****

**最优化方法课程论文**

**题 目：单纯形法**

学号： 1216043011

姓名： 朱 成 亮

专业： 计算机技术

电话：18951759771

**摘要**

最优化方法作为研究各种系统的优化途径及方案，为决策者提供科学决策的依据。线性规划是最优化的一个重要分支，它是研究在满足一组线性约束条件下，使某一线性目标函数达到最优的问题。单纯形法自提出来后，线性规划的理论趋向成熟，实际应用领域日益广泛和深入。随着计算机能够处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划之后，线性规划的应用领域也变得更加广泛。

**关键词**: 线性规划；单纯形法；对偶单纯形法

**1.引言**

在生产过程、科学实验以及日常生活中，人们总希望用最少的人力、物力、财力和时间去办更多的事，获得最大的效益，在管理学中被看作是生产者的利润最大化和消费者的效用最大化，如果从数学的角度来看就被看作是“最优化问题”。在最优化的学习我们所说的最优化问题一般是在某些特定的“约束条件”下寻找某个“目标函数”的最大(或最小)值，其解法称为最优化方法。

在求解线性规划问题时，通用的方法要属单纯形法，首先回顾一下单纯形法的产生和发展。

单纯形法是美国数学家G .B .Duntzg于1947 年首先提出的, 它是线性规划(Linear Prog ramming ,简写LP)问题的通用解法。这是20世纪数学界最重大的成果之一，正是这一方法的有效性，几十年来，几乎所有的领域都得到广泛的应用。线性规划在生产组织与计划问题、合理下料问题、运输问题、生产工艺优化等问题有着广泛的应用。随着计算机的推广和发展, 现在一般的线性规划问题都是应用单纯形法标准软件在计算机上求解。但作为理论基础, 正确理解和掌握单纯形法尤为重要, 其关键是:搞清单纯形表的结构, 正确选择“进基”和“出基”并确定主元, 合理运用矩阵的初等变换, 逐步求出最优解或判定问题无最优解。

线性规划问题的标准型为:



其矩阵形式为:



其中， ，决策向量  ，



A 为约束条件中的系数矩阵, 即

若线性规划是非标准型, 可通过恒等变换和引入松弛变量等方法转化为标准型。如果目标函数是求最大值可通过乘“ -1”化为求解最小值;约束条件s .t .中为“”或“ ”左端加上或减去一个非负松弛变量转化为“=” ;若某变量无非负限制，引进两个非负变量， 令来满足非负要求。

**2．单纯形法**

当最优化问题中的目标函数与约束函数都是变量的线性函数时称为线性规划。工程与管理科学中大量的问题都是变量数目成百上千，乃至上万或数十万的线性规划问题。学习和研究线性规划的求解方法，不仅可以用于求解大量的实际线性规划问题，而且可以用于非线性最优化问题的求解，这是因为当用迭代法求一个非线性最优化问题时，如果我们在迭代点对问题中的有关函数取局部线性近似，所的问题就是一个线性规划问题。

单纯形法同其他的数值求解方法一样是一种迭代法，它根据线性规划问题的特点在问题可行域的顶点中逐步确定问题的最优解。在每一个是基本可行解的迭代点（即顶点），如果它不是最优的，单纯形法从与该顶点相连接的边中确定一个使目标函数值下降的边，沿该边移动可以确定一个与该顶点相邻且目标函数又优于该顶点的新顶点（新的基本可行解）。由于可行域的顶点数是有限的，如果每一次的移动都能使目标函数值下降，则经过有限次的移动方法必须终止于问题的一个最优顶点。

考察标准形线性规划问题

设作为一个基本可行解，单纯形法首先检验它的最优性。如果它不是最优的，确定与该顶点相连的一条使目标函数下降的边；接下来确定沿这条边移动可以到达另一个更优的相邻顶点，也就是得出一个新的基本可行解。

**3.单纯形法的改进**

虽然单纯形法是求解线性规划问题的最有效的方法，但是在很多情况下不能直接用或效率不高，因此人们就开始寻找更有效解决问题的方法。从而对单纯形法进行了改进的发展。

（1）二阶段法

对于如下形式的线性规划问题，不能直接应用单纯形法来求解。



为此，Dantzig 引进松弛变量来把线性规划问题进行转化，即大M法。然后，利用单纯形法求出原问题的一个基本可行解，再利用单纯形法求出原问题的最优解。这样两次应用单纯形法求解线性规划问题叫做二阶段法。

