-\alpha)y]<\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$

$\therefore$ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是严格凸函数。

9 设有非线性规划问题 $\min \frac{1}{2}x^TGx$, s.t. $x\geq b$，其中G为n阶对称正定矩阵，b为n维向量，设u是问题的最优解.

证明：u与$u-b$关于矩阵G共轭(用KT条件) $u^TG(u-b)=0$

$$\min \frac{1}{2}x^TGx$$
$$s.t.\begin{cases} x_1-b_1\geq 0 & c_1(x)=x_1-b_1 \\ x_2-b_2\geq 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ x_n-b_n\geq 0 & c_n(x)=x_n-b_n \end{cases}$$

$\because$ u是此问题的最优解，则u是此问题KT点 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda>0 \\ \nabla f(u)-\sum\lambda\nabla c(x)\big|_{x=u}=0 & ① \\ \lambda^TC(x)\big|_{x=u}=0 & ② \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} 由① \Rightarrow \frac{1}{2}Gu=\lambda \Rightarrow \lambda^T=\frac{1}{2}u^TG^T \\ ② \quad \lambda^T(u-b)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}u^TG^T(u-b)=0$$

$\because$ G是对称正定矩阵 $G^T=G$ $\Rightarrow \frac{1}{2}u^TG(u-b)=0 \Rightarrow u^TG(u-b)=0$

$\Rightarrow$ u与$u-b$关于矩阵G共轭

要注意 由 $\nabla f(x)-\lambda^TC(x)=0 \Rightarrow ax-\lambda=0 \Rightarrow au=\lambda$

---

10 $f: R^n\to R$ 为可微凸函数，证明x^*为优化问题 $\min f(x)$, s.t. $x\geq 0$ 的最优解的充要条件是：$x^*\geq 0$，$\nabla f(x^*)\geq 0$，$(\nabla f(x^*))^Tx^*=0$

证：必要性： $\because$ x^*是优化问题 $\min f(x)$, s.t. $x\geq 0$ 的最优解.

$\therefore$ x^*是该问题的KT点，它满足KT条件，即

$$\begin{cases} \nabla f(x^*)-\lambda^*=0 \\ \lambda^{*T}x^*=0 \\ \lambda^*\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^*=\nabla f(x^*)\geq 0 \\ \lambda^{*T}x^*=(\nabla f(x^*))^Tx^*=0 \end{cases}$$

x^*满足约束条件 $x^*\geq 0$

充分性： $\because$ $f(x)$是凸函数

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &\geq f(x^*)+(\nabla f(x^*))^T(x-x^*) \\ &= f(x^*)+(\nabla f(x^*))^Tx \\ &\geq f(x^*) \end{aligned}$$

又 $x^*\geq 0$

故 x^*即是可行解且又是$f(x)$的整体极小点.

$\therefore$ x^*是最优化问题 $\min f(x)$, s.t. $x\geq 0$ 的最优解

11 设A为n阶对称正定矩阵，非零向量 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 为关于A的共轭向量

证明 $A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k}$

证明：即需证 $E = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k} A$

令 $B = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k}$

$BAP_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k} AP_j$

∵当 $k \neq j$ 时，$P_k^T A P_j = 0$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k} AP_j = \frac{P_j P_j^T}{P_j^T A P_j} AP_j = P_j$

∵ $P = [P_1, P_2 \cdots P_n]$

$BAP = [P_1, P_2 \cdots P_n] = P$

∵ $P_1, P_2 \cdots P_n$ 关于A共轭向量

从而 $P = [P_1, P_2 \cdots P_n]$ 可逆

∴ $BA = E$

$A^{-1} = B = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k}$

即 $A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k P_k^T}{P_k^T A P_k}$

---

12 设在单纯形法的某次迭代时 x_j 是离基变量，试证在下一次迭代时 x_j 必不是进基变量

证明：设 x_j 为离基变量时，x_k 为进基变量

新判别数 $\sigma_j' = -\frac{\sigma_k}{a_{jk}}$ ∵ $\sigma_k < 0$，$a_{jk}' > 0$

∴ $\sigma_j' > 0$

∴下一次迭代时 x_j 必不为进基变量

---

13 设 $\bar{x}, \bar{y}$ 分别为下列两个问题

(I) $\min\ c^T x$ s.t. $Ax \geq b$, $x \geq 0$

(II) $\max\ y^T b$ s.t. $y^T A \leq c^T$, $y \geq 0$

的可行解，试证明

$c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$

证明∵ $\bar{x}, \bar{y}$ 为解，则 $A\bar{x} \geq b$，$\bar{y}^T A \leq c^T$

$\bar{y}^T b \leq \bar{y}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x}$

即 $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$

14 对于无约束问题 $\min f(x)$，若在点 x_k 处下降方向为 P_k，采用精确一维搜索方法的下一个迭代点 x_{k+1}，证明 $g_{k+1}^T P_k = 0$，其中 g_{k+1} 表示 $f(x)$ 在 x_{k+1} 点的梯度

证明：由于 $P_{k+1} = -g_{k+1}$

要证明 $P_{k+1}^T P_k = 0$ 即证 $g_{k+1}^T P_k = 0$

对于精确一维搜索 $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha P_k)$

对于极小点 α_k，有 $\varphi(\alpha_k) = f(x_k + \alpha_k P_k)$

则 $\varphi'(\alpha_k) = \nabla f(x_k + \alpha_k P_k) P_k = 0$

$\Rightarrow g_{k+1}^T P_k = 0$

15 给定非线性规划问题 $\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x_i}$ s.t. $\sum_{i=1}^{n}a_i x_i=b$，$x_1,\cdots,x_n\geq 0$，其中 a_i, b_i, c_i 都是正常数，设 x^* 是该问题的最优解，证明：该问题的最优值为 $f(x^*)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i c_i}\right)^2}{b}$