八、证明：$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

证：令 $A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $G = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AGA = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$

$GAG = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = G$

$(AG)^H = \left(\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^H = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AG$

$(GA)^H = \left(\begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^H = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = GA$

$\therefore A^{+} = G$ 即 $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$