（2）扰动法和Bland 法

前面讨论的利用单纯形法求解线性规划问题是约束线性函数非退化的情况下得到。约束线性函数退化的情况下，可能出现循环现象，如果出现循环现象，可以用扰动法。扰动法的

主要思想是如果对常数项 做一个扰动，使变动以后得到的线性规划问题是非退化的，则可以单纯形法求解。经过有限次的迭代可得到新问题的解。再把重新变回来，从而得到原问题的解。换句话说，扰动就相当于增加松弛变量。

R.G. Bland 于1976 年提出一个避免循环的方法。此方法的思想是: 利用单纯形法求解线性规划问题中查看检验数时，如果几个检验数是正的，则选择下标最小的非基变量作进基变量。同时基变量中选择下标最小的作离基变量。Bland 的理论价值很高，但计算效率低。

（3）改进的单纯形法

改进的单纯形法是Dantzig 于1954 年提出的，利用单纯形法求解线性规划问题时，经过每次换基，整个单纯形表都要重新制作，导致计算效率低。故为了提高效率，只关注检验数、进基向量和离基向量。这样，虽然关注的数据少了，但关注的内容不变，因此大大提高了计算的有效性而确保找到最优解。到现在为止，有很多改进的单纯形法出现，其主要思想就是采取更简捷方法来观察检验数、进基向量和离基向量，从而提高计算效率。

**4.应用**

与此同时单纯形法的应用十分广泛，下面我们举一个在决策方面的用用问题。决策是为实现某一目标, 运用科学的理论与方法, 系统的分析主观条件, 提出各种方案, 从中选择出一个能最佳实现目标的最优方案, 以达到最佳的经济效果和社会效果的过程。因此一个决策问题的成立, 必须具备下列的条件:

1. 有明确的目标(包括总目标和分目标)。
2. 存在两个以上为实现同一目标可相互替代的策略或方案。
3. 在不同的自然情况下, 各策略的实施结果可依据一定的理论与方法估计出来。
4. 在各种策略中只能确定一个行动方案。

所谓确定型决策指的是决策者对决策目标的未来发展有十分清楚的了解, 其有关条件都能准确的实例, 每种决策只可能有一种后果。确定型决策除必须具备决策问题的4个必备条件外, 它还应该有一个特定的条件, 即决策对象所处的自然状态是确定的。确定型决策的关键在于人们如何正确估计自然状态, 在实践中人们往往由于无法了解唯一存在着的自然状态而使决策失误。因此从某种意义上说, 确定型决策的成败很大程度上依赖于预测的准确性。本文介绍一种线性规划决策方法来定量评价投标备选项目, 为承包商做出正确投标决策提供理论依据。

下面以某承包商要在同一时间内对两个不同的项目进行投资决策的例子来说明如何求解此类问题。某建设工程承包公司准备同时承包两个项目A和B, 但是现在要求其每年消耗的总人工费、机械费和材料费不超过150万元, 总耗项目措施费及其他建设费不超过100万元, 两个项目每年分别的消耗费用见表2。如若项目A 每年能获得利润200万元, 项目B 每年能获得利润100万元。请问两个项目的工期各自控制在多久, 可以使该承包商在充分利用有限资金的条件下获利最多?

表1：费用定额（万元/年）



(1)确定决策变量, 建立线性规划的数学模型

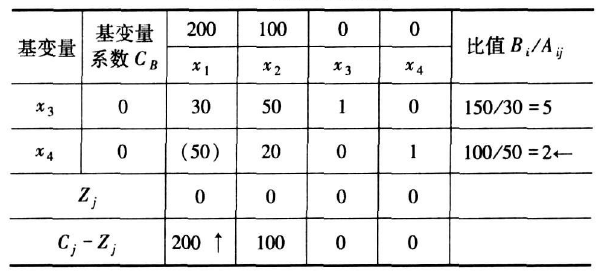
先设变量:为项目A的工期;为项目B的工期;为对两个不等式约束引入的非负松弛变量。再写出其约束条件:



最后写出目标函数: 

(2)用单纯形解法寻求初始解

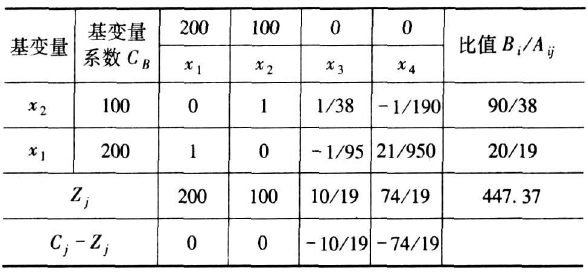
表2：初始单纯形表



注: 选择，作为基变量；选对应的变量进基；选对应的基变量出基；表中的“↑”表示该列为主元列,“←”表示该行为主元行,“（）”表示该括号中的数字为该表的主元素。

(3)用单纯形解法寻求最优解

表3：最终单纯形表



注: 所有的检验数 均为非正值, 即说明该表已经成为最优表。

通过找主元、做初等变换得时的最优为:

