

# 矩阵论复习要点

## 第1章线性空间与线性变换

- 1.理解线性空间意义与性质，掌握子空间的判别法则会判别一个子集是子空间。
- 2.会求子空间的基与维数，两个子空间的交与和的基与维数，向量在一个基下的坐标，一个基到另一个基的过渡矩阵。
- 3.会证明子空间的和是直和。
- 4.理解线性变换的含义与性质，会求线性变换在一个基下的矩阵：
- 5.会求线性变换的象与核的基与维数，会判断线性变换的像与核的和是否是直和。

## 第2章内积空间与等距变换

- 1、内积空间的定义与内积性质，会证明给定的表达式是内积，会求向量的内积，
- 2、会从一个无关向量组出发求标准正交基，
- 3、向量在一个标准正交基下的性质(内积、长度、夹角)
- 4、会证明一个变换是等距变换。

## 第3章矩阵的若当标准形

- 1、掌握矩阵可以对角化的条件；
- 2、掌握正规矩阵的定义与判定法则：
- 3、熟练掌握矩阵的若当标准形的求法与应用，矩阵的不变因子、各阶行列式因子、最小多项式的求法，会利用最小多项式判断矩阵是否能够对角化。

## 第4章矩阵的分解

- 1、会求矩阵的满秩分解、**QR** 分解、奇异值分解;
- 2、矩阵奇异值的定义，以及具体求出一个矩阵的奇异值，矩阵的奇异值分解中 **U**、**V** 的列向量分别是哪两个矩阵的特征向量。

## 第5章矩阵函数

- 1、熟练掌握向量的范数、矩阵的范数的定义，会求向量的 **1**-范数，**2**-范数，**o**-范数;会求矩阵的 **6** 种范数
- 2、掌握矩阵范数与矩阵特征值、奇异值之间的关系。
- 3、会判断矩阵是否收敛，会求 **Neumann** 矩阵级数的和。
- 4、会求矩阵函数，至少掌握一种方法求  **$e^{At}$ ,  $\sin(At)$ ,  $\cos(At)$ ,  $e^A$ ,  $\sin A$ ,  $\cos A$**  等矩阵函数。
- 5、矩阵范数与矩阵谱半径的关系。

## 第6章广义逆矩阵

掌握矩阵的广义逆的定义与性质

- 1、会利用初等变换求减号广义逆;
- 2、会利用满秩分解求矩阵的加号广义逆;3、会利用奇异值分解求出加号广义逆;
- 4、会利用广义逆方法判断一个线性方程组是否有解，有解时求出极小范数解，无解时求出极小范数最小二乘解。

## 考试题型

1. 填空与选择题(30 分)，以基本概念、基本方法为主

2. 计算题(40-60 分)

1. 计算子空间的基、维数、坐标;
2. 内积的计算, 标准正交基;
3. 矩阵的若当标准形计算;
4. 矩阵的三种分解的计算;
5. 向量与矩阵范数的计算、矩阵函数的计算
6. 矩阵的广义逆的计算, 线性方程组有解的判定及求最小二乘解或者极小范数最小二乘解。

3. 证明题(10-20 分)

**例题1** 在  $R^{2 \times 2}$  定义  $T(X) = XA$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

1. 求  $T$  在基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的矩阵  $B$ ;
2. 求的值域及核子空间的基及它们的维数;
3. 试求  $B$  的 *Jordan* 标准形;
4. 能否找到的基, 使得在该基下的矩阵为对角阵? 为什么?

**例题2.** 求矩阵  $A$  的不变因子, 初等因子, 各阶行列式因子, 最小多项式若当标准形。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

并判断  $A$  可否对角化?

计算  $A^6 + 3A - 2I$

NJUPT

例题3 求矩阵 $A$ 的 $QR$ 分解。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例题4 求矩阵 $A$ 的奇异值分解，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**例题5.**利用广义逆方法判断一个线性方程组是否有解，有解时求出极小范数解，无解时求出极小范数最小二乘解。

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

- (1). 求矩阵A的满秩分解;
- (2). 求  $A^+$ ;
- (3). 用广义逆矩阵方法判断方程组是否有解?
- (4). 求方程组的通解或最小二乘解的通解，并求极小范数解或者极小范数最小二乘解。

例5. 求矩阵A的函数 $e^{At}$ ,  $\sin(At)$ ,  $\cos(At)$ ,  $e^A$ ,  $\sin A$ ,  $\cos A$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$