14年. 矩阵论

一. 1. R^3 的子空间 $V=\{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$ 的一组基是 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

2. $\forall A \in R^{2\times2}$，在 $R^{2\times2}$ 中定义线性变换 $T(A)=A\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，则 T 在 $R^{2\times2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是 $\begin{bmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{bmatrix}$

3. 在欧式空间 R^4 中，$\beta_1=(1,1,-1,1)^T$ $\beta_2=(1,-1,-1,1)^T$，则 $W=span(\beta_1,\beta_2)$ 的正交补 $W^\perp$ 的一组基是 $(-1,0,0,1)^T$，$(1,0,1,0)^T$.

4. 矩阵 A 的特征多项式是 $(\lambda-5)(\lambda-2)^3$，最小多项式为 $(\lambda-5)(\lambda-2)$，则 A 的 Jordan 标准形是 $\begin{bmatrix}5&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{bmatrix}$

初等因子 $(\lambda-5)$, $(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-2)$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&0&1\\2&5&2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则向量范数 $\|\alpha_1\|_1=$ 5 矩阵范数 $\|A\|_1=$

6. 已知 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-8\\-2&1\end{pmatrix}$ 且 $\rho(A)=\frac{5}{6}$ 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}&-\frac{16}{3}\\-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}\end{bmatrix}$

二. 设 $R^{2\times2}$ 的子空间 $V_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix} \mid a,b,d\in R\right\}$，$V_2=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix} \mid b\in R\right\}$

分别求 $V_1, V_2, V_1\cap V_2$，V_1+V_2 的一组基及它们的维数，并说明 V_1+V_2 是直和.

解：$V_1 = a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ $a,b,d\in R$

V_1 的基为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\dim V_1=3$

$V_2 = b\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ $b\in R$ V_2 的基为 $\alpha_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ $\dim V_2=1$

$\therefore (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore V_2$ 的基与 V_1 的基线性无关 $\therefore V_1\cap V_2=\{0\}$ $\therefore \dim(V_1\cap V_2)=0$

$\therefore \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)=4$

$\therefore V_1+V_2$ 是直和. 基为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$