,即是=20/19年=1.053年=385天, = 90/38年= 2.368年= 865天, , 相对应的目标函数最大值为= 447.37万元。即该承包商的最佳投标方案为:必须将A项目的工期控制在385天,B项目的工期控制在865天内, 最后可以获利447.37万元。

**5．对偶单纯形法**

与单纯形法相对应的还有对偶单纯形法，对偶理论是最优化中很重要的理论。对每一个线性规划问题，可以构造另一个与之相应且密切的线性规划问题，如果前者称为原是问题，后者就称为对偶问题。线性规划的原始问题和对偶问题无论从数学的角度还是从经济的角度都有十分密切的关系。

单纯形法还面临着一些问题，单纯形法从其产生日起，因为其能有效的解决各类线性规划问题而得到越来越广泛的应用。随着线性规划问题规模的扩大，对单纯形法性能的了解也变得十分必要。大量的统计分析和理论研究表明单纯形法求解线性规划问题的平均迭代次数是问题约束个数的一个不大的倍数。但是我们假设所需的运算工作量的阶数是以幂指数计算的，那么按照我们现在计算机的工作效率，得到结果将会是年后的事了。虽然这是人为设想的最坏情况，但这方面的研究工作者却提出了两个问题：

1. 对线性规划问题是否存在时间复杂性是多项式的算法；
2. 如果存在多项式时间算法，如何设计这样的算法。

对于第一个问题，前苏联数学家Khachiyan在1979年作出了正面回答，提出了椭球算法求不等式问题的解，并证明了算法的时间复杂性是多项式的。利用对偶理论，线性规划问题可以转化成不等式问题，这就明确回答了对线性规划存在多项式算法，但是计算的实际表明，椭球算法的效果要比单纯形法差得多，不是一个又实用价值的算法。

对于第二个问题的回答始于在美国贝尔工作室工作的印度数学家Karmarkar在1984年的杰出工作。他对线性规划的求解提出了一个具有多项式时间复杂度的内点算法。

现如今，内点算法已经成为求解大规模线性规划问题的有效算法之一。我们已经知道，求线性规划问题解的单纯形法在问题的基本可行解中确定最优解，在几何上，每次迭代都是沿着可行域的边界从一个顶点到另一个更好的顶点移动来实现。而内点算法却完全不同，它是从可行域中的一个严格内点开始，产生一个使目标函数值逐步改善的严格内点序列，并最终收敛于问题的最优解。

线性规划加速了数学规划的普及。线性规划是有史以来传播速度最快的学科之一。我对单纯形法只是简单的了解了一下，以上有很多内容是通过查资料而得到的，有不足之处可以指出。

【参考文献】

[1]解可新，韩健，林友联.最优化方法[M]. 天津：天津大学出版社，2004.8.

[2]刘桃凤;[用分块矩阵法求解参数线性规划](http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTOTAL-DILY200001003.htm)[J];电力学报;2000年01期

[3]高培旺,范国兵;[线性规划的一种外点单纯形算法](http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTOTAL-JSDN200303009.htm)[J];吉首大学学报(自然科学版);2003年03期

[4]陈淼超;陈侃;;[基于单纯形算法的表格求解法的研究及应用](http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTOTAL-CHXY201306002.htm)[J];巢湖学院学报;2013年06期

[5]阮国桢;[线性规划基线算法的基本概念](http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTOTAL-JSSX199904005.htm)[J];计算数学;1999年04期

[6]肖凡平,张明善;[线性规划改进单纯形法的一个注记](http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTOTAL-XNMZ200304006.htm)[J];西南民族大学学报(自然科学版);2003年04期

[7]韩伟一;;[单纯形法入基规则的修正](http://cpfd.cnki.com.cn/Article/CPFDTOTAL-EGYL201010001022.htm)[A];中国运筹学会第十届学术交流会论文集[C];2010年

[8]薛静芳;[线性规划的单纯形算法研究及应用](http://cdmd.cnki.com.cn/Article/CDMD-10151-1013205049.htm)[D];大连海事大学;2013年